МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

В. Н. Павелкин, Т. М. Коневских

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Сборник задач

*Допущено методическим советом
Пермского государственного национального
исследовательского университета
в качестве учебного пособия для студентов
всех направлений подготовки и специальностей
механико-математического и физического факультетов*

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
"Perm University Press"

Пермь 2019

УДК 514.12(076.1)
ББК 22.151.5
П12

Павелкин В. Н., **Коневских Т. М.**

П12 Аналитическая геометрия. Сборник задач [Электронный ресурс]: учебн. пособие / В. Н. Павелкин, Т. М. Коневских; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Электрон. дан. – Пермь, 2019. – 5,57 Мб; 173 с. – Режим доступа: www.psu.ru/files/docs/science/books/uchebnie-posobiya/pavelkin-konevskih-analiticheskaya-geometriya.pdf. – Загл. с экрана.

ISBN 978-5-7944-3382-1

Сборник содержит задания трех разделов курса «Аналитическая геометрия»: «Элементы векторной алгебры», «Линейные образы» и «Образы второго порядка». Все разделы сопровождаются краткой теоретической информацией. В конце каждого раздела помещены лабораторные работы и приведены решения типовых задач. В приложении к сборнику приводятся тестовые задания для промежуточного контроля по темам: «Векторная алгебра», «Прямая на плоскости. Уравнение плоскости», «Кривые второго порядка». Ко всем тестам и задачнику приведены ответы. Большинство задач взято из известных задачников.

Учебное пособие предназначено для всех направлений механико-математического и физического факультетов, изучающих дисциплины «Алгебра и аналитическая геометрия» или «Аналитическая геометрия», а также может быть использовано в курсе высшей математики при изучении раздела «Аналитическая геометрия».

УДК 514.12(076.1)
ББК 22.151.5

Издается по решению ученого совета механико-математического факультета Пермского государственного национального исследовательского университета

Рецензенты: кафедра физики и математики ФГБОУ ВО ПГФА Минздрава России (зав. кафедрой, канд. пед. наук ***В. И. Данилова***);

доцент кафедры высшей математики и методики обучения математике ПГГПУ, канд. физ.-мат. наук ***М. С. Ананьева***

ISBN 978-5-7944-3382-1

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В связи с уменьшением числа аудиторных часов и увеличением доли самостоятельной работы студентов возникает необходимость в разработке учебных пособий для более эффективного освоения студентами раздела «Аналитическая геометрия». Этот раздел изучается в дисциплинах «Алгебра и аналитическая геометрия» или «Аналитическая геометрия 1», читаемых для студентов всех направлений механико-математического и физического факультетов, а также в курсе высшей математики.

В данном учебном пособии собраны задачи по трем основным разделам «Аналитической геометрии»: «Элементы векторной алгебры», «Линейные образы» и «Образы второго порядка». Разделы разбиты на темы, включающие достаточно подробные теоретические сведения.

В конце каждого раздела приведены лабораторные работы: две в разделе «Элементы векторной алгебры» – по темам «Метод координат. Простейшие задачи аналитической геометрии» и «Операции над векторами»; две в разделе «Линейные образы» – по темам «Прямая на плоскости» и «Прямая и плоскость в пространстве»; а также одна лабораторная работа в конце раздела 3 – по теме «Приведение линий второго порядка к каноническому виду». В начале каждой лабораторной работы разобраны решения типовых заданий.

В конце пособия приведены тесты с ответами для каждого раздела. Приведенные лабораторные работы могут быть использованы для промежуточного контроля, тесты – для подготовки к тестированию по соответствующей теме. Приведенные варианты тестовых заданий являются аналогичными, но не совпадающими с вариантами тестов промежуточного контроля.

Раздел 1. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Тема 1. Операции над векторами

Определение операций
(сложение, вычитание, умножение вектора на число)

Определение. *Вектор* – это упорядоченная пара точек, т.е. пара точек, одна из которых называется *началом*, другая *концом*.

Чтобы задать вектор, нужно задать:

- начало,
- направление (соотнесенный луч),
- длину.

Определение. *Равные векторы* – векторы, имеющие одинаковые длины и одинаковые направления, но при этом векторы не обязаны совпадать.

Утверждение. Два вектора $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ равны тогда и только тогда, когда при соединении начал и концов этих векторов отрезками получается параллелограмм (рис. 1).

$\overline{AB} = \overline{CD} \Leftrightarrow$

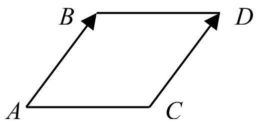


Рис. 1

Определение. Множество всех равных между собой векторов называется *свободным вектором*.

Определение. Два (и более) вектора называются *коллинеарными*, если они лежат на одной или параллельных прямых.

Определение. Три (и более) вектора пространства называются *компланарными*, если они лежат в одной или параллельных плоскостях.

Определение. Вектор $\bar{c}$ назовем *суммой* векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если будучи приложенным к началу вектора $\bar{a}$, его конец будет совпадать с концом вектора $\bar{b}$, причем конец вектора $\bar{a}$ совпадает с началом $\bar{b}$ (рис. 2):

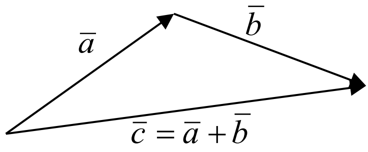


Рис. 2

Определение. Вектор $\bar{b}$ называется произведением числа λ на вектор $\bar{a}$, если

1) $\bar{b} \parallel \bar{a}$;
2) $|\bar{b}| = |\lambda| \cdot |\bar{a}|$;
3) $\lambda > 0 \Rightarrow \bar{b} \uparrow\uparrow \bar{a}$,
   $\lambda < 0 \Rightarrow \bar{b} \uparrow\downarrow \bar{a}$.

Свойства линейных операций над векторами

1) $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$;
2) $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$;
3) $\exists \bar{0} : \forall \bar{a} : \bar{a} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{a}$;
4) $\forall \bar{a} : \exists \bar{a}' : \bar{a} + \bar{a}' = \bar{0}$, $\bar{a}'$ – противоположный вектор вектору $\bar{a}$;
5) $\lambda(\bar{a} + \bar{b}) = \lambda\bar{a} + \lambda\bar{b}$;
6) $(\lambda + \mu)\bar{a} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{a}$;
7) $\lambda(\mu\bar{a}) = (\lambda\mu)\bar{a}$.

Правило параллелограмма. Приложим $\bar{a}$ и $\bar{b}$ к одной точке и достроим до параллелограмма. Тогда суммой этих векторов будет являться вектор, совпадающий с диагональю параллелограмма, начало которого совпадает с общим началом данных векторов (рис. 3).

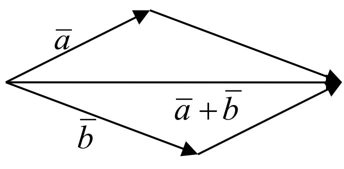
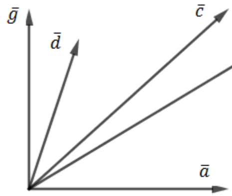


Рис. 3

Задачи

1. Найти на рисунке все тройки векторов, которые удовлетворяют равенству $\overline{x}-\overline{y}=\overline{z}$, записать соответствующие равенства.



2. Векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{d}$, $\overline{g}$ приложены к точке O и расположены в записанном порядке против часовой стрелки $|\overline{a}|=2{,}5$, $|\overline{b}|=2$, $|\overline{c}|=\sqrt{3}+1$, $|\overline{d}|=\sqrt{2}$, $|\overline{g}|=2$, углы между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$, $\overline{c}$ и $\overline{d}$, $\overline{d}$ и $\overline{g}$ равны 60°, 30°, 45°, 105° соответственно. Найти все тройки векторов, подчиняющихся правилу суммирования, записать соответствующие равенства.
3. На плоскости дан треугольник ABC. Найдите точку O этой плоскости, такую, что $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=\overline{0}$.
4. В параллелограмме $ABCD$ точка K делит сторону AB в отношении 3:1, а точка L делит сторону CD в отношении 2:3. Выразить через векторы, лежащие на сторонах параллелограмма, векторы: $\overline{DK}$, $\overline{BL}$, $\overline{KL}$ (двумя способами).
5. На плоскости даны параллелограмм и произвольная точка O. Доказать, что $\overline{OA}+\overline{OC}=\overline{OB}+\overline{OD}$. Доказать обратное утверждение: если для некоторого плоского четырехугольника $ABCD$ и точки O имеет место соотношение $\overline{OA}+\overline{OC}=\overline{OB}+\overline{OD}$, то $ABCD$ – параллелограмм.
6. Доказать, что сумма всех векторов с общим началом в центре правильного многоугольника и концами в его вершинах равна нулю.
7. На векторах $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$ построен параллелепипед. Доказать, что диагональ OD этого параллелепипеда проходит через центр тяжести E треугольника ABC.
8. Доказать, что стороны AB и DC четырехугольника $ABCD$ параллельны тогда и только тогда, когда отрезок MN, соединяющий середины этих сторон, проходит через точку O пересечения диагоналей.

Разложение вектора по данным векторам

Определение. Линейной комбинацией данной системы векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n$ с данным набором чисел $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ называется сумма $\lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + ... + \lambda_n\bar{a}_n$.

Утверждение. Любой вектор плоскости можно представить в виде линейной комбинации двух неколлинеарных векторов этой плоскости.

Утверждение. Любой вектор пространства можно представить в виде линейной комбинации трех некомпланарных векторов этого пространства.

Задачи

9. Векторы $\overline{AK} = \bar{a}$ и $\overline{BL} = \bar{b}$ совпадают с медианами треугольника *ABC*. Выразить векторы, совпадающие со сторонами треугольника, через $\bar{a}$ и $\bar{b}$.
10. В правильном шестиугольнике *KLMNPQ* $\overline{KL} = \bar{t}$, $\overline{QP} = \bar{s}$. Представить векторы, совпадающие с остальными сторонами шестиугольника, в виде линейной комбинации векторов $\bar{t}$ и $\bar{s}$.
11. В треугольнике *ABC* точка *M* делит сторону *AB* в отношении 3:5, а точка *K* делит сторону *BC* в отношении 3:1. Выразить вектор $\overline{CM}$ через векторы $\overline{AK} = \bar{e}_1$ и $\overline{AC} = \bar{e}_2$.
12. В параллелограмме *ABCD* точка *M* делит диагональ *BD* в отношении 2:5. Разложить вектор $\overline{AC}$ по базису $\overline{AM} = \bar{e}_1$ и $\overline{MB} = \bar{e}_2$.
13. В равнобедренной трапеции *ABCD* точка *O* – точка пересечения диагоналей, коэффициент подобия треугольников *AOC* и *BOD* равен *k*, $\overline{BA} = \bar{e}_1$, $\overline{OD} = \bar{e}_2$. Найти разложение вектора $\overline{BC}$ в линейную комбинацию векторов $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$.
14. В треугольнике *ABC* точка *M* – точка пересечения медиан, $\overline{AM} = \bar{a}$, $\overline{AC} = \bar{b}$. Выразить через $\bar{a}$ и $\bar{b}$ векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$.
15. В параллелограмме *ABCD* точка *K* – середина стороны *BC*, а точка *M* – середина стороны *CD*, $\overline{AK} = \bar{a}$, $\overline{AM} = \bar{b}$. Выразить векторы $\overline{BD}$ и $\overline{AD}$ через $\bar{a}$ и $\bar{b}$.
16. Из точки *O* выходят два вектора: $\overline{OA} = \bar{a}, \overline{OB} = \bar{b}$. Найти какой-нибудь вектор $\overline{OM}$, идущий по биссектрисе угла *AOB*.

17. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD угла A. Выразить вектор $\overline{AD}$ через векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.
18. В треугольнике ABC точки M, N, K – середины сторон AB, BC, AC соответственно, точка O – точка пересечения медиан ΔABC. Определить координаты векторов $\overline{KB}, \overline{BN}, \overline{BC}, \overline{AB}, \overline{AC}, \overline{KM}$, принимая за базисные векторы $\overline{OB} = \bar{e}_1, \overline{KN} = \bar{e}_2$.
19. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $\overline{AK} = \bar{k}$, $\overline{AL} = \bar{l}$, $\overline{AM} = \bar{m}$, где K, L, M– середины граней, противолежащих вершине A. Выразить через векторы $\bar{k}$, $\bar{l}$ и $\bar{m}$ вектор $\overline{PQ}$, где точка P делит отрезок BA_1 в отношении 2:5, а точка Q делит отрезок CC_1 в отношении 6:1.
20. Медианы грани ABC тетраэдра $SABC$ пересекаются в точке M. Выразить вектор $\overline{SA}$ через векторы $\overline{SB}$, $\overline{SC}$ и $\overline{SM}$.
21. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка K – середина ребра A_1D_1, точка L – середина ребра CD, точка B_1 – середина отрезка MC_1. Принимая векторы $\bar{e}_1 = \overline{AB}$, $\bar{e}_2 = \overline{AD}$, $\bar{e}_3 = \overline{AA_1}$ за базисные, определить координаты векторов $\overline{CK}$, $\overline{B_1L}$, $\overline{LM}$, $\overline{KL}$, $\overline{DM}$.
22. Зная радиусы-векторы трех последовательных вершин параллелограмма, найти радиус-вектор точки пересечения его диагоналей и радиус-вектор четвертой вершины.
23. Пусть $ABCD$ – параллелограмм, $\bar{e}_1 = \dfrac{1}{2}\overline{AB}, \bar{e}_2 = \dfrac{1}{3}\overline{AC}$. Найти координаты всех вершин параллелограмма и точки пересечения его диагоналей в системе координат $A\bar{e}_1\bar{e}_2$.
24. В пространстве заданы четыре точки: A, B, C и D. Точка E – середина AB, F – середина CD. Доказать, что $\overline{EF} = 0{,}5 \cdot \left(\overline{AC} + \overline{BD}\right)$.
25. В правильном восьмиугольнике $ABCDEFGH$ $\overline{AB} = \bar{a}$, $\overline{AH} = \bar{b}$. Выразить через $\bar{a}$ и $\bar{b}$ векторы, совпадающие с остальными сторонами восьмиугольника.
26. В тетраэдре $ABCD$ точка M – середина ребра BC, точка Q – точка пересечения медиан грани BCD, $\overline{AB} = \bar{b}$, $\overline{AC} = \bar{c}$, $\overline{AD} = \bar{d}$. Выразить через $\bar{b}$, $\bar{c}$ и $\bar{d}$ векторы $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$, $\overline{DM}$, $\overline{AQ}$.
27. Дан треугольник, вершинами которого являются концы трех ребер параллелепипеда, выходящих из одной его вершины. Доказать, что точка пересечения медиан треугольника принадлежит диагонали параллелепипеда, выходящей из той же вершины, и делит эту диагональ в отношении 1:2.

Тема 2. Координаты векторов в аффинной (АСК) и прямоугольной декартовой (ПДСК) системах координат

Линейная зависимость и независимость в координатах, разложение вектора по данным векторам

Определение. Система векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ называется *линейно зависимой*, если существует такой набор коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, из которых хотя бы один не равен нулю, что линейная комбинация данной системы векторов с этим набором коэффициентов равна нулевому вектору $\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + \ldots + \lambda_n\overline{a}_n = \overline{0}$.

Определение. Система векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ называется *линейно зависимой*, если хотя бы один из векторов этой системы можно представить в виде линейной комбинации остальных векторов этой системы.

Определение. Система векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ называется *линейно независимой*, если ее линейная комбинация равна нулевому вектору $\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + \ldots + \lambda_n\overline{a}_n = \overline{0}$ только в случае нулевого набора коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Определение. Система векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ называется *линейно независимой*, если ни один из векторов этой системы нельзя представить в виде линейной комбинации остальных векторов этой системы.

Теорема. Если в системе векторов имеется нулевой вектор, то система линейно зависима.

Теорема. Если в системе векторов имеется линейно зависимая подсистема, то и вся система линейно зависима.

Теорема. Любая подсистема линейно независимой системы линейно независима.

Геометрический смысл линейной зависимости и независимости векторов

Теорема. Для того чтобы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы они были коллинеарны $\bar{a} \parallel \bar{b}$.
Следствие. Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.
Следствие. Для того чтобы два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ были линейно независимы, необходимо и достаточно, чтобы они были не коллинеарны.
Теорема. Для того чтобы система из трех векторов была линейно независима, необходимо и достаточно, чтобы эти векторы были некомпланарными.
Теорема. Любые 4 вектора в пространстве линейно зависимы.
Следствие. Для того чтобы векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ были линейно независимы, необходимо и достаточно, чтобы они были некомпланарны.
Следствие. Нулевой вектор компланарен любой паре векторов.

Задачи

28. Определить, какие из систем векторов являются линейно зависимыми:
    1) $\bar{a} = \{3; 0 - 2\}$, $\bar{b} = \{2; 5; 7\}$ и $\bar{c} = \{4; -5; -11\}$;
    2) $\bar{a} = \{1; -4; 5\}$, $\bar{b} = \{2; 3; -1\}$ и $\bar{c} = \{0; 1; -2\}$;
    3) $\bar{a} = \{3; 0 - 2\}$, $\bar{b} = \{2; 5; 7\}$ и $\bar{c} = \{5; 5; 5\}$.
29. Для линейно зависимых систем предыдущего задания найти коэффициенты нулевой линейной комбинации.
30. Найти разложение вектора $\bar{d}$ по векторам $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ в каждом из следующих случаев:
    1) $\bar{d} = \{2; 5; -6\}$, $\bar{a} = \{2; 5; -4\}, \bar{b} = \{3; 4; 3\}, \bar{c} = \{4; 3; 8\}$;
    2) $\bar{d} = \{0; -13; -15\}, \bar{a} = \{1; 3; 4\}, \bar{b} = \{-1; 1; -2\}, \bar{c} = \{-2; -1; 3\}$;
    3) $\bar{d} = \{6; 2; 2\}$, $\bar{a} = \{0; 2; 4\}, \bar{b} = \{2; 0; -3\}, \bar{c} = \{1; -1; 0\}$.
31. Показать, что каковы бы ни были три вектора $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ и числа λ, μ, ν, векторы $\lambda\bar{a} - \mu\bar{b}, \nu\bar{b} - \lambda\bar{c}, \mu\bar{c} - \nu\bar{a}$ компланарны.
32. Зная разложение векторов $\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$ по трем некомпланарным векторам $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$, проверить, будут ли $\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$ компланарны, и в

случае утвердительного ответа дать линейную зависимость, их связывающую:

1) $\overline{l} = 2\overline{a} - \overline{b} - \overline{c}$, $\overline{m} = 2\overline{b} - \overline{a} - \overline{c}$, $\overline{n} = \overline{2}c - \overline{a} - \overline{b}$;

2) $\overline{l} = \overline{c}$, $\overline{m} = \overline{a} - \overline{b} - \overline{c}$, $\overline{n} = \overline{a} - \overline{b} + \overline{c}$;

3) $\overline{l} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$, $\overline{m} = \overline{b} + \overline{c}$, $\overline{n} = -\overline{a} + \overline{c}$.

33. Найти линейную зависимость между данными четырьмя некомпланарными векторами: $\overline{m} = \overline{a} - \overline{b} + \overline{c}$, $\overline{n} = \overline{b} + 0{,}5\overline{c}$, $\overline{p} = \overline{a} + \overline{b}$, $\overline{q} = \overline{b} - \overline{c}$.

34. Разложить вектор $\overline{s} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$ по трем некомпланарным векторам $\overline{m} = \overline{a} + \overline{b} - 2\overline{c}$, $\overline{n} = \overline{a} - \overline{b}$, $\overline{p} = 2\overline{b} + 3\overline{c}$.

35. Установить, линейно зависима или нет тройка векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$, и, когда это возможно, представить вектор $\overline{c}$ как линейную комбинацию векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если:

1) $\overline{a} = \{5; 2; 1\}, \overline{b} = \{-1; 4; 2\}, \overline{c} = \{-1; -1; 6\}$;

2) $\overline{a} = \{6; 4; 2\}, \overline{b} = \{-9; 6; 3\}, \overline{c} = \{-3; 6; 3\}$;

3) $\overline{a} = \{6; -18; 12\}, \overline{b} = \{-8; 24; -16\}, \overline{c} = \{8; 7; 3\}$.

Деление отрезка в данном отношении

Определение. *Разделить отрезок AB* в данном отношении λ – это значит на прямой *AB* найти такую точку *C*, что:

1) $\dfrac{|AC|}{|CB|} = |\lambda|$;

2) точка *C* принадлежит отрезку *AB*, если λ >0, и лежит вне отрезка *AB*, если λ <0.

Дано: АСК: $O\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$, $A(\alpha_A; \beta_A; \gamma_A)$, $B(\alpha_B; \beta_B; \gamma_B)$, $\dfrac{AC}{CB} = \lambda$. (рис. 4).

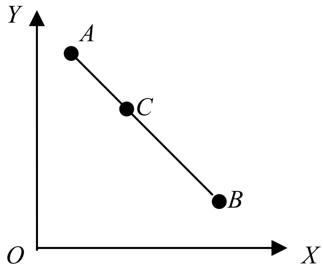


Рис. 4

Найти: $C(\alpha_C;\beta_C;\gamma_C)$.

$$\alpha_C=\frac{\alpha_A+\lambda\alpha_B}{1+\lambda},\ \beta_C=\frac{\beta_A+\lambda\beta_B}{1+\lambda},\ \gamma_C=\frac{\gamma_A+\lambda\gamma_B}{1+\lambda}.$$

Если $\lambda=1$, то точка C есть середина отрезка AB. Ее координаты вычисляются по формулам:

$$\alpha_C=\frac{\alpha_A+\alpha_B}{2},\ \beta_C=\frac{\beta_A+\beta_B}{2},\ \gamma_C=\frac{\gamma_A+\gamma_B}{2}.$$

Задачи

36. Найдите координаты точки M, делящей отрезок, ограниченный точками $M_1(2;3)$ и $M_2(-5;1)$, в отношении:

    1) $\lambda=2$; 2) $\lambda=-0{,}5$; 3) $\lambda=-4$; 4) $\lambda=\frac{1}{3}$.

37. Даны две точки: $A(-4;2)$, $B(8;-7)$. Найти точки C и D, делящие отрезок AB на три равные части.
38. Пусть в данной аффинной системе координат даны точки $A(2;-5)$, $B(-3;7)$. Точки C, D, E делят отрезок AB на четыре равные части. Найти координаты этих точек.
39. Определить координаты концов отрезка AB, который точками $C(2;2)$ и $D(1;5)$ разделен на три равные части.

Длина, орт и направляющие косинусы вектора в ПДСК

Пусть $\overline{a} = \{x, y, z\}$. Тогда длина этого вектора будет вычислять по формуле $|\overline{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Если даны координаты точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то расстояние между ними можно вычислить по формуле

$$\left|\overline{M_1 M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} .$$

Определение. Единичный вектор, имеющий одинаковое направление с данным вектором $\overline{a}$, называется *ортом вектора* $\overline{a}$.

Направляющие косинусы

Пусть α – угол наклона вектора $\overline{a} = \{x, y, z\}$ к оси *Ox*;

β – угол наклона вектора $\overline{a} = \{x, y, z\}$ к оси *Oy*;

γ – угол наклона вектора $\overline{a} = \{x, y, z\}$ к оси *Oz*.

$$\begin{cases} x = np_i\, \overline{a} = |\overline{a}| \cos\alpha \\ y = np_j\, \overline{a} = |\overline{a}| \cos\beta \\ z = np_k\, \overline{a} = |\overline{a}| \cos\gamma \end{cases}$$

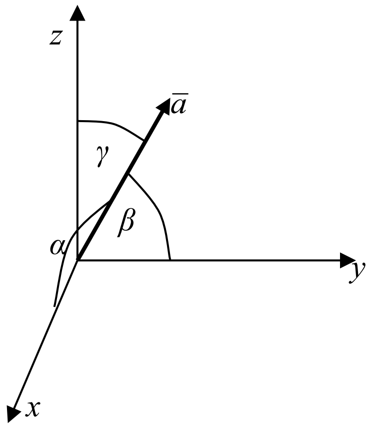


Рис. 5

Определение. $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора $\bar{a}$ (рис.5).

Теорема. Сумма квадратов направляющих косинусов любого вектора $\bar{a} = \{x, y, z\}$ равна единице: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Формулы вычисления направляющих косинусов через координаты вектора:

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\bar{a}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};$$

$$\cos\beta = \frac{y}{|\bar{a}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{|\bar{a}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Задачи

40. Найти длины векторов, заданных своими координатами в ПДСК: $\{-2; 1; 2\}$, $\{\sqrt{7}; -3; 3\}$, $\{-6; -2; 3\}$, $\{5; -5; 5\}$, $\{7; 6; 5\}$.

41. Даны векторы $\bar{a} = \{2; -3; 1\}$, $\bar{b} = \{0; 1; 0\}$, $\bar{c} = \{2; 5; -3\}$. Найти длины векторов:
    1) $\bar{a} + \bar{b}$;
    2) $\bar{b} + \bar{c}$;
    3) $2\bar{a} + 3\bar{b} - \bar{c}$.

42. Даны векторы $\bar{a} = \{2; -2; 1\}$, $\bar{b} = \{0; 1; 0\}$, $\bar{c} = \{2; 5; -3\}$. Найти орты векторов:
    1) $\bar{a}$;
    2) $\bar{b} + \bar{c}$;
    3) $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$;
    4) $3\bar{a} - 4\bar{b} - \bar{c}$.

43. В условиях предыдущей задачи найти направляющие косинусы векторов:
    1) $\bar{a}$;
    2) $\bar{b} + \bar{c}$;
    3) $2\bar{a} - 2\bar{b} - \bar{c}$.

    Во всех случаях проверить: выполняется ли основное свойство направляющих косинусов.

44. Могут ли направляющие косинусы какого-либо вектора быть равными числам:

1) $\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}$ 2) $1; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1$ 3) $\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}$

Обосновать ответ.

45. Найти координаты вектора $\bar{x}$, направляющие косинусы которого равны $\cos\alpha = \frac{1}{3}, \cos\gamma = -\frac{2}{3}$, если он образует с ортом $\bar{j}$ острый угол и имеет длину $|\bar{x}| = 15$.

46. Радиус-вектор точки M составляет с осью Oy угол $60°$, а с осью Oz угол $45°$, его длина $|\overline{OM}| = 8$. Найдите координаты точки M, если ее абсцисса $x < 0$.

Задание ПДСК в многогранниках и нахождение координат векторов, их длин, расстояний между точками

Задачи

47. Три некомпланарных вектора $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ попарно ортогональны, а их длины соответственно равны 2, 3 и 6. Найти длину вектора $\bar{s} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$ и направляющие косинусы этого вектора в ПДСК, связанной с векторами $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$.

48. К вершине куба приложены три силы, равные по величине 1, 2, 3 и направленные по диагоналям граней куба, проходящим через эту вершину. Найти величину равнодействующей этих сил.

49. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной $AB = 7$. Точка T делит ребро DD_1 в отношении 2:5, а точка S делит ребро B_1C_1 в отношении 3:4. Найти длину отрезка TS.

50. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со сторонами $AB = 3$, $AD = 9$, $AA_1 = 6$ точка M делит отрезок AC_1 в отношении 2:1, точка N ребро BB_1 – в отношении 5:1, точка Q делит отрезок D_1C в отношении 2:1. Найти:
1) расстояние между точками N и Q;
2) расстояние от точки M до плоскости BB_1C_1C.

Тема 3. Скалярное произведение векторов

Определение скалярного произведения и его свойства. Вычисление скалярного произведения с использованием свойств

Определение. *Скалярным произведением* векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла φ между ними. $\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\varphi$.

Поскольку $|\bar{b}|\cdot\cos\varphi = np_{\bar{a}}\bar{b}$, $|\bar{a}|\cdot\cos\varphi = np_{\bar{b}}\bar{a}$, то $\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{b}|np_{\bar{b}}\bar{a}=|\bar{a}|np_{\bar{a}}\bar{b}$.

Скалярное произведение в механике

Пусть некоторая сила $\bar{f}$ производит работу, перемещая материальную точку по прямой из M_1 в M_2. Пусть $\overline{M_1M_2}=\bar{s}$. Величина этой работы A вычисляется по формуле

$$A=|\bar{f}|\cdot|\bar{s}|\cdot\cos\varphi,$$

где φ − угол между $\bar{s}$ и $\bar{f}$.

Геометрические свойства скалярного произведения

Теорема (О геометрических свойствах скалярного произведения)

$\bar{a}\perp\bar{b}\Leftrightarrow\bar{a}\cdot\bar{b}=0$;

$\bar{a}\cdot\bar{b}>0 \Leftrightarrow \varphi$ − *острый* угол $(\bar{a},\bar{b}\neq\bar{0})$

$\bar{a}\cdot\bar{b}<0 \Leftrightarrow \varphi$ − *тупой* угол $(\bar{a},\bar{b}\neq\bar{0})$

$$cos\varphi=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}.$$

Алгебраические свойства скалярного произведения

1) $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}$ (коммутативность);
2) $\bar{a}(\bar{b}+\bar{c})=\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{c}$ (дистрибутивность);
3) $(\lambda\bar{a})\bar{b}=\lambda(\bar{a}\bar{b})$ (ассоциативность относительно умножения на число);
4) $\bar{a}\cdot\bar{a}=\bar{a}^2=|\bar{a}|^2$, $\bar{a}^2\geq 0$, $\bar{a}^2=0\Leftrightarrow\bar{a}=\bar{0}$.

Задачи

51. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{2}{3}\pi$. Зная, что $|\overline{a}| = 10$, $|\overline{b}| = 2$, вычислить $(\overline{a} + 2\overline{b}) \cdot (3\overline{a} - \overline{b})$.
52. Единичные векторы $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ удовлетворяют условию $\overline{e}_1 + \overline{e}_2 + \overline{e}_3 = \overline{0}$. Найти $\overline{e}_1 \cdot \overline{e}_2 + \overline{e}_2 \cdot \overline{e}_3 + \overline{e}_3 \cdot \overline{e}_1$.
53. Зная, что $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = \overline{0}$, $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 1$, $|\overline{c}| = 4$, вычислить $\overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{b} \cdot \overline{c} + \overline{c} \cdot \overline{a}$.
54. В треугольнике *ABC* проведены медианы *AD*, *BE* и *CF*. Вычислить $\overline{BC} \cdot \overline{AD} + \overline{CA} \cdot \overline{BE} + \overline{AB} \cdot \overline{CF}$.
55. Упростить выражение $\overline{a}^{\,2} + 3(\overline{a} \cdot \overline{b}) - 2(\overline{b} \cdot \overline{c}) + 1$, если $\overline{a} = 4\overline{m} - \overline{n}$, $\overline{b} = \overline{m} + 2\overline{n}$, $\overline{c} = 2\overline{m} - 3\overline{n}$, где $\overline{m}^{\,2} = 4$, $\overline{n}^{\,2} = 1$, $\overline{m} \perp \overline{n}$.
56. Вычислить скалярное произведение двух векторов $\overline{p} \cdot \overline{q}$, зная их разложение по трём единичным взаимно перпендикулярным векторам $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$: $\overline{p} = 3\overline{a} + \overline{b} - 2\overline{c}$, $\overline{q} = \overline{a} - 4\overline{b} - 5\overline{c}$.

Вычисление косинуса угла между векторами, длины вектора, проекции вектора на направление другого вектора с использованием свойств

Задачи

57. Дано: $|\overline{a}| = 2$, $|\overline{b}| = 1$, $\varphi = (\overline{a}, \overset{\wedge}{} \overline{b}) = \frac{\pi}{3}$. Найти модуль вектора $\overline{c} = 2\overline{a} - 3\overline{b}$.
58. Дано: $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 2$, $|\overline{c}| = 5$, $\varphi = (\widehat{\overline{a}, \overline{b}}) = (\widehat{\overline{b}, \overline{c}}) = \frac{\pi}{3}$, векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ – компланарны. Найти модуль вектора $\overline{d} = \overline{a} + \overline{b} - \overline{c}$.
59. Вычислить длину диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a} = 5\overline{p} + 2\overline{q}$, $\overline{b} = \overline{p} - 3\overline{q}$, если известно, что $|\overline{p}| = 2\sqrt{2}$, $|\overline{q}| = 3$, $\varphi = (\widehat{\overline{p}, \overline{q}}) = \frac{\pi}{4}$.

60. Найдите косинус угла между векторами $\overline{q} = 3\overline{m} - 2\overline{n}$ и $\overline{r} = \overline{m} + 4\overline{n}$, если известно, что $|\overline{m}| = 2, |\overline{n}| = 5$, а угол $\varphi = (\widehat{\overline{m}, \overline{n}}) = 120^0$.
61. Зная векторы, образующие треугольник: $\overline{AB} = 2\overline{a} - 6\overline{b}$, $\overline{BC} = \overline{a} + 7\overline{b}$ и $\overline{CA} = -3\overline{a} - \overline{b}$, где $\overline{a}$ и $\overline{b}$ – взаимно перпендикулярные орты, определить углы этого треугольника.
62. Даны разложения векторов, служащих сторонами треугольника, по двум взаимно перпендикулярным ортам: $\overline{AB} = 5\overline{a} + 2\overline{b}$, $\overline{BC} = 2\overline{a} - 4\overline{b}$, $\overline{CA} = -7\overline{a} + 2\overline{b}$. Вычислить длину медианы $\overline{AM}$ и высоты $\overline{AD}$ треугольника ABC.
63. Зная разложение вектора $\overline{q} = 6\overline{m} - 2\overline{n} + 3\overline{p}$ по трем перпендикулярным ортам, вычислить длину вектора $\overline{q}$ и углы, которые он образует с каждым из ортов $\overline{m}$, $\overline{n}$ и $\overline{p}$.
64. Пусть $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ – ненулевые векторы. При каком их взаимном расположении справедливо равенство $(\overline{a} \cdot \overline{b}) \cdot \overline{c} = \overline{a} \cdot (\overline{b} \cdot \overline{c})$?
65. Найти угол α при вершине равнобедренного треугольника, зная, что медианы, проведенные из концов основания этого треугольника, взаимно перпендикулярны.
66. Какой угол образуют единичные векторы $\overline{s}$ и $\overline{t}$, если известно, что векторы $\overline{p} = \overline{s} + 2\overline{t}$ и $\overline{q} = 5\overline{s} - 4\overline{t}$ взаимно перпендикулярны?
67. Выразить длины медиан произвольного треугольника через длины его сторон.
68. В треугольнике ABC $\overline{AB} = \overline{b}$, $\overline{AC} = \overline{c}$. Выразить вектор $\overline{h}$, направленный по высоте AH, через векторы $\overline{b}$ и $\overline{c}$.
69. Как расположены прямые AB и AC, если $(\overline{AB} + \overline{AC})^2 = (\overline{AB} - \overline{AC})^2$?
70. Найти проекцию вектора $\overline{a} = 10\overline{m} + 2\overline{n}$ на ось, имеющую направление вектора $\overline{b} = 5\overline{m} - 12\overline{n}$, где $\overline{m}$ и $\overline{n}$ – взаимно перпендикулярные орты. Вычислить углы между осью проекций и единичными векторами $\overline{m}$ и $\overline{n}$.

Доказательства равенства с участием скалярного произведения

Задачи

71. Доказать, что длины векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равны, если векторы $\overline{a}+\overline{b}$ и $\overline{a}-\overline{b}$ перпендикулярны.
72. Доказать, что вектор $\overline{d}=\overline{c}\cdot\left(\overline{b}\cdot\overline{a}\right)-\overline{a}\cdot\left(\overline{b}\cdot\overline{c}\right)$ перпендикулярен вектору $\overline{b}$.
73. Дан прямоугольник *ABCD* и точка *M* (которая может лежать как в плоскости прямоугольника, так и вне её). Показать, что:
    1) скалярное произведение векторов, идущих от точки *M* к двум несмежным вершинам прямоугольника, равно скалярному произведению векторов, идущих от той же точки к двум другим вершинам $\overline{MA}\cdot\overline{MC}=\overline{MB}\cdot\overline{MD}$;
    2) сумма квадратов векторов одной пары равна сумме квадратов другой пары ($\overline{MA}^2+\overline{MC}^2=\overline{MB}^2+\overline{MD}^2$).
74. Доказать, что сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма *ABCD* равна сумме квадратов длин всех его сторон.
75. Доказать, что в любом треугольнике *ABC* имеет место соотношение $BC^2=AC^2+AB^2-2AB\cdot AC\cdot \cos A$.
76. Доказать, что диагонали прямоугольника равны.
77. Доказать, что квадрат длины диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов длин трех его измерений.
78. Доказать, что для любых четырех точек *A*, *B*, *C* и *D* пространства имеет место равенство $\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AC}\cdot\overline{DB}+\overline{BC}\cdot\overline{AD}=0$.
79. Доказать, что в прямоугольном треугольнике медиана, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы.
80. Доказать, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.
81. Доказать теорему о трех перпендикулярах: для того чтобы прямая, лежащая в плоскости, была перпендикулярна наклонной, необходимо и достаточно, чтобы эта прямая была перпендикулярна проекции наклонной.
82. Доказать признак перпендикулярности прямой и плоскости: если прямая перпендикулярна каждой из двух пересекающихся прямых, лежащих в плоскости, то эта прямая и плоскость взаимно перпендикулярны.

Скалярное произведение в ПДСК. Вычисление косинуса угла между векторами, длины вектора, проекции вектора на направление другого вектора

Теорема. Пусть в ПДСК заданы координаты векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$: $\bar{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\bar{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$. Скалярное произведение двух векторов в координатах есть сумма произведений соответствующих координат: $\bar{a} \cdot \bar{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$.

Следствие. Пусть в ПДСК заданы координаты векторов $\bar{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ и $\bar{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$.Тогда

1) $\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$;

2) $\varphi = \bar{a} \wedge \bar{b}$ – острый $\Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 > 0$;

3) $\varphi = \bar{a} \wedge \bar{b}$ – тупой $\Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 < 0$.

Следствие.

$$\cos(\bar{a} \wedge \bar{b}) = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Следствие.

$$|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a} \cdot \bar{a}} = \sqrt{x_1 x_1 + y_1 y_1 + z_1 z_1} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.$$

Следствие.

$$np_{\bar{b}} \bar{a} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Теорема. Пусть в АСК заданы координаты векторов $\bar{a} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + x_3 \bar{e}_3 = \{x_1, x_2, x_3\}$,

$\bar{b} = y_1 \bar{e}_1 + y_2 \bar{e}_2 + y_3 \bar{e}_3 = \{y_1, y_2, y_3\}$.

Тогда $\bar{a} \cdot \bar{b} = \sum\limits_{i,j=1}^{3} x_i \cdot y_j \cdot \delta_{ij}$, где $\delta_{ij} = \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j$.

Задачи

83. Даны три вектора $\bar{a} = \{5, -6, 1\}$, $\bar{b} = \{-4, 3, 0\}$, $\bar{c} = \{5, -8, 10\}$. Вычислить выражения:

1) $3\bar{a}^2 - 4(\bar{a} \cdot \bar{b}) + 2\bar{c}^2$;

2) $2\overline{a}^2 + 4\overline{b}^2 - 5\overline{c}^2$;

3) $3(\overline{a} \cdot \overline{b}) - 4(\overline{b} \cdot \overline{c}) - 5(\overline{a} \cdot \overline{c})$.

