МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ МЕТОДОМ РЕШЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬЦМАНА

И. В. Володин
Пермский государственный национальный исследовательский университет, 614990, Пермь, Букирева, 15

Представлен метод решеточных уравнений Больцмана (Lattice Boltzmann Method, LBM) в аппроксимации Батнагара-Гросса-Крука для решения гидродинамических задач. Моделируются течения Куэтта и Пуазейля, течение в ограниченной полости с подвижной верхней стенкой, а также конвекция в ограниченной полости с боковым подогревом.

Ключевые слова: Решеточные уравнения Больцмана; LBM; LBE, ограниченная полость с подвижной стенкой, конвекция в полости, течение Куэтта, течение Пуазейля

SIMULATION OF FLOWS BY LATTICE BOLTZMANN METHOD

I. V. Volodin
Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm

Lattice Boltzmann method (LBM) in approximation of Bhatnagar–Gross–Krook for solution of hydrodynamical problems is presented. Couette flow, Poiseuille flow, lid-driven cavity and convection in cavity with side heating were simulated.

Keywords: Lattice Boltzmann Method; LBM; LBE, lid-driven cavity, convection in cavity, Couette flow, Poiseuille flow

Ввиду того, что течение жидкости описывается сложными дифференциальными уравнениями, которые не имеют общего решения в аналитическом виде, широкое распространение получили различные вычислительные методы. Подход, предложенный в данной статье, базируется на кинетическом уравнении Больцмана, которое описывает эволюцию во времени функции распределения плотности вероятности $f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t)$ в одночастичном фазовом пространстве. Через нее выражаются макроскопические параметры среды, такие как плотность, скорость и энергия. Таким образом, для моделирования течений предлагается подход газовой динамики, описывающий поведение отдельно взятой частицы и, следовательно, рассматривающий систему на микроскопическом уровне. Обоснованием использования методов газовой динамики в сплошносредных системах является тот факт, что характерное время макроскопической системы намного больше времени свободного пробега.

Кинетическое уравнение Больцмана имеет следующий вид [1]:

$$\boldsymbol{v}\nabla_x f^{(1)} + \boldsymbol{F}\nabla_p f^{(1)} + \frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} = \Gamma^{(+)} - \Gamma^{(-)},$$

где v - скорость жидкости, f- одночастичная функция Больцмана, F-сила, действующая на жидкость, $\Gamma^{(+)} - \Gamma^{(-)}$ - оператор столкновения.

Дискретизация этого уравнения и его дальнейшее программирование стало возможным благодаря аппроксиматическому выражению Батнагара-Гросса-Крука [2] для равновесной функции распределения.

Для численного моделирования необходимо:

- ввести равномерную сетку пространственных координат, при этом поведение жидкости определяется именно в этих узлах сетки;
- дискретизировать время – состояние системы определяется в равноотстоящие моменты времени;
- позволить частицам иметь только определенные значения скорости, так, чтобы за шаг по времени, они успевали перейти в соседний узел.

Рассматриваются частицы одинаковой единичной массы и поэтому устанавливается простая связь с макроскопическими параметрами среды [2]. Связь с макроскопической скоростью:

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{\rho}\sum_{a=1}^{n} f_a,$$

связь с макроскопической плотностью:

$$\rho = \sum_{a=1}^{n} f_a,$$

связь с энергией:

$$\varepsilon\rho = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n}(v_a - u_a)^2 f_a,$$

где n – количество разрешенных скоростей, u_a – скорость потока. В дискретизированном виде уравнение Больцмана имеет вид:

$$f_i(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{c_i}, t + 1) = f_i(\boldsymbol{r}, t) - \frac{f_i - f_i^{eq}}{\tau}.$$

τ – время перехода системы из текущего состояния f_i в состояние соответствующее наименьшей энергии (время релаксации), f_i^{eq} – равновесная функция распределения (используется функция распределения Максвелла), $\boldsymbol{c_i}$ – разрешенная скорость.

Как видно из последнего уравнения несомненным достоинством LBM является легкость создания параллельного кода, так как для вычисления значения f на следующем шаге по времени не нужно знать значение функции в соседних узлах. К достоинствам также относится простота программирования и легкость задания граничных условий, ввиду того, что используются не сеточные методы, а состояние системы описывается фактически единственной функцией. К недостаткам метода можно отнести исключительную сложность использования данного подхода в задачах с деформируемыми границами и необходимую малость числа Маха.

Для описания движения частицы использовалась двумерная девятискоростная модель D2Q9 [2, 3].

Вычислительная программа состоит из нескольких модулей:

1) задание макроскопических параметров жидкости, таких как плотность, скорость и время релаксации системы;

2) распространение введенных значений на каждый узел;
3) задание граничных условий;
4) вычисление скорости в каждом узле;
5) задание оператора столкновения и вычисление функции Больцмана на всей решетке;
6) задание градиента внешней силы;
7) циклическое повторение пунктов 3-6, до тех пор, пока система находится в неравновесном состоянии.

