

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ ПЕРМСКОГО КРАЯ  
ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД УРО РАН  
ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. М. В. ЛОМОНОСОВА

# НЕРАВНОВЕСНЫЕ ПРОЦЕССЫ В СПЛОШНЫХ СРЕДАХ

Материалы  
международного симпозиума

**Том 1**



Пермь 2017

УДК [539.3+532.5](063)

ББК 22.25

Н54

**Неравновесные процессы в сплошных средах: материалы междунар. симп.: в 2 т. /** Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Пермь, 2017. – Т. 1. – 262 с.

ISBN 978-5-7944-2918-3 (т. 1)

ISBN 978-5-7944-2917-6

Представлены материалы международного симпозиума, проходившего на базе Пермского государственного национального исследовательского университета с 15 по 18 мая 2017 г. в рамках Пермского естественнонаучного форума. В симпозиуме приняли участие ведущие и молодые ученые, аспиранты и студенты России и зарубежья.

Тематика сборника охватывает современное состояние и актуальные проблемы механики и физики сплошных сред.

Издание предназначено для научных работников, аспирантов и студентов естественнонаучных специальностей вузов.

УДК [539.3+532.5](063)

ББК 22.5

*Издается по решению ученого совета механико-математического факультета  
Пермского государственного национального исследовательского университета*

ISBN 978-5-7944-2918-3 (т. 1)

ISBN 978-5-7944-2917-6

© ПГНИУ, 2017

## **Научный комитет Симпозиума**

Сопредседатели:

Т.П. Любимова, Пермь, Россия

Л. Писмен, Хайфа, Израиль

А. Вивиани, Неаполь, Италия

К.А. Гаврилов, Пермь, Россия

Е.А. Демехин, Краснодар, Россия

М.Ю. Жуков, Ростов-на-Дону, Россия

О.А. Кабов, Новосибирск, Россия

В.В. Козлов, Новосибирск, Россия

В.Г. Козлов, Пермь, Россия

А.К. Колесников, Пермь, Россия

А.Г. Кузнецов, Пермь, Россия

И.Ю. Макарихин, Пермь, Россия

В.Э. Малышкин, Новосибирск, Россия

В.П. Матвеев, Пермь, Россия

А. Моштаби, Тулуза, Франция

О.Б. Наймарк, Пермь, Россия

А. Непомнящий, Хайфа, Израиль

Н.В. Никитин, Москва, Россия

Е.Н. Пелиновский, Нижний Новгород, Россия

А. Пиковский, Потсдам, Германия

В.В. Пухначев, Новосибирск, Россия

Б. Ру, Марсель, Франция

Н.Н. Смирнов, Москва, Россия

П.В. Трусов, Пермь, Россия

П.Г. Фрик, Пермь, Россия

Ю.Д. Чашечкин, Москва, Россия

В. Шевцова, Брюссель, Бельгия

А.П. Шкарапута, Пермь, Россия

## **Локальный организационный комитет**

Т.П. Любимова

Н.А. Зубова

М.А. Кашина

Л.С. Клименко

А.О. Иванцов

К.Б. Циберкин

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Eckert K., Schwarzenberger K., Köllner T., Aland S., Mokbel M., Boeck T.</b> Flow patterns of solutal Rayleigh-Marangoni convection.....	12
<b>Ortiz de Zárate J. M.</b> Applications of Fluctuating Hydrodynamics to Non-Equilibrium Steady States.....	14
<b>Ortiz de Zárate J.M., Baaske P., Bataller H., Braibanti M., Carpineti M., Cerbino R., Croccolo F., Donev A., Köhler W., Vailati A., Xu Shenghua</b> The Giant Fluctuations (NEUF-DIX) Space Project.....	18
<b>Shevtsova V., Gaponenko Y., Yasnou V., Mialdun A. Nepomnyashchy A.</b> Dynamics of miscible interfaces under periodic excitations.....	20
<b>Shevtsova V.</b> Diffusion and thermodiffusion coefficients in mixtures analyzed on the ISS.....	23
<b>Simanovskii I. B., Viviani A.</b> Nonlinear Convective Oscillations in a Two-Layer System.....	26
<b>Yasnou V., Gaponenko Y., Mialdun A., Shevtsova V.</b> Oscillatory flow state in a liquid bridge observed in presence of a parallel gas stream.....	27
<b>Алабужев А. А., Кашина М. А.</b> Влияние движения линии контакта на колебания пузырька в переменном электрическом поле.....	30
<b>Алабужев А. А.</b> Влияние неоднородности поверхности подложки на осесимметричные колебания цилиндрической капли.....	33
<b>Александров В. А., Тонков Л. Е.</b> Вихревые течения в тонких слоях жидкости и каплях на вибрирующей пластине.....	36
<b>Арсланбекова Р. Б., Омаров И. О., Бейбалаев В. Д., Аливердиев А. А.</b> Об особенностях в фазовой плоскости обобщенной нелинейной системы Дуффинга	39
<b>Асмолов Е. С., Низкая Т. В., Виноградова О. И.</b> Течение и дисперсия частиц в канале с анизотропными супергидрофобными стенками.....	42
<b>Ахмедагаев Р. М., Листратов Я. И.</b> Смешанная конвекция при течении жидкого металла в каналах в сильных магнитных полях.....	45
<b>Батищева К. А., Феоктистов Д. В.</b> Изменение поверхностных свойств алюминиевого сплава АМГ-6 текстурированием волоконным лазером.....	48
<b>Бекежанова В. Б., Гончарова О. Н.</b> Влияние гравитации и тепловой нагрузки на режимы испарительной конвекции.....	51
<b>Белов С. Ю.</b> Вычислительные методы и технологии исследования характеристик поверхности раздела сред дистанционным зондированием в коротковолновом диапазоне радиоволн.....	54
<b>Беляев Ю. Н., Малышкин Д. С.</b> Матричный метод расчёта дифракции упругих волн в слоистой анизотропной среде.....	59
<b>Беляева Н.А., Прянишникова Е. А., Столин А. М.</b> Течение с проскальзыванием вязкого сжимаемого материала.....	62
<b>Бондаренко А. В., Рябкова Н. А., Казаков А. В., Труфанова Н. М.</b> Численное исследование зависимости формы свободной поверхности от времени релаксации.....	65
<b>Бородулин В. И., Иванов А. В., Качанов Ю. С. и др.</b> Экспериментальное исследование восприимчивости пограничного слоя на скользящем крыле к вибрациям поверхности.....	68
<b>Бородулин В. И., Иванов А. В., Качанов Ю. С., Мищенко Д. А., Мищенко Д. А., Örlü R., Hanifi A., Hein S.</b> Распределенная вихревая восприимчивость в градиентном пограничном слое.....	71

<b>Брацун Д. А., Демин В. А., Мизев А. И., Петухов М. И., Шмыров А. В.</b> Численное моделирование термокапиллярной конвекции при наличии нерастворимого сурфактанта.....	74
<b>Брацун Д.А., Зюзгин А. В., Красняков И. В.</b> Об эффективности активного управления конвекцией в термосифоне при запаздывании контроллера.....	77
<b>Бузмакова М. М., Гилев В. Г., Мерзляков А. Ф., Русаков С. В.</b> Исследование изменения свойств эпоксидной смолы, модифицированной фуллеренами C60....	80
<b>Буркова Л. Н., Кондрашов А. Н., Рыбкин К. А., Сбоев И. О.</b> Влияние нагрева на изменение веса тел различной симметрии в вязкой жидкости.....	84
<b>Быков А.В., Шихов А.Н., Белозеров А.С.</b> Прогноз опасных метеорологических явлений в пермском крае с использованием модели WRF.....	87
<b>Ваганов М. В., Райхер Ю. Л.</b> Моделирование FORC диаграмм композита с гибридным магнитным наполнителем.....	93
<b>Вассерман И. Н., Шардаков И. Н., Шестаков А. П.</b> Распространение волн возбуждения в деформированном миокарде.....	96
<b>Вертгейм И. И.</b> Локализованные нелинейные структуры уравнений конвекции Марангони в длинноволновом приближении.....	99
<b>Виноградов Д. А., Тепляков И. О., Ивочкин Ю. П., Клементьева И. Б.</b> Исследование устойчивости одновихревого режима течения в жидком металле под действием внешнего магнитного поля.....	103
<b>Власова О. А., Козлов Н.В.</b> Влияние осциллирующих полей на поведение тяжелого тела во вращающемся цилиндре с жидкостью.....	107
<b>Воробьев А.М., Любимов Д.В., Любимова Т.П.</b> Фазовая устойчивость бинарной системы, заполняющей замкнутый контейнер.....	110
<b>Гаришин О. К., Свистков А.Л., Шадрин В. В.</b> Экспериментальные исследования механических свойств резин, наполненных техническим углеродом и слоистыми глинистыми наночастицами.....	113
<b>Гатапова Е. Я., Корбанова Е. Г., Кабов О. А.</b> Профиль температуры вблизи границы раздела жидкость–газ при испарении различных жидкостей в неизотермических условиях.....	116
<b>Глухов А. Ф., Ладейщикова В. В., Сидоров А. С.</b> Влияние магнитного поля на конвекцию магнитной жидкости в вертикальных связанных каналах.....	119
<b>Голдобин Д. С., Пименова А. В., Любимов Д.В., Любимова Т.П.</b> Волны на границе раздела двухслойной системы невязких жидкостей в поле горизонтальных вибраций.....	122
<b>Голдобин Д.С., Клименко Л.С., Пименова А.В., Любимова Т.П., Лепихин А.П.</b> Турбулентный пограничный слой и смешение вод сливающихся рек.....	125
<b>Горбачева Е. В., Демёхин Е. А.</b> Устойчивость двухслойного течения в микромасштабах под действием постоянного и переменного электрических полей.....	128
<b>Гордеева В. Ю., Люшнин А. В.</b> Исследование механизмов неустойчивости для ультратонкого слоя испаряющейся жидкости при наличии сурфактанта на обеих межфазных границах.....	131
<b>Гороженинова Т. Н., Киченко А. А.</b> Биомеханическое моделирование перестройки трабекулярной костной ткани при изменении нагрузки.....	134
<b>Госсман Н.А.</b> Расчет влияния радиального зазора на граничные условия теплообмена к корпусу КВД авиационного двигателя.....	137
<b>Давыдова М. А., Козлов В. Г., Субботин С. В.</b> Устойчивость осредненного течения, генерируемого колеблющимся ядром во вращающейся сферической полости.....	140

<b>Демехин Е. А., Ганченко Г. С., Шелистов В. С., Франц Е.А.</b> Исследование движения ионообменной микрочастицы в слабом электрическом поле.....	<b>143</b>
<b>Дёмин А. А., Терпугов В. Н., Свистков А. Л., Русаков С. В., Кондюрин А. В.</b> Стратосферный эксперимент по определению температуры плоской пластины под действием солнечного потока.....	<b>146</b>
<b>Демин В. А., Мизев А. И., Петухов М. И.</b> О термокапиллярном механизме пространственного разделения металлических расплавов.....	<b>149</b>
<b>Денисова М. О., Костарев К. Г., Ошмарина М. В., Торохова С. В., Шмыров А. В., Шмырова А. И.</b> Контракция в неравновесных системах жидкостей.....	<b>152</b>
<b>Добросельский К.Г.</b> Исследование пространственных и кинематических параметров вихревых структур за обтекаемым цилиндром.....	<b>156</b>
<b>Долгих Т. Ф.</b> Решение уравнений зонального электрофореза эллиптического типа.....	<b>159</b>
<b>Дударь О. И., Дударь Е. С.</b> Исследование тепломассообмена при конденсации влаги в вентиляционной сети подземного сооружения.....	<b>162</b>
<b>Дядюкина А. Д., Киченко А. А.</b> Математическое моделирование структуры трабекулярной костной ткани.....	<b>165</b>
<b>Егоров М. Ю.</b> Численное исследование динамики внутрикамерных процессов при срабатывании ракетного двигателя на твёрдом топливе.....	<b>168</b>
<b>Ефремов Д.В., Уваров С.В., Наймарк О.Б.</b> Закономерности критичности при многомасштабной динамике прерывистой текучести в сплаве АМг6.....	<b>172</b>
<b>Загвозкин Т. Н., Любимова Т. П.</b> Численное исследование адвективного вымывания локализованных конвективных структур в пористой среде.....	<b>175</b>
<b>Захаров А.П., Писмен Л.М.</b> Фазовое разделение и деформации в нематических эластомерах при разбухании.....	<b>178</b>
<b>Захлевных А.Н., Кузнецова К.В.</b> Эффекты мягкого сцепления в коллоидной суспензии магнитных частиц в холестерическом жидком кристалле.....	<b>181</b>
<b>Захлевных А.Н., Манцуоров А.В.</b> Ориентационные переходы в ферронематиках в магнитном поле.....	<b>184</b>
<b>Зубарев Н. М., Кочурин Е. А.</b> Моделирование нелинейной динамики свободной поверхности жидкого диэлектрика конечной глубины в электрическом поле.....	<b>187</b>
<b>Зубова Н. А., Любимова Т. П.</b> Вибрационная конвекция трехкомпонентной смеси в прямоугольной полости в условиях невесомости.....	<b>190</b>
<b>Иванцов А. О., Любимова Т. П., Воробьев А. М.</b> Численное моделирование эволюции гравитационных и капиллярных волн в системе двух слабосмешивающихся жидкостей.....	<b>194</b>
<b>Иванцов А. О., Любимова Т. П.</b> Моделирование динамики деформируемой цилиндрической капли в стратифицированной жидкости под действием вибраций.....	<b>198</b>
<b>Ильин Н.А., Ряшенцев В.В.</b> Исследование физико-механических свойств модифицированного СВМПЭ.....	<b>202</b>
<b>Исламова А. Г., Орлова Е. Г., Феоктистов Д. В.</b> Экспериментальное исследование испарения капель солевых растворов на полированной алюминиевой поверхности.....	<b>206</b>
<b>Казимарданов М. Г., Мингалев С. В., Любимова Т. П., Гомзииков Л. Ю.</b> Особенности моделирования распада пленки на капли в результате развития неустойчивости Кельвина-Гельмгольца методом объема жидкости.....	<b>209</b>
<b>Калинин Е.И., Охотников Д.И., Малюков А.В., Гольцман А. Е., Мазо А. Б., Молочников В. М.</b> Крупномасштабные вихревые структуры в следе за препятствием в канале при переходе к турбулентности.....	<b>214</b>

<b>Караваев А. С., Копысов С. П.</b> Решение трехмерных контактных задач методом Шварца.....	<b>217</b>
<b>Карпунин И. Э., Козлов Н. В.</b> Динамика свободного цилиндрического тела во вращающейся горизонтальной полости при вибрациях.....	<b>220</b>
<b>Кашина М. А.</b> Влияние неоднородности поверхности подложки на колебания цилиндрической капли в переменном электрическом поле.....	<b>223</b>
<b>Кирий В. А, Ганченко Н. Ю., Репина М. Ю.</b> Численное моделирование динамики электролита для электрических мембран с учетом диссоциации воды и микрошероховатости.....	<b>226</b>
<b>Клименко Л. С., Марышев Б. С.</b> Влияние осаждения примеси на линейную устойчивость в концентрационной задаче Хортона-Роджерса -Лэпвуда в рамках фрактальной модели.....	<b>230</b>
<b>Клименко Л.С., Любимов Д.В.</b> Генерация среднего течения около искривленной свободной поверхности при наличии ПАВ.....	<b>234</b>
<b>Кнутова Н. С., Шварц К.Г.</b> Поведение конечно-амплитудных возмущений в слабо вращающемся слое жидкости в условиях микрогравитации.....	<b>238</b>
<b>Колегов К. С.</b> Моделирование формирования рельефной стеклянной пленки в испаряющейся коллоидной жидкости при ИК-нагреве.....	<b>242</b>
<b>Колегов Р. Н., Любимова Т. П., Синер А. А.</b> Разработка численной методики оценки характеристик акустических резонансных процессов в проточной части газотурбинного двигателя.....	<b>246</b>
<b>Колесниченко И. В., Лосев Г. Л., Халилов Р. И.</b> Вихревое течение галлиевого сплава под действием внешнего магнитного поля.....	<b>249</b>
<b>Колесниченко И. В., Мандрыкин С. Д., Халилов Р. И.</b> Электровихревое течение жидкого металла в цилиндрическом объеме.....	<b>252</b>

## CONTENTS

<b>Eckert K., Schwarzenberger K., Köllner T., Aland S., Mokbel M., Boeck T.</b> Flow patterns of solutal Rayleigh-Marangoni convection.....	12
<b>Ortiz de Zárate J. M.</b> Applications of Fluctuating Hydrodynamics to Non-Equilibrium Steady States.....	14
<b>Ortiz de Zárate J.M., Baaske P., Bataller H., Braibanti M., Carpineti M., Cerbino R., Croccolo F., Donev A., Köhler W., Vailati A., Xu Shenghua</b> The Giant Fluctuations (NEUF-DIX) Space Project.....	18
<b>Shevtsova V., Gaponenko Y., Yasnou V., Mialdun A., Nepomnyashchy A.</b> Dynamics of miscible interfaces under periodic excitations.....	20
<b>Shevtsova V.</b> Diffusion and thermodiffusion coefficients in mixtures analyzed on the ISS.....	23
<b>Simanovskii I. B., Viviani A.</b> Nonlinear Convective Oscillations in a Two-Layer System.....	26
<b>Yasnou V., Gaponenko Y., Mialdun A., Shevtsova V.</b> Oscillatory flow state in a liquid bridge observed in presence of a parallel gas stream.....	27
<b>Alabuzhev A. A., Kashina M. A.</b> The influence of contact line motion on the forced oscillations of a gas bubble under an alternating electric field.....	30
<b>Alabuzhev A. A.</b> Influence of the heterogeneity substrate surface on the axisymmetric oscillations of a cylindrical drop.....	33
<b>Aleksandrov V. A., Tonkov L. E.</b> Vortex flows in thin layers of liquid and drops on the vibrating plate.....	36
<b>Arslanbekova R. B., Omarov I. O., Beybalaev V. D., Aliverdiev A. A.</b> On peculiarities in the phase plane of the generalized nonlinear Duffing system.....	39
<b>Asmolov E. S., Nizkaya T. V., Vinogradova O. I.</b> Flow and particle dispersion in a channel with anisotropic superhydrophobic walls.....	42
<b>Akhmedagaev R. M., Listratov Ya. I.</b> Mixed convection in the channel flow of the liquid metal affected by strong magnetic fields.....	45
<b>Batishcheva K. A., Feoktistov D. V.</b> Modification of aluminum alloy surface properties by wave-long laser texturing.....	48
<b>Bekezhanova V. B., Goncharova O. N.</b> Influence of the gravity and thermal load on regimes of evaporative convection.....	51
<b>Belov S. Yu.</b> Computational methods and technologies of a research of characteristics of the interface between media by remote sensing in the short-wave range of radio waves .....	54
<b>Belyayev Yu. N., Malyshkin D. S.</b> The matrix method for calculating the diffraction of elastic waves in layered anisotropic medium.....	59
<b>Belyaeva N.A., Pryanishnikova E.A., Stolin A.M.</b> Viscous compressible material flow with slip.....	62
<b>Bondarenko A. V., Riabkova N. A., Kazakov A. V., Trufanova N. M.</b> Numerical study of the dependence of the shape of a free surface from the relaxation time.....	65
<b>Borodulin V. I., Ivanov A. V., Kachanov Yu. S., Mischenko D. A., Örlü R., Hanifi A., Hein S.</b> Experimental study of boundary layer receptivity to surface vibrations on a swept wing.....	68
<b>Borodulin V. I., Ivanov A. V., Kachanov Yu. S., Mischenko D. A., Fedenkova A. A.</b> Distributed vortex receptivity in gradient boundary layer.....	71
<b>Bratsun D. A., Demin V. A., Mizev A. I., Petukhov M. I., Shmyrov A. V.</b> Numerical simulation of thermocapillary convection in the presence of insoluble surfactant...	74

<b>Bratsun D. A., Zyuzgin A. V., Krasnyakov I. V.</b> On the efficiency of active control of convection in a thermosyphon with time-delay controller .....	77
<b>Buzmakova M. M., Gilev V. G., Merzlyakov A. F., Rusakov S. V.</b> The research of the properties' change of the epoxy, modified by fullerenes C60.....	80
<b>Burkova L. N., Kondrashov A. N., Rybkin K. A., Sboev I. O.</b> Weight loss on heating of the bodies with different symmetry.....	84
<b>Bykov A.V., Shikhov A.N., Belozyorov A.S.</b> Forecasting meteorological hazards in the Perm Region by means of WRF model WRF.....	87
<b>Vaganov M. V., Raikher Yu. L.</b> Modelling FORC diagrams for an ensemble of magnetically soft and hard particles.....	93
<b>Vasserman I. N., Shardakov I. N., Shestakov A. P.</b> Propagation of excitation waves in deformed myocardium.....	96
<b>Wertgeim I. I.</b> Localized nonlinear structures of long-wave approximation of Marangoni convection equations.....	99
<b>Vinogradov D. A., Teplyakov I. O., Ivochkin Yu. P., Klementeva I. B.</b> Investigation of stability of single vortex flow mode in liquid metal by influence of external magnetic field.....	103
<b>Vlasova O. A., Kozlov N.V.</b> Influence of oscillating fields on the heavy body behavior in a rotating cylinder with liquid.....	107
<b>Vorobev A., Lyubimov D., Lyubimova T.</b> Phase stability of a binary mixture in a confined container.....	110
<b>Garishin O. K., Svistkov A. L., Shadrin V. V.</b> Experimental studies of the mechanical properties of rubbers filled with carbon black and layered clay nanoparticles....	113
<b>Gatapova E. Ya., Korbanova E. G., Kabov O. A.</b> Temperature profile near liquid–gas interface during evaporation of different fluids for non–isothermal case.....	116
<b>Glukhov A. F., Ladeyshchikova V. V., Sidorov A. S.</b> Influence of the magnetic field on the convection of a magnetic fluid in vertical coupled channels .....	119
<b>Goldobin D. S., Pimenova A. V., Lyubimov D. V., Lyubimova T. P.</b> Interfacial waves in a two-layer liquid system subject to horizontal vibrations.....	122
<b>Goldobin D. S., Klimenko L. S., Pimenova A. V., Lyubimova T. P., Lepikhin A. P.</b> Turbulent boundary layer and mixing of waters of confluencing rivers.....	125
<b>Gorbacheva E. V., Demekhin E. A.</b> Stability of a two-layer flow in microscale under the influence of a constant and alternating electric fields.....	128
<b>Gordeeva V. Y., Lyushnin A. V.</b> The study of mechanisms of instabilities for an ultra-thin layer of evaporating liquid in the presence of the surfactant on both interfaces.....	131
<b>Gorozheninova T. N., Kichenko A. A.</b> Biomechanical modeling of bone tissue remodeling under changing load.....	134
<b>Gossman N. A.</b> Calculation of the influence of radial gap on the boundary conditions of heat exchange to the case of the high-pressure compressor of an aircraft engine.....	137
<b>Davydova M. A., Kozlov V. G., Subbotin S. V.</b> Stability of steady flow generated by oscillating core in rotating spherical cavity.....	140
<b>Demekhin E. A., Ganchenko G. S., Shelistov V. S., Frants E. A.</b> Investigation of the motion of an ion-exchange microparticle in a weak electric field.....	143
<b>Demin A. A., Terpugov V. N., Svistkov A. L., Rusakov S. V., Kondyurin A. V.</b> Stratospheric experiment on temperature of flat plate under solar irradiation.....	146
<b>Demin V. A., Mizev A. I., Petukhov M. I.</b> On thermocapillary mechanism of spatial separation of metal melts.....	149
<b>Denisova M. O., Kostarev K. G., Oshmarina M. V., Torokhova S. V., Shmyrov A. V., Shmyrova A. I.</b> Contraction in nonequilibrium systems.....	152

<b>Dobrosel'skii K.G.</b> The study of the spatial and kinematic parameters of the vortex structures behind the streamlined cylinder.....	156
<b>Dolgikh T. F.</b> Solution to equation for zone electrophoresis of elliptic type.....	159
<b>Dudar O. I., Dudar E. S.</b> Research of heat and mass transfer during the moisture condensation in ventilation network of underground structure.....	162
<b>Dyadyukina A. D., Kichenko A. A.</b> Mathematical modelling of trabecular bone structure.....	165
<b>Egorov M. Yu.</b> Numerical research of dynamics intracameral processes when firing a rocket engine solid fuel.....	168
<b>Efremov D.V., Uvarov S.V., Naimark O.B.</b> Criticality laws in the multiscale dynamics of jerky flow in the Al-Mg alloy.....	172
<b>Zagvozhkin T. N., Lyubimova T. P.</b> Numerical calculations of advective removal of localized convective structures in a porous medium.....	175
<b>Zakharov A.P., Pismen L.M.</b> Swelling-induced phase bistability and reshaping in nematic elastomers.....	178
<b>Zakhlevnykh A. N., Kuznetsova K.V.</b> Soft anchoring effects in colloidal suspension of magnetic particles in a cholesteric liquid crystal.....	181
<b>Zakhlevnykh A. N., Mantsurov A.V.</b> Orientational transitions in ferronematics under magnetic field.....	184
<b>Zubarev N. M., Kochurin E. A.</b> Simulation of nonlinear dynamics of free surface of finite depth liquid dielectric under the action of electric field.....	187
<b>Zubova N. A., Lyubimova T. P.</b> Vibrational convection of ternary mixture in rectangular cavity in zero gravity condition.....	190
<b>Ivantsov A. O., Lyubimova T. P., Vorobev A. M.</b> Numerical simulation of the evolution of gravity-capillary waves in a system of two slowly miscible liquids.....	194
<b>Ivantsov A. O., Lyubimova T. P.</b> Modeling of the dynamics of a deformable cylindrical drop in a density-stratified liquid under vibrations.....	198
<b>Ilyin N. A., Ryashentsev V. V.</b> The study of physical and mechanical properties modified UHMWPE.....	202
<b>Islamova A.G., Orlova E.G., Feoktistov D.V.</b> Experimental study of the salt solutions droplets evaporation on polished aluminum surface.....	206
<b>Kazimardanov M. G., Mingalev S. V., Lyubimova T. P., Gomzikov L. Y.</b> The simulation of primary atomization due to Kelvin-Helmholtz instability by volume of fluid method.....	209
<b>Kalinin E. I., Okhotnikov D. I., Malyukov A. V., Goltsman A. E., Mazo A. B., Molochnikov V. M.</b> Large scale vortical structures in the wake of an obstacle in transition to turbulent channel flow.....	214
<b>Karavaev A. S., Kopysov S. P.</b> Solving three-dimensional contact problems using Schwarz method.....	217
<b>Karpunin I. E., Kozlov N. V.</b> Dynamics of a free cylindrical body in a rotating horizontal cavity under vibrations.....	220
<b>Kashina M. A.</b> Influence of the heterogeneity substrate surface on the oscillations of a cylindrical drop in an alternating electric field.....	223
<b>Kiriy V. A., Ganchenko N. Yu., Repina M. Yu.</b> Numerical simulation of selective surface microinhomogeneities' impact on electrolyte dynamics with considering water dissociation.....	226
<b>Klimenko L. S., Maryshev B. S.</b> Impact of the solute immobilization on stability within the solute analog of Horton–Rogers–Lapwood.....	230
<b>Klimenko L. S., Lyubimov D. V.</b> Surfactant effect an average flow generation near curved free surface.....	234

<b>Knutova N.S., Shvarts K.G.</b> Behavior of finite-amplitude perturbations in a slow rotating liquid layer under microgravity conditions.....	<b>238</b>
<b>Kolegov K. S.</b> Simulation of relief glass film formation in the evaporating colloidal liquid under IR heating.....	<b>242</b>
<b>Kolegov R. N., Lyubimova T. P., Siner A. A.</b> Development of numerical method for prediction of acoustic resonance phenomena characteristics in aircraft engine ducts.....	<b>246</b>
<b>Kolesnichenko I. V., Losev G. L., Khalilov R. I.</b> Vortex flow of gallium alloy under external alternating magnetic field.....	<b>249</b>
<b>Kolesnichenko I. V., Mandrykin S. D., Khalilov R. I.</b> Electro-vortex flow of liquid metal in cylindrical volume.....	<b>252</b>

# Flow patterns of solutal Rayleigh-Marangoni convection

K. Eckert<sup>a,b</sup>, K. Schwarzenberger<sup>a</sup>, T. Köllner<sup>b,c</sup>, S. Aland<sup>d</sup>, M. Mokbel<sup>d</sup>, T. Boeck<sup>c</sup>

<sup>a</sup> TU Dresden, Institut für Verfahrenstechnik und Umwelttechnik, 01062 Dresden  
email: kerstin.eckert@tu-dresden.de

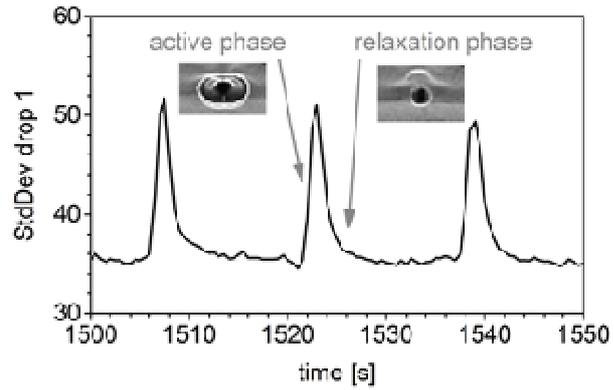
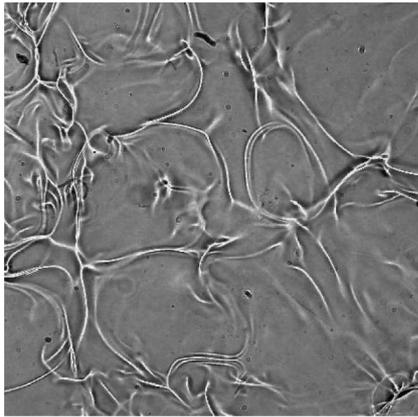
<sup>b</sup> Helmholtz-Zentrum Dresden-Rossendorf (HZDR), Institute of Fluid Dynamics, P.O. Box 510119, 01314 Dresden

<sup>c</sup> TU Ilmenau, Institute of Thermodynamics and Fluid Mechanics, P.O. Box 100565, 98684 Ilmenau

<sup>d</sup> TU Dresden, Institute of Scientific Computing, 01062 Dresden

Mass transfer between immiscible liquid layers potentially causes convection due to buoyancy forces (Rayleigh mechanism) and interfacial tension gradients (Marangoni mechanism). Rayleigh convection will be triggered if a density decreasing solute is transported against the direction of gravitational acceleration. If at the same time the solute is reducing interfacial tension and is transported out of the phase with lower diffusivity, the system is linear stable to cellular Marangoni convection. However, the interaction of the Rayleigh convection with the Marangoni effect produces a chaotic flow structure, denoted as eruptions, see Fig. 1 (left). We examine this flow structure by a combination of experiments and three-dimensional direct numerical simulations [1]. Thereby, we demonstrate that the detaching solutal plumes in the organic phase are the origin of intense spreading events driven by interfacial tension gradients.

In a second configuration, we consider the *reverse* direction of mass transfer, where a stable density stratification is built up. If small droplets are placed in the concentration gradient, they show a periodic convection in the form of relaxation oscillations, cf. Fig.1 (right). This experimental finding can be reproduced by 2D numerical simulations based on a diffusive-interface approach [2] which assume a linear concentration and density gradient. By analyzing the characteristics of the relaxation oscillations, the underlying mechanism can be attributed to the interaction between the mixing by Marangoni convection and the restorative effects of diffusion and buoyant convection on the driving concentration gradients. Furthermore, we show that an intriguing coupling of the relaxation oscillations can occur in multi-droplet configurations.



**Figure 1:** Left: Shadowgraph image of Rayleigh-Marangoni convection in a water-cyclohexanol system with isopropanol as diffusing solute. The size of the shown window is approx. 15 mm. Right: Relaxation oscillations at droplets (0.3 mm diameter) of liquid paraffin immersed in an aqueous solution of isopropanol.

## References

1. Köllner, T., Schwarzenberger, K., Eckert, K., and Boeck, T. The eruptive regime of mass transfer-driven Rayleigh-Marangoni convection. *Journal of Fluid Mechanics*, 2016, vol. 791, R4.
2. Schwarzenberger, K., Aland, S., Domnick, H., Odenbach, S., Eckert, K. Relaxation oscillations of solutal Marangoni convection at curved interfaces. *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*, 2015, vol. 481, pp. 633–643.

# Applications of Fluctuating Hydrodynamics to Non-Equilibrium Steady States

J. M. Ortiz de Zárate

Universidad Complutense. Departamento de Física Aplicada I.  
Plaza de las Ciencias, 1. 28040 Madrid. Spain.  
email: jmortizz@ucm.es

## 1. Introduction

In this presentation I review various applications of Fluctuating Hydrodynamics for the evaluation of spontaneous thermal fluctuations in non-equilibrium steady states. This research topic was first considered at Perm State University by Zaitsev and Shliomis [1] for the case of a fluid subjected to a stationary temperature gradient below (but close to) the convection threshold. Unfortunately, this pioneering paper is little known and had not much impact. Years later, similar ideas were re-discovered in the West by Swift and Hohenberg [2] with greater success, leading among other developments to the nowadays well known SH equation.

Fluctuating Hydrodynamics (FHD) is a mesoscopic extension of classical hydrodynamics, invented in the former Soviet Union by Landau and Lifshitz [3] and well publicized through their famous *Course of Theoretical Physics* [4]. The basic idea behind FHD is as follows: As is well-known, in hydrodynamics the balance equations (mass, momentum, energy,...) need to be complemented with (linear) phenomenological laws which relate the so-called dissipative fluxes with the gradients of thermo-hydrodynamic fields. Landau and Lifshitz [3-4] proposed that, to reflect the stochastic nature of the atomic interactions responsible of dissipation, the linear laws should be considered to be valid only 'on average', and need to be supplemented with random dissipative fluxes. To fix ideas one can consider, for instance, the case of a diffusion flow  $\mathbf{J}$  in an isothermal binary fluid mixture (Fick's law) for which FHD proposes an stochastic phenomenological law, namely

$$\mathbf{J} = -\rho D \nabla c + \delta \mathbf{J}, \quad (1.1)$$

where  $\rho$ ,  $D$  and  $\nabla c$  are the mass density, the diffusion coefficient and the concentration gradient (in mass fraction), respectively. Most importantly,  $\delta \mathbf{J}$  in Eq. (1.1) represents a random diffusion flow. To recover the classical Fick's law on average, one must have  $\langle \delta \mathbf{J} \rangle = 0$ . Substitution of expressions like (1.1) into the balance laws (balance of mass for this particular case) transforms the hydrodynamic equations into a set of partial **stochastic** differential equations. Of course, by taking averages (over fluctuations) one re-obtains the classical or **deterministic** hydrodynamic equations. But the stochastic FHD equations make it possible to elucidate the nature of thermal fluctuations, and evaluate explicit expressions for their time correlation functions. However, to proceed in that direction one needs to know the statistical properties of  $\delta \mathbf{J}$ , beyond the cancellation of the first moment. The contribution of Landau and Lifshitz [3-4] is to realize that, since for **global equilibrium** states natural or spontaneous fluctuations in the thermodynamic variables (density, number of particles, etc.) are known from Statistical Physics (canonical ensemble), the second moment of the random dissipative fluxes must be given by the so-called Fluctuation-Dissipation Theorem (FDT). In the particular case of eq. (1.1) the FDT means that the components of the random diffusion flux for an isotropic fluid are correlated as:

$$\langle \delta J_i(\mathbf{r}, t) \cdot \delta J_i(\mathbf{r}', t') \rangle = 2 k_B T \rho D \left( \frac{\partial c}{\partial \mu} \right)_{T,p} \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'), \quad (1.2)$$

In eq. (1.2)  $k_B$  is Boltzmann's constant,  $T$  is the temperature (uniform for a global equilibrium state) and  $(\partial c / \partial \mu)_{T,p}$  the osmotic compressibility (the **thermodynamic factor** in the theory of diffusion). In addition,  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}'$  are two position vectors and  $t$ ,  $t'$  two values of time. In principle, the FDT (1.2) is only rigorously valid for fluctuations in a global equilibrium state [3,4], in which case statistical physics provides a justification.

Subsequent development of FHD after Landau and Lifshitz [3-4] has been slow. It only was received in the West years later, in particular through the work of Fox and Uhlenbeck [5,6] who provided further justification of the FDT in equilibrium states based on kinetic theory arguments (beyond the phenomenological ones summarized in the previous paragraph). Equilibrium FHD was originally formulated for one-component fluid systems [1-6] and over the years has been extended, among other developments, to binary mixtures [7], chemical reactions [8] and nematic liquid crystals [9].

The slow development of (equilibrium) FHD was probably due to the fact that, in its main application the calculation of fluctuations spectra, it had to compete with an alternative approach: The method of arbitrary initial conditions, as pioneered by Mountain [10] and adopted by the most popular monographs on the subject [11-12]. This alternative consists in solving deterministic (with no random contributions) hydrodynamic equations with arbitrary initial conditions. Then, one multiplies the solution by the arbitrary initial condition, averages over these initial conditions, and obtains the dynamic  $\langle \delta c^*(t) \delta c(0) \rangle$  correlation function(s) as a function of the static  $\langle \delta c^*(0) \delta c(0) \rangle$  correlation(s). To complete the calculation by the Mountain [10-12] method, one needs expressions for the static correlations, which are borrowed from equilibrium statistical physics. The two approaches: FHD [1-9] and arbitrary initial conditions [10-12], are fully equivalent for fluctuations in equilibrium states. However, for our purpose here it is very important to notice that, in addition to the extensions mentioned earlier [1,7-9], FHD has been also successfully extended to fluctuations in non-equilibrium states [1]. On the contrary, the Mountain method [10-12] does not work for non-equilibrium fluctuations.

## 2. Fluctuations in non-equilibrium steady states

Historically, the first use of FHD to study fluctuations in a non-equilibrium steady state was by Zaitsev and Shliomis [1] in 1970 who consider a one-component fluid subjected to a temperature gradient (Rayleigh-Bénard problem). They correctly identified a non-equilibrium enhancement of the fluctuations that, eventually, diverges (in a linear theory) when the convection threshold is approached. But that work [1] had little impact and no continuity. It did not discuss consequences relevant for experiments.

For our purpose here, one can consider that the beginning of a continuous line of research on non-equilibrium fluctuations in fluids subjected to a temperature gradient was in 1982 by Kirkpatrick et al. [13]. These authors put the focus on consequences observable by laser light scattering when the system is far from any hydrodynamic instability, and correctly identified that the most prominent experimental effect will be in the Rayleigh line of the scattering spectrum, in contrast with tiny unobservable effects on the Brillouin doublet that other authors were investigating at that time [14] and confusing a bit the issue. The original work of Kirkpatrick et al. [13] was based on kinetic theory, in line with the Fox and Uhlenbeck [5]

justification of FHD. However, very quickly [15], their results were re-derived based on FHD proper<sup>1</sup>, which provides a simpler way and became the theory of choice since.

The theoretical predictions [13-15] on the non-equilibrium enhancement of fluctuations were confirmed by accurate dynamic light-scattering experiments with toluene at the laboratory of Prof. Jan V. Sengers at the University of Maryland [16,17]. Pretty quickly, the theory was extended to binary liquid mixtures subjected to a temperature gradient, in which case the Soret effect induces enhanced concentration fluctuations [18]. Similarly, the predictions for mixtures were swiftly confirmed experimentally [19,20], even in a more convincing way since concentration fluctuations are easier to observe.

Researchers soon realized that these non-equilibrium fluctuations are highly anisotropic and, generically, of long spatial range [13,16]. This is in contrast with equilibrium fluctuations, which only are long-ranged in the close vicinity of critical points. The spatial long-ranged nature of the fluctuations causes them to be affected by gravity [21] (a theoretical prediction also quickly verified experimentally [20]) and by finite-size effects [22]. Interestingly, it was the incorporation of buoyancy and confinement effects [21,22] into the theory of light-scattering from fluid and fluid mixtures subjected to a temperature gradient which allowed to make contact with the theme of fluctuations close to the convection threshold and the original paper of Zaïtsev and Shliomis [1] and Swift and Hohenberg [2], see ref. [23].

The field of non-equilibrium fluctuations has continued to experience important developments in the latter years. On the experimental side it is worth mentioning the development of the shadowgraph technique [24,25], that allows to perform simultaneous light-scattering at multiple wave numbers, while covering a range where buoyancy and confinement effects are important. By conducting shadowgraph experiments in microgravity, it was possible to verify the effects of confinement on non-equilibrium fluctuations [26]. With a dynamic version of shadowgraphy [27], also the effects of buoyancy and confinement on the decay rate of non-equilibrium concentration fluctuations has been studied [28]. Among the recent theoretical developments, we mention the theoretical evaluation of fluctuation-induced (Casimir) forces associated with the spatial long-range nature of non-equilibrium fluctuations [29]. In addition, the progress of computational FHD, based on a numerical solution of hydrodynamic equations with stochastic forcing [30] is opening new possibilities.

## Acknowledgements

I thank both the Ural Branch of the RAS and Perm State University, in particular Prof. Lyubimova, for inviting me to attend this conference. My research is funded by the Spanish State Secretary of Science by the grant FIS2014-58950-C2-2-P.

## References

1. V.M. Zaïtsev, M.I. Shliomis, Hydrodynamic Fluctuations near the Convection Threshold Sov. Phys. JETP, **32**, 1971, pp. 866-870. Zh. Eksp. Teor. Fiz. **59**, 1970, pp. 1583-1592
2. J.B. Swift, P.C. Hohenberg, Hydrodynamic Fluctuations at the Convective Instability, Phys. Rev. A, **15**, 1977, pp. 319-328.
3. L. D. Landau, E. M. Lifshitz, Hydrodynamic Fluctuations, Sov. Phys. JETP, **5**, 1957, p. 512-513. Zh. Eksp. Teor. Fiz., **32**, 1957, p. 618,
4. L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Pergamon, London, 1959.
5. R.F. Fox, G.E. Uhlenbeck, Contributions to non-equilibrium thermodynamics. I. Theory of hydrodynamical fluctuations, Phys. Fluids, **13**, 1970, p. 1893.
6. R. F. Fox, Gaussian Stochastic Processes in Physics, Phys. Rep., **48**, 1978, pp. 179-283.
7. J. Foch, Phys. Fluids, 1971, 14, 893.

---

<sup>1</sup> In line with Zaïtsev and Shliomis [1], but without reference to them

8. I. Pagonabarraga, A. Pérez-Madrid and J. M. Rubí, *Physica A*, 1997, 237, 205.
9. M. Treiber and L. Kramer, *Phys. Rev. E*, 1994, 49, 3184.
10. R.D. Mountain, Spectral Distribution of Scattered Light in a Simple Fluid *Rev. Mod. Phys.*, 38, 1966, pp. 205-214.
11. B. J. Berne, R. Pecora, *Dynamic Light Scattering* Wiley, 1976.
12. J. P. Boon, S. Yip, *S. Molecular Hydrodynamics* McGraw-Hill, 1980.
13. T. R. Kirkpatrick, E. G. D. Cohen, J.R. Dorfman, Light Scattering by a Fluid in a Nonequilibrium Steady State. II. Large Gradients. *Phys. Rev. A*, 26, 1982, pp. 995-1014.
14. A.-M. S. Tremblay, M. Arai, E. D. Siggia. Fluctuations about simple nonequilibrium steady states. *Phys. Rev. A*, 23, 1981, pp. 1451-1480.
15. D. Ronis, I. Procaccia. Nonlinear resonant coupling between shear and heat fluctuations in fluids far from equilibrium *Phys. Rev. A*, 26, 1982, pp. 1812-1815.
16. B.M. Law, R.W. Gammon, J.V. Sengers. Light-scattering Observations of Long-Range Correlations in a Nonequilibrium Liquid *Phys. Rev. Lett.*, 60, 1988, p. 1554.
17. B. M. Law, P.N. Segrè, R.W. Gammon, J.V. Sengers. Light-Scattering measurements of Entropy and Viscous Fluctuations in a Liquid far from Equilibrium *Phys. Rev. A*, 41, 1990, pp. 816-824.
18. B.M. Law, J.C. Nieuwoudt. Noncritical liquid mixtures far from equilibrium: The Rayleigh line *Phys. Rev. A*, 40, 1989, pp. 3880-3885.
19. W.B. Li, K.J. Zhang, J.V. Sengers, R.W. Gammon, J.M. Ortiz de Zárate. Concentration Fluctuations in a Polymer Solution under a Temperature Gradient *Phys. Rev. Lett.*, 81, 1998, pp. 5580-5583.
20. A. Vailati, M. Giglio. q-Divergence of Nonequilibrium Fluctuations and Its Gravity-Induced Frustration in a Temperature Stressed Liquid Mixture *Phys. Rev. Lett.*, 77, 1996, pp. 1484-1487.
21. P.N. Segrè, J.V. Sengers. Nonequilibrium Fluctuations in Liquid Mixtures under the Influence of Gravity. *Physica A*, 198, 1993, pp. 46-77.
22. J.M. Ortiz de Zárate, J.V. Sengers. Fluctuations in fluids in thermal nonequilibrium states below the convective Rayleigh-Bénard instability *Physica A*, 300, 2001, pp. 25-52.
23. J.M. Ortiz de Zárate, J.V. Sengers. Boundary effects on the nonequilibrium structure factor of fluids below the Rayleigh-Bénard instability *Phys. Rev. E*, 66, 2002, 66, 036305.
24. A. Vailati, M. Giglio. Giant fluctuations in a free diffusion process. *Nature*, 390, 1997, pp. 262-265.
25. J. Oh, G. Ahlers. Thermal-Noise Effect on the Transition to Rayleigh-Bénard Convection *Phys. Rev. Lett.*, 91, 2003, 094501.
26. C.J. Takacs, A. Vailati, R. Cerbino, S. Mazzoni, M. Giglio, D.S. Cannell. Thermal Fluctuations in a Layer of Liquid CS<sub>2</sub> Subjected to Temperature Gradients with and without the Influence of Gravity *Phys. Rev. Lett.*, 106, 2011, 244502.
27. F. Croccolo, D. Brogioli, A. Vailati, M. Giglio, D.S. Cannell. Nondiffusive decay of gradient-driven fluctuations in a free-diffusion process *Phys. Rev. E*, 76, 2007, 041112.
28. C. Giraudet, H. Bataller, Y. Sun, A. Donev, J.M. Ortiz de Zárate, F. Croccolo. Slowing-down of non-equilibrium concentration fluctuations in confinement *Europhys. Lett.*, 111, 2015, 60013.
29. T.R. Kirkpatrick, J.M. Ortiz de Zárate, J.V. Sengers. Giant Casimir effect in fluids in nonequilibrium steady states. *Phys. Rev. Lett.*, 110, 2013, 235902.
30. F. Balboa Usabiaga, J.B. Bell, R. Delgado-Buscalioni, A. Donev, T.G. Fai, B.E. Griffith, C.S. Peskin. Staggered Schemes for Fluctuating Hydrodynamics *SIAM J. Multiscale Model. Simul.*, 10, 2012, pp. 1369-1408.

# The Giant Fluctuations (NEUF-DIX) Space Project

**J.M. Ortiz de Zárate<sup>1</sup>, P. Baaske<sup>2</sup>, H. Bataller<sup>3</sup>, M. Braibanti<sup>4</sup>,  
M. Carpineti<sup>5</sup>, R. Cerbino<sup>6</sup>, F. Croccolo<sup>3,7</sup>, A. Donev<sup>8</sup>, W. Köhler<sup>9</sup>,  
A. Vailati<sup>5</sup>, Shenghua Xu<sup>10</sup>**

<sup>1</sup> Dept. Applied Physics I, Universidad Complutense, ES-28040 Madrid, Spain  
email: jmortizz@ucm.es

<sup>2</sup> Nanotemper Technologies GmbH, Munich, Germany

<sup>3</sup> Laboratoire des Fluides Complexes et leurs Réservoirs - IPRA, UMR5150,  
CNRS/TOTAL/UNIV PAU & PAYS ADOUR, FR-64600 Anglet, France

<sup>4</sup> ESA-Estec Noordwijk, The Netherlands

<sup>5</sup> Dpt. di Fisica, Università degli Studi di Milano, IT-20133 Milano, Italy

<sup>6</sup> Dip. Biotechnologie Mediche e Medicina Traslazionale, Università degli Studi di Milano,  
IT-20090 Segrate, Italy

<sup>7</sup> Centre Nationale d'Etudes Spatiales, Paris, France

<sup>8</sup> Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, NY 10012, USA

<sup>9</sup> Physikalisches Institut, Universität Bayreuth, D-95440 Bayreuth, Germany

<sup>10</sup> Key Laboratory of Microgravity, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Science,  
Beijing, China

Mass and thermal diffusion processes in a liquid mixture are accompanied by non-equilibrium fluctuations. The amplitude of these fluctuations at small wave vectors is orders of magnitude larger than that of the equilibrium ones [1,2]. On Earth gravity quenches long wavelength non equilibrium fluctuations [3,4], while in microgravity conditions they are fully developed and span all the available length scales up to the macroscopic size of the systems [5,6]. Available theoretical models, based on linearized hydrodynamics, provide an accurate description of the static and dynamic properties of the fluctuations under ideal conditions such as small gradients and stationary states [1].

The aim of the Giant Fluctuations space project is to investigate Non-Equilibrium Fluctuations during Diffusion in In complex liquids (NEUF-DIX), under conditions that cannot be tackled easily by theoretical models, such as transient diffusion, concentrated samples and large gradients [7]. The focus of the project is on the investigation of the non-equilibrium fluctuations in complex liquids, because of the rich phenomenology that can be attained by tuning the interactions in such systems. Since gravity quenches long-wavelength non-equilibrium fluctuations, in order to fully exploit the scale-free behaviour of the fluctuations we envision performing experiments under microgravity conditions. The project recently entered its A/B phase and will be flown on-board the International Space Station.

The goal of the project is to tackle several challenging problems that emerged during the last years, such as i) understanding the non-equilibrium fluctuations in a complex ternary mixture including a polymer [8], ii) understanding the non-equilibrium fluctuations in a complex ternary mixture including a polymer close to a glass transition [9-10], iii) checking the theoretical predictions of Casimir-like forces induced by non-equilibrium fluctuations [11,12], iv) the investigation of the onset of fluctuations during transient diffusion [13], v) understanding the non-equilibrium fluctuations in concentrated colloidal suspensions [14], a problem strictly related with the detection of Casimir forces], vi) understanding the effect of non-equilibrium

fluctuations on antibodies. We envision to parallel these experiments with state of the art multi-scale simulations [15-16].

### References

1. Ortiz de Zarate J.M. and Sengers J. V., Hydrodynamic fluctuations in fluids and fluid mixtures (Elsevier, Amsterdam 2006)
2. Croccolo F., Ortiz de Zarate J. M. and Sengers J. V., Eur. Phys. J. E **39**, 125 2016
3. Vailati, A. and Giglio, M., Nature, 390, 262, 1997
4. Croccolo, F., et al., Ann. NY Acad.Sci., 1077, 365, 2006
5. Vailati, A., et al., Nature Comm., 2, 290, 2011
6. Croccolo, F., et al., Micrograv. Sci. Technol. 28, 467 (2016)
7. P. Baaske, H. Bataller, M. Braibanti, M. Carpineti, R. Cerbino, F. Croccolo, A. Donev, W. Köhler, J. M. Ortiz de Zárate, and A. Vailati, Eur. Phys. J. E 39, 119 2016
8. Bataller H., et al., Eur. Phys. J. E accepted 2017
9. Rauch, J., Köhler, W., Phys. Rev. Lett., 88, 185901, 2002
10. Rauch, J., Köhler, W. J. Phys. Chem., 119, 11977, 2003
11. Kirkpatrick, T. R., Ortiz de Zárate, J. M., and Sengers, J. V., Phys. Rev. Lett., 110, 235902, 2013
12. Kirkpatrick, T. R., Ortiz de Zárate, J. M., and Sengers, J. V., Phys. Rev. Lett, 115, 035901, 2015
13. Cerbino, R., Sun, Y., Donev, A., and Vailati, A., Sci. Rep., 5, 14486, 2015
14. Giavazzi F., et al., Eur. Phys. J. E 39, 103 2016
15. Donev, A. and Vanden-Eijnden, E., J. Chem. Phys., 140, 234115, 2014
16. Donev, A., et al., Physics of Fluids, **27(3)**, 037103, 2015

# Dynamics of miscible interfaces under periodic excitations

V. Shevtsova<sup>a</sup>, Y. Gaponenko<sup>a</sup>, V. Yasnou<sup>a</sup>, A. Mialdun<sup>a</sup>, A. Nepomnyashchy<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Microgravity Research Centre, University of Brussels, 50 Av. F. Roosevelt  
Brussels 1050, Belgium, email: vshev@ulb.ac.be

<sup>b</sup>Mathematics Dept., Technion, Israel Institute of Technology, 32000 Haifa, Israel

We present experimental evidence of the existence of an interfacial instability between two miscible liquids of similar (but non-identical) viscosities and densities under horizontal vibration. A stably stratified two-layer system is composed of the same binary mixture with different concentrations placed in a confined cell (with length twice as large as the height). Unlike the case of immiscible fluids, here, the interface is a transient layer of small but non-zero thickness. Vibrations are imposed parallel to the diffusive interface. In the experiments, the frequency and amplitude were varied within the ranges 2–24 Hz and 1.5–16 mm, respectively. Depending on vibration forcing, that is amplitude and frequency of vibrations, the different interfacial patterns were observed. The experiments were conducted in laboratory and in reduced gravity. This evolution is also examined numerically.

**Keywords:** Frozen wave; pattern formation; Faraday waves

## 1. Introduction

The interfacial tension between immiscible fluids is an equilibrium thermodynamic property that results from different cohesion forces between various types of molecules. At a phase boundary, the sum of the interactions with the molecules of the same phase is greater than that of the interactions with the molecules of another phase. When two miscible liquids are brought into contact, a concentration (and density) gradient can occur, which relaxes through diffusion as the system approaches a uniform, equilibrium state. However, there are differences in intermolecular interactions. The nature of the interface between two different miscible fluids has been the topic of an intense study for more than a hundred years in the fields of physics and chemistry. Korteweg proposed in 1901 that stress caused by a density gradient could act like interfacial tension. Zeldovich [1] considering free energy suggested that the transient surface tension could be evaluated as  $\sigma \sim \Delta c^2 / \delta$ , where  $\Delta c$  is the change in composition expressed as a mole fraction, and  $\delta$  is the width of the transition zone.

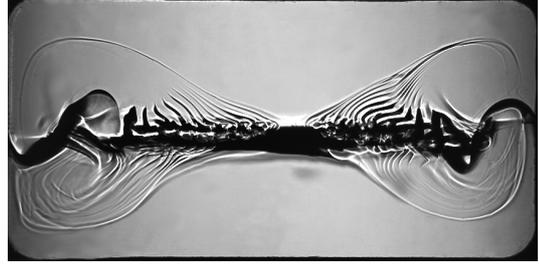
Here we consider an even trickier miscible interface. Two different binary mixtures of closely matching viscosities, which will be brought into contact in a closed cell, are composed of the same molecules (water and isopropanol, IPA) but at different concentrations. Two superposed layers of incompressible and miscible liquids are placed in a rectangular container which is vibrated at constant frequency and amplitude. Vibrations are implied parallel to interface. Our recent experiments under normal and reduced gravity conditions have shown that application of shear stresses along the miscible interface, such as periodic excitations, leads to an interfacial instability instead of an active diffusion process. Instability in miscible systems is noticeably different from immiscible ones because of its transient nature; the difference in density across the interface and the effective interfacial tension decrease over time.

## 2. Vibrational instability at normal gravity

Horizontal vibrations of the flat liquid/liquid interface produces instability in the form of frozen waves caused by a shear-driven mechanism similar to the Kelvin-Helmholtz instability. The distinction is that, as a result of a harmonic change in the flow direction, the wave remains on average in the same place, as its profile is frozen in the reference frame of a vibrating container. This instability has a threshold which depends on the frequency and amplitude. The observed regular structures above the threshold look static and are referred to as “frozen waves”. Instability in miscible systems caused by horizontal vibrations is noticeably different from immiscible ones because of its transient nature. One of the features that highlights the difference between immiscible and miscible fluids is the shape of frozen waves. For immiscible fluids, the shape of frozen waves is sinusoidal while in the case of miscible liquids it takes saw-tooth shape as shown in Fig.1a. We have provided an explanation that vanishing interfacial tension is responsible for triangular-shaped waves while for immiscible fluids this shape is known to be sinusoidal [2, 3].



(a) Frozen waves on miscible interface [2],  $f=10\text{Hz}$ ,  $A=11.2\text{mm}$ ,  $g=g_0$



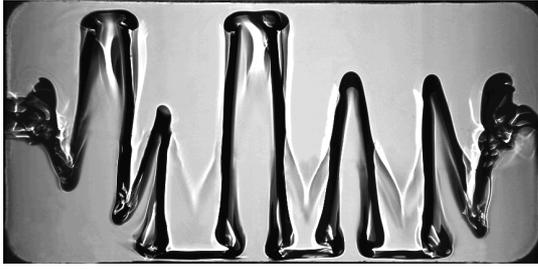
(b) Fish spine pattern [4],  $f=4\text{Hz}$ ,  $A=20.3\text{mm}$ ,  $g=g_0$

**Fig.1.** Interfacial patterns on miscible interface under tangential vibration in normal gravity. The flow dynamics was monitored from the side by direct shadowgraphy of the interface.

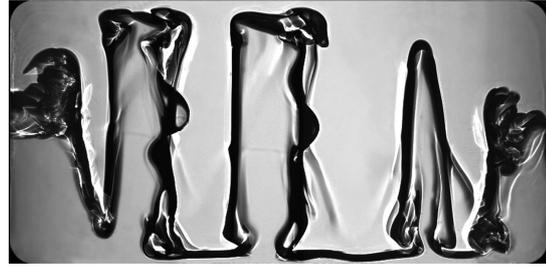
We discovered an unexplored pattern generated by lateral walls in miscible liquids [4]. Generally these patterns can be seen as a wave spreading from the wall along the interface with decaying amplitude and, literally, can be called a fish spine, see Fig.1b. We suggest that the fish-spine pattern has no threshold, and at the lowest tested its horizontal extension is contracted to the point. The pattern is observed in laboratory experiments and numerical simulations below and above the frozen-wave instability threshold. At the threshold, a competition develops between the novel “fish spine” pattern and frozen waves, while above the threshold these two kinds of patterns may coexist in spatially separated domains.

## 3. Vibrational instability at reduced gravity

In the reduced gravity experiments, after the formation of the waviness on the interface, the growth of the amplitude does not stop, but continues until the interface reaches the upper/bottom wall. The long lived pattern consists of a series of vertical columns of alternating liquids as shown in Fig.2a. The different peaks attain a rectangular shape of various widths. The vertical columns exist for a long time, at least until the end of the experiments, without interaction between them. Note that in the vertical columnar pattern the density and viscosity gradients perpendicular to vibrations practically vanish. Thus, the mechanisms that initially drove the instability (density, inertia and viscosity) and the mechanisms that limit its growth (gravity and effective interfacial tension) become weak. We suppose that the columns will decay on the diffusion time scale as the small fluctuations of density and viscosity will smear the interface over time.



(a) Columnar instability [5],  $f=12\text{Hz}$ ,  
 $A=5.8\text{mm}$ ,  $g=10^{-2}g_0$



(b) Faraday waves over frozen waves [6]  
 $f=8\text{Hz}$ ,  $A=10.7\text{mm}$ ,  $g=10^{-2}g_0$

**Fig.2.** Interfacial patterns on miscible interface under tangential vibration in reduced gravity of parabolic flight.

We have discovered another peculiar behaviour of the interface between two miscible liquids placed in a finite-size container under horizontal vibration [6]. Faraday waves occur as a secondary instability on the primary wavy patterns created by periodic vibrations parallel to the interface between two miscible liquids. We provide evidence that periodic wave patterns created by the Kelvin–Helmholtz instability and Faraday waves simultaneously exist in the same system of miscible liquids as seen in Fig.2b.

Specifically, this scenario was first observed in the reduced gravity experiments where the instability pattern was covering a vast area, and therefore they can be characterized more easily. Next, a similar temporal behaviour of the two instabilities was revealed in ground-based experiments. In the dynamics, vertically growing large-scale frozen waves yield Faraday waves with a smaller wavelength. The emergence of the different scale waves observed in the experiments in normal and reduced gravity is confirmed numerically and explained theoretically.

The work was supported by Russian Science Foundation (grant No. 14-21-00090).

## References

1. *Zeldovich Y.B.* Interfacial tension between miscible liquids (in Russian), 1949, Zhur. Fiz. Khim, XXIII, 931–935.
2. *Gaponenko Y.A., Torregrosa M, Yasnou V., Mialdun A., Shevtsova V.* Dynamics of the interface between miscible liquids subjected to horizontal vibration, J. Fluid Mech., (2015), vol. 784, pp. 342-372.
3. *Gaponenko Y., Shevtsova V.* Shape of diffusive interface under periodic excitations at different gravity levels, Microgravity Sci. Technol., 2016, 28: 431.
4. *Shevtsova V., Gaponenko Y., Yasnou V., Mialdun A., Nepomnyashchy A.* Wall-Generated Pattern on a Periodically Excited Miscible Liquid/Liquid Interface, Langmuir, 31, pp.5550–5553 (2015).
5. *Gaponenko Y., Torregrosa M., Yasnou V., Mialdun A., Shevtsova V.* Interfacial pattern selection in miscible liquids under vibration, Soft Matter., 2015, Vol. 11, 8221-8224.
6. *Shevtsova V., Gaponenko Y., Yasnou V., Mialdun A., Nepomnyashchy A.* Two-scale wave patterns on a periodically excited miscible liquid/liquid interface, J. Fluid Mech. (2016), vol. 795, pp. 409-422.

# Diffusion and thermodiffusion coefficients in mixtures analyzed on the ISS

V. Shevtsova

<sup>a</sup> Microgravity Research Centre, University of Brussels, 50 Av. F. Roosevelt Brussels 1050, Belgium

email: vshev@ulb.ac.be

A comprehensive analysis of recent studies on diffusion and thermodiffusion (also Soret or thermal diffusion) in liquid mixtures is presented. The focus is placed on mixtures composed by three chemicals. The need in microgravity experiments is caused by the existence of mixtures with negative Soret effect when denser component moves toward the hot region, i.e. against gravity. It may lead to the development of convection. The IVIDIL (Influence of vibration on diffusion in Liquids), the first diffusion controlled experiment in binary mixtures on the International Space Station (ISS), has shown that on-board g-jitter does not affect the results and it paved the road to more complex experiments. The international DCMIX (Diffusion coefficients in mixtures) project is focused on the investigation of the mass transport in ternary mixtures and it comprises four experiments on the ISS. The results and problems disclosed during microgravity experiments will be discussed in details.

**Keywords:** diffusion; Soret; microgravity; IVIDIL; DCMIX

## 1. Introduction

In a liquid mixture composed of several components, a temperature gradient leads not only to the transport of heat, but also to a mass transport and thus also to differences in concentration between the various components. This so-called thermodiffusion (also Soret effect or thermal diffusion) may play an important role in many natural and technological processes.

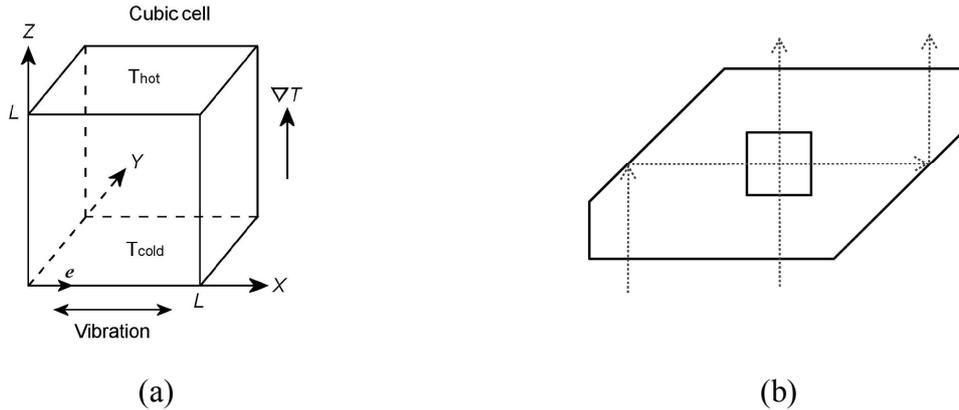
The Soret coefficient is negative (positive) when thermodiffusion separates the species with the denser component migrating to the hot (cold) wall. Consequently, in a gravity field, Soret separation can have either a stabilising or destabilising effect on the conductive state, depending on its sign. The sign of the Soret coefficient depends on the mixture considered, its composition and the working temperature. In the case of negative Soret effect, the instability may develop even in system with gravitationally stable configuration [1, 2]. In the case of ternary mixtures with negative Soret coefficients, most of experimental techniques do not allow even to recognize the development of convection.

With the aim to establish reliable and guaranteed convection-free reference data on thermodiffusion, ESA (European Space Agency) has created instrument SODI (selectable optical diagnostics instrument) which is placed on the ISS. Note that the benefits of microgravity environment on space platforms such as International Space Station (ISS) can be altered by the residual gravity (g-jitter).

## 2. The IVIDIL experiment

At earlier stage of microgravity experiments, there was a comprehensive discussion about the role of on-board g-jitters. The open question had to be solved by the IVIDIL experiment on the ISS: does g-jitter cause a sizeable mean flow and, if so, does this mean flow promote striations and other defects in materials processing in microgravity? For this, the working

liquid was placed in a cubic inner cell (Fig. 1. a). The external walls of the cell are shaped in the form of two prisms (Fig. 1. b) to allow optical observation in two perpendicular directions. The opposite horizontal walls of the cells were held at constant temperatures  $T_{\text{hot}}$  and  $T_{\text{cold}}$ . In the experiments, the mean temperature was fixed at  $25^{\circ}\text{C}$ , while the applied temperature differences  $\Delta T = T_{\text{hot}} - T_{\text{cold}}$  were 5, 10 and 15 K. Experiments were conducted with a water–isopropanol mixture when the cell is subjected to translational vibration in the direction perpendicular to the temperature gradient. Several experiments were conducted without imposed vibrations.



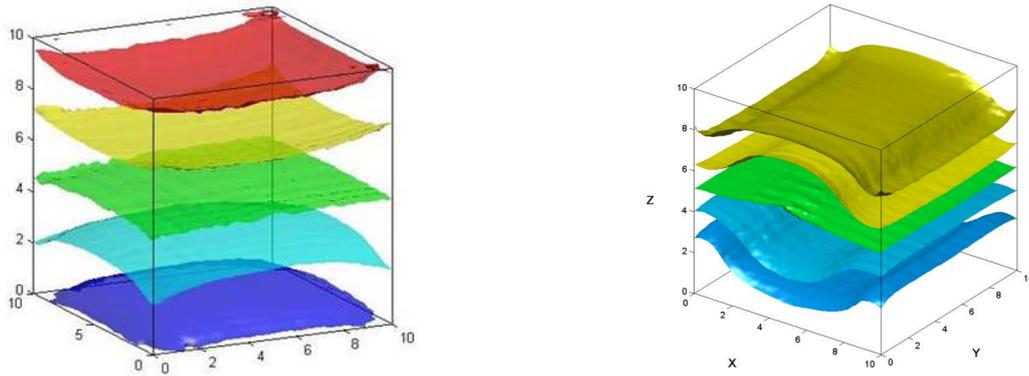
**Fig. 1.** The cell arrangement: (a) the cubic cell and coordinate system; (b) top view of the experimental cell (note that the front view corresponds to a beam that travels directly through the cell)

The effect of the gravitational environment on a diffusion-controlled process can be identified in the following ways:

- (a) by direct observation of temperature or concentration fields and their smoothness;
- (b) by comparing fields along two perpendicular views;
- (c) by reproducibility of experimental results when repeating experiment on different days and thus in a different microgravity environment;
- (d) by comparing with computations in the absence of perturbations;
- (e) by observation of g-jitter-induced convection, in the case that it arises.

These objectives were fulfilled by observing diffusive process under different imposed controlled vibrations. The IVIDIL experiment provided one of the first quantitative observations confirming that the daily on-board environment of the ISS does not perturb diffusion controlled experiments [3]. Experiments with two binary mixtures were reproducible on different days, even in different months, and thus in a different environment, and provided a separation of the components equivalent to that obtained from numerical simulations without perturbations. The transient (pulse-like) acceleration of external forces (docking, orbit correction, etc.) may affect the diffusion-controlled processes and it requires analysis in each particular case. The 3D concentration field, shown in Fig.2a, did not reveal significant disturbances due to on-board accelerations, except for small ripples of iso-surfaces typical of most experiments. It was demonstrated that, unlike g-jitter, imposed vibrations with constant frequency and amplitude do affect the diffusion process, see Fig.2b.

While IVIDIL examined a binary solution, it also paved the way for research on more complex mixtures in orbit by demonstrating that g-jitter would not complicate the results and that the available on-board experimental technique allows accurate measurements of the Soret and diffusion coefficients.



(a) Experiment in g-jitter environment of the ISS (b) Experiment in case of imposed vibrations with  $f=1\text{Hz}$ ,  $A=68\text{mm}$ .

**Fig.2.** Results of IVIDIL experiment on the ISS present the iso-surfaces of concentration field after 12 h of Soret separation. Various colour correspond to different levels of concentration

### 3. The DCMIX project

International DCMIX project is focused on the investigation of the mass transport in ternary mixtures and it comprises four experiments on the ISS with participating research groups from Belgium, Canada, France, Germany, Italy, Japan, Russia, and Spain.

The first experiment DCMIX1 analysed mixtures of three hydrocarbons, THN, IBB and nC12 [4]. The second one, DCMIX2, considered three chemicals which are mixable only at certain concentrations: Toluene, Methanol and Cyclohexane [5]. The DCMIX3 experiment was conducted from September until November 2016 and the major results did not yet arrived from the ISS. The recorded images of thermodiffusion in ternary mixture composed by Water, Ethanol and Triethylenglycole will arrive to the ground shortly. Following DCMIX4 experiment have already been planned for the coming years.

This work was supported by Perm Region Government (Contract C-26/004.03).

### References

1. Shevtsova V.M., Melnikov D.E., Legros J.C. Onset of convection in Soret driven instability, Phys. Rev. E, 2006, Vol. 73, 047302.
2. Lyubimova T., Zubova N., Shevtsova V. Onset and non-linear regimes of Soret-induced convection in binary mixtures heated from above. Eur Phys J E Soft Matter. 2017, Vol.40, no. 3, 27. DOI: 10.1140/epje/i2017-11517-5.
3. Shevtsova V., Gaponenko Y.A., Sechenyh V., Melnikov D.E., Lyubimova T., Mialdun A. Dynamics of a binary mixture subjected to a temperature gradient and oscillatory forcing. J. Fluid Mech., 767 (2015), pp. 290-322 doi:10.1017/jfm.2015.50.
4. Bou-Ali M. M., Ahadi A., Alonso de Mezquia D., Galand Q., Gebhardt M, Khlybov O., Köhler W., Larrañaga M., Legros J. C., Lyubimova T., Mialdun A., Ryzhkov I., Saghir M. Z., Shevtsova V., Van Varenbergh S. Benchmark DCMIX1: Soret, thermodiffusion and molecular diffusion coefficients of the ternary mixture THN-IBB-nC12. Eur Phys J E Soft Matter., (2015) 38, 30.
5. Mialdun A., Shevtsova V. Temperature dependence of Soret and diffusion coefficients for toluene–cyclohexane mixture measured in convection-free environment, J. Chem. Phys. 143, 224902 (2015); DOI: 10.1063/1.4936778.

# Nonlinear Convective Oscillations in a Two-Layer System

I. B. Simanovskii<sup>a</sup>, A. Viviani<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Department of Mathematics

Israel Institute of Technology, 32000 Haifa, Israel

<sup>b</sup> Department of Industrial and Information Engineering

University of Campania "Luigi Vanvitelli"

via Roma 29, 81031 Aversa, Italy

It is known that two-layer liquid systems are subject to numerous instabilities. Several classes of instabilities have been found by means of the linear stability theory for purely thermocapillary flows and for buoyant-thermocapillary flows. There are two basic physical phenomena that produce convective instability in systems with an interface: buoyancy and thermocapillary effects. When heating is from below, the buoyancy instability generates the Rayleigh - Benard convection, while the thermocapillary effect is the origin of the Marangoni - Benard convection. One of the interesting phenomena caused by the joint action of buoyancy and thermocapillary effects is the appearance of the oscillatory instability of the mechanical equilibrium by heating from below. There are various phenomena that can be the origin of a heat release on the interface. For example, the interfacial heat release accompanies an interfacial chemical reaction and the evaporation. The interfacial heating may be generated, e.g., by an infrared light source. The presence of a constant, spatially uniform heat release at the interface can also lead to the appearance of an oscillatory instability. In reality, the interfacial heat release/consumption is not constant but is determined by the interfacial temperature. The heat produced on the interface is equal to the heat transported to the rigid boundaries of the system. In the present work, nonlinear convective flows developed under the joint action of buoyant and thermocapillary effects in a two-layer system with rigid heat-insulated lateral walls, have been investigated. The influence of a temperature-dependent interfacial heat release/consumption on nonlinear oscillatory convective regimes has been studied. The wide range of a parameter  $Q_T$ , characterizing the temperature dependence of heat sources and heat sinks at the interface, has been considered. It is shown that in the case of heat consumption, the region of oscillatory flows can be restricted by the values of  $Q_T$ , both from below and from above, by the regions of the steady flows. We have found that sufficiently strong temperature dependence of interfacial heat sources and heat sinks can lead to the change of the sequence of bifurcations and the development of new nonlinear regimes in the system.

# Oscillatory flow state in a liquid bridge observed in presence of a parallel gas stream

V. Yasnou, Y. Gaponenko, A. Mialdun, V. Shevtsova

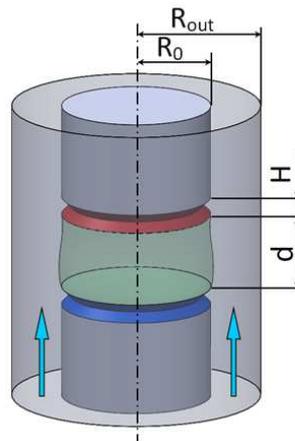
Microgravity Research Centre, University of Brussels, 50 Av. F. Roosevelt  
Brussels 1050, Belgium, email: vshev@ulb.ac.be

We present an experimental and numerical study on oscillatory flow states in a non-isothermal liquid bridge heated from above. Ambient gas enters the cylindrical duct from the cold side and its motion is counter-directed with respect to the Marangoni flow. The velocity and temperature of gas were well-controlled. The temperature of gas was changed in the range between 12°C and 31°C and two velocities were analysed: 0.1m/s and 0.5m/s. The test fluids were nitrogen (gas) and n-decane (liquid), the latter is weakly volatile. Their viscosity ratio is about 40 and for the considered low gas velocities the shear stresses are relatively small. Consequently, the main action of the gas flow is through the heat transfer between gas and liquid.

**Keywords:** liquid bridge; heat transfer; instability

## 1. Introduction

Hydrothermal instabilities in a liquid bridge have been extensively studied since the 80s using different test liquids and at various volume and aspect ratios [1]. Lately, the effect of ambient gas on the stability of a flow inside a liquid bridge has become an object of investigation [2]. A typical liquid bridge is a finite volume of liquid confined between two solid cylindrical rods, kept in its position by surface tension. The schematic of the system, relevant to the experiment and numerical simulations, is shown in Fig. 1.



**Fig.1.** Geometry and scales relevant to the experiment and numerical simulations.

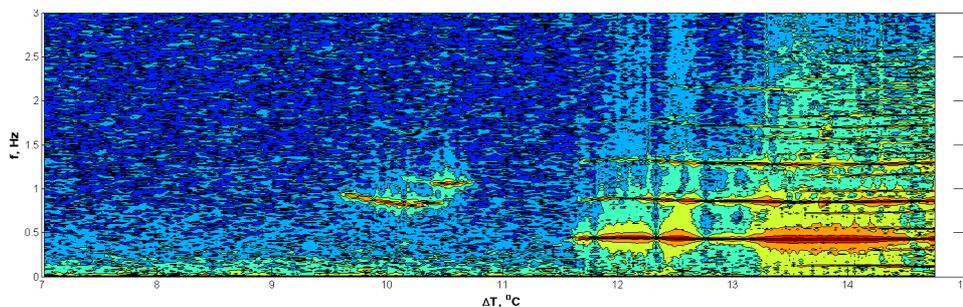
A non-isothermal liquid bridge can be regarded as the simplest idealization of the configuration appearing in the floating zone technique, which is used for crystal growth and purification of high melting-point materials. This study is connected to the microgravity experiment JEREMI (Japanese European Research Experiment on Marangoni Instabilities) where the use of a forced coaxial gas stream is proposed to control the hydrothermal instabilities in liquid bridges [3]. The results of a recent numerical study on instability caused by a gas stream along

the interface of an axisymmetric liquid bridge [4] have shown that the cooling of the interface may cause Pearson-like type of instability prior to the appearance of typical hydrothermal waves.

## 2. Experimental

The experiments are conducted in a ground laboratory where the stationary flow appears at arbitrary tiny values of imposed  $\Delta T$  due to thermocapillary stresses and evolves under the action of both Marangoni and buoyancy forces. In order to study hydrothermal instability in the liquid bridge under the action of a parallel gas flow, we have developed a new instrument. The new set-up is profitably different with respect to the previous models. In this instrument only the tips of the rods (disk-shaped), which are in contact with liquids, are heated or cooled as can be also seen in Fig.1. The temperature of the disks is adjusted independently. The major part of the rods is thermally insulated and does not influence gas temperature. Unlike any other existing instruments, this design allows gas temperature to be below the temperature of the cold rod.

The experimental study reports on non-isothermal experiments in liquid bridges while the counter-current gas moves with constant velocity: (a)  $V=0.1\text{m/s}$  and  $0.5\text{ m/s}$ . In the present experimental campaign gas of a constant flow rate enters from the bottom through an annular duct. The gas temperature is the control parameter of the study. During the experiment the mean temperature was kept constant while  $\Delta T$  was increasing with the small ramping rate. The discussion concerning the experimental observations is based on the records of three thermocouples imbedded into the liquid near the upper rod. In the case of an oscillatory flow, for each imposed temperature difference ( $\Delta T$ ) the Fourier analysis was performed each 50 s. Then, the frequency spectra made at each  $\Delta T$  were combined into a Fourier map where the amplitude of the frequency is shown by colours. One of the most intriguing Fourier maps is shown in Fig.2. The map helps to follow the evolution of non-linear states with the increase of  $\Delta T$ . Using these maps we can observe not only the critical parameters but also all the non-linear transitions occurring in the system.



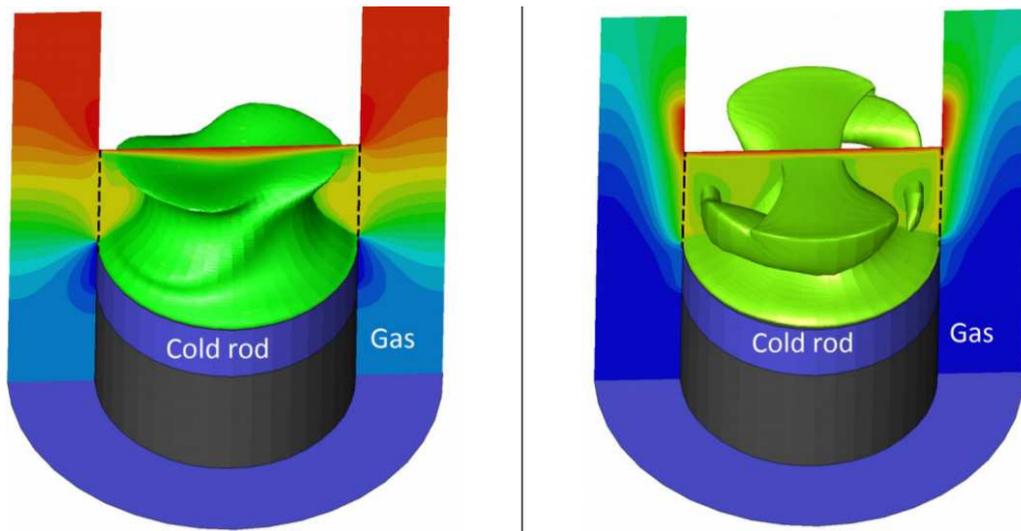
**Fig.2** *Fourier map for the experiment with gas velocity  $V=0.5\text{m/s}$  at temperature  $T=28^\circ\text{C}$ . The system stabilizes instability shortly after appearing of periodic oscillations. It reappears again with further increase of temperate difference*

## 3. Numerical results

The investigated physical problem is the same as in the experiment. We perform 3-D time-dependent numerical simulations of buoyancy-thermocapillary convection in a cylindrical liquid bridge in two phases. The liquid and gas are considered as Newtonian fluids with temperature-dependent properties. The weak evaporation of liquid is taken onto account through the heat transfer across the interface. Numerical simulations provide a spatiotemporal behaviour supporting experimental observations. In the tests, when the gas temperature is below the

mean temperature, the azimuthal wave number is equal to  $m=2$ . With further increase of the gas temperature the interplay between different modes was observed.

The comparison of temperature fields for the cases when gas is motionless and moving with velocity 0.1m/s are shown in Fig.3 a and Fig.3 b, respectively. In the absence of forced gas the iso-surface of the mean temperature approaches the interface while the temperature in gas is almost linear in vertical direction as seen in Fig.3 a. The colder gas is localized only in the vicinity of the cold rod. When gas is moving, the mean temperature approaches the interface only at the upper part while in the bulk it is closer to the symmetry axis, see Fig.3 b. It can be attributed to the cooling of the interface; the gas temperature in Fig.3 a is essentially colder than in Fig.3 b.



**Fig.3:** Computed temperature field in a liquid bridge filled with n-decane and air as gas;  $T = 7.4K$ ,  $T_{\text{mean}} = 298K$  and  $T_{\text{gas}} = 293K$ . The iso-surfaces of the mean temperature inside the liquid are shown by green colours. The temperature field in gas phase is illustrated by colours.

## References

1. Schwabe D. Thermocapillary Liquid Bridges and Marangoni Convection under Microgravity - Results and Lessons Learned, *Microgravity Sci. Technol.*, 2014, 26, 1–10.
2. Melnikov D.E., Shevtsova V., Yano T., Nishino K. Modeling of the experiments on the Marangoni convection in liquid bridges in weightlessness for a wide range of aspect ratios, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, (2015) 87, 119–127
3. Shevtsova V, Gaponenko Y., Kuhlmann H.C., Lappa M., Lukasser M., Matsumoto S., Mialdun A., Montanero J.M., Nishino K., Ueno I. The JEREMI-Project on Thermocapillary Convection in Liquid Bridges. Part B: Overview on Impact of Co-axial Gas Flow. *FDMP*, 2014, 10,197-240.
4. Shevtsova V, Gaponenko Y. A., Nepomnyashchy A. Thermocapillary flow regimes and instability caused by a gas stream along the interface, *J. Fluid Mech.*, 2013, 714., 644-670.

## **Влияние движения линии контакта на колебания пузырька в переменном электрическом поле**

**А. А. Алабужев<sup>a,b</sup>, М. А. Кашина<sup>b</sup>**

<sup>a</sup> Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013, Пермь, ул. Акад. Королева, 1

<sup>b</sup> Пермский государственный национальный исследовательский университет  
614990, Пермь, ул. Букирева, 15

email: alabuzhev@mail.ru

Исследовано поведение газового цилиндрического пузырька в неоднородном переменном электрическом поле. Пузырек окружен несжимаемой жидкостью и ограничен в осевом направлении двумя параллельными твердыми поверхностями. Газ в пузырьке предполагается невесомым и его состояние описывается политропным процессом. Скорость движения контактной линии пропорциональна сумме отклонения краевого угла и скорости быстрых релаксационных процессов, частоты которых пропорциональная удвоенной частоте электрического поля. Обнаружено, что в переменном электрическом поле существуют «антирезонансные» частоты, как и при обычных механических колебаниях пузырька. Однако, в случае симметричного поля (возбуждаются четные моды), неподвижная точка на боковой поверхности наблюдается только вблизи частоты объемных колебаний. Для несжимаемой капли «антирезонансные» частоты наблюдаются для всех мод. Резонансная амплитуда на этой частоте имеет ярко выраженный характер по сравнению с остальными резонансами. Но с увеличением давления газа в пузырьке происходит сдвиг резонансной частоты и этот эффект исчезает. Отметим, что амплитуда объемных колебаний аналогичного пузырька в переменном поле давления растет с увеличением параметра давления газа.

**Ключевые слова:** газовый пузырек; переменное электрическое поле; вынужденные колебания; динамика линии контакта

## **The influence of contact line motion on the forced oscillations of a gas bubble under an alternating electric field**

**A. A. Alabuzhev<sup>a,b</sup>, M. A. Kashina<sup>b</sup>**

<sup>a</sup> Institute of Continuous Media Mechanics, Koroleva str., 1, 614013, Perm

<sup>b</sup> Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm

email: alabuzhev@psu.ru

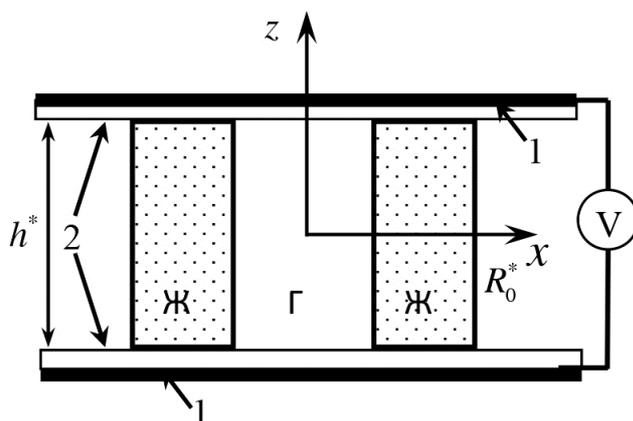
The behavior of a cylindrical gas bubble in an inhomogeneous alternating electric field is investigated. The bubble is surrounded by an incompressible fluid and is bounded axially by two parallel solid surfaces. The gas in the bubble is assumed to be weightless and its state is described by a polytropic process. The contact line

velocity is proportional to the sum of the deviation of the edge angle and the velocity of fast relaxation processes whose frequencies are proportional to the doubled frequency of the electric field. It is found that in an alternating electric field there are "antiresonant" frequencies, as under ordinary mechanical oscillations of the bubble. However, in the case of a symmetric field (even modes are excited), a fixed point on the lateral surface is observed only near the frequency of the volume oscillations. For an incompressible drop, the "antiresonant" frequencies are observed for all modes. The resonance amplitude at this frequency has a pronounced character in comparison with the other resonances. But as the gas pressure in the bubble increases, the resonant frequency shifts and this effect disappears. Note that the amplitude of the volume oscillations of an analogous bubble in an alternating field of pressure increases with increasing gas pressure parameter.

**Keywords:** gas bubble; alternating electric field; forced oscillations; contact line dynamics

Исследованию поведения капель и пузырьков в электрическом поле в настоящее время уделяется большое внимание [1,2]. Одной из наиболее важных проблем является эффект электросмачивания на диэлектрической подложке. При описании движения линии контакта под действием электрического поля обычно используется условие Юнга-Липмана [1,2], однако данное условие плохо описывает поведение краевого угла в переменных полях и при больших потенциалах. Авторами данной работы, на основе эффективного граничного условия Хокинга [3], было предложено другое соотношение между скоростью движения линии контакта и отклонением краевого угла [4]: движения контактной линии пропорциональна сумме отклонения краевого угла и скорости быстрых релаксационных процессов, частоты которых пропорциональна удвоенной частоте электрического поля. Это условие позволяет получить хорошее качественное согласие с экспериментальными данными.

В данной работе исследовано поведение газового цилиндрического пузырька в



**Рис. 1.** Геометрия задачи. Ж – жидкость, Г – газ, 1 – электроды, 2 – диэлектрические пластины

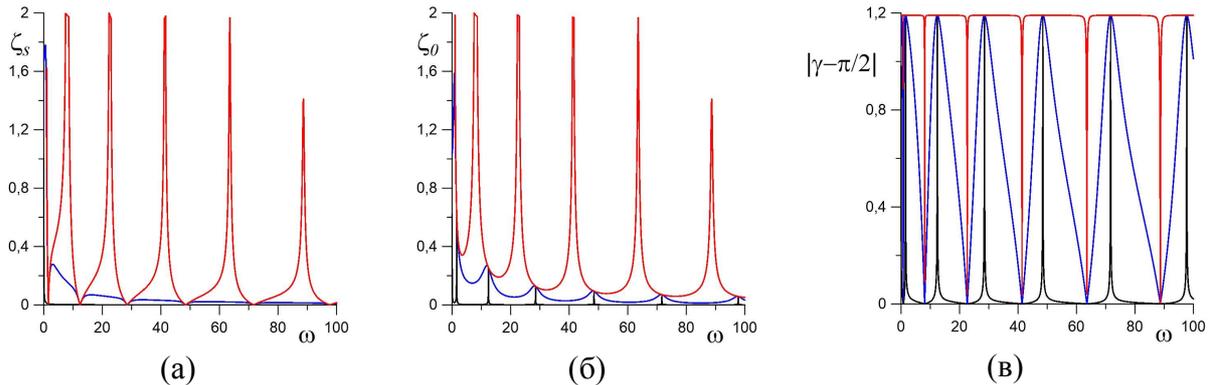
однородном переменном электрическом поле (рис. 1). Равновесный радиус пузырька  $r_0^*$ , высота –  $h^*$ . Газ в пузырьке рассматривался невесомым, его состояние описывалось политропным процессом. Пузырек окружен несжимаемой жидкостью конечного объема (равновесный радиус –  $R_0^*$ ) и ограничен в осевом направлении двумя параллельными твердыми поверхностями. Рассматривались случаи свободной и твердой внешней поверхности жидкости. Электрическое поле создаёт внешнюю периодическую силу, которая непосредственно действует на

линию контакта трех сред. Движение линии контакта описывается эффективным граничным условием [4]:

$$z = \mp 1/2, r = 1: \quad \zeta_t = \mp \lambda (\zeta_z + A \cos 2\omega t), \quad (1)$$

где  $\zeta(z, t)$  – функция описывающая отклонение боковой поверхности пузырька от равновесного положения,  $A$  – эффективная амплитуда электрического поля,  $z = z^*/h^*$ ,  $r = r^*/r_0^*$ ,  $\zeta = \zeta^*/A^*$ ,  $\lambda = \Lambda^* b \sqrt{(\rho_e^* + \rho_i^*) r_0^* / \sigma^*}$ ,  $b = r_0^*/h^*$ ,  $\Lambda^*$  – параметр Хокинга,  $\sigma^*$  – коэффициент поверхностного натяжения.

Переменное электрическое поле возбуждает только осесимметричные колебания пузырька. Собственные колебания рассматриваемого пузырька были исследованы в работах [5–7]. В данной работе изучаются только четные моды вынужденных колебаний. На рис. 2 показана амплитуда отклонения боковой поверхности пузырька ( $\zeta_s$  на верхней пластине и  $\zeta_0$  в центре) и краевого угла от равновесного значения.



**Рис. 2.** Зависимость отклонения линии контакта  $\zeta_s$  (а), боковой поверхности  $\zeta_0$  (б) и отклонения краевого угла (в) от частоты внешних вибраций  $\omega$  при разных значениях параметра Хокинга  $\lambda$  ( $R_0 = 5$ ,  $b = 1$ ),  $\lambda = 0,01$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\lambda = 100$

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект № 17-41-590108).

### Список литературы

1. Mugele F., Baret J.-C. Electrowetting: from basics to applications // J. Phys.: Condens. Matter. 2005. Vol. 17. P. 705–774. DOI: 10.1088/0953-8984/17/28/R01.
2. Bonn D., Eggers J., Indekeu J., Meunier j., Rolley E. Wetting and spreading // Rev. Mod. Phys. 2009. Vol. 81. P. 739–805. DOI: 10.1103/RevModPhys.81.739.
3. Hocking L.M. The damping of capillary-gravity waves at a rigid boundary // J. Fluid Mech. 1987. Vol. 179. P. 253-266. DOI: 10.1017/S0022112087001514.
4. Alabuzhev A.A., Kashina M.A. The oscillations of cylindrical drop under the influence of a nonuniform alternating electric field // J. Phys.: Conf. Ser. 2016. Vol. 681, 012042. DOI: 0.1088/1742-6596/681/1/012042.
5. Алабузhev А. А. Поведение цилиндрического пузырька под действием вибраций // Вычисл. мех. сплош. сред. 2014. Т.7, № 2. С. 151-161. DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.2.16.
6. Алабузhev А.А., Кайсина М.И. Влияние движения линии контакта на осесимметричные колебания цилиндрического пузырька // Вестник Пермского университета. Серия: Физика. 2015. Вып. 2(30). С. 56–68.
7. Alabuzhev A.A., Kaysina M.I. The translational oscillations of a cylindrical bubble in a bounded volume of a liquid with free deformable interface // J. Phys.: Conf. Ser. 2016. Vol. 681, 012043. DOI: 10.1088/1742-6596/681/1/012043.

## **Влияние неоднородности поверхности подложки на осесимметричные колебания цилиндрической капли**

**А. А. Алабужев**

Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013, Пермь, ул. Акад. Королева, 1  
Пермский государственный национальный исследовательский университет  
614990, Пермь, ул. Букирева, 15  
email: alabuzhev@mail.ru

Исследуются вынужденные колебания капли жидкости, окруженной другой жидкостью в цилиндрическом сосуде конечного объема. В равновесном состоянии капля имеет форму цилиндра, который ограничен в осевом направлении двумя параллельными твердыми поверхностями. На сосуд действует вибрационная сила направленная параллельно оси симметрии. Учитывается динамика линии контакта трех сред: скорость движения контактной линии пропорциональна отклонению краевого угла от его равновесного значения. Несмотря на использование модели невязкой жидкости, применение данного условия приводит к затуханию колебаний, которое объясняется взаимодействием линии контакта с твердой поверхностью. Это эффективное граничное условие и его модификации использовались во множестве работ, например, при исследовании колебаний капиллярного моста, полусферической капли и газового пузырька на подложке, цилиндрической капли и газового пузырька, сжатой капли, рассеивании капиллярных волн и движения линии контакта по вертикальной твердой поверхности. Главное отличие данной задачи от остальных работ – неоднородная смачиваемость подложек, т.е. постоянная Хокинга (параметр смачивания) является не постоянной величиной, а зависит от координат.

**Ключевые слова:** цилиндрическая капля; контактная линия; вынужденные колебания

## **Influence of the heterogeneity substrate surface on the axisymmetric oscillations of a cylindrical drop**

**A. A. Alabuzhev**

Institute of Continuous Media Mechanics, Koroleva str., 1, 614013, Perm  
Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm  
email: alabuzhev@mail.ru

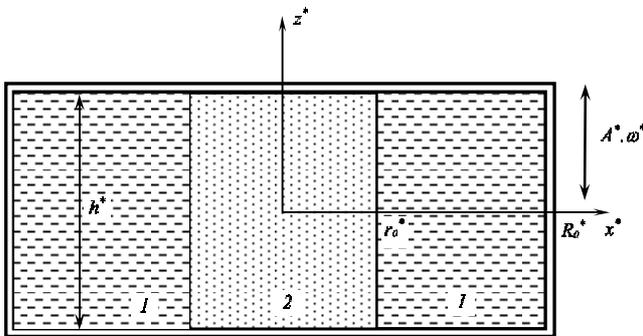
The forced oscillations of a fluid drop surrounded by another fluid in a cylindrical vessel of finite volume are studied. The drop has the cylindrical form in the equilibrium state, which is bounded in the axial direction by two parallel solid surfaces. The oscillatory force is parallel to the symmetry axis of the vessel. The dynamics of the three media contact line is taken into account: the contact line velocity is proportional to the deviation of the contact angle from its equilibrium value. Despite the use of an inviscid fluid model, the application of this condition leads to oscilla-

tion, which is explained by the interaction of the contact line with a solid surface. This effective boundary condition and its modifications have been used in many articles, for example, in studying the oscillations of a capillary bridge, a hemispherical drop and a gas bubble on a substrate, a cylindrical drop and a gas bubble, a compressed drop, scattering of capillary waves, and motion of the contact line along a vertical hard surface. The main difference between our problem and the recent papers is the non-uniform wettability of the substrates, i.e. the Hocking's constant (wetting parameter) is a function of coordinates.

**Keywords:** contact line; forced oscillations; cylindrical drop

В настоящее время исследованию динамики линии контакта трех сред уделяется большое внимание. В работе [1] при изучении стоячих волн между двумя вертикальными стенками, было предложено эффективное граничное условие, предполагающее линейную связь между скоростью движения линии контакта и отклонением краевого угла от равновесного положения. Данное условие содержит два важных предельных случая: фиксированного краевого угла (линия контакта не взаимодействует с твердой стенкой) и неподвижной линии контакта (краевой угол может изменяться). Данное условие использовалось для других объектов (капля, пузырек, жидкий мост) в различных постановках физических задач [2–7]. Однако во всех подобных работах рассматривалась однородная поверхность пластины. В данной работе рассматриваются осесимметричные колебания цилиндрической капли в сосуде конечного объема с неоднородными стенками (колебания капли в сосуде с однородными стенками рассмотрены в [8]).

Рассмотрим каплю несжимаемой жидкости плотностью  $\rho_2^*$ , которая находится в цилиндрическом сосуде радиуса  $R_0^*$  и высотой  $h^*$  (рис. 1). В равновесном состоянии



**Рис. 1.** Геометрия задачи. 1 – жидкость, 2 – капля

капля имеет форму цилиндра радиуса  $r_0^*$ , который ограничен в осевом направлении параллельными твердыми поверхностями (дном и крышкой сосуда). Равновесный краевой угол между боковой поверхностью капли и твердой поверхностью прямой. Капля в сосуде окружена несжимаемой жидкостью плотностью  $\rho_1^*$ . На сосуд действует

вибрационная сила с частотой  $\omega^*$  и амплитудой  $A^*$ , которая направлена вдоль оси симметрии сосуда. В цилиндрической системе координат (ось  $z$  совпадает с осью симметрии сосуда), боковую поверхность капли можно описать функцией  $r^* = r_0^* + \zeta^*(z^*, t^*)$ , где  $\zeta^*(z^*, t^*)$  – функция, описывающая отклонение поверхности от равновесного положения.

