МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования “Пермский государственный
национальный исследовательский университет”

Кафедра теоретической физики

Основы специальной теории относительности и ее связь с электродинамикой

Методические указания

Пермь 2017

Составитель: доцент **В.А. Демин**

Основы специальной теории относительности и ее связь с электродинамикой: методические указания / Перм. гос. нац. исслед. ун-т; сост. В.А. Демин. Пермь, 2016. 20 с.

Предназначено студентам старших курсов физического факультета всех специальностей, изучающим курс классической электродинамики

Печатается по решению методической комиссии физического факультета Пермского государственного национального исследовательского университета

1. ВВЕДЕНИЕ

В 2007 г. в ходе реализации приоритетного национального проекта “Образование” издательством Пермского университета были опубликованы два учебных пособия по Электродинамике [1] и Электродинамике сплошных сред [2]. Книги были выпущены в рамках выполнения инновационной образовательной программы “Формирование информационно-коммуникативной компетентности выпускников классического университета в соответствии с потребностями информационного общества”. Авторами этих пособий были сотрудники Пермского государственного национального исследовательского университета – заведующий кафедрой теоретической физики, профессор Д.В. Любимов и профессор кафедр теоретической и общей физики Н.И. Лобов. Следует отметить, что традиционно в Пермском университете электродинамика всегда читалась на высоком научном и методическом уровне. Не будет преувеличением утверждать, что содержание и стиль изложения материала в пособиях [1,2] во многом были сформированы под воздействием лекций выдающегося педагога и ученого, профессора кафедры теоретической физики Г.З. Гершуни, который ранее в течение многих десятилетий блестяще читал этот курс [3].

В настоящее время пособия [1,2] активно используются в учебном процессе на физическом факультете при обучении студентов всех направлений. Однако учебная программа на физическом факультете Пермского государственного университета построена так, что традиционно базовый курс электродинамики вакуума у студентов должен завершаться изложением основ специальной теории относительности, которая, как известно, позволяет элегантно и компактно заново переписать уравнения Максвелла в терминах 4-тока и тензора электромагнитного поля. К сожалению, эта часть материала была упущена при написании пособий [1,2]. По этой причине в предлагаемых методических указаниях была сделана попытка восполнить данный пробел так, чтобы излагаемый материал органично дополнял упомянутые выше пособия.

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГАЛИЛЕЯ И ПРЕДПОСЫЛКИ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Анализ уравнений электродинамики показывает, что они находятся в противоречии с основными принципами классической механики Ньютона. А именно, уравнения Максвелла не инвариантны относительно преобразований Галилея. Для дальнейших рассуждений введем понятие инерциальной системы отсчета (СО).

Инерциальными называются СО, в которых движение тел, не подверженных действию внешних сил, происходит равномерно и прямолинейно. Рассмотрим преобразования координат и скоростей применительно к инерциальным системам отсчета:

$$\begin{cases} x = x' + \upsilon t' \\ y = y', \quad z = z' \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = \dot{x}' + \upsilon \\ t = t' \end{cases}$$

Для простоты формулами описывается случай одномерного движения материальной точки вдоль оси x' и начала отсчета СК K' относительно оси x с постоянной скоростью υ (рис. 1).

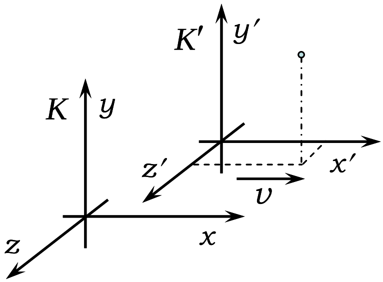

Рис.1. Иллюстрация к правилу сложения скоростей Галилея и относительности движения

Инвариантность относительно преобразований Галилея подразумевает неизменность уравнений Ньютона при переходе от одной инерциальной СО к другой:

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad m\ddot{y} = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad m\ddot{z} = -\frac{\partial U}{\partial z},$$

$$\ddot{x} = \ddot{x}', \quad \ddot{y} = \ddot{y}', \quad \ddot{z} = \ddot{z}',$$

