

Лабораторная работа №300
МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ¹

Приборы и принадлежности: электролитическая кювета, набор электродов, понижающий трансформатор, цифровой вольтметр В7-38.

Введение. Нередко различные физические поля описываются одинаковыми уравнениями. Решение уравнения для одного поля может быть применено для описания других, аналогичных, полей. При определенных условиях электростатическое, магнитостатическое поля и поле постоянного тока описываются дифференциальным уравнением второго порядка в частных производных – уравнением Лапласа

$$\nabla^2 Z = 0. \quad (1)$$

В зависимости от задачи Z может означать потенциал, температуру и т.д. На границах поля скаляр Z должен принимать определенные (граничные) значения. Если границы поля имеют слишком сложную геометрическую форму, то аналитического решения уравнения (1) может и не быть. Такое поле можно изучать в натуре или приходится его моделировать.

Уравнения электростатического поля и поля постоянного тока. Рассмотрим уравнения и свойства этих полей, а также возможность моделирования электростатического поля на электропроводной модели.

Электрическое поле вне заряженных тел и поле тока вне источников электродвижущих сил описываются уравнением Лапласа, имеющим в декартовых координатах вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad (2)$$

где φ – электрический потенциал.

Первый интеграл этого уравнения есть

$$\vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\vec{E}(x, y, z) = \text{const}. \quad (3)$$

¹ Данной работе предшествовала другая – «Моделирование электростатического поля на электропроводной бумаге», которая была поставлена Г.Н.Хлебутиным.

Он определяет вектор напряженности \vec{E} электрического поля как функцию координат. Величина, стоящая в левой части уравнения (3), называется градиентом потенциала и обозначается символом $grad \varphi$ или $\nabla \varphi$.

$$grad \varphi = \nabla \varphi = \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (4)$$

Градиент потенциала – это вектор, направленный в сторону наибольшего возрастания скалярной величины φ . Вектор \vec{E} , по определению, направлен в сторону убывания потенциала, т.е. противоположно градиенту φ , поэтому в уравнении (3) стоит знак минус перед вектором \vec{E} .

Интегрирование уравнения (3) дает значение потенциала как функцию координат

$$\varphi = \varphi(x, y, z). \quad (5)$$

Если электрическое поле создается в проводящей среде, то оно описывается уравнением

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}. \quad (6)$$

Это закон Ома в дифференциальной форме, где \vec{j} – плотность тока, \vec{E} – напряженность электрического поля, γ – удельная электропроводность среды. В случае изотропных сред их электрические свойства характеризуются единственным числом: ϵ – в диэлектрике и γ – в проводнике.

Плоский конденсатор. Поле плоского конденсатора, размеры пластин которого велики по сравнению с расстоянием между ними, однородно, т.е. напряженность \vec{E} в любой точке поля одинакова, а потенциал зависит только от расстояния до обкладок конденсатора. Примем потенциал одной из обкладок равным нулю, совместим с ней начало отсчета и направим ось x перпендикулярно ей в сторону другой обкладки (рис.1). Запишем для этого случая уравнение Лапласа

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = 0. \quad (7)$$

Проинтегрируем его, в результате чего получим

$$\frac{d\varphi}{dx} = const \equiv C_1. \quad (8)$$

После второго интегрирования имеем

$$\varphi = C_1 x + C_2. \quad (9)$$

Обозначим расстояние между обкладками d , разность потенциалов между ними U . При $x = 0$ потенциал $\varphi = 0$, из формулы (9) следует $C_2 = 0$.

При $x = d$ потенциал $\varphi = U$, поэтому $C_1 = \frac{U}{d}$.

Подставляя C_1 в (9), получаем

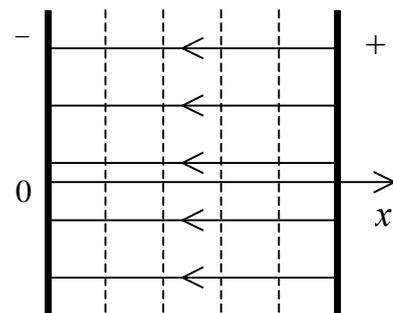


Рис.1

$$\varphi = \frac{U}{d}x, \quad (10)$$

т.е. потенциал возрастает по линейному закону от нуля на левой обкладке до U на правой. Напряженность электрического поля направлена в сторону убывания потенциала, она постоянна по величине и направлению. В векторной форме ее можно записать так:

$$\vec{E} = -\vec{i} \frac{U}{d}. \quad (11)$$

Из формулы (10) видно, что плоскости $x = const$, параллельные обкладкам, представляют собой эквипотенциальные поверхности. Линии напряженности электрического поля перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям, в том числе и поверхности электродов или обкладок конденсатора. Таковы результаты решения уравнения Лапласа.

