

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ ПЕРМСКОГО КРАЯ  
ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД УРО РАН  
ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. М. В. ЛОМОНОСОВА

# НЕРАВНОВЕСНЫЕ ПРОЦЕССЫ В СПЛОШНЫХ СРЕДАХ

Материалы  
международного симпозиума

**Том 2**



Пермь 2017

УДК [539.3+532.5](063)

ББК 22.25

Н54

**Неравновесные процессы в сплошных средах: материалы междунар. симп.: в 2 т. /** Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Пермь, 2017. – Т. 2. – 264 с.

ISBN 978-5-7944-2919-0 (т. 2)

ISBN 978-5-7944-2917-6

Представлены материалы международного симпозиума, проходившего на базе Пермского государственного национального исследовательского университета с 15 по 18 мая 2017 г. в рамках Пермского естественнонаучного форума. В симпозиуме приняли участие ведущие и молодые ученые, аспиранты и студенты России и зарубежья.

Тематика сборника охватывает современное состояние и актуальные проблемы механики и физики сплошных сред.

Издание предназначено для научных работников, аспирантов и студентов естественнонаучных специальностей вузов.

УДК [539.3+532.5](063)

ББК 22.5

*Издается по решению ученого совета механико-математического факультета  
Пермского государственного национального исследовательского университета*

ISBN 978-5-7944-2919-0 (т. 2)

ISBN 978-5-7944-2917-6

© ПГНИУ, 2017

## **Научный комитет Симпозиума**

Сопредседатели:

Т.П. Любимова, Пермь, Россия

Л. Писмен, Хайфа, Израиль

А. Вивиани, Неаполь, Италия

К.А. Гаврилов, Пермь, Россия

Е.А. Демехин, Краснодар, Россия

М.Ю. Жуков, Ростов на Дону, Россия

О.А. Кабов, Новосибирск, Россия

В.В. Козлов, Новосибирск, Россия

В.Г. Козлов, Пермь, Россия

А.К. Колесников, Пермь, Россия

А.Г. Кузнецов, Пермь, Россия

И.Ю. Макарихин, Пермь, Россия

В.Э. Малышкин, Новосибирск, Россия

В.П. Матвеев, Пермь, Россия

А. Моштаби, Тулуза, Франция

О.Б. Наймарк, Пермь, Россия

А. Непомнящий, Хайфа, Израиль

Н.В. Никитин, Москва, Россия

Е.Н. Пелиновский, Нижний Новгород, Россия

А. Пиковский, Потсдам, Германия

В.В. Пухначев, Новосибирск, Россия

Б. Ру, Марсель, Франция

Н.Н. Смирнов, Москва, Россия

П.В. Трусов, Пермь, Россия

П.Г. Фрик, Пермь, Россия

Ю.Д. Чашечкин, Москва, Россия

В. Шевцова, Брюссель, Бельгия

А.П. Шкарапута, Пермь, Россия

## **Локальный организационный комитет**

Т.П. Любимова

Н.А. Зубова

М.А. Кашина

Л.С. Клименко

А.О. Иванцов

К.Б. Циберкин

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Колмогоров Г. Л., Кузнецова Е. В., Климов Н. А.</b> Температурные остаточные напряжения при механической обработке металлов.....	12
<b>Колчанов Н. В., Колесниченко Е. В.</b> Влияние агрегатов на тепловую конвекцию в горизонтальном слое магнитного коллоида.....	19
<b>Колчанова Е.А., Колчанов Н.В.</b> Конвекция в слое бинарной жидкости, частично заполненном неоднородной пористой средой: колебательная и монотонная неустойчивости.....	22
<b>Копысов С. П., Кузьмин И. М., Новиков А. К., Тонков Л. Е.</b> Параллельная реализация интерполяции на основе радиальных базисных функций с сокращением данных.....	25
<b>Копьев В. Ф., Храмов И. В., Черенкова Е. С., Пальчиковский В. В., Берсенеv Ю. В.</b> Модальный анализ шума вихревого кольца в АЗК ПНИПУ.....	28
<b>Крутова И. Ю., Опрышко О. В.</b> Численное моделирование придонных частей торнадо в стационарном плоском случае.....	31
<b>Кси Р., Воробьев А.</b> Моделирование бинарной смеси двух жидкостей на основе метода фазового поля.....	34
<b>Кузнецов А. А., Пшеничников А. Ф.</b> Вращательная динамика магнитных наночастиц в переменном магнитном поле.....	37
<b>Кузнецов Г.В., Максимов В.И., Дудак А.А.</b> Математическое моделирование турбулентного теплопереноса в технологическом водоеме-охладителе.....	40
<b>Кузнецов Г.В., Ни А.Э.</b> Пространственная задача кондуктивно-конвективного теплопереноса в замкнутой полости с источником интенсивного радиационного нагрева.....	45
<b>Куликов Ю.М., Сон Э.Е.</b> Особенности развития неустойчивости Кельвина-Гельмгольца в течениях термовязкой жидкости.....	52
<b>Куркина О. Е., Рувинская Е. А., Куркин А. А., Рыбин А. В.</b> Пространственная структура поля скорости в слоистой жидкости при распространении внутреннего солитона.....	58
<b>Кучинский М. О., Евграфова А. В., Сухановский А. Н., Попова Е. Н.</b> Исследование динамики конвективных течений в неоднородно нагретом цилиндрическом слое жидкости.....	61
<b>Лебедев А. В.</b> Нелинейная восприимчивость как новый метод исследования межчастичных взаимодействий в магнитных жидкостях.....	64
<b>Любимова Т. П., Фатгалов О. О.</b> Динамика твердых частиц, взвешенных в жидкости, под действием горизонтальных вибраций линейной поляризации.....	67
<b>Любимова Т. П., Лепихин А. П., Паршакова Я. Н.</b> Численное моделирование поперечного перемешивания водных масс в поверхностных водных объектах... ..	71
<b>Любимова Т. П., Прокопьев С. А.</b> Нелинейные режимы конвекции бинарных смесей в плоском горизонтальном слое.....	75
<b>Любимова Т. П., Файзрахманова И. С.</b> Влияние вибраций конечной частоты на устойчивость конвективных течений в пористой среде, насыщенной бинарной смесью с эффектом Соре.....	78
<b>Мандрыкин С. Д., Захлевных А. Н., Макаров Д. В.</b> Ориентационная структура холестерического жидкого кристалла в слабом вращающемся магнитном поле.....	81
<b>Марышев Б. С.</b> Устойчивость однородного вертикального просачивания смеси через горизонтальный слой пористой среды.....	84



<b>Марышев Б. С.</b> О молекулярно-диффузионном транспорте растворенных газов в ненасыщенной пористой среде.....	88
<b>Мизёв А. И., Шмыров А. В., Шмырова А. И.</b> О причинах возникновения вихревого течения на межфазной границе, содержащей адсорбированный слой поверхностно-активного вещества.....	92
<b>Морозов И. А., Фрейберг М. А.</b> Исследование микроструктуры наполнителя в резине методами наноиндентации.....	95
<b>Морозов К. И., Лешанский А. М.</b> Направленное движение магнитных микро- и наночастиц во вращающемся магнитном поле.....	98
<b>Мошева Е. А., Денисова М. О., Шмырова А. И., Шмыров А. В., Лысенко С. Н.</b> Конвективные процессы в двухслойных системах несмешивающихся жидкостей при фронтальной реакции нейтрализации.....	101
<b>Мошева Е. А., Шмыров А. В., Лысенко С. Н.</b> Экспериментальное исследование влияния универсального индикатора РКС на развитие хемоконвективного движения в двухслойной системе смешивающихся жидкостей.....	104
<b>Недожогин Н. С., Новиков А. К., Копысов С. П.</b> О распараллеливании методов декомпозиции области при решении конечно-элементных задач на гибридных архитектурах.....	107
<b>Недожогин Н. С., Тонков Л. Е., Чернова А. А.</b> Вынужденные колебания капли жидкости на высоких модах.....	110
<b>Никулин И.Л., Файзрахманова И.С., Перминов А.В.</b> Моделирование конвективных течений в условиях интенсивного теплообмена и высокочастотного магнитного поля.....	113
<b>Новиков А. А., Захлевных А. Н., Макаров Д. В.</b> Критические параметры перехода холестерик-нематик, индуцированного магнитным полем и сдвиговым потоком.....	116
<b>Озерных В.С., Волегов П.С.</b> Исследование поля напряжений, создаваемого зернограницными дислокациями.....	119
<b>Остапович К.В., Трусов П.В.</b> Об идентификации симметрии упругих свойств поликристаллических материалов.....	122
<b>Паймушин В. Н., Фирсов В. А., Шишкин В. М., Левашов А. П.</b> Идентификация наследственных свойств оргстекла ПММА на основе исследования затухающих изгибных колебаний тест-образцов.....	125
<b>Пелевин А. Г., Гаришин О. К., Шадрин В. В.</b> Модель механического поведения образцов полиэтилена наполненного польгорскитом.....	128
<b>Пелиновский Е. Н., Шургалина Е. Г., Диденкулова И. И.</b> Безотражательное распространение волн в сильно неоднородных средах.....	131
<b>Перминов А. В., Любимова Т. П.</b> Влияние вибраций на конвективную устойчивость псевдопластической жидкости в плоском вертикальном слое.....	136
<b>Пестренин В. М., Пестренина И. В., Ландик Л. В.</b> Два подхода к изучению параметров состояния упругих тел вблизи особых точек.....	139
<b>Петров Д. А., Семенов Д. В.</b> Бистабильные явления в антиферромагнитных жидких кристаллах.....	142
<b>Петров Д. А., Скоков П. К.</b> Определение полей ориентационных переходов в жидкокристаллических суспензиях углеродных нанотрубок.....	145
<b>Пименова А. В., Газдалиев И. М., Голдобин Д. С.</b> Удельная площадь поверхности раздела в тонкослойной системе двух жидкостей при поверхностном кипении.....	148
<b>Полосков И. Е.</b> О некоторых численно-аналитических алгоритмах решения задач стохастической механики сплошных сред.....	151

<b>Полудницин А. Н., Шарифулин А. Н.</b> Влияние граничных условий на глубину гистерезиса режима конвективного вихревого течения в наклоняемой прямоугольной полости.....	<b>154</b>
<b>Попов Ф.С.</b> О прямой математической модели для исследования эффекта Портевена – Ле Шателье.....	<b>157</b>
<b>Пшеничников А.Ф.</b> Динамика намагничивания и кластерный анализ магнитных жидкостей.....	<b>160</b>
<b>Роговой А. А., Столбова О. С.</b> Моделирование термомеханического поведения сплавов и полимеров с памятью формы при конечных деформациях.....	<b>163</b>
<b>Родин А.А., Земляникин А.Ю., Лиходеев Н.М., Куркин А.А., Родина Н.А.</b> Лабораторное и численное исследование наката волн на линейно-наклонный берег.....	<b>166</b>
<b>Рудяк В. Я.</b> Решение уравнений зонального электрофореза эллиптического типа.....	<b>169</b>
<b>Рушинская К. С., Ильин В. А.</b> Электроконвекция слабопроводящей жидкости при инъекции заряда в горизонтальных ячейках с разным аспектным отношением.....	<b>172</b>
<b>Ряшенцев В.В., Ильин Н.А.</b> Формирование физико-механических свойств наномодифицированного АБС-сополимера в условиях пластического деформирования с дополнительным СВЧ-воздействием.....	<b>175</b>
<b>Сагитов Р. В., Шарифулин А. Н.</b> Устойчивость стационарных режимов конвективных течений в наклоненной прямо-угольной полости.....	<b>178</b>
<b>Садиков Е. С.</b> Влияние электрического поля на параметрическую неустойчивость двухслойной системы жидкостей.....	<b>181</b>
<b>Саранин В. А., Майер В. В., Вараксина Е. И.</b> Исследование формы лежащей капли в поле тяжести и явления её прыжка при переходе в невесомость.....	<b>184</b>
<b>Сармакеева А.С., Тонков Л.Е.</b> Моделирование обтекания цилиндра методами погруженных границ.....	<b>187</b>
<b>Сбоев И. О., Бабушкин И. А.</b> Изучение влияния вертикальных вибраций на теплообмен в цилиндрической полости с жидкостью при локальном подогреве снизу.....	<b>190</b>
<b>Соболева Е. Б.</b> Потеря устойчивости и конвективные течения в сверхкритической жидкости с переменными физическими свойствами.....	<b>194</b>
<b>Соколов А. К., Гаришин О. К., Свистков А. Л.</b> Моделирование механизма формирования нанотяжей в эластомерных композитах с твердым зернистым нанонаполнителем.....	<b>197</b>
<b>Сорокин В. Г., Резник В. В., Вязьмин А. В.</b> Новые точные решения нелинейного реакционно-диффузионного уравнения с запаздыванием.....	<b>200</b>
<b>Спивак Л. В.</b> Калориметрические исследования фазовых превращений в двухкомпонентных металлических сплавах.....	<b>203</b>
<b>Спивак С. И.</b> Математическое моделирование сложных химических кинетики реакций.....	<b>206</b>
<b>Ступникова А. В., Шарифулин А. Н.</b> Определение глубины гистерезиса режима тепловой конвекции в полости с движущейся стенкой в маломодовом приближении.....	<b>207</b>
<b>Талипова Т.Г., Куркина О.Е., Рувинская Е.А., Слюняев А.В., Пелиновский Е.Н.</b> Развитие солибора в длинноволновых моделях нелинейных внутренних волн.....	<b>210</b>
<b>Тельканов М.А., Волегов П.С.</b> Исследование влияния смены вида нагружения на характер кристаллографической текстуры поликристалла.....	<b>214</b>

<b>Титов В.В., Степанов Р.А.</b> Теплообмен в бесконечном слое с фрактальным распределением нагревателя.....	<b>217</b>
<b>Тюлькина И.В.</b> Влияние внутреннего шума на состояния «Химеры» в ансамбле Курамото.....	<b>220</b>
<b>Тялина Н. А., Листратов Я. И.</b> Прямое численное моделирование течения жидкости в каналах.....	<b>223</b>
<b>Уткин М. А., Макаров Д. В.</b> Эффекты магнитной сегрегации в слое ферроне-матика при супертвистовых искажениях поля директора.....	<b>226</b>
<b>Циберкин К.Б.</b> Об учёте инерционных слагаемых в уравнении фильтрации жидкости в системах с границами раздела.....	<b>230</b>
<b>Черепанов И. Н., Смородин Б. Л.</b> Конвекция коллоидной суспензии в вертикальной ячейке при нагреве сбоку.....	<b>233</b>
<b>Чиглинцева А.С.</b> Автомодельная задача о нагнетании гидратообразующего холодного газа в снежный массив, насыщенный тем же газом.....	<b>236</b>
<b>Чикулаев Д. Г., Шварц К. Г.</b> Влияние вращения на колебательную моду неустойчивости адвективного течения в горизонтальном слое жидкости с твёрдыми границами для случая спиральных возмущений.....	<b>239</b>
<b>Шарифулин В. А., Любимов Д. В., Любимова Т. П., Шарифулин А. Н.</b> Вибрационная тепловая конвекция талой воды в условиях пониженной гравитации.....	<b>242</b>
<b>Шарифулин Т. М., Феоктистов Д. В.</b> Экспериментальное исследование скорости испарения капли дистиллированной воды в условиях свободного её падения на нагретую полированную и структурированную алюминиевую поверхность.....	<b>245</b>
<b>Шварц К. Г.</b> Крупномасштабное неизотермическое течение во вращающемся слое жидкости со свободной верхней границей.....	<b>249</b>
<b>Шургалина Е. Г.</b> Солитонная турбулентность в системах типа уравнения Кортевега – де Вриза.....	<b>252</b>
<b>Щипицын В. Д., Козлов В. Г.</b> Сила отталкивания, действующая на цилиндрическое тело вблизи границы полости при поступательных вибрациях. Роль амплитуды колебаний.....	<b>255</b>

## CONTENTS

<b>Kolmogorov G. L., Kuznecova E. V., Klimov N. A.</b> Residual stresses in mechanical machining of metals.....	12
<b>Kolchanov N. V., Kolesnichenko E.V.</b> Effect of aggregates on thermal convection in a horizontal magnetic colloid layer.....	19
<b>Kolchanova E. A., Kolchanov N. V.</b> Convection in a binary fluid layer partially filled with an inhomogeneous porous medium: oscillatory and monotonic instabilities.....	22
<b>Kopysov S. P., Kuzmin I. M., Novikov A. K., Tonkov L. E.</b> Parallel implementation radial basis functions interpolation with data reduction.....	25
<b>Kopiev V. F., Khramtsov I. V., Cherenkova E. S., Palchikovskiy V. V.</b> Modal analysis of vortex ring noise in anechoic chamber PNRPU.....	28
<b>Krutova I.Y., Opryshko O.V.</b> Numerical simulation of the bottom part of tornadoes and tropical cyclones in a stationary plane case.....	31
<b>Xie R., Vorobev A.</b> Phase-field modelling of the slowly miscible binary liquid/liquid system.....	34
<b>Kuznetsov A. A., Pshenichnikov A. F.</b> Rotational dynamics of magnetic nanoparticles in alternating magnetic field.....	37
<b>Kuznetsov G. V., Maksimov V. I., Dudak A. A.</b> Mathematical modeling of turbulent heat transfer in technological water-cooler.....	40
<b>Kuznetsov G. V., Nee A. E.</b> Three-dimensional problem of conductive-convective heat transfer in a closed cavity with a radiant heating source.....	45
<b>Kulikov Y.M., Son E.E.</b> On the development of Kelvin-Helmholz instability in thermoviscous flows.....	52
<b>Kurkina O. E., Rouvinskaya E. A., Kurkin A. A., Rybin A. V.</b> Spatial structure of the velocity field induced by internal solitary wave in the layered fluid.....	58
<b>Kuchinskii M. O., Evgrafova A. V., Sukhanovskii A. N., Popova E. N.</b> Studying of convective flows dynamic in non-uniformly heated cylindrical fluid layer.....	61
<b>Lebedev A. V.</b> Nonlinear susceptibility how new method of investigation of interactions in magnetic fluids.....	64
<b>Lyubimova T. P., Fattalov O. O</b> Dynamics of solid particles suspended in a liquid under the action of horizontal vibrations of linear polarization.....	67
<b>Lyubimova T. P., Lepikhin A. P., Parshakova Ya. N.</b> Numerical modeling of transverse mixing of water masses in surface water bodies.....	71
<b>Lyubimova T. P., Prokopev S. A.</b> Non-linear convective regimes of binary mixtures in a plane horizontal layer.....	75
<b>Lyubimova T. P., Fayzrakhmanova I. S.</b> Effect of finite frequency vibrations on the on-set of convection in porous medium saturated by binary mixture with the Soret effect.....	78
<b>Mandrykin S. D., Zakhlevnykh A. N., Makarov D. V.</b> Orientational structure of a cholesteric liquid crystal in a weak rotating magnetic field.....	81
<b>Maryshev B. S.</b> Stability of homogeneous vertical seepage of mixture through horizontal porous layer.....	84
<b>Maryshev B. S.</b> On the molecular-diffusion transport of dissolved gases in an unsaturated porous medium.....	88
<b>Mizev A. I., Shmyrov A. V., Shmyrova A. I.</b> On the causes of the vortex flow appearance at the interphase with an adsorbed layer of surfactants.....	92
<b>Morozov I. A., Freyberg M. A.</b> Research of filler microstructure in rubber by using nanoindentation methods.....	95

<b>Morozov K. I., Leshansky A. M.</b> Propulsion of magnetic micro-/nanoparticles in rotating magnetic field.....	98
<b>Mosheva E. A., Denisova M. O., Shmyrova A. I., Shmyrov A. V., Lysenko S. N.</b> Convective processes arising in two-layer systems of immiscible liquids from a frontal neutralization reaction.....	101
<b>Mosheva E. A., Shmyrov A. V., Lysenko S. N.</b> Effect of the universal color indicator RKS on the formation of the chemoconvective motion in two layer miscible system.....	104
<b>Nedozhgin N. S., Novikov A. K., Kopysov S. P.</b> On the parallelization of the domain decomposition methods in solving finite-element problems on the hybrid architectures.....	107
<b>Nedozhgin N. S., Tonkov L. E., Chernova A. A.</b> Forced oscillations of a liquid drop on high modes.....	110
<b>Nikulin I.L., Faizрахmanova I.S., Perminov A.V.</b> Modelling of convective flows with intensive heat exchange and high-frequency magnetic field.....	113
<b>Novikov A. A., Zakhlevnykh A. N., Makarov D. V.</b> Critical parameters of the cholesteric-nematic transition induced by a magnetic field and a shear flow.....	116
<b>Ozernykh V.S., Volegov P.S.</b> Investigation of the stress field created by grain boundary dislocations.....	119
<b>Ostapovich K. V., Trusov P. V.</b> On elastic symmetry identification of polycrystalline materials.....	122
<b>Paimushin V. N., Firsov V. A., Shishkin V. M., Levashov A. P.</b> Identification of Plexiglas PMMA hereditary properties on basis of Study Test Specimens damped flexural oscillation.....	125
<b>Pelevin A. G., Garishin O. K., Shadrin V. V.</b> Model of the mechanical behavior of polyethylene samples filled with palygorskite.....	128
<b>Pelinovsky E. N., Shurgalina E. G., Didenkulova I. I.</b> Non-reflected wave propagation in strongly inhomogeneous media.....	131
<b>Perminov A. V., Lyubimova T. P.</b> Vibration impact on the convective stability of pseudoplastic fluid in plane vertical layer.....	136
<b>Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V.</b> Two ways to the studying of the elastic bodies stress state in the singular points vicinity.....	139
<b>Petrov D. A., Semenov D. V.</b> Bistable phenomena in the antiferromagnetic liquid crystals.....	142
<b>Petrov D. A., Skokov P. K.</b> Defining of orientational transition fields in liquid-crystalline suspensions of carbon nanotubes.....	145
<b>Pimenova A. V., Gazdaliev I. M., Goldobin D. S.</b> Specific interface area in a thin layer system of two immiscible liquids with vapour generation at the contact interface.....	148
<b>Poloskov I. E.</b> On some symbolic and numerical algorithms to solve problems of stochastic continuous media mechanics.....	151
<b>Poludnitsin A. N., Sharifulin A. N.</b> Influence of boundary conditions on the depth of the hysteresis of the regime of convective vortex flow in an inclined rectangular region.....	154
<b>Popov F. S.</b> On a direct mathematical model for investigation of the Portevin – Le Chatelier effect.....	157
<b>Pshenichnikov A. F.</b> Magnetization dynamics and cluster analysis of magnetic fluids.....	160
<b>Rogovoy A. A., Stolbova A. S.</b> Modeling the thermomechanical behavior of shape memory alloys and polymers under finite deformations.....	163
<b>Rodin A.A., Zemlyanikin A.Y., Likhodeev N.M., Kurkin A.A., Rodina N.A.</b> Laboratory and numerical study of the wave run-up on the flat slope.....	166

<b>Rudyak V. Ya.</b> The current state of the study of transport processes in nanofluids.....	<b>169</b>
<b>Rushinskaya K. S., Ilin V. A.</b> Electroconvection of a weakly conductive liquid under charge injection in horizontal cells with the different aspect ratio.....	<b>172</b>
<b>Ryashentsev V. V., Ilyin N. A.</b> Formation of physico-mechanical properties of nano-modified ABS copolymer under conditions of plastic deformation with the additional microwave exposure.....	<b>175</b>
<b>Sagitov R. V., Sharifulin A. N.</b> Stability of stationary modes of convective flows in an inclined rectangular cavity.....	<b>178</b>
<b>Sadilov E. S.</b> The influence of the electric field on parametric in-stability of two-layer system.....	<b>181</b>
<b>Saranin V.A., Mayer V.V., Varaksina E.I.</b> Research of the form of a lying drop in the gravitational field and the phenomenon of its jump at transition in weightlessness..	<b>184</b>
<b>Sarmakeeva A. S., Tonkov L. E.</b> Simulation flow-past of a fixed cylinder by Immersed Boundary methods.....	<b>187</b>
<b>Sboev I. O., Babushkin I. A.</b> An investigation of the influence of vertical vibrations on heat transfer in a cylindrical cavity with the fluid by local heating from below.....	<b>190</b>
<b>Soboleva E. B.</b> Bifurcations and convective flows in a supercritical fluid with variable physical properties.....	<b>194</b>
<b>Sokolov A. K., Garishin O. K., Svistkov A. L.</b> Modeling of formation mechanism nanostrands in elastomeric composites with hard particulate nanofiller.....	<b>197</b>
<b>Sorokin V. G., Reznik V. V., Vyazmin A. V.</b> New Exact Solutions of Nonlinear Reaction–Diffusion Equation with Delay.....	<b>200</b>
<b>Spivak L. V.</b> Calorimetric studies of phase transformations in two-component metallic alloys.....	<b>203</b>
<b>Spivak S. I.</b> Mathematical modeling of kinetics of complex chemical reactions.....	<b>206</b>
<b>Stupnikova A. V., Sharifulin A. N.</b> Determination of the hysteresis depth of the thermal convection regime in a cavity with a moving wall in the low-mode approximation.....	<b>207</b>
<b>Talipova T.G., Kurkina O.E., Rouvinskaya E.A., Slunyaev A.V., Pelinovsky E.N.</b> Solibore Generation in the Nonlinear Long Internal Wave Models.....	<b>210</b>
<b>Telkanov M. A., Volegov P. S.</b> Study of influence of the deformation type change on the crystallographic texture.....	<b>214</b>
<b>Titov V. V., Stepanov R. A.</b> Heat transfer in the infinite layer with a fractal distribution of a heater.....	<b>217</b>
<b>Tyulkina I. V.</b> Effect of intrinsic noise on Chimera states in Kuramoto ensemble.....	<b>220</b>
<b>Tyalina N. A., Listratov Y. I.</b> Direct numerical simulation of fluid flow in duct.....	<b>223</b>
<b>Utkin M. A., Makarov D. V.</b> Magnetic segregation effects in a ferronematic layer at the supertwisted director-field distortions.....	<b>226</b>
<b>Tsiberkin K. B.</b> On inertial term effect in filtration equation in system with interfaces	<b>230</b>
<b>Cherepanov I. N., Smorodin B. L.</b> Convection in a colloidal suspension in vertical slot under heating from the side.....	<b>233</b>
<b>Chiglintseva A.S.</b> The self-similar problem of injecting a hydrate-forming cold gas into a snow massif saturated with the same gas.....	<b>236</b>
<b>Chikulaev D. G., Shvarts K. G.</b> The effect of rotation on the oscillation instability mode of advective flow in a horizontal fluid layer with rigid boundaries for the case of spiral perturbations.....	<b>239</b>
<b>Sharifulin V. A., Lyubimov D. V., Lyubimova T. P., Sharifulin A. N.</b> Low mode model of Thermal Vibrational convection of melted water.....	<b>242</b>

<b>Sharifulin T. M., Feoktistov D. V.</b> Experimental study of evaporation rate of distilled water drop when it's free-falling on heated polished and structured aluminum surface.....	<b>245</b>
<b>Shvarts K. G.</b> Large-scale non-isothermal flow in a rotating layer of fluid with a free upper boundary.....	<b>249</b>
<b>Shurgalina E.G.</b> Soliton turbulence in the systems of the Korteweg – de Vries equation type.....	<b>252</b>
<b>Schipitsyn V. D., Kozlov V. G.</b> Repulsive force acting on the cylindrical solid near the border of the cavity under translational vibrations. The role of amplitude of oscillations.....	<b>255</b>

## Температурные остаточные напряжения при механической обработке металлов

Г. Л. Колмогоров, Е. В. Кузнецова, Н. А. Климов

Пермский национальный исследовательский политехнический университет,  
614000, Россия, г. Пермь, Комсомольский проспект, д. 29,  
email: nikita-kl@yandex.ru

В статье рассматривается термоупругое состояние осесимметричного тела при наличии градиента температуры за счет разогрева контактного слоя при резании, оценивается возможность появления термопластических деформаций в поверхностном слое и возможное формирование остаточных напряжений при последующем охлаждении образца. Для стальных металлоизделий определяются предельные температурные режимы, превышение которых приведет к остаточным сжимающим или растягивающим напряжениям. Приводится пример конкретной реализации расчета предельной скорости подачи, превышение которой приведет к чрезмерному разогреву обрабатываемого цилиндрического образца и появлению остаточных напряжений, которые могут значительно влиять на надежность обработанной детали.

**Ключевые слова:** остаточные напряжения; механическая обработка; термоупругое состояние; температура; контактный слой

## Residual stresses in mechanical machining of metals

G. L. Kolmogorov, E. V. Kuznecova, N. A. Klimov

State National Research Politechnical University of Perm, Komsomolsky Av. 29,  
Perm, Russia, 614000,  
email: nikita-kl@yandex.ru

The article examines the thermoelastic state of an axisymmetric body in the presence of a temperature gradient due to heating of the contact layer during cutting. Specifically, the possibility of the thermoplastic deformation in the surface layer and the possibility of the residual stresses formation during subsequent cooling have been estimated. For steel hardware, the boundary temperature regimes leading to the compressive or tensile residual stresses have been determined. Furthermore, the paper presents a specific implementation of calculating the maximum feed rate which, if exceeded, will cause excessive heating of the machined cylindrical specimen and residual stress, which may significantly affect the reliability of the a machined part.

**Keywords:** residual stress; machining; thermoelastic condition; temperature; contact layer

### Введение

При механической обработке резанием возможно образование технологических остаточных напряжений, которые в значительной степени влияют на качество металлоизделий [1, 2].



Основными технологическими факторами формирования напряжений при механической обработке являются:

- температурные условия контактного слоя;
- механическое воздействие инструмента на обрабатываемую деталь;
- возможные фазоструктурные изменения в поверхностном слое.

Наличие вышеприведенных факторов усложняет анализ условий формирования остаточных напряжений и приводит зачастую к противоречивым результатам.

В данной статье проведен анализ влияния температуры контактного слоя на условия формирования остаточных напряжений за счет появления термопластических деформаций в поверхностном контактном слое с последующим образованием остаточных напряжений при охлаждении на выходе металла из зоны контакта инструмент - обрабатываемая деталь, определены режимы механической обработки, предотвращающие образование температурных остаточных напряжений.

Одной из причин формирования технологических остаточных напряжений при резании является температурное поле, возникающее за счет действия сил трения в контакте инструмент – обрабатываемая деталь. Остаточные напряжения, при механической обработке возникают в тонком поверхностном слое обрабатываемого изделия толщиной 250 мкм, что особенно характерно для высокоскоростной обработки [3].

Остаточные напряжения в поверхностном слое определяют качество поверхности и точность обрабатываемых изделий [4, 5]. При этом основным фактором, влияющим на формирование поверхностного слоя является скорость резания [3].

Остаточные напряжения, действующие в поверхностных слоях, влияют на прочность всей детали. Для маложестких деталей они могут привести к короблению деталей и изменению их геометрии, что является особенно актуальным при изготовлении деталей ответственного назначения. Для деталей высокой жесткости наличие остаточных напряжений приводит к возможному возникновению микротрещин с последующим их развитием до макротрещин и разрушению деталей.

Качество поверхностного слоя деталей машин характеризуется многими технологическими факторами, в том числе величиной и знаком остаточных напряжений. Известно, что остаточные напряжения сжатия повышают прочность деталей машин, остаточные напряжения растяжения приводят к понижению прочности и возможному разрушению поверхностного слоя [6, 7].

#### **Методика проведения исследования**

Одной из основных причин появления остаточных напряжений при механической обработке является контактный разогрев поверхности обрабатываемой детали за счет тепловыделения в зоне контакта технологического инструмента и обрабатываемой детали.

При значительном разогреве в обрабатываемом изделии возникают термические напряжения, которые носят упругий характер, однако при определенных градиентах температур возможно появление термопластических деформаций. Последующее охлаждение обрабатываемых изделий приводит к образованию остаточных напряжений в поверхностном обработанном слое, которые во многом определяют качество изделий. Известные исследования по механике резания и условий формирования остаточных напряжений носят противоречивый характер о знаке и величине остаточных напряжений. Сложности экспериментального определения остаточных напряжений не позволяют прогнозировать их влияние на эксплуатационные характеристики изделий. По мнению авторов желательно оценить условия формирования температурных остаточных напряжений и обеспечить режимы механической обработки, исключающие возможность их появления.

Цель работы – создание методики определения предельного термоупругого состояния осесимметричного тела под действием разности температур поверхностного слоя и центральных слоев обрабатываемого осесимметричного тела. Для оценки термоупругого состояния заготовки и возможного появления пластических деформаций в поверхностном слое решена задача термоупругости для осесимметричного цилиндрического тела.

Термоупругому состоянию изделия в условиях плоской деформации (отсутствие осевых деформаций  $\varepsilon_z$ ) будут соответствовать следующие выражения для компонентов тензора напряжений [8]:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\alpha E}{1-\nu} \left( \frac{1}{R^2} \int_0^R T r dr - \frac{1}{r^2} \int_0^r T r dr \right); \\ \sigma_\theta &= \frac{\alpha E}{1-\nu} \left( \frac{1}{R^2} \int_0^R T r dr + \frac{1}{r^2} \int_0^r T r dr - T \right); \\ \sigma_z &= \frac{\alpha E}{1-\nu} \left( \frac{2\nu}{R^2} \int_0^R T r dr - T \right), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$ , – напряжения в радиальном, окружном и осевом направлении соответственно;  $\alpha$  – коэффициент линейного температурного расширения материала детали;  $E$  – модуль упругости материала детали,  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $R$  – радиус детали,  $T(r)$  – температурная функция,  $r$  – радиальная координата.

Контактный разогрев при механической обработке локализуется в тонком поверхностном слое, поэтому полагаем, что распределение температуры по сечению изделия описывается экспоненциальной зависимостью вида:

$$T = T_0 \exp\left(\frac{\beta r}{R}\right), \quad (2)$$

где  $\beta$  – эмпирический показатель.

Обозначив температуру поверхности изделия через  $T_k$ , из условия  $T_{r=R} = T_k$  найдем показатель  $\beta$  и получим температурную функцию, соответствующую контактному разогреву изделия в процессе механической обработки в следующем виде:

$$T = T_0 \left( \frac{T_k}{T_0} \right)^{\bar{r}} \quad (3)$$

где  $\bar{r} = r/R$  – безразмерная радиальная координата.

Зависимость (3) положена в основу последующих расчетов термоупругих напряжений, возникающих в изделии за счет контактного разогрева. Подставляя зависимость (3) в соотношения (1), после интегрирования и преобразования получим:

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{\alpha E T_0}{1-\nu} \left\{ \frac{1}{\ln\left(1+\frac{\Delta T}{T_0}\right)} \left[ 1 + \frac{\Delta T}{T_0} - \frac{1}{\bar{r}} \left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\right)^{\bar{r}} \right] + \frac{1}{\ln^2\left(1+\frac{\Delta T}{T_0}\right)} \left[ \frac{1}{\bar{r}^2} \left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\right)^{\bar{r}} - \frac{1}{\bar{r}^2} - \frac{\Delta T}{T_0} \right] \right\}; \\
\sigma_\theta &= \frac{\alpha E T_0}{1-\nu} \left\{ \frac{1}{\ln\left(1+\frac{\Delta T}{T_0}\right)} \left[ \frac{1}{\bar{r}} \left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\right)^{\bar{r}} - \frac{1}{\bar{r}^2} - \frac{\Delta T}{T_0} \right] + \frac{1}{\ln^2\left(1+\frac{\Delta T}{T_0}\right)} \left[ \frac{1}{\bar{r}^2} - \frac{1}{\bar{r}^2} \left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\right)^{\bar{r}} - \frac{\Delta T}{T_0} \right] - \left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\right)^{\bar{r}} \right\}; \\
\sigma_z &= \frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{2T_0\nu}{\ln\left(1+\frac{\Delta T}{T_0}\right)} \left[ 1 - \frac{\Delta T}{T_0 \ln\left(1+\frac{\Delta T}{T_0}\right)} + \frac{\Delta T}{T_0} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\right)^{\bar{r}} \ln^2\left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\right) \right].
\end{aligned}
\tag{4}$$

В формулах (4)  $\Delta T = T_k - T_0$  - разность температур поверхности и центра обрабатываемого детали.

Численный анализ соотношений (4) говорит о том, что наибольшие температурные напряжения возникают в поверхностных слоях детали ( $\bar{r} = 1$ ), где и можно ожидать появление остаточных напряжений. Для поверхности выражения (4) примут вид:

$$\begin{aligned}
\sigma_{r/\bar{r}=1} &= 0; \\
\sigma_{\theta/\bar{r}=1} &= \frac{\alpha E T_0}{1-\nu} \left[ \frac{2 \left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\right)}{\ln\left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\right)} - \frac{2\Delta T}{T_0 \ln^2\left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\right)} - \left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\right) \right]; \\
\sigma_{z/\bar{z}=1} &= \nu \sigma_{\theta/\bar{r}=1}.
\end{aligned}
\tag{5}$$

Последнее из соотношений (5) следует из закона Гука для осесимметричного напряженного состояния при  $\sigma_{r/\bar{r}=1} = 0$  и  $\varepsilon_z = 0$ .

Возможному появлению остаточных напряжений в поверхностных слоях изделия предшествует переход обрабатываемого металла в пластическое состояние. Для оценки этого перехода используем критерий удельной энергии формоизменения (условие Губера-Мизеса) [9]:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2} = \sigma_T,
\tag{6}$$

где  $\sigma_i$  - интенсивность напряжений, МПа;  $\sigma_T$  - предел текучести обрабатываемого материала, МПа.

Условие пластичности (6) для поверхностных слоев упрощается и принимает вид:

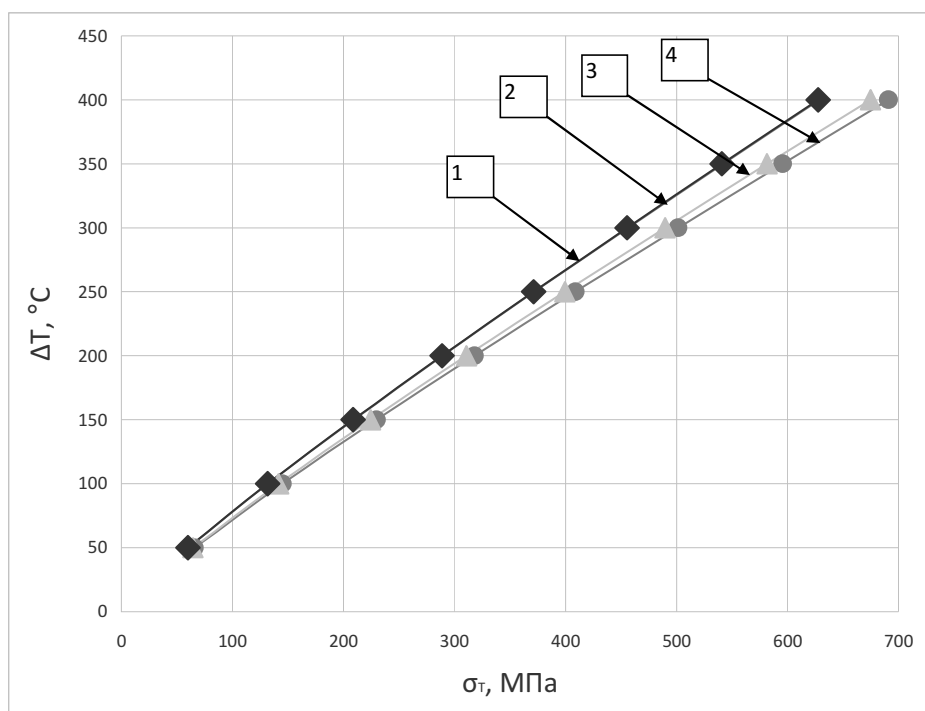
$$\sigma_\theta \sqrt{1-\nu+\nu^2} = \sigma_T
\tag{7}$$

### Результаты исследований и их обсуждение

Данная методика использована для оценки нежелательных режимов механической обработки, применение которых приводит к переходу контактного слоя при механической обработке в пластическое состояние и последующему формированию при охлаждении остаточных напряжений.

На (рис. 1) представлены результаты расчета по формулам (5) и (7) связи напряжений в заготовке  $\sigma_\theta$  и  $\Delta T$  для некоторых марок стали. В соответствии с (рис. 1) при известном значении  $\sigma_T$  для конкретного материала определяется значение  $\Delta T$ , превышение которого приведет к появлению термопластических деформаций с последующим формированием при охлаждении нежелательных остаточных напряжений. Исходные данные для расчетов принимались в соответствии с работой [9].

В соответствии с (рис. 1) по известному значению  $\sigma_T$  для конкретной стали определяется предельное значение  $\Delta T$ , превышение которого приведет к появлению температурных остаточных напряжений. Для определения  $\Delta T$  выбираются параметры механической обработки, предотвращающие формирование температурных остаточных напряжений.



**Рис. 1.** Расчетные зависимости  $\Delta T - \sigma_T$  для сталей: 1 – сталь 20; 2 – сталь У12А; 3 – сталь 40ХН; 4 – сталь 50

В настоящее время многие исследования посвящены определению температурного разогрева контактного слоя от параметров механической обработки, что подтверждает актуальность предлагаемой методики. В общем виде зависимость температуры контакта можно представить в следующем виде [10]:

$$T_k = T_0 + \alpha v^b s^c t^d, \quad (8)$$

где  $T_0$  – температура центральных слоев детали;  $v$  – скорость резания в м/мин;  $s$  – подача за один оборот в мм/об;  $t$  – глубина резания в мм.

В результате контактного разогрева между центральными и поверхностными слоями образуется разность температур, величина которой определяется вторым слагаемым в выражении (8)

$$\Delta T = \alpha v^b s^c t^d. \quad (9)$$

Прологарифмируем выражение (9), получим:

$$\ln(\Delta T) = \ln(\alpha) + b \ln(v) + c \ln(s) + d \ln(t). \quad (10)$$

Соотношение (10) можно использовать для определения технологических параметров, превышение которых может привести к формированию остаточных напряжений при известной критической разности температур  $\Delta T_{кр}$ .

Из соотношения (10), например, можно найти предельное значение скорости подачи:

$$S_{np} = \exp\left[\frac{1}{c}(\ln(T_{кр}) - \ln(\alpha) - b \ln(v) - d \ln(t))\right]. \quad (11)$$

#### Пример конкретной реализации

В качестве примера приводятся результаты расчета предельной скорости подачи для стали 40ХН, зависимость (8) для которой имеет следующий вид [10]:

$$T_k = T_0 + 148.8 \cdot v^{0.4} s^{0.24} t^{0.1}. \quad (12)$$

При использовании соотношения (12) для стали 40ХН уравнение (11) будет иметь следующий вид:

$$S_{np} = \exp\left[4.17 \cdot (\ln(\Delta T_{кр}) - \ln(148.8) - 0.4 \ln(v) - 0.1 \ln(t))\right] \quad (13)$$

Для данной стали 40ХН при температуре цеха  $20^\circ\text{C}$   $\sigma_T = 7.85 \cdot 10^8$  МПа, из решения уравнения (5) получим  $\Delta T_{кр} = 412,2^\circ\text{C}$ .

Для  $t = 4$  мм,  $v = 15$  м/мин получим значения предельной подачи за оборот  $s = 0.44$  мм/об.

Следует отметить, что данная методика может быть использована и для случая фазоструктурных переходов в металле. При этом  $\Delta T$  будет определяться разностью температур фазового перехода в поверхностном слое детали и температурой центральной части обрабатываемой детали.

#### Выводы

В работе решена задача термоупругости для осесимметричного тела, определены температурные условия появления пластических деформаций в поверхностном слое обрабатываемого изделия с возможным последующим формированием остаточных напряжений.

Определены предельные температурные условия контактного разогрева, позволяющие исключить возможность появления в осесимметричных изделиях остаточных напряжений при механической обработке.

Получены зависимости предельной скорости резания от технологических параметров процесса резания.

#### Список литературы

1. Биргер И.А. Остаточные напряжения. – М.: Машгиз, 1963 – 239 с.
2. Колмогоров Г.Л. Технологические остаточные напряжения и их влияние на долговечность и надежность металлоизделий / изд. Перм. Нац. исслед. политех. ун-та, 2012 – 226 с.
3. Васильков Д. В., Кочина Т. Б. Упругое последствие в деталях при высокоскоростной обработке резанием // Металлообработка, 2014, № 2, с 2 – 10.
4. Сулова А. Г., Инженерия поверхности деталей /М.: Машиностроение, 2008 – 320 с.
5. Маталин А. А. Точность механической обработки и проектирование технологических процессов. М.: Машиностроение, 1970 – 320 с.
6. В. А. Витаминов, М. З. Захватов, А. Г. Схиртладзе, В. Н. Агеева, Вэй Пью Маунг, Обеспечение качества поверхностного слоя материала деталей машин // Технология машиностроения 2014, № 1, с. 7-11.

7. *Л. М. Акулова, Т. К. Романова, Л. Е. Сергеев, В. Е. Бабин, Е. В. Сенчуров*, Формирование остаточных напряжений при магнитно-абразивной обработке деталей машин // *Технология машиностроения*, 2014, № 3, с 24 – 27.
8. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М: Наука, 1975 – 576 с.
9. *Малинин Н. Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. Учебник для студентов вузов. Изд. 2 – е, перераб. и доп. М.: Машиностроение, 1975 – 400 с.
10. *Даниелян А.М.* Резание металлов и инструмент. Монография. - Москва: "Машгиз", 1950. - 454 с.

## **Влияние агрегатов на тепловую конвекцию в горизонтальном слое магнитного коллоида**

**Н. В. Колчанов<sup>a</sup>, Е.В. Колесниченко<sup>b</sup>**

Пермский государственный национальный исследовательский университет,  
614990, Пермь, ул. Букирева, 15

<sup>a</sup> email: kolchanovn@gmail.com

<sup>b</sup> email: kolesnichenkoev@gmail.com

В работе экспериментально исследуется тепловая конвекция в плоском горизонтальном слое магнитного коллоида толщиной 2.4 мм. В качестве исследуемого образца используется магнитный коллоид на основе ундекана. Твёрдые коллоидные магнетитовые частицы имеют средний размер 9 нм. Объёмная доля твёрдой фазы в коллоиде составляет 14 %. Используемая экспериментальная установка позволяет производить тепловизионную съёмку поля температуры с верхней границы горизонтального слоя магнитного коллоида. Было проведено несколько серий тепловизионных измерений. Обнаружен новый конвективный режим вблизи порога устойчивости механического равновесия. Для него характерны конвективные структуры, состоящие из нисходящего устойчивого потока в центре структуры и неустойчивых восходящих потоков по краям. С ростом средней температуры коллоида диапазон чисел Рэлея для этого режима сужается. Мы предполагаем, что на формирование конвективных структур оказывают влияние не только тепловое расширение и термодиффузия, но и седиментация агрегатов. Размер агрегатов с ростом средней температуры коллоида уменьшается, что приводит к сужению диапазона чисел Рэлея.

**Ключевые слова:** магнитный коллоид; конвекция; агрегаты

## **Effect of aggregates on thermal convection in a horizontal magnetic colloid layer**

**N. V. Kolchanov<sup>a</sup>, E.V. Kolesnichenko<sup>b</sup>**

Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm

<sup>a</sup> email: kolchanovn@gmail.com

<sup>b</sup> email: kolesnichenkoev@gmail.com

In the work, we experimentally study thermal convection in a plane horizontal layer of magnetic colloid with a thickness of 2.4 mm. We use an undecane-based magnetic colloid as a test sample. Solid colloidal magnetite particles have an average size of 9 nm. Volume fraction of a solid phase in the colloid is of 14 %. The experimental setup used allows carrying out a thermal imaging survey for a temperature field at the upper boundary of a horizontal magnetic colloid layer. Several series of thermal imaging measurements were performed. A new convective regime was revealed near the threshold of mechanical equilibrium stability. Convective structures consisting of a stable downward flow in the structure center and unstable upward flows along the edges are typical for the regime. A Rayleigh number range for this regime shrinks as the average colloid

temperature increases. We suppose that the formation of convective structures is affected not only by thermal expansion and thermal diffusion, but also by sedimentation of aggregates. An aggregate size decreases as the average colloid temperature rises. It causes shrinkage of the Rayleigh number range.

**Keywords:** magnetic colloid; convection; aggregates

## 1. Введение

В отсутствие магнитного поля тепло- и массоперенос в неоднородно нагретом магнитном коллоиде может быть связан с гравитационной конвекцией. Она может возникнуть из-за эффекта теплового расширения или эффекта *Core*. Эти явления создают неравномерное распределение плотности, если в жидкости присутствует неоднородное распределение температуры. Рост неоднородностей температуры может привести к неустойчивости неподвижного состояния жидкости и дальнейшему развитию конвекции. Подобная ситуация возникает в горизонтальном слое подогреваемой снизу однокомпонентной молекулярной жидкости за счёт теплового расширения. В многокомпонентных коллоидных средах неоднородности плотности связаны как с тепловым расширением жидкости, так и нормальной или аномальной термодиффузией [1,2]. В случае подогрева снизу нормальная термодиффузия вызывает градиент концентрации твердых частиц, направленный вверх и обуславливающий неустойчивую стратификацию по плотности. В магнитных коллоидах нормальная термодиффузия может играть существенную роль ввиду больших значений коэффициента *Core* (например,  $S_T = 0.169 \text{ K}^{-1}$  для магнитного коллоида на основе керосина), который на 2-4 порядка превышает коэффициент *Core* молекулярных смесей [3].

При работе с коллоидами не стоит забывать про явление оседания частиц под действием гравитационного поля – седиментацию. Это явление делает более устойчивым неподвижное состояние жидкой среды. В подогреваемом снизу горизонтальном слое коллоидной жидкости возникает конкуренция нормальной термодиффузии и седиментации при диффузионном переносе частиц сквозь неподвижный массив окружающей молекулярной жидкости, находящейся в целом в состоянии механического равновесия.

## 2. Установка и методика эксперимента

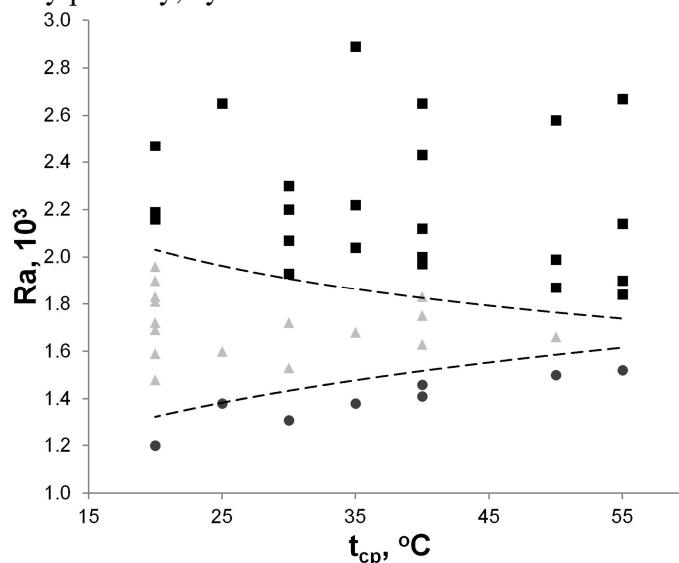
Горизонтальный слой имеет цилиндрическую форму с диаметром 58 мм и высотой 2,4 мм. Сверху слой жидкости ограничен стеклом из фторида лития (LiF), а снизу – алюминиевой пластиной толщиной 2 мм. Цилиндрическая боковая граница сделана из органического стекла. Необходимые значения температур на верхней и нижней границах слоя устанавливались с помощью жидкостных термостатов KRIO-VT-01, дополнительного медного теплообменника и системы термостатирования верхней границы полости. В эксперименте использовался тепловизор, который позволяет измерять температуру до сотых долей градуса. Тепловизионные измерения температуры верхней границы слоя возможны, т.к. верхняя грань полости изготовлена из соли LiF. Эта соль пропускает излучение инфракрасной части спектра.

Конвективный эксперимент состоит из нескольких серий измерений. В каждой серии поддерживалась постоянная средняя температура коллоидной жидкости. После заливки исследуемой жидкости в полость на её верхней и нижней границах задавался начальный перепад температур ( $\approx 1 \text{ }^\circ\text{C}$ ). При этом магнитный коллоид оставался в состоянии механического равновесия. Далее в течение 2-3 суток повышался перепад температур с шагом  $0.5\text{-}1 \text{ }^\circ\text{C}$  до  $14 \text{ }^\circ\text{C}$ .



### 3. Результаты

Зафиксирован слабый конвективный режим вблизи порога устойчивости механического равновесия. При данном режиме формируются конвективные структуры, состоящие из нисходящего устойчивого потока в центре структуры и неустойчивых восходящих потоков по краям. С ростом числа Ra этот режим сменяется другим режимом, который наблюдался ранее в другом эксперименте [4]. Измерения проводились при различных средних температурах, после чего была построена карта режимов (рис. 1). Из карты режимов можно увидеть, что с увеличением средней температуры магнитного коллоида диапазон чисел Ra, относящийся к новому режиму, сужается.



**Рис. 1.** Карта режимов. «Круги» соответствуют механическому равновесию, «треугольники» - новому режиму конвекции, «квадраты» - режиму, наблюдавшемуся ранее.

Мы предполагаем, что на формирование конвективных структур оказывают влияние не только тепловое расширение и термодиффузия, но и седиментация агрегатов. Размер агрегатов с ростом средней температуры коллоида уменьшается, что приводит к сужению диапазона чисел Рэлея.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-31-00040 мол\_а.

#### Список литературы

1. *Blums E., Mezulis A., Maiorov M., Kronkalns G.* Thermal diffusion of magnetic nanoparticles in ferrocolloids: experiments on particle separation in vertical column, *J. Magn. Mater.* 169 (1) (1997) 220–228. DOI:10.1016/S0304-8853(96)00730-5.
2. *Cerbino R., Vailati A., and Giglio M.* Soret driven convection in a colloidal solution heated from above at very large solutal Rayleigh number, *Physical review E* (2002), Vol.66, 055301(R). DOI:10.1103/PhysRevE.66.055301.
3. *Sprenger L., Lange A. and Odenbach S.* Thermodiffusion in concentrated ferrofluids: a review and current experimental and numerical results on non-magnetic thermodiffusion, *Phys. Fluids* 25 (2013), 122002. DOI:10.1063/1.4848656.
4. *Kolchanov N. V., Putin G. F.* Gravitational convection of magnetic colloid in a horizontal layer // *International Journal of Heat and Mass Transfer* 89. 2015. P. 90 – 101. DOI:10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.05.050.

## **Конвекция в слое бинарной жидкости, частично заполненном неоднородной пористой средой: колебательная и монотонная неустойчивости**

**Е. А. Колчанова<sup>a,b,c</sup>, Н. В. Колчанов<sup>c</sup>**

<sup>a</sup> Институт механики сплошных сред УрО РАН,

614013, Пермь, ул. Академика Королёва, 1

email: ekaterina\_shishk@mail.ru

<sup>b</sup> Пермский национальный исследовательский политехнический университет,

614000, Пермь, ул. Комсомольский пр., 29

<sup>c</sup> Пермский государственный национальный исследовательский университет,

614990, Пермь, ул. Букирева, 15

email: kolchanovn@gmail.com

Численно изучается возникновение конвекции с двойной диффузией в слое бинарной жидкости, частично заполненном пористой средой в поле силы тяжести. Пористость среды линейно зависит от вертикальной координаты. Ее проницаемость определяется формулой Кармана-Козени. Задаются постоянные равновесные градиенты температуры и концентрации. Исследуются два направления нагрева: снизу и сверху. Уравнения конвекции записываются в приближении Буссинеска для каждой области слоя. Фильтрация бинарной жидкости в пористой среде подчиняется закону Дарси. Линейная задача устойчивости равновесия решается методом стрельбы. Показано, что при подогреве слоя снизу в случае, когда градиенты температуры и концентрации тяжелой компоненты жидкости сонаправлены, конвекция возникает колебательным образом. С изменением градиента пористости и концентрационного числа Релея происходит резкая смена характера неустойчивости: с длинноволновой моды на коротковолновую. При подогреве сверху наиболее опасными являются монотонные длинноволновые возмущения, охватывающие весь слой.

**Ключевые слова:** двухслойная система; неоднородная пористая среда; колебательная неустойчивость

## **Convection in a binary fluid layer partially filled with an inhomogeneous porous medium: oscillatory and monotonic instabilities**

**E. A. Kolchanova<sup>a,b,c</sup>, N. V. Kolchanov<sup>c</sup>**

<sup>a</sup> Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Academ. Koroleva St. 1, 614013, Perm

email: ekaterina\_shishk@mail.ru

<sup>b</sup> Perm National Research Polytechnic University,

Komsomolsky prospect St. 29, 614000, Perm

Double-diffusive convection excitation in a binary fluid layer partially filled with porous medium under the gravity field is numerically studied. Medium porosity linearly depends on the vertical coordinate. Permeability is determined by the Carman-Kozeny formula. Constant equilibrium temperature and concentration gradients are established. Two heating directions are investigated: from below and above. Convection equations are written in the Boussinesq approximation for each region of the layer. Binary fluid filtration in the porous medium obeys the Darcy law. A linear problem of the equilibrium stability is solved by the shooting method. It was shown that in the case, when the layer is heated from below and the temperature and concentration gradients for the heavier component of fluid are co-directed, convection can arise in an oscillatory manner. With a change in the porosity gradient and compositional Rayleigh number, there is a sharp change in the instability nature: from the long-wave to short-wave modes. When the fluid is heated from above, monotonous long-wave perturbations covering the entire layer are the most dangerous.

**Keywords:** two-layer system; inhomogeneous porous medium; oscillatory instability

## 1. Введение

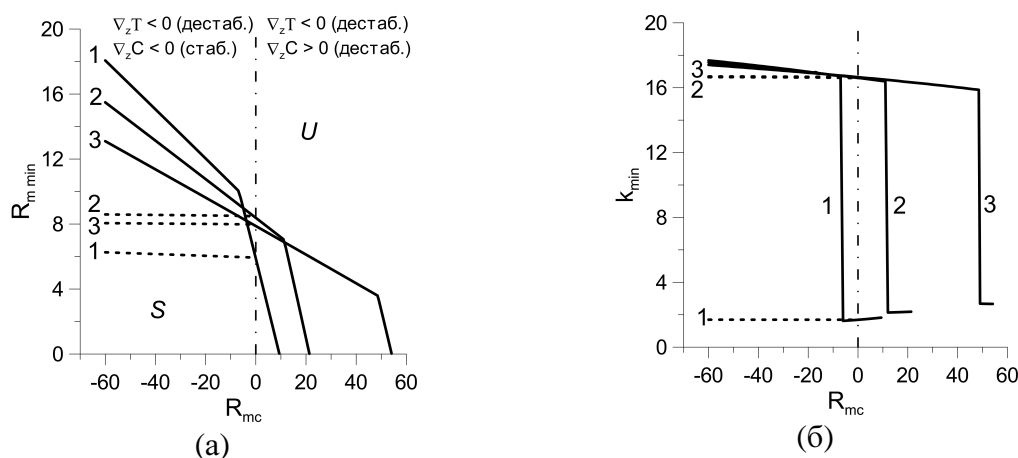
Конвекция с двойной диффузией в слоях бинарной жидкости и насыщенной пористой среды в поле тяжести вызвана неоднородностью плотности при наличии градиентов температуры и концентрации. Возникновение конвекции с двойной диффузией в однородном пористом слое, насыщенном бинарной жидкостью, изучалось в [1]. Найдены границы монотонной и колебательной неустойчивости равновесия. Дополнительный слой жидкости, расположенный над пористой средой, дестабилизирует равновесие. С ростом его толщины происходит резкая смена характера неустойчивости: с длинноволновой на коротковолновую [2, 3]. Длинноволновая неустойчивость связана с возмущениями в слое жидкости и пористой среде. Коротковолновая неустойчивость обусловлена нарастанием возмущений в слое жидкости над средой. Две моды конвекции также обнаружены для трехслойной системы, состоящей из слоя пористой среды, окруженного слоями жидкости [4]. Изменение градиента пористости оказывает большее влияние на длинноволновую моду по сравнению с коротковолновой [5]. Описанные результаты получены для монотонной неустойчивости. Колебательное возбуждение конвекции, изучено мало.

## 2. Постановка задачи и результаты

Рассматривается горизонтальный слой бинарной жидкости, частично заполненный пористой средой в поле силы тяжести. Относительная толщина  $d$  области жидкости над пористой средой равна 0.17. Пористая среда представляет собой систему стеклянных шаров. Насыщающая жидкость – водный раствор хлорида аммония. Пористость среды является линейной функцией поперечной координаты и меняется в пределах  $0.3 < m < 0.7$ . Проницаемость находится по формуле Кармана-Козени. На твердых границах слоя заданы постоянные, разные значения температуры  $T$  и концентрации  $C$  тяжелой компоненты бинарной жидкости. Слой подогревается снизу или сверху.

Численно, методом стрельбы определяются границы устойчивости равновесия жидкости относительно монотонных и колебательных возмущений. Карты устойчиво-

сти, полученные при подогреве слоя снизу, представлены на рис. 1. Показано, что в интервале значений концентрационного числа Релея  $-5 < R_{mc} < 60$  и безразмерного градиента пористости  $-0.2 < m_z < 0.2$  монотонная неустойчивость связана с развитием длинноволновых возмущений, охватывающих весь слой. С уменьшением  $R_{mc}$  происходит резкая смена характера неустойчивости, и наиболее опасными становятся коротковолновые возмущения, локализованные в области слоя над пористой средой (изломы кривых 1–3, рис. 1). Изменение градиента пористости оказывает больше влияние на длинноволновую неустойчивость по сравнению с коротковолновой. Когда градиенты температуры и концентрации сонаправлены, конвекция возбуждается колебательным образом (штриховые кривые 1–3, рис. 1). При  $m_z = -0.2$  колебательная длинноволновая неустойчивость наблюдается при  $R_{mc} < -5$  (штриховая кривая 1, рис. 1).



**Рис. 1.** Карты монотонной (сплошные кривые) и колебательной (штриховые кривые) неустойчивости при подогреве снизу и разных значениях  $m_z$ :  $-0.2$  (кривые 1),  $0$  (кривые 2),  $0.2$  (кривые 3).  $U$  – область неустойчивости,  $S$  – область устойчивости. (а) Минимальное критическое число Релея, (б) волновое число наиболее опасных возмущений.

При подогреве слоя сверху неустойчивость обусловлена нарастанием монотонных длинноволновых возмущений. Наибольшее изменение длины волны возмущений зафиксировано, когда пористость растет с глубиной ( $-0.2 < m_z < 0$ ).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-31-60004 мол\_а\_дк.

### Список литературы

1. Nield D. A., Bejan A. Convection in Porous Media. New York: Springer-Verlag, 1999. 546 p.
2. Chen F., Chen C. F. Onset of finger convection in a horizontal porous layer underlying a fluid layer // Journal of Heat Transfer. 1988. Vol. 110. P. 403–409. DOI: 10.1115/1.3250499.
3. Hirata S. C., Goyeau B., Gobin D. Stability of thermosolutal natural convection in superposed fluid and porous layers // Transport in Porous Media. 2009. Vol. 78. P. 525–536. DOI: 10.1007/s11242-008-9322-9.
4. Любимов Д. В., Муратов И. Д. О конвективной неустойчивости в слоистой системе // Гидродинамика. Пермь, 1977. Вып. 10. С. 38–46.
5. Chen F. Salt-finger instability in an anisotropic and inhomogeneous porous substrate underlying a fluid layer // Journal of Applied Physics. 1992. Vol. 71. P. 5222. DOI: 10.1063/1.350579.

# Параллельная реализация интерполяции на основе радиальных базисных функций с сокращением данных

С. П. Копысов<sup>а</sup>, И. М. Кузьмин<sup>а</sup>, А. К. Новиков<sup>а</sup>, Л. Е. Тонков<sup>а</sup>

<sup>а</sup> Институт механики УрО РАН  
426067, Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34  
email: i.m.kuzmin@gmail.com

При моделировании сопряженных задач газодинамики и механики деформируемого твердого тела каждая из физических задач решается независимо, используя собственную расчетную сетку. Таким образом, возникает необходимость в интерполяции физических данных (давления, перемещений) между двумя сетками. Интерполирование данных осуществляется методом радиальных базисных функций не использующим топологию сетки. В статье рассматривается сокращение времени интерполяции, как за счет использования параллельных вычислений, так и за счет сокращения размерности системы возникающей при формировании интерполанта с использованием полойной разделения расчетной сетки.

**Ключевые слова:** радиальные базисные функции; интерполяция данных; параллельные вычисления

## Parallel implementation radial basis functions interpolation with data reduction

S. P. Kopysov<sup>a</sup>, I. M. Kuzmin<sup>a</sup>, A. K. Novikov<sup>a</sup>, L. E. Tonkov<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Institute of Mechanics UB RAS, T. Baramzinoy St. 34, 426067, Izhevsk  
email: i.m.kuzmin@gmail.com

To solving fluid-structure interaction problems, each of the physical problems is solved independently, using its own mesh. Thus, there is a need for interpolation of physical data (pressure, displacement) between two meshes. Interpolation of data is carried out by the method of radial basis functions, since it does not use the mesh topology and allows obtaining the best interpolation. In this article, we consider the decrease in the interpolation time both due to the use of parallel computations, and by reducing the size of the system forming the interpolant, using the layer-by-layer partition of the computational mesh.

**Keywords:** radial basis functions; data interpolation; parallel computing

### 1. Интерполяция сеточных данных методом РБФ

Суть метода радиальных базисных функций заключается в построении интерполанта, коэффициенты которого находятся из решения системы уравнений. В зависимости от выбора функции матрица системы имеет разную обусловленность, а система уравнений разную сложность решения. Как следствие, процесс интерполяции может

занимать значительное время, что сказывается на общем времени решения сопряженной задачи.

Рассмотрим интерполяцию давления между двумя сетками, записанную в матричной форме. Обозначим через  $\Omega$  область, на границе которой  $\Gamma_\Omega = \partial\Omega$  задано давление  $p_{\Gamma_\Omega}$ , а через  $\Phi$  область, на границу  $\Gamma_\Phi = \partial\Phi$  которой необходимо его перенести. Процедура интерполяции давления между границами запишется следующим образом:

$$\begin{bmatrix} W_{\Gamma_\Omega\Gamma_\Omega} & P_{\Gamma_\Omega} \\ P_{\Gamma_\Omega}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{\Gamma_\Omega} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p_{\Gamma_\Phi} = \begin{bmatrix} W_{\Gamma_\Phi\Gamma_\Omega} & P_{\Gamma_\Phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \quad (1)$$

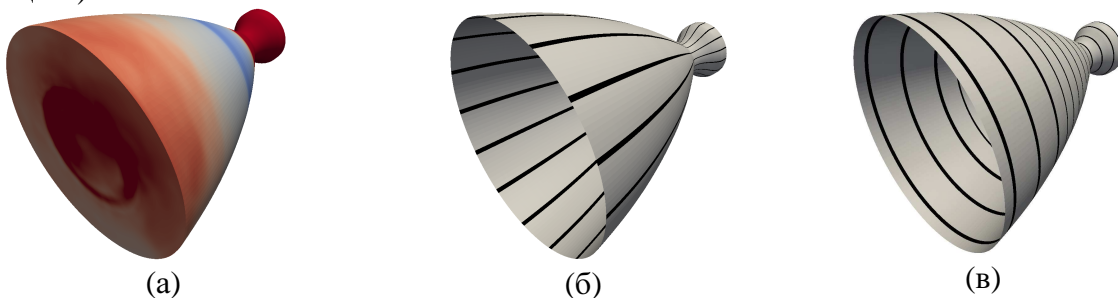
где  $W_{\Gamma_\Omega\Gamma_\Omega}$  и  $W_{\Gamma_\Phi\Gamma_\Omega}$  – матрицы состоящие из элементов вида  $\phi(\|x\|) = \|x_{\Gamma_\Omega}^i - x_{\Gamma_\Omega}^j\|$ ,  $\phi(\|x\|) = \|x_{\Gamma_\Phi}^i - x_{\Gamma_\Omega}^j\|$ , соответственно,  $P_{\Gamma_\Omega}$ ,  $P_{\Gamma_\Phi}$  – матрицы столбцов,  $\alpha$ ,  $\beta$  – коэффициенты искомого интерполянта,  $p_{\Gamma_\Phi}$  – давление на границе области  $\Phi$ .

Наиболее затратной операцией процедуры интерполяции является решение системы уравнений (1). Зачастую, функции, дающие наилучшую интерполяцию, не могут обеспечить приемлемое время решения системы уравнений, в этом случае можно уменьшить время за счет сокращения размерности системы, а также использованием параллельных вычислений.

## 2. Сокращение размерности системы при построении интерполянта

Сокращение размерности системы рассмотрим на примере сопряженной задачи взаимодействия сверхзвукового сопла с высокой степенью геометрического расширения [3]. Особенностью этой задачи является протяженная граница, по которой проходит интерполяция данных, а также неравномерное распределение давления по границе  $\Omega$ , области заполненной газом (рис. 1. а).

Особенность распределения давления учитывается при разделении области на основе послойного метода, учитывающего условия соседства узлов и ячеек расчетной сетки [4]. Сокращение данных заключается в выборе из послойного разделения заданного числа слоев, наиболее полно представляющих характер распределения интерполируемых данных. На (рис. 1. б, в) показано два варианта разделения поверхностной сетки на 150 слоев и выбора 15 слоев, участвующих в интерполяции. (окрашены в темной цвет).



**Рис. 1.** (а) распределение давления на границе области, (б) вариант разделения вдоль образующих, (в) вариант разделение вдоль сечения

Сравнение качества интерполяции проводилось для базисных функций из [3] для разного разделения и числа учитываемых слоев. В случае интерполяции давления качество оценивается, как относительная погрешность, вычисляемая через отношение норм равнодействующих сил давления. Как показали результаты, качество зависит не только от числа точек интерполяции, но и от их выбора. Наилучшая интерполяция получается при послойном разделении области вдоль сечения. Из рассматриваемых методов луч-

ший результат показал метод РБФ с глобальной функцией  $\phi(\|x\|) = \|x\|^2 \log \|x\|$ , позволивший сократить число уравнений системы (1) в 15 раз с сохранением качества интерполяции.

### 3. Параллельное формирование и решение системы уравнений РБФ

Несмотря на возможности уменьшения размерности системы, время интерполяции остается существенным в рамках решения сопряженной задачи. Основные затраты приходятся на решение системы (1) и формирование матриц  $W_{\Gamma_\Omega \Gamma_\Omega}$ ,  $W_{\Gamma_\Phi \Gamma_\Omega}$ . Решение системы уравнений, как правило, осуществляется методами из подпространства Крылова. Эти методы объединяет использование матрично-векторного произведения, которое эффективно выполняется с использованием GPU. Характерной особенностью базисных функций, рассматриваемых выше, является полностью заполненная матрица  $W_{\Gamma_\Omega \Gamma_\Omega}$ , что сказывается на размере системы, которую можно решить на GPU. Используя подход, представленный в [1], объем используемой памяти можно увеличить за счет использования нескольких GPU. Таким образом, основные затраты интерполяции минимизируются за счет использования одного или нескольких графических ускорителей. Время, затрачиваемое на формирование матриц  $W_{\Gamma_\Omega \Gamma_\Omega}$  и  $W_{\Gamma_\Phi \Gamma_\Omega}$ , уменьшается за счет использования многопоточности. Распараллеливание в рамках технологии OpenMP позволило добиться сокращения времени до семи раз при использовании восьми потоков CPU.

### 4. Выводы

Послойное разделение, учитывающее особенности распределения интерполируемых сеточных данных, позволяет их существенно сократить, сохраняя качество интерполяции. При нерегулярном распределении сеточных данных, наиболее эффективными являются глобальные базисные функции, позволяющие существенно сократить объем данных. Сокращение данных приводит к уменьшению размерности системы уравнений (1), что, вместе с использованием GPU и многопоточности, позволяет уменьшить время вычислений, затрачиваемое на интерполяцию в десятки раз.

### 5. Благодарности

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 17-01-00402\_а, 16-37-00060-мол\_а).

#### Список литературы

1. *Kopysov S. P., Kuzmin I. M., Nedozhogin N. S., Novikov A. K., Sagdeeva Y. A.* Scalable hybrid implementation of the Schur complement method for multi-GPU systems // *Journal of Supercomputing*. 2014. Vol. 69. P. 81–88.
2. *Wang T. S., Zhao X., Zhang S.* Aeroelastic Modeling of a Nozzle Startup Transient // *Journal of Propulsion and Power*. 2013. V. 30.
3. *Копысов С. П., Кузьмин И. М., Тонков Л. Е.* Методы деформирования сеток в сопряженных задачах // *Вычислительные методы и программирование*. 2013. Т. 14. С. 269–278.
4. *Новиков А. К., Копысов С. П., Пиминова Н.К.* Послойное разделение конечно-элементных сеток для мультиядерных архитектур // *Суперкомпьютерные дни в России*. 2016. С. 493–504.

## Модальный анализ шума вихревого кольца в АЗК ПНИПУ

В. Ф. Копьев<sup>1,2</sup>, И. В. Храмцов<sup>2,a</sup>, Е. С. Черенкова<sup>2,b</sup>, В. В. Пальчиковский<sup>2</sup>,  
Ю. В. Берсенеv<sup>2</sup>

<sup>1</sup>НИМК ЦАГИ. г.Москва, улица Радио, 17.

<sup>2</sup>Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, Комсомольский пр., 29.

email: <sup>a</sup>igorhrs92@mail.ru, <sup>b</sup>cherenkova-zh@mail.ru

Механизмы генерации шума интенсивными турбулентными течениями на данный момент являются недостаточно изученными. При этом основные физические закономерности должны проявляться уже в самых простых вихревых течениях. Примером такого течения может являться вихревое кольцо. В работе проводятся экспериментальные исследования по регистрации шума турбулентных вихревых колец, измерения траектории и скорости данных вихрей с помощью современных многоканальных акустических методов. Получены усредненные по ансамблю реализаций спектры для различных участков траектории движения вихревого кольца, а также направленность шума вихревого кольца.

**Ключевые слова:** турбулентное вихревое кольцо; аэроакустика; заглушенная камера; метод азимутальной декомпозиции

## Modal analysis of vortex ring noise in anechoic chamber PNRPU

V. F. Kopiev<sup>1,2</sup>, I. V. Khramtsov<sup>2,a</sup>, E. S. Cherenkova<sup>2,b</sup>, V. V. Palchikovskiy<sup>2</sup>,  
Yu. V. Bersenev<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Central Aerohydrodynamic Institute (TsAGI), Moscow, street Radio, 17.

<sup>2</sup>Perm National Research Polytechnic University. Perm, Komsomolsky prospect, 29.

email: <sup>a</sup>igorhrs92@mail.ru, <sup>b</sup>cherenkova-zh@mail.ru

By now the mechanisms of noise generation by intense turbulent flows are little-studied. The basic physical laws, at the same time, should be revealed in the most simple vortex flows. An example of such a flow is a vortex ring.

Experimental studies to record the noise of turbulent vortex rings, the trajectory and velocity of these vortices are carried out using modern methods of multichannel acoustic measurements. The spectra averaged over the ensemble of realizations for different sections of the motion trajectory of the vortex ring and noise directivity of vortex ring noise are obtained.

**Keywords:** turbulent vortex ring; aeroacoustics; anechoic chamber; azimuthal decomposition technique



## 1. Введение

Дозвуковая турбулентная струя является одним из основных источников шума в современных авиационных силовых установках, шум в которой генерируется турбулентными вихрями. Основной трудностью изучения шума струи является то, что в турбулентных струях присутствуют вихри различных масштабов, взаимодействующие друг с другом, что приводит к «смазыванию» картины излучения, поэтому чрезвычайно важной представляется возможность исследования фундаментальных вопросов излучения звука турбулентными потоками на примере изолированного вихря. Примером такого вихря может являться турбулентное вихревое кольцо [1].

Относительно недавно российскими учеными был разработан новый метод исследования шума турбулентной струи на основе синхронного многоканального анализа звукового поля с помощью микрофонных решеток (метод азимутальной декомпозиции). Впервые данный метод был использован для анализа вихревых колец в работе [2].

## 2. Экспериментальное исследование вихревого кольца

В данной работе регистрация шума вихревого кольца проводилась в акустической заглушенной камере ПНИПУ [3].

Для применения метода азимутальной декомпозиции (ADT), на траектории движения вихревого кольца была установлена решетка с шестью микрофонами, расположенными в углах правильного шестиугольника, на расстоянии 4 м. После проведения эксперимента был проведен первичный отбор реализаций.

При обработке данных методом ADT были получены спектры для каждой реализации, а также амплитуду звуковой мощности шума вихревого кольца. В дальнейшем данные спектры усреднялись для определения пика вихревого кольца и определения частотного диапазона ( $\pm 150$ Гц), для построения направленности шума вихревого кольца (рис. 1).

После усреднения амплитуд звуковой мощности определялся общий шум состоящий из данных амплитуд для каждой полосы частот и затем относительный вклад каждой моды в шум вихревого кольца на определенном участке траектории.

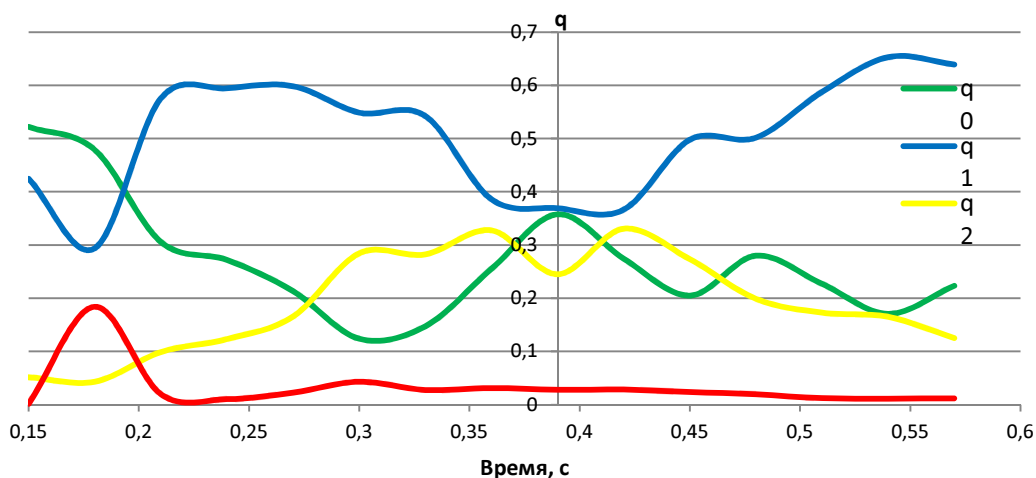


Рис.1. Направленность шума вихревого кольца

### 3. Заключение

Разработана методика экспериментально исследования акустических и аэродинамических характеристик вихревого кольца на основе многоканальных методов исследования. Эта методика развивает подход, впервые предложенный в [1]. Полученные результаты позволили выделить шум турбулентного вихревого кольца на фоне собственного структурного шума установки в существенно более широком диапазоне параметров. Подтвердилось, что вихревое кольцо действительно излучает звук и звуковое поле сосредоточено в узкой полосе частот.

По направленности шума вихревого кольца четко видна осесимметричная, первая и вторая моды. Третья мода практически не вносит свой вклад в шум вихревого кольца. На первоначальном участке видно влияние шума установки на моды вихревого кольца

Работа выполнена в рамках госзадания, выполняемого научными коллективами исследовательских центров и (или) научных лабораторий образовательных организаций высшего образования, регистрационный номер 9.3480.2017/ПЧ.

### Список литературы

1. *Зайцев М.Ю., Копьев В.Ф., Мунин А.Г., Потокин А.А.* Излучение звука турбулентным вихревым кольцом // Докл. АН СССР. 1990. Т. 312. №5. С. 1080–1083.
2. *Зайцев М.Ю., Копьев В.Ф., Котова А.Н.* «Представление звукового поля турбулентного вихревого кольца суперпозицией квадруполей» // Акуст. Журн. 2001. Т. 47. №6. С. 793–801.
3. *Копьев В.Ф., Зайцев М.Ю., Пальчиковский В.В., Храмов И.В., Берснев Ю.В.* Экспериментальное исследование шума турбулентных вихревых колец в заглушенной камере // Вестник ПНИПУ. Аэрокосмическая техника. Пермь. 2016. №45. С. 194–199.

## Численное моделирование придонных частей торнадо в стационарном плоском случае

И.Ю. Крутова, О.В. Опрышко

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»  
115409, г. Москва, Каширское шоссе, д. 31  
email: IYKrutova@mephi.ru

В природе довольно часто встречается интересное атмосферное явление – восходящие закрученные потоки (ВЗП) воздуха, такие как вихри, смерчи, торнадо. Доступная часть данных натуральных наблюдений за торнадо систематизирована и собрана в шкалу Фудзиты. В ней указывается значение ширины полосы разрушения для торнадо различной интенсивности, а также значение максимальной скорости ветра. Баутиным С. П. была предложена и обоснована ранее не встречающаяся схема возникновения природных восходящих закрученных потоков типа торнадо и тропического циклона. В данной работе представлен сравнительный анализ газодинамических характеристик всех классов торнадо по расширенной шкале Фудзиты для углов:  $\pi/3$ ,  $\pi/4$ ,  $\pi/6$ , задающих широту точки нахождения потока.

**Ключевые слова:** система уравнений газовой динамики; торнадо; шкала Фудзиты; закрутка газа

## Numerical simulation of the bottom part of tornadoes and tropical cyclones in a stationary plane case

I.Y. Krutova, O.V. Opryshko

National Research Nuclear University MEPHI (Moscow Engineering Physics Institute)  
115409, Moscow, Kashirskoe shosse, 31  
email: IYKrutova@mephi.ru

Interesting atmospheric phenomena are often found in nature. These are ascending swirling flows (ASF) of air, such as whirlwinds, tornadoes, tornado.

An available part of these observations of tornadoes is systematized and collected in the Fujita scale. It indicates the value of the bandwidth destruction for tornadoes of varying intensity, and the value of maximum wind speed.

Bautin S.P. proposed and justified the encountered previously scheme of the natural upward swirling flows of tornadoes and tropical cyclones type.

This paper presents a comparative analysis of the gas dynamic characteristics of all classes of tornado on the Enhanced Fujita scale for angles:  $\pi/3$ ,  $\pi/4$ ,  $\pi/6$ , defining the breadth of the point of finding the flow.

**Keywords:** system of equations of gas dynamics; tornado; Fujita scale; twist of gas

Rising swirling flows of air, have the following characteristics:

1. There is a motion of gas in the atmosphere, which rotates with the Earth round its axis, which is local in the scale of the planet, and it exists within a fairly long time.
2. Gas movement in the ASF is the screw, i.e., with simultaneous movement of gas particles going up spin - rotational movement round the axis of the rising swirling stream.
3. Strong winds occur around the base of the ASF, which cause numerous destructions.

In order to model the gas flow in the bottom part of tornado within the scheme proposed by S.P. Bautin [1] (see also [2]), the Fujita scale [3] is used as field studies data at tornado of varying intensity, as shown below in table 1.

**Table 1.** *Fujita Scale*

Class of tornado	Speed wind in m / s	Width Track, m	Central path length, km	Average time life, min
F0	19-32	5-15	1.9	2.4
F1	33-50	16-50	4.2	5.2
F2	51-70	51-160	8.7	10.8
F3	71-92	161-508	16.1	20.0
F4	93-116	547-1448	43.8	54.4
F5	117-142	1609-4989	57.1	71.0

A Cauchy problem with the initial conditions was posed for the system of equations of gas dynamics, set up on a horizontal plane  $z = 0$ , the value of which are determined  $c_0, u_0, v_0$ , [2].  $c_0$  – the sound velocity of the gas,  $u_0$  – radial component of gas velocity vectors,  $v_0$  – circumferential component of gas velocity vectors. The speed in the vertical direction is zero.

In this paper the following problem is solved

$$\left\{ \begin{array}{l} c'_0 = -\frac{(\gamma-1)}{2} c_0 \frac{\left[ u_0^2 + \frac{a^2 (r_{in}^4 - r^4)}{4r^2} \right]}{r(u_0^2 - c_0^2)}, \\ u'_0 = u_0 \frac{\left[ u_0^2 + \frac{a^2 (r_{in}^4 - r^4)}{4r^2} \right]}{r(u_0^2 - c_0^2)}, \\ c_0(r) \Big|_{r=r_{in}} = 1, \\ u_0(r) \Big|_{r=r_{in}} = u_{in}. \end{array} \right. \quad (1)$$

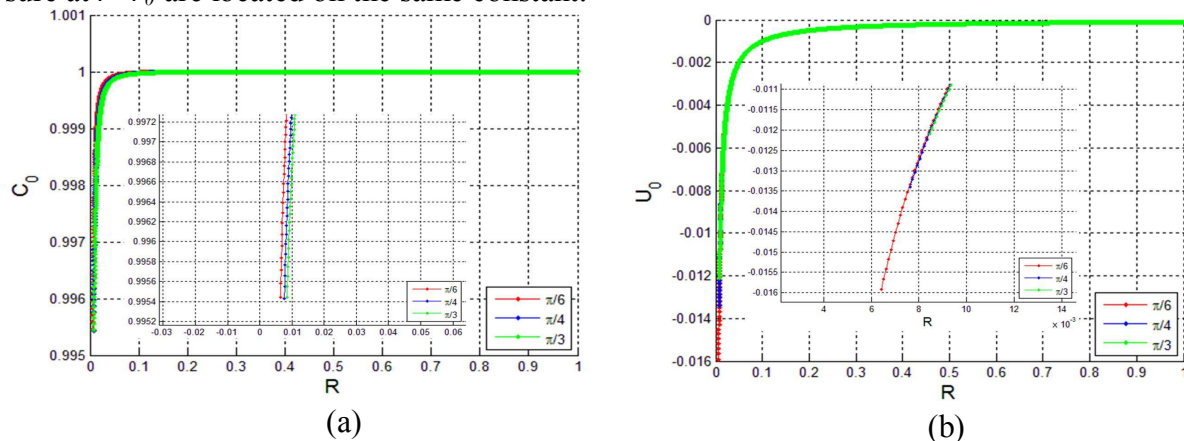
$$v_0 = \frac{a(r_{in}^2 - r^2)}{2r}, \quad v_0(r_{in}) = 0, \quad a = 2\Omega \sin \psi.$$

Here,  $\Omega$  – the magnitude of angular velocity of the Earth's rotation,  $\psi$  – the latitude of the point.

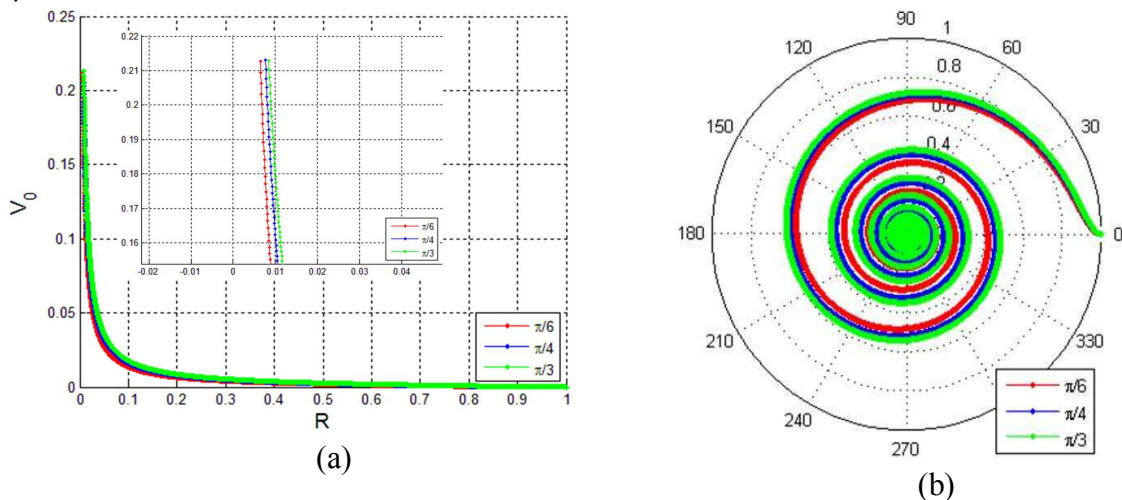
The set of the Cauchy problem (1) was solved numerically.

These are the results of calculations for angles:  $\psi = \pi/6$ ,  $\psi = \pi/4$ ,  $\psi = \pi/3$ , defining the breadth of the point, in which the tornadoes function.

Figure 1 shows the results calculation of values  $c_0(r)$  for a tornado F30 class for latitudes:  $\psi=\pi/4$ ,  $\psi=\pi/3$ . Regardless of the latitude of the operating tornadoes, density and pressure at  $r=r_0$  are located on the same constant.



**Figure 1.** Plots of the function (a)  $c_0$ , (b)  $u_0$  for a tornado F30 class for  $\psi=\pi/6$ ,  $\psi=\pi/4$ ,  $\psi=\pi/3$



**Figure 2.** Plots of the function (a)  $v_0(r)$ , (b) graphs of the particle's trajectory for a tornado F30 class for  $\psi=\pi/6$ ,  $\psi=\pi/4$ ,  $\psi=\pi/3$

General conclusions on the calculations of gas-dynamic parameters:

the major changes taking place in the gas-dynamic parameters at the neighborhood stokes for  $r=r_0$ ;

to increase the flow rate increases the speed of the module at the neighborhood stokes  $r=r_0$ ;

for tornado one class with increasing latitude rate rising the circumferential speed of an order of magnitude greater radial velocity module for  $r=r_0$ .

Thank you Professor S.P. Bautina for useful discussions.

## Bibliography

1. *Bautin S. P.* Tornado and the Coriolis force. Nauka, Novosibirsk, 2008. 96 p.
2. *Bautin S. P., Krutov I. Y., Obukhov A. G., Bautin K. V.* Destructive atmospheric vortices: theorem calculations, experiments. Novosibirsk: Nauka, 2013. 216 p.
3. *Tatom F. B., Witton S. J.* The transfer of energy from tornado into the ground // Seismological Research Letter. - 2001. - V. 72. № 1. - Pp. 12-21.
4. *Emanuel K. A.* A statistical Analysis of Tropical Cyclone Intensity // Journ. of the Atmospheric Sciences. 2000. V. 128. P. 1139–1152.

## **Моделирование бинарной смеси двух жидкостей на основе метода фазового поля**

**Р. Кси, А. Воробьев**

Университет Саутгемптона, Саутгемптон, SO17 1BJ, Великобритания

email: A.Vorobev@soton.ac.uk

Цель данной работы – разработать теоретическую модель для корректного воспроизведения динамики перемешивания двух смешиваемых жидкостей в общем случае, а также, в частности, воспроизвести результаты экспериментальных наблюдений, раннее проведенных путем наблюдения смешения жидкостей внутри горизонтальных капилляров. Первоначальное моделирование было проведено на основе классического закона Фика. Полученные результаты согласуются с классическими представлениями, а именно, граница раздела смешиваемых жидкостей остается неподвижной в капилляре, а ее толщина медленно увеличивается со временем, что, однако, противоречит экспериментальным наблюдениям. Другая модель, основывается на методе фазового поля. В рамках новой модели, можно ввести в рассмотрение две фазы, которые разделяются границей раздела, наделенной поверхностным натяжением. Кроме того, межфазная диффузия в новой модели определяется на основе градиента химического потенциала. Новая модель позволяет воспроизвести форму межфазной границы, и предсказать ее движение как целого. Однако, предсказания для скорости межфазной границы согласуются с теорией Фика, и не согласуются с экспериментом. Также модель была дополнена включением гидродинамических эффектов, интенсивность и, соответственно, влияние течений оказалась незначительным.

**Ключевые слова:** смешиваемые жидкости; метод фазового поля; бинарные смеси

## **Phase-field modelling of the slowly miscible binary liquid/liquid system**

**R. Xie, A. Vorobev**

University of Southampton, Southampton, SO171BJ, United Kingdom

email: A.Vorobev@soton.ac.uk

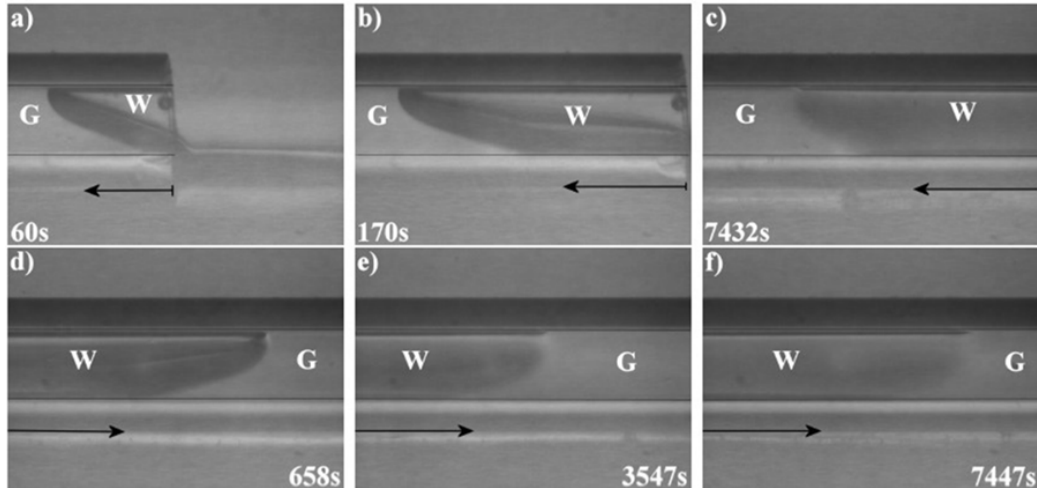
We develop a theoretical model that would provide an accurate description of the mixing process of two miscible liquids, and would reproduce the experiments with two miscible liquids that saturate capillary tubes. The work is started by using the classical Fick's law of diffusion. The obtained results agree with common expectations that liquid/liquid boundaries stay stationary and just would smear. This however contradicts to the experimental observations. Our other more-advanced model is based on the phase-field approach, that clearly introduces the phases and defines the diffusion flux through the gradient of the chemical potential. The model reproduces the shape of the liquid/liquid interfaces. The rate of interfacial mass transfer remains, however, similar with the predictions of the Fick's theory, i.e. incorrect.

The role of hydrodynamic effects was also assessed, but the hydrodynamic flows were found to be negligible.

**Keywords:** miscible liquids; phase field approach; binary mixtures

## 1. Introduction

Diffusion between two miscible liquids plays a key role in various natural and industrial processes. Traditionally, diffusion is defined through the Fick's law, which assumes that the diffusion flux is driven by the gradients of concentration, which is however only applicable to the cases of small concentration gradients.



**Fig. 1** The shapes of the glycerol/water interfaces at different time moments are shown. The horizontal tube with two open ends is initially filled with glycerol and then the tube is immersed into a water-filled thermostatic bath. Two glycerol/water boundaries are formed at the opposite sides, and these boundaries move towards the middle of the tube with equal speeds

In experiments [1], conducted with different miscible liquids that were saturating a capillary, a clear solute/solvent front was visible for prolonged time periods. The typical shapes of the solute/solvent boundaries formed at two sides of the tube are shown in Fig. 1. The commonly expected behaviour is however that the solute/solvent boundary should stay immovable and should become thicker through smearing, and this contracts the experimental observations when the motion of the solute/solvent boundaries is reported.

We aim to develop the theoretical model that would provide an accurate description of the mixing process of two miscible liquids, and would reproduce the experimental observations reported in work [1].

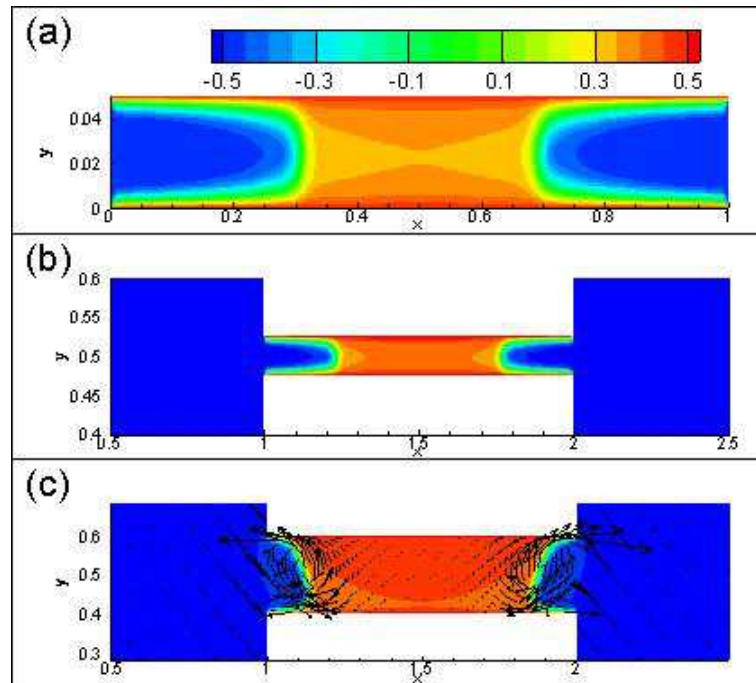
## 2. Results and discussion

We start the modelling by employing the classical Fick's law of diffusion, with additional assumption that the diffusion coefficient strongly depends on concentration. The obtained results reproduce the general expectations, that the stationary diffusive phase boundaries that smear in time. Since this is not in agreement with the experimental work [1], we tried a more advanced theory.

