

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Пермский государственный университет

Научно-образовательный центр
«Неравновесные переходы в сплошных средах»

Ю.К. Братухин, Г.Ф. Путин

ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Учебное пособие по лабораторному практикуму «Механика»
курса общей физики

Пермь 2003

ББК 22.253.3

Б 87

УДК 531.7.08 (076.5)

Братухин Ю.К., Путин Г.Ф.

Б 87 Обработка экспериментальных данных: Учебное пособие по лабораторному практикуму «Механика» курса общей физики / Перм. ун-т. – Пермь, 2003. – 80 с.

ISBN 5–7944–0370 5

Пособие предназначено для студентов первого курса физических факультетов университетов, а также студентов других естественно-научных факультетов университетов и технических вузов, приступающих к работе в практикуме по общей физике. Оно составлено в соответствии с действующей программой курса общей физики как введение в курс лабораторных работ. Дается краткое изложение теории, относящееся ко всем заданиям, и описание несколько лабораторных работ, каждую из которых одновременно могут выполнять студенты всей группы. Формулировка задач предусматривает, чтобы исполнение большинства экспериментальных установок было простым и студенты, проделав опыты, сами могли предложить их усовершенствование или, при желании, воспроизвести дома. Поэтому пособие может быть использовано и для самостоятельной работы.

Табл. 10. Ил. 13. Библиогр. 12 назв.

Учебное пособие подготовлено при поддержке Научно-образовательного центра «Неравновесные переходы в сплошных средах»

Печатается по решению Ученого совета физического факультета Пермского университета

Рецензенты:

кафедра прикладной физики Пермского государственного технического университета;

доктор физико-математических наук, профессор
А.Ф. Пшеничников

ISBN 5–7944–0370 5

© Ю.К.Братухин, Г.Ф.Путин, 2003

ОГЛАВЛЕНИЕ

1.	ПРАВИЛА ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ	5
1.1.	Обработка результатов прямых измерений	5
1.2.	Обработка результатов косвенных измерений	9
2.	ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТОВ О ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТАХ ..	11
3.	ВВЕДЕНИЕ	12
4.	ВИДЫ ИЗМЕРЕНИЙ	15
4.1.	Измерение	15
4.2.	Прямые измерения	15
4.3.	Косвенные измерения	15
5.	ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ	16
5.1.	Запись результата измерений	16
5.2.	Среднее значение	16
5.3.	Истинное значение	17
5.4.	Доверительный интервал	17
5.5.	Коэффициент надежности	17
6.	ВИДЫ ПОГРЕШНОСТЕЙ	18
6.1.	Абсолютная погрешность	18
6.2.	Относительная погрешность	18
6.3.	Систематическая ошибка	19
6.4.	Случайная ошибка	21
6.5.	Промах	22
7.	ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ	23
7.1.	Предельная ошибка прибора	23
7.2.	Класс точности	24
7.3.	Ошибка прибора	24
7.4.	Ошибка округления	25
7.5.	Суммарная ошибка измерения	25
8.	СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ СЛУЧАЙНУЮ ОШИБКУ ...	27
8.1.	Обработка результатов прямых измерений	27
8.2.	Распределение Гаусса	30
8.3.	Метод Стьюдента	31
8.4.	Обработка результатов косвенных измерений	33

9.	ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРИ ОБРАБОТКЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ	37
9.1.	Число значащих цифр при определении погрешности	38
9.2.	К вычислению суммарной ошибки измерения.	40
9.3.	О точности вычислений	40
10.	ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ ПО СТАТИСТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ	42
10.1.	Лабораторная работа. Изучение распределения случайной величины. Газ Лоренца	44
10.2.	Лабораторная работа. Экспериментальное определение числа π . Игла Бюффона	55
10.3.	Лабораторная работа. Моделирование измерений, сопровождающихся большой случайной погрешностью	64
10.4.	Лабораторная работа. Пример оценки погрешности косвенных измерений. Определение плотности твердого тела	70
10.5.	Лабораторная работа. Определение плотности твердого тела правильной геометрической формы	76
11.	КАК ПИСАТЬ ОТЧЕТЫ О ЛАБОРАТОРНЫХ И НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ РАБОТАХ И НАУЧНЫЕ СТАТЬИ	77
	БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.	79

В главах 1, 2 кратко приведена последовательность шагов, обязательных при обработке и представлении экспериментальных данных и при оформлении отчетов о лабораторных работах. Подробное изложение этих вопросов содержится в разделах 3 – 11, составляющих основное содержание данного пособия.

1. ПРАВИЛА ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ¹

При обработке результатов измерений предлагается следующий порядок действий.

1.1. Обработка результатов прямых измерений

Прямыми называются измерения, при которых искомая величина считывается непосредственно с прибора.

Пусть в одних и тех же условиях проделано n измерений некоторой физической величины x .

1. Записываем в таблицу в тетради результаты каждого из отдельных измерений x_1, x_2, \dots, x_n .
2. Вычисляем *среднее арифметическое значение* $\langle x \rangle$ из n измерений

$$\langle x \rangle = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (1.1.1)^2 / (5.2.1)^{3,4}$$

¹ Приводимые здесь правила представления результатов предписываются Государственным стандартом ГОСТ 8.011-72 [1].

² Жирный шрифт используется при нумерации формул и таблиц в пределах данной - справочной главы 1.

³ Чтобы помочь читателю быстрее отыскать разъяснения к формулам, приводимым в главе 1, после косой черты обычным шрифтом указана нумерация, используемая при их описании в основных разделах 3 – 11.

⁴ Цифры перед первой точкой означают номер раздела (главы); перед второй точкой – номер подраздела (параграфа); цифры после второй точки соответствуют номеру формулы, таблицы, рисунка в пределах указанного подраздела в порядке их появления. Например: формула (5.2.1) введена в главе 5, параграфе 1 и является первой формулой, которой присвоен номер в этом параграфе.

3. Находим абсолютные погрешности отдельных измерений

$$\Delta x_i = \langle x \rangle - x_i. \quad (1.1.2) / (6.1.1)$$

4. Определяем из таблицы **1.1.1** коэффициент Стьюдента $t_{p,n}$ для числа проведенных измерений n (и заданной надежности $p = 0.95$)⁵.

Таблица **1.1.1**

Коэффициенты Стьюдента

$p = 0.95$

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	∞
$t_{p,n}$	12.7	4.3	3.2	2.8	2.6	2.4	2.4	2.3	2.3	2.1	2.0

5. Вычисляем абсолютную **случайную погрешность** $\overset{\circ}{\Delta} x$ результата всех n измерений по формуле

$$\overset{\circ}{\Delta} x = t_{p,n} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\langle x \rangle - x_i)^2}{n(n-1)}}. \quad (1.1.3) / (8.3.1)$$

6. Вычисляем абсолютную **погрешность прибора** Δ_{np} по формуле

$$\Delta_{np} = \frac{2}{3} \delta \quad (p = 0.95), \quad (1.1.4) / (7.3.2)$$

где δ – предельная ошибка прибора, указываемая на шкале прибора или в его паспорте.

⁵ Значение коэффициента надежности $p = 0.95$ предписывается Государственным стандартом 8.207-76 [2].

7. Вычисляем абсолютную **погрешность округления** прибора $\Delta_{окр}$ по формуле

$$\Delta_{окр} = 0.48 \omega \quad (p = 0.95), \quad (1.1.5) / (7.4.2)$$

где ω – цена наименьшего деления прибора.

Погрешности прибора $\Delta_{пр}$ и округления $\Delta_{окр}$ для некоторых приборов, применяемых в лабораторном практикуме по механике, указаны в таблице **1.1.2**:

Таблица **1.1.2**

Погрешности приборов

$p = 0.95$

Прибор	Цена наименьшего деления, ω	Предельная погрешность прибора, δ	Погрешность округления, $\Delta_{окр}$	Погрешность прибора, $\Delta_{пр}$
Микрометр	0.01 мм	0.01 мм	0.005 мм	0.007 мм
Штангенциркуль	0.1 мм	0.1 мм	0.05 мм	0.07 мм
Штангенциркуль	0.05 мм	0.05 мм	0.02 мм	0.03 мм
Весы технические	0.1 г (100 мг)	0.01 г	0.05 г	0.07 г
Линейка	1 мм	1 мм	0.5 мм	0.7 мм
Секундомер	0.2 с	0.2 с	0.1 с	0.14 с

8. Определяем суммарную **абсолютную погрешность** Δx опыта по формуле

$$\Delta x = \sqrt{(\overset{\circ}{\Delta} x)^2 + \Delta_{пр}^2 + \Delta_{окр}^2}. \quad (1.1.6) / (7.5.1)$$

При вычислении Δx по формуле **(1.1.6)** можно отбросить одну или две из погрешностей $\overset{\circ}{\Delta} x$, $\Delta_{пр}$ и $\Delta_{окр}$, если их величины вдвое или значительно меньше оставшихся.

9. Округляем абсолютную погрешность Δx (см. параграф 9.1):
- до одной значащей цифры, если эта цифра больше или равна 2. Например,

$$\Delta x = 0.\underline{5}23 \approx 0.\underline{5};$$

- до двух значащих цифр, если первая из них меньше 2. Например,

$$\Delta x = 0.\underline{1}24 \approx 0.\underline{12}.$$

Здесь и в ряде следующих примеров значащие цифры подчеркнуты.

10. Записываем окончательный *результат эксперимента* в виде

$$X = \langle x \rangle \pm \Delta x \quad (p = 0.95) \quad (1.1.7) / (5.1.1)$$

и указываем единицы измерения.

Запись (1.1.7) означает, что истинное значение X измеряемой величины x лежит в *доверительном интервале* $(\langle x \rangle - \Delta x, \langle x \rangle + \Delta x)$ с вероятностью p , составляющей 95 %.

11. Округляем среднее значение $\langle x \rangle$ таким образом, чтобы погрешность Δx приходилась (см. параграф 9.1):

- на последний разряд среднего $\langle x \rangle$, если Δx записано с одной значащей цифрой

$$X = (6438 \pm 523) \approx (6.4 \pm 0.\underline{5}) \cdot 10^3 \text{ м} \quad (p = 0.95); \quad (1.1.8)$$

- на два последних разряда среднего $\langle x \rangle$, если Δx записано с двумя значащими цифрами

$$X = (6438 \pm 124) \approx (6.44 \pm 0.\underline{12}) \cdot 10^3 \text{ м} \quad (p = 0.95). \quad (1.1.9)$$

12. Определяем *относительную погрешность* $\Delta x_{\text{отн}}$ результата серии измерений

$$\Delta x_{\text{отн}} = \Delta x / \langle x \rangle. \quad (1.1.10) / (6.2.1)$$

13. Записываем теоретическое, или табличное, или полученное в других исследованиях и т.д., значение изучаемой нами физической величины x . Приводим подробную ссылку на цитируемый источник.

Например: *Табличное значение плотности алюминия при температуре 20° С*

$$\rho = 2.69 \text{ г/см}^3.$$

См.: Таблицы физических величин: Справочник / Под ред. И.К. Кикоина. М.: Атомиздат. 1976. 1006 с. (таблица на с. 121).

14. Сравниваем полученный в наших экспериментах результат с данными предыдущего пункта 13. Если эти результаты значительно различаются, следует установить причины такого расхождения: проверить вычисления; повторить измерения для одного - двух характерных значений параметров.
15. Записываем вывод.

Например: *В пределах погрешности эксперимента результаты наших измерений согласуются (не согласуются) с теоретическим, или табличным, или приведенным в цитируемой работе [N] значением. (Расхождение результатов может быть обусловлено следующими причинами: ..., или следующими недостатками используемых приборов и методики эксперимента: ...).*

1.2. Обработка результатов косвенных измерений

Косвенными называются измерения, при которых интересующая нас величина z является функцией k ($k \geq 1$) непосредственно измеряемых величин x_1, x_2, \dots, x_k :

$$z = z(x_1, x_2, \dots, x_k). \quad (1.2.1) / (8.4.1)$$

При обработке результатов косвенных измерений наиболее распространен следующий способ.

1. Данные прямых измерений каждого из параметров x_1, x_2, \dots, x_k обрабатываем, как описано в параграфе 1.1:

- Вычисляем **средние арифметические значения** аргументов $\langle x_1 \rangle, \langle x_2 \rangle, \dots, \langle x_k \rangle$ по формуле (1.1.1);

- Находим **абсолютные погрешности** $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_k$ измерений каждого из аргументов, пользуясь приведенными выше формулами (1.1.3) – (1.1.6). При этом для всех аргументов задаем одно и то же значение надежности $p = 0.95$.

2. **Результат косвенного измерения** определяем, подставляя найденные средние $\langle x_1 \rangle, \langle x_2 \rangle, \dots, \langle x_k \rangle$ от непосредственно измеренных величин в формулу для функции z

$$z = z(\langle x_1 \rangle, \langle x_2 \rangle, \dots, \langle x_k \rangle). \quad (1.2.2) / (8.4.5)$$

3. **Абсолютную погрешность** Δz для результата косвенных измерений оцениваем по формуле

$$\Delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x_1} \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_2} \Delta x_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial z}{\partial x_k} \Delta x_k\right)^2}, \quad (1.2.3) / (8.4.6)$$

где $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_k}$ - частные производные⁶ функции z , вычисляемые при значениях переменных $x_1 = \langle x_1 \rangle, x_2 = \langle x_2 \rangle, \dots, x_k = \langle x_k \rangle$.

Результирующая погрешность Δz имеет ту же надежность $p = 0.95$.

При вычислении результирующей погрешности по формуле (1.2.3) следует пренебречь теми из слагаемых в подкоренном выражении, которые по крайней мере вдвое меньше оставшихся членов.

Еще один способ обработки результатов косвенных измерений описан далее в параграфе 8.4.

⁶ Символы $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots$ означают частные производные [3]. Каждая частная производная может быть найдена как обыкновенная производная функции $z(x_1, x_2, \dots)$ по соответствующему аргументу, если оставшиеся аргументы рассматривать как постоянные параметры.

2. ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТОВ О ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТАХ⁷

1. Каждая работа должна начинаться с новой страницы.
2. Заголовок работы должен быть выделен.
3. После заголовка необходимо записать краткое Введение, в котором должны быть отражены следующие моменты:
 - постановка задачи, какое явление или какая зависимость будут исследованы, что ожидается получить в ходе выполнения работы;
 - физические величины, которые будут измеряться в работе; каковы их размерности и единицы измерения;
 - описание метода измерений, используемого в работе. При этом обязательно следует схематически нарисовать экспериментальную установку и написать рабочую формулу и формулы для вычисления погрешностей.
4. Экспериментальные результаты следует записывать только в рабочую тетрадь, в заранее заготовленные таблицы. Не следует использовать для этих целей черновики.
5. Если измеряемая величина зависит от внешних условий, например, от температуры или давления, необходимо записать условия эксперимента.
6. Окончательный результат следует записать в конце отчета с указанием доверительного интервала, коэффициента надежности, единиц измерения и внешних условий. Этот результат должен быть выделен.
7. Если возможно, полученный результат необходимо сравнить с имеющимися табличными данными, теоретическими расчетами или результатами экспериментов других авторов, обязательно приведя при этом ссылку на источник этих данных.
8. Если в измерениях содержатся систематические погрешности (например, сила трения, не учтенная в формулах), то указывать доверительный интервал не имеет смысла [4, 5]. В этом случае ограничиваются оценкой точности метода измерений.
9. Для характеристики качества результатов и используемого экспериментального метода рекомендуется всегда оценивать относительную погрешность результата.
10. Все записи в тетради должны быть датированы.

⁷ См. также разделы 3, с. 13; 10, с. 42; 11, с. 77 данной книги.

3. ВВЕДЕНИЕ

Основными задачами лабораторной практики являются:

- знакомство с приборами;
- приобретение опыта в проведении эксперимента;
- иллюстрация теоретических положений физики.

Очевидно, что ни один курс практических работ не сможет включить в себя всю теорию и познакомить со всеми приборами. Поэтому главная задача настоящего практикума - научиться:

- планировать эксперимент так, чтобы точность измерений соответствовала поставленным целям;
- учитывать возможность систематических ошибок и принимать меры для их устранения;
- анализировать результаты эксперимента и делать правильные выводы;
- оценивать точность окончательного результата;
- вести записи измерений и расчетов аккуратно, ясно и кратко.

Познакомиться с приемами практического проведения измерений, статистической обработки их результатов, с методами экспериментальных исследований и указаниями по оформлению результатов, составлению отчетов и написанию научных статей мы рекомендуем по книге Дж. Сквайрса «Практическая физика» [4].

Предлагаемый лабораторный практикум по механике как одному из разделов физики призван не столько сообщить читателю новые сведения – это уже выполнено школой – сколько помочь ему глубже понять существо более или менее известных фактов и их взаимосвязь. Эта основная наша цель непосредственно связана также с воспитанием творческих способностей и формированием самостоятельного мышления. Такое воспитание может формироваться на следующих основных направлениях: умение обобщать – индукция; умение применять теорию к конкретной задаче – дедукция и, пожалуй, самое важное – умение выявлять противоречия между теоретическими обобщениями и практикой – диалектика.

