

Лабораторная работа № 323

ИЗМЕРЕНИЕ СДВИГА ФАЗ В ЦЕПЯХ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

Приборы и принадлежности: лабораторная панель «Переменный ток. Закон Ома» с резистором, конденсатором и катушкой, источник переменного тока – генератор ГЗ-118, универсальный вольтметр В7-40.

Введение. Рассмотрим электрическую цепь (рис.1), содержащую (в общем случае) активное сопротивление R , индуктивность L и емкость C , в которую включен источник переменного тока с напряжением на выходе

$$u = U_m \cos \omega t, \quad (1)$$

где u – мгновенное напряжение – напряжение в момент времени t ,

U_m – амплитуда напряжения,

ω – циклическая частота колебаний напряжения.

Принято считать, что активное сопротивление *всей цепи* (в том числе сопротивление проводов, сопротивление обмотки катушки) сосредоточено в R , емкость всей цепи – в C , а индуктивность – в L . Такая цепь называется контуром с *сосредоточенными* параметрами. Согласно второму правилу Кирхгофа для данной цепи можно написать следующее уравнение:

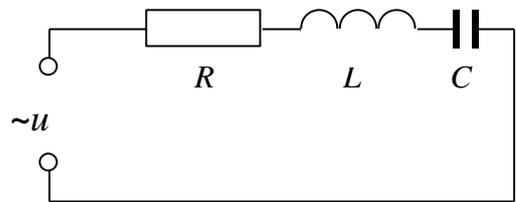


Рис.1

$$u_C + iR = U_m \cos \omega t - L \frac{di}{dt}, \quad (2)$$

где i – мгновенное значение тока в цепи, изменяющееся как и напряжение с частотой ω ,

u_C – напряжение на конденсаторе.

Рассмотрим ряд цепей с различными нагрузками и соответствующие им уравнения.

1. Пусть к источнику присоединено только *активное* сопротивление R (рис.2,а). При этом $L=0$, $C \rightarrow \infty$. Сопротивление называется *активным* потому, что в нем происходит превращение энергии электрического тока во внутреннюю энергию проводника или в механическую работу.

Уравнение (2) для данного частного случая принимает вид:

$$iR = U_m \cos \omega t,$$

из которого следует, что ток

$$i_R = \frac{U_m}{R} \cos \omega t = I_{Rm} \cos \omega t, \quad (3)$$

где I_{Rm} – амплитуда тока в цепи с активной нагрузкой, $I_{Rm} = U_m/R$.
 Таким образом, колебания силы тока в цепи, содержащей *только* активное

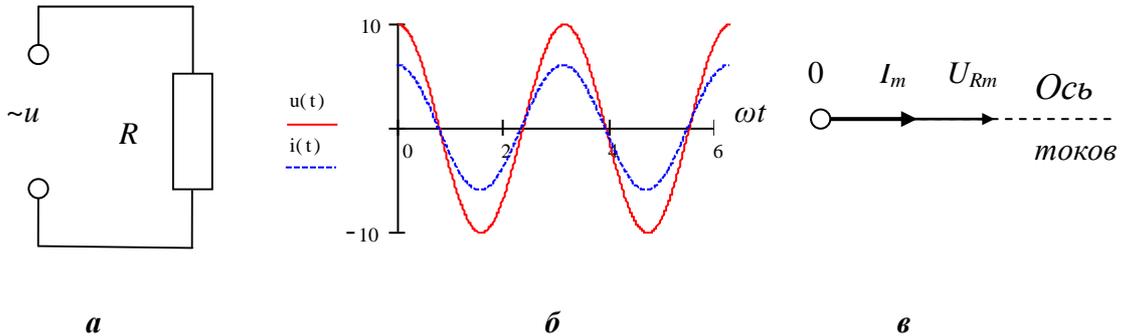


Рис.2

сопротивление, совпадают по фазе с колебаниями напряжения (рис. 2,б). Векторная диаграмма для данной ситуации представлена на рис. 2,в.