где m – масса тела, U – потенциальная энергия (в принципе в правых частях могут стоять и непотенциальные силы). Учитывая равенство ускорений в разных ИСО, приходим к выводу, что формально уравнения Ньютона в штрихованной системе координат выглядят также, как в нештрихованной:

$$m\ddot{x}' = -\frac{\partial U}{\partial x'}, \quad m\ddot{y}' = -\frac{\partial U}{\partial y'}, \quad m\ddot{z}' = -\frac{\partial U}{\partial z'}.$$

В основе противоречия электродинамики и классической ньютоновой механики лежит опытный факт постоянства скорости света во всех инерциальных СО. Исторически Майкельсон был первым, кому удалось с высокой степенью точности измерить влияние орбитального движения Земли на результирующую скорость света (1881 г.) и получить при этом отрицательный результат. Де Ситтер в 1912 г. провел независимое исследование излучения двойных звезд. Итогом этих наблюдений является опытный факт, согласно которому скорость света в вакууме одинакова во всех ИСО и является фундаментальной физической постоянной $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Убедительные данные, связанные с фактом постоянства скорости света во всех ИСО, позволили Эйнштейну в 1905 г. сформировать новую концепцию пространства-времени и построить специальную теории относительности, в основу которой он положил два постулата:

1. Все законы физики одинаковы во всех инерциальных системах отсчета.

2. Скорость света в пустом пространстве одинакова для наблюдателей во всех ИСО и не зависит от относительного движения источника света.

Следует отметить, что волны в материальных средах принципиально отличаются от электромагнитных волн, которые распространяются в вакууме. Неявно постулатами специальной теории относительности предполагается следующее:

1. Все инерциальные системы отсчета эквивалентны.

2. Пространство однородно и изотропно.

Сразу отметим (и это будет подтверждено ниже), что если скорость света является абсолютной константой, то время и длина должны быть относительными величинами.

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА

Исходя из постулатов теории относительности, можно найти законы преобразования координат и времени при переходе от одной ИСО к другой (рис. 1). Как и ранее, параметр υ – скорость движения СО K' относительно СО K. Пусть в момент времени t' в точке с координатами x', y', z' происходит событие. Задача заключается в том, чтобы найти координаты этого события в СО K.

Согласно идеологии неразрывности пространства и времени событие должно характеризоваться в разных системах отсчета совокупностями координат x, y, z, t и x', y', z', t' соответственно.

Пусть в момент времени $t = 0$ начала отсчета координатных систем K' и K совпадают. В этот момент из начала координат испускается сферическая электромагнитная волна. Для простоты относительное движение систем отсчета происходит только вдоль осей x и x'. Уравнение световой волны в системе отсчета K имеет следующий вид:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 .$$

Согласно принципу относительности системы отсчета K и K' неотличимы. Тогда уравнение этой же волны будет иметь вид

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 ,$$

и для них справедливо

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 . \qquad (1)$$

По условию движение происходит только вдоль оси x, поэтому

$$y = y', \quad z = z' . \qquad (2)$$

Связь между переменными x, t и x', t' может быть только линейной, т.к. все ИСО равноправны. В результате имеем соотношения

$$x' = \alpha(\upsilon)\left(x - \upsilon t\right), \qquad (3)$$

$$t' = \beta t + \gamma x . \qquad (4)$$

Здесь α, β, γ – некоторые константы. Это максимально общая линейная связь с учетом того, что при $t = 0$ начала координат у обеих СО совпадают, и координата $x' = 0$ относительно системы отсчета K движется по закону $x = \upsilon t$. Таким образом, коэффициенты при x и υt в (3) должны быть одинаковыми по величине и иметь разные знаки, так что результирующий множитель $\alpha(\upsilon)$ обязан быть функцией только υ. Убедившись в справедливости этих рассуждений, подставим (3) и (4) в соотношение (1).