84. Даны три вектора $\overline{a} = \{3,\ 1,\ 2\}$, $\overline{b} = \{2,\ 7,\ 4\}$, $\overline{c} = \{1,\ 2,\ 1\}$. Найти:

1) $(\overline{a} \cdot \overline{b}) \cdot \overline{c}$;

2) $\overline{a}^2 \cdot (\overline{b} \cdot \overline{c})$;

3) $\overline{a}^2 \cdot \overline{b} + \overline{b}^2 \cdot \overline{c} + \overline{c}^2 \cdot \overline{a}$.

85. Определить угол α между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, заданными своими координатами в каждом из случаев:

1) $\overline{a} = \{8,\ 4,\ 1\}$, $\overline{b} = \{2,\ -2,\ 1\}$;

2) $\overline{a} = \{2,\ 5,\ 4\}$, $\overline{b} = \{6,\ 0,\ -3\}$.

86. Даны три вектора $\overline{a} = \{3,\ -2,\ 4\}$, $\overline{b} = \{5,\ 1,\ 6\}$, $\overline{c} = \{-3,\ 0,\ 2\}$. Найти вектор $\overline{x}$, удовлетворяющий одновременно трем уравнениям: $\overline{a} \cdot \overline{x} = 4$, $\overline{b} \cdot \overline{x} = 35$, $\overline{c} \cdot \overline{x} = 0$.

87. Найти численную величину проекции вектора $\{8,\ 4,\ 1\}$ на ось, параллельную вектору $\{2,\ -2,\ 1\}$.

88. Даны два вектора $\overline{a} = \{8,\ 4,\ 1\}$ и $\overline{b} = \{2,\ -2,\ 1\}$, выходящие из одной и той же точки. Найти вектор $\overline{c}$, исходящий из этой же точки, перпендикулярный к вектору $\overline{a}$, равный ему по длине, компланарный с векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, образующий с вектором $\overline{b}$ острый угол.

89. Проверить, могут ли векторы $\overline{a} = 7\overline{i} + 6\overline{j} - 6\overline{k}$, $\overline{b} = 6\overline{i} + 2\overline{j} + 9\overline{k}$ быть ребрами куба. Найти третье ребро куба.

90. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a} = 2\overline{i} + \overline{j}$, $\overline{b} = -\overline{j} + 2\overline{k}$.

91. Найти $\overline{x}$, зная, что $\overline{x} \perp \overline{a}$, $\overline{a} = \{1, 0, 1\}$, $\overline{x} \perp \overline{b}$, $\overline{b} = \{0, 2, -1\}$, проекция вектора $\overline{x}$ на вектор $\overline{c} = \{1, 2, 2\}$ равна 1.

92. Даны вершины треугольника $A(2,\ 3,\ -1)$, $B(4,\ 1,\ -2)$ и $C(1,\ 0,\ 2)$. Найти:

1) внутренний угол при вершине C;

2) $пр_{\overline{CA}}\overline{CB}$.

93. Даны векторы $\overline{a} = \{1, -3, 4\}$, $\overline{b} = \{3, -4, 2\}$, $\overline{c} = \{-1, 1, 4\}$. Найти $пр_{\overline{b}+\overline{c}}\overline{a}$.

94. Даны точки $A(3, 4, -2)$ и $B(2, 5, -2)$. Найти проекцию вектора $\overline{AB}$ на ось, составляющую с осями Ox и Oy углы $\alpha=60^0$ и $\beta=120^0$, а с осью Oz – тупой угол γ.

95. Найти угол между биссектрисами углов Oxy и Oyz.

96. Найти работу равнодействующей сил $\overline{F_1} = \bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$ и $\overline{F_2} = 2\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}$ при перемещении её точки приложения из начала координат в точку $M(2,-1,-1)$.

Задание ПДСК в многогранниках и нахождение косинуса угла между векторами, длины вектора, проекции вектора на направление другого вектора

Задачи

97. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со сторонами $AB = 3$, $AD = 9$, $AA_1 = 6$ точка M делит отрезок AC_1 в отношении 2:1, точка N ребро BB_1 – в отношении 5:1, точка Q делит отрезок D_1C в отношении 2:1. Найти косинус угла между векторами $\overline{MN}$ и $\overline{QB}$.

98. Дана правильная четырехугольная пирамида $ABCDS$, сторона квадрата $ABCD$ равна $2\sqrt{2}$, высота пирамиды равна 6. Точка K делит ребро CS в отношении 1:2, точка L делит AB в отношении 3:1. Найти

1) косинус угла между векторами $\overline{AK}$ и $\overline{CL}$;

2) проекцию вектора $\overline{KL}$ на направление вектора $\overline{BC}$.

Тема 4. Векторное произведение векторов

Определение векторного произведения и его свойства. Вычисление векторного произведения с использованием свойств

Определение. Упорядоченная тройка векторов называется *правой тройкой* или *тройкой положительной ориентации*, если выполнены следующие условия: будучи приведенными к общему началу, векторы упорядоченной тройки расположены так, как можно расположить пальцы правой руки, т. е. первый вектор по направлению большого пальца, второй – по направлению указательного, третий – по направлению среднего (для левой руки тройка будет левой).

Определение. *Векторным произведением вектора* $\bar{a}$ *на вектор* $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c} = \left[\bar{a}, \bar{b}\right] = \bar{a} \times \bar{b}$, для которого выполнены следующие условия:

1) $|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin(\bar{a} \wedge \bar{b})$;
2) $\bar{c} \perp \bar{a}, \bar{b}$;
3) $\bar{c}$ направлен так, что тройка $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ − правая.

Векторное произведение в механике

Определение. *Моментом силы* $\bar{F}$ относительно точки O называется вектор $\overline{m}$, имеющий начало в точке O, направленный перпендикулярно плоскости, определяемой точкой O и вектором $\bar{F}$. Длина вектора $\overline{m}$ равна произведению длины вектора $\bar{F}$ на плечо h (h − длина перпендикуляра, опущенного из точки O на направление вектора $\bar{F}$), или $|\overline{m}| = |\bar{F}| \cdot |\bar{r}| \cdot \sin(\bar{F} \wedge \bar{r})$, где $\bar{r} = \overline{OA}$ − радиус-вектор точки приложения сил $\bar{F}$ (рис. 6).

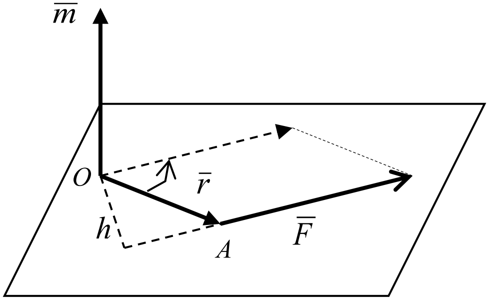


Рис. 6

Алгебраические свойства векторного произведения

1. $[\bar{a};\bar{b}]=-[\bar{b};\bar{a}]$ (антикоммутативность).
2. $[\lambda\bar{a};\bar{b}]=[\bar{a};\lambda\bar{b}]=\lambda[\bar{a};\bar{b}]$ (ассоциативность относительно умножения на число).
3. $[\bar{a};\bar{a}]=\bar{0}$.
4. $\left[\bar{a},\bar{b}\right]=\left[\bar{a}',\bar{b}\right]$, где $\bar{a}'$ – проекция $\bar{a}$ на прямую, перпендикулярную $\bar{b}$ и лежащую в плоскости векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$.
5. $[\bar{a};\bar{b}+\bar{c}]=[\bar{a};\bar{b}]+[\bar{a};\bar{c}]$ (дистрибутивность).
6. $\left[\bar{a},\bar{b}\right]=\bar{0}$, если $\bar{a}=\bar{0}$ или $\bar{b}=\bar{0}$, или векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны.

Задачи

99. Даны два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$, для которых $|\bar{a}|=2$, $|\bar{b}|=6$, $\varphi=(\bar{a},\hat{\ }\bar{b})=\dfrac{5}{6}\pi$. Найти $\left|\left(2\bar{a}+3\bar{b}\right)\times\left(\bar{a}-4\bar{b}\right)\right|$.

100. Упростить выражения:
   1) $2\bar{i}\cdot\left(\bar{j}\times\bar{k}\right)+3\bar{j}\cdot\left(\bar{i}\times\bar{k}\right)+4\bar{k}\cdot\left(\bar{i}\times\bar{j}\right)$;
   2) $\left(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}\right)\times\bar{c}+\left(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}\right)\times\bar{b}+(\bar{b}-\bar{c})\times\bar{a}$;
   3) $\left(3\bar{i}-4\bar{j}-5\bar{k}\right)\times\left(2\bar{i}+6\bar{j}-\bar{k}\right)$.

101. Показать, что $(\bar{a}-\bar{b})\times(\bar{a}+\bar{b})=2(\bar{a}\times\bar{b})$. Выяснить геометрический смысл этого равенства.
102. Разложить вектор $\bar{p}=(3\bar{a}+\bar{b}-2\bar{c})\times(\bar{a}-\bar{b}+5\bar{c})$ по взаимно перпендикулярным ортам $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, образующим правую тройку.
103. Дан вектор $\bar{q}=(3\bar{m}+4\bar{n}+5\bar{p})\times(\bar{m}+6\bar{n}+4\bar{p})$, где $\bar{m}$, $\bar{n}$ и $\bar{p}$ – взаимно перпендикулярные орты, образующие левую тройку. Вычислить его длину.
104. Показать, что $(\bar{a}\cdot\bar{b})^2+(\bar{a}\times\bar{b})^2=|\bar{a}|^2\cdot|\bar{b}|^2$.
105. Дано: $|\bar{a}|=3$, $|\bar{b}|=20$, $\bar{a}\cdot\bar{b}=30$. Найти $|\bar{a}\times\bar{b}|$.
106. Дано: $|\bar{a}|=3$, $|\bar{b}|=26$, $|\bar{a}\times\bar{b}|$=72. Найти $\bar{a}\cdot\bar{b}$.
107. Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ удовлетворяют условию $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=\bar{0}$. Доказать, что $\bar{a}\times\bar{b}=\bar{b}\times\bar{c}=\bar{c}\times\bar{a}$.
108. Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ и $\bar{d}$ связаны соотношениями $\bar{a}\times\bar{b}=\bar{c}\times\bar{d}$, $\bar{a}\times\bar{c}=\bar{b}\times\bar{d}$. Доказать, что векторы $(\bar{a}-\bar{d})$ и $(\bar{b}-\bar{c})$ коллинеарны.
109. Доказать, что точки A, B и C лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\overline{AB}\times\overline{AC}=0$.
110. Доказать, что векторное произведение не изменится, если к одному из сомножителей прибавить вектор, коллинеарный другому сомножителю.
111. Доказать, что для любых векторов $\bar{a}$, $\bar{p}$, $\bar{q}$ и $\bar{r}$ векторы $\bar{a}\times\bar{p}$, $\bar{a}\times\bar{q}$, $\bar{a}\times\bar{r}$ компланарны.
112. Три ненулевых вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ связаны соотношениями $\bar{a}=\bar{b}\times\bar{c}$, $\bar{b}=\bar{c}\times\bar{a}$, $\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}$. Найти длины этих векторов и углы между ними.
113. Равносильны ли равенства $\bar{a}=\bar{b}$ и $\bar{a}\times\bar{c}=\bar{b}\times\bar{c}$?
114. Доказать, что $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})=\bar{b}\cdot(\bar{a}\cdot\bar{c})-\bar{c}\cdot(\bar{a}\cdot\bar{b})$.
115. Показать, что если векторы $\bar{a}\times\bar{b}$, $\bar{b}\times\bar{c}$, $\bar{c}\times\bar{a}$ компланарны, то они и коллинеарны.
116. Можно ли найти вектор $\bar{x}$, одновременно удовлетворяющий двум условиям: $\bar{x}\cdot\bar{a}=\alpha$ и $\bar{x}\times\bar{a}=\bar{c}$, где $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ – данные векторы и α – данный скаляр?

117. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (положительный обход вершин A, B, C и D) с ребром единичной длины, $M \in CD$, $N \in C_1D_1$. Найти, не используя координаты, $\overline{BA}\times\overline{BC}$, $\overline{BA}\times\overline{BM}$, $\overline{BA}\times\overline{BC_1}$, $\overline{BA}\times\overline{BN}$, $\overline{BA_1}\times\overline{BC_1}$.
118. В правильном положительно ориентированном тетраэдре $ABCD$ найти $\overline{AB}\times\overline{AC}$, $\overline{AC}\times\overline{BD}$, приняв длину ребра равной a.
119. Вывести формулу для $\sin(\alpha-\beta)$.

Вычисление площадей и высот фигур, синуса угла между векторами с использованием свойств

Геометрические свойства векторного произведения

Модуль векторного произведения векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ численно равен *площади параллелограмма*, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$S_{\bar{a}\bar{b}} = \left|\left[\bar{a},\bar{b}\right]\right|.$$

Площадь треугольника, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, численно равна половине модуля векторного произведения векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\left[\bar{a},\bar{b}\right]\right|$$

Следствие. $\sin(\bar{a}\,{}^\wedge\bar{b}) = \dfrac{\left|\left[\bar{a},\bar{b}\right]\right|}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}$.

Следствие. $h_a = \dfrac{S_{\bar{a}\bar{b}}}{|\bar{a}|} = \dfrac{\left|\left[\bar{a},\bar{b}\right]\right|}{|\bar{a}|}$ – высота параллелограмма, опущенная на сторону a.

Следствие. $h_b = \dfrac{S_{\bar{a}\bar{b}}}{|\bar{b}|} = \dfrac{\left|\left[\bar{a},\bar{b}\right]\right|}{|\bar{b}|}$ – высота параллелограмма, опущенная на сторону b.

Задачи

120. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ образуют угол 45^0. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\overline{a}-2\overline{b}$ и $3\overline{a}+2\overline{b}$, если $|\overline{a}|=|\overline{b}|=5$.
121. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{p}=2\overline{a}+3\overline{b}$ и $\overline{q}=\overline{a}-4\overline{b}$, где $\overline{a}$ и $\overline{b}$ – единичные взаимно перпендикулярные векторы.
122. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}=\overline{m}+2\overline{n}$ и $\overline{AD}=\overline{m}-3\overline{n}$, где $|\overline{m}|=5$ и $|\overline{n}|=3$, $\varphi=(\overline{m},\overline{n})^{\wedge}=\dfrac{\pi}{6}$.
123. Зная две стороны треугольника $\overline{AB}=3\overline{p}-4\overline{q}$ и $\overline{BC}=\overline{p}+5\overline{q}$, вычислить длину его высоты $\overline{CD}$ при условии, что $\overline{p}$ и $\overline{q}$ – перпендикулярные друг другу орты.
124. Вычислить синус угла между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}=2\overline{m}+\overline{n}-\overline{p}$, $\overline{b}=\overline{m}-3\overline{n}+\overline{p}$, где $\overline{m}$, $\overline{n}$ и $\overline{p}$ – взаимно перпендикулярные орты.
125. Вычислить проекцию вектора $\overline{a}=3\overline{p}-12\overline{q}+4\overline{r}$ на ось, имеющую направление вектора $\overline{b}=(\overline{p}-2\overline{r})\times(\overline{p}+3\overline{q}-4\overline{r})$, где $\overline{p}$, $\overline{q}$ и $\overline{r}$ – взаимно перпендикулярные орты.
126. В параллелограмм *ABCD* площади *S* вписан треугольник *MNP* так, что $\overline{MB}=2\overline{AM}$, $\overline{BN}=4\overline{NC}$, $\overline{AP}=3\overline{PD}$. Найти площадь треугольника *MNP*.

Векторное произведение в ПДСК

Теорема. Пусть в ПДСК заданы координаты векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$: $\overline{a}=\{x_1, y_1, z_1\}$, $\overline{b}=\{x_2, y_2, z_2\}$, тогда

$$[\overline{a},\overline{b}]=\left\{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right\}.$$

Теорема. В АСК векторное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, где $\bar{a} = x_1\bar{e}_1 + y_1\bar{e}_2 + z_1\bar{e}_3$, $\bar{b} = x_2\bar{e}_1 + y_2\bar{e}_2 + z_2\bar{e}_3$, вычисляется по формуле

$$[\bar{a};\bar{b}] = \begin{vmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{vmatrix} \cdot [\bar{e}_1, \bar{e}_2] + \begin{vmatrix} x_1 z_1 \\ x_2 z_2 \end{vmatrix} \cdot [\bar{e}_1, \bar{e}_3] + \begin{vmatrix} y_1 z_1 \\ y_2 z_2 \end{vmatrix} \cdot [\bar{e}_2, \bar{e}_3].$$

Задачи

127. Найти координаты вектора $\bar{a} \times (2\bar{a} + \bar{b})$, если $\bar{a} = \{3; -1; -2\}$, $\bar{b} = \{1; 2; -1\}$.
128. Даны векторы $\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}$, $\bar{b} = -2\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$. Найти $|\bar{c}|$, если $\bar{c} = (\bar{a} - \bar{b}) \times 2\bar{b}$.
129. Даны векторы $\bar{a} = 3\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$, $\bar{b} = 2\bar{i} + 7\bar{j} + 4\bar{k}$ и $\bar{c} = \bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$. Найти $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$ и $(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c}$.

Вычисление площадей и высот фигур, синуса угла между векторами с использованием формулы векторного произведения в координатах

Пусть в ПДСК заданы координаты векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$: $\bar{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\bar{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, тогда площадь параллелограмма, построенного на этих векторах (рис.7),

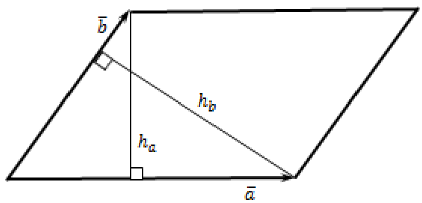


Рис. 7

вычисляется по формуле

$$S_{\bar{a}\bar{b}} = \left|[\bar{a}, \bar{b}]\right| = \sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2};$$

высота параллелограмма вычисляется по формуле

$$h_a = \frac{S_{ab}}{|\bar{a}|} = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}.$$

Следствие.

$$\sin(\bar{a} \wedge \bar{b}) = \frac{|[\bar{a}; \bar{b}]|}{|\bar{a}||\bar{b}|} = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Площадь треугольника на плоскости

Пусть в ПДСК заданы координаты векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$: $\bar{a} = \{x_1, y_1, 0\}$, $\bar{b} = \{x_2, y_2, 0\}$, тогда площади параллелограмма и треугольника, построенных на этих векторах, вычисляются по формулам

$$S_{ab} = \sqrt{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2} = \mathrm{mod}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}, \quad S_{\Delta} = \frac{1}{2} S_{ab} = \frac{1}{2}\mathrm{mod}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Если известны координаты вершин:
A(x_A, y_A*), B(*x_B, y_B*), C(*x_C, y_C*)*, то площадь треугольника вычисляется по формуле

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\mathrm{mod}\begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix},$$

где $\overline{AB} = \{x_B - x_A, y_B - y_A\}$, $\overline{AC} = \{x_C - x_A, y_C - y_A\}$.

Задачи

130. Вычислить синус угла, образованного векторами $\bar{a} = \{2; -2; 1\}$ и $\bar{b} = \{2; 3; 6\}$.
131. Найти площадь треугольника с вершинами A(1, 2, 0), B(3, 2, 1) и C(–2, 1, 2).
132. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\bar{a} = \bar{i} - 2\bar{j} + 5\bar{k}$ и $\bar{b} = 5\bar{j} - 7\bar{k}$.
133. Сила $\bar{F} = \{2, -4, 5\}$ приложена к точке O(0, 2, 1). Определить момент этой силы относительно точки A(–1, 2, 3).
134. Три силы $\overline{F_1} = \{2; 4; 6\}$, $\overline{F_2} = \{1; -2; 3\}$ и $\overline{F_3} = \{1; 1; -7\}$ приложены к точке A(3, –4, 8). Найти величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки B(4, –2, 6).
135. Даны вершины треугольника A(1, –1, 2), B(5, –6, 2) и C(1, 3, –1). Найти длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.

Задание ПДСК в многогранниках: нахождение площадей, высот фигур, синуса угла между векторами с использованием формулы векторного произведения в координатах

Задачи

136. В кубе с ребром единичной длины $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки M, N, P и Q заданы равенствами $\overline{BC} = 2\overline{CM}$, $\overline{AN} = \overline{NA_1}$, $\overline{AQ} = 2\overline{QB}$, $\overline{CP} = 3\overline{PC_1}$. Найти $\left|\overline{MN} \times \overline{PQ}\right|$.
137. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром единичной длины, $\overline{AM} = 2\overline{AB}$, $\overline{CN} = \overline{NC_1}$, $\overline{D_1P} = 2\overline{PA_1}$. Найти площадь треугольника MNP и расстояние от точки P до прямой MN.
138. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром единичной длины, тройка векторов $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{AA_1}$ положительно ориентирована. Найти $\left|\overline{AM} \times \overline{BN}\right|$, если:

1) $\overline{AM} = 2\overline{AB}$, $\overline{BN} = \overline{NB_1}$;
2) $\overline{AM} = \overline{MC}$, $\overline{BN} = 2\overline{B_1B}$;
3) $\overline{AM} = -\overline{AD}$, $\overline{BN} = \overline{ND}$;
4) $\overline{CM} = \overline{MD}$, $\overline{BN} = 2\overline{ND}$;
5) $\overline{A_1M} = 2\overline{MB_1}$, $\overline{CN} = \overline{NB}$.

139. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед, $AB=6$, $BC=3$, $AA_1=9$. Точки K, L и M лежат на отрезках BC_1, D_1D и CD соответственно и удовлетворяют условиям: $\frac{BK}{KC_1} = 2$, $\frac{D_1L}{LD} = 3{,}5$, $\frac{CM}{MD} = 0{,}2$. Найти:
1) площадь треугольника KLM;
2) высоту треугольника KLB, опущенную на сторону KL.

140. В тетраэдре $ABCD$ все плоские углы при вершине D равны 90^0, $DA=2$, $DB=4$, $DC=6$. Точки K, L и P лежат на отрезках AB, BC и DC соответственно и удовлетворяют условиям: $\frac{AK}{KB} = 1$, $\frac{BL}{LC} = 2$, $\frac{DP}{PC} = 0{,}2$. Найти:
1) синус внутреннего угла при вершине P в треугольнике KPL;
2) высоту треугольника KPL, опущенную на сторону KP.

Тема 5. Смешанное произведение векторов

Определение смешанного произведения и его свойства. Вычисление смешанного произведения с использованием свойств

Определение. *Смешанным произведением векторов* $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ называется число, равное векторному произведению $\left[\overline{a}, \overline{b}\right]$, умноженному скалярно на вектор $\overline{c}$, т.е. $\left[\overline{a}, \overline{b}\right] \cdot \overline{c}$.

Обозначения смешанного произведения:

$$\left[\overline{a}, \overline{b}\right] \cdot \overline{c} = \left(\overline{a} \times \overline{b}\right) \cdot \overline{c} = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c}.$$

Алгебраические свойства смешанного произведения

1. Смешанное произведение трех векторов равно нулю, если:
   a) хотя бы один из перемножаемых векторов равен нулю;
   b) два из перемножаемых векторов коллинеарны;
   c) три ненулевых вектора параллельны одной и той же плоскости (компланарны).
2. Смешанное произведение не изменится, если в нем поменять местами знаки векторного ($\times$) и скалярного ($\cdot$) умножения, т.е.
$$\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot\left(\bar{b}\times\bar{c}\right).$$
3. Смешанное произведение не меняется, если переставлять перемножаемые векторы в круговом порядке:
$$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=\bar{b}\cdot\bar{c}\cdot\bar{a}=\bar{c}\cdot\bar{a}\cdot\bar{b}\,.$$
4. При перестановке любых двух векторов смешанное произведение изменяет только знак:
$$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=-\bar{b}\cdot\bar{a}\cdot\bar{c}=-\bar{c}\cdot\bar{b}\cdot\bar{a}=-\bar{a}\cdot\bar{c}\cdot\bar{b}\,.$$
5. $(\bar{a}+\bar{d})\bar{b}\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}+\bar{d}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}$.
6. $(\lambda\bar{a})\bar{b}\cdot\bar{c}=\lambda(\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c})$.

Задачи

141. Вычислить произведение $\left(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}\right)\left(\bar{a}-\bar{b}-\bar{c}\right)\left(\bar{a}-\bar{b}+\bar{c}\right)$.
142. Вычислить произведение $\left(\bar{a}-\bar{b}\right)\left(\bar{b}-\bar{c}\right)(\bar{c}-\bar{a})$.
143. Вычислить произведение $\bar{a}\left(\bar{b}-\bar{c}\right)\left(\bar{a}+\bar{b}+2\bar{c}\right)$.
144. Вычислить произведение $\bar{b}(\bar{c}+\bar{a})\left(\bar{b}+2\bar{c}\right)$, если $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=5$.
145. Вектор $\bar{c}$ перпендикулярен векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$, $\varphi=(\widehat{\bar{a},\bar{b}})=\dfrac{\pi}{6}$, $\left|\bar{a}\right|=6$, $\left|\bar{b}\right|=3$, $\left|\bar{c}\right|=3$. Найти $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$.
146. Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ взаимно перпендикулярны, образуют правую тройку. Найти $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$, зная, что $\left|\bar{a}\right|=4$, $\left|\bar{b}\right|=2$, $\left|\bar{c}\right|=3$.
147. Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ удовлетворяют условию $\bar{a}\times\bar{b}+\bar{b}\times\bar{c}+\bar{c}\times\bar{a}=0$. Доказать, что эти векторы компланарны.
148. Показать, что если векторы $\bar{a}\times\bar{b}$, $\bar{b}\times\bar{c}$, $\bar{c}\times\bar{a}$ компланарны, то они и коллинеарны.

149. Даны единичные векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ и $\bar{e}_3$. Зная, что $(\widehat{\bar{e}_1,\bar{e}_2}) = (\widehat{\bar{e}_3,\bar{e}_1} \times \bar{e}_2) = \alpha$, доказать равенство $\left(\bar{e}_1 \times \bar{e}_2\right) \cdot \bar{e}_3 = 0{,}5 \sin 2\alpha$.

150. Из одной точки проведены три некомпланарных вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$. Показать, что плоскость, проходящая через концы этих векторов, перпендикулярна к вектору $\bar{a} \times \bar{b} + \bar{b} \times \bar{c} + \bar{c} \times \bar{a}$.

151. Даны три некомпланарных вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$. Найти вектор $\bar{x}$, удовлетворяющий системе уравнений $\bar{a} \cdot \bar{x} = \alpha$, $\bar{b} \cdot \bar{x} = \beta$, $\bar{c} \cdot \bar{x} = \gamma$.

152. Проверить, компланарны ли данные векторы, если $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ – взаимно перпендикулярные орты:
   a) $\bar{p} = \bar{a} - 2\bar{b} + \bar{c}, \bar{q} = 3\bar{a} + \bar{b} - 2\bar{c}, \bar{r} = 7\bar{a} + 14\bar{b} - 13\bar{c};$
   b) $\bar{p} = 2\bar{a} + \bar{b} - 3\bar{c}, \bar{q} = \bar{a} - 4\bar{b} + \bar{c}, \bar{r} = 3\bar{a} - 2\bar{b} + 2\bar{c};$
   c) $\bar{p} = \bar{a} \times \bar{m}, \bar{q} = \bar{b} \times \bar{m}, \bar{r} = \bar{c} \times \bar{m}.$

Вычисление объемов, высот, площадей граней, углов между ребрами и гранями фигур с использованием свойств смешанного произведения

Теорема. Смешанное произведение некомпланарных векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, приведенных к общему началу, взятому со знаком «+», если тройка векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ правая, и со знаком «–», если тройка левая.
Теорема. Необходимое и достаточное условие компланарности: смешанное произведение векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ равно 0 тогда и только тогда, когда векторы компланарны.

Задачи

153. Найти объем тетраэдра, если даны длины a и b двух скрещивающихся ребер, расстояние d и угол φ между ними.
154. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{p} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$, $\bar{q} = \bar{a} + \bar{b} - \bar{c}$ и $\bar{r} = \bar{a} - \bar{b} + \bar{c}$.
155. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах:

a) $\bar{a} = \bar{p} - 3\bar{q} + \bar{r}, \bar{b} = 2\bar{p} + \bar{q} - 3\bar{r}$ и $\bar{c} = \bar{p} + 2\bar{q} + \bar{r}$, где $\bar{p}, \bar{q}$ и $\bar{r}$ – взаимно перпендикулярные орты;

b) $\bar{a} = 3\bar{m} + 5\bar{n}, \bar{b} = \bar{m} - 2\bar{n}, \bar{c} = 2\bar{m} + 7\bar{n}$, где $|\bar{m}| = 0{,}5$, $|\bar{n}| = 3$, $\varphi = (\widehat{\bar{m},\bar{n}}) = 135^0$.

156. Вычислить высоту параллелепипеда, построенного на трех векторах $\bar{a} = 3\bar{p} + 2\bar{q} - 5\bar{r}$, $\bar{b} = \bar{p} - \bar{q} + 4\bar{r}$ и $\bar{c} = \bar{p} - 3\bar{q} + \bar{r}$, где $\bar{p}$, $\bar{q}$ и $\bar{r}$ – взаимно перпендикулярные орты и за основание взят параллелограмм, построенный на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Вычисление смешанного произведения в ПДСК

Теорема. Пусть в ПДСК даны координаты векторов: $\bar{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\bar{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, $\bar{c} = \{x_3, y_3, z_3\}$, тогда смешанное произведение этих векторов находится по формуле:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Следствие. Необходимым и достаточным условием компланарности векторов $\bar{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\bar{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, $\bar{c} = \{x_3, y_3, z_3\}$ является равенство нулю их смешанного произведения:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Теорема. Пусть в АСК даны координаты векторов $\bar{a} = \{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$, $\bar{b} = \{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$, $\bar{c} = \{\alpha_3, \beta_3, \gamma_3\}$, или $\bar{a} = \alpha_1\bar{e}_1 + \beta_1\bar{e}_2 + \gamma_1\bar{e}_3$, $\bar{b} = \alpha_2\bar{e}_1 + \beta_2\bar{e}_2 + \gamma_2\bar{e}_3$, $\bar{c} = \alpha_3\bar{e}_1 + \beta_3\bar{e}_2 + \gamma_3\bar{e}_3$ Смешанное произведение векторов $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ находится по формуле:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \cdot \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_3.$$

Задачи

157. Проверить, компланарны ли данные векторы:

1) $\bar{a} = \{1,2,-2\}, \bar{b} = \{1,-2,1\}, \bar{c} = \{5,-2,-1\}$;
2) $\bar{a} = \bar{\jmath} + \bar{k}, \bar{b} = \bar{\jmath} - \bar{k}, \bar{c} = \bar{\imath}$.

158. При каком значении параметра λ векторы $\bar{a} = \bar{\imath} + \bar{\jmath} + \lambda\bar{k}$, $\bar{b} = \{0,1,0\}$ и $\bar{c} = \{3,0,1\}$ компланарны?

159. Доказать, что четыре точки $A_1(3, 5, 1)$, $A_2(2, 4, 7)$, $A_3(1, 5, 3)$ и $A_4(4, 4, 5)$ лежат в одной плоскости.

Вычисление объемов, площадей граней, углов между ребрами и гранями, высот фигур с использованием формулы смешанного произведения в ПДСК

Пусть в ПДСК даны координаты векторов $\bar{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\bar{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, $\bar{c} = \{x_3, y_3, z_3\}$, тогда абсолютная величина смешанного произведения этих векторов будет численно равна *объему параллелепипеда*, построенного на этих векторах как на сторонах, т.е.

$$V_{\text{параллелепипеда}} = V_{abc} = \left|\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}\right| = mod \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Объем тетраэдра, построенного на этих векторах, приведенных к общему началу, будет численно равен $\frac{1}{6}$ модуля смешанного произведения, т.е.

$$V_{\text{тетраэдра}} = \frac{1}{6} V_{abc} = \frac{1}{6}\left|\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}\right| = \frac{1}{6} mod \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Высота тетраэдра, опущенная на основание, образованное векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, находится по формуле

$$H_{ab}=\frac{V_{abc}}{S_{ab}}=\frac{\mathrm{mod}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2}}.$$

Пусть четыре точки $A(x_A,y_A,z_A)$, $B(x_B,y_B,z_B)$, $C(x_C,y_C,z_C)$, $D(x_D,y_D,z_D)$, не лежащие в одной плоскости, являются вершинами тетраэдра. Если на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, построить параллелепипед, то объем тетраэдра будет равен $\frac{1}{6}$ объема параллелепипеда, т.е.

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}mod\begin{vmatrix} x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A \\ x_C-x_A & y_C-y_A & z_C-z_A \\ x_D-x_A & y_D-y_A & z_D-z_A \end{vmatrix},$$

где $\overline{AB}=\{x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A\}$,
$\overline{AC}=\{x_C-x_A,y_C-y_A,z_C-z_A\}$,
$\overline{AD}=\{x_D-x_A,y_D-y_A,z_D-z_A\}$.

Задачи

160. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}=\{1,-2,1\}$, $\bar{b}=\{3,2,1\}$, $\bar{c}=\{1,0,-1\}$.
161. Даны вершины пирамиды A(5, 1, –4), B(1, 2, –1), C(3, 3, –4), S(2, 2, 2). Найти длину высоты, опущенной из вершины S на грань ABC.
162. Дан параллелепипед, построенный на векторах $\bar{a}=\{2,1,-3\}$, $\bar{b}=\bar{\imath}+2\bar{\jmath}+\bar{k}$, $\bar{c}=\{1,-3,1\}$. Найти высоту, опущенную на грань, построенную на векторах $\bar{b}$ и $\bar{c}$.
163. Найти объем треугольной призмы, построенной на векторах $\overline{a}=\{1,\ 2,\ 3\}$, $\overline{b}=\{2,\ 4,\ 1\}$, $\overline{c}=\{2,\ -1,\ 0\}$.

164. Объем тетраэдра равен 5, три его вершины находятся в точках A(2, 1, –1), B(3, 0, 1) и C(2, –1, 3). Найти координаты четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси ординат.

165. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, построенный на векторах $\overline{AB}=\{4,\ 3,\ 0\}$, $\overline{AD}=\{2,\ 1,\ 2\}$, $\overline{AA_1}=\{-3,\ -2,\ 5\}$. Найти:
   a) объем параллелепипеда;
   b) площадь грани *ABCD;*
   c) длину высоты, опущенной из вершины A_1;
   d) угол между ребром *AB* и диагональю BD_1.

166. Дана пирамида с вершинами $A_1(1, 2, 3)$, $A_2(-2, 4, 1)$, $A_3(7, 6, 3)$ и $A_4(4, -3, -1)$. Найти:
   a) длину ребер A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4;
   b) площадь грани $A_1A_2A_3$;
   c) угол между ребрами A_1A_3 и A_1A_4;
   d) объем пирамиды;
   e) длину высоты, опущенной на грань $A_1A_2A_3$.

Задание ПДСК в многогранниках: нахождение объемов, высот, площадей граней, углов между ребрами и гранями фигур с использованием формулы смешанного произведения в координатах

Задачи

167. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед объёма V. Точки M, N, P и Q заданы равенствами $\overline{BM}=3\overline{AM}$, $\overline{DN}=\frac{1}{6}\overline{DD_1}$, $\overline{BP}=3\overline{PC}$, $\overline{B_1Q}=\overline{QC_1}$. Найти объем тетраэдра MNPQ.

168. В правильном тетраэдре *ABCD* с ребром единичной длины $\overline{AB}=2\overline{BM}$, $\overline{DN}=2\overline{NC}$, $\overline{AP}=3\overline{PD}$. Найти точку $T=MNP\bigcap BD$ и объем тетраэдра APNT.

Лабораторная работа № 1
Метод координат. Простейшие задачи аналитической геометрии

Пусть в пространстве задана аффинная система координат (АСК) $O\bar{e}_1\bar{e}_2\bar{e}_3$. Всякий вектор $\bar{a}$ можно единственным образом представить в виде $\bar{a} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 + z\bar{e}_3$, числа x, y, z называются *координатами этого вектора в системе* $O\bar{e}_1\bar{e}_2\bar{e}_3$. Для каждой точки M вектор $\overline{OM}$ называется *радиусом-вектором* этой точки. Координаты радиуса-вектора точки M называются *координатами* этой точки и записываются $M(x, y, z)$. Общая декартова (аффинная) система координат называется прямоугольной, если углы между осями координат прямые, а векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ имеют одинаковую длину. Такую систему обозначают $O\bar{i}\,\bar{j}\,\bar{k}$.

Пример 1. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед, E, F, G – середины сторон AA_1, AD, CC_1. Принимая векторы $\overline{AA_1}$, $\overline{AD}$, $\overline{AB}$ за координатные, определить координаты следующих векторов: $\overline{AC}$, $\overline{AE}$, $\overline{EC_1}$, $\overline{B_1C_1}$, $\overline{FG}$. (рис. 8)

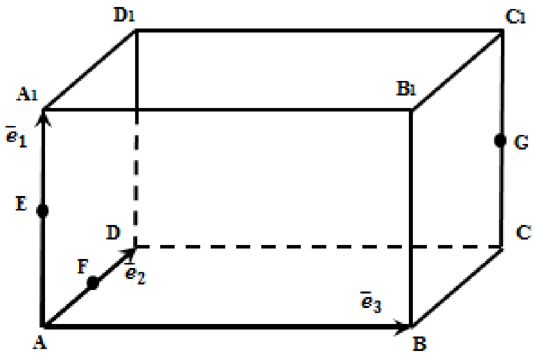


Рис. 8

Решение. Обозначим $\overline{AA_1} = \bar{e}_1$, $\overline{AD} = \bar{e}_2$, $\overline{AB} = \bar{e}_3$.

Поскольку $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD} = \bar{e}_3 + \bar{e}_2$, то $\overline{AC} = \{0, 1, 1\}$;

$\overline{AE} = \dfrac{\overline{AA_1}}{2} = \dfrac{\bar{e}_1}{2}$, то $\overline{AE} = \left\{\dfrac{1}{2}, 0, 0\right\}$;

$\overline{EC_1} = \overline{EA_1} + \overline{A_1B_1} + \overline{B_1C_1} = \dfrac{\bar{e}_1}{2} + \bar{e}_2 + \bar{e}_3$, то $\overline{EC_1} = \left\{\dfrac{1}{2}, 1, 1\right\}$.

Аналогично можно получить координаты векторов $\overline{B_1C_1} = \{0, 1, 0\}$ и $\overline{FG} = \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 1\right\}$.

Пример 2. В ПДСК даны координаты вершин треугольника ABC: A(4, 1), B(7, 5), C(–4, 7). Вычислить длину биссектрисы AD угла A.

Решение. Для определения длины биссектрисы AD нужно знать координаты точки D. Так как AD биссектриса, то D делит отрезок BC на части, пропорциональные прилежащим сторонам AB и AC. Отсюда легко определить отношение λ, в котором точка D делит отрезок BC, $\lambda = \dfrac{|\mathrm{BD}|}{|\mathrm{DC}|} = \dfrac{|\mathrm{AB}|}{|\mathrm{AC}|}$.

Найдем длины сторон $|AB| = \sqrt{(7-4)^2 + (5-1)^2} = 5$.

$|AC| = \sqrt{(-4-4)^2 + (7-1)^2} = 10$.

