Лабораторная работа №327

ВЫНУЖДЕННЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Приборы и принадлежности: лабораторная панель «Колебательный контур», генератор сигналов низкочастотный Г3-120, вольтметр В7-38, осциллограф С1-94.

Введение. Рассмотрим электрическую цепь, состоящую из резистора с активным сопротивлением R, катушки с индуктивностью L и конденсатора емкостью C (рис.1). Предположим, что соединительные провода не обладают ни сопротивлением, ни емкостью, ни индуктивностью. Такая электрическая цепь называется цепью с сосредоточенными параметрами. В каком-то месте разорвем последовательную цепь элементов и на образовавшиеся контакты подадим переменное периодическое напряжение $U(t)$ от внешнего источника тока, которое изменяется со временем по гармоническому закону

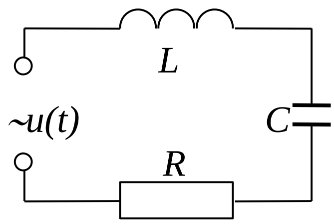

Рис.1

$$u(t) = U_m \cos\omega t, \tag{1}$$

где $u(t)$ – мгновенное значение напряжения в момент времени t,

U_m– амплитуда входного напряжения,

ω – круговая (циклическая) частота колебаний входного напряжения.

Для описания изменений напряжения и тока в такой цепи *достаточно* написать и *решить одно уравнение* – уравнение Кирхгофа (в дальнейшем нам предстоит в этом убедиться). Согласно второму правилу Кирхгофа алгебраическая сумма падений напряжения на всех элементах замкнутого контура равна алгебраической сумме ЭДС, действующих в контуре,

$$iR + u_C = -L\frac{di}{dt} + u(t), \tag{2}$$

где i – мгновенное значение тока в цепи,

u_C – напряжение на конденсаторе,

$-L\dfrac{di}{dt}$ – ЭДС самоиндукции катушки.

Вместо ЭДС источника тока в уравнение поставлено напряжение на его зажимах $u(t)$, тем самым учтено и исключено падение напряжения на внутреннем сопротивлении источника.

Перепишем уравнение (2) так:

$$L\frac{di}{dt}+Ri+u_C=U_m\cos\omega t\,. \tag{3}$$

Перейдем в уравнении (3) к одной переменной, например, к u – напряжению на конденсаторе (индекс C в дальнейшем опустим для упрощения записи), используя следующие замены:

$$i=\frac{dq}{dt}=\frac{d(Cu)}{dt}=C\frac{du}{dt} \quad \text{и} \quad \frac{di}{dt}=C\frac{d^2u}{dt^2}\,. \tag{4}$$

После этого уравнение (3) примет вид

$$LC\frac{d^2u}{dt^2}+RC\frac{du}{dt}+u_C=U_m\cos\omega t\,. \tag{5}$$

Разделив все члены уравнения (5) на LC и вводя обозначения, принятые в учебной литературе,

$$\frac{R}{L}=2\beta\,, \quad \frac{1}{LC}=\omega_0^2\,, \tag{6}$$

получим
$$\ddot{u}+2\beta\dot{u}+\omega_0^2u=U_m\omega_0^2\cos\omega t\,. \tag{7}$$

Величина β называется коэффициентом затухания, ω_0 – собственной частотой контура.

Решив полученное уравнение (7) и используя соотношения (4), можно получить ответы на вопросы о том, как изменяется напряжение на конденсаторе и других элементах цепи, как изменяется ток в цепи со временем, от чего зависит их величина и т.п. Таков теоретический подход к анализу данной цепи. Затем сравниваются теоретические результаты с экспериментальными. *В этом состоит одна из задач данной лабораторной работы.*

Итак, решаем неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка (7). Его решение представляет собой сумму двух слагаемых

$$u = u_1 + u_2\,,$$

где u_1 – общее решение соответствующего однородного уравнения,

u_2 – одно из частных решений неоднородного уравнения.

Общее решение однородного уравнения

$$\ddot{u}_1+2\beta\dot{u}_1+u_1=0$$

представляет собой затухающие *собственные* колебания, которые рано или поздно затухнут, т.е. u_1 обратится в нуль. Поэтому для нас представляет наибольший интерес нахождение слагаемого u_2, характеризующего установившиеся колебания напряжения под действием внешнего источника (так называемые *вынужденные* колебания).

