МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Т. М. Коневских, А. Н. Оглезнева

АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

АЛГЕБРА

*Допущено методическим советом
Пермского государственного национального
исследовательского университета в качестве
учебно-методического пособия для студентов
механико-математического, экономического
и физического факультетов, изучающих дисциплины
«Алгебра и аналитическая геометрия»,«Алгебра»*

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
"Perm University Press"

Пермь 2019

УДК 512: 514(075.8)
ББК 22я7
К64

Коневских Т. М., Оглезнева А. Н.

К64 Алгебра и аналитическая геометрия. Алгебра [Электронный ресурс]: учеб.-метод. пособие / Т. М. Коневских, А. Н. Оглезнева; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Электрон. дан. – Пермь, 2019. – 3,99 Мб; 114 с. – Режим доступа: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/ uchebnie-posobiya/konevskix-oglezneva-algebra-i-analiticheskaya-geometriya-ch-1.pdf – Загл. с экрана.

ISBN 978-5-7944-3363-0

Издание составлено в соответствии с действующими программами курсов «Алгебра и аналитическая геометрия» и «Алгебра» для студентов первого курса механико-математического и физического факультетов.

Пособие включает теоретический материал основных тем курсов: «Метод Гаусса», «Определители», «Матрицы», «Линейные пространства», «Линейные преобразования линейных пространств», «Матрицы перехода», «Евклидовы пространства». Особое внимание уделено решению задач, вызывающих затруднения у студентов. В теоретическом материале содержатся основные определения, формулы, утверждения и свойства.

Кроме того, в пособии в конце разделов приводятся варианты лабораторной работы и задания для самостоятельного решения, которые могут быть использованы при проведении практических занятий. Каждая лабораторная работа содержит 13 различных вариантов.

УДК 512: 514(075.8)
ББК 22я7

Издается по решению ученого совета
механико-математического факультета
Пермского государственного национального исследовательского университета

Рецензенты: зав. кафедрой физики и математики ФГБОУ ВО ПГФА Минздрава России, канд. пед. наук ***В. И. Данилова;***

кафедра высшей математики и методики обучения математике ПГГПУ (и.о. зав. кафедрой, канд. пед. наук, доцент ***Е. Л. Черемных***)

ISBN 978-5-7944-3363-0

ОГЛАВЛЕНИЕ

Раздел 1. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ИСКЛЮЧЕНИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ (МЕТОД ГАУССА)

Системой линейных алгебраических уравнений, содержащей s уравнений и n неизвестных, называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n = b_s. \end{cases} \qquad (1)$$

Здесь $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – неизвестные, a_{ij} – коэффициенты при неизвестных, b_i – свободные члены, $i = \overline{1,s}$, $j = \overline{1,n}$. Матрица $A = (a_{ij})$, составленная из коэффициентов системы, называется *матрицей системы*. *Расширенной матрицей* называется матрица B, полученная из матрицы A дополнением столбцом свободных членов.

Решением системы уравнений (1) называется упорядоченная совокупность n действительных чисел α_1, α_2, ..., α_n удовлетворяющая всем уравнениям системы, т.е. обращающая все уравнения при замене неизвестных на соответствующие числа в верные равенства.

Система (1) называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если она не имеет решений. Совместная система называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если имеет более одного решения.

Две системы линейных уравнений называются *эквивалентными*, если каждое решение первой системы является решением второй и наоборот. Для того чтобы две совместные системы линейных уравнений с одинаковым числом неизвестных были эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы каждое уравнение первой системы было линейной комбинацией уравнений второй системы и наоборот.

Рассмотрим следующие преобразования системы линейных уравнений:

1) перестановку двух уравнений системы;
2) умножение обеих частей одного из уравнений на любое число, отличное от нуля;
3) прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого, умноженных на любое число.

Применяя к системе (1) преобразования 1) – 3), построим эквивалентную систему специального вида. Для этого возьмем в качестве первого уравнения одно из тех уравнений системы (1), где коэффициент при x_1 отличен от нуля. Далее будем домножать это уравнение последовательно на $-\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$, $i = \overline{2,s}$, и прибавлять его почленно к соответствующим уравнениям системы (1).

В результате получаем систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \quad a'_{s2}x_2 + \ldots + a'_{sn}x_n = b'_s. \end{cases} \qquad (2)$$

во всех уравнениях которой, начиная со второго, будет исключено неизвестное x_1. При этом может случиться, что вместе с x_1 будут исключены неизвестные $x_2,...,x_{k-1}$, $k \le n$, но будет найдено уравнение, в котором сохранится x_k. Используем его в качестве второго уравнения системы. Из всех оставшихся уравнений, кроме первых двух, исключим неизвестное x_k, для чего будем умножать второе уравнение на $-\dfrac{a'_{ik}}{a'_{2k}}$ и прибавлять ко всем последующим, т. е. $i=\overline{3,s}$ и т. д.

В результате такого последовательного исключения неизвестных в каком-нибудь уравнении системы все коэффициенты при неизвестных могут обратиться в нуль. Если при этом свободный член будет отличен от нуля, то полученная система несовместна, а значит, несовместна и эквивалентная ей система (1). Если же свободный член какого-нибудь уравнения обратится в нуль вместе со всеми коэффициентами при неизвестных в этом уравнении, то это уравнение из системы можно исключить, так как оно не накладывает никаких ограничений на неизвестные.

Таким образом, после последовательного исключения неизвестных число уравнений в получающихся при этом системах может только уменьшиться.

В результате придем к системе одного из видов:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad a'_{22}x_2 + ... + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \quad ...., \\ \qquad a'_{nn}x_n = b'_n. \end{cases} \tag{3}$$

или

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad a'_{22}x_2 + ... + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \quad ...., \\ \quad a'_{mm}x_m + ... + a'_{mn}x_n = b'_m. \end{cases} \qquad m < n \tag{4}$$

Система (3) называется *системой треугольного вида* и, очевидно, имеет единственное решение. Система (4) называется системой *трапецеидального (ступенчатого)* вида и имеет бесконечно много решений.

Действительно, если систему (4) переписать в виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1m}x_m = b_1 - a_{1m+1}x_{m+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ \quad a'_{22}x_2 + ... + a'_{2m}x_m = b'_2 - a'_{2m+1}x_{m+1} - \ldots - a'_{2n}x_{n2}, \\ \quad ...., \\ \quad a'_{mm}x_m = b'_m - a'_{mm+1}x_{m+1} - ... - a'_{mn}x_n. \end{cases} \tag{5}$$

то, придавая неизвестным $x_{m+1},...,x_n$ произвольные значения, можно для каждого набора $x_{m+1}=x^0_{m+1},...,x_n=x^0_n$ решить систему (5) и получить набор $\left(x^0_1, x^0_2, \ldots, x^0_m, x^0_{m+1},...,x^0_n\right)$, который будет являться решением системы (5) и, следовательно, системы (1).

При этом неизвестные $x_{m+1},\dots,x_n$ принято называть свободными, а $x_1,\dots,x_m$ – основными. Очевидно, легко выразить основные неизвестные через свободные, т. е. получить общий вид решения.

При практическом решении системы (1) все описанные преобразования удобно применять не к самой системе, а к расширенной матрице системы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} & b_s \end{array}\right).$$

Пример 1. Решить систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$$

Решение. Составим и преобразуем матрицу следующим способом: элементы первой строки первой матрицы умножаем последовательно на (–2), (–1), (–1) и прибавляем к соответствующим элементам второй, третьей и четвертой строк соответственно. При переходе от второй к третьей матрице первую строку оставляем неизменной, а элементы второй прибавляем к элементам четвёртой. При переходе от третьей матрицы к четвёртой третью строку умножаем на (-1) и прибавляем к четвертой.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right)(-2)(-1)(-1) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{array}\right)(-1) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Полученное четвертое уравнение системы противоречиво, поэтому система несовместна.

Пример 2. Решить систему:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = -5, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 6x_4 = -6. \end{cases}$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу этой системы и подвергнем ее таким преобразованиям, чтобы она получила треугольный или трапецеидальный вид:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 5 & -5 \\ 1 & -1 & 2 & 6 & -6 \end{array}\right)(-1)(-1) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -7 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \cdot(1/6) \\ \cdot(1/7) \end{array} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)(-1) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

.

Восстановим систему линейных уравнений по последней матрице

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ x_4 = -1. \end{cases}$$

Полученная система, эквивалентная данной системе, совместна. Найдем ее решения. Для этого перепишем ее в следующем виде:

$$\begin{cases} x_1 - x_4 = 1 + x_2 - 2x_3, \\ \quad x_4 = -1. \end{cases}$$

Очевидно, если неизвестным x_2 и x_3 придавать любые значения, то получим решение системы: если $x_2 = C_1$ и $x_3 = C_2$, то $x_4 = -1$, $x_1 = C_1 - 2C_2$.

Таким образом, имеем общий вид решения: $x_1 = C_1 - 2C_2$, $x_2 = C_1$, $x_3 = C_2$, $x_4 = -1$, где C_1, C_2 – любые числа.

Пример 3. Решить систему:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 11, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 7. \end{cases}$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу этой системы и подвергнем ее таким преобразованиям, чтобы она получила треугольный или трапецеидальный вид:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -3 & 11 \\ 4 & 1 & -1 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & -3 & 11 \\ 4 & 1 & -1 & 7 \end{array}\right)(-4)(-2)(-4) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & -3 & 15 \\ 0 & 5 & -5 & 15 \\ 0 & 5 & -5 & 15 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \cdot(1/3) \\ \cdot(1/5) \\ \cdot(1/5) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right)(-2)(-1) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Полученную в шестой матрице нулевую строку удалим. Наша система приведена к треугольному виду и имеет единственное решение. Найдем ее решение. Для этого представим систему в следующем виде:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ \quad x_2 - x_3 = 3, \\ \qquad x_3 = -1. \end{cases}$$

Получаем решение: $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = -1$.

ВАРИАНТЫ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

ВАРИАНТ 1

Решить системы методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 6. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2. \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12. \end{cases}$$

ВАРИАНТ 2

Решить системы методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+11x_3+5x_4=2, \\ x_1+x_2+5x_3+2x_4=1, \\ 2x_1+x_2+3x_3+2x_4=-3, \\ x_1+x_2+3x_3+4x_4=-3. \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1-x_2+x_3+2x_4+3x_5=2, \\ 6x_1-3x_2+2x_3+4x_4+5x_5=3, \\ 6x_1-3x_2+4x_3+8x_4+13x_5=9, \\ 4x_1-2x_2+x_3+x_4+2x_5=1. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1+x_2-3x_3=-1, \\ 2x_1+x_2-2x_3=1, \\ x_1+x_2+x_3=3, \\ x_1+2x_2-3x_3=1. \end{cases}$$

ВАРИАНТ 3

Решить системы методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1+5x_2+4x_3+x_4=20, \\ x_1+3x_2+2x_3+x_4=11, \\ 2x_1+10x_2+9x_3+7x_4=40, \\ 3x_1+8x_2+9x_3+2x_4=37. \end{cases} \quad \begin{cases} 6x_1+4x_2+5x_3+2x_4+3x_5=1, \\ 3x_1+2x_2+4x_3+x_4+2x_5=3, \\ 3x_1+2x_2-2x_3+x_4=-7, \\ 9x_1+6x_2+x_3+3x_4+2x_5=2. \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=2, \\ x_1+3x_2+x_3=5, \\ x_1+x_2+5x_3=-7, \\ 2x_1+3x_2-3x_3=14. \end{cases}$$

ВАРИАНТ 4

Решить системы методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=-3, \\ 3x_1+5x_2+3x_3+5x_4=-6, \\ 6x_1+8x_2+x_3+5x_4=-8, \\ 3x_1+5x_2+3x_3+7x_4=-8. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4+x_5=4, \\ 3x_1+6x_2+5x_3-4x_4+3x_5=5, \\ x_1+2x_2+7x_3-4x_4+x_5=11. \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=3, \\ 3x_1+x_2-5x_3=0, \\ 4x_1-x_2+x_3=3, \\ x_1+3x_2-13x_3=-6. \end{cases}$$

ВАРИАНТ 5

Решить системы методом Гаусса

$$\begin{cases} 7x_1+9x_2+4x_3+2x_4=2, \\ 2x_1-2x_2+x_3+x_4=6, \\ 5x_1+6x_2+3x_3+2x_4=3, \\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4=0. \end{cases} \quad \begin{cases} 6x_1+3x_2+2x_3+3x_4+4x_5=5, \\ 4x_1+2x_2+x_3+2x_4+3x_5=4, \\ 4x_1+2x_2+3x_3+2x_4+x_5=0, \\ 2x_1+x_2+7x_3+3x_4+2x_5=1. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1+3x_2+2x_3=0, \\ 2x_1-x_2+3x_3=0, \\ 3x_1+5x_2+4x_3=0, \\ x_1+17x_2+4x_3=0. \end{cases}$$

ВАРИАНТ 6

Решить системы методом Гаусса

$$\begin{cases} 6x_1+5x_2-2x_3+4x_4=-4, \\ 9x_1-x_2+4x_3-x_4=13, \\ 3x_1+4x_2+2x_3-2x_4=1, \\ 3x_1-9x_2+2x_4=11. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=7, \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=-2, \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=23, \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=12. \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3+2x_4=4, \\ 4x_1+3x_2+x_3+x_4=5, \\ 5x_1+11x_2+3x_3+2x_4=2, \\ 2x_1+5x_2+x_3+x_4=1, \\ x_1-7x_2-x_3+2x_4=7. \end{cases}$$

ВАРИАНТ 7

Решить системы методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 6x_3 + 3x_4 = -1, \\ 7x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 15x_4 = -32, \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 5, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 6x_4 = -8. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 21, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 15, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 18. \end{cases}$$

ВАРИАНТ 8

Решить системы методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 8x_4 = -1, \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 2. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 3x_4 = 7, \\ 3x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 12, \\ 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 20. \end{cases}$$

ВАРИАНТ 9

Решить системы методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - 7x_2 + 3x_3 - x_4 = -1, \\ 5x_1 - 9x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 7, \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 = 8. \end{cases} \quad \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9, \\ 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8, \\ 2x_1 + 16x_2 - 14x_3 = 24, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7. \end{cases} \quad \begin{cases} 12x_1 + 14x_2 - 15x_3 + 24x_4 + 27x_5 = 5, \\ 16x_1 + 18x_2 - 22x_3 + 29x_4 + 37x_5 = 8, \\ 18x_1 + 20x_2 - 21x_3 + 32x_4 + 41x_5 = 9, \\ 10x_1 + 12x_2 - 16x_3 + 20x_4 + 23x_5 = 4. \end{cases}$$

ВАРИАНТ 10

Решить системы методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22. \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 10, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14. \end{cases} \quad \begin{cases} 24x_1 + 14x_2 + 30x_3 + 40x_4 + 41x_5 = 28, \\ 36x_1 + 21x_2 + 45x_3 + 61x_4 + 62x_5 = 43, \\ 48x_1 + 28x_2 + 60x_3 + 82x_4 + 83x_5 = 58, \\ 60x_1 + 35x_2 + 75x_3 + 99x_4 + 102x_5 = 69. \end{cases}$$

ВАРИАНТ 11

Решить системы методом Гаусса

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 7, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 = -7. \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1, \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = -1. \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7, \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9, \\ 8x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11. \end{cases}$$

ВАРИАНТ 12

Решить системы методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_4 = -3, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = -6, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 2. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 + 17x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} 45x_1 - 28x_2 + 34x_3 - 52x_4 = 9, \\ 36x_1 - 23x_2 + 29x_3 - 43x_4 = 3, \\ 35x_1 - 21x_2 + 28x_3 - 45x_4 = 16, \\ 47x_1 - 32x_2 + 36x_3 - 48x_4 = -17, \\ 27x_1 - 19x_2 + 22x_3 - 35x_4 = 6. \end{cases}$$

ВАРИАНТ 13

Решить системы методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 8x_4 = -1, \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 - 7x_2 - x_3 - 2x_4 = 7, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_2 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - 4x_4 = 0. \end{cases}$$

Раздел 2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ N-ГО ПОРЯДКА. МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

§1. Перестановки. Подстановки

Пусть дано упорядоченное множество n элементов. Расположение n элементов в определенном порядке называется *перестановкой из n элементов*.

Так как каждый элемент имеет свой номер, будем говорить, что дано n натуральных чисел.

Число различных перестановок из n чисел равно $n!$.

Если в некоторой перестановке из n чисел число i стоит раньше j, но $i > j$, т.е. большее число стоит раньше меньшего, то говорят, что пара i, j составляет *инверсию*.

Пример 1. Определить число инверсий в перестановке $(1,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2)$.

Решение. Числа 5 и 4, 5 и 3, 5 и 2, 4 и 3, 4 и 2, 3 и 2 образуют инверсии. Общее число инверсий в данной перестановке равно 6.

Перестановка называется *четной*, если общее число инверсий в ней четное, в противном случае она называется *нечетной*. В рассмотренном ранее примере дана четная перестановка.

Пусть дана некоторая перестановка $\ldots,\ i,\ldots,\ j,\ldots$ (*). Преобразование, при котором числа i и j меняются местами, а остальные остаются на своих местах, называется *транспозицией*. После транспозиции чисел i и j в перестановке (*) получится перестановка $\ldots,\ j,\ldots,\ i,\ldots$, где все элементы, кроме i и j, остались на своих местах.

От любой перестановки из n чисел можно перейти к любой другой перестановке из этих чисел с помощью нескольких транспозиций.

Всякая транспозиция меняет чётность перестановки. При $n \geq 2$ число чётных и нечётных перестановок из n чисел одинаково и равно $\dfrac{n!}{2}$.

Пусть M – упорядоченное множество из n элементов. Всякое биективное преобразование множества M называется *подстановкой n-й степени.*

Подстановки записывают так: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$, где $i_k \in \{1, 2, ..., n\}$, $\forall k \in \{1, 2, ..., n\}$ и все i_k различны.

Подстановка называется *четной*, если обе ее строки (перестановки) имеют одинаковую четность, т.е. либо обе четные, либо обе нечетные. В противном случае подстановка называется *нечетной.*

При $n \geq 2$ число четных и нечетных подстановок n-й степени одинаково и равно $\frac{n!}{2}$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

В задачах 1-6 определить число инверсий в перестановках.

1. $(6,\ 3,\ 1,\ 2,\ 5,\ 4)$.
2. $(1,\ 9,\ 6,\ 3,\ 2,\ 5,\ 4,\ 7,\ 8)$.
3. $(1,\ 3,\ 5,...,\ 2n-1,\ 2,\ 4,\ 6,...,\ 2n)$.
4. $(2,\ 4,\ 6,...,\ 2n,\ 1,\ 3,\ 5,...,\ 2n-1)$.
5. $(1,\ 4,\ 7,...,\ 3n-2,\ 2,\ 5,\ 8,...,\ 3n-1,\ 3,\ 6,\ 9,...,\ 3n)$.
6. $(3,\ 6,\ 9,...,\ 3n,\ 2,\ 5,\ 8,...,\ 3n-1,\ 1,\ 4,\ 7,...,\ 3n-2)$.
7. В какой перестановке чисел $1,\ 2,\ 3,...,\ n$ число инверсий наибольшее и чему оно равно?
8. Сколько инверсий образует число 1, стоящее на k-м месте перестановки?
9. Сколько инверсий образует число n, стоящее на k-м месте перестановки чисел $1,\ 2,...,\ n$?
10. Перемножить подстановки: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
11. Найти подстановку X из равенства $A \cdot X \cdot B = C$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 6 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

§2. Определение определителя. Свойства определителей

Определителем квадратной матрицы A *второго порядка* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ называется число $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Определитель матрицы называют также *детерминантом*. Для определителя матрицы A используют следующие обозначения: $|A|$, $det\,A$, ΔA.

Определителем квадратной матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ *третьего порядка называют число* $|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{13}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{33} - a_{21}a_{12}a_{31} - a_{32}a_{23}a_{11}$.

Каждое слагаемое алгебраической суммы в правой части последней формулы представляет собой произведение элементов матрицы, взятых по одному из каждого столбца и каждой строки. Для определения знака произведения полезно знать правило, называемое правилом треугольника, схематически изображённое на рис.1:

«+»  «-» 

Рис. 1

Пример 2. Вычислить определитель 3-го порядка по правилу треугольника

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

Решение.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 1\cdot 5 + 3\cdot 2\cdot(-1) + 4\cdot 6\cdot 0 - 4\cdot 1\cdot(-1) - 6\cdot 3\cdot 5 - 2\cdot 2\cdot 0 = -82.$$

Пусть A – матрица n-го порядка с комплексными элементами:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим всевозможные произведения элементов матрицы A, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца: $a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdot \ldots \cdot a_{ni_n}$ (1). Эти произведения будем называть членами определителя $|A|$. По каждому члену (1) составим подстановку $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$(2).

Определителем n-го порядка, или определителем квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ при $n > 1$, называется алгебраическая сумма всевозможных произведений вида (1), причём произведение (1) берётся со знаком «+», если соответствующая ему подстановка (2) чётная, и со знаком «-», если подстановка нечётная.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя называется определитель, полученный из исходного вычёркиванием i -й строки и j -го столбца.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя называют число $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, где M_{ij} – минор элемента a_{ij} .

СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

1. Определитель не изменяется при замене всех строк соответствующими столбцами (определитель не изменится при транспонировании).
2. При перестановке двух строк (или столбцов) определитель меняет знак.
3. Определитель с двумя одинаковыми (пропорциональными) строками (или столбцами) равен нулю.
4. Общий для всех элементов строки (или столбца) множитель можно вынести за знак определителя.

5. Определитель не изменится, если к элементам некоторой строки (или столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (или столбца), умноженные на одно и то же число, отличное от нуля.
6. Если все элементы некоторой строки (или столбца) определителя равны нулю, то он равен нулю.
7. Определитель равен сумме произведений элементов любой строки (или столбца) и их алгебраических дополнений (свойство разложения определителя по строке (или столбцу)).

§3. Методы вычисления определителей

Рассмотрим некоторые способы вычисления определителей порядка n.

1. *Условие равенства определителя n-го порядка нулю*. Если в определителе n-го порядка хотя бы одна строка (или столбец) состоит из нулей, то определитель равен нулю.
2. *Сведение вычисления определителя n-го порядка к вычислению определителя порядка* $n-1$. Пусть в определителе n-го порядка какая-то строка содержит отличные от нуля элементы. Вычисление определителя n-го порядка можно свести в этом случае к вычислению определителя порядка $n-1$. Действительно, используя свойства определителя, можно все элементы какой-либо строки, кроме одного, сделать нулями, а затем разложить определитель по указанной строке. Например, переставим строки и столбцы определителя так, чтобы на месте a_{11} находился отличный от нуля элемент:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Тогда элементы первого столбца умножаем на $-\dfrac{a_{12}}{a_{11}}$ и прибавляем к элементам второго, затем элементы первого столбца, умноженные на $-\dfrac{a_{13}}{a_{11}}$, прибавляем к элементам третьему и т.д. Получаем определитель вида

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{vmatrix}.$$

Заметим, что переставлять строки (или столбцы) не обязательно. Можно нули получать в любой строке (или столбце) определителя.

Общего метода вычисления определителей порядка n не существует, если не считать вычисления определителя заданного порядка непосредственно по определению. К определителю того или иного специального вида применяются различные методы вычисления, приводящие к более простым определителям.

3. *Приведение к треугольному виду.* Используя свойства определителя, приводим его к так называемому *треугольному виду,* когда все элементы, стоящие по одну сторону от главной диагонали, равны нулю. Полученный определитель треугольного вида равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали. Если удобнее получить нули по одну сторону от побочной диагонали, то он будет равен произведению элементов побочной диагонали, взятому со знаком $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Действительно, произведение

$a_{1n}, a_{2n-1}, \ldots, a_{n1}$ является членом определителя и его знак определяет $(-1)^s$, где s – число инверсий в перестановке $n,\ n-1,\ n-2, \ldots,\ 2,\ 1$. Следовательно, $s = (n-1) + (n-2) + \ldots + 1 = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Пример 3. Вычислить определитель разложением по строке:

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 7 \end{vmatrix}.$$

Решение. Разложим данный определитель по первой строке:

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 7 \end{vmatrix} = (-2)\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (-2)\cdot(-17) + (-3)\cdot(-13) = 34 + 39 = 73.$$

Пример 4. Вычислить определитель четвёртого порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & -2 & 8 \end{vmatrix}.$$

Решение.

1-й способ: Приведём определитель к треугольному виду. Для этого умножаем элементы первой строки последовательно на (-1), 1, (-2) и прибавляем соответственно к элементам второй, третьей и четвёртой строк:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & -2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1\cdot 3\cdot 2\cdot(-2) = -12\ .$$

2-й способ: Вычислим этот определитель разложением по строке. Предварительно преобразуем его так, чтобы в какой-то его строке все элементы, кроме одного, обратились в ноль. Для этого прибавим элементы первой строки определителя к элементам третьей. Затем умножим элементы третьего столбца на (-5) и прибавим к элементам четвёртого столбца. Преобразованный определитель раскладываем по третьей строке. Минор третьего порядка приводим к треугольному виду относительно главной диагонали.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & -2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 10 \\ 2 & 4 & -2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 10 \\ 1 & 5 & 6 & -27 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 18 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 1 & 5 & -27 \\ 2 & 4 & 18 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 0 & 3 & -37 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -12.$$

Пример 5. Вычислить определитель n-ого порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \\ 1 & n & n-1 & \dots & 3 & 2 \\ 1 & 1 & n & \dots & 4 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n & n-1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & n \end{vmatrix}$$

Решение. Вычтем из элементов первой строки соответствующие элементы второй, из второй – третью и т.д., наконец, из элементов предпоследней – элементы последней (последняя строка остается без изменений).

Получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} n-1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 0 & n-1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & n-1 & \dots & -1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & n \end{vmatrix}$$

Элементы последней строки представим в виде суммы двух слагаемых: 0+1, 0+1, …, 0+1, (n–1)+1. Исходя из свойства аддитивности, будем иметь

$$\Delta = \begin{vmatrix} n-1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 0 & n-1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & n-1 & \dots & -1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n-1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} n-1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 0 & n-1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & n-1 & \dots & -1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

Первый определитель в сумме – треугольного вида относительно главной диагонали, поэтому он равен произведению диагональных элементов, т.е. $(n-1)^n$. Второй определитель в сумме преобразуем, прибавив элементы последней строки к элементам всех предыдущих строк определителя. Полученный после преобразования определитель будет треугольного вида относительно главной диагонали, поэтому он будет равен произведению диагональных элементов, т.е. n^{n-1}:

$$= (n-1)^n + \begin{vmatrix} n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & n & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} = (n-1)^n + n^{n-1}.$$

4. *Вычисление определителя с помощью теоремы Лапласа.* Если в определителе выделить k строк (или столбцов) $(1 \le k \le n-1)$, то определитель равен сумме произведений всех миноров k -го порядка, расположенных в выделенных k строках (или столбцах), на их алгебраические дополнения.

Пример 6. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}.$$

Решение. В определителе десять миноров второго порядка, расположенных во второй и пятой строках, но только три из них отличны от нуля. Поэтому данный определитель удобнее разложить по второй и пятой строкам:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2+5+1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2+5+1+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2+5+2+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -21 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ -13 & -2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -11 & -19 \\ 0 & -18 & -22 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -8 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -21 & -7 \\ -13 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -11 & -19 \\ -18 & -22 \end{vmatrix} - 2 = (-2) \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 13 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -11 & -19 \\ -7 & -3 \end{vmatrix} - 2 = 2 \cdot 49 + \begin{vmatrix} -11 & -8 \\ -7 & 4 \end{vmatrix} - 2 =$$

$$= 98 + (-44 - 56) - 2 = 98 - 100 - 2 = -4.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Выяснить, какие произведения входят в определители соответствующих порядков и с какими знаками:
   a) $a_{43}a_{21}a_{35}a_{12}a_{54}$,
   b) $a_{61}a_{23}a_{45}a_{36}a_{12}a_{54}$,
   c) $a_{27}a_{36}a_{51}a_{74}a_{25}a_{43}a_{62}$,
   d) $a_{33}a_{16}a_{72}a_{27}a_{55}a_{61}$.
2. Выбрать такие значения i и k, чтобы произведение $a_{62}a_{i5}a_{33}a_{k4}a_{46}a_{21}$ входило в определитель 6-го порядка со знаком «минус».
3. Выбрать значения i и k, чтобы произведение $a_{47}a_{63}a_{1i}a_{55}a_{7k}a_{24}a_{31}$ входило в определитель 7-го порядка со знаком «плюс».

ВАРИАНТЫ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

ВАРИАНТ 1

Вычислить определители

$$\begin{vmatrix} 7 & 6 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 7 & 5 & 3 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ 3 & 3 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ 4 & 4 & 4 & 4 & \dots & n-1 & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ n-1 & n-1 & n-1 & n-1 & \dots & n-1 & n \\ n & n & n & n & \dots & n & n \end{vmatrix}.$$

ВАРИАНТ 2

Вычислить определители

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & -4 \\ 2 & -1 & 7 & 1 \\ 6 & 4 & 7 & -8 \\ -2 & 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} -a & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -a & a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a & a \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{vmatrix}.$$

ВАРИАНТ 3

Вычислить определители

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & -2 \\ 3 & 2 & 4 & -4 \\ -2 & 3 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 7 & 1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ a & a & x & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a & a & a & \dots & x \end{vmatrix}.$$

ВАРИАНТ 4

Вычислить определители

$$\begin{vmatrix} -3 & 5 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & -4 & -3 \\ 3 & 4 & 2 & -3 \\ 4 & 7 & -8 & -1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} x & x & \dots & x & x & 1 \\ x & x & \dots & x & 2 & x \\ x & x & \dots & 3 & x & x \\ \dots & \dots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \dots & \dots & \dots \\ x & n & x & \dots & x & x \\ x & x & x & \dots & x & x \end{vmatrix}.$$

ВАРИАНТ 5

Вычислить определители

$$\begin{vmatrix} -3 & 5 & -2 & 1 \\ 4 & 7 & -8 & -1 \\ -1 & 7 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & -4 & -3 \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix}.$$

ВАРИАНТ 6

Вычислить определители

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 7 & 5 \\ 2 & -1 & -5 & -3 \\ 5 & -6 & 4 & 2 \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} n & n-1 & \dots & 3 & 2 & a_1 \\ n & n-1 & \dots & 3 & a_2 & a_1 \\ n & n-1 & \dots & a_3 & a_2 & a_1 \\ \dots & \dots & \iddots & \dots & \dots & \dots \\ n & a_{n-1} & \dots & a_3 & a_2 & a_1 \\ a_n & a_{n-1} & \dots & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}.$$

ВАРИАНТ 7

Вычислить определители

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 5 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & -3 \\ 6 & 7 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 7 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & -5 & -3 & -2 \\ 5 & -6 & 4 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \end{vmatrix}.$$

ВАРИАНТ 8

Вычислить определители

$$\begin{vmatrix} -2 & 7 & 5 & -1 \\ -1 & -5 & -3 & -2 \\ -6 & 4 & 2 & -4 \\ -3 & 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & -4 & -3 \\ -2 & 3 & -4 & 2 & -3 \\ 6 & 4 & 7 & -8 & -1 \\ 2 & -1 & 7 & 1 & 5 \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_2 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & 0 \\ & & & & \dots & 1-b_{n-1} & b_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1-b_n \end{vmatrix}.$$

ВАРИАНТ 9

Вычислить определители

$$\begin{vmatrix} 6 & -5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ -4 & 8 & -8 & -3 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}.$$

ВАРИАНТ 10

Вычислить определители

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 7 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & n & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{vmatrix}.$$

ВАРИАНТ 11

Вычислить определители

$$\begin{vmatrix} 9 & 3 & 5 & 9 \\ -8 & 2 & -8 & -5 \\ 5 & 2 & 5 & 4 \\ 10 & 2 & 8 & 7 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}.$$

ВАРИАНТ 12

Вычислить определители

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ -3 & -3 & -2 & 8 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 5 & -5 & -3 & 4 & 2 \\ -4 & 4 & 3 & 6 & 3 \\ 3 & -1 & 6 & 8 & 4 \\ 5 & -3 & 2 & -1 & -2 \\ -7 & 7 & 6 & 8 & 4 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 & \dots & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & \dots & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 6 & \dots & 4 & 4 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 4 & 4 & 4 & \dots & 2n-2 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & \dots & 4 & 2n \end{vmatrix}.$$

ВАРИАНТ 13

Вычислить определители

$$\begin{vmatrix} 9 & 3 & 5 & 6 \\ -8 & 2 & -8 & 5 \\ 5 & 2 & 5 & 4 \\ 10 & 2 & 8 & 7 \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 7 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & -5 & -3 & -2 \\ 5 & -6 & 4 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & n & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Раздел 3. МАТРИЦЫ. ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

Пусть дана матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, где a_{ij} – некоторые числа, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. Будем ее обозначать $A = (a_{ij})$.