Тогда $\lambda = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$. Если обозначить *x*, *y* координаты точки *D*, то

$$\mathrm{x} = \frac{7 + 0{,}5 \cdot (-4)}{1 + 0{,}5} = \frac{10}{3}, \quad \mathrm{y} = \frac{5 + 0{,}5 \cdot 7}{1 + 0{,}5} = \frac{17}{3},$$

$$|AD| = \sqrt{\left(\frac{10}{3} - 4\right)^2 + \left(\frac{17}{3} - 1\right)^2} = \frac{10\sqrt{2}}{3}.$$

Варианты лабораторной работы

ВАРИАНТ 1

1. Дан шестиугольник ABCDEF. Принимая за начало аффинной системы координат вершину A, а за базис – векторы $\overline{AB} = \bar{e}_1$, $\overline{AC} = \bar{e}_2$, найти в этой системе координаты вершин шестиугольника и его центра.
2. Найти центр и радиус окружности, проходящей через точку (2, –1) и касающейся обеих осей координат.
3. Две вершины треугольника – точки (5, 1), (–2, 2), третья вершина на оси *Ox*. Найти ее, если площадь треугольника равна 10 ед^2.

4. Отрезок AB, заданный концами A(1, 3, 4), B(2, –3, 1), разделен на три равные части. Найти координаты точек деления.
5. Даны координаты точек P(–1, 5), Q(3, 2). Найти координаты точки M, симметричной точке P относительно точки Q.

ВАРИАНТ 2

1. В трапеции ABCD отношение $\overline{AD}$ к основанию $\overline{BC}$ равно 3. Принимая за начало координат вершину A, а за базисные векторы $\overline{AD} = \bar{e}_1$ и $\overline{AB} = \bar{e}_2$, найти координаты вершин трапеции, точки M пересечения диагоналей и точки S пересечения боковых ребер.
2. Доказать, что треугольник с вершинами A(0, 0), B(3, 1), C(1, 7) прямоугольный.
3. Определить длину медианы AD треугольника ABC, заданного координатами вершин A(5, –4), B(–1, 2), C(5, 1).
4. Отрезок AB разделен на 5 равных частей; известна первая и последняя точки деления: C(3, –5, 7) и F(–2, 4, –8). Найти координаты концов и остальных точек деления.
5. Найти площадь треугольника задачи 3.

ВАРИАНТ 3

1. Вершина O тетраэдра OABC принята за начало координат, а векторы $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ – за базисные векторы. Найти в этой системе координаты точек пересечения медиан граней тетраэдра.
2. Найти координаты центра и радиус окружности, проходящей через точку A(–8, 4) и касающейся осей координат.
3. Даны две вершины треугольника: A(3, 6) и B(–3, 5). Найти координаты третьей вершины C при условии, что середины сторон AC и BC лежат на осях координат.
4. Отрезок AB разделен на три равные части. Известна первая точка деления C(1, 1, 3) и вторая точка D(0, 4, –1). Определить координаты концов отрезка.
5. Найти площадь треугольника ABC, если его вершины находятся в точках A(–2, 1), B(2, –2), C(8,6).

ВАРИАНТ 4

1. Дан правильный шестиугольник ABCDEF. Найти координаты его вершин и центра O, принимая за начало координат точку A, а за координатные векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ соответственно векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AS}$, где S – точка отрезка AE, причем $\left|\overline{AS}\right| = \left|\overline{AB}\right|$.
2. На оси Oz найти точку, равноудаленную от точек A(–4, 1, 7) и B(3, 5, –2).
3. В прямоугольной декартовой системе даны координаты вершин треугольника A(12, 0), B(7, 5), C(6, 4). Вычислить длину биссектрисы BD угла B.
4. Проверить, что три точки A(1, 5, 3), B(5, –1, 7) и C(6, 0, 8) лежат на одной прямой.
5. Две вершины треугольника ABC находятся в точках A(1, 2) и B(–5, 1), а третья вершина C – на оси Ox. Найти координаты вершины C, если площадь треугольника равна 2 ед^2.

ВАРИАНТ 5

1. В равнобочной трапеции ABCD большее основание $\left|\overline{AD}\right| = 10$, высота равна 2, угол при основании 30°. На плоскости взята прямоугольная система координат, начало которой − точка *O* совпадает с серединой AD, а направления *Ox* и *Oy* – с направлениями $\overline{OD}$ и $\overline{OM}$, где M – точка пересечения диагоналей трапеции. Определить координаты всех вершин трапеции, точки M и точки N – пересечения непараллельных сторон.
2. Дана окружность с центром в точке C(6, 7) и радиусом $r = 5$. Из точки A(7, 14) к окружности проведены касательные. Найти их длины.
3. Даны вершины треугольника в прямоугольной системе координат: A(2, –1, 4), B(3, 2, 6), C(–5, 0, 2). Вычислить длину его медианы, проведенной из вершины A.
4. Отрезок AB разделен на 3 равные части. Известны точки деления C(1, –1), D(2, 3). Найти координаты концов отрезка.
5. Вычислить площадь треугольника, если его вершины находятся в точках A(10, 5), B(3, 2), C(6, –5).

ВАРИАНТ 6

1. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AA_1}$ выбраны за координатные. Определить координаты векторов $\overline{AC_1}$, $\overline{AB_1}$ и $\overline{AM}$, где M – центр тяжести треугольника $A_1B_1C_1$.
2. Найти координаты центра и радиус окружности, проходящей через точку B(–10, 4) и касающейся оси Ox в точке A(–6, 0).
3. Найти точку пересечения общих касательных двух окружностей, центры которых $C_1(2, 5)$ и $C_2\left(\frac{22}{3}, \frac{31}{3}\right)$ и радиусы соответственно равны 3 и 7.
4. Отрезок прямой, ограниченный точками A(–1, 8, 3) и B(9, –7, –2), разделен на 5 равных частей. Найти координаты точек деления.
5. Найти расстояние d от точки A(6, 8) до прямой, проходящей через точки $M_1(-5, 0)$ и $M_2(3, 5)$.

ВАРИАНТ 7

1. В тетраэдре ABCS точки A', B', C' являются соответственно серединами ребер SA, SB, SC, O и O' – точки пересечения медиан треугольников ABC и A'B'C'. Принимая за координатные векторы $\overline{O'C'}, \overline{O'B'}, \overline{O'S},$ определить координаты векторов $\overline{CS}, \overline{AC}, \overline{CA'}, \overline{O'A}, \overline{AS}, \overline{AC'}$.
2. Показать, что треугольник с вершинами в точках A(1, 1), B(2, 5), C(–6, 7) прямоугольный.
3. Отрезок AB разделен на 5 равных частей. Найти координаты точек деления, если A(3, –5, 7) и B(–2, 4, –8).
4. Определить координаты концов отрезка, который точками C(2, 0, 1) и D(5, –2, 0) разделен на 3 равные части.
5. Две вершины треугольника находятся в точках (5, 1) и (–2, 2), третья вершина – на оси Ox. Зная, что площадь треугольника равна 10, найти третью вершину.

ВАРИАНТ 8

1. В правильном шестиугольнике ABCDEF векторы $\overline{AB} = \bar{e}_1$, $\overline{AE} = \bar{e}_2$ выбраны в качестве базисных. Найти в этом базисе координаты векторов $\overline{AC}, \overline{AD}, \overline{AF}, \overline{EF}$.
2. На оси *Ox* найти точку, равноудаленную от точек A(–4, –1) и B(7, 3).

3. Два подобных треугольника имеют общую вершину A(3, –6) и при ней общий угол. Найти две другие вершины большого треугольника, если известны вершины меньшего B(6,2; –3,6) и C(5, 1), а отношение сходственных сторон равно $\frac{5}{2}$.
4. Прямая проходит через две точки: $M_1(-1, 6, 6)$ и $M_2(3, -6, -2)$. Найти ее точки пересечения с координатными плоскостями.
5. Найти расстояние от начала координат до прямой, проходящей через точки (1, 5) и (2, 4).

ВАРИАНТ 9

1. В ромбе ABCD векторы $\overline{AC} = \bar{e}_1$, $\overline{BD} = \bar{e}_2$ взяты за базисные. Найти координаты векторов $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{DA}$ в этом базисе.
2. Показать, что треугольник с вершинами A(7, 3), B(11, –3), C(10, 5) прямоугольный.
3. Отрезок AB разделен на 5 равных частей. Известна первая точка деления C(3, –5, 7) и последняя F(–2, 4, –8). Определить координаты концов отрезка и остальных точек деления.
4. Даны три точки: A(1, –1), B(3, 3) и C(4, 5), лежащие на одной прямой. Определить отношение λ, в котором каждая из них делит отрезок, ограниченный двумя другими.
5. Найти площадь треугольника, вершинами которого служат точки A(4, 2), B(9, 4), C(7, 6).

ВАРИАНТ 10

1. В равнобочной трапеции ABCD угол A равен $\frac{\pi}{3}$. Полагая, что $\overline{AB} = \bar{e}_1$, $\overline{AD} = \bar{e}_2$, разложить по $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ векторы $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{BD}$, причем $\left|\overline{AB}\right| = 6$, $\left|\overline{AD}\right| = 10$.
2. Найти точку, расстояния до которой от точек A(7, 3) и B(–1, 5) соответственно равны 13 и 5.
3. Даны две вершины треугольника: A(–4, –1, 2) и B(3, 5, –6). Найти третью вершину C, зная, что середина стороны AC лежит на оси Oy, а середина BC – на плоскости xOz.
4. Прямая проходит через точки $M_1(-12, -13)$ и $M_2(-2, 5)$. На этой прямой найти точку, абсцисса которой равна 3.

5. Найти расстояние от точки (2, 0) до прямой, проходящей через точки (1, 1) и (5, 4).

ВАРИАНТ 11

1. В тетраэдре ABCS точки A', B', C'– соответственно середины ребер SA, SB, SC, O и O' – точки пересечения медиан треугольников ABC и A'B'C'. Принимая векторы $\overline{O'A'} = \bar{e}_1$, $\overline{O'E'} = \bar{e}_2$, $\overline{O'O} = \bar{e}_3$ за координатные, определить координаты векторов $\overline{OS}, \overline{AC}, \overline{CA'}, \overline{O'A}, \overline{AS}$, где E' – середина отрезка A'C'.
2. Найти центр и радиус окружности, проходящей через точки (6, 0), (24, 0) и касающейся оси Oy.
3. Найти точку пересечения медиан треугольника, зная координаты его вершин: A(1, 4), B(–5, 0), C(–2, 1).
4. Прямая проходит через точки A(7, –3, 4) и B(23, –6, 8). Найти точку пересечения этой прямой с осью абсцисс.
5. В прямоугольной системе координат даны точки A(–2, 1), B(2, –2), C(8, 6). Найти площадь треугольника ABC.

ВАРИАНТ 12

1. Дан параллелепипед ABCDA'B'C'D'. Принимая за базис $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ векторы $\overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AA'}$, найти координаты векторов, совпадающих с ребрами, диагональю параллелепипеда и диагоналями граней, для которых вершина A служит началом.
2. На оси Oy найти точку, равноудаленную от точки (–8, –4) и от начала координат.
3. На прямой, проходящей через точки (4, 8) и (–1, –4), найти точки, отстоящие от второй из данных на расстоянии 4.
4. Прямая проходит через точки M(2, –3, 6) и N(–6, 5, 1). На этой прямой найти точку, ордината которой равна –5.
5. Вычислить площадь треугольника ABC, если A(5, 4), B(11, 0), C(0, 3).

ВАРИАНТ 13

1. Вершина O тетраэдра OABC принята за начало координат, а векторы $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$ – за базисные векторы. Найти в этой системе координаты точек пересечения медиан граней тетраэдра.
2. Найти центр окружности, проходящей через точку (–4, 2) и касающейся оси Ox в точке (2,0).

3. Даны вершины треугольника A(2, –1, 4), B(3, 2, –6), C(–5, 0, 2). Вычислить длину его медианы, проведенной из вершины A.
4. Определить координаты концов A и B отрезка, который точками P(2, 2, 0) и Q(1, 5, –4) разделен на 3 равные части.
5. Вычислить площадь треугольника ABC, если A(–2, 4), B(0, –3), C(1, 7).

ВАРИАНТ 14

1. Найти в плоскости Oxz точку, равноудаленную от трех точек A(1, 1, 1), B(–1, 1, 0), C(3, 1, –1).
2. В параллелограмме ABCD точки E и F – середины сторон BC и AD, O – точка пересечения диагоналей. Взяв векторы $\overline{AF} = \bar{e}_1$ и $\overline{OD} = \bar{e}_2$ за координатные, определить координаты следующих векторов: $\overline{AB}$, $\overline{OC}$, $\overline{FC}$, $\overline{BC}$, $\overline{EO}$, $\overline{BD}$.
3. На прямой, проходящей через точки A(1, 0, 4) и B(3, –1, 2), найти точку C, такую, что $\overline{AC} = 3\overline{AB}$ и точка B лежала бы между A и C.
4. Определить координаты концов отрезка, который точками C(2, 0, 2), D(5, –2, 0) разделен на 3 равные части.
5. Вычислить площадь треугольника ABC, если A(2, 1), B(3, 4), C(1, 6).

Лабораторная работа № 2
Операции над векторами

При выполнении настоящей лабораторной работы следует использовать действия над векторами: умножение на число, сложение; скалярное, векторное, смешанное произведения векторов.

Пример 1. Найти единичный вектор $\bar{e}$, имеющий направление вектора $\overline{AB}$, где A(4, 0, 5), B(7, 1, 3).

Решение. Находим координаты вектора $\overline{AB}$, для чего вычитаем из координат конца соответствующие координаты начала. Получаем $\overline{AB} = \{7-4,\ 1-0,\ 3-5\} = \{3,\ 1, -2\}$.

Далее, для того чтобы найти единичный вектор, имеющий направление данного вектора, следует разделить каждую координату полученного вектора на его длину, т.е.

$$\bar{e} = \frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|} = \frac{\{3,1,-2\}}{\sqrt{3^2+1^2+(-2)^2}}.$$

Ответ: $\bar{e} = \left\{\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}\right\}$.

Пример 2. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a} = 3\bar{i} - \bar{j} - \bar{k}$, $\bar{b} = 2\bar{i} + 5\bar{k}$.

Решение. Находим векторное произведение $\bar{c}$ векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$. В нашем случае $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} = -5\bar{i} - 17\bar{j} + 2\bar{k}$.

$$\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Искомая площадь параллелограмма равна длине векторного произведения векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Получаем $|\bar{c}| = \sqrt{(-5)^2 + (-17)^2 + 2^2} = \sqrt{318}$.

Варианты лабораторной работы

ВАРИАНТ 1

1. Даны координаты вершин пирамиды A(1, –3, 1), B(–3, 2, –3), C(–3, –3, 3), D(–2, 0, –4). Найти:
   1) длину ребра *AB*;
   2) площадь грани *ABC*;
   3) угол между ребрами *AB* и *AC*;
   4) объем пирамиды;
   5) длину высоты, опущенной из вершины *D*.
2. Относительно аффинной системы координат $O\bar{e}_1\bar{e}_2$ дан прямоугольный треугольник *ABC* с вершинами в точках A(0, 1), B(3, 2), C(1, 0), прямым углом при вершине B и катетами *CB*=2, *AB*=3. Определить длины базисных векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2$, и угол между ними.

ВАРИАНТ 2

1. Даны координаты вершин пирамиды $A_1(1, -1, 6)$, $A_2(4, 5, -2)$, $A_3(-1, 3, 0)$, $A_4(6, 1, 5)$. Найти:
   1) длину ребра A_2A_3;
   2) площадь грани $A_1A_2A_3$;
   3) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4;
   4) объем пирамиды;
   5) длину высоты, опущенной из вершины A_4.

2. Длины базисных векторов аффинной системы координат $|\bar{e}_1| = 2$, $|\bar{e}_2| = 4$, и угол $\widehat{\bar{e}_1, \bar{e}_2} = 120^0$. Относительно этой системы координат заданы вершины треугольника A(1, 0), B(1, 3), C(2, 1). Определить длины сторон AB и AC и угол A.

ВАРИАНТ 3

1. Даны координаты вершин пирамиды A(1, 1, 1), B(3, 4, 0), C(-1, 5, 6), D(4, 0, 5). Найти:
   1) длину ребра *BC*;
   2) площадь грани *ABC*;
   3) угол между ребрами *AB* и *AC*;
   4) объем пирамиды;
   5) длину высоты, опущенной из вершины *D*.

2. Даны $|\bar{e}_1| = 1$, $|\bar{e}_2| = \sqrt{3}$ и угол $\widehat{\bar{e}_1, \bar{e}_2} = 30^0$. Найти угол между векторами $\bar{a} = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2$ и $\bar{b} = \bar{e}_1 - \bar{e}_2$ и площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

ВАРИАНТ 4

1. Даны координаты вершин пирамиды A(0, 0, 0), B(5, 2, 0), C(2, 5, 0), D(1, 2, 4). Найти:
   1) длину ребра *BC*;
   2) площадь грани *ABC*;
   3) угол между ребрами *AB* и *AC*;
   4) объем пирамиды;
   5) длину высоты, опущенной из вершины *D*.
2. Даны $|\bar{e}_1| = 2$, $|\bar{e}_2| = \sqrt{3}$ и угол $\widehat{\bar{e}_1, \bar{e}_2} = 60^0$. Найти угол между векторами $\bar{a} = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2$ и $\bar{b} = 3\bar{e}_1 - \bar{e}_2$ и площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

ВАРИАНТ 5

1. Даны координаты вершин пирамиды $A_1(-7, 1, 2)$, $A_2(1, 5, 3)$, $A_3(-5, -1, 3)$, $A_4(4, 5, -1)$. Найти:
   1) длину ребра A_2A_3;
   2) площадь грани $A_1A_2A_3$;
   3) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_3;
   4) объем пирамиды;
   5) длину высоты, опущенной из вершины A_4.
2. Даны длины базисных векторов аффинной системы координат $|\bar{e}_1| = 2$, $|\bar{e}_2| = \sqrt{3}$ и угол $\widehat{\bar{e}_1, \bar{e}_2} = 30^0$. Относительно этой системы

координат даны два вектора $\bar{a} = \{1, 2\}$ и $\bar{b} = \{2, 5\}$. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ и угол между ними.

ВАРИАНТ 6

1. Даны координаты вершин пирамиды $A_1(-2, 3, -2)$, $A_2(2, -3, 2)$, $A_3(2, 2, 0)$, $A_4(1, 5, 5)$. Найти:
   1) длину ребра A_2A_3;
   2) площадь грани $A_1A_2A_3$;
   3) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4;
   4) объем пирамиды;
   5) длину высоты, опущенной из вершины A_4.

2. Относительно аффинной системы координат дан треугольник ABC с вершинами в точках A(2, 1), B(4, 3), C(3, 5), длины сторон которого $AB = \sqrt{10}$, $AC = 4$, $BC = \sqrt{13}$. Определить длины базисных векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ и угол между ними.

ВАРИАНТ 7

1. Дан тетраэдр, построенный на векторах $\overline{AB} = \{2, 0, 0\}$, $\overline{AC} = \{3, 4, 0\}$, $\overline{AD} = \{3, 4, 2\}$. Найти:
   1) объем тетраэдра;
   2) площадь грани ABC;
   3) длину высоты, проведенной из вершины D;
   4) косинус угла между ребрами AB и BC;
   5) длину ребра BC.
2. Даны длины базисных векторов аффинной системы координат $|\bar{e}_1| = 2$, $|\bar{e}_2| = 4$ и угол $\widehat{\bar{e}_1, \bar{e}_2} = 120^0$. Относительно этой системы координат заданы вершины треугольника A(1, 3), B(1, 0), C(2, 1). Найти длины сторон треугольника AB и AC, угол A, площадь треугольника ABC.

ВАРИАНТ 8

1. Даны вершины пирамиды A(–1, 1, 2), B(1, 1, 0), C(2, 6, –2), D(6, 2, 5). Найти:
   1) длину ребра BC;
   2) площадь грани ABC;
   3) угол между ребрами AB и AD;
   4) объем пирамиды;
   5) длину высоты, проведенной из вершины D.

2. Относительно аффинной системы координат $O\bar{e}_1\bar{e}_2$ дан прямоугольный треугольник *ABC* с вершинами в точках A(1, 0), B(0, 1), C(3, 2), прямым углом при вершине *C* и катетами $CA = 2$ и $CB = 3$. Определить длины базисных векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ и угол между ними.

ВАРИАНТ 9

1. Даны вершины пирамиды A(2, –3, 1), B(–1, 1, 1), C(–4, 5, 6), D(–2, 4, 6). Доказать, что ABCD – плоский четырехугольник. Найти:
   1) длину ребра *BC*;
   2) площадь грани *ABC*;
   3) угол между ребрами *AB* и *AD*;
   4) объем пирамиды;
   5) длину высоты, опущенной из вершины *D*.

2. Относительно аффинной системы координат дан треугольник *ABC* с вершинами в точках A(1, 1), B(5, 3), C(3, 5), длины сторон которого суть $AB = \sqrt{52}$, *AC=4*, $BC = \sqrt{28}$. Определить длины базисных векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ и угол между ними.

ВАРИАНТ 10

1. Дан тетраэдр, построенный на векторах $\overline{AB} = \{0, 1, -1\}$, $\overline{AC} = \{2, -1, 4\}$, $\overline{AA'} = \{-3, 2, 2\}$. Найти:
   1) объем тетраэдра;
   2) площадь грани *ABC*;
   3) длину высоты, опущенную из вершины *D*;
   4) косинус угла между ребрами *AB* и *BC*;
   5) длину ребра *BC*.
2. Дана система координат $O\bar{e}_1\bar{e}_2$, причем $|\bar{e}_1| = 2$, $|\bar{e}_2| = \sqrt{3}$, угол $\widehat{\bar{e}_1, \bar{e}_2} = 150^0$. Найти угол между векторами $\bar{a} = \{1, 2\}$ и $\bar{b} = \{2, 2\}$ и площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

ВАРИАНТ 11

1. Даны вершины пирамиды A(4, 2, –1), B(3, 0, 4), C(0, 0, 4), D(5, –1, –3). Найти:
   1) длину ребра *BC*;
   2) площадь грани *ABC*;
   3) угол между ребрами *AB* и *AC*;
   4) объем пирамиды;

5) длину высоты, опущенной из вершины D.

2. Даны длины базисных векторов аффинной системы координат $|\bar{e}_1| = 4$, $|\bar{e}_2| = 2$ и угол $\widehat{\bar{e}_1, \bar{e}_2} = 60^0$. Относительно этой системы координат заданы вершины треугольника A(1, 3), B(1, 0), C(2, 1). Определить длины сторон AB и AC, угол A и площадь этого треугольника.

ВАРИАНТ 12

1. Даны вершины тетраэдра A(2, –4, 5), B(–1, –3, 4), C(5, 5, –1), D(1, –2, 2). Найти:
   1) объем тетраэдра;
   2) длину высоты AH;
   3) угол между ребрами AB и AC;
   4) площадь грани ABC;
   5) длину ребра BC.

2. Зная длины базисных векторов $|\bar{e}_1| = 2$, $|\bar{e}_2| = 3$ и угол $\widehat{\bar{e}_1, \bar{e}_2} = 120^0$, найти длины векторов $\bar{a} = 4\bar{e}_1 - 6\bar{e}_2$, $\bar{b} = \bar{e}_1 + \bar{e}_2$, угол $\varphi = \bar{a}\,^\wedge \bar{b}$, площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

ВАРИАНТ 13

1. Дан тетраэдр, построенный на векторах $\overline{AB} = \{4, 3, 0\}$, $\overline{AD} = \{2, 1, 2\}$, $\overline{AA'} = \{-3, -2, 5\}$. Найти:
   1) объем тетраэдра;
   2) площадь грани ABC;
   3) длину высоты, опущенную из вершины D;
   4) косинус угла между ребрами AB и BC;
   5) длину ребра BC.

2. Длины базисных векторов аффинной системы координат $|\bar{e}_1| = 2$, $|\bar{e}_2| = 1$, и угол $\widehat{\bar{e}_1, \bar{e}_2} = 60^0$. Относительно этой системы координат заданы вершины треугольника A(1, 3), B(1, 0), C(2, 1). Определить длины сторон AB и AC, угол A и площадь треугольника.

Раздел 2. ЛИНЕЙНЫЕ ОБРАЗЫ

Тема 6. Прямая на плоскости

Различные виды уравнений прямой на плоскости

1. $\mathrm{Ax} + \mathrm{By} + \mathrm{C} = 0$ – общее уравнение прямой, $\bar{\mathrm{n}} = \{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}$ – нормальный вектор, перпендикулярный прямой.
2. $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ – уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно вектору $\bar{\mathrm{n}} = \{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}$.
3. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ – уравнение в отрезках, a и b – отрезки, отсекаемые прямой на осях координат.
4. $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$ – канонические уравнения прямой, $M_0(x_0, y_0)$ – фиксированная точка, через которую проходит прямая, $\bar{q} = \{l, m\}$ – направляющий вектор прямой.
5. $\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt \end{cases}$ – параметрические уравнения прямой, $M_0(x_0, y_0)$ – фиксированная точка, через которую проходит прямая, $\bar{q} = \{l, m\}$ – направляющий вектор прямой, t – параметр текущей точки на прямой.
6. $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ – уравнение прямой, проходящей через две фиксированные точки $M_1(x_1, y_1)$и $M_2(x_2, y_2)$.
7. $y - y_0 = k(x - x_0)$ – уравнение прямой, проходящей через фиксированную точку $M_0(x_0, y_0)$, с данным угловым коэффициентом k.
8. $y = kx + b$ – уравнение прямой с угловым коэффициентом, $k = tg\alpha$ – угловой коэффициент, α – угол наклона прямой к оси Ox, b – отрезок, отсекаемый прямой на оси Oy.

Задачи

1. Составить уравнение прямой, имеющей угловой коэффициент 3 и отсекающей на оси ординат отрезок, равный 4. Система координат аффинная.
2. Составить уравнения прямых, проходящих через начало координат и отклоненных к оси OX под углом:

1) 30^0; 3) 60^0; 5) 135^0;
2) 45^0; 4) 120^0; 6) 150^0.

3. Составить уравнение прямой, наклоненной к оси Ox под углом 150^0 и отсекающей на оси Oy отрезок, равный $-\frac{1}{3}$. Найти точку пересечения этой прямой с осью абсцисс.
4. Найти угловой коэффициент и отрезки, отсекаемые на осях координат каждой из следующих прямых:
   1) $2x - y + 4 = 0$; 4) $-3x + 4y - 6 = 0$;
   2) $2x + 3y - 6 = 0$; 5) $3x + \sqrt{3}y + 3 = 0$.
   3) $x + 2y + 1 = 0$;
5. Составить уравнение прямой, проходящей через точку (2, 3) и имеющей угловой коэффициент, равный –5. Система координат аффинная.
6. Составить уравнение прямой, проходящей через точку (–5, 3) и наклоненной к оси Ox под углом 135^0. Система координат аффинная.
7. Луч света направлен по прямой $2x - 3y - 12 = 0$. Дойдя до оси абсцисс, он от нее отразился. Определить точку встречи луча с осью и уравнение отраженного луча.
8. Луч света, пройдя через точку A(2, 3) под углом α к оси Ox, отразился от нее и прошел через точку B(–5, 4). Найти угол α.
9. Составить уравнения прямых, проходящих через пары точек:
   1) (1, 3) и (2, 4); 3) (1, 3) и (1, –7);
   2) (2, 3) и (–4, –6); 4) (2, –3) и (4, –3).
10. Составить уравнения прямых, проходящих через точку (3, –2) параллельно осям координат. Система координат аффинная.
11. Под каким углом к оси Ox наклонена прямая, проходящая через точки (2, –5) и (0, –3)?
12. Дан треугольник ABC: A(–2, 3), B(4, 1), C(6, –5). Написать уравнение медианы этого треугольника, проведенной из вершины A. Система координат аффинная.
13. Дан треугольник ABC: A(4, 4), B(–6, –1), C(–2, –4). Написать уравнение биссектрисы внутреннего угла треугольника при вершине C.
14. Написать уравнения сторон равнобочной трапеции, зная, что основания ее соответственно равны 10 и 6, а боковые стороны образуют с основанием угол 60^0. За ось Ox берется большее основание, за ось Oy – ось симметрии трапеции, а за положительное направление оси Oy – направление луча, пересекающего меньшее основание.
15. Составить уравнение прямой, отсекающей на осях координат отрезки 3 и 5. Система координат аффинная.

16. Через точку M(–4, 10) провести прямые, отсекающие на осях координат равные отрезки.
17. Через точку (2, –1) провести прямую, отрезок которой между осями координат делился бы в данной точке пополам. Система координат аффинная.
18. Определить площадь треугольника, заключенного между осями координат и прямой $x+2y-6=0$.
19. Написать уравнение прямой, параллельной прямой $2x+5y=0$ и образующей вместе с осями координат треугольник, площадь которого равна 5.
20. Через точку M(4, –3) провести прямую так, чтобы площадь треугольника, образованного ею и осями, была равна 3.
21. Написать параметрические уравнения прямой, проходящей через точку (3, –5) параллельно вектору $\{-4,\ 2\}$. Система координат аффинная.
22. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку (–6, –4) и имеющей угловой коэффициент $k=-\frac{3}{7}$. Система координат аффинная.
23. Составить параметрические уравнения прямой, отсекающей на осях координат отрезки 3 и –5. Система координат аффинная.
24. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через начало координат и отклоненной к оси абсцисс под углом в 150^0.
25. Написать в параметрической форме уравнения прямых:

    1) $3x+6y+5=0$;
    2) $x-2y-4=0$;
    3) $y=-3x+5$;
    4) $x=2$;
    5) $y=-3$;
    6) $2x+3y=0$.

26. Записать в виде $Ax+By+C=0$ уравнения прямых в аффинной системе координат:

    1) $\begin{cases} x=t, \\ y=1-3t \end{cases}$;
    2) $\begin{cases} x=2+5t, \\ y=4-7t \end{cases}$.

27. Найти k из условия, что прямая $y=kx+2$ удалена от начала координат на расстояние $\sqrt{3}$.
28. Написать уравнение прямой, проходящей через точу $A\left(-2,\ \frac{2}{5}\right)$ и образующей с осью Ox угол $arctg3$.

29. Составить уравнение прямой, зная, что расстояние от нее до начала координат равно $\sqrt{2}$, а угол между перпендикуляром, опущенным из начала координат на прямую, и осью Ox, равен $\frac{3}{4}\pi$.
30. Через середину отрезка AB, где A(4, 0), B(0, 6), провести прямую, отсекающую на оси Ox отрезок вдвое больший, чем на оси Oy, и написать ее уравнение.
31. Даны точки $M_1(-3, 8)$ и $M_2(2, 2)$. На оси абсцисс найти такую точку M, чтобы ломаная M_1MM_2 имела наименьшую длину.
32. Из точки A(–5, 6) выходит луч света под углом $arctg(-2)$ к оси Ox и отражается от оси Ox, затем от оси Oy. Найти уравнения прямых, по которым направлены все три луча.
33. Найти уравнение прямой, содержащей биссектрису острого угла, образованного прямыми $y = \sqrt{3}x + 4$ и $y = 4$.
34. При каких значениях C площадь, ограниченная координатными осями и прямой $3x + 10y + C = 0$, равна 135 кв. ед.?
35. Написать уравнения сторон квадрата, диагонали которого служат осями координат. Длина стороны квадрата равна a.
36. Относительно ПДСК даны уравнения прямых:
    1) $3x - 2y + 7 = 0$;
    2) $\frac{2}{3}x - \frac{4}{7}y - 1 = 0$;
    3) $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 2 = 0$;
    4) $x + \frac{y}{2} - 3 = 0$;
    5) $-\frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y - 3 = 0$;
    6) $x - 5 = 0$.

    Какие из этих прямых представлены нормальными уравнениями?
37. Привести к нормальному виду уравнения прямых:
    1) $4x - 3y + 10 = 0$;
    2) $5x + 12y - 39 = 0$;
    3) $6x + 8y - 15 = 0$;
    4) $x - 2y + 3 = 0$;
    5) $y - \sqrt{3}x = 4$;
    6) $x \cdot \cos 10^0 + y \cdot \sin 10^0 + 4 = 0$.
38. Дано уравнение первой степени $\frac{3x+2}{6} - \frac{2y-5}{3} = 4$. Найти для соответствующей прямой:
    1) общее уравнение;
    2) нормальное уравнение;
    3) уравнение с угловым коэффициентом;
    4) уравнение прямой в отрезках.

39. Какая зависимость должна существовать между отрезками a и b, чтобы прямая $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ была наклонена к оси Ox под углом: 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{3\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{3}$?

Взаимное расположение двух прямых

I. Прямые заданы общими уравнениями

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \text{ и } A_2x+B_2y+C_2=0.$$

1. Условие параллельности: $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$.
2. Условие совпадения: $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$.
3. Условие перпендикулярности: $A_1A_2+B_1B_2=0$.

II. Прямые заданы каноническими уравнениями

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1} \text{ и } \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}.$$

1. Условие параллельности: $\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}$ и $\frac{x_2-x_1}{l_1}\neq\frac{y_2-y_1}{m_1}$.
2. Условие совпадения: $\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}$ и $\frac{x_2-x_1}{l_1}=\frac{y_2-y_1}{m_1}$.
3. Условие перпендикулярности: $l_1l_2+m_1m_2=0$.

III. Прямые заданы уравнениями с угловыми коэффициентами

$$y=k_1x+b_1 \text{ и } y=k_2x+b_2.$$

1. Условие параллельности: $k_1=k_2$ и $b_1\neq b_2$.
2. Условие совпадения: $k_1=k_2$ и $b_1=b_2$,
3. Условие перпендикулярности: $k_1k_2+1=0$.

Условие параллельности прямых

Задачи

40. Написать уравнение прямой, параллельной биссектрисе второго координатного угла и отсекающей на оси Oy отрезок, равный 3.
41. Написать уравнение прямой, проходящей через точку A(2, –1) и параллельной биссектрисе второго координатного угла.
42. Установить, какие из пар прямых совпадают, параллельны или пересекаются. В последнем случае найти точку пересечения.
    1) $x+y-3=0$, $2x+3y-8=0$;
    2) $x-y+5=0$, $2x-2y+3=0$;
    3) $x-2y+4=0$, $-2x+4y-8=0$;
    4) $x+y+5=0$, $2x+3y+10=0$;
    5) $2x+3y-1=0$, $4x+6y-7=0$;
    6) $x-5y=0$, $2x-10y=0$;
    7) $7x+9y-62=0$, $8x+3y+2=0$;
    8) $x+2=0$, $2x+3=0$;
    9) $x-\sqrt{3}y=0$, $\sqrt{3}x-3y=0$.
43. Установить, какие из пар прямых совпадают, параллельны или пересекаются. В последнем случае найти точку пересечения.
    1) $\begin{cases} x=3+t \\ y=2-t \end{cases}$; $\begin{cases} x=3t \\ y=-2t \end{cases}$;
    2) $\begin{cases} x=5+4t \\ y=-2-2t \end{cases}$; $\begin{cases} x=1-2t \\ y=7+t \end{cases}$;
    3) $\begin{cases} x=4-8t \\ y=2+6t \end{cases}$; $\begin{cases} x=-4+4t \\ y=8-3t \end{cases}$.
44. Установить, какие из пар прямых совпадают, параллельны или пересекаются. В последнем случае найти точку пересечения.
    1) $3x+4y+5=0$, $\begin{cases} x=-3+4t \\ y=1-3t \end{cases}$;
    2) $2x-5y-7=0$, $\begin{cases} x=2+t \\ y=-9-t \end{cases}$;
    3) $6x-3y+5=0$, $\begin{cases} x=5+t \\ y=-3+2t \end{cases}$;
    4) $2x+5y-38=0$, $\begin{cases} x=-2+2t \\ y=-9+5t \end{cases}$;
    5) $3x+9y+5=0$, $\begin{cases} x=2+3t \\ y=-t \end{cases}$;
    6) $4x+5y-6=0$, $\begin{cases} x=-6+5t, \\ y=6-4t \end{cases}$.

45. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A(2, 5) и параллельной вектору $\{5, 4\}$. Система координат аффинная.
46. Через точку (7, 4) провести прямую, параллельную прямой $3x-2y+4=0$. Система координат аффинная.
47. Через точку M(2, 5) провести прямую, равноудаленную от точек P(–1, 2) и Q(5, 4). Система координат аффинная.
48. Даны середины сторон треугольника $M_1(2, 3)$, $M_2(-1, 2)$ и $M_3(4, 5)$. Составить уравнения сторон. Система координат аффинная.
49. Зная уравнения двух сторон параллелограмма $x-3y=0$ и $2x+5y+6=0$ и одну из его вершин C(4, –1), составить уравнения двух других сторон параллелограмма. Система координат аффинная.
50. Даны вершины треугольника A(–1, 2), B(3, –1) и C(0, 4). Через каждую из них провести прямую, параллельную противоположной стороне. Система координат аффинная.
51. Составить уравнение прямой, параллельной и равноудаленной от двух параллельных прямых $x+y-1=0$ и $x+y-13=0$. Система координат аффинная.
52. Составить уравнения прямых, равноудаленных от трех точек (1, 2), (3, 0) и (–4, –5). Система координат аффинная.
53. Зная уравнения двух сторон параллелограмма $x-y-1=0$ и $x-2y=0$ и точку пересечения его диагоналей M(3, –1), составить уравнения двух других сторон параллелограмма. Система координат аффинная.
54. Составить уравнения сторон параллелограмма ABCD, зная, что его диагонали пересекаются в точке M(1, 6), а стороны *AB*, *BC*, *CD* и *DA* проходят соответственно через точки P(3, 0), Q(6, 6), R(5, 9) и S(–5, 4). Система координат аффинная.
55. В параллелограмме ABCD даны уравнения сторон *AB*: $3x+4y-12=0$ и *AD*: $5x-12y-6=0$ и точка $E\left(-2, \frac{13}{6}\right)$ – середина стороны *BC*. Найти уравнения других сторон параллелограмма. Система координат аффинная.
56. Через точку пересечения прямых $3x-2y+5=0$ и $x+2y-9=0$ проведена прямая, параллельная прямой $2x+y+6=0$. Составить ее уравнение.
57. Проверить, что четыре точки A(–2, –2), B(–3, 1), C(7, 7) и D(3, 1) служат вершинами трапеции, составить уравнение средней линии и диагоналей этой трапеции.

58. Даны вершины треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, а именно: A(3, 0), B(0, 3), C(–2, –1) и A_1(6,5; 2,5), B_1(5, 4), C_1(4, 2). Доказать, что стороны их соответственно параллельны и что прямые, соединяющие сходственные вершины, пересекаются в одной точке.

