

Лабораторная работа №331

СЛОЖЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Приборы и принадлежности: лабораторная панель с генератором фиксированных частот, магазином сопротивлений Р-33 и реактивной нагрузкой, генератор ГЗ-120, фазометр Ф2-1, осциллограф С1-94.

Осциллографический метод дает возможность не только визуально наблюдать электрические колебания и их суперпозицию в цепях переменного тока, но и получать некоторые количественные результаты изучения этих явлений.

Упражнение 1

Сложение колебаний одинакового направления равных частот

Введение. Гармоническое колебание *можно представить* как проекцию вектора, равномерно вращающегося в координатной плоскости xu с угловой скоростью ω , на оси координат. В виде векторов часто представляют и электрические величины, напряжение, мощность, силу переменного тока (см. [1] – метод векторных диаграмм).

Рассмотрим схему электрической цепи, состоящей из активной нагрузки R и реактивной Z , соединенных последовательно, по которым протекает один и тот же переменный ток от его источника – генератора (рис.1).

На сопротивлении R возникает падение напряжения u_1 , на нагрузке Z – u_2 . Оба напряжения изменяются с одинаковой частотой ω , заданной генератором. Но в связи с реактивным характером нагрузки Z фаза напряжения u_2 отличается от фазы напряжения u_1 на величину $\delta = \varphi_2 - \varphi_1$

$$\begin{aligned} u_1 &= u_{m1} \cos(\omega t + \varphi_1), \\ u_2 &= u_{m2} \cos(\omega t + \varphi_2). \end{aligned} \quad (1)$$

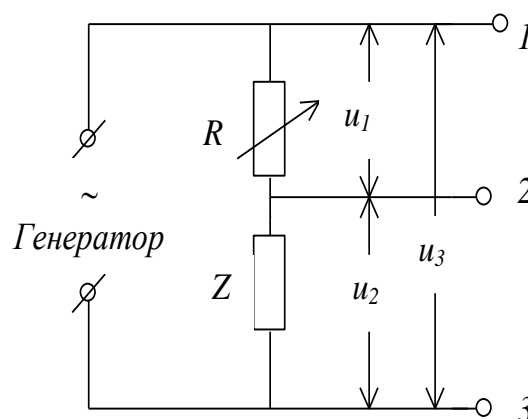


Рис.1

Если напряжение u_1 , снимаемое с клемм 1-2, подать на *вертикальный* вход осциллографа, то на экране будет наблюдаться кривая, изображающая этот колебательный процесс. Отклонение луча осциллографа от горизонтальной оси можно описать уравнением для y_1

$$y_1 = a_1 \cos(\omega t + \varphi_1),$$

где a_1 – амплитуда колебаний луча на экране, пропорциональная амплитуде напряжения u_{m1} ,

$$a_1 = s_y u_{m1}.$$

Коэффициент пропорциональности s_y называется чувствительностью осциллографа по вертикали и измеряется в мм/В [см. лабораторную работу № 330]. Чувствительность можно изменять, увеличивая или уменьшая коэффициент усиления Y -усилителя с помощью переключателя, расположенного на передней панели осциллографа С1-94. Правда, числа около этой ручки обозначают не чувствительность, а величину ей обратную – В/дел, т.е. какое напряжение на входе Y -усилителя вызывает смещение луча на одно деление экранной координатной сетки.

Если на Y -вход осциллографа подать напряжение u_2 с клемм 2-3, то на экране будет наблюдаться осциллограмма следующего процесса:

$$y_2 = a_2 \cos(\omega t + \varphi_2). \quad (2)$$

Если на Y -вход осциллографа подать напряжение с клемм 1-3, то будет видно результирующее колебание от сложения двух вышеуказанных. Но поскольку напряжения u_1 и u_2 сдвинуты по фазе друг относительно друга, то и отклонение луча на экране будет достигать наибольшего отклонения не одновременно. Другими словами, эти напряжения нельзя складывать алгебраически, $u_{m1} + u_{m2} \neq u_{m3}$ равенство должно быть только векторным.