Our next is based on the phase-field (Cahn-Hilliard) approach. This approach is frequently used as a numerical tool to capture the dynamics of immiscible interfaces. We use this ap-

proach as the physics-based model suitable for description of the dynamics of slowly miscible liquids.

Within this approach the diffusion is defined through the gradient of the chemical potential, and the expression for the chemical potential includes the gravity and capillary effects, thus allowing us to consider the effects of surface tension and barodiffusion.



**Fig. 2.** The shapes of the solute/solvent boundaries obtained on the basis of the phase-field model. The results are shown for different geometries. (a) A single capillary, (b) The capillary tube that is joined by two blocks. (c) The block geometry with addition of the hydrodynamic flows generated by the concentration gradients. The velocity field is also shown

The phase-field results are shown in Fig. 2. Two clear interfaces between miscible liquids are seen. The shape of the interfaces is determined by the balance of the gravity and surface tension forces. The solute/solvent boundaries move towards the middle of the tube. However, the predictions of the speed of propagation of the solute/solvent boundary do not agree with the experimental measurements [1].

### 3. Acknowledgements

The financial support of the Government of Perm region, Russia (Contract No. C-26-004-03), the Royal Society (Ref. IE160277), and the Russian Foundation for Basic Research (Grant No. 16-5110079) is gratefully acknowledged.

### References

1. Stevar M.S.P., Vorobev A. Shapes and dynamics of miscible liquid/liquid interfaces in horizontal capillary tubes, *J. Colloid Interface Sci* (2012) 383, p. 184-197.
2. Xie R., Vorobev A. On the phase-field modelling of a miscible liquid/liquid boundary, *J. Colloid Interface Sci* (2016), 464, p. 48–58.



## **Вращательная динамика магнитных наночастиц в переменном магнитном поле**

**А. А. Кузнецов, А. Ф. Пшеничников**

Институт механики сплошных сред УрО РАН  
614013, Пермь, ул. Ак. Королева, 1  
email: kuznetsov.a@icmm.ru

Теоретически исследован отклик разбавленной суспензии магнитных наночастиц в линейно поляризованном переменном поле. Восприимчивости гармоник намагниченности рассчитаны с помощью трёх различных уравнений: уравнения Фоккера-Планка для одночастичной ориентационной функции распределения, уравнения Ланжевена для вращательного движения частицы и макроскопического уравнения намагниченности (уравнения Марценюка-Райхера-Шлиомиса). Результаты первых двух подходов совпадают в широком диапазоне частот и амплитуд поля. Расчёт старших гармоник с помощью уравнения Ланжевена оказывается неэффективен при малых амплитудах поля. Макроскопическое уравнение верно описывает поведение основной гармоники, но результаты для старших гармоник расходятся с точным решением – максимальная ошибка наблюдается в случае, когда период поля сопоставим с броуновским временем вращательной диффузии частиц.

**Ключевые слова:** магнитная наночастица; магнитная жидкость; динамическая восприимчивость

## **Rotational dynamics of magnetic nanoparticles in alternating magnetic field**

**A. A. Kuznetsov, A. F. Pshenichnikov**

Institute of continuous media mechanics UB RAS, Ac. Korolyov St. 1, 614013, Perm  
email: kuznetsov.a@icmm.ru

The response of dilute magnetic nanoparticle suspension to linearly polarized field is studied theoretically. Susceptibilities of the fundamental and high-order magnetization harmonics are calculated via three different equations: Fokker-Planck equation for the one-particle orientation distribution function, Langevin equation for the particle rotational movement and Martsenyuk-Raikher-Shliomis macroscopic magnetization equation. Results of the first two approaches coincide in a wide range of frequencies and amplitudes. It is shown that obtaining high-order harmonics via Langevin equation is computationally inefficient at small field amplitudes. Macroscopic equation properly describes the fundamental harmonic, but high-order harmonics deviate from correct values – the error is maximum when the field period is comparable with the Brownian rotational diffusion time.

**Keywords:** magnetic nanoparticle; magnetic fluid; dynamics susceptibility

## 1. Введение

Магнитная жидкость (МЖ) – высокодисперсная суспензия магнитных наночастиц в немагнитной жидкости-носителе [1]. В настоящей работе мы рассмотрим отклик разбавленной МЖ на переменное магнитное поле в широком диапазоне его амплитуд и частот. Ранее для решения этой задачи успешно применялось уравнение Фоккера-Планка [2], однако мы рассмотрим несколько альтернативных подходов, которые в дальнейшем смогут быть использованы для решения более широкого круга задач.

## 2. Постановка задачи и методы решения

Рассмотрим суспензию невзаимодействующих магнитожёстких частиц в переменном поле  $H(t) = H_0 \cos \omega t$ . Необходимо найти зависимость намагниченности от времени ( $M = M(t)$ ) при заданных параметрах  $\xi_0 = \mu_0 \mu H_0 / kT$  и  $\omega \tau_B$ , где  $\mu$  – магнитный момент частицы,  $kT$  – энергия теплового движения,  $\tau_B$  – броуновское время вращательной диффузии. Намагниченность можно разложить в ряд Фурье  $M = \sum_k M_k e^{ik\omega t}$ , коэффициенты которого легко определить из уравнения Фоккера-Планка

$$2\tau_B \frac{\partial}{\partial t} W(\theta, t) = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \sin \theta \left( \frac{\partial}{\partial \theta} W(\theta, t) + \frac{W(\theta, t)}{kT} \frac{\partial}{\partial \theta} U(\theta, t) \right) \right], \quad (1)$$

где  $W$  – одночастичная ориентационная функция распределения,  $\theta$  – угол между магнитным моментом и полем,  $U = -\mu_0 \mu H \cos \theta$ . Схема решения подробно изложена в [2]: уравнение (1) сводится к системе алгебраических рекуррентных уравнений для элементов разложения  $W$ ; система численно решается методом матричной прогонки. Альтернативный подход заключается в моделировании ансамбля из  $N$  частиц, динамика которых подчиняется уравнению Ланжевена

$$J \dot{\boldsymbol{\omega}}_i = -\boldsymbol{\mu}_i \times \partial U_i / \partial \boldsymbol{\mu}_i - \gamma \boldsymbol{\omega}_i + \boldsymbol{\zeta}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2)$$

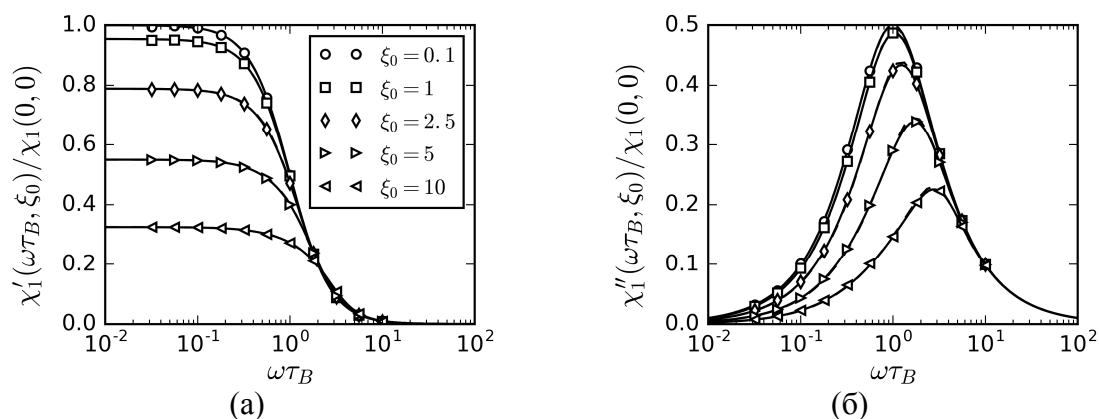
где  $J$  – момент инерции частицы,  $\boldsymbol{\omega}$  – её угловая скорость,  $\gamma$  – коэффициент трения,  $\boldsymbol{\zeta}$  – гауссовский шум, связанный с  $\gamma$  через флуктуационно-диссипационное соотношение. Мгновенное значение намагниченности определяется из соотношения  $M/M_s = \sum_i \cos \theta_i / N$  ( $M_s$  – намагниченность насыщения). Моделирование проводилось для  $N = 10^5$ ,  $J$  и  $\gamma$  задавались так, чтобы влияние инерции на поведение системы было пренебрежимо мало. Последний используемый подход заключается в численном интегрировании макроскопического уравнения намагниченности, предложенного в [3]. Для рассматриваемой задачи уравнение сводится к виду

$$\tau_B \dot{M} = -M \left( 1 - \xi / \xi_e \right), \quad (3)$$

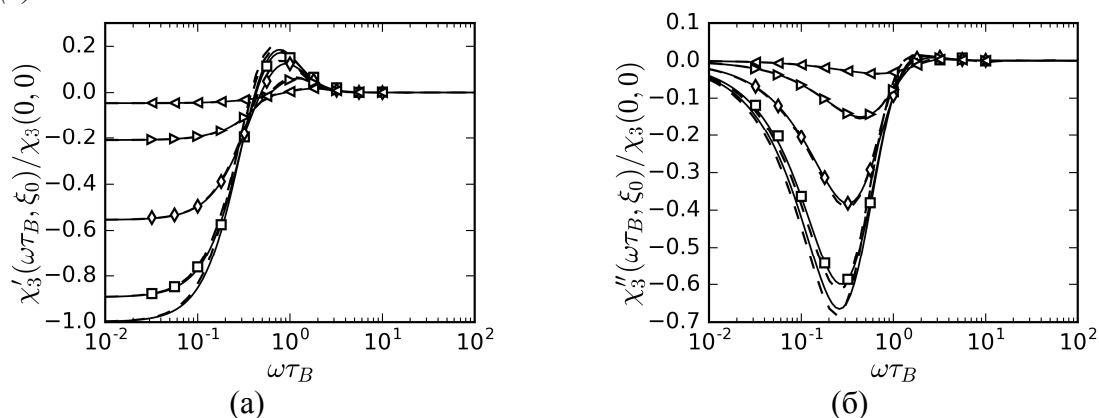
где  $\xi = \mu_0 \mu H / kT$ ,  $\xi_e$  – «эффективное поле»,  $M = M_s L(\xi_e)$ ,  $L(x) = \coth x - 1/x$ .

## 3. Результаты

На (рис. 1 и 2) даны частотные зависимости восприимчивостей первой и третьей гармоники  $M$  ( $\chi_k = M_k / H_0^k$ ,  $M_k = 0$  для чётных  $k$ ). Для  $k = 1$  все три уравнения дают близкие результаты, для  $k > 1$  уравнение (3) даёт отклонения от решения (1) при  $0.1 < \omega \tau_B < 10$ . При использовании уравнения (2) динамика  $M$  на малых амплитудах подвержена сильным флуктуациям и возникает проблема сбора статистики: при  $\xi_0 \geq 5$  достоверные данные удаётся получить за один период поля, при  $\xi_0 = 1$  требуется усреднять результаты по нескольким десяткам периодов, для  $\xi_0 = 0.1$  даже при усреднении по ста перио-



**Рис. 1.** Частотные зависимости действительной (а) и мнимой (б) части восприимчивости основной гармоники намагниченности при различных амплитудах поля. Сплошные линии – решение уравнения (1), символы – уравнения (2), пунктир – уравнения (3)



**Рис. 2.** То же, что на рис. 1, для третьей гармоники намагниченности

дам имеется значительная погрешность в  $\chi_3$  (на рис. 2 данные по  $\xi_0 = 0.1$  не приводятся).

#### 4. Заключение

Все рассмотренные в работе подходы позволяют получить достоверные данные по основной гармонике намагниченности МЖ в широком диапазоне параметров переменного поля. При исследовании старших гармоник предпочтительным является использование уравнения (1).

#### 5. Благодарности

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 16-01-00517, № 16-31-00417).

#### Список литературы

1. Шлиomis М. И. Магнитные жидкости // Успехи физических наук. 1974. Т. 112. Вып. 3. С. 427–458.
2. Dejardin J. L., Kalmykov Yu. P. Nonlinear dielectric relaxation of polar molecules in a strong ac electric field: Steady state response // Physical Review E. 2000. Vol. 61, 1211.
3. Марценюк М. А., Райхер Ю. Л., Шлиomis М. И. К кинетике намагничивания суспензий ферромагнитных наночастиц // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1973. Т. 65. Вып. 2. С. 834–841.

## Математическое моделирование турбулентного теплопереноса в технологическом водоеме-охладителе

Г. В. Кузнецов, В. И. Максимов, А. А. Дудак

Национальный исследовательский Томский политехнический университет, 634050, г. Томск, проспект Ленина, дом 30,  
email: elf@tpu.ru

Представлены результаты математического моделирования гидродинамики и теплопереноса в технологическом водоеме-охладителе с учетом турбулентного характера течения жидкости. Рассматривалась плоская нестационарная задача в рамках модели Навье-Стокса в безразмерных переменных «вихрь скорости – функция тока – температура» для жидкости и уравнении теплопроводности для стенок. Дополнительно введены в рассмотрение уравнения к-ε модели с соответствующими краевыми условиями. Система нестационарных уравнений динамики вязкой жидкости решена методом конечных разностей с использованием итерационного алгоритма. Получены распределения гидродинамических параметров и температур, характеризующие основные закономерности исследуемых процессов. Выделены циркуляционные течения и проведён анализ механизма образования вихрей и распределения температуры в области решения при числах Рейнольдса ( $10^4 \leq Re \leq 10^7$ ) и Грасгофа ( $Gr \geq 10^{12}$ ). Выявлено, что скорость потока обратной воды на входе в водоём существенно влияет на гидродинамику течения и распределение температуры.

**Ключевые слова:** водоем-охладитель; математическое моделирование; смешанная конвекция; турбулентность

## Mathematical modeling of turbulent heat transfer in technological water-cooler

G. V. Kuznetsov, V. I. Maksimov, A. A. Dudak

National Research Tomsk Polytechnic University, 30, Lenina av., Tomsk, 634050, Russia,  
email: elf@tpu.ru

Are represented the results of the mathematical simulation of hydrodynamics and heat transfer in the technological reservoir- cooler taking into account the turbulent nature of liquid flow. The regimes of the mixed convection in the open reservoir with the sections of input and output of water with different parameters of input flow are investigated. Was examined two-dimensional nonstationary problem within the framework of Navier-Stokes model in the dimensionless variables “vorticity - the function of current - temperature” for the liquid and the equation of thermal conductivity for the walls. It is additionally introduced into the examination of the equation κ-ε model with the appropriate boundary conditions. The system of the nonstationary equations of the dynamics of viscous

fluid is solved by the finite-difference method with the use of an iterative algorithm. Are obtained distributions of the hydrodynamic parameters and temperatures, characteristic basic laws governing the processes being investigated. Circulation flows are isolated and is carried out the analysis of the mechanism of the formation of vortices and temperature distribution in the region of the solution with the regimes of forced convection, the numbers of Reynolds ( $10^4 \leq Re \leq 10^7$ ) and Grashof ( $Gr \geq 10^{12}$ ). It is revealed, that the speed of the flow of recirculating water at the entrance into the reservoir substantially affects the hydrodynamics of flow and the temperature distribution.

Keywords: cooling reservoir; mathematical modeling; mixed convection; turbulence

Проблема загрязнения технологических водоемов ТЭС не только сохраняет свою значимость [1-4] в течение многих последних десятилетий, но с каждым годом становится все более актуальной в связи с общим ухудшением состояния окружающей среды [4]. Одним из важнейших аспектов этой крупной научно-технической проблемы является образование и распространение микроорганизмов, бактерий и водорослей [4] в технологических водоемах. Условия и характеристики процессов развития микроорганизмов и водорослей определяются, в основном, тепловым режимом среды, в которой они присутствуют [4]. Поэтому анализ интенсивности загрязнения технологических водоемов наиболее типичными природными загрязнителями возможен только при достоверной оценке температурных полей водоемов. Решение же задачи теплопереноса в рассматриваемых условиях сопряжено с описанием не только процессов теплопроводности, но и конвекции в условиях достаточно интенсивного притока оборотной воды, ее отведения и отвода теплоты в грунт (или подвода) по большей части внешнего контура водоема и охлаждения или нагрева на границе раздела «вода – воздух».

Представляет интерес решение задачи теплопереноса в технологическом водоеме ТЭС с учетом конвекции и теплопроводности, а также турбулентного режима течения жидкости в области с тремя непроницаемыми стенками, одной свободной поверхностью, наличием источников ввода и вывода массы.

Цель работы – математическое моделирование теплопереноса в технологическом водоеме ТЭС в рамках модели, отличающейся от известных учетом турбулентного характера течения жидкости.

Проведено моделирование турбулентного течения несжимаемой вязкой жидкости и теплопереноса в прямоугольной области с двумя вертикальными и одной горизонтальной стенками конечной толщины и одной свободной поверхностью. Система нестационарных уравнений Навье-Стокса для жидкости и уравнением теплопроводности для твердых стенок, соответствующая принятой физической модели рассматриваемого процесса, в целом незначительно отличается от математической модели [5-7]. Дополнительно введены в рассмотрение уравнения к-ε модели с соответствующими краевыми условиями. Задача решалась в безразмерной постановке.

Уравнения Навье-Стокса в приближении Буссинеска в безразмерных переменных «вихрь скорости – функция тока – температура» для воды (режим смешанной конвекции) и уравнение теплопроводности для твердых стенок будут иметь вид [5-5]:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Omega}{\partial X} + V \frac{\partial \Omega}{\partial Y} &= \frac{\partial^2}{\partial X^2} \left[ \left( \frac{1}{\text{Re}} + \frac{1}{\text{Re}_i} \right) \Omega \right] + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left[ \left( \frac{1}{\text{Re}} + \frac{1}{\text{Re}_i} \right) \Omega \right] + \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \frac{\partial \Theta}{\partial Y} \\
+ 2 \frac{\partial U}{\partial Y} \frac{\partial^2}{\partial X^2} \left( \frac{1}{\text{Re}_i} \right) - 2 \frac{\partial V}{\partial X} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left( \frac{1}{\text{Re}_i} \right) + 2 \left( \frac{\partial V}{\partial Y} - \frac{\partial U}{\partial X} \right) \frac{\partial^2}{\partial X \partial Y} \left( \frac{1}{\text{Re}_i} \right) \\
\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Theta}{\partial X} + V \frac{\partial \Theta}{\partial Y} &= \frac{\partial}{\partial X} \left[ \left( \frac{1}{\text{PrRe}} + \frac{1}{\text{Pr}_i \text{Re}_i} \right) \frac{\partial \Theta}{\partial X} \right] + \frac{\partial}{\partial Y} \left[ \left( \frac{1}{\text{PrRe}} + \frac{1}{\text{Pr}_i \text{Re}_i} \right) \frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right], \\
\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} &= -\Omega, \\
\frac{\partial K}{\partial \tau} + U \frac{\partial K}{\partial X} + V \frac{\partial K}{\partial Y} &= \frac{\partial}{\partial X} \left[ \left( \frac{1}{\text{Re}} + \frac{1}{\sigma_k \text{Re}_i} \right) \frac{\partial K}{\partial X} \right] + \frac{\partial}{\partial Y} \left[ \left( \frac{1}{\text{Re}} + \frac{1}{\sigma_k \text{Re}_i} \right) \frac{\partial K}{\partial Y} \right] + \tilde{P}_k + \tilde{G}_k - E \\
\frac{\partial E}{\partial \tau} + U \frac{\partial E}{\partial X} + V \frac{\partial E}{\partial Y} &= \frac{\partial}{\partial X} \left[ \left( \frac{1}{\text{Re}} + \frac{1}{\sigma_\varepsilon \text{Re}_i} \right) \frac{\partial E}{\partial X} \right] + \frac{\partial}{\partial Y} \left[ \left( \frac{1}{\text{Re}} + \frac{1}{\sigma_\varepsilon \text{Re}_i} \right) \frac{\partial E}{\partial Y} \right] + \\
+ c_{1\varepsilon} (\tilde{P}_k + c_{3\varepsilon} \tilde{G}_k) \frac{E}{K} - c_{2\varepsilon} \frac{E^2}{K} \\
\frac{1}{\text{Fo}} \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2},
\end{aligned}$$

Сформулированная выше система нестационарных уравнений динамики вязкой жидкости с соответствующими краевыми условиями решена методом конечных разностей с использованием итерационного алгоритма [5-7]. Использовалась неравномерная разностная сетка. Выбор шагов по времени проводился аналогично [12-13] для обеспечения условий сходимости итерационного процесса. В качестве начального приближения использовались стационарные решения, полученные при малых числах Рейнольдса.

Численные исследования были проведены при следующих достаточно типичных значениях безразмерных и размерных величин:  $\text{Pr}=7,1$ ,  $10^4 \leq \text{Re} \leq 10^7$ ,  $\text{Gr} \geq 10^{12}$ ,  $T_0=293 \text{ K}$ ,  $293 \leq T_{in} \leq 343 \text{ K}$ ,  $273 \leq T_e \leq 297 \text{ K}$ . Рассматривался открытый водоем глубиной 5 и длиной 10 м, толщина бетонных стенок 1 м. Ширина входного и выходного канала составляла 0,3 м.

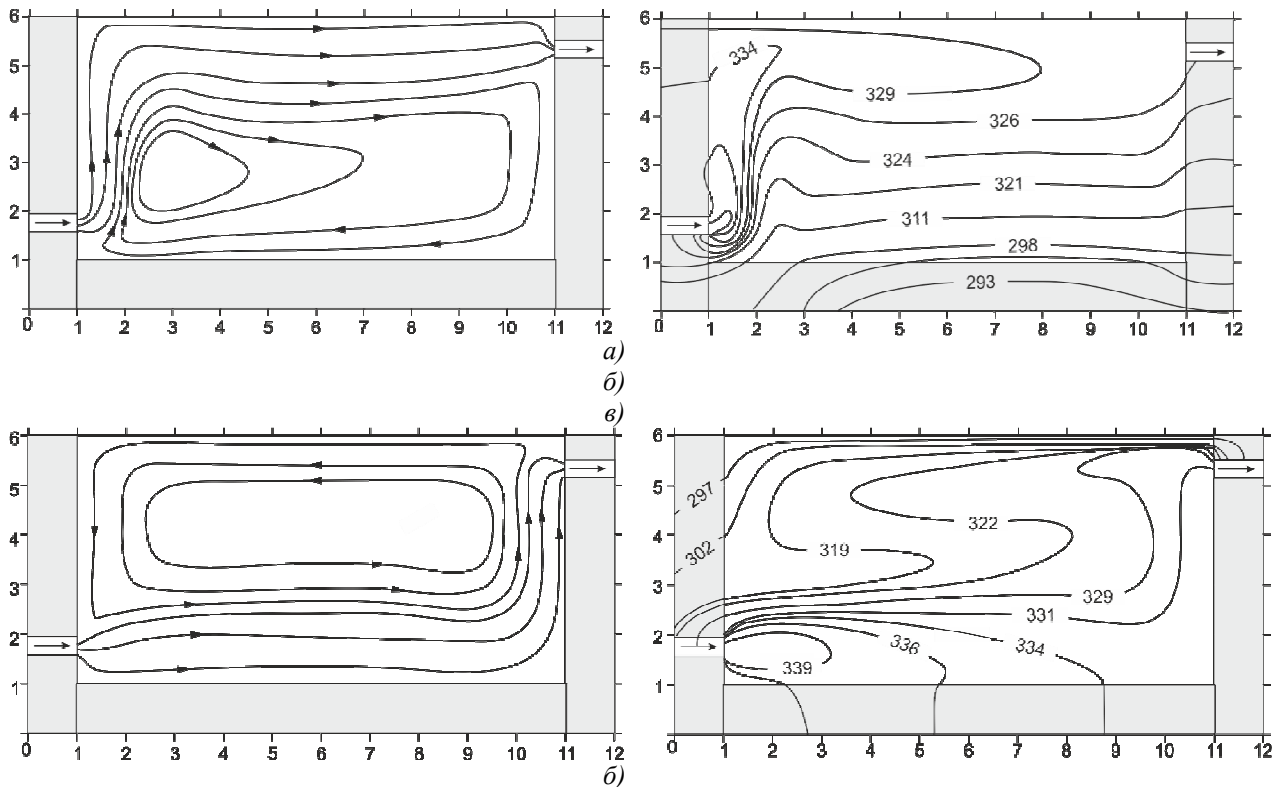
На (рис. 1) приведены типичные результаты решения задачи при различных значениях числа Рейнольдса.

Линии тока и поля температур (рис. 1. а) при  $\text{Gr}=4.56 \cdot 10^{13}$ ,  $\text{Re}=8 \cdot 10^5$  иллюстрируют образование одного обширного вихря в нижней части полости. «Горячая» жидкость, сливаемая в водоем, за счёт сил естественной конвекции поднимается вверх, охлаждённая, двигаясь вдоль дна, направляет основной поток к левой стенке и верхней границе полости. Хорошо видно, что распределение температуры в водоёме по глубине существенно неоднородно. Происходит это за счёт того, что охлаждаемая жидкость в нижней части водоёма практически не смешивается, как показывают результаты численного моделирования, с основным нагретым потоком.

При увеличении числа  $\text{Re}=8 \cdot 10^6$  в водоёме формируется по существу один обширный вихрь (рис. 1. б). При этом вследствие высокой интенсивности вихря

остывающая, но ещё не холодная жидкость поднимается вверх только вдоль правой стенки к выходному отверстию.

Анализ полученных результатов показывает, что скорость потока обратной воды на входе в водоём существенно влияет на гидродинамику течения и распределение температуры. Варьирование числа  $Re$  в относительно небольшом диапазоне приводит к масштабным изменениям структуры потоков жидкости. Это позволяет сделать вывод о том, что изменяя интенсивность притока обратной воды можно управлять тепловым режимом водоема в условиях ввода и отвода массы в режиме смешанной конвекции.



**Рис. 2.** Структура течения (левая часть рисунка) и поле температур при: а –  $Re=8 \cdot 10^5$ , б –  $Re=8 \cdot 10^6$ .  $Gr=4.56 \cdot 10^{13}$ . Размеры приведены в м, температуры – в К

### Заключение

Решение задачи сопряжённого теплопереноса в водоёме-охладителе ТЭС иллюстрирует возможность моделирования существенно неоднородных температурных полей таких водоемов в условиях ввода нагретой до достаточной высоких температур обратной воды и её последующего охлаждения за счёт конвекции и теплопроводности.

Полученные теоретические следствия дают новую информацию, которая не только характеризует конвективный режим течения обратной воды в водоёме-охладителе ТЭС, но и является дополнительной для построения и апробации моделей смешанной конвекции в областях с теплопроводными и аккумулирующими энергию стенками.

Результаты исследований показывают возможность использования уравнений Навье-Стокса в переменных «вихрь скорости – функция тока» для моделирования достаточно сложных по своему характеру течений в режиме турбулентной смешанной конвекции и при неоднородном теплообмене на внешних границах области решения.

Публикация подготовлена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект НШ – 7538.2016.8).

### Список литературы

1. Попов В.М., Рябцев В.И., Рябцев Г.А. О тепловом загрязнении окружающей среды выбросами и сбросами ТЭС и ТЭЦ // Безопасность жизнедеятельности. – 2002. – № 4. – С. 26–28.
2. Palancar M.C., Aragón J.M., Sánchez F., Gil R. Effects of warm water inflows on the dispersion of pollutants in small reservoirs // Journal of Environmental Management. – 2006. – Vol. 81. Iss. 3. – С. 210–222.
3. E.H. Poornima, M. Rajadurai, V.N.R. Rao, S.V. Narasimhan, V.P. Venugopalan Use of coastal waters as condenser coolant in electric power plants: Impact on phytoplankton and primary productivity // Journal of Thermal Biology. – 2006. – Vol. 31. Iss. 7. – С. 556–564.
4. Калайда М.Л., Новикова Г.В., Синюткина Т.П., Шмакова А.А. Борьба с биообрастаниями – важная задача энерго- и ресурсосбережения // Энергетика Татарстана. – 2008. – № 3. – С. 85–92.
5. Kuznetsov G.V., Maksimov V.I. Mathematical modeling of convective–conductive heat transfer in a rectangular domain in a conjugate statement // Journal of Engineering Thermophysics. – 2007. – Vol. 16 – № 4. – С. 270–275.
6. Kuznetsov G.V., Sheremet M.A. Numerical simulation of turbulent natural convection in a rectangular enclosure having finite thickness walls // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2010. – Vol. 53. – С. 7812–7822.
7. Vardar N. Numerical analysis of the transient turbulent flow in a fuel oil storage tank // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2010. – Vol. 46. Iss. 18. – С. 3429–3440.



## **Пространственная задача кондуктивно-конвективного теплопереноса в замкнутой полости с источником интенсивного радиационного нагрева**

**Г. В. Кузнецов, А. Э. Ни**

Национальный исследовательский Томский политехнический университет, 634035, Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30,  
email: nee\_alexander@mail.ru

Представлены результаты математического моделирования совместно протекающих нестационарных процессов ламинарной естественной конвекции и теплопроводности в замкнутой кубической полости с источником лучистой энергии. Краевая задача кондуктивно-конвективного теплопереноса сформулирована в безразмерных переменных «вектор завихренности – векторный потенциал – температура» и решена конечно-разностным методом на равномерной сетке. Разработанный вычислительный код верифицировался на модельных задачах пространственной термогравитационной конвекции в замкнутых дифференциально подогреваемых полостях. Установлено, что процесс теплопереноса в рассматриваемых физических и геометрических условиях имеет существенно нестационарный характер. При этом формируются пространственно неоднородные поля дифференциальных характеристик теплообмена.

**Ключевые слова:** математическое моделирование; ламинарная естественная конвекция; сопряженный теплообмен; инфракрасный излучатель; метод конечных разностей; граница раздела «газ – стенка»

## **Three-dimensional problem of conductive-convective heat transfer in a closed cavity with a radiant heating source**

**G. V. Kuznetsov, A. E. Nee**

National Research Tomsk Polytechnic University, Lenina avenue, 30, Tomsk, 634050, Russia  
email: nee\_alexander@mail.ru

We presented mathematical modelling results of simultaneous unsteady processes of laminar natural convection and conduction in a closed cubic cavity with a radiant energy source. The boundary value problem of conductive-convective heat transfer was formulated in terms of the “vorticity vector – vector potential – temperature” dimensionless variables and solved by means of the finite difference method on a uniform grid. Developed numerical code was validated on benchmark problems of three-dimensional natural convection in closed differentially heated cavities. It was found that the heat transfer process under

study had a significant unsteady nature. Along with that, three-dimensional heterogeneous fields of temperature and streamlines were formed in the solution domain under consideration.

**Keywords:** mathematical modelling; laminar natural convection; conjugate heat transfer; infrared emitter; finite difference method; solid – fluid interface.

### Введение

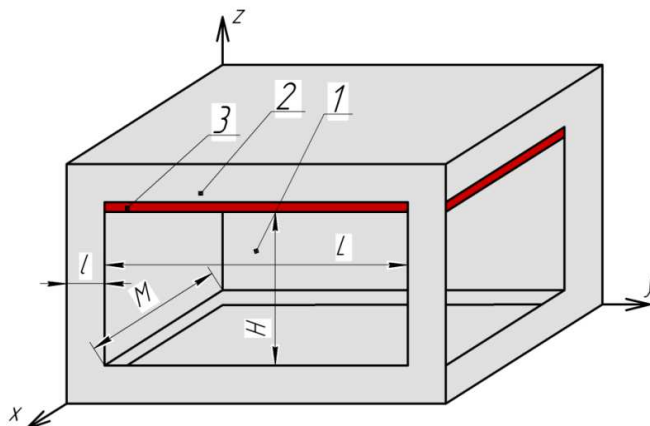
Решения задач конвективного переноса энергии играют важную роль в науке и технике. Известно, что исследования закономерностей процесса теплопереноса в технологических процессах и технических системах способствуют повышению их энергоэффективности. В то же время проведение натурных экспериментов с целью выявления основных характеристик теплообмена представляется далеко не всегда возможным в условиях работы теплотехнического оборудования. Во многих случаях целесообразно использовать методы математического моделирования физических процессов, основанные на решении дифференциальных уравнений в частных производных.

Свободноконвективные течения широко распространены во многих технических системах. Известны решения различных задач естественной конвекции в несопряженной [1 – 3] и сопряженной [4 – 6] постановках. Однако численный анализ в большинстве случаев проводится для плоских задач теплопереноса, что обусловлено существенной трудностью построения разностных схем для нестационарных трехмерных уравнений Навье - Стокса и энергии. Известные же исследования пространственных режимов естественной конвекции [7, 8] выполнены в рамках несопряженных постановок задач. Также в [7, 8] не анализировалось влияние лучистого переноса энергии на формирование дифференциальных и интегральных характеристик теплопереноса. Представляет интерес исследования естественной конвекции в замкнутой системе с источником лучистой энергии в сопряженной постановке.

Целью работы является математическое моделирование пространственной термогравитационной конвекции в замкнутой полости, заполненной газом и ограниченной теплопроводными стенками конечной толщины, с источником интенсивного лучистого нагрева.

### Постановка задачи

Рассматривается типичная инфракрасная камера, представленная на рисунке 1.



**Рис. 1.** Область решения задачи: 1 – газ; 2 – стенки; 3 – инфракрасный излучатель.

Область решения состоит из полости, заполненной воздухом и ограниченной теплопроводными стенками конечной толщины. Источник лучистой энергии (1) закреплен на верхней горизонтальной границе. Считалось, что инфракрасный излучатель имеет постоянную во времени температуру поверхности. На плоскостях раздела «газ – стенка» задавались равенства температур и тепловых потоков. На внешних стенках принимались адиабатические краевые условия. Предполагалось, что лучистая энергия, поступающая от инфракрасного излучателя, равномерно распределялась только по нижней горизонтальной границе раздела «газ – стенка», а теплофизические свойства элементов рассматриваемой системы не зависят от температуры. Режим течения воздуха считался ламинарным.

Безразмерные трехмерные уравнения неразрывности, движения (в преобразованных переменных) и энергии для вязкой несжимаемой теплопроводной жидкости, удовлетворяющей приближению Буссинеска, в условиях термогравитационного теплопереноса имеют вид [6, 9]:

$$\frac{\partial \Omega_x}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Omega_x}{\partial X} + V \frac{\partial \Omega_x}{\partial Y} + W \frac{\partial \Omega_x}{\partial Z} - \Omega_x \frac{\partial U}{\partial X} - \Omega_y \frac{\partial U}{\partial Y} - \Omega_z \frac{\partial U}{\partial Z} = \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \cdot \left( \frac{\partial^2 \Omega_x}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega_x}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \Omega_x}{\partial Z^2} \right) + \frac{\partial \Theta_1}{\partial Y}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \Omega_y}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Omega_y}{\partial X} + V \frac{\partial \Omega_y}{\partial Y} + W \frac{\partial \Omega_y}{\partial Z} - \Omega_x \frac{\partial V}{\partial X} - \Omega_y \frac{\partial V}{\partial Y} - \Omega_z \frac{\partial V}{\partial Z} = \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \cdot \left( \frac{\partial^2 \Omega_y}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega_y}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \Omega_y}{\partial Z^2} \right) - \frac{\partial \Theta_1}{\partial X}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Omega_z}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Omega_z}{\partial X} + V \frac{\partial \Omega_z}{\partial Y} + W \frac{\partial \Omega_z}{\partial Z} - \Omega_x \frac{\partial W}{\partial X} - \Omega_y \frac{\partial W}{\partial Y} - \Omega_z \frac{\partial W}{\partial Z} = \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \cdot \left( \frac{\partial^2 \Omega_z}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega_z}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \Omega_z}{\partial Z^2} \right), \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial Z^2} = -\Omega_x, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial Z^2} = -\Omega_y, \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_z}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi_z}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \Psi_z}{\partial Z^2} = -\Omega_z, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Theta_1}{\partial X} + V \frac{\partial \Theta_1}{\partial Y} + W \frac{\partial \Theta_1}{\partial Z} = \frac{1}{\sqrt{\text{Ra} \cdot \text{Pr}}} \cdot \left( \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial Z^2} \right), \quad (7)$$

$$\frac{1}{\text{Fo}} \cdot \frac{\partial \Theta_2}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial Z^2}, \quad (8)$$

$$\frac{1}{\text{Fo}} \cdot \frac{\partial \Theta_3}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \Theta_3}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta_3}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \Theta_3}{\partial Z^2}. \quad (9)$$

Начальные условия для системы уравнений (1) – (9):

$$\Omega_x = \Omega_y = \Omega_z = \Psi_x = \Psi_y = \Psi_z = \Theta = U = V = W = 0. \quad (10)$$

Граничные условия для системы уравнений (1) – (9):

на поверхности источника лучистой энергии:

$$\Theta_3 = 1. \quad (11)$$

на внешних границах области решения:

$$\frac{\partial \Theta_2}{\partial n} = 0. \quad (12)$$

на границе раздела «газ – стенка», параллельной плоскости  $XY$ :

$$\Omega_x = -\frac{\partial V}{\partial Z}, \Omega_y = \frac{\partial U}{\partial Z}, \Omega_z = 0, \Psi_x = \Psi_y = \frac{\partial \Psi_z}{\partial Z} = 0, \begin{cases} \Theta_1 = \Theta_2, \\ \frac{\partial \Theta_1}{\partial Z} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \frac{\partial \Theta_2}{\partial Z} + Ki. \end{cases} \quad (13)$$

на границах раздела «газ – стенка», параллельных оси  $YZ$ :

$$\Omega_x = 0, \Omega_y = -\frac{\partial W}{\partial X}, \Omega_z = \frac{\partial V}{\partial X}, \frac{\partial \Psi_x}{\partial X} = \Psi_y = \Psi_z = 0, \begin{cases} \Theta_1 = \Theta_2, \\ \frac{\partial \Theta_1}{\partial X} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \frac{\partial \Theta_2}{\partial X}. \end{cases} \quad (14)$$

на границах раздела «газ – стенка», параллельных плоскости  $ZX$ :

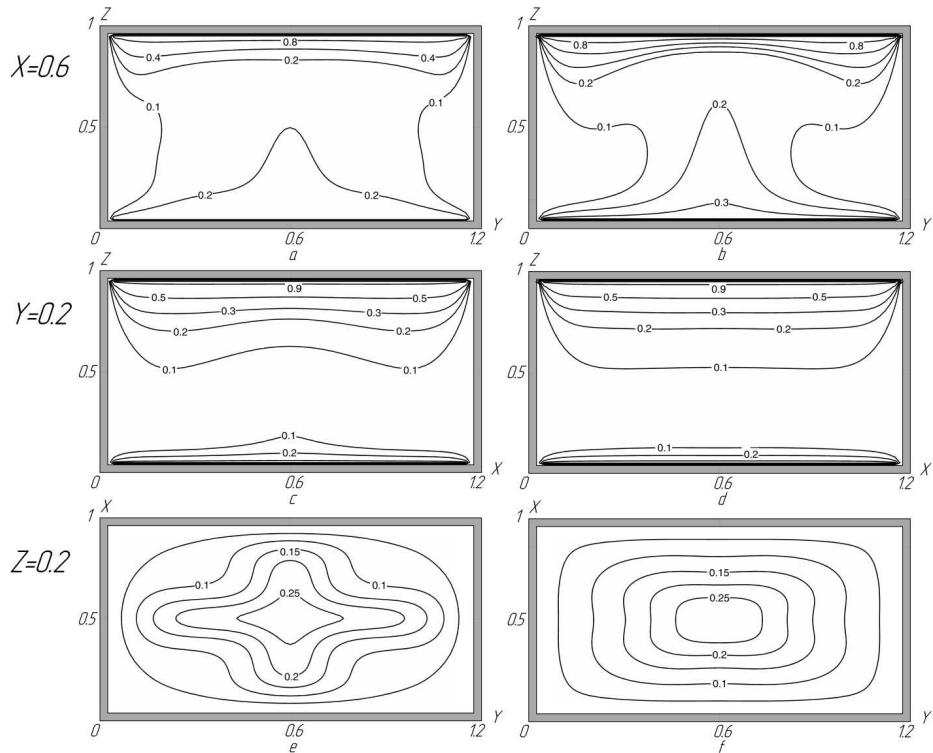
$$\Omega_x = \frac{\partial W}{\partial Y}, \Omega_y = 0, \Omega_z = -\frac{\partial U}{\partial Y}, \Psi_x = \frac{\partial \Psi_y}{\partial Y} = \Psi_z = 0, \begin{cases} \Theta_1 = \Theta_2, \\ \frac{\partial \Theta_1}{\partial Y} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \frac{\partial \Theta_2}{\partial Y}. \end{cases} \quad (15)$$

где  $\Omega$  – вектор завихренности;  $\Psi$  – векторный потенциал;  $\Theta$  – температура;  $U, V, W$  – компоненты скорости в направлениях осей координат  $X, Y, Z$ , соответственно;  $Pr$  – число Прандтля;  $Ra$  – число Рэлея;  $Ki$  – число Кирпичева;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К).

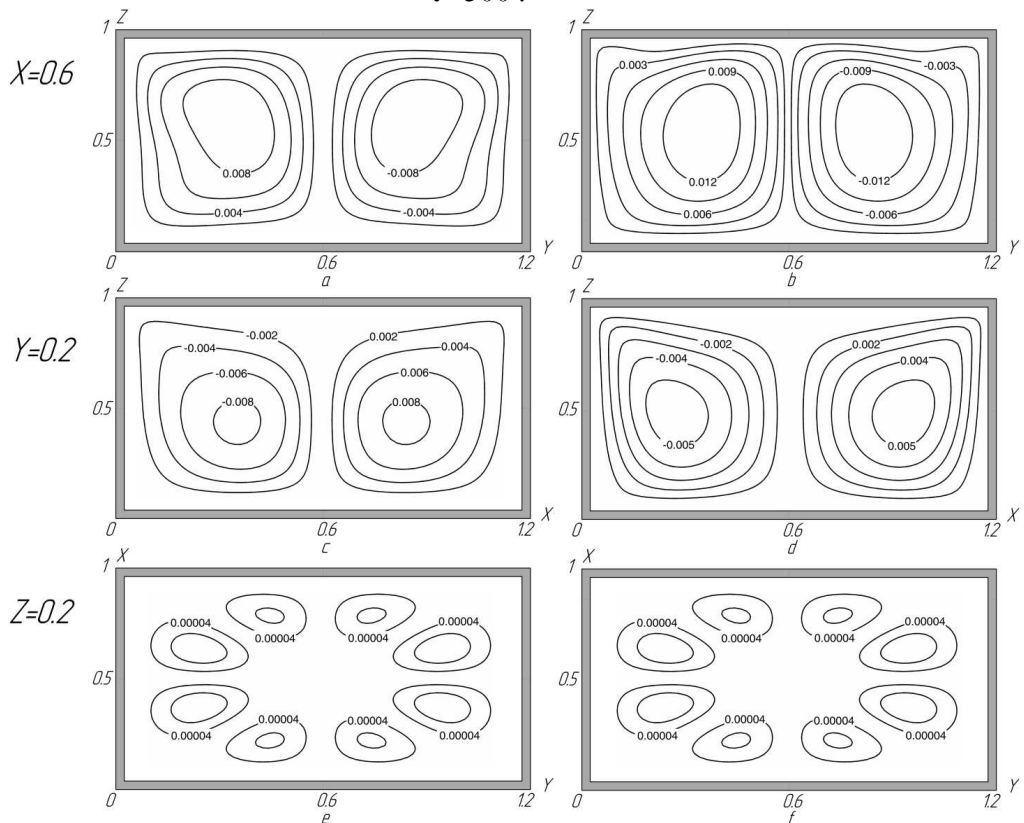
Краевая задача (1) – (9) с соответствующими начальными (10) и граничными (11) – (15) условиями решена конечно-разностным методом [10] на равномерной сетке  $71 \times 71 \times 71$ . Верификация сформулированной модели проводилась путем тестирования используемых алгоритма и метода решения на модельных пространственных задачах естественной конвекции [7, 8]. Сравнение полученных результатов (двумерных полей температур и изолиний тока) с [7, 8] показало их удовлетворительное соответствие.

### Результаты и обсуждение

Численный анализ пространственного режима сопряженный термогравитационной конвекции проведен при значениях безразмерных критериев, соответствующих ламинарному режиму течения газа:  $Ra = 10^6$ ,  $Pr = 0,71$ ,  $Ki = 13$ . На (рис. 2, 3) представлены типичные поля температур и линии тока в различные моменты времени.



**Рис. 2.** Поля температур при  $Ra=10^6$  в различных сечениях: а, с, е)  $\tau=50$  ; б, д, ф)  $\tau=300$  .



**Рис. 3.** Линии тока при  $Ra=10^6$  в различных сечениях: а, с, е)  $\tau=50$  ; б, д, ф)  $\tau=300$  .

На основании анализа представленных дифференциальных характеристик теплопереноса (рис. 2, 3) можно сделать обоснованный вывод, что исследуемый процесс теплопереноса имеет существенно нестационарный характер. Также при

работе инфракрасных излучателей формируются пространственно неоднородные поля (рис. 2, 3) дифференциальных характеристик теплопереноса. При  $\tau = 50$  в газовой полости формируется зона разогретого до высоких температур воздуха у верхней поверхности (сечение  $Z=0,9$ ), что обусловлено переносом теплоты за счет кондукции газа в малой окрестности инфракрасного излучателя. Нагретый воздух остывает за счет теплоотвода в вертикальные стенки и опускается вдоль этих границ. В тоже время у нижней горизонтальной плоскости раздела «газ – стенка» образуется теплый слой воздуха, что, очевидно, связано с подводом лучистой энергии к этой границе. В результате в плоскостях  $ZX$  и  $ZY$  (рис. 3 *a, b, c, d*) формируются две крупномасштабные конвективные ячейки. С ростом времени до  $\tau = 300$  увеличивается средняя абсолютная температура в газовой полости, что, по видимому, связано, с одной стороны, интенсивным подводом теплоты от инфракрасного излучателя, с другой, отсутствием теплоотвода на внешних границах области анализа. Скорость движения воздуха также возрастает (рис. 3 *a, b*). Форма изотерм в сечении  $Z=0,2$  (рис. 2 *f*) обусловлена формированием термического факела в окрестности плоскости симметрии рассматриваемой области решения.

### Заключение

Сформулирована математическая модель пространственного теплопереноса в замкнутом объеме, учитывающая основные значимые факторы (кондукция, конвекция, излучение и сопряженный теплообмен), протекающие при работе источником интенсивного радиационного нагрева. Полученные результаты позволяют сделать вывод о возможности дальнейшего применения аппарата [6, 9] при решении более сложных задач сопряженного конвективно – радиационного теплообмена в закрытых областях в условиях лучистого подвода энергии.

Публикация подготовлена при финансовой Гранта Президента Российской Федерации для ведущих научных школ Российской Федерации НШ-7538.2016.8.

### Список литературы

1. Han D., Yu B., Chen J., Wang Y., Wang Y. POD reduced-order model for steady natural convection based on a body-fitted coordinate // International Communications in Heat and Mass Transfer. 2015. Volume 68. С. 104-113.
2. Szewc K., Pozorski J., Tanire A. Modeling of natural convection with Smoothed Particle Hydrodynamics: Non-Boussinesq formulation // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2011. Volume 54. С. 4807-4816.
3. Wei Y., Dou H. S., Wang Z., Qian Y., Yan W. Simulations of natural convection heat transfer in an enclosure at different Rayleigh number using lattice Boltzmann method // Computers and Fluids. 2016. Volume 124. С. 30-38.
4. Kuznetsov G. V., Sheremet M. A. Conjugate natural convection with radiation in an enclosure // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2009. Volume 52. С. 2215-2223.
5. Bilgen E. Conjugate heat transfer by conduction and natural convection on a heated vertical wall // Applied Thermal Engineering. 2009. Volume 29. С. 334-339.
6. Kuznetsov G. V., Sheremet M. A. Conjugate natural convection in an enclosure with a heat source of constant heat transfer rate // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2011. Volume 54. С. 260-268.

7. *Lo D. C.* An accurate numerical solution study of three-dimensional natural convection in a box // *International Communications in Heat and Mass Transfer*. 2010. Volume 37. C. 1280-1289.
8. *Li Z., Yang M., Zhang Y.* Lattice Boltzmann method simulation of 3-D natural convection with double MRT model // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. Volume 94. C. 222-238.
9. *Kuznetsov G. V., Sheremet M. A.* A numerical simulation of double-diffusive conjugate natural convection in an enclosure // *International Journal of Thermal Sciences*. 2011. Volume 50. C. 1878-1886.
10. *Kuznetsov G. V., Nagornova T. A., Ni A. É.* Computational Modeling of Conjugate Heat Transfer in a Closed Rectangular Domain Under the Conditions of Radiant Heat Supply to the Horizontal and Vertical Surfaces of Enclosure Structures // *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2015. Volume 88. C. 168-177.

# Особенности развития неустойчивости Кельвина-Гельмгольца в течениях термовязкой жидкости

Ю.М. Куликов<sup>a</sup>, Э.Е. Сон<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Московский физико-технический институт (государственный университет) 141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9  
email: kulikov-yurii@yandex.ru

<sup>b</sup> Объединенный институт высоких температур Российской академии наук 125412, г. Москва, ул. Ижорская, д. 13, стр. 2

В настоящей работе обсуждаются особенности крупномасштабного вовлечения и смешения, возникающего в неизотермических сдвиговых течениях, в которых профиль скорости обладает точкой перегиба. Анализ неустойчивости Кельвина-Гельмгольца, развивающейся на границе слоя смешения, проводится на основе зависимостей амплитуды поперечного возмущения и толщины потери импульса. Численное моделирование течения проводится в плоской периодически продолженной области на основе схемы КАБАРЕ, реализованной в приближении слабой сжимаемости. Начальный этап развития неустойчивости полностью определяется универсальным параметром подобия  $k_v$ , который является безразмерной комбинацией числа Рейнольдса  $Re$ , определяемого некоторым образом, а также отношения минимальной и максимальной вязкости  $R_v$  в движущихся слоях. Всего можно выделить приблизительно семь различных режимов смешения, расположенных в плоскости параметров  $(R_v, Re)$ , их возникновение определяется совокупным влиянием нелинейного роста гармонического возмущения, конвекции и диффузии завихренности, а также каскадного слияния вихрей вследствие двумерной природы течения. По характеру наблюдаемых общих зависимостей рассматриваемая проблема относится к классу задач теории свободных пограничных слоев, что и определяет её примечательные свойства.

**Ключевые слова:** сдвиговое течение; точка перегиба; неустойчивость Кельвина-Гельмгольца; слабая сжимаемость; термовязкость

## On the development of Kelvin-Helmholz instability in thermoviscous flows

Y.M. Kulikov<sup>a</sup>, E.E. Son<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Moscow Institute of Physics and Technology (State University), 9 Institutskiy per., Dolgoprudny, Moscow Region, 141701, Russian Federation  
email: kulikov-yurii@yandex.ru

<sup>b</sup> Joint Institute for High Temperatures of Russian Academy of Sciences, Izhorskaya st. 13 Bd.2, Moscow, Russia 125412



Abstract. In present paper we discuss the features of large-scale mixing arising in nonisothermal shear flows. The analysis of Kelvin-Helmholtz instability is performed on the basis of the dependences of the transverse perturbation amplitude and the momentum thickness. Numerical simulation of the flow is carried out in a plane periodically extended domain on the basis of the CABARET scheme implemented in the weakly compressible approximation. The linear stage of instability is completely determined by the universal similarity parameter  $k_t$ , which is a dimensionless combination of the Reynolds number  $Re$  defined in some way, and also the ratio  $R_\nu$  of the minimum and maximum viscosities in the moving layers. Approximately seven different mixing modes can be distinguished located in the plane of the parameters  $(R_\nu, Re)$ . Their appearance is determined by the combined influence of the nonlinear growth of the harmonic perturbation, convection and diffusion of vorticity, as well as the cascade fusion of vortices. By the nature of the observed general dependencies the problem under consideration belongs to the free boundary layer theory.

**Keywords:** mixing; Kelvin-Helmholtz instability; CABARET scheme; thermoviscosity; shear flows; boundary layer theory

Как показал ряд исследований [1, 2], гидродинамика мелких масштабов в значительной степени подвержена крупномасштабным движениям. Эта связь оказывается особенно сильной в течениях с вязкой стратификацией, где в зависимости от условий реализации течения переменная вязкость может оказывать как стабилизирующее, так и дестабилизирующее воздействие на развитие возмущений. Вместе с тем, согласно базовым предположениям [3] широко применяемой теории К41 Колмогорова при больших числах Рейнольдса статистические свойства турбулентности в инерционном и диссипативном интервале не зависят от способа возбуждения турбулентности и универсальным образом определяются тремя параметрами: скоростью диссипации  $\varepsilon$ , кинематической вязкостью  $\nu$  и самим масштабом  $l$ , в инерционном интервале число определяющих параметров уменьшается до двух – скорости диссипации  $\varepsilon$  и масштаба. Из этих положений вытекает неявное следствие, заключающееся в том, что вязкость оказывается существенной лишь на малых масштабах, и, следовательно, не оказывает определяющего влияния на процесс крупномасштабного смешения. В результате в подавляющем большинстве работ рассматриваются потоки однородной жидкости или течения со стратифицированной плотностью.

Однако оказывается, что в спутном [4] течении двух жидкостей с разными кинематическими вязкостями процесс смешения отличается многомасштабностью, тогда как в течениях с постоянной вязкостью происходит генерация обычных вихрей Кельвина-Гельмгольца.

В работе [5] исследовалось влияние вязкости на процесс смешения в том случае, если маловязкая турбулентная струя впрыскивается в более вязкую жидкость. В зависимости от выбранного соотношения вязкостей  $R_\nu = 1 - 400$  наблюдались существенные различия в процессе смешения: если вязкости двух жидкостей приблизительно равны, турбулентность в затопленной струе приводит к интенсивному перемешиванию, в результате чего образуется слой смешения со стратифицированной вязкостью, если же отношение вязкостей превышает  $R_\nu = 400$ , то сколь-нибудь заметного макроскопического смешения жидкостей не происходит.

Задача о временной эволюции слоя смешения относится к классу свободных сдвиговых течений, важную роль в изучении которых сыграла работа [6]. Течение организуется таким образом, что градиенты продольной скорости и вязкости оказываются противоположно направленными: верхняя и нижняя части течения являются покоящимися с большей кинематической вязкостью  $\nu_{high}$ , центральная часть потока имеет скорость  $U_0$  и меньшую вязкость  $\nu_{low}$ , тем самым имитируется процесс смешения в затопленной ламинарной струе (см. рис. 1). Разрыв продольной скорости сглаживается с помощью функции  $\tanh$ :

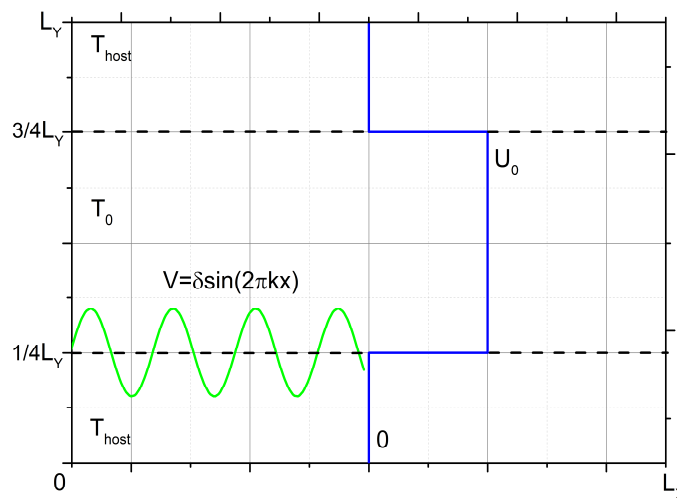
$$U = U_0/2(1 + \tanh(r(y - 1/4L_y))), \quad y \in [0, L_y/2],$$

$$U = U_0/2(1 + \tanh(r(3/4L_y - y))), \quad y \in (L_y/2, L_y].$$

Начальная толщина слоя смешения управляется параметром  $r$  и выбрана очень малой  $r = 1280$ , что в 16 раз превышает значение, использовавшееся в [9]. Начальное условие для продольной скорости дополняется гармоническим возмущением в поперечном направлении

$$V = \delta \sin(2\pi kx), \quad x \in [0, L_x], \quad k = 6.$$

Использование шестой гармоники, являющейся самой быстрорастущей в классической задаче об эволюции двойного сдвигового слоя [7], позволяет уменьшить необходимый временной расчетный интервал. На всех границах расчетной области ставятся периодические граничные условия.



**Рис. 1.**

Рассматриваемая жидкость является термовязкой, поэтому разрыв вязкости на границе слоя смешения является следствием низкой температуры принимающей жидкости и более высокой температуры затопленной струи. Иными словами, в данной задаче в холодный «резервуар» покоящейся жидкости подается поток той же жидкости, но с более высокой температурой. Во всех расчетах скорость струи остается неизменной, меняется только её реперная динамическая вязкость  $\mu_0$  и температура холодной жидкости. Предполагая известным закон изменения вязкости от температуры

$$\mu = \mu_0 e^{-\beta \frac{T-T_0}{T_0}},$$

а также считая температуру струи равной реперному значению  $T_0$ , получим значение температуры покоящейся жидкости

$$T_{host} = T_0 \left( 1 + \frac{1}{\beta} \ln R_v \right).$$

Тогда поперечное распределение температур можно задать как

$$T = 1/2 \left( (T_{host} + T_0) + (T_0 - T_{host}) \tanh(r(y - 1/4 L_y)) \right), \quad y \in [0, L_y / 2],$$

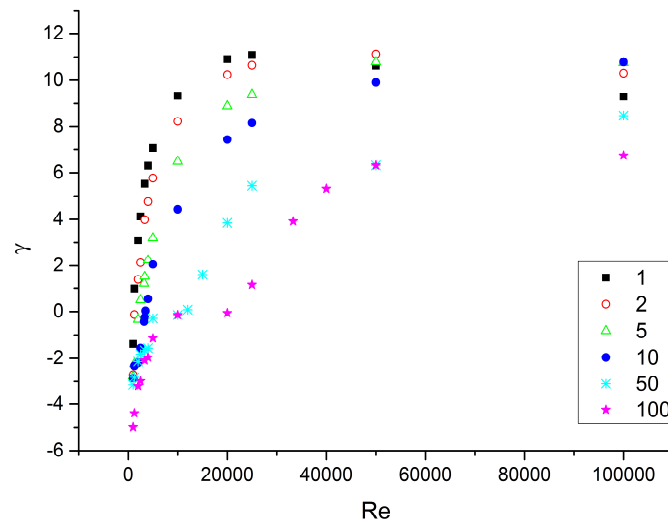
$$T = 1/2 \left( (T_{host} + T_0) + (T_0 - T_{host}) \tanh(r(3/4 L_y - y)) \right), \quad y \in (L_y / 2, L_y].$$

Профиль скорости обладает точкой перегиба, таким образом, как в случае постоянной вязкости, так и при вязкой стратификации будет происходить развитие неустойчивости Кельвина-Гельмгольца.

Численный расчет проводился с помощью схемы КАБАРЕ, реализованной в приближении слабой сжимаемости [8]. Использовались сетки  $512 \times 512$  (1),  $1024 \times 1024$  (2),  $2048 \times 2048$  (3),  $4096 \times 4096$  (4) ячеек, основная масса вычислений выполнена на сетке (2), в отдельных случаях для проверки сходимости использовались сетки (3) и (4). Как уже отмечалось выше, число Рейнольдса  $Re$  и отношение вязкостей можно скомбинировать в один универсальный параметр  $k_t = UL / v_{high} = UL / (R_v v_{low}) = Re / R_v$ , где в качестве характерного размера  $L$  можно использовать ширину затопленной струи  $L = L_y / 2$ , – как это делается в экспериментальных работах, или характерный поперечный размер расчетной области  $L = L_y$ . В теоретических работах число Рейнольдса, как правило, определяется по толщине начального слоя завихренности  $\delta_{\omega,0}$  или по толщине начальной потери импульса  $\delta_\theta$ . По мнению авторов, определение  $Re$ , данное в [9] и часто используемое в подобных задачах, не всегда оказывается подходящим, если рассматривать процесс смешения с точки зрения теории пограничного слоя.

Расчет плоскопараллельного слоистого течения термовязкой жидкости, призванный смоделировать смешение жидкостей с различной вязкостью, показал, что струя жидкости, проникающая в пространство, заполненное неподвижной жидкостью с теми же или близкими физическими свойствами, является разновидностью течения с пограничным слоем [10]. В начальный момент времени торможение охватывает крайние области струи, затем вязкость приводит к торможению жидких частиц, расположенных все ближе и ближе к оси струи. В конечном итоге вся струя становится пограничным слоем, в котором начинают развиваться процессы смешения с окружающей неподвижной жидкостью.

Зависимость амплитуды возмущения от времени, определяемая с помощью одномерного преобразования Фурье, на начальных стадиях имеет совершенно различное поведение. В частности, на некоторых режимах наблюдается обычный экспоненциальный рост, предсказываемый линейной теорией, который в некоторый момент начинает ускоряться. Этот участок может иметь различную протяженность во времени, что затрудняет его аппроксимацию. Иногда в последовательности рассчитываемых режимов наблюдается отклонение от предсказаний теории: происходит задержка нарастания амплитуды, а также (в широкой окрестности кривой нейтральной устойчивости) переход к параболической или линейной зависимостям. Рост отношения вязкостей  $R_v$  при прочих равных приводит к подавлению неустойчивости в слое смешения (см. рис. 2).



**Рис. 2.**

Использованный метод расчета хоть и дает завышение значения по сравнению с линейной теорией, тем не менее, способен предсказать характер роста возмущения на линейной стадии его развития.

Толщина потери  $\delta_\theta$  импульса, определяемая по формуле

$$\delta_\theta(t) = 1/U_0^2 \int_0^{L_y} (U_0 - U(t, y)) dy,$$

является удобным способом описания процесса смешения и имеет свойства универсальной зависимости от параметра  $k_t$ , установленного экспериментально:

$$\delta_\theta = \sqrt{\left(\frac{C + R_v}{1 + R_v}\right)^2 \frac{t}{k_t} + 1},$$

где  $C$  – некоторая константа,  $t$  – время (см. рис.3).

Усиление подавления возмущений на контактной границе приводит к замедлению роста  $\delta_\theta$  и ухудшению смешения, вследствие чего при больших разрывах вязкости центральная струя начинает просто скользить вдоль контактной границы. С феноменологической точки зрения насчитывается приблизительно 7 режимов смешения, переходящих друг в друга при различных  $R_v$ ,  $Re$ . Такое многообразие на самом деле объясняется отношением членов, входящих в уравнение для завихренности.

Таким образом, эволюция процесса (распад и свертывание вихревого листа или медленная диффузия) определяется тем, какой член в уравнении – конвективного переноса или диффузии преобладает в данный момент времени. Еще одной особенностью, отличающей двумерный расчет от экспериментальной практики, является наблюдаемый обратный каскад энтропии, выражающийся в поэтапном слиянии мелких вихрей в более крупные.

Кроме того, по результатам расчетов установлено, что сходимость значений инкремента неустойчивости  $\gamma$  и толщины потери импульса происходит с разной скоростью при измельчении расчетной сетки. Отдельным вопросом является доказательство сеточной сходимости для больших  $Re \sim 10^5$ , где должен наблюдаться каскад энергии. Вместе с тем, опыт показывает, что при изменении измельчении сетки наблюдаются те же стадии эволюции процесса, происходящие с несколько меньшей

скоростью. Последнее верно лишь при том условии, что при распаде слоя завихренности не образуется паразитный вихрь.

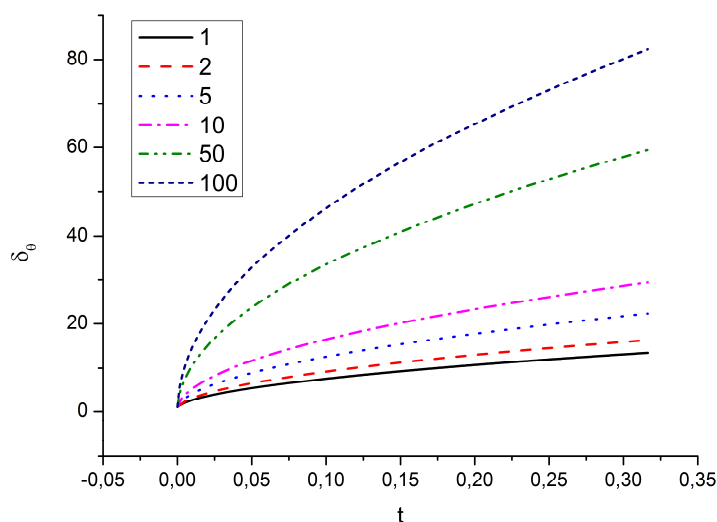


Рис. 3.

Публикация подготовлена при финансовой поддержке гранта РФФИ, проект №15-08-00457.

### Список литературы

1. Danaila L., Antonia R.A., Burattini, P Progress in studying small-scale turbulence using 'exact' two-point equations // *New Journal of Physics*. 2004. №6. P. 128
2. Danaila L., Krawczynski J., Thiesset F., Renou B. Yaglom-like equation in axisymmetric anisotropic turbulence // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2012. №3. P. 241.
3. Фрик П.Г. Турбулентность: модели и подходы. Курс лекций. Часть II. Пермь: ПГТУ, 1998. 136 с.
4. Voivenel L., Varea E., Danaila L., Renou B., Cazalens M. Variable Viscosity Jets: Entrainment and Mixing Process // *Whither Turbulence and Big Data in the 21st Century?* Berlin: Springer International Publishing, 2017. P. 147-162.
5. Campbell I., Turner J.S. The Influence of Viscosity on Fountains in Magma Chambers // *Journal of Petrology*. 1986. №27. P. 1-30.
6. Brown G.L., Roshko A. On density effects and large structure in turbulent mixing layers // *Journal of Fluid Mechanics*. 1974. №64. P. 775-816.
7. Lipavskii M.V., Tolstykh A.I., Chigirev E.N. Numerical simulation of shear layer instability using a scheme with ninth-order multioperator approximations // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2013. №53. P. 296-310.
8. Kulikov Y.M., Son E.E. The CABARET method for a weakly compressible fluid flows in one- and two-dimensional implementations // *Journal of Physics: Conference Series*. 2016. №774. P. 012094.
9. Taguelmimt N., Danaila L., Hadjadj A. Effects of Viscosity Variations in Temporal Mixing Layer // *Flow, Turbulence and Combustion*. 2016. №96. P 163-181.
10. Лойцянский Л.Г. Ламинарный пограничный слой. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. 478 с.

# Пространственная структура поля скорости в слоистой жидкости при распространении внутреннего солитона

О. Е. Куркина, Е. А. Рувинская, А. А. Куркин, А. В. Рыбин

Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексева,  
603950, Нижний Новгород, ул. Минина, д. 24, к. 1.  
email: oksana.kurkina@mail.ru

Определена структура поля скорости, индуцированного уединенными внутренними волнами первой и второй моды. Оценивается вклад членов асимптотического ряда второго порядка для горизонтальной скорости в моделях с почти трехслойной стратификацией плотности жидкости. Определена завихренность, возникающая в слоистой среде при распространении солитона внутренней волны.

**Ключевые слова:** уравнение Гарднера; придонная скорость; завихренность

## Spatial structure of the velocity field induced by internal solitary wave in the layered fluid

O. E. Kurkina, E. A. Rouvinskaya, A. A. Kurkin, A. V. Rybin

Nizhny Novgorod State Technical University n. a. R.E. Alekseev, 24 Minin street, 603950  
Nizhny Novgorod.  
email: oksana.kurkina@mail.ru

The structure of the velocity field induced by internal solitary waves of the first and second modes is determined. The contribution of the second-order terms in the asymptotic series for the horizontal velocity is estimated in models with almost three-layer fluid density stratification. We determine the vorticity field, that is produced in a layered fluid by internal solitary wave.

**Keywords:** Gardner equation; near-bottom velocity; vorticity

### 1. Введение

Исследование внутренних гравитационных волн – одна из наиболее актуальных задач современной механики сплошной среды. Такие волны распространяются в толще устойчиво стратифицированного океана, оказывая значительное влияние на все процессы, происходящие в нем. Хотя внутренние и поверхностные гравитационные волны имеют одинаковую природу, амплитуды первых существенно больше, поскольку на жидкие частицы внутри жидкости действует редуцированное ускорение свободного падения. В прибрежной зоне морей и океанов, иными словами, на «мелкой» воде, достаточно часто встречаются солитоны внутренних волн, существующие благодаря уравновешиванию эффектов нелинейности и дисперсии. Динамика таких волн достаточно хорошо описывается стационарными локализованными решениями различных слабо-нелинейных уравнений, таких как уравнение Кортевега-де Вриза и его уточнения:

уравнение Гарднера, модифицированное уравнение Кортевега-де Вриза, «2+4» уравнение Кортевега-де Вриза [1] и др. Существует большое количество работ, в которых эти уравнения используются для описания особенностей динамики уединенных внутренних волн при распространении над неровным дном (см., например, наши работы [3] и [7]), при взаимодействии с другими уединенными волнами и течениями и т.д. Однако, с практической точки зрения не меньший интерес представляет исследование пространственного распределения в толще жидкости физических полей скорости, давления, завихренности, индуцированных такими волнами. Некоторые особенности вертикальной структуры солитона внутренней волны исследованы в рамках уравнения Кортевега-де Вриза в работе [8], в рамках модифицированного уравнения Кортевега-де Вриза для океана с двумя пикноклинами – в статье [2].

## 2. Описание математической модели

В рамках слабонелинейной теории длинных внутренних волн предполагается, что волновое поле (в частности, вертикальное смещение изопикн  $\zeta(z, x, t)$ ) может быть представлено в виде ряда (до второго порядка по нелинейности) [6]:

$$\zeta(z, x, t) = \eta(x, t)\Phi(z) + \eta^2(x, t)F(z). \quad (2.1)$$

где  $x$  и  $z$  – координаты в горизонтальном и вертикальном направлениях, соответственно,  $t$  – время,  $\eta(x, t)$  описывает эволюцию волны во времени вдоль горизонтальной координаты и в настоящем исследовании удовлетворяет уравнению Гарднера. Функция  $\Phi(z)$  (вертикальная мода) описывает вертикальную структуру поля внутренней волны, а функция  $F(z)$  – первая нелинейная поправка к  $\Phi(z)$ .  $\Phi(z)$  и  $F(z)$  получаются из решения соответствующих задач на собственные значения и используются также для вычисления значений коэффициентов уравнения Гарднера. Подробно эта модель описана в нашей работе [4].

Компоненты скорости частиц жидкости ( $u, w$ ) в вертикальной плоскости ( $x, z$ ) в рамках модели, основанной на уравнении Гарднера, записываются в виде:

$$u(x, z, t) = u_l + u_n, \quad u_l = c\eta(x, t)\frac{d\Phi}{dz}, \quad u_n = \left(\frac{\alpha}{2}\frac{d\Phi}{dz} + c\frac{dF}{dz}\right)\eta^2, \quad (2.2)$$

$$w(x, z, t) = w_l + w_n, \quad w_l = -c\frac{\partial\eta}{\partial x}\Phi(z), \quad w_n = -(\alpha\Phi(z) + 2cF(z))\eta\frac{\partial\eta}{\partial x}, \quad (2.3)$$

где  $c$  – фазовая скорость длинных линейных внутренних волн,  $\alpha$  – коэффициент при квадратичном нелинейном слагаемом уравнения Гарднера.

В настоящей работе используется модель почти трехслойной стратификации плотности жидкости. Для такой жидкости с резкими границами между слоями разной плотности волновые режимы в рамках уравнения Гарднера подробно изучены в работе [5].

## 3. Полученные результаты

Для солитона первой моды отрицательной полярности (линии одинаковой плотности во всей толще воды смещены вниз и повторяют профиль солитона) максимальные по модулю значения горизонтальной скорости достигаются на поверхности жидкости (для солитона положительной полярности – на дне), учет нелинейной поправки приводит к увеличению абсолютных значений скорости в среднем слое и искривлению линии нулевой скорости в направлении, обратном к направлению смещения линий

одинаковой плотности. Для солитона отрицательной полярности у поверхности поток имеет положительные скорости (т.е. их направление совпадает с направлением движения солитона), а у дна – отрицательные. Поле завихренности содержит преимущественно отрицательные значения, достигающие своего максимума (по модулю) там, где расположена вершина солитона по горизонтали, и на глубине залегания верхнего и нижнего пикноклинов.

Для солитона второй моды «выпуклой» формы (линии одинаковой плотности имеют положительную полярность на верхнем пикноклине и отрицательную – на нижнем) максимальные по модулю значения горизонтальной скорости достигаются внутри жидкости (в среднем слое) и на ее поверхности (это справедливо только для некоторых условий), при этом линии нулевой скорости с учетом нелинейной поправки искривляются в сторону, противоположную линиям одинаковой плотности (то есть имеют «вогнутую» форму). В рассматриваемых примерах поток имеет положительные скорости в среднем слое и отрицательные – у дна и поверхности. Максимальные значения завихренности также достигаются по горизонтали – вблизи вершины солитона и по вертикали – на верхнем и нижнем пикноклинах, при этом при прохождении солитона второй моды формируются вихри различных направлений.

Представленные результаты научно-исследовательской работы получены при поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых (МК-5208.2016.5) и гранта РФФИ 16-35-00413.

### Список литературы

1. Куркина О.Е., Куркин А.А., Рувинская Е.А., Пелиновский Е.Н., Соомере Т. Динамика солитонов в неинтегрируемой версии модифицированного уравнения Кортевега – де Вриза // Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2012. Т. 95. Вып. 2. С. 98 – 103 DOI: 10.1134/S0021364012020051.
2. Е.А. Рувинская, О.Е. Куркина, А.А. Куркин Исследование структуры уединенных внутренних волн большой амплитуды в трехслойной жидкости // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика 2011. Вып. 2. С. 61–74.
3. Талипова Т.Г., Куркина О.Е., Рувинская Е.А., Пелиновский Е.Н. Распространение уединенных внутренних волн в двухслойном океане переменной глубины // Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана. 2015. Т. 51. № 1. С. 103.
4. Kurkina O., Talipova T., Pelinovsky E., Soomere T. Mapping the internal wave field in the Baltic Sea in the context of sediment transport in shallow water // Journal of Coastal Research, 2011, P. 2042-2047.
5. Kurkina O., Kurkin A., Rouvinskaya E., Soomere T. Propagation regimes of interfacial solitary waves in a three-layer fluid // Nonlinear Processes in Geophysics. 2015. Vol. 22. P. 117–132. DOI: 10.5194/npg-22-117-2015.
6. Pelinovsky, E. Chapter 4 in the book “Solitary Waves in Fluids” // Boston: WIT Press. Southampton. – 2007.
7. Rouvinskaya E., Talipova T., Kurkina O., Soomere T., Tyugin D. Transformation of Internal Breathers in the Idealised Shelf Sea Conditions // Cont. Shelf Res. 2015. Vol. 110 P. 60–71. DOI: 10.1016/j.csr.2015.09.017.
8. Vlasenko V., Brandt P., Rubino A. Structure of Large-Amplitude Internal Solitary Waves // Journal of Physical Oceanography. 2000. Vol. 30. P. 2172–2185. DOI: 10.1175/1520-0485(2000)030<2172:SOLAIS>2.0.CO;2.



# Исследование динамики конвективных течений в неоднородно нагретом цилиндрическом слое жидкости

М. О. Кучинский<sup>a</sup>, А. В. Евграфова<sup>b</sup>, А. Н. Сухановский<sup>b</sup>, Е. Н. Попова<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Пермский государственный национальный исследовательский университет  
614990, Пермь, ул. Букирева, 15

email: DuSpSp@yandex.ru

<sup>b</sup> Институт механики сплошных сред, 614013, Пермь, ул. Ак. Королева, 1

Экспериментально исследовано влияние геометрических размеров полости на динамику конвективных течений в цилиндрическом слое жидкости при наличии локализованного нагрева. Структура и характеристики основного, крупномасштабного течения при фиксированном значении аспектного отношения не зависят от геометрических размеров и определяются числом Рэ-лея. Показано, что формирование вторичных структур в области нагрева определяется только структурой теплового пограничного слоя.

**Ключевые слова:** локализованный нагрев; вторичные структуры; подобие

## Studying of convective flows dynamic in non-uniformly heated cylindrical fluid layer

М. О. Kuchinskii<sup>a</sup>, А. V. Evgrafova<sup>b</sup>, А. N. Sukhanovskii<sup>b</sup>, Е. N. Popova<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm

email: ivanov@psu.ru

<sup>b</sup> Institute of Continuous Media Mechanics of the Ural Branch of Russian Academy of Science, Academician Korolev Street, 1, 614013, Perm

The structure of convective flows in cylindrical fluid layer with localized heat source was studied experimentally. It was shown that the structure and characteristics of mean flow independent on model sizes. It is defined only by Rayleigh number  $Ra$ . The secondary structures formation depends on characteristics of boundary layer over the heat area.

**Keywords:** local heat; secondary structures; similarity

### 1. Введение

Конвективные течения, возникающие в слоях жидкости над неоднородно нагретой поверхностью, существуют во многих природных и технологических системах.

В отдельный класс задач можно выделить лабораторное и численное моделирование процессов возникновения циклонов и антициклонов. Ранее Г. П. Богатыревым была предложена лабораторная модель тропического циклона во вращающемся слое с локально нагретой подложкой [1]. Несмотря на свою простоту, предложенная модель описывает основные особенности формирования тропических циклонов. Дальнейшие исследования течений в покоящемся и вращающемся слое жидкости при наличии на

дне локализованного источника тепла позволили выявить сложную структуру вторичных течений, возникающих над областью нагрева [2], и изучить механизмы возникновения крупномасштабного вихря [3]. Однако остался ряд вопросов, в том числе вопрос о зависимости характеристик течения от геометрических размеров модели.

В данной работе представлены результаты экспериментального исследования структуры и динамики конвективных течений в неподвижном горизонтальном слое жидкости при наличии локализованного подогрева дна. Исследования проводились для трех конфигураций экспериментальной установки, отличающихся не только геометрическими размерами, но и аспектным соотношением (отношение высоты слоя к диаметру нагревателя).

## 2. Экспериментальная установка и методика измерений

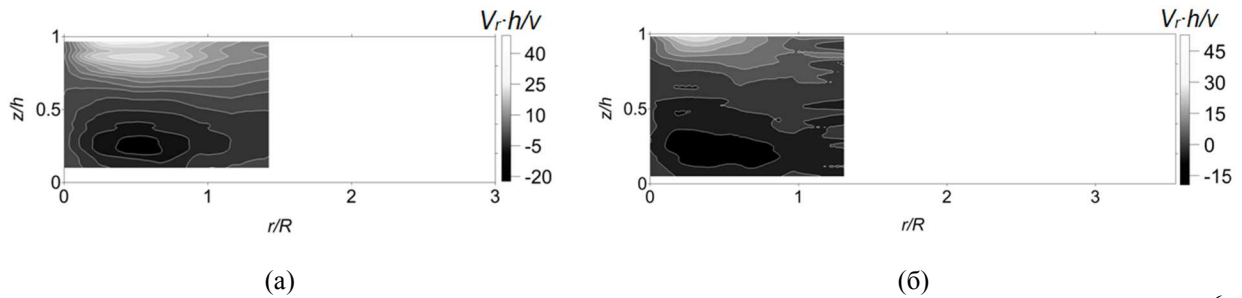
Экспериментальная установка представляла собой цилиндрическую полость диаметром  $D = 300$  мм. Подогрев жидкости происходил при помощи медного теплообменника, диаметром  $2R = 104$  мм, расположенным в центре кюветы заподлицо с ее дном. Высота слоя жидкости составляла  $h = 30$  мм. Параллельно были проведены эксперименты на модели диаметром  $D = 690$  мм, для  $h = 30$  мм и  $h = 60$  мм. Дно большой модели представляло собой текстолитовую пластину толщиной 20 мм. В центр пластины, заподлицо с дном, был вмонтирован медный нагреватель, диаметром  $2R = 195$  мм. Питание нагревателей происходило через источник переменного тока, температура контролировалась при помощи блока Termodat с точностью до 0.5 К. В качестве рабочей жидкости были использованы силиконовые масла с вязкостью при 25<sup>0</sup>С 5, 10 и 20 сСт (число Прандтля  $Pr = 66, 110$  и 209 соответственно). Поверхность жидкости всегда была свободной, температура в комнате поддерживалась постоянной в ходе всех экспериментов. Температура масла в кюветах измерялась при помощи медь-константовых термопар. Для измерения двух (горизонтальных) компонент скорости использовалась измерительная система PIV «Полис».

В качестве безразмерного параметра было использовано число Рэлея  $Ra$ , определенное через разницу температур между нагревателем и комнатой, и высоту слоя жидкости  $h$ .

## 3. Результаты

Подогрев в центральной части приводит к возникновению интенсивного подъемного течения. В верхней части слоя жидкость охлаждается и продолжает движение по направлению к периферии, где продолжает свое движение вдоль боковых стенок полости. В результате возникает адвективная ячейка с конвергентным (сходящимся) течением в нижней части полости и дивергентным (расходящимся) в верхней. Поля радиальной скорости, осредненные по времени и пространству, для двух конфигураций полости и одном числе Рэлея представлены на (рис. 1). Для проверки автомодельности течений поля построены для обезразмеренных координат, высоты  $z/h$  и радиуса  $r/R$ , радиальная скорость также была обезразмерена. За характерную скорость была принята величина  $v/h$ , где  $v$  – значение кинематической вязкости.

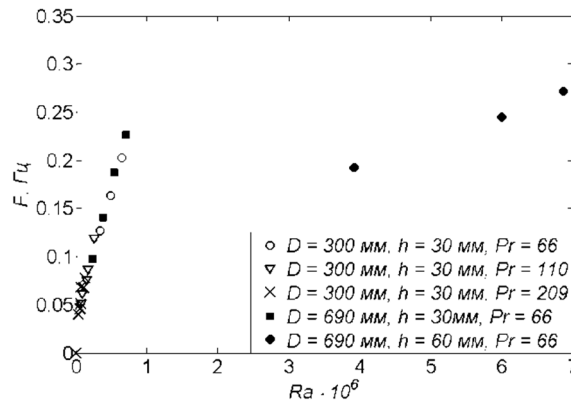
При изменении геометрических размеров полости, но сохранении аспектного отношения ( $\approx 0.5$ ) структура и интенсивность среднего течения хорошо согласуются. Другими словами, варьирование геометрических размеров модели или параметров рабочей жидкости при неизменном числе Рэлея и значении аспектного отношения не приводит к изменению характеристик основного крупномасштабного течения.



**Рис. 1.** Поля радиальной скорости, осредненные по времени и пространству  $Ra = 11 \cdot 10^6$ :  
(а) –  $D = 300$  мм, (б) –  $D = 690$  мм

Наличие крупномасштабной циркуляции приводит к формированию пограничного слоя с неустойчивой стратификацией температуры над нагреваемой областью, в котором возникают вторичные структуры в виде конвективных валов различной ориентации - параллельных и поперечных конвергентному потоку. В [2] было показано, что возникновение поперечных валов носит периодический характер, частота растет с увеличением числа Рэлея. На (рис. 2) представлена зависимость частоты возникновения поперечных валов от числа Рэлея (частота была получена из температурных измерений) для всех конфигураций модели и различных жидкостей.

Существует заметный разброс точек - возникновение вторичных течений в значительной степени зависит от толщины слоя жидкости. Это говорит о том, что число Рэлея не определяет в полной мере процессы, протекающие в пограничном слое. Это подтверждает необходимость использования нескольких безразмерных комплексов для описания многомасштабных гидродинамических систем.



**Рис. 2.** Зависимость частоты возникновения вторичных структур от числа Рэлея

Работа выполнена в рамках проектов РФФИ № 16-31-00150.

### Список литературы

1. Bogatyrev, G. P. Excitation of a cyclonic vortex or a laboratory model for a tropical cyclone // Pisma Zh.Eksp. Teor. Fiz. 1990. V. 51. P. 557-559.
2. Sukhanovskii A., Evgrafova A., Popova E. Horizontal rolls over localized heat source in a cylindrical layer // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2016. Vol. 316. P. 23–33.
3. Sukhanovskii A., Evgrafova A., Popova E. Laboratory study of a steady-state convective cyclonic vortex // Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society. 2016. Vol. 142. P. 2214-2223.

# **Нелинейная восприимчивость как новый метод исследования межчастичных взаимодействий в магнитных жидкостях**

**А. В. Лебедев**

Институт механики сплошных сред УрО РАН  
614013, Пермь, ул. Королева, 1  
email: lav@icmm.ru

Измерена нелинейная динамическая восприимчивость у четырех образцов магнитной жидкости разной концентрации с одинаковым дисперсным составом. Получены отношения третьей гармоники намагниченности к амплитуде поля в зависимости от амплитуды поля и его частоты. Обнаружено, что нормированные на линейную начальную восприимчивость, полевые зависимости нелинейной восприимчивости у образцов разных концентраций существенно отличаются друг от друга. Однако, согласно модифицированной теории эффективного поля, влияние межчастичных дипольных взаимодействий должно изменять кривые только по масштабу вдоль оси абсцисс. Таким образом, модель модифицированного эффективного поля нуждается в дальнейшей существенной модернизации.

**Ключевые слова:** магнитная жидкость; нелинейная восприимчивость; межчастичные взаимодействия

# **Nonlinear susceptibility how new method of investigation of interactions in magnetic fluids**

**A. V. Lebedev**

Institute of continuous media mechanics UB RAS  
email: lav@icmm.ru

Nonlinear susceptibility of four samples with different concentration and same dispersion composition was measured. Relations of third harmonic of magnetization to field amplitude were gotten in dependency of field amplitude and frequency. It was detected that normalized on initial linear susceptibility, field dependencies of nonlinear susceptibility essentially differ each other for samples with different concentration. However, according to theory of modified effective field, influence of interparticle dipole interactions must change only scale along of abscissa. In this way, the model of modified effective field needs in the next essential modernization.

**Keywords:** magnetic fluid; nonlinear susceptibility; interparticle interactions

## **1. Введение**

Магнитные жидкости [1] (коллоидные растворы однодоменных частиц магнетиков нанометрового размера), синтезированные в начале 60-ых годов прошлого столе-

тия [2], являются примером неупорядоченных дипольных систем с сильным межчастичным взаимодействием. Дипольное взаимодействие частиц значительно (в несколько раз) увеличивает статическую восприимчивость магнитных жидкостей [3, 4]. В работе [5] для учета влияния межчастичных взаимодействий на статическую кривую намагничивания была предложена модель эффективного поля. В работах [6, 7] модель эффективного поля получила обоснование и дальнейшее развитие. С помощью модифицированной модели эффективного поля удастся описать статическую кривую намагничивания с погрешностью около 1% (на уровне погрешности измерений). Казалось бы, проблема влияния межчастичных взаимодействий решена. Однако недавно нами были получены результаты по нелинейной восприимчивости, ставящие под сомнение полную адекватность модели модифицированного эффективного поля.

## 2. Экспериментальная установка

Основной проблемой при измерениях нелинейной восприимчивости становится получение переменного поля большой амплитуды. Для этого использовался соленоид длиной 168 мм диаметром 25 мм, снабженный системой термостатирования. Внутри соленоида была размещена измерительная система, состоявшая из двух пробирок диаметром 9 мм и длиной 170 мм с намотанными поверх измерительными катушками. Регистрация выходных сигналов, индуцируемых в катушках, производилась с помощью двухканального синхронного усилителя eLockIn 203 фирмы Anfattec (Германия). Указанный усилитель производит одновременное измерение амплитуд и фаз двух входных сигналов, а также их гармоник. Проверка всей системы в целом производилась путем измерения коэффициента взаимоиндукции. В диапазоне частот 40 Гц – 60 кГц коэффициент взаимоиндукции был постоянен с погрешностью не выше 1%. На верхней границе частотного диапазона синхронного усилителя 240 кГц погрешность составила 7%.

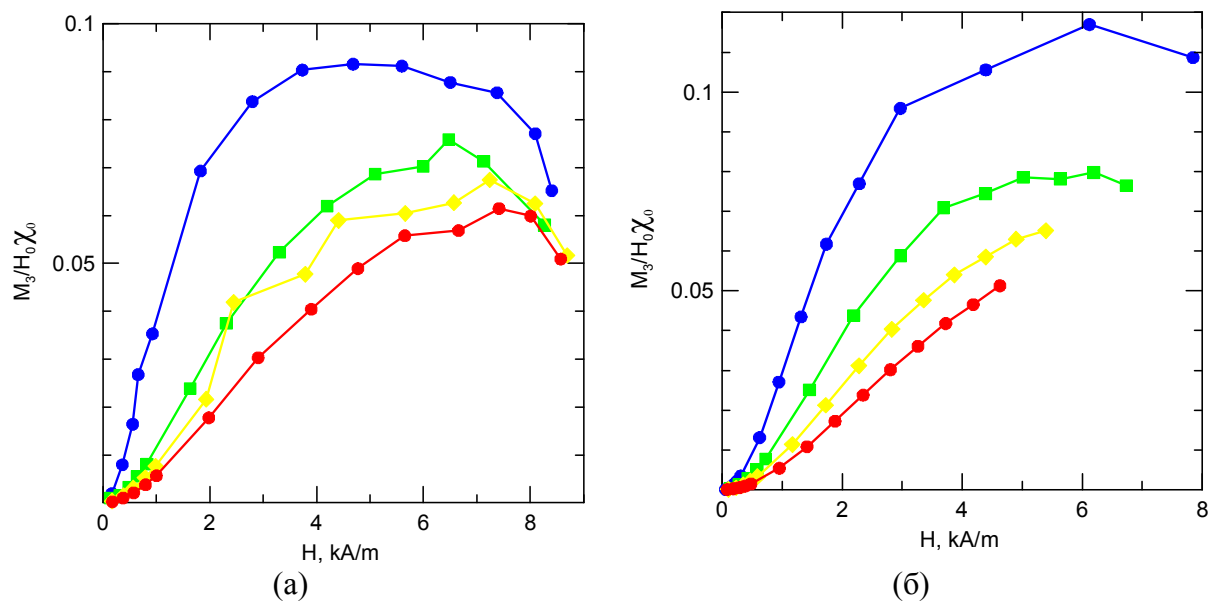
## 3. Образцы жидкости

В экспериментах использовались образцы магнитной жидкости на основе магнетитовых частиц в керосине, стабилизированных олеиновой кислотой. Образцы были получены путем последовательного разведения исходной концентрированной жидкости. Дисперсный состав определялся из анализа кривой намагничивания образца №3. Анализ выполнялся по упрощенной методике с использованием асимптотик кривой намагничивания [8]. Параметры  $\Gamma$ -распределения, аппроксимирующего распределение частиц по размерам, составили  $X_0=0.8358$  нм,  $\alpha=11.06$ . Начальные восприимчивости при температуре измерений  $T=-10^\circ\text{C}$  равнялись соответственно 1.53, 3.53, 7.75 и 18.6.

## 4. Результаты измерений

Измерения выполнялись в диапазоне амплитуд поля от 0 до 8 кА/м для фиксированного ряда частот 111, 333 Гц, 1, 3, 9, 27, 81 кГц при температуре  $-10^\circ\text{C}$ . Результаты измерений нелинейной восприимчивости на частоте 111 Гц представлены на (рис. 1. а). Как можно видеть, кривые не могут быть совмещены путем изменения масштаба, хотя теория модифицированного эффективного поля требует подобия кривых по горизонтальной оси. Подобное различие сохраняется и на высоких частотах. Для примера на (рис. 2. б) представлены результаты измерений на частоте 9 кГц.

Таким образом, теория модифицированного эффективного поля нуждается в дальнейшем совершенствовании.



**Рис. 1.** Нормированные полевые зависимости нелинейной восприимчивости на частотах 111 Гц и 9 кГц

## 5. Благодарности

Работа была выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект №. 15-12-10003).

## Список литературы

1. Шлиомис М.И. Магнитные жидкости // УФН. 1974. Т. 112(3). С.435 - 458.
2. Розенцвейг Р. Феррогидродинамика: Пер. с англ. под ред. Гогосова В.В. М.: Мир, 1989. (R.E. Rosensweig, Ferrohydrodynamics, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.)
3. Pshenichnikov A.F., Lebedev A.V. Low-temperature susceptibility of concentrated magnetic fluids // J. Chem. Phys. 2004. V. 121. P. 5455-5467.
4. Лебедев А.В. Дипольное взаимодействие частиц в магнитных жидкостях// Коллоидный журнал. 2014. Т. 76(3). С. 363-371.
5. Pshenichnikov A. F., Mekhonoshin V. V., Lebedev A. V. Magneto-granulometric analysis of concentrated ferrocolloids // J. Magn. Magn. Mater. 1996. V.161. P. 94-102.
6. Ivanov A. O., Kuznetsova O. B. Magnetic properties of dense ferrofluids: an influence of interparticle correlations // Phys. Rev. E 2001. V.64. P. 414051-4140512.
7. Иванов А.О., Кузнецова О.Б. Магнитогранулометрический анализ ферроколлоидов: модифицированная модель среднего поля второго порядка // Коллоидный журнал. 2006. Т.68. С. 472- 484.
8. Пшеничников А. Ф., Лебедев А. В., Радионов А. В., Ефремов Д. В. // Коллоидный журнал. 2015. Т. 77. С. 207-213.

## **Динамика твердых частиц, взвешенных в жидкости, под действием горизонтальных вибраций линейной поляризации**

**Т. П. Любимова<sup>a,b</sup>, О. О. Фатталов<sup>a,b</sup>**

<sup>a</sup> Институт механики сплошных сред УрО РАН (Пермь),

<sup>b</sup> Пермский государственный национальный исследовательский университет (Пермь)

Работа посвящена исследованию динамики ансамбля твердых частиц, взвешенных в вязкой жидкости, в сосуде, совершающем поступательные линейно-поляризованные вибрации. Эксперименты, проведенные для двухфазной системы песок - водный раствор глицерина, показали, что в диапазоне частот от 10 до 45 гц наблюдается формирование структур, представляющих собой линейные цепочки, ориентированные перпендикулярно направлению вибраций. При больших частотах частицы собираются у одной из стенок кюветы. Получены зависимости пространственного периода образующихся структур от параметров вибраций. Найдено, то при фиксированной частоте вибраций период структур растет с увеличением амплитуды вибраций по закону, близкому к линейному, а при фиксированной амплитуде вибраций, пространственный период структур уменьшается с повышением частоты вибраций. Исследовано влияние кинематической вязкости жидкости на пространственный период структур. Найдено, что период структур растет с увеличением вязкости по корневому закону.

**Ключевые слова:** горизонтальные вибрации; разделение фаз; пограничный вязкий слой, ансамбль частиц

## **Dynamics of solid particles suspended in a liquid under the action of horizontal vibrations of linear polarization**

**T. P Lyubimova<sup>a,b</sup>, O. O Fattalov<sup>a,b</sup>**

<sup>a</sup> Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Koroleva St. 1, 614013 Perm, Russia

<sup>b</sup> Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm, Russia

The work is devoted to the study of the dynamics of an ensemble of solid particles suspended in a viscous liquid in a vessel performing translational linearly polarized vibrations. Experiments carried out for a two-phase system of sand - an aqueous solution of glycerin showed that formation of structures representing linear chains oriented perpendicular to the direction of vibrations is observed in the frequency range from 10 to 45 Hz. At high frequencies, the particles are collected at one of the walls of the cuvette. Dependences of the spatial period of the formed structures on the parameters of vibrations are obtained. It is found that for a fixed frequency of vibrations, the period of structures increases with increasing vibration amplitude according to a law close to linear, and for a fixed

amplitude of vibrations, the spatial period of structures decreases with increasing frequency of vibrations. The influence of the kinematic viscosity of a liquid on the spatial period of structures is studied. It is found that the period of structures increases with increasing viscosity according to the root law.