Частное решение уравнения (7) *проще* искать в комплексной форме, заменив в его правой части $\cos\omega t$ на $\exp(j\omega t)$, которая пропорциональна действительной части выражения

$$e^{j\omega t}=\cos\omega t+j\sin\omega t\,.$$

Пусть решением нового уравнения является комплексная функция $\hat{u}$ (u с «крышей»), так что

$$\ddot{\hat{u}}+2\beta\dot{\hat{u}}+\omega_0^2\hat{u}=U_m\omega_0^2 e^{j\omega t}. \qquad (8)$$

Тогда действительная часть этой функции, т.е. $\mathrm{Re}\,\hat{u}$, является решением уравнения, у которого в правой части стоит $\mathrm{Re}\,e^{j\omega t}=\cos\omega t$, т.е. искомым решением уравнения (7) [1].

Будем искать частное решение уравнения (8) в виде

$$\hat{u}=Ae^{j\omega t}. \qquad (9)$$

Функция $\hat{u}$ должна удовлетворять неоднородному уравнению (8). Продифференцируем функцию (9) по времени

$$\dot{\hat{u}}=jA\omega e^{j\omega t},$$

$$\ddot{\hat{u}}=-A\omega^2 e^{j\omega t}$$

и подставим в уравнение (8)

$$-A\omega^2 e^{j\omega t}+2j\beta\omega Ae^{j\omega t}+\omega_0^2 Ae^{j\omega t}=U_m\omega_0^2 e^{j\omega t}.$$

$$\left(-\omega^2+\omega_0^2+2j\beta\omega\right)Ae^{j\omega t}=U_m\omega_0^2 e^{j\omega t}.$$

Сократим на $e^{j\omega t}$ и найдем амплитуду колебаний напряжения на конденсаторе A в формуле (9)

$$A=\frac{U_m\omega_0^2}{\omega_0^2-\omega^2+2j\beta\omega}.$$

Амплитуда колебаний оказалась комплексной величиной благодаря знаменателю, который мы представим в виде

$$\left(\omega_0^2-\omega^2\right)+2j\beta\omega=\rho\, e^{j\psi}. \qquad (10)$$

$$A=\frac{U_m\omega_0^2}{\rho e^{j\psi}},$$

где ρ и ψ – вещественные величины.

Чтобы найти модуль комплексного числа, умножим выражение (10) на взаимно сопряженное выражение

$$\left(\omega_0^2-\omega^2\right)-2j\beta\omega=\rho e^{-j\psi}.$$

В результате получится

$$\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\left(2\beta\omega\right)^2=\rho^2,$$

откуда

$$\rho=\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\left(2\beta\omega\right)^2}.$$

[1] Re от франц. Reel, читается «реэль», – действительный. Im от франц. Imaginaire, читается «имажинер»,– мнимый.

Таким образом, колебания напряжения на конденсаторе описываются следующим соотношением:

$$\hat{u}=\frac{U_m\omega_0^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\left(2\beta\omega\right)^2}\,e^{j\psi}}e^{j\omega t},$$

или

$$\hat{u}=\frac{U_m\omega_0^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\left(2\beta\omega\right)^2}}e^{j(\omega t-\psi)}$$

и, следовательно,

$$u_2=\mathrm{Re}\hat{u}=\frac{U_m\omega_0^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\left(2\beta\omega\right)^2}}\cos(\omega t-\psi), \tag{11}$$

Итак, в рассматриваемой электрической цепи с течением времени устанавливаются *вынужденные колебания с той же частотой* ω, *какова частота колебаний источника*. *Амплитуда* вынужденных колебаний напряжения на конденсаторе – то, что стоит перед знаком cos в формуле (11) – не зависит от времени и определяется, в основном, частотой собственных колебаний ω_0 и частотой внешнего воздействия ω, такова

$$u_{2m}=\frac{U_m\omega_0^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\left(2\beta\omega\right)^2}}. \tag{12}$$

Характерный вид резонансных кривых напряжения на конденсаторе колебательного контура, определяемых формулой (12), показан на рис.2.