$$\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = \vec{u}_3.$$

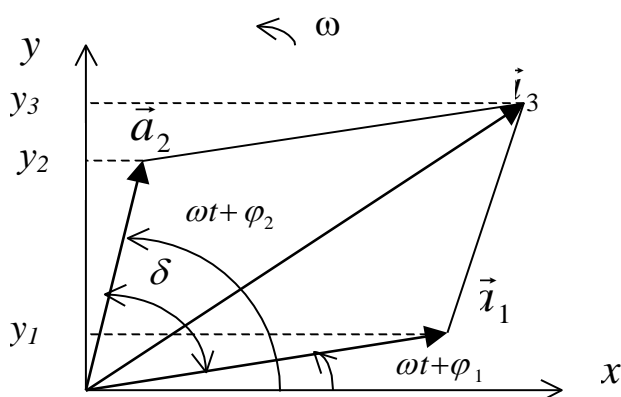


Рис.2

Амплитуды колебаний луча осциллографа, имеющих ту же разность фаз δ , тоже нужно складывать как векторы. Изобразим векторы \vec{a}_1 и \vec{a}_2 на плоскости xu с учетом их фаз (рис.2) Построим по правилу параллелограмма результирующий вектор \vec{a}_3 .

Следовательно, вектор \vec{a}_3 вращается с той же угловой

скоростью, как и векторы \vec{a}_1 и \vec{a}_2 , так что результирующее колебание y_3 будет гармоническим с частотой ω и амплитудой a_3 , определяемой по теореме косинусов.

$$a_3^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \cos[\pi - (\varphi_2 - \varphi_1)],$$

$$a_3^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos \delta, \quad (3)$$

где

$$\delta = \varphi_2 - \varphi_1.$$

Итак, сложение нескольких колебаний одного направления сводится к операции сложения векторов. Рассмотренный способ отличается простотой и наглядностью.

Экспериментальная часть работы состоит в проверке выражения (3). Для этого собирается электрическая цепь, принципиальная схема которой приведена на рис.1. Переменный ток проходит последовательно через активное сопротивление R и реактивное Z . Падение напряжения на любом из этих элементов можно подать на вход усилителя вертикального отклонения осциллографа, и на экране возникнут колебания, пропорциональные входному напряжению $u \sim i$.

Описание установки. В экспериментальную установку (рис.3) входят: генератор ГЗ-120 (1), фазометр Ф2-1 (2), лабораторная панель (3), содержащая активную нагрузку R (магазин сопротивлений Р33) и реактивную Z (между клеммами 2-3 – катушку индуктивности), и осциллограф С1-94 (4).

Подготовка к работе. 1. Соберите электрическую цепь по схеме (рис.3) и предложите преподавателю или лаборанту проверить ее.

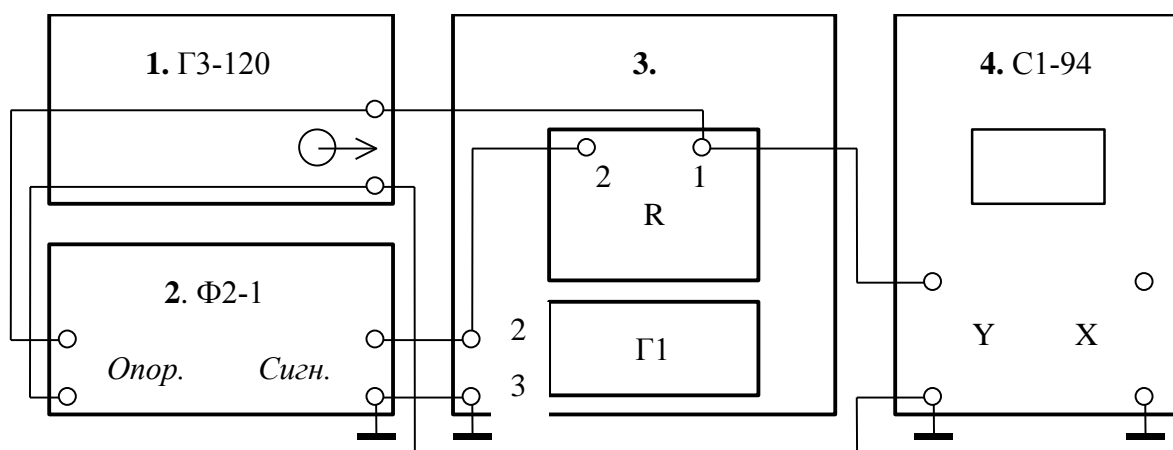


Рис.3

2. Подготовьте приборы к работе.