Сравнивая члены при квадратичных слагаемых одного типа, получаем три нелинейных алгебраических уравнения

$$\alpha^2 - c^2\gamma^2 = 1, \quad \alpha^2\upsilon^2 - c^2\beta^2 = -c^2 , \quad \alpha^2\upsilon + c^2\beta\gamma = 0 .$$

Несложные вычисления дают значения искомых коэффициентов α, β и γ:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} , \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} , \quad \gamma = -\frac{\upsilon/c^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} .$$

Возвращаясь к формулам (3) и (4), имеем в результате следующие правила преобразования координат и времени:

$$x' = \frac{x - \upsilon t}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} , \quad y' = y , \quad z' = z , \quad t' = \frac{t - \upsilon x/c^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} . \qquad (5)$$

Обратные преобразования соответственно характеризуются видом

$$x = \frac{x' + \upsilon t'}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \upsilon x'/c^2}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}}. \qquad (6)$$

Эти соотношения носят название *преобразований Лоренца* (1898 г.). В предельном случае $\upsilon << c$ приходим к преобразованиям Галилея:

$$x = x' + \upsilon t, \qquad t = t'.$$

Вывод: теория относительности не отвергает законы классической механики как неверные, а включает их в себя как предельный случай.

Преобразования Лоренца свидетельствуют о том, что временна́я и пространственная координаты единым образом преобразуются при переходе от одной СО к другой. Будучи ранее независимыми переменными, теперь они образуют единое четырехмерное пространство-время.

4. ЭФФЕКТ СОКРАЩЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ИНТЕРВАЛА

Из преобразований Лоренца вытекают так называемые эффекты сокращения длины и увеличения временного интервала при измерении этих величин в ЛСО по отношению к собственной длине и времени. Пусть l_o – продольный размер тела в СО, в которой оно неподвижно (в данном случае K' – собственная СО).

Далее измерение длины тела произведем в системе отсчета K в момент времени t. Иными словами, необходимо зафиксировать координаты концов стержня в один и тот же момент времени t. Подобное может случиться только в том случае, если сигналы из x_1' и x_2' вышли в разные моменты времени t_1' и t_2' (так как скорость света одинакова во всех ИСО). Таким образом, из преобразований Лоренца вытекает связь

$$x_2' = \frac{x_2 - \upsilon t}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}}, \quad x_1' = \frac{x_1 - \upsilon t}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}}.$$

Вычитая из одного равенства другое, получим

$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}}.$$

Вспоминая, что по определению

$$l_o = x_2' - x_1', \qquad l = x_2 - x_1,$$

получаем окончательно формулу

$$l = l_o \sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2} \; . \qquad (7)$$

С одной стороны, рассмотренный эффект традиционно называется лоренцевым сокращением длины, однако следует заметить, что первенство получения этой формулы независимо от Лоренца принадлежит ирландскому физику Дж. Фицжеральду (1892 г.). Логика вывода формулы (7) показывает, что эффект сокращения длины имеет чисто кинематическую природу.

5. ЭФФЕКТ УВЕЛИЧЕНИЯ ВРЕМЕННОГО ИНТЕРВАЛА

Постоянство скорости света во всех ИСО и неразрывная связь координат и времени приводит к еще одному следствию. А именно, время в специальной теории относительности тоже не имеет абсолютного характера.

Пусть в некоторой фиксированной точке x' в системе отсчета K' происходит некоторый физический процесс в течение некоторого времени $\Delta t' = t_2' - t_1'$. Здесь t_2' и t_1' – соответственно моменты времени начала и конца этого процесса. Тогда из преобразований Лоренца следует, что

$$t_2 = \frac{t_2' + \upsilon x'/c^2}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}}, \quad t_1 = \frac{t_1' + \upsilon x'/c^2}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}} .$$

Вычитаем из одного равенства другое

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}} .$$

Приходим к эффекту увеличения временного интервала $\tau = \Delta t$ в системе отсчета K по сравнению с интервалом времени $\tau_o = \Delta t'$ в собственной СО:

$$\tau = \frac{\tau_o}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}} . \qquad (8)$$

Движущиеся относительно некоторой системы отсчета часы идут медленнее, чем в собственной системе координат.

