

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А. С. Иванов

ОСНОВЫ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ: КОЛЕБАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Методы решения задач

*Допущено методическим советом
Пермского государственного национального
исследовательского университета в качестве
учебного пособия для студентов, обучающихся
по направлениям подготовки бакалавров «Радиофизика»,
«Физика», «Прикладная математика и физика»*



Пермь 2017

УДК 534.1
ББК 22.336
И20

Иванов А. С.

И20 Основы теории колебаний: колебания динамических систем. Методы решения задач: учеб.-метод. пособие / А. С. Иванов; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Пермь, 2017. – 115 с.

ISBN 978-5-7944-2932-9

Пособие посвящено методике решения задач по предмету «Основы теории колебаний». Издание содержит учебно-методический материал для проведения аудиторных практических занятий по темам: 1) свободные колебания в линейных системах с одной степенью свободы; 2) изображение фазовых портретов колебательных систем методом изоклин; 3) колебания в линейных физических системах при внешнем периодическом воздействии; 4) колебания в слабонелинейных, слабодиссипативных системах; 5) малые колебания в линейных системах с несколькими степенями свободы.

Предназначено для студентов физического факультета обучающихся по направлениям подготовки «Радиофизика», «Физика», «Прикладная математика и физика».

УДК 534.1
ББК 22.336

*Печатается по решению редакционно-издательского совета
Пермского государственного национального исследовательского университета*

Рецензенты: лаборатория динамики дисперсных систем Института механики сплошных сред УрО РАН (зав. лаб. – д-р физ.-мат. наук, проф. **А. Ф. Пшеничников**); канд. техн. наук, доцент кафедры «Информационные технологии и автоматизированные системы» Пермского национального исследовательского политехнического университета **Г. Ф. Масич**

ISBN 978-5-7944-2932-9

© ПГНИУ, 2017
© Иванов А. С., 2017

Оглавление

Предисловие	5
1. Свободные колебания в линейных системах с одной степенью свободы	7
1.1. Математический аппарат	7
1.2. Электрические колебания в простейших электрических цепях . . .	12
2. Изображение фазовых портретов колебательных систем методом изоклин	29
2.1. Предварительные замечания	29
2.2. Математический аппарат	31
2.3. Составление фазовых портретов методом изоклин	36
3. Колебания в линейных физических системах при внешнем периодическом воздействии	51
3.1. Математический аппарат	51
3.2. Решение задач методом гармонического анализа	53
4. Колебания в слабонелинейных, слабодиссипативных системах	59
4.1. Предварительные замечания	59
4.2. Математический аппарат	60

4.3. Слабонелинейные, слабодиссипативные системы	69
5. Малые колебания в линейных системах с несколькими степенями свободы	97
5.1. Предварительные замечания	97
5.2. Математический аппарат	98
5.3. Виды связей в колебательной системе	102
5.4. Колебания в связанных электрических контурах	103
Список использованной литературы	113

Предисловие

Предлагаемое пособие "Основы теории колебаний: колебания динамических систем. Методы решения задач" посвящено методике решения задач по предмету "Основы теории колебаний". Издание содержит учебный материал для проведения аудиторных практических занятий общей продолжительностью 15 академических часов. Предназначено для студентов физического факультета Пермского государственного национального исследовательского университета.

Необходимость в издании отдельного пособия для практических занятий обусловлена тем, что, как показывает преподавательская практика, умение студента хорошо решать задачи почти никак не соотносится с объемом теоретических знаний, полученных им на лекционных занятиях, а полностью зависит от степени овладения студентами той или иной методикой. Это связано с тем, что в основе решения задач лежит определенный набор конкретных методов (алгоритмов), разработанных для решения определенного круга практически значимых задач. При этом, как известно, лекционный курс выполняет иную задачу: он формирует фундамент теоретических основ, дает физическое толкование процессов и т.п. В связи с этим возникла необходимость выделить методику решения задач в самостоятельное учебное пособие. Учитывая специфику подготовки студентов, обучающихся по специальности "Радиофизика", значительная часть материала была изложена на примерах электрических схем, полезных для будущих инженеров-радиоэлектронщиков. Это обстоятельство никак не влияет на

формирование у студентов знаний, умений, навыков и компетенций по предмету, потому что теория колебаний объединяет в себе все разделы физики на едином математическом фундаменте. В связи с этим в каждой главе математический аппарат выделен в отдельный раздел.

В пособии изложены следующие темы: 1). свободные колебания в линейных системах с одной степенью свободы; 2). изображение фазовых портретов колебательных систем методом изоклин; 3). колебания в линейных физических системах при внешнем периодическом воздействии; 4). колебания в слабонелинейных, слабодиссипативных системах; 5). малые колебания в линейных системах с несколькими степенями свободы. В конце каждой главы приводятся задачи для самостоятельного решения.

Предполагается, что студенты, обучающиеся по предмету "Основы теории колебаний", предварительно успешно освоили учебные курсы "Математический анализ", "Теория дифференциальных уравнений", "Радиоэлектроника", "Теоретическая механика", "Теория функций комплексной переменной".

Глава 1

Свободные колебания в линейных системах с одной степенью свободы

1.1. Математический аппарат

Задачи настоящей главы значительно выходят за рамки, установленные её названием. Эта глава рассказывает не только о том, как исследовать колебательные процессы в физических системах с одной степенью свободы. Здесь подробно обсуждаются электрические цепи, в которых возможно возникновение электрических колебаний, а также физические соображения, позволяющие правильно описать начальное и текущее состояние изучаемой системы.

Перед тем, как непосредственно перейти к решению физических задач, освежим необходимые математические знания. Как будет неоднократно продемонстрировано впоследствии, колебания в системе с 1-й степенью свободы описываются уравнением вида

$$y'' + py' + qy = 0. \quad (1.1)$$

Это линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка, искомым решением которого является функция $y = y(x)$. Напомним, что однород-

ным называется уравнение, которое обращается в тождество при подстановке нулевого решения $y = 0$. Как известно, чтобы найти общий интеграл этого уравнения, достаточно найти два независимых частных решения. Поиск этих решений осуществляется в виде $y = \exp(kx)$.

Сделаем полезное отступление-напоминание. Такой вид частного решения возникает по аналогии с решением дифференциального уравнения первого порядка

$$p \frac{dy}{dx} + qy = 0.$$

В этом уравнении легко разделяются переменные

$$\frac{dy}{y} = -\frac{q}{p} dx,$$

и решение находится интегрированием левой и правой частей уравнения:

$$y = y_0 \exp\left(-\frac{q}{p}x\right).$$

Подчеркнем усвоенный из этого отступления полезный урок: при решении усложненных задач (уравнение 2-го порядка) полезно предварительно упростить задачу (до уравнения 1-го порядка) и посмотреть, какое решение получается в простом случае. Эта рекомендация носит общий характер и, конечно, не относится напрямую к курсу высшей математики в ВУЗе.

Итак, подставим выбранное частное решение в уравнение (1.1) и получим

$$\exp(kx) (k^2 + pk + q) = 0.$$

Очевидно, что $\exp(kx) \neq 0$ при любом kx , следовательно, частные решения вида $y = \exp(kx)$ уравнения (1.1) целиком определяются квадратным характери-

ческим уравнением $k^2 + pk + q = 0$ и его корнями

$$k_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}. \quad (1.2)$$

Подставляя корни $k_{1,2}$, найдем общее решение однородного уравнения как суперпозицию двух частных решений. Свойство суперпозиции, конечно, автоматически гарантировано тем, что исходное уравнение является линейным

$$y(x) = C_1 \exp(k_1 x) + C_2 \exp(k_2 x), \quad (1.3)$$

где C_1, C_2 — постоянные величины, определяемые начальными условиями

$$\begin{aligned} y(x=0) &= y_0, \\ y'(x=0) &= y'_0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Для задач из курса механики условия (1.4) подразумевают определение начального положения и начальной скорости, а в задачах радиотехники — величину электрического заряда и тока соответственно. С точки зрения математики существует три различных решения исходного уравнения (1.1), отличающихся между собой в соответствии с тем, какой вид имеют корни характеристического уравнения (1.2). Рассмотрим эти случаи по отдельности.

Случай I. Корни $k_{1,2}$ действительные, не совпадают друг с другом.

Корни $k_{1,2}$ являются действительными и не совпадают друг с другом в том случае, когда дискриминант характеристического уравнения больше нуля. В этом случае $p^2 - 4q > 0$, а общее решение уравнения (1.1) имеет вид

$$y(x) = \exp\left(-\frac{p}{2}x\right) \left[C_1 \exp\left(-\frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2}x\right) + C_2 \exp\left(\frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2}x\right) \right]. \quad (1.5)$$

Полученное выражение математически описывает некоторый быстро затухающий физический процесс, который не является колебательным. Величина $\delta = p/2$ в русскоязычной литературе называется декрементом затухания и определяет интенсивность затухания физического процесса. Такой процесс обычно называется аperiodической релаксацией системы к своему равновесному состоянию. В качестве мысленного эксперимента представим себе поведение натянутой струны, погруженной в жидкость с большой вязкостью (например, мёд); если предоставить такую систему самой себе, она не сможет совершить ни одного колебания, а лишь плавно отрелаксирует к своему положению равновесия, которое характеризуется минимальными деформациями струны.

Случай II. Корни $k_{1,2}$ действительные, совпадают друг с другом.

Корни $k_{1,2}$ являются действительными и совпадают друг с другом в том случае, когда дискриминант характеристического уравнения равен нулю $p^2 - 4q = 0$, а общее решение уравнения (1.1) имеет вид

$$y(x) = \exp\left(-\frac{p}{2}x\right) [C_1x + C_2]. \quad (1.6)$$

В этом случае линейная независимость частных решений гарантирована введением множителя x у первого решения. Математически выражения (1.6) и (1.5) отличаются значительно, а с точки зрения физики они описывают один и тот же процесс аperiodической релаксации.

Случай III. Корни $k_{1,2}$ комплексно-сопряжённые.

Если дискриминант характеристического уравнения меньше нуля $p^2 - 4q < 0$, корни $k_{1,2}$ являются комплексно-сопряжёнными. Для удобства обозначим

$$k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2} = -\alpha \pm j\beta, \quad (1.7)$$

где $j = \sqrt{-1}$ — мнимая единица (мы будем использовать j вместо общеупотребительной i , чтобы избежать путаницы с обозначением силы электрического тока I). Запишем полученное общее решение уравнения (1.1) и сразу преобразуем его согласно формулам Эйлера

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 \exp(-(\alpha + j\beta)x) + C_2 \exp(-(\alpha - j\beta)x) = (C_1 \cos(\beta x) - \\ &\quad - jC_1 \sin(\beta x) + C_2 \cos(\beta x) + jC_2 \sin(\beta x)) \exp(-\alpha x) = \\ &= \exp(-\alpha x) \left[\widetilde{C}_1 \cos(\beta x) + j\widetilde{C}_2 \sin(\beta x) \right]. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Полученное решение является комплексной функцией действительного переменного. Как легко показать, если некоторая функция $U(x) + jV(x)$ удовлетворяет уравнению (1.1), то каждая из функций по отдельности $U(x)$, $V(x)$ также удовлетворяет этому уравнению

$$\begin{aligned} (U(x) + jV(x))'' + p(U(x) + jV(x))' + q(U(x) + jV(x)) &= 0; \\ U''(x) + pU'(x) + qU(x) + j[V''(x) + pV'(x) + qV(x)] &= 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Равенство нулю комплексной функции подразумевает равенство нулю ее действительной и мнимой частей одновременно

$$\begin{aligned} U''(x) + pU'(x) + qU(x) &= 0, \\ V''(x) + pV'(x) + qV(x) &= 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

То есть мы получили два независимых уравнения вида (1.1) для обеих функций $U(x)$ и $V(x)$. Эта цепочка рассуждений объясняет, почему функции $\cos(\beta x)$ и $\sin(\beta x)$, входящие в общее решение (1.8) в виде комплексной функции действительного переменного, сами по себе являются частными решениями уравнения (1.1). Это позволяет уйти от математического аппарата теории функций ком-

плексного переменного и записать общее решение в виде суперпозиции действительных функций

$$y(x) = \exp(-\alpha x) [C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)], \quad (1.11)$$

где константы C_1, C_2 по-прежнему определяются начальными условиями вида (1.4). Как видно из выражения (1.11), общее решение в случае, если $p^2 - 4q < 0$, описывает затухающий (благодаря множителю $\exp(-\alpha x)$) колебательный (благодаря периодичности функций \cos, \sin) физический процесс. Именно это выражение представляет собой наибольший интерес с точки зрения изучаемого курса. Продемонстрируем особенности применения математических знаний к решению физических задач.

1.2. Электрические колебания в простейших электрических цепях

Адаптируем описанный выше математический аппарат к решению физических задач. Для этой цели разберём несколько демонстраций.

Задача № 1 Найти условие, при котором в электрической цепи, изображенной на рис. 1.1, возможно существование собственных электрических колебаний. Перед началом решения задачи сделаем некоторые пояснения.

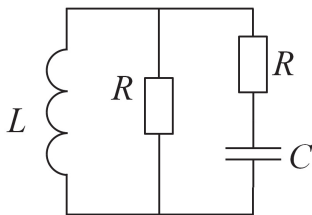


Рис. 1.1. Электрическая цепь, совмещающая в себе одновременно черты последовательного и параллельного колебательного контуров

Во-первых, следует обратить внимание на саму постановку задачи: она является очень характерной для курса, посвященного теории колебаний, когда интерес представляет весь колебательный процесс, взятый в целом, а не какая-то отдельно взятая характеристика системы.

Во-вторых, перед началом решения задачи полезно посмотреть на схему и попытаться представить себе, в чем заключается особенность её работы. Так, в рассматриваемой схеме можно без труда заметить то, что она является неким синтезом последовательного и параллельного колебательного контуров. Если бы в схеме отсутствовала центральная ветвь (т.е. при условии $R \rightarrow \infty$), то контур был бы последовательным, однако увеличение сопротивления R приведет к возрастанию электрических потерь в правой ветви. При каком-то значении R колебания вовсе станут невозможны. К аналогичному выводу можно прийти, если рассмотреть другой предельный случай, когда $R \rightarrow 0$ и центральная ветвь становится источником короткого замыкания. Таким образом, еще до математического решения задачи мы смогли удостовериться в том, что колебания в рассматриваемой цепи возможны не при любых параметрах задачи, а при каком-то особом условии.

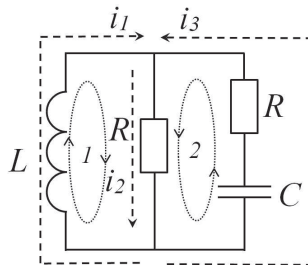


Рис. 1.2. Произвольно обозначенные токи в ветвях цепи и направления обхода 1 и 2-го контуров

Сделав эти наблюдения, перейдем к составлению уравнений. Для этого произвольным образом нарисуем во всех ветвях соответствующие токи i_1 , i_2 , i_3 (см. рис.1.2). Напоминаем, что электрический ток в ветви необходимо рисовать от узла к узлу, чтобы случайно не нарисовать несколько разных токов в разных элементах одной и той же ветви. Запишем по общеизвестным правилам уравнения Кирхгофа для нашей цепи

$$i_1 - i_2 + i_3 = 0, \quad (1.12)$$

$$L \frac{di_1}{dt} + i_2 R = 0, \quad (1.13)$$

$$\frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_3(\xi) d\xi + i_3 R + i_2 R = 0. \quad (1.14)$$

Уравнение Кирхгофа (1.12) написано для верхнего узла цепи, а уравнения (1.13) и (1.14) написаны в соответствии с законом Кирхгофа для левого элементарного контура, пройденного по часовой стрелке, и правого элементарного контура, пройденного против часовой стрелки соответственно. Полученную систему интегро-дифференциальных уравнений (1.12)–(1.14) можно решить, если воспользоваться несколькими советами. Сначала необходимо избавиться от операции интегрирования. Для этого в нашем случае продифференцируем выражение (1.14). Далее следует несколько раз воспользоваться подстановками переменных, например, из (1.13)

$$i_2 = -\frac{L}{R} \frac{di_1}{dt},$$

и, соответственно,

$$\frac{di_2}{dt} = -\frac{L}{R} \frac{d^2 i_1}{dt^2}.$$

Из (1.12) можно аналогично выразить i_3

$$i_3 = i_2 - i_1,$$

$$\frac{di_3}{dt} = -\frac{i_1}{dt} - \frac{L}{R} \frac{d^2 i_1}{dt^2}.$$

Подставим полученные выражения в (1.14) и приведем к каноническому виду полученное линейное дифференциальное уравнение второго порядка для i_1

$$\frac{d^2 i_1}{dt^2} + \left(\frac{R}{2L} + \frac{1}{2RC} \right) \frac{di_1}{dt} + \frac{i_1}{2LC} = 0. \quad (1.15)$$

Решив это уравнение и определив $i_1(t)$, можно вычислить и остальные неизвестные функции $i_2(t)$ и $i_3(t)$. Здесь уместно сделать полезное для всего дальнейшего курса замечание о возможности самопроверки, основанной на анализе размерностей получаемых в уравнении величин. Очевидным фактом является то, что все слагаемые, входящие в уравнение, должны обладать одной и той же размерностью. Посмотрим, выполняется ли это правило в уравнении (1.15), которое мы только что получили? Для этого проверим размерность каждого члена уравнения. Размерность первого члена очевидна [Ac^{-2}]. Разберемся со вторым членом. Он представляет собой произведение некоторой суммы на первую производную силы тока по времени, а размерность di/dt — это [Ac^{-1}]. Посмотрим на слагаемые в скобке перед первой производной. Размерность каждого слагаемого, как и следовало ожидать, [c^{-1}]. Запомните, пожалуйста, как выглядят эти слагаемые, потому что они очень важны во всем дальнейшем курсе. Это не просто случайные комбинации параметров электрической цепи, а постоянные времени этой цепи, которые несут в себе информацию о том, какие колебания возможны

в системе, а какие — нет:

$$\tau_1 = RC,$$

$$\tau_2 = L/R.$$

Последнее слагаемое (1.15) тоже выдерживает проверку на размерность, так как оно представляет собой произведение силы тока на квадрат циклической частоты колебаний идеального контура без потерь, вычисленную по формуле Томсона, известной еще по школьной программе

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Подобным образом необходимо осуществлять самопроверку на каждом этапе решения задачи. При невыполнении правила размерности дальнейшее решение задачи бессмысленно. Полученное уравнение (1.15) позволяет нам ответить на вопрос о возможности существования собственных колебаний в рассматриваемой электрической цепи. Для этого с математической точки зрения необходимо, чтобы дискриминант характеристического уравнения был отрицательным. Используя введенные ранее математические переменные, необходимо, чтобы выполнялось условие $p^2 - 4q < 0$. В терминах нашей задачи необходимо выполнение условия

$$\left(\frac{R}{2L} + \frac{1}{2RC} \right)^2 - 4 \frac{1}{2LC} < 0.$$

После небольшого преобразования приходим к неравенству

$$\left| x + \frac{1}{x} \right| < 2\sqrt{2},$$

где $x = R\sqrt{C/L}$. Заметим, что величина x должна быть безразмерной величи-

ной, ведь справа от знака неравенства стоит скаляр. Проверяем, действительно

$$R\sqrt{\frac{C}{L}} = \sqrt{R^2\frac{C}{L}} = \sqrt{\frac{RC}{L/R}} = \sqrt{\frac{\tau_1}{\tau_2}}.$$

Все верно. Раскрываем модуль, решаем простое квадратное уравнение и находим ответ к задаче

$$(\sqrt{2} - 1) < R\sqrt{\frac{C}{L}} < (\sqrt{2} + 1).$$

Обсудим полученный ответ.

Во-первых, как и предполагалось, свободные колебания в системе возможны лишь для некоторого диапазона параметров цепи. Однако наше первичное рассуждение, основанное лишь на знаниях из курса радиоэлектроники, о том, что все зависит от R , оказалось неправильным. Неправоммерно говорить о большом или маленьком значении R , так как само по себе сопротивление в схеме еще не определяет ее способность к функционированию в колебательном режиме. Все решается соотношением постоянных времени цепи! Именно постоянные времени определяют скорость перезаряда конденсатора (RC) и скорость перематнивания катушки индуктивности (L/R). Если эти характерные процессы сильно отличаются по продолжительности, то колебаний не будет. Если же они длятся примерно одинаковое время, то становятся возможными свободные колебания, при которых электрическая энергия периодически трансформируется из потенциальной (энергия электрического поля конденсатора) в кинетическую (энергия магнитного поля катушки) и обратно.