Генератор фиксированных частот Г1 должен быть выключен.

На магазине R установите сопротивление порядка нескольких килоом.

Фазометр Ф2-1. 1. Включите его в сеть.

2. Тумблер поставьте в положение «*Опережает*».

3. Переключатель поставьте в положение «*Калибровка*» и убедитесь, что стрелка прибора установилась на последнее деление шкалы.

4. Поставьте переключатель в положение «*Уст.0*» (установка нуля) и ручкой регулировки «*Уст.0*» поставьте стрелку прибора на нуль.

5. Поставьте переключатель в положение «*100°*».

После этого прибор готов к измерению фазы напряжения, поданного на клеммы «Сигнал», по отношению к фазе опорного напряжения.

Генератор ГЗ-120. В данной работе требуется синусоидальное напряжение, снимаемое специальным кабелем с разъема, отмеченного

знаком $\ominus \rightarrow \sim$.

1. Перед включением генератора в сеть установите с помощью лимба и переключателя «Множитель частоты» какое-либо значение в диапазоне 600...800 Гц.

2. Включите генератор в сеть и ручкой регулировки поставьте выходное напряжение 2...3 В (предварительно; потом его, может быть, придется изменить).

3. Переключатель “ ΔdB “ поставьте в положение “0” – при этом выходное напряжение соответствует показанию вольтметра. Если переключатель поставить в положение “10” , то выходное напряжение уменьшится по сравнению с показанием вольтметра примерно в 3 раза (так как $10 dB = 20 \lg 3$).

Осциллограф С1-94. 1. Включите осциллограф в сеть.

2. Утопите все кнопки, кроме «Авт/Ждуц» – она должна быть отжата.

3. На Y-вход подайте напряжение с клемм 1 – 3.

4. Получите на экране устойчивое изображение синусоидального напряжения умеренной яркости. Устойчивость достигается переключением скорости развертки «Время/Дел» и ручкой «Уровень», устанавливающей оптимальное напряжение запуска генератора развертки.

5. Ручкой регулировки усиления «В/Дел» (ступенчато) и ручкой регулировки выходного напряжения генератора ГЗ-120 (плавно) установите величину изображения по вертикали 8 делений координатной сетки осциллографа. В дальнейшем положение регуляторов **не изменяйте на протяжении всей серии измерений!**

6. Утопите кнопку «Авт/Ждуц» и ручкой «Уровень» прекратите действие генератора развертки. При этом изображение на экране выглядит как одна вертикальная линия, длина которой соответствует установленной Вами ранее амплитуде колебаний. Ручкой « \leftrightarrow » установите линию на середину экрана, так удобнее измерять амплитуды соответствующих колебаний.

Измерения. 1. Изменяя сопротивление активной нагрузки R , установите стрелку фазометра на 10° . При таком варианте включения, какой изображен на рис.3, фазометра показывает разность фаз между входным напряжением u_3 (напряжение на $R+Z$) и напряжением u_2 на нагрузке Z . Обозначим ее φ_ϕ . Запишите в табл.1 амплитуду колебаний на $R+Z$ (между клеммами 1 – 3) в делениях масштабной сетки экрана – a_3 .

2. Переключите Y-вход осциллографа на нагрузку R (клеммы 1–2), измерьте на экранной сетке амплитуду колебаний a_1 и запишите в табл.1.

Таблица 1

$R,$ Ом	$\varphi_\phi,$ град.	$\varphi_{зр},$ град.	$a_1,$ дел.	$a_2,$ дел.	$a_3,$ дел.	$\cos \delta$	$\delta,$ град.	$\delta_{изм},$ град

--	--	--	--	--	--	--	--	--

3.Переключите Y -вход осциллографа на нагрузку Z (клеммы 2–3) и измерьте амплитуду колебаний a_2 .

4.Произведите аналогичные измерения (пп.2–3) при сдвиге фаз $20; 30 \dots 60^\circ$, устанавливая его каждый раз путем изменения сопротивления R .

5.Закончив измерения, переключатель фазометра поставьте в позицию «Калибровка», затем выключите все приборы.

Обработка результатов. 1.По формуле (3) вычислите разность фаз

$\delta = \varphi_2 - \varphi_1$ между напряжений u_2 и u_1 , или в текущих обозначениях – между \vec{a}_2 и \vec{a}_1 .

