МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

О. Г. Пенский

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЦИФРОВЫХ ДВОЙНИКОВ

Допущено методическим советомПермского государственного национального исследовательского университета в качестве учебного пособия для студентов, обучающихсяпо направлению подготовки магистров «Фундаментальная информатика и информационные технологии (направленность Открытые информационные системы)», и аспирантов направления подготовки «Информатика и вычислительная техника», профиль «Математическое моделирование».

Пермь 2019

УДК 519.86: 519.87
ББК 22.18
П253

Пенский О. Г.

П253 Математические модели цифровых двойников: учеб. пособие / О. Г. Пенский; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Пермь, 2019. − 157 с.

ISBN 978-5-7944-3267-1

Введены математически формализованные понятия эмоции, воспитания робота и другие основанные на них психологические параметры интеллектуальных машин. Введены безразмерные коэффициенты, характеризующие эмоциональную и информационную память робота, изучено влияние памяти робота на его поведение. Описано поведение групп роботов. Предложено правило принятия роботом альтернативного решения на основе эмоционального выбора. Описаны приложения моделей в психологии человеческого социума.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки магистров «Фундаментальная информатика и информационные технологии (направленность Открытые информационные системы)», и аспирантов направления подготовки «Информатика и вычислительная техника», профиль «Математическое моделирование».

УДК 519.86: 519.87
ББК 22.18

Печатается по решению ученого совета механико-математического факультета Пермского государственного национального исследовательского университета

Рецензенты: д-р техн. наук, заведующий кафедрой «Математическое обеспечение и применение ЭВМ» Пензенского государственного университета профессор ***П. П. Макарычев***;
д-р техн. наук, профессор кафедры «Автоматика и телемеханика» ПНИПУ ***С. Ф. Тюрин***

ISBN 978-5-7944-3267-1

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 5
1. Определение эмоции робота 8
2. Воспитание робота 13
3. Параметры группы эмоциональных роботов 22
4. Дружба роботов 25
5. Гипотеза о психологических установках роботов 27
6. Эквивалентный воспитательный процесс 31
  6.1. Математическая модель эквивалентного воспитательного процесса 31
  6.2. Альтернатива целевой функции при совпадении тактов реального и эквивалентного воспитательного процессов 34
  6.3. Обобщение на случай несовпадения тактов реального и эквивалентного воспитательных процессов 38
7. Способ приближенного определения динамики изменения коэффициентов памяти на одном такте 39
8. Математическая модель формирования равноценных групп роботов 40
9. Алгоритм формирования равноценных групп роботов 43
10. Применение правил векторной алгебры к исследованию эмоционального состояния группы роботов 44
11. О математической оценке величины достижения поставленной перед роботом цели 48
  11.1. Правило вычисления величины достижения поставленной цели 48
  11.2. Алгоритм формирования равноценных групп роботов по величине достижения поставленной цели 53
12. Математическая модель эмоциональных способностей робота 53
13. Работа и сила воли эмоционального робота 57
14. Математическая модель таланта 60
15. Модель темперамента робота 63
  15.1. Описание модели 63
  15.2. Программная реализация вычисления темперамента 65
  15.3. Верификация модели натурными экспериментами 66
  15.4. Темперамент группы роботов 67
16. К исследованию динамики психологических процессов в группе роботов 67
17. Правила и прогноз эмоционального выбора робота 70
18. Математические модели восприимчивости робота и человека к воспитанию 76

19. Алгоритм и программная реализация измерения эмоций абонента мобильного телефона 80
19.1. Авторский алгоритм 81
19.2. Программная реализации алгоритма 82
20. Математические модели психологических характеристик робота с гармоническими эмоциями 85
21. Математические модели гармонического воспитания робота 88
21.1. Математические модели робота с отсутствием памяти 88
21.2. Математические модели робота с абсолютной памятью 91
21.3. Математические модели робота с неабсолютной памятью 93
21.4. Примеры оценки точности моделей 97
22. Математическая модель оценки достижения поставленной цели роботом с гармоническими эмоциями 97
23. Обобщение правил эмоционального поведения робота на случай произвольного количества взаимодействующих с роботом игроков 99
23.1. Первое правило альтернативного выбора 99
23.2. Второе правило альтернативного выбора 101
23.3. Ортогональность векторов воспитания и эквивалентность правил альтернативного выбора 101
24. Эмоциональный выбор и конфликт между роботами 102
25. Математические модели «психических заболеваний» роботов 103
26. Модели комплексных эмоций роботов 108
27. Роботы с абсолютной памятью 111
28. Алгоритм эмоциональных контактов в группе роботов 115
29. Математическая модель плана трансляции передач средств массовой информации 118
30. Математическая модель интереса к проектам СМИ 123
30.1. Формула интереса 123
30.2. Программа реализации модели 124
30.3. Способ приближенного определения входных параметров модели и вычислительный эксперимент 126
31. Простейшие математические модели пропаганды и контрпропаганды 127
31.1. Математическая модель одновременного воспитания группы субъектов 127
31.2. Математическая модель групповой памяти 128
31.3. Модель пропаганды и контрпропаганды 129
32. Математические модели индивидуальной психоэмоциональной адаптации к спортивным тренировкам детей-инвалидов по зрению 131
33. Аномальное воспитание робота 139
34. Об информационных аспектах Е-существа 142
Заключение 154
Литература для углубленного изучения курса 155

ВВЕДЕНИЕ

В середине XX в. появились научные работы, посвященные искусственному синтезированию разных аспектов психологии человека. Основоположниками такого направления стали не психологи, а кибернетики, биокибернетики и математики. Одним из основателей синтетической психологии является Валентино Брайтенберг, профессор Института биологической кибернетики им. Макса Планка в Тюбингене. Его подход заключается в том, что биологическое поведение легче синтезировать, чем анализировать. Используя элементарные механизмы с датчиками и электрические устройства, управляемые простейшими микросхемами, по его мнению, можно имитировать такие чувства, как любовь, агрессия, страх и др.

В 1960–70-х годах почти всем казалось, что создание мыслящих и исполнительных роботов – дело ближайшего будущего. Однако скоро стало ясно, что даже самые простые физические действия, например: взять со стола кружку, ощутить препятствие в пространстве, спланировать маршрут и переместиться по нему, оказались для роботов весьма сложными задачами.

Один из известнейших исследователей Родни Брукс из MIT предложил подход в области робототехники, радикально отличавшийся от остальных. Его вдохновили насекомые и другие существа с маленьким объемом мозга. Он решил создать архитектуру робота, выполняющего свои действия не на построении сложной внутренней модели окружающего пространства, а как непосредственную реакцию на возникающие внешние раздражители. Результаты оказались впечатляющими. Насекомоподобные типы роботов могли сделать почти все, на что были способны роботы, моделирующие внутреннюю модель окружающего пространства. При этом они обладали намного меньшими вычислительными мощностями.

В конце 80-х годов сформировалось направление кибернетических исследований – «Искусственная жизнь» (Artificial Life). Основной мотивацией исследований искусственной жизни стало желание понять и смоделировать формальные принципы организации биологической жизни. Основное предположение «Искусственной жизни» состоит в том, что “логическая форма” организма может быть отделена от материальной основы его конструкции.

Параллельно развивалось такое научное направление, как эволюционная нейрокибернетика. Одной из ее целей является понимание того, как зародилась логика на нашей планете. Ученые анализируют эволюцию наиболее нетривиальных «интеллектуальных» биокибернетических свойств «интеллектуальных изобретений» биологической эволюции (безусловных рефлексов, привыкания, условных рефлексов, цепей условных рефлексов). Исследователи пришли к выводу, что в результате такой эволюции возникла человеческая логика, обеспечивающая научное познание природы.

Моделирование человекоподобной памяти всегда притягивало исследователей. Однако до конца не выяснено, как именно функционирует человеческая память. Это привело к созданию множества моделей, которые внесли свой вклад в понимание сознания человека.

Ученые отмечают, что память является необходимым условием для любой формы обучения. Это утверждение основано на точке зрения Бакстера и Брона: в основе познания лежит память.

У биологических существ даже простое приобретение знаний – это уже форма обучения, так как достаточно сложно, если вообще возможно, определить, где заканчивается процесс запоминания и начинается процесс обучения.

Несколько лет назад моделирование основных характеристик памяти человека позволило создать программы, которые запоминали информацию о событиях, извлекали из нее некоторые закономерности и правила, сохраняли полученные «умозаключения» в базу данных.

Зарубежные и отечественные ученые разработали много разнообразных эвристических моделей психики и мышления человека. На их основе создана программа «Композитор» Рейтмана и Санчера, воспроизводящая в упрощенном виде творчество композитора; программа Гелентера, способная доказывать геометрические теоремы, и др. Однако все вышеперечисленные модели являются узкоспециализорованными.

Нейробиологи предлагают множество теорий и моделей, которые могут за счет технических средств моделировать познавательные возможности памяти. Например, исследование человеческой памяти может быть разделено на несколько составляющих: строение нервных связей, скорость запоминания, объем запоминаемой информации.

В последнее десятилетие под влиянием кибернетики во многих отраслях знания, в том числе и психологии, получил широкое распространение такой метод научного исследования, как математическое моделирование памяти робота. Для этого математики, кибернетики и робототехники обратились к исследованиям психологов в области памяти человека.

Человеческая память работает благодаря трем процессам:

1) декодирование информации, которая получена от рецепторов;
2) сохранение информации в кратковременной или долго-временной памяти;
3) поиск и извлечение (воспоминание) информации из памяти (если она не забыта);

Существует несколько теорий эмоций человека, а также описаны несколько формальных математических моделей эмоций. Такие модели применяются для определения эмоций в виде, приемлемом для проектирования и создания роботов.

Информационная теория эмоций П.В. Симонова говорит о том, что эмоции человека появляются от недостатка или избытка информации для удовлетворения потребности. Степень эмоционального напряжения в таком случае определяется силой потребности и величиной дефицита прагматической информации, необходимой для достижения цели.

Модель KARO описывает качественную и количественную сторону 22 видов эмоций: качественно описывает условия возникновения каждой эмоции, а количественно определяет интенсивность эмоции. Модель KARO базируется на основе формальной логики.

Модель EMA основана на формальной логике, для описания эмоций использует такие переменные, как полезность, желательность, вероятность события. EMA отличается от KARO только выбором используемых переменных.

Модель *Affective Computing* предоставляет возможность роботу распознавать эмоции человека по лицевому выражению и типичному поведению. Такая модель позволяет описать внешние выражения эмоций роботом. В модели *Affective Computing* применяются цепи Маркова для задания переходов из одного эмоционального состояния в другое.

В модели Фоминых–Леонтьева эмоция – это числовая функция (имеющая смысл силы эмоции). Областью определения является некоторый набор параметров, который описывает ситуацию. Для каждого типа эмоций предлагается свой набор параметров. Для каждого агента (человека, животного, робота) и для каждой эмоции представляется возможным предложить свою функцию F, которая определяет силу эмоции в зависимости от величины аргументов.

Преимущество существующих подходов в том, что они позволяют моделировать различные типы эмоций, на основе представленных знаний в различном виде. Можно описывать новые типы эмоций и новые типы эмоционального поведения роботов. Однако такие модели не универсальны. Они дают адекватные результаты только в рамках конкретных прикладных задач и не учитывают процесс поступления информации и знаний в робота.

Настоящее учебное пособие описывает универсальные математические модели эмоциональных роботов без привязки к конкретным типам эмоций. Предлагемая теория основана на методах математического анализа, линейной алгебры и оптимизации.

Настоящее учебное пособие разработано на основе результатов исследований, изложенных в монографии О.Г. Пенского, Ю.А. Шарапова, Н.В. Ощепковой «Математические модели роботов с неабсолютной памятью и приложения моделей», изданной в Пермском государственном национальном исследовательском университете в 2018 году.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭМОЦИИ РОБОТА

Из теории психологии человека известно, что эмоции являются ответной реакцией организма на некий раздражитель-стимул. Для роботов этот стимул назовем сюжетом и дадим ему следующее определение.

Пусть t – время.

<u>Определение 1.1</u>. Функцию *S(t)* будем называть сюжетом, если она обладает следующими свойствами:

1) область определения *S(t):* $t \in \left[0, t^*\right]$, $t^* > 0$, $t^* < \infty$;
2) *S(t)*>0 для любого $t \in \left[0, t^*\right]$;
3) *S(t)* – взаимнооднозначная функция;
4) *S(t)* – ограниченная функция.

Так как психологические свойства эмоций высших живых существ запутанны и неоднозначны, мы решили ввести отдельное математическое определение эмоции робота, отвлекаясь от реальных эмоций человека и в то же время аккумулируя в этом определении основные свойства эмоций человека и животных. Мы также абстрагируемся от содержательной стороны эмоций.