Во-вторых, проясним физический смысл использованного математического неравенства $p^2 - 4q < 0$. Это неравенство в физических терминах означает, что колебания возможны лишь в том случае, когда частота свободных незатухающих колебаний в контуре без потерь $(\sqrt{LC})^{-1}$ превышает значение декремента

затухания. Эта мысль звучит очень неясно, поэтому перефразируем полученное утверждение на языке постоянных времени и продемонстрируем ее при помощи рис. 1.3.

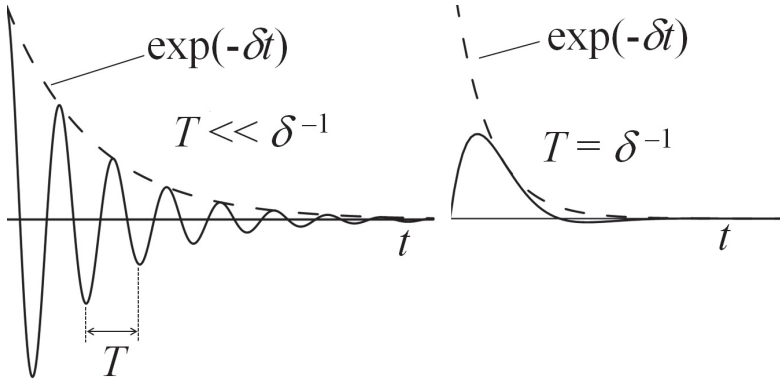


Рис. 1.3. Осциллограммы колебательного (слева) и релаксационного (справа) затухающих процессов

Итак, первая постоянная времени определяется обратной величиной декремента затухания δ^{-1} . Эта постоянная времени — основной временной ограничитель физического процесса. Именно эта постоянная времени определяет, насколько быстро убывает огибающая (изображена на осциллограммах рис. 1.3 пунктиром) экспоненциальная функция. Вторая постоянная времени — это период T одного свободного колебания в системе без затухания (без трения).

Таким образом, если частота свободных колебаний больше декремента затухания, то это значит, что в системе успеет произойти несколько колебательных циклов до того момента, как колебания полностью затухнут. В противном случае колебания затухают слишком быстро и ни один колебательный цикл не наблюдается (осциллограмма справа на рис. 1.3).

Решение и обсуждение результатов задачи № 1 завершено. В следующей задаче будет подробно рассмотрен вопрос о корректном составлении начальных условий вида (1.4).

Задача № 2. Найти зависимость напряжения на конденсаторе $U_C(t)$ после замыкания ключа K на схеме, изображенной на рис. 1.4.

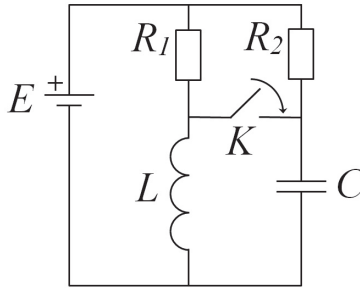


Рис. 1.4. Коммутация в электрической цепи с одной степенью свободы (к задаче № 2)

Решение подобных задач следует начинать с анализа электрической цепи до и после коммутации (переключения). При этом необходимо следовать следующим простым соображениям: в цепях постоянного тока катушка индуктивности L является источником короткого замыкания (её активное сопротивление равно нулю), а конденсатор C разрывает ветвь, в которую он включен (его сопротивление бесконечно большое). Это схематично показано на левой части рис. 1.5. До коммутации ключа K ветвь с конденсатором C не влияла на работу цепи (слева на рис. 1.5 она изображена пунктиром). Поэтому по этой ветви до коммутации не протекает ток. В свою очередь катушка индуктивности L изображена пунктиром потому, что ее сопротивление по постоянному току равно нулю, и на схеме она заменена идеальным проводником.

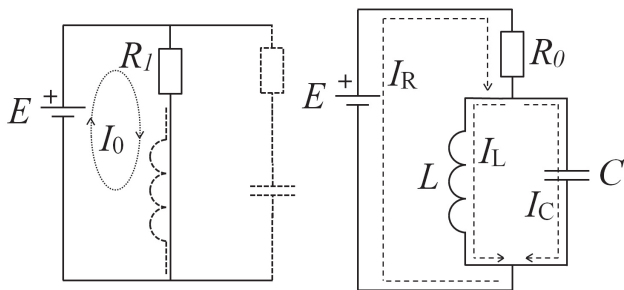


Рис. 1.5. Эквивалентные схемы исследуемой цепи до (слева) и после (справа) коммутации

Таким образом, до коммутации в исследуемой цепи протекал лишь один постоянный ток I_0 по замкнутому контуру через источник постоянного напряжения E и резистор R_1 . На схеме направление тока I_0 для удобства выбрано согласованным с полярностью источника E , хотя это и необязательное требование:

$$I_0 = \frac{E}{R_1}. \quad (1.16)$$

После замыкания ключа K в цепи начнется переходной электрический процесс, который по условию задачи является затухающим и колебательным. Чтобы решить задачу, необходимо упростить топологию цепи и объединить два параллельно включенных резистора R_1 и R_2 в один резистор $R_0 = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$, как показано справа на рис. 1.5. На этом все подготовительные работы завершены и можно приступить к записи системы уравнений. Как всегда для цепей с одной степенью свободы запишем 1 уравнение Кирхгофа для токов и 2 уравнения Кирхгофа для контуров:

$$I_L + I_C - I_R = 0, \quad (1.17)$$

$$I_R R_0 + L \frac{I_L}{dt} - E = 0, \quad (1.18)$$

$$I_R R_0 + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t I_C(\xi) d\xi - E = 0. \quad (1.19)$$

Сделаем ряд преобразований, подобных тем, что мы делали в задаче № 1, и получим уравнение для любого из неизвестных токов I_R , I_C или I_L . Напомним, что по условию задачи мы должны найти $U_C(t)$, но это напряжение вычисляется как интеграл от $I_C(t)$, что значительно труднее, чем, например, найти напряжение на катушке. Поэтому на данном этапе решения необходимо руководствоваться соображением простоты, а не тем, что спрашивается в условии задачи. Итак, произведем преобразования, оговорившись при этом, что представленные ниже преобразования являются лишь показательным примером, а не руководством к действию и не алгоритмом решения подобных задач.

Продифференцируем уравнение (1.19)

$$R_0 \frac{dI_R}{dt} + \frac{I_C}{C} = 0, \quad (1.20)$$

откуда можно выразить

$$I_C = -R_0 C I_R'. \quad (1.21)$$

Продифференцируем также (1.18), откуда найдем

$$\frac{dI_R}{dt} = -\frac{L}{R_0} \frac{d^2 I_L}{dt^2}. \quad (1.22)$$

Из (1.18) дополнительно выразим I_R

$$I_R = \frac{E}{R_0} - \frac{L}{R_0} \frac{dI_L}{dt}. \quad (1.23)$$

Подставим (1.22) в (1.21) и тем самым выразим I_C через I_L . Выражение (1.23) в свою очередь выражает I_R через I_L , т.е. мы получили возможность свести любое уравнение к уравнению, в котором была бы только одна неизвестная функция I_L . Например, воспользуемся первым уравнением исходной системы (1.17), сократим на множитель LC и получим линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка в каноническом виде

$$\frac{d^2 I_L}{dt^2} + \frac{1}{R_0 C} \frac{dI_L}{dt} + \frac{1}{LC} I_L = \frac{E}{R_0 LC}. \quad (1.24)$$

Перед тем, как решать это уравнение, необходимо, конечно, проверить его согласно правилу размерностей. Слева все слагаемые имеют размерность $[Ac^{-2}]$, что легко проверяется, так как размерность $[R_0 C]$ — это $[c]$, а у $[LC]$ — размерность $[c^2]$. В правой части уравнения стоит комбинация, которая до этого момента не встречалась, но и она легко проверяется, так как E/R_0 имеет размерность силы тока $[A]$, и дополнительно вновь встречается множитель $[LC]$. Уравнение проверку прошло, можно решать дальше. Из курса дифференциальных уравнений известно, что общее решение неоднородного уравнения является суммой общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения, что с целью запоминания можно записать в виде мнемонического правила ОРНУ=ОРОУ+ЧРНУ. Ранее в главе, посвященной математическому аппарату, мы уже решали однородное уравнение второго порядка, поэтому сразу запишем ОРОУ (1.24) и обозначим его \tilde{I}_L

$$\tilde{I}_L = \exp(-\delta t) [C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)], \quad (1.25)$$

где частота затухающих колебаний ω равна

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2R_0C}\right)^2},$$

а декремент затухания δ

$$\delta = \frac{1}{2R_0C}.$$

Далее найдем ЧРНУ. Согласно курсу дифференциальных уравнений будем его искать в виде правой части уравнения. Справа в (1.24) стоит константа, следовательно, частное решение необходимо искать в виде константы. Обозначим ЧРНУ как \hat{I}_L . Подставим \hat{I}_L в (1.24), при этом слагаемые с первой и второй производной по времени равны нулю. Получим

$$\frac{\hat{I}_L}{LC} = \frac{E}{R_0LC},$$

откуда $\hat{I}_L = E/R_0$. Так мы нашли ОРНУ $I_L = \tilde{I}_L + \hat{I}_L$,

$$I_L = \exp(-\delta t) [C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)] + \frac{E}{R_0}. \quad (1.26)$$

Вычислим константы интегрирования C_1, C_2 . Для этого необходимо уяснить законы коммутации для конденсаторов и катушек индуктивности. Эти законы основываются на том факте, что энергетическое состояние элементов L, C нельзя изменить мгновенно. В каждый момент времени t в конденсаторе и катушке накоплено определенное количество электрической W_C и магнитной W_L энергии

$$W_C = \frac{CU_C^2}{2}, \quad W_L = \frac{LI_L^2}{2},$$

где U_C и I_L — напряжение на конденсаторе и сила тока, протекающего через

катушку, соответственно. Согласно закону сохранения энергии для мгновенного (за бесконечно малый интервал времени, соответствующий моменту коммутации в цепи) изменения энергетического состояния C или L необходимо развить бесконечно большую мощность за счет внешних источников энергии. Таких источников, способных развить бесконечно большую мощность, в цепи нет, поэтому для момента коммутации t_0 следует записать закон сохранения энергии в виде

$$W_C|_{t=t_0-0} = W_C|_{t=t_0+0},$$

$$W_L|_{t=t_0-0} = W_L|_{t=t_0+0},$$

что равнозначно выражениям

$$U_C|_{t=t_0-0} = U_C|_{t=t_0+0}, \quad (1.27)$$

$$I_L|_{t=t_0-0} = I_L|_{t=t_0+0}, \quad (1.28)$$

которые и принято назвать первым и вторым законами коммутации. Итак, согласно (1.27) и (1.28) напряжение на конденсаторе и ток через катушку в момент коммутации остаются неизменными. Применим эти законы к нашей задаче, обратившись к эквивалентной схеме на рис. 1.5 слева (до коммутации). Из схемы видно, что до замыкания ключа K (и в самый момент его замыкания) через катушку индуктивности L протекал ток

$$I_L|_{t=t_0} = E/R_1.$$

Напряжение на конденсаторе C до замыкания ключа K (и в самый момент его замыкания) равно

$$U_C|_{t=t_0} = E.$$

Мы записали оба закона коммутации, однако, как было показано ранее, для вычисления констант интегрирования нам необходимо знать $I_L|_{t=t_0}$ и $I'_L|_{t=t_0}$. Воспользуемся вторым законом коммутации для $U_C|_{t=t_0}$, чтобы вычислить неизвестную величину $I'_L|_{t=t_0}$. Для этого рассмотрим колебательный контур $L - C$ после замыкания ключа K и запишем для него уравнение согласно закону Кирхгофа для контуров в самом общем виде

$$U_L + U_C = 0.$$

Напомним, что закон Кирхгофа для контуров — это закон сохранения энергии. В свою очередь закон сохранения энергии — это универсальный закон, который выполняется всегда, в том числе и в момент коммутации! Это значит, что уравнение Кирхгофа можно переписать в виде

$$U_L|_{t=t_0} + U_C|_{t=t_0} = 0.$$

Запишем это выражение в явном виде

$$L \left[\frac{I_L}{dt} \right]_{t=t_0} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t=t_0} I_C(\xi) d\xi = 0. \quad (1.29)$$

Учтем правильно полярность напряжения на конденсаторе C в начальный момент времени, чтобы заменить второе слагаемое в выражении (1.29) и не ошибиться знаком. До коммутации нижняя обкладка конденсатора была заряжена отрицательно, а верхняя — положительно до напряжения E . Выберем направление обхода колебательного контура $L - C$ против часовой стрелки. В этом случае напряжение на L войдет в уравнение со знаком (+), так как направление тока, протекающего через L , совпадает с направлением обхода по контуру,

а напряжение на C войдет со знаком $(-)$, так как мы мысленно обходим C от отрицательно заряженной обкладки к положительно заряженной обкладке

$$+L \left[\frac{I_L}{dt} \right]_{t=t_0} - E = 0, \quad (1.30)$$

откуда определится недостающее начальное условие $I_L|_{t=t_0} = E/L$. Не станем пренебрегать проверкой по правилу размерностей и на этом этапе решения задачи. Ясно, что $I_L|_{t=t_0}$ имеет размерность $[A \cdot s^{-1}]$. Проверим слагаемое E/L . Для этого достаточно домножить числитель и знаменатель на некоторое сопротивление R , тогда получится $[E/R]/[L/R]$, откуда сразу видно, что в числителе стоит величина с размерностью силы тока, а в знаменателе — комбинация, известная как постоянная времени. Проверка удачно завершена. Дальнейший ход решения задачи очевиден и не требует особых пояснений. Подставим начальные условия в уравнение (1.26) при $t_0 = 0$ с и получим

$$C_1 = -\frac{E}{R_2},$$

$$C_2 = \left(\frac{E}{L} + \delta C_1 \right) / \omega.$$

(Самостоятельно убедитесь, что размерность полученных констант правильная!) Таким образом, мы нашли искомые константы, что позволяет нам в явном виде записать $I_L(t)$. По условию задачи нам необходимо записать $U_C(t)$. Заметим, что напряжение на C и напряжение на L — это одно и то же напряжение. Значит, для окончательного ответа необходимо продифференцировать полученное выражение $I_L(t)$ и умножить его на L . Предоставляем читателю возможность сделать это самостоятельно. Задача решена. Для успешного завершения курса решите следующие типовые задачи.

Задача № 3. Найти уравнение колебаний тока, протекающего через катушку L в схеме, изображенной на рис. 1.6, после размыкания ключа K .

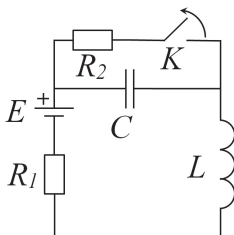


Рис. 1.6. Схема электрической цепи (к задаче № 3)

Задача № 4. Найти уравнение колебаний электрического напряжения на конденсаторе C в схеме, изображенной на рис. 1.7, после размыкания ключа K_2 и замыкания ключа K_1 .

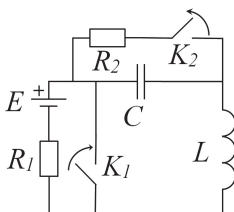


Рис. 1.7. Схема электрической цепи (к задаче № 4)

Задача № 5. Найти уравнение колебаний тока в контуре после отключения источника ЭДС посредством размыкания ключа K при условии, что а) $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, б) $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, в) $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$. Схема изображена на рис. 1.8.

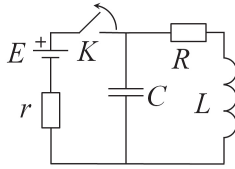


Рис. 1.8. Схема электрической цепи (к задаче № 5)

Задача № 6. Найти уравнение колебаний тока в контуре после размыкания ключа K в схеме, изображенной на рис. 1.9.

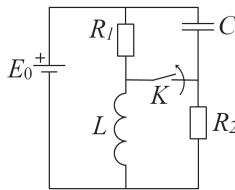


Рис. 1.9. Схема электрической цепи (к задаче № 6)

Задача № 7. Найти уравнение колебаний тока в контуре после замыкания ключа K в схеме, изображенной на рис. 1.10.

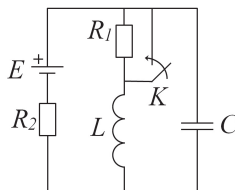


Рис. 1.10. Схема электрической цепи (к задаче № 7)

Глава 2

Изображение фазовых портретов колебательных систем методом изоклин

2.1. Предварительные замечания

Как было показано в предыдущей главе, предмет теории колебаний заключается в том, чтобы изучать общий характер поведения физических систем. Теория колебаний позволяет найти ответы на вопросы о том, является ли движение периодическим или нет, какие существуют собственные частоты колебаний системы, какие колебания и с какими частотами являются основными, а какие — второстепенными (пренебрежимо малыми). Именно поэтому в курсе теории колебаний изучаются фазовые портреты физических систем. Фазовый портрет — это аналитический инструмент, который позволяет изображать все возможные движения физической системы, охватывая все возможные значения числовой оси времени t . В этой главе мы временно отвлечемся от анализа электрических колебаний в радиотехнических цепях и будем использовать терминологию из курса классической механики, так как именно здесь терминология из курса механики является наиболее наглядной и интуитивно понятной. Это никак не

нарушает целостность учебного пособия, так как предлагаемая глава носит исключительно методический характер, а знания и навыки, приобретенные при её изучении, без затруднений будут использованы в дальнейшем.

Следует также отметить, что изложенный ниже материал не претендует на всеобъемлющую полноту. В настоящей главе не рассматриваются особенности построения фазовых портретов с особыми точками типа "фокус", "узел" и некоторых других, так как в этих случаях метод изоклин неудобен (для фазовых портретов с "фокусом", например, предпочтительней пользоваться методом Лье-нара). Тем не менее это нельзя назвать серьезным недостатком учебного пособия по двум причинам. Во-первых, фазовые портреты бесконечно разнообразны, и нюансам их построения уместно посвятить отдельный одно- или даже двухсеместровый учебный курс. В нашем пособии даны лишь базовые знания по этому вопросу (например, понятие об устойчивости колебаний), позволяющие почувствовать предмет. Во-вторых, на сегодняшний день существует большое количество разнообразных математических пакетов (например, Wolfram Mathematica, Maple и т.п.), позволяющих практически мгновенно построить любой фазовый портрет. Это обстоятельство несколько обесценивает человеческие навыки построения фазовых портретов и выводит на первый план навык интерпретации полученного результата (что, по всей видимости, является общей тенденцией в современной прикладной математике). С другой стороны, полностью отказаться от этой главы тоже нельзя, так как человек без личного опыта в построении фазовых портретов совершенно не способен их воспринимать. По этим причинам цель главы заключается в том, чтобы на примере простых, типовых, но характерных задач (как удачно выразились авторы [1], — "в лабораторных условиях математики") научить читателя исследовать колебательные системы с помощью фазовых портретов и грамотно интерпретировать полученные результаты.

2.2. Математический аппарат

Вспомним некоторые сведения из теории дифференциальных уравнений, а именно то, как решать обыкновенные дифференциальные уравнения 2-го порядка методом изоклин, и научимся применять этот метод к анализу колебательных систем.

