АДВЕКТИВНОЕ ВЫМЫВАНИЕ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ КОНВЕКТИВНЫХ СТРУКТУР

Т. Н. Загвозкин, Д. С. Голдобин
Пермский государственный национальный исследовательский университет,
614990, Пермь, Букирева, 15

Крупномасштабная тепловая конвекция в слое при неоднородном вдоль оси *x* нагреве может быть описана уравнением [1]:

$$\dot{\theta} + u\partial_x\theta + \partial_x^4\theta - \partial_x((\partial_x\theta)^3 - q(x)\partial_x\theta) = 0,$$

где θ – поле температуры, u – скорость прокачивания жидкости вдоль слоя, $q(x)$ – локальное отклонение интенсивности нагрева от критического значения. Если осуществлять локальный нагрев:

$$q(x) = \begin{cases} -\beta^2, & x < 0 \\ \alpha^2, & 0 < x < L \\ -\beta^2, & x > L \end{cases}$$

то при $u = 0$ в системе могут возникать течения, локализованные в области возбуждения ($0 < x < L$). Схема такого нагрева приведена на рисунке 1. Увеличение скорости прокачивания жидкости u приводит к «вымыванию» конвективного течения из области возбуждения. Целью данной работы является нахождение критических значений скорости u, при которой течение перестает возбуждаться.

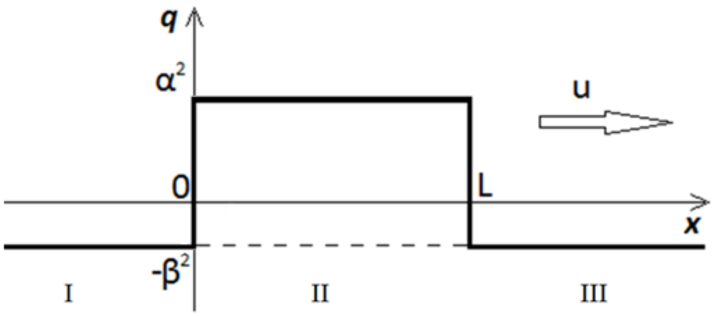

Рис. 1. *Локальное отклонение интенсивности нагрева*

Для качественного понимания картины полученных решений были посчитаны инкременты возмущений основного состояния. Результаты расчета изображены на графике, приведенном на рисунке 2, где по оси абсцисс отложена скорость прокачивания жидкости через слой, а по оси ординат инкремент возмущений основного состояния. По приведенной зависимости можно судить о том, что при нарастании скорости прокачивания решение в области **A** находится на ветви монотонной устойчивости, а после попадает в область **B** на колебательную ветвь, аналогично тому, что наблюдалось для сценариев вымывания локализованных структур, возникающих при случайной пространственной неоднородности параметров [2].

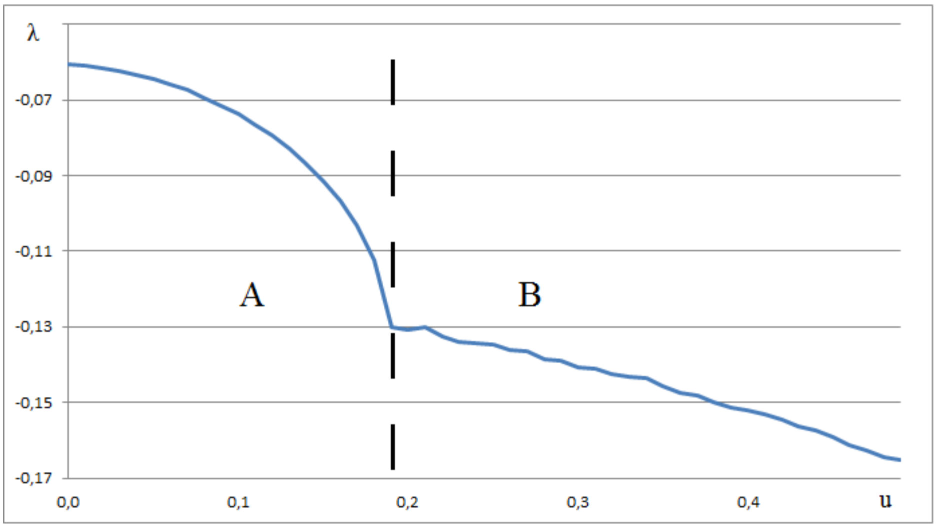

Рис.2. *Зависимость инкремента возмущений от скорости прокачивания жидкости*

Для решения задачи о монотонной устойчивости подставим в уравнение решения вида:

