МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А. В. Шилина, А. Н. Оглезнева

КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

ЗАДАЧИ И УПРАЖЕНИЯ

*Допущено методическим советом
Пермского государственного национального
исследовательского университета в качестве
учебного пособия для студентов, обучающихся
по направлению подготовки бакалавров «Математика»
и «Механика и математическое моделирование»*

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
"Perm University Press"

Пермь 2019

УДК 517.5(075.8)
ББК 22.161я73
Ш578

Шилина А. В., Оглезнева А. Н.

Ш578 Комплексный анализ. Задачи и упражнения [Электронный ресурс]: учеб. пособие / А. В. Шилина, А. Н. Оглезнева; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Электрон. дан. – Пермь, 2019. – 4,49 Мб; 107 с. – Режим доступа: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/uchebnie-posobiya/shilina-oglezneva-kompleksnyj-analiz-zadachi-i-uprazhneniya.pdf. – Загл. с экрана.

ISBN 978-5-7944-3358-6

Учебное пособие написано на основе курса лекций, читаемых авторами в течение ряда лет на механико-математическом факультете Пермского государственного национального исследовательского университета. Его содержание посвящено исследованию свойств аналитических функций комплексного переменного и является основой курса «Комплексный анализ».

Пособие предназначено для студентов, изучающих комплексный анализ аналитических функций. В нём содержится необходимый теоретический материал, примеры с подробным решением, задачи для самостоятельной работы, а также приведен пример итоговой работы по данному курсу.

Пособие может использоваться студентами, изучающих комплексный анализ, а также магистрантами и аспирантами, которые занимаются исследованиями, связанными с применением математических методов.

УДК 517.5(075.8)
ББК 22.161я73

Издается по решению ученого
совета механико-математического факультета
Пермского государственного национального исследовательского университета

Рецензенты: кафедра «Высшая математика» ПНИПУ (зав. кафедрой, д-р физ.-мат. наук, профессор ***Абдуллаев А. Р.***);

профессор кафедры высшей математики, и.о. зав кафедрой информационных технологий в бизнесе НИУ ВШЭ – Пермь, д-р пед. наук, профессор ***Е. Г. Плотникова***

ISBN 978-5-7944-3358-6

СОДЕРЖАНИЕ

1. МНОЖЕСТВО КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ. ТОПОЛОГИЯ КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Основные понятия

Параметры	Имя понятия, обозначение	Определяющее понятие и видовые признаки
z	Комплексное число	Пара действительных чисел z = (x, y), $x \in R, y \in R$, для которых определены операции: 1) сравнения: $z_1=(x_1,y_1)$, $z_2=(x_2,y_2)$, тогда $z_1=z_2 \Leftrightarrow x_1=x_2$, и $y_1=y_2$; 2) сложения: $z_1+z_2=(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$
$x \in R$	Действительная часть комплексного числа, x	$x = \mathrm{Re}(z)$
$y \in R$	Мнимая часть комплексного числа, y	$y = \mathrm{Im}(z)$
z = (x,y), $x \in R, y \in R$	Алгебраическая форма записи комплексного числа	$z = x + iy$
$\bar{z}$	Сопряженное число	$\bar{z} = x - iy$
$z_1 - z_2$	Разность двух комплексных чисел	$z_1 - z_2 = (x_1+x_2,) - i(y_1+y_2)$
$z_1 \cdot z_2$	Произведение двух комплексных чисел	$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$
$\rho = \lvert z\rvert$	Модуль комплексного числа	$\lvert z\rvert = \sqrt[2]{x^2 + y^2}$, $\lvert z\rvert^2 = z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$
$\frac{z_1}{z_2}$	Деление двух комплексных чисел	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\,\overline{z_2}}{z_2\,\overline{z_2}} = \frac{z_1\,\overline{z_2}}{\lvert z_2\rvert^2}$
C	Множество комплексных чисел	Поле чисел относительно операций сложения и умножения

$Arg(z) \in R$ $\forall z \in C, z \neq 0$	Аргумент комплексного числа	Угол между положительным направлением оси Ox и вектором z
$\arg z \in R$, $\forall z \in C, z \neq 0$	Главное значение аргумента	$\arg z = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \in [0, 2\pi)$ $\arg z = arctg \frac{y}{x} \in (-\pi, \pi]$
$d(z_1, z_2)$	Метрика в C	Функция d: C×C $\to$ [0, +∞) $\vert$ $\forall\ z_1, z_2, z_3 \in$ C $d(z_1, z_2) = \vert z_2 - z_1 \vert = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ 1) $d(z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2$ 2) $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$ 3) $d(z_1, z_2) \leq d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2)$
$u_{z_0} \in C$	Окрестность точки $z_0 \in C$	$u_{z_0} = \{z \in C \vert\ \vert z - z_0 \vert < \varepsilon\}$
$z = \infty$	Окрестность бесконечно удалённой точки	$u_\infty = \{z \in C : \vert z \vert > R\}$
$\tau \subseteq \wp(C)$	Топология комплексной плоскости	Система множеств, порождённая системой окрестностей на C
$S \in R^3$	Сфера Римана	геометрическое представление комплексной плоскости на сфере S: $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$
$\overline{C}$	Расширенная комплексная плоскость	$\overline{C} = C \cup \{\infty\}$
$\overline{C}$	Компактифицированная комплексная плоскость	Расширенная комплексная плоскость $\overline{C}$
$\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C$	Последовательность комплексных чисел	Упорядоченное счетное множество комплексных чисел
$\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C$	Ограниченная последовательность	Последовательность ограничена, если $\forall n \in N \quad \exists M > 0 : \vert z_n \vert \leq M$
$\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C$	Предел последовательности	$z_0 \in C$ – предел последовательности $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, если для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N(\varepsilon)$: $\vert z_n - z_0 \vert < \varepsilon\ \ \forall\ n \geq N$, Тогда $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z_0$

$\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C$	Сходящаяся последовательность	Последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к $z_0 \in C$, если $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$
$\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C$	Неограниченно возрастающая последовательность	Последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ неограниченно возрастает при $n \to \infty$, если $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$
$z_0 \in C$	Внутренняя точка множества D, $D \subseteq C$	$z_0 \in D$ является внутренней точкой множества М, если $\exists u_{z_0} \in \tau : u_{z_0} \subseteq D$
$z_0 \in C$	Граничная точка множества	$z_0 \in C$ является граничной точкой множества D, если $\forall u_{z_0} \in \tau : u_{z_0} \cap D \neq \varnothing$ $\wedge u_{z_0} \cap (C \setminus D) \neq \varnothing$
$D \subseteq C$	Область на комплексной плоскости	Множество D, в котором: 1) все точки внутренние; 2) граница области является связным множеством
$\partial D \subseteq C$	Граница области	Множество граничных точек
$D \subseteq C$	Однозначная область	Область D, граница которой ∂D имеет порядок связности равный одному
$D \subseteq C$	Многозначная область	Область D, граница которой ∂D имеет порядок связности ≥ 2

Основные утверждения

УТВ_1.1. Существует взаимно однозначное отображение множества комплексных чисел **С** на плоскость *р*, при котором $\forall z$ из множество комплексных чисел соответствует точка на плоскости *р* с координатами *(x,y), x=Re(z), y =Im(z).*

Будем считать плоскость *р* комплексной плоскостью $\boxed{z}$.

Каждое комплексное число изобразим вектором на плоскости (см рис.1). Тогда полярные координаты вектора: $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ и угол φ между положительным направлением оси Ох и вектором z однозначно определяют комплексное число на плоскости:

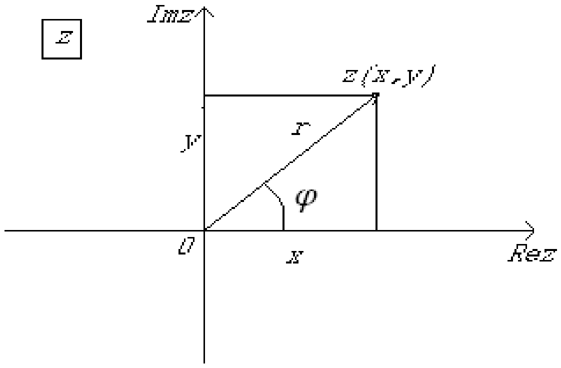

Рис. 1

$$z = x + iy = \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, r \geq 0, \varphi \in R$$

$z \neq 0$

УТВ_1.2. $\varphi = \mathrm{Arg}\ (\mathrm{z}) = \arg z + 2\pi k, k \in Z, z \neq 0$ – многозначная функция комплексного аргумента, определённая $\forall z \in C : z \neq 0$**.**

УТВ_1.3. Формулы для вычисления главного значения аргумента

$$arg\ (z) = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, x > 0 \\ \pi + arctg\dfrac{y}{x}, x < 0, y > 0 \\ -\pi + arctg\dfrac{y}{x}, x < 0, y < 0 \\ 0, \quad x > 0, y = 0 \\ \pi, \quad x < 0, y = 0 \\ \pi/2, \quad x = 0, y > 0 \\ -\pi/2, \quad x = 0, y < 0 \end{cases}$$

УТВ_1.4. Тригонометрическая форма записи комплексного числа

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\varphi = Arg(z), r = |z|$.

УТВ_1.5. Формула Эйлера: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

УТВ_1.6. Показательная форма записи комплексного числа

$z = re^{i\varphi}$, где $\varphi = Arg(z), r = |z|$

УТВ_1.7. Формула Муавра

$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r^n e^{in\varphi}$, $n \in Z$.

УТВ_1.8. Извлечение корня

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}), k = 0,1,..n-1,\ n \in Z,$$

Причем, все корни располагаются равномерно на окружности радиуса $\sqrt[n]{r}$.

УТВ_1.9. Свойства сопряжения

$(z_1 \pm z_2)^* = z_1^* \pm z_2^*$;

$(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$;

$(z_1 / z_2)^* = z_1^* / z_2^*$;

$(z^*)^* = z$.

УТВ_1.10. Комплексная плоскость взаимно однозначно отображается на сферу Римана

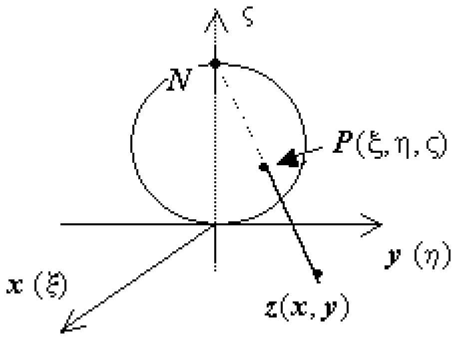

Рис. 2

Риман предложил применять для геометрического представления комплексной плоскости сферу (см. рис.2). Вместе с координатами ***x***, ***y*** в плоскости ***C*** рассмотрим трёхмерную прямоугольную систему координат *ξ, η, ζ,* такую, что оси *ξ*, η совпадают с осями ***x***, ***y***, а ось *ζ* им перпендикулярна.

Поместим в это пространство сферу S, S: $\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$, касающуюся плоскости ***C*** в начале координат своим южным полюсом.

Каждой точке $z(x, y) = x + iy \in C$ поставим в соответствие точку *P(ξ, η, ζ)* сферы, получающуюся при пересечении луча, проведённого через точку *z* и северный полюс *N* сферы, со сферой. Очевидно, соответствие *z* ↔ *P* однозначно отображает плоскость *C* на сферу с единственной исключённой точкой – северным полюсом *N*. Такое соответствие *z*↔ *P* называется **стереографической проекцией**.

Формулы стереографической проекции:

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{x}{1+|z|^2}, \\ \eta = \dfrac{y}{1+|z|^2} \\ \zeta = \dfrac{|z|^2}{1+|z|^2} \end{cases}$$, формулы обратного преобразования имеют вид $$\begin{cases} x = \dfrac{\xi}{1-\zeta} \\ y = \dfrac{\eta}{1-\zeta} \end{cases}.$$

Условимся считать, что точка N на сфере S соответствует бесконечно удалённой точке $z = \infty$. Тем самым установим взаимно однозначное отображение плоскости на сферу S. Такую пополненную плоскость будем называть замкнутой комплексной плоскостью и обозначать $\overline{C}$, а сферу S – сферой Римана. Если не прибегать к стереографической проекции, то несобственная точка $z = \infty$ рассматривается как единственная предельная точка любой последовательности $\{z_n\}$ комплексных чисел таких, что $|z_n| \to \infty$ при $n \to \infty$ независимо от того, по какому пути точки последовательности удаляются от начала координат.

Замечание 9.1

Сфера Римана S является ограниченным, замкнутым и, как следствие, компактным множеством. Поэтому добавление к множеству комплексных чисел C бесконечно удалённой точки $z = \infty$ называют *компактификацией множества C,* а расширенную комплексную плоскость $\overline{C}$ – *компактифицированной* комплексной плоскостью.

УТВ_1.11. Топология комплексной плоскости определяется системой окрестностей нуля

1). Окрестность точки на комплексной плоскости.

Выберем точку z_0 на комплексной плоскости. Определим окрестность этой точки как открытый круг с центром в точке z_0 и радиусом ε: $u_{z_0,\varepsilon} = |z - z_0| < \varepsilon$.

2). Опишем следующие множества на комплексной плоскости:

2.1*)* $|z–z_0|=a$ *(a>0)* – окружность с центром в точке z_0 радиуса а;

2.2) $|z–z_0|<a$ *(a>0)* – открытый круг с центром в точке z_0 радиуса а;

2.3*)* $|z–z_0|>a$ *(a>0)* – внешность открытого круг с центром в точке z_0 радиуса а;

2.4*)* $a<|z–z_0|<b$ *(0<a<b)* – открытое кольцо с центром в точке z_0.

Используя понятие «аргумент», опишем ещё ряд множеств на плоскости:

2.5) $arg(z–z_0)= \varphi$ – луч, с началом в точке z_0 , идущий под углом φ к положительному направлению действительной оси Ox;

2.6) $\alpha <arg(z–z_0)<\beta$ – внутренность неограниченного открытого сектора с вершиной в точке z_0 и углом $\beta-\alpha$.

В процессе изучения комплексного анализа необходимо также рассмотреть множества:

2.7) *Re z= a* – прямая, || мнимой оси, проходящая через точку (a, 0);

2.8) *Im z= b* – прямая, || действительной оси, проходящая через точку (0, b).

УТВ_1.12. Необходимое и достаточное условие сходимости последовательности комплексных чисел

Последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C$ сходится к $z_0 \in C$ тогда и только тогда, когда сходятся последовательности действительной и мнимой частей: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$,

причем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$, где $z_0 = x_0 + iy_0$.

УТВ_1.13. Необходимое и достаточное условие ограниченности последовательности.

Последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C$ ограничена тогда и только тогда, когда ограничены последовательности действительной и мнимой частей: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$.

УТВ_1.14. Все свойства сходящихся и ограниченных последовательностей в поле действительных чисел справедливы и для последовательностей в поле комплексных чисел.

Основные умения

1. Вычислить сумму, разность, произведение и частное комплексных чисел.
2. Найти модуль и главное значение аргумента комплексного числа.
3. Возвести комплексное число в степень.
4. Извлечь корни из комплексного числа. Изобразить их на окружности.
5. Решить алгебраическое уравнение $z^n = a$, $z^n = \bar{z}$.
6. Определить множество на комплексной плоскости.
7. Найти множество внутренних и граничных точек множества.

Основные примеры и их решение

Пример 1

Записать следующие комплексные числа в тригонометрической и показательной формах:

а) $z = 3 + 3i$; б) $z = -\sqrt{3} + i$; в) $z = -3i$;

г) $z = -3 - 2i$; д) $z = -3\left(cos\frac{\pi}{8} - isin\frac{\pi}{8}\right)$.

Решение:

а) Для начала вычислим модуль и аргумент (точнее главное значение аргумента) комплексного числа $z = 3 + 3i$. У нас $x = 3 > 0, y = 3 > 0$, тогда $\rho = |z| = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}, argz = arctg\frac{y}{x} = arctg\frac{3}{3} = \frac{\pi}{4}$.

Получаем $z = 3 + 3i = 3\sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + i\,sin\frac{\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$.

б) Для числа $z = -\sqrt{3} + i, x = -\sqrt{3} < 0, y = 1 > 0, \rho = |z| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2, argz = \pi + arctg\frac{y}{x} = \pi + arctg\frac{1}{-\sqrt{3}} = \pi + \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{6}$.

Значит, $z = -\sqrt{3} + i = 2\left(cos\frac{5\pi}{6} + i\,sin\frac{5\pi}{6}\right) = 2\,e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

в) Для числа $z = -3i$ имеем $x = 0, y = -3 < 0, \rho = |z| = \sqrt{0^2+(-3)^2} = 3, argz = -\frac{\pi}{2}$.

Тогда $z = -3i = 3\left(cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\,sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 3\,e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

г) Для числа $z = -3 - 2i, x = -3 < 0, y = -2 < 0, \rho = |z| = \sqrt{(-3)^2+(-2)^2} = \sqrt{13}, argz = -\pi + arctg\frac{y}{x} = -\pi + arctg\frac{-2}{-3} = -\pi + arctg\frac{2}{3}$.

Получаем $z = -3 - 2i = \sqrt{13}\left(cos\left(arctg\frac{2}{3} - \pi\right) + i\,sin\left(arctg\frac{2}{3} - \pi\right)\right) = \sqrt{13}\,e^{i\left(arctg\frac{2}{3}-\pi\right)}$.

д) Для числа $z = -3\left(cos\frac{\pi}{8} - isin\frac{\pi}{8}\right)$ данная запись не является тригонометрической формой записи. Перепишем в другом виде: $z = 3\left(-cos\frac{\pi}{8} + isin\frac{\pi}{8}\right)$.

Найдем аргумент $\varphi = argz$ из условий: $cos\varphi = -cos\frac{\pi}{8}, sin\varphi = sin\frac{\pi}{8}$. Эти равенства выполняются для угла $\varphi = \pi - \frac{\pi}{8} = \frac{7\pi}{8}$.

В итоге $z = -3\left(cos\frac{\pi}{8} - isin\frac{\pi}{8}\right) = 3\left(cos\frac{7\pi}{8} + isin\frac{7\pi}{8}\right)$=$2\,e^{i\frac{7\pi}{8}}$.

Пример 2

Вычислить $z_1 + z_2, z_1 - z_2, z_1 \cdot z_2, \frac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = -2 + i, z_2 = 1 - 3i$.

Решение:

Используем правила:

$z_1 + z_2 = (-2 + i) + (1 - 3i) = -1 - 2i;$

$z_1 - z_2 = (-2 + i) - (1 - 3i) = -3 + 4i;$

$z_1 \cdot z_2 = (-2 + i) \cdot (1 - 3i) = -2 + 6i + i - 3i^2 = 1 + 7i;$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-2+i}{1-3i} = \frac{(-2+i)\cdot(1+3i)}{(1-3i)\cdot(1+3i)} = \frac{-2-6i+i+3i^2}{1+9} = \frac{-5-5i}{10} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Стоит отметить, что в некоторых случаях умножение и деление комплексных чисел удобнее производить в тригонометрической форме.

Пример 3

Вычислить $\dfrac{-1-i}{\sqrt{3}+i}$.

Решение:

Запишем числитель и знаменатель в тригонометрической форме.

Для числа $z_1 = -1 - i$, $\rho = |z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, $argz = -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$.

Для числа $z_2 = \sqrt{3} + i$, $\rho = |z| = 2$, $argz = \frac{\pi}{6}$.

Тогда получаем

$$\frac{-1-i}{\sqrt{3}+i} = \frac{\sqrt{2}\left(cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\,sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)}{2\left(cos\frac{\pi}{6} + i\,sin\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(cos\left(-\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + i\,sin\left(-\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(cos\left(-\frac{11\pi}{12}\right) + i\,sin\left(-\frac{11\pi}{12}\right)\right)$$

Пример 4

Изобразить на комплексной плоскости множества точек, удовлетворяющих следующим условиям:

a) $|z - 2 + i| = 2$;

b) $\begin{cases} |z| \le 2 \\ \dfrac{\pi}{4} < \arg z < \dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$;

c) $|z - i| = |z + 2|$;

d) $\begin{cases} |z - i| < 1 \\ \arg z \ge \dfrac{\pi}{4} \\ \arg(z + 1 + i) \le \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$.

Решение:

a) Запишем комплексное число в алгебраической форме: $z = x + yi$.

$|z-2+i| = 2 \;\Rightarrow |x+yi-2+i| = 2 \;\Rightarrow |(x-2)+i(y+1)| = 2$

По формуле модуля комплексного числа, имеем

$\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2} = 2$ или $(x-2)^2+(y+1)^2 = 4$.

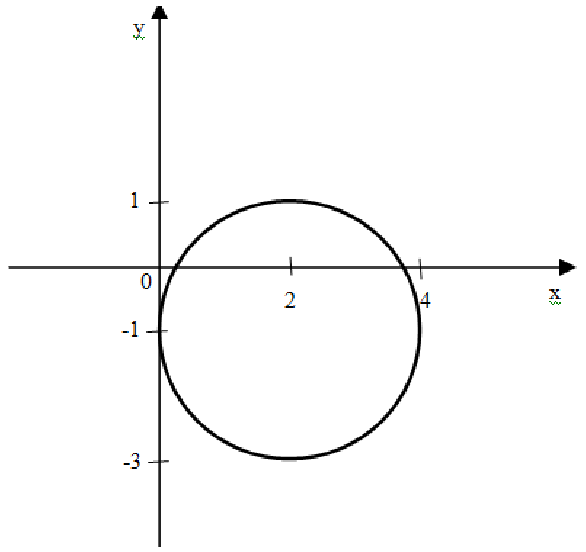

Рис. 3

Получили окружность с центром в точке $(2,-1)$ и радиусом $R = 2$ (см. рис. 3)

b) Первое условие дает множество точек, расположенных внутри круга с центром в начале координат и радиусом $R = 2$. Второе условие по определению аргумента комплексного числа позволяет определить область, заключенную между лучами $\varphi = \frac{\pi}{4}$ и $\varphi = \frac{3\pi}{4}$. При пересечении двух областей получаем область, изображенную на рисунке 4:

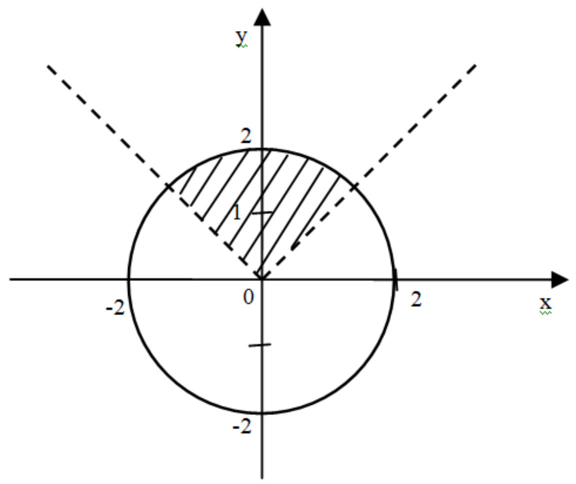

Рис. 4

c) Исходя из геометрического смысла модуля комплексного числа, равенству $|z-i| = |z-(-2)|$ соответствует множество точек z, равноудаленных от точек $z = i$ и $z = -2$. Следовательно, получаем серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему точки $z = i$ и $z = -2$(см. рис. 5).

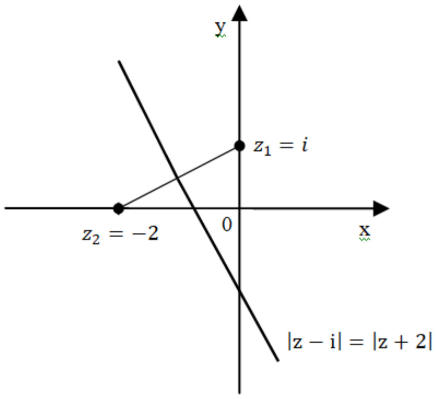

Рис. 5

d) Изобразим на отдельных рисунках множества точек (см. рис. 6 –8), удовлетворяющих каждому из неравенств условия

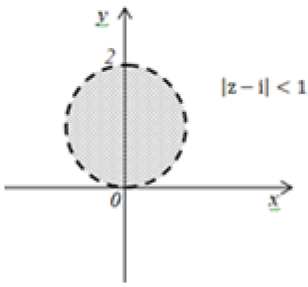

Рис. 6

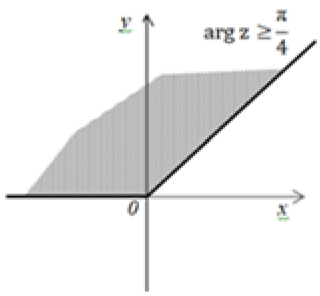

Рис. 7

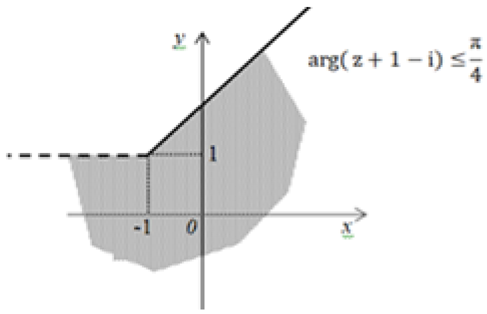

Рис. 8

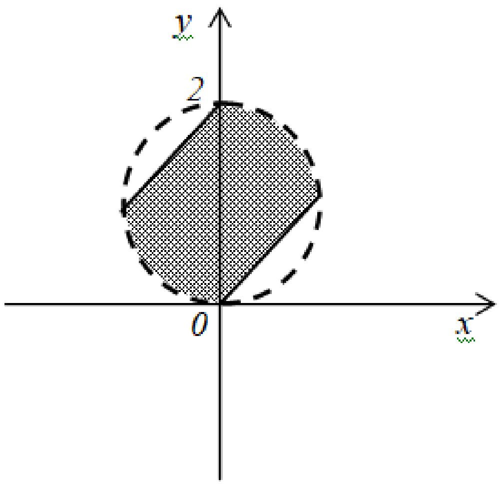

Рис. 9

Находим пересечение трех полученных областей. Это и будет искомое множество (см. рис. 9)

Пример 5

Вычислить $\frac{(1+i)^{28}}{(1-i)^{24}-i\cdot(1+i)^{24}}$.

Решение:

Для начала вычислим степени комплексных чисел. Запишем числа $z_1 = 1 + i, z_2 = 1 - i$ в тригонометрической форме.

$|z_1| = \sqrt{2}, |z_2| = \sqrt{2}, arg(z_1) = \frac{\pi}{4}, arg(z_2) = -\frac{\pi}{4}$;

$z_1 = 1 + i = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + i\,sin\frac{\pi}{4}\right), z_2 = 1 - i = \sqrt{2}\left(cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\,sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

По формуле Муавра:

$${z_1}^{28} = (1+i)^{28} = \sqrt{2}^{28}\left(cos\frac{\pi}{4} + i\,sin\frac{\pi}{4}\right)^{28} = 2^{14}\left(cos\left(28\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i\,sin\left(28\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= 2^{14}\big(cos(7\pi) + i\,sin(7\pi)\big) = -2^{14}.$$

$${z_1}^{24} = (1+i)^{24} = \sqrt{2}^{24}\left(cos\frac{\pi}{4} + i\,sin\frac{\pi}{4}\right)^{24} = 2^{12}\left(cos\left(24\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i\,sin\left(24\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= 2^{12}\big(cos(6\pi) + i\,sin(6\pi)\big) = 2^{12}.$$

$${z_2}^{24} = (1-i)^{24} = \sqrt{2}^{24}\left(cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\,sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^{24} =$$

$$= 2^{12}\left(cos\left(-24\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i\,sin\left(-24\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2^{12}\big(cos(-6\pi) + i\,sin(-6\pi)\big) = 2^{12}.$$

Тогда получаем

$$\frac{(1+i)^{28}}{(1-i)^{24} - i\cdot(1+i)^{24}} = \frac{-2^{14}}{2^{12} - i\cdot 2^{12}} = \frac{-2^{14}}{2^{12}(1-i)} = \frac{-2^2(1+i)}{1+1} = -2(1+i)\,.$$

Пример 6

Решить уравнение $z^3 + 1 = 0$.

Решение:

Перепишем уравнение в виде: $z = \sqrt[3]{-1}$. Представим число (-1) в тригонометрической форме: $-1 = 1(cos\pi + i\,sin\pi)$.

По формуле корня из комплексного числа имеем

$\sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{1}\left(cos\frac{\pi+2\pi k}{3} + i\,sin\frac{\pi+2\pi k}{3}\right)$, где $k = 0, 1, 2$.

Распишем все корни.

При $k = 0$, $z_0 = 1\left(cos\frac{\pi}{3} + i\,sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

При $k = 1$, $z_1 = 1\left(cos\frac{\pi+2\pi}{3} + i\,sin\frac{\pi+2\pi}{3}\right) = cos\pi + i\,sin\pi = -1$.

При $k = 2$, $z_2 = 1\left(cos\frac{5\pi}{3} + i\,sin\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Отметим, что найденным корням уравнения соответствуют вершины правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса 1 с центром в начале координат (см. рис.10).

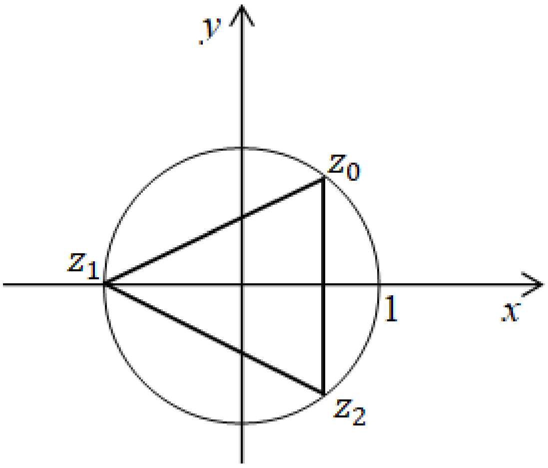

Рис. 10

Вариант теста

1	Найти угол на который надо повернуть вектор z_1, чтобы получился вектор z_2. $z_1 = \sqrt{2} + 6\sqrt{2}i$, $z_2 = 7+5i$	Угол поворота 1. $\pi/4$ 2. $-3\pi/4$ 3. $3\pi/4$ 4. $5\pi/6$ 5. $-\pi/4$
2	Выписать модуль и главное значение аргумента следующих комплексных чисел: а) $z = -1 + \sqrt{3}i$; б) $z = \sin(\pi/7) - i\cos(\pi/7)$; в) $z = 7 - i$.	
3	$z \in C,\ n \in N$ $z = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}$, $n = 18$	Вычислить z^n и выбрать правильный ответ: 1. $-i$, 2. -1, 3. $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, 4. i, 5. 1.
4	Выписать все решения уравнения $(z-1+i)^2 = -1 + \sqrt{3}i$;	
5	Найти и изобразить множество D: $\lvert iz - 1\rvert = \lvert z - 1\rvert$ на комплексной плоскости.	