**Keywords:** horizontal vibrations; Phase separation; Boundary viscous layer, ensemble of particles

Известно, что две частицы, взвешенные в маловязкой жидкости отличающейся плотности, притягиваются, если линия, соединяющая их центры, ортогональна направлению вибраций, и отталкиваются, если эта линия параллельна направлению вибраций [1]. В работах [2,3] представлены результаты экспериментального и численного исследования взаимодействия между двумя твердыми частицами, взвешенными в колеблющейся вязкой жидкости в сосуде, совершающем поступательные линейно-поляризованные вибрации в направлении, перпендикулярном линии, соединяющей центры масс частиц. Найдено, что существует равновесное расстояние между частицами, при котором происходит переход от силы притяжения, на больших расстояниях между частиц, к силе отталкивания на малых расстояниях. В случае ансамбля, состоящего из большого числа частиц, под действием вибраций частицы образуют специфические структуры (кластеры) [4]. В настоящей работе экспериментально исследуется поведение двухфазной системы из макроскопических частиц, взвешенных в вязкой жидкости, совершающей малоамплитудные высокочастотные поступательные вибрации.

Эксперименты проводились на электродинамическом вибраторе V650 на базе вибратора LDS. Управление виброиспытаниями велось в ручном режиме с помощью виброметра и генератора сигналов синусоидальной формы GFG-8219A. Поставлено три серии экспериментов по изучению поведения двухфазной системы: песок и водный раствор глицерина. Высота кюветы, которая подвергалась высокочастотным малоамплитудным вибрациям, равняется 5мм, что значительно больше размера средней песчинки, это позволяет говорить о том, что результаты экспериментов справедливы в трехмерном случае.

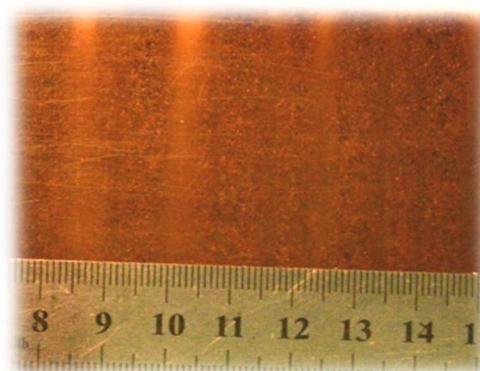
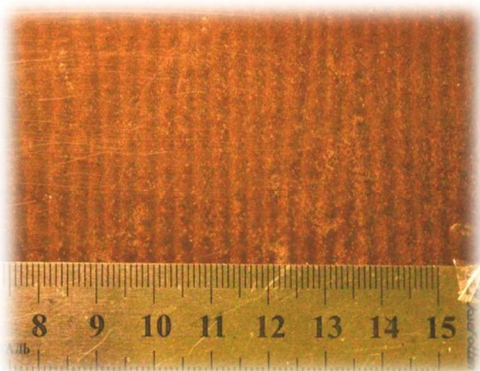
Первая серия экспериментов была посвящена изучению устойчивости образующихся структур из кластеров, их стационарности, а также определению диапазона значений параметров, при которых при которых наблюдались устойчивые структуры кластеров. Найдено, что при малых амплитудах и низких частотах вибраций никаких кластеров не образуется. Пороговым значением частоты, при котором образуются периодические структуры, в исследованном диапазоне  $5 - 74$  гц является значение  $10$  гц при амплитуде вибраций в  $2,5$  мм в  $50\%$  растворе глицерина. Начиная с данного значения частоты, периодические структуры ярко выражены и поддаются изучению. По мере роста энергии поступательных вибраций, характер поведения данной динамической системы изменяется. При любом фиксированном значении частоты с ростом амплитуды вибраций наблюдается увеличение расстояния между образующимися кластерами из частичек. Немаловажно то, что при данных параметрах формирующаяся структура устойчива и достаточно пары секунд, чтобы система вышла на стационарный режим.

В диапазоне частот от  $10$  гц –  $50$  гц при амплитуде от  $2,5$  мм до  $8$  мм возможна четкая и устойчивая картина (см рис. 1. а). При дальнейшем росте частоты и амплитуды вибраций происходит качественное изменение картины, кластеры становятся не устойчивыми, расстояние между ними хаотически меняется, они принимают синусоидальную форму. Картина перестает быть стационарной и можно наблюдать, как одни кластеры из частиц сливаются с другими (см рис. 1. б). При дальнейшем росте



амплитуды вибраций при фиксированной частоте, происходит полное разделение фаз (см. рис. 1. в) и все частицы собираются у одной из боковых стенок кюветы. Определена область параметров, в которой структура образующихся кластеров максимально выражена и устойчива. Амплитуда  $a$  составляет  $1 \div 8$  мм, частота вибраций  $f$  порядка  $10 \div 45$  гц для водного раствора глицерина с динамической вязкостью  $\eta = 1.805 \div 38.720$  спз при комнатной температуре  $+ 25 \text{ C}^0$

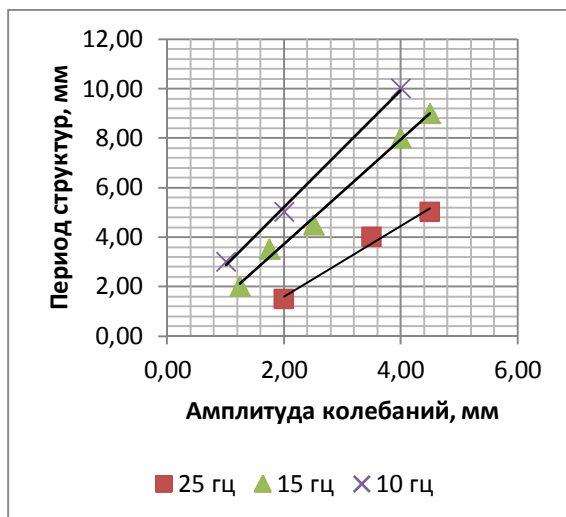
При дальнейшем увеличении частоты вибраций картина качественно не изменяется. При частотах свыше 50 гц вся система моментально разделяется на жидкую и твердую фазы.



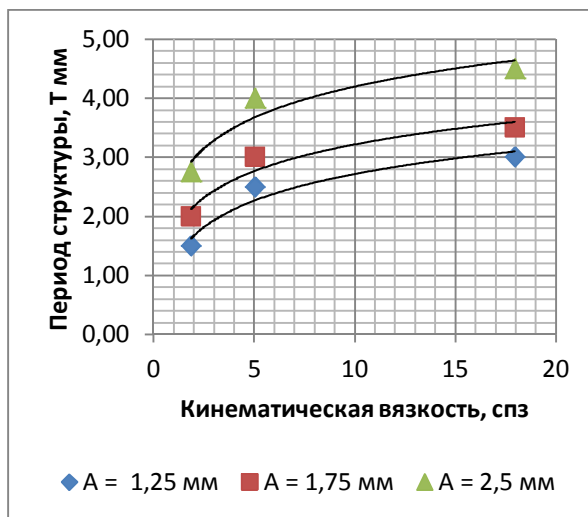
**Рис 1.а.** Частота 20 гц, амплитуда 3,50мм **Рис 1.б.** Частота 45 гц, амплитуда 2,75 мм



**Рис. 1.в.** Частота 45 гц, амплитуда 3,50 мм



**Рис. 2.** Зависимости пространственного периода образующихся структур от амплитуды вибраций при кинематической вязкости  $\nu = 17,960$  спз и трех различных значениях частоты вибраций



**Рис. 3.** Зависимости пространственного периода образующихся структур от кинематической вязкости при частоте вибраций 30 гц и трех различных значениях амплитуды вибраций

Вторая серия экспериментов была посвящена исследованию зависимостей пространственного периода образующихся структур от параметров вибраций. На (рис. 2) показано изменение пространственного периода образующихся структур при изменении амплитуды вибраций для трех фиксированных значений частоты вибраций при следующих параметрах эксперимента: в кювету, заполненную 70 % водным раствором глицерина с плотностью  $\rho = 1224,3 \text{ кг/м}^3$  и кинематической вязкостью  $\nu = 17,960 \text{ см}^2/\text{с}$  помещалось 20 мл речного песка с частицами радиусом  $0,2 \div 0,5 \text{ мм}$  и насыпной плотностью  $\rho_0 = 1500 \text{ кг/м}^3$ . Как видно, при всех значениях частоты вибраций в рассмотренном диапазоне наблюдается линейный рост периода структур с увеличением амплитуды вибраций. При одной и той же амплитуде вибраций значения периода тем меньше, чем выше частота вибраций.

Третья серия экспериментов была посвящена изучению влияния кинематической вязкости жидкости на пространственный период формирующихся структур. Результаты этой серии экспериментов, полученные при фиксированной частоте вибраций, равной 30 гц, трех различных значениях амплитуды вибраций, показаны на (рис.3). Как видно, пространственный период структур растет при увеличении кинематической вязкости по закону, близкому к корневому.

### **Заключение**

В работе исследована динамика твердых частиц, взвешенных в колеблющейся вязкой жидкости. Проведено три серии экспериментов. В первой серии исследовался диапазон параметров вибраций, в котором в жидкости формируются периодические структуры. Найдено, что формирование структур, представляющих собой линейные цепочки, ориентированные перпендикулярно направлению вибраций, наблюдается в диапазоне частот от 10 до 45 гц. При больших значениях частоты частицы собираются у одной из стенок кюветы. Вторая серия экспериментов была направлена на получение зависимости пространственного периода образующихся структур от параметров вибраций. Найдено, то при фиксированной частоте вибраций период структур растет с увеличением амплитуды вибраций по закону, близкому к линейному. При фиксированной амплитуде вибраций, чем выше частота вибраций, тем меньше пространственный период структур. Третья серия экспериментов была посвящена исследованию влияния кинематической вязкости жидкости на пространственный период структур. Найдено, что период структур растет с увеличением вязкости по корневому закону.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 14-21-00090).

### **Список литературы**

1. *Lyubimov D.V., Cherepanov A.A., Lyubimova T.P.* The motion of solid body in a liquid under the influence of a vibrational field. Reviewed Proc. of the First Int. Symp. on Hydromechanics and Heat/Mass Transfer in Microgravity, Gordon and Breach, 1992, pp.247-251.
2. *Klotsa D., Michael R. Swift, Bowley R. M., and King P. J.* Interaction of spheres in oscillatory fluid flows. School of Physics and Astronomy, University of Nottingham, Nottingham, NG7 2RD, United Kingdom, 2007.
3. *Lyubimova, T., Lyubimov, D., Shardin, M.* The interaction of rigid cylinders in a low Reynolds number pulsational flow (2011) Microgravity Science and Technology, 23 (3), pp. 305-309.
4. *Wunenburger R., Carrier V., and Garrabos Y,* Phys. Fluids 14, 2350 2002.

## **Численное моделирование поперечного перемешивания водных масс в поверхностных водных объектах**

**Т. П. Любимова<sup>a,b</sup>, А. П. Лепихин<sup>c</sup>, Я. Н. Паршакова<sup>a</sup>**

<sup>a</sup> Институт механики сплошных УрО РАН, 614013, Пермь, ул. Академика Королёва, 1

<sup>b</sup> Пермский государственный национальный исследовательский университет, 614990, Пермь, ул. Букирева, 15

email: lyubimovat@mail.ru

<sup>c</sup> Горный институт УрО РАН, 614007, Пермь, ул. Сибирская, 78 –а

email: lepihin49@mail.ru

Проведено трехмерное численное моделирование поперечного перемешивания водных масс в поверхностных водных объектах. Рассмотрено поведение вод двух рек в месте слияния и на протяжении десятка километров от места слияния. Течение рассматривалось как изотермическое, плотность считалась постоянной и независимой от концентрации примесей в воде. Вычисления проводились в рамках к-ε модели для описания турбулентных пульсаций. В силу геохимических особенностей почвы донных площадей, химический состав рассматриваемых рек существенно различается. Однако рассматривается случай, когда, примесь не влияет на характер течения, является пассивной и выступает в роли индикатора степени перемешивания потоков. Исследована зависимость скорости поперечного перемешивания от расхода воды в смешивающихся реках, характерных для различных сезонных периодов. В результате расчетов строились поля концентрации примеси и векторные поля скорости для различных сечений вдоль по потоку. Найдено, что с увеличением расхода воды в смешивающихся реках интенсивность перемешивания снижается. Ниже места слияния реки текут вниз по течению по всей глубине практически не перемешиваясь в горизонтальном направлении на всем исследуемом участке.

**Ключевые слова:** слияние рек; вторичные течения; несмешивание потоков

## **Численное моделирование поперечного перемешивания водных масс в поверхностных водных объектах**

**T. P. Lyubimova<sup>a,b</sup>, A. P. Lepikhin<sup>c</sup>, Ya. N. Parshakova<sup>a</sup>**

<sup>a</sup> Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Akademika Koroleva St. 1, 614013, Perm, email: lyubimovat@mail.ru

<sup>b</sup> Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm

<sup>c</sup> Mining Institute UB RAS, Sibirskaya St. 78 –а, 614007, Perm

Three-dimensional numerical modeling of transverse mixing of water masses in surface water bodies is carried out. The behavior of the waters of two rivers at the

confluence and over a ten kilometers from the confluence is considered. The flow was considered as isothermal, the density was considered constant and independent of the solute concentration in the water. Calculations were carried out within the framework of the k-ε model for describing turbulent pulsations. Due to geochemical features of bottom soil, the chemical composition of the considered rivers varies considerably. However, we consider the case when the solute does not effect on the flow character, it is passive and acts as an indicator of the degree of flows mixing. The dependence of the velocity of transverse flow mixing on the water consumption in mixing rivers characteristic for different seasonal periods was investigated. As a result of calculations, solute concentration fields and velocity vector fields were constructed for different cross sections along the flow. It is found that with increasing of consumption water in mixing rivers, the intensity of mixing decreases. Below the confluence the rivers flow downstream along the entire depth, practically unmixed in the horizontal direction throughout the investigated area.

**Keywords:** confluence of rivers; secondary flows; unmixing flows

## 1. Введение

Поверхностные водные объекты, как естественные (реки, озера), так и искусственные (пруды, водохранилища) являются основным источником питьевого водоснабжения. В связи с этим особое внимание должно уделяться вопросам их загрязнения, в первую очередь экстремального, создающего непосредственную угрозу их потребительским свойствам. Традиционно считается, что основным механизмом переноса поллютантов в поверхностных водных объектах является фиковская диффузия, при этом концентрация и характер поллютантов не влияет на механизмы переноса. Однако, выполненные в последние годы исследования показали, что эти традиционные представления далеко не всегда приемлемы. В ряде случаев даже сравнительно невысокие концентрации поллютантов через изменение плотности могут принципиально изменить гидродинамику потока. Играющие в этих случаях важную роль плотностные эффекты могут иметь очень большое значение при решении прикладных водохозяйственных задач.

Одним из важных вопросов является вопрос о формировании в реках не смешивающихся на значительном протяжении потоков с существенно различающимися по ряду физических и химических свойств водами. В частности, реки Вишера и Кама, как свидетельствуют многочисленные космо- и аэро-снимки от створа слияния до территории Соликамско-Березниковского промышленного узла, практически не перемешиваются. Это имеет принципиальное значение при решении задачи регламентации техногенных воздействий этого крупнейшего в бассейне р. Камы источника техногенного загрязнения.

## 2. Методика проведения численного моделирования

Численное моделирование поперечного перемешивания водных масс в поверхностных водных объектах проведено в рамках трехмерного подхода. Рассмотрено поведение вод двух рек в месте слияния и на протяжении десятка километров от места слияния. Течение рассматривалось как изотермическое, плотность считалась постоянной и независимой от концентрации примесей в воде. Вычисления проводились при помощи пакета вычислительной гидродинамики ANSYS Fluent с использованием к-ε модели для описания турбулентных пульсаций. Задача решалась в рамках нестационарного изотермического подхода. Для оценки эффективности применения к-ε модели

турбулентности, проведены тестовые расчеты с использованием модели более высокого порядка – модели напряжений Рейнольдса, в которой решаются семь дополнительных уравнений для сдвиговых напряжений. Установлено, что отличие в полученных данных составляет не более 3 процентов, в связи с чем для дальнейшего исследования использовалась к-е модель, в связи с меньшими затратами по временному ресурсу. На входах расчетной области задавались постоянная скорость течения, одинаковая для обеих рек, и постоянная концентрация соли, различная для каждой реки. На свободной поверхности жидкости ставились граничные условия отсутствия касательных напряжений. На твердых границах ставилось условие прилипания, также границы считались непроницаемыми. Для пространственной дискретизации уравнений использовалась схема второго порядка точности. Временная эволюция моделировалась по явной схеме второго порядка.

Вычисления проводились для участка протяженностью 11 км. Расчетная область охватывала участки рек протяженностью 1 километр до места слияния, затем 10 км от места слияния вверх по течению. Значение ширины русел рек одинаковы и равны 250 м, после места слияния ширина русла равна 500 м. Глубина рек принималась постоянной на протяжении всей вычислительной области и равной 8 м.

Расчетная сетка строилась при помощи программного пакета Gambit 2.3.16, входящего в состав ANSYS Fluent. При этом число узлов по глубине расчетной области принималось равным 25, сетка строилась равномерно по глубине. По горизонтали сетка состояла из четырехугольных ячеек, равномерно распределенных по всей длине, с характерным линейным размером 20 м. Размерность сетки составляла порядка пятьсот тысяч узлов.

### **3. Результаты расчетов**

Рассмотрена зависимость скорости поперечного перемешивания от расхода воды в смешивающихся реках, характерных для различных сезонных периодов. В результате расчетов строились поля концентрации примеси и векторные поля скорости для различных сечений вдоль по потоку. Получено, что с увеличением расхода воды в смешивающихся реках интенсивность перемешивания снижается. Ниже места слияния реки текут вниз по течению по всей глубине практически не перемешиваясь в горизонтальном направлении на всем исследуемом участке. Такое поведение объясняется наличием двухвихревого течения, расположенного поперек русла ниже места слияния рек. Вихри направлены от берегов к середине русла. Чем больше скорость воды в реках, тем интенсивнее двухвихревое течение, которое препятствует перемешиванию вод разных рек. Так для скорости 0.2 м/с максимальная скорость поперечного течения составляет 0.04 м/с на расстоянии 200 метров от места слияния, на расстоянии 700 метров – 0.004 м/с. С уменьшением расхода воды в реках до места слияния скорость поперечных вихрей снижается значительно, для скорости потоков 0.05 м/с максимальная скорость поперечного течения составляет 0.001 м/с на расстоянии 200 метров от места слияния, на расстоянии 700 метров – 0.0004 м/с. Таким образом, для малых расходов рек размыв границы между потоками наблюдается на небольших расстояниях от места слияния.

#### **4. Заключение**

В настоящей работе явление существенного ослабления поперечного перемешивания водных масс в поверхностных водных объектах исследуется с помощью трехмерного численного моделирования поперечного перемешивания водных масс при слиянии двух рек. Исследована зависимость скорости поперечного перемешивания от расхода воды в смешивающихся реках, характерных для различных сезонных периодов. Найдено, что с увеличением расхода воды в смешивающихся реках интенсивность перемешивания снижается.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Пермского края из средств гранта 16-41-590005.

## Нелинейные режимы конвекции бинарных смесей в плоском горизонтальном слое

Т. П. Любимова<sup>b</sup>, С. А. Прокопьев<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Пермский государственный национальный исследовательский университет  
614990, Пермь, ул. Букирева, 15

<sup>b</sup> Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013, Пермь, ул. Королева, 1

Работа посвящена численному исследованию нелинейных режимов конвекции бинарной смеси с эффектом Соре в поле силы тяжести при заданном вертикальном тепловом потоке через твердые горизонтальные границы. Моделируется область с отношением высоты к длине 1:5. Рассмотрены два типа граничных условий на вертикальных границах: периодические граничные условия и условия, соответствующие твердым границам замкнутой полости. Полученные в расчетах для ячейки слоя критические значения числа Релея близки к полученным ранее путем решения линейной задачи устойчивости равновесия. Обнаружено, что длинноволновые нелинейные режимы конвекции существуют лишь в узком интервале значений числа Релея, близких к порогу возбуждения конвекции. При увеличении числа Релея наблюдается постепенный переход к режимам конвекции со все большим числом вихрей.

**Ключевые слова:** свободная конвекция; эффект Соре; термодиффузия; бинарная смесь.

## Non-linear convective regimes of binary mixtures in a plane horizontal layer

T. P. Lyubimova<sup>b</sup>, S. A. Prokopen<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm, Russia

<sup>b</sup> Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Koroleva St. 1, 614013 Perm, Russia

The paper deals with the numerical investigation of the non-linear Soret-induced convection regimes of binary mixtures in the gravity field. A mixture is subjected to a prescribed constant vertical heat flux through rigid impermeable horizontal borders. The cavity with the height-length ratio of 1:5 is modeled. The two types of boundary conditions on vertical walls are considered, namely the periodic boundary conditions and the conditions corresponding to rigid borders of a closed cavity. The critical values of the Rayleigh numbers received in the calculation for a layer cell are close to the ones received earlier by solving the linear equilibrium stability problem. It was found that the longwave non-linear regimes of convection exist only within the narrow range of the Rayleigh number values which are close the threshold of convection onset. With increase of the Rayleigh number the gradual transformation to the convection regimes with the larger number of vortexes is observed.

**Keywords:** natural convection; Soret-induced convection; thermal diffusion; binary mixture

Рассматриваются нелинейные режимы конвекции бинарной смеси в плоском горизонтальном слое и вытянутой по горизонтали прямоугольной полости с твердыми непроницаемыми для вещества горизонтальными границами с заданным тепловым потоком. Для описания поведения смеси используются уравнения свободной конвекции, записанные в приближении Буссинеска. Учитывается эффект термодиффузии. Эффектом диффузионной теплопроводности пренебрегается.

Уравнения свободной конвекции бинарной смеси имеют вид:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \Delta \mathbf{v} + \frac{Ra}{Pr} (T + C) \boldsymbol{\gamma} \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \frac{1}{Pr} \Delta T \quad (2)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla C = Sc (\Delta C - \psi \Delta T) \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (4)$$

$\mathbf{v} = (v_x, 0, v_z)$  – вектор скорости,  $p$  – давление,  $Ra = g\beta_T \Theta h^3 / \nu \chi$  – число Релея,  $Pr = \nu / \chi$  – число Прандтля,  $Sc = \nu / D$  – число Шмидта,  $\nu$  – кинематическая вязкость,  $\chi$  – коэффициент температуропроводности,  $\beta_T$  и  $\beta$  – температурный и концентрационный коэффициенты расширения смеси,  $D$  – коэффициент молекулярной диффузии,  $D_T$  – коэффициент термодиффузии,  $\psi = (\beta \nabla C) / (\beta_T \nabla T)$  – отношение разделения.

Численное моделирование проводилось методом конечных разностей. В качестве расчетной области использовалась область с отношением длины к высоте 5:1.

Граничные условия на горизонтальных границах задавались в виде:

$$z = 0, 1: \mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = -1, \quad \frac{\partial C}{\partial z} - \psi \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad (5)$$

Было рассмотрено два варианта граничных условий на вертикальных границах: периодические граничные условия:

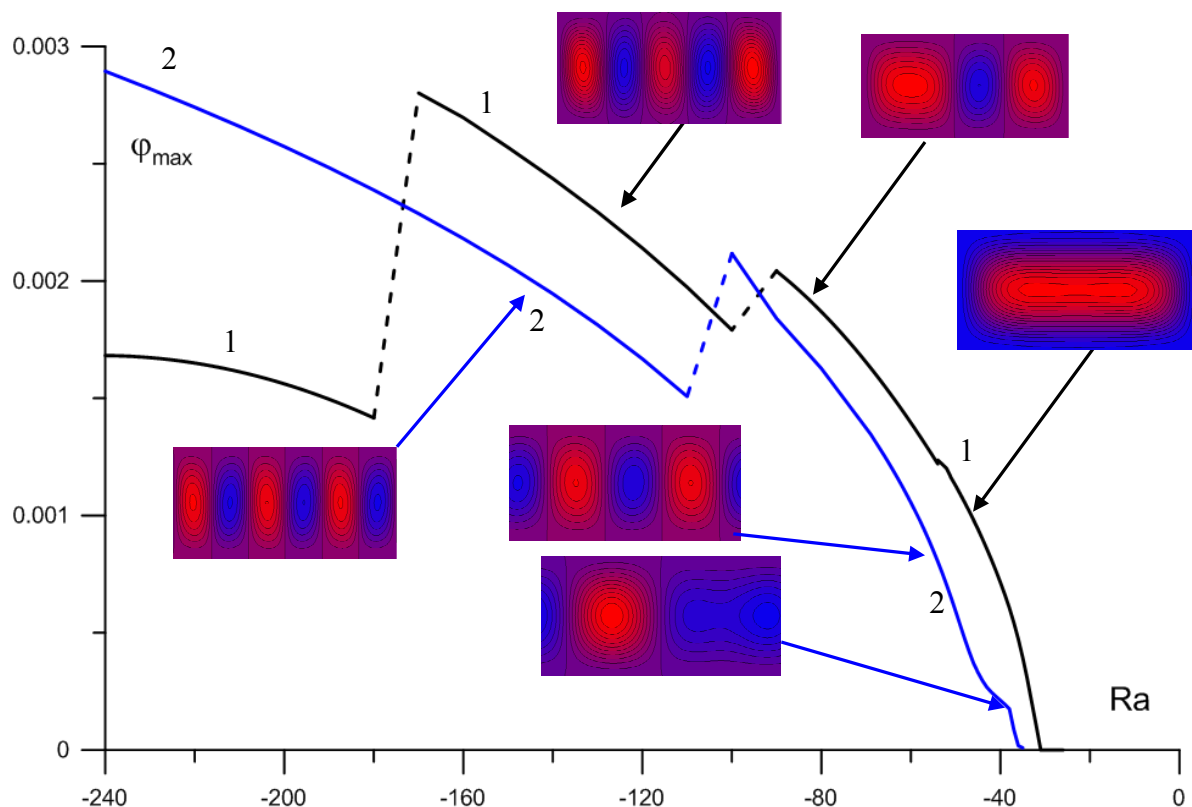
$$x = 0, 5: \mathbf{v}(x, z) = \mathbf{v}(x + l_x, z), T(x, z) = T(x + l_x, z), C(x, z) = C(x + l_x, z) \quad (6)$$

и условия, соответствующие твердым вертикальным границам замкнутой области:

$$x = 0, 5: \mathbf{v} = 0, T = 1 - z, \quad \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

Расчеты проводились для модельной жидкой смеси с параметрами:  $Pr = 10$ ,  $Sc = 1000$ .





**Рис. 1** Зависимости максимального значения функции тока от числа Рейля для  $\psi = -0.2$ : 1 – замкнутая область, 2 – ячейка слоя.

Как показано в работе [1], в случае горизонтального слоя бинарной смеси с эффектом Соре с твердыми непроницаемыми для вещества границами с заданным тепловым потоком на границах при всех значениях параметров наиболее опасными являются длинноволновые возмущения.

Расчеты, проведенные в настоящей работе для ячейки горизонтального слоя, дали критические значения  $Ra$ , близкие к полученным [1] путем решения линейной задачи устойчивости равновесия. Однако, было обнаружено нетривиальное развитие конвективных режимов выше порога возникновения конвекции. Найдено, что, как в случае ячейки горизонтального слоя, так и в случае вытянутой по горизонтали замкнутой полости, длинноволновые режимы конвекции существуют лишь в узком интервале значений числа Рейля, близких к пороговому, с увеличением же числа Рейля постепенно происходит переход к режимам со все большим числом вихрей.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 14-21-00090).

### Список литературы

1. Lyubimova T.P., Sadilov E.S. and Prokopen S.A. Eur. Phys. J. E (2017) 40: 15

## **Влияние вибраций конечной частоты на устойчивость конвективных течений в пористой среде, насыщенной бинарной смесью с эффектом Соре**

**Т. П. Любимова<sup>a,b</sup>, И. С. Файзрахманова<sup>a,c</sup>**

<sup>a</sup> Институт механики сплошных сред Уральского Отделения Российской Академии Наук, 614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1

<sup>b</sup> Пермский государственный национальный исследовательский университет 614990, Пермь, ул. Букирева, 15

email: lyubimovat@mail.ru

<sup>c</sup> Пермский национальный исследовательский политехнический университет, 614990, Пермь, Комсомольский просп, 29

email: faizr2@gmail.com

Исследовано влияние вибраций конечной частоты на границы линейной устойчивости механического равновесия и нелинейные режимы конвекции в пористой среде, насыщенной бинарной смесью с эффектом Соре, в квадратной полости. На горизонтальных границах полости задан постоянный однородный вертикальный тепловой поток, вертикальные границы теплоизолированы. Решение линейной задачи устойчивости показало, что имеются синхронные, субгармонические и квазипериодические резонансные зоны неустойчивости. Численно методом конечных разностей исследованы нелинейные режимы конвекции при разных значениях числа Рэлея и параметров внешних вибраций. Изучена эволюция нелинейных конвективных структур, демонстрирующая разнообразные регулярные и квазипериодические режимы. Построены спектры Фурье, описывающие нелинейную динамику системы.

**Ключевые слова:** конвекция; бинарные смеси; пористая среда; вибрации; устойчивость

## **Effect of finite frequency vibrations on the onset of convection in porous medium saturated by binary mixture with the Soret effect**

**T. P. Lyubimova<sup>a,b</sup>, I. S. Fayzrakhmanova<sup>a,c</sup>**

<sup>a</sup> Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Akad. Koroleva str., 614013, Perm

<sup>b</sup> Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm

email: lyubimovat@mail.ru

<sup>c</sup> Perm National Research Polytechnic University, Komsomolsky prosp., 29, 614990, Perm

email: faizr2@gmail.com

Effect of finite frequency vibrations on linear stability of the convectionless state and non-linear regimes of convection in porous medium saturated by binary mixture with the Soret effect in square cavity is investigated. The constant homogeneous vertical heat flux is imposed at the horizontal boundaries and vertical boundaries are assumed to be thermally insulated. The solution of linear stability problem has shown that there exist synchronous, subharmonic and quasiperiodic resonance zones of instability. The nonlinear regimes of convection at various values of the Rayleigh number and external vibration parameters are studied numerically by finite difference method. The evolution of non-linear regimes demonstrating different regular and quasi-periodic regimes is investigated. Fourier spectra describing the non-linear dynamics of the system are obtained.

**Keywords:** convection; binary mixture; porous medium; vibrations, stability

## 1. Введение

Широко известно, что внешние периодические воздействия могут сильно влиять на гидродинамическую устойчивость и тепло-массообмен. Установлено, что вибрации или модуляция силы тяжести – это наиболее простой вариант периодического воздействия. Исследованию влияния вибраций конечной частоты посвящено достаточно много работ. Приведем здесь работы наиболее близкие к данному исследованию. В работе [1] рассмотрено влияние вибраций конечной частоты на возникновение и нелинейные режимы тепловой конвекции в однородной жидкости. В работе [2] исследовано влияние вибраций конечной частоты на режимы конвекции в бинарной смеси. Возникновение и надкритические режимы конвекции бинарной смеси с эффектом Соре в горизонтальном слое пористой среде в условиях периодической модуляции силы тяжести исследованы в [3].

## 2. Постановка задачи

В настоящей работе рассматривается квадратная область пористой среды, насыщенной бинарной смесью с эффектом Соре. На горизонтальных границах полости задан постоянный вертикальный тепловой поток, вертикальные границы предполагаются теплоизолированными. Все границы полости непроницаемы для вещества. Благодаря эффекту Соре в полости формируется вертикальный градиент концентрации. Полость подвержена вертикальному периодическому воздействию – модуляции поля тяжести.

Рассмотрение проводится в двумерной постановке. Уравнения конвекции бинарной смеси с эффектом Соре в пористой среде записываются в рамках приближения Дарси-Буссинеска, в терминах функции тока, температуры и концентрации.

## 3. Методы решения и результаты

Для изучения устойчивости основного состояния, в котором движение жидкости отсутствует, вводились нормальные возмущения функции тока, температуры и концентрации и записывалась линеаризованная система уравнений и граничных условий. Линеаризованная задача допускает разделение переменных. В результате получается система обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд возмущений. Полученные амплитудные уравнения интегрировались численно, в соответствии с теорией Флоке составлялась матрица монодромии, собственные значения которой позволяют получить значения декремента возмущений. Границе устойчивости соответствует набор параметров, для которого вещественная часть декремента равна нулю. Теория

Флоке возволяет классифицировать возмущения по мнимой части декремента: возмущения синхронные, если мнимая часть декремента равна нулю или частоте внешнего периодического воздействия; субгармонические, если мнимая часть декремента равна половине частоты внешнего периодического воздействия; во всех остальных случаях возмущения квазипериодические. Построены нейтральные кривые и карты режимов в широком диапазоне параметров.

Полные нелинейные уравнения интегрировались численно методом конечных разностей с использованием явной схемы. Границы устойчивости, полученные в нелинейных расчетах, оказались близки к найденным путем решения линейной задачи. Были исследованы надкритические режимы конвекции, построены карты нелинейных режимов конвекции на плоскости параметров число Рэлея – параметр разделения.

#### 4. Заключение

Решена линейная задача о влиянии модуляции поля тяжести на границы линейной устойчивости механического равновесия в пористой среде, насыщенной бинарной смесью с эффектом Соре, в квадратной полости. Найдено, что, как и в случае однородной жидкости, вибрации могут оказывать как стабилизирующее, так и дестабилизирующее действие. Получены карты устойчивости, найдены области существования режимов гармонических, субгармонических и квазипериодических колебаний на плоскости параметров число Рэлея – параметр разделения, показано, что при значениях параметров, соответствующих колебательной неустойчивости в статическом поле тяжести, воздействие вибраций приводит к квазипериодическим режимам конвекции.

Проведены расчеты нелинейных режимов конвекции. Получены численные данные о границах устойчивости и нелинейных режимах конвекции при разных значениях числа Рэлея и параметров внешних вибраций. Изучена эволюция нелинейных конвективных структур, демонстрирующая разнообразные регулярные и квазипериодические режимы. Построены спектры Фурье, описывающие нелинейную динамику системы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 14-21-00090).

#### Список литературы

1. *Бурдэ Г. И.* Численное исследование конвекции в условиях периодической модуляции внешней силы / в сб. Гидродинамика, вып. 3 // Пермь, Изд-во Пермск. гос. ун-та, 1971, С.75–96.
2. *Мызникова Б. И., Смородин Б. Л.* О конвективной устойчивости горизонтального слоя двухкомпонентной смеси в модулированном поле внешних сил // Известия РАН. МЖГ. 2001. № 1. С. 3–13.
3. *Bahloul A., Boutana N., Vasseur P.* Double-diffusive and Soret-induced convection in shallow horizontal porous layer // Journal of Fluid Mechanics. 2003. Vol. 491. P. 325–352. DOI: 10.1017/S0022112003005524.

# Ориентационная структура холестерического жидкого кристалла в слабом вращающемся магнитном поле

С. Д. Мандрыкин, А. Н. Захлевных, Д. В. Макаров

Пермский государственный национальный исследовательский университет  
614990, Пермь, ул. Букирева, 15  
email: sergey.mandrykin@gmail.com

В рамках континуальной теории Эриксона-Лесли изучено поведение ориентационной структуры холестерического жидкого кристалла в слабом вращающемся магнитном поле. Получено аналитическое решение уравнения движения директора для установившегося режима вращения. Вычислен шаг спиральной структуры холестерического жидкого кристалла при малых напряженностях магнитного поля.

**Ключевые слова:** холестерический жидкий кристалл; вращающееся магнитное поле

## Orientational structure of a cholesteric liquid crystal in a weak rotating magnetic field

S. D. Mandrykin, A. N. Zakhlevnykh, D. V. Makarov

Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm  
email: sergey.mandrykin@gmail.com

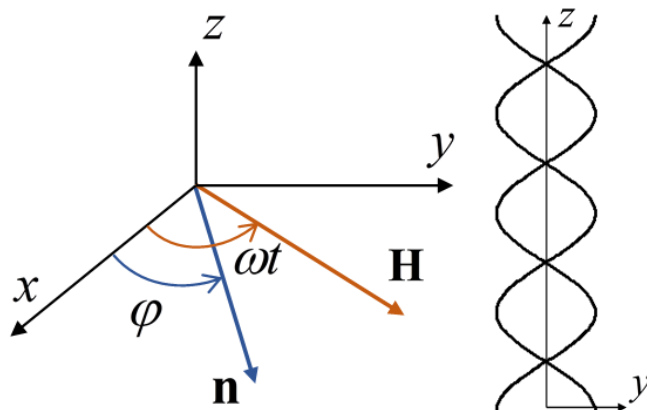
Within the framework of the Ericksen-Leslie continuum theory, the behavior of the orientational structure of a cholesteric liquid crystal in a weak rotating magnetic field is studied. We have obtained the analytical solution of the equation of the director motion for the steady-state regime of rotation. The pitch of the helical structure of the cholesteric liquid crystal for weak magnetic field strengths is calculated.

**Keywords:** cholesteric liquid crystal; rotating magnetic field

Отличительной особенностью холестерических жидких кристаллов (ХЖК), или холестериков, является надмолекулярная спиральная структура, которая очень чувствительна к различным внешним воздействиям. Как известно [1], однородное магнитное поле, приложенное ортогонально оси спирали ХЖК, способствует ее деформации. Рост напряженности поля увеличивает шаг спирали, индуцируя пороговым образом фазовый переход холестерик - нематик. Вращение магнитного поля приводит к увлечению вещества вслед за полем и повороту жидкокристаллической структуры. В данной работе теоретически изучается поведение ориентационной структуры ХЖК в слабом вращающемся магнитном поле.

Рассмотрим неограниченный образец холестерического жидкого кристалла (см. рисунок), ортогонально оси спирали которого приложено вращающееся с постоянной угловой скоростью  $\omega$  магнитное поле  $\mathbf{H} = H(\cos \omega t, \sin \omega t, 0)$ . Динамику ори-

ентационной структуры ХЖК будем описывать в рамках континуальной теории, предложенной Эриксоном и Лесли [1].



**Рисунок.** Ориентация спиральной структуры холестерического жидкого кристалла во вращающемся магнитном поле

В этой теории направление преимущественной ориентации молекул ХЖК характеризуется с помощью единичного вектора  $\mathbf{n}$ , называемого директором. Будем считать, что со временем меняется только ориентационная структура холестерика, при этом сам безграничный образец остается неподвижным. В этом случае динамика холестерика описывается уравнением движения директора

$$\mathbf{h} = \gamma_1 \mathbf{N} + \gamma_2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{A}. \quad (1)$$

где  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  – коэффициенты вращательной вязкости ХЖК,  $\mathbf{N} = d\mathbf{n}/dt - \overline{\overline{\boldsymbol{\Omega}}} \cdot \mathbf{n}$  – скорость изменения директора относительно среды,  $\overline{\overline{\mathbf{A}}}$  и  $\overline{\overline{\boldsymbol{\Omega}}}$  – симметричная и антисимметричная части тензора градиентов скоростей, а вектор молекулярного поля  $\mathbf{h}$ , действующий на директор  $\mathbf{n}$ , определяется следующим образом:  $h_i = -\partial F_V / \partial n_i + \nabla_k \partial F_V / \partial (\nabla_k n_i)$ . Здесь объемная плотность свободной энергии ХЖК  $F_V$  включает в себя объемную плотность энергии ориентационно-упругих деформаций поля директора (потенциал Озеена-Франка)

$$F_d = \frac{1}{2} [K_{11} (\text{div } \mathbf{n})^2 + K_{22} (\mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{n} + q_0)^2 + K_{33} (\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{n})^2]. \quad (2)$$

и объемную плотность энергии взаимодействия магнитного поля с ХЖК-матрицей

$$F_{dia} = -\frac{1}{2} \chi_a (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H})^2. \quad (3)$$

где  $K_{ii}$  – модули ориентационной упругости (константы Франка),  $q_0$  – волновое число невозмущенной спиральной структуры ХЖК,  $\chi_a > 0$  – анизотропия диамагнитной восприимчивости ХЖК.

Для рассматриваемой геометрии (см. рис.) поле директора можно искать в следующем виде:

$$\mathbf{n} = [\cos \varphi(z, t), \sin \varphi(z, t), 0]. \quad (4)$$

В этом случае уравнение движения директора (1) с учетом (2) – (4) примет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} - \frac{h^2}{2} \sin 2(\varphi - \tau) = \frac{\Omega}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}. \quad (5)$$

Здесь  $\tau = \omega t$  – безразмерное время,  $h = H/H_0$  и  $\Omega = \omega/\omega_c$  – безразмерные напряженность и угловая скорость вращения магнитного поля, где в качестве единиц измерения выбраны величины  $H_0 = q_0 \sqrt{K_{22}/\chi_a}$  и  $\omega_c = K_{22} q_0^2 / 2\gamma_1$ . Волновое число  $q_0$  для определенности будем считать положительным, поэтому в невозмущенном состоянии холестерик будет иметь правовинтовую спираль.

В случае слабого магнитного поля ( $h \ll 1$ ) угол ориентации директора можно представить в виде ряда по четным степеням напряженности  $h$ :

$$\varphi(\zeta, \tau) = \varphi_0(\zeta) + h^2 f(\zeta, \tau) + \dots \quad (6)$$

где  $\varphi_0(\zeta) = \zeta$  – пространственная зависимость угла поворота директора в невозмущенном холестерике при  $h = 0$ . Подставляя выбранный вид решения (6) в уравнение движения директора (5), для установившегося режима вращения ориентационной структуры холестерика получаем

$$\varphi(\zeta, \tau) = \zeta - \frac{2h^2}{16 + \Omega^2} \left[ \sin 2(\zeta - \tau) + \frac{\Omega}{4} \cos 2(\zeta - \tau) \right]. \quad (7)$$

Вычислим шаг спирали холестерика  $p$  в слабых магнитных полях. Интегрируя по периоду структуры, имеем

$$p = 2 \int_0^{p/2} d\zeta = 2 \int_0^\pi \frac{d\zeta}{d\varphi} d\varphi \approx 2 \int_0^\pi \frac{d\zeta}{d\varphi} d\zeta,$$

учитывая выражение (7), получаем

$$\frac{p}{p_0} \approx 1 + \frac{h^4}{32 + 2\Omega^2}. \quad (8)$$

Здесь  $p_0 = 2\pi$  – шаг невозмущенной спирали ХЖК. В отсутствие вращения ( $\Omega = 0$ ) соотношение (8) совпадает с классическим результатом, полученным де Женом, для шага спирали холестерика в статическом магнитном поле [2]. Из формулы (8) видно, что в слабых магнитных полях с ростом угловой скорости вращения поля  $\Omega$  шаг спирали холестерика уменьшается.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 16-42-590539).

### Список литературы

1. Блинов Л. М. Жидкие кристаллы: Структура и свойства. М.: URSS, 2015. 484 с.
2. De Gennes P. G. Calcul de la distorsion d'une structure cholesterique par un champ magnetique // Solid State Communications. 1968. Vol. 6. P. 163–165.

## Устойчивость однородного вертикального просачивания смеси через горизонтальный слой пористой среды

Б. С. Марышев<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup> Пермский государственный национальный исследовательский университет  
614990, Пермь, ул. Букирева, 15  
email: bmaryshev@mail.ru

<sup>b</sup> Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1

Исследована линейная задача устойчивости однородного вертикального просачивания жидкости, содержащей тяжелую примесь, через горизонтальный слой пористой среды. Задача решалась с учетом иммобилизации примеси в пористой среде, описываемой в рамках МИМ подхода моделью кинетики второго порядка. Рассмотрена устойчивость режима однородного вертикального просачивания относительно двумерных возмущений, на верхней и нижней границах которой заданы постоянные различные концентрации примеси. Ранее было выяснено, что при учете иммобилизации примеси в спектре возмущений режима однородного вертикального просачивания появляются колебательные возмущения, которые отсутствуют для случая без учета иммобилизации диффузии. Численно получены нейтральные кривые в пространстве параметров, а также зависимости частоты нейтральных возмущений от волнового числа. Показано, что волновое число наиболее опасных возмущений растет с ростом числа Пекле (характеризующего интенсивность прокачки). Выяснено, что учет иммобилизации приводит к понижению устойчивости по сравнению с классической моделью диффузии. Обнаружено, что колебательный режим конвекции существует лишь в некоторой области параметров, характеризующих интенсивность сорбции.

**Ключевые слова:** конвекция в пористой среде; иммобилизация; колебательная мода

## Stability of homogeneous vertical seepage of mixture through horizontal porous layer

B. S. Maryshev<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup> Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm  
email: bmaryshev@psu.ru

<sup>b</sup> Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Ak. Koroleva str. 1, 617013, Perm

The linear stability problem of homogeneous vertical seepage of the liquid mixture through a horizontal porous layer is investigated. The problem is solved taking into account immobilization of the solute by the porous medium, which is described within the MIM approach based on the second-order kinetics model. The stability of the homogeneous vertical seepage mode to two-dimensional perturbations has been considered. It is assumed that the lower and upper boundaries are maintained



at fixed different concentrations of solute. It has been found in previous work that due to consideration for the solute immobilization the perturbation spectrum of the homogeneous vertical seepage mode exhibits oscillatory perturbations which are absent in the case without immobilization. Neutral curves for the space of the respective parameters and plots of neutral perturbation frequency as the function wave number have been obtained numerically. It has been shown critical value of wave number decreases with increasing of Peclet number (dimensionless intensity of seepage). The numerical investigation has shown that the oscillatory mode of convection exists only in a certain range of parameters characterizing the intensity of sorption.

**Keywords:** convection in porous media; immobilization; oscillations

## 1. Введение

Пористая среда имеет достаточно сложную пространственную структуру. Дрейф частиц в такой среде не всегда подчиняется нормальному распределению, поскольку частицы примеси могут прилипнуть к твердому скелету (иммобилизоваться), что приводит к замедлению переноса примеси в пористой среде.

Прилипание жидкости к скелету пористой среды происходит непрерывно по всему объему. Эффект не слишком существенен для мелких частиц, вроде молекул воды или двух- трехатомной примеси. Однако, достаточно крупные частицы могут иммобилизоваться активно, что приводит к существенному замедлению диффузии [1,2]. В настоящей работе иммобилизация описывается в рамках МИМ (mobile-immobile medium) модели с нелинейной кинетикой сорбции учитывающей насыщение твердой матрицы пористой среды примесью [3].

В работе исследуется устойчивость вертикального просачивания жидкой смеси через слой пористой среды. Между верхней и нижней границами слоя задается перепад концентрации, что вызывает конвективное движение в поле тяжести. Устойчивость механического равновесия в описанной системе без учета иммобилизации была исследована в работах [4,5]. Исследование устойчивости вертикального просачивания в слое и замкнутой области пористой среды было проведено в работах [6,7], где было показано, что колебательная мода в спектре возмущений отсутствует. В работе [8] учтено влияние иммобилизации на устойчивость просачивания в замкнутой области пористой среды и установлены условия возникновения колебательной моды.

Настоящая работа посвящена исследованию влияния иммобилизации примеси на устойчивость однородного вертикального просачивания примеси через слой пористой среды. Основной интерес представляет форма наиболее опасных возмущений, для которой нет ограничений в случае слоя пористой среды.

## 2. Основные уравнения

Состояние однородного вертикального просачивания смеси через слой пористой среды может быть описано следующими зависимостями скорости и концентрации от координат:

$$V = (0, Pe), \quad c_s = \frac{e^{Pe y} - e^{Pe}}{1 - e^{Pe}}, \quad q_s = \frac{aq_0 c_s}{(ac_s + b)}, \quad (2.1)$$

где  $V$  – вектор скорости фильтрации,  $Pe$  – безразмерная скорость вертикального просачивания смеси,  $c_s$  – концентрация примеси в мобильной фазе (дрейфующей с пото-

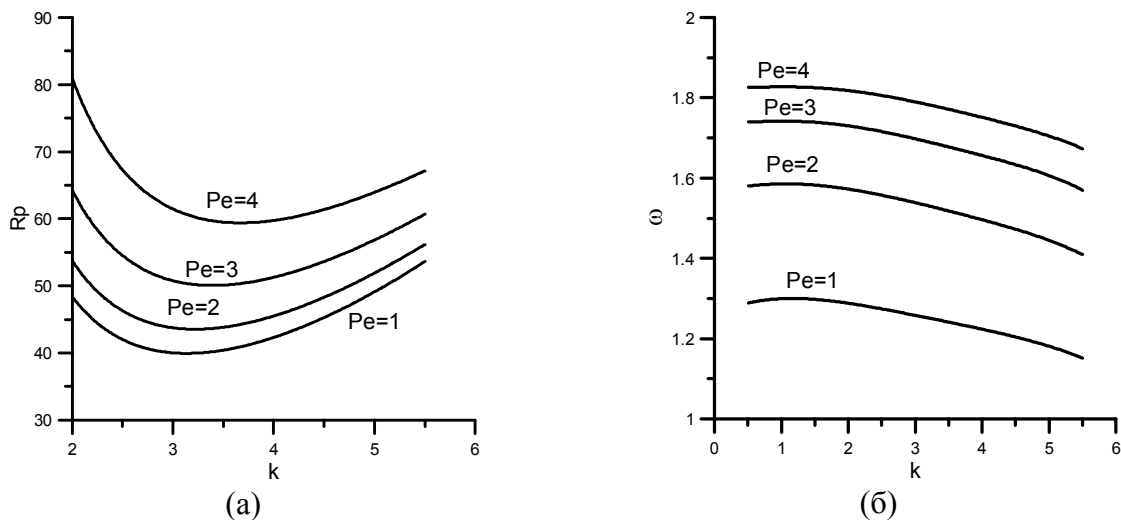
ком),  $q_s$  – концентрация примеси в немобильной фазе (осевшей на стенки пор),  $a, b$  – безразмерные коэффициенты адсорбции и десорбции,  $q_0$  – предельная концентрация насыщения немобильной фазы. Уравнения для малых возмущений основного состояния (2.1) могут быть записаны в терминах возмущений концентрации и функции тока следующим образом:

$$\begin{aligned}
 ikRpC &= k^2\psi - \partial_y^2\psi, \\
 i\omega(C + Q) &= \partial_y^2C - k^2C - ik\psi\partial_y c_s - Pe\partial_y C \\
 (i\omega + b + ac_s)Q &= (aq_0 - aq_s)C, \\
 C, Q, \psi|_{y=0,1} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

где  $C, Q$  – возмущения концентрации примеси в мобильной и немобильной фазах,  $k, \omega$  – длина волны (в горизонтальном направлении) и частота нейтральных возмущений. Безразмерный параметр  $Rp$  – число Релея-Дарси, описывающее влияние плавучести символом  $\partial_y$  обозначено дифференцирование по вертикальной координате.

### 3. Результаты

Параграф посвящен обсуждению результатов решения задачи (2.2), она представляет собой задачу на собственные значения и решалась методом дифференциальной прогонки. В результате были получены зависимости числа Релея-Дарси и частоты нейтральных возмущений от длины волны для различных значений остальных параметров задачи. Результаты решения задачи (2.2) для различных значений числа Пекле представлены на (рис. 1).



**Рис. 1.** Зависимости числа Релея-Дарси (рис 1. а) и частоты нейтральных возмущений (рис 1. б) от длины волны для различных значений числа Пекле, значения числа Пекле для различных кривых указаны на рисунке

Из (рис. 1) видно, что значение волнового числа соответствующего минимуму нейтральной кривой  $Rp(k)$  (описывающее наиболее опасные возмущения) растет с

увеличением числа Пекле, то есть имеется возможность управления пространственной структурой течения с помощью интенсивности внешнего потока.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 14-21-00090).

### Список литературы

1. *Bromly M., Hinz C.* Non-Fickian transport in homogeneous unsaturated repacked sand // *Water Resour. Res.* 2004. Vol. 40, N W07402. P. 1-13. DOI: 10.1029/2003WR002579.
2. *Gouze P., Le Borgne T., Leprovost R., Lods G., Poidras T., Pezard P.* Non-Fickian dispersion in porous media: 1. Multiscale measurements using single-well injection withdrawal tracer tests // *Water Resour. Res.* 2008. Vol.44, N. W06426. P. 1-15. DOI: 10.1029/2007WR006278.
3. *Selim, H. M., and Amacher M. C.* Reactivity and Transport of Heavy Metals in Soils. CRC/Lewis, Boca Raton, FL. 1997. 240 P.
4. *Horton C.W., Rogers F.T.:* Convection currents in a porous medium // *J. Appl. Phys* 1945. Vol. 16. N. 6. DOI : <http://dx.doi.org/10.1063/1.1707601>.
5. *Lapwood E.R.:* Convection of a fluid in a porous medium // *Proc. Camb. Philos. Soc.* 1948. Vol. 44, P. 508-521. DOI: <https://doi.org/10.1017/S030500410002452X>.
6. *Nield D.A., Bejan A.* Convection in Porous Media, New York: Springer. 2006. 640 P.
7. *Lyubimov D. V., Bratsun D. A., Lyubimova T. P., Roux B* Influence of gravitational precipitation of solid particles on thermal buoyancy convection // *Advances in Space Research.* 1998 Vol.22. N.8. P. 1267-1270. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0273-1177\(98\)00163-X](https://doi.org/10.1016/S0273-1177(98)00163-X).
8. *Maryshev B. S., Lyubimova T. P., Lyubimov D. V.* Stability of homogeneous seepage of a liquid mixture through a closed region of the saturated porous medium in the presence of the solute immobilization // *International Journal of Heat and Mass Transfer.* 2016. Vol. 102. N. 11. P. 113-121. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.06.016>.

## О молекулярно-диффузионном транспорте растворенных газов в ненасыщенной пористой среде

Б. С. Марышев<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup> Пермский государственный национальный исследовательский университет  
614990, Пермь, ул. Букирева, 15  
email: bmaryshev@mail.ru

<sup>b</sup> Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1

Исследуется формирование пузырьковой фазы газов в пласте ненасыщенной пористой среды. При формировании почв, происходит медленное осаждение минеральных веществ и перегноя с выделением газов. По мере осаждения почва насыщается грунтовыми водами и газы растворяются в воде. Транспорт газов растворенных в жидкостях обладает некоторыми особенностями: во-первых концентрация раствора всюду равна растворимости газа, во-вторых растворимость газа зависит только от давления (для изотермических систем). Упомянутые эффекты приводят к формированию пузырьковой фазы в присутствии неоднородности давления, порождающей неоднородность растворимости. Неполное насыщение среды означает наличие воздуха, поскольку растворимость газов зачастую мала они аккумулируются в воздушной фазе, но насыщенность пористой среды с глубиной увеличивается, пока не достигает значения пористости. В этом случае воздушной фазы не остается, происходит полное растворение газа в жидкости, что приводит интенсификация переноса. Таким образом, в верхней части пласта возникает запирающая зона, внутри которой перенос газов практически отсутствует. Работа посвящена изучению эффекта аккумуляции газов.

**Ключевые слова:** транспорт в пористой среде; пузырьковая среда; диффузия

## On the molecular-diffusion transport of dissolved gases in an unsaturated porous medium

B. S. Maryshev<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup> Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm  
email: bmaryshev@psu.ru

<sup>b</sup> Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Ak. Koroleva str. 1, 617013, Perm

The natural porous media (e.g. soil, sand, peat etc.) usually are partially saturated by groundwater. The saturation of soil depends on hydrostatic pressure which is linearly increased with depth. Often some gases (e.g. nitrogen, oxygen, carbon dioxide, methane etc.) are dissolved into the groundwater. The solubility of gases is very small because of that two assumptions is applied: I. The concentration of gas is equal to solubility, II. Solubility depends only on pressure (for isothermal sys-

tems). In this way some part of dissolved gas transfers from the solution to the bubble phase. The gas bubbles are immovably trapped in a porous matrix by surface-tension forces and the dominant mechanism of transport of gas mass becomes the diffusion of gas molecules through the liquid. If the value of water content is small then the transport of gas becomes slow and gas accumulates into bubble phase. The presence of bubble phase additionally decreases the water content and slows down the transport. As result the significant mass of gas should be accumulated into the massif of porous media. We derive the transport equations and find the solution which is demonstrated the accumulation of gases. The influence of saturation, porosity and filtration velocity to accumulation process is investigated and discussed.

**Keywords:** transport in porous media; bubbly media; diffusion

## 1. Введение

Работа посвящена исследованию формирования пузырьковой фазы газов в пласте ненасыщенной пористой среды. При формировании почв, происходит медленное осаждение минеральных веществ и перегноя с выделением газов. По мере осаждения почва насыщается грунтовыми водами и газы растворяются в воде. Транспорт газов растворенных в жидкостях обладает некоторыми особенностями: во-первых концентрация раствора всюду равна растворимости газа, во-вторых растворимость газа зависит только от давления [1] (для изотермических систем). Упомянутые эффекты приводят к формированию пузырьковой фазы в присутствии неоднородности давления, порождающей неоднородность растворимости [1]. Неполное насыщение среды означает наличие воздуха, поскольку растворимость газов зачастую мала они аккумулируются в воздушной фазе, но согласно результатам работ [2,3], насыщенность пористой среды с глубиной увеличивается, пока не достигает значения пористости. В этом случае воздушной фазы не остается, происходит полное растворение газа в жидкости, что приводит интенсификация переноса. Таким образом, в верхней части пласта возникает запирающая зона, внутри которой перенос газов практически отсутствует.

## 2. Основные уравнения

Эволюция концентрации газа в пузырьковой фазе может быть описана с помощью следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left( \theta X_b X + (\phi - \theta)^2 X_b \right) = \\ & -(\phi - \theta) \frac{\partial}{\partial z} \left( -\theta \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{X_b}{(\phi - \theta)} X \right) + Pe \theta \frac{X_b X}{(\phi - \theta)} + \frac{(\phi - \theta)}{X_0} Pe X_b \right); \quad X = \frac{P}{K}; \\ & \theta = \theta_r - X_b, \quad P < P_w \\ & \theta = \theta_r + (\phi - \theta_r) \left[ 1 - \left( 1 + \alpha P^n \right)^{\frac{1-n}{n}} \right] - X_b, \quad P_w < P < P_e \\ & \theta = \phi - X_b, \quad P > P_e \end{aligned} \tag{2.1}$$

где  $\theta$  – насыщенность среды,  $X_b$  – концентрация метана в пузырьковой фазе,  $X$  – растворимость газа,  $\phi$  – пористость среды,  $D$  – коэффициент диффузии,  $U$  – скорость оседания отложений,  $K$  – константа Генри,  $\theta_r$  – остаточная насыщенность (в припо-

верхностной зоне пласта),  $P_w$  – давление протекания,  $P_e$  – давление насыщения,  $\alpha$  – весовой коэффициент,  $n$  – геометрический параметр (связанный со структурой среды). Первое и второе уравнение системы (2.1) получены способом аналогичным описанному в работах [1,2], с учетом неполной насыщенности среды. Уравнения зависимости насыщенности от давления получены в работах [3,4].

В качестве примера выберем параметры характеризующие транспорт метана в торфяных отложениях. Поскольку скорость осаждения  $U \sim 0.5 \div 5 \text{ см/год}$  очень мала, то зависимость давления от глубины  $z$  линейна  $P = \rho g z$ , где  $\rho$  – средняя плотность воды (растворимость газов мала, то есть плотность смеси слабо отличается от плотности воды),  $g$  – ускорение свободного падения. Тогда перепад насыщенности среды происходит на характерном пространственном масштабе  $L = z_e - z_w$ , этот масштаб для торфяных и черноземных почв может быть оценен как  $L \sim 10 \text{ м}$  [3]. Выберем  $L$  в качестве характерного пространственного масштаба, тогда  $[P] = \rho g L$  – характерный масштаб давления. Для растворимости справедлива зависимость  $X = X_0 z$ , где  $X_0 = \rho g L / K \sim 10^{-4}$ . Выбирая  $[t] = L^2 / D$  в качестве масштаба времени, получим безразмерную форму для уравнений (2.1)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left( \theta X_b z + (\varphi - \theta)^2 \frac{X_b}{X_0} \right) = \\ & - (\varphi - \theta) \frac{\partial}{\partial z} \left( -\theta \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{X_b z}{(\varphi - \theta)} \right) + Pe \theta \frac{X_b z}{(\varphi - \theta)} + \frac{(\varphi - \theta)}{X_0} Pe X_b \right); \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\theta = \theta_r, \quad z < h_w; \quad \theta = \phi, \quad z > h_w + 1;$$

$$\theta = \theta_r + (\phi - \theta_r) \left[ 1 - \left( 1 + Az^n \right)^{\frac{1-n}{n}} \right], \quad h_w < P < h_w + 1;$$

где  $h_w$  – безразмерная глубина ненасыщенной зоны пласта,  $A = \alpha \cdot (\rho g L)$  – безразмерный весовой коэффициент,  $Pe = UL / D$  – число Пекле. Основываясь на результатах обработки экспериментальных данных [4] можно оценить  $n \approx 6$ ,  $A \approx 10^4$ ,  $h_w \approx 1$ ,  $\theta_r \approx 0.05$  для рассматриваемых почв, такие почвы обладают достаточно большими значениями пористости  $\varphi \approx 0.9$ , коэффициент диффузии для метана в воде  $D \sim 10^{-9} \text{ м}^2 / \text{с}$ , т.е. для числа Пекле имеем  $Pe \approx 0.3 \div 3$ .

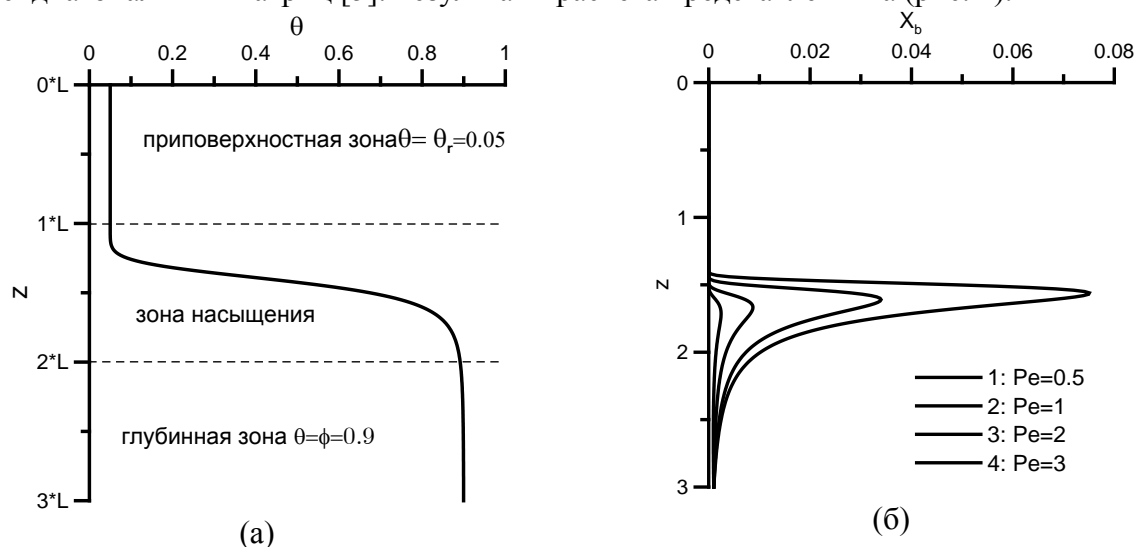
В расчетах глубина пласта была выбрана равной  $3L$  (см. Рис. 1а), то есть три характерных масштаба перепада насыщенности. В верхней зоне  $\theta = \theta_r = 0.05$ ,  $z = [0, 1]$ , в средней зоне насыщенность меняется согласно последнему уравнению в системе (2.2), в нижней зоне насыщенность равна пористости. Граничные условия были выбраны следующим образом: на верхней – отсутствие потока газа (весь газ в пузырьковой фазе), на нижней, очевидно, концентрация равна характерной растворимости; таким образом:

$$X_b = 0 \Big|_{z=0}, \quad X_b = X_0 \Big|_{z=3}. \quad (2.3)$$

### 3. Результаты

Задача, (2.2), (2.3) представляет собой классическое уравнение в частных производных параболического типа со смешанными граничными условиями. Она решается

численно, использован метод конечных разностей второго порядка точности по пространству. По времени реализована неявная схема первого порядка точности, для решения возникающей системы линейных уравнений использован метод прогонки для трехдиагональных матриц [5]. Результаты расчета представлены на (рис. 1).



**Рис. 1.** Зависимость насыщенности от глубины пласта (рис 1. а) и распределение концентрации с глубиной (рис 1. б) для различных значений числа Пекле.

Из (рис. 1) видно, что происходит аккумуляция газа в пузырьковой фазе, внутри зоны насыщения пласта. Видно, что величина эффекта уменьшается с увеличением скорости осаднения, этот эффект связан с подавлением диффузии при быстром осаднении почвы. Так же удалось оценить глубину запирающего слоя, она порядка глубины ненасыщенной приповерхностной зоны, при этом большая часть газа аккумулирована в слое глубиной, около половины зоны насыщения.

Работа выполнена при финансовой поддержке совета по грантам Президента Российской Федерации (код проекта МК-1447.2017.5).

### Список литературы

1. Goldobin D. S., Brilliantov N. V., Levesley J., Lovell M. A., Rochelle C. A., Jackson P. D., Haywood A. M., Hunter S. J., Rees J. G. Non-Fickian diffusion and the accumulation of methane bubbles in deep-water sediments // *Eur. Phys. J. E.* 2014. Vol. 37, N 45. DOI: 10.1140/epje/i2014-14045-x.
2. Davie M. K., Buffett B. A. A numerical model for the formation of gas hydrate below the seafloor // *J. Geophys. Res.* 2001. Vol. 106, N 1B. P. 497-514. DOI: 10.1029/2000JB900363.
3. van Genuchten M.Th. A Closed-form Equation for Predicting the Hydraulic Conductivity of Unsaturated Soils // *Soil Sci. Soc. Am. J.* 1980. Vol. 44, N 5. P. 892-898 DOI: 10.2136/sssaj1980.03615995004400050002x.
4. Марышев Б. С., Latrille C., Nèel M. Ch. Особенности насыщения пористой среды // XIX Зимняя Школа по Механике Сплошных Сред. Сборник Статей. 2015. С. 147-152.
5. Калиткин Н. Н. Численные методы // М: Наука.1978. 512с.

## **О причинах возникновения вихревого течения на межфазной границе, содержащей адсорбированный слой поверхностно-активного вещества**

**А. И. Мизёв, А. В. Шмыров, А. И. Шмырова**

<sup>a</sup> Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013, Пермь, ул. Ак. Королева, 1  
email: alex\_mizev@icmm.ru, smyrrov@icmm.ru; lutsik@icmm.ru,

Экспериментально исследованы структура и устойчивость поверхностного течения жидкости от сосредоточенного источника в гидродинамической системе, содержащей адсорбированный слой поверхностно-активного вещества (ПАВ). Предложен физический механизм формирования вихревого течения в области, занятой молекулами ПАВ. Показана необходимость постановки различных граничных условий для потенциальной и вихревой составляющей скорости конвективного течения в данной области межфазной границы.

**Ключевые слова:** поверхностно-активные вещества; гидродинамическая неустойчивость, вихревое течение

## **On the causes of the vortex flow appearance at the interphase with an adsorbed layer of surfactants**

**A. I. Mizev, A. V. Shmyrov, A. I. Shmyrova**

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, st. A. Koroleva 1, Perm, 614013  
email: alex\_mizev@icmm.ru, smyrrov@icmm.ru; lutsik@icmm.ru,

The structure and stability of the surface flow of a liquid from a located source in a hydrodynamic system containing an adsorbed surfactant layer were investigated experimentally. A physical mechanism is proposed for the formation of a vortex flow in the region occupied by surfactants. The necessity of setting different boundary conditions for the potential and vortex component of convective flow velocity in a given region of the interface is shown.

**Key words:** surfactants; hydrodynamic instability, vortex flow

### **1. Введение**

На сегодняшний день до сих пор открыт вопрос о природе возникновения вихревого движения в системах жидких и газообразных сред с поверхностями раздела. Интерес к данной проблеме продиктован существованием широкого класса как фундаментальных, так и прикладных задач. Проведенные исследования позволяют внести ясность в природу явлений, протекающих на границе раздела двух фаз и вблизи нее, предложить физический механизм, ответственный за формирование двух типов течения: радиального и многовихревого, а также дать рекомендации по постановке неклассических граничных условий при решении гидродинамических задач близкой постановки.

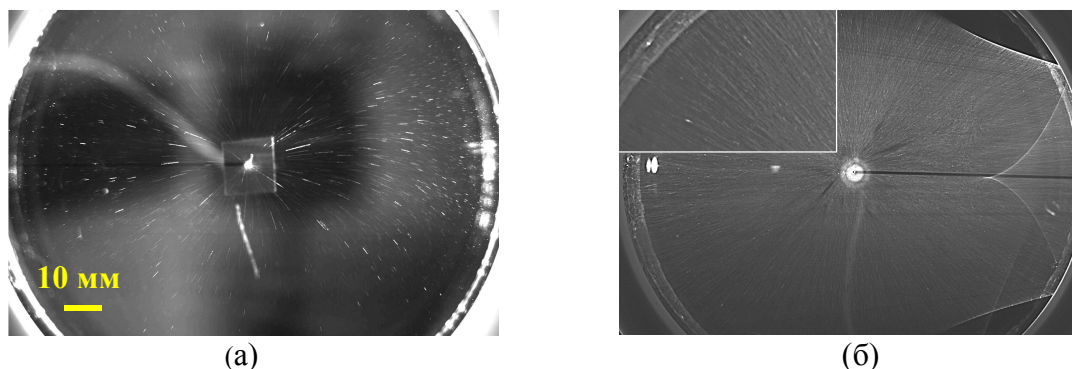


## 2. Методика эксперимента

Экспериментальные исследования проводились в цилиндрической стеклянной кювете диаметром 172 мм и высотой 55 мм. После многоступенчатой процедуры очистки полость заполнялась водой, прошедшей последовательно процедуры бидистилляции и деионизации. Структура поверхностного течения визуализировалась с помощью светорассеивающих частиц, подсвеченных лазерным ножом. Для удаления остаточных примесей, адсорбирующихся из объема на границе раздела, применялся метод барьерной очистки с использованием аспиратора. После подготовки поверхности на ней формировался слой молекул нерастворимого ПАВ (олеиновой кислоты). Значение поверхностного давления  $\pi = \sigma - \sigma_0$ , создаваемого монослоем ПАВ, определялось с помощью погруженной в воду пластинки Вильгельми, подвешенной к высокоточным весам. Течение на межфазной поверхности генерировалось путем подачи либо чистой воды, либо слабоконцентрированного (до 10% массовой концентрации  $C$ ) водного раствора этилового спирта через подведенный из объемной фазы сосредоточенный источник. В работе были проведены эксперименты с источниками трёх типов: сосредоточенным со свободной верхней границей, щелевым и капиллярным. Отличие в конструкции источников и использование различных жидкостей при генерации поверхностного течения позволяло варьировать его интенсивность в широких пределах. Сила воздействия со стороны источника на поверхностный монослой в такой задаче определялась значениями вязкого ( $\tau$ ), и концентрационно-капиллярного ( $\Delta\sigma_c$ ), слагаемого касательного напряжения. Эксперименты проводились при температуре  $(25.0 \pm 0.5)^\circ\text{C}$ .

## 3. Результаты

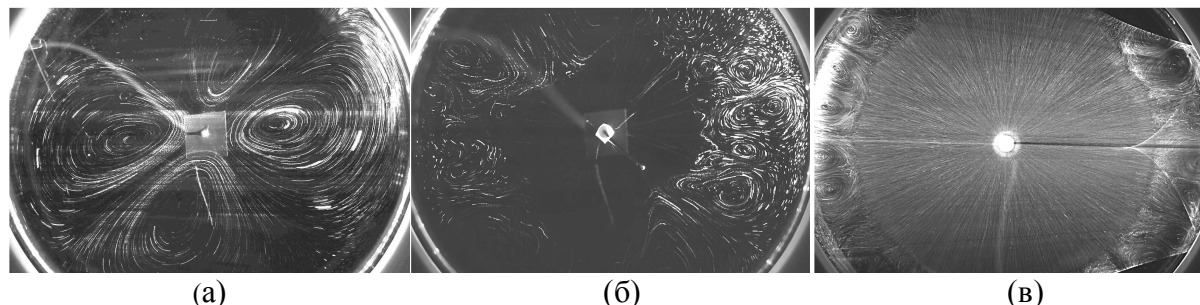
Эксперименты показали, что в отсутствии молекул ПАВ на поверхности воды формировалось теоретически предсказанное ранее [1] осесимметричное радиальное течение, как в случае вязкого растекания жидкости (рис. 1 а), так и в случае совместного действия вязких и концентрационно-капиллярных сил (рис. 1 б).



**Рис.1.** Структуры поверхностного течения в отсутствии адсорбированного слоя при (а)  $\tau = 14.0$  дин/см,  $\Delta\sigma_c = 0$  и (б)  $\tau = 0.78$  дин/см,  $\Delta\sigma_c = 23.5$  дин/см

Внесение в систему молекул ПАВ любой поверхностной плотности приводило к потере устойчивости осесимметричного радиального течения и формированию вторичного течения с многовихревой структурой, периодичной в азимутальном направлении (рис. 2). Эксперименты показали, что природа гидродинамического течения не является определяющим фактором в данной задаче. Использование источников различного типа позволяет лишь варьировать размер зоны, занятой осесимметричным радиальным течением, но не предотвратить появления вихревого движения. Анализ полученных данных, теоретических [3] и экспериментальных работ [4] позволил сделать

вывод о том, что возникновение различных структур поверхностного течения есть результат конкуренции двух встречных поверхностных механизмов, возникающих при движении жидкости, которое в свою очередь приводит к неоднородному перераспределению молекул ПАВ на межфазной границе. Результат конкуренции двух встречных касательных напряжений и определяет положение границы между двумя зонами.



**Рис.2.** Структуры поверхностного течения, наблюдаемые при  $\pi=2.0\pm 0.2$  дин/см от (а) сосредоточенного источника со свободной верхней границей ( $\tau=14$  дин/см), (б) щелевого ( $\tau=9.4$  дин/см) и (в) капиллярного ( $\tau=5$  дин/см,  $\Delta\sigma_c=23.5$  дин/см)

Дополнительные эксперименты, выполненные при частичном отсечении объемной или поверхностной фазы, а так же эксперименты с твердой границей раздела, позволяют сделать вывод о том, что формирование многовихревого течения на поверхности, занятой ПАВ, связано с неустойчивостью радиального течения, распространяющегося в объеме. При этом подвижность межфазной границы также играет важную роль. Механизм формирования вихревого течения в области, занятой молекулами ПАВ, можно предложить следующий. Существование потенциального течения на поверхности или в приповерхностной области приводит к перераспределению молекул ПАВ и появлению встречного касательного напряжения концентрационно-капиллярной природы. После установления баланса касательных напряжений скорость на поверхности, занятой сурфактантом, становится равной нулю, что соответствует граничному условию прилипания. С другой стороны, чисто вихревое течение (с осью, перпендикулярной поверхности раздела) переносит молекулы сурфактанта, не приводя к сжатию слоя, в результате чего на границе раздела выполняется условие проскальзывания. Несимметрия граничных условий и приводит к постепенному затуханию потенциального течения и усилению вихревого. Таким образом, в таких задачах для адекватного описания течений вблизи поверхности, занятой сурфактантом, необходимо задание комбинированного граничного условия: для потенциальной составляющей скорости условие прилипания, а для вихревой составляющей условие проскальзывания.

#### 4. Благодарность

Работа выполнена в рамках проекта РФФИ № 16-01-00662.

#### Список литературы

1. Братухин Ю. К., Маурин Л. Н. Растворение нагретого тела, соприкасающегося со свободной поверхностью жидкости // Инж.-физ. журнал. 1968. Т.14. № 6. С. 1033-1037.
2. Carpenter B. and. Homsy. G. M The effect of surface contamination on thermocapillary flow in a two-dimensional slot. // J. Fluid Mech. 1986. Vol. 155. P. 429-439.
3. Мизёв А. И., Шмыров А. В. Взаимодействие термокапиллярного течения с поверхностной фазой в ячейке Хеле-Шоу // сборник научных трудов «Конвективные течения». 2015. №7. С. 37-60.

## Исследование микроструктуры наполнителя в резине методами наноиндентации

И. А. Морозов<sup>a,b</sup>, М. А. Фрейберг<sup>a,b,c</sup>

<sup>a</sup> Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013, Пермь, ул. ак. Королева, 1

<sup>b</sup> Пермский государственный национальный исследовательский университет  
614990, Пермь, ул. Букирева, 15

<sup>c</sup> email: marussiaperm@yandex.ru

В работе представлена разрабатываемая нами методика количественного анализа микроструктуры наполнителя в резине. В основе лежит исследование карт механических свойств, полученных наноиндентированием поверхности материала с помощью атомно-силового микроскопа. Показано, что по сравнению с изучением рельефа композита, данный подход позволяет однозначно идентифицировать фрагменты наполнителя в матрице полимера.

**Ключевые слова:** наполненная резина; атомно-силовая микроскопия; наноиндентация

## Research of filler microstructure in rubber by using nanoindentation methods

I. A. Morozov<sup>a,b</sup>, M. A. Freyberg<sup>a,b,c</sup>

<sup>a</sup> Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, ak. Koroleva St. 1, 614013, Perm

<sup>b</sup> Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm

<sup>c</sup> email: marussiaperm@yandex.ru

The paper presents a method of quantitative analysis of filler microstructure in rubber. The suggested approach is based on investigation of maps of mechanical properties obtained from nanoindentation of material surface by means of the atomic force microscope (AFM). It allows precisely identify the filler fragments in the polymer matrix as opposite to the method where the composite relief is studied.

**Keywords:** filled rubber; atomic force microscopy; nanoindentation

### 1. Введение

Добавление активных наполнителей, т.е. обладающих сильными взаимодействиями с эластомерной матрицей, в эластомерное связующее улучшает прочностные и механические свойства резинотехнических изделий. Эластичные свойства, присущие ненаполненным вулканизатам, при этом сохраняются. В настоящее время ведется активный поиск и (частичное) замещение классических наполнителей, в первую очередь сажи, новыми перспективными наполнителями, одним из которых является природный минерал – шунгит.

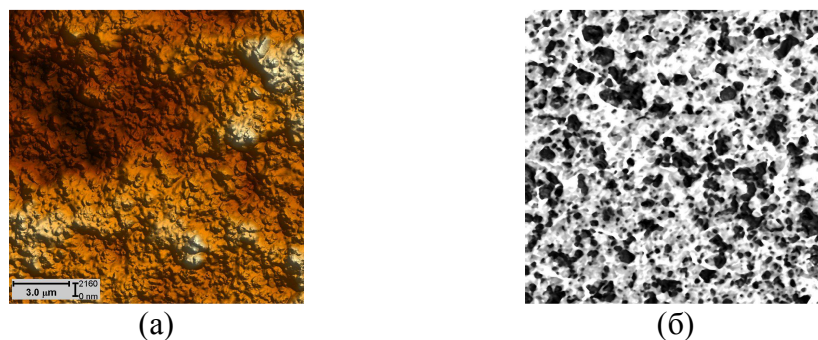
При разработке рецептуры важно знать информацию о структуре и взаиморасположении наполнителя в матрице. Обычно, для этих целей исследуют рельеф срезов материалов методами оптической, либо (реже) атомно-силовой микроскопии [1]. Как показала практика, однозначное определение фрагментов наполнителя в неровном релье-

ефе поверхности композита, как в случае с шунгитом, не всегда возможно. В данной работе мы предлагаем использовать для выделения наполнителя из рельефа карты механических свойств рельефа, в частности, адгезии между поверхностью композита и зондом микроскопа.

## 2. Результаты

В качестве материала для исследования использовали резины, наполненные нанощунгитом (объемная доля наполнителя 18%).

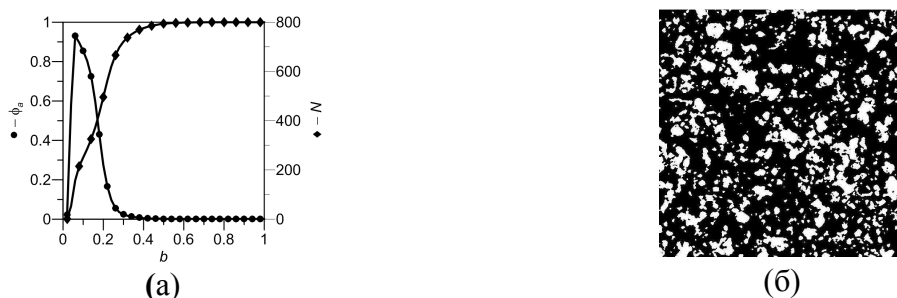
Исследование проводилось на атомно-силовом микроскопе *Dimension Icon* в режиме наномеханического картирования [2]. В данном режиме в каждой точке рельефа происходит вдавливание (наноиндентация) зонда в материал с частотой 2 кГц. Обработка силовых кривых взаимодействия позволяет получить карты следующих свойств поверхности: геометрию рельефа, силу адгезии между зондом и материалом, глубину индентации, модуль упругости (вычисленный на основе модели упругого контактного взаимодействия). С каждого материала было получено несколько изображений размером 15x15 мкм разрешением 1024x1024 точки в плоскости  $x-y$ . Примеры полученных изображений (карты рельефа и адгезии) показаны на (рис. 1).



**Рис. 1.** АСМ-изображения 15x15 мкм поверхности наполненной шунгитом резины: рельеф (а) и карта адгезии (б)

Рельеф поверхности наполненной шунгитом резины существенно неровный. Тем не менее, видимые на поверхности фрагменты наполнителя отчетливо различимы на карте адгезии как темные участки. Жесткие включения наполнителя обладают низкой адгезией, мягкий полимер – высокой.

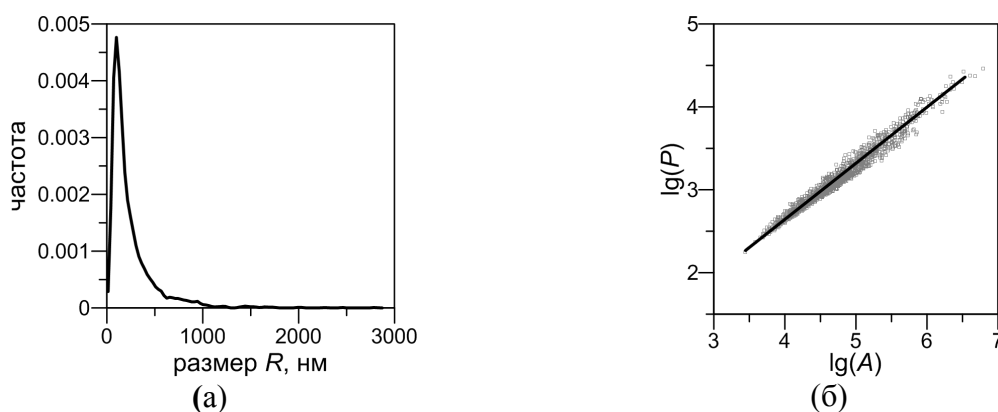
Для выделения фрагментов наполнителя проводили бинаризацию карты адгезии. В зависимости от порога  $b$  бинаризации изображение распадается на определенное число фрагментов. На (рис. 2. а) показаны характерные зависимости доли площади  $\phi_a$  наблюдаемых после бинаризации фрагментов и их количества  $N$  в зависимости от  $b$ .



**Рис. 2.** Доля площади фрагментов и их количества в зависимости от порога бинаризации (а) результат бинаризации карты адгезии (б)

Установлено, что максимум  $N(b)$  соответствует  $\phi_a \approx 0.18$ , что, в свою очередь, соответствует доле наполнителя в эластомере (18%). Используем найденный порог бинаризации для выделения контуров включений наполнителя (рис. 2 б). Таким образом, непрерывный рельеф распадается на фрагменты, отождествляемые со структурой наполнителя в резине. Выделенные фрагменты могут быть как отдельно стоящими включениями, так и агломератами – группой близко стоящих включений.

На (рис. 3. а) представлено распределение размеров фрагментов наполнителя. Под размером  $R$  понимаем удвоенное среднее расстояние от центра фрагмента до его границы. Видно, что большинство включений имеют размер  $< 500$  нм, хотя встречаются и крупные агломераты. На (рис. 3. б) показана зависимость между периметром и площадью фрагментов наполнителя:  $P \sim A^{D/2}$  в двойных логарифмических координатах.



**Рис. 3.** Размеры включений (а) и зависимость между площадью и периметром (б)

### 3. Заключение

В работе представлены основы нового разрабатываемого метода анализа микроструктуры наполнителя в наполненных резинах на основе количественного анализа карт наноиндентации поверхности. В качестве примера рассмотрена обработка поверхности резины, наполненной наношунгитом.

В дальнейшем методы будут дополнены анализом большего количества параметров микроструктуры как отдельных включений, так и их взаиморасположения.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 15-08-03881.

### Список литературы

1. Morozov I. A., Solodko V. N., Kurakin A. Yu. Quantitative study of filled rubber microstructure by optical and atomic force microscopy // Polymer testing. 2015. V. 44. P. 197–207.
2. Pittenger B., Erina N., Su C. Quantitative Mechanical Property Mapping at the Nanoscale with PeakForce QNM // Application Note 128. Bruker Corporation. 2012. P. 1-12.

## Направленное движение магнитных микро- и наночастиц во вращающемся магнитном поле

К. И. Морозов<sup>a</sup>, А. М. Лешанский<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup> Технион – Израильский Технологический Институт, 32000, Хайфа, Израиль  
email: mrk@technion.ac.il

<sup>b</sup> Институт нанотехнологий Рассела Берри  
email: lisha@technion.ac.il

Построена общая теория вращательного и поступательного движения магнитных микро- и наночастиц произвольной формы во вращающемся магнитном поле. Скорость направленного движения определяется матрицей хиральности, недиагональные компоненты которой не связаны с геометрической хиральностью тела. Теория предсказывает существование двух комплементарных решений, различающихся углом, образуемым магнитным моментом частицы с осью вращения поля. Замечательно, что две одинаковые частицы, находясь в этих состояниях, могут двигаться, вообще говоря, с разными скоростями и даже в разных направлениях. Показано, что для простого класса аркообразных ахиральных тел существует такая ориентация намагниченности, при которой оба решения совпадают. В этом случае тело движется подобно спиральному пропеллеру. Таким образом, геометрически ахиральный магнитный объект становится эффективно хиральным в результате его взаимодействия с внешним магнитным полем.

**Ключевые слова:** направленное движение; магнитные наночастицы; хиральность

## Propulsion of magnetic micro-/nanoparticles in rotating magnetic field

K. I. Morozov<sup>a</sup>, A. M. Leshansky<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup> Technion – Israel Institute of Technology, 32000, Haifa, Israel  
email: mrk@technion.ac.il

<sup>b</sup> Russel Berrie Nanotechnology Institute (RBNI)  
email: lisha@technion.ac.il

The general theory of rotation and propulsion of magnetized object of arbitrary shape driven by a rotating magnetic field is developed. Propulsion velocity is written in terms of geometry-dependent chirality matrix where both the diagonal elements (owing to body chirality) and off-diagonal entries contribute in a similar way. The theory leads to multiplicity of stable rotational states: there are two dual solutions corresponding to complementary angles the magnetization forms with the field rotation axis. As a result, two identical magnetic objects may propel with different speeds or even in opposite directions. For a class of simple achiral objects, there is a particular magnetization whereas the pair of symmetric rotational states give rise to a unique chiral-like propulsion gait, resembling that of an ideal

helical propeller. Geometrically achiral object can acquire apparent chirality due to its interaction with the external magnetic field.

**Keywords:** propulsion; magnetic nanoparticles; chirality

Доставка микро- и наночастиц в заданную точку жидкости является одной из актуальных прикладных задач. Сравнительно давно было осознано, что направленный транспорт возможен под действием внешних магнитных полей, если сами частицы являются магнитными. Так, хорошо известны сепарация и транспорт феррочастиц магнитных жидкостей под действием градиентного магнитного поля [1]. К сожалению, эффективность данного метода оказалась невелика, что затрудняет использование метода в приложениях. Настоящий прорыв в технологии транспорта магнитных частиц был сделан в 2009 году двумя экспериментальными группами – Фишера [2] и Нельсона [3]. Было предложено использовать хиральные (спиралеобразные) магнитные частицы. Во вращающемся магнитном поле такие пропеллеры ввинчиваются в среду подобно штопору.

Теория явления была построена в работах [4, 5] для случая намагниченных и суперпарамагнитных частиц. Основные механизмы могут быть поняты из следующей качественной картины. При низких частотах поля частица синхронно вращается в плоскости поля, а её центр инерции практически покоится. Начиная с некоторой критической частоты, частица стремится ориентироваться своей длинной осью вдоль оси вращения поля, понижая тем самым трение о жидкость и свою магнитную энергию. В этот момент она начинает двигаться трансляционно. С ростом частоты поля угол прецессии уменьшается, а скорость направленного движения растет. Если спираль намагничена перпендикулярно оси своего вращения, она движется с максимальной скоростью и нулевым углом прецессии.

Предсказания теории находятся в полном согласии с экспериментальными данными [4, 5]. Между тем в работе [6] было установлено, что ахиральные частицы – кластеры из трех шариков, не лежащих на одной прямой, – тоже направленно движутся во вращающемся магнитном поле! Для объяснения этого явления в настоящей работе рассматривается движение во вращающемся магнитном поле частицы произвольной формы и с произвольной ориентацией магнитного момента.

Направленное движение частицы в задаче обязано исключительно моменту внешних магнитных сил  $L_m$ . В приближении малых чисел Рейнольдса [7] поступательная  $U$  и вращательная  $\Omega$  скорость частицы связаны с  $L_m$ :  $U = \mathcal{G} \cdot L_m$ ,  $\Omega = \mathcal{F} \cdot L_m$ , где  $\mathcal{G}$  и  $\mathcal{F}$  - тензоры подвижности – сопряженный и вращательный, соответственно. Окончательно поступательная скорость частицы может быть выражена в терминах безразмерного тензора хиральности  $\mathbf{Ch} = l^1 \mathcal{G} \cdot \mathcal{F}^{-1}$  ( $l$  – характерный размер тела) и зависящих от частоты  $\omega$  поля эйлеровых углов  $\psi$  и  $\vartheta$  ориентации частицы. Вклады диагональных и недиагональных компонент хиральности равны:

$$U_1 / \omega l = Ch_{11} \sin^2 \psi \sin^2 \vartheta + Ch_{22} \cos^2 \psi \sin^2 \vartheta + Ch_{33} \cos^2 \vartheta. \quad (1)$$

$$U_2 / \omega l = Ch_{12} \sin 2\psi \sin^2 \vartheta + Ch_{13} \sin \psi \sin 2\vartheta + Ch_{23} \cos \psi \sin 2\vartheta. \quad (2)$$

Формулы (1) и (2) дают общее формальное решение задачи. Важно, что коэффициенты хиральности зависят лишь от геометрии тела. Если тело представляет собой вытянутую спираль, все недиагональные компоненты  $\mathbf{Ch}$  равны нулю. Тогда тело движется как в прежнем рассмотрении [4] и максимальная скорость достигается при нулевом уг-



ле прецессии  $\vartheta$ :  $U_1 = \text{Ch}_{33}\omega l$ . В случае ахирального кластера из трех шариков ситуация совершенно иная: все диагональные компоненты матрицы хиральности обращаются в нуль, а из недиагональных нетривиальное значение имеет лишь коэффициент  $\text{Ch}_{13}$  (ось  $u$  выбрана вдоль оси второго порядка). Как видно из формулы (2), в отличие от спирали, для движения ахирального кластера необходимы значительные углы прецессии  $\vartheta$ . В частности максимум скорости достигается при  $\vartheta = 45^\circ$ . Это также означает, что поперечно или продольно намагниченные кластеры двигаться во вращающемся поле не могут. Для такого движения необходимы обе компоненты намагниченности. Именно наличие обеих компонент намагниченности делает объект *эффективно хиральным* в результате его взаимодействия с внешним магнитным полем.

Для произвольного тела вклад в скорость дают все компоненты хиральности – диагональные (1) и недиагональные (2). Важно, что вклады слагаемых обеих групп сопоставимы по величине. В результате оказывается, что оптимальным пловцом является вовсе не спираль. Более того, в классе спиральных тел максимум скорости достигается не при поперечном, а при некотором наклонном намагничивании тела. Эти и ряд других вопросов рассматриваются детально в работе [8].

This work was supported in part by the German-Israeli Foundation (GIF) via the grant no. I-1255-303.10/2014, 'Dynamics of Artificial Magnetic Nanopropellers' (A.M.L. and K.I.M.) and the Israel Ministry for Immigrant Absorption (K.I.M.).

### Список литературы

1. *Rosensweig R. E.* Ferrohydrodynamics. Cambridge University Press, Cambridge, 1985. 344 p.
2. *Zhang L., Abbott J. J., Dong L., Kratochvil B. E., Bell D., Nelson B. J.* Artificial bacterial flagella: fabrication and magnetic control // *Applied Physics Letters*. 2009. Vol. 94. N 6. 064107 - 3 p. DOI: 10.1063/1.3079655.
3. *Ghosh A., Fischer P.* Controlled propulsion of artificial magnetic nanostructured propellers // *Nano Letters*. 2009. Vol. 9. N. 6. P. 2243–2245.
4. *Morozov K. I., Leshansky A. M.* The chiral magnetic nanomotors // *Nanoscale*. 2014. Vol. 6. N. 3. P. 1580–1588. DOI: 10.1039/C3NR04853E.
5. *Morozov K. I., Leshansky A. M.* Dynamics and polarization of superparamagnetic chiral nanomotors in a rotating magnetic field // *Nanoscale*. 2014. Vol. 6. N. 20. P. 12142–12150. DOI: 10.1039/C4NR02953D.
6. *Cheang U. K., Meshkati ., Kim D., Kim M. J., Fu H. C.* Minimal geometric requirements for micropropulsion via magnetic rotation // *Physical Review E: Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*. 2014. Vol. 90. N. 3. 033007 - 8 P. DOI: 10.1103/PhysRevE.90.033007.
7. *Happel J., Brenner H.* Low Reynolds number hydrodynamics. Kluwer. 1983. 553 p.
8. *Morozov K. I., Mirzae Y., Kenneth O., Leshansky A. M.* Dynamics of arbitrary shaped propellers driven by a rotating magnetic field // *Physical Review Fluids*. 2017. To be published.



## Конвективные процессы в двухслойных системах несмешивающихся жидкостей при фронтальной реакции нейтрализации

Е. А. Мошева<sup>а</sup>, М. О. Денисова<sup>а</sup>, А. И. Шмырова<sup>а</sup>, А. В. Шмыров<sup>а</sup>,  
С. Н. Лысенко<sup>б</sup>

<sup>а</sup> Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013, Пермь, ул. Ак. Королева, 1  
email: mosheva@icmm.ru, maria.denisova@icmm.ru; lutsik@icmm.ru, smyrov@icmm.ru

<sup>б</sup> Институт технической химии УрО РАН, 614013, Пермь, ул. Ак. Королева, 3

Экспериментально изучены конвективные процессы, сопровождающие фронтальную реакцию нейтрализации в системе несмешивающихся жидкостей, в двух различных ситуациях: (i) реагенты и продукт реакции не проявляют поверхностно-активных свойств по отношению к межфазной поверхности, разделяющей слои, и (ii) один из реагентов или продукт реакции поверхностно-активен к границе раздела двух фаз. Результаты исследований позволяют оценить вклад капиллярных и гравитационных сил в формирование конвективного движения. Первые определяются зависимостью поверхностного натяжения от концентрации веществ, участвующих в реакции нейтрализации. Вторые связаны с формированием локальных зон с неустойчивой стратификацией плотности, возникающих в процессе протекания реакции нейтрализации.

**Ключевые слова:** хемоконвекция; реакция нейтрализации; конвекция Марангони

## Convective processes arising in two-layer systems of immiscible liquids from a frontal neutralization reaction

Е. А. Mosheva<sup>а</sup>, М. О. Denisova<sup>а</sup>, А. И. Shmyrova<sup>а</sup>, А. В. Shmyrov<sup>а</sup>, С. Н. Lysenko<sup>б</sup>

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, st. A. Koroleva 1, Perm, 614013  
email: mosheva@icmm.ru, maria.denisova@icmm.ru; lutsik@icmm.ru, smyrov@icmm.ru

<sup>б</sup> Institute of Technical Chemistry of UB RAS, Ak. Koroleva St. 3, 614013, Perm

Convective processes accompanying the frontal neutralization reaction in the immiscible liquid system have been studied experimentally in two different situations: (i) the reagents and reaction product do not exhibit surface-active properties with respect to the interface separating layer, and (ii) one of the reagents or reaction product is surface-active to the interface. The results of the studies make it possible to estimate the contribution of capillary and gravitational forces to the formation of convective motion. The first is determined by the dependence of the surface tension on the reactants concentration participating in the neutralization reaction. The latter is associated with the formation of local zones with unstable density stratification driven by the neutralization reaction.