Две матрицы: $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ – называются *равными*, если их размеры (число строк и число столбцов) совпадают и соответствующие элементы равны, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$ при всех i, j.

Суммой двух матриц одинаковых размеров: $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ – называется матрица $C = (c_{ij})$ (обозначается $C = A + B$) тех же размеров, элементы которой определяются равенствами $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для всех i, j.

Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ на число α называется матрица $B = (b_{ij})$ (обозначается $B = \alpha A$), элементы которой определяются равенством $b_{ij} = \alpha a_{ij}$ для всех i, j.

Для этих операций справедливы следующие свойства:

1. $A + B = B + A$;
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$;
3. $\exists 0$, что $A + 0 = A$, где 0 – нулевая матрица;
4. для $\forall A$ $\exists(-A)$, что $A + (-A) = 0$;
5. $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$;
6. $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$;
7. $\alpha \cdot (\beta A) = (\alpha \cdot \beta) A$.

Произведением матриц $A = (a_{ij})$ размером $m \times p$ и $B = (b_{ij})$ размером $p \times n$ называется матрица $C = (c_{ij})$ размером $m \times n$, элементы которой определяются равенством

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{ip} \cdot b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj}, \ i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n}.$$

Таким образом, каждый элемент матрицы $C = A \cdot B$, расположенный в i-й строке и j-м столбце, равен сумме произведений соответствующих элементов i-й строки матрицы A и элементов j-го столбца матрицы B.

Замечание. Произведение матриц A и B существует только при условии, что число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

Отметим *основные свойства произведения матриц* (считаем, что все приведенные произведения имеют смысл):

1. в общем случае отсутствует коммутативность $A \cdot B \neq B \cdot A$;
2. $A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$, где 0 – нулевая матрица;
3. $A \cdot E = E \cdot A = A$, где E – единичная матрица;
4. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$;
5. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$;
6. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$;
7. если A и B - квадратные матрицы одного порядка, то $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

Перестановочными называются матрицы A и B, для которых $A \cdot B = B \cdot A$.

Рассмотрим квадратную матрицу A. Матрица B такая, что $A \cdot B = B \cdot A = E$, называется *обратной к матрице* A и обозначается A^{-1}, т.е. $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Теорема: Для того чтобы матрица A имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы она была невырожденной (т.е. $\det A \neq 0$).

Для любой невырожденной матрицы $A = (a_{ij})$ существует единственная обратная матрица. Она имеет вид:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} в A, причём элементами i-й строки матрицы A^{-1} являются алгебраические дополнения элементов i-го столбца матрицы $A = (a_{ij})$.

Пример 1. Найти произведение матриц: $A \cdot B$ и $B \cdot A$ (если они существуют)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем произведение матриц $A \cdot B$. Оно существует, так как количество столбцов матрицы A (равно 4) совпадает с количеством строк матрицы B (равно 4). Матрица $C = A \cdot B$ будет состоять из двух строк и двух столбцов.

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)\cdot 1 + 3\cdot 0 + 4\cdot(-1) + 0\cdot 4 & (-2)\cdot 2 + 3\cdot(-1) + 4\cdot 0 + 0\cdot 0 \\ 5\cdot 1 + (-1)\cdot 0 + 2\cdot(-1) + 3\cdot 4 & 5\cdot 2 + (-1)\cdot(-1) + 2\cdot 0 + 3\cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & -7 \\ 15 & 11 \end{pmatrix}.$$

Найдем произведение матриц $B \cdot A$. Оно существует, так как количество столбцов матрицы B (равно 2) совпадает с количеством строк матрицы A (равно 2). Матрица $D = B \cdot A$ будет состоять из четырёх строк и четырёх столбцов.

$$D=\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\\-1&0\\4&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&3&4&0\\5&-1&2&3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot(-2)+2\cdot5 & 1\cdot3+2\cdot(-1) & 1\cdot4+2\cdot2 & 1\cdot0+2\cdot3\\ 0\cdot(-2)+(-1)\cdot5 & 0\cdot3+(-1)\cdot(-1) & 0\cdot4+(-1)\cdot2 & 0\cdot0+(-1)\cdot3\\ (-1)\cdot(-2)+0\cdot5 & (-1)\cdot3+0\cdot(-1) & (-1)\cdot4+0\cdot2 & (-1)\cdot0+0\cdot3\\ 4\cdot(-2)+0\cdot5 & 4\cdot3+0\cdot(-1) & 4\cdot4+0\cdot2 & 4\cdot0+0\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&1&8&6\\-5&1&-2&-3\\2&-3&-4&0\\-8&12&16&0\end{pmatrix}.$$

Пример 2. Найти матрицу, обратную матрице $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&3&2\\1&3&-1\end{pmatrix}$.

Решение.

1-й способ: Находим определитель матрицы A: $\Delta=\det A=-3$. Так как $\Delta\neq0$, то обратная матрица существует.

Находим алгебраические дополнения всех элементов матрицы A. Напоминаем, что алгебраическое дополнение элемента a_{ij} находится по формуле $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

Для элементов матрицы A получаем

$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}3&2\\3&-1\end{vmatrix}=-9$ $A_{21}=(-1)^{3}\cdot\begin{vmatrix}0&1\\3&-1\end{vmatrix}=3$ $A_{31}=(-1)^{4}\cdot\begin{vmatrix}0&1\\3&2\end{vmatrix}=-3$

$A_{12}=(-1)^{3}\cdot\begin{vmatrix}0&2\\1&-1\end{vmatrix}=2$ $A_{22}=(-1)^{4}\cdot\begin{vmatrix}0&1\\1&-1\end{vmatrix}=-1$ $A_{32}=(-1)^{5}\cdot\begin{vmatrix}0&1\\0&2\end{vmatrix}=0$

$A_{13}=(-1)^{4}\cdot\begin{vmatrix}0&3\\1&3\end{vmatrix}=-3$ $A_{23}=(-1)^{5}\cdot\begin{vmatrix}0&0\\1&3\end{vmatrix}=0$ $A_{33}=(-1)^{6}\cdot\begin{vmatrix}0&0\\0&3\end{vmatrix}=0.$

Составим обратную матрицу:

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\cdot\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=-\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-9&3&-3\\2&-1&0\\-3&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-1&1\\-2/3&1/3&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix}3&-1&1\\-2/3&1/3&0\\1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&1\\0&3&2\\1&3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

2-й способ: Найдём A^{-1} с помощью элементарных преобразований над строками матрицы:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&0&1&1&0&0\\0&3&2&0&1&0\\1&3&-1&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&-1&0&0&1\\0&3&2&0&1&0\\0&0&1&1&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-3&0&-1&1\\0&3&2&0&1&0\\0&0&1&1&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&3&-1&1\\0&3&0&-2&1&0\\0&0&1&1&0&0\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&3&-1&1\\0&1&0&-2/3&1/3&0\\0&0&1&1&0&0\end{array}\right).$$

Полученная справа матрица является обратной к данной.

Выражения $A \cdot X \cdot B = C$, $A \cdot X = B$, $X \cdot A = B$, где A, B, C – матрицы и X – неизвестная матрица, называются *матричными уравнениями*.

Если матрица A невырожденная, то уравнения $A \cdot X = B$, $X \cdot A = B$ имеют единственное решение, соответственно $X = A^{-1} \cdot B$ и $X = B \cdot A^{-1}$. Если матрица A – вырожденная, то элементы матрицы X принимаем за неизвестные, вычисляем произведение матриц и приравниваем соответствующие элементы матриц левой и правой части уравнения.

Пример 3. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Так как $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, то матричное уравнение имеет единственное решение:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Находим обратную матрицу для матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

$A_{11} = 2$, $A_{12} = -3$, $A_{21} = -1$, $A_{22} = 2$,

поэтому

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Получаем ответ: $X = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$.

Пример 4. Найти все решения уравнения $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Для матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ обратная матрица не существует, так как ее определитель равен 0. Запишем искомую матрицу в виде $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$. Тогда данное уравнение примет вид

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_3 & 2x_2 + 3x_4 \\ 4x_1 + 6x_3 & 4x_2 + 6x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Откуда получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_3 = 1, \\ 4x_1 + 6x_3 = 2, \\ 2x_2 + 3x_4 = 2, \\ 4x_2 + 6x_4 = 4. \end{cases}$$

Для нахождения ее решения достаточно найти решение системы

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_3 = 1, \\ 2x_2 + 3x_4 = 2. \end{cases}$$

Эта система имеет бесчисленное множество решений:

$x_1 = \frac{1}{2}(1 - 3x_3),\ x_2 = \frac{1}{2}(2 - 3x_4)$, где x_3, x_4 – любые числа.

Ответ: Данному уравнению удовлетворяет бесчисленное множество матриц вида

$$\begin{pmatrix} \frac{(1-3x_3)}{2} & \frac{(2-3x_4)}{2} \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

где x_3, x_4 – любые числа.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Если матрицы A и B можно умножать, то следует ли из этого, что их можно складывать? Если матрицы A и B можно складывать, то следует ли из этого, что их можно умножать?
2. Можно ли умножить квадратную матрицу на неквадратную? Может ли произведение неквадратных матриц быть квадратной матрицей?
3. Может ли при умножении ненулевых матриц получиться нулевая матрица?
4. Могут ли совпадать A и A^T? Как выглядит матрица $\left(A^T\right)^T$?
5. Верно ли равенство $(A+B)^T = A^T + B^T$?
6. Верно ли равенство $(A+E)(A-E) = A^2 - E^2$?
7. Верно ли равенство $(A+E)^2 = A^2 + 2A + E$?
8. Верно ли равенство $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$?
9. Верно ли равенство $(A+B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2$?
10. Могут ли быть эквивалентными матрицы с различным количеством строк? Столбцов?
11. Обязательно ли существует произведение $B \cdot A$, если $A \cdot B = E$?
12. Как изменится произведение матриц A и B, если переставить i-ю и j-ю строки матрицы A?
13. Как изменится произведение матриц A и B, если к элементам i-й строки матрицы A прибавить элементы j-й строки, умноженные на число c?
14. Как изменится произведение матриц A и B, если переставить i-й и j-й столбцы матрицы B?

ВАРИАНТЫ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

ВАРИАНТ 1

1. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
2. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.
3. Найти все матрицы второго порядка, произведение которых на транспонированную матрицу равно единичной матрице.
4. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера, матричным методом и методом Гаусса: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8. \end{cases}$

ВАРИАНТ 2

1. Решить матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
2. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Найти все решения матричного уравнения $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 59 & 28 \\ 42 & 24 \end{pmatrix}$.
4. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера, матричным методом и методом Гаусса: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5. \end{cases}$

ВАРИАНТ 3

1. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Найти все матрицы, перестановочные с матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера, матричным методом и методом Гаусса: $\begin{cases} x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5, \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -4, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 12, \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5. \end{cases}$

ВАРИАНТ 4

1. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.
2. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Найти все решения матричного уравнения $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$.
4. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера, матричным методом и методом Гаусса: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$

ВАРИАНТ 5

1. Решить матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} -7 & -11 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.
2. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Найти все решения матричного уравнения $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.
4. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера, матричным методом и методом Гаусса: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -4, \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 10x_4 = -12, \\ x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 20x_4 = -25. \end{cases}$

ВАРИАНТ 6

1. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Найти все решения матричного уравнения $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}$.

4. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера, матричным методом и методом Гаусса: $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 12, \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 4, \\ 7x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 16. \end{cases}$

ВАРИАНТ 7

1. Решить матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} -11 & 17 \\ 8 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 10 & -6 \end{pmatrix}$.

2. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 8 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

3. Найти все матрицы, перестановочные с матрицей $\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.

4. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера, матричным методом и методом Гаусса: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 2x_4 = -1. \end{cases}$

ВАРИАНТ 8

1. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Найти все решения матричного уравнения $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.

4. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера, матричным методом и методом Гаусса: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 15, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -7, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -7. \end{cases}$

ВАРИАНТ 9

1. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
2. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Найти все матрицы второго порядка, квадраты которых равны единичной матрице.
4. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера, матричным методом и методом Гаусса: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 13, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 10, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$

ВАРИАНТ 10

1. Решить матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.
2. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -5 & 7 & 4 \\ 4 & -6 & -10 \end{pmatrix}$.
3. Найти все матрицы, перестановочные с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
4. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера, матричным методом и методом Гаусса: $\begin{cases} x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -9, \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -6, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 10, \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_4 = -3. \end{cases}$

ВАРИАНТ 11

1. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.
2. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Найти все матрицы, перестановочные с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
4. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера, матричным методом и методом Гаусса: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 7, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 11. \end{cases}$

ВАРИАНТ 12

1. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Найти все матрицы второго порядка, квадраты которых равны нулевой матрице.
4. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера, матричным методом и методом Гаусса: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 10x_4 = 3, \\ x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 20x_4 = 2. \end{cases}$

ВАРИАНТ 13

1. Решить матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
2. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Найти все матрицы, перестановочные с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
4. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера, матричным методом и методом Гаусса: $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 20, \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 12, \\ 7x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$

Раздел 4. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§1. Определение линейного пространства

Пусть L – некоторое множество, элементы которого называются векторами, причём любой упорядоченной паре векторов $x, y \in L$ сопоставлен единственный вектор $z \in L$, который называется *суммой векторов* x и y и обозначается $x + y$. Пусть также P – некоторое поле, элементы которого называются *скалярами*, и для любого скаляра $k \in P$ и любого вектора $x \in L$ определён единственный вектор $d \in L$, который называется *произведением скаляра* k *на вектор* x, или произведением вектора x на скаляр k, и обозначается kx. Множество L называется *линейным пространством над полем* P, если выполняются следующие аксиомы:

1. Для любых элементов $x, y \in L$ имеет место равенство $x + y = y + x$ (*коммутативный закон сложения*);
2. Для любых элементов $x, y \in L$ имеет место равенство $(x + y) + z = x + (y + z)$ (*ассоциативный закон сложения элементов из* L);
3. В множестве L есть такой элемент (обозначим его символом 0 и назовем нулевым элементом), что для любого элемента $x \in L$ имеет место равенство $x + 0 = x$ (*особая роль нулевого элемента*);
4. Для любого элемента $x \in L$ в этом множестве есть элемент (обозначим его символом $-x$ и назовем его *противоположным элементом* x), при котором $x + (-x) = 0$;
5. Для любого элемента $x \in L$ и числа $1 \in P$ имеет место равенство $1 \cdot x = x$ (*особая роль числа 1*).
6. Для любых чисел $\alpha, \beta \in P$ и любого элемента $x \in L$ имеет место равенство $(\alpha \cdot \beta)x = \alpha(\beta x)$ (*ассоциативный закон умножения элементов поля* P).
7. Для любых чисел $\alpha, \beta \in P$ и любого элемента $x \in L$ имеет место равенство $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ (*дистрибутивный закон относительно суммы элементов поля* P).
8. Для любого числа $\alpha \in P$ и любых элементов $x, y \in L$ имеет место равенство $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$ (*дистрибутивный закон относительно суммы элементов из* L).

Чаще всего в качестве поля P рассматривают поле действительных чисел R (и тогда L называют *вещественным векторным пространством*, или просто *векторным пространством*), или поле C комплексных чисел (в этом случае L – *комплексное векторное пространство*). Независимо от природы линейного пространства всякий его элемент называют *вектором*.

Приведем примеры линейных пространств. Если для множеств не указаны в тексте правила сложения элементов и умножения элементов на число, то их следует задавать так, как это было сделано в изучаемых ранее разделах курсов «Алгебра» и «Аналитическая геометрия», где эти множества были определены и изучены.

Пример 1. Является ли множество L всех векторов в трёхмерном пространстве действительным линейным пространством?

Решение. Если векторы $\bar{x}, \bar{y} \in L$, то вектор суммы $\bar{x} + \bar{y} \in L$ определён для взятых $\bar{x}$ и $\bar{y}$ однозначно.

Если α – действительное число, вектор $\bar{x} \in L$, то $\alpha \cdot \bar{x} \in L$. Таким образом, требования замкнутости операций сложения элементов из множества L и умножения элементов из множества L на действительное число из поля P определения линейного пространства для множества L выполняются.

Выполнение всех аксиом, кроме пятой, было установлено в курсе «Аналитическая геометрия». Рассмотрим вектор $1 \cdot \bar{x}$. Согласно определению умножения вектора на число, вектор $1 \cdot \bar{x}$ сонаправлен с вектором $\bar{x}$. Его длина $|1 \cdot \bar{x}| = |1| \cdot |\bar{x}| = 1 \cdot |\bar{x}| = |\bar{x}|$ равна длине вектора

$\bar{x}$. Следовательно, векторы $1\cdot\bar{x}$ и $\bar{x}$ равны, т.е. $1\cdot\bar{x}=\bar{x}$, следовательно, пятая аксиома имеет место для векторов множества L .

Итак, для множества L и поля P действительных чисел выполняются все требования определения линейного пространства, поэтому L является действительным линейным пространством.

Пример 2. Пусть A^n – множество всех упорядоченных систем n произвольных действительных чисел $(x_1, x_2, .., x_n)=x$, т.е $A^n=\{(x_1,x_2,...,x_n)|x_i\in R,\ i=\overline{1,n}\}$. Два элемента из A^n : $x=(x_1, x_2, .., x_n)$, $y=(y_1, y_2, .., y_n)$ - называются *равными*, если $x_i=y_i$, $i=\overline{1,n}$. Числа $x_1,..,x_n$ называют компонентами x. Суммой элементов x и y назовем элемент $(x_1+y_1,..,x_n+y_n)$ и обозначим его $x+y$. Произведением действительного числа α на элемент x назовем элемент $(\alpha x_1,..,\alpha x_n)$ и обозначим его αx. Покажем, что A^n является действительным линейным пространством относительно введённых операций.

Решение. Согласно условию примера требования замкнутости операций сложения элементов множества A^n и умножения элементов множества A^n на действительное число из поля P при определении линейного пространства для множества A^n выполняются.

Осталось проверить выполнение восьми аксиом.

1. Пусть $x=(x_1,..,x_n)$, $y=(y_1,..,y_n)$. Тогда $x+y=(x_1+y_1,..,x_n+y_n)$ и $y+x=(y_1+x_1,..,y_n+x_n)$. Так как сложение действительных чисел подчиняется закону коммутативности поэтому $x_i+y_i=y_i+x_i$, $i=\overline{1,n}$, значит $x+y=y+x$.
2. Выполнение второй аксиомы проверяется аналогично с использованием ассоциативного закона для сложения действительных чисел.
3. Роль нулевого элемента в A^n играет элемент $0=(0,..,0)$. Действительно, $x+0=(x_1+0,..,x_n+0)=(x_1,..,x_n)=x$.
4. Для элемента $x=(x_1,..,x_n)$ противоположным элементом является $-x=(-x_1,..,-x_n)$, так как $x+(-x)=(x_1+(-x_1),..,x_n+(-x_n))=(0,..,0)=0$.
5. Поскольку $1\cdot x=(1\cdot x_1,..,1\cdot x_n)=(x_1,..,x_n)=x$, то $1\cdot x=x$.
6. Если α,β – любые действительные числа, то
   $(\alpha+\beta)\cdot x=((\alpha+\beta)\cdot x_1,..,(\alpha+\beta)\cdot x_n)=(\alpha\cdot x_1+\beta\cdot x_1,..,\alpha\cdot x_n+\beta\cdot x_n)=$
   $(\alpha\cdot x_1,..,\alpha\cdot x_n)+(\beta\cdot x_1,..,\beta\cdot x_n)=\alpha\cdot(x_1,..,x_n)+\beta\cdot(x_1,..,x_n)=\alpha\cdot x+\beta\cdot x.$
7. Пусть α,β – любые действительные числа, тогда
   $(\alpha\beta)\cdot x=((\alpha\beta)\cdot x_1,..,(\alpha\beta)\cdot x_n)=(\alpha(\beta\cdot x_1),..,\alpha(\beta\cdot x_n))=\alpha(\beta\cdot x_1,..,\beta\cdot x_n)=\alpha(\beta\cdot x).$
   Следовательно, $(\alpha\beta)\cdot x=\alpha(\beta\cdot x)$.
8. Если α – любое действительное число, то
   $\alpha(x+y)=\alpha(x_1+y_1,..,x_n+y_n)=(\alpha(x_1+y_1),..,\alpha(x_1+y_1))=(\alpha x_1+\alpha y_1,..,\alpha x_n+\alpha y_n)=$
   $=(\alpha x_1,..,\alpha x_n)+(\alpha y_1,..,\alpha y_n)=\alpha(x_1,..,x_n)+\alpha(y_1,..,y_n)=\alpha x+\alpha y,$
   т.е. $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$.

Таким образом, для множества A^n над полем P действительных чисел выполняются все требования определения, поэтому A^n является линейным действительным пространством. A^n называют *арифметическим n-мерным пространством*.

Пример 3. Является ли действительным линейным пространством множество L всех векторов из A^n, компоненты которых удовлетворяют условию $x_1+..+x_n=1$, если операции сложения векторов и умножения векторов на число определить так же, как и в примере 2?

Решение. Пусть $x=(x_1,..,x_n)$, $y=(y_1,..,y_n)$ – любые два вектора из L. Тогда $x_1+..+x_n=1$, $y_1+..+y_n=1$. Рассмотрим вектор $x+y=(x_1+y_1,..,x_n+y_n)$. Так как $(x_1+y_1)+...+(x_n+y_n)=(x_1+x_2+\ldots+x_n)+(y_1+y_2+\ldots+y_n)=2\neq 1$, то вектор $x+y\notin L$. Таким образом, для множества L не выполняется требование замкнутости операции сложения элементов множества L при определении линейного пространства, поэтому это множество не является линейным пространством.

Пример 4. Проверить, является ли линейным действительным пространством множество M всех векторов плоскости, образующих с данным ненулевым вектором $\bar{a}$ угол φ, $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$.

Решение. $\bar{x}\in M$ образует угол φ с вектором $\bar{a}$, а вектор $-\bar{x}$ - угол $\pi-\varphi\neq\varphi$. Множество M не является линейным пространством, так как $-\bar{x}\notin M$.

Пример 5. В множестве R^+ положительных действительных чисел определены следующие операции:

а) $x\oplus y=xy$;

б) $\alpha\cdot x=x^{\alpha}$.

Показать, что множество R^+ относительно указанных операций является действительным линейным пространством.

Решение. В условии задачи определены операции сложения элементов множества R^+ и умножения элементов множества R^+ на число из поля P. Проверим выполнение восьми аксиом:

1. $x\oplus y=xy$, $y\oplus x=yx$. Так как $xy=yx$, поскольку $x,y\in R^+$, то $x\oplus y=y\oplus x$.
2. $(x\oplus y)\oplus z=(xy)z$, $x\oplus(y\oplus z)=x\oplus(yz)=x(yz)$. Но $(xy)z=x(yz)$, поскольку $x,y,z\in R^+$, поэтому $(x\oplus y)\oplus z=x\oplus(y\oplus z)$.
3. $1\oplus x=1\cdot x=x$, т.е. нулевым элементом является число 1.
4. $x\oplus x^{-1}=xx^{-1}=1$, поэтому число x^{-1} играет роль противоположного элемента для x. Так как R^+ не содержит числа 0, то всякий элемент из R^+ имеет противоположный ему элемент.
5. $\alpha\cdot(x\oplus y)=\alpha(xy)=(xy)^{\alpha}=x^{\alpha}y^{\alpha}=\alpha x\oplus\alpha y$.
6. $(\lambda+\mu)\cdot x=x^{\lambda+\mu}=x^{\lambda}\cdot x^{\mu}=(\lambda\cdot x)\oplus(\mu\cdot x)$.
7. $\lambda\cdot(\mu\cdot x)=\lambda\cdot(x^{\mu})=(x^{\mu})^{\lambda}=x^{\lambda\mu}=(\lambda\mu)x$.
8. $1\cdot x=x^1=x$.

Таким образом, все требования определения линейного пространства для R+ выполнены, поэтому R^+ является действительным линейным пространством.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Проверить, является ли следующее множество векторов плоскости действительным линейным пространством:
   a) множество R всех векторов плоскости;
   b) множество S всех радиус-векторов точек первой четверти прямоугольной декартовой системы координат;
   c) множество T всех радиус-векторов точек плоскости, составляющих данную прямую;
   d) множество всех векторов плоскости, за исключением векторов, параллельных данной прямой.
2. Доказать, что множество S матриц порядка n с действительными элементами составляет действительное линейное пространство.
3. Является ли множество M_n симметрических матриц порядка n с действительными элементами действительным линейным пространством?
4. Является ли множество $M_{m\times n}$ всех матриц размера $m\times n$ с элементами из R относительно обычных операций сложения матриц и умножения матриц на число действительным линейным пространством?
5. Является ли множество чисел из отрезка $[0;1]$ числовой прямой относительно обычных операций сложения и умножения чисел линейным пространством над полем R?
6. Является ли множество векторов плоскости (пространства) с рациональными координатами относительно обычных операций сложения и умножения векторов на число линейным пространством над полем R?
7. Является ли множество монотонно возрастающих на числовой оси функций относительно обычных операций сложения функций и умножения функции на число линейным пространством над полем R?
8. Является ли линейным пространством над полем Q рациональных чисел множество чисел вида $a+b\sqrt{2}$, где a и b – рациональные числа?
9. Является ли линейным пространством над R множество отрицательных действительных чисел?
10. Является ли линейным пространством над R множество векторов плоскости, исходящих из начала координат, с концами на прямой $y=kx$?
11. Является ли линейным пространством над R множество векторов плоскости, исходящих из начала координат, с концами на прямой $y=kx+b$, где $b\neq 0$?
12. Является ли линейным пространством над R множество многочленов степени $\leq n$ (включая нулевой многочлен) с действительными коэффициентами?
13. Является ли линейным пространством над R множество многочленов степени n с действительными коэффициентами?

§2. Линейная комбинация системы векторов. Линейная оболочка системы векторов. Эквивалентные системы векторов

Системой векторов линейного пространства L называется любая совокупность его векторов.

Пусть $a_1,...,a_n$, где $a_n \in L, i=\overline{1,n}$ – система векторов. Вектор, который можно представить в виде $\lambda_1 a_1 + ... + \lambda_n a_n$, называется *линейной комбинацией векторов* $a_1,...,a_n$. Числа $\lambda_1,...,\lambda_n$ называются *коэффициентами этой линейной комбинации*.

Линейную комбинацию $\lambda_1 a_1 + ... + \lambda_n a_n$ назовем *нетривиальной*, если среди $\lambda_i, i=\overline{1,n}$ существует хотя бы одно отличное от нуля. В противном случае линейную комбинацию назовем *тривиальной*. Очевидно, что нетривиальных комбинаций для одной и той же системы векторов существует бесконечное множество.

Пусть b – некоторый вектор пространства L. Говорят, что b является линейной комбинацией системы векторов $a_1,...,a_n$, если найдутся числа $\lambda_1,...,\lambda_n$, для которых $b = \lambda_1 a_1 + ... + \lambda_n a_n$. Множество всех линейных комбинаций данной системы векторов $a_1,...,a_n$ называется линейной оболочкой этой системы и обозначается $L(a_1,...,a_n)$ или $L = < a_1,...,a_n >$. Таким образом, $b \in < a_1,...,a_n > \Leftrightarrow b = \lambda_1 a_1 + ... + \lambda_n a_n$ для некоторого набора $\lambda_1,...,\lambda_n$.

Две системы векторов называются *эквивалентными*, если любой вектор первой системы линейно выражается через векторы второй системы, а любой вектор второй системы линейно выражается через векторы первой системы. Иными словами, линейные оболочки этих систем векторов должны совпадать.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Даны векторы в A^4: $a_1 = (-1,\ 0,\ 1,\ 0)$, $a_2 = (-3,\ 2,\ 0,\ 1)$, $a_3 = (2,\ -2,\ 1,\ -1)$, $a_4 = (0,\ 2,\ -3,\ 1)$.
   a) Вычислить линейные комбинации векторов:
      - $b_1 = 3a_1 + a_2 + 3a_3 + 2a_4$;
      - $b_2 = a_1 + a_2 + 2a_3 + a_4$;
      - $b_3 = a_1 - a_2 - a_3 + a_4$.
   b) Представить вектор в виде линейной комбинации других векторов:
      - a_4 через a_1, a_2, a_3;
      - a_3 через a_1, a_2, a_4.;
      - a_4 через a_1, a_2;
      - a_3 через a_1, a_2.
   c) Записать следующие условия в виде систем линейных уравнений относительно переменных $\lambda_1,...,\lambda_4$ и решить их:
      - $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \lambda_4 a_4 = 0$;
      - $\lambda_3 a_3 + \lambda_4 a_4 = a_1$;
      - $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = (-15, 8, 3, 4)$;
      - $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0$.
2. Описать линейные оболочки следующих систем векторов в пространстве A^5:
   a) (1, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 1);
   b) (0, 1, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1, 1), (0, 0, 0, 1, 2).

§3. Линейная зависимость и линейная независимость системы векторов

Система векторов $a_1, ..., a_n$ называется *линейно зависимой*, если существуют такие числа $\lambda_1, ..., \lambda_n$, среди которых хотя бы одно отлично от нуля, и выполняется равенство $\lambda_1 a_1 + ... + \lambda_n a_n = 0$.

Если же это равенство выполняется только в том случае, когда все $\lambda_i = 0, i = \overline{1, n}$, то система векторов $a_1, ..., a_n$ называется *линейно независимой*.

Теорема. Система векторов $a_1,...,a_n$, $n > 2$ будет линейно зависимой тогда и только тогда, когда хотя бы один из ее векторов является линейной комбинацией остальных.

Пример 1. Многочлен $f(x) = a_0 x^n + .. + a_n$ является линейной комбинацией многочленов $x^n, x^{n-1}, .., 1$ с коэффициентами $a_0, a_1, ..., a_n$. Многочлены $x^n, x^{n-1}, .., 1$ составляют линейно независимую систему, так как многочлен $f(x)$ является нулевым только в том случае, когда $a_0 = a_1 = ... = a_n = 0$.

Пример 2. Система матриц $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ является линейно независимой, так как линейная комбинация $\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix}$ равна нулевой матрице только в том случае, когда $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$.

Пример 3. Даны векторы $a = (1,2,3)$, $b = (1,-1,6)$, $c = (-2,-3,0)$. Выяснить, будет ли система векторов a, b, c линейно зависимой.

Решение. Составим линейную комбинацию данных векторов $\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c$ и приравняем ее к нулю, т.е.

$$\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = 0.$$

Распишем последнее равенство в координатах

$$\lambda_1(1,\ 2,\ 3) + \lambda_2(1,\ -1,\ 6) + \lambda_3(\ -2,\ -3,\ 0) = (0,\ 0,\ 0)$$

или

$$(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3,\ 2\lambda_1 - \lambda_2 - 3\lambda_3,\ 3\lambda_1 + 6\lambda_2 + 0\lambda_3) = (0,\ 0,\ 0).$$

Приравнивая одноименные координаты равных векторов, получаем

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0, \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 - 3\lambda_3 = 0, \\ 3\lambda_1 + 6\lambda_2 + 0\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Полученную систему уравнений решим методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{array}\right).$$

Окончательно получим

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0, \\ -3\lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ 7\lambda_3 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = 0, \\ \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Система имеет единственное тривиальное решение, поэтому линейная комбинация данных векторов равна нулю только в случае, когда все коэффициенты равны нулю. Поэтому данная система векторов линейно независима.

Пример 4. Векторы a, b, c линейно независимы. Какими будут системы векторов

a) $a, a+b, a+b+c$;

b) $a-b, a-c, b-c$?

