

КОНВЕКТИВНЫЕ ПОГРАНИЧНЫЕ СЛОИ У ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ПОРИСТОЙ СРЕДЫ И ОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ ОТ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА И НАГРЕТОЙ ГРАНИЦЫ

И. В. Тюлькина

Пермский государственный национальный исследовательский университет,
614990, Пермь, Букирева, 15

В настоящей работе проводится сравнительный анализ поля скорости и толщины пограничного слоя для двух систем: система с конвективным пограничным слоем на границе раздела пористой среды Бринкмана и однородной жидкости, а так же система с точечным источником тепла на аналогичной границе.

Ключевые слова: пограничный слой; пористая среда; однородная жидкость

CONVECTIVE BOUNDARY LAYERS AT THE INTERFACE BETWEEN A POROUS MEDIUM AND A HOMOGENEOUS LIQUID FROM A POINT SOURCE AND A HEATED BOUNDARY

I. V. Tyulkina

Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm

In this paper, we perform a comparative analysis of the velocity field and the thickness of the boundary layer for two systems: a system with a convective boundary layer at the interface between a Brinkman porous medium and a homogeneous liquid, and a system with a point source of heat at a similar boundary.

Keywords: boundary layer; porous medium; homogeneous liquid

Особенности течения в гидродинамических системах, которые включают смежные области с различными свойствами, исследовались различными авторами. Значимые результаты в описании взаимодействия смежных течений получены при использовании приближения пограничного слоя на границе раздела двух областей [1–4].

В настоящей работе мы сравниваем и анализируем две системы:

- конвективный пограничный слой у нагретой границы раздела пористой среды Бринкмана и однородной жидкости (задача детально описана в [5]);
- конвективный факел над точечным источником тепла на границе раздела тех же сред.

Далее в тексте будем обозначать их как первая и вторая система.

Рассматривается стационарное двумерное течение жидкости, смежной с пористой средой, насыщенной той же жидкостью, в поле силы тяжести. На рис. 1 показана конфигурация модели: для первой системы на оси x мы имеем нагретую границу с постоянной температурой, для второй системы в начале координат лежит точечный источник тепла, температура границы не постоянна.

Система уравнений гидродинамики описываемой задачи включает уравнения Навье–Стокса для внешнего течения и уравнения Бринкмана для пористой среды [6], а также уравнение теплопроводности для обеих сред:

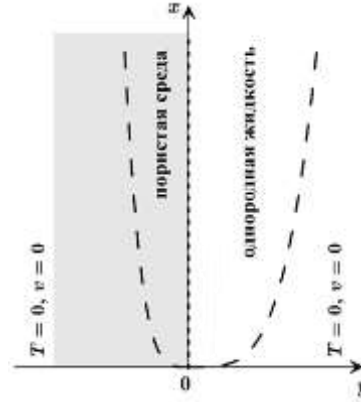


Рис. 1. Геометрия задачи и схематическая структура пограничных слоёв

$$\begin{aligned}
 (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{v} &= -\rho^{-1} \nabla P + \nu \Delta \boldsymbol{v} + g \beta_0 T \boldsymbol{\gamma}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \quad \boldsymbol{v} \nabla T = \chi \Delta T, \\
 (\boldsymbol{v}_p \cdot \nabla) \boldsymbol{v}_p &= -\rho^{-1} \nabla P + \nu_{\text{eff}} \Delta (\varphi \boldsymbol{v}_p) + g \beta_0 T_p \boldsymbol{\gamma} - \nu K^{-1} \varphi \boldsymbol{v}_p, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{v}_p = 0, \\
 \boldsymbol{v}_p \nabla T_p &= \chi \Delta T_p, \quad \nu_{\text{eff}} = \nu \varphi^{-1}.
 \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\boldsymbol{v} = \{u, v\}$ – скорость течения жидкости, P – давление, K – проницаемость, φ – пористость, ρ , ν , χ – плотность, кинематическая вязкость и теплопроводность жидкости, соответственно. Индекс p обозначает величины, относящиеся к пористой среде. Уравнение Бринкмана включает силу сопротивления Дарси и эффективную кинематическую вязкость ν_{eff} [7].