2.По данным табл.1 постройте шесть векторных диаграмм. Диаграммы строятся следующим образом. На горизонтальной оси отложите вектор \vec{a}_1 (рис.4), на котором постройте треугольник по двум другим сторонам $|\vec{a}_2|$ и $|\vec{a}_3|$. Затем достройте его до параллелограмма.

3.Транспортиром измерьте угол между векторами \vec{a}_2 и \vec{a}_3 на каждой диаграмме и результат впишите в табл.1.

Сравните угол $\varphi_{гр}$, полученный графическим путем, с разностью фаз между этими же векторами, измеренной фазометром φ_ϕ .

4.Измерьте на векторной диаграмме угол δ между векторами \vec{a}_2 и \vec{a}_1 . (в табл.1 он обозначен $\delta_{изм}$) и сравните его с углом, рассчитанным

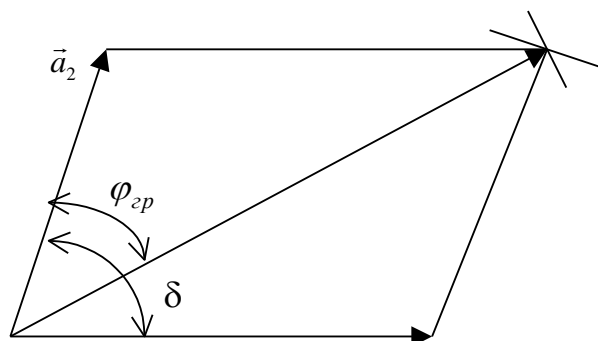


Рис.4

из формулы (3). Сделайте выводы на основании полученных результатов.

Упражнение 2

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний с кратными частотами

Введение. Рассмотрим систему, обладающую двумя степенями свободы, т.е. состояние которой определяется двумя величинами. В качестве такой системы рассмотрим электронный пучок в электронно-лучевой трубке осциллографа. Место попадания пучка электронов на экране можно описать двумя координатами, в частности, декартовыми x и y . Такой выбор разумен, так как электронно-лучевая трубка осциллографа имеет две пары управляющих пластин, отклоняющих пучок электронов в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Если подать переменное напряжение на обе пары пластин одновременно, то луч будет участвовать в двух колебательных движениях, происходящих во взаимно перпендикулярных плоскостях. Результат совместного действия обоих напряжений будет наблюдаться на экране осциллографа.

Итак, рассмотрим сложение двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаний одной частоты ω , совершающихся вдоль координатных осей x и y ,

$$x = a \cos \omega t, \quad y = b \cos(\omega t + \varphi), \quad (4)$$

где φ – разность фаз между рассматриваемыми колебаниями.

Выражение (4) представляет собой заданное в параметрической форме уравнение траектории точки, участвующей в обоих колебаниях. Если исключить параметр t , то можно получить уравнение траектории в декартовых координатах [2]

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \varphi = \sin^2 \varphi. \quad (5)$$

Таким образом, вид траектории зависит от разности фаз φ .

1. Пусть $\varphi = 0$. В этом случае уравнение (5) принимает следующий вид:

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 = 0, \quad (6)$$

$$y = \frac{b}{a} x. \quad (7)$$

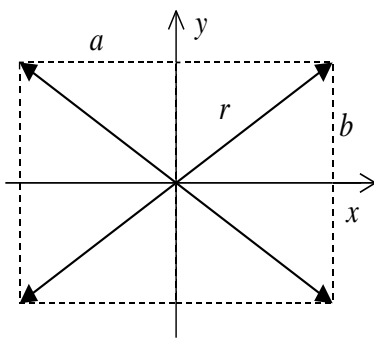


Рис.5

Это уравнение прямой, проходящей через начало координат (рис.5). Луч осциллографа будет колебаться вдоль этой прямой с частотой ω и амплитудой r

