ТЕЧЕНИЕ В КАНАЛЕ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ

Д. В. Третьяков, С. В. Мингалев
Пермский государственный национальный исследовательский университет,
614990, Пермь, Букирева, 15

При учете проскальзывания тангенциальная скорость жидкости или газа на твердой поверхности считается неравной нулю и определяется из граничного условия:

$$\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{\tau}} = \lambda \vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\nabla \vec{\boldsymbol{v}} + (\nabla \vec{\boldsymbol{v}})^{\mathrm{T}}) \cdot \vec{\boldsymbol{\tau}}, \tag{1}$$

где $\vec{\boldsymbol{v}}$ – скорость жидкости, $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ и $\vec{\boldsymbol{n}}$ – единичные векторы, направленные по касательной и по нормали к поверхности твердого тела, λ – длина проскальзывания, T – операция транспонирования. Для жидкостей λ является величиной порядка 10^{-6} – 10^{-9} м, что значительно меньше, чем характерные размеры в большинстве задач. Это позволяет в этих задачах считать правую часть (1) равной нулю и использовать условие отсутствия проскальзывания. В большом количестве исследований [1] для определения длины проскальзывания измеряется расход жидкости в канале с заданным перепадом давления на концах. Некоторые исследователи [3] при использовании такого метода получали результат, не согласующийся с выводами, сделанными в рамках других подходов. Целью исследования является изучения влияния шероховатости на точность измерения длины проскальзывания. Для этого рассматривается стационарное течение ньютоновской несжимаемой жидкости в канале переменного сечения при наличии проскальзывания и перепада давления на концах. Перепад давления задается граничным условием

$$p\big|_{x=\tilde{L}} + \delta_p = p\big|_{x=-\tilde{L}} - \delta_p, \tag{2}$$

где p – давление, $2\delta_p$ – перепад давления на концах канала, $2\tilde{L}$ – длина канала. После преобразования давления:

$$p \to p - \delta_p x / \tilde{L}, \tag{3}$$

граничное условие (2) примет вид $p\big|_{x=\tilde{L}} = p\big|_{x=-\tilde{L}}$. Положение стенок канал изменяется по закону $x = \pm(h + A\sin ky)$.

Поведение жидкости описывается системой уравнений Навье-Стокса, которая после преобразования давления (3) и обезразмеривания примет вид:

$$\delta^3 \left(\mathrm{v}_x \frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} + \mathrm{v}_y \frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial y} \right) = \frac{1}{\mathrm{Re}} \left[-\frac{\partial p}{\partial x} + \delta^2 \left(\frac{\partial^2 \mathrm{v}_x}{\partial x^2} + \delta^2 \frac{\partial^2 \mathrm{v}_x}{\partial y^2} \right) \right],$$

$$\delta\left(\mathrm{v}_x\frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial x}+\mathrm{v}_y\frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial y}\right)=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial^2\mathrm{v}_y}{\partial x^2}+\delta^2\frac{\partial^2\mathrm{v}_y}{\partial y^2}+2\right),\ \frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial y}=0.$$

Поперечная координата x измеряется в половинах расстояния между стенками h, продольная координата y – в $1/k$, давление p в единицах $\delta_p/(2\tilde{L}k)$, продольная скорость v_y – в характерных скоростях течения Пуазейля $\delta_p\rho h^2/(2\tilde{L}\eta)$, поперечная скорость v_x – в $\delta_p kh^3/(2\tilde{L}\eta)$, характерных скоростях течения Пуазейля, умноженных на kh.

При этом на стенках, положение которых после обезразмеривания будет задаваться уравнениями $x=\pm(1+\alpha\sin y)$, ставятся граничное условие на тангенциальную компоненту скорости (1):

$$\mathrm{v}_y=\pm\frac{\Lambda}{(1+\alpha^2\delta^2\cos^2 y)^{3/2}}\left[\left(\frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial x}+\delta^2\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial y}\right)\left(\alpha^2\delta^2\cos^2 y-1\right)\pm 4\frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial y}\alpha\delta^2\cos y\right]$$

и граничное условие равенства нулю нормальной компоненты скорости:

$$\mathrm{v}_x=\pm\alpha\mathrm{v}_y\cos y.$$

Параметрами задачи являются длина канала L, длина проскальзывания Λ, амплитуда изменения сечения канала α, «волновое» число δ, число Рейнольдса Re:

$$L=\tilde{L}/h,\ \delta=hk,\ \alpha=A/h,\ \Lambda=\lambda/h,\ \mathrm{Re}=h^3\rho\delta_p/(2\eta^2\tilde{L}).$$

Решение задачи искалось в виде рядов по параметру α:

$$\begin{aligned}
\mathrm{v}_x&=\alpha(\mathrm{v}_{1s}(x)\sin y+\mathrm{v}_{1c}(x)\cos y)+\alpha^2(\mathrm{V}_2(x)+\ldots\\
\mathrm{v}_y&=\mathrm{u}_0+\alpha(\mathrm{u}_{1s}(x)\sin y+\mathrm{u}_{1c}(x)\cos y)+\alpha^2(\mathrm{U}_2(x)+\ldots\\
p&=\alpha(p_{1s}(x)\sin y+p_{1c}(x)\cos y)+\alpha^2(\mathrm{P}_2(x)+\ldots
\end{aligned}\tag{4}$$

Решение в нулевом порядке описывает течение Пуазейля при наличии проскальзывания: $\mathrm{u}_0=1+2\Lambda-x^2$.