Во-первых, выберем оптимальный набор координат, в которых удобно описывать физические состояния колебательных систем. Рассмотрим для начала общий вид дифференциального уравнения второго порядка, описывающего колебания в неконсервативной системе при вынужденном воздействии. Динамическое уравнение согласно 2-му закону Ньютона имеет вид $\vec{a} = \vec{F}/m$, и в одномерном случае ($a = d^2x/dt^2$) запишется так:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(x, \frac{dx}{dt}\right). \quad (2.1)$$

Правая часть уравнения описывает баланс сил инерции и возвращающей силы, причем переменная x' (скорость) в функции f возникает не только в контексте проявления диссипативных сил (трение), но и в результате существования реактивных элементов в изучаемой системе. К сожалению, динамическое уравнение (2.1) не годится для описания физического состояния системы, так как эволюция системы (переход её из состояния № 1 в состояние № 2 за бесконечно малый промежуток времени dt) определяется набором координат и скоростей, а не равнодействующей силой, ведь, как было точно сформулировано С. Э. Хайкиным [2] (несмотря на всю очевидность этого утверждения), сила определяет ускорение, а не перемещение. Эти рассуждения приводят нас к пониманию того, что наилучшим набором переменных для описания состояния физической системы являются радиус-векторы (координаты) и векторы скорости (для простоты в

дальнейшем будет рассматриваться лишь одномерный случай). Введём новую переменную y (скорость)

$$y = \frac{dx}{dt},$$

откуда

$$dt = \frac{dx}{y}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} = y \frac{dy}{dx}.$$

Подставим новую переменную в (2.1) и получим преобразованное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{y}, \quad (2.2)$$

описывающее эволюцию физической системы в удобных переменных — x (координата) и y (скорость). Приведем для убедительности еще два аргумента в пользу новых переменных x, y . Заметим, во-первых, что именно этими переменными определяются потенциальная $U = U(x)$ и кинетическая $T = T(y)$ энергии системы. Во-вторых, с математической точки зрения именно этот набор переменных $(x|_{t_0}, x'|_{t_0} = y_0)$ выделяет единственно верное решение из всего бесконечного многообразия возможных решений уравнения движения

$$x'' + 2\delta x' + \omega_0^2 x = F(t).$$

Естественно, речь здесь ведется об определении констант интегрирования, которые в первом разделе пособия обозначались как C_1, C_2 . На этом закончим с аргументацией выбора новых переменных и перейдем непосредственно к изучению свойств уравнения (2.2).

С формальной точки зрения уравнение (2.2) описывает некоторые кривые на плоскости в координатах (x, y) . Такая плоскость называется фазовой, а каждая i -я точка этой плоскости (x_i, y_i) называется изображающей, потому что каждой

точке соответствует (изображает) конкретное уникальное состояние физической системы с соответствующей потенциальной $U(x_i)$ и кинетической $T(y_i)$ энергией. Плоскость же называется фазовой в том смысле, что под фазой (в силу многозначности этого слова) понимается состояние системы, как, например, в словосочетании "фаза Луны". Кривые на фазовой плоскости называются фазовыми траекториями, потому что они представляют собой траектории движения изображающих точек по фазовой плоскости. На этом мы завершим краткое обобщение принятой терминологии и перейдем к исследованию общих свойств фазовой плоскости и фазовых траекторий.

Свойство 1

Изображающие точки всегда перемещаются по фазовой плоскости по часовой стрелке: слева направо в I и II квадрантах и справа налево в III и IV квадрантах фазовой плоскости, как показано на рис. 2.1.

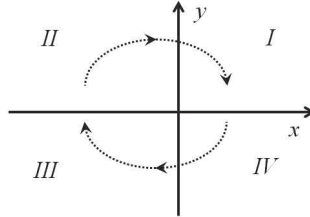


Рис. 2.1. Направление перемещения точек на фазовой плоскости

Такая направленность движения точек обусловлена тем, что в верхней полуплоскости $y = dx/dt > 0$, а так как время t всегда увеличивается, т.е. $dt > 0$, то это значит, что величина dx тоже должна быть больше нуля. Увеличение x означает движение вправо. Для нижней полуплоскости $y < 0$, и, аналогично, $dx < 0$, т.е. движение осуществляется влево.

Свойство 2

Фазовые траектории пересекают ось x всегда под прямым углом. Рассмотрим с формальной точки зрения величину, стоящую в левой части уравнения (2.2). Это производная функции y по аргументу x и в рассматриваемом случае удобно прибегнуть к геометрической интерпретации производной. Будем рассматривать dy/dx как тангенс угла, образованного касательной к фазовой траектории $y(x)$ и осью x . Тогда при пересечении $y(x)$ оси x значение функции y по определению равно нулю

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{y=0} = \frac{f(x, 0)}{0} \rightarrow \infty,$$

а тангенс угла наклона касательной стремится в бесконечность. Это значит, что угол между касательной к фазовой траектории и осью x составляет $\pi/2$ радиан, что и требовалось показать.

Свойство 3

Особые точки фазовых траекторий соответствуют положениям устойчивого и неустойчивого равновесия. Поясним, во-первых, что особыми называются такие точки $(x_i, y_i = 0)$ фазовых траекторий, в которых касательная к фазовой траектории не определена

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_i, y_i=0} = \frac{f(x_i, 0)}{0} = \frac{0}{0}.$$

Объясним смысл особых точек. Напомним, что физический смысл функции $f(x, y)$ — это баланс сил инерции и возвращающих сил. Равенство нулю этой функции в особой точке $(x_i, y_i = 0)$ означает, что на физическое тело в этом состоянии (которое изображается точкой $(x_i, y_i = 0)$) действует нулевая равнодействующая всех внешних сил, а это значит, что ускорение тела в этом со-

стоянии равно нулю. С другой стороны, в особой точке скорость тела $y_i = 0$ равна нулю. Если скорость и ускорение тела равны нулю, то тело находится в состоянии покоя. Таким образом, мы пришли к основному выводу: особая точка изображает состояние покоя физического тела.

Как известно, состояние покоя бывает устойчивым либо неустойчивым, что определяется поведением функции потенциальной энергии $U(x)$ в окрестности особой точки. Как известно, потенциальная энергия — это функция только координат. На поверхности Земли (в приближении малости вертикальных перемещений по сравнению с радиусом планеты) $U(x) = mgz(x)$, где m — масса тела, а g — ускорение свободного падения, $z(x)$ — высота поднятия тела относительно некоторого уровня, принятого за нулевой. При этом профиль горного ландшафта полностью повторяет вид функции потенциальной энергии (с точностью до масштабирующего множителя) физического тела, перемещающегося по этой местности. Это обстоятельство позволяет прибегнуть к интуитивно понятному рис. 2.2.

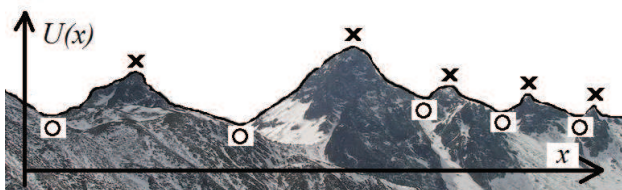


Рис. 2.2. Горный профиль повторяет вид потенциальной энергии $U(x)$. Горные вершины (точки неустойчивого равновесия, обозначенные крестами) всегда чередуются с перевалами (точки устойчивого равновесия, обозначенные кружками)

На рисунке изображены точки устойчивого и неустойчивого равновесия, где отчетливо видна их закономерная особенность чередования. Обсудим вид потенциальной энергии $U(x)$ в окрестности точки x_i , если она является точкой устой-

чивого равновесия. В этом случае при выведении тела из положения равновесия на небольшое расстояние ξ (для мысленного эксперимента удобно представлять себе шарик) равнодействующая сила будет стремиться вернуть его обратно, так как $U(x_i + \xi) > U(x_i)$, а $\vec{f} = -\nabla U(x)$.

Из всего сказанного напрашивается вывод о том, что для математического анализа поведения колебательной системы нам необходимо анализировать вид потенциальной энергии $U(x)$ в окрестности всех особых точек. Для этой цели представим функцию $U(x)$ в виде ряда Тейлора

$$U(x_i + \xi) = U(x_i) + \frac{1}{1!} \left(\frac{dU(x)}{dx} \right)_{x=x_i} \xi + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2U(x)}{dx^2} \right)_{x=x_i} \xi^2 + \dots \quad (2.3)$$

Второе слагаемое по свойству особой точки равно нулю. Следовательно, для того, чтобы понять, устойчиво или неустойчиво положение равновесия в точке x_i , необходимо посмотреть на знак второй производной $d^2U(x)/dx^2$ в этой точке.

Если

$$\left(\frac{d^2U(x)}{dx^2} \right)_{x=x_i} > 0,$$

значит, это устойчивое положение равновесия. Если же эта производная меньше нуля, то положение равновесия неустойчивое. В случае устойчивого равновесия фазовые траектории в окрестности этой точки имеют вид эллипсов и точка принадлежит к типу "центр". В противном случае фазовые траектории имеют вид гипербол, и точка принадлежит к типу "седло".

2.3. Составление фазовых портретов методом ИЗОКЛИН

Применим полученные знания на практике, решив типовую задачу.

Задача № 8

Нарисовать фазовый портрет системы, движение которой описывается уравнением

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{y},$$

а возвращающая сила имеет вид

$$f(x, y) = -x + \frac{1}{3}x^3.$$

Постараемся изложить решение задачи в виде универсального алгоритма, отвлекаясь на необходимые пояснения.

Шаг 1. Найдем особые точки — точки равновесия исследуемой системы. Начинать необходимо именно с этого шага, потому что особые точки — это самые важные точки на фазовой плоскости, все поведение физической системы определяется именно ими. Здесь уместно привести аллюзию к вычислению интегралов в теории функций комплексной переменной, когда интеграл по замкнутому контуру от некоторой функции $F(\hat{Z})$ полностью определяется лишь суммой вычетов в особых точках $\text{Res}(F(\hat{Z}), \hat{Z}_i)$ этой функции.

Итак, найдем все x_i , в которых $f(x_i, y) = 0$, т.е. решим уравнение

$$-x + \frac{x^3}{3} = 0.$$

Корни уравнения вычисляются устно: $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{3}$, $x_3 = -\sqrt{3}$.

Шаг 2. Исследуем найденные особые точки на устойчивость. Для этого вычислим вторую производную $U(x)$. Так как $f_x = -dU(x)/dx$, то

$$\frac{d^2U(x)}{dx^2} = -\frac{df(x, y)}{dx} = 1 - x^2.$$

Подставим числовые значения

$$\left(\frac{d^2U(x)}{dx^2}\right)_{x=x_1=0} = 1 > 0,$$

$$\left(\frac{d^2U(x)}{dx^2}\right)_{x=x_2=\sqrt{3}} = -2 < 0,$$

$$\left(\frac{d^2U(x)}{dx^2}\right)_{x=x_3=-\sqrt{3}} = -2 < 0,$$

из которых видно, что x_1 — это устойчивое положение равновесия (точка типа "центр"), а x_2, x_3 — неустойчивое (точки типа "седло"). Заметьте, что они, как и было подмечено ранее, чередуются между собой на оси x . Указанное обстоятельство позволяет осуществлять самопроверку на этом этапе решения задачи.

Шаг 3. Изобразим особые точки на фазовой плоскости и соответствующие фазовые траектории в их окрестности (см. рис. 2.3).

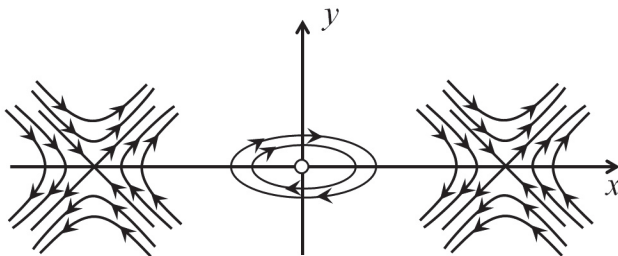


Рис. 2.3. Изображение особых точек на фазовой плоскости и фазовые траектории в их окрестности

Рекомендации по выполнению этого шага заключаются в том, что рисунок фазовой плоскости предпочтительно выполнять вытянутым по горизонтали, так как основные элементы находятся либо на оси x , либо вблизи неё. Также желательно выбрать такой масштаб оси x , чтобы особые точки были визуально раз-

двинуты на значительные расстояния, в противном случае будет трудно разобраться, какая фазовая траектория какой области принадлежит. Сразу после обозначения особых точек следует нарисовать 1 – 3 фазовые траектории возле них. При этом сразу же необходимо рисовать стрелочки, указывающие направление эволюции изучаемой системы. Как мы выяснили ранее, эти стрелочки имеют однозначное направление, но, несмотря на всю очевидность, есть строгое требование, предъявляемое к фазовым портретам, согласно которому наличие стрелочек является обязательным. С позиции наиболее общих аргументов причина этого требования кроется во втором законе термодинамики, регламентирующем направленность всех физических процессов. Именно однозначная направленность фазовых траекторий формально отличает их от привычных графиков математических функций.

Шаг 4. Построение изоклин для наиболее простых случаев. Итак, изоклины – это кривые на фазовой плоскости, являющиеся геометрическим местом точек, в которых касательные к фазовым траекториям имеют один и тот же угол наклона по отношению к оси x . Вспомним, что уравнение движения (2.1) в левой части содержит dy/dx . Эта величина является тангенсом угла наклона касательной к фазовой траектории. Чтобы построить изоклину, зафиксируем значение dy/dx и для простоты выберем такое значение угла, чтобы значение его тангенса было бы удобно использовать в дальнейших устных вычислениях. Такими простыми углами, конечно, являются 0 , $\pi/4$ и $-\pi/4$. Обычно этих значений является достаточно, чтобы письменно решить задачу без привлечения вычислительной техники.

Итак, выбираем первый угол $\pi/4$ и найдем уравнение изоклины:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\varphi=\pi/4} = \operatorname{tg}(\pi/4) = 1.$$

Тогда уравнение будет

$$\frac{\left(\frac{x^3}{3} - x\right)}{y} = 1.$$

Это уравнение кубической параболы. Нарисуем ее на фазовом портрете и на ней нанесем штрихи, имеющие фиксированный наклон к оси x (а не к параболе!), равный $\pi/4$. Замечание: рисовать изоклины и штрихи лучше всего карандашом, так как они являются вспомогательными деталями, и их обильное загромождение может осложнить анализ конечного фазового портрета. Аналогично рисуем вторую изоклину для угла $\varphi = -\pi/4$.

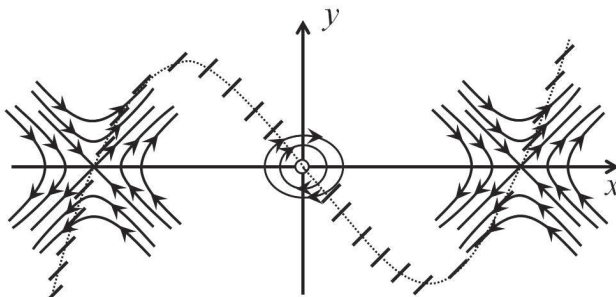


Рис. 2.4. Первая изоклина на фазовой плоскости

В этом случае $\operatorname{tg} \varphi = -1$ и мы снова получаем кубическую параболу, полностью симметричную относительно оси y . Штрихи, являющиеся касательными к фазовым траекториям, должны рисоваться под неизменным углом по отношению к оси x , в противном случае изоклины будут только мешать рисовать фазовый портрет.

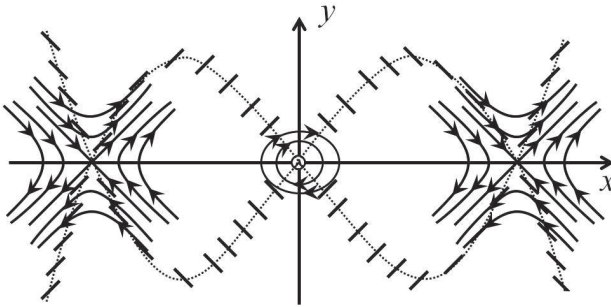


Рис. 2.5. Вторая изоклина на фазовой плоскости

Шаг 5. По постороенным изоклинам нарисовать остальные фазовые траектории. Заметим, что фазовые траектории не могут пересекаться, так как пересечение двух траекторий в некоторой точке означает равенство потенциальной и кинетической энергий системы в этой точке, что невозможно при различных значениях полной энергии в системе.

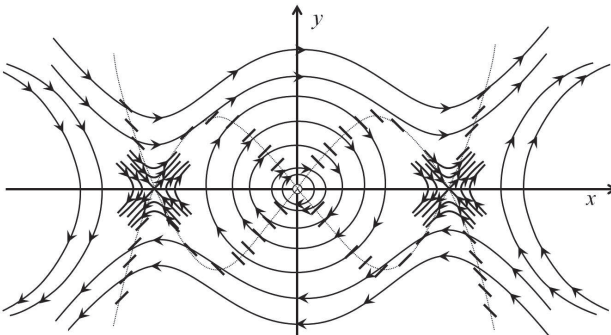


Рис. 2.6. Фазовые траектории на фазовой плоскости

Шаг 6. Построить сепаратрису – фазовую траекторию, разделяющую топологически разные области. Построить функцию $U(x)$, сопоставить ее вид с

полученным фазовым портретом, сделать выводы. На рис. 2.7 изображён окончательный фазовый портрет системы. Жирной линией выделена сепаратриса. Согласно правилу она обязательно проходит через точки типа "седло".

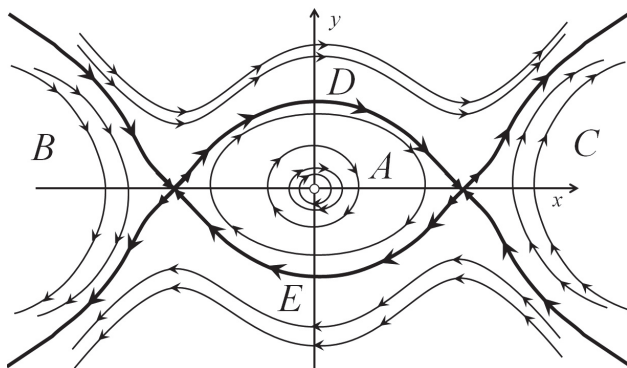


Рис. 2.7. Окончательный фазовый портрет с топологически различными областями (дополнительные построения удалены для наглядности): область A — область колебательного движения, B, C, D, E — области инфинитного (пространственно неограниченного) аperiodического движения

Вычислим потенциальную энергию изучаемой физической системы (с точностью до константы U_0) и качественно посмотрим, какие режимы движений возможны в системе:

$$U(x) = - \int f(x) dx = -\frac{x^4}{12} + \frac{x^2}{2} + U_0.$$

Построим качественный график полученной функции и проведем мысленный опыт, чтобы лучше понять особенности движений изучаемой системы в различных режимах, обозначенных на фазовой плоскости литерами A, B, C, D, E . С этой целью сопоставим $U(x)$ некоторый профиль ландшафта и мысленно представим себе все возможные движения шарика по этому ландшафту. На рис. 2.8

изображены все возможные движения в соответствии с обозначением областей на фазовом портрете. Представленные рисунки настолько подробны, что дополнительные комментарии излишни.

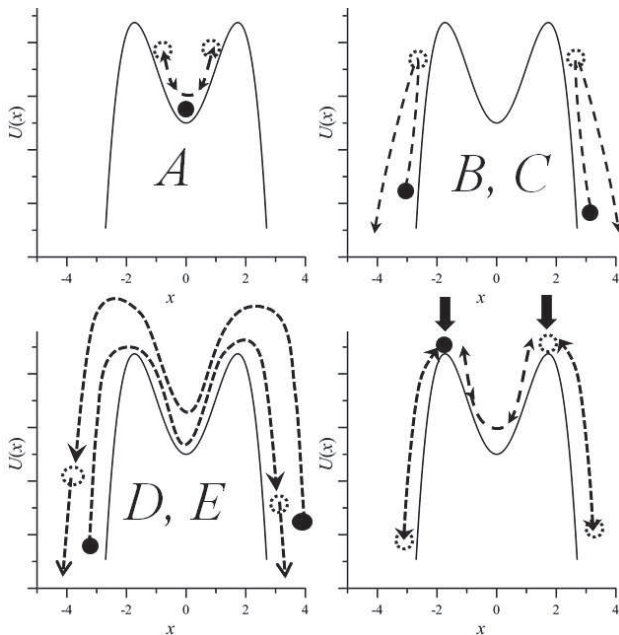


Рис. 2.8. Мысленный эксперимент. Нижний правый рисунок соответствует движению по сепаратрисе, а черные стрелки указывают на положение неустойчивого равновесия

Обсуждение задачи. Мы изобразили фазовый портрет изучаемой физической системы, однако до самого этого момента нами не было четко сформулирована цель, ради которой была проделана эта большая работа. Основная цель — это понимание того, какие движения возможны в системе, и как они будут реализовываться. Не менее важная причина, которая может побудить инженера составить фазовый портрет — это желание разобраться с тем, какие начальные условия необходимо задать в системе, чтобы получить желаемый режим движе-

ний. Представьте, например, что решённая задача является частью работы по проектированию некоторого электрического генератора. В этом случае, глядя на фазовый портрет, можно сказать, что при включении внешнего источника питания физические величины, описывающие работу генератора (координате x соответствует заряд q , а скорости y соответствует сила тока I) должны одновременно попасть в область A . В этом случае устройство сможет генерировать колебания, а в противном случае на выходе устройства будет наблюдаться некий аperiodический импульс напряжения.