Условие перпендикулярности прямых

Задачи

59. Установить, какие из пар прямых будут перпендикулярны:
    1) $x-2y+3=0$, $2x+y-5=0$;
    2) $2x+3y-6=0$, $2x-3y+4=0$;
    3) $3x+7y+4=0$, $7x-3y+2=0$;
    4) $5x+6y-8=0$, $6x+5y+2=0$;
    5) $x-y=0$, $x+y=0$;
    6) $x+3=0$, $y-2=0$.
60. Составить уравнение прямой, проходящей через точку (7, 4) перпендикулярно к прямой $3x-2y+4=0$.
61. Через точку пересечения прямых $3x-y=0$ и $x+4y-2=0$ провести прямую, перпендикулярную к прямой $2x+7y=0$.
62. Даны вершины треугольника A(4, 6), B(–4, 0) и C(–1, –4). Составить уравнение высоты, опущенной из вершины A на сторону BC.
63. Найти проекцию точки (–5, 6) на прямую $7x-13y-105=0$.
64. Найти точку, симметричную точке M(–2, 9) относительно прямой $2x-3y+18=0$.
65. На прямой $x+y-3=0$ найти точку M, такую, чтобы лучи MA и MB, выходящие из этой точки M и проходящие через точки A(–2, –1) и B(1, 3), образовывали с данной прямой равные углы.
66. На прямой $x-3y+1=0$ найти точку, равноудаленную от двух точек (–3, 1) и (5, 4).
67. Даны четыре точки: M_1(0, 0), M_2(0, 1), M_3(–2, 1) и M_4(1, 1). Найти точку M, зная, что она служит вершиной равнобедренных треугольников MM_1M_2 и MM_3M_4, боковые стороны которых MM_1, MM_2 и MM_3, MM_4.
68. Даны две вершины треугольника: A(–6, 2), B(2, –2) и точка H(1, 2) пересечения его высот. Вычислить координаты третьей вершины C.

69. В треугольнике ABC известны: сторона AB: $4x+y-12=0$, высота BH: $5x-4y-15=0$ и высота AH: $2x+2y-9=0$. Написать уравнения двух других сторон и третьей высоты.
70. Точка пересечения высот треугольника лежит в начале координат. Уравнения двух сторон этого треугольника $x+3y-1=0$ и $3x+5y-6=0$. Составить уравнение третьей стороны.
71. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну из вершин A(3, –4) и уравнения двух высот: $7x-2y-1=0$ и $2x-7y-6=0$.
72. Дан треугольник с вершинами в точках A(2, 5), B(5, –1) и C(8, 3). Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения медиан треугольника перпендикулярно к прямой $x+y+4=0$.
73. На прямую, проходящую через точки A(1, –2) и B(0, –7), опущен перпендикуляр из точки D(–3, 4). Вычислить отношение, в котором основание этого перпендикуляра делит отрезок AB.
74. На высоте BH треугольника ABC с вершинами в точках A(3, 1), B(5, 4) и C(1, 3) найти точку P, делящую эту высоту в отношении $\lambda=-3$ и вычислить площадь четырёхугольника ABCP.
75. Составить уравнения катетов прямоугольного треугольника, площадь которого равна 20 кв. ед., если известно, что его гипотенуза лежит на оси абсцисс, а вершина прямого угла совпадает с точкой C(–1, 4).
76. Даны точки A(–3, 1) и B(3, –7). На оси ординат найти точку M, чтобы прямые AM и BM были перпендикулярны друг к другу.

Нахождение точки пересечения прямых на плоскости и угла между прямыми

Точка пересечения прямых находится решением системы уравнений этих прямых.

Угол между двумя прямыми находится по следующим формулам:

I. Прямые заданы общими уравнениями

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \text{ и } A_2x+B_2y+C_2=0, \text{ тогда}$$

$$\cos\alpha=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^{\,2}+B_1^{\,2}}\sqrt{A_2^{\,2}+B_2^{\,2}}}.$$

II. Прямые заданы каноническими уравнениями

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1} \text{ и } \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}, \text{ тогда}$$

$$\cos\alpha=\frac{l_1 l_2+m_1 m_2}{\sqrt{l_1{}^2+m_1{}^2}\sqrt{l_2{}^2+m_2{}^2}}.$$

III. Прямые заданы уравнениями с угловыми коэффициентами:

$$y=k_1x+b_1 \text{ и } y=k_2x+b_2, \text{ тогда}$$

$$tg\alpha=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}.$$

Задачи

77. Найти точки пересечения прямых:
    1) $8x-3y-1=0$, $4x+y-13=0$;
    2) $3x+7y-15=0$, $9x+21y-32=0$;
    3) $5x-2y+13=0$, $x+3y-11=0$.

    Предварительно исследовать данные системы уравнений.
78. Даны вершины четырёхугольника A(–9, 0), B(–3, 6), C(3, 4) и D(6, –3). Найти точку пересечения его диагоналей *AC* и *BD* и вычислить угол между ними.
79. Проверить, что прямые $y=3x-1$, $x-7y=7$ и $x+y-7=0$ служат сторонами равнобедренного треугольника.
80. Составить уравнения сторон квадрата, если даны координаты одной из его вершин A(2, –4) и точка пересечения диагоналей M(5, 2).
81. Написать уравнение прямой, соединяющей центр тяжести треугольника ABC с началом координат, если координаты вершин: A(2, –1), B(4, 5) и C(–3, 2).
82. Зная уравнения боковых сторон равнобедренного треугольника $y=3$ и $x-y+4=0$, составить уравнение третьей стороны при условии, что она проходит через начало координат.
83. Составить уравнения катетов прямоугольного равнобедренного треугольника, зная уравнение гипотенузы $y=3x+5$ и вершину прямого угла (4, –1).
84. В равнобедренном прямоугольном треугольнике даны координаты вершины острого угла (5, 7) и уравнение противолежащего катета $6x+4y-9=0$. Составить уравнения двух других сторон треугольника.

85. Найти угол между прямыми:
1) $y = 2x - 3$ и $y = 0{,}5x + 5$;
2) $2x - 3y + 10 = 0$ и $5x - y + 4 = 0$;
3) $y = 0{,}75x - 2$ и $8x + 6y + 5 = 0$;
4) $y = 5x + 1$ и $y = 5x - 2$;
5) $3x + 2y - 1 = 0$ и $5x - y + 4 = 0$;
6) $y = 3{,}5x - 3$ и $7x - 2y + 2 = 0$;
7) $x + 4y + 10 = 0$ и $5y - 3 = 0$;
8) $3x - 2y + 0{,}1 = 0$ и $2x + 3y - 5 = 0$.

86. Найти угол между прямыми:
1) $x - 2 = 0$ и $x - y + 1 = 0$;
2) $2x - 3y = 0$ и прямой, проходящей через точки (5, 0) и (0, 3).

87. При каких значениях параметра α следующие пары прямых: а) параллельны; б) перпендикулярны?
1) $2x - 3y + 4 = 0$ и $\alpha x - 6y + 7 = 0$;
2) $\alpha x - 4y + 1 = 0$ и $-2x + y + 2 = 0$;
3) $4x + y - 6 = 0$ и $3x + \alpha y - 2 = 0$;
4) $x - \alpha y + 5 = 0$ и $2x + 3y + 3 = 0$.

88. Написать уравнение прямой, проходящей через точку A(0, 2) под углом $\frac{\pi}{4}$ к прямой $x - 2y + 3 = 0$.

89. Вычислить углы треугольника, стороны которого относительно ПДСК даны уравнениями: $18x + 6y - 17 = 0$, $14x - 7y + 15 = 0$ и $5x + 10y - 9 = 0$.

90. При каком значении параметра α прямые $(3\alpha + 2)x + (1 - 4\alpha)y + 8 = 0$ и $(5\alpha - 2)x + (\alpha + 4)y - 7 = 0$ будут перпендикулярными друг к другу?

91. При каком значении параметра a прямые $3ax - 8y + 13 = 0$ и $(a + 1)x - 2ay - 21 = 0$ будут параллельными?

92. Составить уравнение прямой, проходящей через точку (x', y') и перпендикулярной к прямой $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$.

93. Определить углы между прямыми, если известны их угловые коэффициенты $k_1 = \frac{1}{3}$ и $k_2 = -\frac{1}{2}$?

94. Через точку (3, 1) провести прямые, наклоненные к прямой $2x + 3y - 1 = 0$ под углом 45^0.

95. Через начало координат провести прямые, образующие с прямой $5x-6y+2=0$ углы, тангенсы которых равны $\pm\frac{7}{6}$.

96. Даны точки A(3, 3) и B(0, 2). На прямой $x+y-4=0$ найти точку, из которой отрезок AB виден под углом 45^0.

97. Для каждой из упорядоченных пар прямых найти тангенс угла от первой прямой до второй прямой:
    1) $2x+3y=0$ и $x-y+5=0$;
    2) $x-3y+2=0$ и $2x+y=0$;
    3) $2x+5y-3=0$ и $5x+2y-6=0$;
    4) $3x+4y-12=0$ и $5x-12y+60=0$.

98. Даны уравнения основания равнобедренного треугольника $x+y-1=0$ и боковой его стороны $x-2y-2=0$; точка (–2, 0) лежит на другой боковой стороне. Найти уравнение третьей стороны треугольника.

99. Даны две прямые: $x+3y=0$ и $x-y+8=0$. Найти третью прямую так, чтобы вторая из данных прямых была биссектрисой угла между первой из данных прямых и искомой прямой.

100. Даны вершины (–2, 1) и (4, 5) в основании равнобедренного треугольника и косинус угла A при его вершине $\cos A=\frac{15}{17}$. Найти координаты вершины A.

101. Даны вершина B(–3, –1) равнобедренного треугольника, вершина C(2, 1) в его основании и $\cos\varphi=\frac{3}{5}$ угла при вершине. Составить уравнения сторон треугольника.

102. Даны две вершины A(1, 2) и B(3, 4) треугольника и косинусы внутренних углов A и B, прилежащих к вершинам $\cos A=\frac{2}{\sqrt{5}}$ и $\cos B=\frac{3}{\sqrt{10}}$. Составить уравнения сторон треугольника и найти его третью вершину.

103. Дана вершина C(–3, 2) треугольника, косинусы его внутренних углов A и B: $\cos A=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos B=\frac{3}{5}$, и уравнение $2x-y-2=0$ стороны AB. Составить уравнения сторон треугольника.

104. Определить тангенсы внутренних углов треугольника, стороны которого заданы уравнениями $x+2y=0$, $3x-y=0$, $x+y-1=0$.

Расстояние от точки до прямой

Нормированное уравнение прямой: $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$.

Переход от общего уравнения прямой $Ax + By + C = 0$ к нормированному $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$:

Пусть $\mu = \pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$, знак выбирается противоположным знаку C, тогда $\cos\alpha = \mu A,\ \sin\alpha = \mu B,\ -p = \mu C$.

Расстояние от точки $M_0(x_0;\, y_0)$ до прямой с нормированным уравнением $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$:

$$d = x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p.$$

Задачи

105. Две стороны квадрата лежат на прямых $5x-12y-65=0$ и $5x-12y+26=0$. Найти площадь квадрата.
106. Найти геометрическое место точек, расстояние от которых до прямой $5x-12y-13=0$ равно 3.
107. Найти расстояние между двумя параллельными прямыми $3x+4y-20=0$ и $6x+8y+5=0$.
108. Найти длину высоты BD в треугольнике с вершинами A(4, –3), B(–2, 6) и C(5, 4).
109. Написать уравнение прямой, проходящей через точку A(1, 5) на расстоянии 5 ед. от начала координат.
110. Найти координаты точки, равноудаленной от двух точек (5, 4) и (–3, 2) и лежащей на прямой $x-3y+8=0$.
111. Составить уравнение прямой, симметричной прямой $x+2y-6=0$ относительно точки A(4, 2).
112. Найти уравнения прямых, на которых лежат биссектрисы углов между прямыми $3x-4y+12=0$ и $5x+12y-2=0$.
113. Написать уравнение прямой, проходящей через точку A(2, 5) на расстоянии 2 от точки B(0, –1).
114. Написать уравнение прямой, проходящей через точку A(1, –1) так, что середина ее отрезка, заключенного между прямыми

$2x-3y-6=0$ и $2x-3y+6=0$, лежала бы на прямой $2x+15y-42=0$.

115. Две смежные вершины квадрата имеют координаты (1, 4) и (4, 5). Найти координаты двух других вершин.
116. Найти уравнения прямых, на которых лежат три стороны квадрата, зная, что четвертой стороной является отрезок прямой $4x+3y-12=0$, концы которого лежат на осях координат.
117. Уравнение одной из сторон угла есть $4x-3y+9=0$, уравнение его биссектрисы: $x-7y+21=0$. Написать уравнение прямой, на которой лежит другая сторона угла.
118. Даны вершины треугольника A(–1, –1), B(1, 3) и C(4, –1). Из вершины B опущена высота. К какой из сторон ближе расположена середина этой высоты?
119. Составить уравнение прямой, делящей пополам отрезок между точками A(–3, 2) и B(5, –2) и образующей с отрезком AB угол вдвое больший, чем с осью Ox.
120. Из всех прямых, параллельных прямой $\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=1$, найти те, которые проходят на расстоянии 5 ед. от точки (2, 3).
121. Дан треугольник: A(1, 2), B(3, 7) и C(5, –13). Вычислить длину перпендикуляра, опущенного из вершины B на медиану, проведенную из вершины A.
122. На оси ординат найти точку, одинаково удаленную от начала координат и от прямой $3x-4y+12=0$.
123. Диагонали ромба длиной в 30 и 16 ед., приняты за оси координат. Вычислить расстояние между параллельными сторонами этого ромба.
124. Через точку P(–2, 1) проведена прямая так, что ее расстояние от точки C(3, 1) равно 4. Найти угловой коэффициент этой прямой.
125. Найти центр круга, касающегося прямых $3x-4y+10=0$ и $3x+4y=0$, причем радиус круга r = 8.
126. Даны точки A(2, –3) и B(5, –1). Провести прямую так, чтобы она прошла на расстоянии 6 ед. от точки A и на расстоянии 4 ед. от точки B.
127. Вычислить площадь треугольника, образованного биссектрисами внешних углов треугольника, стороны которого даны: $3x+3y-5=0$, $x-y-1=0$ и $7x+y+1=0$.

128. Точка движется так, что расстояние ее от начала координат остается все время вдвое больше расстояния от прямой $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$. Найти траекторию движущейся точки.
129. Нужно восстановить границы квадратного участка земли по трем сохранившимся столбам: одному в центре участка и по одному на двух противоположных границах. На плане положение столбов определено координатами: среднего M(1, 6) и двух боковых: A(5, 9) и B(3, 0). Составить уравнения прямых, изображающих искомые границы.

Взаимное расположение трех прямых на плоскости. Пучок прямых

Пучком прямых с центром в точке S называется множество всех прямых плоскости, проходящих через точку *S*.
Уравнение пучка прямых:

$$\alpha\left(A_1x + B_1y + C_1\right) + \beta\left(A_2x + B_2y + C_2\right) = 0,$$

где $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ – уравнения двух различных прямых, принадлежащих данному пучку.

Задачи

130. Определить взаимное расположение прямых в каждой из следующих троек прямых в аффинной системе координат:
   1) $2x + y - 3 = 0$, $3x - 2y + 5 = 0$, $5x - y + 2 = 0$;
   2) $x - 2y + 3 = 0$, $2x - 4y + 7 = 0$, $3x - 6y + 4 = 0$;
   3) $x + 4y - 5 = 0$, $x - 2y + 7 = 0$, $x + 3 = 0$;
   4) $y - 5 = 0$, $y + 2 = 0$, $y = 0$;
   5) $x - y + 3 = 0$, $2x - 2y + 7 = 0$, $4x - 4y + 1 = 0$;
   6) $2x + 3y + 5 = 0$, $x - y + 1 = 0$, $3x - 4y - 12 = 0$;
   7) $3x + 2y + 6 = 0$, $9x + 6y - 5 = 0$, $5x - y + 3 = 0$.
131. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку пересечения прямых $2x + y - 3 = 0$ и $7x - 4y + 2 = 0$. Система координат аффинная.

132. Написать уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $7x - y + 3 = 0$ и $3x + 5y - 4 = 0$ и через точку A(2, –1). Система координат аффинная.
133. Через точку пересечения прямых $3x - 5y + 2 = 0$ и $5x - 2y + 4 = 0$ провести прямую, параллельную прямой $2x - y + 4 = 0$. Система координат аффинная.
134. Через точку пересечения прямых $2x - 6y + 3 = 0$ и $5x + y - 2 = 0$ провести прямые, параллельные осям координат. Система координат аффинная.
135. Через точку пересечения прямых $x + y - 6 = 0$ и $2x + y - 13 = 0$ провести прямую, отсекающую на осях координат равные отрезки (учитывая их знаки).
136. Составить уравнение прямой, проходящей через точки пересечения пар прямых $2x - y = 0$, $x + 4y - 2 = 0$ и $x + 2y = 0$, $3x - 7y + 4 = 0$. Система координат аффинная.
137. Через точку пересечения прямых $3x - y = 0$ и $x + 4y - 2 = 0$ провести прямую, перпендикулярную к прямой $2x + 7y = 0$.
138. Составить уравнения прямых, проходящих через точку пересечения прямых $x + y - 4 = 0$ и $2x + 3y - 9 = 0$ и наклоненных ко второй из данных прямых под углом 45^0.
139. Через точку пересечения прямых $2x + y = 0$ и $3x + 7y - 11 = 0$ провести прямую, образующую с прямой $x + 4y = 0$ углы, тангенсы которых равны ±2.
140. Через точку пересечения прямых $3x + y + 10 = 0$ и $4x + 5y + 6 = 0$ провести прямую, отстоящую от начала координат на расстоянии 4.
141. Какому условию должны удовлетворять коэффициенты a и b, чтобы прямые $ax + by + 1 = 0$, $2x - 3y + 5 = 0$ и $x - 1 = 0$ проходили через одну и ту же точку?
142. Через точку пересечения прямых $2x - 5y - 1 = 0$ и $x + 4y - 7 = 0$ провести прямую, делящую отрезок между точками A(4, –3) и B(–1, 2) в отношении $\lambda = \frac{2}{3}$.
143. Не вычисляя координат вершин треугольника, написать уравнения прямых, проведенных через эти вершины параллельно противоположным сторонам. Стороны треугольника заданы уравнениями $5x - 2y + 6 = 0$, $4x - y + 3 = 0$ и $x + 3y - 7 = 0$.

144. Стороны угла, данные своими уравнениями $2x-3y+1=0$ и $x+4y-5=0$, пересечены рядом параллельных прямых $y=2x+b$. Найти геометрические места:
   1) середин отрезков параллельных прямых, заключенных между сторонами угла;
   2) точек, делящих в отношении $\lambda = 3$ отрезки параллельных прямых, заключенных между сторонами угла.

Тема 7. Плоскость

Различные виды уравнений плоскости

1. Общее уравнение плоскости: $Ax + By + Cz + D = 0$, причем $A, B\ C$ не равны одновременно нулю, $\bar{n} = \{A, B, C\}$ – нормальный вектор, перпендикулярный плоскости.
2. $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ – уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ с данным нормальным вектором $\bar{n} = \{A, B, C\}$.
3. Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно двум неколлинеарным векторам $\bar{p} = \{p_x, p_y, p_z\}$ и $\bar{q} = \{q_x, q_y, q_z\}$:
$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ p_x & p_y & p_z \\ q_x & q_y & q_z \end{vmatrix} = 0 \cdot$$
4. Уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ параллельно вектору $\bar{p} = \{p_x, p_y, p_z\}$:
$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = 0 \cdot$$
5. Уравнение плоскости, проходящей через три точки: $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$:
$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \cdot$$

6. Параметрические уравнения плоскости:

$$\begin{cases} x = x_0 + ul_1 + vl_2, \\ y = y_0 + um_1 + vm_2, \\ z = z_0 + un_1 + vn_2. \end{cases}$$

где $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка, через которую проходит плоскость, $\overline{q}_1 = \{l_1; m_1; n_1\}$ и $\overline{q}_2 = \{l_2; m_2; n_2\}$ – неколлинеарные векторы, параллельные плоскости.

7. Уравнение плоскости в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Задачи

145. Составить уравнение плоскости, проходящей через:
   1) точку M(–2, 3, 1) параллельно плоскости *Oxy*;
   2) точку M(1, –2, 4) параллельно плоскости *Oxz*;
   3) точку M(–5, 2, –1) параллельно плоскости *Oyz*;
   4) точку M(–2, 3, 1) и ось *Oy*;
   5) точку M(4, –1, 2) и ось *Ox*;
   6) точку M(3, –4, 7) и ось *Oz*.
146. Составить уравнение плоскости, проходящей через:
   1) точку A(5, –4, 6) перпендикулярно оси *Ox*;
   2) точку A(5, –4, 6) и отсекающей равные отрезки на положительных координатных полуосях.
147. Уравнение плоскости $2x - 6y + 3z - 14 = 0$ привести к нормальному виду.
148. Определить направляющие косинусы радиуса-вектора, перпендикулярного к плоскости $3x - 4y + 5z - 10 = 0$.
149. Написать уравнение плоскости:
   1) параллельной оси *Oz* и проходящей через точки $M_1(3, -1, 2)$ и $M_2(-1, 2, 5)$;
   2) проходящей через точку $M_1(3, -1, 2)$ перпендикулярно вектору $\overline{M_1M_2}$.
150. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2, 3, -4)$ и параллельной векторам $\overline{a} = \{-3,\ 2,\ -1\}$, $\overline{b} = \{0,\ 3,\ 1\}$

.

151. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2, 0, -1)$ и $M_2(-3, 1, 3)$ параллельно вектору $\bar{s} = \{1,\ 2,\ -1\}$.
152. Написать уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки: $M_1(1, 0, -1)$, $M_2(2, 2, 3)$, $M_3(0, -3, 1)$.
153. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M(1, –2, 3) и линию пересечения плоскостей $2x - y + 2z - 6 = 0$ и $3x + 2y - z + 3 = 0$.
154. Составить уравнение плоскости, отсекающей на осях *Ox* и *Oy* отрезки, соответственно равные 5 и –7, и проходящей через точку (1, 1, 2).
155. Составить уравнение плоскости, отсекающей на осях аффинной системы координат отрезки, соответственно равные 3, 5 и –7.
156. Составить уравнение плоскости, отсекающей на оси *Oz* отрезок $c = -5$ и перпендикулярной к вектору $n = \{-2; 1; 3\}$.
157. Составить уравнения плоскостей, проходящих через оси координат и параллельных вектору $\{2,\ 1,\ -4\}$.
158. Составить уравнения плоскостей, проходящих через оси координат и через точку (3, –5, 1).
159. Составить параметрические уравнения плоскости, проходящей через точку (2, 3, –5) и параллельной векторам $\{-5,\ 6,\ 4\}$ и $\{4,\ -2,\ 0\}$.
160. Написать общее уравнение плоскости по её параметрическим уравнениям в каждом из следующих случаев:

1) $\begin{cases} x = 2 + 3u - 4v, \\ y = 4 - v, \\ z = 2 + 3u. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = u + v, \\ y = u - v, \\ z = 5 + 6u - 4v. \end{cases}$

161. Найти плоскость, зная, что точка M(2, –4, 4) служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту плоскость.
162. Даны точки A(3, –2, 1) и B(6, 0, 5). Составить уравнение плоскости, проходящей через точку *B* и перпендикулярной к прямой *AB*.

Взаимное расположение плоскостей

Утверждение. Плоскости, заданные уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, параллельны, если выполняется условие

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

Утверждение. Плоскости, заданные уравнениями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, совпадают тогда, когда выполняется условие

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}.$$

Утверждение. Плоскости, заданные уравнениями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, перпендикулярны тогда, когда выполняется условие

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

Условие параллельности плоскостей

Задачи

163. Даны четыре вершины тетраэдра: A(3, 5, –1), B(7, 5, 3), C(9, –1, 5), D(5, 3, –3). Написать уравнения плоскостей, равноудалённых от всех вершин тетраэдра.
164. Установить, какие из следующих пар плоскостей пересекаются, параллельны или совпадают:
    1) $2x+3y+4z-12=0$, $3x-6y+1=0$;
    2) $3x-4y+6z+9=0$, $6x-8y-10z+15=0$;
    3) $3x-2y-3z+5=0$, $9x-6y-9z-5=0$;
    4) $x+y+z-1=0$, $2x+2y-2z+3=0$;
    5) $2x-y-z-3=0$, $10x-5y-5z-15=0$.
165. Даны уравнения трех граней параллелепипеда $2x+3y+4z-12=0$, $x+3y-6=0$, $z+5=0$ и одна из его вершин (6, –5, 1). Составить уравнения трех других граней параллелепипеда.
166. Определить, при каких значениях l и m следующие пары уравнений будут определять параллельные плоскости:
    1) $2x+ly+3z-5=0$, $mx-6y-6z+2=0$;
    2) $3x-y+lz-9=0$, $2x+my+2z-3=0$;
    3) $mx+3y-2z-1=0$, $2x-5y-lz=0$.
167. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M(0, −3, 2) параллельно плоскости, проходящей через точки $M_1(0, -2, -1)$, $M_2(1, -3, 4)$, $M_3(1, 1, -1)$.

168. Написать уравнение плоскости, расположенной на равном расстоянии от двух данных параллельных плоскостей $4x-3y+z-2=0$ и $4x-3y+z+8=0$.

Условие перпендикулярности плоскостей

Задачи

169. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(4, 2, 3)$ и $M_2(2, 0, 1)$ и перпендикулярной к плоскости $x+2y+3z+4=0$.
170. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M(1, 0, 3) и перпендикулярной к плоскостям $x+y+z-8=0$ и $2x-y+4z+5=0$.
171. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной к прямой пересечения плоскости $x-2y+4z-3=0$ с плоскостью Oxz.
172. Найти основание перпендикуляра, опущенного из точки (1, 3, 5) на прямую, по которой пересекаются плоскости $2x+y+z-1=0$ и $3x+y+2z-3=0$.
173. Определить, при каком значении l следующие пары уравнений будут определять перпендикулярные плоскости:
    1) $3x-5y+lz-3=0$, $x+3y+2z+5=0$;
    2) $7x-2y-z=0$, $lx+y-3z-1=0$.
174. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $2x-y-12z-3=0$ и $3x+y-7z-2=0$ перпендикулярно плоскости $4x-2y+25=0$.

Нахождение угла между плоскостями

Определение. *Углом между двумя плоскостями* называется угол между их нормальными векторами.

Утверждение. Косинус угла между двумя плоскостями, заданными уравнениями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, вычисляется по формуле

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Задачи

175. Найти величину острого угла между плоскостями:
   1) $11x-8y-7z-15=0$, $4x-10y+z-2=0$;
   2) $2x+3y-4z+4=0$, $5x-2y+z-3=0$.
176. Через начало координат провести плоскость, перпендикулярную к плоскости $5x-2y+5z-10=0$ и образующую с плоскостью $x-4y-8z+12=0$ угол 45^0.
177. Вычислить косинусы внутренних двугранных углов тетраэдра, образованного плоскостями координат и плоскостью $2x+3y+6z-12=0$.
178. Найти косинус угла между плоскостями $3x+y-2z+4=0$ и $x-7y+2z=0$, в котором лежит точка (1, 1, 1).
179. Грани тетраэдра заданы уравнениями $2x-2y+z+2=0$, $x+y+z-5=0$, $8x+4y+z-16=0$, $4x+3y=0$. Вычислить косинус внутреннего двугранного угла тетраэдра, ребром которого служит линия пересечения первых двух плоскостей.
180. Определить уравнение плоскости, проходящей через ось Oy и составляющей с плоскостью $x+\sqrt{6}y-z-3=0$ угол 60^0.
181. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(0, 0, 2)$ и $M_2(0, 1, 0)$ и образующей угол 45^0 с плоскостью Oyz.

Пучок плоскостей. Связка плоскостей

Определение. *Пучком плоскостей в пространстве* называется совокупность всех плоскостей, проходящих через данную прямую.

Определение. Уравнением пучка плоскостей, проходящих через прямую, определяемую пересечением пары непараллельных плоскостей

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$

причем A_1, B_1, C_1 не равны одновременно нулю и

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

причем A_2, B_2, C_2 не равны одновременно нулю, называется уравнение вида

$$\alpha\left(A_1x+B_1y+C_1z+D_1\right)+\beta\left(A_2x+B_2y+C_2z+D_2\right)=0,$$

причем α и β не равны нулю одновременно.

Определение. *Связкой плоскостей в пространстве* называется совокупность всех плоскостей, проходящих через данную точку.

Определение. Если точка Р, принадлежащая одновременно трем плоскостям

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

причем A_1, B_1, C_1 не равны одновременно нулю,

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

причем A_2, B_2, C_2 не равны одновременно нулю и

$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0,$$

причем A_3, B_3, C_3 не равны одновременно нулю и единственная, то уравнение вида

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) + \gamma(A_3x + B_3y + C_3z + D_3) = 0,$$

где α, β и γ не равны нулю одновременно, называется *уравнением связки плоскостей*, проходящих через точку Р.

Задачи

182. Написать уравнение плоскости, проходящей через начало координат и через линию пересечения плоскостей $2x + 5y - 6z + 4 = 0$, $3y + 2z + 6 = 0$.
183. Через линию пересечения плоскостей $6x - y + z = 0$, $5x + 3z - 10 = 0$ провести плоскость, параллельную оси *Ox*.
184. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $x + 2y + 3z - 4 = 0$, $3x + z - 5 = 0$ и отсекающей на осях *Oy* и *Oz* равные отрезки.
185. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $2x - z = 0$, $x + y - z + 5 = 0$ и перпендикулярной к плоскости $7x - y + 4z - 3 = 0$.
186. Составить уравнение плоскости, перпендикулярной к плоскости $x + 3y + 5z - 10 = 0$ и проходящей через линию пересечения данной плоскости с плоскостью *Oxy*.
187. В пучке, определяемом плоскостями $2x + y - 3z + 2 = 0$ и $5x + 5y - 4z + 3 = 0$, найти две перпендикулярные друг другу плоскости, из которых одна проходит через точку (4, –3, 1).
188. В пучке, определяемом плоскостями $3x + y - 2z - 6 = 0$ и $x - 2y + 5z - 1 = 0$, найти плоскости, перпендикулярные к этим плоскостям.

189. Через линию пересечения плоскостей $x+5y+z=0$ и $x-z+4=0$ провести плоскость, образующую угол 45^0 с плоскостью $x-4y-8z+12=0$.
190. Через ось Oz провести плоскость, образующую с плоскостью $2x+y-\sqrt{5}z-7=0$ угол 60^0.
191. Даны уравнения граней тетраэдра: $x+2y+z+2=0$ (1), $x+y-1=0$ (2), $x-y-z=0$ (3), $3x+z+1=0$ (4). Написать уравнение плоскости, проходящей через ребро, определяемое двумя первыми гранями, и через середину ребра, определяемого двумя последними гранями.
192. Даны три плоскости: $2x+3y-4z+5=0$, $2x-z+3=0$, $x+y-z=0$. Через линию пересечения двух плоскостей провести плоскость так, чтобы линия ее пересечения с третьей плоскостью была перпендикулярна к линии пересечения первой и второй плоскостей.
193. Даны уравнения граней тетраэдра: $x+2y-3z-6=0$ (1), $2y+5z-4=0$ (2), $3x+z+1=0$ (3), $x+2y=0$ (4). Написать уравнение плоскости, проходящей через ребро, определяемое двумя первыми гранями, и параллельной противоположному ребру тетраэдра.
194. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку пересечения трех плоскостей $x-y=0$, $x+y-2z+1=0$, $2x+z-4=0$ и
    1) проходящей через ось Oy;
    2) параллельной плоскости Oxz;
    3) проходящей через начало координат и точку (2, 1, 7).

Расстояние от точки до плоскости

Определение. *Расстоянием от точки до плоскости* называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на данную плоскость.
Утверждение. Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости, заданной уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, где A, B и C не равны одновременно нулю, вычисляется по формуле

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Задачи

195. Определить расстояния от точек A(3, 5, 7), B(7, –1, 2), C(2, 0, 4) до плоскости $x+2y-2z+5=0$.
196. Составить уравнения биссекторных плоскостей углов между двумя плоскостями $7x+y-6=0$, $3x+5y-4z+1=0$.
197. Даны вершины тетраэдра A(0, 0, 2), B(3, 0, 5), C(1, 1, 0) и D(4, 1, 2). Вычислить длину высоты, опущенной из вершины *D* на грань *ABC*.
198. Составить уравнение плоскости, отстоящей от начала координат на расстоянии $\sqrt{29}$ и перпендикулярной к прямой, по которой пересекаются плоскости $2x-y+z=0$, $6x-y+7z-4=0$.
199. На оси Oz найти точку, равноудаленную от точки (2, 3, 4) и от плоскости $2x+3y+z-17=0$.
200. На оси *Oy* найти точки, равноудаленные от плоскостей $x+y-z+1=0$ и $x-y+z-5=0$.
201. Составить уравнение плоскости, параллельной плоскости $2x+y-4z+5=0$ и отстоящей от точки (1, 2, 0) на расстоянии $\sqrt{21}$.
202. На линии пересечения двух плоскостей $2x-y+z-8=0$, $4x+3y-z+14=0$ найти точки, отстоящие от плоскости $2x+3y-6z-10=0$ на расстоянии 7.
203. На прямой, по которой пересекается плоскость $2x-3y+4z-5=0$ с плоскостью *Oxz*, найти точки, отстоящие от плоскости $2x+y-z+3=0$ на расстоянии $\sqrt{6}$.
204. Написать уравнение плоскости, отсекающей на осях координат отрезки, пропорциональные числам 1, 2, 3, и отстоящей от точки (3, 5, 7) на расстоянии 4.
205. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку A(5, 2, 0) и удалённой от точки B(6, 1, –1) на расстояние 1 и от точки C(0, 5, 4) на расстояние 3.
206. Через линию пересечения плоскостей $2x-y+z-8=0$, $4x+3y-z+14=0$ провести плоскости, отстоящие от начала координат на расстоянии 1.

Тема 8. Прямая в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Различные виды уравнений прямой в пространстве

1. $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ – каноническое уравнение прямой, $M_0(x_0,y_0,z_0)$ – точка, через которую проходит прямая, $\overline{q}=\{l;m;n\}$ – направляющий вектор прямой.
2. $\begin{cases} x=x_0+lt, \\ y=y_0+mt, \\ z=z_0+nt \end{cases}$ – параметрические уравнения прямой.
3. $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$ – уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$.
4. $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ – уравнения прямой, заданной в виде пересечения двух плоскостей.

Формулы перехода от уравнений прямой, заданной в виде пересечения двух плоскостей, к каноническому виду

$$l=\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix},\quad m=-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix},\quad n=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}.$$

В качестве точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ можно взять любую точку, координаты которой удовлетворяют системе уравнений плоскостей:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}.$$

Задачи

207. Составить уравнение прямой M_1M_2 в каждом из следующих случаев, учитывая, что система координат аффинная:

1) $M_1(2, 3, 1)$, $M_2(4, 6, 9)$;
2) $M_1(7, -1, 2)$, $M_2(5, -1, 4)$;
3) $M_1(1, 5, 1)$, $M_2(1, -5, 1)$.

208. Составить параметрические уравнения прямых, учитывая, что система координат аффинная:

1) $\begin{cases} x - 2y + 4z = 0, \\ 3x - 2y + 5z = 0. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y - z + 5 = 0, \\ 2x - y + 2z - 2 = 0. \end{cases}$

209. Написать уравнение прямой, проходящей через:

1) точку (3, 5, 1) параллельно прямой $\begin{cases} x = 2 + 4t, \\ y = -3t, \\ z = -3. \end{cases}$

2) точку (0, –5, 4) параллельно прямой $\begin{cases} x + 2y + 6 = 0, \\ z - 5 = 0. \end{cases}$

210. Представить каждую из следующих прямых как линию пересечения плоскостей, параллельных осям *Ox* и *Oy:*

1) $\begin{cases} x = 3 + 5t, \\ y = 7 - 4t, \\ z = -6 + t. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = -1 + t, \\ y = 1 - t, \\ z = 5t. \end{cases}$

Взаимное расположение прямых в пространстве

Утверждение. Две прямые, заданные уравнениями

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1} \text{ и } \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2},$$

параллельны, но не совпадают тогда и только тогда, когда выполняются условия:

$$\begin{cases} \dfrac{l_2}{l_1} = \dfrac{m_2}{m_1} = \dfrac{n_2}{n_1}; \\ \left[\begin{array}{l} \dfrac{x_2 - x_1}{l_1} \neq \dfrac{y_2 - y_1}{m_1} \\ \dfrac{y_2 - y_1}{m_1} \neq \dfrac{z_2 - z_1}{n_1} \end{array} \right. \end{cases}.$$

Утверждение. Две прямые, заданные уравнениями

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \text{ и } \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2},$$

совпадают тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\begin{cases} \dfrac{l_2}{l_1}=\dfrac{m_2}{m_1}=\dfrac{n_2}{n_1}; \\ \dfrac{x_2-x_1}{l_1}=\dfrac{y_2-y_1}{m_1}=\dfrac{z_2-z_1}{n_1} \end{cases}.$$

Утверждение. Две прямые, заданные уравнениями

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \text{ и } \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2},$$

лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0 \cdot$$

Утверждение. Две прямые, заданные уравнениями

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \text{ и } \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2},$$

скрещиваются тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}\neq 0$$

Задачи

В задачах 211–213 установить, какие из следующих пар прямых скрещиваются, параллельны, пересекаются или совпадают; если прямые параллельны, написать уравнение плоскости, через них проходящей; если прямые пересекаются, написать уравнение содержащей их плоскости и найти их общую точку.

211. 1) $\begin{cases} x=1+2t, \\ y=7+t, \\ z=3+4t. \end{cases}$ и $\begin{cases} x=6+3t, \\ y=-1-2t, \\ z=-2+t. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 2 - 2t, \\ z = -t. \end{cases}$ и $\begin{cases} x = -2t, \\ y = -5 + 3t, \\ z = 4. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = 2 + 4t, \\ y = -6t, \\ z = -1 - 8t. \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 7 - 6t, \\ y = 2 + 9t, \\ z = 12t. \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = 1 + 9t, \\ y = 2 + 6t, \\ z = 3 + 3t. \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 7 + 6t, \\ y = 6 + 4t, \\ z = 5 + 2t. \end{cases}$

212. 1) $\begin{cases} x + z - 1 = 0, \\ 3x + y - z + 13 = 0. \end{cases}$ и $\begin{cases} x - 2y + 3 = 0, \\ y + 2z - 8 = 0. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x + 3y = 0, \\ x + z - 8 = 0. \end{cases}$ и $\begin{cases} z - 4 = 0, \\ 2x + 3z - 7 = 0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y + z - 1 = 0, \\ y + 4z = 0. \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x + 3y + 6z - 6 = 0, \\ 3x + 4y + 7z = 0. \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x + y - 2z - 6 = 0, \\ 41x - 19y + 52z - 68 = 0. \end{cases}$ и $\begin{cases} x - 2y + 5z - 1 = 0, \\ 33x + 4y - 5z - 68 = 0. \end{cases}$

213. 1) $\begin{cases} x = 9t, \\ y = 5t, \\ z = -3 + t. \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x - 3y - 3z - 9 = 0, \\ x - 2y + z + 3 = 0. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = t, \\ y = -8 - 4t, \\ z = -3 - 3t. \end{cases}$ и $\begin{cases} x + y - z = 0, \\ 2x - y + 2z = 0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = 3 + t, \\ y = -1 + 2t, \\ z = 4. \end{cases}$ и $\begin{cases} x - 3y + z = 0, \\ x + y - z + 4 = 0. \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = -2 + 3t, \\ y = -1, \\ z = 4 - t. \end{cases}$ и $\begin{cases} 2y - z + 2 = 0, \\ x - 7y + 3z - 17 = 0. \end{cases}$

Взаимное расположение прямой и плоскости

Утверждение. Для того чтобы *прямая* с уравнением $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ *была параллельна плоскости* с уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\begin{cases} Al + Bm + Cn = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0 \end{cases}.$$

Утверждение. Для того чтобы *прямая* с уравнением $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ *лежала в плоскости* с уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\begin{cases} Al+Bm+Cn=0 \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0 \end{cases}.$$

Задачи

В задачах 214–215 установить в каждом из случаев, лежит ли данная прямая в данной плоскости, параллельна плоскости или пересекает ее; в последнем случае найти точку пересечения прямой и плоскости.