Решение.

a) Составим линейную комбинацию и приравняем её к нулю:

$$k_1 a + k_2(a+b) + k_3(a+b+c) = 0 .$$

Используя свойства операций с векторами в линейном пространстве, перепишем последнее равенство в виде

$$(k_1+k_2+k_3)a + (k_2+k_3)b + k_3 c = 0. \qquad (*)$$

Так как векторы a, b, c линейно независимы, коэффициенты при a, b, c должны быть равны нулю, т.е.

$$\begin{cases} k_1+k_2+k_3=0, \\ k_2+k_3=0, \\ k_3=0. \end{cases}$$

Полученная система уравнений имеет единственное тривиальное решение: $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. Так как равенство (*) выполняется только при $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, то векторы $a, a+b, a+b+c$ – линейно независимы.

b) Составим равенство

$$\lambda_1(a-b) + \lambda_2(a-c) + \lambda_3(b-c) = 0$$

или

$$(\lambda_1+\lambda_2)a + (-\lambda_1+\lambda_3)b + (-\lambda_2-\lambda_3)c = 0. \qquad (**)$$

Применяя аналогичные рассуждения, получим

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2=0, \\ -\lambda_1+\lambda_3=0, \\ -\lambda_2-\lambda_3=0. \end{cases}$$

Решая систему уравнений методом Гаусса, получим

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

или

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2=0, \\ \lambda_2+\lambda_3=0. \end{cases}$$

Последняя система имеет бесконечное множество решений: $\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda_3$. Среди этого множества решений можно выделить, например, такое решение: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1$. Таким образом, существует ненулевой набор коэффициентов, для которого выполняется равенство (**). Следовательно, система векторов $a-b, a-c, b-c$ – линейно зависима.

Пример 5. Система векторов $a_1, ..., a_n$ линейно независима, а система векторов $a_1, ..., a_n, b$ линейно зависима. Доказать, что вектор b является линейной комбинацией векторов $a_1, ..., a_n$.

Решение. Так как система векторов $a_1, ..., a_n, b$ линейно зависима, то найдутся такие числа $\lambda_1,..,\lambda_n,\mu$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, и имеет место равенство

$$\lambda_1 a_1 + .. + \lambda_n a_n + \mu b = 0. \qquad (***)$$

В равенстве **(***)** $\mu \neq 0$. Действительно, при $\mu = 0$ система $a_1, ..., a_n$ была бы линейно зависимой.

Из соотношения **(***)** получаем $\mu b = -\lambda_1 a_1 - .. - \lambda_n a_n$ или $b = -\frac{\lambda_1}{\mu} a_1 - .. - \frac{\lambda_n}{\mu} a_n$.

Обозначим $-\frac{\lambda_1}{\mu} = \alpha_1, \ldots, -\frac{\lambda_n}{\mu} = \alpha_n$.

Получим $b = \alpha_1 a_1 + .. + \alpha_n a_n$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Система, содержащая нулевой вектор, линейно зависима.
2. Система, состоящая из одного вектора a, линейно зависима тогда и только тогда, когда, $a = 0$.
3. Система, состоящая из двух векторов, линейно зависима тогда и только тогда, когда, векторы пропорциональны (т.е. один из них получается из другого умножением на число).
4. Если к линейно зависимой системе добавить вектор, то получится линейно зависимая система.
5. Если из линейно независимой системы удалить вектор, то полученная система векторов линейна независима.
6. Если система S линейно независима, но становится линейно зависимой при добавлении вектора a, то вектор a линейно выражается через векторы системы S.
7. Если векторы $a_1,...,a_k$ линейно независимы и вектор b не является их линейной комбинацией, то система векторов $a_1,...,a_k,b$ линейно независима.
8. Доказать, что в пространстве A^n линейно независимы следующие системы векторов:
   a) $e_1 = (1,\ 0,\ 0,...,\ 0)$, $e_2 = (0,\ 1,\ 0,...,\ 0)$, ..., $e_n = (0,\ 0,\ 0,...,\ 1)$;
   b) $f_1 = (1,\ 1,\ 1,...,\ 1)$, $f_2 = (0,\ 1,\ 1,...,\ 1)$, …, $f_n = (0,\ 0,\ 0,...,\ 1)$.
9. Установить линейную зависимость или независимость следующих систем векторов в соответствующих векторных пространствах:
   a) система векторов $a_1 = (2,\ -9,\ 1)$, $a_2 = (2,\ -2,\ -3)$, $a_3 = (-1,\ -2,\ 3)$ трёхмерного пространства;
   b) система векторов $a_1 = (1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0)$, $a_2 = (1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1)$, $a_3 = (1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0)$ арифметического пространства A^5;
   c) система матриц $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ в пространстве матриц второго порядка.
10. Пусть система векторов a, b, c векторного пространства линейно независима. Докажите линейную независимость следующих систем векторов:
    a) $a+b$, b, c;
    b) $a+\lambda b$, b, c, где λ – произвольное число;
    c) $a+b$, $a+c$, $b+c$.
11. Пусть a, b, c – три вектора на плоскости, из которых можно сложить треугольник. Будут ли эти векторы линейно зависимы?

12. Даны два вектора: $a_1 = (1,\ 2,\ 3,\ 4)$, $a_2 = (0,\ 0,\ 0,\ 1)$. Подобрать ещё два четырёхмерных вектора a_3 и a_4 так, чтобы система a_1, a_2, a_3, a_4 была линейно независимой.

§4. Базис системы векторов. Размерность линейного пространства. Ранг матрицы. Ранг системы векторов

Пусть S – некоторая система векторов линейного пространства. *Базисом* этой системы называется такая её линейно независимая подсистема S_0, в которой всякий вектор из S линейно выражается через векторы системы S_0.

Эквивалентное определение: *базис системы векторов* S – это такая линейно независимая подсистема S_0 системы S, которая становится линейно зависимой при добавлении любого вектора из S. Число векторов (какого-либо) базиса системы векторов называется *рангом* этой системы.

Утверждения:

1) Пусть S – некоторая система векторов и S_0 – её линейно независимая подсистема. Тогда S_0 можно дополнить до базиса системы S.
2) Любое линейное пространство имеет базис.
3) Пусть $a_1,...,a_k$ и $b_1,...,b_s$ – два базиса одной и той же системы векторов. Тогда $k = s$.

Если в линейном пространстве L существует базис из конечного числа векторов, то пространство L называют *конечномерным*, а число векторов базиса - *размерностью пространства* L (и обозначают $\dim L$). Если L – линейное пространство над полем P, то его нулевой вектор сам составляет линейное пространство над полем P. Это линейное пространство обозначается O и называется *нулевым линейным пространством*. Так как нулевое линейное пространство состоит из одного нулевого вектора, в нем нет линейно независимых векторов и нет максимально линейно независимой системы векторов. Нулевое линейное пространство называется *линейным пространством размерности 0*.

Утверждения:

Пусть L – линейное пространство размерности *n*. Тогда

1) Если система векторов $S \subset L$ линейно независима и состоит из *n* векторов, то S – базис пространства L.
2) Любая система векторов $S \subset L$, состоящая более чем из *n* векторов, линейно зависима.
3) $\dim A^n = n$ при любом $n \geq 1$.
4) Элементарные преобразования системы векторов не изменяют ранга этой системы.
5) Всякая линейно независимая система векторов линейного пространства L, $n \geq 1$, содержится в некотором базисе L.
6) Если $a_1,...,a_n$ – базис линейного пространства L, то любой вектор $b \in L$ можно разложить по базису, т.е. представить в виде $b = \lambda_1 a_1 + .. + \lambda_n a_n$. Это разложение для b единственно.

   Коэффициенты $\lambda_1,...,\lambda_n$ называются *координатами вектора* b в базисе $a_1,...,a_n$.

Рангом матрицы называют ранг системы ее столбцов. Ранг матрицы соответствует наивысшему порядку отличных от нуля миноров этой матрицы. Такие миноры называют *базисными*. Столбцы матрицы, на которых располагается хотя бы один базисный минор этой матрицы, *линейно независимые*. Их называют *базисными столбцами* матрицы. Если ранг матрицы равен числу ее столбцов, то все столбцы матрицы линейно независимые. Ранг матрицы можно определять как ранг системы ее строк. Ранг матрицы по строкам совпадает с ее рангом по столбцам. Базисные строки матрицы определяются так же, как ее базисные столбцы. Для вычисления ранга матрицы можно использовать *метод окаймления*, который состоит в следующем: находят какой-либо минор первого или второго порядка, отличный от нуля, и вычисляют окаймляющие его миноры следующего порядка. Если среди них найдется отличный от нуля, то окаймляют его. Пусть уже найден таким способом минор r -го порядка, отличный от нуля. Тогда вычисляют его окаймляющие миноры $(r+1)$ -го порядка. Если все они окажутся равными нулю, то ранг матрицы равен r.

Для определения ранга системы векторов $a_1, a_2, ..., a_s$ следует эти векторы представить в виде столбцов (или строк) матрицы и вычислить её ранг. Это и будет ранг системы рассматриваемых векторов. По базисным минорам легко выделяются все максимальные линейно независимые подсистемы данной системы векторов.

Утверждения:

1) Пусть в пространстве R^n задана система векторов $a_1, a_2, ..., a_p$ и матрица A с p строками и n столбцами, i -я строка которой состоит из компонент вектора a_i, $i = 1,\ 2, ..., p$,
   a) ранг системы векторов $a_1, a_2, ..., a_p$ совпадает с рангом матрицы A;
   b) если матрица A подобна ступенчатой матрице B, тогда ранг системы векторов $a_1, a_2, ..., a_p$ равен числу ненулевых строк матрицы B;
   c) если $p = n$, то система $a_1, a_2, ..., a_p$ является базисом пространства R^n тогда и только тогда, когда $|A| \neq 0$.
2) Ранг r системы $a_1, ..., a_n, b$ совпадает с рангом системы векторов $a_1, ..., a_n$ тогда и только тогда, когда $b \in < a_1, ..., a_n >$. Если при этом $r = n$, то вектор b единственным образом выражается в виде линейной комбинации векторов $a_1, ..., a_n$.

Пример 1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ методом окаймления миноров.

Решение. Рассмотрим ненулевой минор первого порядка матрицы $M_1 = 2 \neq 0$. Найдем окаймляющие миноры для M_1. Будем анализировать окаймляющие миноры 2-го порядка до тех пор, пока не найдем отличный от нуля минор. Если все рассматриваемые миноры 2-го порядка все будут равны нулю, то ранг данной матрицы будет равен 1.

$$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0 \text{ (пропорциональны строки)}, \qquad M_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 .$$

Значит, $r(A) \geq 2$. Рассмотрим окаймляющие миноры для M_3.

$$M_4 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ (пропорциональны строки)},$$

$$M_5 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 10 \end{vmatrix} = 0 \text{ (пропорциональны строки)},$$

$$M_6 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \text{ (пропорциональны строки)}.$$

Поскольку все окаймляющие миноры 3-го порядка для M_3 равны нулю, ранг матрицы равен порядку наивысшего отличного от нуля минора 2-го порядка (порядку минора M_3), т.е. $r(A)=2$.

Пример 2. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}$ с помощью элементарных преобразований.

Решение. Элементарными преобразованиями матрицы называются следующие преобразования:

- умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля;
- прибавление к одной строке (столбцу) другой строки (столбца), умноженной на любое число;
- перестановка двух строк (столбцов).

При элементарных преобразованиях ранг матрицы не меняется.

$$A=\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг данной матрицы равен числу ненулевых строк в ступенчатой матрице, т.е. $r(A)=3$.

Пример 3. Найти все базисы системы векторов: $a_1=(2,\ 1,\ -3,\ 1)$, $a_2=(4,\ 2,\ -6,\ 2)$, $a_3=(6,\ 3,\ -9,\ 3)$, $a_4=(1,\ 1,\ 1,\ 1)$.

Решение. Построим из координат векторов матрицу по столбцам:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & -6 & -9 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения всех базисов данной системы векторов необходимо выделить все базисные миноры построенной матрицы. Найдем ранг этой матрицы с помощью элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & -6 & -9 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & -9 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & -10 & -15 & -5 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, ранг данной матрицы соответствует числу ненулевых строк в ступенчатой матрице, т.е. $r(A)=2$. Первый столбец ступенчатой матрицы соответствует координатам вектора a_4, второй – a_2, третий – a_3, четвёртый – a_1. В любом базисе данной системы векторов будет два вектора. Базисными минорами являются

$$M_1=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \neq 0,\ M_2=\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \neq 0,\ M_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Остальные миноры второго порядка равны нулю, поэтому базисными быть не могут. Базисами данной системы векторов являются векторы:

1) a_2, a_4,

2) a_3, a_4,

3) a_1, a_4.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Какие из следующих систем векторов составляют базис пространства R^3:
   a) (1, 1, 1), (–1, –1, –1), (0, 1, 1). (0, 0, 1),
   b) (1, 1, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 1),
   c) (1, 2, 3), (3, 2, 1), (1, 1, 1),
   d) (1, –2, –2), (1, 5, –3). (–1, –5, 5),
   e) (1, 2, 7), (–2, –4, –8), (0, 0, 0).
2. При каких значениях параметров следующие системы векторов образуют базис пространства R^3:
   a) (λ, 1, 0), (1, λ, 1), (0, 1, λ),
   b) (1, α, β), (0, 1, γ), (0, 0, 1),
   c) (1, 1, 1), (α, β, γ), $(\alpha^2, \beta^2, \gamma^2)$,
   d) $(1, \alpha, \alpha^2)$, $(1, \beta, \beta^2)$, $(1, \gamma, \gamma^2)$,
   e) (1, 2, 3), (3, 2, 1), $(1, 1, \alpha)$.
3. Найти базис и ранг систем векторов. При решении использовать метод окаймления миноров или метод элементарных преобразований:
   a) (1, 1, –1, –1), (2, 2, 1, –1), (2, 2, –5, –3), (1, 1, –1, –1),
   b) (1, 3, –1, 4), (2, 4, –4, 8), (1, 1, –6, 6), (1, 3, –1, 8),
   c) (1,7,1,5), (–1,–7,–3,–2), (–1,–7,–5,7), (–1,–7,–5,1),
   d) (1,–3,1,3,–3), (1,4,7,4,–3), (–1,–4,–7,2,6), (-1,3,-1,3,5), (1,–3,1,–3,–7),
   e) (1,1,–3,1,2), (–1,–1,4,2,4), (–1,–1,9,2,5), (2,2,–1,2,5), (–2,–2,8,4,8).
4. Показать, что в пространстве многочленов степени ≤ 3 системы многочленов образуют базисы:
   a) $1,\ x,\ x^2,\ x^3$,
   b) $1,\ x-1,\ (x-1)^2,\ (x-1)^3$,
   c) $1,\ x+1,\ (x+1)^2,\ (x+1)^3$.
   d) $1,\ x+2,\ (x-3)^2,\ x^3+5$.
5. Определить размерность линейного пространства многочленов с коэффициентами из R степени ≤ 3, которые дополнительно удовлетворяют одному из условий:
   a) $f(0)=0$,
   b) $f(4)=0$,
   c) $f''(3)=0$,
   d) $f(1)=3f(2)$,
   e) $f'(0)=f(1)$,
   f) $f''(0)=f(1)$.
6. Найти базис и размерность пространства матриц размера 2×3 с элементами из R.
7. Найти какой-нибудь базис и размерность пространства решений следующих систем уравнений:
   a) $\begin{cases} 2x_1+x_2-4x_3=0, \\ 3x_1+5x_2-7x_3=0, \\ 4x_1-5x_2-6x_3=0; \end{cases}$
   b) $\begin{cases} 2x_1-x_2+5x_3+7x_4=0, \\ 4x_1-2x_2+7x_3+5x_4=0, \\ 2x_1-x_2+x_3-5x_4=0; \end{cases}$
   c) $\begin{cases} 5x_1+3x_2+4x_3=0, \\ 6x_1+5x_2+6x_3=0; \end{cases}$
   d) $\begin{cases} 4x_1-6x_2+5x_3=0, \\ 6x_1-9x_2+10x_3=0; \end{cases}$
   e) $x_1+x_2+\ldots+x_n=0$.

§5. Разложение вектора по базису. Координаты вектора в базисе

Пусть в некотором линейном пространстве L зафиксирован базис $e=(e_1,e_2,...,e_n)$. Если $x\in L$, то найдутся числа $x_1,x_2,..,x_n$, для которых $x=x_1e_1+x_2e_2+...+x_ne_n$. Упорядоченный набор $x_1,x_2,..,x_n$ называется *набором координат вектора* x *в базисе* $e=(e_1,e_2,...,e_n)$.

Утверждения:

1. Координаты вектора в заданном базисе определены единственным образом.
2. При сложении векторов соответствующие координаты слагаемых складываются. При умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.

Пример 1. Найти координаты многочлена

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$$

a) в базисе $1,x,x^2,...,x^n$;

b) в базисе $1,(x-1),(x-1)^2,...,(x-1)^n$, выяснив, что многочлены действительно образуют базис.

Решение.

a) Докажем, что многочлены $1,x,x^2,...,x^n$ (*) составляют базис пространства всех многочленов степени $\le n$ ($P_n[x]$).

Для этого сначала покажем, что система многочленов (*) линейно независима. Пусть $\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_n$ – такие числа из поля P, при которых $\alpha_0\cdot 1+\alpha_1\cdot x+...,+\alpha_nx^n=0$. Тогда по определению равенства многочленов $\alpha_0=\alpha_1=...=\alpha_n=0$. Значит, система многочленов (*) линейно независима.

Покажем теперь, что система многочленов (*) составляет базис пространства $P_n[x]$. Для любого $f(x)\in P_n[x]$ имеем:

$$f(x)=\beta_0\cdot 1+\beta_1\cdot x+\beta_2\cdot x^2+...+\beta_n\cdot x^n.$$

Следовательно, $f(x)$ является линейной комбинацией системы многочленов (*). Тогда система $1,x,x^2,...,x^n,f(x)$ линейно зависима. Таким образом, система многочленов (*) составляет базис пространства $P_n[x]$.

Значит, согласно определению координат вектора в базисе, данный многочлен $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$ имеет в базисе $1,x,x^2,...,x^n$ координаты $\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_n$.

b) Докажем, что многочлены $1,(x-1),(x-1)^2,...,(x-1)^n$ (**) составляют базис пространства $P_n[x]$.

Для этого сначала покажем, что система многочленов (**) линейно независима. Пусть $\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_n$ – такие числа из поля P, что $\alpha_0\cdot 1+\alpha_1\cdot(x-1)+...,+\alpha_n(x-1)^n=0$. Тогда по определению равенства многочленов $\alpha_0=\alpha_1=...=\alpha_n=0$. Значит, система многочленов (**) линейно независима.

Покажем теперь что система многочленов (**) составляет базис пространства $P_n[x]$. Для любого $f(x)\in P_n[x]$ имеем:

$$f(x)=\beta_0\cdot 1+\beta_1\cdot(x-1)+\beta_2\cdot(x-1)^2+...+\beta_n\cdot(x-1)^n.$$

Следовательно, $f(x)$ является линейной комбинацией системы многочленов (**). Тогда система $1,(x-1),(x-1)^2,...,(x-1)^n,f(x)$ линейно зависима. Таким образом, система многочленов (**) составляет базис пространства $P_n[x]$.

Согласно определению координат вектора в базисе, многочлен

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = b_0 \cdot 1 + b_1 \cdot (x-1) + b_2 \cdot (x-1)^2 + \ldots + b_n \cdot (x-1)^n$ имеет в базисе $1, (x-1), (x-1)^2, \ldots, (x-1)^n$ координаты $b_0, b_1, \ldots, b_n$, где $b_k = \dfrac{f^{(k)}(1)}{k!}$ при $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Найти координаты вектора $x = (6,\ 0, -5)$ пространства R^3 в базисах
   a) (3, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 1);
   b) (1, –1, 0), (1, 2, 3), (0, 1, –1).
2. Показать, что система векторов $e_1 = (1,\ 0,\ 1,\ 0)$, $e_2 = (1,\ 1,\ 0,\ 0)$, $e_3 = (0,\ 1,\ 1,\ 1)$, $e_4 = (0,\ 0,\ 1,\ 1)$ является базисом пространства A^4. Найти координаты вектора $a = (1,\ 2,\ 3,\ 4)$ в этом базисе.
3. Разложить векторы $x = (2,\ 6,\ 6,\ 8)$ и $y = (0,\ 0,\ 0,\ 8)$ по базисам
   a) $e_1 = (1,\ 6,\ -2,\ -3)$, $e_2 = (-1,\ -9,\ 7,\ 8)$, $e_3 = (2,\ 6,\ 7,\ 2)$, $e_4 = (1,\ 6,\ -3,\ 3)$;
   b) $e_1 = (1,\ -3,\ 4,\ 2)$, $e_2 = (-2,\ 7,\ -6,\ 2)$, $e_3 = (2,\ -8,\ 2,\ -5)$, $e_4 = (-1,\ 3,\ -4,\ 2)$.
4. Найти координаты вектора $f(x) = x^2 - 5x + 6$ пространства многочленов степени ≤ 3 в базисах:
   a) $-2, -x,\ 2x^2, x^3$;
   b) $1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3$.

§6. Подпространство, его базис и размерность

Пусть L – линейное пространство над полем P и A – подмножество из L. Может оказаться, что A само составляет линейное пространство над полем P относительно тех же операций, что и L. Тогда А называют подпространством пространства L .

Согласно определению линейного пространства, чтобы A было подпространством, надо проверить выполнимость в A операций, т.е.

1. $\forall a, b \in A:\ a + b \in A$,
2. $(\forall a \in A)(\forall k \in P):\ ka \in A$,

и проверить, что операции в A подчинены восьми аксиомам. Однако последнее будет излишним (в силу того, что эти аксиомы выполняются в L), т.е. справедлива

Теорема. Пусть L линейное пространство над полем P и $A \subseteq L$. Множество A тогда и только тогда является подпространством L, когда выполняются следующие требования:

1. $\forall a, b \in A:\ a + b \in A$,
2. $(\forall a \in A)(\forall k \in P):\ ka \in A$.

Утверждение. Если L – n-мерное линейное пространство и A его подпространство, то A также конечномерное линейное пространство и его размерность не превосходит n.

Пример 1. Является ли подпространством пространства векторов-отрезков V_2 множество S всех векторов плоскости, каждый из которых лежит на одной из осей координат - Ox или Oy ?

Решение: Пусть $\overline{a} \in Ox$, $\overline{b} \in Oy$ и $\overline{a} \neq 0$, $\overline{b} \neq 0$. Тогда $\overline{a}+\overline{b} \notin S$ (Рис.1).

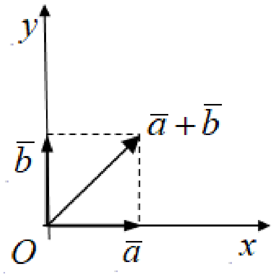

Рис 1

Следовательно, S не является подпространством V_2.

Пример 2. Является ли линейным подпространством линейного пространства V_2 векторов-отрезков плоскости множество S всех векторов плоскости, начала и концы которых лежат на прямой l этой плоскости?

Решение. Если вектор $\overline{a} \in S$ умножить на действительное число k, то получим вектор $k \cdot \overline{a}$, также принадлежащий S. Если $\overline{a}$ и $\overline{b}$ – два вектора из S, то $\overline{a}+\overline{b} \in S$ (по правилу сложения векторов на прямой). Следовательно, S является подпространством V_2 (Рис.2).

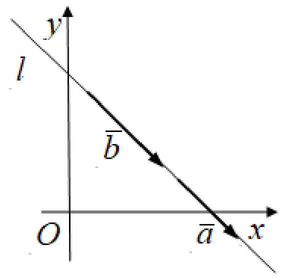

Рис 2

Пример 3. Является ли линейным подпространством линейного пространства V_2 множество A всех векторов плоскости, концы которых лежат на прямой l (предположить, что начало любого вектора совпадает с началом координат)?

Решение. В случае, когда прямая l не проходит через начало координат, множество A не является линейным подпространством пространства V_2, так как $\overline{a}+\overline{b} \notin l$. (Рис.3)

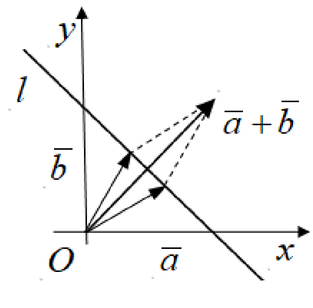

Рис 3

В случае, когда прямая l проходит через начало координат (Рис.4), множество A является линейным подпространством пространства V_2, так как $\overline{a}+\overline{b} \in l$ и при умножении любого вектора $\overline{a} \in A$ на действительное число α из поля P получим $\alpha\overline{a} \in l$.

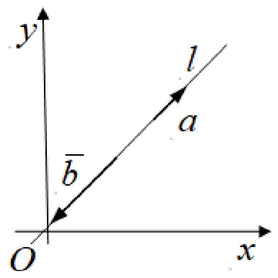

Рис 4

Таким образом, требования линейного пространства для множества A выполнены.

Пример 4. Пусть дана система векторов $a_1,...,a_k$ из линейного пространства L над полем P. Доказать, что множество всевозможных линейных комбинаций $t_1a_1+...+t_ka_k$ с коэффициентами $t_1,...,t_k$ из P является подпространством L (это подпространство A называют подпространством, порожденным системой векторов $a_1,...,a_k$ или *линейной оболочкой этой системы векторов*, и обозначают так: $A=<a_1,...,a_k>$ или $A=L(a_1,...,a_k)$).

Решение. Так как $A=\{t_1a_1+...+t_ka_k, t_i\in P, i=\overline{1,k}\}$, то для любых элементов $x,y\in A$ имеем

$$x=r_1a_1+...+r_ka_k,$$

$$y=s_1a_1+...+s_ka_k,$$

где $r_i,s_i\in P$, $i=\overline{1,k}$.

Тогда $x+y=(r_1a_1+...+r_ka_k)+(s_1a_1+...+s_ka)=(r_1+s_1)a_1+...+(r_k+s_k)a_k$.

Так как $r_i,s_i\in P$, то $r_i+s_i\in P$, поэтому $x+y\in<a_1,...,a_k>$.

Проверим выполнимость второго условия теоремы. Если x – любой вектор из A и t – любое число из P, то $tx=t(r_1a_1+...+r_ka_k)=(tr_1)a_1+...+(tr_k)a_k$. Поскольку $t\in P$ и $r_i\in P$, $i=\overline{1,k}$, то $tr_i\in P$, $i=\overline{1,k}$, поэтому $tx\in<a_1,...,a_k>$.

Таким образом, согласно теореме множество A – подпространство линейного пространства L.

Для конечномерных линейных пространств справедливо и обратное утверждение.

Теорема. Всякое подпространство A линейного пространства L над полем P является линейной оболочкой некоторой системы векторов.

При решении задачи нахождения базиса и размерности линейной оболочки используют следующую теорему.

Теорема. Базис линейной оболочки $<a_1,...,a_k>$ совпадает с базисом системы векторов $a_1,...,a_k$. Размерность линейной оболочки $<a_1,...,a_k>$ совпадает с рангом системы векторов $a_1,...,a_k$.

Пример 5. Найти базис и размерность подпространства $S=<a_1,a_2,a_3,a_4>$ линейного пространства $P_3[x]$, если $a_1=1+x$, $a_2=1-x$, $a_3=1+x+x^3$, $a_4=2+x^3$.

Решение. Известно, что векторы и их координатные строки (столбцы) обладают одинаковыми свойствами (в отношении линейной зависимости). Составляем матрицу $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ из координатных столбцов векторов a_1, a_2, a_3, a_4 в базисе $1, x, x^2, x^3$.

Найдем ранг матрицы A.

$$M_2=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-1-1=-2\neq 0, \quad M_3=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2\neq 0, \quad M_4=|A|=0.$$

Следовательно, ранг $r(A)=3$. Итак, ранг системы векторов a_1, a_2, a_3, a_4 равен 3. Значит, размерность подпространства S равна 3, а его базис состоит из трех векторов: a_1, a_2, a_4 (так как в базисный минор M_3 входят координаты только этих векторов).

Пример 6. Доказать, что множество H векторов арифметического пространства A^n, у которых первая и последняя координаты равны 0, составляет линейное подпространство. Найти его базис и размерность.

Решение. Пусть $x, y\in H$.

Тогда

$$x=(0, x_2, ..., x_{n-1}, 0),$$
$$y=(0, y_2, ..., y_{n-1}, 0)$$

и

$$x+y=(0, x_2+y_2, ..., x_{n-1}+y_{n-1}, 0).$$

Следовательно, $x+y\in H$ для любых $x, y\in H$.

Если $x\in H$, $k\in P$, то $kx=k(0,x_2,...,x_{n-1},0)=(0,kx_2,...,kx_{n-1},0)\in H$.

Таким образом, согласно теореме о линейном подпространстве множество H является линейным подпространством пространства A^n.

Найдем базис H. Рассмотрим следующие векторы из H: $a_2=(0, 1, 0, ..., 0)$, $a_3=(0, 0, 1, ..., 0)$, $a_{n-1}=(0, 0, 0, ..., 1, 0)$. Эта система векторов линейно независима. Действительно, пусть

$$k_2a_2+...+k_{n-1}a_{n-1}=0.$$

Тогда

$$k_2(0, 1, ..., 0)+k_3(0, 0, 1, ..., 0)+...+k_{n-1}(0, 0, .., 1, 0)=$$
$$=(0, k_2, ..., 0)+(0, 0, k_3, ..., 0)+...+(0, 0, .., k_{n-1}, 0)=(0, k_2, k_3, ..., k_{n-1}, 0)=0=(0, 0, ..., 0)$$

и

$$k_2=...=k_{n-1}=0.$$

Можно убедиться, что система $a_2,...,a_{n-1},x$ линейно зависима при любом векторе x из H. Этим доказано, что $a_2, ..., a_{n-1}$ - максимальная линейно независимая система векторов подпространства H, т.е. $a_2, ..., a_{n-1}$ – базис в H и $\dim H=n-2$.

§7. Сумма и пересечение подпространств. Прямая сумма подпространств

Пусть L – линейное пространство над полем P, A и B – его подпространства. *Суммой* подпространств A и B называют множество $A+B=\{\, a+b \mid a\in A,\ b\in B\}$.

Пример 1. На плоскости R_2 векторы, лежащие на оси Ox, составляют подпространство A; векторы, лежащие на оси Oy, составляют подпространство B. Множество $A+B$ совпадает с R_2, в чем можно убедиться, проверив включения $A+B\subseteq R_2$ и $R_2\subseteq A+B$ (Рис.1).

Теорема. Сумма подпространств A и B линейного пространства L является его подпространством.

Утверждения

1. Базис суммы подпространств $A=<a_1,\dots,a_к>$, $B=<b_1,\dots,b_s>$ совпадает с базисом системы векторов $\{a_1,\dots,a_к,b_1,\dots,b_s\}$.
2. Размерность $A+B$ равна рангу системы векторов $\{a_1,\dots,a_к,b_1,\dots,b_s\}$.

Пример 2. В линейном пространстве A^4 даны подпространства $A=<a_1,a_2,a_3>$ и $B=<b_1,b_2,b_3>$, где $a_1=(1,\ 2,\ -1,\ 3)$, $a_2=(2,\ 1,\ 4,\ 2)$, $a_3=(4,\ 5,\ 2,\ 8)$, $b_1=(6,\ 6,\ 6,\ 8)$, $b_2=(5,\ 4,\ 7,\ 7)$, $b_3=(4,\ 2,\ 8,\ 6)$. Найти базис и размерность подпространства $A+B$.

Решение. Найдем базис A и базис B. Составляем матрицы M и N и ищем их ранги. Матрица M составлена из координат векторов a_1,a_2,a_3 по строкам.

$$M=\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\2&1&4&2\\4&5&2&8\end{pmatrix},$$

$$M_2=\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}=1-4\neq 0,\quad M_3=\begin{vmatrix}1&2&-1\\2&1&4\\4&5&2\end{vmatrix}=0,\quad M_3'=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&1&2\\4&5&8\end{vmatrix}=0,$$

значит $r(M)=2$, поэтому $\dim(A)=2$.

Векторы a_1, a_2 составляют базис A, так как координаты этих векторов проходят через базисный минор M_2.

Матрица N составлена из координат векторов b_1,b_2,b_3 по строкам.

$$N=\begin{pmatrix}6&6&6&8\\5&4&7&7\\4&2&8&6\end{pmatrix},$$

$$M_2=\begin{vmatrix}6&6\\5&4\end{vmatrix}=24-30\neq 0,\quad M_3=\begin{vmatrix}6&6&6\\5&4&7\\4&2&8\end{vmatrix}=0,\quad M_3'=\begin{vmatrix}6&6&8\\5&4&7\\4&2&6\end{vmatrix}=0,$$

значит $r(N)=2$, поэтому $\dim(B)=2$.