<u>Определение 1.2.</u> Функцию *f(t),* удовлетворяющую соотношению $f(t) = a(S(t), t)S(t)$, где *a(s(t),t)* – произвольная функция, назовем функцией внутренних переживаний робота.

Будем говорить, что сюжет *S(t)* порождает внутренние переживания робота.

<u>Определение 1.3.</u> Функцию внутренних переживаний робота $M(t)$ назовем эмоцией робота, если она удовлетворяет условиям:

1. Область определения $M(t): t \in [t_0, T_0]$, $0 \le t_0 < T_0 < \infty$.

2. $M(t)$ – дифференцируемая на (t_0, T_0), непрерывная и однозначная функция на $[t_0, T_0]$.

3. $M(t_0) = 0$ и $M(T_0) = 0$.

4. В области определения существует единственная точка z, такая, что $z \ne t_0$, $z \ne T_0$ и $\dfrac{dM(z)}{dt} = 0$.

Предположим, что существует такое число $J > 0$, что для любых эмоций робота выполняется условие $|M(t)| \le J$.

Легко видеть что, например, функция $M(t) = P\sin\left(\frac{\pi}{t^0}t\right)$ для $t \in \left[0, t^0\right]$, $P = const$ является эмоцией.

<u>Определение 1.4.</u> Функцию $\overline{M}(t)$ назовем комплексной эмоцией, если ее можно представить в виде вектора, элементами которого являются эмоции, одновременно порожденные одним сюжетом.

Мы не станем акцентировать внимание на содержательном характере эмоций и учтем лишь важное для нас:

1. Эмоции имеют знак (положительный или отрицательный).
2. Количество эмоций субъекта конечно.

Исходя из п.2, можно сказать, что эмоциональное состояние робота описывается вектором эмоций $\overline{M}(t)$ с конечным количеством элементов, равным числу n:

$$\overline{M}(t) = \left[M_1(t), \ldots, M_n(t)\right].$$

В дальнейшем, если говорим об эмоции одного вида, то опускаем соответствующий индекс, знак вектора и используем обозначение $M(t)$.

За нулевую эмоциональную отметку примем такое состояние робота, когда у него эмоции полностью отсутствуют.

Очевидно, что в качестве сюжета могут выступать чисто внешние раздражители, например такие, о которых не содержится информации в памяти робота (см. рис. 1.1).

В качестве сюжета, порождающего эмоции робота, также могут выступать раздражители, о которых информация частично содержится в памяти робота и частично поступает из внешней среды (см. рис. 1.2).

И наконец, сюжетом может быть информация, полностью находящаяся в памяти робота. Этот случай соответствует, например тому, когда вызванное у робота воспоминание порождает эмоции (см. рис. 1.3).

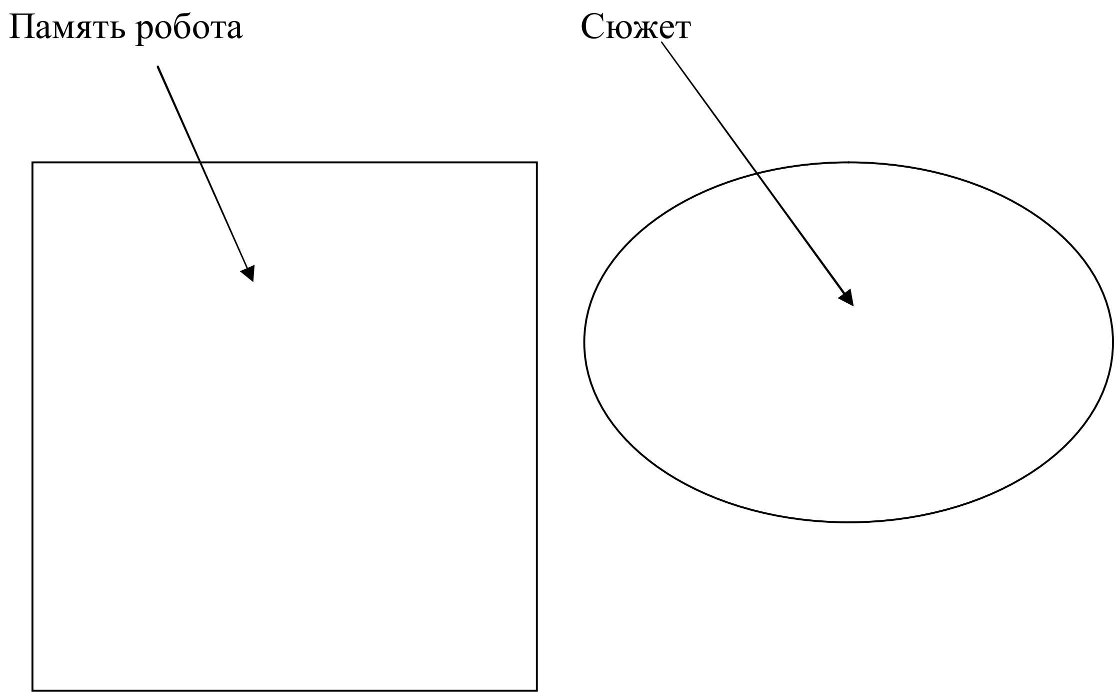

Рис. 1.1. Сюжет – чисто внешний раздражитель

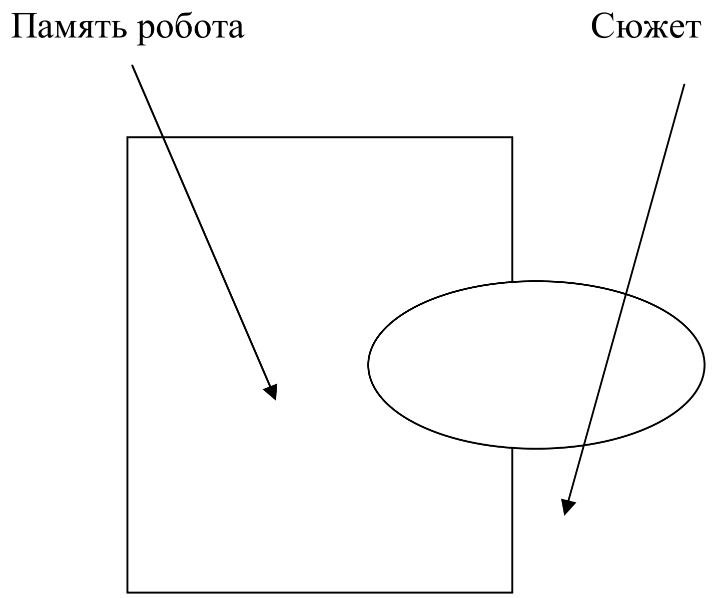

Рис. 1.2. Сюжет – частично внешний раздражитель

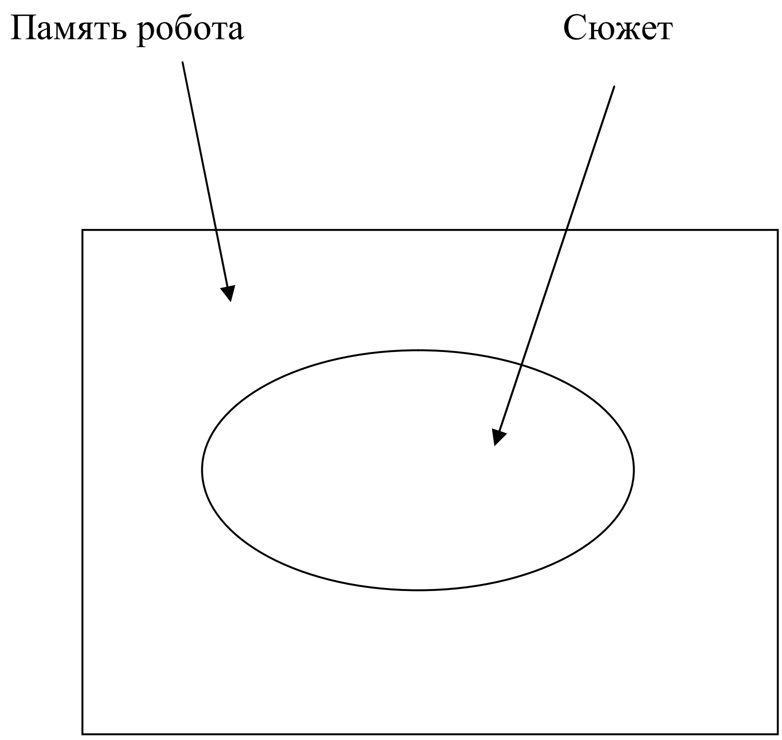

Рис. 1.3. Сюжет – чисто внутренний раздражитель

Рисунки 1.2 и 1.3 частично соответствуют психологической теории С.Шехтера, согласно которой «на возникшее эмоциональное состояние помимо воспринимаемых стимулов и порождаемых ими телесных изменений оказывают воздействие прошлый опыт человека и оценка им наличной ситуации…»

Обратим внимание на то, что при описании принадлежности сюжета к памяти робота мы употребляли слово «информация», которая, как известно, измеряется битами. Поэтому выдвинем следующую гипотезу: *сюжет* также *можно измерять битами информации*.

Очевидно то, что различные сюжеты могут порождать одну и ту же эмоцию робота, то есть нет взаимно однозначного соответствия между сюжетом и эмоцией. Сказанное иллюстрирует рис. 1.4.

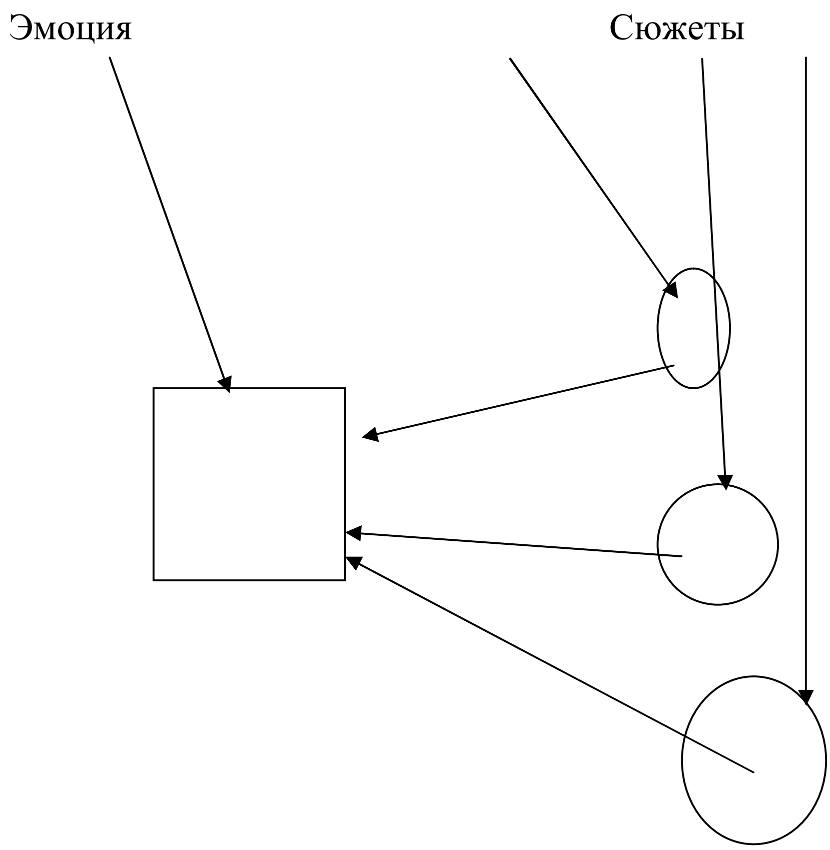

Рис. 1.4. Соответствие между сюжетами и эмоцией

В свою очередь, один и тот же сюжет может спровоцировать различные эмоции робота (см. рис. 1.5).

Аналогично плотности вещества в физике введем понятие удельной эмоции робота.

<u>Определение 1.5.</u> Удельной *a(S(t),t*) эмоцией робота назовем эмоцию, приходящуюся на единицу сюжета.

Очевидно, что удельная эмоция удовлетворяет соотношению $a(S(t),t)=\frac{M(S(t),t)}{S(t)}$.

Легко видеть, что знак эмоции $M(S(t),t)$ робота определяется знаком удельной эмоции *a(S(t),t*).