Все физические параметры обезразмерены в единицах вязкости, единичный шаг по времени означает, что частица проходит характерную толщину вязкого слоя $L = \nu/a$, где a – есть скорость звука в данной точке, ν – вязкость жидкости. Управляющими параметрами являются число Маха, число Рейнольдса (Re) и число Рэлея (Ra).

Были смоделированы двумерные течения Куэтта и Пуазейля, течение в квадратной полости с подвижной верхней стенкой, конвективное течение в той же полости с горизонтальным градиентом температуры.

Для иллюстрации работы метода, приведем результаты моделирования двух последних задач.

Рассмотрим течение вязкой жидкости в прямоугольной полости с твердыми стенками, верхняя стенка которой движется с заданной постоянной скоростью: проекция компоненты скорости на ось Ox – $v_x = 0.2$, на ось Oy – $v_y = 0$, использовалась решетка Nx x Ny=100x100, Re=120.

Результатом численного решения методом LBM является векторное поле скорости, приведенное на рис. 1.

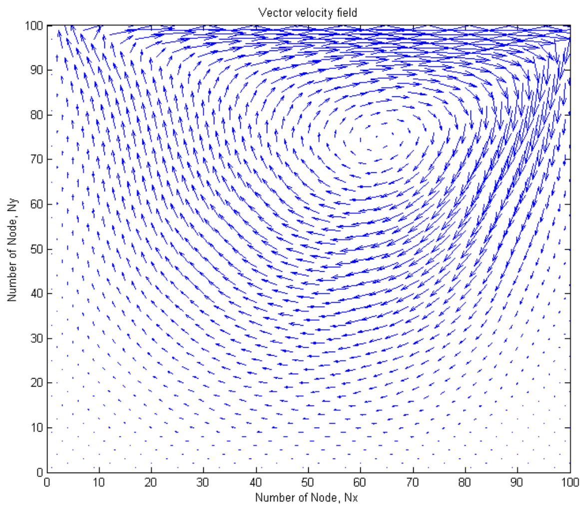

Рис. 1. *Поле скорости в ограниченной полости с подвижной верхней границей*

Геометрия следующей задачи эквивалентна предыдущей. Рассматривается конвекция вязкой жидкости в замкнутой полости, с нагревом на левой стенке, верхние и нижние границы теплоизолированные. Re = 120, Ra=10^5.

Векторное поле скорости приведено на рис. 2, поле температуры – на рис. 3.

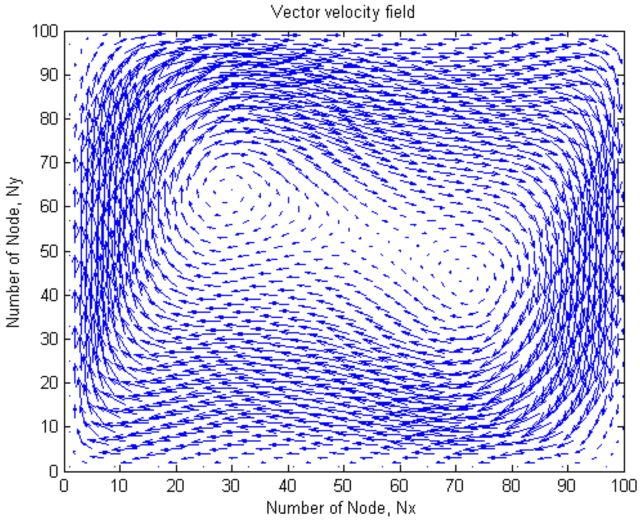

Рис. 2. *Поле скорости в конвективной задаче*

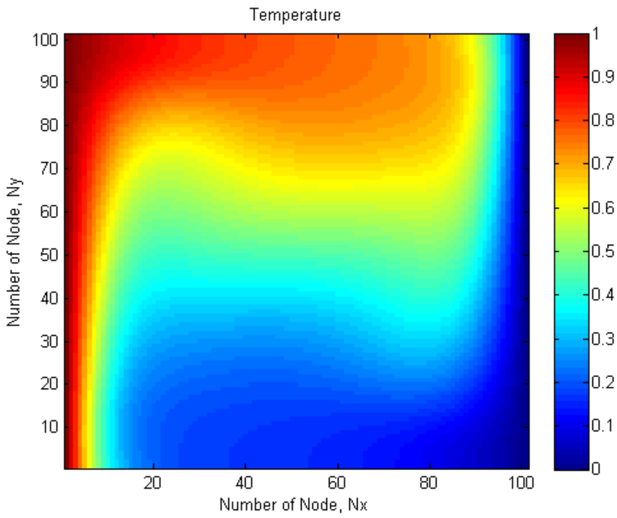

Рис. 3. *Поле температуры в конвективной задаче*

В будущем планируется перейти к решению задач с многофазными жидкостями и сложной геометрией.

Список литературы

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 10. Физическая кинетика. М.: Физматлит, 2002. 536 с.
2. *Sukop M. C., Thorne D. T., Jr*. Lattice Boltzmann Modeling. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007. 173 p.
3. *Succi S.* The Lattice Bolyzman Equation for Fluid Dynamics and Beyond. Clarendod Press Oxford, 2001. 299 p.