Цилиндрический конденсатор. Если длина цилиндрического конденсатора велика по сравнению с радиусами внутренней и внешней обкладок r_1 , r_2 , то поле зависит только от расстояния r от оси конденсатора, и уравнение Лапласа в цилиндрической системе координат запишется так:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0. \quad (12)$$

После первого интегрирования уравнения (12) получается следующее:

$$r \frac{d\varphi}{dr} = const = C_1. \quad (13)$$

Второе интегрирование дает

$$\varphi = C_1 \ln r + C_2. \quad (14)$$

Полагая, что при $r=r_1$ $\varphi=0$ и при $r=r_2$ $\varphi=U$, определяем константы интегрирования

$$C_1 = \frac{U}{\ln(r_2/r_1)}; \quad C_2 = \frac{U}{\ln(r_2/r_1)} \ln r_1.$$

Подставляя эти значения в уравнение (14), получаем

$$\varphi = \frac{U}{\ln(r_2/r_1)} \ln \frac{r}{r_1}, \quad (15)$$

т.е. потенциал возрастает в направлении от внутренней обкладки к наружной (если наружная обкладка положительна). Напряженность поля при этом направлена радиально от наружной обкладки к внутренней

$$\vec{E} = -\frac{U}{\ln(r_2/r_1)} \frac{1}{r} \vec{e}_r, \quad (16)$$

где \vec{e}_r – единичный вектор радиального направления.

Из двух последних уравнений следует, что цилиндрические поверхности $r = const$, в том числе и обкладки, являются поверхностями равного потенциала, а линии напряженности поля ортогональны им.

Если пространство между электродами рассмотренных конденсаторов сплошь заполнить электролитом и приложить к электродам разность потенциалов, то соотношения (10), (11), (15) и (16) для потенциала и поля остаются в силе. Линии напряженности электрического поля, в силу действия формулы (6), совпадают с линиями тока и перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям, в том числе и поверхностям электродов.

В случае электродов сложной формы условие ортогональности силовых линий напряженности поверхности электродов в электрическом поле выполняется всегда. В электропроводной модели для выполнения этого условия необходимо, чтобы электропроводность электродов была гораздо больше электропроводности среды, заполняющей межэлектродное пространство.

Описание установки. Экспериментальная установка представляет собой плоскую горизонтальную кювету, в которую наливается жидкий электролит – прокипяченная водопроводная вода. Электропроводность ее вполне подходит для проведения подобных опытов. В воду помещены два неподвижных электрода *A*, *B* и один подвижный – зонд *C*.

Форму и размеры неподвижных электродов экспериментатор может менять в зависимости от поставленной задачи.

Электрическая схема установки представлена на рис.2. К неподвижным электродам подведено переменное напряжение от понижающего трансформатора. Применение постоянного тока в данном случае нежелательно в связи с явлением *поляризации электродов*.

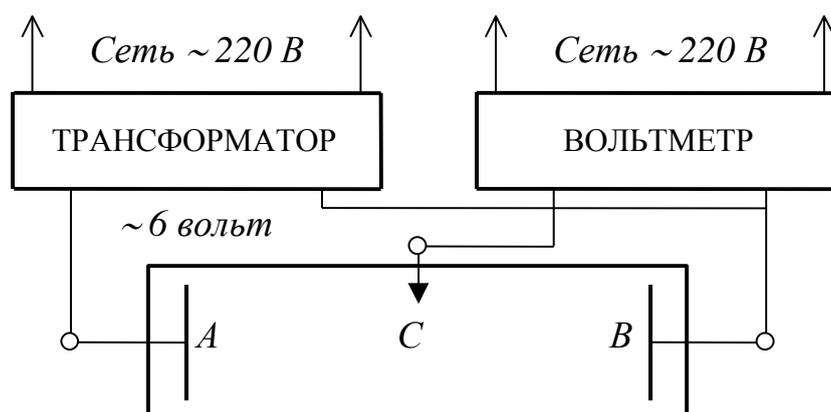


Рис.2

В качестве измерительного прибора используется цифровой электронный вольтметр В7-38. Его применение оправдано тем, что входное сопротивление вольтметра (500 кОм) значительно больше сопротивления того участка цепи, куда он включается, поэтому его включение практически не изменяет конфигурацию поля и не влияет на точность результатов измерения.

Одна из клемм вольтметра соединена с электродом *B*. Следовательно, вольтметр измеряет фактически разность потенциалов между электродами *B* и *C*. Но если потенциал электрода *B* принять за нуль, то показания вольтметра

будут численно равны потенциалам точек электрического поля, в которые помещается подвижный зонд C .

Измерения. 1.Налейте в кювету воду, предназначенную для этой работы, в количестве 300-400 мл, чтобы ее слой составлял около 1 см.

2.С помощью установочных винтов отрегулируйте положение кюветы так, чтобы слой воды в ней был одинаковой толщины.