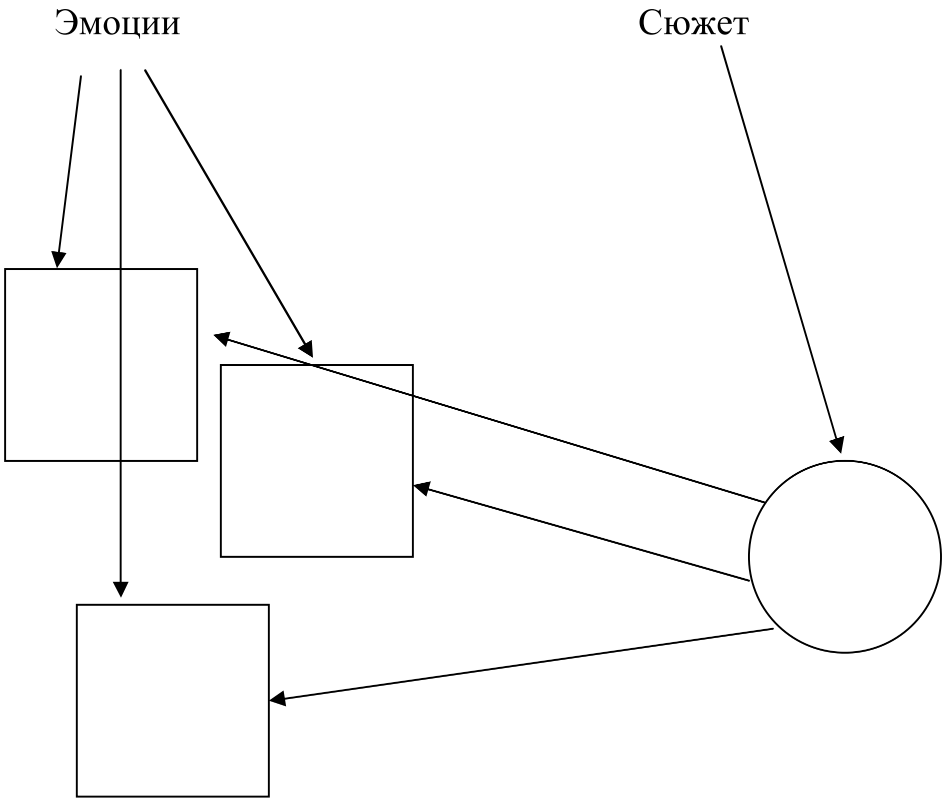

Рис.1.5. Соответствие между эмоциями робота и сюжетом

Математическая теория эмоциональных роботов, описываемая в настоящей монографии, рассматривает случаи, изображенные на рис. 1.4 и 1.5.

2. ВОСПИТАНИЕ РОБОТА

Введем определение эмоционального воспитания робота, отвлекаясь от содержательной части понятия «воспитание», рассматриваемого в психологии.

<u>Определение 2.1.</u> Воспитание (воспитание робота) – это относительно устойчивое отношение робота к сюжету.

Из определения 1.3 следует, что эмоция робота *M(t)* является непрерывной функцией на отрезке $[0, t]$, а следовательно, интегрируемой на этом отрезке. Дадим следующее определение:

<u>Определение 2.2.</u> Элементарным воспитанием робота *r(t)* на сюжетах *S(t)* назовем функцию вида

$$r(t) = \int_0^t a(S(\tau), \tau) S(\tau) d\tau. \tag{2.1}$$

Отметим очевидные математические свойства элементарного воспитания:

1) если знак удельной эмоции совпадает со знаком сюжета, то воспитание положительно;

2) в силу определения 1.3 функция *r(t)* является дифференцируемой по параметру *t*, поэтому справедливо соотношение $M(s(t),t) = \dfrac{dr(t)}{dt}$.

Будем считать, что с течением времени робот забывает эмоции, которые он когда-то испытывал. Прошлые эмоции все меньше и меньше сказываются на его текущем воспитании. А вместе с тем забываются и прошлые элементарные воспитания, которые были порождены испытываемыми ранее эмоциями робота.

Исходя из этого становится очевидным следующее определение.

<u>Определение 2.3.</u> Воспитанием робота *R(t)* (воспитание робота во время действия эмоции) на сюжетах *S(t)* назовем функцию вида

$$R_i(t) = r_i(\tau) + \theta_i(t) R_{i-1}(t_{i-1}), \tag{2.2}$$

где t – текущее время, $t > t_i$, $0 \le \theta_i(t) \le 1$. Текущее время удовлетворяет соотношению $t = \tau + t_i$, где τ – текущее время действия настоящей эмоции от начала ее проявления, t_i– общее время действия всех предыдущих эмоций, $R_i(t_i)$ – воспитание, полученное роботом за время t_i. Для робота с неабсолютной памятью справедливы соотношения $\theta_i(t_i) = \theta_i \le 1 - \delta$, $0 \le \delta = const < 1$.

Также можно дать следующее словесное определение воспитания: воспитание – это величина, определяющая устойчивость мотивации поведения робота на определенном классе сюжетов.

<u>Определение 2.4.</u> Коэффициенты $\theta_i(t)$ назовем коэффициентами памяти прошлых событий, или коэффициентами памяти робота.

Согласно формуле (2.2) можем записать соотношение, определяющее воспитание в начале действия на робота эмоции с порядковым номером i+1:

$$R_{i+1}(0) = r(0) + \theta_i(0) R_i(t_i).$$

Легко видеть, что справедливы равенства

$$R_{i+1}(0) = R_i(t_i), \quad r(0) = 0.$$

Следовательно, выполняется соотношение $\theta_i(0) = 1$.

<u>Определение 2.5.</u> Тактом назовем время действия одной эмоции.

Из психологической науки известно, что эмоция не может продолжаться более 10 с. Предположим, что величина такта любой эмоции робота не больше этого числа.

В дальнейшем психологические характеристики роботов, соответствующие текущему действию такта, будем обозначать со скобками после переменной, а значения психологических характеристик, соответствующие концам тактов, – без скобок. Например, $R_i(t)$ определяет функцию изменения воспитания для текущего времени *t* действующего такта *i*, а R_i – значение воспитания в конце такта *i*.

Легко видеть, что робот, характеризующийся коэффициентом памяти прошлых воспоминаний, тождественным 1, в деталях помнит все прошлые эмоциональные воспитания. Такого робота можно назвать роботом с абсолютной памятью. Но предположим, что память робота о прошлом стирается, т. е. для забывчивого робота в конце каждого такта справедливо двойное неравенство $0 \le \theta_i < 1$. Таким образом, для этого робота можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 2.1. Воспитание только на положительных эмоциях забывчивого робота имеет пресыщение.

Доказательство

Легко видеть, что соотношение (2.2) эквивалентно равенству

$$R_i = r_i + \theta_i \left[r_{i-1} + \theta_{i-1} R_{i-2} \right]. \qquad (2.3)$$

Соотношение (2.3) можно записать в следующем виде:

$$R_i = r_i + \theta_i r_{i-1} + \theta_i \theta_{i-1} r_{i-2} + \theta_i \theta_{i-1} \theta_{i-2} r_{i-3} + \ldots + \theta_i \theta_{i-1} \theta_{i-2} \ldots \theta_1 r_0 . \qquad (2.4)$$

Так как все эмоции положительны, то и элементарные воспитания положительны; так как эмоции ограничены по величине и время действия эмоции ограничено, то элементарные воспитания также ограничены. Исходя из этого, можно сделать вывод, что для робота с неабсолютной памятью существуют такие числа θ и q, для которых выполняются неравенства

$$1 > \theta \ge \theta_j, \quad q \ge r_k, \quad q \ge r(\tau), \qquad (2.5)$$

где $j = \overline{1, i}, \quad k = \overline{0, i-1}$.

Благодаря соотношениям (2.4) и (2.5) можно получить верхнюю оценку изменения функции *R(t)*. Она будет иметь вид

$$R(t) \le q + q \sum_{j=0}^{i-1} \theta^j \le 2q \sum_{j=0}^{i-1} \theta^j . \qquad (2.6)$$

Правая часть соотношения (2.6) определяет сумму членов геометрической прогрессии, которая влечет неравенство

$$R(t) \le 2q \frac{1 - \theta^{i-1}}{1 - \theta} . \qquad (2.7)$$

Перейдя в правой части соотношения (2.7) к пределу при $t \to \infty$ или $i \to \infty$, получим верхнюю оценку для значения воспитания:

$$R(t) \le \frac{2q}{1-\theta}. \qquad (2.8)$$

Неравенство (2.8) позволяет сделать вывод о том, что воспитание робота, основанное на положительных эмоциях, ограничено сверху, т. е. имеет пресыщение, что требовалось доказать.

Теорема 2.1 полностью подтверждается психологическими исследованиями, результаты которых говорят о том, что невозможно воспитывать человека до бесконечности: у воспитуемого начиная с какого-то времени наступает пресыщение, и он поднимается на новую ступень эмоциональной деятельности.

Определение 2.6. Предельным воспитанием U назовем величину, соответствующую конечному моменту времени действия эмоций и удовлетворяющую равенству $U = \frac{q}{1-\theta}$.

Определение 2.7. Эмоции, влекущие равные элементарные воспитания, назовем равноценными.

Определение 2.8. Забывчивого робота, у которого все коэффициенты памяти, соответствующие конечному моменту времени каждой эмоции, равны и постоянны, назовем равномерно забывчивым.

Теорема 2.2. Воспитание робота R_i, основанное на равноценных эмоциях равномерно забывчивого робота, определяется соотношением $R_i = q\frac{1-\theta^i}{1-\theta}$, где q – значение элементарного воспитания, i – порядковый номер завершенной равноценной эмоции из числа эмоций, на основе которых осуществляется воспитание, к текущему моменту времени.

Доказательство, очевидно, следует из теоремы 2.1.

Сделаем нижеследующее замечание: при компьютерной реализации эмоций робота в процессе действия сюжета невозможно предсказать продолжительность действия сюжета. Поэтому целесообразно моделировать эмоции после завершения этого действия.

Рассмотрим пример.

Выберем функцию эмоций в виде

$$M(t) = P\sin\left[\frac{\pi}{t^0 - t^*}\left(t - t^*\right)\right], \qquad (2.9)$$

где $P = const$, $t \in \left[t^*, t^0\right]$, t^0– фиксированное число, причем $t^0 \in \left(t^*, 2t^*\right]$.

Заметим, что изменение некоторых условий принадлежности функции внутренних переживаний робота к эмоциям, согласно формуле

(2.9), не требует корректировки рассматриваемой в настоящей монографии теории.

Очевидно, что такт τ для эмоции (2.9) удовлетворяет соотношению $\tau = t^0 - t^*$, а элементарное воспитание *r* определяется формулой

$$r = \int_{t^*}^{t^0} P \sin\left[\frac{\pi}{t^0 - t^*}\left(t - t^*\right)\right] dt = 2P\frac{t^0 - t^*}{\pi} = 2P\frac{\tau}{\pi}. \qquad (2.10)$$

Легко видеть, что при воспитательном процессе соотношение (2.10) обеспечивает равноценные эмоции при условии $P\tau = const$.

Будем предполагать, что все такты равны между собой.

Ниже приведем теорему, которая математически характеризует стирание памяти о прошлых воспитаниях, если эти воспитания не поддерживаются эмоциями с течением времени. В этом случае индекс i определяется из соотношения $i = \left[\frac{t}{\sigma}\right]$, где t – текущее время, σ – время действия первой и единственной эмоции, повлекшей элементарное воспитание r_0.

<u>Теорема 2.3.</u> У равномерно забывчивого робота первое и единственное элементарное воспитание забывается согласно геометрической прогрессии.

<u>Доказательство.</u> Согласно равенству (2.4) при отсутствии постоянно действующих в течение времени эмоций воспитание к моменту времени t удовлетворяет соотношению

$$R_i = \theta_i \theta_{i-1} \theta_{i-2} ... \theta_1 r_0. \qquad (2.11)$$

Так как робот равномерно забывчив, то справедливо равенство $\theta_j = \theta = const, \quad j = \overline{1,i}$. Следовательно, верна формула $R_i = \theta^i r_0$, что и требовалось доказать.

Следующая теорема позволяет оценить сверху текущее воспитание забывчивого робота в том случае, когда он в прошлом получил только единственное элементарное воспитание.

<u>Теорема 2.4.</u> Воспитание забывчивого робота, полученное в результате единственного положительного элементарного воспитания, удовлетворяет неравенству $R_i \le \theta^{i-1} r_0$, где $\theta \ge \theta_j, \quad j = \overline{1,i}$.

<u>Доказательство</u>, очевидно, следует из вида формулы (2.11).

Выше была отмечена справедливость соотношения

$$M(t) = \frac{dr(t)}{dt}. \qquad (2.12)$$

Пусть для робота элементарные воспитания удовлетворяют неравенству

$$\left| r_j \right| \le q . \qquad (2.14)$$

При стремлении значения i к бесконечности и обратной нумерации элементарных воспитаний соотношение (2.4) примет вид

$$R = \sum_{i=1}^{\infty} r_{i-1} \prod_{j=1}^{i-1} \theta_j . \qquad (2.15)$$

<u>Определение 2.9.</u> Воспитание робота, соответствующее формуле (2.15), назовем бесконечным воспитанием.

Заметим, что сходимость бесконечного воспитания определяет перспективы воспитания робота.

<u>Теорема 2.5.</u> Для забывчивого робота бесконечное воспитание, соответствующее концам тактов, сходится.

