

К ВОПРОСУ О ПЕРЕСТРОЙКЕ КОНВЕКТИВНЫХ РЕЖИМОВ В ЯЧЕЙКЕ ХЕЛЕ-ШОУ С ШИРОКИМИ ГРАНЯМИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

К. А. Гаврилов, В. А. Демин, М. И. Петухов

Пермский государственный национальный исследовательский университет,
614990, Пермь, Букирева, 15

На данный момент изучение конвективных течений жидкостей и газов представляет собой актуальную задачу в различных областях науки и техники. Наряду с нахождением условий возникновения гравитационно-конвективных течений, определением границ устойчивости различных гидродинамических режимов, одним из наиболее важных направлений исследования гидродинамических систем является процесс хаотизации течений.

Для существенного упрощения математических моделей соответствующие задачи решаются в безразмерной форме, что дает различные управляющие параметры (числа Рэлея, Грасгофа, Прандтля, Био и др.), которые полностью определяют характер установившегося течения. При определении влияния управляющих параметров на получаемое течение задачи, как правило, формулируются для полостей правильной геометрической формы (куб, шар, цилиндр и др.). Одной из наиболее удобных полостей для моделирования является ячейка Хеле-Шоу – прямоугольный параллелепипед, для которого справедливо приближение плоских траекторий, вследствие чего течение можно считать двумерным из-за малости одной из сторон по сравнению с другими.

При реализации равномерного подогрева снизу вертикально ориентированной ячейки Хеле-Шоу (вертикальная грань больше горизонтальной), заполненной рабочей жидкостью, в ней могут появиться различные конвективные структуры: начиная от равновесия и множества стационарных течений с различным количеством вихрей, и, заканчивая специфическими автоколебательными режимами. Наиболее часто автоколебательными являются пульсационный режим и четырехвихревой режим с перезамыканием угловых вихрей. Теоретическое исследование пульсационных течений в условиях, приближенным к экспериментальным введением теплопроводности широких граней, представлено в данной работе.

Впервые экспериментальное наблюдение конвективных течений в вертикально-ориентированной ячейке Хеле-Шоу было проведено в работах [1, 2]. Помимо визуальных наблюдений, при помощи термопарных измерений был установлен нелинейный характер колебаний. Теоретический анализ устойчивости данных течений проводился в [2]. Были получены аналитические выражения для границ линейной устойчивости

механического равновесия, проведен численный расчет нелинейных режимов для полости с соотношением сторон 2:10:20.

В [3, 4] при исследовании полости с соотношением сторон 2:20:40, был обнаружен новый автоколебательный режим, который был назван пульсационным. В [5] при использовании численного моделирования методом конечных разностей подтверждено подобие пульсационных течений в ячейках Хеле-Шоу с разным соотношением сторон.

В данной работе рассматривалась вертикально ориентированная ячейка Хеле-Шоу с соотношением сторон 2:20:40 с широкими гранями произвольной теплопроводности. На горизонтальных гранях ячейки установлена определенная разность температур, узкие вертикальные грани предполагаются теплоизолированными.

Для математического описания данной гидродинамической системы использовалась система уравнений тепловой конвекции в приближении Буссинеска:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\text{Pr}} (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \Delta \mathbf{v} + \text{Ra} T \boldsymbol{\gamma}, \quad (1)$$

$$\text{Pr} \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) T = \Delta T, \quad \text{div} \mathbf{v} = 0. \quad (2)$$

Система уравнений (1), (2) содержит безразмерные управляющие параметры: числа Рэлея и Прандтля:

$$\text{Ra} = g\beta\Theta d^3 / \nu\chi, \quad \text{Pr} = \nu/\chi,$$

где \mathbf{v} , p , T – безразмерные поля скорости, давления и температуры, $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}(0,1,0)$ – единичный вектор, направленный вертикально вверх, ν , χ , β – коэффициенты кинематической вязкости, теплопроводности и теплового расширения, Θ – характерная разность температур между верхним и нижним теплообменниками, g – величина ускорения свободного падения. Расстояние в уравнениях обезразмерено по полутолщине слоя d .