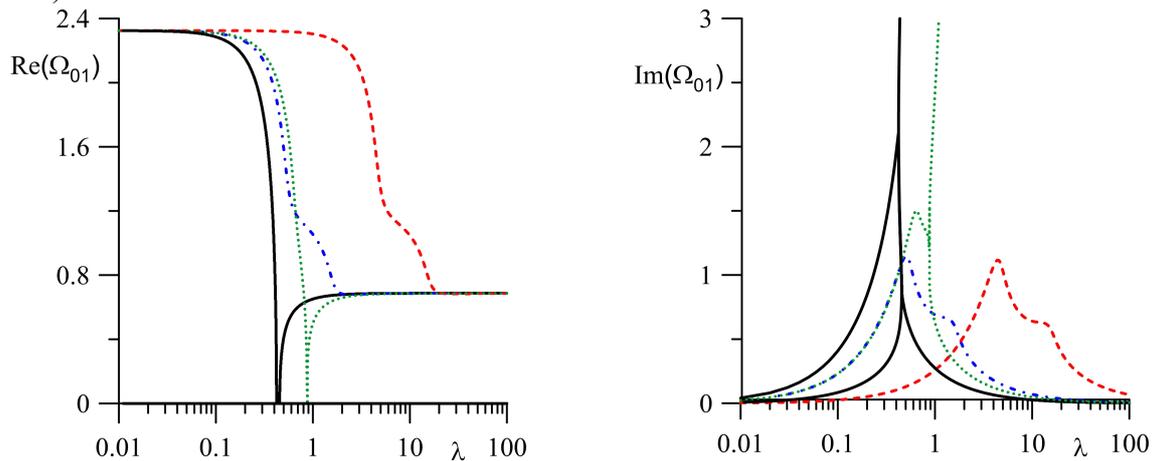
Движение линии контакта описывается модифицированным условием Хокинга [1] (в главном порядке разложения по малой амплитуде вибраций):

$$z = \mp 1/2, r = 1: \quad \zeta_t = \pm \Lambda(\alpha) \zeta_z, \quad (1)$$

где  $z = z^*/h^*$ ,  $r = r^*/r_0^*$ ,  $\zeta = \zeta^*/A^*$ ,  $\Lambda = \Lambda^* b \sqrt{(\rho_e^* + \rho_i^*) r_0^* / \sigma^*}$ ,  $b = r_0^*/h^*$ ,  $\Lambda^*$  – параметр Хокинга,  $\sigma^*$  – коэффициент поверхностного натяжения.

Для примера выберем в качестве функции неоднородности поверхности подложек (2) – линейное распределение  $\Lambda = \lambda |\sin(k \cos \alpha)|$ . На (рис. 2) показана основная частота собственных колебаний и коэффициент затухания для случая однородных и неоднородных подложек при разных значениях параметров задачи.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-21-00090).



**Рис. 2.** Зависимость частоты  $\text{Re}(\Omega)$  и декремента затухания  $\text{Im}(\Omega)$  от параметра Хокинга  $\lambda$  ( $b = 0.4$ ,  $\rho_i = 0.7$ ,  $R_0 = 5$ )

$\Lambda = \lambda$  (сплошная линия),  $k = 0.1$  (пунктирная),  $k = 1$  (штрих-пунктирная),  $k = 10$  (штриховая)

### Список литературы

1. Hocking L.M. The damping of capillary-gravity waves at a rigid boundary // J. Fluid Mech. 1987. Vol. 179. P. 253-266. DOI: 10.1017/S0022112087001514.
2. Shklyaev S., Straube A.V. Linear oscillations of a hemispherical bubble on a solid substrate // Phys. Fluids. 2008. Vol. 20. 052102. DOI: 10.1063/1.2918728.
3. Алабужев А.А., Любимов Д.В. Влияние динамики контактной линии на собственные колебания цилиндрической капли // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 5. С. 78-86. DOI: 10.1007/s10808-007-0088-6.
4. Fayzrakhmanova I. S., Straube A. V. Stick-slip dynamics of an oscillated sessile drop // Phys. Fluids. 2009. Vol. 21. 072104. DOI: 10.1063/1.3174446.
5. Алабужев А. А. Поведение цилиндрического пузырька под действием вибраций // Вычисл. мех. сплош. сред. 2014. Т.7, № 2. С. 151-161. DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.2.16.
6. Fayzrakhmanova I. S., Straube A. V., Shklyaev S. Bubble dynamics atop an oscillating substrate: Interplay of compressibility and contact angle hysteresis // Phys. Fluids. 2011. Vol. 23. 102105. DOI: 10.1063/1.3650280.
7. Алабужев А.А., Кайсина М.И. Влияние движения линии контакта на осесимметричные колебания цилиндрического пузырька // Вестник Пермского университета. Серия: Физика. 2015. Вып. 2(30). С. 56–68.
8. Алабужев А.А. Продольные колебания цилиндрической капли в ограниченном объеме жидкости // Вычислительная механика сплошных сред. 2016. Т.9, № 3. С. 316-330. DOI: 10.7242/1999-6691/2016.9.3.26.

## **Вихревые течения в тонких слоях жидкости и каплях на вибрирующей пластине**

**В. А. Александров, Л. Е. Тонков**

Институт механики УрО РАН  
426067, Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34  
email: ava@udman.ru

Экспериментально исследовано поведение тонких слоев жидкости и капель на горизонтально расположенной прямоугольной вибрирующей пластине, возбуждаемой с одного края пьезоэлектрическим преобразователем. Обнаружены явления движения слоя жидкости к участкам поверхности пластины с пучностями изгибных колебаний, возбуждение капиллярных волн на поверхности слоя жидкости и отдельных капель, внутренние и поверхностные течения в слоях жидкости и каплях. В каплях вязкой жидкости на краях пластины вибрации создают вихревые течения и возвратную струю, поверхность которой деформирована капиллярной волной. Проведенные эксперименты демонстрируют возможность перемешивания жидкостей и суспензий в объеме отдельных капель.

**Ключевые слова:** пьезопреобразователь; вибрирующая пластина; вихревые течения

## **Vortex flows in thin layers of liquid and drops on the vibrating plate**

**V. A. Aleksandrov, L. E. Tonkov**

Institute of Mechanics UB RAS, T. Baramzinoy St. 34, 426067, Izhevsk,  
email: ava@udman.ru

The behavior of thin layers of liquid and droplets on a horizontally arranged rectangular vibrating plate excited at one edge by a piezoelectric transducer was experimentally studied. The phenomena of motion of the liquid layer toward the surface areas of the plate with antinodes of bending vibrations, excitation of capillary waves on the surface of the liquid layer and individual droplets, internal and surface currents in liquid layers and droplets are detected. In the droplets of a viscous liquid at the edges of the plate, vibrations are created by vortex currents and a return jet whose surface is deformed by a capillary wave. The carried out experiments demonstrate the possibility of mixing liquids and suspensions in the volume of individual drops.

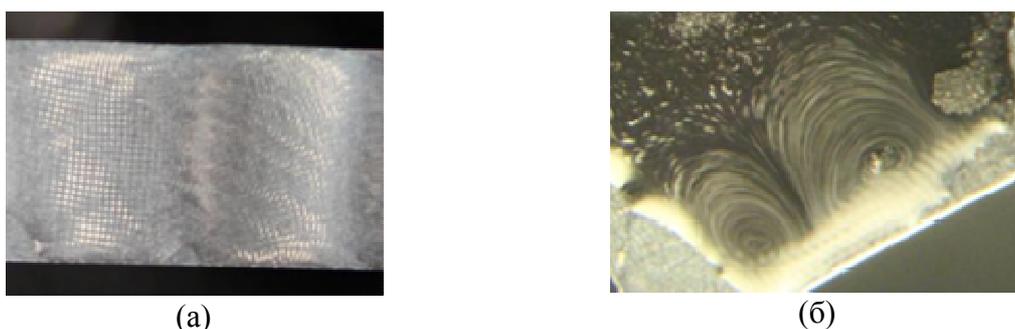
**Keywords:** piezoelectric transducer; vibrating plate; vortex flows

Физические процессы при взаимодействии колеблющихся твердых тел с жидкостью находят применение в различных технологиях обработки жидкостей. Особый интерес представляют процессы, проявляющиеся при колебаниях в интервале ультразвуковых и близких к ним частот. Наибольшую амплитуду из упругих колебаний имеют изгибные колебания, в связи с этим целью данных исследований является исследова-

ние взаимодействия жидкости и вибрирующей упругой пластины, возбужденной пьезоэлектрическим преобразователем.

Устройство с вибрирующей пластиной представляет колебательную систему из держателя, пьезопреобразователя и прямоугольной пластины. На электроды дискового пьезопреобразователя, одним из которых служит его корпус, подается электрическое напряжение от усилителя, на вход которого поступают сигналы от генератора звуковых частот. Колебания пьезопреобразователя, возникающие за счет обратного пьезоэффекта, создают вибрации пластины в виде вынужденных изгибных колебаний.

При взаимодействии вибрирующей консольной пластины с жидкостью были выявлены эффекты перемещения смачивающего слоя жидкости по поверхности вертикально установленной вибрирующей пластины и распыления жидкости в слое в местах пучностей ее изгибных колебаний. При вибрациях горизонтально установленной пластины с тонким слоем жидкости (рис. 1) и каплями (рис. 2) обнаруживаются капиллярные волны на поверхности слоя жидкости и капель, а также внутренние течения в их объеме [1]. Маловязкие жидкости как вода, спирт или бензин, по поверхности пластины растекаются тонким слоем и при определенных частотах вибраций на поверхности слоя жидкости возникают двумерные капиллярные волны в виде ряби Фарадея. С увеличением амплитуды вибраций пластины частицы жидкости отрываются от гребней капиллярных волн, в процессе которого жидкость распыляется.



**Рис. 1.** Рябь Фарадея (а) и вихревые течения (б) в слое воды на стальной пластине.

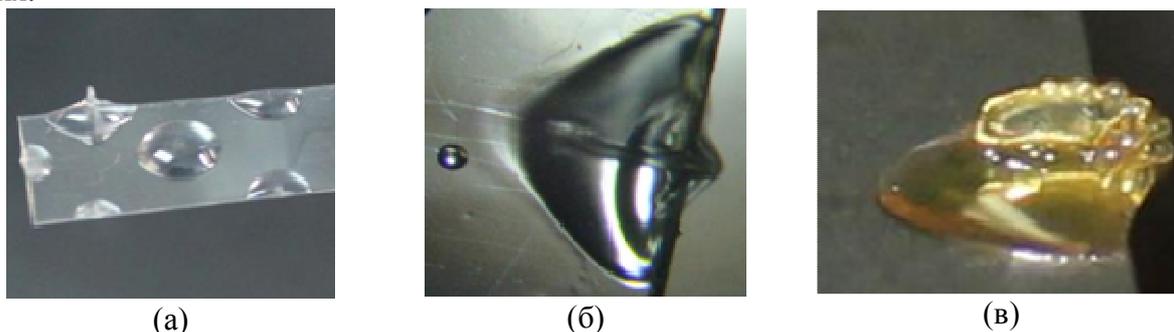


**Рис. 2.** Вихревые течения в капле воды в сидячем (а) и висящем (б) положениях.

Исследование поведения отдельных капель маловязких жидкостей требует подготовки поверхности пластины или подбора материала пластины для сохранения формы капли. Поверхность полимерных материалов обладает некоторой лиофобностью и поэтому они могут использоваться в качестве подложек при исследованиях влияния вибраций на капли жидкости [2, 3]. В качестве вибрирующей пластины нами использована прозрачная подложка из полиэтиленфталата (PET) толщиной 0.35 мм. С применением

РЕТ пластин становится возможным наблюдение внутренних процессов при вибрациях как в сидячих, так и в висячих каплях. На (рис. 2) показана одна и та же капля воды в сидячем и висящем положениях на поверхности РЕТ пластины, вибрирующей с частотой 635 Гц. Течения в капле визуализируются частицами графита.

Вязкие жидкости, нанесенные тонким слоем на поверхность пластины, при возбуждении вибраций сначала перетекают к участкам поверхности пластины с пучностями колебаний, принимая выпуклую форму. С увеличением амплитуды вибраций формируются отдельные капли вытянутой формы в центре пучностей колебаний пластины (рис. 3. а). Дальнейшее увеличение амплитуды вибраций приводит к тому, что в каплях вязкой жидкости образуются капиллярные волны на их поверхности и вихревые течения.



**Рис. 3.** Капли силиконового масла (а) на вибрирующей пластине и возвратные течения в каплях растительного (б) и вакуумного масла (в).

Вихревые течения создают возвратную струю, направленную от края пластины (рис. 3. б). В некоторых случаях удается создать условия образования возвратного течения в виде мостика.

На поверхности вибрирующих капель вязкой жидкости образуются также капиллярные волны, которые проявляются в первую очередь на участке поверхности вблизи края пластины и, распространяясь по поверхности капли, приводят к деформации поверхности возвратной струйки (рис. 3. в). В условиях возбуждения стоячей капиллярной волны на краю капли внутренние течения вблизи поверхности вибрирующей пластины направлены к центру пучности колебаний края пластины, а течения на поверхности – от центра пучности. Вихревые течения в слоях жидкости и отдельных каплях в условиях вибраций перемешивают жидкость в их объеме.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 16-41-180276\_p\_урал\_a.

### Список литературы

1. Александров В. А. Гидродинамические явления при взаимодействии колеблющейся консольной пластины с жидкостью // Химическая физика и мезоскопия. 2014. Т. 16, № 2. С. 308–313.
2. Lei W., Jia Z. - h., He J. - C., Cai T. - M. Dynamic properties of vibrated drops on a superhydrophobic patterned surface // Applied Thermal Engineering. 2014. Vol. 62. Iss. 2. pp.507–512, <http://dx.doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2013.10.019>.
3. Tsai P. H., Wang C. H., Wang A. B., Korobkin A., Purvis R., Khabakhpasheva T. Investigation of droplet oscillation on a vibrating elastic plate // 13th Asian Symposium on Visualization. June 22-26 2015, Novosibirsk, Russia. ITAM SB RAS, 2015. 9 p.

## Об особенностях в фазовой плоскости обобщенной нелинейной системы Дуффинга

Р. Б. Арсланбекова<sup>a</sup>, И. О. Омаров<sup>a</sup>, В. Д. Бейбалаев<sup>a</sup>, А. А. Аливердиев<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Дагестанский государственный университет, 367025, г. Махачкала, ул. Магомед-Гаджиева 43А

email: kaspj\_03@mail.ru

<sup>b</sup> Институт проблем геотермии ДНЦ РАН, 367030, г. Махачкала, пр. Шамиля 39А

email: aliverdi@mail.ru

Исследована динамическая система, описываемая нелинейным уравнением Дуффинга с операторами дробного дифференцирования. Построены фазовые траектории динамической системы при различных значениях параметра  $\alpha$ . Установлено топологическое изменение фазовой плоскости при изменении параметра  $\alpha$ .

**Ключевые слова:** динамическая система; фазовая плоскость; дробная производная

## On peculiarities in the phase plane of the generalized nonlinear Duffing system

R. B. Arslanbekova<sup>a</sup>, I. O. Omarov<sup>a</sup>, V. D. Beybalaev<sup>a</sup>, A. A. Aliverdiev<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Dagestan State University, 367025, Makhachkala, M. Gadzhieva Str., 43A

email: kaspj\_03@mail.ru.

<sup>b</sup> Institute for Geothermal Researches DSC RAS, 367030, Makhachkala, Shamilya Highway 39A

email: aliverdi@mail.ru.

We have studied the dynamical system, which are described by a nonlinear Duffing equation with fractional differentiation operators. The phase trajectories of a dynamic system are constructed for the different values of the parameter  $\alpha$ . We have established a topological change in the phase plane with the changing of  $\alpha$ .

**Keywords:** dynamic system; phase plane; fractional derivative

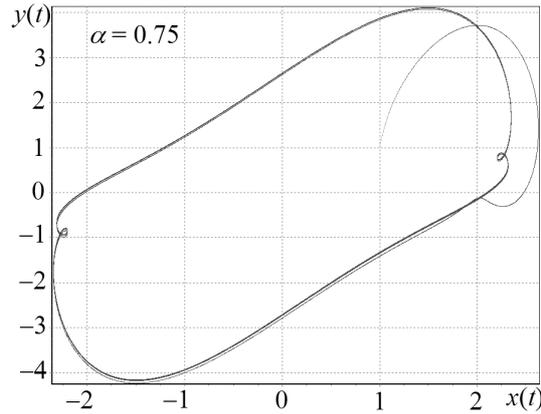
Повышенный интерес к изучению нелинейных динамических систем, где реализуются идеи детерминированного хаоса и фрактальной геометрии обусловлен тем, что закономерности таких систем становятся базовыми для установления сущности широкого круга явлений, охватывая не только физические, но и химические, геофизические, биологические, социально-экономические системы [1-3].

Рассмотрим динамическую систему, описываемую нелинейным осцилляторным уравнением с дробным производным Caputo [4] вида:

$$\partial_{0t}^{\alpha} (\partial_{0t}^{\alpha} x(t)) + k^{\alpha} \partial_{0t}^{\alpha} x(t) + f(x) = P(t), \quad (1)$$

где  $k$  - коэффициент затухания,  $f(x)$  - нелинейная восстанавливающая сила,  $P(t)$  - периодическая функция периода  $T$ .

Рассмотрим частный случай уравнения (1)



**Рис.1.** Фазовая плоскость динамической системы, описываемой уравнением (3) при  $B = 0$ ,  $\alpha=0.75$ .

$$\partial_{0t}^{\alpha}(\partial_{0t}^{\alpha}x(t)) + k^{\alpha}\partial_{0t}^{\alpha}x(t) + \beta^{\alpha}x + x^3 = B \cos t. \quad (2)$$

Запишем уравнение (2) в виде системы

$$\begin{cases} \partial_{0t}^{\alpha}x(t) = y, \\ \partial_{0t}^{\alpha}y(t) = -k \cdot y - \beta \cdot x - x^3 + B \cos t. \end{cases} \quad (3)$$

Уравнение (3) описывает вынужденные колебания в системах с фрактальной структурой. Здесь  $k$  постоянный положительный коэффициент затухания, а  $x^3$  нелинейная возвращающая сила. Рассмотрим задачу в отсутствии внешних сил ( $B = 0$ ). В этом случае система при  $\beta < 0$  имеет единственное положение равновесия, а в случае  $\beta > 0$  имеется три положения равновесия  $x = 0, \pm\sqrt{\beta}$ . При  $\beta > 0$ , точки  $\bar{x} = \sqrt{\beta}$ ,  $\bar{y} = 0$  и  $\bar{x} = -\sqrt{\beta}$ ,  $\bar{y} = 0$  являются особыми точками. С помощью замены  $\xi = x - \bar{x}$ ,  $\eta = y - \bar{y}$ , ограничиваясь только слагаемыми первого порядка малости, имеем:

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \frac{\xi(0)}{2} [E_{\alpha,1}(\lambda_1 t^{\alpha}) - E_{\alpha,1}(\lambda_2 t^{\alpha})] + \\ &+ \frac{\xi(0)k + \eta(0) - \gamma\xi(0)}{2\sqrt{\gamma^2 - 4\beta}} [E_{\alpha,1}(\lambda_1 t^{\alpha}) - E_{\alpha,1}(\lambda_2 t^{\alpha})] \pm \frac{2\beta\sqrt{\beta} \cdot t^{\alpha}}{2\sqrt{\gamma^2 - 4\beta}} [E_{\alpha,\alpha}(\lambda_1 t^{\alpha}) - E_{\alpha,\alpha}(\lambda_2 t^{\alpha})], \\ \eta(t) &= \frac{\eta(0)}{2} [E_{\alpha,1}(\lambda_1 t^{\alpha}) + E_{\alpha,1}(\lambda_2 t^{\alpha})] + \\ &+ \frac{-4\beta\xi(0) - \gamma\eta(0) \pm 2\beta\sqrt{\beta}}{p(\lambda_1 - \lambda_2)} [E_{\alpha,1}(\lambda_1 t^{\alpha}) - E_{\alpha,1}(\lambda_2 t^{\alpha})] \end{aligned} \quad (4)$$

Решение системы (4) будем находить численным методом в области

$$D = \{ |t| \leq T, |x_i - x_i^{(0)}| < b, i = 1, 2, \dots, m \}.$$

Для численного решения задачи Коши для системы (6) введем по переменной  $t$  равномерную сетку с шагом  $\tau > 0$ :  $\omega_{\tau} = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, 2, \dots\}$ .

Решение задачи можно найти в явном виде по рекуррентным формулам [5-7]  
 $\omega_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, 2, \dots\}$ .

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0, y(0) = y_0, \\ x_1 &= x_0 + \Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha y_0, \\ x_{n+1} &= x_n - \tau^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)(t_{n-k+1}^{1-\alpha} - t_{n-k}^{1-\alpha}) + \Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha y_n, \\ y_1 &= y_0 + \Gamma(2-\alpha)\tau^\beta \left( -ky_0 + \beta \cdot x_0 - (x_0)^3 + B \cos t_0 \right), \\ y_{n+1} &= y_n - \tau^{\beta-1} \sum_{k=0}^{n-1} (y_{k+1} - y_k)(t_{n-k+1}^{1-\beta} - t_{n-k}^{1-\beta}) + \\ &\quad + \Gamma(2-\alpha)\tau^\beta \left( -k^\alpha y_n - \beta^\alpha x_n - (x_n)^3 + B \cos t_n \right), \\ n &= 1, 2, \dots \end{aligned}$$

При  $\alpha = 0.75$  (см. рис. 1) в динамической системе устанавливается устойчивый предельный цикл. Наличие устойчивого предельного цикла на фазовой плоскости показывает, что в динамической системе установились незатухающие периодические колебания. Амплитуда и период этих колебаний в определенных пределах не зависят от начальных условий и определяются лишь значениями параметров системы. В нашем случае параметром системы является и показатель дробной производной. Таким образом, параметр дробной производной  $\alpha$  является управляющим параметром системы и при его изменении в фазовой плоскости происходят топологические изменения

### Список литературы

1. Колесников А. А. Основы синергетики управляемых систем.- Таганрог: Изд-во ТРГУ, 2001. 123 с.
2. Малиницкий Г. Г., Потапов А. Б. Современные проблемы нелинейной динамики. М.: Мир, 2000. 336 с.
3. Magomedov R. A., Meilanov R. P., Akhmedov E. N., Aliverdiev A. A., Calculation of multi-component compound properties using generalization of thermodynamics in derivatives of fractional order // Journal of Physics: Conference Series, Vol. 774. 2016. P. 012025 DOI:10.1088/1742-6596/774/1/012025.
4. Нахушев А.М. Элементы дробного исчисления и их применение. Нальчик, 2003. - 299 с.
5. Паровик Р. И. Некоторые свойства фрактального осциллятора Ван-Дер-Поля. // «Актуальные проблемы прикладной математики и информатики». Материалы Международ. научн. конф., 17-21 октября 2016 г. //: Терскол, 2016. С. 243-247.
6. Бейбалаев В. Д. Решение начальной задачи для дифференциального уравнения «фрактального» осциллятора // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. Вып.1(19). 2009. С. 240-242.
7. Бейбалаев В. Д. Разностные методы решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дробного дифференцирования.// Вестник ДГУ.- Вып. 6, 2014.- С. 53-61.

## Течение и дисперсия частиц в канале с анизотропными супергидрофобными стенками

Е. С. Асмолов<sup>a,b</sup>, Т. В. Низкая<sup>a</sup>, О. И. Виноградова<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup> Институт физической химии и электрохимии РАН,  
119071, Москва, Ленинский проспект, 31  
email: aes50@yandex.ru

<sup>b</sup> Московский государственный университет, 119991, Москва, Ленинские горы, 1  
email: oivinograd@yahoo.com

В канале с супергидрофобными стенками под действием градиента давления генерируются сложные структуры течения, связанные с анизотропным скольжением. Получено решение для трехмерного течения в канале со скрещенными полосатыми стенками на основе приближенного решения уравнений Стокса и метода Диссипативной Динамики Частиц. Среднее течение представляет собой суперпозицию течений Пуазейля, поперечного сдвига и однородного течения скольжения. Течение в поперечном направлении сопровождается образованием пары вихрей. Поперечный сдвиг значительно усиливает дисперсию броуновских частиц в широких каналах. Получены простые оценки для дисперсии в поперечном направлении на малых и больших временах, которые позволяют найти оптимальные значения чисел Пекле  $Pe$ , при которых достигается максимальная дисперсия в канале заданной длины. Оценки согласуются с результатами компьютерного моделирования дисперсии ансамбля частиц.

**Ключевые слова:** супергидрофобные поверхности; дисперсия частиц; скольжение

## Flow and particle dispersion in a channel with anisotropic superhydrophobic walls

E. S. Asmolov<sup>a,b</sup>, T. V. Nizkaya<sup>a</sup>, O. I. Vinogradova<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup> Institute of Physical Chemistry and Electrochemistry RAS,  
Leninsky Prospect 31, 119991, Moscow  
email: aes50@yandex.ru

<sup>b</sup> Moscow State University, Lenin mountains 1, 119991, Moscow  
email: oivinograd@yahoo.com

Pressure gradient generates complex flow patterns in superhydrophobic channels with misaligned textured surfaces. We present approximate theoretical solutions of Stokes equations and Dissipative Particle Dynamics (DPD) simulations for 3D flow in striped superhydrophobic channels. The mean flow is the superposition of the Poiseuille, transverse shear and slip-driven plug flows. A transverse shear can strongly enhance spreading of Brownian particles across the channel. We provide simple scaling results to guide the optimization of this transverse hydrodynamic dispersion. We relate short- and long-time spreading of the particle assembly to a Peclet number  $Pe$  and average slip velocities. We evaluate an optimal  $Pe$  that max-

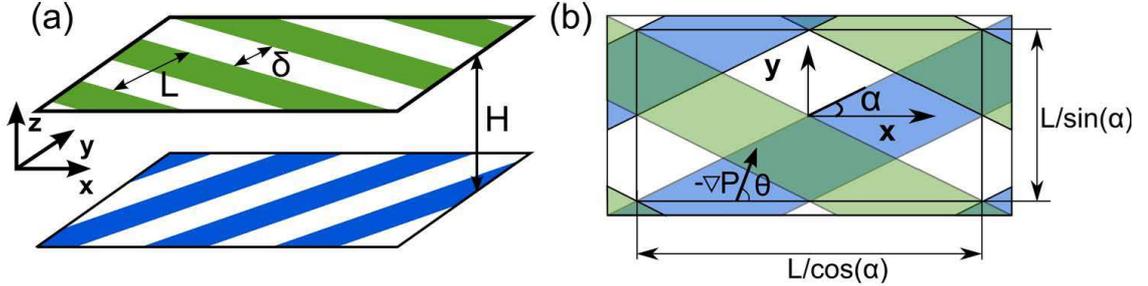
imizes transverse spreading in superhydrophobic channels of a finite length. Simulations of particle assembly validate the scaling relationships.

**Keywords:** superhydrophobic surfaces; particle dispersion; slip

## 1. Introduction

Superhydrophobic (SH) textures in the Cassie state, where the texture is filled with gas, have motivated numerous studies during the past decade [1]. The use of highly anisotropic SH textures provides additional possibilities for flow manipulation due to secondary flows transverse to the direction of the applied pressure gradient [2]. This can be used to separate non-Brownian microparticles [3] and enhance mixing rate [4] in microfluidic devices. Most of the prior work has focused on calculations of the eigenvalues of the effective slip-length tensor for a single SH interface [5]. In the present paper, we show that any misalignment of textured and anisotropic walls necessarily leads to a generation of shear flow in the transverse direction, which has not been appreciated in previous work [6]. The transverse shear generates complex flow structures at the scale of the texture period [7]. Dispersion of Brownian particles is relevant to many applications. It is difficult in wide microchannels with smooth walls since the diffusion is slow at low  $Re$  and large  $Pe$ . SH surfaces with anisotropic patterns can enhance mixing in channels and both transverse shear and vertical components of the velocity contribute to this process. We study dispersion of additives in the flow under combined action of advection and molecular diffusion and look for an optimal regime.

## 2. Flow field and particle dispersion

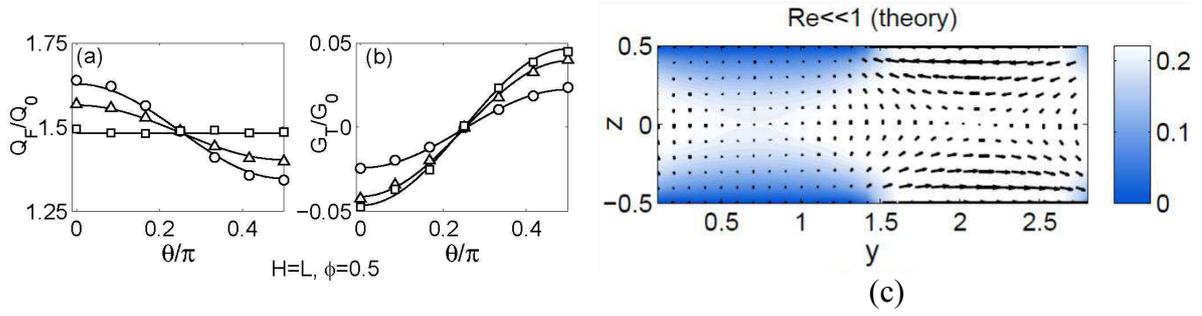


**Fig. 1.** (a) Two identical misaligned superhydrophobic walls with no-slip (white) and partial-slip (colored) stripes. (b) Top view of a periodic rectangular unit cell.

We consider the pressure-driven flow between two parallel stationary SH walls decorated with identical anisotropic textures with the fraction of the slipping area  $\phi = 1 - \delta/L$ . The flow is periodic with a rectangular unit cell shown in Fig. 1(b). We assume the gas interface to be flat with no meniscus curvature. The 3D flow is found using the theoretical solution of Stokes equations valid at  $H/L \sim 1$  and DPD simulations. The effective properties of the channel are characterized by the flow and shear rates averaged over the cell volume  $V$ :

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{V} \int \mathbf{u}_\tau dV, \quad \mathbf{G} = \frac{1}{V} \int \frac{\partial \mathbf{u}_\tau}{\partial z} dV,$$

where coordinates are scaled by  $H$ ,  $\mathbf{u}_\tau = (u_x, u_y)$  is the tangential velocity scaled by  $U_0 = -H^2 \nabla P / (2\mu)$ . The results evaluated within the two approaches are presented in Fig. 2(a) and compare very well. The flow in the transverse direction at  $x=0$  is shown in Fig. 2(b).



**Fig. 2.** (a) Forward flow rate (b) and transverse shear rate vs.  $\theta/\pi$ . Symbols show simulation results for  $Re=2.8$  and  $\alpha=\pi/12$  (circles),  $\alpha=\pi/6$  (triangles) and  $\alpha=\pi/4$  (squares). Solid curves are theoretical predictions for  $Re \ll 1$ . (c) Velocity field ( $u_y, u_z$ ) at  $x=0$ .

The dispersion of additives in the transverse direction due to a combined effect of convection and Brownian diffusion is scaled for the two limiting cases as

$$\frac{\sigma_y(x)}{H} \propto \begin{cases} u_{sy} Pe^{-1/2} \lambda^{3/2}, & u_{sy}^{-1} \ll \lambda \ll Pe, \\ u_{sy} Pe^{1/4} \lambda^{3/4}, & \lambda \gg Pe, \end{cases} \quad (1)$$

where  $\lambda = L_{ch}/H \gg 1$ ,  $L_{ch}$  is the channel length,  $u_{sy}$  is the averaged slip velocity across the flow at channel walls,  $Pe = U_0 H/D$  is the Peclet number. It follows from (1) that the maximal spreading can be attained when  $Pe \sim \lambda$ , or equivalently, when the time scales for particles to migrate through the channel and to diffuse to channel walls are comparable. This conclusion is validated by simulations of particle assembly.

### 3. Acknowledgement

Research is supported by the Russian Foundation for Basic Research (grant 15-01-03069).

### Bibliography

1. Darmanin T., Guittard F. Recent advances in the potential applications of bioinspired superhydrophobic materials // J. Mater. Chem. A. 2014. Vol. 2. P. 16319–16359.
2. Vinogradova O. I., Belyaev A. V. Wetting, roughness and flow boundary conditions // J. Phys.: Cond. Matter. 2011. Vol. 23. P. 184104.
3. Pimponi D., Chinappi M., Gualtieri P. et al. Mobility tensor of a sphere moving on a superhydrophobic wall: application to particle separation // Microuidics Nanouidics. 2014. Vol. 16. P. 571–585.
4. Ou J., Moss G. R., Rothstein J. P. Enhanced mixing in laminar flows using ultrahydrophobic surfaces // Phys. Rev. E. 2007. Vol. 76. P. 016304.
5. Asmolov E. S., Vinogradova O. I. Effective slip boundary conditions for arbitrary one-dimensional surfaces // J. Fluid Mech. 2012. Vol. 706. P. 108.
6. Bazant M. Z., Vinogradova O. I. Tensorial hydrodynamic slip // J. Fluid Mech. 2008. Vol. 613. P. 125.
7. Nizkaya T. V., Asmolov E. S., Zhou J. et al. Flows and mixing in channels with misaligned superhydrophobic walls // Phys. Rev. E. 2015. Vol. 91, P. 033020.

## **Смешанная конвекция при течении жидкого металла в каналах в сильных магнитных полях**

**Р. М. Ахмедагаев<sup>а</sup>, Я. И. Листратов<sup>а</sup>**

<sup>а</sup> Национальный исследовательский университет «Московский Энергетический Институт», 111250, Москва, ул. Красноказарменная, 14  
email: akhmedagaev.r.m@gmail.ru

Представлены результаты экспериментальных исследований и численные данные метода прямого численного моделирования (DNS) для гидродинамики и теплообмена жидкого металла в различных конфигурациях в продольном и поперечном магнитных полях (МП). Условия полученных результатов близки к условиям работы термоядерного реактора (ITER) типа токамак. Характерной особенностью таких исследований является совместное влияние сильного МП и термогравитационной конвекции (ТГК), при которых наблюдаются недостаточно изученные эффекты такие как: неравномерное распределение коэффициентов теплоотдачи по периметру канала, чрезвычайно высокие температурные колебания возле стенки канала, наличие зон ухудшенного теплообмена. Развитие ТГК в условиях МП приводит к появлению низкочастотных пульсаций аномально высокой интенсивности, в несколько раз превышающей турбулентный уровень.

**Ключевые слова:** жидкий металл; магнитная гидродинамика; смешанная конвекция

## **Mixed convection in the channel flow of the liquid metal affected by strong magnetic fields**

**R. M. Akhmedagaev<sup>а</sup>, Ya. I. Listratov<sup>а</sup>**

<sup>а</sup> National Research University «Moscow Power Engineering Institute», Krasnokazarmennaya St. 14, 111250, Moscow  
email: akhmedagaev.r.m@gmail.com

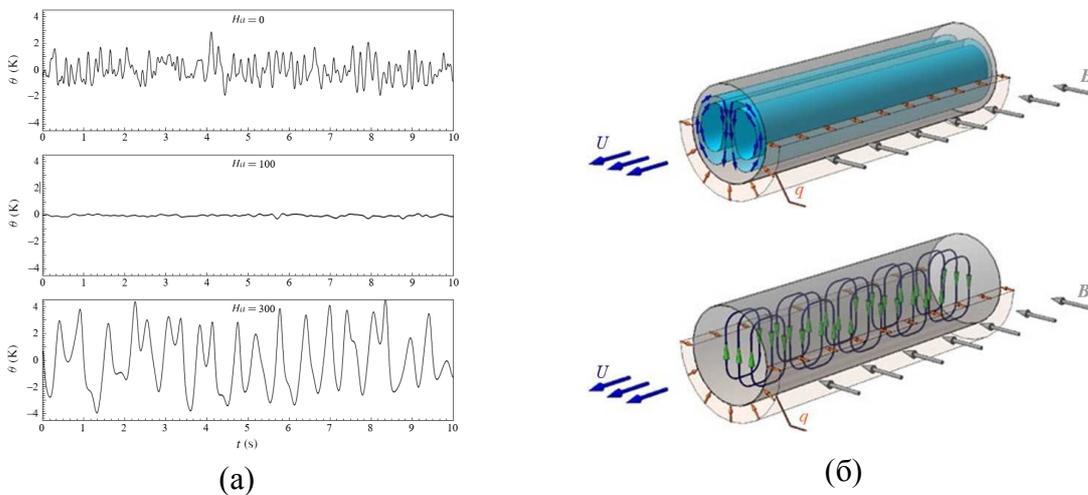
The results of experimental investigation and numerical data of the method of direct numerical simulation (DNS) for fluid dynamics and heat transfer of liquid metal in various configurations in the longitudinal and transverse magnetic fields (MF) are presented. Conditions of the received results are close to the fusion reactor (ITER) tokamak type. A characteristic feature of such research is the joint effect of strong MF and thermo-gravitational convection in which there are understudied effects such as: the extremely uneven distribution of heat transfer coefficients along the perimeter of the tube, abnormally high temperature fluctuations near the wall and the presence of areas with degraded heat transfer. Generation of large scale secondary vortices with the axis parallel to the MF induction causes temperature fluctuations of the abnormal intensity that considerably exceeds the level of turbulent fluctuations.

**Keywords:** liquid metal; magnetic hydrodynamics; mixed convection

## 1. Введение

Исследование ТГК в потоках ЖМ в каналах и трубах при совместном влиянии с сильными МП является весьма актуальной задачей в настоящее время. Это объясняется тем, что в силу ряда своих особенностей ЖМ рассматриваются в качестве перспективного теплоносителя в ряде проектов ИМБ международного термоядерного реактора [1].

Одним из проявлений эффекта влияния ТГК, который должен учитываться при разработке blankets, является возникновение аномальных пульсаций температуры. В качестве примера можно привести результаты эксперимента по смешанной конвекции турбулентного течения ЖМ в горизонтальной трубе в сильных поперечных МП при нижнем обогреве участка для температурных пульсаций (рис. 1. а) [2, 3]. Были проведены численные исследования [4] и подтверждена гипотеза о реструктуризации вто-

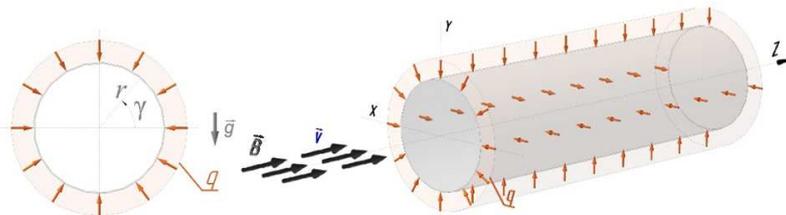


**Рис. 1.** (а) Температурные пульсации в потоке ЖМ ( $r/d=0.35$ ,  $\vartheta=3\pi/2$  - вблизи нижней части трубы,  $x/d=37$ ):  $Re=10^4$ ,  $Gr=8.5 \cdot 10^7$ ; (б) Предполагаемая схема реструктуризации вторичных течений.

ричных течений свободной конвекции под действием сильного МП (рис. 1б).

Аномальные пульсации возникают и в экспериментах для вертикальных каналов и труб в поперечном МП [5]. Аналогичные результаты были получены методом DNS [6]. Эксперименты в продольном МП для вертикальной трубы [3] также показывают, что с увеличением числа Гартмана могут возникать подобные эффекты.

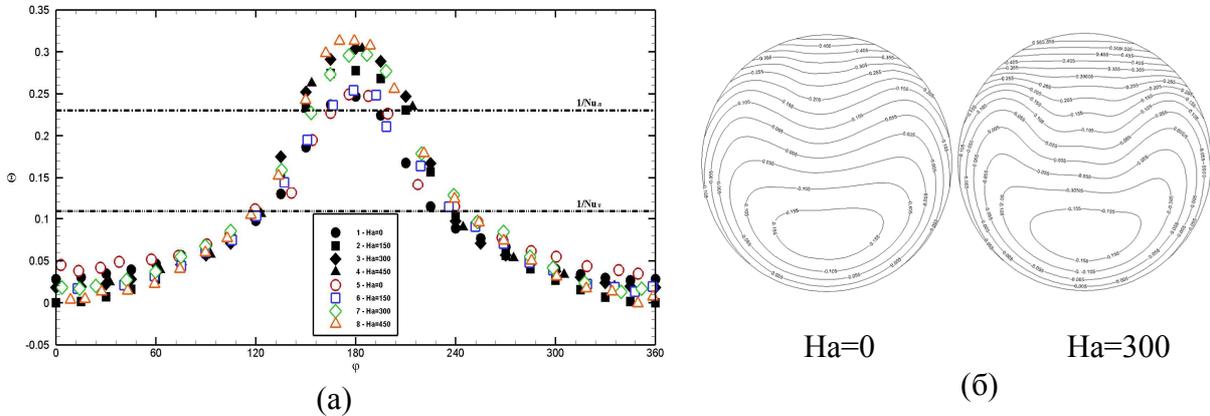
Цель данной работы состоит в численном исследовании методом DNS горизонтальной обогреваемой трубы в продольном МП (рис. 2) для подтверждения гипотезы о возникновении аномальных температурных пульсаций с ростом числа Гартмана.



**Рис. 2.** Исследуемая схема течения.

## 2. Результаты

Исследуемая геометрия представлена на (рис. 2). Длина участка ( $l$ ) принимается равной  $5d$ . Радиус расчетной области ( $r$ ) изменяется от 0 до 1. Допущения, граничные условия, система уравнений и алгоритм метода DNS представлены в работе [6].



**Рис. 3.** (а) Распределение температуры стенки по периметру сечения трубы,  $Re=10^4$ ,  $Gr=0.8 \cdot 10^8$ : 1-4 – DNS, 5-8 – [2]; (б) Поля осредненной температуры в поперечном сечении трубы,  $Re=10^4$ ,  $Gr=0.8 \cdot 10^8$ .

Полученные результаты иллюстрируют значительное влияние ТГК на поля скорости и температуры: нарушается осевая симметрия, распределение температуры стенки по периметру сечения становится неоднородным. Максимум температуры оказывается в верхней части сечения трубы и его абсолютное значение оказывается выше, чем при ламинарном теплообмене (рис. 3).

Влияние ТГК на поля скорости оказывается еще более сильным, чем на поля температуры: максимум скорости смещен к низу трубы и растянут по окружности. В продольном МП эффекты ТГК не ослабевают, а даже усиливаются. Несмотря на подавление турбулентности, при  $Ha=300$  и выше не наблюдается снижение теплоотдачи до ламинарных значений.

Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ №14.Z50.31.0042.

### Список литературы

1. Leshukov A. Yu., Kapyshev V. K., Kartashev I. A., Kovalenko V. G. et al. Design development and analytical assessment of LLCB TBM in Russian Federation during 20122013.- Ibid., p. 12321240.
2. Belyaev I. A., Genin L. G., Listratov Ya. I., Melnikov I. A., Sviridov V. G., Sviridov E. V., Ivochkin Yu. P., Razuvanov N. G., Shpansky Yu. S, Specific features of liquid metal heat transfer in a tokamak reactor, Megnetohydrodynamics Vol. 49 (2013), No. 1, pp. 177–190.
3. Genin L. G., Zhilin V. G., Ivochkin Y. P., Razuvanov N. G., Belyaev I. A., Listratov Y. I., Sviridov V. G. Temperature fluctuations in a heated horizontal tube affected by transverse magnetic field, in: Proc. 8th PAMIR Conf. Fund. Appl. MHD, Borgo, Corsica, France, 2011, pp. 37 – 41.
4. Zikanov O., Listratov Y., Sviridov V. G. Natural convection in horizontal pipe flow with strong transverse magnetic field, J. Fluid Mech. 720 (2013) 486–516.
5. Melnikov I. A., Sviridov E. V., Sviridov V. G., Razuvanov N.G. Experimental investigation of MHD heat transfer in a vertical round tube affected by transverse magnetic field, Fusion Eng. Des. 112 (2016) 505–512.
6. Zikanov O., Listratov Y. Numerical investigation of MHD heat transfer in a vertical round tube affected by transverse magnetic field, Fusion Eng. Des. 113 (2016) 151–161.

# **Изменение поверхностных свойств алюминиевого сплава АМГ-6 текстурированием волоконным лазером**

**К. А. Батищева<sup>а</sup>, Д. В. Феоктистов<sup>а</sup>**

<sup>а</sup> Национальный исследовательский томский политехнический университет  
634050, Томск, пр. Ленина, 30  
email: bka1801@mail.ru

Определено изменение статического контактного угла (СКУ) капли дистиллированной воды объемом 10 мкл на текстурированных подложках из алюминиевого сплава АМГ-6 лазерным излучением различной мощности. Текстура нанесена лазерной системой на базе волоконного лазера. Установлено, что увеличение мощности лазерного излучения, приводит к уменьшению СКУ, измеренного в первый день после нанесения текстуры. Определено изменение дисперсионной и полярной составляющих поверхностной энергии текстурированных подложек. Установлено, что под воздействием окружающей среды поверхностные свойства АМГ-6 изменяются с течением времени. СКУ увеличивается и достигает стабильного состояния на двадцатый день после нанесения текстуры.

**Ключевые слова:** статический контактный угол; смачивание; текстура

## **Modification of aluminum alloy surface properties by wave-long laser texturing**

**K. A. Batishcheva<sup>a</sup>, D. V. Feoktistov<sup>a</sup>**

<sup>a</sup> National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk Polytechnic University,  
Lenin Avenue 30, 634050, Tomsk  
email: bka1801@mail.ru

Change of the static contact angle (SCA) of distilled water droplet 10  $\mu$ l volume on textured aluminum alloy AMG-6 substrates by laser radiation with different power was studied. The texture is applied by a laser system based on a fiber laser. It is established that increase the power of laser radiation leads to decrease SCA measured on the first day after application of texture. Change dispersion and polar surface energy components of textured substrates is determined. It was found that under the influence of the environment, the surface properties of AMG-6 change with time. SCA increased and reached stable state on the twentieth day after application of texture.

**Keywords:** static contact angle; wetting; texture

### **1. Введение**

Известно [1-3], что на межмолекулярное взаимодействие конденсированных фаз жидкости и твердого тела (смачивание) влияет множество факторов. Основными, из

которых, являются поверхностная энергия и текстура поверхности. Один из способов модификации последних – обработка лазерным излучением.

Цель работы экспериментально определить изменение поверхностных свойств АМГ-6 лазерным текстурированием.

## 2. Описание эксперимента

Принцип действия экспериментальной установки, методика проведения исследования описаны в [1-2].

Эксперимент проведен с использованием шести подложек, изготовленных из алюминиевого сплава АМГ-6. Поверхность последних полировалась. После полировки пять подложек обработаны лазерным излучением, одна осталась без изменений. Текстура нанесена лазерной системой «Минни-Маркер 2 М 20» (таблица).

**Таблица. Технические характеристики лазерной системы «МинниМаркер 2 М 20» используемые при нанесении текстуры**

частота лазерного луча, Гц	99
скорость перемещения, $10^{-3}$ м/с	800
Мощность, Вт	2, 6, 10, 14, 18

Среднее арифметическое отклонение профиля поверхности подложек (Ra) определено на профилометре «НОММЕЛ TESTER T1000». С помощью микроскопа «Hitachi-3000M» получены фотографии микроструктуры. Все образцы исследовались методом рентгеновской дифрактометрии XRD с помощью дифрактометра Shimadzu XRD 7000S. Определена полярная и дисперсионная составляющая поверхностной энергии подложек.

На поверхность с помощью высокоточного дозатора размещалась капля дистиллированной воды объемом 10 мкл. СКУ измерялся в течение двадцати дней с интервалом в пять дней.

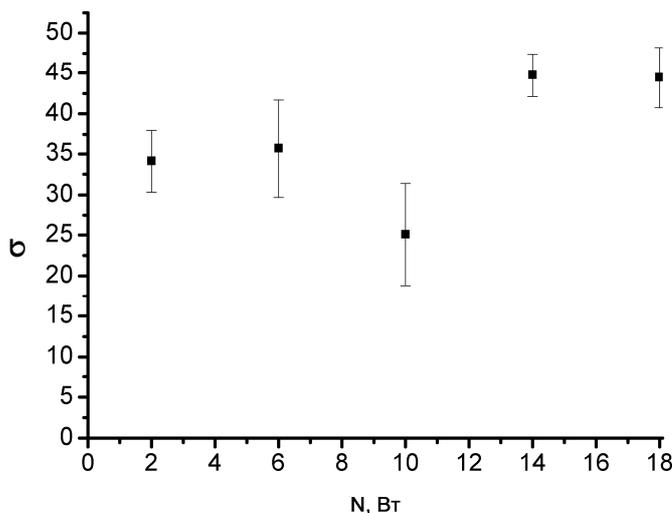
## 3. Анализ результатов

Получены значения СКУ подложек, текстурированных лазерным излучением. Установлено, что текстурирование лазером мощностью до 2 Вт не приводит к изменению СКУ. Последний равен значению полированной поверхности – 102 градуса. Величина поверхностной энергии остается постоянной  $34 \pm 4$  мН/м. Воздействие лазерным излучением мощностью до 2 Вт не влияет на строение кристаллической решетки поверхностного слоя металла. СКУ с течением времени стабилен.

СКУ подложек, текстурированных лазерным излучением мощностью 6, 10, 14, 18 Вт, увеличивался и достиг стабильного состояния через двадцать дней. Установлено, что увеличение мощности лазерной обработки привело к изменению строения кристаллической решетки. Через двадцать дней СКУ подложек, обработанных лазером мощностью 6, 10 Вт, достиг значения полированной поверхности 102 градуса. Воздействие лазером мощностью 14, 18 Вт позволило получить пористую текстуру, образованную сетью кристаллов различных размеров и форм. Глубина пор не превышает  $2 \pm 0.19$  мкм. СКУ составил 114 и 120 градусов, соответственно. Со временем лежащая капля под действием силы тяжести растекалась, заполняя поры. СКУ уменьшался до 70 градусов.

Установлено, что с увеличением мощности лазера от 2 до 18 Вт поверхностная энергия подложек, измеренная через двадцать дней после нанесения текстуры,

увеличилась на 10 мН/м (рисунок). Доля дисперсионной составляющей поверхностной энергии увеличивается. Полярная составляющая остается постоянной.



**Рисунок.** Зависимость поверхностной энергии ( $\sigma$ , мН/м) от мощности лазерного луча

#### 4. Заключение

Установлено, что значение СКУ подложек, текстурированных лазерным излучением мощностью 6, 10, 14, 18 Вт изменяется во времени. Стабильное состояние наступает на двадцатый день после обработки лазером. Увеличение СКУ обусловлено изменением кристаллической решетки и изменением соотношения полярной и дисперсионной составляющей поверхностной энергии подложек. Установлено, что лазерное текстурирование (мощность – 14, 18 Вт) алюминиевого сплава АМГ-6 позволяет улучшить гидрофобные свойства поверхности.

Работа поддержана грантом Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых – кандидатов наук (МК-6810.2016.8).

#### Список литературы

1. Кузнецов Г.В., Орлова Е.Г. Феоктистов Д.В. Испарение капель жидкостей с поверхности анодированного алюминия // Теплофизика и аэромеханика. – 2016 – Т. 23 – №1. – С. 17–22.
2. Семенов А. А., Зайцев Д. В., Кузнецов Г. В., Кабов О. А, Феоктистов Д.В. Экспериментальное исследование испарения капли жидкости на нагреваемой твердой поверхности // Теплофизика и аэромеханика. – 2015 – Т. 22 – №6. – С. 801–804.
3. Зайцев Д. В., Кириченко Д. П., Кабов О. А. Влияние смачиваемости подложки на разрыв локально нагреваемой пленки жидкости // Письма в Журнал технической физики. – 2015 – Т. 41 – №11. – С. 79–85.

## Влияние гравитации и тепловой нагрузки на режимы испарительной конвекции

В. Б. Бекежанова<sup>a</sup>, О. Н. Гончарова<sup>b,c</sup>

<sup>a</sup> Институт вычислительного моделирования СО РАН, 660036, Красноярск, Академгородок, 50/44  
email: vbek@icm.krasn.ru

<sup>b</sup> Институт теплофизики СО РАН, 630090, Новосибирск, пр. Ак. Лаврентьева, 1  
email: gon@math.asu.ru

<sup>c</sup> Алтайский государственный университет, 656049, Барнаул, пр. Ленина, 61

Исследуется точное решение уравнений Обербека – Буссинеска, описывающее совместное течение испаряющейся вязкой теплопроводной жидкости и газопаровой смеси в горизонтальном канале. При описании движения газовой фазы в основных уравнениях и граничных условиях на поверхности раздела дополнительно учтены эффекты Соре и Дюфура. Предложена классификация типов течений в зависимости от структуры полей скорости и температуры, типа граничных условий для функции концентрации пара. Изучена линейная устойчивость всех возникающих типов течений в случае равной тепловой нагрузки на внешних границах канала. Исследованы динамика и свойства возникающих характеристических возмущений при изменении гравитации и интенсивности внешнего теплового воздействия. Возмущения могут приводить к формированию ячеек, термокапиллярных и деформированных вихревых структур, отвечающих разным механизмам потери устойчивости. Полученные результаты позволяют решить проблему интенсификации или подавления конвекции за счёт управления внешними воздействиями в системах жидкостного охлаждения и термостабилизации.

**Ключевые слова:** испарительная конвекция; точное решение; устойчивость

## Influence of the gravity and thermal load on regimes of evaporative convection

V. B. Bekezhanova<sup>a</sup>, O. N. Goncharova<sup>b,c</sup>

<sup>a</sup> Institute of Computational Modelling SB RAS, Akademgorodok 50/44, 660036, Krasnoyarsk

email: vbek@icm.krasn.ru

<sup>b</sup> Institute of Thermophysics SB RAS, Ac. Lavrentieva ave 1, 630090, Novosibirsk

email: gon@math.asu.ru

<sup>c</sup> Altai State University, Lenina pr. 61, 656049, Barnaul

The exact solution of the Oberbeck – Boussinesq equations is investigated. The solution describes a joint flow of an evaporating liquid and gas-vapor mixture in a horizontal layer. The Soret and Dufour effects are additionally taken into account in the governing equations and interface conditions. Classification of the flows types is proposed depending on structure of the velocity and temperature fields, type of boundary conditions for the vapor concentration function. The linear stability of the flows is studied in the case of equal thermal load on the channel

walls. Dynamics and properties of the arising characteristic perturbations are investigated under changing gravitational and thermal actions. Perturbations can lead to formation of cells, thermocapillary and deformed vortex structures responsible for different mechanisms of the stability loss. Obtained results allow one to solve the problem of intensification/suppression of the convection in systems of fluidic cooling and thermotabilization with help of external actions.

**Keywords:** evaporative convection; exact solution; stability

## 1. Введение

Новые физические эксперименты [1, 2] позволяют изучить различные характеристики течений испаряющихся жидкостей в спутном газовом потоке. Структура таких течений определяется разнородными факторами: естественной и термокапиллярной конвекцией, касательными напряжениями, вызванными газовым потоком, теплофизическими свойствами рабочих сред и массопереносом через межфазную поверхность за счёт испарения или конденсации. Результаты теоретического исследования влияния отдельных факторов являются основой для модификации существующих опытных методик и разработки новых технических решений задач теплофизики для жидкостных систем охлаждения и термостабилизации.

## 2. Постановка задачи и точное решение

Рассматривается стационарное течение испаряющейся жидкости, увлекаемой спутным газовым потоком, в плоском бесконечном горизонтальном канале с непроницаемыми твёрдыми стенками. Для описания движения жидкости и парогазовой смеси используются уравнения Обербека – Буссинеска, учитывающие дополнительно эффекты Дюфура и Соре (характеризуются параметрами  $\delta$  и  $\alpha$  соответственно) в верхнем слое. Пар считается пассивной примесью, и концентрация пара в газе описывается уравнением диффузии, которое является следствием законов Фика.

Точное решение системы исходных уравнений имеет вид [3]

$$u_j = u_j(y), v_j = 0, p_j = p_j(x, y), T_j = (a_1^j + a_2^j y)x + \vartheta_j(y), C = (b_1 + b_2 y)x + \phi(y), \quad (2.1)$$

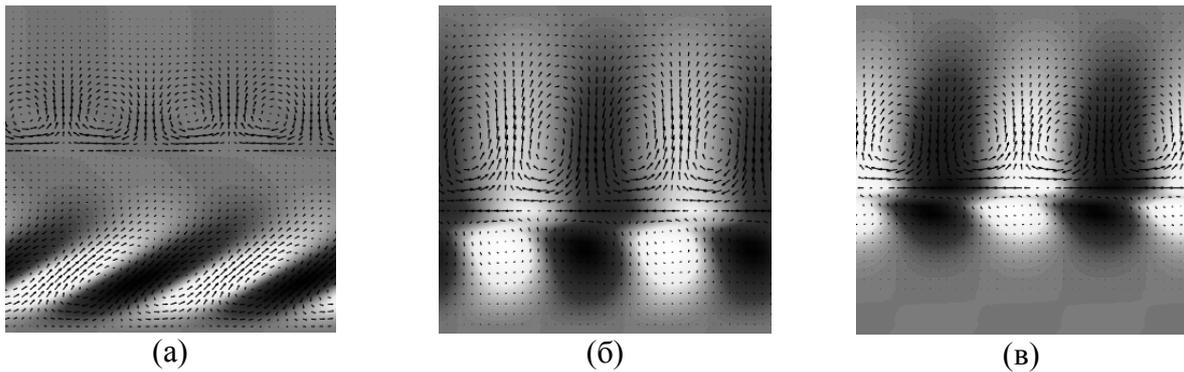
где  $u_j$  – скорость  $j$ -ой среды,  $p_j$  – давление,  $T_j$  – температура,  $C$  – концентрация пара в газе,  $j = 1, 2$ .

На внешних стенках заданы условия прилипания, линейное по продольной координате распределение температуры и условие отсутствия потока пара (либо условие нулевой концентрации пара) на верхней границе. На поверхности раздела жидкость-газ – условия непрерывности температуры и касательных скоростей, кинематическое и динамическое условие. В энергетическом условии учтены диффузионный поток массы за счёт испарения, уравнение баланса массы и термодинамическое соотношение для концентрации насыщенного пара:

$$k_1 T_{1y} - k_2 T_{2y} - \delta k_2 C_y |_{\Gamma} = -LM, \quad M = -D\rho_2(C_y + \alpha T_y) |_{\Gamma},$$

где  $k_j$  – коэффициент теплопроводности  $j$ -ой среды,  $M$  – массовая скорость испарения. Для замыкания задачи использовано условие, задающее расход парогазовой смеси.

Предложена классификация типов течений в зависимости от структуры полей скорости и температуры. При изменении интенсивности гравитационного и теплового (задаётся продольным градиентом температуры) воздействия, расхода газа, толщины



**Рис. 1.** Типичные формы тепловых и гидродинамических возмущений двухслойных течений с испарением: деформированные вихревые структуры (а), конвективные ячейки (б), термокапиллярные структуры (в).

жидкого и парогазового слоя решение (2.1) может описывать течения чисто термокапиллярного, смешанного и пуазейлевского типа (подробнее о классификации см. [4]).

### 3. Задача об устойчивости

Исследована линейная устойчивость всех классов течений относительно плоских нормальных возмущений. Изучено влияние гравитации и тепловой нагрузки (задаётся продольным градиентом температуры) на структуру возникающих характеристических возмущений. Установлена зависимость формы возмущений от типа основного течения. Для течений пуазейлевского типа (формируются в условиях гипергравитации и/или при больших расходах газа) характерно образование деформированных вихревых структур, «вытянутых» вдоль оси течения (рис. 1. а). Уменьшение гравитационного воздействия приводит к перестройке возмущений – в системе возникают конвективные ячейки (рис. 1. б). При микрогравитации или в условиях интенсивной тепловой нагрузки формируются термокапиллярные структуры (рис. 1. в) с характерными тепловыми пятнами вблизи поверхности раздела.

Получены качественные критерии смены наиболее опасных возмущений, условия сосуществования конвективного и термокапиллярного механизмов неустойчивости и эффективные возможности подавления неустойчивостей в двухслойной системе с испарением в гравитационных полях различной интенсивности за счёт внешних управляющих воздействий и/или толщины слоёв рабочих сред.

Работа первого автора выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 17-01-00229). Работа второго автора по постановке задачи и построению точного решения поддержана РФФИ (грант 17-08-00291).

### Список литературы

1. Kabov O. A., Zaitsev D. V., Cheverda V. V., Bar-Cohen A. Evaporation and flow dynamics of thin, shear-driven liquid films in microgap channels // *Experimental Thermal and Fluid Science*. 2011. V. 35. N. 5. С. 825–831.
2. Lyulin Y., Kabov O. Evaporative convection in a horizontal liquid layer under shear-stress gas flow // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2014. V. 70. P. 599–609.
3. Гончарова О. Н., Резанова Е. В. Пример точного решения стационарной задачи о двухслойных течениях с испарением на границе раздела // *Прикладная механика и техническая физика*. 2014. № 2. P. 68–79.
4. Bekezhanova V. B., Goncharova O. N. Stability of exact solutions describing two-layer flows with evaporation at the interface // *Fluid Dynamics Research*. 2016. Vol. 48, 061408.

# **Вычислительные методы и технологии исследования характеристик поверхности раздела сред дистанционным зондированием в коротковолновом диапазоне радиоволн**

**С. Ю. Белов**

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, 119991, Москва, Ленинские горы, 1

email: Belov\_Sergej@Mail.Ru

Мониторинг поверхности земли методом дистанционного зондирования в коротковолновом диапазоне радиоволн может позволить оперативно выявлять некоторые геофизические параметры экосистем. Данный диапазон позволяет диагностировать и подповерхностный слой земли, поскольку параметр рассеяния формируется и неоднородностями диэлектрической проницаемости подповерхностных структур. Данным методом при организации мониторингового зондирования, возможно выявлять области изменения этих сред, например, для оценки сейсмической опасности, опасных природных явлений, изменения экосистем, а также некоторых экстремальных событий техногенного характера. Проблема измерения и учёта рассеивающей способности земной поверхности в коротковолновом диапазоне радиоволн важна для решения ряда задач, например, при диагностике свойств среды с помощью методов, использующих этот радиодиапазон, что представляет интерес для геологоразведочных и экологических исследований. В работе представлен новый некогерентный метод оценки параметра сигнал/шум. Выполнен сравнительный анализ и показано, что по аналитической (относительной) точности определения этого параметра новый метод на порядок превосходит широко используемый стандартный и одного порядка с известной когерентной методикой. Анализ аналитических погрешностей оценки этого параметра позволил рекомендовать новый метод вместо стандартного.

**Ключевые слова:** дистанционное зондирование; рассеяние радиоволн поверхностью; КВ-диапазон

## **Computational methods and technologies of a research of characteristics of the interface between media by remote sensing in the short-wave range of radio waves**

**S. Yu. Belov**

M. V. Lomonosov Moscow State University, Lenin mountains 1, 119991, Moscow

email: Belov\_Sergej@Mail.Ru

Monitoring of the earth's surface by remote sensing in the short-wave band can provide quick identification of some characteristics of ecosystems. This band range allows one to diagnose subsurface aspects of the earth, as the scattering parameter is affected by irregularities in the dielectric permittivity of subsurface structures. The new method is suggested. This method based on the organization of the monitoring probe may detect changes in these environments, for example, to assess seismic hazard, hazardous natural phenomena, changes ecosystems, as well as some man-made hazards and etc. In this paper, we propose a new method for estimating the parameters of incoherent signal/noise ratio. Analysis of admissible relative analytical error of estimation of this parameter allowed to recommend new method instead of standard method. A comparative analysis and shows that the analytical (relative) accuracy of the determination of this parameter new method on the order exceeds the widely-used standard method.

**Keywords:** remote sensing; surface scattering of radio waves; SW-range

## 1. Введение

Параметр  $\beta_K$  возвращённого, частично рассеянного ионосферного сигнала представляет интерес как важная характеристика «возмущённости», «мутности» статистически неоднородной ионосферной плазмы, показатель надёжности работы ионосферных каналов связи, а также диагностических каналов. Оперативная и надёжная оценка параметра  $\beta_K$  имеет общефизический интерес (радиофизика, геофизика, оптика и т. д.); конкретизация осуществлена для ионосферного случая. Данный диапазон позволяет диагностировать и подповерхностный слой земли, поскольку параметр рассеяния формируется также и неоднородностями диэлектрической проницаемости подповерхностных структур.

Проблема измерения и учёта рассеивающей способности земной поверхности в коротковолновом диапазоне радиоволн важна для решения ряда задач, например, при диагностике свойств среды с помощью методов, использующих этот радиодиапазон, когда на трассе происходит промежуточное отражение (рассеяние) от земной поверхности, что представляет интерес для геологоразведочных и экологических исследований.

Важнейшими аспектами при использовании средств космического базирования для целей природопользования и экологического мониторинга являются выбор рабочего диапазона зондирования и вопросы влияния сред на проходящее излучение. Выбор КВ диапазона позволяет учитывать подповерхностный слой (толщины порядка длины волны падающего излучения).

## 2. Методы расчёта (когерентный и некогерентный)

В фиксированной точке приёма на поверхности земли (в скалярном приближении) ионосферный сигнал, узкополосный случайный процесс  $\mathcal{E}(t)$  представляет собой суперпозицию “зеркальной”  $\mathcal{E}_0(t)$  и рассеянной  $\mathcal{E}_p(t)$  по нормальному закону компонент:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) &= \mathcal{E}_0(t) + \mathcal{E}_p(t) = E_{00} \cdot e^{i(\omega_0 t - \Phi(t))} + \mathcal{E}_p(t) = \\ &= R(t) \cdot e^{i(\omega_0 t - \Phi(t))} = [E_c(t) + i \cdot E_s(t)] \cdot e^{i\omega_0 t}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\varphi(t)$ ,  $\Phi(t)$ ,  $R(t)$ ,  $E_m(t)$ ,  $m=c,s$  – медленные на периоде  $T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_0}$  случайные процессы;  $E_{00} = Const$ .

Параметр рассеяния определяется отношением:

$$\beta_k^2 = \frac{\text{мощность зеркальной компоненты}}{\text{мощность рассеянной компоненты}} = \frac{E_{00}^2}{2 \cdot \mathcal{E}_p^2}. \quad (2)$$

Здесь и ниже черта “—” означает статистическое усреднение.  $E_c(t) = R(t) \cdot \cos \Phi(t)$  и  $E_s(t) = R(t) \cdot \sin \Phi(t)$  – низкочастотные квадратуры ионосферного сигнала,  $R(t)$  – огибающая,  $\Phi(t)$  – суммарная фаза.

При этом индекс  $K = E4, R2, R4$  означает экспериментально регистрируемые первичные случайные процессы и соответствующий метод их регистрации:  $E4$  – когерентный;  $R2, R4$  – некогерентные амплитудные.

Достаточно широко используется для оценки  $\beta_K$  (2) стандартный некогерентный  $R2$ -метод, основанный на соотношении [1]:

$$\frac{\overline{R^2}}{(\overline{R})^2} = f(\beta_{R2}) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{(1 + \beta_{R2}^2) \cdot \exp(\beta_{R2}^2)}{[(1 + \beta_{R2}^2) \cdot I_0(\beta_{R2}^2/2) + \beta_{R2}^2 \cdot I_1(\beta_{R2}^2/2)]^2}. \quad (3)$$

$I_n(x)$  – функция Бесселя  $n$ -го порядка от чисто мнимого аргумента.

Используя когерентный  $E4$ -метод,  $\beta_{E4}$  оценивается по эксцессу  $\gamma_{E4}$  квадратур:

$$\gamma_{E4}(\beta_{E4}) = \frac{\overline{E_m^4}}{(\overline{E_m^2})^2} - 3 = -\frac{3}{2} \cdot \frac{\beta_{E4}^4}{(1 + \beta_{E4}^2)^2}; \quad m=c,s. \quad (4)$$

Следует заметить, что измеряемыми первичными параметрами являются отношения моментов  $\overline{R^2}/(\overline{R})^2$ ,  $\overline{E_m^4}/(\overline{E_m^2})^2$  соответственно. Естественно, соотношения (3), (4) получены с учётом определённых моделей структуры ионосферного сигнала. Исследования показали, что вероятностные свойства ионосферного сигнала (1) отражений первой кратности достаточно хорошо описываются моделью Райса со смещённым спектром (РС-модель) [2], на основе которой получены выражения (3), (4). Заметим, что выражение (4) когерентной методики  $E4$  обеспечивает на порядок более высокую относительную аналитическую точность оценки параметра  $\beta_K$  [3].

В настоящей работе предлагается новый некогерентный  $R4$ -метод определения  $\beta_{R4}$  по эксцессу  $\gamma_{R4}$  огибающей для РС-модели:

$$\gamma_{R4}(\beta_{R4}) = \frac{\overline{R^4}}{(\overline{R^2})^2} - 3 = \gamma_{R4}(\beta_{R4}) = -1 - \frac{\beta_{R4}^4}{(1 + \beta_{R4}^2)^2}. \quad (5)$$

Для сопоставления приведённых методов в смысле относительных погрешностей, допускаемых при вычислении  $\beta_K$ , обусловленных видом функциональных зависимостей  $f(\beta)$ ,  $\gamma_{E4}(\beta)$  и  $\gamma_{R4}(\beta)$ , получим выражения (6):

$$\mathcal{E}_k = \left| \frac{\Delta \beta_K}{\beta_K} \right| = \left| \frac{1}{\beta_K} \cdot \frac{dG_K}{dZ_K} \cdot \Delta(Z_K) \right|, \quad Z_K = \frac{\overline{R^2}}{(\overline{R})^2}, \quad \frac{\overline{E_m^4}}{(\overline{E_m^2})^2}, \quad \frac{\overline{R^4}}{(\overline{R^2})^2} \quad (6)$$

где  $G_K = f, \gamma_{E4}, \gamma_{R4}$ ;  $\Delta(Z_K)$  – абсолютные статистические ошибки измеряемых величин.

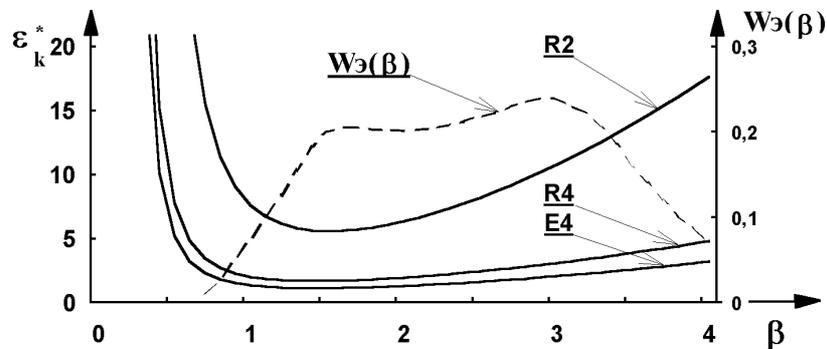
Погрешности (включая статистические) для разных методик определения  $\beta_K$  [4]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{R2}(\beta) &= \frac{\pi}{8} \cdot \frac{[(1+\beta^2) \cdot I_0(\beta^2/2) + \beta^2 \cdot I_1(\beta^2/2)]^3}{\beta^2 \cdot \exp(\beta^2) \cdot I_1(\beta^2/2)} \cdot \Delta(Z_{R2}); \\ \varepsilon_{E4}(\beta) &= \frac{(1+\beta^2)^3}{6 \cdot \beta^4} \cdot \Delta(Z_{E4}); \\ \varepsilon_{R4}(\beta) &= \frac{(1+\beta^2)^3}{4 \cdot \beta^4} \cdot \Delta(Z_{R4}).\end{aligned}\tag{7}$$

Статистическая ошибка  $\Delta(Z_K)$  зависит от объёма выборки  $N$  и при одинаковых объёмах выборки может быть разной для каждого из способов. Чтобы акцентировать внимание на погрешностях за счёт различия функциональных зависимостей (3) – (5), нормируем (7) на  $\Delta(Z_K)$ .

Графики зависимостей  $\varepsilon_K^* = \frac{\varepsilon_K}{\Delta(Z_K)}$  для  $\beta_{R2}$ ,  $\beta_{E4}$  и  $\beta_{R4}$  приведены на рисунке.

$\varepsilon_K^*$  будем ниже называть аналитической (относительной) погрешностью метода.



**Рисунок.** График зависимостей  $\varepsilon_K^*$ ,  $K = R2, R4, E4$  (сплошные линии) и экспериментальное распределение  $W_{\mathcal{E}}(\beta)$  (пунктир) (слой F2, 4,5 – 9,5 МГц).

Экспериментальное распределение  $W_{\mathcal{E}}(\beta)$  определяет диапазон изменения  $\beta$ .

### 3. Заключение

Из выражений (4) и (5) видно, что  $\varepsilon_{E4}^* = \frac{2}{3} \cdot \varepsilon_{R4}^*$  — одного порядка и существенно (на порядок) превосходят точность измерения стандартной  $R2$ -методики. В итоге, анализ аналитических погрешностей оценки параметра  $\beta_K$  позволил рекомендовать метод  $R4$  вместо стандартного  $R2$ . При этом достаточно высокая аналитическая (относительная) точность оценки параметра  $\beta_K$  может быть достигнута с помощью некогерентной аппаратуры, используя выражение (5) метода  $R4$ . Отметим, что за когерентной методикой  $E4$  остаётся возможность оптимизации статистической ошибки путём соответствующей специальной цифровой обработки ионосферного сигнала [5].

### Список литературы

1. Белов С. Ю. Экспериментальное исследование характеристик когерентной и некогерентной обработки информации при дистанционном зондировании атмосферы и «шероховатой» земной поверхности в коротковолновом диапазоне радиоволн. // Известия высших учебных заведений. Физика. 2016. Т. 59 (12-3). ISSN 0021-3411. С. 121-124.

2. *Belov S. Yu.* The analysis of monitoring data of the parameter scattering power the earth's surface in the short-wave range of radio waves. // Исследования по геоинформатике: труды геофизического центра РАН. ФГБУН, Москва, eISSN: 2308-5983. Том 4. № 2. 2016. DOI: 10.2205/2016BS08Sochi. С. 50.
3. *Belov S. Yu., Belova I. N., Falomeev S. D.* Monitoring of coastal ecosystems by method of remote sensing in the short-wave range of radio waves. // Proceedings of International Conference «Managing risks to coastal regions and communities in a changing world» (EMECs'11-SeaCoasts XXVI). DOI: 10.21610/conferencearticle\_58b4316d2a67c. ISBN 978-5-369-01628-2.
4. *Белов С. Ю.* О некоторых характеристиках рассеивающей способности земной поверхности при дистанционном зондировании в коротковолновом диапазоне радиоволн. // Региональные проблемы дистанционного зондирования Земли (РПДЗЗ-2015). ISBN 978-5-7638-3306-5. Красноярск, СФУ, 2015. С. 101–104.
5. *Белов С. Ю.* Программа регистрации квадратурных компонент  $n$ -кратного отражённого от земной поверхности радиосигнала. Свидетельство о регистрации права на программное обеспечение № RU.2016612172 от 19.02.2016 г.

## Матричный метод расчёта дифракции упругих волн в слоистой анизотропной среде

Ю. Н. Беляев<sup>a</sup>, Д. С. Малышкин<sup>b</sup>

Сыктывкарский государственный университет, 167001, Сыктывкар, Октябрьский пр. 55  
email: <sup>a</sup> ybelyayev@mail.ru, <sup>b</sup> prorid3r@gmail.com

Рассматривается рассеяние упругих волн слоистыми анизотропными средами. Для расчёта шести лучевой дифракции используется метод матрицы переноса. Распределение энергии падающей волны между рассеянными волнами характеризуется коэффициентами преобразований. Представлен метод вычислений коэффициентов преобразований. Этот метод не требует решения алгебраической задачи на собственные значения для волн в анизотропном слое. Особенности зависимостей коэффициентов преобразований от углов падения, частоты и толщины слоя демонстрируются на примерах слоёв некоторых кристаллов.

**Ключевые слова:** упругие волны; матрица переноса; ошибки усечения и округления

## The matrix method for calculating the diffraction of elastic waves in layered anisotropic medium

Yu. N. Belyayev<sup>a</sup>, D. S. Malyshkin<sup>b</sup>

Syktvykar State University, Oktyabrskii pr. 55, Syktvykar-167001, Russia  
email: <sup>a</sup> ybelyayev@mail.ru, <sup>b</sup> prorid3r@gmail.com

Scattering of elastic waves in layered anisotropic media is considered. Transfer matrix method is used to calculate the six-beam diffraction. The distribution of incident wave energy between six scattered waves is characterized by conversion coefficients. The method for conversion coefficients calculations is presented. It does not require solving algebraic problem on eigenvalues for waves in an anisotropic layer. Features of dependencies of conversion coefficients on angles of incidence, frequency and the thickness of the layer are demonstrated by examples of some crystalline layers.

**Keywords:** elastic waves; transfer matrix; truncation and round-off errors

**1. Обзор методов расчёта упругих волн** в различных слоистых средах имеется в монографиях [1], [2]. Падающая на анизотропный слой продольная ( $P$ -тип) или сдвиговая ( $SH$ - или  $SV$ -тип) волна порождает в общем случае шесть волн. Для расчёта волн, рассеянных анизотропным слоем, в данной работе используется метод матрицы переноса. Уравнения движения и закон Гука, описывающие напряжённо-деформированное состояние твёрдого тела, редуцируются, применительно к деформациям, порождаемым плоской волной в слоистой среде, в систему  $d_z\Psi = W\Psi$ , где дифференцирование ведётся по координате  $z$ , перпендикулярной границам слоя. Волновое поле описывается вектор-столбцом  $\Psi$ , элементами которого являются компоненты вектора смещения и тензора напряжений:  $u_y, p_{yz}, u_x, u_z, p_{xz}, p_{zz}$ . Матрица переноса  $T_i = \exp[W_i(d_{i+1} - d_i)]$  связывает значения вектор-функции  $\Psi(z)$  на границах  $i$ -го слоя  $\Psi(d_{i+1}) = T_i\Psi(d_i)$ , так что для  $N$ -слойной среды  $\Psi(d) = T\Psi(0)$ , где

$T = T_N T_{N-1} \cdots T_1$  и  $d = d_1 + \cdots + d_N$  – толщина слоистой среды. Одной из величин, оказывающих существенное влияние на результат расчётов матрицы переноса, является параметр распространения  $\kappa = \nu d$ , где  $\nu$  – частота колебаний волны. Стандартный подход [1]-[2] к расчёту волн в анизотропной среде основан на нахождении волновых чисел (собственных значений матрицы  $W_i$ ) для каждого слоя структуры. Если для случаев двух- и четырёхволновой дифракций [2] проблема собственных значений и вычисление матричной экспоненты имеют простые аналитические решения, то для матриц  $W_i$  шестого порядка общего вида собственные значения могут быть найдены только численными методами. Возникающие при этом погрешности являются одной из причин того, что вычисление матрицы переноса для больших значений  $\kappa$  при наличии неоднородных волн может приводить к неудовлетворительным результатам [3]. В данной работе для нахождения  $\exp(Wd)$  используется метод [4], не требующий вычисления собственных значений матрицы  $W$ .

**2. Матрица переноса** однородного слоя толщиной  $d$ , если воспользоваться известными свойствами матричной экспоненты, может быть представлена формулами:

$$T = \exp(Wd) = \left[ \exp\left(\frac{Wd}{m}\right) \right]^m = \left[ \sum_{i=0}^5 \left(\frac{Wd}{m}\right)^i K_i \right]^m, \quad K_i \approx \sum_{g=0}^i \sum_{l=0}^{6+N} \frac{1}{j!} p_{6-l+g} \dot{\equiv}_{j-1-g}(6). \quad (1)$$

Здесь  $\dot{\equiv}_g(6)$  – это так называемые *симметрические многочлены шестого порядка*, выражаемые через коэффициенты  $p_1, \dots, p_6$  характеристического уравнения матрицы  $Wd/m$  с помощью рекуррентных уравнений [5]:  $\dot{\equiv}_0(6) = \dot{\equiv}_1(6) = \dots = \dot{\equiv}_4(6) = 0$ ;  $\dot{\equiv}_5(6) = 1$ ;  $\dot{\equiv}_g(6) = p_1 \dot{\equiv}_{g-1}(6) + p_2 \dot{\equiv}_{g-2}(6) + \dots + p_n \dot{\equiv}_{g-n}(6)$ . Параметр масштабирования  $m = 2^j$  ( $j$  – целое число) – это наименьшее число, удовлетворяющее условию  $\eta = 8.5 \kappa (\rho \max |S_{gh}|)^{1/2} / m < 1$ , где  $\rho$  – плотность, а  $S_{gh}$  – компоненты тензора упругой податливости (в матричной форме записи) анизотропного слоя.

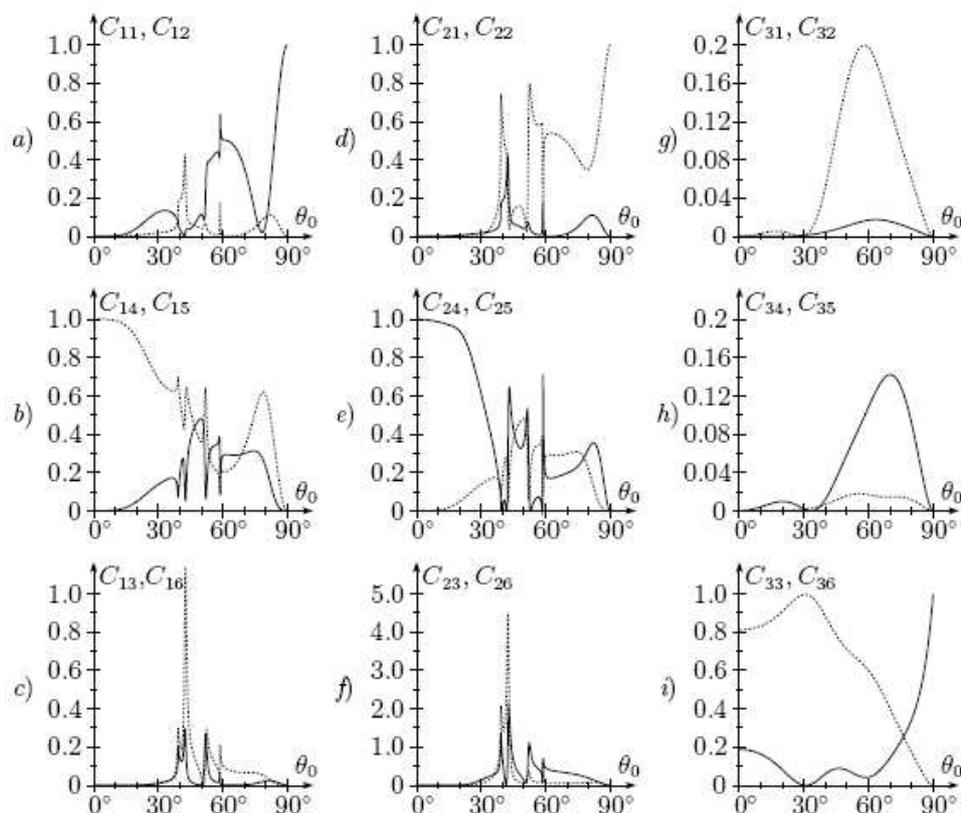
Приближённое равенство в последней формуле (1) становится точным при  $N \rightarrow \infty$ . Погрешность вычислений матрицы переноса по методу (1) не превосходит величины  $\varepsilon < m\eta^{N+1} / \left[ (N+6) \prod_{i=1}^N (n+i) \right]$  и, очевидно, может регулироваться выбором значений  $N$ .

Представленный метод нахождения матрицы переноса тестировался в расчётах рассеяния упругих волн на трёхслойной модели: кристаллический слой ( $\text{PbMoO}_4$ ,  $\text{In}$ ,  $\text{BaTiO}_2$ ) ограниченный твёрдыми изотропными полупространствами. Упругие параметры кристаллов брались по книге [5], а первой и третий слои полагались одинаковыми с плотностью  $\rho_0 = \rho_d = 2.65 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$  и упругими постоянными Ламе  $\lambda_0 = \lambda_d = 1.67 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ ,  $\mu_0 = \mu_d = 3.27 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ . Проводилось сравнение преобразований энергии падающей плоской волны в волны  $SH$ -,  $SV$ - и  $P$ -типа (с номерами 1, 2, 3, соответственно), рассеиваемые кристаллом в область  $z < 0$ , и в волны  $SH$ -,  $SV$ - и  $P$ -типа (пронумерованные 4, 5, 6), рассеиваемые кристаллом в область  $z > d$ .

**3. Коэффициенты преобразований**  $C_{is}$  определяются равенствами  $C_{is} = |A_s/A_{0i}|^2$ , где  $A_s$ ,  $s = 1, \dots, 6$ , – амплитуды рассеянных волн,  $A_{0i}$  – амплитуда падающей волны ( $i = 1$  для падающей волны  $SH$ -типа,  $i = 2$  –  $SV$ -типа,  $i = 3$  –  $P$ -типа). Коэффициенты  $C_{is}$  зависят от упругих свойств среды (через элементы матрицы переноса), углов падения  $\theta_0$  (между направлением падающей волны и осью  $z$ ) и  $\alpha$  (между плоскостью падения и плоскостью  $xy$ ) и параметра распространения  $\kappa$ . Примеры спектров  $C_{is} = C_{is}(\theta_0)$  рассеяния упругих волн кристаллическим слоем  $\text{PbMoO}_4$  показаны на рисунке. Зависимости  $C_{i1}(\theta_0)$ ,  $C_{i3}(\theta_0)$ ,  $C_{i5}(\theta_0)$  представлены сплошными, а  $C_{i2}(\theta_0)$ ,  $C_{i4}(\theta_0)$ ,  $C_{i6}(\theta_0)$  – штрихованными линиями.

**4. Результаты** моделирования спектров позволяют утверждать, что преобразования волны *SH*-типа в волну *SV*-типа и наоборот характеризуются равенствами  $C_{12}(\theta_0, \alpha) = C_{21}(\theta_0, \alpha)$  и  $C_{15}(\theta_0, \alpha) = C_{24}(\theta_0, \alpha)$ . Высокая точность выполнения этих равенств и закона сохранения потока энергии при выполнении расчётов свидетельствуют о надёжности представленного метода.

Когда модули трёх собственных значения  $k_1, k_2, k_3$  матрицы  $W$  соотносятся примерно как 3 : 2 : 1, наблюдается резонансное преобразование поляризаций упругих волн. В примере, представленном на рисунках *a – f*, такая ситуация реализуется для четырёх углов падения. Так если  $\theta_0 = 42.18^\circ$  *SH* волна при отражении полностью преобразуется в *SV* волну. Это акустический аналог «комбинационного» резонанса – возбуждение колебаний  $\omega_1$  и  $\omega_2$  в системе с двумя степенями свободы при воздействии на последнюю с частотой  $\omega$ , удовлетворяющей условию  $\omega : \omega_1 : \omega_2 = 3 : 2 : 1$  [6].



**Рисунок.** Спектры рассеяния упругих волн слоем  $\text{PbMoO}_4$ ,  $\kappa = 7845$  м/с,  $\alpha = 15.09^\circ$

#### Список литературы

1. Бреховских Л.М., Годин О.А. Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989. 416 с.
2. Aki K., Richards P.G. Quantitative seismology. Sausalito, CA: University Science Books, 2002. 700 p.
3. Potel C., de Belleval J.-F. Acoustic propagation in anisotropic periodically multilayered media: A method to solve numerical instabilities//J. Appl. Phys. 1993. Vol. 74. P. 2208–2215.
4. Беляев Ю.Н. К вычислению функций матриц // Математические заметки. 2013. Т. 94. Вып. 2. С. 175–182. DOI: 10.4213/mzm9345
5. Dieulesaint E., Royer D. Ondes élastiques dans les solides. Application au traitement du signal. Paris: Masson, 1974. 424 p.
6. Мандельштам Л.И. Полное собрание трудов. Том 3. М.: Из-во АН СССР, 1950. 423 с.

## Течение с проскальзыванием вязкого сжимаемого материала

Н. А. Беляева<sup>а</sup>, Е. А. Прянишникова<sup>а</sup>, А.М. Столин<sup>б</sup>

<sup>а</sup> Сыктывкарский государственный университет

167001, Сыктывкар, Октябрьский пр., 55

email: belyayevana@mail.ru, email: pryanysh@inbox.ru

<sup>б</sup> Институт структурной макрокинетики и проблем материаловедения (ИСМАН) РАН

142432, г. Черноголовка Московской обл., ул. Академика Осипьяна, д. 8

email: amstolin@ism.ac.ru

На основе двумерной математической модели течения композитного материала в цилиндрическом канале переменного сечения под действием одностороннего давления построена усредненная по радиусу аналитическая модель. Проведен численный анализ искомых функций течения с учетом трения и скорости пристенного проскальзывания в рамках усредненной модели. Основным методом численного анализа – метод разностных схем. На основе широкого численного эксперимента получена аналитическая оценка скорости проскальзывания материала на граничной поверхности. Полученные результаты согласуются с результатами современных исследований, опубликованными в открытой печати.

**Ключевые слова:** математическая модель; течение композита; пристенное проскальзывание

## Viscous compressible material flow with slip

N.A. Belyaeva<sup>а</sup>, E.A. Pryanishnikova<sup>а</sup> A.M.Stolin<sup>б</sup>

<sup>а</sup> Syktyvkar State University 167001, Syktyvkar, Oktyabrski pr., 55

email: belyayevana@mail.ru, email: pryanysh@inbox.ru

<sup>б</sup> ISMAN Russian Academy of Science

Institute of Structural Macrokinetics and Materials Science RAS

142432, Chernogolovka Moscow Region,, Academician Osipyman str., 8,

email: amstolin@ism.ac.ru

The composite material flow in a cylindrical channel of variable cross-section under the action of a one-sided pressure is analyzed. A possible material wall slip is considered. The slip velocity is analyzed on the basis of the averaged mathematical model. An analytical estimate of the slip velocity of the material at the boundary surface is presented. The results obtained are consistent with the results of modern studies published in the open press.

**Keywords:** mathematical model; composite flow; wall slip

## Введение

В работе [1] представлена двумерная математическая модель экструзии сжимаемого композитного материала из цилиндрической камеры через формирующую матрицу в направляющий калибр. Чтобы избежать сложности анализа поставленной задачи, связанные с двумерностью, предложен переход к усредненной по радиусу математической модели. На основе полученной аналитической модели предполагается нахождение оценки возможной скорости пристенного проскальзывания движущегося под действием давления композитного материала. Результаты исследований, связанные с развитием данного подхода, представлены на конференциях [2, 3], некоторые результаты изложены в настоящей работе.

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим течение композитного пористого материала в цилиндрическом канале переменного сечения под действием одностороннего давления. Математическая модель рассматриваемого процесса состоит из трех уравнений:

$$\frac{\partial(\rho_1\rho)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_1\rho\vec{V}) = 0 \quad (1)$$

$$\rho_1\rho\left(\vec{F} - \frac{d\vec{V}}{dt}\right) + \operatorname{div}\Pi = 0 \quad (2)$$

$$\Pi = \left[ -p + \left( \xi - \frac{2}{3}\mu \right) \operatorname{div}(\vec{V}) \right] I + 2\mu\dot{\Phi} \quad (3)$$

(1) – уравнение неразрывности, (2) – движения, (3) – дифференциальное уравнение состояния; плотность материала определяется произведением  $\rho_1 \cdot \rho$ , где  $\rho_1$  – плотность несжимаемой основы,  $\rho$  – относительная плотность; скорость течения,  $\Pi$  – тензор напряжений,  $I, \dot{\Phi}$  – единичный тензор и тензор скоростей деформации, соответственно.

В силу симметрии области течения предполагаем, что искомые функции, определяющие течение, не зависят от угловой координаты, так что касательная скорость  $v_\varphi = 0$ , касательные напряжения  $\sigma_{r\varphi} = \sigma_{z\varphi} = 0$ .

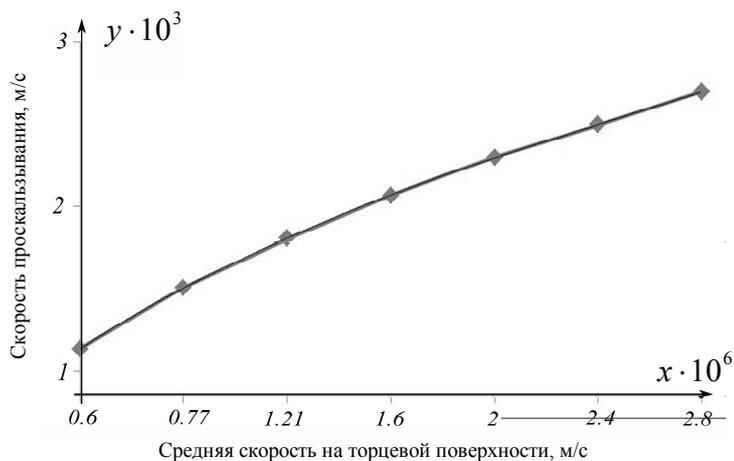
Ввиду малости числа Рейнольдса: вязкость несжимаемой основы велика – уравнения движения (2) заменим условиями равновесия [4]. Предполагаем отсутствие действия внешних сил  $\vec{F}$  на течение материала, внутреннее давление  $p$  положим равным нулю. Применим к проекциям уравнений системы (1)–(3), соответствующим начальным и граничным условиям метод усреднения по радиусу, воспользовавшись формулой:

$$\overline{f(r)} = \frac{2}{R_1^2} \int_0^{R_1} r f(r) dr. \quad (4)$$

### 2. Некоторые результаты численных экспериментов

В усредненных уравнениях искомые функции являются функциями лишь осевой координаты. Численное решение уравнений проводится на основе метода разностных схем [5].

Предполагается следующее начальное распределение плотности:  $\rho_0(z) = \rho_0 + (\rho_m - \rho_0)z$ , интенсивность силы трения определим формулой:  $\tau_{fr} = k_{fr} \cdot P(t)$ , где  $k_{fr}$  – коэффициент трения,  $P(t)$  – одностороннее давление, под действием которого движется материал. Зададим [6] скорость пристенного скольжения формулой  $v_b = \beta \cdot \tau_{fr}^c$ , параметры  $\beta$  и  $c$  зависят от свойств материала, в расчетах приняты значения:  $\beta = 0.1$ ,  $c = 0.5$ .



**Рис. 1.** Зависимость скорости проскальзывания на стенке от средней скорости «активной» поверхности

На основе проведенного численного эксперимента получено соотношение (рис. 1), связывающее скорость проскальзывания и среднюю скорость перемещения поперечной границы, движущейся под действием силы интенсивностью  $P(t)$ . Зависимость аппроксимирована кубическим полиномом вида

$$y = 0.0222x^3 - 0.4345x^2 + 4.807x + 7.0143.$$

Приведенный результат согласуется с данными, полученными в работе [7]. Полученный результат подтверждает адекватность используемых в модели соотношений между действующим давлением и силой трения, скоростью проскальзывания и силой трения.

### Список литературы

1. Прянишникова Е.А., Беляева Н.А. Метод усреднения в задаче математического моделирования экструзии композитного материала // Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1. Вып. 16. 2012. С. 20 – 27.
2. Прянишникова Е.А., Беляева Н.А. Трение и скорость проскальзывания в процессе экструзии композитного материала // Проблемы деформирования и разрушения материалов и конструкций: тезисы докл. Всерос. конф. Пермь, 17—19 июня 2015 г. Пермь: Изд-во Пермского национального исследовательского политехнического университета, 2015. С. 87.
3. Pryanishnikova E.A., Belyaeva N.A., Stolin A.M., Stelmakh L.S. Mathematical model of the flow of compressible material in cylindrical channel with variable cross section. Abstracts of International conference Days on Diffraction 2016, June 27 – July 1, 2016, St. Petersburg. P. 104–105.
4. Беляева Н.А. Математические модели деформируемых структурированных материалов. Монография. Сыктывкар: Изд-во СыктГУ, 2008. 116 с.
5. Самарский, А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. 616 с.
6. M. Gupta. Effect of wall Slip on the Flow in a flat Die for Sheet Extrusion. ANTEC pp1191–1196. (2011).
7. Ивицкий И.И. Моделирование пристенного скольжения полимера // Технологический аудит и резервы производства. №5/3 (19). 2014. С. 8 – 11.

# Численное исследование зависимости формы свободной поверхности от времени релаксации

**А. В. Бондаренко, Н. А. Рябкова, А. В. Казаков, Н. М. Труфанова**

Пермский национальный исследовательский политехнический университет  
614990, Пермь, Комсомольский проспект, д. 29  
email: a.bondarenko1991@mail.ru

В статье представлены результаты численных исследований течения полимерных расплавов в фильере. Для моделирования процесса использовалась дифференциальная модель Максвелла. В работе исследовалось изменение формы экструдата на участке свободного истечения. Для решения задачи был применен программный пакет ANSYS POLYFLOW.

**Ключевые слова:** время релаксации; вязкоупругая жидкость; свободная поверхность

## Numerical study of the dependence of the shape of a free surface from the relaxation time

**A. V. Bondarenko, N. A. Riabkova, A. V. Kazakov, N. M. Trufanova**

Perm National Research Polytechnic University,  
614990, Perm, 29 Komsomolsky av  
email: a.bondarenko1991@mail.ru

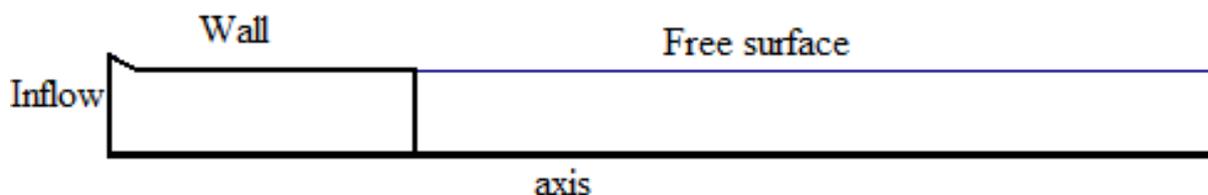
In the paper, the results of numerical investigations of polymer melts in a channel die. The Maxwell model is used for viscoelastic simulation. In work studied a change in the shape of the extrudate in free surface region. The computations are performed with ANSYS POLYFLOW software.

**Keywords:** relaxation time; viscoelastic fluid; free surface

### 1. Введение

Подбор оптимальных технологических режимов процесса экструзии, несомненно, является важной и актуальной задачей, так как влияет непосредственно на качество готового изделия. Исследованию процесса экструзии полимерных материалов посвящено большое количество как теоретических [1–2] так и экспериментальных работ [3]. Однако, следует отметить, что недостаточно раскрытым оставался вопрос прогнозирования результирующей формы экструдата за пределами канала фильеры. Задачей данного исследования являлась оценка степени влияния вязкоупругих свойств перерабатываемого материала на формирование свободной поверхности готового изделия.

Схема течения вязкоупругой жидкости представлена на (рис. 1). Жидкость подается на вход в канал (Inflow). На твердых стенках выполняются условия прилипания и непроникновения (Wall). На участке свободного течения задаются кинематическое и динамическое граничные условия (Free surface). Данную задачу удобно рассматривать в осесимметричной постановке (Axis – ось симметрии).



**Рис. 1.** Схема течения вязкоупругой жидкости в канале и за пределами фильеры

## 2. Постановка задачи

В работе были сделаны следующие допущения: 1 процесс стационарный, 2 задача осесимметричная, 3 коэффициент поверхностного натяжения не учитывается при решении задачи, 4 процесс изотермический.