<u>Доказательство.</u> Покажем, что ряд (2.15) сходится абсолютно.

Так как выполняется неравенство $0 \le \theta_i < 1 - \delta$, то существует такое θ, меньшее единицы, что справедливо соотношение $\theta_i \le \theta < 1$, где $i = \overline{1, \infty}$.

В силу неравенства (2.14), формулы (2.15) и формулы для определения суммы членов геометрической прогрессии можно записать соотношение

$$\sum_{i=1}^{\infty} | r_{i-1} | \prod_{j=1}^{i-1} \theta_j \le \sum_{i=0}^{\infty} q\theta^i = \frac{q}{1-\theta} < \infty .$$

Таким образом, ряд (2.15) сходится абсолютно, и, следовательно, ряд сходится.

Теорема доказана.

В силу предыдущей теоремы для конца каждого такта непрерывного воспитательного процесса справедливо соотношение

$$z = \lim_{i \to \infty} R_i = \lim_{i \to \infty} r_i + \lim_{i \to \infty} \theta_i \lim_{i \to \infty} R_{i-1} ,$$

которое эквивалентно равенству

$$z = \lim_{i \to \infty} r_i + \lim_{i \to \infty} \theta_i z . \qquad (2.16)$$

Формула (2.16) позволяет сформулировать следующую теорему.

<u>Теорема 2.6.</u> Элементарное воспитание равномерно забывчивого робота, соответствующее концам тактов, с течением времени непрерывного воспитательного процесса стремится к постоянной величине.

<u>Доказательство</u>

Так как для равномерно забывчивого робота справедливо соотношение $\theta_i = \theta = const < 1, \quad i = \overline{1,\infty}$, то в силу равенства (2.16) последовательность элементарных воспитаний, соответствующая концам воспитательных тактов, имеет предел.

Теорема доказана.

Следствие 2.6. Для равномерно забывчивого робота справедлива формула $\lim\limits_{i\to\infty} r_i = (1-\theta)z$.

Доказательство следует из равенства (2.16).

Оценим погрешность величины бесконечного воспитания при условии, когда для оценки суммы ряда (2.15) применяется k членов ряда.

Легко видеть, что при обратной нумерации элементарных воспитаний погрешность $b_{k+1} = \left| \sum\limits_{i=k+1}^{\infty} r_i \prod\limits_{j=1}^{i-1} \theta_j \right|$ при конечном суммировании k членов ряда будет удовлетворять неравенству

$$b_{k+1} \le \frac{q\theta^k}{1-\theta}.$$

Очевидно, что воспитание не может осуществляться непрерывно: после серии эмоциональных воспитательных воздействий наступает период затишья в воспитании.

Введем дополнительное определение.

Определение 2.10. Полным воспитательным циклом назовем количество тактов, равное сумме количества тактов при воздействии воспитательных эмоций и количества тактов, соответствующих отсутствию воздействий элементарных воспитаний на робота до наступления следующего воспитательного эмоционального воздействия.

Рассмотрим воспитание равномерно забывчивого робота с равноценными эмоциями.

Легко видеть, что согласно теоремам 2.2 и 2.3 воспитание F_{j_1,k_1} для первого полного воспитательного цикла равномерно забывчивого робота на равноценных эмоциях с равными тактами удовлетворяет соотношению

$$F_{j_1,k_1} = q\theta^{k_1} \frac{1-\theta^{j_1}}{1-\theta}, \qquad (2.17)$$

где j_1 – количество тактов при наличии воспитательных воздействий на робота, k_1 – количество тактов при их отсутствии.

Очевидно, что воспитание F_{j_n,k_n}, полученное роботом в результате n полных воспитательных циклов, определяется равенством

$$F_{j_n,k_n} = \theta^{k_n}\left(q\frac{1-\theta^{j_n}}{1-\theta} + \theta^{j_n} F_{j_{n-1},k_{n-1}}\right). \qquad (2.18)$$

Из соотношений (2.17) – (2.18) следует, что величина Ω_{j_n,k_n}, задаваемая равенством $\Omega_{j_n,k_n} = \frac{F_{j_n,k_n}}{q}$, не зависит от q. Так как справедливо соотношение $q=const$, то Ω_{j_n,k_n} является безразмерной мерой воспитания, полученного роботом в результате n полных воспитательных циклов.

<u>Определение 2.11.</u> Функцию Ω_{j_n,k_n} назовем функцией памяти.

Очевидно, что функция памяти показывает, насколько в процессе воспитания равноценные воспитательные эмоции запоминаются роботом.

Пусть число U определяет величину, равную наибольшему (пресыщенному) воспитанию. Полагая эмоции равноценными и коэффициенты памяти равными одной и той же константе, перейдем в обеих частях равенства (2.2) к пределу при стремлении количества тактов к бесконечности. В результате этого действия получим соотношение

$$\lim_{i\to\infty} r(t) = U(1-\theta) = q\,.$$

Таким образом, воспитание робота R, полученное в результате первого полного воспитательного цикла, будет определяться формулой

$$R = \theta^{k_1}\left(1-\theta^{j_1}\right)U\,.$$

Легко видеть, что функция $G(k_1, j_1)$, удовлетворяющая соотношению

$$G(k_1, j_1) = \frac{R}{U} = \theta^{k_1}\left(1-\theta^{j_1}\right), \qquad (2.19)$$

определяет отклонение воспитания от его пресыщения: чем ближе при заданных величинах k_1 и j_1 значение $G(k_1, j_1)$ к единице, тем ближе воспитание робота к пресыщению, и наоборот.

<u>Определение 2.12.</u> Функцию $G(k_1, j_1)$ назовем индикатором пресыщения.

Легко показать, что индикатор пресыщения для фиксированных k_1 и j_1 имеет максимальное значение при выполнении условия

$$\theta = \left(\frac{k_1}{j_1 + k_1} \right)^{\frac{1}{j_1}}. \qquad (2.20)$$

Подставляя соотношение (2.20) в равенство (2.19), получим формулу, определяющую максимально возможное значение $G_{\max}$ индикатора пресыщения в конце первого полного воспитательного цикла:

$$G_{\max} = \left(\frac{k_1}{j_1 + k_1} \right)^{\frac{k_1}{j_1}} \frac{j_1}{j_1 + k_1}.$$

<u>Определение 2.13.</u> Функцию $B_{j_n,k_n} = \dfrac{F_{j_n,k_n}}{U}$ назовем полным индикатором пресыщения.

В заключение приведем несколько утверждений, касающихся робота с неравноценными эмоциями, не являющегося равномерно забывчивым.

Легко видеть, что для такого робота в конце полных воспитательных циклов, количество которых равно n, общая функция воспитательного процесса $V_{l_n,i_n}^{[n]}$, определяющая воспитание, полученное в результате этих циклов, удовлетворяет соотношению

$$V_{l_p,i_p}^{[p]} = \left(\mathop{\Pi}_{k=1}^{l_p} \tilde{\tilde{\theta}}_k^{[p]} \right) \left[r_{i_p+1}^{[p]} + \sum_{k=1}^{i_p+1} r_{k-1}^{[p]} \mathop{\Pi}_{j=1}^{i_p+1-k} \theta_j^{[p]} + \left(\mathop{\Pi}_{i=1}^{i_p} \theta_i^{[p]} V_{l_{p-1},i_{p-1}}^{[p-1]} \right) \right],$$

$$p = \overline{2,n},$$

$$V_{i_1,l_1}^{[1]} = \left(\mathop{\Pi}_{k=1}^{l_1} \tilde{\tilde{\theta}}_k^{[1]} \right) \left[r_{i_1+1}^{[1]} + \sum_{k=1}^{i_1+1} r_{k-1}^{[1]} \mathop{\Pi}_{j=1}^{i_1+1-k} \theta_j^{[1]} \right],$$

где $[i]$ – обозначение переменных, соответствующих воспитательному циклу с номером i, $i = \overline{1,n}$, $\tilde{\tilde{\theta}}_k^{[p]}$ соответствует коэффициентам памяти цикла с номером p для тактов без эмоциональных воспитаний, k – номер такта без эмоциональных воспитаний, l_p – количество тактов цикла с номером p без эмоциональных воздействий, i_p – количество тактов воспитательного цикла с номером p при непрерывных эмоциональных воспитательных воздействиях.

Очевидно, что для забывчивого робота справедливы неравенства

$$|V_{l_p,i_p}^{[p]}| \le F_{l_p,i_p},\ F_{l_p,i_p} = \theta^{l_p} \left(q \frac{1}{1-\theta} + \theta^{i_p} F_{l_{p-1},i_{p-1}} \right),\ p = \overline{2,n},$$

$$\left|V^{[1]}_{l_1,i_1}\right| \le F_{l_1,i_1}\,,\ F_{l_1,i_1} = q\theta^{i_1}\frac{1}{1-\theta},$$

где $\theta = \max(\overset{\approx}{\theta}{}^{[p]}_j\ ,\ \ \theta^{[p]}_i)$, $i = \overline{1, i_p}$, $j = \overline{1, l_p}$, $p = \overline{1, n}$.

Введем следующие определения:

Определение 2.14. Обобщенной функцией памяти $W^{[n]}_{l_n,i_n}$ назовем величину, удовлетворяющую соотношению $\overset{\approx}{W}{}^{[n]}_{l_n,i_n} = \dfrac{V^{[n]}_{l_n,i_n}}{q}$.

Определение 2.15. Обобщенным индикатором пресыщения воспитания назовем функцию вида $W^{[n]}_{l_n,i_n} = \dfrac{|V^{[n]}_{l_n,i_n}|\,(1-\theta)}{q}$.

Из вышеприведенных определений, следует, что обобщенная функция памяти и обобщенный индикатор пресыщения воспитания являются без-размерными функциями.

Очевидно, что обобщенный индикатор пресыщения воспитания удовлетворяет неравенству $0 \le W^{[n]}_{l_n,i_n} \le 1$.

3. ПАРАМЕТРЫ ГРУППЫ ЭМОЦИОНАЛЬНЫХ РОБОТОВ

Рассмотрим задачу, связанную с изучением эмоционального состояния группы роботов. Приведенная ниже теория представляет собой одну из попыток математически формализовать решение этой задачи.

Определение 3.1. Будем определять суммарное воспитание группы, состоящей из n роботов, принадлежащих множеству Ω_n, на сюжете $S(t)$ по формуле

$$W_{\Omega_n} = \sum_{i\in\Omega_n}\int_0^t a_i(S(\tau),\tau)S(\tau)d\tau. \qquad (3.1)$$

Пусть мы имеем две группы, насчитывающие p и k роботов и составляющие два множества – Ω_p, Ω_k соответственно, где $\Omega_p \cup \Omega_k = \Omega_n$, $\Omega_p \cap \Omega_k = \otimes$, $\Omega_p \ne \otimes$, $\Omega_k \ne \otimes$. Выясним, когда в наибольшей степени возможен психологический конфликт между этими группами на одном классе сюжетов. Очевидно, что, например, ненависть определяется противоположными по знаку суммарными воспитаниями враждующих групп и что для наивысшей конфронтации между группами роботов необходимо выполнение равенства $\frac{W_{\Omega_k}}{W_{\Omega_p}} = -1$, где $W_{\Omega_p} \neq 0$.

Справедливо обратное утверждение: если суммарное воспитание двух групп равно нулю и хотя бы воспитание одного робота не равно нулю, то вероятна наивысшая конфронтация между двумя группами роботов.

Приведем доказательство этого утверждения.

Пусть $W_{\Omega_n} = 0$, тогда можно так подобрать числа k и p, где $k+p=n$, и множества Ω_k и Ω_p, что будет справедливо равенство $W_{\Omega_n} = W_{\Omega_k} + W_{\Omega_p} = 0$, т.е. $\frac{W_{\Omega_k}}{W_{\Omega_p}} = -1$ при $W_{\Omega_p} \neq 0$, что и требовалось доказать.

Исходя из вышеизложенного, следует <u>теорема 3.1</u>. Для наибольшей конфронтации между группами роботов при существовании хотя бы одного робота с ненулевым воспитанием необходимо и достаточно равенство нулю суммарного воспитания этих групп.

Очевидно, что конфронтация будет тем острее, чем больше значение $\left|W_{\Omega_k}\right|$ отличается от нуля.

Сформулированная теорема позволяет определять наиболее враждующие пары роботов или группировки роботов. Для выявления конфликтующих групп достаточно вычислить воспитание каждого робота, а затем, например перебором с помощью компьютера или вручную, получить массив всевозможных суммарных воспитаний. Множества роботов, чьи суммарные воспитания близки к нулю, составят конфликтные группы риска.

Легко видеть, что группа является тем сплоченнее, чем ее суммарное воспитание наиболее отлично от нуля.

