

ВЛИЯНИЕ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ ВИБРАЦИЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ЖИДКОСТЕЙ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Д. М. Попов^a, Т. П. Любимова^{a,b}

^aПермский государственный национальный исследовательский университет, 614990, Пермь, Букирева, 15

^bИнститут механики сплошных сред УрО РАН, 614013, Пермь, Королева, 1

Введение. Изучение устойчивости границы раздела несмешивающихся жидкостей в пористой среде является важным и актуальным как с научной точки зрения, так и с точки зрения приложений, таких как промышленная добыча нефти и других углеводородов методом вытеснения, фильтрация подземных вод и др. В литературе имеется много работ по исследованию устойчивости границы раздела несмешивающихся жидкостей в пористой среде в отсутствие внешних воздействий. Влияние вибраций на устойчивость границы раздела несмешивающихся жидкостей в пористой среде изучено недостаточно. Данная работа направлена на восполнение этого пробела.

Постановка задачи. Рассматривается бесконечный в горизонтальных направлениях слой пористой среды, со средней пористостью ε и проницаемостью m , заполненный двумя несмешивающимися жидкостями. Толщина слоя первой (нижней) жидкости h_1 , её плотность ρ_1 , динамическая вязкость μ_1 ; для второй (верхней) жидкости - h_2, ρ_2, μ_2 соответственно. Верхняя и нижняя границы пористой среды считаются твёрдыми. Слой подвергается вибрациям в горизонтальном направлении с частотой ω и амплитудой a . Рассмотрение будем вести в рамках модели Дарси. Ось z направим вертикально вверх, ось x – вдоль оси вибраций. Начало отсчёта выберем на границе раздела двух жидкостей.

В системе отсчёта, связанной с сосудом, уравнение движения принимает вид:

$$\frac{\rho_j}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \vec{u}_j}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} (\vec{u}_j \cdot \nabla) \vec{u}_j \right) = -p_j - \frac{\mu_j}{m} \vec{u}_j - \rho_j g \vec{e}_z + a \omega^2 \rho_j \cos(\omega t) \vec{e}_x \quad (1)$$

где \vec{e}_z - единичный вектор, направленный вертикально вверх, \vec{e}_x - единичный вектор вдоль оси x , $j = 1, 2$ - номер жидкости.

К уравнению движения следует добавить уравнение неразрывности:

$$\operatorname{div} \vec{u}_j = 0 \quad (2)$$

Уравнения (1)-(2) следует дополнить граничными условиями непротекания на твёрдых стенках:

$$z = -h_1 : \vec{u}_1 \cdot \vec{e}_z = 0; \quad z = h_2 : \vec{u}_2 \cdot \vec{e}_z = 0 \quad (3)$$

Пусть $\eta(x, t)$ есть z - координата точек границы раздела между жидкостями. Тогда граничные условия на границе раздела жидкостей примут вид:

1) Кинематическое условие:

$$z = \eta: \quad \varepsilon \frac{\partial \eta}{\partial t} + \vec{u}_j \cdot \nabla \eta = u_{jz} \quad (4)$$

2) Условие баланса нормальных напряжений:

$$z = \eta: \quad p_1 - p_2 = -\sigma \Delta \eta \quad (5)$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения.

Кроме того, будем полагать выполненным условие замкнутости течения:

$$\forall x, t: \quad \int_{-h_1}^{\eta} u_{1x} dz + \int_{\eta}^{h_2} u_{2x} dz = 0 \quad (6)$$

Основное состояние. Границу раздела между жидкостями в основном состоянии считаем плоской, а течение полагаем плоскопараллельным, то есть:

$$\eta(x, t) = 0, \quad \vec{u}_j = (U_j(z, t), 0, 0), \quad p_j = P_j(x, z, t) \quad (7)$$

Подставляя (7) в систему (1)–(6) и решая её, находим:

$$U_2 = -\frac{h_1}{h_2} U_1, \quad U_1 = a\omega\varepsilon A \cos(\omega t - \gamma)$$

где коэффициенты A, γ являются безразмерными и в безразмерной форме имеют вид:

$$A = \frac{\bar{h}_2(1 - \bar{\rho})}{\sqrt{F^2 \beta^2 (\bar{h}_1 + \bar{\mu} \bar{h}_2)^2 + (\bar{h}_2 + \bar{\rho} \bar{h}_1)^2}}, \quad \tan(\gamma) = \frac{\bar{h}_2 + \bar{\rho} \bar{h}_1}{F \beta (\bar{h}_1 + \bar{\mu} \bar{h}_2)}$$

Задача устойчивости. Рассмотрим устойчивость основного состояния. Для этого рассмотрим малые возмущения основного состояния:

$$\eta = \eta(x, t), \quad \vec{u}_j = U_j \vec{e}_x + u'_j(x, z, t), \quad p_j = P_j + p'_j(x, z, t) \quad (8)$$

где штрихи уже опущены.

