МОДЕЛЬ ЭЛЕКТРОКОНВЕКЦИИ СЛАБОПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ В СЛОЕ С ТВЁРДЫМИ ГРАНИЦАМИ С УЧЁТОМ КОНЕЧНОГО ВРЕМЕНИ РЕЛАКСАЦИИ ЗАРЯДА

О. Л. ВОХМЯНИНА, В. А. ИЛЬИН
Пермский государственный национальный исследовательский университет,
614990, Пермь, Букирева, 15

В работе получена и исследована при некоторых параметрах восьмимодовая модель электроконвекции слабопроводящей жидкости, вызванной действием электрокондуктивного механизма неустойчивости в электрическом поле горизонтального конденсатора.

Рассмотрим плоский горизонтальный слой со слабопроводящей жидкостью в присутствии гравитационного поля. Идеально тепло- и электропроводные границы конденсатора расположены в $z = -1/2$, $z = 1/2$, нагреты до разной температуры $T(-1/2) = \Theta$, $T(1/2) = 0$ (Θ – характерная разность температур). Случай $\Theta > 0$ соответствует нагреву снизу. Слой находится в переменном электрическом поле, которое направлено вдоль оси z. Потенциал поля верхней границы равен нулю, потенциал нижней изменяется по гармоническому закону: $\varphi = U\cos(\omega t)$.

Используем безразмерные переменные на основе масштабов: расстояния – h, времени – $\rho h^2/\eta$, скорости – χ/h, температуры – Θ, давления – $\eta\chi/h^2$, потенциала – U, поля – U/h, плотности заряда – gU/h^2. Тогда система уравнений электротермической конвекции жидких диэлектриков в безразмерном виде будет выглядеть следующим образом [1]:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{\mathrm{Pr}}\left(\vec{v}\nabla\right)\vec{v} = -\nabla p + \nabla\vec{v} + \mathrm{R}'\rho_e\vec{E} + \mathrm{Ra}T\vec{\gamma},\\
\mathrm{Pr}\frac{\partial T}{\partial t} + \left(\vec{v}\nabla\right)T = \Delta T,\\
\mathrm{div}\left(\vec{v}\right) = 0,\\
\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \frac{1}{\mathrm{Pr_e}}\mathrm{div}\left(\sigma\vec{E}\right) + \frac{1}{\mathrm{Pr}}\left(\vec{v}\nabla\right)\rho_e = 0,\\
\mathrm{div}\vec{E} = \rho_e, \vec{E} = -\nabla\varphi, \sigma = 1 + S_\sigma T, \vec{\gamma} = (0,0,1).
\end{gathered} \qquad (1)$$

Эта система уравнений содержит следующие безразмерные величины: $\mathrm{Ra} = \rho_0 g\beta\Theta h^3/\eta\chi$ – тепловой число Рэлея, $\mathrm{R}' = \varepsilon U^2/\eta\chi$ – электрический аналог числа Галилея, $\mathrm{Pr} = \eta/\chi\rho$ – число Прандтля, $\mathrm{Pr_e} = \tau_e/\tau = \varepsilon\chi/h^2\sigma_0$ – электрическое число Прандтля, характеризующее отношение времени релаксации электрического заряда к характеристическому времени затухания вязких возмущений, $\omega = \rho\Omega\, h^2/\eta$ – безразмерная частота модуляции электрического поля, $S_\sigma=\beta_\sigma\Theta$ – малый параметр, характеризующий неоднородность электропроводности жидкости. Малость параметра S_σ<<1 дает возможность использовать безындукционное приближение, в котором в расчет берется только внешнее электрическое поле.

Введем функцию тока $w = \dfrac{\partial\psi}{\partial x}, u = -\dfrac{\partial\psi}{\partial z}$. Тогда уравнения, описывающие электротермическую конвекцию слабопроводящей жидкости в гравитационном и электрическом полях, примут вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi + \frac{1}{\mathrm{Pr}}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}\Delta\psi - \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x}\Delta\psi\right) = \mathrm{Ra}_\sigma\frac{\partial\rho_e}{\partial x}\cos\omega t + \mathrm{Ra}\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + \Delta^2\psi,$$

$$\mathrm{Pr}\frac{\partial\vartheta}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\vartheta}{\partial z} - \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\vartheta}{\partial x} = \Delta\vartheta + \frac{\partial\psi}{\partial x}, \qquad (2)$$

$$\mathrm{Pr}_e\frac{\partial\rho_e}{\partial t} + \frac{\mathrm{Pr}_e}{\mathrm{Pr}}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\rho_e}{\partial z} - \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\rho_e}{\partial x}\right) + \rho_e + \frac{\partial\vartheta}{\partial z}\cos\omega t = 0.$$