Пусть суммарное воспитание членов первой группы роботов, полученное в результате нескольких полных воспитательных циклов $W^{[1]}$, удовлетворяет соотношению $W^{[1]} = \sum_{j=1}^{n} V^{[1]}_{i^{[1]}_{p_j}, k^{[1]}_{k_{p_j}}}$, а соответствующее суммарное воспитание членов второй группы определяется формулой $W^{[2]} = \sum_{j=1}^{m} V^{[2]}_{i^{[2]}_{p_j}, k^{[2]}_{k_{p_j}}}$, где индекс, написанный в квадратных скобках, определяет принадлежность к первой или второй группе роботов, n – количество роботов в первой группе, m – количество роботов во второй группе.

Тогда условие конфликта между группами будет определяться соотношением $W^{[1]} + W^{[2]} = 0$, которое эквивалентно равенству $\sum\limits_{j=1}^{n} V^{[1]}_{i^{[1]}_{p_j}, k^{[1]}_{k_{p_j}}} + \sum\limits_{j=1}^{m} V^{[2]}_{i^{[2]}_{p_j}, k^{[2]}_{k_{p_j}}} = 0$.

<u>Определение 3.2.</u> Изменение знака воспитания на противоположный назовем перевоспитанием.

Очевидно, что одна группа из k роботов может перевоспитать другую группу из p роботов в свою пользу, если к началу перевоспитания будет выполняться равенство $\dfrac{W_{\Omega_k}}{W_{\Omega_p}} = Q$, где $Q \neq -1$, $\left|W_{\Omega_k}\right| > \left|W_{\Omega_p}\right|$, $W_{\Omega_p} W_{\Omega_k} < 0$. Чем значительнее величина Q отличается от -1, тем наиболее эффективно будет происходить перевоспитание.

<u>Определение 3.3</u>**.** Будем говорить, что в группе в момент времени t_0 присутствует конфликт по эмоциям, если сумма эмоций каждого члена группы равна нулю, т. е. $\sum\limits_{i=1}^{n} M_i(t_0) = 0.$

Очевидно, что если в момент времени t_0 суммарные эмоции и воспитания членов группы роботов равны нулю, то налицо угроза открытого конфликта в его наивысшей степени.

Рассмотрим условия конфликта между двумя равномерно забывчивыми роботами с равноценными эмоциями.

Известно, что предельное воспитание первого равномерно забывчивого робота U_1, воспитанного на равноценных эмоциях, удовлетворяет соотношению $U_1 = \dfrac{q_1}{1-\theta_1}$, а предельное воспитание второго равномерно забывчивого робота U_2, также воспитанного на равноценных эмоциях, определяется равенством $U_2 = \dfrac{q_2}{1-\theta_2}$, где θ_1 и θ_2 – соответствующие коэффициенты памяти, q_1 и q_2 – значения соответствующих элементарных воспитаний. Предположим, что роботы при бесконечном воспитательном процессе приходят к конфликту по воспитаниям. Тогда следует справедливость формулы $U_1 = U_2$, влекущая соотношение

$$\frac{q_1}{1-\theta_1} = \frac{q_2}{1-\theta_2}. \tag{3.2}$$

Равенство (3.2) позволяет определить приближенную зависимость друг от друга коэффициентов памяти двух конфликтующих на равноценных эмоциях равномерно забывчивых роботов:

$$\theta_2 = 1 - (1 - \theta_1)\frac{q_2}{q_1}. \qquad (3.3)$$

Очевидно, что если коэффициенты θ_1 и θ_2 не будут связаны соотношением (3.3), то никогда в пределе первый и второй роботы не придут к конфликту по воспитаниям.

В разделе 2 было показано, что в результате j непрерывных воспитательных воздействий на первого робота и i непрерывных воспитательных воздействий на второго робота соответствующие воспитания описываются формулами

$$R_j^{[1]} = q_1 \frac{1 - \theta_1^j}{1 - \theta_1}, \quad R_i^{[2]} = q_2 \frac{1 - \theta_2^i}{1 - \theta_2}.$$

Тогда условие наступления конфликта между роботами в процессе воспитания будет определять равенство

$$q_1 \frac{1 - \theta_1^j}{1 - \theta_1} = q_2 \frac{1 - \theta_2^i}{1 - \theta_2}. \qquad (3.4)$$

Но мы можем сказать, что если коэффициенты памяти θ_1 и θ_2 не связаны соотношением (3.3), то с течением времени конфликт между роботами в процессе воспитания пройдет сам, т. е. без каких-либо дополнительных эмоциональных воздействий, отличных от воздействия уже существующими равноценными эмоциями.

4. ДРУЖБА РОБОТОВ

Попытаемся ввести понятие «дружба роботов».

Введем несколько определений.

Определение 4.1. Будем говорить, что группа роботов дружна, если индивидуальные воспитания каждого из ее членов положительны.

Определение 4.2. Если индивидуальные воспитания дружной группы роботов не меньше величины $P_0 > 0$, то будем говорить, что группа роботов дружна со значением дружбы P_0.

Теорема 4.1. Существует такое число ξ, что дружная группа роботов является дружной со значением дружбы ξ.

Доказательство. Так как группа дружна, то индивидуальные воспитания $R_i \quad (i = \overline{1, n})$ каждого из его роботов удовлетворяют условию $R_i > 0$.

Следовательно, существует такое число $\xi>0$, что справедливы неравенства $R_i \geq \xi, \quad i = \overline{1,n}$, что и требовалось доказать.

Определение 4.3. Пусть индивидуальные воспитания группы, состоящей из n роботов, положительны. Суммарным значением дружбы n роботов назовем сумму всех величин индивидуальных воспитаний роботов этой группы.

Будем предполагать, что совокупность роботов, количество которых равно n, разделена на две группы. Пусть первая группа, состоящая из m роботов, является наиболее дружной и значение дружбы равно P_0. Таким образом, суммарное значение дружбы первой группы P определяется равенством $P = mP_0$.

Пусть вторая группа, состоящая из n-m роботов, имеет значение дружбы, равное R_0. Тогда суммарное значение дружбы второй группы удовлетворяет соотношению $A = (n-m)R_0$.

Очевидно, что суммарное значение дружбы двух групп R будет определяться формулой

$$R = P + A = mP_0 + (n-m)R_0. \qquad (4.1)$$

Предположим справедливость неравенства $P_0 > R_0$.

Пусть члены второй группы являются роботами с равными равноценными эмоциями q и равномерно забывчивыми с равными коэффициентами памяти θ.

Поставим следующую задачу: определить условие воспитания роботов второй группы, при котором становится возможным достижение коэффициента дружбы второй группы, равного или большего значению коэффициента дружбы первой группы в результате воспитания роботов второй группы.

Исходя из соотношения (4.1) следует, что это условие определяется неравенством

$$mP_0 + (n-m)R_* \geq nP_0, \qquad (4.2)$$

где R_* – значение воспитания каждого робота второй группы после начала воспитательного процесса.

Легко видеть, что соотношение (4.2) эквивалентно формуле

$$R_* \geq P_0. \qquad (4.3)$$

Будем одновременно воздействовать на каждого робота второй группы равноценными эмоциями, пока не начнет выполняться условие (4.3). Очевидно, что в конце воспитательного процесса должно выполняться соотношение

$$q\frac{1-\theta^j}{1-\theta}+\theta^j R_0 \geq P_0,$$

где j – количество тактов воспитательного процесса для роботов второй группы.

Таким образом, при заданных коэффициентах памяти роботов второй группы для определения наименьшего количества необходимых воспитательных тактов необходимо решить следующую задачу:

$$\text{найти } \min_{j\geq 1}\left(q\frac{1-\theta^j}{1-\theta}+\theta^j R_0 - P_0\right) \tag{4.4}$$

при условии $q\dfrac{1-\theta^j}{1-\theta}+\theta^j R_0 - P_0 \geq 0$.

Докажем теорему.

Теорема 4.2. Если справедливо соотношение $\dfrac{q}{1-\theta}+R_0 < P_0$, то задача (4.4) не имеет решения.

Доказательство. Так как роботы второй группы равномерно забывчивы, то справедливо двойное неравенство $0 \leq \theta < 1$. Таким образом, условие теоремы 4.2 влечет формулу, справедливую для любого значения тактов j:

$$q\frac{1-\theta^j}{1-\theta}+\theta^j R_0 < P_0.$$

Эта формула говорит о том, что ограничивающее условие в задаче (4.4) никогда выполняться не будет. Следовательно, задача (4.4) при условиях теоремы не имеет решения, что и требовалось доказать.

Иными словами, смысл теоремы можно передать так: не всегда воспитательными воздействиями на роботов можно добиться того, чтобы роботы стали одинаково дружны между собой с заданным значением дружбы.

5. ГИПОТЕЗА О ПСИХОЛОГИЧЕСКИХ УСТАНОВКАХ РОБОТОВ

Советский психолог Д.Н. Узнадзе, бывший директор Института психологии АН Грузии, носящего его имя, выдвинул гипотезу о существовании у человека психологических установок. Узнадзе писал, что в течение жизни установки человека меняются.

Опишем гипотезу советского психолога языком математики и перенесем ее на математическое описание психологии эмоционального робота.

Согласно работам Д.Н. Узнадзе и его учеников существуют периоды жизни человека, при которых установки не меняются. Поэтому будем считать, что для этих периодов эмоции человека (робота) являются равноценными.

Будем считать, что эмоция $M_0(t)$, соотвествующая нулевому такту, при котором она появилась у робота в результате первого воздействия на него сюжетом-стимулом, сохраняется в памяти робота постоянно, выступая своеобразным эталоном эмоций этого типа и являясь эталоном эмоций, т.е. эталонной эмоцией. Сказанное можно описать математически следующим образом:

$$M_i(t) = M_0(t) = M(t). \qquad (5.1)$$

Так как формула (5.1) справедлива для любого такта i, то можно заключить, что у отдельного робота эталонные эмоции одного типа, вызванные одним и тем же стимулом, равноценны, т.е. справедливо равенство

$$q = \int_{t_{i-1}}^{t_i} M(\tau)d\tau = const, i > 0.$$

Прежде чем перейти к дальнейшему изложению, отметим, что адекватность определения 2.6, описывающего предельное воспитание, т.е. пресыщение воспитания робота, полностью подтверждается психологическими исследованиями. Результаты этих исследований говорят о том, что невозможно воспитывать человека до бесконечности; у воспитуемого, начиная с определенного времени, наступает пресыщение, и он поднимается на новую ступень эмоциональной деятельности. Опишем переход на эту новую ступень.

Введем определение уровня воспитания робота.

Определение 5.1. Уровнем воспитания робота назовем количество смен эталонных эмоций (установок) робота к текущему моменту времени воспитательного процесса.

Воспитание, эталонную эмоцию и коэффициенты памяти, соответствующие уровню k, обозначим $R_i^{[k]}$, $M^{[k]}(t)$ и $\theta_i^{[k]}$.

Пусть робот является равномерно забывчивым с равными коэффициентами памяти для всех уровней, т.е. $\theta_i^{[k]} = \theta$. Предположим также, что для всех уровней непрерывного воспитания робота его эмоции положительны, что влечет справедливость неравенства $q > 0$.

Исходя из вышеизложенного, можно предложить следующий алгоритм смены эталонных эмоций (установок) робота:

1. Задается эталонная эмоция первого уровня $(k=1)$.
2. Значению такта присваивается номер 1: $i=1$.
3. Воспитательный процесс определяется согласно формуле

$$R_i^{k]} = q^{[k]} + \theta R_{i-1}^{[k]}.$$

4. Вычисляется предельное воспитание $U^{[k]}$ для уровня k по формуле $U^{[k]} = \dfrac{q^{[k]}}{1-\theta}$.
5. Если $\left|R_i^{[k]} - U^{[k]}\right| > \varepsilon$, то номер такта i увеличивается на 1 и осуществляется переход к пункту 3.
6. Увеличиваем порядковый номер k на единицу и осуществляем присваивание $q^{[k]} = R_i^{[k-1]}$.
7. Если суммарное время воспитательного робота меньше допустимого, то идем к 2.
8. Конец.

Предложенный алгоритм изменения установок и перехода воспитания робота на более высокий уровень назовем алгоритмом Д.Н. Узнадзе.

Пусть переход с уровня k воспитательного процесса на уровень $k+1$ осуществляется при выполнении условия

$$R_i^{[k]} = R^{[k]} = \frac{q^{[k]}}{1-\theta} - \varepsilon^{[k]},$$

где $0 < \varepsilon^{[k]} < \dfrac{q^{[k]}}{1-\theta}$.

Введем определение восприимчивости робота к воспитанию.

<u>Определение 5.2.</u> Обратную величину к величине отклонения предельного воспитания от воспитания, при котором осуществляется переход на новый воспитательный уровень, назовем восприимчивостью робота к воспитанию.

Очевидно, что для уровня k восприимчивость $w^{[k]}$ робота к воспитанию определяется формулой $w^{[k]} = \dfrac{1}{\varepsilon^{[k]}}$.