Математическое описание процесса течения основывается на законах сохранения. Уравнения неразрывности и движения дополняется описанием вязкоупругих свойств материалов, представляющим собой линейную модель Максвелла:

$$\sigma + \lambda \cdot \overset{\nabla}{\sigma} = 2 \cdot \mu \cdot W \quad (1)$$

где  $W$  – тензор скоростей деформации,  $\overset{\nabla}{\sigma}$  – верхняя конвективная производная вязкоупругого тензора напряжений, которая может быть найдена из следующего уравнения:

$$\overset{\nabla}{\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} - (\nabla v \cdot \sigma + (\nabla v)^T) \quad (2)$$

Тензор скоростей деформации:

$$W = 0,5 \cdot (\nabla v + (\nabla v)^T) \quad (3)$$

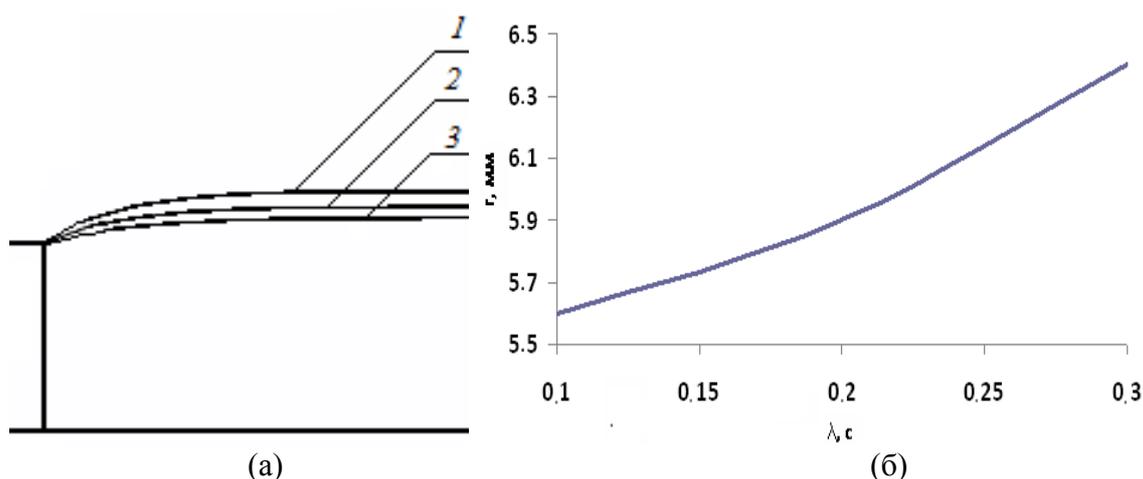
В уравнениях (1)–(3)  $\sigma$  – тензор напряжения,  $\lambda$  – время релаксации,  $\mu$  – вязкость,  $v$  – вектор скорости.

## 3. Результаты

Модель вязкоупругой жидкости учитывает такой параметр как время релаксации ( $\lambda$ ), заключающийся в падении начального напряжения в  $e$  раз за определенный промежуток времени. Для оценки степени влияния вязкоупругих свойств экструдруемых материалов на формирование внешней свободной поверхности за пределами фильеры была проведена серия численных экспериментов, отличительным фактором которых являлось время релаксации. Были получены поля скоростей, давлений, компоненты тензора напряжения, а также координаты деформируемой границы экструдата за пределами фильеры (см. рис. 2). На (рис. 2. а) графически показано изменение формы свободной поверхности для различных параметров времени релаксации.

Анализ полученных результатов показал, что вязкоупругие свойства влияют на итоговый размер экструдата при отсутствии принудительной вытяжки. С увеличением  $\lambda$  релаксационные процессы замедляются, что приводит к большему разбуханию материала в области со свободной поверхностью.

На (рис. 2. б) показано изменение геометрических размеров экструдата в зависимости от времени релаксации. Эксперименты показали, что предельное значение времени релаксации для данной геометрии, свойств материала и режима переработки составляет порядка 0.3 с. Дальнейшее увеличение  $\lambda$  приводит к нарушению устойчивости решения, что в физической интерпретации может выражаться в неконтролируемом распухании экструдата и невозможности корректной переработки материала. Уменьшение  $\lambda$  менее 0.1 с. практически не оказывает существенного влияния на величину распухания экструдата.



**Рис. 2.** (а) Изменение формы свободной поверхности для различных времен релаксации: 1 –  $\lambda=0.3$  с; 2 –  $\lambda=0.2$  с; 3 –  $\lambda=0.1$  с; (б) Изменение радиуса экструдата в зависимости от времени релаксации

#### 4. Заключение

В результате проведенных исследований была разработана модель процесса течения полимерной жидкости. Была показана зависимость геометрических размеров готового изделия от вязкоупругих свойств. Более глубокое изучение вязкоупругих свойств материалов позволит упростить процесс формирования качественного изделия.

#### Список литературы

1. Бачурина М. В., Казаков А. В., Труфанова Н. М. Математическое моделирование процесса стратифицированного течения расплавов полимеров в осесимметричной постановке // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2014. № 2. С. 102–124.
2. Снигерев Б. А., Алиев К. М., Тазюков Ф. Х. О форме выходящей струи при выдавливании вязкоупругой жидкости из плоского щелевого канала // Вестник Самарского гос. ун-та. 2009. Т. 6(72). С. 130–138.
3. Снигерев Б. А. Неизотермическое ползущее течение вязкоупругой жидкости со свободной поверхностью // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2010. Т. 1. С. 61–65.

## **Экспериментальное исследование восприимчивости пограничного слоя на скользящем крыле к вибрациям поверхности**

**В. И. Бородулин<sup>a</sup>, А. В. Иванов<sup>a</sup>, Ю. С. Качанов<sup>a</sup>, Д. А. Мищенко<sup>a</sup>,  
R. Örlü<sup>b</sup>, A. Hanifi<sup>b</sup>, S. Hein<sup>c</sup>**

<sup>a</sup> Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН  
630090, Новосибирск, ул. Институтская, 4/1

email: bo@itam.nsc.ru

<sup>b</sup> KTH Mechanics, SE-100 44 Stockholm, Sweden

<sup>c</sup> Institute of Aerodynamics and Flow Technology, DLR, 37073 Göttingen, Germany

В работе представлены первые результаты экспериментального исследования механизма восприимчивости пограничного слоя на модели скользящего крыла бесконечного размаха к локализованным вибрациям поверхности при порождении мод неустойчивости поперечного течения (CF), а также 3D волн Толлмина-Шлихтинга (TS). Исследования проведены в широком диапазоне частот и поперечных волновых чисел с использованием метода контролируемых нестационарных возмущений. Количественные характеристики исследуемых явлений – коэффициенты локализованной вибрационной восприимчивости при возбуждении мод CF и TS, впервые получены на реальном скользящем крыле.

**Ключевые слова:** трёхмерный пограничный слой; устойчивость; восприимчивость

## **Experimental study of boundary layer receptivity to surface vibrations on a swept wing**

**V. I. Borodulin<sup>a</sup>, A. V. Ivanov<sup>a</sup>, Yu. S. Kachanov<sup>a</sup>, D. A. Mischenko<sup>a</sup>,  
R. Örlü<sup>b</sup>, A. Hanifi<sup>b</sup>, S. Hein<sup>c</sup>**

<sup>a</sup> Khristianovich institute of theoretical and applied mechanics SB RAS, Institutskaya St. 4/1,  
630090, Novosibirsk

email: bo@itam.nsc.ru

<sup>b</sup> KTH Mechanics, SE-100 44 Stockholm, Sweden

<sup>c</sup> Institute of Aerodynamics and Flow Technology, DLR, 37073 Göttingen, Germany

The paper is devoted to the first results of an experimental investigation of boundary-layer receptivity mechanism to local surface vibrations on a model of an infinite-span swept wing at excitation of Cross-flow (CF) and Tollmien-Schlichting (TS) instability modes. Experiments were carried out in a broad range of frequencies and spanwise wavenumbers by means of method of controlled unsteady perturbations. Quantitative characteristics of the phenomenon under study – the coefficients

of localized vibrational receptivity at excitation of CF- and TS-modes are obtained for the first time on a real swept wing.

**Keywords:** three-dimensional boundary layer; instability; receptivity

## 1. Параметры проведенных экспериментов

В настоящей работе представлены первые результаты экспериментов, направленных на количественное исследование механизмов порождения двух типов мод неустойчивости, возникающих на скользящем крыле: (а) мод поперечного течения (CF, эксперимент А) и (б) мод Толлмина-Шлихтинга (TS, эксперимент В). Исследования проведены в пограничном слое на модели с ламинаризованным крыловым профилем (угол скольжения  $35^\circ$ , хорда 0,8 м), установленной в рабочей части малотурбулентной аэродинамической трубы МТЛ (КТИ, Стокгольм). Основные измерения выполнены термоанемометром в условиях возбуждения полностью контролируемых, нестационарных возмущений пограничного слоя специальным источником, установленным вблизи передней кромки модели. Источник представлял собой вибрирующую на заданной частоте  $f$  мембрану (диаметром 8 мм), которая приводилась в движение слабыми пульсациями давления. Указанные пульсации генерировались заглушенным динамиком (расположенным вне рабочей части трубы) и подводились в полость под мембраной гибкой пневмотрассой. Расположение мембраны примерно соответствовало окрестности нижних ветвей кривых нейтральной устойчивости для мод CF и TS.

В эксперименте А модель была установлена под углом атаки  $-5^\circ$ , в эксперименте В —  $+1,5^\circ$ . В условиях эксперимента А самыми быстрорастущими были моды CF, а моды TS подавлялись благоприятным градиентом давления. В эксперименте В моды CF быстро затухали, а моды TS нарастали в широком диапазоне параметров. Скорости набегающего потока в обоих экспериментах была около 10 м/с. Исследования проведены в диапазонах частот:  $f = 65 \div 140$  Гц (А) и  $f = 98 \div 255$  Гц (В). В каждом из частотных режимов форма колеблющейся мембраны была тщательно измерена. Согласно расчётам, возмущения в выбранных диапазонах частот должны были нарастать в некоторых диапазонах поперечных волновых чисел.

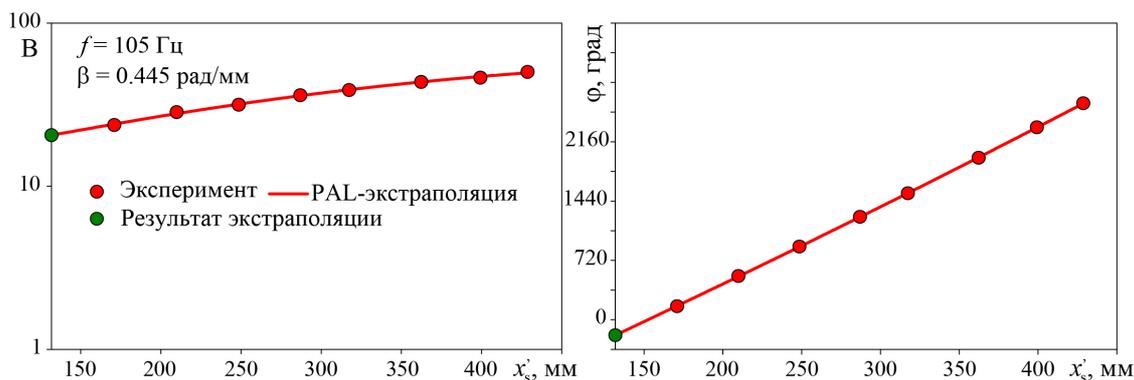
## 2. Основные результаты

В каждой серии проведенных экспериментов обнаружено эффективное порождение пакетов трехмерных волн неустойчивости. Характеристики их развития вниз по потоку были тщательно измерены для каждого частотного режима, как и характеристики основного потока. В том числе, получены пространственные поля амплитуд и фаз возмущений. Разложение исследованных волновых поездов на нормальные наклонные моды позволило получить кривые нарастания амплитуд и фаз, как CF-мод, так и мод TS в широком диапазоне поперечных волновых чисел. На (рис. 1.) представлен пример таких кривых, полученных в эксперименте А для одного из поперечных волновых чисел  $\beta$ . Значения амплитуд, фаз и продольных волновых чисел генерируемых мод в положении мембраны были получены экстраполяцией указанных кривых (из дальнего поля источника) процедурой PAL [1]. (Непосредственно над мембраной измерения провести было невозможно ввиду присутствия ближнего поля источника.) Эта процедура подразумевает аппроксимацию экспериментальных фаз и логарифмов амплитуд полиномами второй степени и экстраполяцию измеренных величин в положение источника прямыми с производными равными производным указанных полиномов в самой ближней к источнику экспериментальной точке. Как можно увидеть на (рис. 1.) кривые PAL хорошо аппроксимируют экспериментальные данные, а экстрапо-

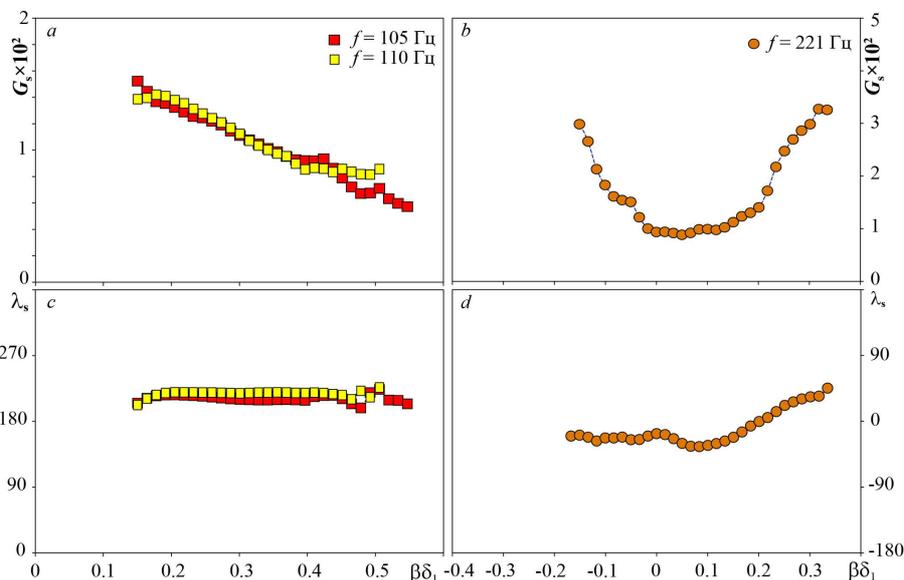
ляция выполнена не слишком далеко вверх по потоку. Эти обстоятельства указывают на достаточно высокую точность полученных при проведении PAL-процедуры данных.

Коэффициенты восприимчивости, как и в [1], были определены как отношение комплексных амплитуд волн неустойчивости в положении мембраны к резонансному спектру неоднородности поверхности. (Моды резонансного спектра неровности имеют те же частоты, поперечное и продольное волновые числа, что и генерируемые моды неустойчивости пограничного слоя в положении источника.) На (рис. 2.) приведены примеры амплитуд  $G_s$  и фаз  $\lambda_s$  коэффициентов восприимчивости при порождении мод CF (рис. 2a, c) и TS (рис. 2 b, d). Результаты приведены в зависимости от поперечных волновых чисел, нормированных на толщину вытеснения  $\delta_1$  (в положении мембраны).

Результаты прямых измерений характеристик восприимчивости течения при возбуждении мод CF и 3D мод TS на реальном скользящем крыле получены впервые.



**Рис. 1** Пример кривых нарастания амплитуд (a) и фаз (b) генерируемых CF-мод и PAL-экстраполяция данных на положение источника



**Рис. 2.** Амплитуды и фазы коэффициентов восприимчивости при порождении мод неустойчивости CF (a, c) и TS (b, d)

Работа поддержана грантом в рамках проекта RECEPT (АСРО-GA-2010-265094), 7-й рамочной программой ЕС.

### Список литературы

1. Crouch J.D., Kachanov Y.S., Gaponenko V.R. Swept-wing boundary-layer receptivity to surface nonuniformities // *J. Fluid Mech.* 2002. Vol. 461. P. 93–126.

## Распределенная вихревая восприимчивость в градиентном пограничном слое

В. И. Бородулин, А. В. Иванов, Ю. С. Качанов, Д. А. Мищенко,  
А. А. Феденкова

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН  
630090, Новосибирск, ул. Институтская, 4/1  
email: D.A.Mischenko@itam.nsc.ru

В работе представлены результаты экспериментального исследования эффективного порождения 3D волн Толлмина-Шлихтинга в пограничном слое механизмами распределенной вихревой восприимчивости. Эксперименты проведены в условиях неблагоприятного градиента давления (параметр Хартри  $\beta_H = -0.115$ ) с использованием полностью контролируемых возмущений: вихрей набегающего потока и 2D неоднородностей стенки. Обнаружено, что исследуемые механизмы способны существенно изменять характер развития волн неустойчивости по сравнению тем, что даёт механизм линейной неустойчивости пограничного слоя. Получены количественные характеристики исследуемого явления – коэффициенты распределенной восприимчивости двух типов: вихревой и вихрь-неровность. Обнаружено, что неблагоприятный градиент давления приводит к ослаблению механизма восприимчивости типа вихрь-неровность.

**Ключевые слова:** Пограничный слой; волны Толлмина-Шлихтинга; распределённая вихревая восприимчивость.

## Distributed vortex receptivity in gradient boundary layer

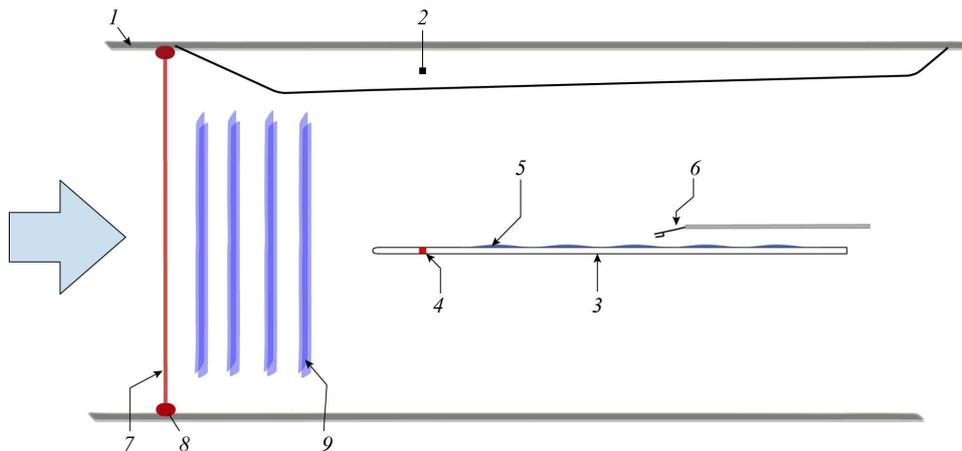
V. I. Borodulin, A. V. Ivanov, Yu. S. Kachanov, D. A. Mischenko,  
A. A. Fedenkova

Khristianovich institute of theoretical and applied mechanics SB RAS,  
Institutskaya St. 4/1, 630090, Novosibirsk  
email: D.A.Mischenko@itam.nsc.ru

The paper presents the results of an experimental study of effective excitation of the 3D Tollmien-Schlichting waves in a boundary layer by mechanisms of distributed vortex receptivity. The experiments are carried out in presence of adverse pressure gradient (Hartree parameter  $\beta_H = -0.115$ ) using fully-controlled disturbances: (i) freestream vortices and (ii) 2D surface nonuniformities. The mechanisms under study are found to be able to modify significantly streamwise evolution of instability waves compared to that providing by the linear boundary-layer instability mechanism. Quantitative characteristics of the phenomenon under study are obtained – two kinds of the distributed receptivity coefficients: vortex ones and vortex/roughness ones. The adverse pressure gradient is found to lead to weakening of the vortex/roughness receptivity mechanism.

**Keywords:** Boundary layer; Tollmien-Schlichting waves; distributed vortex receptivity

## 1. Экспериментальная модель и условия экспериментов



**Рис. 1.** Экспериментальная модель. 1 – стенка рабочей части трубы, 2 – ложная стенка, 3 – пластина, 4 – точечный источник волн ТШ, 5 – 2D-неровность поверхности, 6 – датчик термоанемометра, 7 – вибрирующая проволочка, 8 – шаговые двигатели, 9 – вихри в основном потоке.

Эксперименты выполнены в малотурбулентной аэродинамической трубе Т-324 ИТПМ СО РАН в пограничном слое на модели плоской пластины (рис. 1). Форма ложной стенки 2 обеспечивала в области основных измерений реализацию автомодельного течения с неблагоприятным продольным градиентом давления (НГД, параметр Хартри  $\beta_H = -0.115$ ). Скорость потенциального потока  $U_e$  над пограничным слоем изменялась с 8,88 до 8,61 м/с. Контролируемые вихри в свободном потоке генерировались вибрирующей проволочкой 7. 2D-неоднородности поверхности модели (синусоидальной формы с длиной волны  $\lambda_{sx}$  и амплитудой  $h_s \sim 200$  мкм) моделировались специальными накладками, изготовленными по оригинально высокоточной технологии. Эксперименты проведены в нескольких режимах, в части которых параметры задачи (частота возмущений основного потока  $f$  и  $\lambda_{sx}$ ) были подобраны таким образом, чтобы для определённых значений угла наклона к потоку  $\theta$  возбуждаемых волн Толлмина-Шлихтинга (ТШ) обеспечить выполнение условия резонанса продольных волновых чисел порождаемых мод ТШ, вихрей набегающего потока и неоднородностей поверхности [1].

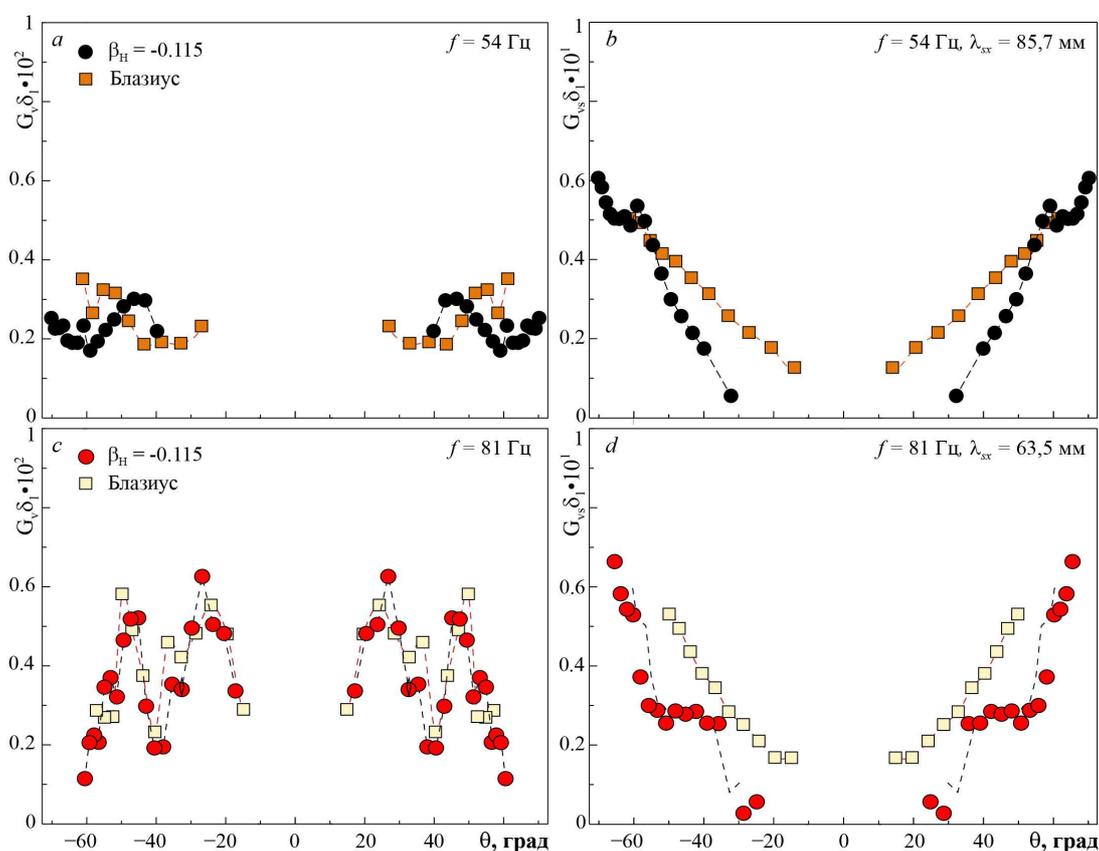
Характеристики линейного развития волн ТШ были измерены для каждого из исследованных режимов в дополнительной серии экспериментов, в которых волновые поезда волн ТШ порождались точечным источником возмущений 4. Дополнительные эксперименты проведены в отсутствии контролируемых возмущений в основном потоке (вибрирующая проволочка 7 была выключена). Эти характеристики были необходимы для количественного исследования механизмов распределенного порождения указанных мод неустойчивости и оценки величин амплитуд и фаз коэффициентов распределенной вихревой восприимчивости течения.

## 2. Основные результаты

Обнаружено, что исследуемые механизмы восприимчивости (вихревой и типа вихрь-неровность) могут приводить к заметно более быстрому нарастанию амплитуд волн ТШ по сравнению с законами линейной устойчивости течения. Сложная математически некорректная задача нахождения коэффициентов распределенной восприим-

чивости [1] была решена путем аппроксимации экспериментальных продольных распределений амплитуд и фаз возмущений пограничного слоя аналитическими решениями соответствующего эволюционного дифференциального уравнения с неизвестными коэффициентами.

Полученные результаты напрямую сопоставлены с данными работы [1], полученными для пограничного слоя Блазиуса. Обнаружено, что амплитуды комплексных коэффициентов вихревой восприимчивости на гладкой поверхности ( $G_v$ ) весьма консервативны и слабо зависят от градиента давления (рис. 2 *a, c*). Найдено, что амплитуды коэффициентов на неровной поверхности ( $G_{vs}$ ), наоборот, весьма чувствительны к указанному градиенту. Его присутствие приводит к их заметному уменьшению (рис. 2 *b, d*). Эффективность механизма восприимчивости вихрь-неровность растёт с увеличением угла наклона волны ТШ к потоку  $\theta$ . Обнаружено, что при амплитудах неровности  $h_s/\delta_1$  менее  $\sim 4\%$  ( $\delta_1$  – толщина вытеснения), величины  $G_v$  в среднем больше, чем  $G_{vs}$ , т.е. механизм восприимчивости связанный с рассеянием вихрей на естественной неоднородности пограничного слоя доминирует, а при более высоких неровностях начинает преобладать механизм восприимчивости типа вихрь-неровность.



**Рис. 2.** Амплитуды коэффициентов вихревой восприимчивости (*a, c*) и восприимчивости вихрь-неровность (*b, d*) в пограничном слое с НГД ( $\beta_H = -0.115$ ) и Блазиуса.

Работа поддержана РФФИ (грант №15-08-07818)

### Список литературы

1. Borodulin V.I., Ivanov A.V., Kachanov Y.S., Fedenkova A.A. Three-dimensional distributed receptivity of a boundary layer to unsteady vortex disturbances // XIII International Conference on Methods of Aerophysical Research. Proceedings. Part III. – Novosibirsk: Publ. House “Parallel”, 2007, p. 45–50.

## **Численное моделирование термокапиллярной конвекции при наличии нерастворимого сурфактанта**

**Д. А. Брацун<sup>а</sup>, В. А. Демин<sup>б</sup>, А. И. Мизев<sup>с</sup>, М. И. Петухов<sup>б</sup>,  
А. В. Шмыров<sup>с</sup>**

<sup>а</sup> Пермский национальный исследовательский политехнический университет, 614990, Пермь, Комсомольский проспект, 29

<sup>б</sup> Пермский государственный национальный исследовательский университет, 614990, Пермь, ул. Букирева, 15

email: demin@psu.ru

<sup>с</sup> Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1

Работа посвящена численному решению системы уравнений термокапиллярной конвекции и описывает поведение нерастворимого сурфактанта на свободной поверхности жидкости в ячейке Хеле – Шоу. Вдоль свободной поверхности задавалось распределение температуры, соответствующее линейному теплотоклу, что вызывало неоднородность касательных напряжений и приводило к генерации течения в объеме. В ходе численного моделирования были учтены как термокапиллярный, так и концентрационно-капиллярный механизмы. Установлено, что при значениях параметра эластичности в интервале от нуля до единицы на поверхности формируются две различные области – свободная от сурфактанта и застойная, покрытая пленкой. На свободной поверхности имеет место сильный термокапиллярный эффект, который способствует развитию конвекции. Застойная область характерна большим перепадом концентрации сурфактанта, который тормозит развитое течение. В результате на поверхности образуется точка застоя, положение которой в зависимости от значения параметра эластичности было изучено в данной работе.

**Ключевые слова:** концентрационная конвекция; свободная поверхность; эффект Марангони

## **Numerical simulation of thermocapillary convection in the presence of insoluble surfactant**

**D. A. Bratsun<sup>а</sup>, V. A. Demin<sup>б</sup>, A. I. Mizev<sup>с</sup>, M. I. Petukhov<sup>б</sup>,  
A. V. Shmyrov<sup>с</sup>**

<sup>а</sup> Perm National Research Polytechnic University, Komsomolsky prospect, 15, 614990, Perm

<sup>б</sup> Perm State National Research University, Bukireva St. 15, 614990, Perm

email: demin@psu.ru

<sup>с</sup> Institute of Continuous Media Mechanics of the Ural Branch of Russian Academy of Science, Academician Korolev St. 1, 614013, Perm

This paper is devoted to investigation of thermocapillary convection in the Hele – Shaw cell. The equations system of interfacial hydrodynamics has been solved numerically. The behaviour of insoluble surfactant on the free surface of the liquid is described. The temperature distribution corresponding to linear heat flux has been imposed along the free boundary. Thermal effect is resulted to the non-uniformity of tangential stresses and generation of convective flow in the volume. Thermocapillary and concentration-capillary mechanisms have been taken into account in numerical simulation. It has been found that at values of elasticity number from zero to the unit, two different regions on the surface are formed. There are intervals without surfactant and covered by the quasi-solid film. As a result, there is a specific stagnant point on the surface, which position has been determined in dependence on value of elasticity number.

**Keywords:** concentration-induced convection; free surface; Marangoni effect

## 1. Введение

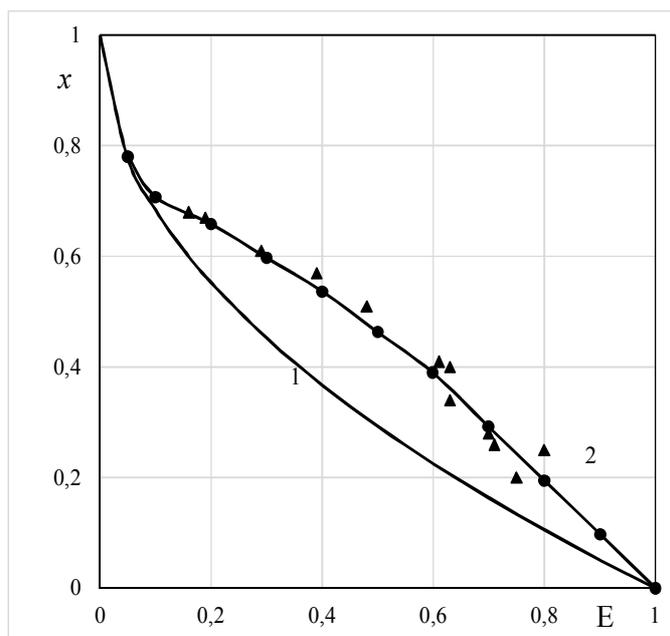
Образование квази-твердой пленки на свободной поверхности в замкнутой полости было изучено в теоретических работах [1,2]. Однако, чтобы получить аналитическое решение, в них делалось множество упрощений. В частности, в отмеченных работах рассматривалась полость с нагревом со стороны одной из вертикальных граней, но при этом распределение температуры вдоль всей полости считалось линейным. В работе [3] данная задача была исследована экспериментально. Как выяснилось, получить такое распределение температуры достаточно сложно, поэтому был использован неоднородный нагрев сверху так, чтобы создать линейное распределение на свободной поверхности. Вероятно, данное изменение привело к существенным отличиям в результатах, так как положение точки застоя в зависимости от параметра эластичности не совпадало с теоретическими предсказаниями (рис. 1). В данной работе приводится численное моделирование поведения нерастворимого сурфактанта на свободной поверхности жидкости в ячейке Хеле – Шоу при наличии неоднородного нагрева сверху с целью согласовать теорию и эксперимент.

## 2. Постановка задачи и результаты расчетов

Численное моделирование основывалось на классических уравнениях термокапиллярной конвекции [1,2]. Рабочая жидкость находилась в ячейке Хеле – Шоу со свободной горизонтальной поверхностью, на которой присутствовал нерастворимый сурфактант. В отсутствие градиента температуры на всей свободной поверхности образуется пленка. По мере увеличения разности температур пленка смещается, создавая, таким образом, участок со свободной поверхностью. Одним из ключевых параметров, характеризующих положение точки, разделяющей свободную поверхность и пленку, является параметр эластичности  $E = \Gamma_0 \sigma_T / \theta \sigma_T$ , который по существу равен отношению концентрационного числа Марангони к тепловому. Здесь  $\Gamma_0$  – величина насыщения сурфактанта в газовом состоянии,  $\theta$  – характерная разность температур,  $\sigma_T$ ,  $\sigma_T$  – коэффициенты концентрационной и температурной неоднородности поверхностного натяжения, соответственно.

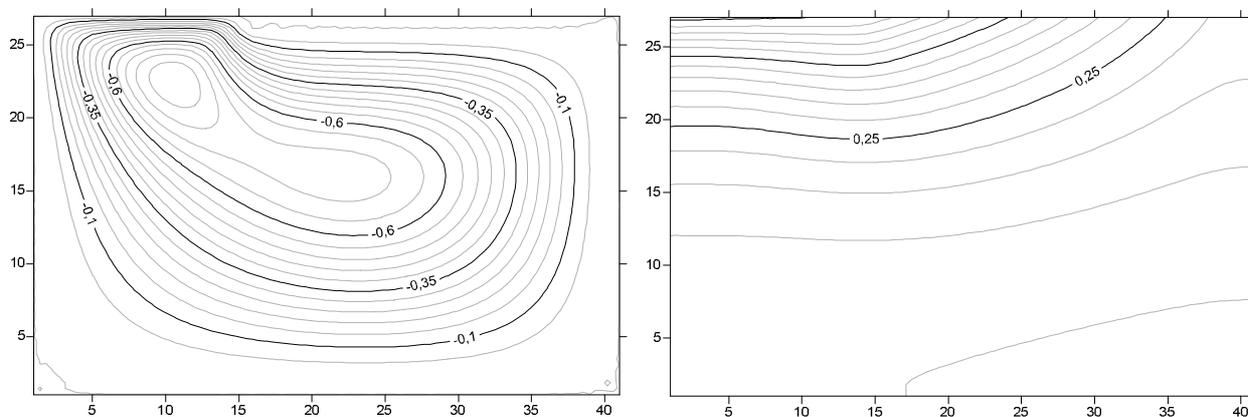
Задача решалась методом конечных разностей с помощью двухполюсного метода посредством программы, написанной на языке Fortran-90. По результатам решения уравнений было установлено, что изменение температурных граничных условий сильно сказывается на положении точки застоя. Результирующая кривая, определяющая положение точки застоя в зависимости от параметра эластичности хорошо повторяет экспериментальные данные (рис. 1).

В области  $0 < E < 1$  на поверхности образуются 2 участка: свободный участок и участок, закрытый пленкой. Уменьшение параметра эластичности усиливает термокапиллярный эффект и генерирует течение с большей интенсивностью, что, в свою очередь, сильнее сдвигает пленку в противоположный конец полости. В ходе расчетов было учтено изменение состояния сурфактанта (газовое и жидкорасширенное) посредством введения функции Хевисайда в граничное условие на касательные напряжения. Характерное отклонение от линейной зависимости при больших  $E$  вызвано переходом сурфактанта в жидкорасширенное состояние. Полученные в результате расчетов поля функции тока и температуры согласуются с экспериментом [3] (рис. 1,2).



**Рис. 1.** Зависимости размера окна от параметра эластичности, полученные разными методами. 1 – аналитический расчет Хомси; 2 – приближение Хеле – Шоу для фиксированного линейного теплопотока на поверхности; треугольники – экспериментальные данные.

Работа поддержана РФФИ, грант № 16-01-00662 а.



**Рис. 2.** Поле функции тока и температуры при  $E = 0.6$

### Список литературы

1. *Homsy G.M., Meiburg E.* The effect of surface contamination on thermocapillary flow in a two-dimensional slot // *J. Fluid Mech.* 1984. Vol. 139. P. 443–459.
2. *Carpenter Bradley, Homsy G.M.* The effect of surface contamination on thermocapillary flow in a two-dimensional slot. Part 2. Partially contaminated interfaces // *J. Fluid Mech.* 1986. Vol. 155. P. 429–439.
3. *Мизев А.И., Шмыров А.В.* Взаимодействие термокапиллярного течения с поверхностной фазой в ячейке Хеле – Шоу // *Сб. науч. трудов «Конвективные течения», Вып. 7.* Пермь: ПГГПУ, 2015. С. 37–60.

## **Об эффективности активного управления конвекцией в термосифоне при запаздывании контроллера**

Д. А. Брацун<sup>а</sup>, А. В. Зюзгин<sup>б</sup>, И. В. Красняков<sup>а</sup>

<sup>а</sup> Пермский национальный исследовательский политехнический университет 614990, Пермь, ул. Комсомольский проспект, 29  
email: krasnyakov\_ivan@mail.ru

<sup>б</sup> Пермский государственный национальный исследовательский университет 614990, Пермь, ул. Букирева, 15

В работе теоретически и экспериментально рассматривается задача об автоматическом управлении движением жидкости в подогреваемой снизу прямоугольной конвективной петле с помощью подсистемы, которая меняет режимы конвекции посредством малых изменений ориентации петли в пространстве. Мы акцентируем внимание на эффекте запаздывания, который возникает в обратной связи при генерировании команды контроллера. Для этого к естественному запаздыванию в работе контроллера, которое имеет гидродинамическую природу, искусственно вводилась задержка. Разработана математическая модель явления. Изучены динамические режимы работы управляемого термосифона. Приводится сравнение с экспериментальными данными, полученными для додекана и трансформаторного масла. Показано, что чрезмерное усиление обратной связи может возбуждать в системе как периодические, так и хаотические режимы конвекции.

**Ключевые слова:** тепловая конвекция; активное управление; запаздывание

## **On the efficiency of active control of convection in a thermosyphon with time-delay controller**

D. A. Bratsun<sup>а</sup>, A. V. Zyuzgin<sup>б</sup>, I. V. Krasnyakov<sup>а</sup>

<sup>а</sup> Perm National Research Polytechnic University, Komsomolsky prospect 29, 614990, Perm  
email: krasnyakov\_ivan@mail.ru

<sup>б</sup> Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm

The problem of active automatic control of the fluid flow in a rectangular convective loop heated from below is studied theoretically and experimentally. The control is performed by using a feedback subsystem which changes the convection regimes by introducing small discrete changes in the spatial orientation of the loop with respect to gravity. We focus on effects that arise when the feedback controller operates with time delays. In order to tune the retardation time, a delay was artificially introduced to the natural lag in the operation of the controller, which is hydrodynamic in nature. The mathematical model of the phenomenon is developed. The dynamic regimes in the work of the thermosyphon under control are studied. The comparison of the experimental data obtained for

dodecane and transformer oil with theory is given. It is shown that excessive gain of feedback can excite both periodic and chaotic convection modes in the system.

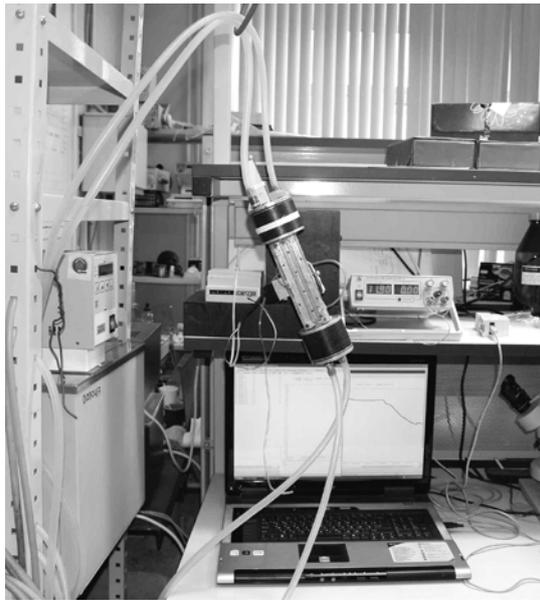
**Keywords:** thermal convection; active control; time-delay

Вопросы управления процессами тепломассопереноса вызывают значительный интерес, как с фундаментальной точки зрения, так и в связи с многочисленными технологическими приложениями. Особенно актуальна задача об активном управлении с обратной связью, когда управление осуществляется в автоматическом режиме по определенному закону. Задача об автоматическом поддержании механического квазиравновесия неоднородно нагретой жидкости в прямоугольной петле с запаздыванием была рассмотрена теоретически и экспериментально в [1]. В отличие от множества работ зарубежных и российских авторов в качестве объекта управления был рассмотрен термосифон (замкнутая конвективная система с одномерным течением жидкости) прямоугольной формы. Было показано, что в этом случае можно добиться уверенной стабилизации механического равновесия жидкости в широком диапазоне управляющих параметров даже для линейного закона управления. Было обнаружено также, что чрезмерное усиление обратной связи возбуждает в системе колебания, которые имеют гидродинамическую природу. Оказалось, что эти колебания вызываются запаздыванием управляющей подсистемы вовремя вносить коррекцию в состояние управляемой системы [1]. Таким образом, как оказалось, мы сталкиваемся здесь с типичной системой, имеющей отрицательную обратную связь с запаздыванием. Подробное обоснование математической модели было выполнено в работе [2]. В работах [3,4] был изучен вопрос о влиянии шума на качество управления. Наиболее интересный результат был обнаружен в подкритической области. Оказалось, что при совместном действии шума и запаздывания при числах Рэлея ниже критического могут возбуждаться квазирегулярные колебания. Таким образом, эффект, впервые обнаруженный в системах с геной регуляцией в клетках [5], был продемонстрирован в механической системе со сравнительно большим числом степеней свободы. Это подтверждает фундаментальный характер обнаруженного в [5] эффекта.

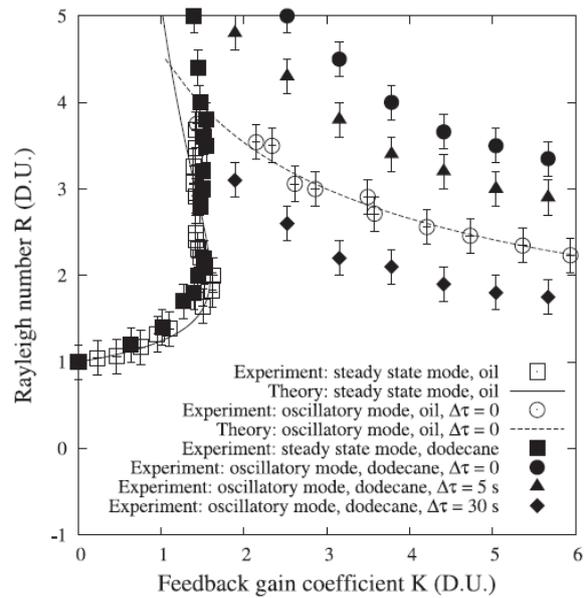
Данная работа посвящена экспериментальному и теоретическому исследованию влияния запаздывания на эффективность управления. Для подробного изучения эффекта в ходе экспериментов к естественному значению запаздывания системы, обнаруженному ранее, искусственно производилась добавка, при изменении которой было возможно изучать устойчивость системы в широком диапазоне значений управляющих параметров и величины запаздывания.

Общий вид экспериментальной установки и её описание представлены на (рис. 1. а). Карта устойчивости для различных режимов конвекции, полученная для трансформаторного масла и додекана представлена на (рис. 1. б).

В настоящей работе построена маломодовая динамическая модель явления и теоретически рассмотрены динамические свойства модели далеко от точки первой бифуркации. Изучение её свойств показало, что из-за запаздывания контроллер вступает в сложное нелинейное взаимодействие с управляемой конвективной системой. Это взаимодействие в зависимости от значений управляющих параметров (числа Рэлея и коэффициента управления) может привести к стационарному, периодическому или даже хаотическому поведению. Построены фазовые портреты, выявлены основные бифуркации в системе. Поставлен вопрос об организации интеллектуального управления, которое бы выполняло функции предиктора, снижало величину запаздывания и повышало бы качество управления. Проводится сравнение с данными эксперимента. Для нейтральных кривых первых бифуркаций обнаружено хорошее согласие с экспериментальными данными (рис. 1. б).



(а)



(б)

**Рис. 1.** Общий вид экспериментальной установки (а) и основная карта устойчивости, суммирующая данные для трансформаторного масла и додекана (б), а также теоретические кривые, вычисленные для масла. На фотографии представлена сама конвективная петля в определенной фазе движения под углом к полю тяжести, а также контроллер, состоящий из компьютера, соединенного с термосифоном через вольтметр и термопару, и шаговый двигатель, осуществляющий поворот петли. Сплошная и пунктирная линии на графике обозначают монотонную и колебательную моду соответственно. Величина  $\Delta\tau$  определяет искусственную добавку к временной задержке контроллера вносить изменения в поведение управляемой системы.

Данная работа была выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект № 3.6990.2017/Бч).

### Список литературы

1. Брацун Д.А., Зюзгин А.В., Половинкин К.В., Путин Г.Ф. Об активном управлении равновесием жидкости в термосифоне // Письма в Журн. техн. физ. – 2008. – Т. 34. – Вып. 15. – С. 36–42.
2. Брацун Д.А., Красняков И.В. Математическая модель активного управления конвекцией в термосифоне с запаздыванием по времени // Вест. Перм. гос. гум. - пед. ун-та. Сер. №2: Физико-математические и естественные науки. 2014. – Вып. 2. – С.28-53.
3. Брацун Д.А., Зюзгин А.В. Эффект возбуждения подкритических колебаний в стохастических системах с запаздыванием. Часть II. Управление равновесием жидкости // Компьютерные исследования и моделирование. – 2012. – Т. 4. – № 2. – С. 375-396.
4. Bratsun D., Krasnyakov I., Zyuzgin A. Delay-induced oscillations in a thermal convection loop under negative feedback control with noise // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. – 2017. – Vol. 47. – P. 109-126.
5. Bratsun D., Volfson D., Hasty J., Tsimring L.S. Delay-induced stochastic oscillations in gene regulation // Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. – 2005. – Vol. 102. – P. 14593-14598.

## **Исследование изменения свойств эпоксидной смолы, модифицированной фуллеренами C<sub>60</sub>**

**М. М. Бузмакова, В. Г. Гилев, А. Ф. Мерзляков, С. В. Русаков**

Пермский государственный национальный исследовательский университет  
614990, Пермь, ул. Букирева, 15  
email: mariya\_nazarova@mail.ru

Проведено исследование механических свойств образцов эпоксидной смолы допированных фуллеренами C<sub>60</sub> в диапазоне массовых концентраций от 0.02% до 1%. Исследование проводилось методами компьютерного моделирования и натурального эксперимента. Предложена перколяционная модель модификации эпоксидной смолы фуллеренами, с помощью которой найдено значение критической концентрации фуллеренов в эпоксидной смоле, соответствующей порогу перколяции. Выполнен натуральный эксперимент по измерению модуля Юнга эпоксидной смолы, модифицированной фуллеренами. Проведено сравнение результатов компьютерного моделирования и натурального эксперимента. Выявлена немонотонная зависимость модуля Юнга от концентрации фуллеренов с максимумом при 0.153 масс.%. Показано, что на пороге перколяции изменение механических свойств материала также имеет пороговый характер.

**Ключевые слова:** нанокompозит; эпоксидная смола; фуллерен; математическое моделирование

## **The research of the properties' change of the epoxy, modified by fullerenes C<sub>60</sub>**

**M. M. Buzmakova, V. G. Gilev, A. F. Merzlyakov, S. V. Rusakov**

Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm  
email: mariya\_nazarova@mail.ru

The research of the properties' change of the epoxy by the addition of various values of the C<sub>60</sub> fullerenes in the range of mass concentration from 0.02% to 1% has been conducted. The research has been conducted by the methods of the computer modeling and the natural experiment. The percolation model of the epoxy, modified by fullerenes C<sub>60</sub> is proposed. The result of computer modeling is the value of the fullerenes' critical concentration in the epoxy, at which the material changes the properties. The critical concentration corresponds to the percolation threshold. The natural experiment on the measurement of the Jung' module of the epoxy, modified by fullerenes is executed. The comparison of the results of the computer modeling and the natural experiment has been conducted. The nonmonotonic dependence of the Jung' module of the fullerenes concentration with the maximum at 0.153 % masses is revealed. It is shown, that the properties' change of the material also has the threshold character on the percolation threshold.

**Keywords:** nanocomposite; epoxy; fullerene; mathematical modeling

## 1. Введение

Решение многих сложных и практически важных задач базируется на использовании специфических свойств полимеров. В литературе широко представлены исследования физико-химических, оптических и электрических свойств ряда синтетических материалов, допированных фуллеренами (см. например, [1]). Показано, что при модификации полимерных матриц нанокуглеродными частицами (фуллерен, нанотрубки) материал приобретает новые или улучшает существующие свойства. В тоже время анализ литературных данных указывает на неоднозначность влияния нанонаполнителя на характеристики таких материалов. Существует большой разброс в экспериментальных данных по изучению структуры и свойств нанокмозитов. Особенно это касается области малых концентраций наномодификатора. В настоящей работе предложена модель модификации эпоксидной смолы фуллеренами и исследовано изменение модуля Юнга в зависимости от концентрации фуллеренов в отверженных образцах эпоксидной смолы.

## 2. Постановка задачи и методы исследования

### 2.1. Моделирование

Компьютерное моделирование проводилось методами Монте-Карло с использованием теории перколяции и фракталов, теории вероятности и математической статистики. Для генерации случайных чисел использовался алгоритм «вихрь Мерсенна», который обладает большим периодом [2]. Для равномерного распределения частиц в среде был использован эффективный алгоритм, разработанный авторами [3].

Перколяционная модель эпоксидной смолы, модифицированной фуллеренами, представлена трехмерной системой (куб с линейным размером  $L$ ) – полимерной матрицей, в которой равномерно диспергированы сферы радиусом  $r = 0.357$  нм – фуллерены, межфазные области представлены проницаемыми оболочками сфер, которые могут пересекаться и образовывать кластеры. Взаимодействие между фуллеренами характеризуется силами Ван-дер-Ваальса. Два фуллерена слипаются, если расстояние между ними становится равным длине связи С–С (0.154 нм). Если расстояние больше, то вероятность образования сферолита из межфазных областей (кластера из проницаемых оболочек сфер) пропорциональна Ван-дер-Ваальсовому взаимодействию  $p_{bond} = U/U_{max}$ , где  $U_{max}$  – потенциал при расстоянии между фуллеренами, равным 0.154 нм. Величина межфазных областей (толщина проницаемой оболочки) характеризуется способностью атома углерода фуллерена связаться с атомом азота эпоксидной смолы. При этом образуется простая связь С–N длиной 0.147 нм, что соответствует минимальному значению толщины межфазного слоя. Порог перколяции соответствует значению критической концентрации фуллеренов в полимере, при котором наноматериал приобретает или улучшает свои свойства.

### 2.2. Детали натурального эксперимента

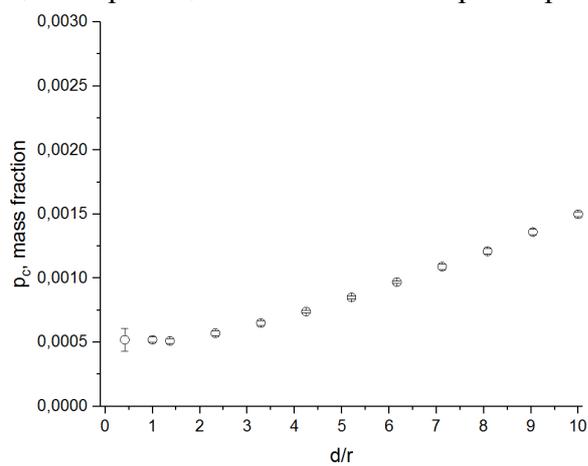
В работе использовалась эпоксидная смола L с отвердителем EPH 161 (соотношения смешивания в весовых частях 4:1). В качестве наполнителя использовались фуллерены C60 (98+) производства ООО НПК «Современные технологии синтеза».

При изготовлении образцов для исследования, навеску смолы с наполнителем замешивали с помощью электромеханического смесителя. Далее смесь диспергировалась в ультразвуковой ванне до достижения равномерного распределения модификатора в жидкой смоле. После чего добавлялся отвердитель. Полученная смесь тщательно

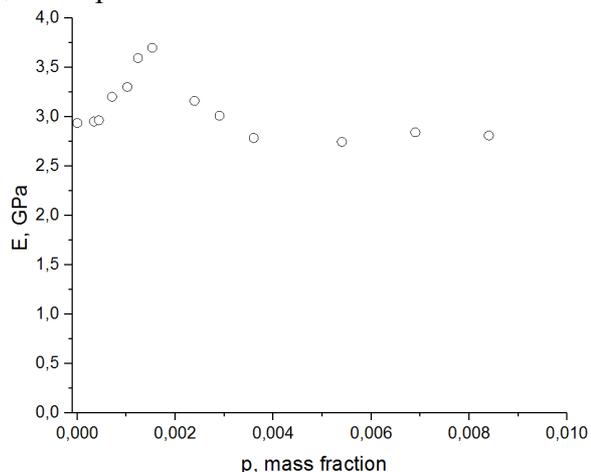
смешивалась электромеханическим смесителем и дополнительно в ультразвуковой ванне. Состав заливался в прямоугольную форму, где отверждался. Образцы для исследования имели размеры 90\*40\* 1 мм. Измерения массы смолы, отвердителя и фуллеренов, необходимые для расчета концентрации смеси, выполнялись с помощью аналитических весов ЛВ-210А. Модуль Юнга измерялся с помощью универсальной испытательной машины ZWIC Z-250 с использованием датчиков измерения деформации.

### 3. Результаты и их обсуждение

Результаты компьютерного моделирования для  $L = 50$  и различных значений толщины проницаемой оболочки показаны на рис. 1. Видно, что при увеличении толщины проницаемой оболочки порог перколяции возрастает.



**Рис. 1.** Значения порога перколяции в зависимости от отношения толщины межфазного слоя к радиусу фуллера



**Рис. 2.** Изменение модуля Юнга в зависимости от концентрации фуллеренов

Результаты измерения модуля Юнга при различных значениях концентрации фуллеренов в эпоксидной смоле представлены на (рис. 2). Видно, что при увеличении концентрации наполнителя модуль Юнга возрастает и достигает своего максимального значения при 0.153 масс.% фуллеренов. Значение порога перколяции, равное концентрации фуллеренов в смоле с максимальным значением модуля Юнга, соответствует отношению межфазного слоя к радиусу фуллера, равному 10 (то есть толщина межфазного слоя на порядок больше радиуса наночастицы). Можно сделать вывод, что межфазные области в наноматериале имеют величины между нано- и микро размерами. Дальнейшее увеличение концентрации фуллеренов приводит к уменьшению модуля Юнга практически до его значения чистой смолы.

### 4. Заключение

Проведено исследование изменения механических свойств эпоксидной смолы, модифицированной фуллеренами. Получены значения критической концентрации фуллеренов, при которой наноматериал приобретает улучшенные свойства. Экспериментально показано, что существует оптимальная концентрация фуллеренов в эпоксидной смоле, при которой происходит существенное возрастание модуля Юнга. Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 16-31-00064, № 15-0107946)

### Список литературы

1. *Гуняев Г. М., Каблов Е. Н., Алексакин В. М.* Модифицирование конструкционных углеродных наночастиц // Российский химический журнал. – 2010. – №1. – 15с. – URL: [www.viam.ru/public](http://www.viam.ru/public)
2. *Matsumoto M.* Mersenne twister: A 623-dimensionally equidistributed uniform pseudorandom number generator // ACM Trans. on Modeling and Computer Simulations. – 1998. – Vol. 8. – P. 3-30.
3. *Бузмакова М.М., Русаков С.В.* Алгоритмы диспергирования частиц в неупорядоченной среде // Фундаментальные исследования. – 2016. – № 7-2. – С. 213-217.

## **Влияние нагрева на изменение веса тел различной симметрии в вязкой жидкости**

**Л. Н. Буркова, А. Н. Кондрашов, К. А. Рыбкин, И. О. Сбоев**

Пермский государственный национальный исследовательский университет  
614990, Пермь, ул. Букирева, 15

email: lyubashaburkova@gmail.com, akon.psu@yandex.ru, k.rybkin@gmail.com,  
ivan-sboev@yandex.ru

В работе экспериментально изучается влияние формы, нагретого тела, на изменение его веса в жидкости. Эксперименты проводились с конусом и шаром одинакового объема, изготовленных из сплава Розе, внутрь которых был помещен резистор. Подвешенные на весах тела, помещались в воду или глицерин, и нагревались при помощи источника питания постоянной мощности. Локализованный источник тепла создавал в слое жидкости градиент давления, вследствие чего, на него начинала действовать дополнительная выталкивающая сила, в этом случае, его вес уменьшался. Замечено, что изменение веса наиболее выражено для конуса, что объясняется различием возникающих конвективных течений.

**Ключевые слова:** нагрев; изменение веса; тепловая конвекция

## **Weight loss on heating of the bodies with different symmetry**

**L. N. Burkova, A. N. Kondrashov, K. A. Rybkin, I. O. Sboev**

Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm

email: lyubashaburkova@gmail.com, akon.psu@yandex.ru, k.rybkin@gmail.com,  
ivan-sboev@yandex.ru

The impact of the shape of a heated body is on the change in its weight in a liquid was experimentally studied. Experiments were carried out with the cone and the sphere of the same volume, made of Rose alloy, with electrical heater inside. Body, hanged on the scale, was placed in water or glycerin, and was heated with a constant current source. The pressure gradient of surrounding fluid layer was made by fluid convective motion. So, buoyancy force acting on the body was changed and its weight decreased. It is noted that the weight change is more pronounced for the cone, than the sphere. Main differences are in the convection patterns form, dependent on body shape

**Keywords:** heating; change of weight; thermal convection

### **1. Введение**

Как показывает обзор литературы, на сегодняшний день, интерес к проблеме тепловой конвекции в замкнутых полостях под действием локализованных источников тепла не угасает [1 – 2]. Направление основных исследований долгое время определялось необходимостью решения проблемы эффективности систем охлаждения, поэтому

подавляющее большинство работ, уже нескольких десятилетий, направлены на исследование зависимости интенсивности теплоотдачи от граничных условий, а также от геометрических размеров рабочей полости. Наибольший интерес вызывают результаты работы ученых из Массачусетского технологического института [3]. Ими было обнаружено, что в тех случаях, когда локализованный источник тепла создает в слое жидкости градиент давления, на него начинает действовать дополнительная выталкивающая сила. При этом в описанной задаче рассматривалось поведение в жидкости нагретых частиц небольшого размера. Так, для обеспечения локализованного подогрева производилось направленное воздействие лазерного излучения на частицу, в результате чего температура объекта увеличивалась. Используемая экспериментальная установка позволяла регистрировать смещение частицы в жидкости по изменению электрического поля в этой области. Таким образом, возникновение кулоновских сил обусловлено смещением микрочастицы или изменением веса частицы в жидкости. Эксперимент проходил с легкими частицами размера 100 – 250 мкм. Как показал обзор литературы, всплытие макроскопических тел, вследствие, появления конвективных течений не рассматривалось. По этой причине, целью данной работы является изучение влияния нагрева на поведение тела в жидкости.

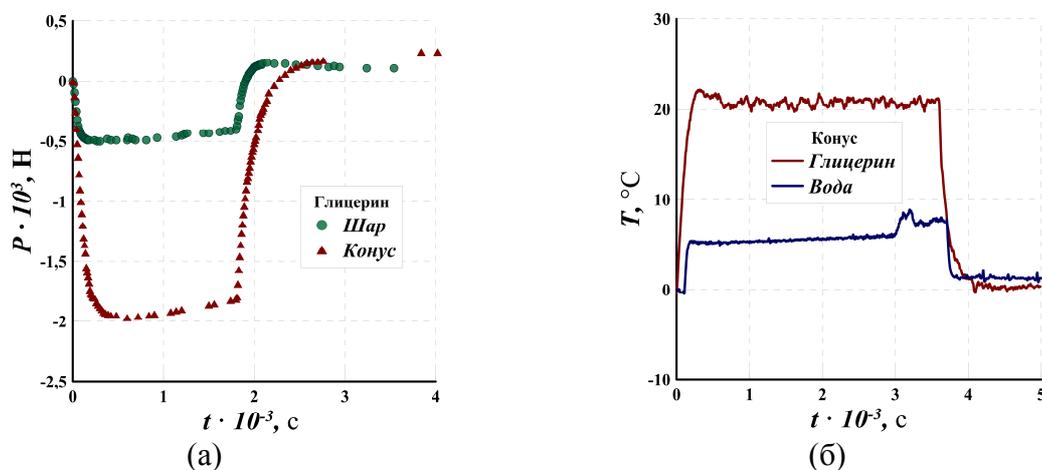
## 2. Экспериментальная установка и методика

В данной работе использовалась экспериментальная установка, которая состояла из следующих предметов: экспериментальный объект, стеклянная кювета, весы с дискретностью 0.01 грамма, дифференциальная термопара, микровольтметр, источник питания, лазер мощностью 0.4 Вт, компьютер и фотоаппарат. В качестве экспериментальных объектов были выбраны шар и конус, изготовленные из сплава Розе, внутрь которых был помещен резистор с сопротивлением 100 Ом.

Подвешенные на весах, тела устанавливались в центр кюветы. На данном этапе работы, для сравнения, использовались две жидкости - вода и глицерин. При проведении эксперимента, на резистор подавалось напряжение 30 В, ток при этом составлял 0.3 А.

## 3. Результаты экспериментов

В результате экспериментов получены зависимости изменения веса тела от времени при нагреве в течении 30 минут (рис. 1. а).



**Рис. 1.** (а) Зависимость веса от времени при нагреве тел в глицерине, (б) зависимость температуры от времени при нагреве конуса в глицерине и воде

Зависимость демонстрирует, что вес тела, в момент включения нагрева, уменьшается, а после постепенно увеличивается, и при выключении нагрева происходит резкое возрастание веса, причем он превосходит начальное значение.

Это можно объяснить тем, что при возникновении конвективных течений на, погруженное в жидкость тело начинает действовать дополнительная сила, которая выталкивает тело из жидкости, и как следствие, вес тела уменьшается. Последующее увеличение веса связано с изменением температуры и плотности жидкости вблизи тела, а в момент выключения нагрева увеличение веса, вызвано ослаблением конвективных течений. Вес тела в конце эксперимента, оказался больше начального значения, так как жидкость прогрелась. В результате экспериментов было обнаружено, что максимальная температура тела в глицерине, при одной мощности, в 2.5 раза превосходит соответствующую температуру тела в воде (рис. 1. б), а так же, что находясь в одинаковой жидкости, температура и вес конуса изменяются существенно сильнее, чем у шара. Разницу в изменении веса при нагреве тел одного объема можно объяснить различием в возникающих конвективных течениях.

Для визуализации течений были проделаны эксперименты со светоотражающими частицами в воде (рис. 2). В результате визуализации, обнаружено, что конвективные течения имеют разную форму, следовательно, на тела действует разная дополнительная выталкивающая сила, что и является причиной наблюдаемой разности в зависимостях веса от времени.

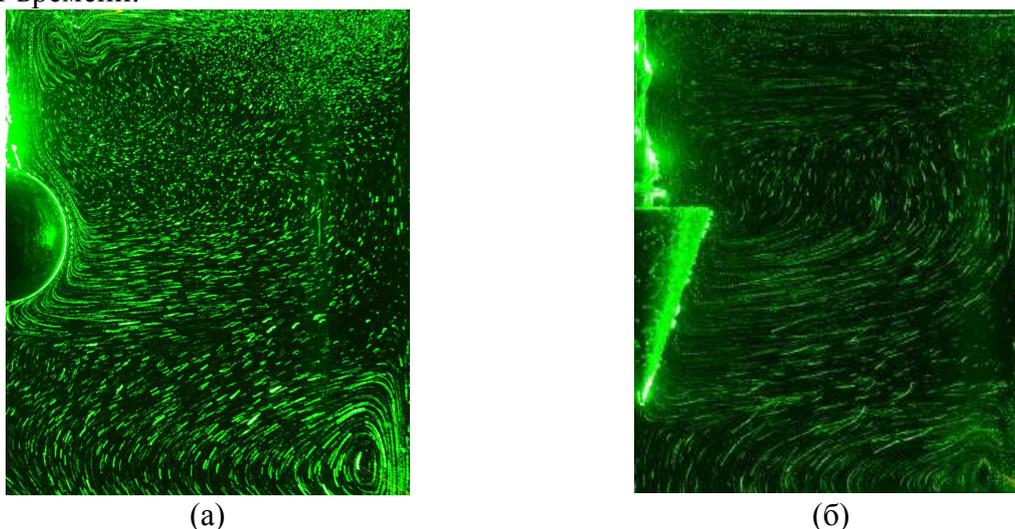


Рис. 2. Визуализация конвективных течений при нагреве (а) шара, (б) конуса

#### 4. Заключение

Проведены эксперименты, позволяющие показать, что температура тела оказывает влияние на изменение веса тел различной формы, в глицерине и воде. Построены графики зависимостей веса тел в глицерине и воде. Проведена визуализация конвективных течений с использованием светоотражающих частиц для шара и конуса.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации по поддержке ведущих научных школ (грант № НШ-9176.2016.1).

#### Список литературы

1. *Martynenko O.G. Khramtsov P.P.* Free-convective heat transfer: with many photographs of flows and heat exchange. Springer Science & Business Media, 2005. 518 p
2. *Bergman T.L.* Fundamentals of heat and mass transfer. John Wiley & Sons, 2011. 98 p.
3. *Amato W.S., Chi T.* Free convection heat transfer from isothermal spheres in water // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 1972. – Т. 15, № 2. – . 327–339 p.

## **Прогноз опасных метеорологических явлений в пермском крае с использованием модели WRF**

**А.В. Быков, А.Н. Шихов, А.С. Белозеров**

Пермский государственный национальный исследовательский университет  
614990, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, 15  
email: bykovav@psu.ru

Статья посвящена верификации краткосрочного численного прогноза опасных и неблагоприятных явлений погоды по мезомасштабной модели атмосферы WRF на территории Среднего Урала. Приведено краткое описание прогностической модели WRF и основных экспериментов по подбору оптимальных настроек модели. Первый эксперимент позволил подобрать оптимальную параметризацию конвекции. В следующих экспериментах производилась оценка применимости модели с высоким пространственным разрешением для прогноза систем глубокой конвекции. Заключительный эксперимент был проведен с целью верификации оперативного прогноза опасных явлений погоды на территории Пермского края в 2016 году. Качество прогноза отдельных типов опасных явлений уже оценивается как удовлетворительное, но необходимо продолжение настройки модели с целью дальнейшего улучшения качества прогноза.

**Ключевые слова:** опасные явления погоды; краткосрочный прогноз; модель WRF; глобальные модели атмосферы

## **Forecasting meteorological hazards in the Perm Region by means of WRF model WRF**

**A.V. Bykov, A.N. Shikhov, A.S. Belozyorov**

Perm State University, 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia, ivanov@email.ru

The article describes the verification of short-term numerical forecasting of severe weather events using the mesoscale atmospheric WRF model in the Middle Urals region. We describe WRF software and numerical experiments of modeling dangerous weather phenomena. The first experiment is devoted to selection parameterization of convective processes. At the next experiments we simulated mesoscale convective systems on high resolution grid of WRF model. Besides, we used WRF modeling dangerous weather in in the Middle Urals region at 2016. Forecast quality of some types severe weather is satisfactory. But we want to continue numerical experiments.

**Keywords:** severe weather events; short-term forecast; WRF model; global atmospheric model

На территории Пермского края ежегодно фиксируются различные опасные метеорологические явления, которые иногда приводят к материальному ущербу. Зачастую такие явления связаны с развитием атмосферной конвекции (сильные ливни, крупный град, шквалы, смерчи). Из явлений, не связанных с развитием атмосферной конвекции, наибольший интерес вызывают сильные снегопады, так как особенности

рельефа Пермского края создают благоприятные условия для их возникновения. Задачу прогноза опасных метеорологических явлений на территории Пермского края можно решить с помощью численных моделей атмосферы, наиболее распространенной из которых является мезомасштабная прогностическая модель WRF.

В настоящее время в ведущих странах мира разработаны прогностические модели состояния атмосферы. Модели численно решают систему трехмерных осредненных уравнений Навье-Стокса (уравнения Рейнольдса) на вращающейся сфере с дополнительным уравнением переноса водяного пара [1]. Кроме того, в правые части системы уравнений включены вклады от параметризаций подсеточного масштаба (конвекция, тепловая радиация, турбулентность и т.д.). Система уравнений решается различными методами, например методом Рунге-Кутты 4 порядка точности. Алгоритмы решения уравнений в настоящее время адаптированы для параллельного исполнения на множестве вычислительных узлов и пространственное разрешение моделей становится все меньше. При уменьшении шага сетки возрастает точность описания орографии и взаимодействия атмосферы с земной поверхностью, из-за этого появляется возможность описывать некоторые процессы напрямую, не прибегая к процедурам параметризации.

Модель WRF (Weather Research and Forecast Model) создана в США. Разработка производится NCEP (National Centers for Environmental Prediction), NCAR (National Center for Atmospheric Research), FSL (Forecast Systems Laboratory) и др [2]. WRF является свободным программным обеспечением и доступна в исходных кодах. Еще одним преимуществом модели является наличие большого количества встроенных в нее процедур параметризаций подсеточных процессов, что обеспечивает возможность гибкой настройки. Кроме того, модель может запускаться в параллельном режиме на многоядерных процессорах и вычислительных кластерах с использованием библиотек OpenMP. Модель WRF поставляется с динамическими ядрами ARW (разработано в NCAR) и NMM (разработано в NCEP). Динамические ядра различаются системами уравнений, описывающими состояние атмосферы и методами их численного решения, набором доступных параметризаций и т.д.

С 2012 года в ПГНИУ использовалась модель WRF-ARW 3.2.1. Модель эксплуатировалась с низким горизонтальным разрешением (10 км) на многопроцессорном вычислительном комплексе «ПГУ-Тесла» [3]. С 2014 года начались работы по обновлению и настройке программного комплекса WRF, в связи с чем была проведена серия экспериментов.

Модель WRF-ARW версии 3.6.1. была установлена на персональный компьютер (процессор Intel Core-i5 с тактовой частотой 3.41 ГГц, 24 ГБ оперативной памяти). Для перевода данных счета модели из формата NetCDF в код GRIB-1 (сжатый формат для хранения метеорологических данных) использовался программный комплекс UPP 2.2. Кроме интерполяции данных счета модели на изобарические поверхности этот программный комплекс также позволяет вычислять дополнительные характеристики атмосферы (например, радиолокационную отражаемость, высоту и температуру верхней границы облачности и др.).

Инициализация модели WRF и задание граничных условий (с шагом 1 ч) выполнена по данным реанализа численной модели прогноза CFS. Выбор данных CFS в качестве исходных обусловлен их сравнительно высоким пространственным ( $0.5^\circ$ ) и временным (1 ч) разрешением. Таким образом, численные эксперименты производились в режиме «квазипрогноза» или «диагноза».

Визуализация выходных данных выполнялась в программных пакетах OpenGrADS 2.0.2 и ArcGIS 10.1. Вывод в программном комплексе OpenGrADS осуществлялся в графический формат PNG, растровый формат GeoTIFF и векторный

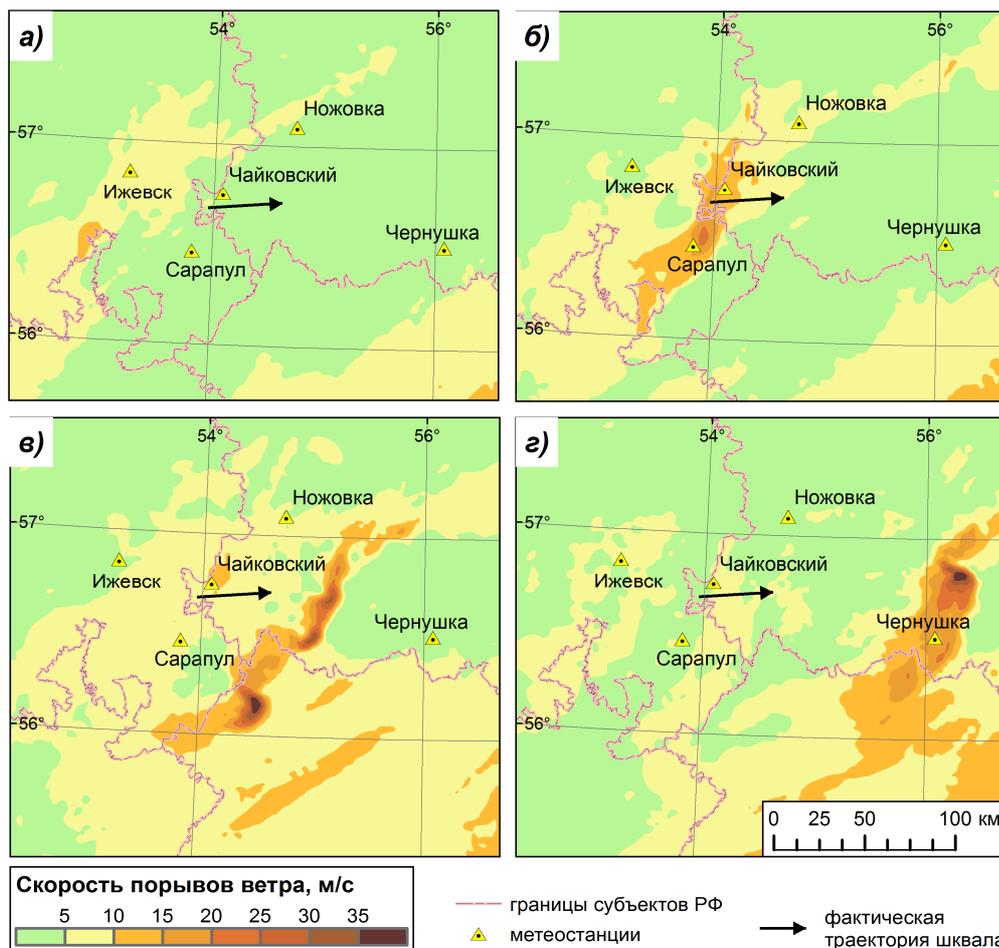
формат SHP. Данные в растровом и векторном форматах использовались для сопоставления с данными дистанционного зондирования в ArcGIS. Использовались следующие выходные данные модели: интенсивность осадков в виде дождя и града (крупы), мм/ч, расчетное максимальное значение радиоэха конвективных облаков, DBz, средняя скорость ветра и скорость ветра в порывах (с учетом вертикальной составляющей) на высоте 10 м, высота верхней границы облаков (ВГО) (Нвго, км) и температура на данном уровне (температура ВГО, °С).

Оценка качества результатов моделирования производилась путем их сопоставления со спутниковыми данными Terra/Aqua MODIS, полученными из архивов NASA (Goddard Space Flight Center). Дополнительно выполнялось сопоставление выходных данных модели с данными сети метеорологических радиолокаторов и данными об осадках наблюдательной сети Росгидромета.

Расчет выполнялся на 38 вертикальных уровнях, период моделирования составлял 24 ч, а временной шаг вывода данных 1 ч. В дальнейшем число вертикальных уровней было доведено сначала до 42. Модель WRF запускалась со следующими схемами параметризации подсеточных процессов: микрофизика облачности – схема Томпсона, длинноволновая радиация – схема RRTM, коротковолновая радиация – схема Дудья, приземный слой – схема Монино-Обухова с вязким подслоем Карлсона-Боланда и стандартными функциями подобия, подстилающая поверхность и почва – схема NOAH; пограничный слой – схема университета Енсей. Выбор данных параметризаций обусловлен тем, что они рекомендованы для использования в средних широтах руководством по экспликации модели.

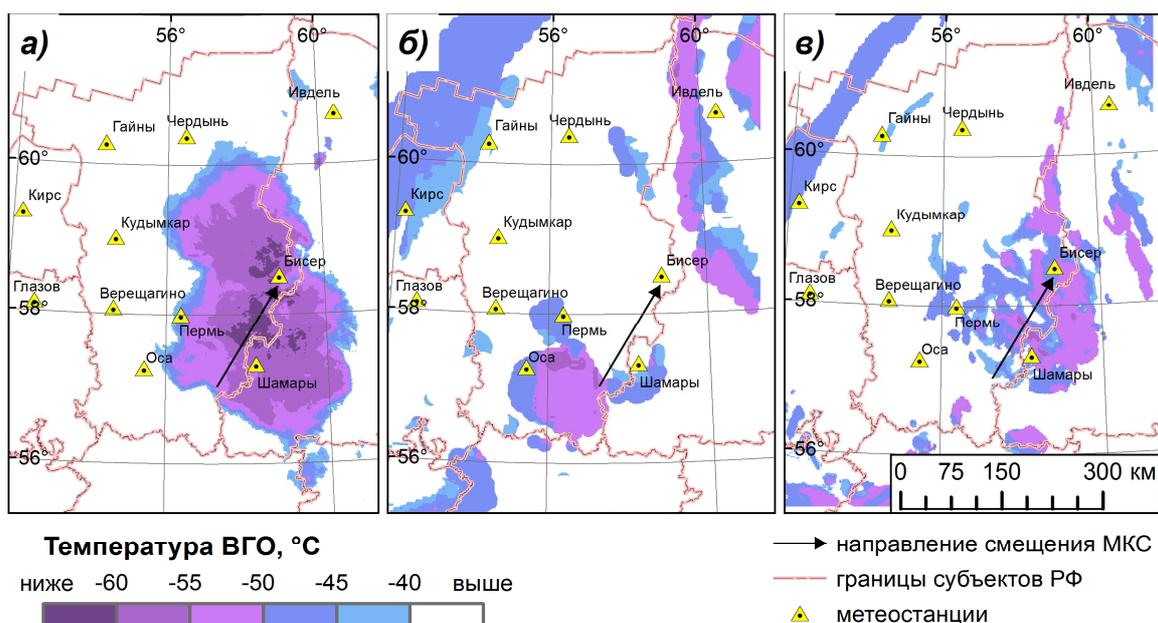
В первом эксперименте был произведен подбор оптимальной параметризации конвективных процессов [4]. Модель запускалась с низким пространственным разрешением (10 км) как с различными параметризациями конвективных процессов, так и без них (в режиме прямого моделирования конвекции на сетке с пространственным разрешением 10 и 4 км). Расчеты показали, что прямое моделирование конвекции предпочтительнее использования параметризаций даже при грубом шаге сетки (10 км). Однако, шага сетки 10 км недостаточно для воспроизведения ячейковой структуры скоплений кучево-дождевых облаков.

Следующий эксперимент был поставлен с целью оценки применимости модели WRF-ARW в режиме прямого моделирования конвекции на сетках с высоким пространственным разрешением (4 км) для случаев возникновения мезомасштабных конвективных систем (МКС) на территории Пермского края. Эксперимент показал, что в половине случаев прогноз МКС оказался неоправдавшимся [4]. При этом, в большинстве случаев, когда прогноз не оправдался, МКС воспроизвелись со сдвигом в пространстве до 150 км или по времени до 2 часов. В остальных случаях ошибочных прогнозов МКС не воспроизвелись вообще. Ошибки в прогнозе положения МКС, как правило, связаны с влиянием начальных условий (например, со смещением фронтальной зоны относительно ее положения по данным глобальной модели). Случаи же, когда модель WRF вообще не воспроизводит глубокую конвекцию, наблюдаются при определенном типе синоптических ситуаций. Модель не прогнозирует возникновение МКС во внутримассовых ситуациях, когда отсутствует выраженная зона сходимости воздушных течений. Заметно повышается успешность прогноза в случаях с хорошо выраженными фронтальными зонами. В свою очередь, такие параметры, как температура и высота верхней границы облаков, средняя скорость ветра и скорость порывов ветра (см. рис. 1) при шквалах, а также мгновенная интенсивность осадков (определяемая по значениям радиоэха) воспроизводятся моделью достаточно адекватно.



**Рис. 1.** Скорость порывов ветра 17.08.2014 г. по модели WRF: а) – 9 ч. ВСВ, б) – 10 ч. ВСВ, в) – 11 ч. ВСВ, г) – 12 ч. ВСВ

Существенное влияние на успешность прогноза пространственного положения и интенсивности МКС может оказывать выбор шага модельной сетки по горизонтали. Для оценки степени влияния этого параметра был проведен численный эксперимент по подбору шага сетки для нескольких случаев возникновения МКС. Расчеты производились с шагом сетки 2, 3, 4, 5, 6, 7.2, 9, 12 км, при этом другие начальные условия были заданы аналогичными. По результатам этих численных экспериментов было установлено, что результаты моделирования с разным (даже близким, например 3 и 4 км) шагом сетки могут принципиально различаться [4]. Лишь в одном из рассмотренных случаев (24.06.2013 г) модель WRF не воспроизвела конвекцию при проведении расчета с любым пространственным разрешением. В других случаях удалось подобрать оптимальный шаг сетки (2 или 3 км), при котором пространственное положение МКС воспроизводится с наибольшей достоверностью. Кроме этого, увеличение пространственного разрешения позволяет получить более адекватную оценку максимальной скорости ветра при шквале. Пример влияния шага сетки на качество прогноза показан на (рис. 2).



**Рис. 2.** Температура верхней границы облаков, 21.06.2012 г., 18 ВСУ: а) – по спутниковым данным MODIS, б) – по модели WRF, расчет с шагом сетки 9 км, в) – по модели WRF, расчет с шагом сетки 3 км.

Следующий эксперимент был проведен с целью оценки применимости модели WRF-ARW для прогноза МКС, генерирующих смерчи [5]. Для этого были взяты 8 случаев. Расчеты с шагом 9 км были выполнены для всех случаев смерчей, а с шагом 3 км – только в тех случаях, когда модель успешно воспроизводила глубокую конвекцию при расчете с низким разрешением. В качестве начальных и граничных условий для модели WRF использовались данные реанализа NCEP CFS и GFS с шагом сетки  $0.5^\circ$ , а также (для случая смерча 13.07.2016 г.) – также и прогноз NCEP/GFS (с шагом сетки  $0.5^\circ$ ). Оценка качества результатов моделирования была выполнена на основе сопоставления времени возникновения и пути перемещения мезоциклона по модели WRF с фактическим треком смерча (выявленным на основе анализа ветровальных нарушений лесного покрова) и сопоставления пространственного положения и времени прохождения зон активной конвекции по модели WRF и по спутниковым данным Terra/Aqua MODIS.

В большинстве рассматриваемых случаев, модель WRF воспроизводит основные вышеописанные циркуляционные особенности, способствовавшие развитию смерчей. Это обеспечивает качественные результаты моделирования возникновения и эволюции мезомасштабных конвективных систем. Однако в некоторых случаях в данных реанализа CFSR и GFSR, использованных в качестве начальных условий для запуска модели WRF, содержатся существенные ошибки при определении пространственного положения фронтальных зон. Это негативно сказывается на качестве результатов мезомасштабного моделирования.

С начала 2016 года начались эксперименты по использованию WRF-ARW для оперативного прогноза метеорологических величин и опасных явлений на территории Пермского края. Модель запускалась с шагом сетки 9 км (позднее – 7.2 км). Вместо данных реанализа стали использоваться данные оперативного прогноза по модели NCEP-GFS с горизонтальным разрешением  $0.5^\circ$  с усвоением данных реанализа (за 12 часов, предшествующих прогнозу).

Прогноз опасных явлений холодного периода оказался достаточно надежным (значение критерия Пирси-Обухова 0,47). Однако, прогноз сильных снегопадов

ливневого характера в тыловых частях циклонов характеризуется как недостаточно надежный. Из опасных явлений погоды теплого периода в 2016 г. наиболее успешным был прогноз сильных дождей, охватывающих большие территории, а наименее успешным – прогноз локальных ливней и шквалов. В некоторых случаях модель вообще не воспроизводит развитие глубокой конвекции. Это, вероятно, обусловлено ошибками в начальных условиях, т.е. в данных глобальной модели GFS. В то время, в ряде случаев место и время возникновения опасных конвективных явлений были успешно спрогнозированы по модели WRF. Такой результат, как правило, недостижим с использованием синоптического метода прогноза, и указывает на практическую ценность мезомасштабного численного прогноза конвективных явлений.

В настоящее время программный комплекс WRF-ARW 3.8.1 установлен на вычислительный комплекс с гибридной архитектурой «ПГНИУ-Кеплер». В результате установки скорость вычислений возросла в 5 раз (использовались 16 ядер Intel Xeon E5 2.7 ГГц). Кроме того, был установлен программный комплекс WRF-NMM; в настоящее время проводятся работы по его настройке.

Основное ограничение численного прогноза конвективных опасных явлений – это определение пространственного положения мезомасштабных конвективных систем, что приводит к ошибкам при прогнозе места и времени возникновения опасных явлений. Систематической ошибкой является также занижение скорости порывов ветра при шквалах, но данная проблема может быть устранена путем уменьшения горизонтального шага сетки модели до 2-3 км. Кроме того, имеются перспективы к совершенствованию качества прогноза, связанные с ростом качества глобальных прогностических моделей. Таким образом, прогноз опасных метеорологических явлений при помощи мезомасштабных моделей представляет большой интерес для дальнейших исследований.

Публикация подготовлена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-35-00410 мол-а и 16-45-590823 p\_a).

### **Список литературы**

1. Толстых М.А. Глобальные модели атмосферы: современное состояние и перспективы развития // Труды Гидрометцентра России. 2016. Вып. 359. С. 5–32.
2. Вельтищев Н.Ф., Жупанов В.Д., Павлюков Ю.Б. Краткосрочный прогноз сильных осадков и ветра с помощью разрешающих конвекцию моделей WRF // Метеорология и гидрология. 2011. № 1. С. 5–18
3. Калинин Н.А., Ветров А.Л., Связов Е.М., Попова Е.В. Изучение интенсивной конвекции в Пермском крае с помощью модели WRF // Метеорология и гидрология. 2013. № 9. С. 21–30.
4. Шихов А.Н. Быков А.В. Оценка качества прогноза мезомасштабных конвективных систем на Западном Урале с помощью модели WRF и спутниковых данных MODIS // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. Т. 13. №1. Москва. 2016. С. 137–148.
5. Шихов А.Н. Быков А.В. Изучение двух случаев сильных смерчей в Предуралье // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. Т. 12. №3. Москва. 2015. С. 124–133.

## Моделирование FORC диаграмм композита с гибридным магнитным наполнителем

М. В. Ваганов<sup>а</sup>, Ю. Л. Райхер<sup>а</sup>

<sup>а</sup> Институт механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук 614013, Пермь, ул. Академика Королёва, 1  
emails: mikhail.vaganov.sci@gmail.com, yuriy.raikher@gmail.com

Представлена модель намагничивания магнитного композита гибридного состава, то есть дисперсии, содержащей смесь магнитомягких и магнитотвердых микрочастиц. Намагничивание магнитотвердой фазы рассчитывается по модели Стонера-Вольфарта; намагничивание магнитомягкой фазы – по соотношению Фрелиха-Кеннелли. Магнитное взаимодействие частиц учитывается в рамках теории среднего поля. Выполнено моделирование петель намагничивания и построена диаграмма FORC гибридного композита. Показано, что взаимное влияние магнитотвёрдой и магнитомягкой фаз ведет к появлению характерного диагонального «хребта» на диаграмме FORC.

**Ключевые слова:** гибридные магнитные композиты; магнитный гистерезис; диаграммы FORC

## Modelling FORC diagrams for an ensemble of magnetically soft and hard particles

M. V. Vaganov<sup>а</sup>, Yu. L. Raikher<sup>а</sup>

<sup>а</sup> Institute of Continuous media mechanics of the Ural Branch of Russian Academy of Science, Academician Korolev St. 1, 614013, Perm  
emails: mikhail.vaganov.sci@gmail.com, yuriy.raikher@gmail.com

A model of a magnetic composite of hybrid type, i.e., a system that contains a mixture of both magnetically soft and magnetically hard microparticles is proposed. Magnetization of the magnetically hard phase is described by means of the Stoner-Wohlfarth model. Magnetization of the magnetically soft phase obeys the Froehlich-Kennelly law. The magnetic interparticle interaction is accounted for in terms of a mean-field theory. Magnetization curves and FORC diagram of the hybrid composite have been simulated. It is shown that mutual influence of the magnetically hard and soft phases causes a diagonal “ridge” in the FORC diagram.

**Keywords:** hybrid magnetic composites; magnetic hysteresis; FORC diagrams

### 1. Введение

В настоящей статье рассматриваются магнитные композиты гибридного состава, содержащие магнитомягкие (ММ) и магнитотвердые (МТ) частицы. Высокую коэрцитивность обеспечивает магнитотвердая фаза, а магнитомягкая повышает величину намагниченности всего образца. Цель работы – установить, каким образом «магнитная гибридность» композита проявляется при его тестировании по стремительно набираю-

щему популярность новому протоколу измерений – диаграммам кривых перемагничивания первого порядка (FORC) [1].

Эксперимент FORC начинается с приложения к образцу магнитного поля достаточного для того, чтобы привести намагниченность в насыщение. Затем поле уменьшают до некоторого реверсного (отрицательного) значения  $H_r$  и начинают повышать (снова до насыщения) с заданным шагом  $\Delta H$ , регистрируя намагниченность после каждого шага. Следующая частная петля снимается таким же образом, но абсолютная величина  $H_r$  увеличивается на  $\Delta H$ . В последнем цикле поле  $H_r$  уже настолько велико, что обеспечивает полную инверсию намагниченности образца (отрицательное насыщение). Результатом такого набора измерений является двумерный дискретный массив значений намагниченности  $M(H, H_r)$ . Как показано в [1], вторая производная намагниченности по полям  $H$  и  $H_r$  в координатах поля коэрцитивности  $H_c = (H - H_r) / 2$  и поля взаимодействия частиц  $H_u = (H + H_r) / 2$  представляет собой распределение отдельных частиц по этим параметрам. График указанной производной, построенный в координатах полей  $H$  и  $H_r$  или в координатах  $H_c$  и  $H_u$ , и называется диаграммой FORC [2].

## 2. Моделирование намагничивания композита

Для описания возникающего в композите магнитного взаимодействия используем модель среднего поля [3]. Полагаем, что магнитное поле, действующее на ММ частицы, складывается из внешнего поля  $H_0$  и поля, создаваемого непосредственно МТ частицами. Намагничиваясь, ММ частицы, в свою очередь, создают поле, действующее на МТ фазу вместе с  $H_0$ :

$$\begin{cases} H^{MT} = H_0 + q_1 M^{MM} (H^{MM}) \\ H^{MM} = H_0 + q_2 M^{MT} (H^{MT}) \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $H^{MT}$  и  $H^{MM}$  – поля, действующие на МТ и ММ фазы, а  $M^{MT}$  и  $M^{MM}$  – намагниченности МТ и ММ фаз, соответственно;  $q_1$  и  $q_2$  – константы среднего поля. Считая, что  $q_1$  порядка коэффициента Лоренца, выберем для него значение  $q_1 = 0.2$ . Поскольку намагниченность магнитомягкой фазы достигает величины насыщения при достаточно малых полях, влияние на нее МТ частиц достаточно велико, поэтому полагаем  $q_2 = 0.8$ .

Реальным прототипом изучаемого композита является гибридный магнитный эластомер подобный тому, что изучался экспериментально в работах [4,5]. Таким образом, следует полагать, что ММ фаза состоит из частиц железа со средним характерным размером 5 мкм, а МТ фаза композита представляет собой частицы интерметаллида NdFeB со средним размером около 50 мкм.

Для описания намагниченности дисперсных ММ воспользуемся соотношением Фрелиха-Кеннелли:

$$M^{MM} = \frac{\chi_0 M_S^{MM} H^{MM}}{\chi_0 H^{MM} + M_S^{MM}}, \quad (2)$$

где  $\chi_0$  – начальная магнитная восприимчивость,  $M_S^{MM}$  – намагниченность насыщения ММ фазы.

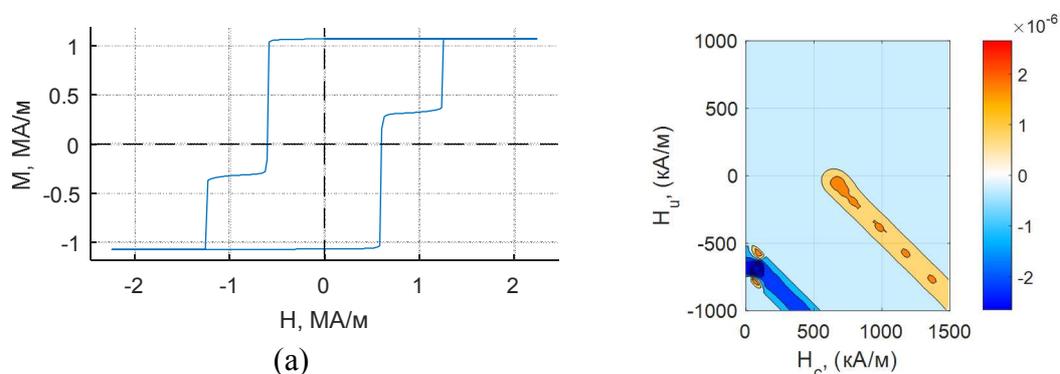
Ввиду высокой магнитной анизотропии и указанного размера, частицы NdFeB находятся в однодоменном состоянии. По этой причине их намагничивание естественно описывать моделью Стонера-Вольфарта с магнитной энергией

$$U^{MT} / V = -\mu_0 M_S^{MT} (\mathbf{eH}^{MT}) - K (\mathbf{en})^2, \quad (3)$$

где  $\mu_0$  – магнитная проницаемость вакуума,  $e$  – единичный вектор магнитного момента,  $n$  – направление оси анизотропии,  $K$  – константа одноосной анизотропии,  $V$  – объем частицы, а  $M_S^{MM}$  – намагниченность насыщения МТ материала.

### 3. Диаграмма FORC

Ввиду того, что влияние МТ фазы мешает внешнему полю  $H_0$  перемагничивать ММ фазу, на графике намагничивания, получаемом в результате расчёта по формулам (1)–(3) можно выделить две пары скачков намагниченности, характерных для гибридного композита. Меньшие скачки соответствуют перемагничиванию МТ фазы, а большие – перемагничиванию ММ фазы, см. рис. 1 (а). Вводя распределение МТ частиц по коэрцитивной силе и намагниченности насыщения, что заведомо присуще реальным образцам, видим, что одному и тому же значению  $H_0$ , будет соответствовать набор полей различные  $H^{MM}$ . На диаграммах FORC указанный разброс дает диагональный пик на диаграммах FORC, см. рис. 1 (б). Наличии этой особенности у гибридных композитов прежде было обнаружено в эксперименте [5].



**Рис. 1.** (а) Гистерезис модельного гибридного композита; (б) диаграмма FORC с симметричным диагональным хребтом, отражающим взаимодействие магнитных фаз

Работа выполнена при поддержке проекта РФФИ-ННИО 16-51-12001 (ПАК 907).

### Список литературы

1. *Mayergoyz I. D.* Mathematical Models of Hysteresis. New York: Springer-Verlag, 1991. 207 p.
2. *Pike C. R., Roberts A. P., Verosub K. L.* Characterizing interactions in fine magnetic particle systems using first order reversal curves // *Journal of Applied Physics*. 1999. Vol. 85. DOI: 10.1063/1.370176.
3. *Panagiotopoulos I.* A simple approach to the First Order Reversal Curves (FORC) of two-phase magnetic systems // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 2011. Vol. 323. N. 16. P. 2148-2153.
4. *Kramarenko E. Yu., Chertovich A. V., Stepanov G. V., Semisalova A. S., Makarova L. A., Perov N. S., Khokhlov A. R.* Magnetic and viscoelastic response of elastomers with hard magnetic filler // *Smart Materials and Structures*. 2015. Vol. 24. Art. no. 035002.
5. *Linke J. M., Borin D. Yu., Odenbach S.* First-order reversal curve analysis of magnetoactive elastomers // *RCS Advances*. 2016. Vol. 102. DOI: 10.1039/C6RA23435F.

## Распространение волн возбуждения в деформированном миокарде

И. Н. Вассерман<sup>a</sup>, И. Н. Шардаков<sup>a</sup>, А. П. Шестаков<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Институт механики сплошных сред УрО РАН  
614013, Пермь, ул. Букирева, 15  
email: igorw@icmm.ru

Построена модель изменения внутриклеточной проводимости миокарда, при его деформации на основе анализа микроструктурной модели Р.Е. Hand, В.Е. Griffith, С.С. Peskin (Bull.Math.Biol.(2009), { 71}(7)). Сердечная ткань рассматривалась, как периодическая решетка, где клетки являются прямоугольными призмами, заполненными изотропным электролитом, а проводимость щелевых соединений учитывалась через граничные условия на сторонах этих призм и считалась постоянной. С помощью метода гомогенизации в виде, предложенном в работе G. Richardson and S. J. Chapman.(SIAM Journal Appl. Math. (2011). 71(3)), значения проводимости аналитически выражены через размеры клетки, параметры периодичности решетки, электрические свойства миоплазмы и щелевых соединений. На основе этих соотношений построены зависимости проводимости ткани от ее деформации (в текущей конфигурации). Разработаны численный алгоритм, основанный на методе расщепления и его программная реализация, на базе конечно-элементной библиотеки FENICS. Сравниваются проводимости, вычисленные при различных зависимостях от деформации. Рассмотрены профили волны возбуждения в прямоугольной двумерной области, рассчитанные при их использовании.

**Ключевые слова:** миоплазма; щелевые соединения; внутриклеточная проводимость; микроструктурная модель

## Propagation of excitation waves in deformed myocardium

I. N. Vasserman<sup>a</sup>, I. N. Shardakov<sup>a</sup>, A. P. Shestakov<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Institute of Continuous Media Mechanics of the UB of RAS,  
Academika Koroleva st,1, 614013, Perm  
email: igorw@icmm.ru

A model for changing the intracellular conductivity of the myocardium under its deformation has been constructed, based on an analysis of the microstructural model of P.E. Hand, V.E. Griffith, C.S. Peskin (Bull.Math.Biol.(2009)). The cardiac tissue was considered as a periodic lattice, where the cells are rectangular prisms filled with an isotropic electrolyte, and the conductivity of the gap junctions was expressed through the boundary conditions on the sides of these prisms and was assumed to be constant. Using the homogenization method in the form proposed in the paper of G. Richardson, S.J. Chapman.(SIAM Journal Appl. Math.

(2011)) conductivity values are analytically expressed through the lattice parameters, and the dependences of conductivities of the tissue on its deformation is determined. A numerical algorithm based on the splitting method and its implementation using the finite element library FENICS are developed. The profiles of the excitation wave in a rectangular two-dimensional region, are considered.

**Keywords:** Myoplasm; gap junctions; intracellular conductivity; microstructural model

## 1. Введение

С макроскопической точки зрения сердечная мышца может рассматриваться как две неоднородные анизотропные проводящие среды – внеклеточное пространство и внутриклеточное пространство – взаимодействующие через мембрану (бидоменная модель) [1]. Каждая из этих двух сред характеризуется своим тензором проводимости. Для большинства задач распространения возбуждения в миокарде может быть использована более простая монодоменная модель при соответствующем вычислении тензоров проводимости [2].

Благодаря волокнисто-слоистой организации сердечная ткань обладает значительной анизотропией и неоднородностью. Значения проводимости в разных направлениях различаются на порядок. Сердце является движущимся органом, испытывающим большие деформации в процессе работы. Поэтому распространение электрического возбуждения должно исследоваться в подвижной среде.

При исследовании проводимости деформируемой сердечной ткани возможны два крайних подхода: один (наиболее распространенный) рассматривает миокард, как анизотропную жидкость, когда проводимость в любом из направлений не зависит от деформации, происходит только поворот тензора проводимости вместе с материальными осями. Второй подход рассматривает миокард, как пространственную решетку резисторов, для которой сопротивление между любыми двумя точками не меняется при деформации. Каждому из этих подходов соответствует свой носитель: у первого - это цитоплазма, у второго - щелевые соединения.