Векторы b_1, b_2 составляют базис B, так как координаты этих векторов проходят через базисный минор M_2.

Тогда $A+B=<a_1,a_2,b_1,b_2>$. Найдем базис системы векторов $\{a_1,a_2,b_1,b_2\}$. Для этого надо найти ранг матрицы H, строки которых – координаты данных четырёх векторов.

$$H=\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\2&1&4&2\\6&6&6&8\\5&4&7&7\end{pmatrix},$$

$$M_2=\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}=1-4\neq 0,\quad M_3=\begin{vmatrix}1&2&-1\\2&1&4\\6&6&6\end{vmatrix}=0,\quad M_3'=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&1&2\\6&6&8\end{vmatrix}=6\neq 0$$

$$M_4=\begin{vmatrix}1&2&-1&3\\2&1&4&2\\6&6&6&8\\5&4&7&7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&-1&3\\0&-3&6&-4\\0&-6&12&-10\\0&-6&12&-8\end{vmatrix}=0.$$

Значит $r(H)=3$. Так как в базисный минор M_3' входят координаты векторов a_1, a_2, b_1, то базис $A+B$ составляют векторы a_1, a_2, b_1, $\dim(A+B)=3$.

Пересечением подпространств A и B линейного пространства L называется множество $A\bigcap B=\{x\in L | x\in A, x\in B\}$.

Теорема. Пересечение подпространств линейного пространства L является подпространством L.

Теорема. Размерность суммы подпространств равна сумме размерностей слагаемых без размерности их пересечения, т.е.

$$\dim(A+B)=\dim(A)+\dim(B)-\dim(A\bigcap B). \tag{1}$$

Из этой формулы находим размерность $A\bigcap B$:

$$\dim(A\bigcap B)=\dim(A)+\dim(B)-\dim(A+B).$$

Так как размерности подпространств в правой части этого равенства мы умеем находить, то по этой формуле можно найти $\dim(A\bigcap B)$.

Пример 3. Для подпространств A и B из примера 2 найти базис и размерность подпространства $A\bigcap B$.

Решение. Так как $\dim(A+B)=3$, $\dim(A)=2$, $\dim(B)=2$, то по формуле (1) будем иметь

$$3=2+2-\dim(A\bigcap B).$$

Таким образом, $\dim(A\bigcap B)=1$. Теперь остается найти базис $A\bigcap B$. Для этого достаточно найти один ненулевой вектор из $A\bigcap B$, который и составит базис $A\bigcap B$.

Пусть $x\in A\bigcap B$, тогда

$$x=t_1a_1+t_2a_2=t_1(1,\ 2,\ -1,\ 3)+t_2(2,\ 1,\ 4,\ 2),$$

и

$$x=s_1b_1+s_2b_2=s_1(6,\ 6,\ 6,\ 8)+s_2(5,\ 4,\ 7,\ 7),$$

тогда

$$t_1(1,\ 2,\ -1,\ 3)+t_2(2,\ 1,\ 4,\ 2)=s_1(6,\ 6,\ 6,\ 8)+s_2(5,\ 4,\ 7,\ 7).$$

Отсюда получим

$$t_1(1,\ 2,\ -1,\ 3)+t_2(2,\ 1,\ 4,\ 2)=s_1(6,\ 6,\ 6,\ 8)+s_2(5,\ 4,\ 7,\ 7)$$

$$(t_1+2t_2-6s_1-5s_2,\ 2t_1+t_2-6s_1-4s_2,\ -t_1+4t_2-6s_1-7s_2,\ 3t_1+2t_2-8s_1-7s_2)=(0,\ 0,\ 0,\ 0).$$

Записываем покомпонентно это равенство и получаем систему линейных однородных уравнений относительно неизвестных t_t, t_2, s_1, s_2:

$$\begin{cases} t_1+2t_2-6s_1-5s_2=0, \\ 2t_1+t_2-6s_1-4s_2=0, \\ -t_1+4t_2-6s_1-7s_2=0, \\ 3t_1+2t_2-8s_1-7s_2=0. \end{cases}$$

Решаем систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -6 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & -6 & -4 & 0 \\ -1 & 4 & -6 & -7 & 0 \\ 3 & 2 & -8 & -7 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -6 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & -12 & -12 & 0 \\ 0 & -4 & 10 & 8 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -6 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -4 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -6 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -6 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

$s_1=0$,

$t_2=2s_1+2s_2=2s_2$,

$t_1=-2t_2+6s_1+5s_2=-4s_2+5s_2=s_2$.

Найдем ненулевое частное решение этой системы, придав свободному неизвестному s_2 ненулевое значение, например $s_2=1$.

При выбранном значении s_2 переменные $t_1=1$ и $t_2=2$. Записываем вектор x:

$x=t_1a_1+t_2a_2=1\cdot(1,\ 2,\ -1,\ 3)+2\cdot(2,\ 1,\ 4,\ 2)=s_1b_1+s_2b_2=(5,\ 4,\ 7,\ 7)$.

Мы нашли ненулевой вектор из пересечения $A\cap B$, он составляет базис $A\cap B$. Подпространство $A\cap B=<(5,\ 4,\ 7,\ 7)>$.

Если подпространства A и B заданы однородными системами уравнений, то пересечение $A\cap B$ будет определяться системой, полученной объединением всех уравнений из этих систем. Любая фундаментальная система решений такой системы уравнений является базисом пересечения $A\cap B$.

Пример 4. Пусть подпространства A и B заданы соответственно системами уравнений

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+5x_4=0, \\ 3x_1-x_2+2x_3-7x_4=0, \\ 4x_1+x_2-3x_3+6x_4=0. \end{cases} \quad (*) \qquad \begin{cases} 3x_1+4x_2-5x_3+7x_4=0, \\ 2x_1-3x_2+3x_3-2x_4=0, \\ 5x_1+x_2-2x_3+5x_4=0. \end{cases} \quad (**)$$

Найти базис и размерность подпространств $A+B$ и $A\cap B$.

Решение. Исследуем систему $(*)$

$$H=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & 2 & -7 \\ 4 & 1 & -3 & 6 \end{pmatrix},$$

$$M_2=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-11\neq 0, \qquad r(H)\geq 2, \qquad M_3=\begin{vmatrix}2 & 3 & -1\\ 3 & -1 & 2\\ 4 & 1 & -3\end{vmatrix}=46\neq 0,$$

значит $r(H)=3$.

Исследуем систему $(**)$

$$Q=\begin{pmatrix}3 & 4 & -5 & 7\\ 2 & -3 & 3 & -2\\ 5 & 1 & -2 & 5\end{pmatrix},$$

$$M_2=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 2 & -3\end{vmatrix}=-17\neq 0, \quad r(Q)\geq 2, \qquad M_3=\begin{vmatrix}3 & 4 & -5\\ 2 & -3 & 3\\ 5 & 1 & -2\end{vmatrix}=0, \quad M_3'=\begin{vmatrix}3 & 4 & 7\\ 2 & -3 & -2\\ 5 & 1 & 5\end{vmatrix}=0,$$

значит $r(Q)=2$.

Подпространство B задается системой

$$\begin{cases}3x_1+4x_2-5x_3+7x_4=0,\\ 2x_1-3x_2+3x_3-2x_4=0.\end{cases} \qquad (***)$$

Для нахождения суммы A и B определяем базис A (ФСР системы уравнений $(*)$) и базис B (ФСР системы уравнений $(***)$).

Решаем систему $(*)$. ФСР состоит из одного решения ($n-r=4-3=1$), x_1, x_2, x_3 – основные неизвестные, x_4 – свободное неизвестное. Получаем систему из системы $(*)$:

$$\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=-5x_4,\\ 3x_1-x_2+2x_3=7x_4,\\ 4x_1+x_2-3x_3=-6x_4.\end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 3 & -1 & -5x_4\\ 3 & -1 & 2 & 7x_4\\ 4 & 1 & -3 & -6x_4\end{array}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 3 & -1 & -5x_4\\ 0 & -11 & 7 & 29x_4\\ 0 & -5 & -1 & 4x_4\end{array}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 3 & -1 & -5x_4\\ 0 & -11 & 7 & 29x_4\\ 0 & 0 & -46 & -101x_4\end{array}\right),$$

$$\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=-5x_4,\\ \quad -11x_2+7x_3=29x_4,\\ \qquad\quad -46x_3=-101x_4.\end{cases}$$

$x_3=\dfrac{101}{46}x_4$,

$x_2=\dfrac{29x_4-7x_3}{-11}=-\dfrac{29}{11}x_4+\dfrac{707}{11\cdot 46}x_4=-\dfrac{627}{506}x_4$,

$x_1=\dfrac{-5x_4+x_3-3x_2}{2}=-\dfrac{5}{2}x_4+\dfrac{101}{92}x_4+\dfrac{1881}{1012}x_4=\dfrac{-2530+1111+1881}{1012}x_4=\dfrac{462}{1012}x_4=\dfrac{231}{506}x_4.$

ФСР: $\left(\dfrac{231}{506},-\dfrac{627}{506},\dfrac{101}{46},1\right)$ или (231, -627, 1111, 506). Базис пространства A – это вектор $(231,\ 627, 1111, 506)=a$.

Решаем систему $(***)$. ФСР состоит из двух решений ($n-r=4-2=2$). Основные неизвестные – x_1, x_2, свободные – x_3, x_4.

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 5x_3 - 7x_4, \\ 2x_1 - 3x_2 = -3x_3 + 2x_4. \end{cases}$$

x_1	x_2	x_3	x_4
$\frac{3}{17}$	$\frac{19}{17}$	1	0
$-\frac{13}{17}$	$-\frac{20}{17}$	0	1

1) $x_3 = 1$, $x_4 = 0$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 5 \\ 2x_1 - 3x_2 = -3 \end{cases} \qquad x_1 = \frac{3}{17}, \qquad x_2 = \frac{19}{17}.$$

2) $x_3 = 0$, $x_4 = 1$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = -7 \\ 2x_1 - 3x_2 = 2 \end{cases} \qquad x_1 = -\frac{13}{17}, \qquad x_2 = -\frac{20}{17}.$$

В качестве базиса подпространства B можно взять векторы

$$b_1 = (3,\ 19,\ 17,\ 0) \text{ и } b_2 = (-13,\ -20,\ 0,\ 17).$$

Тогда

$$A + B = < a, b_1, b_2 > = < (231,\ -627,\ 1111,\ 506), (3,\ 19,\ 17,\ 0), (-13,\ -20,\ 0,\ 17) > .$$

Посмотрим, является ли система векторов a, b_1, b_2 линейно зависимой или линейно независимой.

$$H = \begin{pmatrix} 231 & -627 & 1111 & 506 \\ 3 & 19 & 17 & 0 \\ -13 & -20 & 0 & 17 \end{pmatrix},$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 231 & -627 \\ 3 & 19 \end{vmatrix} \neq 0,\ r(H) \geq 2 \quad M_3 = \begin{vmatrix} 231 & -627 & 1111 \\ 3 & 19 & 17 \\ -13 & -20 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad r(H) = 3.$$

Система векторов a, b_1, b_2 линейно независима, является базисом $(A + B)$.

Найдем размерность пересечения ($A \cap B$) подпространств.

$3 = 2 + 1 - \dim(A \cap B)$, $\dim(A \cap B) = 0$, $A \cap B = 0$. Для нахождения базиса пересечения подпространств $A \cap B$ следует решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

$$K=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1 & 5\\ 3 & -1 & 2 & -7\\ 4 & 1 & -3 & 6\\ 3 & 4 & -5 & 7\\ 2 & -3 & 3 & -2\end{pmatrix},$$

$$M_3=\begin{vmatrix}2 & 3 & -1\\ 3 & -1 & 2\\ 4 & 1 & -3\end{vmatrix}\neq 0, \quad M_4=\begin{vmatrix}2 & 3 & -1 & 5\\ 3 & -1 & 2 & -7\\ 4 & 1 & -3 & 6\\ 2 & -3 & 3 & -2\end{vmatrix}\neq 0.$$

$r(K)=4 \Rightarrow r=n \Rightarrow$ система имеет единственное нулевое решение. Поэтому $A\bigcap B=0$. Базиса подпространства $A\bigcap B=0$ нет.

Пусть в L имеем подпространства A и B. Может оказаться, что $A\bigcap B=0$. Тогда сумма подпространств A и B называется *прямой суммой* и обозначается $A+B=A\oplus B$. Подпространство $A+B$ обозначим через H: $H=A+B$, $H\subseteq L$. Тогда записывают $H=A\oplus B$, если $H=L$,то $L=A\oplus B$, и говорят: подпространство H (линейное пространство L) является прямой суммой подпространств A и B. Если $L=A\oplus B$, то подпространства A и B называют *прямыми дополнениями друг друга* в пространстве L.

Теорема. Сумма подпространств A и B тогда и только тогда является прямой, когда размерность суммы подпространств A и B равна сумме размерностей слагаемых, т.е.

$$\dim(A+B)=\dim(A)+\dim(B).$$

Пример 6. Подпространства A и B из примера 4 составляют прямую сумму, так как $A\bigcap B=0$.

ВАРИАНТЫ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

ВАРИАНТ 1

1. Является ли линейным пространством множество всех радиус-векторов точек первой четверти прямоугольной декартовой системы координат?
2. Доказать, что множество $A=\{(\alpha_1,0,\alpha_2,0)\mid \alpha_1,\alpha_2\in R\}$ составляет подпространство пространства A_4. Найти его базис и размерность.
3. Найти базис и размерность линейной оболочки векторов $a_1=(5,\ 2,\ -3,\ 1)$, $a_2=(4,\ 1,\ -2,\ 3)$, $a_3=(1,\ 1,\ -1,\ -2)$, $a_4=(3,\ 4,\ -1,\ 2)$.
4. Найти базис и размерность суммы и пересечения подпространств, натянутых на векторы $x_1=(1,\ 1,\ 1,\ 1)$, $x_2=(1,\ 1,\ -1,\ -1)$, $x_3=(1,\ -1,\ 1,\ -1)$;
$y_1=(1,\ -1,\ -1,\ 1)$, $y_2=(2,\ -2,\ 0,\ 0)$, $y_3=(3,\ -1,\ 1,\ 1)$.

ВАРИАНТ 2

1. Является ли линейным пространством множество всех радиус-векторов точек, образующих данную прямую. Найти его базис и размерность.

2. Доказать, что множество $A=\{(\alpha_1,\alpha,\alpha_2,\alpha) \mid \alpha,\alpha_1,\alpha_2 \in R\}$ составляет подпространство пространства A_4. Найти его базис и размерность.
3. Найти базис и размерность линейной оболочки векторов $a_1 = 1+2x+3x^2-4x^3$, $a_2 = 2+3x-4x^2+x^3$, $a_3 = 2-5x+8x^2-3x^3$, $a_4 = 5+26x-9x^2-12x^3$, $a_5 = 3-4x+x^2+2x^3$.
4. Найти базис и размерность суммы и пересечения подпространств, натянутых на векторы $a_1 = (1,\ 2,\ 1)$, $a_2 = (1,\ 1,\ -1)$, $a_3 = (1,\ 3,\ -3)$;
$y_1 = (2,\ 3,\ -1)$, $y_2 = (1,\ 2,\ 2)$, $y_3 = (1,\ 1,\ 3)$.

ВАРИАНТ 3

1. Является ли линейным пространством множество всех векторов плоскости за исключением векторов, параллельных данной прямой.
2. Доказать, что множество $A=\{f(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n \mid a_0,...,a_n \in R,\ f(0)=0\}$, составляет подпространство пространства P_n. Найти его базис и размерность.
3. Найти базис и размерность линейной оболочки векторов
$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ a_4 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 15 & 17 \end{pmatrix},\ a_5 = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -7 & 0 \end{pmatrix}.$$
4. Найти базис и размерность суммы и пересечения подпространств, натянутых на векторы $x_1 = (0,\ 1,\ 1,\ 1)$, $x_2 = (1,\ 1,\ 1,\ 2)$, $x_3 = (-2,\ 0,\ 1,\ 1)$;
$y_1 = (-1,\ 3,\ 2,\ -1)$, $y_2 = (1,\ 1,\ 0,\ -1)$, $y_3 = (-1,\ 7,\ 4,\ -3)$.

ВАРИАНТ 4

1. Составляет ли линейное пространство множество многочленов $A=\{f(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n \mid a_0,...,a_n \in R\}$? Найти его размерность и базис.
2. Доказать, что множество $A=\{(\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha) \mid \alpha,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in R\}$ составляет подпространство пространства A_5. Найти его базис и размерность.
3. Найти базис и размерность линейной оболочки векторов $a_1 = e_1+2e_2+3e_3+4e_4$, $a_2 = 2e_1+3e_2+4e_3+5e_4$, $a_3 = 3e_1+4e_2+5e_3+6e_4$, $a_4 = 4e_1+5e_2+6e_3+7e_4$; e_1,e_2,e_3,e_4 – базис линейного пространства L.
4. Найти базис и размерность суммы и пересечения подпространств, натянутых на векторы $a_1 = (1,\ 1,\ 0,\ 0)$, $a_2 = (1,\ 1,\ 2,\ 2)$, $a_3 = (3,\ 1,\ 3,\ 1)$;
$y_1 = (2,\ 2,\ 2,\ 2)$ $y_2 = (2,\ 0,\ 1,\ -1)$ $y_3 = (3,\ 1,\ 2,\ 0)$.

ВАРИАНТ 5

1. Образует ли линейное пространство множество многочленов $A=\{a_0x^n+a_1x^{n+1}+...+a_kx^{n+k} \mid n \in N,\ a_0,...,a_k \in R,\ k=0,1,...\}$? Указать его базис и размерность.

2. Доказать, что множество всех решений однородной системы линейных уравнений с n неизвестными образует подпространство пространства A_n. Найти его базис и размерность.
3. Найти базис и размерность линейной оболочки векторов $a_1 = 2 - x + 3x^2 - 2x^3 + 4x^4$, $a_2 = 7x^4 + x^3 + 5x^2 - 2x + 4$, $a_3 = 2 + x^2 - x + 8x^3 + 2x^4$.
4. Найти базис и размерность суммы и пересечения подпространств, натянутых на векторы $x_1 = (2,\ -1,\ 0,\ 0,\ 3)$, $x_2 = (4,\ -2,\ 0,\ 0,\ 6)$, $x_3 = (0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 2)$;
$y_1 = (2,\ 1,\ 1,\ -1,\ 1)$, $y_2 = (1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1)$, $y_3 = (1,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0)$.

ВАРИАНТ 6

1. Во множестве $S = \{(\alpha_1, \alpha_2, ...) \mid \alpha_i \in N,\ i = 1,\ 2, ...\}$ введены операции сложения $x + y = (\alpha_1, \alpha_2, ...) + (\beta_1, \beta_2, ...) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, ...)$ и умножения на действительное число k: $kx = k(\alpha_1, \alpha_2, ...) = (k\alpha_1, k\alpha_2, ...)$. Является ли S линейным пространством, если $\alpha_i \in R,\ i = 1,\ 2, ...$? Указать его базис и размерность.
2. Образует ли подпространство пространства V_2 множество радиус-векторов точек некоторой прямой? Указать его базис и размерность
3. Найти базис и размерность линейной оболочки векторов
$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix},\ a_4 = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}.$$
4. Найти базис и размерность суммы и пересечения подпространств, натянутых на векторы $a_1 = (1,\ 2,\ 0,\ 1)$, $a_2 = (1,\ 1,\ 1,\ 0)$, $a_3 = (3,\ 5,\ 1,\ 2)$;
$b_1 = (1,\ 0,\ 1,\ 0)$, $b_2 = (1,\ 3,\ 0,\ 1)$, $b_3 = (3,\ 6,\ 1,\ 2)$.

ВАРИАНТ 7

1. Образуют ли линейное пространство множество матриц $M = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} ... a_{1n} \\ .... \\ a_{n1} ... a_{nn} \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} a_{ij} \in R \\ i, j = \overline{1, n} \end{matrix} \right\}$?
Указать его базис и размерность.
2. Составляет ли подпространство пространства P_5 множество $A = \{a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 \mid a_0, a_2, a_4 \in R\}$? Указать его базис и размерность
3. Найти базис и размерность линейной оболочки векторов $a_1 = x^5 + x^4 + x + 1$, $a_2 = -1$, $a_3 = 2x^2 + 5x$, $a_4 = 2x^3 - 2$.
4. Найти базис и размерность суммы и пересечения подпространств, натянутых на векторы $x_1 = (1,\ -1,\ -1,\ 1)$, $x_2 = (0,\ 2,\ 2,\ 0)$, $x_3 = (0,\ 3,\ 2,\ -1)$;
$y_1 = (0,\ 1,\ 2,\ -1)$, $y_2 = (1,\ -1,\ 1,\ 1)$, $y_3 = (2,\ -1,\ 4,\ 1)$.

ВАРИАНТ 8

1. Является ли множество матриц $M=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \middle| a,b,d\in R\right\}$ линейным пространством? Найти его базис и размерность.
2. Доказать, что множество 6-мерных векторов $A=\{(\alpha,\beta,\alpha,\beta,\alpha,\beta)\mid \alpha,\beta\in R\}$ составляет подпространство пространства A_6. Найти его базис и размерность.
3. Найти базис и размерность линейной оболочки векторов $a_1=e_1+e_2+e_3+e_4$, $a_2=-e_5-e_4-e_3+e_2+e_1$, $a_3=3e_1+2e_2-e_5$, $a_4=2e_5+5e_4+5e_3+e_2+e_1$, $a_5=-e_3-e_2+e_1$; e_1,e_2,e_3,e_4,e_5 – базис линейного пространства.
4. Найти базис и размерность суммы и пересечения подпространств, натянутых на векторы $a_1=(1,\ -2,\ 1)$, $a_2=(0,\ -3,\ 3)$, $a_3=(2,\ -7,\ 5)$, $a_4=(1,\ -3,\ 2)$;
$b_1=(1,\ 0,\ 0)$, $b_2=(2,\ 2,\ 0)$, $b_3=(0,\ 0,\ 3)$, $b_4=(4,\ 4,\ 3)$.

ВАРИАНТ 9

1. Составляет ли линейное пространство множество двумерных векторов $A_2=\{(\alpha,\beta \mid \alpha,\beta\in R\}$ с операциями сложения $x+y=(\alpha_1,\alpha_2)+(\beta_1,\beta_2)=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2)$ и умножения на действительное число k $kx=k(\alpha,\beta)=(k\alpha,k\beta)$? Найти его базис и размерность.
2. Доказать, что множество матриц $A=\left\{\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} a_i\in R \\ i=1,2,3 \end{matrix}\right\}$ составляет подпространство пространства M_3. Найти его базис и размерность.
3. Найти базис и размерность линейной оболочки векторов $a_1=3-x+3x^2+2x^3+5x^4$, $a_2=5-3x+3x^2+4x^4$, $a_3=1-3x-5x^2-7x^4$, $a_4=x^4+4x^3+x^2-5x+7$.
4. Найти базис и размерность суммы и пересечения подпространств, натянутых на векторы $x_1=(1,\ -1,\ -1,\ 1)$, $x_2=(0,\ 2,\ 2,\ 0)$, $x_3=(0,\ 3,\ 2,\ -1)$;
$y_1=(0,\ 1,\ 2,\ -1)$, $y_2=(1,\ -1,\ 1,\ 1)$, $y_3=(2,\ -1,\ 4,\ 1)$.

ВАРИАНТ 10

1. Доказать, что множество $M_2=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a,b,c,d\in R\right\}$ образует линейное пространство. Найти его базис и размерность.
2. Образует ли подпространство пространства A_n множество $A=\{(x_1,x_2,...,x_n)\mid x_i\in R, x_1+x_2+...+x_n=0\}$? Найти его базис и размерность.
3. Найти базис и размерность линейной оболочки векторов $a_1=(4,\ 3,\ -5,\ 2,\ 3)$, $a_2=(8,\ 6,\ -7,\ 4,\ 2)$, $a_3=(4,\ 3,\ -8,\ 2,\ 7)$, $a_4=(4,\ 3,\ 1,\ 2,\ -5)$.
4. Найти базис и размерность суммы и пересечения подпространств, натянутых на векторы $a_1=(1,\ 1,\ 1,\ 1)$, $a_2=(1,\ -1,\ 1,\ -1)$, $a_3=(1,\ 3,\ 1,\ 3)$;
$b_1=(1,\ 2,\ 0,\ 2)$, $b_2=(1,\ 2,\ 1,\ 2)$, $b_3=(3,\ 1,\ 3,\ 1)$.

ВАРИАНТ 11

1. Составляет ли линейное пространство множество векторов:
   a) $A=\{(x_1,x_2,...,x_n)\big|\ x_i -$ четные числа$, i=1,...,n\}$,
   b) $B=\{(x_1,x_2,...,x_n)\big|\ x_i -$ нечетные числа$, i=1,...,n\}$?
2. Составляет ли множество многочленов $A=\{f(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n\big|\ a_0,...,a_n\in R,$ $a_0+...+a_n=0\}$ подпространство пространства P_n ? Найти его базис и размерность.
3. Найти базис и размерность линейной оболочки векторов $a_1=e_1-e_2+e_3$, $a_2=e_1+e_2+e_4$, $a_3=2e_1+e_3+e_4$; e_1,e_2,e_3,e_4 , – базис линейного пространства L .
4. Найти базис и размерность суммы и пересечения подпространств, натянутых на векторы $a_1=(1,\ 1,\ 0,\ 0),\ a_2=(0,\ 1,\ 1,\ 0),\ a_3=(0,\ 0,\ 1,\ 1);$
   $b_1=(1,\ 0,\ 1,\ 0)$, $b_2=(0,\ 2,\ 1,\ 1)$, $b_3=(1,\ 2,\ 1,\ 2)$.

ВАРИАНТ 12

1. Составляет ли линейное пространство множество матриц $A=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c\end{pmatrix}\Big| a,b,c\in R\right\}$? Найти его базис и размерность.
2. Доказать, что множество $A=\left\{\underbrace{(x,...,x)}_{n}\Big| x\in R\right\}$ составляет подпространство пространства A_n . Найти его базис и размерность.
3. Найти базис и размерность линейной оболочки векторов $a_1=x+2x^2+3x^3-2x^4+x^5$, $a_2=3x^5-4x^4+5x^3+6x^2+3x$, $a_3=x^2+x-4x^4+7x^3+x^5$, $a_4=2x+4x^2-2x^3-3x^4+3x^5$.
4. Найти базис и размерность суммы и пересечения подпространств, натянутых на векторы $x_1=(1,\ 2,\ 1,\ -2),\ x_2=(2,\ 3,\ 1,\ 0),\ x_3=(1,\ 2,\ 2,\ -3);$
   $y_1=(1,\ 1,\ 1,\ 1)$, $y_2=(1,\ 0,\ 1,\ -1)$, $y_3=(1,\ 3,\ 0,\ 4)$.

ВАРИАНТ 13

1. Составляет ли множество многочленов $A=\{f(x)=a_1x+a_3x^3+a_5x^5\big|\ a_1,a_3,a_5\in R\}$ линейное пространство? Найти его базис и размерность.
2. Составляет ли множество матриц $A=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\Big| a,b,c,d\in R, a+b+c+d=0\right\}$ подпространство пространства M_2 ? Найти его базис и размерность.
3. Найти базис и размерность линейной оболочки векторов $a_1=1-x+x^2-x^3+x^4$, $a_2=7x^4-x^3+x^2+x+3$, $a_3=1+x+3x^4$, $a_4=2x^4+x^3-x^2+2x$.
4. Найти базис и размерность суммы и пересечения подпространств, натянутых на векторы $a_1=(2,\ -5,\ 3,\ 4),\ a_2=(1,\ 2,\ 0,\ 7),\ a_3=(3,\ -6,\ 2,\ 5);$
   $b_1=(2,\ 0,\ 4,\ 6)$, $b_2=(1,\ 1,\ 1,\ 1)$, $b_3=(3,\ 3,\ 1,\ 5)$.

Раздел 5. МАТРИЦА ПЕРЕХОДА

§1. Определение матрицы перехода

Пусть в линейном пространстве L_n заданы два базиса:

$e=(e_1, e_2, ..., e_n)$ (назовем его старым базисом) и

$e'=(e'_1, e'_2, ..., e'_n)$ (назовем его новым базисом).

Разложим векторы базиса e' по базису e:

$$\begin{cases} e_1' = t_{11}e_1 + t_{21}e_2 + ... + t_{n1}e_n, \\ e_2' = t_{12}e_1 + t_{22}e_2 + ... + t_{n2}e_n, \\ ...., \\ e_n' = t_{1n}e_1 + t_{2n}e_2 + ... + t_{nn}e_n. \end{cases} \quad (1)$$

Матрицу $T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & ... & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & ... & t_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ t_{n1} & t_{n2} & ... & t_{nn} \end{pmatrix}$ называют *матрицей перехода* от базиса e к базису e'.

Равенства (1) в матричном виде удобно записывать так:

$$e' = e \cdot T \quad (2).$$

Правило построения матрицы перехода

Для построения матрицы перехода от базиса e к базису e' нужно для всех векторов e_i' нового базиса e' найти их координатные столбцы в старом базисе e и записать их в качестве соответствующих столбцов матрицы T.

Теорема. Матрица перехода от одного базиса n-мерного линейного пространства L_n над полем P к другому его базису является невырожденной матрицей n-го порядка с элементами из поля P.

Теорема. Любая невырожденная квадратная матрица n-го порядка с элементами из поля P служит матрицей перехода от одного базиса n-мерного линейного пространства L_n над полем P к некоторому другому базису пространства L_n.

§2. Связь координат вектора в разных базисах

Пусть в линейном пространстве L_n заданы базисы $e=(e_1, e_2, ..., e_n)$ и $e'=(e'_1, e'_2, ..., e'_n)$ с матрицей перехода T от базиса e к базису e', т.е. верно $e' = e \cdot T$ (2). Вектор a имеет в базисах e и e' координаты

$$[a]_e = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ ... \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \qquad [a]_{e'} = \begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ ... \\ \alpha_n' \end{pmatrix},$$

$$a = e[a]_e = (e_1, e_2, ..., e_n)\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ ... \\ \alpha_n \end{pmatrix} \text{ и } a = e'[a]_{e'} = (e'_1, e'_2, ..., e'_n)\begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ ... \\ \alpha_n' \end{pmatrix}.$$

Тогда, с одной стороны, $a = e[a]_e$, а с другой стороны $a = e'[a]_{e'} = (e \cdot T)[a]_{e'}$
Из этих равенств получаем: $a = e[a]_e = e(T \cdot [a])_{e'}$. Отсюда в силу единственности разложения вектора по базису e вытекает равенство $[a]_e = T \cdot [a]_{e'}$ (3), или

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ ... \\ \alpha_n \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ ... \\ \alpha_n' \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Соотношения (3) и (4) называют *формулами преобразования координат* при изменении базиса линейного пространства. Они выражают старые координаты вектора через новые. Эти формулы можно преобразовать относительно новых координат вектора, умножив (4) слева на T^{-1} (такая матрица существует, так как T – невырожденная матрица). Тогда получим $[a]_{e'} = T^{-1} \cdot [a]_e$. По этой формуле, зная координаты вектора в старом базисе е линейного пространства L_n, можно найти его координаты в новом базисе, e'.

Часто векторы базисов e и e' сами бывают заданы координатами в некотором базисе e^0. Тогда матрица перехода от базиса e к базису e' находится по формуле

$$e = e^0 \cdot T_{e^0 \to e},$$

отсюда получаем формулу

$$e^0 = eT_{e^0 \to e}^{-1}.$$

$$e' = e^0 \cdot T_{e^0 \to e'} = \left(eT_{e^0 \to e}^{-1}\right) \cdot T_{e^0 \to e'} = e \cdot \left(T_{e^0 \to e}^{-1} \cdot T_{e^0 \to e'}\right),$$

отсюда получаем формулу

$$T_{e \to e'} = T_{e^0 \to e}^{-1} \cdot T_{e^0 \to e'}. \qquad (5)$$

Пример 1. Найти матрицу перехода к базису $e'_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, если векторы заданы своими координатами в базисе $e = (e_1, e_2)$.

