СПЕКТРЫ ИНКРЕМЕНТОВ В МАЛОМОДОВОЙ МОДЕЛИ КОНВЕКЦИИ ЖИДКОСТИ С ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ ВНУТРЕННИМИ ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛА

К. М. Лопатина[a], К. Б. Циберкин[a,b]
[a]Пермский государственный национальный исследовательский университет, 614990, Пермь, Букирева, 15
[b]Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013, Пермь, Королева, 1

Исследуется устойчивость механического равновесия жидкости в бесконечном горизонтальном плоском слое жидкости при наличии внутренних источников тепла, мощность которых изменяется во времени по гармоническому закону. В экспериментах [1,2] такая жидкость представляет собой раствор соли (например, Cu_2SO_4) концентрацией не более 10%, и внутренние источники тепла реализуются посредством приложения к слою переменного электрического напряжения конечной частоты. В настоящей работе проводимость предполагается достаточно большой, чтобы предотвратить возможность локального накопления заряда в жидкости и пренебречь эффектами электроконвекции [3], однако вместе с тем и достаточно малой, чтобы магнитогидродинамические эффекты также могли быть исключены из рассмотрения [4].

Движение жидкости в слое описывается уравнениями конвекции в приближении Буссинеска. В безразмерной форме они записываются следующим образом:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = -\nabla p + \mathrm{Pr}\,\Delta\boldsymbol{v} + \mathrm{Gr}T\boldsymbol{\gamma},$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0, \qquad (1)$$
$$\frac{\partial T}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla T = \Delta T + 2(1+\cos\omega t),$$

где $\boldsymbol{v}$, T, P – скорость, температура и давление в жидкости; Pr, Gr – число Прандтля и число Грасгофа, соответственно; $\boldsymbol{\gamma}$ – единичный вектор, направленный вдоль вертикальной оси. Температура на границах слоя зафиксирована и принята за начало отсчёта. Также на стенках выполняется условие прилипания:

$$z = 0,1:\ \boldsymbol{v} = 0,\ T = 0. \qquad (2)$$

При обезразмеривании используются следующие масштабы величин:

$$[z] = H,\ [\boldsymbol{v}] = \frac{\chi}{H},\ [T] = \frac{\sigma E_0^2 H^3}{4\chi\rho C_p},\ [t] = \frac{H^2}{\chi}.$$

Управляющие параметры равны

$$\mathrm{Pr} = \frac{\nu}{\chi},\ \mathrm{Gr} = \frac{g\beta[T]H^2}{\chi^2}.$$

Выбор масштаба температуры обусловлен структурой решения уравнения теплопроводности при механическом равновесии.

Поскольку слой – бесконечный, то при отсутствии движения жидкости в нём реализуется вертикальный градиент температуры, и, соответственно, возможно механическое равновесие, несмотря на пульсации температуры и давления. Нестационарный характер источников тепла обуславливает потенциальную возможность возникновения в системе параметрического резонанса.

Исследование устойчивости квазиравновесного решения проведено методом Галёркина–Канторовича [5] с использованием двух базисных функций для разложения малых возмущений вертикальной компоненты поля скорости и двух – для температуры:

$$\begin{gathered} v_z' = a_1(t)\sin(\pi z)\sin(\pi z) + a_2(t)\sin(2\pi z)\sin(\pi z), \\ T' = b_1(t)\sin(\pi z) + b_2(t)\sin(2\pi z). \end{gathered} \tag{3}$$

Выбранные функции удовлетворяют условиям на границах слоя и включают чётную и нечётную компоненту. Применение процедуры спектрального метода приводит к системе амплитудных уравнений для связанных осцилляторов (показан вид уравнений при отсутствии колебаний мощности источников):

$$\begin{gathered} \left(16\pi^6 + 24\pi^4k^2 + 11\pi^2k^4 + 3k^6\right)\mathrm{Pr}\, a_1 - \frac{8\mathrm{Gr}k^2}{\pi^2}a_2 + \\ + \left(\left(16\pi^4 + 8\pi^2k^2 + 3k^4\right)\mathrm{Pr} + 4\pi^4 + 7\pi^2k^2 + 3k^4\right)\dot{a}_1 + \left(4\pi^2 + 3k^2\right)\ddot{a}_1 = 0, \\ \left(164\pi^6 + 81\pi^4k^2 + 14\pi^2k^4 + k^6\right)\mathrm{Pr}\, a_2 - \frac{16\mathrm{Gr}k^2}{\pi^2}a_1 + \\ + \left(\left(50\pi^4 + 10\pi^2k^2 + k^4\right)\mathrm{Pr} + 20\pi^4 + 9\pi^2k^2 + k^4\right)\dot{a}_2 + \left(5\pi^2 + k^2\right)\ddot{a}_2 = 0. \end{gathered} \tag{4}$$

Видно, что чётная и нечётная компонента скорости не являются независимыми. При учёте периодического характера мощности тепловыделения в приведённой системе возникают нестационарные коэффициенты в коэффициентах связи между уравнениями.

Анализ представленной системы уравнений даёт критическое значение числа Грасгофа $2.6\cdot10^5$ в стационарном случае. Аналитическое исследование на предмет присутствия в системе параметрического резонанса к настоящему моменту не проведено в полной мере. В рамках прямого численного моделирования системы уравнений (1) областей резонансной дестабилизации равновесия не выявлено, что может свидетельствовать об их относительно небольшой ширине, однако удалось обнаружить несколько различных режимов течения.

При низких числах Грасгофа существует периодический режим, в котором на стационарное вихревое течение накладываются незначительные пульсации скорости и температуры. По мере увеличения числа Грасгофа до $1.2\cdot10^7$ и более в области низких частот реализуется пульсирующий режим, для которого характерно чередование стационарного и нерегулярного течения с периодом, соответствующим внешнему воздействию. Наконец, при высоких частотах в слое устанавливается полностью нерегулярный режим течения, в Фурье-спектре которого присутствует несколько выделенных несоизмеримых частот.

Список литературы

1. *Kozlov V., Vjatkin A., Sabirov R.* Convection of liquid with internal heat release in a rotating container // Acta Austronautika. 2013. V. 89. P. 99–106.
2. *Вяткин А. А., Иванова А. А., Козлов В.Г., Сабиров Р. Р.* Конвекция тепловыделяющей жидкости во вращающемся горизонтальном цилиндре // Изв. РАН: МЖГ. 2014. № 1. С. 21–30.
3. *Ильин В. А.* Электроконвекция слабопроводящей жидкости в постоянном электрическом поле. // Журнал технической физики, 2013, Т. 83, № 1, с. 64–73.
4. *Лыков А. В., Берковский Б. М.* Конвекция и тепловые волны. М.: Энергия, 1974, 336 с.
5. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.