## 2. Описание и результаты

В данной работе построена модель изменения внутриклеточной проводимости миокарда, при его деформации. Вывод макропроводимостей проводился на основе микроструктурной модели Р.Е. Hand, В.Е. Griffith, С.С. Peskin. [3] в которой сердечная ткань рассматривалась, как периодическая решетка, где клетки являются прямоугольными призмами, заполненными изотропной проводящей средой, а проводимость щелевых соединений учитывалась через граничные условия на сторонах этих призм. Считается, что в направлении волокна клетки прилегают друг к другу, в поперечных – существуют промежутки. С помощью метода гомогенизации и рассмотрения общего тока через периодическую структуру значения внутриклеточной проводимости вдоль и поперек волокна выражены через размеры клетки, параметры периодичности решетки, электрические свойства миоплазмы и щелевых соединений.

Также в этой работе показано, что внеклеточная проводимость слабо зависит от самих линейных размеров клетки, а зависит, в основном, от отношения размеров клетки к соответствующим параметрам периодичности структуры. Поэтому следует ожидать, что внеклеточная проводимость будет слабо зависеть от деформации.

Если деформация представляет собой растяжение-сжатие в материальных осях, то зависимость макропроводимостей от деформации может быть получена с помощью довольно простых обобщений модели, учитывающих слоистую структуру миокарда

при подстановке измененных размеров в вышеупомянутые выражения для внутриклеточной проводимости.

Для более общего случая, когда главные оси деформации не совпадают с материальными осями, обусловленными волокнисто-слоистой структурой миокарда в этих материальных осях присутствуют сдвиги. Аналитическое решение на основе модели [3] может быть получено и в этом случае при использовании метода гомогенизации в виде, представленном в работе G. Richardson and S. J. Chapman [4].

В этом случае тензор проводимости может быть представлен как тензор обратный сумме обратных тензоров проводимости цитоплазмы и щелевых соединений:

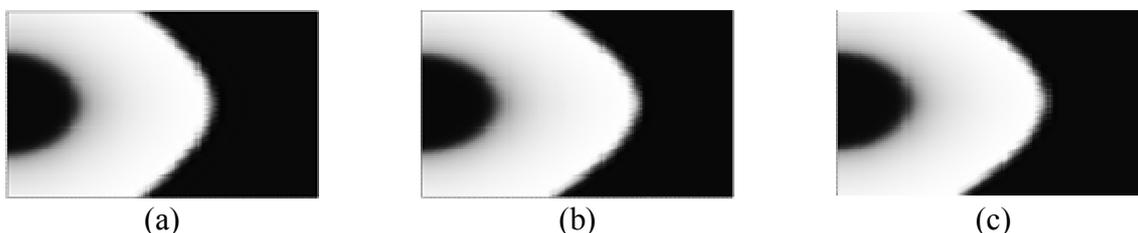
$$\mathbf{d} = \beta_1 (\mathbf{d}_c^{-1} + \mathbf{d}_g^{-1})^{-1}. \quad (1)$$

где  $\mathbf{d}_c = \sigma_c \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{d}_g = J^{-1} \mathbf{F} \mathbf{d}_{g0} \mathbf{F}^T$  - приведенные проводимости цитоплазмы и щелевых соединений,  $\beta_1$  - объемная доля клеток во всей ткани.

Было рассмотрено распространение волны возбуждения в прямоугольной области при удлинении  $\lambda=1.4$  вдоль горизонтальной оси, соответствующей направлению волокна. Источник первоначального возбуждения расположен в середине правой стороны прямоугольной области. Результаты показаны в таблице 1 и на (рис. 1).

**Таблица 1.** Изменение продольной проводимости при деформации

Модель	Внутриклеточная	Приведенная монодоменой модели
Решетка резисторов	1.96	1.24*
Данная модель	1.24	1.09



**Рис. 1.** Распространение волны возбуждения в прямоугольной области, с возбудимой средой, рассматриваемой как: (a) квазижидкость, (b) решетка резисторов, (c) согласно данной модели

### Список литературы

1. Sundnes J. et al. Computing the Electrical Activity in the Heart. Springer-, 2006.
2. Poste M. et al. A comparison of monodomain and bidomain reaction-diffusion models for action potential propagation in the human heart. // IEEE Transactions on Biomedical Engineering. 2006. Vol. 53, N. 12. P. 2425–2435.
3. Hand P.E., Griffith B.E., Peskin C.S. Deriving Macroscopic Myocardial Conductivities by Homogenization of Microscopic Models. // Bulletin of Mathematical Biology. 2009. Vol. 71, N.7, P. 1707-1726.
4. Richardson G., Chapman S. J. Derivation of the Bidomain Equations for a Beating Heart with a General Microstructure. //SIAM Journal on Applied Mathematics. 2011. Vol. 71, N.3, P 657-675.

# Локализованные нелинейные структуры уравнений конвекции Марангони в длинноволновом приближении

И. И. Вертгейм<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Институт механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук 614013, Пермь, ул. Акад. Королёва, 1  
email: wertg@icmm.ru

Исследуются стационарные и нестационарные решения нелинейных уравнений, полученных в длинноволновом приближении для задачи о конвекции Марангони, вызванной локализованным источником тепла или поверхностно-активной примеси в тонком горизонтальном слое вязкой несжимаемой жидкости со свободной поверхностью. Распределение температуры или концентрации примеси в жидкости соответствует однородному вертикальному градиенту, искаженному наложением слабо неоднородного локализованного в горизонтальной плоскости потока тепла или примеси. Нижняя граница слоя считается теплоизолированной, а верхняя – свободной и деформируемой. Уравнения, полученные в длинноволновом приближении, сформулированы в терминах функций амплитуд распределения температуры или концентрации примеси, деформации поверхности и завихренности. Исследовано основное состояние системы в зависимости от формы неоднородности теплопотока, его зависимость от параметров и устойчивость. Для локализованных в области неоднородности поверхностного натяжения стационарных решений задачи найдены области параметров, соответствующие структурам различной пространственной конфигурации.

**Ключевые слова:** конвекция Марангони; длинноволновое приближение; нелинейные локализованные структуры

## Localized nonlinear structures of long-wave approximation of Marangoni convection equations

I. I. Wertgeim<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Institute of Continuous Media Mechanics RAS, Akad. Korolyov St., 1, 614013, Perm  
email: wertg@icmm.ru

Stationary and non-stationary solutions of nonlinear equations of the long-wave approximation for the Marangoni convection problem caused by a localized heat source or a surface active impurity in a thin horizontal layer of a viscous incompressible fluid with a free surface are investigated. The distribution of the temperature or impurity concentration in the liquid corresponds to a uniform vertical gradient, distorted by the imposition of a slightly inhomogeneous heat flux or impurity localized in the horizontal plane. The lower boundary of the layer is considered

thermally insulated, and the upper boundary is considered free and deformable. The equations obtained in the long-wave approximation are formulated in terms of the amplitudes of the temperature distribution or impurity concentration, deformation of the surface, and vorticity. The basic state of the system, its dependence on the parameters and stability are investigated depending on the form of non-homogeneity of the heat flow. For stationary solutions localized in the region of the surface tension inhomogeneity, domains of parameters corresponding to structures of different spatial configurations are found.

**Keywords:** Marangoni convection; long-wave approximation; nonlinear localized structures

## 1. Введение

Интерес к проблеме численного моделирования надкритических режимов термокапиллярной конвекции в тонком слое жидкости со свободной деформируемой верхней границей и неоднородным локализованным источником неоднородности поверхностного натяжения, т.е. тепловым пятном или локальным внесением примеси поверхностно-активного вещества (ПАВ) [1] связан с возможностями управления устойчивостью и структурой течения Марангони, а также с экспериментально наблюдаемыми явлениями возникновения сложных режимов течения и форм поверхности жидкости [2]. Особый интерес представляет изучение влияния изменения параметров и формы локализованного нагрева на возникающие структуры конвекции Марангони. Ранее была предложена модель длинноволнового приближения [3,4] и показано наличие в ее рамках локализованных и глобальных структур в зависимости от параметров, обнаружено наличие множества локализованных решений основного состояния с резкими переходами между различными их формами при изменении параметров характеризующих интенсивность и горизонтальный размер тепловой или концентрационной неоднородности и исследована их устойчивость [3-6]. В настоящей работе в рамках модели длинноволнового приближения [3,4] проведено численное исследование в плоской и осесимметричной постановках исходной нелинейной задачи и её упрощений, проведен анализ влияния формы неоднородности теплового пятна или локализованного распределения ПАВ на вид и особенности решений.

## 2. Постановка и методы решения задачи в длинноволновом приближении

Математическая модель представляет собой (в случае термокапиллярной конвекции) систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных для зависящих от горизонтальных координат амплитуд температуры, завихренности и деформации поверхности жидкости [3,4]. Основные состояния - стационарные плоские или осесимметричные решения, зависящие от одной пространственной переменной

$$\Phi_0 = \Phi_0(\xi), \quad H_0 = H_0(\xi). \quad (2.1)$$

Переменная  $\xi$  определена как  $\xi \equiv x$  для плоской задачи и  $\xi \equiv r$  - для осесимметричной. Система определяющих уравнений для стационара в этих обозначениях принимает вид:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{15} \nabla^4 \Phi_0 - \nabla^2 H_0 - \frac{48}{35} \nabla \left( |\nabla \Phi_0|^2 \nabla \Phi_0 \right) + \left( \frac{1}{10} + \frac{1}{5P} \right) \nabla \left( \nabla^2 \Phi_0 \nabla \Phi_0 \right) + \\ & + 2 \nabla \left( H_0 \nabla \Phi_0 \right) + \left( \frac{3}{5} + \frac{1}{10P} \right) \nabla^2 |\nabla \Phi_0|^2 - \nabla \left( q \nabla \Phi_0 \right) + \frac{1}{2} \nabla^2 q + \zeta q H_0 = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$G \nabla^2 H_0 - Ca \nabla^4 H_0 = -72 \nabla^2 \Phi_0. \quad (2.3)$$

Функции  $\Phi_0(\xi)$  и  $H_0(\xi)$  характеризуют стационарные амплитуды полей температуры и деформации свободной поверхности жидкости. Уравнения (2.2) – (2.3) и исходные нестационарные уравнения в терминах компонент скорости и температуры записаны в безразмерных переменных с использованием в качестве единиц измерения: длины  $L$ , времени –  $L^2/\chi$ , температуры –  $AL$ , скорости –  $\chi/L$ , давления –  $\eta\chi/L^2$ , где  $A$  – абсолютная величина равновесного градиента температуры. Символы  $\eta, \nu, \chi, \sigma$  обозначают коэффициенты динамической вязкости, кинематической вязкости, температуропроводности и поверхностного натяжения жидкости соответственно.

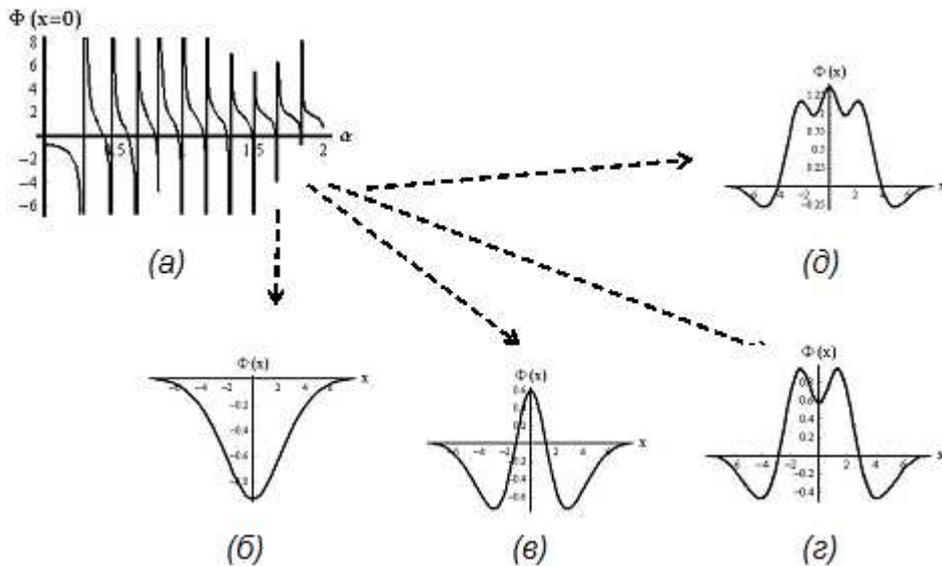
Построенная модель содержит следующие безразмерные параметры: число Марангони  $Ma = (\partial\sigma/\partial T)QL^3/(\eta\chi)$ , число Прандтля  $P = \nu/\chi$ , число Галилея  $G = gL^3/(\nu\chi)$ , капиллярное число  $Ca = \sigma L/(\eta\chi)$ .

Параметры  $G, Ca$  в расчете входят в виде комбинаций  $c = 72/Ca$  и  $\delta = G/Ca$ . Недеформируемой границе соответствуют значения  $c \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0$ . Нижняя граница слоя  $z = 0$  считается теплоизолированной, а верхняя граница  $z = L + h(x, y, t)$  – свободной и деформируемой. Предполагается, что в жидкости установлено распределение температуры, соответствующее однородному подогреву снизу, искаженному наложением слабо неоднородного теплового потока мощности  $Q(x, y, z) = q(x, y) \cdot q_z(z)$ . Рассмотрены различные формы тепловой неоднородности в горизонтальном и вертикальном направлениях, соответствующие экспериментам с сосредоточенными источниками тепла – твердотельным и созданным лазерным излучением.

### 3. Результаты численного исследования стационарных решений

Проведено численное исследование задачи (2.2-2.3) в плоской и осесимметричной постановках исходной нелинейной задачи и её упрощений – уравнений, полученных в предположении недеформируемости свободной границы и при линеаризации задачи.

При упрощении задачи получена последовательность нелинейных уравнений, в простейшем варианте приводящая к нелинейному уравнению Шредингера с локализованным потенциалом, задаваемым формой неоднородного горизонтального распределения мощности источника тепла или примеси. Выявлены общие для всей последовательности приближений свойства решений, а также свойства, определяемые спецификой конкретной гидродинамической задачи в полной постановке. Отличительной особенностью нелинейной задачи является наличие множества решений при конкретных фиксированных параметрах системы. Зависимость решения линейной краевой задачи от параметров системы, в частности от величины нагрева (расхода примеси) в центре пятна с неоднородностью поверхностного натяжения, характеризуется наличием разрывов второго рода – происходит неограниченное возрастание или убывание решения при конечном изменении параметра (рис. 1).



**Рис. 1.** Значение в центре пятна (а) и форма (б-д) функции амплитуды температуры в зависимости от значений параметра  $\alpha$  ( $\beta=0.3$ ;  $\alpha = 0.1$  (б),  $\alpha = 0.4$  (в),  $\alpha = 0.58$  (г),  $\alpha = 0.75$  (д));

Выполнен анализ устойчивости стационарных решений, исследованы нестационарные переходные режимы течения при изменении параметров со временем. Выявлены особенности процессов перестройки формы свободной поверхности и распределения температуры или концентрации примеси с течением времени при разрушении неустойчивых положений равновесия и установлении устойчивых.

### Список литературы

1. Братухин Ю.К., Макаров С.О. Гидродинамическая устойчивость межфазных поверхностей. Пермь: Изд.Пермского университета, 2005. 239 с.
2. Мизев А.И. Экспериментальное исследование термокапиллярной конвекции, индуцированной локальной температурной неоднородностью вблизи поверхности жидкости. 2. Источник тепла, индуцированный излучением// Прикладная механика и техническая физика, 2004. Т.45, №5. С. 102-108.
3. Вертгейм И.И., Мызникова Б.И. Устойчивость и структура термокапиллярного течения в горизонтальном слое с локализованным нагревом // Гидродинамика. Межвузовский сб. науч. тр., вып. 3, Пермь: ПГУ, 2002. С. 39-55.
4. Karlov S. P. Kazenin D. A. Myznikova, B.I, Wertgeim I.I. Experimental And Numerical Study Of The Marangoni Convection Due To Localized Laser Heating // J. Nonequilibrium Thermodynamics, 2005. V. 30, № 3. - P. 283-304.
5. Вертгейм И.И., Кумачков М.А. Нелинейные структуры термокапиллярной конвекции в локально нагреваемом слое жидкости со свободной деформируемой поверхностью//Гидродинамика / Сб. Науч. тр., 2007. - Пермь: ПГУ, 2007, №. 16.- С. 42-56.
6. Кумачков М.А., Вертгейм И.И. Анализ устойчивости и вторичных режимов термокапиллярного течения в слое жидкости при локализованном нагреве // Вычислительная механика сплошных сред.- 2009 – Т. 2. – № 3. – С. 57-69.

## **Исследование устойчивости одновихревого режима течения в жидком металле под действием внешнего магнитного поля**

**Д. А. Виноградов, И. О. Тепляков, Ю. П. Ивочкин, И. Б. Клементьева**

Объединённый институт высоких температур РАН, Москва,  
125412, Россия, г. Москва, ул. Ижорская, д.13, стр.2,  
email: igor.teplyakov@mail.ru

Численно исследована структура течений в полусферическом контейнере при влиянии внешнего осевого магнитного поля, которое приводит к образованию восходящего вихря. Расчеты проведены для разных отношений размеров малого и большого электродов. Получена зависимость, разделяющая структуру ЭВТ на две зоны, с одним и двумя вихрями.

## **Investigation of stability of single vortex flow mode in liquid metal by influence of external magnetic field**

**D. A. Vinogradov, I. O. Teplyakov, Yu. P. Ivochkin, I. B. Klementeva**

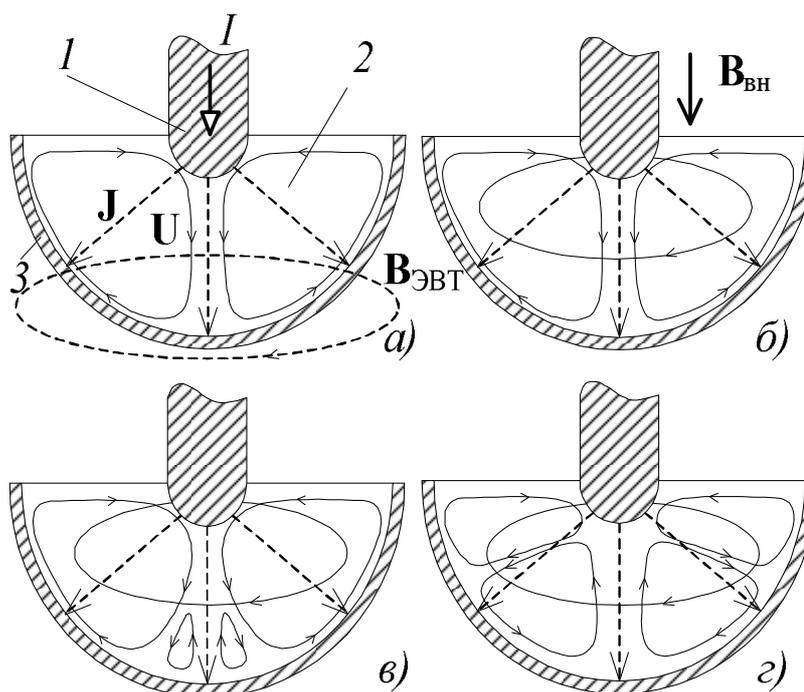
Joint Institute of High Temperature, Russia, 111116 Moscow, Izhorkaya 13 bld.2,  
email: igor.teplyakov@mail.ru

Flow structure in a hemispherical container under the influence of an external axial magnetic field which leads to the formation of the rising vortex was numerically investigated. Calculations were carried out for different ratios of the small and large electrode sizes. The dependence separating EVF structure into two zones, with one or two vortices was obtained.

**Введение.** При пропускании электрического тока через объем жидкого металла возникает объёмная вихревая сила  $\mathbf{F}=\mathbf{J}\times\mathbf{B}$  (здесь,  $\mathbf{J}$  и  $\mathbf{B}$  – плотность электрического тока и магнитная индукция созданного им поля), приводящая в случае пространственно неоднородного распределения  $\mathbf{J}$  к образованию т.н. электровихревого течения (ЭВТ). Подобные течения существенным образом влияют на многие технологические процессы в машиностроении (электрошлаковая сварка) и электрометаллургии (электрошлаковый переплав, различные электроплавильные печи). В частности, именно ЭВТ определяют гидродинамическую структуру потоков в рабочей ванне дуговых печей постоянного тока, которые находят все большее применение в промышленности [1].

Обычно предполагается, что в рассматриваемой осесимметричной системе с центральным электродом без учета воздействия внешних магнитных полей ЭВТ имеет форму тороидального вихря (см. рис. 1а). Внешнее осевое магнитное поле ( $\mathbf{B}_{\text{вн}}$ ) в подобной геометрии рабочего участка приводит к азимутальной закрутке течения (рис. 1. б). При этом в объеме жидкого металла возникает вторичный вихрь, вращающийся в вертикальной плоскости противоположно основному

электровихревому течению (рис. 1. г) и отгесняющий его на периферию рабочей ванны. При этом геометрия систем отличается друг от друга, формой и размером малого и большого (рабочая ванная) электродов. В электрошлаковой сварке, как правило имеет место малый электрод больших размеров (относительно большого электрода), а в электрошлаковом переплаве малый электрод значительно меньше. Тем не менее, структура ЭВТ (течение вида рис. 1. а или вида рис.1. г) [2-4], как было указано выше влияет на качество получаемого продукта. При этом параметры систем отличаются по общим габаритам, а так же по свойствам рабочих жидкостей. Связи с этим целесообразно исследовать структуру ЭВТ при различных конфигурациях малого и большого электрода, а также проводить расчеты в безразмерном виде, далее такие результаты можно обобщить для систем с любыми габаритами и свойствами рабочей жидкости через коэффициенты масштаба.



**Рис. 1.** Структура ЭВТ под действием внешнего осевого магнитного поля. 1 - малый электрод, 2 - жидкий металл, 3 - контейнер-электрод. а) ЭВТ имеет вид тора, б) появление азимутальной закрутки, в) возникновение вторичного вихря, г) двухвихревое вращающееся ЭВТ.

**Численная методика.** Цель данной работы - получение границы раздела один вихрь - два вихря в зависимости от параметров ЭВТ (силы тока  $I$  и внешнего магнитного поля  $\mathbf{B}_{\text{вн}}$ ), а также свойств металлической жидкости.

Численные расчеты проводились методом контрольного объема на неструктурированной сетке, решалось уравнение движения при использовании нестационарной ламинарной модели.

Запишем уравнение движения, которое учитывает наличие внешнего магнитного поля в ССК [5]:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U}\nabla)\mathbf{U} = -\nabla p + \frac{1}{\sqrt{S}} \Delta \mathbf{U} + \frac{\cos \theta - 1}{4\pi^2 r^3 \sin \theta} e_\theta - \frac{N \sin \theta}{S 2\pi r^2} e_\varphi$$

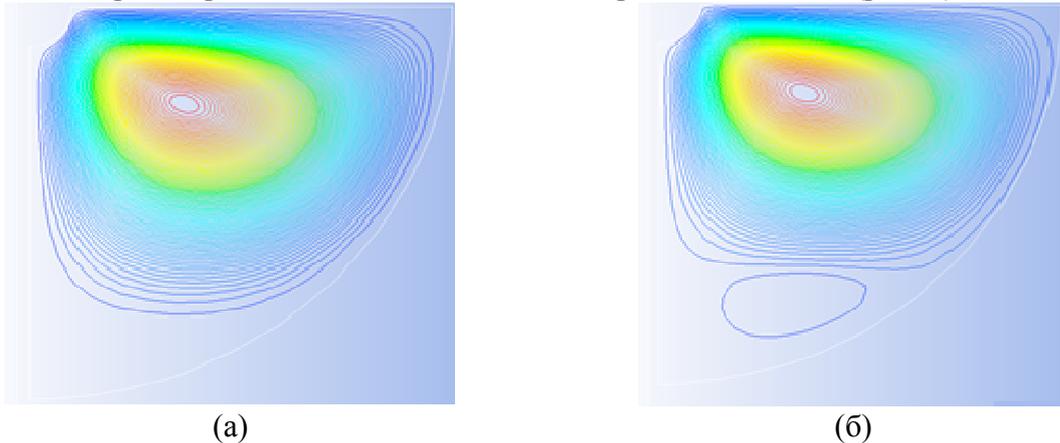
Для осесимметричных расчетов использовалась цилиндрическая система координат (ЦСК)  $(r, \varphi, z)$ , поэтому запишем компоненты электромагнитной силы в ЦСК:

$$F_r = \frac{(\sqrt{r^2 + z^2} - z)}{4\pi^2(r^2 + z^2)^2}, F_\varphi = \frac{Nr}{2\pi(r^2 + z^2)^{3/2}}, F_z = \frac{(\sqrt{r^2 + z^2} - z)}{4\pi^2(r^2 + z^2)^2}.$$

Для приведения уравнения к безразмерному виду используется масштабы: Линейный размер ( $R_2$ ), плотность тока ( $j_0 = I_0 / R_2^2$ ), магнитное поле ( $B_0 = \mu_0 I_0 / R_2$ ), электромагнитная сила ( $f_0 = \mu_0 I_0^2 / r_2^3$ ), скорость ( $u_0 = \sqrt{f_0 R_2 / \rho}$ ), время ( $t_0 = R_2 / u_0$ ), давление ( $p_0 = \rho u_0^2$ ), число Рейнольдса ( $Re = \sqrt{f_0 R_2^3 / \rho \nu^2} = \sqrt{\mu_0 / \rho} I_0 / \nu$ ), параметр  $S$  ( $S = Re^2 = \mu_0 I^2 / \rho \nu^2$ ), параметр  $N$  ( $N = B I_0 R_2 / \rho \nu^2$ ), параметр  $\alpha$  ( $\alpha = B_{\text{вн.}} / B_0 = N / S$ ).

Здесь параметр  $S$  характеризует интенсивность ЭВТ в зависимости от электрического тока и свойств электропроводящей жидкости, параметр  $N$  характеризует интенсивность внешнего осевого магнитного поля.

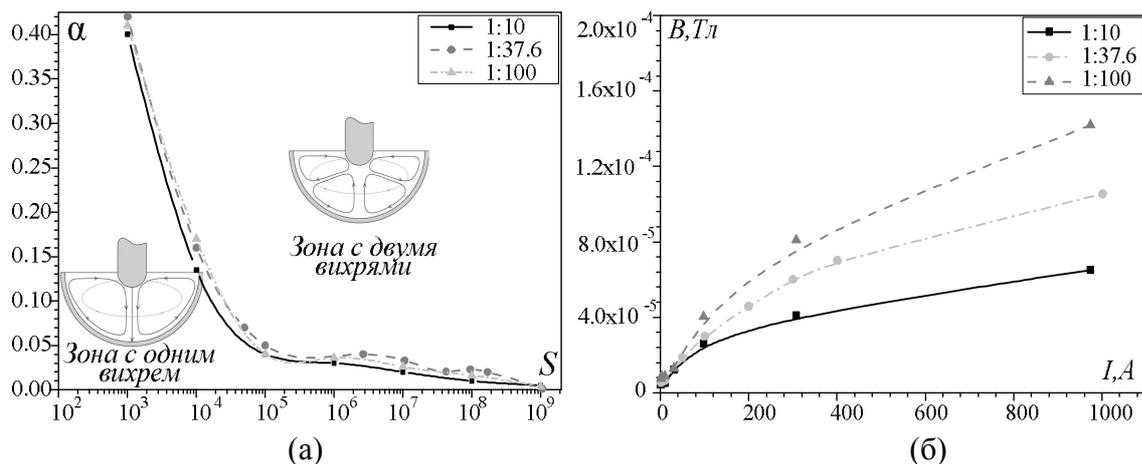
Было получено несколько режимов, для разного отношения размеров малого и большого электрода: 1:10, 1:37.6 и 1:100. Для получения границы раздела один вихрь - два вихря использовалась следующая методика: для некоторого значения параметра  $S$  задавалось значение параметра  $\alpha$  и проводился нестационарный расчет, в результате получались траектории движения жидкости, которые показаны на (рис. 2).



**Рис. 2.** Траектории движения жидкости. (а) одновихревая система, (б) двухвихревая система

Если получен случай *a*, тогда параметр  $\alpha$  увеличивается, до тех пор пока не будет получен случай *б*, или наоборот. Затем шаг изменения параметра  $\alpha$  уменьшается и вычисления выполняются снова, так делается то тех пор пока не будет достигнута 5% точность для точки границы один вихрь - два вихря. Аналогичные вычисления производятся для значений  $S$  в пределах  $10^3 \div 10^9$  для всех отношений малого и большого электродов.

**Результаты.** На (рис. 3) представлены, полученные границы раздела зоны с одним и двумя вихрями. С ростом параметра  $S$ , требуется меньшее  $\alpha$  для образования восходящего вихря. В размерном виде с ростом электрического тока, пропускаемого через электропроводящую жидкость, требуются большее внешнее магнитное для образования восходящего вихря, а с увеличением размера малого электрода меньшее магнитное поле.



**Рис. 3.** (а) Границы раздела зон с двумя вихрями и одним вихрем граница в параметрах  $\alpha$ - $S$ , (б) Границы раздела зон с двумя вихрями и одним вихрем безразмерная граница  $B$ - $I$ , для эвтектического сплава  $In$ - $Ga$ - $Sn$  [6]

**Заключение.** В результате численного моделирования получена граница раздела зон с одним и двумя вихрями. Граница получена как для безразмерного вида ( $\alpha$ - $S$ ), так и для размерного ( $B$ - $I$ ). При этом с увеличением числа  $S$  (параметр силы тока), требуется меньшее число  $\alpha$  ( $V_{вн}$ ) для образования восходящего вихря. Уменьшение размера малого электрода приводит к тому, что восходящий вихрь образуется при больших значениях числа  $\alpha$  ( $V_{вн}$ ).

Так же при числах  $S$  больше, чем  $\sim 10^7$  наблюдается осцилляция вихрей [7]. Дальнейшие исследования будут направлены на получения границы осцилляции.

#### Список литературы

1. Бояревич В. В., Фрейберг Я. Ж., Шилова Е. И., Щербинин Э. В. Электровихревые течения. Рига: Зинатне, 1985. 315 с.
2. Жилин В. Г., Ивочкин Ю. П., Тепляков И. О. К вопросу о закрутке осесимметричных электровихревых течений. // Теплофизика высоких температур №6, 2011, с. 957-959.
3. Жилин В. Г., Ивочкин Ю. П., Игумнов В. С., Оксман А. А. Экспериментальное исследование электровихревых течений в полусферическом объеме // ТВТ. 1995. Т. 33. № 1. С. 490–491.
4. Ивочкин Ю. П., Тепляков И. О., Гусева А. А. Численное и экспериментальное исследование структуры закрученного электровихревого течения // ТПТ. 2012. № 8. С. 5-11.
5. Shatrov V., Gerbeth G. Stability of the electrically induced flow between two hemispherical electrodes, Vol. 48, No. 3, 469-484, 2012.
6. Prokhorenko V. Ya., Ratushnyak E. A., Stadnyk B. I., Lakh V. I., Koval A. M. Physical properties of thermometric alloy  $In$ - $Ga$ - $Sn$ . High temperature vol.8. №2, 1970. p.374.
7. Ивочкин Ю. П., Тепляков И. О., Виноградов Д. А. Экспериментальное и численное исследование автоколебаний в электровихревом течении жидкого металла // ТПТ. 2015. № 12. С. 539-546.

## **Влияние осциллирующих полей на поведение тяжелого тела во вращающемся цилиндре с жидкостью**

**О. А. Власова<sup>a</sup>, Н. В. Козлов<sup>b</sup>**

<sup>a</sup> Лаборатория вибрационной гидромеханики, Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, 614990, Пермь, ул. Сибирская, 24.

email: vlasova\_oa@pspu.ru

<sup>b</sup> Лаборатория гидродинамической устойчивости, Институт механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук, 614013 Пермь, ул. Академика Королева, 1.

email: kozlov.n@icmm.ru

Экспериментально исследуется поведение тяжелого цилиндрического тела во вращающейся горизонтальной цилиндрической полости с жидкостью. Рассматривается два случая вращения полости: равномерное и модулированное. В случае равномерного движения кюветы обнаружено несколько режимов поведения тела в зависимости от скорости ее вращения: скольжение, «шагающий» цилиндр, стационарный подвес тела, неустойчивость подвешенного состояния, центрифугированное состояние и гравитационный отрыв. Переход между режимами определяется соотношением действующих на тело сил: силы тяжести, центробежной силы и вязкого взаимодействия со стенкой. Структуры течений вблизи цилиндра изучены при помощи PIV метода. При модулированном вращении полости исследуется динамика тела в центрифугированном состоянии, при этом в отсутствие модуляции оно совершает твердотельное вращение с полостью и жидкостью. Скорость вращения кюветы периодически изменяется (модулируется), в результате чего тело совершает тангенциальные колебания. Обнаружено, что при пороговом значении амплитуды и частоты модуляции скорости вращения полости тело отрывается от стенки. С повышением амплитуды модуляции при фиксированном значении частоты зазор между телом и стенкой увеличивается.

**Ключевые слова:** тяжелое тело; вращение; вязкая жидкость; подъемная сила; модуляция скорости.

## **Influence of oscillating fields on the heavy body behavior in a rotating cylinder with liquid**

**O. A. Vlasova<sup>a</sup>, N.V. Kozlov<sup>b</sup>**

<sup>a</sup> Laboratory of Vibrational Hydromechanics, Perm State Humanitarian Pedagogical University, Sibirskaya St. 24, 614990, Perm.

email: vlasova\_oa@pspu.ru

<sup>b</sup> Laboratory of Hydrodynamic Stability, Institute of Continuous Media Mechanics of the Ural Branch of Russian Academy of Science, Akademika Koroleva St. 1, 614013, Perm.

email: kozlov.n@icmm.ru

The behavior of a heavy cylinder in a rotating horizontal cylindrical cavity with liquid is studied experimentally. The uniform and modulated cavity rotations are considered. At the uniform rotation, several cylinder motion modes are found: sliding, «walking», stationary suspension, suspended state instability, centrifuged state and the gravitational detachment. The transition between the modes is determined by the gravity to centrifugal force ratio and the viscous interaction with the wall. The flow structure is studied using the PIV method. At the modulated rotation, the body dynamics is investigated in a centrifuged state, when it performs an average solid-state rotation with the liquid. The cavity rotation speed varies periodically. At threshold values of the amplitude and frequency of modulation of the cavity rotation speed, the body is repulsed from the wall. With an increase in the modulation amplitude for a fixed frequency, the gap between the body and the wall increases.

**Keywords:** heavy body; rotation; viscous liquid; lift force; time-varying rotation.

## 1. Экспериментальная установка и методика

Внутри прозрачной цилиндрической кюветы *I* помещается цилиндрическое тело *2*, изготовленное из алюминия или плексигласа (рис. 1). Кювета с цилиндром внутри заполняется водным раствором глицерина. Для изучения течений вблизи цилиндра в раствор добавляется визуализатор. Используемое в экспериментах тело считается «тяжелым», поскольку его плотность превышает плотность жидкости. На торец тела нанесена метка, которая позволяет контролировать его вращение вокруг собственной оси. Кювета вращается по закону  $\Omega = \Omega_{rot}(1 + \varepsilon \cos \Omega_{lib} t)$ . Здесь  $\Omega_{rot}$  – средняя скорость вращения полости,  $\varepsilon$  – амплитуды модуляции, определяющая максимальное отклонение от  $\Omega_{rot}$ ,  $\Omega_{lib}$  – частота модуляции. В случае равномерного вращения полости  $\varepsilon = 0$ . Для регистрации эксперимента используется скоростная видеокамера при освещении кюветы мощным источником света.

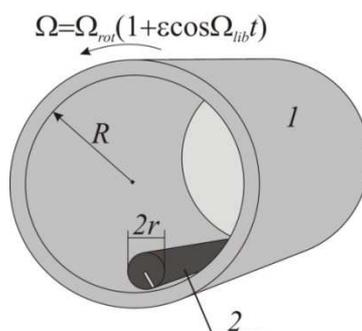


Рис. 1. Схема экспериментальной установки

## 2. Результаты экспериментов

### 2.1. Равномерное вращение

При изучении поведения тяжелого тела в горизонтальном равномерно вращающемся цилиндре с жидкостью обнаружены качественно различающиеся состояния тела в зависимости от скорости вращения полости. Исследована временная динамика и построены траектории движения тела. Обнаружены два механизма отрыва тела от границы полости: гидродинамический и гравитационный. Гидродинамический отрыв, при котором тело находится в практически стационарном в лабораторной системе отсчета

состоянии, ранее был обнаружен в [1]. В случае гравитационного отрыва тело совершает вращение вместе с полостью и удаляется от стенки полости на доле периода в результате колебаний относительно полости, вызываемых полем силы тяжести. В обоих случаях сила тяжести играет определяющую роль. Проведенное исследование позволяет учесть влияние поля силы тяжести в дальнейшем, при изучении поведения тела в неравномерно вращающейся полости.

## 2.2. Модулированное вращение

Рассматривается случай быстрого вращения полости, когда тело находится в центрифугированном состоянии. Периодическое изменение скорости вращения кюветы вызывает тангенциальные колебания тела, в результате которых генерируется осредненная подъемная сила [2, 3], отталкивающая тело от стенки полости (рис. 2). Повышение амплитуды модуляции сопровождается увеличением зазора  $d$  между телом и стенкой полости. Сила отталкивания проявляется на расстоянии, сравнимом с толщиной динамического пограничного слоя. Одновременно с азимутальными колебаниями цилиндр совершает вращательные колебания вокруг своей оси. Обнаружено, что в надкритической области в результате нарушения симметрии азимутальных колебаний тело в среднем совершает азимутальный дрейф. В области высоких частот колебаний кюветы найдена зависимость коэффициента подъемной силы от величины зазора между телом и стенкой.

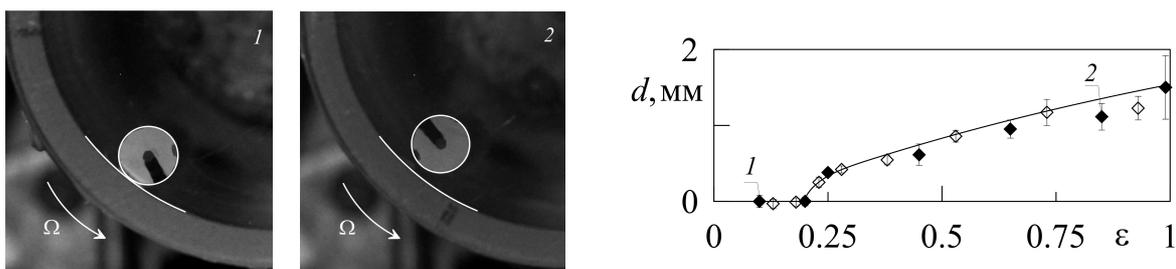


Рис. 2. Отрыв тела от границы полости

Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (проект 14-11-00476).

### Список литературы

1. Sun C. Mullin T., Wijngaarden L. van, Lohse D. Drag and lift forces on a counter-rotating cylinder in rotating flow // J. Fluid Mech. 2010. Vol. 664. P. 150–173.
2. Сенницкий В.Л. О силовом взаимодействии жидкости и тела, касающегося стенки // Письма в Журнал технической физики. 2005. Т. 31. № 20. С. 1–5.
3. Иванова А.А., Козлов В.Г., Щитицын В.Д. Подъемная сила, действующая на цилиндрическое тело в жидкости вблизи границы полости, совершающей поступательные колебания // ПМТФ. 2014. № 5. С. 55–64.

## Фазовая устойчивость бинарной системы, заполняющей замкнутый контейнер

А.М. Воробьев<sup>а</sup>, Д.В. Любимов<sup>б</sup>, Т.П. Любимова<sup>с</sup>

<sup>а</sup> Университет Саутгемптона, Southampton, SO17 1BJ, United Kingdom  
email: A.Vorobev@soton.ac.uk

<sup>б</sup> Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm

<sup>с</sup> Institute of Continuous Media Mechanics, Korolev St. 1, 614013, Perm  
email: lubimova@psu.ru

Рассматривается термодинамическая устойчивость изотермической бинарной смеси, заполняющей полость конечного размера. В данной системе есть два основных состояния, гомогенное и гетерогенное, устойчивость которых в первую очередь определяется средней плотностью и капиллярным числом. Кроме того, есть область параметров, в которой данные состояния метастабильны: конечное возмущение первоначально однородного состояния приводит к расслоению, и конечное возмущение первоначально неоднородного состояния может вызвать обратный процесс гомогенизации системы. Кроме того, показано, что границы устойчивости гомогенного и гетерогенного состояний зависят от размеров контейнера, что является новым наиболее интересным результатом данного исследования.

**Ключевые слова:** фазовый переход; метод фазового поля; бинарная система

## Phase stability of a binary mixture in a confined container

A. Vorobev<sup>a</sup>, D. Lyubimov<sup>b</sup>, T. Lyubimova<sup>c</sup>

<sup>a</sup> University of Southampton, Southampton, SO17 1BJ, United Kingdom  
email: A.Vorobev@soton.ac.uk

<sup>b</sup> Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm

<sup>c</sup> Institute of Continuous Media Mechanics, Korolev St. 1, 614013, Perm  
email: lubimova@psu.ru

Thermodynamic stability of an isothermal binary mixture enclosed in a closed cavity is studied. Such a system has two equilibrium states, homogeneous and heterogeneous, and the stability of these states is defined by the average concentration of the mixture and capillary parameter. Moreover, there is a range of parameters where these two states are metastable, i.e. a finite perturbation of a initially uniform state may result in phase-separation, and the perturbation of initially heterogeneous state may initiate a reverse process leading to homogenisation of the binary system. We also show how the phase boundaries depend on the size of the container, which is another interesting and new result of the current study.

**Keywords:** phase transition; phase field approach; binary mixture

## 1. Introduction

We examine the thermodynamic evolution of a binary mixture that belongs to the popular class of mixtures that are characterised by the upper critical solutal temperature. In such mixtures, the components are completely miscible if the mixture temperature is above the critical point, and the components are only partially miscible, until the solutal saturation is reached in both phases, if the mixture temperature is below the critical point.

It is assumed that the mixture is isothermal, and the mixture temperature is below the critical point. If solute is added to a solvent phase, then in a confined system the dissolution of the solute inclusion may be either complete or incomplete as dependent on the amount of the solute added and on the saturation levels in both solute and solvent phases. In the opposite case, if the system is initially homogeneous (solute and solvent are mixed up and form a homogeneous phase), a shake of the container may induce the process of nucleation. We aim to determine the range of parameters when the complete dissolution of two substances is possible, and, correspondingly, the range of parameters when the nucleation in a initially homogeneous phase may occur. We also aim to understand whether the properties of the nuclei are affected by the fact that the binary mixture is enclosed into a container.

## 2. Problem statement

Our analysis is restricted to the thermodynamic evolution of an isothermal binary mixture. The governing equation in non-dimensional form reads,

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \Delta(2AC + 4C^3 - Ca\Delta C). \quad (1)$$

Here  $C$  is the concentration that is defined as the mass fraction of a component in a mixture, and then this quantity is redefined by  $C \rightarrow (C - C_c)$ , where  $C_c$  is the concentration of the mixture in the critical point. The non-dimensional parameter  $A \equiv a/b$  defines the thermodynamic model for a binary mixture ( $a$  and  $b$  are two dimensional phenomenological parameters). In the current work, we assume that  $A = -1/2$ . The second non-dimensional parameter is the capillary number,  $Ca = \varepsilon/(L^2b)$ , that defines the role of capillary effects ( $\varepsilon$  is the capillary constant, that is introduced within the phase-field approach to characterise the strength of capillary effects). For non-dimensionalization of equation (1), the following typical scales were used: the size of the container,  $L$ , as a length unit and the diffusive time scale,  $L^2/b$ , as a time unit, where  $b$  is used a unit of the chemical potential.

The governing equation (1) is supplemented with the following boundary conditions:

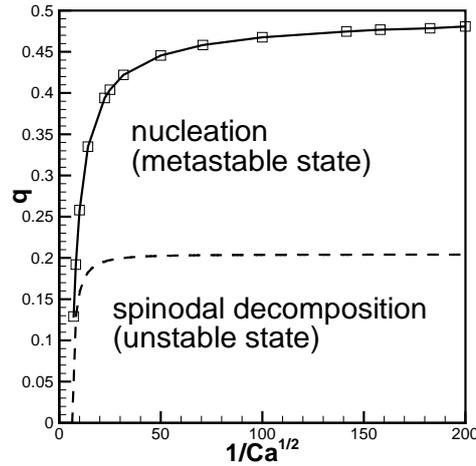
$$\frac{\partial \mu}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial n} = 0, \quad (2)$$

the first of which signifies no diffusive flux through the container's walls, while the second condition states that the molecules of the wall are neutral to the molecules of mixture components. Here  $\partial/\partial n$  is the normal derivative.

## 3. Results

The homogeneous solutions of equation (1) are trivial, with uniform concentration field,  $C = q$ , where  $q$  is the average concentration of the mixture.

We examine the full nonlinear stability of the homogeneous state for the binary mixture that fills a two-dimensional square cavity with respect to a finite droplet-like perturbation. The numerical results are reflected in Fig. 1.



**Fig. 1.** The phase diagram for a binary mixture in a closed cavity. The dashed line depicts the boundary of the zone of spinodal instability (a homogeneous state is unstable to infinitely small perturbations); the solid line defines the zone of nucleation (a homogeneous state is stable to infinitely small perturbations but unstable to finite-size perturbations). The homogeneous state is absolutely stable above the solid line.

#### 4. Conclusions

We have examined the phase stability of the liquid-liquid binary mixture that fills a closed cavity. The mixture can be either homogeneous (the liquids fully mix) or heterogeneous (there exists an interface separating the liquids). The stability of these two states is defined by the binodal curve that approximately may be given by the following expression:

$$q = 0.5 - \left( \frac{\varepsilon}{L^2 b} \right)^{3/8}. \quad (3)$$

If the container is very large ( $L \rightarrow \infty$ ), then the boundary of the nucleation zone shifts to the value  $1/2$ . At the same time, the size of the critical droplet would become very large (see [1] for more details), which means that the binary system may not be in an equilibrium heterogeneous state if the average concentration is near  $1/2$ , which is obvious. For the lower values of  $q$  the nucleation would be possible.

The result given by expression (3) is particularly important for smaller enclosures, when dissolution of the solute additive may not occur as expected. Moreover, an experiment conducted with the use of the containers of different sizes would in general produce different phase diagrams for the same binary mixture.

#### 5. Acknowledgments

The financial support of the Government of Perm region, Russia (Contract No. C-26-004-03), the Royal Society (Ref. IE160277), and the Russian Foundation for Basic Research (Grant No. 16-5110079) is gratefully acknowledged.

#### Список литературы

1. Vorobev A., Lyubimov D., Lyubimova T. Phase diagram of a binary mixture in a closed container // Phys. Rev. E. 95, 022803 (2017)

## **Экспериментальные исследования механических свойств резин, наполненных техническим углеродом и слоистыми глинистыми наночастицами**

**О. К. Гаришин<sup>a</sup>, А. Л. Свистков<sup>a,b</sup>, В. В. Шадрин<sup>a,b</sup>**

<sup>a</sup> Институт механики сплошных сред УрО РАН

614013, Пермь, ул. ак. Королева, 1

email: gar@icmm.ru, svistkov@icmm.ru, shadrin@icmm.ru

<sup>b</sup> Пермский государственный национальный исследовательский университет

614990, Пермь, ул. Букирева, 15

В настоящее время нанонаполнитель из диспергированных глинистых минералов является одним из перспективных направлений в разработке новых рецептур для автомобильных шин. В работе представлены результаты экспериментов по исследованию вязкоупругих свойств эластомерных нанокompозитов с наполнителем из слоистого глинистого минерала (монтмориллонит). Обнаружено, что добавление даже незначительного количества (3-5%-мас.) монтмориллонита существенно сказывается на механических свойствах резины, способствуя развитию в материале вязко-упругих процессов и появлению остаточных деформаций при деформировании.

**Ключевые слова:** эластомер; глинистый наполнитель; прочность; деформация

## **Experimental studies of the mechanical properties of rubbers filled with carbon black and layered clay nanoparticles**

**O. K. Garishin<sup>a</sup>, A. L. Svistkov<sup>a,b</sup>, V. V. Shadrin<sup>a,b</sup>**

<sup>a</sup> Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, ac. Korolev St. 1, 614013, Perm

e-mail: gar@icmm.ru, svistkov@icmm.ru, shadrin@icmm.ru

<sup>b</sup> Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm

Currently, nanofiller from dispersed clay minerals is one of the promising directions in the development of new formulations for automobile tires. The paper presents the results of experiments on investigation of viscoelastic properties of elastomeric nanocomposites filled by layered clay mineral (montmorillonite). Our investigations have demonstrated that the incorporation of even small amounts of montmorillonite (3-5%-mas) significantly influences the mechanical properties of rubbers, giving rise to viscoelastic processes in the material and residual strains appearance during deformation.

**Keywords:** elastomer; clay filler; strength; strain

В работе исследовались эластомерные нанокompозиты, содержащие относительно новый (для них) тип наполнителя – монтмориллонит. Этот материал относится к

классу разбухающих глинистых минералов и, при определённой обработке, способен диспергировать на наночастицы в виде ультратонких чешуек с минимальной толщиной до 1 нанометра и характерным размером от 30 нм до нескольких микрон. Эти частицы могут образовывать отдельные пачки – тактоиды – из параллельно расположенных пластинок (до нескольких десятков). Природный монтмориллонит состоит из хаотически ориентированных тактоидов.

В качестве матрицы использовали вулканизаты натурального каучука, содержащие технический углерод марки N330 и ряд других добавок, концентрация которых была одинаковой для всех образцов. Соответственно, вопросы их влияния на изменение механических свойств композита в данной работе не рассматривались.

Таким образом, в эксперименте исследовались следующие материалы:  
– натуральный каучук (НК), наполненный 21%-мас. технического углерода (ТУ);  
– НК, наполненный 21%-мас. ТУ и 3.5%-мас. монтмориллонита (ММТ).

Экспериментальные исследования проводились на универсальной разрывной машине Testometric FS100kN СТ. При этом использовалась специальная методика, основанная на циклическом деформировании образца с переменной пошаговой нарастающей амплитудой по деформациям (и остановками на релаксацию при смене направления деформирования). Испытания такого рода применяются обычно при исследовании полимеров, когда требуется получить за один эксперимент комплексные данные о вязкоупругих и упругопластических свойствах материала [1-5]. Скорость движения захватов (как при растяжении, так и при снятии нагрузки) равнялась 20%/мин. Время каждой релаксации составляло 10 минут. Образцы изготавливались в виде лопаток по стандарту ISO 527-2-5A с рабочей частью 2×4×20 мм.

На рисунке показано как наличие глинистого наполнителя сказывается на механических свойствах резины. Представлены результаты 12 циклов нагружения (с остановками на релаксацию) образцов резины, наполненной ТУ (21.5%-мас.) и такой же резины с дополнительным наполнением ММТ (3.5%-мас.). На графике видно, что для обоих видов наполнителя имеет место существенное размягчение материала (эффект Маллинза [6]) и появление ярко выраженных вязкоупругих свойств.

На начальном этапе нагружения ввод глинистого нанонаполнителя сначала вызывал увеличение напряжений по сравнению с композитами, содержащими только ТУ. При дальнейшем увеличении  $\lambda$  композиты с глинистыми наночастицами становились более мягкими (по сравнению с системами "каучук + ТУ"). Для наглядности на графике нанесены штриховые линии, соединяющие максимальные напряжения на цикле для каждого материала. Эти линии пересекаются при удлинениях примерно  $\lambda=3$ .

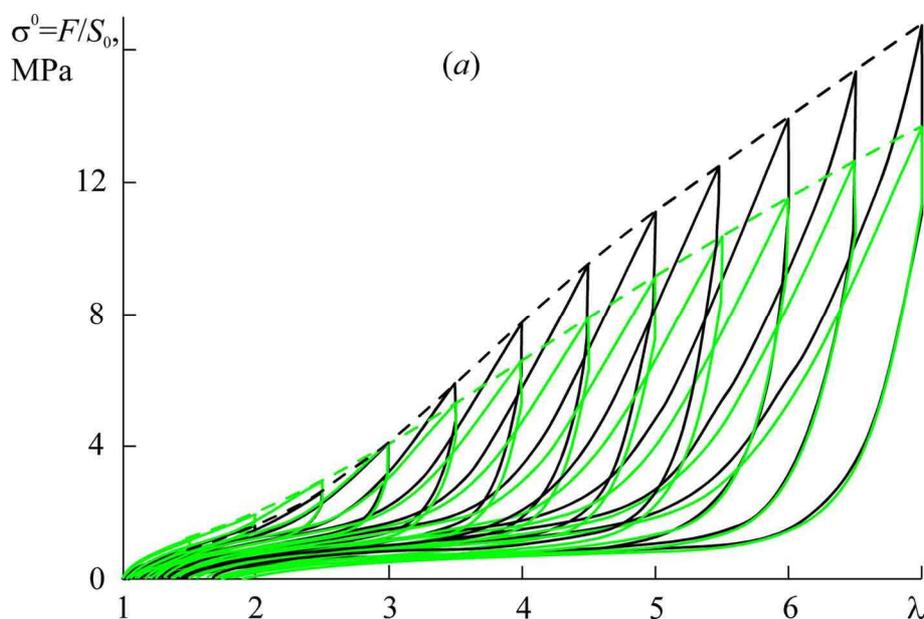
На наш взгляд этот эффект связан с тем, что при больших кратностях удлинения композита в его структуре происходит переориентация частиц монтмориллонита вдоль оси растяжения. Пластины в тактоиде под действием внешней деформации могут проскальзывать относительно друг друга, разгружая, тем самым, перенапряженные места. Следовательно, требуется меньше энергии на деформирование системы и уровень макронапряжений снижается.

Интересно отметить, что кривые разгрузки и остаточные деформации для данных материалов оказались близки, то есть на этих этапах циклического нагружения ввод монтмориллонита сказывается слабо.

В итоге можно сделать вывод, что добавление в резину даже относительно небольших количеств ММТ существенно сказывается на её механических свойствах, способствуя при деформировании материала развитию как обратимых, так и диссипативных процессов (вязко-упругих и упруго-пластических). Это связано с особенностями строения частиц наполнителя, представляющих собой пачки из параллельно распо-

женных ультратонких силикатных пластинок. В процессе нагружения материала, происходит переориентация и искажение формы этих частиц, что приводит к снижению концентрации напряжений на уровне микроструктуры и диссипации энергии.

Для резины автомобильных шин, рабочий диапазон деформаций которых не превышает 20-50%, включение глинистого наполнителя (монтмориллонита), который усиливает жёсткость в начале деформирования, может быть вполне оправдано.



**Рисунок.** Кривые циклического растяжения каучуков, наполненных техническим углеродом и монтмориллонитом; NR-CB30 – чёрные линии; NR-CB30-MMT5 – зелёные линии

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 16-08-00756 и 17-08-01118.

### Список литературы

1. Meyer R. W., Pruitt L. A. The effect of cyclic true strain on the morphology, structure, and relaxation behavior of ultra high molecular weight polyethylene // *Polymer*. 2001, Vol. 42, P. 5293–5306.
2. Bergstrom J. S., Rimnac C. M., Kurtz S. M. An augmented hybrid constitutive model for simulation of unloading and cyclic loading behavior of conventional and highly crosslinked UHMWPE // *Biomaterials*. 2004. Vol. 25. P. 2171–2178.
3. Ayoub G., Zairi F., Nait-Abdelaziz M., Gloaguen J. M. Modelling large deformation behaviour under loading–unloading of semicrystalline polymers: application to a high density polyethylene // *Int. J. Plasticity*. 2010. Vol. 6. P. 329–347.
4. Drozdov A. D., Klitkou R., Christiansen J. C. Cyclic viscoplasticity of semicrystalline polymers with finite deformations // *Mechanics of Materials*. 2013. Vol. 56. P. 53–64.
5. Garishin O. K., Korlyakov A. S., Shadrin V. V. Investigation of the elastic-viscous-plastic behavior of thermoplastic materials. Experiment and simulation // XLII Summer School-Conference "Advanced problems in mechanics": Proceedings. St.-Petersburg. 2014. P. 547–553.
6. Mullins L. J. Softening of rubber by deformation // *Rub. Chem. Techn.*. 1969. Vol. 42, N. 1, P. 165–185.

## **Профиль температуры вблизи границы раздела жидкость–газ при испарении различных жидкостей в неизотермических условиях**

**Е. Я. Гатапова<sup>a,b</sup>, Е. Г. Корбанова<sup>a,b</sup>, О. А. Кабов<sup>a,b</sup>**

<sup>a</sup> Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН,  
630090, Новосибирск, проспект Лаврентьева, 1

email: gatapova@itp.nsc.ru

<sup>b</sup> Новосибирский государственный университет, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2

Измерен профиль температуры на границе раздела жидкость–газ при испарении тонкого слоя жидкости. Испарение происходит при локальном нагреве со стороны подложки в условиях нормального атмосферного давления. Использовалась микротермопара с толщиной короляка менее 4 мкм. Величина скачка температуры возрастает с увеличением температуры нагревателя. В зависимости от внешних условий, температура в газовой фазе вблизи границы раздела жидкость–газ может быть выше или ниже, чем у жидкости. Профиль температуры для различных жидкостей имеет отличный характер.

**Ключевые слова:** скачок температуры; межфазная границы; испарение

## **Temperature profile near liquid–gas interface during evaporation of different fluids for non–isothermal case**

**E. Ya. Gatapova<sup>a,b</sup>, E. G. Korbanova<sup>a,b</sup>, O. A. Kabov<sup>a,b</sup>**

<sup>a</sup> Kutateladze Institute of Thermophysics SB RAS, Lavrentyev Ave. 1, 630090, Novosibirsk  
email: gatapova@itp.nsc.ru

<sup>b</sup> Novosibirsk State University, Pirogova Str. 2, 630090, Novosibirsk

The temperature profiles are measured across a liquid - gas at normal atmospheric conditions. A thin water layer is locally heated from the bottom substrate and it evaporates from the liquid-gas interface. Microthermocouple with the sensor element thickness of 4  $\mu\text{m}$  is used. The temperature jump value is found to increase with increasing the temperature difference between a heater and an ambient gas. It is shown that the temperature profile has a different character for different liquids.

**Keywords:** temperature jump; interface; evaporation

### **1. Введение**

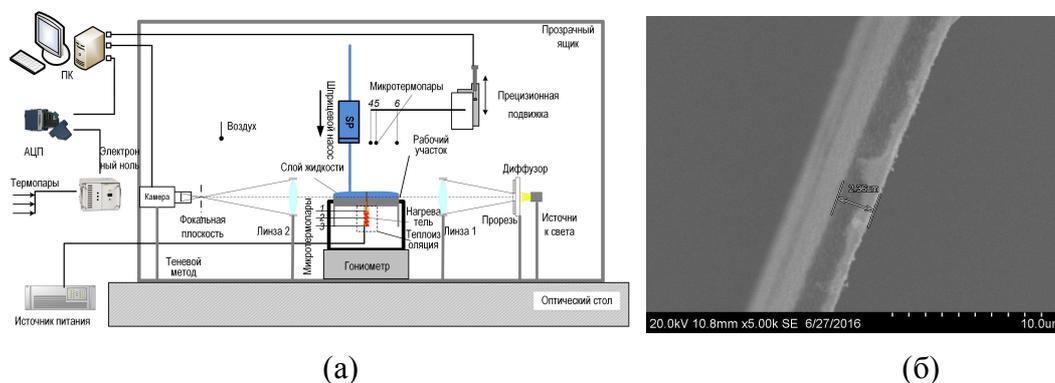
Особенности на границе раздела жидкость–газ при фазовом переходе представляют большой интерес для систем охлаждения [1]. Особенно это актуально для микросистем, где сама межфазная граница трудно определима, а эффекты, возникающие в области слоя Кнудсена, становятся существенными. Граница раздела жидкость–газ, как

правило при фазовом переходе находится далеко от термодинамического равновесия. Правильное определение граничных условий является важным фундаментальным вопросом для лучшего понимания неравновесных явлений, таких как эффект Лейденфроста и динамика линии контакта трех фаз [2].

Существование скачка температуры в слое Кнудсена при испарении и конденсации давно известно в кинетической теории [3,4]. Один из подходов к описанию теплообмена в двухфазной системе, основанный на полном уравнении Навье–Стокса с граничными условиями со скачками температуры и давления был предложен в [5]. Однако, большинство экспериментальных данных о скачке температуры на границе раздела жидкость–газ были получены в условиях пониженного давления [6,7]. В работе [8] было впервые установлено существование скачка температуры на границе раздела вода–воздух при атмосферном давлении и зафиксирован рост скачка с ростом температуры нагревателя с помощью микротермопары с размером королька 4 мкм. В данной работе представлены новые результаты для жидкостей  $C_2H_5OH$ ,  $CH_2I_2$  и HFE-7100.

## 2. Экспериментальная установка и процедура измерения

В работе представлены новые данные экспериментального исследования температурного поля двухслойной системы жидкость–газ, включая границу раздела. Эксперименты проведены для четырех различных жидкостей при локальном нагреве и испарении. Использовались: сверхчистая вода (MilliQ), 99%  $C_2H_5OH$ ,  $CH_2I_2$  и HFE-7100. Схема экспериментальной установки и оборудования представлена на (рис. 1. а), [8]. Эксперименты проводились при квазистационарном режиме нагрева. Температура нагревателя контролировалась тремя микротермопарами, а атмосфера при помощи термогигрометра Testo и барометра.



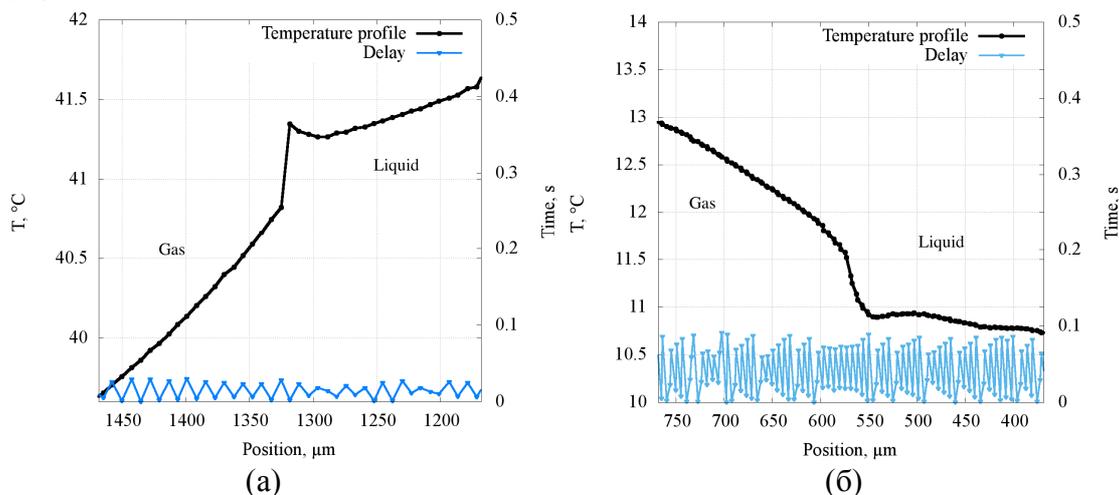
**Рис. 1.** (а) – Схема экспериментальной установки и используемого оборудования. (б) – СЭМ фотография микротермопары на Hitachi S340.

Для измерения температурного профиля поперек слоев использовалась микротермопара с толщиной королька 3–4 мкм (рис. 1. б). Калибровка микротермопар осуществлялась в диапазоне температур 5 – 100°C. Ошибка измерений 0,02°C. Прецизионная подвижка (с минимальным шагом 50 нм) перемещала микротермопару и определяла её положение. Для визуализации использовался теневой метод (3 мкм на пиксель). Синхронизация чтений микротермопары и положения микроподвижки производилась с помощью специально разработанного программного обеспечения на C++.

## 3. Полученные результаты и выводы

Измерения позволили получить подробную картину температурного профиля поперек слоев жидкость–газ. Подтверждено существование скачка температуры на границе раздела жидкость–газ при атмосферном давлении также для жидкостей  $C_2H_5OH$ ,  $CH_2I_2$

и HFE-7100 (рис. 2). Получены подробные данные для мощности нагревателя от 0 до 1,2 Вт.



**Рис. 2.** Профили температур: (а) - для  $\text{CH}_2\text{I}_2$ -воздух, темп. нагревателя  $41,5^\circ\text{C}$ , темп. воздуха  $25,9^\circ\text{C}$ , влажность  $47,2\%$ , давление  $99,99$  кПа; (б) – HFE-7100 – воздух, нет нагрева, темп. воздуха  $26,1^\circ\text{C}$ , влажность  $24,9\%$ , давление  $99,59$  кПа.

Показано, что для различных жидкостей профиль температуры может иметь разный характер. В частности, при достаточном увеличении температуры нагревателя температура воздуха вблизи границы раздела  $\text{CH}_2\text{I}_2$ -воздух ниже температуры жидкости. В то время как для HFE-7100 температура воздуха выше температуры HFE-7100 на границе раздела (рис. 2). Измерен расход испарившейся жидкости, который составил  $0,008$  мкл/с для испарения  $\text{CH}_2\text{I}_2$  в воздух при мощности  $0,252$  Вт и  $0,477$  мкл/с для HFE-7100 без нагрева.

### Список литературы

1. Rao S.R., Peles Y. Spatiotemporally resolved heat transfer measurements for flow boiling in microchannels// International Journal of Heat and Mass Transfer, 2015. Vol. 89, P. 482–493.
2. Blake T.D. The physics of moving wetting lines// Journal of Colloid and Interface Science. 2006. Vol. 299, P. 1–13.
3. Kucherov R.Ya., Rikenglaz L.E. On hydrodynamic boundary conditions for evaporation and condensation// Journal of Experimental and Theoretical Physics. 1960. Vol. 37, P. 88–89.
4. Pao Y.-P. Temperature and density jumps in the kinetic theory of gases and vapors// Physics of Fluids. 1971. Vol. 14, P. 1340–1346.
5. Gatapova E.Y., Graur I.A., Sharipov F., Kabov O.A. The temperature and pressure jumps at the vapor–liquid interface: Application to a two-phase cooling system// International Journal of Heat and Mass Transfer. 2015. Vol. 83, P. 235 – 243. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2014.12.003>
6. Rose J.W. Interphase matter transfer, the condensation coefficient and dropwise condensation// Proc. 11th Int. Heat Transfer Conf. 1998. 1, P. 89–104.
7. Fang G., Ward C.A. Temperature measured close to the interface of an evaporating liquid// Physical Review E. 1999. Vol. 59, P. 417–428.
8. Gatapova E.Y., Graur I.A., Kabov O.A., Aniskin V.M., Filipenko M.A., Sharipov F., Tadrast L. The temperature jump at water-air interface during evaporation// International Journal of Heat and Mass Transfer. 2017. Vol. 104, P. 800 – 812. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.08.111>.

## **Влияние магнитного поля на конвекцию магнитной жидкости в вертикальных связанных каналах**

**А. Ф. Глухов, В. В. Ладейщикова, А. С. Сидоров**

Пермский государственный национальный исследовательский университет  
614990, Пермь, ул. Букирева, 15  
email: glua@mail.ru

В работе экспериментально исследовалось конвективное течение магнитной жидкости в вертикальных связанных каналах в случае, когда приложенный градиент температуры и вектор напряженности внешнего магнитного поля направлены вертикально. Показано, что однородное магнитное поле уменьшает интенсивность конвективного течения и измерено критическое значение поля, при котором конвекция скачком завершается механическим равновесием. При уменьшении поля конвекция возникает вновь, но с гистерезисом.

**Ключевые слова:** вертикальные связанные каналы; конвекция; магнитная жидкость; магнитное поле

## **Influence of the magnetic field on the convection of a magnetic fluid in vertical coupled channels**

**A. F. Glukhov, V. V. Ladeyshchikova, A. S. Sidorov**

Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm  
email: glua@mail.ru

The convective flow of a magnetic fluid in vertical coupled channels is studied experimentally. The temperature gradient and the external magnetic field strength vector were directed vertically. It is shown that a homogeneous magnetic field reduces the intensity of the convective flow. The critical value of the field at which convection abruptly ends with mechanical equilibrium is measured. With a decrease in the field, convection arises again, but with hysteresis.

**Keywords:** vertical coupled channels; convection; magnetic fluid; magnetic field

### **1. Введение**

В экспериментах с магнитными жидкостями в связанных вертикальных каналах [1, 2] было замечено, что конвекция возникает “жестко”, колебательным образом и в опытах наблюдается периодическая смена направления течения вблизи порога неустойчивости равновесия. Эффекты в магнитных жидкостях качественно аналогичны таковым при конвекции бинарных смесей с положительной термодиффузией, которые объяснены генерацией концентрационных неоднородностей за счет термодиффузион-

ного разделения компонентов поперек узких каналов [3]. Роль коллоидных частиц длительное время оставалась в тени, а в [4] даже сделана попытка объяснить переброшенные колебания в рамках трехкомпонентной модели, т.е. в предположении бинарности жидкого носителя магнитных частиц. Для самих частиц учитывалась только их седиментация в гравитационном поле, а иные возможные механизмы генерации неоднородностей, например термофорез, не учитывались.

Наличие магнитного момента у частиц позволяет воздействовать на них магнитным полем, что может способствовать прояснению роли частиц в конвекции коллоидов.

Ранее влияние однородного магнитного поля на конвекцию магнитных жидкостей в вертикальном слое при подогреве сбоку описано в [5]. Механизм влияния поля – это термомагнитный эффект [5, 6].

## 2. Методика эксперимента

Установка для измерения конвективного течения [2, 3] состояла из прямоугольного латунного стержня, снабженного массивными изотермическими теплообменниками. Вдоль стержня создавалось однородное по сечению и линейное по высоте стержня распределение температуры. В стержне были вырезаны два продольных канала квадратного сечения, соединенные сверху и внизу перемычками того же профиля. В опытах использовалась установка с поперечным сечением каналов  $3.2 \times 3.2 \text{ мм}^2$  и длиной  $50 \text{ мм}$ . Расстояние между осями каналов, составляло  $6 \text{ мм}$ . Для проведения визуальных наблюдений каналы закрывались прозрачной пластиной из органического стекла, в результате чего образовывался замкнутый гидравлический контур, заполненный магнитной жидкостью.

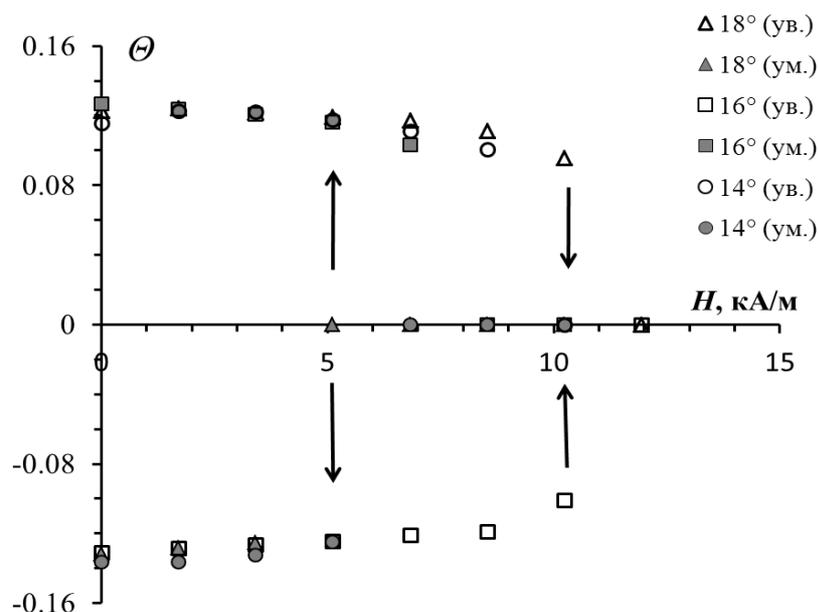
Интенсивность свободноконвективного течения в эксперименте фиксировалась по безразмерным искажениям  $\Theta = T_x / \Delta T$  температурного поля, которое измерялось дифференциальной термопарой, установленной на середине высоты каналов. Термопара фиксировала разность температур  $T_x$  между восходящим и нисходящим потоками. Спаи термопары имели длину  $1.5 \text{ мм}$  и достигали центра каждого из каналов. Сигнал  $T_x$  термопары подавался на цифровой микровольтметр Термодат 38В1. Спаи второй термопары были вставлены в тонкие сверления внутри теплообменников и измеряли вертикальный перепад температур  $\Delta T$  вдоль каналов, который поддерживался на заданном уровне терморегулятором Термодат 16. Эти приборы подключались к USB – порту компьютера. Данные с приборов записывались и сохранялись при помощи программы TermodatNet.

Магнитное поле создавалось катушками Гельмгольца. Основные параметры системы катушек указаны в работе [5].

В экспериментах использовалась магнитная жидкость на основе керосина с 4 % содержанием магнетитовых частиц, со средним диаметром  $10 \text{ нм}$ .

## 3. Результаты

Пока величина вертикального градиента температуры не превышает критического значения, магнитная жидкость находится в состоянии механического равновесия. При постепенном увеличении  $\Delta T$  после достижения критических условий подогрева, в жидкости начинается переход от равновесия к конвективному течению. Этот процесс может завершиться стационарным течением с определенным направлением циркуляции, когда жидкость в одном канале поднимается вверх, а в другом опускается вниз.



**Рисунок.** Зависимость интенсивности конвективного течения от напряженности внешнего магнитного поля для разных перепадов температур  $\Delta T$  между теплообменниками. Пустые символы случай увеличения  $H$ , закрашенные – уменьшения  $H$

Узкий интервал припороговых низкочастотных перебросовых колебаний [2, 4] в описываемых экспериментах не рассматривался, а быстро проходил, путем выбора сразу достаточно больших перепадов температур.

После возникновения стационарного течения включалось однородное вертикальное магнитное поле. При постепенном увеличении поля от 0 до 15 кА/м интенсивность течения  $\Theta$  уменьшалась, и в диапазоне значений 10 – 12 кА/м течение скачком переходило к механическому равновесию. При обратном ходе по напряженности, т.е. при ее уменьшении, механическое равновесие могло вновь скачком смениться конвекцией. Этот переход происходил при более низких значениях  $H$ , т.е. наблюдался гистерезис.

### Список литературы

1. Путин Г.Ф. Экспериментальное исследование влияния барометрического распределения на течения ферромагнитных коллоидов // Материалы 11-го Рижского совещания по магнитной гидродинамике. Рига. 1984. С. 15 - 18.
2. Глухов А.Ф., Путин Г.Ф. Конвекция магнитных жидкостей в связанных каналах при подогреве снизу // Изв. РАН. МЖГ. 2010. № 5. С. 41-48.
3. Глухов А.Ф., Демин В.А., Путин Г.Ф. Конвекция бинарной смеси в связанных каналах при подогреве снизу // Изв. РАН. МЖГ. 2007. № 2. С. 13-23.
4. Глухов А.Ф., Демин В.А., Попов Е.А. Тепловая конвекция магнитной наносuspension в узких каналах // Изв. РАН, МЖГ. 2013. № 1. С. 41-61.
5. Bozhko A.A., Putin G.F., Sidorov A.S., Suslov S.A. Thermomagnetic convective flows in a vertical layer of ferrocolloid: Perturbation energy analysis and experimental study // Physical Review E. 2012. Vol. 86. 016301.
6. Баитовой В.Г., Берковский Б.М., Вислович А.Н. Введение в термомеханику магнитных жидкостей. М.: ИВТАН, 1985. 188 с.

## Волны на границе раздела двухслойной системы невязких жидкостей в поле горизонтальных вибраций

Д. С. Голдобин<sup>a,b</sup>, А. В. Пименова<sup>a</sup>, Д. В. Любимов<sup>b</sup>, Т. П. Любимова<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup> Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013, Пермь, ул. Ак. Королева, 1  
email: anastasiya.pimenova@gmail.com

<sup>b</sup> Пермский государственный национальный исследовательский университет,  
614990, Пермь, ул. Букирева, 15

Исследуются волны на границе раздела двух достаточно тонких горизонтальных слоев несмешивающихся жидкостей, вовлеченных в высокочастотные горизонтальные вибрации. Выведены уравнения динамики границы раздела, соответствующие двумерным и трехмерным течениям. Результаты получены в рамках длинноволнового приближения, которое обосновано тем, что линейный анализ неустойчивости в системе выявляет ее длинноволновый характер для случая достаточно тонких слоев. Уравнение для плоских волн ниже порога линейной неустойчивости системы имеет вид «плюс»-уравнения Буссинеска. Для трехмерных волн горизонтальные координаты вдоль и поперек направления вибраций существенно неравноправны.

**Ключевые слова:** двухслойная система жидкостей; горизонтальные вибрации; волны на поверхности раздела

## Interfacial waves in a two-layer liquid system subject to horizontal vibrations

D. S. Goldobin<sup>a,b</sup>, A. V. Pimenova<sup>a</sup>, D. V. Lyubimov<sup>b</sup>, T. P. Lyubimova<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup> Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Ak. Koroleva str. 1, 614013, Perm  
email: anastasiya.pimenova@gmail.com

<sup>b</sup> Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm

We study the waves at the interface between two thin horizontal layers of immiscible liquids subject to high-frequency horizontal vibrations. The evolution equations for two- and three-dimensional flow were derived. The results are derived within the framework of the long-wave approximation since the linear stability analysis for the flat-interface state reveals the instabilities of thin layers to be long wavelength. Below the instability threshold the dynamics of plane waves is governed the plus-Boussinesq equation. For 3-d waves, there is a significant inequality between the perpendicular- and tangential-to-vibrations horizontal coordinates.

**Keywords:** two-layer liquid system; horizontal vibrations; interfacial waves

## 1. Введение

Рассматривается система, состоящая из двух горизонтальных слоев несмешивающихся между собой жидкостей, ограниченная сверху и снизу твердыми непроницаемыми горизонтальными поверхностями. Система вовлекается в горизонтальные линейно-поляризованные вибрации со скоростью вибрационного движения  $(b/2)e^{i\omega t}$ . Анализ двумерных течений в заданной системе был проведен в работах [1–4]. В частности, в работе [2] было показано, что высокочастотные горизонтальные вибрации, в отличие от вертикальных, не могут подавлять неустойчивость Релея–Тейлора, но могут приводить к возникновению квазиравновесных состояний. Также было показано, что в достаточно тонких слоях невязких жидкостей неустойчивость является подкритической и носит длинноволновый характер. Для случая одинаковой толщины слоев  $h$ , условием длинноволности является  $h < [3\sigma(g(\rho_1 - \rho_2))]^{1/2}$ , где  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $\rho_i$  — плотность  $i$ -й жидкости,  $g$  — ускорение свободного падения [2].

## 2. Уравнения эволюции длинноволновых возмущений

Рассмотрим динамику длинноволновых возмущений с помощью стандартного метода многих масштабов с малыми параметрами  $(T^{-1}/\omega)$  и  $(h/l)$ , где  $T$  — характерный временной масштаб эволюции волны на границе раздела,  $l$  — характерная длина волны. В двумерном случае динамика системы в терминах осредненных по периоду вибраций потенциала поля скорость  $\varphi$  и отклонения поверхности раздела от невозмущенного состояния  $\eta$  описывается уравнениями

$$\begin{cases} B_0 \frac{h_1 \rho_2 + h_2 \rho_1}{h_1 h_2} (h_1 \varphi_1)_\tau = \left[ 1 - \frac{1}{3} \frac{h_1^3 \rho_2 + h_2^3 \rho_1}{h_1 \rho_2 + h_2 \rho_1} \right] \eta_{xx} + \frac{3}{2} \frac{\rho_2 - \rho_1}{h_1 \rho_2 + h_2 \rho_1} \eta^2 + \frac{B_1}{B_0} \eta, \\ \eta_\tau = -(h_1 \varphi_1)_{xx}. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь введен параметр вибрационного воздействия

$$B \equiv \frac{\rho_* b^2}{\sqrt{\alpha(\rho_2 - \rho_1)g}} = B_0 + B_1, \quad B_0 = \frac{2(h_1 \rho_2 + h_2 \rho_1)^3}{\rho_1 \rho_2 (\rho_2 - \rho_1)^2 (h_1 + h_2)^2},$$

где  $B_0$  — критическое значение этого параметра. С помощью преобразования координат вида

$$\begin{aligned} x &\rightarrow xL \sqrt{\frac{B_0}{(-B_1)} \left[ 1 - \frac{h^2}{3L^2} \right]}, & t &\rightarrow t \sqrt{\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_*} \frac{L^3 B_0^3}{hb^2 B_1^2} \left[ 1 - \frac{h^2}{3L^2} \right]}, \\ \eta &\rightarrow \eta h \frac{\rho_2 + \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \frac{(-B_1)}{B_0}, & \varphi &\rightarrow \varphi \sqrt{\frac{\rho_*(\rho_2 + \rho_1)^2}{(\rho_2 + \rho_1)^3} \frac{L^3 B_1^2}{hb^2 B_0^3} \left[ 1 - \frac{h^2}{3L^2} \right]}, \end{aligned}$$

система уравнений (1) может быть приведена к виду, аналогичному «плюс» уравнению Буссинеска:

$$\ddot{\eta} - \eta_{xx} + \left( (3/2) \eta^2 + \eta_{xx} \right)_{xx} = 0.$$

Для трехмерных волн аналогичный анализ позволяет получить следующие уравнение:

$$\ddot{\eta} - \eta_{xx} - \eta_{yy} + \left( (3/2) \eta^2 + \eta_{xx} \right)_{xx} = 0.$$

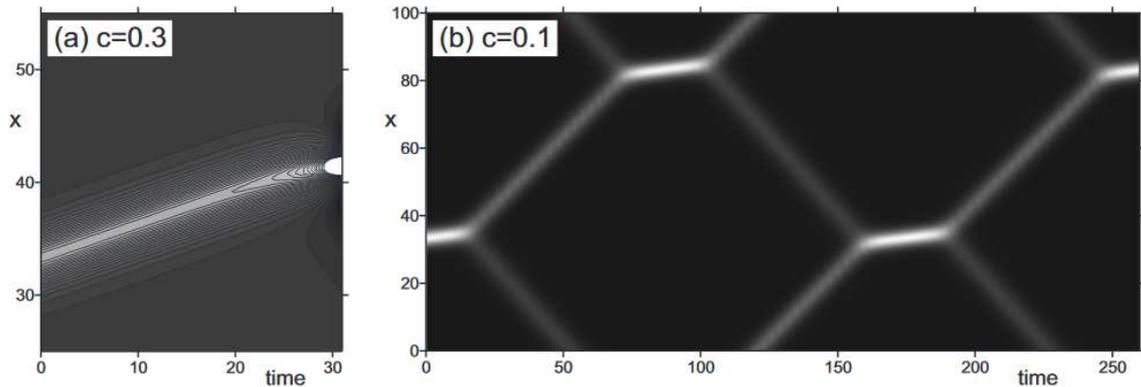
## 3. Солитонное решение

Для данной задачи может быть сформулирован аналог теоремы Сквайра: наибо-

лее опасные моды возмущений параллельны вектору вибраций. Поэтому возникающие стационарные структуры могут быть рассмотрены в двумерной геометрии. Динамика системы, описываемой полученным уравнением, допускает возникновение быстрых устойчивых и медленных неустойчивых солитонов вида

$$\eta_0(\xi \equiv x - ct) = \frac{1 - c^2}{\text{ch}^2(\sqrt{1 - c^2} \xi / 2)}.$$

В процессе эволюции неустойчивые солитоны могут или распадаться на два устойчивых солитона меньшей амплитуды, или взрывным образом приводить к возникновению сингулярности (см. рис. 1).



**Рис. 1.** Возможные сценарии эволюции неустойчивого солитона: (a) – взрывное образование сингулярности, (b) – распад на два быстрых устойчивых солитона

Интересным представляется то, что два быстрых солитона, возникшие в результате распада начального солитона, могут в дальнейшем столкнуться и вновь образовать неустойчивый солитон.

#### 4. Заключение

В данной работе была рассмотрена динамика волн на внутренней поверхности в двухслойной системе несмешивающихся жидкостей в поле горизонтальных вибраций. Были получены уравнения динамики крупномасштабных волн ниже порога линейной устойчивости в двумерном и трехмерном случае. Было показано, что полученная система уравнений может быть приведена к виду «плюс»-уравнения Буссинеска.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (грант 14-21-00090).

#### Список литературы

1. Любимов Д. В., Любимова Т. П., Черепанов А. А. Динамика поверхностей раздела в вибрационных полях – М.: Физматлит, 2003. 216 с.
2. Любимов Д. В., Черепанов А. А. О возникновении стационарного рельефа на поверхности раздела жидкостей в вибрационном поле // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 6. С. 8–13.
3. Goldobin D. S., Pimenova A. V., Kovalevskaya K. V., Lyubimov D. V., Lyubimova T. P. Running interfacial waves in a two-layer fluid system subject to longitudinal vibrations // Physical Review E. 2015. Vol. 91. 053010.
4. Goldobin D. S., Kovalevskaya K. V., Lyubimov D. V. Elastic and inelastic collisions of interfacial solitons and integrability of a two-layer fluid system subject to horizontal vibrations // Europhysics Letters. 2014. Vol. 108. 54001.

## Турбулентный пограничный слой и смешение вод сливающихся рек

Д. С. Голдобин<sup>a,b</sup>, Л. С. Клименко<sup>a</sup>, А. В. Пименова<sup>a</sup>, Т. П. Любимова<sup>a,b</sup>,  
А. П. Лепихин<sup>b,c</sup>

<sup>a</sup> Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013, Пермь, ул. Ак. Королева, 1  
email: Denis.Goldobin@gmail.com

<sup>b</sup> Пермский государственный национальный исследовательский университет,  
614990, Пермь, ул. Букирева, 15

<sup>c</sup> Горный институт УрО РАН, 614007, Пермь, ул. Сибирская, 78а

В работе рассматривается турбулентный перенос в окрестности свободной поверхности жидкости при линейном профиле сдвигового напряжения, соответствующем, например, течению слоя воды под уклон и течению рек. Выведены уравнения транспорта пассивного скаляра в такой системе. При этом согласовано рассматриваются турбулентная вязкость и турбулентная диффузия, что позволяет рассчитать как профиль течения реки, так и профиль коэффициента эффективной диффузии. Оказывается, что для равенства коэффициентов в безразмерном уравнении транспорта пассивного скаляра, масштаб координаты вдоль течения реки должен быть на 2 порядка больше масштабов поперечных координат. Также получены самоподобные решения для поля концентрации пассивной примеси вдали от дна и берегов.

**Ключевые слова:** слияние рек; турбулентная диффузия; пограничный слой.

## Turbulent boundary layer and mixing of waters of confluencing rivers

D. S. Goldobin<sup>a,b</sup>, L. S. Klimenko<sup>a</sup>, A. V. Pimenova<sup>a</sup>, T. P. Lyubimova<sup>a,b</sup>,  
A. P. Lepikhin<sup>b,c</sup>

<sup>a</sup> Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Ak. Koroleva str. 1, 614013, Perm  
email: Denis.Goldobin@gmail.com

<sup>b</sup> Perm State University, Bukireva str. 15, 614990, Perm

<sup>c</sup> Mining Institute UB RAS, Sibirskaya str. 78a, 614007, Perm

We consider the turbulent transport near free liquid boundary where the shear stress profile is linear, which corresponds to the liquid flow downhill an inclined plane and rivers. We derive transport equations for a passive scalar in these systems. Consistent consideration of turbulent viscosity and turbulent diffusion allows one to calculate the profiles of the average flow velocity and the effective diffusion coefficient. We find that, for the dimensionless equation of diffusive transport, all the coefficients equal 1, if the scale of the coordinate downstream the river is by two orders of magnitude larger than that of the transversal coordinates. The self-similar solution for the concentration field of a passive admixture is obtained; this solution is valid away from the banks and bed of the river.

**Keywords:** river confluence; turbulent diffusion; turbulent boundary layer.

## 1. Введение

При слиянии рек с заметно отличающимся цветом воды нередко можно визуаль-но наблюдать очень низкую эффективность смешения вод вниз по течению. Важно от-метить, что зачастую различия в составе воды, определяющие цвет, достаточно малы, чтобы заметно сказываться на механических свойствах вод. Во многих случаях можно уверенно говорить о переносе пассивного скаляра при практически однородных меха-нических параметрах системы.

## 2. Эффективная вязкость и диффузия в турбулентных пограничных слоях

Одно из возможных объяснений природы эффекта связано с особенностями тур-булентной диффузии в приповерхностном пограничном слое. В отсутствие объемных сил при однородном в пространстве сдвиговом напряжении  $\sigma$  около плоской твердой стенки эффективная турбулентная вязкость оказывается (см., например, [1])

$$\nu_{\text{turb}} = \kappa_1 u_* y, \quad (1)$$

где эмпирический коэффициент  $\kappa_1 \approx 0.4$ ;  $y$  — расстояние от стенки;  $u_*$  служит мерой характерной величины турбулентных пульсаций в объеме, однако ее строгое определе-ние связано со сдвиговым напряжением  $\sigma = \rho u_*^2$ ;  $\rho$  — плотность жидкости. Соответ-ствующий профиль скорости осредненного сдвигового течения

$$u(y) \approx \frac{u_*}{\kappa_1} \ln \frac{y u_*}{\xi_{01} \nu}, \quad (2)$$

где эмпирическая константа  $\xi_{01} \approx 0.13$ ,  $\nu$  — кинематическая вязкость жидкости. Выра-жение (2) справедливо за пределами тонкого пристеночного «вязкого подслоя» ( $y < y_* = \xi_{01} \nu / u_*$ ), в котором закон (1) нарушается. Твердая стенка отличается от сво-бодной недеформируемой поверхности наличием условия непроскальзывания. Однако, турбулентная вязкость (1) обращается на границе в ноль, снимая условие непроскаль-зывания на масштабах больших по сравнению с  $y_*$ , т.е. отличия между твердой и сво-бодной границей существенны в «вязком подслое» и сказываются на эмпирической константе  $\xi_{01}$ , но не на коэффициенте  $\kappa_1$ .

В слое воды, стекающем под уклон с углом  $\alpha$  под действием собственного веса, сдвиговое напряжение обращается в ноль на поверхности и линейно растет с глубиной  $y$ :

$$\sigma = \rho g y \sin \alpha. \quad (3)$$

Для такой ситуации анализ масштабной инвариантности, приводивший при однород-ном сдвиговом напряжении  $\sigma$  к уравнению (1), дает

$$\nu_{\text{turb}} = \kappa_{3/2} \sqrt{\sigma / (\rho y)} y^{3/2} = \kappa_{3/2} \sqrt{g \sin \alpha} y^{3/2}. \quad (4)$$

Таким образом, для рек приповерхностное снижение эффективной вязкости оказыва-ется даже более существенным, чем в пограничном слое около твердой стенки.

Анализ турбулентного теплопереноса показывает, что  $\chi_{\text{turb}} = \nu_{\text{turb}} / \beta$ , где константа  $\beta$  определяется эмпирически — для течения около твердой стенки при однородном сдвиговом напряжении  $\beta_1 \approx 0.9$  [1]. Поскольку механизм турбулентной диффузии по-добен механизму турбулентной теплопроводности,

$$D_{\text{turb},1} = \beta_1^{-1} \kappa_1 u_* y \quad (5)$$

для течения при однородном  $\sigma$  и

$$D_{\text{turb},3/2} = \beta_{3/2}^{-1} \kappa_{3/2} \sqrt{g \sin \alpha} y^{3/2} \quad (6)$$

при линейном профиле сдвигового напряжения (3).

### 3. Турбулентная диффузия в реках

Сшивание профилей турбулентной вязкости у дна, при приблизительно однородном сдвиговом напряжении, и в приповерхностной области дает приблизительный профиль течения реки вдали от берегов:

$$u(y) \approx \begin{cases} \frac{\sqrt{g\alpha H}}{\kappa_1} \left( \ln \left[ \frac{4H}{e^2} \frac{\sqrt{g\alpha H}}{\xi_{01}\nu} \frac{1-\sqrt{y/H}}{1+\sqrt{y/H}} \right] + 2\sqrt{\frac{y}{H}} \right), & y > H/2, \\ u_0 - 2\kappa_{3/2}^{-1} \sqrt{g\alpha} y^{1/2}, & y < H/2, \end{cases}$$

где  $H$  — глубина реки, приповерхностная скорость течения  $u_0$  определяется из сшивания профилей при  $y = H/2$ :

$$u_0 = \sqrt{g\alpha H} \left[ \frac{\sqrt{2}}{\kappa_1} + \frac{\sqrt{2}}{\kappa_{3/2}} + \frac{1}{\kappa_1} \ln \left( \frac{4(3-2\sqrt{2})}{e^2} \frac{H\sqrt{g\alpha H}}{\xi_{01}\nu} \right) \right] \approx \frac{\sqrt{g\alpha H}}{\kappa_1} \ln \left( \frac{H\sqrt{g\alpha H}}{0.51\nu} \right). \quad (7)$$

Транспорт концентрации  $\omega$  в реке определяется уравнением

$$\partial_t \omega + u(y) \partial_z \omega = \nabla \cdot (D_{\text{turb},3/2} \nabla \omega), \quad (8)$$

где  $z$  — координата вдоль русла реки вниз по течению,  $x$  — координата поперек реки. При  $\partial/\partial z \ll \partial/\partial y$  и установившемся распределении примеси, после обезразмеривания координат, в приповерхностной области можно получить из (8):

$$\partial_z \omega = y^{3/2} \partial_x^2 \omega + \partial_y (y^{3/2} \partial_y \omega),$$

где  $[x] = [y] = H$ , а  $[z] = \beta_{3/2} H (\kappa_1 \kappa_{3/2})^{-1} \ln [H^{3/2} (g\alpha)^{1/2} / (0.51\nu)]$ . При реалистичных  $\alpha = 10^{-4}$  и  $H = 5$  м,  $[z]/[y] \approx 76$ , то есть процесс выравнивания неоднородностей распределения концентрации поперек реки протекает на большом пространственном масштабе вниз по течению реки. Вдали от дна и берегов поле концентрации обладает свойствами масштабного подобия:

$$\omega(x, y, z) = \Omega(\xi, \zeta), \quad \xi = \frac{x}{z^2}, \quad \zeta = \frac{y}{z^2}.$$

Работа выполнена в рамках гранта РФФИ № 16-41-590005 р\_а.

### Список литературы

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.

## **Устойчивость двуслойного течения в микромасштабах под действием постоянного и переменного электрических полей**

**Е. В. Горбачева<sup>a</sup>, Е. А. Демёхин<sup>b</sup>**

<sup>a</sup> Кубанский Государственный университет  
350040, Краснодар, ул. Ставропольская, 149  
email: katya1911@list.ru

<sup>b</sup> Финансовый Университет при Правительстве Российской Федерации  
350051, Краснодар, ул. Шоссе Нефтяников, 32  
email: edemekhi@gmail.com

В работе изучается устойчивость двуслойного электроосмотического течения проводящей (электролит) и непроводящей (диэлектрик) вязких жидкостей, в микроканале, под действием постоянного и переменного электрических полей. Нижняя стенка, граничащая с электролитом предполагается заряженной поверхностью, а верхняя стенка – электрически изолирована. Заряд на нижней границе предполагается неподвижным, а поверхностный заряд на свободной поверхности раздела жидкостей предполагается мобильным. Данная модель описывается системой уравнений Нернста – Планка – Пуассона - Стокса с соответствующими граничными условиями. Исследована линейная устойчивость одномерного течения. При постоянном электрическом поле обнаружено наличие двух типов неустойчивости: коротковолновой и длинноволновой.

**Ключевые слова:** электролит; микромасштабы; электроосмотическое течение; система Нернста – Планка – Пуассона – Стокса.

## **Stability of a two-layer flow in microscale under the influence of a constant and alternating electric fields**

**E. V. Gorbacheva<sup>a</sup>, E. A. Demekhin<sup>b</sup>**

<sup>a</sup> Kuban State University, Stavropolskaya St. 149, 350040, Krasnodar  
email: katya1911@list.ru

<sup>b</sup> Financial University under the Government of the Russian Federation, Shosse Neftyanikov St. 32, 350051, Krasnodar  
email: edemekhi@gmail.com

The stability of a two-layer electroosmotic flow of conductive (electrolyte) and non-conductive (dielectric) viscous liquids, in a microchannel, under the influence of AC and DC electric field is studied. The lower wall bordering the electrolyte is assumed to be a charged surface, and the upper wall is electrically isolated. The charge at the lower boundary is assumed to be stationary, and the surface charge on the free interface of the fluids is assumed to be mobile. This model is described by the system of Nernst-Planck-Poisson-Stokes equations with the corresponding

boundary conditions. The linear stability of a one-dimensional flow is investigated. With a constant electric field, two types of instability are observed: short-wave and long-wave.

**Ключевые слова:** electrolyte; Microscale; Electroosmotic flow; Nernst-Planck-Poisson-Stokes system.

## 1. Введение

В связи с быстрым развитием биотехнологий проблемы электрокинетики привлекли к себе большое внимание. Одним из ее приложений является медицинская диагностика в лабораториях на чипе. Электроосмотические течения используются в лабораториях на чипе для транспорта и перемешивания жидкостей. Тем не менее, когда на жидкость воздействуют постоянным электрическим полем, то возникают различные нежелательные эффекты, такие как деградация образцов, электролиз, образование пузырьков на электродах. Это происходит из-за необходимости использования электрических полей большой мощности для электроосмотического движения жидкости. Данные эффекты могут быть предотвращены за счет использования переменного электрического поля.

Для приведения в движение непроводящих жидкостей в микромасштабах используют двуслойную систему, так чтобы электроосмотическое течение электролита увлекало за собой слой диэлектрической жидкости. Однако даже при использовании такой техники теоретические аспекты транспорта и перемешивания непроводящих жидкостей остаются недостаточно изученными.

### 1.1. Постановка задачи

В работе исследуется физическая система, состоящая из двух тонких пленок смешивающихся жидкостей, имеющих постоянную вязкость и диэлектрическую проницаемость. Система заключена между двумя бесконечными параллельными пластинами  $y = 0$  и  $y = H$ . Математически модель движения электролита описывается системой уравнений Нернста – Планка – Пуассона - Стокса (1)-(4):

$$\frac{\partial c^{\pm}}{\partial t} + U \cdot \nabla c^{\pm} = \nabla \cdot (c^{\pm} \nabla \Phi) + \nabla^2 c^{\pm}; \quad (1)$$

$$\nu^2 \nabla^2 \Phi = -(c^+ - c^-); \quad (2)$$

$$-\nabla p + \mu_e \nabla^2 u = \frac{\kappa}{\nu^2} (c^+ - c^-) \nabla \Phi; \quad (3)$$

$$\nabla \cdot u = 0; \quad (4)$$

где (1) – уравнения транспорта ионов; (2) – уравнение Пуассона для электрического потенциала; (3) – уравнение Стокса; (4) – уравнение неразрывности жидкости; где  $c^{\pm}$  – являются концентрация положительных и отрицательных ионов;  $u$  – вектор скорости жидкости, электролита;  $\Phi$  – это электрический потенциал электролита;  $p$  – это давление в электролите.