Решение и ответы

1	Для решения задачи используем тот факт, что при повороте радиус – вектора z, модуль чила не изменяется, а меняется только аргумент. Также при умножении двух чисел с одинаковыми модулями их аргументы складываются. Таким образом, чтобы найти угол поворота необходимо разделить z_2 на z_1: $\frac{z_2}{z_1}\frac{7+5i}{\sqrt{2}+6\sqrt{2}i}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{7+5i}{1+6i}\cdot\frac{1-6i}{1-6i}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(7+5i)(1-6i)}{1+36}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{7+30-42i+5i}{37}=$ $=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{37-37i}{37}=\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ Аргумент числа $\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}$ и будет являться искомым углом поворота: $-\frac{\pi}{4}$.
2	а. $\mid z\mid=2,\ \arg z=\frac{2\pi}{3}$ б. $\mid z\mid=1,\ \arg z=-\frac{5\pi}{14}$ в. $\mid z\mid=5\sqrt{2},\ \arg z=-arctg\left(\frac{1}{7}\right)$.
3	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)^{18}=\left(1\cdot e^{-\frac{5\pi}{6}}\right)^{18}=e^{-\frac{5\pi\cdot 18}{6}}=e^{-15\pi}=-1.$
4	$(z-1+i)^2=-1+\sqrt{3}i\ \Rightarrow z-1+i=\sqrt[2]{-1+\sqrt{3}i}=\sqrt[2]{2\cdot e^{\frac{2\pi}{3}i}}=\sqrt{2}e^{\frac{\frac{2\pi}{3}i+2\pi ki}{2}}=$ $=\sqrt{2}\cdot e^{\frac{\pi}{3}i+\pi ki},\ k=0,1\ \Rightarrow$ $z=\begin{cases}1-i+\sqrt{2}\cdot e^{\frac{\pi}{3}i}=1-i+\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})=1-i+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i\\1-i+\sqrt{2}\cdot e^{\frac{\pi}{3}i+\pi i}=1-i-\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})=1-i-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}i\end{cases}.$
5	$\lvert ix-y-1\rvert=\lvert x+iy-1\rvert\ \Rightarrow\sqrt{x^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x-1)^2+y^2}\ \Rightarrow$ $x^2+y^2+2y+1=x^2-2x+1+y^2\Rightarrow y=-x$ Таким образом, искомое множество точек $\{z\in C:\ y=-x\}$.

2. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Основные понятия

Параметры	Понятие и его обозначение	Определяющее понятие и видовые признаки
$w = f(z), z \in \overline{C}$, $w \in \overline{C}$	Функция комплексной переменной	Отображение множества $\overline{C}$ на $\overline{C}$, при котором точке $z \in \overline{C}$ ставится в соответствие точка $w \in \overline{C}$
$D \subseteq \overline{C}$	Область определения функции $w = f(z)$	Множество точек z, в которых определена функция $w = f(z)$
$E \subseteq \overline{C}$	Область значений функции $w = f(z)$	Образ множества D при отображении $w = f(z)$
$u(x, y): R \times R \to R$	Действительная часть функции $w = f(z)$	$u = \mathrm{Re}(w)$, где $w = f(z) = f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$
$v(x, y): R \times R \to R$	Мнимая часть функции $w = f(z)$	$v = \mathrm{Im}(w)$, где $w = f(z) = f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$
$w = f(z)$	Однозначная функция	Функция однозначна на D, если каждой точке из области определения D соответствует единственное значение $w \in E$
$W = F(z)$	Многозначная функция	Функция $W = F(z)$ многозначна на $D \subseteq \overline{C}$, если $\forall z \in D$ определено множество значений $W = \{ w \in E : w = F(z) \}$
$w = f(z)$	Периодическая функция	$w = f(z)$ периодична с периодом $\omega \in C$, если $f(z+\omega) = f(z)$
$w = f(z)$	Однолистная функция	Функция $w = f(z)$ однолистна на $D \subseteq \overline{C}$, если она инъективна на D

$w = f(z)$	Многолистная функция	Функция $w = f(z)$ многолистна на $D \subseteq \overline{C}$, если функция не инъективна на D: $\exists z_1, z_2 \in D : z_1 \neq z_2$, но $f(z_1) = f(z_2)$
$w = f(z), z \in D,$ $w \in \overline{C}$	Ограниченная функция на $D \subseteq \overline{C}$	Функция ограничена на D, если $\forall z \in D \;\; \exists M > 0 : \lvert f(z) \rvert \le M$
$A \in C$ $A = \lim\limits_{z \to a} f(z)$	Предел функции $w = f(z)$ в точке a	Число $A \in C$ называется пределом функции $w = f(z)$ при $z \to a, a \in C,$ если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \lvert z - a \rvert < \delta \Rightarrow \lvert f(z) - A \rvert < \varepsilon$
$w = f(z)$	Непрерывность функции в точке $a \in C$	$w = f(z)$ непрерывна в точке $a \in C$, если в этой точке существует предел $\lim\limits_{z \to a} f(z) = f(a)$
$w = f(z)$	Непрерывность функции в области $D \subseteq C$	Функция $w = f(z)$ непрерывна в области $D \subseteq C$, если функция непрерывна в каждой точке области D
$w = f(z)$	Равномерно непрерывная функция в области D	Функция $w = f(z)$ равномерно непрерывна на D, если $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : \forall z_1, z_2 \in D \;\; \lvert z_1 - z_2 \rvert < \delta \Rightarrow$ $\lvert f(z_1) - f(z_2) \rvert < \varepsilon$

Основные утверждения

УТВ_2.1. Функция $w = f(z)$ ограничена на области определения $D \subseteq C$ тогда и только тогда, когда на $D \subseteq R^2$ ограничены функции $u(x, y) = \mathrm{Re}(f(z)), \;\; v(x, y) = \mathrm{Im}(f(z))$.

УТВ_2.2. Функция $w = f(z)$ имеет предел $\lim\limits_{z \to a} f(z) = A$, $a \in C, A \in \overline{C}$ тогда и только тогда, когда в точке $z = a \in C$ имеют предел функции $u(x, y) = \mathrm{Re}(f(z)), \;\; v(x, y) = \mathrm{Im}(f(z))$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = \mathrm{Re}(A) \\ \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = \mathrm{Im}(A) \end{cases}, \text{ где } a = x_0 + y_0.$$

УТВ_2.3. Функция $w = f(z)$ непрерывна в точке $a \in C$ тогда и только тогда, когда непрерывны в точке $a = x_0 + y_0$ функции $u(x, y) = \mathrm{Re}(f(z))$ и $v(x, y) = \mathrm{Im}(f(z))$.

УТВ_2.4. Свойства функции $w = f(z)$, непрерывной на ограниченном, замкнутом подмножестве $K \subseteq C$:

1. Если функция $w = f(z)$ непрерывна на $K \subseteq C$, то она ограничена на *K:*

   $\exists M > 0 : |f(z)| < M \quad \forall z \in K.$

2. Модуль функции $w = f(z)$, непрерывной на *K*, достигает наибольшего и наименьшего на *K* значения.
3. Всякая функция, непрерывная на *K*, равномерно непрерывна на нем:

   $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall z_1, z_2 \in K\left(|z_1 - z_2| < \delta \Rightarrow |f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon\right).$

   Эти свойства вытекают из общих теорем о функциях нескольких переменных, непрерывных на компактном множестве в метрическом пространстве.

УТВ_2.5. Свойства основных элементарных функций

1. Линейная функция $w = az + b$.

Линейная функция $w = az + b$ определена всюду на С $\Rightarrow$ $D = C$. Область значений функции $E = C$. Бесконечно удаленная точка $z = \infty$ при линейном отображении переходит сама в себя. Геометрически линейное отображение $w = az + b,$ где

$a = re^{i\varphi}, b \in C$, означает композицию трёх отображений:

а) растяжение: $\xi(z) = rz, r > 0,$

б) поворот: $\eta(\xi) = e^{i\varphi}\xi, \varphi \in R$,

в) сдвиг: $w = \eta + b$.

Функция однозначна, однолистна и не периодична на $\overline{C}$.

2. Дробно–линейная функция $w = \dfrac{az + b}{cz + d}, ad - bc \neq 0$.

Область определения $D = C \setminus \{-\dfrac{d}{c}\}$, область значений $E = C \setminus \{\frac{a}{c}\}$. Установим взаимно

однозначное соответствие между расширенной плоскостью $\overline{C}$ и плоскостью $\overline{W}$

следующим образом: точку $z = \infty$ отобразим биективно на точку $w = \dfrac{a}{c}$, а точке $z = -\dfrac{d}{c}$

поставим в соответствие $w = \infty$. Теперь будем считать, что функция

$w = \dfrac{az + b}{cz + d}, ad - bc \neq 0$ определена на всей расширенной плоскости $\overline{C}$ и принимает любое

значение из $\overline{C}$, т.е. $D = \overline{C}$ и $E = \overline{C}$. Функция однозначна, однолистна и не периодична на $\overline{C}$.

3. Степенная функция $w = z^n, n \in N$.

Действительную и мнимую части степенной функции удобно искать в полярных координатах: пусть $z = x + iy = \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$, тогда $w = z^n$ = (формула Муавра)=

$= r^n \cos n\varphi + ir^n \sin n\varphi \Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = r^n \cos n\varphi \\ v(x,y) = r^n \sin n\varphi \end{cases}$, $z \neq 0$. При $z = 0$ функция принимает значение $w = 0$.

Область определения D = C, область значений E = C.

Функция однозначна на всей области определения, но не является однолистной на D.

Например, $w = z^4 : w(i) = w(-i) = 1, i \neq -i$. Функция $w = z^4$ будет однолистной на множестве $S = \left\{ z : \arg(z_2) - \arg(z_1) < \dfrac{\pi}{2} \right\}$. Можно выбрать $S = \left\{ z : 0 < \arg(z) < \dfrac{\pi}{2} \right\}$.

4. Показательная функция $w = e^z$.

Определим функцию как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n = e^z$.

Докажем существование этого предела $\forall z \in C$. Для этого положим $z = x + iy$ и заметим, что по правилам возведения в степень $\left|\left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n\right| = \left(1 + \dfrac{2x}{n} + \dfrac{x^2 + y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}$,

$$\arg\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = n \cdot arctg\frac{y/n}{1 + \frac{x}{n}}.$$

Следовательно, существуют $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n\right| = e^x$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\arg\left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n = y \Rightarrow$

$$\exists\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y) \Rightarrow \left|e^z\right| = e^{\operatorname{Re} z} = e^x, \arg e^z = \operatorname{Im} z = y.$$

Тогда $e^z = e^x(\cos y + i\sin y) = (x = 0) \Rightarrow e^{iy} = \cos y + i\sin y$ – формула Эйлера. Определим теперь действительную и мнимую части функции.

Действительная и мнимая части функции: $w = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = (\textit{формула Эйлера})$

$= e^x(\cos y + i\sin y) \Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = e^x \cos y \\ v(x,y) = e^x \sin y \end{cases}$. Заметим, что $\left|e^z\right| = e^x; Arg(e^z) = y$.

Область определения $D = C$, область значений $E = C \setminus \{0\}$.

Функция периодична с мнимым периодом $\omega = 2\pi i$ (проверить самостоятельно). Функция однозначна на области определения $D = C$.

Функция не однолистна в области определения: $w(z + 2\pi ki) = w(z),\ \ k \in Z$. Область однолистности: $\operatorname{Im}(z_2 - z_1) < 2\pi$ (см.рис. 11)

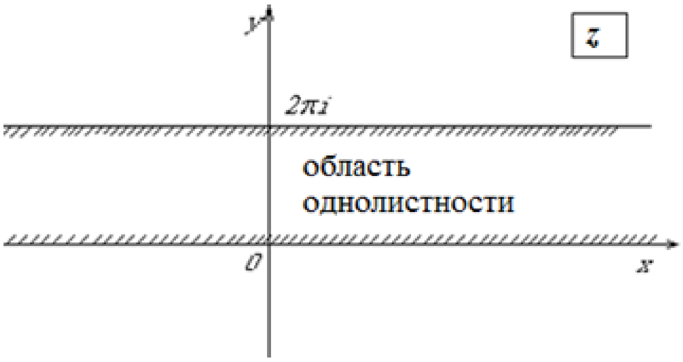

Рис. 11

Для показательной функции справедлив ряд тождеств, выполняющихся для функции действительного переменного:

1. $e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$

2. $e^{z_1 - z_2} = e^{z_1} / e^{z_2}$.

А также свойство периодичности функции:

3. $e^{z + 2\pi ki} = e^{z}$, $k \in Z$.

5. Гиперболические функции. $w = chz$, $w = shz$, $w = thz$, $w = cthz$.

Определим функции следующим образом:

$$chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2},\ \ shz = \frac{e^z - e^{-z}}{2},\ \ thz = \frac{shz}{chz},\ \ cthz = \frac{chz}{shz}.$$

Из определения найдём действительную и мнимую части функции. Например, у функции

$$w = chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{e^{x+iy} + e^{-x-iy}}{2} = \frac{e^x e^{iy} + e^{-x} e^{-iy}}{2} = \frac{e^x(\cos y + i\sin y) + e^{-x}(\cos y - i\sin y)}{2} =$$

$$= \frac{(e^x + e^{-x})\cos y + i(e^x - e^{-x})\sin y}{2} = chx\cos y + i\ shx\sin y.$$ Таким образом,

$$chz = \begin{cases} u(x, y) = chx\cos y \\ v(x, y) = shx\sin y \end{cases}.$$

Самостоятельно найдите $u(x, y)$ и $v(x, y)$ для остальных функций.

Область определения $D=C$, область значений функций $w=ch\,z,\ w=sh\,z,\quad E=C$. Гиперболические функции $w=chz, w=shz$ однозначны на D, периодичны с мнимым периодом $\omega=2\pi i$: $ch(z+2\pi ik)=chz, k\in Z$, $sh(z+2\pi ik)=shz, k\in Z$.

Гиперболические функции не однолистны на D. Рассмотреть доказательство этого факта самостоятельно.

Для гиперболических функций справедлив ряд тождеств, аналогичных тождествам для функций действительных переменных. Например, $ch^2z-sh^2z=1$. Доказать все тождества можно из определений этих функций.

6. Тригонометрические функции $w=\cos z$, $w=\sin z$, $w=tgz$, $w=ctgz$.

Определим функции следующим образом:

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\ \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\ tgz=\frac{\sin z}{\cos z},\ ctgz=\frac{\cos z}{\sin z}.$$

Из определения найдём действительную и мнимую части функции. Рассмотрим функцию $w=\sin z$:

$$w=\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\frac{e^{ix-y}-e^{-ix+y}}{2i}=\frac{e^{ix}e^{-y}-e^{-ix}e^{y}}{2i}=\frac{e^{-y}(\cos x+i\sin x)-e^{y}(\cos x-i\sin x)}{2i}=$$

$$=\frac{(e^{-y}-e^{y})\cos x+i(e^{-y}+e^{y})\sin x}{2i}=\sin x\,chy+i\ \cos x\,shy.$$ Таким образом

$$\sin z=\begin{cases}u(x,y)=\sin x\,chy\\ v(x,y)=\cos x\,shy\end{cases}.$$

Область определения функций $w=\cos z, w=\sin z$ $D=C$, область значений $E=C$.

Тригонометрические функции $w=\cos z$, $w=\sin z$ однозначны на D, периодичны с периодом $\omega=2\pi$: $\cos(z+2\pi k)=\cos z, k\in Z$, $\sin(z+2\pi k)=\sin z, k\in Z$. Тригонометрические функции не являются однолистными на D.

Для тригонометрических функций справедлив ряд тождеств, аналогичных тождествам для функций действительных переменных. Например, $\cos^2 z+\sin^2 z=1$.

Докажем тождество:

$$\cos^2 z+\sin^2 z=\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2+\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^2=\frac{e^{2iz}+2+e^{-2iz}}{4}-\frac{e^{2iz}-2+e^{-2iz}}{4}=$$

$$=\frac{2}{4}+\frac{2}{4}=\frac{4}{4}=1.$$

Доказательства остальных тождеств можно также провести из формул определения этих функций.
Существуют также тождества, связывающие гиперболические и тригонометрические функции:

$$\cos iz = chz;\ \ \sin iz = ishz;\ \ chiz = \cos z;\ \ shiz = i\sin z.$$

Докажем одно и них:

$\cos iz = \dfrac{e^{i(iz)} + e^{-i(iz)}}{2} = \dfrac{e^{-z} + e^{z}}{2} = chz$. Остальные доказываются аналогично.

7. Логарифмическая функция. $W = Ln(z)$, главное значение логарифма $w = \ln z$. Выделим действительную и мнимую часть функции $W = Ln(z)$.

Пусть $r = |z| = \sqrt[2]{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arg z = arctg\dfrac{y}{x}$. Тогда

$$W = Ln(z) = (z = re^{i(\varphi + 2\pi k)}) = Ln(re^{i(\varphi+2\pi k)}) = (\textit{формально логарифмируем}) = \ln r + i(\varphi + 2\pi k) =$$

$$= (\textit{подставляя выражения для } r \textit{ и } \varphi) = \tfrac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + i(arctg\frac{y}{x} + 2\pi k), k \in Z.$$

Область определения $D = C \setminus \{0\}$. Множество значений $E = C$. Бесконечно удалённая точка не входит в область определения и область значений функции $w = \ln z$, так как не существует аргумента в точке $z = \infty$, а также не определён логарифм в бесконечно удалённой точке.
Функция $W = Ln(z)$ многозначная, в каждой точке области определения принимает счётное множество значений. Выделяют также функцию $w = \ln z = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + iarctg\dfrac{y}{x}$, которую называют главным значением логарифма. Главное значение логарифма является однозначной и однолистной функцией в области определения D.
Для функции $w = \ln z$ выполняются тождества, справедливые для функции действительного переменного:

1) $\ln(z_1 \cdot z_2) = \ln(z_1) + \ln(z_2)$;

2) $\ln(z_1/z_2) = \ln(z_1) - \ln(z_2)$;

3) $\ln(z^n) = n\ln(z)$.

Заметим, что для функции $W = Ln(z)$ данные тождества выполняются не всегда. Например, найдите ошибку (самостоятельно) в рассуждениях, приводящих парадоксу И. Бернулли:

$(-z^2) = z^2 \Rightarrow 2Ln(-z) = 2Lnz \Rightarrow Ln(-z) = Lnz.$

8. Обратные тригонометрические и гиперболические функции.
Многозначные функции, определённые как решения уравнений вида:

$z=\sin w;\; z=\cos w,\; z=shw,\; z=chw,\; z=thw,\; z=tgw.$

Найдём в общем виде решение уравнения $z=\cos w$.

$z=\cos w=$ (по определению *cos(w)* имеем)$=\dfrac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}=$ (обозначим $e^{iw}=t$)=

$=\dfrac{t+1/t}{2}\Rightarrow t+\dfrac{1}{t}=2z=(t\neq 0)\Rightarrow t^2-2zt+1=0\Rightarrow D=4z^2-4$. Находим решение:

$$t_{1,2}=\frac{2z+2\sqrt{z^2-1}}{2}=z+\sqrt{z^2-1}\Rightarrow e^{iw}=z+\sqrt{z^2-1}\Rightarrow iw=Ln(z+\sqrt{z^2-1})$$

Получаем окончательно $w=Arc\cos z=-iLn(z+\sqrt{z^2-1})$.

Аналогично получаются другие формулы для этих функций:

$w=Arc\sin z=-iLn(iz+\sqrt{1-z^2})$,

$w=Arctgz=-\frac{i}{2}Ln\dfrac{1+iz}{1-iz}$, $w=Arcctgz=-\dfrac{i}{2}Ln\dfrac{z+i}{z-i}$, $w=Arshz=Ln(z+\sqrt{z^2+1})$,

$w=Archz=Ln(z+\sqrt{z^2-1})$, $w=Arthz=\dfrac{1}{2}Ln\dfrac{1+z}{1-z}$, $w=Arcthz=\dfrac{1}{2}Ln\dfrac{z+1}{z-1}$.

9. Общая степенная функция.

Пусть $z,a\in C, z\neq 0$. Определим функцию $w=z^a$ следующим образом:

$$W=z^a=e^{aLn(z)}=e^{a(\ln|z|+i\arg(z)+2\pi ki)},\; k\in Z.$$

Функция определена $\forall z\in C: z\neq 0$. Функция многозначная и в каждой точке области определения принимает счётное множество значений.

Вычислим $i^{2i}=e^{2iLn(i)}=e^{2i(\pi i/2+2\pi ki)}=e^{-\pi+2\pi k}$, $k\in Z$.

Основные примеры и их решение

1. Найти действительную и мнимую часть функции.
2. Найти область определения и множество значений функции.
3. Вычислить значение функции в точке.
4. Найти образ множества при отображении.
5. Вычислить предел функции в точке.
6. Построить путь на плоскости.
7. Найти множество решений трансцендентного уравнения.

Задание 1. Пусть $w = u + iv,\;\; z = x + iy$, тогда зависимость $w = f(z)$ можно записать в виде

$w = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y); \quad u(x,y) = \mathrm{Re}(f(z)), \quad v(x,y) = \mathrm{Im}(f(z))$.

Тем самым задание *f(z)* в комплексной плоскости z есть одновременное задание двух действительных функций двух действительных переменных в плоскости С. Поэтому свойства функций комплексной переменной во многом определяются свойствами функции двух действительных переменных. Можно сказать, что геометрический смысл функции комплексного переменного – отображение области определения D в область значений *E*.

Пример 1. Рассмотрим функцию $w = \dfrac{1}{z}$. Если $z = x + iy$, тогда $w = \dfrac{1}{x+iy} = \dfrac{x-iy}{x^2+y^2} \quad \Rightarrow$

$u = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $v = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$.

Задание 2. Область определения и множество значений функции $w = f(z)$ определяются областью определения и множеством значений функций $\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$.

Пример 2. Найдем область определения и множество значений функции $w = e^z$.

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = (\textit{формула} \quad \textit{Эйлера}) = e^x(\cos y + i\sin y) \Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = e^x \cos y \\ v(x,y) = e^x \sin y \end{cases}.$$

Функции u и v определены $\forall x, y \in C \Rightarrow D = C$. При этом функции u и v не могут одновременно обращаться в ноль, поэтому область значений $E = C \setminus \{0\}$.

Задание 3. Для вычисления значения функции в точке, подставим значения x,y непосредственно в формулу $w = f(z)$ или в формулы для u,v: $\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$.

Пример 3. Вычислить значение функции $w = e^z$ в точке $z = 1 - 3i$.
Решение: $w(1-3i) = \exp(1-3i) = e^1(\cos(-3) + i\sin(-3)) = e(\cos 3 - i\sin 3)$.

Тогда $u(1,-3) = e\cos 3, v(1,-3) = -e\sin 3$. $|w(1-3i) = e|$, $\arg(1-3i) = -3$.

Задание 4

Пусть на плоскости задана кривая $\gamma : F(x,y) = 0$. Для нахождения образа кривой γ

необходимо исключить из системы $\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \\ F(x,y) = 0 \end{cases}$ переменные (x,y), после чего получить общий

вид кривой $\phi(u,v) = 0$.

Пример 4

а) Определить образ множества $D=\{z : x=y\}$ при отображении $w=\dfrac{1}{z}$.

Для решения рассмотрим систему $\begin{cases} u=\dfrac{x}{x^2+y^2} \\ v=-\dfrac{y}{x^2+y^2} \\ x=y \end{cases}$. Для точек прямой $y = x$ переход к новым координатам упрощается: $u=\dfrac{1}{2x}, v=\dfrac{-1}{2y}$. Обратное преобразование $x=\dfrac{1}{2u}, y=\dfrac{-1}{2v}$. Таким образом, преобразование уравнения кривой $y = x$ соответствует кривой $u = -v$, т.е. образ множества $f(D)=\{w : u=-v\}$.

б) Определить образ множества $D=\{z : |z-1|=1\}$ при отображении $w=\dfrac{1}{z}$. Для решения рассмотрим систему $\begin{cases} u=\dfrac{x}{x^2+y^2} \\ v=-\dfrac{y}{x^2+y^2} \\ x^2+y^2=2x \end{cases}$. Исключая из системы переменные (x, y), находим зависимость между (u,v): $\begin{cases} u=\dfrac{x}{2x} \\ v=-\dfrac{y}{2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=\dfrac{1}{2} \\ v\in R \end{cases}$. Таким образом, преобразование окружности соответствует прямой $u=1/2$, т.е. $f(D)=\left\{w : u=\dfrac{1}{2}\right\}$.

Задание 5. Вычислить предел функции $w=f(z)$ в точке $z=a$. Для вычисления предела $\lim\limits_{z\to a} f(z)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)+i\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)$, необходимо вычислить два двойных предела от функций двух переменных. Двойной предел вычисляем по разным направлениям. Если пределы по разным направлениям совпадают, то предел от функций $u(x,y)$ или $v(x,y)$ существует.

Пример 5. Можно ли доопределить функцию $w=\dfrac{\mathrm{Re}(z^2)}{|z|^2}$ в точке $z = 0$?

Попытаемся доопределить $w=f(z)$ в точке z = 0, вычислив предел *f(z)* при $z\to 0$:

$$\lim_{z\to a} f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{Re}(z^2)}{|z|^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \text{(вычисляем предел по разным направлениям)}=$$

$$=\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x=0\\ y\to 0}}\dfrac{-y^2}{y^2}=-1\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=0}}\dfrac{x^2}{x^2}=1\end{cases}.$$

Пределы по разным направлениям различны, поэтому предела функции $w=f(z)$ в точке $z = 0$ не существует, следовательно, нельзя доопределить функцию до непрерывной в нуле.

Задачи для самостоятельной работы

1. Вычислить значения e^z в точках:

1) $z=2\pi i$; 2) $z=\pi i$; 3) $z=\dfrac{\pi i}{2}$; 4) $z=-\dfrac{\pi i}{2}$; 5) $z=\dfrac{\pi i}{4}$

2. Доказать тождества:

1. $\cos(-z)=\cos z$
2. $\sin(-z)=-\sin z$
3. $ch(-z)=ch(z)$
4. $sh(-z)=-sh(z)$
5. $\cos^2 z+\sin^2 z=1$
6. $ch^2z-sh^2z=1$
7. $\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\sin z_2\cos z_1$
8. $\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2$
9. $\cos z_1+\cos z_2 = = 2\cos\dfrac{z_1+z_2}{2}\cos\dfrac{z_1-z_2}{2}$
10. $shz=-i\sin(iz)$
11. $\cos(iz)=chz$
12. $sh(iz)=i\sin z$
13. $ch(iz)=\cos z$
14. $tg(iz)=i\,thz$
15. $th(iz)=i\,tg\,z$
16. $\mathrm{Re}\sin z=\sin x\,chy$, $\mathrm{Im}\sin z=\cos x\,shy$
17. $\mathrm{Re}\cos z=\cos x\,chy$, $\mathrm{Im}\cos z=-\sin x\,shy$

18. $\operatorname{Re} shz = shx\cos y$, $\operatorname{Im} shz = chx\sin y$

19. $\operatorname{Re} chz = chxchy$, $\operatorname{Im} chz = shxshy$

20. $|\sin z| = \sqrt{ch^2 y - \cos^2 x}$

21. $|\cos z| = \sqrt{ch^2 y - \sin^2 x}$

22. $|shz| = \sqrt{ch^2 x - \cos^2 y}$

23. $|chz| = \sqrt{ch^2 x - \sin^2 y}$

3. Найти множества точек, в которых следующие функции принимают:

а). Чисто мнимые значения; б). Действительные значения:

3.1.а) $\sin z$; б) shz; в) $\cos z$; г) $ctgz$; д) thz.

3.2.а) $\cos z$; б) chz; в) $\sin z$; г) tgz д) $cthz$.

4. Найти множество тех z, при которых функция обращается в 0:

1) $\sin z$; 2) $\cos z$; 3) shz; 4) chz.

5. Решить уравнения:

1) $\sin z = \frac{4i}{3}$; 3) $\cos z = \frac{3i}{4}$; 5) $tgz = \frac{5i}{3}$; 7) $shz = \frac{i}{2}$;

2) $\sin z = \frac{5}{3}$; 4) $\cos z = \frac{3+i}{4}$; 6) $ctgz = -\frac{3i}{5}$; 8) $chz = \frac{1}{2}$.

Вариант лабораторной работы

Задание 1. Исследовать функцию комплексного переменного: $w = f(z) = ie^{iz}$.

Решение:

1. Область определения $D(f)$ данной функции – вся комплексная плоскость $\boldsymbol{C}$. Область значений $Im(f)$ также $\boldsymbol{C}$.

2. Выпишем действительную $u(x,y)$ и мнимую $v(x,y)$ части функции. Используя $z = x + iy$ и формулу Эйлера, преобразуем функцию:

$w = ie^{i(x+iy)} = ie^{ix-y} = ie^{ix}e^{-y} = ie^{-y}(cosx + isinx) = e^{-y}(icosx - sinx)$.

Получаем $u(x,y) = -e^{-y}sinx, v(x,y) = e^{-y}cosx$.

3. Укажем множества, где функция принимает действительные и только мнимые значения.

Чтобы найти только действительные значения функции, отметим, что должна отсутствовать мнимая часть, т.е. $v(x, y) = 0$.

Получаем уравнение: $e^{-y} cosx = 0$.