2. Пусть нагрузкой источника переменного тока является катушка индуктивности L . Активным и емкостным сопротивлением данной цепи пренебрежем (рис.3,а).

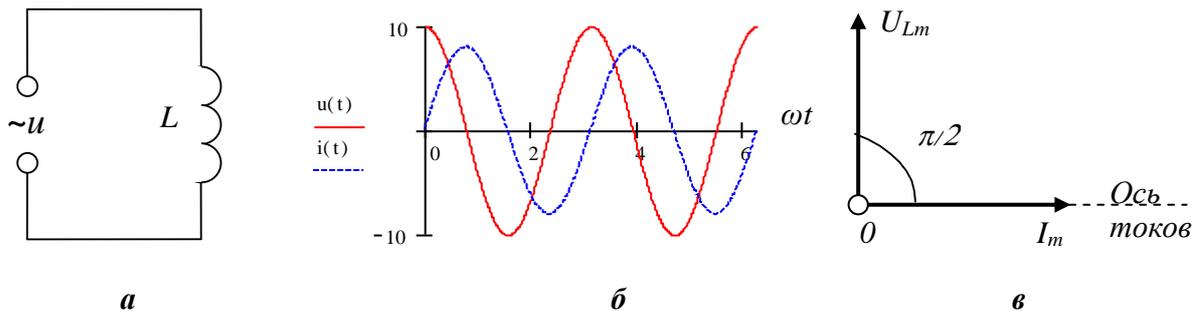


Рис.3

Уравнение Кирхгофа (2) для такого контура имеет вид:

$$U_m \cos \omega t - L \frac{di}{dt} = 0 \quad (4)$$

Величина ЭДС самоиндукции $L \frac{di}{dt}$ численно равна падению напряжения на индуктивности L , которое в дальнейшем обозначим U_L .

Из уравнения (4) можно написать, что

$$di = \frac{U_m}{L} \cos \omega t \cdot dt \quad (5)$$

Проинтегрируем уравнение (5) и получим для тока следующее выражение:

$$i = \frac{U_m}{\omega L} \sin \omega t + const.$$

Так как в цепи нет постоянной составляющей тока, то $const=0$.

Таким образом, ток в цепи *только* с индуктивностью имеет вид

$$i_L = \frac{U_m}{\omega L} \sin \omega t = I_{Lm} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right), \quad (6)$$

где I_{Lm} – амплитуда тока.
$$I_{Lm} = \frac{U_m}{\omega L} = \frac{U_{Lm}}{X_L}. \quad (7)$$

Сравнивая выражение (7) с приведенным ранее (3), можно сделать вывод, что величина ωL в случае индуктивной нагрузки играет роль сопротивления. Она носит название *индуктивного сопротивления* и обозначается X_L .

Из сравнения формул (6) и (1) видно, что ток в цепи, содержащей чисто индуктивную нагрузку, *отстает* от напряжения по фазе на $\pi/2$ радиан (рис. 3,б). На векторной диаграмме вектор напряжения U_{Lm} повернут на угол $\pi/2$ от вектора тока в положительном направлении – против часовой стрелки, вектор тока I_m отстает от него.

3. Пусть в цепь источника переменного тока включен только конденсатор емкостью C без диэлектрических потерь энергии (рис. 4,а).

