

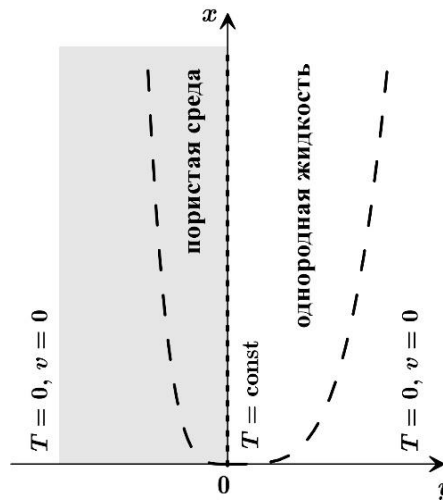
# КОНВЕКТИВНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ГРАНИЦЕ ЖИДКОСТИ И ПОРИСТОЙ СРЕДЫ

И. В. Тюлькина, К. Б. Циберкин

Пермский государственный национальный исследовательский университет,  
614990, Пермь, Букирева, 15

Существенные результаты в описании взаимодействия смежных потоков жидкостей были получены в рамках приближения пограничного слоя на границе раздела [1–3]. В настоящей работе исследуется структура поля скорости в конвективном пограничном слое на границе пористой среды Бринкмана и однородной жидкости, при постоянной температуре границы.

Рассматривается двумерное течение жидкости, смежной с пористой средой, насыщенной той же жидкостью, в отсутствие внешних сил (Рис. 1).



**Рис. 1.** Конфигурация рассматриваемой системы

Полная система уравнений гидродинамики описываемой задачи включает уравнения Навье–Стокса для внешнего течения и уравнения Бринкмана для пористой среды [4], а также уравнение теплопроводности для обеих сред:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{v} + g\beta_0 T \boldsymbol{\gamma}, \\
 \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \chi \Delta T, \\
 \frac{\partial \mathbf{v}_p}{\partial t} + (\mathbf{v}_p \cdot \nabla) \mathbf{v}_p &= -\frac{1}{\rho} \nabla P_p + \nu_{\text{eff}} \Delta (\varphi \mathbf{v}_p) + g\beta_0 T_p \boldsymbol{\gamma} - \frac{\nu}{K} \varphi \mathbf{v}_p, \\
 \operatorname{div} \mathbf{v}_p &= 0, \quad \frac{\partial T_p}{\partial t} + \mathbf{v}_p \cdot \nabla T_p = \chi \Delta T_p.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $\mathbf{v} = \{u, v\}$  – скорость течения жидкости,  $P$  – давление,  $K$  – проницаемость,  $\varphi$  – пористость,  $\rho, \nu, \chi$  – плотность, кинематическая

вязкость и температуропроводность жидкости, соответственно. Индекс  $p$  обозначает величины, относящиеся к пористой среде. Уравнение Бринкмана отличается от уравнения Навье–Стокса наличием слагаемого, описывающего вязкую силу сопротивления пористого скелета, которая определяется законом Дарси. При этом вводится величина  $\nu_{\text{eff}}$  – эффективная кинематическая вязкость в пористой среде, которая описывает диффузию импульса с учётом микроскопической структуры среды. Для неё в соответствии с работами [5, 6] принято значение  $\nu_{\text{eff}} = \nu/\varphi$ .

Система (1) дополняется условиями на границе раздела  $y = 0$  [5, 6]:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \varphi \mathbf{v}_p, & P - 2\rho\nu v_y &= P_p - 2\rho\nu_{\text{eff}}\varphi v_{p,y}, \\ u_y - \frac{\nu_{\text{eff}}}{\nu}\varphi u_{p,y} &= -\frac{\beta}{K^{\frac{1}{2}}}\varphi u_p, & T &= T_p = \Theta, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\beta$  – эмпирический параметр, определяемый свойствами пористой матрицы и геометрией пор на микроуровне, а  $\Theta$  – температура, поддерживаемая на границе раздела сред. Здесь и далее в тексте частные производные по координатам обозначены индексами  $x$  и  $y$ , соответственно.