**Key words:** chemoconvection; Neutralization reaction; Marangoni convection

## 1. Введение

Процессы тепло и массопереноса в системах реагирующих жидкостей часто встречаются в прикладных задачах. К наиболее простым химическим реакциям можно отнести реакцию нейтрализации. Продуктами этой реакции являются вода и соль, которая обладает физико-химическими параметрами (плотность, вязкость, коэффициент диффузии и т.д.), отличными от параметров исходных реагентов. Последнее может приводить к формированию конвективных течений, которые значительно ускоряют процесс массопереноса в такой системе. На сегодняшний день, как теоретически [1,2], так и экспериментально [2,3] наиболее хорошо изучена задача реакции нейтрализации, протекающей в системе смешивающихся реагентов. При этом работ, посвященных исследованию аналогичной задачи в случае несмешивающихся жидкостей значительно меньше, т.к. в таких системах возможно появление капиллярных течений, обусловленных существованием межфазной границы и образованием в результате реакции поверхностно-активного продукта.

## 2. Методика эксперимента

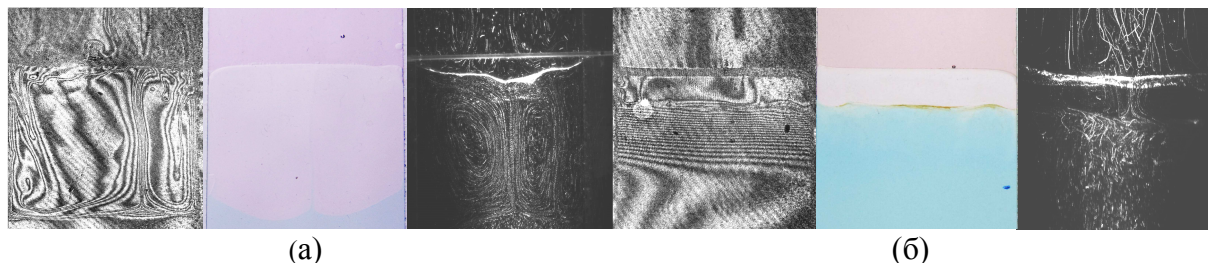
С целью изучения конвективных движений, формирующихся в ходе фронтальной реакции нейтрализации, в работе были проведены эксперименты в системах несмешивающихся жидкостей в двух различных ситуациях. В первом случае в качестве реагентов использовались растворы неорганической соляной кислоты (HCl) в пентаноле (C<sub>5</sub>H<sub>11</sub>OH) и водные растворы гидроксида натрия (NaOH). В такой системе продуктом реакции будет являться поверхностно-неактивный водный раствор хлорида натрия. Вторая серия экспериментов была проведена в двухслойной системе, состоящей из растворов уксусной кислоты (CH<sub>3</sub>COOH) в смеси хлорбензола (C<sub>6</sub>H<sub>5</sub>Cl) с бензолом (C<sub>6</sub>H<sub>6</sub>) – с одной стороны – и водного раствора гидроксида натрия – с другой. Данная конфигурация позволяет реализовать случай, в котором и реагент кислота, и продукт реакции ацетат натрия (CH<sub>3</sub>COONa), проявляют поверхностно-активные свойства по отношению к границе раздела двух фаз.

Эксперименты проводились в вертикальной ячейке Хеле-Шоу с размерами 9.0 см×2.4 см×0.12 см в первом случае и 6.0 см×4.0 см×0.12 см во втором. Для визуализации полей концентрации в работе использовался интерферометр Физо. Структура конвективного движения визуализировалась с помощью светорассеивающих частиц, подсвеченных лазерным ножом. Пространственное распределение реагентов контролировалось с помощью универсального индикатора pH уровня. Заполнение интерференционной ячейки осуществлялось послойно в порядке плотности исходных реагентов: щелочная среда внизу полости, кислотная вверху. Плотности и поверхностное натяжение растворов измерялись на тензиометре Sigma 701. Все эксперименты проводились при температуре (25.0±0.5)°C.

## 3. Результаты

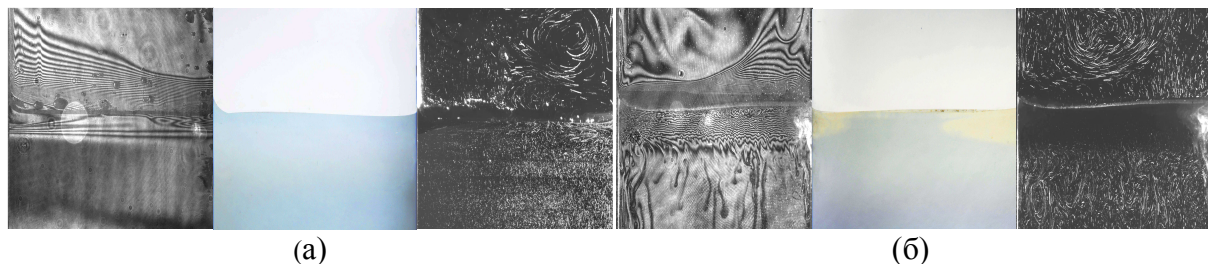
Эксперименты показали, что сценарий развития реакции существенно зависит от начальных концентраций реагентов. При работе с растворами соляной кислоты и раствором щелочи в концентрациях  $C_A=3.11$  моль/л и  $C_B=1.25$  моль/л соответственно, в системе реализовывался конвективный режим протекания реакции (рис. 1. а). Граница реакции быстро отделялась от межфазной границы и двигалась вниз, достигая дна кюветы за времена порядка 10 минут. Формирование конвективных потоков в данной ситуации идентично, описанному в работе [2] случаю смешивающихся реагентов. В системе растворов в концентрациях  $C_A=1.31$  моль/л и  $C_B=2.5$  моль/л в первые несколько минут положение фронта реакции совпадало с положением межфазной границы, ниже которой формировалась, расширяющаяся со временем, устойчивая диффузионная зона. С течением времени граница реакции отделялась от межфазной, а в образующейся между ними области визуа-

лизировалось слабое ячеистое движение (рис. 1. б). Через полтора часа проведения эксперимента движение фронта реакции останавливалось, а конвективные валы распадались. В случае, когда молярные концентрации растворов были близки ( $C_A=C_B=2.5$  моль/л), в системе наблюдался близкий к конвективному режим но с более медленным движением фронта реакции.



**Рис.1.** Интерферограммы, распределение pH и трековые снимки, наблюдаемые в двухслойной системе HCl/NaOH при концентрациях (а)  $C_A=3.11$  моль/л,  $C_B=1.25$  моль/л ( $t=545$  с от начала реакции) и (б)  $C_A=1.31$  моль/л,  $C_B=2.5$  моль/л ( $t=3720$  с от начала реакции)

В экспериментах, проведенных в двухслойной системе уксусная кислота гидроксид натрия при концентрациях ( $C_A=1.67$  моль/л и  $C_B=5$  моль/л) наблюдался диффузионный режим протекания реакции (рис. 2 а), осложненный слабым капиллярным течением Марангони вдоль межфазной границы. При концентрациях  $C_A=3.4$  моль/л и  $C_B=1.67$  моль/л в системе наблюдалась мелкомасштабная конвекция пальцеобразной структуры (*Double-diffusive convection*) совместно с интенсивным конвективным течением в области, занятой реагентом (рис. 2 б). Полученные результаты также хорошо согласуются с результатами работ других авторов [1,3].



**Рис.2.** Интерферограммы, распределение pH и трековые снимки, наблюдаемые в двухслойной системе CH<sub>3</sub>COOH/NaOH при концентрациях (а)  $C_A=1.67$  моль/л,  $C_B=5$  моль/л ( $t=480$  с от начала реакции) и (б)  $C_A=1.34$  моль/л,  $C_B=1.67$  моль/л ( $t=420$  с от начала реакции)

#### 4. Благодарность

Работа выполнена в рамках проектов РФФИ № 15-01-04842 и № 16-31-00251 мол\_а

#### Список литературы

1. Traveyan P. M. J., Almarcha C., De Wit A. Buoyancy-driven instabilities around miscible A+B→C reaction fronts: A general classification // Physical Review E. 2015. E 91,023001.
2. Bratsun D. A., Stepkina O. S., Kostarev K. G., Mizev A. I., Mosheva E. A. Development of Concentration-Dependent Diffusion Instability in Reactive Miscible Fluids Under Influence of Constant or Variable Inertia // Microgravity Science and Technology. 2016. Vol. 28. Is. 6. PP 575–585. DOI: 10.1007/s12217-016-9513-x.
3. Eckert K., Acker M., Shi Y. Chemical pattern formation driven by a neutralization reaction. I. Mechanism and basic features // 2004. Phys. of Fluids . 2004. Vol. 16. PP. 385-399.

## **Экспериментальное исследование влияния универсального индикатора РКС на развитие хемоконвективного движения в двуслойной системе смешивающихся жидкостей**

**Е. А. Мошева<sup>а</sup>, А. В. Шмыров<sup>а</sup>, С. Н. Лысенко<sup>б</sup>**

<sup>а</sup> Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013, Пермь, ул. Ак. Королева, 1  
email: mosheva@icmm.ru, smurov@icmm.ru

<sup>б</sup> Институт технической химии УрО РАН, 614013, Пермь, ул. Ак. Королева, 3

Экспериментально исследовано влияния универсального кислотно-щелочного индикатора РКС на структурообразование и массоперенос в двуслойной системе смешивающихся, химически реагирующих жидкостей в вертикальной ячейке Хеле-Шоу. Задача рассмотрена на примере реакции нейтрализации. Обнаружено, что наличие индикатора приводит не только к изменению пространственно-временных характеристик системы, но и к смене механизма массопереноса вблизи фронта реакции – от диффузионного к конвективному. Выявлены условия, при которых индикатор не оказывает влияния на ход реакции и может быть использован для визуализации.

**Ключевые слова:** реакция нейтрализации; концентрационно-зависимая диффузия; цветные индикаторы

## **Effect of the universal color indicator RKS on the formation of the chemoconvective motion in two layer miscible system**

**E. A. Mosheva<sup>а</sup>, A. V. Smyrov<sup>а</sup>, S. N. Lysenko<sup>б</sup>**

<sup>а</sup> Institute of continuous media mechanics UB RAS, Ak. Koroleva St. 1, 614013, Perm  
email: mosheva@icmm.ru, smurov@icmm.ru

<sup>б</sup> Institute of Technical Chemistry of UB RAS, Ak. Koroleva St. 3, 614013, Perm

Effect of the universal acid-base indicator RKS on the pattern formation and mass transfer in a two-layer system composed of two miscible liquids filling a vertical Hele-Shaw cell is studied experimentally. The considered reaction is neutralization. It turns out that the presence of the indicator leads to change in the space-time characteristics of the system and even to change in the mass transfer mechanism near the reaction front – from diffusive to convective. The conditions under which the indicator does not affect on the reaction and can be used as a visualizing tool are revealed.

**Keywords:** neutralization reaction; concentration-dependent diffusion; color indicator

## 1. Введение

В хемогидродинамике для визуализации пространственного распределения реагентов и продуктов реакции применяют кислотно-щелочные индикаторы. Считается, что их использование не влияет на динамику реакции. Однако, как показывают недавние исследования [1, 2], применение индикаторов даже в небольших концентрациях способно изменять распределение плотности вблизи фронта реакции, приводя к неустойчивости и формированию конвективного движения.

В недавнем исследовании [3], посвященном изучению реакции нейтрализации в двухслойной системе смешивающихся жидкостей, был обнаружен новый тип конвективной неустойчивости (далее CDD-неустойчивость), обусловленный зависимостью коэффициентов диффузии реагентов и продукта реакции от их концентрации. Для визуализации растворенных веществ был использован универсальный индикатор РКС, что, в свете вышеупомянутых работ, ставит вопрос о корректности полученных результатов. Целью данной работы является изучение влияния универсального индикатора РКС на устойчивость двухслойной системы и формирование CDD-неустойчивости.

## 2. Методика эксперимента

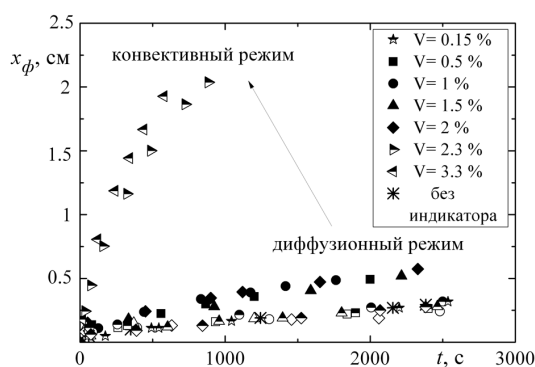
Эксперимент выполнен в вертикальной ячейке Хеле-Шоу с размерами 9.0 см×2.4 см×0.12 см. Водный раствор гидроксида натрия с концентрацией  $C_b = 0.5$  М и водный раствор соляной кислоты с концентрацией  $C_a = 0.7$  М образуют устойчиво стратифицированную по плотности двухслойную систему. Для изучения влияния универсального индикатора РКС было рассмотрено три ситуации: (i) индикатор растворился в обоих слоях, (ii) только в верхнем слое с кислотой и (iii) только в нижнем слое с основанием. Индикатор был приготовлен на основе водного раствора этилового спирта с массовой концентрацией  $w = 80\%$ . Плотность и концентрация раствора индикатора:  $\rho = 0.849$  г/см<sup>3</sup>,  $C_i = 2 \cdot 10^{-4}$  моль/л. Эксперименты проводились при комнатной температуре (24±1)°С. Применение интерферометра Физо позволяло судить об устойчивости и визуализировать структуру конвективного течения в экспериментах без индикатора.

## 3. Результаты

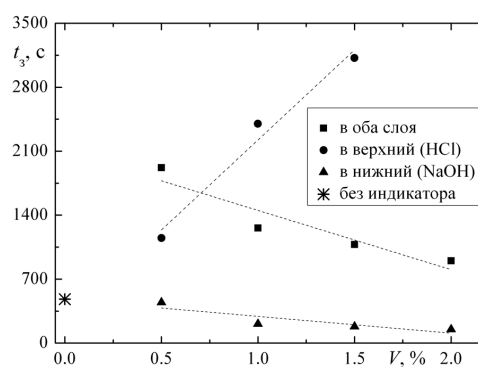
Эксперименты показали, что в отсутствие индикатора массоперенос реагентов и продукта реакции вблизи фронта реакции осуществляется благодаря процессу диффузии, что существенно увеличивает продолжительность протекания реакции и, как следствие, приводит к низким скоростям распространения фронта,  $v \sim 10^{-4}$  см/с (см. рис. 1). Спустя некоторое время внутри переходной зоны возникает участок с неустойчивым распределением плотности, в пределах которого формируется горизонтальный ряд конвективных ячеек, названный в [3] CDD-неустойчивостью.

Влияние индикатора на устойчивость двухслойной системы и структуру конвективного движения существенно зависит от того, в каком из слоев он был растворен. На (рис. 1) представлена зависимость координаты положения фронта реакции от времени. Видно, что при добавлении индикатора в оба слоя или только в верхний (символы с половинчатой и белой заливкой соответственно), скорость фронта совпадает со скоростью, измеренной в эксперименте в отсутствие индикатора, для всех использованных концентраций. Совершенно иная ситуация наблюдается при добавлении индикатора в нижний слой. При малых концентрациях индикатора (< 2%) CDD неустойчивость развивается гораздо раньше, что приводит к увеличению скорости движения фронта реак-

ции (символы с чёрной заливкой на рис. 1). Добавление больших концентраций приводит к совершенно другому сценарию развития реакции. С самого начала эксперимента в верхнем слое системы, содержащем кислоту, развивается интенсивное конвективное движение, существенно увеличивающее массоперенос вблизи фронта реакции, что приводит к резкому росту скорости распространения фронта (рис. 1). Таким образом, добавление даже таких незначительных концентраций индикатора в нижний слой приводят к смене механизма массопереноса – от диффузионного к конвективному.



**Рис. 1.** Эволюция координаты положения фронта реакции.



**Рис. 2.** Зависимость времени возникновения CDD-неустойчивости от объёмной концентрации индикатора.

На (рис. 2) представлен график зависимости времени зарождения,  $t_3$  ячеистой структуры от концентрации растворенного индикатора. Эксперимент показал, что присутствие индикатора в обоих или только верхнем слое всегда увеличивает время, необходимое на формирование неустойчивости, тогда как его добавление только в нижний слой всегда уменьшает это время. Путём варьирования концентраций индикатора и выбора слоя, в котором он будет растворён, можно приблизиться к результатам, полученным в эксперименте при отсутствии индикатора. В частности, добавление индикатора с объёмной концентрацией  $V < 0.2\%$  в любой из слоёв (или в оба) не сказывается на времени формирования неустойчивости. Отметим, что такой концентрации индикатора достаточно для получения контрастной визуализации.

Поскольку CDD-конвекция является разновидностью неустойчивости двойной диффузии, то наличие ещё одного компонента (индикатора) ведёт к изменению профиля плотности системы (за счёт разности в скорости диффузии растворенных веществ), что сказывается на её пространственно-временных характеристиках. Так как основным компонентом индикатора является этиловый спирт, то в дальнейшем планируется исследовать его влияние на формирование неустойчивости и на режимы реакции.

Работа выполнена в рамках проекта РФФИ № 16-31-00251 мол\_a

### Список литературы

1. Kuster S., Riolfo L. A., Zalts A., et al. Differential diffusion effects on buoyancy-driven instabilities of acid-base fronts: the case of a color indicator // *Phys. Chem. Chem. Phys.* 2011. Vol. 13. P. 17295–17303. 10.1039/c1cp21185d.
2. Nisimura T., Tanoue K., Watanabe T., et al. Instabilized Fluid Flow at interface of chemical reaction in liquid phase // *Trans. Japan Soc. Mech. Eng.* 2006. Vol. 72. Part B. P. 1773–1780. DOI: 10.1299/kikaib.72.1773.
3. Bratsun D., Kostarev K., Mizev A., Mosheva E. Concentration-dependent diffusion instability in reactive miscible fluids // *Physical Review E.* 2015. Vol. 92, 011003(R).

## **О распараллеливании методов декомпозиции области при решении конечно-элементных задач на гибридных архитектурах**

**Н. С. Недожогин<sup>a</sup>, А. К. Новиков<sup>a,b</sup>, С. П. Копысов<sup>a,b</sup>**

<sup>a</sup> Институт Механики УрО РАН, 426067, Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34  
email: Nedozhogin@inbox.ru

<sup>b</sup> ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет», 426034, Ижевск, ул.  
Университетская, 1

При решении конечно-элементных задач на гибридных архитектурах рассматривается распределение вычислений между процессорами, их ядрами и ускорителями; минимизация числа и размеров сообщений между подзадачами. В работе представлены параллельные алгоритмы декомпозиции области для конечно-элементного анализа: поэлементные «безматричные» вычисления, блочные варианты итерационных методов и итерационный метод дополнения Шура. В ходе численных исследований на нескольких вычислительных архитектурах, сравнивается разделение расчетных областей, без ветвления и с ветвлением топологических связей подобластей.

**Ключевые слова:** параллельные вычисления; методы декомпозиции; метод конечных элементов; гибридные архитектуры

## **On the parallelization of the domain decomposition methods in solving finite- element problems on the hybrid architectures**

**N. S. Nedozhogin<sup>a</sup>, A. K. Novikov<sup>a,b</sup>, S. P. Kopysov<sup>a,b</sup>**

<sup>a</sup> Institute of Mechanics UB RAS, T. Baramzinoy St. 34, 426067, Izhevsk  
email: Nedozhogin@inbox.ru

<sup>b</sup> Udmurt State University, Universitetskaya St. 1, 426034, Izhevsk

In solving finite-element problems on hybrid architectures, the distribution of computing between processors, their cores and accelerators, and a minimization of messages number and sizes between subtasks are considered. The paper presents parallel algorithms of the domain decomposition for finite element analysis: element-by-element "matrix-free" computing, block variants of iterative methods and an iterative Schur's complement method. In numerical studies, we compare the partitioning of computational domains without branching and branching of topological subdomains connections on several computing architectures.

**Keywords:** parallel computing; decomposition methods; finite element method; hybrid architectures

## 1. Введение

В современных гибридных вычислительных системах, как правило, применяются многоядерные центральные процессоры, многосокетовые вычислительные узлы с ускорителями вычислений. Значительные ограничения на структуру алгоритмов, исполняемых на многоядерных процессорах и графических ускорителях, накладываются для обеспечения эффективной обработки множественных данных с небольшими блоками управления исполнением и кэш-памятью.

Важной характеристикой вычислительных алгоритмов является соотношение числа операций с плавающей точкой на байт обращений к памяти, называемое арифметической интенсивностью и определяющей пути оптимизации алгоритмов и их программных реализаций: локализация и близость расположения данных в области памяти каждого ядра; выполнение максимального возможного числа операций над данными в памяти без их повторной загрузки.

Анализируя ускорения, полученные для некоторого разделения данных, многоядерной архитектуры и нескольких алгоритмов, можно оценить используемую модель параллельных вычислений и выполнить оптимизацию алгоритмов, архитектуры или программного обеспечения с целью минимизации издержек вызванных эффектами сериализации и очередей, задержками, связанными с поддержанием системы в согласованном состоянии на основе универсальной модели масштабируемости.

Обеспечение распределения вычислений между процессорами и ускорителями; минимизация числа и размеров сообщений, передаваемых между подзадачами, остаются основными показателями эффективности различных параллельных алгоритмов декомпозиции области для конечно-элементного анализа, среди которых будут рассматриваться: поэлементные «безматричные» вычисления [1, 2], блочные варианты итерационных методов[3, 4] и итерационный метод дополнения Шура[4].

## 2. Методы декомпозиции

В поэлементных схемах метода конечных элементов глобальная матрица жёсткости не формируется явно. При решении системы уравнений итерационными методами, матрично-векторное произведение разбивается на две операции: множества произведений локальных матриц и векторов и сложение векторов — результатов этих произведений. В параллельной реализации этап сложения векторов приводит к конфликтам при записи и эффективными представляются варианты разделения сетки, исключающие одновременный доступ к общим узловым данным из нескольких конечных элементов. Распределение вычислительной нагрузки происходит на этапе формирования локальных матриц жесткости и наследуется от разделения расчетной сетки, которое также учитывает производительность доступных вычислительных ресурсов (ядра CPU и ускорителей), затрат на коммуникации между CPU и ускорителями и определяет количество конечных элементов, локальные матрицы которых формируются на центральных процессорах и ускорителях соответственно.

При декомпозиции системы линейных уравнений, получаемых после дискретизации, часто используются блочные варианты итерационных методов. Представление матриц в виде графа позволяет разделить его вершины на множества по числу доступных графических ускорителей и процессоров с упорядочиванием вершин на две группы: внутренние и граничные (связанные хотя бы с одной вершиной из другого множества). На основе полученного разделения в каждом множестве формируются матрицы, не содержащие вершины из других подобластей  $A_k^{[i_k, i_k]}$ ,



матрицы, включающие связи внутренних с граничными вершинами  $\mathbf{A}_k^{[i_k, b_k]}$ ,  $\mathbf{A}_k^{[b_k, i_k]}$  и матрицы граничных вершин графа  $\mathbf{A}_k^{[b_k, b_m]}$ . Здесь  $k, m$  – номер множества вершин. Тогда при решении системы уравнений, например методом сопряжённых градиентов каждая векторная операция делится на две: соответствующим внутренним и граничным вершинам. Эти операции независимы и могут выполняться параллельно. Для нахождения матрично-векторного произведения  $\mathbf{q} = \mathbf{A}\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q} = \{\mathbf{q}_1^i, \mathbf{q}_1^b, \mathbf{q}_2^i, \mathbf{q}_2^b, \dots, \mathbf{q}_{n_p}^i, \mathbf{q}_{n_p}^b\}$ , на каждом GPU (номер графического ускорителя обозначим  $k$ ,  $n_p$  – общее число GPU) необходимо вычислить:

$$\mathbf{q}_k^{b_{GPU}} = \mathbf{A}_k^{[b_k, i_k]} \cdot \mathbf{p}_k^i; \quad \mathbf{q}_k^i = \mathbf{A}_k^{[i_k, i_k]} \cdot \mathbf{p}_k^i + \mathbf{A}_k^{[i_k, b_k]} \cdot \mathbf{p}_k^b$$

Параллельно с этим, на CPU вычисляется

$$\mathbf{q}_k^{b_{CPU}} = \sum_{m=1}^{m < n_p} \mathbf{A}_k^{[b_k, b_m]} \cdot \mathbf{p}_k^b.$$

Далее суммируем вектора  $\mathbf{q}_k^{b_{GPU}}$  и  $\mathbf{q}_k^{b_{CPU}}$  в каждом параллельном потоке.

Рассмотрим метод дополнения Шура. Применение этого метода позволяет сократить размер решаемой системы уравнений, но при этом требуются значительные затраты на этапе её формирования. Реализация алгоритма использует двухуровневое распараллеливание. При сборке матрицы дополнения Шура, в каждой подобласти параллельно формируются локальные матрицы. Стоит отметить, что такая декомпозиция данных имеет крупноблочную структуру. При вычислении локальных матриц дополнения Шура рассматривались два варианта: формирование на CPU и на GPU. Самой затратной операцией при этом является обращение матрицы. На CPU обратная матрица вычислялась с помощью LU-факторизации, на GPU — через решение независимых систем итерационными методами с разными правыми частями.

В численных исследованиях, сравнивались разделение расчетных сеток без ветвления и с ветвлением топологических связей подобластей на нескольких вычислительных архитектурах. Анализ и оптимизация параллельных вычислительных алгоритмов методов декомпозиции области выполнялась с учетом оценок универсальной модели масштабируемости и арифметической интенсивности вычислений.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, в рамках исследований по грантам №16-01-00129-а, 16-41-180276-р\_урал-а, 17-01-00402-а.

### Список литературы

1. Kopysov S. P., Novikov A. K., Nedozhogin N. S., Rychkov V. N. Scalability of parallel finite element algorithms on multi-core platforms // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2016. Vol. 158. N. 1. P. 012055.
2. Копысов С. П., Кузьмин И. М., Недождогин Н. С., Новиков А. К., Рычков В. Н., Сагдеева Ю. А., Тонков Л. Е. Параллельная реализация конечно-элементных алгоритмов на графических ускорителях в программном комплексе FEStudio // Компьютерные исследования и моделирование. 2014. Т. 6. № 1. С. 79–97.
3. Saad Y. Iterative Methods for Sparse Linear Systems. SIAM. 2000. 439 p.
4. Kopysov S. P., Kuzmin I. M., Nedozhogin N. S., Novikov A. K., Sagdeeva Y. A. Scalable hybrid implementation of the Schur complement method for multi-GPU systems // Journal of Supercomputing. 2014. Vol. 69. N. 1. P. 81–88.

## Вынужденные колебания капли жидкости на высоких модах

Н. С. Недожогин, Л. Е. Тонков, А. А. Чернова

Институт механики УрО РАН, 426067, Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34  
email: alicaaa@gmail.com

В данной работе изучается процесс колебания капли жидкости малого объема, лежащей на вибрирующей с частотами, соответствующими 6 и 8 модам колебаний, гидрофобной недеформируемой подложке. Математическая модель колебаний капли построена в рамках вязкой несжимаемой жидкости с применением модели объема жидкости - Volume of Fluid (VoF) и использованием методов контрольного объема и Эйлера для дискретизации по пространству и времени. Изучены вопросы учета динамического изменения контактного угла в тройной точке жидкость/подложка/воздух. Выявлен и описан механизм возбуждения поверхностных волн. Полученные численные результаты согласуются с известными экспериментальными данными.

**Ключевые слова:** колебания капли жидкости; внутренние течения; контактный угол

## Forced oscillations of a liquid drop on high modes

N. S. Nedozhogin, L. E. Tonkov, A. A. Chernova

Institute of Mechanic UrB RAS, T. Baramzinoy St. 34, 426067, Izhevsk  
email: alicaaa@gmail.com

In this paper we study the process of oscillation drops a small amount of fluid lying on a vibrating with frequencies corresponding to 6 and 8 modes of vibration of the hydrophobic non-deformable substrate. Mathematical model of droplet oscillation is built within a viscous incompressible fluid model with a VoF model and using the control volume and Euler methods for sampling in space and time. Studied changes in the accounting for the dynamic contact angle at the triple point liquid / substrate / air. It identified and described the mechanism of excitation of surface waves. The numerical results are consistent with experimental data.

**Keywords:** oscillation liquid droplet; internal flow; contact angle

### 1. Введение

При вертикальных колебаниях капли малого объема жидкости на свободной поверхности этой капли наблюдается возбуждение поверхностных капиллярных волн, динамика которых зависит от вязкости, поверхностного натяжения и плотности жидкости и параметров внешнего воздействия (частоты и амплитуды колебаний подложки). Интерес представляет период колебаний жидкости, характеризующийся малыми амплитудами и частотами до 1кГц, при которых на свободной поверхности возбуждаются капиллярно-гравитационные волны, но атомизация не наблюдается.

Изучению такого начального периода колебаний жидкости посвящены экспериментальные работы [1,2], где исследуются колебания жидкости малого объема

( $5 \cdot 10^{-9} \text{ м}^3$ ), лежащей на гидрофобной недеформируемой вибрирующей с частотами (450 – 800 Гц) и малыми амплитудами (3.5÷13 мкм) подложке. Экспериментальные исследования показывают, что внутренние течения в капле характеризуются явной трехмерностью, а одним из определяющих параметров является угол смачивания. Численному исследованию процесса вынужденных колебаний капли жидкости, лежащей на вибрирующей с частотами, близкими к 1 кГц, гидрофобной недеформируемой подложке посвящена данная работа.

## 2. Математические модели и алгоритмы

Рассмотрим задачу о движении капли жидкости, вызванном вертикальными перемещениями жесткой подложки (рис. 1.). Пусть область  $\Omega \in \mathbb{R}^3$  заполнена двухфазной средой и  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_0$ , будем считать, что в подобласти  $\Omega_1$  находится газ, а в  $\Omega_0$  - жидкость;  $\Gamma_1$  является границей раздела фаз,  $\Gamma_2$  - атмосферная границы расчетной области. В начальный момент времени  $t = 0$  подложка  $\Omega_2$  начинает вибрировать под действием акустических возмущений. Расположенная на подложке  $\Omega_2$  капля жидкости  $\Omega_0$ , также, начинает совершать вертикальные колебания.

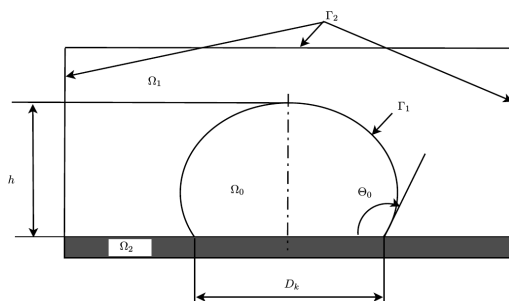


Рис. 1 Расчетная область

Экспериментальная установка подробно описана в работе [2]. Капля воды, объемом 5 мкл размещалась в центре подложки, при этом, угол смачивания составлял  $\theta_0 = 115^\circ \pm 1^\circ$ , а диаметр контакта и высота капли -  $D_k = 2.02 \text{ мм}$  и  $h = 1.52 \text{ мм}$ , соответственно.

Во многих практически важных случаях поставленная задача может быть сведена к рассмотрению системы из двух несмешивающихся несжимаемых вязких сред, движение каждой из которых описывается уравнениями Навье-Стокса и уравнением неразрывности. На границе раздела сред  $\Gamma_1$  выполняются условия динамического равновесия [3]. Геометрические характеристики фазовой границы определяются с учетом действия сил поверхностного натяжения с помощью введения скалярной функции, имеющей смысл объемной концентрации [4]. Таким образом, система уравнений Навье-Стокса и неразрывности принимает вид

$$\frac{\partial \rho U}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho U U) = -\nabla p + \nabla \cdot \tau - \sigma K \nabla \alpha \delta(\alpha) (1 - \cos \Theta_0 + \rho g). \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \rho U = 0. \quad (2)$$

Система (1), (2) дополняется уравнением переноса для  $\alpha$

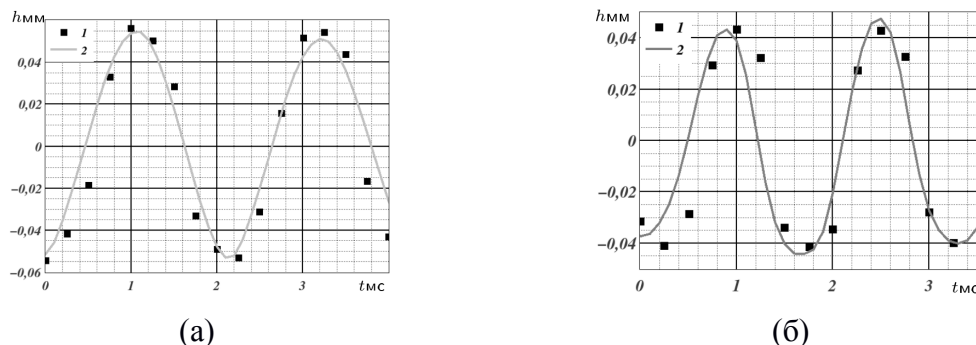
$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = U \cdot \nabla \alpha. \quad (3)$$

Численное решение системы (1) - (3) выполняется на основе метода контрольного объема для дискретизации исходных уравнений и подробно описано в [3]. При ре-

шении полученных систем линейных уравнений использовался распределённый решатель на основе предобусловленного метода сопряжённых градиентов, реализованный для гибридных вычислительных систем.

### 3. Численное моделирование.

В результате вычислительного эксперимента получены мгновенные профили капли, позволяющие выявить поверхностные эффекты, обусловленные вибрациями подложки с частотами от 450 до 800 Гц, и сопоставить их с экспериментальными данными [1]. Также построены зависимости изменения высоты профиля капли от времени (рис.2).



**Рис. 2.** Графики изменения высоты капли: 1 - эксперимент [1], 2 - расчет для: б (а) и 8 (б) мод колебаний.

Как видно из (рис. 3) расчетные кривые соответствуют экспериментальным как качественно, так и количественно. Однако, необходимо отметить, что изменение высоты профиля разреза капли зависит, как от частоты колебаний подложки, так и от заданного ограничения контактного угла. Выявлено, что с увеличением частоты колебаний подложки влияние ограничений краевого угла также увеличивается. Однако, в виду отсутствия экспериментальных и численных исследований, определение корректного диапазона ограничения угла смачивания требуется для каждой рассматриваемой частоты колебаний. Выявлены и описаны внутренние течения в капле, определено влияние ограничения контактного угла на топологические особенности внутренних течений. Как и в экспериментальных работах[1,2] при частоте вибрации подложки выше 400 Гц зафиксирована инициация процесса атомизации жидкости.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант 16-38-00127 мол\_а.) и комплексной программы фундаментальных исследований УрО РАН, проект № 15-7-1-11.

#### Список литературы

1. *Shin Y. S., Lim H. Ch.* Shape oscillation and detachment conditions for a droplet on a vibrating flat surface // *Eur. Phys. Journal.* 2014. V. 37. I. 74. P.1-10.
2. *Kim H., Lim H. Ch.* Mode Pattern of Internal Flow in a Water Droplet on a Vibrating Hydrophobic Surface // *Journal Phys. Chem. B.* 2015. V. 119. P. 6740-6746.
3. *Chernova A.A., Kopysov S.P., Tonkov L.E.* Simulation of a liquid drop on a vibrating hydrophobic surface // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering.*, 2016. V. 158, N. 1, 12026.
4. *Hirt C. W., Nichols B. D.* Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries // *Journal of computational physics.* 1981. V. 39. P. 201-225.

## **Моделирование конвективных течений в условиях интенсивного теплообмена и высокочастотного магнитного поля**

**И.Л. Никулин, И.С. Файзрахманова, А.В. Перминов**

Пермский национальный исследовательский политехнический университет  
614990, Пермь, Комсомольский пр., 29  
email: nil@live.ru

Решается задача о конвекции проводящего расплава в высокочастотном магнитном поле. Оно генерирует в расплаве индукционные токи, которые разогревают расплав и приводят к возникновению независящих от времени объёмных сил. В работе представлена математическая модель, описывающая ламинарное осреднённое осесимметричное течение расплава в приближение Буссинеска, приводятся безразмерные уравнения переноса импульса и тепловой энергии, сформулированы граничные условия, определены управляющие параметры. Методами вычислительного эксперимента исследуется действие двух механизмов генерации течения в расплаве: гравитационная конвекция неоднородно разогретого расплава и вынужденное движение, возбуждаемое действием силы Лоренца на расплав. Описаны результаты моделирования течений для параметров, близких к реальной технологической установке.

**Ключевые слова:** индукционная плавка; проводящий расплав; переменное магнитное поле; конвекция; неоднородный нагрев; сила Лоренца

## **Modelling of convective flows with intensive heat exchange and high-frequency magnetic field**

**I.L. Nikulin, I.S. Faizrakhmanova, A.V. Perminov**

Perm National Research Polytechnic University, Komsomolsky str., 29, 614990, Perm  
email: nil@live.ru

The convection problem for conductive melt in high-frequency magnetic field is solved. This field generates in melt eddy currents, which heats the melt and leads to appearance of time-independent volume forces. In paper the mathematical model is presented, it describes laminar axisymmetric averaged melt flow in Boussinesq approximation, the dimensionless equations of the momentum and heat energy transfer is written; the boundary conditions are stated; the governing parameters are pointed. The action of the flow generation mechanisms is investigated numerically. These mechanisms are the buoyancy of non-uniform heated melt and the forced motion generated by the Lorenz's force action on the melt. The results of flow simulation is described for system close to real technological device.

**Keywords:** induction melting; conductive melting; alternating magnetic field; convection; non-uniform heating; Lorenz's force

Индукционное плавление металла широко используется в технических процессах с высокими требованиями к чистоте материала: точном литье, зонной плавке, плавлении химически активных металлов, при производстве чистых материалов и т.п. Знание механизмов генерации течений позволяет управлять движением расплава, выбирать эффективные режимы плавления и обработки.

Исследуется течение расплава в тигле индукционной печи. Геометрия задачи и условия прогрева подробно описаны в [1]. В осесимметричной постановке основные уравнения переноса импульса и тепловой энергии в терминах завихренности скорости  $\omega$  и функции тока  $\psi$  с учётом уравнения неразрывности  $\text{div } v = 0$  имеют вид

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (r\omega)}{\partial r} - u\omega \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \omega}{\partial z} - v\omega \right) + \text{Gr} \frac{\partial T}{\partial r} + \text{Na}^2 F, \quad (1)$$

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial z}, \quad u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\omega r, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r}{\text{Pr}} \frac{\partial T}{\partial r} - urT \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial T}{\partial z} - vT \right) + \frac{Q}{\text{Pr}} q, \quad (3)$$

где  $\tau$  – время,  $u$  и  $v$  – радиальная и аксиальная компоненты скорости,  $\text{Gr} = g\beta a R^4 / (\lambda \nu^2)$  – число Грасгофа;  $g$  – ускорение свободного падения,  $\beta$  – коэффициент объёмного расширения,  $a$  – характерная плотность теплового потока со свободной поверхности,  $R$  – внутренний радиус тигля,  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности,  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости,  $T$  – температура,  $\text{Na} = \sqrt{\mu_a H_0^2 R^2 / (\rho \nu^2)}$  – число Гартмана,  $\mu_a$  – абсолютная магнитная проницаемость,  $H_0$  – характерная напряжённость магнитного поля,  $\rho$  – плотность расплава,  $F$  – ротор силы Лоренца,  $\text{Pr} = \nu / \chi$  – число Прандтля,  $\chi$  – коэффициент температуропроводности,  $Q = H_0^2 / (\sigma a R)$  – параметр тепловыделения, задающий интенсивность источников тепла [2],  $\sigma$  – удельная электрическая проводимость,  $q$  – объёмная плотность тепловых источников.

Ротор силы Лоренца и мощность источников рассчитываются через суммы гармоник полей индукционных токов  $\mathbf{H}_1$  и  $\mathbf{H}_2$

$$F = \frac{1}{2} [(\mathbf{H}_1 \nabla) \mathbf{H}_1 + (\mathbf{H}_2 \nabla) \mathbf{H}_2], \quad q = \frac{1}{2} [(\nabla \times \mathbf{H}_1)^2 + (\nabla \times \mathbf{H}_2)^2], \quad (4)$$

которые находятся из решения системы уравнений

$$\nabla^2 \mathbf{H}_1 = D_H (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}^{out}), \quad \nabla^2 \mathbf{H}_2 = -D_H \mathbf{H}_1, \quad (5)$$

где  $D_H = \mu_a \sigma R^2 \Omega$  – параметр диффузии переменного магнитного поля в расплав,  $\Omega$  – частота тока в индукторе,  $\mathbf{H}^{out}$  – магнитное поле индуктора.

Для скорости на твердых границах выполняется условие прилипания. На свободной поверхности равна нулю касательная компонента тензора вязких напряжений, а тепло отводится излучением

$$-\frac{\partial T}{\partial z} = \text{Bi}_r (T^4 - T_a^4), \quad (6)$$

где  $Bi_r = \varphi e b a^3 R^4 / \lambda^4$  – радиационное число Био,  $\varphi$  – средний угловой коэффициент,  $e$  – степень черноты,  $b$  – постоянная Стефана-Больцмана,  $T$  и  $T_a$  – температуры поверхности и окружающей среды. Твёрдые стенки считаются теплоизолированными.

В рассматриваемой системе управляющими параметрами при заданной геометрии и свойствах материала являются:

1) параметр диффузии переменного магнитного поля  $D_H$  (частота тока), определяющий структуру поля индукционных токов, следовательно, и распределения ротора силы Лоренца  $F$  и источников тепла  $q$ ;

2) число Гартмана  $Ha$  (сила тока в индукторе, напряжённость поля индуктора), определяет силовое влияние магнитного поля на конвективное течение;

3) число Грасгофа  $Gr$  определяет вклад гравитационной конвекции в тепломассоперенос.

Расчеты показали, что в расплаве, занимающем объём с отношением диаметра к высоте 1:1 и параметрами  $Pr = 0.008$ ,  $Gr = 2 \cdot 10^5$ , интенсивность течения меняется нелинейным образом при увеличении параметра  $D_H$  [3]. До  $D_H \sim 11$  интенсивность течения нарастает, а затем монотонно убывает, что объясняется конкуренцией двух механизмов генерации течений. Первый механизм связан с гравитационной конвекцией неоднородно нагретого расплава, второй – с генерацией течений высокочастотным магнитным полем. В отсутствие магнитного поля ( $Ha = 0$ ,  $Gr > 0$ ) в системе генерируется одновихревое течение (тепловая конвекция при подогреве сбоку), в отсутствие тепловой конвекции ( $Gr = 0$ ,  $Ha > 0$ ) магнитное поле генерирует четырехвихревое течение.

С ростом  $D_H$  тепловые источники локализуются около боковой стенки, течение при этом остается стационарным в широком диапазоне  $D_H$ , для исследованных  $Ha = 100, 80, 60$ .

Для параметров расплава никеля и условиях, близких к технологическим,  $Pr=0.0269$ ,  $Gr=2 \cdot 10^7$ ,  $Ha=4795$  можно говорить только о квазистационарных режимах. С ростом  $D_H$  интенсивность осреднённого течения меняется также нелинейным образом. Начиная с некоторого  $D_H$ , когда магнитное поле сосредоточено вблизи боковой стенки цилиндра, течение становится стационарным.

### Список литературы

1. *Perminov A.V., Nikulin I.L.* Mathematical model of the processes of heat and mass transfer and diffusion of the magnetic field in an induction furnace // *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2016. Vol. 89. N. 2. P. 397–409.
2. *Nikulin I.L.* Mathematical modelling of AMF geometry and frequency impacts on volume and surface melt flows at induction melting // *Magnetohydrodynamics*. 2016. Vol. 52. N. 4. P. 513-526.
3. *Perminov A.V., Nikulin I.L.* Numerical investigation of electromagnetic effects and averaged metal melt flows generated by high-frequency magnetic field // *Magnetohydrodynamics*. 2016. Vol.52. N 1. P. 135–143.

## **Критические параметры перехода холестерик-нематик, индуцированного магнитным полем и сдвиговым потоком**

**А. А. Новиков, А. Н. Захлевных, Д. В. Макаров**

Пермский государственный национальный исследовательский университет  
614990, Пермь, ул. Букирева, 15  
email: novikov21s@yandex.ru

Исследовано раскручивание спиральной структуры холестерического жидкого кристалла комбинированным действием магнитного поля и сдвигового течения. Рассмотрены различные ориентации магнитного поля в плоскости сдвигового потока. Показано, что магнитное поле и течение холестерического жидкого кристалла с постоянным градиентом скорости вызывают пороговым образом фазовый переход холестерик - нематик. Проанализирована зависимость критического угла ориентации директора в переходе холестерик-нематик от управляющих параметров системы.

**Ключевые слова:** холестерический жидкий кристалл; сдвиговое течение; магнитное поле

## **Critical parameters of the cholesteric-nematic transition induced by a magnetic field and a shear flow**

**A. A. Novikov, A. N. Zakhlevnykh, D. V. Makarov**

Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm  
email: novikov21s@yandex.ru

The untwisting of the helical structure of a cholesteric liquid crystal by the combined action of a magnetic field and a shear flow is investigated. Various orientations of the magnetic field in the plane of the shear flow are considered. We have shown that the magnetic field and flow of a cholesteric liquid crystal with a constant velocity gradient induce the cholesteric-nematic phase transition. The dependence of the critical orientational angle of the director in the cholesteric-nematic transition on the control parameters of the system is analyzed.

**Keywords:** cholesteric liquid crystal; shear flow; magnetic field

Холестерические жидкие кристаллы (ХЖК) обладают спиральной ориентационной структурой, которая обуславливает их разнообразные физические свойства, такие как селективное отражение света, высокая чувствительность цвета образца к изменениям температуры, флексоэлектричество и т.д., которые широко используются в устройствах отображения информации [1]. Этими свойствами можно управлять изменением шага спирали ХЖК при помощи различных внешних воздействий.



В данной работе теоретически исследуется раскручивание ориентационной спиральной структуры ХЖК воздействием магнитного поля и сдвигового потока в рамках теории Эриксона-Лесли, которая включает в себя уравнение движения и условие несжимаемости ХЖК [2]

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \nabla_k \sigma_{ki}, \nabla_i v_i = 0. \quad (1)$$

уравнение движения директора [2]

$$h_i = \gamma_1 N_i + \gamma_2 n_k A_{ki}. \quad (2)$$

где  $\rho$ ,  $v_i$  и  $\sigma_{ki}$  – плотность, скорость и тензор напряжений ХЖК,  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  – коэффициенты вращательной вязкости ХЖК,  $n_i$  – директор ХЖК,  $N_i = dn_i/dt - \Omega_{ik} n_k$  – скорость изменения директора относительно движущейся среды,  $A_{ik} = (\nabla_k v_i + \nabla_i v_k)/2$  и  $\Omega_{ik} = (\nabla_k v_i - \nabla_i v_k)/2$  – симметричная и антисимметричная части тензора градиентов скоростей. Молекулярное поле  $h_i$ , действующее на  $n_i$ , определяется соотношением

$$h_i = -\frac{\partial F_V}{\partial n_i} + \nabla_k \frac{\partial F_V}{\partial (\nabla_k n_i)}. \quad (3)$$

где  $F_V$  – объемная плотность свободной энергии ХЖК, имеющая вид [2]

$$F_V = \frac{1}{2} [K_{11} (\nabla \cdot \mathbf{n})^2 + K_{22} (\mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{n} + q_0)^2 + K_{33} (\mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{n})^2] - \frac{1}{2} \chi_a (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H})^2. \quad (4)$$

Здесь  $K_{11}$ ,  $K_{22}$ ,  $K_{33}$  – константы Франка,  $q_0 > 0$  – волновое число невозмущенной спиральной структуры холестерического жидкого кристалла,  $\chi_a > 0$  – анизотропия диамагнитной восприимчивости ХЖК. Первый вклад в  $F_V$  (4) характеризует энергию ориентационно-упругих деформаций поля директора, второй – представляет собой объемную плотность энергии взаимодействия магнитного поля  $\mathbf{H}$  с ХЖК-матрицей.

Рассмотрим сдвиговое течение неограниченного ХЖК со скоростью  $\mathbf{v} = [0, u(x), 0]$ , ось спирали которого ортогональна плоскости сдвига  $xOy$  (рис. 1).

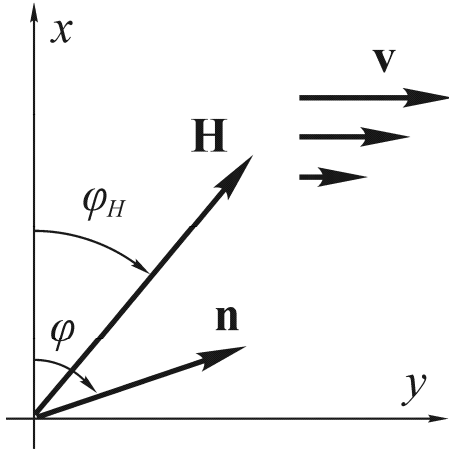


Рис. 1. Ориентация ХЖК в магнитном поле и сдвиговом потоке

Приложим магнитное поле  $\mathbf{H} = H [\cos \varphi_H, \sin \varphi_H, 0]$  ортогонально оси спирали ХЖК под некоторым углом  $\varphi_H$  в плоскости сдвига. Магнитное поле и сдвиговое течение оказывают конкурирующее действие на ХЖК, деформируя его спиральную структуру. Векторное поле директора при совместном действии поля и сдвигового потока можно искать в следующем виде:

$$\mathbf{n} = [\cos \varphi(z), \sin \varphi(z), 0]. \quad (5)$$

Для стационарного сдвигового потока с постоянным градиентом скорости  $A = du/dx$  условие несжимаемости (1) выполняется тождественно, а уравнение движения (1) просто определяет давление в системе. Уравнение движения директора (2) с учетом (3) – (5) приводит к следующему уравнению для угла  $\varphi(\zeta)$

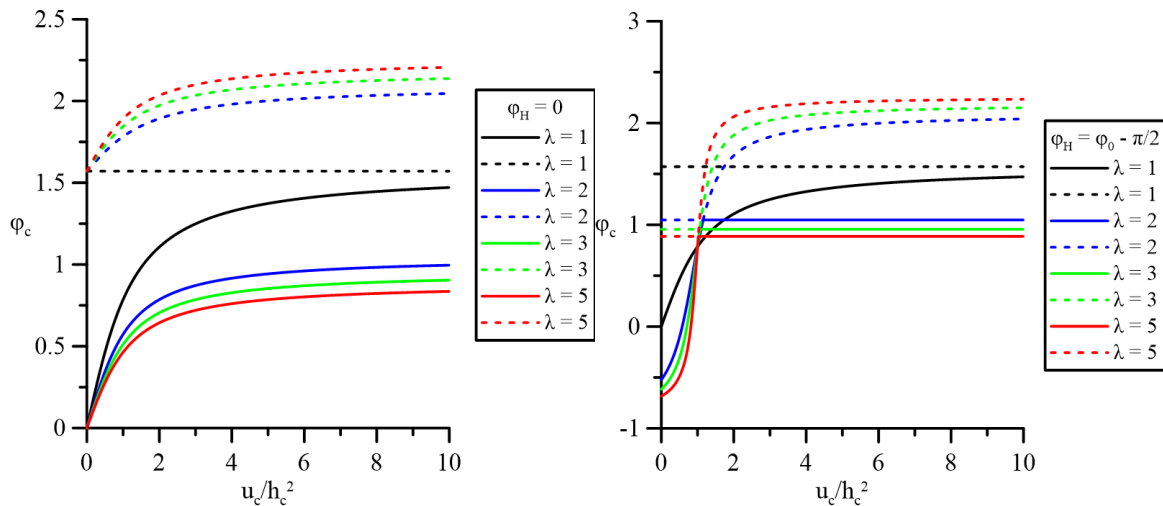
$$\frac{d^2\varphi}{d\zeta^2} - \frac{h^2}{2} \sin 2(\varphi - \varphi_H) + \frac{u}{2} \left( \frac{1}{\lambda} + \cos 2\varphi \right) = 0. \quad (6)$$

где  $\zeta = q_0 z$  – безразмерная координата,  $h = Hq_0^{-1} \sqrt{\chi_a / K_{22}}$  – безразмерная напряженность магнитного поля,  $u = A|\gamma_2| / (K_{22}q_0^2)$  – безразмерная величина градиента скорости,  $\lambda = -\gamma_2 / \gamma_1$  – реактивный параметр.

В раскрученной ( $d\varphi/d\zeta = 0$ ) фазе при наличии магнитного поля и сдвигового потока директор ориентируется во всем образце ХЖК под некоторым постоянным углом  $\varphi_c$ , который находится из уравнения (6)

$$\tan \varphi_c = \frac{-\cos 2\varphi_H \pm Q}{\sin 2\varphi_H + U - U/\lambda}, Q = \sqrt{1 + U^2(1 - 1/\lambda^2) + 2U \sin 2\varphi_H}, U = u_c/h_c^2. \quad (7)$$

Здесь  $h_c$  и  $u_c$  – критические напряженность магнитного поля и градиент скорости сдвигового течения, при которых раскручивается спираль ХЖК.



**Рис. 2.** Критический угол ориентации директора  $\varphi_c$  в переходе холестерик-нематик как функция  $u_c/h_c^2$  для различных  $\lambda$  и  $\varphi_H$

Зависимость угла  $\varphi_c$  (7) от  $u_c/h_c^2$  изображена на (рис. 2). Пунктирными линиями показаны неустойчивые по отношению к малым возмущениям решения (7), сплошными – устойчивые. Видно, что при ориентации поля под углом  $\varphi_H = 0$  критический угол  $\varphi_c$  с ростом градиента скорости увеличивается, асимптотически приближаясь к значению  $\varphi_0$ , где  $\varphi_0$  – угол ориентации директора сдвиговым потоком. При ориентации поля под углом  $\varphi_H = \varphi_0 - \pi/2$  угол  $\varphi_c$  достигает значения  $\varphi_0$  при конечных градиентах скорости сдвига.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (проект № 3.5977.2017).

### Список литературы

1. *Blinov L. M., Chigrinov V. G.* Electrooptic Effects in Liquid Crystal Materials, New York: Springer-Verlag, 1994. 476 p.
2. *Stewart I. W.* The Static and Dynamic Continuum Theory of Liquid Crystals: A Mathematical Introduction. London: Taylor & Francis, 2004. 360 p.

## **Исследование поля напряжений, создаваемого зернограницными дислокациями**

**В.С. Озерных, П.С. Волегов**

Пермский национальный исследовательский политехнический университет  
614990, Пермь, Комсомольский проспект, 29  
email: ozernykh@yandex.ru

В работе рассмотрены некоторые физические механизмы упрочнения в поликристаллических металлах. Используется двухуровневая математическая модель неупругого деформирования представительного объема поликристаллического материала, модифицированная с целью учета поля напряжений, создаваемого дислокациями, находящимися на границах зерен. Проведена оценка влияния поля напряжений, создаваемого зернограницными дислокациями, на дислокации, находящиеся на различном расстоянии от границы. Показано, что появление поля напряжений, создаваемого зернограницными дислокациями, может привести к блокировке системы скольжения, что, в свою очередь, может способствовать появлению микротрещин в материале.

**Ключевые слова:** границы зерен; дислокации; физические теории пластичности

## **Investigation of the stress field created by grain boundary dislocations**

**V.S. Ozernykh, P.S. Volegov**

Perm National Research Polytechnic University, Komsomolsky Ave. 29, 614990, Perm,  
email: ozernykh@yandex.ru

We considered some physical mechanisms of hardening in polycrystalline metals. Mathematical model of inelastic deformation of representative volume of polycrystalline, modified to take into account the stress field generated by dislocations located at the grain boundaries is used. The influence of the stress field created by grain-boundary dislocations on dislocations located at different distances from the boundary is estimated. It is found that the appearance of the stress field of the GBD can lead to the blocking of the slip system, which in turn can contribute to the appearance of microcracks in the material.

**Keywords:** grain boundaries; dislocations; crystal plasticity

При интенсивных неупругих деформациях поликристаллических материалов важно учитывать эволюцию внутренней структуры материала, в особенности – появление внутренних полей напряжений, «тормозящих» или «разгоняющих» дислокации, следовательно, приводящие к процессам упрочнения или разупрочнения на мезоуровне. Особое значение при этом имеют поля напряжений, которые возникают вблизи границ зерен в результате формирования сложных дефектных структур в приграничной области.

Целью работы является модификация двухуровневой упруговязкопластической математической модели неупругого деформирования поликристалла, позволяющей учитывать влияние полей напряжений, создаваемых зернограничными дислокациями. Структура и соотношения используемой в качестве базовой модели подробно описаны, например, в работах [1, 2].

В процессе неупругого деформирования решеточные дислокации движутся из одного зерна в другое через границу; при этом в границе остается некоторая «фиктивная» дислокация ориентационного несоответствия (ДОН), которая приводит к появлению зернограничной дислокации (ЗГД). ЗГД отделяет ту часть межзеренной границы, где сдвиг уже прошел и восстановилось исходное периодическое строение границы, от той части, где он еще не начался. Принято считать, что ЗГД создают поля напряжений, препятствующие дальнейшему движению дислокаций по кристаллографическим системам скольжения с направлением сдвига «к границе». Следует отметить, что это поле «внутренних напряжений» может как затруднять движение дислокаций, подходящих к границе, так и облегчать движение дислокациям, движущимся от границы. Очевидно, что в рамках работы важно учитывать средний размер зерна в поликристалле, поскольку чем мельче зерно, тем выше доля границ зерен в представительном объеме материала, следовательно, образуется большее число ЗГД на границах зерен [3].

Для определения влияния поля напряжений, создаваемых ДОНами, на внутризеренные дислокации, считается, что дислокации распределены по всему объему зерен равномерно, при этом плотность дислокаций составляет порядка  $10^{10} \text{ см}^{-2}$ , что характерно для материалов, прошедших интенсивные неупругие деформации. С учетом среднего размера зерна 50 мкм [3] вычислено среднее расстояние между дислокациями на системах скольжения (порядка 0,01 мкм). Рассматривались малоугловые границы наклона с углом разориентировки в 10 градусов. Исходя из этих данных, рассчитано среднее поле напряжений, создаваемое дислокациями ориентационного несоответствия внутри зерна. С помощью соотношения Шмида проведен расчет касательного (в иностранной литературе – «обратного») напряжения на системах скольжения, создаваемого совокупностью ДОНов. Для расчета поля напряжений рассматривается минимальное расстояние от границы, на котором может находиться дислокация  $r_{\min}$  (соотношения идентичны для каждой из систем скольжения, поэтому индексы систем скольжения в соотношения опущены):

$$r_{\min} : |\tau - \tau_{\text{ДОН}}| = \tau_{\text{П-Н}},$$

где  $\tau$  – действующее внешнее касательное напряжение на системе скольжения,  $\tau_{\text{ДОН}}$  – касательное напряжение на системе скольжения, создаваемое ДОН,  $\tau_{\text{П-Н}}$  – напряжение Пайерлса-Набарро.

Очевидно, что поле напряжений, создаваемое ДОН, зависит от расстояния до ДОН, на котором оно измеряется. Поэтому для получения общей характеристики влияния этого поля напряжений на текущей системе скольжения выбрана интегральная мера, характеризующая среднее напряжение:

$$\tau_{bs} = \frac{1}{d} \int_{r_{\min}}^d \tau_{\text{ДОН}}(r) dr,$$

где  $\tau_{bs}$  – среднее «обратное» касательное напряжение на текущей системе скольжения, создаваемое ДОН (препятствующее движению дислокаций в направлении «к границе»),  $d$  – размер зерна.

Далее рассчитано эффективное касательное напряжение на системе скольжения:

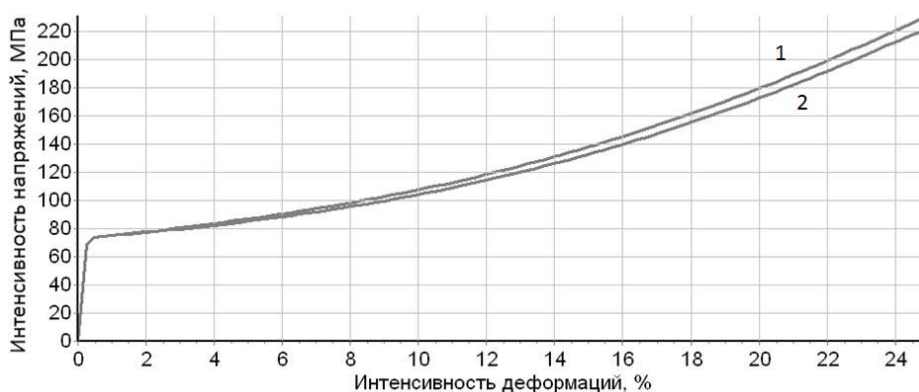
$$\tau_{\text{eff}} = \tau - \tau_{bs}.$$

Построено модифицированное соотношение для скорости сдвига по системе скольжения:

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_0 \left( \frac{\tau_{eff}}{\tau_c} \right)^m H(\tau_{eff} - \tau_c),$$

где  $\tau_c$  – критическое напряжение сдвига по системе скольжения,  $\dot{\gamma}_0$  и  $m$  – параметры вязкоупругого закона: характерная скорость сдвигов при равенстве касательных напряжений на СС критическим и константа скоростной чувствительности материала,  $H$  – функция Хэвисайда.

Проведены численные эксперименты по деформированию ГЦК бикристалла, упругопластические характеристики которого соответствуют технически чистой меди.



**Рис. 1.** Кривые деформирования для бикристалла: 1 – с учетом поля напряжений, создаваемого ДОН, 2 – без учета поля напряжений, создаваемого ДОН

Из (рис. 1) видно, что в численных экспериментах, проведенных с учетом поля напряжений, создаваемого ДОН (кривая 1), напряжения, требуемые для продолжения деформирования, оказываются выше, чем в численном эксперименте без учета поля напряжений, создаваемого ДОН.

Таким образом, в работе проведена оценка влияния поля напряжений ДОН на дислокации, находящиеся на различном расстоянии от границы (в частности – вблизи текущей и противоположной границы). Выявлено, что ДОН не имеют дальнедействующего поля напряжений. Получено, что появление поля напряжений ЗГД может привести к блокировке системы скольжения в направлении к границе, что в свою очередь, может способствовать появлению микротрещин в материале, которые оказывают существенное влияние на процессы накопления поврежденности и развитие процессов разрушения.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ №МК-1298.2017.1.

### Список литературы

1. Трусов П.В., Волегов П.С., Нечаева Е.С. Многоуровневые физические модели пластичности: теория, алгоритмы, приложения// Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – № 4-4. – С. 1808-1810.
2. Trusov P.V., Shveykin A.I., Nechaeva E.S., Volegov P.S. Multilevel models of inelastic deformation of materials and their application for description of internal structure evolution// Physical Mesomechanics. – 2012. – Т. 15, № 3-4. – С. 155-175.
3. Shen Y.F., Lu L., Lu Q.H., Jin Z.H., Lu K. Tensile properties of copper with nano-scale twins// Scripta Materialia. – 2005. – № 52. – С.989–994.

## Об идентификации симметрии упругих свойств поликристаллических материалов

К. В. Остапович, П. В. Трусов

Пермский национальный исследовательский политехнический университет  
614990, Пермь, Комсомольский проспект, 29

Обсуждаются вопросы, связанные с установлением класса симметрии упругих свойств анизотропных поликристаллических материалов. Рассматривается задача идентификации класса линейно-упругого материала, все компоненты тензора упругих констант которого полагаются известными в некоторой системе координат. Описывается общий подход к решению данной задачи, основанный на оценке невязок аппроксимаций заданного тензора упругих констант в различных классах. Данная методология применяется для анализа изменения симметрии упругих свойств представительных макрообъемов поликристаллической меди при интенсивном неупругом деформировании. Результаты, полученные с помощью многоуровневых моделей, основанных на физических теориях упруговязкопластичности, демонстрируют возможность образования выраженных кристаллографических текстур, характеризующихся макроскопической изотропией упругих свойств.

**Ключевые слова:** поликристалл; текстура; упругость; симметрия; физические теории упруговязкопластичности

## On elastic symmetry identification of polycrystalline materials

K. V. Ostapovich, P. V. Trusov

Perm National Research Polytechnic University, Komsomolsky Ave. 29, 614990, Perm

Problems related to elastic symmetry class identification of anisotropic polycrystalline materials are discussed. Given all elastic components of a linear elastic material with respect to some coordinate system, a class identification problem is stated. To solve this problem, a general approach based on evaluation of residuals caused by elasticity tensor's approximations from various classes is introduced. Such methodology is applied to analyze changes in elastic symmetry of representative volumes of polycrystalline copper during large plastic deformation. By using crystal elasto-visco-plasticity multi-level models, it is observed that formations of pronounced crystallographic textures resulting in macroscopic elastic isotropy are possible.

**Keywords:** polycrystal; texture; elasticity; symmetry; crystal elasto-visco-plasticity

Востребованные в современной промышленности поликристаллические металлы и сплавы обладают существенной анизотропией физико-механических свойств, обусловленной неоднородностью их внутренней структуры. Симметричные характеристики таких материалов, как правило, априори неизвестны, а возможность их установления играет важную роль при проектировании изделий, моделировании процессов термомеханической обработки и эксплуатации готовых деталей и конструкций. Кроме того,

определенный интерес представляет исследование связи указанных характеристик с различными параметрами микроструктуры.

Рассмотрим вопросы, относящиеся к установлению класса симметрии упругих свойств представительного макрообъема анизотропного простого материала, упругое деформирование которого описывается обобщенным законом Гука:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{\Pi} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (1)$$

где  $\boldsymbol{\sigma}$  и  $\boldsymbol{\varepsilon}$  – тензоры (второго ранга) соответственно напряжений Коши и малых упругих деформаций,  $\mathbf{\Pi}$  – тензор (четвертого ранга) упругих констант. Формальная классификация упругих свойств такого материала может быть осуществлена на основе выделения специальных классов тензоров четвертого ранга.

Под классом  $\mathcal{K}$  тензора четвертого будем понимать объединение всех подпространств, ортогонально конгруэнтных некоторому заданному подпространству в пространстве тензоров четвертого ранга. В рамках данного определения могут быть введены разнообразные классификации тензоров упругих констант, в том числе – распространяемая в механике симметричная классификация, основанная на понятии группы равноправности неискаженной конфигурации.

Задача идентификации класса упругих свойств формулируется следующим образом [1]. В базисе  $\{\mathbf{I}_i\}$  лабораторной системы координат для исследуемого материала полагаются заданными все компоненты тензора  $\mathbf{\Pi}$  упругих констант. Требуется определить, к каким из известных классов  $\mathcal{K}^{(s)}$  упругие свойства данного материала могут быть отнесены с той или иной точностью.

В качестве критерия для отнесения свойств материала к некоторому классу  $\mathcal{K}^{(s)}$  целесообразно принять существование аппроксимации  $\mathbf{\Pi}^{(s)} \in \mathcal{K}^{(s)}$  тензора  $\mathbf{\Pi}$  упругих констант, обладающей достаточно малой невязкой в обобщенном законе Гука. Обозначим  $\|\cdot\|_{\mathbb{E}_3^r}$  – фробениусову норму на пространстве тензоров ранга  $r$ . Величину  $IE[\mathbf{\Pi}^{(s)}, \mathbf{\Pi}]$  такую, что всюду имеет место неравенство:

$$\|\boldsymbol{\Psi}^{(s)} : \boldsymbol{\varepsilon}\|_{\mathbb{E}_3^2} \leq IE[\mathbf{\Pi}^{(s)}, \mathbf{\Pi}] \|\boldsymbol{\varepsilon}\|_{\mathbb{E}_3^2},$$

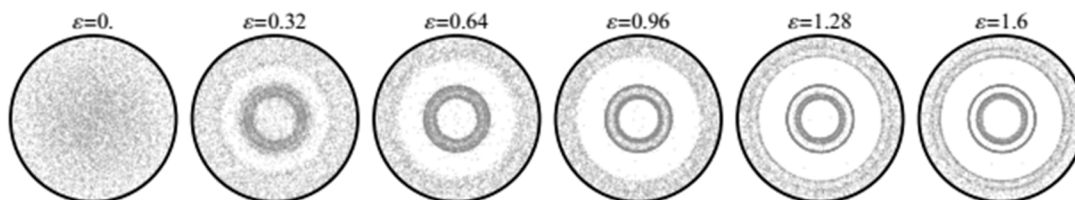
где  $\boldsymbol{\Psi}^{(s)} = \mathbf{\Pi}^{(s)} - \mathbf{\Pi}$ , назовем оценкой несоответствия (*ОН*) аппроксимации  $\mathbf{\Pi}^{(s)}$  тензору  $\mathbf{\Pi}$ . Вопрос о соответствии рассматриваемого тензора заданному классу естественным образом может быть сведен к минимизации функции  $IE[\cdot, \mathbf{\Pi}]$  на допустимом множестве тензоров этого класса. Заметим, что точная ОН дается величиной  $\|\boldsymbol{\Psi}^{(s)}\| = \inf_{\|\boldsymbol{\varepsilon}\|_{\mathbb{E}_3^2}=1} \|\boldsymbol{\Psi}^{(s)} : \boldsymbol{\varepsilon}\|_{\mathbb{E}_3^2}$ , однако при формулировке целевой функции вычислительным преимуществом обладает использование ее верхней оценки –  $\|\boldsymbol{\Psi}^{(s)}\|_{\mathbb{E}_3^4}$ .

Для характеристики относительной невязки удобно ввести относительную оценку несоответствия (*ООН*)  $RIE[\mathbf{\Pi}^{(s)}, \mathbf{\Pi}] = \|\mathbf{\Pi}'^{-1}\| IE[\mathbf{\Pi}^{(s)}, \mathbf{\Pi}]$ , где  $\mathbf{\Pi}'^{-1}$  – тензор, обобщенно обратный к  $\mathbf{\Pi}$ :

$$\frac{\|\boldsymbol{\Psi}^{(s)} : \boldsymbol{\varepsilon}\|_{\mathbb{E}_3^2}}{\|\mathbf{\Pi} : \boldsymbol{\varepsilon}\|_{\mathbb{E}_3^2}} \leq RIE[\mathbf{\Pi}^{(s)}, \mathbf{\Pi}].$$

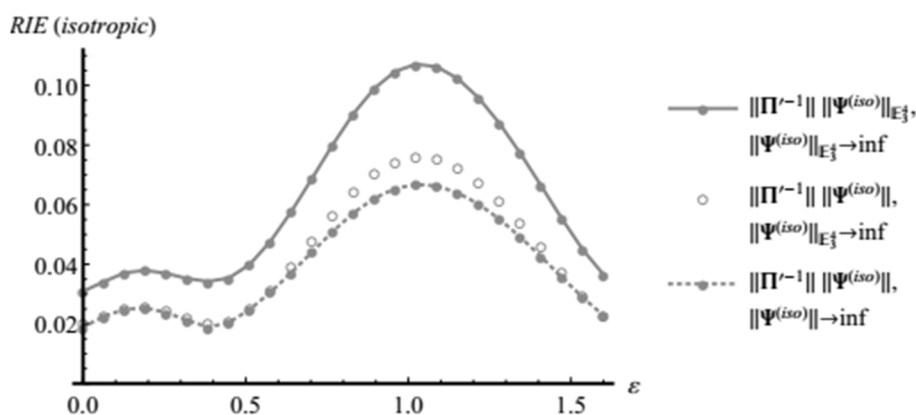
Последовательность ООН формирует для исследуемого материала иерархию классов, к которым его упругие свойства могут быть отнесены с соответствующим уровнем погрешности.

С помощью изложенного подхода исследовалось изменение симметрии упругих свойств поликристаллического агрегата меди, состоящего из 1000 кристаллитов, при неупругом деформировании. На (рис. 1) приведены прямые полюсные фигуры (ППФ), полученные при многоуровневом моделировании процесса осадки [2]. В рассматриваемом опыте реализовывалось кинематическое нагружение с макроскопическим градиентом места  $\mathbf{F}(t) = e^{0.5\varepsilon(t)}(\mathbf{I}_1\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2\mathbf{I}_2) + e^{-\varepsilon(t)}\mathbf{I}_3\mathbf{I}_3$ , где  $\varepsilon(t) = 10^{-3}t$ .



**Рис. 1.** Изменение ППФ для направлений  $\langle 111 \rangle$  (проецирование вдоль оси  $x_3$ ) поликристаллического агрегата меди при квазиодноосной осадке

Агрегирование материальных характеристик осуществлялось осреднением по Фойгту. Изменения ООН упругих свойств исследуемого агрегата классу изотропии представлены на (рис. 2). Характерной особенностью изображенных зависимостей является их существенная немонотонность. Полученные результаты свидетельствуют о возможности значительного снижения степени анизотропии макроскопических упругих свойств при заметном усилении неоднородности распределения ориентаций.



**Рис. 2.** Изменение ООН упругих свойств поликристаллического агрегата меди классу изотропии при квазиодноосной осадке

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант №17-19-01292).

### Список литературы

1. Остапович К. В., Трусов П. В. Об анизотропии упругих материалов: идентификация симметричных свойств // Механика композиционных материалов и конструкций – 2016. – Т. 22. – № 1. – С. 69-84.
2. Трусов П. В., Швейкин А. И., Нечаева Е. С., Волегов П. С. Многоуровневые модели неупругого деформирования материалов и их применение для описания эволюции внутренней структуры // Физическая мезомеханика – 2012. – №1 – С. 33-56.



## **Идентификация наследственных свойств оргстекла ПММА на основе исследования затухающих изгибных колебаний тест-образцов**

**В. Н. Паймушин<sup>a,b</sup>, В. А. Фирсов<sup>a</sup>, В. М. Шишкин<sup>c</sup>, А. П. Левашов<sup>c</sup>**

<sup>a</sup> Казанский национальный исследовательский технический университет им. А. Н. Туполева, 420111, Казань, ул. К. Маркса, 10  
email: vpajmushin@mail.ru

<sup>b</sup> Казанский федеральный университет, 420008, Казань, ул. Кремлевская, 18

<sup>c</sup> Вятский государственный университет, 610000, Киров, ул. Московская, 36  
email: tism1@rambler.ru

Разработана методика идентификации наследственных свойств в условиях кратковременной ползучести оргстекла ПММА (полиметилметакрилат) по экспериментальному смещению центра затухающих изгибных колебаний вертикально закрепленных тест-образцов после предварительной выдержки их в статическом изогнутом состоянии, основанная на применении метода конечных элементов и интегральных уравнений наследственно-упругого материала с ядром наследственности Колтунова-Ржаницына. Построена целевая функция для идентификации реологических параметров отмеченного ядра. Для нахождения минимума целевой функции используется прямой поиск по базовой точке. Получена усредненная по нескольким тест-образцам временная зависимость ядра наследственности исследуемого оргстекла.

**Ключевые слова:** ядро наследственности; конечный элемент; целевая функция

## **Identification of Plexiglas PMMA hereditary properties on basis of Study Test Specimens damped flexural oscillation**

**V. N. Paimushin<sup>a,b</sup>, V. A. Firsov<sup>a</sup>, V. M. Shishkin<sup>c</sup>, A. P. Levashov<sup>c</sup>**

<sup>a</sup> Kazan National Research Technical University then. A. N. Tupolev, Karl Marx St. 10, 420111, Kazan  
email: vpajmushin@mail.ru

<sup>b</sup> Kazan Federal University, The Kremlin St. 18, 420008, Kazan

<sup>c</sup> Vyatka State University, Moscov St. 36, 610000, Kirov  
email: tism1@rambler.ru

The technique of identification of heritable properties in the short-term creep conditions of Plexiglas PMMA (polymethylmethacrylate) with respect to experimental shift of the center of the damped flexural oscillations of vertically clamped test specimens after their preliminary hold in a static bending conditions was developed. This technique based on using a finite-element method and integral equations of the heritable-elastic material with a Koltunov-Rzhanitsyn heredity kernel.

Objection function for identification of rheological parameters of noted kernel has been constructed. Direct search in a basic point for finding the objective function minimum has been used. Average time dependence of heredity kernel for several Plexiglas specimens under investigation has been obtained.

**Keywords:** the heredity kernel; finite element; objective function

## 1. Введение

На кафедре прочности конструкций Казанского национального исследовательского технического университета им. А.Н. Туполева разработана экспериментальная установка [1] для определения динамических характеристик упругости и демпфирующих свойств жестких и эластичных материалов на основе исследования затухающих изгибных колебаний соответствующих тест-образцов. При динамических испытаниях вертикально расположенных тест-образцов из оргстекла ПММА обнаружилось явление, состоящее в смещении центра колебаний свободного конца тест-образца относительно временной оси с постепенным стремлением его к нулю, что можно объяснить упругим последствием при мгновенном снятии предварительно созданного статического изогнутого состояния тест-образца. Отмеченный факт позволяет ставить задачу идентификации наследственных свойств оргстекла по экспериментальному смещению центра колебаний тест-образцов, что явилось причиной появления настоящей работы.

## 2. Методика проведения эксперимента

Эксперимент состоит из двух этапов: на первом этапе тест-образец выдерживается в статическом изогнутом состоянии под действием подвешенного через блок груза в течение времени  $t_1$ , достаточного для стабилизации прогиба  $w$  его свободного конца; на втором этапе груз мгновенно снимается и записывается виброграмма затухающих изгибных колебаний  $w(t)$  свободного конца тест-образца до момента времени  $t_2$ , соответствующего практически нулевому прогибу  $w$ . Происходящие после снятия груза затухающие колебания тест-образца представляются в виде суммы двух независимых процессов: медленного процесса стремления к нулю смещения центра колебаний тест-образца, используемого для идентификации наследственных свойств оргстекла, и быстрого процесса колебаний относительно данного центра.

## 3. Теоретические основы и полученные результаты

Для связи нормальных напряжений  $\sigma(t)$  с деформацией  $\varepsilon(t)$  в медленном процессе деформирования оргстекла берется уравнение наследственности [2]

$$\sigma(t) = E[\varepsilon(t) - \int_0^t R(t-\tau)\varepsilon(\tau)d\tau], \quad (1)$$

где  $t$  – время наблюдения;  $\tau$  – время, предшествующее моменту наблюдения;  $R(t-\tau)$  функция влияния, зависящая от аргумента  $t-\tau$  (ядро релаксации). В качестве функции  $R(t-\tau)$  для полимерных материалов можно взять ядро Колтунова-Ржаницына [3]:

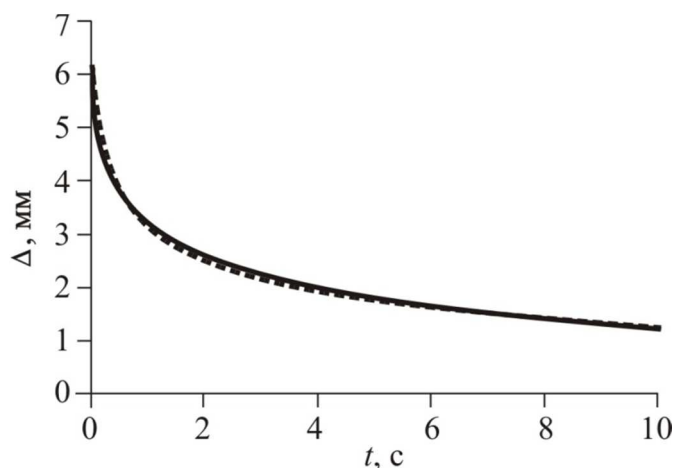
$$R(t-\tau) = C(t-\tau)^{\alpha-1} e^{-\beta(t-\tau)} \quad (C > 0, \quad 0 < \alpha < 1, \quad \beta > 0). \quad (2)$$

Здесь  $C$  – параметр вязкости,  $\alpha$  – параметр сингулярности,  $\beta$  – параметр затухания, определяемые из условия минимума целевой функции

$$F(C, \alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n [1 - \Delta(t_i) / \Delta^*(t_i)]^2, \quad (3)$$

где  $\Delta(t_i)$ ,  $\Delta^*(t_i)$  – соответственно расчетные и экспериментальные смещения центра колебаний тест-образца в заданные моменты времени  $t_i$ . Для определения смещений  $\Delta(t_i)$  используется метод конечных элементов с представлением тест-образца балочными элементами одинаковой длины. Смещения  $\Delta^*(t_i)$  находятся по огибающим  $A^{(+)}(t)$  и  $A^{(-)}(t)$  в областях положительных и отрицательных значений экспериментальной виброграммы колебаний  $w(t)$  свободного конца тест-образца.

Определены параметры  $C$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  шести тест-образцов с длинами  $L=300\div 800$  мм из условия минимума целевой функции (3). Ширина и толщина тест-образцов:  $b=20$  мм;  $h=3.9$  мм. Поиск отмеченных параметров осуществлялся по базовой точке [4] с шагом  $d=0.001$  по каждому параметру. На рисунке приведены расчетная зависимость  $\Delta(t)$  при найденных параметрах  $C$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  и экспериментальная зависимость  $\Delta^*(t)$  для тест-образца с длиной  $L=700$  мм. Представленные зависимости являются достаточно близкими между собою. Однако, необходимо заметить, что параметры  $C$ ,  $\alpha$  и  $\beta$ , полученные на различных тест-образцах, имеют некоторый разброс. Поэтому окончательные значения данных параметров получены усреднением их по отмеченным шести тест-образцам:  $C=0.02837$ ;  $\alpha=0.01230$ ;  $\beta=0.02245$ .



**Рисунок.** Расчетная зависимость  $\Delta(t)$  (сплошная линия) и экспериментальная зависимость  $\Delta^*(t)$  (пунктирная линия) для тест-образца с длиной  $L=700$  мм

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-19-00667).

### Список литературы

1. Паймушин В. Н., Фирсов В. А., Гюнал И., Егоров А. Г. Теоретико-экспериментальный метод определения параметров демпфирования на основе исследования затухающих изгибных колебаний тест-образцов. 1. Экспериментальные основы // Механика композит. материалов. 2014. Т. 50. № 2. С. 185–198.
2. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
3. Колтунов М. А. Ползучесть и релаксация. М.: Высшая школа, 1976. 277 с.
4. Шуп Т. Решение инженерных задач на ЭВМ. М.: Мир, 1982. 238 с.

## Модель механического поведения образцов полиэтилена наполненного полигорскитом

А. Г. Пелевин<sup>a,b</sup>, О. К. Гаришин<sup>b</sup>, В. В. Шадрин<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Пермский государственный национальный исследовательский университет  
614990, Пермь, ул. Букирева, 15  
email: smile3k@yandex.ru

<sup>b</sup> Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013, Пермь, Академика Королева, 1

В работе представлены эксперименты на циклическое растяжение образцов полиэтилена наполненного полигорскитом различной концентрации. По результатам экспериментов видно, что использование полигорскита в качестве наполнителя для улучшения механических свойств не эффективно. Эксперименты составлены таким образом, что их численная обработка позволяет разделить упругопластические и вязкоупругие составляющие деформации образца. Механическое поведение образцов теоретически описано с помощью математической модели. Модель базируется на дифференциальном подходе к построению определяющих уравнений механического поведения материала и может быть представлена в виде символьных схем. Различие экспериментальных и теоретических кривых напряжения-деформации не превышает 1%.

**Ключевые слова:** модель; упругопластичность; вязкоупругость; полиэтилен; полигорскит

## Model of the mechanical behavior of polyethylene samples filled with palygorskite

A. G. Pelevin<sup>a,b</sup>, O. K. Garishin<sup>b</sup>, V. V. Shadrin<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm  
email: ivanov@psu.ru

<sup>b</sup> Institute of continuous media mechanics UB RAS, Akademika Koroleva st, 1, 6714013, Perm

The paper presents experiments with the cyclic tensile the samples of polyethylene filled with palygorskite different concentrations. From the experimental results it is seen that the use of palygorskite as filler for improving mechanical properties is not effective. The structure of the experiments allows to easily split elastic-plastic and viscoelastic mechanical properties of the sample. The mechanical behavior of the samples is theoretically described with a mathematical model. The model is based on the differential approach to the construction of constitutive equations of the mechanical behaviour of the material and can be represented by symbolic schemes. The difference of the experimental and theoretical curves of stress-strain does not exceed 1%.

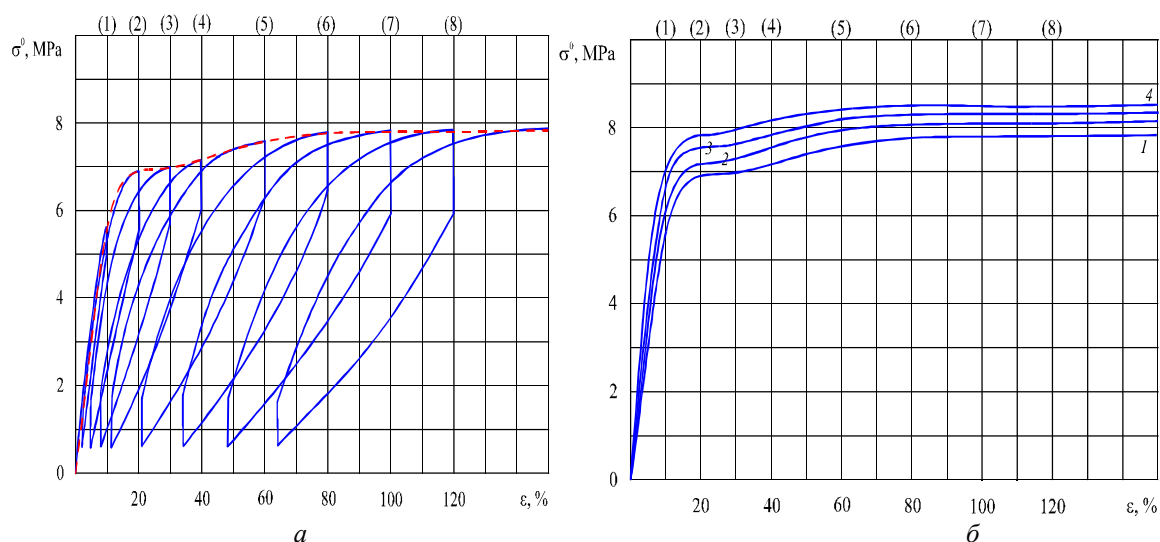
**Keywords:** model; progammatically; viscoelasticity; polyethylene; palygorskite

## 1. Введение

Механические свойства полимерные нанокомпозитов в значительной степени определяются влиянием наполнителя. Сильные адсорбционные свойства палыгорскита обусловлены наличием цеолитных каналов и пористым пространством агрегатов, сформированных из игольчатых частиц [1,2]. Было предложено использование палыгорскита в качестве наполнителя для полиэтилена. Были проведены экспериментальные и теоретические исследования механических свойств полученного нанокомпозита.

### 1.1. Эксперимент

Проведены циклические эксперименты на растяжение для образцов полиэтилена с массовой долей наполнителя  $\varphi = 0, 5, 10$  и  $15\%$ . В качестве наполнителя использовался палыгорскит. Каждый эксперимент включал в себя 8 циклов деформации и последующие растяжение до разрыва. Каждый цикл состоял из 4 последовательных типов нагружения: 1) растяжение с постоянной скоростью, 2) релаксация напряжений, 3) сжатие с постоянной скоростью, 4) релаксация напряжений (рис 1а). Последние точки релаксации каждого цикла определяют равновесные упругопластические свойства материала. Остальной вклад несет вязкоупругая фаза материала.

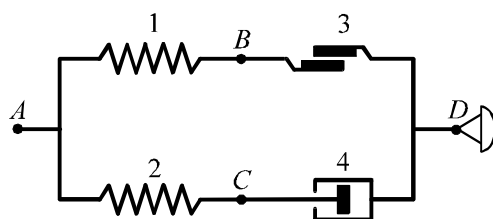


**Рис. 1а** : сплошная линия — кривая циклического нагружения полиэтилена с массовой долей наполнителя  $\varphi=0\%$ , пунктирная линия — расчетная теоретическая кривая растяжения до разрыва; **б** : 1,2,3,4 — расчетные кривые растяжений до разрыва образцов с массовой долей наполнителя  $\varphi = 0, 5, 10, 15\%$  соответственно;  $\sigma^0$  — номинальные напряжения,  $\varepsilon$  — деформация; (1), (2), ..., (8) — максимальные деформации циклов 1-8 соответственно.

### 1.2. Моделирование упруго, вязко, пластических свойств.

В работе используется дифференциальная реологическая модель основанная на аддитивном разложении тензора скоростей деформации среды  $\mathbf{D}$  на упругую  $\mathbf{D}^{el}$ , пластическую  $\mathbf{D}^{pl}$  и вязкую  $\mathbf{D}^{vs}$  части. Модель удобно представлять с помощью символической схемы (рис. 2). За каждым элементом схемы (рис.2) стоят определенные тензорные уравнения, схема показывает принцип образования системы тензорных уравнений. Подробно о дифференциальных определяющих уравнениях, используемых в модели, рас-

смотрено в работах [3,4,5].



**Рис. 2.** Расчетная символьная схема упруго-вязко-пластической модели

### 1.3. Заключение

Результаты проведенных экспериментов (рис. 1а,б) показывают незначительное увеличение механических свойств, что говорит о неэффективности использования палыгорскита в качестве наполнителя для полиэтилена улучшающего механические свойства. Модель и полученные теоретические кривые точно описывают механическое поведение материала. Параметры модели подтверждают низкую эффективность использования палыгорскита в качестве наполнителя улучшающего механические свойства.

## 2. Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ 16-08-00756 и 17-08-01118.

### Список литературы

1. Кристаллохимические исследования нескольких образцов палыгорскита различного генезиса // Кристаллография, 2009, т. 54, №5, с. 930-947.
2. Юнусов М.Ю., Кариев А.Р., Пиров Т.Т., Сохибов Н.Б., Джабборов А.А.. Новые данные об адсорбционных свойствах монтмориллонитовых (бентонитовых) и палыгорскитовых глин Таджикистана// Доклады Академии Наук Республики Таджикистан, 2011, т. 54, №2, Геохимия, с. 145-148.
3. Svistkov A.L., Lauke B. Differential constitutive equations of incompressible media with finite deformations. J. Appl. Mech. Tech. Phy., 2009, vol. 50, 3, pp. 493-503.
4. Garishin O.K., Svistkov A.L., Gerasin V.A., Guseva M.A. Simulation of the elastic-plastic behavior of polyolefin-based nanocomposites with a different structure of layered filler. Polym. Sci., Ser. A, 2009, vol. 51, no. 4, pp. 407-415.
5. Пелевин А.Г., Свистков А.Л., Шадрин В.В. Использование двухуровневой модели для описания равновесных свойств резин с разными типами наполнителей. Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2011. № 5. С. 162-166.

## Безотражательное распространение волн в сильно неоднородных средах

Е. Н. Пелиновский<sup>a,b</sup>, Е. Г. Шургалина<sup>a,b</sup>, И. И. Диденкулова<sup>b,c</sup>

<sup>a</sup> Федеральный научный центр «Институт прикладной физики РАН», 603950, г. Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46  
email: pelinovsky@hydro.appl.sci-nnov.ru

<sup>b</sup> Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексева, 603950, г. Нижний Новгород, ул. Минина, 24

<sup>c</sup> Институт морских систем, Таллинский технологический университет, г. Таллин, ул. Академия, 23

Исследуется распространение длинных слабо нелинейных волн в водных каналах переменного прямоугольного сечения. Предполагается, что изменения глубины канала и его ширины связаны определенным образом между собой (самосогласованный канал), так что в рамках линейной теории мелкой воды волна распространяется в канале без отражения несмотря на сильную неоднородность среды. Выведено модифицированное уравнение Кортевега-де Вриза, описывающее динамику слабо нелинейных слабо дисперсионных волн в таком канале. Обсуждаются общие свойства безотражательных волн в сильно неоднородных средах, в частности в океане и атмосфере, а также солнечных атмосферах и плазме.

**Ключевые слова:** волны в неоднородных средах; уравнение Кортевега-де Вриза

## Non-reflected wave propagation in strongly inhomogeneous media

E. N. Pelinovsky<sup>a,b</sup>, E. G. Shurgalina<sup>a,b</sup>, I. I. Didenkulova<sup>b,c</sup>

<sup>a</sup> Institute of Applied Physics of Russian Academy of Science, 603950, Nizhny Novgorod  
email: pelinovsky@hydro.appl.sci-nnov.ru

<sup>b</sup> Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R. Alekseev, 603950, Nizhny Novgorod

<sup>c</sup> Marine System Institute at Tallinn Technological University, Tallinn

The weakly nonlinear long wave propagation in water channel of variable rectangular cross-section is studied. It is assumed that channel is self-consistent with certain condition on the variability of water depth and width. The wave moves in such channels with no reflection in the framework of linear shallow-water equations even the inhomogeneity is strong. Modified Korteweg-de Vries equation is derived for unidirectional weakly nonlinear weakly dispersive waves in self-consistent channel. General features of non-reflected waves in strongly inhomogeneous media (ocean and atmosphere, solar atmosphere and plasma) are discussed.

**Keywords:** waves in inhomogeneous media, Korteweg-de Vries equation

Распространение длинных волн типа цунами в узких бухтах и проливах может привести к интенсификации волнового поля и аномально большому накату волн на бе-

рег, что наблюдалось во время последних катастрофических цунами, Математически, в этом случае динамика волн может быть описана в «канальном» приближении для усредненных по поперечному сечению характеристик течения. Получаемые в этом приближении одномерные уравнения позволяют ускорить проведение расчетов, особенно в условиях, когда параметры подходящих волн неизвестны (как это часто бывает на практике), либо батиметрия канала известна с плохой точностью. В результате, удастся получить экспресс оценки параметров волн, основываясь на небольшом числе параметров, характеризующих задачу.

Нелинейная теория длинных волн в каналах произвольного поперечного сечения развита уже достаточно давно. Бегущие волны в таких каналах с учетом нелинейности и дисперсии изучались в [1-3]. Для волн в канале прямоугольного сечения с переменными глубиной и шириной выведено уравнение Кортевега-де Вриза с переменными коэффициентами [4,5]. Аналогичные уравнения выведены также для волн в каналах другой геометрии [6,7]. В большинстве работ характеристики канала меняются медленно вдоль оси канала, так что можно считать волну локально такой же, как и в канале фиксированного сечения и использовать асимптотические методы для описания изменчивости параметров волны; см., например [8] и ссылки там.

Если пренебречь дисперсией, то в рамках нелинейной теории мелкой воды можно отказаться от приближения плавного изменения характеристик канала в пространстве и найти точные решения, описывающие накат нелинейных волн на берега узких бухт и заливов [7, 9-11]. Более того, показано, что эта теория объясняет существование волн-убийц на берегу и хорошо согласуется с их наблюдениями [12].

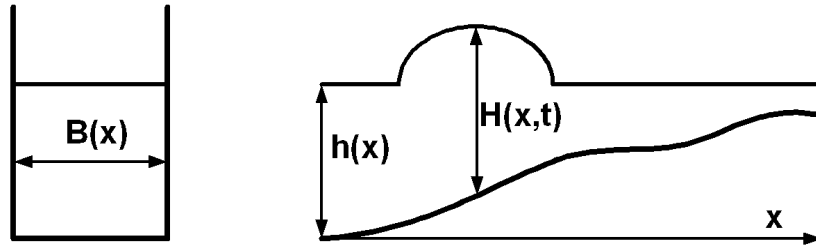
В настоящей статье нам хотелось показать, что даже в случае сильной изменчивости характеристик канала в пространстве удастся построить пример однонаправленного распространения нелинейной волны с дисперсией (безотражательного распространения). Это удастся сделать для канала прямоугольного сечения, в котором ширина канала определенным способом связана с глубиной бассейна. В таком «самоогласованном» канале отражение отсутствует, даже если глубина канала меняется сильно, в том числе ступенькообразно.

