Лабораторная работа № 332

ЗАТУХАЮЩИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В КОЛЕБАТЕЛЬНОМ КОНТУРЕ

Приборы и принадлежности: лабораторная панель «Затухающие колебания», источник постоянного тока, осциллограф, магазин сопротивлений.

Введение. Замкнутая электрическая цепь, состоящая из конденсатора C, соединенного последовательно с катушкой индуктивности L, называется колебательным контуром. Реальный колебательный контур обладает электрическим сопротивлением, которое на схеме показано в виде резистора R.

Рассмотрим электрическую цепь, состоящую из колебательного контура C,L,R и источника постоянного тока, ЭДС которого E (рис.1).

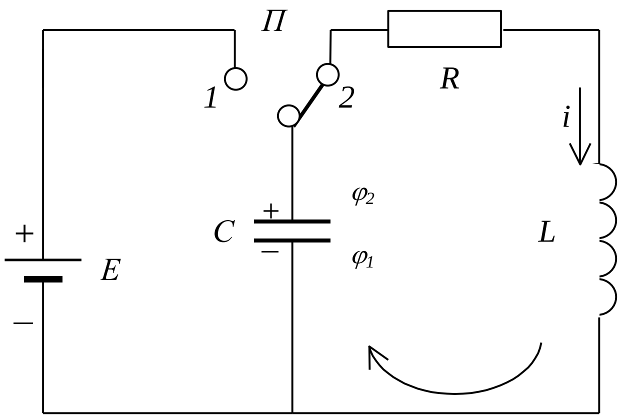

Рис.1

При помощи переключателя $П$ подключим источник питания к конденсатору (переключатель $П$ в положении 1) и зарядим его. Конденсатор при этом запасет некоторое количество энергии. Затем поставим переключатель $П$ в положение 2. Теперь заряженный конденсатор будет входить в замкнутую цепь колебательного контура и все процессы в контуре будут происходить без участия источника питания, а только под влиянием энергии конденсатора.

Напишем для данного контура уравнение по второму правилу Кирхгофа

$$Ri + u = E_{син},$$

где i – ток в цепи,

u – напряжение на конденсаторе,

$E_{син}$ – ЭДС самоиндукции катушки.

В результате некоторых замен получим следующее уравнение:

$$Ri + \frac{q}{C} = -L\frac{di}{dt}. \qquad (1)$$

Оно содержит несколько неизвестных функций времени: $i,\ q,\ di/dt$. Выразим их через другую функцию, но одну, например, через напряжение на конденсаторе u, учитывая, что

$$q = Cu, \quad i = \frac{dq}{dt} = C\frac{du}{dt}, \quad \frac{di}{dt} = C\frac{d^2u}{dt^2}.$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$LC\frac{d^2u}{dt^2} + RC\frac{du}{dt} + u = 0,$$

или

$$\ddot{u} + \frac{R}{L}\dot{u} + \frac{1}{LC}u = 0. \qquad (2)$$

Воспользуемся обозначениями, употребляемыми в учебной литературе,

$$\frac{R}{L} = 2\beta, \quad \frac{1}{LC} = \omega_0^2,$$

и перепишем уравнение (2) так:

$$\ddot{u} + 2\beta\dot{u} + \omega_0^2 u = 0. \qquad (3)$$

β – коэффициент затухания.

Таким образом, получено дифференциальное уравнение второго порядка, решая которое можно получить напряжение на конденсаторе *u* как функцию времени.

Предположим сначала, что активное сопротивление контура мало по сравнению с реактивным и им можно пренебречь ($R \to 0$). Уравнение (3) в этом случае будет выглядеть так:

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0. \qquad (4)$$

Его решением является одна из гармонических функций

$$u = U_m \cos(\omega_0 t + \alpha), \qquad u = U_m \sin(\omega_0 t + \alpha), \qquad (5)$$

либо их линейная комбинация.