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (8)$$

2. При разности фаз $\varphi = \pm \pi$ уравнение (5) примет вид

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = 0,$$

откуда видно, что результирующее движение луча представляет собой гармоническое колебание вдоль другой прямой (см. рис. 5)

$$y = -\frac{b}{a} x. \quad (9)$$

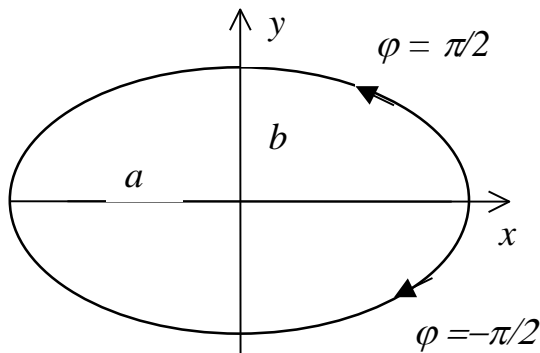


Рис.6

3. При разности фаз $\varphi = \pm \pi/2$ уравнение (5) примет такой вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (10)$$

т.е. уравнение эллипса, оси которого совпадают с осями координат (рис.6). При равенстве амплитуд, т.е. $a = b$, эллипс переходит в окружность.

Если частоты взаимно перпендикулярных колебаний не одинаковы, но кратны, то траектории результирующего движения луча имеет вид довольно сложных кривых, называемых *фигурами Лиссажу* (рис.7).

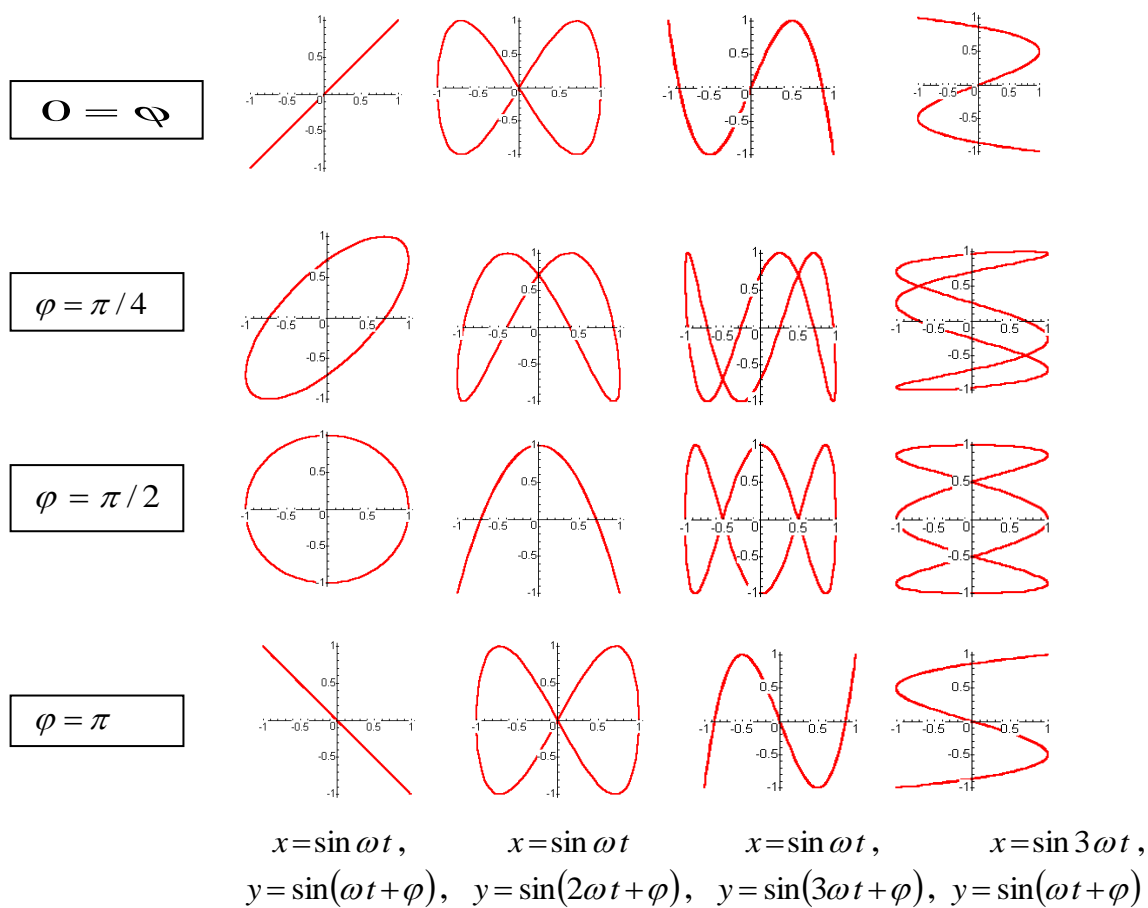


Рис.7

Пусть частота колебаний вдоль оси x равна ω_x , а вдоль оси y в n раз больше, т.е.