Исследуем амплитуду колебаний напряжения на конденсаторе u_{2m} (12) на экстремум. Амплитуда становится максимальной в том случае, если знаменатель минимален, а его производная по ω обращается в нуль

$$\frac{d}{d\omega}\left[\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2\right]=0,$$

$$4\omega\left(\omega^2+2\beta^2-\omega_0^2\right)=0.$$

Полученное выражение обращается в нуль, если 1) $\omega=0$, но этот случай для нас в данный момент не представляет интереса; или 2) $\omega^2+2\beta^2-\omega_0^2=0$. Отсюда следует, что при некоторой частоте источника амплитуда колебаний становится наибольшей. Такую частоту называют *резонансной* – $\omega_\text{р}$. Для резонансной частоты из условия (2) получается следующая формула:

$$\omega_\text{р}=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}\,. \tag{13}$$

Явление возрастания амплитуды вынужденных колебаний при определенном значении частоты внешнего воздействия называется *резонансом.*

Если коэффициент затухания β небольшой, т.е. $2\beta^2 << \omega_0^2$, то резонансная частота почти совпадает с собственной частотой контура ω_0. Амплитуда напряжения на конденсаторе при этом равна

$$u_{2p} = \frac{U_m \omega_0}{2\beta}. \qquad (14)$$

Из формулы (11) видно, что напряжение на конденсаторе u_2 и входное напряжение $u(t)$ (1) не совпадают по фазе. Разность фаз ψ между ними, также как и амплитуда, зависит, в основном, от частот ω и ω_0 ; ее можно определить как аргумент комплексного числа (10):

$$tg\,\psi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}, \qquad \psi = arc\,tg\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \qquad (15)$$

График зависимости разности фаз от частоты колебаний источника представлен на рис.3.

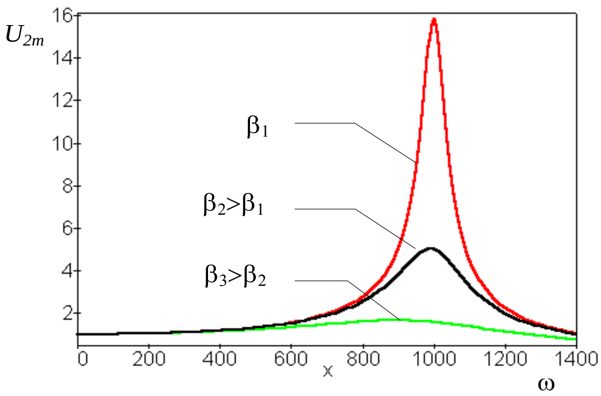

Рис.2. График зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты источника

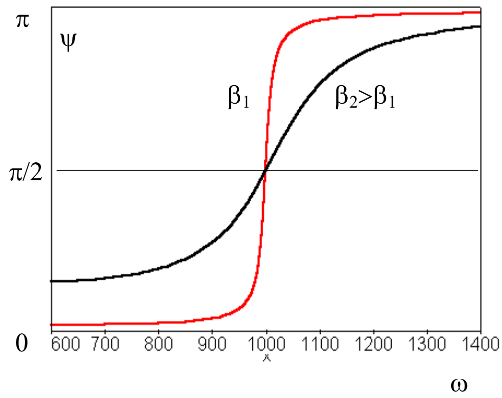

Рис.3. График зависимости разности фаз напряжения на конденсаторе и напряжения источника от частоты

Если от величин β и ω_0 перейти к параметрам колебательного контура L,C,R, то для амплитуды колебаний напряжения на конденсаторе вместо выражения (12) получится следующая формула:

$$u_{2m} = \frac{U_m}{\omega C\sqrt{\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 + R^2}}. \qquad (16)$$

Вместо выражения (13) для резонансной частоты ω_p получается формула

$$\omega_p = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}. \qquad (17)$$

Амплитуда напряжения (14) на резонансной частоте такова:

$$u_{2р}=U_m\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\,. \tag{18}$$

Зная напряжение на конденсаторе (11), можно вычислить заряд конденсатора, а затем и ток в контуре

$$q=Cu,\quad i=\frac{dq}{dt},$$

$$q=\frac{CU_m\omega_0^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2}}\cos(\omega t-\psi),$$

$$i=-\frac{CU_m\omega_0^2\,\omega}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2}}\sin(\omega t-\psi),$$

$$i=\frac{CU_m\omega_0^2\,\omega}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2}}\cos\left(\omega t-\psi+\frac{\pi}{2}\right). \tag{19}$$

Таким образом, ток в конденсаторе опережает напряжение на нем по фазе на $\pi/2$.