6. ПРАВИЛО СЛОЖЕНИЯ СКОРОСТЕЙ

Выведем теперь релятивистскую формулу сложения скоростей. Для начала определим естественным образом скорости тела в разных системах отсчета:

$$u_x = dx/dt\,,\ (K) \qquad u_x{}' = dx'/dt'\,,\ (K')$$

$$u_y = dy/dt\,, \qquad u_y{}' = dy'/dt'\,,$$

$$u_z = dz/dt\,, \qquad u_z{}' = dz'/dt'\,.$$

Из преобразований Лоренца (6) следует, что дифференциалы пространственных координат и времени в разных системах отсчета связаны соотношениями

$$dx = \frac{dx' + \upsilon dt'}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}, \qquad dt = \frac{dt' + \upsilon dx'/c^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\,.$$

(также для одномерного относительного движения систем отсчета имеем $dy = dy'$, $dz = dz'$). Разделив приращения координат на соответствующие приращения времени, получаем выражения для скоростей в системе отсчета K:

$$u_x = \frac{dx' + \upsilon dt'}{dt' + \dfrac{\upsilon dx'}{c^2}} = \frac{u_x{}' + \upsilon}{1 + \dfrac{\upsilon u_x{}'}{c^2}}\,, \tag{9}$$

$$u_y = \frac{dy'\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}{dt' + \dfrac{\upsilon dx'}{c^2}} = \frac{u_y{}'\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}{1 + \dfrac{\upsilon u_x{}'}{c^2}}\,, \tag{10}$$

$$u_z = \frac{dz'\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}{dt' + \dfrac{\upsilon dx'}{c^2}} = \frac{u_z{}'\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}{1 + \dfrac{\upsilon u_x{}'}{c^2}}\,. \tag{11}$$

В том числе, эти формулы удивительным образом правильно отражают факт одинаковости скорости света во всех ИСО. В переделе малых скоростей имеем

$$u_x \approx u_x{}' + \upsilon\,, \quad u_y \approx u_y{}'\,, \quad u_z \approx u_z{}'\,.$$

7. ИНВАРИАНТЫ В СТО

Одна из главных задач, которые ставит перед собой СТО, заключается в выявлении и анализе абсолютных и относительных величин [4]. Введем понятие интервала, по-прежнему имея в виду, что событие характеризуется четырьмя переменными x, y, z и t. Из преобразований Лоренца следует, что время неразрывно связано с пространственными координатами и наоборот. Определим новую формальную координату $\tau = ict$. Соответствующее ей перемещение имеет ту же размерность, что и Δx, Δy, Δz. Понятие интервала вводится по аналогии с обычным интервалом в смысле расстояния между точками и некоторого промежутка времени

$$s = \sqrt{c^2(t_1 - t)^2 - (x_1 - x)^2 - (y_1 - y)^2 - (z_1 - z)^2}\ .$$

В штрихованной системе координат по определению интервал записывается следующим образом:

$$s' = \sqrt{c^2(t_1' - t')^2 - (x_1' - x')^2 - (y_1' - y')^2 - (z_1' - z')^2}\ .$$

Докажем, что интервал является инвариантом. А именно, эта скалярная величина не меняется в ходе преобразований Лоренца. Пусть для простоты

$$(y_1 - y)^2 = (y_1' - y')^2,$$

$$(y_1 - y)^2 = (z_1' - z')^2\ .$$

Преобразуются только $\Delta x'$ и $\Delta t'$:

$$(x_1' - x')^2 = \frac{(x_1 - x)^2 - 2v(x_1 - x)(t_1 - t) + v^2(t_1 - t)^2}{1 - v^2/c^2},$$

$$c^2(t_1' - t')^2 = \frac{(t_1 - t)^2 - \dfrac{2v}{c^2}(x_1 - x)(t_1 - t) + \dfrac{v^2}{c^4}(x_1 - x)^2}{1 - v^2/c^2}c^2\ .$$