Как отмечалось выше, широкие грани имеют произвольную теплопроводность, поэтому граничное условие на них будет иметь вид:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Gamma} = -a(T - T_0),$$

где a – коэффициент теплоотдачи. На всех границах, также, выполняется условие прилипания жидкости к поверхности твердых граней $\mathbf{v}|_{\Gamma} = 0$.

При использовании приближения Хеле-Шоу, введем функцию тока:

$$v_x = \partial \Psi / \partial y, \quad v_y = -\partial \Psi / \partial x.$$

После исключения давления и получения уравнений в терминах «вихрь – функция тока» решение системы будем искать в виде:

$$\Psi = \psi(x, y, t) \cos(\pi z/2), \quad T = -y + \theta(x, y, t) \left(1 + (2a/\pi) \cos(\pi z/2)\right),$$

где ψ – подлежащая определению амплитуда функции тока, θ – отклонение температуры от линейного равновесного профиля. Сначала решалась линейная задача устойчивости равновесия. При этом, по аналогии с [2], рассматривались следующие разложения для возмущений функции тока и температуры:

$$\psi = \psi_{nm} \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{H} y\right), \quad \theta = \theta_{nm} \cos\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{H} y\right),$$

где L – ширина полости, H – высота полости. Граница устойчивости соответствующей моды находится аналитически:

$$\begin{aligned} \text{Ra}_{nm} = \frac{\pi^4 L^2}{n^2} \left(\left(\frac{n}{L}\right)^2 + \left(\frac{m}{H}\right)^2 \right) \left(\left(\frac{n}{L}\right)^2 + \left(\frac{m}{H}\right)^2 + \frac{1}{4} \right) \times \\ \times \left(\frac{\pi^2 + 4a}{2(2+a)^2} \left(\left(\frac{n}{L}\right)^2 + \left(\frac{m}{H}\right)^2 \right) + \frac{a}{2+a} \left(\left(\frac{n}{L}\right)^2 + \left(\frac{m}{H}\right)^2 + \frac{1}{4} \right) \right). \end{aligned}$$

Этот результат совпадает с известными предельными случаями идеально теплоизолированных и идеально теплопроводных границ. Графически он представлен на рис. 1 для исследуемого диапазона коэффициентов теплоотдачи. Данная область была выбрана для максимального сходства с экспериментом [4] по пороговому значению моды 11. Далее производилось решение нелинейной задачи. Для этого рассматривалась маломодовая модель [2], ограниченная следующим набором базисных функций: $\psi_{11}, \psi_{12}, \psi_{21}, \psi_{22}, \psi_{31}, \psi_{31}, \theta_{01}, \theta_{02}, \theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{21}, \theta_{22}, \theta_{31}$. Для решения задачи в такой постановке использовался метод Галеркина-Канторовича.

В результате был обнаружен пульсационный режим в диапазоне коэффициентов теплоотдачи от 0.14 до 0.23 (рис. 2a). При этом из-за малого количества мод пульсационный режим имел достаточно малую амплитуду, в отличие от того, который получался в других работах. Возможно, для большего совпадения с экспериментальными данными, в рассматриваемой системе необходимо наличие моды 23. Также, в отличие от эксперимента, не был обнаружен стационарный двухвихревой режим. Вместо этого наблюдался прямой переход от одновихревого стационарного режима к пульсационному.

Для данного пульсационного режима были получены амплитудно-частотные характеристики. На рис. 2b представлена главная частота пульсаций локально усредненная по параметру теплоотдачи.

Из полученных результатов можно заметить, что, несмотря на некоторые различия пульсационных режимов, которые были реализованы разными методами [5], их количественные характеристики не сильно отличаются.