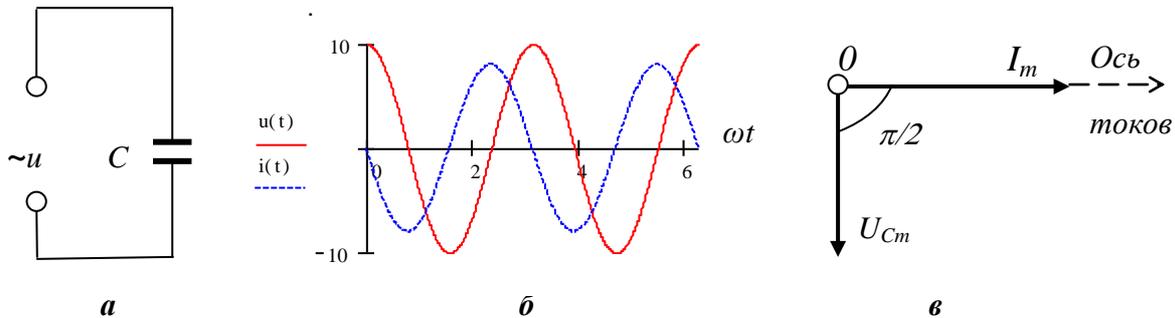


Рис.4

Напряжение на конденсаторе C равно выходному напряжению источника

$$u_C = \frac{q}{C} = U_m \cos \omega t. \quad (8)$$

Так как $i = \frac{dq}{dt}$ и $q = Cu$, то $i = \frac{d}{dt}(CU_m \cos \omega t)$.

$$i_C = -CU_m \omega \sin \omega t = I_{Cm} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right), \quad (9)$$

где
$$I_{Cm} = C\omega U_m = \frac{U_{Cm}}{1/C\omega} = \frac{U_{Cm}}{X_C}. \quad (10)$$

Величина
$$X_C = 1/\omega C \quad (11)$$

называется *емкостным* сопротивлением цепи. (Индекс C при обозначении тока указывает *лишь на то*, что он протекает в цепи с чисто емкостной нагрузкой).

Для постоянного тока $\omega=0$, поэтому конденсатор представляет бесконечно большое сопротивление. С ростом частоты переменного тока емкостное сопротивление уменьшается.

Из сравнения формул (9) и (1) видно, протекающий через конденсатор ток *опережает* по фазе напряжение на емкости на $\pi/2$. (рис. 4,б). На векторной диаграмме (рис. 4,в) вектор тока I_{Cm} повернут на угол $\pi/2$ от U_{Cm} в сторону *положительного* направлению вращения.

Сопротивления X_C и X_L называют *реактивными*. На них *не происходит* превращения энергии электрического тока во внутреннюю энергию нагрузки несмотря на наличие сопротивления (в этом смысл их названия).

4.Рассмотрим электрическую цепь с сосредоточенными параметрами R, L, C (рис. 5,а). Под действием переменного напряжения U_{BX} в цепи установится переменный ток I , величина которого *одинакова* во всех элементах – резисторе, катушке и конденсаторе, так как они соединены последовательно (ток через каждый из вольтметров считаем пренебрежимо малым по сравнению с I). Протекающий ток вызывает на них падение напряжения: $U_R = IR$ – на активном сопротивлении, $U_L = IX_L = I\omega L$ – на индуктивности и $U_C = IX_C = I \cdot 1/\omega C$ – на емкости. Величинами U_R, U_L, U_C, U_{BX} обозначены напряжения, которые показывают соответствующие вольтметры. Сумма напряжений должна быть равна приложенному к данной цепи напряжению U_{BX} . Но эта сумма не может быть ни арифметической, ни алгебраической, а только векторной, так как между напряжениями существует *фазовые сдвиги*.

Для расчета цепей переменного тока применяются два метода: 1) так называемый *символический* – это аналитический метод с использованием комплексных переменных [1,3,4] и 2) *графический* – метод векторных диаграмм. Воспользуемся вторым [3].

Построение векторной диаграммы для последовательного контура производится в следующем порядке.

1. В произвольном направлении, например горизонтально, прочерчивают *ось токов* и на ней в определенном масштабе откладывают вектор тока I_m . Вместо амплитудного значения можно откладывать эффективное, $I = I_m/\sqrt{2}$, т.е. показание прибора. Это эквивалентно уменьшению масштаба диаграммы в $\sqrt{2}$ раз.

2. В том же направлении откладывают вектор U_R , – падение напряжения на активном сопротивлении, которое *синфазно* току. Масштаб для напряжения должен быть выбран, разумеется, свой.

3. Под углом $-\pi/2$ к вектору тока строят вектор U_C , так как напряжение на конденсаторе *отстает от тока* по фазе на эту величину.