В теоретической картине, которая Вам преподносится на лекциях, рассматриваются те стороны реального мира, которые теория считает важными. Может получиться так, что Ваше знакомство с миром природы ограничится только этими сторонами, и Вы будете уверены,

что это и есть весь реальный мир, а не отдельные его грани. К тому же в такой картине все так хорошо увязано, что легко утратить представление о том, какие усилия потребовались для ее создания. Лучшее лекарство от такой болезни – пойти в лабораторию и там убедиться в сложности реального мира.

Занимаясь экспериментальной физикой, Вы прежде всего узнаете, как трудно бывает проверить теорию, измерить то, что нужно, а не что-то иное, и научитесь преодолевать такие трудности. Вместе с тем, у Вас появится взгляд на физику в целом и на взаимоотношения между теорией и экспериментом.

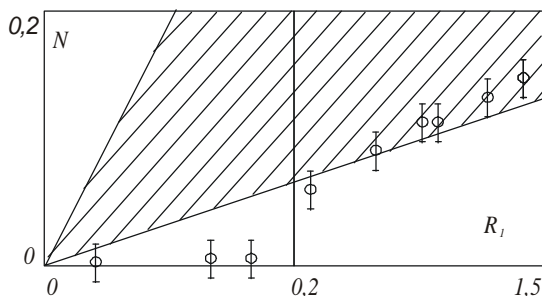
Чтобы научить оформлению отчетов о научном исследовании (для Вас это обучение разбивается на этапы – лабораторные работы, студенческие научные семинары и конференции, участие в исследованиях кафедры), часть приводимых далее описаний лабораторных работ составлена в стиле статей в научных журналах. О том, как писать научные статьи, подробно говорится в книгах [4], [6], где даются практические советы, рекомендации и приводятся образцы. Мы здесь укажем только, что в таких описаниях будем придерживаться общепринятого разбиения статьи на следующие разделы:

- введение с постановкой задачи;
- описание экспериментальной установки и методики измерений;
- результаты эксперимента;
- их анализ и сопоставление с результатами других авторов;
- выводы.

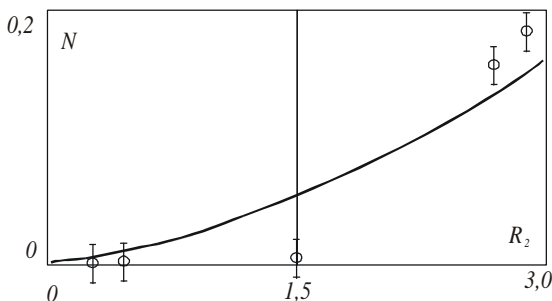
Для всех физиков мира подобная манера изложения стала настолько неотъемлемым профессиональным навыком, что часто служит поводом для шуток и пародий – смотри, например, статьи П. Иордана и Р. де Кронига «Движение нижней челюсти у крупного рогатого скота в процессе пережевывания пищи» и Я. И. Френкеля «К квантовой теории танца» в книге [6]. Не удержались от подобной шутки над штампами и над собой и авторы данного издания, поместив в разделе «Обсуждение результатов» совместной публикации [7] в уважаемом академическом журнале дословную цитату из пародии «Инструкция для читателя научных статей» [6]: «Если принять во внимание приближения, сделанные при анализе, согласие экспериментальных и теоретических результатов следует признать удовлетворительным», но, правда, опустив раскрытый в «Инструкции...» тайный смысл этой фразы: «Согласие вообще

отсутствует» - в уверенности, что посвященные поймут этот смысл и без дополнительных разъяснений.

Для того чтобы продемонстрировать, насколько полезно, сообщая экспериментальные данные, указывать не только средние характеристики, но и доверительные интервалы, в пределах которых наиболее вероятно нахождение истинных значений измеряемых величин, а также показать, как могут соотноситься теоретические и экспериментальные результаты при изучении конкретных задач, приведем два графика из упомянутой статьи [7].



Фигура 1 из работы [7]. Тепловой поток через пропитанную жидкостью пористую среду с мелкими порами. Точки - данные опытов. Область теоретических значений заштрихована



Фигура 2 из работы [7]. Теплоперенос через среду с крупными порами. Точки — эксперимент; кривая — теория

4. ВИДЫ ИЗМЕРЕНИЙ

4.1. Измерение

Измерением какой-либо физической величины называется операция, позволяющая узнать, во сколько раз измеряемая величина больше (или меньше) соответствующей величины, принятой за единицу.

Необходимо подчеркнуть, что такое сравнение с эталоном – измерение – должно выполняться в строго определенных условиях и вполне определенным образом. Например, измерение длины предмета предполагает, что эталон неподвижен по отношению к нему, а измерение продолжительности события производится по неподвижным часам. В этом смысле поучителен разбор Эйнштейном понятия одновременности, которое в классической физике не определялось вообще как *a priori* «очевидное».

Измерения разделяются на прямые и косвенные.

4.2. Прямые измерения

Прямыми называются такие измерения, при которых искомая величина сравнивается с единицей измерения непосредственно или при помощи измерительного прибора, проградуированного в соответствующих единицах. Примерами прямых измерений являются измерения длины линейкой или штангенциркулем; измерения масс на рычажных весах с помощью набора разновесов; измерения промежутков времени при помощи часов или секундомера, измерения температуры термометром, напряжения вольтметром и т.п. Значение измеряемой величины отсчитывается при этом по шкале прибора или определяется подсчетом мер, разновесов и т.д.

4.3. Косвенные измерения

Косвенными называются измерения, при которых искомая величина находится как функция нескольких непосредственно измеряемых величин. Примерами косвенных измерений могут служить: нахождение плотности твердого тела путем измерения его массы и объема; измерение вязкости жидкости по ее объемному расходу при истечении через круговой капилляр, длине и сечению этого капилляра; или по скорости падения в этой жидкости маленького шарика, его плотности и диаметру и т.п.

5. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Следует понимать, что никакое измерение не может быть выполнено абсолютно точно. Любое измерение всегда дает результат, несколько отличающийся от истинного значения изучаемой величины. Принято говорить, что результат измерения содержит некоторую ошибку, илиотягчен ошибкой. Поэтому в задачу измерений входит не только нахождение самой искомой величины, но и оценка допущенной при измерении погрешности.

5.1. Запись результата измерений

Пусть мы произвели n измерений некоторой физической величины x . Результаты этих отдельных измерений обозначим через x_1, x_2, \dots, x_n . Истинное значение измеряемой величины (неизвестное нам) обозначим буквой X .

В соответствии с требованиями Государственных стандартов ГОСТ 8.011-72 и ГОСТ 8.207-76 [2, 3], сообщая об измеренной нами физической величине x , мы всегда должны, кроме полученного результата, указать приближенную ошибку Δx наших измерений (называемую еще абсолютной погрешностью), записав результат в виде

$$X = \langle x \rangle \pm \Delta x \quad (p = 0.95) \quad (5.1.1)$$

с обязательным указанием единиц измерения и надежности p , для которой ГОСТ 8.207-76 предписывает значение $p = 0.95$.

Запись (5.1.1) означает, что истинное значение X измеряемой величины x лежит в интервале $(\langle x \rangle - \Delta x, \langle x \rangle + \Delta x)$ с некоторой вероятностью p (по ГОСТу эта вероятность должна быть равна 95 %).

5.2. Среднее значение

Если измерения сопровождаются разбросом экспериментальных данных, в качестве среднего значения $\langle x \rangle$ измеряемой величины x в выражении (5.1.1) принимается среднее арифметическое значение

$$\langle x \rangle = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (5.2.1)$$

где n – число измерений. При использовании этой формулы нужно иметь в виду, что в ней все x независимы и равновероятны. Мы будем предполагать, что это условие всегда выполнено.

5.3. Истинное значение

Строго говоря, под «истинным» значением X измеряемой величины следует понимать среднее арифметическое значение при бесконечном числе измерений (в формуле (5.2.1) n следует устремить к ∞). Поскольку выполнить бесконечное число измерений принципиально невозможно, то следует согласиться, что экспериментатор может иметь дело только со средними арифметическими величинами $\langle x \rangle$ и принять, что $X \equiv \langle x \rangle$.

5.4. Доверительный интервал

Интервал $(\langle x \rangle - \Delta x, \langle x \rangle + \Delta x)$ – с центром в точке $\langle x \rangle$ и полушириной, равной погрешности Δx – в котором с вероятностью p ($p = 0.95$) заключено истинное значение X измеряемой величины x , называется доверительным интервалом.

Правила и формулы, на основании которых, в соответствии с ГОСТ, по измеренным величинам x_1, x_2, \dots, x_n рекомендуется вычислять полуширину доверительного интервала (абсолютную погрешность результата Δx), будут изложены в главе 8. Более подробное освещение этих вопросов будет дано на старших курсах в теории вероятностей и математической статистике.

5.5. Коэффициент надежности

Параметр $p = 0.95$ называется коэффициентом доверия, или коэффициентом надежности, или просто надежностью. Значение коэффициента надежности $p = 0.95$, предписываемое ГОСТом, означает, что вероятность попадания результатов достаточно длинной серии отдельных измерений в доверительный интервал $(\langle x \rangle - \Delta x, \langle x \rangle + \Delta x)$ составляет 95 %.

6. ВИДЫ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Точность измерений обычно ограничивается несовершенством измерительных приборов, несовершенством наших органов чувств и статистическим характером изучаемых явлений.

При косвенных измерениях, когда конечный результат находится подстановкой непосредственно измеренных величин в некоторую формулу, точность может зависеть и от того, насколько хорошо эта формула описывает зависимость изучаемой характеристики от измеряемых параметров.

6.1. Абсолютная погрешность

Абсолютной ошибкой i -го измерения Δx_i называется отклонение результата i -го измерения x_i от среднего значения $\langle x \rangle$

$$\Delta x_i = \langle x \rangle - x_i. \quad (6.1.1)$$

Абсолютной ошибкой, или абсолютной погрешностью результата всех измерений называется полуширина Δx доверительного интервала ($\langle x \rangle - \Delta x, \langle x \rangle + \Delta x$).

6.2. Относительная погрешность

Качество результатов измерений обычно удобно характеризовать не абсолютной величиной ошибки Δx , а ее отношением к измеряемой величине $\langle x \rangle$, которое называется относительной ошибкой и обычно выражается в процентах:

$$\Delta x_{\text{отн}} = \Delta x / \langle x \rangle. \quad (6.2.1)$$

Удобство применения относительной ошибки обусловлено тем, что в большинстве приложений именно эта величина играет существенную роль. Например, будем измерять какую либо длину с точностью до 1 см. В случае, когда речь идет об определении длины карандаша, указанная точность будет весьма низкой – около 10 %. С

другой стороны, если поставить перед собой задачу - с той же абсолютной погрешностью в 1 см определить расстояние от Перми до Москвы, то такая точность будет чрезмерно высокой ($\sim 10^{-6} \%$). Проводить измерения с названной точностью в этом случае будет очень трудно, да и вряд ли необходимо.

Приведенный пример показывает, что указание абсолютной ошибки мало отражает действительную точность измерений. В противоположность этому, относительная погрешность, сопоставляющая величину ошибки с измеряемой характеристикой, дает непосредственное представление о точности измерений.

По характеру происхождения все ошибки измерений можно разделить на три типа – систематические, случайные и грубые ошибки, или промахи.

6.3. Систематическая ошибка

Систематическая ошибка – это смягченное выражение, заменяющее слова «ошибка экспериментатора».

Систематические ошибки остаются, как правило, постоянными на протяжении всей серии опытов. Величина их может быть и известной, и неизвестной заранее. Например, курс шхуны «Пилигрим»⁸ содержал неизвестную Дику Сэнду, но известную Негоро систематическую ошибку.

Систематические погрешности могут быть обусловлены различными причинами:

- ограниченной точностью изготовления прибора (погрешностью прибора). Шкала линейки может быть нанесена неточно (неравномерно); взвешивание может производиться с помощью неточных гирь; положение нуля термометра может не соответствовать нулевой температуре; капилляр термометра может иметь разное сечение в разных участках шкалы; стрелка амперметра может не располагаться на нуле в отсутствие электрического тока через прибор;
- такие ошибки часто возникают из-за того, что реальная установка в чем-то отличается от идеальной, или условия

⁸ Верн, Жюль. Пятнадцатилетний капитан / Собр. соч.: в 6 т. Т. 2. 1992. М.: Современный писатель. 445 с.

эксперимента отличаются от предполагаемых теорией, а поправки на это несоответствие не делаются. Систематическая погрешность возникает при измерении массы, если не учитывается действие выталкивающей силы воздуха на взвешиваемое тело и на разновесы; при измерениях объема жидкости или газа, если не учитывается тепловое расширение; при калориметрических измерениях, если не учитывается теплообмен прибора с окружающей средой. Другими примерами эффектов, которыми может быть обусловлена обсуждаемая ошибка, являются термо-ЭДС в контактах, сопротивление подводящих проводов, «мертвое» время счетчиков частиц;

- систематические ошибки могут быть обусловлены также неправильным выбором метода измерений. Например, мы совершив такую ошибку, определяя плотность какого-то материала посредством измерений объема и веса образца, если этот образец содержит внутри пустоты, например, пузыри воздуха, попавшие туда при отливке;
- мы допускаем систематическую погрешность, округляя численную величину до какого-либо приближенного значения, например, полагая $\pi = 3$, $\pi = 3.1$, $\pi = 3.14$ и т. д. вместо $\pi = 3.14159265\dots$

При наличии скрытой систематической погрешности результат, приведенный с незначительной ошибкой, будет выглядеть вполне надежным, хотя на самом деле он является неверным.

Классическим примером может служить опыт Милликена по измерению элементарного электрического заряда e . В этом эксперименте требуется знать вязкость воздуха. Милликен взял заниженную величину вязкости и получил

$$e = (1.591 \pm 0.002) \cdot 10^{-19} \text{ Кл.}$$

В настоящее же время принято значение

$$e = (1.60210 \pm 0.00002) \cdot 10^{-19} \text{ Кл.}$$

Долгое время величины ряда других атомных констант, таких, как постоянная Планка и число Авогадро, базировались на значении элементарного электрического заряда e , полученном Миллиkenом, и, следовательно, содержали ошибку, превышающую 0.5 %.

Систематические ошибки не поддаются математическому анализу, и поэтому их *нужно выявить и устранить*. Если удастся обнаружить причину и найти величину сдвига (например, вес вытесненного телом воздуха при точном взвешивании), то систематическую погрешность можно исключить введением поправки к измеренному значению. Однако общих рецептов и универсальных правил, позволяющих обнаружить систематические ошибки конкретного измерения, не существует. Выявление, оценка и устранение таких ошибок требует опыта, догадки и интуиции экспериментатора. Нужно тщательно продумывать методику опытов и придирчиво выбирать аппаратуру. Иногда систематическую ошибку, обусловленную измерительным прибором, можно уменьшить, используя более точный прибор, желательно, другого типа. Наиболее действенный способ обнаружения систематических ошибок – это сравнение результатов измерений одной и той же величины, выполненных принципиально разными методами.

6.4. Случайная ошибка

Случайные ошибки проявляются в разбросе отсчетов при повторении измерений в одних и тех же доступных контролю условиях.

Величина случайных ошибок различна даже для измерений, выполненных одинаковым образом. Случайные ошибки происходят вследствие меняющихся от измерения к измерению неконтролируемых причин, действие которых неодинаково в каждом опыте и не всегда может быть учтено. Даже при взвешивании одними и теми же гирями мы, вообще говоря, будем получать разные значения веса. Источниками ошибок могут быть, например, колебания воздуха, воздействующие неодинаково на чашки весов; пылинки, осевшие на одну из чашек; нагревание одной половины коромысла от приближения руки взвешивающего; разное трение в правом и левом подвесах чашек и множество других причин, которые практически невозможно учесть. При измерениях периода колебаний маятника с помощью секундомера скажутся погрешности моментов пуска и остановки секундомера, ошибка в величине отсчета, небольшая неравномерность движения маятника вследствие трения. Случайные погрешности вызываются также сотрясениями здания. В опытах по измерению скорости радиоактивного распада ядер сама определяемая величина определена лишь статистически, как некоторое среднее

значение, и флуктуации числа распадов в равные промежутки времени будут наблюдаться даже при идеально точной аппаратуре.

Проделав измерения и используя методы обработки, основанные на теории ошибок, можно дать оценку случайной ошибки и указать вероятность, с которой истинное значение измеряемой величины находится внутри некоторого доверительного интервала.

Случайную ошибку можно уменьшить путем многократного повторения измерений.

6.5. Промах

Следует особо выделить такой вид ошибок, как грубый просчет, или промах. Под промахом понимается ошибка, сделанная вследствие неверной записи показаний прибора, недосмотра экспериментатора, или вызванная неисправностями аппаратуры. Например, неправильно записанный отсчет, замыкание электрической цепи являются промахами, которых следует по возможности избегать.

В качестве примера промаха при взвешивании можно привести запись веса 100.20 г вместо 1000.20 г. При измерениях длины метровой линейкой промах может появиться, если один из концов измеряемого предмета окажется совмещенным не с нулевым делением линейки, а, скажем, с делением 10 см.