214. 1) $\frac{x-12}{4}=\frac{y-9}{3}=\frac{z-1}{1}$, $3x+5y-z-2=0$;

2) $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z}{3}$, $3x-3y+2z-5=0$;

3) $\frac{x-13}{8}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{3}$, $x+2y-4z+1=0$;

4) $\frac{x-7}{5}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-5}{4}$, $3x-y+2z-5=0$.

215. 1) $\begin{cases} 3x+5y-7z+16=0, \\ 2x-y+z-6=0. \end{cases}$ и $5x-z-4=0$;

2) $\begin{cases} 2x+3y+6z-10=0, \\ x+y+z+5=0. \end{cases}$ и $y+4z+17=0$;

3) $\begin{cases} x+2y+3z+8=0, \\ 5x+3y+z-16=0. \end{cases}$ и $2x-y-4z-24=0$.

216. Найти проекцию прямой на плоскость Oxy в каждом из следующих случаев:

1) $\begin{cases} 5x+8y-3z+9=0, \\ 2x-4y+z-1=0. \end{cases}$

2) $\frac{x-3}{-5}=\frac{y-4}{6}=\frac{z-6}{8}$.

217. Найти точки пересечения с плоскостями координат каждой из следующих прямых:

1) $\begin{cases} 6x + 2y - z - 9 = 0, \\ 3x + 2y + 2z - 12 = 0. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = 6 + 2t, \\ y = -2 + 4t, \\ z = -5t. \end{cases}$

218. Найти точку встречи прямой $\begin{cases} x = 2t, \\ y = 1 - t, \\ z = 3 + t. \end{cases}$ с плоскостью $x + y + z - 10 = 0$. Система координат аффинная.

219. Составить уравнение прямой, лежащей в плоскости $y + 2z = 0$ и пересекающей прямые $\begin{cases} x = 1 - t, \\ y = t, \\ z = 4t. \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 2 - t, \\ y = 4 + 2t, \\ z = 1. \end{cases}$ Система координат аффинная.

220. Составить уравнение прямой, проходящей через точку (3, −1, −4), пересекающей ось *Oy* и коллинеарной плоскости $y + 2z = 0$. Система координат аффинная.

221. Составить уравнение прямой, проходящей через точку (2, 3, 1) и пересекающей прямые $\begin{cases} x + y = 0, \\ x - y + z + 4 = 0. \end{cases}$ и $\begin{cases} x + 3y - 1 = 0, \\ y + z - 2 = 0. \end{cases}$. Система координат аффинная.

222. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и через прямую $\begin{cases} x = 3 - 2t, \\ y = 1 + t, \\ z = t. \end{cases}$. Система координат аффинная.

223. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку (−3, 1, 0) и через прямую $\begin{cases} x + 2y - z + 4 = 0, \\ 3x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$.

224. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} x = 2 + 3t, \\ y = -1 + 6t, \\ z = 4t. \end{cases}$ и коллинеарную прямой $\begin{cases} x = -1 + 2t, \\ y = 3t, \\ z = -t. \end{cases}$.

225. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку (−2, 3, 0) и через прямую $\begin{cases} x = 1, \\ y = 2 + t, \\ z = 2 - t. \end{cases}$

226. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось *Oy* и коллинеарной линии пересечения двух плоскостей $\begin{cases} x + 4y - 2z + 7 = 0, \\ 3x + 7y - 2z = 0 \end{cases}$. Система координат аффинная.

Угол между двумя прямыми. Угол прямой и плоскости. Условие перпендикулярности двух прямых. Условие перпендикулярности прямой и плоскости

Определение. *Углом между двумя прямыми* называется угол между их направляющими векторами.

Утверждение. Косинус угла между двумя прямыми, заданными уравнениями $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ и $\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$, вычисляется по формуле $\cos\varphi=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$.

Следствие. Условие перпендикулярности двух прямых:

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0.$$

Определение. *Углом между прямой и плоскостью* называется угол между прямой и ортогональной проекцией этой прямой на данную плоскость.

Утверждение. Синус угла между прямой, заданной уравнением $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$, и плоскостью, заданной уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, вычисляется по формуле

$$\sin\varphi=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

Утверждение. Прямая, заданная уравнением $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$, перпендикулярна плоскости, заданной уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}.$$

Задачи

227. Определить направляющие конусы прямых:

1) $\frac{x-1}{4}=\frac{y-5}{-3}=\frac{z+2}{12}$; 2) $\frac{x}{12}=\frac{y-7}{9}=\frac{z+3}{20}$.

228. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку A(1, –5, 3) и образует с осями координат углы, соответственно равные 60^0, 45^0, 120^0.

229. Определить угол, образованный прямыми $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{6}=\frac{z-5}{2}$ и $\frac{x}{2}=\frac{y-3}{9}=\frac{z+1}{6}$.

230. Вычислить углы, образованные противоположными ребрами тетраэдра с вершинами A(3, –1, 0), B(0, –7, 3), C(–2, 1, –1), D(3, 2, 6).

231. Вычислить направляющие конусы прямой $5x-6y+2z+21=0,\ x-z+3=0$.

232. Найти косинусы углов между прямыми:

1) $\begin{cases} x=3+t, \\ y=7-2t, \\ z=4+3t. \end{cases}$ и $\begin{cases} x=2+5t, \\ y=1-t, \\ z=1. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x+y-z+1=0, \\ 3x-y+z=0. \end{cases}$ и $\begin{cases} x-y+1=0, \\ 2x+2y-5z+1=0. \end{cases}$

233. Найти угол между прямой $\begin{cases} x=5+6t, \\ y=1-3t, \\ z=2+t. \end{cases}$ и плоскостью $7x+2y-3z+5=0$.

234. Найти угол между прямой $x+y-z=0,\ 2x-3y+z=0$ и плоскостью $3x+5y-4z+2=0$.

235. Составить уравнения проекции прямой $2x+y-z+4=0,\ x+y=0$ на плоскость Oxz.

236. Составить уравнения проекции прямой $\begin{cases} x=3+5t, \\ y=-1+t, \\ z=4+t. \end{cases}$ на плоскость $2x-2y+3z-5=0$.

237. Составить уравнения перпендикуляра, опущенного из точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на плоскость $Ax+By+Cz+D=0$.

238. Из точки (3, –2, 4) опустить перпендикуляр на плоскость $5x+3y-7z+1=0$.

239. Найти проекцию точки (1, 2, –3) на плоскость $6x-y+3z-41=0$.

240. Найти точку, симметричную точке (2, 7, 1) относительно плоскости $x-4y+z+7=0$.

241. Составить уравнение прямой, перпендикулярной к плоскости Oxz и пересекающей две прямые $\begin{cases} x=t, \\ y=-4+t, \\ z=3-t. \end{cases}$ и $\begin{cases} x=1-2t, \\ y=-3+t, \\ z=4-5t. \end{cases}$

242. Через начало координат провести плоскость, перпендикулярную к прямой $\frac{x+2}{4}=\frac{y-3}{5}=\frac{z-1}{-2}$.

243. Найти точку, симметричную данной (4, 3, 10) относительно прямой $\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 2 + 4t,. \\ z = 3 + 5t. \end{cases}$

244. Найти прямую, проходящую через точку M(0, 1, 1), образующую прямой угол с прямой $\begin{cases} y + 1 = 0, \\ x + 2z - 7 = 0 \end{cases}$ и пересекающую прямую $\begin{cases} x - 1 = 0, \\ z + 1 = 0. \end{cases}$

245. Составить уравнение прямой, пересекающей ортогонально ось *Oy* и прямую $\begin{cases} x = 3 + 4t, \\ y = 1 - t, \\ z = 2 + 5t. \end{cases}$

246. Составить уравнения перпендикуляра, опущенного из точки (3, 2, 1) на ось *Ox*.

247. Составить уравнения перпендикуляра, опущенного из точки (−1, 0, 4) на прямую $\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2t, \\ z = 4 - t. \end{cases}$.

248. Провести через точку пересечения плоскости $x + y + z + -1 = 0$ с прямой $\begin{cases} y - 1 = 0, \\ z + 1 = 0. \end{cases}$ прямую, лежащую в этой плоскости и перпендикулярную к данной прямой.

Расстояние от точки до прямой. Кратчайшее расстояние между двумя прямыми

Утверждение. Расстояние от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до прямой с уравнением $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ вычисляется по формуле

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ l & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ l & m \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Утверждение. Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми с уравнениями $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ и $\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$ вычисляется по формуле

$$d=\frac{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}^2}}.$$

Задачи

249. Найти расстояние от точки (1, 3, 5) до прямой, по которой пересекаются плоскости $2x+y+z-1=0$, $3x+y+2z-3=0$.
250. Найти расстояние от точки (1, 2, 5) до каждой из следующих прямых:
   1) $\begin{cases} x=t, \\ y=1-2t, \\ z=3+t. \end{cases}$
   2) $\begin{cases} x+y-z+2=0, \\ 4x-3z+3=0. \end{cases}$
251. Найти уравнение и длину высоты треугольника, образуемого пересечением плоскости $3x-y+4z-12=0$ с координатными плоскостями при условии, что вершина треугольника лежит на оси Oz.
252. Найти кратчайшее расстояние между двумя прямыми:
   1) $\begin{cases} x=3+t, \\ y=1-t, \\ z=2+2t. \end{cases}$ и $\begin{cases} x=-t, \\ y=2+3t, \\ z=3t. \end{cases}$
   2) $\begin{cases} x+y-z+1=0, \\ x+y=0. \end{cases}$ и $\begin{cases} x-2y+3z-6=0, \\ 2x-y+3z-6=0. \end{cases}$
   3) $\begin{cases} x+2y-z+1=0, \\ 2x-3y+z-4=0. \end{cases}$ и $\begin{cases} x+y+z-9=0, \\ 2x-y-z=0. \end{cases}$
253. Найти расстояние между двумя параллельными прямыми $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{2}$ и $\frac{x-7}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-3}{2}$.
254. Найти кратчайшее расстояние между диагональю куба и не пересекающей ее диагональю грани, если ребро куба равно 1.

Лабораторная работа № 3
Прямая на плоскости

Уравнение пучка прямых полезно применять при решении задач на прямые. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Через точку пересечения прямых $3x - y = 0$, $x + 4y - 2 = 0$ провести прямую, перпендикулярную к прямой $2x + 7y = 0$.

Решение. Уравнение искомой прямой запишем как уравнение прямой из пучка $\alpha(3x - y) + \beta(x + 4y - 2) = 0$. Коэффициенты α и β найдем из условия перпендикулярности ее прямой $2x + 7y = 0$. Выразим угловые коэффициенты этих прямых: $k_1 = \dfrac{3\alpha + \beta}{\alpha - 4\beta}$, $k_2 = -\dfrac{2}{7}$,

запишем условие их перпендикулярности: $\left(-\dfrac{2}{7}\right) \cdot \left(\dfrac{3\alpha + \beta}{\alpha - 4\beta}\right) = -1$.

Решаем полученное уравнение $6\alpha + 2\beta = 7\alpha - 28\beta$, $\alpha = 30\beta$. Уравнение имеет бесконечно много решений. Берем одно из них (ненулевое), например $\beta = 1$, $\alpha = 30$. Найденные α и β подставляем в уравнение прямой

$$30(3x - y) + 1(x + 4y - 2) = 0 \text{ или } 91x - 26y - 2 = 0.$$

Ответ: $91x - 26y - 2 = 0$.

Пример 2. Через точку пересечения прямых $3x + y + 10 = 0$, $4x + 5y + 6 = 0$ провести прямую, отстоящую от начала координат на расстоянии 4.

Решение. Уравнение искомой прямой запишем как уравнение прямой из пучка, заданного прямыми

$3x + y + 10 = 0$ и $4x + 5y + 6 = 0$, $\alpha(3x + y + 10) + \beta(4x + 5y + 6) = 0$ или

$$(3\alpha + 4\beta)x + (\alpha + 5\beta)y + 10\alpha + 6\beta = 0.$$

Выразим расстояние ее до начала координат:

$$d = \frac{|10\alpha + 6\beta|}{\sqrt{(3\alpha + 4\beta)^2 + (\alpha + 5\beta)^2}}.$$

Составим уравнение по условию задачи:

$$\frac{|10\alpha + 6\beta|}{\sqrt{(3\alpha + 4\beta)^2 + (\alpha + 5\beta)^2}} = 4 .$$

Решаем его:

$$(10\alpha + 6\beta)^2 = 16\left((3\alpha + 4\beta)^2 + (\alpha + 5\beta)^2\right),$$

$$(5\alpha + 3\beta)^2 = 4(3\alpha + 4\beta)^2 + 4(\alpha + 5\beta)^2 ,$$

$$25\alpha^2 + 30\alpha\beta + 9\beta^2 = 36\alpha^2 + 96\alpha\beta + 64\beta^2 + 4\alpha^2 + 40\alpha\beta + 100\beta^2 ,$$

$$15\alpha^2 + 106\alpha\beta + 155\beta^2 = 0 ,$$

$$15\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + 106\frac{\alpha}{\beta} + 155 = 0,$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_{1,2} = \frac{-53 \pm \sqrt{53^2 - 15 \cdot 155}}{15},$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_1 = -\frac{31}{15}, \quad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_2 = -\frac{75}{15} = -5.$$

Получаем две прямые:

1) при $\beta = 15, \alpha = -31$: $3x - 4y + 20 = 0$;

2) при $\beta = 1, \alpha = -5$: $x + 4 = 0$.

Ответ: $3x - 4y + 20 = 0$, $x + 4 = 0$.

Варианты лабораторной работы

ВАРИАНТ 1

1. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку пересечения прямых $2x + y - 3 = 0$, $7x - 4y + 2 = 0$.
2. В параллелограмме *ABCD* даны уравнения сторон *(AB)*: $2x - y + 1 = 0$ и *(AD)*: $x + y - 3 = 0$. Написать уравнения его высот *AM* и *AN*.

3. В треугольнике *ABC* известны уравнения стороны *(AB)*: $x+2y+1=0$, высот *(AH)*: $2x+3y-4=0$, *(BH)*: $3x-7y+1=0$. Записать уравнения двух других его сторон.

ВАРИАНТ 2

1. Написать уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $3x-5y+2=0$ и $5x-2y+4=0$ параллельно прямой $2x+y+4=0$.
2. Написать уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $x-3y+1=0$, $2x+y-3=0$ и отстоящей от точки A(–1, 0) на расстоянии 1.
3. Даны уравнения сторон квадрата *(AB)*: $x+2y+1=0$ и *(AD)*: $2x-y+4=0$. Найти уравнение его диагонали *AC*.

ВАРИАНТ 3

1. Через точку пересечения прямых $2x-6y+3=0$, $5x+y-2=0$ провести прямые, параллельные осям координат.
2. Через точку пересечения прямых $2x+y-3=0$, $x-y+1=0$ провести прямую, делящую отрезок между точками A(4, 2) и B(2, –6) пополам.
3. В равнобедренном треугольнике известны уравнения боковых сторон $4x-y+5=0$, $2x+3y+1=0$. Написать уравнение его высоты.

ВАРИАНТ 4

1. Через точку пересечения прямых $x+y-6=0$ и $2x+y-13=0$ провести прямую, отсекающую на осях координат равные отрезки.
2. Найти прямую, проходящую через точку A(2, –1) и точку пересечения прямых $x-2y+1=0$, $2x+3y-7=0$.
3. В пучке прямых $x-3y+1=0$, $2x+5y-7=0$ выделить прямую, параллельную оси *Ox*.

ВАРИАНТ 5

1. Составить уравнения прямых, проходящих через точку пересечения прямых $x+y-4=0$, $2x+3y-9=0$ и наклоненных ко второй из данных прямых под углом 45°.

2. Через точку пересечения прямых $x+y-1=0$, $2x+5y-7=0$ провести прямую параллельно прямой $3x+8y-1=0$.
3. В параллелограмме *ABCD* даны уравнения сторон *(AB)*: $3x-y+1=0$, *(AD)*: $x+2y+4=0$ и диагонали *(BD)*: $5x+3y-4=0$. Найти уравнения двух других его сторон.

ВАРИАНТ 6

1. Через точку пересечения прямых $2x+y=0$, $3x+7y-11=0$ провести прямую, образующую с прямой $x+4y=0$ углы, тангенсы которых равны ±2.
2. Через точку пересечения прямых $2x+3y-1=0$, $x-y+4=0$ провести прямую, отсекающую на осях координат равные отрезки (одного знака).
3. Даны уравнения двух сторон ромба $2x+y-1=0$, $6x+3y-19=0$ и его диагонали $x=0$. Найти уравнения двух других его сторон.

ВАРИАНТ 7

1. Через точку пересечения прямых $2x+5y-8=0$, $x-3y+4=0$ провести прямую, делящую отрезок между точками A(–3, 2), B(1, 4) пополам.
2. Через точку пересечения прямых $2x+y-1=0$, $3x+2y-4=0$ провести прямую, составляющую с осью абсцисс угол 45°.
3. Даны уравнения сторон прямоугольника $2x+y-1=0$, $2x+y+4=0$ и его диагонали $3x+4y-7=0$. Составить уравнения двух других сторон прямоугольника.

ВАРИАНТ 8

1. Зная уравнения одной из сторон угла $2x-3y+4=0$ и его биссектрисы $x+y-1=0$, найти уравнение второй стороны угла.
2. Через точку пересечения прямых $5x+y-1=0$, $x-3y+1=0$ провести прямую, отсекающую на осях координат равные отрезки (разных знаков).
3. Даны уравнения двух сторон ромба $x-3y=0$, $x-3y-7=0$ и диагонали $2x+5y-3=0$. Найти уравнения двух других его сторон.

ВАРИАНТ 9

1. Написать уравнения прямых, проходящих через вершины треугольника параллельно противолежащим сторонам, если уравнения сторон треугольника $x+y-1=0$, $2x+3y-12=0$, $x=0$.
2. Через точку пересечения прямых $3x+3y=0$, $5x+3y+2=0$ провести прямую, отстоящую от точки (3, –1) на расстоянии 2.
3. Даны уравнения сторон ромба $x+3y+1=0$, $3x+y+16=0$. Найти уравнение биссектрисы его угла.

ВАРИАНТ 10

1. Составить уравнения высот треугольника, зная уравнения его сторон $x+y-1=0$, $2x+3y-12=0$, $x=0$.
2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $3x+2y-2=0$, $x-5y-12=0$ и делящей отрезок AB пополам, где A(2, 4), B(–4, 2).
3. Даны уравнения сторон ромба $x-2y-2=0$, $2x-y+4=0$ и его диагонали $x+y+1=0$. Найти уравнения двух других его сторон.

ВАРИАНТ 11

1. Найти уравнение биссектрисы угла, если уравнения его сторон $x-y+1=0$, $2x+3y-4=0$.
2. Написать уравнение прямой, проходящей через начало координат и через точку пересечения прямых $x-2y+3=0$, $2x+3y-1=0$.
3. Даны уравнения сторон прямоугольника $2x+3y-6=0$, $2x+3y-56=0$ и его диагонали $x+y=0$. Найти уравнения остальных его сторон.

ВАРИАНТ 12

1. Написать уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $x-y+2=0$, $2x-3y+1=0$ и делящей отрезок между точками A(4, –3) и B(–1, 2) в отношении $\lambda=\dfrac{2}{3}$.
2. Даны сторона угла $x+2y=0$, его биссектриса $3x+y-1=0$. Найти уравнение другой стороны угла.
3. Даны уравнения сторон ромба $x+3y-8=0$, $3x-y+16=0$ и его диагонали $2y-x-2=0$. Найти уравнения остальных сторон ромба.

ВАРИАНТ 13

1. Через точку пересечения прямых $2x + y - 1 = 0$ и $x + 3y + 4 = 0$ провести прямую, перпендикулярную прямой $5x + 4y - 8 = 0$.
2. Через точку пересечения прямых $2x + y + 2 = 0$ и $2x - 3y + 4 = 0$ провести прямую, отсекающую на осях координат равные отрезки (одного знака).
3. Даны уравнения сторон параллелограмма $x - 2y - 2 = 0$, $x + y - 1 = 0$ и его диагонали $2x - y + 4 = 0$. Найти уравнения двух других его сторон.

Лабораторная работа № 4
Прямая и плоскость в пространстве

Пример 1. Дан тетраэдр *ABCD* и середина *E* ребра *AB*. Приняв точку *A* за начало координат и полагая $\bar{e}_1 = \overline{AB}$, $\bar{e}_2 = \overline{AC}$, $\bar{e}_3 = \overline{AD}$, написать уравнения всех граней тетраэдра и плоскости *ECD* (рис. 9).

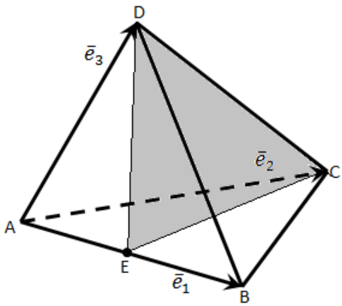


Рис. 9

Решение. Сначала определим координаты всех вершин тетраэдра и точки *E*. Из условий задачи следует, что A(0, 0, 0), B(1, 0, 0), C(0, 1, 0), D(0, 0, 1) и E(0,5; 0, 0).

Грань *ABC* есть координатная плоскость *xOy*, поэтому ее уравнение имеет вид $z = 0$. Аналогично, уравнения плоскостей *ABD* и *ACD* соответственно $y = 0$ и $x = 0$.

Уравнение грани *BCD* может быть записано по формуле (5) (см. с. 72):

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x+y+z-1=0 .$$

Уравнение плоскости *CDE* запишем по формуле (7) (см. с. 73):

$$\frac{x}{0{,}5}+\frac{y}{1}+\frac{z}{1}=1 \quad \text{или} \quad 2x+y+z-1=0.$$

Пример 2. Написать уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $x+y-z+1=0$ и *Oxz*, перпендикулярной плоскости $x-3y+z=0$. (Система координат прямоугольная).

Решение. Напишем уравнение пучка, определяемого плоскостями $x+y-z+1=0$ и $y=0$, $\alpha(x+y-z+1)+\beta y=0$, и подберем α и β так, чтобы искомая плоскость была перпендикулярна плоскости $x-3y+z=0$. Так как уравнение плоскости из пучка можно записать в виде $\alpha x+(\alpha+\beta)y-\alpha z+\alpha=0$, то из условия перпендикулярности $1\alpha-3(\alpha+\beta)-1\alpha=0$ или $\alpha+\beta=0$, т.е. $\alpha=-\beta$. Тогда $\alpha(x+y-z+1)-\alpha y=0$, следовательно, искомая плоскость имеет уравнение $x-z+1=0$.

Пример 3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку (2, 1, 0) и пересекающей прямые $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{3}$ и $\frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{1}$.

Решение. Искомую прямую можно рассматривать как прямую, по которой пересекаются две плоскости, проходящие через данную точку и данные прямые.

Уравнение плоскости, проходящей через первую прямую $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{3}$ и точку (2, 1, 0) имеет вид (см. формулу (4) на с. 72):

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z \\ 2 & 1 & 3 \\ 2+1 & 1-1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ или } 3y-z-3=0.$$

Уравнение плоскости, проходящей через вторую прямую $\frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{1}$ и точку (2, 1, 0) имеет вид (см. формулу (4) на с.72):

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+2 & z \\ 3 & 2 & 1 \\ 2-2 & 1+2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & y+2 & z \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ или } x-3z-2=0.$$

Искомую прямую можно найти как пересечение найденных плоскостей: $\begin{cases} 3y-z-3=0, \\ x-3z-2=0. \end{cases}$ (рис. 10).

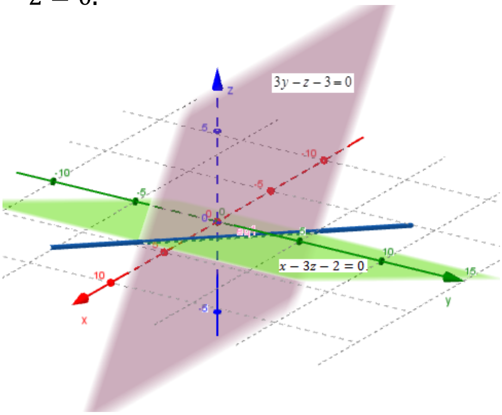


Рис. 10

Варианты лабораторной работы

ВАРИАНТ 1

1. На оси *Oz* найти точку, равноудаленную от точки M(1, 1, 4) и от плоскости $2x-2y+z-12=0$.
2. Доказать, что прямые $\begin{cases} x=2+4t, \\ y=-6t, \\ z=-1-8t. \end{cases}$ и $\begin{cases} x=7-6t, \\ y=2+9t, \\ z=12t. \end{cases}$ лежат в одной плоскости, и написать уравнение этой плоскости.
3. Найти расстояние от точки P(7, 9, 7) до прямой $\begin{cases} x-2z-2=0, \\ x-2y+z=0. \end{cases}$

ВАРИАНТ 2

1. На оси Oy найти точку, равноудаленную от плоскостей $x+2y-2z-1=0$ и $3x+5=0$.
2. Доказать, что прямые $\begin{cases} x+y-3z-1=0, \\ 2x-y-9z-2=0, \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+y-2z-2=0, \\ 2x-2y-z-2=0. \end{cases}$ пересекаются. Написать уравнение плоскости, проходящей через эти прямые.
3. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ и $\dfrac{x+4}{2}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+2}{-3}$.

ВАРИАНТ 3

1. Через линию пересечения плоскостей $x-y+z-1=0$ и $2x+5y-2z-13=0$ провести плоскость, касающуюся сферы $x^2+y^2+z^2=9$.
2. Доказать, что прямые $\begin{cases} x=1+2t, \\ y=-t, \\ z=1+t. \end{cases}$ и $\begin{cases} x+3y+z+2=0 \\ x-y-3z-2=0 \end{cases}$ параллельны, и составить уравнение плоскости, проходящей через эти прямые.
3. Доказать, что прямые $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{2}$ и $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{0}$ скрещиваются, и найти кратчайшее расстояние между ними.

ВАРИАНТ 4

1. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки A(−1, 0, 1) и B(1, 1, 2) и отстоящей от начала координат на расстоянии $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.
2. Доказать, что прямые $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{1}$ и $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y-5z-8=0 \end{cases}$ пересекаются. Составить уравнение плоскости, проходящей через эти прямые.

3. Доказать, что прямые $\begin{cases} x = 2 + 3t, \\ y = -1 - 2t, \\ z = 2t. \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x - 3y - 4 = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$ скрещиваются, и найти кратчайшее расстояние между ними.

ВАРИАНТ 5

1. На оси Oz найти точку, равноудаленную от точки M(2, 3, 4) и от плоскости $2x + 3y + z - 17 = 0$.
2. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x+5}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-1}{2}$ и параллельной прямой $\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \\ x + 2y - 3z + 5 = 0 \end{cases}$.
3. Найти кратчайшее расстояние между прямыми $\begin{cases} x = 3 + t, \\ y = 1 - t, \\ z = 2 + 2t. \end{cases}$ и $\frac{x}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{3}$.

ВАРИАНТ 6

1. На прямой $\begin{cases} 2x - y + z - 8 = 0 \\ 4x + 3y - z + 14 = 0 \end{cases}$ найти точки, отстоящие от плоскости $2x + 3y - 6z - 10 = 0$ на расстоянии 7.
2. Составить уравнение проекции прямой $\begin{cases} x = 3 + 5t, \\ y = -1 + t, \\ z = 4 + t. \end{cases}$ на плоскость $2x - 2y + 3z - 5 = 0$.
3. Найти кратчайшее расстояние между двумя прямыми $\begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ и $x = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{1}$.

ВАРИАНТ 7

1. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку A(5, 2, 0) и удаленной от точки B(6, 1, –1) на расстояние 1 и от точки C(0, 5, 4) на расстояние 3.
2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M(1, 1, –3) и параллельной прямым $\begin{cases} 2x - 2y + 3z - 4 = 0 \\ x + 2y - 4z + 1 = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} 3x - y - z = 0 \\ x + y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$.

3. Найти расстояние между прямыми $\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{2}$, $\begin{cases} 3x+y-2=0 \\ 3x+z=0 \end{cases}$.

ВАРИАНТ 8

1. Найти проекцию прямой $x-y-z=0$, $x-5y+z-10=0$ на плоскость $x+2y+3z-2=0$ и определить угол, составленный этой проекцией с плоскостью *Oxy*.
2. На оси *Oz* найти точку, равноудаленную от плоскостей $12x+9y-20z-19=0$ и $16x-12y+15z-9=0$.
3. Найти расстояние между прямыми $x=y=z$ и $\begin{cases} x-1=0 \\ y-2=0 \end{cases}$.

ВАРИАНТ 9

1. Найти расстояние от точки P(–1, 1, –2) до плоскости, проходящей через точки $M_1(1, -1, 1)$, $M_2(-2, 1, 3)$ и $M_3(4, -5, -2)$.
2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку (0, 0, 1) и пересекающей каждую из прямых $\begin{cases} x-2y+z-1=0 \\ 2x-y+2z-3=0 \end{cases}$, $\frac{x-1}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-1}$.
3. Найти расстояние от точки A(3, –5, 2) до прямой $\begin{cases} x=t, \\ y=1-2t, \\ z=3+t. \end{cases}$

ВАРИАНТ 10

1. Написать уравнение плоскости, отсекающей на осях координат отрезки, пропорциональные числам 1, 2, 3, и отстоящей от точки (3, 5, 7) на расстоянии 4.
2. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат параллельно прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-2}{-1}$ и перпендикулярно плоскости $x-2y+z-1=0$.

3. Найти расстояние от точки P(7, 9, 7) до прямой $\begin{cases} 2x - 2y - z - 2 = 0 \\ x - 2z - 2 = 0 \end{cases}$.

ВАРИАНТ 11

1. Составить уравнение плоскости, параллельной плоскости $2x + y + 2z + 5 = 0$ и отстоящей от точки (1, 2, 0) на расстоянии 3.
2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M(1, –2, 1) перпендикулярно к прямой $\begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 \\ x + y - z - 2 = 0 \end{cases}$.
3. Найти расстояние между прямыми $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{2}$ и $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2}$.

ВАРИАНТ 12

1. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(-1, 0, 1)$ и $M_2(1, 1, 2)$, отстоящей от начала координат на расстоянии $\frac{2}{\sqrt{3}}$.
2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку (0, 0, 1) и пересекающей каждую из прямых $\begin{cases} x - 2y + z - 1 = 0 \\ 2x - y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$, $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$.
3. Найти расстояние от точки (7, 9, 7) до прямой $\begin{cases} x = 2 + 4t, \\ y = 1 + 3t,. \\ z = 2t. \end{cases}$

ВАРИАНТ 13

1. Составить уравнение плоскости, зная что расстояние до нее от трех точек: A(6, 1, –1), B(0, 5, 4), C(5, 2, 0) соответственно $d_1 = 1$, $d_2 = 3$, $d_3 = 0$.
2. Найти точку, симметричную с точкой P(4, 3, 10) относительно прямой $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z-3}{2}$.
3. Найти кратчайшее расстояние между прямыми $\begin{cases} x = 9 + 4t, \\ y = -2 - 3t, \\ z = t. \end{cases}$ и

$$\begin{cases} 9x + 2y + 14 = 0 \\ 2x + 2z - 4 = 0 \end{cases}.$$

Раздел 3. ОБРАЗЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Тема 9. Элементарная теория кривых второго порядка

Окружность

Определение. *Окружностью* называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой центром.

Пусть *C(a, b)* − центр окружности. Расстояние любой точки окружности до центра обозначим *r* − *радиус* окружности.

Пусть *M(x, y)* − любая (текущая) точка окружности.

Определение. Уравнение вида $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ называется *нормальным уравнением* окружности. Если центр окружности лежит в начале системы координат, т.е. *a* = *b*, то уравнение вида $x^2 + y^2 = r^2$ называют *каноническим уравнением* окружности.

Задачи

1. Составить уравнение окружности, имеющей центр в точке:
   1) (2, –5) и радиус, равный 4;
   2) (–3, 4) и проходящей через начало координат;
   3) (0, 4) и проходящей через точку (5, –8).
2. Найти уравнение окружности, если известны координаты концов одного из ее диаметров AB: A(1, 4) и B(–3, 2).

3. На оси абсцисс найти центр окружности, проходящей через точки A(2, 3) и B(5, 2), и написать уравнение этой окружности.
4. Найти уравнение окружности, проходящей через точки (3, 0) и (–1, 2), зная, что ее центр лежит на прямой $x - y + 2 = 0$.
5. Написать уравнение окружности, проходящей через три данные точки: A(0, 2), B(1, 1) и C(2, –2).
6. Найти уравнение окружности, описанной около треугольника, вершины которого имеют координаты:
   1) (7, 7), (0, 8) и (–2, 4);
   2) (0, 4), (1, 2) и (3, –2).
7. Определить координаты центра и радиус каждой из следующих окружностей:
   1) $x^2 + y^2 - 6x = 0$;
   2) $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$;
   3) $x^2 + y^2 - 10x + 24y - 56 = 0$;
   4) $3x^2 + 3y^2 + 6x - 4y - 1 = 0$.
8. Привести к нормальному виду уравнения окружностей:
   1) $x^2 + y^2 - 4x = 0$;
   2) $x^2 + y^2 + 6y - 7 = 0$;
   3) $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 1 = 0$;
   4) $3x^2 + 3y^2 - 4x - 6y - 15 = 0$.
9. Как преобразуется уравнение окружности $x^2 + y^2 + 4x - 12y - 9 = 0$, если перенести начало координат в ее центр?
10. Какие особенности можно отметить в расположении окружности относительно осей координат, если некоторые из коэффициентов ее общего уравнения $A(x^2 + y^2) + Dx + Ey + F = 0$ обращаются в нуль?
11. Окружность касается обеих осей координат и проходит через точку A(2, 9). Найти ее уравнение.
12. Написать уравнение окружности, которая касается оси *Ox* в точке (5, 0) и отсекает на оси *Oy* хорду длиной в 10 ед.
13. Найти центр окружности, радиус которой *r=50*, зная, что окружность отсекает на оси *Ox* хорду длиной в 28 ед. и проходит через точку A(0, 8).
14. Написать уравнение окружности, имеющей центр в точке (6, 7) и касающейся прямой $5x - 12y - 24 = 0$.
15. Дана окружность $(x-1)^2 + y^2 = 4$. Через точку $A\left(2,\ -\frac{1}{2}\right)$ требуется провести такую хорду, которая делилась бы в этой точке пополам.

16. Дана окружность $(x-1)^2+(y-2)^2=25$. Составить уравнение ее касательной в точке (5, 5).
17. Написать уравнения касательных, проведенных из начала координат к окружности $x^2+y^2-10x-4y+25=0$.
18. Написать уравнение окружности, проходящей через точку (1, 1) и касающейся прямых $7x+y-3=0$ и $x+7y-3=0$.
19. Найти уравнение общей хорды двух окружностей: $x^2+y^2=10$ и $x^2+y^2-10x-10y+30=0$.
20. Под каким углом пересекаются окружности $x^2+y^2=16$ и $(x-5)^2+y^2=9$? (Указание: углом, под которым пересекаются окружности, называется угол между касательными к этим окружностям в одной из точек их пересечения.)

Эллипс

Определение. *Эллипс* – геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух фиксированных точек F_1 и F_2, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, бóльшая чем расстояние между фокусами (рис. 11).

Постоянную сумму расстояний произвольной точки эллипса до фокусов принято обозначать через $2a$. Фокусы эллипса обозначаются F_1 и F_2; расстояние между ними – через $2c$.

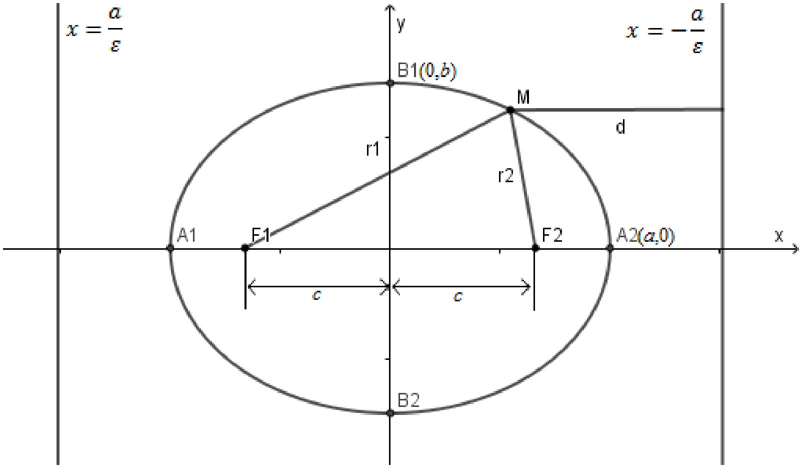


Рис. 11

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка эллипса. Тогда по условию $|F_1M|+|F_2M|=2a$. Если в прямоугольной декартовой системе координат фокусы эллипса расположены в точках $F_1(-c,\ 0)$, $F_2(c,\ 0)$, то уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{1}$$

где $b^2 = a^2 - c^2$(очевидно, что $a > b$, т.е. эллипс “вытянут” вдоль оси Ox). Уравнение вида (1) называется *каноническим уравнением эллипса*.

При указанном выборе системы координат оси координат являются осями симметрии эллипса, а начало координат – его центром симметрии. Точки, в которых эллипс пересекает свои оси, называются его *вершинами*.

Определение. Число ε, равное отношению фокусного расстояния к длине большей оси эллипса, $\varepsilon = \frac{c}{a}$ (2), называется *эксцентриситетом* эллипса (в формуле a — *бóльшая полуось*).

На бóльшей оси расположены фокусы эллипса. Очевидно, что $0< \varepsilon <1$ (для окружности $\varepsilon = 0$).

Определение. Две прямые, перпендикулярные бóльшей оси эллипса, проходящие от его центра на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$, называются *директрисами эллипса*. Уравнения директрис имеют вид

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon},$$

где ε определятся формулой (2), и в формуле (1) $a > b$.

Замечание. Если $b > a$, то фокусы эллипса (1) расположены в точках $F_1(0, -c)$, $F_2(0, c)$, а его директрисы определяются уравнениями $y = \pm \frac{b}{\varepsilon}$, где $\varepsilon = \frac{c}{b}$, $c^2 = b^2 - a^2$, т.е. эллипс "вытянут" вдоль оси Oy.

Теорема. Пусть r − расстояние произвольной точки $M(x, y)$ до ближайшего фокуса, d − расстояние от этой же точки до односторонней с фокусом директрисы. Тогда $\frac{r}{d}$ есть постоянная величина, равная эксцентриситету эллипса:

$$\frac{r}{d} = \varepsilon.$$

Уравнение касательной в точке $M(x_0, y_0)$, лежащей на эллипсе (1), имеет вид

$$\frac{x \cdot x_0}{a^2} + \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1.$$

Теорема. Касательная к эллипсу составляет равные углы с фокальными радиусами, проведенными в точку касания.