Так как $\mathrm{e}^{-\mathrm{y}} \neq 0 \Rightarrow \cos \mathrm{x} = 0 \Rightarrow \mathrm{x} = \frac{\pi}{2} + \pi \mathrm{n}, \mathrm{n} \in \mathrm{Z}$ или $\left\{\mathrm{z} \in \mathrm{C}: Re(\mathrm{z}) = \frac{\pi}{2} + \pi \mathrm{n}, \mathrm{n} \in \mathrm{Z}\right\}$.

Аналогично, чтобы найти мнимые значения функции, необходимо решить уравнение $u(x, y) = 0$.

$-e^{-y} sinx = 0$. Так как $\mathrm{e}^{-\mathrm{y}} \neq 0 \Rightarrow sin\mathrm{x} = 0 \Rightarrow \mathrm{x} = \pi \mathrm{n}, \mathrm{n} \in \mathrm{Z}$.

Ответ: $\{\mathrm{z} \in \mathrm{C}: Re(\mathrm{z}) = \pi \mathrm{n}, \mathrm{n} \in \mathrm{Z}\}$

4. Вычислим значения функции в точках: $a_1 = \pi i$, $a_2 = 1 + 2i$, $a_3 = \frac{\pi}{2} - 3i$.

$w_1 = f(a_1) = ie^{i(\pi i)} = ie^{\pi i^2} = ie^{-\pi}$,

$w_2 = f(a_2) = ie^{i(1+2i)} = ie^{i-2} = ie^{-2}e^{i} = ie^{-2}(cos1 + isin1) = e^{-2}(-sin1 + icos1)$,

$w_3 = f(a_3) = ie^{i\left(\frac{\pi}{2}-3i\right)} = ie^{3}e^{\frac{\pi}{2}i} = ie^{3}\left(cos\frac{\pi}{2} + isin\frac{\pi}{2}\right) = ie^{3}(0 + i) = -e^{3}$,

5. Найдем образ множества $\mathrm{M} = \{\mathrm{z} \in \mathrm{C}: Im(\mathrm{z}) = 1\}$ при отображении $w = f(z)$.

Отметим, что множество M задает на плоскости прямую $\{z \epsilon C: y = 1\}$. Составим систему

$$\begin{cases} u = -e^{-y} sinx \\ v = e^{-y} cosx \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = -e^{-1} sinx \\ v = e^{-1} cosx \\ y = 1 \end{cases}$$

Возведем первое и второе уравнения в квадрат и сложим равенства:

$$+\begin{cases} u^2 = e^{-2} sin^2 x \\ v^2 = e^{-2} cos^2 x \end{cases}$$

$$u^2 + v^2 = e^{-2}(sin^2 x + cos^2 x)$$

Получили $u^2 + v^2 = e^{-2}$. Заметим, что при данном отображении прямая преображается в окружность.

Таким образом, $f(M) = \{w \in \mathrm{C}: |w| = e^{-1}\}$.

Задание 2. Исследовать функцию комплексного переменного: $w = f(z) = \frac{1}{z-i}$.

Решение:

1. Область определения и область значений данной функции определим, аналогично функциям действительного переменного. Получаем $D(f) = C\backslash\{i\}$, $Im(f) = C\backslash\{0\}$.

2. Выпишем действительную $u(x, y)$ и мнимую $v(x, y)$ части функции.

$$w = \frac{1}{z-i} = \frac{1}{x+iy-i} = \frac{1}{x+i(y-1)} = \frac{x-i(y-1)}{(x+i(y-1))(x-i(y-1))} = \frac{x-i(y-1)}{x^2+(y-1)^2}.$$

Тогда, $u(x, y) = \frac{x}{x^2+(y-1)^2}$, $v(x, y) = -\frac{y-1}{x^2+(y-1)^2}$.

3. Укажем множества, где функция принимает действительные и только мнимые значения.

Действительные значения функции $v(x,y)=0$.

Получаем уравнение: $\frac{x}{x^2+(y-1)^2}=0$.

Так как $x,y\epsilon R \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2+(y-1)^2\neq 0 \end{cases}$. В итоге получаем $\{z\in C: Re(z)=0\}$.

Аналогично находим мнимые значения функции при условии, что $u(x,y)=0$.

$-\frac{y-1}{x^2+(y-1)^2}=0$. $\begin{cases} y=1 \\ x^2+(y-1)^2\neq 0 \end{cases}$. В ответе $\{z\in C: Im(z)=1\}$.

4. Вычислим значения функции в точках: $a_1=2i$, $a_2=1+3i$, $a_3=-1+i$.

$w_1=f(a_1)=\frac{1}{2i-i}=\frac{1}{i}=-i$,

$w_2=f(a_2)=\frac{1}{1+3i-i}=\frac{1}{1+2i}=\frac{1-2i}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{1-2i}{1+4}=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i=0{,}2-0{,}4i$,

$w_3=f(a_3)=\frac{1}{-1+i-i}=-1$.

5. Найдем образ множества $M=\{z\in C: Im(z)=2\}$ при отображении $w=f(z)$.

Составим систему:

$$\begin{cases} u=\frac{x}{x^2+(y-1)^2} \\ v=-\frac{y-1}{x^2+(y-1)^2} \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=\frac{x}{x^2+1} \\ v=-\frac{1}{x^2+1} \\ y=1 \end{cases}.$$

Возведем первое и второе уравнения в квадрат и сложим равенства:

$$+\begin{cases} u^2=\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^2 \\ v^2=\left(-\frac{1}{x^2+1}\right)^2 \end{cases}$$

$u^2+v^2=\frac{x^2}{(x^2+1)^2}+\frac{1}{(x^2+1)^2} \Rightarrow u^2+v^2=\frac{x^2+1}{(x^2+1)^2} \Rightarrow u^2+v^2=\frac{x^2+1}{(x^2+1)^2} \Rightarrow u^2+v^2=\frac{1}{x^2+1}$.

Выражая из системы $v=-\frac{1}{x^2+1}$, получаем $u^2+v^2=-v$ или $u^2+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$.

Отметим, что при данном отображении прямая $\{y=2\}$ перешла в окружность.

Таким образом, $f(M)=\{w\in C: |w+0{,}5i|=0{,}5\}$.

Задание 3. Доказать тождество $sh(z)=-isin(iz)$.

Решение

Рассмотрим правую часть равенства. Используя равенство $sin(z)=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$, преобразуем ее.

$-isin(iz) = -i\frac{e^{i(iz)}-e^{-i(iz)}}{2i} = -i\frac{e^{-z}-e^{z}}{2i} = -\frac{e^{-z}-e^{z}}{2} = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2} = sh(z).$

Тождество доказано.

Задание 4. Решить уравнение: $4cosz + 5 = 0$.

Решение

Используя равенство $cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, перепишем уравнение в виде

$2\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) + 5 = 0.$

Сделаем замену: $e^{iz} = a$,

$2(a + a^{-1}) + 5 = 0.$

$2a^2 + 5a + 2 = 0.$

Решая квадратное уравнение, получаем корни $a_1 = -2$, $a_2 = -\frac{1}{2}$.

Тогда $e^{iz} = -2$ и $e^{iz} = -\frac{1}{2}$.

Прологарифмируем равенства и распишем логарифм по определению:

1) $e^{iz} = -2$: $iz = Ln(-2) = ln2 + i(\pi + 2\pi n)$, $z_1 = (\pi + 2\pi n) - iln2$, n ∈ Z;

2)$e^{iz} = -\frac{1}{2}$:$iz = Ln\left(-\frac{1}{2}\right) = ln\frac{1}{2} + i(\pi + 2\pi n)$, $z_2 = (\pi + 2\pi n) - iln\frac{1}{2} = (\pi + 2\pi n) + iln2$, n ∈ Z.

Выпишем ответ z= $\pi(1 + 2n) \pm iln2$, n ∈ Z.

3. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Основные понятия

Параметры	Понятие и его обозначение	Определяющее понятие и видовые признаки
$\frac{dw}{dz}\Big\vert_{z=a} = f'(a)$	Производная функции $w = f(z)$ в точке $z = a$	Число $f'(a) = \lim\limits_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z}$, если предел существует и равен конечному числу
$w = f(z)$, $z = a \in D$	С–дифференцируемость функции $w = f(z)$ в точке $z = a$	Функция называется С–дифференцируемой в точке z = a, если 1) $w = f(z)$ непрерывна в точке z = a; 2) функция $w = f(z)$ имеет в точке $z = a$ производную
$w = f(z)$, $z = a \in D$	Аналитичность функции $w = f(z)$ в точке $z = a$	Функция $w = f(z)$ называется аналитической в точке, если функция дифференцируема как в точке $z = a$, так и в некоторой её окрестности: $\exists u_a = \{z : \vert z - a\vert < \varepsilon\} : f(z)$ дифференцируема $\forall z \in u_a$
$w = f(z)$, $z \in D$, D – область в С	Аналитичность функции $w = f(z)$ в области D	Функция является аналитической в области D, если она является аналитической в каждой точке области D
$w = f(z)$	Целая функция	Функция является аналитической во всей комплексной плоскости С: $f(z) \in H(C)$
Множество	H(D)	Множество функций, аналитических в области D
$w = f(z) : D \to \widetilde{D}$	Конформное отображение	Отображение $w = f(z)$ конформно в точке $z = a \in D$, если оно сохраняет углы между кривыми при данном отображении
$w = f(z) : D \to \widetilde{D}$	Конформное отображение в области D	Отображение $w = f(z)$ конформно в области D, если оно конформно $\forall z \in D$

Основные утверждения

УТВ_3.1. Необходимые и достаточные условия С – дифференцируемости функции $w = f(z)$ в точке $z = a \in D$.

Для того чтобы функция $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ была дифференцируема в точке $z = a \in D$ необходимо и достаточно:

1) чтобы функции *u(x,y); v(x,y)* были R^2 дифференцируемы в этой точке;
2) чтобы функции *u(x,y); v(x,y)* удовлетворяли условиям Коши – Римана:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{z=a} = \dfrac{\partial v}{\partial y}\Big|_{z=a} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{z=a} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}\Big|_{z=a} \end{cases}.$$

УТВ_3.2. Формулы для вычисления производной в точке $z = a \in D$:

Если $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ дифференцируема в точке $z = a \in D$, то производную можно вычислить по формулам

$$f'(a) = \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{z=a} + i\frac{\partial v}{\partial x}\bigg|_{z=a} = \frac{\partial v}{\partial y}\bigg|_{z=a} + i\frac{\partial v}{\partial x}\bigg|_{z=a} = \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{z=a} - i\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{z=a} = \frac{\partial v}{\partial y}\bigg|_{z=a} - i\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{z=a}.$$

Доказательство:

$$f'(a) = \lim_{z \to a} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = (\text{предел существует}) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y = 0}} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y = 0}} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + i\frac{\Delta v}{\Delta x} \right) =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{z=a} + i\frac{\partial v}{\partial x}\bigg|_{z=a} = \frac{\partial v}{\partial y}\bigg|_{z=a} + i\frac{\partial v}{\partial x}\bigg|_{z=a} = \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{z=a} - i\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{z=a} = \frac{\partial v}{\partial y}\bigg|_{z=a} - i\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{z=a}.$$

УТВ_3.3. Условия Коши – Римана в полярных координатах $(z = re^{i\varphi}, w = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi))$ выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -r\frac{\partial v}{\partial r}$$ (вывод сделать самостоятельно).

УТВ_3.4. Правила дифференцирования функций комплексной переменной.

Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ дифференцируемы в точке z, тогда

1. $\forall c \in C : (cf(z))' = cf'(z)$.

2. $(f(z) \pm g(z))' = f'(z) \pm g'(z)$.

3. $\left(f(z) \cdot g(z)\right)' = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z)$.

4. $\left(\dfrac{f(z)}{g(z)}\right)' = \dfrac{f'(z) \cdot g(z) - f(z) \cdot g'(z)}{g^2(z)}$, $g(z) \neq 0$.

5. дифференцирование сложной функции: пусть $f(z) : D \to \widetilde{D}, g(w) : \widetilde{D} \to \hat{D} \Rightarrow$

$\left(g \circ f\right)'(z) = \left(g'(w) \circ f(z)\right) f'(z)$.

УТВ_3.5. Свойства аналитических функций.

Пусть $f(z) \in H(D)$, тогда

1. $u(x,y); v(x,y)$ являются сопряженной парой гармонических функций, т.е.

функции $u(x,y); v(x,y)$ удовлетворяют условиям Коши – Римана в области D и

$\Delta u = 0 \wedge \Delta v = 0 \;\; \forall (x,y) \in D$.

2. Функцию $w = f(z)$ можно восстановить по известной действительной или мнимой части с точностью до константы.

3. Если $f(z), g(z) \subseteq H(D)$, тогда

3.1. $\forall c \in C : cf(z) \in H(D)$.

3.2. $f(z) + g(z) \in H(D)$.

3.3. $\left(f(z) \cdot g(z)\right) \in H(D)$.

3.4. $\left(\dfrac{f(z)}{g(z)}\right) \in H(D)$, $g(z) \neq 0$.

3.5. $f(z) \in H(D), g(w) \in H(\widetilde{D}) \Rightarrow \left(g \circ f\right)(z) \in H(D)$.

УТВ_3.6. Все элементарные функции являются аналитическими в своей области определения.

УТВ_3.7. Геометрический смысл дифференцирования.

Пусть $f(z) \in H(D)$, $z = a \in D$ и $f'(a) \neq 0$. Тогда

1. $k = \left|f'(a)\right|$ – коэффициент растяжения в точке $z = a$ при отображении $f(z)$:

все кривые $\gamma \subset D$, проходящие через точку $z = a$, при отображении $f(z)$ растягиваются (сжимаются) в k раз.

2. $\alpha = \arg(f'(a))$ – угол поворота в точке $z = a$ при отображении $f(z)$:

все кривые $\gamma \subset D$, проходящие через точку $z = a$, при отображении $f(z)$ поворачиваются на угол α по часовой стрелке, если $\alpha < 0$ и против часовой стрелки, если $\alpha > 0$ на величину $\arg(f'(a))$.

УТВ_3.8. Если $f(z) \in H(D)$, $z = a \in D$ и $f'(a) \neq 0$, тогда отображение $w = f(z)$ конформно в точке z = a.

УТВ_3.9. Теорема единственности аналитической функции

Пусть $f(z), g(z) \subseteq H(D)$ и $f(z) = g(z)$ $\forall z \in M \subset D$, причем M имеет хотя бы одну предельную точку $z = a \in D$, тогда $f(z) \equiv g(z)$ $\forall z \in D$.

Следствие 3.9.1

Пусть $f(z) \in H(D)$ и $f(z) = c$ $\forall z \in \gamma$, где кривая $\gamma \subset D$, тогда $f(z) = c$ $\forall z \in D$.

Используя данное следствие из теоремы единственности, можно доказать известные тождества для элементарных функций, которые остаются верными и при переходе к комплексным значениям переменной.

Например, докажем, что $\sin 2z = 2\sin z \cos z$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(z) = \sin 2z - 2\sin z \cos z$. Функция $f(z) \in H(C)$ как комбинация целых функций. При $z = x \in R$ ($z \in Ox$) имеем

$f(x) = \sin 2x - 2\sin x \cos x$=0 =(в силу следствия 3.9.1)$\Rightarrow$ $f(z) = 0$ $\forall z \in C$.

УТВ_3.10. Пусть $f(z)$ дифференцируема в точке $z = a$ и $f'(a) \neq 0$. Тогда якобиан преобразования $w = f(z)$ равен $|f'(a)|^2$.

Доказательство

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = |f'(a)|^2.$$

Следствие 3.10.1. Пусть $f(z) \in H(D)$ и $f'(z) \neq 0$ в области D $\Rightarrow$ площадь образа области D равна $S(\widetilde{D}) = \iint\limits_D |f'(z)|^2\, dxdy$.

Доказательство

$$f(z)\in H(D) \Rightarrow (f(D)=\widetilde{D}) \Rightarrow S(\widetilde{D})=\iint\limits_{\widetilde{D}} dudv=\iint\limits_{D} |J|\,dxdy=\iint\limits_{D} |f'(z)|^2\,dxdy.$$

Следствие 3.10.2. Пусть $f(z)\in H(D)$ и $f'(z)\neq 0$ в области D $\Rightarrow$ длина образа кривой $\Gamma\subset$D равна $\int\limits_{\Gamma} |f'(z)||dz|$.

Доказательство:

$f(z)\in H(D)$, $\Gamma\in D \Rightarrow (\Gamma_1=f(\Gamma)) \Rightarrow$ длина кривой Γ_1: $l(\Gamma_1)$ вычисляется по формуле $l(\Gamma_1)=\int\limits_{\Gamma_1} |d\omega|=\int\limits_{\Gamma} |f'(z)||dz|$.

Основные примеры и их решение

1. Определить, является ли функция С–дифференцируемой в точке, аналитической в точке.
2. Определить, является ли функция С–дифференцируемой в области D, аналитической в области D.
3. Найти множество С – дифференцируемости и область аналитичности функции.
4. Найти производную функции.
5. Найти коэффициент растяжения и угол поворота в точке, в области.
6. Проверить, является ли пара функций *u(x,y); v(x,y)*, определённых в области D, сопряжённой парой гармонических функций.
7. Восстановить голоморфную функцию по известной действительной или мнимой части.
8. Доказать простейшие свойства аналитических функций.

Задание 1

Дана функция $f(z)\colon D\subseteq\overline{C}\to\overline{C}$, точки $a_1,a_2\in D$. Проверить, будет ли функция $f(z)$ дифференцируемой и аналитической в точках a_1,a_2. Найти область дифференцируемости и область аналитичности $f(z)$.

a) $f(z)=z\cdot\overline{z},\ a_1=0,\ a_2=i;$

b) $f(z)=i\cdot\overline{z},\ a_1=0,\ a_2=i;$

c) $f(z)=i\cdot z^2-3z+1,\ \ a_1=0,\ a_2=i.$

Решение:

a) Выпишем действительную и мнимую части функции $f(z)=z\cdot\overline{z}$.

Так как $z = x + iy$, $\overline{z} = x - iy$. $f(z) = z \cdot \overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$. Получаем, действительную часть $u(x,y) = x^2 + y^2$ и мнимую часть $v(x,y) = 0$. Вычислим частные производные этих функций и проверим выполнение условий Коши – Римана.

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = 0$$

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 0 = -2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Условия Коши – Римана выполняются только в точке (0, 0). Поэтому данная функция дифференцируема в точке a_1, но не в a_2. Так как функция дифференцируема только в точке $z = 0$, то она не является аналитической в этой точке. Потому что функция не дифференцируема в окрестности точки $z = 0$.

b) Для функции $f(z) = i \cdot \overline{z} = i \cdot (x - iy) = y + i \cdot x$ также проверим выполнение условий Коши – Римана.

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 1$$

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = 1, \qquad \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = 0$$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 1 \neq -1 \end{cases}.$$

Так как $u'_y \neq -v'_x$, то данная функция не является ни дифференцируемой, ни аналитической.

c) Для функции $f(z) = i \cdot z^2 - 3z + 1$ выделим действительную и мнимую части.

$$f(z) = i \cdot z^2 - 3z + 1 = i(x + iy)^2 - 3(x + iy) + 1 = i(x^2 - y^2 + i2xy) - 3(x + iy) + 1 =$$
$$= ix^2 - iy^2 - 2xy - 3x - 3iy + 1 = -2xy - 3x + 1 + i \cdot (x^2 - y^2 - 3y).$$

Проверим условия Коши – Римана.

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = -2y - 3, \qquad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -2x$$

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = -2y - 3$$

$$\begin{cases} -2y - 3 = -2y - 3 \\ -2x = -2x \end{cases}.$$

Очевидно, что оба условия выполнены для всех x и y. Следовательно, областью дифференцируемости данной функции является вся комплексная плоскость C. Таким образом, функция дифференцируема в любой точке C, в том числе и в точках $a_1 = 0$, $a_2 = i$.

Так как функция дифференцируема всюду, то она является аналитической в каждой точке плоскости. Областью аналитичности становится комплексная плоскость C**.**

Найдем производную данной функции.

$f'(z) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = -2y - 3 + i \cdot 2x = 2i \cdot (x + iy) - 3 = 2i \cdot z - 3.$

Задание 2

Можно ли восстановить функцию $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, если:

a) $u(x,y) = \frac{cosx}{y}$;

b) $v(x,y) = 3xy^2 - x^3 + 7y$.

Решение:

a) Проверим, является ли функция $u(x,y) = \frac{cosx}{y}$ гармонической.

$$\frac{\partial \mathrm{u(x,y)}}{\partial \mathrm{x}} = -\frac{\mathrm{sinx}}{\mathrm{y}},\ \frac{\partial \mathrm{u(x,y)}}{\partial \mathrm{y}} = -\frac{\mathrm{cosx}}{\mathrm{y}^2};$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{u(x,y)}}{\partial \mathrm{x}^2} = -\frac{\mathrm{cosx}}{\mathrm{y}},\ \frac{\partial^2 \mathrm{u(x,y)}}{\partial \mathrm{y}^2} = \frac{2\mathrm{cosx}}{\mathrm{y}^3};$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{u(x,y)}}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{u(x,y)}}{\partial \mathrm{y}^2} = -\frac{\mathrm{cosx}}{\mathrm{y}} + \frac{2\mathrm{cosx}}{\mathrm{y}^3} \neq 0.$$

Функция $u(x,y)$ не является гармонической, поэтому восстановить функцию $f(z)$ нельзя.

b) Найдем вторые частные производные для функции $v(x,y) = 3xy^2 - x^3 + 7y$

$$\frac{\partial \mathrm{v}(x,y)}{\partial x} = 3\mathrm{y}^2 - 3\mathrm{x}^2,\ \frac{\partial \mathrm{v}(x,y)}{\partial y} = 6\mathrm{xy} + 7;$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{v}(x,y)}{\partial x^2} = -6\mathrm{x},\ \frac{\partial^2 \mathrm{v}(x,y)}{\partial y^2} = 6\mathrm{x};$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{v}(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{v}(x,y)}{\partial y^2} = -6x + 6x = 0.$$

Данная функция удовлетворяет уравнению Лапласа, поэтому она гармоническая. Следовательно, можно восстановить голоморфную функцию $f(z)$, мнимой частью которой является функция $v(x,y) = 3xy^2 - x^3 + 7y$.

Чтобы найти действительную часть функции $f(z)$, воспользуемся условиями Коши – Римана.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial v(x,y)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 6\mathrm{xy} + 7 \\ \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -(3\mathrm{y}^2 - 3\mathrm{x}^2) \end{cases}$$

Из первого уравнения $u(x,y) = \int(6xy + 7)\,\partial x = 3x^2y + 7x + \varphi(y)$. Подставляем найденную функцию во второе уравнение:

$$\frac{\partial(3x^2y + 7x + \varphi(y))}{\partial y} = -(3y^2 - 3x^2);$$

$3x^2 + \varphi'(y) = -3y^2 + 3x^2 \Rightarrow \ \varphi'(y) = -3y^2 \Rightarrow \varphi(y) = -y^3 + C$, где С – константа.

Получаем $u(x,y) = 3x^2y + 7x - y^3 + C$.

Тогда функция $f(z) = 3x^2y + 7x - y^3 + C + i(3xy^2 - x^3 + 7y)$. Преобразуем и сделаем замену. В итоге получим функцию $f(z) = iz^3 + 7z + C$, где С – любое число. Если определено значение функции в одной точке, то функция определяется однозначно.

Например, пусть дано условие $f(1 + 2i) = 7 + 3i$.

Вычислим значение найденной функции в точке $z = 1 + 2i$:

$$f(z) = i(1 + 2i)^3 + 7(1 + 2i) + C = i(1 + 6i - 12 - 8i) + 7 + 14i + C =$$
$$= i(-11 - 2\,i) + 7 + 14i + C = -11i + 2 + 7 + 14i + C = 9 + 3i + C.$$

Тогда $9 + 3i + C = 7 + 3i$. Получили $C = 2$.

Окончательно имеем ответ $f(z) = iz^3 + 7z + 2$.

Задание 3

Найти сопряжённую функцию $v(x, y)$ к функции $u(x,y) = chx\ cosy$.

Решение:

Для решения необходимо проверить гармоничность функций и выполнение условий Коши – Римана. Проверим, удовлетворяет ли исходная функция уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} = chx\ cosy,\ \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = -chx\ cosy;$$

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = chx\ cosy - chx\ cosy = 0.$$

Функция $u(x,y)$ гармоническая.

Найдем функцию $v(x, y)$, используя условия Коши – Римана:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v(x,y)}{\partial x} = -\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial v(x,y)}{\partial y} = shx\ cosy \\ \dfrac{\partial v(x,y)}{\partial x} = -(-chx\ siny) \end{cases}.$$

Решая систему, получим $v(x, y) = shx\ siny + C$.

Несложно проверить, что полученная функция также гармоническая:

$$\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} = shx\ siny,\ \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} = -shx\ siny;$$

$$\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} = shx\ siny - shx\ siny = 0.$$

Задание 4

Для функции $f(z) = e^z$ найти:

1) коэффициент растяжения и угол поворота в точке $z_0 = ln2 + i\frac{\pi}{4}$;
2) коэффициент растяжения для точек области $D_1 = \{z \in \overline{C}: Rez = 2\}$ и угол поворота для точек области $D_2 = \{z \in \overline{C}: Imz = \frac{\pi}{2}\}$;
3) множество всех точек, в которых коэффициент линейного растяжения равен единице при отображении $w = f(z)$;
4) множество всех точек, в которых угол поворота равен нулю при отображении $w = f(z)$.

Решение:

Найдем производную функции $f'(z) = (e^z)' = e^z = e^x(cosy + i\, siny)$.

a) Вычислим значение производной в точке z_0: $f'(z_0) = e^{ln2}\left(cos\frac{\pi}{4} + i\, sin\frac{\pi}{4}\right) =$

$= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

По определению коэффициент растяжения $k = |f'(z)|$.

$k = |f'(z_0)| = \left|\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right| = 2$. Получили $k > 1$ – растяжение.

Чтобы найти угол поворота, надо найти аргумент производной:

$argf'(z_0) = \frac{\pi}{4}$. Получили угол поворота $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

b) Найдем модуль и аргумент производной:

$|f'(z)| = |e^z| = |e^x(cosy + i\, siny)| = \sqrt{e^{2x}cos^2y + e^{2x}sin^2y} = e^x$;

$argf'(z_0) = arctg\frac{e^x siny}{e^x cosy} = arctg(tgy) = y$.

Для области D_1 $Rez = 2 \Rightarrow x = 2$, тогда коэффициент растяжения для точек этой области $k = e^2 > 1$.

Для области D_2 $Imz = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = \frac{\pi}{2}$, тогда угол поворота для точек области $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

c) $k = 1$, тогда $|f'(z)| = 1 \Rightarrow e^x = 1$, получаем $x = 0$.

Следовательно, множество точек, в которых коэффициент линейного растяжения равен единице, имеет вид $D_3 = \{z \in \overline{C}: Rez = 0\}$.

d) $\varphi = 0$, тогда $argf'(z_0) = 0$, получаем, что $y = 0$.

Следовательно, множество точек, в которых угол поворота равен нулю, имеет вид $D_4 = \{z \in \overline{C}: Imz = 0\}$.

Задание 5

Найти длину L спирали, на которую с помощью функции $w = f(z) = e^z$ отображается отрезок $\{ y = x, 0 \le x \le 2\pi\}$.

Решение:

Используем формулу для вычисления длины образа:

$f'(z) = (e^z)' = e^z = e^x(cosy + i\, siny)$

$|f'(z)| = e^x$;

$|dz| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$, для отрезка $y = x$ получаем $dy = dx$, тогда $|dz| = \sqrt{2}dx$.

В итоге $l = \int_0^{2\pi} e^x\sqrt{2}dx = \sqrt{2}e^x\Big|_0^{2\pi} = \sqrt{2}(e^{2\pi} - e^0) = \sqrt{2}(e^{2\pi} - 1)$.

Задание 6

Найти площадь образа области D при отображении $w = f(z) = \mathrm{z}^2$.

$D: 1 \le |z| \le 2, -\frac{\pi}{4} \le argz \le \frac{\pi}{4}$.

Решение:

Производная функции $f'^{(z)} = (z^2)' = 2z = 2\rho e^{i\varphi}$.

$|f'(z)| = 2|z| = 2\rho$.

Тогда вычисляем площадь образа, переходя к полярной системе координат

$$S = \iint_D |f'(z)|^2 dxdy = \iint_D 4\,\rho^2\rho d\rho = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_1^2 4\rho^3 d\rho = \varphi \quad \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cdot \rho^4\Big|_1^2 =$$

$$= \left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \cdot (2^4 - 1) = \frac{\pi}{2} \cdot 15 = 7{,}5\pi.$$

Задачи для самостоятельной работы

1. Найти все точки, в которых дифференцируемы функции.

1) $\mathrm{Re}\, z$; 2) x^2y^2; 3) $|z|^2$; 4) $x^2 + iy^2$; 5) $z\,\mathrm{Re}\, z$; 6) $2xy - i(x^2 - y^2)$.

2. Пусть кривая C – это луч $arg(z–z_0)=\varphi$, выходящий из точки z. Найти коэффициент линейного растяжения R и угол поворота α в точке z_0 для этого луча при отображениях

1) $\omega = z^2$, $z_0 = 1$;

2) $\omega = \bar{z}^2$, $z_0 = i$;

3) $\omega = ie^{2z}$, $z_0 = 0$;

4) $\omega = 2z + i\bar{z}$, $z_0 = 0$;

5) $\omega = \dfrac{z - z_0}{z + z_0}$, $z_0 = 0$;

6) $\omega = \dfrac{1 - iz}{1 + iz}$, $z_0 = -i$.

3. Найти множество всех точек, в которых коэффициент линейного растяжения равен единице при отображениях:

1) $\omega = z^2$	2) $\omega = z^3$	3) $\omega = z^2 - 2z$
4) $\omega = \dfrac{1}{z}$	5) $\omega = \dfrac{1 + iz}{1 - iz}$	6) $\omega = \dfrac{az + b}{cz + d}$, $ad - bc \neq 0$

4. Найти множество всех точек, в которых угол поворота равен нулю при отображениях:

1) $\omega = z^2$	2) $\omega = z^3$	3) $\omega = z^2 - 2z$
4) $\omega = \dfrac{1}{z}$	5) $\omega = \dfrac{1 + iz}{1 - iz}$	6) $\omega = \dfrac{az + b}{cz + d}$, $ad - bc \neq 0$

Вариант лабораторной работы

Задание 1

Дана функция f(z): D $\subseteq \overline{C} \rightarrow \overline{C}$ и точка a $\in$ D. f(z) = $\bar{z}\,\mathrm{Re}(z)$, $a = 0$.