Амплитуда тока также изменяется с частотой источника резонансным образом согласно формуле

$$i_m=\frac{CU_m\omega_0^2\,\omega}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2}}\,, \tag{20}$$

а график этой зависимости приведен на рис. 4.

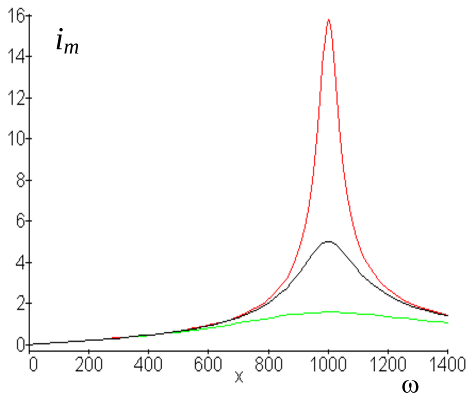

Рис.4

Амплитуда силы тока имеет максимальное значение при частоте, совпадающей с собственной частотой контура ω_0. Амплитуда, выраженная через параметры цепи L,C,R, запишется так:

$$i_m=\frac{U_m}{\sqrt{\left(\frac{1}{\omega C}-\omega L\right)^2+R^2}}\,. \tag{21}$$

Для разности фаз вместо формулы (15) запишем следующую:

$$\psi=arctg\,\frac{R}{\frac{1}{\omega C}-\omega L}\,. \tag{22}$$

Цель лабораторной работы: а)наблюдение резонанса напряжений в последовательном контуре, б)снятие резонансных характеристик такого контура, в)определение его резонансной частоты, г)сравнение результатов, полученных при теоретическом анализе, с опытными данными.

Упражнение 1
Получение резонансных кривых колебательного контура

Измерения. 1.Соберите электрическую цепь согласно схеме, представленной на рис. 5. Напряжение синусоидальной формы подается с соответствующего выхода генератора сигналов Г3-120 на входные клеммы лабораторной панели, обозначенные знаками *~Г*.

Все элементы электрической цепи колебательного контура уже соединены на лабораторной панели (**ЛП**). Величину емкости и активного сопротивления можно изменять с помощью переключателей *R1...R3* и *C1,C2*. *R1* – омическое сопротивление катушки 114 Ом, последовательно с которым включается резистор 330 Ом, если нажата и зафиксирована клавиша *R2*, или 1,0 кОм, если утоплена клавиша *R3*.

Начать измерения рекомендуем при нажатых клавишах *R1, C1*.

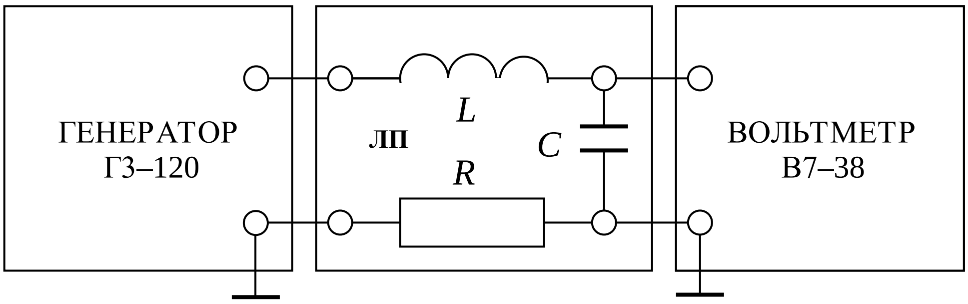

Рис.5

2.Поставьте ручки управления на генераторе Г3-120 до его включения в сеть в следующие положения:

- *«Множитель частоты» – 1,*
- переключатель *«dB»* – 0,
- регулятор напряжения поверните против часовой стрелки до упора,
- частотный лимб оставьте в произвольном положении.

3.На вольтметре В7-38 нажмите клавишу *U~* , так как предстоит измерять переменное напряжение.

4.Предложите преподавателю или лаборанту проверить установку.

5.Включите генератор и вольтметр в сеть 220 В.

6.Установите напряжение генератора по его стрелочному индикатору около 2 В. Обратите внимание на то, что при этом показывает вольтметр.

7.Определите, в каком частотном диапазоне лежит резонансная частота данного электрического контура. Для этого повращайте лимб при всех положениях переключателя *«Множитель частоты»* и найдите, где показания вольтметра становятся наибольшими. В этом диапазоне в дальнейшем и следует снимать резонансную характеристику контура.

