

ТЕПЛОВАЯ КОНВЕКЦИЯ ОКОЛО ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА ТЕПЛА В СЛОИСТОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Т. Н. Загвозкин, Д. С. Голдобин

Пермский государственный национальный исследовательский университет,
614990, Пермь, Букирева, 15

В данной работе мы исследуем тепловую конвекцию в естественных природных пористых массивах, для которых очень существенны горизонтальное слоение и анизотропия проницаемости на больших пространственных масштабах [1,2]. Типичные значения коэффициента анизотропии проницаемости на больших пространственных масштабах находятся в интервале 0.001-0.1.

Анизотропия теплопроводности выражена не так сильно. Для понимания этого факта рассмотрим систему с чередующимися горизонтальными слоями равной толщины с отношением теплопроводностей ε (формирование системы такого типа естественно по причине вариации режимов осаднения пород из-за Ледниковых циклов). Анизотропия эффективной крупномасштабной теплопроводности такой системы равна $4\varepsilon/(1 + \varepsilon)^2$. Даже при $\varepsilon = 0.1$ анизотропия оказывается равна 0.33. Тем не менее, в настоящем теоретическом исследовании мы рассмотрим как случай малой, так и случай существенной анизотропии теплопроводности.

Поток тепла будет выражаться в следующем виде:

$$\vec{J}_T = -\bar{\kappa}\nabla T,$$

где \vec{J}_T – поток тепла, $\bar{\kappa}$ – тензор теплопроводности, T – температура.

Тензор теплопроводности, исходя из постановки задачи, можно представить в виде:

$$\kappa_{xx} = \kappa_h; \kappa_{yy} = k_\theta \kappa_h,$$

где κ_h – коэффициент теплопроводности в горизонтальном направлении, k_θ – коэффициент анизотропии теплопроводности среды.

Для описания потока жидкости будем использовать приближение Дарси:

$$\vec{v} = -\frac{\bar{k}}{\eta}\nabla p,$$

где \vec{v} – скорость фильтрации, \bar{k} – тензор проницаемости, p – давление.

Тензор проницаемости представим в виде:

$$k_{xx} = k_h; k_{yy} = k_\psi k_h,$$

где k_h – коэффициент проницаемости в горизонтальном направлении, k_ψ – коэффициент анизотропии проницаемости среды.

Рассматривая задачу конвекции от точечного источника в случае цилиндрической симметрии, при большой горизонтальной анизотропии проницаемости и теплопроводности пористого массива, уравнения для

стационарных режимов двухмерной фильтрации неизотермической жидкости в приближении Буссинеска [2] представимы в виде:

$$\begin{cases} \Delta_\varphi \varphi = R\theta_r \\ \Delta_\theta \theta = \left(\varphi_r + \frac{\varphi}{r}\right)(\theta_y - 1) - \varphi_y \theta_r \end{cases}$$

где θ – отклонение температуры от основного состояния $\theta_0 = -y$, φ – функция тока, r – радиальная (горизонтальная) координата, y – вертикальная координата, R – число Релея-Дарси для слоя единичной толщины при заданных материальных параметрах и градиенте температуры в основном состоянии. Функция φ здесь введена так, что:

$$v^r = -\frac{1}{r} \frac{\partial(r\varphi)}{\partial y}, \quad v^y = \frac{1}{r} \frac{\partial(r\varphi)}{\partial r}.$$

Линии тока в таком случае будут поверхностями постоянного значения $(r\varphi)$. Согласно групповому анализу (см. [3] или пример для линейного источника [4]) возможны только самоподобные решения вида:

$$\varphi = w_1(z), \quad \theta = y + \frac{1}{y} w_2(z), \quad \text{где } z = \frac{r}{y}. \quad (1)$$

Будем рассматривать решения такого типа в полупространстве $y \geq 0$, что соответствует источнику на нижней горизонтальной границе пористого полупространства (см. пример реализации в геологической системе на рис. 1).



Рис. 1. Пример системы, где реализуется решение (1)

Для этих решений исходная система принимает вид:

$$\begin{cases} (1 + k_\varphi z^2)w_1' + \frac{w_1}{z} = R w_2 + C \\ (1 + k_\theta z^2)w_2' + k_\theta z w_2 = -w_1 w_2 \end{cases}$$

Выражения для потоков тепла и массы через поверхность полусферы радиуса R_0 в этом случае будут иметь вид:

$$J_\theta = 2\pi w_2(0) + 2\pi \int_0^{+\infty} \frac{-w_2 \varphi + z w_2^2 + z C w_2}{1 + k_\varphi z^2} dz$$

$$J_v = 2\pi R_0 \frac{z\varphi}{\sqrt{1+z^2}} \Big|_0^{+\infty}$$

Поток тепла не зависит от радиуса R_0 , и рассматриваемые решения могут описывать течения вокруг точечного источника тепла. Ограничимся случаем отсутствия притока жидкости. Тогда из выражения для потока жидкости получаем условие равенства нулю функции тока φ при $z \rightarrow 0$, и $z \rightarrow +\infty$.

Рассмотрим случай $k_\varphi = k_\theta = 0$, что соответствует слабой теплопроводности и плохой проницаемости в вертикальном направлении. С математической точки зрения, в уравнениях исчезает теплопроводная часть потока тепла в вертикальном направлении и сопротивление среды горизонтальным движениям жидкости. Тогда исходная система сводится к одному дифференциальному уравнению 2-го порядка:

$$w_2'' - \frac{1}{w_2} w_2'^2 + \frac{1}{z} w_2' = -R w_2^2 - C w_2,$$

где C – константа интегрирования.