Задача в первом порядке определяется системой дифференциальных уравнений для коэффициентов v_{1c} и v_{1s} в (4):

$$\frac{1}{\delta\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^4\mathrm{v}_{1s}}{\partial x^4}-2\delta^2\frac{\partial^2\mathrm{v}_{1s}}{\partial x^2}+\delta^4\mathrm{v}_{1s}\right)+\mathrm{u}_0\frac{\partial^2\mathrm{v}_{1c}}{\partial x^2}+2\mathrm{v}_{1c}-\delta^2\mathrm{u}_0\mathrm{v}_{1c}=0,\tag{5}$$

$$\frac{1}{\delta\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^4\mathrm{v}_{1c}}{\partial x^4}-2\delta^2\frac{\partial^2\mathrm{v}_{1c}}{\partial x^2}+\delta^4\mathrm{v}_{1c}\right)-\mathrm{u}_0\frac{\partial^2\mathrm{v}_{1s}}{\partial x^2}-2\mathrm{v}_{1s}+\delta^2\mathrm{u}_0\mathrm{v}_{1s}=0\tag{6}$$

с граничными условиями

$$x=\pm 1:\ \mathrm{v}_{1c}=\pm 2\Lambda,\ \frac{\partial \mathrm{v}_{1c}}{\partial x}+2(L+1)\pm\Lambda\left(\frac{\partial^2 \mathrm{v}_{1c}}{\partial x^2}+\delta^2\mathrm{v}_{1c}\right)=0, \qquad (7)$$

$$x=\pm 1:\ \mathrm{v}_{1s}=0,\ \frac{\partial \mathrm{v}_{1s}}{\partial x}\pm\Lambda\left(\frac{\partial^2 \mathrm{v}_{1s}}{\partial x^2}+\delta^2\mathrm{v}_{1s}\right)=0. \qquad (8)$$

Коэффициенты u_{1c}, u_{1s}, p_{1c}, p_{1s} в (4) находятся по формулам:

$$\mathrm{u}_{1s}=-\frac{\partial \mathrm{v}_{1c}}{\partial x},\ p_{1s}=\frac{\partial^2 \mathrm{u}_{1c}}{\partial x^2}-\mathrm{Re}\left[(1+2\Lambda-x^2)\delta\,\mathrm{u}_{1s}-2\delta\mathrm{v}_{1c}x\right]-\delta^2\mathrm{u}_{1c},$$

$$\mathrm{u}_{1c}=\frac{\partial \mathrm{v}_{1s}}{\partial x},\ p_{1c}=\mathrm{Re}\left[(x^2-2\Lambda-1)\delta\,\mathrm{u}_{1c}-2\delta\mathrm{v}_{1s}x\right]+\delta^2\mathrm{u}_{1s}-\frac{\partial^2 \mathrm{u}_{1s}}{\partial x^2}.$$

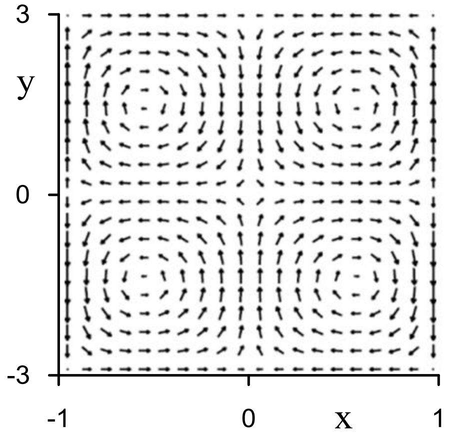

Рис. 1. *Векторное поле* $(\mathrm{u}_1,\mathrm{v}_1)$ *для* $\Lambda=0.0001$, *Re=0.1*, $\delta=0.1$