Будет ли функция *f(z)*

1) дифференцируема в точке *a*?

2) голоморфна в точке *a*?

3) Найти *f ‘(a)*, если она существует.

4)Найти область дифференцируемости *f(z)* и область аналитичности *f(z).*

Задание 2

Функция *v:* $R^2 \rightarrow R$. Можно ли восстановить функцию *f(z) = u + iv*, как функцию, аналитическую в некоторой области D $\subseteq \overline{C}$, если $u = \ln(x^2 + y^2)$?

Задание 3

Найти сопряжённую к функции *u (x, y)* = $sh x \cos(y - 1)$ функцию *v(x,y).*

Восстановить аналитическую функцию *f(z)* по известной действительной части *u (x, y)* = $sh x \cos(y - 1)$*,* при условии *f(0) = – i sin*1.

Задание 4

Для функции $f(z) = \dfrac{1}{i-z}$ найти :

1) Коэффициент растяжения для точек области D1 = $\{z \subseteq \overline{\overline{C}} : |z - i| = ½\}$

2) Угол поворота для точек области D2 = $\{z \subseteq \overline{\overline{C}} : \mathrm{Im}(z) = 1,\ z \neq i\}$.

Задание 5

1) Найти множество всех точек, в которых коэффициент линейного растяжения равен единице при отображении: $\omega = \dfrac{1+iz}{1-iz}$

2) Найти множество всех точек, в которых угол поворота равен нулю при отображении: $\omega = \dfrac{1+iz}{1-iz}$.

Задание 6

1) Найти длины образа кривой C при отображении ω:

C: $z = it + 1$, $0 \le t \le 1$, $\omega = z^2$

2) Найти площадь образа области D при отображении :

D: $\left\{2 < |z| < 3, |\arg z| < \dfrac{\pi}{4}\right\}$, $\omega = z^2$;

Задание 7

Доказать, если *f* $\subseteq$ *H(D)* $\Rightarrow$ *2Re(f(z)) + 3Im(f(z))* гармоническая функция в области D .

4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ И АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛА КОШИ

Основные понятия

Параметры	Понятие и его обозначение	Определяющее понятие и видовые признаки
$w=f(z):D\to\widetilde{D}$ $\gamma\subset D$ $\int\limits_{\gamma} f(z)dz$	Интеграл от функции комплексной переменной $f(z)$ вдоль кривой $\gamma\subset D$	$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ \lambda\to 0}}\sum\limits_{r=1}^{n} f(z_k)\Delta z_k$, где $\lambda=\max\limits_{k=1,n}\lvert\Delta z_k\rvert$
$F(z)$	Первообразная функции $f(z)$ в области D	$F(z)$ первообразная $f(z)$ в области D, если $F(z)\in H(D)$ и $F'(z)=f(z)$
Множество	Семейство первообразных функции $f(z)$ в области D	Множество функций $\{\Phi(z):\Phi(z)=F(z)+c, c\in C\wedge F'(z)=f(z)\}$

Основные утверждения

4.1. Построение интеграла от функции комплексного переменного вдоль кривой

Рассмотрим на плоскости C область D и $\gamma\subset D$, где $\gamma = AB$ кусочно–гладкая кривая, A – начальная точка кривой, B – конечная точка. В каждой точке кривой определена функция $f(z)$ (см. рис 12).

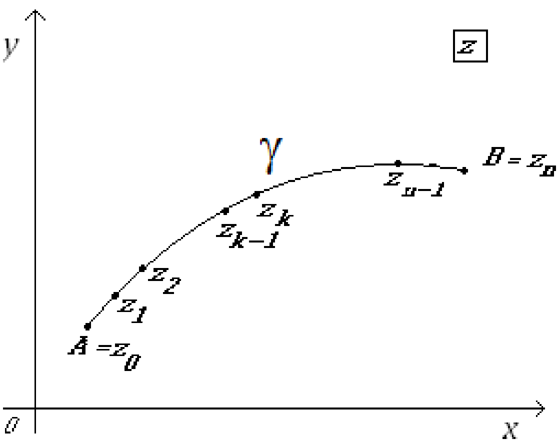

Рис. 12

Рассмотрим разбиение кривой AB на элементарные дуги точками $z_0, z_1,...z_{n-1}, z_n$, причем $A=z_0, B=z_n$.

Обозначим через l_k, $k=1,...,n$ длину дуги γ_k. Пусть $\lambda=\max\limits_{k=1,n} l_k$. На каждой дуге γ_k произвольно выберем точку $\widetilde{z}_k$ и составим интегральную сумму $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} f(\widetilde{z}_k)\Delta z_k$,

$\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$.

Переходя к пределу при $\lambda\to 0\ (\Leftrightarrow n\to\infty)$, получим

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\widetilde{z}_k)\Delta z_k .$$

Тогда обозначим $S = \int\limits_{\gamma} f(z)dz$. Предел в определении интеграла существует и не зависит от разбиения, а также от выбора промежуточных точек $\tilde{z}_k$, если функция непрерывна на этой кривой.

Достаточные условия существования предела легко находятся самостоятельно на основании **УТВ_4.1** .

УТВ_4.2. Теорема о существовании интеграла от функции комплексного переменного

Интеграл от функции $f(z)$ по кривой $\gamma \subset D$ существует и конечен, если кривая кусочно–гладкая, а функция $f(z)$ непрерывна на этой кривой.

УТВ_4.3. Свойства интеграла

1) Линейность интеграла: $\forall a,b \in C \ \int\limits_{\gamma}(af(z)+bg(z))dz = a\int\limits_{\gamma} f(z)dz + b\int\limits_{\gamma} g(z)dz$.

2) Ориентированность интеграла: $\int\limits_{\gamma} f(z)dz = -\int\limits_{\bar{\gamma}} f(z)dz$.

3) Аддитивность интеграла. Если $\gamma = C_1 \cup C_2 \Rightarrow \int\limits_{\gamma} f(z)dz = \int\limits_{C_1} f(z)dz + \int\limits_{C_2} f(z)dz$.

4) Оценка интеграла: $\left|\int\limits_{\gamma} f(z)dz\right| \le \int\limits_{\gamma} |f(z)|dz$.

УТВ_4.4. Формулы для вычисления интеграла

Существует несколько способов вычисления интеграла:

1. Пусть на кусочно–гладкой кривой $\gamma \subset C$ определена непрерывная функция $f(z)$, тогда

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = (f(z) = u+iv, z = x+iy) = \int\limits_{\gamma}(u+iv)(dx+idy) = \int\limits_{\gamma} udx - vdy \ \ + i\int\limits_{\gamma} udy + vdx$$

2. Если кривая может быть задана параметрическими уравнениями $\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [a,b] \subset R$,

то интеграл может быть вычислен следующим образом:

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = (dz = z'(t)dt) = \int\limits_{a}^{b} f(z(t)z'(t)dt.$$

Пример 1

Вычислить $\int\limits_{C}(z-a)^m dz$, m – целое, C – окружность $|z-a| = R.$

<u>Решение:</u>

Параметрическое уравнение окружности $z - a = \mathrm{Re}^{it}, t \in [0,2\pi]$. Тогда

$$\int_C (z-a)^m dz = \int_0^{2\pi} R^m e^{imt} Rie^{it} dt = iR^{m+1}\int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t}dt = \begin{cases} \dfrac{iR^{m+1}}{(m+1)i} e^{i(m+1)t}\Big|_0^{2\pi}, m \neq -1 \\ i\displaystyle\int_0^{2\pi} dt, m=-1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{R^{m+1}}{m+1}(e^{i(m+1)t}-1)=0, m\neq -1. \\ 2\pi i, m=-1 \end{cases}$$

Таким образом, $\int\limits_{|z-a|=R} (z-a)^m dz = \begin{cases} 0, m \neq -1 \\ 2\pi i, m=-1 \end{cases}$.

Пример 2

Вычислить $\int\limits_\gamma f(z)dz$, где $f(z) = (Im(z) + 1) - \mathrm{Re}(z)i$, кривая γ – отрезок прямой, соединяющий точки $z = 1$, $z = -i$ (см. рис. 13).

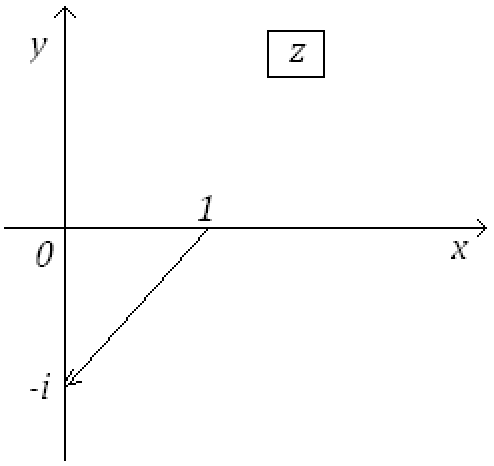

Рис. 13

Имеем $u = y + 1$, $v = -x$.

Уравнение прямой $y = x - 1$ и $dy = dx$.

Используем формулу

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma udx - vdy \ + i\int_\gamma udy + vdx =$$

$$= \int_\gamma (y+1)dx - (-x)dy + i\int_\gamma (-x)dx + (y+1)dy =$$

$$= -\int_0^1 [(x-1+1)-(-x)]dx - \ i\int_0^1 [(-x)+(x-1+1)]dx =$$

$$= -\int_0^1 2xdx - i\int_0^1 0dx = -1.$$

УТВ_4.5.1. Теорема Коши для односвязной области

Если $f(z) \in H(\overline{D})$, D – односвязная область, $\partial D -$гладкий контур $\Rightarrow \int\limits_{\partial D} f(z)dz = 0$.

<u>Доказательство:</u> $f(z) \in H(\overline{D}) \Rightarrow$ в области D функция удовлетворяет условиям Коши – Римана $u'_x = v'_y, u'_y = -v'_x$, и её частные производные непрерывны в D $\Rightarrow$

$\int\limits_{\partial D} f(z)dz = \int\limits_{\partial D} udx - vdy + i\int\limits_{\partial D} udy + vdx$, и подынтегральные выражениям в данной формуле являются полными дифференциалами $\Rightarrow \int\limits_{\partial D} f(z)dz = \int\limits_{\partial D} udx - vdy + i\int\limits_{\partial D} udy + vdx = 0 + i0 = 0$.

УТВ_4.5.2. Теорема Коши для многосвязной области

Если $f(z) \in H(\overline{D})$, D – многосвязная область, ∂D – гладкий контур $\Rightarrow \int\limits_{\partial D} f(z)dz = 0$.

Следствие_4.5. Независимость интеграла от пути интегрирования

Если $f(z) \in H(D)$, D – односвязная область, $\gamma \subset D$ – незамкнутая кривая

$\Rightarrow \int\limits_{\gamma} f(z)dz$ не зависит от пути интегрирования, а зависит от начальной и конечной точек интегрирования.

<u>Доказательство</u>

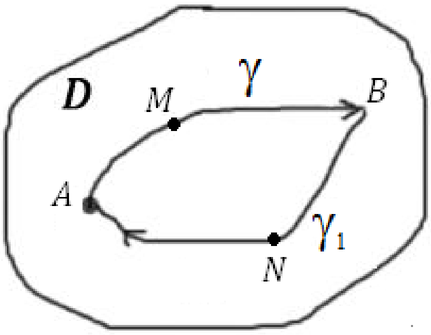

Рис. 14.

Пусть $f(z) \in H(D)$, D – односвязная область, $\gamma \subset D$ – незамкнутая кривая =(пусть A – начальная точка интегрирования, B – конечная точка)$\Rightarrow$ построим замкнутый контур, соединив точки A, B гладкой кривой γ_1 (см. рис. 14) $\Rightarrow$

$$\int\limits_{L} f(z)dz = \int\limits_{AMB} f(z)dz + \int\limits_{BNA} f(z)dz = \int\limits_{AMB} f(z)dz -$$

$$- \int\limits_{ANB} f(z)dz = 0 \text{ (по теореме Коши 4.5.1)} \Rightarrow$$

$$\int\limits_{AMB} f(z)dz = \int\limits_{ANB} f(z)dz.$$

УТВ_4.6. Теорема о первообразной аналитической функции

Пусть $f(z) \in H(D) \Rightarrow \forall a \in D$ функция $F(z) = \int\limits_{a}^{z} f(\xi)d\xi$, $z \in D$ является аналитической в D и $F'(z) = f(z), z \in D$.

УТВ_4.7. Теорема об общем виде первообразной

Пусть $f(z)$ непрерывна в области D и интеграл от этой функции по любой замкнутой кривой, лежащей в области D, равен нулю. Тогда функция $F(z) = \int\limits_{a}^{z} f(\xi)d\xi$ есть первообразная функции $f(z)$.

Замечание к УТВ. 4.6 и 4.7

Если *F(z)* – первообразная функции *f(z)* в области D, $F(z) \in H(D) \Rightarrow$

$\Phi(z) = F(z) + c$ – первообразная функции *f(z)* $\forall c \in C$.

УТВ_4.8. Формула Ньютона – Лейбница

Пусть $f(z) \in H(D)$, D – односвязная область, *Φ(z)* – некоторая первообразная функции *f(z)* в области D: $\Phi'(z) = f(z), z \in D \Rightarrow \int\limits_a^b f(z)dz = \Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(z)\Big|_a^b$.

УТВ_4.9.1. Интегральная формула Коши

Пусть $f(z) \in H(\overline{D}) \Rightarrow \forall a \in D$ справедлива формула $f(a) = \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\partial D}\dfrac{f(z)}{z-a}dz$.

УТВ_4.9.2. Если $f(z) \in H(u_a), a \in D \Rightarrow$ в точке z = a функция $f(z)$ имеет производную любого порядка и $f^{(n)}(a) = \dfrac{n!}{2\pi i}\oint\limits_L \dfrac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$, где L – кусочно–гладкий контур, $L \subset u_a$.

Примечание. Из теоремы 4.9.2 следует, что если функция f(z) является аналитической в точке и её окрестности, то в этой точке являются аналитическими и все производные этой функции.

УТВ_4.10. Теорема Мореры

Пусть функция непрерывна в односвязной области D, интеграл от этой функции по любому замкнутому кусочно – гладкому контуру, лежащему в D, равен нулю. Тогда $f(z) \in H(D)$.

<u>Доказательство</u>

$\forall \gamma \subset D: \oint\limits_\gamma f(z)dz = 0$, γ – замкнутый контур $\Rightarrow$ $\forall \gamma \subset D: \int\limits_\gamma f(z)dz$, где γ – незамкнутая кривая, не зависит от вида кривой, а зависит от начальной и конечной точки интегрирования $\Rightarrow$ интеграл $F(z) = \int\limits_a^z f(\xi)d\xi$ при фиксированной точке $a \in D$ есть функция верхнего предела =(теорема 4.6)$\Rightarrow$ $F(z) \in H(D)$ и $F'(z) = f(z)$ =(УТВ_4.9.2)$\Rightarrow$ $f(z) \in H(D)$ как производная аналитической функции.

УТВ_4.11. Достаточные условия аналитичности функции

Если функция $f(z)$ непрерывна на замыкании $\overline{D}$ односвязной области, ограниченной кусочно–гладким контуром ∂D, то $\forall a \in D$ имеем $f(a) = \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\partial D}\dfrac{f(z)}{z-a}dz \Rightarrow f(z) \in H(D)$.

Основные примеры и их решение

1) Вычислить интеграл от непрерывной однозначной функции.

2) Вычислить интеграл от непрерывной многозначной функции.

3) Вычислить интеграл от аналитической функции с помощью формулы Ньютона – Лейбница.

4) Вычислить интеграл с помощью интегральной формулы Коши.

Пример 3. Вычисление интеграла вдоль гладкой кривой

Вычислить $\int\limits_C e^{\bar{z}} dz$, где C – отрезок прямой $y = -x$, соединяющей точки

$z_1 = 0$ и $z_2 = \pi - i\pi$.

<u>Решение:</u> Параметрические уравнения линии C есть $x = t, y = -t$ или в комплексной форме

$z = t - it, 0 \le t \le \pi.$

Поэтому получим

$$\int\limits_C e^{\bar{z}} dz = \int\limits_0^{\pi} e^{t+it}(1-i)dt = (1-i)\int\limits_0^{\pi} e^{t(1+i)}dt = \frac{1-i}{1+i} e^{(1+i)t} \Big|_0^{\pi} = (e^{\pi} + 1)i.$$

Пример 4. Вычисление интеграла вдоль гладкой кривой

Вычислить $\int\limits_C (z^2 + z \cdot \bar{z})dz$, где C – дуга окружности $|z| = 1, (0 \le \arg z \le \pi)$.

<u>Решение:</u> Параметрическое уравнение полуокружности:

$x = \cos t, y = \sin t, t \in [0, \pi]$ или $z = e^{it}$. Тогда $dz = ie^{it}dt$ и

$$\int\limits_C (z^2 + z\bar{z})dz = \int\limits_0^{\pi} ie^{it}(e^{i2t} + 1)dt = i\int\limits_0^{\pi} (e^{3it} + e^{it})dt = (\frac{1}{3}(e^{3it} + e^{it})) \Big|_0^{\pi} = -\frac{8}{3}.$$

В следующих примерах стоящая под знаком интеграла ветвь многозначной функции выделяется заданием её значения в некоторой точке контура интегрирования. Если контур интегрирования C замкнут, то начальной точкой пути интегрирования считается та точка, в которой задано значение подынтегральной функции.

Пример 5. Вычисление интеграла вдоль заданной кривой от однозначной ветви многозначной функции

Вычислить $\int\limits_C \dfrac{dz}{\sqrt{z}}$, где

1) C – полуокружность $|z|=1, y\ge 0, \sqrt{1}=-1$;
2) C – полуокружность $|z|=1, x\le 0, \sqrt{i}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$;
3) C – окружность $|z|=1, \sqrt{-1}=i$.

Решение

1. Параметрическое уравнение верхней полуокружности $z=e^{it}$, $t\in[0,\pi]$. Тогда имеем две ветви:

$$(\sqrt{z})_k = e^{\frac{i(t+2\pi k)}{2}}, k=0{,}1, \text{ то есть, } \left(\sqrt{z}\right)_0 = e^{\frac{it+2\pi 0 i}{2}} = e^{\frac{it}{2}} \text{ или}$$
$$\left(\sqrt{z}\right)_1 = e\frac{i(t+2\pi)}{2} = e^{\frac{it}{2}+\pi i} = -e^{-\frac{it}{2}}.$$

Выберем нужную ветвь, учитывая, что $\sqrt{1}=-1$.

При $t=0$ имеем $\left(\sqrt{1}\right)_0 = e^{\frac{i\cdot 0}{2}} = 1$; $\left(\sqrt{1}\right)_1 = -e^{\frac{i\cdot 0}{2}} = -1$. Поэтому выбираем ветвь $\sqrt{z}=e^{-\frac{it}{2}}$.

Значит, $\int\limits_C \dfrac{dz}{\sqrt{z}} = \int\limits_0^\pi \dfrac{ie^{it}dt}{-e^{\frac{it}{2}}} = -i\int\limits_0^\pi e^{i\frac{t}{2}}dt = -\left.\dfrac{ie^{\frac{it}{2}}}{i/2}\right|_0^\pi = -2(e^{i\frac{\pi}{2}}-1) = 2(1-i)$.

2. Параметрическое уравнение левой полуокружности $z=e^{\frac{i(t+\frac{\pi}{2})}{2}}, t\in[0,\pi]$.

Тогда $\left(\sqrt{z}\right)_k = e^{\frac{i\left(t+\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)}{2}}, \quad k=0{,}1$

$$\left(\sqrt{z}\right)_0 = e^{\frac{i(t+\frac{\pi}{2}+2\pi 0)}{2}} = e^{\frac{it}{2}+\frac{\pi i}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)e^{\frac{it}{2}},$$

$$\left(\sqrt{z}\right)_1 = e^{\frac{i(t+\frac{\pi}{2}+2\pi)}{2}} = e^{\frac{it}{2}+\frac{5\pi i}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)e^{\frac{it}{2}}.$$

При $t=0$ имеем либо $(\sqrt{i})_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, либо $(\sqrt{i})_1 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

Согласно условию примера выбираем ветвь $\sqrt{z} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)e^{\frac{it}{2}}$. Тогда

$$\int_C \frac{dz}{\sqrt{z}} = -\int_0^{\pi} \frac{ie^{i(t+\frac{\pi}{2})}dt}{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)e^{\frac{it}{2}}} = -\frac{\sqrt{2}i}{1+i}\int_0^{\pi} e^{i(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{2})}dt = \sqrt{2}(1-i)e^{i(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{2})}\Big|_0^{\pi} = \sqrt{2}(1-i)\left[e^{i\pi} - e^{\frac{i\pi}{2}}\right] =$$

$= \sqrt{2}(1-i)(-1-i) = -2\sqrt{2}.$

3. Параметрическое уравнение окружности, начальной точкой отсчёта которого при $t=0$ является точка $z=-1$, имеет вид $z = e^{i(t+\pi)}$, $t \in [0,2\pi]$. Имеем две ветви

$$\left(\sqrt{z}\right)_0 = e^{\frac{i(t+\pi+2\pi 0)}{2}} = e^{\frac{it}{2}+\frac{\pi i}{2}} = ie^{\frac{it}{2}}$$

$$\left(\sqrt{z}\right)_1 = e^{\frac{i(t+\pi+2\pi)}{2}} = e^{\frac{it}{2}+\frac{3\pi i}{2}} = -ie^{\frac{it}{2}}$$

При $t=0$ имеем $(\sqrt{-1})_0 = i$ либо $(\sqrt{-1})_1 = -i$. Согласно условию примера выбираем ветвь $\sqrt{z} = ie^{i\frac{t}{2}}$. Тогда $\int_C \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_0^{2\rho} \frac{-ie^{it}dt}{ie^{\frac{it}{2}}} = -\int_0^{2\pi} e^{\frac{it}{2}}dt = -\frac{2}{i}e^{\frac{it}{2}}\Big|_0^{2\pi} = -\frac{2}{i}(e^{\pi i}-1) = -4i$.

Пример 6. Вычисление интеграла от однозначной ветви многозначной функции

Вычислить $\int_C \operatorname{Ln} z dz$, где

1) C – окружность $|z| = R$, $\operatorname{Ln}(-R) = \ln R + 3\pi i$,

2) C — окружность $|z| = 1$, $\operatorname{Ln} i = \frac{\pi i}{2}$.

Решение

1) Параметрическое уравнение окружности, начинающейся в точке $-R$, имеет вид

$$z = \mathrm{Re}^{i(t+\pi)} = -\mathrm{Re}^{it}, t \in [0,2\pi].$$

Так как $\operatorname{Ln}(-R) = \ln R + 3\pi i$, то из всех ветвей $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\arg z + 2\pi ki$ выбираем ветвь при $k=1$. Действительно,

$$\operatorname{Ln}(-R) = \ln R + i(\pi) + 2\pi ki = \ln R + 3\pi i \Rightarrow$$
$$i\pi + 2\pi ki = 3\pi i \to k = 1.$$

Тогда,

$$\int_C \operatorname{Ln} z dz = \int_0^{2\pi} \operatorname{Ln}(-\mathrm{Re}^{it})(-Rie^{it})dt = -\int_0^{2\pi}[\ln R + it + 2\pi i]Rie^{it}dt = -Ri\int_0^{2\pi}(\ln R + it + 2\pi i)e^{it}dt$$

Применим формулу интегрирования по частям:

$u = \ln R + 2\pi i + it$, $dv = e^{it}dt$. Тогда $du = idt$, $v = -ie^{it}$.

Подставим

$$\int_C \operatorname{Ln} z dz = -Ri\left[-(\ln R + 2\pi i + it)ie^{it}\Big|_0^{2\pi} + i^2\int_0^{2\pi} e^{it}dt\right] = Ri^2(\ln R + 2\pi i + 2\pi i)e^{2\pi i} - Ri^2(\ln R + 2\pi i)e^0 +$$

$$+\frac{Ri}{i}e^{it}\Big|_0^{2\pi} = -R(\ln R + 4\pi i) + R(\ln R + 2\pi i) + R(e^{2\pi i} - e^0) = -2\pi Ri.$$

2)Параметрическое уравнение окружности, начинающейся в точке i, имеет вид $z = e^{i(t+\frac{\pi}{2})}$, $t \in [0,2\pi]$. По определению $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\arg z + 2\pi ki, k = 0, \pm 1,..$

Так как $\operatorname{Ln} i = \dfrac{\pi i}{2}$, то из всех ветвей $\operatorname{Ln} z$ выбираем ветвь при $k=0$; так как

$$\operatorname{Ln} i = \ln|i| + i\arg i + 2\pi k i = \frac{\pi i}{2} \Rightarrow i\frac{\pi}{2} + 2\pi k i = \frac{\pi i}{2} \Rightarrow k = 0.$$

Поэтому

$$\int_C \operatorname{Ln} z dz = \int_0^{2\pi} \operatorname{Ln}(e^{i(t+\frac{\pi}{2})}) i i e^{it} dt = -\int_0^{2\pi}\left[\ln\left|e^{i\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}\right| + i\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right]e^{it}dt = -i\int_0^{2\pi}\left(t+\frac{\pi}{2}\right)e^{it}dt =$$

$$= \begin{vmatrix} u = t+\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow du = dt \\ dv = e^{it}dt \Rightarrow v = \dfrac{1}{i}e^{it} \end{vmatrix} = -i\left[\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{i}e^{it}\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{i}\int_0^{2\pi} e^{it}dt\right] = -i\left[\frac{5\pi}{2i}e^{2\pi i} - \frac{\pi}{2i} + e^{it}\Big|_0^{2\pi}\right] = -2\pi .$$

Пример 7. Вычисление интеграла с помощью интегральной формулы Коши

Вычислить интеграл $\displaystyle\int_{|z-1|=1} \frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2} dz$.

<u>Решение:</u> Подынтегральная функция $\dfrac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2}$ является аналитической в области $|z-1| \le 1$ всюду, кроме точки $z_0 = 1$. Выделим под знаком интеграла функцию $f(z)$, являющуюся аналитической в круге $|z-1| \le 1$. Для этого перепишем подынтегральную функцию в виде $\dfrac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2} = \dfrac{\frac{\sin \pi z}{(z+1)^2}}{(z-1)^2}$ и в качестве $f(z)$ возьмём $\dfrac{\sin \pi z}{(z^2+1)^2}$. Полагая в формуле (7) $n=1$, получим $\displaystyle\int_{|z-1|=1} \frac{\frac{\sin \pi z}{(z+1)^2}}{(z-1)^2} dz = 2\pi i f'(1)$.

Находим производную

$$f'(z) = \left[\frac{\sin \pi z}{(z+1)^2}\right]^2 = \frac{\pi\cos \pi z(z+1)^2 - \sin \pi z \cdot 2(z+1)}{(z+1)^4} = \frac{\pi\cos\pi z(z+1) - 2\sin \pi z}{(z+1)^3}.$$

Отсюда $f'(1) = \dfrac{2\pi\cos\pi}{2^3} = -\dfrac{\pi}{4}$, следовательно,

$$\int_{|z-1|=1} \frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2} dz = -\frac{\pi^2}{2} i .$$

Пример 8. Вычисление интеграла с помощью интегральной формулы Коши

Вычислить интеграл $\displaystyle\int_C \frac{e^{z^2}dz}{z^2-6z}$, если а) $C: |z-2| = 1$, б) $C: |z-2| = 3$, в) $C: |z-2| = 5$.

<u>Решение</u>

а) В замкнутой области, ограниченной окружностью $|z-2| = 1$, подынтегральная функция является аналитической $\Rightarrow$ по теореме Коши $\displaystyle\int_{|z-2|=1} \frac{e^{z^2}dz}{z^2-6z} = 0.$

б) Внутри области, ограниченной окружностью $|z-2|=3$, находится одна точка $z=0$, в которой знаменатель обращается в нуль. Перепишем интеграл в виде

$$\int_C \frac{e^{z^2}dz}{z^2-6z} = \int_{|z-2|=3} \frac{\frac{e^{z^2}}{z-6}}{z}dz.$$

Функция $f(z)=\dfrac{e^{z^2}}{z-6}$ является аналитической в данной области. Применяя интегральную формулу Коши ($z=0$), получим

$$\int_{|z-2|=3} \frac{e^{z^2}dz}{z^2-6z} = 2\pi i\,\frac{z^2}{z-6}\;\Big|_{z=0} = 2\pi i(-\frac{1}{6}) = -\frac{\pi i}{3}.$$

в) В области, ограниченной окружностью $|z-2|=5$, имеем две точки $z=0$, $z=6$, в которых знаменатель подынтегральной функции обращается в нуль. Непосредственно формулу 4.9.1.применять нельзя. Можно поступить так. Разложим дробь $\dfrac{1}{z^2-6z}$ на простейшие. Получаем

$$\frac{1}{z^2-6z} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{z-6} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{z}.$$

Подставляя в интеграл, получим

$$\int_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2}dz}{z^2-6z} = \frac{1}{6}\int_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2}dz}{z-6} - \frac{1}{6}\int_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2}dz}{z} = \frac{1}{6}2\pi i e^{z^2}\;\Big|_{z=6} - \frac{1}{6}2\pi i e^{z^2}\;\Big|_{z=0} = \frac{\pi i}{3}e^{36} - \frac{\pi i}{3}\cdot 1 =$$

$$= \frac{e^{36}-1}{3}\pi i.$$

Пример 9. Вычисление интеграла от аналитической функции с помощью формулы Ньютона –Лейбница

Вычислить $\displaystyle\int_{1-i}^{2+i}(3z^2+2z)dz.$

<u>Решение:</u> Так как подынтегральная функция $f(z)=3z^2+2z$ является аналитической всюду в C, то, применяя формулу Ньютона – Лейбница, найдём

$$\int_{1-i}^{2+i}(3z^2+2z)dz = (z^3+z^2)\;\Big|_{1-i}^{2+i} = (2+i)^3+(2+i)^2-(1-i)^3-(1-i)^2 = 7+19i.$$

Задачи для самостоятельной работы

1. Вычислить интегралы от аналитических функций.