Вычитая из нижнего равенства верхнее, получаем

$$c^2(t_1' - t')^2 - (x_1' - x') =$$

$$= \frac{c^2(t_1 - t)^2 - (x_1 - x)^2 - v^2(t_1 - t)^2 + \dfrac{v^2}{c^2}(x_1 - x)^2}{1 - v^2/c^2} =$$

$$= c^2(t_1 - t)^2 - (x_1 - x)^2\ .$$

В результате приходим к заключению

$$s = s'\ .$$

Иными словами, интервал действительно является инвариантом. Если s – вещественная величина ($c^2\Delta t^2 > \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$), то интервал называется *времениподобным*. Когда s – мнимая величина ($c^2\Delta t^2 < \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$), то интервал называется *пространственноподобным*.

Условие $c^2\Delta t^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$ формирует так называемый *световой конус* [5,6]. Световой конус разделяет множество точек в четырехмерном пространстве-времени на области “абсолютного будущего”, “абсолютного прошлого” и абсолютно удаленных событий.

На следующем этапе рассуждений введем понятие собственного времени. Пусть в некоторой точке последовательно происходят два события в моменты времени t' и t_1', разделенные промежутком $dt_о = t_1' - t'$ (время, прошедшее между двумя событиями). В соответствии с накладываемыми условиями интервал для этих двух событий равен

$$ds = \sqrt{c^2(t_1 - t)^2 - (x_1 - x)^2 - (y_1 - y)^2 - (z_1 - z)^2} = c dt_o .$$

Событие происходит в одной и той же точке в СО K', поэтому $dx' = dy' = dz' = 0$. Но интервал – инвариант, поэтому собственное время тоже является инвариантом

$$dt_o = \frac{ds}{c} .$$

Собственное время можно выразить через временной промежуток в произвольной системе координат. Окончательно имеем

$$dt_o = dt\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2} . \qquad (12)$$

С одной стороны, эта формула повторяет (8), однако теперь собственное время, в отличие от интервалов времени во всех других ИСО, приобретает исключительный, выделенный характер, т.к. является инвариантом.

8. 4-ВЕКТОР СКОРОСТИ И 4-ИМПУЛЬС

Определим четыре-вектор скорости, как производную от 4-радиус-вектора по некоторому инварианту, т.е. скаляру. Указанный радиус-вектор характеризуется набором координат

$$r_\alpha = \left(x, y, z, \tau\right).$$

Естественной и единственной возможностью при выборе скалярной величины, по которой должно производиться дифференцирование радиус-вектора, является собственное время: т.е. $u_\alpha = dr_\alpha / dt_о$. Вычисления дают

$$u_x = \frac{dx}{dt_о} = \frac{dx}{dt\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}} = \frac{\upsilon_x}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}} , \qquad (13)$$

$$u_y = \frac{v_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad u_z = \frac{v_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{14}$$

При этом любопытно выглядит четвертая компонента скорости

$$u_\tau = \frac{d\tau}{dt_\text{o}} = \frac{ic}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{15}$$

Фактически она является отражением разницы между собственным временем и временем в любой другой ИСО. В пределе $v << c$ пространственные компоненты 4-скорости превращаются в обычные составляющие вектора скорости.

Далее предположим, что тела обладают инерцией, которая характеризуется скаляром, т.е. инвариантом. Эта величина называется массой тела m. Это дает возможность по “накатанной” схеме (13) – (15) определить вектор 4-импульса: $p_\alpha = mu_\alpha$.

Умножая на массу левые и правые части равенств (13) – (15), получаем определение вектора 4-импульса тела:

$$p_x = \frac{mv_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad p_y = \frac{mv_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \tag{16}$$

$$p_z = \frac{mv_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad p_\tau = \frac{imc}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{17}$$

В индексной форме кратко можно записать $p_\alpha = mu_\alpha$, где текущий индекс принимает значения $\alpha = \overline{1,4}$.

Необычной и не совсем очевидной величиной здесь является четвертая компонента 4-импульса. Физический смысл этой неотъемлемой составляющей 4-вектора импульса тела будет прояснен ниже.

9. УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ ТЕЛА В СТО

Следующий этап построения релятивистской механики связан с выводом уравнения, которое определяет динамику тела. Потребуем, чтобы искомое уравнение имело четырехмерную векторную форму. Это опять означает, что приращение импульса необходимо делить на скаляр, т.е. на приращение собственного времени dt_o. Таким образом, по аналогии со вторым законом Ньютона сформулируем закон динамики в СТО

$$\frac{dp_\alpha}{dt_o} = \mathcal{F}_\alpha, \tag{18}$$

где $\mathcal{F}_\alpha$ – релятивистский четыре-вектор силы, компоненты которого должны изменяться при переходе от одной СО к другой в соответствии с формулами преобразования векторов. Правда, более естественным в законе релятивистской динамики представляется определять изменение времени в системе отсчета K, в которой производится измерение приращения импульса. Тогда получаем

$$\frac{dp_\alpha}{dt} = \mathcal{F}_\alpha \sqrt{1 - \upsilon^2/c^2} \equiv f_\alpha \, .$$

10. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ФОРМУЛА ЭНЕРГИИ ТЕЛА

Вычислим в рамках релятивистской динамики работу при одномерном перемещении тела массой m вдоль оси x. (для простоты f_y = 0, f_z = 0). Будем интересоваться работой, производимой за единицу времени в системе отсчета K:

$$\frac{\delta A}{\delta t} = f_x \upsilon_x = \upsilon_x \frac{dp_x}{dt} = \upsilon_x \frac{d}{dt} \frac{m\upsilon_x}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} =$$

$$= \frac{m\upsilon_x}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} \frac{d\upsilon_x}{dt} + \frac{m\upsilon_x^2}{\left(1-\upsilon^2/c^2\right)^{3/2}} \frac{\upsilon_x}{c^2} \frac{d\upsilon_x}{dt} =$$

$$= \frac{m\upsilon_x}{\left(1-\upsilon^2/c^2\right)^{3/2}} \frac{d\upsilon_x}{dt} \, . \qquad (19)$$

Также как в классической механике, необходимо попытаться представить это выражение в виде полной производной от некоторой функции. В данном случае эту возможность можно реализовать, в результате чего приходим к равенству

$$\frac{\delta A}{\delta t} = \frac{d}{dt} \frac{mc^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} \, .$$

Выражение под оператором производной по времени по смыслу представляет собой энергию тела массой m:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} \, . \qquad (20)$$

Содержательно формула для энергии (20) в корне отличается от аналогичной величины в ньютоновой механике. Важнейшая особенность полученной формулы заключается в том, что теперь нельзя разогнать тело с ненулевой массой покоя до скорости света, т.к. для этого потребовалось бы совершить над телом бесконечную работу. Еще одно замечание касается предельного случая $\upsilon = 0$. Согласно (20) тело в покое обладает энергией

$$E = mc^2 .$$

Это соотношение называется *формулой Эйнштейна*. Оно имеет глубокий физический смысл, который заключается в том, что масса в определенном смысле эквивалентна энергии тела в покое, т.к. с точностью до размерного множителя равна ей.

Не менее важным является еще одно примечательное следствие. Для его фиксации необходимо сопоставить (20) с четвертой компонентой 4-импульса. Из сравнения соответствующих формул (17) и (20) видно, что четвертая компонента импульса p_τ имеет простую и наглядную физическую интерпретацию – это энергия тела с точностью до размерного множителя.

Таким образом, имеем 4-импульс в виде

$$P_\alpha = \left(\vec{p}, \frac{iE}{c}\right) = \left(p_x, p_y, p_z, \frac{iE}{c}\right).$$

В ньютоновой механике импульс и кинетическая энергия являются разными характеристиками движения. В релятивистской динамике эти две, на первый взгляд непохожие друг на друга, физические величины представляют собой единое целое, образуя единую четырехмерную количественную меру движения в пространстве-времени.

