

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КАПЛИ В ПЕРЕМЕННОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

М. А. Кашина

Пермский государственный национальный исследовательский университет,
614990, Пермь, Букирева, 15

Нестационарное движение линии контакта трех несмешивающихся фаз встречается во многих природных и технологических процессах и привлекает внимание многочисленных исследователей, благодаря разнообразным эффектам [1, 2]. Одним из направлений исследований является изучение возможности управления каплями на подложке, например, с помощью вибраций [3], электрического поля [4], испарения [5] или поверхностных свойств подложки [6].

Наиболее часто используется условие, примененное в [7] для изучения стоячих волн между двумя вертикальными стенками. Указанное условие предполагает линейную связь между скоростью движения контактной линии и отклонением краевого угла от его равновесного значения (как правило, для простоты считают равновесный краевой угол прямым):

$$\frac{\partial \zeta^*}{\partial t^*} = \Lambda^* \mathbf{k} \cdot \nabla \zeta^*, \quad (1)$$

где ζ^* – отклонение поверхности от равновесного положения, Λ^* – феноменологическая постоянная (постоянная Хокинга), \mathbf{k} – вектор нормали к твердой поверхности. Отметим, что условия фиксированной контактной линии и постоянного краевого угла являются частными случаями граничного условия (1): $\zeta^* = 0$ и $\mathbf{k} \cdot \nabla \zeta^* = 0$, соответственно. В [7] было показано, что граничное условие (1) приводит к затуханию колебаний, за исключением двух указанных выше предельных случаев.

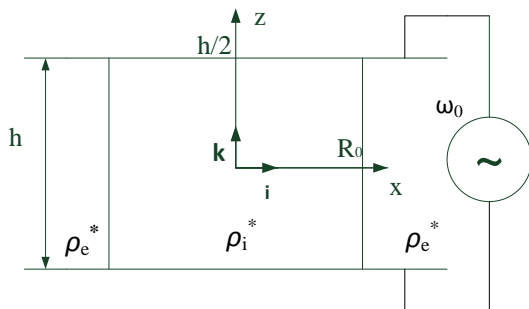


Рис. 1. Геометрия задачи

В данной работе исследуется влияние переменного неоднородного электрического поля на устойчивость вынужденных колебаний капли жидкости. Внешнее электрическое поле играет роль внешней силы, которая заставляет двигаться контактную линию. Для описания движения контактной линии используется модифицированное условие Хокинга (1): скорость

движения контактной линии пропорциональна сумме отклонения краевого угла и скорости быстрых релаксационных процессов, частоты которые пропорциональны удвоенной частоте электрического поля.

Капля несжимаемой жидкости с плотностью ρ_i^* , окруженная другой жидкостью плотности ρ_e^* . Вся система ограничена двумя параллельными твер-

дыми поверхностями (рис. 1), расстояние между которыми равно h^* . Сосуд замкнут на бесконечности. Капля имеет форму круглого цилиндра радиусом R^* в отсутствие внешних сил. Равновесный краевой угол между боковой поверхностью капли и твердыми плоскостями прямой. На систему действует переменное неоднородное электрическое поле с амплитудой A^* и частотой ω^* .

В пренебрежении вязким затуханием запишем в безразмерной форме уравнения Бернулли и непрерывности и граничных условий:

$$p = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \Delta \varphi = 0, \quad (2)$$

$$r = 1: \quad \left[\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right] = 0, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad [p] = \zeta + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \alpha^2} + b^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2}, \quad (3)$$

$$r = 1, \quad z = \pm 1/2: \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \mp \lambda \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} \pm a f(\alpha) \cos(2\omega t) \right), \quad (4)$$

$$z = \pm 1/2: \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

где квадратные скобки обозначают скачок величины на границе раздела между внешней жидкостью и каплей, φ – потенциал скорости, a – безразмерная амплитуда электрического поля, ζ – отклонение поверхности от равновесного положения, λ – безразмерная постоянная Хокинга. Плотность объемных зарядов на поверхности раздела жидкостей считаем пренебрежимо малой и их влияние не учитываем.

Для задачи (2)–(5) выбраны в качестве единиц измерения времени $\sqrt{(\rho_e^* + \rho_i^*)R^{*3}/\sigma}$, радиальной координаты R^* , осевой координаты h^* , отклонения поверхности A^* , скорости $A^* \sqrt{\sigma/((\rho_e^* + \rho_i^*)R^{*3})}$, плотности $\rho_e^* + \rho_i^*$, давления $A^* \sigma/R^{*2}$, где σ – коэффициент поверхностного натяжения.

Для примера рассмотрим неоднородное электрическое поле вдоль оси x , т.е. функцию $f(\alpha)$ в граничном условии (4):

$$f(\alpha) = \sin(k \cos(\alpha)),$$

где k – волновое число.