Решение. Векторы нового базиса: $e' = (e'_1, e'_2)$ - заданы своими координатами в старом базисе: $e = (e_1, e_2)$, т.е. $e' = e \cdot T$.

$$e'_1 = (e_1, e_2)\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2e_1 + 3e_2,$$

$$e'_2 = (e_1, e_2)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1e_1 + 2e_2.$$

По определению матрицы перехода получаем $T_{e \to e'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Пример 2. Найти матрицу перехода от базиса $e=(e_1,e_2)$ к базису $e'=(e_1',e_2')$, если векторы этих базисов заданы своими координатами в некотором базисе e^0:

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}_{e^0},\ e_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_{e^0},\ e_1'=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}_{e^0},\ e_2'=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}_{e^0}.$$

Решение.

1 способ.

$$T_{e^0\to e}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\quad T_{e^0\to e'}=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}.$$

$$T_{e\to e'}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}0&-1\\-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\1&-1\end{pmatrix}.$$

2 способ.

$$e_1=(e_1^0,e_2^0)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=1e_1^0+1e_2^0, \qquad (1)$$

$$e_2=(e_1^0,e_2^0)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=1e_1^0+0e_2^0, \qquad (2)$$

$$e_1'=(e_1^0,e_2^0)\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=2e_1^0+1e_2^0, \qquad (3)$$

$$e_2'=(e_1^0,e_2^0)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=1e_1^0+2e_2^0. \qquad (4)$$

Из равенства (2) имеем $e_2=e_1^0$.

Из равенства (1) имеем $e_1=e_2^0+e_2$, значит $e_2^0=e_1-e_2$.

Из равенства (3) имеем $e_1'=2e_1^0+1e_2^0=2e_2+e_1-e_2=e_2+e_1$.

Из равенства (4) имеем $e_2'=1e_1^0+2e_2^0=e_2+2(e_1-e_2)=2e_1-e_2$.

Из последних двух равенств имеем

$$e_1'=e_1+e_2, \qquad e_2'=2e_1-e_2.$$

По определению матрицы перехода получаем $T_{e\to e'}=\begin{pmatrix}1&2\\1&-1\end{pmatrix}$.

Пример 3. В линейном пространстве многочленов не выше второй степени с действительными коэффициентами даны два базиса:

$$e=(e_1,e_2,e_3):\ e_1=1,\ e_2=x,\ e_3=x^2.$$

$$e'=(e_1',e_2',e_3'):\ e_1'=1,\ e_2'=x-1,\ e_3'=(x-1)^2.$$

Найти матрицу перехода от базиса e к базису e'.

Решение.

$$e_1'=1=1e_1+0e_2+0e_3,$$

$$e_2'=x-1=-1e_1+1e_2+0e_3,$$

$$e_3'=(x-1)^2=x^2-2x+1=1e_1-2e_2+1e_3.$$

По определению матрицы перехода получаем

$$T_{e\to e'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 4. В пространстве X_3 задан вектор x и векторы e_1', e_2', e_3' столбцами координат в базисе $e=(e_1,e_2,e_3)$: $x_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}_e$, $e_1' = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}_e$, $e_2' = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}_e$, $e_3' = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_e$ и вектор $y_{e'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{e'}$ – в виде столбца координат в базисе $e'=(e_1', e_2', e_3')$. Найти координаты вектора x в базисе $e'=(e_1', e_2', e_3')$ и координаты вектора y в базисе $e=(e_1,e_2,e_3)$.

Решение.

$$e_1' = 5e_1 - 1e_2 + 2e_3,$$
$$e_2' = 2e_1 + 3e_2 + 0e_3,$$
$$e_3' = -2e_1 + 1e_2 + 1e_3.$$

По определению матрицы перехода получаем

$$T_{e\to e'} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Используем формулу связи координат одного и того же вектора в разных базисах:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}_e = T_{e\to e'} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}_{e'},$$

отсюда получаем

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}_{e'} = T_{e\to e'}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}_e.$$

$$\left|T_{e\to e'}\right| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 9 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3(9+2) = 33,$$

$$T_{e\to e'}^{-1} = \frac{1}{33}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 8 \\ 3 & 9 & -3 \\ -6 & 4 & 17 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}_{e'} = \frac{1}{33}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 8 \\ 3 & 9 & -3 \\ -6 & 4 & 17 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}_e = \begin{pmatrix} \frac{-13}{33} \\ \frac{42}{33} \\ \frac{-7}{33} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}_e = T_{e\to e'}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{e'} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{e'} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Пример 5. Матрица перехода от базиса $e=(e_1,e_2)$ к базису $f=(f_1,f_2)$ имеет вид $T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$. Найти координаты векторов e_1,e_2 и вектора $c=2e_1+3e_2$ в базисе $f=(f_1,f_2)$

Решение.

1 способ. По определению матрицы перехода получаем

$$f_1 = 2e_1 - 3e_2,$$
$$f_2 = 3e_1 - 4e_2.$$

Из этих равенств найдем векторы e_1,e_2:

$$e_1 = -4f_1 + 3f_2 = (-4,\ 3)_f,$$
$$e_2 = -3f_1 + 2f_2 = (-3,\ 2)_f,$$
$$c = 2e_1 + 3e_2 = 2\cdot(-4,\ 3)_f + 3\cdot(-3,\ 2)_f = (-17,\ 12)_f.$$

2 способ.

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}_e = T_{e\to f}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}_f,$$

выразим

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}_f = T_{e\to f}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}_e = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}_e = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}_e = \begin{pmatrix} -17 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

$$T_{e\to f}^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = T_{f\to e},$$
$$e_1 = -4f_1 + 3f_2 = (-4,\ 3)_f,$$
$$e_2 = -3f_1 + 2f_2 = (-3,\ 2)_f,$$

Пример 6. Убедиться, что векторы $a_1=(1,2,-3)$, $a_2=(4,2,-8)$, $a_3=(1,4,-1)$ образуют базис линейного пространства A^3. Найти координаты вектора $b=(-1,0,5)$ в базисе $a=(a_1,a_2,a_3)$.

Решение.

Составим из координат векторов a_1,a_2,a_3 матрицу и найдём её определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ -3 & -8 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -3 & -8 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & 5 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 5 \end{vmatrix} = -10\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -20 \neq 0.$$

Следовательно, векторы $a_1=(1,2,-3)$, $a_2=(4,2,-8)$, $a_3=(1,4,-1)$ образуют базис линейного пространства A^3.

$$a_1=(1,2,-3)=1\cdot e_1+2\cdot e_2-3\cdot e_3,$$
$$a_2=(4,2,-8)=4\cdot e_1+2\cdot e_2-8\cdot e_3,$$
$$a_3=(1,4,-1)==1\cdot e_1+4\cdot e_2-1\cdot e_3,$$
$$b=(-1,0,5)=-1\cdot e_1+0\cdot e_2+5\cdot e_3.$$

$$T_{e\to a}=\begin{pmatrix}1&4&1\\2&2&4\\-3&-8&-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1\\0\\5\end{pmatrix}_e=T_{e\to a}\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}_a.$$

$$\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}_a=T_{e\to a}{}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\5\end{pmatrix}_e=\begin{pmatrix}1&4&1\\2&2&4\\-3&-8&-1\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\5\end{pmatrix}_e=-\frac{1}{20}\cdot\begin{pmatrix}30&-4&14\\-10&2&-2\\-10&-4&-6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\5\end{pmatrix}_e=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1) Пусть e_1,e_2 – базис пространства R^2 и $e_1'=5e_1-e_2$, $e_2'=2e_1+3e_2$. Показать, что e_1',e_2' – базис пространства R^2. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму и от второго к первому. Найти координаты вектора $a=e_1+4e_2$ в базисе e_1',e_2'.

2) Показать, что системы векторов $e_1,e_2,...,e_n$ и $f_1,f_2,...,f_n$ являются базисами пространства R^n. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму и от второго к первому в следующих случаях:

   a) $e_1=(1,\ -1,\ 0)$, $e_2=(1,\ 2,\ 3)$, $e_3=(0,\ 1,\ -1)$, $f_1=(3,\ -1,\ 4)$, $f_2=(1,\ -2,\ -5)$, $f_3=(3,\ -2,\ -1)$ при $n=3$;

   b) $e_1=(1,\ 2,\ -1,\ 0)$, $e_2=(1,\ -1,\ 1,\ 1)$, $e_3=(-1,\ 2,\ 1,\ 1)$, $e_4=(-1,\ -1,\ 0,\ 1)$, $f_1=(2,\ 1,\ 0,\ 1)$, $f_2=(0,\ 1,\ 2,\ 2)$, $f_3=(-2,\ 1,\ 1,\ 2)$, $f_4=(1,\ 3,\ 1,\ 2)$ при $n=4$.

3) Пусть $e_1,\ e_2,\ e_3$ – базис пространства R^3 и $e_1'=e_1+2e_2+2e_3$, $e_2'=2e_1-e_2$, $e_3'=-e_1+e_2+e_3$. Показать, что $e_1',\ e_2',\ e_3'$ – базис пространства R^3. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму и от второго к первому. Найти координаты векторов $x=e_1+4e_2-e_3$, $y=2e_1'-e_2'+e_3'$ и $z=2x+3y$ в обоих базисах.

4) Пусть $a_1,\ a_2,\ a_3$ и $b_1,\ b_2,\ b_3$ – два базиса пространства R^3 и $T=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ – матрица перехода от первого базиса ко второму. Найти координаты векторов $x=2a_1-3a_2+a_3$ и $y=3b_1+b_2-b_3$ первом и втором базисах.

5) Записать матрицу перехода от базиса $e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4$ к базису

   а) $e_2,\ e_3,\ e_4,\ e_1$,

b) $e_2,\ e_1,\ e_3,\ e_4$,

c) $e_1,\ e_1+e_2,\ e_2+e_3,\ e_3+e_4$.

6) Как изменится матрица перехода от одного базиса к другому, если:
   a) поменять местами два вектора первого базиса,
   b) поменять местами два вектора второго базиса,
   c) записать векторы первого базиса в обратном порядке,
   d) записать векторы второго базиса в обратном порядке,
   e) записать векторы обоих базисов в обратном порядке?

7) Найти матрицу перехода от базиса $1,\ x,\ x^2,\ x^3$ пространства многочленов степени ≤ 3 к базису $1,\ (x-a),\ (x-a)^2,\ (x-a)^3$.

ВАРИАНТЫ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

ВАРИАНТ 1

1. Матрица $M=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$ является матрицей перехода от базиса $e_1,\ e_2,\ e_3$ к базису $a_1,\ a_2,\ a_3$. Найти координаты векторов $e_1,\ e_2,\ e_3$ и вектора $x=2e_1-e_3$ в базисе $a_1,\ a_2,\ a_3$.
2. В пространстве многочленов, степени которых не превосходят 3, найти матрицу перехода от базиса $1,\ x,\ x^2,\ x^3$ к базису $3,\ 3x+5,\ (x+3)^2,\ (x-4)^3$.
3. Найти связь координат одного и того же вектора в двух базисах $e_1=1-x$, $e_2=2$ и $a_1=3+2x$, $a_2=4+3x$.

ВАРИАНТ 2

1. Убедиться, что $a_1=(1,\ 2,\ -3)$, $a_2=(4,\ 2,\ -8)$, $a_3=(1,\ 4,\ -1)$ образуют базис линейного пространства A^3. Найти координаты вектора $b=(7,\ -1,\ -2)$ в базисе $a_1,\ a_2,\ a_3$.
2. В пространстве многочленов, степени которых не превосходят 2, найти матрицу перехода от базиса $x^2+3x-2,\ 3x-1,\ 5$ к базису $1,\ x,\ x^2+3$.
3. Матрица $T=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -3 & -4\end{pmatrix}$ является матрицей перехода от базиса $e_1,\ e_2$ к базису $f_1,\ f_2$. Найти координаты векторов $e_1,\ e_2$, $c=2e_1+3e_2$ в базисе $f_1,\ f_2$.

ВАРИАНТ 3

1. Даны два базиса линейного пространства A^3: $e_1=(1,\ 1,\ 1)$, $e_2=(2,\ 1,\ 1)$, $e_3=(1,\ 0,\ 1)$ и $f_1=(0,\ 1,\ 1)$, $f_2=(1,\ 0,\ 1)$, $f_3=(1,\ 0,\ 2)$. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму и от второго к первому.
2. Найти координаты многочлена $f(x)=x^2+8x-24$ в базисе $3x^2+2x-1,\ 3x+4,\ x^2+3x-2$.

3. Убедиться, что многочлены $2,\ (x-3),\ (2-x)^2,\ (x+4)^3$ составляют базис пространства P_3. Найти матрицу перехода от базиса $1,\ x,\ x^2,\ x^3$ к базису $2,\ (x-3),\ (2-x)^2,\ (x+4)^3$

ВАРИАНТ 4

1. Даны два базиса линейного пространства: $e_1=(1,\ 2)$, $e_2=(2,\ 3)$ и $e_1'=(4,\ 5)$, $e_2'=(1,\ 1)$. Найти связь координат одного и того же вектора в этих базисах.
2. Убедиться, что многочлены $f_1=x^2-3x+1$, $f_2=4x+3x^2$, $f_3=x^2$ составляют базис линейного пространства многочленов, степени которых не превосходят 2. Найти координаты многочлена $g=5x^2-5x+3$ в этом базисе.
3. Убедиться, что многочлены $2,\ (x-3),\ (x-2)^2$ составляют базис пространства P_2. Найти матрицу перехода от базиса $2,\ (x-3),\ (x-2)^2$ к базису $1,\ x,\ x^2$.

ВАРИАНТ 5

1. Найти связь координат одного и того же вектора в двух базисах: $a_1=(1,\ 2)$, $a_2=(2,\ 1)$ и $b_1=(2,\ 3)$, $b_2=(4,\ 1)$.
2. Найти матрицу перехода от базиса $1,\ x,\ x^2,\ x^3$ к базису $4,\ x^2+1,\ x^3+3x-1,\ x^3+2x-1$.
3. Даны два базиса $a_1,\ a_2$ и $b_1,\ b_2$, причем $a_1=3b_1+5b_2$, $a_2=2b_1+3b_2$. Найти координаты вектора $c=3b_1+2b_2$ в базисе $a_1,\ a_2$.

ВАРИАНТ 6

1. Найти матрицу перехода от базиса $a_1=(1,\ 2,\ 3)$, $a_2=(4,\ 0,\ -1)$, $a_3=(2,\ 2,\ 0)$ к базису $e_1=(1,\ 0,\ 0)$, $e_2=(0,\ 1,\ 0)$, $e_3=(0,\ 0,\ 1)$.
2. Найти координаты многочлена $f(x)=5x^2-3x+6$ в базисе $4,\ 4x+3,\ x^2-3x+1$.
3. Найти связь координат вектора в двух базисах: $a_1=3+2x$, $a_2=4+3x$ и $e_1=1-x$, $e_2=2$.

ВАРИАНТ 7

1. Убедиться, что векторы $a_1=(1,\ 2,\ 3)$, $a_2=(2,\ 3,\ -1)$, $a_3=(2,\ 0,\ 1)$ образуют базис линейного пространства A^3. Найти координаты вектора $x=(0,\ -7,\ -3)$ в этом базисе.
2. В пространстве многочленов, степени которых не превосходят 2, найти матрицу перехода от базиса $x,\ x^2+2x,\ x^2-3x+1$ к базису $4,\ 4x-2,\ x^2+x-3$.
3. Матрица $M=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ является матрицей перехода от базиса $a_1=(1,\ 2)$, $a_2=(3,\ 2)$ к базису $b_1,\ b_2$. Найти координаты вектора $c=2a_1+a_2$ в базисе $b_1,\ b_2$.

ВАРИАНТ 8

1. Найти матрицу перехода от базиса $e_1' = e_1$, $e_2' = e_1 + e_2$, $e_3' = e_1 + e_2 + e_3$ к базису $e_1,\ e_2,\ e_3$.
2. Убедиться, что многочлены $f_1 = x^2 + 3x + 1$, $f_2 = -1 + 4x^2$, $f_3 = x^2 - 2x$ составляют базис пространства P_2 многочленов, степени которых не превосходят 2. Найти координаты многочлена $g = 3x^2 - 8x - 3$ в этом базисе.
3. Матрица $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ является матрицей перехода от базиса $x,\ 1,\ x^2$ к базису $f_1,\ f_2,\ f_3$. Найти матрицу перехода от базиса $f_1,\ f_2,\ f_3$ к базису $x,\ 1,\ x^2$.

ВАРИАНТ 9

1. Матрица $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ является матрицей перехода от базиса $e_1,\ e_2,\ e_3$ к базису $a_1,\ a_2,\ a_3$. Найти координаты векторов $e_1,\ e_2,\ e_3$ и $x = e_1 + 2e_2 - e_3$ в базисе $a_1,\ a_2,\ a_3$.
2. Для пространства P_2 многочленов, степени которых не превосходят 2, найти матрицу перехода от базиса $4x^2 - 1,\ 4x + 1,\ 3$ к базису $x^2 + 2x + 3,\ 2x,\ x - 4$.
3. Даны два базиса: $a_1 = (1,\ -2)$, $a_2 = (3,\ -5)$ и $b_1 = (1,\ 1)$, $b_2 = (2,\ 3)$ пространства A_2 двумерных векторов. Найти матрицу перехода от базиса $a_1,\ a_2$ к базису $b_1,\ b_2$.

ВАРИАНТ 10

1. Найти матрицу перехода от базиса $a_1 = (1,\ 2,\ 3)$, $a_2 = (2,\ 3,\ -1)$, $a_3 = (0,\ 1,\ 1)$ к базису $b_1 = (2,\ 3,\ 1)$, $b_2 = (1,\ 1,\ 1)$, $b_3 = (-1,\ 2,\ 1)$.
2. В пространстве P_2 многочленов, степени которых не превосходят 2, найти координаты многочлена $f(x) = 3x^2 + 6$ в базисе $x^2 + x - 1,\ x^2 + 2x - 3,\ x - 3$.
3. Матрица $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ является матрицей перехода от базиса $1,\ x,\ x^2$ к базису $f_1,\ f_2,\ f_3$ в пространстве P_2 многочленов, степени которых не превосходят 2. Найти координаты многочлена $g(x) = 3x^2 - 4x + 1$ в базисе $f_1,\ f_2,\ f_3$.

ВАРИАНТ 11

1. В пространстве P_2 многочленов, степени которых не превосходят 2, даны два базиса: $x,\ x^2 + 4x,\ 3x - 1$ и $x^2 - 3x + 1,\ x^2 + 1,\ 3x + 1$. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму.

2. Убедиться, что векторы $a_1=(1,\ 2)$, $a_2=(3,\ 5)$ образуют базис пространства A_2. Найти координаты вектора $x=(3,\ 4)$ в базисе $a_1,\ a_2$.
3. Матрица $M=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ является матрицей перехода от базиса $e_1,\ e_2,\ e_3$ к базису $a_1,\ a_2,\ a_3$. Найти координаты вектора $b=3a_1-a_2+a_3$ в базисе $e_1,\ e_2,\ e_3$.

ВАРИАНТ 12

1. Матрица $M=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ является матрицей перехода от базиса $e_1,\ e_2,\ e_3$ к базису $a_1,\ a_2,\ a_3$. Найти координаты векторов $e_1,\ e_2,\ e_3$ и вектора $x=2e_1-e_2$ x=2e1–e2 в базисе $a_1,\ a_2,\ a_3$.
2. Даны два базиса линейного пространства A_2 двумерных векторов: $a_1=(3,\ 4)$, $a_2=(1,\ 1)$ и $b_1=(2,\ 5)$, $b_2=(1,\ 3)$. Найти матрицу перехода от второго базиса к первому.
3. В пространстве многочленов P_3 найти матрицу перехода от базиса $1,\ x,\ x^2,\ x^3$ к базису $5,\ 2x-3,\ (x-3)^2,\ (x+2)^3$.

ВАРИАНТ 13

1. Убедиться, что векторы $a_1=(1,\ 2,\ -3)$, $a_2=(4,\ 2,\ -8)$, $a_3=(1,\ 4,\ -1)$ образуют базис линейного пространства A_3. Найти координаты вектора $(-1,\ 0,\ 5)$ в базисе $a_1,\ a_2,\ a_3$.
2. В пространстве многочленов, степени которых не превосходят 2, найти матрицу перехода от базиса $x^2+3x-2,\ 2x-3,\ 3$ к базису $1,\ 3x-2,\ x^2-4x$.
3. Даны два базиса линейного пространства A_2 двумерных векторов: $a_1=(1,\ 2)$, $a_2=(3,\ 5)$ и $b_1=(2,\ 1)$, $b_2=(3,\ 4)$. Найти матрицу перехода от базиса $a_1,\ a_2$ к базису $b_1,\ b_2$.

Раздел 6. РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНЫХ И НЕОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАНГОВ ИХ МАТРИЦ

Метод Гаусса имеет ряд недостатков: нельзя узнать, совместна система или нет, пока не будут проведены все преобразования, необходимые при использовании метода Гаусса; метод Гаусса не пригоден для систем с буквенными коэффициентами.

Рассмотрим другие методы решения систем линейных уравнений. Применение этих методов предполагает использование понятия ранга матрицы и сведение решения любой совместной системы к решению системы, к которой применимо правило Крамера.

Пример 1. Найти общее решение следующей системы линейных уравнений с помощью фундаментальной системы решений приведенной однородной системы и частного решения неоднородной системы:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 9x_4 = -1. \end{cases}$$
(1)

1. Составляем матрицу A и расширенную матрицу $\overline{A}$ системы (1):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -9 \end{pmatrix} \qquad \overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -9 & -1 \end{array}\right).$$

2. Исследуем систему (1) на совместность. Для этого находим ранги матриц A и $\overline{A}$ (обозначим их через r_A и $r_{\overline{A}}$). Если окажется, что $r_A \neq r_{\overline{A}}$, то система (1) несовместна. Если же получим, что $r_A = r_{\overline{A}}$, то эта система совместна и мы ее будем решать. (Исследование на совместность основано на теореме Кронекера-Капелли).

   a) Находим r_A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -9 \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти r_A, будем рассматривать последовательно отличные от нуля миноры первого, второго и других порядков матрицы A и окаймляющие их миноры.

$M_1 = 1 \neq 0$ (1 берем из левого верхнего угла матрицы A).

Окаймляем M_1 второй строкой и вторым столбцом этой матрицы. $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Продолжаем окаймлять M_1 второй строкой и третьим столбцом. Получим $M_2' = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Значит, $r_A \geq 2$. Теперь окаймляем отличный от нуля минор M_2' второго порядка.

Имеем: $M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ (так как два первых столбца одинаковые).

$$M_3' = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -8 \end{vmatrix} = 0$$ (т.к. вторая и третья строки пропорциональны).

Мы видим, что $r_A = 2$, а M_2' – базисный минор матрицы A.

   b) Находим $r_{\overline{A}}$.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -9 & -1 \end{array}\right).$$

Достаточно базисный минор M_2' матрицы A окаймить столбцом свободных членов и всеми строками (у нас только последней строкой).

$$M_3'' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда следует, что $r_{\overline{A}} = 2$ и M_2' остается базисным минором матрицы $\overline{A}$.

Так как $r_A = r_{\overline{A}}$, то система (1) совместна.

Переходим к нахождению общего решения этой системы.

3. Составим приведенную однородную систему (2) для системы (1), заменив в (1) все свободные члены нулями. Затем найдем фундаментальную систему решений (ФСР) системы (2), а через нее и общее решение этой системы.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 9x_4 = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Так как M_2' – базисный минор матрицы A системы (2), то эта система эквивалентна системе (3), состоящей из первых двух уравнений системы (2) (ибо M_2' находится в первых двух строках матрицы A).

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Так как базисный минор M_2' находится в первом и третьем столбцах матрицы A, то основными неизвестными в (3) будут x_1 и x_3. Свободные неизвестные x_2 и x_4 перенесем в правые части системы уравнений (3).

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = -x_2 + x_4, \\ x_1 - 2x_3 = -x_2 - 3x_4. \end{cases} \qquad (4)$$

В этой системе два свободных неизвестных (x_2 и x_4). Поэтому ФСР системы (4) состоит из двух решений. Чтобы их найти, придадим свободным неизвестным в (4) сначала значения $x_2 = 1$, $x_4 = 0$, а затем другие: $x_2 = 0$, $x_4 = 1$.

При $x_2 = 1$, $x_4 = 0$ получим

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = -1, \\ x_1 - 2x_3 = -1. \end{cases}$$

Эта система уже имеет единственное решение (его можно найти по правилу Крамера или любым другим способом). Вычтя из второго уравнения первое, получим:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = -1, \\ -x_3 = 0. \end{cases}$$

Ее решение: $x_1 = -1$, $x_3 = 0$. Учитывая значения x_2 и x_4, которые мы им придали, получим первое фундаментальное решение системы (2): $\beta_1 = (-1, 1, 0, 0)$.

Теперь полагаем в (4) $x_2 = 0$, $x_4 = 1$. Получим:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_3 = -3. \end{cases}$$

Решаем эту систему по теореме Крамера:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-5}{-1} = 5, \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-4}{-1} = 4.$$

Получаем второе фундаментальное решение системы (2): $\beta_2 = (5, 0, 4, 1)$.

Решения β_1, β_2 и составляют ФСР системы (2). Тогда ее общим решением будет

$$\gamma = C_1\beta_1 + C_2\beta_2 = C_1(-1, 1, 0, 0) + C_2(5, 0, 4, 1) = (-C_1 + 5C_2, C_1, 4C_2, C_2),$$

здесь C_1, C_2 – произвольные постоянные.

4. Найдем одно частное решение неоднородной системы (1). Как и в пункте 3, вместо системы (1) рассмотрим эквивалентную ей систему (5), состоящую из первых двух уравнений системы (1).

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2. \end{cases} \tag{5}$$

Перенесем в правые части свободные неизвестные x_2 и x_4.

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 1 - x_2 + x_4, \\ x_1 - 2x_3 = 2 - x_2 - 3x_4. \end{cases} \tag{6}$$

Придадим свободным неизвестным x_2 и x_4 произвольные значения, например, $x_2 = 2$, $x_4 = 1$ и подставим их в (6). Получим систему

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_3 = -3. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение, так как ее определитель $M_2' \neq 0$. Решая ее по теореме Крамера или методом Гаусса, получим $x_1 = 3$, $x_3 = 3$. Учитывая значения свободных неизвестных x_2 и x_4, получим частное решение неоднородной системы (1) $\alpha_1 = (3, 2, 3, 1)$.

5. Теперь осталось записать *общее решение* α неоднородной системы (1): оно равно сумме частного решения этой системы и общего решения ее приведенной однородной системы (2):

$$\alpha = \alpha_1 + \gamma = (3, 2, 3, 1) + (-C_1 + 5C_2, C_1, 4C_2, C_2).$$

$$\begin{cases} x_1 = 3 - C_1 + 5C_2, \\ x_2 = 2 + C_1, \\ x_3 = 3 + 4C_2, \\ x_4 = 1 + C_2. \end{cases} \tag{7}$$

6. **Проверка.** Чтобы проверить, правильно ли решена система (1), надо общее решение (7) подставить в (1). Если каждое уравнение превратиться в тождество (C_1 и C_2 должны уничтожиться), то решение найдено верно.

Мы подставим (7) для примера только в последнее уравнение системы (1)

($x_1 + x_2 + x_3 - 9x_4 = -1$).

Получим:

$$(3 - C_1 + 5C_2) + (2 + C_1) + (3 + 4C_2) - 9(1 + C_2) = -1,$$

$$(C_1 - C_1) + (4C_2 + 5C_2 - 9C_2) + (3 + 2 + 3 - 9) = -1.$$

Откуда $-1 = -1$, т.е. получили тождество. Так поступаем со всеми остальными уравнениями системы (1).

Замечание. Проверка обычно довольно громоздкая. Можно рекомендовать следующую «частичную проверку». В общем решении системы (1) произвольным постоянным придать некоторые значения и подставить полученное частное решение только в отброшенные уравнения, т.е. в те уравнения из (1), которые не вошли в (5). Если получите тождества, то скорее всего решение системы (1) найдено правильно. Но полной гарантии правильности такая проверка не дает.

Пример 2. Найти общее решение системы линейных уравнений (1), выразив основные неизвестные через свободные.

Решение. Как и в примере 1, составляем матрицы A и $\overline{A}$ системы (1) и исследуем систему (1) на совместность (см. пункты 1 и 2 примера 1). Так мы нашли общий базисный минор $M_2' = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ этих матриц. Оставляем теперь только те уравнения системы (1), коэффициенты в которых входят в этот базисный минор, т.е. первые два уравнения и рассматриваем состоящую из них систему, эквивалентную системе (1):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2. \end{cases} \tag{8}$$

Перенесем в правые части этих уравнений свободные неизвестные:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 1 - x_2 + x_4, \\ x_1 - 2x_3 = 2 - x_2 - 3x_4. \end{cases} \tag{9}$$

Систему (9) решаем методом Гаусса, считая правые части свободными членами:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 - x_2 + x_4 \\ 1 & -2 & 2 - x_2 - 3x_4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 - x_2 + x_4 \\ 0 & -1 & 1 - 4x_4 \end{array}\right).$$

Откуда получаем, что $-x_3 = 1 - 4x_4$ или $x_3 = -1 + 4x_4$. Подставим найденное выражение для x_3 в первое уравнение системы, получим $x_1 + 1 - 4x_4 = 1 - x_2 + x_4$. Получаем $x_1 = -x_2 + 5x_4$.

Получим общее решение системы (1): $x_1 = -x_2 + 5x_4$, $x_3 = -1 + 4x_4$. Здесь x_2 и x_4 могут принимать произвольные значения.

Это решение можно представить и в виде вектора:

$$(-x_2 + 5x_4, x_2, -1 + 4x_4, x_4).$$

Замечание. Разумеется, систему (8) можно решать и другими способами – методами Крамера, подстановкой. Но всегда правые ее части считаются свободными членами.

ВАРИАНТЫ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

Задания

1. Найти фундаментальную систему решений однородной системы и выразить через нее общее решение этой системы (способ выполнения этого задания описан в пункте 3 примера 1).
2. Исследовать на совместность, найти общее решение системы линейных уравнений с помощью фундаментальной системы решений приведенной однородной системы и частного решения неоднородной системы. Сделать проверку полученного решения (способ выполнения этого задания описан в примере 1).

3. Найти общее решение системы линейных уравнений из своего варианта задания 2, выразив основные неизвестные через свободные (способ выполнения этого задания описан в примере 2).