$a)$ $\displaystyle\int_{1+i}^{-1-i}(2z+1)dz;$ б) $\displaystyle\int_{0}^{1+i}z^3dz;$ в) $\displaystyle\int_{1}^{i}(3z^4-2z^3)dz.$

2. Вычислить интегралы любым способом:

1) $\displaystyle\int_{|z|=r} z^n dz$;

2) $\displaystyle\int_{|z|=r} \frac{|\,dz\,|}{|z-a|^2}$.

3) $\int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{\sqrt{z}}$, $\sqrt{-1}=i$;

4) $\int\limits_{|z|=1} z^n Lnzdz$, $Ln\,1$ =0.

5) $\int\limits_L |z|\,dz$ по контурам:

а) L – радиус–вектор точки $z=2-i$;

б) L – полуокружность $|z|=1$, $-\frac{\pi}{2}\le \arg z \le \frac{\pi}{2}$, начало пути в точке $z=-i$;

в) C – окружность $|z|=R$;

6) Вычислить $\int\limits_L |z|\,\bar{z}\,dz$, где L – замкнутый контур, состоящий из верхней полуокружности $|z|=1$ и отрезка $-1\le x\le 1$, $y=0$.

7) Вычислить $\int\limits_L (1+i-2\bar{z})dz$ по линиям, соединяющим точки $z_1=0$, $z_2=1+i$.

а) по прямой; б) по параболе $y=x^2$; в) по ломаной $z_1 z_3 z_2$, где $z_3=1$.

8) Вычислить следующие интегралы:

а). $\int\limits_C z\,\mathrm{Im}\,z^2 dz$, $\mathrm{C}:|z|=1$, $(-\pi\le \arg z\le 0)$;

б). $\int\limits_C e^{|z|^2}\,\mathrm{Re}\,zdz$, C - прямая, соединяющая $z_1=0$, $z_2=1+i$.

в). $\int\limits_C z\,\mathrm{Re}\,zdz$, $\mathrm{C}:|z|=1$, обход против часовой стрелки.

9) Вычислить $\int\limits_C \frac{dz}{\sqrt{z}}dz$, где

а) $C:|z|=1$, $\mathrm{Re}\,z\ge 0$, $\sqrt{-i}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$;

б) $C:|z|=1$, $y\le 0$, $\sqrt{-1}=i$;

в) $C:|z|=1$, $\sqrt{1}=-1$.

10) Вычислить $\int\limits_C \mathrm{Ln}\,zdz$, где

а) $C:|z|=1$, $\mathrm{Ln}\,1=0$; б) $C:|z|=R$, $\mathrm{Ln}\,R=\ln R$; в) $C:|z|=R$, $\mathrm{Ln}\,R=\ln R+2\pi i$;

11) Вычислить $\int\limits_C \frac{dz}{\sqrt[4]{z^3}}$, $C:|z|=1$, $y\ge 0$, $\sqrt[4]{1}=1$.

3. Вычислить с помощью интегральной формулы Коши:

1) $\int\limits_{|z+i|=3} \sin z\frac{dz}{z+i}$;

2) $\int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{z^2-1}$;

3) $\int\limits_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2-1} dz;$

4) $\int\limits_{|z|=4} \frac{ch\, z}{z^2+\pi^2} dz;$

5) $\int\limits_{|z+1|=1} \frac{dz}{(1+z)(z-1)^3};$

6) $\int\limits_{|z-i|=1} \frac{\cos z}{(z-i)^3} dz;$

7) $\int\limits_{\partial D} \frac{e^z dz}{z(1-z^3)},$

D: а) $|z|<\frac{3}{2}$, б) $|z-1|<\frac{1}{2}$;

8) $\int\limits_{|z|=r} \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)},$

$|a|<r<|b|$, $n=1,2,\ldots$.

Ответы на задание 3:

1) $2\pi \cdot sh1$;
2) 0;
3) $2\pi i \cdot sh1$;
4) 0;
5) $-\frac{i\pi}{4}$;
6) $-i\pi \cdot ch1$;
7) а) $\pi i(2-e)$; б) $-\pi ie$;
8) $-2\pi i(b-a)^{-n}$.

Вариант контрольной работы

№1. Вычислить интеграл

$$\int\limits_C \cos(z-i)dz, C:[0,\tfrac{\pi}{2}+i]\cup[\tfrac{\pi}{2}+i,-\tfrac{\pi}{2}+i].$$

№ 2. Вычислить интеграл

$$\int\limits_C \bar{z}\,\mathrm{Re}(z)dz, C:|z|=1, z_0=-1.$$

№ 3. Вычислить интеграл

$$\int\limits_C z^2 Ln(z)dz, C:|z|=2, \quad Ln(1)=2\pi i.$$

№ 4. Вычислить интеграл предложенным контурам

$$\int\limits_C \frac{z\sin z}{z^2+\pi^2} dz;$$

1.$C: |z+\pi i| = 3,5;$

2. $C: |z| = 4.$

5. РЯДЫ ТЕЙЛОРА И ЛОРАНА.
ОСОБЫЕ ТОЧКИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Основные понятия

Параметры	Понятие и его обозначение	Определяющее понятие и видовые признаки
$\sum_{k=1}^{\infty} z_k, z_k \in C$	Ряд с комплексными числами	$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = \sum_{k=1}^{\infty}(x_k + iy_k) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k + i\sum_{k=1}^{\infty} y_k$
$\sum_{k=1}^{\infty} z_k, z_k \in C$	Сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$	Ряд сходится, если существует предел последовательности частичных сумм: $\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S$, где $S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$
$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$	Функциональ–ный ряд	$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) = \sum_{k=1}^{\infty}(u_k(x,y) + iv_k(x,y)) =$ $= \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,y) + i\sum_{k=1}^{\infty} v_k(x,y),$ $u_k(x,y), v_k(x,y) : R \times R \to R$
$\sum_{k=1}^{\infty} C_k (z-a)^k$	Степенной ряд Тейлора	Ряд вида $\sum_{k=1}^{\infty} C_k (z-a)^k$, где $C_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} \frac{f(z)dz}{(z-a)^k} = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, k = \overline{1,+\infty}, a \in C$
$D \subseteq C$	Область сходимости степенного ряда	Открытое множество точек, в которых сходится степенной ряд: $\lvert z-a \rvert < R$
$R \in [0,+\infty)$	Радиус сходимости	Радиус R наименьшего круга, содержащего область сходимости
$z = a$, $f(z) \in H(D)$	Нуль аналитической функции	Точка $z = a$ называется нулем функции, если $f(a) = 0$
$n \in N$	Порядок нуля	Натуральное число n называется порядком нуля $z = a$ функции $f(z)$, если $f(a) = 0, f'(a) = 0, f''(a) = 0, \ldots, f^{n-1}(a) = 0,$ $f^{n}(a) \neq 0$

$\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k (z-a)^k$	Ряд Лорана	Ряд вида $\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k (z-a)^k$, где $C_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} \frac{f(z)dz}{(z-a)^k}, k=\overline{-\infty,+\infty}, a \in C$
$V \subseteq C$	Область сходимости ряда Лорана	Кольцо V= $\{z \in C : r < \lvert z-a \rvert < R,\ 0 \le r < R \le +\infty, a \in C\}$
$\sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-a)^k$	Правильная часть ряда Лорана	Часть ряда Лорана с неотрицательными степенями *(z – a)*, сходящаяся в круге $\lvert z-a \rvert < R$: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k (z-a)^k = \boxed{\sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-a)^k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{-k}}{(z-a)^k}$
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{-k}}{(z-a)^k}$	Главная часть ряда Лорана	Часть ряда Лорана с отрицательными степенями (z – a), сходящаяся во внешности круга $\lvert z-a \rvert > r$: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k (z-a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-a)^k + \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{-k}}{(z-a)^k}}$
$z = a$	Изолированная особая точка аналитической функции	Точка $z = a$ называется изолированной особой точкой *f(z)*, если $\exists \overset{\circ}{u}_a = \{z \in C : 0 < \lvert z-a \rvert < \varepsilon,\ \varepsilon > 0\}$ – проколотая окрестность точки $z = a$, где $f(z) \in H(\overset{\circ}{u}_a)$ и $f(z) \notin H(u_a)$
$z = a, a \in \overline{C}$	Устранимая особая точка	$z = a$ – устранимая особая точка *f(z)*, если $\exists \lim_{z \to a} f(z) = A,\ \lvert A \rvert < +\infty$
$z = a, a \in \overline{C}$	Полюс	$z = a$ – полюс функции *f(z)*, если $\lim_{z \to a} f(z) = \infty$
$n \in N$	Порядок полюса	Натуральное число *n* называется порядком полюса функции $f(z)$, если $f(z) \approx \frac{1}{z^n}$ при $z \to \infty$
$z = a, a \in \overline{C}$	Существенно особая точка	$z = a$ – существенно особая точка функции $f(z)$, если не существует $\lim_{z \to a} f(z)$ ни конечного, ни бесконечного

$f(z)=P_n(z)$	Полином	Целая функция $f(z)$, имеющая на бесконечности полюс
$f(z)\in H(C)$	Целая трансцендентная функция	Целая функция $f(z)$, имеющая на бесконечности существенно особую точку
$f(z)$	Мероморфная функция	Функция $f(z)$, не имеющая в C никаких других особенностей, кроме полюсов
$f(z)$	Рациональная функция	$f(z)$– рациональная функция, если она имеет конечное число изолированных особых точек в расширенной комплексной плоскости $\overline{C}$ и все они полюсы

Основные утверждения

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k, z_k \in C$ с общим членом $z_k = x_k + i\, y_k$. Он разделяется на два ряда с действительными числами $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k, x_k \in R$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k, y_k \in R,$ где $x_k + iy_k = z_k \in C$. Из сходимости этих рядов следует сходимость исходного ряда.

УТВ_5.1. О сходимости числового ряда

Числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k, z_k \in C$ сходится тогда и только тогда, когда сходятся ряды

действительной и мнимой частей: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k, x_k \in R$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k, y_k \in R$, где $x_k + iy_k = z_k \in C$.

УТВ_5.1.1

Числовой ряд сходится абсолютно, если сходится ряд, составленный из модулей.

УТВ_5.2

Функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ сходится в точке $z = a$, если сходится числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(a)$.

УТВ_5.3. Равномерная сходимость функциональных рядов на множестве $M \subseteq \overline{C}$

2.1. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z), f_k(z): M \subseteq \overline{C} \to \overline{C}$, равномерно сходится на множестве $M \subseteq \overline{C}$**,** если ряд

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ сходится $\forall z \in M$ и $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N = N(\varepsilon)$:при $n \ge N$ $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f_k(z)\right| < \varepsilon$.

2.2. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ сходится равномерно на множестве $M \subseteq \overline{C}$, если сходится ряд

$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k(z)\|$, $\|f_k(z)\| = \sup_{z \in M} |f_k(z)|$ и $\left|\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)\right| \le \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k(z)\|$.

2.3. Если $f_k(z)$ непрерывны на $M \subseteq \overline{C} \Rightarrow$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ сходится равномерно на М и сумма

ряда $S(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ непрерывна на *M*.

УТВ_5.4. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ сходится равномерно на М, $f_k(z)$ непрерывны на М, $\gamma \subset M$ – кусочно – гладкая кривая, тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ можно почленно интегрировать вдоль кривой $\gamma \subset M$.

УТВ_5.5. Теорема Вейерштрасса.

Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$, $f_k(z) \in H(D)$, сходится равномерно на любом компактном подмножестве $K \subset D$, тогда

1. Сумма ряда $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$, $f(z) \in H(D)$;
2. Ряд можно дифференцировать любое число раз $\forall z \in D$.

УТВ_5.6. Теорема о ряде Тейлора

Если $f(z) \in H(D)$ и $a \in D \Rightarrow \forall z \in U = \{z \in D : |z-a| < R\} \subseteq D$, то функцию можно представить в виде суммы сходящегося степенного ряда $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k (z-a)^k$, где

$$C_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)dz}{(z-a)^k} = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, k = \overline{1,+\infty}.$$

Доказательство

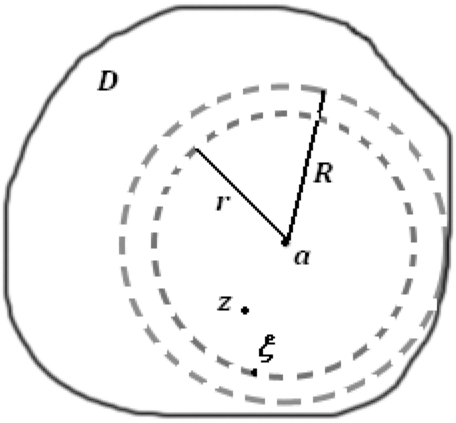

Рис. 15.

Рассмотрим рис. 15. Пусть $z \in U$. Выберем число r так, чтобы $|z-a| < r < R$ и обозначим $\gamma_r = \{\xi : |\xi - a| = r\}$.

По интегральной формуле Коши имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi . \qquad (*)$$

Чтобы получить разложение в степенной ряд, воспользуемся формулой суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии для $\dfrac{1}{\xi - z}$ в интеграле (*)

$\dfrac{1}{\xi - z} = \dfrac{1}{\xi - a + a - z} = \dfrac{1}{(\xi - a)(1 - \frac{z-a}{\xi - a})} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(z-a)^k}{(\xi - a)^{k+1}}$. Умножим обе части равенства на $\dfrac{1}{2\pi i} f(\xi)$ и проинтегрируем почленно вдоль γ_r, получим, учитывая, что $\dfrac{|z-a|}{|\xi - a|} = \dfrac{|z-a|}{r} < 1$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \sum_{\text{л}=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_r} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - a)^{k+1}} (z-a)^k = \left(C_k = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_r} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - a)^{k+1}} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-a)^k;\ C_k \ –$$

коэффициенты ряда. Используя интегральную формулу Коши, получаем

$$C_k = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - a)^{k+1}} = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$ – коэффициенты ряда Тейлора.

Следствие 5.6.1. Неравенство Коши для коэффициентов

$$f(z) \in H(\overline{U}) \text{ и } \forall z \in \partial U \ \exists M > 0 : |f(z)| < M \ \Rightarrow |C_k| \le \frac{M}{r^k}, k = 0,1,2,3,...$$

Доказательство

$$|C_k| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - a)^{k+1}} \right| \le \frac{1}{2\pi} M \oint\limits_{\gamma} \frac{dl}{|\xi - a|^{k+1}} = (|\xi - a| = r) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} M \frac{2\pi r}{r^{k+1}} = \frac{M}{r^k}, k = 0,1,2,3,...$$

Следствие 5.6.2. Теорема Лиувилля

Если $f(z) \in H(C)$ и $\forall z \in C \ \exists M > 0 : |f(z)| < M \Rightarrow f(z) \equiv const \ \forall z \in C$.

<u>Доказательство</u>

Воспользуемся неравенством Коши для коэффициентов

$$|C_k| \le \frac{M}{r^k}, k = 0,1,2,3,... \ = (r \to \infty) \Rightarrow 0 \le |C_k| \to 0 \ \forall k = 1,2,3,.... \Rightarrow$$

$$C_k = 0 \forall k = 1,2,3,... \Rightarrow f(z) = C_0 \ \forall z \Rightarrow f(z) \equiv const \ \forall z \in C.$$

УТВ_5.7. Теорема Абеля

Если степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-a)^k$ сходится в некоторой окрестности точки $z_0 \in C \Rightarrow$ ряд сходится на множестве $U = \{z : |z-a| < |z_0 - a|\}$, и на любом компактном подмножестве $K \subset$ U ряд сходится абсолютно и равномерно.

Следствие 5.7.1

Если степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-a)^k$ расходится в некоторой точке $z_0 \in C$, то он расходится и во всех точках z, удовлетворяющих неравенству $|z-a| > |z_0 - a|$.

Следствие 5.7.2

Для всякого степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-a)^k$ существует такое число R, что внутри круга $|z-a| < R$ данный степенной ряд сходится, а вне этого круга расходится, причем в круге $|z-a| < r < R$ степенной ряд сходится равномерно.

Следствие 5.7.3. Формула Коши – Адамара

Радиус сходимости степенного ряда можно вычислить по формуле $\frac{1}{R} = \overline{\lim_{k \to \infty}} \sqrt[k]{|C_k|}$,

$0 \le R \le \infty$.

Следствие 5.7.4

Степенной ряд внутри круга сходимости можно почленно интегрировать и дифференцировать любое число раз, причем радиус сходимости полученных рядов равен радиусу сходимости исходного ряда.

Это свойство также является прямым следствием теоремы Вейерштрасса.

УТВ_5.8. О сумме степенного ряда

Сумма степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-a)^k$ является аналитической в круге сходимости.

УТВ_5.9. Теорема единственности разложения в ряд Тейлора

Всякий сходящийся степенной ряд является рядом Тейлора своей суммы.

Доказательство

Рассмотрим ряд $\sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-a)^k$. Ряд сходится в области U=$\{z : |z-a| < R\}$ =(УТВ5.8)⇒

сумма ряда $f(z) \in H(U)$ =(следствие 5.7.4)⇒ $f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(C_n (z-a)^n\right)^{(k)} =$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} C_n n(n-1)\cdots(n-k+1)(z-a)^{n-k} = (z=a) \Rightarrow f^{(k)}(a) = C_k k! \Rightarrow C_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \Rightarrow$$

коэффициенты C_k – коэффициенты ряда Тейлора ⇒ ряд $\sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-a)^k$ – ряд Тейлора.

Пример 1

Разложить в ряд Тейлора по степеням $(z-i)$ функцию $f(z) = z^5$.

Решение:

$f(z) = z^5,\ f(i) = i^5 = i;$

$f'(z) = 5z^4,\ f'(i) = 5i^4 = 5;$

$f''(z) = 20z^3,\ f''(i) = 20i^3 = -20i;$

$f'''(z) = 60z^2,\ f'''(i) = 60i^2 = -60;$

$f^{(4)}(z) = 120z,\ f^{(4)}(i) = 120i;$

$f^{(5)}(z) = 120,\ f^{(5)}(i) = 120;\ f^{(6)}(z) = f^{(7)}(z) = \ldots = 0.$

Рядом Тейлора функции $f(z) = z^5$ по степеням $(z-i)$ является многочлен 5–й степени

$$f(z) = i + 5(z-i) - 10i(z-i)^2 - 10(z-i)^3 + 5i(z-i)^4 + (z-i)^5$$

Приложение ряда Тейлора

Разложение функции в ряд Тейлора может быть использовано для определения порядка нуля аналитической функции.

УТВ_5.10. Теорема о представлении функции в нуле

Пусть $f(z) \in H(D)$, z = a является нулем функции, причем $f(a) = 0$ и

$\forall z \in \{z : 0 < |z - a| < \varepsilon\}$ $f(z) \neq 0 \Rightarrow \exists n \in N : f(z) = (z-a)^n g(z)$, $g(z) \in H(D)$ и $g(a) \neq 0.$

<u>Доказательство:</u> $f(z) \in H(D)$=(теорема о ряде Тейлора 5.6)$\Rightarrow$ $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-a)^k$ =(z = a – нуль функции)$\Rightarrow$ $C_0 = f(a) = 0 \Rightarrow C_k \neq 0$ $\forall k$ одновременно $\Rightarrow \exists C_n \neq 0, n = \min_{k=1,\infty}(k : C_k \neq 0) \Rightarrow$

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} C_k (z-a)^k = C_n (z-a)^n + C_{n+1}(z-a)^{n+1} + ..., C_n \neq 0$$

$\Rightarrow f(z) = (z-a)^n (C_n + C_{n+1}(z-a) + ...), C_n \neq 0$=(обозначим $g(z) = C_n + C_{n+1}(z-a) + ...$ = ($g(z) \in H(D)$ как сумма сходящегося степенного ряда)$\Rightarrow$ $f(z) = (z-a)^n g(z)$, $g(a) = C_n \neq 0$.

Пример 2

Определить порядок нуля для *f(z)*= $\sin z$ и *f(z)*= $(1 - \cos z)$ при $a = 0$

1. *f(z)* = $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + ... = z(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + ...)$ $\Rightarrow$ a = 0 нуль 1–го порядка

2. *f(z)* = 1 – cos *z* = $1 - (1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + ...) = z^2(\frac{1}{2} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - ...)$ $\Rightarrow$ a = 0 нуль 2–го порядка.

Следствие 5.11.2. Функция $f(z) \in H(D)$ может иметь бесконечное число нулей лишь в открытой или неограниченной области *D*.

Следствие 5.11.3. Целая функция на ограниченном множестве $M \subseteq C$ имеет лишь конечное число нулей.

УТВ_5.12. Теорема о ряде Лорана

Любую функцию $f(z) \in H(V)$, $V = \{z \in C : r < |z - a| < R,\ 0 \leq r < R \leq +\infty, a \in C\}$ можно в этом кольце представить как сумму сходящегося ряда $\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k (z-a)^k$, коэффициенты которого определяются по формулам $C_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)dz}{(z-a)^k}, k = \overline{-\infty, +\infty}, a \in C$.

Доказательство

Фиксируем произвольную точку $z \in V$ и построим кольцо

$V' = \{z : r < r' < |z-a| < R' < R\}$ такое, что $V' \subset V$.

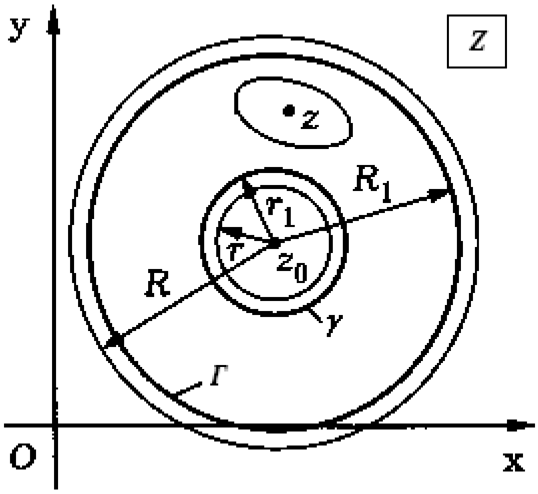

Рис. 16

По интегральной формуле Коши имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial V}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi - \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi \quad (*),$$

где окружности $\Gamma = \{z : |z-a| = R'\}$ и $\gamma = \{z : |z-a| = r'\}$ ориентированы против часовой стрелки.

1) Для всех $\xi \in \Gamma$ имеем $\frac{|z-a|}{|\xi - a|} < 1$, поэтому геометрическая прогрессия (**)

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - a + a - z} = \frac{1}{(\xi - a)(1 - \frac{z-a}{\xi - a})} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-a)^k}{(\xi - a)^{k+1}}$$ сходится равномерно по ξ на Г.

Умножая (**) на ограниченную функцию $\frac{1}{2\pi i}f(\xi)$ (что не нарушает равномерной сходимости) и интегрируя почленно вдоль Г, получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi = \sum_{л=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - a)^{k+1}}(z-a)^k = \left(C_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - a)^{k+1}}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}C_k(z-a)^k.$$

2) Второй интеграл в формуле (*) придется разлагать иначе.

При всех $\xi \in \gamma$ имеем $\frac{|\xi - a|}{|z-a|} < 1 \Rightarrow$ получаем равномерно сходящуюся на γ геометрическую прогрессию вида

$$-\frac{1}{\xi - z} = -\frac{1}{\xi - a + a - z} = \frac{1}{(z-a)(1 - \frac{\xi - a}{z-a})} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\xi - a)^k}{(z-a)^{k+1}}.$$

Снова умножая ее на ограниченную функцию $\frac{1}{2\pi i} f(\xi)$ и интегрируя почленно вдоль γ, получаем (***):

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(\xi)d\xi}{(z-a)^{k+1}}(\xi - a)^{k} = \left(d_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} f(\xi)(\xi - a)^{k-1}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_k}{(z-a)^k}.$$

Заменим теперь в формуле (***) индекс $k : k := -k$, тогда разложение (***) примет вид

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi = \sum_{k=-1}^{-\infty}C_k(z-a)^k = \sum_{k=-1}^{-\infty}\frac{C_k}{(z-a)^{-k}}.$$

Теперь получим нужное разложение

$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k(z-a)^k = \sum_{k=0}^{\infty}C_k(z-a)^k + \sum_{k=-1}^{-\infty}C_k(z-a)^k$, где ряд определяется как объединение рядов. Остается заметить, что по теореме о независимости такого интеграла от пути интегрирования, в формулах (**) и (***) окружности Г и γ можно заменить любой окружностью $\{z : |z-a| = \rho\}$, где $r < \rho < R$, и тогда эти формулы для коэффициентов примут вид

$$C_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{l}\frac{f(z)dz}{(z-a)^k}, k = \overline{-\infty, +\infty}, a \in C, l : |z-a| = \rho .$$

Следствие 5.12.1. Неравенство Коши для коэффициентов

$f(z) \in H(\overline{V})$ и $\forall z \in \{z : |z-a| = \rho\}\ \exists M > 0 : |f(z)| < M \ \Rightarrow |C_k| \le \frac{M}{\rho^k}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$

УТВ_5.13. Сумма ряда Лорана является аналитической в кольце сходимости.

Доказательство

По теореме Абеля ряд Лорана сходится равномерно на любом компактном подмножестве кольца V, поэтому по теореме Вейерштрасса его сумма является аналитической в V.

УТВ_5.14. Теорема единственности

Всякий сходящийся ряд по положительным и отрицательным степеням *(z— a)* является рядом Лорана своей суммы.

Формулы для коэффициентов ряда Лорана на практике применяются сравнительно редко, ибо они требуют вычисления интегралов. На основании доказанной теоремы единственности для получения лорановских разложений можно использовать любой законный прием: все такие приемы приведут к одному нужному результату.

Пример 3. Разложение функции в ряд Лорана

Разложить функцию $f(z) = \dfrac{z^2}{z-1}$ в ряд Лорана по степеням z и $(z-1)$.

Решение

1. Разложим функцию в кольце $0 < |z| < 1$. Представим функцию в виде $f(z) = -z^2\ \dfrac{1}{1-z}$.

Используем формулу для суммы геометрической прогрессии $\dfrac{1}{1-q} = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$. В круге $|z| < 1$ ряд сходится и $f(z) = -z^2(1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \ldots) = -z^2 - z^3 - z^4 - \ldots$, т.е. разложение содержит только правильную часть.

2. Разложим в кольце $1 < |z| < \infty$. Перейдем во внешнюю область круга $|z| > 1$. Функцию представим в виде $f(z) = \dfrac{z^2}{z} \cdot \dfrac{1}{1 - 1/z}$, где $\dfrac{1}{|z|} < 1$, и получим итоговое разложение

$f(z) = z\sum_{n=1}^{\infty} (1/z)^{n-1} = z + 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}\ldots.$

3. Воспользуемся тем, что $z^2 = (z-1)^2 + 2(z-1) + 1$, тогда

$f(z) = \dfrac{z^2}{z-1} = \dfrac{(z-1)^2 + 2(z-1) + 1}{(z-1)^2} = 1 + \dfrac{2}{z-1} + \dfrac{1}{(z-1)^2}$ – это и есть разложение функции по степеням $(z-1)$ для всех $z \neq 1$, т.е. в кольце $0 < |z-1| < \infty$.

Пример 4

Разложить в ряд Лорана функцию $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-3)}$

a) по степеням z в круге $|z| < 1$;

b) по степеням z кольце $1 < |z| < 3$;

c) по степеням $(z-2)$.

Решение: Разложим функцию на простейшие дроби $\dfrac{1}{(z-1)(z-3)} = = \dfrac{A}{z-1} + \dfrac{B}{z-3} =$ $\dfrac{A(z-3) + B(z-1)}{(z-1)(z-3)}$. Из условий $z = 1 \Rightarrow A = -\dfrac{1}{2}$, $z = 3 \Rightarrow B = \dfrac{1}{2}$.

a) $f(z) = ½\left[\dfrac{1}{1-z} - \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{(1-z/3)}\right] = ½\left[\sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} - (1/3)\sum_{n=1}^{\infty} (z/3)^{n-1}\right]$ при $0 < |z| < 1$.

b) $f(z) = -½\left[\dfrac{1/z}{1-1/z} + \dfrac{1/3}{1-z/3}\right] = -\dfrac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^{n-1}}{3^n}\right)$ при $1 < |z| < 3$.

c) $f(z) = ½ [\frac{1}{1-z} - \frac{1}{3-z}] = -½ [\frac{1}{1-(2-z)} + \frac{1}{1-(z-2)}] =$

$= -½\sum_{n=1}^{\infty}\{(2-z)^{n-1} + (z-2)^{n-1}\} = -\sum_{n=1}^{\infty}(2-z)^{2(n-1)}$ при $0<|z-2|<1$.

Изолированные особые точки аналитических функций

Пусть функция $f(z)$ является аналитической в кольце $0<|z-a|<r$ ($r<|z|<\infty$, если $a=\infty$), но не определена в самой точке $z=a$. В этом случае точку a называют изолированной особой точкой однозначного характера для функции $f(z)$.

По поведению функции вблизи точки a различают три вида изолированных точек особого характера:

1. Если $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ существует и конечен, то $z=a$ устранимая особая точка.

2. Если $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ существует, но равен бесконечности, то $z=a$ называется полюсом функции $f(z)$.

3. Если $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ не существует, то точка $z=a$ называется существенно особой точкой функции $f(z)$.

Пример неизолированной особой точки

Например, рассмотрим функцию $f(z) = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{z}}$. Функция имеет полюсы в точках $z = \frac{1}{n}$ $(n = \pm1, \pm2, ...)$, следовательно, точка $z = 0$ является неизолированной особой точкой $f(z)$.

Характер изолированной особой точки $z = a$ тесно связан с характером лорановского разложения функции в проколотой окрестности этой точки (мы будем коротко называть его разложением в окрестности $z = a$). Для конечных точек $z = a$ эта связь выражается следующими теоремами.