В пределе малых скоростей $\upsilon << c$ правую часть формулы (20) можно разложить в ряд по малому параметру $\varepsilon = \upsilon/c$. Используя известную математическую формулу

$$\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}} \approx 1 + \frac{\varepsilon}{2} + \ldots ,$$

получаем

$$E = mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2} + \ldots\right) = mc^2 + \frac{m\upsilon^2}{2} + \ldots$$

Первое слагаемое – это уже отмеченная выше энергия покоя, второе – классическое выражение для кинетической энергии тела.

11. 4-ТОК В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Перейдем теперь к построению релятивистской электродинамики. Здесь необходимо оговориться, что речь должна идти лишь о придании уравнениям Максвелла несколько другой более симметричной формы. Уравнения Максвелла инвариантны относительно преобразований Лоренца (6), и они не требуют коренной переработки.

Таким образом, в основу дальнейших рассуждений положим предположения об инвариантности полевых уравнений относительно лоренцевых преобразований и сохранении электрического заряда

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho \vec{v}\right) = 0\,, \tag{21}$$

где ρ – объемная плотность заряда. Иными словами, закон сохранения заряда должен быть справедлив во всех инерциальных СО. Необходимо только придать закону сохранения заряда (21) релятивистски инвариантную форму.

Для этого достаточно ввести 4-вектор, который в дальнейшем будет именоваться 4-током

$$J_\alpha = \left(\rho u_x, \rho u_y, \rho u_z, ic\rho\right).$$

В терминах 4-тока закон сохранения заряда (21) имеет особенно простую форму (по-прежнему $\tau = ict$ – четвертая координата):

$$\frac{\partial J_\alpha}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} + \frac{\partial J_\tau}{\partial \tau} = 0\,, \qquad \alpha = \overline{1,4}\,.$$

Из определения 4-вектора вытекает, что при переходе от одной СК к другой его компоненты должны преобразовываться по следующим формулам

$$a_\alpha = \gamma_{\alpha\beta} a_\beta{}'\,.$$

По повторяющемуся индексу β предполагается суммирование. Обобщение преобразований (6) дает [7]:

$$a_x = \frac{a_{x'} - i\dfrac{v}{c}a_{\tau'}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,, \quad a_y = a_{y'}\,, \quad a_z = a_{z'}\,, \quad a_\tau = \frac{a_{\tau'} + i\dfrac{v}{c}a_{x'}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,. \tag{22}$$

В отличие от классической механики Ньютона система уравнений Максвелла – Лоренца является релятивистски инвариантной. Выпишем уравнения электродинамики в терминах электрического потенциала φ и векторного потенциала $\vec{A}$:

$$\Box \vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}\,, \qquad \Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,, \tag{23}$$

$$\Box \varphi = -4\pi\rho\,, \qquad \vec{j} = \rho \vec{u}\,, \tag{24}$$

где $\Box$ – оператор Даламбера, $\vec{j}$ – объемная плотность тока. Как известно, система уравнений (23), (24) дополняется определенным ограничением, которое носит название калибровки Лоренца:

$$\mathrm{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 .$$

Видно, что правые части неоднородных волновых уравнений (23), (24) являются частями введенного нами ранее 4-тока. Для объединения уравнений (23), (24) определим 4-потенциал. Он вводится по аналогии с 4-током

$$A_\alpha = \left(A_x, A_y, A_z, i\varphi\right) = \left(\vec{A}, i\varphi\right).$$

С помощью 4-векторов тока и потенциала можно записать соотношения (23), (24) в виде одного универсального уравнения

$$\Box A_\alpha = -\frac{4\pi}{c} J_\alpha .$$

Условие калибровки Лоренца также без труда записывается в четырехмерной форме

$$\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0, \quad \alpha = \overline{1,4} .$$