4. Под углом $+\pi/2$ к оси токов проводят вектор U_L , так как напряжение на индуктивности *опережает ток* по фазе.

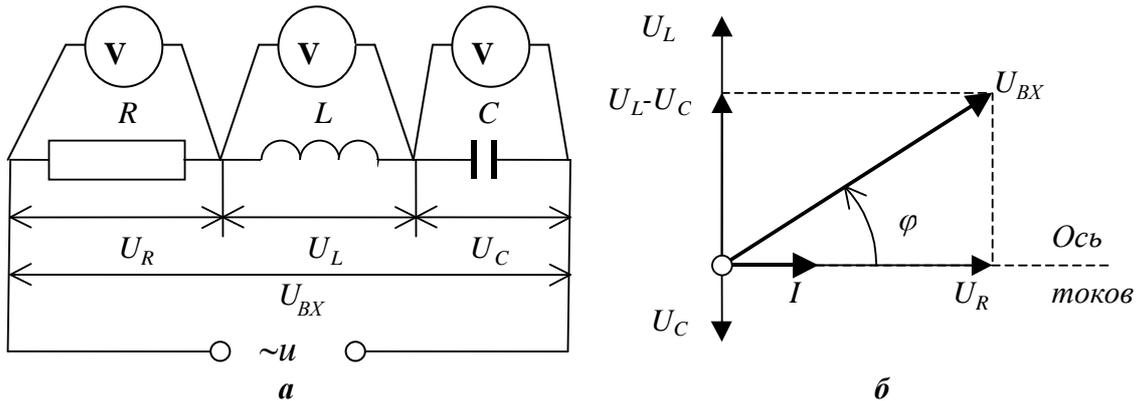


Рис.5

5. Находят векторную сумму всех напряжений, получается вектор U_{BX} . Видно, что ток в цепи I не совпадает по фазе с приложенным к ней напряжением U_{BX} (рис. 5,б). φ – *разность фаз* тока и напряжения (по-другому, *сдвиг фаз* между током и напряжением).

6. Измерение длины суммарного вектора с учетом масштаба напряжения дает входное напряжение в вольтах, а угол сдвига фаз измеряется на диаграмме транспортиром или вычисляется тригонометрически. В этом состоит *графический* способ расчета цепи.

Итак, если напряжение на входе цепи изменяется по закону $u = U_m \cos \omega t$, то в цепи течет ток $i = I_m \cos(\omega t + \varphi)$, причем разность фаз φ может быть как положительной, так и отрицательной.

Аналитически величины I_m и φ определяются следующим образом. Из векторной диаграммы следует, что

$$U_{BX}^2 = (U_L - U_C)^2 + U_R^2,$$

$$U_m^2 = I_m^2 \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 + I_m^2 R^2. \quad (12)$$

Отсюда

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}. \quad (13)$$

Вместо *амплитудных* значений в формуле (13) можно писать *эффективные* (или действующие) значения тока и напряжения, которые в $\sqrt{2}$ раз меньше амплитудных

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \quad (14)$$

Уравнение (14) выражает закон Ома для цепей переменного тока. Роль сопротивления здесь играет выражение, стоящее в знаменателе,

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}, \quad (15)$$

которое называется *полным сопротивлением*.

Таким образом, **переменный ток в участке цепи прямо пропорционален переменному напряжению на этом участке и обратно пропорционален его полному сопротивлению**. Так можно сформулировать закон Ома.

Разность между фазой тока и фазой напряжения (сдвиг фаз) зависит от активного и реактивного сопротивлений. Из рис. 5,б следует, что

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_L - U_C}{U_R} = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}. \quad (16)$$