$$\theta_j \sim e^{-\lambda t} e^{i k_j x},$$

где индексом j обозначаются моды функции θ соответствующие разным корням характеристического уравнения k_j. Функция θ, в каждой области пространства, будет представлять собой сумму мод, с разными наборами k_j, не дающими бесконечного роста функции на данном участке. Для нахождения границы устойчивости рассмотрим стационарный случай: λ=0, само характеристическое уравнение при этом примет следующий вид:

$$k^3 - q(x)k + iu = 0$$

Решив характеристическое уравнение и найдя, таким образом, функции θ_j, мы должны представить в качестве общего решения их суперпозицию, отбросив моды, расходящиеся при $x=\pm\infty$. Следовательно, исходя из вида корней уравнения k_j, мы оставляем в областях **I** и **III** суммы одной или двух экспонент, а в области **II** все три функции с соответствующими коэффициентами.

В качестве граничных условий используем условие сшивки на границе области возбуждения:

$$\theta^{I}(0) = \theta^{II}(0); \qquad \theta^{II}(L) = \theta^{III}(L);$$

$$\theta^{I}_{x}(0) = \theta^{II}_{x}(0); \qquad \theta^{II}_{x}(L) = \theta^{III}_{x}(L);$$

$$\theta^{I}_{xx}(0) = \theta^{II}_{xx}(0); \qquad \theta^{II}_{xx}(L) = \theta^{III}_{xx}(L),$$

где верхним индексом обозначена принадлежность функции θ и ее производных к определенной области пространства.

Данные граничные условия дают нам систему 6-и уравнений с 6-ю неизвестными. Приравнивая определитель этой системы нулю, получим уравнение, задающее зависимость критической скорости прокачивания жидкости через слой от длины области возбуждения локализованного течения.

Результаты решения этой задачи для некоторого набора параметров приведены на рисунке 3, где по оси абсцисс отложены критические значения скорости прокачивания жидкости через слой, а по оси ординат длина области возбуждения.

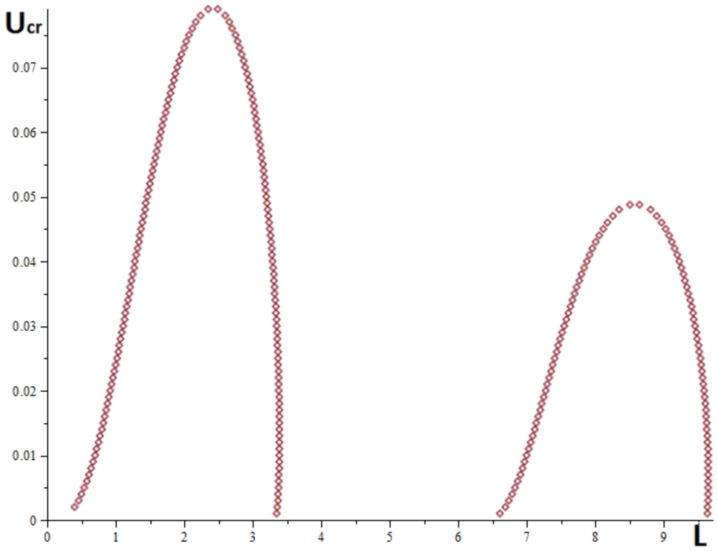

Рис.3. *Нейтральная кривая устойчивости основного состояния при: α=1, β=0,1*

На представленном рисунке ниже кривой тривиальное состояние неустойчиво по отношению к монотонной моде, а выше все монотонные возмущения затухают, т.е. стационарная локализованная структура не возбуждается.