$$n = \frac{\omega_y}{\omega_x}. \quad (11)$$

В этом случае уравнение траектории движения точки будет уравнением n -ой степени. Если n – число рациональное, т.е. может быть представлено в виде отношения двух целых чисел

$$n = \frac{n_x}{n_y}, \quad (12)$$

то из выражений (11) и (12) можно написать следующие отношения:

$$\frac{\omega_y}{\omega_x} = \frac{T_x}{T_y} = \frac{n_x}{n_y}, \quad (13)$$

где ω и T – циклическая частота и период колебаний вдоль соответствующих осей.

Перепишем последнее выражение в виде

$$n_y T_x = n_x T_y = t_1.$$

Отсюда следует, что за время t_1 точка совершает n_x колебаний в направлении оси y и n_y колебаний вдоль оси x . По истечению времени t_1 точка

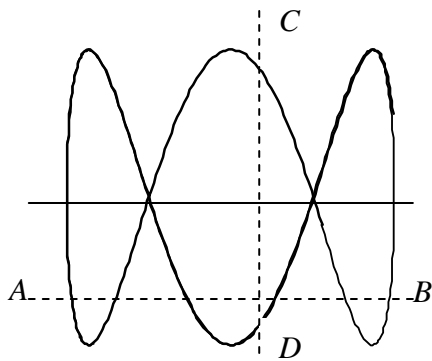
будет иметь прежнюю фазу колебаний, траектория следующего движения будет накладываться на предыдущую и на экране образуется устойчивая картина. По фигурам Лиссажу можно определить частоту колебаний одного источника, если частота другого известна.

Выберем одну из приведенных кривых. Пусть она n_x раз пересекает ось x и n_y раз – ось y . В соответствии с формулой (13) можно написать, что

$$\frac{n_x}{n_y} = \frac{\omega_y}{\omega_x} = \frac{2\pi\nu_y}{2\pi\nu_x}.$$

Если на горизонтальный вход осциллографа подано напряжение известной частоты ν_x , а на вертикальный – неизвестной ν_y , то

$$\nu_y = \frac{n_x}{n_y} \nu_x. \quad (14)$$



Таким образом, вытекает следующее правило нахождения неизвестной частоты по фигурам Лиссажу. Через полученную фигуру проводят две взаимно перпендикулярные прямые AB и CD , параллельные осям координат (рис.8). Подсчитывают число точек пересечения фигуры с прямой AB – n_x и с прямой CD – n_y . На данном рисунке $n_x=6$, $n_y=2$,

так что неизвестная частота $\nu_y=6/2 \nu_x$. Во избежание ошибок прямые AB и CD не рекомендуется проводить через узлы, а также по касательным.

Измерения. 1.Соберите экспериментальную установку (рис.9).

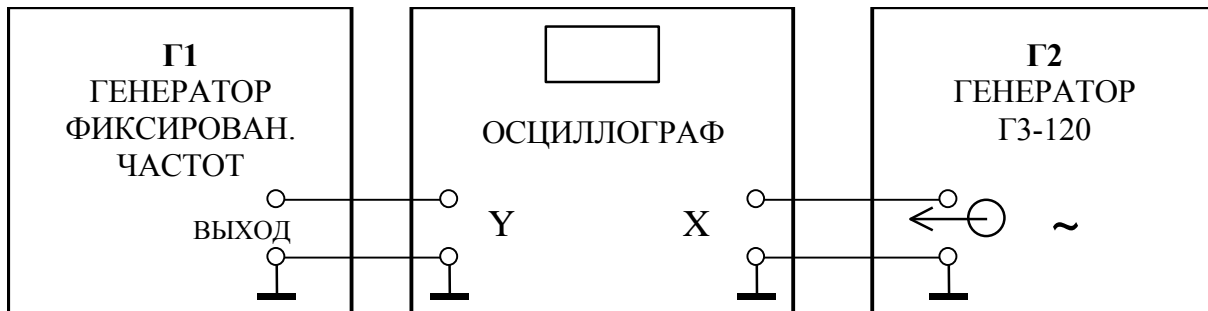


Рис.9

Осциллограф С1-94 имеет X -вход на тыльной стороне корпуса. Предложите преподавателю или лаборанту проверить правильность сборки.

