ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №10

ИЗУЧЕНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Цель работы: исследование зависимости напряжения на емкости и тока в колебательном контуре от частоты вынужденных колебаний.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Для того чтобы в реальной колебательной системе происходили незатухающие колебания, необходимо компенсировать потери энергии. Подвод энергии можно осуществлять с помощью некоторого периодически действующего фактора $x(t)$ (например, силы при механических колебаниях), изменяющегося по гармоническому закону

$$x = x_0\cos\omega t.$$

Колебания, совершающиеся под действием внешнего периодического воздействия, называются вынужденными колебаниями. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний имеет вид

$$\frac{d^2S}{dt^2} + 2\delta\frac{dS}{dt} + \omega_0^2 S = x_0\cos\omega t. \quad (10.1)$$

Частное решение этого уравнения

$$S = A\cos(\omega t - \psi),$$

где ψ - сдвиг по фазе колеблющейся величины относительно внешнего воздействия.

Амплитуда вынужденных колебаний A зависит от ω. График функции $A = f(\omega)$ имеет максимум при некоторой частоте $\omega = \omega_{рез}$. Величина $\omega_{рез}$ называется резонансной частотой. Можно показать, что для резонансной частоты справедливо соотношение

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}.$$

Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы (частоты вынуждающего переменного напряжения при вынужденных электрических колебаниях в контуре) к частоте $\omega_{рез}$ называется резонансом. При $\omega_0^2 >> \delta^2$ значение $\omega_{рез}$ практически совпадает с собственной частотой ω_0 колебательной системы.

Рассмотрим колебательный контур (рис. 10.2), к которому подключён источник переменного напряжения, изменяющегося по гармоническому закону

$$U = U_m\cos\omega t,$$

где U_m – амплитудное значение напряжения источника.

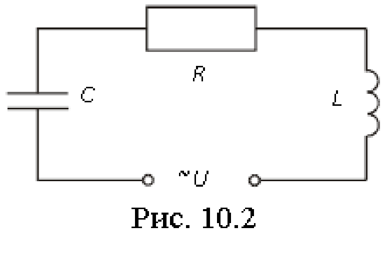

Рис. 10.2

В таком контуре возникает переменный ток, который вызывает на всех элементах цепи падения напряжения: $U = IR$ на резисторе, $U_L = L\dfrac{dI}{dt}$ на катушке и $U_C = \dfrac{q}{C}$ на конденсаторе. В любой момент времени сумма напряжений на элементах контура равна приложенному извне напряжению

$$U_R + U_C + U_L = U_m \cos\omega t,$$

или

$$IR + \frac{q}{C} + L\frac{dI}{dt} = U_m \cos\omega t.$$

С учётом соотношений $I = \dot{q}$ и $\dfrac{dI}{dt} = \ddot{q}$, получим дифференциальное уравнение электрических колебаний в контуре

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{U_m}{L}\cos\omega t,$$

полностью совпадающее с уравнением (10.1), из чего следует, что заряд конденсатора совершает колебания по закону

$$q = q_m \cos(\omega t - \psi), \qquad (10.2)$$

а ток по закону

$$I = -\omega q_m \sin(\omega t - \psi) = I_m \cos(\omega t - \psi + \frac{\pi}{2}) = I_m \cos(\omega t - \varphi),$$

где $\varphi = \psi - \dfrac{\pi}{2}$ - сдвиг фаз между током и приложенным к контуру напряжением, $I_m = \omega q_m$ - амплитудное значение тока.

Векторная диаграмма амплитуд падений напряжений на элементах контура приведена на рис. 1.4.

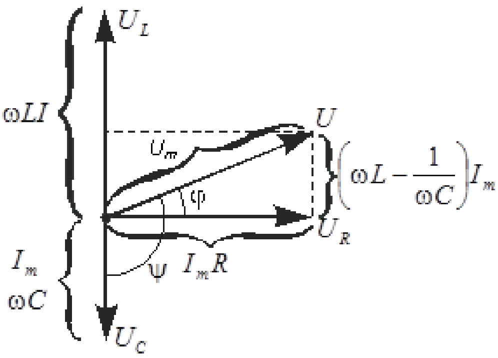

Рис. 1.4

Амплитуда U_m приложенного извне напряжения равна векторной сумме амплитуд этих падений напряжений. Из векторной диаграммы следует, что

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}.$$

Для прямоугольного треугольника векторов можно также записать

$$(RI_m)^2 + \left(\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) I_m\right)^2 = U_m^2$$

откуда получим выражение для амплитуды силы тока (закон Ома для цепи переменного тока)

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

Разделив выражение (10.2) на C, получим закон изменения напряжения на конденсаторе

$$U_C = \frac{q_m}{C}\cos(\omega t - \psi) = U_{Cm}\cos(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}).$$