Предположим справедливость равенства $\varepsilon^{[k]} = \varepsilon = const$ для любого уровня.

Легко показать, что, исходя из алгоритма Д.Н. Узнадзе в этом случае численное значение итогового воспитания, при котором осуществляется переход с уровня k воспитательного процесса на уровень $k+1$, удовлетворяет соотношению

$$R^{[k]} = \frac{q^{[1]}}{(1-\theta)^k} + \varepsilon \frac{(1-\theta)^k - 1}{\theta(1-\theta)^{k-1}}. \qquad (5.2)$$

Формула (5.2) влечет цепочку следующих равенств:

$$R^{[k]} = \frac{q^{[1]}\theta + \varepsilon\left[(1-\theta)^{k+1} - 1 + \theta\right]}{\theta(1-\theta)^k} = \varepsilon\left[\frac{\theta\left(\frac{q^{[1]}}{\varepsilon} + 1\right) - 1}{\theta(1-\theta)^k} + \frac{1-\theta}{\theta}\right]. \qquad (5.3)$$

Нетрудно заметить, что при удовлетворении условия $q^{[1]} = \left(\frac{1}{\theta} - 1\right)\varepsilon$ справедливо равенство $\lim\limits_{k\to\infty} R^{[k]} = q^{[1]}$. Анализируя соотношение (5.3), можно сделать вывод о том, что при выполнении неравенства $q^{[1]} > \left(\frac{1}{\theta} - 1\right)\varepsilon$ итоговое воспитание стремится к положительной бесконечности при бесконечном увеличении количества уровней; при выполнении неравенства $q^{[1]} < \left(\frac{1}{\theta} - 1\right)\varepsilon$, даже при воздействии на робота только положительными эмоциями, справедливо равенство $\lim\limits_{k\to\infty} R^{[k]} = -\infty$. Таким образом, восприимчивость робота к воспитанию и память робота серьезно влияют на результаты его длительного непрерывного эмоционального воспитания.

При компьютерном моделировании непрерывного воспитательного процесса эмоциональных роботов с учетом эталонных эмоций (установок) Д.Н. Узнадзе и предлагаемого нами определения момента для изменения этих установок разработчик-программист может самостоятельно задавать значения коэффициентов памяти и восприимчивости роботов к воспитанию.

Отметим, что при компьютерной реализации алгоритма Д.Н. Узнадзе в качестве одного из входных параметров целесообразнее использовать относительную восприимчивость к воспитанию α, смысл которой определяется формулой

$$\alpha = \frac{\varepsilon}{\frac{q^{[1]}}{1-\theta}} = \frac{\varepsilon(1-\theta)}{q^{[1]}}.$$

Таким образом, величина α показывает часть предельного воспитания, при достижении которой происходит переход от предыдущего уровня итогового воспитания к последующему. Очевидна справедливость двойного неравенства $0<\alpha<1$.

Легко показать, что при выполнении условия $\alpha=\theta$ справедлива формула $\lim\limits_{k\to\infty} R^{[k]}=q^{[1]}$, при $\alpha<\theta$ верно соотношение $\lim\limits_{k\to\infty} R^{[k]}=\infty$, при $\alpha>\theta$ справедливо равенство $\lim\limits_{k\to\infty} R^{[k]}=-\infty$.

Таким образом, предлагаемый раздел позволяет прогнозировать качественное поведение итогового непрерывного воспитания роботов с учетом численных значений элементарного воспитания, коэффициента памяти робота и восприимчивости воспитания и дает возможность проводить аналогию между внутренними механизмами психологического поведения робота и человека.

6. ЭКВИВАЛЕНТНЫЙ ВОСПИТАТЕЛЬНЫЙ ПРОЦЕСС

Определение 6.1. Эквивалентным воспитательным процессом назовем непрерывный воспитательный процесс, соответствующий воспитанию с равноценными эмоциями, равными коэффициентами памяти, имеющий наименьшее отклонение во всех узловых точках измерения воспитания от значений реального непрерывного воспитательного процесса робота.

6.1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭКВИВАЛЕНТНОГО ВОСПИТАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА

Пусть значения воспитаний реального непрерывного воспитательного процесса робота в конце каждого такта задаются величинами R_j, $j=\overline{1,n}$, где n – общее количество воспитательных тактов. Пусть также выполняются условия

$$R_{j+1}\ge R_j>0,\ j=\overline{1,n-1}. \tag{6.1}$$

Аппроксимируем реальный воспитательный процесс робота эквивалентным воспитательным процессом. Очевидно, что для этого необходимо найти значения переменных θ, q, доставляющих минимум целевой функции

$$J(\theta,q)=\sum_{j=2}^{n}\left(R_j-\theta^{j-1}R_1-q\frac{1-\theta^{j-1}}{1-\theta}\right)^2. \tag{6.2}$$

Таким образом, для построения эквивалентного воспитательного процесса необходимо решить систему уравнений

$$\frac{\partial J(\theta,q)}{\partial\theta}=0,\quad \frac{\partial J(\theta,q)}{\partial q}=0. \tag{6.3}$$

В развернутом виде с учетом соотношения (6.2) система уравнений (6.3) примет вид

$$\sum_{j=2}^{n}\left(R_j-\theta^{j-1}R_1-q\frac{1-\theta^{j-1}}{1-\theta}\right)\left(1-\theta^{j-1}\right)=0, \tag{6.4}$$

$$\sum_{j=2}^{n}\left(R_j-\theta^{j-1}R_1-q\frac{1-\theta^{j-1}}{1-\theta}\right)\left[(j-1)\theta^{j-2}R_1-q\frac{1-\theta^{j-1}-(j-1)\theta^{j-2}(1-\theta)}{(1-\theta)^2}\right]. \tag{6.5}$$

Так как решения системы уравнений (6.4) – (6.5) должны удовлетворять условиям

$$0\le\theta<1,\ q\ge 0, \tag{6.6}$$

то, благодаря проверке справедливости неравенств (6.6), можно оценить адекватность эквивалентного процесса реальному воспитательному процессу.

Найденные из уравнений (6.4) – (6.5) коэффициенты θ, q позволяют приближенно найти предельное значение воспитания непрерывного процесса *Z*. Очевидно, что величина *Z* удовлетворяет соотношению

$$Z=\lim_{j\to\infty}\left(R_1\theta^{j-1}+q\frac{1-\theta^{j-1}}{1-\theta}\right)=\frac{q}{1-\theta}.$$

Оценим погрешность вычисления предельного воспитания реального непрерывного процесса роботов через эквивалентный воспитательный процесс.

Согласно формуле непрерывного воспитания реального процесса справедливо соотношение

$$R_j=r_j+\theta_j R_{j-1}+\prod_{k=1}^{j}\theta_k R_1. \tag{6.7}$$

Перейдем в равенстве (6.7) к пределу при времени, стремящемся к бесконечности:

$$\lim_{j\to\infty}R_j=\lim_{j\to\infty}r_j+\lim_{j\to\infty}\theta_j\lim_{j\to\infty}R_{j-1}+\lim_{j\to\infty}\prod_{k=1}^{j}\theta_k R_1. \tag{6.8}$$

Согласно теореме о сходимости воспитания справедливо соотношение $\lim\limits_{j\to\infty}R_j=D>0$. Исходя из этого, соотношение (6.8) эквивалентно равенству

$$D=\lim_{j\to\infty}r_j+\lim_{t\to\infty}\theta_j D.$$

Таким образом, величина *D* удовлетворяет соотношению

$$D = \frac{\lim\limits_{j\to\infty} r_j}{1 - \lim\limits_{j\to\infty}\theta_j}. \tag{6.9}$$

Предположим справедливость неравенства

$$\frac{\lim\limits_{j\to\infty} r_j}{1 - \lim\limits_{j\to\infty}\theta_j} \ge \frac{q}{1-\theta}. \tag{6.10}$$

С учетом последнего неравенства и соотношения (6.9) получим следующую формулу:

$$D - Z = \frac{\lim\limits_{j\to\infty} r_j}{1 - \lim\limits_{j\to\infty}\theta_j} - \frac{q}{1-\theta} \le \frac{M}{1-\bar{\theta}} - \frac{q}{1-\theta} = \frac{M-q}{\left(1-\bar{\theta}\right)(1-\theta)} + \frac{q\bar{\theta} - M\theta}{\left(1-\bar{\theta}\right)(1-\theta)}, \tag{6.11}$$

где $M = \max\limits_j r_j, \bar{\theta} = \max\limits_j \theta_j$.

Рассмотрим случай, соответствующий неравенству

$$\frac{\lim\limits_{j\to\infty} r_j}{1 - \lim\limits_{j\to\infty}\theta_j} < \frac{q}{1-\theta}.$$

Очевидно, что в этом случае оценка погрешности предельного воспитания будет удовлетворять соотношениям

$$Z - D = \frac{q}{1-\theta} - \frac{\lim\limits_{j\to\infty} r_j}{1 - \lim\limits_{j\to\infty}\theta_j} \le \frac{q}{1-\theta} - \frac{\underline{M}}{1-\underline{\theta}} = \frac{q\left(1-\underline{\theta}\right) - \underline{M}(1-\theta)}{(1-\theta)\left(1-\underline{\theta}\right)}, \tag{6.12}$$

где $\underline{M} = \min r_j, \quad \underline{\theta} = \min \theta_j, \quad j = \overline{1,\infty}$.

Соотношения (6.11) и (6.12) дают возможность вычислить оценку X погрешности предельного воспитания при аппроксимации реального процесса эквивалентным воспитательным процессом. Очевидно, что в общем случае она будет определяться формулой

$$X \le \max\left(\left|\frac{M-q}{\left(1-\bar{\theta}\right)(1-\theta)} + \frac{q\bar{\theta} - M\theta}{\left(1-\bar{\theta}\right)(1-\theta)}\right|, \left|\frac{q\left(1-\underline{\theta}\right) - \underline{M}(1-\theta)}{(1-\theta)\left(1-\underline{\theta}\right)}\right|\right).$$

Анализ формул (6.11) и (6.12) позволяет утверждать, что погрешность вычисления предельного воспитания будет тем меньше, чем хуже эмоциональная память робота.

Равенства (5.11), (5.12) позволяют говорить о справедливости формулы для забывчивого робота:

$$\lim_{j\to\infty} R_j \approx \frac{q}{1-\theta}. \qquad (5.13)$$

В силу предположения (6.1) соотношение (6.13) помогает приближенно вычислять предельное воспитание робота для реального воспитательного процесса на основе эквивалентного воспитательного процесса.

Легко видеть, что равенство (6.9) влечет соотношение

$$R_j \le \frac{M}{1-\bar{\theta}}, \quad j=\overline{1,\infty},$$

являющееся верхней оценкой величины воспитания реального воспитательного процесса забывчивого робота.

6.2. АЛЬТЕРНАТИВА ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ ПРИ СОВПАДЕНИИ ТАКТОВ РЕАЛЬНОГО И ЭКВИВАЛЕНТНОГО ВОСПИТАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

Введем более простую целевую функцию, минимизация которой также даст нам коэффициенты θ и q, которые определяют эквивалентный воспитательный процесс:

$$J(\theta,q)=\sum_{i=2}^{n}\left(R_i-q-\theta R_{i-1}\right)^2.$$

Справедливость данной целевой функции для построения эквивалентного воспитательного процесса следует из формулы воспитания робота с равноценными эмоциями и равными коэффициентами памяти: $R_i = q+\theta R_{i-1}$.