Ограничимся рассмотрением нормальных возмущений вида:

$$\vec{u}_j = \vec{u}'_j(z, t) e^{ikx}, \quad p_j = \tilde{p}_j(z, t) e^{ikx}, \quad \eta = \xi(t) e^{ikx} \quad (9)$$

и будем считать возмущения скорости безвихревыми.

После подстановки (8)–(9) в исходную систему (1)–(6) и линеаризации полученных уравнений, последовательным исключением возмущений давления и потенциала возмущений скорости приходим к одному уравнению для $\xi(t)$.

Обезразмерим это уравнение, выбрав единицы измерения следующим образом: $[t] = \omega^{-1}$, $[L] = l_c = \sqrt{\sigma / (g(\rho_1 - \rho_2))}$. Тогда окончательно приходим к уравнению:

$$\ddot{\xi} + b \dot{\xi} + [c_1 (\cos(t - \gamma))^2 + c_2 \cos(t - \gamma) + c_3] \xi = 0$$

где коэффициенты b, c_1, c_2, c_3 определяются выражениями:

$$c_1 = -\bar{k}^2 \bar{a}^2 \alpha^2 \bar{\rho} R_1 R_2 (1 + \bar{h}_1 / \bar{h}_2) A^2, \quad c_2 = i \bar{k} \bar{a} F \beta \alpha^2 R_1 R_2 (\bar{\rho} - \bar{\mu}) (1 + \bar{h}_1 / \bar{h}_2) A,$$

$$c_3 = \beta^2 \alpha \bar{k} (1 + \bar{k}^2) (1 - \bar{\rho}), \quad b = F \beta \alpha (R_1 + \bar{\mu} R_2)$$

где введены следующие безразмерные параметры и обозначения: $\bar{\rho} = \rho_2 / \rho_1$, $\bar{\mu} = \mu_2 / \mu_1$, $\bar{h}_1 = h_1 / l_c$, $\bar{h}_2 = h_2 / l_c$, $\bar{k} = k l_c$, $R_j = \coth(\bar{k} \bar{h}_j)$, $\bar{a} = a / l_c$, $We = \omega^2 l_c / g$, $\alpha = 1 / (R_1 + \bar{\rho} R_2)$, $\beta = 1 / \sqrt{We}$, $F = \mu_1 \varepsilon \sqrt{l_c / g} / (m \rho_1)$.

Результаты численного решения. На рис. 1 изображена нейтральная кривая, полученная при указанных значениях параметров.

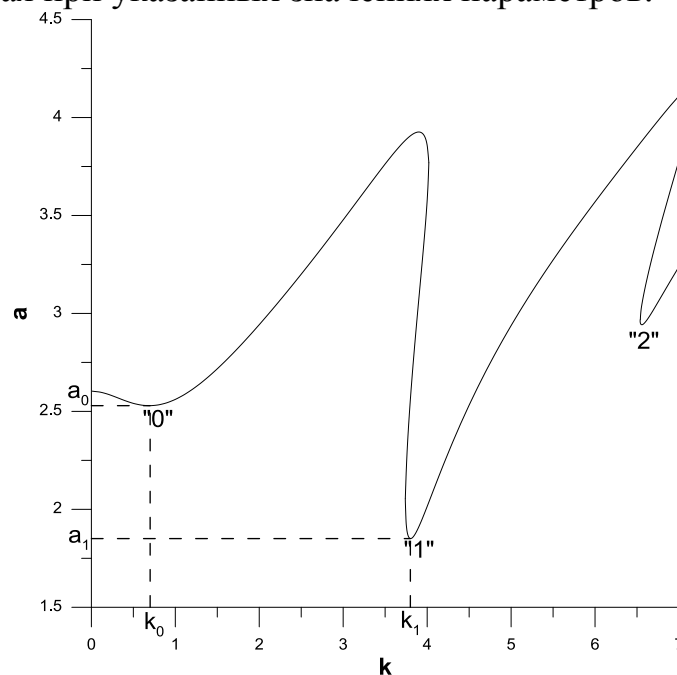


Рис. 1. Нейтральная кривая при $\bar{\rho} = 0.8$, $\bar{\mu} = 0.5$, $\bar{h}_1 = \bar{h}_2 = 2.0$, $We = 5.0$, $F = 0.4$