2.После проверки включите осциллограф в сеть, отключив его развертку (утопите кнопку «Авт/Ждуц»). В этом случае развертка осуществляется напряжением генератора ГЗ-120, поданным на X -вход.

3.Включите генераторы $G1$ и $G2$. Генератор фиксированных частот вырабатывает переменное напряжение, частота которого изменяется ступенями с помощью переключателя «Частота» и тумблера «Множитель».

4. Ручкой регулировки напряжения генератора ГЗ-120 и его аттенуатором, а также регулятором усиления осциллографа *В/Дел* получите изображение размером приблизительно 6×6 делений шкалы экрана.

5. Поставьте тумблер «*Множитель*» генератора фиксированных частот *Г1* в положение «*×1*», а переключатель частоты – в первую позицию. Изменяя плавно частоту генератора *Г2*, получите на экране поочередно изображение эллипса, «восьмерки», двойной «восьмерки», каждый раз записывая частоту *Г2* в табл.2. То же самое сделайте при всех остальных положениях переключателя частоты генератора *Г1*.

6. Срисуйте в свой лабораторный журнал вид нескольких фигур Лиссажу, указав частоты обоих генераторов.

Таблица 2

Положение переключателя генератора <i>Г1</i>	Вид фигуры Лиссажу	Частота генератора <i>Г2</i> , ν_x , Гц	Частота генератора <i>Г1</i> ν_y , Гц

Обработка результатов сводится к расчету частоты генератора *Г1* по формуле (14). Таким образом, шкала генератора *Г1* будет проградуирована в единицах частоты, в качестве которой берется ее среднее значение, полученное от фигур разного вида.

Упражнение 3

Сложение колебаний одного направления двух близких частот

Рассмотрим результат сложения двух одинаково направленных колебаний y_1 и y_2 с близкими частотами ω_1 и ω_2 . Для простоты будем считать, что амплитуды обоих колебаний одинаковы и равны a и начальные фазы тоже одинаковы – φ

$$y_1 = a \cos(\omega_1 t + \varphi), \quad (15)$$

$$y_2 = a \cos(\omega_2 t + \varphi).$$

$$y = y_1 + y_2 = a[\cos(\omega_1 t + \varphi) + \cos(\omega_2 t + \varphi)],$$

$$y = 2a \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \cdot \cos \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \varphi \right).$$

(16)

Если разность $\omega_1 - \omega_2 = \Omega$ мала по сравнению с ω_1 и ω_2 , то результирующее колебание (16) можно рассматривать как гармоническое со средней частотой $\omega = (\omega_1 + \omega_2) / 2$ и амплитудой

$$2a \cos \left(\frac{\Omega t}{2} \right), \quad (17)$$

медленно меняющейся с частотой $\Omega/2$ (так как Ω мала!) по гармоническому закону. Такое явление называется *биением* (рис.10). Биение возникает вследствие

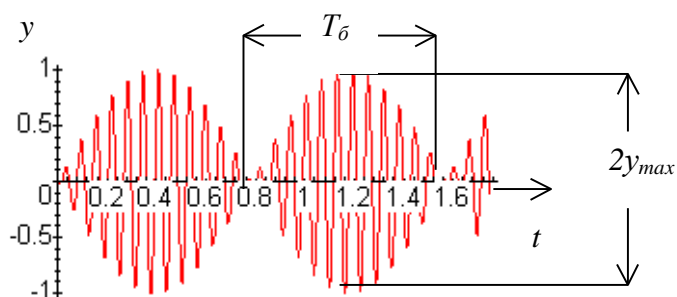


Рис.10

того, что амплитуда изменяется от $u_{max} = 2a$, когда фазы складываемых колебаний совпадают, до $u_{min} = 0$, когда колебания оказываются в противофазе. Явление биений широко используется в радиотехнике (напр., супергетеродинный прием электромагнитных волн).

Измерения. Для изучения биений предлагается экспериментальная установка, блок-схема которой приведена на рис.11.