Произведем минимизацию данной функции. Для этого необходимо решить следующую систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial J(\theta,q)}{\partial\theta}=0, \\ \dfrac{\partial J(\theta,q)}{\partial q}=0. \end{cases}$$

Найдем соответствующие производные:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial J(\theta,q)}{\partial \theta} = 2\sum\limits_{i=2}^{n}\left(R_i - q - \theta R_{i-1}\right)\left(-R_{i-1}\right), \\ \dfrac{\partial J(\theta,q)}{\partial q} = 2\sum\limits_{i=2}^{n}\left(R_i - q - \theta R_{i-1}\right)(-1). \end{cases}$$

Система примет следующий вид:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=2}^{n}\left(R_i - q - \theta R_{i-1}\right)R_{i-1} = 0, \\ \sum\limits_{i=2}^{n}\left(R_i - q - \theta R_{i-1}\right) = 0. \end{cases}$$

Упростим и получим

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=2}^{n} R_i R_{i-1} - q\sum\limits_{i=2}^{n} R_{i-1} - \theta\sum\limits_{i=2}^{n} (R_{i-1})^2 = 0, \\ \sum\limits_{i=2}^{n} R_i - q(n-1) - \theta\sum\limits_{i=2}^{n} R_{i-1} = 0. \end{cases}$$

Система является линейной относительно θ и q, поэтому выразим θ и q через R_i. Из второго уравнения получаем

$$q = \frac{\sum\limits_{i=2}^{n} R_i - \theta\sum\limits_{i=2}^{n} R_{i-1}}{n-1}.$$

Подставим q в первое уравнение и получим

$$\sum_{i=2}^{n} R_i R_{i-1} - \frac{\sum\limits_{i=2}^{n} R_i - \theta\sum\limits_{i=2}^{n} R_{i-1}}{n-1}\sum_{i=2}^{n} R_{i-1} - \theta\sum_{i=21}^{n}(R_{i-1})^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=2}^{n} R_i R_{i-1} - \frac{\sum\limits_{i=2}^{n} R_i \sum\limits_{i=2}^{n} R_{i-1}}{n-1} + \theta\frac{\left(\sum\limits_{i=2}^{n} R_{i-1}\right)^2}{n-1} - \theta\sum_{i=2}^{n}(R_{i-1})^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=2}^{n} R_i R_{i-1} - \frac{\sum\limits_{i=2}^{n} R_i \sum\limits_{i=2}^{n} R_{i-1}}{n-1} - \theta\left(\sum_{i=2}^{n}(R_{i-1})^2 - \frac{\left(\sum\limits_{i=2}^{n} R_{i-1}\right)^2}{n-1}\right) = 0,$$

$$\theta = \frac{\sum_{i=2}^{n} R_i R_{i-1} - \frac{\sum_{i=2}^{n} R_i \sum_{i=2}^{n} R_{i-1}}{n-1}}{\left(\sum_{i=2}^{n} (R_{i-1})^2 - \frac{\left(\sum_{i=2}^{n} R_{i-1} \right)^2}{n-1} \right)} = \frac{(n-1)\sum_{i=2}^{n} R_i R_{i-1} - \sum_{i=2}^{n} R_i \sum_{i=2}^{n} R_{i-1}}{(n-1)\sum_{i=2}^{n} (R_{i-1})^2 - \left(\sum_{i=2}^{n} R_{i-1} \right)^2}.$$

Следовательно,

$$q = \frac{\sum_{i=2}^{n} R_i - \frac{(n-1)\sum_{i=2}^{n} R_i R_{i-1} - \sum_{i=2}^{n} R_i \sum_{i=2}^{n} R_{i-1}}{(n-1)\sum_{i=2}^{n} (R_{i-1})^2 - \left(\sum_{i=2}^{n} R_{i-1} \right)^2} \sum_{i=2}^{n} R_{i-1}}{n-1}.$$

Таким образом, при известных значениях воспитания реального воспитательного процесса робота $R_i, i = \overline{1,n}$ получаем единственные значения коэффициентов θ и q, для которых должны выполняться условия $0 \le \theta < 1$, $q \ge 0$.

Если полученные значения удовлетворяют всем вышеперечисленным ограничениям, то коэффициенты θ и q определяют эквивалентный воспитательный процесс. Если же полученные значения не удовлетворяют ограничениям, то построить эквивалентный воспитательный процесс с выбором тех же тактов воспитания, что и в реальном воспитательном процессе, и соответствующими воспитаниями $R_i, i = \overline{1,n}$ реального воспитательного процесса невозможно.

Найденные коэффициенты θ и q позволяют приближенно найти предельное значение реального воспитательного процесса. Пусть Z – предельное значение, тогда

$$Z = \lim_{i \to \infty} (q + \theta R_{i-1}) = q + \theta Z.$$

Отсюда получаем $Z = \dfrac{q}{1-\theta}$.

Согласно формуле непрерывного реального воспитательного процесса справедливо соотношение

$$R_i = r_i + \theta_i R_{i-1}.$$

Переходя к пределу в данном соотношении, получим

$$\lim_{i \to \infty} R_i = \lim_{i \to \infty} r_i + \lim_{i \to \infty} \theta_i \lim_{i \to \infty} R_{i-1}.$$

Согласно теореме 2.1 о сходимости воспитания забывчивого робота на положительных эмоциях справедливо соотношение $\lim\limits_{i\to\infty} R_i = D > 0$. Таким образом, получаем

$$D = \lim_{i\to\infty} r_i + \lim_{i\to\infty} \theta_i D,$$

$$D = \frac{\lim\limits_{i\to\infty} r_i}{1 - \lim\limits_{i\to\infty} \theta_i}.$$

Пусть $\dfrac{\lim\limits_{i\to\infty} r_i}{1 - \lim\limits_{i\to\infty} \theta_i} \geq \dfrac{q}{1-\theta}$, тогда получим формулу

$$D - Z = \frac{\lim\limits_{i\to\infty} r_i}{1 - \lim\limits_{i\to\infty} \theta_i} - \frac{q}{1-\theta} \leq \frac{M_1}{1-\bar{\theta}_1} - \frac{q}{1-\theta} = \frac{M_1(1-\theta) - q(1-\bar{\theta}_1)}{(1-\bar{\theta}_1)(1-\theta)},$$

где $M_1 = \max\limits_i r_i, \bar{\theta}_1 = \max\limits_i \theta_i, i = \overline{1,\infty}$.

Рассмотрим случай, когда $\dfrac{\lim\limits_{i\to\infty} r_i}{1 - \lim\limits_{i\to\infty} \theta_i} < \dfrac{q}{1-\theta}$, тогда получим формулу:

$$Z - D = \frac{q}{1-\theta} - \frac{\lim\limits_{i\to\infty} r_i}{1 - \lim\limits_{i\to\infty} \theta_i} \leq \frac{q}{1-\theta} - \frac{M_2}{1-\bar{\theta}_2} = \frac{q(1-\bar{\theta}_2) - M_2(1-\theta)}{(1-\bar{\theta}_2)(1-\theta)},$$

где $M_2 = \min\limits_i r_i, \bar{\theta}_2 = \min\limits_i \theta_i, i = \overline{1,\infty}$.

Полученные соотношения дают возможность вычислить погрешность предельного воспитания при аппроксимации реального воспитательного процесса эквивалентным воспитательным процессом. Погрешность X будет определяться следующим соотношением:

$$X \leq \max\left(\frac{M_1(1-\theta) - q(1-\bar{\theta}_1)}{(1-\bar{\theta}_1)(1-\theta)}, \frac{q(1-\bar{\theta}_2) - M_2(1-\theta)}{(1-\bar{\theta}_2)(1-\theta)} \right).$$

Из анализа вышеописанного неравенства можно сделать вывод о том, что чем хуже эмоциональная память у робота, тем меньше погрешность вычисления предельного воспитания.

Пример. Рассмотрим пример построения эквивалентного воспитательного процесса:

Пусть реальный воспитательный процесс содержит три такта воспитания R_1, R_2, R_3, при этом $R_1 = 1, R_2 = 3, R_3 = 4$. Используя приведенные формулы для вычисления θ и q, получаем

$$\theta = \frac{2*15 - 7*4}{2*10 - 16} = \frac{1}{2} = 0.5,$$
$$q = \frac{7 - 0.5*4}{2} = \frac{5}{2} = 2.5.$$

При этом выполняются ограничения $0 \le \theta < 1, q \ge 0$.

Таким образом, мы получили аппроксимацию реального воспитательного процесса, имеющего три такта воспитания, в которых реальное воспитание $R_1 = 1$, $R_2 = 3$, $R_3 = 4$, эквивалентным воспитательным процессом с равноценными эмоциями при $q = 2.5$ и равными коэффициентами памяти $\theta = 0.5$.

Исходя из полученных значений, находим приближенное значение предельного воспитания Z. Несложные вычисления дают следующее соотношение: $Z \approx \frac{q}{1-\theta} = 5$.

6.3. ОБОБЩЕНИЕ НА СЛУЧАЙ НЕСОВПАДЕНИЯ ТАКТОВ РЕАЛЬНОГО И ЭКВИВАЛЕНТНОГО ВОСПИТАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

В качестве обобщения будем предполагать, что количество воспитательных тактов в эквивалентном воспитательном процессе может отличаться от их количества в реальном воспитательном процессе. Например, конец второго такта реального воспитательного процесса может соответствовать концу второго или более такта эквивалентного воспитательного процесса. Несовпадение тактов для воспитательных процессов может быть связано с произвольностью времени измерения воспитаний реального воспитательного процесса. Построение эквивалентного воспитательного процесса может приближенно восстанавливать значения воспитаний реального процесса для каждого такта.

Предполагая непрерывность эквивалентного воспитательного процесса, можно положить, что во время каждого такта эквивалентного воспитательного процесса на робота действует равноценная эмоция с элементарным воспитанием q. Легко видеть, что целевая функция может быть представлена следующим образом:

$$J(\theta, q, j_1, ..., j_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(R_i - q \frac{1-\theta^{j_i}}{1-\theta} \right)^2, \qquad (6.14)$$

где R_i – значение воспитания реального воспитательного процесса после такта i, а $q\dfrac{1-\theta^{j_i}}{1-\theta}$ характеризует воспитание, полученное в результате эквивалентного воспитательного процесса после такта j_i.

Таким образом, для построения эквивалентного воспитательного процесса необходимо минимизировать целевую функцию (6.14). Для этого необходимо решить систему уравнений

$$\frac{\partial J(\theta, q, j_1, ..., j_n)}{\partial \theta} = 0,$$

$$\frac{\partial J(\theta, q, j_1, ..., j_n)}{\partial q} = 0.$$

Система уравнений для определения величин θ и q примет вид

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \left(R_i - q\dfrac{1-\theta^{j_i}}{1-\theta} \right) \left[j_i \theta^{j_i - 1}(1-\theta) + \theta^{j_i} - 1 \right] = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} \left(R_i - q\dfrac{1-\theta^{j_i}}{1-\theta} \right) = 0, \\ 0 < \theta < 1, q > 0 \end{cases}$$

Пример. Полагая справедливость соотношений $R_1 = 3, R_2 = 6, R_3 = 10$ и используя способ циклического перебора для минимизации целевой функции (6.14) при шаге перебора для q и θ, равном 0.1, для j_i, равного 1, и интервалах изменений q в пределах от 0.1 до 2.9, θ – в пределах от 0.09 до 0.99, j_i – в пределах от 1 до 100, получим следующие значения искомых величин: $q = 0.2$, $\theta = 0.99$, $j_1 = 16$, $j_2 = 35$, $j_3 = 69$. Очевидно, что предельное воспитание равно 20. Результаты вычислений показывают, что значение целевой функции (5.14) при найденных параметрах эквивалентного воспитательного процесса равно 0.0056, т.е. построенный эквивалентный воспитательный процесс довольно точно аппроксимирует реальный воспитательный процесс.

7. СПОСОБ ПРИБЛИЖЕННОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИНАМИКИ ИЗМЕНЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПАМЯТИ НА ОДНОМ ТАКТЕ

В разделе 2 для начала каждого такта было доказано равенство

$$\theta_i(0) = 1, i = \overline{1, \infty}. \tag{7.1}$$

Представим коэффициенты памяти $\theta_i(t)$ в виде

$$\theta_i(t) = a_i t + b_i,$$

где a_i, b_i – константы, не зависящие от текущего времени t действия эмоции.

Согласно равенствам (7.1) и соотношениям для определения коэффициентов a_i, b_i получим системы уравнений

$$a_i 0 + b_i = 1, \tag{7.2}$$

$$a_i\left(t_i - t_{i-1}\right) + b_i = \theta, \tag{7.3}$$

где t_{i-1}, t_i – время начала и конца такта с номером i, θ – коэффициент памяти соответствующего эквивалентного процесса.

Получим соотношения, позволяющие найти неизвестные величины в системе уравнений (7.2) – (7.3) при условии, что параметры эквивалентного процесса находятся согласно целевой функции, приведенной в разделе 6.2.

Легко видеть, что искомые величины определяются явными формулами

$$b_i = 1,$$

$$a_i = \frac{\dfrac{(n-1)\sum\limits_{i=2}^{n} R_i R_{i-1} - \sum\limits_{i=2}^{n} R_i \sum\limits_{i=2}^{n} R_{i-1}}{(n-1)\sum\limits_{i=2}^{n}\left(R_{i-1}\right)^2 - \left(\sum\limits_{i=2}^{n} R_{i-1}\right)^2} - 1}{t_i - t_{i-1}},$$

где n – количество тактов, для которых известны последовательные значения воспитаний робота R_i и продолжительность тактов, определяемых величинами t_{i-1}, t_i, $i = \overline{1,n}$.

8. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ РАВНОЦЕННЫХ ГРУПП РОБОТОВ

Ниже предлагается один из способов формирования групп роботов, равных по своим суммарным воспитаниям.

Рассмотрим совокупность, состоящую из k роботов, каждому из которых присвоен порядковый номер i, где $i = \overline{1,k}$.

Пусть робот i обладает воспитанием R_i. Тогда суммарное воспитание совокупности роботов A будет удовлетворять соотношению $A = \sum\limits_{i=1}^{k} R_i$.