Задача решена. С целью демонстрации решим еще одну задачу на рассматриваемую тему.

Задача № 9. Нарисовать фазовый портрет системы, движение которой описывается уравнением

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{y},$$

а возвращающая сила имеет вид

$$f(x, y) = x^2.$$

Решим задачу по изложенному выше алгоритму. Итак, на первом шаге решения необходимо найти все особые точки x_i , в которых $f(x_i, y) = 0$:

$$x^2 = 0,$$

откуда получаем корни уравнения $x_{1,2} = 0$. На втором шаге необходимо исследовать найденные особые точки на устойчивость. Для этого вычислим вторую производную $U(x)$

$$\frac{d^2U(x)}{dx^2} = -\frac{df(x, y)}{dx} = 2x$$

и подставим числовое значение вычисленного корня

$$\left(\frac{d^2U(x)}{dx^2}\right)_{x=0} = 0.$$

Такой случай нами ранее не оговаривался. Тем не менее можно уже сейчас сделать вывод о том, что существующее в системе положение равновесия в точке с координатой $x = 0$ не является ни устойчивым ("центр"), ни неустойчивым ("седло"). Проследуем далее по обозначенному алгоритму и построим фазовый портрет. Для этого построим изоклины для наиболее простых случаев. Выбираем первый угол $\pi/4$ и найдем уравнение изоклины

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\varphi=\pi/4} = \operatorname{tg}(\pi/4) = 1.$$

Тогда уравнение будет $y = x^2$. Это уравнение квадратичной параболы. Выбираем второй угол $-\pi/4$ и найдем уравнение второй изоклины $y = -x^2$. Нарисуем на фазовой плоскости полученные изоклины (см. рис. 2.9).

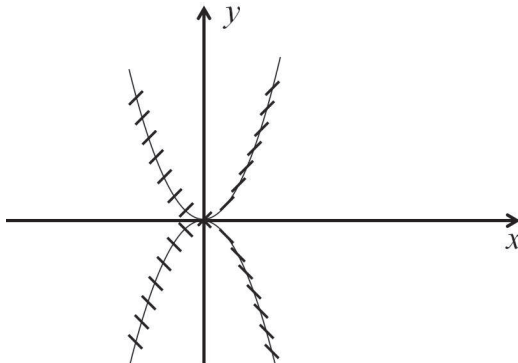


Рис. 2.9. Изоклины на фазовой плоскости

Изображения изоклин, к сожалению, не могут полностью прояснить ситуацию. В таких непростых случаях необходимо сразу обращаться к анализу вида потенциальной энергии

$$U(x) = - \int f(x)dx = -\frac{x^3}{3} + U_0.$$

Асимметричный вид потенциальной энергии сразу объясняет результат, полученный на втором шаге алгоритма. При описании подобных физических систем используется еще один тип особых точек – вида "седло-центр". Особенность этой точки заключается в том, что фазовые траектории в её окрестности отличаются по обе стороны. В нашем случае (см. рис. 2.10) справа фазовые траектории имеют вид гипербол, а слева – эллипсов.

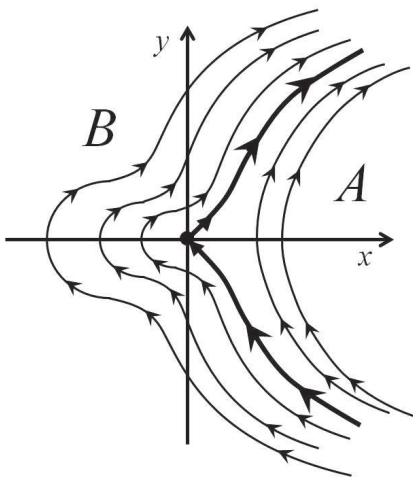


Рис. 2.10. Фазовый портрет с особой точкой типа "седло-центр"

Построим качественный график полученной функции потенциальной энергии $U(x)$ и проведем мысленный опыт, чтобы лучше понять особенности движе-

ний изучаемой системы в различных режимах, обозначенных на фазовой плоскости литерами A, B . С этой целью сопоставим $U(x)$ некоторый профиль ландшафта и мысленно представим себе все возможные движения шарика по этому ландшафту. На рис. 2.11 изображены все возможные движения в соответствии с обозначением областей на фазовом портрете. Как и в предыдущей задаче, на фазовом портрете присутствует сепаратриса, разделяющая две топологически разные области, и выходящая из точки типа "седло-центр". Задача решена.

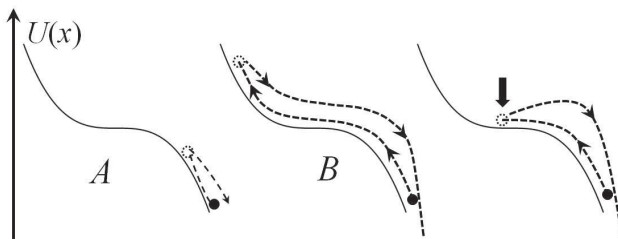


Рис. 2.11. Мысленный эксперимент. Крайний правый рисунок соответствует движению по сепаратрисе, черная стрелка указывает на положение неустойчивого равновесия, в котором шарик может находиться неопределенное время

До этого времени мы решали задачи исключительно формально подходу к исходным уравнениям, описывающим вид возвращающей силы, не объясняя причин появления функции конкретного вида. Покажем на примере следующей задачи весь путь получения уравнений, начиная от анализа исходной электрической схемы.

Задача № 10. Нарисовать фазовый портрет системы, изображенной на схеме (см. рис. 2.12), если вольт-фарадная характеристика конденсатора описывается уравнением

$$U(q) = \frac{1}{C}(q^3 - q).$$

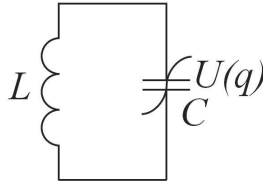


Рис. 2.12. Колебательный контур с нелинейной ёмкостью

Составим динамическое уравнение системы, для чего запишем уравнение Кирхгофа для контура

$$U_L + U_C = 0, \quad \text{или}$$

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t I(\xi) d\xi = 0.$$

Выразим силу тока через производную заряда по времени и получим

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{C} (q^3 - q) = 0.$$

Очевидно, что мы пришли к динамическому уравнению вида (2.1)

$$\frac{d^2 q}{dt^2} = \frac{1}{LC} (-q^3 + q).$$

Преобразуем уравнение к стандартному виду, вводя (для узнаваемости) замену переменных $x = q$, $y = x'$ и выбирая удобный масштаб задачи, при котором $LC = 1$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x^3 + x}{y}.$$

Таким образом мы пришли к стандартной постановке задачи, когда возвращающая сила имеет вид

$$f(x, y) = -x^3 + x.$$

Дальнейшее решение задачи не требует дополнительных комментариев.

На этом мы завершаем главу, посвященную фазовым портретам. Для закрепления полученных знаний решите самостоятельно следующие задачи.

Задача № 11. Нарисовать фазовый портрет системы, движение которой описывается уравнением

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{y},$$

а возвращающая сила имеет вид

$$f(x, y) = x \exp(-x).$$

Задача № 12. Нарисовать фазовый портрет системы, движение которой описывается уравнением

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{y},$$

а возвращающая сила имеет вид

$$f(x, y) = -x + x^2 + x^3.$$

Примечание: обратите внимание на отличие данной задачи от аналогичной, разобранный ранее в тексте главы, заключающееся в несимметричности ”потенциальной ямы” $U(x)$ относительно оси ординат.

Задача № 13. Нарисовать фазовый портрет системы, движение которой описывается уравнением

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{y},$$

а возвращающая сила имеет вид

$$f(x, y) = x^2 - 1.$$

Задача № 14. Нарисовать фазовый портрет системы, движение которой описывается уравнением

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{y},$$

а возвращающая сила имеет вид

$$f(x, y) = \cos(x), \quad x \in -\pi.. \pi.$$

Глава 3

Колебания в линейных физических системах при внешнем периодическом воздействии

3.1. Математический аппарат

Настоящая глава посвящена изучению колебательных процессов в линейных системах при внешнем периодическом воздействии. Обсуждаются вопросы гармонического анализа, включающие в себя метод разложения периодических функций в ряд Фурье (разложение на гармоники) и метод комплексных амплитуд, позволяющий проанализировать установившийся режим колебаний в электрических контурах. По умолчанию предполагается, что читатель уже знаком с указанными темами, а основной целью главы является демонстрация одновременного практического применения этих методов при решении задач в курсе теории колебаний. Изложим некоторые простые соображения относительно гармонического анализа.

Необходимость применения гармонического анализа заключается в том, что отклик линейной системы $y(t)$ на внешнее воздействие $x(t)$ можно вычислить относительно просто только в том случае, если $x(t)$ — гармоническое воздействие. Во всех остальных случаях необходимо пользоваться дополнительными методами. В частности, если $x(t)$ является аperiodической функцией, следует пользоваться преобразованием Лапласа, а если $x(t)$ является периодической, то достаточно применить разложение в ряд Фурье.

Суть гармонического анализа заключается в том, что "сложная" функция $x(t)$ представляется как суперпозиция (сумма) гармоник — отдельных, по выражению академика Л. И. Мандельштама, — "спектрально простых" [3], гармонических колебаний. Далее воздействие этой "сложной" функции $x(t)$ заменяется суммой воздействий отдельных гармоник. Результат этого воздействия, т.е. отклик линейной системы $y(t)$, вычисляется как суперпозиция откликов этой системы на каждую из гармоник. Эта операция является возможной, конечно, благодаря свойству линейности изучаемой системы (в нелинейных системах так поступать нельзя). Надо сказать, что идея заменить одну сложную функцию несколькими простыми лежит в самой основе разложения любой функции в любой (необязательно в ряд Фурье) функциональный ряд. Для практических нужд бывает очень полезно сформулировать краткие тезисы (иногда в ущерб полноте учебного курса) по некоторой области знаний, чтобы добиться ясности изложения. Возьмем на себя смелость обобщить знания из области теории функциональных рядов (см, например, [4]) максимально простым языком:

Итак, ряд — это сумма. Разложение в ряд — это упрощение, заключающееся в том, что сложная функция заменяется суммой нескольких простых функций. Исследование ряда на сходимость — это операция, которая позволяет сказать, — возможна ли такая упрощающая замена или нет. Если ряд

сходится, то упрощающая замена возможна, если ряд расходится, то раскладывать функцию в ряд нельзя.

Последняя операция — исследование ряда на сходимость почти никогда не выполняется в теории колебаний по причине её избыточности. Дело в том, что, во-первых, существуют условия Дирихле — четкие требования, предъявляемые к виду функции $x(t)$. Если $x(t)$ не удовлетворяет им, то раскладывать ее в ряд Фурье нельзя. Таким образом, вопрос о сходимости конкретного ряда Фурье обычно снимается еще до его вычисления. Во-вторых, реально встречающиеся на практике физические процессы почти всегда описываются функциями, которые удовлетворяют условиям Дирихле в силу естественных причин (например, ограниченность процессов по интенсивности и времени в силу закона сохранения энергии).

3.2. Решение задач методом гармонического анализа

Продемонстрируем практическое использование метода гармонического анализа на примере одной типовой задачи.

Задача № 15. Для электрической цепи, изображенной на рис. 3.1, найти отношение амплитуды второй гармоники к амплитуде первой гармоники напряжения на конденсаторе при условии

$$\omega = \frac{\omega_0}{2},$$

где ω — частота вынуждающей силы, ω_0 — частота собственных незатухающих колебаний в контуре без потерь.

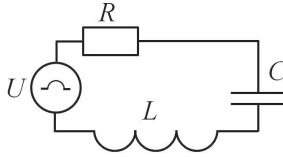


Рис. 3.1. Схема электрической цепи (к задаче № 15)

Внешняя вынуждающая сила — генератор электрических периодических колебаний U воздействует на изучаемую цепь напряжением, изображенном на рис. 3.2.

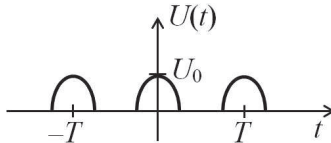


Рис. 3.2. Форма сигнала генератора (к задаче № 15)

Алгоритм решения задачи следующий:

шаг № 1. Решить задачу в случае гармонического воздействия;

шаг № 2. Представить внешнюю вынуждающую силу в виде суммы гармонических воздействий (разложить ее в ряд Фурье);

шаг № 3. Найти суперпозицию откликов исследуемой системы на вынуждающее воздействие.

Итак, начнем с отыскания искомой величины — напряжения на конденсаторе $U_C(t)$ в случае гармонического внешнего воздействия. Для этого заменим генератор $U(t)$ генератором синусоидальных колебаний с частотой ω . Методом комплексных амплитуд найдем

$$\hat{U}_C = \frac{\hat{Z}_C}{\hat{Z}_C + \hat{Z}_L + \hat{Z}_R} \hat{U} = \frac{1}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC} \hat{U}.$$

Перейдем к действующим значениям

$$\widetilde{U}_C = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}} \widetilde{U}. \quad (3.1)$$

Для удобства дальнейшего использования запишем математическое выражение для напряжения $U(t)$

$$U(t) = \begin{cases} U_0 \cos(\omega t), & \text{при } \left(\frac{4k-1}{2}\right) \frac{\pi}{\omega} \leq t \leq \left(\frac{4k+1}{2}\right) \frac{\pi}{\omega}, k \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{для всех остальных } t. \end{cases}$$

Разложим функцию $U(t)$ в ряд Фурье, т.е. сопоставим этой функции новую функцию $u(t)$

$$u(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)),$$

где

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} U(t) \cos(n\omega t) dt,$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} U(t) \sin(n\omega t) dt.$$

При этом n -я гармоника представляет собой колебание с частотой $n\omega$, амплитудой A_n и фазой φ_n

$$A_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2},$$

$$\varphi_n = \operatorname{arctg} \left(\frac{B_n}{A_n} \right).$$

В нашем случае исходная функция $U(t)$ является чётной, что легко заметно по ее симметрии относительно оси ординат. Это значит, что все нечётные гармо-

ники равны нулю $B_n = 0$. Коэффициенты перед $\cos(n\omega t)$ отличны от нуля и равны

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} U_0 \cos(\omega t) \cos(n\omega t) dt = \frac{-2U_0}{(n^2 - 1)\pi} \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right).$$

Тогда первая и вторая гармоники входного сигнала (внешнего воздействия) равны соответственно

$$u_1(t) = \frac{U_0}{2} \cos(\omega t),$$

$$u_2(t) = \frac{2U_0}{3\pi} \cos(2\omega t).$$

Заметим, что при вычислении A_1 потребовалось воспользоваться правилом Лопиталя, чтобы раскрыть неопределенность вида "0/0". Подставим амплитуды A_1, A_2 в выражение (3.1) и получим конечное выражение

$$\frac{\widetilde{U}_{C2}}{\widetilde{U}_{C1}} = \frac{A_2}{A_1} \frac{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}}{\sqrt{(1 - 4\omega^2 LC)^2 + (2\omega RC)^2}}.$$

По условию задачи $\omega = \omega_0/2 = 1/2\sqrt{LC}$. Тогда окончательный ответ

$$\frac{\widetilde{U}_{C2}}{\widetilde{U}_{C1}} = \frac{4}{3\pi\beta} \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{2}\right)^2},$$

где $\beta = R\sqrt{C/L}$ – безразмерный параметр задачи. Задача решена. Для закрепления полученных знаний решите самостоятельно следующие задачи.

Задача № 16. В колебательный контур (рис. 3.3) включен генератор напряжения $U(t)$, изменяющегося по периодическому закону (рис. 3.3). Найти отношение амплитуд второй гармоники u_2 к амплитуде первой гармоники u_1 для колебаний напряжения на конденсаторе C контура, как функцию основной частоты колебаний.

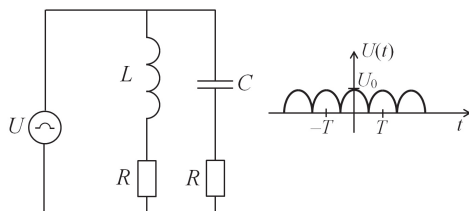


Рис. 3.3. Электрическая цепь (к задаче № 16)

Задача № 17. В колебательный контур (рис. 3.4) включен генератор напряжения $U(t)$, изменяющегося по периодическому закону (рис. 3.4). Найти отношение амплитуд второй гармоники u_2 к амплитуде первой гармоники u_1 для колебаний напряжения на конденсаторе C контура, как функцию основной частоты колебаний.

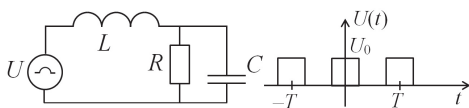


Рис. 3.4. Электрическая цепь (к задаче № 17)

Задача № 18. В колебательный контур (рис. 3.5) включен генератор напряжения $U(t)$, изменяющегося по периодическому закону (рис. 3.5). Найти отношение амплитуд второй гармоники u_2 к амплитуде первой гармоники u_1 для колебаний напряжения на конденсаторе C контура, как функцию основной частоты колебаний.

Задача № 19. В колебательный контур (рис. 3.6) включен генератор напряжения $U(t)$, изменяющегося по периодическому закону (рис. 3.6). Найти отношение амплитуд второй гармоники u_2 к амплитуде первой гармоники u_1 для колебаний напряжения на конденсаторе C контура, как функцию основной частоты колебаний.

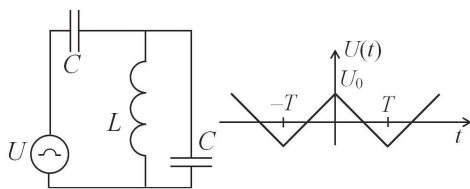


Рис. 3.5. Электрическая цепь (к задаче № 18)

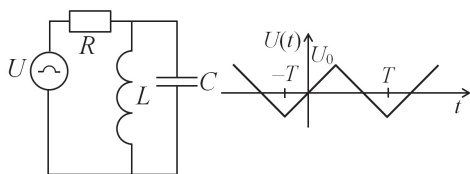


Рис. 3.6. Электрическая цепь (к задаче № 19)

Задача № 20. В колебательный контур (рис. 3.7) включен генератор напряжения $U(t)$, изменяющегося по периодическому закону (рис. 3.7). Найти отношение амплитуд второй гармоники u_2 к амплитуде первой гармоники u_1 для колебаний напряжения на конденсаторе C контура, как функцию основной частоты колебаний.

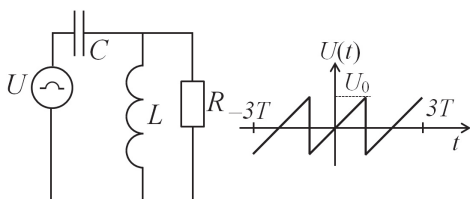


Рис. 3.7. Электрическая цепь (к задаче № 20)

Глава 4

Колебания в слабонелинейных, слабодиссипативных системах

4.1. Предварительные замечания

Настоящее пособие посвящено вопросам теории колебаний в линейных физических системах. Тем не менее следует понимать, что линейная система — это несуществующая абстракция, а все реальные колебательные системы диссипативны и в большей или меньшей степени нелинейны. Колебания в нелинейных системах изучаются в отдельном, крупном учебном курсе. Однако существует обширный класс задач, относящихся к колебаниям в слабонелинейных системах, которые можно *приближенно*, но с хорошей точностью, решить методами линейной теории колебаний. При этом задачи настоящего раздела, как мы увидим, имеют колоссальное значение для науки и техники. В качестве математического аппарата будет использоваться метод медленно меняющихся амплитуд (далее — МММА), предложенный Ван-дер-Полем. Этот метод был значительно переработан и математически обоснован академиком Л. И. Мандельштамом и его коллегой Н. Д. Папалекси [5].

