# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВСПЛЫТИЯ ПУЗЫРЯ

В. А. Ельтищев, А. Н. Кондрашов
Пермский государственный национальный исследовательский университет,
614990, Пермь, Букирева, 15

Дрейф тел – один из самых распространенных процессов на Земле, который играет важную роль в целом ряде технологических процессов и в технических устройствах.

Изучение движения одиночных газовых пузырей продолжается в течение длительного времени. Получены важные теоретические решения [1–2] и накоплено значительное количество экспериментальных результатов [3].

За последнее двадцатилетие было проведено немало и численных работ по изучению дрейфа пузырьков в жидкости. В статье [4] численно моделировалось поведение пузыря в вязкой жидкости. Был проведен анализ изменения формы поверхности пузыря в зависимости от соотношения его сторон (высоты и ширины) при различных числах Рейнольдса. При $Re$ = 13.95 конечная форма поверхности пузыря не зависит от начального соотношения сторон, однако при $Re$ = 206.3 конечная форма пузырька качественно меняется.

В работах, связанных с моделированием поведения пузырька воздуха в жидкости, чаще всего исследуются изменения формы поверхности пузыря от различных параметров: вязкости жидкости, размера пузыря, числа Рейнольдса, начальных условий и т.д.

**Цель настоящей работы** – численное моделирование всплытия воздушного пузырька в жидкости с учетом сил поверхностного натяжения.

## Постановка задачи

Рассматривается двухмерная задача дрейфа газового пузырька в вязкой несжимаемой жидкости с учетом искажений формы его поверхности и пространственного перемещения. Область прямоугольная с твердыми непроницаемыми границами.

Для отделения жидкой фазы в рассматриваемой области от газообразной вводится функция фазы, которая принимает определенное значение в конкретной фазе (рис. 1):

$\varphi(x, y) = 0$ в жидкой фазе,

$\varphi(x, y) = 1$ в газообразной фазе,

$0 < \varphi(x, y) < 1$ на границе между фазами.

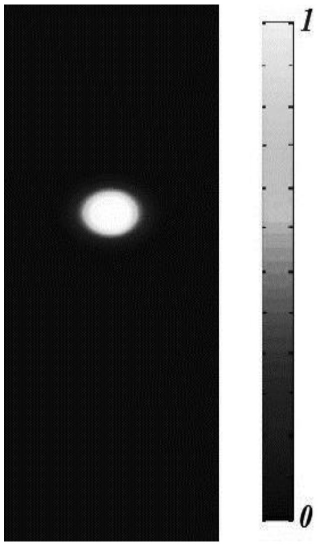



**Рис. 1.** *Функция фазы в области*

Поставленную задачу можно описать системой уравнений (1)–(4), которая состоит из уравнения Навье-Стокса (1), уравнения непрерывности (2), уравнения Пуассона для давления (3) и уравнения переноса для фазы (4).

$$\rho\left[\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v}\right]=-\nabla P+\nabla[\mu(\nabla\boldsymbol{v}+\nabla\boldsymbol{v}^T)]+\rho\boldsymbol{g}+\boldsymbol{F_{sf}}, \quad (1)$$

$$\nabla\boldsymbol{v}=0, \quad (2)$$

$$\Delta P=div\{\nabla[\mu(\nabla\boldsymbol{v}+\nabla\boldsymbol{v}^T)]+\boldsymbol{F_{sf}}-\rho(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v}+\rho\boldsymbol{g}\}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\nabla)\varphi=\gamma\nabla\left(\varepsilon\nabla\varphi-\varphi(\varphi-1)\frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|}\right), \quad (4)$$

где $\rho$ – плотность вещества, $P$ – давление, $\mu$ – динамическая вязкость, $\boldsymbol{g}$ – ускорение силы тяжести, $\boldsymbol{F_{sf}}$ – сила поверхностного натяжения, $\gamma$ – параметр, определяющий максимальную скорость в модели.

Уравнение для давления (3) получается из уравнения движения (1) путем применения операции дивергенции, учитывая (2). Сила поверхностного натяжения $\vec{F}_{sf}$ может быть записана в виде:

$$\boldsymbol{F_{sf}}=\nabla[\sigma\{1-(\mathbf{nn}^{\mathrm{T}})\}\delta],$$

где $\sigma$ — коэффициент поверхностного натяжения, $\boldsymbol{n}=\frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|}$ — вектор нормали к поверхности пузыря, а $\delta=|\varphi(1-\varphi)||\boldsymbol{n}|$ — дельта-функция Дирака.

Плотность и динамическая вязкость вещества выражаются через функцию $\varphi$ следующим образом:

$$\rho = \rho_f + (\rho_g - \rho_f)\varphi,$$
$$\mu = \mu_f + (\mu_g - \mu_f)\varphi,$$

где индекс $f$ относится к жидкости, а $g$ — к газу.