Если серия из небольшого числа измерений содержит грубую ошибку – промах, то наличие этого промаха может сильно исказить как среднее значение $\langle x \rangle$ измеряемой величины, так и погрешность измерения Δx . Поэтому такой промах необходимо исключить из окончательного результата. Обычно промах имеет значение, резко отличающееся от других данных. Иногда промах удается выявить, повторив измерение.

Для устранения промахов нужно соблюдать аккуратность и тщательность в работе и записи данных. Как правило, грубые ошибки могут быть обнаружены, поэтому результаты таких измерений следует отбрасывать.

7. ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ

До сих пор мы не принимали во внимание ошибки прибора. В то же время показания любого измерительного прибора по ряду причин отличаются от истинного значения измеряемой величины; другими словами, прибор обладает погрешностью. Погрешность прибора разделяют на основную и дополнительную.

Основная погрешность

Основная погрешность прибора обусловлена его устройством, качеством изготовления и состоянием. Эту погрешность образуют, в частности, следующие факторы:

- неточная градуировка шкалы у линейки, штангенциркуля, микрометра; неточная градуировка и установка шкалы у электроизмерительных приборов;
- трение подвижных частей в весах, индукционных, емкостных и пьезо-датчиках, стрелочных электроизмерительных приборах;
- остаточные деформации в различных узлах и в чувствительных элементах датчиков;
- изменение электрических и магнитных свойств материалов – «старение» магнитов, изменение проводимости катушек, шунтов и добавочных сопротивлений, окисление контактов;
- собственное потребление энергии электроизмерительными приборами.

Дополнительная погрешность

Дополнительная погрешность прибора обусловлена влиянием таких внешних причин, как:

- температура, влажность и давление окружающей среды;
- внешние электрические и магнитные поля;
- продолжительность прогрева прибора;
- отклонение частоты и формы кривой питающего напряжения от стандартных зависимостей.

7.1. Предельная ошибка прибора

В паспорте прибора обычно указывается его наибольшая суммарная абсолютная ошибка – так называемая предельная ошибка δ . Максимальная погрешность δ , даваемая штангенциркулем и микрометром, как правило, нанесена на самом приборе.

Сведения о предельной ошибке некоторых приборов, часто применяемых в лабораторном практикуме, содержатся в таблице 1.1.2.

7.2. Класс точности

Погрешность электроизмерительных приборов принято характеризовать классом точности, который определяется как выраженное в процентах отношение предельной абсолютной погрешности δ к максимальному (номинальному) значению $x_{ном}$ измеряемой данным прибором величины

$$\text{класс точности} = \frac{\delta}{x_{ном}} \times 100\%. \quad (7.2.1)$$

В зависимости от качества изготовления электроизмерительные приборы в нашей стране характеризуются классом точности, выраженным одним из следующих чисел: 0.02; 0.05; 0.1; 0.2; 0.5; 1.0; 2.5; 4.0. Более грубым приборам класс точности не присваивается. Класс точности изображается на шкале прибора одним из приведенных чисел, взятым в кружок.

Если известен класс точности прибора, то его предельную ошибку δ можно найти по формуле

$$\delta = (\text{класс точности} \times x_{ном}) / 100. \quad (7.2.2)$$

У хороших измерительных приборов цена деления шкалы согласована с классом точности. Пользуясь такими приборами, нецелесообразно на глаз оценивать доли деления, если эти доли не отмечены на шкале.

7.3. Ошибка прибора

Погрешность прибора Δ_{np} определяется через предельную погрешность δ выражением [2]

$$\Delta_{np} = t_{p,n} \times \frac{d}{3}, \quad (7.3.1)$$

в которое входит коэффициент Стьюдента $t_{p,n}$ (см. параграф 8.3) для бесконечного количества измерений $n \rightarrow \infty$. В соответствии с таблицей 1.1.1 для принятого нами значения надежности $p = 0.95$ коэффициент $t_{p,n} = 2$, и для погрешности прибора получаем

$$\Delta_{np} = \frac{2}{3} \delta \quad (p = 0.95). \quad (7.3.2)$$

7.4. Ошибка округления прибора

Погрешность округления прибора $\Delta_{окр}$ возникает, например, при измерении длины линейкой или микрометром, времени секундомером, напряжения и тока – стрелочными электроизмерительными приборами. В этих случаях полуширина доверительного интервала $\Delta_{окр}$ определяется по формуле

$$\Delta_{окр} = p \times \frac{\omega}{2}, \quad (7.4.1)$$

где ω – цена наименьшего деления шкалы прибора [2].

Для заданной надежности $p = 0.95$

$$\Delta_{окр} = 0.48 \omega \quad (p = 0.95). \quad (7.4.2)$$

Значения погрешности прибора Δ_{np} и погрешности округления $\Delta_{окр}$ для ряда измерительных устройств, которые используются в лабораторном практикуме, также приведены в таблице 1.1.2.

7.5. Суммарная ошибка измерения

В общем случае, при использовании достаточно грубого прибора ошибка прибора Δ_{np} и ошибка округления $\Delta_{окр}$ могут быть порядка или даже больше случайной ошибки $\overset{\circ}{\Delta} x$. В этом случае суммарная абсолютная погрешность эксперимента определяется по «формуле Пифагора»

$$\Delta x = \sqrt{(\overset{\circ}{\Delta} x)^2 + \Delta_{np}^2 + \Delta_{окр}^2}. \quad (7.5.1)$$

Формула (7.5.1) охватывает все возможные варианты оценки погрешности прямых измерений.

8. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ СЛУЧАЙНУЮ ОШИБКУ

Обратимся к рассмотрению, пожалуй, самой трудной для усвоения задаче лабораторного практикума – обработке результатов измерений.

8.1. Обработка результатов прямых измерений

Случайные ошибки обуславливают разброс экспериментальных данных около истинного значения X . Они принципиально неустранимы, но их величину можно прогнозировать методами математической статистики по измеренным величинам x .

Продemonстрируем данный процесс на конкретном примере об определении расстояния шагами. Один из авторов этого пособия в течение многих лет ходит из дома на работу (расстояние L) с шагомером в кармане. В таблице 8.1.1 приведены записи показаний шагомера.

Таблица 8.1.1

Результаты измерения расстояния шагомером

Число шагов	Число наблюдений k в интервале шириной 10, 20 и 40 шагов			Число шагов, продолжение	Число наблюдений k в интервале шириной 10, 20 и 40 шагов		
	10	20	40		10	20	40
6190 и менее	4	5	12	6400-6409	123	245	456
6200-6209	2			6410-6419	122		
6210-6219	3			6420-6429	108	211	
6220-6229	5	7		6430-6439	103		
6230-6239	2			6440-6449	96	184	342

6240-6249	9	21	58	6450-6459	88	158	187
6250-6259	12			6460-6469	89		
6260-6269	16	37		6470-6479	69		
6270-6279	21			6480-6489	60	110	
6280-6289	27	61	160	6490-6499	50		77
6290-6299	34			6500-6509	44		
6300-6309	48	99		6510-6519	33		
6310-6319	51			6520-6529	27	48	
6320-6329	60	130	299	6530-6539	21		28
6330-6339	70			6540-6549	16		
6340-6349	80	169		6550-6559	12	15	
6350-6359	89			6560-6569	9		
6360-6369	97	211	440	6570-6579	6	22	
6370-6379	104			6580-6589	4		7
6380-639	109	6590-6599		3			
6390-6399	120	229		6600 и более	4		

Всего 2080 опытов.

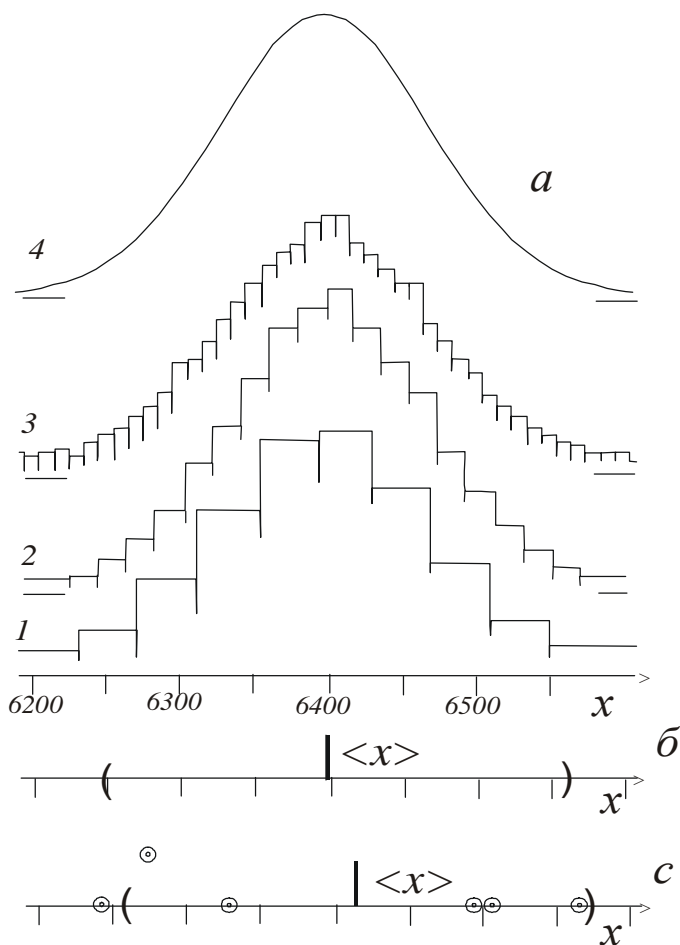


Рис. 8.1.1. Измерение расстояния шагами:
 а – гистограмма и кривая распределения данных таблицы 1.1.1. По горизонтальной оси отложено число шагов x , по оси ординат в удобном масштабе – число случаев k , когда отсчет попадает в рассматриваемый интервал;
 б – среднее значение и доверительный интервал для 2080 измерений;
 в – среднее значение, доверительный интервал и экспериментальные точки для 5 измерений

Для дальнейшего анализа удобно представить эти результаты наглядно в виде «столбчатой» диаграммы. Разобьем всю область изменения значений x (от 6200 до 6600 шагов) на равные отрезки (основания столбиков) и подсчитаем, сколько раз измеряемая величина (число шагов) попадает в каждый из интервалов. Число этих попаданий отложим в произвольном масштабе на оси ординат (высота столбов). Такие диаграммы называются гистограммами (*histos* - столб). Ширина интервалов может быть любой: на рисунке 8.1.1 приведены три вложенные одна в другую гистограммы с шириной интервала в 40, 20 и 10 шагов, соответственно. Масштаб по оси абсцисс один и тот же, а по оси ординат масштабы выбраны так, чтобы максимумы всех гистограмм имели одинаковую высоту.

Отметим, что все три гистограммы имеют практически одинаковый вид: «максимумы», «точки перегиба» и «хвосты» лежат в одних и тех же областях. Отличие этих гистограмм заключается только в ширине «уступов». Если бы мы провели не 2080 измерений, а в 10 раз больше, можно было бы еще уменьшить интервалы. При этом гистограмма «выродилась» бы в практически гладкую кривую. Такие кривые, получаемые при бесконечном увеличении числа измерений и бесконечном уменьшении интервалов, называются кривыми распределения. Они изучаются в математической статистике.

8.2. Распределение Гаусса

Мы будем пользоваться только распределением Гаусса [1, с. 26], представленным на рисунке 8.1.1 кривой 4

$$f(x) \sim e^{-\frac{(\langle x \rangle - x)^2}{2s^2}}, \quad (8.2.1)$$

где

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\langle x \rangle - x_i)^2}{n(n-1)}}. \quad (8.2.2)$$

Эта формула распределения вполне приемлема и позволяет легко провести вычисления. Кроме того, оценки ошибок в большинстве случаев оказываются довольно грубыми, и эта неопределенность в их оценке полностью перекрывает ошибки, которые обусловлены

произволом выбора в качестве функции распределения формулы (8.2.1). Правда, сказанное выше выполняется не всегда. Например, если результаты измерений дискретны и соответствуют ближайшим делениям шкалы прибора, пользоваться гауссовым распределением нельзя.

Перечислим основные свойства распределения Гаусса:

- Функция $f(x)$ зеркально симметрична относительно истинного значения X измеряемой величины x .
- Площадь под кривой $f(x)$ пропорциональна общему числу измерений. Коэффициент пропорциональности принято выбирать так, чтобы эта площадь равнялась 1; тогда

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s^2}} e^{-\frac{(\langle x \rangle - x)^2}{2s^2}}. \quad (8.2.3)$$

- Точки перегиба кривой (8.2.1) удалены от X на $\pm \sigma$. При этом доля результатов всех измерений, попадающая в интервал $(-\sigma, +\sigma)$, составляет 68.3 %. В интервале $(-2\sigma, +2\sigma)$ находится уже 95.4 % всех результатов. В теории вероятности σ называется средним квадратичным отклонением, а σ^2 – дисперсией, характеризующей разброс случайной величины (*dispersio* - рассеяние).
- Функция $f(x)$ называется плотностью распределения и равна числу отсчетов, приходящихся на единичный интервал, так что $f(x)dx$ равно числу попаданий измеряемой величины X в интервал от x до $x + dx$.

8.3. Метод Стьюдента

Наша задача состоит в том, чтобы, не выполняя большого числа измерений, найти среднее значение $\langle x \rangle$, близкое к истинному значению X измеряемой величины, и погрешность измерений – полуширину доверительного интервала Δx , близкую к 2σ , как того требуют Государственные стандарты [2, 3]. Это делается по формулам Стьюдента (У. Госсет, Англия, 1908; *Student* – его псевдоним). Рекомендуется в качестве истинного значения X брать $\langle x \rangle$, вычисляемое по формуле (5.2.1), а случайную ошибку $\overset{\circ}{\Delta} x$ оценивать по формуле

$$\Delta x = t_{p,n} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\langle x \rangle - x_i)^2}{n(n-1)}}, \quad (8.3.1)$$

где n – число измерений.

Коэффициенты Стьюдента $t_{p,n}$ зависят от значения надежности p и числа измерений n . Величины этих коэффициентов для заданного $p = 0.95$ [2, 3] и различных n находят по таблице 1.1.1.

Проиллюстрируем эффективность методики Стьюдента при определении среднего значения и доверительного интервала по данным небольшого количества измерений на нашем примере с подсчетом числа шагов.

Для всей серии из $n = 2080$ испытаний (таблица 8.1.1) коэффициент Стьюдента $t_{p,n}$ равен 2, и после весьма трудоемких вычислений по формулам (5.2.1) и (8.3.1) получаем следующее выражение:

$$X = (6410 \pm 150) \text{ шагов} \quad (p = 0.95). \quad (8.3.2)$$

Однако приведенный результат не является окончательным. В соответствии с излагаемыми далее – в параграфе 9.1 – правилами округления экспериментальных данных, предписывающими, сколько значащих цифр следует оставлять при оценке погрешности, выражение (8.3.2) следует записать в виде (9.1.2):

$$X = (6.41 \pm 0.15) \cdot 10^3 \text{ шагов} \quad (p = 0.95).$$

Возвратимся к нашему примеру об измерении расстояния шагами. Для сопоставления результатов обработки большого числа измерений (8.3.2) с гистограммами и кривой распределения удобно отметить эти данные на числовой оси (рисунок 8.1.1, б) в том же масштабе, что и на рисунке 8.1.1, а. Среднее значение (5.2.1) покажем вертикальной черточкой, а доверительный интервал (8.3.1) – круглыми скобками. Из рисунка 8.1.1 видно, что, поскольку расчеты выполнены по очень большому количеству измерений, $\langle x \rangle$ действительно совпадает с абсциссой максимума кривой распределения, а границы доверительного интервала удалены от максимума вдвое дальше точек перегиба.

Если теперь из всей серии в 2080 испытаний произвольно, скажем, с помощью генератора случайных чисел, выбрать всего 5 значений x , получится приблизительно такой же результат. Пусть, например, выбраны числа $x_1 = 6251$, $x_2 = 6368$, $x_3 = 6583$, $x_4 = 6483$, $x_5 = 6505$. После обработки по Стьюденту получим

$$X = (6438 \pm 163) \approx (6.41 \pm 0.16) \cdot 10^3 \text{ шагов} \quad (p = 0.95). \quad (8.3.3)$$

Отметим эти данные, а также выбранные числа на оси x рисунка 8.1.1, в. Сравнивая выражения (1.1.6 – 1.1.8) и рисунки 8.1.1, а - 8.1.1, в, убеждаемся, что метод Стьюдента позволяет с весьма неплохой точностью находить интересующие нас величины по коротким сериям испытаний. Некоторое расхождение результатов вполне допустимо, особенно если вспомнить об экономии времени и усилий на измерения и обработку при сокращении количества опытов – в нашем примере с 2080 до 5!