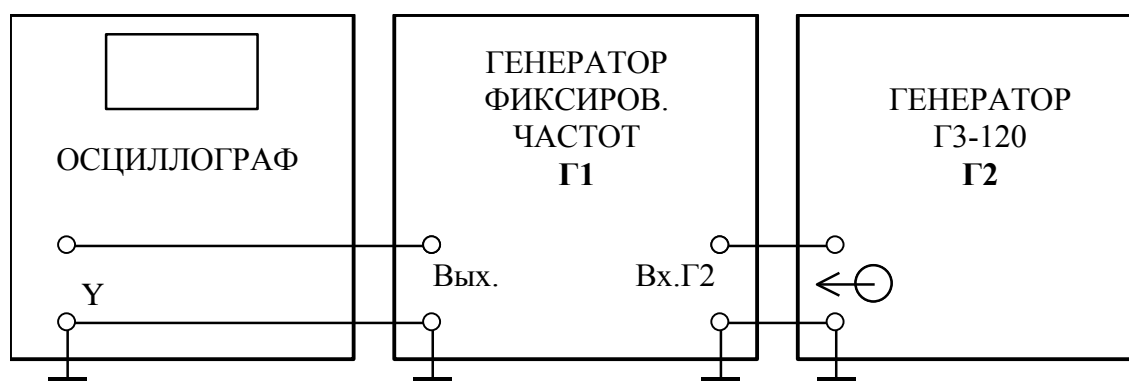


Рис.11

Напряжения от двух генераторов $G1$ и $G2$ подаются на одно нагрузочное сопротивление. Осциллограф, подключенный к этому сопротивлению, позволяет наблюдать результирующее напряжение на нем.

1. Включите генератор фиксированных частот $G1$ и установите на нем самую высокую частоту, из измеренных Вами в упр.2. Обозначим ее ν_1 .

2. Включите осциллограф и получите изображение высотой 3...4 см. Длительность развертки осциллографа следует установить такую, чтобы на экране было видно около 30 полных колебаний.

3. Включите генератор $G2$ и установите частоту ν_2 , близкую к частоте генератора $G1$.

4. Повышая выходное напряжение генератора $G2$, получите на экране картину биений. Амплитуда колебаний в минимуме должна быть близка к нулю. Измерьте амплитуду колебаний в максимуме биений – u_{max} .

5. Подрегулируйте частоту $G2$ и длительность развертки осциллографа так, чтобы на экране установилось 2 или 3 периода биений. Результаты запишите в табл.3.

6. По времени развертки определите период и частоту биений. Она должна быть равна, согласно формуле (16), $\nu_b = \nu_1 - \nu_2$. Срисуйте картину биений на кальку.

Таблица 3

$\nu_1, \text{Гц}$	$\nu_2, \text{Гц}$	$\nu_0, \text{Гц}$	$a, \text{дел.}$	$u_{\text{max}}, \text{дел.}$

7. На генераторе $Г1$ поставьте тумблер в положение « $\times I$ », получите биения. Повторите действия, указанные в п.3–5.

Контрольные вопросы

1. Как реализуется сложение колебаний одного направления? Как увеличить число слагаемых?

2. Электрическое напряжение – скалярная величина. Как в таком случае понимать «векторная диаграмма» напряжений?

3. Как построить векторную диаграмму по результатам измерений?

4. Можно ли выполнить данное упражнение, используя вместо осциллографа вольтметр переменного напряжения? Если нельзя, то почему; если можно, то какой.

5. Как реализуется сложение двух взаимно перпендикулярных колебаний в данной работе? Есть ли механические аналогии такого процесса?

6. Рассмотрите поведение электронного луча при одновременном приложении двух напряжений одинаковой частоты к X - и Y -входу осцилло-графа, имеющих одинаковые фазы и отличающиеся на $\pm\pi/2$.

7. В чем специфика сложения двух близких по частоте колебаний одного направления? Что будет наблюдаться, если частоты складываемых колебаний сильно отличаются друг от друга (скажем, на 3-4 порядка)?

Список рекомендуемой литературы

1. Савельев И.В. Курс общей физики: Кн.1. Механика. М.: Наука, 1998. §8.6-8.8.
2. Кортнев А.В., Рублев Ю.В., Куценко А.Н. Практикум по физике. М.: Высшая школа, 1963. С.295.