СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОЛЬЦА ЖИДКОСТИ С УЧЕТОМ ДВИЖЕНИЯ ЛИНИЙ КОНТАКТА

М. И. Кайсина
Пермский государственный национальный исследовательский университет,
614990, Пермь, Букирева, 15

В данной работе продолжаются исследования, начатые в работах [1–5] по изучению влияния движения линии контакта трех сред на собственные и вынужденные колебания газового цилиндрического пузырька.

В работах [1–3] изучалась осесимметричная мода собственных колебаний и вынужденные колебания цилиндрического газового пузырька в однородном пульсационном поле давления. Трансляционная мода собственных колебаний такого пузырька исследовалась в [4]. Предполагалось, что внешняя поверхность жидкости свободная, т.е. поверхностное натяжение на внешней поверхности жидкости достаточно мало и им можно пренебречь. Фактически это означает, что внешняя жидкость окружена невесомым газом с постоянным безразмерным давлением, равным единице.

В работе [5] рассматриваются осесимметричные собственные и вынужденные колебания цилиндрического газового пузырька, окруженного несжимаемой жидкостью в замкнутом сосуде конечного объема. Таким образом, в отличие от работ [1–4], внешняя поверхность жидкости ограничена твердой стенкой сосуда. Данная постановка является физически более обоснованной и довольно просто может быть реализована в экспериментальной работе.

В данной работе, в отличие от перечисленных выше работ, внешняя поверхность может деформироваться и учитывается движение линии контакта.

Рассмотрим колебания газового пузырька, окруженного несжимаемой жидкостью с плотностью ρ_e^*. Здесь и в дальнейшем величины с индексом i относятся к пузырьку, e - окружающей жидкости. Система ограничена двумя параллельными твердыми плоскостями (рис. 1), расстояние между которыми равно h^*. В отсутствие внешних сил пузырек имеет форму цилиндра радиусом r_0^*. Краевой угол между боковой поверхностью пузырька и твердыми плоскостями в равновесии равен $\pi/2$. На расстоянии R_0^* от оси симметрии жидкость, окружающая пузырек, ограничена свободной поверхностью. Таким образом, жидкость имеет форму кольца или толстостенного полого цилиндра. Но для простоты понимания, удобнее говорить о газовом пузырьке окруженного жидкостью конечного объема.

Движение жидкости будем рассматривать как потенциальное. В пренебрежении вязким затуханием, давление жидкости будет описываться уравнениями Бернулли, а потенциал скорости уравнением Лапласа (задача линеаризуется по малой амплитуде отклонения боковой поверхности):

$$p_e = -\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t},\ \Delta\varphi = 0,\ p_i = -P_0\langle\zeta\rangle \tag{1}$$

$r = 1$: $$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial r},\ [p] = \zeta + \frac{\partial^2\zeta}{\partial\alpha^2} + b^2\frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2}, \tag{2}$$

$r = 1,\ z = \pm 1/2$: $$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \mathrm{m}\lambda\frac{\partial\zeta}{\partial z}, \tag{3}$$

$r = R$: $$\frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial r},\ [p] = -\left(\xi + \frac{\partial^2\xi}{\partial\alpha^2} + b^2\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\right), \tag{4}$$

$r = R,\ z = \pm 1/2$: $$\frac{\partial\xi}{\partial t} = \mathrm{m}\lambda\frac{\partial\xi}{\partial z}, \tag{5}$$

$z = \pm 1/2$: $$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0, \tag{6}$$

где φ – потенциал скорости жидкости, p_i – давление газа внутри пузырька, ζ – отклонение боковой поверхности пузырька от положения равновесия, ξ – отклонение внешней поверхности жидкости от положения равновесия, $r = r^*/r_0^*$, $z = z^*/h^*$ – безразмерные координаты, квадратными скобками обозначим скачок величины на границе раздела между жидкостью и пузырьком, угловые скобки означают осреднение по поверхности пузырька.

В задаче (1)–(6) выбраны качестве единиц измерения времени – $\sqrt{\rho_e^* r_0^{*3}/\sigma^*}$, радиальной координаты – r_0^*, осевой координаты – h^*, отклонения поверхности – амплитуду колебаний A^*, скорости – $A^*\sqrt{\sigma^*/\rho_e^* r_0^{*3}}$, давления – $A^*\sigma^*/r_0^{*2}$, где σ^* – коэффициент поверхностного натяжения.

Краевая задача (1)–(6) содержит следующие безразмерные параметры: малую относительную амплитуду $\varepsilon = A^*/r_0^*$, параметр смачивания $\lambda = \Lambda^*\Big/\sqrt{\rho_e^* r_0^*/\sigma^*}$, геометрический параметр $b = r_0^*/h^*$, радиус внешней поверхности $R = R_0^*/r_0^*$, безразмерная частота вибраций $\omega = \omega^*\sqrt{\rho_e^* r_0^{*3}/\sigma^*}$, давление газа $P_0 = 2n_p P_g^* r_0^*/\sigma^*$.