ВАРИАНТ 1

1. $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0, \\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0, \\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0, \\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3-x_4=1, \\ x_1-x_2+x_3-x_4=0, \\ x_1-x_2+5x_3-x_4=4, \\ x_1-x_2+6x_3-x_4=5. \end{cases}$

ВАРИАНТ 2

1. $\begin{cases} 2x_1-4x_2+5x_3+3x_4=0, \\ 3x_1-6x_2+4x_3+2x_4=0, \\ 4x_1-8x_2+17x_3+11x_4=0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=1, \\ 3x_1-2x_2+3x_3=0, \\ x_1+3x_2+2x_3=5, \\ 3x_1+2x_2+2x_3=3. \end{cases}$

ВАРИАНТ 3

1. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3+3x_4+5x_5=0, \\ 6x_1+4x_2+3x_3+5x_4+7x_5=0, \\ 9x_1+6x_2+5x_3+7x_4+9x_5=0, \\ 3x_1+2x_2+4x_4+8x_5=0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x_1+x_2-x_3-x_4=2, \\ 9x_1+x_2-2x_3-x_4-2x_5=5, \\ x_1-x_2-x_4+2x_5=1, \\ x_1+x_2-x_3-3x_4+4x_5=2. \end{cases}$

ВАРИАНТ 4

1. $\begin{cases} 6x_1-2x_2+2x_3+5x_4+7x_5=0, \\ 9x_1-3x_2+4x_3+8x_4+9x_5=0, \\ 6x_1-2x_2+6x_3+7x_4+x_5=0, \\ 3x_1-x_2+4x_3+4x_4-x_5=0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4=1, \\ x_1-2x_2+x_3-x_4=-1, \\ x_1-2x_2+x_3+5x_4=5. \end{cases}$

ВАРИАНТ 5

1. $\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4+3x_5=0, \\ 5x_1+7x_2+x_3+3x_4+4x_5=0, \\ 4x_1+5x_2+2x_3+x_4+5x_5=0, \\ 7x_1+10x_2+x_3+6x_4+5x_5=0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4, \\ x_2-x_3+x_4=-3, \\ x_1+3x_2-3x_4=1, \\ -7x_2+3x_3+x_4=-3. \end{cases}$

ВАРИАНТ 6

1. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+5x_3+6x_4=0, \\ 3x_1+4x_2+6x_3+7x_4=0, \\ 3x_1+x_2+x_3+4x_4=0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=7, \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=-2, \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=23, \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=12. \end{cases}$

ВАРИАНТ 7

1. $\begin{cases} 8x_1-5x_2-6x_3+3x_4=0, \\ 4x_1-x_2-3x_3+2x_4=0, \\ 12x_1-7x_2-9x_3+5x_4=0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=1, \\ x_1-x_2+x_3+x_4-2x_5=0, \\ 3x_1+3x_2-3x_3-3x_4+4x_5=2, \\ 4x_1+5x_2-5x_3-5x_4+7x_5=3. \end{cases}$

ВАРИАНТ 8

1. $\begin{cases} 14x_1+35x_2-7x_3-63x_4=0, \\ -10x_1-25x_2+5x_3+45x_4=0, \\ 26x_1+65x_2-13x_3-117x_4=0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=1, \\ x_1+2x_2-x_3+x_4-2x_5=1, \\ 4x_1-10x_2+5x_3-5x_4+7x_5=1, \\ 2x_1-14x_2+7x_3-7x_4+11x_5=-1. \end{cases}$

ВАРИАНТ 9

1. $\begin{cases} 7x_1-4x_2+9x_3+2x_4+2x_5=0, \\ 5x_1+8x_2+7x_3-4x_4+2x_5=0, \\ 3x_1-8x_2+5x_3+4x_4+2x_5=0, \\ 7x_1-2x_2+2x_3+x_4-5x_5=0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=1, \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4=1, \\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4=1, \\ 2x_1+2x_2+2x_3-x_4=1, \\ 5x_1+5x_2+2x_3=2. \end{cases}$

ВАРИАНТ 10

1. $\begin{cases} 2x_1+x_2+4x_3+x_4=0, \\ 3x_1+2x_2-x_3-6x_4=0, \\ 7x_1+4x_2+6x_3-5x_4=0, \\ x_1+8x_3+7x_4=0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 7x_1-5x_2-2x_3-4x_4=8, \\ -3x_1+2x_2+x_3+2x_4=-3, \\ 2x_1-x_2-x_3-2x_4=1, \\ -x_1+x_3+2x_4=1, \\ -x_2+x_3+2x_4=3. \end{cases}$

ВАРИАНТ 11

1. $\begin{cases} x_1+4x_2+2x_3-3x_5=0, \\ 2x_1+9x_2+5x_3+2x_4+x_5=0, \\ x_1+3x_2+x_3-2x_4-9x_5=0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1+x_2=1, \\ x_1+x_2+x_3=4, \\ x_2+x_3+x_4=-3, \\ x_3+x_4+x_5=2, \\ x_4+x_5=-1. \end{cases}$

ВАРИАНТ 12

1. $\begin{cases} 2x_1+6x_2+10x_3+4x_4-2x_5=0, \\ 6x_1+10x_2+17x_3+7x_4-3x_5=0, \\ 9x_1+3x_2+2x_4+3x_5=0, \\ 12x_1-2x_2+x_3+8x_4+5x_5=0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 12x_1-18x_2+102x_3-174x_4-216x_5=132, \\ 14x_1-21x_2+119x_3-203x_4-252x_5=154, \\ x_3+2x_4+3x_5=-1, \\ 4x_3+5x_4+6x_5=-2, \\ 7x_3+8x_4+9x_5=-3. \end{cases}$

ВАРИАНТ 13

1. $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=0, \\ 2x_1-4x_2+5x_3+7x_4=0, \\ 6x_1-12x_2+17x_3-9x_4=0, \\ 7x_1-14x_2+18x_3+17x_4=0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=6, \\ 3x_1+5x_2+2x_3+2x_4=4, \\ 9x_1+4x_2+x_3+7x_4=2. \end{cases}$

Раздел 7. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ

§1. Определение линейного преобразования

Пусть L n-мерное линейное пространство над полем P, P – поле действительных или комплексных чисел, и φ – преобразование его в себя (или на себя), то есть закон, по которому каждому элементу x линейного пространства L ставится в соответствие единственный элемент - $\varphi(x)$ - этого пространства. Вектор $\varphi(x)$ называется *образом вектора* x, а вектор x - *прообразом вектора* $\varphi(x)$. Преобразование φ называется *линейным преобразованием* линейного пространства L, если выполняются условия

1) $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$,

2) $\varphi(\lambda x)=\lambda\varphi(x)$, для любых векторов $x, y \in L$ и любого числа $\lambda \in P$.

Чтобы задать линейное преобразование φ линейного n-мерного пространства L, достаточно в нем взять любой базис и указать образы базисных векторов.

Если $a_1,...,a_n$ – базис L и $\varphi(a_1)=b_1,...,\varphi(a_n)=b_n$, то можем найти образ любого вектора $x \in L$. Действительно, $x=x_1a_1+...+x_na_n$, поэтому

$$\varphi(x)=\varphi(x_1a_1+...+x_na_n)=x_1\varphi(a_1)+...+x_n\varphi(a_n)= =x_1b_1+...+x_nb_n .$$

Если $(e_1,...,e_n)$ – базис линейного пространства L и φ – его линейное преобразование, то нам известны образы $\varphi(e_1),...,\varphi(e_n)$; разложим их по базису:

$$\varphi(e_1)=\alpha_{11}e_1+\ldots+\alpha_{n1}e_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi(e_n)=\alpha_{1n}e_1+\ldots+\alpha_{nn}e_n.$$

Из коэффициентов этих разложений можно составить матрицу по столбцам:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Столбцы этой матрицы являются координатными столбцами образов соответствующих базисных векторов. Такая матрица называется *матрицей линейного преобразования* φ в базисе $e_1,\ldots,e_n$.

При нахождении матрицы линейного преобразования нужно

1) найти образы базисных векторов,
2) выразить каждый из них через базис,
3) выписать коэффициенты разложения в столбцы.

В матричном виде эти соотношения запишем в виде

$$\varphi(e)=eA_{\varphi_e}$$

или

$$\varphi(e)=eA,$$

где $\varphi(e)=(\varphi(e_1),\ldots,\varphi(e_n))$, $e=(e_1,\ldots,e_n)$, A – матрица линейного преобразования φ в базисе e.

Зная матрицу линейного преобразования φ, можно найти образ любого вектора x. Если $x=x_1e_1+\ldots+x_ne_n$, а $\varphi(x)=x_1'e_1+\ldots+x_n'e_n$, то

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ \ldots \\ x_n' \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Связь между матрицами одного и того же преобразования в разных базисах выражается формулой

$$B=T^{-1}AT,$$

где

A – матрица линейного преобразования φ в базисе $e_1,\ldots,e_n$,

B – матрица линейного преобразования φ в базисе $e_1',\ldots,e_n'$,

T – матрица перехода от базиса $e_1,\ldots,e_n$ к базису $e_1',\ldots,e_n'$.

§2. Действия с линейными преобразованиями

Произведение линейного преобразования на число

Пусть φ – линейное преобразование линейного пространства L над полем P и k – любое число из P. В результате линейного преобразования φ произвольному вектору $a\in L$ соответствует единственный вектор $\varphi(a)=a'\in L$. Вектор $ka'\in L$. Если вектору a поставить в соответствие вектор ka', то имеем преобразование пространства L:

$$a\to ka'=k(\varphi(a)).$$

Это преобразование пространства L называют *произведением преобразования* φ *на число* k и обозначают $k\varphi$:

$$((k\varphi)a = k(\varphi(a)) = ka'.$$

Теорема 1. Если φ линейное преобразование линейного пространства L над полем P и k – любое число из P, то $k\varphi$ есть линейное преобразование линейного пространства L.

Теорема 2. Если A – матрица линейного преобразования φ линейного пространства L в базисе e, то матрица линейного преобразования $k\varphi$ в базисе e есть kA.

Пример 1. Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ - матрица линейного преобразования φ линейного пространства L_2 над полем C в базисе $e = (e_1, e_2)$. Найти матрицу преобразования 2φ.

Решение. Матрица преобразования 2φ есть $2A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$.

Сложение и вычитание линейных преобразований

Пусть даны линейные преобразования φ и ψ линейного пространства L. Если a - любой вектор из L, то $\varphi(a) = a'$ и $\psi(a) = a''$ - векторы из L. Если вектору a поставим в соответствие единственный вектор $a' \neq a''$ из L, то получим преобразование линейного пространства L. Оно называется *суммой линейных преобразований* φ и ψ и обозначается $\varphi + \psi$.

Итак, по определению

$$(\varphi + \psi)a = \varphi(a) + \psi(a) = a' + a''.$$

Аналогично определяется разность линейных преобразований:

$$(\varphi - \psi)a = \varphi(a) - \psi(a) = a' - a''.$$

Теорема 3. Если φ и ψ – линейные преобразования линейного пространства L, то преобразования $\varphi + \psi$ и $\varphi - \psi$ линейного пространства L являются линейными.

Теорема 4. Если A и B – матрицы, соответственно, линейных преобразований φ и ψ линейного пространства L в базисе $e = (e_1, ..., e_n)$, то матрицы $A + B$, $A - B$ являются соответственно матрицами линейных преобразований $\varphi + \psi$ и $\varphi - \psi$ в том же базисе.

Пример 2. Пусть $e = (e_1, e_2)$ базис линейного пространства L_2, φ, ψ – его линейные преобразования и их матрицы соответственно $A_{\varphi_e} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B_{\psi_e} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу линейных преобразований в базисе e:

1) $2\varphi + 3\psi$,
2) $3\psi - \varphi$.

Решение.

1) $2A + 3B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$,
2) $3B - A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

В линейном пространстве L даны линейные преобразования φ и ψ. Результатом последовательного выполнения линейных преобразований φ и ψ является преобразование линейного пространства L. Оно называется *произведением линейных преобразований* φ и ψ и обозначается $\varphi\cdot\psi$:

$$(\varphi\cdot\psi)\cdot a=\varphi\cdot[\psi\cdot a].$$

Теорема 5. Произведение линейных преобразований φ и ψ линейного пространства L является линейным преобразованием этого пространства.

Теорема 6. Если A и B - соответственно матрицы линейных преобразований φ и ψ линейного пространства L_n в базисе $e=(e_1,...,e_n)$, то матрица линейного преобразования $\psi\cdot\varphi$ линейного пространства L_n в базисе e есть $B\cdot A$.

Пример 3. Пусть $A=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}$ матрицы линейных преобразований соответственно φ и ψ линейного пространства L_2 в базисе $e=(e_1,e_2)$. Найти матрицы преобразований в базисе e.

1) $\varphi\psi$,
2) $\psi\varphi$,
3) $(\psi+\varphi)\varphi$.

Решение.

1) $A\cdot B=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\6&0\end{pmatrix}$;

2) $B\cdot A=\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}$;

3) $(B+A)A=\begin{pmatrix}2&1\\4&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&4\\8&8\end{pmatrix}$.

Пример 4. Пусть линейное преобразование φ пространства L_2 в базисе $f=(f_1=(2,1),\ f_2=(1,1))$ имеет матрицу $\begin{pmatrix}3&3\\2&1\end{pmatrix}$, а линейное преобразование ψ этого пространства в базисе $h=(h_1=(1,3), h_2=(2,4))$ имеет матрицу $\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$. Найти матрицу линейных преобразований $\varphi+\psi$, $\varphi\psi$ в базисах $f=(f_1,f_2)$, $h=(h_1,h_2)$ и исходном базисе $e=(e_1,e_2)$.

Решение. Чтобы найти матрицы преобразований $\varphi+\psi$, $\varphi\psi$, надо знать матрицы преобразований φ и ψ в одном и том же базисе. Мы имеем три базиса: $e=(e_1,e_2)$, $f=(f_1,f_2)$, $h=(h_1,h_2)$. По условию задачи есть следующие соотношения:

1) $f=eT_{e\to f}$, $T_{e\to f}=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$;

2) $h=eT_{e\to h}$, $T_{e\to h}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$;

3) $\varphi f = fA,\ A_{\varphi_f} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

4) $\psi h = hB,\ B_{\psi_h} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Из соотношений 1)–2) получим связь базисов f и h:

$$e = fT_{e\to f}^{-1},\ h = eT_{e\to h} = \left(fT_{e\to f}^{-1}\right) T_{e\to h} = fT_{e\to f}^{-1}T_{e\to h},$$

т.е.

$$h = fT_{e\to f}^{-1}T_{e\to h} \text{ и } f = hT_{e\to h}^{-1}T_{e\to f}.$$

Матрицы линейного преобразования в разных базисах связаны соотношением

$$B_{\varphi_{e'}} = T_{e\to e'}^{-1}A_{\varphi_e}T_{e\to e'}.$$

1) Найдем матрицы преобразования φ в базисах e и h:

a) f – старый базис, $A_{\varphi_f} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, e - новый базис, M_{φ_e} – матрица линейного преобразования φ в базисе e. По формуле связи между матрицами одного и того же линейного преобразования в разных базисах имеем соотношение:

$$A_{\varphi_f} = T_{e\to f}^{-1}M_{\varphi_e}T_{e\to f},$$

отсюда получаем формулу

$$M_{\varphi_e} = T_{e\to f}A_{\varphi_f}T_{e\to f}^{-1}.$$

$$T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\quad T_{e\to f}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$M_{\varphi_e} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) e – старый базис, $M_{\varphi_e} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ – матрица линейного преобразования φ в базисе e, h – новый базис, K_{φ_h} – матрица линейного преобразования φ в базисе h.

$$T_{e\to h} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\qquad T_{e\to h}^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$K_{\varphi_h} = T_{e\to h}^{-1}M_{\varphi_e}T_{e\to h} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 18 \\ -2 & -15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 56 & 76 \\ -47 & -64 \end{pmatrix}$$

2) Найдем матрицы преобразования ψ в базисах e и f.

a) e – новый базис, $B_{\psi_h} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица линейного преобразования ψ в базисе h, h – старый базис, N_{ψ_e} – матрица линейного преобразования ψ в базисе e. По формуле связи между матрицами одного и того же линейного преобразования в разных базисах имеем соотношение

$$B_{\psi_h} = T_{e\to h}^{-1}N_{\psi_e}T_{e\to h},$$

отсюда получаем формулу

$$N_{\psi_e} = T_{e\to h} B_{\psi_h} T_{e\to h}^{-1}.$$

$$T_{e\to h} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad T_{e\to h}{}^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$N_{\psi_e} = T_{e\to h} B_{\psi_h} T_{e\to h}{}^{1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 19 & -13 \end{pmatrix}.$$

b) e – старый базис, $N_{\psi_e} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -7 & 5 \\ -19 & 13 \end{pmatrix}$ – матрица линейного преобразования ψ в базисе e, S_{ψ_f} – матрица линейного преобразования ψ в базисе f, f – новый базис.

$$S_{\psi_f} = T_{e\to f}{}^{-1} N_{\psi_e} T_{e\to f},$$

$$T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ T_{e\to f}{}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$S_{\psi_f} = T_{e\to f}^{-1} N_{\psi_e} T_{e\to f} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & 5 \\ -19 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 12 & -8 \\ -31 & 21 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 16 & 4 \\ -41 & -10 \end{pmatrix}.$$

3) Матрицы преобразования $\varphi+\psi$ и $\varphi\psi$ в базисе e.

$$M_{\varphi_e} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \ N_{\psi_e} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -7 & 5 \\ -19 & 13 \end{pmatrix},$$

$$Q_{(\varphi+\psi)_e} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -7 & 5 \\ -19 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2{,}5 & 8{,}5 \\ -8{,}5 & 9{,}5 \end{pmatrix},$$

$$R_{(\varphi\psi)_e} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & 5 \\ -19 & 13 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -121 & 83 \\ -64 & 44 \end{pmatrix}.$$

4) Матрицы преобразования $\varphi+\psi$ и $\varphi\psi$ в базисе f.

$$A_{\varphi_f} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \ S_{\psi_f} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 16 & 4 \\ -41 & -10 \end{pmatrix},$$

$$H_{(\varphi+\psi)_f} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 16 & 4 \\ -41 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 5 \\ -18{,}5 & -4 \end{pmatrix},$$

$$L_{(\varphi\psi)_f} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 16 & 4 \\ -41 & -10 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -75 & -18 \\ -9 & -2 \end{pmatrix}.$$

5) Матрицы преобразований $\varphi+\psi$ и $\varphi\psi$ в базисе h.

$$K_{\varphi_h} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 56 & 76 \\ -47 & -64 \end{pmatrix}, B_{\psi_h} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$U_{(\varphi+\psi)_h} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -56 & -76 \\ 47 & 64 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26 & -37 \\ 24{,}5 & 33 \end{pmatrix},$$

$$V_{(\varphi\psi)_h} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -56 & -76 \\ 47 & 64 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -188 & -132 \\ 158 & 111 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -94 & -66 \\ 79 & 55{,}5 \end{pmatrix}.$$

Пример 5. Пусть $P_3(x)$ – пространство многочленов степени ≤ 3 с действительными коэффициентами. Поставим каждому многочлену $f(x)$ в соответствие многочлен $\varphi[f(x)] = f(x+1) + f(x)$.

Решение. Так как $f(x+1) + f(x)$ есть многочлен с действительными коэффициентами степени не выше 3, то он принадлежит $P_3(x)$, иными словами, φ – преобразование линейного пространства $P_3(x)$ в себя.

Докажем, что преобразование φ – линейное. Проверим выполнимость условий 1 и 2.

1)
$$\varphi[h(x) + f(x)] = h(x+1) + f(x+1) + h(x) + f(x) = [h(x+1+h(x)] + [f(x+1) + f(x)] =$$
$$= \varphi[h(x)] + \varphi[f(x)];$$

2)
$$\varphi[\lambda \cdot f(x)] = \lambda \cdot f(x+1) + \lambda \cdot f(x) = \lambda \cdot [f(x+1) + f(x)] = \lambda \cdot \varphi[f(x)]..$$

Из этого следует, что φ – линейное преобразование пространства $P_3(x)$.

Найдем матрицу преобразования φ в базисе $1, x, x^2, x^3$.

Образы базисных векторов таковы:
$$\varphi(1) = 1+1 = 2 = 2\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + 0\cdot x^3,$$
$$\varphi(x) = x+1+x = 1+2x = 1\cdot 1 + 2\cdot x + 0\cdot x^2 + 0\cdot x^3,$$
$$\varphi(x^2) = (x+1)^2 + x^2 = 1+2x+x^2+x^2 = 1\cdot 1 + 2\cdot x + 2\cdot x^2 + 0\cdot x^3,$$
$$\varphi(x^3) = (x+1)^3 + x^3 = 1+3x+3x^2+x^3+x^3 = 1\cdot 1 + 3\cdot x + 3\cdot x^2 + 2\cdot x^3.$$

Следовательно, матрица преобразования φ имеет вид
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Пример 6. Выяснить, является ли преобразование φ пространства A^3 линейным, если оно задано законом $\varphi[(x_1, x_2, x_3)] = (x_2 + x_3, x_1, 2x_1 + x_2 - x_3)$, где (x_1, x_2, x_3) – произвольный вектор из A^3. Найти его матрицу в базисе.

Решение. Рассмотрим два вектора:
$$x = (x_1, x_2, x_3),\ y = (y_1, y_2, y_3)$$
и их сумму
$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3).$$
Найдем их образы:
$$\varphi(x) = (x_2 + x_3, x_1, 2x_1 + x_2 - x_3),$$
$$\varphi(y) = (y_2 + y_3, y_1, 2y_1 + y_2 - y_3),$$
$$\varphi(x+y) = (x_2 + y_2 + x_3 + y_3, x_1 + y_1, 2x_1 + 2y_1 + x_2 + y_2 - x_3 - y_3).$$
Очевидно, что $\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x+y)$.

Теперь проверим выполнимость второго условия. Так как $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$, то
$$\varphi(\lambda x) = (\lambda x_2 + \lambda x_3, \lambda x_1, 2(\lambda x_1) + \lambda x_2 - \lambda x_3) = \lambda(x_2 + x_3, x_1, 2x_1 + x_2 - x_3) = \lambda\varphi(x).$$

Выяснили, что преобразование φ – линейное. Чтобы записать матрицу этого преобразования в базисе $e=(e_1,e_2,e_3)$, нужно найти образы базисных векторов. Пусть базисные векторы имеют координаты (задали базис): $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,0,1)$.
Находим

$$\varphi[(1,0,0)]=\varphi(e_1)\to(0,1,2)=0\cdot e_1+1\cdot e_2+2\cdot e_3,$$
$$\varphi[(0,1,0)]=\varphi(e_2)\to(1,0,1)=1\cdot e_1+0\cdot e_2+1\cdot e_3,$$
$$\varphi[(0,0,1)]=\varphi(e_3)\to(1,0,-1)=1\cdot e_1+0\cdot e_2-1\cdot e_3,$$

т.е. $A_{\varphi_e}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\2&1&-1\end{pmatrix}$.

Пример 7. Дана матрица линейного преобразования $\varphi\cdot$ в базисе e_1,e_2,e_3, $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$.

Найти образ вектора $x=2e_1-3e_2+e_3$.
Решение.

1-й способ. Используя формулу, получим $\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

или

$$\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot2+1\cdot(-3)+2\cdot1\\1\cdot2+0\cdot(-3)+1\cdot1\\1\cdot2+1\cdot(-3)+0\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix},$$

т.е. $\varphi(x)=e_1+3e_2-e_3$.
2-й способ. Исходя из определения матрицы линейного преобразования и свойства линейного преобразования, имеем:

$$\varphi(x)=\varphi(2e_1-3e_2+e_3)=2\varphi(e_1)-3\varphi(e_2)+\varphi(e_3)=2(1,1,1)-3(1,0,1)+(2,1,0)=(1,3,-1).$$

Пример 8. Линейное преобразование φ в базисе a_1,a_2 имеет матрицу $A=\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}$. Найти его матрицу в базисе $e_1=2a_2-a_1$, $e_2=-a_2+a_1$.

Решение. Обозначим через B матрицу преобразования φ в базисе e_1,e_2. Тогда имеем $B=T^{-1}AT$.

Из условия задачи ясно, что матрица перехода от базиса a_1,a_2 к e_1,e_2 имеет вид

$$T=\begin{pmatrix}-1&1\\2&-1\end{pmatrix}.$$

Найдем $T^{-1}=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}$, тогда

$$B=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-2\\7&-4\end{pmatrix}.$$

Пример 9. Линейное преобразование φ трехмерного действительного пространства с базисом e_1, e_2, e_3 векторы $x_1 = e_1 - e_2 + e_3$, $x_2 = e_1 + e_2 - e_3$, $x_3 = e_1 - e_2 - e_3$ (1) переводит соответственно в векторы $y_1 = e_1 + 2e_2 + e_3$, $y_2 = e_2 + e_3$, $y_3 = e_1 + e_3$ (2). Найти матрицу C преобразования φ в базисе e_1, e_2, e_3.

Решение. Так как матрица T (столбцы ее составлены из координат векторов x_1, x_2, x_3) – невырожденная, то векторы x_1, x_2, x_3 составляют базис пространства. Матрица T является матрицей перехода от базиса e_1, e_2, e_3, к базису x_1, x_2, x_3. Обозначим через Q матрицу линейного преобразования φ в базисе x_1, x_2, x_3. Тогда

$$Q_{\varphi_x} = T^{-1} C_{\varphi_e} T \text{ и } C_{\varphi_e} = T Q_{\varphi_x} T^{-1}.$$

Найдем матрицу Q_{φ_x}. Так как $\varphi(x_1) = y_1$, $\varphi(x_2) = y_2$, $\varphi(x_3) = y_3$, то следует векторы y_1, y_2, y_3 выразить через x_1, x_2, x_3. Выразим e_1, e_2, e_3 через x_1, x_2, x_3 из системы уравнений (1) и подставим их в формулы (2).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & x_1 \\ 1 & 1 & -1 & x_2 \\ 1 & -1 & -1 & x_3 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & x_1 \\ 0 & 2 & -2 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & -2 & x_3 - x_1 \end{array}\right),$$

следовательно, $e_3 = -\frac{1}{2}(x_3 - x_1)$.

$$2e_2 - 2e_3 = x_2 - x_1 \text{, откуда } e_2 = \frac{1}{2}(x_2 - x_3).$$

$$e_1 - e_2 + e_3 = x_1 \text{, откуда } e_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2.$$

Тогда получим

$$y_1 = x_1 + \frac{3}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3,$$

$$y_2 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3,$$

$$y_3 = x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3,$$

$$Q_{\varphi_x} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Из формул (1) получаем матрицу перехода

$$T_{e \to x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

находим

$$T^{-1}_{e \to x} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Окончательно получаем

$$C_{\varphi_e} = TQ_{\varphi_x}T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

§3. Характеристический многочлен и характеристические числа матрицы

Пусть дана квадратная матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ порядка n. *Характеристической матрицей* матрицы A называют

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

с переменной λ, принимающей любые числовые значения.

Определитель $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$ матрицы $A - \lambda E$ является многочленом n-ой степени от λ. Этот многочлен называют характеристическим многочленом матрицы A, уравнение $|A - \lambda E| = 0$ – её *характеристическим уравнением*, а его корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – *характеристическими корнями* или характеристическими числами матрицы A.

§4. Собственные значения и собственные векторы матрицы

Пусть дана квадратная матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ порядка n и n-мерный вектор-столбец $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Причём элементы матрицы и вектор-столбца принадлежат одному и тому же полю P, называемому основным. Произведение AX также является n-мерным вектор-столбцом с элементами из поля P. Среди всевозможных n-мерных векторов X может оказаться такой, что $AX = \lambda X$ при некотором числовом множителе λ из поля P.

Собственным вектором линейного преобразования φ называется всякий ненулевой вектор X, удовлетворяющий условию $\varphi(X)=\lambda_0 \cdot X$, где λ_0 – число.

Число λ_0 называется *собственным значением* преобразования φ, соответствующим данному собственному вектору X.

Равенство $AX=\lambda X$ можно переписать в виде $(A-\lambda E)X=0$, или, что то же самое, в виде

$$\begin{cases} (\alpha_{11}-\lambda)x_1+...+\alpha_{1n}x_n=0, \\ \text{..} \\ \alpha_{n1}x_1+...+(\alpha_{nn}-\lambda)x_n=0. \end{cases} \qquad (*)$$

Если известно собственное значение λ, то все собственные векторы матрицы A, принадлежащие этому собственному значению, находятся как ненулевые решения системы (*). Вместе с тем, эта однородная система с квадратной матрицей $A-\lambda E$ имеет ненулевые решения X тогда и только тогда, когда определитель $|A-\lambda E|$ матрицы этой системы равен нулю и λ принадлежит рассматриваемому полю P. Но это означает, что λ является корнем характеристического многочлена $|A-\lambda E|$ и принадлежит полю P. Таким образом, характеристические числа матрицы, принадлежащие основному полю, являются её собственными значениями. Для определения всех собственных значений матрицы A нужно найти все её характеристические числа и из них выбрать лишь те, которые принадлежат основному полю P, а для отыскания всех собственных векторов матрицы A нужно найти все ненулевые решения системы (*) при каждом собственном значении λ матрицы A.

Пример 1. Найти собственные значения и собственные векторы действительной матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Характеристический многочлен матрицы A имеет вид:

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -4 \\ 2 & -2-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}.$$

Умножим второй столбец на число (-2) и сложим с первым столбцом:

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 & -4 \\ 6+2\lambda & -2-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}.$$

Прибавим третью строку к первой строке и получим

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 0 & -3-\lambda \\ 6+2\lambda & -2-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}.$$

Умножим первый столбец на число (-1), сложим с третьим столбцом и получим

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 0 & 0 \\ 6+2\lambda & -2-\lambda & -8-2\lambda \\ 0 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}.$$

Умножим первую строку на число 2 и сложим со второй строкой и получим

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & -8-2\lambda \\ 0 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}.$$

Умножим второй столбец на число (-2) и сложим с третьим столбцом и получим

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & -4 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda)(\lambda-6)(\lambda+3) = (\lambda+3)^2(6-\lambda).$$

Таким образом, характеристический многочлен имеет корни: $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = \lambda_3 = -3$. Все они действительные и поэтому являются собственными значениями матрицы A.

При $\lambda = 6$ система $(A-\lambda E)X = 0$ имеет вид $\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 - 8x_2 - 2x_3 = 0, \\ -4x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$ Её общим решением является $X = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_2 \\ -2x_2 \end{pmatrix}$ с произвольным постоянным x_2. При x_2, имеющем последовательно все действительные значения, решение определяет общий вид собственных векторов матрицы A, принадлежащих собственному значению $\lambda = 6$.

При $\lambda = -3$ система $(A-\lambda E)X = 0$ имеет вид $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ -4x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$ Её общим решением является $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ -2x_1 + 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$ с произвольными постоянными x_1 и x_3. При x_1 и x_3, независимо приобретающих все действительные значения, решение определяет общий вид собственных векторов матрицы А, принадлежащих собственному значению $\lambda = -3$.

§5. Приведение матрицы к диагональному виду

Пусть дана квадратная матрица A порядка n. Если возможно из каких-либо n собственных векторов матрицы A, принадлежащих собственно числам $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, как из столбцов построить квадратную невырожденную матрицу S порядка n, то будет выполняться соотношение $S^{-1}AS = \Lambda$, где $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ – диагональная матрица с собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ матрицы A по диагонали. При этом говорят, что матрица A приводится матрицей S к диагональному виду. Матрица A в этом случае называется *матрицей простой структуры*. К матрицам простой структуры относятся симметрические матрицы и матрицы простого спектра. *Матрицы простого спектра* – это те матрицы, у которых все собственные значения различны и их число совпадает с порядком матрицы.

Из соотношения $S^{-1}AS = \Lambda$ получается соотношение $A = S\Lambda S^{-1}$ – *каноническое разложение матрицы* A.

Если матрицу S, удовлетворяющую соотношению $S^{-1}AS = \Lambda$, построить нельзя, то матрица A не приводится к диагональному виду, и, следовательно, не имеет канонического разложения.

При конструировании матрицы S для соотношений $S^{-1}AS = \Lambda$ и $A = S\Lambda S^{-1}$ нужно найти все собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ матрицы A и при каждом собственном значении λ_i построить фундаментальную систему решений (ФСР) однородной системы уравнений $(A - \lambda_i E)X = 0$. Из решений ФСР, как из столбцов, составить матрицу S. Причём в матрице S столбцами записываются решения для каждого λ_i в порядке нумерации собственных значений: $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ (число одинаковых λ_i соответствует их кратности). Если матрица S окажется квадратной, то она будет удовлетворять соотношениям $S^{-1}AS = \Lambda$ и $A = S\Lambda S^{-1}$. Если же матрица S окажется неквадратной, то матрица A не приводится к диагональному виду и, следовательно, не имеет канонического разложения.

Для построения ФСР находят общее решение однородной системы уравнений: берут любой отличный от нуля определитель порядка, равного числу свободных неизвестных в системе; элементы i -й строки (столбца) этого определителя принимают соответственно за значения свободных неизвестных и находят из общего решения значения остальных (главных) неизвестных. Так делают для всех строк (столбцов) выбранного определителя. Полученные при этом частные решения составляют ФСР рассматриваемой однородной системы уравнений. Свободным неизвестным можно придавать значения из строк (столбцов) выбранного определителя в самой системе уравнений и находить соответствующие значения главных неизвестных из системы.

Из этого правила вытекает, что построение ФСР однородных системы линейных уравнений неоднозначно. Поэтому будет неоднозначным и построение матрицы S для соотношений $S^{-1}AS = \Lambda$ и $A = S\Lambda S^{-1}$.

Пример 1. Матрица линейного преобразования φ в некотором фиксированном базисе e_1, e_2, e_3 имеет вид $A_{\varphi_e} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Найти собственные числа, собственные векторы преобразования φ и (если это возможно) базис, в котором матрица φ имеет диагональный вид.