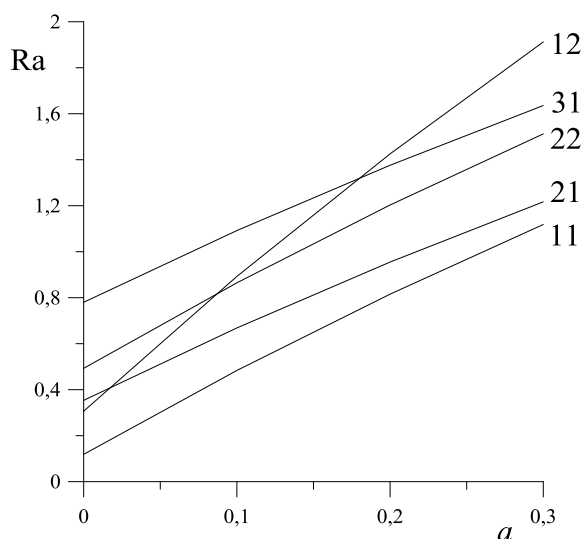


Рис. 1. Порог устойчивости равновесия первых пяти гидродинамических мод

Таким образом, при использовании маломодовой модели определяются границы существования пульсационного режима при параметрах, соответствующих эксперименту.

Для получения еще большей схожести с опытом необходимо использовать модель с большим количеством мод.

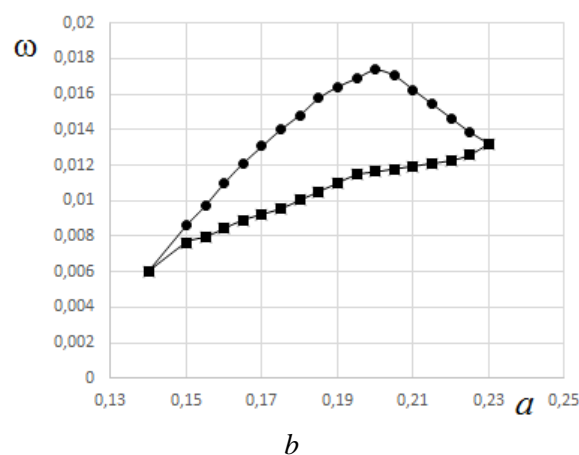
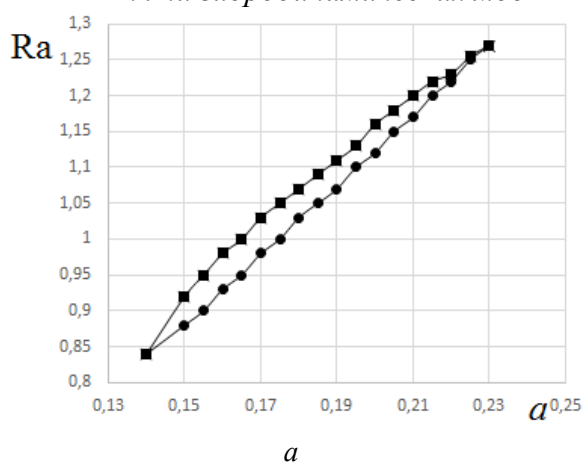


Рис. 2. а) границы пульсационного режима, б) основная частота, соответствующая минимальному и максимальному числам Рэлея для пульсационного режима (круги – минимальное число Рэлея, квадраты – максимальное)

Список литературы

1. Путин Г. Ф., Ткачева Е. А. Экспериментальное исследование надкритических конвективных движений в ячейке Хеле-Шоу // Изв. АН СССР. МЖГ. 1979. № 1. С. 3–8.
2. Любимов Д. В., Путин Г. Ф., Чернатынский В. И. Конвекция в ячейке Хеле-Шоу при подогреве снизу // Сб. Гидродинамика. Вып. 10. 1977. С. 3–14.
3. Babushkin I. A., Demin V. A. Vibrational convection in the Hele-Shaw cell. Theory and experiment // JAMTP. 2006. Vol. 47. N. 2. P. 183–189.
4. Babushkin I. A., Demin V. A., Anferov D. V. Experimental and theoretical investigation of transitional convective flows in Hele-Shaw cell // Proc. of Int. Conf. «Advanced Problems in Thermal Convection». 2004. P. 173–178.
5. Гаврилов К. А., Демин В. А., Петухов М. И. К вопросу о подобию пульсационных режимов в ячейке Хеле-Шоу // Вестник Пермского университета. Серия: Физика. 2014. Вып. 1. С. 57–63.