Если центр эллипса смещен в точку $C(x_0, y_0)$, но его оси параллельны осям координат, то уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

При этом координаты фокусов

$$F_1(-c+x_0, y_0), F_2(c+x_0, y_0),$$

координаты вершин эллипса

$$A_1(-a+x_0, y_0), A_2(a+x_0, y_0), B_1(x_0, -b+y_0), B_2(x_0, b+y_0),$$

уравнения директрис: $x - x_0 = \pm \frac{a}{\varepsilon}$.

Задачи

21. Составить простейшее уравнение эллипса, зная, что:
    1) полуоси его соответственно равны 4 и 2;

2) расстояние между фокусами равно 6 и большая полуось равна 5;
3) большая полуось равна 10 и эксцентриситет $\varepsilon = 0{,}8$;
4) малая полуось равна 3 и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
5) сумма полуосей равна 8 и расстояние между фокусами тоже равно 8.

22. Дано уравнение эллипса $25x^2 + 169y^2 = 4225$. Вычислить длину осей, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса.
23. Расстояния одного из фокусов эллипса до концов его большой оси соответственно равны 7 и 1. Составить уравнение этого эллипса.
24. Вершина треугольника, имеющего неподвижное основание, перемещается так, что периметр треугольника сохраняет постоянную величину. Найти траекторию вершины при условии, что основание равно 24 см, а периметр − 50 см.
25. Дан эллипс $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$. Написать уравнения его директрис.
26. Оси эллипса совпадают с осями координат. Эллипс проходит через точки P(2, 2) и Q(3, 1). Составить уравнение эллипса.
27. Прямые $x = \pm 8$ служат директрисами эллипса, малая ось которого равна 8. Найти уравнение этого эллипса.
28. Определить эксцентриситет эллипса, зная, что:
    1) малая ось его видна из фокуса под прямым углом;
    2) расстояние между фокусами равно расстоянию между вершинами малой и большой осей;
    3) расстояние между директрисами в 4 раза больше расстояния между фокусами.
29. Меридиан земного шара имеет форму эллипса, отношение осей которого $\frac{299}{300}$. Определить эксцентриситет земного меридиана.
30. На эллипсе $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$ найти точку, отстоящую на расстоянии 5 ед. от его малой оси.
31. На эллипсе $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ найти точку, расстояние до которой от правого фокуса в 4 раза больше расстояния от левого.

32. На эллипсе, один из фокусов которого имеет координаты (3, 0), взята точка M(4; 2,4). Найти расстояние от этой точки до соответствующей директрисы, зная, что центр эллипса совпадает с началом координат.

33. В эллипс $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$ вписан прямоугольник, две противоположные стороны которого проходят через фокусы. Вычислить площадь этого прямоугольника.

34. Составить уравнение такой хорды эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$, которая точкой M(2, 1) делится пополам.

35. Написать уравнение касательной к эллипсу $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{18}=1$ в точке M(4, 3).

36. Составить уравнения касательных к эллипсу $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{9}=1$, проходящих через точку A(–6, 3).

37. Найти касательные к эллипсу $\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{24}=1$, которые параллельны прямой $2x-y+17=0$.

38. Провести к эллипсу $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$ касательные, перпендикулярные к прямой $13x+12y-115=0$.

39. Найти уравнения тех касательных эллипса $3x^2+8y^2=45$, расстояния которых от центра эллипса равно 3.

40. Найти уравнение касательной эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, отношение расстояний которой от двух фокусов равно 9.

41. Привести кривые к каноническому виду:
   1) $x^2+y^2-2x+6y-5=0$;
   2) $x^2+4y^2+4x-16y-8=0$;
   3) $x^2+2y^2+8x-4=0$.

Гипербола

Определение. *Гиперболой* называют геометрическое место точек плоскости, для которых модуль разности расстояний до двух фиксированных точек F_1 и F_2 плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая расстояния между фокусами (рис. 12).

Фокусы гиперболы обозначаются через F_1 и F_2; расстояние между ними − через $2c$. По определению гиперболы $2a < 2c$.

Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка гиперболы. Тогда по условию

$$\left\| F_1 M \right| - \left| F_2 M \right\| = 2a \cdot \qquad (1)$$

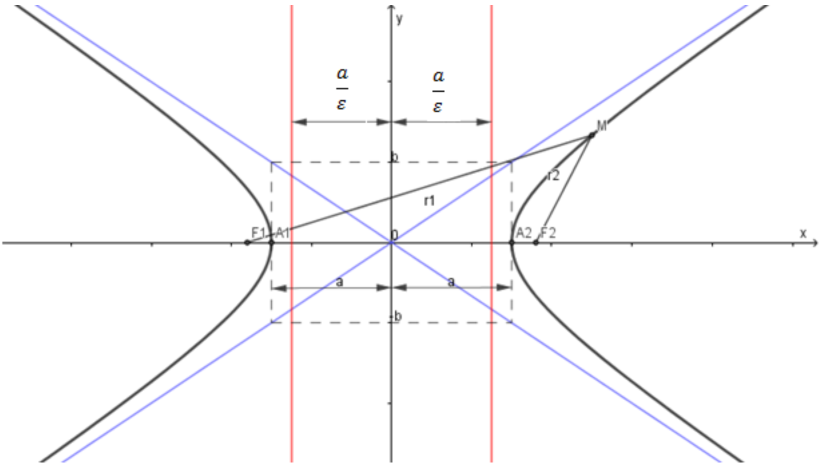


Рис. 12

В прямоугольной декартовой системе координат положим $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$. Тогда уравнение гиперболы может быть преобразовано к *каноническому виду*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (2)$$

где $b^2 = c^2 - a^2$.

Определение. Гипербола, в которой $a = b$, называется *равносторонней.*

Определение. Из уравнения (2) следует, что оси координат являются *осями симметрии гиперболы*, а начало координат − ее *центром симметрии*.

Определение. Ось *Ox,* на которой расположены фокусы гиперболы, называется *действительной*, а ось *Oy* называется *мнимой осью*.

Определение. Прямоугольник со сторонами *2a* и *2b*, расположенный симметрично относительно осей гиперболы и касающийся ее в вершинах, называется *основным прямоугольником* гиперболы.

Определение. Прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ (3) называются *асимптотами гиперболы*.

Асимптоты равносторонней гиперболы перпендикулярны друг другу.

Определение. Уравнение $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (4) определяет гиперболу с фокусами на оси ординат $F_1(0, c)$, $F_2(0, -c)$. В этом случае модуль разности расстояний от произвольной точки гиперболы до фокусов равен *2b* (рис. 13).

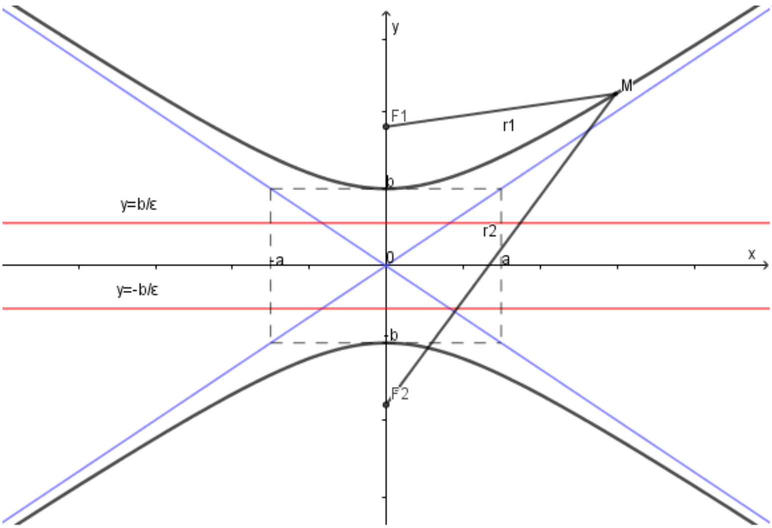


Рис. 13

Определение. Две гиперболы, определяемые уравнениями $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ и $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ в одной и той же системе координат, называются *сопряженными* (рис. 14).

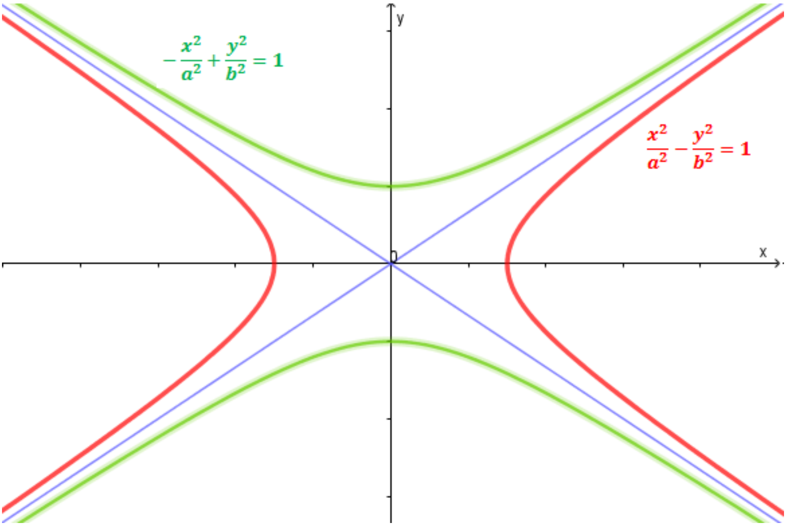


Рис. 14

Определение. Число ε, равное отношению фокусного расстояния к расстоянию между вершинами, $\varepsilon = \frac{c}{a}$ (5), называется *эксцентриситетом* гиперболы (в формуле a − действительная *полуось*). Очевидно, что $\varepsilon > 1$.

Определение. Две прямые, параллельные мнимой оси гиперболы, проходящие от ее центра на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$, называются *директрисами гиперболы* (2). Их уравнения имеют вид

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon}, \tag{6}$$

где ε определятся формулой (5).

Определение. Прямые $y = \pm\frac{b}{\varepsilon}$ (7) называют *директрисами сопряженной гиперболы*, где $\varepsilon = \frac{c}{b}$.

Теорема. Если r − расстояние от произвольной точки гиперболы $M(x, y)$ до ближайшего фокуса, d − расстояние от этой же точки до односторонней с этим фокусом директрисы, то отношение $\frac{r}{d}$ есть постоянная величина, равная эксцентриситету гиперболы:

$$\frac{r}{d} = \varepsilon. \qquad (7)$$

Уравнение касательной в точке $M(x_0, y_0)$, лежащей на гиперболе (2):

$$\frac{x \cdot x_0}{a^2} - \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1. \qquad (8)$$

Теорема. Касательная к гиперболе делит угол между фокальными радиусами, идущими в точку касания, пополам.

Если центр гиперболы смещен в точку $C(x_0, y_0)$, но ее оси параллельны осям координат, то уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + -\frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \qquad (9)$$

При этом координаты фокусов

$$F_1(-c+x_0, y_0),\ F_2(c+x_0, y_0),$$

координаты вершин

$$A_1(-a+x_0, y_0),\ A_2(a+x_0, y_0),$$

уравнения директрис

$$x - x_0 = \pm\frac{a}{\varepsilon},$$

уравнения асимптот

$$y - y_0 = \pm\frac{b}{a}(x - x_0).$$

Задачи

42. Составить уравнение гиперболы, оси которой совпадают с осями координат, зная, что:
    1) расстояние между вершинами равно 8, а расстояние между фокусами 10;
    2) вещественная полуось равна 5 и вершины делят расстояния между центром и фокусами пополам;
    3) вещественная ось равна 6 и гипербола проходит через точку (9, –4);

4) гипербола проходит через точки P(5, 2) и $Q(2\sqrt{5}, \sqrt{2})$.

43. Составить каноническое уравнение гиперболы, если:

1) действительная ось равна 48 и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{13}{12}$;
2) действительная ось равна 16 и угол между асимптотой и осью абсцисс определяется условием $tg\varphi = \frac{3}{4}$.

44. Составить уравнение гиперболы, зная фокусы $F_1(10, 0)$, $F_2(-10, 0)$ и одну из точек гиперболы $M\left(12,\ 3\sqrt{5}\right)$.
45. Вычислить эксцентриситет равносторонней гиперболы.
46. Даны уравнения асимптот гиперболы $y = \pm\frac{5}{12}x$ и координаты точки M(24, 5), лежащей на гиперболе. Составить уравнение гиперболы.
47. Составить каноническое уравнение гиперболы, если:

1) расстояние между директрисами равно $\frac{32}{5}$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{4}$;
2) угол между асимптотами равен 60^0 и $c = 2\sqrt{3}$.

48. Составить уравнение гиперболы, имеющей общие фокусы с эллипсом $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$, при условии, что эксцентриситет ее $\varepsilon = \frac{5}{4}$.
49. Составить уравнение гиперболы, проходящей через фокусы эллипса $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$ и имеющей фокусы в вершинах этого эллипса.
50. Дана гипербола $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. Требуется:

1) вычислить координаты фокусов;
2) вычислить эксцентриситет;
3) написать уравнения асимптот и директрис;
4) написать уравнение сопряженной гиперболы и вычислить ее эксцентриситет.

51. Доказать, что отрезки, отсекаемые директрисами на асимптотах (считая от центра гиперболы), равны действительной полуоси.

52. Доказать, что директриса гиперболы проходит через основание перпендикуляра, опущенного из соответствующего фокуса на асимптоту гиперболы. Вычислить длину этого перпендикуляра.
53. Вычислить полуоси гиперболы, зная, что:
    1) расстояние между фокусами равно 8 и расстояние между директрисами равно 6;
    2) директрисы даны уравнениями $x = \pm 3\sqrt{2}$ и угол между асимптотами прямой;
    3) асимптоты заданы уравнениями $y = \pm 2x$ и фокусы находятся на расстоянии 5 от центра;
    4) асимптоты заданы уравнениями $y = \pm \frac{5}{3}x$ и гипербола проходит через точку N(6, 9).
54. Написать канонические уравнения двух сопряженных гипербол, зная, что расстояние между директрисами первой из них равно 7,2 и расстояние между директрисами второй равно 12,8.
55. Определить угол между асимптотами гиперболы, у которой:
    1) эксцентриситет $\varepsilon = 2$;
    2) расстояние между фокусами вдвое больше расстояния между директрисами.
56. Вычислить эксцентриситет гиперболы при условии, что угол между асимптотами равен: 1) 60^0; 2) 90^0.
57. На гиперболе $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1$ взята точка, абсцисса которой равна 10 и ордината положительная. Вычислить фокальные радиусы-векторы этой точки и угол между ними.
58. На гиперболе $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ найти точку, для которой:
    1) фокальные радиусы-векторы перпендикулярны друг к другу;
    2) расстояние от левого фокуса вдвое больше, чем от правого.
59. Доказать, что произведение расстояний от любой точки гиперболы до двух асимптот есть величина постоянная.
60. Через точку (2, –5) провести прямые, параллельные асимптотам гиперболы $x^2 - 4y^2 = 4$.
61. Привести к простейшему виду уравнения гипербол:
    1) $9x^2 - 25y^2 - 18x - 100y - 316 = 0$;
    2) $5x^2 - 6y^2 + 10x - 12y - 31 = 0$;
    3) $x^2 - 4y^2 + 6x + 5 = 0$.

Парабола

Определение. *Парабола* – геометрическое место точек, для каждой из которых расстояние r до некоторой фиксированной точки, называемой фокусом F, равно расстоянию d до некоторой прямой, называемой директрисой (рис. 15).

Фокус параболы обозначается буквой F, а расстояние от фокуса до директрисы $- p$. Число p называется *параметром* параболы ($p > 0$).

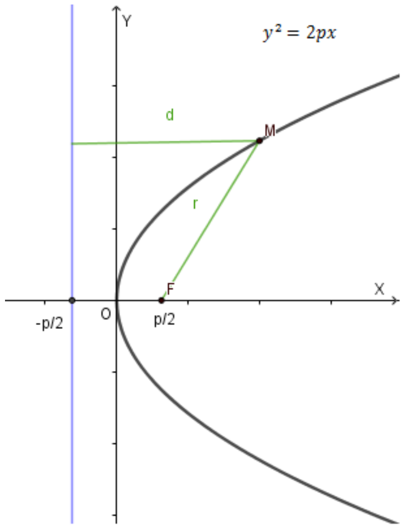


Рис. 15

Если M − произвольная точка параболы, то по определению имеет место равенство

$$d(M, F) = d(M, A). \tag{1}$$

Для вывода канонического уравнения параболы выберем декартовую систему координат. Пусть ось абсцисс направлена перпендикулярно директрисе d, задаваемой уравнением $x = -\frac{p}{2}$ в сторону фокуса $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$.

Пусть точка M параболы имеет координаты x и y, т.е. $M(x, y)$. Тогда $d(M, F) = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$, $d(M, A) = x + \frac{p}{2}$. Из условия (1) следует уравнение параболы

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Для приведения его к каноническому виду нужно возвести обе части равенства в квадрат. После упрощения получаем

$$y^2 = 2px. \qquad (2)$$

Определение. Уравнение (2) называется *каноническим уравнением параболы*.

Определение. Величина p называется *параметром* параболы. Она характеризует величину так называемого фокального радиуса, т.е. ординаты точки параболы. Та из парабол имеет наибольший фокальный радиус, которая имеет большую величину параметра p.

Определение. *Осью параболы* называется ее ось симметрии.

Определение. *Вершиной параболы* называется точка пересечения параболы с ее осью симметрии.

Парабола, симметричная относительно оси Ox, проходящая через начало координат с фокусом в точке $F\left(-\frac{p}{2}; 0\right)$, имеет уравнение $y^2 = -2px$, изображена на рис. 16:

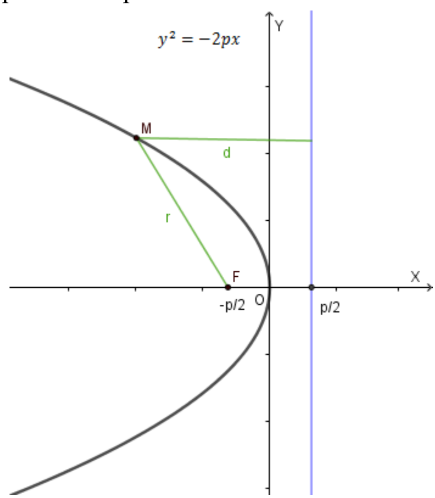


Рис. 16

Парабола, симметричная относительно оси Oy, проходящая через начало координат с фокусом в точке $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$, имеет уравнение $x^2 = 2py$, изображена на рис. 17:

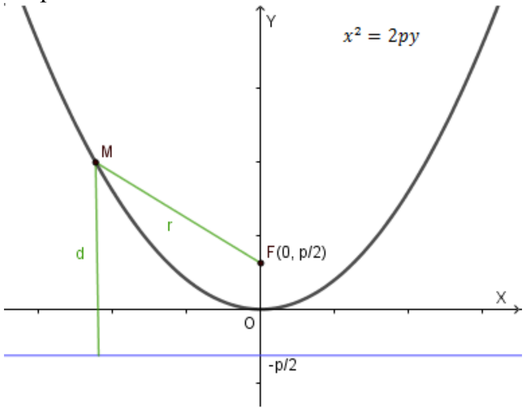


Рис. 17

Парабола, симметричная относительно оси Oy, проходящая через начало координат с фокусом в точке $F\left(0,-\frac{p}{2}\right)$, имеет уравнение $x^2 = -2py$, изображена на рис. 18:

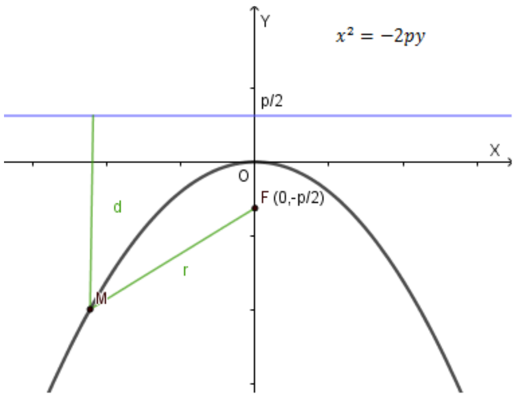


Рис. 18

Пусть парабола задана уравнением $y^2 = 2px$ и точка $M(x_0, y_0)$ лежит на ней. Угловой коэффициент k касательной к данной параболе определяется по формуле $k = \dfrac{p}{y_0}$.

Уравнение касательной к параболе в точке M будет

$$y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0) \text{ или } yy_0 - y_0^2 = p(x - x_0). \qquad (3)$$

Поскольку точка M лежит на параболе, то

$$y_0^2 = 2px_0.$$

Поэтому, подставив данное выражение в (3) вместо y_0^2, получим *уравнение касательной к параболе* $y^2 = 2px$ в точке $M(x_0, y_0)$:

$$yy_0 = p(x + x_0). \qquad (4)$$

Теорема. Касательная к параболе образует с осью параболы и фокальным радиусом точки касания равные углы.

Если начало координат смещено в точку $C(x_0, y_0)$, а ось параболы параллельна оси Oy, то уравнение параболы имеет вид:

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0).$$

При этом $F\left(x_0; y_0 + \dfrac{p}{2}\right)$, а уравнение директрисы $y = -\dfrac{p}{2} + y_0$.

Задачи

62. Определить координаты фокуса параболы:
    1) $y^2 = 4x$; 2) $x^2 = 4y$; 3) $y^2 = -8x$.
63. Составить каноническое уравнение параболы, зная, что:
    1) расстояние фокуса от вершины равно 3;
    2) фокус имеет координаты (5, 0), а ось ординат служит директрисой;
    3) парабола симметрична относительно оси Ox, проходит через начало координат и через точку М(1, –4);
    4) парабола симметрична относительно оси Oy, фокус помещается в точке (0, 2) и вершина совпадает с началом координат;
    5) парабола симметрична относительно оси Oy, проходит через начало координат и через точку М(6, –2);
    6) расстояние фокуса от директрисы равно 2.
64. Составить уравнение директрисы параболы $y^2 = 6x$.

65. Составить уравнение параболы, если даны координаты фокуса F(3, 0) и уравнение директрисы $x = -1$.
66. Определить фокус параболы $y = x^2 - 4x + 5$.
67. На параболе $y^2 = 8x$ найти точку, фокальный радиус-вектор которой равен 20.
68. На параболе $y^2 = 4{,}5x$ взята точка M(x, y), находящаяся от директрисы на расстоянии d = 9,125. Вычислить расстояние до этой точки от вершины параболы.
69. Найти такую хорду параболы $y^2 = 4x$, которая точкой (3, 1) делится пополам.
70. Составить уравнение касательной к параболе $y^2 = 4x$ в точке M(9, 6).
71. Через точку P(5, –7) провести касательную к параболе $y^2 = 8x$.
72. Дано уравнение касательной $x - 3y + 9 = 0$ к параболе $y^2 = 2px$. Составить уравнение параболы.
73. Дана парабола $y^2 = 12x$. Провести к ней касательную:
    1) в точке с абсциссой $x = 3$;
    2) параллельно прямой $3x - y + 5 = 0$;
    3) перпендикулярно прямой $2x + y - 7 = 0$;
    4) образующую с прямой $4x - 2y + 9 = 0$ угол 45^0.
74. Найти кратчайшее расстояние параболы $y^2 = 64x$ от прямой $4x + 3y + 46 = 0$.
75. Определить координаты вершины параболы, величину параметра и направление оси, если парабола дана одним из следующих уравнений:
    1) $y^2 - 10x - 2y - 19 = 0$;
    2) $y^2 - 6x + 14y + 49 = 0$;
    3) $y^2 + 8x - 16 = 0$;
    4) $x^2 - 6x - 4y + 29 = 0$;
    5) $y = Ax^2 + Bx + C$;
    6) $y = x^2 - 8x + 15$;
    7) $y = x^2 + 6x$.
76. Вычислить параметр параболы $y^2 = 2px$, если известно, что она касается прямой $x - 2y + 5 = 0$.
77. Составить уравнение общей хорды для $y^2 = 18x$ и $(x+6)^2 + y^2 = 100$.

78. Найти общие касательные для $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1$ и $y^2=\frac{20}{3}x$.
79. Найти координаты такой точки параболы $y^2=6x$, которая находится от директрисы на расстоянии 3,5.
80. В параболу $y^2=2px$ вписан равносторонний треугольник, одна из вершин которого совпадает с вершиной параболы. Найти длину стороны треугольника.
81. На параболе $y^2=-4x$ найти координаты точки, расстояние от которой до прямой $y=1+3\sqrt{2}-x$ равно 3.
82. Камень, брошенный под углом к горизонту, достиг наибольшей высоты 16 м. Описав параболическую траекторию, он упал в 48 м от точки бросания. На какой высоте находился камень на расстоянии 6 м по горизонтали от точки бросания?
83. Дана парабола $y^2=12x$. Найти длину ее хорды, проходящей через точку A(8, 0) и наклоненной к оси Ox под углом 60^0.
84. Через фокус параболы $y^2=12x$ проведена хорда, перпендикулярная к ее оси. Найти длину хорды.
85. Трос, подвешенный за два конца на одинаковой высоте, имеет форму дуги параболы. Расстояние между точками крепления 24 м. Глубина прогиба троса на расстоянии 3 м от точки крепления равна 70 см. Определить глубину прогиба троса посередине между креплениями.

Лабораторная работа № 5
Приведение линий второго порядка к каноническому виду

Пусть в прямоугольной системе координат Oxy задана линия второго порядка своим общим уравнением

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0.$$

Известно, что существует такая прямоугольная система координат $Ox'y'$, полученная поворотом системы координат Oxy на угол α вокруг точки O, что уравнение линии в системе координат $Ox'y'$ не содержит член с произведением неизвестных, т.е. имеет вид

$$a'_{11}x'^2+a'_{22}y'^2+2a'_{13}x'+2a'_{23}y'+a'_{33}=0 \ (*).$$

Здесь возможны следующие случаи:

1. Если $a'_{11} \neq 0$ и $a'_{22} \neq 0$, то уравнение (*) переписываем в виде
$$a'_{11}\left(x'^2 + 2\frac{a'_{13}}{a'_{11}}x' + \frac{a'^2_{13}}{a'^2_{11}}\right) + a'_{22}\left(y'^2 + 2\frac{a'_{23}}{a'_{22}}y' + \frac{a'^2_{23}}{a'^2_{22}}\right) - \frac{a'^2_{13}}{a'_{11}} - \frac{a'^2_{23}}{a'_{22}} + a'_{33} = 0$$
или
$$a'_{11}\left(x' + \frac{a'_{13}}{a'_{11}}\right)^2 + a'_{22}\left(y' + \frac{a'_{23}}{a'_{22}}\right)^2 + A_{33} = 0\,,$$
где $A_{33} = a'_{33} - \frac{a'^2_{13}}{a'_{11}} - \frac{a'^2_{23}}{a'_{22}}$.

Применяя параллельный перенос $X = x' + \frac{a'_{13}}{a'_{11}}$, $Y = y' + \frac{a'_{23}}{a'_{22}}$, получаем простейшее уравнение линии
$$a'_{11}X^2 + a'_{22}Y^2 + A_{33} = 0. \qquad (1)$$

2. Если $a'_{11} = 0$, $a'_{22} \neq 0$ и $a'_{13} \neq 0$, то простейшее уравнение имеет вид
$$a'_{22}Y^2 + 2A_{13}X = 0. \qquad (2)$$

3. Если $a'_{11} = 0$, $a'_{22} \neq 0$ и $a'_{13} = 0$, то из уравнения
$$a'_{22}y'^2 + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0,$$
получаем
$$a'_{22}\left(y'^2 + 2\left(\frac{a'_{23}}{a'_{22}}\right)y' + \frac{a'^2_{23}}{a'^2_{22}}\right) - \frac{a'^2_{23}}{a'_{22}} + a'_{33} = 0$$
или
$$a'_{22}\left(y' + \frac{a'_{23}}{a'_{22}}\right)^2 + A_{33} = 0\,.$$

Обозначая $Y = y' + \frac{a'_{23}}{a'_{22}}$, $A_{33} = -\frac{a'^2_{23}}{a'_{22}} + a'_{33}$, окончательно получаем
$$a'_{22}Y^2 + A_{33} = 0. \qquad (3)$$

По уравнениям (1), (2) и (3) можно найти каноническое уравнение линии. При выполнении данной работы следует придерживаться следующего порядка:

1. Определяем $ctg2\alpha = \dfrac{(a_{11} - a_{22})}{2a_{12}}$, где α – угол, который образует ось Ox' новой системы координат с осью Ox.
2. Используя формулы
$$\cos 2\alpha = \frac{ctg2\alpha}{\sqrt{1 + ctg^2 2\alpha}}; \ \sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{(1 - \cos 2\alpha)}{2}};$$
$$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{(1 + \cos 2\alpha)}{2}},$$
находим $\sin\alpha$, $\cos\alpha$.
3. Составляем формулы преобразования прямоугольной системы координат:
$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{cases}$$
4. Находим уравнение (*) линии в системе координат $Ox'y'$. Заметим, что полученное уравнение не содержит произведение $x'y'$.
5. В уравнении (*) выделяем полные квадраты, определяем тип линии и записываем каноническое уравнение и формулы параллельного переноса.
6. Строим исходную систему координат, относительно нее систему, полученную поворотом на угол α, и систему $O'XY$, полученную параллельным переносом.
7. В системе $O'XY$ строим линию по ее каноническому уравнению.

Пример 1. Определить форму, размеры, расположение линии
$$6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0.$$

Решение. Так как $a_{11} = 0$, $2a_{12} = 6$, $a_{22} = 8$, то $ctg2\alpha = -\dfrac{8}{6} = -\dfrac{4}{3}$.

Тогда

$$\cos 2\alpha = -\frac{\frac{4}{3}}{\sqrt{1+\frac{16}{9}}} = -\frac{4}{5},$$

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{\left(1+\frac{4}{5}\right)}{2}} = \pm\frac{3}{\sqrt{10}}, \ \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{\left(1-\frac{4}{5}\right)}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Выбирая $\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$, составим формулы преобразования координат:

$$x = \frac{1}{\sqrt{10}}x' - \frac{3}{\sqrt{10}}y' = \frac{1}{\sqrt{10}}\left(x' - 3y'\right),$$

$$y = \frac{3}{\sqrt{10}}x' + \frac{1}{\sqrt{10}}y' = \frac{1}{\sqrt{10}}\left(3x' + y'\right).$$

Находим уравнение линии в системе координат $Ox'y'$, $K_{ox'} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 3$:

$$\frac{6\left(x'-3y'\right)\left(3x'+y'\right)}{10} + \frac{8\left(3x'+y'\right)^2}{10} - \frac{12\left(x'-3y'\right)}{\sqrt{10}} - \frac{26\left(3x'+y'\right)}{\sqrt{10}} + 11 = 0.$$

Приводим подобные и получаем:

$$9x'^2 - y'^2 - \frac{90}{\sqrt{10}}x' + \frac{10}{\sqrt{10}}y' + 11 = 0$$

или

$$9x'^2 - y'^2 - 9\sqrt{10}x' + \sqrt{10}y' + 11 = 0.$$

Дополняя до полных квадратов,

$$9\left(x' - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 - \left(y' - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 - 9 = 0.$$

Полагаем $X = x' - \frac{\sqrt{10}}{2}$, $Y = y' - \frac{\sqrt{10}}{2}$. Тогда наше уравнение примет вид:

$$9X^2 - Y^2 - 9 = 0$$

и канонический вид:

$$\frac{X^2}{1} - \frac{Y^2}{9} = 1.$$

Таким образом, данная линия является гиперболой, $a = 1$, $b = 3$. Строим чертеж (рис. 19).

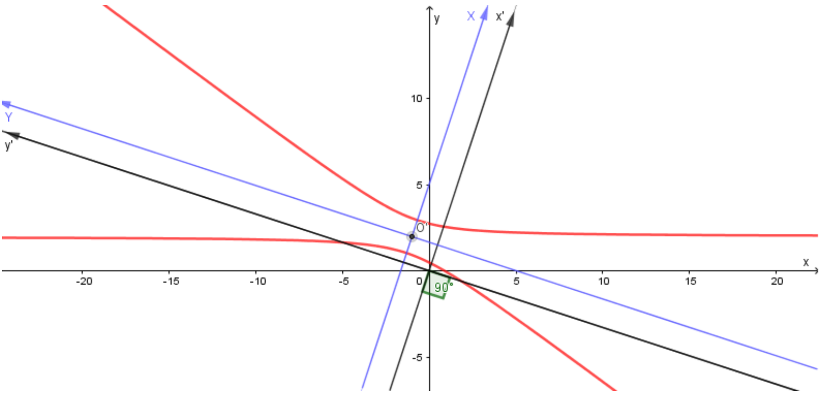


Рис. 19

Находим координаты нового начала $O'(-1, 2)$ в системе координат Oxy:

$$x = \frac{\frac{\sqrt{10}}{2} - \frac{3\sqrt{10}}{2}}{\sqrt{10}} = -1, \; y = \frac{\frac{3\sqrt{10}}{2} + \frac{\sqrt{10}}{2}}{\sqrt{10}} = 2.$$

Пример 2. Определить форму, размеры и расположение линии

$$4x^2 - y - 8x + 3 = 0.$$

Решение. Данная линия является параболой. Выделим полный квадрат:

$$4\left(x^2 - 2x + 1\right) - 4 - y + 3 = 0, \text{ получим } 4(x-1)^2 = y + 1.$$

Обозначим $X = x - 1$, $Y = y + 1$ (**). Тогда каноническое уравнение линии имеет вид $X^2 = \frac{Y}{4}$. Из формул (**) находим $O'(1, -1)$. Строим чертеж (рис. 20).

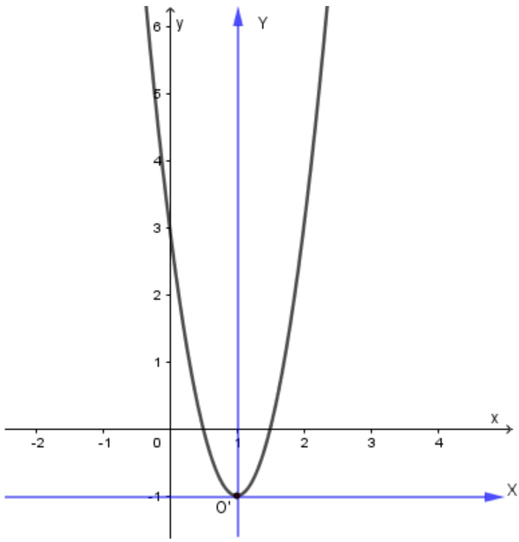


Рис. 20

Пример 3. Определить форму, размеры, расположение линии

$$153x^2 + 42xy + 97y^2 + 528x - 304y - 608 = 0$$

и построить эту линию в исходной системе координат.

Решение. Так как $a_{11} = 153$, $2a_{12} = 42$, $a_{22} = 97$, то $ctg2\alpha = \frac{4}{3}$.

Тогда $$\cos 2\alpha = \frac{\frac{4}{3}}{\sqrt{1+\frac{16}{9}}} = \frac{4}{5}, \qquad \sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{\left(1-\frac{4}{5}\right)}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{10}},$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{\left(1+\frac{4}{5}\right)}{2}} = \pm\frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Выбирая $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$, составим формулы преобразования координат:

$$x = \frac{3}{\sqrt{10}}x' - \frac{1}{\sqrt{10}}y' = \frac{1}{\sqrt{10}}\left(3x' - y'\right),$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{10}}x' + \frac{3}{\sqrt{10}}y' = \frac{1}{\sqrt{10}}\left(x' + 3y'\right).$$

Находим уравнение линии в системе координат $Ox'y'$, $K_{ox'} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{3}$:

$$\frac{153\left(3x'-y'\right)^2}{10} + \frac{42\left(3x'-y'\right)\left(x'+3y'\right)}{10} + \frac{97\left(x'+3y'\right)^2}{10} +$$
$$+\frac{528\left(3x'-y'\right)}{\sqrt{10}} - \frac{304\left(x'+3y'\right)}{\sqrt{10}} - 608 = 0,$$

которое после раскрытия скобок и приведения подобных примет вид:

$$160x'^2 + 90y'^2 + 128\sqrt{10}x' - 144\sqrt{10}y' - 608 = 0.$$

Для удобства разделим обе части последнего уравнения на 2. Тогда получим

$$80x'^2 + 45y'^2 + 64\sqrt{10}x' - 72\sqrt{10}y' - 304 = 0.$$

Дополняя до полных квадратов, получим

$$80\left(x' + \frac{2\sqrt{10}}{5}\right)^2 + 45\left(y' - \frac{4\sqrt{10}}{5}\right)^2 - 720 = 0.$$

Полагаем $X = x' + \frac{2\sqrt{10}}{5}$, $Y = y' - \frac{4\sqrt{10}}{5}$. Тогда наше уравнение примет вид $80X^2 + 45Y^2 - 720 = 0$ или в каноническом виде:

$$\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{16} = 1.$$

Таким образом, данная линия является эллипсом, $a = 3$, $b = 4$. Для его построения в исходной системе координат сначала повернем оси этой системы на угол $\alpha = arctg\frac{1}{3} \approx 18^0$. Затем в полученной системе координат $x'Oy'$ перенесем начало координат в точку $O'\left(-\frac{2\sqrt{10}}{5}; \frac{4\sqrt{10}}{5}\right)$.

Находим координаты нового начала $O'(-2, 2)$ в системе координат Oxy:

$$x = \frac{1}{\sqrt{10}}\left(3x' - y'\right) = \frac{1}{\sqrt{10}}\left(\frac{-6\sqrt{10}}{5} - \frac{4\sqrt{10}}{5}\right) = -2,$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{10}}\left(x' + 3y'\right) = \frac{1}{\sqrt{10}}\left(-\frac{2\sqrt{10}}{5} + \frac{12\sqrt{10}}{5}\right) = 2.$$

Строим чертеж (рис. 21).

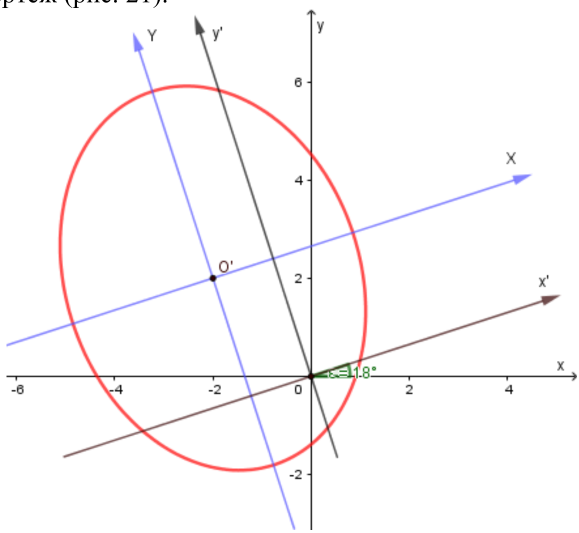


Рис. 21

Пример 4. Определить форму, размеры, расположение линии

$$4x^2+4xy+y^2-2x-16y-14=0$$

и построить эту линию в исходной системе координат.

Решение. Так как $a_{11}=4$, $2a_{12}=4$, $a_{22}=1$, то $ctg2\alpha=\frac{3}{4}$.