В результате полная система уравнений электродинамики приобретает релятивистски инвариантную форму. Это означает, что законы электродинамики, как и полагается, одинаковы во всех ИСО. При этом потенциалы электромагнитного поля не являются инвариантными величинами. Очевидно, что закон преобразования потенциалов определяется общими формулами (22):

$$A_x = \frac{A_x{}' + \frac{\upsilon}{c}\varphi'}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}, \quad A_y = A_y{}', \quad A_z = A_z{}', \quad \varphi = \frac{\varphi' + \frac{\upsilon}{c}A_x{}'}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} . \qquad (25)$$

12. ТЕНЗОР ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Вспомним связь между напряженностями электрического и магнитного полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$, с одной стороны, и соответствующими потенциалами с другой:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} ,$$

$$\vec{H} = \mathrm{rot}\vec{A} .$$

Далее будем иметь в виду, что $A_\alpha = (A_x, A_y, A_z, i\varphi)$, φ – электрический, $\vec{A}$ – векторный потенциалы. По-прежнему роль четвертой координаты выполняет переменная $\tau = ict$. По формулам приходим к антисимметричным выражениям для компонент вектора напряженности ЭП:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} = i\left(\frac{\partial A_\tau}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial \tau}\right),$$

$$E_y = i\left(\frac{\partial A_\tau}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial \tau}\right),$$

$$E_x = i\left(\frac{\partial A_\tau}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \tau}\right).$$

Введение четвертой временно́й координаты τ, включающей мнимую единицу, приводит к тому, что выражения для компонент вектора напряженности формально становятся антисимметричными.

Взяв ротор векторного потенциала, получим подобные соотношения для компонент магнитного поля

$$H_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad H_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad H_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

Эти выражения изначально были антисимметричными и естественным образом сохранили это свойство.

Введем антисимметричный тензор

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta} \quad \left(F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}\right).$$

Компоненты этого тензора выражаются через компоненты электрического и магнитного полей следующим образом:

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}.$$

13. УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ФОРМЕ

В качестве напоминания выпишем исходную систему уравнений Максвелла [1], [4], [6], описывающую эволюцию электрического и магнитного полей в вакууме по заданным и в общем случае меняющимся с течением времени распределениям заряда и токов

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \mathrm{div}\vec{H} = 0, \tag{26}$$

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \mathrm{div}\vec{E} = 4\pi\rho. \tag{27}$$

Легко видеть, что традиционные для математики операции однократного дифференцирования и свертки применительно к тензору $F_{\alpha\beta}$ позволяют полностью воспроизвести уравнения Максвелла (26), (27), которые приобретают компактную и особо симметричную форму:

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial F_{\alpha\gamma}}{\partial x_\beta} = 0, \qquad \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = \frac{4\pi}{c} J_\alpha .$$

Это и есть релятивистски инвариантная форма записи уравнений Максвелла. Свойства поля вытекают из вида одного антисимметричного тензора электромагнитного поля, определенного в 4-мерном пространстве-времени.

Составляющие $\vec{E}$ и $\vec{H}$ входят в этот тензор в определенном смысле на равных правах.

14. БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Любимов Д.В.* Электродинамика. Электромагнитное поле в вакууме: учеб. пособие. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2007. 91 с.
2. *Лобов Н.И.*, Электродинамика сплошных сред. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2007. 87 с.
3. *Гершуни Г.*З. Электродинамика. Излучение дипольной системы: методич. указ. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 1989. 16 с.
4. *Левич В.Г.* Курс теоретической физики. Т. I. М.: Наука, 1969. 704 с.
5. *Угаров В.А.* Специальная теория относительности. М.: Наука, 1969. 304 с.
6. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т II. Теория поля. М.: Наука, 1988, 512 с.
7. *Рашевский П.К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967, 664 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Методическое издание

Основы специальной теории относительности
и ее связь с электродинамикой

Составитель: Виталий Анатольевич Демин

Редактор *Л.Л. Савенкова*
Технический редактор *Л.А. Богданова*
Корректор *Г.А. Гусман*

Подписано в печать 15.11.2002.
Формат 60×84 1/16. Бум. тип. № 2
Усл. печ. л. 1,16. Тираж 50 экз. Заказ.

Издательский центр Пермского государственного
национального исследовательского
университета, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15