Результаты численного решения данного уравнения представлены на рис. 2.

Рассмотрим случай $k_\varphi = k_\theta = 1$, что соответствует изотропной среде. Тогда исходная система сводится к виду:

$$\begin{cases} (1+z^2)w_1' + \frac{w_1}{z} = R w_2 + C_1 \\ (1+z^2)w_2' + z w_2 = -w_1 w_2 \end{cases}$$

Данная система решалась численно, результат решения представлен на рис. 3.

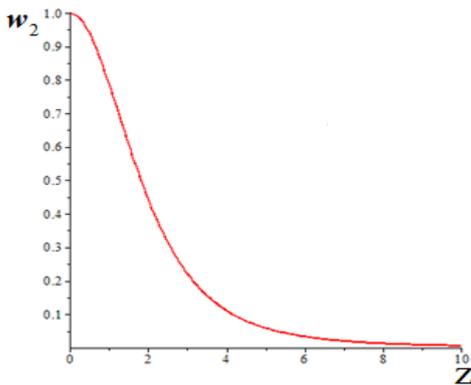


Рис. 2. График зависимости $w_2(z)$, при $C = 0, R = 1, w_2(0) = 1$

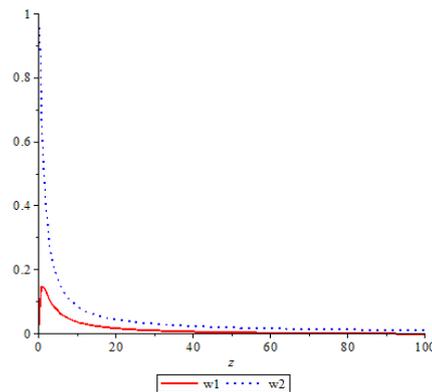


Рис. 3. Графики зависимостей $w_1(z)$ и $w_2(z)$, при начальном значении $w_2 = 1$

Для полного потока тепла имеем следующее выражение:

$$J_\theta^{\text{полн}} = 2\pi w_2(0) + 2\pi \int_0^{+\infty} \frac{-w_2\varphi + z w_2^2 + z C w_2}{1+z^2} dz$$

Данный интеграл посчитан численно, результат представлен на рис. 4.

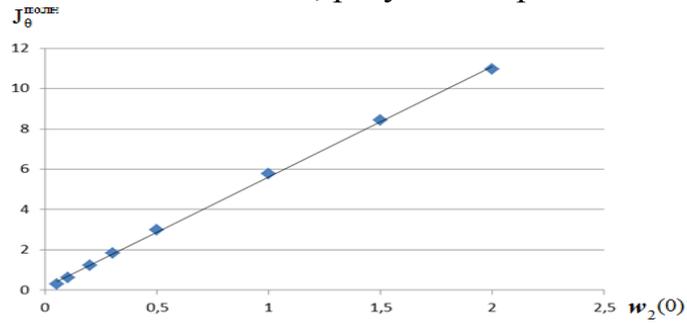


Рис. 4. График зависимости $J_\theta^{\text{полн}}(w_2(0))$

Результаты прямого численного решения исходной системы уравнений, при различных параметрах, приведены на рис. 5–7. Верхняя половина соответствует нагреву снизу, а нижняя, при инверсии вертикальной координаты, может быть интерпретирована как случай стока тепла.

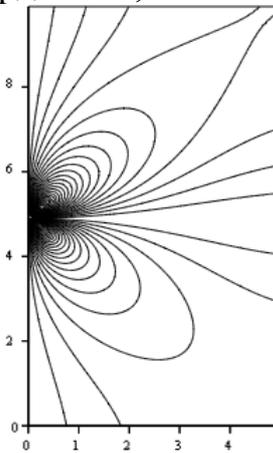


Рис. 5. Линии равных значений функции тока при $k_\psi=1; k_\theta=1; \vartheta_0=10$

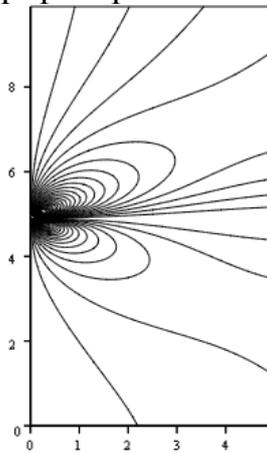


Рис. 6. Линии равных значений функции тока при $k_\psi=0.1; k_\theta=1; \vartheta_0=10$

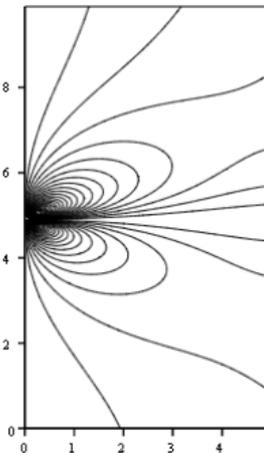


Рис. 7. Линии равных значений функции тока при $k_\psi=1; k_\theta=0.1; \vartheta_0=10$

Не смотря на то, что для рассматриваемой системы были найдены самоподобные решения, результаты прямого моделирования показывают, что в системе реализуются режимы с несамоподобными течениями, при любых значениях коэффициентов анизотропии.

Список литературы

1. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972. 288 с.
2. Nield D. A., Bejan A. Convection in Porous Media. N.-Y.: Springer, 2006, 640 p.
3. Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983, 280 с.
4. Корлекова Т. М., Любимов Д. В., Голдобин Д. С. Решения и групповой анализ уравнений тепловой конвекции в слоистой пористой среде // Материалы конференции «Физика для Пермского края», вып. 5, 2012.