8.4. Обработка результатов косвенных измерений

Рассмотрим случай, когда интересующая нас величина z является функцией k непосредственно измеряемых величин x_1, x_2, \dots, x_k :

$$z = z(x_1, x_2, \dots, x_k). \quad (8.4.1)$$

Обозначим через $x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i$ набор значений, принимаемых первичными переменными при их i -м измерении. Пусть всего проведено n измерений и, соответственно, получено n таких наборов, то есть i пробегает значения от 1 до n : $i = (1, n)$. При обработке этих результатов можно поступить двояким образом.

Способ 1

Вычисляем n значений z^i функции z , подставляя в выражение (8.4.1) конкретные наборы значений аргументов $x_1^i, x_2^i, \dots, x_k^i$:

$$z^i = z(x_1^i, x_2^i, \dots, x_k^i), \quad i = (1, n). \quad (8.4.2)$$

После этого совокупность вычисленных значений z^i обрабатываем как серию прямых измерений с помощью формул (5.2.1) и (8.3.1):

- находим среднее арифметическое из этих n значений z^i функции z

$$\langle z \rangle = \langle z^i \rangle = \frac{z_1^i + z_2^i + \dots + z_n^i}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z^i. \quad (8.4.3)$$

- оцениваем ошибку косвенных измерений по формуле Стьюдента (8.3.1)

$$\Delta z = t_{p,n} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\langle z \rangle - z^i)^2}{n(n-1)}}. \quad (8.4.4)$$

Способ 2

По n значениям каждой из напрямую измеренных переменных x_1, x_2, \dots, x_k : с помощью методики Стьюдента по формулам (5.2.1) и (8.3.1), (7.3.2), (7.4.2), (7.5.1) находим:

- средние значения аргументов $\langle x_1 \rangle, \langle x_2 \rangle, \dots, \langle x_k \rangle$;
- ошибки $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_k$. При этом для всех переменных принимаем одно и то же значение надежности $p = 0.95$

Конечный результат находится подстановкой найденных средних $\langle x_1 \rangle, \langle x_2 \rangle, \dots, \langle x_k \rangle$ от непосредственно измеренных величин в формулу для функции z

$$z = z(\langle x_1 \rangle, \langle x_2 \rangle, \dots, \langle x_k \rangle). \quad (8.4.5)$$

Полуширину доверительного интервала Δz для результата косвенных измерений оцениваем по формуле

$$\Delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x_1} \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_2} \Delta x_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial z}{\partial x_k} \Delta x_k\right)^2}, \quad (8.4.6)$$

где $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_k}$ - частные производные функции z , вычисляемые

при значениях переменных $x_1 = \langle x_1 \rangle, x_2 = \langle x_2 \rangle, \dots, x_k = \langle x_k \rangle$. Каждая

частная производная может быть найдена как обыкновенная производная функции $z(x_1, x_2, \dots)$ по соответствующему аргументу, если оставшиеся аргументы рассматривать как постоянные параметры ([5], с. 107).

Результирующая погрешность Δz имеет ту же надежность $p = 0.95$.

Сравнивая слагаемые в подкоренном выражении (8.4.6), можно понять, погрешности каких из непосредственно измеряемых величин вносят наибольший вклад в окончательную ошибку Δz . Указанный анализ выражения (8.4.6) для результирующей ошибки Δz полезен для того, чтобы при подготовке и проведении эксперимента направить основные усилия на повышение точности в определении тех параметров, которые вносят основной вклад в ошибку Δz и, напротив, увидеть, на измерения каких величин можно не затрачивать большого труда.

В качестве примера применения второго способа рассмотрим обработку косвенных измерений величины z по измерениям двух величин x и y : $z = z(x, y)$. Среднее значение $\langle z \rangle$ находим по средним $\langle x \rangle$ и $\langle y \rangle$

$$\langle z \rangle = z(\langle x \rangle, \langle y \rangle), \quad (8.4.7)$$

а для вычисления погрешности Δz воспользуемся правилом (8.4.6)

$$\Delta z^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \Delta x \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \Delta y \right)^2, \quad (8.4.8)$$

где Δx и Δy – погрешности в определении величин x и y .

Пусть, например, в нашей задаче об определении расстояния шагами (параграф 8.1) требовалось определить не число шагов X от дома до работы, а расстояние L в метрах. Тогда необходимо было бы еще измерить среднюю длину шага l на некоторой мерной длине, например, на стометровке. Пусть в результате этих дополнительных измерений оказалось, что длина шага l равна

$$l = (0.99 \pm 0.02) \text{ м} \quad (p = 0.95). \quad (8.4.9)$$

Тогда среднее расстояние от дома до работы $\langle L \rangle = \langle x \rangle \cdot \langle l \rangle$ равнялось бы

$$\langle L \rangle = \langle x \rangle \cdot \langle l \rangle = 6.4 \cdot 10^3 \cdot 0.99 \approx 6.3 \cdot 10^3 \text{ м.} \quad (8.4.10)$$

Для того, чтобы оценить погрешность опыта, учтем, что в нашем случае формула (8.4.8) приводит к следующему выражению:

$$\Delta L^2 = (\langle l \rangle \Delta x)^2 + (\langle x \rangle \Delta l)^2, \quad (8.4.11)$$

которое удобно записать, разделив обе части на $\langle L \rangle^2 = \langle x \rangle^2 \cdot \langle l \rangle^2$:

$$\left(\frac{\Delta L}{L} \right)^2 = \left(\frac{\Delta x}{\langle x \rangle} \right)^2 + \left(\frac{\Delta l}{\langle l \rangle} \right)^2. \quad (8.4.12)$$

Отсюда можно найти погрешность

$$\left(\frac{\Delta L}{6300} \right)^2 = \left(\frac{200}{6400} \right)^2 + \left(\frac{0,02}{0,99} \right)^2. \quad (8.4.13)$$

Разрешая это уравнение относительно ΔL , находим $\Delta L \approx 2 \cdot 10^2 \text{ м}$. Таким образом, окончательный результат должен быть записан так:

$$L = (6.3 \pm 0.2) \cdot 10^3 \text{ м} \quad (p = 0.95). \quad (8.4.14)$$

Более подробные сведения по статистической обработке данных можно найти в книгах [1] и [6]. В них показано, в частности, что, если ошибки измерений малы по сравнению с измеряемой величиной, то оба приведенных выше способа обработки результатов косвенных измерений дают одинаковые данные. Однако с точки зрения удобства расчетов второй способ представляется менее трудоемким.

9. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРИ ОБРАБОТКЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

В физике принято обязательное правило, по которому сравнивают только однородные объекты, характеристики (параметры) которых выражаются размерными или безразмерными числами.

Размерные числа

Размерные величины получают из сравнения интересующего Вас свойства объекта со стандартным свойством.

Выбор единиц измерения в физике диктуется обычно не столько Генеральными конференциями по мерам и весам, сколько здравым смыслом, в конечном счете – психологией восприятия человеком числа. Мы легко представляем себе числа порядка десяти, ста, от силы – тысячи. Поэтому при рассказе о результатах опыта выбирают такие единицы, чтобы полученные числа были порядка 10. Так, длину палки удобно выразить в метрах, а не в километрах или сантиметрах.

Безразмерные числа

В качестве примера безразмерной величины укажем измерение массы атомов в единицах массы атома водорода или в долях массы атома углерода. Так получается безразмерная масса. Другой пример - измерение угла не в градусах, а в долях дуги единичной окружности; так получают безразмерные числа - радианы. Безразмерные числа удобны также при сравнении результатов, полученных разными экспериментаторами.

Приняты три следующие основные формы представления числа: цифрами, буквами (например, π , e) и точками на числовой оси.

Приближенные числа

Очевидно, что, измеряя какую-либо величину, мы получаем приближенное значение.

- Приближенные числа принято записывать в виде десятичной дроби с указанием числа единиц и порядка числа.
Например, число Авогадро N_A следует записать в виде

$$N_A \approx 6.02 \cdot 10^{23} \text{ молекул / моль.}$$

Кроме приближенных чисел, получаемых в эксперименте, мы сталкиваемся с ними в процессе вычислений.

Значащие цифры

Все отличные от нуля цифры, составляющие число, а также нули в середине или в конце числа, называются значащими. Нули впереди числа указывают на разряд последнего и не являются значащими. Числа 1.38, 0.138 и 0.0138 имеют три значащие цифры. Числа 1.380, 0.1380 и 0.01380 имеют четыре значащие цифры. В этих примерах значащие цифры подчеркнуты.

Точность числа

О точности числа судят по количеству значащих цифр, содержащихся в нем. Все значащие цифры приближенного числа, за исключением последней, считаются *верными*. Последняя значащая цифра называется *сомнительной*. Так, в приведенном выше значении числа Авогадро $6.02 \cdot 10^{23}$ молекул / моль предполагается, что первые две цифры «6» и «0» *верные*, а последняя «2» - *сомнительная*. Абсолютная погрешность таких чисел считается равной ± 1 от последнего знака. Например,

$$\sin 45^\circ = 0.7071 \pm 0.0001.$$

Число значащих цифр и точность числа

Приведенный ниже пример показывает связь точности числа с количеством значащих цифр:

$$\begin{aligned} \sin 0.45^\circ &= 0.4350 \pm 0.0001 \text{ (относительная погрешность } 0.02 \% \text{)} = \\ &= 0.435 \pm 0.001 \text{ (} 0.2 \% \text{)} = 0.44 \pm 0.01 \text{ (} 2 \% \text{)} = 0.4 \pm 0.1 \text{ (} 25 \% \text{)}. \end{aligned}$$

9.1. Число значащих цифр при определении погрешности

Величина случайной ошибки, как и сами результаты измерений, подвержена случайным колебаниям. На примере, приведенном в предыдущей главе, мы видели, что даже при довольно большом числе измерений мы получаем большие доверительные интервалы, т. е. величину ошибки мы всегда определяем достаточно грубо. Поэтому ГОСТ 8.011-72 [2] предписывает округлять абсолютная погрешность опыта Δx до двух значащих цифр.

При десяти измерениях ошибка Δx определяется с погрешностью более 10 %. Добавим, что в студенческих лабораторных практикумах, как правило, используются относительно недорогие измерительные приборы и экспериментальные установки, не обеспечивающие высокую точность измерений. Поэтому в учебных лабораториях при оценке абсолютной ошибки измерений рекомендуется руководствоваться следующим правилом:

Абсолютная погрешность Δx определяется с точностью:

- до одной значащей цифры, если эта цифра больше или равна 2.
- Например, если Δx получилось равным 0.523, то приводим одну цифру: $\Delta x = 0.5$;
- до двух значащих цифр, если первая из них меньше 2.
- Например, если $\Delta x = 0.124$, то следует давать две значащие цифры: $\Delta x = 0.12$.

При этом **среднее значение** $\langle x \rangle$ следует округлить таким образом, чтобы погрешность Δx приходилась:

- на последний разряд среднего $\langle x \rangle$, если погрешность Δx записана с точностью до одной значащей цифры.
- Например,

$$X = (6.4 \pm 0.2) \cdot 10^3 \text{ шагов} \quad (p = 0.95); \quad (9.1.1)$$

- на два последних разряда среднего $\langle x \rangle$, если абсолютная ошибка Δx определена с точностью до двух значащих цифр. Например, рассмотренный в предыдущем разделе результат измерения расстояния шагами (8.3.2) следует записать в виде

$$X = (6410 \pm 150) \approx (6.41 \pm 0.15) \cdot 10^3 \text{ шагов} \quad (p = 0.95). \quad (9.1.2)$$

Обсуждаемое округление среднего значения и погрешности следует выполнять всегда, поскольку излишнее число приводимых десятичных знаков создает ложное впечатление о большой точности результата. К сожалению, при работе в лабораторном практикуме студенты в ущерб усвоению физической сути много времени тратят на «точные» вычисления, большая часть которых не используется и пропадает впустую.

9.2. К вычислению суммарной ошибки измерения

Результирующая погрешность Δx при прямых измерениях находится по формуле (7.5.1), где $\overset{\circ}{\Delta} x$ - случайная ошибка, а Δ_{np} и $\Delta_{окр}$ - ошибки прибора и округления:

$$\Delta x = \sqrt{(\overset{\circ}{\Delta} x)^2 + \Delta_{np}^2 + \Delta_{окр}^2} \quad (7.5.1)$$

Мы указали выше (параграф 9.1), что в учебных лабораториях принято округление погрешности до одной - двух значащих цифр. Вследствие этого при вычислении суммарной ошибки измерения Δx можно пренебречь какими-то из отдельных погрешностей $\overset{\circ}{\Delta} x$, Δ_{np} и $\Delta_{окр}$, если их величина вдвое или даже только вдвое меньше других из этих погрешностей.

Поясним это следующим примером. При пользовании микрометром $\Delta_{np} = 0.007$ мм, $\Delta_{окр} = 0.005$ мм (см. таблицу 1.1.2). Если случайная погрешность $\overset{\circ}{\Delta} x$ составит, например, ~ 0.02 мм, то можно учитывать только ее одну, поскольку в таком случае

$$\begin{aligned} \Delta x &= \sqrt{0.02^2 + 0.007^2 + 0.005^2} = \sqrt{4 \cdot 10^{-4} + 0.49 \cdot 10^{-4} + 0.25 \cdot 10^{-4}} = \\ &= \sqrt{4.74 \cdot 10^{-4}} \approx 0.22 \approx 0.2 \text{ мм} \quad (p = 0.95), \end{aligned}$$

и два последних слагаемых под корнем, вклад которых скажется лишь на втором знаке результирующей погрешности Δx , могут быть отброшены.

9.3. О точности вычислений

Точность обработки числового массива экспериментальных данных должна быть согласована с точностью измерений. Вычисления, проведенные с большим, чем необходимо, числом значащих цифр, требуют лишних затрат труда и создают ложное впечатление о высокой точности измерений. Например, вычисляя объем куба, сторону которого Вы измерили штангенциркулем и получили 1.01 см, Вы должны списывать с калькулятора не все знаки

$V = 1.030301 \text{ см}^3$, а только три цифры, поскольку *точность Ваших измерений определяет и точность окончательного результата*: $V = 1.03 \text{ см}^3$. Мнемоническое правило (от Мнемозины – матери муз) здесь таково: *число исходных значащих цифр* (здесь три цифры: «1», «0», «1») *должно быть равно числу значащих цифр в результате*⁹: 1.03. Следует сказать, что для отбрасывания излишних (неверных) цифр в окончательном ответе требуется немалое мужество. В нашем примере начинающему расчетчику число 1.030301 кажется более «точным», хотя это совсем не так, поскольку исходное число 1.01 имеет ошибку в определении последней цифры и, если учитывать эту ошибку, изменяется и результат.

Чтобы быть уверенным, что математическая обработка данных не исказит ощутимым образом наш результат, *необходимо следить, чтобы ошибка, получающаяся в результате вычислений, была примерно на порядок меньше погрешности измерений*. Во многих случаях для соблюдения этого условия *точность чисел при арифметических операциях должна быть на порядок выше точности окончательного результата*.

Сказанное выше обосновывает одно из основных правил, которые следует учитывать при планировании и подготовке экспериментов. В силу исключительной важности выделим это правило:

- ***Точность, необходимая для получения определенного результата, диктует постановку всего опыта и выбор приборов для измерения.***

⁹ Чтобы подчеркнуть обязательность и важность обсуждаемого здесь положения, напомним, что академик Крылов, математик и кораблестроитель, увольнял сотрудников, которые не руководствовались этими правилами и проделывали вычисления с большей, чем следовало, точностью.

Крылов А.Н. Мои воспоминания. Л.: Судостроение. 1984. 477 с.

10. ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ ПО СТАТИСТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Для иллюстрации методики статистической обработки результатов измерений ниже предлагаются четыре лабораторные работы. В трех первых работах задачи сформулированы так, что измерения сопровождаются случайными ошибками, значительно превосходящими погрешности округления и прибора. Обработка результатов, предложенная в этих работах, позволяет на основе данных каждого участника образовать общий массив данных для построения гистограмм. В четвертой работе иллюстрируется обработка результатов косвенных измерений. В ней учитываются как случайные ошибки, так и погрешности округления и прибора.

Перед тем как приступить к выполнению лабораторных заданий, дадим несколько советов по ведению записей результатов эксперимента и их обработке:

- Все результаты измерений нужно записывать в таблицу *немедленно* и без каких-либо арифметических или других преобразований в уме. Если при таких преобразованиях Вы допустите ошибку, то позже исправить ее уже не сможете.
- При выполнении и записи измерений проверяйте то, что Вы записали. Работу проводите так: считайте показания прибора, запишите в таблицу и затем вновь посмотрите на прибор.
- В таблице следует указывать название прибора и его заводской номер с тем, чтобы при обнаружении неувязок Вы могли проверить использованные приборы, не повторяя всего эксперимента.
- Результаты записывайте только в «чистовую» тетрадь. Если записывать данные наблюдений сначала на клочке бумаги или в «черновой» тетради, а затем переносить их в «чистовую» тетрадь, то
 - это приведет к большим потерям времени;

- при переписывании возможны ошибки.
- Часто при переписывании мы приходим к заключению, что некоторые из данных не очень показательны либо получены в неподходящих условиях, т. е. мы отбираем их. Однако *все первичные данные измерений надо обязательно сохранять*, поскольку в дальнейшем может понадобиться другой отбор.
- Ошибочные результаты не исправляйте, а, зачеркнув, напишите рядом правильный результат.
- Помните, что, как гласит китайская пословица, «один рисунок лучше тысячи слов», и всегда сопровождайте записи рисунками.
- Старайтесь всегда записывать результаты измерений в виде таблиц. Такая запись компактнее и проще для чтения.
- Рабочую формулу следует привести к такому виду, чтобы в нее входили только измеренные Вами величины.