Обычно, когда говорят о волнах в жидкости переменной глубины, говорят о потерях энергии на отражение от донных неровностей [13]. Ограничение распространения волн вдоль главной оси канала позволяет локализовать передачу энергии (нет цилиндрического ослабления, нет дифракционных потерь), но не препятствует рассеянию энергии «назад», если глубина и ширина канала меняются произвольным образом. Тем не менее, при специальных законах изменения характеристик канала волна не будет отражаться и может распространяться на большие расстояния без потери энергии. Продемонстрируем это сначала на примере распространения линейных длинных волн в прямоугольном канале переменного сечения (рис. 1). В этом случае исходным является волновое уравнение

$$B(x) \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - g \frac{\partial}{\partial x} \left( B(x) h(x) \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = 0. \quad (1)$$

где  $\eta(x,t)$  – вариации свободной поверхности жидкости в канале и  $H(x,t) = \eta(x,t) + h(x)$ .





**Рис.** Геометрия канала: слева – поперечное сечение, справа – продольный разрез

Если канал самосогласован ( $B \sim h^{-1/2}$ , где  $B(x)$  и  $h(x)$  – ширина и глубина канала), то уравнение (1) переписывается в виде

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c(x) \frac{\partial}{\partial x} \left( c(x) \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = 0. \quad (2)$$

где  $c = (gh)^{1/2}$  – скорость распространения волн в канале. Очевидная замена перехода от  $x$  к времени распространения  $\tau(x) = \int dx / c(x)$  приводит (2) к уравнению с постоянными коэффициентами, доказывая существование бегущих волн вида

$$\eta(x, t) = A_0 \Phi[t - \tau(x)]. \quad (3)$$

где  $A_0$  – постоянная амплитуда волны и  $\Phi(t)$  описывает форму волны в фиксированной точке  $x_0$ . При этом записи волны (мареограммы) оказываются одинаковыми в различных точках канала, хотя, конечно, в пространстве форма волны меняется. Аналогично можно найти скорость частиц в волне

$$u(x, t) = \frac{g}{c(x)} \eta[t - \tau(x)]. \quad (4)$$

амплитуда такой волны меняется в пространстве, а временная форма нет.

Если теперь рассматривать нелинейные длинные волны, то основные уравнения мелкой воды сводятся к нелинейному волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} = \frac{1}{2g} \frac{\partial^2 u^2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial t} \left[ \frac{\eta u}{c} \right] = \frac{\partial N}{\partial \tau}. \quad (5)$$

которое, однако, не является замкнутым, поскольку в правую (нелинейную) часть входит скорость частиц. Если нелинейность мала, то для скорости можно использовать выражение (4) и замкнуть уравнение (5). Поскольку правая часть в (5) мала, то легко перейти к одноволновому уравнению, используя

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \eta = \frac{\partial N}{\partial \tau}. \quad (6)$$

Тогда

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial \tau} = -\frac{1}{2} N\{\eta, u; t, \tau\}. \quad (7)$$

Возвращаясь к исходным переменным, получаем окончательно уравнение простой волны

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c \left[ 1 + \frac{3\eta}{2h} \right] \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{c\eta^2}{4h^2} \frac{dh}{dx}. \quad (8)$$

Уравнение (8) в частных производных первого порядка, как известно, эквивалентно системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений, которые можно проинтегрировать. В частности, амплитуда волны меняется с глубиной по следующему закону

$$\eta \left( 4 + 5 \frac{\eta}{h} \right)^{1/5} = \text{const}. \quad (9)$$

В линейной бегущей волне, как мы получали, амплитуда волны не меняется с глубиной. В нелинейном случае она меняется, однако, поскольку нелинейность мала, то этот эффект мал, и им можно пренебречь.

Пренебрегая этим изменением амплитуды, мы легко можем решить уравнение (8) для любого закона изменения глубины бассейна и найти расстояния, когда нелинейная волна опрокидывается. Очевидно, однако, что в окрестности точки обрушения начинают сказываться дисперсионные эффекты. Для их изучения мы перейдем от уравнений мелкой воды к системе уравнений Грин-Нагди [14-16]. В случае малой нелинейности и дисперсии модифицируется только одно уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{h^3}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{dh}{dx} \right] - \frac{dh}{dx} \left[ \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{dh}{dx} \frac{\partial u}{\partial t} \right]. \quad (10)$$

Дальнейшая процедура получения нелинейного эволюционного уравнения аналогична приведенной выше для Римановой волны. Опуская громоздкие выкладки, приведем окончательное уравнение для однонаправленных волн

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c \left[ 1 + \frac{ch}{4} \frac{d^2 h}{dx^2} + \frac{3\eta}{2h} \right] \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{c}{6h} \frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) = \frac{c\eta^2}{4h^2} \frac{dh}{dx}. \quad (11)$$

Оно обобщает известное уравнение Кортевега-де Вриза на случай сильно неоднородной среды для волн в самосогласованном канале. Сильная неоднородность, как видно, меняет линейную скорость распространения волн, а также модифицирует нелинейные и дисперсионные слагаемые. Некоторые примеры, описывающие трансформацию уединенной волны (солитона) в самосогласованном канале, будут описаны в докладе.

В заключение заметим, что рассмотренный пример безотражательного распространения нелинейной волны в сильно неоднородной среде не является единственным. Если канал имеет параболическое сечение, а ось канала наклонена линейно к горизонту, то в рамках нелинейной теории мелкой воды также находятся безотражательные волны, которые взаимодействуют только в одной точке (урезе воды) [9]. Аналогичные эффекты сейчас активно изучаются применительно к атмосфере Земли и Солнца, где также реализуются условия безотражательного распространения волн [17-18].

Публикация подготовлена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (МД-6373.2016.5), гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ НШ-6637.2016.5, а также грантов PUT1378, РФФИ (16-32-60012, 16-35-00175, 16-55-52019, 15-05-02430, 15-42-02357, 16-02-00167), Volkswagen Foundation.

## Список литературы

1. *Peregrine D.H.* Long waves in a uniform channel of arbitrary cross-section // *J. Fluid Mech.* 1968. Vol. 32. P. 353-365.
2. *Shen M.C.* Long waves in a stratified fluid over a channel of arbitrary cross section // *Phys. Fluids.* 1968. Vol. 11. P. 1853-1882.
3. *Fenton J.D.* Cnoidal waves and bores in uniform channels of arbitrary cross-section // *J. Fluid Mech.* 1973. Vol. 58. P. 417-434.
4. *Shuto N.* Nonlinear long waves in a channel of variable section // *Coastal Engng Japan* 1974. Vol. 17. P. 1-12.
5. *Ostrovsky L.A., and Pelinovsky E.N.* Refraction of nonlinear ocean waves in a beach zone // *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*, 1975. Vol. 11. P. 37 - 41.
6. *Teng M.H., and Wu T.Y.* Nonlinear water waves in channels of arbitrary shape // *J Fluid Mech.*, 1992. Vol. 242. P. 211-233.
7. *Pedersen G.* Fully nonlinear Boussinesq equations for long wave propagation and runup in sloping channels with parabolic cross section // *Natural Hazards*, 2016. Vol. 84. P. S599-S619.
8. *Grimshaw R.* Solitary waves propagating over variable topography // In: *Tsunami and Nonlinear Waves* (Ed. A. Kundu). Springer. 2007. P. 51-64.
9. *Didenkulova I., and Pelinovsky E.* Nonlinear wave evolution and runup in an inclined channel of a parabolic cross-section // *Phys Fluids*, 2011. Vol. 23. Issue 8, 086602.
10. *Didenkulova I., and Pelinovsky E.* Runup of tsunami waves in U – shaped bays. // *Pure and Applied Geophysics*, 2011. Vol. 168. P. 1239-1249.
11. *Rybkin A. Pelinovsky E.N., and Didenkulova I.* Nonlinear wave run-up in bays of arbitrary cross-section: generalization of the Carrier-Greenspan approach // *J Fluid Mech.*, 2014. Vol. 748. P. 416-432.
12. *Didenkulova I., and Pelinovsky E.* Rogue waves in nonlinear hyperbolic systems (shallow-water framework) // *Nonlinearity*, 2011. Vol. 24. P. R1-R18.
13. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973.
14. *Green A.E. and Naghdi P.M.* A derivation of equations for wave propagation in water of variable depth. // *J. Fluid Mech.* 1976. Vol.78. P. 237–246.
15. *Le Metayer O., Gavriluk S., and Hank S.* A numerical scheme for the Green–Naghdi model // *J. Comput. Phys.* 2010. Vol. 229. P. 2034–2045.
16. *Touboul J., and Pelinovsky E.* Bottom pressure distribution under a solitonic wave reflecting on a vertical wall // *European J Mechanics B Fluids.* 2014. Vol. 48. P. 13-18.
17. *Petrukhin N.S., Ruderman M.S., and Pelinovsky E.* Non-reflective propagation of kink pulses in magnetic waveguides in solar atmosphere // *Solar Physics*, 2015. Vol. 290.P. 1323-1335.
18. *Ruderman M.S., Petrukhin N.S., and Pelinovsky E.* On the ratio of periods of the fundamental harmonic and first overtone of magnetic tube kink oscillations // *Solar Physics.* 2016. Vol. 291. P. 1143-1157.

## **Влияние вибраций на конвективную устойчивость псевдопластической жидкости в плоском вертикальном слое**

**А. В. Перминов<sup>a</sup>, Т. П. Любимова<sup>b</sup>,**

<sup>a</sup> Пермский национальный исследовательский политехнический университет 614990, Пермь, Комсомольский пр-т., 29

email: perminov1973@mail.ru

<sup>b</sup> Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013, Пермь, ул. Академика Королёва, 1

email: lubimova@psu.ru

На основании уравнений термовибрационной конвекции сформулирована и решена линейная задача устойчивости осредненного плоскопараллельного течения псевдопластической жидкости Уильямсона относительно малых периодических вдоль слоя возмущений. Расчеты показали, что, как и в случае ньютоновской жидкости, при малых значениях числа Прандтля наиболее опасными являются гидродинамические монотонные возмущения. С повышением числа Прантля наиболее опасными становятся тепловые колебательные возмущения. Усиление псевдопластических свойств жидкости приводит к дестабилизации основного течения относительно обоих типов возмущений. Включение вибраций, как и в случае ньютоновской жидкости, приводит к появлению дополнительного механизма неустойчивости, зависящего от частоты вибраций и величины градиента температуры. Усиление интенсивности вибраций приводит к дестабилизации течения относительно всех исследованных мод неустойчивости.

**Ключевые слова:** неньютоновская жидкость; термовибрационная конвекция; высокочастотные вибрации; устойчивость; вертикальный слой

## **Vibration impact on the convective stability of pseudoplastic fluid in plane vertical layer**

**A. V. Perminov<sup>a</sup>, T. P. Lyubimova<sup>b</sup>**

<sup>a</sup> Perm National Research Polytechnic University, 29 Komsomolsky prospekt, 614990, Perm  
email: perminov1973@mail.ru

<sup>b</sup> Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, 1 Akademika Koroleva st, 614013, Perm.  
email: lubimova@psu.ru

Based on the equations of the thermovibrational convection the linear problem of the stability of the pseudoplastic Williamson's fluid plane-parallel averaged flow was formulated and solved for small periodic layer-longwise perturbations. It was shown by calculations the hydrodynamic monotonous perturbations are the most dangerous for small Prandtl number, the similar situation was observed in newtonian fluid. The increasing of Prandtl number leads to the thermal oscillatory perturbations becomes the most dangerous. The pseudoplastic properties strengthening

leads to instability of the general flow for both types of perturbation. Like for the newtonian fluids, the engaging of oscillations leads to the appearance of additional instability mechanism, which depends on frequency of vibration and temperature gradient value. The vibrations intensity strengthening leads to the flow destabilization for all instability modes investigated.

**Keywords:** non-Newtonian fluid; thermovibrational convection; high-frequency vibration; stability; vertical layer.

## 1. Введение

В рамках модели Уильямсона исследуется линейная устойчивость термовибрационного конвективного течения псевдопластической жидкости. Известно, что высокочастотные колебания полости с жидкостью в неоднородном поле температуры вызывают вибрационно-конвективные течения, в котором все физические поля разделяются на пульсационную и осредненную компоненты. Когда период колебаний много меньше всех гидродинамических времен, а амплитуда смещения в некотором смысле мала, возможно применение метода осреднения, который позволяет получить замкнутую систему уравнений для осредненных и пульсационных полей. Систематическое описание основных положений термовибрационной конвекции ньютоновской жидкости приведено в монографии [1]. Там же представлены результаты решения линейных задач устойчивости термовибрационного конвективного течения ньютоновской жидкости в бесконечном слое. Осредненные уравнения термовибрационной конвекции жидкости Уильямсона в высокочастотном приближении сформулированы в [2].

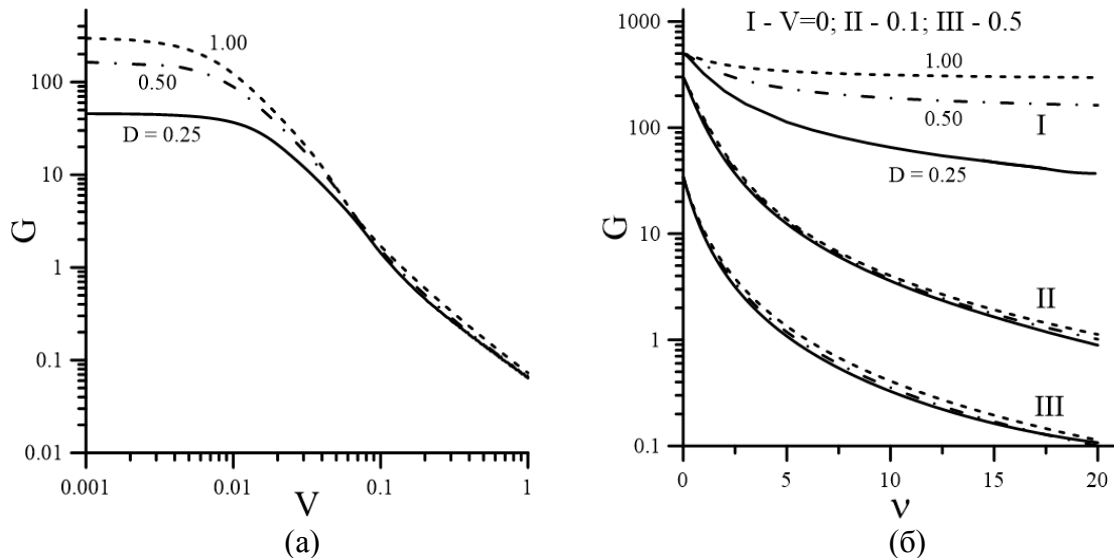
## 2. Постановка задачи и основные результаты

Рассмотрим бесконечный вертикальный слой жидкости Уильямсона толщиной  $2h$ , находящийся в поле тяжести и ограниченный твердыми идеально теплопроводными границами. На границах слоя заданы постоянные разные температуры  $\pm\theta$ . Начало координат находится в центре слоя. Ось  $z$  направлена вдоль слоя вверх, а ось  $x$  горизонтально поперек слоя. Вдоль осей  $y$  и  $z$  слой полагается бесконечным. Слой совершает линейно-поляризованные высокочастотные вибрации вдоль оси  $z$  с частотой  $\omega$  и амплитудой  $a$ .

Уравнения, описывающие стационарное плоскопараллельное течение жидкости Уильямсона в слое при наличии вибраций, и линеаризованные уравнения для малых возмущений основного состояния в терминах завихренности и функции тока приведены в работе [3], где обсуждалось влияние высокочастотных продольных вибраций на структуру основного течения. Показано, что с усилением вибрационного воздействия нелинейно-вязкие свойства жидкости перестают влиять на структуру и интенсивность основного течения псевдопластической жидкости, и оно становится похожим на течение обычной ньютоновской жидкости.

Исследуется устойчивость стационарного плоскопараллельного течения относительно нормальных периодических вдоль оси  $z$  возмущений. В качестве параметра, определяющего влияние вибраций на устойчивость течения, настоящей работе используется  $V = a\omega\mu_\infty/\rho gh^2 = \sqrt{Gv}/Gr$ , который в отличие от традиционного для данного класса задач вибрационного числа Грасгофа  $Gv = (a\omega\beta\theta\rho h/\mu_\infty)^2$  [1, 3] не зависит от характерной разности температур. Оценки показывают, что в поле тяжести Земли  $V \leq 1$ .

На (рис. 1) приведены зависимости модифицированного критического числа Грасгофа  $G = g\beta\theta\rho^2 h^3 / (\mu_\infty + AB^{-1})^2 = Gr/(1+\nu)^2$  от вибрационного параметра  $V$  и параметра неньютоновости  $\nu = A/(\mu_\infty B)$  для числа Прандтля  $Pr = \mu_\infty/(\chi\rho)$ , равного единице, и нескольких значений безразмерного реологического параметра  $D = A/(g\beta\theta\rho h)$ .



**Рис. 1.** Зависимость модифицированного критического числа Грасгофа от вибрационного параметра для  $\nu = 16$  (а) и от параметра неньютоновости (б). Ньютоновской жидкости на фрагменте (а) соответствует кривая  $D = 0$ , а на фрагменте (б) точки при  $\nu = 0$ .

Расчеты показали, что при малых числах Прандтля наиболее опасными являются монотонные гидродинамические моды возмущений, а с увеличением  $Pr$  на первый план выходят тепловые колебательные моды. Критические модифицированные числа Грасгофа для колебательных мод возмущений, для которых расчеты проводились при  $Pr = 100$ , существенно меньше, чем для монотонных мод, однако, зависимости имеют характер, аналогичный представленным на рисунке 1. Усиление интенсивности вибраций приводит к дестабилизации течения. При  $V \geq 0.1$  критические значения  $G$  для различных значений реологического параметра  $D$  мало отличаются друг от друга. Усиление псевдопластических свойств жидкости приводит к дестабилизации основного течения, но течение жидкостей с большим  $D$  оказывается более устойчивым.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 14-21-00090).

### Список литературы

1. Gershuni G.Z., Lyubimov D.V. Thermal Vibrational Convection. N.Y. et al.: Wiley, 1998. 358 p.
2. Перминов А.В. Устойчивость жесткого состояния обобщенной ньютоновской жидкости // МЖГ. 2014. Т. 49, № 2. С. 6–15. <http://dx.doi.org/10.1134/S0015462814020033>.
3. Перминов А.В., Любимова Т.П. Устойчивость термовибрационной конвекции псевдопластической жидкости в плоском вертикальном слое // Вычисл. мех. сплош. сред. 2017. Т.10, №1. С. 78–90.

## **Два подхода к изучению параметров состояния упругих тел вблизи особых точек**

**В. М. Пестренин<sup>а</sup>, И. В. Пестренина<sup>а</sup>, Л. В. Ландик<sup>а</sup>**

<sup>а</sup> Пермский государственный национальный исследовательский университет  
614990, Пермь, ул. Букирева, 15  
email: pestreninvm@mail.ru

Рассматриваются два (приводящие к различным результатам) подхода к изучению напряженно деформированного состояния вблизи особых точек деформируемых тел – классический и неклассический. В классическом подходе особая точка считается математической. Параметры состояния в ней не определены. Их асимптотические значения не имеют механического содержания, так как не существует отвечающего им элементарного объема. Достоверность классических решений ограничена областью вне малой окрестности особой точки. В неклассическом подходе особая точка отождествляется с представительным объемом тела. В такой точке параметры состояния определены и подчинены задаваемым ограничениям. Количество таких ограничений превышает количество ограничений в точках границы классической задачи. Приводятся примеры вычислений параметров состояния в особых точках упругих элементов конструкции при силовой и температурной нагрузке.

**Ключевые слова:** особая точка; неклассическая задача; концентрация напряжений

## **Two ways to the studying of the elastic bodies stress state in the singular points vicinity**

**V.M. Pestrenin<sup>a</sup>, I.V. Pestrenina<sup>a</sup>, L.V. Landik<sup>a</sup>**

<sup>a</sup> Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm  
email: pestreninvm@mail.ru

Article is dedicated to the two methods (leading to different results) of stress-strain state study in the neighbourhood of the singular points of deformable bodies comparison. First method is classical, second – non-classical. In the classical approach the singular point is considered to be mathematical. State parameters are not defined in it. Their asymptotic values do not have a mechanical content, because there is no elementary volume corresponding to them. The reliability of classical solutions is limited by the area outside a small neighbourhood of a singular point. In the non-classical approach the singular point is identified with a representative volume of the body. In this case point state parameters may be defined and are subjected by the restrictions. The number of these restrictions exceeds the number of constraints on the boundary in the classical case. Examples of the state parameters computing at the singular points of the elastic construction elements with the force and thermal loading are shown.

**Keywords:** singular point; non-classical problem; stress concentration

Особые точки упругих тел – это вершина трещин, клиньев, конусов, пирамид, линии пересечения образующих поверхностей (ребра), точки края линий (поверхностей) соединения составных элементов конструкций и т.п. Вблизи особых точек деформируемых тел оказываются весьма значительными коэффициенты концентрации напряжений, поэтому изучение параметров состояния в окрестностях таких особенностей вызывает большой интерес авторов, исследования которых базируются на различных подходах: классическом и неклассическом.

**Классический подход** основан на допущениях:

а) особая точка является математической (не представительным объемом, не материальной);

б) на сколь угодно малом расстоянии от особой точки состояние тела описывается макроскопической моделью.

Принимаемые допущения позволяют построить лишь асимптотическое решение. Как правило, авторы разыскивают не параметры состояния в математической особой точке, а показатели сингулярности – параметры решения характеристических уравнений однородных задач. Полагается, что при выполнении критериев, накладываемых на показатели сингулярности, напряжения при приближении к особой точке неограниченно возрастают. Отметим особенности классического подхода.

1. Представление об особой точке как математической не согласуется с постулатом механики сплошной среды о точке как представительном объеме.

2. Условия о сингулярном поведении решения, принимаемые на основе значений показателей сингулярности, не являются достаточными условиями. Имеются примеры, в которых выполняются критерии, но отсутствует сингулярное поведение решения в окрестности особой точки.

В частности, при растяжении составной прямоугольной пластинки распределенной нагрузкой  $\sigma_0$ , приложенной перпендикулярно линии скрепления составляющих элементов. Критерием [1] сингулярного поведения решения в окрестности точки края линии соединения является условие  $0 < \text{Re } \lambda_k < 1$ , где  $\lambda_k$  — корень характеристического уравнения

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 0 & -(\lambda+1) & 0 & -1 & 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda-1 & 0 & -1 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & -(\alpha+1) & 0 & \beta-\alpha & 0 & 1-\beta+\lambda(\alpha-\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-\alpha+1) & 0 & \beta-\alpha & 0 & 1-\beta-\lambda(\alpha-\beta) \\ \cos a_1 & \sin a_1 & -(\lambda+1)\cos b_1 & (\lambda+1)\sin b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin a_1 & \cos a_1 & (\lambda-1)\sin b_1 & (\lambda-1)\cos b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin a_2 & \cos a_2 & (1-\lambda)\sin b_2 & (\lambda-1)\cos b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos a_2 & \sin a_2 & (1+\lambda)\cos b_2 & (\lambda+1)\sin b_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (1)$$

Здесь  $a_i = (\lambda+1)\gamma_i, b_i = (\lambda-1)\gamma_i, \alpha = \frac{\Gamma(k_1+1) - (k_2+1)}{\Gamma(k_1+1) + (k_2+1)}, \beta = \frac{\Gamma(k_1-1) - (k_2-1)}{\Gamma(k_1+1) + (k_2+1)}$  —

комбинированные параметры упругих постоянных материалов, где  $k_i = 3 - 4\nu_i, \Gamma = G_2 / G_1, G_i = E_i / 2(1 + \nu), (\nu_i, G_i$  — коэффициенты Пуассона и модели сдвига материалов),  $i=1,2$ . В условиях плоской деформации при материальных параметрах скрепляемых тел  $E_i = 0.206e12$  Па,



$E_2 = 0.17304e12$  Па,  $\nu_1 = 0.3$ ,  $\nu_2 = 0.26$  существует корень характеристического уравнения (1)  $\lambda_1 = 0.73784$ . Выполняется критерий сингулярного поведения решения при стремлении  $r$  к точке  $A$ , однако сингулярное поведение решения не реализуется, так как однородное напряженное состояние  $\sigma_{22} = \sigma_0$ ,  $\sigma_{ij} = 0$ , ( $i \neq 2, j \neq 2$ ) удовлетворяет всем уравнениям линейной теории упругости и, следовательно, является единственным решением рассматриваемой задачи.

3. На расстояниях от особой точки, соизмеримых с характерным размером представительного объема тела, применение макроскопических уравнений представляется некорректным, так как здесь должен рассматриваться более низкий уровень структуры тела с соответствующей ему математической моделью.

Отмеченные особенности математически безупречных методов классического подхода применительно к реальным телам ограничивают достоверность получаемых решений областью вне малой окрестности особой точки.

**Неклассический подход** к исследованию напряженно деформированного состояния (НДС) непосредственно в особых точках и их окрестностях основан на концепции особой точки как представительного объема (материальной точки) тела. Такой подход согласуется с постулатами механики сплошных сред. При этом в особой точке становятся определенными параметры состояния. Формулируются ограничения на эти параметры (в частности, граничные условия), которым должно удовлетворять решение. Такие ограничения представляют собой систему алгебраических уравнений. Изучение этих уравнений позволяет адекватно поставить задачу механики деформируемого твердого тела (МДТТ) для тела с особой точкой, выявить критические сочетания материальных и геометрических параметров рассматриваемого элемента конструкции, часто полностью описать НДС в этой точке. При этом необычность (уникальность) особой точки проявляется в избыточности, по сравнению с граничной точкой в классической задаче, задаваемых в ней ограничений. Это обстоятельство делает задачу МДТТ для тела с особой точкой неклассической. Для неклассических задач механики упругих тел с особыми точками справедлива теорема единственности при условии существования решения и разработан численно аналитический итерационный метод его нахождения [2–4]. В докладе рассматриваются неклассические задачи однородных и составных плоских клиньев, однородных и составных пространственных ребер, внутренних особых точек в плоских элементах конструкций.

### Список литературы

1. Матвеев В.П., Федоров А.Ю. Оптимизация геометрии составных упругих тел как основа совершенствования методик испытаний на прочность клеевых соединений // Вычислительная механика сплошных сред. 2011. Т.4. №4. С.63–70.
2. Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В. Итерационный конечно-элементный алгоритм исследования напряженного состояния элементов конструкций с особыми точками и его реализация // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2015. № 4. С. 171–187.
3. Pestrenin V. M., Pestrenina I. V., Landik L. V. Nonstandart problems for structural elements with spatial composite ribs // Mechanics of Composite Materials. 2015. Vol. 51. No. 4. –P.489–504.
4. Pestrenin V. M., Pestrenina I. V. Constraints on stress components at the internal singular point of an elastic compound structure // Mechanics of Composite Materials. 2017. Vol. 53, No. 1. P.107–116.

## **Бистабильные явления в антиферромагнитных жидких кристаллах**

**Д. А. Петров, Д. В. Семенов**

Пермский государственный национальный исследовательский университет  
614990, Пермь, ул. Букирева, 15  
email: dvsemen93@gmail.com

Изучены ориентационные переходы в ферронематике – высокодисперсной суспензии магнитных частиц в нематическом жидком кристалле с равновесным распределением магнитных моментов частиц параллельно и антипараллельно директору (антиферромагнитный жидкий кристалл). Рассмотрена модифицированная форма энергии ориентационного взаимодействия примесных феррочастиц с жидкокристаллической матрицей, допускающая бистабильное сцепление. Показано, что в магнитном поле ферронематик может находиться в двух однородных состояниях: начальная антиферромагнитная фаза и однородная ферримагнитная фаза. Аналитически получены выражения для пороговых полей переходов между однородными и неоднородными ориентационными фазами ферронематика. Установлено, что в результате бистабильного сцепления директора и намагниченности возможен переход суспензии из антиферромагнитной фазы в однородную ферримагнитную фазу, минуя неоднородное состояние ферронематика.

**Ключевые слова:** жидкий кристалл; ферронематик; магнитная суспензия; мягкое сцепление; ориентационные переходы; бистабильность

## **Bistable phenomena in the antiferromagnetic liquid crystals**

**D. A. Petrov, D. V. Semenov**

Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm  
email: dvsemen93@gmail.com

The orientation transitions in ferronematics, i.e. the high-dispersity suspension of magnetic particles in nematic liquid crystals with the equal numbers of magnetic particles with magnetic moments oriented in parallel and antiparallel to local director (antiferromagnetic liquid crystal) are studied. The modified form of the orientational interaction energy of impurity particles with the liquid crystal matrix accepting the bistable surface anchoring is considered. It is showed that in the presence of magnetic field ferronematic is able to be in two uniform states: the initial antiferromagnetic phase and the uniform ferrimagnetic phase. The expressions for threshold fields of transitions between the uniform and non-uniform orientation phases of ferronematic are obtained analytically. It is determined that because of bistable coupling of director and magnetization there is transition of the suspension from antiferromagnetic to ferrimagnetic phase without non-uniform state of ferronematic.

**Keywords:** liquid crystal; ferronematic; magnetic suspension; soft coupling; orientational transitions; bistability

Рассмотрим ферронематик (ФН), находящийся в плоской ячейке толщиной  $L$ . Ось  $x$  системы координат направим параллельно ограничивающим пластинам, ось  $z$  – перпендикулярно им, начало координат выберем в центре слоя. Будем полагать, что имеется жесткое планарное сцепление директора с границами слоя, так что направление директора на границе фиксировано и совпадает с осью легкого ориентирования  $\mathbf{n}_0 = (1, 0, 0)$ . Будем считать сцепление молекул жидкого кристалла (ЖК) с поверхностью феррочастиц мягким и планарным. Направим магнитное поле  $\mathbf{H} = (0, 0, H)$  перпендикулярно границам слоя. Возникающее в поле искажение ориентационной структуры ФН в равновесии отвечает минимуму свободной энергии [1, 2]

$$F = \iiint_V (F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5) dV. \quad (1)$$

$$F_1 = \frac{K_1}{2} (\operatorname{div} \mathbf{n})^2 + \frac{K_2}{2} (\mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{n})^2 + \frac{K_3}{2} (\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{n})^2, \quad F_2 = -\frac{\chi_a}{2} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H})^2, \quad F_3 = -M_s (f_+ - f_-) \mathbf{m} \mathbf{H},$$

$$F_4 = \frac{k_B T}{v} (f_+ \ln f_+ + f_- \ln f_-), \quad F_5 = \frac{W}{d} (f_+ + f_-) (\mathbf{n} \times \mathbf{m})^2 [1 - \zeta (\mathbf{n} \times \mathbf{m})^2],$$

где  $K_1, K_2, K_3$  – упругие модули Франка,  $\mathbf{n}$  – директор ЖК,  $\mathbf{m}$  – единичный вектор намагниченности,  $\chi_a > 0$  – анизотропия диамагнитной восприимчивости нематика,  $M_s$  – намагниченность насыщения материала феррочастиц,  $f_+$  и  $f_-$  – объемные доли частиц с магнитными моментами  $\boldsymbol{\mu}_+ = M_s v \mathbf{m}_+$  и  $\boldsymbol{\mu}_- = M_s v \mathbf{m}_-$ , направленными параллельно и антипараллельно локальному директору  $\mathbf{n}$  соответственно,  $k_B$  – постоянная Больцмана,  $T$  – температура,  $v$  – объем частицы,  $W > 0$  – плотность поверхностной энергии,  $d$  – поперечный диаметр частицы,  $\zeta$  – анизотропия поверхностного сцепления примесных частиц с ЖК-матрицей [1]. Мы рассматриваем ФН, который в отсутствие магнитного поля имеет равные доли феррочастиц с магнитными моментами  $\boldsymbol{\mu}_+$  и  $\boldsymbol{\mu}_-$ . Такая суспензия является ЖК аналогом антиферромагнетика (антиферромагнитный ЖК) с нулевой суммарной намагниченностью [2]. Мы полагаем, что  $\bar{f} \ll 1$  ( $\bar{f} = Nv/V$ ,  $N$  – число магнитных частиц в суспензии,  $V$  – объем ФН), что позволяет пренебречь межчастичными магнитными диполь-дипольными взаимодействиями в суспензии. Использование модифицированного потенциала  $F_5$ , предложенного в работе [1], дает возможность исследовать бистабильные явления в ФН, приводящие к скачкообразному изменению ориентации директора и намагниченности.

Для рассматриваемой геометрии выражения для  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{m}$  можно искать в виде

$$\mathbf{n} = [\cos \varphi(z), 0, \sin \varphi(z)], \quad \mathbf{m} = [\cos \psi(z), 0, \sin \psi(z)], \quad (2)$$

где  $\varphi(z), \psi(z)$  – углы отклонения директора и намагниченности от оси легкого ориентирования  $\mathbf{n}_0$  соответственно.

Введем безразмерные параметры: координату  $\tilde{z} = z/L$ , напряженность магнитного поля  $h = HL(\chi_a/K_1)^{1/2}$ , приведенную объемную долю магнитных частиц в суспензии

$g_{\pm} = f_{\pm}/\bar{f}$ , а также  $b = M_s \bar{f} L / (K_1 \chi_a)^{1/2}$ ,  $\sigma = L^2 W \bar{f} / (K_1 d)$ ,  $\kappa = k_B T \bar{f} L^2 / (K_1 \nu)$  и  $k = K_3 / K_1$  [2].

Следуя работе [2], после обезразмеривания и минимизации свободной энергии (1) относительно  $\varphi(\tilde{z})$ ,  $\psi(\tilde{z})$  и  $g_{\pm}(\tilde{z})$ , можно получить систему уравнений ориентационного и магнитного равновесия ФН, которая допускает два однородных решения, устойчивых в ненулевых магнитных полях. Первое из них  $\varphi(\tilde{z}) = \psi(\tilde{z}) = 0$ ,  $g_{\pm}(\tilde{z}) = 1/2$  (антиферромагнитная фаза) устойчиво в полях  $0 \leq h \leq h_c$ , где  $h_c$  определяется формулой

$$\pi^2 = h_c^2 \left( 1 + \frac{2\sigma b^2}{2\sigma\kappa - b^2 h_c^2} \right). \quad (3)$$

Второе решение  $\varphi(\tilde{z}) = 0$ ,  $\psi(\tilde{z}) = \pi/2$ ,  $g_{\pm} = Q \exp(\pm bh/\kappa)$ ,  $Q = 1/2 \text{ch}(bh/\kappa)$  отвечает однородной ферромагнитной фазе с некомпенсированными магнитными подсистемами  $g_+$  и  $g_-$ , магнитные моменты которых направлены параллельно и антипараллельно магнитному полю соответственно.

Поле перехода ФН  $h_s$  из неоднородного состояния с углами  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  отличными от нуля и  $\pi/2$  в ферромагнитную фазу имеет вид

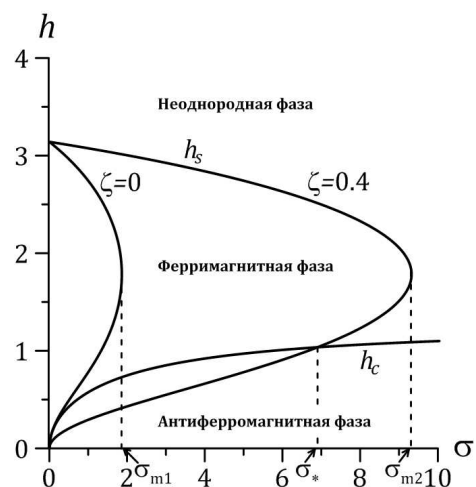
$$\pi^2 = h_s^2 + \frac{2\sigma b h_s [1 - 2\zeta]}{b h_s - 2\sigma \coth(b h_s / \kappa) [1 - 2\zeta]}. \quad (4)$$

На рисунке представлена диаграмма ориентационных фаз ФН в терминах магнитного поля и энергии сцепления  $\sigma$ . В случае обычного потенциала  $\zeta = 0$  при  $\sigma < \sigma_{m1}$  с ростом магнитного поля в ФН происходят ориентационные переходы: антиферромагнитная фаза – неоднородная фаза – ферромагнитная фаза – неоднородная фаза. Для  $\zeta = 0.4$  при  $\sigma_* < \sigma < \sigma_{m2}$  последовательность переходов остается такая же, как для случая с  $\zeta = 0$ . При  $\sigma < \sigma_*$  переход из антиферромагнитной фазы в ферромагнитную фазу происходит, минуя неоднородную фазу, т.е. с ростом магнитного поля ФН скачком намагничивается в направлении поля.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 16-32-00223).

### Список литературы

1. Burylov S. V., Zakhlevnykh A. N. . Orientational energy of anisometric particles in liquid-crystalline suspensions // Physical Review E. 2013. Vol.88, No.1. P. 012511(1–16).
2. Zakhlevnykh A. N., Petrov D. A. Magnetic field induced orientational transitions in soft compensated ferronematics // Phase Transitions, 2014. Vol. 87, P. 1–18.



Пороговые поля  $h_c^-$  и  $h_s$  как функции энергии сцепления  $\sigma$  для  $b = 5$ ,  $\kappa = 5$ ,  $\zeta = 0.4$ .

## Определение полей ориентационных переходов в жидкокристаллических суспензиях углеродных нанотрубок

Д. А. Петров, П. К. Скоков

Пермский государственный национальный исследовательский университет  
614990, Пермь, ул. Букирева, 15  
email: skokovpk@gmail.com

В рамках континуальной теории изучены индуцированные постоянным магнитным полем ориентационные переходы в суспензии углеродных нанотрубок на основе нематического жидкого кристалла. Аналитически получены выражения для полей переходов между сосуществующими ориентационными фазами суспензии.

**Ключевые слова:** жидкий кристалл; углеродные нанотрубки; мягкое сцепление; ориентационные переходы

## Defining of orientational transition fields in liquid-crystalline suspensions of carbon nanotubes

D. A. Petrov, P. K. Skokov

Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm

On the basis of the continuum theory orientational transitions induced by constant magnetic field in the suspension of carbon nanotubes based on nematic liquid crystal were studied. Analytical expressions for the magnetic fields of transitions between coexisting orientation phases of the suspension were obtained.

**Keywords:** liquid crystal; carbon nanotubes; soft coupling; orientational transitions

Рассмотрим плоский слой суспензии углеродных нанотрубок (УНТ) [1] на основе нематического жидкого кристалла (НЖК) толщиной  $L$ . Начало декартовой системы координат поместим в середине слоя, ось  $x$  направим вдоль границ слоя, а  $z$  – ортогонально им. Сцепление директора НЖК  $\mathbf{n}$  с границами слоя будем полагать абсолютно жестким и планарным. Рассмотрим случай мягкого планарного сцепления директоров НЖК  $\mathbf{n}$  и УНТ  $\mathbf{m}$ , так что в отсутствие поля  $\mathbf{n} \parallel \mathbf{m}$ . Магнитное поле направим ортогонально границам слоя  $\mathbf{H} = (0, 0, H)$ .

Будем решаться задачу в рамках континуальной теории, в основе которой лежит функционал свободной энергии суспензии [2]

$$F = \int (F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6) dV, \quad (1)$$

$$F_1 = \frac{1}{2} [K_{11}(\operatorname{div} \mathbf{n})^2 + K_{22}(\mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{n})^2 + K_{33}(\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{n})^2], \quad F_2 = -\frac{1}{2} \chi_a (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H})^2,$$

$$F_3 = -\frac{1}{2} \chi_a^p f (\mathbf{m} \cdot \mathbf{H})^2, \quad F_4 = -\frac{W_p f}{d} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{m})^2, \quad F_5 = \frac{k_B T}{v} f \ln f.$$

Здесь  $K_{11}$ ,  $K_{22}$  и  $K_{33}$  – константы Франка;  $\mathbf{n}$  – директор НЖК;  $\mathbf{m}$  – директор УНТ;  $\chi_a > 0$  и  $\chi_a^p > 0$  – анизотропии диамагнитной восприимчивости НЖК и УНТ соответственно;  $f$  – объемная доля УНТ в суспензии;  $W_p > 0$  – плотность энергии сцепления ЖК-матрицы с поверхностью УНТ;  $d$  – поперечный диаметр УНТ;  $v$  – объем УНТ;  $k_B$  – постоянная Больцмана;  $T$  – температура.

Слагаемое  $F_1$  в (1) представляет плотность свободной энергии ориентационно-упругих деформаций НЖК;  $F_2$  и  $F_3$  – учитывают взаимодействие диамагнитной НЖК-матрицы и УНТ с магнитным полем соответственно;  $F_4$  – объемная плотность энергии сцепления УНТ с молекулами НЖК; слагаемое  $F_6$  учитывает вклад энтропии смешения идеального раствора УНТ в суспензии.

Удобно решать задачу в безразмерном виде, используем следующие безразмерные величины и параметры [2]: координату  $\tilde{z} \equiv z/L$ ; энергию сцепления директора НЖК с директором УНТ  $\sigma = W_p \bar{f} L^2 / K_{11} d$ ; сегрегационный параметр  $\kappa = k_B T \bar{f} L^2 / K_{11} v$ ; напряженность магнитного поля  $h = HL \sqrt{\chi_a / K_{11}}$ ; параметр  $\gamma = \bar{f} \chi_a^p / \chi_a$ , определяющий какой из квадрупольных механизмов влияния магнитного поля преобладает в суспензии (связанный с НЖК или с УНТ). Определим приведенную объемную долю УНТ в суспензии  $g = f / \bar{f}$  ( $\bar{f} = Nv/V$ ,  $N$  – число УНТ в объеме  $V$  суспензии) и параметр анизотропии ориентационной упругости  $k = K_{33} / K_{11}$ .

Для рассматриваемой геометрии директоры ЖК и УНТ можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{n} = (\cos \varphi(z), 0, \sin \varphi(z)), \quad \mathbf{m} = (\cos \psi(z), 0, \sin \psi(z)), \quad (2)$$

где углы  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  отсчитываются от оси  $x$  в направлении магнитного поля.

В результате минимизации свободной энергии (1) относительно  $\varphi$  и  $\psi$ , а также  $g$ , получим систему уравнений ориентационного и магнитного равновесия суспензии

$$\ddot{\varphi} K(\varphi) + \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 \frac{dK(\varphi)}{d\varphi} + \frac{1}{2} h^2 \sin 2\varphi - \sigma g \sin(2\varphi - 2\psi) = 0, \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \gamma h^2 \sin 2\psi + \sigma \sin(2\varphi - 2\psi) = 0, \quad (4)$$

$$g = Q \cdot \exp \left\{ \frac{\gamma h^2 \sin^2 \psi}{2\kappa} + \frac{\sigma \cos^2(\varphi - \psi)}{\kappa} \right\}, \quad (5)$$

$$Q^{-1} = \int_{-1/2}^{1/2} \exp \left\{ \frac{\gamma h^2 \sin^2 \psi}{2\kappa} + \frac{\sigma \cos^2(\varphi - \psi)}{\kappa} \right\} d\tilde{z}.$$

Отметим, что минимизация (1) по  $g$  должна проводиться с дополнительным условием постоянного числа УНТ в системе  $\int f dV = Nv$ . Здесь также было введено обозначение  $K(\varphi) = \cos^2 \varphi + k \sin^2 \varphi$ . Точкой обозначена производная по  $\tilde{z}$ .

Система уравнений (3–5) с граничными условиями  $\varphi|_{\tilde{z}=\pm 1/2} = 0$  допускает несколько однородных решений. Первому из них отвечает планарная фаза  $\varphi(\tilde{z}) \equiv \psi(\tilde{z}) \equiv 0$  и  $g(\tilde{z}) = 1$ , которая является устойчивой пока магнитное поле не превысит некоторое пороговое значение  $h_c$ . По аналогии с чистым ЖК поле  $h_c$  определяет границу перехода Фредерикса. Вблизи  $h_c$  углы  $\varphi(\tilde{z}) \ll 1$ ,  $\psi(\tilde{z}) \ll 1$ , а распределение УНТ в слое близко к однородному  $g(\tilde{z}) \approx 1$ , тогда в результате линеаризации система (3–5) примет вид

$$\ddot{\varphi} + \lambda^2 \varphi = 0, \quad \lambda^2 = h_c^2 + \frac{2\sigma\gamma h_c^2}{2\sigma - \gamma h_c^2}. \quad (6)$$

Из условия существования нетривиального решения уравнения (6) получим выражения для определения поля перехода Фредерикса

$$h_c^2 + \frac{2\sigma\gamma h_c^2}{2\sigma - \gamma h_c^2} = \pi^2. \quad (7)$$

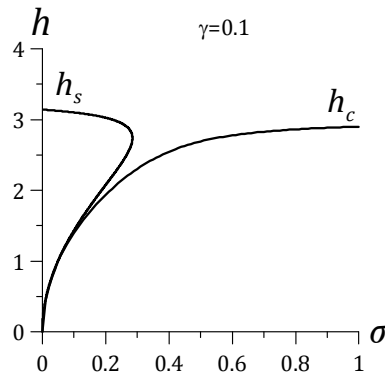
Второе однородное решение  $\varphi(\tilde{z}) \equiv 0$ ,  $\psi(\tilde{z}) \equiv \pi/2$  и  $g(\tilde{z}) = 1$  отвечает состоянию, в котором директор ЖК параллелен границам слоя, а директор УНТ ориентирован в направлении магнитного поля ( $\mathbf{n} \perp \mathbf{m} \parallel \mathbf{H}$ ) – гомеотропная фаза. Вблизи поля перехода в гомеотропную фазу  $h_s$  угол  $\varphi(\tilde{z}) \ll 1$ , а угол  $\psi$  близок к  $\pi/2$  ( $\psi(\tilde{z}) = \pi/2 - \delta\psi(\tilde{z})$ , где  $\delta\psi(\tilde{z}) \ll 1$ ). В низшем порядке разложения (3)–(5) получим

$$\ddot{\varphi} + \Lambda^2 \varphi = 0, \quad \Lambda^2 = h_s^2 - \frac{2\sigma\gamma h_s^2}{2\sigma - \gamma h_s^2}. \quad (8)$$

Из условия существования нетривиального решения уравнения (8) получим

$$h_s^2 - \frac{2\sigma\gamma h_s^2}{2\sigma - \gamma h_s^2} = \pi^2. \quad (9)$$

На (рис. 1.) представлены решения уравнений (7) и (9) для  $\gamma = 0.1$ . Кривые на рисунках определяют границы ориентационных фаз суспензии. Области под кривой  $h_c$  соответствует однородная планарная фаза. Область, ограниченная справа кривой  $h_s$ , а слева – осью ординат, отвечает гомеотропной фазе. Внешняя по отношению к кривой  $h_s$  область, находящаяся выше  $h_c$ , отвечает неоднородному состоянию, в котором угол между директорами ЖК  $\mathbf{n}$  и УНТ  $\mathbf{m}$  принимает значения от 0 до  $\pi/2$ .



**Рис. 1.** Диаграмма ориентационных фаз суспензии УНТ на основе НЖК

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 16-32-00223).

### Список литературы

1. Fujiwara M., Kawakami K., Tanimoto Y. Magnetic orientation of carbon nanotubes at temperatures of 231 K and 314K // *Molecular Physics*. 2002. Vol. 100. N. 8. P. 1085–1088. DOI: 10.1080/00268970110109501
2. Zakhlevnykh A. N., Petrov D. A. Weak coupling effects and re-entrant transitions in ferronematic liquid crystals // *Journal of Molecular Liquids*. 2014. Vol. 198. P. 223–233. DOI: 10.1016/j.molliq.2014.06.028.

## Удельная площадь поверхности раздела в тонкослойной системе двух жидкостей при поверхностном кипении

А. В. Пименова<sup>a</sup>, И. М. Газдалиев<sup>b</sup>, Д. С. Голдобин<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup> Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013, Пермь, ул. Ак. Королева, 1  
email: anastasiya.pimenova@gmail.com

<sup>b</sup> Пермский государственный национальный исследовательский университет,  
614990, Пермь, ул. Букирева, 15

Для хорошо перемешанных многофазных жидкостных систем важной характеристикой состояния является удельная площадь контакта жидкостей  $S_V$ . В частности, эта характеристика важна при описании процесса поверхностного кипения двух несмешивающихся жидкостей. В данной работе найдена зависимость параметра  $S_V$  от макроскопического среднего перегрева системы  $\langle\Theta\rangle$  относительно температуры закипания. Результаты получены в приближении тонких слоев, когда потенциальная энергия поднимающегося пузырька мала по сравнению с энергией поверхностного натяжения.

**Ключевые слова:** поверхностное кипение; многофазные системы; несмешивающиеся жидкости.

## Specific interface area in a thin layer system of two immiscible liquids with vapour generation at the contact interface

A. V. Pimenova, I. M. Gazdaliev<sup>b</sup>, D. S. Goldobin<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup> Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Ak. Koroleva str. 1, 614013, Perm  
email: anastasiya.pimenova@gmail.com

<sup>b</sup> Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm

For well-stirred multiphase fluid systems the mean interface area per unit volume, or “specific interface area”  $S_V$ , is a significant characteristic of the system state. In particular, it is important for the dynamics of systems of immiscible liquids experiencing interfacial boiling. We estimate the value of parameter  $S_V$  as a function of the average system overheat  $\langle\Theta\rangle$  above the interfacial boiling point. The final results of this paper are restricted to the case of thin layers, where the potential gravitational energy of bubbles leaving the contact interface is small compared to their surface tension energy.

**Keywords:** direct contact boiling, multiphase system, immiscible liquids.

### 1. Введение

Одной из важных характеристик состояния системы несмешивающихся жидкостей является удельная площадь контакта жидкостей  $S_V = \delta S / \delta V$ . В частности, эта ха-



рактеристика важна при рассмотрении процесса кипения двух несмешивающихся жидкостей [1]. В данной работе рассматривается процесс парообразования между двумя тонкими слоями несмешивающихся жидкостей. Объемы обеих компонент предполагаются соизмеримыми, то есть ни одна фаза не является преобладающей.

## 2. Энергетический баланс в системе

Так как теплота фазового перехода велика по сравнению с кинетической энергией микроскопического движения и потенциальной энергией в поле силы тяжести (см. [2]), можно считать, что все тепло, поступающее в систему, тратится на парообразование:

$$Q_{V,t}V \rightarrow (\Lambda_1 n_1^{(0)} + \Lambda_2 n_2^{(0)})V_{V,t} \quad (1)$$

где  $Q_{V,t} = \delta Q / (\delta V \delta t)$  — приток тепла на единицу объема,  $V$  — объем системы,  $V_{V,t}$  — объем пара, выделяемый за единицу времени,  $\Lambda_j$  — теплота парообразования в расчете на одну частицу,  $n_j^{(0)}$  — концентрация насыщенных паров жидкостей.

Срывающийся с поверхности контакта пузырек, поднимаясь и лопаюсь, вносит в систему дополнительную механическую энергию  $E_{bub}$ . В статистически стационарном состоянии вся энергия, вносимая пузырьком, рассеивается вязкими силами:

$$E_{bub} \frac{V_{V,t}}{V_{bub}} \rightarrow W_{l,k,t}, \quad (2)$$

где  $W_{l,k,t}$  — скорость вязкого рассеяния энергии,  $V_{bub}$  — характерный размер пузырька. Как было показано в работе [2],

$$W_{l,k} \sim \sigma V S_V, \quad (3)$$

где  $\sigma$  — характерное поверхностное натяжение жидкостей.

В данной работе рассматриваются тонкие слои жидкостей, поэтому потенциальной энергией всплывающих пузырьков можно пренебречь по сравнению с энергией поверхностного натяжения. Так как давление внутри пузырька больше атмосферного, то пузырек, лопаюсь, высвобождает дополнительную энергию  $A_{\delta V} = (c_V/c_P)V\delta P$ . Введем коэффициент  $\theta$ , показывающий, какая часть высвободившейся энергии переходит в макроскопическую механическую энергию жидкости. Тогда энергия

$$E_{bub} = 4\pi r_{bub} \sigma + \theta A_{\delta V} = \frac{3\sigma}{r_{bub}} V_{bub} \theta_\Sigma, \quad \text{где } \theta_\Sigma = 1 + \frac{2}{3} \theta \frac{c_V}{c_P}. \quad (4)$$

С учетом работы [2], уравнение (4) принимает вид

$$\frac{E_{bub}}{V_{bub}} = 3\sigma \theta_\Sigma \left(\frac{\pi}{3}\right)^{1/3} \left(\frac{\rho g}{6\eta_V}\right)^{1/9} S_V^{8/9} \left(\frac{V_{V,t}}{V}\right)^{-1/9} \quad (5)$$

С другой стороны, в работе [2] было показано, что

$$\frac{\delta W_{l,k,t}}{\delta V} \approx S_V \frac{2\rho u_*^3}{\kappa} \ln \frac{Hu_*}{2\xi_0\nu} \quad \text{и} \quad \frac{\delta W_{l,k}}{\delta V} \approx \frac{\rho u_*^2}{2\kappa^2} \ln^2 \frac{Hu_*}{2e\xi_0\nu}, \quad (6)$$

где  $\kappa \approx 0.4$ ,  $\xi_0 \approx 0.13$ ,  $\nu$  — характерная кинематическая вязкость,  $u_*$  — характерная скорость турбулентных пульсаций течения.

### 3. Параметр перемешанности $S_V$ как функция среднего перегрева системы $\langle \Theta \rangle$

Из уравнений (1), (5) и (6) следует

$$Q_{V,t} \approx (\Lambda_1 n_1^{(0)} + \Lambda_2 n_2^{(0)}) S_V^{1/8} \frac{(3\pi)^{3/8}}{(3\theta_\Sigma)^{9/8}} \left( \frac{6\eta_V}{\rho g} \right)^{1/8} \left( \frac{2\rho u_*^3}{\kappa} \ln \frac{u_*}{2\xi_0 \nu S_V} \right)^{9/8} \quad (7)$$

Зависимость между  $S_V$  и  $u_*$  может быть найдена из уравнений (6) и (3):

$$2\kappa S_V^{1/2} \sqrt{\sigma / \rho} \approx u_* \ln \frac{u_*}{2e\xi_0 \nu S_V}. \quad (8)$$

С другой стороны, приток тепла  $Q_{V,t} = 2q_T S_V$ , где  $q_T \approx \kappa \rho c_p u_* \langle \Theta \rangle / [\beta \ln(u_*/2\nu S_V)]$ ,  $\beta \approx 0.9$ ,  $\langle \Theta \rangle$  — средний перегрев системы относительно температуры поверхностного закипания (см. [2]), что можно переписать как

$$Q_{V,t} \approx S_V \frac{2\kappa \rho c_p u_* \langle \Theta \rangle}{\beta \ln[u_*/(2\nu S_V)]} \quad (9)$$

Система уравнений (7)–(9) представляет собой замкнутую систему уравнений для  $S_V$ ,  $u_*$  и  $Q_{V,t}$ . Исключая из нее  $u_*$ , можно найти связь между  $S_V$  и притоком тепла  $Q_{V,t}$ :

$$S_V = \alpha_{\Theta_1}^{4/5} \langle \Theta \rangle^{16/5} F_{7/5,\infty} \left( \frac{\alpha_{\Theta_2}}{\alpha_{\Theta_1}^{7/5}} \langle \Theta \rangle^{-8/5} \right); \quad F_{7/5,n}(Z) \equiv \ln^{4/5} \underbrace{(Z \ln^{-7/5} (\dots Z \ln^{-7/5} (Z) \dots))}_{(n-1)\text{раз}},$$

где

$$\alpha_{\Theta_1} = \frac{1}{2\kappa} \left( \frac{3\theta_\Sigma}{4} \right)^{9/2} \left( \frac{\pi}{3} \right)^{3/2} \left( \frac{\rho^2 g}{6\eta_V \sigma} \right)^{1/2} \left( \frac{\rho^2 c_p}{\beta(\Lambda_1 n_1^{(0)} + \Lambda_2 n_2^{(0)})} \right)^4 (\rho\sigma)^{-17/4},$$

$$\alpha_{\Theta_2} = \frac{1}{2e\xi_0 \nu} \left( \frac{3\theta_\Sigma}{4} \right)^{9/2} \left( \frac{\pi}{3} \right)^{3/2} \left( \frac{\rho g}{6\eta_V} \right)^{1/2} \left( \frac{\rho^2 c_p}{\beta(\Lambda_1 n_1^{(0)} + \Lambda_2 n_2^{(0)})} \right)^4 (\rho\sigma)^{-17/4},$$

Для величин  $Z$ , соответствующих реальным системам, функция  $F$  быстро сходится по мере увеличения  $n$ : функция  $F_{7/5,2}(Z)$  отличается от  $F_{7/5,\infty}(Z)$  менее, чем на 1%.

### 4. Заключение

В работе найдена зависимость удельной площади контакта двух несмешивающихся жидкостей, испытывающих поверхностное парообразование, от величины среднего перегрева системы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 15-01-04842).

### Список литературы

1. Pimenova A. V., Goldobin D. S. Boiling of the interface between two immiscible liquids below the bulk boiling temperatures of both components // European Physical Journal E. 2014. Vol. 37. P. 108.
2. Goldobin D. S., Pimenova A. V. Specific interface area and self-stirring in a two-liquid system experiencing intense interfacial boiling below the bulk boiling temperatures of both components // E-print arXiv:1606.09520. 2016.

## **О некоторых численно-аналитических алгоритмах решения задач стохастической механики сплошных сред**

**И. Е. Полосков**

Пермский государственный национальный исследовательский университет,  
614990, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, 15,  
email: polosk@psu.ru

Рассматриваются вопросы, связанные с моделированием и анализом стохастических явлений в распределенных системах, описываемых дифференциальными и интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных. Дан обзор основных существующих аналитических, приближенных и приближенно аналитических методов решения задач стохастической механики сплошной среды. Представлены наши методики, основанные на использовании понятия функционала плотности вероятности, формализации перехода от сплошной среды к дискретной и обратно, расширения пространства состояний, использования функций Христовой и др., принципы их практической реализации, включающие использование пакетов компьютерной алгебры, и результаты исследования некоторых моделей механики твердого деформируемого тела, вязкоупругости, экологии и т.п.

**Ключевые слова:** стохастическая механика; моделирование; методы исследования; численно-аналитические расчеты; (вязко) упругость; математическая физика

## **On some symbolic and numerical algorithms to solve problems of stochastic continuous media mechanics**

**I. E. Poloskov**

Perm State University, 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia,  
email: polosk@psu.ru

We consider issues concerned with modeling and analysis of stochastic phenomena in distributed systems described by partial differential and integro-differential equations. A review of the main existing analytical, approximate and approximately analytical methods for solving problems of stochastic continuum mechanics is given. We give a survey of our methods. These methods are based on a usage of the probability density functional, a formalization of transition from a continuous medium to a discrete one and back, an extension of the state space, an employment of the Christov's functions, etc. Then we explain principles of their practical implementation including the use of computer algebra packages and some results of examination for a number of models of mathematical physics, mechanics of deformable solids, viscoelasticity, ecology and so forth.

**Keywords:** stochastic mechanics; modeling; research methods; symbolic and numerical calculations; (visco) elasticity; mathematical physics

Быстрый рост вычислительных мощностей дает возможность моделировать и прогнозировать сложные физические процессы, происходящие в технике, природе и обществе. Между тем в математических моделях большинства реальных процессов мы сталкиваемся с неопределенностью из-за неполноты моделей, ошибок измерений и отсутствия знаний.

Стохастические (интегро-)дифференциальные уравнения в частных производных (С(И)ДУвЧП) [1]

$$\frac{\partial U(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t, U'_x(\mathbf{x}, t), U''_{xx}(\mathbf{x}, t), \dots) + \left\langle \int_{t_0}^t \mathbf{h}(\mathbf{x}, t, U'_x(\mathbf{x}, t), U''_{xx}(\mathbf{x}, t), \dots) dt + \right\rangle \\ + \mathcal{G}(\mathbf{x}, t, U'_x(\mathbf{x}, t), U''_{xx}(\mathbf{x}, t), \dots) V(\mathbf{x}, t), \quad U(\mathbf{x}, t_0) = U_0(\mathbf{x}),$$

где  $t$  – время;  $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$ ;  $U(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{R}^N$  – вектор состояния;  $U_0(\mathbf{x})$  – случайное поле с известными характеристиками;  $\mathbf{f}(\dots)$ ,  $\mathbf{h}(\dots)$  и  $\mathcal{G}(\dots)$  – заданные неслучайные функции;  $V(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{R}^M$  – вектор независимых пространственно-временных белых шумов, дают возможность включения внешних и/или внутренних возмущений в математические модели для последующего компьютерного моделирования.

Случайные явления в системах с распределенными параметрами вызывают значительный интерес исследователей. Например, большое число работ посвящено анализу напряженно-деформируемого состояния и вибраций пластин, оболочек и упругих стержней, машиностроительных конструкций, транспортных систем; изучению стохастических режимов химической технологии, движения волн в случайно неоднородных средах и др.

Методы анализа стохастических аналогов классических линейных уравнений математической физики (параболических, гиперболических, колебаний балок, пластин и др.) [2,3] основаны на разложении решений уравнений в ряды по неслучайным собственным функциям соответствующих задач. При этом возможны два варианта: а) явное представление решений в виде рядов Фурье; б) расчет зависящих от времени коэффициентов при собственных функциях как решений систем обыкновенных ДУ (ОДУ). В обоих вариантах далее следует вычисление необходимых вероятностных характеристик решений исходных задач по стандартным формулам теории случайных процессов [1].

При решении несложных нелинейных задач, когда с достаточной точностью можно воспользоваться собственными функциями линеаризованных уравнений, схема решения соответствует второму варианту, рассмотренному в предыдущем абзаце. При этом основные трудности связаны с построением системы нелинейных стохастических ОДУ (СОДУ) для коэффициентов разложения высокого порядка, что необходимо для получения приближенного решения исходной задачи с требуемой точностью.

При изучении линейных систем с распределенными параметрами, как правило, ограничиваются использованием методов корреляционного анализа. При анализе же нелинейных объектов одним из наиболее часто применяемых подходов является трактовка движений таких систем как векторных марковских процессов. Но для использования теории таких процессов требуется предварительная дискретизация задачи и редукция к конечному числу степеней свободы, что вносит в задачу необратимую погрешность. Другим инструментом решения подобных задач является использование характеристических функционалов (ХФ).

Как и при анализе СОДУ, методы статистического моделирования (МСМ) [4] являются самыми общими, наиболее распространенным и применимыми для численного анализа любых стохастических систем с распределенными параметрами. Реализации МСМ концептуально просты и удобны в использовании. Но несмотря на значительные

усилия специалистов в направлении повышения их эффективности и универсальности основным недостатком МСМ остается необходимость выполнения огромного объема расчетов.

Кроме перечисленных, можно отметить следующие приближенные методы исследования СДУвЧП [1]: применение полиномиальных хаотических разложений и регулярных ортогональных разложений (включающих разложения Карунена–Лоэва, анализ главных компонент, сингулярные разложения), стохастических интеграторов, случайных сплайнов, разложений Неймана; стохастические методы конечных элементов и разностей, Галеркина, конечных объемов, коллокаций, граничных элементов; методы моментов, вейвлетов, прямых, частиц, усреднения и др. Обзор известных алгоритмов анализа СИДУвЧП можно найти в [5].

Применяемые нами методики базируются на использовании понятия функционала плотности вероятности, формализации перехода от сплошной среды к дискретной и обратно, расширении пространства состояний, использовании функций Христова и др., а их практическая реализация основана на широком использовании пакетов компьютерной алгебры, что позволило получить интересные результаты при исследовании ряда моделей математической физики, механики твердого деформируемого тела, вязкоупругости, экологии и т.п.

Публикация подготовлена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-01-96019).

#### **Список литературы**

1. *Полосков И. Е.* Стохастический анализ динамических систем [Электронный ресурс]: монография. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2016.
2. *Болотин В. В.* Случайные колебания упругих систем. М.: Наука, 1979.
3. *Elishakoff I.* Probabilistic theory of structures. Mineola (NY): Dover, 1999.
4. *Kalos M. H., Whitlock P.A.* Monte Carlo methods. 2nd ed. Weinheim: Wiley, 2008. 215 p.
5. *Soize C., Poloskov I.* Time-domain formulation in computational dynamics for linear viscoelastic media with model uncertainties and stochastic excitation // *Computers & Mathematics with Applications*. 2012. Vol.64, № 11. P.3594–3612.

## **Влияние граничных условий на глубину гистерезиса режима конвективного вихревого течения в наклоняемой прямоугольной полости**

**А. Н. Полудницин<sup>а</sup>, А. Н. Шарифулин<sup>б</sup>**

<sup>а</sup> Пермский государственный национальный исследовательский университет  
614990, Пермь, ул. Букирева, 15

email: panam.48@mail.ru

<sup>б</sup> Пермский национальный исследовательский политехнический университет,  
614990, Пермь, Комсомольский проспект, 29

email: sharifulin@bk.ru

Статья посвящена исследованию гистерезиса стационарных режимов конвекции в закрытом, нагретом снизу и наклонном квадратном цилиндре, заполненном воздухом для случаев теплоизолированных и идеально теплопроводящих боковых стенок. Поля температуры и скорости получены с использованием метода сеток для наклонов от горизонтального положения до 30 градусов в диапазоне чисел Рэлея до 20-кратного превышения его критического значения. Величина углового интервала области, в которой могут существовать две различные моды (аномальная и нормальные) течения в цилиндре с теплоизолированными стенками, была получена примерно в 3 раза больше, чем в цилиндре с теплопроводящими стенками. В случае теплопроводящих стенок максимальный угол существования аномального вихревого потока достигал  $7,7^\circ$  при 3,3-кратном превышении критического значения числа Рэлея.

**Ключевые слова:** гистерезис; тепловая конвекция; наклон

## **Influence of boundary conditions on the depth of the hysteresis of the regime of convective vortex flow in an inclined rectangular region**

**A. N. Poludnitsin<sup>а</sup>, A. N. Sharifulin<sup>б</sup>**

<sup>а</sup> Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm

email: panam.48@mail.ru

<sup>б</sup> Perm National Research Polytechnic University, Komsomolsky pr. 29, 614990, Perm

email: sharifulin@bk.ru

The article is dedicated to the study of hysteresis of stationary convection regimes in a closed, heated from below and tilted square cylinder filled with air for cases of heat-insulated and perfectly heat-conducting sidewalls. The temperature and velocity fields were obtained using grid method for inclinations from a horizontal position up to 30 degrees in the range of Rayleigh numbers up to 20-fold excess of its critical value. The size of region angular interval in which can exist two different

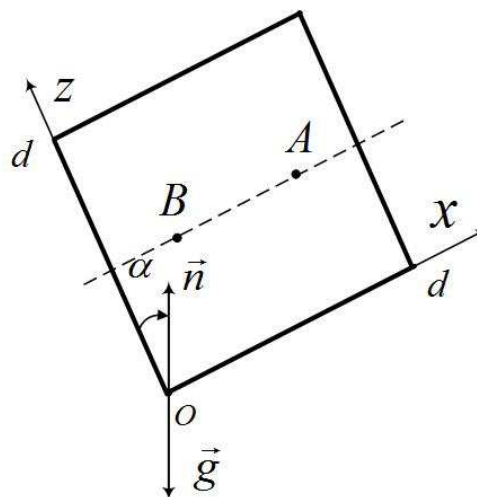
modes (anomalous and normal) of flow in the cylinder with the heat-insulated walls was established to be about 3 times greater than that in the cylinder with the heat-conducting ones. In the case of the heat-conducting walls the maximum angle of the anomalous -flow existence reached 7.7 degrees at a 3.3-fold excess of the critical value of Rayleigh number.

**Keywords:** hysteresis; thermal convection; inclination

В ряде технических устройств возникает необходимость управления потоком тепла в замкнутых полостях с распределенными источниками тепла на стенках. Известно, что в камерах заполненных воздухом при наличии разности температур между двумя противоположными изотермическими гранями возникает конвективное течение. Интенсивность и структура которого определяется не только числом Релея и формой полости, но и в значительной мере зависит от степени наклона камеры и предшествующей эволюции системы. Непрерывное изменение наклона квадратной полости около положения соответствующего подогреву снизу ( $\alpha = 0$ , см. рис.1) при докритических значениях числа Релея приводит к плавному изменению направления вращения конвективного вихря.

Однако при числах Релея превышающих критическое такое плавное изменение наклона полости приводит к скачкообразному изменению направления вращения вихря сопровождаемому гистерезисом. Такое гистерезисное поведение конвективного вихря наблюдалось в экспериментах с наклоном кубической полости [1,2]. Изменение направления вращения вала регистрировалось с помощью дифференциальных термодпар, размещенных в точках А и В.

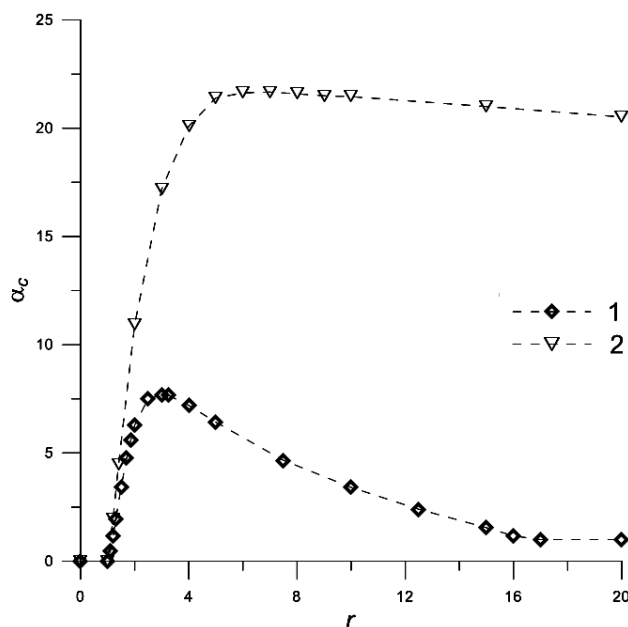
Цель настоящей работы, – является влияния теплопроводности боковых стенок ( $x = 0, d$ ) на глубину гистерезиса.



**Рис. 1.** Геометрия задачи о свободной тепловой конвекции в горизонтальном цилиндре квадратного сечения. В среднем сечении, отмеченном пунктиром, расположены точки А и В, между которыми рассчитывается перепад температуры  $dT$ . Точки находятся на расстоянии  $d/4$  от стенок

Результаты расчетов, проведенных для двух предельных случаев представлены на (рис.2.) Видно, что бифуркационные кривые отражающие глубину гистерезиса в предельных случаях теплопроводности границ имеют максимум. Он ярче выражен в случае теплопроводных стенок, но глубина гистерезиса примерно в

три раза меньше, чем в случае теплоизолированных границ и наступает при трех надкритичностях. В случае теплоизолированных границ максимум глубины гистерезиса выражен слабее и достигается позднее, примерно при шести надкритичностях. Отметим, что при ранних расчетах [3] максимум бифуркационной кривой не был обнаружен.



**Рис. 2.** Зависимости критического угла (глубины гистерезиса) от надкритичности для случая теплопроводных стенок (кривая 1) и теплоизолированных (кривая 2)

Работа была поддержана Министерством образования и науки Российской Федерации (проект No.3.6990.2017/БЧ).

### Список литературы

1. Sharifulin A.N., Poludnitsin A.N., Kravchuk A.S. Laboratory Scale Simulation of Nonlocal Generation of a Tropical Cyclone // Journal of Experimental and Theoretical Physics. 2008. Vol.107. № 6. P.1090–1093.
2. Sharifulin A. N., Poludnitsin A.N. Experimental determination of limits of existence of anomalous convective currents in tilted cube // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2014. Vol. 55. No. 3. P.462-469.
3. Cliffe, K.A., Winters K.H. A numerical study of the cusp catastrophe for Benard convection in tilted cavities // Journal of Computational Physics. 1984. Vol. 54. №. 3. P. 531–534.



## **О прямой математической модели для исследования эффекта Портевена – Ле Шателье**

**Ф. С. Попов**

Пермский национальный исследовательский политехнический университет  
614990, Пермь, пр. Комсомольский, 29  
email: popovfyodor@yandex.ru

В работе рассматривается прямой подход к моделированию неупругого деформирования поликристалла с особым вниманием к прерывистой пластичности в процессах интенсивных неупругих деформаций. Основным механизмом возникновения эффекта Портевена – Ле Шателье полагается динамическое деформационное старение. Для корректного описания эволюции и взаимодействия всех носителей деформации разрабатывается под-модель (мезоуровень-2). Сформулированы некоторые соотношения для описания эволюции плотностей дислокаций.

**Ключевые слова:** прерывистая пластичность; прямые модели; плотность дислокаций; эффект Портевена – Ле Шателье

## **On a direct mathematical model for investigation of the Porteven – Le Chatelier effect**

**F. S. Popov**

Perm National Research Polytechnic University, Komsomolsky Ave. 29, 614990, Perm  
email: popovfyodor@yandex.ru

The paper considers a direct approach to modeling inelastic deformation of a polycrystal with special attention to discontinuous plasticity in the processes of intense inelastic deformations. The main mechanism for the appearance of the Porteven-Le Chatelier effect is the dynamic deformation aging. For a correct description of the evolution and the interaction of all deformation carriers, a sub-model (meso-level-2) is developed. Some relations for describing the evolution of dislocation densities are formulated.

**Keywords:** discontinuous plasticity; direct models; the dislocation density; Porteven – Le Chatelier effect

Значительная доля технологических процессов переработки металлов и сплавов осуществляется методами обработки давлением, в ходе которых имеют место различные эффекты, как положительные, например упрочнение, так и негативные, к которым можно отнести возникновение различных неустойчивостей, в том числе – эффект Портевена – Ле Шателье (ЭПЛШ). Основываясь на физике твердого тела и экспериментальных данных можно констатировать, что возникновение ЭПЛШ связано

в первую очередь с диффузией примесных атомов и взаимодействием последних с дислокациями. Для исследования указанного эффекта в работе предлагается использовать многоуровневую модель, основанную на физической теории упруговязкопластичности.

В большинстве известных моделей, основанных на физических теориях, процесс деформирования связывают с эволюцией микроструктуры материала, где основными факторами, определяющими пластическое деформирование, является движение дислокаций, их взаимодействие друг другом и с другими дефектами (в том числе – с атомами примесей). Однако соотношения, используемые для описания данных процессов, явным образом не учитывают указанных механизмов взаимодействия, например в [1-2]. В связи с этим разработка модели для описания ЭПЛШ, включающей в рассмотрение в явном виде диффузию примесных атомов, представляется актуальной задачей.

При изготовлении современных деталей корпусов чаще всего используются металлические сплавы с неограниченной растворимостью, которые подвергаются штамповке для получения нужной формы. Однако при повышенных температурах и низких скоростях деформирования имеет место ЭПЛШ, который обуславливается процессами взаимодействия дислокаций как друг с другом, так и с атомами включенного материала в сплаве, а именно – динамическим деформационным старением.

В настоящей работе реализуется прямая модель (1-го типа [3]), позволяющая корректно учитывать взаимодействия элементов различных масштабных уровней. В рамках создания модели разрабатывается подмодель взаимодействия дислокационных структур и атомов примеси на основе механизмов мобилизации и иммобилизации дислокаций, образования барьеров. В предлагаемой работе выделены следующие типы взаимодействия дислокации с образованием дислокационных структур: генерация новых дислокаций, аннигиляция дислокаций, иммобилизация дислокаций на барьерах различной природы. Суммарная плотность дислокаций на каждой  $k$ -й системе скольжения (СС):

$$\rho^{(k)} = \rho_{m+}^{(k)} + \rho_{m-}^{(k)} + \rho_{im+}^{(k)} + \rho_{im-}^{(k)},$$

где  $\rho_m^{(k)}$  – плотность подвижных дислокаций на каждой  $k$ -й СС;  $\rho_{im}^{(k)}$  – плотность иммобильных дислокаций, которые представляют собой неактивированные дислокации;  $\rho_{m+}^{(k)}$ ,  $\rho_{m-}^{(k)}$  – плотность положительных и отрицательных мобильных дислокаций на  $k$ -й СС;  $\rho_{im+}^{(k)}$ ,  $\rho_{im-}^{(k)}$  – плотность положительных и отрицательных иммобильных дислокаций на  $k$ -й СС.

Уравнения для эволюции каждого из слагаемых для суммарной плотности дислокаций можно записать аналогично [4]:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{m\pm}^{(k)} &= \dot{\rho}_{nuc\pm}^{(k)} + \dot{\rho}_{mob\pm}^{(k)} - \dot{\rho}_{imm\pm}^{(k)} - \dot{\rho}_{m\pm}^{(k)ann} - \dot{\rho}_{m\pm im\mp}^{(k)ann}, \\ \dot{\rho}_{im\pm}^{(k)} &= \dot{\rho}_{imm\pm}^{(k)} - \dot{\rho}_{mob\pm}^{(k)} - \dot{\rho}_{m-im\pm}^{(k)ann}, \end{aligned}$$

где индексы *nuc*, *ann*, *imm* и *mob* отвечают соответственно за генерацию, аннигиляцию, остановку на препятствиях и мобилизацию дислокаций.

Основными источниками возникновения новых дислокаций считаются источники Франка-Рида, поэтому при учете зарождения дислокаций для положительных и от-

рицательных дислокаций мощность источников полагается одинаковой  $\dot{\rho}_{nuc+}^{(k)} = \dot{\rho}_{nuc-}^{(k)}$ . На основе [5] скорость зарождения дислокаций принимается пропорциональной плотности активных источников дислокаций в материале и скорости движения дислокаций, то есть чем выше плотность активных источников, тем выше скорость генерации дислокаций, поэтому скорость генерации дислокаций определяется соотношением:

$$\dot{\rho}_{nuc}^{(k)} = \rho_s^{(k)} \frac{v^{(k)}}{h_{ann}},$$

где  $\rho_s^{(k)}$  – плотность активных источников дислокаций,  $v^{(k)}$  – средняя скорость движения дислокаций по СС,  $h_{ann}$  – расстояние между вновь образованными дислокациями, при сближении дислокаций на меньшее расстояние происходит их аннигиляция, т.е. при сближении дислокаций разных знаков на одной или близких параллельных СС до критического расстояния они взаимно уничтожаются. Аннигиляция дислокаций может происходить на всех СС и зависит от плотностей дислокаций различных знаков на СС и скорости их движения, соответственно интенсивности аннигиляции дислокаций можно записать в следующем виде по аналогии с работой [6]:

$$\dot{\rho}_{m+}^{(k)ann} = \dot{\rho}_{m-}^{(k)ann} = h_{ann} \rho_{m+}^{(k)} \rho_{m-}^{(k)} (|v_{m+}^{(k)} - v_{m-}^{(k)}|),$$

$$\dot{\rho}_{im+m-}^{(k)ann} = h_{ann} \rho_{im+}^{(k)} \rho_{m-}^{(k)} |v_{m-}^{(k)}|,$$

$$\dot{\rho}_{im-m+}^{(k)ann} = h_{ann} \rho_{im-}^{(k)} \rho_{m+}^{(k)} |v_{m+}^{(k)}|.$$

Подмодель опирается на понятия плотностей дислокаций и средней скорости движения дислокаций по системам скольжения, с которыми удобно работать в рамках рассмотрения различных типов взаимодействия дислокаций. На основе разрабатываемой модели возможно рассмотрение эффекта упрочнения и других эффектов, возникающих в процессе пластического деформирования.

### Список литературы

1. Horvath G., Chinh N., Gubicza J., Lendvai J. Plastic instabilities and dislocation densities during plastic deformation in Al–Mg alloys // Materials Science and Engineering – 2007. – Vol. A 445–446. – Pp. 186–192.
2. Kubin, L. P., Estrin, Y. Evolution of dislocation densities and the critical conditions for the Portevin-Le Châtelier effect // Acta Metallurgica et Materialia. – 1990. – Vol. 38. – Pp. 697-708.
3. Трусов П.В., Швейкин А.И. Многоуровневые физические модели моно- и поликристаллов. Прямые модели // Физическая мезомеханика. – 2011. – Т.14. №5. – С.5-30.
4. Austin R. A., McDowell D. L. A dislocation-based constitutive model for viscoplastic deformation of FCC metals at very high strain rates // International Journal of Plasticity. – 2011. – Vol.27. – Pp. 1-24.
5. Davoudi K. M., Nicola L., Vlassak J. J. Dislocation climb in two-dimensional discrete dislocation dynamics // Journal of Applied Physics. – 2012. – Vol. 111(10).
6. Alankar A., Eisenlohr Ph., Raabe D. A dislocation density-based crystal plasticity constitutive model for prismatic slip in alfa-titanium // Acta Materialia – 2011. – Vol. 59. – Pp.7003–7009.

## **Динамика намагничивания и кластерный анализ магнитных жидкостей**

**А. Ф. Пшеничников**

Институт механики сплошных сред УрО РАН  
614013, Пермь, ул. Ак. Королева, 1  
email: pshenichnikov@icmm.ru

Проведен краткий анализ экспериментальных работ, выполненных в ИМСС УрО РАН в разное время и направленных на обнаружение в магнитных жидкостях наноразмерных кластеров (агрегатов). Обсуждаются реологические и диффузионные опыты, опыты по магнитофорезу и седиментации частиц во внешних силовых полях, опыты по динамике магнитной жидкости в скрещенных полях и в линейно поляризованном магнитном поле. Во всех этих случаях однозначная интерпретация экспериментальных результатов оказывается возможной только в рамках гипотезы о существовании в магнитных жидкостях коротких цепочек из 2–4 частиц или квазисферических кластеров, содержащих несколько десятков частиц каждый. Основное внимание в данной работе уделено кластерному анализу магнитных жидкостей, основанному на разложении спектра динамической восприимчивости в ряд по функциям Дебая.

**Ключевые слова:** магнитные жидкости; динамическая восприимчивость; кластерный анализ

## **Magnetization dynamics and cluster analysis of magnetic fluids**

**A. F. Pshenichnikov**

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Korolyov St. 1, 614013, Perm  
email: pshenichnikov@icmm.ru

A short analysis of experimental works performed at ICMM UB RAS at different times and targeted at tracing nano-sized clusters (aggregates) in magnetic fluids has been made. The matter of discussion is a series of experiments including rheological and diffusion tests, experiments on magnetophoresis and sedimentation of particles in the external force fields, experiments on dynamics of magnetic fluid in the cross fields and in the linearly polarized magnetic field. In all of the above cases, the experimental results can be unambiguously interpreted only on the hypothesis that in magnetic fluids there exist short chains containing 2–4 particles and quasi-spherical clusters, each containing several dozens of particles. In this paper, the emphasis is placed on the cluster analysis of magnetic fluids, which is based on the expansion of the susceptibility spectrum in terms of the Debye function. The technique for measuring the dynamic susceptibility, processing of experimental results and their interpretation is briefly described. For the sake of completeness, the paper presents the data on the characteristic dimensions of clusters

their concentration, the influence of temperature, concentration of the free surfactant, centrifugal or magnetic separation of particles includes a brief review of the problem statement, methods of study and description of the results.

**Keywords:** magnetic fluids; dynamic susceptibility; cluster analysis

## 1. Введение

Хорошо известно, что межчастичные (стерические, Ван-дер-ваальсовы, магнитодипольные и гидродинамические) взаимодействия играют важную роль в формировании физических свойств магнитных жидкостей (например, [1]). Так, приведенный коэффициент градиентной диффузии магнитных наночастиц может измениться в три – пять раз, начальная магнитная восприимчивость раствора увеличивается в два-три раза, коэффициент сегрегации частиц в гравитационном поле (или поле центробежных сил) на три – четыре порядка и эффективная вязкость раствора в слабых полях увеличивается на два - три порядка с ростом концентрации твердой фазы.

Традиционно, при анализе свойств магнитных жидкостей наиболее важными считаются магнитодипольные взаимодействия, так как действие сил Ван-дер-Ваальса почти полностью нейтрализуется защитными оболочками из ПАВ. Действительно, при больших энергиях магнитодипольных взаимодействий наблюдаются процессы агрегирования частиц с образованием цепочек в разбавленных растворах и самоорганизации магнитных моментов частиц с образованием вихревых структур в концентрированных системах (фазовый переход второго рода), конденсации частиц в капельные агрегаты характерным размером в десятки и сотни микрометров (фазовый переход первого рода) и фазовый переход типа «клубок-глобула» в длинных цепочках с ограниченными степенями свободы. Тем не менее, ряд экспериментов показывает, что Ван-дер-ваальсовы взаимодействия играют важную роль в формировании физических свойств магнитных жидкостей, так как приводят к образованию квазисферических агрегатов, объединяющих в себе по несколько десятков наноразмерных суперпарамагнитных частиц. В настоящей работе проведен краткий анализ экспериментальных работ, выполненных в ИМСС УрО РАН в разное время и направленных на обнаружение в магнитных жидкостях наноразмерных кластеров (агрегатов). Наибольшее внимание уделено кластерному анализу магнитных жидкостей, основанному на разложении спектра динамической восприимчивости в ряд по функциям Дебая.

## 2. Эксперименты по обнаружению квазисферических кластеров

В отсутствие внешнего поля магнитные жидкости, очищенные от избытка свободного стабилизатора, ведут себя как обычные ньютоновские жидкости, эффективная вязкость  $\eta$  которых зависит от объемной концентрации частиц  $\varphi$  и температуры. Тщательные измерения динамической вязкости, проведенные в [2, 3], показали, что ее концентрационная зависимость очень хорошо описывается формулой Форда  $\eta_0/\eta = 1 - 4.5\varphi$  с тем только отличием, что коэффициент при концентрации  $\varphi$  в 1.8 раза превышает эйнштейновское значение 2.5. Это увеличение вязкости может быть объяснено только увеличением эффективной доли частиц за счет жидкости, заключенной внутри кластеров, образовавшихся в результате межчастичных взаимодействий. Независимость приведенной вязкости от температуры означает, что энергия этих взаимодействий много больше энергии теплового движения. Такому условию удовлетворяют только Ван-дер-ваальсовы взаимодействия. Эксперименты по измерению коэффициентов диффузии [3] полностью подтвердили эти выводы, позволили оценить размеры кластеров в 40-60 нм и определить наиболее вероятную форму агрегатов. Форма агрегатов оказалась

близкой к сферической. Точно такие же выводы следуют из опытов по магнитофорезу частиц в градиентном магнитном поле [4, 5] и анализа динамической магнитной восприимчивости раствора в низкочастотной области спектра (до 100 кГц) [6 – 8].

Эксперименты по анализу динамической магнитной восприимчивости оказались наиболее информативными, так как позволяют провести кластерный анализ магнитной жидкости - получить информацию о спектре времен релаксации намагниченности, среднем диаметре одиночных частиц и агрегатов, их концентрации и относительном вкладе в равновесную восприимчивость. Кластерный анализ основан на формальном разложении мнимой и вещественной частей восприимчивости в ряд по функциям Дебая и определении спектральных амплитуд и времен релаксации из экспериментальных кривых в диапазоне частот от 10 Гц до 100 кГц. В этом частотном диапазоне релаксация намагниченности происходит за счет вращения частиц и/или кластеров в вязкой среде, поэтому время релаксации  $\tau_B$  и объем  $V$  кластера однозначно связаны известной формулой  $\tau_B = 3\eta V/kT$ , где  $kT$  - энергия теплового движения. Результаты кластерного анализа примерно для двух десятков образцов магнитных жидкостей типа "магнетит+олеиновая кислота жидкие углеводороды" приведены в работах [6 – 8]. Квазисферические агрегаты были обнаружены во всех случаях, но их концентрация в растворе изменялась в широких пределах в зависимости от технологии получения жидкости и дисперсного состава частиц. Изменялось также распределение кластеров по размерам, но в относительно нешироком диапазоне от 40 до 90 нм.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 16-01-00517.

### Список литературы

1. *Shliomis M.I., Pshenichnikov A.F., Morozov K.I., Shurubor I.Yu.* Magnetic properties of ferrocolloids // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 1990. Vol. 85. P.40–46.
2. *Бузмаков В.М., Пшеничников А.Ф.* О концентрационной зависимости вязкости магнитных жидкостей // *Магнитная гидродинамика*. 1991. N 1. С.18–22.
3. *Buzmakov V.M., Pshenichnikov A.F.* On the Structure of Microaggregates in Magnetite Colloids // *Journal of Colloid and Interface Science*. 1996. Vol. 182. P. 63–70.
4. *Ivanov A.S., Pshenichnikov A.F.* Magnetophoresis and diffusion of colloidal particles in a thin layer of magnetic fluids // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. Vol. 322. 2010. P. 2575–2580. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmmm.2010.03.023>.
5. *Pshenichnikov A.F., Ivanov A.S.* Magnetophoresis of particles and aggregates in concentrated magnetic fluids // *Physical Review E*. 2012. Vol. 86. P. 051401. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.86.051401>.
6. *Лактина Е.В., Пшеничников А.Ф.* Дисперсия магнитной восприимчивости и микроструктура магнитной жидкости // *Коллоидный журнал*. 2006. Т. 68. № 3. С. 327–337.
7. *Пшеничников А.Ф., Лебедев А.В., Радионов А.В., Ефремов Д.В.* Магнитная жидкость для работы в сильных градиентных магнитных полях // *Коллоидный журнал*. 2015. Т. 77. № 2. С. 207–231.
8. *Pshenichnikov A.F., Lebedev A.V., Lakhtina E.V., Kuznetsov A.A.* Effect of centrifugation on dynamic susceptibility of magnetic fluids // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 2017. Vol. 432. P. 30-36. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmmm.2017.01.069>.

## **Моделирование термомеханического поведения сплавов и полимеров с памятью формы при конечных деформациях**

**А. А. Роговой<sup>а</sup>, О. С. Столбова<sup>а</sup>**

<sup>а</sup> Институт механики сплошных сред УрО РАН  
614013, Пермь, ул. Академика Королёва, 1  
email: rogovoy@icmm.ru, sos@icmm.ru

В настоящей работе, используя формализованный подход к построению определяющих соотношений для сложных сред в рамках конечных деформаций, построены и аттестованы модели поведения сплавов, ферромагнитных материалов и полимеров с памятью формы. Представлены кинематические и определяющие уравнения, удовлетворяющие принципам термодинамики и объективности. Полученные соотношения аттестованы на задачах о конечных деформациях простых конструкций при прямом и обратном аустенитно-мартенситном фазовом переходе в сплавах и ферромагнитных материалах с памятью формы и релаксационном переходе из высокоэластичного состояния в застеклованное в полимерах с памятью формы.

**Ключевые слова:** фазовый переход; память формы; определяющие уравнения; конечные деформации

## **Modeling the thermomechanical behavior of shape memory alloys and polymers under finite deformations**

**A. A. Rogovoy<sup>a</sup>, A. S. Stolbova<sup>a</sup>**

<sup>a</sup> Institute of Continuous Media Mechanics, Academician Korolev St. 1, 614013, Perm  
email: rogovoy@icmm.ru, sos@icmm.ru

In this paper, using a formalized approach to the construction of constitutive equations for complex media under finite deformations, the models have been constructed to describe the behavior of shape memory alloys, ferromagnetic materials and polymers. The kinematic and constitutive equations, satisfying the principles of thermodynamics and objectivity, have been developed. The obtained relations have been tested on problems of finite deformation of samples during forward and reverse martensitic transformations in shape memory alloys and ferromagnetic materials and during forward and reverse relaxation transitions from the highly elastic to the glassy state in shape memory polymers.

**Keywords:** phase transformation; shape memory; constitutive equations; finite strains

## **1. Введение**

Определяющие соотношения для сложных сред при малых деформациях могут быть построены, используя простой, но эффективный подход, основанный на возможности представить полную деформацию суммой упругих, неупругих и температурных деформаций. Аналогичный подход положен в основу построения определяющих соотношений термо-упруго-неупругих процессов при больших деформациях вводя, помимо начальной и текущей конфигураций, еще и промежуточную конфигурацию, близкую к текущей. В рамках такого подхода в [1] разработана теория построения моделей, описывающих поведение сложных сред при конечных деформациях и удовлетворяющих принципам термодинамики и объективности.

## **2. Сплавы с памятью формы**

В сплавах с памятью формы (СПФ) высокотемпературная аустенитная фаза переходит при охлаждении в низкотемпературную мартенситную, а мартенситная при нагревании в аустенитную. Фазовые деформации, возникающие при этом, зависят не только от температуры, но и от напряжений, которые, в свою очередь, определяются фазовыми деформациями. Для описания возникающих в СПФ в процессе фазового перехода фазовых деформаций, в настоящей работе используются соотношения, предложенные в работах А.А. Мовчана [2] и обобщенные на конечные деформации в [3].

Для решения связанной краевой задачи выполнена вариационная постановка в форме Лагранжа относительно начальной конфигурации, для численной реализации которой использован метод конечных элементов и процедура линеаризации. Полученные соотношения аттестованы на трех задачах о деформировании консольной пластины с одним жестко закрепленным концом [3]: 1) Две пластины (из бериллиевой бронзы и СПФ — равноатомного никелида титана) одинаковой длины скреплены по длине без натяга (пластина из СПФ снизу). Сначала образец охлаждается, а затем нагревается, при этом в СПФ происходит сначала прямое мартенситное превращение, а затем обратное. 2) До скрепления двух пластин пластина из СПФ при температуре, соответствующей полностью аустенитному состоянию, подвергается одноосному однородному растяжению по длине, затем пластина охлаждается и разгружается. После этого пластины из бериллиевой бронзы и СПФ скрепляются по длине без натяга (пластина из СПФ снизу). Полученная двухслойная пластина нагревается, а затем охлаждается. 3) Пластина из СПФ нагружается в аустенитном состоянии касательным напряжением, после чего охлаждается, разгружается и вновь нагревается.

## **3. Ферромагнитные сплавы с памятью формы**

В ферромагнитных материалах внешнее магнитное поле возбуждает в образце поверхностные и массовые (пондеромоторные) силы. Наведенное в образце магнитное поле и деформация образца изменяют внешнее поле, что, в свою очередь, приводит к изменению поверхностных и массовых сил. В ферромагнитных сплавах с памятью формы (ФСФ), внешнее магнитное поле еще и смещает температуру фазового перехода, дополняя смещение, возникающее от действия напряжения. В работе [4] построена модель поведения ФСФ. Постановка связанной краевой задачи осуществлена в виде вариационного уравнения Лагранжа и вариационного уравнения для магнитного поля. Уравнения записаны относительно начальной конфигурации. Для верификации модели использованы экспериментальные результаты, представленные в работе [5], в которой с помощью магнитного поля, влияющего на температуру фазового перехода мартенсит-аустенит, осуществлялось управление эффектом памяти формы (ЭПФ) в образце



из сплава Ni-Mn-Fe-Ga. В результате, предварительно деформированный образец восстанавливал свою форму. Рассмотрена задача, соответствующая этому эксперименту.

#### 4. Полимеры с памятью формы

ЭПФ проявляется в полимерах, имеющих определенную структуру. Суть его состоит в том, что в процессе релаксационного перехода из высокоэластичного состояния в застеклованное (охлаждение материала), деформация, имеющаяся в высокоэластичной фазе, «замораживается» в момент перехода, и деформации, возникающие в застеклованной фазе при дальнейшем деформировании, накладываются на эти «замороженные». При нагревании последние постепенно «размораживаются». Обобщая на конечные деформации подход, изложенный в работе [6], построена модель поведения полимеров с памятью формы (ППФ) [7]. Полученные соотношения аттестованы на задачах, имеющих экспериментальное обеспечение [8, 9].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 14-01-00080 и № 16-31-00161 мол\_а).

#### Список литературы

1. Rogovoy A. A. Formalized approach to construction of the state equations for complex media under finite deformations // *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2012. Vol. 24. N. 2. P. 81–114.
2. Мовчан А. А., Шельмагин П. В., Казарина С. А. Определяющие уравнения для двухэтапных термоупругих фазовых превращений // *Прикладная механика и техническая физика*. 2001. Т. 42. № 5. С. 152–160.
3. Роговой А. А., Столбова О. С. Моделирование упруго-неупругих процессов при конечных деформациях в сплавах с памятью формы // *Прикладная механика и техническая физика*. 2013. Т. 54. № 2. С. 148–162.
4. Rogovoy A., Stolbova O. Modeling the magnetic field control of phase transition in ferromagnetic shape memory alloys // *International Journal of Plasticity*. 2016. Vol. 85. P. 130–155.
5. Cherechukin A. A., Dikshtein I. E., Ermakov D. I., Glebov A. V., Koledov V. V., Kosolapov D. A., Shavrov V. G., Tulaikova A. A., Krasnoperov E. P., Takagi T. Shape memory effect due to magnetic field induced thermoelastic martensitic transformation in polycrystalline Ni-Mn-Fe-Ga alloy // *Physics Letters A*. 2001. Vol. 291. P. 175–183.
6. Baghani M., Naghdabadi R., Arghavani J. A large deformation framework for shape memory polymers: Constitutive modeling and finite element implementation // *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2013. Vol. 24 (1). P. 21–32.
7. Роговой А. А., Столбова О. С. Моделирование термомеханических процессов в полимерах с памятью формы при конечных деформациях // *Прикладная механика и техническая физика*. 2015. Т. 56. № 6. С. 143–157.
8. Liu Y., Gall K., Dunn M. L., Greenberg A. R., Diani J. Thermomechanics of shape memory polymers: uniaxial experiments and constitutive modeling // *International Journal of Plasticity*. 2006. Vol. 22. P. 279–313.
9. Volk B. L., Lagoudas D. C., Chen Yi-Chao. Analysis of the finite deformation response of shape memory polymers: II. 1D calibration and numerical implementation of a finite deformation, thermoelastic model // *Smart Materials and Structures*. 2010. Vol. 19. P. 75006–75016.