Из возможных решений выберем то, которое удовлетворяет начальным условиям: при $t=0$ (момент переключения переключателя *П* на рис.1 из положения *1* в положение *2*) напряжение на конденсаторе максимально – U_{m0} и ток в контуре отсутствует, $i=0$. Этим условиям удовлетворяет функция

$$u = U_{m0}\cos\omega_0 t. \qquad (6)$$

Здесь ω_0 – собственная частота колебаний контура, которая определяется его параметрами *L* и *C*

$$\omega_0 = \sqrt{1/LC}. \qquad (7)$$

Таким образом, функция (6) является уравнением незатухающих колебаний с частотой ω_0. Следует заметить, что наряду с колебаниями напряжения в контуре будут колебаться по гармоническому закону с той же частотой и другие физические величины (ток в цепи, заряд конденсатора, напряженность электрического поля в конденсаторе, индукция магнитного поля в катушке). Поэтому электрическая цепь с такими свойствами называется колебательным контуром.

Если активное сопротивление контура невелико, так что $\beta^2 << \omega_0^2$, то уравнение (3) имеет следующее решение:

$$u = U_{m0} \cdot e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha), \tag{8}$$

где U_{m0} – напряжение на конденсаторе в момент времени $t=0$.

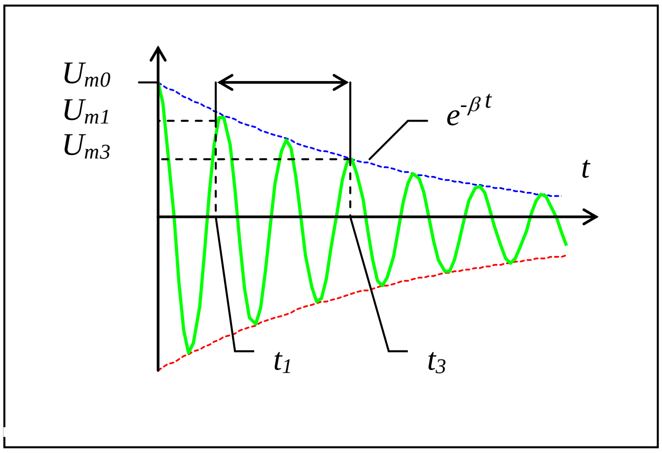

Рис.2

При $t=0$ $u=U_{m0}$, следовательно, начальная фаза колебаний $\alpha=0$. Из формулы (8) видно, что амплитуда колебаний убывает с течением времени как $e^{-\beta t}$, т.е. процесс колебаний в контуре не строго периодический, колебания являются затухающими (рис.2). β называется *коэффициентом затухания*. Частота затухающих колебаний ω отличается от частоты незатухающих колебаний ω_0 в меньшую сторону

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \tag{9}$$

За период колебаний в этом случае можно принять приблизительно величину $T = 2\pi/\omega$, назвав ее *квазипериодом*.

Для характеристики скорости затухания колебаний вводится физическая величина, называемая *логарифмическим декрементом затухания*, который, по определению, есть логарифм отношения наибольших отклонений двух следующих друг за другом колебаний

$$\Lambda = \ln \frac{U_m(t)}{U_m(t+T)}. \tag{10}$$

Логарифмический декремент затухания связан с коэффициентом затухания β и периодом колебаний T следующим образом:

$$\Lambda = \beta T. \tag{11}$$

При слабом затухании $\omega \cong \omega_0$ период можно считать равным $T = 2\pi\sqrt{LC}$, то

$$\Lambda = \frac{R}{2L} 2\pi\sqrt{LC}; \quad \Lambda = \pi R\sqrt{C/L}. \tag{12}$$

Для характеристики колебательных свойств системы, в том числе колебательного контура, применяется величина Q, называемая *добротностью* контура, которая также связана с длительностью процесса затухания колебаний. Она определяется так:

$$Q = \frac{\pi}{\Lambda}. \tag{13}$$

Выясним физический смысл добротности. Амплитуда напряжения на конденсаторе убывает со временем по закону $e^{-\beta t}$. Энергия заряженного конденсатора пропорциональна квадрату амплитуды, т.е. энергия уменьшается как $e^{-2\beta t}$. Относительное уменьшение энергии за один период колебаний будет таким:

$$\frac{\Delta w}{w} = \frac{w(t) - w(t+T)}{w(t)} = \frac{1 - e^{-2\beta T}}{1} = 1 - e^{-2\Lambda}.$$

При небольшом затухании декремент $\Lambda < 1$, поэтому

$$\frac{\Delta w}{w} \cong 1 - (1 - 2\Lambda) = 2\Lambda,$$

откуда

$$\Lambda = \frac{1}{2}\frac{\Delta w}{w}.$$

Подставив это выражение декремента затухания в формулу (13), получим

$$Q = 2\pi \frac{w}{\Delta w}. \qquad (14)$$

Таким образом, добротность колебательного контура оказывается пропорциональна отношению энергии, содержащейся в контуре, к потере энергии Δw за время одного колебания (за период).