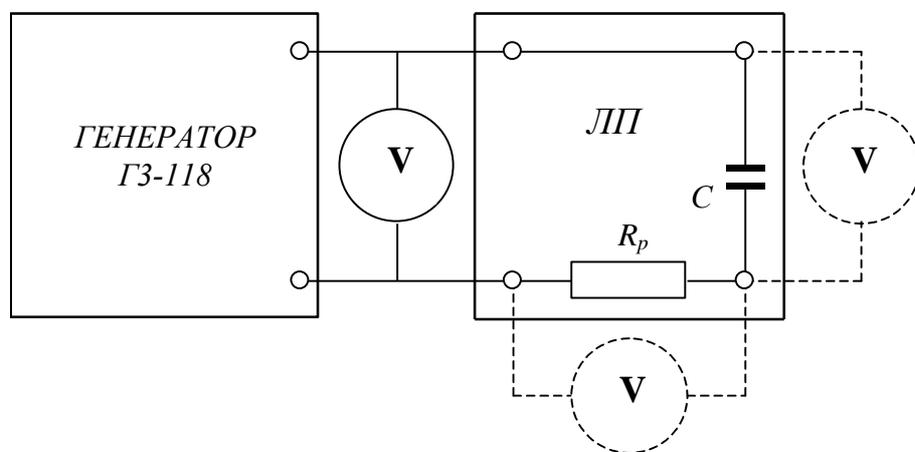
Целью работы является определение сдвига фаз между током и напряжением с применением векторных диаграмм в наиболее часто встречающихся цепях переменного тока.

Упражнение 1

Цепь с емкостной нагрузкой (RC-цепь)

Чтобы построить векторную диаграмму, необходимо знать падение напряжения на всех элементах рассматриваемой цепи. К этому сводятся предстоящие действия.

Измерения. 1.Соберите электрическую цепь (RC-цепь) по схеме (рис.6), где ЛП – лабораторная панель. Предложите преподавателю или лаборанту



проверить ее. В цепи отсутствует амперметр. Поэтому силу тока в цепи предлагается определять из закона Ома по падению напряжения на резисторе с известным сопротивлением R_p .

2.Включите вольтметр. Нажмите клавишу

Рис.6
 клавишу “ U_{\sim} ” – измерения переменного напряжения и клавишу “АВТ” – автоматический выбор предела измерения.

3.Установите с помощью декадных переключателей и десятичного множителя частоту генератора ГЗ-118 **1,10 кГц**.

Строгое предупреждение! Нельзя выставлять нули на всех декадных переключателях частоты генератора! Согласно инструкции прибор генерирует колебания от 10 Гц до 200 кГц. Не следует заставлять его делать невозможное. Нарушение инструкции сопровождается перегоранием транзисторов выходного каскада генератора.

Включите генератор в сеть, установите входное напряжение $U_{BX}=3...4$ В (оно же – напряжение на выходе генератора).

4.Присоединяя поочередно вольтметр параллельно конденсатору C и резистору R_p , запишите его показания U_C и U_R точно три значащие цифры в соответствующие колонки табл.1.

Таблица 1

$R_p=$								
$\nu,$ кГц	$U_{BX},$ В	$U_R,$ В	$U_C,$ В	$I,$ А	$Z_1,$ Ом	$C,$ Ф	$\varphi_{гр},$ град.	$\varphi_{ан},$ град.

5.Проведите аналогичные измерения при частотах генератора 2,10; 3,10; 4,10; 5,10 кГц, каждый раз проверяя и поддерживая прежнее входное напряжение.

6.Выключите генератор. С помощью того же универсального вольтметра измерьте сопротивление резистора R_p и запишите его в табл.1.

Обработка результатов измерений. 1.Для всех частот постройте векторные диаграммы напряжений на миллиметровой бумаге. Делать это надо так, как сказано выше (см. с.92). Проведите ось токов, отложите на ней вектор тока I (в масштабе). На этой же оси отложите вектор U_R (в своем масштабе). Из конца вектора U_R под углом $-\pi/2$ постройте вектор U_C (Падением напряжения на активном сопротивлении конденсатора в данном случае можно пренебречь. О причинах этого кратко написано в работе №325).

2.Постройте суммарный вектор двух вышеуказанных. Проверьте, что векторная сумма падений напряжения на конденсаторе и резисторе, полученная Вами, равна входному напряжению.

3.На полученных диаграммах измерьте транспортиром угол между вектором входного напряжения и вектором тока I и впишите его в колонку $\varphi_{гр}$ табл.1. Это искомая разность фаз, найденная графически.