## Лабораторное и численное исследование наката волн на линейно-наклонный берег

А.А. Родин<sup>a</sup>, А.Ю. Земляникин<sup>a</sup>, Н.М. Лиходеев<sup>a</sup>, А.А. Куркин<sup>a</sup>,  
Н.А. Родина<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева,  
603950, Нижний Новгород, ул. Минина, 24  
email: xmrarro@gmail.com

<sup>b</sup> Национальный исследовательский университет Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 603022, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23

Выполнено лабораторное и численное исследование наката волн, генерируемых в результате гидродинамического коллапса на линейно-наклонный береговой профиль. Лабораторные эксперименты проведены в экспериментальном гидродинамическом лотке на базе НГТУ им. Р.Е. Алексеева. Численное решение получено с помощью вычислительного комплекса CLAWPACK в рамках нелинейной теории мелкой воды. Показано, что численные высоты наката полученные в рамках используемой бездисперсионной модели, в целом, хорошо соответствуют лабораторным данным.

**Ключевые слова:** нелинейная теория мелкой воды; обрушение волны; накат волн на берег

## Laboratory and numerical study of the wave run-up on the flat slope

A.A. Rodin<sup>a</sup>, A.Y. Zemlyanikin<sup>a</sup>, N.M. Likhodeev<sup>a</sup>, A.A. Kurkin<sup>a</sup>,  
N.A. Rodina<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev, Minin St. 24, 603950, Nizhny Novgorod  
email: xmrarro@gmail.com

<sup>b</sup> National Research University «Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod»,  
Prospekt Gagarina. 23, 603022, Nizhny Novgorod

A laboratory and numerical research of the run-up of waves generated by the dam break on the flat slope have been conducted. Laboratory experiments were carried out in the experimental wave tank at the NNSTU. R.E. Alekseeva. The numerical solutions were obtained using the CLAWPACK software package within the framework of nonlinear shallow water theory. The numerical run-up heights is in a good fitment with the results of the laboratory experiments in the framework of non-dispersive model.

**Keywords:** nonlinear shallow water theory; wave breaking; wave run-up on the shore

### 1. Введение

Накат длинной волны на плоский откос является традиционной темой исследования гидродинамики прибрежной зоны. Такая геометрия задачи легко реализуется в опытовых бассейнах и хорошо аппроксимирует в среднем приурезовую область. Для

описания и интерпретации экспериментальных результатов используются различные численные алгоритмы решения уравнений гидродинамики. Отметим лишь наиболее распространенные алгоритмы нелинейной теории мелкой воды, нелинейно-дисперсионной теории длинных волн, уравнений Эйлера и Навье-Стокса, метода крупных частиц. В случае длинных волн относительно малой амплитуды здесь имеется набор аналитических решений нелинейных уравнений теории мелкой воды, широко используемые для тестирования численных схем.

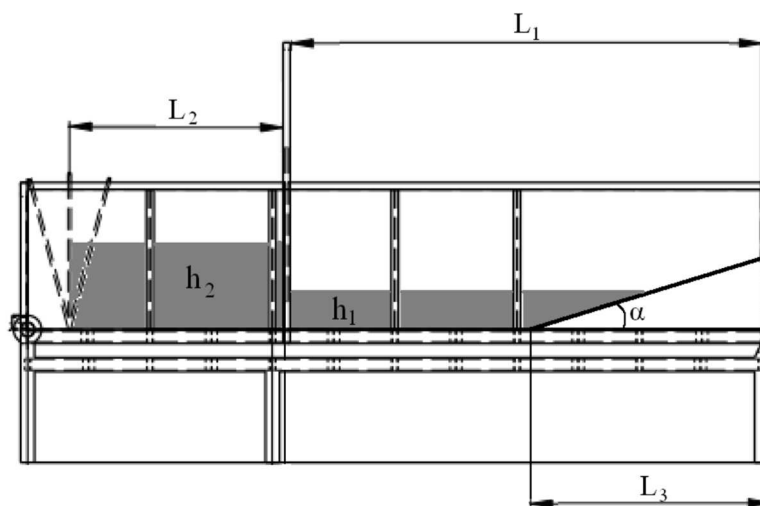
При всех достоинствах использования численных алгоритмов (скорость счета, минимальные затраты на проведение численного эксперимента), которые все чаще используются для решений задач наката, слабым местом существующих моделей является отсутствие или ненадежность доказательства их адекватности в рассматриваемой области применения. Поэтому вопрос об оценке применимости конкретного программного пакета, как правило, остается открытым и требует верификации полученных данных как с помощью аналитических решений, так и с помощью лабораторных и натурных экспериментов. Сопоставление динамики наката волн на плоский откос в ходе лабораторных и численных экспериментов и проводится в настоящем исследовании.

## 2. Лабораторный эксперимент

Лабораторные эксперименты были проведены в гидродинамическом бассейне НГТУ им. Р.Е. Алексеева (рис. 1). Бассейн, в котором проводились опыты, имеет следующие размеры: длина - 6.5 метра; ширина - 0.5 метра; высота - 1 метр.

Для моделирования задачи генерации и распространения волны прорыва используется герметичная вертикальная заслонка, которая при старте эксперимента со скоростью 1 м/с поднимается вверх.

В проведенной серии экспериментов стенка делила лоток на два резервуара:  $L_1 = 4.56$  метра – расстояние до «плотины» и, соответственно,  $L_2 = 1.91$  м - после (толщина стенки равна 0.03 м). Уровень жидкости за заслонкой  $h_2$  варьировался в интервале от 0.12 до 0.35 метра, а перед заслонкой ( $h_1$ ) от 0 до 0.19 метра (рис. 1).



**Рис. 1.** Геометрия задачи при проведении лабораторных и численных экспериментов

Волна, сформировавшаяся при гидродинамическом коллапсе накатывалась на плоский откос, установленный на другом конце экспериментальной установки, тангенс угла наклона  $\alpha$  которого равен 0.0067. Длина основания откоса  $L_3$  равна 1.55 м. В ходе испытаний с различными начальными условиями были измерены профиль падающей волны, а также высота её наката.

### 3. Численные эксперименты

Для проведения численных экспериментов нами был использован программный пакет CLAWPACK (версия 4.6.2, [www.clawpack.org](http://www.clawpack.org)), верифицированный на ряде тестовых задач [1] и используемый в настоящее время, в частности, для описания волн цунами. Данный программный пакет реализует одномерную систему нелинейных уравнений мелкой воды, записанную в полных потоках. Так как система гиперболических уравнений представляет собой законы сохранения, записанные в дифференциальной форме, она подходит для описания как гладких, так и разрывных течений жидкости. При этом диссипативные эффекты типа трения Шези, обычно учитываемые в практических задачах морской гидротехники, здесь не учитываются для простоты. Обрушение волны в программном пакете CLAWPACK аппроксимируется гидродинамическим скачком. Длина пространственного шага во всех численных экспериментах одинакова и равна 0.005 м, временной шаг подбирался автоматически, удовлетворяя условию Куранта-Фридрихса-Леви. Начальные условия соответствовали условиям лабораторных экспериментов. На границах скорость течения равна нулю.

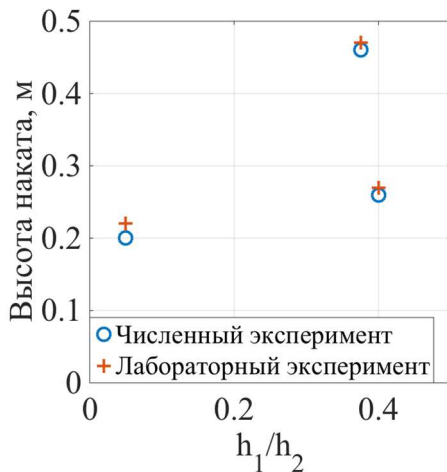


Рис. 2. Сравнение высот наката волн на плоский откос

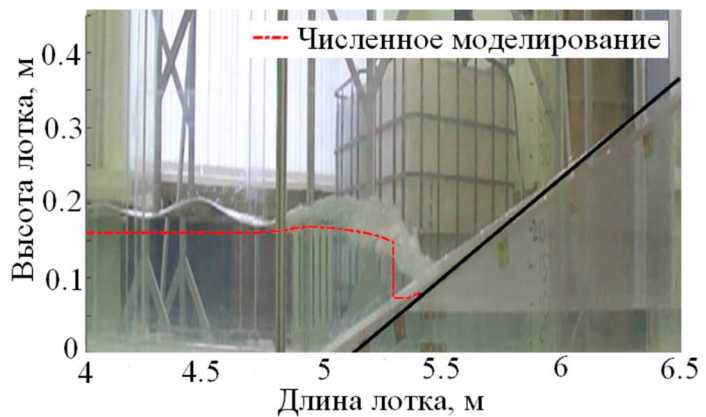


Рис. 3. Профиль фронта волны, подходящей к откосу ( $h_1=0.08$  м,  $h_2=0.2$  м)

### 4. Результаты и выводы

Был проведен ряд численных и лабораторных экспериментов. Показано, что численные высоты наката, в целом, хорошо соответствуют лабораторным данным (рис. 2). Отличие профилей фронта волны, подходящей к откосу, в первую очередь, обусловлены отсутствием дисперсии в рассматриваемой численной модели (рис. 3). Описания и параметры всех лабораторных экспериментов (бенчмарков) будут размещены в открытом доступе на сайте научно – исследовательской лаборатории моделирования природных и техногенных катастроф НГТУ им. П.Е. Алексеева ([www.lmnad.nntu.ru](http://www.lmnad.nntu.ru)).

Представленные результаты получены при поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых (МК-1127.2017.5).

#### Список литературы

1. Berger M., George D., LeVeque R.J., Mandli K. The GeoClaw software for depth-averaged flows with adaptive refinement // Advances in Water Resources. 2011. V. 34. No. 9. P. 1195–1206.

## Современное состояние изучения процессов переноса в наножидкостях

**В. Я. Рудяк**

Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет  
630008, Новосибирск, ул. Ленинградская, 113  
email: valery.rudyak@mail.ru

Наножидкости, т.е. дисперсные флюиды с наночастицами, новый тип дисперсных жидкостей, изучение которых началось около двух десятилетий тому назад. Непрерывно растущий интерес к ним обусловлен, прежде всего, их многочисленными уже существующими и возможными приложениями. Поскольку все возможные приложения связаны с течением наножидкостей, то ключевыми являются процессы переноса в них. В данной работе систематически обсуждается вязкость и теплопроводность наножидкостей. Анализируются как экспериментальные данные, так и результаты молекулярно-динамического моделирования. Показано, что теплофизические свойства наножидкостей не описываются классическими теориями, объясняются причины такого поведения. В частности, и вязкость, и теплопроводность наножидкостей зависит не только от концентрации частиц, но и от их размера и материала. В то же время коэффициент теплоотдачи помимо этого определяется еще и режимом течения

**Ключевые слова:** наночастицы; наножидкости; процессы переноса

## The current state of the study of transport processes in nanofluids

**V. Ya. Rudyak**

Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering, Leningradskaya St. 113,  
630008, Novosibirsk  
email: valery.rudyak@mail.ru

Nanofluids (carrier fluid + nanoparticles) is new type of dispersed fluid. Their studying was begun about twenty years ago. Continuously growing interest in them is due, first of all, to their numerous existing and possible applications. The transport processes are key processes because all applications of nanofluids are connected with their flows. In present paper the viscosity and thermal conductivity of nanofluids are systematically discussed. The experimental data and results of the molecular dynamics simulation are analyzed. It was shown that thermophysical properties of nanofluids do not described by the classical theories. It is explained the reasons of such non-classical behavior. In particular the viscosity and thermal conductivity of nanofluids depend not only on volume concentration of the particles but also on their size and material. At the same time, the heat transfer coefficient besides this is also determined by the flow regime.

**Keywords:** nanoparticles; nanofluids; transport processes

## 1. Введение

Непрерывно возрастающий интерес к наножидкостям связан, прежде всего, с уже существующим или планируемым их использованием в химических процессах, включая катализ, для охлаждения различных устройств, в био-, МЭМС- и нанотехнологиях различного назначения, при создании новых систем транспортировки и производства тепловой энергии, новых лекарственных и косметических препаратов, систем распознавания загрязнений различного типа и очистки воздуха и воды, новых смазочных материалов, лаков и красок, для доставки лекарственных препаратов, наносенсоров и наноактюаторов и т.д. С другой стороны, почти сразу после начала их изучения, а это произошло около двадцати лет тому назад, выяснилось, что они имеют необычные свойства переноса, которые не описываются классическими теориями. Тем не менее вплоть до последних дней вокруг свойств наножидкостей все еще много дискуссий и весьма противоречивых данных относительно их свойств. Поскольку все возможные приложения связаны с течением наножидкостей, то ключевыми являются процессы переноса в них. В данной работе систематически обсуждаются процессы переноса в наножидкостях и особенности их течений. Анализируются как экспериментальные данные, так и результаты молекулярно-динамического моделирования.

## 2. Вязкость наножидкостей

Относительно вязкости наножидкости к настоящему времени достигнуто практически полное понимание. Прежде всего, выяснилось, что она не описывается классическими теориями, развитыми для крупнодисперсных жидкостей (Эйнштейна, Бэтчелора и т.д.). Во всем экспериментально исследованном диапазоне концентраций наночастиц (обычно не выше 10–15%) вязкость наножидкости существенно выше соответствующего значения для крупнодисперсной жидкости. Второе важное обстоятельство было установлено сначала методом молекулярной динамики [1]. На модельных наножидкостях было показано, что их вязкость зависит не только от концентрации частиц, но также от их размера. Позднее это было подтверждено многочисленными экспериментами и показано, что вязкость наножидкости при заданной концентрации частиц тем больше, чем меньше их размер. Далее сначала методом молекулярной динамики [2, 3], а потом и экспериментально [4] было показано, что вязкость наножидкостей зависит также от материала частиц.

Анализ механизмов формирования вязкости наножидкостей требует отдельного подробного обсуждения, что выходит за рамки данной статьи. Однако можно достаточно кратко сформулировать основные причины неклассического поведения. Первое наножидкость существенно более структурирована, чем базовая жидкость [5]. Второе, даже при сравнительно малых объемных концентрациях численная плотность наночастиц столь велика, что необходимо учитывать взаимодействие частиц через среду. Наконец рост вязкости с уменьшением размера наночастиц объясняется тем, что сечение рассеяния молекул несущей жидкости на частицах (а это основной механизм переноса импульса) обратно пропорционален их радиусам.

## 3. Теплопроводность наножидкостей

Уже первые эксперименты по измерению теплопроводности наножидкостей (Masuda, et al., 1993; Eastman, et al., 1998; Wang, Xu, Choi, 1999) были чрезвычайно оптимистичными. Добавление даже небольших количеств металлических наночастиц (долей процента) увеличивало теплопроводность наножидкости по сравнению с базовой на проценты или даже на десятки процентов. Было установлено, что теплопроводность

наножидкостей также не описывается классическими теориями (Максвелла и т.д.). Тем не менее долгое время результаты экспериментов, выполнявшихся в десятках групп по всему миру оказывались чрезвычайно противоречивыми. Причину этого удалось установить сравнительно недавно. Теплопроводность наножидкостей, как и их вязкость, зависит не только от концентрации частиц, но также от их размера. Причем, в отличие от вязкости, она увеличивается с ростом размера частиц. Во всех случаях существует некоторое предельное значение концентрации наночастиц, выше которой коэффициент теплопроводности перестает расти.

С другой стороны, оказалось, что теплопроводность наножидкостей тем больше, чем больше плотность наночастиц. Учет этих обстоятельств позволил построить достаточно простую универсальную формулу для коэффициента теплопроводности наножидкостей [6, 7]. Наконец важно подчеркнуть, что в зависимости от материала наночастиц наножидкости с достаточно малыми частицами могут иметь теплопроводность ниже, предсказываемой теорией Максвелла. Этот вывод, установленный экспериментально, подтверждается и молекулярно-динамическим моделированием.

#### 4. Заключение

Подводя итог, можно констатировать, что наножидкости фактически мезообъект, поскольку наночастицы по размерам занимают промежуточное место между молекулами и макроскопическими частицами, что и определяет их теплофизические свойства. Это, в свою очередь формирует и особые свойства течений наножидкостей. Одной из характерных особенностей таких течений является, то, что следует с большой осторожностью пользоваться обычными критериями подобия. Так, например, число Прандтля будет зависеть и от концентрации частиц, и от их размера [8].

Работа выполнена при частичном финансировании РФФИ (грант № 17-01-00040).

#### Список литературы

1. Рудяк В. Я., Белкин А. А., Егоров В. В., Томилина Е. А. Моделирование процессов переноса методом молекулярной динамики. II. Сила сопротивления и эффективная вязкость в наносuspensions // Пепринт НГАСУ. №1(18). Новосибирск, 2006. 52 с.
2. Rudyak V. Ya., Krasnolutskii S. L. Dependence of the viscosity of nanofluids on nanoparticle size and material // *Physics Letters A*. 2014. Vol. 378. P. 1845–1849.
3. Рудяк В. Я., Краснолуцкий С. Л. Моделирование коэффициента вязкости наножидкости методом молекулярной динамики // *Журнал технической физики*. 2015. Т. 85. Вып. 6. С. 9–16.
4. Рудяк В. Я., Минаков А. В., Сметанина М. С., Пряжников М. И. Экспериментальные данные о зависимости вязкости наножидкостей на основе воды и этиленгликоля от размера и материала частиц // *Доклады Академии наук*. 2016. Т. 467. № 3. С. 289–291.
5. Rudyak V. Ya. Viscosity of nanofluids. Why it is not described by the classical theories // *Advances in Nanoparticles*. 2013. Vol. 2. P. 266–279.
6. Ceotto D., Rudyak V. Ya. Phenomenological formula for thermal conductivity coefficient of water-based nanofluids // *Colloid Journal*. 2016. Vol. 78. N 4. P. 509–514.
7. Pryazhnikov M. I., Minakov A. V., Rudyak V. Ya., Guzei D. V. Thermal conductivity measurements of nanofluids // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2017. Vol. 104. N 1. P. 1275–1282.
8. Rudyak V. Ya., Minakov A. V., Pryazhnikov M. I. Thermal properties of nanofluids and their similarity criteria // *Technical Physics Letters*. 2017. Vol. 43. Issuer 1. P. 23–26.

## **Электроконвекция слабопроводящей жидкости при инъекции заряда в горизонтальных ячейках с разным аспектным отношением**

**К. С. Рушинская, В. А. Ильин**

Пермский государственный национальный исследовательский университет

614990, Пермь, ул. Букирева, 15

email: ksr7777777@yandex.ru, ilin1@psu.ru

Изучены нелинейные режимы электроконвекции неизотермической слабопроводящей жидкости в постоянном электрическом поле горизонтального слоя при униполярной инъекции заряда с катода. При вычислениях были рассмотрены прямоугольные ячейки разной длины с условиями периодичности. Построены карты режимов электроконвекции.

**Ключевые слова:** электроконвекция; слабопроводящая жидкость; инъекция

## **Electroconvection of a weakly conductive liquid under charge injection in horizontal cells with the different aspect ratio**

**K. S. Rushinskaya, V. A. Ilin**

Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm

email: ksr7777777@yandex.ru, ilin1@psu.ru

Nonlinear regimes of electroconvection in a horizontal layer of the nonisothermal weakly conductive liquid in a steady electric field have been studied. Electroconvection is given rise by unipolar injection of charge from a cathode. During calculations rectangular cells of a different length with the periodicity conditions have been observed. The diagrams of electroconvection regimes have been plotted.

**Keywords:** electroconvection; weakly conductive liquid; injection

Движение слабопроводящих жидкостей в электрическом поле привлекает внимание тем, что представляет собой способ прямого преобразования энергии электрического поля в энергию движения жидкой среды [1]. С практической точки зрения знание законов действия электрического поля на конвективные течения актуально в связи с проблемой эффективного управления конвекцией, тепло- и массопереносом в различных технологических ситуациях, в частности, в электрогидродинамических насосах.

В настоящей работе инъекционный механизм зарядообразования считается основным. Используется модель униполярной инъекции, предложенная в работе [1, 2]. Согласно этой модели инжектируемая в жидкость плотность заряда прямо пропорциональна напряжённости электрического поля в конденсаторе.



В рамках безындукционного приближения безразмерная система уравнений электротермической конвекции слабопроводящей жидкости имеет вид [2–4]:

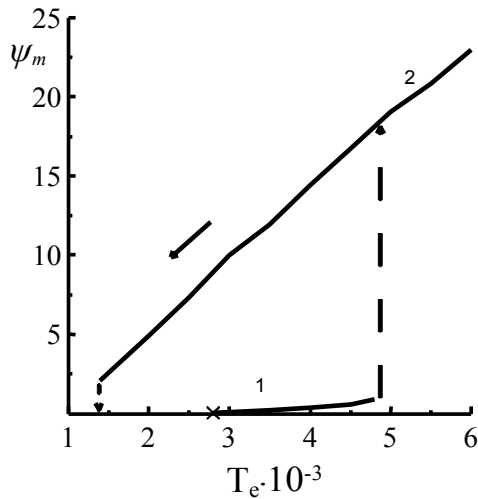
$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \Delta \Phi - E \frac{T_e^2}{M^2} \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{Ra}{Pr} \frac{\partial q}{\partial x}, \\ \frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \rho_e}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \rho_e}{\partial x} &= \frac{T_e^2}{M^2} \left( \rho_e^2 + E \frac{\partial \rho_e}{\partial t} \right), \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{1}{Pr} \Delta T. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\Phi$  – вихрь скорости,  $\psi$  – функция тока,  $T$  – температура жидкости,  $q$  – плотность заряда,  $x, z$  – горизонтальная и вертикальная координаты,  $t$  – время,  $E$  – напряженность электрического поля;  $T_e$  и  $M$  – безразмерные электрические параметры,  $Pr$  – число Прандтля,  $Ra$  – тепловое число Рэлея [3].

Граничные условия имеют вид ( $A$  – параметр инжекции):

$$\begin{aligned} z = 0: \psi = 0, \partial \psi / \partial z = 0, q = AE, T = 1; \\ z = 1: \psi = 0, \partial \psi / \partial z = 0, T = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

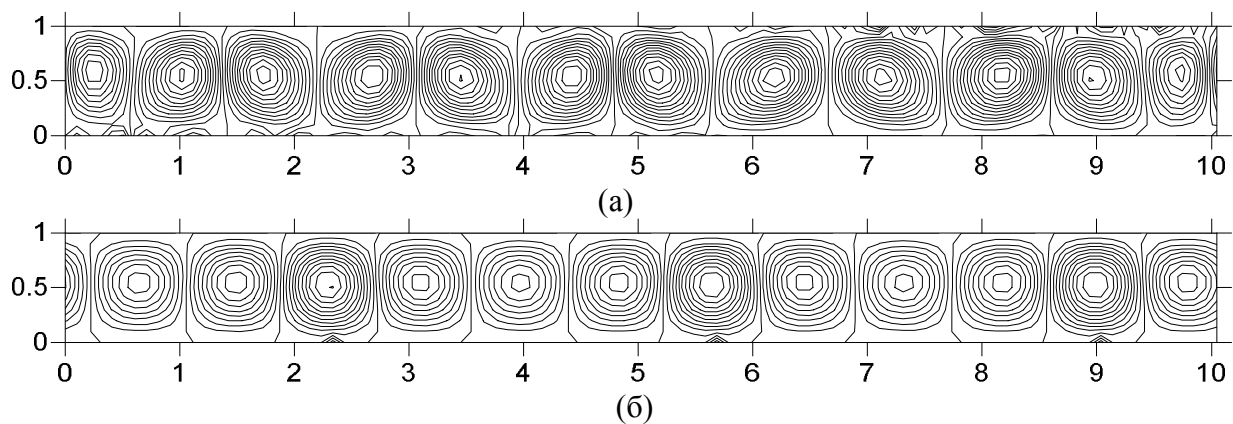
Задача решалась методом конечных разностей. Рассмотрен случай подогрева снизу. Нагрев сверху рассмотрен в работе [3]. Для вычислений выбиралась прямоугольная ячейка с пространственными размерами  $L_z = 1, L_x = 2; L_z = 1, L_x = 4; L_z = 1, L_x = 10$ . Сетка бралась соответственно  $21 \times 41; 21 \times 81; 21 \times 201$ . Число Прандтля  $Pr = 10$ . Использовались условия периодичности. Расчёты проведены при разных значениях параметра  $T_e$ , для теплового числа Рэлея  $Ra = 500; 1000$ .



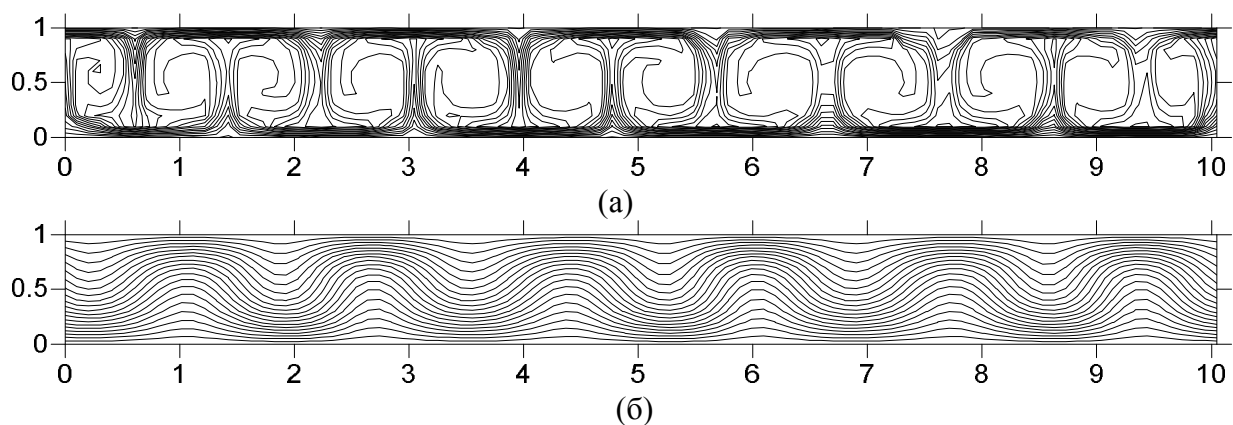
**Рис. 1.** Зависимость функции тока от параметра  $T_e$  для  $Ra = 1000$ , сетка  $21 \times 81$  ( $L_z = 1, L_x = 4$ )

Результаты расчетов систематизированы. Обнаружены два режима стационарной конвекции, между которыми наблюдались гистерезисные переходы [5]. На (рис. 1) представлены результаты расчётов зависимости максимальной функции тока  $\psi_m$  от электрического параметра  $T_e$  для  $Ra = 1000$  и сетки  $21 \times 81$ . На (рис. 1) нижний режим 1 имеет меньшую интенсивность движения, верхний режим 2 – большую интенсивность. Для ячейки  $L_z = 1, L_x = 2$  нижний режим начинается при  $T_e = 2.5 \cdot 10^3$ ; при  $L_z = 1, L_x = 4$  – при большем значении  $T_e = 2.8 \cdot 10^3$ . Существует конкуренция между режимом 2 и равновесием, режимами 1 и 2. Гистерезисные переходы от одного режима к другому происходят между  $T_e = 1.3 \cdot 10^3$  и  $T_e = 4.9 \cdot 10^3$ . Интенсивность второго режима растёт с ростом  $T_e$ .

На (рис. 2, 3) представлены изолинии функции тока и температуры для двух режимов электроконвекции при тепловом числе Рэлея  $Ra = 500$ , прямоугольной сетке  $21 \times 201$ . Различие структур изолиний для двух режимов стационарной электроконвекции обусловлено тем, что движение слабопроводящей жидкости в режиме 2 происходит более интенсивно, чем в режиме 1.



**Рис. 2.** Изолинии функции тока для верхнего режима при  $T_e = 7 \cdot 10^3$  (а) и нижнего режима при  $T_e = 4 \cdot 10^3$  (б)



**Рис. 3.** Изолинии температуры для верхнего режима при  $T_e = 7 \cdot 10^3$  (а) и нижнего режима при  $T_e = 4 \cdot 10^3$  (б)

### Список литературы

1. Жакин А. И. Электрогидродинамика // Успехи физических наук. 2012. Т. 182. №5. С. 495–520.
2. Верещага А. Н. Унарная электроконвекция в плоском слое // Гидродинамика и процессы тепломассопереноса, 1989. С. 42-47.
3. Мордвинов А. Н., Смородин Б. Л. Электроконвекция при инжекции с катода и нагреве сверху // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2012. Т. 141. Вып. 5. С. 997–1005.
4. Ильин В. А., Мордвинов А. Н., Петров Д. А. Электроконвекция слабопроводящей жидкости при униполярной инжекции заряда в постоянном электрическом поле // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2015. Т. 147. Вып. 1. С. 181–188.
5. Ильин В. А. Электроконвекция слабопроводящей жидкости в горизонтальном конденсаторе при униполярной инжекции заряда // Журнал технической физики. 2017. Т. 87. Вып. 1. С. 5–9.

## **Формирование физико-механических свойств наномодифицированного АБС-сополимера в условиях пластического деформирования с дополнительным СВЧ-воздействием**

**В.В. Ряшенцев<sup>a</sup>, Н.А. Ильин<sup>b</sup>**

Тамбовский государственный технический университет, 392000, Россия г. Тамбов, ул. Мичуринская. д.112,

<sup>a</sup> email: ryashentsev.slava@mail.ru

<sup>b</sup> email: ilinnikit@yandex.ru

В последнее время для улучшения прочностных характеристик готовых изделий в полимерные композиты добавляют малые (до 1-2 %) добавки наноматериалов. Наибольшее применение из наноматериалов в этих целях находят углеродные наноматериалы (УНМ) с размером частиц 40-100 нм, Использование методов твердофазной технологии позволяет получить изделия с улучшенными эксплуатационными характеристиками. В процессе исследований был разработан новый метод обработки термопластов электромагнитными волнами. Проведенные исследования показали, что после проведения СВЧ термообработки наблюдается снижение необходимого давления формования при твердофазной экструзии  $P_f$  (МПа)  $\approx$  на 10 % и увеличение прочностных характеристик в условиях одноосного растяжения и срезающих напряжений (МПа)  $\approx$  на 30 %, а также твердости по Шору D до 10 %. При этом качество поверхности полученного по предлагаемому методу композита существенно выше, изделия характеризуются явно выраженной равномерной глянцевой поверхностью. В результате анализа полученных экспериментальных данных можно сделать вывод об эффективности использования СВЧ воздействия в целях получения упрочненных полимерных материалов.

**Ключевые слова:** СВЧ воздействие; наномодифицированный АБС-сополимер; твердофазная экструзия

## **Formation of physico-mechanical properties of nano-modified ABS copolymer under conditions of plastic deformation with the additional microwave exposure**

**V. V. Ryashentsev<sup>a</sup>, N. A. Ilyin<sup>b</sup>**

Tambov state technical University 392000, Russia, Tambov, Michurinskaya. D. 112,

<sup>a</sup> email: ryashentsev.slava@mail.ru

<sup>b</sup> email: ilinnikit@yandex.ru

In recent times, to improve the strength characteristics of finished products in polymer composites add small (up to 1-2 %) addition of nanomaterials. The

greatest application of these nanomaterials in order to find carbon nanomaterials (CNM) with a particle size of 40-100 nm, Using the methods of solid-phase technology allows to obtain products with improved performance. During the research a new method was developed for the processing of thermoplastics by electromagnetic waves. Since carbon is a good conductor and its rate of heating is significantly higher than the polymer matrix, there is more intensive heating of the nanoparticles. Investigation of the strength in uniaxial tension and shear stress were carried out on a universal testing machine UTS 101-5, the hardness of the material shore D was measured on the Durometer shore D type in accordance with GOST 24621-91.

**Keywords:** microwave exposure; nanomodified ABS polymer; Solid-phase extrusion

Современные полимерные материалы являются сложными композитами, содержащими наряду с полимерной матрицей ряд компонентов, выбор которых определяется условиями эксплуатации готовых изделий. В частности, для улучшения прочностных характеристик готовых изделий в полимерные композиты в последнее время добавляют малые (до 1-2 %) добавки наноматериалов. Наибольшее применение из наноматериалов в этих целях находят углеродные наноматериалы (УНМ) с размером частиц 40-100 нм, что позволяет формировать полимерную матрицу с улучшенными прочностными характеристиками. В данной работе в качестве модифицирующего вещества использовали УНМ «Таунит» (производитель - ООО «Нанотехцентр», г.Тамбов).

Использование методов твердофазной технологии позволяет получить изделия с улучшенными эксплуатационными характеристиками. В частности: повышаются прочностные показатели в условиях срезающих напряжений, повышается предел текучести, предел прочности при разрыве, относительное удлинение при разрыве. В процессе исследований был разработан новый метод обработки термопластов электромагнитными волнами.

Поскольку углерод является хорошим проводником и темп его нагрева существенно выше, чем полимерной матрицы, то наблюдается более интенсивный нагрев наночастиц. Это приводит к локальному нагреву пограничной поверхности полимерной матрицы и углеродного наноматериала вплоть до расплавления полимера. Использование данного метода нагрева позволяет снизить необходимое давление формования при ТФЭ.

Кроме того, температурное расширение как локально расплавленной пленки полимера, обволакивающей наночастицы, так и самих наночастиц, ограниченных основной твердой частью полимерной матрицы, приводит к значительному повышению внутреннего давления и, как следствие, к увеличению площади пограничной поверхности полимерной матрицы с частицами углеродного наноматериала. Это явление дополнительно сказывается на увеличении прочностных характеристик готовых изделий, полученных методом твердофазного формования.

Исследование прочности в условиях одноосного растяжения и срезающих напряжений проводились на универсальной испытательной машине УТС 101-5 при скорости перемещения подвижного зажима машины – 20 мм/мин. Тисп = 298К. Твердость материалов по Шору D определяли на дюрометре Шора типа D в соответствии с ГОСТ 24621-91.

Проведенные исследования показали, что после проведения СВЧ термообработки наблюдается снижение необходимого давления формования при твердофазной экструзии  $P_{\phi}$  (МПа)  $\approx$  на 10 % и увеличение прочностных характеристик в условиях одноосного растяжения и срезающих напряжений (МПа)  $\approx$  на 30 %, а также

твердости по Шору D до 10 %. При этом качество поверхности полученного по предлагаемому методу композита существенно выше, изделия характеризуются явно выраженной равномерной глянцевой поверхностью.

В результате анализа полученных экспериментальных данных можно сделать вывод об эффективности использования СВЧ воздействия в целях получения упрочненных полимерных материалов.

Работа выполнена под руководством к.т.н., доцента кафедры «Материалы и технология» ФГБОУ ВО «ТГТУ» Завражин Д.О.

### **Список литературы**

1. *Завражин, Д.О.* Кинетика и интенсификация процессов твердофазной технологии обработки модифицированных полимер-углеродных материалов на основе СВЧ-нагрева: дисс. на соискание ученой степени к.т.н. // Тамбовский государственный технический университет. Тамбов, 2011.
2. *Завражин, Д.О.* Исследование процесса интенсивной пластической деформации материалов на основе ПА-6 // Вопросы современной науки и практики. Университет им. В.И. Вернадского. 2012. Т. 43. С. 20-23.
3. *Завражин, Д.О.* Формирование структурно-механических свойств наномодифицированных полимерных материалов в условиях твердофазной плунжерной экструзии // Письма о материалах. 2014. Т. 4. №3 (15). С. 182-185.

## **Устойчивость стационарных режимов конвективных течений в наклоненной прямоугольной полости**

**Р. В. Сагитов<sup>a</sup>, А. Н. Шарифулин<sup>b</sup>**

<sup>a</sup> Пермский государственный национальный исследовательский университет  
614990, Пермь, ул. Букирева, 15  
email: sagitovrv@mail.ru

<sup>b</sup> Пермский национальный исследовательский политехнический университет,  
614990, Пермь, Комсомольский проспект, 29  
email: sharifulin@bk.ru

Исследуются влияния наклона на структуру и устойчивость конвективного течения в полости, имеющей форму горизонтального прямоугольного параллелепипеда, который может наклоняться вокруг горизонтальной оси. Между двумя противоположными стенками параллелепипеда (горизонтальными в отсутствии наклона) задается постоянный перепад температуры, а остальные стенки были теплоизолированными. Трением жидкости о границы полости пренебрегали. Рассмотрено влияние наклона, при котором его образующая остается горизонтальной. Задача решается путем решения многомерным методом Ньютона системы алгебраических уравнений, полученной дискретизацией уравнений тепловой конвекции. Определялись различные стационарные режимы. Для исследования найденных стационарных режимов на устойчивость относительно малых возмущений решается задача нахождения собственных значений системы для амплитуд малых возмущений. Определяются значения параметров, при которых якобиан этой системы равен нулю. Получены бифуркационные диаграммы и бифуркационные кривые для одного, двух и трех ячеистых режимов, исследована устойчивость стационарных режимов. Получено, что в области малых углов задача может иметь до 27-ми стационарных состояний.

**Ключевые слова:** тепловая конвекция; неустойчивость; бифуркации

## **Stability of stationary modes of convective flows in an inclined rectangular cavity**

**R. V. Sagitov<sup>a</sup>, A. N. Sharifulin<sup>b</sup>**

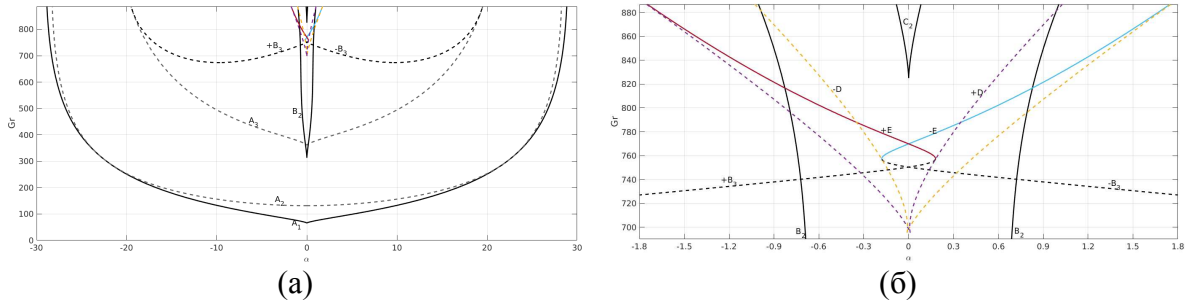
<sup>a</sup> Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm  
email: ivanov@psu.ru

<sup>b</sup> Perm National Research Polytechnic University, Komsomolsky pr. 29, 614990, Perm  
email: sharifulin@bk.ru

The influence of the inclination on the structure and stability of convective flow in a cavity having the form of a horizontal rectangular parallelepiped that can tilt around the horizontal axis is studied. Between the two opposite walls of the parallelepiped (horizontal in the absence of inclination) a constant temperature is set,



Анализ бифуркационной диаграммы (рис.1), соответствующей строгому подогреву снизу, показывает, что с ростом числа Грасгофа бифуркации приводят к увеличению числа устойчивых (неустойчивых) состояний согласно последовательности:  
 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 8$   
 $(0 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 9 \rightarrow 11 \rightarrow 15 \rightarrow 17 \rightarrow 19)$ .



**Рис. 2.** Бифуркационная кривая на плоскости  $(\alpha - Gr)$  (а) и её фрагмент (б)

Бифуркации происходят при пересечении бифуркационных кривых на плоскости параметров  $(\alpha - Gr)$ , представленных на (рис.2.). При этом ниже кривой  $A_1$  существует 1 стационарное состояние, между кривыми  $A_1$  и  $A_2$  - 2 устойчивых состояния, 1 неустойчивое состояние, между  $A_2$  и  $A_3$  ниже  $B_2$  - 2 устойчивых состояния, 3 неустойчивых состояния, между  $B_2$  и  $A_3$  - 4 устойчивых состояния, 5 неустойчивых состояний, между  $A_3$  и  $+B_3$  ( $-B_3$ ) правее (левее)  $B_2$  - 2 устойчивых состояния, 5 неустойчивых состояний, выше кривой  $A_3$ , внутри кривой  $B_2$ , ниже кривых  $+B_3$ ,  $-B_3$ ,  $+D$ ,  $-D$  4 устойчивых состояния, 7 неустойчивых состояний, внутри области, ограниченной кривыми  $+E$ ,  $-D$ ,  $-E$  ( $+E$ ,  $+D$ ,  $-E$ ) - 5 устойчивых состояний, 16 неустойчивых состояний, выше кривой  $+E$  ( $-E$ ), ниже кривой  $C_2$ , левее (правее)  $+D$  ( $-D$ ) - 6 устойчивых состояний, 17 неустойчивых состояний, выше кривой  $C_2$  - 8 устойчивых состояний, 19 неустойчивых состояний.

Работа была поддержана Министерством образования и науки Российской Федерации (проект No.3.6990.2017/БЧ).

### Список литературы

1. Sharifulin A.N., Poludnitsin A.N., Kravchuk A.S. Laboratory Scale Simulation of Nonlocal Generation of a Tropical Cyclone // Journal of Experimental and Theoretical Physics. 2008. Vol.107. № 6. P.1090–1093.
2. Sagitov R.V., Sharifulin A. N. Stability of steady state thermal convection in a titled rectangular cavity in low-mode approach. // Thermophysics & Aeromechanics. 2008. Vol. 15. №2. P. 233–241.
3. Mizushima J., Nakamura T. Repulsion of eigenvalues in the Rayleigh-Bénard problem // Journal of the Physical Society of Japan. 2002. Vol, 71.№. 3. P. 677–680.



# Влияние электрического поля на параметрическую неустойчивость двухслойной системы жидкостей

Е. С. Садилов<sup>а</sup>

<sup>а</sup> Институт механики сплошных сред УрО РАН  
614013, Пермь, ул. Королева, 1  
email: sadilove@icmm.ru

Работа посвящена исследованию влияния электрического поля на устойчивость границы раздела двух жидкостей, одна из которых идеально электропроводная, а другая – идеальный диэлектрик, по отношению к нормальным вибрациям. Исследование проводится в предположении малости вязкости, что позволяет использовать приближение пограничного слоя. Для исследования пограничного слоя применен метод многих масштабов. Границы устойчивости найдены аналитически вблизи порога устойчивости.

**Ключевые слова:** параметрическая неустойчивость; электрическое поле; двухслойная система

## The influence of the electric field on parametric instability of two-layer system

E. S. Sadilov<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Institute of Continuous Media Mechanics, Koroleva St. 1, 614013, Perm  
email: sadilove@icmm.ru

The article is devoted to the investigation of the influence of the electric field on the instability of the interface of two fluids. One fluid is ideal electrically conducting, other fluid is ideal dielectric. The study is carried in the proposal of smallness of the viscosity, which allows us to use the boundary layer theory. For study of the boundary layer we use multiple scales method. The instability boundaries are found analytically near the threshold of instability.

**Keywords:** parametric instability; electric field; two-layer system

### 1. Введение

Влияние нормальных вибраций на устойчивость свободной поверхности жидкости впервые было исследовано в экспериментальной работе Фарадея [1]. Рэлей рассмотрел эту задачу теоретически в предположении идеальности жидкости [2]. В работе [3] впервые была учтена вязкость, но сделано это было феноменологически. Последовательный учет вязкости был проведен в работе [4].

Влияние электрического поля в отсутствие вибраций впервые было рассмотрено в работах Тонкса [5] и Френкеля [6].

В данной же работе рассматривается совместное влияние электрического поля и нормальных вибраций на устойчивость границы раздела сред.

## 2. Постановка задачи

Исследуется горизонтальный плоский слой, заполненный двумя жидкостями. Нижняя жидкость считается идеально электропроводной. Верхняя жидкость – идеальный диэлектрик. Толщина слоя считается бесконечной. Граница раздела сред в невязком состоянии горизонтальна. Для описания этой системы используются следующая система уравнений:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + A(\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \mathbf{v}_1 = -\nabla p_1 + \frac{N}{\sqrt{We}} \nabla^2 \mathbf{v}_1 - \left( \frac{1}{AWe} - 4 \cos 2t \right) \mathbf{e}_z, \quad (2.1)$$

$$\bar{\rho} \left( \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + A(\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \mathbf{v}_1 \right) = -\nabla p_1 + \frac{\bar{\rho} N}{\sqrt{We}} \nabla^2 \mathbf{v}_1 - \bar{\rho} \left( \frac{1}{AWe} - 4 \cos 2t \right) \mathbf{e}_z, \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0, \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_2 = 0, \quad (2.4)$$

$$\nabla^2 \Phi = 0. \quad (2.5)$$

Здесь  $\Phi$  – потенциал электрического поля в диэлектрике (в проводнике электрическое поле равно нулю и поэтому потенциал также можно приравнять нулю).

К этой системе уравнений надо добавит граничные условия:

$$z \rightarrow +\infty: \quad v_{2z} = 0, \quad \nabla \Phi = \mathbf{e}_z, \quad (2.6)$$

$$z \rightarrow -\infty: \quad v_{2z} = 0, \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} z = \zeta: \quad \Phi = 0, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} + A(\mathbf{v}_{j\perp} \cdot \nabla) \zeta = A v_{jz}, \\ p_1 - p_2 + \frac{(1 - \bar{\rho})F}{AWe} (\nabla \Phi)^2 + \frac{2N}{\sqrt{We}} \left( \bar{\rho} \bar{v} \frac{\partial v_{2z}}{\partial z} - \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} \right) = \frac{1 - \bar{\rho}}{AWe} \nabla \cdot \mathbf{n}, \\ \frac{\partial \mathbf{v}_{1\perp}}{\partial z} + \nabla_{\perp} v_{1z} = \bar{\rho} \bar{v} \left( \frac{\partial \mathbf{v}_{2\perp}}{\partial z} + \nabla_{\perp} v_{2z} \right), \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{e}_z - \nabla_{\perp} \zeta}{\sqrt{1 + (\nabla_{\perp} \zeta)^2}}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Здесь появляются следующие безразмерные параметры:

$$\bar{\rho} = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad \bar{v} = \frac{v_2}{v_1}, \quad A = \frac{a}{l_c}, \quad We = \frac{\omega^2 l_c}{g}, \quad F = \frac{\varepsilon E_*^2 l_c}{8\pi\alpha}, \quad N = \frac{v_1}{\sqrt{g l_c^{3/2}}} \quad (2.9)$$

– отношение плотностей, отношение кинематических вязкостей, безразмерная амплитуда вибраций, число Вебера, параметр, характеризующий интенсивность электрического поля, безразмерная вязкость.

Система уравнений (2.1)-(2.5) и граничных условий (2.6)-(2.8) имеет следующее решение:

$$p_1 = P_0 - z \left( \frac{1}{AWe} - 4 \cos 2t \right), \quad p_2 = P_0 + \frac{(1 - \bar{\rho})F}{AWe} - \bar{\rho} z \left( \frac{1}{AWe} - 4 \cos 2t \right), \quad (2.10)$$

$$\Phi = z.$$

Это основное состояние. Дальше были введены малые возмущения и исследована неустойчивость основного состояния.

### 3. Граница неустойчивости

При исследовании задачи использовалось предположение о малости вязкости, что позволило использовать приближение пограничного слоя. В результате использования метода многих масштабов для границы неустойчивости был получен следующий результат:

$$A = \pm \sqrt{\left\{ \left( \frac{3}{2} \frac{1 + \bar{\rho}}{1 - \bar{\rho}} + F - \frac{1}{k_0} \right) (k - k_0) - \frac{\bar{\rho} \sqrt{2\nu N}}{\sqrt[4]{We(1 - \bar{\rho})}} \right\}^2 + \left( \frac{\bar{\rho} \sqrt{2\nu N}}{\sqrt[4]{We(1 - \bar{\rho})}} \right)^2}, \quad (3.1)$$

где  $k_0$  определяется из соотношения:

$$k_0(k_0^2 - 2Fk_0 + 1) = \frac{1 + \bar{\rho}}{1 - \bar{\rho}} We. \quad (3.2)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта № 0014-2015-0026 (Программа № IV.4.12).

### Список литературы

1. *Faraday M.* On a peculiar class acoustical figures on certain forms assumed by a group of particles upon elastic surface // *Phil. Trans Roy. Soc., London.* 1831 Vol. 121. P. 209–318.
2. *Стретт Дж. В. (лорд Рэлей)* Теория звука // М. ГИТТЛ. 1955. Т. 1.
3. *Сорокин В.И.* Об эффекте фонтанирования капель с поверхности вертикально колеблющейся // *Акуст. журнал.* 1957. Т. 3. № 3. С. 262–273.
4. *Черепанов А. А.* Влияние переменных внешних полей на неустойчивость Рэлея-Тейлора // *Некоторые задачи устойчивости поверхности жидкости.* Свердловск. 1984. С. 29–53.
5. *Tonks L. A.* Theory of liquid surface rupture by uniform electric field // *Physical Review.* 1935. Vol. 48, P. 562–568.
6. *Френкель Я. И.* К теории Тонкса о разрыве поверхности жидкости постоянным электрическим полем в вакууме // *Журн. эксперим. и теор. физики.* 1936. Т.6. № 4. С. 348–350.

## **Исследование формы лежащей капли в поле тяжести и явления её прыжка при переходе в невесомость**

**В.А. Саранин<sup>а</sup>, В.В. Майер<sup>а</sup>, Е.И. Вараксина<sup>а</sup>**

<sup>а</sup> Глазовский государственный педагогический институт им. В.Г. Короленко, 427621, Глазов, ул. Первомайская, 25,  
e-mail: val-sar@yandex.ru

Экспериментально, теоретически и численно исследуются форма капли, лежащей на несмачиваемой твердой подложке и явление ее прыжка при переходе в условия невесомости. Рассчитана форма лежащей капли, найдено, что ее высота немонотонным образом зависит от объема. Сделаны теоретические оценки скорости подскока капли при ее малых и больших размерах. Численно рассчитаны скорости подскока при произвольных размерах капли. Теоретические, численные и экспериментальные результаты находятся в удовлетворительном согласии.

**Ключевые слова:** форма лежащей капли, прыжок капли при переходе в невесомость, скорость прыжка капли.

## **Research of the form of a lying drop in the gravitational field and the phenomenon of its jump at transition in weightlessness**

**V.A. Saranin<sup>a</sup>, V.V. Mayer<sup>a</sup>, E.I. Varaksina<sup>a</sup>**

<sup>a</sup> V. G. Korolenko Glazov State Pedagogical Institute, Pervomaiskaya, 25, 427621, Glazov  
e-mail: val-sar@yandex.ru

Experimentally, theoretically and numerically studied form of drops lying on a non-wettable solid support, and the phenomenon of its jump from the substrate during the transition in weightlessness. The shape of the underlying drops found that her height is non-monotonic dependence on the volume. Made theoretical estimates of speed bounce drop in its small and large sizes. Numerically calculated bounce rate for arbitrary size droplets. Theoretical, numerical and experimental results are in satisfactory agreement.

**Keywords:** the form of a lying drop, a drop jump at transition in weightlessness, speed of jumping up of a drop.

Исследование формы лежащей капли жидкости в поле тяжести и явления прыжка капли при переходе в условия невесомости представляет интерес как с научно-методической точки зрения, так и с прикладной [1–6].

Для теоретического и численного расчета скорости, с которой капля удаляется от подложки при ее свободном падении, рассматривается механическая модель капли, как осциллятора, состоящего из двух грузиков массами  $m/2$  ( $m$  – масса всей капли), при-

крепленных к пружине и расположенных на подложке массой  $M \gg m$ . На основе этого рассмотрения для скорости центра масс капли можно получить соотношение

$$v = \sqrt{\frac{\sigma \Delta S}{\rho V}} \quad (1)$$

Рассмотрим асимптотику малых и больших капель. В случае малых капель существенны эффекты вязкости, и при деформации лежащей капли под действием силы тяжести часть энергии переходит в тепло. В результате можно получить следующую формулу для расчета скорости малых капель:

$$v = \frac{x_s}{R_0} \sqrt{\frac{3}{2\rho} \left( \frac{\rho g R_0}{3} - 2\eta \sqrt{\frac{2\sigma}{\rho R_0^3}} \right)} \quad (2)$$

$x_s$  - радиус «седла» капли (рис. 1). Радиус капли в сферическом состоянии  $R_0$ , начиная с которого выражение под первым корнем становится неотрицательным, равен

$$R_{0\min} = \left( \frac{6\eta}{\rho g} \sqrt{\frac{2\sigma}{\rho}} \right)^{\frac{2}{5}} \quad (3)$$

Капли меньшего радиуса не должны отрываться от подложки при ее свободном падении. Для параметров чистой воды при комнатной температуре этот радиус оказывается равным  $R_{0\min} \approx 0.56$  мм.

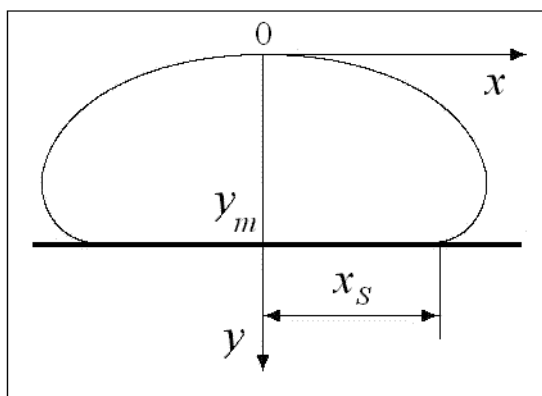


Рис. 1. Форма сечения капли, лежащей на несмачиваемой поверхности

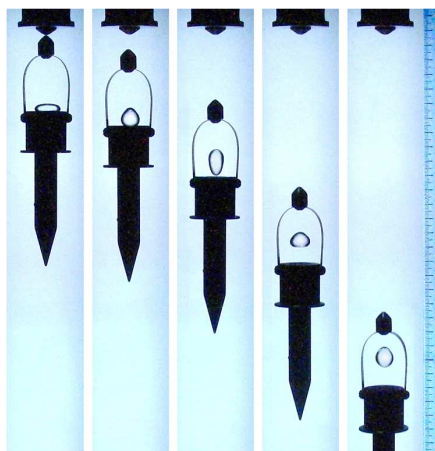


Рис. 2. Прыжок капли воды при свободном падении

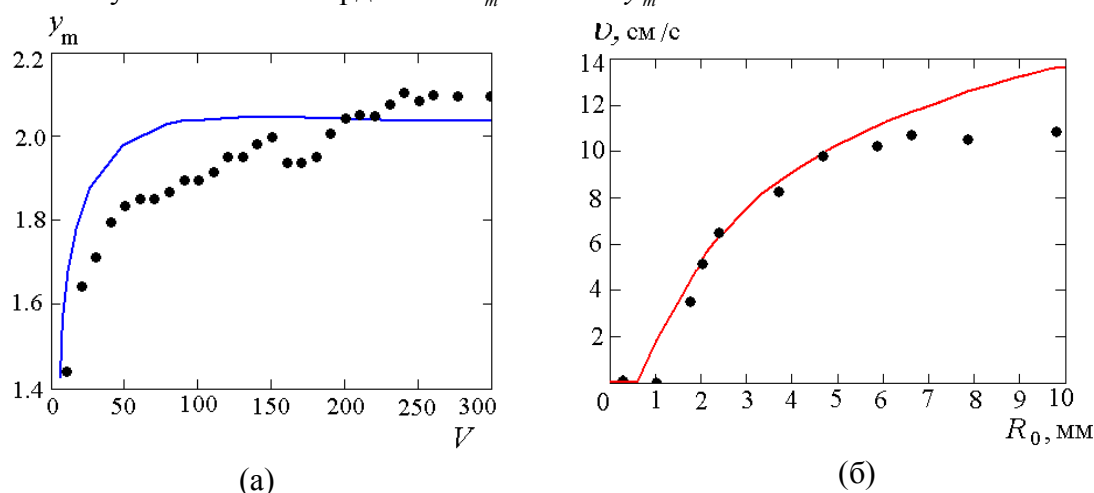
Перейдем к рассмотрению предельного случая капли большой массы. Такая капля на несмачиваемой поверхности растечется и примет форму почти плоской "лепешки" конечной толщины. Асимптотическое значение скорости прыжка очень большой капли получается следующим [3]:

$$v_m = (\sigma g / \rho)^{1/4} \quad (4)$$

Для расчета формы лежащей капли и скорости ее прыжка при любых значениях параметров использовалось уравнение Юнга-Лапласа, описывающее форму ее сечения [2–5]. Это уравнение удобно записать в безразмерной форме, выбрав в качестве единицы длины величину, пропорциональную капиллярной постоянной жидкости  $[l] = \sqrt{\sigma / \rho g}$ :

$$\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} + \frac{|y'|}{x(1+y'^2)^{1/2}} = P + y \quad (5)$$

В случае, когда капля полностью не смачивает поверхность подложки, решение уравнения (5) полностью определяется заданием параметра  $P$ , который однозначно и монотонно (но неявным образом) связан с объемом капли. Уравнение (5) интегрировалось численно. Найденная форма сечения лежащей капли, например, при  $P = 0.5$  (радиус эквивалентной сферической капли  $R_0 \approx 4.53$  мм) показана на рис. 1. В программе также рассчитывались площадь поверхности, объем капли, её эквивалентный сферический радиус и скорость подскока. На (рис. 3) а показана зависимость в безразмерных единицах максимального вертикального размера каплей  $y_m$  от их объема. На кривой имеются максимум: он имеет координаты  $V_m = 150$  и  $y_m = 2.048$ .



**Рис. 3.** Теоретические (линии) и экспериментальные (точки) зависимости максимальной высоты капли от ее объема в безразмерных переменных (а) и скорости прыжка от радиуса эквивалентной капли сферической формы (б)

Для исследования капиллярного прыжка лежащей капли при переходе в невесомость применялся подвешенный на электромагните металлический столик с массивной ножкой (рис. 2). Пороговое значение радиуса капли, начиная с которого она начинала отрываться от подложки, составило в экспериментах примерно 1.1 мм. На (рис. 3 б) представлена зависимость скорости прыжка капли от радиуса эквивалентной капли сферической формы.

### Список литературы

1. Кирко И.М., Добычин Е.И., Попов В.И. Явление капиллярной "игры в мяч" в условиях невесомости // Доклады АН СССР. 1970. Т. 192, № 2. С. 301–303.
2. Мышкица А.Д. Гидромеханика невесомости. М.: Наука, 1976. 504 с.
3. Саранин В.А. Примеры исследования устойчивости равновесия жидкостей на основе уравнения Лапласа / Актуальные проблемы механики сплошных сред: Материалы науч. конф. // Пермь, 1 – 2 ноября 2005. С. 120–122.
4. Паддей Дж.Ф., Питт А.Р. Измерение поверхностного натяжения с использованием тонких пленок / в сб. Поверхностные силы в тонких пленках // М: Наука, 1979 С. 174.
5. Саранин В.А., Иванов Ю.В. Равновесие жидкостей и его устойчивость. М. – Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2009. 172 с.
6. Майер В.В., Вараксина Е.И., Саранин В.А. Лекционные демонстрации прыжка капли в невесомость // УФН. 2017. Т. 187, № 1. С. 119–124.

## Моделирование обтекания цилиндра методами погруженных границ

А. С. Сармакеева<sup>a</sup>, Л. Е. Тонков<sup>b</sup>

<sup>a,b</sup> Институт Механики УрО РАН, 426067, г. Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34

<sup>a</sup> email: asarmakeeva@gmail.com

<sup>b</sup> email: tnk@udman.ru

В работе рассматриваются и сравниваются варианты метода погруженных границ (immersed boundary). Результаты верифицируются на тестовых задачах обтекания неподвижного цилиндра с различными числами Рейнольдса.

**Ключевые слова:** метод погруженной границы; обтекание цилиндра; несжимаемая жидкость; метод конечных объемов

## Simulation flow-past of a fixed cylinder by Immersed Boundary methods

A. S. Sarmakeeva<sup>a</sup>, L. E. Tonkov<sup>b</sup>

<sup>a,b</sup> Institute of Mechanics UB RAS, T. Baramzinoy 34, 426067, Izhevsk, Russia

<sup>a</sup> email: asarmakeeva@gmail.com

<sup>b</sup> email: tnk@udman.ru

The article concerns various of immersed boundary methods. This methods has been used to verify the results in test problems calculating a flow-past of a fixed cylinder at different Reynolds numbers.

**Keywords:** immersed boundary method; finite volume method; numerical modeling.

Рассматривается математическая формулировка и алгоритмы, применяемые к классу задач, которые содержат твердые тела (жесткие или деформируемые), движущиеся в жидкости при моделировании полей течения вокруг тел, скоростей плавания тел и определения сил на границах. Для подобных течений и их взаимодействий с твердыми/деформируемыми телами произвольных геометрий находит широкое применение метод погруженных границ на декартовых сетках [1]. Основная идея метода заключается в эффективном решении гидродинамических уравнений на декартовой сетке с некоторым представлением межфазной интерфейсной границы для твердого тела, не совпадающей с расчетной сеткой. Существует несколько вариантов метода погруженных границ, когда влияние твердого тела учитывается как дополнительное слагаемое в уравнениях импульса до дискретизации уравнений, так и на уровне граничных условий в системе алгебраических уравнений, полученной после дискретизации. В первом подходе (“continuous forcing”), вклады сил, действующих между жидкостью и телом учитываются с помощью регуляризации Дельта-функции и реконструкции потока, которая значительно упрощает процедуру дискретизации. В дискретном подходе (“discrete forcing”) условия на интерфейсе накладываются в расчетных ячейках, граничащих с твердым телом.

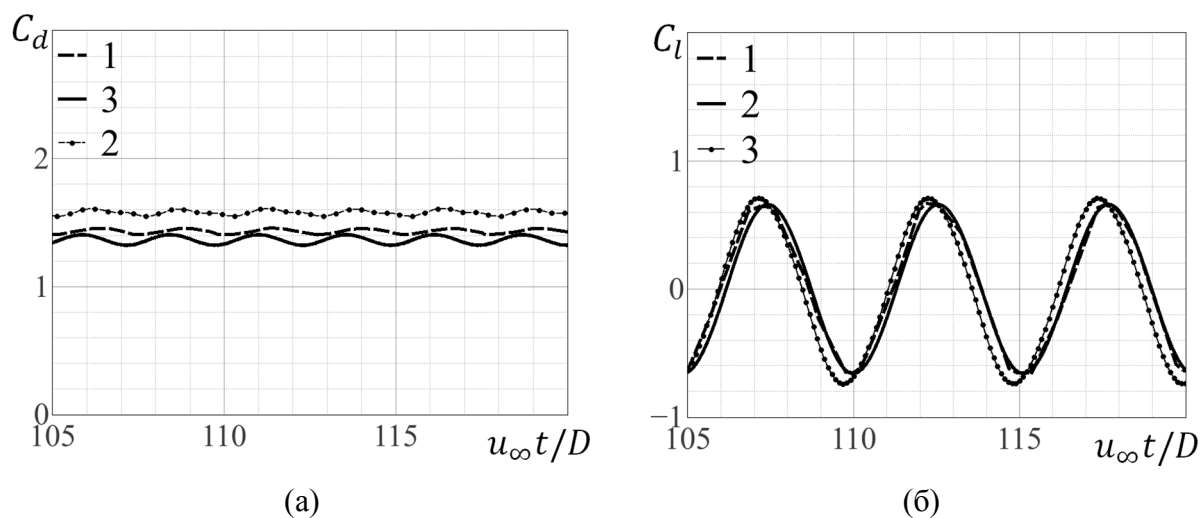
Рассматривался вариант дискретного метода сил при явной постановке граничных условий, в котором для нахождения коэффициентов квадратичной интерполяции значений переменных в граничных ячейках на расширенном шаблоне применялся метод наименьших квадратов [2].

Результаты сравнивались с работой [3], в которой для интерполяции на сетках использовалась функции воспроизводящего ядра аналогично используемых в бессеточном методе частиц (Reproducing Kernel Particle Method [4]).

В численном эксперименте сравниваются результаты моделирования обтекания потоком вязкой несжимаемой среды постоянной плотности неподвижного цилиндра с разными числами Рейнольдса, с явным описанием границ (для аппроксимации основных уравнений использовался метод конечных объемов) и, описанными выше, модификациями метода погруженной границы. Задача обтекания жидкостью кругового цилиндра является одной из самых известных классических тестов, моделирующих движение жидкости или газа. При числах Рейнольдса ( $Re$ ) выше 30, за цилиндром образуется последовательность вихрей, известная как «вихревая дорожка Кармана». Для оценки нестационарного характера течения определялся коэффициент лобового сопротивления  $C_d$  и коэффициент подъемной силы  $C_l$ :

$$C_d = \frac{2F_d}{\rho u_\infty^2 D}, C_l = \frac{2F_l}{\rho u_\infty^2 D}$$

где  $D$  — диаметр цилиндра,  $F_d$  — проекция силы, действующая на цилиндр на ось  $Ox$ ,  $F_l$  — проекция силы, действующая на цилиндр на ось  $Oy$ ,  $u_\infty$  — масштаб скорости.



**Рис. 1.** Изменение коэффициента лобового сопротивления  $C_d$  (а) и коэффициента подъемной силы  $C_l$  (б): 1 – расчет модификацией метода погруженных границ [3]; 2 – расчет методом с явным описанием границ; 3 – расчет методом погруженных границ с квадратичной интерполяцией [2].

На (рис. 1) приводится зависимость коэффициента лобового сопротивления и коэффициента подъемной силы от безразмерного времени  $u_\infty t/D$ . Размер расчетной области определялся в зависимости от диаметра цилиндра  $\Omega = [32D, 16D]$ ,  $D = 0.5$ ,  $Re = 185$ . Из рисунка видно, что значения, полученные в ходе численного эксперимента, хорошо согласуются для ряда задач представленных в [3].



При моделировании методом с определенными границами использовалась четырехгранная сетка из 84200 ячеек со сгущением к цилиндру, для моделирования методом погруженных границ использовалась равномерная сетка из 120000 ячеек. Для того чтобы добиться аналогичной точности представления в области цилиндра, при расчете методом погруженных границ, использовалась сетка с большим количеством ячеек. Соответственно, расчет потребовал пропорционально больших вычислительных затрат.

Результаты расчетов позволили оценить вычислительные затраты применения дискретных вариантов метода погруженных границ, что дает основание для дальнейшего расширения области применения подхода в задачах взаимодействия нескольких подвижных твердых тел произвольной формы и потоков жидкости.

Работа выполнена при поддержке фонда РФФИ N 16-41-180276\_p\_урал\_a.

### Список литературы

1. *Mittal R., Iccarino G.* Immersed boundary methods // *Ann. Rev. Fluid Mech.* 2005. Vol. 37. P. 239–261.
2. *Jasak H., Rigler D., Tukovic Z.* Design and implementation of Immersed Boundary Method with discrete forcing approach for boundary conditions // 11<sup>th</sup> World Congress on Computational Mechanics. 20-25.07.2014. Barcelona. Spain. P. 5319–5332.
3. *Pinelli A., Naqavi I. Z., Piomelli U., Favier J.* Immersed-boundary methods for general finite-difference and finite-volume Navier-Stokes solvers // *Journal of Computational Physics.* Elsevier. 2010. Vol. 229, N 24. P.9073–9091.
4. *Liu W. K., Jun S., Zhang Y. F.* Reproducing kernel particle methods. // *Int. J. Numer. Meth. Fluids.* 1995. Vol. 20. P. 1081–1106.

# **Изучение влияния вертикальных вибраций на теплообмен в цилиндрической полости с жидкостью при локальном подогреве снизу**

**И. О. Сбоев, И. А. Бабушкин**

Пермский государственный национальный исследовательский университет  
614990, Пермь, ул. Букирева, 15  
email: ivan-sboev@yandex.ru

Важным с точки зрения эффективности охлаждения систем, содержащих теплообменники компактных размеров, является изучение зависимости между интенсивностью теплообмена и амплитудой внешних вибраций. Настоящая работа посвящена исследованию особенностей теплообмена в замкнутой цилиндрической полости, заполненной жидкостью и подогреваемой снизу круглым источником тепла. Температурные измерения выполнены при помощи датчика теплового потока, а исследование структуры течения жидкости проведено методом лазерного ножа.

**Ключевые слова:** вибрационная конвекция; локальный источник тепла; осесимметричный тепловой плюм; датчик теплового потока

## **An investigation of the influence of vertical vibrations on heat transfer in a cylindrical cavity with the fluid by local heating from below**

**I. O. Sboev, I. A. Babushkin**

Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm  
email: ivan-sboev@yandex.ru

Important from the point of view of efficiency of cooling systems containing local heat exchangers is the research of relationship between heat transfer rate and the amplitude of external vibrations. The present work is devoted to investigation of the characteristics of heat transfer in a cylindrical enclosure filled with fluid and heated from below by round source of heat. Temperature measurements made using a heat flux sensor, and the investigation of the structure of fluid flow carried out by laser-knife method.

**Keywords:** vibration convection; local heat source; an axisymmetric thermal plume; heat flux sensor

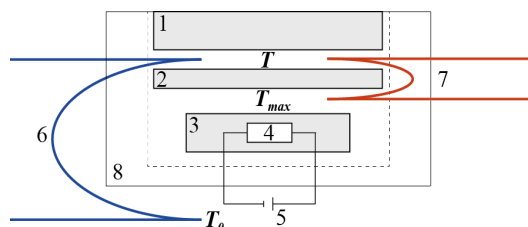
### **1. Введение**

Конвективный перенос энергии играет преимущественную роль во многих случаях теплообмена, поэтому исследования конвективных процессов в замкнутых полостях различных конфигураций до сих пор являются актуальными. Однако результаты экспе-

риментальных исследований теплопереноса в полостях с нагревателем конечных размеров значительно реже встречаются в литературе [1–8]. Как следствие имеет место недостаточное количество экспериментального материала в области тепловой конвекции от локального источника тепла при наличии вибрационного воздействия. Целью настоящей работы является изучение особенностей теплопереноса в цилиндрическом слое жидкости, находящимся под влиянием вертикальных вибраций заданной частоты. В ходе исследования проводится измерение теплового потока через локальный нагреватель, а также выполняется визуализация установившегося потока методом лазерного ножа.

## 2. Описание экспериментальной установки и методики измерений

Для изучения теплопереноса в жидкости при локализованном подогреве была изготовлена лабораторная модель. Рабочая полость, заполненная дистиллированной водой, ограничена боковой поверхностью трубы из оргстекла с внешним диаметром 90.0 мм. Толщина стенки трубы равнялась 3.0 мм. Сверху слой жидкости ограничен пластиной из алюминия толщиной 7.0 мм. Основанием полости служит пластина из оргстекла толщиной 25.0 мм. Высота слоя жидкости составляла 40.0 мм.

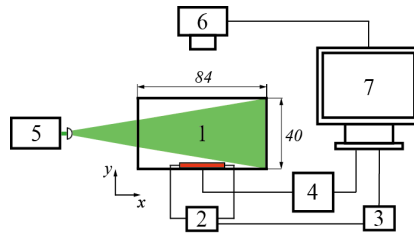


**Рис. 1.** Схема датчика теплового потока: 1 – медный круг радиусом 5.0 мм, соприкасающийся верхней границей с жидкостью, 2 – прокладка из текстолита толщиной 0.8 мм, 3 – медный теплообменник, 4 – резистор сопротивлением 100 Ом, 5 – источник питания, 6, 7 – дифференциальные медь-константановые термопары, 8 – подставка из оргстекла

Локальный подогрев осуществлялся снизу благодаря медному теплообменнику в виде плоского цилиндра радиусом 5.0 мм. Снизу теплообменник касался круглой прослойки из текстолита, которая в свою очередь приводилась в тепловой контакт с резистором сопротивлением 100 Ом, играющего роль источника тепла. Прослойка из текстолита, таким образом, являлась частью датчика теплового потока (рис. 1). Измерение превышения температуры медного теплообменника над температурой алюминиевого массива  $\Delta T_{\text{сл}} = T - T_0$  и величины теплового потока через пластину из текстолита, пропорционального перепаду температур  $\Delta T_{\text{д}} = T_{\text{max}} - T_0$ , выполнялось при помощи дифференциальных медь-константановых термопар. Величина термо-ЭДС определялась в процессе калибровки и составляла 39 мкВ/К.

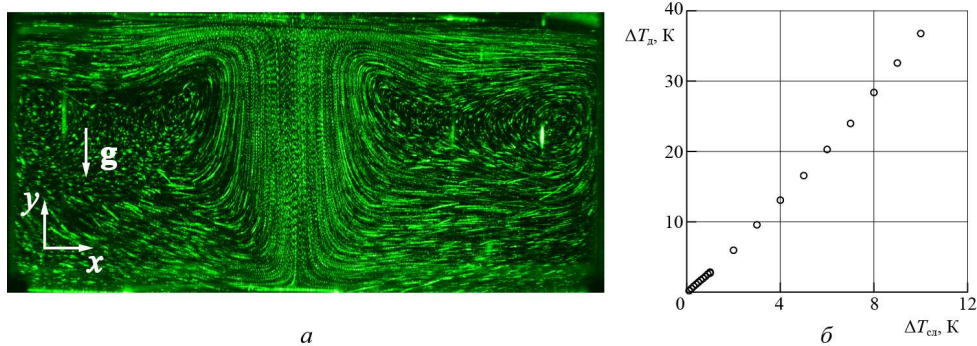
### 2.1. Перенос тепла в отсутствие вибраций

При отсутствии вибраций температура медного теплообменника поддерживалась постоянной при помощи ПИД-регулятора. Для наблюдения течения внутри слоя жидкости проводилась съемка микрочастиц (GRILTEX 2A P1 60% 50 мкм, 40% 80 мкм) при помощи лазерного ножа в вертикальной плоскости в центре слоя (рис. 2).



**Рис. 2.** Схема экспериментальной установки: 1 – лабораторная модель, 2 – источник питания, 3 – ПИД-регулятор на базе микроконтроллера ATtiny2313, 4 – микровольтметр с частотой опроса 2 Гц, 5 - зеленый DPSS лазер KLM-532/h-1000, 6 – цифровая камера, 7 – компьютер

В результате исследования установившегося в слое жидкости течения в отсутствие вибраций получены фотографии траекторий светотражающих частиц в плоскости лазерного ножа (рис. 3. а), а также определена зависимость между перепадом температуры на текстолитовой прослойке от перепада температуры на слое (рис. 3. б).



**Рис. 3.** Визуализация установившегося течения жидкости светотражающими частицами в плоскости  $ху$  при горизонтальном расположении полости (а); зависимость между перепадом температуры на текстолитовой прослойке  $\Delta T_{д}$  от перепада температуры на слое  $\Delta T_{сл}$  (б). Погрешность измерения температуры на прослойке не превышает 4%

Методом Шмидта-Мильвертона определено критическое число Рэлея, при котором возникающее в виде теплового плюма конвективное течение нарушает механическое равновесие слоя жидкости.

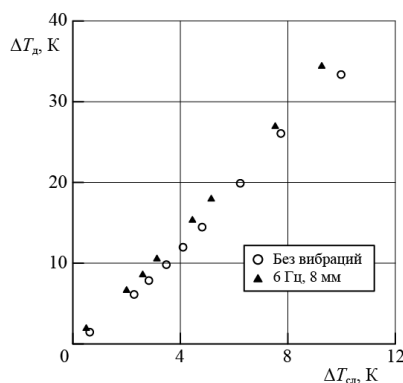
$$Ra_{кр} = (1.587 \pm 0.032) \cdot 10^6.$$

За характерный размер принималась высота цилиндрической полости.

## 2.2. Перенос тепла при вертикальных вибрациях

Исследование влияния вертикальных вибраций на теплоперенос в жидкости проводилось с использованием электродинамического вибростенда LDS V650. Лабораторная модель крепилась к рабочей части вибратора, которая приводилась в движение с частотой от 5 до 10 Гц. Допустимая амплитуда колебаний изменялась в интервале от 4 мм и 8 мм. Из-за наличия вертикальных вибраций высокой по сравнению с периодом опроса микроконтроллера частоты регуляция температуры нагревателя не проводилась. По этой причине подогрев жидкости осуществлялся путем регулирования мощности электрического тока, проходящего через резистор.

Наиболее заметное влияние вибраций на теплообмен при установившемся конвективном течении имело место при колебаниях слоя жидкости с частотой 6 Гц и амплитудой 8 мм (рис. 4). При этом в случае вибраций с большими частотами изменение интенсивности теплопереноса в жидкости оказывалось менее существенным.



**Рис. 4.** Зависимость между перепадом температуры на текстолитовой прослойке  $\Delta T_{д}$  от перепада температуры на слое  $\Delta T_{сл}$  в неподвижной рабочей полости и при наличии вертикальных вибраций

### 3. Заключение

В настоящей работе изучено поведение развитого конвективного течения в виде осесимметричного теплового плюма, возникающего при локализованном подогреве в цилиндрическом слое покоящейся жидкости. Также в отсутствие вибрационного воздействия выполнена визуализация потока при помощи взвешенных в жидкости частиц.

Температурные измерения вблизи локального нагревателя проводились как без внешних вибраций слоя жидкости, так и при совершении рабочей полостью вертикальных колебаний. В ходе измерений получены зависимости перепада температуры на слое жидкости от градиента температуры на датчике теплового потока. Показано влияние вертикальных вибраций на теплообмен в жидкости при локализованном подогреве снизу.

### Список литературы

1. *Torrance K. E., Orloff L., Rockett J. A.* Experiments on natural convection in enclosures with localized heating from below // *Journal of Fluid Mechanics*. 1969. Vol. 36. N. 1. P. 21–31.
2. *Torrance K. E., Rockett J. A.* Numerical study of natural convection in an enclosure with localized heating from below – creeping flow to the onset of laminar instability // *Journal of Fluid Mechanics*. 1969. Vol. 36. N. 1. P. 33–54.
3. *Hahne E. W. P.* Heat transfer and natural convection patterns on a horizontal circular plate // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 1969. Vol. 12. N. 5. P. 651–652.
4. *Sezai I., Mohamad A. A.* Natural convection from a discrete heat source on the bottom of a horizontal enclosure // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2000. Vol. 43. N. 13. P. 2257–2266.
5. *Paroncini M., Calcagni B., Marsili F.* Effects of the dimension of a localized heat source on the natural convection in square enclosures: comparison between numerical and experimental investigation // *ASME 2003 Heat Transfer Summer Conference*. – American Society of Mechanical Engineers, 2003. P. 565–572.
6. *Sarris I. E., Lekakis I., Vlachos N. S.* Natural convection in rectangular tanks heated locally from below // *International journal of heat and mass Transfer*. 2004. Vol. 47. N. 14. P. 3549–3563.
7. *Calcagni B., Marsili F., Paroncini M.* Natural convective heat transfer in square enclosures heated from below // *Applied Thermal Engineering*. 2005. Vol. 25. N. 16. P. 2522–2531.
8. *Calcagni B., Marsili F., Paroncini M.* Investigation of the effects of the dimension of a localized heat source on the natural convection in square cavities // *WIT Transactions on Modelling and Simulation*. 2005. Vol. 41. P. 727–736.

# Потеря устойчивости и конвективные течения в сверхкритической жидкости с переменными физическими свойствами

Е.Б. Соболева<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН  
119526, Москва, пр-т Вернадского 101 к. 1  
email: soboleva@ipmnet.ru

Выполнено численное моделирование тепловой гравитационной конвекции сверхкритической жидкости в вертикальной прямоугольной области с разными значениями температуры на боковых границах. Рассмотрен случай существенной разности температур, приводящей к заметным неоднородностям плотности и физических свойств. Исследована смена режимов течения.

**Ключевые слова:** неустойчивость, тепловая гравитационная конвекция, термодинамическая критическая точка, переменные физические свойства, численное моделирование

## Bifurcations and convective flows in a supercritical fluid with variable physical properties

E. B. Soboleva<sup>a</sup>

<sup>a</sup> A.U. Ishlinskiy Institute for Problems in Mechanics of the RAS  
Pr. Vernadskogo, 101, k. 1, 119526, Moscow, Russia  
email: soboleva@ipmnet.ru

Numerical simulation of thermal gravity-driven convection in a supercritical fluid inside a vertical rectangular cavity with side walls to be held at variable temperatures is carried out. A significant temperature difference leading to a big density inhomogeneity and variability in physical properties is considered. Changing of flow regimes is studied.

**Keywords:** instability, thermal gravity-driven convection, thermodynamic critical point, variable physical properties, numerical simulation

### 1. Введение

Вещества вблизи термодинамической критической точки имеют особые свойства, поэтому привлекают исследователей. В серии космических экспериментов с околокритическими жидкостями [1] обнаружены особенности в их движении и теплообмене, что послужило толчком для разносторонних исследований в рамках гидродинамических моделей (см. [2-4] и цитируемую литературу). При приближении к критической точке сжимаемость и теплоемкость среды при постоянном давлении сильно возрастают. Однако, во многих работах перемещение массы инициировалось слабым теплоподводом, при котором температура в объеме меняется незначительно и физические свойства среды можно считать постоянными по пространству. При существенном теп-

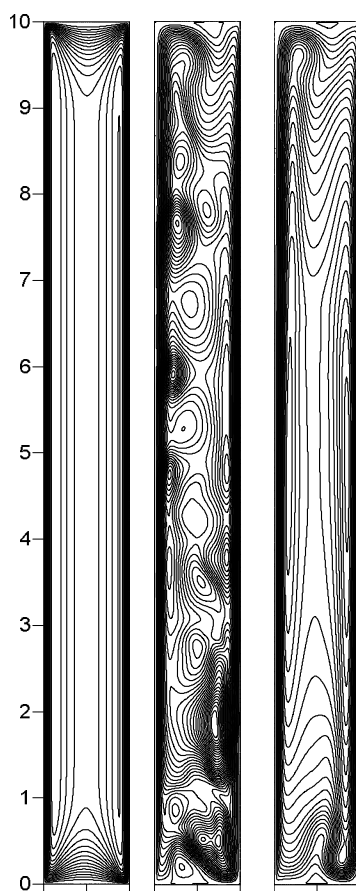
лоподводе температура, плотность и зависящие от них физические свойства могут заметно меняться внутри объема, приводя к новым гидродинамическим эффектам. Задачи об околокритических средах с переменными свойствами решались численно в [5, 6].

В настоящей работе выполнено численное моделирование тепловой гравитационной конвекции в вертикальной прямоугольной области с большой разностью температур на боковых границах, дающей существенную неоднородность плотности и физических свойств внутри объема.

## 2. Постановка и решение задачи

Рассматривается область шириной  $l = 1$  мм и высотой в 10 раз больше в поле земной силы тяжести. В области содержится вещество  $\text{CO}_2$  в сверхкритическом состоянии, температура постоянна и на 13 К выше критической; плотность равна критической. Среда находится в состоянии покоя. В начальный момент температура на левой границе начинает линейно расти, на правой – уменьшаться. Через сотые доли секунды значения температуры на левой и правой границах становятся на 23 К и 3 К выше критической, они фиксируются и далее не меняются. Возникшая в области разность температур  $\Delta T = 20$  К приводит к развитию тепловой гравитационной конвекции.

Используется полная гидродинамическая модель, которая включает уравнения Навье-Стокса и энергии вязкого теплопроводного сжимаемого несовершенного газа и уравнение состояния Ван-дер-Ваальса [7]. На ее основе создан численный код с применением конечно-разностного метода на разнесенной пространственной сетке [7].



**Рисунок.** Изолинии функции тока в моменты времени  $t=0,038; 1,40; 4,42$  с

Решение получено на сетке  $120 \times 1200$  с временным шагом  $\tau = 2,5 \cdot 10^{-5}$  с.

Показано, что на ранних стадиях формируется ламинарное течение, состоящее из двух симметричных вытянутых вихрей (рисунок, слева). Через некоторое время происходит серия бифуркаций, конвекция становится стохастической (рисунок, в центре). На поздних стадиях течение устанавливается и переходит опять к ламинарному режиму (рисунок, справа). В установившемся течении формируется сильная вертикальная стратификация температуры и плотности, так что на центральной вертикали параметр  $\varepsilon$  растет снизу вверх почти линейно от 0,014 до 0,070, а параметр  $m$  убывает от 0,26 до -0,24. Здесь  $\varepsilon = (T - T_c) / T_c$ ,  $m = (\rho - \rho_c) / \rho_c$  - температурное и плотностное «расстояния» до критической точки. Теплоемкость при постоянном давлении  $c_p$  и коэффициент теплового расширения  $\beta$  меняются примерно в 3 раза немонотонным образом, достигая максимума центральной части области.

По свойствам среды при начальной температуре и разности температур  $\Delta T$  можно рассчитать характерные значения чисел Рэлея  $Ra = g\beta\Delta T l^3 / (\nu\alpha) = 5.53 \cdot 10^6$  и Прандтля  $Pr = \nu / \alpha = 5.96$ ; здесь  $g$  - ускорение силы тяжести,  $\nu$ ,  $\alpha$  - коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности. Для сравнения получено решение аналогичной задачи с такими же значениями  $Ra$ ,  $Pr$ , но с малой разностью температур  $\Delta T = 0.020$  К. Берется область в 10 раз больше с  $l = 1$  см. Получено, что переход от начального к конечному режиму течения происходит также через серию бифуркаций, однако развивается на временном интервале, который примерно на два порядка больше, чем в первом случае; характерная скорость течения примерно на порядок меньше, чем в первом случае. В установившемся течении  $\varepsilon$ ,  $m$ ,  $c_p$ ,  $\beta$  вдоль центральной вертикали меняются мало в пределах 0,1 %.

### 3. Заключение

Показано, что в среде с существенно переменными свойствами переход от начального режима течения к конечному происходит гораздо быстрее, чем в среде с практически постоянными свойствами.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 15-01-02012).

#### Список литературы

1. *Barmatz M., Hahn I., Lipa J.A., Duncan R.V.* Critical phenomena in microgravity: Past, present and future // *Rev. Mod. Phys.* 2007. V. 79. № 1. P. 1–52.
2. *Onuki A.* Phase Transition Dynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. 710p.
3. *Lyubimov D., Lyubimova T., Vorobev A. et. al.* Thermal vibrational convection in near-critical fluids. Part. 2. Weakly non-uniform heating // *JFM.* 2006. V.564. P. 185–196.
4. *Полежаев В.И.* Методы моделирования конвективных, волновых процессов и теплообмена в околкритических средах (обзор) // *Изв. РАН. МЖГ.* 2011. № 2. С. 9–32.
5. *Соболева Е.Б.* Тепловая гравитационная конвекция сверхкритической жидкости с переменными физическими свойствами при боковом подводе тепла // *Изв. РАН. МЖГ.* 2013. № 5. С. 91–101.
6. *Соболева Е.Б.* Адиабатический нагрев (охлаждение) сверхкритической жидкости при изменении ее физических свойств // *Изв. РАН. МЖГ.* 2017. № 1. С. 28–39.
7. *Полежаев В.И., Соболева Е.Б.* Нестационарные эффекты тепловой гравитационной конвекции околкритической жидкости при боковом нагреве и охлаждении // *Изв. РАН. МЖГ.* 2002. № 1. С. 81–93.



## **Моделирование механизма формирования нанотяжей в эластомерных композитах с твердым зернистым нанонаполнителем**

**А.К. Соколов<sup>a</sup>, О. К. Гаришин<sup>a</sup>, А.Л. Свистков<sup>a,b</sup>**

<sup>a</sup> Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия, 614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1  
email: aleksandr\_\_sokol@mail.ru

<sup>a</sup> Пермский государственный национальный исследовательский университет  
614990, Пермь, ул. Букирева, 15

Известно, что наполнение каучуков сажей существенно улучшает их прочностные и деформационные свойства. Одно из возможных объяснений данного явления состоит в том, что нанонаполнитель создает в композите огромное количество равномерно распределенных микроразрывов, способствующих переводу каучуковой матрицы из сложного напряженного состояния в систему многочисленных одноосно нагруженных волокон (тяжей). Поэтому разрывные усилия для них должны быть гораздо выше соответствующих величин для того же эластомера, в неориентированном состоянии. Для проверки этой гипотезы была разработана соответствующая структурная модель, учитывающая возможность анизотропного упрочнения эластомера при деформировании. Результаты компьютерного моделирования показали, что в случае ее использования разрывы матрицы происходили не в зазоре между включениями, а на некотором удалении от него. Таким образом, вокруг зазора между частицами происходило формирование ослабленной зоны в виде "пустотелого кольца", что вполне можно интерпретировать как появление эластичного тяжа между данными частицами.

**Ключевые слова:** нанокompозит; конечные деформации; вычислительный эксперимент; критерий разрушения; эластомер; наполнитель; нанотяжи

## **Modeling of formation mechanism nanostrands in elastomeric composites with hard particulate nanofiller**

**A. K. Sokolov<sup>a</sup>, O. K. Garishin<sup>b</sup>, A. L. Svistkov<sup>a,b</sup>**

<sup>a</sup>Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Akademika Koroleva St. 1, 614013, Perm, Russia

email: aleksandr\_\_sokol@mail.ru

<sup>b</sup> Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm, Russia

It is well known that filling carbon black to rubbers significantly improves their strength and deformation properties. One possible explanation for this phenomenon is that the nanofiller creates a huge amount of uniformly distributed micro-breaks

to facilitate transfer of the rubber matrix from complex stress state into the system of many uniaxially loaded fibers (strands).

Appropriate structural model of an elastomeric composite was developed to verify this hypothesis. It takes into account the possibility of anisotropic strengthening of the elastomer during deformation. The results of computer simulation showed that in case of its using matrix breaks occurred not in the gap between the inclusions, but on some removal from it. Thus, the formation of a weakened zone in the form of a "hollow ring" occurred around the gap between the particles, that is quite be interpreted as a possible appearance of the elastic strand between the particles.

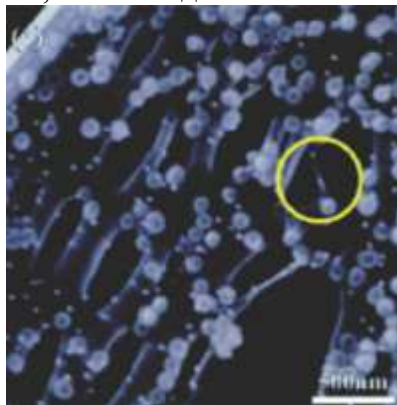
**Keywords:** Nanocomposites; finite deformations; computational experiment; criterion of destruction; elastomer; filler; polymer bridge

## 1. Введение

С начала XX века известно, что наполнение каучуков сажей (20-30% по объему) существенно улучшает их многие эксплуатационные свойства: повышает жесткость, увеличивает разрывные усилия в 5–15 раз, а предельные деформации в 2–4 раза [1–4]. При этом, чем меньше размеры частиц наполнителя, тем сильнее упрочняется материал [5–6]. Однако причины и механизмы этих эффектов до сих пор являются предметом дискуссий среди материаловедов. Проверке одной из гипотез, способных объяснить процесс упрочнения, и посвящена данная работа. Суть ее состоит в том, что наночастицы обладают огромной поверхностью межфазных контактов, что превращает значительную долю матрицы в связанное, то есть более прочное состояние. Одновременно нанонаполнитель создает в композите огромное количество равномерно распределенных микроразрывов, способствующих переводу каучуковой матрицы из сложного (трехосного) напряженного состояния в систему многочисленных одноосно нагруженных волокон-тяжей ориентированных вдоль действия внешней нагрузки, то есть наиболее эффективным образом.

## 2. Формирование нанотяжей

Возникающие в результате данной структурной перестройки волокна представляют собой цепочки из сажевых частиц, скрепленными одноосно ориентированным каучуком. Поэтому разрывные усилия для волокон должны быть гораздо выше соответствующих величин для того же эластомера, но в обычном неориентированном состоянии. Наличие таких образований подтверждается экспериментально [7–9]. На (рис. 1) хорошо видны как тяжи, так и соединяемые ими агрегаты из сажевых частиц.



**Рис. 1.** Нанотяжи между агрегатами технического углерода на сканах, полученных с помощью атомно-силовой микроскопии

Для описания и анализа механизма возникновения нанотяжей была разработана структурная модель дисперсно-наполненного эластомера. В ее основе лежит новый деформационный критерий прочности, учитывающий возможность анизотропного упрочнения эластомера при вытяжке (1).

$$f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{\lambda_e}{\beta \sum_{i=1}^3 \exp(-\alpha_i \lambda_i^2) - 1} < A, \quad (1)$$

$$\lambda_e = \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + (\lambda_2 - \lambda_3)^2 + (\lambda_1 - \lambda_3)^2},$$

где  $\lambda_i$  – соответствующие кратности главных удлинений,  $\alpha$  и  $\beta$  константы, подбираемые из экспериментов (двуосное нагружение эластомера);  $A$  – предел прочности на разрушение. Основная особенность критерия в том, что при растяжении или сжатии по двум осям его значение будет выше, чем при одноосном деформировании (это при одних и тех же интенсивностях деформаций). То есть при одноосном нагружении материал разрушится позже, чем в случае двух или трехосного деформирования.

Результаты компьютерного моделирования показали, что разрывы связующего происходили не в зазоре между включениями, а на некотором удалении от него. Таким образом, вокруг зазора между частицами происходило формирование ослабленной зоны в виде "пустотелого кольца", что вполне можно интерпретировать как появление эластичного тяжа между данными частицами. В итоге можно сказать, что формирование тяжей в эластомерном композите возможно в том случае если в процессе деформирования будет происходить анизотропное изменение прочностных свойств матрицы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 16-08-00756 и № 16-08-00914).

### Список литературы

1. Kraus G. Reinforcement of elastomers by carbon black // Rub. Chem. Tech., 1978, Т. 51, №. 1. С. 297–321.
2. Garishin O.C., Moshev V.V. Damage model of elastic rubber particulate composites // J. Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 2002. V. 38. P. 63–69.
3. Garishin O.C., Moshev V.V. Structural rearrangement in dispersion-filled composites: influence on mechanical properties // Polymer Science. 2005, V. 47, №4, P. 403–408
4. Куперман Ф. Е. К вопросу о механизме усиления каучуков техуглеродом // XXIV Симпозиум "Проблемы шин и эластомерных композитов": Москва, 2013, С. 171–190.
5. Мошев В.В., Гаришин О.К. Структурная механика дисперсно-наполненных эластомерных композитов // Успехи механики, 2005, Т. 4, № 2, С. 3–36.
6. Чвалун С.Н. Полимерные нанокомпозиты // Природа, 2000, №7, P. 22–30.
7. Dohi H., Kimura H., Kotani M., Kaneko T., Kitaoka T., Nishi T., Jinnai H. Three-Dimensional Imaging in Polymer Science: Its Application to Block Copolymer Morphologies and Rubber Composites // Polymer Journal, 2007, V. 39, № 8, P. 749–758.
8. Morozov I.A., Lauke B., Heinrich G. Quantitative microstructural investigation of carbon-black-filled rubbers by AFM // Rubber chemistry and technology, 2012, V. 85, P. 244–263.
9. Morozov I.A. Structural-Mechanical AFM Study of Surface Defects in Natural Rubber Vulcanizates // Macromolecules, 2016, V. 49, №16, P. 5985–5992.

## Новые точные решения нелинейного реакционно-диффузионного уравнения с запаздыванием

В. Г. Сорокин<sup>a</sup>, В. В. Резник<sup>b</sup>, А. В. Вязьмин<sup>b,c</sup>

<sup>a</sup> МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2-я Бауманская ул., 5/1, 105005, Москва, Россия  
email: vsesor@gmail.com

<sup>b</sup> Московский политехнический университет, ул. Б. Семеновская, 38, 107023, Москва, Россия

email: cocamen9@mail.ru

<sup>c</sup> ОАО «НИИРП», поселок НИИРП, 141312, Сергиев Посад, Россия  
email: av1958list.ru

Получены новые точные решения нелинейного реакционно-диффузионного уравнения с запаздыванием, содержащего произвольную кинетическую функцию. Для поиска точных решений использован метод обобщенного разделения переменных. В специальных случаях точные решения выражаются через элементарные функции. Все точные решения содержат свободные параметры. Это позволяет использовать их в качестве тестовых задач для проверки адекватности и оценки точности результатов численного моделирования процессов тепло- и массопереноса с запаздыванием.