Предположение, что основное изменение скорости происходит в пределах тонкой переходной области с характерной шириной δ вблизи границы раздела, позволяет применить к модели (1) теорию Прандтля [4]. С учётом стационарности рассматриваемого течения уравнения в приближении пограничного слоя принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
 uu_x + vu_y - \nu u_{yy} &= g \beta_0 T, \quad u_x + v_y = 0, \quad uT_x + vT_y = \chi T_{yy}, \\
 u_p u_{p,x} + v_p u_{p,y} - \nu u_{p,yy} &= g \beta_0 T_p - \nu K^{-1} \varphi u_p, \quad u_{p,x} + v_{p,y} = 0, \\
 u_p T_{p,x} + v_p T_{p,y} &= \chi T_{p,yy}.
 \end{aligned} \quad (2)$$

Частные производные по координатам обозначены индексами x и y . Система дополняется условиями на границе раздела [6, 7]. Граничные условия в приближении пограничного слоя:

$$v = \varphi v_p, \quad v_y = v_{y,p}, \quad u_y - u_{p,y} = -\beta \varphi K^{-1/2} u_p$$

где β – эмпирический параметр, определяемый свойствами пористой матрицы и геометрией пор на микроуровне. Система уравнений замыкается условиями вдали от границы (жидкость вдали неподвижна):

$$y \rightarrow +\infty: v \rightarrow 0, T \rightarrow 0 \qquad y \rightarrow -\infty: v_p \rightarrow 0, T_p \rightarrow 0 \quad (3)$$

Дальнейшее исследование и поиск автомодельного решения удобно проводить в терминах функции тока, определяемой стандартно: $u = -\psi_y$, $v = \psi_x$. В обеих задачах автомодельные решения строятся в виде:

$$\xi = Bx^\alpha y, \quad \psi = Ax^\beta f(\xi), \quad T = \Theta x^\gamma g(\xi)$$

где f и g – новые неизвестные функции. Поскольку граничные условия линейны, преобразование совпадает для обеих сред. Однако запись уравнения Бринкмана для пористой среды в автомодельной форме возможна только в предположении, что проницаемость зависит от x по степенному закону; для первой системы $K = K_0 x^{1/2}$, для второй – $K = K_0 x^{4/5}$.

При этом уравнения (1) для первой системы упрощаются:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{Pr}}(2f'^2 - 3ff'') &= f''' + g, \quad g'' + fg' = 0, \\ \frac{1}{\text{Pr}}(2f_p'^2 - 3f_p f_p'') &= f_p''' + g_p - \frac{8\varphi \text{Pr}^{1/2}}{\text{Da}_0 \text{Ra}^{1/2}} f_p', \quad g_p'' + f_p g_p' = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

для второй системы один из масштабных параметров требуется определять дополнительно из закона сохранения энергии [8], и (1) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{5\text{Pr}}(f'^2 - 3ff'') &= \frac{3}{5}f''' + g, \quad g'' + (fg)' = 0, \\ \frac{1}{5\text{Pr}}(f_p'^2 - 3f_p f_p'') &= \frac{3}{5}f_p''' + g_p - \frac{\varphi}{\text{Da}_0 \text{Ra}^{1/2}} f_p', \quad g_p'' + (f_p g_p)' = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

В (4) и (5) введены безразмерные управляющие параметры: число Прандтля $\text{Pr} = \nu/\chi$, число Рэлея $\text{Ra} = g\beta_0\theta\delta^3/\nu\chi$, и аналог числа Дарси $\text{Da}_0 = K_0/\delta^{3/2}$.

Условия (2) на границе раздела $\xi = 0$ для систем (4) и (5) аналогичны, и различие есть лишь в условии для вторых производных f :

$$f = \varphi f_p, \quad f' = \varphi f_p', \quad g = g_p = 1,$$

для первой и второй системы, соответственно:

$$f'' - f_p'' = \frac{2^{1/2}}{3^{1/2}} \frac{\beta\varphi}{\text{Pr}^{1/4} \text{Ra}^{1/4} \text{Da}_0^{1/2}} f_p', \quad f'' - f_p'' = \frac{5^{1/2}}{3^{1/2}} \frac{\beta\varphi}{\text{Ra}^{1/4} \text{Da}_0^{1/2}} f_p';$$

условия вдали от границы также одинаковы в обеих задачах:

$$f(+\infty) = 0, \quad f_p(-\infty) = 0, \quad g(+\infty) = 0, \quad g_p(-\infty) = 0.$$

Уравнения для течения однородной жидкости во внешнем потоке в системе (4) и (5) совпадают с известными [4, 8]. Уравнения для пористой среды содержат дополнительное слагаемое, обусловленное силой Дарси.

Решение полученной задачи реализовано посредством конечно-разностного алгоритма, основанного на методе прогонки, и реализованного на языке FORTRAN-90. Расчёт производится на отрезке $[-10, 10]$. Возможность перехода к конечной области обусловлена экспоненциальным приближением решений к нулю вдали от границы раздела [4].