Тогда $\cos 2\alpha=\frac{ctg2\alpha}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}}=\frac{3}{5}$, $\sin\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Выбирая $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$, составим формулы преобразования координат:

$$x=\frac{2}{\sqrt{5}}x'-\frac{1}{\sqrt{5}}y'=\frac{1}{\sqrt{5}}(2x'-y'),$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{5}}x'+\frac{2}{\sqrt{5}}y'=\frac{1}{\sqrt{5}}(x'+2y').$$

Находим уравнение линии в системе координат $Ox'y'$, $K_{\mathrm{ox}'}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{2}$:

$$\frac{4(2x'-y')^2}{5}+\frac{4(2x'-y')(x'+2y')}{5}+\frac{(x'+2y')^2}{5}+$$

$$-\frac{2(2x'-y')}{\sqrt{5}}-\frac{16(x'+2y')}{\sqrt{5}}-14=0,$$

которое после раскрытия скобок и приведения подобных примет вид:

$$5x'^2-4\sqrt{5}x'-6\sqrt{5}y'-14=0.$$

Выделяя полный квадрат при переменной x', получим

$$5\left(x'-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2-6\sqrt{5}\left(y'+\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)=0.$$

Полагаем $X=x'-\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $Y=y'+\frac{3\sqrt{5}}{5}$. Тогда наше уравнение примет вид $5X^2-6\sqrt{5}Y=0$ или в каноническом виде:

$$X^2 = \frac{6\sqrt{5}}{5} Y .$$

Таким образом, данная линия является параболой. Для ее построения в исходной системе координат сначала повернем оси этой системы на угол $\alpha = arctg\frac{1}{2} \approx 27^0$. Затем в полученной системе координат $x'Oy'$ перенесем начало координат в точку $O'\left(\frac{2\sqrt{5}}{5};-\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)$.

Находим координаты нового начала $O'(-2, 2)$ в системе координат Oxy:

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{4\sqrt{5}}{5} + \frac{3\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{7}{5},$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{6\sqrt{5}}{5}\right) = -\frac{4}{5}.$$

Строим чертеж (рис. 22).

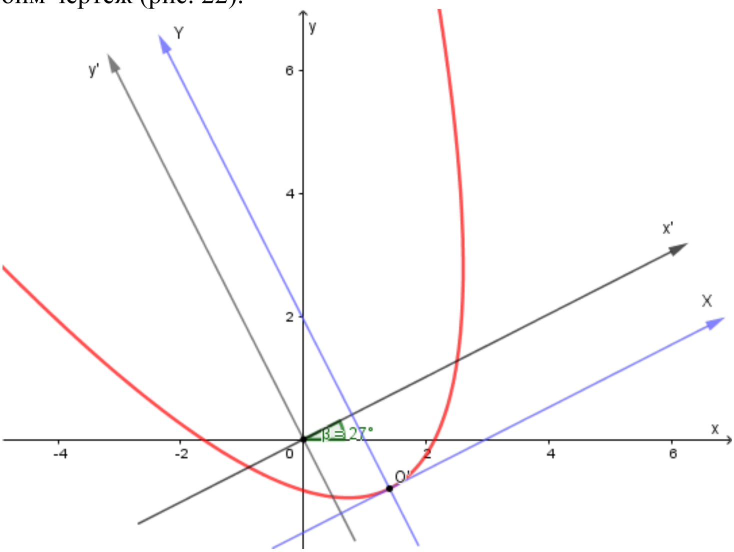


Рис. 22

Варианты лабораторной работы

ВАРИАНТ 1

1) $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x - 4y - 12 = 0$;
2) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x - 2y + 1 = 0$;
3) $4x^2 - y^2 - 16x - 6y + 3 = 0$.

ВАРИАНТ 2

1) $x^2 - 6xy + y^2 - 4x - 4y + 12 = 0$;
2) $x^2 - 2xy + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$;
3) $4x^2 + 9y^2 + 8x - 36y + 4 = 0$.

ВАРИАНТ 3

1) $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$;
2) $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$;
3) $x^2 + 6y^2 - 6x + 12y + 13 = 0$.

ВАРИАНТ 4

1) $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$;
2) $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 4 = 0$;
3) $3x^2 - 2y^2 + 6x + 4y + 1 = 0$.

ВАРИАНТ 5

1) $3x^2 - 4xy - 2x + 4y - 5 = 0$;
2) $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 40x + 30y = 0$;
3) $x^2 + 2y^2 - 4x - 12y + 23 = 0$.

ВАРИАНТ 6

1) $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$;
2) $4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0$;
3) $x^2 - 10x + 4y^2 + 8y - 7 = 0$.

ВАРИАНТ 7

1) $8x^2 + 4xy + 5y^2 + 8x - 16y - 16 = 0$;
2) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0$;
3) $x^2 - y^2 - 20y - 105 = 0$.

ВАРИАНТ 8

1) $8x^2 - 8xy + 7y^2 + 6x - 6y + 9 = 0$;
2) $x^2 - 2xy + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$;
3) $9x^2 + 16y^2 - 54x + 64y + 1 = 0$.

ВАРИАНТ 9

1) $x^2 + 6xy + y^2 + 8x + 24y = 0$;
2) $x^2 + 4xy + 4y^2 + 8x + 6y + 2 = 0$;
3) $x^2 - 4y^2 - 4x - 8y - 4 = 0$.

ВАРИАНТ 10

1) $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$;
2) $x^2 - xy + 4y^2 + 6x + 12y + 8 = 0$;
3) $4x^2 + 9y^2 - 8x - 32 = 0$.

ВАРИАНТ 11

1) $7x^2 - 8xy + y^2 - 16x - 2y - 51 = 0$;
2) $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 6y = 0$;
3) $2x^2 + y^2 - 12x - 4y + 21 = 0$.

ВАРИАНТ 12

1) $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 12x - 12y + 4 = 0$;
2) $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$;
3) $9x^2 - 4y^2 - 36x + 8y + 4 = 0$.

ВАРИАНТ 13

1) $x^2 - 12xy - 4y^2 + 12x + 8y + 5 = 0$;
2) $x^2 + 2xy + y^2 - 8y + 4 = 0$;
3) $4x^2 + y^2 + 8x + 4y + 4 = 0$.

ВАРИАНТ 14

1) $8y^2 + 6xy - 12x - 26y + 1 = 0$;
2) $4x^2 + 4xy + y^2 + 6x + 8y + 2 = 0$;
3) $6x^2 + y^2 + 12x - 6y + 13 = 0$.

ВАРИАНТ 15

1) $3x^2 + 4xy + 12x + 16y - 36 = 0$;
2) $4x^2 + 12xy + 9y^2 - x + 2 = 0$;
3) $9x^2 + 25y^2 + 54x - 100y - 44 = 0$.

ВАРИАНТ 16

1) $x^2 - 4xy + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$;
2) $4x^2 - 4xy + y^2 + 10x - 20y - 50 = 0$;
3) $9x^2 + 4y^2 - 8y - 32 = 0$.

ВАРИАНТ 17

1) $8x^2 + 4xy + 5y^2 - 56x - 32y + 80 = 0$;
2) $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 230x + 110y - 475 = 0$;
3) $3x^2 - y^2 + 6x - 6y - 9 = 0$.

ВАРИАНТ 18

1) $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y - 16 = 0$;
2) $x^2 - 2xy + y^2 - 6x - 10y + 25 = 0$;
3) $2x^2 + 3y^2 + 5xy - y - 2 = 0$.

ВАРИАНТ 19

1) $x^2 - 8xy + 7y^2 - 2x - 16y - 51 = 0$;
2) $9x^2 + 12xy + 4y^2 - y + 2 = 0$;
3) $4x^2 + 9y^2 + 16x - 18y + 23 = 0$.

ВАРИАНТ 20

1) $x^2 + 6xy + y^2 + 24x + 8y = 0$;
2) $x^2 - 2xy + y^2 - 6x + 2y = 0$;
3) $2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 2 = 0$.

ВАРИАНТ 21

1) $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0$;
2) $4x^2 - 4xy + y^2 - 3x + 4y - 7 = 0$;
3) $4x^2 - y^2 - 16x - 6y + 3 = 0$.

ВАРИАНТ 22

1) $8x^2 + 6xy - 12y - 26x + 11 = 0$;
2) $x^2 + 4xy + 4y^2 + 8x + 6y + 2 = 0$;
3) $25x^2 + 9y^2 - 100x + 54y - 44 = 0$.

ВАРИАНТ 23

1) $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 6x - 10y - 3 = 0$;
2) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$;
3) $x^2 - 3y^2 + 6x - 6y - 6 = 0$.

ВАРИАНТ 24

1) $12xy + 5y^2 - 12x - 22y - 19 = 0$;
2) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 14x - 2y + 7 = 0$;
3) $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y + 27 = 0$.

ОТВЕТЫ

Раздел 1. Элементы векторной алгебры

Тема 1. Операции над векторами

Таблица 1

№ Задания	Ответ
1	$\overline{a}=\overline{b}-\overline{d}$, $\overline{d}=\overline{b}-\overline{a}$, $\overline{g}=\overline{c}-\overline{a}$, $\overline{a}=\overline{c}-\overline{g}$
2	$\overline{c}=\overline{a}+\overline{g}$, $\overline{b}=\overline{a}+\overline{d}$
3	т. O – центр тяжести ΔABC (точка пересечения медиан ΔABC)
4	$\overline{DK}=\overline{DA}+\frac{3}{4}\overline{AB}=\overline{CB}+\frac{3}{4}\overline{DC}$, $\overline{BL}=\overline{BC}+\frac{2}{5}\overline{CD}=\overline{AD}+\frac{2}{5}\overline{BA}$, $\overline{KL}=\overline{BC}-\frac{3}{20}\overline{AB}=\overline{AD}-\frac{3}{20}\overline{AB}$
9	$\overline{AB}=\frac{2}{3}\overline{a}-\frac{2}{3}\overline{b}$, $\overline{BC}=\frac{2}{3}\overline{a}+\frac{4}{3}\overline{b}$, $\overline{AC}=\frac{4}{3}\overline{a}+\frac{2}{3}\overline{b}$
10	$\overline{LM}=\overline{s}$, $\overline{MN}=\overline{s}-\overline{t}$, $\overline{NP}=-\overline{t}$, $\overline{OK}=-\overline{s}+\overline{t}$
11	$\overline{CM}=\frac{3}{2}\overline{e}_1-\frac{17}{8}\overline{e}_2$
12	$\overline{AC}=2\overline{e}_1-1{,}5\overline{e}_2$
13	$\overline{BC}=-\frac{1}{k}\overline{e}_1+(1+k)\overline{e}_2$
14	$\overline{AB}=3\overline{a}-\overline{b}$, $\overline{BC}=2\overline{b}-3\overline{a}$
15	$\overline{AB}=\frac{4}{3}\overline{a}-\frac{2}{3}\overline{b}$, $\overline{AD}=\frac{4}{3}\overline{b}-\frac{2}{3}\overline{a}$, $\overline{BD}=2\overline{b}-2\overline{a}$
16	$\overline{OM}=\frac{\overline{a}}{\lvert\overline{a}\rvert}+\frac{\overline{b}}{\lvert\overline{b}\rvert}$
17	$\overline{AD}=\frac{\overline{AB}\cdot\lvert\overline{AC}\rvert+\overline{AC}\cdot\lvert\overline{AB}\rvert}{\lvert\overline{AB}\rvert+\lvert\overline{AC}\rvert}$
18	$\overline{KB}=\{1{,}5;\,0\}$, $\overline{BN}=\{-1{,}5;\,1\}$, $\overline{BC}=\{-3;\,2\}$, $\overline{AB}=\{0;\,2\}$, $\overline{AC}=\{-3;\,4\}$, $\overline{KM}=\{1{,}5;\,-1\}$
19	$\overline{PQ}=\frac{3}{14}\overline{l}-\frac{5}{14}\overline{m}+\frac{15}{14}\overline{k}$

Окончание табл. 1

№ Задания	Ответ
20	$\overline{SA} = 3\overline{SM} - \overline{SB} - \overline{SC}$
21	$\overline{CK} = \{-1;\ -0{,}5;\ 1\}$; $\overline{B_1L} = \{-0{,}5;\ 1;\ -1\}$; $\overline{LM} = \{0{,}5;\ -2;\ 1\}$; $\overline{KL} = \{0{,}5;\ 0{,}5;\ -1\}$; $\overline{DM} = \{1;\ -2;\ 1\}$
22	$\frac{\bar{r}_1 + \bar{r}_3}{2}$; $\bar{r}_1 - \bar{r}_2 + \bar{r}_3$
23	A(0, 0); B(2, 0); C(0, 3); D(–2, 3);O(0; 1,5)
25	$\overline{BC} = \sqrt{2}\bar{a} + \bar{b}$, $\overline{CD} = \bar{a} + \sqrt{2}\bar{b}$, $\overline{DE} = \bar{b}$, $\overline{EF} = -\bar{a}$, $\overline{GF} = -\sqrt{2}\bar{a} - \bar{b}$, $\overline{GH} = -\bar{a} - \sqrt{2}\bar{b}$
26	$\overline{BC} = \bar{c} - \bar{b}$, $\overline{BD} = \bar{d} - \bar{b}$, $\overline{CD} = \bar{d} - \bar{c}$, $\overline{DM} = \frac{1}{2}\bar{b} + \frac{1}{2}\bar{c} - \bar{d}$, $\overline{AQ} = \frac{1}{3}(\bar{b} + \bar{c} + \bar{d})$

Тема 2. Координаты векторов в аффинной (АСК) и прямоугольной декартовой (ПДСК) системах координат

Таблица 2

№ Задания	Ответ
28	1), 3) линейно зависимая система; 2) линейно независимая система
29	1) $2\bar{a} - \bar{b} - \bar{c} = \bar{0}$; 3) $\bar{a} + \bar{b} - \bar{c} = \bar{0}$
30	1) $\bar{d} = 2\bar{a} - 2\bar{b} + \bar{c}$; 2) $\bar{d} = -4\bar{a} - 2\bar{b} - \bar{c}$; 3) $\bar{d} = 2\bar{a} + 2\bar{b} + 2\bar{c}$
32	1) $\bar{l} + \bar{m} + \bar{n} = \bar{0}$; 2) $2\bar{l} + \bar{m} - \bar{n} = \bar{0}$; 3) векторы некомпланарны
33	$3\bar{m} + 2\bar{n} - 3\bar{p} + 4\bar{q} = \bar{0}$
34	$\bar{s} = \frac{2}{5}\bar{m} + \frac{3}{5}\bar{n} + \frac{3}{5}\bar{p}$
35	1) векторы линейно независимы; 2) $\bar{c} = \frac{1}{2}\bar{a} + \frac{2}{3}\bar{b}$; 3) векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ линейно зависимы, но вектор $\bar{c}$ не может быть представлен как линейная комбинация векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, т.к. эти последние векторы коллинеарны между собой, а вектор $\bar{c}$ им не коллинеарен

Окончание табл. 2

№ Задания	Ответ
36	1) $M\left(-\frac{8}{3};\frac{5}{3}\right)$; 2) $M(9;5)$; 3) $M\left(-\frac{22}{3};\frac{1}{3}\right)$; 4) $M\left(\frac{1}{4};\frac{5}{2}\right)$
37	C(0, −1), D(4, −4)
38	C(0,75; –2), D(−0,5; 1), E(−1,75; 4)
39	A(3, −1), B(0, 8)
40	3; 5; 7; $5\sqrt{3}$; $\sqrt{110}$
41	1) $\lvert\bar{a}+\bar{b}\rvert=3$; 2) $\lvert\bar{b}+\bar{c}\rvert=7$; 3) $\lvert 2\bar{a}+3\bar{b}-\bar{c}\rvert=\sqrt{93}$
42	1) $\left\{\frac{2}{3};-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right\}$; 2) $\left\{\frac{2}{7};\frac{6}{7};-\frac{3}{7}\right\}$; 3) $\left\{\frac{2}{3};\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right\}$; 4) $\left\{\frac{4}{\sqrt{277}};-\frac{15}{\sqrt{277}};-\frac{6}{\sqrt{277}}\right\}$
43	1) $\cos\alpha=\frac{2}{3}$; $\cos\beta=-\frac{2}{3}$; $\cos\gamma=\frac{1}{3}$; 2) $\cos\alpha=\frac{2}{7}$; $\cos\beta=\frac{6}{7}$; $\cos\gamma=-\frac{3}{7}$; 3) $\cos\alpha=\frac{\sqrt{6}}{15}$; $\cos\beta=-\frac{11\sqrt{6}}{30}$; $\cos\gamma=\frac{\sqrt{6}}{6}$
44	1) да; 2) нет; 3) нет
45	$\bar{x}=\{5;10;-10\}$
46	$M\left(-4;4;4\sqrt{2}\right)$
47	$\lvert\bar{s}\rvert=7$; $\cos\alpha=\frac{2}{7}$; $\cos\beta=\frac{3}{7}$; $\cos\gamma=\frac{6}{7}$
48	5
49	$3\sqrt{10}$
50	1) $\sqrt{91}$; 2) 1

Тема 3. Скалярное произведение векторов

Таблица 3

№ Задания	Ответ
51	242
52	–1,5
53	–13
54	0
55	104
56	9
57	$\sqrt{13}$
58	7
59	15, $\sqrt{593}$
60	$\cos\varphi = -\dfrac{17}{2\sqrt{91}}$
61	$A = \dfrac{\pi}{2}$, $B = \arccos\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$, $C = \arccos\dfrac{\sqrt{5}}{5}$
62	$\lvert\overline{AM}\rvert = 6$, $\lvert\overline{AD}\rvert = \dfrac{12\sqrt{5}}{5}$.
63	$\lvert\bar{q}\rvert = 7$, $\cos\left(\bar{q}\,\hat{}\,\bar{m}\right) = \dfrac{6}{7}$, $\cos\left(\bar{q}\,\hat{}\,\bar{n}\right) = -\dfrac{2}{7}$, $\cos\left(\bar{q}\,\hat{}\,\bar{p}\right) = \dfrac{3}{7}$
64	$\bar{a} \parallel \bar{c}$, $\bar{b} \perp \bar{a}$ и $\bar{b} \perp \bar{c}$
65	$\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$
66	$\bar{s}\,\hat{}\,\bar{t} = \dfrac{\pi}{3}$
67	$\lvert\bar{m}\rvert = \dfrac{1}{2}\sqrt{2\lvert\bar{b}\rvert^2 + 2\lvert\bar{c}\rvert^2 - \lvert\bar{a}\rvert^2}$, $\lvert\bar{n}\rvert = \dfrac{1}{2}\sqrt{2\lvert\bar{a}\rvert^2 + 2\lvert\bar{c}\rvert^2 - \lvert\bar{b}\rvert^2}$, $\lvert\bar{p}\rvert = \dfrac{1}{2}\sqrt{2\lvert\bar{a}\rvert^2 + 2\lvert\bar{b}\rvert^2 - \lvert\bar{c}\rvert^2}$
68	$\bar{h} = \bar{b} + \dfrac{\bar{b}\cdot\left(\bar{b} - \bar{c}\right)}{\lvert\bar{c} - \bar{b}\rvert^2}\cdot\left(\bar{c} - \bar{b}\right)$

Окончание табл. 3

№ Задания	Ответ
69	$AC \perp AB$
70	$np_{\bar{b}}\bar{a} = 2$, $\cos\left(\bar{b}\,^\wedge\bar{m}\right) = \frac{5}{13}$, $\cos\left(\bar{b}\,^\wedge\bar{n}\right) = -\frac{12}{13}$
83	1) 716; 2) –721; 3) –353
84	1) $\{21, 42, 21\}$; 2) 280; 3) $\{115, 242, 137\}$
85	1) $\cos\alpha = \frac{1}{3}$; 2) $\alpha = 90^0$
86	$\bar{x} = \{2, 7, 3\}$
87	3
88	$\left\{\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{11}{\sqrt{2}}, \frac{4}{\sqrt{2}}\right\}$
89	$\bar{c} = \pm\left(6\bar{i} - 9\bar{j} - 2\bar{k}\right)$
90	$\alpha = 90^0$
91	$\bar{x} = -1{,}5\bar{i} + 0{,}75\bar{j} + 1{,}5\bar{k}$
92	1) $\alpha = \arccos\frac{18}{\sqrt{494}}$; 2) $np_{\overline{CA}}\overline{CB} = \frac{18}{\sqrt{19}}$
93	$np_{\bar{b}+\bar{c}}\bar{a} = 5$
94	–1
95	$\alpha = 90^0$
96	2
97	$\cos\alpha = \frac{53}{2\sqrt{19}\cdot\sqrt{43}}$
98	1) $\cos\alpha = -\frac{25}{34}$; 2) $np_{\overline{BC}}\overline{KL} = -\frac{5\sqrt{2}}{3}$

Тема 4. Векторное произведение векторов

Таблица 4

№ Задания	Ответ
99	66
100	1) 3; 2) $2(\overline{a}\times\overline{c})$; 3) $34\overline{i}-7\overline{j}+26\overline{k}$
101	Удвоенная площадь параллелограмма равна площади параллелограмма, построенного на его диагоналях
102	$\overline{p}=3\overline{a}-17\overline{b}-4\overline{c}$
103	21
105	$30\sqrt{3}$
106	± 30
112	$\lvert\overline{a}\rvert=\lvert\overline{b}\rvert=\lvert\overline{c}\rvert=1$, векторы попарно перпендикулярны
113	нет
116	$\overline{x}=\dfrac{\alpha\overline{b}+(\overline{a}\times\overline{c})}{\overline{a}\cdot\overline{b}}$
117	$\overline{BA}\times\overline{BC}=\overline{B_1B}$; $\overline{BA}\times\overline{BM}=\overline{B_1B}$; $\overline{BA}\times\overline{BC_1}=\overline{B_1C}$; $\overline{BA}\times\overline{BN}=\overline{B_1C}$; $\overline{BA_1}\times\overline{BC_1}=\overline{B_1D}$
118	$\overline{AB}\times\overline{AC}=\dfrac{3a\sqrt{2}}{4}\overline{OD}$; $\overline{AC}\times\overline{BD}=a\sqrt{2}\,\overline{MN}$, где M и N – середины ребер AC и BD
120	$50\sqrt{2}$
121	11
122	37,5
123	3,8
124	$\sin\alpha=\sqrt{\dfrac{248}{273}}$
125	$np_{\overline{b}}\overline{a}=\dfrac{6}{7}$, если $\overline{p}$, $\overline{q}$ и $\overline{r}$ составляют правую тройку; $np_{\overline{b}}\overline{a}=-\dfrac{6}{7}$, если $\overline{p}$, $\overline{q}$ и $\overline{r}$ составляют левую тройку
126	$S_{MNP}=\dfrac{23}{60}S$

Окончание табл. 4

№ Задания	Ответ
127	$\{5, 1, 7\}$
128	$\lvert\bar{c}\rvert = 10\sqrt{3}$
129	$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = -46\bar{i} + 29\bar{j} - 12\bar{k}$; $(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} = -7\bar{i} + 7\bar{j} + 7\bar{k}$
130	$\sin\alpha = \frac{5\sqrt{17}}{21}$
131	$S = \frac{3\sqrt{6}}{2}$
132	$S = \frac{\sqrt{195}}{2}$
133	$\{8, 9, 4\}$
134	15; $\cos\alpha = \frac{2}{3}$, $\cos\beta = -\frac{2}{3}$, $\cos\gamma = -\frac{1}{3}$
135	5
136	$\overline{MN} \times \overline{PQ} = \frac{11}{12}\overline{DA} + \frac{13}{8}\overline{DC} + \frac{1}{2}\overline{DD_1}$
137	$S_{MNP} = \frac{5\sqrt{5}}{12}$, $h = \frac{5\sqrt{5}}{9}$
138	1) $\frac{1}{3}$; 2) $\sqrt{2}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 1; 5) $\frac{\sqrt{13}}{6}$
139	1) $S_{KLM} = \frac{3\sqrt{37}}{2}$; 2) $h = \frac{2\sqrt{409}}{\sqrt{53}}$
140	1) $\sin P = \sqrt{\frac{581}{582}}$; 2) $h = \frac{\sqrt{581}}{3\sqrt{6}}$

Тема 5. Смешанное произведение векторов

Таблица 5

№ Задания	Ответ
141	$-4\overline{a}\overline{b}\overline{c}$
142	0
143	$3\overline{a}\overline{b}\overline{c}$
144	–10
145	±27
146	24
151	$\overline{x}=\dfrac{\alpha\left(\overline{b}\times\overline{c}\right)+\beta\left(\overline{c}\times\overline{a}\right)+\gamma\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)}{\overline{a}\overline{b}\overline{c}}$
152	a) и c) компланарны; b) некомпланарны
153	$V_{ABCD}=\dfrac{1}{6}abd\sin\varphi$
154	4
155	a) 25; b) 0
156	$h=\dfrac{49}{\sqrt{323}}$
157	1) компланарны; 2) некомпланарны
158	$\lambda=\dfrac{1}{3}$
160	12
161	$h=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$
162	$h=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$
163	$V=\dfrac{25}{6}$
164	(0, 8, 0) или (0, –7, 0)
165	a) $V_{ABCD}=12$; b) $S_{ABCD}=2\sqrt{26}$; c) $h=\dfrac{6}{\sqrt{26}}$; d) $\alpha=\arccos\dfrac{16\sqrt{10}}{75}$

Окончание табл. 5

166	a) $A_1A_2=\sqrt{17}$; $A_1A_3=2\sqrt{13}$; $A_1A_4=5\sqrt{2}$; b) $S_{A_1A_2A_3}=14$; c) $\alpha=\arccos\left(-\frac{1}{5\sqrt{26}}\right)$; d) $V=30$; e) $h=6\frac{3}{7}$
167	$V_{MNPQ}=\frac{19}{96}V$
168	Если за базис выбраны векторы $\bar{e}_1=\overline{AB}$, $\bar{e}_2=\overline{AC}$, $\bar{e}_3=\overline{AD}$, то $\overline{AT}=\left\{\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right\}$, $V_{APNT}=\frac{\sqrt{2}}{48}$

Раздел 2. ЛИНЕЙНЫЕ ОБРАЗЫ

Тема 6. Прямая на плоскости

Таблица 6

№ Задания	Ответ
1	$3x-y+4=0$
2	1) $x-\sqrt{3}y=0$; 2) $x-y=0$; 3) $\sqrt{3}x-y=0$, 4) $\sqrt{3}x+y=0$; 5) $x+y=0$; 6) $x+\sqrt{3}y=0$
3	$\sqrt{3}x+3y+1=0$; $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};0\right)$
4	1) $k=2$, $a=-2$, $b=4$; 2) $k=-2/3$, $a=3$, $b=2$; 3) $k=-1/2$, $a=-1$, $b=-1/2$; 4) $k=3/4$, $a=-2$, $b=3/2$; 5) $k=-\sqrt{3}$, $a=-1$, $b=-\sqrt{3}$
5	$5x+y-13=0$
6	$x+y+2=0$
7	$2x+3y-12=0$, (6; 0)
8	$\alpha=45^0$
9	1) $x-y+2=0$; 2) $3x-2y=0$; 3) $x-1=0$; 4) $y+3=0$
10	$x-3=0$, $y+2=0$

Продолжение табл. 6

№ Задания	Ответ
11	135^0
12	$5x+7y-11=0$
13	$7x+y+18=0$
14	$y=0$; $y=2\sqrt{3}$; $y=\sqrt{3}x+5\sqrt{3}$; $y=-\sqrt{3}x+5\sqrt{3}$
15	$5x+3y-15=0$
16	$x+y-6=0$
17	$x-2y-4=0$
18	$S=9$
19	$2x+5y\pm10=0$
20	$3x+2y-6=0$; $3x+8y+12=0$
21	$x=3-4t$; $y=-5+2t$
22	$x=-6+7t$; $y=-4-3t$
23	$x=3+3t$; $y=5t$
24	$x=-\sqrt{3}t$; $y=t$
25	1) $x=-2t$, $y=-\frac{5}{6}+t$; 2) $x=4+2t$, $y=t$; 3) $x=t$, $y=5-3t$; 4) $x=2$, $y=t$; 5) $x=t$, $y=-3$; 6) $x=3t$, $y=-2t$
26	1) $3x+y-1=0$; 2) $7x+5y-34=0$
27	$k=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$
28	$15x-5y+32=0$
29	$x-y+2=0$
30	$x+2y-8=0$; $x-2y+4=0$
31	(1, 0)
32	$2x+y+4=0$; $2x-y+4=0$; $2x+y-4=0$
33	$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+4$
34	$C=\pm90$
35	$y=\pm x\pm a\frac{\sqrt{2}}{2}$
36	3), 5) и 6)

Продолжение табл. 6

№ Задания	Ответ
37	1) $-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-2=0$; 2) $\frac{5}{13}x+\frac{12}{13}y-3=0$; 3) $\frac{6}{10}x+\frac{8}{10}y-\frac{3}{2}=0$; 4) $-\frac{1}{\sqrt{5}}x+\frac{2}{\sqrt{5}}y-\frac{3}{\sqrt{5}}=0$; 5) $-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y-2=0$; 6) $-x\cos 10^0-y\sin 10^0-4=0$ или $x\cos 190^0+y\sin 190^0-4=0$
38	1) $3x-4y-12=0$, 2) $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-\frac{12}{5}=0$, 3) $y=\frac{3}{4}x-3$, 4) $\frac{1}{4}x-\frac{1}{3}y=1$
39	1) $b=-a$; 2) $b=a$; 3) $b=-\sqrt{3}a$
40	$y=-x+3$
41	$x+y-1=0$
42	1) пересекаются в точке (1, 2); 2) параллельны; 3) совпадают; 4) пересекаются в точке (–5, 0); 5) параллельны; 6) совпадают; 7) пересекаются в точке (–4, 10); 8) параллельны; 9) совпадают
43	1) пересекаются в точке (15, –10); 2) параллельны; 3) совпадают
44	1) совпадают; 2) пересекаются в точке (–4, –3); 3) параллельны; 4) пересекаются в точке (4, 6); 5) параллельны; 6) совпадают
45	$4x-5y+17=0$
46	$3x-2y-13=0$
47	$x-2=0$; $x-3y+13=0$
48	$3x-5y+9=0$; $x-y+3=0$; $x-3y+11=0$
49	$x-3y-7=0$; $2x+5y-3=0$
50	$3x+4y-16=0$; $5x+3y-1=0$; $2x-y-7=0$

Продолжение табл. 6

№ Задания	Ответ
51	$x+y-7=0$
52	$5x-7y-3=0$; $x+y+3=0$; $7x-5y-9=0$
53	$x-y-7=0$; $x-2y-10=0$
54	$x+2y-3=0$, $2x-y-6=0$, $x+2y-23=0$, $2x-y+14=0$
55	$9x+12y+20=0$; $5x-12y+36=0$
56	$2x+y-6=0$
57	$BC\parallel DA$; $3x-5y+5=0$; $x-y=0$; $y-1=0$
59	1), 3), 5) и 6)
60	$2x+3y-26=0$
61	$91x-26y-2=0$
62	$3x-4y+12=0$
63	(2, –7)
64	$M_1(2,3)$
65	$M\left(\frac{2}{5}, \frac{13}{5}\right)$; $M\left(\frac{4}{7}, \frac{17}{7}\right)$
66	$\left(\frac{29}{18}, \frac{47}{54}\right)$
67	$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
68	C(2, 4)
69	BC: $x-y-3=0$; AC: $4x+5y-20=0$; CH: $3x-12y-1=0$
70	$39x-9y-4=0$
71	$2x+7y+22=0$; $7x+2y-13=0$; $x-y+2=0$
72	$3x-3y-8=0$
73	$\lambda=-0,5$
74	$P\left(\frac{5}{4}; \frac{1}{4}\right)$; S = 7,5 *кв.ед*
75	$x-2y+9=0$; $2x+y-2=0$ или $2x-y+6=0$; $x+2y-7=0$
76	$M_1(0,2)$ и $M_2(0,-8)$

Продолжение табл. 6

№ Задания	Ответ
77	1) (2, 5); 2) прямые параллельны; 3) (–1, 4)
78	M(0, 3), $\varphi = arctg(-2)$
80	$3x + y - 2 = 0$, $x - 3y - 14 = 0$, $x - 3y + 16 = 0$, $3x + y - 32 = 0$
81	$y = 2x$
82	$y = \left(-1 \pm \sqrt{2}\right)x$
83	$y = -2x + 7$; $y = 0{,}5x - 3$
84	Уравнение катета: $2x - 3y + 11 = 0$, уравнение гипотенузы: $x + 5y - 40 = 0$ или $5x - y - 18 = 0$
85	1) $\varphi = arctg(3/4)$; 2) $\varphi = \pi/4$; 3) $\varphi = \pi/2$; 4) $\varphi = 0$; 5) $\varphi = \pi/4$; 6) $\varphi = 0$; 7) $\varphi = arctg(1/4)$; 8)) $\varphi = \pi/2$
86	1) $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$; 2) $\varphi = arctg\left(\dfrac{19}{9}\right)$
87	1) *а)* 4, *б)* –9; 2) *а)* 8, *б)* –2; 3) *а)* 0,75, *б)* –12; 4) *а)* –1,5, *б)* $\dfrac{2}{3}$
88	$3x - y + 2 = 0$ и $x + 3y - 6 = 0$
89	$\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{\pi}{4}$
90	$\alpha = 1$; $\alpha = 0$
91	$a = 2$; $a = -\dfrac{2}{3}$
92	$(x - x')\sin\alpha - (y - y')\cos\alpha = 0$
93	45^0 и 135^0

Продолжение табл. 6

№ Задания	Ответ
94	$5x+y-16=0$ и $x-5y+2=0$
95	$72x-y=0$; $12x+71y=0$
96	$M_1(4, 0)$; $M_2(-1, 5)$
97	1) 5; 2) –7; 3) $-\frac{21}{20}$; 4) $\frac{56}{33}$
98	$2x-y+4=0$
99	$3x+y+16=0$
100	$A_1(-7,15)$; $A_2(9,-9)$
101	$12x-y-23=0$, $26x-7y+71=0$, $2x-5y+1=0$, или $8x+9y-25=0$, $14x+23y+65=0$, $2x-5y+1=0$
102	$x-y+1=0$, $3x-y-1=0$, $x-2y+5=0$, $C_1\left(\frac{7}{5}, \frac{16}{5}\right)$ или $x-y+1=0$, $x-3y+5=0$, $2x-y-2=0$, $C_2\left(\frac{11}{5}, \frac{12}{5}\right)$
103	*CB:* $2x-11y+28=0$ или *CA:* $3x-4y+17=0$, *CB:*$2x+y+4=0$
104	–7; 2; $\frac{1}{3}$
105	49
106	$5x-12y-52=0$ и $5x-12y+26=0$
107	4,5
108	$5{,}1\sqrt{2}$
109	$y-5=0$ и $5x+12y-65=0$
110	(1, 3)
111	$x+2y-10=0$
112	$7x-56y+83=0$; $32x+4y+73=0$
113	$x-2=0$; $4x-3y+7=0$
114	$4x-3y-7=0$
115	(2, 1) и (5, 2) или (0, 7) и (3, 8)
116	$3x-4y-9=0$, $3x-4y+16=0$, $4x+3y-37=0$ или $4x+3y+13=0$
117	$3x+4y-12=0$

Продолжение табл. 6

№ Задания	Ответ
118	к стороне AB
119	$x-2y-1=0$
120	$4x-3y+26=0$ и $4x-3y-24=0$
121	$\delta=\dfrac{25}{\sqrt{34}}$
122	$M_1(0,-12)$ и $M_2\left(0,\dfrac{4}{3}\right)$
123	$d=14\dfrac{2}{17}$
124	$k=\pm\dfrac{4}{3}$
125	$C_1\left(-\dfrac{5}{3},\ 11\dfrac{1}{4}\right)$, $C_2\left(-15,\ \dfrac{5}{4}\right)$, $C_3\left(-\dfrac{5}{3},\ -8\dfrac{3}{4}\right)$, $C_4\left(11\dfrac{2}{3},\ \dfrac{5}{4}\right)$
126	$y-3=0$ и $12x-5y-117=0$
127	$S=4\dfrac{2}{27}$
128	$y=\sqrt{3}x$, $y=0$
129	$x+2y-23=0$, $x+2y-3=0$, $2x-y-6=0$ и $2x-y+14=0$
130	1) три прямые проходят через одну точку; 2) три прямые параллельны между собой; 3) три прямые проходят через одну точку; 4) три прямые параллельны между собой; 5) три прямые параллельны между собой; 6) прямые образуют треугольник; 7) первые две прямые параллельны, третья их пересекает
131	$5x-2y=0$
132	$25x+29y-21=0$
133	$38x-19y+30=0$
134	$32x-9=0$, $32y-19=0$
135	$x+y-6=0$
136	$8x-49y+20=0$
137	$91x-26y-2=0$

Окончание табл. 6

№ Задания	Ответ
138	$5x+y-16=0$; $x-5y+2=0$
139	$7x-6y+19=0$; $9x+2y+5=0$
140	$x+4=0$; $3x-4y+20=0$
141	$3a+7b+3=0$
142	$2x-y-5=0$
143	$x+3y-9=0$; $68x-17y+57=0$; $65x-26y+72=0$
144	1) $14x-43y+29=0$; 2) $2x-25y+23=0$

Тема 7. Плоскость

Таблица 7

№ Задания	Ответ
145	1) $z-1=0$; 2) $y+2=0$; 3) $x+5=0$; 4) $x+2z=0$; 5) $z+2y=0$; 6) $4x+3y=0$
146	1) $x-5=0$; 2) $x+y+z-7=0$
147	$\frac{2}{7}x-\frac{6}{7}y+\frac{3}{7}z-2=0$
148	$\cos\alpha=\frac{3\sqrt{2}}{10}$; $\cos\beta=-\frac{2\sqrt{2}}{5}$; $\cos\gamma=\frac{\sqrt{2}}{2}$
149	1) $3x+4y-5=0$; 2) $4x-3y-3z-9=0$
150	$5x+3y-9z-55=0$
151	$9x+y+11z-7=0$
152	$16x-6y-z-17=0$
153	$14x+7y-2z+6=0$
154	$14x-10y+33z-70=0$
155	$35x+21y-15z-105=0$
156	$2x-y-3z-15=0$
157	$x-2y=0$; $2x+z=0$; $4y+z=0$
158	$5x+3y=0$, $x-3z=0$, $y+5z=0$
159	$x=2-5u+4v$, $y=3+6u-2v$, $z=-5+4u$
160	1) $x-4y-z+16=0$; 2) $x+5y-z+5=0$

Продолжение табл. 7

№ Задания	Ответ
161	$x-2y+2z-18=0$
162	$3x+2y+4z-38=0$
163	Семь плоскостей: $x-z-6=0$; $x+y-10=0$; $x+2y-z-8=0$; $2x+y-z-14=0$; $x-y-z-2=0$; $2x+y+z-16=0$; $5x+y-2z-28=0$
164	1) пересекаются; 2) пересекаются; 3) параллельны; 4) пересекаются; 5) совпадают
165	$2x+3y+4z-1=0$; $x+3y+9=0$; $z-1=0$
166	1) $l=3,\ m=-4$; 2) $l=3,\ m=-2/3$; 3) $l=-10/3,\ m=-6/5$
167	$15x-5y-4z-7=0$
168	$4x-3y+z+3=0$
169	$x-2y+z-3=0$
170	$5x-2y-3z+4=0$
171	$4x-z=0$
172	(–2, 1, 4)
173	1) $l=6$, 2) $l=-1/7$
174	$x+2y+5z+1=0$
175	1) $\varphi=45^0$; 2) $\varphi=90^0$
176	$x+20y+7z=0$; $x-z=0$
177	$\frac{2}{7}; \frac{3}{7}; \frac{6}{7}$
178	$-\frac{4}{3\sqrt{21}}$
179	$\frac{1}{3}$
180	$x-z=0$
181	$\pm\sqrt{5}x+2y+z-2=0$
182	$6x+9y-22z=0$