Рассмотрим случай сильного затухания, когда $\beta = \omega_0$. Согласно формуле (9) колебания в таких условиях становятся невозможными, так как $\omega = 0$, напряжение на конденсаторе уменьшается со временем апериодически

$$u = U_{m0} e^{-\beta t}.$$

Такой процесс имеет место в том случае, если активное сопротивление контура достигает критической величины (или превышает ее). Значение критического сопротивления можно найти из условия $\beta^2 = \omega_0^2$.

$$\frac{R_{KP}^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}, \qquad R_{KP} = 2\sqrt{L/C}. \qquad (15)$$

Целью работы является изучение электрических колебаний, определение квазипериода, декремента затухания в зависимости от параметров контура.

Описание установки. Исследуемый колебательный контур размещен на лабораторной панели «Затухающие колебания». Он состоит из катушки индуктивности L набора конденсаторов $C1 \ldots C5$, любой из которых можно включить в контур с помощью клавишного переключателя. Колебания в контуре возбуждаются короткими прямоугольными импульсами, получаемыми от генератора импульсов *ГИ*, находящегося внутри лабораторной панели (рис.3).

Активное сопротивление контура состоит из сопротивления катушки R_L и сопротивления магазина R_M, присоединяемого последовательно к катушке через соответствующие клеммы на панели. Благодаря магазину активное сопротивление контура можно изменять по желанию экспериментатора.

Затухающие колебания напряжения на конденсаторе наблюдаются на экране осциллографа. Включение осциллографа параллельно конденсатору практически не влияет на параметры колебательного контура и не отражается на электрических процессах в нем благодаря большому входному сопротивлению осциллографа (порядка МОм) и малой входной емкости его (порядка десятка пФ).

Упражнение 1
Измерение периода электрических колебаний

Измерения. 1.Соберите электрическую цепь по схеме (рис.3), где *ЛП* – лабораторная панель «Затухающие колебания», *ИП* – источник питания постоянного тока, *МС* – магазин сопротивлений.

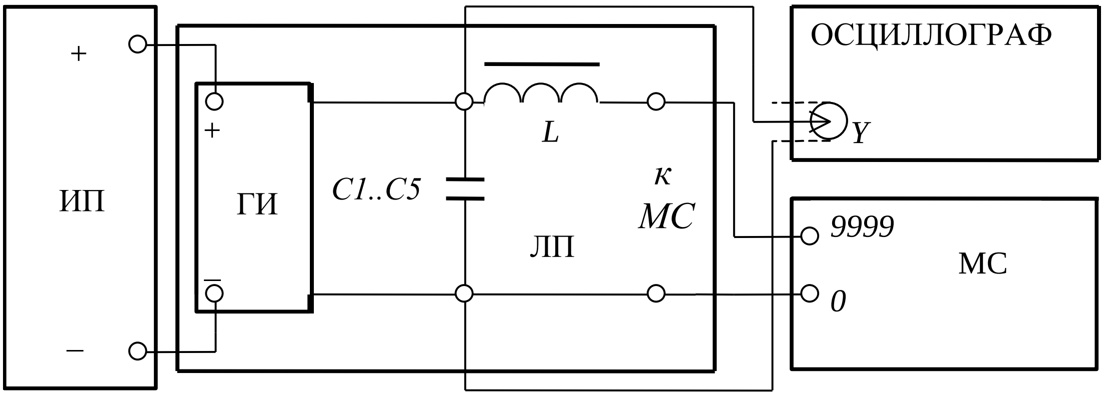

Рис.3

Обратите внимание, что на *Y*-вход осциллографа подается напряжение с конденсатора колебательного контура. Это сделано не случайно. Тем самым можно сравнить результат аналитического решения – функции (8) – с опытом. Здесь Вы имеете возможность увидеть, как выглядит эта функция на экране осциллографа, т.е. убедиться (или усомниться) в правильности решения.