**Ключевые слова:** реакционно-диффузионное уравнение; запаздывание во времени; точные решения

## New Exact Solutions of Nonlinear Reaction– Diffusion Equation with Delay

V. G. Sorokin<sup>a</sup>, V. V. Reznik<sup>b</sup>, A. V. Vyazmin<sup>b,c</sup>

<sup>a</sup> Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul. 5/1, 105005, Moscow, Russia  
email: vsesor@gmail.com

<sup>b</sup> Moscow Polytechnic University, Bolshaya Semenovskaya str. 38, 107023, Moscow, Russia  
email: cocamen9@mail.ru

<sup>c</sup> Scientific Research Institute of Rubber Industry, poselok NIIRP, 141312, Sergiev Posad, Russia  
email: av1958list.ru

Nonlinear reaction-diffusion equation with a delay in time is investigated. Equation considered here contains one arbitrary function. Exact solutions with a generalized separation of variables are found. For special cases, new exact solutions are obtained, some of which can be represented in terms of elementary functions. All of these solutions contain free (arbitrary) parameters, so that one can use for solving modeling problems of heat and mass transfer with relaxation phenomena.

**Keywords:** reaction-diffusion equation; delay in time; exact solutions

## 1. Введение

Явления с запаздыванием проявляются во многих природных и технических процессах, например, динамике роста популяций, кроветворении, динамике инфекционных заболеваний и развитии эпидемий, пищевых цепях, геномных сетях, в локально-неравновесных процессах теплопереноса, химических и биохимических реакциях, управлении сложными или удаленными техническими объектами и др. [1].

Системы с запаздывающей обратной связью часто моделируются реакционно-диффузионными уравнениями, в которых кинетическая функция  $f$  зависит и от искомой функции  $u = u(x, t)$ , и от той же функции с запаздывающим аргументом  $w = u(x, t - \tau)$ . Специальный случай  $f(w)$  допускает следующую физическую интерпретацию: процесс массо- и теплопереноса в локально неравновесной среде обладает инерционными свойствами, т.е. система не мгновенно реагирует на воздействие в рассматриваемый момент времени  $t$ , как в локально-равновесном случае, а на время запаздывания  $\tau$  позже [2].

Наиболее хорошо изучено параболическое реакционно-диффузионное уравнение с запаздыванием. Различным свойствам и точным решениям данного уравнения и систем таких уравнений посвящены работы [3, 4]. Для поиска точных решений исследуемого нелинейного диффузионно-реакционного уравнения использовались метод обобщенного разделения переменных [5], а также метод функциональных связей [6].

## 2. Точные решения уравнения с запаздыванием

Рассмотрим класс нелинейных трехмерных реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием вида

$$u_t = a\Delta u + bu + f(u - kw), \quad w = u(\mathbf{x}, t - \tau), \quad (1)$$

где  $u_t$  – частная производная по времени  $t$  искомой функции  $u(\mathbf{x}, t)$ ,  $\Delta$  – трехмерный оператор Лапласа,  $\mathbf{x}$  – вектор декартовой системы координат,  $\tau$  – время запаздывания,  $a, b, k$  – параметры,  $f$  – произвольная функция. Сформулируем положения, обобщающие результаты [4] на трехмерный случай и позволяющие получать новые точные решения (1) с помощью уже имеющихся. Сформулированные ниже положения доказываются прямой подстановкой.

*Положение 1.* Пусть  $k > 0$  и  $u_0 = u_0(\mathbf{x}, t)$  – решение (1). Тогда функция

$$u = u_0(\mathbf{x}, t) + \exp(c_1 t) \xi(\mathbf{x}, t), \quad c_1 = \ln k / \tau, \quad (2)$$

где  $\xi = \xi(\mathbf{x}, t)$  –  $\tau$ -периодическая функция, удовлетворяющая уравнению

$$\xi_t = a\Delta \xi + (b - c_1)\xi, \quad \xi(\mathbf{x}, t) = \xi(\mathbf{x}, t + \tau), \quad .$$

также решение уравнения (1).

*Положение 2.* Пусть  $k < 0$  и  $u_0 = u_0(\mathbf{x}, t)$  – решение (1). Тогда функция

$$u = u_0(\mathbf{x}, t) + \exp(c_2 t) \eta(\mathbf{x}, t), \quad c_2 = \ln |k| / \tau, \quad (3)$$

где  $\eta = \eta(\mathbf{x}, t)$  –  $\tau$ -апериодическая функция, удовлетворяющая уравнению

$$\eta_t = a\Delta \eta + (b - c_2)\eta, \quad \eta(\mathbf{x}, t) = -\eta(\mathbf{x}, t + \tau), \quad .$$

также решение уравнения (1).

*Положение 3.* При  $k = 0$  справедливы результаты положения 1 и уравнение (1) допускает решение с обобщенным разделением переменных вида

$$u = t\varphi(\mathbf{x}) + \psi(\mathbf{x}), \quad (4)$$

где функции  $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$  и  $\psi = \psi(\mathbf{x})$  удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} a\Delta\varphi + b\varphi &= 0, \\ a\Delta\psi + b\psi &= \varphi - f(-\tau\varphi), \end{aligned}$$

а также другое точное решение с аддитивным разделением переменных

$$u = \varphi(\mathbf{x}) + \theta(t), \quad (5)$$

где функции  $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$  и  $\theta = \theta(t)$  удовлетворяют независимым уравнениям

$$\begin{aligned} a\Delta\varphi + b\varphi &= 0, \\ \theta'_t(t) &= b\theta(t) + f[\theta(t) - \theta(t + \tau)]. \end{aligned}$$

### 3. Простейшие решения уравнения (1)

Чтобы получить новые точные решения уравнения (1) с помощью формул (2) – (5) необходимо тем или иным способом определить простейшие решения. Так в этом качестве проще всего использовать решение  $u_0 = \text{const}$ , где  $u_0$  является корнем алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$bu_0 + f[(1-k)u_0] = 0.$$

Другое частное решение уравнения (1) можно искать в виде:

$$u_0 = u_0(\mathbf{x}) \Rightarrow a\Delta u_0 + bu_0 + f((1-k)u_0) = 0;$$

а также в виде трехмерной бегущей волны  $u_0 = u_0(\zeta)$ , где  $\zeta = \lambda t + k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-08-01252).

#### Список литературы

1. Долгих Ю.Ф., Сурков П.Г. Математические модели динамических систем с запаздыванием: учебное пособие. Екатеринбург: Издательство Уральского университета, 2012. 122 с.
2. Полянин А.Д., Сорокин В.Г., Вязьмин А.В. Точные решения и качественные особенности нелинейных гиперболических реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием // Теоретические основы химической технологии. 2015. Т. 49. № 5. С. 527–541.
3. Meleshko S.V., Moys S. On the complete group classification of the reaction–diffusion equation with a delay // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2008. V. 338. P. 448–466.
4. Polyainin A.D., Zhurov A.I. Non-linear instability and exact solutions to some delay reaction-diffusion systems // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2014. V. 62. P. 33–40.
5. Полянин А.Д. Точные решения с обобщенным разделением переменных нелинейных реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием // Теоретические основы химической технологии. 2015. Т. 49. № 1. С. 112–119.
6. Polyainin A.D., Zhurov A.I. The functional constraints method: Application to non-linear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2014. V. 67. P. 267–277.

## **Калориметрические исследования фазовых превращений в двухкомпонентных металлических сплавах**

**Л. В. Спивак**

Пермский государственный национальный исследовательский университет  
614990, Пермь, ул. Букирева, 15  
email: lspivak@psu.ru

Впервые с использованием дифференциальной сканирующей калориметрии высокого разрешения исследованы процессы кристаллизации и распада твердого раствора в сплавах на основе системы Al-Cu. При кристаллизации обнаружены скачки теплового потока по достижению линий ликвидуса. Такие же скачки теплового потока фиксируются после завершения кристаллизации по достижению линии ограниченной растворимости. Предполагается, что эти явления связаны с образованием в жидкости или твердом растворе большого количества локальных микрообъемов (концентрационные флуктуации), обогащенных ведущим кристаллизацию компонентом. Их появление предшествует началу процессов образования и роста кристаллов новой фазы. Аналогичные эффекты имеют место и для других двухкомпонентных металлических сплавов.

**Ключевые слова:** калориметрия; фаза; превращение

## **Calorimetric studies of phase transformations in two-component metallic alloys**

**L. V. Spivak**

Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm  
email: lspivak@psu.ru

With use of a differential scanning calorimetry of high resolution processes of crystallization and decomposition of the solid solution in the alloys based on Al-Cu system were studied for the first time. During the crystallization, jumps in the heat flux were found upon reaching the liquidus lines. The same heat flow jumps are fixed after the completion of the crystallization upon reaching the limited solubility line. It is assumed that these phenomena are associated with the formation, in a liquid or solid solution, of a large number of local microvolumes (concentration fluctuations) enriched in the leading crystallization component. Their appearance precedes the beginning of the processes of formation and growth of crystals of the new phase. Similar effects occur for other two-component metallic alloys.

**Keywords:** calorimetry; phase; transmutation

## 1. Введение

В термодинамически открытых системах металл-водород синергические эффекты микропластичности наблюдаются только тогда, когда происходит выделение гидридных или гидридоподобных фаз при совместном действии внешнего поля напряжений и высокоинтенсивного диффузионного потока водорода (см. [1]). Появление в последние годы аппаратуры дифференциального калориметрического анализа высокого разрешения позволило провести калориметрические исследования фазовых превращений при термоциклировании содержащих водород металлов Va группы. Они привели к обнаружению (см. например, [2]) неизвестных ранее калориметрических эффектов: появлению калориметрических максимумов при выделении из твердых растворов металл-водород гидридных фаз, или, наоборот, при их растворении при нагреве. Показано [3], что водород в металлах в зависимости от температуры и концентрации можно рассматривать как газ (неупорядоченная система), жидкость (появление ближнего порядка), твердое тело – наличие собственной подрешетки атомов водорода в металлической матрице.

Естественно было сравнить такие эффекты с калориметрическими исследованиями других, не содержащих водород, сплавов, претерпевающих при термоциклировании выделение или растворение избыточных фаз.

Поэтому для решения вопроса насколько специфичны калориметрические эффекты, наблюдаемые в сплавах металл – водород, необходимо было вновь вернуться к рассмотрению особенностей выделения (растворения) избыточных фаз в сплавах других систем с использованием современных методов дифференциальной сканирующей калориметрии. Такие исследования были проведены на многих двухкомпонентных сплавах. В предлагаемом сообщении это продемонстрировано на сплавах одной из хорошо известных систем Al–Cu.

## 2. Методика исследования

Объектом исследования были выбраны доэвтектические сплавы Д1 и Д19 системы Al–Cu, содержащие около 4.0 % вес. Cu. Данные по дифференциальной сканирующей калориметрии (DSC) получены с помощью прибора STA "Jupiter" 449.

## 3. Экспериментальные результаты и их обсуждение

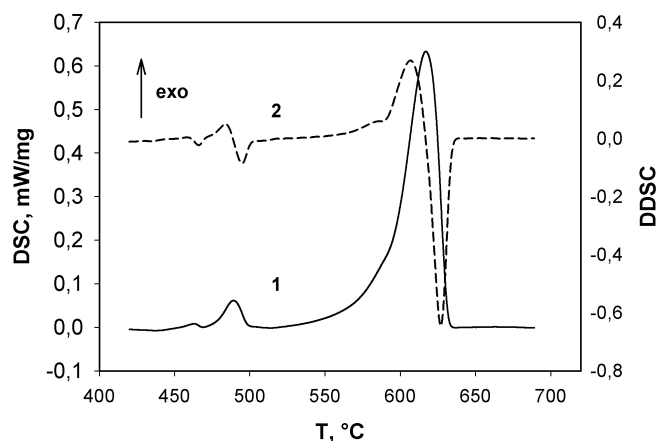
При охлаждении из жидкого состояния сплава Д19 (см. рисунок) экзотермический пик, связанный с развитием кристаллизационных процессов, характеризуется выраженной асимметрией. Наибольшая скорость выделения тепла (максимум на первой производной сигнала DSC – DDSC) наблюдается по достижению или в непосредственной близости к линии ликвидус (см. рисунок).

При дальнейшем охлаждении после кристаллизации (см. рисунок) в районе температур 510–426 °С фиксируется относительно слабо (~ 3 Дж/г) выраженный экзотермический пик, характер теплового эффекта которого не позволяет отнести ответственный за его появление процесс к фазовым превращениям первого рода.

В двухкомпонентной жидкости при приближении к линии ликвидуса должно происходить расслоение первоначально однородной по составу жидкой фазы на области с высокой и низкой концентрацией одного из компонентов. В ней возникают и существуют в динамическом равновесии значительное количество микрообластей, состав которых близок к составу кристаллизующейся в этой точке диаграммы состояния  $\alpha$ -фазы. Автокаталитический процесс возникновения в этих микрообъемах большого



числа зародышей новой фазы приводит к скачку тепловыделения. Последнее, не согласуется с существующими представлениями о процессах кристаллизации [4–6].



**Рисунок.** Зависимость сигнала DSC и DDSC от температуры при охлаждении сплава Д19

Если исходить из того, что из твердого раствора, содержащего около 4% вес. меди, выделяется интерметаллид, содержащий 54% вес. меди, то его выделению должен предшествовать процесс расслоения твердого раствора на области с высокой, близкой к концентрации меди в интерметаллиде, и на обедненные медью локальные области. То есть, необходимой предпосылкой для выделения новой фазы является возникновение концентрационных флуктуаций.

#### 4. Заключение

Отмеченные выше закономерности фазовых превращений присущи и другим двухкомпонентным системам, в том числе и некоторым системам металл – водород. Полученные результаты не описываются существующими представлениями о процессах кристаллизации двухкомпонентных сплавов.

По-видимому, в двухкомпонентных металлических сплавах не реализуются в чистом виде фазовые переходы первого рода. Механизмы фазовой трансформации при кристаллизации и распаде пересыщенных твердых растворов характеризуются наложением этих двух типов фазовых превращений.

#### Список литературы

1. Спивак Л. В. Синергические эффекты деформационного отклика в термодинамически открытых системах металл-водород //УФН. 2008. Т.178. №9. С. 897–922.
2. Спивак Л. В. Термокинетические эффекты при нагреве и охлаждении сплавов системы Nb–H //Альтернативная энергетика и экология. Международный журнал. (IS-JAEE). 2013. №8. С. 23–26.
3. Алефельда Г., Фелькля И. Водород в металлах. М.: Мир, 1981. Т.2. 430 с.
4. Уманский Я. С., Финкельштейн Б. И., Блантер М. Е. Физическое металловедение. М.: Металлургиздат, 1958. 721 с.
5. Куриц В., Фишер Д. Д. Фундаментальные основы затвердевания. М.: Издательство «ИКИ», 2013. 300 с.
6. Кана Р. У., Хаазена П. Т. Фазовые превращения в металлах и сплавах с особыми физическими свойствами. Т.2. М.: Металлургиздат, 1987. 624 с.

## Математическое моделирование кинетики сложных химических реакций

Спивак С.И.

Башкирский государственный университет, 450074, РБ, г.Уфа, ул.Заки Валиди, 32  
Институт нефтехимии и катализа РАН, 450075, РБ, г.Уфа, пр.Октября, 141  
email: semen.spivak@mail.ru

Предмет настоящей работы – информативность измерений и задачи математического моделирования химических процессов и реакторов. Это направление в настоящее время активно развивается в самых разных областях, в том числе в химии и химической технологии.

Рассматриваются обратные задачи идентификации механизмов сложных химических реакций. Основная сложность решаемых задач – недоинформативность измерений. Гипотетические схемы о механизмах реакций включают большое количество веществ и реакций между ними. Математические описания – системы дифференциальных уравнений, число неизвестных которых равно числу участвующих в реакции веществ. В то же время непосредственному измерению доступна только часть из этих веществ. Возникает обратная задача определения параметров системы дифференциальных уравнений (константы скоростей химических реакций), воспроизводящих часть ее решений. Следствием недоинформативности является неединственность решения обратной задачи.

В работе задача анализа неединственности решения обратной задача поставлена и рассмотрена как задача качественного анализа соответствующих систем дифференциальных уравнений химической кинетики. Классифицируются типы неединственности в зависимости от типа кинетического эксперимента. Определяется число независимых параметров, допускающих однозначное оценивание. Решается задача выделения числа и вида независимых параметров.

Вид оптимальных режимов (ОР) работы химических реакторов принципиально зависит от численных значений параметров химических реакций, лежащих в основе процесса. Численные значения кинетических констант определяются в результате обработки кинетических измерений. Погрешность в измерениях делает неизбежной погрешность в параметрах, что может сделать невозможным однозначное определение ОР. Возникает задача анализа чувствительности ОР к вариации кинетических параметров в некоторых пределах, определяемых величиной их погрешности. Задача оптимизации: определить температурный оптимум, обеспечивающий минимальную длину химического реактора при заданном начальном составе реагентов и продуктов реакции. Задаются двухсторонние ограничения на температуру процесса, которые определяются условиями проведения процесса.

В том случае, когда исходная система дифференциальных уравнений имеет малую размерность (до 3 уравнений) удалось получить явные аналитические выражения для ОР. В общем случае, для систем достаточно большой размерности, трудно надеяться на аналитические результаты. Решающую роль приобретает вычислительный эксперимент.

Разработаны программные комплексы решения рассматриваемых задач. Анализ иллюстрируется решением задач идентификации механизмов, определения ОР конкретных реакций, в том числе промышленно значимых.

## **Определение глубины гистерезиса режима тепловой конвекции в полости с движущейся стенкой в маломодовом приближении**

**А. В. Ступникова, А. Н. Шарифулин**

Пермский национальный исследовательский политехнический университет,  
614990, Пермь, Комсомольский проспект, 29  
emails: Stypnast2014@yandex.ru, sharifulin@bk.ru

Статья посвящена исследованию гистерезиса стационарных режимов конвекции вязкой несжимаемой жидкости в закрытом, нагреваемом снизу квадратном цилиндре, верхняя стенка которого может двигаться с постоянной скоростью. Если число Релея менее критического плавное циклическое изменение скорости верхней стенки ведет к возникновению и плавному циклическому изменению интенсивности конвективного вихря в полости. При превышении числом Релея его критического значения циклическое изменение скорости верхней стенки ведет смене направления вращения конвективного вихря гистерезисным образом. В работе в маломодовом приближении показано, что глубина гистерезиса увеличивается с ростом числа Релея.

**Ключевые слова:** гистерезис; тепловая конвекция; движение стенок

## **Determination of the hysteresis depth of the thermal convection regime in a cavity with a moving wall in the low-mode approximation**

**A. V. Stupnikova, A. N. Sharifulin**

Perm National Research Polytechnic University, Komsomolsky pr. 29, 614990, Perm  
emails: Stypnast2014@yandex.ru, sharifulin@bk.ru

The article is devoted to the investigation of the hysteresis of stationary modes of the convection of a viscous incompressible fluid in a closed quadratic cylinder heated from below, whose upper wall can move at a constant speed. If the Rayleigh number is less than critical, a smooth cyclic change in the velocity of the upper wall leads to the appearance of a smooth cyclical change in the intensity of the convective vortex in the cavity. When the Rayleigh number exceeds its critical value, the cyclic variation of the velocity of the upper wall leads to a change in the direction of rotation of the convective vortex in a hysteresis manner. In the work in the small-mode approximation, it is shown that the depth of the hysteresis increases with increasing Rayleigh number.

**Keywords:** hysteresis; thermal convection; boundary moving

Экспериментальное и теоретическое изучение бифуркаций стационарных режимов тепловой конвекции в замкнутой полости актуально для предсказания смен режимов, как в технологических процессах, так и для предсказания природных катастроф, связанных со сменой режимов атмосферных или океанических течений.

Со времен работы Релея по конвекции в горизонтальном слое сложился подход, заключающийся в рассмотрении устойчивости тепловой конвекции в полостях простой геометрической формы: горизонтальных и вертикальных плоских слоях и бесконечных цилиндрах для условий подогрева когда возможно состояния механического равновесия. Нарушение условий механического равновесия приводит к качественному изменению бифуркационной картины. К настоящему времени хорошо изучено влияние наклона полости, ее вибраций. Интересно с точки зрения приложений влияния движения одной из стенок полости. Такой способ нарушения условий механического равновесия практически не исследован. Имеется лишь работа [1], где показано, что движение верхней стенки квадратной полости (см.рис.1) приводит к разрушению вилочной бифуркации. В отсутствии нагрева задача переходит в известную задачу Кавагути[2].

В настоящей работе для анализа бифуркаций стационарных состояний этой задачи применяется маломодовая модель, аналогичная использованной в [3]:

$$\begin{cases} \dot{\psi} = -\psi + r\mathcal{G}_1 + \text{Re}, \\ \text{Pr} \dot{\mathcal{G}}_1 = \psi - \mathcal{G}_1 - \psi\mathcal{G}_2, \\ \text{Pr} \dot{\mathcal{G}}_2 = -b\mathcal{G}_2 + \psi\mathcal{G}_1, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\psi$  – интенсивность вихря, возникающего в полости, а  $\mathcal{G}_1$  и  $\mathcal{G}_2$  – амплитуды первых двух членов разложения поля температуры.  $r$  – нормированное число Релея, задающее интенсивность подогрева,  $\text{Re}$  – число Рейнольдса, совпадающее с безразмерной скоростью движения верхней стенки,  $b$  – геометрический параметр,  $\text{Pr}$  – число Прандтля.

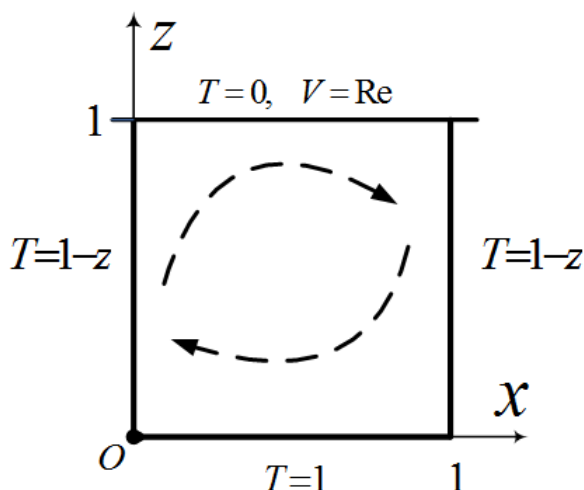
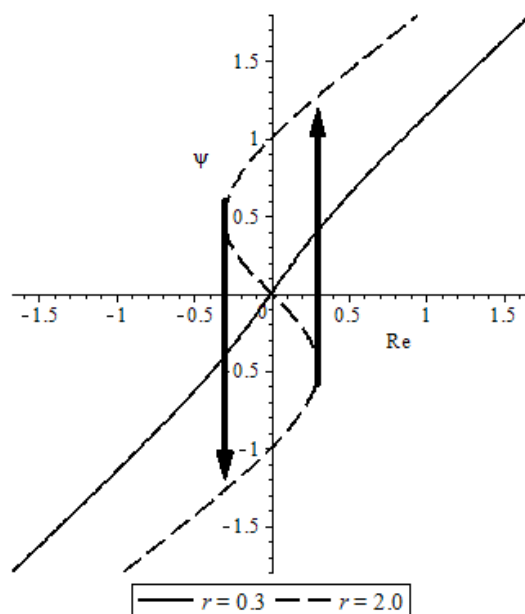


Рис. 1. Геометрия задачи

С помощью модели (1) численно и аналитически было исследовано влияние скорости движения верхней стенки  $\text{Re}$  на интенсивность вихря, возникающего в полости. Задача имеет два предельных случая. В первом, когда  $\text{Re}=0$  (неподвижная стенка) модель (1) переходит в хорошо исследованную модель Лоренца, а при  $r=0$  (1) имеет решение  $\psi = \text{Re}$ . Это решение качественно верно описывает поведение жидкости при малых числах Рейнольдса, когда течение остается одновихревым [2]. Как видно из

(рис. 2.) полученная в расчетах при  $r = 0.3$  зависимость  $\psi(\text{Re})$  остается практически линейной.



**Рис. 2.** Бифуркационная диаграмма, показывающая возникновение гистерезиса при достаточно большой интенсивности подогрева

При достаточно большой интенсивности подогрева ( $r = 2$ ), когда число Релея в два раза больше критического, модель предсказывает возникновение гистерезисных переходов при плавном увеличении или уменьшении скорости движения стенки. Определена зависимость глубины гистерезиса от числа Релея.

Работа была поддержана Министерством образования и науки Российской Федерации (проект No.3.6990.2017/БЧ).

### Список литературы

1. *Тарунин Е. Л.* Ветвление решений уравнений конвекции в замкнутой полости с подвижной границей при подогреве снизу // Современные проблемы тепловой гравитационной конвекции. Минск. 1974. С. 51-58.
2. *Kawaguti M.* Numerical solution of the Navier-Stokes equations for the flow in a two-dimensional cavity // Journal of the Physical Society of Japan. 1961. Vol. 16. №. 11. P. 2307-2315.
3. *Sagitov R.V., Sharifulin A. N.* Stability of steady state thermal convection in a tilted rectangular cavity in low-mode approach. // Thermophysics & Aeromechanics. 2008. Vol. 15. №2. P. 233–241.

## Развитие солибора в длинноволновых моделях нелинейных внутренних волн

Т.Г. Талипова<sup>a,b</sup>, О.Е. Куркина<sup>b</sup>, Е.А. Рувинская<sup>b</sup>, А.В. Слюняев<sup>a,b</sup>, Е.Н. Пелиновский<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup> Институт прикладной физики РАН, 603950, Нижний Новгород, ул. Ульянова 46, email: tgtalipova@mail.ru

<sup>b</sup> Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексева, 603950, Нижний Новгород, ул. Минина 24, email: oksana.kurkina@mail.ru

Рассматривается генерация солибора внутренней волны из начальных синусоидального и импульсного возмущений в рамках уравнения Гарднера с разными знаками кубической нелинейности и положительным знаком квадратичной нелинейности. В зависимости от типа возмущения и знака кубической нелинейности реализуются разные сценарии. При начальной синусоидальной волне и отрицательном кубе генерируются два ондулярных бора в двух точках обрушения синусоидальной волны. Показан процесс образования толстого солитона из развивающегося ондулярного бора. При положительной кубической нелинейности в точках обрушения, находящихся у креста и подошвы внутренней волны генерируются солитоны положительной и отрицательной полярностей соответственно. Показано, что нелинейное взаимодействие двух солиборов приводит к результирующей отрицательной скорости солитона с малой амплитудой. Если начальное возмущение имеет форму импульса отрицательной полярности, то из него генерируются как солиборы, так и бризеры внутренних волн, и динамика становится достаточно сложной.

**Ключевые слова:** асимптотические модели; солиборы внутренних волн; бризеры внутренних волн

## Solibore Generation in the Nonlinear Long Internal Wave Models

T.G. Talipova<sup>a,b</sup>, O.E. Kurkina<sup>b</sup>, E.A. Rouvinskaya<sup>b</sup>, A.V. Slunyaev<sup>a,b</sup>, E.N. Pelinovsky<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup> Institute of Applied Physics RAS, Uljanov str. 46, 603950, Nizhny Novgorod, email: tgtalipova@mail.ru

<sup>b</sup> Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev, Minin str. 24, 603950, Nizhny Novgorod, email: oksana.kurkina@mail.ru

The internal solibore generation from the initial monochromatic wave or impulse disturbance is studied in the frames of the asymptotic model based on the Gardner equation with both signs of the cubic nonlinear term and positive quadratic nonlinear term. Due to kind of the initial wave and sign of cubic nonlinearity various sec-

ondary waves are realized. Initial sine wave generates two undular bores in both breaking points when the cubic term is negative. The process of formation of the thick or table solitary wave is scrutinized. When the cubic nonlinearity is positive solitary waves of positive and negative polarities are generated in the breaking points near sine wave crest and trough accordingly. It is shown that interaction of two solibores leads to negative resulting speed of the solitary wave with the lowest amplitude. When the initial wave is the pulse of negative polarity and the cubic nonlinearity is positive the both internal solitary waves and internal breathers are generated and the wave dynamics becomes very complicated

**Keywords:** asymptotic models; internal wave soliton; internal breather

## 1. Introduction

Internal tidal wave entering shallow waters transforms into an undular bore. Undular bores are very often observed in the stratified ocean as the vertical displacements of the pycnocline, which lies in the depth of 50-200 m, and they manifest themselves on the ocean surface as the slicks of various intensities, see for instance, (Jackson and Apel, 2004). Sometimes internal undular bore is called solibore. One of examples of solibore evolution in the Arctic Ocean is analyzed in (Talipova et al., 2015). From the physical point of view the undular bore appears in the nonlinear dispersive systems if dispersion is weak in comparison with nonlinearity, and may be realized when the initial disturbance is very long. Appropriate model of such a phenomenon is based on the famous Korteweg-de Vries equation and its extensions (the Gardner equation for example, included the next cubic nonlinear term).

## 2. Theoretical model and results

We use the canonical form of the Gardner equation

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + 6\eta(1 + q\eta)\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0. \quad (1)$$

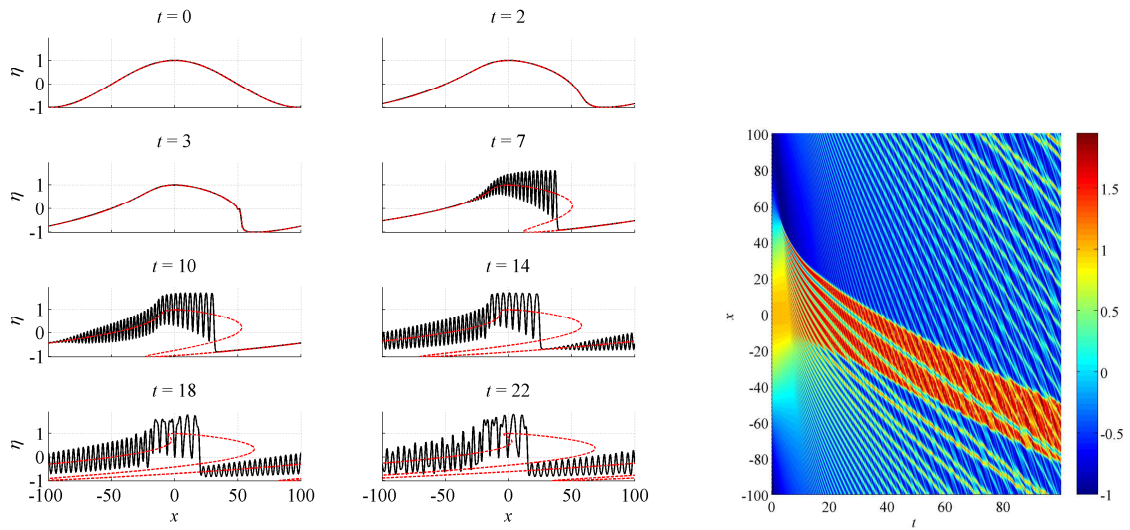
with  $q = \pm 1$ . The sign of quadratic nonlinear term as well as the real values of the coefficients of the Gardner equation in context of the various physical applications are not significant and can be eliminated using appropriate scaling. We compare our numerical results with an analytical rigorous Riemann solution of the dispersionless Gardner equation

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + 6\eta(1 + q\eta)\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

given by the expression

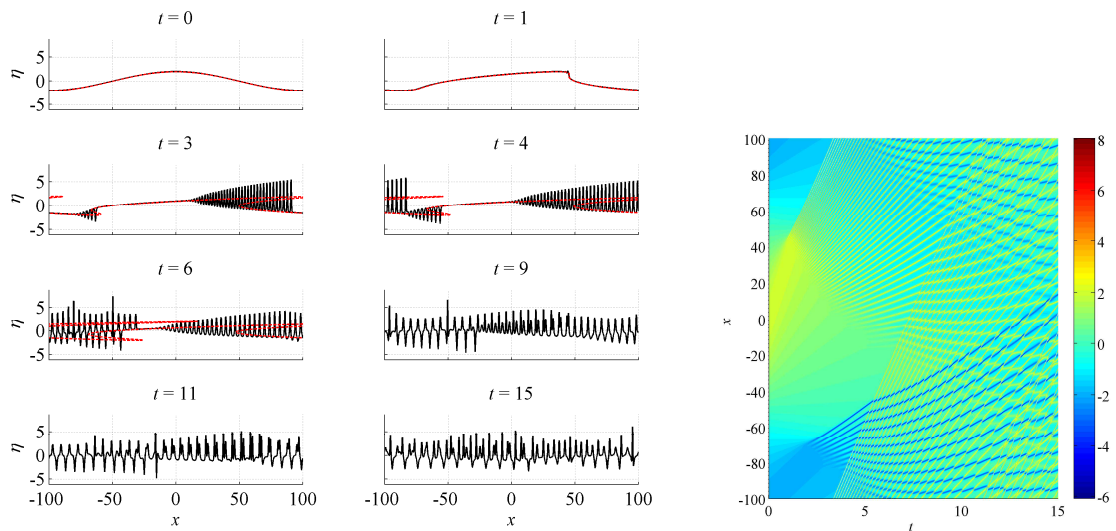
$$\eta(x, t) = F(x - V(\eta)t), \quad \text{where } V(\eta) = 6\eta(1 + q\eta). \quad (3)$$

For the sinusoidal initial wave which amplitude  $A$  is large enough ( $A = 1$ ), and case  $q = -1$  two breaking points are predicted within the dispersionless Gardner equation (1) (Kartashova et al, 2013), and also within the full nonlinear theory for two-layer shallow water (Zahibo et al 2007). The second breaking point appears on the back-slope of sine wave significantly later than the first breaking point ( $t = 10$  on Fig.1. left). The first undular bore begins to interact with its own tail due to periodicity even earlier than the second undular bore is formed. The generation of the table-top soliton takes place between both breaking points. The  $x - t$  diagram of the process presented on Fig1 (right) shows that solitary waves of small amplitudes get the additional negative shift when interact with solitary waves of large amplitudes.



**Fig. 1.** Left hand side: snapshots of wave evolution at  $A = 1$  ( $q = -1$ ) for the Gardner equation (1) – black line, and purely nonlinear wave deformation ( ) – red line; right hand side: space-time diagram of wave evolution

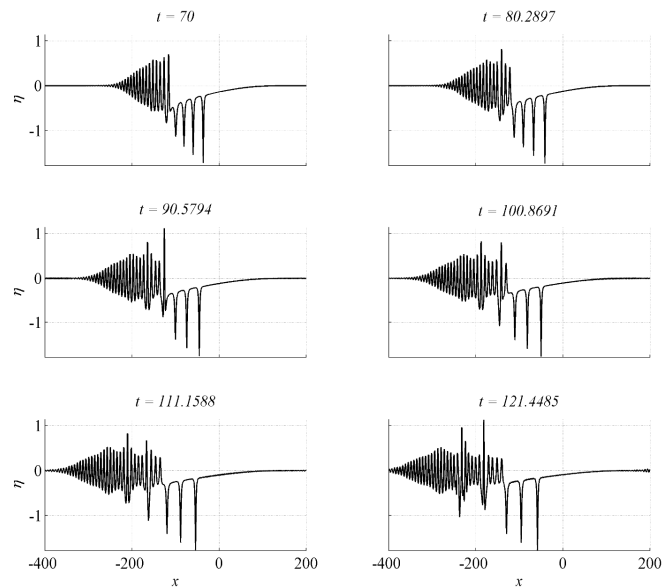
The process of solibore development from the initial sinusoidal wave with  $A = 2$  and case  $q = 1$  is shown on Fig.2. The second breaking point in the sine trough appears later than the first one also and the interaction between the positive solitary waves with the negative ones leads to appearance of the waves with abnormal heights.



**Fig. 2.** Left hand side: snapshots of the wave evolution,  $A = 2$ ,  $q = +1$  for the Gardner equation (1) – black line, and purely nonlinear wave deformation (17) – dashed red line; right hand side: space-time diagram of wave evolution

The initial negative pulse with small amplitude in the frames of the Gardner equation with  $q=1$  generates the nonlinear Airy function, but with amplitude grows it may born the solitary waves as well as the breather like waves what is confirmed by the solution of the inverse problem. Process of the solitary waves and breather-like waves appearance for Gaussian pulse  $\eta(x, t = 0) = -A \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{L}\right)$  with  $A = 1$  and  $L = 61$  is shown on Fig.3.





**Fig. 3.** Snapshots of the negative pulse evolution,  $A = 1$ ,  $L = 61$  in the Gardner equation with  $q = +1$

### 3. Acknowledgements

This work is supported by RFBR grant 16-05-00049 and the President grant for scientific schools of the Russian Federation HIII-6637.2016.5

### References

1. *Apel J.R.*, A new analytical model for internal solitons in the ocean // *J. Phys. Oceanogr.* 2003. V. 33. P. 2247–2269.
2. *Talipova T., Pelinovsky E., Kurkina O., Kurkin A.* Numerical modeling of the internal dispersive shock wave in the ocean // *Shock Vib.* 2015. V. 2015. P. ID 875619, 7 pages.
3. *Kartashova E., Pelinovsky E., and Talipova T.* Fourier spectrum and shape evolution of an internal Riemann wave of moderate amplitude. // *Nonlin. Processes Geophys.* 2013. V. 20. P. 571-580.
4. *Zahibo N., Slunyaev A., Talipova T., Pelinovsky E., Kurkin A., and Polukhina O.* Strongly nonlinear steepening of long interfacial waves // *Nonlin. Processes Geophys.* 2007. V. 14. P. 247-256.

## **Исследование влияния смены вида нагружения на характер кристаллографической текстуры поликристалла**

**М. А. Тельканов, П. С. Волегов**

Пермский национальный исследовательский политехнический университет  
614990, Пермь, пр. Комсомольский, 29  
email: michaelperm@gmail.com

В работе рассматривается двухуровневая модель неупругого деформирования поликристалла, учитывающая развороты (ротации) кристаллических решеток зерен в процессах интенсивных неупругих деформаций. Для описания ротаций используется модель, учитывающая несовместность пластических деформаций в соседних элементах. На верхнем масштабном уровне в модели рассматривается представительный объем поликристалла, элементом нижнего масштабного уровня является зерно. Построены прямые полюсные фигуры представительного объема поликристалла, проанализировано влияние смены вида деформирования на характер получаемых кристаллографических текстур.

**Ключевые слова:** физические теории пластичности; двухуровневые модели; неупругая деформация; кристаллографические текстуры

## **Study of influence of the deformation type change on the crystallographic texture**

**M. A. Telkanov, P. S. Volegov**

Perm National Research Polytechnic University, Komsomolsky Ave. 29, 614990, Perm

In this paper, mathematical model describing the viscoelastoplasticity deformation of representative volume of polycrystalline material with taking into account crystal lattices rotation during intense inelastic deformation is considered. The submodel associated with the incompatibility of plastic shears in neighboring grains used to describe lattice rotations. At the upper scale level, the model considers the representative volume of a polycrystalline, and the element of the lower level is the separate grain. Direct pole figures of a representative volume of a polycrystalline are built, the effect of deformation type changes on the obtained crystallographic textures is analyzed.

**Keywords:** crystal plasticity; two-level model; inelastic deformation; crystallographic textures

### **1. Введение**

В настоящее время практически любой процесс обработки металлов сопровождается интенсивными неупругими деформациями. Известно, что в таких процессах мате-

риалы испытывают существенную перестройку зеренной и фрагментной структуры. Например, при равноканальном угловом прессовании (РКУП) происходит измельчение зерен, что позволяет существенно повышать предел текучести материала без потери способности к пластическому деформированию [1]. Кроме того, практически все виды обработки металлов приводят к образованию кристаллографической текстуры, то есть наличию выделенных направлений в ориентациях кристаллических решеток зерен, что, в свою очередь, порождает анизотропию физико-механических свойств. В некоторых случаях применяют одновременную или последовательную обработку материала разными видами деформирования. Например, так поступают с насосными штангами, используемыми при эксплуатации нефтегазовых скважин. Одновременно растягивая и закручивая штангу, можно добиться упрочнения её поверхностного слоя, и, как следствие, обеспечить больший ресурс её работы. Таким образом, задача изучения эволюции физико-механических свойств при сложном нагружении представляется весьма актуальной, а учет механизмов, приводящих к такой эволюции, позволит качественно улучшить существующие модели деформирования поликристаллических материалов.

Целью настоящей работы является разработка двухуровневой статистической модели неупругого деформирования представительного объема (ПО) поликристалла с учетом ротаций кристаллических решеток зерен и изучение с ее помощью эволюции физико-механических свойств поликристалла. В частности, будет рассмотрена эволюция кристаллографической текстуры материала при смене вида деформирования.

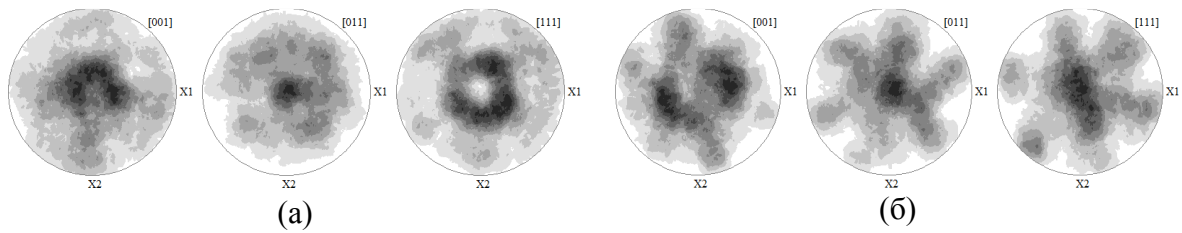
## **2. Постановка задачи**

В работе используется двухуровневая математическая модель неупругого деформирования поликристаллов [2-3]. Верхний масштабный уровень (макроуровень) модели описывает представительный объем поликристалла, состоящий из элементов мезоуровня – отдельных кристаллитов. Определяющим соотношением мезоуровня является закон Гука, для установления связи переменных различных масштабных уровней применяется гипотеза Фойгта. Для ротаций кристаллических решеток зерен применена модель, учитывающая несовместность пластических сдвигов.

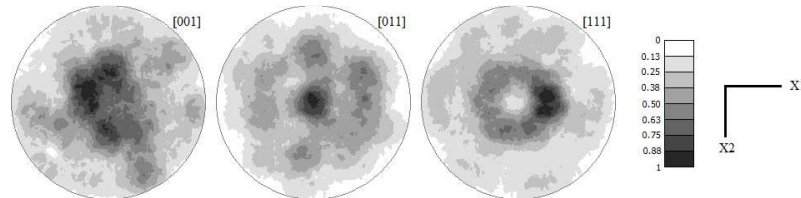
В рамках работы проведены численные эксперименты по деформированию представительного объема ОЦК-поликристалла из 512 зерен с учетом смены типа нагружения. Параметры материала соответствуют конструкционной стали Ст45. В начальном состоянии кристаллические решетки зерен поликристалла ориентированы по случайному равномерному закону в ориентационном пространстве, поэтому кристаллографическая текстура отсутствует. Далее поликристалл подвергался нагружению по двузвенной траектории «растяжение-сдвиг» или «сдвиг-растяжение». В течение эксперимента через равные промежутки деформации производилось построение прямых полюсных фигур (ППФ) поликристалла.

## **3. Результаты моделирования**

На (рис. 1. а) представлены прямые полюсные фигуры ПО поликристалла после одноосного растяжения до интенсивности деформаций 30%, а на (рис. 1. б) – для простого сдвига. При построении ППФ в плоскости, перпендикулярной оси растяжения, всегда наблюдается аксиальная текстура, а ППФ, построенная в плоскости сдвига, даёт текстуру, напоминающую лучи, расходящиеся от центра. На (рис. 2) представлены ППФ поликристалла после последовательной обработки растяжением и сдвигом, из которых видно, что сдвиг слабо повлиял на общий вид текстуры, в которой по-прежнему можно выделить отчетливую аксиальную составляющую.

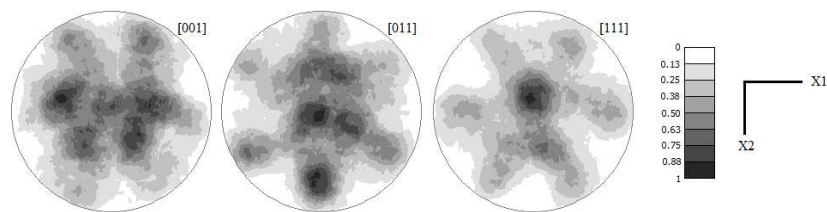


**Рис. 1.** ППФ после одноосного растяжения (а) и после простого сдвига (б).



**Рис. 2.** ППФ после последовательного применения растяжения и простого сдвига

Аналогичный эксперимент был проведен с другой комбинацией нагрузжений: РКУП с углом сопряжения каналов  $45^\circ$  и одноосным растяжением [4]. Полученные результаты приведены на (рис. 3). В данном случае текстура практически не имеет аксиальной составляющей за счет деформации растяжением.



**Рис. 3.** ППФ после последовательного применения РКУП и растяжения

Из полученных данных можно сделать вывод о том, что с увеличением накопленной деформации способность материала к изменению текстуры заметно падает. Как следствие, можно сделать вывод о гораздо более сильном влиянии первичной обработки на свойства материала по сравнению с последующими.

#### 4. Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ № МК-1298.2017.1.

#### Список литературы

1. Малыгин Г. А. Пластичность и прочность микро- и нанокристаллических материалов (обзор) // Физика твердого тела. – 2007. – Т. 49. – №. 6. – С. 961-982.
2. Тельканов М.А., Волегов П.С. Описание ротаций кристаллических решеток и фрагментации зерен при интенсивных неупругих деформациях поликристаллов // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2016. – Т. 21, № 3. – С. 1338–1341.
3. Трусов П.В., Волегов П.С., Кондратьев Н.С. Физические теории пластичности: учебное пособие. Пермь: Изд-во ПНИПУ, 2013. – 244 с.
4. Скрябина Н. Е., Аптуков В. Н., Романов П. В., Фрушар Д. Влияние равноканального углового прессования на механические свойства и микроструктуру образцов магниевых сплавов // Вестник ПНИПУ. Механика. 2014. №3 С.113-128.

# Теплообмен в бесконечном слое с фрактальным распределением нагревателя

В. В. Титов<sup>а</sup>, Р. А. Степанов<sup>а</sup>

<sup>а</sup> Институт механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук 614013, Пермь, ул. Академика Королёва, 1  
email: titov.v@icmm.ru

В рамках этой работы мы изучаем влияние неоднородного распределения температуры на границе на конвекцию в бесконечном горизонтальном плоском слое. Результаты получены прямым численным моделированием уравнений сжимаемого неизоэтермического течения в кубической области с периодическими вертикальными границами и сплошными горизонтальными стенками. Найдены ламинарные и слабо нелинейные режимы течения. Рассмотрены регулярные и фрактальные распределения. Проведено сравнение интенсивности теплового потока через слой при фиксированных градиенте температуры и площади поверхности нагревания нижней границы. Полученные результаты для фрактальной геометрии показывают появление многомасштабной структуры потока и усиление каскадного теплообмена.

**Ключевые слова:** прямое численное моделирование; конвекция

## Heat transfer in the infinite layer with a fractal distribution of a heater

V. V. Titov<sup>a</sup>, R. A. Stepanov<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Institute of Continuous Media Mechanics of the Ural Branch of Russian Academy of Science, Academician Korolev Street, 1, 614013, Perm  
email: titov.v@icmm.ru

In the framework of this paper, we study an effect of inhomogeneous temperature distribution at boundary on the convection in an infinite horizontal plane layer. The results are obtained by a direct numerical simulation of the equations for compressible non-isothermal flow in a cubic numerical domain with periodic vertical boundaries and solid horizontal walls. Laminar and weakly non linear flow regimes are found. Regular and fractal distributions are considered. The intensities of heat flux through the layer are compared for fixed temperature gradient and the area of heated surface of the bottom boundary. The obtained results for fractal geometry show an appearance of the multiscale structure of the flow and the enhancement of a cascade heat transfer.

**Keywords:** direct numerical simulation; convection

### 1. Введение

В настоящее время энергосбережение и повышение энергетической эффективности в различных секторах экономики является приоритетным направлением науки, техники и технологий. Повышение энергоэффективности неразрывно связано с улуч-

шением характеристик различных теплообменных устройств. Целью данной работы является численное исследование возможности повышения эффективности теплообмена за счет неоднородности теплопроводящих свойств нагревателя. Особенный интерес представляет фрактальное распределение нагревательных элементов. В зависимости от размерности фрактала можно получить различное распределение энергии пульсаций по спектру [1], что в свою очередь усилит каскадные процессы и турбулентный перенос тепла [2]. Рассматривается несколько вариантов геометрии нагреваемой области с регулярным распределением одинаковых элементов и распределением, повторяющим фрактал – «ковёр Серпинского». Исследование влияния фрактальности нагрева на свойства конвекции представляет как фундаментальный так практический интерес.

## 2. Математическая модель

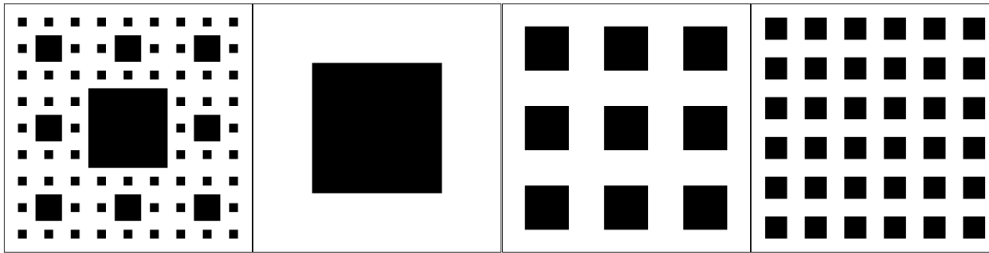
Конвекция сжимаемой неизотермической вязкой среды описывается следующими безразмерными уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{D \ln \rho}{Dt} &= -\nabla \cdot \mathbf{U} \\ \frac{D\mathbf{U}}{Dt} &= -(M^2 \gamma)^{-1} (T \nabla \ln \rho + \nabla T) - Fr \mathbf{e}_z + 2 Re^{-1} (\mathbf{S} \cdot \nabla \ln \rho + \nabla \cdot \mathbf{S}) \\ \frac{DT}{Dt} &= -T(\gamma-1) \nabla \cdot \mathbf{U} + \gamma (Re Pr)^{-1} \rho^{-1} \Delta T + 2 M^2 \gamma (\gamma-1) Re^{-1} \mathbf{S}^2 \end{aligned} \quad (1)$$

где  $D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{U} \cdot \nabla$  – производная Лагранжа,  $\rho$  – плотность,  $\mathbf{U}$  – поле скорости,  $T$  – температура,  $\mathbf{S}$  – девиатор симметричного тензора сдвига скорости,  $M = U_0/a_0$  – число Маха,  $Fr = U_0/\sqrt{gL}$  – число Фруда,  $Re = U_0 L/\nu$  – число Рейнольдса и  $Pr = \nu/\chi$  – число Прандтля,  $\gamma$  – показатель адиабаты,  $U_0$  – характерная скорость,  $a_0$  – скорость звука в среде,  $g$  – ускорение свободного падения,  $L$  – характерный размер,  $\nu$  – кинематическая вязкость,  $\chi$  – температуропроводность. Также вводится безразмерный параметр  $\theta = T_1/T_0$ , где  $T_0$  – температура холодной границы, а  $T_1$  – температура нагревателя.

Рассматривается трехмерная кубическая область. В качестве начального распределения выбрана покоящаяся среда постоянной температуры, равной температуре холодной верхней границы, находящаяся в состоянии гидростатического равновесия. Вертикальные границы периодические, горизонтальные границы являются твердыми стенками с условием прилипания. Особенность рассматриваемой задачи состоит в том, что на нижней границе задается неоднородное распределение температуры различных конфигураций (рис. 1). Суммарная площадь всех элементов равна для каждого из вариантов. Введём параметр  $D$ , описывающий тип нагревателя:  $D=f$  – фрактальный нагреватель,  $D=1$  – один сплошной квадрат,  $D=9$  – 9 квадратов,  $D=36$  – 36 квадратов.

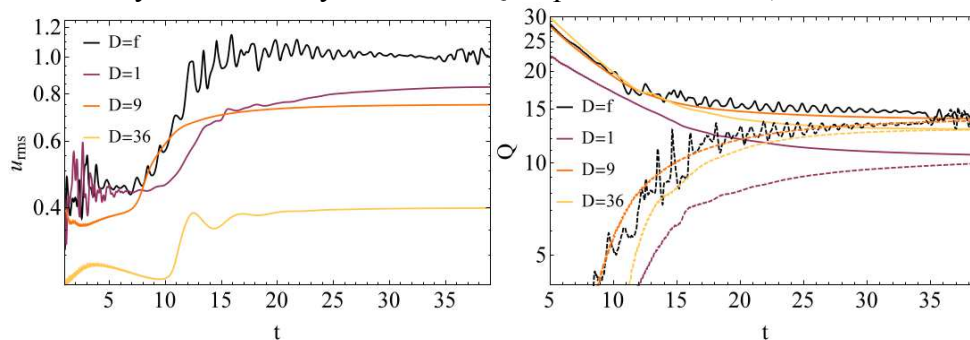
Уравнения (1) численно решались с использованием центральных разностей шестого порядка для аппроксимации пространственных производных. Интегрирование по времени выполняется явной схемой пятого порядка Рунге-Кутты-Фельберга с адаптивным шагом по времени.



**Рис. 1.** 4 конфигурации теплопроводящих элементов (черные) и теплоизолированной (белый) области (слева на право): 3 итерации ковра Серпинского, 1 большой квадрат, 9 средних квадратов и 36 малых квадратов

### 3. Результаты

Результаты численного моделирования получены для следующих значений безразмерных параметров:  $\theta = 3$ ,  $M = 0.1$ ,  $Fr = 0.088$ ,  $Re = 180$ ,  $\gamma = 5/3$ ,  $Pr = 1$  и различных значениях  $D$ . Такой подход позволяет сконцентрировать внимание на основной идее – изучении свойств структуры течения и эффективного потока тепла для различных форм нагревателей равной площади. Поток тепла  $Q(t)$  для случая с фрактальным нагревателем демонстрирует нелинейный квазипериодический характер (рис. 2). Также  $D=f$  показывает существенное увеличение  $Q$  в сравнении с  $D=1$ , около 50%.



**Рис.2.** Эволюции среднеквадратической скорости  $u_{rms}$  (слева) и потока тепла  $Q(t)$  (справа) через верхнюю (пунктир) и нижнюю (сплошной) границы для 4 значений  $D$

Проведено исследование пространственных спектров кинетической энергии. Наиболее развитый спектр получен для  $D=f$ . Спектры  $D=9$  и  $D=36$  дискретны, лишь несколько масштабов обладают ненулевой энергией. Полученные результаты подтвердили изначальное предположение о том, что фрактальная структура нагревателя позволяет сформировать многомасштабное течение, усиливающее перенос тепла.

### 4. Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке проект РФФИ-16-41-590406-урал.

### Список литературы

1. Vasil'ev A. Y., Kolesnichenko I. V., Mamykin A. D., Frick P. G., Khalilov R. I., Rogozhkin S. A., Pakholkov V. V. Turbulent convective heat transfer in an inclined tube filled with sodium // Journal of Technical Physics. 2015. Vol. 60. P. 1305–1309. DOI: 10.1134/S1063784215090236.
2. Sukhanovskii A., Evgrafova A., Popova E. Horizontal rolls over localized heat source in a cylindrical layer // Physica D Nonlinear Phenomena. 2016. Vol. 316. P. 23–33. DOI: 10.1016/j.physd.2015.11.007.

## Влияние внутреннего шума на состояния «Химеры» в ансамбле Курамото

И. В. Тюлькина

Пермский государственный национальный исследовательский университет, 614990, Пермь, ул. Букирева, 15  
Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013, Пермь, ул. Акад. Королева, 1  
email: irinatiulkina95@gmail.com

В работе строится теория возмущений теории Отта–Антонсена для случая ансамбля осцилляторов с внутренним шумом. В этой ситуации идентичные осцилляторы формируют притягивающие однокластерные состояния, что позволяет получить редуцированные уравнения динамики параметров порядка в малой окрестности таких состояний. Оказывается, что внутренний шум вносит эффективную диссипативность в динамику параметров порядка. Развита теория используется для исследования влияния внутреннего шума на состояния типа «Химера» в ансамблях Курамото. Для таких систем обнаруживается существенная редукция разнообразия типов состояний-Химер: многокластерные состояния подансамблей разрушаются — однокластерные становятся притягивающими. Результаты теории возмущений и численного счета полной системы уравнений хорошо согласуются друг с другом.

**Ключевые слова:** теория Отта-Антонсена; внутренний шум; состояния «Химеры»

## Effect of intrinsic noise on Chimera states in Kuramoto ensemble

I. V. Tyulkina

Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm  
Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Ak. Koroleva str. 1, 614013, Perm  
email: irinatiulkina95@gmail.com

We develop perturbation theory on top of the Ott–Antonsen theory for the case of ensemble of oscillators with intrinsic noise. In this case, identical oscillators form attracting one-cluster states, which allows one deriving the reduction equations for order parameters within the vicinity of these states. The intrinsic noise is found to bring an effective dissipativeness in the dynamics of order parameters. The developed perturbation theory is employed for studying the effect of intrinsic noise on the Chimera states in Kuramoto ensembles. We reveal significant reduction of the diversity of possible types of Chimera states; multi-cluster states of subensembles disappear—one-cluster states become attracting. The results of the perturbation theory and numerical simulation of the original equations are in close agreement with each other.

**Keywords:** Ott-Antonsen theory; intrinsic noise; Chimera states



## 1. Введение

Для ансамблей фазовых осцилляторов, подчиняющихся уравнениям вида

$$\dot{\varphi}_k = \Omega_k + \text{Im}(2h(t)e^{-i\varphi_k}), \quad (1)$$

где  $\varphi_k$  и  $\Omega_k$  — фаза и частота  $k$ -го осциллятора, соответственно,  $h(t)$  — произвольная функция времени, развита теория Отта–Антонсена [1]. Оказывается, что динамика плотности распределения состояний  $w(\varphi_k, t)$  обладает бесконечным числом интегралов движения, и имеет очень низкую размерность: определяется единственным дифференциальным уравнением первого порядка для комплексной переменной. Применительно к ансамблям осцилляторов такие свойства динамики позволяют получить замкнутое уравнение для параметра порядка даже в тех случаях, когда осцилляторы (их собственные частоты) неидентичны.

Построение теории возмущений для теории Отта–Антонсена (и ее обобщение, теория Ватанабе–Строгатца), для слабого нарушения свойств симметрии представляет огромный интерес, но оказывается проблематичным в общем случае [2]. Сложность связана с тем, что динамика параметра порядка в системе (1) может быть разнообразной, однако распределение осцилляторов относительно друг друга и их разбиение на кластеры при этом оказывается замороженным. Слабое нарушение вида (1) может вести как к слиянию кластеров, так и самопроизвольному разбиению на новые кластеры. Таким образом в динамике ансамбля начинает присутствовать не только динамика параметра порядка для каждого кластера, но и динамика кластеризации. Редукция такой динамики к невозмущенной динамике, описанной Оттом и Антонсеном, невозможна.

## 2. Теория возмущений для случая внутреннего шума

Вместе с тем, представляют интерес и частные случаи нарушения вида (1). Таковым является случай ансамбля осцилляторов с внутренним шумом. Внутренний шум приводит к медленному слиянию кластеров — однокластерные режимы динамики, близкие к таковым в теории Отта–Антонсена, оказываются притягивающими и, вместе с тем, для них может строиться теория возмущений. В работе, удастся развить теорию возмущений для ансамбля осцилляторов

$$\dot{\varphi}_k = \Omega_k + \text{Im}(2h(t)e^{-i\varphi_k}) + \varepsilon \zeta_k(t), \quad (2)$$

где  $\varepsilon$  — амплитуда внутреннего шума,  $\zeta_k(t)$  — индивидуальный внутренний шум:

$$\langle \zeta_k(t) \zeta_l(t+t') \rangle = \delta_{kl} \langle \zeta_k(t) \zeta_k(t+t') \rangle, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \zeta_k(t) \zeta_k(t+t') \rangle dt' = 2.$$

Описание динамики параметра порядка  $Z = \langle \exp(i\varphi_k) \rangle$  требует для замыкания (приближительного) учета динамики параметра  $Q = \langle \exp(i2\varphi_k) \rangle - Z^2$ , который обращается в ноль для однокластерных состояний в теории Отта–Антонсена, и описывает степень ее нарушения. В итоге можно получить редуцированные уравнения динамики системы:

$$\dot{Z} = i\Omega Z - (\gamma + \varepsilon^2)Z + h - h^*(Z^2 + Q), \quad \dot{Q} = (i2\Omega - 2\gamma - 4h^*Z)Q - 2\varepsilon^2 Z^2 - 4\varepsilon^2 Q, \quad (3)$$

где  $\Omega$  — средняя частота и  $\gamma$  — ширина распределение частот (для частот предполагается распределение Лоренца). Существенно, что динамика становится диссипативной.

## 3. Состояния «Химеры» в ансамблях Курамото

Воспользуемся уравнениями (3) для исследования влияния внутреннего шума на возникновение состояний «Химеры» в двух связанных ансамблях осцилляторов

$$\dot{\varphi}_{s,k} = \omega + \sum_{r=1}^2 K_{sr} N_r^{-1} \sum_{j=1}^{N_r} \sin(\varphi_{r,j} - \varphi_{s,k} - \alpha) \quad (4)$$

(здесь  $s = 1, 2$  и  $N_s$  — число осцилляторов в ансамбле  $s$ ). Для системы (4) ранее была показана возможность состояний, когда один ансамбль полностью синхронизован, а аттракторами для динамики параметра порядка второго ансамбля являются (в зависимости от параметров связей) либо колебания, синхронизованные с первым ансамблем, либо квазипериодические колебания [3]. На плоскости  $Z_2/Z_1$ , где  $Z_s = \langle \exp(i\varphi_{s,k}) \rangle$ , эти режимы соответствуют притягивающей стационарной точке и устойчивому предельному циклу, соответственно. Затем для этой же системы было показано, что если начальное состояние второго ансамбля не является однокластерным, то в системе реализуются другие режимы типа «Химера»: вместо стационарной точки на плоскости  $Z_2/Z_1$  наблюдаются замкнутые петли, а вместо предельного цикла — квазипериодические траектории [4].

В настоящей работе в систему (4) вводится внутренний шум. Как показал анализ, введение шума приводит к тому, что однокластерные состояния второго ансамбля оказываются притягивающими: система приходит к ним даже при многокластерных начальных состояниях. На основе редукции (3), динамика системы с однокластерными состояниями может быть описана системой уравнений

$$\begin{aligned} \dot{Z}_1 &= (i\omega - \varepsilon^2)Z_1 + h_1 - h_1^*(Z_1^2 + Q_1), & \dot{Q}_1 &= (i2\omega - 4\varepsilon^2 - 4h_1^*Z_1)Q_1 - 2\varepsilon^2 Z_1^2 Q_1, \\ \dot{Z}_2 &= (i\omega - \varepsilon^2)Z_2 + h_2 - h_2^*(Z_2^2 + Q_2), & \dot{Q}_2 &= (i2\omega - 4\varepsilon^2 - 4h_2^*Z_2)Q_2 - 2\varepsilon^2 Z_2^2 Q_2, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $h_s = 0.5(K_{s1}Z_1 + K_{s2}Z_2)e^{-i\alpha}$ ,  $K_{11} = K_{22} > 0$ ,  $K_{12} = K_{21} > 0$ . Численный счет для полной системы уравнений и системы (5) показывает хорошую точность этого приближения, в то время как дальнейшая редукция посредством подстановки  $Q_s = 0$  приводит к существенным погрешностям.

Хотя введение слабого шума  $\sigma < 0.01$  существенно изменяет динамику системы, поскольку приводит к «вымиранию» многокластерных состояний, однокластерные состояния остаются практически неизменными. Увеличение шума ведет к уменьшению предельных циклов и последующему превращению их в стационарные точки.

#### 4. Заключение

В работе построена теория возмущений теории Отта–Антонсена для случая ансамбля осцилляторов с внутренним шумом. Теория возмущений применена для исследования влияния внутреннего шума на режимы типа «Химера» в ансамблях Курамото.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ № МК-1447.2017.5.

#### Список литературы

1. Ott E., Antonsen T. M. Low dimensional behavior of large systems of globally coupled oscillators // CHAOS. 2008. Vol. 18. 037113.
2. Vlasov V., Rosenblum M., Pikovsky A. Dynamics of weakly inhomogeneous oscillator populations: perturbation theory on top of Watanabe–Strogatz integrability // J. Phys. A: Math. Theor. 2016. Vol. 49. 31LT02.
3. Abrams D. M., Mirollo R., Strogatz S. H., Wiley D. A. Solvable Model for Chimera States of Coupled Oscillators // Phys. Rev. Lett. 2008. Vol. 101. 084103.
4. Pikovsky A., Rosenblum M. Partially Integrable Dynamics of Hierarchical Populations of Coupled Oscillators // Phys. Rev. Lett. 2008. Vol. 101. 264103.

# Прямое численное моделирование течения жидкости в каналах

Н. А. Тялина<sup>а</sup>, Я. И. Листратов<sup>а</sup>

<sup>а</sup> НИУ «МЭИ», 111250, Москва, ул. Красноказарменная, 14  
email: ntyalina35@gmail.com, yaroslav.listratov@gmail.com

Описан подход моделирования течения жидкости с помощью DNS. Алгоритм основан на уравнениях Навье-Стокса для сплошной среды. Дается объяснение реализации DNS, описывается методика моделирования. Представлены результаты применения описанного алгоритма к задаче о гидродинамике и теплообмене при турбулентном течении в круглой трубе, а также к задаче о свободноконвективном теплообмене в трехмерной полости.

**Ключевые слова:** численное моделирование; DNS; течение жидкости

## Direct numerical simulation of fluid flow in duct

N. A. Tyalina<sup>а</sup>, Y. I. Listratov<sup>а</sup>

<sup>а</sup> National Research University «MPEI», Krasnokazarmennaya Street 14, 111250, Moscow  
email: ntyalina35@gmail.com, yaroslav.listratov@gmail.com

An approach to fluid flow simulation using DNS is considered. The algorithm is based on the Navie-Stokes equations. A clear explanation of DNS implementation is provided, the technique of simulation is described. The results of applying the algorithm to the problem of hydrodynamics and heat transfer in turbulent flow in a pipe and to the problem of natural convective in a three-dimensional cavity are presented.

**Keywords:** numerical simulation; DNS; fluid flow

### 1. Введение

Численный эксперимент осуществляется с помощью CFD-кода, который предполагает использование метода прямого численного моделирования (DNS) для решения системы уравнений Навье-Стокса [2]. При таком подходе происходит решение полных уравнений Навье-Стокса без использования приближений и осреднений, таким образом, разрешаются все пространственно-временные масштабы турбулентности.

### 2. Математическая модель и дискретизация

Рассматривается течение несжимаемой жидкости с постоянными физическими свойствами [1]. К решению представляется полная система уравнений Навье-Стокса, приведенная к безразмерному виду с помощью характерных масштабов задачи:

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\nabla P + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{U} + \mathbf{F}_{mass} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{U}(\nabla \cdot \theta) = \frac{1}{Pe} \Delta \theta - U_x \cdot \frac{dT_m}{dx} \quad (3)$$

Здесь  $\mathbf{F}_{\text{mass}}$  – массовые сил. Система записана без учета внутренних источников тепла, вязкой диссипации, работы сил давления; температурное поле представляется в виде суммы  $\Theta(\mathbf{x}, t) = T_m(\mathbf{x}) + \theta(\mathbf{x}, t)$ , где  $\theta$  – температурные флуктуации;  $T_m(\mathbf{x}) = A^{-1} \int_A U_x \Theta dA$  – безразмерная среднемассовая температура,  $A$  – площадь поперечного сечения канала.

## 2.1. Вычислительная схема

Вычислительная схема основана на методе конечных разностей, основой которого является представление дифференциальных уравнений в конечно-разностной форме [3]. Для этого пространственная область разбивается на расчетные ячейки, а все члены уравнений аппроксимируются на данной сетке, в результате чего к решению предстает система алгебраических уравнений.

К расчетной области предъявляются значительные требования: область должна быть протяженной настолько, чтобы в ней умещались максимальные масштабы турбулентности; сеточный шаг должен учитывать мелкомасштабные вихри, а также позволять производить точные вычисления в области высоких градиентов. Поэтому сгущается по направлению к стенке; по другим направлениям сетка однородна.

На шаг по времени также накладываются ограничения, которые вызваны необходимостью разрешать все временные масштабы в уравнениях Навье-Стокса и требованиями устойчивости разностной схемы.

## 2.2. Решение уравнений Навье-Стокса

Уравнение (2) интегрируется по времени с использованием явного метода Адамса-Башфорта [1]. Для обеспечения связи между скоростью и давлением используется классический проекционный метод, основанный на теореме о разложении Гельмгольца-Ходжа. Каждый шаг по времени включает в себя следующий алгоритм вычислительных действий. Определяется промежуточное поле скорости с ненулевой дивергенцией:

$$\frac{3\mathbf{U}^* - 4\mathbf{U}^n + \mathbf{U}^{n-1}}{2\Delta t} = 2\mathbf{F}^n - \mathbf{F}^{n-1}; \mathbf{F} = -\mathbf{U}(\nabla \cdot \mathbf{U}) - \nabla P + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{U} + \mathbf{F}_{\text{mass}} \quad (4)$$

Решаются уравнения Пуассона для давления:

$$\Delta P^{n+1} = \frac{3}{2\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{U}^* \quad (5)$$

Вычисляется поле скорости с учетом требования соленоидальности:

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^* - \frac{2}{3} \Delta t \nabla P^{n+1} \quad (6)$$

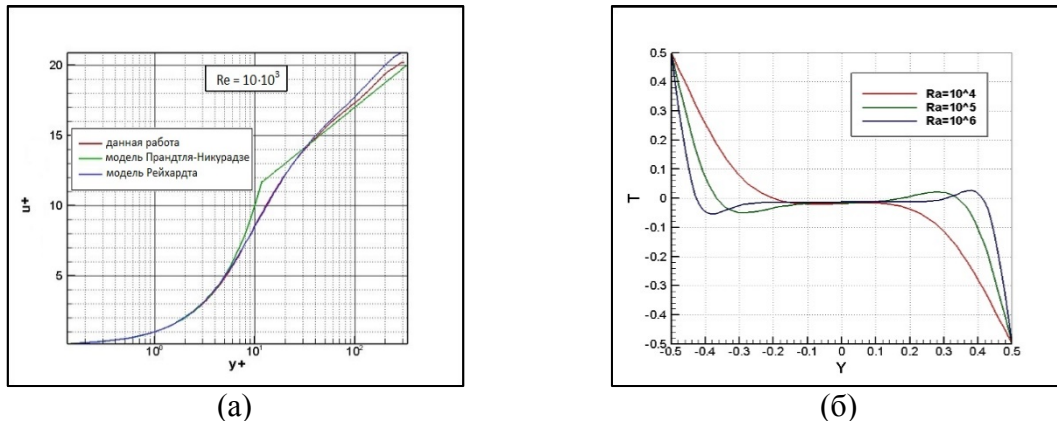
Уравнение Пуассона (5) для давления получается путем применения оператора дивергенции к уравнению (6). Найденные градиенты давления затем подставляются в (6) для расчета истинного поля скорости.

При интегрировании уравнения энергии необходимо учитывать ограничения численной неустойчивости на шаг по времени. В случае полностью явной схемы имеем:

$$\frac{3\theta^{n+1} - 4\theta^n + \theta^{n-1}}{2\Delta t} = 2G^n - G^{n-1}, G = -\mathbf{U}(\nabla \theta) - U_x \cdot \frac{dT_m}{dx} + \frac{1}{Pe} \Delta \theta \quad (7)$$

### 3. Результаты

Описанный метод был применен для решения задачи о вынужденном течении воды ( $Pr = 7$ ) в круглой трубе для чисел Рейнольдса  $Re = 5 \cdot 10^3 - 15 \cdot 10^3$  [4] и о свободно-конвективном теплообмене воды ( $Pr = 4$ ) в камере с боковыми изотермическими стенками в диапазоне чисел Релея  $Ra = 10^4 - 10^6, 10^9 - 10^{11}$  [5]. Применительно к обеим задачам были определены мгновенные и осредненные поля скорости и температуры (рисунки), коэффициенты теплоотдачи. Помимо того, для вынужденной конвекции были рассчитаны интенсивности пульсаций скорости и температуры, коэффициент сопротивления.



**Рисунок.** Универсальный профиль скорости при течении в круглой трубе для  $Re = 10 \cdot 10^3$  (а), распределение температуры между обогреваемыми стенками полости при свободной конвекции (б)

### 4. Заключение

Представлен метод DNS, а также ключевые моменты используемого CFD-кода. Анализ результатов, полученных с помощью DNS, и их сравнение с другими работами в данных областях говорят о его корректной работе и возможности дальнейшего использования для решения более сложных задач.

#### Список литературы

1. Zikanov O., Listratov Y. I., Sviridov V. G. Natural convection in horizontal pipe flow with a strong transverse magnetic field // J. Fluid Mech. 2013. Vol. 720. P. 486–516. DOI:10.1017/JFM.2013.45.
2. Белов И.А., Исаев С.А. Моделирование турбулентных течений: учебное пособие. СПб.: Балт. гос. техн. ун-т., 2001. 108 с.
3. Патанкар С. В. Численное решение задач теплопроводности и конвективного теплообмена при течении в каналах. М.: Издательство МЭИ, 2003. 312 с.
4. Тялина Н. А., Листратов Я. И. Прямое численное моделирование гидродинамики и теплообмена при турбулентном течении воды в круглой трубе / в сб.: Радиотехника, электротехника и энергетика. Двадцать вторая Междунар. науч.-техн. конф. студентов и аспирантов. Тез. докл. // М.: Издательский дом МЭИ, 2016. Т. 3, с.63.
5. Тялина Н. А., Листратов Я. И. Прямое численное моделирование свободной конвекции в трехмерной полости / в сб.: Радиотехника, электротехника и энергетика. Двадцать третья Междунар. науч.-техн. конф. студентов и аспирантов. Тез. докл. // М.: Издательский дом МЭИ, 2017. Т. 3, с.61.

## Эффекты магнитной сегрегации в слое ферронематика при супертвистовых искажениях поля директора

М. А. Уткин, Д. В. Макаров

Пермский государственный национальный исследовательский университет, 614990, Россия, Пермь, ул. Букирева, 15  
email: utkinmaksim@gmail.com

В рамках континуальной теории изучена индуцированная магнитным полем супертвистовая ориентационная структура ферронематического жидкого кристалла. Рассматривается слой ферронематика с жестким планарным сцеплением директора на границах, к которому в плоскости слоя под произвольным углом приложено однородное магнитное поле. Сцепление между директором и намагниченностью предполагается жестким. Получены концентрационное распределение магнитных частиц внутри слоя ферронематика и углы ориентации директора и намагниченности с учетом эффекта магнитной сегрегации для различных значений параметров суспензии.

**Ключевые слова:** ферронематический жидкий кристалл; супертвистовая деформация; эффект сегрегации

## Magnetic segregation effects in a ferronematic layer at the supertwisted director-field distortions

M. A. Utkin, D. V. Makarov

Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm  
email: utkinmaksim@gmail.com

In the framework of the continuum theory the supertwisted orientational structure of a ferronematic liquid crystal induced by a magnetic field is studied. We consider a layer of ferronematic with rigid planar coupling of the director at the boundaries that is subject to a uniform magnetic field in the plane of the layer at an arbitrary angle. The coupling between the director and the magnetization is assumed to be rigid. We have obtained the concentration distribution of the magnetic particles inside the ferronematic layer and the angles of the director and magnetization orientations taking into account the magnetic segregation effect for different values of the suspension parameters.

**Keywords:** ferronematic liquid crystal; supertwisted distortion; segregation effect

Ферронематическими жидкими кристаллами, или ферронематиками (ФН), называют суспензии анизометричных магнитных частиц, в которых роль несущей среды играет нематический жидкий кристалл (НЖК) [1–2]. За счет сцепления НЖК-матрицы с магнитными частицами начальная магнитная восприимчивость в таких мягких конденсированных средах повышается по сравнению с чистыми НЖК и в ряде случаев они могут быть ориентированы относительно слабым внешним магнитным полем [3].

Целью настоящей работы является теоретическое описание индуцированных магнитным полем суперत्वистовых деформаций ориентационной структуры слоя ферронема-тика с учетом эффекта магнитной сегрегации.

Рассмотрим слой ФН толщиной  $D$  (рис. 1. а), к которому приложим внешнее магнитное поле  $\mathbf{H} = H(\cos \varphi_H, \sin \varphi_H, 0)$  под произвольным углом  $\varphi_H$  в плоскости слоя (рис. 1. б).

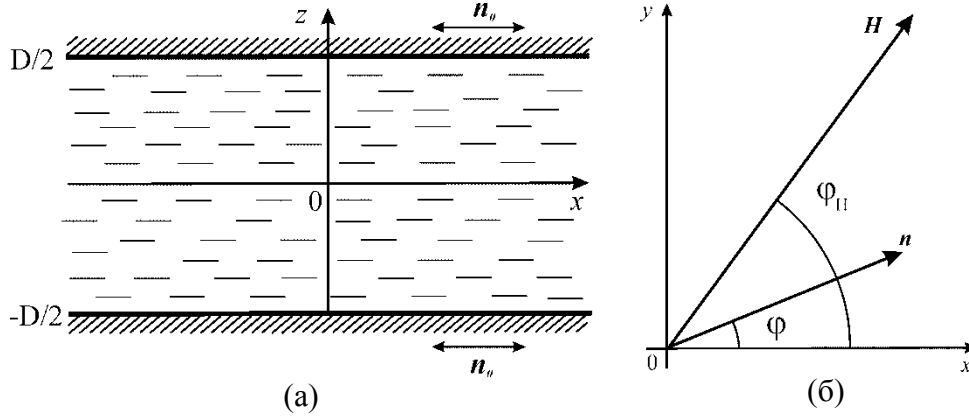


Рис. 1. Ориентация слоя ферронема-тика в магнитном поле  $\mathbf{H}$

На границах слоя зададим условия жесткого планарного сцепления директора  $\mathbf{n}$  (единичного вектора, характеризующего направление преимущественной ориентации молекул НЖК) с ограничивающими пластинами. Сцепление между директором и вектором намагниченности ФН будем считать жестким и планарным, поэтому ориентационная и магнитная структуры ФН могут быть описаны одним вектором

$$\mathbf{n} = [\cos \varphi(z), \sin \varphi(z), 0]. \quad (1)$$

Равновесная ориентационная структура слоя ФН определяется из условия минимума полной свободной энергии [2, 3]

$$F = \int F_V dV, \quad F_V = F_d + F_{dia} + F_{ferro} + F_{entr}. \quad (2)$$

$$F_d = \frac{1}{2} [K_{11} (\text{div} \mathbf{n})^2 + K_{22} (\mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{n})^2 + K_{33} (\mathbf{n} \times \text{rot} \mathbf{n})^2]$$

$$F_{dia} = -\frac{1}{2} \chi_a (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H})^2, \quad F_{ferro} = -M_s f \mathbf{n} \cdot \mathbf{H}, \quad F_{entr} = \frac{k_B T}{v} f \ln f.$$

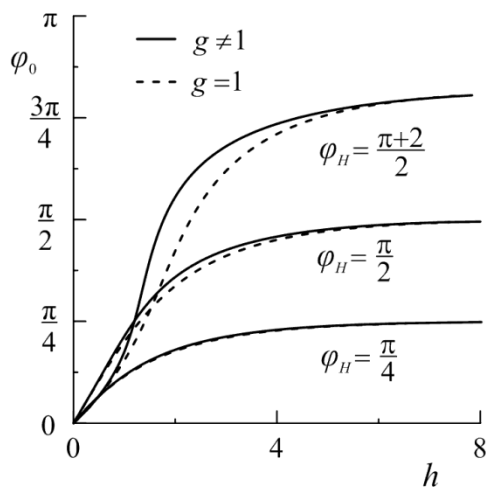
Здесь  $K_{ii}$  – константы Франка;  $\chi_a > 0$  – анизотропия диамагнитной восприимчивости НЖК,  $M_s$  – намагниченность насыщения материала феррочастиц,  $f = f(z)$  – локальная объемная доля магнитных частиц в суспензии,  $k_B$  – постоянная Больцмана,  $T$  – температура,  $v$  – объем феррочастицы. Объемная плотность свободной энергии  $F_V$  (2) включает в себя  $F_d$  – потенциал Озеена-Франка,  $F_{dia}$  – объемную плотность энергии взаимодействия магнитного поля с нематическим жидким кристаллом (диамагнитный вклад),  $F_{ferro}$  – объемную плотность энергии взаимодействия магнитного поля с магнитными моментами феррочастиц (дипольный вклад) и  $F_{entr}$  – вклад энтропии смешения «идеального газа» феррочастиц в суспензии.

Минимизация функционала свободной энергии ФН (2) приводит к системе дифференциальных уравнений равновесия ФН, которые могут быть проинтегрированы:

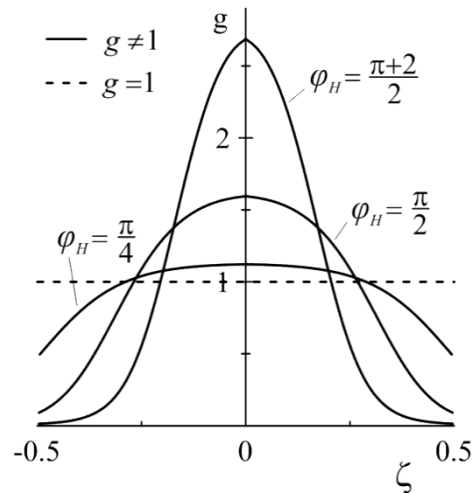
$$\int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{A(\varphi)}} = \frac{1}{2}, \quad \int_0^{\varphi_0} \frac{g d\varphi}{\sqrt{A(\varphi)}} = \frac{1}{2}. \quad (3)$$

$$A(\varphi) = \frac{h^2}{2} [\cos 2(\varphi_0 - \varphi_H) - \cos 2(\varphi - \varphi_H)] + 2\kappa [g_0 - g], \quad g = Q \exp \left\{ \frac{bh}{\kappa} \cos(\varphi - \varphi_H) \right\}$$

где  $\varphi_0$  – угол ориентации директора в центре слоя,  $g_0$  – приведенная объемная доля магнитных частиц в центре слоя ФН,  $\zeta = z/D$  – безразмерная координата,  $h = HD\sqrt{\chi_a/K_{22}}$  – безразмерная напряженность магнитного поля,  $\kappa = k_B T \bar{f} D^2 / (\nu K_{22})$  – сегрегационный параметр [2]. Параметр  $b = D \bar{f} M_s / \sqrt{K_{22} \chi_a}$  характеризует механизм воздействия магнитного поля на ферронематик. При  $b \gg 1$  главным механизмом влияния на ФН является дипольный механизм, при  $b \ll 1$  – квадрупольный.



**Рис. 2.** Угол поворота директора  $\varphi_0$  в центре слоя ФН как функция  $h$  для  $b=5, \kappa=5$  при различных  $\varphi_H$



**Рис. 3.** Приведенная объемная доля магнитных частиц  $g$  в слое ФН для  $b=5, \kappa=5, h=3$  при различных  $\varphi_H$

На (рис. 2) представлена зависимость угла ориентации директора  $\varphi_0$  в центре слоя от напряженности магнитного поля  $h$  для различных углов поворота поля  $\varphi_H$ . В отсутствие магнитного поля ориентационная структура ФН однородна внутри слоя, что соответствует  $\varphi_0 = 0$ . Как видно из (рис. 2), при включении поля с ростом его напряженности угол поворота директора в центре слоя увеличивается монотонным образом, асимптотически приближаясь к значению угла ориентации поля  $\varphi_H$ . Эффект сегрегации, обуславливающий неоднородное распределение магнитных частиц внутри слоя ( $g \neq 1$ ), приводит к более сильному отклонению директора от исходного состояния, чем при однородном распределении ( $g = 1$ ). Как видно из (рис. 3), увеличение угла поворота магнитного поля  $\varphi_H$  приводит к повышению концентрации магнитных частиц в центральной части слоя ФН.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (проект № 3.5977.2017).



### Список литературы

1. *de Gennes P. G., Prost J.* The Physics of Liquid Crystals. Oxford: Clarendon Press. 1993. 596 p.
2. *Brochard F., de Gennes P. G.* Theory of magnetic suspensions in liquid crystals // Journal de Physique. 1970. Vol. 31. P. 691–708.
3. *Райхер Ю. Л., Бурылов С. В., Захлевных А. Н.* Ориентационная структура и магнитные свойства ферронематика во внешнем поле // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1986. Т. 91. Вып. 2. С. 542–551.

## **Об учёте инерционных слагаемых в уравнении фильтрации жидкости в системах с границами раздела**

**К. Б. Циберкин**

<sup>a</sup> Пермский государственный национальный исследовательский университет  
614990, Пермь, ул. Букирева, 15  
email: kbtsiberkin@psu.ru

Проанализировано влияние инерционных слагаемых в уравнениях нестационарной фильтрации жидкости на структуру и устойчивость течений в системах с границами раздела однородной жидкости и насыщенной пористой среды. Для задачи о пограничном слое у границы раздела двух сред показано, что при исключении нелинейных слагаемых из уравнения фильтрации значительно изменяется скорость потока на границе раздела. Толщина пограничного слоя в пористой среде растёт при увеличении числа Рейнольдса, что противоречит результатам общей теории пограничного слоя. Для задачи об устойчивости плоскопараллельного течения жидкости над слоем пористой среды построены семейства нейтральных кривых на основе полной модели и уравнений без инерционных членов. Выявлена дестабилизация коротковолнового минимума на бимодальных кривых. Положение длинноволнового минимума меняется незначительно, и он остаётся доминирующим.

**Ключевые слова:** фильтрация; инерционные слагаемые; уравнение Бринкмана

## **On inertial term effect in filtration equation in system with interfaces**

**К. В. Tsiberkin**

Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm  
email: kbtsiberkin@psu.ru

The paper presents the analysis of the inertial terms effect in fluid filtration equation on flow in system with interface between the fluid and porous medium. The first considered problem is the boundary-layer flow near the fluid–porous medium interface. It is shown the linearization of filtration equation rapidly changes the velocity magnitude at the interface. Moreover, the boundary layer thickness in porous medium grows up with the Reynolds number increasing, and it contradicts the general boundary layer theory. In addition, the linear stability problem of plane-parallel flow overlying the saturated porous medium is considered. The stability curves are obtained from the equations with and without the inertial terms. It is found the short wave perturbations destabilize significantly, when the inertial terms are omitted; at the same time, the neutral curves have not valuable changes at the long wave interval, and the long wave minimum remains the main.

**Keywords:** filtration; inertial terms; Brinkman equation

## 1. Введение

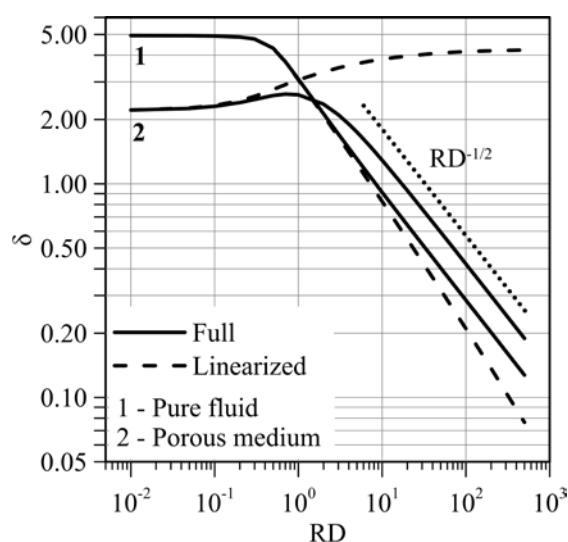
Вопрос о необходимости учёта инерционного слагаемого  $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$  в уравнениях фильтрации рассматривается уже долгое время, начиная с работы [1]. Показано, что при строгом осреднении уравнения Навье–Стокса в пористой среде инерционное слагаемое не исчезает, однако многими авторами предполагается его несущественный вклад в уравнения ввиду малого значения скорости фильтрации. В ряде работ отмечается, что данное слагаемое может быть сопоставимо по величине с квадратичной силой сопротивления Форхгеймера [2].

В настоящем исследовании представлен анализ влияния инерционного слагаемого на сопряжённые потоки в однородной жидкости и пористой среде, взаимодействующие через границу двух сред. Рассматриваются две задачи – о пограничном слое вблизи границы раздела и об устойчивости плоскопараллельного течения над пористой средой. Непосредственно продемонстрирован существенный вклад инерционных слагаемых в формирование структуры и устойчивость потоков.

## 2. Пограничный слой

Задача о структуре пограничного слоя у границы раздела жидкости и пористой среды решена с использованием стандартной теории Прандтля. Построена автомодельная система уравнений для функции тока. Уравнение для течения в однородной жидкости совпадает с уравнением Блазиуса [3], а в пористой среде, описываемой уравнением Бринкмана, дополняется слагаемым, связанным с силой сопротивления Дарси.

На основе серии расчётов для различных значений управляющего параметра  $RD = Re \cdot Da$  ( $Re$  – число Рейнольдса,  $Da$  – число Дарси, определяемые по характерному продольному масштабу задачи) найдена толщина пограничного слоя в однородной жидкости и пористой среде с учётом и без учёта инерционного слагаемого в уравнении Бринкмана. Полученная зависимость представлена на рис. 1. Видно её существенное изменение при линеаризации уравнения фильтрации.

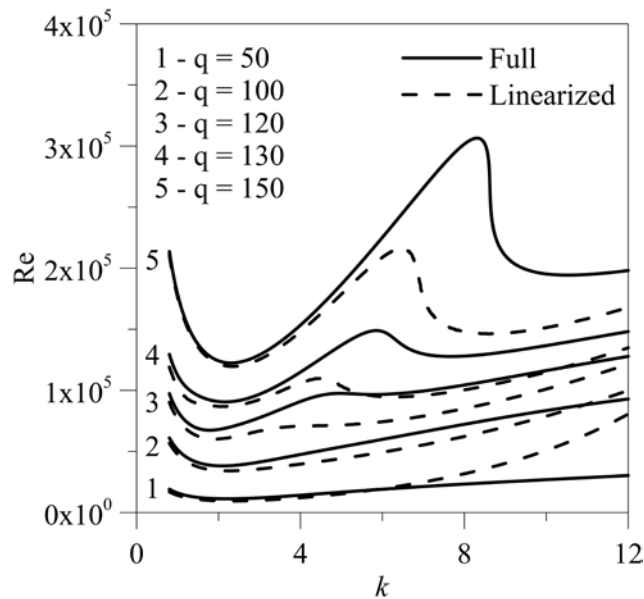


**Рис. 1.** Ширина пограничного слоя у границы жидкости и пористой среды в зависимости от управляющего параметра  $RD$ : 1 – однородная жидкость, 2 – пористая среда. Сплошной линией приведены зависимости для полной модели, штриховой – для модели без инерционных слагаемых; пунктир показывает зависимость  $RD^{-1/2}$ , свойственную задаче Блазиуса

### 3. Устойчивость плоскопараллельного течения

Исследование устойчивости плоскопараллельного течения слоя однородной жидкости с недеформируемой свободной верхней поверхностью над слоем пористой среды выполнено методом стрельбы. Результаты сопоставлены с ранее опубликованными [4], полученными без исключения инерционного слагаемого в уравнении Бринкмана.

На (рис. 2) приведены построенные нейтральные кривые течения. Исключение инерционного слагаемого приводит к существенной дестабилизации коротковолновых возмущений при низкой проницаемости среды (большие значения  $q$ ). Положение длинноволнового минимума нейтральной кривой при этом не изменяется, и он остаётся ведущим во всём рассмотренном диапазоне параметров задачи.



**Рис. 2.** Нейтральные кривые для плоскопараллельного течения жидкости над пористой средой при относительной толщине пористого слоя  $d = 0.35$  и различных значениях проницаемости (рост  $q$  означает уменьшение проницаемости). Сплошные линии – полные уравнения, штриховые – модель без инерционных слагаемых

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 14-21-00090).

#### Список литературы

1. Wooding R. A. Steady state free thermal convection of liquid in a saturated permeable medium // Journal of Fluid Mechanics. 1957. V. 2. P. 273–285.
2. Nield D., Bejan A. Convection in porous media. New-York: Springer, 2013. 778 p.
3. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. 744 с.
4. Lyubimova T. P., Lyubimov D. V., Baydina D. T., Kolchanova E. A., Tsiberkin K. B. Instability of plane-parallel flow of incompressible liquid over a saturated porous medium // Physical Review E. 2016. Vol. 94, 013104.

## Конвекция коллоидной суспензии в вертикальной ячейке при нагреве сбоку

И. Н. Черепанов<sup>а</sup>, Б. Л. Смородин<sup>а</sup>,

<sup>а</sup> Пермский государственный национальный исследовательский университет  
614990, Пермь, ул. Букирева, 15  
email: che-email@yandex.ru

Изучены конвективные течения и перенос наночастиц, возникающие при нагреве сбоку вертикальной ячейки, заполненной коллоидной суспензией. При численном моделировании течений учитывается гравитационная седиментация наночастиц. Обнаружено два режима течения изначально стратифицированной коллоидной суспензии, переход между которыми происходит при некотором критическом числе Грасгофа. Интенсивность установившегося в подкритической области течения коллоидной суспензии значительно ниже, чем в молекулярной жидкости. Величина конвективного потока примеси имеет порядок величины молекулярного переноса. Интенсивное течение, возникающее в надкритической области, после длительной эволюции полностью перемешивает коллоидную суспензию до однородного состояния.

**Ключевые слова:** тепловая конвекция; коллоидная суспензия; термодиффузия; гравитационная седиментация; численное моделирование

## Convection in a colloidal suspension in vertical slot under heating from the side

I. N. Cherepanov<sup>а</sup>, B. L. Smorodin<sup>а</sup>

<sup>а</sup> Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm  
email: che-email@yandex.ru

Convective flow and transport of nanoparticles in the vertical cell filled with a colloidal suspension are studied under heating from the side. The gravitational sedimentation of the nanoparticles is taken into account in numerical simulation. Two regimes of the laminar flow of colloidal suspension are founded. The transition between them occurs at a critical Grashof number. The intensity of the colloidal suspension flow established in the subcritical region is much lower than in molecular liquids. The magnitude of the convective flux of a colloidal suspension is of the order of magnitude of molecular transfer. In the supercritical region, the intense flow is generated. After long transient proses, convective flow completely mixes the colloidal suspension to a homogeneous condition.

**Keywords:** thermal convection; colloidal suspension; thermal diffusion; gravitational sedimentation; numerical simulation

Рассматривается расположенная в поле тяжести замкнутая вертикальная ячейка, заполненная коллоидной суспензией, частицы которой обладают аномальным коэффициентом термодиффузии (рис. 1). Аспектное отношение ячейки равно 4. Полагается, что в начальный момент времени коллоидная суспензия находится в равновесии, а концентрация характеризуется барометрическим распределением [1]. Затем к боковым границам ячейки прикладывается постоянная разность температур. При этом условие существования механического равновесия нарушается [2], в системе возникает макроскопическое движение. Конвективные течения, возникающие в данной системе, численно смоделированы в рамках приближения Буссинеска. Задача характеризуется следующими безразмерными числами: Прандтля  $Pr$ , Льюиса  $L$ , Больцмана  $B$ , Грасгофа  $Gr$ , – а также безразмерной длиной седиментации  $l_{sed}$ . Процедура численных расчетов подробно рассмотрена [3,4].