Диэлектрическая жидкость электронейтральна, следовательно, потенциал  $\varphi$  описывается уравнением Лапласа, а гидродинамика описывается уравнением Стокса (5)-(7):

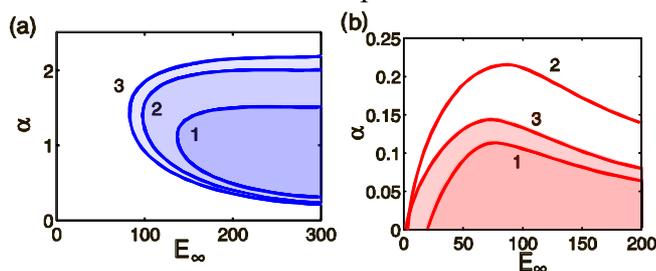
$$\nabla^2 \varphi = 0; \quad (5)$$

$$-\nabla p + \mu_d \nabla^2 u = 0; \quad (6)$$

$$\nabla \cdot u = 0. \quad (7)$$

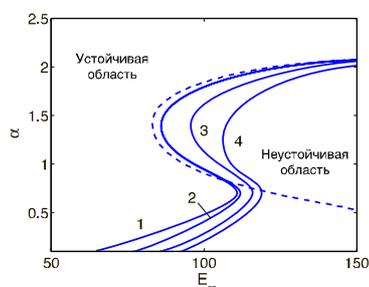
Граничные условия на электролите формулируются следующим образом: 1) предполагается, что поверхность непроницаема для катионов и анионов; 2) потенциал является непрерывным, а его градиент имеет скачок, связанный с мобильным поверхностным зарядом, 3) заряд поверхности сохраняется, 4) задаются два граничных условия для нормальных и касательных напряжений, и кинематическое ограничение на свободной поверхности.

Увеличение вязкости жидкости диэлектрика соответствует увеличению параметра  $\mu$ . При этом расчеты показывают, что стационарное течение становится более устойчивым к коротковолновым возмущениям (рис. 1. а) и менее устойчивым к длинноволновым возмущениям (рис. 1. б). Но при этом коэффициент максимального роста возмущений  $\lambda_{\max}$  увеличивается незначительно и приходит к насыщению (рис. 1. с).



**Рис.1.** Кривые нейтральной устойчивости (а) и (б) для  $q = -3$ ,  $\sigma = 1$ ,  $\nu = 0.1$ ,  $\kappa = 0.2$ ,  $H = 4$  и для различных значений 1:  $\mu = 0$  2:  $\mu = 0.5$ , 3:  $\mu = 1$ , 4:  $\mu = 3.5$

Порог неустойчивости определяется длиной волн: для более сильных внешних электрических полей, одномерное решение имеет коротковолновую неустойчивость. В пределе бесконечно малых волновых чисел, независимые неустойчивые режимы имеют четкий физический смысл: они являются возмущениями, соответственно, толщины пленки, поверхностного заряда, объемной проводимости, и объемного заряда. Для конечных волновых чисел, описываемых численным линейным анализом устойчивости, эти режимы теряют простую физическую интерпретацию. Для бесконечно больших чисел Вебера (или для недеформируемого раздела газ-жидкость) длинноволновая неустойчивость исчезает, в то время как коротковолновая неустойчивость сохраняется. С увеличением числа Дебая коротковолновая область неустойчивости замыкается, сужается, стягивается в точку, и в конце концов исчезает, для достаточно большого числа Дебая только длинноволновая неустойчивость остается. При наложении переменного поля наблюдается изменение типа неустойчивости: коротковолновая и длинноволновая области неустойчивости сливаются в одну (рис. 2). При этом с увеличением частоты электрического поля происходит стабилизация одномерного течения



**Рис. 2.** Кривые нейтральной устойчивости для  $q = -3$ ,  $\sigma = 1$ ,  $\nu = 0.1$ ,  $\kappa = 0.2$ ,  $H = 4$ ,  $\mu = 1$  и различных значений частоты внешнего поля 1:  $\omega = 0.01$ , 2: 0.1, 3: 1, 4: 2.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (№15-08-02483-а)

## **Исследование механизмов неустойчивости для ультратонкого слоя испаряющейся жидкости при наличии сурфактанта на обеих межфазных границах**

**В. Ю. Гордеева<sup>a</sup>, А. В. Люшнин<sup>b</sup>**

<sup>a</sup> Пермский государственный национально- исследовательский политехнический университет, Лысьвенский филиал, 618900, Россия, Пермский край, г. Лысьва, ул. Ленина, 1,  
email: yanma@mail.ru

<sup>b</sup> Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, 614990, Россия, г. Пермь, Сибирская д. 24,  
email: andry@pspu.ru

Теоретически исследуется процесс испарения ультра тонкого слоя жидкости (например, воды) со свободной поверхностью, расположенной на твердой подложке. На межфазных границах «жидкость-пар» и «жидкость-твердая подложка» находится сурфактант. Поверхностная энергия линии контакта «твердое тело-жидкость» является немонотонной функцией относительно толщины слоя и является суммой ван-дер-ваальсового взаимодействия, специфического взаимодействия двойного электрического слоя межфазной границы и взаимодействия, обусловленного наличием растворения сурфактанта в слое. В рамках длинноволнового приближения в системе уравнений Навье-Стокса изучается влияние сурфактанта на динамику и устойчивость движения фронта испарения тонкой жидкостной пленки для различных вариантов концентрации сурфактанта.

**Ключевые слова:** испарение; ван-дер-Ваальс; сурфактант; устойчивость; уравнение Навье-Стокса; межфазная граница

## **The study of mechanisms of instabilities for an ultra-thin layer of evaporating liquid in the presence of the surfactant on both interfaces**

**V. Y. Gordeeva, A. V. Lyushnin**

State National Research Politechnical University of Perm, Lyusva branch, 1, Lenina st., Lyusva, Perm krai, Russia, 618900,  
email: yanma@mail.ru

Perm State Humanitarian-Pedagogical University, 24, Sibirskaya st., Perm, 614990, Russia,  
email: andry@pspu.ru

Abstract. We theoretically investigate the evaporation process of the ultra-thin layer of liquid (e.g. water) with a free surface located on a solid substrate. At interfaces "liquid-vapor" and "liquid-solid substrate" is a surfactant. The surface energy of the line of contact, "solid-liquid" is a non-monotonic function of relative layer thickness and is the sum of the van der Waals interaction, specific

interaction of the electrical double layer the interface and interaction due to the presence of dissolved surfactant in the layer. In the framework of the long-wave approximation in the system of the Navier-Stokes equations we study the effect of surfactant on the dynamics and stability of motion of the evaporation front a thin liquid film for different concentration of surfactant.

**Keywords:** evaporation; van-der-Waals; surfactant; stability, Navie-Stoks equation, interface

Прогресс в области электронных и оптических устройств зависит от способности полупроводниковой промышленности изготавливать компоненты, у которых растет их сложность при уменьшении размера. Стремление к миниатюризации фактически послужило толчком для активизации в последние десятилетие фундаментальных и прикладных исследований в области ультратонких (толщиной менее 1000 Å) пленок [1-5].

При испарении тонкого слоя воды в экспериментах установлено, что при некотором значении толщины первоначально плоская поверхность полярной жидкости становится неустойчивой и появляются две характерные толщины тонкого слоя жидкости  $h_1$  и  $h_2$ , ( $h_2 > h_1$ ) [6-8]. В этой системе имеется «тонкий», порядка нескольких десятков ангстрем, прекурсионный слой  $h_1$  толщина которого не изменяется и «толстый» молекулярный слой  $h_2$ , толщина которого имеет значение порядка 300-900 Å в зависимости от вида жидкости и подложки. Толщина молекулярного слоя, при испарении, с течением времени стремится к толщине прекурсионного слоя.

В теоретической работе [9], основываясь на теории ДЛФО было показано, что для описания двухуровневой структуры тонких слоев полярной жидкости необходимо учитывать тот факт, что энергия межфазного взаимодействия должна складываться из суммы ван-дер-ваальсовского взаимодействия и специфического взаимодействия двойного электрического слоя на межфазной границе «жидкость-твердое тело».

В экспериментальной работе [10] произведено исследование процессов испарения/конденсации водяной капли, расположенной на кремниевой подложке при наличии сурфактанта на обеих контактных линиях «подложка-жидкость» и «жидкость-воздух». Сурфактант (органосиликон Silwet L-77) при 1 % от веса слоя воды способен снижать поверхностное натяжение на свободной границе более чем в три раза. Толщина такой трехфазной системы составляла порядка 300 ангстрем. Такая «сэндвич-структура» находит широкое применение в агропромышленности. Было обнаружено, что при испарении такая система распадается на микрокапли, которые покрыты слоем сурфактанта. Установлено, что видимый угол контакта капля увеличивается при конденсации и снижение в процессе испарения. Наличие сурфактанта приводит к тому, что эволюция формы капли происходит в колебательном режиме.

В данной работе теоретически рассматривается эволюция и механизмы неустойчивости сверхтонкого испаряющегося слоя жидкости при наличии сурфактанта на обеих межфазных границах. С использованием длинноволнового разложения для системы уравнений Навье-Стокса удается получить эволюционные уравнения для значений толщины слоя и межфазных концентраций. Обнаружены три типа неустойчивости. Один из этих механизмов отвечает за испарение, а два других механизма являются концентрационными и зависят от величины концентрации на межфазных границах. Исследуется устойчивость данной системы относительно возмущений. Получены карты устойчивости для всех механизмов в зависимости от параметров системы.

Публикация подготовлена при финансовой поддержке министерства образования Пермского края (грант № С 26./004.04).

### Список литературы

1. *Menard E, Meitl M.A., Sun Y, Park J, Shir D.J., Nam Y., Jeon S., Rogers J.A.* Micro-and nanopatterning techniques for organic electronic and optoelectronic systems. // *Chem. Rev.* 2007. V.107. P.1117–1160.
2. *del Campo A, Arzt E.* Fabrication approaches for generating complex micro- and nanopatterns on polymeric surfaces. // *Chem. Rev.* 2008. V.108. P. 911–45.
3. *Nie Z, Kumacheva E.* Patterning surfaces with functional polymers // *Nat Mater.* 2008. V.7. P.277–90.
4. *Xue L, Han Y.* Pattern formation by dewetting of polymer thin film // *Prog. In Polymer Sci.* 2011. V. 36. P.269-293.
5. *Zhong X., Crivoi A, Duan F.* Sessile nanofluid droplet drying // *Adv. Coll. And Int. Sci.* 2015/ V.217. P.13-30.
6. *Thiele U, Mertig M, Pompe W.* Dewetting of an evaporating thin liquid film: Heterogeneous nucleation and surface instability// *Phys. Rev. Lett.* 1998. V.80. P.2869-2872.
7. *Lyushnin A.V., Golovin A.A. and Pismen L.M.* Fingering instability of thin evaporating liquid films// *Phys. Rev. E.* 2002/ V. 65. P. 021602-021609.
8. *Leizerson I, Lipson S.G., Lyushnin A.V.* Finger Instability in Wetting-Dewetting Phenomena // *Langmuir.* 2004. V.20. P. 291-294.
9. *Sharma A.* Relationship of thin film stability and morphology to macroscopic parameters of wetting in the apolar and polar systems // *Langmuir.* 1993. V.9.P.861-869.
10. *Gokhale S.J., Plawsky J.L.,Wayner P.W. Jr.* Spreading, evaporation, and contact line dynamics of surfactant-laden microdrops // *Langmuir.* 2005. V.21. P. 8188–8197.

## **Биомеханическое моделирование перестройки трабекулярной костной ткани при изменении нагрузки**

**Т.Н. Гороженинова<sup>а</sup>, А.А. Киченко<sup>б</sup>**

<sup>а</sup> Пермский национальный исследовательский политехнический университет, 614990, Пермь, Комсомольский проспект, 29

email: gorogenonova@gmail.com

<sup>б</sup> Пермский национальный исследовательский политехнический университет, 614990, Пермь, Комсомольский проспект, 29

email: kichenko.alex@yandex.ru

В настоящее время не существует методов, позволяющих определить изменения трабекулярной микроструктуры *in vivo* инструментально. Таким образом, возникает необходимость в прогнозировании долговременного отклика структуры на внешнее вмешательство методами биомеханического моделирования, т.е. необходимость в разработке модели перестройки (адаптации) трабекулярной костной ткани с учётом взаимовлияния напряжённо-деформированного состояния и структурных изменений. В данной работе моделируется перестройка образца кости, как упругого анизотропного тела оснащенного структурой, согласно эволюционным соотношениям впервые предложенных в работе [1] и примененных при практических расчетах в серии исследований [1–6]. В качестве инструмента численного моделирования используется программный пакет конечно-элементного анализа ANSYS. Для верификации данной модели, рассматривается ряд задач, описанных в работах [1,3,4,6]. В частности, исследуется напряженно-деформированное состояние анизотропной балки под воздействием изгибающего момента в состоянии гомеостаза[8].

**Ключевые слова:** трабекулярная костная ткань; перестройка; эволюционные соотношения

## **Biomechanical modeling of bone tissue remodeling under changing load**

**T. N. Gorozheninova<sup>а</sup>, A. A. Kichenko<sup>б</sup>**

<sup>а</sup> Perm National Research Polytechnic University, 614990, Perm, Komsomolsky prospect, 29

Email: gorogenonova@gmail.com

<sup>б</sup> Perm National Research Polytechnic University, 614990, Perm, Komsomolsky prospect, 29

Email: kichenko.alex@yandex.ru

Nowadays, there are no methods to determine the changes in the trabecular microstructure *in vivo* instrumentally. It is becomes necessary to predict the long-term response of the structure to external load by methods of biomechanical modeling. In other words there is a need to develop a model of cancellous tissue remodeling (adaptation) considering the influence of the stress-strain state and

structural changes. Here the bone sample is proposed as an elastic anisotropic body equipped with a structure, according to the evolutionary equations first proposed in [1] and applied in practical calculations in a series of research [1-6]. As an instrument of numerical simulation is used finite element analysis software package ANSYS. To verify this model, we considered the problems described in [1,3,4,6]. And the stress-strain state of an anisotropic beam under the bending moment in the homeostasis state [8].

**Keywords:** cancellous bone tissue; remodeling; evolution equations

На развитие и функционирование костной системы человека влияют постоянно изменяющиеся нагрузки различной природы. Подобные изменения имеют отдаленные во времени последствия и в первую очередь отражаются на организации структуры костной ткани. Костная ткань живого человека является сложной, динамической структурой, в которой непрерывно происходят адаптационные процессы. Костная ткань живого человека является сложной, динамической структурой, в которой непрерывно происходят адаптационные процессы. Она делится на компактную (кортикальную) и трабекулярную (губчатую) кость.

Трабекулярная костная ткань является неоднородным пористым анизотропным материалом, механические свойства которой в значительной мере определяются её внутренней архитектурой. Под действием новой нагрузки, в структуре трабекулярной костной ткани могут начаться адаптационные изменения, которые затем повлияют на кортикальную костную ткань.

Известно, что адаптационные процессы, протекающие в организме человека, подчиняются закону Вольфа (Wolff's law). Закон Вольфа для костной ткани [7,9] говорит о том, что архитектура трабекулярной кости в локальной области структурно приспособляется к местному напряженному состоянию костной ткани. При этом структурная адаптация в живой трабекулярной кости носит направленный характер: трабекулы располагаются закономерно, сообразно тому, какие внешние нагрузки испытывает данная кость [7,9]. В частности, ориентация трабекул в рассматриваемой области кости должна совпадать с главными направлениями тензора напряжений в этой же области. В месте, где приложена нагрузка и началась перестройка, происходит увеличение плотности, а трабекулы выстраиваются вдоль главных направлений тензора напряжений [2, 5, 7].

Математически, процесс адаптации кости можно описать системой дифференциальных уравнений, позволяющих наблюдать изменение структуры и доли твердого объема во времени:

$$\frac{d\tilde{K}}{dt} = f_1(\tilde{K}, \tilde{\varepsilon}, e), \quad \frac{d\tilde{\varepsilon}}{dt} = f_2(\tilde{K}, \tilde{\varepsilon}, e), \quad \frac{de}{dt} = f_3(\tilde{K}, \tilde{\varepsilon}, e) \quad (1)$$

где  $\tilde{K}$  – девиатор тензора структуры  $\tilde{H}$ , нормированный таким образом, что  $\text{tr}\tilde{K} = 0$ ,  $e$  – изменение доли твердого объема кости относительно отсчётной величины  $v_0$ . Ранее система (1) решалась не зависимо от тензора деформаций  $\tilde{\varepsilon}$ , он считался неизменным в течение процесса перестройки.

Для реализации численного алгоритма выбирались объекты, обладающие простой геометрической формой, такой как куб или призма. Полученное напряженно-деформированное состояние, вызванное различными типами нагрузки, а также значения величин, ответственных за структуру материала сравнивались с описанными в литературе [1,4]. Численный метод также применялся к объектам сложной геометрической формы.

Разработанный численный алгоритм показал соответствие результатов положениям закона Вольфа.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 15–01–04884–а).

### Список литературы

1. *Cowin S.C.* An evolutionary Wolff's law for trabecular architecture // *J. Biomech. Engng.* – 1992. – Vol. 114. –P. 129–136.
2. *Tverier V., Kichenko A., Nyashin Y., Lokhov V.* Experimental construction of the fabric tensor for trabecular bone tissue // *Series on Biomechanics*, 2015, Vol. 29, No. 4, P. 33–38.
3. *Tverier V., Kichenko A., Nyashin Y., Lokhov V.* Mathematical modelling of trabecular bone tissue remodelling under load // *Series on Biomechanics*, 2015, Vol. 29, No. 4, P. 39–44.
4. *Киченко А.А., Тверье В.М., Няшин Ю.И., Осипенко М.А., Лохов В.А.* О приложении теории перестройки трабекулярной костной ткани // *Российский журнал биомеханики.* – 2012. – Т. 16, № 4. – С. 53–72.
5. *Киченко А.А.* Постановка начально-краевой задачи о перестройке трабекулярной костной ткани // *Российский журнал биомеханики.* – 2012. – Т.16, №4. – С.36-52.
6. *Гороженинова Т.Н. Киченко А.А.* Решение задачи о перестройке трабекулярной костной ткани в конечно-элементном пакете ANSYS. // В кн. *Биомеханика-2016: тез. докл. XII всерос. конф. Пермь 5-8 декабря 2016.* Издательство Пермского государственного технического университета. С 36-37.
7. *Cowin S.C.* *Bone Mechanics Handbook* – Second edition. – New York: CRC Press, 2001. – 1136 p.
8. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела / Изд.2-е. – М., Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1977, – 416 с.
9. *Няшина Ю.И., Подгайца Р.М.* Экспериментальные методы в биомеханике:Пермь: Издательство Пермского государственного технического университета, 2008.

# Расчет влияния радиального зазора на граничные условия теплообмена к корпусу КВД авиационного двигателя

**Н.А. Госсман**

Пермский государственный национальный исследовательский университет  
614990, Пермь, ул. Букирева, 15  
email: ngossman@mail.ru

Рассматривается изменение параметров компрессора высокого давления при изменении величины радиального зазора между лопатками рабочих колес и корпусом, между лопатками направляющих аппаратов и ротором. Исследование проведено с использованием метода расчёта двумерного течения воздуха в компрессоре и расчета граничных условий теплообмена (коэффициента теплоотдачи) с помощью критериальных уравнений.

**Ключевые слова:** радиальный зазор; коэффициент теплоотдачи; система автоматического управления радиальными зазорами

## Calculation of the influence of radial gap on the boundary conditions of heat exchange to the case of the high-pressure compressor of an aircraft engine

**N. A. Gossman**

Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm  
email:ngossman@mail.ru

The change in the parameters of the high-pressure compressor is considered when the radial gap between the rotor blades and the case, between the vanes of the guide devices and the rotor. The study was carried out using the method of calculating the two-dimensional flow of air in the compressor and calculating the boundary conditions of heat transfer (heat transfer coefficient) using criterial equations.

**Keywords:** radial gap; heat transfer coefficient; radial gap control system

### 1. Введение

В работе проводится численное исследование изменения параметров компрессора высокого давления (КВД) авиационного двигателя в результате изменения радиального зазора. А также исследование изменения граничных условий теплообмена (коэффициента теплоотдачи и температуры воздуха) в результате полученных изменений параметров компрессора.

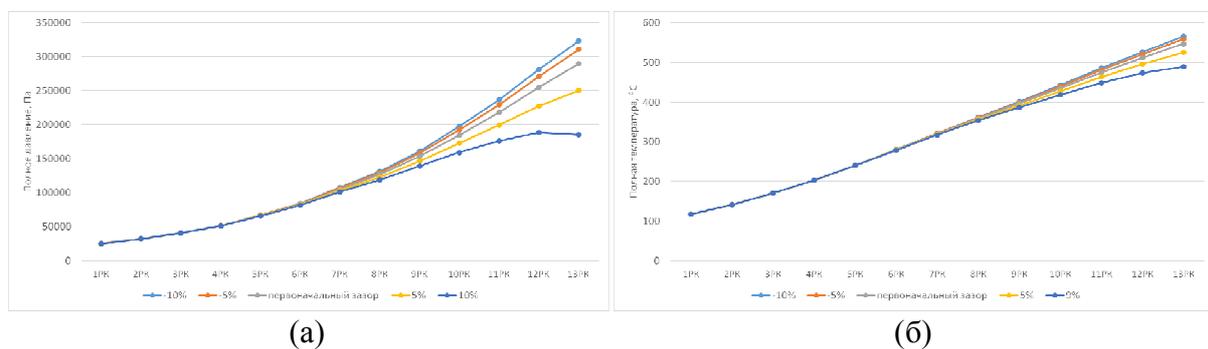
Рассматриваемый КВД является осевым тринадцатиступенчатым компрессором. Работа была выполнена с применением метода расчёта двухмерного течения воздуха в

компрессоре, основанного на численном решении уравнений Эйлера и метода определения граничных условий теплообмена, основанного на решении критериальных уравнений.

## 2. Расчет аэродинамических параметров КВД

Для исследования влияния изменения радиального зазора на аэродинамические параметры данного КВД были проведены расчёты для пяти значений радиального зазора  $\Delta r$ , мм: первоначального значения зазора в каждой ступени компрессора, увеличенного на 5 и 9%, уменьшенного на 5 и 10%. Радиальные зазоры в каждой ступени имели различное первоначальное значение, полученное экспертным путем для максимального режима работы рассматриваемого двигателя.

Результаты всех расчётов (значения полного давления и полной температуры) представлены на (рис. 1. а и б).



**Рис. 1.** Зависимость изменения полного давления (а) и полной температуры (б) от изменения радиального зазора над рабочими лопатками компрессора

Как видно, расчёты показали, что изменение величины радиального зазора оказывает существенное влияние на параметры компрессора (давление и температуру) на 8-13 рабочих ступенях. Данный результат расчетов показывает, что наличие системы регулирования радиальными зазорами в этих ступенях будет эффективным.

## 3. Расчет граничных условий теплообмена к корпусу КВД в зоне радиальных зазоров

В качестве граничных условий теплообмена к корпусу задаются коэффициенты теплоотдачи и температура воздуха. Коэффициенты теплоотдачи к корпусу в зоне радиального зазора вычислялись по формуле:

$$\alpha = \frac{Nu \cdot \lambda_{\bar{\Delta}}}{b_{\bar{\Delta}}} \quad (1)$$

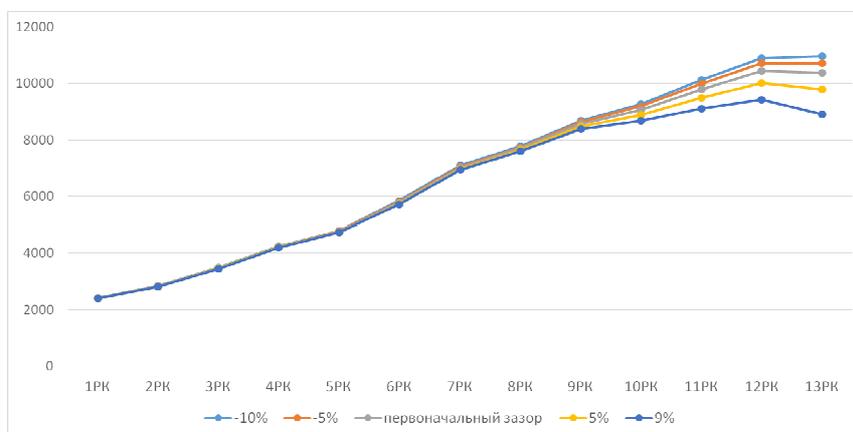
где  $Nu = 0.058 \cdot Re^{0.8} \cdot (1 + \bar{\Delta}_Z^{0.5})$  - число Нуссельта,

$Re = \frac{c_{cp} \cdot \rho_{cp} \cdot b_{PK}}{\mu_{cp}}$  - число Рейнольдса,

$\bar{\Delta}_Z = \frac{\Delta_Z}{h_{PK}}$  - относительный радиальный зазор,

где  $\Delta_Z$  - радиальный зазор,  $h_{PK}$  - высота рабочей лопатки.

Используя в расчетах коэффициента теплоотдачи ранее найденные параметры компрессора, получено влияние изменения радиальных зазоров на коэффициент теплоотдачи в зоне радиального зазора рабочих ступеней (рис. 2).



**Рис. 2.** Зависимость изменения коэффициента теплоотдачи от изменения радиального зазора над рабочими лопатками компрессора

Результаты расчета показали, что изменения радиального зазора существенно влияют на коэффициент теплоотдачи к корпусу КВД в зоне зазора 10-13 рабочих ступеней.

#### Список литературы

1. Локай В. И., Бодунов М. Н., Жуйков В. В., Щукин А. В. Теплопередача в охлаждаемых деталях газотурбинных двигателях. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Машиностроение, 1993.
2. Акуленко В. С., Иноземцев А. А., Соловьев Б. А. Авиационный газотурбинный двигатель ПС-90А, Уч.пособие, Ленинград, 1990.

## **Устойчивость осредненного течения, генерируемого колеблющимся ядром во вращающейся сферической полости**

**М. А. Давыдова<sup>а</sup>, В. Г. Козлов<sup>а</sup>, С. В. Субботин<sup>а</sup>**

<sup>а</sup> Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет  
614990, Пермь, ул. Сибирская, 24  
email: subbotin\_sv@pspu.ru

Экспериментально исследуется осредненное течение, возбуждаемое круговыми колебаниями внутреннего ядра во вращающейся вокруг горизонтальной оси сферической полости с жидкостью. Ядро, плотность которого меньше плотности жидкости, в лабораторной системе отсчета занимает стационарное положение вблизи центра полости под действием центробежной силы. В системе отсчета полости ядро совершает круговые колебания с частотой равной частоте вращения. Дифференциальное вращение ядра отсутствует, для этого один из полюсов ядра соединен с ближайшим полюсом полости гибкой, но упругой на скручивание леской. Обнаружено, что в результате колебаний ядра в полости возбуждается осредненное течение, профиль скорости которого исследуется PIV-методом. Основное течение состоит из системы вложенных жидких цилиндров, вращающихся с различными угловыми скоростями. При этом интенсивность течения пропорциональна квадрату амплитуды колебаний ядра. С увеличением амплитуды колебаний ядра осесимметричное течение испытывает серию неустойчивостей. Показано, что пороги возникновения неустойчивостей определяются числом Рейнольдса, рассчитанным через амплитуду колебаний ядра относительно полости.

**Ключевые слова:** ядро; колебания; осредненное течение

## **Stability of steady flow generated by oscillating core in rotating spherical cavity**

**M. A. Davydova<sup>a</sup>, V. G. Kozlov<sup>a</sup>, S. V. Subbotin<sup>a</sup>**

<sup>a</sup> Perm State Humanitarian Pedagogical University, Sibirskaya St. 24, 614990, Perm  
email: subbotin\_sv@pspu.ru

Steady flow excited by the circular oscillations of the inner core in a spherical cavity rotating about the horizontal axis with liquid is experimentally studied. The core has lower density compared to the fluid and occupies a stable position near the cavity center in the laboratory frame under the action of centrifugal force. In the cavity frame the core performs circular oscillations with a frequency equal to the rotation frequency. Differential rotation of the core is absent, for this, one of the core poles is fastened to the nearest cavity pole by a flexible but elastic for twisting the fishing line. It is found that as a result of the core oscillations the steady flow appears, the velocity profile of which is investigated by the PIV-method. The main

flow consists of the system of nested liquid cylinders rotating with different angular velocities. The intensity of the flow is proportional to the square of the amplitude of the core oscillations. With increasing of the amplitude of the core oscillations, the axisymmetrical flow experiences a series of instabilities. It is shown that the instability thresholds are determined by the Reynolds number, calculated by the amplitude of the core oscillations relative to the cavity.

**Keywords:** core; oscillations; steady flow

## 1. Введение

В [1] было обнаружено, что колебания свободного ядра во вращающейся сферической полости приводят к возникновению осредненного азимутального течения, приводящего в дифференциальное вращение само ядро. Наличие дифференциального вращения ядра модифицирует результирующее осредненное течение благодаря циркуляции жидкости в Экмановских пограничных слоях, при этом оба механизма генерации потоков проявляют себя независимо. Целью данной работы является экспериментальное исследование структуры течения, генерируемой колеблющимся ядром в отсутствие его собственного дифференциального вращения.

## 2. Экспериментальная установка и методика

Сферическое тело (ядро) радиуса  $R_1 = 1.77$  см и средней плотности  $\rho_s = 0.22$  г/см<sup>3</sup> находится в заполненной жидкостью сферической полости радиуса  $R_2 = 3.60$  см. Полость вращается вокруг горизонтальной оси, при этом ядро занимает стационарное положение в лабораторной системе отсчета на расстоянии  $b$  от оси вращения. Для препятствия дифференциального вращения ядра, последнее соединено с одним из полюсов кюветы при помощи тонкой нейлоновой лески толщиной  $d = 0.37$  мм. В качестве рабочей жидкости используются водоглицериновые растворы кинематической вязкости  $\nu = 1\text{--}12$  сСт. Вращение полости задается шаговым двигателем. Скорость вращения полости варьируется в диапазоне  $\Omega_{rot} = 60\text{--}240$  с<sup>-1</sup>.

Профиль скорости жидкости в сферическом слое исследуется PIV-методом. Для этого полость освещается световым ножом в плоскости поперечной оси вращения, который генерируется лазером непрерывного действия. Видеорегистрация осуществляется на неподвижную в лабораторной системе отсчета скоростную видеокамеру с частотой равной частоте вращения. С помощью программы PIVLab [2] обрабатываются пары кадров, промежутков времени между которыми кратен периоду вращения полости.

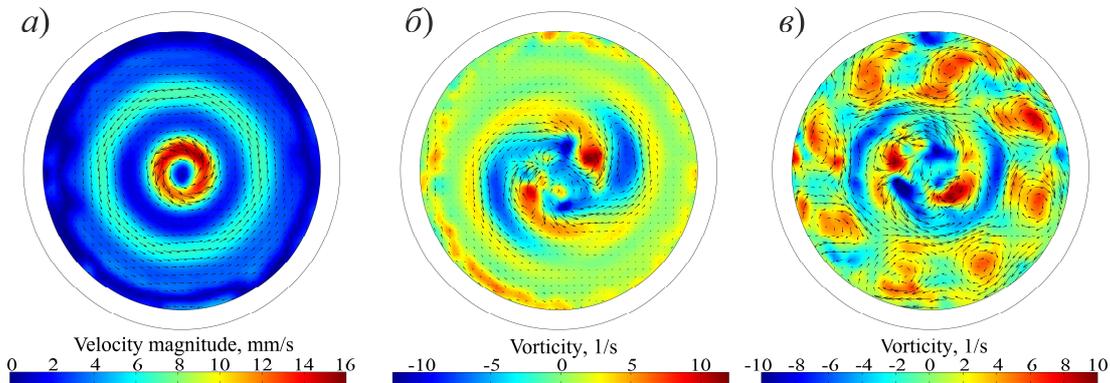
## 3. Колебания ядра и осредненное течение

В системе отсчета полости ядро совершает круговые колебания в экваториальной плоскости относительно центра полости с амплитудой  $b$  и частотой  $\Omega_{osc} = -\Omega_{rot}$  [1]. Колебания ядра являются источником пульсационного движения жидкости в динамических пограничных слоях вблизи твердых границ. В результате нелинейных эффектов в пограничных слоях генерируется осредненное течение, которое приводит в движение жидкость в объеме полости. Профиль осредненной азимутальной скорости жидкости приведен на (рис. 1. *a*). Угловая скорость жидкости немонотонным образом распределена вдоль радиуса, при этом в профиле скорости присутствует серия точек перегиба.

#### 4. Устойчивость осредненного течения

Согласно [1] интенсивность азимутального течения определяется комплексом  $\Delta\Omega_L/\Omega_{rot} \sim b^2/R_1\delta$ , где  $\delta = (2\nu/\Omega_{rot})^{1/2}$  – толщина динамического пограничного слоя. В свою очередь амплитуда колебаний ядра пропорциональна безразмерному ускорению  $\Gamma = g/\Omega_{rot}^2 R_1$  и относительной плотности ядра:  $b \sim \Gamma R_1(1-\rho)$ . Устойчивость осредненного течения, возбуждаемого свободным ядром, определяется числом Рейнольдса, рассчитанным через дифференциальное вращение ядра  $Re = |\Delta\Omega|R_2/\nu$  [3]. Ввиду аналогии задач и считая, что  $\Delta\Omega_L \sim \Delta\Omega$ , введем число Рейнольдса, рассчитанное через амплитуду колебаний ядра  $Re_\Gamma = \Gamma^2 E^{-3/2} (1-\rho)^2$ , где  $E = \nu/\Omega_{rot} R_1^2$  – число Экмана.

С увеличением  $Re_\Gamma$  в структуре течения наблюдается серия неустойчивостей. Первоначально в центральной части полости возникает двумерная вихревая система (рис. 1. б). Вихри вытянуты вдоль оси вращения, а их скорость меньше скорости вращения полости. Следующий пороговый переход связан с возбуждением системы валов в объеме полости (рис. 1. в). Валы распространяются в антициклоническом направлении, а их скорость обратно пропорциональна квадрату волнового числа,  $u \sim 1/m^2$ . Полученное дисперсионное соответствует волне Россби. Исключение из рассмотрения стационарного потока, обусловленного дифференциальным вращением ядра, показывает, что ранее наблюдавшиеся структуры в задаче со свободным ядром [3] связаны с неустойчивостью вибрационного течения. При этом Экмановский поток модифицирует структуру течения в сферическом слое, что приводит к изменению величины критического значения  $Re_\Gamma$ .



**Рис. 1.** Эволюция структуры осредненного течения с увеличением параметра  $Re_\Gamma$  в плоскости  $z/R_2 = 0.56$  от экватора (внешняя граница): (а) осесимметричное течение; (б) возникновение вихревой системы на оси вращения; (в) волна Россби. Направление вращения полости – по часовой стрелке.

Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (проект 14-11-00476).

#### Список литературы

1. Kozlov V.G., Kozlov N.V., Subbotin S.V. Steady flows excited by circular oscillations of free inner core in rotating spherical cavity // Eur. J. Mech. B-Fluid. 2016. Vol. 58. P. 85–94.
2. Thielicke W., Stamhuis E.J. PIVlab – Time-Resolved Digital Particle Image Velocimetry Tool for MATLAB (version: 1.41).
3. Kozlov V.G., Kozlov N.V., Subbotin S.V. Instabilities and pattern formation in rotating spherical cavity with oscillating inner core // Eur. J. Mech. B-Fluid. 2017. V. 63. P. 39–46.

## Исследование движения ионообменной микрочастицы в слабом электрическом поле

Е. А. Демехин<sup>a,b</sup>, Г. С. Ганченко<sup>b</sup>, В. С. Шелистов<sup>b</sup>, Е. А. Франц<sup>b,c</sup>

<sup>a</sup> Московский государственный университет им. Ломоносова М.В., 1191926, Москва, Мичуринский пр., 1

email: edemekhi@gmail.com

<sup>b</sup> Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, 350051, Краснодар, ул. Шоссе Нефтяников, 32

email: GSGanchenko@fa.ru, VSSHelistov@fa.ru

<sup>c</sup> Кубанский государственный университет, 350040, Краснодар, ул. Ставропольская, 149  
email: eafrants@gmail.com

В работе исследуется движение ионообменной частицы в растворе электролита под действием внешнего электрического поля малой напряженности. С помощью асимптотического метода получены аналитические оценки для скорости частицы. Кроме того получено численное решение соответствующей задачи, а именно профили распределения концентраций, потенциала и линий тока жидкости. Произведено сравнение аналитических результатов с результатами численного моделирования.

**Ключевые слова:** ионообменная микрочастица; асимптотический анализ; электрофорез

## Investigation of the motion of an ion-exchange microparticle in a weak electric field

E. A. Demekhin<sup>a,b</sup>, G. S. Ganchenko<sup>b</sup>, V. S. Shelistov<sup>b</sup>, E. A. Frants<sup>b,c</sup>

<sup>a</sup> Moscow State University, Michurinsky Av. 1, 1191926, Moscow

email: edemekhi@gmail.com

<sup>b</sup> Financial University under the Government of the Russian Federation, shosse Neftyanikov St. 32, 350051, Krasnodar

email: ganchenko.ru@gmail.com, shelistov\_v@mail.ru

<sup>c</sup> Kuban State University, Stavropolskaya St. 149, 350040, Krasnodar

email: eafrants@gmail.com

In this paper, we study the motion of an ion-exchange particle in an electrolyte solution under a weak external electric field of small strength. An analytic form of the particle's velocity has been obtained using an asymptotic method. A comparison of analytical results with the results of numerical simulation has been made.

**Keywords:** Ion-exchange microparticle; asymptotic analysis; electrophoresis

В данной работе исследуется движение проводящей сферической катионообменной микрочастицы в растворе бинарного электролита под действием внешнего электрического поля напряженности  $E_\infty$ . Коэффициенты диффузии катионов и анионов принимаются равными; движение рассматривается в стоксовском приближении.

Так как рассматриваемая частица имеет сферическую форму, то систему уравнений Нернста–Планка–Пуассона–Стокса имеет смысл записать в сферической системе координат с началом в центре частицы и считать движущейся со скоростью частицы. Задача симметрична, поэтому ограничимся зависимостью только от одного угла и записью уравнений в двумерной постановке:

$$\frac{\partial c^\pm}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla c^\pm = \nabla(c^\pm \nabla \Phi) + \nabla^2 c^\pm; \quad (1)$$

$$\nu^2 \nabla^2 \Phi = c^- - c^+; \quad (2)$$

$$-\nabla P + \nabla^2 \mathbf{U} = (c^+ - c^-) \frac{\kappa}{\nu^2} \nabla \Phi = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{U} = 0. \quad (3)$$

Здесь  $c^\pm$  — молярные концентрации катионов и анионов,  $\mathbf{U}$  — вектор скорости,  $\Phi$  — потенциал электрического поля,  $P$  — давление,  $\nu$  — число Дебая и  $\kappa$  — коэффициент сцепления между гидродинамической и электростатической частями задачи.

На поверхности частицы берутся следующие краевые условия: концентрация положительных ионов фиксирована, поток отрицательных ионов через поверхность отсутствует, потенциал проводящей частицы постоянен и без ограничения общности может быть положен равным нулю, компоненты скорости удовлетворяют условиям непроницаемости и прилипания:

$$r = 1: c^+ = p, \quad c^- \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\partial c^-}{\partial r} = 0, \quad \Phi = 0, \quad \mathbf{U} = 0 \quad (4)$$

Вдали от микрочастицы концентрация стремится к равновесной, вектор напряженности и вектор скорости предполагаются параллельными оси  $x$  декартовой системы координат:

$$r \rightarrow \infty: c^+ \rightarrow 1, \quad c^- \rightarrow 1, \quad \mathbf{U} \rightarrow (-U_\infty \sin \theta, U_\infty \cos \theta), \quad \Phi = -E_\infty r \cos \theta \quad (5)$$

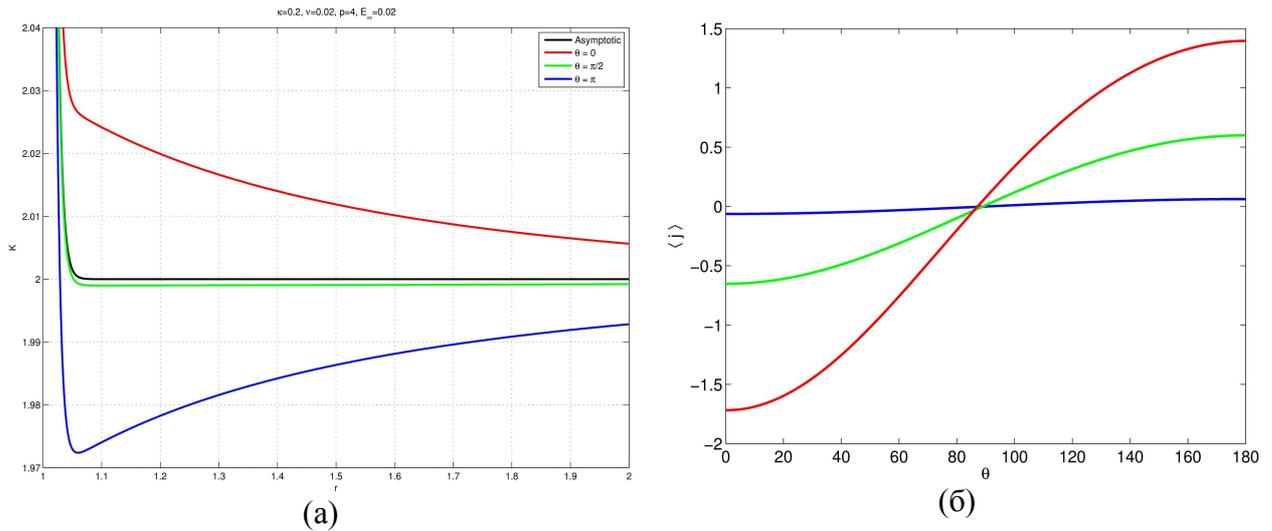
Задача замыкается добавлением начальных условий: концентрации катионов и анионов предполагались равными равновесной концентрации,  $t = 0: c^\pm = 1$ .

Для асимптотического решения системы в частных производных при  $E_\infty \rightarrow 0$  было использовано общее разложение функций системы относительно  $E_\infty$ , учитывающее только линейные члены:

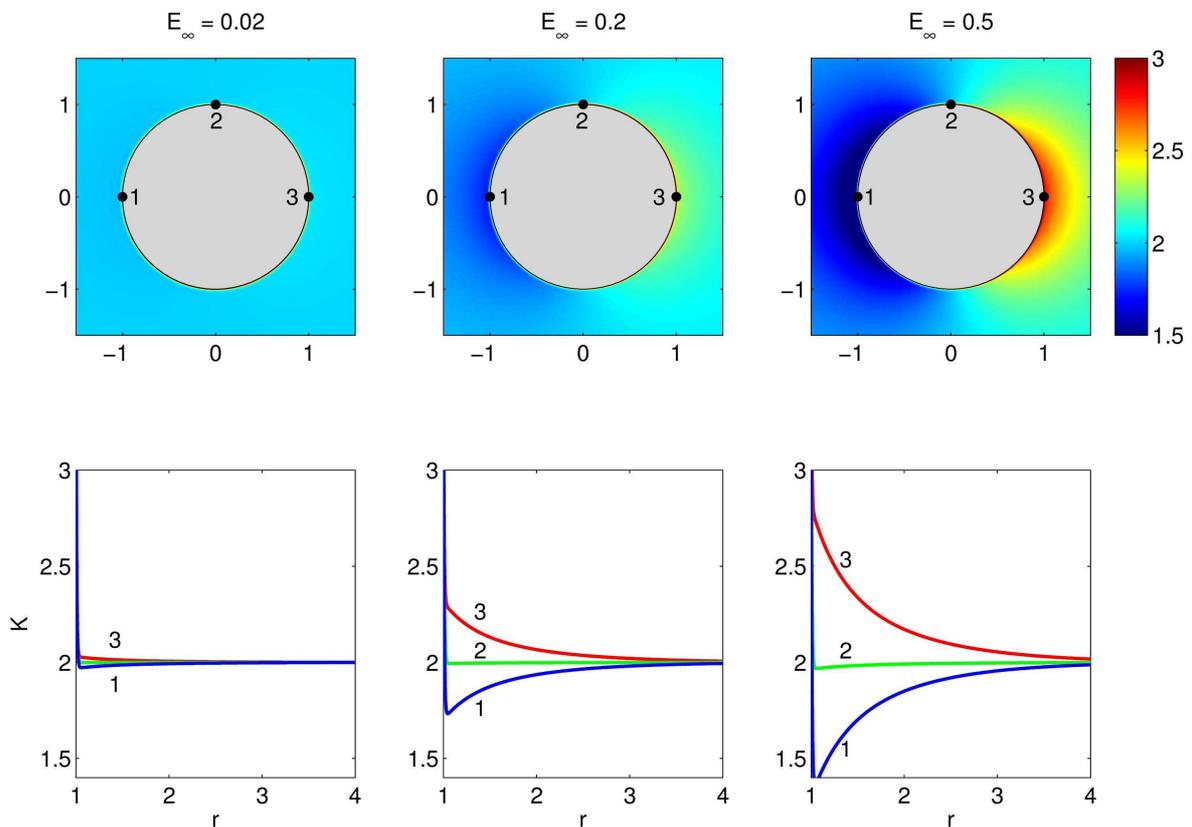
$$c^\pm = c_0^\pm + c_1^\pm \cdot E_\infty + O(E_\infty^2), \quad \Phi = \Phi_0 + \Phi_1 \cdot E_\infty + O(E_\infty^2), \quad U = U_0 + U_1 \cdot E_\infty + O(E_\infty^2). \quad (6)$$

Решение нулевого приближения находилось из предположения, что  $\nu \rightarrow 0$ . В результате были получены аналитические формулы для функций  $K = c^- + c^+$  и  $\Phi$ , а также формула, выражающая зависимость скорости частицы  $U_\infty$  от напряженности поля  $E_\infty$ .

На (рис. 1) приведено сравнение суммарной концентрации ионов  $K$ , рассчитанной по аналитическим формулам (непрерывные линии) с результатами численного моделирования. Функция  $\rho = c^+ - c^-$  совпадает с графической точностью.



**Рис. 1.** (а) Сравнение аналитических выводов с численным моделированием для суммарной концентрации ионов  $K$  и (б) средний ток на поверхности частицы как функция угла



**Рис. 2.** Распределение потенциала  $\Phi$  около поверхности частицы при разных значениях напряженности поля  $E_\infty$  (верхний ряд) и кривые плотности заряда  $K$  (нижний ряд) для тех же значений напряженности поля для значений угла:  $\theta = 0, 90$  и  $180^\circ$  (кривые 1, 2 и 3 соответственно)

Публикация подготовлена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-08-00643).

# Стратосферный эксперимент по определению температуры плоской пластины под действием солнечного потока

А. А. Дёмин<sup>а</sup>, В. Н. Терпугов<sup>а</sup>, А. Л. Свистков<sup>а</sup>, С. В. Русаков<sup>а</sup>,  
А. В. Кондюрин<sup>а,б</sup>

<sup>а</sup> Пермский государственный национальный исследовательский университет  
614990, Пермь, ул. Букирева, 15  
email: doymnbi@mail.ru

<sup>б</sup> Школа физики Сиднейского университета, Сидней, Австралия

В работе ставится задача создания комплекса экспериментов «Земля-стратосфера», который позволит определить потоки тепла и определить температурные изменения в модели плоской пластины подогреваемой солнечным излучением и отраженным излучением Земли. Как известно солнечное излучение отражается от земной поверхности, тем самым возможны различия между экспериментальными и теоретическими значениями температуры тела в стратосфере. Данный эксперимент позволит создать модель изменения температуры для дальнейшего использования в математических моделях кинетики отверждения материала в стратосфере.

**Ключевые слова:** стратосфера; полет; излучения; температура

## Stratospheric experiment on temperature of flat plate under solar irradiation

A. A. Demin<sup>а</sup>, V. N. Terpugov<sup>а</sup>, A. L. Svistkov<sup>а</sup>, S. V. Rusakov<sup>а</sup>,  
A. V. Kondyurin<sup>а,б</sup>

<sup>а</sup> Perm State University, Bukirev 15, Perm, 614990, Russia  
email: doymnbi@mail.ru

<sup>б</sup> School of Physics, University of Sydney, Sydney, Australia

In present investigation a task on experimental setup “Eath-stratosphere” is considered, which can help to measure heat flux and to calculate temperature behavior of flat plate irradiated by sun light and reflected light from Earth. As known, solar light is reflected by Earth surface that gives a deviation between theoretical and experimental values for a balloon load in stratosphere. The stratospheric experiment will give a model of temperature variations for following models of curing kinetics of composite materials in stratosphere.

**Keywords:** stratosphere; flight; radiation; temperature

Увеличение объёма строительных модулей поднимаемых на орбиту Земли, на поверхности Луны и т. д. возможно при использовании технологии полимеризации композиционных материалов непосредственно в открытом космическом пространстве. Однако структура и свойства полимерного материала напрямую зависят от процесса его формирования, а процесс полимеризации в открытом космосе будет происходить в условиях высокого вакуума, резких перепадов температур и жесткого космического излучения, [1–6]. Таким образом, условия, характерные для околоземных орбит способны значительно повлиять на итоговые свойства полученного материала.

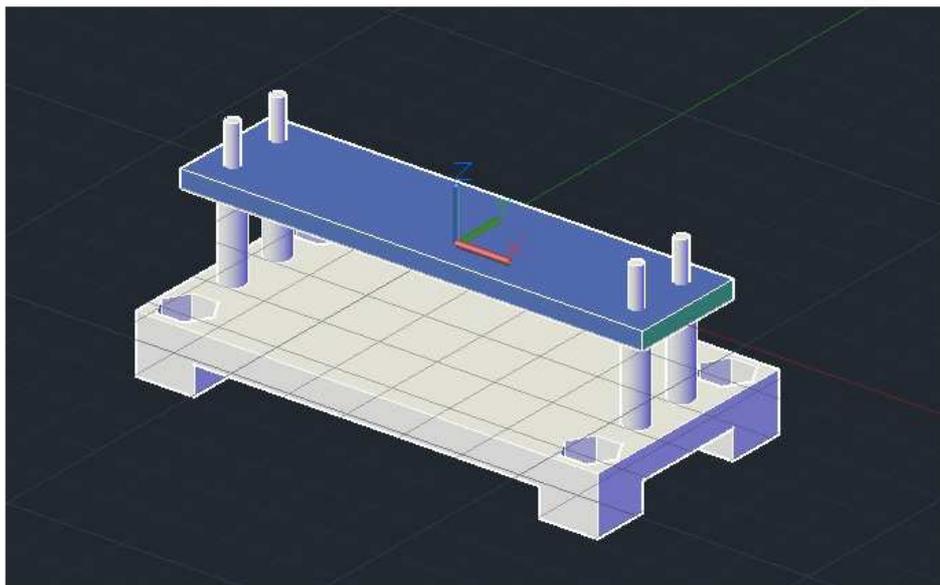
Определение воздействия факторов космического пространства на материал, является основной задачей исследования.

В силу высокой стоимости экспериментов и существующих запретов на унос связующего, проведение исследований на орбите Земли невозможно. В настоящей работе предлагается заменить испытания в космосе комплексом испытаний на Земле и стратосфере (на высоте 30 – 40 км).

Для обеспечения высокого качества материала, требуется оценка стратосферных условий. Чёткое понимание этих условий, позволит сформировать гипотезы поведения материала в реальном космосе.

Планируется проведение стратосферных экспериментов с целью расчёта переносимого тепла частицами в верхних слоях атмосферы. На стратосферную платформу предлагается установить 3 одинаковых образца с известными физическими и термодинамическими константами. Например сталь или алюминий. Каждый из образцов будет подвержен отличным друг от друга излучениям.

Предполагается три вида расположения образцов. Первый образец устанавливается таким образом, чтобы получать излучение напрямую из космоса. Второй необходимо подвергнуть, отражённому от Земли, излучению и исключить прямое воздействие космоса. Третий образец является промежуточным, между первым и вторым. Он изолируется от «верхних» и «нижних» излучений и подвергается только переносимым частицами теплу.



**Рисунок.** 3D модель экспериментальной подставки, с установленным на ней материалом, сделанной в AutoCAD.

В рассматриваемом случае на платформу устанавливаются 3 экспериментальные подставки (на рисунке выше), к которым подведены по 3 термопары. Диаметр спайки термопары составляет 1.1 мм. Расчёт температуры начинается с момента запуска платформы. На стратосферную платформу установлен процессорный блок на базе Arduino Uno управляемый экспериментом. Процессорный блок, также имеет систему протоколирования эксперимента, а сама установка снабжена системой навигации. Максимальная высота подъёма платформы составляет в среднем 35-40 км, где обеспечивается влияние космических условий, в силу преодоления защитного озонового слоя стратосферной платформой. Время всего полёта в среднем составляет 2-

3 часа. После достижения критической высоты, платформа стремительно падает вниз. Для безопасного падения на платформе установлена парашютная медуза, изготовленная под определённую нагрузку. Затем происходит поиск платформы, при помощи навигационного оборудования и доставка образцов в лабораторию.

Данные полученные из стратосферы позволят создать температурную модель стратосферы, которые будут применены в дальнейших экспериментах по отверждению полимерного материала в стратосферных условиях.

Автор статьи выражает благодарность А. В. Кондюрину за предоставленные консультации в разработке технологии эксперимента. Работа выполняется при финансовой поддержке грантов РФФИ № 14-08-96011\_урал\_а, №15-01-07946\_а, №16-48-590844\_а.

### Список литературы

1. *A.A. Demin, A.V. Kondyurin, V.N. Terpugov.* Computer and stratospheric flight simulation of space experiment on curing of epoxy composite. Статья в изданиях, входящих в Scopus. *Materials Physics and Mechanics*, Санкт-Петербург, Россия, 2016, с. 73 – 36.
2. *Кондюрин А.В., Комар Л.А., Свистков А.Л.* Моделирование кинетики реакции отверждения композиционного материала на основе эпоксидного связующего // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2010. – Т. 16, № 4. – С. 597-611.
3. *Русаков С.В., Свистков А.Л., Комар Л.А., Кондюрин А.В.* Моделирование отверждения эпоксидной смолы в условиях открытого космоса // *Материалы XVIII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСПС' 2013)*, 22-31 мая 2013 г., Алушта. – М.: Изд-во МАИ, 2013. С.128-130.
4. *A. Kondyurin* // *Journal of Spacecraft and Rockets* 48 (2011) 378.
5. *A. Wilson* // *Journal of the British Interplanetary Society* 34 (1981) 10.
6. *D.P. Cadogan, S.E. Scarborough,* Rigidizable Materials for use in Gossamer Space Inflatable Structures, *AIAA Paper 2001-1417* (2001).

## **О термокапиллярном механизме пространственного разделения металлических расплавов**

**В. А. Демин<sup>a</sup>, А. И. Мизев<sup>b</sup>, М. И. Петухов<sup>a</sup>**

<sup>a</sup> Пермский государственный национальный исследовательский университет, 614990, Пермь, ул. Букирева, 15  
email: demin@psu.ru

<sup>b</sup> Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1

Работа посвящена описанию процесса разделения расплавов легкоплавких металлов на компоненты в вертикально-ориентированном неоднородно нагретом капилляре. На вертикальных границах капилляра устанавливается градиент температуры, направленный вертикально вверх. Также на боковых гранях имеет место условие полного несмачивания. Вследствие этого на свободной поверхности возникает эффект Марангони, при описании которого учитываются термо- и концентрационно-капиллярный механизмы. Взаимодействие компонентов расплава с поверхностью происходит посредством включения адсорбционно-десорбционного механизма в граничные условия. Моделирование конвективных процессов проводилось численно на основе уравнений межфазной гидродинамики. По результатам вычислительного эксперимента была установлена роль распределения температуры на поверхности в формировании полей объемной концентрации. Показано, что термокапиллярный и адсорбционно-десорбционный механизмы создают опускное течение, которое приводит к крупномасштабному продольному перераспределению компонентов расплава.

**Ключевые слова:** концентрационная конвекция; свободная поверхность; эффект Марангони; адсорбционно-десорбционные процессы

## **On thermocapillary mechanism of spatial separation of metal melts**

**V. A. Demin<sup>a</sup>, A. I. Mizev<sup>b</sup>, M. I. Petukhov<sup>a</sup>**

<sup>a</sup> Perm State National Research University, Bukireva St. 15, 614990, Perm  
email: demin@psu.ru

<sup>b</sup> Institute of Continuous Media Mechanics of the Ural Branch of Russian Academy of Science, Academician Korolev St. 1, 614013, Perm

The results of direct numerical simulation of the concentration-induced convection have been presented in this paper. Binary melt of liquid metals filling vertical thin capillary with non-uniform temperature distribution on the boundaries is considered. It is assumed that the condition of absolute nonwetting takes place on the sidewalls of the channel. Because of this effect there is a free surface on vertical boundaries, where thermocapillary force is appeared due to the external longitudinal

nal temperature gradient which makes to move liquid elements at a big distance, compared with axial size of capillary. The numerical calculations have been fulfilled in the PGU-Tesla supercomputer of the Research Academic Center "Parallel and Distributed Calculations" at Perm State University. The method of finite differences was applied. Numerical code was written in programming language Fortran-90. Calculation results show that the lifting speed of returning motion in the volume is less, than on the surface, that's why admixture in the stage of saturation can be accumulated nearby the lower part of capillary. After establishing the flow is stationary and determined as in the volume as on the surface predominantly by the Marangoni number. Intensity of motion and processes of adsorption-desorption on the free boundary have the decisive influence upon the formation of surface and volume concentration fields and speed of components redistribution in a volume. Thus, one of the possible mechanisms of longitudinal division on components of liquid binary mixtures in thin channels has been demonstrated.

**Keywords:** concentration-induced convection; free surface; Marangoni effect; processes of adsorption-desorption

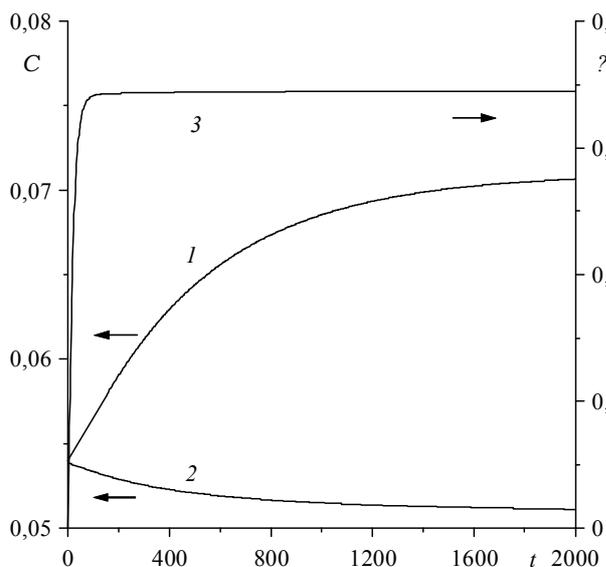
## 1. Введение

Явление продольного разделения компонентов металлических расплавов в тонких капиллярах впервые наблюдалось в работе [1]. Алундовый капилляр диаметром от 0.8 до 1.2 мм и высотой от 40 до 220 мм, заполненный однородной двухкомпонентной смесью жидких металлов (Sn-Pb, Cd-Bi или Al-Si), в вертикальном положении помещался в печь так, что оба компонента поддерживались в расплавленном состоянии. Спустя время ~1 ч его вынимали и немедленно остужали, после чего изучалось продольное распределение компонентов расплава. В опытах фиксировался достаточно большой перепад концентрации ~5-20% на торцах капилляра. По результатам многочисленных экспериментов было выявлено несколько особенностей явления разделения: устремление перепада концентрации к некоторому пределу при увеличении продолжительности эксперимента, разделение происходило только в случае вертикальной ориентации капилляра, при увеличении температуры выдержки в печи наблюдалось уменьшение перепада концентрации.

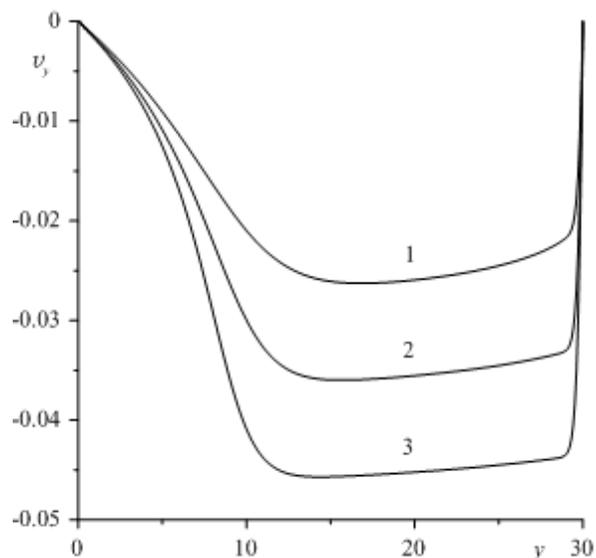
## 2. Постановка задачи и результаты расчетов

Для объяснения разделения смеси жидких металлов на компоненты было сделано предположение о наличии в капилляре диффузионно-концентрационного и конвективного механизмов переноса. На вертикальных стенках рассматриваемого капилляра, вследствие процессов теплообмена в печи, устанавливается градиент температуры, направленный вверх. В силу специфики используемого в эксперименте материала капилляра, на вертикальных гранях имеет место условие полного несмачивания. На образованной таким образом вертикальной свободной поверхности возникает температурная неоднородность поверхностного натяжения, которая приводит к термокапиллярному эффекту. Также в модели были учтены эффекты адсорбции-десорбции. Задача в подобной, но более упрощенной постановке была решена в [2], где было показано, что наличие указанных механизмов приводит к небольшому (~1 %) перепаду концентрации. В рамках более расширенной модели учитывался концентрационно-капиллярный механизм. Задача решалась методом конечных разностей с помощью двухполюсного метода посредством программы, написанной на языке Fortran-90.

Результаты численного моделирования показали, что в процессе разделения компонентов смеси за время порядка одного часа (рис. 1) устанавливается достаточно сильный перепад концентрации (~20%), что достаточно близко к результатам экспериментов [1]. Численное решение уравнений концентрационной конвекции приводило к появлению опускного течения на поверхности. Примесь, скапливаемая в нижней части капилляра, из-за эффекта десорбции проникает в объем, и за счет подъемного течения в центре капилляра незначительно переносится в его верхнюю часть. Затем, за счет адсорбции, в области с низкой концентрацией она возвращалась на поверхность. Отдельно была изучена роль термо- и концентрационно-капиллярного механизмов в формировании профилей поверхностной и объемной концентрации.



**Рис. 1.** Максимум и минимум поля объемной концентрации в зависимости от времени (1,2) при  $Ma_T = 8$  и  $Ma_T = 7$ ; 3 – максимум поверхностной концентрации в зависимости от времени.



**Рис. 2.** Продольная компонента скорости на поверхности капилляра. Концентрационное число Марангони  $Ma_T = 5$ . Кривые 1-3 соответствуют  $Ma_T = 6, 8, 10$ .

Рост теплового числа Марангони, что соответствует усилению термокапиллярного механизма, приводит к увеличению перепада концентрации. В то же время увеличение концентрационного числа Марангони (концентрационно-капиллярного механизма) дает обратный результат. Аналогичное поведение проявляется и на профилях скорости (рис. 2). Исходя из представленных результатов, можно утверждать, что предложенная модель позволяет качественно описать разделение смеси, находящейся в условиях, близких к экспериментам.

Работа поддержана РФФИ, грант № 16-01-00662 а.

### Список литературы

1. Гаврилин И.В., Фролова Т.Б., Захаров В.П. О ликвации в жидких эвтектических расплавах // Известия АН СССР. Металлы, 1984. №3. С. 191–193.
2. Демин В.А., Петухов М.И. К вопросу о механизме крупномасштабного переноса компонентов металлических расплавов в неоднородно нагретых тонких капиллярах // Вестник Пермского университета. Сер. Физика. Вып. 3 (34). 2016. С. 65–71.

## Контракция в неравновесных системах жидкостей

М. О. Денисова<sup>a</sup>, К. Г. Костарев<sup>a</sup>, М. В. Ошмарина<sup>b</sup>, С. В. Торохова<sup>a</sup>,  
А. В. Шмыров<sup>a</sup>, А. И. Шмырова<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Институт механики сплошных сред УрО РАН  
614013, Пермь, ул. академика Королева, 1  
email: kostarev@icmm.ru

<sup>b</sup> Пермский государственный национальный исследовательский университет  
614990, Пермь, ул. Букирева, 15

Экспериментально изучено развитие конвективного движения в ряде систем жидкостей с межфазной границей, через которую происходит диффузия поверхностно-активного вещества. Специфика рассматриваемых задач состоит в равной начальной плотности всех жидкостей – как базовых, так и диффундирующей. В этой ситуации гравитационная конвекция возникает в результате эффекта контракции, представляющего собой неаддитивное изменение объема и, соответственно, плотности смеси при изменении концентрации одной из ее компонент. Взаимодействие гравитационных и концентрационно-капиллярных течений проанализировано на примере двух задач – (а) установления колебательного режима конвекции вблизи вертикальной межфазной границы, перегораживающей горизонтальный канал, (б) развития неустойчивости Тейлора в системе с горизонтальной межфазной границей.

**Ключевые слова:** диффузия; контракция; конвекция

## Contraction in nonequilibrium systems

М. О. Denisova<sup>a</sup>, К. G. Kostarev<sup>a</sup>, М. V. Oshmarina<sup>b</sup>, S. V. Torokhova<sup>a</sup>,  
A. V. Shmyrov<sup>a</sup>, A. I. Shmyrova<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, st. A. Koroleva 1, Perm, 614013  
kostarev@icmm.ru

<sup>b</sup> Perm State National Research University, st. Bukirev, 15, Perm, 614990

The development of convective motion in a number of liquid systems with an interface through which diffusion of the surfactant occurs is experimentally studied. The specificity of the problems under consideration consists in an equal initial density of all liquids, both basic and diffusing. In this situation, buoyancy-driven convection arises as a result of contraction effect, which is a nonadditive change in volume and, accordingly, the density of the mixture when the concentration of one of its components varies. The interaction between buoyancy-driven convection and concentration-capillary one was analyzed using two problems: (a) the establishment of an oscillatory regime of flows near a vertical interphase boundary crossing the horizontal channel; (b) the development of Taylor instability in a system with a horizontal interface.

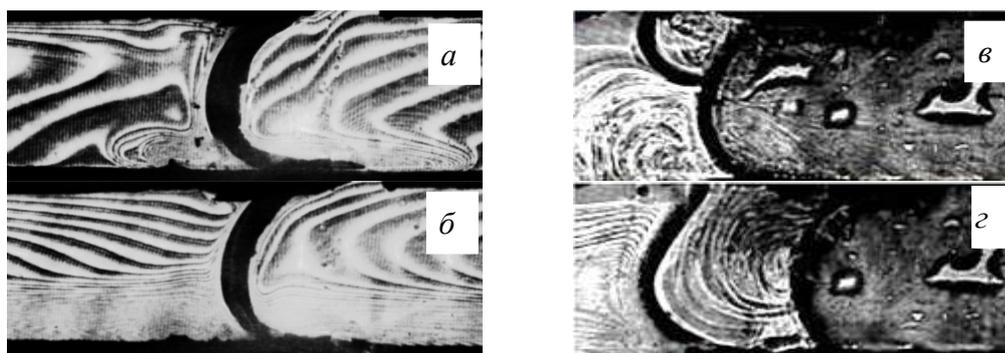
**keywords:** diffusion; contraction; convection

Контракция (дословно «сжатие») – неаддитивное изменение объема неравновесной системы жидкостей в результате поглощения или диффузии одной из компонент системы либо совершения системой фазового перехода. Причиной контракции служат изменение межмолекулярного расстояния и формирование пространственной структуры (при смене состояния системы) либо «переупаковка» молекул базовой компоненты жидкой смеси при появлении или исчезновении второй компоненты. В основном, влияние контракции изучено для случая фазовых переходов [1]. В жидкостях контракция обычно маскируется изменением суммарной плотности вследствие исходного различия в плотностях компонент системы (контракционные изменения на порядок слабее).

Роль контракции кардинально изменяется, когда в массообменных процессах начинают участвовать жидкие системы с равной или близкой плотностью исходных компонент. В этой ситуации контракция не только определяет интенсивность свободно-конвективного движения, но может спровоцировать и потерю равновесия первоначально устойчиво-стратифицированной системы жидкостей.

В качестве примера влияния контракции на формирование структуры течения рассмотрим развитие диффузионного процесса в системе жидкостей с межфазной границей, перегораживающей горизонтальный прямоугольный канал. В качестве базовых (контактирующих) жидкостей системы выбраны смесь хлорбензола и бензола – с одной стороны – и водный раствор хлористого натрия – с другой. Концентрации смеси и раствора подобраны так, что их исходные плотности равны плотности диффундирующей компоненты, роль которой выполняет уксусная кислота. Изначально вся кислота сосредоточена в бинарной смеси, а контактирующие жидкости разделены подвижной перегородкой. Для визуализации полей концентрации и структуры течений (последних в силу малого значения коэффициента диффузии) использован интерференционный метод. Высота канала 2.5 мм, ширина 1.2 мм, протяженность 50 мм.

При удалении перегородки в системе жидкостей начинается диффузионный процесс, протекающий без развития капиллярной конвекции, если  $C_0 < 10\%$ , где  $C_0$  – начальная массовая концентрация кислоты в смеси. При этом действие эффекта контракции в системе таково, что диффузия кислоты из бинарной смеси в раствор соли приводит к локальному росту плотности по обе стороны межфазной границы и формированию слабого адвективного течения гравитационной природы (рис. 1. а и 1. б).



**Рис. 1.** Эволюция поля концентрации вблизи межфазной границы, перегораживающей канал (вид сбоку): слева – смесь, справа – водный раствор; (а, б) –  $C_0 = 10\%$ , время с начала опыта  $t$ , с: а – 3; б – 95; (в, г) –  $C_0 = 20\%$ , время развития цикла с начала опыта  $t_1^* = 15$  с, время с начала цикла  $t$ , с: в – 2; г – 12

Превышение начальной концентрацией порогового значения [2] ведет к возникновению конвекции Марангони, разрушающей распределение концентрации, сформированное диффузией. Вследствие конкуренции между капиллярным и гравитационным механизмами движения в канале устанавливается колебательный режим течения (рис. 1 *в-г*) – кратковременные «вспышки» Марангони конвекции сменяются относительно продолжительными интервалами восстановления перепадов плотности вблизи границы фаз за счет адвективного свободно-конвективного движения.

В отличие от ситуации, рассмотренной в [3], капиллярное движение имеет вид двух пар вихрей, первоначально достаточно симметричных относительно оси канала (как следствие гидроневесомости), но асимметричных относительно межфазной границы (как следствие контракции). Вихри разделены струей, подносящей ПАВ к межфазной границе.

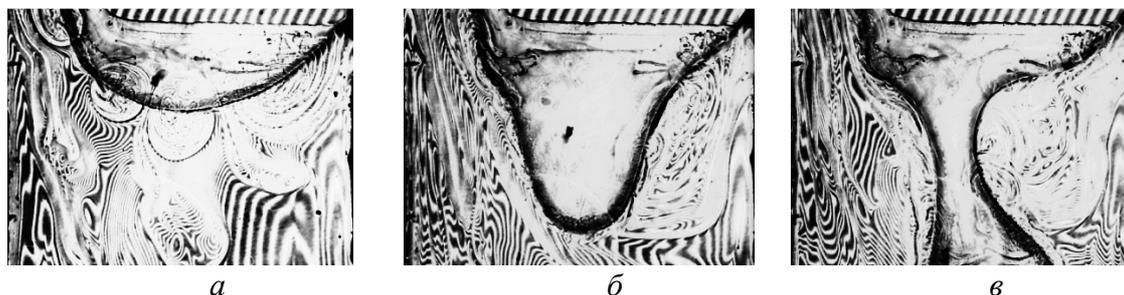
Дальнейшая эволюция пар вихрей различна. В нижнем паре вихрей смесь, потеряв часть кислоты вследствие диффузии, в результате контракции становится тяжелей и не только участвует в вихревом движении, но и растекается по дну канала, вытесняя вверх смесь с исходным содержанием кислоты. В смеси вслед за этой областью вверх смещается и струя ПАВ, удерживая в углу верхний вихрь и ускоряя в нем – за счет интенсификации движения – снижение концентрации кислоты. Последнее хорошо заметно по резкому перепаду показателя преломления на границе вихря. Со временем, увеличиваясь в размерах и становясь существенно плотнее окружающей среды, верхний вихрь оседает на дно канала, отсекая питающую струю от межфазной поверхности и прекращая тем самым капиллярное движение. И лишь свежая порция смеси, достигающая границы фаз, запускает новый цикл конвекции Марангони.

Отметим, что наблюдаемое формирование вертикальной стратификации ПАВ приближает начальные условия в канале к описанным в [3]. Действительно, через несколько циклов число капиллярных вихрей сокращается до одной пары, как и в [3].

Еще более наглядно действие контракции проявляется в случае горизонтальной межфазной границы – для выбранной системы жидкостей, послойно заполняющей вертикальную ячейку Хеле-Шоу. Если водный раствор хлористого натрия находится поверх смеси, содержащей кислоту, то диффузия последней в раствор нарушает механическое равновесие системы, обеспеченное равенством исходных плотностей жидкостей. Контракция увеличивает плотность раствора, поглощающего кислоту, в то время как по другую сторону межфазной поверхности плотность смеси остается прежней (потеряв кислоту, обедненная смесь хлорбензола и бензола в силу контракции становится тяжелее и опускается на дно ячейки, вытесняя к межфазной границе смесь с исходной плотностью). В результате роста гидростатического давления межфазная поверхность прогибается (рис. 2. *а*).

При  $C_0 > 10\%$  деформацию межфазной поверхности ускоряет развитие капиллярной конвекции, которая существенно интенсифицирует диффузионный процесс. Возникающая конвекция Марангони имеет вид отдельных парных – расположенных по разные стороны межфазной границы – вихрей (рис. 2. *а*), мигрирующих к центру быстро провисающей поверхности раздела фаз. Кроме того, деформации межфазной поверхности способствует и снижение межфазного натяжения  $\sigma$  с ростом начальной концентрации кислоты. Так, при  $C_0 = 20\%$   $\sigma = 3$  дин/см, в то время как при  $C_0 = 10\%$   $\sigma$  вдвое больше. Вихри увеличиваются в размере, объединяясь и формируя, в конечном итоге, систему двух симметричных парных вихрей, прилегающих к восходящей струе смеси, подпитывающей капиллярное движение. Рост концентрации кислоты в растворе в области струи ведет к дальнейшему локальному уменьшению межфазного натяжения с одновременным превышением плотности над средней плотностью системы. Система

теряет устойчивость – формируется каплеобразная область, которая ускоренно – по мере стекания раствора, обогащенного кислотой – погружается в толщу смеси (т.о. наблюдается классическая неустойчивость Тейлора, рис. 2. б).



**Рис. 2.** Диффузия уксусной кислоты в вертикальном канале: снизу – смесь с  $C_0 = 20\%$ , вверху – водный раствор NaCl ( $C_{01} = 7.2\%$ ). Время с момента создания межфазной границы  $t$ , с: а – 27, б – 37; в – 39

Снижение концентрации кислоты вблизи оставшейся неподвижной межфазной границы приводит к восстановлению межфазного натяжения до значений, близких к исходному, в результате чего формируется шейка капли (рис. 2в) и капля отрывается. Площадь межфазной поверхности сокращается практически до начальных размеров. Если запас смеси с исходной концентрацией в полости достаточно велик, то развитие тейлоровской неустойчивости повторяется.

Анализируя полученные результаты, можно сделать вывод, что исходное равенство плотностей базовых жидкостей и диффундирующего ПАВ, способное, на первый взгляд, обеспечить адекватное лабораторное моделирование массообмена в условиях невесомости, на самом деле не создает желаемых условий. Контракция, сопровождающая изменение концентрации ПАВ по обе стороны межфазной границы, приводит к генерации локальных неоднородностей плотности жидкостей, порождая гравитационную конвекцию. Однако эти перепады, по крайней мере, на порядок меньше, чем в случае системы на основе базовых однокомпонентных жидкостей. В результате, конвекция Марангони оказывается способной выйти на передний план, приводя к формированию течений и полей концентраций, близких по структуре к возникающим в условиях микрогравитации.

Работа выполнена при поддержке проектов РФФИ (№ 15-01-04842) и ведущей научной школы РФ (НШ-9176.2016.1).

1. Reddy V., Beckermann N C. Modeling of macrosegregation due to thermosolutal convection and contraction-driven flow in direct chill continuous casting of an Al-Cu round ingot // Metallurgical and Materials Transactions B. 1997. Vol. 28. Issue 3. P 479–489.
2. Бирих Р. В., Денисова М. О., Костарев К. Г. Возникновение конвекции Марангони, вызванной локальным внесением ПАВ // Известия РАН. МЖГ. 2011. № 6. С. 56–68.
3. Бушуева К. А., Денисова М. О., Зуев А. Л., Костарев К. Г. Возникновение течения у поверхности пузырьков и капель в градиентном растворе поверхностно-активной жидкости // Коллоидный журнал. 2008. Т. 70. № 4. С.457–463.

# Исследование пространственных и кинематических параметров вихревых структур за обтекаемым цилиндром

К.Г. Добросельский

Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН  
630090, Новосибирск, пр. Ак. Лаврентьева, 1  
email: dobroselsky@mail.ru

Представлены результаты экспериментального исследования поперечного обтекания круглого цилиндра турбулентным потоком воды при переходе от субкритической к критической области, с числами Рейнольдса  $Re \approx (2.07-2.84) \cdot 10^5$ . С использованием метода PIV получены данные о поле осредненной скорости вблизи цилиндра и по этим полям исследованы вихревые структуры в ближнем следе за цилиндром, проведено сравнение их пространственных и кинематических параметров для нескольких бескавитационных режимов обтекания. Показано, что с ростом числа Рейнольдса вихревая зона за цилиндром уменьшается более чем в два раза.

**Ключевые слова:** гидродинамическая труба; цилиндр; PIV; вихревые структуры; обратное течение

## The study of the spatial and kinematic parameters of the vortex structures behind the streamlined cylinder

K.G. Dobrosel'skii

Institute of Thermophysics S.S.Kutateladze SB RAS  
1 Akad. Lavrentiev Ave, 630090, Novosibirsk  
email: dobroselsky@mail.ru

The results of experimental investigation of transverse flow around a circular cylinder turbulent flow of water at the transition from subcritical to critical region with Reynolds numbers  $Re \approx (2.07-2.84) \cdot 10^5$  are presented. Data on averaged velocity fields around the cylinder are obtained by means of particle image velocimetry (PIV). Based on these fields, vortex structures in the near wake behind the cylinder are investigated, and their spatial and kinematic parameters for several without cavitation of flow regimes are compared. It is shown that with increasing Reynolds number the vortex region behind the cylinder decreases more than twice.

**Keywords:** hydrodynamic tunnel; cylinder; PIV; vortex structures; reverse current

### 1. Введение

Поперечно-обтекаемые цилиндрические поверхности широко распространены в теплообменных, энергетических и теплотехнических устройствах. Несмотря на просто-

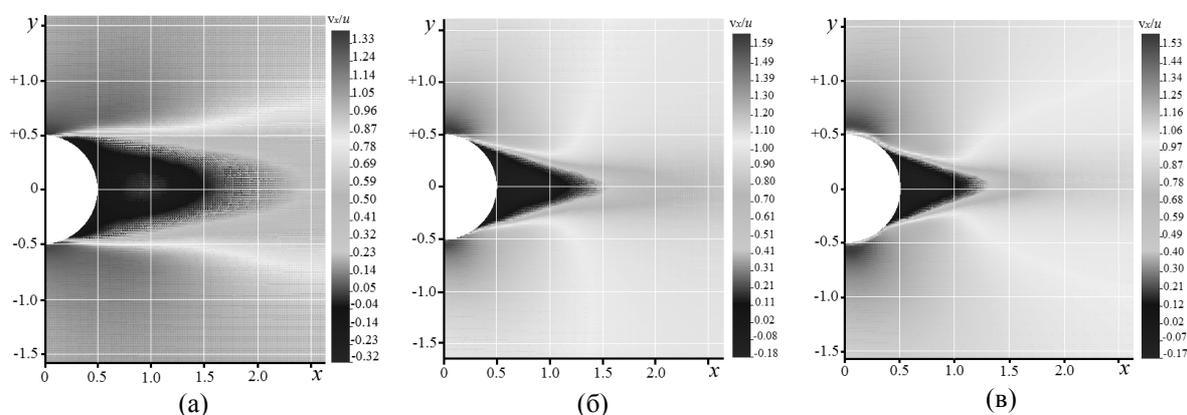
ту геометрии, течение вокруг круглого цилиндра является чрезвычайно сложным, и зависит от режима обтекания. Условия обтекания и размеры вихревой зоны (структур) за телами важны для проектирования размещения как одиночных, так и групп обтекаемых элементов в гидравлических и теплотехнических конструкциях.

## 2. Постановка задачи

В данной работе приводятся с использованием метода PIV экспериментальные исследования обтекания круглого цилиндра поперечным турбулентным потоком воды в конце субкритической и в начале критической области с числами Рейнольдса  $Re \approx (2.07-2.84) \cdot 10^5$  для бескавитационных режимов. В качестве рабочей жидкости использовалась водопроводная фильтрованная вода. Для ядра постоянной скорости уровень турбулентности в канале составлял  $Tu \approx 1\%$ . Для проведения экспериментальных исследований использовалась гидродинамическая труба замкнутого типа [1] Новосибирского национального исследовательского государственного университета (НГУ). Перпендикулярно боковым стенкам прямоугольного рабочего канала располагался стальной цилиндр диаметром  $d = 0.026$  м [2]. Управление экспериментом и обработка данных осуществлялась с использованием программного пакета «ActualFlow» [3].

## 3. Результаты и обсуждение

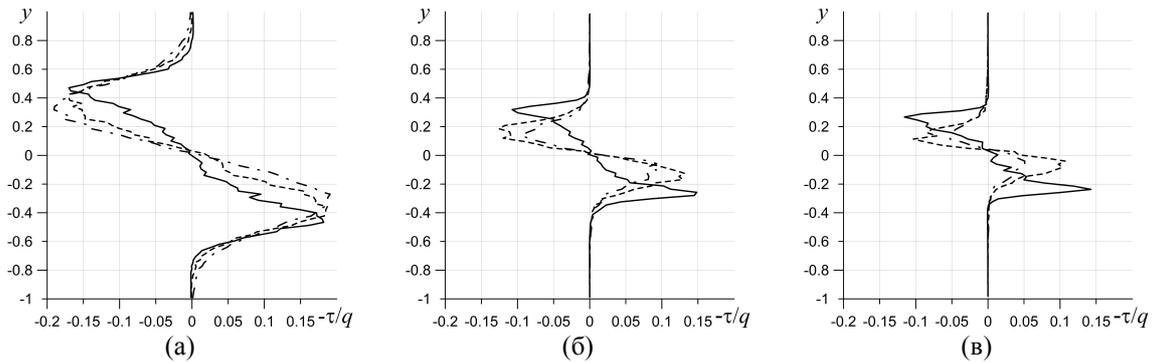
На (рис. 1) представлены средние поля скоростей  $v_x/u$  при обтекании цилиндра в центральной части канала при различных числах Рейнольдса. Здесь  $u$  – среднерасходная скорость;  $x$  и  $y$  – продольная и поперечная безразмерные координаты в долях  $d$ .



**Рис.1.** Поле скорости  $v_x/u$ : (а)– $Re = 2.0 \cdot 10^5$ , (б)– $Re = 2.5 \cdot 10^5$ , (в)– $Re = 2.8 \cdot 10^5$

Ниже, на (рис. 2) представлены сравнительные графики  $-\tau/q$ , где  $\tau = -\rho \bar{u}_x \bar{u}_y$  – касательное напряжение ( $u_x, u_y$  – соответствующие пульсации скоростей  $v_x$  и  $v_y$ ;  $\rho$  – плотность воды);  $q = \rho u^2/2$  – средний динамический напор набегающего потока. Сплошная линия соответствует координате  $x$ , при которой скорость обратного течения за цилиндром максимальна, штриховая линия –  $x \approx 1.2$ , штрихпунктирная линия –  $x \approx 1.5$ .

Анализируя (рис. 1, 2) можно сделать вывод, что сразу за цилиндром образуется устойчивая, сильно турбулированная область, где формируются вихревые структуры, противоположно вращающиеся: от верхней части – по часовой стрелке, от нижней – против часовой стрелки. По осредненным полям скорости  $v_x$  и  $v_y$  были определены координаты центров вихрей с относительной погрешностью не более 1 % [2].



**Рис.2.** Профили относительных касательных напряжений: (а)– $Re = 2.07 \cdot 10^5$ , (б)– $Re = 2.54 \cdot 10^5$ , (в)– $Re = 2.84 \cdot 10^5$

Между вихрями жидкость движется в направлении, обратном основному потоку. Вдоль оси симметрии ближнего следа величина средней скорости изменяется немонотонно: она равна нулю на поверхности цилиндра и в конце области обратных токов, максимальна – примерно в средней части [4]. В таблице приведены основные безразмерные пространственные и кинематические параметры вихревой зоны за цилиндром.

**Таблица.** Параметры вихревых структур за обтекаемым цилиндром

Число $Re \cdot 10^{-5}$	2.07	2.37	2.54	2.84
Длина обратного тока, $l_r/d$	1.00	0.72	0.60	0.45
Максимальная скорость обратного тока, $v_{rmax}/u$	0.32	0.21	0.18	0.17
Расстояние между центрами вихрей, $\Delta y_v/d$	0.51	0.45	0.29	0.22
Ширина вихревой зоны, $\Delta y_w/d$	1.7	1.1	0.85	0.7

В [4] приводятся значения скорости обратных токов  $(0.15-0.25)u$ , длина области обратных токов  $0.5d \approx \text{const}$  для чисел Рейнольдса  $Re \geq 1.5 \cdot 10^4$ .

#### 4. Заключение

Полученные с помощью метода PIV осредненные векторные поля скорости показали наличие двух противоположно вращающихся вихревых структур в ближнем следе цилиндра с обратным течением между ними. Обнаружено, что при увеличении числа  $Re$  от  $2.07 \cdot 10^5$  до  $2.84 \cdot 10^5$  вихревая зона за цилиндром уменьшилась как в поперечном, так и в продольном направлении более чем в два раза.

#### Список литературы

1. Добросельский К. Г. Методика исследования поперечного обтекания цилиндра в гидродинамической трубе // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Физика. 2013. Т. 8. № 4. С. 110–117.
2. Добросельский К. Г. Обтекание цилиндра в начале критической области // ПМТФ. 2016. Т. 57. № 2. С. 117–123.
3. Ахметбеков Е. К., Бильский А. В., Ложкин Ю. А. и др. Система управления экспериментом и обработки данных, полученных методами цифровой трассерной визуализации (ActualFlow) // Вычисл. методы и программирование. 2006. Т.7. С. 79–85.
4. Дыбан Е. П., Эпик Э. Я. Тепломассообмен и гидродинамика турбулизированных потоков. Киев: Наук.Думка, 1985. 296 с.

# Решение уравнений зонального электрофореза эллиптического типа

Т. Ф. Долгих<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Южный федеральный университет  
344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8А  
email: dolgikh@sfnedu.ru

В работе рассмотрены способы получения решения в неявном и явном виде системы уравнений эллиптического типа, которые описывают процесс зонального электрофореза в двухкомпонентной смеси, с различными пространственно-периодическими начальными данными.

**Ключевые слова:** зональный электрофорез; метод годографа; пространственно-периодические начальные данные

## Solution to equation for zone electrophoresis of elliptic type

T. F. Dolgikh<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Southern Federal University, Milchakova St. 8A, 344090, Rostov on Don  
email: dolgikh@sfnedu.ru

We use the special method for solution of the elliptic equations system that describe the process of zone electrophoresis in a two-component mixture, with different spatially periodic initial data.

**Keywords:** zone electrophoresis; godograph method; spatially periodic initial data

### 1. Введение

Рассматривается задача о зональном электрофорезе — методе разделения смеси на отдельные компоненты. В работе представлена модель бездиффузионного процесса переноса вещества в двухкомпонентной смеси. Система квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка, описывающая задачу о поведении многокомпонентной жидкости под действием электрического поля, как правило, имеет гиперболический тип. Однако в случаях, когда проводимость смеси уменьшается при увеличении концентраций компонентов, тип уравнений изменяется на эллиптический [1, 2]. Для исследования сплошных сред, которые описываются эллиптическими уравнениями, используются периодические данные, определенные в начальный момент времени. Именно такие начальные данные рассматривались в предложенной работе. В результате удалось проследить образование пространственно-временных структур, возникающих при эволюции решения.

### 2. Постановка задачи

Система уравнений, описывающая процесс зонального электрофореза без учета диффузии для двухкомпонентной смеси, имеет вид [1, 2]

$$u_t^i + \mu^1 \mu^2 \left( \frac{\mu^i u^i}{1 + u^1 + u^2} \right)_x = 0, \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

где  $\mu^i > 0$  — постоянные подвижности и  $u^i = u^i(x, t)$  — эффективные концентрации компонент смеси. Здесь эффективные концентрации  $u^i$  определяются через концентрации и зарядности компонент смеси, поэтому могут принимать как положительные, так и отрицательные значения. Но при этом полная проводимость всей смеси  $1 + s = 1 + u^1 + u^2$  всегда положительна.

Система (1) имеет инварианты Римана

$$K_t^i + \Lambda^i K_x^i = 0, \quad \Lambda^i = \frac{1}{K^i K^1 K^2}, \quad i = 1, 2. \quad (2)$$

Эллиптичность уравнений (1) соответствует комплексно сопряженным инвариантам Римана  $K^i$  и собственным значениям  $\Lambda^i$ .

Рассмотрим случай, когда на контуре  $\Gamma$ , который является отрезком оси  $t = t_0$ , для уравнений (2) определены начальные данные известных функций  $K_0^i(\tau)$

$$K^i \Big|_{t=t_0} = K_0^i(\tau), \quad a \leq \tau \leq b, \quad i = 1, 2. \quad (3)$$

В случае эллиптичности уравнений (1) комплексно сопряженными будут не только собственные значения  $\Lambda^i$  и инварианты Римана  $K^i$ , но и параметры  $a$  и  $b$ . В связи с этим введем следующие обозначения

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= u + iv, \quad \mathbf{b} = u + iv, \quad \mathbf{a}^* = \mathbf{b}, \quad \mathbf{K}_0 = P_0 + iQ_0, \quad \mathbf{K} = K^1 = P + iQ, \\ \mathbf{K}^* &= K^2 = P - iQ, \quad \mathbf{k} = k^1 = K_0^2(\mathbf{a}) = p + iq, \quad \mathbf{k}^* = k^2 = K_0^1(\mathbf{b}) = p - iq, \end{aligned}$$

где  $P = P(u, v)$ ,  $Q = Q(u, v)$ ,  $p = p(u, v)$ ,  $q = q(u, v)$  — это вещественные функции от вещественных переменных  $u$  и  $v$ .

Тогда в комплексной форме задача (2), (3) запишется в виде

$$\mathbf{K} |\mathbf{K}|^2 \mathbf{K}_t + \mathbf{K}_x = 0, \quad \mathbf{K} \Big|_{t=t_0} = \mathbf{K}_0(\tau). \quad (4)$$

### 3. Решение задачи (4) с пространственно-периодическими начальными данными

Для решения задачи (4) был использован метод годографа, основанный на законах сохранения [2]. В результате было получено аналитическое решение  $t(u, v)$ ,  $x(u, v)$  в неявном виде, которое полностью определяется начальными условиями:

$$t(u, v) = t_0 - \frac{(p^2 + q^2)^2 (pF_0 - G_0 + 2v(p^2 + q^2))}{4q^3}, \quad (5)$$

$$x(u, v) = u - \frac{pG_0 - (p^2 + q^2)F_0 - 2p(p^2 + 3q^2)}{4q^3}, \quad (6)$$

Здесь через  $F_0$  и  $G_0$  обозначены мнимые части чисто мнимых функций  $F(u, v) = 2 \int_{u+iv}^{u-iv} P_0(\tau) d\tau$ ,  $G(u, v) = \int_{u+iv}^{u-iv} (P_0^2(\tau) + G_0^2(\tau)) d\tau$ .

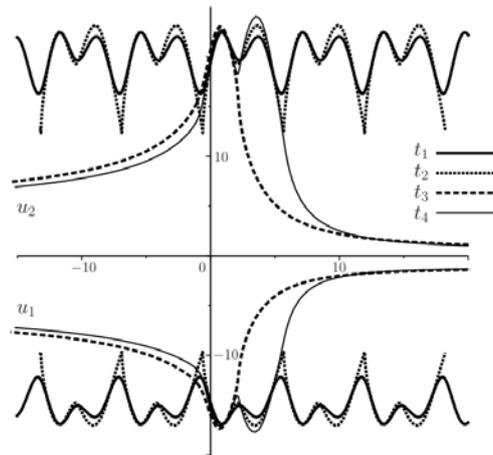
Решим задачу Коши

$$\frac{du}{d\rho} = -t_v q^4, \quad \frac{dv}{d\rho} = t_u q^4, \quad u|_{\rho=0} = u^*, \quad v|_{\rho=0} = v^*,$$

где  $\rho$  — некоторый параметр, значения  $t_u, t_v$  определяются через формулы (5), (6), а  $u^*, v^*$  определяют изохрону при  $t = t^* = t(u^*, v^*) = \text{const}$ . Определив отсюда  $u = u(\rho), v = v(\rho)$ , найдем функции  $p(u, v), q(u, v)$ . Далее вычисляются концентрации компонент смеси по соотношениям

$$u^1 = \frac{\mu^2 (1 - 2\mu^1 p + \mu^1 \mu^1 (p^2 + q^2))}{\mu^1 - \mu^2}, \quad u^2 = \frac{\mu^1 (1 - 2\mu^2 p + \mu^2 \mu^2 (p^2 + q^2))}{\mu^2 - \mu^1}. \quad (7)$$

На рисунке представлены распределения концентраций компонент смеси  $u^1, u^2$  в различные моменты времени при периодических начальных данных  $P_0(\tau) = -\alpha \varepsilon \sin \tau, Q_0(\tau) = 1 + \gamma \varepsilon \sin \beta \tau$ . Здесь видно, что происходит переход от одного семейства решений к другому, который требует дополнительного исследования [2].



**Рисунок.** Концентрации компонент смеси  $u^1(x, t), u^2(x, t)$  в моменты времени  $t_1 = 0.2638, t_2 = 0.4998, t_3 = 0.6663, t_4 = 0.7904$ ;  $u^* = -0.2, v^* = -0.30, -0.63, -0.95, -1.20$ , соответственно;  $\varepsilon = 0.1, \alpha = 0.7, \beta = 2, \gamma = 0.5$

#### 4. Заключение

Качественные изменения с течением времени решений задачи (4) с периодическими начальными данными особенно отчетливо видны для величин  $p(x, t^*), q(x, t^*)$  (см. [2, 3]): наблюдается переход от пространственно-периодического возмущения к солитоноподобным профилям для  $q(x, t)$  и кинкоподобным профилям для  $p(x, t)$ . Таким образом, можно выдвинуть гипотезу, что в эллиптическом случае задача (4) описывает некоторую квазигазовую неустойчивую среду типа газа Чаплыгина.

Работа выполнена в рамках базовой части государственного задания Министерства образования и науки РФ № 1.5169.2017/БЧ.

#### Список литературы

1. Жуков М. Ю. Массоперенос электрическим полем. Ростов н/Д: Изд. РГУ, 2005.
2. Жуков М. Ю., Ширяева Е. В., Долгих Т. Ф. Метод годографа для решения гиперболических и эллиптических квазилинейных уравнений. Ростов н/Д: Изд. ЮФУ, 2015.
3. Долгих Т. Ф. Уравнения эллиптического типа для зонального электрофореза // Труды XVIII Межд. конф. «Современные проблемы механики сплошной среды», 7.11–10.11.2016. Ростов н/Д: Изд. ЮФУ, 2016. Т. 1. С.179–183.

## **Исследование теплообмена при конденсации влаги в вентиляционной сети подземного сооружения**

**О. И. Дударь<sup>а</sup>, Е. С. Дударь<sup>а</sup>**

<sup>а</sup> Пермский национальный исследовательский политехнический университет  
614990, Пермь, Комсомольский пр., 29  
email: olegdudar@yandex.ru

Описывается математическая модель процесса теплообмена при конденсации в вентиляционной сети подземного сооружения. Решение задачи гидродинамики основано на использовании формулы распределения скоростей, единой для гладкостенного, квадратичного и переходного режимов турбулентного течения воздуха в трубе. Для анализа процессов теплообмена и массообмена в потоке паровоздушной смеси применяется решение Лайона. Для решения задачи распространения тепла в горном массиве используется метод функций Грина в сочетании с преобразованием Лапласа. Расчет вентиляционной сети ведется с помощью сочетания метода конечных элементов с методом ламинарных решений. Разработан пакет «MineClimate», который позволяет определять воздухораспределение в рудничной сети, параметры микроклимата, количество выпавшей при конденсации влаги и ее распределение по ветвям сети в произвольный момент времени. Оценивается влияние различных параметров, таких как: расход, глубина горизонта, гигроскопичность пород и др., на количество выпадающей влаги и величину зоны конденсации в вентиляционной сети подземного сооружения.

**Ключевые слова:** вентиляционная сеть; конденсация; теплообмен

## **Research of heat and mass transfer during the moisture condensation in ventilation network of underground structure**

**O. I. Dudar<sup>а</sup>, E. S. Dudar<sup>а</sup>**

<sup>а</sup> Perm National research Polytechnic University, Komsomolsky Ave. 29, 614990, Perm  
email: olegdudar@yandex.ru

The mathematical model of heat and mass transfer at condensation in ventilation network of an underground construction is described. The solution of the hydrodynamic problem is based on use of the formula of velocity distribution which is universal for smooth-pipe, quadratic and transitional regimes of air flow in a pipe. Lyon's solution is used to analyze heat and a mass transfer processes at condensation. The method of Green's functions in combination with Laplace's transformation is applied to analyze heat conductivity in rock massif. Calculation of a ventilation network is fulfilled by means of the combination of the FEM and the

laminar solutions method. The package “MineClimate” is created which allows determining microclimate parameters, amount of the condensed water and its distribution at the network. Influence of various parameters such as the mass flow rate, the mining depth, rock hygroscopicity etc. on the dropping moisture amount and the condensation zone size is considered.

**Keywords:** ventilation network; moisture condensation; heat and mass transfer

## 1. Введение

В теплое время года атмосферный воздух, попадая в вентиляционную сеть подземного сооружения, охлаждается при контакте с более холодными горными породами и высвобождает содержащуюся в нем влагу. Практика показывает, что количество выпадающей влаги может достигать 10000 тонн за сезон. В данной работе рассматривается математическая модель явления и на ее основе для модельной вентиляционной сети определяются факторы, наиболее влияющие на количество выпадающей влаги и на степень ее локализации.

## 2. Математическая модель процесса конденсации влаги

В качестве элементарного объекта вентиляционной сети рассматривается цилиндрическая полость, по которой движется смесь сухого воздуха и водяного пара.

Течение воздуха по полости считается стабилизированным, причем возможны режимы течения: ламинарный, а также турбулентные гладкостенный, квадратичный и переходный. Тепло- и массообмен в потоке рассматриваются как квазистационарные процессы, а распространение тепла в горных породах – как нестационарный процесс. Для замыкания уравнений используется полуэмпирическая теория Прандтля.