10.1. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

ИЗУЧЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ. ГАЗ ЛОРЕНЦА

Принадлежности: доска Гальтона и шарики – свинцовая дробь, полиэтиленовые гранулы, крупа и т.д.

Цель данной работы:

- продемонстрировать, как в простой динамической системе, в которой все взаимодействия носят детерминированный (причинный) характер и нет никакого случайного механизма типа колеса рулетки или броска наудачу, как в следующей работе, тем не менее возникает случайное поведение;
- показать, как для этих случайных величин при росте длины серии испытаний проявляются законы теории вероятностей - в частности, устанавливаются распределение вероятностей, близкое к распределению Гаусса;
- наконец, основная цель – проиллюстрировать, как, не делая большого числа испытаний, можно методом Стюдента определить среднее значение и характерную ширину кривой распределения изучаемой случайной величины.

До недавнего времени считалось, что в отсутствие случайных внешних шумов или внутренних флуктуаций хаотическое поведение возможно лишь в очень сложных системах (здесь мы не касаемся вероятностного квантово-механического описания объектов микромира – электронов, фотонов, атомов и др.). Примером такой сложной системы с большим числом степеней свободы может служить газ, в одном кубическом сантиметре которого при нормальных условиях содержится 10^{19} молекул. В таких системах случайность связана с тем, что мы никогда не можем точно задать начальные условия для всех переменных – трех координат и трех составляющих скорости для каждой молекулы и поэтому вынуждены использовать усредненное статистическое описание.

В последние годы было обнаружено, что хаотическое, случайное поведение возможно даже в очень простых динамических системах, в

частности, в системе из двух бильярдных шаров на столе. Доступное изложение этих вопросов содержится, например, в статьях [8, 9]. Стало понятно, что статистические закономерности возникают у систем, движения в которых неустойчивы. Неустойчивыми называются движения, при которых малое изменение начальных данных приводит к нарастающим различиям траекторий. При полной неустойчивости это различие растет со временем экспоненциально.

Примером одной из самых неустойчивых динамических систем является двухмерный газ Лоренца, изображенный на рисунке 10.1.1. Представим себе, что на плоскости размещены кружки одинакового радиуса, центры которых образуют периодическую, например, квадратную решетку. Эти кружки принято называть рассеивателями. Рассмотрим движение материальной точки между рассеивателями, при котором точка, достигнув одного из рассеивателей, упруго отражается от него по закону «угол падения равен углу отражения». Такая динамическая система предложена Г.А.Лоренцем в начале XX века как модель электропроводности металлов. Как видно из рисунка 10.1.1, траектории, вышедшие из близких точек под близкими углами, очень быстро расходятся: их направления становятся разными, и происходит «потеря памяти» о начальных данных. Заметим, что, если вместо кружков взять многоугольники с плоскими гранями, мы получим гораздо более устойчивую систему.

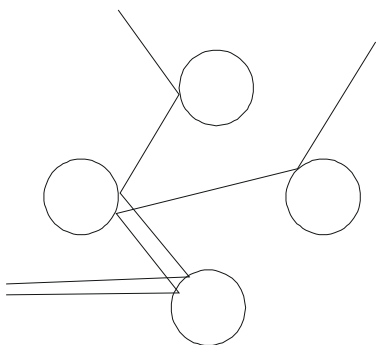


Рис. 10.1.1. Неустойчивость лучей при рассеивании на цилиндрах

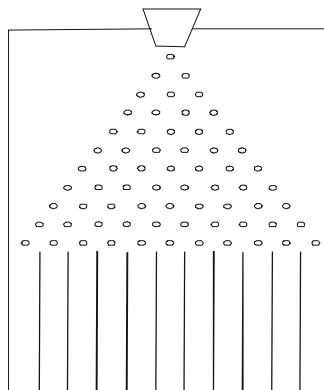


Рис. 10.1.2. Установка для наблюдения случайного движения шарика

Авторы использовали в опытах доску Гальтона, имеющую внизу 48 карманов шириной 1.0 см и высотой 14 см. Рассеивателями служили гвозди диаметром 1.0 мм, вбитые взаимно перпендикулярными рядами на расстоянии 1.0 см друг от друга. Всего на доске имелся 41 горизонтальный ряд рассеивателей. Наблюдали движение свинцовых шариков (дробинok) диаметром 2.0 мм. Шарик выпускался на решетку сверху вблизи оси симметрии, которая приходилась на границу между 24 и 25 карманами. Регистровался номер ячейки, в которую попадал шарик; счет начинался от левого края доски. Этот номер можно понимать как координату соответствующей ячейки, измеряемую с точностью в 1 см; для шариков, угодивших в первую ячейку, $x = 1$ см, во вторую - $x = 2$ см и так далее. Результаты одной из серий испытаний приведены в таблице 10.1.1.

Таблица 10.1.1 (13.08.2002)

Рассеяние шариков периодической решеткой

Номер бросания, i	Координата ячейки x_i , см	$\langle x \rangle - x_i$, см	$(\langle x \rangle - x_i)^2$, см ²
1	29	- 3	9
2	26	0	0
3	34	- 8	64
4	20	6	36
5	23	3	9
6	47	- 21	441
7	17	9	81
8	4	22	484
9	32	- 6	36
10	24	2	4
Среднее значение	26	-	-

Заметим, что при использовании здесь и в следующих лабораторных работах программируемого калькулятора два последних столбца таблицы 10.1.1 являются излишними.

Приведенные в таблице 10.1.1 данные показывают, что движение шариков в решетке рассеивателей действительно непредсказуемо. Индивидуальные траектории, начинаясь в окрестности оси симметрии, заканчиваются то в левой, то в правой половинах установки. При этом отклонения траекторий иногда достигают очень большой величины: например, ячейки $x_6 = 47$ см и $x_8 = 4$ см. Однако непосредственно из таблицы 10.1.1 уловить какие-то закономерности обсуждаемого процесса довольно трудно. Значительно нагляднее эти закономерности проявляются, если отметить ячейки, в которые попали шарики, т. е. координаты x_i концов траекторий, на числовой оси, как это сделано на рисунке 10.1.3, *а*. Напомним, что x в этой задаче – дискретная переменная, пробегающая значения от 1 до 48 см с шагом 1 см. Границы диапазона изменения x (ширина доски) показаны на рисунке 10.1.3 штриховкой. Здесь же вертикальной пунктирной линией изображено положение оси симметрии установки, т. е. абсцисса X начала всех траекторий.

Из рисунка 10.1.3 видно, что, во-первых, концы траекторий x_i располагаются примерно симметрично относительно начальной точки X и, во-вторых, малые отклонения от оси симметрии наблюдаются значительно чаще, нежели большие. Замечательно также, что вычисленное по формуле 5.2.1 среднее значение номеров ячеек, в которые угодили шарики, $\langle x \rangle = 26$, оказывается близким к абсциссе точки запуска. Подобное свойство случайно разлетающихся осколков снаряда, с учетом их масс, позволяет найти направление на орудие, выпустившее этот снаряд. Значение $\langle x \rangle$ показано на рисунке 10.1.3, *а* сплошной вертикальной черточкой. Здесь же круглыми скобками изображен доверительный интервал $(\langle x \rangle - \Delta x, \langle x \rangle + \Delta x)$, вычисленный по формуле 8.3.1 с надежностью $p = 0.95$. Как видим, этот интервал охватывает большинство результатов таблицы 10.1.1.

Обработка данных таблицы 10.1.1 по методу Стьюдента дает

$$x = (26 \pm 8) \text{ см} \quad (p = 0.95). \quad (10.1.1)$$

Обсуждаемые закономерности случайного рассеяния частиц газа Лоренца проявляются еще нагляднее, если увеличивать число испытаний. На рисунке 10.1.3, *б* показано распределение по ячейкам 250 дробинok диаметром 2.0 мм. Экспериментальная установка, методика и условия опытов те же самые, что и в описанных ранее наблюдениях авторов за десятью частицами. Рисунок построен по сводным данным студенческой группы, каждый из членов которой

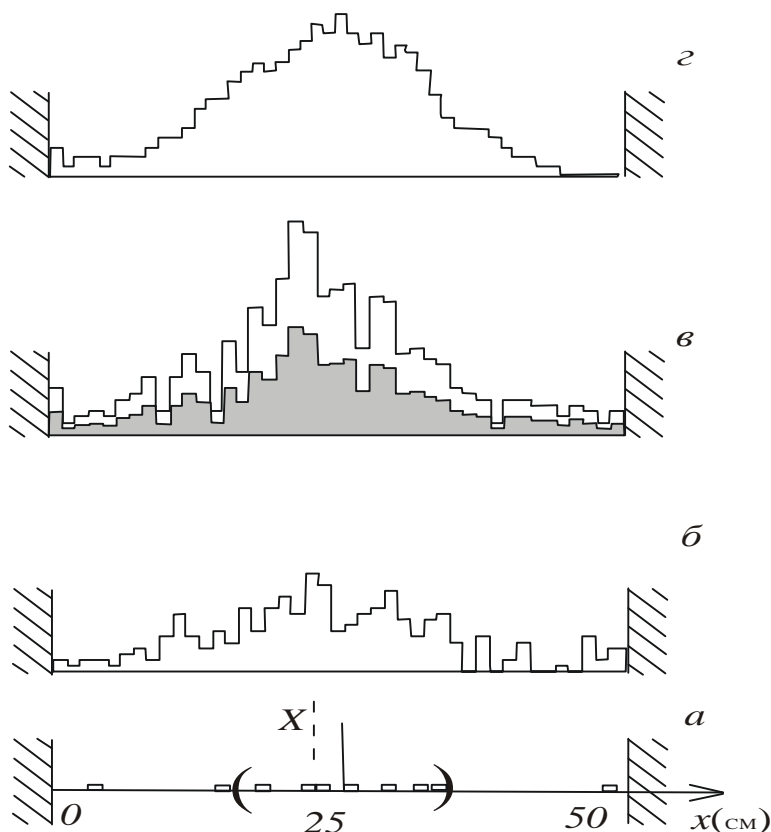


Рис. 10.1.3. Рассеяние частиц периодической решёткой отражателей:

- а* – результат 10 испытаний по данным таблицы 10.1.1. Прямоугольниками выделены ячейки, в которые попали шарики;
- б* – результат 250 поочередных испытаний. По вертикальной оси отложено количество шариков, угодивших в соответствующую ячейку. На одну частицу приходится столбик такой же высоты, как на фрагменте *а*;
- в* – результат 500 поочередных испытаний. Линия 1 – одна частица изображается таким же столбиком, как на фрагментах *а* и *б*; линия 2 – столбиком вдвое меньшей высоты;
- г* – распределение по ячейкам при засыпке нескольких десятков тысяч шариков

запускал на решетку одну за другой 10 своих дробинok. Координаты x_i из таблицы 10.1.1 также учтены в этом массиве данных. На рисунке 10.1.3, б уже угадывается функция распределения (8.2.3): гистограмма 10.1.3, б имеет максимум вблизи оси симметрии доски, то есть вблизи абсциссы X точки бросания, примерно симметрична относительно этой оси, а ее ветви спадают с удалением от X подобно «хвостам» функции распределения Гаусса (8.2.3), представленной кривой 4 на рисунке 8.1.1. Увеличение числа частиц в крайних карманах объясняется отражением шариков от узких боковых границ используемой экспериментальной установки. Однако диаграмма 10.1.3, б еще далека от плавной кривой, поскольку на ней имеется большое количество провалов и выступов значительной величины.

В разделе 8.1 указывалось, что для приближения к гладкой кривой распределения следует увеличивать число испытаний до бесконечности. Чтобы проиллюстрировать изменения, происходящие с гистограммой при таком предельном переходе, на рисунке 10.1.3, в изображена диаграмма распределения 500 частиц. Для ее построения, кроме данных для 250 шариков, приведенных на рисунке 10.1.3, б, использовались результаты еще одной студенческой группы, полученные по такой же методике и с тем же количеством шариков. Если, независимо от количества испытаний, попадание шарика в ячейку отмечать столбиком одной и той же высоты, площадь, заключенная между ломаной и осью абсцисс, будет возрастать пропорционально числу измерений. В нашем случае площадь диаграммы для пятисот шариков будет ровно в два раза больше, чем для двухсот пятидесяти (рисунок 10.1.3, в, линия 1). Зависимость площади гистограммы, а вместе с ней максимальной ординаты и высоты ступенек, от числа измерений затрудняет сопоставление диаграмм и понимание закономерностей их эволюции. Поэтому, как отмечалось в разделе 8.1, существует договоренность: при построении гистограмм и функций распределения использовать такой вертикальный масштаб, чтобы ограничиваемая ими площадь была неизменной (и численно равной единице). В нашем примере с пятьюстами и двумястами пятьюдесятью шариками это условие легко соблюсти, если во втором случае отмечать попадание шарика столбиком вдвое меньшей высоты. В таком масштабе диаграмма распределения пятисот частиц представлена на рисунке 10.1.3, в линией 2. Теперь легко увидеть, что гистограммы для этих двух серий испытаний качественно подобны. В то же время, при большем количестве измерений число крупных скачков на диаграмме и размах этих скачков заметно уменьшаются.

Эта тенденция проявляется еще отчетливее, если выполнить опыты с тысячами или десятками тысяч частиц. Однако, если проводить такие опыты по прежней методике, запуская на решетку каждый шарик в отдельности и наблюдая его движение, понадобятся очень большие затраты времени и сил. Поэтому будем насыпать шарики в установку через воронку «непрерывным потоком» до тех пор, пока одна из ячеек не заполнится ими доверху. В нашей установке с карманами сечением 1.0 см^2 и высотой 14 см и с шариками диаметром 2.0 мм в один лишь доверху заполненный карман поместятся около двух с половиной тысяч частиц. Чтобы не иметь дела с подсчетами большого количества частиц, скопившихся в каждой из ячеек, учтем, что плотность упаковки, то есть количество шариков в единице объема, во всех ячейках примерно одинаковы. Поэтому высота столба шариков в той или иной ячейке прямо пропорциональна числу частиц, оказавшихся в ней. Следовательно, при насыпании большого количества частиц мы получаем непосредственно гистограмму их распределения по ячейкам. Другими словами, установка «сама строит гистограмму»! Пример такой гистограммы приведен на рисунке 10.1.3, *г*, по вертикальной оси которого отложены высоты столбов из шариков, зарегистрированные в одном из опытов. Максимальная ордината соответствует высоте кармана (14 см). Масштаб по вертикали выбран из условия, чтобы площадь этой диаграммы была такой же, как на рисунках 10.1.3, *б* и 10.1.3, *в*, линия 2. Мы видим, что эта гистограмма остается подобной диаграммам, полученным для меньшего числа частиц. В то же время, она составлена из значительно меньших ступенек и поэтому существенно точнее приближается к плавной кривой распределения Гаусса (8.2.3). Для более лучшего приближения нам следовало бы не только увеличивать число испытаний, но и устремить к нулю ширину интервалов (ячеек). Однако здесь мы ограничены возможностями экспериментального метода, поскольку ширина карманов не может быть намного уменьшена – в частности, карманы не могут быть уже частиц.

В заключение подчеркнем достоинства методики Стьюдента для отыскания истинного значения случайной величины (в нашем примере – абсциссы X точки запуска шариков) и доверительного интервала ($\langle x \rangle - \Delta x$, $\langle x \rangle + \Delta x$) с помощью малого числа измерений. Действительно, сравнивая рисунки 10.1.3, *а* – 10.1.3, *г*, замечаем, что среднее значение $\langle x \rangle$, найденное по результатам всего десяти бросаний, отличается от истинного значения X в такой же мере, как в сериях из сотен или даже десятков тысяч испытаний. Сопоставление

этих рисунков показывает также, что доверительный интервал, вычисленный по данным десяти наблюдений, охватывает большую долю результатов даже очень длинных серий измерений.

Измерения

- Каждый из студентов группы запускает поочередно десять шариков на решетку рассеивателей доски Гальтона, наблюдает их движение и записывает в таблицу, подобную таблице 10.1.1, координаты x_i ячеек, в которые попали шарики.
- По десяти своим наблюдениям x_i студент вычисляет по формулам методики Стьюдента 5.2.1 и 8.3.1 среднее значение $\langle x \rangle$ и доверительный интервал ($\langle x \rangle - \Delta x$, $\langle x \rangle + \Delta x$) и записывает результаты в виде выражения 2.1.1.
- Далее, подобно тому, как это сделано на рисунке 10.1.3, а, на числовой оси отмечаются начальная абсцисса X всех траекторий, их конечные координаты x_i , значение $\langle x \rangle$ и доверительный интервал ($\langle x \rangle - \Delta x$, $\langle x \rangle + \Delta x$).
- На основании наблюдений, таблицы и рисунка делаются выводы о том, является ли движение шарика в периодической решетке случайным, а также о том, попадает ли истинное значение координаты точки запуска X в найденный в опытах доверительный интервал. Эти выводы записываются в тетрадь.
- Затем такие же вычисления проделываются с четырьмя произвольно выбранными из таблицы значениями x_i , например, x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , и получаются какие-то другие $\langle x \rangle$ и Δx . Строится еще один рисунок, на котором на числовую ось наносятся выбранные координаты x_i и результаты их обработки. Полученные данные сопоставляются с результатами десяти испытаний и объясняются причины их сходства или отличия.