8.Изменяя частоту генератора через 100...200 Гц, снимите показания вольтметра и запишите их в таблицу. Эти измерения проведите с обоими конденсаторами при трех сопротивлениях.

ν, *Гц*	*Напряжение на конденсаторе* U_C *,В*					
	C1=0,011 мкФ			*C2=0,033 мкФ*		
	R1=114 Ом	*R2=444 Ом*	*R3=1,14 кОм*	*R1=114 Ом*	*R2=444 Ом*	*R3=1,14 кОм*

Обработка результатов. 1.Постройте графики зависимости напряжения на конденсаторе колебательного контура от частоты колебаний источника. С какими теоретическими результатами согласуются полученные данные?

2.По резонансным кривым определите резонансную частоту того и другого контура.

3.Рассчитайте индуктивность катушки, включенной в контур, по формуле (17), положив в ней *R=0*, т.е. считая $2\beta^2 << \omega_0^2$ (проверьте это!).

Упражнение 2
Наблюдение разности фаз между напряжением на конденсаторе и напряжением источника колебаний

Согласно теории фазовая резонансная кривая, представленная на рис.3, при резонансной частоте проходит через отметку $\pi/2$. Этот факт можно использовать для получения соответствующей фигуры Лиссажу на экране осциллографа. С этой целью на Y-вход осциллографа подается напряжение с конденсатора колебательного контура, а на X-вход – напряжение с выхода генератора (см. рис.6). При этом происходит сложение двух взаимно

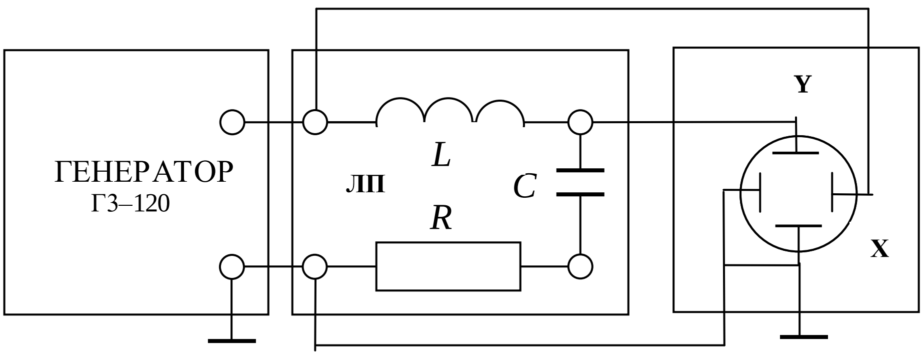

Рис.6

перпендикулярных колебаний, сдвинутых друг по отношению к другу на некоторый угол ψ. (Подробнее о сложении колебаний см. работу №331).

Измерения. 1.Соберите электрическую цепь по схеме, представленной на рис.6 и, не включая приборы в сеть, дайте проверить ее преподавателю или лаборанту. Гнездо Х-входа у осциллографа С1-94 расположено на тыльной стороне. Развертка осциллографа – *ждущая* (клавиша "*Авт/ждущ*" утоплена). В этом случае горизонтальная развертка производится напряжением генератора Г3-120.

После проверки включите осциллограф, затем генератор в сеть 220 В. Установите выходное напряжение генератора 2...3 В.

3.Вращая частотный лимб генератора в области резонансной частоты данного контура, наблюдайте изменение размеров и ориентации эллипса на экране осциллографа. Нарисуйте в тетради осциллограммы при резонансной, при более низкой и более высокой частоте генератора.

4.Добейтесь того, чтобы оси эллипса совпали с осями координатной сетки осциллографа. Спишите то значение частоты генератора, при которой это положение достигнуто. Совпадает ли полученное значение частоты с резонансным значением, полученным из резонансных кривых? Подумайте, какой из способов определения резонансной частоты дает более точный результат.