Амплитудное значение напряжения на конденсаторе

$$U_{Cm} = \frac{q_m}{C} = \frac{U_m}{\omega C\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{I_m}{\omega C}. \tag{10.3}$$

Резонансная частота для напряжения на конденсаторе U_C равна

$$\omega_{U\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} \le \omega_0.$$

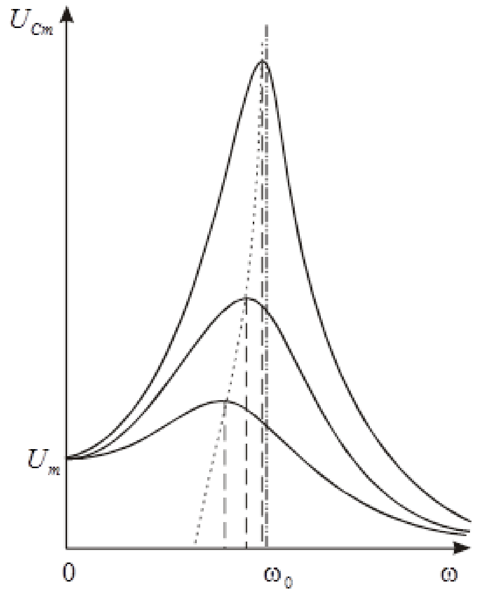

Рис. 10.4

Резонансные кривые для U_C изображены на рис. 10.4. При $\omega \to 0$ резонансные кривые сходятся в одной точке с координатой $U_{Cm} = U_m$, соответствующей напряжению, возникающему на конденсаторе при подключении его к источнику постоянного напряжения U_m. Максимум при резонансе получается тем выше и резонансная кривая тем острее, чем меньше $\delta = \frac{R}{2L}$, т. е. чем меньше активное сопротивление и больше индуктивность контура.

При малом затухании ($\omega_0^2 >> \delta^2$) резонансную частоту для напряжения можно положить равной ω_0. Соответственно можно считать, что

$$\omega_{\text{рез}}L - \frac{1}{\omega_{\text{рез}}C} \approx 0. \quad (10.4)$$

Используя формулы (10.3) и (10.4) найдём отношение амплитуды напряжения на конденсаторе при резонансе $U_{Cm\text{рез}}$ к амплитуде внешнего напряжения U_m

$$\frac{U_{Cm\,\text{рез}}}{U_m} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{\sqrt{LC}}{CR} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = Q.$$

Таким образом, добротность контура показывает, во сколько раз напряжение на конденсаторе превышает приложенное извне напряжение.

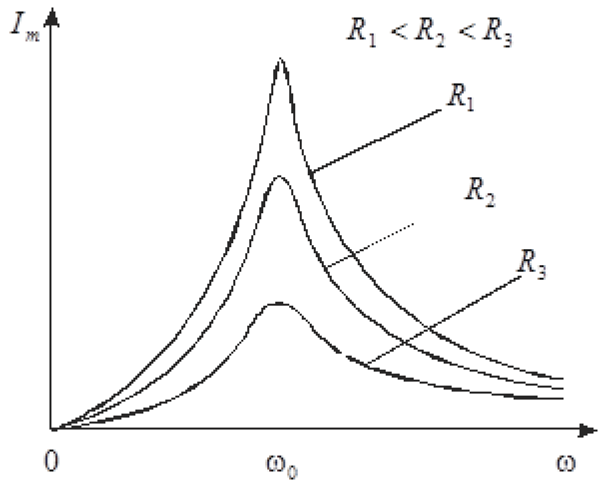

Рис. 1.6

Резонансные кривые для силы тока изображены на рис. 1.6. Амплитуда силы тока I_m имеет максимальное значение при $\omega L - \dfrac{1}{\omega C} \approx 0$.

Следовательно, резонансная частота для силы тока не зависит от R и совпадает с собственной частотой контура ω_0. Графики зависимости $I = f(\omega)$ при различных R называются резонансными кривыми колебательного контура.

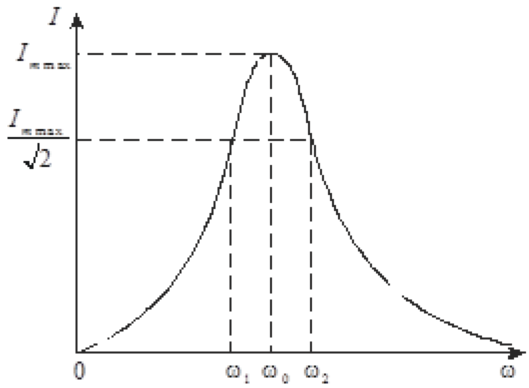

Рис. 1.7

Добротность контура определяет также «остроту» резонансных кривых. На рис. 1.7 изображена одна из резонансных кривых для силы тока в контуре. Частоты ω_1 и ω_2

соответствуют току $I_m = \dfrac{I_{m\,max}}{\sqrt{2}}$ (отношение амплитуд токов, равному $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ соответствует отношение мощностей, равное $\dfrac{1}{2}$). Относительная ширина контура $\dfrac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0}$ равна величине, обратной добротности контура $\dfrac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} = \dfrac{1}{Q}$.