На рис. 1 показано векторное поле $(\mathrm{u}_1,\mathrm{v}_1)$, полученное в результате численного решения задачи (5)-(8). Оно описывает течение с четырех ячеистой, периодической структурой. В верхней левой и в правой нижней ячейках жидкость вращается по часовой стрелке, а в верхней правой и левой нижней – против часовой стрелки. Поведение системы определяется тремя параметрами: Re, δ и Λ. Для малых значений числа Рейнольдса и параметра δ жидкость вращается в каждой ячейки относительно точки, которая находится вблизи от геометрического центра этой ячейки. При увеличении числа Рейнольдса и параметра δ эти точки смещаются к стенкам канала. Причем увеличение параметра δ приводит к более значительному её смещению, чем увеличение числа Рейнольдса. Изменение длины проскальзывания Λ в физически обоснованных пределах не оказывает заметного влияния на структуру течения. Для вычисления влияния шероховатости на перенос вещества необходимо знать $U_2(x)$ в (4), которая определяется уравнениями:

$$U_2=c_2+\frac{\delta}{2}\mathrm{Re}\int_1^x\left(\mathrm{v}_{1c}\frac{\partial \mathrm{v}_{1s}}{\partial x}-\mathrm{v}_{1s}\frac{\partial \mathrm{v}_{1c}}{\partial x}\right)dx,$$

$$c_2=\frac{1}{2}\left[\Lambda\left(\left.\frac{\partial^3 \mathrm{v}_{1c}}{\partial x^3}\right|_{x=1}-3\delta^2\left.\frac{\partial \mathrm{v}_{1c}}{\partial x}\right|_{x=1}-5\delta^2\right)+\left.\frac{\partial^2 \mathrm{v}_{1c}}{\partial x^2}\right|_{x=1}+1\right]-\Lambda^2\delta\,\mathrm{Re}\left.\frac{\partial \mathrm{v}_{1s}}{\partial x}\right|_{x=1}.$$

Зная U_2, расход жидкости можно вычислить по формуле:

$$Q = \frac{4}{3} + 4\Lambda + \alpha^2 \left(\frac{1}{2}\left[\mathrm{u}_{1s}\big|_{x=1} + \mathrm{u}_{1s}\big|_{x=-1} \right] - 1 + \int_{-1}^{1} U_2(x)dx \right) + \mathrm{O}(A^3).$$

Величина Q_2 отражает влияние шероховатости, величину которой характеризует параметр α. Влияния изменения длины проскальзывания на Q_2 составляет величину меньше 1% (рис.2а). Как следует из рис. 2b, для

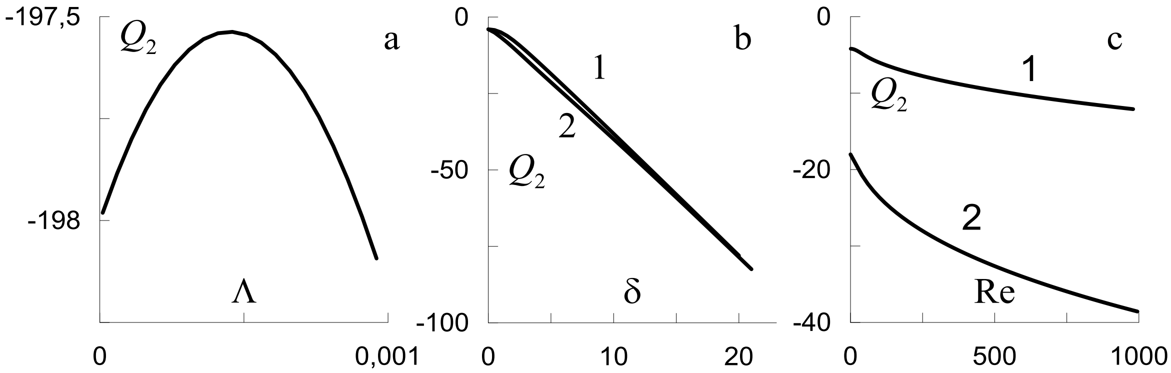

Рис. 2. *Зависимость расхода жидкости от а) параметра δ для Re*=10(1), 50(2), *b) длины проскальзывания для Re*=10, *δ*=50 *c) числа Рейнольдса для δ*=0.5 (1), 5(2)

небольших чисел Рейнольдса зависимость Q_2 от δ можно приближенно описать формулой $Q_2 \approx -4.07\delta - 3.998$ (для больших Re, как следует из рис. 1с, эта формула не будет работать). Используя её можно найти выражение для систематической ошибки, возникающей при определении Λ из-за наличия шероховатости, в виде

$$\frac{|\Lambda' - \Lambda|}{\Lambda} = \frac{\alpha^2}{4\Lambda}(4.07\delta + 3.998).$$

Из этой формулы можно сделать вывод, что характерные размеры шероховатости должны быть значительно меньше, чем измеряемая длина проскальзывания. Это может быть легко реализовано для течения разряженного газа в канале. Для жидкостей из-за малого значения длины проскальзывания (порядка 1–10 нм) добиться выполнения этого условия оказывается почти невозможно.

Список литературы

1. *Tropea C., Foss J. F., Yarin A.* Springer Handbook of Experimental Fluid Dynamics. New York: Springer, 2007. 1557 p.
2. *Pfahler J., Harley J., Bau H., Zemel J.* Liquid transport in micron and submicron channels // Sensors and Actuators. 1990. V. 22. P. 431–434.