Тогда постановка задачи тепломассообмена при конденсации пара из движущейся по цилиндрической полости в горном массиве паровоздушной смеси описывается следующей системой уравнений в частных производных:

$$\rho_g \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_t + \mu \Delta \mathbf{v}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_t = \rho_g \varepsilon (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T), \quad (3)$$

$$\rho_g c_g \mathbf{v} \cdot \nabla T = \nabla \cdot \rho_g c_g (a + \varepsilon_q) \nabla T, \quad (4)$$

$$\mathbf{v} \cdot \nabla C = \nabla \cdot \rho_g (D + \varepsilon_D) \nabla C, \quad (5)$$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T), \quad (6)$$

где  $\mathbf{v}$  – вектор скорости;  $\boldsymbol{\sigma}_t$  – тензор турбулентных напряжений;  $p$  – давление;  $T$  – температура;  $C$  – массовая концентрация водяного пара;  $\mu$ ,  $a$ ,  $D$  – коэффициенты молекулярной вязкости, температуропроводности и диффузии;  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_q$ ,  $\varepsilon_D$  – коэффициенты турбулентной вязкости, температуропроводности и диффузии;  $\rho_g$ ,  $c_g$  – плотность, и изобарная теплоемкость воздуха;  $\rho$ ,  $c$ ,  $\lambda$  – плотность, теплоемкость и теплопроводность горных пород.

Рассматриваемая проблема распадается на три взаимосвязанные задачи: гидродинамики (1-3), тепло- и массообмена в парогазовой смеси (4, 5) и теплопроводности горных пород (6). Взаимное влияние этих процессов учитывается условиями сопряжения на границе, конвективными слагаемыми и учетом влияния определяемых величин на свойства парогазовой смеси.

Для ламинарного режима движения решение уравнений (1, 2) дает на участке гидродинамической стабилизации цилиндрической полости параболический профиль скорости. В работе [1] получена формула распределения скоростей, единая для гладкостенного, квадратичного и переходного режимов турбулентного течения. При известном профиле скорости задача гидродинамики сводится к определению массового расхода в цилиндрической полости и перепада давления по ее длине.

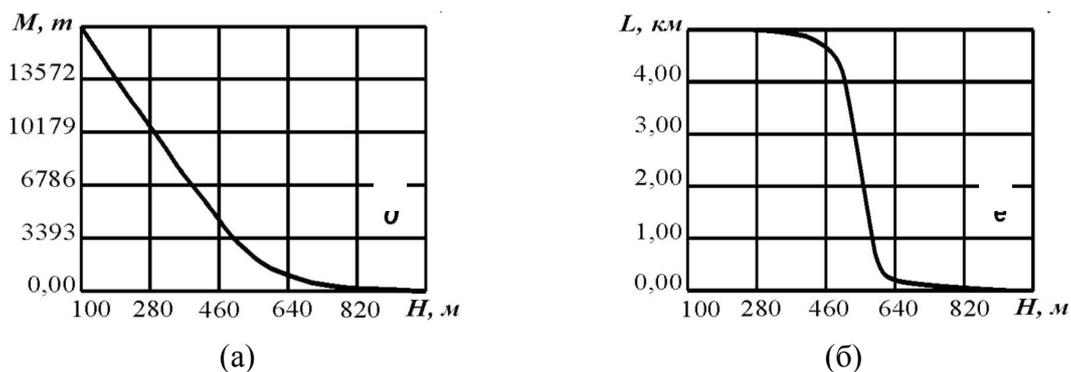
При анализе процессов тепло- и массообмена при конденсации полагаем, что толщина образующейся пленки конденсата на стенке полости мала, поэтому перепадом температуры в пленке жидкости можно пренебречь. Аналогия процессов тепло- и массообмена позволяет использовать известное решение Лайона для решения как задачи теплообмена, так и массообмена [2].

Метод функций Грина в сочетании с преобразованием Лапласа использовался для решения задачи (8) о распространении тепла в бесконечном горном массиве от движущегося в цилиндрической полости потока воздуха при произвольном изменении его среднemasсовой температуры.

Для расчета давлений в узлах и расходов в ветвях всей вентиляционной сети использовалось предложенное авторами сочетание одномерного метода конечных элементов и метода ламинарных решений (МКЭ-МЛР), которое может быть использовано для анализа процесса течения жидкости в любом (ламинарном, гладкостенном, квадратичном, переходном) режиме [2].

### 3. Исследование влияния некоторых параметров на процесс конденсации

В данной работе теоретически с помощью разработанного авторами исследовательского пакета прикладных программ «MineClimate» исследовалось влияние на количество выпадающей влаги  $M$  и размер зоны конденсации  $L$  таких параметров, как: расход воздуха, его среднегодовая температура, глубина горизонта подземного сооружения, гигроскопичность горных пород и др. При этом подземную сеть моделировали системой параллельных выработок. На (рис. 1) в качестве примера показано влияние на величины  $M$  и  $L$  глубины горизонта подземного сооружения.



**Рис. 1.** Зависимость количества выпадающей влаги  $M$  (а) и размера зоны конденсации  $L$  (б) от глубины горизонта подземного сооружения  $H$ .

#### Список литературы

1. Дударь О. И. Закон сопротивления и распределение скоростей при переходном режиме турбулентного движения воздуха в горной выработке // ГИАБ. 2015. № S7. С. 47 – 54.
2. Дударь Е. С., Дударь О. И., Мохирев Н. Н. Расчет параметров микроклимата с учетом конденсации влаги в рудничной вентиляционной сети // ГИАБ. 2011. № 7. С. 331– 344.

## Математическое моделирование структуры трабекулярной костной ткани

А. Д. Дядюкина<sup>а</sup>, А. А. Киченко<sup>а</sup>.

<sup>а</sup> Пермский национальный исследовательский политехнический университет, 614000, Пермь, Комсомольский проспект, 29, email: Nahinya@yandex.ru

Рассматриваются некоторые вопросы, связанные с количественным описанием структуры трабекулярной костной ткани, используя методы стереологии. Которые основаны на анализе особенностей распределения трабекул в пространстве  $R^3$ , исходя из неполного рассмотрения двумерных образований в этом пространстве. На данный момент, величиной, учитывающей морфологическое строение костной ткани, является тензор второго ранга, называемый тензором структуры. Экспериментально установлено, что тензор структуры является симметричным и положительно определенным. В этом исследовании произведена автоматизация расчёта тензора структуры двумерных образцов. В результате чего был разработан программный продукт, который с помощью метода среднего расстояния между порами, рассчитывает тензор анизотропии, а после (при помощи тензорных операций) находит тензор структуры. Разработанный продукт прошёл верификацию на тестовых образцах и подтвердил обоснованность автоматизации определения тензора структуры.

**Ключевые слова:** трабекулярная костная ткань; тензор структуры; стереология

## Mathematical modelling of trabecular bone structure

A. D. Dyadyukina<sup>а</sup>, A. A. Kichenko<sup>а</sup>

<sup>а</sup> State National Research Politechnical University of Perm, Komsomolsky Av. 29, Perm, Russia, 614000, email: Nahinya@yandex.ru

We research a mathematical model of bone's structure. The mathematical model of a bone is built, basic properties of investigated object save, including bone anisotropy, which can be described by the methods of quantitative stereology, herewith morphological features of bone structure represented by the fabric tensor. The article focuses on the one of the methods of quantitative determination of the characteristics of bone structure. The received results will be able to use to display the structural features of the bone. We create the program product, that calculates the anisotropy tensor and get fabric tensor. We use tensor's algebra and the methods of stereology by our accounts. The developed product has passed the verification by test samples and has showed own operability.

**Key words:** trabecular bone; fabric tensor; stereology

Опорно-двигательный аппарат является сложной многоуровневой биологической системой, достигшей в процессе эволюционного развития оптимальной структурной организации [1]. Наиболее сложное строение имеют кости, которые относятся к пассивной части двигательного аппарата. Они подвергаются непрерывному механическому нагружению вследствие весовой нагрузки, тонуса и работы мышц. Все кости имеют плотный прочный внешний слой, который состоит из компактного костного вещества и образует кортикальную костную ткань. Внутренний слой кости, в свою очередь, состоит из костных пластинок и перекладин (трабекул), образующих ячеистую, губчатую архитектуру – трабекулярную костную ткань.

В соответствии с законом Вольфа, кость может адаптировать свою структуру в ответ на механическое воздействие, и, следовательно, направление трабекул в губчатом веществе в значительной степени зависит от напряженного состояния, испытываемого костью [2].

Структурная анизотропия губчатого слоя кости существенно влияет на её механические свойства. С другой стороны, механические свойства трабекулярной кости в значительной мере определяются её внутренней архитектурой и подчиняются тем же принципам, что и несущие конструкции [3]. Адаптационные изменения различной, в том числе патологической природы, происходящие в губчатой кости, могут приводить к уменьшению прочности кости и увеличению риска ее переломов. Таким образом, возникает необходимость количественного описания структуры губчатой кости и происходящих в ней изменений.

В данной работе для количественного описания структуры трабекулярной костной ткани используются методы количественной стереологии, которые основаны на анализе особенностей распределения трабекул в пространстве  $R^3$ , исходя из неполного рассмотрения двумерных образов в этом пространстве [3, 4]. В настоящее время признано, что величиной, позволяющей учесть анизотропное строение костного материала, является тензор второго ранга, называемый тензором структуры  $\mathbf{H}$  (*fabric tensor*) [2, 3, 5]. Экспериментально установлено, что тензор структуры является симметричным и положительно определенным [2, 6]. Для определения тензора структуры  $\mathbf{H}$  необходимо определить тензор анизотропии  $\mathbf{M}$ , связанный с ним соотношением (1) [6].

$$\mathbf{H} = (\mathbf{M}^{-1})^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

Для построения тензора анизотропии необходимо рассчитать ряд вспомогательных стереометрических величин, для чего используется метод среднего расстояния между порами [6, 7]. Который заключается в определении среднего расстояния между порами в трёх различных направлениях  $\theta_1 = 0^\circ$ ,  $\theta_2 = 120^\circ$ ,  $\theta_3 = 240^\circ$ , и связывается с компонентами тензора анизотропии следующими соотношениями:

$$\begin{cases} m_{11} = f_1 \\ m_{22} = \frac{1}{3}(2f_2 + 2f_3 - f_1) \\ m_{12} = \frac{\sqrt{3}}{3}(f_3 - f_2) \end{cases} \quad (2)$$

$$f_i = \frac{1}{L_b(\theta_i)^2}, \quad i = 1, \dots, 3.$$

В матричном виде тензор анизотропии может быть представлен:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix} \quad (3)$$

В соответствии с вышеизложенной методикой была написан программный продукт, способный автоматически рассчитывать тензор структуры костной ткани. Для реализации данной методики использовался пакет Delphi 7, возможности которого позволяют анализировать изображение и совершать некоторые математические операции.

Готовый продукт, имеющий многооконный интерфейс, способен:

- 1) Применять метод среднего расстояния между порами к микрофотографии костного образца.
- 2) Строить среднее расстояние между порами в полярной системе координат, которое можно визуализировать эллипсом;
- 3) Рассчитывать коэффициенты тензора анизотропии;
- 4) Находить тензор структуры;
- 5) Выводить результаты на экран.

Во избежание ошибок программный продукт прошел верификацию на тестовых образцах и продемонстрировал свою работоспособность в определении тензора структуры [8].

Резюмируя всё вышесказанное, в проведённом исследовании был изучен метод количественного описания структуры костной ткани, который заключается в нахождении тензора анизотропии с помощью подсчёта среднего расстояния между порами. Данный метод был автоматизирован, для чего был написан программный продукт, который прошёл верификацию и продемонстрировал свою работоспособность.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 15–01–04884–а).

### Список литературы

1. Бруско А. Т., Гайко Г. В. Функциональная перестройка костей и её клиническое значение. – Луганск: Луганский государственный медицинский университет, 2005.
2. Cowin S. C. Bone Mechanics Handbook. – Second edition. – New York: CRC Press, 2001. – 1136 p.
3. Няшин Ю. И., Подгайц Р. М. Экспериментальные методы в биомеханике: учеб. пособие – Пермь: Издательство Пермского государственного технического университета, 2008.
4. Underwood E. Quantitative stereology. – Mass.: Addison Wesley, 1970. – 370 p
5. Harrigan T. P., Mann R. W. Characterization of microstructural anisotropy in orthotropic materials using a second rank tensor // J. Mater. Sci. – 1984. – Vol. 19. – P. 761–767.
6. Киченко А. А., Тверье В. М., Няшин Ю. И., Заборских А. А. Экспериментальное определение тензора структуры трабекулярной костной ткани // Российский журнал биомеханики. – 2011. – Т. 15, № 4. – С. 78–93.
7. Tverier V., Kichenko A., Nyashin Y., Lokhov V. Experimental construction of the fabric tensor for trabecular bone tissue // Series on Biomechanics, 2015, Vol. 29, No. 4, P. 33–38.
8. Дядюкина А. Д., Киченко А. А. Математическое моделирование трабекулярной костной ткани // Тезисы докладов XII Всероссийской конференции с международным участием и школы-семинара «Биомеханика–2016». –2016, С. 45.

## **Численное исследование динамики внутрикамерных процессов при срабатывании ракетного двигателя на твёрдом топливе**

**М. Ю. Егоров**

Пермский национальный исследовательский политехнический университет  
614990, Россия, г. Пермь, Комсомольский проспект, 29  
email: egorov-m-j@yandex.ru

Для оптимизации параметров ракетного двигателя на твёрдом топливе принята попытка прямого численного исследования его внутрикамерных процессов. Формулируется сопряжённая задача, включающая в себя: – срабатывание воспламенителя; – прогрев, воспламенение и последующее горение заряда твёрдого топлива; – течение воздуха и продуктов сгорания в камере сгорания (включая камеру воспламенителя), газоходах, сопловых блоках и за сопловыми блоками; – разгерметизация камеры сгорания и вылет заглушек сопловых блоков. Для решения поставленной задачи разработан комплекс прикладных программ на ЭВМ, использующий стандарт многопоточковой обработки информации OpenCL. Приведены результаты расчётов. Представлено распределение во времени давления в газоходах. Фиксируется генерация сложных колебательных процессов, включая эффекты типа «биеение».

**Ключевые слова:** Численное исследование; ракетный двигатель на твёрдом топливе; внутрикамерные процессы

## **Numerical research of dynamics intracameral processes when firing a rocket engine solid fuel**

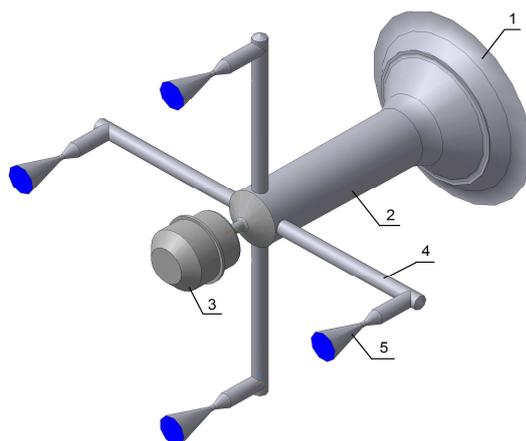
**M. Yu. Egorov**

Perm National Research Polytechnic University  
614990, Russia, Perm, Komsomolsky prospect, 29  
email: egorov-m-j@yandex.ru

In order to optimize the parameters of the rocket engine solid fuel attempts to direct numerical study of its intra-chamber processes. Formulated conjugate task includes: - operation of the igniter; - heating, ignition and subsequent burning of solid fuel charge; - for air and combustion products in the combustion chamber (including igniter chamber), ducts, nozzle block and the nozzle block; - depressurization of the combustion chamber and nozzle caps crash blocks. To solve this problem has developed a set of applications on a computer that uses standard OpenCL multithreading information. The results of the calculations. The distribution of pressure in time flues. Fixes the generation of complex oscillatory processes, including "beating" type effects.

**Keywords:** Numerical study, rocket engine on solid fuel, intrachamber processes

Современный ракетный двигатель на твёрдом топливе (РДТТ) – сложная техническая система, в которой одновременно протекает ряд взаимосвязанных (сопряжённых) нестационарных и нелинейных физико–химических процессов [1-7 и др.]. Ракетный двигатель, рассматриваемый в настоящей работе, имеет свои функциональные и конструктивные особенности. Конфигурация газодинамического тракта РДТТ представлена на (рис. 1).

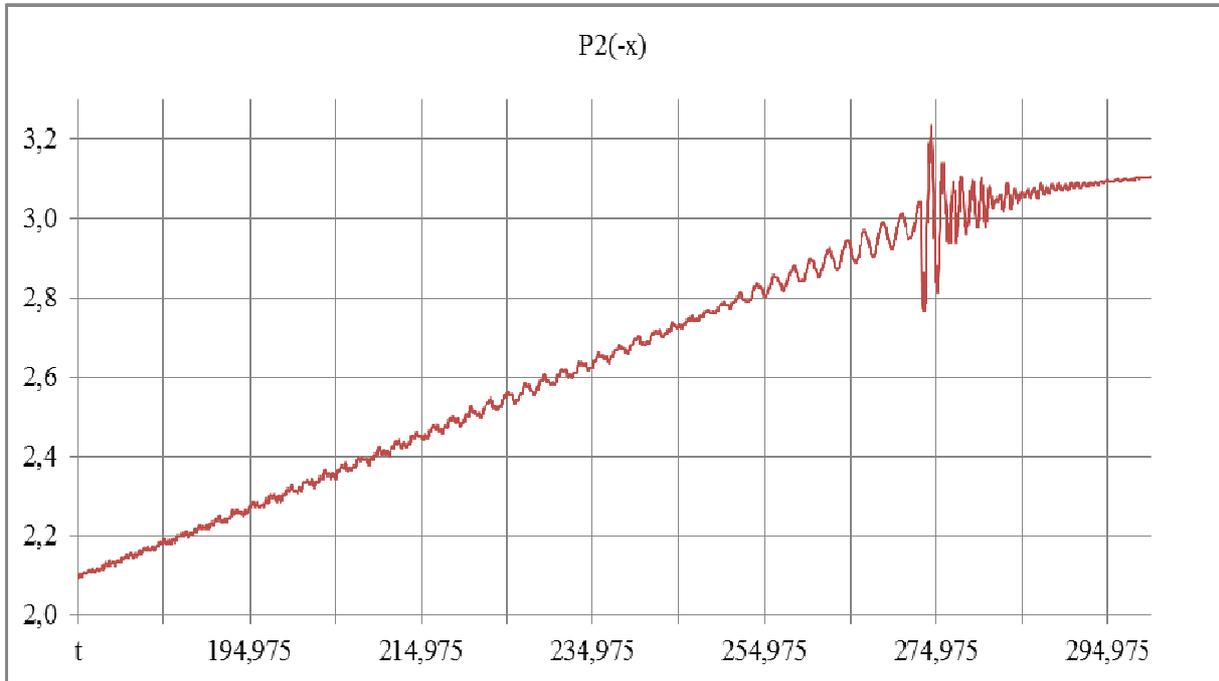


**Рис. 1.** Конфигурация газодинамического тракта РДТТ: 1 - свободный объём камеры сгорания, 2 - центральный газоход, 3 - камера воспламенителя, 4 - боковой газоход, 5 - сопловой блок.

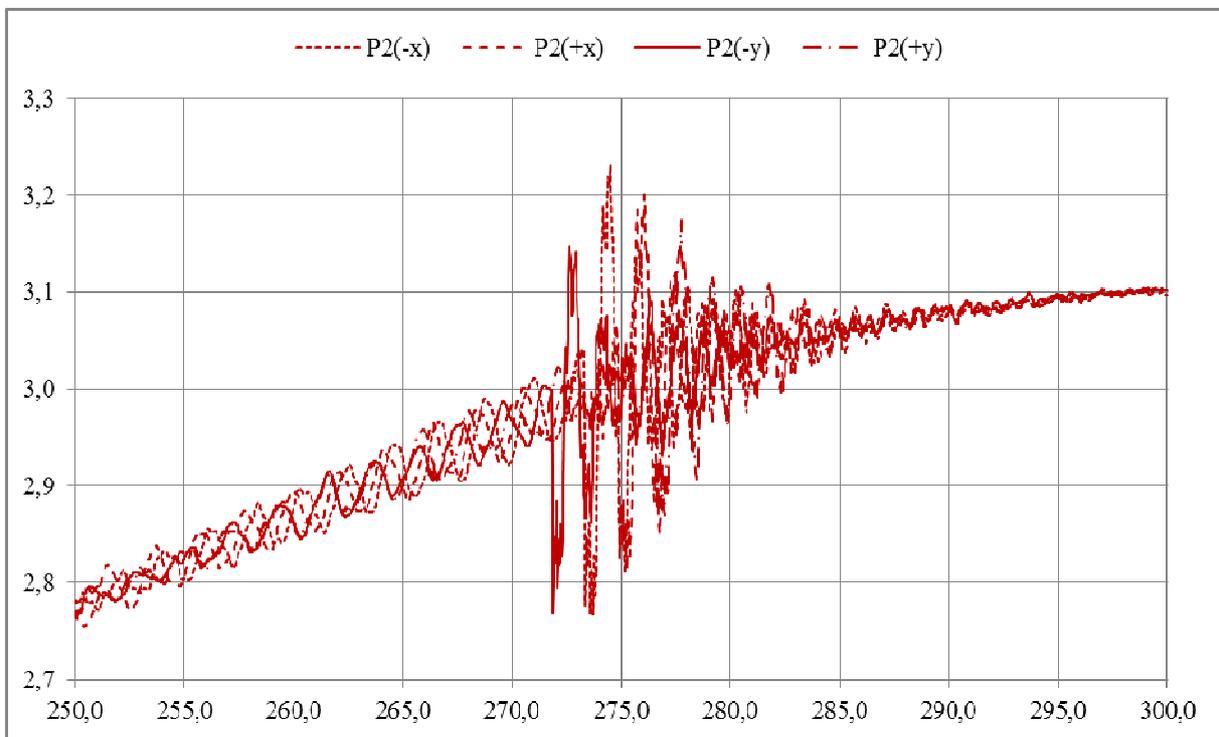
Для оптимизации параметров ракетного двигателя в предлагаемой работе принята попытка прямого численного исследования его внутрикамерных процессов (на уровне постановки вычислительного эксперимента). Рассматривается сопряжённая постановка задачи, включающая в себя: – срабатывание воспламенителя; – прогрев, воспламенение и последующее нестационарное и турбулентное горение заряда твёрдого топлива; – нестационарное ударно-волновое и вихревое гомогенное течение воздуха и продуктов сгорания в камере сгорания (включая камеру воспламенителя), газоходах, сопловых блоках и за сопловыми блоками; – разгерметизацию камеры сгорания и вылет заглушек четырёх сопловых блоков. Каждая из подзадач рассматривается во взаимосвязи и разрешается одновременно.

Приведём некоторые результаты численных расчётов динамики внутрикамерных процессов при срабатывании РДТТ. Изменение параметров потока представлено в безразмерном виде, время дано в условных единицах. На (рис. 2) показано изменение во времени давления газовой смеси в фиксированной точке (вершине) бокового газохода РДТТ. На (рис. 3) показано изменение во времени (фрагментально) давления в четырёх точках (вершинах) четырёх боковых газоходов в увеличенном масштабе. Фиксируется сложный волновой (пульсационный) характер течения. Частота низкочастотных пульсаций давления хорошо согласуется с частотой первой продольной моды, определяемой по известной аналитической зависимости  $f = a/(2 \cdot l)$  [8], где  $a$  – скорость звука,  $l$  – длина бокового газохода. Фиксируется эффект типа «биение» [9,10]. Причём амплитуда колебаний давления со временем возрастает. Возможен эффект резонанса, что

косвенно подтверждается экспериментальными данными по стендовой отработке ракетного двигателя (датчиками перегрузки). Дальнейшему возрастанию амплитуды колебаний давления препятствует вылет заглушек соплового блока при  $t \sim 273$ . Причём четыре заглушки соплового блока вылетают не одновременно, а с существенной задержкой по времени.



**Рис. 2.** Изменение во времени давления газовой смеси в фиксированной точке (вершине) бокового газохода.



**Рис. 3.** Изменение во времени давления в четырёх точках (вершинах) четырёх боковых газоходов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект РФФИ № 01-96023/14-16\_p\_Урал\_a).

### Список литературы

1. *Алемасов В. Е., Дрегалин А. Ф., Тишин А. П.* Теория ракетных двигателей. – М.: Машиностроение, 1980. 533 с.
2. *Липанов А. М., Бобрышев В. П., Алиев А. В. и др.* Численный эксперимент в теории РДТТ. / Под ред. А.М. Липанова. Екатеринбург: УИФ «Наука», 1994. 301 с.
3. *Егоров М. Ю., Егоров Я. В., Егоров С. М.* Исследование неустойчивости рабочего процесса в двухкамерном РДТТ // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2007. № 4. С. 39-43.
4. *Егоров М. Ю., Егоров С. М., Егоров Д. М.* Численное исследование переходных внутрикамерных процессов при выходе на режим работы РДТТ // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2010. № 3. С. 41-45.
5. *Егоров М. Ю., Егоров Д. М.* Численное исследование динамики внутрикамерных процессов при срабатывании бессоплового РДТТ // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2013. № 1. С. 51-54.
6. *Егоров М. Ю.* Метод Давыдова – современный метод постановки вычислительного эксперимента в ракетном твёрдотопливном двигателестроении // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Аэрокосмическая техника. 2014. № 37. С. 6-70.
7. *Давыдов Ю. М., Егоров М. Ю.* Численное моделирование нестационарных переходных процессов в активных и реактивных двигателях. М.: Национальная академия прикладных наук РФ, 1999. 272 с.
8. *Соркин Р. Е.* Газотермодинамика ракетных двигателей на твёрдом топливе. М.: Наука, 1967. 368 с.
9. *Штёкера Х.* Справочник по физике. Формулы, таблицы, схемы. М.: Техносфера, 2009. 1264 с.
10. *Глебов Г. А., Высоцкая С. А.* К вопросу о возникновении неустойчивости в виде «биений» в камере ракетного двигателя твёрдого топлива // В сб.: Люльевские чтения: материалы десятой межрегиональной отраслевой научно-технической конференции. АО «ОКБ «Новатор», 22-24 марта 2016 года. Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2016. с. 49-51.

## **Закономерности критичности при многомасштабной динамике прерывистой текучности в сплаве АМг6**

**Д.В. Ефремов, С.В. Уваров, О.Б. Наймарк**

Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013, Пермь,  
ул. Академика Королёва, 1  
email: efremov.d@icmm.ru

Исследована критическая динамика пространственно-временных флуктуаций напряжения пластического течения алюминиевого сплава АМг6 в условиях осадки наклонных цилиндрических образцов. Установлено наличие двух значений «критических» деформаций, соответствующих диапазону стохастической динамики, характерной для поведения неравновесных критических систем – степенной расходимости времен следования флуктуаций в окрестности критических деформаций. Предложена интерпретация явления прерывистой текучности (эффект Портевена-Ле-Шателье) как критического явления в неравновесной системе. Обосновано предположение, что переход через второе критическое значение макроскопической деформации сопровождается развитием флуктуаций напряжений пластического течения с качественно-новой пространственно-временной динамикой, соответствующей формированию очагов макроскопических трещин.

**Ключевые слова:** прерывистая текучность; пространственно-временная динамика напряжений пластического течения

## **Criticality laws in the multiscale dynamics of jerky flow in the Al-Mg alloy**

**D.V. Efremov, S.V. Uvarov, O.B. Naimark**

Institute of Continuous Media Mechanics, UB RAS,  
Academica Koroleva St. 1, 614013, Perm  
email: efremov.d@icmm.ru

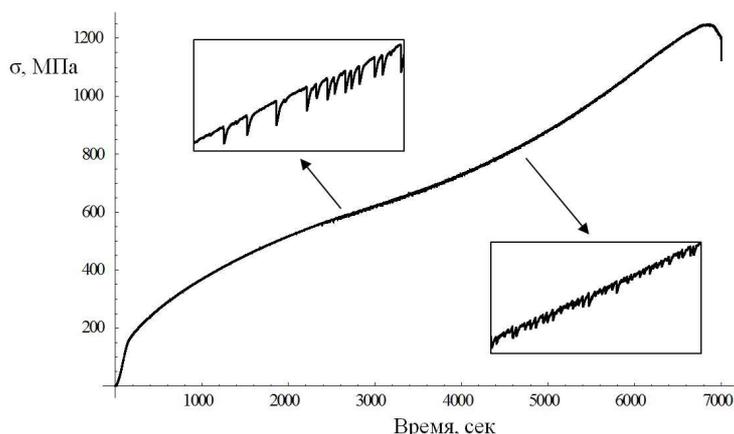
The critical dynamics of the spatial-temporal fluctuations of the stress of the plastic deformation of inclined cylindrical samples made of Al-Mg alloy was investigated. The presence of two values of "critical" strain values corresponding to the range of stochastic dynamics which is typical for nonequilibrium critical systems was determined. The interpretation of the jerky flow (the Portevin-Le Chatelier effect) as a critical phenomenon in a nonequilibrium system was proposed. We suppose that the transition through the second critical value of macroscopic deformation is accompanied with the development of fluctuations of plastic flow stresses with a qualitatively new spatial-temporal dynamics corresponding to the nucleation of macroscopic cracks.

**Keywords:** discontinuous fluidity; space-time dynamics of plastic flow stresses

В отличие от распространенных представлений о пластичности как устойчивом квазиоднородном течении материалов пластическое деформирование кристаллов и поликристаллов характеризуется большими пространственно-временными флуктуациями напряжений, локализацией деформации, обнаруживающих признаки масштабной инвариантности, характерные для поведения неравновесных критических систем. Деформационная динамика характеризуется локализованными флуктуациями деформаций с признаками перемежаемости и степенными зависимостями статистических распределений.

Скачкообразная деформация как проявление неустойчивости пластического течения обнаруживается для широкого класса пластичных материалов при определенных температурно-скоростных условиях деформирования. Известно, что температура и скорость деформации являются важнейшими параметрами процессов неупругого деформирования. Для поликристаллов в условиях отсутствия фазовых переходов повышение температуры и уменьшение скорости деформации может приводить к снижению пороговых напряжений и проявлениям неустойчивости пластического течения (известных как «прерывистое течение» или эффект Портевена-Ле Шателье). Одной из основных причин такого деформационного поведения являются процессы диффузии и взаимодействия дислокаций с примесными атомами [1]. Классический «механический» сценарий эффекта Портевена-Ле Шателье связывается с неустойчивостью деформации вследствие аномальной «отрицательной» чувствительности материала к скорости деформации [2]. Неустойчивость проявляется в виде формирования полос локализованной деформации на поверхности образца с характерной шириной 10-100 мкм, при этом зарождение каждой полосы ассоциируется с появлением флуктуаций (скачков) напряжений на деформационной кривой. Разнообразная пространственно-временная динамика коллективного поведения флуктуаций напряжений пластического течения анализируется в [3,4] и связывается с закономерностями скейлинга неравновесных критических систем.

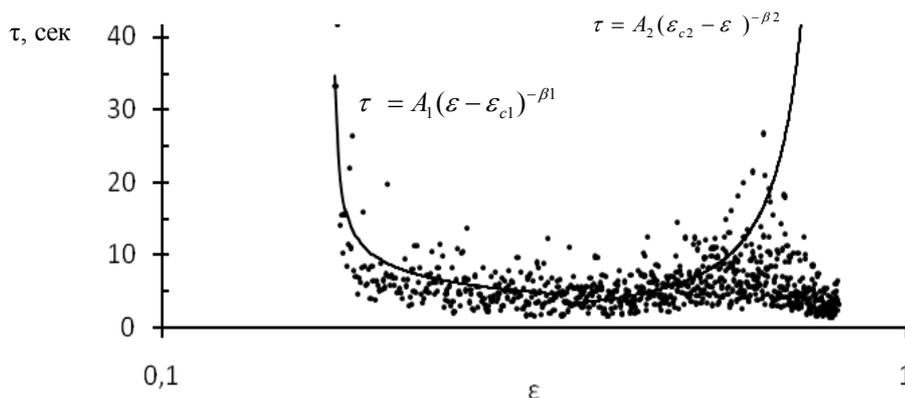
Деформационная диаграмма алюминиевого сплава представлена на (рис. 1) и демонстрирует множественные флуктуации напряжения течения, обнаруживающие различную динамику на разных участках деформационной кривой.



**Рис. 1.** Деформационная диаграмма алюминиевого сплава АМг6.

Исследовалось деформирование (сжатие) образцов наклонных цилиндрических образцов сплава АМг6 при скоростях осадки 1-4 мкм/с, для которых наблюдается «прерывистое» течение. Следуя [5], исследовалась временная последовательность флуктуаций - «время» ожидания» между событиями, (рис. 2), которое демонстрирует

степенные зависимости вида  $\tau = A_1(\varepsilon - \varepsilon_{c1})^{-\beta_1}$  и  $\tau = A_2(\varepsilon_{c2} - \varepsilon)^{-\beta_2}$  в окрестности двух значений макроскопических деформаций  $\varepsilon_{c1}$  и  $\varepsilon_{c2}$ . Данные значения соответствуют начальной стадии развития конечно-амплитудных флуктуаций в условиях локализации пластической деформации и стадии перехода к новому сценарию локализации деформации, предшествующей образованию очагов разрушения. По аналогии с теорией критических явлений значения  $\varepsilon_{c1}$  и  $\varepsilon_{c2}$  могут рассматриваться как аналоги критических точек, в окрестности которых наблюдается резкое увеличение характерных времен «релаксации» [6].



**Рис. 2.** Зависимость интервалов времени между конечно-амплитудными флуктуациями напряжения течения.

Переход через вторую «критическую точку»  $\varepsilon_{c2}$ , в отличие от результатов [5], не сопровождался разрушением образца, но обнаруживал развитие флуктуаций с качественно-новой пространственно-временной динамикой, которая может быть ассоциирована с формированием областей локализации поврежденности, предшествующих зарождению макроскопических трещин [7].

### Список литературы

1. Zaiser M. Scale invariance in plastic flow of crystalline solids // *Advances in Physics*.- 2006. Vol. 55. N. 1–2. P. 185–245.
2. Kubin L. P., Ananthakrishna G., Fressengeans C. Comment on “Portevin-Le Chatelier effect” // *Physical review E*. 2002. Vol. 65. P. 053501-1–053501-2. DOI: 10.1103/PhysRevE.65.053501.
3. Ananthakrishna G., Noronha S. J., Fressengeans C., Kubin L. P. Crossover from chaotic to self-organized critical dynamics in jerky flow of single crystals // *Physical review E*. 1999. Vol. 60. N. 5. P. 5455–5462.
4. Lebyodkin M. A., Brechet Y., Estrin Y., Kubin L. P. Statistics of the catastrophic slip in the Portevin-Le Chatelier Effect // *Physical review letters*. 1995. V. 74. N. 23. P. 4758–4761.
5. Gianfranco D., Franco N. Critical Dynamics of Burst Instabilities in the Portevin-Le Chatelier Effect // *Physical review letters*. 2000. Vol. 85. N. 19. P. 4096–4099.
6. Naimark O. B. Structural-scaling transitions in solids with defects and symmetry aspects of field theory // *Physical Mesomechanics*. 2010. Vol. 13. N. 5–6. P. 306–317.
7. Naimark O. B. Defect Induced Transitions as Mechanisms of Plasticity and Failure in Multifield Continua (Review Paper) // In “Advances in Multifield Theories of Continua with Substructure”, Birkhauser Boston, Inc., Eds: G.Capriz , P.Mariano. 2004. P. 75–114.

## **Численное исследование адвективного вымывания локализованных конвективных структур в пористой среде**

**Т. Н. Загвозкин<sup>a</sup>, Т. П. Любимова<sup>a,b</sup>**

<sup>a</sup> Институт механики сплошных сред УрО РАН 614013, Россия, г. Пермь, ул. Академика Королёва, 1  
email: timofey@zagvozkin.ru

<sup>b</sup> Пермский государственный национальный исследовательский университет 614990, Пермь, ул. Букирева, 15  
email: lyubimovat@mail.ru

Рассмотрена конвекция в плоском горизонтальном слое насыщенной жидкостью пористой среды, ограниченном твердыми непроницаемыми границами с заданным тепловым потоком, при наличии продольного прокачивания жидкости. Вычисления проводились на основе амплитудных уравнений, полученных ранее в длинноволновом приближении в рамках модели Дарси-Бусинеска, в приближении малых отклонений значений теплового потока через границы от критических значений для случая однородного нагрева. В рассмотренной системе возможно возникновение локализованных конвективных структур в области, где тепловой поток превышает критическое значение для случая однородного подогрева снизу. В работе проведено численное исследование процесса вымывания локализованного течения из зоны его возбуждения при различных скоростях прокачивания жидкости через слой. Получены нейтральные кривые монотонной и колебательной неустойчивости основного состояния системы.

**Ключевые слова:** пористая среда; конвекция; локальный нагрев

## **Numerical calculations of advective removal of localized convective structures in a porous medium**

**T. N. Zagvozkin<sup>a</sup>, T. P. Lyubimova<sup>a,b</sup>**

<sup>a</sup> Institute of Continuous Media Mechanics, UB RAS Akademika Koroleva st, 1, 614013, Perm  
email: timofey@zagvozkin.ru

<sup>b</sup> Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm  
email: lyubimovat@mail.ru

Convection in a plane horizontal layer of a porous medium saturated with liquid, bounded by solid impermeable boundaries subjected to the given inhomogeneous heat flux, and liquid pumping along the layer is considered. In such systems, the occurrence of localized convective structures in the region where the heat flux exceeds the critical value for the case of uniform heating from below is possible. Calculations based on amplitude equations in the long-wave approximation are

carried out using the Darcy-Boussinesq model and the approximation of small deviations of values of the heat flux from critical values for the case of homogeneous heating. In this work, numerical modeling of the process of removal localized flow from the region of its excitation with respect to different values of the velocity of liquid pumping through the layer are conducted. Neutral curves for monotonic and oscillatory instabilities of the base state of the system are obtained.

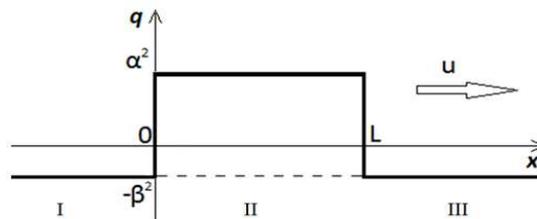
**Keywords:** porous medium; convection; local heating

## 1. Введение

В связи с множеством практических применений вызывает интерес развитие конвективных течений от локализованных источников тепла. Для однородной жидкости в различных вариантах постановки задачи рассматривался конвективный факел как от точечного источника в бесконечной среде, так и от горизонтального линейного [1]. Устойчивость конвективных потоков однородной жидкости вызванных неоднородностью нагрева исследована в [2]. Исследование конвективного факела от точечного источника тепла в неограниченном массиве пористой среды впервые проведено в работе [3], от горизонтального линейного источника в работе [4]. В работе [5] рассмотрены свободная и вынужденная конвекция в окрестности линейного источника тепла или нагреваемого цилиндра. Крупномасштабная конвекция в насыщенном жидкостью горизонтальном слое пористой среды, ограниченном твердыми границами с заданным тепловым потоком при наличии прокачивания жидкости через слой исследована в работах [6, 7]. Найдено, что наиболее опасными возмущениями в этом случае являются длинноволновые возмущения. В настоящей работе с помощью численного решения полученных в работе [6] амплитудных уравнений исследуется процесс вымывания локализованных конвективных структур в горизонтальном слое пористой среды из области их возбуждения.

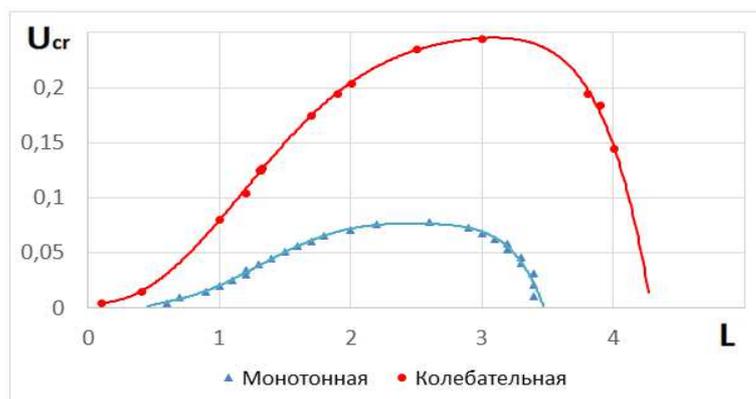
## 2. Постановка задачи

Рассматривается одномерная задача о конвекции в горизонтальном плоском слое пористой среды, насыщенном жидкостью, при наличии неоднородного по горизонтали вертикального теплового потока и прокачивания жидкости в горизонтальном направлении (рис. 1), где  $q(x)$  - относительное отклонение (вызванное неоднородным нагревом) теплотокота через границы слоя от критического значения для случая однородного нагрева,  $u=const$  – скорость продольного прокачивания жидкости. В отсутствие прокачивания ( $u=0$ ) в слое могут возникать течения, локализованные в области возбуждения ( $0 < x < L$ ). Прокачивание жидкости может приводить к «вымыванию» конвективного течения из области его возбуждения. Целью настоящей работы являлось нахождение критических значений скорости прокачивания, при которых локализованное конвективное течение перестает возбуждаться.



**Рис.1.** Распределение вертикального потока тепла по горизонтали

Получены нейтральные кривые монотонной и колебательной неустойчивости для разных наборов параметров (рис. 2). Кривые для монотонной неустойчивости имеют колоколообразную форму, при значениях параметров, соответствующих областям ниже кривых может существовать устойчивое локализованное конвективное течение. В зазоре между нейтральными кривыми монотонной и колебательной неустойчивости может существовать только осциллирующее течение. При значениях параметров, соответствующих области над кривыми, конвективное течение «вымывается» полностью, теплового потока в области возбуждения недостаточно для зарождения и/или поддержания стационарных конвективных структур.



**Рис.2.** Нейтральные кривые устойчивости основного состояния

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 14-21-00090)

### Список литературы

1. Brand R. S., Lahey F. J. The heated laminar vertical jet // Journal of Fluid Mechanics, 1967. V. 29, No. 2. P. 305–315.
2. Lyubimov D. V., Cherepanov A. A. Stability of convective flow induced by inhomogeneous heating. Convective flows/PSPU, Perm, 1991, P. 17-26.
3. Wooding R. A. Convection in a saturated porous medium at large Rayleigh number or Peclet number // Journal of Fluid Mechanics, V. 15, №4, 1963, P. 527–544.
4. Nakayama A. Free Convection from a Horizontal Line Heat Source in a Power-Law Fluid-Saturated Porous Medium // International Journal of Heat and Fluid Flow, V. 14, №3, 1993. P. 279–283.
5. Kurdyumov V. N., Linan A. Free and forced convection around line sources of heat and heated cylinders in porous media // Journal of Fluid Mechanics, V. 427, 2001. P. 389–409.
6. Goldobin D. S., Shklyaeva E. V. Large-scale thermal convection in a horizontal porous layer, Physical Review E 78(2), 027301 (2008).
7. Goldobin D. S. and Lyubimov D. V., Journal of Experimental and Theoretical Physics, 104, 830 (2007).

## Фазовое разделение и деформации в нематических эластомерах при разбухании

А.П. Захаров, Л.М. Писмен

Технион – Израильский технологический институт, Хайфа 32000, Израиль  
email: andreiz@technion.ac.il

В работе исследуются деформации нематоэластичных пленок под влиянием изотропного растворителя с возникновением сосуществования изотропной и нематической фаз. Структура межфазной границы задана с учетом оптимальной ориентации нематика, определяемой взаимодействием между градиентом параметра нематического порядка и концентрацией растворителя. Рассчитаны равновесные состояния и формы после фазового разделения для плоских, цилиндрических и сферических тонких пленок с прямолинейной и круговой границей между нематической и изотропной областями. Показано, что неоднородное расширение и сжатие вблизи границы приводит к изгибу материала, который распространяется перпендикулярно границе.

**Ключевые слова:** жидкокристаллические эластомеры; неустойчивость; разбухание гелей

## Swelling-induced phase bistability and reshaping in nematic elastomers

A.P. Zakharov, L.M. Pismen

Technion – Israel Institute of Technology, Haifa 32000, Israel  
email: andreiz@technion.ac.il

This work theoretically investigates reshaping of nematoelastic shells upon absorption of an isotropic solvent under conditions when isotropic and nematic phases coexist. The nematic texture at the interphase boundary is computed taken into account the optimal nematic orientation governed by interaction of gradients of the nematic order parameter and solvent concentration. We compute equilibrium shapes of deformed thin sheets and cylindrical and spherical shells with the rectilinear or circular shape of the boundary between nematic and isotropic domains. A differential expansion or contraction near this boundary generates a folding pattern spreading out into the bulk of both phases.

**Keywords:** liquid crystal elastomers; instability; gel swelling

### 1. Введение

Любое изменение нематического порядка в нематических эластомерных пленках приводит к деформации. Следуя ранним теоретическим работам по исследованию деформаций в однофазных жидкокристаллических эластомерах [1], первой практической реализации [2], и развитию теории комбинирующей нематическую и упругую составляющую функционала Ландау - де Жена [3], были изучено значительное разнообразие возникающих форм в структурно-упорядоченных нематических эластомерах [4]. В ряде

работ [5] было показана возможность получения целевых форм путем установления желаемой нематической ориентации предварительно процедуры полимеризации и последующего повышения температуры выше точки фазового перехода. Нематические текстуры также могут быть определены путем изменения состава вещества, например в результате добавления присадок (наиболее часто используется при изомеризации светом [6]) или в результате разбухания нематических гелей в нематических [7] или изотропных растворителях [8].

Разбухание как изотропных так и нематических гелей происходит в противодействии энтропийной эластичности полимерной сетки [9], поэтому равновесная форма, по видимости, должна уравнивать осмотическую и эластическую энергию системы. Дополнительным фактором в нематических гелях является изменение параметра нематического порядка, который снижается при повышении концентрации изотропного растворителя. Недавно Cheewatungroj и Terentjev [10] показали возможность сосуществования однородных нематической и изотропной фаз с разными концентрациями растворителя. В частности, были исследованы условия спонтанного разделения фаз в нематических эластомерах в одномерной геометрии. Очевидно, что значительно более сложный процесс происходит при решении этой проблемы в двумерной геометрии на оболочках, что является предметом исследования данной работы.

## 2. Основные уравнения

Нематическое состояние в плоских пленках может быть найдено путем минимизации функционала нематической энергии  $F_n = \int L_n d^2 \mathbf{x}$  зависящего от тензора параметра нематического порядка  $\mathbf{Q}$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} p & q \\ q & -p \end{pmatrix} = \frac{S}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos 2\vartheta & \sin 2\vartheta \\ \sin 2\vartheta & -\cos 2\vartheta \end{pmatrix},$$

$$L_n = (1-\varphi)\alpha h \left[ -\frac{1-\gamma\varphi}{2} Q_{ij} Q_{ij} + \frac{1}{4} (Q_{ij} Q_{ij})^2 + \frac{\kappa_1}{2} |\nabla_i Q_{ij}|^2 + \frac{\kappa_2}{4} \sum_{ijk} (\nabla_i Q_{jk})^2 - \beta \nabla_i \varphi \nabla_j Q_{ij} \right],$$

где  $\vartheta$  угол ориентации директора,  $S = \sqrt{\text{Tr}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q})} = \sqrt{p^2 + q^2}$  - скалярный параметр порядка,  $\varphi$  - концентрация растворителя,  $\alpha$  - характеристическая нематическая ориентационная энергия на единицу объема,  $h$  - толщина пленки,  $\kappa_1, \kappa_2$  - константы эластичности,  $\gamma$  - константа активности растворителя,  $\beta$  - параметр определяющий спонтанную нематической ориентацию на границе фаз разной концентрации.

Свободная энергия взаимодействия растворитель-полимер [11] представлена в виде  $F_m = \int L_m d^2 \mathbf{x}$ ,  $L_m = h \left[ \frac{\chi}{2} |\nabla \varphi|^2 + nkT[\varphi \ln \varphi + (1-\varphi) \ln(1-\varphi) - \zeta \varphi (1-\varphi)] \right]$ , где  $\chi > 0$  - коэффициент перемешивания,  $n$  - общее число молекул растворителя,  $\zeta$  - параметр скорости взаимодействия компонентов смеси.

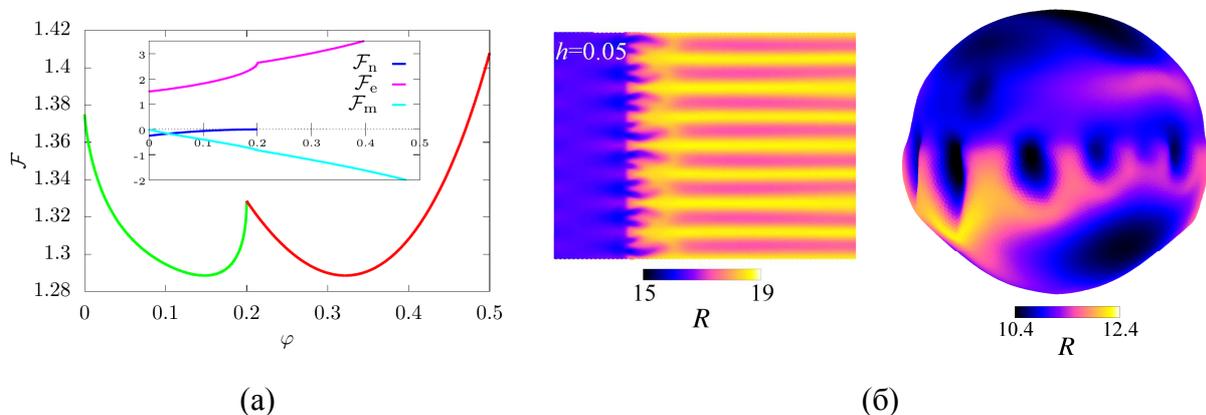
Свободная энергия эластичности определяется как сумма отклонений от оптимальной плоскостной ( $\mathbf{u}$ ) и поперечной деформации ( $v$ ) и записана как функционал

$$F_e = \int L_e d^2 \mathbf{x}, \quad L_e = \frac{E}{2} \left[ |\mathbf{u}|^2 + v^2 + \frac{h^2}{9} \text{Tr}(\mathbf{C}^2) \right],$$

где  $E$  - модуль Юнга,  $C$  - тензор кривизны. Таким образом, равновесная форма может быть найдена путем минимизации общей энергии системы, составленная как сумма  $F = F_n + F_m + F_e$ .

### 3. Результаты

Проведено исследование системы, где одновременно сосуществуют изотропная и нематическая фазы, разделённые межфазной границей, которая в недеформированном состоянии стационарна и прямолинейная, тогда как свободная энергия в разных фазах предполагается одинаковой (рис. 1 а). Путем численной оптимизации функционала общей свободной энергии показана сложность и вариативность деформаций, возникающих в результате разбухания тонких пленок нематических гелей с наличием межфазной границы. Произведен расчет деформации фазового перехода для пленок прямоугольной и цилиндрической формы с однородным нематическим распределением, а также для сферических оболочек при наличии топологических дефектов (рис. 1 б).



**Рис. 1.** (а) Общая свободная энергия как функция концентрации растворителя  $\phi$  (б) Равновесные формы пленки нематического эластомера после фазового разделения

Работа поддержана Israel Science Foundation (грант 669/14).

#### Список литературы

1. P. G. de Gennes, C. R. Seances Acad. Sci. Ser. B 281, 101(1975).
2. H. Finkelmann, H. Kock and Rehage G. Macromol. Rapid. Commun. 2, 317 (1981)
3. M. Warner, K. P. Gelling, and Vilgis T. A J. Chem. Phys. 88,4008 (1988).
4. C. D. Modes, K. Bhattacharya, and Warner M. Proc. R. Soc. A 467, 1121 (2011).
5. L. T. de Haan, A.P.H.J. Schenning, and Broer D. J. Polymer 55, 5885 (2014).
6. J. Kupfer and Finkelmann H. Makromol. Chem. Rapid Comm. 12, 717 (1991).
7. K. Urayama, Y. Okuno, T. Kawamura, and Kohjiya S. Macromolecules, 35, 4567 (2002).
8. K. Urayama, Y. Okuno, and Kohjiya S. Macromolecules, 36, 6229 (2003).
9. I. Bahar and B. Erman, Macromolecules, 20, 1696 (1987).
10. Cheewaruangroj N. and Terentjev E. M. Phys. Rev. E, 92, 042502 (2015).
11. Flory P. J., Chem J. Phys. 10, 51 (1942).

## **Эффекты мягкого сцепления в коллоидной суспензии магнитных частиц в холестерическом жидком кристалле**

**А. Н. Захлевных, К. В. Кузнецова**

Пермский государственный национальный исследовательский университет  
614990, Пермь, ул. Букирева, 15  
email: raddabuy@yandex.ru

В рамках континуальной теории изучено влияние магнитного поля на раскручивание спиральной структуры коллоидной суспензии магнитных частиц в холестерическом жидком кристалле с мягким сцеплением частиц с матрицей. Рассмотрен фазовый переход феррохолестерик – ферронематик, получено уравнение для поля перехода в ферронематическую фазу и определена зависимость поля перехода от материальных параметров суспензии.

**Ключевые слова:** холестерический жидкий кристалл; коллоидная суспензия; феррохолестерик; ферронематик; фазовые переходы

## **Soft anchoring effects in colloidal suspension of magnetic particles in a cholesteric liquid crystal**

**A. N. Zakhlevnykh, K.V. Kuznetsova**

Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm  
email: raddabuy@yandex.ru

On the base of continuum theory, we study magnetic field induced unwinding of spiral structure of colloidal suspension of magnetic particles in cholesteric liquid crystal with soft anchoring between the particles and the matrix. We study ferrocholesteric - ferronematic phase transition, and derive the equation for the transition field in ferronematic phase and obtain the dependence of the transition field on material parameters of the suspension.

**Keywords:** cholesteric liquid crystal; colloidal suspension; ferrocholesteric; ferronematic; phase transitions.

Феррохолестерики (ФХ) - коллоидные суспензии магнитных наночастиц, введенных в холестерический жидкий кристалл (ХЖК). Из-за ориентационной связи между анизометричными частицами и молекулами ХЖК малые концентрации наночастиц (доли процента по объему) приводят к повышению магнитной восприимчивости на три-четыре порядка. В результате спиральная структура ФХ раскручивается в слабых магнитных полях и ФХ переходит в ферронематическую (ФН) фазу.

Направим магнитное поле  $\mathbf{H} = (0, H, 0)$  перпендикулярно оси спиральной структуры ФХ. Сцепление между молекулами ХЖК-матрицы и наночастицами предполагаем

мягким и планарным, т.е. магнитные частицы внедрены в ХЖК таким образом, что их главные оси параллельны локальному директору  $\mathbf{n}$ . Диамагнитную анизотропию ХЖК  $\chi_a$  будем считать положительной, поэтому директор стремится повернуться в направлении поля. В этом случае дипольный механизм взаимодействия ФХ с магнитным полем (влияние магнитного поля на феррочастицы) и квадрупольный (влияние поля на диамагнитную ХЖК матрицу) усиливают друг друга.

Деформация ориентационной структуры ФХ может быть изучена в рамках континуальной теории [1], основанной на функционале свободной энергии. Выражение для свободной энергии ФХ имеет вид

$$F = \iiint (F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5) dV, \quad (1)$$

$$F_1 = \frac{1}{2} [K_{11} (\nabla \cdot \mathbf{n})^2 + K_{22} (\mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{n} + q_0)^2 + K_{33} (\mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{n})^2],$$

$$F_2 = -\frac{1}{2} \chi_a (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H})^2, \quad F_3 = -M_s f (\mathbf{m} \cdot \mathbf{H}),$$

$$F_4 = \frac{k_B T}{v} f \ln f, \quad F_5 = -\frac{w}{d} f (\mathbf{n} \cdot \mathbf{m})^2$$

где  $K_{11}$ ,  $K_{22}$ ,  $K_{33}$  – упругие модули Франка;  $q_0$  – собственное волновое число спирали ХЖК,  $\mathbf{n}$  – директор жидкого кристалла;  $\mathbf{m}$  – единичный вектор намагниченности;  $M_s$  – намагниченность насыщения материала феррочастиц;  $f$  – объемная доля магнитных частиц в суспензии;  $d$  – поперечный диаметр частицы;  $v$  – объем частицы;  $k_B$  – постоянная Больцмана;  $T$  – температура;  $w$  – поверхностная плотность энергии сцепления молекул холестерика с феррочастицами. Мы полагаем  $f \ll 1$ , чтобы пренебречь межчастичными магнитными диполь-дипольными взаимодействиями в суспензии.

Под действием магнитного поля, направленного перпендикулярно оси спирали ФХ, ориентационная структура ФХ теряет геликоидальный характер, и векторы  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{m}$  можно представить в виде

$$\mathbf{n} = [\cos \varphi(z), \sin \varphi(z), 0], \quad \mathbf{m} = [\cos \psi(z), \sin \psi(z), 0]. \quad (2)$$

Выбирая в качестве единицы длины  $q_0^{-1}$ , определим безразмерные величины

$$h = \frac{H}{q_0 \sqrt{K_{22} / \chi_a}}, \quad \xi = \frac{M_s \bar{f}}{q_0 \sqrt{K_{22} \chi_a}}, \quad \kappa = \frac{k_B T \bar{f}}{q_0^2 K_{22} v}, \quad \sigma = \frac{w \bar{f}}{q_0^2 K_{22} d} \quad (3)$$

Здесь  $h$  представляет собой безразмерную напряженность поля, измеренную в единицах поля перехода в чистом ХЖК. Параметр  $\xi$  характеризует относительную роль дипольного и квадрупольного механизмов влияния поля на ФХ (при больших  $\xi$  преобладает дипольный механизм, при малых – квадрупольный), а параметр  $\kappa$  является сегрегационным параметром (при больших  $\kappa$  сегрегация несущественна). Параметр  $\sigma$  характеризует энергию взаимодействия магнитных частиц с ХЖК-матрицей (малые  $\sigma$  отвечают слабому сцеплению),  $\bar{f} = Nv/V$  – средняя объемная доля частиц,  $N$  – число магнитных частиц в суспензии,  $V$  – объем ФХ.

Полная свободная энергия (1) ФХ представляет собой функционал относительно функций  $\phi(z)$ ,  $\psi(z)$  и  $f(z)$ . Минимизация свободной энергии (1) по этим функциям при условии постоянства числа частиц в суспензии

$$\int fdV = N\nu. \quad (4)$$

дает систему уравнений, которая определяет ориентационное состояние ФХ во внешнем магнитном поле

$$\frac{d^2\phi}{dz^2} = -\frac{1}{2}h^2 \sin 2\phi + \sigma g \sin 2(\phi - \psi), \quad (5)$$

$$\xi h \cos \psi + \sigma \sin 2(\phi - \psi) = 0, \quad (6)$$

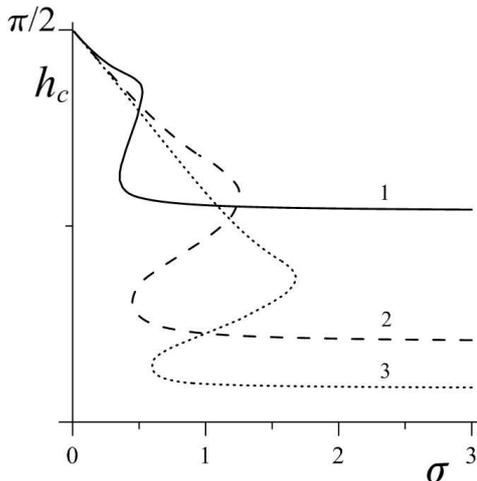
$$g(z) = Q \exp \left\{ \frac{\xi h \sin \psi + \sigma \cos^2(\phi - \psi)}{\kappa} \right\}, \quad (7)$$

Здесь (6) играет роль уравнения связи ориентационных распределений  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{m}$ , формула (7) описывает эффект сегрегации магнитной примеси [1], множитель  $Q$  определяется условием (4), и введена приведенная объемная доля частиц  $g = f / \bar{f}$ .

Раскручивание спиральной структуры (переход в ферронематическую фазу) происходит при достижении полем критического значения  $h_c$ . Поле перехода определяется из условия равенства свободной энергии ФХ и раскрученного полем ФН с однородным распределением твердой фазы и удовлетворяет уравнению

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{h_c^2 \cos^2 \phi + 2\kappa \left[ 1 - \exp \left\{ \frac{\xi h_c (\sin \psi - 1) - \sigma \sin^2(\phi - \psi)}{\kappa} \right\} \right]} d\phi = 2\pi. \quad (8)$$

Здесь в ФН фазе  $\mathbf{n} \parallel \mathbf{m} \parallel \mathbf{H}$ , т.е. углы ориентации директора и намагниченности  $\phi_0 = \pi/2$  и  $\psi_0 = \pi/2$ .



Зависимость критического поля  $h_c(\sigma)$  от энергии сцепления при  $\kappa=5$ : кривая 1 –  $\xi=0.5$ , 2 –  $\xi=2$ , 3 –  $\xi=5$

### Список литературы

1. Zakhlevnykh A.N., Kuznetsova K.V. Magnetic-field induced orientational transition in a helical liquid-crystalline antiferromagnet // Phys. Solid State. Vol. 58, 2358 (2016).

## Ориентационные переходы в ферронематиках в магнитном поле

А. Н. Захлевных, А. В. Манцуоров

Пермский государственный национальный исследовательский университет  
614990, Пермь, ул. Букирева, 15  
email: flexar@mail.ru

В работе построена молекулярно-статистическая теория ферронематиков–суспензий магнитных частиц в нематических жидких кристаллах. Рассмотрены ориентационные эффекты под действием магнитного поля с учётом ориентационной связи между жидкокристаллической матрицей и ансамблем частиц, а также диамагнитной энергии взаимодействия поля с матрицей.

**Ключевые слова:** нематический жидкий кристалл; суспензия; ферронематик; фазовые переходы

## Orientational transitions in ferronematics under magnetic field

A. N. Zakhlevnykh, A.V. Mantsurov

Perm State University, Bukirev St. 15, 614990, Perm  
email: flexar@mail.ru

A molecular-statistical theory of ferronematics, i.e., suspensions of magnetic particles in nematic liquid crystals is proposed. Orientational effects under the action of a magnetic field are considered with allowance of the orientational coupling between the liquid crystal matrix and the ensemble of particles, as well as the diamagnetic energy of the interaction of the field with the matrix.

**Keywords:** nematic liquid crystal; suspension; ferronematic; phase transitions

В работе в рамках молекулярно-статистического подхода изучаются индуцированные внешним магнитным полем ориентационные переходы в ферронематике (ФН– суспензии анизометричных феррочастиц в нематическом жидком кристалле (НЖК)). Будем полагать, что сцепление директора с поверхностью частиц мягкое и планарное, так что в отсутствие магнитного поля директор ЖК-матрицы и длинные оси частиц параллельны. В магнитном поле  $\vec{H} = (0, 0, H)$  свободная энергия ФН, рассматриваемого как смесь  $N_n$  молекул ЖК и  $N_p$  магнитных наночастиц, имеет вид[1, 2]

$$F = \frac{\lambda V}{v_n} \frac{1}{2} [y_n^2 \eta(\eta + 1) + y_p y_n \omega \gamma \mathcal{S}(2\eta + 1) + y_p y_n \omega \gamma \eta] - y_n \tau \ln f(\sigma_n, 0) - y_p \gamma \tau \ln f(\sigma_p, \zeta), (1)$$

где  $\zeta = h / \tau$ ,  $\tau = k_B T / \lambda$ ,  $h = M_s v_p H / \lambda$ ,  $f(\sigma, \zeta) \equiv \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \exp\{\alpha x^2 + \zeta x\} dx$ .

Здесь  $\lambda$  – константа среднего поля,  $M_s$  – намагниченность насыщения материала магнитных частиц,  $v_p$  – объем частицы,  $v_n$  – объем молекулы НЖК,  $\chi_a^n$  – анизотропия диамагнитной восприимчивости молекулы НЖК, параметр  $\omega$  описывает относительную роль анизотропного ориентационного взаимодействия между частицами и ЖК-матрицей, параметр  $\gamma$  характеризует относительный объем наночастиц,  $y_n \equiv N_n v_n / V$  и  $y_p \equiv N_p v_p / V$  – объемные доли компонент,  $\eta = \langle P_2(\vec{n}\vec{v}) \rangle$  и  $S = \langle P_2(\vec{n}\vec{e}) \rangle$  – скалярные параметры порядка ЖК и магнитной подсистем, соответственно,

$$\sigma_n = \frac{3}{2} \frac{y_n \eta + y_p \omega \gamma S}{\tau} + \frac{\xi h^2}{\tau}, \quad \sigma_p = \frac{3}{2} \frac{y_n \omega \eta}{\tau}.$$

Здесь параметр  $\xi = \lambda \chi_a^n / (M_s v_p)^2$  характеризует относительную роль диамагнитных взаимодействий ЖК-матрицы с полем по сравнению с ферромагнитными. В работе [2] диамагнитные эффекты не учитывались ( $\xi = 0$ ).

Условия термодинамического равновесия  $\partial F / \partial \eta = \partial F / \partial S = 0$  определяют зависимости параметров порядка  $\eta$  и  $S$ , а также приведённой намагниченности  $m = \langle \vec{e}\vec{n} \rangle = \partial \ln f(\sigma, \zeta) / \partial \zeta$  от температуры  $\tau$  и напряженности поля, показанные на рис. 1 и 2. На этих рисунках термодинамически устойчивые участки кривых проведены жирными линиями, вертикальные отрезки прямых отвечают скачкам параметров порядка в точке фазового перехода.

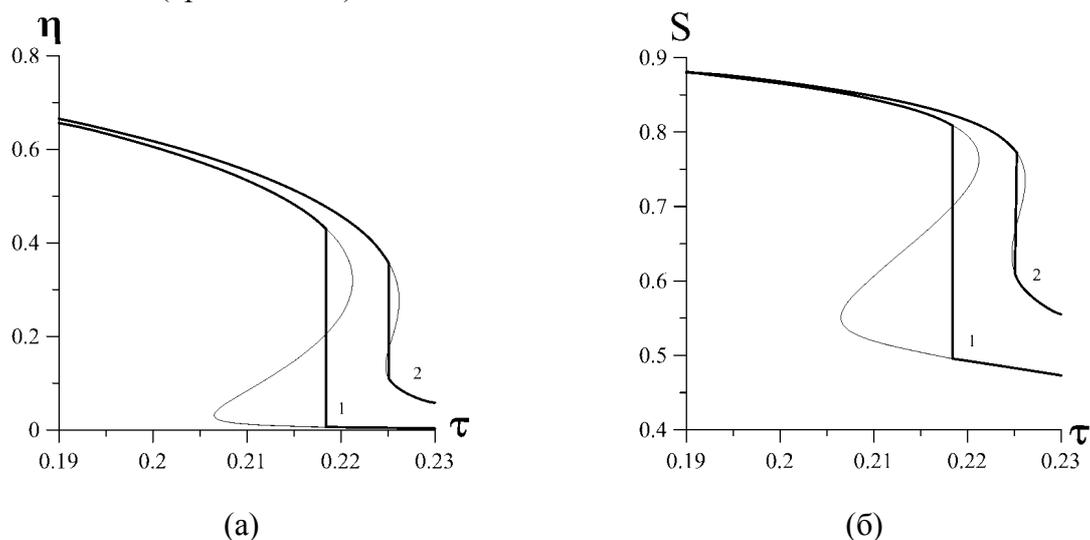
В отсутствие поля при высоких температурах ( $\tau > \tau_c$ ) ФН находится в изотропной фазе. При понижении температуры в ЖК-матрице происходит фазовый переход в упорядоченную фазу [1]. Этим переходом индуцируется ориентационное упорядочение магнитных частиц и параметры порядка претерпевают скачки, характерные для фазовых переходов первого рода.

На (рис. 1) показано поведение параметров порядка в магнитном поле. Если поле приложено при  $\tau > \tau_c$ , оно ориентирует магнитные частицы, а ориентационное сцепление частиц с ЖК-матрицей передает это упорядочение молекулам ЖК, в результате чего упорядочивается ЖК-матрица. Такая высокотемпературная фаза ФН является парамагнитной и характеризуется параметром порядка  $S$ . С понижением температуры происходит переход первого рода в высокоупорядоченную ферромагнитную фазу. Этот переход показан на рисунках вертикальным отрезком прямой между двумя частями Z-образной кривой.

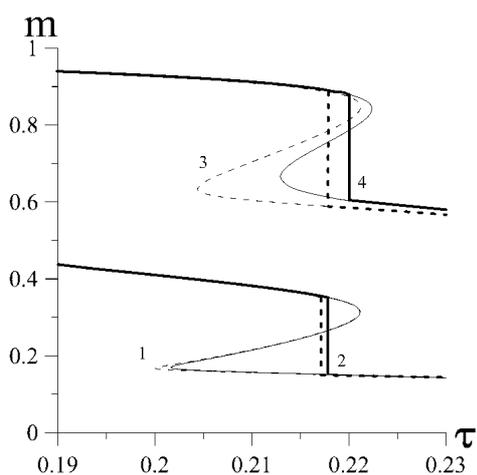
Влияние упорядочения ЖК-матрицы на феррочастицы показано на (рис. 1. б). При  $\tau > \tau_c$  суспензия ведет себя как обычная магнитная жидкость, поэтому магнитные частицы легко ориентируются полем. Как видно из (рис. 1. б), частицы ориентированы вдоль поля достаточно сильно уже в паранематической фазе. По этой причине ниже точки  $\tau_c$ , когда ЖК-матрица оказывает сильное ориентирующее влияние, рост параметра порядка  $S$  при понижении температуры становится слабым. Видно, что в слабых полях влияние ЖК-матрицы на упорядочение ансамбля магнитных частиц весьма существенно.

Из (рис. 1) и (рис. 2) видно, что с ростом магнитного поля увеличивается температура фазового перехода. При  $\xi \neq 0$  этот эффект становится более заметным. С ростом напряжённости магнитного поля уменьшается скачок параметра порядка при фазовом переходе и при некотором  $h$  этот скачок исчезает и переход размывается. Рис.

2 показывает, что диамагнитные эффекты становятся существенными в достаточно сильных полях (кривые 3 и 4).



**Рис. 1.** Температурные зависимости параметров порядка ЖК-матрицы  $\eta$  (а) и наночастиц  $S$  (б) при  $y_p = 0.01$ ,  $\gamma = 0.06$ ,  $\omega = 2$ ,  $h = 1$ . Кривая 1 –  $\xi = 0$ , 2 –  $\xi = 0.01$



**Рис. 2.** Температурные зависимости приведённой намагниченности  $m$  при  $y_p = 0.01$ ,  $\gamma = 0.06$ ,  $\omega = 2$ . Штриховая линия:  $\xi = 0$ ; сплошная линия:  $\xi = 0.01$ . Кривые 1 и 2 –  $h = 0.1$ , кривые 3 и 4 –  $h = 0.5$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 16-02-00196).

#### Список литературы

1. Захлевных А. Н., Лубнин М. С., Петров Д. А. Об одной простой молекулярно-статистической модели жидкокристаллической суспензии анизометричных частиц // Журн. эксперим. и теорет. физики. 2016. Том 150, вып. 5 (11). С.1041-1051.
2. Zakhlevnykh A. N., Lubnin M. S., Petrov D. A. A simple model of liquid-crystalline magnetic suspension of anisometric particles // J. Magn. Magn. Mater. 2017. Vol. 431. P. 62–65.

## Моделирование нелинейной динамики свободной поверхности жидкого диэлектрика конечной глубины в электрическом поле

Н. М. Зубарев<sup>a,б</sup>, Е. А. Кочурин<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Институт электрофизики УрО РАН, 620016, Екатеринбург, ул. Амундсена, 106

<sup>b</sup> Физический институт им. Лебедева РАН, 119991, Москва, Ленинский проспект, 53  
email: kochurin@ier.uran.ru

Рассмотрена нелинейная динамика свободной поверхности диэлектрической жидкости с высокой проницаемостью в сильном тангенциальном электрическом поле. В рамках метода динамических конформных преобразований (область, занимаемая жидкостью, отображается в полосу) осуществлено моделирование взаимодействия встречных волн. Для слоя жидкости конечной глубины исследовано взаимодействие пространственно локализованных волн. Показано, что нелинейная суперпозиция волн обеспечивает заметное увеличение амплитуды возмущения границы по сравнению с линейной. В пределе мелкой воды возникает тенденция к формированию вертикальной струи.

**Ключевые слова:** свободная поверхность; нелинейные волны; электрическое поле

## Simulation of nonlinear dynamics of free surface of finite depth liquid dielectric under the action of electric field

N. M. Zubarev<sup>a,б</sup>, E. A. Kochurin<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Institute of Electrophysics, UB of RAS, 620016, Ekaterinburg, Amundsen str., 106

<sup>b</sup> Lebedev Physical Institute, RAS, 119991, Moscow, Leninsky Prospekt, 53

Nonlinear dynamics of the free surface of finite depth non-conducting fluid with high dielectric constant subjected to a strong horizontal electric field is considered. Using the conformal transformation (the region occupied by the fluid is transformed into a strip), the process of counter-propagating waves interaction is numerically simulated. For the case of a finite depth layer of liquid, the interaction of spatially localized waves is investigated. It is shown that the nonlinear superposition of waves leads to a noticeable increase in the amplitude of boundary perturbation in comparison with the linear one. In the shallow water limit, the tendency to the formation of a vertical liquid jet is observed.

**Keywords:** free surface; nonlinear waves; electric field

Рассмотрим динамику свободной поверхности непроводящей жидкости конечной глубины  $d$  во внешнем горизонтальном электрическом поле. Мы будем рассматривать

задачу с плоской симметрией. В невозмущенном состоянии граница представляет собой плоскость  $y = 0$  (ось  $x$  прямоугольной системы координат лежит в этой плоскости, а ось  $y$  направлена по нормали к ней). Напряженность внешнего электрического поля направлена по оси  $x$ ; по абсолютному значению она равна  $E$ . Вдоль оси  $x$  рассматриваемая система является периодической, т.е.  $E = U / l$ , где  $U$  – падение напряжения на пространственном периоде  $l$ . Отклонение поверхности раздела от плоскости  $y = 0$  задается функцией  $\eta(x, t)$ , т.е. уравнение  $y = \eta$  определяет профиль границы. Будем считать жидкость невязкой и несжимаемой, а течение – безвихревым (потенциальным). Потенциал скорости жидкости  $\Phi$  удовлетворяет уравнению Лапласа  $\nabla^2 \Phi = 0$ ,  $-d < y < \eta$ , со следующим условием на дне  $\Phi_y = 0$ ,  $y = -d$ . На свободной поверхности должны выполняться кинематическое и динамическое граничные условия [1], соответственно,

$$\eta_t = \Phi_y - \eta_x \Phi_x, \quad \Phi_t + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{(\nabla \varphi)^2 - E^2}{2\rho}, \quad (1)$$

где  $\varphi$  – потенциал электрического поля,  $\rho$  – плотность жидкости,  $\varepsilon_0$  – электрическая постоянная,  $\varepsilon \gg 1$  – диэлектрическая проницаемость жидкости. В силу отсутствия объемного заряда внутри жидкости потенциал электрического поля будет удовлетворять уравнению Лапласа  $\nabla^2 \varphi = 0$ . Условия непрерывности нормальной компоненты вектора электрической индукции на поверхности и на дне жидкости примут вид  $\varphi_y - \eta_x \varphi_x = 0$ ,  $y = \eta$ ;  $\varphi_y = 0$ ,  $y = -d$ . Для удобства дальнейшего рассмотрения удобно перейти к безразмерным обозначениям посредством замен  $\Phi \rightarrow \lambda c \Phi$ ,  $\varphi \rightarrow \lambda E \varphi$ ,  $x \rightarrow \lambda x$ ,  $\eta \rightarrow \lambda \eta$ ,  $t \rightarrow \lambda c^{-1} t$ , где  $\lambda$  – характерная длина волны,  $c = (\varepsilon_0 \varepsilon E^2 / \rho)^{1/2}$  – скорость распространения линейных волн, в новых переменных она равна единице.

Далее, совершим конформное преобразование области, занимаемой жидкостью, в параметрическую полосу  $-D < v \leq 0$ ,  $-\infty < u < +\infty$ , где  $D = D(t)$  – конформная глубина жидкости. Свободная поверхность жидкости будет задаваться параметрическими выражениями  $y = Y(u, t)$ ,  $x = u - \hat{T}Y$ , где  $\hat{T}$  – интегральный оператор, его действие и действие обратного к нему оператора  $\hat{R}$  определяется в Фурье-пространстве, как  $\hat{T}_k = i \coth(kD)$ ,  $\hat{R}_k = -i \tanh(kD)$ . Конформная глубина связана с физической глубиной следующим образом

$$D(t) = d + \frac{1}{l} \int_{-l/2}^{l/2} Y(u, t) du.$$

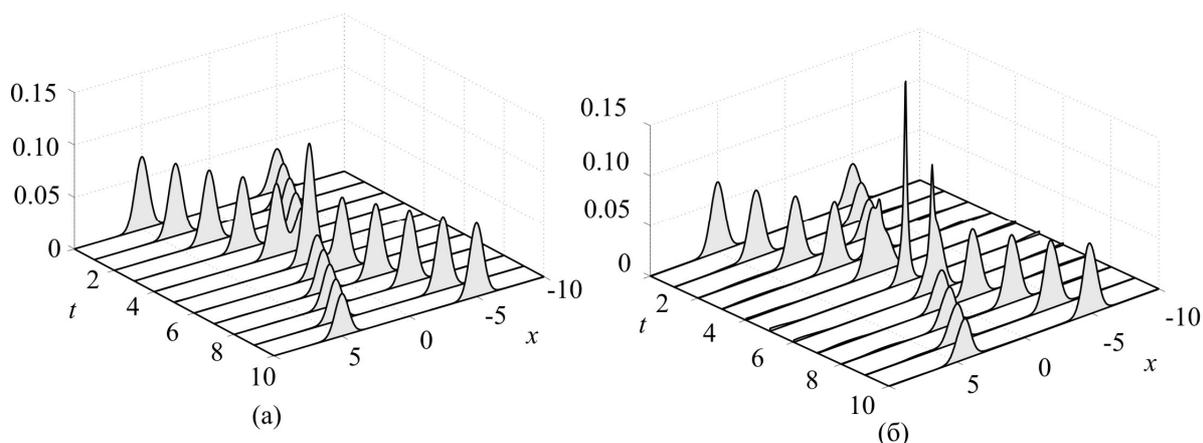
Кинематическое граничное условие (1) в новых переменных примет вид

$$Y_t = \left[ 1 - \hat{T}Y_u \right] \frac{\hat{R}\Psi_u}{J} - Y_u \hat{T} \left( \frac{\hat{R}\Psi_u}{J} \right), \quad (2)$$

где  $\Psi$  – функция, задающая значение потенциала скорости на границе, и  $J = X_u^2 + Y_u^2$  – якобиан конформного преобразования, его обратное значение определяет электростатическое давление на границе жидкости  $P_E = 1/J$ . Уравнение баланса сил на свободной поверхности жидкости можно записать в виде

$$\Psi_t = -\frac{1}{2J} \left[ \Psi_u^2 - \hat{R}\Psi_u^2 \right] - \Psi_u \hat{T} \left( \frac{\hat{R}\Psi_u}{J} \right) + \frac{1-J}{2J}, \quad (3)$$

Для численного моделирования системы уравнений (2)-(3) удобно пользоваться спектральными методами, т.е. аппроксимировать искомые функции конечными рядами Фурье. Итак, рассмотрим взаимодействие двух встречных нелинейных локализованных волн следующего вида  $Y = Y^+ + Y^-$ ,  $Y^\pm = a^\pm \exp(-2[u \pm u_0]^2)$ , где знаки  $\pm$  соответствуют положительному и отрицательному направлениям распространения волн вдоль оси  $x$ ,  $a^\pm$  – амплитуды волн,  $\pm u_0$  – начальные положения максимумов амплитуд волн. На (рис. 1) показана эволюция поверхности при взаимодействии локализованных волн малой амплитуды при различных значениях глубины жидкости. Из (рис.1. а) видно, что при относительно большом значении глубины  $d = 1$ , взаимодействие волн происходит практически линейно (сильнонелинейная динамика волн для глубокой жидкости рассматривалась в работе [2]). По мере уменьшения глубины амплитуда поверхности в момент столкновения начинает возрастать и для малой глубины  $d \approx 0.07$  она превосходит сумму амплитуд слабонелинейных волн (см. рис. 1. б).



**Рис. 1.** Взаимодействие встречных нелинейных волн на границе жидкости.

Таким образом, результаты моделирования показывают, что интенсивность взаимодействия нелинейных волн усиливается по мере уменьшения глубины жидкости. В пределе малой глубины это свойство приводит к формированию узко направленного возмущения, амплитуда которого становится сравнимой или даже превышает глубину жидкости. Другими словами возникает тенденция к формированию струй на границе жидкости при взаимодействии встречных нелинейных волн.

### Благодарности

Работа выполнена в рамках темы гос. задания 0389-2014-0006 при поддержке РФФИ (проекты 16-38-60002 мол\_а\_дк, 16-08-00228 и 17-08-00430) и Президиума УрО РАН (проект 15-8-2-8) и Совета по грантам Президента РФ (СП-132.2016.1).

### Список литературы

1. Zubarev N. M. Nonlinear waves on the surface of a dielectric liquid in a strong tangential electric field // *Physics Letters A*. 2004. Vol. 333. P. 284–288. DOI: 10.1016/j.physleta.2004.10.058.
2. Зубарев Н. М., Кочурин Е. А. Взаимодействие сильно нелинейных волн на свободной поверхности непроводящей жидкости в горизонтальном электрическом поле // Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2014. Т. 99. Вып. 11. С. 729–734. DOI: 10.1134/S0021364014110125.

## **Вибрационная конвекция трехкомпонентной смеси в прямоугольной полости в условиях невесомости**

**Н. А. Зубова<sup>a</sup>, Т. П. Любимова<sup>a,b</sup>**

<sup>a</sup> Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013, Пермь, ул. Акад. Королева, 1  
email: yanca@yandex.ru

<sup>b</sup> Пермский государственный национальный исследовательский университет,  
614990, Пермь, ул. Букирева, 15  
email: lubimova@psu.ru

В настоящей работе проведено прямое численное моделирование вибрационной конвекции трехкомпонентной смеси в прямоугольной полости в условиях невесомости. Полость имеет твердые, непроницаемые для вещества границы и совершает продольные гармонические вибрации с конечной амплитудой и частотой. Короткие границы полости теплоизолированы, длинные поддерживаются при постоянных разных температурах. Расчеты выполнены для трехкомпонентной смеси с отрицательными отношениями разделения компонент. Получены численные данные о структуре среднего течения и распределениях концентрации примесей при различных интенсивностях вибраций. Показано, что с ростом интенсивности вибраций происходит перестройка структуры среднего течения, связанная с неустойчивостью квазиравновесия течения в центральной части полости и сопровождающаяся резким скачком интенсивности теплопереноса.

**Ключевые слова:** конвекция; вибрации; трехкомпонентная смесь; невесомость

## **Vibrational convection of ternary mixture in rectangular cavity in zero gravity condition**

**N. A. Zubova<sup>a</sup>, T. P. Lyubimova<sup>a,b</sup>**

<sup>a</sup> Institute of continuous media mechanics UB RAS, Akad. Koroleva St. 1, 614013, Perm  
email: yanca@yandex.ru

<sup>b</sup> Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm  
email: lubimova@psu.ru

In the present paper a direct numerical simulation of the vibrational convection of a ternary mixture in a rectangular cavity at the zero gravity conditions is carried out. The cavity has a rigid, impermeable boundaries and performs longitudinal harmonic vibration with finite amplitude and frequency. The short boundaries of the cavity are thermally insulated, the long ones are kept at constant different temperatures. The calculations were performed for a ternary mixture with negative separation ratios of the components. The numerical data on the structure of the average flow and distributions of solutes concentration for various vibration intensities is obtained. It is shown that as the intensity of vibrations increases, the struc-

ture of the average flow is restructured, due to the instability of the quasi-equilibrium of the flow in the central part of the cavity and accompanied by a sharp jump in the intensity of heat transfer.

**Keywords:** convection; vibration; ternary mixture; zero gravity

### 1. Постановка задачи и метод решения

Рассмотрим индуцируемую эффектом Соре конвекцию трехкомпонентной смеси в прямоугольной полости с отношением сторон 5:1 в условиях невесомости. Границы полости считаются твердыми, непроницаемыми для вещества. Короткие стороны прямоугольника теплоизолированы, на длинных сторонах поддерживаются постоянные разные температуры. Полость совершает продольные гармонические вибрации с амплитудой  $a$  и угловой частотой  $\omega$ . Нестационарные безразмерные уравнения индуцируемой эффектом Соре конвекции трехкомпонентной смеси в приближении Буссинеска в системе отсчета колеблющейся полости, а также граничные условия, имеют вид [1]:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \nabla \vec{u} = -\nabla p + \nabla^2 \vec{u} + \frac{\text{Ra}_v}{\text{Pr}} \cos(\Omega t) (T + \mathbf{I} \cdot \mathbf{C}) \vec{n}, \quad \nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \nabla T = \frac{1}{\text{Pr}} \nabla^2 T, \quad \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} + \vec{u} \nabla \mathbf{C} = \frac{1}{\text{SC}} (\nabla^2 \mathbf{C} - \boldsymbol{\psi} \nabla^2 T), \quad (2)$$

$$x = 0, 5: \quad \vec{u} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

$$y = 0, 1: \quad \vec{u} = 0, \quad T = \pm 1/2, \quad \frac{\partial}{\partial y} (C - \boldsymbol{\psi} T) = 0. \quad (4)$$

Здесь  $\vec{u}$  – вектор скорости,  $p$  – давление,  $T$  – температура,  $\mathbf{C} = (C_1, C_2)^T$  – транспонированный вектор концентраций компонент,  $\mathbf{I} = (1, 1)$  – единичный вектор,  $\vec{n}$  – единичный вектор в направлении вибраций.

Уравнения (1)-(4) содержат следующие безразмерные параметры:  $\text{Pr} = \nu / \chi$  – число Прандтля,  $\boldsymbol{\psi}$  – вектор отношений разделения,  $\text{SC} = \nu^{-1} \mathbf{BDB}^{-1}$  – матрица чисел Шмидта,  $\text{Ra}_v = a \omega^2 \beta_T \Delta T H^3 / (\nu \chi)$  – вибрационное число Релея,  $\Omega = \omega H^2 / \nu$  – безразмерная частота вибраций. К уравнениям (1)-(4) применено преобразование, исключаящее эффект перекрестной диффузии. Это преобразование приводит матрицу  $\text{SC}$  к диагональному виду и имеет вид [2]:

$$\mathbf{C} = \mathbf{BV} (\mathbf{BQ})^{-1} \hat{\mathbf{C}}, \quad \boldsymbol{\psi} = \mathbf{BV} (\mathbf{BQ})^{-1} \hat{\boldsymbol{\psi}},$$

где  $\mathbf{V}$  – матрица, в столбцах которой находятся собственные вектора  $v_i = (v_{i1}, v_{i2})^T$  матрицы коэффициентов молекулярной диффузии,  $\mathbf{Q} = \text{diag} \{q_1, q_2\}$ ,  $q_i = \beta_i^{-1} \sum_{j=1}^2 \beta_j v_{ij}$ .

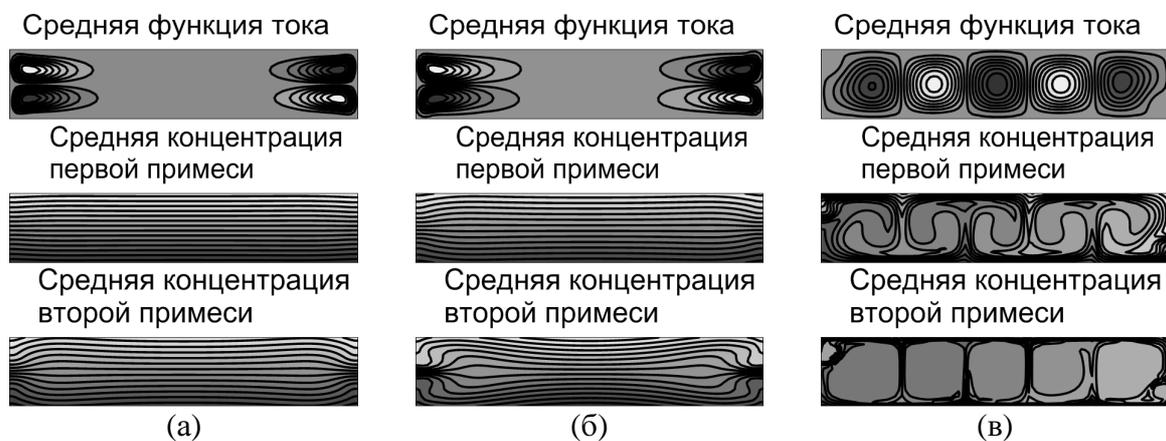
Задача (1)-(4), переписанная в терминах функции тока и завихренности, решалась численно, методом конечных разностей. Нестационарные уравнения решались с помощью явной конечно-разностной схемы с постоянным временным шагом  $h^2 / 8$ , где  $h$  – постоянный шаг по пространству. Уравнение Пуассона для функции тока решалось

лось методом последовательной верхней релаксации. Значения завихренности на границах полости получались по формуле Тома [3]. Начальные условия соответствовали установившимся поперечным градиентам температуры и концентрации примесей:

$$T = 1/2 - y, \quad C = \psi(1/2 - y).$$

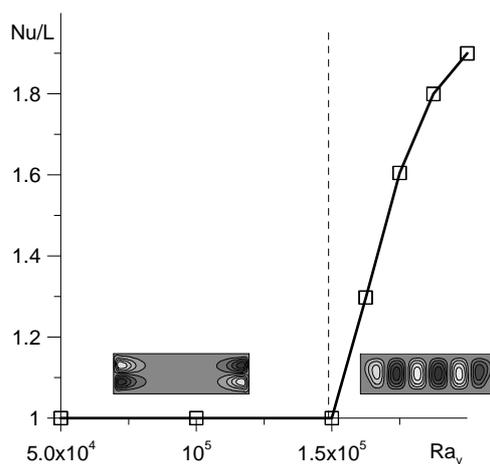
Вычисления проводились для трехкомпонентной смеси со следующими безразмерными параметрами: число Прандтля  $Pr = 10$ , числа Шмидта  $Sc_1 = 100$ ,  $Sc_2 = 1000$ , отношения разделения  $\psi_1 = -0.3$ ,  $\psi_2 = -0.1$ . Значение безразмерной частоты вибраций было также фиксированным  $\Omega = 445$ . Это значение в случае полости высотой 1 см, заполненной трехкомпонентной жидкой смесью с вязкостью  $\nu \sim 10^{-6}$ , соответствует размерной частоте, примерно равной 1 Гц. Средние величины получались путем осреднения мгновенных величин по периоду вибраций.

## 2. Численные результаты



**Рис. 1.** Изолинии средних функции тока и концентраций компонент: (а) –  $Ra_v = 5 \cdot 10^4$ ; (б) –  $Ra_v = 1 \cdot 10^5$ ; (в) –  $Ra_v = 2 \cdot 10^5$

При малых значениях вибрационного числа Релея ( $Ra_v = 5 \cdot 10^4$ , рис. 1. а) в полости наблюдается слабоинтенсивное среднее течение, имеющее форму четырех вихрей, расположенных попарно возле боковых границ полости, а в центральной части полости течение практически отсутствует. Поля концентраций примесей практически не искажены течением. Увеличение  $Ra_v$  приводит к росту интенсивности течения, возрастает перемешивание смеси, что усиливает деформацию изолиний концентрации примесей возле боковых границ полости (рис 1. б,  $Ra_v = 1 \cdot 10^5$ ). При достижении вибрационным числом Релея значения  $Ra_v \approx 1.5 \cdot 10^5$  происходит качественная перестройка структуры течения, связанная с неустойчивостью квазиравновесия смеси в центральной части полости и сопровождаемая сильным увеличением интенсивности теплопереноса (рис. 2). В результате неустойчивости формируется среднее течение, имеющее многотовихревую форму с вихрями, занимающими весь объем полости (рис. 1. в).



**Рис. 2.** Безразмерный тепловой поток через нижнюю границу полости на единицу длины в зависимости от вибрационного числа Релея

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 14-21-00090).

### Список литературы

1. *Gershuni G. Z., Lyubimov D. V.* Thermal Vibrational Convection. New York: Wiley, 1998. 358 p.
2. *Ryzhkov I. I., Shevtsova V. M.* Long-wave instability of a multicomponent fluid layer with the Soret effect // *Physics of Fluids*. 2009. Vol. 21. P. 014102. DOI: 10.1063/1.3054154
3. *Thom A., Apelt C. J.* Field computations in engineering and physics. London: Van Nostrand, 1961. 165 p.

## **Численное моделирование эволюции гравитационных и капиллярных волн в системе двух слабосмешивающихся жидкостей**

**А. О. Иванцов<sup>a,b</sup>, Т. П. Любимова<sup>a,b</sup>, А. М. Воробьев<sup>c</sup>**

<sup>a</sup> Институт механики сплошных сред Уральского Отделения Российской Академии Наук, 614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1

email: lyubimovat@mail.ru

<sup>b</sup> Пермский государственный национальный исследовательский университет 614990, Пермь, ул. Букирева, 15

<sup>c</sup> Университет Саутгемптона, Саутгемптон, Великобритания

Проведено численное моделирование эволюции гравитационных и капиллярных волн на плоской межфазной границе в системе двух слабосмешивающихся жидкостей. Моделирование проводилось на основе модели фазового поля. Для описания процесса диффузии использовался обобщенный закон Фика, в рамках которого скорость диффузионного массопереноса определяется через градиент химического потенциала. Вычисления показали, что диффузия является дополнительным механизмом диссипации гравитационных и капиллярных волн. Аналогично вязкой диссипации взаимная диффузия жидкостей приводит к ограничению сверху значений волнового числа наблюдаемых волн, более короткие волны полностью подавляются при некоторой толщине переходного слоя между фазами. В широком диапазоне параметров построены зависимости частоты гравитационно-капиллярных волн от волнового числа. Законы дисперсии, полученные для малой диффузии и малой толщины границы раздела сред, качественно совпадают с известным дисперсионным соотношением для волн на границе раздела несмешивающихся жидкостей.

**Ключевые слова:** слабосмешивающиеся жидкости; гравитационно-капиллярные волны; диффузия; модель фазового поля

## **Numerical simulation of the evolution of gravity-capillary waves in a system of two slowly miscible liquids**

**A. O. Ivantsov<sup>a,b</sup>, T. P. Lyubimova<sup>a,b</sup>, A. M. Vorobev<sup>c</sup>**

<sup>a</sup> Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm

email: lyubimovat@mail.ru

<sup>b</sup> Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Akad. Koroleva str., 614013, Perm

<sup>c</sup> University of Southampton, Southampton, SO17 1BJ, UK

email: A.Vorobev@soton.ac.uk

Numerical simulation of the evolution of gravity-capillary waves on horizontal interphase in a system of two slowly miscible liquids is carried out. The simulation was performed using the phase-field model. To describe the diffusion process, the extended Fick's law was used. According this approach the diffusion mass transfer rate is determined through the gradient of the chemical potential. Calculations showed that diffusion is an additional mechanism for the dissipation of gravitational and capillary waves. Similarly to viscous dissipation, the mutual diffusion of liquids leads to a restriction on of maximum values of observed wave number. Waves with short wave number are completely suppressed for some thickness of the transition layer between the phases. In a wide range of parameters, the dependences of the frequency of gravity-capillary waves on the wave number are obtained. The dispersion laws obtained for small diffusion and small thickness of the interface are close to the known dispersion relation for waves at the interface of immiscible liquids. However, for a correct transition to the limit of immiscible liquids, it is also necessary to reduce the capillary parameter value, so that the ratio of the capillary number to the thickness of the transition layer remains finite.

**Keywords:** slowly miscible liquids; gravity-capillary waves; diffusion; phase field model

В работе проведено численное исследование эволюции гравитационных и капиллярных волн на плоской межфазной границе в системе двух слабосмешивающихся жидкостей. Моделирование проведено на основе метода фазового поля. В соответствии с данным методом межфазная граница представляется в виде слоя конечной толщины; положение и свойства границы определяются на основе поля концентрации  $C$  (которое в свою очередь определяется, как массовая доля одного из компонент смеси). Новизна подхода состоит в использовании обобщенного закона Фика, в рамках которого скорость диффузионного массопереноса определяется через градиент химического потенциала. Удельная свободная энергия определяется как функция концентрации и градиента концентрации:

$$f(C, \nabla C) = f_0(C) + \frac{\epsilon}{2} (\nabla C)^2. \quad (1)$$

Второе градиентное слагаемое в выражении (1) учитывает эффекты поверхностного натяжения. Предполагается, что капиллярная постоянная  $\epsilon$  достаточно мала, так что влияние второго слагаемого пренебрежимо мало везде, за исключением областей с большим градиентом концентрации, т.е. границ раздела фаз. Для определения классической части функции свободной энергии  $f_0$  использовано выражение Ландау для околокритических систем.