2.Ручки управления осциллографа поставьте в исходное положение:

- все кнопки утоплены, кроме одной – переключателя вертикального входа ≅/~ , которая должна быть отжата,
- *«Развертка»* – 2 мс/дел; при этом развертка работает в режиме «ждущая», она запускается теми же импульсами, которые заряжают конденсатор,
- *«Усилитель»* – 1 В/дел.

3.На магазине *МС* поставьте нулевое сопротивление, на панели *ЛП* включите один из конденсаторов контура.

4.На источнике питания *ИП* поставьте выходное напряжение 6 В.

5.После проверки цепи преподавателем включите осциллограф в сеть, затем – источник питания *ИП*.

6.Ручкой осциллографа *«Уровень»* (ей достигается синхронизация внутренней развертки) добейтесь устойчивого изображения нескольких цугов затухающих колебаний. Срисуйте осциллограмму в свой лабораторный журнал. Пользуясь шкалой экранной сетки осциллографа и длительностью развертки, определите и отметьте на осциллограмме период следования цугов.

7.Измерьте период колебаний напряжения на конденсаторе, наблюдаемых Вами на экране, при каждом значении емкости *C* и при $R_M=0$. Для этого длительность развертки следует установить *0,2…0,5 мс/дел*. Сосчитайте число полных колебаний n, укладывающихся в N делениях экранной сетки, и рассчитайте период колебаний, приняв во внимание длительность развертки осциллографа τ *время/деление*. Результаты запишите в табл.1.

Таблица 1

C,	n	N	$t=\tau N$	$T=t/n$	T^2	ω	L

Обработка результатов измерений. 1.Постройте график зависимости периода колебаний от емкости контура, а также T^2 от C. С какой целью Вы это делаете?

2.Вычислите самый большой коэффициент затухания β, приняв сопротивление контура 100 Ом. Сравните β^2 и ω^2. Какой вывод следует?

3.Вычислите R_{KP} по формуле (15) для наибольшей и наименьшей емкости.

4.Установите на магазине сопротивлений найденное значение критического сопротивления и наблюдайте вид осциллограмм. Срисуйте их в лабораторную тетрадь для отчета. Укажите на осциллограммах амплитуду импульсов и их длительность.

5.Посмотрите форму напряжений на конденсаторе колебательного контура при нескольких значениях сопротивления R_M, на 1-2 порядка превышающих критическое сопротивление R_{KP}.

6.По формуле (7) вычислите индуктивность катушки L при всех значениях емкости контура. Результат представьте в стандартном виде

$$L = \overline{L} \pm \Delta L, \text{ при } p=0{,}95.$$

Упражнение 2
Измерение логарифмического декремента затухания в зависимости от сопротивления контура

Измерения. 1.Поставьте на магазине MC нулевое сопротивление.

2.Установите горизонтальную линию развертки осциллографа строго посередине экрана.

3.Измерьте наибольшее отклонение одного из колебаний U_{m1} в делениях координатной сетки осциллографа. Отсчитайте n-ое колебание (5…10) и измерьте его величину U_{mn} (см. рис. 2). Результаты запишите в табл.3. Чтобы исключить влияние запускающего импульса на результаты измерения отклонений от оси графика, первое измеряемое колебание лучше брать не в начале цуга, а в средней части.

Таблица 2

C	R_M	U_{m1}	n	U_{mn}	Λ	Q

4.Повторите измерения п.2, увеличивая активное сопротивление контура с помощью магазина *МС* через 10 Ом, доведя его до 90 Ом.

5.Повторите измерения п.1-3 с другим конденсатором в контуре.

Обработка результатов. 1.Вычислите логарифмический декремент затухания по формуле

$$\Lambda = \frac{1}{n-1}\ln\frac{U_{m1}}{U_{mn}}. \qquad (16)$$

2.Постройте график зависимости логарифмического декремента затухания от сопротивления магазина R_M при обеих емкостях. Экстраполируйте графики к $\Lambda=0$. Обратите внимание, где они пересекают ось абсцисс. Проанализируйте полученные результаты.

Упражнение 3
Измерение логарифмического декремента затухания в зависимости от емкости контура

Измерения. 1.Поставьте на магазине сопротивлений $R_M=0$ или *10* Ом.

2.Снимите зависимость наибольших отклонений луча от оси осциллограммы затухающих колебаний, как это рекомендовано в п.3 упр.2, последовательно включая конденсаторы всех имеющихся емкостей. Результаты запишите в табл.3.