Система уравнений замыкается условиями вдали от границы:

$$y \rightarrow +\infty: \mathbf{v} \rightarrow 0, \quad T \rightarrow 0; \quad y \rightarrow -\infty: \mathbf{v}_p \rightarrow 0, \quad T_p \rightarrow 0.$$

Уравнение Бринкмана и граничные условия (2) могут быть получены осреднением уравнений Навье–Стокса на масштабе пор [5, 6], что обуславливает их физическую достоверность по сравнению с известными эмпирическими условиями для модели Дарси [7, 8].

Предположение, что основное изменение скорости происходит в пределах тонкой переходной области с характерной шириной  $\delta$  вблизи границы раздела, позволяет применить к модели (1) – (3) теорию Прандтля [9]. С учётом стационарности рассматриваемого течения уравнения в приближении пограничного слоя принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} uu_x + vv_y - \nu u_{yy} &= g\beta_0 T, & u_x + v_y &= 0, \\ uT_x + vT_y &= \chi T_{yy}, \\ u_p u_{p,x} + v_p u_{p,y} - \nu u_{p,yy} &= g\beta_0 T_p - \frac{\nu}{K}\varphi u_p, & u_{p,x} + v_{p,y} &= 0, \\ u_p T_{p,x} + v_p T_{p,y} &= \chi T_{p,yy}. \end{aligned}$$

Граничные условия (2) в приближении пограничного слоя, с учётом, что продольный градиент давления отсутствует, поскольку течение возникает только благодаря конвекции, и вдали от границы скорость жидкости равна нулю в обеих средах, принимают вид

$$\mathbf{v} = \varphi \mathbf{v}_p, \quad v_y = v_{p,y}, \quad u_y - u_{p,y} = -\frac{\beta}{K^{1/2}}\varphi u_p, \quad T = T_p = \Theta.$$

Дальнейшее исследование и поиск автомодельного решения удобно проводить в терминах функции тока, определяемой стандартным образом:

$$u = -\psi_y, \quad v = \psi_x.$$

Уравнения в терминах функции тока допускают автомодельное преобразование

$$\xi = cx^\alpha y, \quad \psi = Ax^\beta f(\xi), \quad T = \Theta g(\xi),$$

где  $f$  и  $g$  – новые неизвестные функции. Поскольку функции тока и температура связаны линейными граничными условиями, это преобразование совпадает для обеих сред. Однако запись уравнения Навье – Стокса для пористой среды в автомодельной форме возможна только в предположении, что проницаемость зависит от  $x$  по закону  $K = K_0 x^{1/2}$ .

Применение указанных преобразований к задаче (1) – (3) однозначно определяет показатели степени и константы:

$$\alpha = -\frac{1}{4}, \quad \beta = \frac{3}{4}, \quad A = -\frac{4\chi c}{3}, \quad c = \left(\frac{9g\beta_0\Theta}{4\chi^2}\right)^{\frac{1}{4}}, \quad B = \Theta.$$

При этом уравнения (1) упрощаются:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{Pr}}(2f'^2 - 3f''f) &= f''' + g, & g'' + fg' &= 0, \\ \frac{1}{\text{Pr}}(2f_p'^2 - 3f_p''f_p) &= f_p''' + g_p - \frac{8\varphi \text{Pr}^{\frac{1}{2}}}{\text{Da}_0 \text{Ra}^{\frac{1}{2}}} f_p', & g_p'' + fg_p' &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

здесь введены параметры:  $\text{Pr} = \nu/\chi$  – число Прандтля,  $\text{Ra} = (9g\beta_0\Theta\delta^3/\nu\chi)$  – число Рэлея,  $\text{Da}_0 = K_0/\delta^{3/2}$  – аналог числа Дарси. Условия (2) на границе раздела  $\xi = 0$  принимают вид