4.2. Математический аппарат

Опишем и прокомментируем метод медленно меняющихся амплитуд (ММА). Основная предпосылка появления метода заключается в гипотезе о том, что колебания в линейной и слабонелинейной системах должны описываться похожими уравнениями. Интуитивно понятно, что это предположение оправдывается тем лучше, чем меньше проявляются нелинейные свойства системы. Таким образом, в предельном случае, при исчезающе малых нелинейных поправках, это предположение должно обратиться в констатацию факта. Так, если в *линейной* физической системе гармоническое колебание $x(t)$ в общем в виде описывается функцией

$$x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где A_0 , ω_0 , φ_0 — константы, то предполагается, что в *слабонелинейной* системе колебание можно (при определенных условиях) представить в похожем виде

$$x(t) = a(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)). \quad (4.1)$$

Уравнение (4.1) описывает колебания, близкие к гармоническим, но не строго гармонические. Заметим, что с формальной точки зрения мы 1 (одной) неизвестной функции $x(t)$ поставили в соответствие 2 (две) другие неизвестные функции $a(t)$, $\varphi(t)$. Эти функции являются очень медленно меняющимися с течением времени t . Однако в физике эпитеты "медленно" и "быстро" в известной мере лишены смысла и требуют математического определения. Так, характерное время изменения $a(t)$, $\varphi(t)$ сопоставляется с периодом одного колебания T (похожая ситуация наблюдалась в первой главе). Математически это записывается так:

$$\frac{da}{dt} T \ll a,$$

$$\frac{d\varphi}{dt}T \ll \varphi.$$

Поясним ещё один нюанс: под периодом колебания T в разных задачах могут пониматься различные интервалы времени. Если, например, речь идет о свободных колебаниях в последовательном $R-L-C$ контуре, то, как известно из первой главы пособия,

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}},$$

а если на этот же самый контур действует внешняя вынуждающая сила вида $U_0 \cos(pt)$, то

$$T = \frac{2\pi}{p}.$$

Это объясняется тем, что в присутствии внешней вынуждающей силы собственные колебания быстро затухают (за характерное время переходного процесса), и остаются только колебания с частотой внешней вынуждающей силы p . Поэтому период внешней вынуждающей силы является более приоритетным масштабом времени, чем период собственных колебаний.

Итак, рассмотрим в общем виде уравнение колебаний в слабонелинейной системе

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \mu_0 f\left(x, \frac{dx}{dt}\right), \quad (4.2)$$

где μ_0 — некоторое конечное число, а функция f содержит нелинейные слагаемые по x и x' . Выберем новый масштаб времени

$$\tau = \omega_0 t.$$

Запишем преобразования масштаба согласно формализму Лейбница

$$d\tau = \omega_0 dt,$$

$$\frac{d}{dt} = \omega_0 \frac{d}{d\tau},$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \omega_0^2 \frac{d^2}{d\tau^2}.$$

При этом период колебания в новом масштабе равен, конечно, 2π . Запишем уравнение (4.2) при новом масштабе времени (разделив левую и правую части уравнения на ω_0^2

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + x = \mu f\left(x, \frac{dx}{d\tau}\right). \quad (4.3)$$

Здесь μ является малым параметром задачи

$$\mu = \frac{\mu_0}{\omega_0^2} \rightarrow 0.$$

Приведем численную оценку для подтверждения этого утверждения. Допустим, уравнение (4.3) описывает некоторые колебания в слабонелинейной системе, происходящие на частоте музыкальной ноты *la* равной 440 Гц. Тогда $\omega_0^2 \approx 7.6 \cdot 10^6 \text{ рад}^2\text{с}^{-2}$. То есть уже для звуковых частот множитель ω_0^2 имеет порядок десяти миллионов и стремительно увеличивается с ростом частоты. В настоящей главе в основном будут рассматриваться именно высокочастотные устройства (в том числе СВЧ) и их эквивалентные схемы, для которых с уверенностью можно утверждать, что μ — малый параметр. Благодаря малости μ в правой части уравнения (4.3) можно предположить, что его решением будет функция вида (4.1)

$$x(\tau) = a(\tau) \cos(\tau + \varphi(\tau)).$$

Однако вид функции (4.1) крайне неудобен для практических задач потому, что неизвестная функция $\varphi(t)$ является аргументом другой функции — \cos . Это легко исправить, если заменить одни неизвестные функции $a(t)$, $\varphi(t)$ на другие неизвестные функции $u(\tau)$ и $v(\tau)$, связанные между собой очевидными выражениями

$$\begin{aligned} x(\tau) &= u(\tau) \cos(\tau) + v(\tau) \sin(\tau), \\ a(\tau) &= \sqrt{u^2(\tau) + v^2(\tau)}, \\ \varphi(\tau) &= \operatorname{arctg} \left(\frac{v(\tau)}{u(\tau)} \right). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Заметим, что никакая информация о колебательном движении при этом не теряется, и с формальной точки зрения задача опять же не упрощается, ведь 2 неизвестные функции заменяются другими 2-мя неизвестными функциями, но зато это преобразование позволяет избежать значительных сложностей с решением трансцендентных уравнений. Новые функции $u(\tau)$ и $v(\tau)$ благодаря явной связи с $a(\tau)$ и $\varphi(\tau)$ также являются медленно меняющимися функциями. Так как они являются множителями перед $\cos(\tau)$, $\sin(\tau)$, их называют медленно меняющимися амплитудами, что нашло отражение в названии метода решения задач.

Как и в случае с *линейным* дифференциальным уравнением, для поиска общего решения *нелинейного* уравнения необходимо подставить функцию $x(\tau)$ (4.4) в само уравнение (4.3). Для этого необходимо вычислить первую и вторую производные x по τ . По правилу дифференцирования сложной функции

$$x' = u'(\tau) \cos(\tau) + v'(\tau) \sin(\tau) - u(\tau) \sin(\tau) + v(\tau) \cos(\tau).$$

Сейчас уместно припомнить сделанное ранее наблюдение относительно того,

что формально мы одну неизвестную искомую функцию $x(\tau)$ заменили двумя неизвестными функциями $u(\tau)$ и $v(\tau)$. Это означает, что мы сознательно расширили класс решений и сейчас имеем право наложить разумное ограничение на этот класс. Формально можно придумать любое уравнение, связывающее $u(\tau)$ и $v(\tau)$, но мы, конечно, возьмём то уравнение, которое позволит упростить решение задачи, а именно

$$u'(\tau) \cos(\tau) + v'(\tau) \sin(\tau) = 0, \quad (4.5)$$

и тогда окончательно

$$x' = -u(\tau) \sin(\tau) + v(\tau) \cos(\tau). \quad (4.6)$$

Вычислим вторую производную x по τ , для чего продифференцируем (4.6)

$$x'' = -u'(\tau) \sin(\tau) + v'(\tau) \cos(\tau) - u(\tau) \cos(\tau) - v(\tau) \sin(\tau). \quad (4.7)$$

Здесь, конечно,

$$-u'(\tau) \sin(\tau) + v'(\tau) \cos(\tau) \neq 0,$$

так как эта сумма отличается от уравнения связи (4.5), приравнять эту сумму к нулю нет никаких оснований. Подставим (4.4), (4.7) и (4.6) в левую и правую части уравнения (4.3). Дополним полученное уравнение нашим уравнением связи (4.5) и получим готовую систему уравнений (для удобства $u(\tau)$ и $v(\tau)$ далее обозначаются просто u и v)

$$\begin{cases} -u' \sin(\tau) + v' \cos(\tau) = \mu f(u, v), \\ u' \cos(\tau) + v' \sin(\tau) = 0. \end{cases} \quad (4.8)$$

Эта система уравнений связывает между собой функции u и v с их первыми производными. Преобразуем систему (4.8) к более удобному виду, для чего умножим второе уравнение (4.8) на $\cos(\tau)$ и вычтем из него первое уравнение (4.8), умноженное на $\sin(\tau)$. Так получим первое уравнение новой системы (4.9). Действуя аналогичным способом, дополним его вторым и получим новую систему (4.9) в окончательном виде

$$\begin{cases} u' = -\mu f(u, v) \sin(\tau), \\ v' = \mu f(u, v) \cos(\tau). \end{cases} \quad (4.9)$$

Заметьте, что полученные уравнения являются дифференциальными уравнениями *первой* степени. Однако никакого упрощения по сути добиться не удалось: действительно, совершив все перечисленные преобразования, мы просто заменили *одно* уравнение *второй* степени (4.3) на *два* уравнения *первой* степени (4.9). При этом, если осреднить новые уравнения за 1 период колебаний 2π , получится система

$$\begin{cases} \langle u' \rangle = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu f(u, v) \sin(\tau) d\tau \equiv \Phi(u, v), \\ \langle v' \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu f(u, v) \cos(\tau) d\tau \equiv \Psi(u, v). \end{cases} \quad (4.10)$$

Или, что то же самое

$$\begin{cases} \langle u' \rangle = \Phi(u, v), \\ \langle v' \rangle = \Psi(u, v). \end{cases} \quad (4.11)$$

Систему (4.11) называют системой укороченных уравнений. Укороченные уравнения связывают средние за период изменения амплитуд колебаний со значениями этих амплитуд. Возможности, предоставляемые системой укороченных

уравнений, позволяют (проведите параллель с материалом, изложенном в главе про фазовые портреты): найти все стационарные колебания системы (т.е. найти такие пары (u_i, v_i) , когда одновременно $\langle u' \rangle|_{(u_i, v_i)} = 0$ и $\langle v' \rangle|_{(u_i, v_i)} = 0$); найти амплитуды колебаний в стационарных состояниях (то есть $a_i = \sqrt{u_i^2 + v_i^2}$); исследовать стационарные колебания (u_i, v_i) на устойчивость. Заметьте, что речь о получении искомой функции $x(t)$ в явном виде вообще не идет. Эту мысль следует понимать так: никакого упрощения уравнений нет и не будет по причине нелинейности исходного уравнения колебаний. Найти функцию $x(\tau)$ в явном виде не получится (за редким исключением), однако МММА позволяет получить важную информацию об исследуемой физической системе, а именно её стационарные состояния и устойчивость этих состояний. Исследуем стационарные амплитуды на устойчивость, для чего внесём малые возмущения в стационарные амплитуды. Пусть ξ есть малое возмущение стационарной амплитуды u_i , а η — малое возмущение амплитуды v_i . Проследим, что будет с $\langle u' \rangle$, $\langle v' \rangle$

$$\langle u' \rangle|_{u=u_i+\xi} = \langle (u_i + \xi)' \rangle = \langle u_i' \rangle + \langle \xi' \rangle = 0 + \langle \xi' \rangle,$$

$$\langle v' \rangle|_{v=v_i+\eta} = \langle (v_i + \eta)' \rangle = \langle v_i' \rangle + \langle \eta' \rangle = 0 + \langle \eta' \rangle.$$

Правые части укороченных уравнений разложим в ряды Тейлора с точностью до первых производных

$$\Phi(u_i + \xi, v_i + \eta) = \underbrace{\Phi(u_i, v_i)}_{=0} + \underbrace{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right)_{u_i, v_i}}_{a_{11}} \xi + \underbrace{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial v}\right)_{u_i, v_i}}_{a_{12}} \eta + \dots$$

$$\Psi(u_i + \xi, v_i + \eta) = \underbrace{\Psi(u_i, v_i)}_{=0} + \underbrace{\left(\frac{\partial \Psi}{\partial u}\right)_{u_i, v_i}}_{a_{21}} \xi + \underbrace{\left(\frac{\partial \Psi}{\partial v}\right)_{u_i, v_i}}_{a_{22}} \eta + \dots$$

Приравнивая левые и правые части укороченных уравнений, получим новую систему уравнений, описывающих эволюцию возмущений ξ , η с течением времени

$$\begin{cases} \xi' = a_{11}\xi + a_{12}\eta, \\ \eta' = a_{21}\xi + a_{22}\eta. \end{cases} \quad (4.12)$$

Это система дифференциальных уравнений первого порядка. Ранее (см. первую главу пособия) уже обсуждалось, что дифференциальное уравнение первого порядка имеет решение в виде экспоненциальной функции, поэтому мы и в рассматриваемом случае тоже будем искать решение системы (4.12) в виде

$$\xi = \xi_0 \exp(\lambda\tau),$$

$$\eta = \eta_0 \exp(\lambda\tau).$$

Подставим эти выражения и преобразуем систему (4.12) дифференциальных уравнений в новую систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\xi + a_{12}\eta = 0, \\ a_{21}\xi + (a_{22} - \lambda)\eta = 0. \end{cases} \quad (4.13)$$

Первое решение системы (4.13), заметно сразу

$$\xi = 0, \eta = 0.$$

Оно означает, что амплитуды возмущений ξ_0 , η_0 равны нулю, т.е. никаких возмущений вообще нет. Это решение является абсолютно бесполезным, и в математике официально называется тривиальным. Для существования *нетривиаль-*

ного решения необходимо потребовать равенства нулю основного определителя системы

$$\lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0. \quad (4.14)$$

Это уравнение позволяет вычислить показатели экспоненциальных функций λ

$$\lambda_{1,2} = \left(\frac{a_{11} + a_{22}}{2} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{a_{11} + a_{22}}{2} \right)^2 + a_{12}a_{21}}. \quad (4.15)$$

Вообще говоря, получившиеся корни λ могут быть комплексными числами, однако можно уверенно сказать, что если действительная часть

$$\Re(\lambda) > 0,$$

то стационарное состояние является неустойчивым. Действительно, в этом случае, например, для ξ будет справедливо

$$\xi(\tau) = \xi_0 \exp([\Re(\lambda) + j\Im(\lambda)]\tau) = \xi_0 \exp(\Re(\lambda)\tau) [\cos(\Im(\lambda)\tau) + \sin(\Im(\lambda)\tau)].$$

Так, действительная часть λ обеспечит экспоненциальный рост амплитуды ξ_0 исходного бесконечно малого возмущения ξ стационарного состояния (u_i, v_i) . Мнимая часть λ описывает биение, проявляющееся в периодичном перераспределении энергии нарастающего колебания между чётной (\cos) и нечётной (\sin) компонентой гармоники. Рассуждая аналогично, если

$$\Re(\lambda) < 0,$$

то возмущения $\xi(\tau)$, $\eta(\tau)$ будут затухать с течением времени, что однозначно указывает на устойчивость соответствующей стационарной амплитуды (u_i, v_i) .

4.3. Слабонелинейные, слабодиссипативные системы

Задача № 21. Исследовать с помощью МММА процесс затухания свободных колебаний в линейной диссипативной колебательной системе, изображенной на рис.4.1. Оговоримся сразу, что эта задача имеет очевидный ответ: колебания в



Рис. 4.1. Колебательный контур (к задаче № 21)

последовательном $R - L - C$ контуре без внешнего воздействия могут только затухать, т.е. у такой системы существует только одна стационарная амплитуда колебаний, равная нулю, и эта стационарная амплитуда, конечно, является устойчивой, — небольшое возмущение системы всегда будет затухать в ней. Тем не менее мы решим эту задачу с использованием МММА, чтобы наглядно показать алгоритм решения подобных задач и продемонстрировать, что МММА — это *приближенный*, а не точный метод решения.

Начнем с описания работы схемы. Изучаемая электрическая цепь представляет собой одиночный контур, поэтому сразу запишем для него одно уравнение Кирхгофа

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t I(\xi) d\xi = 0.$$

Заменим силу тока I на другую переменную — электрический заряд x (для удобства будем использовать x , а не общепринятое обозначения заряда q)

$$x = \frac{dI}{dt}$$

и получим "колебательное" дифференциальное уравнение второго порядка

$$Lx'' + Rx' + \frac{x}{C} = 0.$$

Разделим уравнение на L и введем стандартные обозначения, после чего придем к уравнению вида (4.2)

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad 2\delta = \frac{R}{L}.$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2x = -2\delta\frac{dx}{dt}.$$

Это уравнение можно решить с использованием МММА, для чего введём новый масштаб времени. В этой системе есть только собственные колебания, поэтому в качестве масштабирующего множителя удобно выбрать частоту ω_0 , т.е. $\tau = \omega_0 t$. Преобразованное уравнение будет

$$x'' + x = -\mu x',$$

при чем величина $\mu = 2\delta/\omega_0 \ll 1$ — малый параметр задачи. Перейдем сразу к вычислению укороченных уравнений

$$\begin{aligned} \langle u' \rangle &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu f(u, v) \sin(\tau) d\tau = \frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} [-U \sin(\tau) + v \cos(\tau)] \sin \tau d\tau = \\ &= \frac{-\mu U}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(\tau) d\tau + \frac{\mu v}{2\pi} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(\tau) \sin(\tau) d\tau}_{=0} = -\frac{\mu U}{2}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Аналогично вычисляется

$$\langle v' \rangle = \frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} [-U \sin(\tau) + v \cos(\tau)] \cos \tau d\tau = -\frac{\mu v}{2}.$$

Следующий шаг - вычисление стационарных амплитуд (u_i, v_i) , при которых

$$\langle u' \rangle = 0, \quad \langle v' \rangle = 0.$$

Нетрудно догадаться, что в этой задаче существует только одна стационарная амплитуда

$$u_1 = 0, \quad v_1 = 0.$$

Здесь уместно сразу описать одну особенность задач, требующих применения МММА, — укороченные уравнения иногда бывает довольно трудно решить относительно амплитуд u и v . Часто приходится именно *догадываться*, проявлять некое подобие математической смекалки, нежели решать в соответствии с четким алгоритмом. В дальнейшем будут продемонстрированы некоторые удачные приёмы, позволяющие разрешить укороченные уравнения, а сейчас запомните первый из них: начинать надо с проверки нулевой стационарной амплитуды, ведь она есть почти у всех колебательных систем (нулевая амплитуда означает отсутствие колебаний).

Следующий шаг в решении задачи — анализ устойчивости стационарной амплитуды. Для этого шага вычислим все коэффициенты в матрице (4.13)

$$a_{11} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \right)_{u_1, v_1} = -\frac{\mu}{2}, \quad a_{12} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v} \right)_{u_1, v_1} = 0,$$
$$a_{21} = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial u} \right)_{u_1, v_1} = 0, \quad a_{22} = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial v} \right)_{u_1, v_1} = -\frac{\mu}{2}.$$

Тогда в соответствии с (4.15)

$$\lambda_1 = -\frac{\mu}{2}, \quad \lambda_2 = 0.$$

При этом действительная часть $\Re(\lambda_1) < 0$, $\Re(\lambda_2) = 0$. Значит, внесенные возмущения ξ и η не будут нарастать с течением времени. Значит, нулевая стационарная амплитуда является устойчивой. Рассматриваемая задача является уникальной в том смысле, что позволяет найти решение уравнения колебаний $x(t)$ в общем виде. Как вы увидите в дальнейшем, эта исключительная ситуация больше не повторится. Рассмотрим полученные ранее укороченные уравнения

$$\begin{cases} \langle u' \rangle = -\frac{\mu}{2}, \\ \langle v' \rangle = -\frac{\mu}{2}. \end{cases} \quad (4.17)$$

Они легко интегрируются почленно

$$\begin{cases} u(\tau) = u_0 \exp(-\frac{\mu}{2}\tau), \\ v(\tau) = v_0 \exp(-\frac{\mu}{2}\tau). \end{cases} \quad (4.18)$$

Подставляем полученные функции u , v в уравнение для x , перейдем обратно от τ к t и получим окончательный ответ

$$x(t) = \exp(-\delta t)[u_0 \cos(\omega_0 t) + v_0 \sin(\omega_0 t)].$$

Сравним полученное нами решение с *точным* решением

$$x(t) = \exp(-\delta t)[u_0 \cos(\sqrt{(\omega_0^2 - \delta^2)} \cdot t) + v_0 \sin(\sqrt{(\omega_0^2 - \delta^2)} \cdot t)].$$

Видно, что отличие заключается в том, что частота колебаний в приближенном решении равна частоте собственных колебаний контура без затуханий. Это не очень критично, так как под корнем находится разность квадратов, и даже

если $\delta = 0.1\omega_0$ (что свидетельствует о низкой добротности контура), то частота затухающих колебаний

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - (0.1\omega_0)^2} = \omega_0\sqrt{0.99} \approx 0.995\omega_0,$$

как видно, отличается от частоты незатухающих колебаний примерно на полпроцента. Эта оценка демонстрирует высокую точность приближенного ММА, если выполняются два самосогласованных требования: с одной стороны (см. первую главу пособия) для существования колебаний в системе необходимо, чтобы выполнялось требование $\omega_0^2 > \delta^2$; с другой стороны, сама возможность использования ММА выдвигает требование малости параметра μ в правой части уравнения колебаний, а $\mu = 2\delta/\omega_0$. Таким образом, как и следовало ожидать, тщательное выполнение условий применимости метода является залогом его точности.