3.Закрепите на откидном столике лист бумаги формата $A4$.

4.Погрузите в воду и закрепите плоские электроды.

5.Соберите электрическую цепь по схеме (рис.2) и предложите преподавателю или лаборанту проверить правильность сборки.

6.Включите в сеть 220 В трансформатор и вольтметр, поставив при этом переключатель рода работы вольтметра на измерение переменного напряжения.

7.Откинув столик с бумагой на опорный кронштейн, прикоснитесь зондом в электроду. Опустите столик на острие зонда так, чтобы на бумаге остался след от прикосновения острия. Далее нанесите на бумагу еще 4-5 уколов, причем крайние из них следует совместить с границами электрода. В дальнейшем Вы сможете изобразить на бумаге форму и местоположение данного электрода. Точно так же нанесите на бумагу положение второго электрода. Запишите около каждого электрода показания вольтметра.

8.Перемещая зонд в пространстве между электродами, найдите точку поля, в которой вольтметр показывает 1,0 В, и перенесите ее положение на планшет. Найдите еще не менее пяти точек поля в различных местах кюветы с таким же потенциалом, каждый раз перенося их на планшет.

9.Подобным образом нанесите на лист бумаги точки с потенциалом 2,0; 3,0 В и т.д. Около каждой серии точек подписывайте соответствующий им потенциал (показания вольтметра).

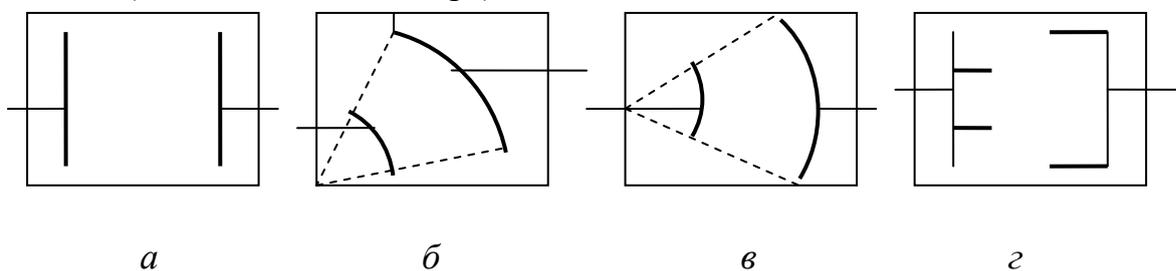


Рис.3

10.Замените плоские электроды теми, которые Вам предложит преподаватель из приведенных на рис.3, и проведите с ними те же измерения (пп. 7-9) на новом чистом планшете.

11.Закончив работу, выключите приборы и соберите воду из кюветы в подходящий сосуд с помощью груши.

Обработка результатов измерений. 1.На каждом из полученных планшетов проведите карандашом контуры электродов.

2. Экспериментальные точки (наколы) с одинаковым потенциалом соедините пунктирными линиями. Это будут эквипотенциальные линии электрического поля.

3. Постройте линии напряженности электрического поля, имея в виду, что они ортогональны линиям равного потенциала. Их принято проводить с такой густотой, чтобы соседние эквипотенциальные и силовые линии образовывали, пересекаясь, приблизительно квадраты.

4. Постройте график зависимости потенциала электрического поля вдоль одной из силовых линий от расстояния, выбрав за начало отсчета электрод с нулевым потенциалом.

5. Вычислите модуль вектора напряженности электрического поля вдоль одной из силовых линий в случае плоского конденсатора и вдоль двух удаленных друг от друга линий – в случае поля более сложной конфигурации. Постройте соответствующие графики для обоих случаев.

Контрольные вопросы

1. Каким уравнением описывается электростатическое поле в вакууме?

2. Почему электростатическое поле можно моделировать посредством поля тока? Всегда ли это можно сделать?

3. Решите уравнение Лапласа для электрического поля плоского и цилиндрического конденсатора. Что такое граничные условия?

4. Как из экспериментальной карты поля получить его характеристики: напряженность и потенциал.

5. Нарисуйте схему экспериментальной установки и расскажите о методике проведения измерений и обработки результатов.

6. Обоснуйте правомерность замены постоянного тока переменным в данной работе.

Список рекомендуемой литературы

1. Калашников С.Г. Электричество. М.: Наука, 1977. §8-13, 17-19.
2. Практикум по физике: Электричество и магнетизм /Под ред. Ф.А.Николаева. М.: Высшая школа, 1991. С.24-28.
3. Савельев И.В. Курс физики: Электричество и магнетизм. М.: Наука, 1998. Кн.2. §1.5 – 1.8; 1.14.
4. Сивухин Д.В. Общий курс физики: Электричество. М.: Наука, 1983. §3,18,19.
5. Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм. М.: Высшая школа, 1983.