Упражнение 3
Наблюдение разности фаз между приложенным напряжением и током в колебательном контуре

Из теории следует, что последовательный колебательный контур на резонансной частоте представляет собой чисто активную нагрузку. Следовательно, между напряжением, приложенным к входным клеммам контура, и током в нем разность фаз равна нулю. Чтобы убедиться в этом, произведите сложение на осциллографе двух напряжений: одного – входного

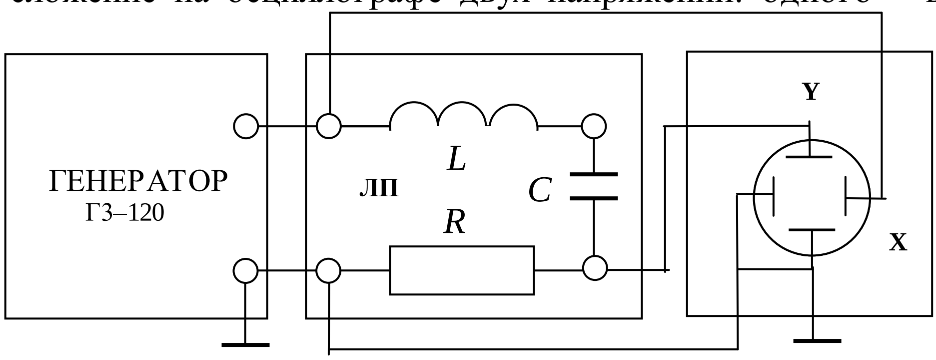

Рис.7

(полного) напряжения контура и другого – падения напряжения на активном сопротивлении, которое пропорционально протекающему по контуру току.
Это явление подробно анализируется в работе №323.

Измерения. 1.Для реализации поставленной выше задачи соберите электрическую цепь, изображенную на рис.7. Активное сопротивление вначале поставьте наибольшее – $R3$, потом его можно уменьшить.

2.После проверки собранной цепи преподавателем или лаборантом включите в сеть осциллограф и генератор. Напряжение на выходе генератора установите по его стрелочному индикатору 2...3 В.

3.Так как на экране осциллографа наблюдается результат сложения двух взаимно перпендикулярных колебаний, то, скорее всего, там будет наблюдаться эллипс. Ручками регулировки осциллографа установите подходящее для наблюдения изображение. Возможно, для уменьшения размеров изображения придется уменьшить на 10; 20 дБ выходное напряжение генератора с помощью аттенюатора, т.е. примерно в 3; 10 раз. Децибел – это единица относительного изменения мощности или напряжения (в данном случае): $10\ дБ=20\ lg\ (U_1/U_2)$. $U_1/U_2 \cong 3$.

4.Медленно вращая частотный лимб генератора около резонансной частоты данного контура (Вы ее ориентировочно знаете из упр.1), наблюдайте за изменением формы эллипса. Что происходит с эллипсом, если Вы переходите через резонансную частоту «снизу – вверх» или наоборот? Нарисуйте (или снимите на кальку) наблюдаемые на экране осциллограммы при резонансной частоте, а также при частотах несколько ниже и несколько выше резонансной.

5.Добейтесь превращения эллипса в наклонную прямую. Что это означает? Запишите частоту генератора, при которой такое событие произошло. Сравните полученное значение с резонансными частотами, полученными в предыдущих упражнениях из наблюдения других резонансных эффектов. Какой из методов определения резонансной частоты колебательного контура, по Вашему мнению, оказался наиболее простым, какой – наиболее точным?

Контрольные вопросы

1.Рассмотрите колебательный контур, который содержит источник переменного напряжения. Напишите для него уравнение Кирхгофа, решите и проанализируйте.

2.Рассмотрите на Ваших графиках, как изменяется амплитуда колебаний напряжения на конденсаторе при изменении частоты. На какую частоту приходятся максимумы резонансных кривых? Что такое резонансная частота колебательного контура? К какому значению будет стремиться амплитуда, если частоту устремить к нулю? А если к бесконечности?

3.Влияет ли включение вольтметра параллельно конденсатору колебательного контура на его резонансную частоту?

4.Как производится измерение разности фаз между током в контуре и напряжением? Что показывают полученные результаты?

5.Как измерить разность фаз между входным напряжением и напряжением на конденсаторе? Что показывает фазовая резонансная кривая?

Список рекомендуемой литературы

1.Лабораторные занятия по физике./Под ред. Л.Л.Гольдина. М.: Наука, 1983. С. 294–305.
2.Савельев И.В. Курс физики. М.: Наука, 1989. Т.2. §71.
3.Сивухин Д.В. Общий курс физики: Электричество. М.: Наука, 1983. Т.3. §127.