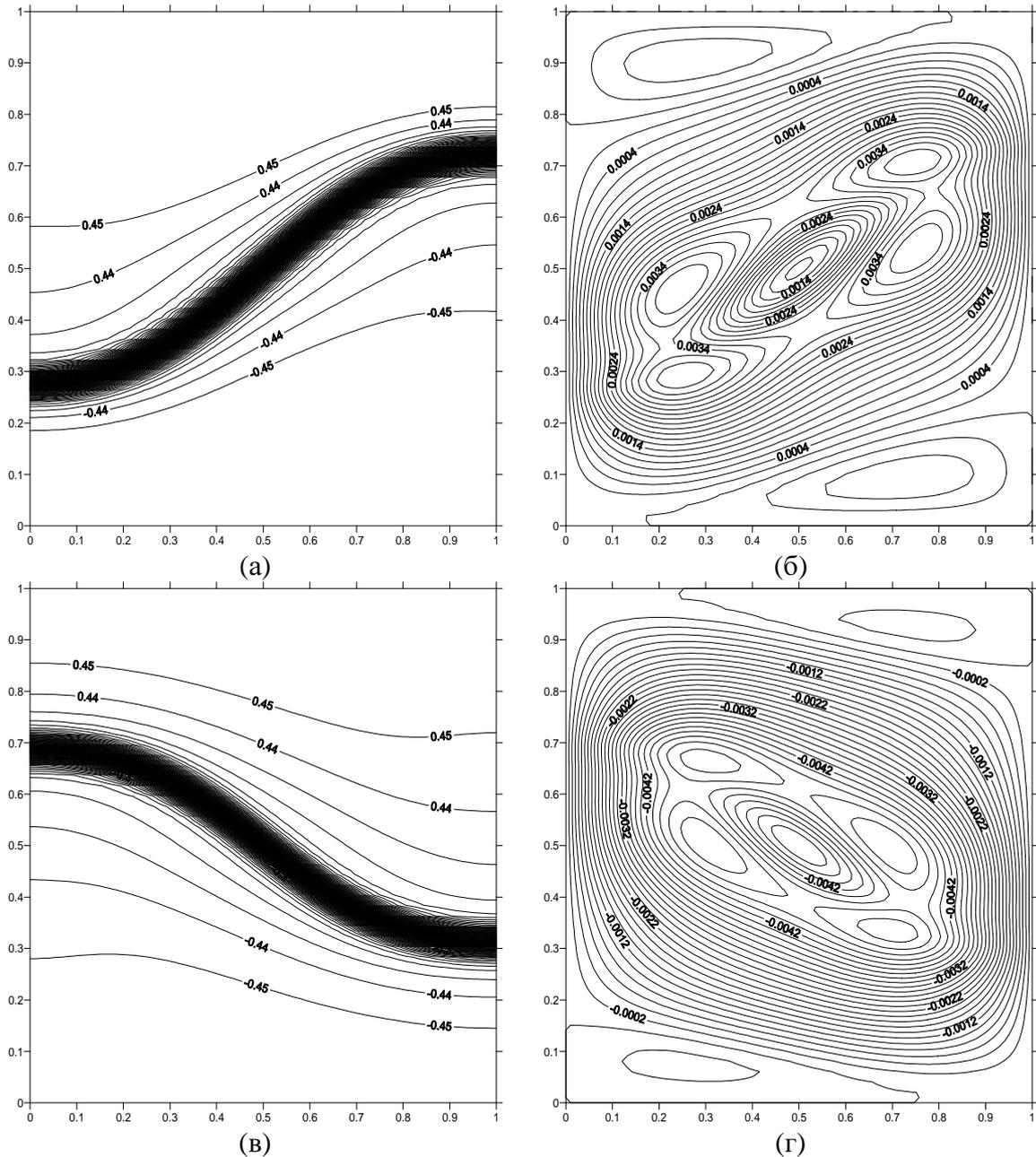
С использованием функции свободной энергии (1), уравнения Навье-Стокса могут быть переписаны в виде так называемых уравнений Кана-Гилларда-Навье-Стокса, которые дают описание эволюции гетерогенной бинарной смеси. В рамках приближения Буссинеска, справедливого для описания сравнительно медленных процессов на конвективных и диффузионных временных масштабах, уравнения запишутся в виде [1, 2]:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla \Pi + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u} - C \nabla \mu + 2\text{Gr} C \boldsymbol{\gamma}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) C = \frac{1}{\text{Pe}} \Delta \mu, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3)$$

$$\mu = \text{Gr}(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\gamma}) + 2AC + 4C^3 - \text{Ca} \Delta C. \quad (4)$$

В данных уравнениях использованы стандартные обозначения для переменных;  $\gamma$  - единичный вектор, направленный вверх,  $\mu$  - химический потенциал. Уравнения (2)-(4) записаны в безразмерном виде и включают в себя следующие безразмерные параметры: число Грасгофа,  $Gr = \varphi g \tilde{L} / \tilde{\mu}$ , число Рейнольдса,  $Re = \tilde{\rho} \tilde{\mu}^{1/2} L / \tilde{\eta}$ , число Пекле,  $Pe = \varphi g \tilde{L} / \tilde{\mu}$ , капиллярное число,  $Ca = \varepsilon / \tilde{\mu} \tilde{L}$ . Здесь  $\tilde{L}$  - характерный размер,  $\tilde{\mu}$  - характерное значение химического потенциала,  $\tilde{\eta}$  - характерная вязкость и  $\varphi = (\rho_2 - \rho_1) / \rho_1$ , где  $\rho_1$  и  $\rho_2$  - плотности соответственно 1 и 2 фаз.

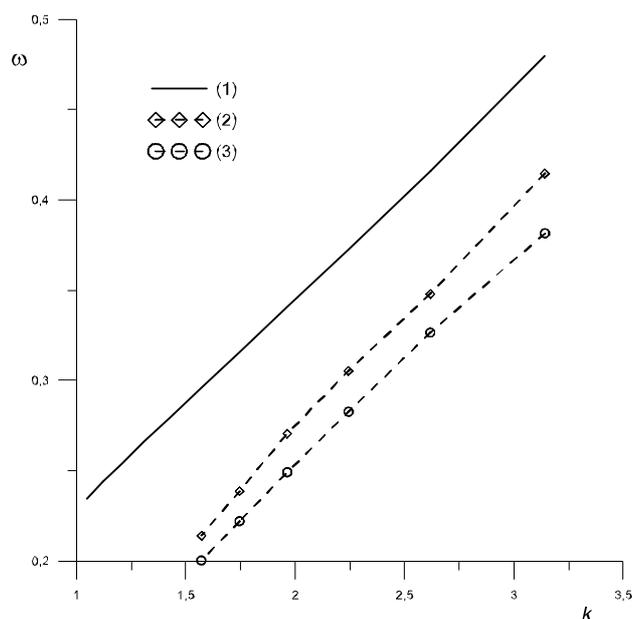


**Рис. 1.** Гравитационно-капиллярные волны в системе двух слабосмешивающихся жидкостей. На рисунках слева показано распределение фаз, справа – функция тока при  $Re = 5000$ ,  $Re = 2000$  в различные моменты времени: (а)-(б)  $t = 16$ , (в)-(г)  $t = 24$

Вычисления показали, что диффузия является дополнительным механизмом диссипации гравитационных и капиллярных волн. Аналогично вязкой диссипации взаимная диффузия жидкостей приводит к ограничению сверху значений волнового числа

наблюдаемых волн, более короткие волны полностью подавляются при некоторой толщине переходного слоя между фазами.

Толщина границы раздела сред заметно меняется только на начальной стадии. В дальнейшем толщина границы раздела сред, т.е. области в которой градиенты концентрации велики, возрастает значительно медленнее. При этом процесс смешивания жидкостей не прекращается, диффузия приводит к уменьшению разницы концентраций в верхней и нижней частях слоя (см. рис. 1). При достаточно интенсивной диффузии скорость затухания гравитационно-капиллярных волн возрастает, в результате, к моменту времени, когда жидкости в значительной степени перемешиваются, волны всегда затухают. Результаты численного моделирования хорошо согласуются с анализом, проведенным ранее в рамках линейной теории устойчивости.



**Рис. 2.** Закон дисперсии гравитационно-капиллярных волн при различных параметрах: (1) – предел невязких жидкостей; (2)  $Re = 2000, Pe = 105$ ; (3)  $Re = 2000, Pe = 5000$

Получены зависимости частоты гравитационно-капиллярных волн от волнового числа в широком диапазоне параметров (рис. 2). Полученные законы дисперсии при малой диффузии и малой толщине границы раздела сред качественно совпадают с известным дисперсионным соотношением для волн на границе раздела несмешивающихся жидкостей. С ростом интенсивности диффузии частота гравитационно-капиллярных волн при заданном волновом числе уменьшается, а скорость затухания волн возрастает.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-51-10079 КО\_а)

### Список литературы

1. Vorobev, A. Boussinesq approximation of the Cahn-Hilliard-Navier-Stokes equations. // Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics. 2010. Vol. 82, P. 1–10. DOI: 10.1103/PhysRevE.82.056312.
2. Vorobev A., Boghi A. Phase-field modelling of a miscible system in spinning droplet tensiometer // Journal Colloid Interface Science. 2016. Vol. 482, P. 193–204. DOI: 10.1016/j.jcis.2016.07.080.

## **Моделирование динамики деформируемой цилиндрической капли в стратифицированной жидкости под действием вибраций**

**А. О. Иванцов<sup>a,b</sup>, Т. П. Любимова<sup>a,b</sup>**

<sup>a</sup> Институт механики сплошных сред Уральского Отделения Российской Академии Наук, 614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1

email: lyubimovat@mail.ru

<sup>b</sup> Пермский государственный национальный исследовательский университет 614990, Пермь, ул. Букирева, 15

Исследовано поведение цилиндрической жидкой капли, в стратифицированной жидкости, заполняющей колеблющийся сосуд, в условиях невесомости. Рассмотрен случай, когда ось вибраций сонаправлена с градиентом плотности внешней жидкости. Моделирование проводилось в неосредненной постановке для сосуда квадратного сечения. В начальный момент капля находится в центре области. Обнаружено, что капля смещается в направлении более плотной жидкости, в то время как в отсутствие стратификации, при тех же параметрах вибраций, среднее положение капли не меняется. Получены зависимости средней силы, действующей на цилиндрическую каплю, от величины градиента плотности внешней жидкости и параметров вибраций. Найдено, что на начальных этапах процесса, когда поле плотности линейно меняется в направлении вибраций, указанная сила пропорциональна градиенту плотности внешней жидкости и вибрационному ускорению. Движение капли к стенке сосуда обуславливает существенную перестройку поля плотности внешней жидкости. Изучены средние течения, генерируемые вблизи капли.

**Ключевые слова:** вибрации; генерация средних течений; стратифицированная жидкость

## **Modeling of the dynamics of a deformable cylindrical drop in a density-stratified liquid under vibrations**

**A. O. Ivantsov<sup>a,b</sup>, T. P. Lyubimova<sup>a,b</sup>**

<sup>a</sup> Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm

email: lyubimovat@mail.ru

<sup>b</sup> Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Akad. Koroleva str., 614013, Perm

The behavior of a cylindrical liquid drop in a stratified liquid filling an oscillating container in zero gravity conditions is studied. It is supposed that the axis of vibrations and the density gradient of the external fluid are co-directed. The simulation is carried out for square container using non-averaged approach based on

complete set of equations for incompressible fluid. At the initial time moment, the drop is in the center of the container. The calculations show that the drop moves in the direction to more dense liquid, while in the absence of stratification of external liquid, the average position of the drop is not changed. The dependences of the average force acting to the drop on the external fluid density gradient and the vibration parameters are obtained. It is found that at the earlier stages of the process, when the density field varies linearly in the direction of vibrations, this force is proportional to the density gradient in the external fluid and to the vibration acceleration. The motion of a drop to the wall of the container causes a substantial modification of the density field. The average flows generated near the drop are studied.

**Keywords:** vibrations; average flow generation; stratified liquid

Вибрации являются одним из перспективных способов управления неоднородными гидродинамическими системами [1]. С помощью вибрационного воздействия можно значительно усовершенствовать многие технологические процессы, с другой стороны, вибрации часто являются трудноустраняемым сопутствующим явлением технологических процессов, и возникает необходимость исследовать эффекты, которые они вызывают. Поведение гидродинамических систем в вибрационных полях изучается в большом количестве работ: движение твердого тела в вибрирующей жидкости изучается в [2-3], влияние вибраций на поведение поверхности раздела двух несмешивающихся жидкостей исследуется в [4-5], динамика пузырей и капель рассмотрена в [6-7].

В настоящей работе рассматривается поведение цилиндрической жидкой капли, в стратифицированной жидкости, заполняющей колеблющийся сосуд, в условиях невесомости. Ось вибраций параллельна градиенту плотности внешней жидкости. Сосуд совершает колебания по гармоническому закону:  $\vec{r} = a\vec{j} \cos \omega t$ , где  $\vec{r}$  – координата центра масс сосуда,  $a$  – амплитуда вибраций,  $\omega$  – частота вибраций,  $\vec{j}$  – единичный вектор, направленный вдоль оси вибраций.

Уравнения, описывающие динамику системы в системе отчета, связанной с колеблющимся сосудом, имеют вид:

$$\frac{\partial \vec{v}_s}{\partial t} + \vec{v}_s \cdot \nabla \vec{v}_s = -\nabla p_s + \frac{1}{\Omega} \Delta \vec{v}_s + \lambda \vec{j} \cos t, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \vec{v}_s = 0. \quad (2)$$

Здесь индекс  $s = 1, 2$  нумерует жидкости.

Пусть форма капли задается уравнением  $\zeta(x, y, z) = 0$ , на границе раздела требуем выполнения обычных условий непрерывности нормальных и касательных напряжений и скорости и кинематического условия

$$(p_1 - p_2)n_i = \frac{1}{\Omega} (\sigma_{ik}^{(1)} - \sigma_{ik}^{(2)})n_k + \frac{1}{We} n_i \operatorname{div} \vec{n}, \quad (3)$$

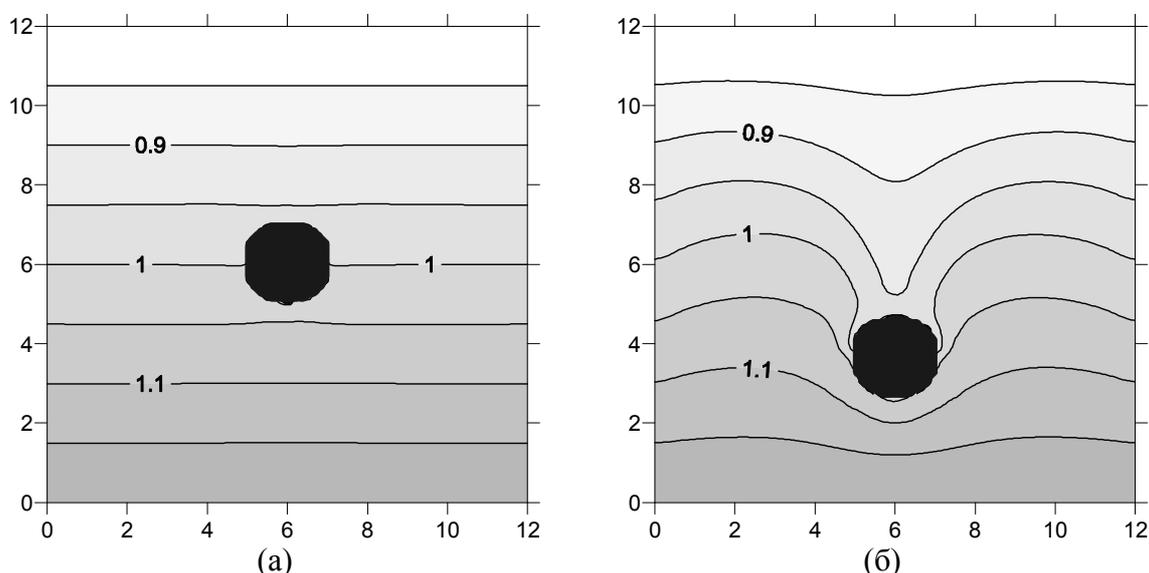
$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \vec{v}_1 \cdot \nabla \zeta = 0, \quad (4)$$

где  $\vec{n}$  – единичный вектор нормали к поверхности раздела, направленный в сторону легкой жидкости;  $\sigma_{ik}^s = \eta_s (\partial v_{s,i} / \partial x_k + \partial v_{s,k} / \partial x_i)$  – тензор вязких напряжений. На твердых стенках полости выполняются условия прилипания.

Уравнения и граничные условия (1-4) записаны в безразмерных переменных, в качестве единиц измерения длины выбран радиус капли  $R$ , времени – обратная частота вибраций  $1/\omega$ , плотности – средняя плотность стратифицированной жидкости вблизи капли  $\rho$ , динамической вязкости – вязкость внешней жидкости  $\eta$ , среднего ускорения

капли –  $\eta^2 / (\rho^2 R^3)$ . Задача содержит следующие безразмерные параметры:  $\lambda = a / R$  – амплитуда вибраций,  $\Omega = \rho \omega R^2 / \eta$  – безразмерная частота вибраций,  $We = \rho R^3 \omega^2 / \alpha$  – число Вебера ( $\alpha$  – коэффициент поверхностного натяжения),  $P = \rho_1 / \rho$  – безразмерная плотность капли,  $N = \eta_1 / \eta$  – вязкость капли,  $\beta = R \nabla \rho_2 / \rho$  – безразмерный градиент плотности внешней жидкости.

Численное исследование динамики деформируемой цилиндрической капли проводилось в неосредненной постановке с использованием метода Volume of Fluid, реализованного в пакете Ansys Fluent. Для повышения точности решения вблизи границы раздела сред, использовалась неоднородная сетка, динамически адаптирующаяся в процессе итерирования уравнений. Стратификация внешней жидкости задавалась дополнительной скалярной функцией, для которой решалось уравнение переноса. Пространственная дискретизация уравнений производилась методом третьего порядка точности, для аппроксимации временной производной использовалась схема второго порядка. Шаг по времени составлял 0,02 от периода вибраций. Средние значения функций вычислялись осреднением по пяти периодам вибраций.

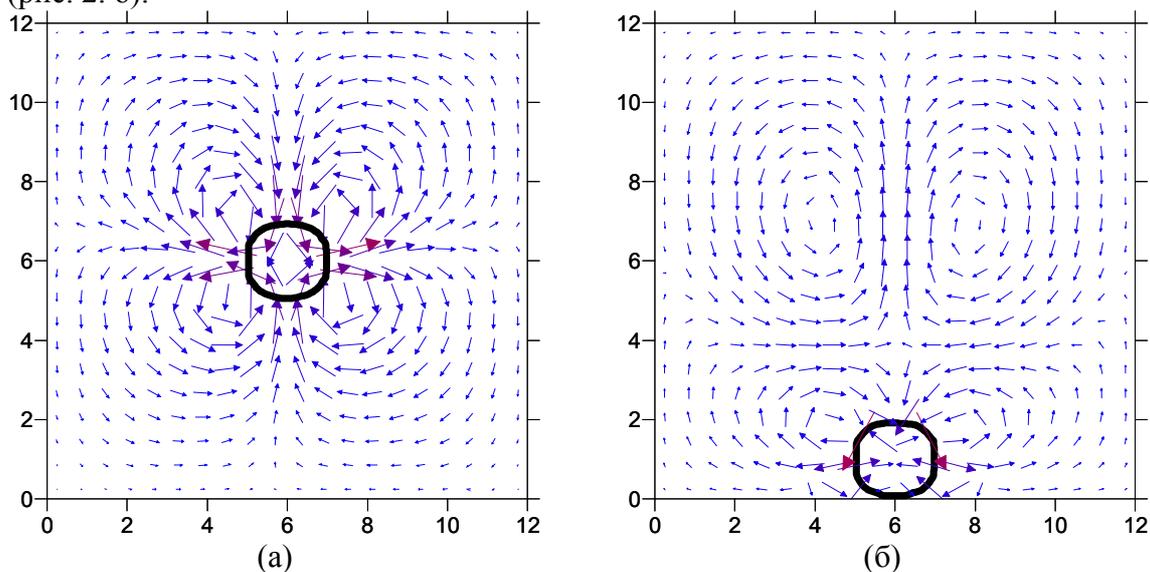


**Рис. 1.** Распределение плотности при  $We = 40$ ,  $\lambda = 0.2$ ,  $\Omega = 63$ ,  $P = 2$ ,  $\beta = 0.03$  в различные моменты времени: (а) -  $t = 6$ , (б) -  $t = 60$

Моделирование показало, что стратификация внешней жидкости существенно влияет на осредненную динамику капли. Вычисления показали, что при наличии стратификации окружающей жидкости на каплю в вибрационном поле действует средняя сила. В результате наблюдается смещение капли вдоль градиента плотности внешней жидкости. (рис. 1)

Вибрации приводят к генерации средних течений вблизи поверхности раздела. На (рис. 2. а) показано векторное поле скорости среднего течения, полученное в результате осреднения численных данных по периоду вибраций. В направлениях перпендикулярных оси вибраций, наблюдается течение, направленное от капли, вдоль оси вибраций жидкость подтекает к капле. Из-за наличия стратификации интенсивность вихрей со стороны более плотной жидкости ниже, чем со стороны менее плотной. По всей видимости, потеря симметричности среднего течения и является причиной возникновения средней силы. Движение капли к стенке сосуда обуславливает существенную перестройку поля плотности внешней жидкости. Жидкость увлекается вслед за каплей, в результате образуется область, в которой плотность жидкости ниже, чем вдали от капли.

При этом средние течения, генерируемые вблизи капли, также существенно изменяются (рис. 2. б).



**Рис. 2.** Поле средней скорости и осредненная форма капли при  $We = 40$ ,  $\lambda = 0.2$ ,  $\Omega = 63$ ,  $P = 2$ ,  $\beta = 0.03$ : (а) -  $t = 6$ , (б) -  $t = 200$

Получены зависимости величины средней силы, действующей на цилиндрическую каплю кругового сечения, от значений градиента внешней плотности жидкости и параметров вибраций. Найдено, что на начальных этапах процесса, когда поле плотности еще не перестроилось, указанная сила линейно растет с увеличением градиента плотности внешней жидкости. Зависимость средней силы от частоты вибраций квадратична, а ее зависимость от амплитуды вибраций линейна. Таким образом, в исследованном диапазоне параметров (при конечных амплитудах и частотах вибраций и конечных вязкостях жидкостей) средняя сила, действующая на каплю, пропорциональна градиенту плотности внешней жидкости и вибрационному ускорению.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (грант № 14-21-00090)

### Список литературы

1. Челомей В. Н. Парадоксы в механике, вызываемые вибрациями // ДАН СССР. 1983. Т. 270. № 1. С. 62–67.
2. Любимов Д.В., Любимова Т.П., Черепанов А.А. О движении твердого тела в вибрирующей жидкости. // ПГПИ, Пермь, 1987.
3. Lyubimov D.V., Cherepanov A.A., Lyubimova T.P.. The motion of solid body in a liquid under the influence of a vibrational field // Reviewed Proc. of the First Int. Symp. on Hydromechanics and Heat/Mass Transfer in Microgravity. Gordon and Breach. 1992. P. 247–251.
4. D.V.Lyubimov, A.A.Cherepanov, T.P.Lyubimova, B.Roux. Vibration influence of a two-phase system in weightlessness conditions // J. Physique IV. 2001. Vol. 11(Pr6), P. 83–90.
5. Любимов Д.В., Любимова Т.П., Иванцов А.О., Черепанова А.А. Использование метода сквозного счета для моделирования динамики систем с поверхностями раздела // Вычислительная механика сплошных сред. 2008. Т. 1, № 2, С. 53–62.
6. D.V.Lyubimov, T.P.Lyubimova, S.Meradji, B.Roux, D.Beysens, Y.Garrabos, D.Chatain. 2D unsteady motion and deformation of a gaseous bubble in a vibrating liquid at zero gravity // J. Physique IV. 2001. Vol.11(Pr6), P. 91–98.
7. Иванцов А.О. Акустические колебания полусферической капли // Вестник Пермского университета. Серия: Физика. 2012. № 3 (21), С. 16–23.

## Исследование физико-механических свойств модифицированного СВМПЭ

Н.А. Ильин<sup>а</sup>, В.В. Ряшенцев<sup>б</sup>

Тамбовский государственный технический университет, 392000, Россия г. Тамбов, ул. Мичуринская. д.112,

<sup>а</sup> email: ilinnikit@yandex.ru

<sup>б</sup> email: ryashentsev.slava@mail.ru

Целью настоящей работы является получение материалов на основе СВМПЭ с высокими физико-механическими и трибологическими свойствами, в том числе превышающими мировой уровень, с использованием непрерывного процесса экструзионного формования порошка СВМПЭ, а также внедрение новых материалов в промышленности взамен менее эффективных, традиционных и импортных материалов. Коллективом НОЦ ТамбГТУ-ИСМАН «Твердофазные технологии» разработан ряд композитов конструкционного назначения для различных отраслей машиностроения. В настоящей работе представляло интерес исследовать физико-механические свойства полимерной системы СВМПЭ + глауконит, полученной компрессионным формованием по технологии, разработанной в НОЦ ТамбГТУ-ИСМАН «Твердофазные технологии». При оценке твердости исследуемых композитов по Шору D следует отметить, что внесение малого (до 2 масс.част.) количества модификатора позволяет повысить твердость композита на 8-10%, при этом наблюдается высокая стабильность результатов. Концентрационные зависимости полностью коррелируют с характеристиками физико-механических свойств в области малых добавок нанонаполнителей.

**Ключевые слова:** СВМПЭ; глауконит; физико-механические свойства полимерной системы

## The study of physical and mechanical properties modified UHMWPE

N. A. Ilyin<sup>a</sup>, V. V. Ryashentsev<sup>b</sup>

Tambov state technical University 392000, Russia, Tambov, Michurinskaya. D. 112,

<sup>a</sup> email: ilinnikit@yandex.ru

<sup>b</sup> email: ryashentsev.slava@mail.ru

The aim of this work is to obtain materials based on UHMWPE with high physical-mechanical and tribological properties, including exceeding international standards, with the use of a continuous process of extrusion molding of the powder of UHMWPE, as well as the introduction of new materials in the industry to replace less efficient, traditional and imported materials. Team REC TambSTU-ISMANT "Solid phase technologies" developed a number of composites structural assignments for the various branches of engineering. In the present work was of interest to investigate the physico-mechanical properties of polymer

system UHMWPE + glauconite, obtained by the compression molding technology developed by the RECs TambSTU-ISMAN "Solid-phase technologies". When assessing the hardness of the investigated composites shore D it should be noted that the introduction of small (up to 2 mass.often.) the amount of modifier allows to increase the hardness of the composite is at 8-10%, while the observed high stability of the results. Concentration dependence are fully correlated with the characteristics of physical and mechanical properties in the region of small additions of nanofillers.

**Keywords:** UHMWPE; glauconite; physico-mechanical properties of polymer system

В настоящее время уровень потребления СВМПЭ отечественной промышленностью составляет около 7000 тыс. тонн/год. По сырью (порошки СВМПЭ различных марок) и по изделиям (лист, стержень, волокно, ткани) практически весь указанный объем продукции является импортным. Количество перерабатываемого в изделия порошка СВМПЭ отечественными производителями составляет 15-20% от уровня потребления. Это приводит к сильной зависимости многих российских предприятий от зарубежных поставщиков, прежде всего США и Германии. Поэтому развитие собственных производств по переработке СВМПЭ представляется на сегодняшний день актуальной задачей.

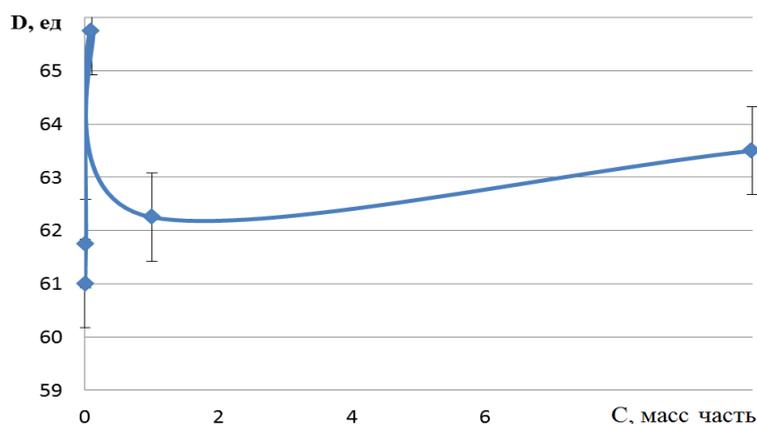
Целью настоящей работы является получение материалов на основе СВМПЭ с высокими физико-механическими и трибологическими свойствами, в том числе превышающими мировой уровень, с использованием непрерывного процесса экструзионного формования порошка СВМПЭ, а также внедрение новых материалов в промышленности взамен менее эффективных, традиционных и импортных материалов. Коллективом НОЦ ТамбГТУ-ИСМАН «Твердофазные технологии» разработан ряд композитов конструкционного назначения для различных отраслей машиностроения [1-4].

В настоящей работе представляло интерес исследовать физико-механические свойства полимерной системы СВМПЭ + глауконит, полученной компрессионным формованием по технологии, разработанной в НОЦ ТамбГТУ-ИСМАН «Твердофазные технологии».

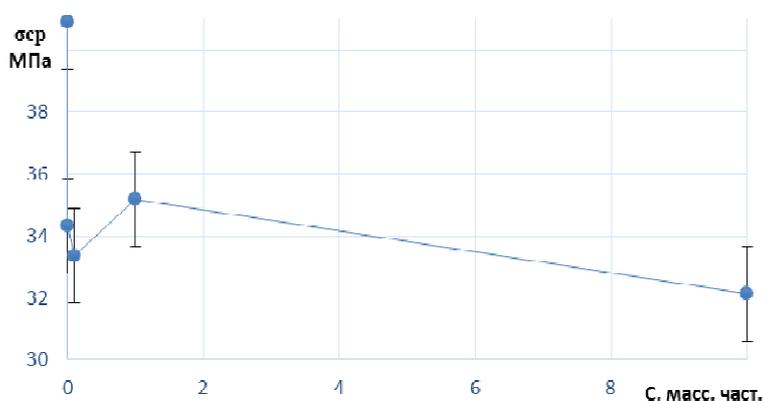
Физико-механические свойства нанокompозитов СВМПЭ + глауконит исследовали на испытательной машине УТС-101-5 (одноосное растяжение, срез) и твердомере ИТ-5069 (твердость по Шору, D).

При оценке твердости исследуемых композитов по Шору D следует отметить, что внесение малого (до 2 масс.част.) количества модификатора позволяет повысить твердость композита на 8-10%, при этом наблюдается высокая стабильность результатов. Концентрационные зависимости полностью коррелируют с характеристиками физико-механических свойств в области малых добавок нанонаполнителей.

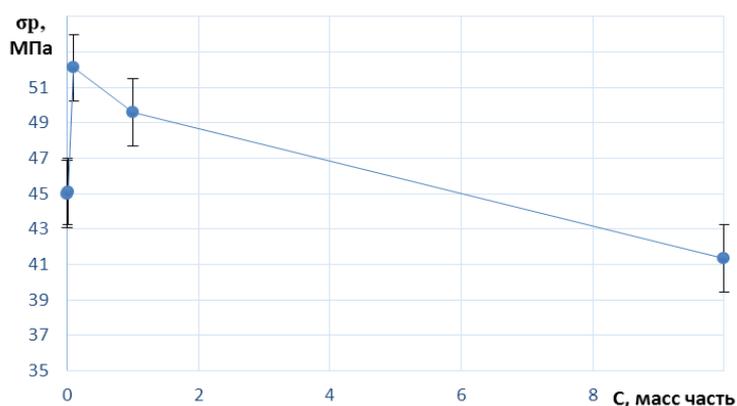
Интересно отметить, что данные теплофизических свойств композитов СВМПЭ + глауконит, полученных экспресс – методом снятия коэффициентов теплопроводности и температуропроводности, также коррелируют с данными физико-механических свойств и триботехнических показателей в первую очередь в области малых добавок наполнителей нанографита и глауконита.



**Рис. 1.** Диаграмма изменения твердости по Шору D образцов системы СВМПЭ + глауконит от содержания модификатора



**Рис. 2.** Диаграмма изменения прочностных характеристик в условиях срезающих напряжений образцов полимерной системы СВМПЭ + глауконит от содержания модификатора



**Рис. 3.** Диаграмма изменения прочностных характеристик в условиях одноосного растяжения образцов полимерной системы СВМПЭ + глауконит от содержания модификатора

Помимо сказанного, следует отметить, что использование природных сорбентов (глауконит) и других наносиликатов в деле организации нужных структур и создания необходимых технологических и эксплуатационных свойств готовых продуктов

незаслуженно мало в технологии получения современных полимерных композитных материалов.

Работа выполнена под руководством к.т.н., доцента кафедры «Материалы и технология» ФГБОУ ВО «ТГТУ» Завражин Д.О.

### **Список литературы**

1. *Баронин, Г. С.* Сравнительные молекулярно-релаксационные и структурно-механические характеристики композитов на основе СВМПЭ / Г.С. Баронин и др. // Химическая технология. 2009. Т. 10. №1. С. 16-21.
2. *Шапкин, К. В.* Твердофазная обработка давлением полимерных композитов на основе сверхвысокомолекулярного полиэтилена / К.В. Шапкин и др. // Перспективные материалы. 2011. №11. С. 455-461.
3. *Баронин, Г. С.* Оценка диффузионных, релаксационных свойств и структуры СВМПЭ-композитов, полученных твердофазной экструзией / Г.С. Баронин и др. // Вестник Тамбовского государственного технического университета. 2009. Т. 15. №4. С. 795-805.
4. *Иванов, С. А.* Исследование структурно-механических свойств твердофазных углеродсодержащих ПЭВП-нанокompозитов и прогнозирование результатов с помощью нейросетевых технологий / С.А. Иванов и др. // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2013. Т. 18. № 5. С. 2366-2368.

## Экспериментальное исследование испарения капель солевых растворов на полированной алюминиевой поверхности

А. Г. Исламова<sup>а</sup>, Е. Г. Орлова<sup>а</sup>, Д. В. Феоктистов<sup>а</sup>

<sup>а</sup> Томский политехнический университет, 634050, Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30  
email: agi2@tpu.ru

Проведено экспериментальное исследование испарения капель дистиллированной воды и растворов солей на нагретой горизонтальной алюминиевой поверхности. По результатам анализа изменения контактного диаметра выделены режимы испарения капель жидкостей. Установлено, что при десорбции воды из растворов солей LiBr, LiCl (при  $t=80$  °C) на поверхности капли образуется тонкая пленка кристаллогидратов. В случае соли NaCl образуются объёмные кристаллы соли (без кристаллогидратов). При покрытии поверхности капли кристаллической плёнкой, перед контактной линией зарегистрирована область кристаллизации.

**Ключевые слова:** десорбция капель; контактный диаметр; гидраты кристаллов соли

## Experimental study of the salt solutions droplets evaporation on polished aluminum surface

A.G. Islamova<sup>а</sup>, E.G. Orlova<sup>а</sup>, D.V. Feoktistov<sup>а</sup>

<sup>а</sup> National Research Tomsk Polytechnic University, Lenin Ave., 30, 634050, Tomsk  
email: agi2@tpu.ru

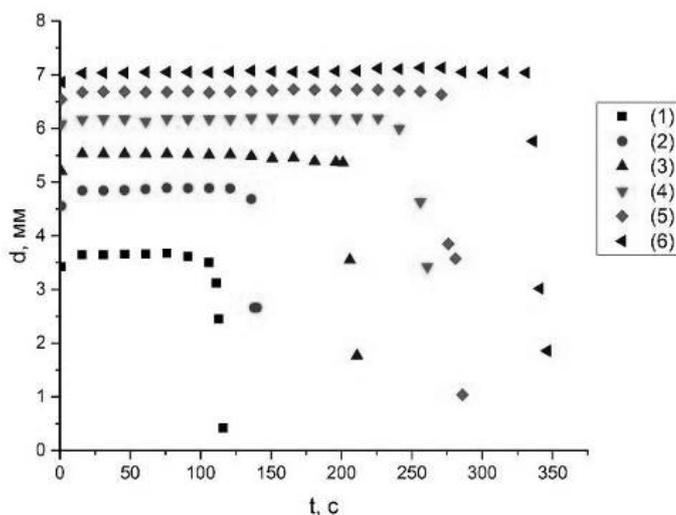
An experimental study of distilled water and salt solutions droplets evaporation on a heated horizontal aluminum surface is carried out. According to the analysis of contact diameter change, the evaporation regimes of liquid droplets were identified. A thin film of crystalline hydrates is found to form on the surface of droplet while water desorption from solutions of LiBr, LiCl salts (at  $t=80$  °C). The bulk crystals of salt (without hydrates of salt crystals) form in the case of NaCl solution. When the drop surface is covered with a crystalline film, a crystallization region is registered in front of the contact line.

**Keywords:** desorption of droplets; edge angle; hydrates of salt crystals

На процесс испарения капель жидкости оказывает влияние много факторов, среди которых можно выделить состав жидкости (чистая жидкость [1], коллоидные растворы [2], растворы с твёрдыми частицами [3]), подложка (свойства поверхности от шероховатости и смачивания [4], до теплофизических свойств поверхности [5]), условия окружающей среды (при нормальных условиях [1], при нагревании подложки [4,5], обдувании потоком воздуха [6]). Более глубокое понимание процесса испарения представляет интерес с точки зрения практических приложений, например, технологии печати и нанесения покрытий, охлаждение распылением, абсорбционные тепловые насосы и производство новых материалов для оптического и электронного оборудования.

Целью настоящей работы является экспериментальное исследование изменения контактного диаметра в условиях испарения капель растворов солей LiBr, LiCl и NaCl на алюминиевой поверхности. Исследования проводились на экспериментальной установке, подробно описанной в [5].

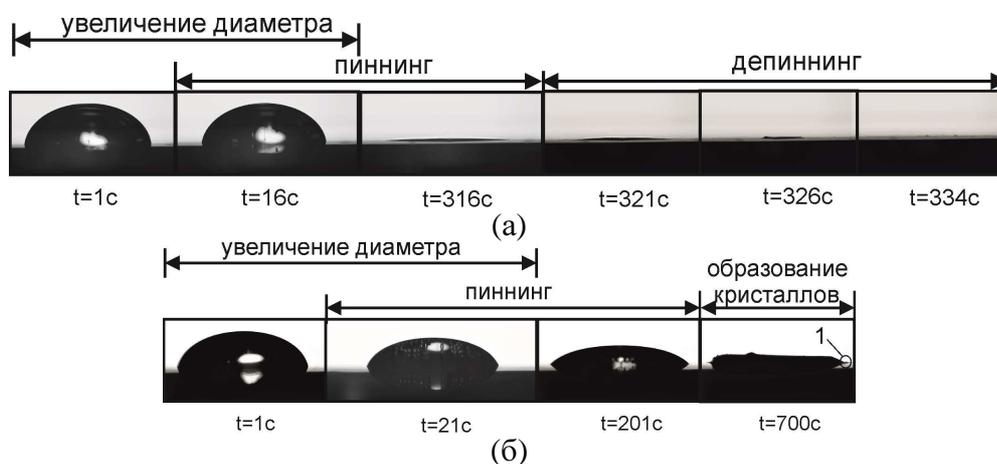
По результатам анализа изменения контактного диаметра (рис. 1) выделены три режима испарения капли дистиллированной воды на полированной алюминиевой поверхности: 1 – увеличение площади контакта; 2 – “пиннинг” [5] капли (площадь контакта постоянна); 3 – “депиннинг” [5] капли (уменьшение контактного диаметра).

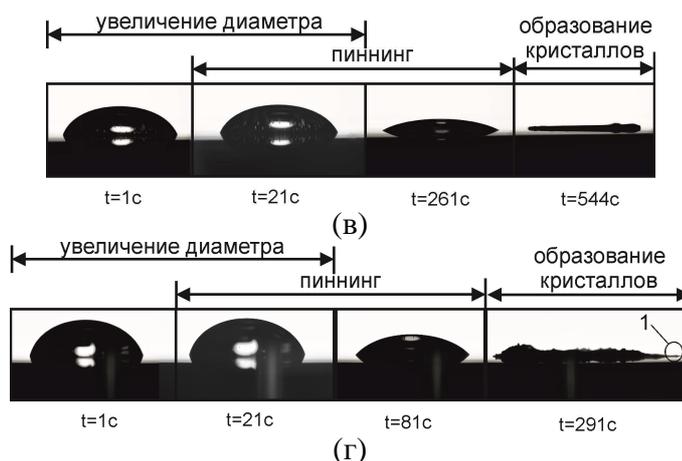


**Рис. 1.** Изменение контактного диаметра во времени в условиях испарения капли дистиллированной воды на алюминиевой поверхности, нагретой до 80 °С. Объем капли, мкл: 1 – 10; 2 – 20; 3 – 30; 4 – 40; 5 – 50; 6 – 60

При испарении 10% водных растворов солей LiCl, NaCl, а также 30% LiBr и соответствующем изменении контактного диаметра по аналогии с [5] можно условно выделить три режима испарения: 1 – увеличение площади контакта; 2 – “пиннинг” капли (площадь контакта постоянна); 3 – “образование кристаллов соли или кристаллогидратов” капли.

Механизм испарения водных растворов солей в режимах “увеличения площади контакта” и “пиннинга” аналогичен режимам испарения дистиллированной воды [5]. На рисунке 2 приведены типичные фотоизображения капель начальным объемом  $V_0 = 60\mu\text{l}$ .





**Рис. 2.** Фотокадры капли объемом  $V_0 = 60 \mu\text{l}$ , испаряющейся на алюминиевой поверхности, нагретой до  $80 \text{ }^\circ\text{C}$ . Жидкости: а) дистиллированная вода; б) 30% водный раствор LiBr. 10% водные растворы: в) LiCl; г) NaCl. 1 – область кристаллизации перед контактной линией

Известно [5], что при полном испарении дистиллированной воды образуется “сухое” пятно. В проведенных экспериментах установлено, что при десорбции воды из растворов солей LiBr, LiCl, (при  $t = 80 \text{ }^\circ\text{C}$ ) на поверхности капли образуется тонкая пленка кристаллогидратов. Для растворов LiBr, LiCl на одну молекулу воды приходится одна молекула соли. В случае соли NaCl образуются объёмные кристаллы соли (без кристаллогидратов). Установлено, что при покрытии поверхности капли кристаллической плёнкой перед контактной линией зарегистрирована область кристаллизации (рис. 2. б). Первоначально образуются кристаллогидраты в прекурсионной плёнке. При этом осуществляется движение молекул воды в направлении образовавшихся кристаллов, что повышает толщину прекурсионной плёнки, и она становится визуально видимой (показано на рис. 2 б, г). Диаметр образованной кристаллогидратной плёнки больше начального диаметра капли. Со временем диаметр кристаллогидратного пятна на нагретой поверхности увеличивается в несколько раз. Последнее обусловлено потоком молекул воды к краям капли, где ниже концентрация воды. Данные особенности важны для ряда технологических задач, связанных с выпариванием соли из капель раствора.

Работа поддержана грантом Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых - кандидатов наук (МК-6810.2016.8).

### Список литературы

1. Hu H., Larson R. G. Evaporation of a Sessile Droplet on a Substrate // The Journal of Physical Chemistry B. 2002. Vol. 106, P. 1334–1344.
2. Deegan R., Bakajin O., Dupont T., Huber G., Nagel S., Witten T. Contact line deposits in an evaporating drop // Physical Review E. 2000. Vol. 62, P. 756–765.
3. Pauchard L., Parisse F., Allain C. Influence of salt content on crack patterns formed through colloidal suspension desiccation // Physical Review E. 1999. Vol. 59, P. 3737–3740.
4. Sobac B., Brutin D. Triple-line behavior and wettability controlled by nanocoated substrates: influence on sessile drop evaporation // Langmuir. 2011. Vol. 27, P. 14999–15007.
5. Кузнецов Г.В., Феоктистов Д.В., Орлова Е.Г., Батищева К.А. Режимы испарения капли воды на медных подложках // Коллоидный журнал. 2016. Т. 78. № 3. С. 17–22.
6. Bin L., Bennacer R., Bouvet A. Evaporation of methanol droplet on the Teflon surface under different air velocities // Applied Thermal Engineering. 2011. Vol. 31, P. 3792–3798.

## **Особенности моделирования распада пленки на капли в результате развития неустойчивости Кельвина-Гельмгольца методом объема жидкости**

**М. Г. Казимарданов<sup>a,b</sup>, С. В. Мингалев<sup>b</sup>, Т. П. Любимова<sup>a,c</sup>, Л. Ю. Гомзи-ков<sup>b</sup>**

<sup>a</sup> Пермский государственный национальный исследовательский университет  
614990, Пермь, ул. Букирева, 15

email: kazimardanov@mail.ru

<sup>b</sup> АО «ОДК-Авиадвигатель», 614010, Пермь, пр. Комсомольский, 93

email: SMingaliov@gmail.com

<sup>c</sup> ИМСС УрО РАН, 614013, Россия, г. Пермь, ул. Академика Королёва, 1

email: lubimova@psu.ru

Обсуждаются особенности моделирования срыва капель с жидкой пленки в результате развития неустойчивости Кельвина-Гельмгольца с помощью метода объема жидкости. Показано, что последовательное усреднение по ансамблю капель и по времени позволяет получить гладкие зависимости характеристик ансамбля капель от координаты. При этом значение наиболее важной для инженерных приложений величины, среднего заутеровского диаметра, оказывается близким к тому, которое можно получить из полуэмпирической теории.

**Ключевые слова:** неустойчивость Кельвина-Гельмгольца; двухмерные течения; распыл жидкости

## **The simulation of primary atomization due to Kelvin-Helmholtz instability by volume of fluid method**

**M. G. Kazimardanov<sup>a,b</sup>, S. V. Mingalev<sup>b</sup>, T. P. Lubimova<sup>a,c</sup>, L. Y. Gomzikov<sup>b</sup>**

<sup>a</sup> Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm

email: kazimardanov@mail.ru

<sup>b</sup> JSC «ODK-Aviadvigatel», Komsomolsky Pr. 93, 614010, Perm

email: SMingaliov@gmail.com

<sup>c</sup> ICMM UB RAS, Academician Korolev St. 1, 614013, Perm

email: lubimova@psu.ru

The application of volume of fluid method to the atomization due to Kelvin-Helmholtz instability is studied. The consistent implementation of droplet ensemble average and the averaging over the time allow to get smooth dependence of droplet ensemble characteristic on coordinate. Moreover, the sauter mean diameter which was found by volume of fluid method is close to the theoretical value of this quantity.

**Keywords:** Kelvin-Helmholtz instability; 2d flow; atomization

## 1. Введение

К настоящему моменту имеется большое количество статей, касающихся проблемы моделирования вторичного дробления капель в турбулентном потоке. Подходы к моделированию вторичного распада капель, предложенные А. Луо и А. Ф. Свендсен [1], а также Ф. Лехр и др. [2], много лет используются в ANSYS CFX и ANSYS Fluent в рамках сплошнородного подхода к описанию ансамбля капель. При описании дисперсной фазы в рамках лагранжевого подхода используются методы TAB [3] и KHRT [4]. Все эти подходы позволяют с достаточной для инженерных расчетов точностью описывать вторичное дробление капель. Однако их нельзя применить для моделирования первичного распада струи на капли, которое, на данный момент, представляет открытую проблему. Наиболее простым способом решить эту задачу представляется прямое численное моделирование срыва капель с поверхности струи или пленки с помощью метода объема жидкости. В настоящей работе в двухмерной постановке методом объема жидкости исследуется срыв капель с поверхности жидкости набегающим потоком воздуха. В качестве объекта для исследования особенностей моделирования срыва капель с поверхности жидкости методом объемов был выбран двухмерный канал, с одной из сторон которого расположены два примыкающих друг к другу отверстия. В одно из них подается воздух со скоростью 50-70 м/с, а в другое – жидкость со скоростью 1-2 м/с. Эта задача интенсивно исследовалась на протяжении многих лет в качестве наиболее простого примера системы, в которой реализуется неустойчивость Кельвина-Гельмгольца [5].

## 2. Система уравнений

В рамках модели объемов жидкости в ANSYS Fluent решается система уравнений в частных производных, состоящая из уравнения для импульса смеси, её энергии и объемной доли жидкости:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v_i + \sum_{j=1}^2 \nabla_j (\rho v_j v_i) = \nabla_i p + \sum_{j=1}^2 \nabla_j \eta (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i) + F_i,$$
$$\frac{\partial}{\partial t} \rho E + \sum_{j=1}^2 \nabla_j v_j (\rho E + p) = \nabla \kappa \nabla T, \quad \frac{\partial}{\partial t} \alpha \rho_w + \sum_{j=1}^2 \nabla_j \alpha \rho_w v_j = 0,$$

где  $\rho$  - плотность смеси,  $v_i$  - скорость смеси,  $p$  - давление,  $\eta$  - динамическая вязкость смеси,  $F_i$  - сила поверхностного натяжения,  $\kappa$  - коэффициент теплопроводности смеси,  $T$  - температура,  $\rho_w$  - плотность жидкости,  $\alpha$  - объемная доля жидкости, которая принимает значения от 0 до 1. Если  $\alpha = 0$ , то жидкость в выделенном объеме отсутствует; если же  $\alpha = 1$ , то выделенный объем полностью заполнен жидкостью.

Уравнения, связывающие физические параметры смеси с физическими параметрами, составляющих её компонент, имеют вид  $\rho = \alpha \rho_w + (1 - \alpha) \rho_a$ ,  $\kappa = \alpha \kappa_w + (1 - \alpha) \kappa_a$ ,  $\eta = \alpha \eta_w + (1 - \alpha) \eta_a$ ,  $c_v = \alpha (\rho_w / \rho) c_v^{(w)} + (1 - \alpha) (\rho_a / \rho) c_v^{(a)}$ , где  $c_v$  - удельная теплоемкость при постоянном объеме, индексом  $w$  обозначены плотность, коэффициент теплопроводности и динамическая вязкость жидкости, а индексом  $a$  - газа (воздуха). Воздух считается идеальным газом, для которого выполняется уравнение Клапейрона-Менделеева,  $\rho_a = pM / RT$ , где  $R$  - универсальная газовая постоянная,  $M$  - молярная масса воздуха. Жидкость считается несжимаемой. Плотность внутренней энергии смеси определяется выражением  $E = c_v T$ .

Сила поверхностного натяжения моделируется в рамках модели непрерывных поверхностных сил (continuum surface force) [6, 7]. Выражение для неё имеет вид  $F_i = 2\rho k \sigma \nabla_i \alpha / (\rho_a + \rho_w)$ ,  $k = \sum_{j=1}^2 \partial n_j / \partial x_j$ ,  $n_i = \nabla_i \alpha / |\nabla \alpha|$ , где  $\sigma$  - коэффициент поверхностного натяжения.

### 3. Геометрия задачи

Исследуемая область представляет собой двумерный канал. Через отверстие ВА (рис. 1.) подается воздух со скоростью  $V_a = 50-70$  м/с и температурой  $T_a = 300$  К, а через отверстие АО – жидкость со скоростью  $V_w = 1-2$  м/с и температурой  $T_w = 300$  К. Границы DB и CO представляют собой твердые стенки. На границе CD задается давление  $p_{out} = 101325$  Па.



Рис. 1. Геометрия задачи

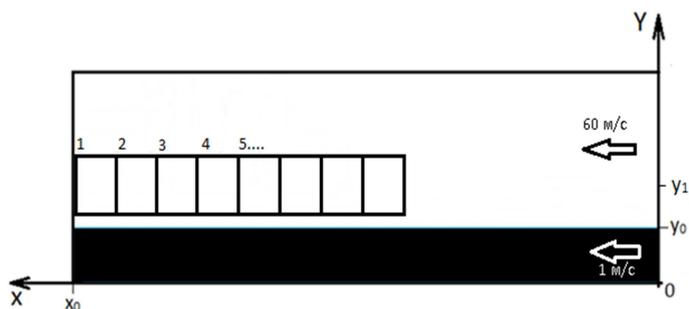


Рис. 2. Зоны, в которых вычислялись усредненные характеристики ансамбля капель

### 4. Зависимости усредненных характеристик ансамбля капель от координаты

Для того чтобы определить зависимость от координаты усредненных характеристик ансамбля частиц, пространство над жидкой пленкой было разбито на перекрывающиеся зоны, как это показано на (рис. 2). Для каждой из этих зон были вычислены показанные на рис. 3 - 5 характеристики, усредненные сначала по ансамблю капель внутри зоны, а затем по времени. Эти зависимости вычислялись для трех размеров отверстия, через которое подавалась вода: 1 мм (обозначено на графиках штриховой линией), 1.5 мм (сплошной линией) и 2 мм (штрихпунктирной). Из (рис. 3) можно сделать вывод, что в среднем капли срываются с поверхности жидкости под небольшим углом и при приближении к выходу из канала стремятся двигаться параллельно вектору скорости набегающего потока воздуха.

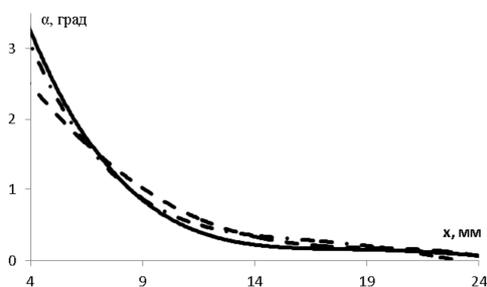


Рис. 3. Зависимость от координаты среднего угла отброса капель

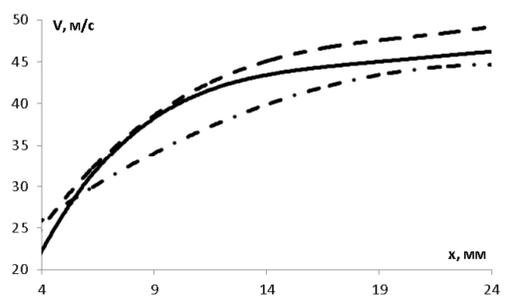
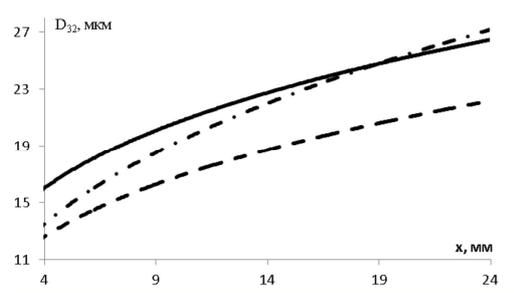


Рис. 4. Зависимость от координаты среднего модуля скорости капель



**Рис. 5.** Зависимость от координаты среднего заутеровского диаметра

Как следует из (рис. 4), после срыва капли разгоняются и к выходу из канала начинают двигаться со скоростью, близкой к скорости воздуха. Можно отметить, что скорость капель зависит от толщины слоя жидкости. Чем толще слой, тем больше оказывается средняя скорость капель.

Из (рис. 5.) можно сделать вывод, что усредненные размеры капель растут при приближении к выходу из канала. На выходе из канала они принимают значение 20-30 мкм. Этот результат можно сравнить со значением, найденным по формуле, предложенной Э. Майер [8]:  $\bar{D}_{32} = (9/2)F\lambda_{\min}$ ,  $\lambda_{\min} = 2\pi\sqrt[3]{16(\mu_w\sqrt{\sigma/\rho_w}/(\beta\rho_a V_a^2))^{2/3}}$ , где подгоночные параметры  $F = 0.14$ ,  $\beta = 0.3$ . Подставляя в это выражение значения параметров для воды и воздуха (плотность воздуха будем считать  $\rho_a = 1.29 \text{ кг/м}^3$ ), получим оценку для среднего заутеровского диаметра  $D_{32} \sim 33 \text{ мкм}$ , что достаточно близко к полученному в расчетах значению.

Из сказанного выше можно сделать вывод, что усреднение по времени позволяет получать плавные зависимости характеристик ансамбля капель от координаты. При этом значения среднего заутеровского диаметра оказываются близки к тем, которые можно получить на основе полуэмпирической формулы.

## 5. Заключение

В настоящей работе в двухмерной постановке методом объема жидкости исследован срыв капель с поверхности жидкости набегающим потоком воздуха. Определены зависимости усредненных характеристик капель от координаты для разных размеров отверстия, через которое подается жидкость. Полученное в расчетах значение среднего заутеровского диаметра оказалось близким к найденному на основе полуэмпирической формулы.

### Список литературы

1. Luo H., Svendsen H. F. Theoretical Model for Drop and Bubble Breakup in Turbulent Dispersions // AIChE Journal. 1996. Vol. 42, N 5. P. 1225–1233.
2. Lehr F., Millies M., Mewes D. Bubble-Size Distributions and Flow Fields in Bubble Columns // AIChE Journal. 2002. Vol. 8, N 11. P. 2426–2443.
3. O'Rourke O.J., Amsden A.A., The TAB Method for Numerical Calculation of Spray Droplet Breakup // SAE Technical Paper 872089. 1987.
4. Beale J. C., Reitz R.D. Modeling Spray Atomization with the Kelvin-Helmholtz/Rayleigh-Taylor Hybrid Model // Atomization and Sprays. 1999. Vol. 9. P. 623–650.
5. Jeffreys H. On the formation of water waves by wind // Proc. R. Soc. London, Series A. 1925. Vol. 107, N 742. P. 189-206.

6. *Д.В.Любимов, Т.П.Любимова.* Об одном методе сквозного счета для решения задач с деформируемой поверхностью раздела. Моделирование в механике, 1990, т. 4(21), N1, С.136-140.
7. *Brackbill J.U., Kothe D.B., C. Zemach A.* Continuum Method for Modeling Surface Tension // J. Comput. Phys. 1992. Vol. 100. P. 335–354.
8. *Mayer E.* Theory of Liquid Atomization in High Velocity Gas Streams // ARS Journal. 1961. Vol. 31, N 12. P. 1783–1785.

## Крупномасштабные вихревые структуры в следе за препятствием в канале при переходе к турбулентности

Е. И. Калинин<sup>a</sup>, Д. И. Охотников<sup>a</sup>, А. В. Малюков<sup>b</sup>, А. Е. Гольцман<sup>b</sup>,  
А. Б. Мазо<sup>a</sup>, В. М. Молочников<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Казанский (Приволжский) федеральный университет, 420008, Россия, г. Казань,  
ул. Кремлевская, д.18  
email: kalininei@yandex.ru

<sup>b</sup> Казанский научный центр Российской академии наук, 420111, Россия, г. Казань,  
ул. Лобачевского, 2/31

Представлены результаты прямого численного моделирования течения в канале прямоугольного сечения с поперечным препятствием в виде расположенного на нижней стенке полуцилиндра, а также приподнятого над нижней стенкой полного цилиндра. Проведено сравнение численных расчетов с экспериментальными данными. Показано, что переход к локальной турбулентности для рассмотренных конфигураций осуществляется с помощью двух различных механизмов, каждый из которых определяет свою уникальную структуру течения в следе за препятствием. Выполнен анализ влияния расположения препятствия, а также параметров вынужденной нестационарности на вихревую структуру течения за выступом.

**Ключевые слова:** прямое численное моделирование; течение в канале; спиралевидные вихри

## Large scale vortical structures in the wake of an obstacle in transition to turbulent channel flow

Е. И. Kalinin<sup>a</sup>, D. I. Okhotnikov<sup>a</sup>, A. V. Malyukov<sup>b</sup>, A. E. Goltsman<sup>b</sup>,  
A. B. Mazo<sup>a</sup>, V. M. Molochnikov<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Kazan (Volga region) Federal University, 18 Kremlyovskaya str, Kazan, 420008, Russian Federation

email: kalininei@yandex.ru

<sup>b</sup> Kazan Scientific Center of Russian Academy of Sciences, 2/31 Lobachevsky str., Kazan, 420111, Russian Federation

In the present study the results of direct numerical simulation of flow in a square duct roughened by a semi-circular rib and circular cylinder are presented. Numerical simulation results were verified by comparison with experimental data. It is shown that for two considered geometries laminar-turbulent transition occurs using two different scenarios. The impact of obstacle location and imposed flow oscillations are discussed.

**Keywords:** direct numerical simulation; channel flow; helical vortices

## 1. Введение

Исследование отрывных течений в каналах и трубах при обтекании препятствий является важной и актуальной задачей гидромеханики, так как подобные течения наблюдаются в большом количестве инженерных приложений. Природа подобного рода течений во многом схожа – за препятствием образуется застойная зона, которая в зависимости от параметров течения и геометрии канала может быть устойчивой или неустойчивой. Механизм образования неустойчивости и перехода к турбулентности, а также исследование структуры течения в следе за препятствием представляет большой научный интерес. В данной работе проведено сравнение механизмов перехода к турбулентности в двух каналах прямоугольного поперечного сечения с различными препятствиями. В первом случае препятствие представляет цилиндр, находящийся на расстоянии радиуса от нижней стенки, а во втором полуцилиндр, установленный на нижней стенке канала (рис. 1). Числа Рейнольдса, рассчитанные по поперечному размеру препятствия, выбирались равными  $Re=165-400$ , что соответствует номинально ламинарному режиму течения.

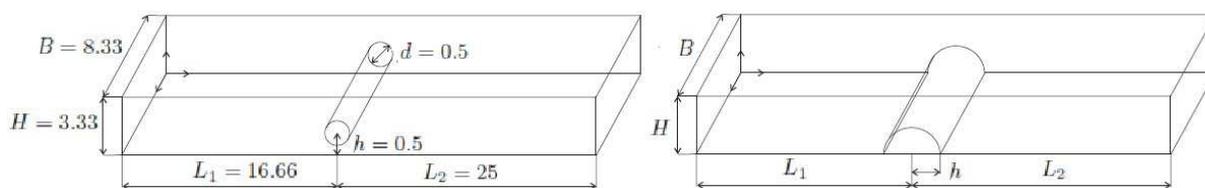


Рис. 1. Геометрия расчетной области

Принципиальной особенностью течения являлся равномерный профиль скорости во входном сечении канала. Предварительно проведенные экспериментальные и численные исследования показывают, что в обеих рассматриваемых конфигурациях при критических числах Рейнольдса происходит локальный переход к турбулентности, который, однако, осуществляется с помощью двух различных механизмов, каждый из которых определяет свою уникальную структуру течения в следе за препятствием [1]. Настоящая работа посвящена подробному описанию этих механизмов и изучению факторов, влияющих на структуру течения.

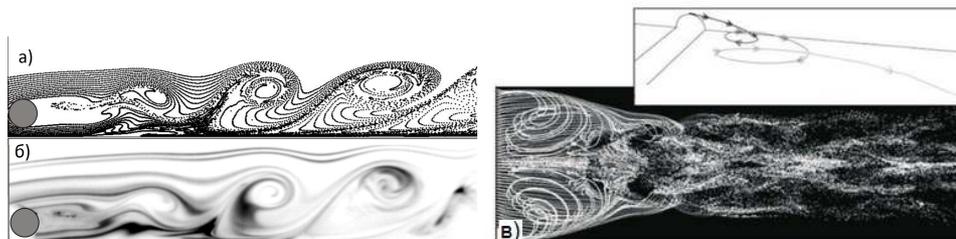
## 2. Методика исследований

Настоящие исследования проводились на основе прямого численного решения системы уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости в нестационарной постановке. На входе в канал задавался равномерный профиль скорости на стенках канала и на поверхности препятствия ставились граничные условия прилипания. Расчеты проводились в пакете ANSYS Fluent 15.0, а расчетная сетка была построена с использованием композиционного подхода [2], в котором область расчета покрыта набором нескольких структурированных локально-ортогональных сеточных фрагментов, соединенных неструктурированными вставками.

Достоверность результатов расчета подтверждена сравнением с экспериментом, проведенным в лаборатории гидродинамики и теплообмена КазНЦ РАН [1]. Выполнены сравнения картины течения, конфигурации вихревых сгустков и частоты схода вихрей, а так же профилей средней скорости потока и амплитуд, во всех случаях получено вполне удовлетворительное совпадение расчетных и экспериментальных результатов.

### 3. Результаты расчетов

В случае препятствия в виде кругового цилиндра над нижней стенкой канала первичный механизм потери устойчивости течения аналогичен формированию дорожки Кармана при обтекании кругового цилиндра безграничным потоком жидкости. Течение характеризуется образованием периодической вихревой дорожки в следе за цилиндром. В отличие от обтекания цилиндром безграничным потоком, в данном течении наблюдается асимметрия дорожки (рис. 2. а, б), ввиду влияния близко расположенной стенки. По мере роста числа Рейнольдса, как показывает эксперимент и расчет, в среднем следе за цилиндром происходит локальный переход к турбулентности.



**Рис. 2.** Визуализация течения около цилиндрического препятствия,  $Re_h = 240$ : а) частицы (расчет); б) дымящаяся проволочка (эксперимент); в) спиралевидные траектории частиц при  $Re_h = 270$  при обтекании выступа

В случае полукругового препятствия, основной причиной локального перехода к турбулентности является взаимодействие парных спиральных угловых вихрей, образующихся в ближнем следе за препятствием. Начало их взаимодействия происходит, как только поперечный размер вихря превысит величину, равную половине ширины канала (рис. 2. в). Этот размер определяется шириной пограничного слоя, нарастающего вдоль боковых стенок канала. Поэтому при переносе препятствия ближе к входному сечению удается задержать начало ламинарно-турбулентного перехода.

Отдельная серия экспериментов и численных расчетов была посвящена изучению влияния вынужденных пульсаций скорости на течение около полукругового выступа. Показано, что при достаточно высокой частоте наложенных пульсаций спиралевидное движение жидкости от боковых стенок канала к его оси, в стационарном потоке определяющее формирование крупных вихревых структур за выступом, в пульсирующем потоке не достигает плоскости симметрии канала, а срывающиеся с препятствия вихри на начальной стадии формирования имеют цилиндрическую форму. При этом структура течения напоминает описанное ранее течение за цилиндрическим препятствием.

### 4. Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 15–01–06172).

#### Список литературы

1. Молочников В. М., Мазо А. Б., Малюков А. В., Калинин Е. И., Михеев Н. И., Душина О. А., Паерелий А. А. Особенности формирования вихревых структур в отрывном течении за выступом в канале при переходе к турбулентности // Теплофизика и аэромеханика.– 2014.– №3. Т.21. С.325-334.
2. Kalinin E. I., Mazo A. B., Isaev S. A. Composite mesh generator for CFD problems // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2016, Vol. 158. P. 012047.

# Решение трехмерных контактных задач методом Шварца

**А. С. Караваев, С. П. Копысов**

Институт механики УрО РАН, 426067, Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34  
email: karavaev-alexander@yandex.ru, s.kopysov@gmail.com

В рамках конечно-элементного подхода разработан алгоритм решения статической трехмерной контактной задачи механики деформируемого твердого тела на основе альтернирующего метода Шварца. Приведены результаты работы алгоритма для случаев несогласованного сеточного разбиения, в том числе с переменной зоной контакта.

**Ключевые слова:** метод конечных элементов; контактный алгоритм; альтернирующий метод Шварца

## Solving three-dimensional contact problems using Schwarz method

**A. S. Karavaev, S. P. Kopysov**

Institute of Mechanics UB RAS, T. Baramzinoy St. 34, 426067, Izhevsk  
email: karavaev-alexander@yandex.ru, s.kopysov@gmail.com

Based on finite element theory Schwarz alternating method for solving contact problems of deformable solid mechanics in three – dimensional space is developed. The different results of algorithm for non-matching meshes including varied contact zone is considered.

**Keywords:** finite element method; contact algorithm; Schwarz alternating method

### 1. Введение

Процессы контактного взаимодействия широко распространены в современной технике, природных и биологических процессах, поэтому высока актуальность исследований в данной области. В конечно-элементном моделировании известен ряд методов решения контактных задач: штрафных функций, множителей Лагранжа, альтернирования Шварца [1]. В данной работе строится итерационный метод Шварца для двух контактирующих трехмерных тел, позволяющий рассматривать решение задачи напряженного-деформируемого состояния в стандартной постановке для каждого из контактирующих тел и допускающий высокоуровневое распараллеливание процесса решения.

Рассматривается статическая контактная задача трехмерных однородных и изотропных линейно-упругих контактирующих тела  $A$  и  $B$ . Более детально математическая постановка для двухмерного случая может быть найдена [2,3]. Остановимся на особенностях алгоритма альтернирования по подобластям в трехмерном случае.

### 2. Контактный алгоритм на основе метода Шварца

В соответствии с предложенным итерационным алгоритмом на каждой  $j$ -ой итерации выполняется два шага, где поочередно удовлетворяются условия сопряжения по перемещениям и напряжениям для узлов, расположенных на контактной поверхности.

В случае тела  $A$  на первом из них для каждого узла  $\mathbf{x}^a$  на контактной поверхности задается вектор перемещений к нормали  $\mathbf{n}^b$  поверхности тела  $B$ , проекция на  $\mathbf{n}^b$  которого вычисляется по формуле  $\bar{u}_{2j-1}^a = u_{2j-1}^a + \alpha_{2j-1}(u_{2j-1}^b - u_{2j-1}^a - \delta)$ , где  $u_{2j-1}^a, u_{2j-1}^b$  – соответственно проекции векторов перемещений узла  $\mathbf{x}^a$  и его сходной точки на поверхности тела  $B$  с предыдущей силовой итерации к нормали  $\mathbf{n}^b$ ,  $\alpha_{2j-1}$  – итерационный параметр,  $\delta$  – начальный зазор между контактными поверхностями по нормали  $\mathbf{n}^b$ . На втором шаге для каждого узла  $\mathbf{x}^a$  задается поверхностная нагрузка  $\bar{\mathbf{p}}_{2j}^a = \mathbf{p}_{2j}^a - \alpha_{2j}(\mathbf{p}_{2j-1}^b + \mathbf{p}_{2j-1}^a)$ , где  $\mathbf{p}_{2j-1}^a, \mathbf{p}_{2j-1}^b$  – соответственно вектора напряжений узла  $\mathbf{x}^a$  и его сходной точки на поверхности тела  $B$  по направлению нормали  $\mathbf{n}^b$ ,  $\alpha_{2j}$  – итерационный параметр. Вопрос вычисления итерационных параметров рассматривался в работах [2,3].

Рассмотрим особенности реализации метода для трехмерных контактных задач в практически важных случаях.

В данной работе в качестве сходной точки использовалась точка пересечения перпендикуляра, опущенного из узла  $\mathbf{x}^a$ , лежащего на контактной поверхности тела  $A$ , на контактную поверхность тела  $B$ , состоящую из четырехугольных ячеек. Случай тела  $B$  рассматривается аналогично.

Вычисление тензора напряжений в узле осуществляется трilinearной экстраполяцией по значениям напряжений в гауссовых точках интегрирования шестигранного элемента. Вектор напряжений в узле по направлению нормали к сходной точке определяется на  $j$ -ой итерации в случае контактного узла  $\mathbf{x}^a$  тела  $A$  как  $\mathbf{p}_{2j}^a = \mathbf{n}^b \sigma_{2j}^a$ , где  $\sigma_{2j}^a$  – тензор напряжений узла  $\mathbf{x}^a$ . Вычисление вектора узловых сил, статически эквивалентных действию распределенной по поверхности шестигранного элемента нагрузки, осуществляется с использованием квадратур Гаусса. Для определения величин напряжений и перемещений в сходных точках требуется информация об их локальных координатах поиск которых необходимо осуществлять по известным значениям глобальных координат.

В случае задания кинематических граничных условий на  $j$ -ой итерации для контактного узла необходимо учитывать линейную зависимость между компонентами перемещения, которая в случае перемещения  $\mathbf{u}^a$  контактного узла  $\mathbf{x}^a$  тела  $A$  имеет вид  $\mathbf{n}^b \cdot \mathbf{u}^a = \bar{u}_{2j-1}^a$ . Такого вида условия задавались методом штрафа.

При реализации итерационного процесса Шварца зона контакта изменяется и во многих случаях использовались дополнительные условия для исключения из контактной области узлов относительно перемещение которых больше заданного значения.

### 3. Тестовые примеры

Проверка работоспособности алгоритма осуществлялась моделированием состояний с постоянными напряжениями (patch-тест) на несогласованных сетках. В первом тесте рассматриваются два куба расположенных параллельно оси  $OZ$  один на другом. Поверхность нижнего куба закреплена, а на поверхности верхнего задается единичное давление [4]. Коэффициент Пуассона принимается равным нулю, что обеспечивает ненулевую компоненту тензора напряжения  $\sigma_{zz} = -1$  Па. Численное решение на первой контактной итерации совпадает с аналитическим и обеспечивает точное распределение компонент перемещений и напряжений контактирующих тел.

Во втором трехмерном тестовом примере на верхние поверхности двух контактирующих тел приложено давление вдоль оси  $OZ$  [5], которое должно обеспечивать однородное поле напряжений  $\sigma_{zz} = -260$  Па. Полученное распределение напряжений имеет неоднородность со значениям напряжений  $\sigma_{zz}(min) = -269.5$  и  $\sigma_{zz}(max) =$

–160.4 Па, сосредоточенную на границе контакта. С уменьшением шага сетки в зоне контакта среднее значение компоненты напряжения сходится к точному решению.

Для задачи Герца об упругом контакте шара с полупространством проведен ряд численных экспериментов для различных значений глубины проникновения  $h$  (0.3 – 1.7% от радиуса шара) задаваемой вдоль оси  $OZ$ . Погрешность величины максимального контактного давления от теоретического составляло от 0.7 до 7.7% , а погрешность радиуса пятна контакта 0.5 – 10.7%. Сходимость достигалась за 3 - 6 контактных итераций.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ № 17-01-00402\_а, 16-01-00129\_а.

### Список литературы

1. *Галанин М. П.* Варианты реализации метода множителей Лагранжа для решения двумерных контактных задач // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2015. № 89. 27 с.
2. *Цвик Л. Б.* Принцип поочередности в задачах сопряжения и контакте деформируемых тел // Прикл. Механика. 1980. Т.16. № 1. С.13-18.
3. *Станкевич И. В., Яковлев М. Е., Си Т. Х.* Разработка алгоритма контактного взаимодействия на основе альтернирующего метода Шварца // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия: Естественный науки. 2011. Вып. S. С. 134–141.
4. *Taylor R. L., Papadopoulos P.* On a patch test for contact problems in two dimensions. In: Wriggers P., Wagner W., editors. Computational methods in nonlinear mechanics. Springer: Berlin; 1991. p. 690-702.
5. *Rebel E. G., Park K. C., Felippa C. A.* Application of the Localised Lagrange Multiplier Method to a 3D Contact Patch Test. // 43rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, Denver, Colorado, 2001.

## **Динамика свободного цилиндрического тела во вращающейся горизонтальной полости при вибрациях**

**И. Э. Карпунин<sup>a</sup>, Н. В. Козлов<sup>b</sup>**

<sup>a</sup> Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет  
614990, Пермь, ул. Сибирская, 24  
email: vankarpunin@yandex.ru

<sup>b</sup> Институт механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук  
614013, Пермь, ул. Академика Королёва, 1  
email: kozlov.n@icmm.ru

Экспериментально изучается динамика цилиндрического тела во вращающейся полости при перпендикулярных оси вращения вибрациях. Экспериментальное исследование проводится при высокой скорости вращения, когда под действием центробежной силы тело смещается к оси вращения, то есть находится в центрифугированном состоянии. В отсутствие вибраций наблюдается отстающее вращение тела, вызванное его радиальным смещением под действием поля силы тяжести. Режим осреднённого движения тела зависит от частоты вращения полости. Вибрации приводят к возбуждению разного рода дифференциального вращения тела (опережающего или отстающего), связанного с резонансным возбуждением его инерционных колебаний. Определена зависимость скорости дифференциального вращения тела от частоты вибраций. Динамика твердого тела изучается при фиксированной частоте вращения полости и в зависимости от задаваемой частоты вибраций имеет различный сложный характер. Анализ траектории показал, что движение тела состоит из нескольких колебательных мод.

**Ключевые слова:** дифференциальное вращение; цилиндрическое тело; вибрации

## **Dynamics of a free cylindrical body in a rotating horizontal cavity under vibrations**

**I. E. Karpunin<sup>a</sup>, N. V. Kozlov<sup>b</sup>**

<sup>a</sup> Perm State Humanitarian Pedagogical University, Sibirskaya St. 24, 614990, Perm  
email: vankarpunin@yandex.ru

<sup>b</sup> Institute of Continuous Media Mechanics of the Ural Branch of Russian Academy of Science, Akademika Koroleva St. 1, 614013, Perm  
email: kozlov.n@icmm.ru

Dynamics of a cylindrical body in a rotating cavity is experimentally studied under vibrations perpendicular to the rotation axis. Experiments are run at high speed, when under the action of centrifugal force the body is shifted to the rotation axis (is centrifuged). In the absence of vibrations, lagging rotation of the body is observed, due to the body radial shift under the action of gravity. The body average motion mode depends on the cavity rotation frequency. Vibrations lead to the excitation of different kinds of body differential rotation (leading or lagging) as-

sociated with the resonant excitation of its inertial oscillations. The dependence of the differential speed of body rotation from the vibration frequency is obtained. The body dynamics, which is studied at a fixed cavity rotation frequency, has a different complex character depending on the vibration frequency. The trajectory analysis revealed that the body motion consists of several oscillatory modes.

**Keywords:** differential rotation; cylindrical body; vibrations

## 1. Введение

Действие внешней силы на вращающуюся двухфазную систему приводит к возбуждению инерционных колебаний. Вследствие этого в жидкости возникает дифференциальное вращение [1, 2]. Механизм дифференциального вращения заключается в генерации средней массовой силы в вязких пограничных слоях вблизи колеблющихся поверхностей [1, 3, 4]. В случае, когда легкая фаза – твердое тело, эффект оказывается наиболее сильным [5]. Это связано с различием в граничных условиях на границе раздела жидкостей и границе жидкость–твердое тело [6]. При вращении поперечные вибрации резонансным образом возбуждают интенсивные колебания тела (отстающие либо опережающие), что приводит к генерации осредненного течения в коаксиальном зазоре и к вращению самого тела. Направление осредненного вращения совпадает с направлением колебаний тела и определяется относительной частотой вибраций. Интенсивность движения определяется амплитудой колебаний тела и вязкостью жидкости [5].

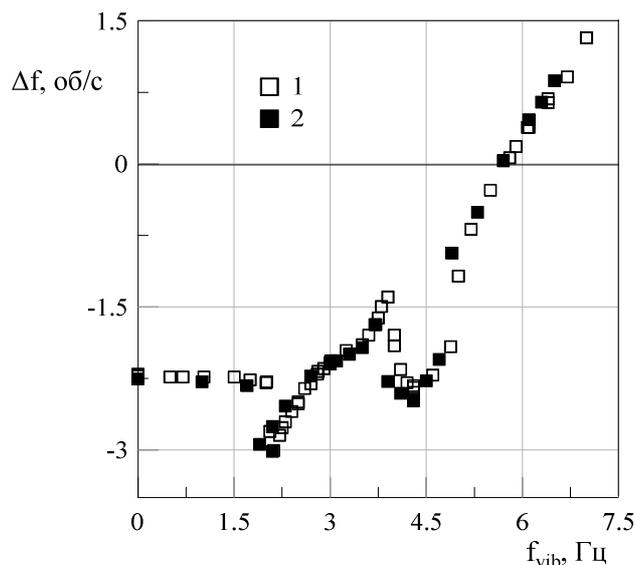
## 2. Постановка эксперимента

Экспериментальная модель представляет собой прозрачную цилиндрическую кювету из оргстекла, герметично закрытую с торцов крышками, одна из которых прозрачна. Внутри полости – рабочая жидкость (вода) и цилиндрическое тело из капролона, дополненное упорами для предотвращения сдвига к одному из торцов. При помощи шагового двигателя кювета приводится во вращение. Длина и радиус полости:  $l_1 = 28.0$  см,  $r_1 = 3.5$  см. Длина и радиус тела:  $l_2 = 24.5$  см,  $r_2 = 2.0$  см. Относительная плотность тела:  $\rho = 0.88$ . Частота вращения кюветы:  $f_r = 0 - 9.75$  об/с. Центрифугирование тела происходит при  $f_r = 4.88$  об/с, всплытие – при  $f_r = 4.37$  об/с. Экспериментальная модель помещается на вибростенд, который осуществляет поперечные оси вращения вибрации с заданной частотой. Частота вибрации:  $f_{vib} = 0 - 7$  Гц. Значение фиксированной частоты вращения полости (в случае воздействия вибрации):  $f_r = 4.88$  об/с.

## 3. Результаты

Изучена зависимость относительной частоты вращения тела  $\Delta f = f_s - f_r$  от частоты вибраций  $f_{vib}$  (рисунок). Анализ экспериментальных данных показал, что при повышении и понижении  $f_{vib}$  происходит смена режимов движения цилиндрического тела в полости. Сравнение результатов при прямом (точки 1) и обратном (точки 2) ходе по частоте  $f_{vib}$  обнаруживает узкие области гистерезиса в переходах между соседними режимами движения. В случае прямого хода при малом значении  $f_{vib} = 0 - 2$  Гц вибрации не оказывают влияния на значение  $\Delta f$ . В данной области динамика тела не отличается от гравитационного случая и характеризуется стационарным смещением тела относительно оси вращения полости. При  $f_{vib} = 2.1$  Гц скорость вращения тела скачком уменьшается, а дальнейшее увеличение  $f_{vib}$  сопровождается повышением скорости вращения тела вплоть до  $f_{vib} = 3.9$  Гц. При  $f_{vib} = 3.9 - 4.3$  Гц происходит уменьшение  $\Delta f$ , которое при  $f_{vib} > 4.3$  Гц сменяется монотонным возрастанием частоты вращения тела.

Характер движения тела на участке  $f_{vib} = 2.1 - 3.9 \text{ Гц}$  можно определить как круговые колебания относительно оси полости. В области  $f_{vib} = 3.9 - 5 \text{ Гц}$  траектория тела имеет сложный характер в силу суперпозиции нескольких колебательных движений с различными частотами, что приводит к изменению скорости дифференциального вращения. При  $f_{vib} > 5 \text{ Гц}$  торец тела движется по спирали, то приближаясь к центру полости, то удаляясь к цилиндрической стенке. Наблюдения в боковой проекции показывают, что такая траектория связана с нутациями. При обратном ходе по частоте вибраций области  $f_{vib}$  с характерными режимами движения тела воспроизводятся в обратном порядке, однако пороги переходов не совпадают. Об этом свидетельствуют небольшие различия в величине скорости дифференциального вращения.



**Рисунок.** Зависимость  $\Delta f$  от  $f_{vib}$ : 1 – повышение частоты вибрации; 2 – понижение частоты вибрации

### Список литературы

1. Иванова А. А., Козлов В. Г., Чиграков А. В. Динамика жидкости во вращающемся горизонтальном цилиндре // Изв. РАН. МЖГ. 2004. № 4. С. 98–111.
2. Иванова А. А., Козлов В. Г., Полежаев Д. А. Вибрационная динамика центрифугированного слоя жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2005. № 2. С. 147–156.
3. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука. 1974. 711 с.
4. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир. 1973. 758 с. (Batchelor G.K. An Introduction to Fluid Dynamics. Cambridge Univ. Press, 1967. 615 p.)
5. Козлов В. Г., Козлов Н. В. Вибрационный гидродинамический волчок // Докл. РАН. 2007. Т. 415. №. 6. С. 759–762.
6. Любимов Д. В., Любимова Т. П., Черепанов А. А. Динамика поверхностей раздела в вибрационных полях. М.: Физматлит. 2003. 215 с.

## **Влияние неоднородности поверхности подложки на колебания цилиндрической капли в переменном электрическом поле**

**М.А. Кашина**

Пермский государственный национальный исследовательский университет  
614990, Пермь, ул. Букирева, 15  
email: ya.kashina-marina@yandex.ru

Исследуются вынужденные колебания капли несжимаемой жидкости, окруженной другой жидкостью под действием переменного электрического поля. В равновесном состоянии капля имеет форму цилиндра, который ограничен в осевом направлении двумя параллельными твердыми поверхностями. Равновесный краевой угол между боковой поверхностью капли и твердой пластиной – прямой. Электрическое поле создает внешнюю периодическую силу, которая действует на линию контакта трех сред: капля-жидкость-твердая пластина. Скорость движения этой линии пропорциональна сумме отклонения краевого угла от равновесного значения и скорости релаксационных процессов, частота которых равна удвоенной частоте электрического поля. Получены данные об отклонении поверхности капли в зависимости от параметра Хокинга и геометрического параметра. Обнаружено, что при однородном переменном электрическом поле неоднородность пластин приводит к возбуждению азимутальных мод колебаний капли. Показано, что с увеличением постоянной Хокинга уменьшается взаимодействие линии контакта с подложкой, что приводит к хорошо выраженным резонансным эффектам.

**Ключевые слова:** цилиндрическая капля; контактная линия; вынужденные колебания

## **Influence of the heterogeneity substrate surface on the oscillations of a cylindrical drop in an alternating electric field**

**M. A. Kashina**

Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm  
email: ya.kashina-marina@yandex.ru

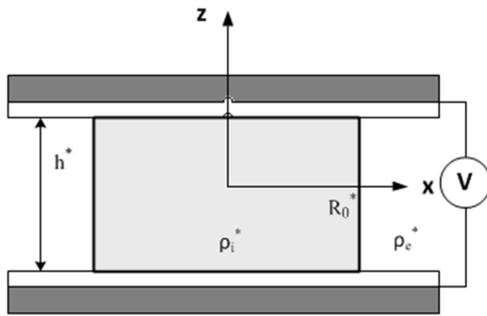
The forced oscillations of a drop of an incompressible fluid surrounded by another liquid under the action of an alternating electric field are studied. The drop has the cylindrical form in the equilibrium state, which is bounded in the axial direction by two parallel solid surfaces. The equilibrium edge angle between the side surface of the drop and the solid plate is right. The electric field creates an external periodic force, which acts on the contact line of three media: drop-fluid-solid plate. The velocity of the contact line is proportional to the deviation of the contact angle and the speed of the fast relaxation processes, which frequency is proportional to twice the frequency of the electric field. The deviation of the

interface is as a function of the Hocking parameter and the aspect ratio. It is found that the inhomogeneity of the plates leads to the azimuth modes excitation of the drop oscillations under a uniform alternating electric field. It is shown that the interaction of the contact line with the substrate decreases with increasing Hocking constant, which leads to well-pronounced resonance effects.

**Keywords:** contact line; forced oscillations; cylindrical drop

Изучению поведения движения и устойчивости капли жидкости в электрическом поле посвящено большое количество работ [1-4]. Одним из важных факторов, влияющих на поведение капли и способы управления, является электросмачивание (electrowetting, EW) – влияние электрического поля на смачивание каплей твердой подложки [4]. Толчком к бурному развитию этой тематики послужило использование диэлектрических прокладок на проводящей поверхности (electrowetting-on-dielectric, EWOD) [4,5]. Однако условие Юнга-Липмана, которое используется в большинстве работ, плохо описывает отклонение краевого угла в сравнении с экспериментальными данными. Авторами данной работы было предложено другое граничное условие [6], использование которого показывает хорошее согласие с экспериментом.

В данной работе исследуются вынужденные колебания капли несжимаемой жидкости с плотностью  $\rho_i^*$ , окруженная другой жидкостью плотности  $\rho_e^*$ . Вся система ограничена двумя параллельными твердыми поверхностями (рис. 1), расстояние между которыми равно  $h^*$ . Сосуд замкнут на бесконечности. Капля имеет форму круглого



**Рис. 1.** Геометрия задачи

цилиндра радиусом  $R_0^*$  в отсутствие внешних сил. Равновесный краевой угол между боковой поверхностью капли и твердой поверхностью прямой. На систему действует переменное неоднородное электрическое поле с амплитудой  $A^*$  и частотой  $\omega^*$ . Это поле играет роль внешней силы, которая заставляет двигаться контактную линию. В цилиндрической системе координат (ось  $z$  совпадает с осью симметрии сосуда), боковую поверхность капли можно описать функцией  $r^* = R_0^* + \zeta^*(z^*, \alpha, t^*)$ , где  $\zeta^*(z^*, \alpha, t^*)$  - функция, описывающая отклонение боковой поверхности капли от равновесного положения.

Движение линии контакта описывается граничным условием [6] (в главном порядке разложения по малой амплитуде вибраций):

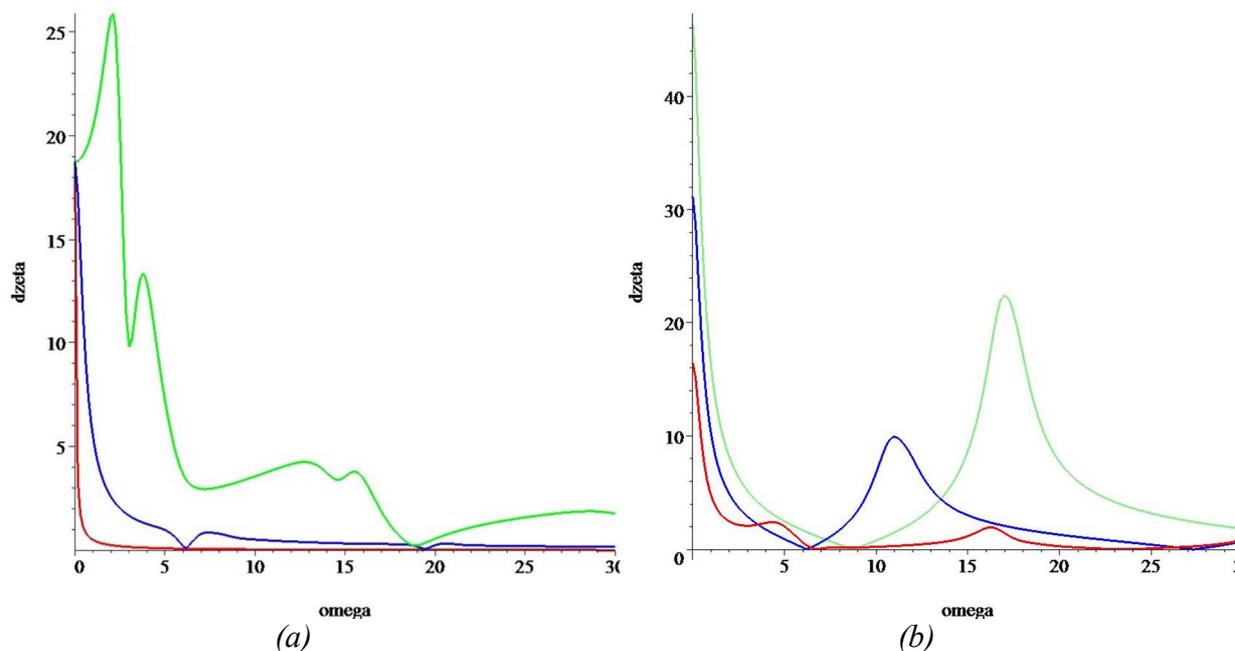
$$z = \mp 1/2, r = 1, \quad \zeta_t = \pm \Lambda(\alpha)(\zeta_z + A \cos 2\omega t), \quad (1)$$

где  $z = z^*/h^*$ ,  $r = r^*/R_0^*$ ,  $\zeta = \zeta^*/A^*$ ,  $\Lambda = \Lambda^* b \sqrt{(\rho_e^* + \rho_i^*) R_0^* / \sigma^*}$ ,  $b = R_0^*/h^*$ ,  $\Lambda^*$  – параметр Хокинга,  $\sigma^*$  – коэффициент поверхностного натяжения.

В качестве функции неоднородности поверхности подложек выбрано  $\Lambda = \lambda |\cos \alpha|$ . Однородные пластины были рассмотрены в работе [6]. На (рис. 2) показана амплитуда отклонения линии контакта  $\zeta$  в зависимости от частоты электрического поля для трех значений постоянной Хокинга  $\lambda$  и геометрического параметра  $b$ .

Из представленных рисунков (рис. 2. а) видно, что при малых значениях параметра  $\lambda$  резонансные эффекты отсутствуют, что объясняется сильным взаимодействием линии контакта с подложкой. При больших значениях  $\lambda$  линия контакта свободно скользит по твердой поверхности, что приводит к хорошо выраженным резонансным эффектам для всех частот собственных колебаний.

С увеличением геометрического параметра  $b$  растут значения частот собственных колебаний, что приводит к сдвигу резонансных значений частоты поля (рис. 2. б). Существуют также «антирезонансные» частоты, при которых линия контакта неподвижна, а изменяется только краевой угол.



**Рис. 2.** Максимальное отклонение линии контакта  $\zeta$  от частоты  $\omega$  (а) при трех разных значениях  $\lambda$  ( $b=1.0$ ,  $A=10.1$ ,  $\lambda=0.1$ ,  $\lambda=1.0$ ,  $\lambda=10.0$ ) и (б) при трех разных значениях  $b$  ( $\lambda=1.0$ ,  $A=10.1$ ,  $b=0.9$ ,  $b=1.5$ ,  $b=2.0$ )

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 14-21-00090).

### Список литературы

1. Melcher J. R., Taylor G. I. Electrohydrodynamics: A Review of the Role of Interfacial Shear Stresses // Ann. Rev. Fluid Mech. 1969. V. 1. P. 111-146.
2. Pelekasis N. A., Economou K., Tsamopoulos J. A. Linear oscillations and stability of a liquid bridge in an axial electric field // Phys. of Fluids. 2001. V. 13. P. 3564-3581.
3. Шутов А. А. Форма капли в постоянном электрическом поле // ЖТФ. 2002. Т. 72, №12. С. 15-22.
4. Mugele F., Baret J.-C. Electrowetting: from basics to applications // J. Phys.: Condens. Matter. 2005. V. 17. P. 705-774.
5. Berge B. Electrocapillarity and Wetting of Insulator Films by Water // Comptes Rendus Acad. Sci. II. 1993. V. 317. P. 157-163.
6. Alabuzhev A. A., Kashina M. A. The oscillations of cylindrical drop under the influence of a nonuniform alternating electric field // J. Phys.: Conf. Ser. 2016. V. 681. 012042.

# Численное моделирование динамики электролита для электрических мембран с учетом диссоциации воды и микрошероховатости

В. А. Кирий<sup>a</sup>, Н. Ю. Ганченко<sup>b</sup>, М. Ю. Репина<sup>c</sup>

<sup>a</sup> Финансовый университет при правительстве Российской Федерации, 350051, г. Краснодар, ул. Шоссе Нефтяников/ул. им. Федора Лузана, 32/34

email: vladimir@kiryu.ru

<sup>b</sup> Кубанский государственный университет, 350040 г. Краснодар, ул. Ставропольская, 149

<sup>c</sup> Южный федеральный университет, 344006, г. Ростов-на-Дону, ул. Б. Садовая, 105/42

Исследуется поведение раствора электролита, находящегося под действием внешнего электрического поля, вблизи ионоселективной поверхности, имеющей геометрические микронеоднородности. Впервые разработан вычислительный метод прямого численного решения полной системы Нернста-Планка-Пуассона-Стокса в криволинейной системе координат. Выявлены значения параметров микронеоднородности, которые существенно дестабилизируют систему, уменьшая критическое значение разности потенциалов. В математическую модель также включен механизм диссоциации воды внутри мембраны.

**Ключевые слова:** электрокинетическая неустойчивость; уравнения Нернста-Планка-Пуассона-Стокса; численное моделирование

## Numerical simulation of selective surface microinhomogeneities' impact on electrolyte dynamics with considering water dissociation

V. A. Kiriy<sup>a</sup>, N. Yu. Ganchenko<sup>b</sup>, M. Yu. Repina<sup>c</sup>

<sup>a</sup> Financial University under the Government of the Russian Federation, 350051, Krasnodar  
email: vladimir@kiryu.ru

<sup>b</sup> Kuban State University, 350040, Krasnodar

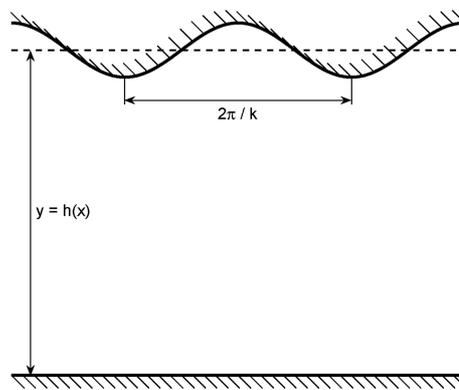
<sup>c</sup> Southern Federal University, 344006, Rostov-on-Don

The behavior of electrolyte solution exposed under an external electric field is investigated near an ion-selective surface with geometric inhomogeneities. It is known that one-dimensional solution loses stability near a surface if the potential drop is large enough. Such a critical value is lower if inhomogeneities are present. In the present work, a direct numerical simulation method for the full Nernst-Planck-Poisson-Stokes system in curvilinear coordinates is presented. The values of inhomogeneity parameters are identified that significantly destabilize the system, thus lowering the critical potential. The mathematical model also includes the mechanism of water dissociation inside the membrane.

**Keywords:** electrokinetic instability; Nernst-Planck-Poisson-Stokes equations; direct numerical simulation

Микронеоднородности различной природы, всегда присутствующие на мембране, могут существенным образом менять поток ионов к поверхности мембраны и, следовательно, изменять вольт-амперную характеристику мембраны. Неоднородности создают переменный электрический заряд и тангенциальное электрическое поле вдоль мембраны, их произведение дает кулонову силу и возбуждает конвективный перенос ионов.

Особый интерес представляет случай, когда характерные размеры неоднородности — ее длина волны и амплитуда — сравнимы по величине и соответствуют толщине зоны пространственного заряда, т. е.  $0.1 \div 1$  мкм [1]. В данной работе разработан новый метод решения указанной задачи в двумерной постановке. Уравнения Нернста-Планка-Пуассона-Стокса (НППС) представляются в неортогональной криволинейной системе координат. Рассматривается раствор симметричного бинарного электролита с равными коэффициентами диффузии ионов  $\tilde{D}$ , динамической вязкостью  $\tilde{\mu}$ , диэлектрической проницаемостью  $\tilde{\epsilon}$ , в области, ограниченной двумя ионоселективными поверхностями  $\tilde{y} = 0$  и  $\tilde{y} = \tilde{h}(\tilde{x})$  (рис. 1).



**Рис. 1.** Геометрия течения: нижняя плоская,  $y=0$ , и верхняя искривленная,  $y=h(x)$ , поверхности являются катионообменными мембранами

Задача о движении электролита описывается системой уравнений НППС. Для обезразмеривания выбираются следующие величины:  $\tilde{H}$  — среднее расстояние между поверхностями ( $\tilde{H} = \frac{1}{T} \int_0^{\tilde{T}} \tilde{h}(\tilde{x}) d\tilde{x}$ , где  $\tilde{T} = 2\pi/\tilde{k}$  — период возмущения),  $\tilde{H}^2/D$  — характерное время,  $\tilde{\mu}$  — динамическая вязкость,  $\tilde{\Phi}_0 = \tilde{R}\tilde{T}/\tilde{F}$  — характерный потенциал (где  $\tilde{R}$  — универсальная газовая постоянная,  $\tilde{T}$  — абсолютная температура, полагаемая неизменной,  $\tilde{F}$  — постоянная Фарадея),  $\tilde{c}_\infty$  — концентрация электролита на границе резервуара.

Верхняя поверхность (катионообменная мембрана) волнистая и описывается уравнением  $y=h(x)$ , нижняя (граница рассматриваемой области с резервуаром) — плоская,  $y=0$ . На поверхностях задаются следующие условия:

$$y = 0: c^+ = c^- = 1, V = 0, \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \Phi = -\Delta V,$$

$$y = h(x): c^+ = p, -c^- \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \frac{\partial c^-}{\partial n} = 0, \Phi = 0, U = 0, V = 0,$$

на нижней границе: концентрации ионов равны концентрации резервуара, вертикальная составляющая скорости равна нулю, отсутствуют касательные напряжения. На верхней границе задано фиксированное значение концентрации катионов  $p$  на поверхности, отсутствие потока анионов через поверхности, разность потенциалов  $\Delta V$ , условие при-

липания.  $n$ - нормаль к поверхности  $y=h(x)$ . Плотность электрического тока через поверхность:

$$j^+ - j^- = j^+ = c^+ \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \frac{\partial c^-}{\partial n}.$$

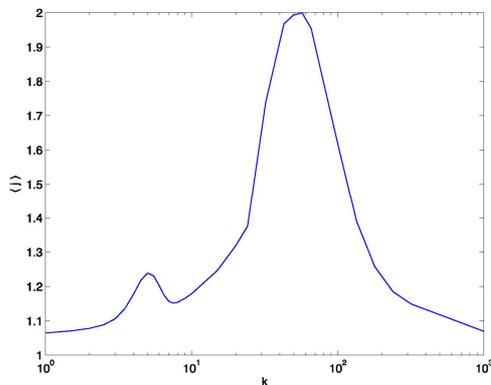
В качестве среднего тока берется  $j$ :

$$j = \int_0^L (j^+ - j^-) dx,$$

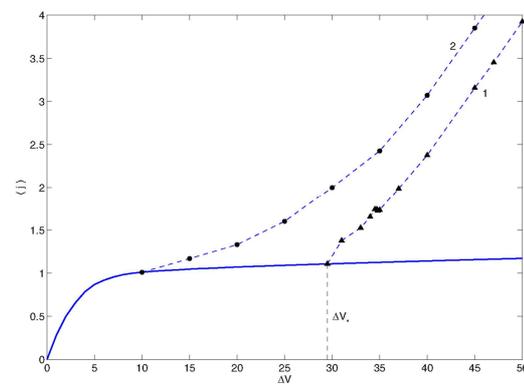
усредненный по длине мембраны  $L=2n/k$ .