Для потенциала φ_e и отклонения поверхности ζ запишем решения следующим образом:

$$\begin{aligned}\varphi(r,z,t,\alpha) = i\Bigg(\Bigg(&\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\big(a_{mn}I_m(2\pi nbr) + b_{mn}K_m(2\pi nbr)\big)\cos(2\pi nz) + \\ &+\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\big(f_{mn}I_m((2n+1)\pi br) + g_{mn}K_m((2n+1)\pi br)\big)\sin((2n+1)\pi z) + \\ &+\sum_{m=1}^{\infty}\big(a_{m0}r^m + b_{m0}r^{-m}\big)\Bigg)e^{im\alpha} + (a_{00} + b_{00}\ln r)\Bigg)e^{i\omega t},\end{aligned} \tag{7}$$

$$\zeta(\alpha,z,t)=\left(\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(c_{mn}\cos(2\pi nz)+h_{mn}\sin\left((2n+1)\pi z\right)\right)\right)e^{im\alpha}+\right.$$

$$+d_0\cos\left(\frac{z}{b}\right)+j_0\sin\left(\frac{z}{b}\right)+d_1z^2e^{i\alpha}+j_1ze^{i\alpha}+ \tag{8}$$

$$\left.+\sum_{m=2}^{\infty}\left(d_m\operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{m^2-1}}{b}\right)+j_m\operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{m^2-1}}{b}\right)\right)e^{im\alpha}\right)e^{i\omega t},$$

$$\xi(\alpha,z,t)=\left(\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(C_{mn}\cos(2\pi nz)+H_{mn}\sin\left((2n+1)\pi z\right)\right)\right)e^{im\alpha}+\right.$$

$$+D_0\cos\left(\frac{z}{b}\right)+J_0\sin\left(\frac{z}{b}\right)+D_1z^2e^{i\alpha}+J_1ze^{i\alpha}+ \tag{9}$$

$$\left.+\sum_{m=2}^{\infty}\left(D_m\operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{m^2-1}}{b}\right)+J_m\operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{m^2-1}}{b}\right)\right)e^{im\alpha}\right)e^{i\omega t},$$

где ω – частота собственных колебаний, I_m, K_m - модифицированные функции Бесселя. Вид решений (8), (9) написан исходя из кинематических условий (2), (4) соответственно.

Подставляя решения (7) – (9) в уравнения (1) – (6), получим трансцендентные уравнения для нахождения собственных частот ω, которые здесь не приводятся по причине их громоздкости. Заметим, что получается два набора частот: для газового пузырька и внешней оболочки жидкости. Таким образом, жидкое кольцо имеет две частоты для каждой моды собственных колебаний. Уравнения решались методом двумерных секущих.

Кратко приведем основные результаты:

1. Найдено, что для основной четной моды собственных колебаний, которая описывает радиальные колебания пузырька, частота колебаний может обращаться в ноль на некотором интервале значений λ. Длина этого интервала растет с увеличением параметра b. Эта частота уменьшается с увеличением радиуса свободной поверхности внешней жидкости R и увеличивается с ростом давления газа в пузырьке P_0. Частота первой моды собственных осесимметричных колебаний может обращаться в нуль на некотором интервале значений λ. Длина этого интервала уменьшается с увеличением геометрического параметра b. Такая зависимость основной частоты осесимметричной моды от параметра λ отличается от зависимостей других мод. Частоты четных мод, кроме радиальной, и частоты нечетных мод слабо зависят от значений P_0.

2. С увеличением капиллярного параметра происходит уменьшение частоты трансляционной моды и при некотором значении капиллярного параметра частота обращается в ноль при любом значении b.

3. Показано, что увеличение постоянной Хокинга приводит к уменьшению частоты собственных колебаний. Наименьшая собственная частота достигается в случае свободно скользящей линии контакта.

4. Найдено, что для любой моды собственных колебаний, которая описывает азимутальные колебания пузырька, основная частота колебаний может обращаться в нуль, начиная с некоторого значения геометрического параметра b, на интервале значений параметра λ. Длина этого интервала растет с увеличением b.

5. Частоты уменьшаются с увеличением радиуса свободной поверхности внешней жидкости и увеличиваются с ростом геометрического параметра b. Инкремент затухания также увеличивается с ростом b или волнового числа n. Также отметим, что значения частот азимутальных мод не зависят от давления газа внутри пузырька.

6. Отметим, что частоты собственных колебаний внешней поверхности стремятся к нулю при $R \to \infty$.

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта РФФИ № 14-07-96017-р-урал-а.

Список литературы

1. *Алабужев А. А.* Поведение цилиндрического пузырька под действием вибраций // Вычислительная механика сплошных сред. 2014. Т.7, № 2. С. 151–161.
2. *Кайсина М. И.* Динамика цилиндрического пузырька в переменном поле давления // Математическое моделирование в естественных науках. 2014. Т. 1. С. 107-110.
3. *Кайсина М. И., Алабужев А. А.* Осесимметричные колебания цилиндрического пузырька // XIX Зимняя школа по механике сплошных сред Тезисы докладов / Институт механики сплошных сред Уральского отделения РАН. Пермь, 2015. С. 138.
4. *Алабужев А. А., Кайсина М. И.* Трансляционная мода собственных колебаний цилиндрического пузырька // Вестник Пермского университета. Серия: Физика. 2015. Вып. 1(29). С. 35–41.
5. *Алабужев А. А., Кайсина М. И.* Влияние движения линии контакта на осесимметричные колебания цилиндрического пузырька // Вестник Пермского университета. Серия: Физика. 2015. Вып. 2(30) (принято к печати).