Видно, что нейтральная кривая представляет собой совокупность локальных минимумов плавно соединённых друг с другом. Для удобства описания результатов введём нумерацию минимумов целыми числами, начиная с нуля, в порядке возрастания соответствующего им волнового числа, так как это изображено на рис. 1. При этом “0”-му минимуму соответствует безразмерное волновое число k_0 и безразмерная амплитуда a_0 , “1”-му минимуму — k_1 и a_1 соответственно и т. д., что также изображено на рис. 1.

В целом на плоскости (\bar{a}, \bar{k}) можно выделить две зоны: зону основной неустойчивости, связанную с неустойчивостью Кельвина – Гельмгольца, и зону параметрического резонанса. Порог возбуждения основной зоны представлен участком нейтральной кривой, который содержит “0”-й минимум и утыкается в ось $\bar{k} = 0$. Порог возбуждения зоны параметрического резонанса выражается резонансными языками, которым соответствуют минимумы, начиная с “1”-го.

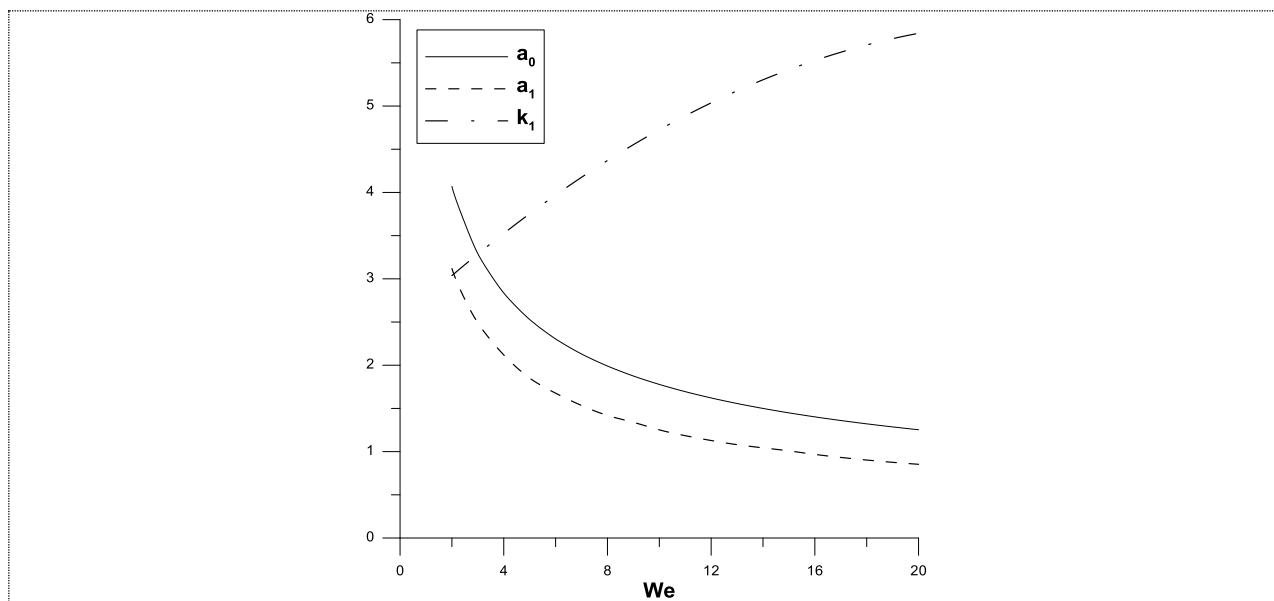


Рис. 2. Зависимость k_0, k_1, a_0, a_1 от We , при $\bar{\rho} = 0.8, \bar{\mu} = 0.5, \bar{h}_1 = \bar{h}_2 = 2.0, We = 5.0, F = 0.4$

На рис. 2 представлены графики, демонстрирующие изменение безразмерных волновых чисел k_0, k_1 и амплитуд a_0, a_1 в зависимости от параметра We , при неизменных остальных параметрах.