Для численного решения, вводится криволинейная система координат:  $\tau = t$ ;  $\xi = x$ ;  $\eta = \frac{y}{h(x)}$ , в которой расчетная область принимает вид прямоугольника.

Для решения системы адаптирован квазиспектральный метод [1,2]. Периодичность функций вдоль мембраны позволяет разложить их в тригонометрические ряды Фурье. В поперечном направлении использованы многочлены Чебышева.



**Рис. 2.** Зависимость среднего тока от волнового числа микронеоднородности для  $\kappa = 0.1, \nu = 10^{-3}$ ,  $\Delta V/\Delta V^*$  Амплитуда микронеоднородности фиксирована,  $a=0.05$ .



**Рис. 3.** Вольт-амперная характеристика,  $\kappa = 0.1, \nu = 10^{-3}$ , 1:  $a = 0$ ; 2:  $a = 0.05$ ,  $k = k_2$ .

На (рис. 2) представлена зависимость средней по времени плотности тока  $\langle j \rangle$  от волнового числа микронеоднородности  $k$  при фиксированной ее амплитуде  $a=0.05$ . Зависимость имеет два явно выраженных максимума,  $k_1 \approx 5$  и  $k_2 \approx 57$ . Первый, более слабый максимум, был обнаружен в работе [3]. Характерная длина возмущения для второго максимума,  $l_2 = 2\pi/k_2 \approx 0.11$ , соответствует толщине зоны обессоливания,  $y_m = \sqrt[3]{9\nu^2 \Delta V^2 / 8j} \approx 0.121$ , где электрическое сопротивление раствора максимально. Искривление поверхности порядка  $y_m$ , вероятно, приводит к разрушению зоны обессоливания. Были проведены расчеты для модели с учетом диссоциации воды. В отличие от рассмотрения биполярных мембран [4], в данной постановке не возникает достаточно большой напряженности электрического поля для того, чтобы второй эффект Вина вносил существенный вклад в процесс диссоциации и, как следствие, механизм диссоциации не вносит в решение качественных изменений, замечены лишь незначительные количественные поправки.

Обобщение результатов приведено в вольт-амперной характеристике на (рис. 3). Для гладкой мембраны средняя плотность тока равна предельной вплоть до потери устойчивости  $\Delta V = \Delta V^*$ . Для волнистой мембраны изменения начинаются практически сразу после допредельных значений — ток отклоняется, а затем резко нарастает.

Представлены результаты прямого численного моделирования поведения раствора электролита, находящегося под действием внешнего электрического поля, вблизи

ионоселективной поверхности, с геометрическими микронеоднородностями. Обнаружена интенсификация электрического тока через поверхность при определенных параметрах неоднородности, и дано физическое объяснение этой интенсификации.

Работа выполнена при поддержке гранта: 16-48-230107-р\_а «Математическое моделирование электрогидродинамики неидеальных биполярных мембран с учетом диссоциации воды»

### Список литературы

1. Шелистов В. С., Никитин Н. В., Ганченко Г. С., Демёхин Е. А. Численное моделирование электрокинетической неустойчивости в полупроницаемых мембранах // Доклады РАН. 2011. Т. 440, № 5. С. 625630.
2. Demekhin E. A., Shelistov V. S., Polyanskikh S. V. “Linear and nonlinear evolution and diffusion layer selection in electrokinetic instability” // Phys. Rev. E. 2011. V. 84, P. 036318.
3. Chang H. C., Demekhin E. A., Shelistov V. S. “Competition between Dukhin’s and Rubinstein’s electrokinetic modes” // Phys. Rev. E. 2012. V. 86. P. 046319.
4. Демёхин Е. А., Моринева И. В., Калайдин Е. Н. Математическое моделирование электродинамики биполярных мембран с учетом диссоциации воды и химических реакций с ионогенными группами мембран // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2016, №4. С. 39-46.

## **Влияние осаждения примеси на линейную устойчивость в концентрационной задаче Хортона-Роджерса -Лэпвуда в рамках фрактальной модели**

**Л.С. Клименко<sup>a,b</sup>, Б. С. Марышев<sup>a,b</sup>**

<sup>a</sup> Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1

email: lyudmilaklimenko@gmail.com

<sup>b</sup> Пермский государственный национальный исследовательский университет 614990, Пермь, ул. Букирева, 15

email: bmaryshev@mail.ru

Исследована линейная устойчивости задача конвективного течения смеси в горизонтальном слое пористой среды при заданном вертикальном градиенте концентрации. Задача решалась с учетом осаждения (иммобилизации) примеси в пористой среде, описываемой в рамках фрактальной модели. Внешний горизонтальный фильтрационный поток считался стационарным. Получены уравнения, определяющие частоту нейтральных колебаний и критическое значение числа Релея-Дарси. Исследованы зависимости критически параметров от параметров осаждения. Численно получены карты устойчивости в широком диапазоне параметров системы. Обнаружено, что учет осаждения приводит к увеличению критического значения числа Релея-Дарси с увеличением интенсивности внешнего потока.

**Ключевые слова:** конвекция в пористой среде; осаждение; фрактальная модель

## **Impact of the solute immobilization on stability within the solute analog of Horton–Rogers–Lapwood**

**L. S. Klimenko<sup>a,b</sup>, B. S. Maryshev<sup>a,b</sup>**

<sup>a</sup> Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm

email: bmaryshev@psu.ru

<sup>b</sup> Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Ak. Koroleva str. 1, 617013, Perm

Linear stability analysis within the solute analog of Horton–Rogers–Lapwood (HRL) problem has been carried out. Solute immobilization (the sorption of solute particles) by the porous medium is taken into account within the fractal MIM approach. The solute concentration difference between the layer boundaries and the external filtration flux are assumed as constant. The system of equations that determine the frequency of neutral oscillations and the critical value of the Rayleigh–Darcy number is obtained. Neutral curves of the critical parameters on the governing parameters are plotted. Stability maps are obtained numerically in a wide

range of parameters of the system. It was found that taking immobilization into account leads to an increase in the critical value of the Rayleigh-Darcy number with an increase in the intensity of the external filtration flux.

**Keywords:** convection in porous media; immobilization; fractal model

## 1. Введение

Настоящая работа посвящена изучению возникновения конвективного течения смеси в горизонтальном слое пористой среды при заданном вертикальном градиенте концентрации, в навязанном внешнем горизонтальном фильтрационном стационарном потоке при учете осаждения примеси.

Задача в аналогичной постановке, но без учета осаждения частиц и в отсутствии внешнего потока впервые была решена в [1]. Было показано, что возникающий конвективный режим представляет собой набор конвективных ячеек, ширина которых равна толщине слоя. Влияние внешнего горизонтального потока на конвективные режимы было исследовано в [2]. Было показано, что хоть и наличие внешней прокачки приводит к колебательному характеру неустойчивости, но скорость внешнего потока влияет только на частоту колебаний. Длина волны критических возмущений и критическое значение числа Релея-Дарси остаются неизменными. Учет осаждения примеси в рассматриваемой задаче был произведен в работе [3]. Были получены карты наблюдающихся режимов конвекции. Было обнаружено, что учет осаждения примеси приводит к тому, что критические значения параметров становятся зависящими от интенсивности внешнего потока. Учет влияния примеси был произведен в рамках МММ (mobile-immobile medium) модели с линейной кинетикой сорбции [4]. Однако, как показано в работе [5] моделирование процесса осаждения примеси будет более реалистичным, если использовать фрактальную линейную модель мобильно/немобильной среды (fМММ) [6]. Такому моделированию и посвящена настоящая работа. Основным интересом представляет форма наиболее опасных возмущений, и зависимость критических параметров от параметров задачи.

## 2. Основные уравнения

Линеаризованная система уравнений для малых возмущений состояния однородного горизонтального просачивания смеси через слой пористой среды может быть записана в терминах возмущений концентрации и функции тока следующим образом:

$$\begin{aligned} \partial_t (c + q) + \text{Pe} \partial_x c + \partial_x \psi &= \nabla^2 c, \\ \nabla^2 \psi &= -R_p \partial_x c, \\ q &= \frac{\lambda}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{c(\mathbf{r}, t')}{(t-t')^\alpha} dt'. \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $c$  – концентрация примеси в мобильной фазе (дрейфующей с потоком),  $q$  – концентрация примеси в немобильной фазе (осевшей на стенки пор),  $\lambda$  – безразмерный параметр мобильности,  $\alpha$  – порядок фрактальности. Задача характеризуется двумя управляющими параметрами  $\text{Pe}$  – число Пекле или безразмерная скорость фильтрации и  $R_p$  – число Релея-Дарси, описывающее влияние плавучести.

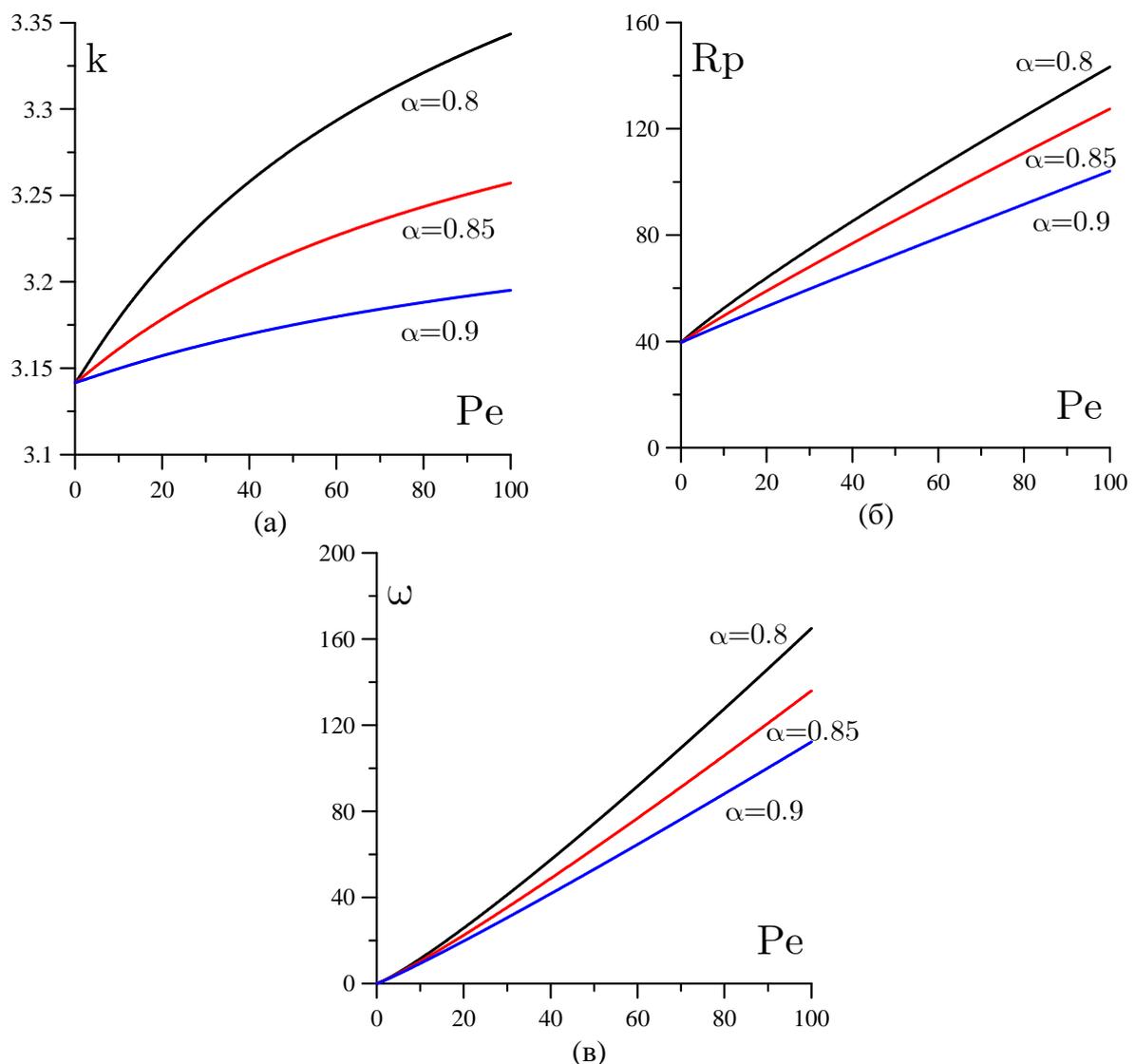
Задача (2.1) представляет собой задачу на собственные значения, используя преобразование Фурье-Лапласа, получим уравнения определяющие частоту нейтральных колебаний и критическое значение числа Релея-Дарси:

$$\omega + \lambda \operatorname{Im}(i^\alpha) \omega^\alpha - k_x \operatorname{Pe} = 0,$$

$$R_p = \frac{(\pi^2 n^2 + k_x^2)^2}{k_x^2} + \frac{(\pi^2 n^2 + k_x^2)}{k_x^2} \lambda \operatorname{Re}(i^\alpha) \omega^\alpha. \quad (2.2)$$

### 3. Результаты

Результаты решения задачи (2.2) для значений порядка фрактальности, реализуемых в экспериментах, представлены на Рисунке.



**Рисунок.** Зависимости длины волны (рис 1. а), числа Релея-Дарси (рис 1. б) и частоты (рис 1. в) от числа Пекле

Из Рисунка видно, что зависимости имеют нелинейный характер и увеличением числа Пекле растет как критическое значение числа Релея-Дарси, так и волновое число.

Таким образом, в случае стационарного внешнего потока, учет иммобилизации приводит к увеличению критических значений управляющих параметров с увеличением интенсивности внешнего потока. Были также исследованы асимптотики больших и малых интенсивностей потока, показано, что при большой интенсивности потока влияние осаждения примеси сводится лишь к повышению устойчивости за счет исключения части примеси из потока. При малых интенсивностях потока наблюдается изменение критических значений длины волны и числа Релея-Дарси наиболее опасных возмущений. Численно получены карты устойчивости в широком диапазоне параметров системы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 14-21-00090).

### Список литературы

1. *Horton C. W., Rogers F. T.*: Convection currents in a porous medium // J. Appl. Phys 1945. Vol. 16. N. 6. DOI : <http://dx.doi.org/10.1063/1.1707601>.
2. *Prats M.* The effect of horizontal fluid flow on thermally induced convection currents in porous mediums. J. Geophys. Res. 19663. P. 483.
3. *Maryshev B. S.* The Effect of Sorption on Linear Stability for the Solutal Horton–Rogers–Lapwood Problem //Transport in Porous Media. 2015. V. 109. . 3. P. 747-764.
4. *Van Genuchten M. T., Wierenga P. J.* Mass transfer studies in sorbing porous media I. Analytical solutions //Soil Science Society of America Journal. 1976. V. 40. 4 P. 473-480.
5. *Maryshev B., Cartalade A., Latrille C., Néel M.-Ch.* Identifying Space-Dependent Coefficients and the Order of Fractionality in Fractional Advection–Diffusion Equation, Transp. Porous Med. 2016 V. 116. N, 1 P. 53-71. DOI: 10.1007/s11242-016-0764-1.
6. *Schumer R., Benson D. A., Meerschaert M. M., Bauemer B.* Fractal mobile/immobile solute transport. Water Resour. Res. 2003. V. 39. P. 1-10.

## Генерация среднего течения около искривленной свободной поверхности при наличии ПАВ

Л. С. Клименко<sup>a,b</sup>, Д. В. Любимов<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Пермский государственный национальный исследовательский университет  
614990, Пермь, ул. Букирева, 15  
email: lyudmilaklimenko@gmail.com

<sup>b</sup> Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013, Пермь, ул. Ак. Королева, 1

Работа посвящена изучению генерации среднего течения около искривленной свободной поверхности при наличии поверхностно-активного вещества. Исследование проведено на примере газового пузырька, взвешенного в жидкости. Течение жидкости около пузырька возникает под действием приложенных вибраций малой амплитуды и высокой частоты. Обмен поверхностно-активным веществом между поверхностью пузырька и окружающей жидкости лимитируется процессом адсорбции-десорбции. Толщина пленки адсорбированных ПАВ считается пренебрежимо малой. Задача решена в приближении, что форма пузырька в присутствии адсорбированных ПАВ не теряет сферической симметрии. С помощью метода срачиваемых асимптотических разложений получено выражение для касательных напряжений на внешней границе пограничного слоя, которое может быть использовано в качестве эффективного граничного условия для течения во внешних по отношению к пограничным слоям областях.

**Ключевые слова:** среднее течение; пузырек; ПАВ

## Surfactant effect an average flow generation near curved free surface

L. S. Klimenko<sup>a,b</sup>, D. V. Lyubimov<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm  
email: lyudmilaklimenko@gmail.com

<sup>b</sup> Institute of Continuous Media Mechanics Uo RAS, Koroleva St. 1, 614013, Perm

The present work is devoted to the average flow generation near curved free surface with a surfactant adsorbed on the surface layer. The investigation was carried out for a gas bubble embedded in a viscous incompressible liquid. The liquid flow is generated by small amplitude and high frequency vibrations. Surfactant exchange between the bubble surface and the surrounding liquid is limited by the process of adsorption-desorption. The film thickness of the adsorbed surfactant is negligible. The problem is solved under assumption that the shape of the bubble in the presence of adsorbed surfactant remains spherical symmetry.

The effective boundary conditions for the shear stress, describing the above generation have been obtained by matched asymptotic expansions method. The condi-

tions under which the bubble surface can be considered as a quasi-solid are determined. It is shown that in the case of the significant effect of surfactants on the surface tension, the dominant mechanism for the generation is the Schlichting mechanism.

**Keywords:** average flow; bubble; surfactant

Как известно, одним из интересных проявлений действия вибраций является возникновение средних течений. Впервые такие течения были обнаружены около твердой стенки, обтекаемой неоднородным пульсирующим потоком [1,2]. При этом на внешней границе пограничного слоя средняя касательная скорость отлична от нуля и ее значение может быть использовано в качестве эффективного граничного условия при нахождении среднего течения в основной области движения [3]. Для плоской поверхности раздела двух жидкостей кроме аналогичного механизма генерации [4] существует еще и механизм Дора [5], определяющий эффективные касательные напряжения.

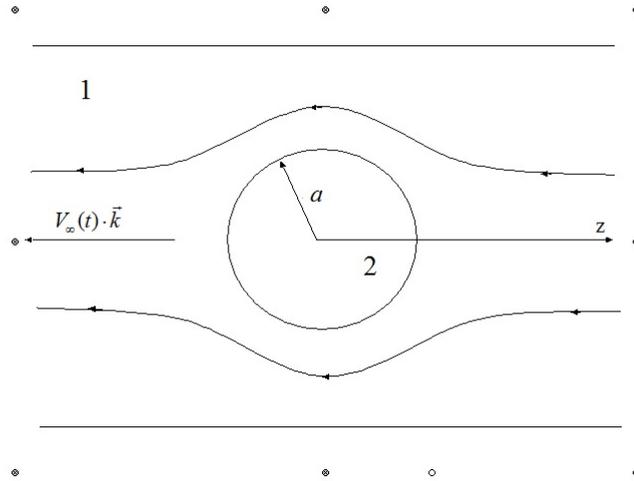
Для случая свободной плоской поверхности оба указанных механизма не работают, и лишь при наличии деформаций поверхности появляется еще один механизм – механизм генерации Лонге-Хиггинса [6], заключающийся в том, что средние течения формируются бегущими по свободной поверхности волнами.

В работе [7] был описан новый механизм генерации, связанный исключительно со средней кривизной поверхности, нечувствительный к пульсационным деформациям. Исследование было проведено применительно к свободной поверхности и к поверхности раздела. В качестве свободной поверхности рассматривался газовый пузырек, взвешенный в жидкости. Задача была решена для сферической [7] и цилиндрической геометрии [8]. При изучении искривленной поверхности раздела рассматривалась капля жидкости, взвешенной в жидкости отличной плотности [9]. Показано, что при сравнимых плотностях и вязкостях жидкостей основные механизмы генерации аналогичны механизмам Дора и Шлихтинга, в то время как влияние кривизны является вторичным фактором.

Конкуренция описанных выше механизмов генерации становится особенно актуальна, когда исследуемая поверхность покрыта тонкой пленкой поверхностно-активного вещества. Для случая поверхности раздела (капли) было показано [10], что в случае, когда влияние ПАВ на поверхностное натяжение значительно (параметр изо-термы адсорбции Гиббса намного больше толщины вязкого пограничного слоя Стокса), механизм генерации Шлихтинга доминирует.

Цель настоящей работы – изучить, какие механизмы генерации будут играть роль для случая свободной поверхности при наличии поверхностно-активного вещества.

Для этого рассмотрим поведение газового пузырька, взвешенного в несжимаемой жидкости (рисунок). Течение жидкости возникает под действием приложенных гармонических вибраций с амплитудой  $b$  и частотой  $\omega$ . Обмен поверхностно-активным веществом между поверхностью пузырька и окружающей жидкости лимитируется процессом адсорбции-десорбции. Предполагается, что поверхностно-активные вещества растворимы в окружающей жидкости. Окружающая жидкость и жидкость в капле считаются несжимаемыми.



**Рисунок.** Конфигурация задачи. 1- окружающая жидкость, 2- газовый пузырек.

Система уравнений в безразмерном виде в системе отчета, связанной с центром пузырька, отдельно для среднего и пульсационного движения имеет

$$\vec{u} \cdot \nabla \vec{u} + \frac{\varepsilon^2}{\delta^4} \overline{\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}} = -\nabla p + \Delta \vec{u},$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \delta^2 (\vec{u} \cdot \nabla \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{u}) + \varepsilon \widetilde{\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}} = -\nabla \tilde{p} + \delta^2 \Delta \vec{v} - \frac{\partial \vec{U}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{u} = 0,$$

где черта сверху означает осреднение по времени, а знак тильда – взятие пульсационной части.

Перейдем к обсуждению граничных условий. Вдали от пузырька для средней и пульсационной скорости имеем

$$r \rightarrow \infty: \vec{u} \rightarrow 0; \quad \vec{v} \rightarrow \vec{k} \cos t - \vec{U}$$

На поверхности пузырька, при  $r = 1$ , для пульсационной скорости

$$v_r = 0,$$

$$\tilde{p} - 2\delta^2 \frac{\partial v_r}{\partial r} - 2 \frac{k}{\operatorname{We}} \Gamma = 0,$$

$$\left( \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} - v_\vartheta \right) - \frac{k}{\delta^2 \varepsilon \operatorname{We}} \frac{\partial \Gamma}{\partial \vartheta} = 0,$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \varepsilon \left( \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} + v_\vartheta \operatorname{ctg} \vartheta \right) = 0.$$

Для средней скорости и давления

$$u_r = 0, \quad \bar{p} - 2 \frac{\partial u_r}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial u_\vartheta}{\partial r} - u_\vartheta = 0$$

Задача характеризуется четырьмя безразмерными параметрами:  $\varepsilon = b/a$  – отношение амплитуды вибраций к радиусу капли,  $\delta = 1/a \sqrt{\nu/\omega}$  – безразмерная толщина пограничного слоя,  $k = \gamma' \Gamma_0 / \gamma$  – коэффициент эластичности Гиббса  $\operatorname{We} = \rho \omega^2 a^3 / \gamma$  –

число Вебера. Будем считать, что параметры  $\varepsilon$  и  $\delta$  малыми и искать решение в виде разложения по параметру  $\varepsilon$ . Отметим, что равномерно пригодное разложение удается построить только тогда, когда указанные параметры одного порядка малости. Остальные параметры будем считать конечными.

С помощью метода сращиваемых асимптотических разложений [8] получены эффективные граничные условия для касательных напряжений, описывающие генерацию среднего течения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 15-01-09069).

### Список литературы

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., 1969.
2. Ниборг В. Акустические течения // Физическая акустика под редакцией У. Мэзона. Том II часть Б. М.: Мир, 1969. С. 364-367.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика, том VI, Гидродинамика, М.: Физматлит, 2001. С. 735.
4. Dore D. On mass transport induced by interfacial oscillations at a single frequency // Proc. Camb. Phil. Soc. 1973. V. 74. P. 333-347.
5. Любимов Д. В., Любимова Т. П., Черепанов А. А. Динамика поверхностей раздела в вибрационных полях. М.: Физматлит, 2003. С. 216.
6. Longuet-Higgins M. S. Mass transport in water waves // Philosophical Transactions A. 1953. V. 245. P. 353-581.
7. Gershuni G. Z., Lyubimov D. V. Thermal Vibrational Convection. – Wiley: N.Y. et al., 1998, 358 p.
8. Клименко Л. С., Любимов Д. В. Генерация среднего течения пульсационным потоком около искривленной свободной поверхности // Изв. РАН. МЖГ. 2012. № 1. С. 33-43.
9. Клименко Л. С., Любимов Д. В. Генерация среднего течения пульсационным потоком около цилиндрического газового пузырька // Вестник Пермского государственного Университета, Серия: Физика, Пермь, 2011, Вып. 1, С. 9-13.
10. Любимов Д. В., Клименко Л. С. Генерация среднего течения в пульсационном потоке около искривленной поверхности раздела // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, №4, 2011, С. 951-953.
11. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. – 1959.
12. Ван Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.:Мир, 1967. 310 с.

## **Поведение конечно-амплитудных возмущений в слабо вращающемся слое жидкости в условиях микрогравитации**

**Н.С. Кнутова<sup>a</sup>, К.Г. Шварц<sup>a</sup>**

<sup>a</sup> Пермский государственный национальный исследовательский университет  
614990, Пермь, ул. Букирева, 15  
email: natalie@knutov.com

В работе исследуется поведение пространственных конечно-амплитудных возмущений адвективного термокапиллярного течения, возникающего в слабо вращающемся слое жидкости в условиях микрогравитации. Границы слоя свободные и считаются плоскими, на них действует касательная термокапиллярная сила Марангони, температура среды вблизи границ слоя является линейной функцией координат. Исследование проводится на основе нелинейной задачи методом сеток при значениях числа Марангони выше критического при малых числах Грасгофа. Расчеты показали, что в случае монотонной неустойчивости формируются стационарные конечно-амплитудные возмущения скорости и температуры, а в случае колебательной неустойчивости – нестационарные периодические возмущения, в виде чередующихся холодных и теплых пятен, образующих систему вихрей, вращающихся в противоположных направлениях. Результаты исследования имеют значение для космического материаловедения.

**Ключевые слова:** адвективное течение; устойчивость; вращение; конечно-амплитудные возмущения; горизонтальная конвекция

## **Behavior of finite-amplitude perturbations in a slow rotating liquid layer under microgravity conditions**

**N.S. Knutova<sup>a</sup>, K.G. Shvarts<sup>a</sup>**

<sup>a</sup> Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm  
email: natalie@knutov.com

The behavior of spatial finite-amplitude perturbations of the advective thermocapillary flow arising in a slow rotating liquid layer under microgravity conditions is investigated. The boundaries of the layer are free and are assumed to be plane, the tangential thermocapillary force of Marangoni operates on them, the temperature near the boundaries of the layer is a linear function of the coordinates. The investigation is carried out on the basis of a nonlinear problem by the grid method for values of the Marangoni number above the critical value for small Grashof numbers. Calculations showed that in the case of monotonic instability, stationary finite-amplitude perturbations of velocity and temperature are formed, and in the case of oscillatory instability, nonstationary periodic perturbations are formed in the form of alternating cold and warm spots forming a system of vortices rotating in opposite directions. The results of the study are important for space materials science.

**Keywords:** advective flow; instability; rotation; finite-amplitude perturbations; horizontal convection

Адвективные течения возникают в плоском горизонтальном слое жидкости под действием продольного градиента температуры [1]. В достаточно тонком слое при наличии гравитации, когда на свободной границе поддерживается линейное распределение температуры, возникает устойчивое термокапиллярное течение [2]. При наличии теплоотдачи с поверхности по закону Ньютона возмущения температуры на поверхности отличны от нуля, под действием силы Марангони может возникнуть неустойчивость течения. Наличие вращения меняет профили скорости и температуры течения, что так же может привести к возникновению неустойчивости течения.

Во вращающемся слое жидкости формируется однородное стационарное течение, описанное аналитически [3] в виде точного решения уравнений Навье-Стокса; была исследована линейная устойчивость течения на нормальные возмущения, определены критические значения числа Марангони при числах Тейлора  $0 < Ta < 10$  и Грасгофа  $0 < Gr < 8$ . В данной работе, являющейся продолжением [4] исследуется поведение конечно-амплитудных возмущений, возникающих в слое жидкости при значениях числа Марангони за порогом устойчивости в условиях микрогравитации.

**Постановка задачи.** Рассмотрим во вращающейся декартовой системе координат  $XYZ$  плоский бесконечный слой несжимаемой жидкости, вращающийся с постоянной угловой скоростью в условиях микрогравитации. Ось вращения совпадает с вертикальной осью координат  $Z$ , вращение слабое и позволяет пренебрегать центробежной силой на достаточно большом расстоянии от вертикальной оси. Обе границы слоя свободные и считаются плоскими, на них действует касательная термокапиллярная сила Марангони, коэффициент поверхностного натяжения линейно зависит от температуры  $T$  [5], на границах осуществляется теплоотдача по закону Ньютона. Температура среды вблизи границ слоя является линейной функцией координат.

**Конечно-амплитудные возмущения.** Для исследования устойчивости стационарного термокапиллярного течения применим метод малых возмущений [1]

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{V}, \quad \mathbf{v}_0 = (u_0, v_0, 0), \quad \mathbf{V} = (u, v, w), \quad T = T_0 + \theta, \quad p = p_0 + p'. \quad (1)$$

Здесь  $V$ ,  $\theta$ ,  $p'$  – малые возмущения скорости, температуры и давления. Поведение возмущений конечной амплитуды в надкритической области будем проводить на основе нелинейной безразмерной системы:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + Mn [(\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{v}_0 + (\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{V}] + \sqrt{Ta} (\mathbf{i}_z \times \mathbf{V}) = -\nabla p' + \Delta \mathbf{V} + \frac{Gr}{Mn} \theta \mathbf{i}_z. \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0. \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + Mn [(\mathbf{V} \nabla) \theta + (\mathbf{V} \nabla) T_0 + (\mathbf{v}_0 \nabla) \theta] = \frac{1}{Pr} \Delta \theta. \quad (4)$$

При этом граничные условия такие:

$$z = \pm 1: \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial \theta}{\partial y}, \quad w = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = \mp Bi \theta. \quad (5)$$

где  $Mn$  – число Марангони,  $Gr$  – число Грасгофа,  $Ta$  – число Тейлора,  $Pr$  – число Прандтля,  $Bi$  – число Био.

Будем рассматривать два случая – случай пространственных винтовых периодических по  $x$  возмущений в виде валов с осью, параллельной оси  $X$ , и пространственных спиральных периодических по  $y$  возмущений в виде валов с осью, параллельной оси  $Y$ . Для винтовых возмущений введём функцию тока возмущений  $\psi(t, x, z)$ , вихрь возмущения скорости  $\varphi(t, x, z)$  и температуры  $\theta(t, x, z)$ . Все величины предполагаются периодическими функциями горизонтальной координаты  $y$  с периодом  $L$ , где  $L$  – длина волны возмущений, соответствующая критическому числу Марангони для фиксированных значений других параметров. Условия периодичности заданы на боковых границах. Функции тока  $\psi(t, x, z)$  и вихря скорости  $\varphi(t, x, z)$  описывают проекцию движения конечно-амплитудных возмущений на плоскость  $XZ$ . Вторая компонента скорости  $v(t, x, z)$  описывает проекцию движения конечно-амплитудных возмущений на плоскость  $YZ$  или  $XY$ . Аналогичным образом введем функцию тока  $\psi(t, y, z)$  и вихря скорости  $\varphi(t, y, z)$  для спиральных возмущений.

Нелинейная двумерная задача решается методом сеток [6] при фиксированных значениях  $Pr=6.7$ ,  $Bi=0.1$ , и различных значениях  $Ta$  и  $Gr$ . В рамках двухполюсового метода использовалась явная конечно-разностная схема. Уравнение Пуассона для функции тока решается методом последовательной верхней релаксации. Расчеты проводились на сетке  $100 \times 401$  узлов до достижения максимумов производных по времени величины меньшей, чем  $10^{-6}$ . Это достигалось не менее чем за 15 единиц модельного времени.

Расчеты показали, что и для винтовых, и для спиральных возмущений в случае монотонной линейной неустойчивости формируются стационарные конечно-амплитудные возмущения скорости и температуры, а в случае колебательной неустойчивости – нестационарные периодические возмущения.

В случае винтовых возмущений вблизи минимумов нейтральных кривых возмущение температуры представляет собой систему чередующихся теплых и холодных пятен, расположенных вдоль оси  $x$ . Конечно-амплитудные возмущения образуют систему пространственных вихрей. При увеличении числа Марангони движение усложняется, максимальные значения возмущения температуры возрастают, холодное пятно в центре слоя смещается к верхней границе, а теплые пятна по бокам – к нижней границе слоя. Проекция движения, описанная возмущением функции тока, представляет собой систему чередующихся пар вихрей, экстремальные значения достигаются вблизи верхней и нижней границ. Вторая компонента скорости возмущений образует систему из четырех вихрей, в центре слоя имеет отрицательные значения и положительные по бокам.

При увеличении числа Грасгофа в слабо вращающемся слое жидкости и в случае винтовых, и в случае спиральных возмущений, возникает периодически изменяющаяся картина конечно-амплитудных возмущений в виде пространственных вихрей и температурных пятен, которые с течением времени разворачиваются поперек слоя и двигаются вдоль его границ.

### Список литературы

1. *Gershuni G. Z., Laure P., Myznikov V. M., Roux B., Zhukhovitsky E. M.* On the stability of planeparallel advective flows in long horizontal layer // *Microgravity Q.*, 1992. V. 2. № 3. P. 141–151.
2. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А.* Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989. 319 с.

3. *Кнутова Н. С., Шварц К. Г.* Исследование поведения и устойчивости адвективно-термокапиллярного течения в слабо вращающемся слое жидкости в условиях микрогравитации // Изв. РАН. МЖГ. 2015. №3. С.32-43.
4. *Шварц К. Г.* Устойчивость термокапиллярного адвективного течения в медленно вращающемся слое жидкости в условиях невесомости. Изв. РАН. МЖГ. 2012. № 1. С. 44–58.
5. *Аристов С. Н., Шварц К. Г.* Вихревые течения адвективной природы во вращающемся слое жидкости – Пермь: Перм. ун-т, 2006. 155 с.
6. *Шварц К. Г.* Конечно-амплитудные пространственные возмущения адвективного течения во вращающемся горизонтальном слое жидкости // Вычислительные технологии, 2001. Т.6. Спец. выпуск. Ч.2. – Труды Международной конференции RDAMM-2001. С.702-707.

## **Моделирование формирования рельефной стеклянной пленки в испаряющейся коллоидной жидкости при ИК-нагреве**

**К. С. Колегов**

Каспийский институт морского и речного транспорта филиал ФГБОУ ВО «ВГУВТ»,  
414000, Астрахань, ул. Никольская, 6

Астраханский государственный университет, 414056, Астрахань, ул. Татищева, 20а  
email: konstantin.kolegov@asu.edu.ru

В работе теоретически изучается модификация метода испарительной литографии, когда в систему добавлен ИК-источник. После размещения над коллоидной пленкой маски с отверстиями жидкость начинает испаряться неравномерно. В результате возникают течения жидкости, направленные в сторону областей под открытыми участками в маске. Происходит массоперенос частиц в эти участки. Сопутствующий ИК-нагрев приводит к спеканию частиц. В итоге образуется стеклянная пленка требуемой структуры, которая зависит от шаблона (маски). Предложена математическая модель, описывающая данный процесс. Полученные численные результаты качественно согласуются с результатами экспериментов других авторов. Температура в системе с течением времени возрастает практически линейно. Толщина сформированной твердой пленки под отверстием маски на порядок больше толщины покрытия, которое образовалось под закрытой областью шаблона.

**Ключевые слова:** испарительная литография; ИК-излучение; стеклообразование

## **Simulation of relief glass film formation in the evaporating colloidal liquid under IR heating**

**K. S. Kolegov**

Caspian Institute of Sea & River Transport the branch of the Volga State University of Water  
Transport, Nikolskaya St. 6, 414000, Astrakhan

Astrakhan State University, Tatishchev St. 20a, 414056, Astrakhan  
email: konstantin.kolegov@asu.edu.ru

This work is devoted to a theoretical studying of IR radiation-assisted evaporative lithography. After placing the mask with holes over a colloidal film the liquid begins to evaporate nonuniformly. As a result, fluid flows are directed toward the areas under the open areas in the mask. There is a mass transfer of particles to these areas. The accompanying infrared heating leads to sintering of the particles. As a result the glass film of required structure which depends on a template (mask) is formed. A mathematical model describing this process is proposed. The obtained numerical results are in qualitative agreement with the results of other authors' experiments. The temperature in the system increases practically linearly over time. The thickness of the formed solid film under the hole of the mask is an order

of magnitude greater than the thickness of the coating that formed under the closed area of the template.

**Keywords:** evaporative lithography; infrared radiation; glass formation

## 1. Введение

Образование микро- и наноструктур в результате высыхания капель и пленок различных растворов привлекает внимание из-за множества приложений, начиная от новых методов диагностики в медицине [1] и заканчивая созданием дисплеев, заряжающих электронные устройства от солнечного света [2]. Об управлении формой получаемых структур за счет испарения как ключевого эффекта говорилось еще в [3]. Позже эта идея была применена в методе испарительной литографии [4]. После размещения над коллоидной пленкой маски с отверстиями жидкость начинает испаряться неравномерно. В результате возникают течения, направленные в сторону областей под открытыми участками в маске. Происходит массоперенос частиц в эти участки. У метода есть два ограничения. Во-первых, общее время процесса испарения значительно возрастает из-за того, что маска блокирует большую часть поверхности жидкой пленки. Во-вторых, частицы стекловидных полимеров, температура плавления которых выше комнатной, не формируют пленку, а лишь — хрупкие покрытия. Чтобы исключить эти недостатки в [5] пропускают ИК-излучение через отверстия в маске. Это приводит к нагреву коллоидных частиц в локальных областях. Частицы начинают спекаться. По мере высыхания жидкой пленки формируется твердое покрытие требуемой рельефной формы. Толщина стеклянной пленки может варьировать от нескольких сотен нанометров до сотен микрометров. В [6] построена модель, которая описывает тепло- и массоперенос в такой системе лишь на гидродинамическом этапе, когда раствор слабый. Цель данной работы заключается в математическом описании и последующего этапа, фазового перехода золя в стекло.

## 2. Уравнения математической модели

Система включает уравнение неразрывности, уравнение конвекции, уравнение теплопроводности для жидкости и для подложки:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = -J, \quad \frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{CJ}{h},$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} = \text{Fo} \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x} \left( hk \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{1}{\text{Gz}} \frac{T_s - T}{h} + \text{St} \frac{1 - \exp(-a_\lambda h l_c)}{h} H(X_h - x) - \frac{J}{h} (\text{Bu} - T),$$

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} = \text{Fo}_s \frac{\partial}{\partial x} \left( k_s \frac{\partial T_s}{\partial x} \right) + \frac{1}{\text{Gz}_s} \frac{T - T_s}{h_s} + \text{St}_s \frac{\exp(-a_\lambda h l_c)}{h_s} H(X_h - x).$$

Толщина пленки  $h$ , скорость поперечного течения  $u$ , плотность потока пара  $J$ , массовая доля коллоидных частиц  $C$ , температура жидкости  $T$ , коэффициент теплопроводности  $k$  и температура подложки  $T_s$  есть функции, зависящие от координаты  $x$  и времени  $t$ . Число Фурье  $\text{Fo}$ , число Гретца  $\text{Gz}$ , число Стэнтона  $\text{St}$  и число Бульгина  $\text{Bu}$  — это безразмерные параметры задачи. Подстрочный знак  $s$  указывает на отношение параметра или функции к подложке. Произведение  $a_\lambda l_c$  — безразмерная величина, где  $a_\lambda$  — показатель поглощения ( $\text{м}^{-1}$ ),  $l_c$  — характерный масштаб длины ( $\text{м}$ ). Функция Хевисайда  $H$  используется для описания влияния маски на систему. Величина  $2X_h$  равняется ширине отверстия в маске. Все уравнения получены при рассмотрении баланса массы и тепловой энергии в выделенном элементарном объеме [6]. Поперечная скорость течения жидкости находится с использованием приближения смазки

$$u = \frac{1}{Ca} \frac{h^2}{3\eta} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3},$$

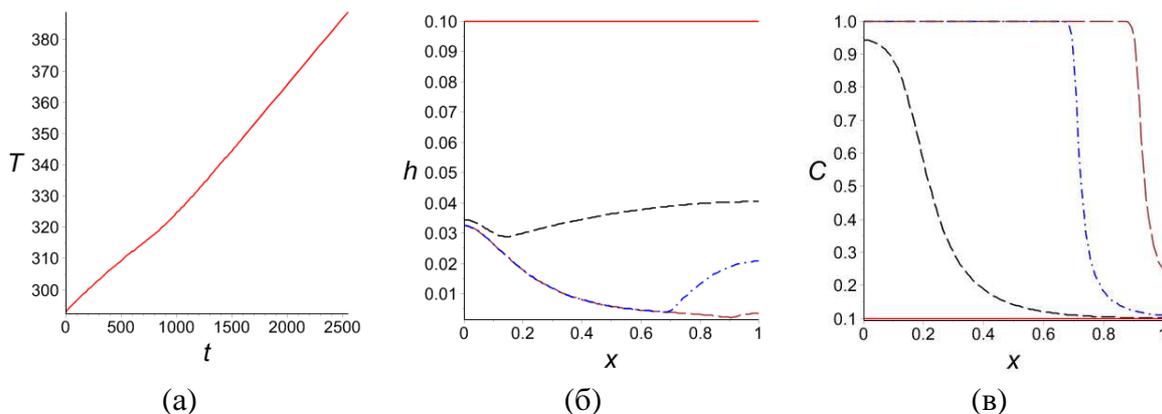
где  $Ca$  — капиллярное число. Для определения вязкости  $\eta$  используется эмпирическая зависимость, полученная из экспериментальных данных [7]. Плотность потока пара  $J$  описывается модельным законом, который учитывает концентрацию и температуру.

Начальную форму поверхности пленки считаем плоской,  $h(x, 0) = h_0$ . Температура и массовая доля частиц равномерно распределены в начальный момент времени,  $T(x, 0) = T_s(x, 0) = 1$ ,  $C(x, 0) = C_0$ . На границах  $\partial C/\partial x = \partial T/\partial x = \partial T_s/\partial x = 0$  в силу симметрии. В точках  $x = 0$  и  $x = X$  поток меняет направление, поэтому  $u(0, t) = u(X, t) = 0$ .

### 3. Результаты численных расчетов

Задача решается методом конечных разностей (неявная разностная схема). Результирующая система алгебраических уравнений решается методом Ньютона. При расчетах используется сетка со 125 узлами по пространственной координате.

Результаты расчетов показывают практически линейное повышение температуры жидкости с течением времени (рисунок (а)). Это хорошо согласуется с экспериментальными данными [5]. На другом графике (рисунок (б)) представлена толщина пленки на различных временных этапах. В начале процесса толщина жидкой пленки равномерная. А на финальной стадии наблюдаем сформировавшуюся стеклянную пленку переменной толщины. Под прорезью в маске значение  $h$  примерно на порядок больше, чем в районе закрытой области. Авторы [5] экспериментально получили схожие результаты. Эволюция массовой доли частиц показана на рисунке (в). На финальной стадии процесса жидкость в объеме практически полностью отсутствует.



**Рисунок.** Результаты расчетов. На рисунке приведены (а) динамика температуры жидкости ( $K$ ) во времени ( $c$ ) в точке  $x = 0$ , (б) профиль пленки ( $mm$ ) и (в) массовая доля частиц на нескольких последовательных временных отрезках

### 4. Заключение

В предложенной модели рассматривается лишь компенсационное течение. Однако полученные численные результаты согласуются с экспериментальными данными [5]. Это позволяет сделать предположение, что конвективные потоки, возникающие в результате перепада концентрации и температуры на поверхности и в объеме, оказывают на систему незначительное влияние. Чтобы окончательно подтвердить это или опровергнуть, необходимо построить двумерную модель, учитывающую течения Марангони и Релея–Бенара.

## 5. Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-38-00439 мол\_а).

### Список литературы

1. *Шатохина С. Н., Шабалин В. Н.* Морфология биологических жидкостей — новое направление в клинической медицине // Альманах клинической медицины. 2003. № 6. С. 404–422.
2. *Layani M., Gruchko M., Milo O., Balberg I., Azulay D., Magdassi S.* Transparent conductive coatings by printing coffee ring arrays obtained at room temperature // ACS Nano. 2009. Vol. 3. N. 11. P. 3537–3542.
3. *Deegan R. D., Bakajin O., Dupont T. F., Huber G., Nagel S. R., Witten T. A.* Contact line deposits in an evaporating drop // Physical Review E. 2000. Vol. 62. N. 1. P. 756–765.
4. *Harris D. J., Hu H., Conrad J. C., Lewis J. A.* Patterning colloidal films via evaporative lithography // Physical Review Letters. 2007. Vol. 98. N. 14. P. 148301.
5. *Georgiadis A., Routh A. F., Murray M. W., Keddie J. L.* Bespoke periodic topography in hard polymer films by infrared radiation-assisted evaporative lithography // Soft Matter. 2011. Vol. 7. Issue 23. P. 11098–11102.
6. *Колегов К. С.* Математическое моделирование тепло- и массопереноса в коллоидной жидкости, испаряющейся из ячейки под маской при ИК-нагреве // Прикаспийский журнал: управление и высокие технологии. 2016. № 4. Вып. 36. С. 85–98.
7. *Матвеевко В. Н., Курсанов Е. А.* Вязкость и структура дисперсных систем // Вестник Московского университета. Серия 2. Химия. 2011. Т. 52. № 4. С. 243–276.

## **Разработка численной методики оценки характеристик акустических резонансных процессов в проточной части газотурбинного двигателя**

**Р. Н. Колегов<sup>b,c</sup>, Т. П. Любимова<sup>a,b</sup>, А. А. Синер<sup>a,c</sup>**

<sup>a</sup> Пермский государственный национальный исследовательский университет, 614990, Пермь, ул. Букирева, 15

<sup>b</sup> Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013, Пермь, ул. Академика Королёва, 1

<sup>c</sup> АО «ОДК-Авиадвигатель», 614990, Пермь, ул. Комсомольский пр., 93

Проведено численное моделирование собственных резонансных частот канала перепуска воздуха авиационного двухконтурного двигателя. Получены результаты численных расчетов собственных частот полости перепуска в ANSYS CFX. В расчетах для возбуждения полости канала перепуска на входной границе задавался широкополосный шум (120 дБ) и поток со скоростью 60 м/с, что приводит к проявлению резонанса на собственной частоте полости. В расчете вдоль всей проточной части были установлены микрофоны, в которых записывалось статическое давление. На основании полученных сигналов было сделано Фурье преобразование и построены спектры. Результаты численных расчетов в ANSYS CFX собственной частоты хорошо согласуются с аналитическими и экспериментальными данными.

**Ключевые слова:** акустический резонанс; собственная частота; уравнения Навье-Стокса; Фурье преобразование

## **Development of numerical method for prediction of acoustic resonance phenomena characteristics in aircraft engine ducts**

**R. N. Kolegov<sup>b,c</sup>, T. P. Lyubimova<sup>a,b</sup>, A. A. Siner<sup>a,c</sup>**

<sup>a</sup> Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm

<sup>b</sup> Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Akademika Korolyova st. 1, 614013, Perm

<sup>c</sup> JSC«ODK-Aviadvigatel », Komsomolsky pr. 93, 614990, Perm

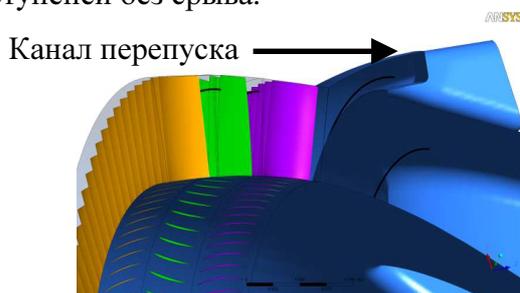
In present paper the numerical simulation of the resonance eigen frequencies of the double-flow aircraft engine bleed valve was conducted. The simulation was performed with ANSYS CFX commercial solver. The broadband excitation of 120 dB level was added to the main flow of 60 m/s at the inlet in the simulation. Such an excitation brings the resonance at the eigen frequencies of the valve. Several monitor points for static pressure were located inside the computational domain and the Fourier transform was applied to the obtained monitor signals.

Numerical results for the eigen frequency obtained with ANSYS CFX was in a good agreement with the analytical and the experimental data.

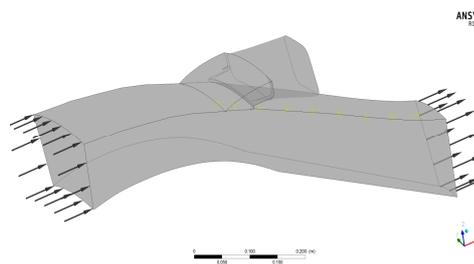
**Keywords:** acoustic resonance; eigen frequency; Navier-Stokes equations; Fourier transform

## 1. Введение

В авиационном двухконтурном двигателе для повышения давления на входе в компрессор высокого давления (КВД) устанавливаются подпорные ступени. Для обеспечения устойчивой работы подпорных ступеней на нерасчетных режимах осуществляют перепуск воздуха за вентилятором при помощи заслонок перепуска [1]. Общий вид каналов перепуска с заслонкой изображен на (рис. 1). В результате осевые скорости воздуха увеличиваются, а углы атаки приближаются к расчетным, что обеспечивает работу ступеней без срыва.



**Рис.1.** Подпорные ступени и канал перепуска



**Рис. 2.** Общий вид исходной расчетной области

Обобщая все ранее проведенные исследования, можно заключить, что полости канала перепуска при закрытых заслонках образуют объем с собственной резонансной частотой низких порядков. Во время эксплуатации авиационного двигателя в проточной части компрессора низкого давления (КНД) могут возникнуть колебания, способные возбудить полость канала перепуска на собственной частоте, в результате чего возникнет резонанс, который может привести к возникновению слышимого тонального шума или даже вызвать поломку лопаточной машины.

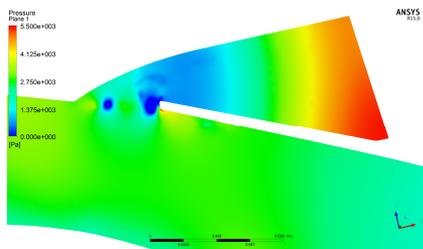
## 2. Постановка задачи

Рассматривается одиночный канал перепуска воздуха авиационного двигателя совместно с проточной частью за КНД (рис. 2). Для обоснования достоверности полученных результатов проведены расчеты газоздушного тракта за КНД без полости перепуска воздуха и расчеты при разной температуре на входной границе.

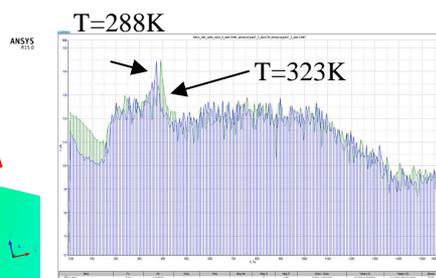
В качестве граничных условий на входе задавали поток со скоростью 60 м/с и нестационарный случайный сигнал (белый шум), реализуемый случайным распределением статического давления во времени, на выходе – статическое давление. Стенки канала в расчете полагались адиабатическими. Также на них задавалось условие прилипания. На выходе из расчетной области задавалось неотражающее граничное условие. Расчет проводился на неструктурированной сетке, которая состояла из 8281868 элементов.

## 3. Результаты

Рис. 3 иллюстрирует мгновенное распределение статического давления внутри расчетной области. Из представленных данных видно, что поле давления имеет максимум вблизи заслонки перепуска, что согласуется с [2].



**Рис. 3.** Мгновенное распределение давления



**Рис. 4.** Спектры пульсации давления в канале перепуска при разных температурах



**Рис. 5.** Спектры пульсации давления для геометрии без полости канала перепуска и с полостью

Для обоснования достоверности полученных результатов собственных частот проведены расчеты при разной температуре на входной границе. На (рис. 4) представлены спектры пульсации давления вблизи полости канала перепуска при разной температуре на входе  $T=288\text{K}$  и  $T=323\text{K}$ . Видно, что при увеличении температуры резонансная частота увеличивается, что согласуется с общей акустической теорией [4].

Также был рассмотрен случай численного моделирования газоздушного тракта за КНД без полости канала перепуска (рис. 5). Из спектров видно, что резонанс на частоте порядка 400 Гц вызван наличием в проточной части полости канала перепуска, так как в расчете без резонатора резонанс отсутствует

#### 4. Заключение

Возбуждение полости канала перепуска широкополосным шумом (120 дБ на полосу при разрешающей способности  $\Delta f=6$  Гц), фильтрованным в диапазоне частот от 200 до 1000 Гц, совместно с потоком 60 м/с приводит к проявлению резонанса на собственной частоте полости канала перепуска.

Результаты расчетов собственной частоты канала перепуска хорошо согласуются как с экспериментальными данными, так и с теоретическими выкладками (Таблица 1).

**Таблица 1.** Собственная частота канала перепуска

Численный расчет	Эксперимент [2]	Аналит. расчет [3]	Аналит. расчет [2]
372 Гц	391 Гц	450 Гц	370...430 Гц

#### Список литературы

1. Нихамкин М.А., Зальцман М.М. Конструкция основных узлов двигателя ПС-90А. Учеб. пособие – 2-е изд., испр. и доп., 2002. – 108 с.
2. Алексенцев А.А., Саженов А.Н., Сухинин С.В. Акустические резонансные явления в каналах перепуска воздуха авиационных двухконтурных двигателей // Прикладная механика и техническая физика. 2016. Номер 6. С. 12-21.
3. Двигатель ПС-90А. Моделирование частот акустических колебаний в каналах перепуска за КНД ПС-90А. Технический отчет №55198, ОАО “Авиадвигатель”, 2014
4. Морз Ф. Колебания и звук. – М.; Л.: Гостехиздат, 1949. – 496 с.

## Вихревое течение галлиевого сплава под действием внешнего магнитного поля

И. В. Колесниченко<sup>a</sup>, Г. Л. Лосев<sup>b</sup>, Р. И. Халилов<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Институт Механики Сплошных Сред Уральского Отделения Российской Академии Наук, 614013, Пермь, ул. Акад. Королева, 1

<sup>b</sup> Пермский государственный национальный исследовательский университет 614990, Пермь, ул. Букирева, 15

Экспериментально исследованы энергетические и частотные характеристики колебательного вихревого течения жидкого галлиевой эвтектики при помощи ультразвукового анемометра. В работе исследуется зависимость средней локальной кинетической энергии течения и выделенной частоты колебаний вихрей от величины и частоты приложенного внешнего переменного магнитного поля. Обнаружен немонотонный характер зависимости локальной энергии от величины и частоты внешнего поля. Зависимость частоты колебаний вихрей от параметров внешнего поля линейна.

**Ключевые слова:** вихревое течение; магнитная гидродинамика; жидкий металл

## Vortex flow of gallium allow under external alternating magnetic field

I. V. Kolesnichenko<sup>a</sup>, G. L. Losev<sup>b</sup>, R. I. Khalilov<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, 1, Ac. Korolev st., Perm, 614013

<sup>b</sup> Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm

The power and spectral parameters of oscillatory vortex flow of gallium eutectic have been investigated using ultrasonic Doppler velocimeter. The nonlinear and nonmonotonic dependences of vortexes mean local kinetic energy from value and frequency of external magnetic field have been found in experiment. The oscillation dominant frequency have shown linear dependence on magnetic field value and frequency.

**Keywords:** vortex flow; magnetohydrodynamics; liquid metal

### 1. Введение

Область приложения магнитной гидродинамики (МГД) охватывает такие технологически важные процессы как транспортировка, очистка, дозирование, и перемешивание расплавленных металлов и их сплавов. Зачастую в технологических приложениях МГД используются течения вызванные воздействием на металл внешних полей, порождающих в среде вихревые токи [1]. Взаимодействие токов с исходным магнитным полем порождает вихревое течение в металле. Основная проблема экспериментального исследования таких течений – высокие температура и химическая активность расплавленных металлов.

В данной работе исследуются энергетические и спектральные свойства колебательного течения жидкой галлиевой эвтектики (87.5% Ga, 10.5% Sn, 2% Zn) в плоском

горизонтальном слое во внешнем переменном магнитном поле при помощи распространённого метода [2-4] ультразвуковой доплеровской velocиметрии.

## 2. Описание экспериментальной установки

Повторяя конфигурацию работы [5], экспериментальная установка состоит из слоя жидкой галлиевой эвтектики (плотность  $\rho = 6256 \text{ кг/м}^3$ , кинематическая вязкость  $\nu = 3.1 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$ , электропроводность  $\sigma = 3.56 \cdot 10^6 \text{ См}$ , скорость звука в среде  $c = 2828 \text{ м/с}$ ), заключенного в кювету из органического стекла с размерами рабочей полости кюветы  $200 \times 100 \times 15 \text{ мм}^3$ . Слой помещен в зазор между полюсами С-образного индуктора, питание которого осуществляется от источника тока Pacific Smart Source. Использование ультразвукового анемометра DOP 2000 позволяет измерять выбранную компоненту скорости вдоль всего ультразвукового луча, не ограничиваясь одной лишь точкой. Перед началом опытов была найдена зависимость магнитной индукции поля в зазоре индуктора от силы тока в питающих катушках. Измерения производились при помощи тесламетра Lake Shore 421 Gauss meter. Линейный характер зависимости позволяет использовать силу тока в катушках индуктора в качестве меры внешнего воздействия.

## 3. Зависимость характеристик течения от силы тока

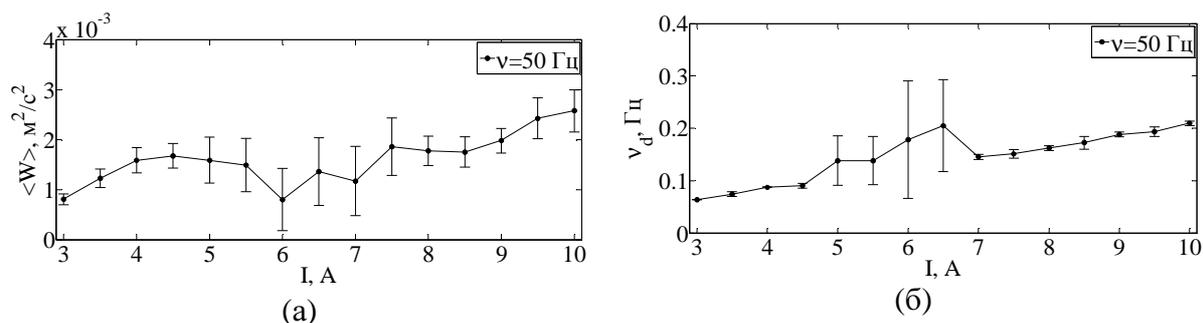
В ходе исследования профилей скорости течения жидкого металла при различных величинах электромагнитных сил (сила и частота токов питания катушек индуктора) были построены амплитудные и частотные зависимости средней удельной энергии течения  $W_y$  от силы тока в катушках электромагнита. Зависимость  $W_y$  с оценкой погрешности для 3 опытных реализаций приведена на (рис. 1. а).

Средняя энергия демонстрирует немонотонную зависимость от величины приложенного внешнего поля. В области токов  $I = 5.0 - 6.5 \text{ А}$  течение становится нестабильным и профили скорости демонстрируют случайный характер изменения. В то же время, зависимость доминантной частоты от силы тока демонстрирует линейный характер (рис. 1. б). Значительные величины погрешности в промежутке токов  $I = 5.0 - 6.5 \text{ А}$  говорят о непостоянстве частоты колебаний в данной области.

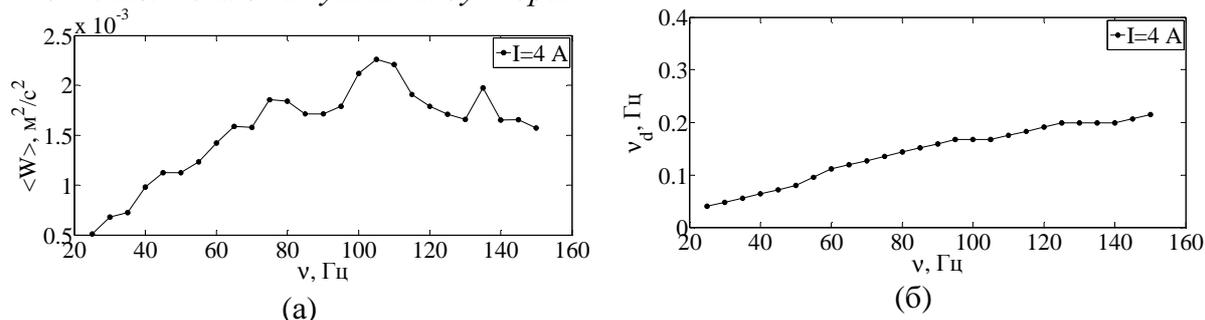
## 4. Зависимость от частоты тока

При решении задачи об оптимальных параметрах внешнего воздействия на жидкий металл с целью получения максимальной эффективности перемешивания необходимо рассмотреть влияние не только величины, но и частоты приложенного внешнего поля. В ходе работы были построены зависимости локальной средней энергии (рис. 2. а) и выделенной частоты колебаний профиля скорости (рис. 2. б) от частоты питающего тока в катушках индуктора.

Рис. 2. а демонстрирует ярко выраженные колебания на фоне общего роста кинетической энергии течения с ростом частоты в диапазоне  $25 - 105 \text{ Гц}$ . В то же время, по достижении частоты тока  $110 \text{ Гц}$ , наблюдается постепенное снижение энергии, что может свидетельствовать о качественной перестройке структуры течения (изменение общего количества вихрей, либо смещение наблюдаемого вихря в иную область). Частота колебаний профиля скорости линейно растёт с увеличением частоты внешнего поля. Таким образом, при заданной силе тока скорость перемешивания можно увеличить за счет изменения частоты воздействия на металл.



**Рис. 1.** Зависимость средней локальной энергии (а) и доминантной частоты (б) от силы тока в катушках индуктора.



**Рис. 2.** Зависимость средней локальной энергии (а) и доминантной частоты (б) от частоты питающего электромагнит тока.

## 5. Заключение

В ходе работы был обнаружен немонотонный характер зависимости средней локальной энергии вихревого течения жидкого металла от величины и частоты внешнего приложенного магнитного поля. Наличие участков, отвечающих локальному минимуму кинетической энергии течения, позволяет уменьшить интенсивность перемешивания металла при воздействиях одного порядка. В то же время, частота колебаний вихрей линейно зависит от величины и частоты внешнего поля, что указывает на повышение эффективности передачи энергии между вихрями.

### Список литературы

1. I. Kolesnichenko, S. Khripchenko, D. Buchenau, G. Gerbeth. Flow in a square layer of conducting liquid // Magnetohydrodynamics. 2005. Vol. 41, no. 1, p. 39–51.
2. O. Andreev, Y. Kolesnikov, A. Thess. Application of the ultrasonic velocity profile method to the mapping of liquid metal flows under the influence of a non-uniform magnetic field // Exp Fluids. 2009. No. 46, p. 77–83.
3. D. Rabiger, S. Eckert, G. Gerbeth. Measurements of an unsteady liquid metal flow during spin-up driven by a rotating magnetic field // Exp Fluids. 2010. No. 48, p. 233–244.
4. S. Eckert, P. A. Nikrityuk, D. Rabiger, K. Eckert, and G. Gerbeth. Efficient Melt Stirring Using Pulse Sequences of a Rotating Magnetic Field: Part I. Flow Field in a Liquid Metal Column // The Minerals, Metals & Materials Society and ASM International. 2007. Vol. 38, p. 977–988.
5. I. Kolesnichenko R. Khalilov S. Khripchenko. Vortical flow of conducting fluid driven by an alternating magnetic field in a plane channel // Magnetohydrodynamics. 2007. Vol. 43, no. 1. p. 45–52.

## Электровихревое течение жидкого металла в цилиндрическом объеме

И. В. Колесниченко<sup>a</sup>, С. Д. Мандрыкин<sup>b</sup>, Р. И. Халилов<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Институт механики сплошных сред Уральского отделения Российской Академии Наук, 614013, Пермь, ул. Акад. Королева, 1

<sup>b</sup> Пермский государственный национальный исследовательский университет 614990, Пермь, ул. Букирева, 15

В работе исследуется электровихревое течение в цилиндрическом объеме с боковым локализованным подводом электрического тока. Характеристики скорости определяются путем численного счета и эксперимента. Эксперимент проводится с использованием галлиевой эвтектики и ультразвукового доплеровского анемометра. Получены профили и поля скорости для разных значений тока. Изучены характеристики колебательного режима течения.

**Ключевые слова:** электровихревое течение; магнитная гидродинамика; жидкий металл

## Electrovortex flow of liquid metal in cylindrical volume

I. V. Kolesnichenko<sup>a</sup>, S. D. Mandrykin<sup>b</sup>, R. I. Khalilov<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, 1, Ac. Korolev st., Perm, 614013

<sup>b</sup> Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm

In this paper, the electro-vortex flow in a cylindrical volume with a lateral localized electric current supply is investigated. The velocity characteristics are evaluated by numerical calculation and experiment. The experiment is carried out using a gallium eutectic and an ultrasonic Doppler anemometer. The profiles and velocity fields are obtained for different values of electric current. The characteristics of the flow oscillations are studied.

**Keywords:** electrovortex flow; magnetohydrodynamics; liquid metal

### 1. Введение

Электровихревое течение электропроводной жидкости возникает при протекании электрического тока по жидкости и взаимодействии с ним собственного магнитного поля [1]. Это течение появляется в процессах, использующих локализованный кондукционный подвод электрического тока к жидкому металлу с помощью электродов. Эти течения могут выполнять полезную функцию перемешивания при кристаллизации жидкого металла в отдельных объемах [2, 3] для улучшения кристаллической структуры, либо в плавильных дуговых печах [4]. С другой стороны, эти течения могут выполнять нежелательное перемешивание содержимого жидкометаллических батарей, используемых для накопления электроэнергии [5]. Также эти течения можно использовать в плоских каналах [6] в устройствах для перекачивания жидкого металла [7]. Все это обуславливает интерес к электровихревым течениям.

В данной работе исследуется малоизученный случай течения в цилиндрическом объеме с боковым локализованным подводом электрического тока. В данном случае должна возникнуть двухтороидальная конфигурация течения. Целью работы является исследование характеристик интенсивности течения и его колебаний.

## 2. Методы

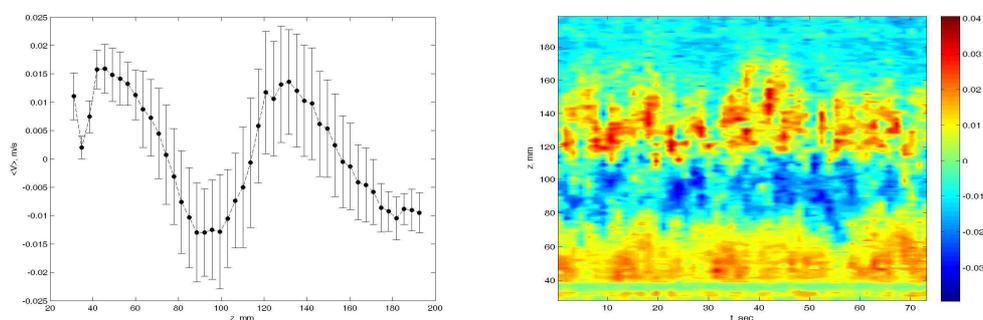
Экспериментальное исследование проводилось на установке, состоящей из цилиндрического канала длиной 204 мм и диаметром 68 мм из нержавеющей стали, торцевые стенки которого изготовлены из плексигласа. Канал заполнен галлиевой эвтектикой (87.5%Ga+10.5%Sn+2%Zn, плотность  $\rho = 6256 \text{ кг/м}^3$ , кинематическая вязкость  $\nu = 3.1 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$ , электропроводность  $\sigma = 3.56 \cdot 10^6 \text{ См}$ , скорость звука  $c = 2828 \text{ м/с}$ ). К боковым стенкам канала оппозитно подведены цилиндрические медные электроды диаметром 20 мм. Они подключены к источнику постоянного тока. Канал снаружи покрыт теплоизоляцией для подавления конвективного течения.

Для измерения характеристик течения использовался ультразвуковой доплеровский анемометр (Dop-2000, Signal Processing, Switzerland). С помощью него можно получить эволюцию компоненты профиля скорости, направленной вдоль луча [6]. Главным преимуществом методики является возможность проводить измерения в непрозрачной жидкости, где нельзя использовать оптические полевые методы. В исследовании использовалось несколько датчиков с частотой 4 МГц, подключенных к мультиплексору. Прибор позволяет получить как осредненные профили, так и изучить низкочастотные осцилляции профиля скорости.

Численное исследование трехмерных процессов в цилиндрическом канале производилось с помощью математической модели, основанной на уравнениях магнитной гидродинамики. Электродинамическая часть задачи описывается системой уравнений Максвелла. Гидродинамическая часть задачи описывается уравнением Навье-Стокса и неразрывности поля скорости, при этом для описания турбулентности используется модель LES. На границе для скорости ставится условие прилипания.

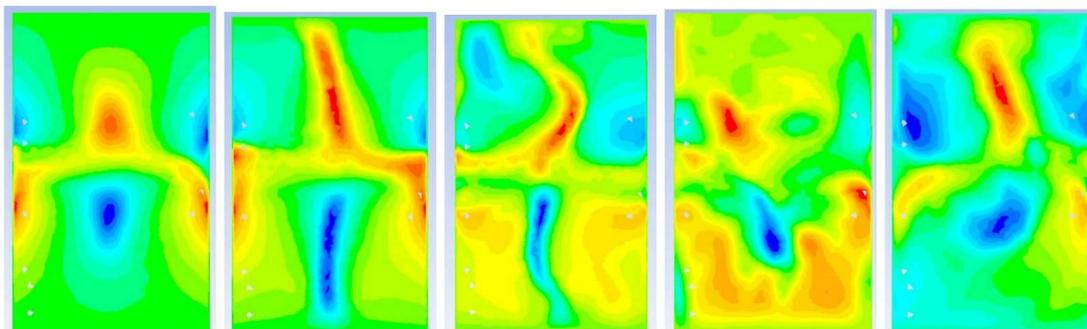
## 3. Результаты

Эксперимент показал, что в канале возникает вихревое течение. На (рис. 1) приведены примеры профиля для одного значения тока, на котором указаны среднеквадратичные отклонения скорости в данной точке, а также диаграмма эволюции профиля скорости. Течение нестационарно — об этом свидетельствуют значительные отклонения от среднего, а также чередование зон максимума и минимума на диаграмме.



**Рис. 1.** Пример профиля течения жидкого металла (слева) и диаграммы его эволюции (справа)

Численные расчеты показали, что течение в виде двух тороидальных вихрей возникает либо при малых токах, либо при больших токах, но в начальный момент времени. Осредненное течение близко к стационарному случаю в виде двух тороидальных вихрей. Далее происходит эволюция этих вихрей в виде попеременного усиления их интенсивности, при этом происходят их искажения. Это видно на эволюции сечения поля скорости (рис. 2).



**Рис. 2.** Пример эволюции осевой компоненты скорости в осевом сечении от начала развития течения (электроды — в плоскости сечения)

#### 4. Выводы

Результаты исследования показали, что двухтороидальная конфигурация течения сохраняется в стационарном состоянии только при малых значениях тока, которые не представляют практический интерес. Нестационарность течения проявляется в перемещениях вихрей и попеременном усилении их интенсивности. Эксперименты показали, что в данной конфигурации канала необходимо использовать теплоизоляцию, иначе джоулево тепло приводит к развитию интенсивного конвективного течения. Результаты расчетов и экспериментов согласуются по величине скорости и близки по конфигурации профилей.

#### Список литературы

1. Бояревич В. В., Фрейберг Я. Ж., Шилова Е. И., Щербинин Э. В. Электровихревые течения. / Под ред. Щербинина Э.В. Рига: "Зинатне", 1985. 315 с.
2. Rübiger D., Zhang Y., Galindo V., Franke S., Willers B., Eckert S. The relevance of melt convection to grain refinement in Al-Si alloys solidified under the impact of electric currents. // Acta Materialia, Elsevier BV. 2014. № 79. P. 327-338.
3. Franke S., Rübiger D., Galindo V., Zhang Y., Eckert S. Investigations of electrically driven liquid metal flows using an ultrasound Doppler flow mapping system // Flow Measurement and Instrumentation, Elsevier BV. 2016. № 48. P. 64-73.
4. Kazak O. Modeling of Vortex Flows in Direct Current (DC) Electric Arc Furnace with Different Bottom Electrode Positions // Metallurgical and Materials Transactions B, Springer Nature. 2013 № 44. P. 1243-1250.
5. Weber N., Galindo V., Priede J., Stefani F., Weier T. The influence of current collectors on Taylor instability and electro-vortex flows in liquid metal batteries // Physics of Fluids, AIP Publishing. 2015. № 27, 014103.
6. Kolesnichenko I., Khripchenko S., Buchenau D., Gerbeth G.. Flow in a square layer of conducting liquid // Magnetohydrodynamics. 2005. Vol. 41, no. 1, P. 39–51.
7. Khripchenko S., Kolesnichenko I., Dolgikh V., Denisov S. Pumping effect in a flat MHD channel with an electrovortex flow // Magnetohydrodynamics. 2008. № 44. P. 303-313.

## АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- |                                     |                                   |                                       |
|-------------------------------------|-----------------------------------|---------------------------------------|
| <b>A</b>                            |                                   |                                       |
| Aland S., 1-12                      | Shevtsova V., 1-20, 1-23,<br>1-27 | Власова О.А., 1-107                   |
| <b>B</b>                            | Simanovskii I.B., 1-26            | Волегов П.С., 2-119,<br>2-214         |
| Baaske P., 1-18                     | <b>V</b>                          | Воробьев А.М., 1-110,<br>1-194, 2-34  |
| Bataller H., 1-18                   | Vailati A., 1-18                  | Вязьмин А.В., 2-200                   |
| Boeck T., 1-12                      | Viviani A., 1-26                  | <b>Г</b>                              |
| Braibanti M., 1-18                  | <b>X</b>                          | Газдалиев И.М., 2-148                 |
| <b>C</b>                            | Xu Shenghua., 1-18                | Ганченко Г.С., 1-143                  |
| Carpineti M., 1-18                  | <b>Y</b>                          | Ганченко Н.Ю., 1-226                  |
| Cerbino R., 1-18                    | Yasnou V., 1-20, 1-27             | Гаришин О.К., 1-113,<br>2-128, 2-197  |
| Croccolo F., 1-18                   | <b>A</b>                          | Гагапова Е.Я., 1-116                  |
| <b>D</b>                            | Алабужев А.А., 1-30,<br>1-33      | Гилев В.Г., 1-80                      |
| Donev A., 1-18                      | Александров В.А., 1-36            | Глухов А.Ф., 1-119                    |
| <b>E</b>                            | Аливердиев А.А., 1-39             | Голдобин Д.С., 1-122,<br>1-125, 2-148 |
| Eckert K., 1-12                     | Арсланбекова Р.Б., 1-39           | Гольцман А.Е., 1-214                  |
| <b>G</b>                            | Асмолов Е.С., 1-42                | Гомзииков Л.Ю., 1-209                 |
| Garonenko Y., 1-20, 1-27            | Ахмедагаев Р.М., 1-45             | Гончарова О.Н., 1-51                  |
| <b>H</b>                            | <b>Б</b>                          | Горбачева Е.В., 1-128                 |
| Hanifi A., 1-68, 71                 | Бабушкин И.А., 2-190,             | Гордеева В.Ю., 1-131                  |
| Hein S., 1-68, 71                   | Батищева К.А., 1-48               | Гороженинова Т.Н.,<br>1-134           |
| <b>K</b>                            | Бейбалаев В.Д., 1-39              | Госсман Н.А., 1-137                   |
| Köhler W., 1-18                     | Бекежанова В.Б., 1-51             | <b>Д</b>                              |
| Köllner T., 1-12                    | Белов С.Ю., 1-54                  | Давыдова М.А., 1-140                  |
| <b>M</b>                            | Белозеров А.С., 1-87              | Демёхин Е.А., 1-128,<br>1-143         |
| Mialdun A., 1-20, 1-27              | Беляев Ю.Н., 1-59                 | Дёмин А.А., 1-146                     |
| Mokbel M., 1-12                     | Беляева Н.А., 1-62                | Демин В.А., 1-74, 1-149               |
| <b>N</b>                            | Берсенев Ю.В., 2-28               | Денисова М.О., 1-152,<br>2-101        |
| Nepomnyashchy A., 1-20              | Бондаренко А.В., 1-65             | Диденкулова И.И., 2-131               |
| <b>O</b>                            | Бородулин В.И., 1-68,<br>1-71     | Добросельский К.Г.,<br>1-156          |
| Örlü R., 1-68, 1-71                 | Брацун Д.А., 1-74, 1-77           | Долгих Т.Ф., 1-159                    |
| Ortiz de Zárate J.M., 1-14,<br>1-18 | Бузмакова М.М., 1-80              | Дудак А.А., 2-40                      |
| <b>S</b>                            | Буркова Л.Н., 1-84                | Дударь Е.С., 1-162                    |
| Schwarzenberger K., 1-12            | Быков А.В., 1-87                  | Дударь О.И., 1-162                    |
|                                     | <b>В</b>                          | Дядюкина А.Д., 1-165                  |
|                                     | Ваганов М.В., 1-93                | <b>Е</b>                              |
|                                     | Вараксина Е.И., 2-184             | Евграфова А.В., 2-61                  |
|                                     | Вассерман И.Н., 1-96              | Егоров М.Ю., 1-168                    |
|                                     | Вертгейм И.И., 1-99               | Ефремов Д.В., 1-172                   |
|                                     | Виноградов Д.А., 1-103            |                                       |
|                                     | Виноградова О.И., 1-42            |                                       |

### З

Загвозкин Т.Н., 1-175  
Захаров А.П., 1-178  
Захлевных А.Н., 1-181,  
1-184, 2-81, 2-116  
Земляникин А.Ю., 2-166  
Зубарев Н.М., 1-187  
Зубова Н.А., 1-190  
Зюзгин А.В., 1-77

### И

Иванов А.В., 1-68, 1-71  
Иванцов А.О., 1-194,  
1-198  
Ивочкин Ю.П., 1-103  
Ильин В.А., 2-172  
Ильин Н.А., 1-194, 2-175  
Исламова А.Г., 1-206

### К

Кабов О.А., 1-116  
Казаков А.В., 1-65  
Казимарданов М.Г.,  
1-209  
Калинин Е.И., 1-214  
Караваев А.С., 1-217  
Карпунин И.Э., 1-220  
Качанов Ю.С., 1-68, 1-71  
Кашина М.А., 1-30, 1-223  
Кирий В.А., 1-226  
Киченко А.А., 1-134,  
1-165  
Клементьева И.Б., 1-103  
Клименко Л.С., 1-125,  
1-230, 1-234  
Климов Н.А., 2-12  
Кнутова Н.С., 1-238  
Козлов В.Г., 1-140, 2-255  
Козлов Н.В., 1-107, 1-220  
Колегов К.С., 1-242  
Колегов Р.Н., 1-246  
Колесниченко Е.В., 2-19  
Колесниченко И.В.,  
1-249, 1-252  
Колмогоров Г.Л., 2-12  
Колчанов Н.В., 2-19, 2-22  
Колчанова Е.А., 2-22  
Кондрашов А.Н., 1-84  
Кондюрин А.В., 1-146

Копысов С.П., 1-217,  
2-25, 2-107  
Копьев В.Ф., 2-28  
Корбанова Е.Г., 1-116  
Костарев К.Г., 1-152  
Кочурин Е.А., 1-187  
Красняков И.В., 1-77  
Крутова И.Ю., 2-31  
Кси Р., 2-34  
Кузнецов А.А., 2-37  
Кузнецов Г.В., 2-40, 2-45  
Кузнецова Е.В., 2-12  
Кузнецова К.В., 1-181  
Кузьмин И.М., 2-25  
Куликов Ю.М., 2-52  
Куркин А.А., 2-58, 2-166  
Куркина О.Е., 2-58, 2-210  
Кучинский М.О., 2-61

### Л

Ладейщикова В.В., 1-119  
Ландик Л.В., 2-139  
Лебедев А.В., 2-64  
Левашов А.П., 2-125  
Лепихин А.П., 1-125,  
2-71  
Лешанский А.М., 2-98  
Листратов Я.И., 1-45,  
2-223  
Лиходеев Н.М., 2-166  
Лосев Г.Л., 1-249  
Лысенко С.Н., 2-101,  
2-104  
Любимов Д.В., 1-110,  
1-122, 1-234, 2-242  
Любимова Т.П., 1-110,  
1-122, 1-125, 1-175,  
1-190, 1-194, 1-198,  
1-209, 1-246, 2-67, 2-71,  
2-75, 2-78, 2-136, 2-242  
Люшнин А.В., 1-131

### М

Мазо А.Б., 1-214  
Майер В.В., 2-184  
Макаров Д.В., 2-81,  
2-116, 2-226  
Максимов В.И., 2-40  
Малышкин Д.С., 1-59  
Малюков А.В., 1-214

Мандрыкин С.Д., 1-252,  
2-81  
Манцуров А.В., 1-184  
Марышев Б.С., 1-230,  
2-84, 2-88  
Мерзляков А.Ф., 1-80  
Мизёв А.И., 1-74, 1-149,  
2-92  
Мингалев С.В., 1-209  
Мищенко Д.А., 1-68, 1-71  
Молочников В.М., 1-214  
Морозов И.А., 2-95  
Морозов К.И., 2-98  
Мошева Е.А., 2-101,  
2-104

### Н

Наймарк О.Б., 1-172  
Недожогин Н.С., 2-107,  
2-110  
Ни А.Э., 2-45  
Низкая Т.В., 1-42  
Никулин И.Л., 2-113  
Новиков А.А., 2-116  
Новиков А.К., 2-25, 2-107

### О

Озерных В.С., 2-119  
Омаров И.О., 1-39  
Опрышко О.В., 2-31  
Орлова Е.Г., 1-206  
Остапович К.В., 2-122  
Охотников Д.И., 1-214  
Ошмарина М.В., 1-152

### П

Паймушин В.Н., 2-125  
Пальчиковский В.В., 2-28  
Паршакова Я.Н., 2-71  
Пелевин А.Г., 2-128  
Пелиновский Е.Н., 2-131,  
2-210  
Перминов А.В., 2-113,  
2-136  
Пестренин В.М., 2-139  
Пестренина И.В., 2-139  
Петров Д.А., 2-142, 2-145  
Петухов М.И., 1-74,  
1-149  
Пименова А.В., 1-122,  
1-125, 2-148

Писмен Л.М., 1-178  
Полосков И.Е., 2-151  
Полудницин А.Н., 2-154  
Попов Ф.С., 2-157  
Попова Е.Н., 2-61  
Прокопьев С.А., 2-75  
Прянишникова Е.А., 1-62  
Пшеничников А.Ф., 2-37,  
2-160

## Р

Райхер Ю.Л., 1-93  
Резник В.В., 2-200  
Репина М.Ю., 1-226  
Роговой А.А., 2-163  
Родин А.А., 2-166  
Родина Н.А., 2-166  
Рувинская Е.А., 2-58,  
2-210  
Рудяк В.Я., 2-169  
Русаков С.В., 1-80, 146  
Рушинская К.С., 2-172  
Рыбин А.В., 2-58  
Рыбкин К.А., 1-84  
Рябкова Н.А., 1-65  
Ряшенцев В.В., 1-202,  
2-175

## С

Сагитов Р.В., 2-178  
Садилов Е.С., 2-181  
Саранин В.А., 2-184  
Сармакеева А.С., 2-187  
Сбоев И.О., 1-84, 2-190  
Свистков А.Л., 1-113,  
1-146, 2-197  
Семенов Д.В., 2-142  
Сидоров А.С., 1-119  
Синер А.А., 1-246  
Скоков П.К., 2-145  
Слюняев А.В., 2-210

Сморозин Б.Л., 2-233  
Соболева Е.Б., 2-194  
Соколов А.К., 2-197  
Сон Э.Е., 2-52  
Сорокин В.Г., 2-200  
Спивак Л.В., 2-203  
Спивак С.И., 2-206  
Степанов Р.А., 2-217  
Столбова О.С., 2-163  
Столин А.М., 1-62  
Ступникова А.В., 2-207  
Субботин С.В., 1-140  
Сухановский А.Н., 2-61

## Т

Талипова Т.Г., 2-210  
Тельканов М.А., 2-214  
Тепляков И.О., 1-103  
Терпугов В.Н., 1-146  
Титов В.В., 2-217  
Тонков Л.Е., 1-36, 2-25,  
2-110, 2-187  
Торохова С.В., 1-152  
Трусов П.В., 2-122  
Труфанова Н.М., 1-65  
Тюлькина И.В., 2-220  
Тялина Н.А., 2-223

## У

Уваров С.В., 1-172  
Уткин М.А., 2-226

## Ф

Файзрахманова И.С.,  
2-78, 2-113  
Фатгалов О.О., 2-67  
Феоктистов Д.В., 1-48,  
1-206, 2-245  
Фирсов В.А., 2-125  
Франц Е.А., 1-143  
Фрейберг М.А., 2-95

## Х

Халилов Р.И., 1-249,  
1-252  
Храмцов И.В., 2-28

## Ц

Циберкин К.Б., 2-230

## Ч

Черенкова Е.С., 2-28  
Черепанов И.Н., 2-233  
Чернова А.А., 2-110  
Чиглинцева А.С., 2-236  
Чикулаев Д.Г., 2-239

## Ш

Шадрин В.В., 1-113,  
2-128  
Шардаков И.Н., 1-96  
Шарифулин А.Н., 2-154,  
2-178, 2-207, 2-242  
Шарифулин В.А., 2-242  
Шарифулин Т.М., 2-245  
Шварц К.Г., 1-238, 2-239,  
2-249  
Шелистов В.С., 1-143  
Шестаков А.П., 1-96  
Шихов А.Н., 1-87  
Шишкин В.М., 2-125  
Шмыров А.В., 1-74,  
1-152, 2-92, 2-101, 2-104  
Шмырова А.И., 1-152,  
2-92, 2-101  
Шургалина Е.Г., 2-131,  
2-252

## Щ

Щипицын В.Д., 2-255

## ALPHABETICAL INDEX

### A

Akhmedagaev R.M., 1-45  
Alabuzhev A.A., 1-30, 1-33  
Aland S., 1-12  
Aleksandrov V.A., 1-36  
Aliverdiev A.A., 1-39  
Arslanbekova R.B., 1-39  
Asmolov E.S., 1-42

### B

Baaske P., 1-18  
Babushkin I. A., 2-190  
Bataller H., 1-18  
Batishcheva K.A., 1-48  
Bekezhanova V.B., 1-51  
Belov S.Yu., 1-54  
Belozorov A.S., 1-87  
Belyaeva N.A., 1-62  
Belyayev Yu.N., 1-59  
Beybalaev V.D., 1-39  
Boeck T., 1-12  
Bondarenko A.V., 1-65  
Borodulin V.I., 1-68, 1-71  
Braibanti M., 1-18  
Bratsun D.A., 1-74, 1-77  
Burkova L.N., 1-84  
Buzmakova M.M., 1-80  
Bykov A.V., 1-87

### C

Carpineti M., 1-18  
Cerbino R., 1-18  
Cherenkova E. S., 2-28  
Cherepanov I. N., 2-233  
Chernova A. A., 2-110  
Chiglintseva A.S., 2-236  
Chikulaev D. G., 2-239  
Croccolo F., 1-18

### D

Davydova M.A., 1-140  
Demekhin E.A., 1-128,  
1-143  
Demin A.A., 1-146  
Demin V.A., 1-74, 1-149  
Denisova M. O., 2-101  
Denisova M.O., 1-152  
Didenkulova I. I., 2-131

Dobrosel'skii K.G., 1-156  
Dolgikh T.F., 1-159  
Donev A., 1-18  
Dudak A. A., 2-40  
Dudar E.S., 1-162  
Dudar O.I., 1-162  
Dyadyukina A.D., 1-165

### E

Eckert K., 1-12  
Efremov D.V., 1-172  
Egorov M.Yu., 1-168  
Evgrafova A. V., 2-61

### F

Faizrakhmanova I.S., 2-78,  
2-113  
Fattalov O. O., 2-67  
Fedenkova A.A., 1-71  
Feoktistov D. V., 2-245  
Feoktistov D.V., 1-48,  
1-206  
Firsov V. A., 2-125  
Frants E.A., 1-143  
Freyberg M. A., 2-95

### G

Ganchenko G.S., 1-143  
Ganchenko N.Yu., 1-226  
Gaponenko Y., 1-20, 1-26  
Garishin O. K., 2-128,  
2-197  
Garishin O.K., 1-113  
Gatapova E.Ya., 1-116  
Gazdaliev I. M., 2-148  
Gilev V.G., 1-80  
Glukhov A.F., 1-119  
Goldobin D. S., 2-148  
Goldobin D.S., 1-122,  
1-125  
Goltsman A.E., 1-214  
Gomzikov L.Y., 1-209  
Goncharova O.N., 1-51  
Gorbacheva E.V., 1-128  
Gordeeva V.Y., 1-131  
Gorozheninova T.N., 1-134  
Gossman N.A., 1-137

### H

Hanifi A., 1-68  
Hein S., 1-68

### I

Ilin V. A., 2-172  
Ilyin N. A., 2-175  
Ilyin N.A., 1-204  
Islamova A.G., 1-206  
Ivanov A.V., 1-68, 1-71  
Ivantsov A.O., 1-194, 1-198  
Ivochkin Yu.P., 1-103

### K

Kabov O.A., 1-116  
Kachanov Yu.S., 1-65, 1-68  
Kalinin E.I., 1-214  
Karavaev A.S., 1-217  
Karpunin I.E., 1-220  
Kashina M.A., 1-30, 1-223  
Kazakov A.V., 1-65  
Kazimardanov M.G., 1-209  
Khalilov R.I., 1-249, 1-252  
Khramtsov I. V., 2-28  
Kichenko A.A., 1-134,  
1-165  
Kiriya V.A., 1-226  
Klementeva I.B., 1-103  
Klimenko L.S., 1-125,  
1-230, 1-234  
Klimov N. A., 2-12  
Knutova N.S., 1-238  
Kochurin E.A., 1-187  
Köhler W., 1-18  
Kolchanov N. V., 2-19,  
2-22  
Kolchanova E. A., 2-22  
Kolegov K.S., 1-242  
Kolegov R.N., 1-246  
Kolesnichenko E.V., 2-19  
Kolesnichenko I.V., 1-249,  
1-252  
Köllner T., 1-12  
Kolmogorov G. L., 2-12  
Kondrashov A.N., 1-84  
Kondyurin A.V., 1-146  
Kopiev V. F., 2-28  
Kopysov S. P., 2-25, 2-107  
Kopysov S.P., 1-217

Korbanova E.G., 1-116  
Kostarev K.G., 1-152  
Kozlov N.V., 1-107, 1-220  
Kozlov V. G., 2-255  
Kozlov V.G., 1-140  
Krasnyakov I.V., 1-77  
Krutova I.Y., 2-31  
Kuchinskii M. O., 2-61  
Kulikov Y.M., 2-52  
Kurkin A. A., 2-58, 2-166  
Kurkina O. E., 2-58, 2- 210  
Kuzmin I. M., 2-25  
Kuznecova E. V., 2-12  
Kuznetsov A. A., 2-37  
Kuznetsov G. V., 2-40,  
2-45  
Kuznetsova K.V., 1-181

## L

Ladeyshchikova V.V.,  
1-119  
Landik L.V., 2-139  
Lebedev A. V., 2-64  
Lepikhin A. P., 2-71  
Lepikhin A.P., 1-125  
Leshansky A. M., 2-98  
Levashov A. P., 2-125  
Likhodeev N.M., 2-166  
Listratov Y. I., 2-223  
Listratov Ya.I., 1-45  
Losev G.L., 1-249  
Lysenko S. N., 2-101,  
2-104  
Lyubimov D. V., 2-242  
Lyubimov D.V., 1-110,  
1-122, 1-234  
Lyubimova T. P., 2-67,  
2-71, 2-75, 2-78, 2-136,  
2-242  
Lyubimova T.P., 1-110,  
1-122, 1-125, 1-175, 1-190,  
1-194, 1-198, 1-209, 1-246  
Lyushnin A.V., 1-131

## M

Makarov D. V., 2-81,  
2-116, 2-226  
Maksimov V. I., 2-40  
Malyshkin D.S., 1-59  
Malyukov A.V., 1-214  
Mandrykin S. D., 2-81

Mandrykin S.D., 1-252  
Mantsurov A.V., 1-184  
Maryshev B. S., 2-84, 2-88  
Maryshev B.S., 1-230  
Mayer V.V., 2-184  
Mazo A.B., 1-214  
Merzlyakov A.F., 1-80  
Mialdun A., 1-20  
Mingalev S.V., 1-209  
Mischenko D.A., 1-68, 1-71  
Mizev A. I., 2-92  
Mizev A.I., 1-74, 1-149  
Mokbel M., 1-12  
Molochnikov V.M., 1-214  
Morozov I. A., 2-95  
Morozov K. I., 2-98  
Mosheva E. A., 2-101,  
2-104

## N

Naimark O.B., 1-172  
Nedozhogin N. S., 2-107,  
2-110  
Nee A. E., 2-45  
Nepomnyashchy A., 1-20  
Nikulin I.L., 2-113  
Nizkaya T.V., 1-42  
Novikov A. A., 2-116  
Novikov A. K., 2-25, 2-107

## O

Okhotnikov D.I., 1-214  
Omarov I.O., 1-39  
Opryshko O.V., 2-31  
Orlova E.G., 1-206  
Örlü R., 1-68  
Ortiz de Zárate J.M., 1-14,  
1-18  
Oshmarina M.V., 1-152  
Ostapovich K. V., 2-122  
Ozernykh V.S., 2-119

## P

Paimushin V. N., 2-125  
Palchikovskiy V. V., 2-28  
Parshakova Ya. N., 2-71  
Pelevin A. G., 2-128  
Pelinovsky E. N., 2-131  
Pelinovsky E.N., 2- 210  
Perminov A. V., 2-113,  
2-136

Pestrenin V.M., 2-139  
Pestrenina I.V., 2-139  
Petrov D. A., 2-142, 2-145  
Petukhov M.I., 1-74, 1-149  
Pimenova A. V., 2-148  
Pimenova A.V., 1-122,  
1-125  
Pismen L.M., 1-178  
Poloskov I. E., 2-151  
Poludnitsin A. N., 2-154  
Popov F. S., 2-157  
Popova E. N., 2-61  
Prokopev S. A., 2-75  
Pryanishnikova E.A., 1-62  
Pshenichnikov A. F., 2-37,  
2-160

## R

Raikher Yu.L., 1-93  
Repina M.Yu., 1-226  
Reznik V. V., 2-200  
Riabkova N.A., 1-65  
Rodin A.A., Zemlyanikin  
A.Y., 2-166  
Rodina N.A., 2-166  
Rogovoy A. A., 2-163  
Rouvinskaya E. A., 2-58, 2-  
210  
Rudyak V. Ya., 2-169  
Rusakov S.V., 1-80, 1-146  
Rushinskaya K. S., 2-172  
Ryashentsev V. V., 2-175  
Ryashentsev V.V., 1-202  
Rybin A. V., 2-58  
Rybkin K.A., 1-84

## S

Sadilov E. S., 2-181  
Sagitov R. V., 2-178  
Saranin V.A., 2-184  
Sarmakeeva A. S., 2-187  
Sboev I. O., 2-190  
Sboev I.O., 1-84  
Schipitsyn V. D., 2-255  
Schwarzenberger K., 1-12  
Semenov D. V., 2-142  
Shadrin V. V., 2-128  
Shadrin V.V., 1-113  
Shardakov I.N., 1-96  
Sharifulin A. N., 2-154,  
2-178, 2-207, 2-242

Sharifulin T. M., 2-245  
Sharifulin V. A., 2-242  
Shelistov V.S., 1-143  
Shestakov A.P., 1-96,  
Shevtsova V., 1-20, 1-23,  
1-27  
Shikhov A.N., 1-87  
Shishkin V. M., 2-125  
Shmyrov A. V., 2-92,  
2-101, 2-104  
Shmyrov A.V., 1-74, 1-152  
Shmyrova A. I., 2-92, 2-101  
Shmyrova A.I., 1-152  
Shurgalina E. G., 2-131,  
2-252  
Shvarts K. G., 2-239, 2-249  
Shvarts K.G., 1-238  
Sidorov A.S., 1-119  
Simanovskii I.B., 1-26  
Siner A.A., 1-246  
Skokov P. K., 2-145  
Slunyaev A.V., 2- 210  
Smorodin B. L., 2-233  
Soboleva E. B., 2-194  
Sokolov A. K., 2-197  
Son E.E., 2-52  
Sorokin V. G., 2-200  
Spivak L. V., 2-203  
Spivak S. I., 2- 206  
Stepanov R. A., 2-217  
Stolbova A. S., 2-163  
Stolin A.M., 1-62

Stupnikova A. V., 2- 207  
Subbotin S.V., 1-140  
Sukhanovskii A. N., 2-61  
Svistkov A. L., 2-197  
Svistkov A.L., 1-113, 1-146

## T

Talipova T.G., 2- 210  
Telkanov M. A., 2-214  
Teplyakov I.O., 1-103  
Terpugov V.N., 1-146  
Titov V. V., 2-217  
Tonkov L. E., 2-25, 2-110,  
2-187  
Tonkov L.E., 1-36  
Torokhova S.V., 1-152  
Trufanova N.M., 1-65  
Trusov P. V., 2-122  
Tsiberkin K. B., 2-230  
Tyalina N. A., 2-223  
Tyulkina I. V., 2-220

## U

Utkin M. A., 2-226  
Uvarov S.V., 1-172

## V

Vaganov M.V., 1-93  
Vailati A., 1-18  
Varaksina E.I., 2-184  
Vasserman I.N., 1-96

Vinogradov D.A., 1-103  
Vinogradova O.I., 1-42  
Viviani A., 1-26  
Vlasova O.A., 1-107  
Volegov P. S., 2-214, 2-119  
Vorobev A., 2-34  
Vorobev A.M., 1-110,  
1-194  
Vyazmin A. V., 2-200

## W

Wertgeim I.I., 1-99

## X

Xie R., 2-34  
Xu Shenghua 1-18

## Y

Yasnou V., 1-20, 1-27

## Z

Zagvozhkin T.N., 1-175  
Zakharov A.P., 1-178  
Zakhlevnykh A. N., 2-81,  
2-116  
Zakhlevnykh A.N., 1-181,  
1-184  
Zubarev N.M., 1-187  
Zubova N.A., 1-190  
Zyuzgin A.V., 1-77

*Научное издание*

# **НЕРАВНОВЕСНЫЕ ПРОЦЕССЫ В СПЛОШНЫХ СРЕДАХ**

Материалы международного симпозиума

**Том 1**

Издается в авторской редакции  
Техническая подготовка материалов: *М. А. Кашина*

---

Подписано в печать 27.04.2017. Формат 60×84/16  
Усл. печ. л. 15,23. Тираж 200 экз. Заказ \_\_\_\_

---

Издательский центр  
Пермского государственного  
национального исследовательского университета.  
614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15

Отпечатано на ризографе  
ООО Учебный центр «ИНФОРМАТИКА».  
614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15