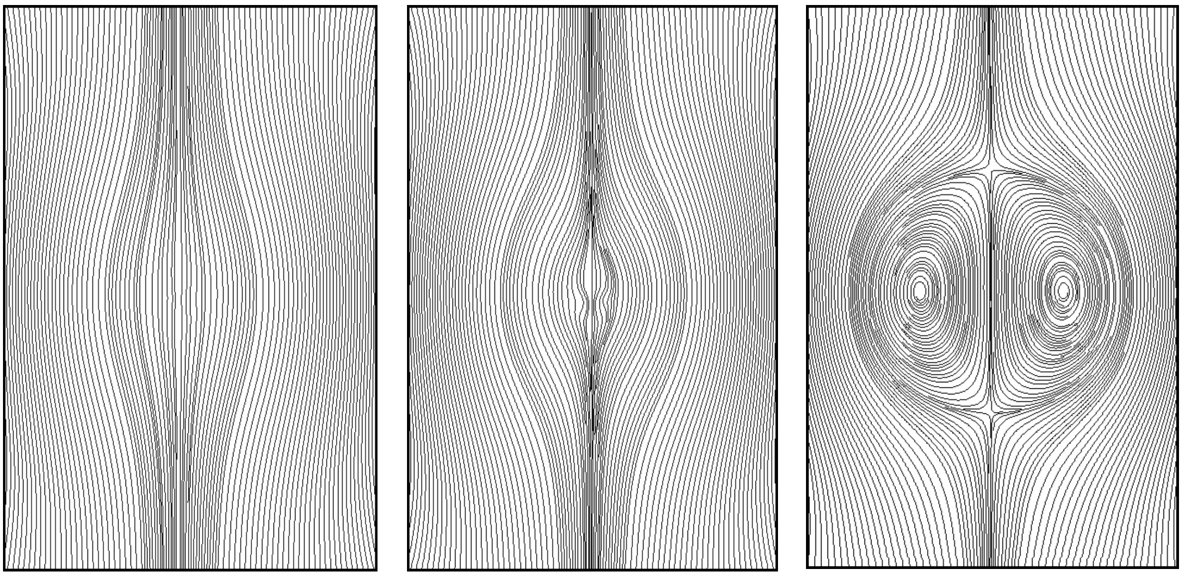
**Методика расчета**

Основой метода является дискретизация — замена непрерывной области совокупностью изолированных точек (вычислительная сетка), причем решение уравнений ищется только в этих точках (узлах сетки). Дифференциальные операторы аппроксимируются конечными разностями, и решение уравнения в частных производных сводится к решению системы алгебраических уравнений.

Система уравнений (1 — 4) решается методом конечных разностей с использованием метода проекции. Уравнение (3) решается методом простой итерации.

**Результаты**

В итоге численного расчета по первой схеме было определено, что пузырьки воздуха с радиусом $R$ > 0.1 мм и $R$ < 4 мм всплывают прямолинейно, не испытывая каких-либо колебаний. Однако в некоторый момент времени, когда скорость пузырька достигает какого-то определенного значения, наступает неустойчивость в решении и схема расходится. Несмотря на это, удалось пронаблюдать за эволюцией вихрей внутри пузыря до разрушения решения (рис. 2).



*а)* *б)* *в)*

**Рис. 2.** *Линии тока в различные моменты времени: а) t=0.005 с, б) t=0.01 с, в) t=0.02 с*

Неустойчивость решения может возникать из-за больших градиентов скорости, в результате которых за один шаг по времени фаза перескакивает на расстояния, большие шага сетки $h$. Так же причиной неустойчивости может быть излишняя плавность функции $\varphi$. Однако, чтобы сделать функцию фазы более крутой на границе пузырь-вода необходимо уменьшать шаг сетки, чтобы разрешить уравнения, но это приводит к росту размеров используемых массивов, а, следовательно, и к увеличению расчетного времени.

## Список литературы


1. *Zhang L., Yang C., Mao Z.-S.* Numerical simulation of a bubble rising in shear-thinning fluids // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2010. N. 12. P. 555–567
2. *Ильгамов М. А., Косолапова Л. А., Малахов В. Г.* Движение пузырька газа в жидкости с учетом искажения его сферической формы // Вестник ТГГПУ. 2010. V. 21. P. 7.
3. *Riboux G., Risso F., Legendre F.* Experimental characterization of the agitation generated by bubbles rising at high Reynolds number // J. Fluid Mech. 2009. P. 509–539.
4. *Hua J., Lou J.* Numerical simulation of bubble rising in viscous liquid // Journal of Computational Physics. 2007. V. 222. P. 769–795.