Задача № 22. Генератор. Уравнение, описывающее электрические колебания в (ламповом) генераторе, было впервые исследовано Ван-дер-Полем. По этой причине это уравнение названо в честь его имени

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2x = \epsilon(1 - x^2)\frac{dx}{dt}. \quad (4.19)$$

Обратите внимание на то, что в этом пособии мы впервые сталкиваемся с нелинейным слагаемым в дифференциальном уравнении, описывающим нелинейное затухание, а именно

$$x^2\frac{dx}{dt}.$$

Иследуем это уравнение посредством ММА. Для этого сначала выберем новый масштаб времени. Так как описываемая система является автоколебатель-

ной (генератор сам вырабатывает колебания, они не являются для него вынужденными), то логично взять период собственных колебаний осциллятора без затуханий в качестве масштабного множителя $\tau = \omega_0 t$. Преобразованное уравнение

$$x'' + x = \mu(1 - x^2)x', \quad \mu = \frac{\epsilon}{\omega_0} \ll 1.$$

Произведем стандартную замену для $x(\tau)$ и $x'(\tau)$, и запишем первое укороченное уравнение (громоздкие вычисления опущены)

$$\langle u' \rangle = \mu \left[\frac{u}{2} - \frac{u^3}{8} - 3\frac{uv^2}{8} + 2\frac{uv^2}{8} \right].$$

С целью самопроверки читателя в этом уравнении нарочно не приведены подобные слагаемые, и вся сумма ненулевых интегралов записана без сокращений. Это выражение можно (и для дальнейшего — нужно) преобразовать к более удобному виду

$$\langle u' \rangle = \mu \frac{u}{2} \left[1 - \frac{u^2}{4} - \frac{v^2}{4} \right] = \mu \frac{u}{2} \left[1 - \frac{A^2}{4} \right].$$

Здесь продемонстрирован один из анонсированных ранее приёмов, значительно облегчающий дальнейший анализ задачи, и заключающийся в том, чтобы объединять сумму квадратов u , v в квадрат амплитуды соответствующей гармоники $A^2 = u^2 + v^2$. Вычисления второй медленно меняющейся амплитуды $\langle v' \rangle$ дают похожее, симметричное уравнение, дополняющее систему укороченных уравнений

$$\begin{cases} \langle u' \rangle = \mu \frac{u}{2} \left[1 - \frac{A^2}{4} \right], \\ \langle v' \rangle = \mu \frac{v}{2} \left[1 - \frac{A^2}{4} \right]. \end{cases} \quad (4.20)$$

Очевидное удобство такого представления укороченных уравнений сразу позво-

ляет вычислить стационарные амплитуды

$$u_1 = 0, \quad v_1 = 0;$$

$$u_2^2 + v_2^2 = 4.$$

Исследуем стационарные амплитуды на устойчивость. Начинать необходимо, конечно, с анализа нулевой амплитуды, так как этот вариант на порядок проще, чем любой другой

$$a_{11} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \right)_{u_1, v_1} = \frac{\mu}{2}, \quad a_{12} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v} \right)_{u_1, v_1} = 0,$$

$$a_{21} = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial u} \right)_{u_1, v_1} = 0, \quad a_{22} = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial v} \right)_{u_1, v_1} = \frac{\mu}{2}.$$

Тогда в соответствии с (4.15)

$$\lambda_1 = \frac{\mu}{2}, \quad \lambda_2 = 0.$$

Это значит, что стационарная амплитуда колебаний $u_1 = 0, v_1 = 0$ является неустойчивой. И это ожидаемый результат, потому что мы изучаем генератор, а задача генератора — вырабатывать колебания, поэтому неустойчивость нулевой амплитуды подтверждает правильность наших рассуждений.

Анализ второй амплитуды $A_2^2 = 4$ значительно осложнен громоздкими математическими преобразованиями. Тем не менее мы знаем полезное свойство (см. вторую главу пособия) колебательных систем, что устойчивые и неустойчивые положения равновесия, обусловленные видом потенциальной энергии, всегда чередуются. Это значит, что если мы доказали, что $A_1^2 = 0$ соответствует неустойчивому состоянию системы, то A_2^2 должна соответствовать устойчивому коле-

бательному режиму. Конечно, это нестрогое обоснование результата, однако в случае уравнения Ван-дер-Поля — правильное.

Подведем краткий итог этой задаче. Уравнение Ван-дер-Поля описывает колебания в нелинейной системе, для которой существует одна отличная от нуля устойчивая амплитуда колебаний и неустойчивая нулевая стационарная амплитуда. При функционировании этой колебательной системы реализуется так называемый "мягкий" режим возбуждения генератора, т.е. колебания плавно нарастают от нуля до конечного значения. Задача решена.

Задача № 23. Качели. Решим задачу о вынужденных колебаниях в линейной системе при одновременном параметрическом и внешнем силовом воздействиях. Мы будем изучать подобные колебания на примере электрической цепи, изображённой на рис. 4.2.

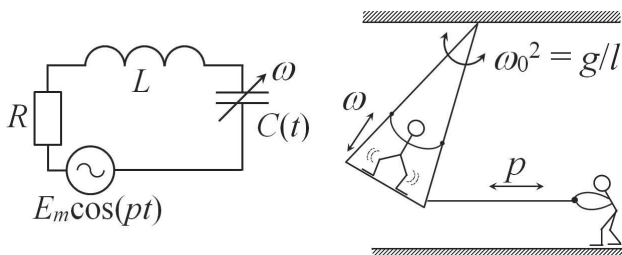


Рис. 4.2. Электрическая цепь (слева) и её механический аналог (справа) (к задаче № 23)

В этой задаче мы впервые сталкиваемся с параметрическим способом возбуждения колебаний, который заключается в периодическом варьировании некоторого параметра задачи. В изображенной электрической схеме незатухающие колебания в замкнутом контуре обусловлены двумя факторами. Во-первых, присутствует типичное внешнее силовое воздействие от источника ЭДС с амплитудой E_m и частотой p . Во-вторых, ёмкость конденсатора является варьируемым па-

раметром задачи, т.е. $C = C(t)$. Изменение ёмкости происходит с частотой ω , поэтому $C(t)$ имеет вид

$$C(t) = \frac{C_0}{1 + m \cos(\omega t)},$$

где $m \ll 1$ – безразмерный параметр модуляции, C_0 – константа. Большим преимуществом рассматриваемой задачи является то, что для неё существует интуитивно понятный механический аналог. Действительно, колебания в изучаемом электрическом контуре полностью аналогичны колебаниям качелей при одновременном параметрическом и силовом воздействии. Силовое воздействие заключается в том, что один из экспериментаторов, изображенных справа на рис. 4.2, посредством веревки с частотой p толкает качели. Параметрическое воздействие заключается в том, что второй экспериментатор приседает (подгибает ноги) и тем самым изменяет длину эквивалентного математического маятника l . Будем по мере надобности возвращаться к этой механической аналогии и в дальнейшем, а пока что напомним уравнение колебаний тока в электрическом контуре

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \int_{-\infty}^t \frac{I(\xi)[1 + m \cos(\omega \xi)]}{C_0} d\xi - E_m \cos(pt + \varphi) = 0.$$

Необходимо дать комментарий относительно вида внешней вынуждающей силы. Знак "минус" поставлен с целью согласования полярности источника напряжения и направления тока I в контуре. Начальная фаза φ описывает фазовое соотношение между силовым и параметрическим воздействиями. Для понимания необходимости введения φ удобно прибегнуть к механической модели и вспомнить личный опыт из детства, который говорит о том, что для параметрической раскачки качелей поджимать и распрямлять ноги надо не случайным образом, а в специальные моменты времени, иначе добиться максимальной амплитуды ко-

лебаний качелей будет невозможно. Как правило, наилучшего результата (увеличения амплитуды колебаний за счет параметрического воздействия) можно добиться, если частота параметрического воздействия в 2 раза больше частоты собственных колебаний ($\omega \approx 2\omega_0$), что тоже всем хорошо известно по личному опыту. Аналогично можно сказать и про раскачивание качелей внешней вынуждающей силой, — её ритм должен соответствовать собственным колебаниям качелей. Так, эти два рассуждения приводят нас к мысли о том, что и между собой внешнее и параметрическое воздействия тоже должны быть синхронизированы (согласованы), а частота внешнего воздействия должна быть близка к частоте собственных колебаний ($\omega_0/p \approx 1$). Это обстоятельство и нашло отражение в появлении разности фаз φ .

Как прежде, перейдем к новой переменной — электрическому заряду x и разделим уравнение на L

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dx}{dt} + \frac{1}{LC_0} [1 + m \cos(\omega t)] x = \frac{E_m}{L} \cos(pt + \varphi).$$

Введем новый масштаб времени $\tau = pt$, что уже оговаривалось ранее, но нелишним будет повторить: в случае вынужденных колебаний необходимо использовать масштаб, характерный для внешней вынуждающей силы. Далее вводим привычные и новые обозначения

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC_0}, \quad 2\delta = \frac{R}{pL}, \quad \chi = \frac{E_m}{p^2L}, \quad \frac{\omega_0^2}{p^2} = (1 - \zeta).$$

Здесь введены новые переменные χ — амплитуда внешней вынуждающей силы, и ζ — расстройка частоты. Эта величина мала $\zeta \ll 1$, потому что

$$\text{если } \frac{\omega_0}{p} \approx 1, \quad \text{то } \left(\frac{\omega_0}{p}\right)^2 \rightarrow 1.$$

Преобразованное уравнение имеет вид

$$x'' + 2\delta x' + (1 - \zeta)[1 + m \cos(2\tau)]x = \chi \cos(\tau + \varphi).$$

Раскроем скобки и учтём, что произведение ζm является величиной большего порядка малости, чем все остальные параметры задачи, поэтому слагаемым $\zeta m \cos(2\tau)x$ можно пренебречь. Окончательный вид уравнения

$$x'' + x = \underbrace{-2\delta x' + \zeta x - m \cos(2\tau)x + \chi \cos(\tau + \varphi)}_{=\mu f(x, x')}.$$

Вычислим (опуская громоздкие вычисления) укороченные уравнения

$$\begin{cases} \langle u' \rangle = -\delta u - \frac{v\zeta}{2} - \frac{mv}{4} + \frac{\chi \sin(\varphi)}{2}, \\ \langle v' \rangle = -\delta v + \frac{u\zeta}{2} - \frac{mu}{4} + \frac{\chi \cos(\varphi)}{2}. \end{cases} \quad (4.21)$$

Следующий шаг предполагает вычисление стационарных амплитуд. В этой задаче мы сталкиваемся с тем, что нулевая стационарная амплитуда отсутствует. Причина тому заключается, конечно, в наличии внешней вынуждающей силы. Тем не менее найти стационарную амплитуду можно, если преобразовать систему уравнений к виду (приравняв нулю $\langle u' \rangle$, $\langle v' \rangle$)

$$\begin{cases} \delta u + \frac{v\zeta}{2} + \frac{mv}{4} = \frac{\chi \sin(\varphi)}{2}, \\ \delta v - \frac{u\zeta}{2} + \frac{mu}{4} = \frac{\chi \cos(\varphi)}{2}. \end{cases} \quad (4.22)$$

Приведем подобные слагаемые и подготовим систему к дальнейшему решению

$$\begin{cases} \delta u + v \left(\frac{\zeta}{2} + \frac{m}{4} \right) = \frac{\chi \sin(\varphi)}{2}, \\ u \left(\frac{m}{4} - \frac{\zeta}{2} \right) + \delta v = \frac{\chi \cos(\varphi)}{2}. \end{cases} \quad (4.23)$$

В настоящем случае нет перекрестных слагаемых (вида uv), поэтому систему можно решить любым подходящим методом, например, методом Крамера, для чего необходимо вычислить три определителя

$$\Delta_0 = \delta^2 - \left(\frac{m^2}{16} - \frac{\zeta^2}{4} \right),$$

$$\Delta_1 = \frac{\delta \chi \sin(\varphi)}{2} - \frac{\chi \cos(\varphi)}{2} \left(\frac{m}{4} + \frac{\zeta}{2} \right),$$

$$\Delta_2 = \frac{\delta \chi \cos(\varphi)}{2} - \frac{\chi \sin(\varphi)}{2} \left(\frac{m}{4} - \frac{\zeta}{2} \right),$$

а искомые стационарные амплитуды будут равны соответственно

$$u_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta_0}, \quad v_1 = \frac{\Delta_2}{\Delta_0}.$$

Заметим важное свойство полученных амплитуд — они обе пропорциональны $u_1 \sim \chi$, $v_1 \sim \chi$ амплитуде внешней вынуждающей силы. Чтобы продолжить анализ полученного решения, вычислим конечную амплитуду стационарного колебания $A^2 = u^2 + v^2$

$$A^2 = \left(\frac{4\delta^2 + \zeta^2 + \frac{m^2}{4} - 2\delta m \sin(2\varphi) + m\zeta \cos(2\varphi)}{\left[4\delta^2 - \left(\frac{m^2}{4} - \zeta^2 \right) \right]^2} \right) \chi^2. \quad (4.24)$$

Из этого выражения следует один важнейший вывод, а именно, если

$$\left(\frac{m^2}{4} - \zeta^2 \right) = 4\delta^2,$$

то в системе возникнет неограниченное нарастание амплитуды колебаний. Этот вывод важен тем, что подобная ситуация в принципе невозможна в случае обычного резонанса в системе с затуханием. Например, если рассмотреть случай резонанса в последовательном $R - L - C$ колебательном контуре, то амплитуда колебаний будет ограничена R , каким бы малым это сопротивление не было. А в случае вынужденных колебаний одновременно с параметрическим воздействием бесконечно большая амплитуда возможна, несмотря на наличие в контуре ненулевого сопротивления R . Это объясняется тем, что энергия, вносимая в контур за счет параметрического воздействия на C , компенсирует энергетические потери, возникающие в R , и рост амплитуды резонансных колебаний уже ничем не сдерживается. Поэтому при прочих равных условиях параметрический резонанс в технике всегда сильнее резонанса обычного, что может быть и полезно (усиление слабых сигналов) и опасно (разрушение аппаратуры под воздействием высокого напряжения) в зависимости от ситуации. Важно также обсудить размерность этого выражения. Заметьте, что параметр модуляции и расстройка частоты — безразмерные величины по условию задачи, а δ — это не декремент затухания, а тоже безразмерная величина, равная отношению периода внешней вынуждающей силы и характерного времени релаксации колебаний в контуре.

Вернёмся к обсуждению задачи. Выражение (4.24) слишком громоздкое, чтобы из него можно было сделать какие-то выводы. Поэтому мы рассмотрим лишь предельный случай резонанса, когда частота внешней вынуждающей силы рав-

на частоте собственных колебаний контура без потерь $p = \omega_0$, т.е. $\zeta = 0$. Тогда

$$A^2 = \left(\frac{4\delta^2 + \frac{m^2}{4} - 2\delta m \sin(2\varphi)}{\left[4\delta^2 - \frac{m^2}{4}\right]^2} \right) \chi^2. \quad (4.25)$$

Такой ответ тоже допускает множество вариантов, но все они являются промежуточными по отношению к двум предельным случаям, когда $\varphi = \pi/4$ и $\varphi = -\pi/4$. Эти два случая называются соответственно

$$(\varphi = \pi/4) \quad A_1 = \frac{\chi}{2\delta + \frac{m}{2}} \quad (\text{слабый резонанс}),$$

$$(\varphi = -\pi/4) \quad A_2 = \frac{\chi}{2\delta - \frac{m}{2}} \quad (\text{сильный резонанс}).$$

Отличие между слабым и сильным резонансом заключается в том, что при слабом резонансе часть энергии, которую получает система от внешнего источника (E), расходуется не на увеличение амплитуды колебаний, а безвозвратно передается источнику параметрического воздействия. В механическом примере с качелями это означает, что часть энергии экспериментатора, который стоит на земле, передаётся второму экспериментатору, а не идёт на увеличение амплитуды колебаний качелей. Заметьте, что в этом случае бесконечно большой амплитуды колебаний быть не может, так как источник параметрической накачки сам является эквивалентным сопротивлением, включённым последовательно в контур. В случае сильного резонанса внешнее силовое и параметрическое воздействия синхронизированы и вся энергия идет на усиление колебаний. В этом случае амплитуда колебаний способна безгранично расти со временем.

В связи с громоздкими математическими выкладками мы не будем здесь

производить анализ устойчивости полученной стационарной амплитуды. Заметим также напоследок, что мы решали задачу в линейном приближении, и это обуславливает возможность существования $A_2 \rightarrow \infty$. В реальных системах при заметном увеличении амплитуды колебаний начинают проявляться нелинейные свойства всех компонентов системы, в том числе и сопротивления (трения). Этот нелинейный рост потерь в конце концов сдерживает наращивание амплитуды колебаний. Об этом и пойдет речь в следующей классической задаче.

Задача № 24. Ограничение амплитуды параметрических колебаний за счет нелинейного затухания (трения). Дана схема, изображенная на рис. 4.3. Необходимо исследовать все колебательные режимы, возможные в данной системе, если сопротивление нелинейно зависит от силы тока, протекающего через него

$$R = R_0(1 + \beta_0 I^2).$$

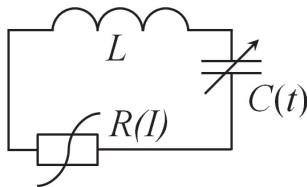


Рис. 4.3. Колебательный контур (к задаче № 24)

В этой цепи нет источника внешней вынуждающей силы, но есть (не изображён на схеме) источник внешней параметрической накачки (термин "накачка" официально используется в русскоязычной литературе, посвященной теории колебаний, по аналогии с английским термином "pump" — насос, помпа, использующимся повсеместно, в том числе и в физике лазеров). Источник (генератор) накачки может быть как механическим, так и электрическим. Для простоты

можно представлять себе кривошипный механизм, который периодически сближает и раздвигает обкладки плоского воздушного конденсатора C .

Начнем решение задачи со стандартного шага — запишем уравнение Кирхгофа для контура, используя заряд x в качестве переменной

$$L \frac{d^2x}{dt^2} + R_0 \frac{dx}{dt} \left(1 + \beta_0 \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right) + \frac{1}{C_0} (1 + m \cos(2\omega t)) x = 0.$$

Выберем новый масштаб времени $\tau = \omega t$, равный одному периоду колебания с частотой ω , при этом, как всегда, частота генератора параметрической накачки равна удвоенной частоте колебаний, которые необходимо усиливать. Преобразуем уравнение к виду

$$x'' + x = \underbrace{-2\delta x' - 2\delta\beta(x')^3}_{=\mu f(x,x')} + \zeta x - m \cos(2\tau)x,$$

где $\beta = \beta_0\omega^2$, $2\delta = R_0/(L\omega)$, $\zeta = 1 - \omega_0^2/\omega^2$. Опуская вычисления, приведем конечный вид укороченных уравнений

$$\begin{cases} \Phi(u, v) = -\delta \left(1 + \frac{3}{4}\beta A^2 \right) u - \frac{1}{2} \left(\frac{m}{2} + \zeta \right) v, \\ \Psi(u, v) = \frac{1}{2} \left(\zeta - \frac{m}{2} \right) u - \delta \left(1 + \frac{3}{4}\beta A^2 \right) v, \end{cases} \quad (4.26)$$

где снова $A^2 = u^2 + v^2$. Как всегда, мы получили систему дифференциальных уравнений, которую не удаётся проинтегрировать. Однако и в этом случае есть возможность найти стационарные состояния и исследовать их устойчивость. Первая стационарная амплитуда видна сразу — это нулевая амплитуда

$$u_1 = 0, \quad v_1 = 0.$$

Чтобы найти вторую амплитуду, преобразуем систему уравнений

$$\begin{cases} \delta \left(1 + \frac{3}{4}\beta A_2^2 \right) u_2 = -\frac{1}{2} \left(\frac{m}{2} + \zeta \right) v_2, \\ \frac{1}{2} \left(\zeta - \frac{m}{2} \right) u_2 = \delta \left(1 + \frac{3}{4}\beta A_2^2 \right) v_2. \end{cases} \quad (4.27)$$

Далее познакомимся с еще одним методом, позволяющим анализировать укороченные уравнения. Поделим уравнения одно на другое (это можно сделать, так как u_2, v_2 заведомо не равны нулю) и по свойству пропорции получим выражение

$$\delta^2 \left(1 + \frac{3}{4}\beta A_2^2 \right)^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{m^2}{4} - \zeta^2 \right),$$

откуда

$$(A_2^2)_{1,2} = \frac{4\beta}{3} \left(-1 \pm \frac{1}{2\delta} \sqrt{\frac{m^2}{4} - \zeta^2} \right).$$

Корень со знаком "минус" перед вторым слагаемым в скобке не имеет физического смысла, так как квадрат амплитуды оказывается отрицательным. По этой причине остается только один корень

$$A_2^2 = \frac{4\beta}{3} \left(\frac{1}{2\delta} \sqrt{\frac{m^2}{4} - \zeta^2} - 1 \right).$$

Это выражение, во-первых, позволяет вычислить непосредственно саму стационарную амплитуду, а, во-вторых, является условием существования этой, отличной от нуля, амплитуды

$$\zeta^2 < \frac{m^2}{4} - 4\delta^2. \quad (4.28)$$

Условие записано именно для расстройки частоты ζ потому, что параметры m и δ являются исходными параметрами задачи, а расстройку можно варьировать.