Сдвиг по фазе тока и напряжения можно найти аналитически из формулы (16), [см. Введение]. Обозначим его $\varphi_{ан}$.

$$\varphi_{ан} = \arctan \frac{U_C}{U_R}.$$

4.Сравните между собой значения углов, полученные графическим и аналитическим способом. Их совпадение или близкие величины подтверждают соответствие теоретических положений, содержащихся во Введении,

экспериментальным результатам. Если углы отличаются более, чем на 5% друг от друга, то в измерениях или вычислениях, скорее всего, содержится ошибка.

5. Вычислите ток в цепи I и сопротивление конденсатора $Z_1 = X_C$ на всех частотах.

$$I = \frac{U_R}{R_p}, \quad Z_1 = \frac{U_C}{I}.$$

6. Из формулы (11) найдите емкость C при всех частотах ν .

$$C = \frac{1}{2\pi\nu} \cdot \frac{1}{Z_1}.$$

Вычислите среднее значение емкости по всем измерениям, а также полуширину доверительного интервала ΔC .

Упражнение 2

Цепь с индуктивной нагрузкой (RL-цепь)

В качестве индуктивной нагрузки применяется катушка, содержащая несколько тысяч витков медного провода и не содержащая железного сердечника. При наличии ферромагнитного сердечника индуктивность катушки зависит от протекающего по ней тока. Нам желательно иметь ее постоянной несмотря на изменение тока в ходе опыта.

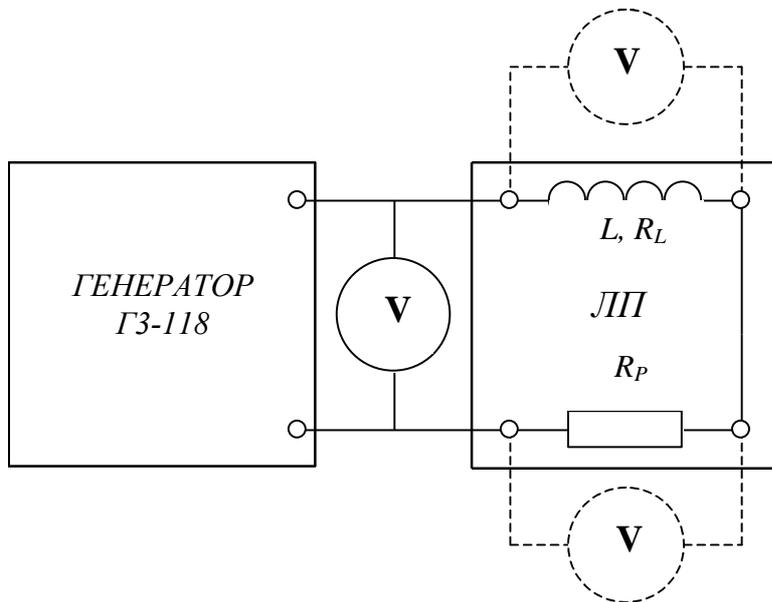


Рис.7

Измерения. 1. Не собирая цепь, включите вольтметр в сеть, нажмите клавишу “R” и клавишу “АВГ”, измерьте сопротивление постоянному току резистора R_p и катушки R_L , запишите их в табл.2.

2. Соберите электрическую цепь по схеме (рис.7).

3. Включите вольтметр параллельно выходу генератора. Нажмите клавиши “U~” и “АВГ”.

4. Установите частоту

генератора **1,10 кГц**, включите генератор в сеть. Установите по вольтметру напряжение на выходе (оно же входное напряжение для нагрузки) $U_{ВХ} = 3...4$ В.

5. Присоединяя вольтметр поочередно к клеммам катушки L и резистора R_p , измерьте U_L и U_R с точностью до трех значащих цифр.

6. Повторите подобные измерения на частотах 2,10; 3,10; 4,10; 5,10 кГц, поддерживая одно и то же напряжение $U_{ВХ}$.