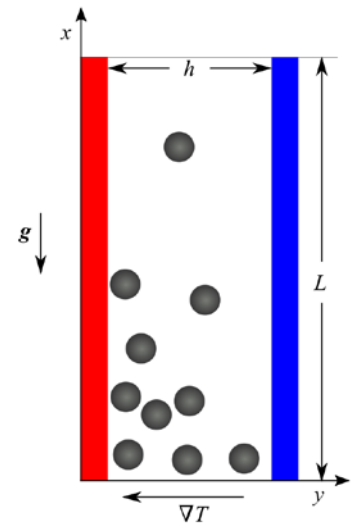


Рис. 1. Геометрия задачи и система координат

Течение коллоидной суспензии качественно отличается от течения однородной жидкости и молекулярной смеси. При числах Грасгофа меньших некоторого критического значения  $Gr < Gr^*$  в системе устанавливается слабое течение. Например, при  $Bm=5000$ ,  $Pr=10$ ,  $l_{sed}=4$  критическое число Грасгофа  $Gr^*=130$ . На (рис. 2) представлены эволюция профиля концентрации и эволюция профиля вертикальной скорости в центре ячейки ( $x=2$ ). В момент времени  $t=0$  распределение концентрации является однородным вдоль оси  $y$ . При появлении разности температур в системе возникает течение, поднимающее более концентрированную суспензию в горячей части слоя, и опускающее менее концентрированную суспензию в холодной. Приток тяжелой (легкой) компоненты увеличивает (уменьшает) плотность суспензии в горячей (холодной) части ячейки, компенсируя изменение плавучести смеси и уменьшая интенсивность течения ( $t=0.003$  и  $t=0.015$  на рис. 2). В дальнейшем слабо конвективное течение практически не влияет на перераспределение примеси. Изотермы вертикальны. На больших временах (например,  $t=3.237$ ) диффузия сглаживает градиент концентрации вблизи вертикальных границ, профиль концентрации приближается к линейному.

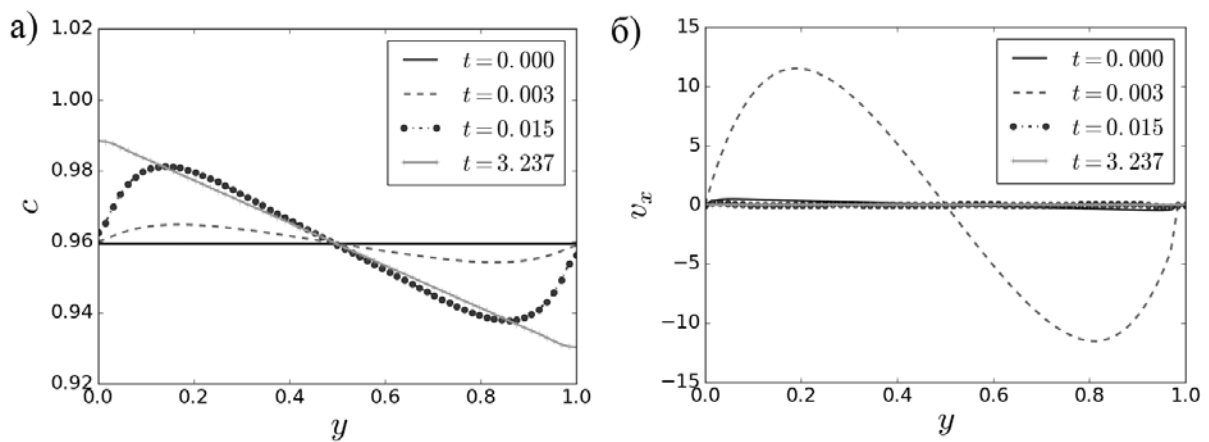
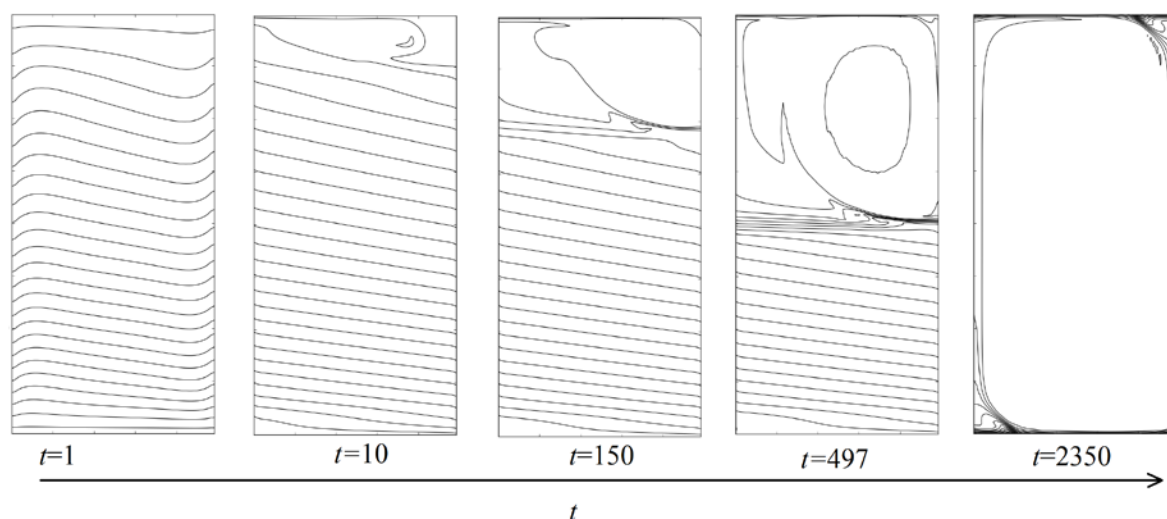


Рис. 2. Эволюция распределения концентрации (а) и вертикальной компоненты скорости (б) в центре слоя  $Gr=2.3 \times 10^2$ ,  $Bm=10^4$ ,  $Pr=10$ ,  $l_{sed}=4$

При числах Грасгофа больших критического значения ( $Gr > Gr^*$ ) эволюция конвективного течения и характер переноса примеси кардинально изменяются (рис. 3). Формирование течения начинается в верхних слоях ячейки, поскольку благодаря гравитационному разделению концентрация в этой области является наименьшей, а следовательно, тепловые неоднородности дают больший относительный вклад в изменения плотности коллоидной суспензии. Новый режим течения приводит к тому, что коллоидная суспензия практически полностью перемешивается до состояния близкого к однородному.



**Рис. 3.** Эволюция изолиний концентрации (слева на право) при  $Gr = 1.6 \cdot 10^2$ ,  $Bm = 5 \cdot 10^3$ ,  $Pr=10$ ,  $l_{sed}=4$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 16-31-60074).

### Список литературы

1. Raikher, Yu.L., Shliomis, M.I. On the kinetics of establishment of the equilibrium concentration in a magnetic suspension // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. 1993, Vol. 122, P. 93-97.
2. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Непомнящий А. А. Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989, 320с.
3. Smorodin B.L., Cherepanov I.N., Convection of colloidal suspensions stratified by thermodiffusion and gravity// Eur. Phys. J. E.2014, Vol. 37, 118.
4. Черепанов И. Н. Течение коллоида в горизонтальной ячейке при подогреве сбоку // Вычислительная Механика сплошных сред. 2016, Т. 9, N 2, С. 135 -144.

## **Автомодельная задача о нагнетании гидратообразующего холодного газа в снежный массив, насыщенный тем же газом**

**А.С. Чиглинцева**

Бирский филиал «Башкирский государственный университет», 452453, Бирск, ул. Интернациональная, 10

Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН, 420111, Казань, ул. Лобачевского, д. 2/31

email: changelina@rambler.ru

Построена математическая модель процесса нагнетания гидратообразующего метана в снежный массив, насыщенный тем же газом. Показано, что в зависимости от интенсивности нагнетания газа можно выделить три характерные зоны в области фильтрации, а именно: ближняя, насыщенная снегом и газом, промежуточная, в которой газ, снег и гидрат находятся в состоянии фазового равновесия, и дальняя, заполненная газом и снегом. Построены автомодельные решения, описывающие поля температур и давлений, а также распределения насыщенностей снега, гидрата и газа в массиве. Для ближней и дальней областей получены аналитические решения. Для промежуточной области получена система из трех обыкновенных дифференциальных уравнений в автомодельных координатах. Проведен анализ влияния параметров, определяющих состояние нагнетаемого газа и массива на протяженность объемной области, а также на распределение температуры, давления, насыщенностей фаз в массиве.

**Ключевые слова:** газовые гидраты; холодный газ; снежный массив

## **The self-similar problem of injecting a hydrate-forming cold gas into a snow massif saturated with the same gas**

**A.S. Chiglintseva**

Birsk Branch of Bashkir State University, International St.10, 452453, Birsk

Email: changelina@rambler.ru

Institute of Mechanics and Engineering, Kazan Science Center, RAS, 420111, Lobachevsky St. 2/31, Kazan

Email: changelina@rambler.ru

The mathematical model of process of forcing of gidratoobrazuyushchy gas (methane) to the snow massif in an initial state saturated with the same gas is constructed. It is shown that depending intensity of injection of gas it is possible to allocate three characteristic zones in the field of a filtration, namely: near, sated with snow and gas, intermediate in which gas, snow and hydrate are in a condition equilibrium of phase, and distant, filled with gas



and snow. The self-similarity solutions describing fields of temperatures and pressure and also distributions of saturations of snow, hydrate and gas in the massif are constructed. For near and distant zones analytical solutions are received. For interim zone the system from three ordinary differential equations in self-similarity coordinates is received. The analysis of influence of the parameters defining a condition of the forced gas and the massif on the extent of volume area and also on distribution of temperature, pressure, saturations of phases in the massif is carried out.

**Keywords:** gas hydrate; injection; cold gas; snow massif

## 1. Введение

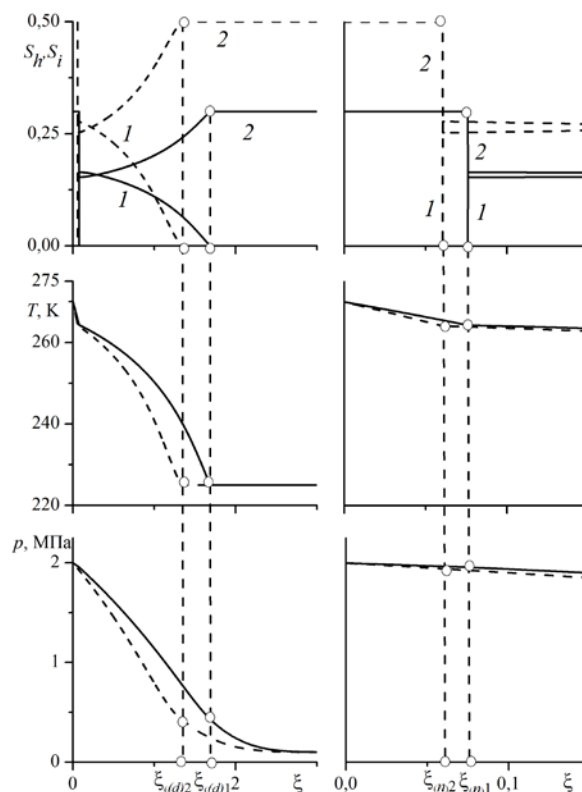
С целью уменьшения общей доли парниковых газов и их безопасного хранения, например, в естественных условиях в подземных залежах можно создавать хранилища, в которых будет законсервирован газ достаточно больших объемов, чем в резервуарах с «чистым» газом». Так, известен эффект самоконсервации газогидратов, который позволяет хранить газ при отрицательной температуре и небольших значениях давлений порядка нескольких атмосфер [1]. В частности, в работе [2] установлено, что накопление газогидрата в поровом пространстве активно протекает не только во влажных пористых средах, но и в породах, частично насыщенных льдом. В работе [3] исследованы особенности процесса образования газогидрата в пористом пласте, изначально насыщенном газом и льдом при инъекции газа.

## 2. Постановка задачи

В работе построено автомодельное решение задачи о нагнетании гидратообразующего газа в снежный массив, насыщенный тем же газом. В полубесконечной области находится снег, насыщенный метаном при давлении  $p_0$  и температуре  $T_0$ , соответствующим термодинамическим условиям существования их в свободном состоянии. При этом, полагаем, что для исходного состояния системы «снег+газ» начальная температура  $T_0$  находится ниже точки плавления льда ( $T_0 < T^{(0)}, T^{(0)} = 0^\circ \text{C}$ ) и давление  $p_0$  меньше равновесного давления фазовых переходов  $p_s(T_0)$  системы «снег+газ+гидрат». Рассматривается модельная задача об инъекции холодного газа ( $T_{ge} \leq 0^\circ \text{C}$ ) через границу  $x=0$  под давлением  $p_e$ , причем значение температуры закачиваемого газа лежит выше равновесной температуры фазовых переходов  $T_s(p_e)$  для системы «снег+газ+гидрат». В зависимости от исходного термобарического состояния системы «снег+газ», а также интенсивности нагнетания газа, определяемой значением давления  $p_e$  будем полагать, что могут возникать три характерные зоны в области фильтрации ( $x > 0$ ): ближняя, где находятся только газ и снег, промежуточная, в которой газ, снег и гидрат находятся в равновесии, и дальняя, которая заполнена газом и снегом. В промежуточной зоне происходит образование гидрата. Соответственно вводятся две фронтальные границы: между дальней и промежуточной зонами, где начинается переход снега в состав гидрата, и между ближней и промежуточной зонами, на которой заканчивается процесс образования гидрата.

На рисунке показано влияние исходного значения снегонасыщенности на протяженность зон и распределение температуры, давления и насыщенностей гидрата и снега. Правая часть рисунка представляет собой увеличенные фрагменты его левой части. Установлено, что с ростом исходной снегонасыщенности сужается

протяженность нагретой зоны за счёт гидратообразования. Это обусловлено тем, что с увеличением начальной снегонасыщенности в массиве, при заданной интенсивности нагнетания газа, увеличивается доля потребления газа, необходимое для образования гидрата, что в свою очередь приводит к более быстрому снижению давления в массиве.



Распределение насыщенностей гидрата (1), снега (2), температуры и давления в массиве при различных исходных значениях снегонасыщенности:  $S_{i0} = 0.5$  (штриховая линия),  $S_{i0} = 0.3$  (сплошная линия)

### 3. Выводы

Рассмотрен процесс инъекции гидратообразующего газа в массив, насыщенный снегом и газом. В зависимости от исходных значений температуры, давления, снегонасыщенности, проницаемости массива, а также от интенсивности нагнетания газа, в области фильтрации могут возникать характерные зоны с фазовыми превращениями.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №15-11-20022).

#### Список литературы

1. Мельников В. П., Поденко Л. С., Нестеров А. Н. и др. Эффект самоконсервации гидратов метана, полученных в «сухой воде» // Доклады Академии наук. 2016. Т. 466. № 5. С. 554-558.
2. Чувилин Е. М., Козлова Е. В. Исследования формирования мерзлых гидратосодержащих пород // Криосфера Земли. 2005. №1. С. 73-80.
3. Хасанов М. К. Исследование режимов образования газогидратов в пористой среде, частично насыщенной льдом // Теплофизика и аэромеханика. 2015. Т. 22. №2. С. 255–266.

## **Влияние вращения на колебательную моду неустойчивости адвективного течения в горизонтальном слое жидкости с твёрдыми границами для случая спиральных возмущений**

Д. Г. Чикулаев<sup>а</sup>, К. Г. Шварц<sup>а</sup>

<sup>а</sup> Пермский государственный национальный исследовательский университет  
614990, Пермь, ул. Букирева, 15  
email: mail@chikulaev.com

В работе исследовано влияние вращения на колебательную моду неустойчивости для случая спиральных возмущений для чисел Тейлора ( $0,1 \leq Ta \leq 10^5$ ) и чисел Прандтля ( $0,01 \leq Pr \leq 20$ ). Обнаружены две колебательные моды неустойчивости. При  $Pr \geq 0,6$  первая мода не существует. Для неё характерны значения волнового числа, соответствующего критическому числу Грасгофа, из диапазона волнового числа  $k_y \leq 1$ , а для второй колебательной моды неустойчивости характерны коротковолновые возмущения при  $3,5 < k_y < 4,5$ . Изучены стабилизационные и дестабилизационные эффекты колебательных мод. Для второй моды получена асимптотическая зависимость критического числа Грасгофа от  $Ta$  и  $Pr$ . Построены нейтральные кривые зависимости критического числа Грасгофа от волнового числа при различных значениях  $Ta$  и  $Pr$ .

**Ключевые слова:** адвективное течение; устойчивость; вращение; нейтральная кривая; метод дифференциальной прогонки; метод сеток

## **The effect of rotation on the oscillation instability mode of advective flow in a horizontal fluid layer with rigid boundaries for the case of spiral perturbations**

D. G. Chikulaev<sup>а</sup>, K. G. Shvarts<sup>а</sup>

<sup>а</sup> Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm  
email: mail@chikulaev.com

The limits of the existence of oscillation instability of an advective flow in a rotating horizontal layer of incompressible fluid with solid boundaries are investigated as the function of the Prandtl ( $Pr$ ) and Taylor ( $Ta$ ) numbers. Two oscillation instability modes are detected and their dependence on the rotation is studied on the range  $0,1 \leq Ta \leq 10^5$  at  $0,01 \leq Pr \leq 20$ . The first oscillation instability mode does

not exist at  $Pr \geq 0,6$ . It is characterized by the range of the wave number  $k_y \leq 1$ , which corresponds to the critical Grashof number. The second oscillation instability mode is characterized by short-wave perturbations at  $3,5 < k_y < 4,5$ . Stabilization and destabilization effects of oscillation modes are studied. The asymptotic dependence of the critical Grashof number on  $Ta$  and  $Pr$  is obtained for the second mode. The neutral curves, as the dependences of the Grashof number on the wave number, are constructed for different values of  $Ta$  and  $Pr$ .

**Keywords:** advective flow; stability; rotation; neutral curves; differential sweep method; grid method

## 1. Введение

Впервые адвективные течения при отсутствии вращения были описаны аналитически Г.А. Остроумовым [1]. Их устойчивость для случая с твёрдыми границами исследована в [2]. В работах [3, 4] впервые аналитически описано адвективное течение при наличии вращения. Работы, посвященные исследованию устойчивости адвективных течений во вращающемся слое жидкости, описаны в обзоре [5]. Устойчивость адвективных течений во вращающемся плоском горизонтальном слое жидкости с твёрдыми границами была исследована при  $Pr = 6.7$  в [6, 7].

В [8] исследована устойчивость адвективного течения в горизонтальном слое с твёрдыми границами при слабом вращении ( $0 \leq Ta \leq 100$ ) и малых числах Прандтля. В работе [9] изучалось влияние быстрого вращения при  $Ta = 10^5$ .

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим бесконечный горизонтальный слой несжимаемой жидкости с твёрдыми границами  $z = \pm h$ , вращающийся с постоянной угловой скоростью  $\Omega_0$ . Направление оси вращения совпадает с вертикальной осью координат  $Oz$ . На верхней и нижней границах задана температура  $T$ , линейно меняющаяся с горизонтальной координатой  $x$ , а также условие прилипания и замкнутости потока. Изучение адвективных течений производим на основе уравнений конвекции в приближении Буссинеска во вращающейся системе отсчёта в декартовой системе координат [10]. Рассмотрим случай, когда число Фруда [10]  $Fr = \Omega_0^2 l / g \ll 1$ , здесь  $l$  — характерный горизонтальный масштаб,  $g$  — ускорение силы тяжести. В этом случае влияние поля тяжести существенно и можно пренебречь влиянием центробежной силы.

Профили скорости и температуры описаны в работе [6] в виде точного решения исходной задачи. Для исследования устойчивости возникающего адвективного течения применим метод малых возмущений [1]. Расчёты производились с помощью метода сеток [7] при количестве узлов равным 800.

## 3. Колебательная мода неустойчивости для случая спиральных возмущений

Исследование устойчивости рассматриваемого адвективного течения показало, что колебательная мода существует на всём диапазоне значений числа Прандтля и  $0 < Ta < 4$ . При  $Ta \geq 4$  возникает монотонная мода, которая с ростом числа Тейлора вытесняет колебательную моду. При  $Pr < 0,6$  обнаружены две нейтральные кривые. Первая кривая возникает при малых значениях волнового числа, её минимум находится ниже минимума второй нейтральной кривой, которая существует при коротковолновых

возмущениях. При  $Pr \geq 0,6$  первая нейтральная кривая пропадает, остаётся только вторая кривая. Таким образом, определим две колебательные моды неустойчивости. Для первой моды характерны значения волнового числа, соответствующего критическому числу Грасгофа, из диапазона волнового числа  $k_y \leq 1$ , а для второй колебательной моды неустойчивости характерны коротковолновые возмущения при  $3,5 < k_y < 4,5$ .

При фиксированном числе Прандтля с ростом числа Тейлора первая и вторая моды стабилизируют течение. Исключением являются очень малые числа Прандтля ( $Pr \leq 0,05$ ), при которых для первой моды существуют пороговые числа Тейлора, и диапазон чисел Прандтля ( $0,4 < Pr < 0,6$ ), при которых с ростом числа Тейлора сначала вторая мода является более опасной, а течение стабилизируется, затем более опасной становится первая мода — течение дестабилизируется, а затем стабилизируется. Далее, вторая мода вновь становится опаснее первой и продолжает стабилизировать течение.

При фиксированном числе Тейлора с ростом числа Прандтля первая мода сначала дестабилизирует течение, а затем стабилизирует. Вторая мода в этом с ростом  $Pr$  только дестабилизирует течение. Для этой моды была получена асимптотическая зависимость критического числа Грасгофа от чисел Тейлора и Прандтля.

### Список литературы

1. *Остроумов Г. А.* Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. – М.: Гос.изд-во технико-теорет лит-ры, 1952.
2. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Непомнящий А. А.* Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989.
3. *Аристов С. Н., Зимин В. Д.* Адвективные волны во вращающемся шаровом слое: препринт / АН СССР, Уральский научный центр. Ин-т механики сплошных сред. Свердловск, 1986. 50с.
4. *Аристов С. Н., Фрик П. Г.* Крупномасштабная турбулентность в тонком слое неизо-термической вращающейся жидкости // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1988. - № 4. – С. 48–55.
5. *Шварц К. Г.* Исследование устойчивости адвективных течений во вращающемся слое жидкости // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. - 2013. – Вып.1(13). – С.54-61.
6. *Аристов С. Н., Шварц К. Г.* Вихревые течения адвективной природы во вращающемся слое жидкости. Перм. ун-т. Пермь, 2006.
7. *Тарунин Е. Л., Шварц К. Г.* Исследование линейной устойчивости адвективного течения методом сеток // Вычислительные технологии. 2001. Т. 6, №6. С. 108–117.
8. *Чиклаев Д. Г., Шварц К. Г.* Влияние слабого вращения на устойчивость адвективного течения в горизонтальном слое жидкости с твёрдыми границами при малых числах Прандтля // Вестник Пермского университета, 2012, № 4 / С.188-192.
9. *Чиклаев Д. Г., Шварц К. Г.* Численное исследование влияния быстрого вращения на устойчивость адвективного течения в горизонтальном слое несжимаемой жидкости с твёрдыми границами при малых числах Прандтля // Вычислительная механика сплошных сред. 2014. Т. 7, №2. С. 135–141.
10. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972.

## **Вибрационная тепловая конвекция талой воды в условиях пониженной гравитации**

**В. А. Шарифулин<sup>a</sup>, Д. В. Любимов<sup>b</sup>, Т. П. Любимова<sup>c</sup>, А. Н. Шарифулин<sup>a</sup>**

<sup>a</sup> Пермский национальный исследовательский политехнический университет, 614990, Пермь, Комсомольский проспект, 29  
email: vadsharif@bk.ru, sharifulin@bk.ru

<sup>b</sup> Пермский государственный университет, 614990, Пермь, ул. Букирева, 15  
email: lubimov@psu.ru

<sup>c</sup> Институт механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук, 614000, Пермь, ул. Академика Королева, 1  
email: lyubimovat@mail.ru

Статья посвящена исследованию методами линейной теории устойчивости и в маломодовом приближении влияния продольных вибраций на возникновение и нелинейные режимы тепловой конвекции горизонтального слоя воды между нагретыми до различной температуры изотермическими плоскостями. Соотношение температур задавалось так, что положение максимума плотности могло располагаться как в слое, так и вне его. Показано, что наличие инверсии плотности оказывает стабилизирующее на вибрационный механизм конвекции. Надкритические нелинейные режимы вибрационной конвекции исследованы с помощью пятимодовой динамической системы, показано, что наличие инверсии плотности подавляет хаос и существенно увеличивает области стабильности осредненного механического равновесия.

**Ключевые слова:** тепловая конвекция; вибрации; инверсия плотности

## **Low mode model of Thermal Vibrational convection of melted water**

**V. A. Sharifulin<sup>a</sup>, D. V. Lyubimov<sup>b</sup>, T. P. Lyubimova<sup>c</sup>, A. N. Sharifulin<sup>a</sup>**

<sup>a</sup> Perm National Research Polytechnic University, Komsomolsky pr. 29, 614990, Perm  
email: vadsharif@bk.ru

<sup>c</sup> Perm State University, Bukireva str. 15, 614990, Perm  
email: lubimov@psu.ru

<sup>c</sup> Institute of Continuous Media Mechanics of the Ural Branch of Russian Academy of Science, Akademika Koroleva str., 1, 614990, Perm  
email: lyubimovat@mail.ru

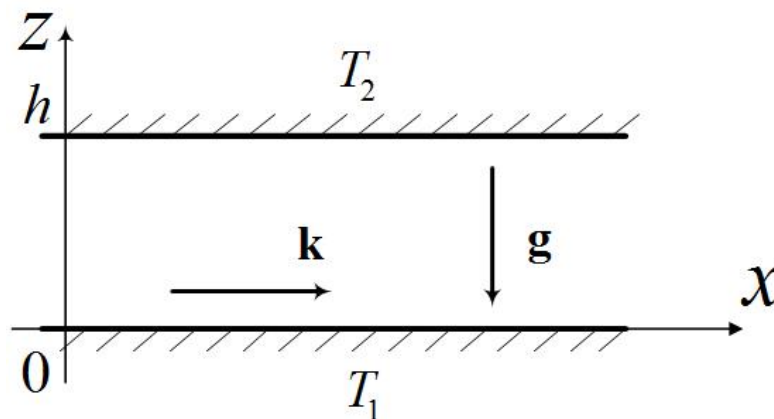
The article is devoted to the investigation by the methods of the linear theory of stability and in the low-mode approximation of the effect of longitudinal vibrations on the occurrence and nonlinear regimes of thermal convection of a horizontal layer of water between isothermal planes heated to different temperatures. The temperature ratio was set so that the position of the density maximum could be located both in the layer and outside it. It is shown that the presence of a density in-

version has a stabilizing effect on the vibrational mechanism of convection. Supercritical nonlinear regimes of vibrational convection have been studied with the aid of a five-mode dynamical system, it is shown that the presence of a density inversion suppresses chaos and substantially increases the stability regions of the averaged mechanical equilibrium.

**Keywords:** thermal convection; vibrations; density inversion

Талая вода, т.е. вода температура которой около нуля градусов Цельсия, имеет квадратичную зависимость плотности от температуры, приводящую к особой двойной стратификации. Возникновение конвекции в слое воды с такой стратификацией приводит к появлению дополнительного механизма перемешивания, - проникающей конвекции, обнаруженного теоретически Веронисом [1]. Во многих технических устройствах неравномерно нагретая талая вода может находиться под воздействием вибраций, приводящих к возбуждению осредненных течений. Механизм возбуждения осредненных конвективных течений в неравномерно нагретой жидкости с линейной зависимостью плотности от температуры хорошо исследован. Показано, что он может приводить к перемешиванию и кризисам теплопередачи даже в условиях невесомости, когда гравитационная тепловая конвекция невозможна [2].

Целью настоящей работы является получение уравнений вибрационной тепловой конвекции талой воды и исследование с их помощью возникновения конвекции в горизонтальном слое, совершающем вибрации в продольном направлении, заданном единичным вектором  $\vec{k}$  в условиях невесомости или пониженной гравитации, направленной перпендикулярно к слою (см. рис. 1). Стенки слоя изотермические поддерживаются при различных температурах.



**Рис. 1.** Горизонтальный плоский слой талой воды, совершающий продольные горизонтальные вибрации

В предельном случае отсутствия инверсии плотности задача определения устойчивости состояния осредненного механического равновесия была сформулирована и экспериментально исследована в [3]. Было получено, что малая гравитация приводит к дестабилизации состояния осредненного механического равновесия, причем критическое значения числа Гершуни (вибрационного аналога числа Релея) линейно уменьшается до нуля с увеличением гравитационного числа Релея до критического значения.

В настоящей работе методами линейной теории устойчивости исследуется влияние тепловой инверсии плотности на совместное проявление вибрационного и гравита-

ционного механизмов конвекции. Показано, что наличие инверсии плотности оказывает стабилизирующее воздействие.

В работе исследуются также надкритические нелинейные режимы вибрационной конвекции. Для этой цели численно исследуется динамическая система, полученная аналогично триплету Лоренца[4]. Для описания возможного двухслойного движения жидкости в надкритическом режиме она дополнена двумя базисными функциями. Решение задачи зависит от пяти безразмерных параметров, - трех нормированных чисел Релея (гравитационного  $r$ , вибрационного  $r_v$  (число Гершуни) и инверсионного  $r_i$ ), числа Прандтля  $Pr$  и геометрического параметра  $b$ . Значения числа Прандтля и геометрического параметра полагались равными значениям, использованным в модели Лоренца ( $Pr = 10, b = 8/3$ ).

Динамическая система в предельном случае  $r_v = 0, r_i = 0$  совпадает с моделью Лоренца. Численное исследование модели в общем случае ( $r_v \neq 0$  и  $r_i \neq 0$ ) показало, что наличие инверсии плотности подавляет хаос. Для  $|r_i| > 0.1$  хаотические режимы недостижимы при любых значениях гравитационного и вибрационного чисел Релея. Обнаружено также, что с увеличением модуля инверсионного числа Релея  $r_i$  растет критическое значение вибрационного числа Релея  $r_v$ , по достижении которого механическое равновесие устойчиво при любых значениях гравитационного числа Релея  $r$ . В случае отсутствия инверсии плотности схожее подавление хаоса наблюдалось в модели Любимова-Закса [5].

Работа была поддержана Министерством образования и науки Российской Федерации (проект No.3.6990.2017/БЧ).

### Список литературы

1. *Veronis G.* Penetrative convection // *Astrophys.J.* 1963, Vol.137, N 2, – P.641-663.
2. *G.Z. Gershuni, D.V. Lyubimov.* – England: Thermal vibrational convection. John Wiley&Sons, 1998. – 358 pp.
3. *Zavarykin M.P., Zorin S.V., Putin G.F.* Convective instabilities in a vibrational field // *Soviet Physics Doklady.* 1988. Vol. 33. P. 174-179.
4. *Lorenz E. N.* Deterministic nonperiodic flow // *Journal of the atmospheric sciences.* 1963. Vol. 20. №. 2. P. 130-141.
5. *Lyubimov D. V., Zaks M. A.* Two mechanisms of the transition to chaos in finite-dimensional models of convection // *Physica D: Nonlinear Phenomena.* 1983. Vol. 9. №. 1-2. P. 52-64.



## **Экспериментальное исследование скорости испарения капли дистиллированной воды в условиях свободного её падения на нагретую полированную и структурированную алюминиевую поверхность**

**Т. М. Шарифулин<sup>а</sup>, Д. В. Феоктистов<sup>а</sup>**

<sup>а</sup> Национальный исследовательский Томский политехнический университет  
634050, Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30  
email: tahir.sharifulin94@mail.ru

Исследовался процесс испарения капли дистиллированной воды при её свободном падении на нагретую поверхность. Для изучения и визуализации процесса взаимодействия импактной струи с нагретой поверхностью, разработана экспериментальная установка, с применением плоскопараллельного источника света и высокоскоростной видеосъёмки со скоростью захвата 5000 кадров в секунду. Экспериментально определена массовая скорость испарения капли дистиллированной воды в условиях испарения на алюминиевой поверхности обработанной лазерным излучением. Установлено, что структура поверхности влияет на возникновение кризиса кипения.

**Ключевые слова:** кипение; капля; нагретая поверхность; площадь смачивания; высота падения; испарение.

## **Experimental study of evaporation rate of distilled water drop when it's free-falling on heated polished and structured aluminum surface**

**T. M. Sharifulin<sup>a</sup>, D. V. Feoktistov<sup>a</sup>**

<sup>a</sup> National Research Tomsk Polytechnic University, Lenin Avenue 30, 634050, Tomsk  
email: tahir.sharifulin94@mail.ru

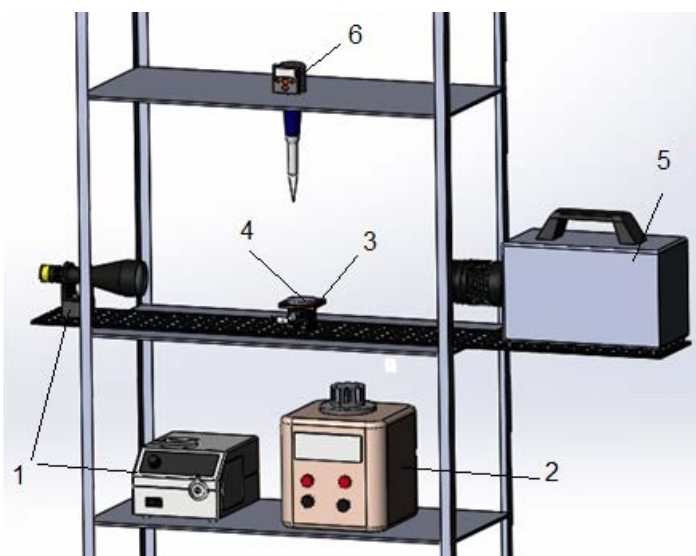
The evaporation process of distilled water droplet upon free fall onto a heated surface was investigated. To study and visualize the interaction process of impact jet with heated surface, experimental setup was developed using a plane-parallel light source and high-speed video with a capture rate of 5000 frames per second. The mass evaporation rate of distilled water droplet under evaporation conditions on laser treatment aluminum surface was experimentally determined. It is established that the surface structure influences onset of boiling crisis.

**Keywords:** boiling, drop, heated surface, wetting area, fall height, evaporation.

Известно [1], что капля жидкости на поверхности нагретого металла в зависимости от температуры последнего может растекаться, принимая форму полусферы или сфероида. При высоких температурах подложки сфероид полностью отделен от поверхности нагрева паровой оболочкой и с металлом не соприкасается. Это явление впервые описано Лейденфростом [2]. Сфероидальное состояние наступает при температуре  $T_L$  (температуре Лейденфроста), близкой к температуре предельного перегрева жидкости  $T_{sh}$  при данном давлении. Температуре Лейденфроста соответствует максимум на зависимости времени полного испарения капли от температуры поверхности [3]. Одним из способов интенсификации процессов теплообмена в системах обеспечения теплового режима оборудования является создание структурированной поверхности теплообмена. При этом используются следующие методы: темплатные, литографические, электронно-лучевая литография, реактивное ионное травление, фотолитография, лазерное излучение. Нанесение микроструктуры изменяет шероховатость поверхности в некоторых случаях химический состав. На сегодняшний день, теоретические положения процесса испарения капли на нагретой структурированной поверхности не обеспечивают прогностического моделирования высокоэффективных теплообменных систем [4-10].

Цель настоящей работы – экспериментальное исследование процесса испарения капли дистиллированной воды в условиях её свободного падения на нагретую полированную и структурированную лазерным излучением алюминиевую поверхность.

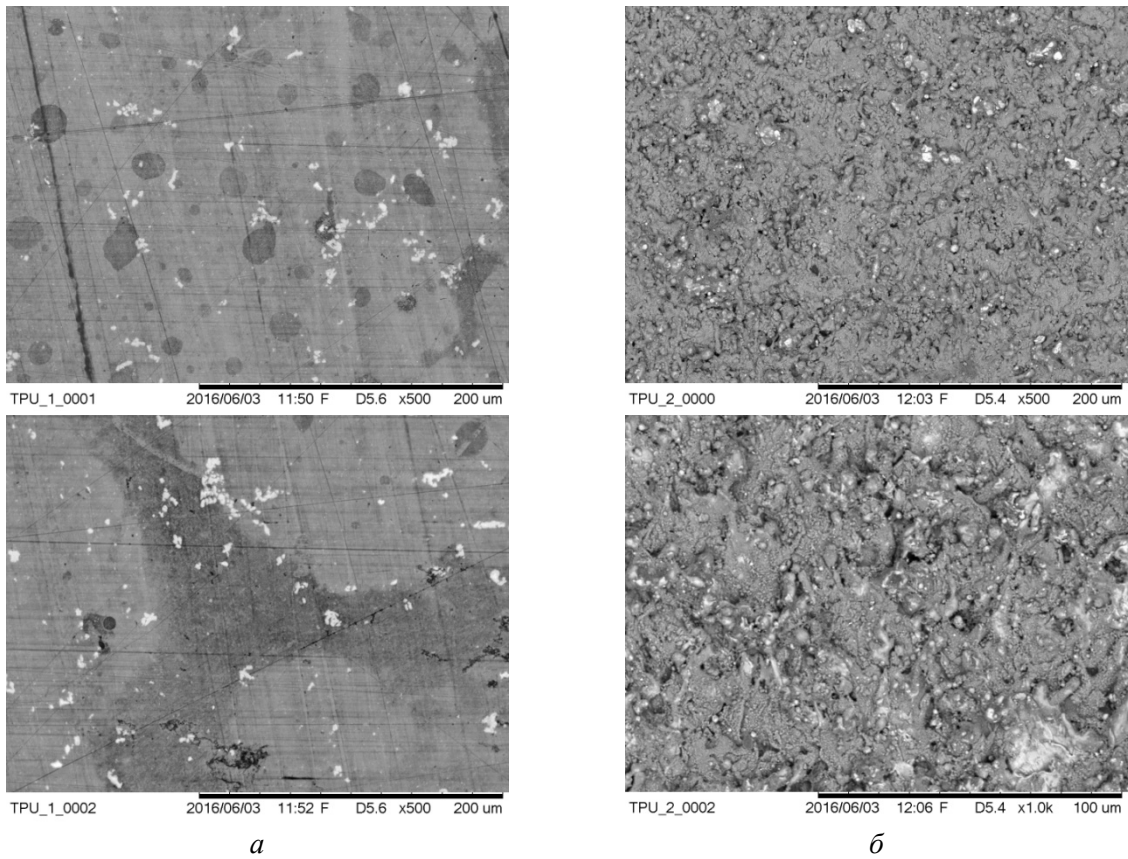
Исследования проведены на установке, принципиальная схема которой представлена на (рис.1). Принцип ее действия подробно представлен в [11]



**Рис. 1.** Схема экспериментальной установки: 1 – источник плоскопараллельного света; 2 – автотрансформатор; 3 – электронагревательный элемент; 4 – подложка; 5 – высокоскоростная камера; 6 – дозатор

Микроструктуры полированной и структурированной поверхностей образованы лазерной обработкой. Энергия в импульсе лазера составляла 1,0мДж, частота следования импульсов 20кГц, скорость перемещения 500м/с. На (рис. 2) приведены фотоизображения поверхностей, полученные на электронном микроскопе.

С высоты 300мм дозировалась капля дистиллированной воды объемом 15мкл на подложку, нагретую до температур 60, 80, 100, 120, 130°C. Падение, соприкосновение, растекание и испарение капли регистрировалось высокоскоростной камерой.



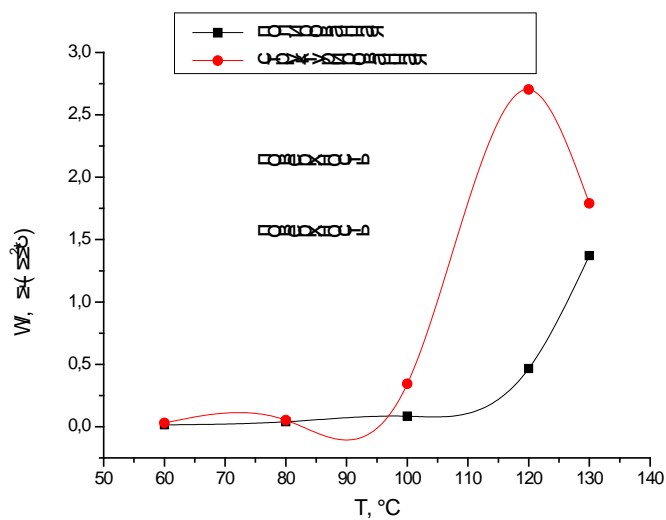
**Рис. 2.** Поверхность подложек ( $\times 1000$ ): (а) полированная; (б) структурированная

Массовая скорость испарения капли определялась по формуле:

$$W = \frac{m}{S \cdot \tau}, \quad \text{мг/мм}^2 \cdot \text{с},$$

где  $m$  – масса капли, мг;  $S$  – площадь смачивания капли,  $\text{мм}^2$ ;  $\tau$  – время жизни капли на подложке, с.

На (рис. 3) представлены полученные зависимости массовой скорости испарения от температуры полированной и структурированной алюминиевой поверхности.



**Рис. 3.** Зависимость массовой скорости испарения капель воды от температуры полированной и структурированной алюминиевой поверхности

Проанализировав графические зависимости скорости испарения капель дистиллированной воды, можно сделать заключение, что нанесённая микроструктура смещает точку кризиса кипения, увеличивается скорость испарения. Так же можно сказать, что для структурированной поверхности имеется максимум скорости испарения при температуре 120°C, после которой происходит уменьшение скорости испарения. При этом частота контакта капли с подложкой будет уменьшаться. Это говорит о снижении интенсивности теплоотдачи от нагретого металла к сфероиду.

Работа поддержана грантом Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых – кандидатов наук (МК-6810.2016.8).

### Список литературы

1. Клевцов А. В., Чилкина Н. В. К теории деформации капли на горизонтальной поверхности // Теплоэнергетика. 1989. №10. С. 60-61.
2. Leidenfrost J. C. // Int. J. Heat Mass Trans. 1966. Vol. 9. P. 1153-1160.
3. Чиннов Е. А., Кабов О. А., Жуковская О. В., Ширина И. А. Теплообмен в недогретой до температуры насыщения испаряющейся пленке жидкости // Теплофизика высоких температур. 2006. Т. 44. № 6. С. 903-913.
4. Накоряков В. Е., Мисюра С. Я., Елистратов С. Л. Особенности испарения капель воды на нагреваемой поверхности // Доклады академии наук. 2013. Том 448. №3. С. 293.
5. Анохина Е. В. Исследование процессов испарения и кипения жидкостей // Журнал технической физики. 2010. Т. 80. № 8. С. 32-37.
6. Васильев П. С., Рева С. Л., Рева Л. С., Новиков А. Е., Голованчиков А. Б. Определение времени испарения кипящей на поверхности нагрева капли // Вестник Казанского технологического университета. 2016. Т. 19. № 5. С. 121-126.
7. Гуликов А. В. Экспериментальное и теоретическое исследование процесса соударения капли жидкости с высокотемпературной стенкой // Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. Москва. 2007.
8. Романов А. С. Особенности тепломассообмена капель жидкостей при взаимодействии с перегретыми мезоструктурными и наноструктурированными поверхностями // Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. 2013.
9. Губарев В. Я., Арзамасцев А. Г. Испарение капли на высокотемпературной поверхности // Тепловые процессы в технике. 2010. №2. С. 63- 66.
10. Бородин С. А. Исследование процесса растекания капли жидкости, наносимой на поверхность подложки // Компьютерная оптика. 2005. №28. С. 66-68.
11. Кузнецов Г. В., Феоктистов Д. В., Орлова Е. Г. Испарение капель жидкостей с поверхности анодированного алюминия // Теплофизика и аэромеханика. 2016. Т. 23. № 1. С. 17-22.

## **Крупномасштабное неизотермическое течение во вращающемся слое жидкости со свободной верхней границей**

**К. Г. Шварц**

Пермский государственный национальный исследовательский университет  
614990, Пермь, ул. Букирева, 15  
email: kosch@psu.ru

Аналитически представлено точное решение уравнений Навье-Стокса, описывающее течение жидкости во вращающемся горизонтальном слое с твердой и теплоизолированной нижней и свободной верхней границей. На верхней границе задано постоянное тангенциальное напряжение внешней силы и имеется теплоотдача по закону Ньютона. Температура среды над поверхностью слоя является линейной функцией горизонтальных координат. Решение находится из краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений для скорости и температуры. Исследуется вид решения в зависимости от чисел Тейлора, Грасгофа, Рейнольдса и Био. Подобно течению Экмана в океане при наличии вращения движение жидкости спиралевидное, учет неоднородности температуры делает спиральное движение более сложным.

**Ключевые слова:** горизонтальная конвекция; точное решение; неизотермическое течение

## **Large-scale non-isothermal flow in a rotating layer of fluid with a free upper boundary**

**K. G. Shvarts**

Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm  
email: kosch@psu.ru

It is presented analytically the exact solution of the Navier-Stokes equations describing the fluid flow in a rotating horizontal layer with rigid and thermally insulated bottom and a free upper boundary. At the upper boundary set to a constant tangential stress of the external force and a heat transfer according to Newton's law. The temperature of the medium above the surface layer is a linear function of horizontal coordinates. The solution is founded from boundary-value problem for ordinary differential equations for the velocity and temperature. It is investigated a type of solution depending on the Taylor, Grashof, Reynolds and Biot number. Like the Ekman flow in the ocean in the presence of rotation the spiral motion of the fluid, given the heterogeneity of the temperature makes the spiral motion is more complex.

**Keywords:** horizontal convection; exact solution; nonisothermal flow

В современных моделях, описывающих океаническую циркуляцию, на верхней границе слоя для скорости задается величина тангенциальных напряжений внешней силы (ветра). При этом поперек слоя формируется крупномасштабное пограничное течение экмановского типа [1, 2]. Подобные течения, описанные аналитически в бесконечном горизонтальном слое вращающейся жидкости со свободной верхней границей, используются для исследования нелинейных эффектов экмановского слоя [3] и для получения моделей двумерного вихревого движения жидкости в рамках теории мелкой воды [4–6]. В данной работе описывается комбинированное крупномасштабное течение, возникающее во вращающемся горизонтальном слое жидкости, нижняя граница которого твердая и теплоизолированная, а верхняя – свободная. На ней задается постоянное тангенциальное напряжение внешней силы и задано линейное распределение температуры.

Рассматривается бесконечный горизонтальный слой несжимаемой жидкости с твердыми границами, который вращается с постоянной угловой скоростью. Ось вращения сонаправлена с вертикальной осью координат  $Oz$ . Нижняя граница твердая и теплоизолированная. На свободной верхней границе задано постоянное тангенциальное напряжение некоторой внешней силы, условие «жесткой крышки» для вертикальной компоненты скорости [7, 8], а температура, линейно меняется с горизонтальной координатой  $x$ . Задано условие замкнутости потока.

Исследование течений проводилось на основе уравнений конвекции в приближении Буссинеска во вращающейся системе отсчета с использованием декартовых координат [9]. Рассматривался случай, когда число Фруда  $Fr \ll 1$ , в этом случае можно пренебречь влиянием центробежной силы.

Решение задачи имеет следующий вид

$$M(z) = \frac{Gr}{\lambda^2} [f_1(z) - f_2(z) - z] + R \cdot e^{i\alpha} f_1(z), \quad (1)$$

$$\text{где, } f_1(z) = \frac{sh(\lambda(z+1)) - (sh\lambda + sh(\lambda z))sh\lambda/\lambda}{\lambda ch(2\lambda) - sh(2\lambda)/2}, \quad f_2(z) = \frac{\lambda ch(\lambda(z-1)) - sh(2\lambda)/2}{\lambda ch(2\lambda) - sh(2\lambda)/2}.$$

$$u_0(z) = \text{Re } M(z), \quad v_0(z) = \text{Im } M(z), \quad (2)$$

$$\theta_0(z) = (\text{Pr}/\sqrt{Ta}) (\text{Im } C_3 \cdot f_3(z) + f_4(z)), \quad (3)$$

$$\text{где } f_3(z) = (3 - 2z - z^2)/2, \quad f_4(z) = v_0(z) - v_0(1) - v_0'(-1)(z - 1 - 1/Bi) - (R/Bi) \sin \alpha.$$

$C_3 = C_1 \lambda \sinh \lambda$ ,  $C_1 = -\frac{Gr}{\lambda^2} (-sh\lambda + \lambda ch\lambda) + Re^{i\alpha} sh\lambda$ .  $M(z) = u_0(z) + iv_0(z)$  – комплексная функция скорости,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\lambda = \sqrt[4]{Ta/4}(1+i)$ ,  $\text{Re}$ ,  $\text{Im}$  – действительная и мнимая часть числа,  $\theta_0(z)$  – температура,  $Ta$  – число Тейлора,  $R$  – число Рейнольдса,  $Gr$  – число Грасгофа,  $\text{Pr}$  – число Прандтля,  $Bi = \gamma_A h$  – число Био, угол  $\alpha$  определяет направление вектора тангенциальных напряжений в заданной системе координат.

Решение (1)–(3) параметрическое, профиль скорости зависит от числа Тейлора (т.е. от интенсивности вращения), первое слагаемое описывает влияние адвекции, а второе слагаемое – воздействие тангенциальных напряжений на профиль скорости течения жидкости.

При  $Ta = 0$  (отсутствие вращения) в изотермическом случае ( $Gr = 0$ ) скорость имеет параболический профиль. В случае отсутствия тангенциальных напряжений на верхней границе ( $R = 0$ ) профиль скорости кубический, жидкость движется в противоположном направлении по сравнению с изотермическим случаем, температура

$\theta_0(z)$  отрицательна. Расчеты, сделанные при  $\alpha = 0$ , показали, что с ростом числа Грасгофа профиль скорости течения меняется. При  $Gr/R \leq 1,01$  в верхней части слоя жидкость движется вправо, а в нижней части – влево. При  $Gr/R > 1,01$  в слое формируются три струи, а при  $Gr/R \geq 3$  их снова две. Температура разных знаков становится при  $Gr/R > 5/3$  и становится отрицательной при  $Gr/R \geq 3$ .

В изотермическом случае ( $Gr = 0$ ) течение, возникающее во вращающемся слое, будет меняться в зависимости от числа Тейлора и направления вектора тангенциальных напряжений на свободной поверхности. При всех значениях  $Ta$  профили скорости  $u_0(z)$  и  $v_0(z)$  описывают спиралевидное движение. Скорость принимает максимальные значения вблизи верхней границы или непосредственно на ней. С ростом числа Тейлора влияние тангенциальных напряжений на скорость течения падает, максимум скорости уменьшается, движение локализуется вблизи свободной границы. Вторая компонента скорости при  $0 \leq Ta \leq 35$  монотонно возрастает по модулю, а затем начинает убывать. Представляет интерес зависимость угла  $\alpha$  от числа Тейлора  $Ta$ , когда  $x$ -вая компонента скорости на верхней границе при  $z=1$  принимает максимальное по модулю значение, а вторая компонента скорости там же равна нулю. Эта зависимость определяется по формуле  $tg \alpha = -Im f_1(1)/Re f_1(1)$ . С ростом числа Тейлора угол растет от нуля градусов при  $Ta=0$ , а при  $Ta \gg 1$  угол стремится к  $45^\circ$ .

Для неизотермического случая при  $R=0$  скорость чисто адвективного течения также принимает максимальные значения вблизи верхней границы. Вторая компонента скорости при  $0 \leq Ta \leq 24$  монотонно возрастает по модулю, а затем начинает убывать. Движение спиральное, но направление спирали противоположное. В общем случае течение является комбинацией ветрового и адвективного течения и является спиральным. Таким образом, адвекция формирует спиральное движение, накладывающееся на спиральное течение, возникающее под воздействием ветрового напряжения на верхней свободной границе.

### Список литературы

1. Педлоки Дж. Геофизическая гидродинамика: В 2-х томах. М.: Мир, 1981. 396с.
2. *Naesser T.M., Leibovich S.* Pattern formation in the marginally unstable Ekman layer // J. Fluid Mech. 2003. Vol.479. P.125–144. DOI: 10.1017/S0022112002003415.
3. *Аристов С.Н., Фрик П.Г.* Нелинейные эффекты влияния экмановского слоя на динамику крупномасштабных вихрей в мелкой воде // ПМТФ, 1991. №2. С.49–54.
4. *Аристов С.Н., Шварц К.Г.* Эволюция ветровой циркуляции в неизотермическом океане // Океанология, 1990. Т.30, вып.4. С.562–566.
5. *Aristov S.N., Shvarts K.G.* On the influence of salinity exchange on the circulation of a fluid in an enclosed basin // Soviet journal of physical oceanography, 1991. Vol.2, No.4. P.293-298. DOI 10.1007/BF02346081.
6. *Aristov S.N., Schwarz K.G.* New two-dimensional model of large-scale oceanic circulation.- Proc. of 2nd International Conference of Computer Modelling in Ocean Engineering'91, Barcelona/30 September- 4 October 1991/- 1991, Balkema, Rotterdam. P.49–54.
7. *Козлов В.Ф.* Модель двумерного вихревого движения жидкости с механизмом вовлечения // Изв. РАН. МЖГ. 1992. №6. С.49–56.
8. *Шварц К.Г.* Модели геофизической гидродинамики: Учеб. пособие по спецкурсу. – Изд. 2-е, доп. и испр.; Перм. ун-т. – Пермь, 2006. – 66с.
9. *Аристов С.Н., Шварц К.Г.* Вихревые течения в тонких слоях жидкости. Киров: ВятГУ, 2011. 207с.



## Солитонная турбулентность в системах типа уравнения Кортевега – де Вриза

Е. Г. Шургалина

Институт прикладной физики РАН,  
603950, г. Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46  
email: eshurgalina@mail.ru

Исследуется динамика солитонных полей в рамках интегрируемых моделей: уравнения Кортевега – де Вриза (КдВ), модифицированного уравнения Кортевега – де Вриза (мКдВ) и уравнения Гарднера. Демонстрируются особенности парных взаимодействий солитонов как элементарного акта солитонной турбулентности. Показана важность взаимодействий солитонов разной полярности в процессе образования аномально больших волн («волн-убийц») в мульти-солитонных полях. Найдены функции распределения и статистические моменты солитонных ансамблей.

**Ключевые слова:** солитон; уравнение Кортевега – де Вриза; численное моделирование

## Soliton turbulence in the systems of the Korteweg – de Vries equation type

E.G. Shurgalina

The Institute of Applied Physics of the Russian Academy of Sciences,  
603950, Nizhny Novgorod, Ulyanova street, 46  
email: eshurgalina@mail.ru

Dynamics of soliton fields in the frameworks of integrable models like Korteweg – de Vries equation (KdV), modified Korteweg – de Vries equation (mKdV) and Gardner equation is studied. Features of pair soliton interactions are demonstrated as elementary act of soliton turbulence. Importance of bipolar soliton interactions in the process of abnormally large waves (“freak waves”) formation in multi-soliton fields is shown. Distribution functions and statistical moments of soliton ensembles are found.

**Key words:** soliton; Korteweg – de Vries equation; numerical modeling

Солитоны являются частью современной нелинейной физики. В интегрируемых системах типа уравнения Кортевега – де Вриза (КдВ) и нелинейное уравнение Шредингера существует достаточно много подходов, позволяющих получить точные решения для описания солитонных взаимодействий. Солитонная турбулентность является частью волновой (слабой) турбулентности, где кинетические уравнения описывают параметры ассоциативной спектральной задачи. Владимир Захаров в 1971 году впервые показал фундаментальную роль парных солитонных взаимодействий в рамках уравнения КдВ. Затем кинетическая теория плотного солитонного газа была развита Геннадием Элем с его соавторами. С помощью этой теории было возможно



описать различные свойства солитонных ансамблей, учитывая упругое двухсолитонное взаимодействие.

В настоящей работе изучается динамика солитонного газа в интегрируемых системах, описываемых моделями типа уравнения Кортевега – де Вриза, такими как: уравнение Кортевега – де Вриза

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad (1)$$

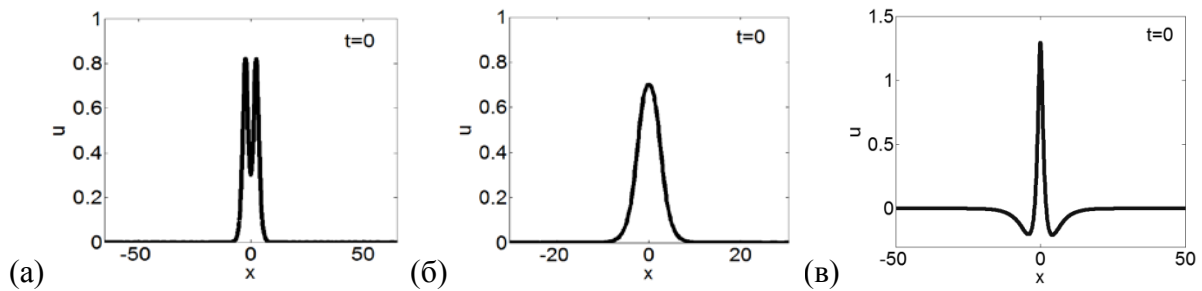
модифицированное уравнение Кортевега – де Вриза

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad (2)$$

уравнение Гарднера, учитывающее квадратичную и кубическую нелинейность

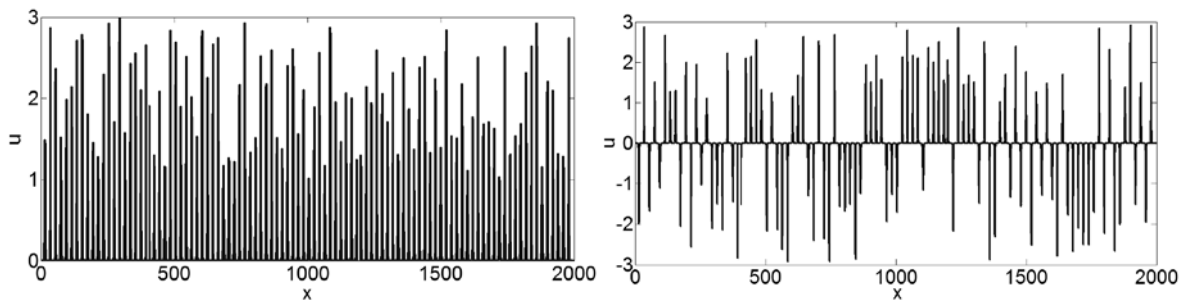
$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u(1 \pm u) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (3)$$

Вначале мы исследовали двухсолитонное взаимодействие в рамках данных моделей как элементарный акт солитонной турбулентности [Pelinovsky et al, 2013; Pelinovsky & Shurgalina, 2015]. Такие взаимодействия могут сильно влиять на статистические свойства солитонных ансамблей. Оказалось, что полярность солитонов кардинальным образом влияет на форму результирующего импульса. Так, если взаимодействуют солитоны одинаковой полярности, амплитуда результирующего импульса уменьшается в момент взаимодействия: (рис. 1. а) – обменное взаимодействие КдВ солитонов ( $A_1=1, A_2=0.7$ ), (рис.1. б) – обменное взаимодействие КдВ солитонов ( $A_1=1, A_2=0.3$ ), (рис. 1. в) – взаимодействие разнополярных мКдВ солитонов  $A_1 = 1, A_2 = -0.3$ .



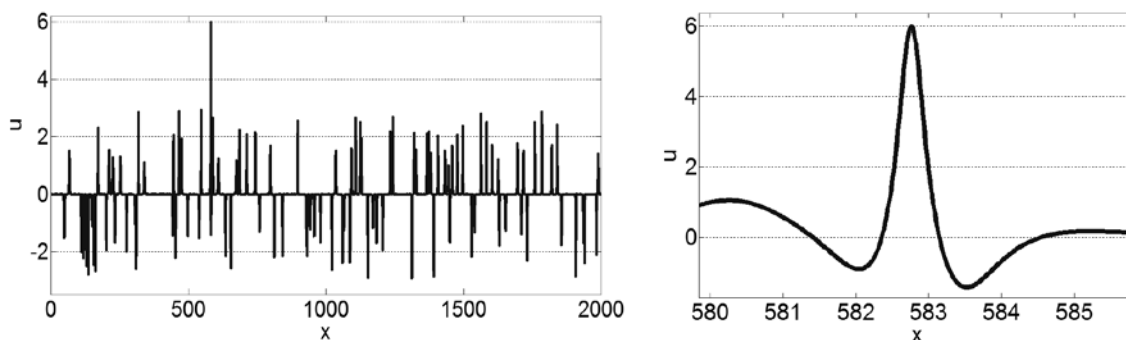
**Рис. 1.** *Формы результирующего импульса при взаимодействии двух солитонов: при обменном взаимодействии, при обгонном взаимодействии и при «поглощении - испускании»*

Динамика ансамблей солитонных полей изучалась численно (псевдо-спектральным методом) с периодическими граничными условиями. Начальные условия задавались суперпозицией удаленных друг от друга солитонов (рис. 2).



**Рис. 2.** Примеры мультисолитонных однополярных и разнополярных полей

Оказалось, что в полях, состоящих из солитонов одной полярности, волн с амплитудами большими, чем амплитуда максимального солитона в начальный момент времени не возникает; высшие статистические моменты таких полей только уменьшаются с течением времени. В солитонном же газе, состоящем из солитонов разных полярностей, периодически возникают anomalously большие волны (волны-убийцы) (рис. 3). Статистические моменты таких полей значительно увеличиваются в результате взаимодействия солитонов, так же как и хвосты функций распределения амплитуд солитонов [3,4].



**Рис. 3.** Волновое поле разнополярных солитонов в момент времени  $t=65$ . Справа – увеличенная волна-убийца

Исследование выполнено при поддержке гранта РФФИ № 16-32-60012.

#### Список литературы:

1. Pelinovsky E., Shurgalina E., Sergeeva A., Talipova T., El G., Grimshaw R. Two-soliton interaction as an elementary act of soliton turbulence in integrable systems // *Physics Letters A*. 2013. V. 377. P. 272-275.
2. Pelinovsky E., Shurgalina E. Two-soliton interaction in the frameworks of modified Korteweg – de Vries equation // *Radiophysics and Quantum Electronics*. 2015. V. 57. P. 737-744.
3. Shurgalina E., Pelinovsky E. Dynamics of irregular wave ensembles in the coastal zone. Nizhny Novgorod: State Technical University. 2015. 179 p
4. Shurgalina E., Pelinovsky E. Nonlinear dynamics of a soliton gas: Modified Korteweg-de Vries equation framework // *Physics Letters A*. 2016. V. 380. P. 2049-2053.

## **Сила отталкивания, действующая на цилиндрическое тело вблизи границы полости при поступательных вибрациях. Роль амплитуды колебаний.**

**В. Д. Щипицын, В. Г. Козлов**

Лаборатория вибрационной гидромеханики, Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, 614990, Пермь, ул. Сибирская, 24  
email: schipitsyn@pspu.ru, kozlov@pspu.ru

Обобщаются результаты экспериментального исследования вибрационной динамики твердого кругового цилиндра в прямоугольной полости, заполненной вязкой несжимаемой жидкостью. Полость совершает высокочастотные поступательные колебания в горизонтальном направлении. Опыты проводятся с телами различной относительной плотности: меньше, или больше плотности жидкости. На цилиндр, совершающий колебания вблизи границы полости под действием осциллирующих сил инерции, действует осредненная сила отталкивания, удерживающая тяжелое тело над дном полости, а легкое – на некотором расстоянии от потолка. Исследуется влияние частоты и амплитуды колебаний тела, а также свойств жидкости на величину вибрационной подъемной силы. Особое внимание уделяется исследованию подъемной силы при больших безразмерных амплитудах колебаний тела. Показано, что с увеличением безразмерной амплитуды величина осредненной подъемной силы снижается. Исследуется роль вращательных колебаний тела, наблюдаемых в экспериментах одновременно с его поступательными колебаниями. Также изучается движение жидкости, возбуждаемое колеблющимся телом в объеме полости. Показано, что при увеличении безразмерной амплитуды на смену безотрывному режиму обтекания тела приходит отрывной, величина осредненной подъемной силы при этом снижается.

**Ключевые слова:** подъемная сила; вязкая жидкость; твердое тело; вибрационная механика

## **Repulsive force acting on the cylindrical solid near the border of the cavity under translational vibrations. The role of amplitude of oscillations.**

**V. D. Schipitsyn, V. G. Kozlov**

Laboratory of vibrational hydromechanics, Perm State Humanitarian Pedagogical University, Sibirskaya av., 24, 614990, Perm  
email: schipitsyn@pspu.ru, kozlov@pspu.ru

The results of experimental study of vibrational dynamics of cylindrical solid in a rectangular cavity filled with viscous incompressible fluid are generalized. The cavity performs high-frequency translational oscillations in a horizontal plane. Experiments are carried out with bodies of different relative density: more or less than liquid's density. The cylinder oscillates near the boundary of the cavity under the influence of oscillating inertia forces. Averaged force repels the body from the boundary and holds a heavy body over the bottom of the cavity and the light one at some distance from the ceiling. It is shown that the value of vibrational lift force depends on the amplitude and frequency of vibrations as well as on the properties of liquid. Particular attention is paid to the investigation of the lift force for large dimensionless amplitudes of body oscillations. It is shown that the value of the averaged lift force decreases with increasing dimensionless amplitude. Rotational oscillations of the body, observed in experiments simultaneously with translational ones, and fluid motion, excited by an oscillating body, are also investigated. It is shown that at increasing the dimensionless amplitude the laminar flow regime is changed by a disruption one and the magnitude of lift force decreases.

**Keywords:** lift force; viscous liquid; solid body; vibrational mechanics

## 1. Постановка задачи

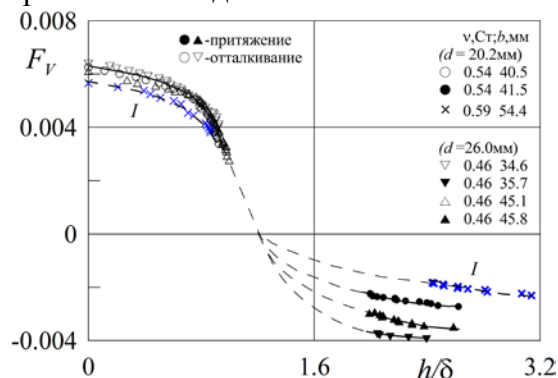
Экспериментальное исследование осредненной силы отталкивания, действующей на цилиндрическое тело, совершающее тангенциальные колебания вблизи границы полости выполнено в [1]. Теоретическое описание подъемной силы в приближении малых амплитуд и высоких частот колебаний дано в [2]. Результаты эксперимента в случае малых амплитуд колебаний тела в невязкой жидкости хорошо согласуются с теоретическими.

В представленной работе исследуется поведение твердого цилиндра кругового сечения, совершающего тангенциальные колебания вблизи плоской границы прямоугольного контейнера под действием осциллирующей силы инерции при больших безразмерных амплитудах колебаний тела. Подробное описание экспериментальной установки и методики проведения экспериментов представлено ранее в [1]. Опыты проводятся с цилиндрами, плотность  $\rho_s$  которых как меньше, так и больше плотности жидкости  $\rho_L$ . Используется методика, позволяющая выполнить прямое измерение вибрационной подъемной силы  $f_v$ , действующей на цилиндр, в зависимости от расстояния  $h$  до стенки. Показано, что вибрационная сила отталкивания, действующая на тело в непосредственной близости от стенки, сменяется силой притяжения на расстояниях, превосходящих радиус вязкого взаимодействия,  $h/\delta > 1$  (где  $\delta \equiv \sqrt{2\nu/\Omega}$  – толщина слоя Стокса,  $\Omega$  – частота вибрационного воздействия). Описание этого невязкого взаимодействия (осредненной силы притяжения) было дано в [3].

## 2. Результаты эксперимента

Введем безразмерную вибрационную силу, действующую на единицу длины тела,  $F_v \equiv f_v/(\rho_L b^2 \Omega^2 d)$ . На рис. 1 представлены зависимости вибрационной силы  $F_v$  от безразмерного расстояния до стенки  $h/\delta$  в условиях квазиравновесия легкого тела вблизи потолка и вблизи дна полости ( $\rho \equiv \rho_s/\rho_L = 0.75$ ). Вблизи дна легкое тело находится в устойчивом равновесии под действием силы притяжения. В экспериментах варьировались амплитуда вибраций  $b$ , диаметр тела  $d$  и кинематическая вязкость жидкости  $\nu$ .

Величина силы отталкивания  $F_V$  монотонно понижается при увеличении расстояния  $h/\delta$ . Максимальное удаление тела от потолка полости во всех случаях не превышает  $h/\delta \approx 1$ . На расстояниях, превышающих  $h/\delta > 1$ , сила отталкивания сменяется силой притяжения, немонотонно изменяющейся с расстоянием, сначала она нарастает по величине с расстоянием, после чего начинает убывать. Крайние правые точки серий соответствуют минимумам кривых взаимодействия.



**Рис. 1.** Зависимость безразмерной силы  $F_V$  от расстояния до стенки  $h/\delta$

Следует отметить, что за исключением одной серии точек (кривая *I*), полученной при самой большой амплитуде вибраций, все результаты при  $h/\delta > 1$  (сила отталкивания) находятся в хорошем согласии между собой. Кривая *I* лежит ниже остальных. Это связано с тем, что при большой безразмерной амплитуде колебаний тела в вязкой жидкости на смену ламинарному обтеканию приходит отрывное. Порог устойчивости в пределе высоких частот на большом расстоянии от стенки определяется безразмерной амплитудой колебаний тела в жидкости  $(A/d)^* = 1.456 \omega^{-1/4}$  [3]. Кривой *I* соответствуют значения амплитуды выше порога устойчивости  $(A/d)^*$ .

Мгновенные поля скорости и осредненные течения жидкости, изученные с помощью PIV (Particle Image Velocimetry) подтверждают, что при увеличении безразмерной амплитуды на смену безотрывному режиму обтекания тела приходит отрывной. Покадровая обработка и анализ видеозаписей, полученных с помощью скоростной видеосъемки процесса, обнаружили, что во всех экспериментах наряду с поступательными колебаниями, тело совершает вращательные колебания. Сделано предположение, что вращательные колебания тела также оказывают влияние на величину подъемной силы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 16-31-00201). Исполнители входят в состав Ведущей научной школы № НШ-9176.2016.1.

### Список литературы

1. Иванова А. А., Козлов В. Г., Щипицын В. Д. Легкий цилиндр в полости с жидкостью при горизонтальных вибрациях // Изв. РАН. МЖГ. 2010. №6. С. 63–73.
2. Иванова А. А., Козлов В. Г., Щипицын В. Д. Подъемная сила, действующая на цилиндрическое тело в жидкости вблизи границы полости, совершающей поступательные колебания // ПМТФ. 2014. № 5. С. 55–64.
3. Любимов Д. В., Любимова Т. П., Черепанов А. А. О движении твердого тела в вибрирующей жидкости // Конвективные течения. Пермь: Изд-е Перм. пед. ин-та, 1987. С. 61–70.
4. Sarpkaya T. Force on a circular cylinder in viscous oscillatory flow at low Keulegan–Carpenter numbers // J. Fluid Mech. 1986. Vol. 165. P. 61–71.

## АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- |                                     |                                   |                                       |
|-------------------------------------|-----------------------------------|---------------------------------------|
| <b>A</b>                            |                                   |                                       |
| Aland S., 1-12                      | Shevtsova V., 1-20, 1-23,<br>1-27 | Власова О.А., 1-107                   |
| <b>B</b>                            | Simanovskii I.B., 1-26            | Волегов П.С., 2-119,<br>2-214         |
| Baaske P., 1-18                     | <b>V</b>                          | Воробьев А.М., 1-110,<br>1-194, 2-34  |
| Bataller H., 1-18                   | Vailati A., 1-18                  | Вязьмин А.В., 2-200                   |
| Boeck T., 1-12                      | Viviani A., 1-26                  | <b>Г</b>                              |
| Braibanti M., 1-18                  | <b>X</b>                          | Газдалиев И.М., 2-148                 |
| <b>C</b>                            | Xu Shenghua., 1-18                | Ганченко Г.С., 1-143                  |
| Carpineti M., 1-18                  | <b>Y</b>                          | Ганченко Н.Ю., 1-226                  |
| Cerbino R., 1-18                    | Yasnou V., 1-20, 1-27             | Гаришин О.К., 1-113,<br>2-128, 2-197  |
| Croccolo F., 1-18                   | <b>A</b>                          | Гатапова Е.Я., 1-116                  |
| <b>D</b>                            | Алабужев А.А., 1-30,<br>1-33      | Гилев В.Г., 1-80                      |
| Donev A., 1-18                      | Александров В.А., 1-36            | Глухов А.Ф., 1-119                    |
| <b>E</b>                            | Аливердиев А.А., 1-39             | Голдобин Д.С., 1-122,<br>1-125, 2-148 |
| Eckert K., 1-12                     | Арсланбекова Р.Б., 1-39           | Гольцман А.Е., 1-214                  |
| <b>G</b>                            | Асмолов Е.С., 1-42                | Гомзииков Л.Ю., 1-209                 |
| Garonenko Y., 1-20, 1-27            | Ахмедагаев Р.М., 1-45             | Гончарова О.Н., 1-51                  |
| <b>H</b>                            | <b>Б</b>                          | Горбачева Е.В., 1-128                 |
| Hanifi A., 1-68, 71                 | Бабушкин И.А., 2-190,             | Гордеева В.Ю., 1-131                  |
| Hein S., 1-68, 71                   | Батищева К.А., 1-48               | Гороженинова Т.Н.,<br>1-134           |
| <b>K</b>                            | Бейбалаев В.Д., 1-39              | Госсман Н.А., 1-137                   |
| Köhler W., 1-18                     | Бекежанова В.Б., 1-51             | <b>Д</b>                              |
| Köllner T., 1-12                    | Белов С.Ю., 1-54                  | Давыдова М.А., 1-140                  |
| <b>M</b>                            | Белозеров А.С., 1-87              | Демёхин Е.А., 1-128,<br>1-143         |
| Mialdun A., 1-20, 1-27              | Беляев Ю.Н., 1-59                 | Дёмин А.А., 1-146                     |
| Mokbel M., 1-12                     | Беляева Н.А., 1-62                | Демин В.А., 1-74, 1-149               |
| <b>N</b>                            | Берсенев Ю.В., 2-28               | Денисова М.О., 1-152,<br>2-101        |
| Nepomnyashchy A., 1-20              | Бондаренко А.В., 1-65             | Диденкулова И.И., 2-131               |
| <b>O</b>                            | Бородулин В.И., 1-68,<br>1-71     | Добросельский К.Г.,<br>1-156          |
| Örlü R., 1-68, 1-71                 | Брацун Д.А., 1-74, 1-77           | Долгих Т.Ф., 1-159                    |
| Ortiz de Zárate J.M., 1-14,<br>1-18 | Бузмакова М.М., 1-80              | Дудак А.А., 2-40                      |
| <b>S</b>                            | Буркова Л.Н., 1-84                | Дударь Е.С., 1-162                    |
| Schwarzenberger K., 1-12            | Быков А.В., 1-87                  | Дударь О.И., 1-162                    |
|                                     | <b>В</b>                          | Дядюкина А.Д., 1-165                  |
|                                     | Ваганов М.В., 1-93                | <b>Е</b>                              |
|                                     | Вараксина Е.И., 2-184             | Евграфова А.В., 2-61                  |
|                                     | Вассерман И.Н., 1-96              | Егоров М.Ю., 1-168                    |
|                                     | Вертгейм И.И., 1-99               | Ефремов Д.В., 1-172                   |
|                                     | Виноградов Д.А., 1-103            |                                       |
|                                     | Виноградова О.И., 1-42            |                                       |

### З

Загвозкин Т.Н., 1-175  
Захаров А.П., 1-178  
Захлевных А.Н., 1-181,  
1-184, 2-81, 2-116  
Земляникин А.Ю., 2-166  
Зубарев Н.М., 1-187  
Зубова Н.А., 1-190  
Зюзгин А.В., 1-77

### И

Иванов А.В., 1-68, 1-71  
Иванцов А.О., 1-194,  
1-198  
Ивочкин Ю.П., 1-103  
Ильин В.А., 2-172  
Ильин Н.А., 1-194, 2-175  
Исламова А.Г., 1-206

### К

Кабов О.А., 1-116  
Казаков А.В., 1-65  
Казимарданов М.Г.,  
1-209  
Калинин Е.И., 1-214  
Караваев А.С., 1-217  
Карпунин И.Э., 1-220  
Качанов Ю.С., 1-68, 1-71  
Кашина М.А., 1-30, 1-223  
Кирий В.А., 1-226  
Киченко А.А., 1-134,  
1-165  
Клементьева И.Б., 1-103  
Клименко Л.С., 1-125,  
1-230, 1-234  
Климов Н.А., 2-12  
Кнутова Н.С., 1-238  
Козлов В.Г., 1-140, 2-255  
Козлов Н.В., 1-107, 1-220  
Колегов К.С., 1-242  
Колегов Р.Н., 1-246  
Колесниченко Е.В., 2-19  
Колесниченко И.В.,  
1-249, 1-252  
Колмогоров Г.Л., 2-12  
Колчанов Н.В., 2-19, 2-22  
Колчанова Е.А., 2-22  
Кондрашов А.Н., 1-84  
Кондюрин А.В., 1-146

Копысов С.П., 1-217,  
2-25, 2-107  
Копьев В.Ф., 2-28  
Корбанова Е.Г., 1-116  
Костарев К.Г., 1-152  
Кочурин Е.А., 1-187  
Красняков И.В., 1-77  
Крутова И.Ю., 2-31  
Кси Р., 2-34  
Кузнецов А.А., 2-37  
Кузнецов Г.В., 2-40, 2-45  
Кузнецова Е.В., 2-12  
Кузнецова К.В., 1-181  
Кузьмин И.М., 2-25  
Куликов Ю.М., 2-52  
Куркин А.А., 2-58, 2-166  
Куркина О.Е., 2-58, 2-210  
Кучинский М.О., 2-61

### Л

Ладейщикова В.В., 1-119  
Ландик Л.В., 2-139  
Лебедев А.В., 2-64  
Левашов А.П., 2-125  
Лепихин А.П., 1-125,  
2-71  
Лешанский А.М., 2-98  
Листратов Я.И., 1-45,  
2-223  
Лиходеев Н.М., 2-166  
Лосев Г.Л., 1-249  
Лысенко С.Н., 2-101,  
2-104  
Любимов Д.В., 1-110,  
1-122, 1-234, 2-242  
Любимова Т.П., 1-110,  
1-122, 1-125, 1-175,  
1-190, 1-194, 1-198,  
1-209, 1-246, 2-67, 2-71,  
2-75, 2-78, 2-136, 2-242  
Люшнин А.В., 1-131

### М

Мазо А.Б., 1-214  
Майер В.В., 2-184  
Макаров Д.В., 2-81,  
2-116, 2-226  
Максимов В.И., 2-40  
Малышкин Д.С., 1-59  
Малюков А.В., 1-214

Мандрыкин С.Д., 1-252,  
2-81  
Манцуров А.В., 1-184  
Марышев Б.С., 1-230,  
2-84, 2-88  
Мерзляков А.Ф., 1-80  
Мизёв А.И., 1-74, 1-149,  
2-92  
Мингалев С.В., 1-209  
Мищенко Д.А., 1-68, 1-71  
Молочников В.М., 1-214  
Морозов И.А., 2-95  
Морозов К.И., 2-98  
Мошева Е.А., 2-101,  
2-104

### Н

Наймарк О.Б., 1-172  
Недожогин Н.С., 2-107,  
2-110  
Ни А.Э., 2-45  
Низкая Т.В., 1-42  
Никулин И.Л., 2-113  
Новиков А.А., 2-116  
Новиков А.К., 2-25, 2-107

### О

Озерных В.С., 2-119  
Омаров И.О., 1-39  
Опрышко О.В., 2-31  
Орлова Е.Г., 1-206  
Остапович К.В., 2-122  
Охотников Д.И., 1-214  
Ошмарина М.В., 1-152

### П

Паймушин В.Н., 2-125  
Пальчиковский В.В., 2-28  
Паршакова Я.Н., 2-71  
Пелевин А.Г., 2-128  
Пелиновский Е.Н., 2-131,  
2-210  
Перминов А.В., 2-113,  
2-136  
Пестренин В.М., 2-139  
Пестренина И.В., 2-139  
Петров Д.А., 2-142, 2-145  
Петухов М.И., 1-74,  
1-149  
Пименова А.В., 1-122,  
1-125, 2-148

Писмен Л.М., 1-178  
Полосков И.Е., 2-151  
Полудницин А.Н., 2-154  
Попов Ф.С., 2-157  
Попова Е.Н., 2-61  
Прокопьев С.А., 2-75  
Прянишникова Е.А., 1-62  
Пшеничников А.Ф., 2-37,  
2-160

## Р

Райхер Ю.Л., 1-93  
Резник В.В., 2-200  
Репина М.Ю., 1-226  
Роговой А.А., 2-163  
Родин А.А., 2-166  
Родина Н.А., 2-166  
Рувинская Е.А., 2-58,  
2-210  
Рудяк В.Я., 2-169  
Русаков С.В., 1-80, 146  
Рушинская К.С., 2-172  
Рыбин А.В., 2-58  
Рыбкин К.А., 1-84  
Рябкова Н.А., 1-65  
Ряшенцев В.В., 1-202,  
2-175

## С

Сагитов Р.В., 2-178  
Садилов Е.С., 2-181  
Саранин В.А., 2-184  
Сармакеева А.С., 2-187  
Сбоев И.О., 1-84, 2-190  
Свистков А.Л., 1-113,  
1-146, 2-197  
Семенов Д.В., 2-142  
Сидоров А.С., 1-119  
Синер А.А., 1-246  
Скоков П.К., 2-145  
Слюняев А.В., 2-210

Сморозин Б.Л., 2-233  
Соболева Е.Б., 2-194  
Соколов А.К., 2-197  
Сон Э.Е., 2-52  
Сорокин В.Г., 2-200  
Спивак Л.В., 2-203  
Спивак С.И., 2-206  
Степанов Р.А., 2-217  
Столбова О.С., 2-163  
Столин А.М., 1-62  
Ступникова А.В., 2-207  
Субботин С.В., 1-140  
Сухановский А.Н., 2-61

## Т

Талипова Т.Г., 2-210  
Тельканов М.А., 2-214  
Тепляков И.О., 1-103  
Терпугов В.Н., 1-146  
Титов В.В., 2-217  
Тонков Л.Е., 1-36, 2-25,  
2-110, 2-187  
Торохова С.В., 1-152  
Трусов П.В., 2-122  
Труфанова Н.М., 1-65  
Тюлькина И.В., 2-220  
Тялина Н.А., 2-223

## У

Уваров С.В., 1-172  
Уткин М.А., 2-226

## Ф

Файзрахманова И.С.,  
2-78, 2-113  
Фатгалов О.О., 2-67  
Феоктистов Д.В., 1-48,  
1-206, 2-245  
Фирсов В.А., 2-125  
Франц Е.А., 1-143  
Фрейберг М.А., 2-95

## Х

Халилов Р.И., 1-249,  
1-252  
Храмцов И.В., 2-28

## Ц

Циберкин К.Б., 2-230

## Ч

Черенкова Е.С., 2-28  
Черепанов И.Н., 2-233  
Чернова А.А., 2-110  
Чиглинцева А.С., 2-236  
Чикулаев Д.Г., 2-239

## Ш

Шадрин В.В., 1-113,  
2-128  
Шардаков И.Н., 1-96  
Шарифулин А.Н., 2-154,  
2-178, 2-207, 2-242  
Шарифулин В.А., 2-242  
Шарифулин Т.М., 2-245  
Шварц К.Г., 1-238, 2-239,  
2-249  
Шелистов В.С., 1-143  
Шестаков А.П., 1-96  
Шихов А.Н., 1-87  
Шишкин В.М., 2-125  
Шмыров А.В., 1-74,  
1-152, 2-92, 2-101, 2-104  
Шмырова А.И., 1-152,  
2-92, 2-101  
Шургалина Е.Г., 2-131,  
2-252

## Щ

Щипицын В.Д., 2-255



## ALPHABETICAL INDEX

### A

Akhmedagaev R.M., 1-45  
Alabuzhev A.A., 1-30, 1-33  
Aland S., 1-12  
Aleksandrov V.A., 1-36  
Aliverdiev A.A., 1-39  
Arslanbekova R.B., 1-39  
Asmolov E.S., 1-42

### B

Baaske P., 1-18  
Babushkin I. A., 2-190  
Bataller H., 1-18  
Batishcheva K.A., 1-48  
Bekezhanova V.B., 1-51  
Belov S.Yu., 1-54  
Belozorov A.S., 1-87  
Belyaeva N.A., 1-62  
Belyayev Yu.N., 1-59  
Beybalaev V.D., 1-39  
Boeck T., 1-12  
Bondarenko A.V., 1-65  
Borodulin V.I., 1-68, 1-71  
Braibanti M., 1-18  
Bratsun D.A., 1-74, 1-77  
Burkova L.N., 1-84  
Buzmakova M.M., 1-80  
Bykov A.V., 1-87

### C

Carpineti M., 1-18  
Cerbino R., 1-18  
Cherenkova E. S., 2-28  
Cherepanov I. N., 2-233  
Chernova A. A., 2-110  
Chiglintseva A.S., 2-236  
Chikulaev D. G., 2-239  
Croccolo F., 1-18

### D

Davydova M.A., 1-140  
Demekhin E.A., 1-128,  
1-143  
Demin A.A., 1-146  
Demin V.A., 1-74, 1-149  
Denisova M. O., 2-101  
Denisova M.O., 1-152  
Didenkulova I. I., 2-131

Dobrosel'skii K.G., 1-156  
Dolgikh T.F., 1-159  
Donev A., 1-18  
Dudak A. A., 2-40  
Dudar E.S., 1-162  
Dudar O.I., 1-162  
Dyadyukina A.D., 1-165

### E

Eckert K., 1-12  
Efremov D.V., 1-172  
Egorov M.Yu., 1-168  
Evgrafova A. V., 2-61

### F

Faizrakhmanova I.S., 2-78,  
2-113  
Fattalov O. O., 2-67  
Fedenkova A.A., 1-71  
Feoktistov D. V., 2-245  
Feoktistov D.V., 1-48,  
1-206  
Firsov V. A., 2-125  
Frants E.A., 1-143  
Freyberg M. A., 2-95

### G

Ganchenko G.S., 1-143  
Ganchenko N.Yu., 1-226  
Gaponenko Y., 1-20, 1-26  
Garishin O. K., 2-128,  
2-197  
Garishin O.K., 1-113  
Gatapova E.Ya., 1-116  
Gazdaliev I. M., 2-148  
Gilev V.G., 1-80  
Glukhov A.F., 1-119  
Goldobin D. S., 2-148  
Goldobin D.S., 1-122,  
1-125  
Goltsman A.E., 1-214  
Gomzikov L.Y., 1-209  
Goncharova O.N., 1-51  
Gorbacheva E.V., 1-128  
Gordeeva V.Y., 1-131  
Gorozheninova T.N., 1-134  
Gossman N.A., 1-137

### H

Hanifi A., 1-68  
Hein S., 1-68

### I

Ilin V. A., 2-172  
Ilyin N. A., 2-175  
Ilyin N.A., 1-204  
Islamova A.G., 1-206  
Ivanov A.V., 1-68, 1-71  
Ivantsov A.O., 1-194, 1-198  
Ivochkin Yu.P., 1-103

### K

Kabov O.A., 1-116  
Kachanov Yu.S., 1-65, 1-68  
Kalinin E.I., 1-214  
Karavaev A.S., 1-217  
Karpunin I.E., 1-220  
Kashina M.A., 1-30, 1-223  
Kazakov A.V., 1-65  
Kazimardanov M.G., 1-209  
Khalilov R.I., 1-249, 1-252  
Khramtsov I. V., 2-28  
Kichenko A.A., 1-134,  
1-165  
Kiriya V.A., 1-226  
Klementeva I.B., 1-103  
Klimenko L.S., 1-125,  
1-230, 1-234  
Klimov N. A., 2-12  
Knutova N.S., 1-238  
Kochurin E.A., 1-187  
Köhler W., 1-18  
Kolchanov N. V., 2-19,  
2-22  
Kolchanova E. A., 2-22  
Kolegov K.S., 1-242  
Kolegov R.N., 1-246  
Kolesnichenko E.V., 2-19  
Kolesnichenko I.V., 1-249,  
1-252  
Köllner T., 1-12  
Kolmogorov G. L., 2-12  
Kondrashov A.N., 1-84  
Kondyurin A.V., 1-146  
Kopiev V. F., 2-28  
Kopysov S. P., 2-25, 2-107  
Kopysov S.P., 1-217

Korbanova E.G., 1-116  
Kostarev K.G., 1-152  
Kozlov N.V., 1-107, 1-220  
Kozlov V. G., 2-255  
Kozlov V.G., 1-140  
Krasnyakov I.V., 1-77  
Krutova I.Y., 2-31  
Kuchinskii M. O., 2-61  
Kulikov Y.M., 2-52  
Kurkin A. A., 2-58, 2-166  
Kurkina O. E., 2-58, 2- 210  
Kuzmin I. M., 2-25  
Kuznecova E. V., 2-12  
Kuznetsov A. A., 2-37  
Kuznetsov G. V., 2-40,  
2-45  
Kuznetsova K.V., 1-181

## L

Ladeyshchikova V.V.,  
1-119  
Landik L.V., 2-139  
Lebedev A. V., 2-64  
Lepikhin A. P., 2-71  
Lepikhin A.P., 1-125  
Leshansky A. M., 2-98  
Levashov A. P., 2-125  
Likhodeev N.M., 2-166  
Listratov Y. I., 2-223  
Listratov Ya.I., 1-45  
Losev G.L., 1-249  
Lysenko S. N., 2-101,  
2-104  
Lyubimov D. V., 2-242  
Lyubimov D.V., 1-110,  
1-122, 1-234  
Lyubimova T. P., 2-67,  
2-71, 2-75, 2-78, 2-136,  
2-242  
Lyubimova T.P., 1-110,  
1-122, 1-125, 1-175, 1-190,  
1-194, 1-198, 1-209, 1-246  
Lyushnin A.V., 1-131

## M

Makarov D. V., 2-81,  
2-116, 2-226  
Maksimov V. I., 2-40  
Malyshkin D.S., 1-59  
Malyukov A.V., 1-214  
Mandrykin S. D., 2-81

Mandrykin S.D., 1-252  
Mantsurov A.V., 1-184  
Maryshev B. S., 2-84, 2-88  
Maryshev B.S., 1-230  
Mayer V.V., 2-184  
Mazo A.B., 1-214  
Merzlyakov A.F., 1-80  
Mialdun A., 1-20  
Mingalev S.V., 1-209  
Mischenko D.A., 1-68, 1-71  
Mizev A. I., 2-92  
Mizev A.I., 1-74, 1-149  
Mokbel M., 1-12  
Molochnikov V.M., 1-214  
Morozov I. A., 2-95  
Morozov K. I., 2-98  
Mosheva E. A., 2-101,  
2-104

## N

Naimark O.B., 1-172  
Nedozhogin N. S., 2-107,  
2-110  
Nee A. E., 2-45  
Nepomnyashchy A., 1-20  
Nikulin I.L., 2-113  
Nizkaya T.V., 1-42  
Novikov A. A., 2-116  
Novikov A. K., 2-25, 2-107

## O

Okhotnikov D.I., 1-214  
Omarov I.O., 1-39  
Opryshko O.V., 2-31  
Orlova E.G., 1-206  
Örlü R., 1-68  
Ortiz de Zárate J.M., 1-14,  
1-18  
Oshmarina M.V., 1-152  
Ostapovich K. V., 2-122  
Ozernykh V.S., 2-119

## P

Paimushin V. N., 2-125  
Palchikovskiy V. V., 2-28  
Parshakova Ya. N., 2-71  
Pelevin A. G., 2-128  
Pelinovsky E. N., 2-131  
Pelinovsky E.N., 2- 210  
Perminov A. V., 2-113,  
2-136

Pestrenin V.M., 2-139  
Pestrenina I.V., 2-139  
Petrov D. A., 2-142, 2-145  
Petukhov M.I., 1-74, 1-149  
Pimenova A. V., 2-148  
Pimenova A.V., 1-122,  
1-125  
Pismen L.M., 1-178  
Poloskov I. E., 2-151  
Poludnitsin A. N., 2-154  
Popov F. S., 2-157  
Popova E. N., 2-61  
Prokopev S. A., 2-75  
Pryanishnikova E.A., 1-62  
Pshenichnikov A. F., 2-37,  
2-160

## R

Raikher Yu.L., 1-93  
Repina M.Yu., 1-226  
Reznik V. V., 2-200  
Riabkova N.A., 1-65  
Rodin A.A., Zemlyanikin  
A.Y., 2-166  
Rodina N.A., 2-166  
Rogovoy A. A., 2-163  
Rouvinskaya E. A., 2-58, 2-  
210  
Rudyak V. Ya., 2-169  
Rusakov S.V., 1-80, 1-146  
Rushinskaya K. S., 2-172  
Ryashentsev V. V., 2-175  
Ryashentsev V.V., 1-202  
Rybin A. V., 2-58  
Rybkin K.A., 1-84

## S

Sadilov E. S., 2-181  
Sagitov R. V., 2-178  
Saranin V.A., 2-184  
Sarmakeeva A. S., 2-187  
Sboev I. O., 2-190  
Sboev I.O., 1-84  
Schipitsyn V. D., 2-255  
Schwarzenberger K., 1-12  
Semenov D. V., 2-142  
Shadrin V. V., 2-128  
Shadrin V.V., 1-113  
Shardakov I.N., 1-96  
Sharifulin A. N., 2-154,  
2-178, 2-207, 2-242

Sharifulin T. M., 2-245  
Sharifulin V. A., 2-242  
Shelistov V.S., 1-143  
Shestakov A.P., 1-96,  
Shevtsova V., 1-20, 1-23,  
1-27  
Shikhov A.N., 1-87  
Shishkin V. M., 2-125  
Shmyrov A. V., 2-92,  
2-101, 2-104  
Shmyrov A.V., 1-74, 1-152  
Shmyrova A. I., 2-92, 2-101  
Shmyrova A.I., 1-152  
Shurgalina E. G., 2-131,  
2-252  
Shvarts K. G., 2-239, 2-249  
Shvarts K.G., 1-238  
Sidorov A.S., 1-119  
Simanovskii I.B., 1-26  
Siner A.A., 1-246  
Skokov P. K., 2-145  
Slunyaev A.V., 2- 210  
Smorodin B. L., 2-233  
Soboleva E. B., 2-194  
Sokolov A. K., 2-197  
Son E.E., 2-52  
Sorokin V. G., 2-200  
Spivak L. V., 2-203  
Spivak S. I., 2- 206  
Stepanov R. A., 2-217  
Stolbova A. S., 2-163  
Stolin A.M., 1-62

Stupnikova A. V., 2- 207  
Subbotin S.V., 1-140  
Sukhanovskii A. N., 2-61  
Svistkov A. L., 2-197  
Svistkov A.L., 1-113, 1-146

## T

Talipova T.G., 2- 210  
Telkanov M. A., 2-214  
Teplyakov I.O., 1-103  
Terpugov V.N., 1-146  
Titov V. V., 2-217  
Tonkov L. E., 2-25, 2-110,  
2-187  
Tonkov L.E., 1-36  
Torokhova S.V., 1-152  
Trufanova N.M., 1-65  
Trusov P. V., 2-122  
Tsiberkin K. B., 2-230  
Tyalina N. A., 2-223  
Tyulkina I. V., 2-220

## U

Utkin M. A., 2-226  
Uvarov S.V., 1-172

## V

Vaganov M.V., 1-93  
Vailati A., 1-18  
Varaksina E.I., 2-184  
Vasserman I.N., 1-96

Vinogradov D.A., 1-103  
Vinogradova O.I., 1-42  
Viviani A., 1-26  
Vlasova O.A., 1-107  
Volegov P. S., 2-214, 2-119  
Vorobev A., 2-34  
Vorobev A.M., 1-110,  
1-194  
Vyazmin A. V., 2-200

## W

Wertgeim I.I., 1-99

## X

Xie R., 2-34  
Xu Shenghua 1-18

## Y

Yasnou V., 1-20, 1-27

## Z

Zagvozhkin T.N., 1-175  
Zakharov A.P., 1-178  
Zakhlevnykh A. N., 2-81,  
2-116  
Zakhlevnykh A.N., 1-181,  
1-184  
Zubarev N.M., 1-187  
Zubova N.A., 1-190  
Zyuzgin A.V., 1-77

*Научное издание*

## **НЕРАВНОВЕСНЫЕ ПРОЦЕССЫ В СПЛОШНЫХ СРЕДАХ**

Материалы международного симпозиума

**Том 2**

Издается в авторской редакции  
Техническая подготовка материалов: *М. А. Кашина*

---

Подписано в печать 27.04.2017. Формат 60×84/16  
Усл. печ. л. 15,35. Тираж 200 экз. Заказ \_\_\_\_

---

Издательский центр  
Пермского государственного  
национального исследовательского университета.  
614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15

Отпечатано на ризографе  
ООО Учебный центр «ИНФОРМАТИКА».  
614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15