Максимум скорости (рис. 2) локализован в однородной жидкости у границы раздела. Толщина динамического пограничного слоя в пределах пористой среды существенно меньше, чем в однородной жидкости. Влияние числа Прандтля на течение в однородной жидкости схоже для обеих задач: чем больше Pr , тем больше автомодельная скорость течения жидкости. Однако для пористой среды наблюдаются противоположные зависимости: в первой системе с увеличением Pr скорость падает, а в системе с точечным источником – растет. Это может быть обусловлено тем, что в (5) в силе Дарси исчезает зависимость от числа Прандтля.

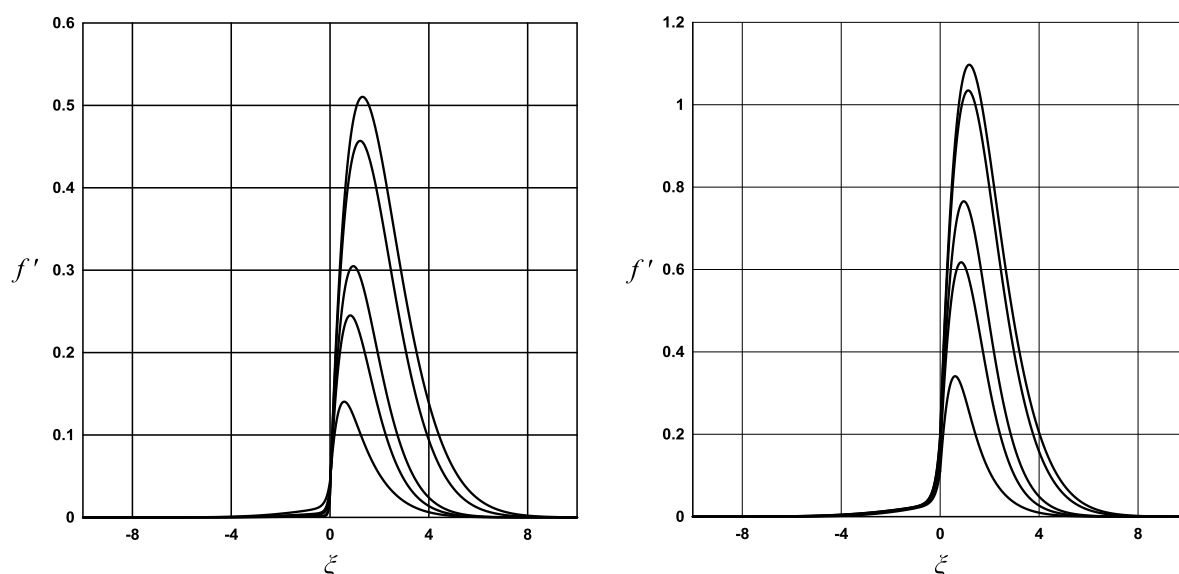


Рис. 2. Профили поля скорости для первой и второй системы при различных значениях $Pr = 0.1; 0.5; 1; 5; 10$

Из решения, в частности, можно найти толщину пограничного слоя δ , которая может быть оценена как расстояние от границы, на котором $u = 0.01u_m$, где u_m – максимальная продольная скорость. Тогда для первой системы мы получаем $\delta \sim x^{1/4}$, для второй системы $\delta \sim x^{2/5}$.

Список литературы

1. Lock R. C. The velocity distribution in the laminar boundary layer between parallel streams // Q.J. Mech. Appl. Math. 1951. Vol. 4, N. 1. P. 42–63.
2. Boyadjiev Chr., Mitev Pl., Sapundzhiev T. Laminar boundary layers of co-current gas-liquid stratified flows – I. Theory // Int. J. Multiphas. Flow. 1976. V. 3, N. 1. P. 51–55.
3. Paster A., Dagan G. Mixing at the interface between two fluids in porous media: a boundary-layer solution // J. Fluid. Mech. 2007. V. 584. P. 455–472.

4. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. 744 с.
5. Тюлькина И.В., Циберкин К.Б. Структура смежных течений у нагретой границы жидкости и пористой среды // Вестник ПГУ. Физика. 2016. № 3 (34). С. 49–57.
6. Brinkman H. C. Calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles Boundary conditions at a naturally permeable wall // Appl. Sci. Res. A. 1947. Vol. 1. P. 27–34.
7. Ochoa-Tapia J. A., Whitaker S. Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid – I. Theoretical development // Int. J. Heat. Mass. Tran. 1995. Vol. 38. P. 2635–2646.
8. Gebhart B., Pera L., Schorr A. W. Steady laminar naturel convection plumes above a horizontal line heat source // Int. J. Heat. Mass. Tran. 1970. Vol. 12. P. 161–171.