$$\begin{aligned} f &= \varphi f_p, & f' &= \varphi f_p', & f'' - f_p'' &= \frac{\sqrt{2}\beta\varphi}{\sqrt{3}\text{Pr}^{\frac{1}{4}}\text{Ra}^{\frac{1}{4}}\text{Da}_0^{\frac{1}{2}}} f_p', \\ f''' - f_p''' &= f_p' \left( \frac{2(\varphi^2 - 1)}{\text{Pr}} f_p' - \frac{\sqrt{6}\beta\varphi}{\text{Da}_0^{\frac{1}{2}}\text{Ra}^{\frac{1}{4}}\text{Pr}^{\frac{5}{4}}} f_p - \frac{8\varphi}{\text{Da}_0 \text{Ra}^{\frac{1}{2}}\text{Pr}^{\frac{1}{2}}} \right) + \frac{3(\varphi + 1)}{\text{Pr}} f_p f_p'', \\ g &= g_p = 1. \end{aligned}$$

Условия (3) вдали от границы раздела:

$$f(+\infty) = 0, \quad f_p(-\infty) = 0, \quad g(+\infty) = 0, \quad g_p(-\infty) = 0.$$

Условие для  $f''' - f_p'''$  на границе раздела получено из уравнений (4) с учётом остальных условий. Оно требуется для замыкания задачи, поскольку условие для  $\psi_{xy}$  в автомодельной форме удовлетворяется тождественно.

Уравнения для течения однородной жидкости во внешнем потоке совпадает с классической системой уравнений для однородной жидкости [10]. Уравнение для пористой среды по структуре также подобно

последнему, но содержит дополнительное слагаемое, обусловленное силой трения в среде. Нелинейное слагаемое в данном уравнении сохранено, поскольку вдали от границы его вклад мал, но он может оказаться существенным при переходе в однородную жидкость.

Из решения, в частности, можно найти максимальную продольную скорость  $u_m$  и толщину пограничного слоя  $\delta$  (последняя может быть оценена как расстояние от границы, на котором  $u = 0.01u_m$ ):

$$u_m = -cAx^{\frac{1}{2}}f'_m, \quad \delta = \frac{1}{c}\xi_\delta x^{\frac{1}{4}}. \quad (5)$$

Здесь  $f'_m$  – максимальное значение  $f'(\xi)$ , а  $\xi_\delta$  находится из условия  $f'(\xi_\delta) = 0.01f'_m$ . Из (5) видно, что толщина пограничного слоя и скорость растут с высотой по законам  $\delta \sim x^{1/4}$  и  $u_m \sim x^{1/2}$ . Полученный результат соответствует известным зависимостям для конвективного пограничного слоя [9, 10]. Детальный анализ поля скорости и температуры в слое является предметом дальнейшего исследования.

### Список литературы

1. *Lock R. C.* The velocity distribution in the laminar boundary layer between parallel streams // Q.J. Mech. Appl. Math. 1951. Vol. 4. No. 1. P. 42-63.
2. *Boyadjiev Chr., Mitev Pl., Sapundzhiev T.* Laminar boundary layers of co-current gas-liquid stratified flows – I. Theory // Int. J. Multiphas. Flow. 1976. Vol. 3. No. 1. P. 51-55.
3. *Paster A., Dagan G.* Mixing at the interface between two fluids in porous media: a boundary-layer solution // J. Fluid. Mech. 2007. Vol. 584. P. 455-472.
4. *Brinkman H. C.* Calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles Boundary conditions at a naturally permeable wall // Appl. Sci. Res. A. 1947. Vol. 1. P. 27-34.
5. *Ochoa-Tapia J. A., Whitaker S.* Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid – I. Theoretical development // Int. J. Heat. Mass. Tran. 1995. Vol. 38. P. 2635-2646.
6. *Ochoa-Tapia J. A., Whitaker S.* Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid – I. Comparison with experiment // Int. J. Heat. Mass. Tran. 1995. Vol. 38. P. 2647-2655.
7. *Beavers G. S., Joseph D. D.* Boundary conditions at a naturally permeable wall // J. Fluid. Mech. 1967. Vol. 30. No. 1. P. 197-207.
8. *le Bars M., Worster M. G.* Interfacial conditions between a pure fluid and a porous medium: implications for binary alloy solidification // J. Fluid. Mech. 2006. Vol. 550. P. 149-173.
9. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. 744 с.
10. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989. 320 с.