Явление резонанса используют для выделения из сложного напряжения, равного сумме нескольких синусоидальных напряжений, нужной составляющей. Пусть напряжение, приложенное к контуру, равно

$U = U_{m1}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + U_{m2}\cos(\omega_2 t + \varphi_2) + \ldots + U_{mi}\cos(\omega_i t + \varphi_i) + \ldots + U_{mn}\cos(\omega_n t + \varphi_n)$.

Настроив контур (посредством изменения R и C) на требуемую частоту ω_i , можно получить на конденсаторе напряжение в Q раз превышающее значение данной составляющей, в то время как напряжение, создаваемое на конденсаторе другими составляющими, будет слабым. Таким образом осуществляется, например, настройка радиоприёмника на нужную длину волны.

Описание лабораторной установки

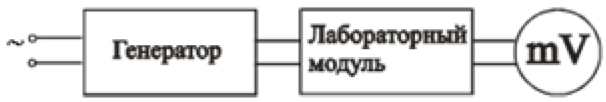

Рис. 10.7

В состав лабораторной установки входят (рис. 10.7) генератор, лабораторный модуль и милливольтметр. Вместо милливольтметра в качестве измерительного прибора можно также использовать осциллограф.

Электрическая схема установки изображена на лицевой панели лабораторного модуля (рис. 3.2).

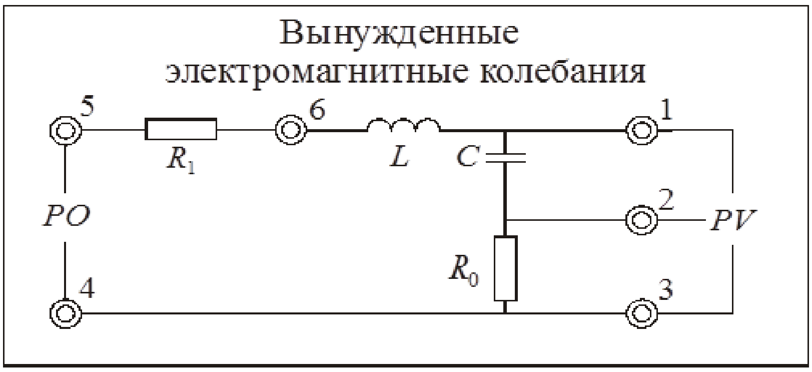

Рис. 3.2

К гнёздам «PO» (4-5) на панели модуля подключается через балластное сопротивление R_1 = 300 Ом генератор гармонических колебаний, а к гнёздам «PV» электронный вольтметр, служащий для измерения напряжения на емкости или образцовом сопротивлении R_0, что дает возможность рассчитать ток в цепи. Генератор можно также подключать к гнёздам 4-6. В этом случае R_1 = 0. Общее активное сопротивление контура $R = R_0 + R_1 + R_к$, где $R_к$ – омическое сопротивление катушки индуктивности.

Порядок проведения измерений.

1. Подсоединить к гнёздам «*РО*» (4-6) генератор гармонических колебаний.
2. Подсоединить к гнёздам (2-3) электронный вольтметр и установить предел измеряемого переменного напряжения 2 В.
3. Включить генератор гармонических колебаний и установить напряжение не более 0,5 В и в дальнейшем контролировать его с помощью вольтметра в цепи (5-4).
4. Изменяя частоту генератора, определить максимальное значение напряжения $U_{0\ max}$ при резонансе и записать величину этого напряжения и значения резонансной частоты $\nu_р$.
5. Изменяя частоту генератора в пределах 0,01 $\nu_р \le \nu_г \le 30\ \nu_р$, где $\nu_р$ – резонансная частота, снять зависимость $U_0 = IR_0$, проделав 15 – 20 измерений. Измерения вблизи $\nu_р$ следует производить с минимально возможным шагом по частоте. Результаты занести в табл. 10.1.
6. Закоротить резистор R_1 и проделать измерения, что в пп.4,5.

Таблица 10.1

R_1 = 0				R_1 = 150 Ом			
$U_{0\ max}$ =… $\nu_р$ = …				$U_{0\ max}$ =… $\nu_р$ = …			
ν, Гц	U_0, В	I_1, мкА	U_{C1}, В	ν, Гц	U_0, В	I_2, мкА	U_{C2}, В
. .							