Исследуем вычисленные стационарные амплитуды на устойчивость. Как уже отмечалось ранее, удобнее всего исследовать состояние покоя с нулевой стационарной амплитудой. Для этого вычислим коэффициенты в рядах Тейлора

$$a_{11} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \right)_{u_1, v_1} = -\delta, \quad a_{12} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v} \right)_{u_1, v_1} = -\frac{1}{2} \left(\frac{m}{2} + \zeta \right),$$

$$a_{21} = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial u} \right)_{u_1, v_1} = \frac{1}{2} \left(\zeta - \frac{m}{2} \right), \quad a_{22} = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial v} \right)_{u_1, v_1} = -\delta.$$

Подставим вычисленные коэффициенты в систему уравнений, описывающих эволюцию возмущений ξ , η стационарных амплитуд, после чего отыщем нетривиальные решения, приравняв нулю определитель системы

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \delta^2 + \frac{1}{4} \left(\zeta^2 - \frac{m^2}{4} \right) = 0.$$

Это квадратное уравнение позволяет вычислить λ . Как мы помним, если $\Re(\lambda) < 0$, то соответствующая стационарная амплитуда является устойчивой, а в противном случае — неустойчивой. Однако полученное уравнение является не простым, а параметрическим, и выводы относительно устойчивости будут сильно зависеть от комбинации параметров задачи. Поэтому мы несколько поменяем подход к этой части проблемы и проанализируем уравнение с формальной, геометрической точки зрения, а именно, зададимся вопросом о том, в каком случае оба корня параболы вида

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

меньше нуля. Для этого одновременно должно выполняться два условия

$$a > 0, \quad b > 0.$$

Первое из них удовлетворяется автоматически, так как δ описывает диссипативные свойства системы и по этой причине $a = 2\delta$ всегда больше нуля. Для коэффициента b ситуация сложнее из-за комбинации параметров, а именно необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$\delta^2 + \frac{1}{4} \left(\zeta^2 - \frac{m^2}{4} \right) > 0.$$

Как и раньше, расстройка по частоте является изменяемым в эксперименте параметром, поэтому сформулируем это неравенство именно для ζ

$$\zeta^2 > \frac{m^2}{4} - 4\delta^2. \quad (4.29)$$

Мы получили условие (4.29) устойчивости нулевой стационарной амплитуды $A_1^2 = 0$, которое очень логично напрямую противоречит условию (4.28) существования ненулевой амплитуды $A_2^2 \neq 0$. Этот результат следует понимать следующим образом. Когда расстройка по частоте большая (т.е. выполняется (4.29)), существует устойчивая нулевая амплитуда, а когда расстройка по частоте становится маленькой (начинает выполняться (4.28)), нулевая стационарная амплитуда становится неустойчивой, зато появляется ненулевая и (по свойству чередования "устойчивое/неустойчивое") устойчивая стационарная амплитуда. Эта закономерность изображена на кривой параметрического резонанса, изображенной на рис. 4.4.

Обсуждение задачи. Из кривой параметрического резонанса видно, что отличные от нуля колебания в контуре, изображенном на рис. 4.3, могут существовать исключительно благодаря энергии генератора накачки только в том случае, если частота генератора накачки отличается от собственной частоты контура не больше, чем регламентировано условием (4.28).

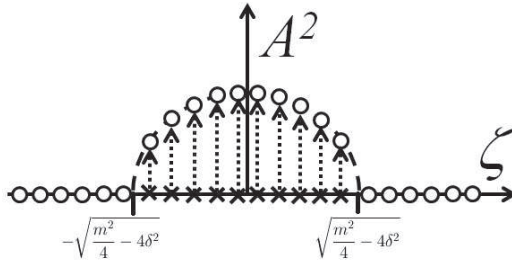


Рис. 4.4. Кривая параметрического резонанса. Устойчивые состояния обозначены кружками, неустойчивые — крестами

В противном случае колебания затухают и никаких колебаний в контуре не остается. Этот факт принципиально отличает вынужденные колебания в контуре от параметрических. Действительно, вынужденные колебания в контуре существуют всегда в силу того, что источник воздействия является частью колебательного контура. В случае параметрических колебаний генератор накачки не является частью колебательного контура, а лишь изменяет один из его параметров (в нашем случае — механическим способом сближает и раздвигает обкладки воздушного конденсатора). Поэтому энергия генератора накачки может поглощаться контуром и расходоваться на поддержание колебаний только тогда, когда выполняется выгодное фазовое соотношение между параметрическим воздействием и существующими колебаниям в контуре.

Другим существенным выводом является то, что максимальная амплитуда A_2 является конечной величиной даже при резонансе частот $\zeta = 0$ (в предыдущей задаче амплитуда неограниченно возрастала). Это обусловлено, конечно, наличием нелинейного сопротивления (трения). Задача решена.

Задача № 25. Параметрический преобразователь (генератора второго рода) с нелинейной ёмкостью в виде сегнетоэлектрического конденсатора.

Постановка и обоснование задачи. Как известно, во всех электронных устройствах накачка осуществляется не механическим, а электрическим способом. Для этого в колебательный контур включается специальный электрический генератор накачки, как это показано на рис. 4.5.

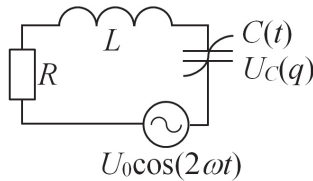


Рис. 4.5. Параметрический преобразователь с нелинейной ёмкостью

Такая электрическая схема называется параметрическим генератором второго рода именно потому, что изменение нелинейного параметра цепи (в данном случае — нелинейной ёмкости C) происходит под действием электрического напряжения, а не механического воздействия, как это принято в генераторах первого рода. Генератор параметрической накачки имеет частоту, равную удвоенной частоте сигнала, который планируется усиливать. Таким образом, цель параметрического генератора — не генерировать высокочастотное колебание с частотой 2ω , а усиливать полезный сигнал на частоте ω . Конечно, заранее сказать, какой будет частота полезного сигнала, нельзя, потому что современные модулированные сигналы представляют собой сразу некоторую полосу частот, а не отдельную частоту ω . Однако это не критично, так как ширина этой полосы всегда по абсолютной величине много меньше ω , и поэтому "ювелирной точности" в настройке генератора накачки на частоту, в точности равную удвоенной частоте несущей, не требуется. В качестве нелинейной ёмкости рассмотрим плоский конденсатор, рабочий зазор которого заполнен сегнетоэлектриком. Как известно из ранних работ академика И.В. Курчатова, сегнетоэлектрики обладают свойством

нелинейной зависимости поляризации от напряженности электрического поля $\vec{P} = f(\vec{E})$. Это находит отражение в нелинейной вольт-фарадной характеристике конденсатора (см. рис. 4.6).

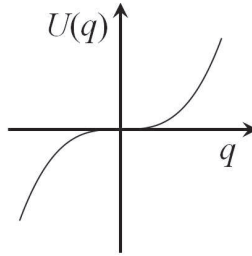


Рис. 4.6. Нелинейная вольт-фарадная характеристика сегнетоэлектрического конденсатора

Как видно из графика, функция имеет вид кубической параболы

$$U_C(q) = \frac{1}{C_0}(q + \gamma_0 q^3).$$

Запишем уравнение Кирхгофа для этого контура

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C_0}(q + \gamma_0 q^3) = U_0 \cos(2\omega t).$$

Уделим внимание одной принципиальной сложности, связанной с решением этого уравнения. Отличие полученного уравнения от изученных ранее заключается в том, что в правой части содержится величина $U_0 \cos(2\omega t)$, которую нельзя считать малой величиной, и, соответственно, нельзя использовать МММА без предварительной подготовки. Причина, по которой нельзя пренебречь этим слагаемым, очень проста — генератор накачки по сути является источником вынужденных колебаний, он непосредственно включен в контур. Поэтому даже

после замены переменных ($\tau = \omega_0 t$) в уравнении

$$x'' + x = \underbrace{\zeta x - 2\delta x' - \gamma_0 x^3}_{=\mu f(x, x')} + \tilde{U} \cos(2\tau)$$

нельзя пренебречь слагаемым $\tilde{U} \cos(2\tau)$. Чтобы решить задачу, необходимо избавиться от этого слагаемого. Для этого введём новую переменную

$$y = x + \tilde{A} \cos(2\tau)$$

и подставим её в исходное уравнение. Выберем значение константы \tilde{A} такое, чтобы сократилось слагаемое с множителем \tilde{U} . При этом полностью избавиться от удвоенной частоты не получится, так как в системе происходят два процесса: с собственной частотой ω_0 и удвоенной частотой 2ω .

Необходимо найти решение y и исследовать, будет ли оно нулевым, стационарным, отличным от нуля, устойчивым или неустойчивым.

Задача № 26. Генератор второго рода с варикапом

Предварительное обсуждение. Результат предыдущей задачи показывает [6], что состояние покоя в колебательном контуре, изображенном на рис. 4.5, является устойчивым, а стационарной амплитуды, отличной от нуля, в системе не существует ни при каких значениях параметров цепи. Причина, по которой в контуре с сегнетоэлектрическим конденсатором не возбуждаются устойчивые отличные от нуля колебания, заключается в том, что ёмкость за один период накачки изменяется два раза при частоте накачки вдвое выше собственной частоты системы. Следовательно, условия параметрического возбуждения в такой системе не выполняются: ёмкость меняется чаще, чем это необходимо (4 раза за период собственных колебаний контура вместо 2). Чтобы устранить этот дефект,

нужно использовать *несимметричную* функцию $U_C(q)$. Для этой цели можно воспользоваться введением напряжения смещения на ёмкость — при этом рабочая точка сместится из нуля кривой $U_C(q)$, однако более продуктивным способом решения задачи является использование варикапа — специального полупроводникового диода, использующегося в качестве нелинейной ёмкости, что отражено в его названии (“varicap” (англ.) от “variable capacity” — варьируемая ёмкость). Принцип работы варикапа основан на том, что любой закрытый $p-n$ переход обладает некоторой ёмкостью. Чем больше приложено к диоду обратное напряжение, — тем шире обедненная зона $p-n$ перехода (та область, в которой находится мало основных носителей заряда). Такое (регулируемое величиной обратного напряжения) увеличение обедненной зоны эквивалентно раздвиганию обкладок плоского конденсатора. Возможность быстрого переключения варикапа привела к тому, что появился обширный класс устройств параметрических усилителей.

Необходимость в параметрических усилителях обусловлена потребностью их практического применения, в частности, необходимостью повышения дальности действия радиолокационных станций дальнего обнаружения самолетов и межконтинентальных баллистических снарядов, необходимостью увеличения дальности действия станций слежения за космическими ракетами и искусственными спутниками Земли, радиотелескопов [7]. С середины 50-х гг. XX столетия возникла потребность в управлении искусственными спутниками Земли, а, как известно, окна прозрачности (частотные диапазоны, которые пропускаются атмосферой) находятся в СВЧ-диапазоне. Большая удаленность космических объектов обуславливает сильную зашумленность полезных сигналов. Применение стандартных методов усиления (электронно-вакуумные приборы СВЧ) часто не даёт желаемых результатов, потому что сами усилительные приборы обла-

дают высоким уровнем шумовой температуры. Например, наилучшие образцы ламп бегущей волны (ЛБВ) обладают шумовой температурой 400 – 600 °К, что соответствует коэффициенту шумов 4 – 5 дБ. В связи с этим применение "холодных" (при комнатной температуре) параметрических колебательных контуров для усиления СВЧ и видео-сигналов нашло повсеместное распространение. Следует, конечно, отдавать себе отчет в том, что техника СВЧ сильно отличается по конструкции от низкочастотной аппаратуры. В качестве колебательных систем в технике СВЧ используются волноводы и резонаторы, а все элементы колебательного контура обладают распределенными параметрами. В качестве демонстрации на рис. 4.7 приведены схематическое изображение и фотография реального промышленного полупроводникового параметрического усилителя.

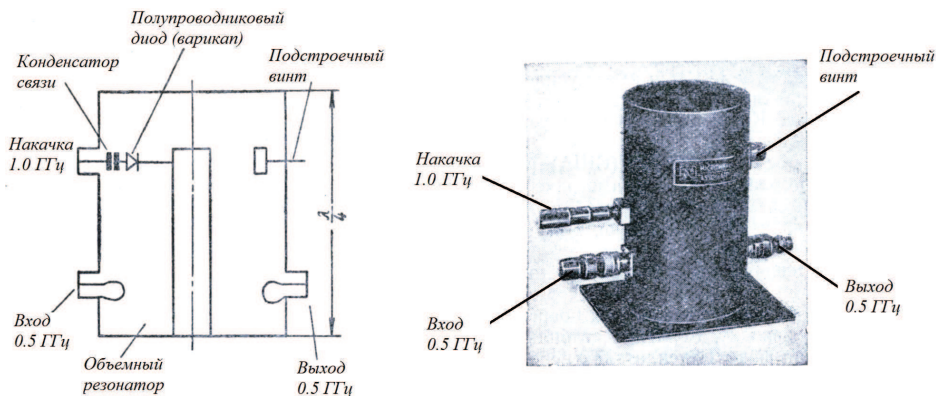


Рис. 4.7. Схематическое изображение (слева) и внешний вид (справа) промышленного полупроводникового параметрического усилителя типа МА-1С дециметрового диапазона

Как видно из схемы, параметрический усилитель представляет собой объемный четвертьволновый (высота $\lambda/4$) резонатор, в котором происходит взаимодействие стоячих электромагнитных волн, образованных источником входного сигнала (например, от локатора) и генератором накачки (чья энергия в итоге идет

на усиление слабого полезного входного сигнала). Ввод и вывод электромагнитной энергии колебаний в резонаторе осуществляются петлями связи (видны на схематическом изображении), являющимися, по сути, излучающей и приёмной антеннами. Подробнее об устройстве СВЧ-техники рассказывается в отдельном учебном курсе, а для первого ознакомления рекомендуем прочитать соответствующую главу из [8].

Постановка задачи. Имеется последовательный колебательный контур с варикапом, рабочий участок вольт-фарадной характеристики которого описывается выражением

$$U_C = \frac{1}{C_0}(q + \beta q^2 + \gamma_0 q^3), \quad \beta > 0, \quad \gamma_0 > 0.$$

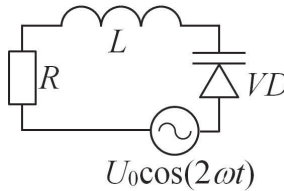


Рис. 4.8. Колебательный контур с сосредоточенными параметрами, являющийся эквивалентной схемой полупроводникового параметрического усилителя

Схема колебательного контура изображена на рис. 4.8 и включает в себя варикап (нелинейную ёмкость), сопротивление R , катушку индуктивности L и генератор накачки, являющийся источником гармонических колебаний с частотой, равной двойной частоте собственных колебаний контура.

Необходимо составить уравнения электрических колебаний в контуре и подготовить задачу к решению посредством МММА (с целью самопроверки приво-

дим ниже правильное выражение)

$$x'' + x = \underbrace{\zeta x - \beta x^2 - \gamma_0 x^3 - 2\delta x'}_{\mu f(x, x')} + \tilde{U} \cos(2\tau).$$

Это уравнение получено в результате пренебрежения членами второго порядка малости

$$(1 - \zeta)\gamma_0 = \gamma_0, \quad (1 - \zeta)\beta = \beta.$$

Необходимо решить это уравнение, найти стационарные амплитуды и исследовать их на устойчивость, после чего результат представить в виде кривой параметрического резонанса. Заметьте, что в этой задаче вольт-фарадная характеристика нелинейной ёмкости не является симметричной, поэтому и результат задачи должен существенно отличаться от результата предыдущей задачи.

Задача № 27. Исследовать с помощью МММА колебания в ламповом генераторе с учётом нелинейности анодного тока от управляющего напряжения. Запишем характеристику электронной лампы в виде кубического полинома [9]

$$i_a = i_{a0} + S_0 u - S_2 u^3.$$

Тогда преобразованное уравнение колебаний будет иметь вид модифицированного уравнения Ван-Дер-Поля

$$x'' + x = \mu_0 [-1 + \alpha(1 + \beta x - x^2)] x'.$$

Исследуйте это уравнение, учитывая, что $\alpha\beta \sim 1$, т.е. этим членом пренебрегать нельзя.

Задача № 28. Исследовать с помощью МММА колебания в контуре с нелинейным трением, если уравнение колебаний имеет вид

$$x'' + \delta(x')^2 + \omega_0^2 x = 0.$$

Задача № 29. Исследовать с помощью МММА колебания в контуре с нелинейной ёмкостью и трением, если уравнение колебаний заряда в системе имеет вид

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} = -\frac{1}{C} q + \alpha q^2 - \beta \frac{dq}{dt} + \gamma \left(\frac{dq}{dt} \right)^2.$$

Глава 5

Малые колебания в линейных системах с несколькими степенями свободы

5.1. Предварительные замечания

Как известно из курса теоретической механики [10], число степеней свободы — это наименьшее число обобщенных координат, необходимое для полного описания конфигурации системы. Например, для однозначного определения конфигурации математического маятника необходима одна обобщенная координата — угол отклонения подвеса от вертикали. При этом декартовы координаты (x, y) материальной точки с массой m однозначно определяются по этому углу. В механике с целью упрощения правило определения числа степеней свободы формулируют так: “Число степеней свободы равно минимальному числу закреплений, которые необходимо сделать в системе для прекращения колебаний в ней.” Для того же математического маятника достаточно сделать одно закрепление, а именно зафиксировать положение материальной точки с массой m .

До настоящего времени мы изучали колебания в системах с одной степенью свободы, однако существует большой класс устройств, состоящих из нескольких связанных между собой подсистем. Колебания в таких системах значительно отличаются от рассмотренных ранее. Настоящая глава посвящена вопросам теории колебаний в системах с N степенями свободы, однако подавляющее большинство задач будет решаться для систем с двумя степенями свободы. Объектами исследования будут связанные электрические колебательные контуры. Для электрических контуров правило определения числа степеней свободы N формулируется так: "Число N равно минимальному числу разрывов цепи, необходимых для полного прекращения колебаний."

5.2. Математический аппарат

Математический аппарат настоящей главы всецело опирается на принцип наименьшего действия. Вся теория строится на свойствах систем с $N = 2$ (двумя) степенями свободы и в дальнейшем обобщается на произвольное N . Настоящую главу следует начать с напоминания о том, что колебания — это ограниченные повторяющиеся движения около некоторого среднего положения [6]. Это универсальное определение подразумевает, что упомянутое "некоторое среднее положение" является положением устойчивого равновесия, а, значит, потенциальная энергия U системы в окрестности этого среднего положения должна иметь минимум. Пользуясь ландшафтной аналогией, удачно использованной во 2-й главе настоящего пособия, можно сказать, что U в окрестности среднего положения должна иметь форму ямы, что нашло свое отражение в часто используемом словосочетании "потенциальная яма". Так как потенциальная энергия по определению является функцией только координат и в системе с $N = 2$ определены две обобщенные координаты q_1 и q_2 , то потенциальная яма опишется

положительно определённой квадратичной формой

$$U(q_1, q_2) = b_{11}q_1^2 + 2b_{12}q_1q_2 + b_{22}q_2^2,$$

$$b_{11} > 0, \quad b_{22} > 0, \quad b_{11}b_{22} > b_{12}^2.$$

Идея и обоснование этого утверждения принадлежат Дирихле, и мы здесь не приводим соответствующих поясняющих комментариев, однако заметим, что $U(q_1, q_2)$ имеет "вид параболы", и функцию любой потенциальной ямы в *окрестности* положения равновесия можно с высокой точностью описать квадратичной функцией. Заметим также, что в предложенной записи коэффициенты $b_{12} = b_{21}$ равны между собой, что является отражением третьего закона Ньютона, согласно которому две подсистемы посредством связи воздействуют друг на друга в равной мере.