Решение уравнения Лапласа (2) с учетом граничного условия (5) можно записать в виде:

$$\varphi_i(r, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{mk} R_{mk}^i(r) \sin((2k+1)\pi z) \cos((2m+1)\alpha) e^{i2\omega t},$$

$$\varphi_e(r, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} b_{mk} R_{mk}^e(r) \sin((2k+1)\pi z) \cos((2m+1)\alpha) e^{i2\omega t},$$

$$\zeta(z, t) = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_{mk} \sin((2k+1)\pi z) \cos((2m+1)\alpha) + d_0 z \cos(\alpha) + \sum_{m=1}^{\infty} d_m \operatorname{sh} \left(\frac{\sqrt{(2m+1)^2 - 1}}{b} z \right) \cos((2m+1)\alpha) \right) e^{i\omega t},$$

где $R_{mk}^i(r) = I_m((2k+1)\pi br)$, $R_{mk}^e(r) = K_m((2k+1)\pi br)$, I_m , K_m - модифицированные функции Бесселя. Подставляя эти решения в уравнения (2)-(5), получим выражения для неизвестных амплитуд a_{mk} , b_{mk} , c_{mk} и d_m . В силу громоздкости, выражения для амплитуд не приводятся.

На рис. 2 показана амплитуда отклонения боковой поверхности $|\zeta|$ и краевой угол γ в зависимости от частоты электрического поля для трансляционной моды для трех значений постоянной Хокинга. В отличие от однородного электрического поля, амплитуда отклонения боковой поверхности имеет одинаковые локальные максимумы. Очевидно, что минимальное значение краевого угла достигается при максимальной амплитуде отклонения (см. рис. 2, 3). Кроме этого, минимальное значение краевого угла отлично от нуля и не зависит от λ .

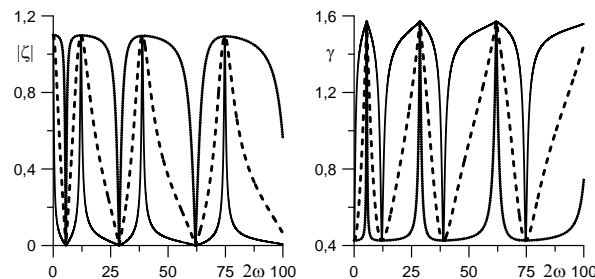


Рис. 2. Максимальное отклонение боковой поверхности и краевого угла при трех разных значениях λ ($b=1$, $\alpha=2.5$, $\rho_i=0.7$).

$\lambda=0.1$ – сплошная линия, $\lambda=1$ – штриховая, $\lambda=10$ – пунктирная.

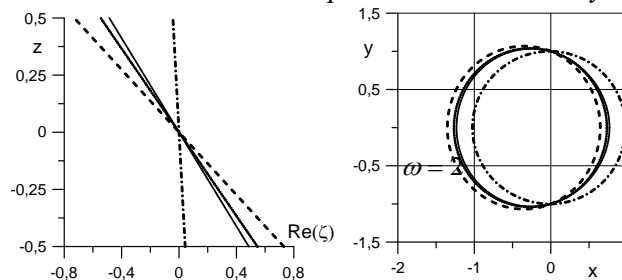


Рис. 3. Форма боковой поверхности и линии контакта в разные моменты времени при $\omega=2$ ($\lambda=1$, $b=1$, $\alpha=2.5$, $\rho_i=0.7$).

$t=0$ – сплошная линия, $t=dT$ – штриховая, $t=2dT$ – пунктирная, $t=3dT$ – штрихпунктирная, $dT=T/8$, T – период колебаний.

При исследовании параметрической неустойчивости рассмотренных выше вынужденных колебаний относительно малых возмущений, решение для отклонения поверхности будем искать в следующем виде:

$$\xi(z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} C_{mk}(t) \cos((2\pi + 1)kz) \cos m\alpha + D_0(t) \sin\left(\frac{z}{b}\right) + D_1(t) z \cos \alpha + \sum_{m=2}^{\infty} D_m(t) \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{m^2 - 1}z}{b}\right) \cos m\alpha.$$

В рассматриваемом случае параметрический резонанс появляется при выполнении условия синхронизма: одна из частот вибраций равна сумме частот соседних мод собственных колебаний. Найден параметр расстройки, получены выражения для границ областей неустойчивости. Отметим, что параметрическая неустойчивость цилиндрической капли со свободно скользящей линией контакта при многочастном механическом воздействии была исследована в работе [8].

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта РФФИ № 14-07-96017-р-урал-а.

Список литературы

1. *de Жен П. Ж.* Смачивание: статика и динамика // УФН 1987. Т. 151, № 4. С. 619–681.
2. *Bonn D., Eggers J., Indekeu J., Meunier J., Rolley E.* Wetting and spreading // Rev. Mod. Phys. 2009. V. 81. P. 739–805.
3. *Любимов Д. В., Любимова Т. П., Шкляев С. В.* Неосесимметричные колебания полусферической капли // Изв. РАН. МЖГ. 2004. № 6. С. 8–20.
4. *Mugele F., Baret J.-C.* Electrowetting: from basics to applications // J. Phys.: Condens. Matter. 2005. V. 17. P. 705–774.
5. *Korenchenko A. E., Beskachko V. P.* Oscillations of a sessile droplet in open air // Phys. Fluids. 2013. V. 25. 112106.
6. *John K., Thiele U.* Self-ratcheting Stokes drops driven by oblique vibrations // Phys. Rev. Lett. 2010. V. 104. 107801.
7. *Hocking L.M.* The damping of capillary-gravity waves at a rigid boundary // J. Fluid Mech. 1987. V. 179. P. 253–266.
8. *Алабужев А. А., Любимов Д. В.* Поведение цилиндрической капли при многочастотных вибрациях // Известия РАН. МЖГ. 2005. № 2. С. 18–28.