Решение. Характеристический многочлен преобразования φ имеет вид

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)((3-\lambda)(1-\lambda)+1) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (2-\lambda)^3.$$

Так как $(2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (2-\lambda)^3$, то собственные значения φ таковы: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

Составим систему уравнений для нахождения собственных векторов, соответствующих корням $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$:

$$\begin{cases} (3-\lambda_i)x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ (2-\lambda_i)x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 + (1-\lambda_i)x_3 = 0. \end{cases}$$

Найдем собственные векторы для $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 0x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 \in R, \\ x_1 = x_3. \end{cases}$$

Если $x_2 = 1$, $x_3 = 0,$ $x_1 = 0$ – первое фундаментальное решение и $g_1 = 0e_1 + e_2 + 0e_3$ – собственный вектор для $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

Если $x_2 = 0$, $x_3 = 1,$ $x_1 = 1$ – второе фундаментальное решение и $g_2 = 1e_1 + 0e_2 + 1e_3$ – собственный вектор для $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

Легко показать, что векторов g_1, g_2 недостаточно для конструирования квадратной невырожденной матрицы 3-го порядка. Поэтому матрица A_{φ_e} не приводится к диагональному виду, вследствие чего не имеет канонического разложения.

Пример 2. Выяснить возможность приведения действительной матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ к диагональному виду.

Решение. Характеристический многочлен имеет вид

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 & -1 \\ -3 & 5-\lambda & -1 \\ -3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix}.$$

Прибавим первый столбец ко второму столбцу и получим

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2-\lambda & -1 \\ -3 & 2-\lambda & -1 \\ -3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}.$$

Умножим вторую строку на (-1), прибавим к первой строке и получим

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ -3 & 2-\lambda & -1 \\ -3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(1-\lambda).$$

Корнями характеристического многочлена матрицы A являются числа $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 1$. Все они действительные и поэтому являются собственными значениями матрицы A.

Составим систему уравнений для нахождения собственных векторов, соответствующих корням $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$:

$$\begin{cases} -3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ -3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ -3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет общее решение: $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -3x_1+3x_2 \end{pmatrix}$, в котором два свободных неизвестных.

Поэтому возьмём, например, определитель $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Полагая в общем решении сначала $x_1=1$, $x_2=0$, найдём $x_3=-3$. Затем, положим $x_1=0$, $x_2=1$, найдём $x_3=3$, которые составляют ФСР рассматриваемой однородной системы уравнений: $X_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Составим систему уравнений для нахождения собственных векторов, соответствующих корням $\lambda_3=1$:

$$\begin{cases} -2x_1+3x_2-x_3=0, \\ -3x_1+4x_2-x_3=0, \\ \quad -3x_1+3x_2=0. \end{cases}$$

Эта система имеет общее решение: $X_3=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}$, в котором одно свободное неизвестное.

Поэтому ФСР состоит из одного решения, например, $X_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Из решений X_1, X_2 и X_3, как из столбцов, составляется невырожденная квадратная матрица $S=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Поэтому матрица A приводится к диагональному виду $\Lambda=S^{-1}AS=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и имеет каноническое разложение $A=S\Lambda S^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

§6. Область значений и ядро линейного преобразования

Пусть φ линейное преобразование линейного пространства L над полем P. Множество $\{\varphi x \mid \forall x \in L\}$ называют *областью значения* линейного преобразования φ и обозначают φL или $\varphi(L)$.

Теорема 1. Область значений линейного преобразования φ линейного пространства L есть подпространство линейного пространства L.

Теорема 2. Пусть $e_1,...,e_n$ – базис линейного пространства L_n и φ – линейное преобразование L_n. Тогда базис φL_n совпадает с базисом системы векторов $\{\varphi e_1,...,\varphi e_n\}$.

Следствие. $\dim \varphi L_n$ равна рангу системы векторов $\varphi e_1,...,\varphi e_n$.

Пусть

$$\begin{array}{c} A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \\ \qquad \varphi e_1 \quad ... \quad \varphi e_n \end{array}$$

- матрица линейного преобразования φ линейного пространства L_n в базисе e. Тогда известны координатные столбцы векторов $\varphi e_1,...,\varphi e_n$ в базисе e. Пусть ранг матрицы A равен r и M_r – ее базисный минор. Для удобства будем считать, что он находится в левом верхнем углу матрицы A. Тогда векторы $\varphi e_1,...,\varphi e_n$ составляют базис системы векторов $\{\varphi e_1,...,\varphi e_n\}$. Согласно следствию теоремы 2 $\varphi e_1,...,\varphi e_n$ – это базис области значений φL_n и $\dim \varphi L_n = r = r(A)$.

Число r называют рангом линейного преобразования φ.

Пример 1. Матрица A линейного преобразования φ линейного пространства A_3 в базисе e_1, e_2, e_3 имеет вид $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найти базис и размерность φA_3.

Решение. Найдём ранг матрицы A:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0, \qquad\qquad r(A) \geq 2.$$

$M_3 = 0$, отсюда $r(A) = 2$. Базисные столбцы – это первый и второй столбцы A. Значит, базис φA_3 составляют векторы $\varphi e_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $\varphi e_2 = e_1 + 2e_2$, и поэтому

$$\varphi A_3 = < e_1 + e_2 + e_3, e_1 + 2e_2 >.$$

Размерность φA_3 равна двум.

Пусть φ – линейное преобразование линейного пространства L над полем P. Множество векторов $\{x \mid x \in L_n, \varphi(x) = 0\}$ называют *ядром* линейного преобразования φ и обозначают $Ker\varphi$. Другими словами, $Ker\varphi$ – это множество всех векторов из L, которые при преобразовании φ переходят в нуль.

Очевидно, что $Ker\varphi \neq 0$, т.к. $\varphi 0 = 0$ и $0 \subset Ker\varphi$.

Теорема 3. Ядро $Ker\varphi$ линейного преобразования φ линейного пространства L является подпространством пространства L .

Доказательство. Проверяем выполнимость двух условий теоремы о линейных подпространствах:

1) $\forall a, b \in Ker\varphi$: $a + b \in Ker\varphi$.

Имеем

$$a \in Ker\varphi \Rightarrow \varphi a = 0;$$
$$b \in Ker\varphi \Rightarrow \varphi b = 0 .$$

Тогда

$$\varphi(a+b) = \varphi a + \varphi b = 0 + 0 = 0 ,$$

поэтому

$$a + b \in Ker\varphi .$$

2) $\forall a \in Ker\varphi$ и $\forall t \in P : ta \in Ker\varphi.$

$$\varphi(ta) = t \cdot (\varphi a) = t \cdot 0 = 0,$$

поэтому

$$ta \in Ker\varphi.$$

Следовательно, $Ker\varphi$ - подпространство пространства L . Теорема доказана.

Теорема 4. Множество векторов $Ker\varphi$ линейного преобразования φ линейного пространства L_n с базисом $e = (e_1, ..., e_n)$ и матрицей

$$A\varphi_e = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

преобразования φ в базисе e совпадает с множеством решений однородной системы уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ \text{.................................} \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Следствие. Если $r(A) = n$, то система имеет одно решение – только нулевое; поэтому $Ker\varphi = 0$. Если $r(A) = r < n$, то система имеет бесконечно много решений. Ее ФСР состоит из $(n - r)$ решений. Они и составляют базис $Ker\varphi$. Размерность ядра равна $(n - r)$, т.е. $\dim Ker\varphi = n - r$.

Число $(n - r) = \dim Ker\varphi$ называют *дефектом* линейного преобразования φ n-мерного линейного пространства L .

Теорема 5. Сумма размерности области значений линейного преобразования φ n-мерного линейного пространства L_n и размерности его ядра равна размерности L_n , т.е.

$$\dim \varphi L + \dim Ker\varphi = n .$$

Пример 2. В линейном пространстве A_3 в базисе e_1, e_2, e_3 матрица A линейного преобразования φ имеет вид: $A_{\varphi_e} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Найти базис и размерность ядра преобразования φ.

Решение. Находим ранг матрицы A.

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 \neq 0,\ r(A) \geq 2,$$

$$M_3 = 0,\ r(A) = 2.$$

Значит $r < n$ ($2 < 3$). Составляем систему уравнений $AX = 0$, где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Она имеет бесконечно много решений, и её ФСР состоит из одного решения: $(n - r) = 3 - 2 = 1.$ Поэтому $\dim Ker\varphi = 1$. Решаем систему (2).

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 = 0. \end{cases}$$

Основные неизвестные – $x_1,\ x_2$, свободные – x_3.

x_1	x_2	x_3
–3	1	1

$$\begin{cases} x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 = -1, \\ x_1 + 3x_2 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 1, \\ -3x_2 + 2x_2 = -1, \\ x_1 = -3x_2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 1, \\ x_2 = 1, \\ x_1 = -3. \end{cases}$$

Значит, ФСР системы (2) является (–3, 1, 1). Базис $Ker\varphi$ состоит из одного вектора, например, $a = -3e_1 + e_2 + e_3$ и $Ker\varphi = < -3e_1 + e_2 + e_3 >$.

ВАРИАНТЫ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

ВАРИАНТ 1

1. В линейном пространстве A_3 задано линейное преобразование φ, при котором $x = (x_1, x_2, x_3)$: $\varphi x = (x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3)$. Доказать, что φ – линейное преобразование. Найти его матрицы в базисах:
   a) $e_1 = (1,\ 0,\ 0)$, $e_2 = (0,\ 1,\ 0)$, $e_3 = (0,\ 0,\ 1)$;
   b) $a_1 = (1,\ 1,\ 1)$, $a_2 = (2,\ 1,\ 3)$, $a_3 = (4,\ 1,\ 6)$.
2. Векторы $a_1 = (2,\ 3,\ 5)$, $a_2 = (0,\ 1,\ 2)$, $a_3 = (1,\ 0,\ 0)$ линейным преобразованием φ преобразуются соответственно в векторы $b_1 = (1,\ 1,\ 1)$, $b_2 = (1,\ 1,\ -1)$, $b_3 = (2,\ 1,\ 2)$.

Найти матрицу этого оператора в том базисе, в котором указаны координаты всех векторов.

3. Дана матрица $M=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ линейного преобразования в базисе e_1, e_2, e_3. Найти образы векторов e_1, e_2, e_3, $a=2e_1-e_2+3e_3$.
4. Описать образ и ядро линейного преобразования дифференцирования пространства многочленов степени $\le n$.
5. Найти собственные значения и собственные векторы линейных преобразований, заданных матрицами

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

ВАРИАНТ 2

1. Показать, что умножение квадратных матриц второго порядка на матрицу $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ справа есть линейное преобразование. Найти его матрицу в базисе $E_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Пусть $\varphi: L\to L$, $\dim L=2$ – линейное преобразование, имеющее в базисе $g_1=(1,\ 2)$, $g_2=(2,\ 3)$ матрицу $M=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, а линейное преобразование $\eta: L\to L$ в базисе $u_1=(3,\ 1)$, $u_2=(4,\ 2)$ задается матрицей $N=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицы линейных преобразований $\varphi+\eta$, $\varphi\cdot\eta$ в базисе g_1, g_2.
3. Матрица $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ является матрицей линейного преобразования φ в базисе e_1, e_2, e_3. Найти образы векторов e_1, e_2, e_3, $a=4e_1-3e_2+e_3$.
4. В пространстве A_3 линейное преобразование φ позволяет перевести вектор $x=(x_1, x_2, x_3)$ в вектор $\varphi x=(x_1-x_2+x_3, x_1-x_2+x_3, x_1-x_2+x_3)$. Найти базисы и размерности образа и ядра этого линейного преобразования.
5. Найти собственные значения и собственные векторы линейных преобразований, заданных матрицами

а) $\begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 5 & 9 & 7 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

ВАРИАНТ 3

1. Дано преобразование φ линейного пространства A_3, которое вектор $x=(x_1,x_2,x_3)$ переводит в вектор $\varphi x=(x_1+x_2+x_3, 2x_2, 3x_1-x_3)$. Доказать, что оно линейное, и найти его матрицы в базисах:
   a) $e_1=(1,\ 0,\ 0)$, $e_2=(0,\ 1,\ 0)$, $e_3=(0,\ 0,\ 1)$;
   b) $a_1=(2,\ 3,\ 1)$, $a_2=(0,\ 1,\ 1)$, $a_3=(0,\ 0,\ 3)$.
2. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 4 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ линейного преобразования φ пространства многочленов степени не выше 2 в базисе $x^2,\ x,\ 1$. Найти образ вектора $f(x)=x^2-4x+3$.
3. Преобразование φ в базисе $a_1=(-3,\ 7)$, $a_2=(1,\ -2)$ имеет матрицу $M=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 5 & -3\end{pmatrix}$, а преобразование ψ в базисе $b_1=(6,\ -7)$, $b_2=(-5,\ 6)$ - $N=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 7\end{pmatrix}$. Найти матрицу $\varphi\cdot\psi$ в том базисе, в котором даны координаты всех векторов.
4. Найти образ и ядро линейного преобразования φ в линейном пространстве V_3 векторов-отрезков, заданного формулой $\varphi x=[x,a]$, где a – фиксированный вектор.
5. Найти собственные значения и собственные векторы линейных преобразований, заданных матрицами
   а) $\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 2\end{pmatrix}$,   б) $\begin{pmatrix}1 & -1 & 16\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

ВАРИАНТ 4

1. Преобразование φ пространства многочленов степени не более 3 определено следующим образом $\varphi(ax^3+bx^2+cx+d)=ax^3+bx^2+cx$. Доказать, что оно линейно и найти его матрицы в базисах
   a) $x^3, x^2, x, 1$;
   b) $x^3, x^2-3, x+1, 2$.
2. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 2 & -1\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}$ линейного преобразования φ арифметического трехмерного пространства A_3 в базисе $a_1=(2,\ 3,\ 0)$, $a_2=(1,\ 1,\ 1)$, $a_3=(0,\ 1,\ 1)$. Найти 1) образ вектора $b=4a_1+8a_2-a_3$; 2) матрицу преобразования φ в базисе $e_1=(1,\ 0,\ 0)$, $e_2=(0,\ 1,\ 0)$, $e_3=(0,\ 0,\ 1)$.
3. Линейное преобразование φ в базисе e_1, e_2 имеет матрицу $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$. Найти матрицу преобразования φ в базисе $a_1=2e_1+e_2$, $a_2=3e_1+e_2$.

4. В пространстве A_3 линейное преобразование φ позволяет перевести вектор $x=(x_1,x_2,x_3)$ в вектор $\varphi x=(2x_1-x_2-x_3, x_1-2x_2+x_3, x_1+x_2-2x_3)$. Найти базисы и размерности образа и ядра этого линейного преобразования.
5. Найти собственные значения и собственные векторы линейных преобразований, заданных матрицами

а) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$.

ВАРИАНТ 5

1. Дано преобразование в пространстве многочленов степени не выше 3, которое позволяет всякий многочлен $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ отображать в многочлен $a_0+a_1x+a_2x^2$. Доказать, что преобразование φ линейное и найти его матрицы в базисах:
   a) $1, x, x^2, x^3$;
   b) $1+x,\ 2-x-x^2,\ x^2-1,\ 3x^3$.
2. Линейное преобразование φ в базисе $a_1=(1,\ 2)$, $a_2=(2,\ 3)$ имеет матрицу $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Линейное преобразование ψ в базисе $b_1=(3,\ 1)$, $b_2=(4,\ 2)$ - матрицу $B=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$. Найти матрицу преобразования $\varphi\cdot\psi$ в базисе a_1, a_2.
3. Дана матрица $M=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ линейного преобразования φ в базисе e_1,e_2,e_3. Найти образы векторов e_1,e_2,e_3, $a=4e_1+e_2-e_3$.
4. В пространстве A_3 линейное преобразование φ позволяет перевести вектор $x=(x_1,x_2,x_3)$ в вектор $\varphi x=(2x_1-x_2+3x_3, x_1-x_2+x_3, x_1-2x_2+x_3)$. Найти базисы и размерности образа и ядра этого линейного преобразования.
5. Найти собственные значения и собственные векторы линейных преобразований, заданных матрицами

а) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$.

ВАРИАНТ 6

1. В пространстве многочленов степени не выше 2 задано преобразование φ, при котором $\varphi(f(x))=f(x+1)-f(x)$. Доказать, что φ – линейное преобразование, и найти его матрицы в базисах
   a) $x^2, x, 1$;
   b) $x^2+2,\ 3x-1,\ 3$.

2. Пусть $\varphi: L \to L$ - линейное преобразование, в базисе $g_1 = (1,\ 2)$, $g_2 = (2,\ 3)$ матрицу $M = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, а линейное преобразование $\eta: L \to L$ в базисе $u_1 = (3,\ 1)$, $u_2 = (4,\ 2)$ задается матрицей $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицы линейных преобразований $\varphi - \eta$, $\varphi \cdot \eta$ в базисе $u_1,\ u_2$.

3. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ линейного преобразования φ в базисе $a_1,\ a_2,\ a_3$. Найти образы векторов $a_1,\ a_2,\ a_3$, $b = a_1 + 2a_3$.

4. В пространстве A_3 линейное преобразование φ позволяет перевести вектор $x = (x_1, x_2, x_3)$ в вектор $\varphi x = (-x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3)$. Найти базисы и размерности образа и ядра этого линейного преобразования.

5. Найти собственные значения и собственные векторы линейных преобразований, заданных матрицами

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

ВАРИАНТ 7

1. Найти матрицы линейного преобразования дифференцирования пространства многочленов степени не выше 2 в базисах

а) $1,\ x,\ x^2$;

b) $1,\ x-1,\ \dfrac{(x-1)^2}{2}$.

2. Найти матрицу линейного преобразования трехмерного пространства A_3, позволяющего перевести векторы $a_1 = (2,\ 3,\ 5)$, $a_2 = (0,\ 1,\ 2)$, $a_3 = (1,\ 0,\ 0)$ соответственно в векторы $b_1 = (1,\ 1,\ 1)$, $b_2 = (1,\ 1,\ -1)$, $b_3 = (2,\ 1,\ 2)$, в том базисе, в котором заданы векторы.

3. Дана матрица $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ линейного преобразования φ в базисе $e_1,\ e_2$. Найти матрицу преобразования φ в базисе $a_1 = 3e_1 - e_2$, $a_2 = e_1 + e_2$.

4. В пространстве P_n многочленов степени $\le n$ задано линейное преобразование $\varphi(f(x)) = f(x+1) - f(x)$. Найти образ и ядро этого линейного преобразования.

5. Найти собственные значения и собственные векторы линейных преобразований, заданных матрицами

а) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

ВАРИАНТ 8

1. Дан базис $e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4$ линейного пространства L, а линейное преобразование $\varphi: L \to L,$ при котором $\varphi e_1 = e_1 + e_2$, $\varphi e_2 = e_2 + e_3$, $\varphi e_3 = e_3 + e_4$, $\varphi e_4 = e_4 + e_1$. Доказать, что векторы $g_1 = \varphi e_1 - \varphi e_2$, $g_2 = \varphi e_2 - \varphi e_3$, $g_3 = \varphi e_1 + \varphi e_3$, $g_4 = e_4$ образуют базис пространства $L,$ и составить матрицу линейного преобразования φ в базисе $g_1,\ g_2,\ g_3,\ g_4$.
2. Пусть линейное преобразование φ в базисе $a_1 = (0,\ 1)$, $a_2 = (1,\ 1)$ имеет матрицу $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, линейное преобразование ψ в базисе $b_1 = (1,\ 3)$, $b_2 = (2,\ 4)$ - $N = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу преобразования $\varphi \cdot \psi$ в базисе a_1, a_2.
3. Матрица $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ является матрицей линейного преобразования φ в базисе e_1, e_2, e_3. Найти образы векторов e_1, e_2, e_3, $a = e_1 + 3e_2 - 5e_3$.
4. В пространстве A_4 линейное преобразование φ позволяет вектор $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ перевести в $\varphi x = (x_1 + x_2 - x_3 - x_4, x_1 + x_2 - x_3 - x_4, 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4, x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4)$. Найти базисы и размерности ядра и образа этого линейного преобразования.
5. Найти собственные значения и собственные векторы линейных преобразований, заданных матрицами

а) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -12 & -19 & -24 \\ 6 & 10 & 13 \end{pmatrix}$.

ВАРИАНТ 9

1. В линейном пространстве L даны базис $e_1,\ e_2,\ e_3$ и линейное преобразование $\varphi: L \to L,$ при котором, что $\varphi e_1 = e_1 + e_2$, $\varphi e_2 = e_1 + e_3$, $\varphi e_3 = e_3 + e_2$. Доказать, что векторы $g_2 = \varphi e_2$, $g_3 = \varphi e_3$, $g_1 = \varphi e_1$ образуют базис в L, и составить матрицы линейного преобразования в базисах:
   a) $e_1,\ e_2,\ e_3$;
   b) $g_1,\ g_2,\ g_3$.
2. Составить матрицы линейного преобразования φ линейного пространства A_3, позволяющего перевести векторы $x_1 = (0,\ 0,\ 1)$, $x_2 = (0,\ 1,\ 1)$, $x_3 = (1,\ 1,\ 1)$ соответственно в векторы $y_1 = (2,\ 3,\ 5)$, $y_2 = (1,\ 0,\ 0)$, $y_3 = (0,\ 1, -1)$ в базисах:
   a) $e_1 = (1,\ 0,\ 0)$, $e_2 = (0,\ 1,\ 0)$, $e_3 = (0,\ 0,\ 1)$;
   b) x_1, x_2, x_3.
3. Линейное преобразование φ в базисе e_1, e_2 имеет матрицу $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Найти образы векторов e_1, e_2, $a = 3e_1 + 5e_2$.

4. В пространстве A_3 линейное преобразование φ позволяет перевести вектор $x=(x_1,x_2,x_3)$ в вектор $\varphi x=(4x_1-2x_2+x_3,x_1-2x_2+x_3,3x_1-x_2+x_3)$. Найти базисы и размерности образа и ядра этого линейного преобразования.
5. Найти собственные значения и собственные векторы операторов, заданных матрицами

а) $\begin{pmatrix}4 & 5\\ 3 & 2\end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

ВАРИАНТ 10

1. В линейном пространстве A_3 задано линейное преобразование φ, при котором для вектора $x=(x_1,x_2,x_3)$ $\varphi x=(x_2+x_3,2x_1-x_2,x_1+x_3)$. Доказать, что φ – линейное преобразование, и найти его матрицы в базисах
   а) $e_1=(1,\ 0,\ 0)$, $e_2=(0,\ 1,\ 0)$, $e_3=(0,\ 0,\ 1)$;
   b) $a_1=(1,\ 1,\ 0)$, $a_2=(2,\ 1,\ 3)$, $a_3=(1,\ 1,\ 1)$;
2. В пространстве многочленов степени не выше 3 даны два линейных преобразования:
   $\varphi:\varphi(f(x))=f'(x)$,
   $\psi:\psi(ax^3+bx^2+cx+d)=ax^3+bx^2+cx$.
   Найти матрицу линейного преобразования $\varphi\cdot\psi$ в базисе $x^3,x^2,\ x,\ 1$.
3. Матрица $M=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$ является матрицей линейного преобразования φ в базисе $e_1,\ e_2,\ e_3$. Найти образы векторов $e_1,\ e_2,\ e_3$, $a=3e_1-2e_2+e_3$.
4. В пространстве многочленов степени ≤ 3 дано линейное преобразование φ такое, что $\varphi(f(x))=f(x+2)-\dfrac{f(x)}{2}$. Найти его образ и ядро.
5. Найти собственные значения и собственные векторы линейных преобразований, заданных матрицами

а) $\begin{pmatrix}3 & 1\\ 3 & 5\end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix}4 & 0 & -1\\ -3 & -6 & -4\\ 4 & 0 & 8\end{pmatrix}$.

ВАРИАНТ 11

1. Проверить, что транспонирование квадратных матриц второго порядка есть линейное преобразование $\varphi\left(\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$. Найти матрицу этого линейного преобразования в базисе $E_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $E_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $E_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $E_4=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
2. Линейное преобразование $\varphi:L\to L$ в базисе $e_1,\ e_2$ имеет матрицу $M=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 5 & -3\end{pmatrix}$. Найти его матрицу в базисе $a_1=e_1+2e_2$, $a_2=2e_1+3e_2$.

3. Линейное преобразование $\varphi: L \to L$ позволяет перевести векторы $a_1 = (2,\ 0,\ 3)$, $a_2 = (4,\ 1,\ 5)$, $a_3 = (3,\ 1,\ 2)$ соответственно в векторы $b_1 = (1,\ 2, -1)$, $b_2 = (4,\ 5,\ -2)$, $b_3 = (1,\ 1,\ 1)$. Найти матрицу этого преобразования в том базисе, в котором даны координаты всех векторов.
4. В пространстве A_4 линейное преобразование φ позволяет вектор $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ перевести в $\varphi x = (x_1 + x_2 + x_3 - x_4, x_1 + x_2 + x_3 - x_4, x_1 + x_2 + x_3 - x_4, x_1 + x_2 + x_3 - x_4)$. Найти базисы и размерности ядра и образа этого линейного преобразования.
5. Найти собственные значения и собственные векторы линейных преобразований, заданных матрицами

а) $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

ВАРИАНТ 12

1. Доказать, что преобразование φ линейного пространства A_3, позволяющего перевести вектор $x = (x_1, x_2, x_3)$ в вектор $\varphi x = (x_1 + x_2, x_2 + 3x_3, 3x_3)$, является линейным. Найти матрицы преобразования φ в базисах:

   a) $e_1 = (1,\ 0,\ 0)$, $e_2 = (0,\ 1,\ 0)$, $e_3 = (0,\ 0,\ 1)$;

   b) $a_1 = (2,\ 2, -1)$, $a_2 = (1,\ 1,\ 0)$, $a_3 = (3,\ 0,\ 0)$;
2. Матрица $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ является матрицей линейного преобразования φ в базисе $a_1 = (1,\ 2)$, $a_2 = (3,\ 0)$. Матрица $N = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ является матрицей линейного преобразования ψ в базисе $e_1 = (1,\ 0)$, $e_2 = (0,\ 1)$. Найти матрицы преобразований $\varphi + \psi$ и $\varphi \cdot \psi$ в базисе a_1, a_2.
3. Матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ является матрицей линейного преобразования φ в базисе $e_1,\ e_2,\ e_3$. Найти образы векторов $e_1,\ e_2,\ e_3$, $x = 3e_1 + 2e_2 + e_3$.
4. В трехмерном линейном пространстве линейное преобразование φ задается матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Найти базисы и размерности ядра и образа этого преобразования.
5. Найти собственные значения и собственные векторы линейных преобразований, заданных матрицами

а) $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -5 & -6 & -5 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

ВАРИАНТ 13

1. В пространстве многочленов степени не выше 2 дано преобразование φ, при котором $\varphi(ax^2+bx+c)=ax^2+bx$. Доказать, что φ – линейное преобразование, и найти его матрицы в базисах
   a) $x^2, x, 1$;
   b) $x^2+2x-1,\ x-1,\ 2$.
2. Линейное преобразование φ в базисе $a_1=(3,\ 1)$, $a_2=(4,\ 2)$ имеет матрицу $M=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, линейное преобразование ψ в базисе $b_1=(1,\ 2)$, $b_2=(2,\ 3)$ - матрицу $B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & 3\end{pmatrix}$. Найти матрицы операторов $\varphi+\psi$ и $\varphi\cdot\psi$ в базисе b_1, b_2.
3. Линейное преобразование φ позволяет перевести векторы $a_1=(1,\ 2)$, $a_2=(2,-1)$ соответственно в векторы $b_1=(3,\ 1)$, $b_2=(2,\ 1)$. Найти матрицу этого преобразования в том базисе, в котором даны координаты всех векторов. Найти матрицу линейного преобразования φ в том базисе, в котором даны координаты всех векторов.
4. В пространстве A_3 линейное преобразование φ позволяет перевести вектор $x=(x_1,x_2,x_3)$ в вектор $\varphi x=(x_1+x_2,x_2,x_1+x_2+x_3)$. Найти базисы и размерности образа и ядра этого оператора.
5. Найти собственные значения и собственные векторы линейных преобразований, заданных матрицами
   а) $\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -4 & 6\end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix}-2 & 12 & 0\\ 1 & -3 & 0\\ 2 & 3 & 2\end{pmatrix}$.

Раздел 8. ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

§1. Определение евклидова пространства. Матрица Грама

В действительном линейном пространстве X определена операция *скалярного умножения векторов*, если любой паре векторов $x, y\in X$ поставлено в соответствие действительное число, которое называют *скалярным произведением векторов* x, y и обозначают символом (x, y), и если для любых $x, y, z\in X$ и любого действительного числа α выполняются следующие аксиомы скалярного произведения:

1) $(x, y)=(y, x)$;
2) $(x+y, z)=(x, z)+(y, z)$;
3) $(\alpha x, y)=\alpha(x, y)$;
4) $(x, x)>0$ при $x\neq 0$ и $(x, x)=0$ при $x=0$.

Пример 1. Пусть X – пространство геометрических векторов, изучаемых в векторной алгебре. Скалярное произведение, определяемое как произведение длин двух векторов на косинус угла между ними, удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения.

Пример 2. В арифметическом пространстве K_n столбцов высоты n скалярное произведение векторов $x=(x_1,x_2,...,x_n)^T$ и $y=(y_1,y_2,...,y_n)^T$ можно определить формулой $(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n$.

Из аксиом 2 и 3 скалярного произведения следует, что любую конечную линейную комбинацию векторов можно умножать скалярно на другую линейную комбинацию векторов по правилу, аналогичному правилу умножения многочлена на многочлен, т.е. по формуле

$$\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i a_i,\sum_{j=1}^{l}\beta_j b_j\right)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\alpha_i\beta_j\left(a_i,b_j\right). \qquad (1)$$

Действительное линейное пространство, в котором определено скалярное умножение векторов, называют *евклидовым пространством*.

Конечномерное линейное пространство можно превратить в евклидово многими способами. Если в n-мерном евклидовом пространстве X зафиксировать базис $e_1,e_2,...,e_n$, то любые векторы x и y имеют в нём разложение

$$x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\ ,\ y=\sum_{j=1}^{n}y_je_j$$

- и формула (1) для векторов x и y запишется в виде

$$\left(x,y\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_iy_j\left(e_i,e_j\right) \qquad (2)$$

или в матричном виде

$$\left(x,y\right)=x^T\varGamma y\,, \qquad (3)$$

где

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix},\ \varGamma=\begin{pmatrix}(e_1,e_1)&(e_1,e_2)&...&(e_1,e_n)\\(e_2,e_1)&(e_2,e_2)&...&(e_2,e_n)\\...&...&...&...\\(e_n,e_1)&(e_n,e_2)&...&(e_n,e_n)\end{pmatrix}.$$

Следовательно, скалярное произведение в евклидовом пространстве X полностью определяется матрицей $\varGamma$.

Матрицу $\varGamma$, в формуле (3) называют матрицей Грама базиса $e=(e_1,e_2,...,e_n)$.

Свойства матрицы Грама

1) Матрица Грама $\varGamma$ симметрическая, для любого n-мерного столбца $x\neq 0$ удовлетворяет условию $x^T\varGamma y>0$.
2) Матрицы Грама $\varGamma$ и $\varGamma'$ базисов e и e' евклидова пространства соотносятся так: $\varGamma'=T^T\varGamma T$, где T – матрица перехода от базиса e к базису e'.
3) Определитель матрицы Грама любого базиса положителен.
4) Все угловые диагональные миноры $\begin{vmatrix}(e_1,e_1)&(e_1,e_2)&...&(e_1,e_k)\\(e_2,e_1)&(e_2,e_2)&...&(e_2,e_k)\\...&...&...&...\\(e_k,e_1)&(e_k,e_2)&...&(e_k,e_k)\end{vmatrix}$, $k=1,2,...,n$, матрицы

Грама базиса $e=(e_1,e_2,...,e_n)$ положительны.

Замечание. Любая матрица, обладающая свойством 4, может рассматриваться как матрица Грама. В частности, в качестве матрицы Грама можно выбрать единичную матрицу, т.е. в заданном базисе $e=(e_1,e_2,...,e_n)$ определить скалярное произведение формулой

$$(x,y)=x^T y=(x_1,x_2,...,x_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n . \tag{4}$$

Теорема 1. Матрица Грама системы векторов является невырожденной только тогда, когда эта система линейно независима. Матрица Грама линейно независимой системы векторов положительно определена , в частности, имеет положительный определитель.

§2. Длины и углы. Ортогональность. Процесс ортогонализации

Длиной $|x|$ вектора x евклидова пространства E называют величину

$$|x|=\sqrt{(x,x)} . \tag{5}$$

Нормировать вектор x – значит заменить его вектором $x^0=\frac{x}{|x|}$. Вектор x^0 называют единичным вектором, или *ортом* вектора x.