Аналогично записывается вид кинетической энергии T , которая по определению является функцией только лишь обобщенных скоростей. Для системы с $N = 2$

$$T(\dot{q}_1, \dot{q}_2) = a_{11}\dot{q}_1^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_{22}\dot{q}_2^2,$$

$$a_{11} > 0, \quad a_{22} > 0, \quad a_{11}a_{22} > a_{12}^2.$$

Функции потенциальной и кинетической энергии входят в состав функции Лагранжа \mathcal{L} ;

$$\mathcal{L} = T - U,$$

которая используется для составления уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (5.1)$$

Функция $F = F(\dot{q}_i)$ — диссипативная функция системы. Для простоты сначала рассмотрим системы без трения (затухания), когда $F = 0$. Подставим уравнения для U , T в (5.1) (все слагаемые поделены на общий множитель, равный 2)

$$\begin{cases} i = 1, & a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + b_{11}q_1 + b_{12}q_2 = 0, \\ i = 2, & a_{22}\ddot{q}_2 + a_{12}\ddot{q}_1 + b_{12}q_1 + b_{22}q_2 = 0. \end{cases} \quad (5.2)$$

Мы получили систему двух линейных дифференциальных уравнений второго порядка, решив которую получим интересующие нас функции $q_1(t)$ и $q_2(t)$, описывающие малые колебания в соответствующих подсистемах. Общий вид решений этой системы уравнений определяется тем, что исследуемые уравнения имеют 2-й порядок, а общим решением уравнения 2-го порядка является гармоническая функция вида

$$A \cos(\omega t).$$

Тогда в качестве общего решения системы уравнений предлагается следующее:

$$\begin{cases} q_1 = A \cos(\omega t), \\ q_2 = kA \cos(\omega t). \end{cases} \quad (5.3)$$

Физический смысл (5.3) заключается в том, что мы в изучаемой системе допускаем существование некоторого произвольного колебания с частотой ω , причем энергия этого колебания распределена между двумя подсистемами в соотношении $1 : k^2$, так как энергия колебания пропорциональна квадрату его амплитуды.

Подставим общее решение (5.3) в исходную систему (5.2) и получим

$$\begin{cases} A(b_{11} - \omega^2 a_{11}) + kA(b_{12} - \omega^2 a_{12}) = 0, \\ A(b_{12} - \omega^2 a_{12}) + kA(b_{22} - \omega^2 a_{22}) = 0. \end{cases} \quad (5.4)$$

Эта система алгебраических уравнений имеет тривиальное ($A = 0$) и нетривиальное решения. Для существования нетривиального решения необходимо потребовать равенства нулю определителя системы

$$\begin{vmatrix} (b_{11} - \omega^2 a_{11}) & (b_{12} - \omega^2 a_{12}) \\ (b_{12} - \omega^2 a_{12}) & (b_{22} - \omega^2 a_{22}) \end{vmatrix} = 0.$$

Раскроем определитель и получим биквадратное уравнение

$$\omega^4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) - \omega^2(a_{22}b_{11} + a_{11}b_{22} - 2a_{12}b_{21}) + (b_{11}b_{22} - b_{12}^2) = 0. \quad (5.5)$$

Это уравнение легко сводится к квадратному простой заменой переменных вида $x = \omega^2$. Решением этого уравнения являются две частоты колебаний $\omega_{1,2}$, которые зависят только от параметров системы a_{ij} , b_{ij} , и поэтому являются инвариантами системы относительно преобразования независимых координат. Это замечание является важным, поскольку изначально обобщенные координаты для решения задачи методом Лагранжа выбираются по принципу удобства, т.е. произвольным образом. Полученные частоты $\omega_{1,2}$ не зависят от выбора координат и называются *нормальными* частотами. В соответствии с найденными значениями парциальных частот можно найти соответствующие коэффициенты

перераспределения энергии колебаний между двумя подсистемами

$$\begin{cases} k_1 = -\frac{\omega_1^2 a_{11} - b_{11}}{\omega_1^2 a_{22} - b_{12}}, \\ k_2 = -\frac{\omega_2^2 a_{11} - b_{11}}{\omega_2^2 a_{22} - b_{12}}. \end{cases} \quad (5.6)$$

Таким образом, каждая из обобщенных координат q_1, q_2 в системе с двумя степенями свободы совершает сложное движение, являющееся суперпозицией двух гармонических колебаний с парциальными частотами

$$\begin{cases} q_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2), \\ q_2 = k_1 A_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + k_2 A_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2). \end{cases} \quad (5.7)$$

Постоянные $A_1, A_2, \alpha_1, \alpha_2$ определяются из начальных условий задачи. Выражения (5.7) называются собственными векторами задачи.

5.3. Виды связей в колебательной системе

В курсе теоретической механики вводятся понятия силовой и инерционной связи. Эти термины призваны определить степень влияния двух и более колебательных подсистем друг на друга. В нашем курсе колебания изучаются на примере электрических контуров, поэтому мы в дальнейшем будем пользоваться следующими эквивалентами:

силовая связь — емкостная связь,

инерционная связь — индуктивная связь.

Следует отметить, что указанные термины являются не более чем удобными словами, особенно если схема колебательной системы имеет подходящее изображение. На самом деле эти термины лишены смысла, напрямую унаследованного от понятий "индукция" и "емкость", потому что конечный вид используемых уравнений Лагранжа зависит от выбора обобщенных координат, которые, как уже указывалось, могут быть выбраны произвольно. Поэтому для уравнений в конкретных обобщенных координатах коэффициенты связи

$$\begin{cases} \alpha_L^2 = \frac{a_{12}^2}{a_{11}a_{22}} & \text{— коэффициент индуктивной связи,} \\ \alpha_C^2 = \frac{b_{12}^2}{b_{11}b_{22}} & \text{— коэффициент емкостной связи} \end{cases}$$

могут иметь неожиданный вид, например, α_C может зависеть от коэффициента взаимной индуктивности $M = \sqrt{L_1 L_2}$, что неудачно сочетается с классическим понятием емкостной связи в курсе радиоэлектроники. Этому обстоятельству не следует придавать особого значения.

5.4. Колебания в связанных электрических контурах

Задача № 30. Индуктивно связанные колебательные контуры усилителя промежуточной частоты. Изучим работу электрической схемы, изображенной на рис. 5.1, для чего найдем значения парциальных и нормальных частот, коэффициенты связи и собственные векторы системы.

Проще всего начинать решение задачи с определения парциальных частот изучаемой системы. Под парциальной частотой в системе с N степенями свободы понимается частота собственных колебаний одной подсистемы после от-

ключения всех остальных $N - 1$ систем от нее. В нашем случае $N = 2$, и парциальные частоты левого и правого контуров (при симметричном отключении противоположного контура) будут

$$n_1^2 = \frac{1}{L_1 C_1}, \quad n_2^2 = \frac{1}{L_2 C_2}.$$

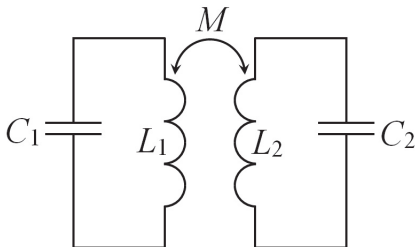


Рис. 5.1. Индуктивно связанные контуры

Далее выберем удобные обобщенные координаты для описания всех движений в системе. Как правило, в качестве q_1 и q_2 удобно выбрать заряды на соответствующих конденсаторах C_1 , C_2 . Тогда потенциальная энергия системы определяется энергией электрического поля, запасенного в конденсаторах

$$U(q_1, q_2) = \frac{q_1^2}{2C_1} + \frac{q_2^2}{2C_2},$$

откуда коэффициенты

$$b_{11} = \frac{1}{2C_1}, \quad b_{12} = 0, \quad b_{22} = \frac{1}{2C_2}.$$

Запишем кинетическую энергию системы, являющуюся энергией магнитного

поля катушек

$$T(\dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{L_1 \dot{q}_1^2}{2} + \frac{L_2 \dot{q}_2^2}{2} + M \dot{q}_1 \dot{q}_2,$$

откуда коэффициенты

$$a_{11} = \frac{L_1}{2}, \quad a_{12} = \frac{M}{2}, \quad a_{22} = \frac{L_2}{2}.$$

Найденные коэффициенты позволяют сразу вычислить коэффициенты связи

$$\mathfrak{a}_L^2 = \frac{M^2}{L_1 L_2}, \quad \mathfrak{a}_C^2 = 0.$$

В нашем случае у контуров нет емкостной связи (отсутствует общий конденсатор, входящий в состав обоих контуров), и поэтому коэффициент $\mathfrak{a}_C = 0$. Подставим выражения для потенциальной и кинетической энергии в уравнение Лагранжа и получим систему

$$\begin{cases} i = 1, & L_1 \ddot{q}_1 + M \ddot{q}_2 + \frac{q_1}{C_1} = 0, \\ i = 2, & L_2 \ddot{q}_2 + M \ddot{q}_1 + \frac{q_2}{C_2} = 0. \end{cases} \quad (5.8)$$

Подставим решение в общем виде и поставим условие существования нетривиального решения, что приведет нас к биквадратному уравнению

$$\omega^4(L_1 L_2 - M^2) - \omega^2 \left(\frac{L_2}{C_1} + \frac{L_1}{C_2} \right) + \frac{1}{C_1 C_2} = 0.$$

Разделим левую и правую части уравнения на $L_1 L_2$ и воспользуемся введенными ранее удобными обозначениями

$$\omega^4(1 - \mathfrak{a}_L^2) - \omega^2(n_1^2 + n_2^2) + n_1^2 n_2^2 = 0.$$

Решим это уравнение для случая двух одинаковых контуров ($L_1 = L_2, C_1 = C_2, n_1 = n_2 = n$)

$$\omega_{1,2} = \frac{n}{\sqrt{1 \pm \kappa_L}}$$

Зная нормальные частоты колебаний, можно по формулам (5.6) вычислить коэффициенты распределения энергии $k_1, 2$ и тем самым полностью определить собственные векторы колебаний в системе по формуле (5.7).

Сделаем небольшой комментарий к полученному результату, для чего качественно изобразим результирующую амплитудно-частотную характеристику (модуль комплексного коэффициента передачи $|K(j\omega)|$) исследуемых контуров на рис. 5.2. Как видно из графика АЧХ, при равенстве парциальных частот

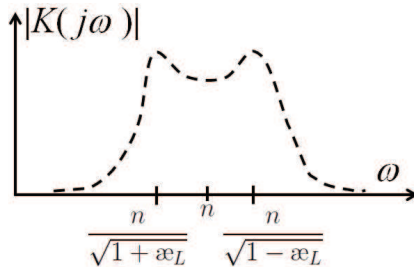


Рис. 5.2. Столбовидная функция АЧХ двух индуктивно связанных колебательных контуров

нормальные частоты тем сильнее отличаются друг от друга, чем сильнее магнитная связь между катушками. Этот феномен обусловлен взаимным влиянием подсистем друг на друга, в связи с чем уместно провести интересную параллель между полученным результатом и квантово-механическим принципом Паули, согласно которому идентичные фермионы (например, электроны в макроскопическом физическом теле) не могут одновременно находиться в одном и том же квантовом состоянии.

Задача решена.

Задача № 31. В качестве демонстрации применим полученные знания к анализу колебаний в схеме, приведенной на рис. 5.3.

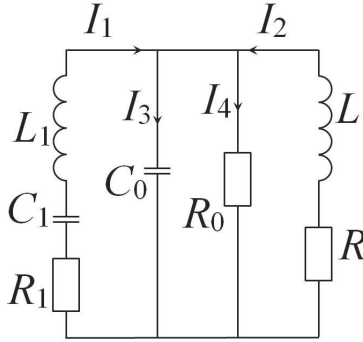


Рис. 5.3. Схема к задаче № 31

Первая особенность изображенной цепи заключается в том, что в ней присутствуют электрические сопротивления, посредством которых осуществляется диссипация энергии. Вторая особенность заключается в том, что в этой цепи присутствует емкостная связь.

Итак, обозначим протекающие в ветвях токи I_1 , I_2 , I_3 , I_4 . Эта схема является системой с 3-мя степенями свободы, так как для полного прекращения электрического тока в системе необходимо минимум сделать три разрыва в цепи. Для описания движений в системе необходимо выбрать 3 обобщенные координаты. Например, это будут электрические заряды, протекающие по ветвям 1, 2 и 3. Обозначим эти величины q_1 , q_2 , q_3 . Соответствующие токи в этих ветвях

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{dq_1}{dt}, \\
 I_2 &= \frac{dq_2}{dt}, \\
 I_3 &= \frac{dq_3}{dt}.
 \end{aligned}
 \tag{5.9}$$

Неизвестный ток I_4 легко найти из уравнения Кирхгофа для верхнего узла схемы

$$I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0. \quad (5.10)$$

Составим систему уравнений Лагранжа вида

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad (5.11)$$

где $i = 1, 2, 3$. Запишем потенциальную энергию системы

$$U(q_1, q_2, q_3) = \frac{q_1^2}{2C_1} + \frac{q_3^2}{2C_0}. \quad (5.12)$$

Запишем кинетическую энергию системы

$$T(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3) = \frac{L_1 \dot{q}_1^2}{2} + \frac{L \dot{q}_2^2}{2}. \quad (5.13)$$

Запишем диссипативную функцию системы

$$F(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3) = \frac{R_1 \dot{q}_1^2}{2} + \frac{R \dot{q}_3^2}{2} + \frac{R_0}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 - 2\dot{q}_1 \dot{q}_3 - 2\dot{q}_2 \dot{q}_3). \quad (5.14)$$

Подставим 5.12, 5.13, 5.14 в 5.11.

$$\begin{aligned} L_1 \ddot{q}_1 + \frac{q_1}{C_1} + R_1 \dot{q}_1 + R_0 \dot{q}_1 + R_0 \dot{q}_2 - R_0 \dot{q}_3 &= 0, \\ L \ddot{q}_2 + R_0 \dot{q}_2 + R_0 \dot{q}_1 - R_0 \dot{q}_3 &= 0, \\ \frac{q_3}{C_0} + R \dot{q}_3 + R_0 \dot{q}_3 - R_0 \dot{q}_1 - R_0 \dot{q}_2 &= 0. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Ищем решение в виде $q_1 = q_{10} \exp(\lambda t)$, $q_2 = q_{20} \exp(\lambda t)$, $q_3 = q_{30} \exp(\lambda t)$. Введем

новые параметры задачи

$$\frac{1}{L_1 C_1} = n_1^2; \frac{R_0}{L_1} = \frac{1}{\tau_0}; \frac{R_1}{L_1} = \frac{1}{\tau_1}; \frac{R_0}{L} = \frac{1}{\tau_2}; \frac{1}{R_0 C_0} = \frac{1}{\tau_3}; \frac{R}{R_0} = \alpha.$$

У этой задачи есть тривиальное и нетривиальное решения. Тривиальное решение — это когда колебания отсутствуют $q_{10} = 0, q_{20} = 0, q_{30} = 0$. Нетривиальное решение задачи возможно тогда, когда определитель системы алгебраических уравнений равен нулю

$$\begin{vmatrix} \left[\lambda^2 + \lambda \left(\frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{\tau_1} \right) + n_1^2 \right] & \begin{bmatrix} \lambda \frac{1}{\tau_0} \\ \lambda \frac{1}{\tau_2} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\lambda \frac{1}{\tau_0} \\ -\lambda \frac{1}{\tau_2} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \lambda \frac{1}{\tau_2} \\ -\lambda \end{bmatrix} & \left[\lambda^2 + \lambda \frac{1}{\tau_2} \right] & \begin{bmatrix} \lambda(1 + \alpha) + \frac{1}{\tau_3} \end{bmatrix} \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим полином 5-й степени λ . Корни полинома комплексные

$$\lambda_i = \omega_i + j\delta_i,$$

где ω_i — i -я нормальная частота колебания, а δ_i — декремент затухания, соответствующий колебанию на ω_i -й частоте. Дальнейшее аналитическое решение задачи не представляется возможным, однако на практике решение задачи в конечном виде можно легко получить численно, воспользовавшись любым математическим пакетом компьютерных программ.

Задача решена.

Задачи для самостоятельного решения

Задача № 32. Найдите парциальные и нормальные частоты колебаний, коэффициенты связи и собственные векторы для цепи, изображенной на рис. 5.4.

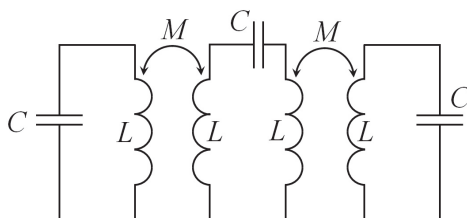


Рис. 5.4. Схема к задаче № 32

Задача № 33. Найдите парциальные и нормальные частоты колебаний, коэффициенты связи и собственные векторы для цепи, изображенной на рис. 5.5.

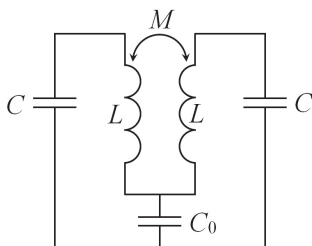


Рис. 5.5. Схема к задаче № 33

Задача № 34. Найдите парциальные и нормальные частоты колебаний, коэффициенты связи и собственные векторы для цепи, изображенной на рис. 5.6.

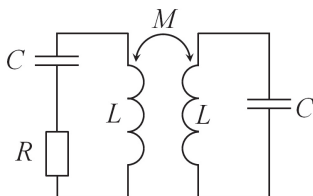


Рис. 5.6. Схема к задаче № 34

Задача № 35. Найдите парциальные и нормальные частоты колебаний, коэффициенты связи и собственные векторы для цепи, изображенной на рис. 5.7.

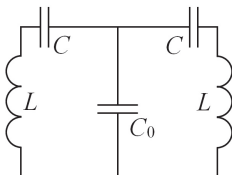


Рис. 5.7. Схема к задаче № 35

Задача № 36. Найдите парциальные и нормальные частоты колебаний, коэффициенты связи и собственные векторы для цепи, изображенной на рис. 5.8.

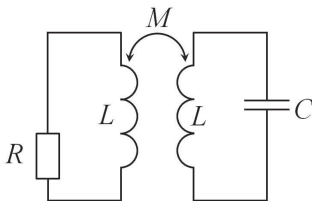


Рис. 5.8. Схема к задаче № 36

Литература

1. Арамапович И. Г., Левин В. И. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1969. 288 с.
2. Хайкин С. Э. Физические основы механики. М.: Наука, 1971. 752 с.
3. Мандельштам Л. И. Лекции по теории колебаний. М.: Наука, 1972. 470 с.
4. Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д. Элементы прикладной математики. М.: Наука, 1972. 592 с.
5. Мандельштам Л. И., Папалекси Н. Д. Об обосновании одного метода приближенного решения дифференциальных уравнений // ЖЭТФ. 1934. Т. 4. с. 117.
6. Бендриков Г. А., Иванов И. В., Карасев М. Д., Медведев В. И., Минакова И. И., Сенаторов К. Я. Теория колебаний. М.: Изд-во МГУ, 1983. 328 с.
7. Сергованцев Б. В. Параметрические усилители СВЧ. М.: Советское радио, 1961. 152 с.
8. Жеребцов И. П. Радиотехника. Л.: Связьиздат, 1953. 436 с.

9. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1958. 916 с.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Курс теоретической физики. Т. 1. М.: Наука; ФИЗМАТЛИТ, 2001. 220 с.

Учебное издание

Иванов Алексей Сергеевич

**ОСНОВЫ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ:
КОЛЕБАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ
Методы решения задач**

Учебно-методическое пособие

Редактор *Н. И. Стрекаловская*
Корректор *А. В. Цветкова*
Компьютерная верстка: *А. С. Иванов*

Подписано в печать 22.05.2017. Формат 60×84/16
Усл. печ. л. 6,68. Тираж 60 экз. Заказ ____

Издательский центр
Пермского государственного
национального исследовательского университета.
614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15

Кунгурская типография.
617475, Пермский край, г. Кунгур, ул. Криулинская, 7