Таблица 3

R_M	C	U_{m1}	n	U_{mn}	Λ	Λ^2

3.Повторите измерения п.2, но для сопротивления R_M на 10 Ом больше.

Обработка результатов. 1.Найдите логарифмический декремент Λ и Λ^2.

2.Постройте графики Λ^2 от C для обоих сопротивлений. Проанализируйте полученный результат.

Упражнение 4
Наблюдение затухающих колебаний на фазовой плоскости

Измерения. 1.Соберите электрическую цепь по схеме (рис.4). Гнездо X-входа у осциллографа С1-94 находится сзади обозначено знаками $X \to\!\bigcirc$.

2.Поставьте на магазине 200…300 Ом. Включите осциллограф, все ручки управления и переключатели оставьте в том же положении, что и при выполнении упр.1. Наблюдайте видоизменения фазовых кривых при изменении емкости и сопротивления колебательного контура.

3.Срисуйте ряд осциллограмм, записав около них параметры контура.

4.Оцените логарифмические декременты затухания колебаний в контуре

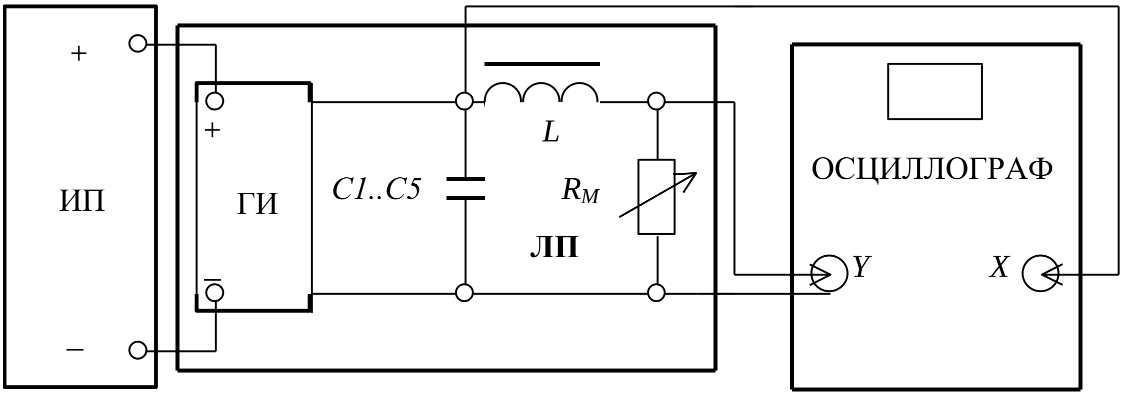

Рис.4

по наблюдаемым кривым и сравните их с полученными в упр.2.

Контрольные вопросы

1.Нарисуйте схему колебательного контура. Зарядите конденсатор. Опишите происходящие в контуре процессы после замыкания цепи.

2.Напишите для замкнутого колебательного контура уравнение Кирхгофа, решите его и проанализируйте решение.

3.От чего зависит частота затухающих колебаний? Совпадает ли она с собственной частотой колебаний в идеальном контуре?

4.От чего зависит скорость затухания колебаний? Что называется логарифмическим декрементом затухания? Каков его физический смысл?

5.Что такое добротность колебательного контура? Каков физический смысл этой величины?

6.Как зависит период колебаний от емкости контура (по Вашим данным)? Зачем предлагается построить график зависимости квадрата периода колебаний от емкости? Что можно сказать на основании его анализа?

7.Как влияет дополнительное активное сопротивление, вводимое в контур, на характер процесса затухания колебаний?

8.Почему при одном и том же активном сопротивлении контура логарифмический декремент тем больше, чем больше емкость контура?

9. Как получается фазовая кривая на экране осциллографа?

Список рекомендуемой литературы

1.Горелик Г.С. Колебания и волны. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. С.63.

2.Руководство к лабораторным занятиям по физике /Под ред. Л.Л.Гольдина. М.: Наука, 1983. С.288

3.Савельев И.В. Курс общей физики: Электричество и магнетизм. М.: Наука, 1998. Кн.2, §13.3..

4.Сивухин Д.В. Общий курс физики. М.: Наука, 1983. Т.3, §124.