Таблица 2

$R_P =$					$R_L =$					
$\nu,$ кГц	$U_{BX},$ В	$U_L,$ В	$U_R,$ В	$I,$ мА	$Z_2,$ Ом	$L,$ Гн	$IR_L,$ В	$I\omega L,$ В	$\varphi_{зр},$ град.	$\varphi_{ан},$ град.

Обработка результатов измерений. 1. Постройте на миллиметровой бумаге векторные диаграммы по данным табл.2. Но в отличие от идеальной индуктивности, рассмотренной во Введении, реальная катушка обладает некоторым активным сопротивлением R_L , которое Вы измерили в п.1. Поэтому ее полное сопротивление

$$Z_2 = \sqrt{R_L^2 + (\omega L)^2} \quad (17)$$

и U_L есть падение напряжения на нем. При этом вектор U_L не перпендикулярен вектору тока I . Чтобы построить U_L , его надо представить как сумму двух слагаемых

$$\vec{U}_L = \vec{IR}_L + \vec{I\omega L}.$$

Первое слагаемое \vec{IR}_L совпадает по фазе с током и поэтому сонаправлено с вектором тока, второе – перпендикулярно вектору тока и опережает его по фазе.

Чтобы построить векторную диаграмму по полученным результатам, отложите в выбранном масштабе вдоль оси токов вектор U_R , к нему прибавьте вектор такого же направления IR_L , затем из его конца под углом $+\pi/2$ постройте вектор $I\omega L$. Если соединить начало первого вектора с концом последнего, получится суммарный вектор, который должен быть равен U_{BX} .

Действительно

$$\vec{U}_{BX} = \vec{U}_R + \vec{U}_L.$$

2. Измерьте транспортиром угол между вектором тока и вектором входного напряжения. Назовем его углом сдвига фаз, определенным *графическим* способом – $\varphi_{зр}$.

3. Определите ток в цепи из закона Ома $I = U_R / R_P$.

4. Найдите полное сопротивление катушки по формуле

$$Z_2 = U_L / I.$$

5. Из формулы (17) найдите L при каждой частоте. Вычислите среднее значение индуктивности \bar{L} и полуширину доверительного интервала ΔL .

6. Из формулы (16) найдите угол сдвига фаз $\varphi_{ан}$ между током в цепи и напряжением. Назовем его углом, определенным *аналитически*.

$$\varphi_{ан} = \arctan \frac{\omega L}{R} = \arctan \frac{I\omega L}{I(R_P + R_L)} = \arctan \frac{I\omega L}{U_R + IR_L}. \quad (18)$$

Сравните значения углов $\varphi_{зр}$ и $\varphi_{ан}$ на всех частотах. Есть ли между ними разница и чему она равна?

Упражнение 3

Цепь с комбинированной нагрузкой (RCL-цепь)

Рассмотрим электрическую цепь переменного тока, содержащую все элементы: активное сопротивление R , емкость C и индуктивность L .

Измерения. 1. Соберите цепь по схеме (рис.8).

2. Измерьте при входном напряжении 3-4 В и частотах 1,10; 2,10; 3,10; 4,10; 5,10 кГц падение напряжения на резисторе, катушке и конденсаторе и запишите их в соответствующие колонки табл.3.

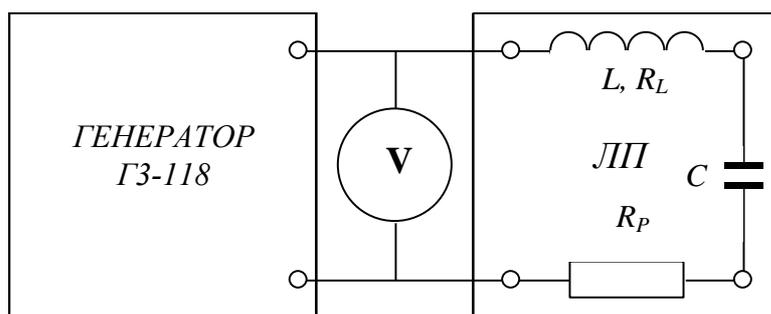


Рис.8

Обработка результатов измерений. 1. Определите ток в цепи из закона Ома, если известно падение напряжения U_R на известном сопротивлении R_P .

$$I = U_R / R_P.$$

2. Рассчитайте все остальные величины, входящие в табл.3.