Следующее задание состоит в построении гистограммы по данным наблюдений всей студенческой группы, т. е. ориентировочно для двухсот пятидесяти частиц (см. рисунок 10.1.3, б). Для этого на большом листе ватмана или миллиметровой бумаги рисуется горизонтальная ось с крупными (например, по 1 см на одну ячейку) делениями. Каждый студент отмечает попадания своих десяти частиц,

закрашивая карандашом или фломастером соответствующие ячейки столбиками определенной высоты – скажем, в 0.5 или 1 см на одну частицу. Построение начинается от дна карманов, т. е. от горизонтальной оси. Получившаяся в итоге верхняя граница столбиков выделяется яркой линией. Продолжением этого задания может быть объединение данных нескольких студенческих групп, что позволит проиллюстрировать эволюцию гистограммы по мере увеличения числа испытаний с 250 до 500, затем до 750 и т. д. Для этого каждая следующая группа наносит свои данные поверх распределения, построенного предыдущей группой.

Затем всей группой выполняется опыт с засыпкой большого количества шариков. Если позволяет время, такой опыт повторяется несколько раз. Это помогает убедиться в том, что конкретные реализации случайного процесса в деталях могут отличаться одна от другой положением максимума, уровнями шариков в ячейках. В то же время во всех реализациях сохраняются общие закономерности - гистограммы напоминают распределение Гаусса (8.2.3), примерно симметричны относительно вертикальной оси, и их максимум располагается недалеко от этой оси. После этого каждый студент переносит в свою тетрадь гистограмму распределения двухсот пятидесяти частиц, а также «реальную» гистограмму непосредственно с доски Гальтона.

Для удобства сравнения целесообразно разместить эти гистограммы, а также рисунки с десятью и четырьмя частицами на одном листе бумаги друг под другом, как это сделано на рис. 10.1.3. Кроме того, следовало бы позаботиться о том, чтобы площади гистограмм были одинаковыми. Однако выполнение этого условия потребовало бы от нас тщательных подсчетов, неоправданных при нашем полуколичественном, иллюстративном уровне рассмотрения. Поэтому ограничимся приближенным условием, чтобы максимумы обеих гистограмм имели одинаковую высоту.

Имея такой рисунок, следует сопоставить гистограммы между собой и с гауссовой кривой (8.2.3); количество и высоту выступов и провалов на них; положение их максимумов в сравнении с координатой X начала траекторий; долю результатов, попадающих в доверительные интервалы, найденные по данным десяти и четырех испытаний.

Контрольные вопросы к работе 10.1

1. При построении гистограмм 10.1.3, *a* – 10.1.3, *в* были использованы результаты опытов с отдельными, не взаимодействующими друг с другом дробинками. Гистограмма 10.1.3, *г* построена при насыпании дробинки «потоком», когда они могут «мешать» друг другу во время движения. Можно ли в таком случае сопоставлять как идентичные эти гистограммы?
2. В экспериментальной установке диаметр дробинки (2.0 мм) и диаметр гвоздей-рассеивателей (1.0 мм) были одного порядка. Можно ли в таком случае утверждать, что в данной работе моделируется газ Лоренца – рассеяние материальных точек на кругах конечного диаметра?
3. Гвозди на доске Гальтона расположены в шахматном порядке. Что произойдет, если их расположить хаотическим образом, оставляя, однако, в силе условие, по которому на каждой единице площади доски должно находиться в среднем одинаковое число рассеивателей?
4. В этом опыте истинное значение X известно. Всегда ли это бывает? Приведите пример, когда X неизвестно.
5. На использованной нами доске Гальтона размещался 41 горизонтальный ряд рассеивателей. Как будет меняться вид гистограмм 10.1.3, *г* при увеличении и уменьшении числа рядов? Останется ли гауссовым распределение шариков по карманам при таких изменениях экспериментальной установки?
6. При распределении тепла в теле быстрые, уже «нагревшиеся» молекулы сталкиваются с более медленными, передавая им свои импульс и энергию. Таким образом, механизм теплопроводности в чем-то похож на процесс рассеивания дробинки на доске Гальтона. Правомочна ли такая аналогия? Можно ли на основании этого сопоставления утверждать, что распределение частиц в карманах доски Гальтона 10.1.3, *г* является дискретным аналогом непрерывного распределения температуры, например, в стержне, к которому в точке X на некоторое время поднесли горящую свечу? Изменению каких параметров доски Гальтона будет в таком случае соответствовать увеличение времени между нагревом стержня и определением в нем распределения температуры? Приведите еще какие-либо физические процессы, которые можно промоделировать на доске Гальтона.

7. Раскрутив мысленно рисунок 10.1.3, z вокруг вертикальной оси, проходящей через точку X , представим себе «заметанный» при этом объем. Предложите установку, на которой можно было бы получить такое двухмерное распределение. Запишите соответствующую функцию распределения по аналогии с формулой (1.1.4).
8. Как зависит форма кривой 10.1.3, z от начальных условий: ширины отверстия в воронке, из которой насыпаются шарики, наклона воронки, скорости вылета из нее дробинки? Можно ли, в принципе, провести эксперимент так, чтобы получить не гауссово, а прямоугольное распределение, когда все дробинки соберутся, например, в 24 и 25 карманах и ни одна частица не попадет в другие ячейки?
9. Можете ли Вы предложить технологически более простую модель для изучения статистических закономерностей?

10.2. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА π . ИГЛА БЮФФОНА

Принадлежности: лист миллиметровой бумаги и тонкий стержень – проволоочная спица, иглолка, спичка, карандаш, авторучка и т.д.

Для опытного определения приближенного значения числа π Бюффоном был предложен эксперимент, в котором на горизонтальную плоскость, разграфленную на квадратные клетки вертикальными и горизонтальными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии $2a$ (см. рисунок 10.2.1), наудачу, т. е. случайным образом, бросается игла длиной $2l$ ($l > 0$).

Обозначим через m_i число прямых, которые пересекает и которых касается игла при i -ом бросании. В приведенном на рисунке 10.2.1 примере $m_i = 14$: семь горизонтальных и семь вертикальных линий.

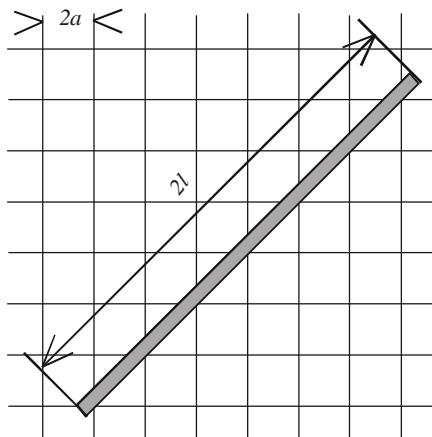


Рис. 10.2.1. Схема эксперимента по определению числа π

Авторы провели опыты с миллиметровой бумагой и шариковой авторучкой длиной $2l = 13.7$ см, подсчитывая числа пересечений сантиметровых делений ($2a = 1.00$ см). Результаты одного из опытов приведены в таблице 10.2.1.

Таблица 10.2.1 (29.04.2003)

Данные для определения числа π

Масштабно-координатная бумага $2a = 1.00$ см

Шариковая ручка длиной $2l = 13.7$ см

Номер бросания i	Число пересечений m_i , безразмерно	Число π , безразмерно	$\langle \pi \rangle - \pi_i$	$(\langle \pi \rangle - \pi_i)^2$
1	19	2.88	- 0.13	0.017
2	16	3.42	0.41	0.168
3	17	3.22	0.21	0.044
4	19	2.88	- 0.13	0.017
5	20	2.74	- 0.27	0.073
Среднее	-	3.03	-	-

Число π находится по формуле [10, 11]:

$$p = \frac{4l}{m_i a} = \frac{4 \times \text{длина иглы (в клетках)}}{\text{число пересечений}} (\text{безразмерно}) \cdot \quad (10.2.1)$$

Обоснование этой формулы дается в конце описания данной лабораторной работы.

Обработка данных таблицы 10.2.1 по Стьюденту (формулы (5.2.1) и (8.3.1)) дает

$$\pi = 3.05 \pm 0.35 \approx 3.0 \pm 0.4 \quad (p = 0.95). \quad (10.2.2)$$

Для наглядности нанесем на числовую ось точками каждый из приведенных в таблице 10.2.1 результатов π_i (рисунок 10.2.2, а). Среднее значение $\langle \pi \rangle$ отметим сплошной вертикальной чертой, а

доверительный интервал ($\langle \pi \rangle - \Delta\pi$, $\langle \pi \rangle + \Delta\pi$) покажем круглыми скобками. «Истинное» значение числа $\pi = 3.1415\dots$ изобразим вертикальной пунктирной линией. Обратим внимание, что, в соответствие с определением доверительного интервала как интервала, в который при $p = 0.95$ попадает 95 % всех результатов (строго говоря, при очень длинной серии испытаний), вне скобок на рисунке 10.2.2, *a* располагается всего одна экспериментальная точка.

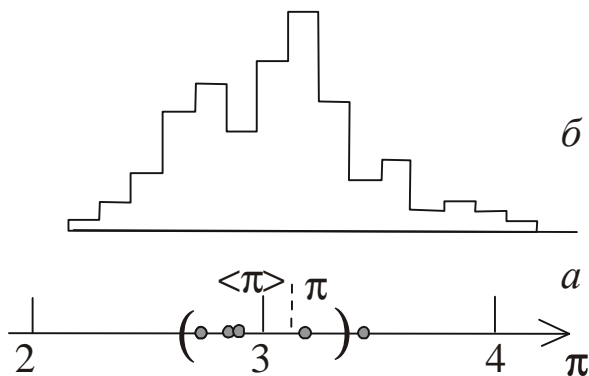


Рис. 10.2.2. Результаты измерений числа π .

a – экспериментальные точки, среднее и истинное значения, доверительный интервал по данным таблицы 2.2.1;

б – гистограмма данных таблицы 10.2.2. По вертикали отложено количество экспериментальных точек, попавших в интервал. Максимальная ордината отвечает 18 попаданиям, а минимальная отличная от нуля ордината – одному попаданию

Из числовой записи экспериментальных результатов (10.2.2) и диаграммы рисунка 10.2.2, *a* видно, что в нашем случае «истинное» значение числа π попадает в найденный в опытах доверительный интервал. В отчетах, статьях и других научных сообщениях этот вывод принято формулировать примерно такими словами: «В пределах погрешности эксперимента приведенный результат согласуется с табличными данными (данными других авторов, результатами теоретических расчетов и т.д.)».

Как обсуждалось в разделе 8, метод Стьюдента применим лишь для случайных величин, распределения которых близки к

распределению Гаусса (8.2.3). Поэтому, вообще говоря, прежде чем использовать формулы Стьюдента (5.2.1) и (8.3.1) для обработки результатов эксперимента, следует убедиться, что даваемые этим экспериментом результаты удовлетворяют такому условию. Сделать это можно, проведя достаточное количество измерений и сравнив их гистограмму с гауссовой кривой. Чтобы показать, что результаты измерений числа π с помощью бросаний иглы удовлетворяют названному требованию, авторы выполнили 100 измерений, включая пять приведенных выше. Распределение результатов на числовой оси дается в таблице 10.2.2.

Таблица 10.2.2 (1.05.2003)

Результаты измерений числа π

Интервал числовой оси	2.40 – 2.50	2.50 – 2.60	2.60 – 2.70	2.70 – 2.80	2.89 – 2.90	2.90 – 3.00	3.00 – 3.10	3.10 – 3.20
Количество наблюдений	1	3	5	10	12	8	14	18

Продолжение таблицы 10.2.2

Интервал числовой оси	3.20 – 3.30	3.30 – 3.40	3.40 – 3.50	3.50 – 3.60	3.60 – 3.70	3.70 – 3.80	3.80 – 3.90
Количество наблюдений	11	4	6	2	3	2	1

Всего 100 бросаний.

При подсчетах точка, приходившаяся на левую границу интервала, включалась в него, а попадавшая на правую границу – исключалась и учитывалась в следующем интервале. (При такой договоренности отрезок обозначают символом $[\quad)$ и называют закрытым слева и открытым справа). Например, точка $\pi = 3.10$ включалась в интервал $\pi = [3.10; 3.20)$, а точка $\pi = 3.20$ – в интервал $\pi = [3.20; 3.30)$.

В графическом виде распределение результатов таблицы 10.2.2 представлено на рисунке 10.2.2, б. Полученную гистограмму можно рассматривать как приближение (правда, весьма грубое) кривой распределения Гаусса. Для более точного сравнения требуется во много раз большее количество измерений. Тем не менее, уже на основании имеющихся данных можно с уверенностью утверждать, что метод Стьюдента применим для определения среднего и оценки погрешности в нашем эксперименте. Обратим также внимание на то, что максимум гистограммы приходится на окрестность истинного значения числа π , а основная доля из ста экспериментальных данных укладывается в доверительный интервал для погрешности, найденный с помощью всего десяти измерений (рисунок 10.2.2, а).

Измерения

Каждый из студентов кладет перед собой горизонтально лист масштабно-координатной бумаги и определяет с точностью до миллиметра длину $2l$ стержня, используемого им в качестве Иглы Бюффона. Чтобы точность измерений была не ниже двух значащих цифр, необходимо, чтобы длина стержня была более 10 мм и число пересекаемых линий более десяти. Поэтому для короткой иглы подсчитывается число пересечений с миллиметровыми делениями бумаги и полагается $2a = 1$ мм. Если игла длиннее 10 см, учитываются лишь сантиметровые графы и принимается $2a = 1$ см. Выполняется 10 бросаний, причем прослеживается, чтобы ориентации стержня при бросаниях отличались одна от другой. Результаты записываются в таблицу, составленную по образцу таблицы 10.2.1. Кроме того, четыре произвольно выбранных значения, например, π_2 , π_4 , π_7 и π_9 , каждый студент заносит в сводную таблицу на аудиторной доске. Если в группе 25 человек, то банк данных будет содержать 100 чисел, что вполне достаточно для получения гистограммы. В первую очередь следует убедиться, что результаты измерений образуют случайную последовательность, для обработки которой применим метод Стьюдента. Чтобы выяснить это, нужно построить гистограмму по данным сводной таблицы. С этой целью на оси абсцисс выделите диапазон, в который попадают все 100 экспериментальных данных. Разбейте этот диапазон на равные отрезки, выбрав их так, чтобы количество отрезков было не менее десяти, а их длина была удобной для подсчетов и построения. В разобранный выше примере при разбросе результатов измерений в диапазоне $2.4 < \pi < 3.9$ последний был разделен на 15 отрезков длиной 0.1. Дробление массива из ста чисел на существенно большее количество интервалов

нецелесообразно, так как в такие интервалы будет попадать слишком мало точек. Подсчитайте число экспериментальных значений π_i , приходящихся на каждый из выбранных Вами отрезков. При этом условьтесь учитывать точки, совпадающие с границами между отрезками, к примеру, так, как это сделано при составлении таблицы 10.2.2. Составьте таблицу, подобную таблице 10.2.2, и впишите в нее результаты этих подсчетов. Число попаданий в каждый из интервалов отложите в удобном масштабе по оси ординат (смотри рисунок 10.2.2, б). Сравните полученную гистограмму с кривой распределения Гаусса (8.2.3). Сделайте вывод о применимости метода Стьюдента для обработки результатов данного эксперимента.

Далее по десяти своим измерениям (см. таблицу 10.2.1) вычислите среднее значение $\langle\pi\rangle$ и погрешность $\Delta\pi$ по формулам Стьюдента (5.2.1) и (8.3.1), запишите результаты в форме (10.2.2), приведите их на числовой оси, как это сделано на рисунке 10.2.2, а, и сделайте вывод о том, согласуются или нет данные Вашего эксперимента с табличным значением числа π .

Затем это же самое проделайте по четырем измерениям, занесенным в общую таблицу на доске. При этом получится какое-то другое $\langle\pi\rangle$ и новое $\Delta\pi$. Сравните их с прежними величинами и проанализируйте разницу.

Сопоставьте положение максимума гистограммы с табличным значением числа π и найденными Вами по результатам десяти и четырех измерений средними значениями $\langle\pi\rangle$, а ширину гистограммы – с доверительными интервалами ($\langle\pi\rangle - \Delta\pi$, $\langle\pi\rangle + \Delta\pi$). Для этого полезно расположить гистограмму и рисунки, на которых показаны Ваши десять и четыре экспериментальные точки, на одном листе бумаги друг под другом, как на рисунке 10.2.2. Все выводы запишите в тетрадь.