УТВ_5.14. **О поведении ряда Лорана в окрестности устранимой особой точки**

Для того чтобы изолированная особая точка a была устранимой особой точкой функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(z)$ была непрерывной и ограниченной в некоторой проколотой окрестности точки $z = a$.

Доказательство

Необходимость

Пусть а – устранимая точка; тогда существует конечный $\lim\limits_{z\to a} f(z) = A$ и, следовательно, $f(z)$ ограничена в некоторой проколотой окрестности $U = \{z : 0 < |z - a| < R\}$ точки z = a. Возьмем любое $0 < \rho < R$ и воспользуемся неравенствами Коши для коэффициентов $|C_k| \le \dfrac{M}{\rho^k}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$. Если k<0, то правая часть стремится к нулю при $\rho \to 0$, левая же часть от ρ не зависит $\Rightarrow$ $C_k < 0,$ при $k < 0$ $\Rightarrow$ главная часть ряда Лорана отсутствует.

Достаточность

Пусть в проколотой окрестности $U = \{z : 0 < |z - a| < R\}$ точки z = a функция $f(z)$ представляется лорановским разложением без главной части: $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} C_k (z - a)^k$. Это разложение является разложение в ряд Тейлора $\Rightarrow$ $\lim\limits_{z\to a} f(z) = C_0 \Rightarrow$ z = a является устранимой точкой $f(z)$.

УТВ_5.14.1. Изолированная особая точка $z = a$ функции $f(z)$ в том и только том случае является устранимой, если $f(z)$ ограничена в некоторой проколотой окрестности точки a.

Продолжив функцию $f(z)$ в ее устранимую точку $z = a$ по непрерывности, т. е. положив $f(a) = \lim\limits_{z\to a} f(z) = A$, мы получим функцию, голоморфную в точке $z = a$ (т. е. устраним особенность). Этим и оправдывается термин «устранимая точка». В дальнейшем можно считать такие точки правильными, а не особыми точками функции.

УТВ_5.15.1. О поведении ряда Лорана в окрестности полюса

Изолированная особая точка $a \in C$ функции $f(z)$ является полюсом в том и только том случае, если главная часть лорановского разложения $f(z)$ в окрестности точки $z = a$ содержит лишь конечное (и положительное) число отличных от нуля членов:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z - a)^k + \sum_{k=1}^{N} \frac{C_{-k}}{(z - a)^k}.$$

Доказательство

Необходимость. Пусть a – полюс; так как $\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$, то существует проколотая окрестность точки $z = a$, в которой $f(z)$ является аналитической и отлична от нуля. В этой окрестности является аналитической и функция $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$, причем существует $\lim\limits_{z\to a} g(z)=\lim\limits_{z\to a}\dfrac{1}{f(z)}=0$. Следовательно, $z = a$ является устранимой точкой (нулем) функции $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ и в окрестности справедливо разложение

$$g(z)=\sum_{k=N}^{\infty} B_k (z-a)^k = B_N (z-a)^N + B_{N+1}(z-a)^{N+1}+\ldots, B_N \neq 0.$$

Но тогда в той же окрестности мы имеем

$f(z)=\dfrac{1}{g(z)}=\dfrac{1}{(z-a)^N}\cdot\dfrac{1}{B_N+B_{N+1}(z-a)+\ldots}$ (*), причем второй множитель является функцией, аналитической в точке $z = a$, и, следовательно, допускает тейлоровское разложение

$$\frac{1}{B_N+B_{N+!}(z-a)+\ldots}=C_{-N}+C_{-N+1}(z-a)+\ldots,\ \left(C_{-N}=\frac{1}{B_N}\neq 0\right).$$

Подставляя это разложение в (*), найдём функцию $f(z)=\dfrac{C_{-N}}{(z-a)^N}+\dfrac{C_{\_N+1}}{(z-a)^{N-1}}+\ldots+\sum\limits_{k=0}^{\infty} C_k (z-a)^k$ – лорановское разложение $f(z)$ в проколотой окрестности точки $z = a$, и его главная часть содержит конечное число членов.

Достаточность. Пусть $f(z)$ в проколотой окрестности точки $z = a$ представляется лорановским разложением, главная часть которого содержит конечное число членов; пусть еще $C_{-N}\neq 0$. Тогда $f(z)$является аналитической в этой окрестности, так же как и функция $g(z)=(z-a)^N f(z)$, и представляется разложением $g(z)=C_{-N}+C_{-N+1}(z-a)+\ldots$, из которого видно, что a является устранимой точкой и существует $\lim\limits_{z\to a} g(z)=C_{-N}\neq 0$. Но тогда функция $f(z)$стремится к бесконечности при $z\to a$, т.е. а является полюсом.

Отметим еще один простой факт о связи полюсов с нулями.

УТВ_5.15.2. Теорема о связи нуля и полюса

Для того чтобы точка $z=a$ ($z=\infty$) была полюсом $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы эта функция представлялась в виде $f(z)=(z-a)^N g(z)$, $g(a)\neq 0$, где $g(z)\in H(u_a)$. Целое число N называется порядком полюса $z=a$ ($z=\infty$).

Доказательство следует из предыдущей теоремы. Предлагается сделать его самостоятельно.

УТВ_5.16. Теорема о поведении ряда Лорана в окрестности существенно особой точки

Изолированная особая точка $z = a$ функции $f(z)$ является существенно особой в том и только том случае, если главная часть лорановского разложения $f(z)$ в окрестности точки $z = a$ содержит бесконечно много отличных от нуля членов.

Доказательство

Достаточность основывается на том факте, что если главная часть содержит бесконечное число членов, то $z = a$ не может быть ни устранимой точкой, ни полюсом;

Необходимость следуеть из определения. Если $z = a$ – существенно особая точка, то главная часть не может ни отсутствовать, ни содержать конечное число членов.

УТВ_5.17. Теорема Сохоцкого

Если $z = a$ является существенно особой точкой функции $f(z)$, то для любого числа $A\in\overline{C}$ существует последовательность точек $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} : z_n \to a$ $(n\to\infty)$ такая, что $\lim\limits_{z\to a} f(z_n) = A$.

Доказательство

1. Пусть $A=\infty$. Так как $f(z)$ по теореме УТВ_5.14 не может быть ограниченной в проколотой окрестности $u_a=\{z:0<|z-a|<R\}\Rightarrow$ в этой окрестности $\exists z_1 : |f(z_1)|>1$. Точно так же в $\left\{z:0<|z-a|<\dfrac{|z_1-a|}{2}\right\}$ найдется $\exists z_2 : |f(z_2)|>2$ и т. д., в $\left\{z:0<|z-a|<\dfrac{|z_1-a|}{n}\right\}$ $\exists z_n : |f(z_n)|>n$. Очевидно, $z_n\to a$ и $\lim\limits_{z\to a} f(z_n)=\infty$.

2. Пусть $A\neq\infty$.

2.1. Рассмотрим множество А–точек функции $f(z)$. Пусть множество А–точек имеет $z = a$ своей предельной точкой, и тогда из них можно выбрать последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} : z_n \to a$ $(n\to\infty)$, на которой $f(z_n) = A$.

2.2 Пусть существует проколотая окрестность $u_a = \{z: 0 < |z-a| < R\}$, в которой $f(z) \neq A$. В этой окрестности является аналитической функция $g(z) = \dfrac{1}{f(z) - A}$, для которой $z = a$ также является существенно особой точкой. По доказанному в п.1 $\exists \{z_n\}_{n=1}^{\infty} : z_n \to a \ (n \to \infty)$, по которой $g(z_n) \to \infty \Rightarrow \ \lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} g(z_n)} + A = A$.

УТВ_5.18. Особенность на бесконечности

На бесконечности характер особенности определяется УТВ_5.14–5.17.

Каким образом это можно сделать?

Дело в том, что в конечных точках характер особенности определяют главные части лорановских разложений, содержащие отрицательные степени (*z* – *a*), которые имеют особенность в этих точках (отсюда и термин «главная часть»). В бесконечности же отрицательные степени правильны и особенность определяется совокупностью положительных степеней. Поэтому главной частью лорановского разложения функции в проколотой окрестности бесконечной точки будем считать совокупность членов этого разложения с положительными степенями. После такого изменения УТВ_5.14–5.17 будут справедливыми и для случая $z = \infty$.

Этот результат сразу получается при помощи замены переменного $z = \dfrac{1}{w}$: если обозначить $f(z) = (z = \dfrac{1}{w}) = f(\dfrac{1}{w}) = g(w)$, то, очевидно, $\lim\limits_{z\leftarrow\infty} f(z) = \lim\limits_{w\to 0} g(w) \Rightarrow \ g(w)$ имеет в точке *z=0* ту же особенность, что $f(z)$ в точке $z = \infty$.

Классификация аналитических функций

УТВ_5.19. Классификация функций по особенности на бесконечности

Пусть $f(z)$– целая функция, т.е. $f(z) \in H(C) \Rightarrow$ существует классификация функций по особенности на бесконечности:

1.Если $z = \infty$ – устранимая особая точка $f(z)$, $f(z) \in H(C) \Rightarrow \ f(z) = const \ \ \forall z \in C$.

2. Если $z = \infty$ – полюс порядка N $\Rightarrow$ $f(z)$ – полином степени N.

3. Если $z = \infty$– существенно особая точка $f(z) \Rightarrow$ $f(z)$– целая трансцендентная функция.

(Доказательство провести самостоятельно, используя теорему Лиувилля).

УТВ_5.20

Если мероморфная функция $f(z)$ на бесконечности имеет устранимую точку или полюс (т.е. если она в C не имеет других особенностей, кроме полюсов), то она является рациональной функцией.

Основные примеры и их решение

1. Разложить функцию в степенной ряд Тейлора в указанной области.
2. Определить область сходимости степенного ряда.
3. Разложить функцию в ряд Лорана в указанном кольце.
4. Разложить функцию в степенной ряд в окрестности точки.
5. Определить порядок нуля функции.
6. Определить порядок полюса.
7. Найти особые точки аналитической функции и определить характер этих точек.
8. Определить характер бесконечно удалённой точки.

Пример 5

Определить область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n$, если $C_n = \frac{1}{(1-i)^n}$, точка $a = i$.

Решение

Найдем радиус сходимости по формуле: $R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$;

$$\sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{|1-i|^n}} = \frac{1}{|1-i|} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Получаем область сходимости ряда $|z-i| < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Пример 6

Функцию $f(z) = \frac{z}{z^2 - iz + 2}$ разложить в ряд

a) в окрестности точки z = 0; определить область сходимости ряда;
b) в кольце $1 < |z| < 2$;
c) в кольце $2 < |z| < \infty$;
d) в окрестности любой особой точки.

Решение

Представим $f(z)$ в виде суммы элементарных дробей:

$$f(z)=\frac{z}{z^2-iz+2}=\frac{1}{3}\frac{1}{z+i}+\frac{2}{3}\frac{1}{z-2i}.$$

a) Преобразуем обе дроби:

(1) $\frac{1}{3}\frac{1}{z+i}=\frac{1}{3i}\frac{1}{1+\left(\frac{z}{i}\right)}$;

(2) $\frac{2}{3}\frac{1}{z-2i}=-\frac{2}{3\cdot 2i}\frac{1}{1-\left(\frac{z}{2i}\right)}=-\frac{1}{3i}\frac{1}{1-\left(\frac{z}{2i}\right)}$.

Используя известные разложения, получаем

$\frac{1}{3i}\frac{1}{z+i}=\frac{1}{3i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{i}\right)^n$, область сходимости $|z|<1$.

$\frac{2}{3i}\frac{1}{z-2i}=\frac{1}{3i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2i}\right)^n$, область сходимости $|z|<2$.

В итоге получим

$$f(z)=\frac{z}{z^2-iz+2}=\frac{1}{3i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{i}\right)^n-\frac{1}{3i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2i}\right)^n.$$

Это разложение – ряд Тейлора функции $f(z)$. Область сходимости $|z|<1$.

b) Заметим, что в кольце $1<|z|<2$ ряд для (1) дроби расходится, а для (2) дроби остается сходящимся. Поэтому преобразуем первую дробь по–другому

$\frac{1}{3}\frac{1}{z+i}=\frac{1}{3z}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{z}\right)}$.

Раскладываем полученную дробь в ряд:

$$\frac{1}{3i}\frac{1}{z+i}=\frac{1}{3iz}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{i}{z}\right)^n=\frac{1}{3i}\sum_{n=1}^{\infty}(-i)^{n-1}\left(\frac{1}{z}\right)^n.$$

Этот ряд сходится при $\left|\frac{1}{z}\right|<1$ или $|z|>1$.

Тогда получим разложение функции в ряд Лорана

$$f(z)=\frac{z}{z^2-iz+2}=\frac{1}{3i}\sum_{n=1}^{\infty}(-i)^{n-1}\left(\frac{1}{z}\right)^n-\frac{1}{3i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2i}\right)^n.$$

Область сходимости: $1<|z|<2$. Главной частью ряда Лорана является слагаемое

$$\frac{1}{3i}\sum_{n=1}^{\infty}(-i)^{n-1}\left(\frac{1}{z}\right)^n.$$

c) В кольце $2<|z|<\infty$ уже обе дроби (1) и (2) будут расходиться, поэтому их необходимо раскладывать по отрицательным степеням z. Первая дробь уже разложена в предыдущем случае. Поэтому преобразуем вторую дробь:

$$\frac{2}{3}\frac{1}{z-2i}=\frac{2}{3z}\frac{1}{1-\left(\frac{2i}{z}\right)}.$$

Раскладываем ее в ряд: $\frac{2}{3z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2i}{z}\right)^{n} = \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(2i)^{n-1}\left(\frac{1}{z}\right)^{n}$.

Полученный ряд сходится при $\left|\frac{2i}{z}\right| < 1$ или $|z| > 2$.

Получили разложение в ряд Лорана данной функции:

$$f(z) = \frac{z}{z^2-iz+2} = \frac{1}{3i}\sum_{n=1}^{\infty}(-i)^{n-1}\left(\frac{1}{z}\right)^{n} + \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(2i)^{n-1}\left(\frac{1}{z}\right)^{n}.$$

Главной частью будут являться оба разложения дробей.

А область сходимости $2 < |z| < \infty$.

Разложим функцию в окрестности точки $z = -i$, т.е. по степеням $(z+i)$:

$$f(z) = \frac{z}{z^2-iz+2} = \frac{1}{3}\frac{1}{z+i} + \frac{2}{3}\frac{1}{z-2i}.$$

Первая дробь уже представляет собой разложение в ряд.

Во второй дроби выделим $(z+i)$:

$$\frac{2}{3}\frac{1}{z-2i} = \frac{2}{3}\frac{1}{(z+i)-3i} = -\frac{2}{3\cdot 3i}\cdot\frac{1}{1-\frac{(z+i)}{3i}}.$$

Тогда имеем разложение: $\frac{2}{3}\frac{1}{z-2i} = -\frac{2}{9i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+i}{3i}\right)^{n}$.

Область сходимости $|z+i| < 3$.

В итоге получаем

$$f(z) = \frac{z}{z^2-iz+2} = \frac{1}{3}\frac{1}{z+i} - -\frac{2}{9i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+i}{3i}\right)^{n}$$

Область сходимости полученного разложения $0 < |z+i| < 3$. Слагаемое $\frac{1}{3}\frac{1}{z+i}$ представляет собой главную часть разложения в ряд Лорана.

Пример 7. Разложить в ряд Лорана по степеням z функцию $f(z) = \frac{5z+100}{-z^4+5z^3+50z^2}$.

Решение: Представим дробь в виде суммы простейших дробей

$$\frac{5z+100}{-z^4+5z^3+50z^2} = \frac{5z+100}{-z^2(z+5)(z-10)} = -\left[\frac{A}{z^2} + \frac{B}{z} + \frac{C}{z+5} + \frac{D}{z-10}\right]$$

и приведем их к общему знаменателю

$A(z^2 - 5z - 50) + Bz(z^2 - 5z - 50) + C z^2(z - 10) + D z^2(z + 5) = -(5z + 100)$

z^3 | $B + C + D = 0$

z^2 | $A - 5B - 10C + 5D = 0$

z^1 | $-5A - 50B = -5$

z^0 | $-50A = -100$

Решение системы линейных уравнений $A = 2$, $B = -0{,}1$, $C = 0{,}2$, $D = -0{,}1$.

F(z) = $\dfrac{-2}{z^2}+\dfrac{0{,}1}{z}-0{,}2\dfrac{1}{z+5}+0{,}1\dfrac{1}{z-10}$ = $\dfrac{-2}{z^2}+\dfrac{0{,}1}{z}-\dfrac{1}{25}\left(\dfrac{1}{1-(-z/5)}\right)-\dfrac{1}{100}\left(\dfrac{1}{1-z/10}\right)$.

Имеем суммы двух геометрических прогрессий $\sum_{n=0}^{\infty}q^n=\dfrac{1}{1-q}$, с q = –z/5, q = z/10.

$$f(z)=\frac{-2}{z^2}+\frac{0{,}1}{z}\;-0{,}04\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-z}{5}\right)\;-0{,}01\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{10}\right).$$

Из условий сходимости |–z/5| < 1 , |z/10| < 1 $\Rightarrow$ |z| < 5 , |z| < 10 .

Ответ: Функция f(z) имеет полюс 2–го порядка в точке z = 0.

Пример 8. Найти все изолированные особые точки функции $f(z)=\operatorname{ctg} z-\dfrac{1}{z}$ и определить их характер.

Решение

Особые точки $f(z)=\operatorname{ctg} z-\dfrac{1}{z}=\dfrac{\cos z}{\sin z}-\dfrac{1}{z}=\dfrac{z\cos z-\sin z}{z\sin z}$ – это корни знаменателя, т.е. $z=0$, $\sin z=0$ и точка $z=\infty$. Решая уравнение $\sin z=0$, получим $z=\pi k,\ \mathrm{k}=0,\pm1,\ldots$. Итак, особые точки $z_0=0$, $z_k=\pi k,\ k=0,\pm1,\ldots$ Точка $z=\infty$ не является изолированной особой точкой для $f(z)$, так как она является предельной точкой для последовательности $z_k=\pi k$. Исследуем характер изолированных особых точек. Для этого рассмотрим $\lim\limits_{z\to z_k}f(z),\ k=0,\pm1,\ldots$:

$$\lim_{z\to0}f(z)=\lim_{z\to0}\frac{z\cos z-\sin z}{z\sin z}=\lim_{z\to0}\frac{z\left(1-\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^4}{4!}-\ldots\right)-\left(z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}-\ldots\right)}{z\left(z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}-\ldots\right)}=$$

$$=\lim_{z\to0}\frac{z\left[1-\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^4}{4!}-\ldots-1+\dfrac{z^2}{3!}-\dfrac{z^4}{5!}+\ldots\right]}{z^2\left(1-\dfrac{z^2}{3!}+\dfrac{z^4}{5!}-\ldots\right)}=\lim_{z\to0}\frac{z^2\left(-\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+z^2\left(\dfrac{1}{4!}-\dfrac{1}{5!}\right)+\ldots\right)}{z\left(1-\dfrac{z^2}{3!}+\dfrac{z^4}{5!}-\ldots\right)}=$$

$$=\lim_{z\to0}\frac{z\left(-\dfrac{1}{3}+\dfrac{96}{120}z^2-\ldots\right)}{1-\dfrac{z^2}{3!}+\dfrac{z^4}{5!}-\ldots}=0.$$

Следовательно, $z=0$ – устранимая.

$$\lim_{z\to\pi k}f(z)=\lim_{z\to\pi k}\left(\operatorname{ctg} z-\frac{1}{z}\right)=\lim_{z\to\pi k}\frac{z\cos z-\sin z}{z\sin z}=\pi k(-1)^k\lim_{z\to\pi k}\frac{1}{z\sin z}=\infty.$$

Значит, $z=\pi k,\ k=\pm1,\pm2,\ldots$ – полюсы. Определим порядок полюсов $z_k=\pi k,\ \mathrm{k}=\pm1,\pm2,\ldots$

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)=\lim_{z\to\pi k}\frac{(z-\pi k)^m(z\cos z-\sin z)}{z\sin z}=(-1)^k\lim_{z\to\pi k}\frac{(z-\pi k)^m}{\sin z}=(-1)^k\lim_{z\to\pi k}\frac{\left[(z-\pi k)^m\right]'}{(\sin z)'}=$$

$$=(-1)^k\lim_{z\to\pi k}\frac{m(z-\pi k)^{m-1}}{\cos z}=\lim_{z\to\pi k}m(z-\pi k)^{m-1}\neq 0 \quad \text{при}\, m=1$$

Значит, $z_k=\pi k$ – простые полюса.

Пример 9. Найти нули функции $f(z)$ и определить их порядок:

а) $f(z)=1+\cos z$; б) $f(z)=\dfrac{z^8}{z-\sin z}$; в) $\mathrm{f(z)}=(\mathrm{z}^2+1)^3\cdot shz$; г) $f(z)=e^{\sin z}-e^{tgz},\ z=0.$

Решение

а) Приравнивая $f(z)$ к нулю, получим $\cos z=-1$, откуда $z_n=(2n+1)\pi,\ n=0,\pm1,...$ – нули данной функции. Далее

$$f'((2n+1)\pi)=-\sin(2n+1)\pi=0;$$
$$f''((2n+1)\pi)=-\cos(2n+1)\pi=1\neq 0.$$

Следовательно, точки $z_n=(2n+1)\pi,\ n=0,\pm1,...$ являются нулями второго порядка данной функции.

б) Приравнивая $f(z)$ к нулю, имеем $z=0$. Определим порядок нуля $z=0$. Используя разложение $\sin z$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0=0$, получим

$$f(z)=\frac{z^8}{z-\sin z}=\frac{z^8}{z-\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-...\right)}=\frac{z^8}{\frac{z^3}{3!}-\frac{z^5}{5!}+...}=\frac{z^5}{\frac{1}{3!}-\frac{z^2}{5!}+...}=z^5\varphi(z),$$

где $\varphi(z)=\dfrac{1}{\frac{1}{3!}-\frac{z^2}{5!}+...}$.

Очевидно, что $\varphi(z)$ является аналитическойя в точке $z=0$ и $\varphi(0)=6\neq 0$. Следовательно, $z=0$ является для данной функции нулём пятого порядка.

в) Полагая $f(z)=0$, получим $(z^2+1)^3\,\mathrm{sh}\,z=0,$ откуда $z^2+1=0$ или $\mathrm{sh}\,z=0.$ Решая эти уравнения, находим нули функции $f(z)$:

$$z=-i,\ z=i,\ z=k\pi i,\ k=0,\pm1,\pm2,....$$

Пусть $z=-i$, тогда $f(z)$ можно представить в виде

$f(z)=(z+i)^3\varphi(z),$ где $\varphi(z)=(z-i)^3\,\mathrm{sh}(z)$ является аналитической в точке $z=-i$, причём $\varphi(-i)=8i\cdot\mathrm{sh}\,i=-8\,\mathrm{sh}\,1\neq 0$. Это означает, в силу (21), что точка $z=-i$ есть нуль третьего порядка. Аналогично доказывается, что и точка $z=i$ является нулём третьего порядка.

Исследуем нули $z = k\pi i,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Производная

$$f'(z) = 6z(z^2+1)^2 \operatorname{sh} z + \left(z^2+1\right)^3 \operatorname{ch} z$$

в точках $z = k\pi i$ – нули первого порядка.

г) Определим порядок нуля $z = 0$. Для этого преобразуем $f(z)$, используя формулу Тейлора для e^z в окрестности точки $z_0 = 0$:

$$f(z) = e^{\sin z} - e^{tgz} = e^{tgz}\left(e^{\sin z - tgz} - 1\right) = e^{tgz}\left[(\sin z - \operatorname{tg} z) + \frac{(\sin z - \operatorname{tg} z)^2}{2!} + \frac{(\sin z - \operatorname{tg} z)^3}{3!} + \ldots\right] =$$

$$= (\sin z - \operatorname{tg} z)e^{tgz}\left[1 + (\sin z - \operatorname{tg} z) + (\sin z - \operatorname{tg} z)^2 + \ldots\right] = \sin z\left(1 - \frac{1}{\cos z}\right)e^{tgz}\left[1 + (\sin z - \operatorname{tg} z) + \ldots\right] =$$

$$= 2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}\left(-2\sin^2\frac{z}{2}\right)\frac{1}{\cos z}\cdot e^{\operatorname{tg} z}\left[1 + (\sin z - \operatorname{tg} z) + \ldots\right] = -\sin\frac{3z}{2}\cdot\frac{4\cos\frac{z}{2}}{\cos z}e^{tgz} *$$

$$* \left[1 + (\sin z - \operatorname{tg} z) + (\sin z - \operatorname{tg} z)^2 + \ldots\right] = -\left[\frac{z}{2} - \frac{z^3}{2^3\cdot 3!} + \frac{z^5}{2^5\cdot 5!} - \ldots\right]^3 \cdot \frac{4\cos\frac{z}{2}}{\cos z}e^{tgz} *$$

$$* \left[1 + (\sin z - \operatorname{tg} z) + (\sin z - \operatorname{tg} z)^2 + \ldots\right] = z^3\left(-\frac{1}{2} + \frac{z^2}{2^3\cdot 3!} - \ldots\right)^3 \frac{4\cos\frac{z}{2}}{\cos z}e^{tgz}\left[1 + (\sin z - \operatorname{tg} z) + \ldots\right] =$$

$$= z^3 \cdot \varphi(z),$$

где $\varphi(z) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{z^2}{2^3\cdot 3!} - \ldots\right)^3 \frac{4\cos\frac{z}{2}}{\cos z}e^{tgz}\left[1 + (\sin z - \operatorname{tg} z) + \ldots\right]$

Очевидно, что $\varphi(z)$ является аналитической функцией в окрестности точки $z = 0$ и $\varphi(0) = -\frac{1}{2} \neq 0$. Поэтому $z = 0$ – нуль третьего порядка функции $f(z)$.

Пример 10. Найти все изолированные особые точки функции и определить их характер (в случае полюса определить порядок).

а) $f(z) = (z-1)\cdot e^{\frac{1}{z-1}}$; б) $f(z) = \frac{\cos z}{z^2}$; в) $f(z) = \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}$; г) $f(z) = \frac{1}{z\left(z^2+4\right)^2}$.

<u>Решение</u>

а) Используя разложение $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \ldots$ и полагая $u = \frac{1}{z-1}$, получим лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности точки $z_0 = 1$:

$$f(z) = (z-1)\left[1 + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2!(z-1)^2} + \frac{1}{3!(z-1)^3} + \ldots\right] = 1 + (z-1) + \frac{1}{2!(z-1)} + \frac{1}{3!(z-1)^2} + \ldots.$$

Это разложение содержит бесконечное множество членов с отрицательными степенями $(z-1)$. Следовательно, $z=1$ – существенно особая точка функции $f(z)$.

б) Функция $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^2}$, как отношение аналитических, будет аналитической во всей плоскости z за исключением $z=0$ и $z=\infty$. Ряд Лорана для $f(z)$:

$$\frac{\cos z}{z^2}=\frac{1}{z^2}\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\ldots\right)=\frac{1}{z^2}-\frac{1}{2!}+\frac{z^2}{4!}-\frac{z^4}{6!}+\ldots$$

в силу единственности разложения является рядом Лорана для функции как в проколотой окрестности точки $z=0$, так и в проколотой окрестности точки $z=\infty$. Так как в полученном разложении есть слагаемые с отрицательной степенью z^{-2}, то $z=0$ – полюс второго порядка. Точка $z=\infty$ является существенно особой, так как главная часть ряда Лорана в её окрестности содержит бесконечное число слагаемых.

в) Особые точки $f(z)=\operatorname{ctg} z-\dfrac{1}{z}=\dfrac{\cos z}{\sin z}-\dfrac{1}{z}=\dfrac{z\cos z-\sin z}{z\sin z}$ – это корни знаменателя, т.е. $z=0$, $\sin z=0$ и точка $z=\infty$. Решая уравнение $\sin z=0$, получим $z=\pi k$, $\mathrm{k}=0,\pm1,\ldots$. Итак, особые точки $z_0=0$, $z_k=\pi k$, $k=0,\pm1,\ldots$. Точка $z=\infty$ не является изолированной особой точкой для $f(z)$, так как она является предельной точкой для последовательности $z_k=\pi k$. Исследуем характер изолированных особых точек. Для этого рассмотрим $\lim\limits_{z\to z_k} f(z)$, $k=0,\pm1,\ldots$:

$$\lim_{z\to0} f(z)=\lim_{z\to0}\frac{z\cos z-\sin z}{z\sin z}=\lim_{z\to0}\frac{z\left(1-\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^4}{4!}-\ldots\right)-\left(z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}-\ldots\right)}{z\left(z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}-\ldots\right)}=$$

$$=\lim_{z\to0}\frac{z\left[1-\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^4}{4!}-\ldots-1+\dfrac{z^2}{3!}-\dfrac{z^4}{5!}+\ldots\right]}{z^2\left(1-\dfrac{z^2}{3!}+\dfrac{z^4}{5!}-\ldots\right)}=\lim_{z\to0}\frac{z^2\left(-\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+z^2\left(\dfrac{1}{4!}-\dfrac{1}{5!}\right)+\ldots\right)}{z\left(1-\dfrac{z^2}{3!}+\dfrac{z^4}{5!}-\ldots\right)}=$$

$$=\lim_{z\to0}\frac{z\left(-\dfrac{1}{3}+\dfrac{96}{120}z^2-\ldots\right)}{1-\dfrac{z^2}{3!}+\dfrac{z^4}{5!}-\ldots}=0.$$

Следовательно, $z=0$ – устранимая.

$$\lim_{z\to\pi k} f(z)=\lim_{z\to\pi k}\left(\operatorname{ctg} z-\frac{1}{z}\right)=\lim_{z\to\pi k}\frac{z\cos z-\sin z}{z\sin z}=\pi k(-1)^k\lim_{z\to\pi k}\frac{1}{z\sin z}=\infty.$$

Значит $z=\pi k,\ k=\pm1,\pm2,...$ – полюсы. Определим порядок полюсов $z_k=\pi k,\ \mathrm{k}=\pm1,\pm2,...$.