7. Подключить вольтметр к гнёздам 1-2 и снять зависимость $U_C = f(\nu)$ при тех же значениях частоты, что и в п. 2. Результаты занести в табл. 10.1.
8.Измерить резонансную частоту при различных значениях ёмкости конденсатора.

Обработка результатов измерений

1. По формуле $I = U_0/R_0$ рассчитать значения тока в контуре и результаты расчетов занести в табл. 10.1. Принять R_0 = 10 Ом.
2. Построить графики зависимости $I_1 = f(\nu)$ и $I_2 = f(\nu)$ (рис. 3.3), где I_1 - ток в контуре при R_1 = 0, а I_2 - ток в контуре при R_1 = 300 Ом.
3. Отложить на графике, соответствующем R_1 = 0, (рис. 10.9) величину $I_1 = \frac{I_{1max}}{\sqrt{2}}$ и определить значение частот ν_1 и ν_2.

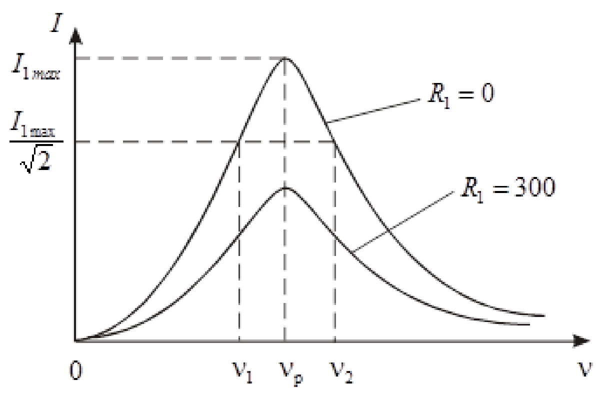

Рис. 10.9

4. Рассчитать добротность контура по формуле $\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_0}=\frac{1}{Q}$.

5. Используя теоретическое значение величины добротности $Q_2^*=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ и экспериментальное значение добротности $\left(Q_1^*=Q_2^*\right)$ определить сопротивление контура R.

6. Построить графики зависимости $U_C = f(\nu)$ для случаев $R_1 = 0$ и $R_1 = 150$ Ом (рис. 10.10).

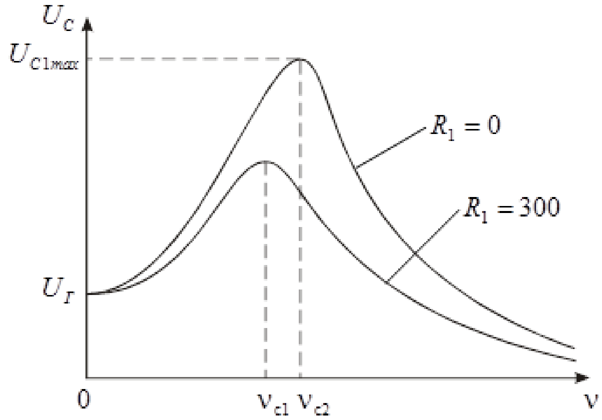

Рис. 10.10

7. Рассчитать по формуле $\nu_{c_1}=\frac{\sqrt{\left(2\pi\nu_p\right)^2-\beta^2}}{2\pi}$ значения частоты при которой напряжение на конденсаторе достигает максимальной величины (при резонансе) и сравнить с частотой ν_{c1}, полученной экспериментально. Принять $\beta = R/2L$.

8. Проделать п. 3 – 7 для случая $R_1 = 150$ Ом. Сравнить полученные результаты.

9. Определить с помощью графиков $U_C = f(\nu)$ значение напряжения на генераторе $U_Г$.

10. Построить зависимость и по тангенсу угла наклона определить значение индуктивности катушки.

Контрольные вопросы

1. Какие колебания называются вынужденными?
2. Записать дифференциальное уравнение вынужденных колебаний и его решение.
3. Что называется резонансом?
4. Каков физический смысл добротности при резонансе в колебательном контуре?
5. Пояснить физическую сущность использования явления резонанса в радиотехнике.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №10
ВЫНУЖДЕННЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Состав работы:
- генератор гармонических колебаний (GFG8219A)_________ 1 шт.
- электронный осциллограф (ОСУ – 10В)__________________1шт.
- микромультиметр (MY - 67)_____ _______________________1_шт.
- адаптер (AC/AD)____1шт.
- приборная полка _____________________________________1 шт.

Параметры работы:

- сопротивление резисторов R0=10,0 Ом, R1=60,0 Ом,
- сопротивление катушки индуктивности R = 100,0 Ом,
- ёмкость конденсатора: 1 – 0,05 мкФ, 2 – 0,1 мкФ, 3 – 0,22 мкф,
- 4 – 0,31 мкФ, 5 – 0,44 мкФ.
- индуктивность катушки L= 240 мГн.