Для решения задачи о колебательной устойчивости подставим в уравнение решения вида:

$$\theta_j \sim e^{-(\lambda+i\Omega)t} e^{ik_j x},$$

где Ω – частота колебаний. Рассмотрим случай: λ=0, получим следующее характеристическое уравнение:

$$k^4 - q(x)k^2 + iuk - i\Omega = 0$$

Решая это уравнение, получим выражения для функций θ в разных областях пространства. Граничные условия зададим аналогично случаю монотонной устойчивости:

$$\theta^I(0) = \theta^{II}(0); \quad \theta^{II}(L) = \theta^{III}(L);$$

$$\theta^I_x(0) = \theta^{II}_x(0); \quad \theta^{II}_x(L) = \theta^{III}_x(L);$$

$$\theta^I_{xx}(0) = \theta^{II}_{xx}(0); \quad \theta^{II}_{xx}(L) = \theta^{III}_{xx}(L);$$

$$\theta^I_{xxx}(0) = \theta^{II}_{xxx}(0); \; \theta^{II}_{xxx}(L) = \theta^{III}_{xxx}(L).$$

Данные граничные условия дают нам систему 8-и уравнений с 8-ю неизвестными, приравнивая её определитель нулю, получим зависимость критической скорости прокачивания жидкости от длины области возбуждения локализованного течения, и частоты наиболее опасных колебаний.

Результаты решения этой задачи для некоторого набора параметров приведены на рисунке 4, где по оси абсцисс отложены критические значения скорости прокачивания жидкости через слой, а по оси ординат длина области возбуждения.

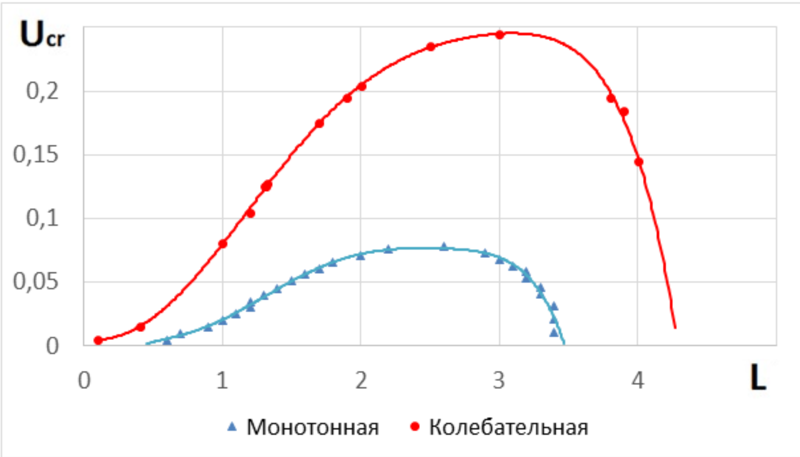

Рис.4. *Нейтральная кривая устойчивости основного состояния при: α=1, β=0.1*

На этом рисунке ниже границы (верхняя кривая) колебательные возмущения тривиального состояния нарастают, т.е. в системе может возбуждаться осциллирующий режим, а выше этой границы все осциллирующие возмущения затухают. Таким образом, можно заметить, что в данной системе в рассмотренном диапазоне параметров локализованные возмущения, по мере роста скорости прокачивания жидкости, исчезают через обратную бифуркацию Хопфа.

В области под кривыми для монотонной устойчивости может существовать устойчивое локализованное конвективное течение, выше этих кривых нет решений, соответствующих стационарному течению. В зазоре между кривыми для монотонной и колебательной устойчивости может существовать только осциллирующее течение. В области над кривыми конвективная структура «вымывается» полностью, в этих режимах надкритичности в области возбуждения недостаточно для зарождения и/или поддержания стационарных конвективных структур.

Список литературы

1. *Goldobin D. S., Shklyaeva E. V.* Large-scale thermal convection in a horizontal porous layer // Phys. Rev. E. 2008. V. 78(2). 027301.
2. *Goldobin D. S., Shklyaeva E. V.* Localization and advectional spreading of convective flows under parametric disorder // E-print: arXiv:0804.3741v2. 2008. http://arxiv.org/abs/0804.3741v2 .