Здесь $\mathrm{Ra}_\sigma = R'\mathrm{S}_\sigma$ – электрическое число Рэлея. Рассмотрим твердые изотермические граничные условия:

$$z = -1/2,\ 1/2:\ \psi=\psi'=\vartheta=0\,. \qquad (3)$$

Для решения системы уравнений (2) используем метод Галеркина и следующие аппроксимации полей ψ и ϑ, удовлетворяющие граничным условиям:

$$\psi = \left(A_1\left(\frac{1}{4}-z^2\right)^2 + A_2\left(\frac{1}{4}-z^2\right)^2 z\right)\sin kx,$$

$$\vartheta = \left(B_1\left(\frac{1}{4}-z^2\right) + B_2\left(\frac{1}{4}-z^2\right)z\right)\cos kx + C\left(\frac{1}{4}-z^2\right)z, \qquad (4)$$

$$\vartheta = \left(D_1 z + D_2\left(\frac{1}{4}-3z^2\right)\right)\cos kx + E\left(\frac{1}{4}-3z^2\right).$$

Здесь k – волновой вектор, характеризующий периодичность возмущений в плоскости слоя, $A_1(t), A_2(t), B_1(t), B_2(t), C(t), D_1(t), D_2(t), E(t)$ – амплитуды. Подставляя разложение (4) в систему (2), после ортогонализации получаем систему восьми обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд слоя.

В случае конечного времени релаксации заряда после перенормировки получается восьмимодовая модель электроконвекции, аналогичная модели [1], полученной для свободных граничных условий:

$$
\begin{aligned}
&\dot{A}_1 = \Pr\left(-qA_1 + rB_1 + eD_2\cos(\omega t)\right),\\
&\dot{A}_2 = \Pr\left(-d_1A_2 + d_3eD_1\cos(\omega t) + d_2rB_2\right),\\
&\dot{B}_1 = -B_1 + A_1 - A_1C,\\
&\dot{B}_2 = -d_4B_2 + d_5A_2 - A_2C,\\
&\dot{C} = -bC + A_1B_1 + A_2B_2,\\
&\dot{D}_1 = d_6A_1E - gD_1 + gB_1\cos(\omega t),\\
&\dot{D}_2 = -gD_2 - gB_2\cos(\omega t),\\
&\dot{E} = -gE - d_7A_1D_1 - gC\cos(\omega t),
\end{aligned}
\tag{5}
$$

где введены следующие параметры

$$
e = \frac{1}{\sqrt{7}}\frac{9k^2Ra_\sigma}{\left(12+k^2\right)\left(10+k^2\right)^2}, r = \frac{27k^2Ra}{28\left(k^2+10\right)^2\left(k^2+12\right)},
$$

$$
q = \frac{k^4+24k^2+504}{\left(12+k^2\right)\left(10+k^2\right)}, b = \frac{42}{k^2+10}, g = \frac{\Pr}{\Pr_e\left(10+k^2\right)},
$$

$$
d_1 = \frac{k^4+88k^2+3960}{\left(44+k^2\right)\left(k^2+10\right)}, d_2 = \frac{7}{27}\frac{12+k^2}{k^2+44}, d_3 = \frac{1}{6}\frac{\left(12+k^2\right)}{\left(44+k^2\right)},
$$

$$
d_4 = \frac{k^2+42}{k^2+10}, d_5 = \frac{11}{3}, d_6 = \frac{6}{5}, d_7 = \frac{2}{7}.
$$

Значение волнового числа бралось в минимуме нейтральной кривой $k = 4.506$ при значении числа Прандтля Pr = 400 в случае мгновенной релаксации заряда [2]. Рассматривался случай постоянного электрического поля и $\Pr_e = 30$. Исследование проведено при некоторых параметрах. Например, при r = 0.8 было установлено, что конвекция начинается колебательным образом, амплитуды с ростом электрического поля растут, затем происходит переход к монотонному режиму.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильин В. А.* Электроконвекция слабопроводящей жидкости в постоянном электрическом поле// Журнал технической физики. 2013. Т. 83, вып. 1. С. 64 –73.
2. *Ширяев А. Ю., Ильин В. А.* Маломодовая модель электроконвекции слабопроводящей жидкости в слое с твердыми границами// Материалы краевой научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Физика для Пермского края». Вып. 5. Пермь, 2012. С. 19 – 22.