Воспользуемся

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)=\lim_{z\to\pi k}\frac{(z-\pi k)^m(z\cos z-\sin z)}{z\sin z}=(-1)^k\lim_{z\to\pi k}\frac{(z-\pi k)^m}{\sin z}=(-1)^k\lim_{z\to\pi k}\frac{\left[(z-\pi k)^m\right]'}{(\sin z)'}=$$

$$=(-1)^k\lim_{z\to\pi k}\frac{m(z-\pi k)^{m-1}}{\cos z}=\lim_{z\to\pi k}m(z-\pi k)^{m-1}\neq0 \quad \text{при } m=1.$$

Значит, $z_k=\pi k$ – простые полюса.

г) Изолированные особые точки $f(z)=\dfrac{1}{z(z^2+4)^2}$ – это нули знаменателя, то есть $z=0$, $z=-2i$, $z=2i$, кроме того, $z=\infty$. Определим характер этих особых точек. Рассмотрим

$$\lim_{z\to0}f(z)=\lim_{z\to0}\frac{1}{z(z^2+4)^2}=\infty \ \Rightarrow\ z=0 \text{ – полюс;}$$

$$\lim_{z\to\pm2i}f(z)=\lim_{z\to\pm2i}\frac{1}{z(z^2+4)^2}=\infty \Rightarrow z=\pm2i \text{ – полюсы;}$$

$$\lim_{z\to\infty}f(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{1}{z(z^2+4)^2}=0 \Rightarrow z=\infty \text{ – устранимая особая точка.}$$

Найдём порядок полюсов:

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)=\lim_{z\to0}(z-0)^m\frac{1}{z(z^2+4)^2}=\lim_{z\to0}\frac{z^{m-1}}{(z^2+4)^2}=\frac{1}{16}\lim_{z\to0}z^{m-1}\neq0$$

при $m=1\Rightarrow z=0$ – простой полюс.

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)=\lim_{z\to2i}(z-2i)^m\frac{1}{z(z-2i)^2(z+2i)^2}=\frac{1}{2i(4i)^2}\lim_{z\to2i}(z-2i)^{m-2}\neq0$$

при $m=2\Rightarrow z=2i$ – полюс второго порядка.

Аналогично можно доказать, что $z=-2i$ – полюс второго порядка.

Пример 11. Определить тип изолированных особых точек

а) $f(z)=\dfrac{e^z}{(z+2i)(z-i)^2}$; б) $f(z)=\operatorname{tg} z$; в) $f(z)=\sin z\cdot\sin\dfrac{1}{z}$; г) $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$.

<u>Решение</u>

а) изолированными особыми точками $f(z)=\dfrac{e^z}{(z+2i)(z-1)^2}$ являются $z_1=-2i$, $z_2=1$ и $z_3=\infty$. Для определения характера этих точек перейдём к $\dfrac{1}{f(z)}=\dfrac{(z+2i)(z-1)^2}{e^z}$. Для $\dfrac{1}{f(z)}$

точки z_1 и z_2 являются нулями кратности соответственно 1 и 2. Поэтому для $f(z)$ $z_1 = 2i$ является полюсом первого порядка, а $z_2 = 1$ – полюсом второго порядка.

Точка $z_3 = \infty$ является существенно особой функции $f(z)$, так как не существует $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$.

б) Изолированные особые точки $f(z) = \operatorname{tg} z$ – это нули знаменателя: $\cos z = 0$, $z_n = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Точка $z = \infty$ – предельная точка для z_n, т.е. не является изолированной. Это полюсы, так как

$$\lim_{z\to\frac{\pi}{2}+\pi n} f(z) = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}+\pi n} \frac{\sin z}{\cos z} = \infty .$$

Эти $z_n = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$ являются полюсами первого порядка, так как для $\dfrac{1}{f(z)} = \operatorname{ctg} z$ точки z_n являются нулями первого порядка: $\left(\dfrac{1}{f(z)}\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 z}$; $\left[\dfrac{1}{f(z)}\right]'\Bigg|_{z=-\frac{\pi}{2}+\pi n} = -1 \neq 0$.

в) Отметим, что функция $f(z) = \sin z \cdot \sin\dfrac{1}{z}$ является чётной, поэтому в её разложении в ряд Лорана не будет нечётных степеней. Изолированными особыми точками для $f(z)$ будут $z = 0$ и $z = \infty$. Это существенно особые точки, действительно, $f(z)$ не имеет предела ни при $z \to 0$, ни при $z \to \infty$.

г) Функция $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ в точке $z = 0$ имеет особенность. Это существенно особая точка, так как

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{3!\,z^3} + \ldots .$$

Этот же ряд есть ряд Лорана и в окрестности точки $z = \infty$, поэтому $z = \infty$ – устранимая особая точка.

Задачи для самостоятельной работы

5.1. У следующих функций найти нули и определить их порядки:

а) $f(z) = 1 + \operatorname{ch} z$; б) $f(z) = (z^2 + \pi^2)(1 + e^{-z})$; в) $f(z) = \cos z + \operatorname{ch} iz$ г) $f(z) = z^2 \sin z$; д.) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sh}^2 z}{z}$; е) $f(z) = \cos z^3$.

5.2. Найти порядок нуля $z_0 = 0$ для следующих функций:

а) $f(z)=\dfrac{z^3}{1+z-e^z}$; б) $f(z)=\dfrac{(1-\cos 2z)^2}{z-\operatorname{sh} z}$; в) $f(z)=\left(e^{z^2}-1\right)z^2$; г) $f(z)=\left(e^z-e^{z^2}\right)\ln(1-z)$; д.) $f(z)=6\sin z^3+z^3\left(z^6-6\right)$; е) $f(z)=2(\operatorname{ch} z-1)-z^2$.

5.3.Разложить функцию в ряд Тейлора.

а) $f(z)=\dfrac{1}{4z+1}$ по степеням (z+1);

б) $f(z)=e^z$ по степеням (2z – 3);

в) $f(z)=\dfrac{z}{z^2+i}$, в окрестности z=0.

г) $f(z)=sh^2\dfrac{z}{2}$, по степеням z.

д) найти несколько первых членов разложения в ряд по степеням z функции $f(z)=\dfrac{1}{e^{-z}+5}$, найти радиус сходимости.

5.4. Разложить в ряд Тейлора в окрестности $z=0$ функции:

1) $\dfrac{1}{(z+1)(z-2)}$;

2) $\dfrac{2z-5}{z^2-5z+6}$;

3) $\dfrac{z}{(z^2+1)(z^2-4)}$;

4) $\dfrac{z^3}{(z^2+1)(z-1)}$;

5) $\dfrac{1}{(z^2-1)^2(z^2+4)}$;

6) $\dfrac{1}{1+z+z^2}$.

7) $\dfrac{2z-1}{4z^2-2z+1}$;

5.5. Найти область сходимости рядов Лорана:

1. $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-|n|} z^n$;

2. $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \dfrac{z^n}{3^n+1}$;

3. $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \dfrac{(z-1)^n}{ch\alpha^n}$, $\alpha>0$;

4. $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-n^2}(z+1)^n$;

5. $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} (2^{-n^2}+1)^{-1}(z+a)^{2n}$;

6. $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \dfrac{z^n}{n^2+1}$;

7. $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-n^2} z^{n^2}$;

8. $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} 2^{n} z^{n}$.

5.6. Следующие функции разложить в ряд Лорана по степеням z в кольце $1<|z|<2$:

1. $\dfrac{1}{(z+1)(z-2)}$;

2. $\dfrac{z^4+1}{(z-1)(z+2)}$;

3. $\dfrac{z}{(z^2+1)(z+2)}$;

4. $\dfrac{1}{(z-1)^2(z+2)}$;

5. $\dfrac{1}{(z^2+1)(z^2-4)}$;

6. $\dfrac{1}{(z^2-1)^2(z^2+4)}$.

5.7. Следующие функции разложить в ряд Лорана по степеням $z-a$ в кольце D:

1. $\dfrac{1}{z(z-3)^2}$, $a=1$, D: $1<|z-1|<2$;

2. $\dfrac{1}{(z^2-9)z^2}$, $a=1$, D: $1<|z-1|<2$;

3. $\dfrac{z+i}{z^2}$, $a=i$, $-i\in$D;

4. $\dfrac{z^2-1}{z^2+1}$, $a=1$, $2i\in$D;

5. $\dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}$, $a=0$, $-\dfrac{3}{2}\in$D;

6. $\dfrac{2z}{z^2-2i}$, $a=1$, $-1\in$D;

7. $\dfrac{z^3}{(z+1)(z-2)}$, $a=-1$, D: $0<|z+1|<3$;

8. $\dfrac{1}{(z^2-1)(z^2+4)}$, $a=0$, D: $|z|>2$;

5.8. Найти все изолированные особые точки для функций:

1) $\dfrac{z}{\sin z}$; 2) $\dfrac{1-\cos z}{\sin^2 z}$; 3) $z^2\sin\dfrac{z}{z+1}$; 4) $\dfrac{1}{z^2-1}\cos\dfrac{\pi z}{z+1}$;

5) $ctgz-\dfrac{1}{z}$; 6) $z\left(e^{\frac{1}{z}}-1\right)$; 7) $\sin\left(e^{\frac{1}{z}}\right)$; 8) $z^2\cos\dfrac{\pi}{z}$;

9) $z^2\cos\dfrac{\pi}{z}$; 10) $\cos\dfrac{\pi z}{z-1}$; 11) $\sin\dfrac{\pi}{z^2+1}$; 12) $\dfrac{z}{e^z+1}$

Вариант лабораторной работы

Задание №1.

Определить область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n$, если $C_n = (-i)^{2n+1}$, точка *a = 0.*

Задание №2.

Функцию $f(z)=\dfrac{2z-1}{z^2-z+1-i}$ разложить в ряд

2.1 в окрестности точки z = 0; определить область сходимости ряда;

2.2 в кольце $1<|z|<\sqrt{2}$; выделить главную часть ряда Лорана;

2.3 в окрестности любой особой точки; определить область сходимости ряда и выделить главную его часть;

2.4 в окрестности бесконечно удаленной точки; определить область сходимости ряда и выделить главную часть разложения.

Задание № 3.

Для функции $f(z)=\dfrac{z}{e^z+1}$ найти все нули и полюса и определить их порядки.

Задание № 4.

Для функции $f(z)=\cos\dfrac{z^2+4z-1}{z+3}$ определить характер всех конечных особых точек.

Задание № 5.

Для этой же функции определить характер бесконечно удаленной точки.

6. ВЫЧЕТЫ. ПРИЛОЖЕНИЕ ВЫЧЕТОВ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ

Основные понятия

Пусть $f(z) \in H(D \setminus \{a\})$, $z = a \in C$ – изолированная особая точка функции *f(z)*.

Параметры	**Понятие и его обозначение**	**Определяющее понятие и видовые признаки**
$\underset{a}{res} f(z) \in C$	Вычет в конечной точке $z = a$.	$\underset{a}{res} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} f(z)dz$, где $\gamma : \lvert z-a \rvert = \rho$
$\underset{\infty}{res} f(z)$	Вычет в бесконечно удаленной точке	$\underset{\infty}{res} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\bar{\gamma}} f(z)dz = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} f(z)dz$
$f(z) \in H(D)$, $a \in C$	Логарифмический вычет в точке *z=a*	$\underset{z=a}{\mathrm{Res}} \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{L} \frac{f'(z)}{f(z)} dz,$
$f(z) \in H(\overline{D})$, $\partial D = L$	Логарифмический вычет относительно контура L	$\underset{L}{\mathrm{Res}} \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{L} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$

Обозначение «Res» происходит от французского слова *residu* – «остаток». Понятие вычета ввел французский математик О. Коши (1789–1852), рассматривая разность значений интегралов от функции по таким двум путям, имеющим общие начало и конец, что полюсы функции лежат между этими путями. Отметим сразу, что если $z = a$ является точкой аналитичности функции f(z), то по теореме Коши для односвязной области вычет этой функции в точке $z = a$ равен нулю. Так что о вычете функции в конечной точке $z = a$ целесообразно говорить, если $z = a$ является изолированной особой точкой этой функции. Именно с такими точками связана теория вычетов.

Основные утверждения

УТВ_6.1. Теорема Коши о вычетах

Пусть функция $f(z) \in H(\overline{D} \setminus \{a_1,...,a_n\})$, $a_1,...,a_n$ – изолированные особые точки функции.

Тогда $\int_{\partial D} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{a_k}{res} f(z).$

Доказательство

Построим окружности L_k, $k=\overline{1,n}$ с центрами в точках a_k столь малых радиусов, что эти окружности не пересекаются друг с другом и все лежат в области D (см. рис 17). По теореме Коши для многосвязной области имеем $\int\limits_{\partial D} f(z)dz = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{L_k} f(z)dz$ (*).

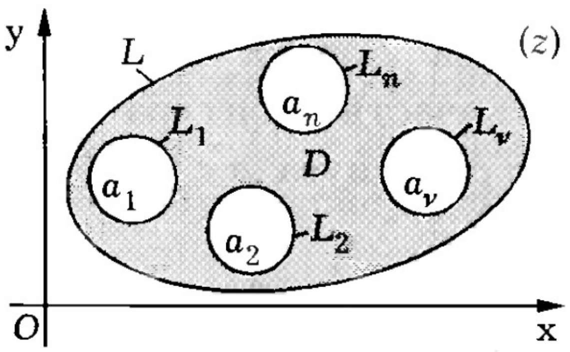

Рис.17

Разделив почленно равенство (*) на $2\pi i$, получаем утверждение теоремы.

УТВ_6.2

Вычет функции *f(z)* в изолированной особой точке $z = a$ равен коэффициенту лорановского разложения *f(z)* в окрестности точки *z=a*: $\underset{a}{res} f(z) = C_{-1}$.

Доказательство

Представим функцию *f(z)* в проколотой окрестности $U = \{z : 0 < |z-a| < R\}$ точки $z = a$ рядом Лорана $f(z) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} C_k (z-a)^k$, где коэффициенты ряда вычисляются по формулам $C_k = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \frac{f(z)dz}{(z-a)^k}, k = \overline{-\infty, +\infty}$. При $k = -1$ получаем $C_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} f(z)dz = \underset{a}{res} f(z)$.

Замечание к УТВ_6.2

Если в точке $z = a$ функция f(z) является аналитической, то $C_{-1} = 0 \Rightarrow \underset{a}{res} f(z) = 0$.

УТВ_6.2 позволяет находить вычет не через интеграл, а с помощью коэффициента лорановского разложения C_{-1}, что во многих случаях оказывается более удобным.

Пример 1

Найти вычет функции $f(z) = ze^{\frac{1}{z}}$ в точке z = 0. Разложим функцию в ряд Лорана и найдем коэффициент C_{-1}.

Имеем $f(z) = ze^{\frac{1}{z}} = z(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + ...) = z + 1 + \frac{1}{2!z} + \frac{1}{3!z^2} + \dots$ $\Rightarrow$ $C_{-1} = \frac{1}{2!}$ $\Rightarrow$ $\underset{a}{res}\, f(z) = \frac{1}{2}$.

УТВ_6.3. Формулы для вычисления вычета

1. Если $z = a$ – устранимая особая точка функции $f(z) \Rightarrow \underset{a}{res}\, f(z) = 0$.
2. Если $z = a$ – полюс, то

2.1. Если $z = a$ –простой полюс $f(z) \Rightarrow \underset{a}{res}\, f(z) = \lim\limits_{z \to a} f(z)(z - a)$.

2.2. Если $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$– аналитические в окрестности $z = a$, $\varphi(a) \neq 0$, $\psi(a) = 0,\ \psi'(a) \neq 0$, то есть $z = a$ – полюс первого порядка для дроби $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, тогда

$$\underset{z=a}{\mathrm{Res}} f(z) = \underset{z=a_0}{\mathrm{Res}} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

2.3. Если $z = a$ – полюс порядка m $\Rightarrow \underset{a}{res}\, f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim\limits_{z \to a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left(f(z)(z-a)^m \right)$.

УТВ_6.4. Теорема о полной сумме вычетов

Пусть $f(z) \in H(C \setminus \{a_1 ... a_n\}) \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} \underset{z=a_k}{res} f(z) + \underset{\infty}{res}\, f(z) = 0$.

УТВ_6.5. О вычете в бесконечно удалённой точке

Если $f(z) \in H(C \setminus \{a_1 ... a_n\}) \Rightarrow \underset{\infty}{res}\, f(z) = -C_{-1}$.

УТВ_6.6 Вычисление несобственных интегралов.

Пусть $f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ – рациональная функция, причём многочлен $Q_n(x) \neq 0$ на всей вещественной оси и его степень n по крайней мере на две единицы больше степени числителя, т.е. $n \geq m + 2$. Тогда $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{\mathrm{Res}} f(z)$,

где z_k – полюсы функции $f(z)$, лежащие в верхней полуплоскости.

Доказательство

Пусть функция *f(x)* имеет аналитическое продолжение в комплексную плоскость *C*. Чтобы вычислить этот интеграл, продолжим подынтегральную функцию *f(x)* в верхнюю полуплоскость Im(z)>0 таким образом, что f(z)$\in H$ ({z: Im z $\geq$ 0}\{$a_1,...,a_n$}). Пусть $f(z)\big|_{z=x} = f(x)$.

Затем выбираем замкнутый контур L, состоящий из отрезка [–R,R]$\subset$***R*** и дуги окружности $|z| = R$ в верхней полуплоскости Im(z)>0, соединяющей концы отрезка (см. рис.18). По теореме Коши о вычетах для контурного интеграла функции f(z) вдоль контура L имеем

$$\oint\limits_L f(z)dz = \int\limits_{-R}^{R} f(x)dx + \int\limits_{\gamma_R} f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} \underset{a_k}{res} f(z),$$

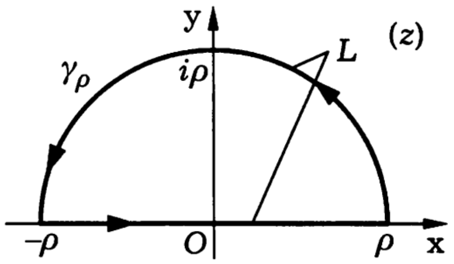

Рис.18

где $a_k, k = \overline{1,n}$ – все особые точки функции внутри контура L. Пусть *R* выбрано настолько большим, что все особые точки функции *f(z)* в верхней полуплоскости попадают внутрь контура *L*, т.е. $a_k, k = \overline{1,n}$ – все особые точки f(z) в верхней полуплоскости. Переходя к пределу при $R \to \infty$,

получаем $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{R} f(x)dx + \lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i\sum\limits_{k=1}^{n} \underset{a_k}{res}\, f(z).$ Если удается вычислить предел интеграла по дуге γ_R, то интеграл можно найти из равенства

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} \underset{a_k}{res}\, f(z) - \lim_{R\to\infty}\int\limits_{\gamma} f(z)dz. \qquad (*)$$

Оценим интеграл в правой части (*):

$$|f(z)|_\gamma = \left|\frac{P_m(z)}{Q_n(z)}\right| \leq \frac{1}{R^2}M, M = \sup_{z\in\gamma}\left|\frac{P_m(\frac{1}{z})}{Q_n(\frac{1}{z})}\right|, \text{т.к. } n \geq m+2 \Rightarrow \left|\int\limits_{\gamma} f(z)dz\right| \leq \frac{1}{R^2}M\cdot 2\pi R \Rightarrow$$

$0 \leq \left|\int\limits_{\gamma} f(z)dz\right| \to 0,\ R \to \infty$. Таким образом, $\int\limits_{\gamma} f(z)dz \to 0, R \to \infty$.

Тогда получаем, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i\sum\limits_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{\mathrm{Res}}\, f(z)$.

Пример 2

Вычислить интеграл $I = \int\limits_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{\left(x^2 + a^2\right)^2}$, $a > 0$.

Решение: Так как подынтегральная функция $f(x) = \frac{x^2}{\left(x^2 + a^2\right)^2}$ чётная, то

$$I = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{\left(x^2 + a^2\right)^2}.$$

Функция $f(z) = \frac{z^2}{\left(z^2 + a^2\right)^2}$ является аналитической всюду на плоскости, за исключением нулей знаменателя: $z^2 + a^2 = 0$, $z_1 = ai$ и $z_2 = -ai$. Эти точки являются двукратными полюсами функции $f(z) = \frac{z^2}{(z - ai)^2 (z + ai)^2}$. Полюс $z_1 = ai$ лежит в верхней полуплоскости.

По доказанной формуле имеем

$$I = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \operatorname*{Res}_{\mathrm{z=ai}} f(z) = \pi i \lim_{z \to ai} \left[\frac{z^2 (z - ai)^2}{(z - ai)^2 (z + ai)^2} \right]' = \pi i \lim_{z \to ai} \left[\frac{z^2}{(z + ai)^2} \right]' =$$

$$= \pi i \lim_{z \to ai} \frac{2z(z + ai)^2 - z^2 \cdot 2(z + ai)}{(z + ai)^4} = \pi i \lim_{z \to ai} \frac{2aiz}{(z + ai)^3} = \frac{\pi i}{4ai} = \frac{\pi}{4a}.$$

При вычислении несобственных интегралов полезна лемма, доказанная французским математиком К. Жорданом (1838–1922).

УТВ_6.7. Лемма Жордана

Пусть $f(z) \in H(D \setminus \{a_1, ... a_n\}), D = \{z : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ и пусть $M(R) = \sup\limits_{z \in \gamma} |f(z)| \to 0, R \to \infty$. Тогда $\forall \lambda \in R \ \lim\limits_{R \to \infty} \int\limits_{\gamma} f(z) e^{i\lambda z} dz = 0$.

УТВ_6.8.

Вычисление несобственных интегралов вида $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x) \sin \alpha x dx,$ $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x) \cos \alpha x dx.$

Пусть $\lambda > 0$ и $R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ – рациональная функция, причём многочлен $Q(x)$ отличен от нуля на вещественной оси и степень $Q(x)$ на единицу больше степени $P(x)$, т.е. $n > m + 1$. Тогда интегралы $I_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x) \sin \lambda x dx$ и $I_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x) \cos \lambda x dx$ сходятся. Введём вспомогательную функцию $f(x) = R(x) e^{i\lambda x}$.

Тогда $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\ell^{i\lambda x}dx = 2\pi i \sum\limits_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname*{Res}\limits_{z=z_k} R(z)e^{i\lambda z}$. Имеем:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin \lambda x dx = \operatorname{Im}\left(2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname*{Res}_{z=z_k} R(z)e^{i\lambda z}\right), \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos \lambda x dx = \operatorname{Re}\left(2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname*{Res}_{z=z_k} R(z)e^{i\lambda z}\right).$$

В этих формулах z_k – полюсы функции $R(x)$, лежащие в верхней полуплоскости.

Пример 3

Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{\left(x^2+1\right)^2} dx$.

Решение: Корни уравнения $z^2+1=0$ $z_1 = i$, $z_2 = -i$ являются полюсами второго порядка функции $R(z) = \frac{1}{\left(z^2+1\right)^2} = \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}$. В верхней полуплоскости лежит полюс $z_1 = i$. Тогда по формуле имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x dx}{\left(x^2+1\right)^2} = \operatorname{Im}\left(2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} R(z) \cdot \ell^{iz}\right) = \operatorname{Im}\left(2\pi i \lim_{z\to i}\left[\frac{(z-i)^2 \ell^{iz}}{(z-i)^2(z+i)^2}\right]'\right) =$$

$$= \operatorname{Im}\left(2\pi i \lim_{z\to i} \frac{i\ell^{iz}(z+i)^2 - \ell^{iz}\cdot 2(z+i)}{(z+i)^4}\right) = \operatorname{Im}\left(2\pi i \lim_{z\to i} \frac{\ell^{iz}(iz-1-2)}{(z+i)^3}\right) = \operatorname{Im}\left(2\pi i \frac{\ell^{-1}}{2i}\right) = 0$$

Пример 4

Вычислить интеграл: $I = \int\limits_0^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^2+4} dx$.

Решение: Так как под знаком интеграла стоит чётная функция, то $I = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^2+4} dx$. Тогда по формуле (34) имеем

$$I = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(2\pi i \operatorname*{Res}_{z=2i}\left(\frac{e^{2iz}}{z^2+4}\right)\right) = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(2\pi i \lim_{z\to 2i} \frac{(z-2i)e^{2iz}}{(z-2i)(z+2i)}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left[2\pi i \lim_{z\to 2i} \frac{e^{2iz}}{z+2i}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(2\pi i \frac{e^{-4}}{4i}\right) = \frac{\pi e^{-4}}{4}.$$

Замечание 6.8. Главное в смысле Коши значение несобственного интеграла

Если $f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ и $Q_n(x)$ на вещественной оси имеет конечное число простых полюсов $x_1, x_2, ..., x_n$, то в этом случае формула 6.8 заменяется на следующую:

$$(**)\qquad v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{i\alpha x}dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k>0} \operatorname{Res} R(z)e^{i\alpha z} + \pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=} R(z)e^{i\alpha z}.$$

Напомним, что если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ за исключением единственной особой точки $c \in [a,b]$, то главным в смысле Коши, значением несобственного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ называется предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right) \equiv v.p.\int_a^b f(x)dx.$$

Пример 5. Вычислить $I = v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \mu x\, dx}{1+x^3}$.

Решение: Рассмотрим интеграл $v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i|\mu|x}\frac{dx}{1+x^3}$. Особые точки $R(z)=\frac{1}{1+z^3}$ являются корнями уравнения $z^3+1=0$, т.е. $z=\sqrt[3]{-1}=\ell^{\frac{i\pi+2\pi ki}{3}}$, $k=0,1,2$ или $z_1=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $z_2=-1$; $z_3=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Все эти точки являются простыми полюсами, причём z_1 лежит в верхней полуплоскости, z_2 – на вещественной оси. Поэтому из (35) имеем

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i|\mu|x}}{1+x^3}dx = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_1}\frac{e^{i|\mu|z}}{1+z^3} + \pi i \operatorname*{Res}_{z=z_2}\frac{e^{i|\mu|z}}{1+z^3} = 2\pi i \left.\frac{e^{i|\mu|z}}{\left(1+z^3\right)'}\right|_{z=z_1} + \pi i \left.\frac{e^{i|\mu|z}}{\left(1+z^3\right)'}\right|_{z=z_2} =$$

$$= 2\pi i\frac{e^{i|\mu|z_1}}{3z_1^2} + \pi i\frac{e^{i|\mu|z_2}}{3z_2^2}$$

(мы воспользовались формулой (**)).

Подставляя z_1, z_2 и заменив e^{iz} по формуле Эйлера, будем иметь

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \mu x\, dx}{1+x^3} = \operatorname{Re}\left[\frac{2\pi i}{3}\cdot\frac{e^{i|\mu|\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}}{\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{\pi i}{3}\cdot\frac{e^{i|\mu|(-1)}}{(-1)^2}\right] =$$

$$= \operatorname{Re}\left[\frac{\pi i}{3}\left(\cos|\mu| - i\sin|\mu|\right) + \frac{8\pi i e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}|\mu|}}{3\left(1+i\sqrt{3}\right)^2}\left(\cos\frac{|\mu|}{2} + i\sin\frac{|\mu|}{2}\right)\right].$$

Преобразовав и выделив вещественную часть, получим

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\mu x\,dx}{1+x^3}=\frac{\pi}{3}\left[\sin|\mu|+e^{-|\mu|\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sin\frac{|\mu|}{2}+\sqrt{3}\cos\frac{|\mu|}{2}\right)\right].$$

Пусть *f(z)* является аналитической функцией в проколотой окрестности точки $z = a$ и не обращается в этой окрестности в нуль. Сама точка $z = a$ может быть как точкой аналитичности этой функции, так и ее изолированной особой точкой.

УТВ_6.9. О логарифмическом вычете в точке

В нуле аналитической функции *f(z)* ее логарифмическая производная $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ имеет простой полюс, а логарифмический вычет равен кратности этого нуля: $\underset{z=a}{res}\dfrac{f'(z)}{f(z)}=m$.

Доказательство

Пусть точка $z = a$ – нуль кратности m функции *f(z)* голморфной в этой точке. Тогда в некоторой окрестности этой точки $f(z)=(z-a)^m g(z)$, $g(z)\in H(u_a), g(a)\neq 0$. Вычисляя логарифмическую производную функции $f(z)$, получаем

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{m(z-a)^{m-1}g(z)+(z-a)^m g'(z)}{(z-a)^m g(z)}=\frac{1}{z-a}\frac{mg(z)+(z-a)g'(z)}{g(z)}=\frac{1}{z-a}\left(m+(z-a)\frac{g'(z)}{g(z)}\right).$$

Согласно утверждению о связи нуля и полюса заключаем, что точка $z = a$ является полюсом функции $\dfrac{f'(z)}{f(z)}\Rightarrow \underset{z=a}{res}\dfrac{f'(z)}{f(z)}=m$.

Следствие 6.9. Если точка $z = a$ – полюс функции *f(z)* порядка *n*, то для логарифмической производной $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ этой функции точка $z = a$ является простым полюсом и $\underset{z=a}{res}\dfrac{f'(z)}{f(z)}=-n$.

Доказательство проводится аналогично.

Пример 6

Вычислить логарифмический вычет функции $f(z)=\dfrac{z^2-5z+6}{(z-1)^2}$

в нулях этой функции и в полюсе.

Решение: Эта функция имеет простые нули в точках *z=2* и *z=3*.

Поэтому $\underset{z=2}{res}\dfrac{f'(z)}{f(z)}=\underset{z=3}{res}\dfrac{f'(z)}{f(z)}=1.$

Точка $z=1$ является полюсом второго порядка этой функции, поэтому

$\underset{z=1}{res}\dfrac{f'(z)}{f(z)}=-2$.

УТВ_6.10. Теорема о логарифмическом вычете

Пусть $f(z) \in H(\overline{D} \setminus \{a_1 ... a_n\})$и $f(z) \neq const$ в *D*. Пусть также функция имеет конечное число нулей в *D*, причем на контуре $L = \partial D$ нет ни нулей, ни полюсов функции. Тогда $\underset{L}{res} \frac{f'(z)}{f(z)} = N - P$, где *N* – число нулей в области *D*, Р – число полюсов в области *D*. Причем каждый нуль следует считать столько раз, какова его кратность, а каждый полюс – каков его порядок.