Окончание табл. 7

№ Задания	Ответ
183	$5y+13z-60=0$
184	$2x-2y-2z-1=0$
185	$3x+5y-4z+25=0$
186	$x+3y-2z-10=0$
187	$3x+4y-z+1=0$; $x-2y-5z+3=0$
188	$41x-19y+52z-68=0$; $33x+4y-5z-63=0$
189	$x+20y+7z-12=0$, $x-z+4=0$
190	$x+3y=0$, $3x-y=0$
191	$11x+16y+5z+4=0$
192	$24x+21y-33z+50=0$
193	$16x+50y-3z-132=0$
194	1) $10x-7z=0$; 2) $6y-7=0$; 3) $39x-29y-7z=0$
195	$\frac{16}{3}$; 2; $\frac{1}{3}$
196	$4x-4y+4z-7=0$, $10x+6y-4z-5=0$
197	$\frac{1}{\sqrt{11}}$
198	$3x+4y-2z\pm 29=0$
199	(0, 0, 3)
200	(0, –3, 0)
201	$2x+y-4z+17=0$; $2x+y-4z-25=0$
202	(0, –3, 5) и $\left(\frac{98}{23}, -\frac{363}{23}, -\frac{375}{23}\right)$
203	$\left(-\frac{31}{10}, 0, \frac{14}{5}\right)$ и $\left(\frac{17}{10}, 0, \frac{2}{5}\right)$
204	$6x+3y+2z-75=0$; $6x+3y+2z-19=0$
205	$x+2y+2z-9=0$; $y-2=0$
206	$3x-4y-5=0$; $387x-164y-24z-421=0$

Тема 8. Прямая в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Таблица 8

№ Задания	Ответ
207	1) $x = 2 + 2t,\ y = 3 + 3t,\ z = 1 + 8t$; 2) $x = 7 - t,\ y = -1,\ z = 2 + t$; 3) $x = 1,\ z = 1$
208	1) $x = -2t,\ y = 7t,\ z = 4t$; 2) $x = t,\ y = -8 - 4t,\ z = -3 - 3t$
209	1) $x = 3 + 4t,\ y = 5 - 3t,\ z = 1$; 2) $\begin{cases} x + 2y + 10 = 0 \\ z - 4 = 0 \end{cases}$
210	1) $\begin{cases} x - 5z - 33 = 0 \\ y + 4z + 17 = 0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 5x - z + 5 = 0 \\ 5y + z - 5 = 0 \end{cases}$
211	1) пересекаются в точке (−3, 5, −5) и лежат в плоскости $9x + 10y - 7z - 58 = 0$; 2) скрещиваются; 3) параллельны и лежат в плоскости $5x - 22y + 19z + 9 = 0$; 4) совпадают
212	1) пересекаются в точке (−3, 0, 4) и лежат в плоскости $3x + 4y + 5z - 11 = 0$; 2) скрещиваются; 3) параллельны и лежат в плоскости $4x + 3y = 0$; 4) совпадают
213	1) совпадают; 2) параллельны и лежат в плоскости $12x - 3y + 8z = 0$; 3) скрещиваются; 4) пересекаются в точке (10, −1, 0) и лежат в плоскости $x - 7y + 3z - 17 = 0$
214	1) прямая и плоскость пересекаются в точке (0, 0, 2); 2) прямая параллельна плоскости; 3) прямая лежит в плоскости; 4) прямая и плоскость пересекаются в точке (2, 3, 1)
215	1) прямая и плоскость пересекаются в точке (2, 4, 6); 2) прямая параллельна плоскости; 3) прямая лежит в плоскости

Продолжение табл. 8

№ Задания	Ответ
216	1) $11x-4y+6=0$; $z=0$; 2) $6x+5y-38=0$; $z=0$
217	1) (−1; 7,5; 0), (2; 0; 3), (0, 5, 1); 2) (6, −2, 0), (7; 0; −2,5), (0, −14, 15)
218	(6, −2, 6)
219	$x=1+4t; y=-2t;\ z=t$
220	$4x+3z=0$, $y+2z+9=0$
221	$x-9y+5z+20=0$, $x-2y-5z+9=0$
222	$x-3y+5z=0$
223	$20x+19y-5z+41=0$
224	$18x-11y+3z-47=0$
225	$x-3y-3z+11=0$
226	$5x+6z=0$
227	1) $\cos\alpha=\frac{4}{13}$; $\cos\beta=-\frac{3}{13}$, $\cos\gamma=\frac{12}{13}$; 2) $\cos\alpha=\frac{12}{25}$; $\cos\beta=\frac{9}{25}$, $\cos\gamma=\frac{20}{25}$
228	$x-1=\frac{y+5}{\sqrt{2}}=-(z-3)$
229	$\cos\varphi=\pm\frac{72}{77}$
230	$\varphi_1=\varphi_2=\varphi_3=\frac{\pi}{2}$
231	$\cos\varphi=\pm\frac{98}{195}$
232	1) $\pm\frac{7}{2\sqrt{91}}$; 2) $\pm\frac{9}{\sqrt{2}\sqrt{66}}$
233	$\arcsin\frac{33}{\sqrt{46}\sqrt{62}}$
234	$\arcsin\frac{1}{10\sqrt{19}}$
235	$x-z+4=0$, $y=0$
236	$5x-13y-12z+20=0$, $2x-2y+3z-5=0$

Окончание табл. 8

№ Задания	Ответ
237	$x = x_0 + At,\ y = y_0 + Bt,\ z = z_0 + Ct$
238	$\frac{x-3}{5} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-4}{-7}$
239	(7, 1, 0)
240	(4, −1, 3)
241	$x = \frac{3}{7}$; $z = \frac{18}{7}$
242	$4x + 5y - 2z = 0$
243	(2, 9, 6)
244	Такой прямой нет
245	$4x + 5z = 0$; $41y - 63 = 0$
246	$y - 2z = 0$; $x = 3$
247	$y + 2z - 8 = 0$; $x + 2y - z + 5 = 0$
248	$x + y + z - 1 = 0$; $x - 1 = 0$
249	$\sqrt{14}$
250	1) $\sqrt{\frac{35}{6}}$; 2) $8\sqrt{\frac{3}{26}}$
251	$x + 3y = 0$; $3x - y + 4z - 12 = 0$; $h = \sqrt{\frac{117}{5}}$
252	1) $\frac{18}{\sqrt{110}}$; 2) 0 (прямые пересекаются); 3) $\frac{16}{\sqrt{102}}$
253	3
254	$\frac{1}{\sqrt{6}}$

Раздел 3. ОБРАЗЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Тема 9. Элементарная теория кривых второго порядка

Таблица 9

Окружность

№ Задания	Ответ
1	1) $(x-2)^2+(y+5)^2=4^2$; 2) $(x+3)^2+(y-4)^2=5^2$; 3) $x^2+(y-4)^2=13^2$
2	$(x+1)^2+(y-3)^2=5$
3	$\left(x-\frac{8}{3}\right)^2+y^2=\frac{85}{9}$
4	$(x-3)^2+(y-5)^2=5^2$
5	$(x+3)^2+(y+2)^2=5^2$
6	1) $(x-3)^2+(y-4)^2=5^2$; 2) данные три точки лежат на одной прямой, поэтому через них нельзя провести окружность
7	1) O(3, 0), $R=3$; 2) O(–3, 4), $R=5$; 3) O(5, –12), $R=15$; 4) $O\left(-1, \frac{2}{3}\right)$, $R=\frac{4}{3}$
8	1) $(x-2)^2+y^2=4$; 2) $x^2+(y+3)^2=16$; 3) $(x+1)^2+(y-5)^2=5^2$; 4) $\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+(y-1)^2=\frac{58}{9}$
9	$x^2+y^2=49$

Окончание табл. 9

№ Задания	Ответ
10	При $F=0$ окружность проходит через начало координат. При $D=0$ окружность симметрична относительно оси ординат, т.е. центр лежит на оси ординат. При $E=0$ окружность симметрична относительно оси абсцисс, т.е. центр лежит на оси абсцисс. При $A=0$ данное уравнение не изображает окружность
11	$(x-17)^2+(y-17)^2=17^2$; $(x-5)^2+(y-5)^2=25$
12	$(x-5)^2+\left(y\pm 5\sqrt{2}\right)^2=50$
13	O(30, 48) или O(–30, 48)
14	$(x-6)^2+(y-7)^2=36$
15	$4x-2y-9=0$
16	$4x+3y-35=0$
17	$y=0$ и $20x-21y=0$
18	$\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{25}{2}$ и $\left(x-\frac{13}{18}\right)^2+\left(y-\frac{13}{18}\right)^2=\frac{25}{162}$
19	$x+y-4=0$
20	$\varphi=90^0$

Таблица 10

Эллипс

№ Задания	Ответ
21	1) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$; 2) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$; 3) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$; 4) $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$; 5) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$
22	$2a=26$; $2b=10$; $F_1(12{,}0)$ и $F_2(-12{,}0)$ и $\varepsilon=\frac{12}{13}$
23	$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$
24	Эллипс с полуосями 13 см и 5 см. Вершины при основании треугольника служат фокусами этого эллипса.

Окончание табл. 10

№ Задания	Ответ
25	$x = \pm 9$
26	$3x^2 + 5y^2 = 32$
27	$\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{16} = 1$
28	1) $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\varepsilon = \frac{\sqrt{10}}{5}$; 3) $\varepsilon = \frac{1}{2}$
29	$\varepsilon = \frac{\sqrt{599}}{300} \approx 0{,}08$
30	$A_1(5, 2)$, $A_2(5, -2)$, $A_3(-5, 2)$, $A_4(-5, -2)$
31	$\left(-\frac{15}{2},\ \pm\frac{3\sqrt{7}}{2}\right)$
32	$d = \frac{13}{3}$
33	$S = 68\frac{4}{7}$
34	$32x + 25y - 89 = 0$
35	$3x + 4y - 24 = 0$
36	$y = 3$; $12x + 7y + 51 = 0$
37	$2x - y \pm 12 = 0$
38	$12x - 13y \pm 169 = 0$
39	Условию задачи удовлетворяют четыре касательные: $\pm 3x \pm 4y + 15 = 0$
40	$x = \pm 5$
41	1) $\frac{(x-1)^2}{15} + \frac{(y+3)^2}{15} = 1$; 2) $\frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$; 3) $\frac{(x+4)^2}{20} + \frac{y^2}{10} = 1$

Таблица 11

Гипербола

№ Задания	Ответ
42	1) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; 2) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{75}=1$; 3) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{2}=1$; 4) $\frac{x^2}{15}-\frac{y^2}{6}=1$
43	1) $\frac{x^2}{576}-\frac{y^2}{100}=1$; 2) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$
44	$\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$
45	$\varepsilon=\sqrt{2}$
46	$\frac{x^2}{432}-\frac{y^2}{75}=1$
47	1) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; 2) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$
48	$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$
49	$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{144}=1$
50	1) $F_1(5, 0)$, $F_2(-5, 0)$; 2) $\varepsilon=\frac{5}{3}$; 3) $y=\pm\frac{4}{3}x$, $x=\pm\frac{9}{5}$; 4) $-\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$, $\varepsilon=\frac{5}{4}$
52	$\delta=b$
53	1) $a=2\sqrt{3}$, $b=2$; 2) $a=b=6$; 3) $a=\sqrt{5}$; $b=2\sqrt{5}$; 4) $a=\frac{3\sqrt{19}}{5}$; $b=\sqrt{19}$

Окончание табл. 11

№ Задания	Ответ
54	$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=\pm 1$ или $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=\pm 1$
55	1) $\varphi = 120^0$; 2) $\varphi = 90^0$
56	1) $\varepsilon=\frac{2}{\sqrt{3}}$; 2) $\varepsilon=\sqrt{2}$
57	$r_1=9$; $r_2=19$; $tg\varphi=\frac{28\sqrt{2}}{41}\approx 0{,}97$
58	1) $\left(\pm\frac{4\sqrt{34}}{5};\ \pm 1{,}8\right)$; 2) $\left(\frac{48}{5};\ \pm\frac{3\sqrt{119}}{5}\right)$
59	$\delta_2\cdot\delta_1=\frac{a^2b^2}{c^2}$
60	$x-2y-12=0$ и $x+2y+8=0$
61	1) $\frac{(x-1)^2}{5^2}-\frac{(y+2)^2}{3^2}=1$; 2) $\frac{(x+1)^2}{6}-\frac{(y+1)^2}{5}=1$; 3) $\frac{(x+3)^2}{4}-y^2=1$

Таблица 12

Парабола

№ Задания	Ответ
62	1) F(1,0); 2) F(0,1); 3) F(–2, 0)
63	1) $y^2=12x$; 2) $y^2=10x-25$; 3) $y^2=16x$; 4) $x^2=8y$; 5) $x^2=-18y$; 6) $y^2=4x$
64	$x=-\frac{3}{2}$
65	$y^2=8x-8$

Окончание табл. 12

№ Задания	Ответ
66	$\left(2,\ \dfrac{5}{4}\right)$
67	$A(18, 12)$ и $B(18, -12)$
68	*OM=10*
69	$y=2x-5$
70	$x-3y+9=0$
71	$x+y+2=0$ и $2x+5y+25=0$
72	$y^2=4x$
73	1) $x+y+3=0$ в точке (3, –6) и $x-y+3=0$ в точке (3, 6); 2) $y=3x+1$; 3) $x-2y+12=0$; 4) $3x+y+1=0$
74	2
75	1) (–2, 1), $p = 5$, ось параллельна оси Ox; 2) (0, –7), $p = 3$, ось параллельна оси Ox; 3) (2, 0), $p = 4$, направление оси совпадает с отрицательным направлением оси Ox; 4) (3, 5), $p = 2$, ось параболы параллельна оси Oy; 5) $\left(-\dfrac{B}{2A},\ \dfrac{4AC-B^2}{4A}\right)$, $p=\dfrac{1}{2\lvert A\rvert}$, ось параболы параллельна оси Oy; 6) (4, –1), $p = 0{,}5$, ось параболы параллельна оси Oy; 7) (–3, –9), $p = 0{,}5$, ось параболы параллельна оси Oy
76	$p = 2{,}5$
77	$x-2=0$
78	$x+3y+15=0$ и $x-3y+15=0$
79	$\left(2,\ \pm 2\sqrt{3}\right)$
80	$4\sqrt{3}p$
81	(–1, 2)
82	7 м
83	24
84	12
85	1,6 м

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров П.С.* Лекции по аналитической геометрии. СПб.: Лань, 2008. 912 с.
2. *Александров П.С.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. СПб.: Лань, 2009. 512 с.
3. *Андреева З.И., Поносова О.М.* Практикум по геометрии. Элементы векторной алгебры. Метод координат на плоскости. Пермь: ПГПУ, 1988. 55 с.
4. *Андреева З.И., Шеремет Г.Г.* Практикум по геометрии. Векторное и смешанное произведения векторов. Метод координат в пространстве. Пермь: ПГПУ, 2002. 24 с.
5. *Бахвалов С.В., Бабушкин Л.И., Иваницкая В.П.* Аналитическая геометрия. М.: Просвещение, 1970. 376 с.
6. *Бахвалов С.В., Моденов П.С., Пархоменко А.С.* Сборник задач по аналитической геометрии. М.: Наука, 1964. 440 с.
7. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Аналитическая геометрия. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 224 с.
8. *Клетеник Д.В.* Сборник задач по аналитической геометрии. СПб.: Профессия, 2002. 200 с.
9. *Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А.* Сборник задач по высшей математике. М.: Айрис-пресс, 2004. 576 с.
10. *Моденов П.С.* Аналитическая геометрия. М.: МГУ, 1969. 704 с.
11. *Цубербиллер О.Н.* Задачи и упражнения по аналитической геометрии. СПб.: Лань, 2003. 336 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ.
ТЕСТЫ

Векторная алгебра. Часть первая

1	Проверить, линейно зависима система векторов или нет, где $\bar{a}=\{6, 4, 2\}$, $\bar{b}=\{-9, 6, 3\}$, $\bar{c}=\{-3, 6, 3\}$. Определить коэффициенты α, β, γ, если $\alpha\bar{a}+\beta\bar{b}+\gamma\bar{c}=\bar{0}$		
1) нет. $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$	2) да. $\alpha=-1/2$, $\beta=2/3$, $\gamma=0$	3) да. $\alpha=1/2$, $\beta=2/3$, $\gamma=-1$	4) нет. $\alpha=1$, $\beta=-3/2$, $\gamma=-1$

2	В тетраэдре $ABCD$ даны ребра, выходящие из вершины A: $\overline{AB}=\bar{b}$, $\overline{AC}=\bar{c}$, $\overline{AD}=\bar{d}$. Выразить через эти векторы остальные ребра тетраэдра		
1) $\overline{BC}=\bar{c}-\bar{b}$, $\overline{CD}=\bar{d}-\bar{c}$, $\overline{DB}=\bar{b}-\bar{d}$	2) $\overline{BC}=\bar{d}-\bar{b}$, $\overline{CD}=\bar{d}-\bar{c}$, $\overline{DB}=\bar{b}-\bar{c}$	3) $\overline{BC}=\bar{d}-\bar{c}$, $\overline{CD}=\bar{b}-\bar{c}$, $\overline{DB}=\bar{b}-\bar{d}$	4) $\overline{BC}=\bar{d}+\bar{c}$, $\overline{CD}=\bar{b}-\bar{c}$, $\overline{DB}=\bar{b}+\bar{d}$

3	Даны вектора $\bar{a}=\{0, 1, 2\}$ и $\bar{b}=\{-1, 0, 1\}$ найти координаты вектора $\bar{c}$, если $2\bar{a}+\bar{b}=\bar{c}$		
1) $\bar{c}=\{0, 0, 0\}$	2) $\bar{c}=\{-1, 2, 5\}$	3) $\bar{c}=\{2, 0, 1\}$	4) $\bar{c}=\{-2, 0, 2\}$

4	В аффинной системе координат с базисом $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ задан вектор $\overline{OM}=3\bar{a}+5\bar{b}-6\bar{c}$. Найти координаты точки M в данной АСК		
1) (3, 5, −6)	2) $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -3\right)$	3) (6, 10, −12)	4) ($\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$)

5	Дана точка C, делящая отрезок AB в отношении $\lambda=3$. Координаты точек A(5, 4, 3) и B(0, −1, 0). Определить расположение точки C

1) $C\left(\frac{5}{4},\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$	2) C(5, 5, 3)	3) C(−5, −6, −3)	4) $C\left(-\frac{5}{2},-\frac{5}{2},-\frac{3}{2}\right)$

6 В АСК заданы векторы $\overline{OA}=\{0, 6, 7\}$, и $\overline{OB}=\{-2, 2, 5\}$. На отрезке AB находится точка N. Известно, что $\left|\overline{AN}\right|=\frac{\sqrt{24}}{8}$, длина $\left|\overline{BN}\right|=\frac{5\sqrt{24}}{24}$. Найти координаты точки N

1) $N(3, 5, 5)$	2) $N\left(-\frac{3}{4},\frac{9}{2},\frac{25}{4}\right)$	3) $N\left(-\frac{4}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$	4) $N(0, -2, 2)$

7 Дан вектор $\overline{a}=\{-5, 2\}$. Найти вектор $\overline{b}$, перпендикулярный к вектору $\overline{a}$, равный ему по длине и направленный так, что, будучи отложены от одной и той же точки, векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ образуют пару, имеющую ту же ориентацию, какую имеет пара единичных векторов осей Ox и Oy.

1) $\overline{b}=\{-2, -5\}$	2) $\overline{b}=\{2, 5\}$	3) $\overline{b}=\{-2, 5\}$	4) $\overline{b}=\{5, -2\}$

8 Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, со стороной $AB=5$. Точка K делит ребро BB_1 в отношении 1:4, а точка P делит ребро DC в отношении 2:3. Найти длину отрезка KP

1) 6,5	2) $\sqrt{35}$	3) $\sqrt{43}$	4) 2,4

9 Зная радиусы-векторы $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$ и $\bar{r}_3$ вершин треугольника, найти радиус-вектор точки пересечения его медиан

1) $\frac{\bar{r}_1+\bar{r}_2+\bar{r}_3}{3}$	2) $2\left(\frac{\bar{r}_1+\bar{r}_2+\bar{r}_3}{3}\right)$	3) $3\left(\frac{\bar{r}_1+\bar{r}_2+\bar{r}_3}{2}\right)$	4) $\frac{\bar{r}_1-\bar{r}_2-\bar{r}_3}{3}$

10 В ΔABC точка K делит медиану BM в отношении 2:5, $\overline{AK}=\overline{e}_1$, $\overline{AM}=\overline{e}_2$. Найти координаты точки B в АСК $A\overline{e}_1\overline{e}_2$

1) (–0,5; 1,6)	2) (1; 0)	3) (2; 5)	4) (1,4; –0,4)

11	Дан равносторонний треугольник ABC, у которого длины сторон равны 1. Полагая $\overline{BC}=\overline{a}$, $\overline{CA}=\overline{b}$, $\overline{AB}=\overline{c}$ вычислить выражение $\overline{a}\overline{b}+\overline{b}\overline{c}+\overline{c}\overline{a}$		
1) 3	2) $-1{,}5$	3) -5	4) $\dfrac{2}{3}$

12	Определить угол между векторами $\overline{a}=\overline{i}+2\overline{j}+3\overline{k}$ и $\overline{b}=6\overline{i}+4\overline{j}-2\overline{k}$		
1) *arccos8*	2) *0*	3) $\dfrac{2}{7}$	4) $arccos\left(\dfrac{2}{7}\right)$

13	Дано $\overline{a}=\{7,-4\}$, $\overline{b}=\{-8,6\}$. Найти проекцию вектора $\overline{a}$ на направление вектора $\overline{b}$		
1) 1	2) 3	3) -8	4) 0

14	Дано $\overline{a}=\{l,m\}$, $\overline{b}=\{3,-4\}$. При каком m вектор $\overline{a}$ противоположен вектору $\overline{b}$ и имеет единичную длину?		
1) 4	2) 0,6	3) 0,8	4) –3

15	Дан базис $\|\overline{e}_1\|=2$, $\|\overline{e}_2\|=4$, угол между векторами $\left(\overline{e}_1,\hat{}\ \overline{e}_2\right)=\dfrac{2\pi}{3}$. Точки A(1, 3), B(2, 1) в АСК $O\overline{e}_1\overline{e}_2$. Найти длину отрезка AB		
1) $6\sqrt{2}$	2) 6	3) $2\sqrt{21}$	4) 8

Ответы

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
3	*1*	*2*	*1*	*1*	*2*	*1*	*2*	*1*	*4*	*2*	*4*	*3*	*3*	*3*

Векторная алгебра. Часть вторая

1	Вычислить площадь параллелограмма, если две его стороны представлены в виде векторов $\bar{a} = 6\bar{i} + 3\bar{j}$, $\bar{b} = 3\bar{i} - 2\bar{j}$, где $\bar{i}$, $\bar{j}$ – орты ПДСК		
1) 3	2) 15	3) 1,2	4) 21

2	Вектор $\bar{a}$ перпендикулярен вектору $\bar{c}$, а $\bar{b} \perp \bar{d}$, причем $\bar{b} \parallel \bar{c}$, тогда можно утверждать, что		
1) $[\bar{a};\bar{b}] \parallel [\bar{c};\bar{d}]$	2) $[\bar{a};\bar{d}] \parallel [\bar{c};\bar{b}]$	3) $[\bar{a};\bar{b}] \parallel \bar{d}$	4) $[\bar{a};\bar{b}] \perp [\bar{c};\bar{d}]$

3	Дано $\bar{p} = \alpha\bar{a} + 5\bar{b}$, $\bar{q} = 3\bar{a} + \bar{b}$. Найти α, если $[\bar{p};\bar{q}] = \bar{0}$, $\bar{a}, \bar{b}$ – базис		
1) 0	2) 3	3) 5	4) 15

4	Дано $\bar{a} = \{8, 4, 1\}$, $\bar{b} = \{2, -2, 1\}$. Найти высоту параллелограмма, построенного на данных векторах, опущенную на сторону b		
1) 18	2) $18\sqrt{2}$	3) $2\sqrt{18}$	4) 36

5	Найти смешанное произведение векторов $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j} - \bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k}$, $\bar{c} = \bar{i} + \bar{j} + 4\bar{k}$		
1) 0	2) $2\bar{i} - 3\bar{j} + 4\bar{k}$	3) 33	4) 3

6	Вычислить смешанное произведение $(\bar{a} - \bar{b})(\bar{b} - \bar{c})(\bar{c} - \bar{a})$		
1) 0	2) $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$	3) $(\bar{a} - \bar{b})\bar{c}$	4) $2\bar{a}\bar{b}\bar{c}$

7	Найти объем пирамиды с вершинами A(2, 2, 2), B(4, 3, 3), C(4, 5, 4), D(5, 5, 6).

1) $\frac{25}{6}$	2) $\frac{7}{6}$	3) 29	4) 7

8	Дано $\bar{a}=7\bar{k}, \bar{b}=\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}, \bar{c}=\bar{i}+2\bar{j}+x\bar{k}$. При каком x векторы компланарны?

1) 0	2) 2	3) при любом x	4) таких x нет

9	Дано $\bar{a}=\{3,1,2\}, \bar{b}=\{2,7,4\}, \bar{c}=\{1,2,1\}$. Найти $\left[\left[\bar{a},\bar{b}\right],\bar{c}\right]$

1) 0	2) $\{-46, 29, -12\}$	3) $\{36, 14, -48\}$	4) $\frac{127}{12}$

10	Даны три некомпланарных вектора $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$. Найти вектор $\bar{x}$, удовлетворяющий системе уравнений $\bar{a}\bar{x}=\alpha, \bar{b}\bar{x}=\beta, \bar{c}\bar{x}=\gamma$

1) $\bar{x}=\dfrac{\alpha\left[\bar{a};\bar{c}\right]+\beta\left[\bar{c};\bar{b}\right]+\gamma\left[\bar{a};\bar{b}\right]}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}$	3) $\bar{x}=\dfrac{\alpha\left[\bar{b};\bar{c}\right]-\beta\left[\bar{c};\bar{b}\right]-\gamma\left[\bar{a};\bar{c}\right]}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}$
2) $\bar{x}=\dfrac{\alpha\left[\bar{b};\bar{c}\right]+\beta\left[\bar{c};\bar{a}\right]+\gamma\left[\bar{a};\bar{b}\right]}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}$	4) $\bar{x}=\beta\dfrac{\left[\bar{b};\bar{c}\right]+\alpha\left[\bar{c};\bar{a}\right]+\gamma\left[\bar{a};\bar{b}\right]}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}$

11	В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ длины сторон AB, AD и AA_1 равны соответственно 6, 4 и 3, точка M делит сторону B_1C_1 в отношении 3:1, точка K делит сторону DD_1 в отношении 1:2. Найти площадь треугольника AMK

1) $\sqrt{693}$	2) $\frac{3}{2}\sqrt{77}$	3) 13,2	4) $3\sqrt{17}$

12	Вычислить координаты вектора $\bar{c}$, если даны координаты векторов $\bar{a}=\{2;3;-2\}$, $\bar{b}=\{3;6;-2\}$, $\lvert\bar{c}\rvert=14$, $\bar{c}\perp\bar{a}$ и $\bar{b}$, а тройка $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – левая тройка векторов

1) $\{-12;4;-6\}$	2) $\{12;-4;6\}$	3) недоста-точно данных	4) $\{6;-12;-4\}$

13	Найти модуль векторного произведения векторов $2\bar{a}+3\bar{b}$ и $\bar{a}-\bar{b}$, если $\lvert\bar{a}\rvert=1$, $\lvert\bar{b}\rvert=2$, угол между $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен $\frac{\pi}{6}$		
1) 1	2) –1	3) 5	4) 4

14	Дано $\lvert\bar{a}\rvert=1, \lvert\bar{b}\rvert=2, \lvert\bar{c}\rvert=3$, угол между $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен $\frac{\pi}{6}$, угол между $[\bar{a};\bar{b}]$ и $\bar{c}$ равен $\frac{2\pi}{3}$. Найти смешанное произведение $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$		
1) ±3	2) 6	3) –1,5	4) ±1,5

15	Найти высоту тетраэдра *KLMN*, опущенную на грань *KLN*, если $\overline{KL}=\bar{a}+\bar{b}$, $\overline{KN}=2\bar{a}-\bar{b}$, $\overline{KM}=\bar{b}+\bar{c}$, где $\bar{c}\perp\bar{a}$, $\bar{c}\perp\bar{b}$, угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен $\frac{5\pi}{6}$, $\lvert\bar{a}\rvert=2, \lvert\bar{b}\rvert=4, \lvert\bar{c}\rvert=3$		
1) 3	2) 1	3) 2	4) 4

Ответы

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
4	*2*	*4*	*3*	*3*	*1*	*2*	*4*	*2*	*2*	*2*	*1*	*3*	*3*	*1*

Прямая на плоскости. Плоскость

1	Составить уравнение прямой, если известен направляющий вектор $\overline{a} = \{5, -4\}$ и дана точка M(−3, 0).		
1) $y = 5x + 15$	2) $\dfrac{x-2}{-10} = \dfrac{y+4}{8}$	3) $y = -\dfrac{5}{4}(x+3)$	4) $5(x+3) - 4y = 0$

2	Составить параметрические уравнения прямой $y = \dfrac{11}{7}x - \dfrac{55}{7}$.		
1) $\begin{cases} x = 5t + 16, \\ y = 11 \end{cases}$	2) $\begin{cases} x = 11t - 5, \\ y = 7t \end{cases}$	3) $\begin{cases} x = 11t - 55, \\ y = 7t \end{cases}$	4) $\begin{cases} x = 7t + 19, \\ y = 11t + 22 \end{cases}$

3	В треугольнике с вершинами A(3, −2), B(8, 3) и C(6, 4) точка K делит сторону AB в отношении 1:4. Уравнение прямой KC имеет вид:		
1) $y = 2{,}5x - 11$	2) $y = 7x + 9$	3) $y = 0{,}4x - 2{,}6$	4) $y = -2x + 16$

4	Серединный перпендикуляр, проведенный к отрезку с концами в точках A(2, −4) и B(−5, 3), имеет уравнение:		
1) $y = 3x + 2$	2) $y + 0{,}5 = -1{,}5 - x$	3) $x = y - 1$	4) $y = -0{,}5$

5	Найти прямую, проходящую через точку M(0, 2) и составляющую угол $\varphi = arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)$ с положительным направлением оси Oy		
1) $3x + 4y - 8 = 0$	2) $3x - 4y + 8 = 0$	3) $4x - 3y + 6 = 0$	4) $4x + 3y - 6 = 0$

6	Найти угол между прямыми, одна из которых имеет уравнение $\begin{cases} x = 3 - 2t, \\ y = 4 + t \end{cases}$ а другая перпендикулярна прямой $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$		
1) $arctg\left(\frac{11}{7}\right)$	2) $-arctg(7)$	3) $arctg\left(\frac{1}{13}\right)$	4) 45°

7	Известно, что расстояния от начала координат до точек пересечения прямой с осями Ox и Oy, соответственно равны 2 и 3. Уравнение прямой может иметь вид:		
1) $y = 2x + 3$	2) $y = -3 - 1{,}5x$	3) $y = 3x - 2$	4) $y = \frac{2}{3}x + 2$

8	Прямая, параллельная оси Oy и проходящая через точку $(0, -5)$, имеет уравнение:		
1) $x = -5$	2) $y = -5$	3) $x = 0$	4) $x = y + 5$

9	Прямые, проходящие через точку (5, 3) так, что расстояния до них от точки (2, 1) равны 2, имеют угловые коэффициенты:		
1) $k_1 = 3$, $k_2 = 4$	2) $k_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{13}}{6}$	3) $k_{1,2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{13}}{3}$	4) $k_1 = 0$, $k_2 = 2{,}4$

10	Определить взаимное расположение двух прямых: 1) $x + 3y + 3 = 0$ и 2) $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}}t, \\ y = -1 + \sqrt{3}t \end{cases}$
1) совпадают	3) пересекаются, но не перпендикулярны
2) перпендикулярны	4) параллельны, но не совпадают

11	Точка $N(-1, 0, 4)$ является основанием перпендикуляра, опущенного из точки $M(3, 1, -2)$ на плоскость π. Уравнение плоскости π имеет вид:
1) $4x + y - 6z + 28 = 0$	3) $4x + y - 6z - 25 = 0$
2) $7x - 10y + 3z - 5 = 0$	4) $3x + y - 2z + 11 = 0$

12	Даны вершины тетраэдра A(3, 0, −1), B(1, −1, 0), C(2, 3, 1), D(−2, 1, 0). Уравнение плоскости, проходящей через точки A и C параллельно вектору $\overline{BD}$, имеет вид:
1) $4x+6y-7z-19=0$	3) $x+3y-4z-7=0$
2) $x-y+3z-7=0$	4) $2x+3y-7z-13=0$

13	Определить, лежат ли точки L(3, 1, 1), M(−2, 3, 0), N(4, 3, −2) и P(10, 3, −4) в одной плоскости? Если да, то найти уравнение этой плоскости
1) не лежат	3) лежат, $7x-12y+5z-14=0$
2) лежат, $3x+4y-7z-6=0$	4) лежат, $x+4y+3z-10=0$

14	Из точки P(2, 3, −5) на координатные оси опущены перпендикуляры. Составить уравнение плоскости, проходящей через их основания
1) $15x+10y-6z-30=0$	3) $-x+3y-7=0$
2) $x+3y+7z-2=0$	4) $2x+3y-5z=0$

15	Выяснить взаимное расположение плоскостей, заданных уравнениями: 1) $3x-2y+4z-12=0$, 2) $\begin{cases} x=2-6s+t, \\ y=4s-t, \\ z=5-8s+11t \end{cases}$
1) параллельны, но не совпадают	3) перпендикулярны
2) совпадают	4) пересекаются, но не перпендикулярны

Ответы

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
2	*4*	*1*	*3*	*3*	*1*	*2*	*3*	*4*	*2*	*1*	*1*	*4*	*1*	*3*

Кривые второго порядка

1	Какую линию задает в ПДСК уравнение $4x^2+25y^2=100$? Указать полуоси a и b		
1) эллипс, a=25, b=4	2) гипербола, a=25, b=4	3) эллипс, a=5, b=2	4) гипербола, a=5, b=2

2	Найти координаты вершин линии $4x^2+25y^2=100$, лежащих на оси Ox		
1) (2, 0), (−2, 0)	2) (5, 0), (−5, 0)	3) (0, −2), (0, 2)	4) (0, −5), (0, 5)

3	Найти координаты фокуса линии $4x^2+25y^2=100$, лежащего в полуплоскости $\{X>0\}$		
1) $(\sqrt{29}, 0)$	2) $(-\sqrt{21}, 0)$	3) $(\sqrt{21}, 0)$	4) $(-\sqrt{29}, 0)$

4	Найти директрисы кривой $4x^2+25y^2=100$		
1) $x=\pm 25/\sqrt{29}$	2) $x=\pm 4/\sqrt{29}$	3) $x=\pm 4/\sqrt{21}$	4) $x=\pm 25/\sqrt{21}$

5	Найти касательную к кривой $4x^2+25y^2=100$ в точке (4; −1,2)		
1) $3{,}75x+10y=3$	2) $8x-15y=50$	3) $24x+5y=90$	4) $12x+5y=42$

6	Какую кривую определяет уравнение $r=\dfrac{9}{4-5\cos\varphi}$? Указать полуоси a и b		
1) эллипс, a=4, b=3	2) гипербола, a=4, b=3	3) эллипс, a=16, b=9	4) гипербола, a=16, b=9

7	Написать каноническое уравнение гиперболы, если заданы уравнения асимптот $3y \pm 2x = 0$ и директрис $\sqrt{13}x \pm 9 = 0$		
1) $4x^2 - 9y^2 = 36$	2) $2x^2 - 3y^2 = 6$	3) $9x^2 - 4y^2 = 36$	4) $3x^2 - 2y^2 = 6$

8	Написать каноническое уравнение параболы, если заданы фокус F(0, 3) и уравнение директрисы $y = -1$		
1) $y^2 = 4(x - 1)$	2) $x^2 = 8(y - 1)$	3) $x^2 = 4(y - 1)$	4) $y^2 = 8(x - 1)$

9	Для параболы из задания 8 написать уравнение в полярных координатах, если полюс находится в фокусе параболы, а полярная ось направлена по оси параболы		
1) $r = \dfrac{8}{1-\cos\varphi}$	2) $r = \dfrac{4}{1-\cos\varphi}$	3) $r = \dfrac{2}{1-\cos\varphi}$	4) $r = \dfrac{3}{1-\cos\varphi}$

10	Для параболы из задания 8 написать уравнение в полярных координатах, если полюс находится в начале координат ПДСК, а полярная ось направлена по оси *Ox*
1) $r^2\cos^2\varphi = 4r\sin\varphi - 4$	3) $r^2\sin^2\varphi = 4r\cos\varphi - 4$
2) $r^2\sin^2\varphi = 8r\cos\varphi - 8$	4) $r^2\cos^2\varphi = 8r\sin\varphi - 8$

11	Найти координаты «левого» фокуса кривой $9x^2 - 16y^2 - 36x - 32y = 124$		
1) $F(-\sqrt{7} + 2, -1)$	2) $F(-3, -1)$	3) $F(-7, -1)$	4) $F(-\sqrt{7} - 2, -1)$

12	Составить каноническое уравнение гиперболы, если угол между асимптотами равен 60^0 и $c = 2\sqrt{3}$		
1) $x^2 - 3y^2 = 3$	2) $x^2 - 3y^2 = 36$	3) $x^2 - 3y^2 = 9$	4) $x^2 - 3y^2 = 27$

13	Найти такую точку на параболе $y^2 = 16x$, чтобы касательная в ней образовала с осью симметрии параболы угол в 30^0
1) $(4{,}8)$	3) $\left(4/3\,,8\sqrt{3}/3\right)$
2) $\left(12{,}8\sqrt{3}\right)$	4) $\left(2{,}4\sqrt{2}\right)$

Ответы

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**
3	*2*	*3*	*4*	*2*	*2*	*1*	*2*	*2*	*4*	*2*	*3*	*2*

Учебное издание

Составители:

Павелкин Владимир Николаевич
Коневских Татьяна Михайловна

Аналитическая геометрия
Сборник задач

Учебное пособие

Редактор *Е. В. Шумилова*
Корректор *В. Е. Пирожкова*
Техническая подготовка материалов: *О. К. Кардакова*

Объем данных 5,57 Мб
Подписано к использованию 14.11.2019

Размещено в открытом доступе
на сайте www.psu.ru
в разделе НАУКА / Электронные публикации
и в электронной мультимедийной библиотеке ELiS

Издательский центр
Пермского государственного
национального исследовательского университета
614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15