Таблица 3

№ изм.	ν , кГц	$R_P =$				$R_L =$				
		$U_{ВХ}$, В	U_R , В	U_L , В	U_C , В	I , А	$I\omega L$, В	IR_L , В	$\varphi_{зр}$, град.	$\varphi_{ан}$, град.

3. Постройте векторные диаграммы для данной цепи. Эту работу рационально выполнять в следующем порядке.

а) По оси токов отложите вектор U_R .

б) Из конца вектора U_R в том же направлении проведите вектор IR_L .

в) Из конца вектора IR_L под углом $+\pi/2$ постройте вектор $I\omega L$.

г) Из конца вектора $I\omega L$ проведите ему противоположный вектор U_C .

д) Проведите вектор из начала первого к концу последнего вектора. Это есть суммарный вектор всех перечисленных выше векторов. Ясно, что по модулю он должен быть равен входному напряжению. Направление вектора входного напряжения по отношению к вектору тока в данной цепи дает угол сдвига фаз между ними.

4. Измерьте транспортиром угол, образованный вектором U_{BX} и ось токов. Это угол сдвига фаз между током и напряжением, который определен *графическим* методом. Обозначьте его, как и прежде, $\varphi_{гр}$.

Активным сопротивлением конденсатора и проводов можно пренебречь ввиду их малости по сравнению с емкостным сопротивлением и активным сопротивлением резистора и катушки.

Разумеется, вместо вычисления *падений напряжения* на индуктивном $I\omega L$, емкостном $I/\omega C$ и активном сопротивлении $I(R_P + R_L)$ можно было бы ограничиться определением указанных *сопротивлений*. Но этого не сделано. Тем самым хотим обратить внимание студентов на совпадение показания вольтметра U_C с $I/\omega C$, на отличие U_L от $I\omega L$ и подчеркнуть причину этого.

5. Рассчитайте угол сдвига фаз из формулы (16). Назовем его аналитическим – $\varphi_{ан}$.

$$\varphi_{ан} = \arctan \frac{I\omega L - U_C}{I(R_P + R_L)}.$$

Сравните его с углом, который был получен графическим способом.

6. Постройте график зависимости угла сдвига фаз $\varphi_{гр}$ от частоты ν переменного тока по данным таблиц 1, 2 и 3.

7. *Вывод* (по всей работе в целом) *запишите* в своей рабочей тетради.

Контрольные вопросы

1. Что такое активное сопротивление в цепи переменного тока? Какие элементы цепи обладают активным сопротивлением? Будут ли они его иметь в цепи постоянного тока?

2. Что такое индуктивное сопротивление? От чего оно зависит? По какой формуле оно вычисляется в работе? От чего зависит индуктивность?

3. Докажите, что напряжение на индуктивности опережает ток по фазе. Изобразите векторную диаграмму для данного случая.

4. Докажите, что колебания напряжения на емкости отстают по фазе от тока. Нарисуйте векторную диаграмму в этом случае.

5. Что такое емкостное сопротивление? От чего оно зависит? Как находится в данной работе? Есть ли среди Ваших результатов такие, на основании которых можно утверждать, что активное сопротивление конденсатора мало по сравнению с емкостным?

6. Что такое метод векторных диаграмм и как им пользоваться в конкретной ситуации?

Список рекомендуемой литературы

1. Калашников С.Г. Электричество. М.: Наука, 1977. §220.
2. Лабораторные занятия по физике /Под ред. Л.Л.Гольдина. М.: Наука, 1983. С.312.
3. Савельев И.В. Курс общей физики. М.: Наука, 1973. Т.2. §92-95.
4. Сивухин Д.В. Общий курс физики. М.: Наука, 1983. Т.3. §129.