Дополнение. Решение задачи об Игле Бюффона [8, с. 81]; [9, с. 38]

Начнем рассмотрение со случая, когда на плоскость нанесены лишь горизонтальные параллельные прямые, отстоящие друг от друга на расстоянии $2a$, и на эту плоскость наудачу брошена короткая (длиной $2l$, меньшей, чем $2a$) игла. Такой вариант задачи изображен на рисунке 10.2.3.

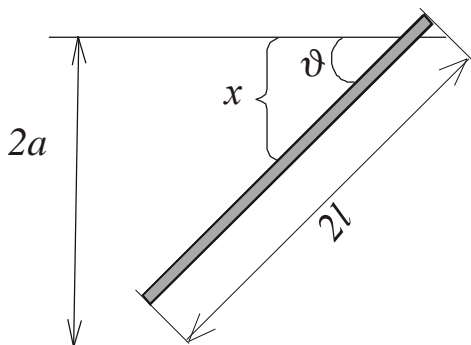


Рис. 10.2.3. Положение иглы, пересекающей одну из прямых

Пусть m – число бросаний, в результате которых игла пересекла одну из прямых или коснулась ее, а n – полное число бросаний. Найдем относительную частоту или, что то же самое, среднее число пересечений m/n . Обозначим через x расстояние от центра иглы до ближайшей прямой. Это расстояние может меняться в пределах от 0 до a . Через φ обозначим угол, составленный иглой с этой прямой. Угол φ может принимать значения в диапазоне от 0 до π . Величины x и φ полностью задают положение иглы. В переменных x и φ всевозможные положения иглы определяются точками прямоугольника со сторонами a и π (рисунок 10.2.4).

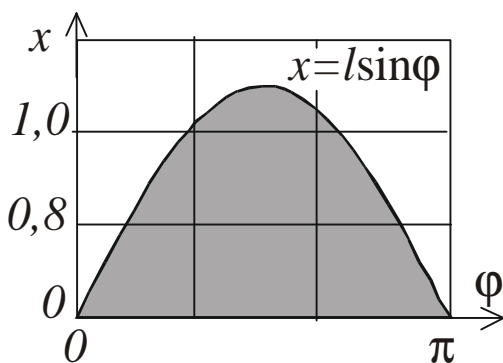


Рис. 10.2.4. К геометрическому определению вероятности пересечения иглы с прямой

Из рисунка 10.2.3 видно, что игла пересекает прямую или касается ее, когда $x \leq l \sin j$. Поэтому все такие положения описываются точками заштрихованной на рисунке 10.2.4 области, которая ограничена кривой $x = l \sin \varphi$ сверху и прямой $x = 0$ – снизу. Таким образом, при большом числе испытаний среднее число пересечений m/n должно стремиться к отношению площади заштрихованной фигуры к площади прямоугольника (подробнее см. [9]):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n} = \frac{1}{ap} \int_0^p l \sin j \, dj = \frac{2l}{ap}. \quad (10.2.3)$$

Таким же выражением описывается среднее число пересечений системы вертикальных прямых, что можно заметить, повернув нашу решетку на 90° . Поскольку сумма средних равна среднему суммы, относительная частота пересечений короткой иглы как с горизонтальными, так и с вертикальными прямыми равна

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n} = \frac{4l}{ap}. \quad (10.2.4)$$

До этого предполагалось, что игла короче, чем расстояние между прямыми. Теперь возьмем длинную иглу ($2l > 2a$) и разделим ее мысленно на n кусков одинаковой длины $2l/n$, меньшей $2a$. Тогда один бросок длинной иглы из n кусков будет эквивалентен одновременному бросанию n коротких игл, или, что то же самое, n броскам одной короткой иглы. Поэтому для относительной частоты пересечений при одном бросании длинной иглы мы получим приближенную формулу

$$\frac{m}{n} = \frac{4}{ap} \left(\frac{l}{n} \right), \quad (10.2.5)$$

которая дает для числа π выражение (10.2.1).

Полученная формула была использована несколькими экспериментаторами в опытах для определения приближенного значения числа π . В таблице 10.2.3 приведены некоторые из результатов.

Таблица 10.2.3

Результаты измерений числа π

Экспериментатор	Год	Число бросаний	Экспериментальное значение
Вольф	1850	5000	3.1596
Смит	1855	3204	3.1553
Фокс	1894	1120	3.1419
Лаццарони	1901	3408	3.1415929

Сведения о погрешности этих измерений в литературе не сообщаются.

Контрольные вопросы к работе 10.2

1. Как влияет на результат измерений числа π толщина используемого стержня? Является ли погрешность измерений, которую Вы допускаете, не учитывая толщину, случайной, подчиняющейся распределению Стьюдента?
2. Пусть бумага, на которую бросают Иглу Бюффона, разграфлена на клетки в форме прямоугольников, ромбов. Как нужно изменить при этом формулу (10.2.4)?
3. Сделайте оценку предельной точности числа π , которую Вы можете получить на Вашей установке при неограниченном числе измерений. Как можно увеличить точность результатов, не прибегая к качественному изменению методики экспериментов?
4. Предположим, что Вы бросаете Иглу Бюффона достаточное число раз и фиксируете не число пересечений m_i , а угол φ_i (смотри рисунок 10.2.3). Как будет выглядеть гистограмма, если по оси абсцисс откладывать угол φ , а по оси ординат – число попаданий в некоторый интервал этого угла, (например, $\Delta\varphi = 10^\circ$)?
5. Можно ли пользоваться формулой (10.2.1), если в качестве «Иглы» взять кольцо? Проверьте Ваш ответ в домашнем эксперименте и обоснуйте теоретически.
6. Траектория броуновской частицы представляет собой ломаную линию. Можно ли, приняв каждый отрезок этой ломаной за случайное положение «Иглы Бюффона», вычислить по этим данным число π ?

10.3. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗМЕРЕНИЙ, СОПРОВОЖДАЮЩИХСЯ БОЛЬШОЙ СЛУЧАЙНОЙ ПОГРЕШНОСТЬЮ

Принадлежности: измерительная линейка, лист бумаги.

Основная цель этого раздела нашего курса – почувствовать, как в процессе измерения возникают случайные ошибки, каким закономерностям они подчиняются и каким способом на фоне этих ошибок можно определить искомую величину, а также ее погрешность. Однако в двух предыдущих работах, где подсчитывались номер ячейки, в которую попал шарик, и число прямых, пересекаемых иглой, случайный разброс результатов порождался не во время измерений, а ранее – в процессе приготовления исследуемых состояний – благодаря неустойчивости движения частицы между круговыми отражателями в первом случае и из-за вероятностного характера падений иглы на плоскость – во втором. Теперь мы предлагаем Вам выполнить лабораторную работу, сформулированную таким образом, что случайными ошибками, значительно превосходящими погрешности округления и прибора, сопровождается непосредственно сам процесс измерения.

Измерения

Каждый студент получает лист бумаги и линейку. Для того, чтобы измерения, выполняемые с помощью линейки с миллиметровыми делениями, давали три значащие цифры, следует взять лист длиной более ста миллиметров. Кроме того, чтобы работа была более наглядной, у каждого из студентов должен быть лист бумаги своей длины x .

Держа линейку на расстоянии 5 – 10 см над бумажным листом (рисунок 10.3.1а), следует пять раз определить с точностью до миллиметра длину листа x_i' . После этого выполняются пять измерений длины листа x_i' , в которых линейка располагается примерно на таком же расстоянии за бумагой (рисунок 10.3.1б).

Затем находят истинную длину листа x'_{11} , положив на него линейку. В качестве примера в таблице 10.3.1 приведены результаты одного из опытов авторов.

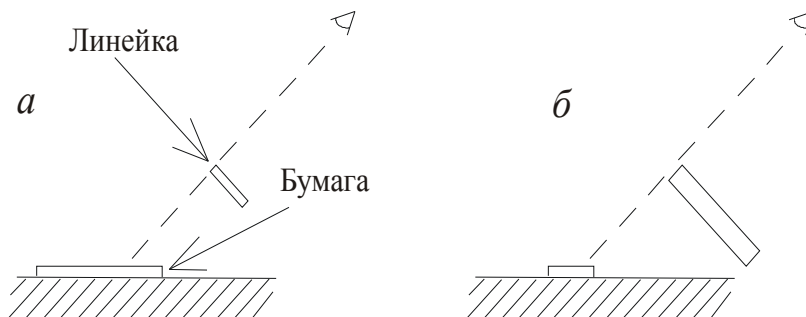


Рис. 10.3.1. Схема эксперимента по определению длины листа бумаги:
а – линейка над листом; б – линейка под листом

Для того, чтобы получить возможность объединить результаты всей студенческой группы в одну общую таблицу и обработать их коллективно, в виде единой универсальной зависимости, следует перейти к безразмерным величинам $x_i = x'_i / x'_{11}$, имеющим смысл

отношения результата измерения x'_i к «точному значению» x'_{11} . С этой целью каждое из 10 измеренных вначале значений длины листа x'_i

($i = 1, 2, \dots, 10$) делят на «истинную» длину x'_{11} , оставляя столько значащих цифр, сколько необходимо для того, чтобы результаты были равноточными. Для этого требуются три значащих цифры в числах, близких, но меньших единицы (например, 0.990), и четыре значащих цифры для чисел, чуть больших единицы (1.100). Все эти равноточные результаты также записывают в таблицу 10.3.1. Кроме того, четыре значения – два из верхней половины таблицы и два из нижней, например, x_2 , x_4 , x_7 и x_9 , записывают в сводную таблицу на доске. Если

в группе 25 человек, то массив данных будет содержать 100 чисел, чего уже вполне достаточно для построения гистограммы.

Таблица 10.3.1 (3.05.2003)

Результаты измерения длины листа масштабной линейкой

i	Способ измерения	x'_i , мм	$x'_i = x'_i / x'_{11}$, безразмерно	$\langle x \rangle - x_i$, безразмерно	$(\langle x \rangle - x_i)^2$, безразмерно
1	Линейка над листом	193	0.923	0.096	0.0092
2		207	0.990	0.029	0.00084
3		196	0.938	0.081	0.0066
4		202	0.967	0.052	0.0027
5		203	0.971	0.048	0.0023
6	Линейка за листом	236	1.129	- 0.11	0.012
7		215	1.029	- 0.010	0.00010
8		230	1.100	- 0.081	0.0066
9		233	1.115	- 0.096	0.0092
10		218	1.043	- 0.024	0.00058
11	Линейка на листе	209	1.000	-	-
	Среднее значение		1.021	-	-

Дальнейшая обработка результатов такая же, как в предыдущих работах. Прежде всего, рекомендуется выяснить, является ли величина x_i случайной переменной с распределением, близким к распределению Гаусса (8.2.3). Сделать это можно, построив ее гистограмму. Для этого на числовой оси отметьте точку 1 - «точное значение». Вправо и влево от этой точки отложите отрезки, которые в сумме перекрывали бы всю

область данных сводной таблицы. Длину этих отрезков выберите такой, чтобы их количество было не более двадцати – иначе на каждый из отрезков выпадет мало экспериментальных точек, что затруднит выявление статистических закономерностей. Затем составьте еще одну таблицу, подобную таблицам 10.1.1 и 10.2.2, и занесите в нее число попаданий в каждый из Ваших интервалов. На основе этой таблицы постройте гистограмму и сделайте выводы о характере Ваших экспериментальных данных.

В качестве примера на рисунке 10.3.2 приведено распределение результатов одной из студенческих групп (сто чисел). Сюда же включены данные из таблицы 10.3.1 (десять чисел). Итого, гистограмма содержит 110 экспериментальных значений. Данные сводной таблицы охватывают диапазон $0.6 < x < 1.4$. Этот диапазон разбит на 16 отрезков; длина каждого из них – 0.05 безразмерной единицы. Экспериментальные точки, угодившие на левую границу отрезка, учитывались в нем, а совпадающие с правой границей – приписывались к следующему отрезку.

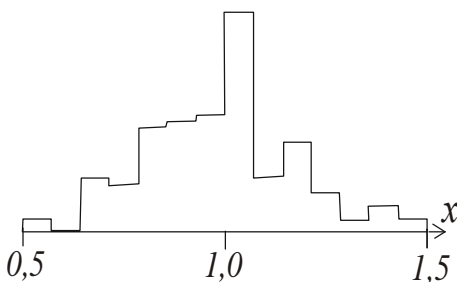


Рис. 10.3.2. Гистограмма результатов измерений длины листа: по горизонтальной оси отложено отношение полученного значения длины к «точной» величине; по вертикальной оси – количество экспериментальных точек, попавших в интервал. Максимальная ордината соответствует 28 попаданиям, минимальная отличная от нуля ордината – одному попаданию

Из рисунка 10.3.2 видно, что в обсуждаемой серии встречаются измерения, выполненные с очень большой ошибкой – от 20 до 40 %! Однако число таких измерений незначительно – не более одного - двух на каждый из отрезков, далеко отстоящих от точки $x = 1$. С

приближением как слева, так и справа к значению $x = 1$, т. е. по мере уменьшения ошибки измерения, количество результатов, попадающих в отрезок, возрастает. Наибольшее число экспериментальных данных приходится на отрезки, примыкающие к точке $x = 1$. Это означает, что чаще всего измерения выполнялись с минимальной ошибкой. Таким образом, мы можем рассматривать гистограмму на рисунке 10.3.2 как приближение, пусть весьма грубое, кривой распределения Гаусса (8.2.3). Поэтому ошибку измерения в этой серии опытов можно считать случайной переменной, для которой применимы соотношения Стьюдента (5.2.1) и (8.3.1).

На следующем этапе каждый студент на основе своих одиннадцати измерений вычисляет $\langle x \rangle$ и Δx по формулам (5.2.1) и (8.3.1). Для приведенных в таблице 10.3.1 данных

$$x = 1.021 \pm 0.054 \approx 1.02 \pm 0.05 \quad (p = 0.95). \quad (10.3.1)$$

Найденные среднее значение и доверительный интервал, а также «истинное» значение $x = 1.000$ и десять оставшихся экспериментальных точек изображаются на числовой оси подобно тому, как это сделано на рисунках 10.1.3а и 10.2.2а. Затем это же самое делается с четырьмя числами, занесенными в общую таблицу. При этом получаются какие-то новые $\langle x \rangle$ и Δx . Результаты вычислений и диаграммы следует сопоставить между собой и с гистограммой распределения сводного массива данных, для чего рекомендуется расположить все рисунки на одном листе друг под другом.

Контрольные вопросы к работе 10.3

1. Можно ли утверждать, что, чем больше проведено измерений, тем ближе $\langle x \rangle$ к X ?
2. Можно ли из таблицы экспериментальных данных вычеркивать некоторые результаты как «ошибочные»?
3. В каких случаях достаточно провести всего одно измерение? Как оценить его ошибку?
4. Могла ли в Ваши измерения длины закрасться систематическая ошибка?
5. При однократном измерении толщины оконного стекла микрометром, штангенциркулем и масштабной линейкой получены следующие результаты: 2.23 мм, 2.2 мм и 2 мм, соответственно. В каком из этих трех значений вероятнее всего

содержится наибольшая случайная ошибка, ошибка прибора, ошибка округления?

6. При выполнении этой работы три студента получили для измерений листы бумаги длиной 10 мм, 10 см и 10 дм. У кого из них вероятнее всего будет наибольшая случайная ошибка, ошибка прибора, ошибка округления?

В качестве моделей процесса измерения, сопровождающегося большой случайной погрешностью, можно предложить и другие задачи. Например, можно, предварительно определив с помощью линейки длину бумажной полоски, куска проволоки или нитки, на глаз разорвать их пополам. Один из получившихся отрезков можно снова на глаз поделить поровну, и т. д. Затем, пользуясь линейкой, нужно найти длину образовавшегося в итоге кусочка и по ней вычислить длину первоначального образца. Полученную величину мы будем понимать как «результат измерения», а ее отклонение от «точного», непосредственно найденного значения – как погрешность. Такие «измерения» следует выполнить несколько раз и обработать их по рецепту, изложенному выше.

Можно предложить еще один вариант подобных опытов. Определив с помощью линейки площадь прямоугольного листа бумаги, на глаз разрезать его пополам, сначала вдоль, а затем поперек. Операцию можно повторить несколько раз. После этого, найдя с помощью линейки площадь одного из обрезков, по ней восстановить площадь первоначального листа.

Вы можете самостоятельно придумать и опробовать еще какие-то способы измерений, дающие большую случайную ошибку.

10.4. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

ПРИМЕР ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА¹⁰

Принадлежности: кольцо или цилиндр, штангенциркуль, микрометр, технические весы.

Это методическая работа по статистической обработке результатов косвенных измерений. Задачи этой работы:

- ознакомиться с простейшими измерительными инструментами - штангенциркулем, микрометром, техническими весами;
- отработать способы вычисления погрешностей, ведения записей, составления отчета.