Углом между ненулевыми векторами x и y евклидова пространства E называют угол φ , определяемый соотношениями

$$\cos\varphi=\frac{(x,y)}{|x||y|},\ 0\le\varphi\le\pi . \tag{6}$$

Корректность определения угла получается из неравенств $-1\le\frac{(x,y)}{|x||y|}\le 1$, равносильных неравенству Коши-Буняковского:

$$(x,y)^2\le(x,x)(y,y) . \tag{7}$$

Из неравенства Коши-Буняковского следует другое важное неравенство:

$$|x+y|\le|x|+|y| , \tag{8}$$

называемое *неравенством треугольника*.

Векторы x и y евклидова пространства E являются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю, т.е. $(x,y)=0$. Из определения ортогональности векторов следует, что нулевой вектор ортогонален любому другому вектору.

Система ненулевых векторов называется *ортогональной системой*, если любые два вектора этой системы ортогональны. Под *ортонормированной системой* понимают ортогональную систему, все векторы которой имеют единичную длину (т.е. нормированы).

Замечание. Любую ортогональную систему можно превратить в ортонормированную простой нормировкой, так как нормирование векторов, как и умножение на произвольные ненулевые числа, не нарушает условия их взаимной ортогональности. Например, если векторы x и y ортогональны, то в силу равенства $(\alpha x,\beta y)=\alpha\beta(x,y)$ векторы αx и βy ортогональны.

Теорема 2. Любая ортогональная система линейно независима.

Существует специальная процедура, которая позволяет преобразовать произвольную линейно независимую систему из k векторов в ортогональную систему, также имеющую k векторов. Эту процедуру называют *процессом ортогонализации*. Она состоит в следующем:

1) полагаем $b_1 = a_1$;

2) если векторы $b_1, b_2, ..., b_{i-1}$ ($i \le k$) найдены, ищем ненулевой вектор

$$b_i = a_1 + \beta_{i1} b_1 + ... + \beta_{i,i-1} b_{i-1}, \qquad (9)$$

выбирая коэффициенты $\beta_{i1}, ..., \beta_{i,i-1}$ так, что бы вектор b_i был ортогонален каждому из векторов $b_1, b_2, ..., b_{i-1}$. Умножим равенство (9) скалярно на вектор b_j, $j = 1,2,...,i-1$. С учётом попарной ортогональности векторов $b_1, b_2, ..., b_{i-1}$ и условия ортогональности им вектора b_i получим:

$$0 = (a_i, b_j) + \beta_j (b_j, b_j).$$

Отсюда находим

$$\beta_j = -\frac{(a_i, b_j)}{(b_j, b_j)} = -\frac{(a_i, b_j)}{|b_j|^2}.$$

Таким образом, очередной вектор b_i нужно выбирать согласно формуле

$$b_i = a_i - \frac{(a_i, b_1)}{|b_1|^2} - \frac{(a_i, b_2)}{|b_2|^2} - ... - \frac{(a_i, b_{i-1})}{|b_{i-1}|^2}. \qquad (10)$$

Процесс ортогонализации рассчитан на линейно независимые системы векторов. Но этот процесс можно модифицировать так, что станет возможным его применение и к линейно зависимым системам векторов. Если система $a_1, a_2, ..., a_k$ линейно зависима, то один из векторов, a_i, является линейной комбинацией предыдущих векторов: $a_1, a_2, ..., a_{i-1}$. В результате процесса ортогонализации на i-м шаге получим нулевой вектор b_i. В таком случае нужно опустить этот вектор и начать следующий шаг. В результате получим ортогональную систему векторов $b_1, b_2, ..., b_s$, но в этой системе будет меньше векторов, чем в исходной системе: $a_1, a_2, ..., a_k$, т.е. $s < k$. Число s есть ранг системы векторов $a_1, a_2, ..., a_k$.

Пример 3. Применяя ортогонализацию и нормирование векторов, ортонормировать систему векторов

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad a_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

считая, что в четырёхмерном евклидовом пространстве E_4 скалярное произведение определено формулой (4).

Решение. Положим $b_1 = a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. В соответствии с формулой (9) находим $b_2 = a_2 + \beta_{21} b_1$.

Умножим скалярно обе части последнего равенства на b_1, получим:

$$0 = (b_2, b_1) = (a_2, b_1) + \beta_{21}(b_1, b_1),$$

откуда

$$\beta_{21}=-\frac{(a_2,b_1)}{(b_1,b_1)}=-\frac{(a_2,b_1)}{|b_1|^2}=-\frac{1}{2}.$$

$$(a_2,b_1)=1\cdot 1+0\cdot 1+1\cdot 0+1\cdot 0=1,$$

$$(b_1,b_1)=1\cdot 1+1\cdot 1+0\cdot 0+0\cdot 0=2.$$

$$b_2=a_2+\beta_{21}b_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Находим вектор $b_3=a_3+\beta_{31}b_1+\beta_{32}b_2$. Умножим скалярно обе части равенства на b_1, получим $0=(b_3,b_1)=(a_3,b_1)+\beta_{31}(b_1,b_1)+\beta_{32}(b_2,b_1)$.

Поскольку $(b_2,b_1)=0$, так как векторы b_1 и b_2 ортогональны, находим

$$\beta_{31}=-\frac{(a_3,b_1)}{(b_1,b_1)}=-\frac{(a_3,b_1)}{|b_1|^2}=0.$$

$$(a_3,b_1)=0\cdot 1+0\cdot 1+1\cdot 0+0\cdot 0=0,$$

$$(b_1,b_1)=1\cdot 1+1\cdot 1+0\cdot 0+0\cdot 0=2.$$

Умножим теперь скалярно обе части равенства $b_3=a_3+\beta_{31}b_1+\beta_{32}b_2$ на b_2, получим:

$$0=(b_3,b_2)=(a_3,b_2)+\beta_{31}(b_1,b_2)+\beta_{32}(b_2,b_2),$$

откуда

$$\beta_{32}=-\frac{(a_3,b_2)}{(b_2,b_2)}=-\frac{(a_3,b_2)}{|b_2|^2}=-\frac{2}{5}.$$

$$(a_3,b_2)=0\cdot\frac{1}{2}+0\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1\cdot 1+0\cdot 1=1,$$

$$(b_2,b_2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1\cdot 1+1\cdot 1=\frac{5}{2}.$$

$$b_3=a_3+\beta_{31}b_1+\beta_{32}b_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}-\frac{2}{5}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{5}\\\frac{1}{5}\\\frac{3}{5}\\-\frac{2}{5}\end{pmatrix}.$$

Находим вектор $b_4=a_4+\beta_{41}b_1+\beta_{42}b_2+\beta_{43}b_3$. Умножим скалярно обе части равенства на b_1, получим

$$0=(b_4,b_1)=(a_4,b_1)+\beta_{41}(b_1,b_1)+\beta_{42}(b_2,b_1)+\beta_{43}(b_3,b_1).$$

Поскольку $(b_2,b_1)=0$ и $(b_3,b_1)=0$, так как векторы b_1, b_2 и b_3 попарно ортогональны, находим

$$\beta_{41}=-\frac{(a_4,b_1)}{(b_1,b_1)}=-\frac{(a_4,b_1)}{|b_1|^2}=-\frac{1}{2}.$$

$$(a_4,b_1)=0\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 0+0\cdot 0=1,$$
$$(b_1,b_1)=1\cdot 1+1\cdot 1+0\cdot 0+0\cdot 0=2\,.$$

Умножим скалярно обе части равенства на b_2, получим

$$0=(b_4,b_2)=(a_4,b_2)+\beta_{41}(b_1,b_2)+\beta_{42}(b_2,b_2)+\beta_{43}(b_3,b_2)\,.$$

Поскольку $(b_1,b_2)=0$ и $(b_3,b_2)=0$, так как векторы b_1, b_2 и b_3 попарно ортогональны, находим

$$\beta_{42}=-\frac{(a_4,b_2)}{(b_2,b_2)}=-\frac{(a_4,b_2)}{|b_2|^2}=-\frac{1}{5}\,.$$
$$(a_4,b_2)=0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1\cdot 1+0\cdot 1=\frac{1}{2},$$
$$(b_2,b_2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1\cdot 1+1\cdot 1=\frac{5}{2}\,.$$

Умножим скалярно обе части равенства на b_3 , получим:

$$0=(b_4,b_3)=(a_4,b_3)+\beta_{41}(b_1,b_3)+\beta_{42}(b_2,b_3)+\beta_{43}(b_3,b_3)\,.$$

Поскольку $(b_1,b_3)=0$ и $(b_2,b_3)=0$, так как векторы b_1, b_2 и b_3 попарно ортогональны, находим

$$\beta_{43}=-\frac{(a_4,b_3)}{(b_3,b_3)}=-\frac{(a_4,b_3)}{|b_3|^2}=-\frac{4}{3}\,.$$
$$(a_4,b_3)=0\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)+1\cdot\frac{1}{5}+1\cdot\frac{3}{5}+0\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)=\frac{4}{5},$$
$$(b_3,b_3)=\left(-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}+\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)=\frac{3}{5}\,.$$

$$b_4=a_4+\beta_{41}b_1+\beta_{42}b_2+\beta_{43}b_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{4}{3}\begin{pmatrix}-\frac{1}{5}\\\frac{1}{5}\\\frac{3}{5}\\-\frac{2}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\0\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

Нормируя векторы b_1, b_2, b_3, b_4, придём к ортонормированной системе векторов

$$q_1=\frac{b_1}{|b_1|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\0\end{pmatrix},\quad q_2=\frac{b_2}{|b_2|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}}\\-\frac{1}{\sqrt{10}}\\\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\\\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\end{pmatrix},\ q_3=\frac{b_3}{|b_3|}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{15}}\\\frac{1}{\sqrt{15}}\\\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\\-\frac{2}{\sqrt{15}}\end{pmatrix},\quad q_4=\frac{b_4}{|b_4|}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}.$$

§3. Ортонормированные базисы

Базис $e_1, e_2, ..., e_n$ евклидова пространства E называют *ортогональным базисом*, если его векторы попарно ортогональны. Если векторы этого базиса, кроме того, имеют единичную длину, т.е. нормированы, то он называется *ортонормированным базисом*. В ортонормированном базисе $e_1, e_2, ..., e_n$ выполняются условия

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 0 \text{ при } i \neq j, \\ 1 \text{ при } i = j. \end{cases} \tag{11}$$

Теорема 3. В любом конечномерном евклидовом пространстве E существуют ортогональные и ортонормированные базисы. При этом любой вектор в E входит в состав какого-либо ортогонального базиса, а любой единичный вектор – в состав какого-либо ортонормированного базиса.

Ортогональные (ортонормированные) базисы можно получить, дополняя подходящими векторами данный вектор или данную ортогональную (ортонормированную) систему векторов.

Пример 4. В трёхмерном арифметическом пространстве K_3 со скалярным произведением $(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$, где $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ построить ортонормированный базис, содержащий вектор $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Добавим к вектору $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ вектор $e_2 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, удовлетворяющий условию $(e_1, e_2) = 0$, которое в координатах имеет вид $1 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 + 1 \cdot y_3 = 0$. Одним из решений этого уравнения является вектор $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Далее, к векторам e_1 и e_2 добавим вектор $e_3 = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$, удовлетворяющий условиям $(e_1, e_3) = 0$ и $(e_2, e_3) = 0$, которые в координатах имеют вид $\begin{cases} 1 \cdot z_1 + 1 \cdot z_2 + 1 \cdot z_3 = 0 \\ 1 \cdot z_1 + 0 \cdot z_2 - 1 \cdot z_3 = 0 \end{cases}$. Одним из решений этой однородной системы уравнений является $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Система векторов e_1, e_2, e_3 является одним из ортогональных базисов в K_3. Нормируя эти векторы, получим в K_3 ортонормированный базис:

$$f_1=\frac{e_1}{|e_1|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\qquad f_2=\frac{e_2}{|e_2|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\qquad f_3=\frac{e_3}{|e_3|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

Пример 5. В трёхмерном евклидовом пространстве E_3 со скалярным произведением

$$(x,y)=x_1y_1+5x_2y_2+6x_3y_3+2x_1y_3+2x_3y_1+3x_2y_3+3x_3y_2,$$

где $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ построить какой-либо ортонормированный базис.

Решение. Следует ортонормировать какую-либо максимальную линейно независимую в E_3 систему векторов, например, систему векторов $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Применим процесс ортогонализации Грама-Шмидта: положим $b_1=e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $b_2=e_2+\beta_{21}b_1$. Умножим скалярно обе части последнего равенства на b_1, получим:

$$0=(b_2,b_1)=(e_2,b_1)+\beta_{21}(b_1,b_1),$$

откуда

$$\beta_{21}=-\frac{(e_2,b_1)}{(b_1,b_1)}=-\frac{(e_2,b_1)}{|b_1|^2}=0,$$

$$(e_2,b_1)=0,$$

$$(b_1,b_1)=1.$$

$$b_2=e_2+\beta_{21}b_1=e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Находим вектор $b_3=e_3+\beta_{31}b_1+\beta_{32}b_2$. Умножим скалярно обе части равенства на b_1, получим

$$0=(b_3,b_1)=(e_3,b_1)+\beta_{31}(b_1,b_1)+\beta_{32}(b_2,b_1).$$

Поскольку $(b_2,b_1)=0$, так как векторы b_1 и b_2 ортогональны, находим

$$\beta_{31}=-\frac{(e_3,b_1)}{(b_1,b_1)}=-\frac{(e_3,b_1)}{|b_1|^2}=-2,$$

$$(e_3,b_1)=2,$$

$$(b_1,b_1)=1.$$

Умножим теперь скалярно обе части равенства $b_3=e_3+\beta_{31}b_1+\beta_{32}b_2$ на b_2, получим

$$0=(b_3,b_2)=(e_3,b_2)+\beta_{31}(b_1,b_2)+\beta_{32}(b_2,b_2),$$

откуда

$$\beta_{32}=-\frac{(e_3,b_2)}{(b_2,b_2)}=-\frac{(e_3,b_2)}{|b_2|^2}=-\frac{3}{5},$$

$$(e_3,b_2)=3,\ (b_2,b_2)=5.$$

$$b_3=e_3+\beta_{31}b_1+\beta_{32}b_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-\frac{3}{5}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-\frac{3}{5}\\1\end{pmatrix}.$$

Нормируем каждый из векторов b_1, b_2, b_3.

$$f_1=\frac{b_1}{|b_1|}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\qquad f_2=\frac{b_2}{|b_2|}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{5}}\\0\end{pmatrix},\qquad f_3=\frac{b_3}{|b_3|}=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5}}}\begin{pmatrix}-2\\-\frac{3}{5}\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\sqrt{5}\\-\frac{3\sqrt{5}}{5}\\\sqrt{5}\end{pmatrix}.$$

Векторы f_1, f_2, f_3 составляют ортонормированную систему.

Задачу можно решить и по-другому. Взять за b_1 произвольный фиксированный вектор и найти вектор b_2 из условия $(b_2,b_1)=0$. Затем найти вектор b_3 из условий $(b_3,b_1)=0$ и $(b_3,b_2)=0$. Полученные векторы b_1, b_2, b_3 следует нормировать с учетом того, что скалярные произведения необходимо считать по заданной в условии задачи формуле.

Теорема 4. В любом ортонормированном базисе n-мерного евклидова пространства E скалярное произведение векторов $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ и $y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$, заданных координатами в этом базисе, определяется формулой

$$(x,y)=x^T y=(x_1,x_2,\dots,x_n)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n. \qquad (4)$$

Наоборот, если в базисе e скалярное произведение определяется формулой (4), то этот базис ортонормированный.

Следствие. В n-мерном линейном пространстве X с заданным базисом e можно задать скалярное произведение так, чтобы заданный базис был ортонормированным.

§4. Ортогональные матрицы

Квадратная матрица Q, для которой транспонированная матрица Q^T совпадает с обратной матрицей Q^{-1}, называется *ортогональной матрицей*. Квадратная матрица Q является ортогональной, если $Q^TQ=QQ^T=E$.

1. Квадратная матрица Q ортогональна только тогда, когда сумма квадратов всех элементов любого её столбца (строки) равна единице, а сумма попарных произведений элементов двух любых столбцов (строк) равна нулю.
2. Определитель ортогональной матрицы равен 1 или –1.
3. Матрица, обратная ортогональной матрице, тоже ортогональная.
4. Произведение ортогональных матриц является ортогональной матрицей.

Теорема 5. В евклидовом пространстве матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису является ортогональной. Если матрица перехода от ортонормированного базиса ко второму базису является ортогональной, то этот второй базис тоже ортонормированный.

§5. Ортогональное дополнение. Ортогональная проекция вектора на подпространство

Пусть E – евклидово пространство, а L – его подпространство. В E множество $L^{\perp}$ векторов, ортогональных к каждому вектору подпространства L, называют ортогональным дополнением к подпространству L.

Теорема 6. Ортогональное дополнение $L^{\perp}$ к подпространству L евклидова пространства E является подпространством в E.

Теорема 7. Конечномерное евклидово пространство E является прямой суммой любого своего подпространства L и его ортогонального дополнения $L^{\perp}$, т.е. ортогональное дополнение к подпространству является прямым дополнением.

Следствие 1. Если подпространство L в n-мерном евклидовом пространстве E имеет размерность k, то его ортогональное дополнение $L^{\perp}$ имеет размерность $n-k$.

Следствие 2. Ортогональным дополнением к подпространству $L^{\perp}$ евклидова пространства E является подпространство L.

Следствие 3. Если L – подпространство в евклидовом пространстве E, то любой вектор $x \in E$ имеет разложение $x = x_0 + x^{\perp}$, где $x_0 \in L$, $x^{\perp} \in L^{\perp}$. Такое разложение единственно.

Пример 6. В четырёхмерном пространстве E_4 скалярное произведение в заданном базисе определено формулой $(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$. Построить ортогональное дополнение $L^{\perp}$ для подпространства $L = < a_1, a_2 >$, где $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Векторы a_1 и a_2 составляют базис в L. Дополним эту систему до базиса в E_4 векторами b_1 и b_2, удовлетворяющими условиям $(a_1, b_i) = 0$ и $(a_2, b_i) = 0$ и положим $L_1 = < b_1, b_2 >$. Векторы b_1 и b_2 являются решениями системы уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$ Общее решение этой системы может быть записано в виде $x = (-x_3 - x_4,\ 0, x_3, x_4) = x_3(-1,\ 0,\ 1,\ 0) + x_4(-1,\ 0,\ 0,\ 1)$. Эта система имеет два фундаментальных решения, например, $b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Отметим, что b_1 и b_2 составляют базис в $L^{\perp}$, т.е. $L_1 = L^{\perp}$.

Пусть L – подпространство евклидова пространства E. Каждый вектор $y \in E$ может быть единственным образом представлен в виде

$$y = y_0 + y^{\perp} \tag{12}$$

где $y_0 \in L$, а вектор $y^{\perp}$ ортогонален к каждому вектору из L, т.е. $y^{\perp} \in L^{\perp}$. Вектор y_0 называют *ортогональной проекцией* вектора y на подпространство L и обозначают $\text{пр}_L y$, а вектор $y^{\perp}$ называют *ортогональной составляющей* вектора y.

На практике при отыскании ортогональной проекции вектора x на подпространство $L = < a_1, a_2, ..., a_k >$, где система $a_1, a_2, ..., a_k$ линейно независима, поступают следующим образом. В разложении $x = x_0 + x^{\perp}$ вектора x на ортогональную проекцию $x_0 = \text{пр}_L x$ и ортогональную составляющую $x^{\perp}$ вектора x вектор x_0 можно представить в виде

$$x_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_k a_k \,. \tag{13}$$

Тогда равенство $x = x_0 + x^{\perp}$ примет вид

$$x = x_0 + x^{\perp} = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_k a_k + x^{\perp} \tag{14}$$

Для определения коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ необходимо умножить равенство (14) скалярно на векторы $a_1, a_2, ..., a_k$. С учетом того, что $(a_1, x^{\perp}) = (a_2, x^{\perp}) = ... = (a_k, x^{\perp}) = 0$, получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} (a_1, x) = \alpha_1 (a_1, a_1) + ... + \alpha_k (a_1, a_k) \\ (a_2, x) = \alpha_1 (a_2, a_1) + ... + \alpha_k (a_2, a_k) \\ ... \\ (a_k, x) = \alpha_1 (a_k, a_1) + ... + \alpha_k (a_k, a_k) \end{cases} \tag{15}$$

относительно неизвестных $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$. Из этой системы находим коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$

Пример 7. Для вектора $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ найти ортогональную проекцию x_0 на подпространство $L = < a_1, a_2 >$ и ортогональную составляющую $x^{\perp}$, если $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Векторы a_1 и a_2 линейно независимы. Запишем $x_0 = \text{пр}_L x$ в виде $x_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Коэффициенты α_1 и α_2 находим, умножая скалярно равенство $x = x_0 + x^{\perp} = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + x^{\perp}$ на векторы a_1 и a_2. Получаем систему

$$\begin{cases}(a_1,x)=\alpha_1(a_1,a_1)+\alpha_2(a_1,a_2)\\(a_2,x)=\alpha_1(a_2,a_1)+\alpha_2(a_2,a_2)\end{cases}.$$

Для определения коэффициентов α_1 и α_2 найдём скалярные произведения:

$(a_1,x)=1\cdot 3+(-1)\cdot 6+0\cdot 0=-3$,

$(a_2,x)=(-1)\cdot 3+2\cdot 6+1\cdot 0=9$,

$(a_1,a_1)=1\cdot 1+(-1)\cdot(-1)+0\cdot 0=2$,

$(a_1,a_2)=1\cdot(-1)+(-1)\cdot 2+0\cdot 1=-3$,

$(a_1,a_2)=(a_2,a_1)=-3$,

$(a_2,a_2)=(-1)\cdot(-1)+2\cdot 2+1\cdot 1=6$.

Таким образом, получаем систему $\begin{cases}-3=2\alpha_1-3\alpha_2\\9=-3\alpha_1+6\alpha_2\end{cases}$, решением которой будут $\alpha_1=\alpha_2=3$.

Значит, $x_0=\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2=3\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix}$, а $x^{\perp}=x-x_0=\begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\-3\end{pmatrix}$.

ВАРИАНТЫ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

ВАРИАНТ 1

1. Используя процесс ортогонализации, построить ортогональный базис подпространства $L=<a_1,a_2,a_3>$, где $a_1=(1,\ 1,\ 1,-2,\ 0)$, $a_2=(0,\ 2,\ 5,\ 0,\ 0)$, $a_3=(1,\ 1,\ 3,-1,\ 2)$.

2. Найти ортогональную проекцию вектора $x=(39,\ 1,\ 33,\ 0)$ на подпространство $L(y_1,y_2,y_3)$ и его ортогональную составляющую, где $y_1=(1,\ 3,\ 0,\ 2)$, $y_2=(3,\ 7,-1,\ 2)$, $y_3=(2,\ 4,-1,\ 0)$.

ВАРИАНТ 2

1. Используя процесс ортогонализации, построить ортогональный базис подпространства $L=<a_1,a_2,a_3,a_4>$, где $a_1=(1,\ 1,-1,-2)$, $a_2=(-2,\ 1,\ 5,\ 11)$, $a_3=(0,\ 3,\ 3,\ 7)$, $a_4=(3,-3,-3,-9)$.

2. Найти ортогональную проекцию вектора $z=(-1,\ 1,\ 3,\ 1)$ на подпространство $L(a_1,a_2,a_3)$ и его ортогональную составляющую, где $a_1=(1,\ 2,\ 1,\ 1)$, $a_2=(2,\ 3,\ 1,\ 0)$, $a_3=(3,\ 1,-2,-7)$.

ВАРИАНТ 3

1. Построить ортонормированный базис пространства A_4, содержащий векторы $a_1 = \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$, $a_2 = \left(\frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{2}, -\frac{5}{6}\right)$.

2. Найти ортогональную проекцию вектора $x = (2, -5,\ 2,\ 1)$ на подпространство $L(a_1, a_2, a_3)$ и его ортогональную составляющую, где $a_1 = (1,\ 1, -2, -7)$, $a_2 = (1, -1,\ 1,\ 4)$, $a_3 = (-2,\ 1, -1,\ 7)$.

ВАРИАНТ 4

1. Убедиться в том, что векторы a_1, a_2 ортогональны, дополнить их до ортогонального базиса пространства A_4, если $a_1 = (1, -1,\ 1, -3)$, $a_2 = (-4,\ 1,\ 5,\ 0)$.

2. Найти ортогональную проекцию вектора $x = (8,\ 3,\ 1, -1)$ на подпространство $L(a_1, a_2, a_3)$ и его ортогональную составляющую, где $a_1 = (2,\ 3, -1,\ 1)$, $a_2 = (4, -3,\ 3,\ 1)$, $a_3 = (2, -15,\ 9,\ 5)$.

ВАРИАНТ 5

1. Используя процесс ортогонализации, построить ортогональный базис подпространства $L = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, где $a_1 = (1,\ 1,\ 1, -2,\ 0)$, $a_2 = (0,\ 2,\ 5,\ 0,\ 0)$, $a_3 = (1,\ 1,\ 3, -1,\ 2)$.

2. Найти ортогональную проекцию вектора $x = (4,\ 8, -8,\ 0)$ на подпространство $L(a_1, a_2, a_3)$ и его ортогональную составляющую, где $a_1 = (1,\ 3,\ 3,\ 5)$, $a_2 = (1,\ 3, -5, -3)$, $a_3 = (1,\ 3,\ 11,\ 13)$.

ВАРИАНТ 6

1. Используя процесс ортогонализации, построить ортогональный базис подпространства $L = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, где $a_1 = (-1, -2,\ 1,\ 2)$, $a_2 = (1,\ 0, -2, -1)$, $a_3 = (2,\ 1,\ 0,\ 0)$.

2. Найти ортогональную проекцию вектора $x = (10, -3,\ 8,\ 9)$ на подпространство $L(a_1, a_2, a_3)$ и его ортогональную составляющую, где $a_1 = (-1, -1,\ 1,\ 0)$, $a_2 = (2,\ 1,\ 2,\ 1)$, $a_3 = (8,\ 1,\ 8,\ 3)$.

ВАРИАНТ 7

1. Используя процесс ортогонализации, найти ортогональный базис подпространства $L = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, где $b_1 = (1,\ 1,\ 1,\ 1)$, $b_2 = (3,\ 3, -1, -1)$, $b_3 = (-2,\ 0,\ 6,\ 8)$.

2. Найти ортогональную проекцию вектора $z=(-3,\ 12,-9,\ 12)$ на подпространство $L(a_1,a_2,a_3)$ и его ортогональную составляющую, где $a_1=(1,-1,\ 1,-1)$, $a_2=(1,\ 2,\ 1,\ 2)$, $a_3=(3,\ 0,\ 3,\ 0)$.

ВАРИАНТ 8

1. Используя процесс ортогонализации, построить ортогональный базис подпространства $L=<a_1,a_2,a_3>$, где $a_1=(1,\ 2,\ 1,\ 3)$, $a_2=(4,\ 1,\ 1,\ 1)$, $a_3=(3,\ 1,\ 1,\ 8)$.

2. Найти ортогональную проекцию вектора $x=(30,\ 33,\ 2,\ 1)$ на подпространство $L(a_1,a_2,a_3)$ и его ортогональную составляющую, где $a_1=(2,\ 1,\ 1,\ 8)$, $a_2=(7,\ 2,\ 1,\ 3)$, $a_3=(3,\ 0,\ 5,\ 1)$.

ВАРИАНТ 9

1. Используя процесс ортогонализации, построить ортогональный базис подпространства $L=<a_1,a_2,a_3,a_4>$, где $a_1=(2,\ 1,\ 3,-1)$, $a_2=(7,\ 4,\ 3,-3)$, $a_3=(0,\ 3,\ 3,\ 7)$, $a_4=(1,\ 1,-6,\ 0)$.

2. Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x=(4,\ 12,\ 1,\ 20)$ на подпространство $L(a_1,a_2,a_3)$, где $a_1=(1,\ 3,\ 1,\ 2)$, $a_2=(2,\ 1,\ 1,\ 3)$, $a_3=(3,\ 4,\ 2,\ 5)$.

ВАРИАНТ 10

1. Используя процесс ортогонализации, построить ортогональный базис подпространства, натянутого на систему векторов $a_1=(1,\ 1,-1,-2)$, $a_2=(5,\ 8,-2,-3)$, $a_3=(3,\ 9,\ 3,\ 8)$.

2. Найти ортогональную проекцию вектора $x=(5,\ 2,-2,\ 2)$ на линейное подпространство L, натянутое на векторы $a_1=(2,\ 1,\ 1,-1)$, $a_2=(1,\ 1,\ 3,\ 0)$, $a_3=(1,\ 2,\ 8,\ 1)$ и его ортогональную составляющую.

ВАРИАНТ 11

1. Убедиться в том, что векторы a_1, a_2 ортогональны, дополнить их до ортогонального базиса пространства A_4, где $a_1=(1,\ 1,\ 1,\ 2)$, $a_2=(1,\ 2,\ 3,-3)$.

2. Найти ортогональную проекцию вектора $x=(14,-3,-6,-7)$ на подпространство A, натянутое на векторы $y_1=(-3,\ 0,\ 7,\ 6)$, $y_2=(1,\ 4,\ 3,\ 2)$, $y_3=(2,\ 2,-2,-2)$ и его ортогональную составляющую.

ВАРИАНТ 12

1. Убедиться в том, что векторы a_1, a_2 ортогональны, дополнить их до ортогонального базиса пространства A_4, где $a_1 = (1, -2, 2, -3)$, $a_2 = (2, -3, 2, 4)$.

2. Найти ортогональную проекцию вектора $x = (1, 3, -6, 1)$ на подпространство, натянутое на векторы $y_1 = (0, 1, 2, 0)$, $y_2 = (-1, 1, 0, 2)$, $y_3 = (1, 1, 4, -2)$ и его ортогональную составляющую.

ВАРИАНТ 13

1. Используя процесс ортогонализации, построить ортогональный базис подпространства, натянутого на данную систему векторов $a_1 = (1, 2, 2, -1)$, $a_2 = (1, 1, -5, 3)$, $a_3 = (3, 2, 8, -7)$.

2. Найти ортогональную проекцию вектора $x = (4, -1, -3, 4)$ на подпространство L, натянутое на векторы $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 2, 2, -1)$, $a_3 = (1, 0, 0, 3)$ и его ортогональную составляющую.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Половицкий Я. Д. Алгебра. Пермь: Перм. ун-т, 2008. Ч. 1, 2.
2. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М.: Физматлит, 1959.
3. Кострикин А. И. Введение в алгебру. Ч.1. Основы алгебры. М.: Физматлит, 2000.
4. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. М.: Физматлит, 2001.
5. Фаддеев Д. К., Соминский И. С. Сборник задач по высшей алгебре. СПб.: Лань, 1999.
6. Шевцов Г. С. Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты. М.: Финансы и статистика, 2003.
7. Михалев А. В., Михалев А. А. Начала алгебры. Ч.1/Интернет-университет инфомационных технологий. М., 2005.
8. Александров П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1979.
9. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. М.: Наука, 1978.
10. Икрамов Х. Д. Задачник по линейной алгебре. М.: Наука, 1975.
11. Алгебра: Лабораторные работы № 1-7/ сост. Г. А. Маланьина, В. И. Хлебутина, Т. М. Коневских. Пермь: Перм. ун-т, 2009.
12. Линейная алгебра: Лабораторные работы № 8-13/ сост. Г. А. Маланьина, Я. Д. Половицкий, В. И. Хлебутина. Пермь: Перм. ун-т, 2006.
13. Линейные пространства: метод. указ. по решению задач/ сост. Г. А. Маланьина, В. И. Хлебутина, Г. Ю. Савинкова. Пермь: Перм. ун-т, 2010.
14. Крутицкая Н. Ч, Шишкин А. А. Линейная алгебра в вопросах и задачах. М.: Высшая школа, 1985.

Учебное издание

Коневских Татьяна Михайловна
Оглезнева Анна Николаевна

Алгебра и аналитическая геометрия. Алгебра

Учебно-методическое пособие

Редактор *Е. А. Огиенко*
Корректор *С. Б. Денисова*
Техническая подготовка материалов: *Т. М. Коневских*

Объем данных 3,99 Мб
Подписано к использованию 05.11.2019

Размещено в открытом доступе
на сайте www.psu.ru
в разделе НАУКА / Электронные публикации
и в электронной мультимедийной библиотеке ELiS

Издательский центр
Пермского государственного
национального исследовательского университета
614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15