Следствие 6.10

Логарифмический вычет многочлена $P_n(z)$ степени *n* относительно простого контура *L*, на котором нет нулей $P_n(z)$, равен числу нулей многочлена (с учетом их кратности) внутри контура.

УТВ_6.11. Принцип аргумента

Разность числа *N* нулей (с учетом их кратности) и числа *P* полюсов (с учетом их порядка) функции *f(z)* в области *D*, ограниченной контуром *L*, равна деленному на 2π приращению аргумента этой функции при обходе *L* точкой *z* в положительном направлении (при условии, что функция *f(z)* является аналитической во всех точках *D*, за исключением конечного числа полюсов, и на *L* не имеет ни нулей, ни полюсов): $N - P = \frac{1}{2\pi} \Delta_L Argf(z)$.

Геометрический смысл принципа аргумента

Выясним геометрический смысл $\frac{1}{2\pi} \Delta_L Argf(z)$. Пусть Г является образом замкнутого контура L при отображении *w = f(z)*.

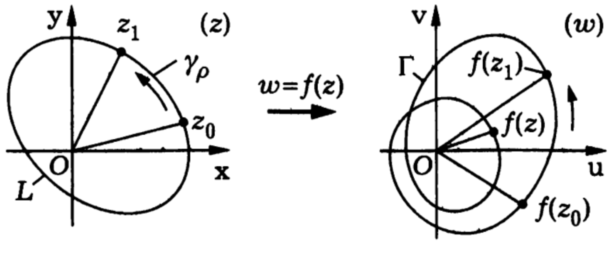

Рис. 19

При полном обходе *L* точкой z соответствующая точка *w=f(z)* описывает в комплексной плоскости (*w*) замкнутую кривую *Г*. Тогда приращение аргумента функции *f(z)* на *Г* будет равно числу полных оборотов, совершаемых точкой *w=f(z)* вокруг точки *w=0* при однократном обходе точкой *z* контура *L* в комплексной плоскости (*z*). Число оборотов считают положительным, если отрезок, соединяющий точку *w=0* с точкой *w=f(z),* поворачивается против часовой стрелки, и отрицательным – в противном случае. Если использовать векторную интерпретацию комплексного числа, то замкнутую кривую *Г* следует считать годографом радиус–вектора точки *w=f(z),* поворачивающегося в плоскости (*w*). Итак, разность числа *N* нулей (с учетом их кратности) и числа *P* полюсов (с учетом их порядка) функции *f(z)* в области *D*, удовлетворяющей условиям УТВ_6.10, равна числу поворотов радиус–вектора точки *w=f(z)* вокруг точки $w = 0$ при однократном обходе точкой *z* границы области D в положительном направлении (см. рис. 19) [4].

Следствие 6.11. Если функция $f(z) \in H(\overline{D})$, причем она не имеет нулей на $L=\partial D$, то

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_L Argf(z) = N.$$

УТВ_6.12. Теорема Руше

Пусть $f(z), g(z) \in H(\overline{D})$ и $\forall z \in L = \partial D \ \ |g(z)| > |f(z)|$. Тогда их сумма *f(z)+g(z)* и функция *g(z)* имеют в D одинаковое число нулей (с учетом их кратности).

Следствие 6.12. Основная теорема алгебры.

Всякий многочлен степени *n* $P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_n$ имеет по крайней мере один нуль.

Доказательство

Пусть $P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_n$ –произвольный многочлен степени n($a_0 \neq 0$). Обозначим $g(z) = a_0 z^n$, $f(z) = a_1 z^{n-1} + ... + a_n$. Тогда $P_n(z) = g(z) + f(z)$. Так как $\left|\frac{f(z)}{g(z)}\right| \to 0$ при $z \to \infty$, то $\exists A > 0 : \forall z \ \ |z| > A$ выполняется неравенство $\left|\frac{f(z)}{g(z)}\right| < 1$, тогда на окружности $|z| = A$ имеет место неравенство $|f(z)| < |g(z)|$. По теореме Руше количество нулей у функции $g(z)$ и $P_n(z) = g(z) + f(z)$ совпадает. Но функция $g(z) = a_0 z^n$ имеет внутри окружности $|z| = A$ n нулей (z=0 является нулем кратности n) $\Rightarrow$ функция $P_n(z) = g(z) + f(z)$ имеет внутри окружности также n нулей.

Замечание к следствию 6.12

Отметим, что многочлен $P_n(z)$ не может иметь более n нулей.

Пример 7

Найдем число корней уравнения $z^5 + z^2 + 1 = 0$ внутри окружности $|z| = 2$. На этой окружности имеем $|z^2|$ = 4, и $|z^5 + 1| \geq |z^5| - 1 = 32 - 1 = 31 \geq |z^2|$. Поэтому можно взять $g(z) = z^5 + 1$ и $f(z) = z^2$. У функции $g(z) = z^5 + 1$ 5 нулей, расположенных на окружности

$|z|=1$, и все они лежат в внутри окружности $|z|=2$. Поэтому по теореме Руше число корней исходного уравнения $z^5+z^2+1=0$ внутри окружности $|z|=2$ равно 5.

Основные примеры и их решение

1) Вычислить вычет функции в конечной или бесконечно удалённой точке.
2) Вычислить криволинейный интеграл с помощью вычетов.
3) Вычислить несобственный интеграл с помощью вычетов.
4) Вычислить логарифмический вычет в точке, по границе связной области.
5) Применить принцип аргумента для определения устойчивости решения дифференциального уравнения.
6) Применить теорему Руше для определения числа корней алгебраического уравнения в заданной области.

Пример 8

Определить характер всех конечных особых точек для функций $f(z)$, найти вычеты в этих точках:

a) $f(z)=\frac{z}{z^5+2z^4+z^3}$;

b) $f(z)=\frac{1-cosz}{z^2}$;

c) $f(z)=sin\frac{1}{z}$.

Решение

a) Функция $f(z)=\frac{z}{z^4+2z^3+z^2}$ имеет две особые точки $z=0$ и $z=-1$.

Преобразуем функцию:

$f(z)=\frac{z}{z^4+2z^3+z^2}=\frac{z}{z^2(z^2+2z+1)}=\frac{1}{z(z+1)^2}$.

Исследуем точку $z=0$. Для этого перепишем функцию в виде $f(z)=\frac{\frac{1}{(z+1)^2}}{z}$. Получаем, что вспомогательная функция $\varphi(z)=\frac{1}{(z+1)^2}$ является аналитической в окрестности точки $z=0$ и $\varphi(0)=1\neq 0$. Следовательно, по определению точка $z=0$ является полюсом 1–го порядка, или простым полюсом.

Аналогично исследуем точку $z=-1$, переписав функцию в следующем виде: $f(z)=\frac{\frac{1}{z}}{(z+1)^2}$.

Заметим, что вспомогательная функция $\varphi(z) = \frac{1}{z}$ является аналитической в окрестности точки $z = -1$ и $\varphi(-1) = -1 \neq 0$. Следовательно, по определению точка $z = -1$ является полюсом 2–го порядка.

Вычислим вычеты для полученных особых точек:

Так как $z = 0$ является простым полюсом, то получаем

$rezf(0) = \lim\limits_{z\to 0}[f(z)\cdot z] = \lim\limits_{z\to 0}\left[\frac{1}{z(z+1)^2}\cdot z\right] = \lim\limits_{z\to 0}\left[\frac{1}{(z+1)^2}\right] = 1.$

Для точки $z = -1$ – полюса 2–го порядка – имеем.

$$rezf(-1) = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to -1}\frac{d}{dz}[f(z)\cdot(z+1)^2] =$$

$$\lim_{z\to -1}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{z(z+1)^2}\cdot(z+1)^2\right] = \lim_{z\to -1}\left(\frac{1}{z}\right)' = \lim_{z\to -1}\left(-\frac{1}{z^2}\right) = -1.$$

b) Особой точкой функции $\mathrm{f(z)} = \frac{1-\cos z}{z^2}$ является точка $\mathrm{z} = 0$. Разложим функцию cosz в ряд Тейлора по степеням z:

$cosz = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} - \frac{z^{10}}{10!} + \cdots.$

Тогда исходная функция $f(z) = \frac{1-cosz}{z^2}$ имеет разложение:

$f(z) = \frac{1-cosz}{z^2} = \frac{1}{z^2}\left(1 - 1 + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} - \frac{z^8}{8!} + \frac{z^{10}}{10!} - \cdots\right) =$

$= \frac{1}{z^2}\left(\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} - \frac{z^8}{8!} + \frac{z^{10}}{10!} - \cdots\right) = \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \frac{z^6}{8!} + \frac{z^8}{10!} - \cdots.$

Получили, что разложение в ряд Лорана совпадает с разложением в ряд Тейлора, т.е. в разложении отсутствует главная часть. Следовательно, $z = 0$ является устранимой точкой данной функции.

Вычет в устранимой особой точке равен 0: $rezf(0) = 0$.

c) Для функции $f(z) = sin\frac{1}{z}$ точка $\mathrm{z} = 0$ является особой.

Используя разложение функции *sin t* и полагая $t = \frac{1}{z}$, получим разложение исходной функции в ряд Лорана:

$sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \frac{1}{7!z^7} + \frac{1}{9!z^9} - \cdots$

Это разложение содержит бесконечное множество членов с отрицательными степенями z. Следовательно, точка $z = 0$ является существенно особой точкой.

Вычет в этой точке равен коэффициенту при первой отрицательной степени в разложении Лорана.

Так как коэффициент при слагаемом $\frac{1}{z}$ равен 1, то $rezf(0) = 1$.

Пример 9

Определить характер бесконечно удаленной точки для функций $f(z) = \frac{z}{z^5+2z^4+z^3}$, найти вычет в этой точке.

Решение

Сделаем замену переменной $w = \frac{1}{z}$. Тогда функция примет вид

$f(z) = \frac{z}{z^4+21z^3+z^2} = \frac{z}{z^2(z^2+2z+1)} = \frac{1}{z(z+1)^2}$.

$f(z) = f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{\frac{1}{w}\left(\frac{1}{w}+1\right)^2} = \frac{w^3}{(w+1)^2}$.

Рассмотрим точку $w = 0$. Вычислим предел новой функции в этой точке:

$\lim\limits_{w\to 0} \frac{w^3}{(w+1)^2} = \frac{0}{1} = 0.$

Т.к. предел существует и конечен, то $w = 0 -$ устранимая особая точка. Поэтому $z = \infty -$ устранимая особая точка. Вычислим вычет в бесконечно удаленной точке по теореме о полной сумме вычетов:

$rezf(\infty) = -\big(rezf(0) + rezf(-1)\big) = -(1 + (-1)) = 0.$

Пример 10

С помощью теоремы Коши о вычетах вычислить

$$\int\limits_{\partial D} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz.$$

a) ∂D: $|z| = 0{,}5$, область D внутри круга.
b) ∂D: $|z| = 2$, область D внутри круга.
c) ∂D: $|z| = 2$, область D содержит бесконечно удаленную точку.

Решение

Подынтегральная функция имеет две особые точки $z = 0$ и $z = -1$. Выясним их характер.

$$\lim_{z\to 0}\frac{e^z - 1}{z^2 + z} = \lim_{z\to 0}\frac{e^z - 1}{z(z + 1)} = \lim_{z\to 0}\frac{e^z - 1}{z}\cdot\lim_{z\to 0}\frac{1}{z + 1} = 1\cdot 1 = 1.$$

Точка $z = 0 -$ устранимая особая точка.

$$\lim_{z\to -1}\frac{e^z - 1}{z^2 + z} = \lim_{z\to -1}\frac{e^z - 1}{z(z + 1)} = \infty.$$

Точка $z = -1 -$ простой полюс.

По теореме Коши о вычетах

$$\int\limits_{\partial D} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz = 2\pi i \sum_{k=0}^{n} resf(z_k)$$

a) В данную область входит только одна особая точка $z = 0$, тогда

$$\int\limits_{\partial D} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz = 2\pi i \cdot resf(0)$$

Но, так как $z = 0 -$ устранимая особая точка, вычет в этой точке равен 0.

Следовательно,

$$\int\limits_{\partial D} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz = 0.$$

b) Во вторую область входят обе особые точки.

Вычислим вычет в точке $z = -1$.

$$rezf(-1) = \lim_{z\to -1}[f(z)\cdot z] = \lim_{z\to -1}\left[\frac{e^z-1}{z^2+z}\cdot(z+1)\right] = \lim_{z\to -1}\left[\frac{e^z-1}{z}\right] = \frac{e^{-1}-1}{-1} = 1 - e^{-1}$$

$$\int\limits_{\partial D} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz = 2\pi i \cdot \big(resf(0) + resf(-1)\big) = 2\pi i \cdot (1 - e^{-1}).$$

c) Так как область содержит бесконечно удаленную точку и не содержит ни одну из конечных особых точек, то получим

$$\int\limits_{\partial D} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz = 2\pi i \cdot resf(\infty)$$

По теореме о вычетах $resf(\infty) = -\big(resf(0) + resf(-1)\big)$. Тогда

$$\int\limits_{\partial D} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz = 2\pi i \cdot resf(\infty) = -2\pi i \cdot \big(resf(0) + resf(-1)\big) = -2\pi i \cdot (1 - e^{-1})$$

$$= 2\pi i \cdot (e^{-1} - 1).$$

Пример 11

Вычислить $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{3 + \cos x}$

Решение:

Сделаем замену $z = e^{ix}$. Тогда $dz = ie^{ix}dx,\ \Rightarrow dx = \frac{dz}{ie^{ix}} \Rightarrow dx = \frac{dz}{iz}$. При этом $cosx = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \frac{z^2+1}{2z}$.

Отметим, что при такой замене интервал интегрирования $[0,2\pi]$ отобразится в окружность $|z| = 1, 0 \le argz \le 2\pi$.

Подставляем все в исходный интеграл:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3+cosx} = \int_{|z|=1} \frac{dz}{3+\frac{z^2+1}{2z}} = \int_{|z|=1} \frac{2zdz}{6z+z^2+1}.$$

Вычислим этот интеграл с помощью основной теоремы о вычетах. Для этого найдем особые точки функции: $z = -3 \pm 2\sqrt{2}$ – полюсы 1–го порядка. Отметим, что особая точка $z = -3 - 2\sqrt{2}$ (так как $|z| = |-3-2\sqrt{2}| > 1$) лежит вне области, ограниченной окружностью $|z| = 1$. Поэтому вычислим вычет подынтегральной функции только в точке $z = -3 + 2\sqrt{2}$. Так как это простой полюс, имеем

$$resf(-3+2\sqrt{2}) = \lim_{z\to -3+2\sqrt{2}} \left[\frac{2z}{6z+z^2+1} \cdot (z+3-2\sqrt{2})\right] = \lim_{z\to -3+2\sqrt{2}} \left[\frac{2z}{(z+3+2\sqrt{2})}\right] =$$

$$= \frac{2(-3+2\sqrt{2})}{(-3+2\sqrt{2}+3+2\sqrt{2})} = \frac{2(-3+2\sqrt{2})}{2\sqrt{2}} = \frac{-3+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1{,}5\sqrt{2}+2.$$

Тогда

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3+cosx} = \int_{|z|=1} \frac{2zdz}{6z+z^2+1} = 2\pi i \cdot resf(-3+2\sqrt{2}) = 2\pi i \cdot (-1{,}5\sqrt{2}+2).$$

Пример 12

Вычислить: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+1)^2}$.

Решение

Введем функцию $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)^2}$. Она совпадает на действительной оси с подынтегральной функцией. Функция $f(z)$ имеет две особые точки: $z = i$ и $z = -i$. Выбираем те точки, которые принадлежат верхней полуплоскости. Подходит только точка $z = i$ – полюс второго порядка. Вычислим вычет в этой точке:

$$rezf(i) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z\to i} \frac{d}{dz} [f(z) \cdot (z-i)^2] =$$

$$= \lim_{z\to i} \frac{d}{dz} \left[\frac{z^2}{(z^2+1)^2} \cdot (z-i)^2\right] = \lim_{z\to i} \left(\frac{z^2}{(z+i)^2}\right)' = \lim_{z\to i} \left(\frac{2zi}{(z+i)^3}\right) = \frac{2i^2}{(i+i)^3} =$$

$$= \frac{-2}{(2i)^3} = \frac{-2}{-8i} = -\frac{i}{4}.$$

Тогда исходный интеграл будет равен

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+1)^2} = 2\pi i \cdot rezf(i) = 2\pi i \cdot \left(-\frac{i}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Пример 13

Вычислить: $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\,sinx\,dx}{x^2-6x+13}$.

Решение

Введем вспомогательную функцию $f(z)=\frac{ze^{iz}}{z^2-6z+13}$.

Найдем особые точки функции: $z=3+2i$ и $z=3-2i$. Это полюса первого порядка. Выбираем точку $z=3+2i$, так как она лежит в верхней полуплоскости. Вычисляем вычет в этой точке:

$$rezf(3+2i)=\lim_{z\to 3+2i}[f(z)\cdot(z-3-2i)]=$$

$$=\lim_{z\to 3+2i}\left[\frac{ze^{iz}}{(z-3-2i)(z-3+2i)}\cdot(z-3-2i)\right]=\lim_{z\to 3+2i}\frac{ze^{iz}}{(z-3+2i)}=\frac{(3+2i)e^{i(3+2i)}}{(3+2i-3+2i)}=\frac{(3+2i)e^{3i}e^{-2}}{4i}=$$

$$\frac{(3+2i)e^{-2}(cos3+isin3)}{4i}=e^{-2}\frac{(3cos3-2sin3)+i(2cos3+3sin3)}{4i}.$$

Тогда исходный интеграл будет равен

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\,sinx\,dx}{x^2-6x+13}=Im\{2\pi i\cdot rezf(3+2i)\}=$$

$$=Im\left\{2\pi i\cdot e^{-2}\frac{(3cos3-2sin3)+i(2cos3+3sin3)}{4i}\right\}=\pi\cdot e^{-2}\frac{(2cos3+3sin3)}{2}.$$

Пример 14

Вычислить логарифмический вычет функции $\mathrm{f(z)}=\frac{\sin z}{\mathrm{z}-2}$ в нулях, полюсе и относительно контура L: $|\mathrm{z}|=8$.

Решение

Данная функция имеет бесконечное множество простых нулей $z=\pi k, k\in\boldsymbol{Z}$ и один простой полюс $z=2$.

1) Логарифмический вычет в нуле равен кратности этого нуля, то $\underset{z=\pi k}{res}\frac{f'(z)}{f(z)}=1$.

2) Логарифмический вычет в полюсе z=2 будет равен кратности полюса, взятой с противоположным знаком: $\underset{z=1}{res}\frac{f'(z)}{f(z)}=-1$.

3) Логарифмический вычет относительно контура L: $|\mathrm{z}|=8$ будет равен: $\underset{|z|=8}{res}\frac{f'(z)}{f(z)}=N-P$, где N – число нулей внутри контура, с учётом их порядка, а P – число полюсов, также с учетом их порядка. В нашем случае, *N=5, P=1.* Таким образом, $\underset{|z|=8}{res}\frac{f'(z)}{f(z)}=N-P=5-1=4$.

Задачи для самостоятельной работы

6.1. Вычислить:

1. $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} \dfrac{\sin z}{z^2}$;
2. $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} e^{1/z}$;
3. $\operatorname*{res}\limits_{z=1} \dfrac{e^z}{(z-1)^3}$;
4. $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} z^2 \sin\dfrac{\pi}{z}$;
5. $\operatorname*{res}\limits_{z=\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos z}{z-\pi/4}$;
6. $\operatorname*{res}\limits_{z=1} z e^{1/(z-1)}$;
7. $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} z^n e^{a/z}$;
8. $\operatorname*{res}\limits_{z=0} \dfrac{e^{z^2}}{z^{2n+1}}$.

6.2. Найти вычеты функций во всех их конечных особых точках**:**

1. $\dfrac{1}{z+z^3}$;
2. $\dfrac{z^2}{z+z^4}$;
3. $\dfrac{z^2}{(1+z)^3}$;
4. $\dfrac{1}{(z^2+1)^3}$;
5. $\dfrac{1}{(z^2+1)(z-1)^2}$;
6. $\dfrac{z^{2n}}{(z-1)^n}$, $n=1,2,\ldots$;
7. $\dfrac{1}{\sin \pi z}$;
8. $ctg \pi z$;
9. $\dfrac{\cos z}{(z-1)^2}$;
10. $\dfrac{1}{e^z+1}$;
11. $\dfrac{\sin \pi z}{(z-1)^3}$.

6.3. Найти вычеты функций в бесконечности:

1. $\dfrac{z^4+1}{z^6-1}$;
2. $\cos\dfrac{z+2}{2z}$;
3. $\dfrac{\sin\frac{1}{z}}{z-1}$;
4. $\dfrac{\cos^2\frac{\pi}{z}}{z+1}$;
5. $\dfrac{(z^{10}+1)\cos\frac{1}{z}}{(z^5+2)(z^6-1)}$;
6. $z\cos^2\dfrac{\pi}{z}$.

6.4. Найти вычеты функций во всех их особых точках и бесконечности:

1. $\dfrac{1}{z^6(z-2)}$;
2. $\dfrac{1+z}{z^6(z+2)}$;
3. $\dfrac{1+z^{10}}{z^6(z^2+4)}$;
4. $\dfrac{1+z^{2n}}{z^n(z-a)}$, $n=1,2,\ldots$, $a \ne 0$;

5. $\sin z \sin \frac{1}{z}$;

6. $\frac{\cos z}{\left(z^2+1\right)^2}$;

7. $\frac{1+z^8}{z^4(z^4+1)} \cos z chz$;

8. $\frac{\sin z}{\left(z^2+1\right)^2}$.

6.5. Вычислить:

1. $\underset{z=0}{res} \frac{z^{n-1}}{\sin z}$, $n=1,2,\ldots$;

2. $\underset{z=0}{res} \frac{\sin 3z - 3\sin z}{\sin z(\sin z - z)}$;

3. $\underset{z=0}{res} \frac{tgz - z}{(1-\cos z)^2}$;

4. $\underset{z=0}{res} \frac{z^{n-2}}{sh^n z}$, $n=2,3,\ldots$;

5. $\underset{z=0}{res}\, z^{n-3} ctg^n z$, $n=2,3,\ldots$;

6. $\underset{z=0}{res} \frac{z}{chz - 1 - z^2/2}$.

6.6. Вычислить интегралы с помощью вычетов**:**

1. $\int\limits_{\partial D} \frac{dz}{1+z^4}$, D: $|z-1|<1$;

2. $\int\limits_{\partial D} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$, D: $|z-1-i|<2$;

3. $\int\limits_{\partial D} \frac{\sin z}{(1+z)^3} dz$, D: $x^{2/3}+y^{2/3} \le 2^{2/3}$;

4. $\int\limits_{\partial D} \frac{dz}{(z^2-1)^2(z-3)^2}$, D: $2<|z|<4$;

5. $\int\limits_{\partial D} \frac{z}{z+3} e^{1/3z} dz$,D: $|z|>4$.

6. $\int\limits_{\partial D} \frac{dz}{z^3(z^{10}-2)}$, D: $|z|<2$;

7. $\int\limits_{\partial D} \frac{z^2 \sin^2 \frac{1}{z}}{(z-1)(z-2)} dz$, D: $|z|<3$;

8. $\int\limits_{\partial D} \frac{z^3}{z^4-1} dz$, D: $|z|<2$;

9. $\int\limits_{\partial D} \frac{z^3}{z+1} e^{1/z} dz$, D: $|z|<2$;

6.7. Вычислить интегралы

1. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$

2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx$

3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 2ix - 2}$

4. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$

5. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$

6. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 4ix - 3)^2}$

7. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^3}$, $a > 0$

Вычислить интегралы с помощью леммы Жордана:

1. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)e^{ix}}{x^2 - 2x + 2} dx$;

2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 - 2ix - 2} dx$;

3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)e^{-i3x}}{x^2 - 2x + 5} dx$;

4. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 2ix - 2)^2} dx$;

5. $\int\limits_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz$.

6. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)\sin 2x}{x^2 + 2x + 2} dx$;

7. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 10} dx$;

8. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx$, $a > 0$;

9. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+a^2)^2} dx$, $a > 0$;

6.9**.** Вычислить интегралы**:**

1. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{5 + 3\cos\varphi}$;

2. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{13 + 12\sin\varphi}$;

3. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\cos^2\varphi}{13 + 12\cos\varphi} d\varphi$;

4. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{a + \sin\varphi}$.

а) $a > 1$; б) $a \in (-1,1)$ (главное значение).

Вариант контрольной работы

№1.

С помощью теоремы Коши о вычетах вычислить

$$\int_{\partial D} \frac{z^2+4}{z^2-3iz-2}dz,\ D: x^2+y^2<9.$$

№2.

Вычислить $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3+\cos x}$

№3.

Вычислить $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2+1)dx}{x^4+1}$

№4.

Вычислить с помощью леммы Жордана

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 \sin x dx}{x^4+5x^2+4}$$

№5.

Вычислить $\int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x dx}{x(x^2+25)}$

Итоговый тест

Читателю предлагается выполнить тест по изученному материалу с тем, чтобы проверить свои знания.

Инструкция по выполнению теста.

В колонках А и В представлены (различными способами) элементы А и В частично упорядоченного множества (ЧУМ) $<\mathbf{O}, \le>$. В колонке *Дополнительная информация* указано ЧУМ $<\mathbf{O}, \le>$ и иногда другая необходимая информация. Номер тестового задания указан в колонке ***№***.

Сравните элементы А и В и выберите букву ответа по правилу:

$A,B \in O$ & $A > B \Rightarrow$ **(A)** ; $A,B \in O$ & $A<B \Rightarrow$ **(B)** ; $A,B \in O$ & $A=B \Rightarrow$ **(C)** ;

$A,B \in O$ & А несравнимо с В $\Rightarrow$ **(D)** ; $A \notin O$ или $B \notin O$ $\Rightarrow$ **(E).**

В тесте используются следующие ЧУМ:

– *$O=<R, \le>$, $A \le B \Leftrightarrow B - A \in [0, +\infty)$*, ***числа;***

– *$O=<\varphi(X), \le>$ для некоторого $X \in ObS, A \le B \Leftrightarrow A \subseteq B$*, ***множества;***

– *$O=<S(T,R), \le>$ для некоторого $T \in ObS$, $A \le B \Leftrightarrow A(t) \le B(t)$ для $\forall t \in T$*, ***функции**;*

– *$O=<PR, \le>$ – ЧУМ высказываний, $\eta:PR \to \{0, 1\}$ – интерпретация высказываний, $A \le B \Leftrightarrow \eta(A) \le \eta(B)$ $(A = B \Leftrightarrow \eta(A) = \eta(B))$*, ***высказывания;***.

– *$O=<CON, \le>$ – ЧУМ понятий, $A \le B \Leftrightarrow V_A \subseteq V_B$ –объемы понятий$(A=B \Leftrightarrow V_A = V_B)$*,***понятия.***

№	А	В	Дополнительная информация
1.	f(z) дифференцируема в точке $z = -1+i$	$f(z) \in H\{z: Im(z)= -Re(z)\}$	Высказывание. *$f(z)= (Im(z))^2 + i\,(Re(z))^2$*
2.	Угол поворота в точке а.	Коэффициент растяжения в точке а.	Числа. $f(z) = e^{\pi z}$, $a = i$.
3.	Функция отображает полосу: $\{z : 0 < x < \pi\}$ в нижнюю полуплоскость	Функция конформна в единичном круге $\|z\| < 1$	Высказывания. $f(z) = e^{iz+3}$
4.	Ряд сходится в области $\|z-1\| < 1$	Ряд сходится в области $\|z-4+3i\| < 1$	Высказывание. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1+i)^n}{3^n} z^n$

5.	$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4}$	$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{3+2\cos x}$	Сравнить числа в колонках А и В.
6.	$\underset{a}{res}\, f(z)=0$	Точка z=a –существенно особая точка f(z).	Высказывание. f(z) $=e^{z-\frac{1}{z}}$, a=∞.
7.	$\lvert res[f(z),\infty]\rvert$	$\lvert res[f(z),0]\rvert$	Числа. f(z) $=e^{z-\frac{1}{z}}$,
8.	$\lvert \int_{\partial D_1} f(z)dz \rvert$	$\lvert \int_{\partial D_2} f(z)dz \rvert$	Числа. f(z)=$(z^2+4z-3)ch\frac{1}{z}$, $D_1=\{z:\lvert z\rvert<1\}$, $D_2=\{z:\lvert z+2i\rvert>1\}$
9.	*f(z)* С–дифференцируема в области *D*	*f(z)* является аналитической функцией в области *D*	Понятия. f: D$\subseteq$ C $\to$ C
10.	$z=\infty$ – полюс третьего порядка	Функция f(z) является целой.	Высказывание. $f(z)=z^3\sin\frac{1}{2z}$

Ответы на тест: $1A,\ 2C,\ 3B,\ 4A,\ 5B,\ 6B,\ 7C,\ 8A,\ 9A,\ 10D$.

Список литературы

1. Свешников А., Тихонов А. Теория функций комплексного переменного. М.: Физматлит, 2001.

2. Волковыский Л., Лунц Г., Араманович И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: Физматлит, 2006.

3. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Т1. М.: Наука, 1961.

4. Морозова В.Д. Теория функций комплексного переменного. М.: МГТУ им. Баумана, 2003.

5. Краснов М.И., Киселев Г.И., Макаренко А.И. Функции комплексного переменного, операционное исчисление, теория устойчивости. М.: Наука, 1981.

Учебное издание

Шилина Алла Владимировна
Оглезнева Анна Николаевна

Комплексный анализ. Задачи и упражнения

Учебное пособие

Редактор *М. А. Шемякина*
Корректор *Н. А. Антонова*
Техническая подготовка материалов: *А. Н. Оглезнева*

Объем данных 4,49 Мб
Подписано к использованию 25.10.2019

Размещено в открытом доступе
на сайте www.psu.ru
в разделе НАУКА / Электронные публикации
и в электронной мультимедийной библиотеке ELiS

Издательский центр
Пермского государственного
национального исследовательского университета
614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15