В работе требуется выполнить равноточные измерения микрометром и штангенциркулем и взвесить тело на технических весах. Равноточности всех измерений добиваются выбором соответствующего инструмента. В нашей лаборатории точность всех измерительных инструментов порядка одного процента, что требует измерений с тремя значащими цифрами (или четырьмя, если первая значащая цифра равна 1). Штангенциркуль дает такую точность, если измеряемая длина больше 1 см, а микрометр – если длина больше 1 мм. При измерении линейных размеров необходимо иметь в виду, что тело может не обладать строго правильной формой. Поэтому измерения штангенциркулем и микрометром делают несколько раз и в разных местах: три, если результаты не меняются, и не менее пяти в противном случае. Взвешивание достаточно выполнить только один раз, поскольку при этом Вы получите четыре-пять значащих цифр, из которых меняется только последняя, но ее все равно придется отбросить при обработке данных.

¹⁰ Разделы 10.4 и 10.5 представляют собой расширенное изложение руководства к лабораторной работе № 1 по обработке экспериментальных данных [12], выполняемой на вводных занятиях в практикуме по общей физике.

Приведем пример записи и обработки результатов.

9.04.2003

Данные для определения плотности материала кольца

Материал - латунь.

Комнатная температура 20° С.

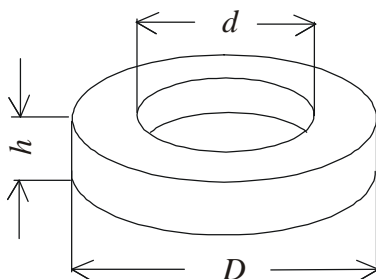


Рис. 10.4.1. Обозначения размеров кольца

Результат измерения массы кольца m

$m = 58.80$ г; $\omega = 100$ мг.

Весы технические № 4002.

Таблица 10.4.1

Результаты измерения внешнего диаметра кольца D

Штангенциркуль № П – 44249

i	D_i , мм	$\langle D \rangle - D_i$, мм	$(\langle D \rangle - D_i)^2$, мм ²
1	69.1	0.2	0.04
2	69.5	- 0.2	0.04
3	69.3	0	0
4	69.3	0	0
5	69.2	0.1	0.01
Среднее значение	69.3	-	-

Таблица 10.4.2

Результаты измерения внутреннего диаметра кольца d
Штангенциркуль № П – 44249

i	d_i , мм	$\langle d \rangle - d_i$, мм	$(\langle d \rangle - d_i)^2$, мм ²
1	51.5	- 0.1	0.01
2	51.5	- 0.1	0.01
3	51.3	0.1	0.01
4	51.2	0.2	0.04
5	51.3	0.1	0.01
Среднее значение	51.4	-	-

Таблица 10.4.3

Результаты измерения толщины кольца h
Микрометр № 1858

i	h_i , мм	$\langle h \rangle - h_i$, мм	$(\langle h \rangle - h_i)^2$, мм ²
1	4.03	- 0.01	0.0001
2	4.02	0	0
3	4.02	0	0
4	4.01	0.01	0.0001
5	4.02	0	0
Среднее значение	4.02	-	-

Вычисляем по формуле Стьюдента (8.3.1) случайные ошибки $\overset{\circ}{\Delta}_x$ при измерениях внешнего и внутреннего диаметров и высоты кольца. Эти ошибки равными 0.19, 0.17 и 0.0089 мм, соответственно.

Для штангенциркуля в зависимости от цены наименьшего деления нониуса (0.1 или 0.05 мм) погрешность прибора Δ_{np} равна 0.07 или 0.03 мм, а погрешность округления $\Delta_{окр}$ - 0.05 или 0.02 мм (см. таблицу 7.1.1). Обе эти ошибки не превышают $0.5 \cdot \overset{\circ}{\Delta}_x$, поэтому при вычислении полной ошибки по формуле (7.5.1) ими можно

пренебречь, поскольку мы договорились записывать полную погрешность с точностью до одной значащей цифры, если эта цифра больше или равна 2.

Покажем это на примере вычисления ошибки ΔD

$$\Delta D = \sqrt{3,61 \cdot 10^{-2} + 0,49 \cdot 10^{-2} + 0,25 \cdot 10^{-2}} = \sqrt{4,3 \cdot 10^{-2}} = 0,21 \text{ мм.}$$

Таким образом, поправки, связанные с учетом Δ_{np} и $\Delta_{окр}$ в этом случае, практически сказываются лишь на второй значащей цифре и могут не вычисляться. В итоге имеем

$$D = (69,3 \pm 0,2) \text{ мм} \quad (p = 0,95), \quad (10.4.1)$$

$$d = (51,4 \pm 0,2) \text{ мм} \quad (p = 0,95). \quad (10.4.2)$$

Для микрометра погрешности $\Delta_{np} = 0,007 \text{ мм}$ и $\Delta_{окр} = 0,005 \text{ мм}$ сравнимы со случайной ошибкой $\overset{\circ}{\Delta} x$ в измерении высоты h , и нам следует учесть их при вычислении Δh

$$\begin{aligned} \Delta h &= \sqrt{0,79 \cdot 10^{-4} + 0,49 \cdot 10^{-4} + 0,25 \cdot 10^{-4}} = \sqrt{1,53 \cdot 10^{-4}} = \\ &= 1,24 \cdot 10^{-2} \approx 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ мм.} \end{aligned}$$

Поскольку первой значащей цифрой в погрешности Δh является 1, в соответствии с правилом, изложенным в разделе 9.1, здесь мы записали ошибку Δh с точностью в две значащих цифры. Однако, если привести окончательный результат в виде $h = (4,02 \pm 0,012) \text{ мм}$, будет нарушена рекомендация раздела 9.1, требующая, чтобы погрешность приходилась на два последних разряда среднего. Поэтому в нашем примере приходится округлить ошибку Δh до одной значащей цифры

$$h = (4,02 \pm 0,01) \text{ мм} \quad (p = 0,95). \quad (10.4.3)$$

При взвешивании тела, масса которого оказалась равной 58,80 г., для получения приемлемой точности – до четвертой значащей цифры – было вполне достаточно воспользоваться наименьшим разновесом в 100 миллиграммов. Это давало погрешность округления $\Delta_{окр} = 0,05 \text{ г}$, намного превосходившую погрешность прибора $\Delta_{np} = 0,007 \text{ г}$ (таблица

7.1.1). Кроме того, при использовании такого весьма большого разноразброса данных отсутствовал, т. е. случайная погрешность Δx была равна нулю. Поэтому при вычислении полной погрешности Δm в формуле (7.5.1) приходилось учитывать лишь погрешность округления, так что

$$m = (58.80 \pm 0.05) \text{ г} \quad (p = 0.95). \quad (10.4.4)$$

По средним значениям внешнего $\langle D \rangle$ и внутреннего $\langle d \rangle$ диаметров, высоты $\langle h \rangle$ и массы $\langle m \rangle$ кольца определяем среднюю плотность материала

$$\langle r \rangle = \frac{\langle m \rangle}{\left[\frac{p}{4} (\langle D \rangle^2 - \langle d \rangle^2) \langle h \rangle \right]} = 8.62 \text{ г/см}^3. \quad (10.4.5)$$

Ошибку Δr косвенного измерения находим по формуле (8.4.6)

$$(\Delta r)^2 = \left(\frac{\partial r}{\partial D} \Delta D \right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial d} \Delta d \right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial h} \Delta h \right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial m} \Delta m \right)^2. \quad (10.4.6)$$

Вычисляем производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial D} &= - \frac{2 \langle D \rangle \cdot \langle m \rangle}{\left[\frac{p}{4} (\langle D \rangle^2 - \langle d \rangle^2) \langle h \rangle \right]} = - \langle r \rangle \frac{2 \langle D \rangle}{\langle D \rangle^2 - \langle d \rangle^2}; \\ \frac{\partial r}{\partial d} &= - \frac{2 \langle d \rangle \cdot \langle m \rangle}{\left[\frac{p}{4} (\langle D \rangle^2 - \langle d \rangle^2) \langle h \rangle \right]} = - \langle r \rangle \frac{2 \langle d \rangle}{\langle D \rangle^2 - \langle d \rangle^2}; \\ \frac{\partial r}{\partial h} &= - \frac{\langle m \rangle}{\left[\frac{p}{4} (\langle D \rangle^2 - \langle d \rangle^2) \langle h \rangle \right]} = \frac{\langle r \rangle}{\langle h \rangle}; \end{aligned} \quad (10.4.7)$$

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m} \frac{\langle m \rangle}{\left[\frac{p}{4} (\langle D \rangle^2 - \langle d \rangle^2) \langle h \rangle \right]} = \frac{1}{\left[\frac{p}{4} (\langle D \rangle^2 - \langle d \rangle^2) \langle h \rangle \right]} = \frac{\langle r \rangle}{\langle m \rangle}.$$

Подставляя эти величины в формулу (10.4.6) и деля результат на $\langle \rho \rangle^2$, находим:

$$\left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2 = \left(2 \frac{\langle D \rangle \Delta D}{\langle D \rangle^2 - \langle d \rangle^2}\right)^2 + \left(2 \frac{\langle d \rangle \Delta d}{\langle D \rangle^2 - \langle d \rangle^2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2. \quad (10.4.8)$$

Отметим характерную особенность вычисления ошибки разности: в окончательной формуле для относительной погрешности результата эта разность оказывается в знаменателе. Поэтому, если уменьшаемое и вычитаемое имеют близкие значения, то это приводит к большим ошибкам. Указанное обстоятельство следует учитывать при планировании эксперимента, заранее предусматривая для таких величин измерения с помощью приборов, обеспечивающих повышенную точность.

Подставляя в последнее уравнение найденные нами ранее средние величины и их погрешности, находим

$$\rho = (8.62 \pm 0.02) \text{ г/см}^3 \quad (p = 0.95). \quad (10.4.9)$$

Табличные значения плотности латуни при температуре 20° С в зависимости от состава охватывают интервал

$$\rho = 8.20 \div 8.85 \text{ г/см}^3.$$

См. Таблицы физических величин: Справочник под ред. И.К. Кикоина. М.: Атомиздат. 1976. 1006 с. (См. таблицу с. 121).

Таким образом, результат наших измерений (10.4.9) попадает в указанный в справочнике интервал значений плотности латуни.

Контрольные вопросы к этой работе объединены с вопросами к работе 10.5 и приведены на с. 76.

10.5. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПРАВИЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

В качестве упрощенного варианта рассмотренной выше лабораторной работы 10.4 можно предложить измерение плотности не кольца, а сплошного тела в форме прямого кругового цилиндра. Тогда в приведенных в разделе 10.4 формулах следует положить диаметр отверстия $d = 0$, и для $\langle \rho \rangle$ и $\Delta \rho$ мы получим выражения

$$\langle r \rangle = \frac{\langle m \rangle}{\left(\frac{p}{4} \langle D \rangle^2 \cdot \langle h \rangle \right)} \quad (10.5.1)$$

$$\left(\frac{\Delta r}{\langle r \rangle} \right)^2 = \left(2 \frac{\Delta D}{\langle D \rangle} \right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{\langle h \rangle} \right)^2 + \left(\frac{\Delta m}{\langle m \rangle} \right)^2 \quad (10.5.2)$$

Контрольные вопросы к работам 10.4 и 10.5

1. Можно ли добиться в обсуждаемом эксперименте той же той же точности, как в соотношениях (10.4.1), (10.4.2) и (10.4.3), имея в своем распоряжении торговые весы (точность 5 г) и ученическую масштабную линейку? Каким для этого должен быть объект измерений?
2. Допустимо ли для учета возможных систематических ошибок увеличивать интервал Δx по отношению к рекомендуемому?
3. Ошибки округляются до одной – двух значащих цифр. Можно ли на основании этого утверждать, что при использовании формулы (7.5.1) для полной ошибки допустимо пренебрегать теми ошибками, которые составляют $1/3$ и меньше от максимальной?
4. Могут ли микрометр и ученическая линейка давать равноточные показания?
5. Какими должны быть внешний и внутренний диаметры кольца и его толщина, чтобы при измерении этих параметров масштабной линейкой, штангенциркулем и микрометром, соответственно, получались равноточные результаты?
6. В работе не учитывается масса воздуха, вытесненная телом (закон Архимеда). Оцените эту систематическую погрешность. При каком давлении воздуха этот эффект следовало бы учесть?

11. КАК ПИСАТЬ ОТЧЕТЫ О ЛАБОРАТОРНЫХ И НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ РАБОТАХ И НАУЧНЫЕ СТАТЬИ [4]

Заглавие

По заглавию публикации судят о ее содержании. Заглавие должно быть кратким – не более десяти слов. Старайтесь вводить в него ключевые слова, которые, в частности, позволят составителям указателей и каталогов отнести Вашу публикацию к тому или иному разделу.

Аннотация

В начале каждой публикации должна быть аннотация объемом около ста слов, в которой четко говорится о содержании статьи или отчета. Тем читателям, которые работают в данной области, аннотация позволит решить, стоит ли читать статью. Те же, кто интересуется подобной тематикой лишь вообще, смогут познакомиться с результатами, не читая всей статьи. Поэтому в аннотации следует указать не только предмет исследования, но и привести окончательные результаты и основные выводы.

Разделы статьи:

- ***Введение***

Во Введении должно быть ясно сказано:

- чем интересна данная задача с точки зрения физики;
- какое место занимает данный эксперимент в общих исследованиях;
- как данный эксперимент связан с предыдущими исследованиями.

- ***Методика эксперимента***

Если Вы пользовались обычными методами измерений и аппаратурой, то достаточно привести их названия или краткое описание и указать литературу, в которой могут быть найдены подробные сведения. Если же аппаратура и методика содержат оригинальные элементы, их следует описать подробно, не вдаваясь, однако, в мелкие, несущественные детали.

- ***Результаты эксперимента***

Невозможно, да и не нужно приводить в статье результаты всех измерений. Поэтому в этом разделе необходимо сообщить:

- типичные данные основных измерений;
- важнейшие окончательные результаты.

- ***Анализ результатов***

Здесь нужно привести:

- сопоставление с другими аналогичными результатами, если они имеются;
- сопоставление с соответствующими теориями;
- анализ состояния исследуемой Вами проблемы в свете полученных Вами данных.

Схемы, графики, таблицы

способствуют ясности изложения. Если Ваша аппаратура не совершенно стандартная, полезно привести ее блок-схему. Результаты удобно представлять графически и в форме таблиц – тогда они хорошо выделяются в тексте.

Важнейшее требование к научной публикации – это ясность построения и изложения. Писать статьи следует хорошим языком. Это означает выбирать слова и строить предложения так, чтобы выразить свои мысли как можно короче и как можно понятней для читателя. Можно ясно построить и длинное предложение, но это требует большого мастерства. Каждый может писать хорошим, ясным языком, если он потрудится. Относитесь критически к тому, что пишете. Постоянно спрашивайте себя: логично, ясно, сжато ли Вы написали. Если нет – попробуйте снова и снова¹¹. Умение хорошо писать не следует отделять от умения хорошо проводить исследования, и не случайно, что такие великие ученые, как Галилей и Ньютон, написали прекрасные научные труды.

¹¹ Простота – это то, что дается труднее всего на свете; это крайний предел опытности, последнее усилие гения.

Ж. Санд

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. ГОСТ 8.011-72. Показатели точности измерений и формы представления результатов измерений.
2. ГОСТ 8.207-76. Прямые измерения с многократными наблюдениями. Методы обработки результатов наблюдений.
3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1977. 832 с.
4. Сквайрс Дж. Практическая физика. М.: Мир, 1971. 247 с.
5. Зайдель А.Н. Ошибки измерений физических величин. Л.: Наука, 1974. 108 с.
6. Физики продолжают шутить. М.: Мир, 1968. 320 с.
7. Братухин Ю.К., Путин Г.Ф. О внутрипоровой конвекции при вертикальной ориентации градиента температуры // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1984. № 1. С. 93 – 98.
8. Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И. Хаотическая динамика простых систем // Природа. 1981. № 2. С. 54 – 65.
9. Синай Я.Г. Случайность неслучайного // Природа. 1981. № 3. С. 72 – 80.
10. Мостеллер Ф. Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями. М.: Наука, 1985. 88 с.
11. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятности. М.: Наука, 1969. 400 с.
12. Руководство к лабораторным работам по механике и молекулярной физике / Под ред. М.П. Сорокина. Пермский университет. Пермь, 1975. 222 с.

Учебное издание

Юрий Клавдиевич Братухин

Геннадий Федорович Путин

ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Учебное пособие по лабораторному практикуму «Механика»
курса общей физики

Редактор *Н.И.Стрекаловская*

Корректор *Г.А.Гусман*

ИБ № 501

Подписано в печать 28.05.03. Формат 60х84 1/16. Бум. тип. № 1.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 4.65. Уч.–изд. л. 3.8.

Тираж 200 экз. Заказ .

Редакционно-издательский отдел Пермского университета
614990. Пермь, ул. Букирева, 15

Отпечатано в ООО Печатный салон «Гармония»
614000. Пермь, ул. Кирова, 34. Тел. 12-82-09, 12-01-13