Поставим следующую задачу: из множества Ω всех роботов совокупности сформировать группы роботов – не пересекающиеся подмножества $\Omega_p,\ p=\overline{1,n}\ (n<k)$, $\bigcup\limits_{p=1}^{n}\Omega_p=\Omega$, такие, что полученные группы наименее отличаются друг от друга по значениям суммарных воспитаний.

Дадим следующее определение и докажем вспомогательную теорему.

<u>Определение 8.1.</u> Средним воспитанием F_p группы p назовем величину, удовлетворяющую соотношению $F_p=\dfrac{\sum\limits_{j\in\Omega_p}R_j}{N_p}$, где N_p– количество роботов во множестве Ω_p.

<u>Теорема 8.1.</u> Суммарное воспитание A удовлетворяет равенству

$$A=\sum_{i=1}^{n}N_iF_i.$$

<u>Доказательство</u>

Легко видеть, что справедлива цепочка равенств

$$N_iF_i=N_i\frac{\sum\limits_{j\in\Omega_i}R_j}{N_i}=\sum_{j\in\Omega_i}R_j\ . \qquad (8.1)$$

Суммируя (8.1) по всем значениям i, получим $\sum\limits_{i=1}^{n}N_iF_i=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j\in\Omega_i}R_j=\sum\limits_{s=1}^{k}R_s=A$, т. е. $\sum\limits_{i=1}^{n}N_iF_i=A$, что и требовалось доказать.

Введем целевую функцию в следующем виде:

$$J=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\left(N_iF_i-N_jF_j\right)^2 .$$

Теперь поставленную задачу можно описать математически следующим образом:

$$\text{найти}\ \min_{N_i,\ F_i}\ J\left(\overline{N},\overline{F}\right) \qquad (8.2)$$

при ограничениях $\sum\limits_{i=1}^{n}N_i=k,\quad \sum\limits_{i=1}^{n}N_iF_i=A,\quad N_i>0,\quad i=\overline{1,n}$.

Задача (8.2) относится к задачам на нахождение условного экстремума функции нескольких переменных, и ее можно решить, например, используя хорошо известный метод Лагранжа.

Применение метода Лагранжа к решению задачи (8.2) приводит к нахождению корней следующей системы уравнений:

$$2F_i\sum_{j=i+1}^{n}\left(N_iF_i-N_jF_j\right)-\lambda_1-\lambda_2F_i=0,\quad i=1,\overline{n-1},$$

$$\sum_{i=1}^{n}N_i-k=0,$$

$$2\sum_{i=1}^{n-1}\left(N_iF_i-N_nF_n\right)+\lambda_2=0, \qquad (8.3)$$

$$\sum_{i=1}^{n}N_iF_i-A=0,$$

$$2\sum_{j=i+1}^{n}\left(N_iF_i-N_jF_j\right)-\lambda_2=0,\quad i=1,\overline{n-1},$$

$$2F_n\sum_{i=1}^{n-1}\left(N_iF_i-N_nF_n\right)+\lambda_1+\lambda_2F_n=0,$$

где $\lambda_1,\ \lambda_2$ – вспомогательные переменные метода Лагранжа.

В общем случае ответ на вопрос о существовании и единственности решения нелинейной алгебраической системы уравнений (8.3), а также математических способах его нахождения остается открытым.

Рассмотрим несколько иную задачу, но похожую по своей постановке на задачу (8.2). В новой постановке будем предполагать, что количество роботов N_p рассматриваемых групп Ω_p задано. Легко видеть, что тогда математическая постановка задачи примет следующий вид:

$$\text{найти } \min_{F_i} J\left(\bar{F}\right) \qquad (8.4)$$

$$\text{при ограничении } \sum_{i=1}^{n}N_iF_i=A.$$

Согласно методу Лагранжа решение задачи (8.4) сводится к нахождению корней системы линейных уравнений

$$2\sum_{j=i+1}^{n}\left(N_iF_i-N_jF_j\right)-\lambda=0,\quad i=1,\overline{n-1},$$

$$\sum_{i=1}^{n}N_iF_i-A=0, \qquad (8.5)$$

$$2\sum_{i=1}^{n-1}\left(N_iF_i-N_nF_n\right)+\lambda=0,$$

где λ – вспомогательная переменная метода Лагранжа.

Легко показать, что главный определитель системы уравнений (8.5), например, при $n=2$ (этот случай соответствует разбиению совокупности роботов на две группы), отличен от нуля, т.е. система (8.5) при таком n всегда имеет единственное решение.

Определение 8.2. Группы со значениями F_i, $i = \overline{1,n}$, являющиеся решением задачи (8.4), назовем равноценными.

Определение 8.3. Группы со значениями F_i, $i = \overline{1,n}$, являющиеся решением задачи (8.4) и обеспечивающие минимум целевой функции J, равный нулю, назовем абсолютно равноценными.

Определим простые условия, при которых формируемые группы являются абсолютно равноценными.

Очевидно, что функция $J\left(\bar{F}\right)$ имеет минимум, равный нулю, при справедливости соотношений

$$N_i F_i = N_j F_j, \quad i = \overline{1,n-1}, \quad j = \overline{i+1,n},$$

$$\sum_{i=1}^{n} N_i F_i = A.$$

Легко показать, что при $n = 2$ группы становятся абсолютно равноценными при выполнении равенств $F_1 = \dfrac{A}{2N_1}$, $\quad F_2 = \dfrac{A}{2N_2}$.

Решение задачи (8.2) позволяет найти численные значения абстрактных средних воспитаний, которые могут не совпадать со средними реальными воспитаниями формируемых групп роботов. Это связано с тем, что средние воспитания всех реальных групп являются известными числами и, следовательно, абсолютной равноценности при формировании групп совокупности роботов, исходя из воспитаний отдельных роботов, можно не достичь. По этой же причине не всегда можно разбить совокупность на равноценные группы.

9. АЛГОРИТМ ФОРМИРОВАНИЯ РАВНОЦЕННЫХ ГРУПП РОБОТОВ

Приведем алгоритм, позволяющий формировать из совокупности реальные группы роботов, наиболее близкие к равноценным:

1. Задаем числа $N_1,\ldots,N_n$, определяющие количество роботов каждой из формируемых групп, где $\sum_{i=1}^{n} N_i = k$.

2. Формируем массив Z всевозможных множеств $Z = \left\{\Omega_{N_1,y},\ldots,\Omega_{N_n,y}\right\}_{y=1}^{q}$ (q – количество наборов множеств в массиве

Z), таких, что

$$\bigcup_{i=1}^{n} \Omega_{N_i,y} = \Omega, \quad \Omega_{N_i,y} \cap \Omega_{N_j,y} = \otimes, \quad i \neq j, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,n}.$$

3. На основе п. 2 вычисляем значения функции $J\left(\overline{F}\right)$ для каждого из набора множеств $\Omega_{N_1,y},...,\Omega_{N_n,y}$.
4. Определяем номера y, для которых множества, им соответствующие, доставляют минимум значениям функции $J\left(\overline{F}\right)$.
5. Выводим на средства обмена информацией между компьютером и пользователем множества $\Omega_{N_1,y},...,\Omega_{N_n,y}$, соответствующие минимальным значениям функции $J\left(\overline{F}\right)$.

Заметим, что при реализации на ЭВМ п. 2 можно использовать известные компьютерные алгоритмы комбинаторного анализа.

После подбора множеств, определяющих наиболее близкие по суммарным воспитаниям группы роботов, можно оценить равноценность этих групп по отношению друг к другу, сравнивая средние воспитания этих групп со значениями F_i, полученными при решении задачи (8.4). Для определения величины близости V сформированных групп к равноценным предлагается использовать следующую формулу: $V = \max\limits_i \frac{|D_i - F_i|}{F_i}$, $i = \overline{1,n}$, D_i – реальные средние воспитания каждой из сформированных групп. Очевидно, что чем ближе величина V к нулю, тем ближе друг к другу сформированные группы.

Для выявления подгрупп, состоящих из роботов и объединенных по их уровням воспитаний, из всей рассматриваемой совокупности роботов можно применить известные алгоритмы кластерного анализа. Использование этих алгоритмов позволит, например, выявить роботов, входящих в лидирующие или отстающие по воспитанию подгруппы роботов.

10. ПРИМЕНЕНИЕ ПРАВИЛ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ К ИССЛЕДОВАНИЮ ЭМОЦИОНАЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ ГРУППЫ РОБОТОВ

Здесь и в дальнейшем будем использовать прямоугольную декартову систему координат.

<u>Определение 10.1</u>. Воспитанием робота по n типам эмоций назовем вектор

$$\bar{R} = \left(R_1, R_2, ..., R_j, ..., R_n\right),$$

где каждый элемент вектора воспитания по эмоциям одного типа определяется согласно соотношению (2.2).

Введение векторов воспитаний и эмоций позволяет использовать правила векторной алгебры при математических операциях с воспитаниями и эмоциями.

Так, воспитание группы R, состоящей из m роботов, можно вычислить по формуле

$$R = \sum_{k=1}^{m} \bar{R}_k, \tag{10.1}$$

а эмоцию группы роботов M – исходя из соотношения

$$M = \sum_{k=1}^{m} \bar{M}_k, \tag{10.2}$$

где k – порядковый номер робота в группе.

Заметим, что вектор групповых эмоций при $m<n$ содержит как минимум n-m нулевых элементов.

Введя соотношения (10.1) и (10.2), мы определили правило сложения векторов психологических характеристик роботов.

Ниже приведем результаты теоретических исследований, касающихся пары эмоциональных роботов или их двух групп, каждая из которых характеризуется своими векторами эмоций или воспитаний.

Определение 10.2. Однотипными психологическими векторами роботов будем называть векторы, являющиеся или только векторами эмоций, или только векторами воспитания.

Для унификации записей однотипные психологические векторы обозначим $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Рассмотрим психологические свойства скалярного произведения векторов эмоций и воспитания роботов.

Пусть вектор $\bar{a}$ является однотипным психологическим вектором первого робота или группы роботов, а вектор $\bar{b}$ – тем же однотипным вектором второго робота или второй группы роботов. Оба робота или группа роботов принадлежат общей совокупности роботов.

Аналогично правилам векторной алгебры под скалярным произведением двух однотипных психологических векторов будем понимать величину, удовлетворяющую соотношению

$$\left(\bar{a},\bar{b}\right)=\left|\bar{a}\right|\left|\bar{b}\right|\cos\alpha,$$

где $\left|\bar{a}\right|$, $\left|\bar{b}\right|$ – длины векторов (вычисляются по известным формулам векторной алгебры), α – угол между векторами $\bar{a}, \bar{b}$.

Очевидно, что $\cos(\alpha)$ удовлетворяет равенству

$$\cos(\alpha)=\frac{\left(\bar{a},\bar{b}\right)}{\left|\bar{a}\right|\left|\bar{b}\right|}.$$

<u>Определение 10.3.</u> Если $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$, то будем считать, что психологические действия направлены на достижение одной цели, если же $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$, то на достижение противоположных целей.

Определение 10.3 иллюстрируют рис. 10.1 и 10.2.

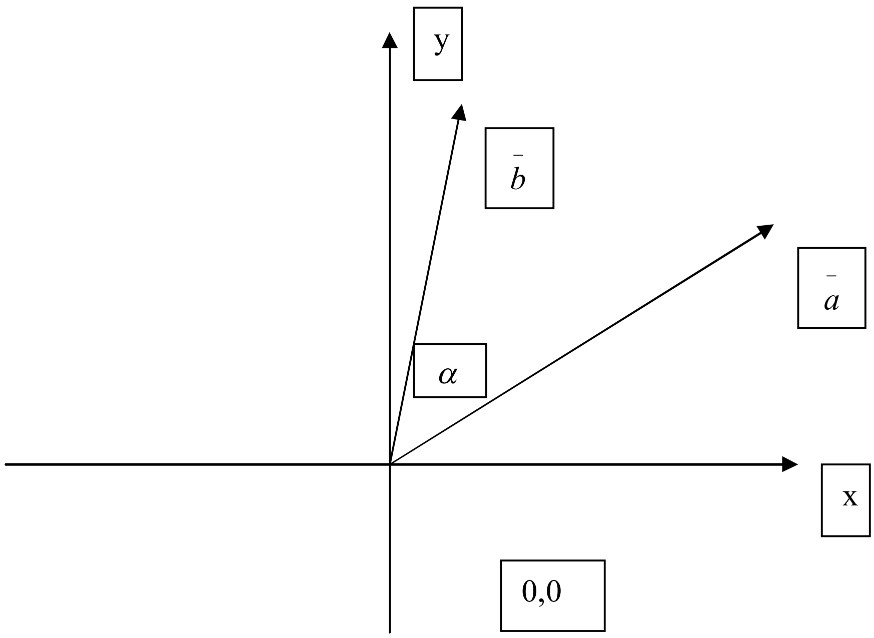

Рис.10.1. Однотипные психологические векторы, направленные на достижение одной цели

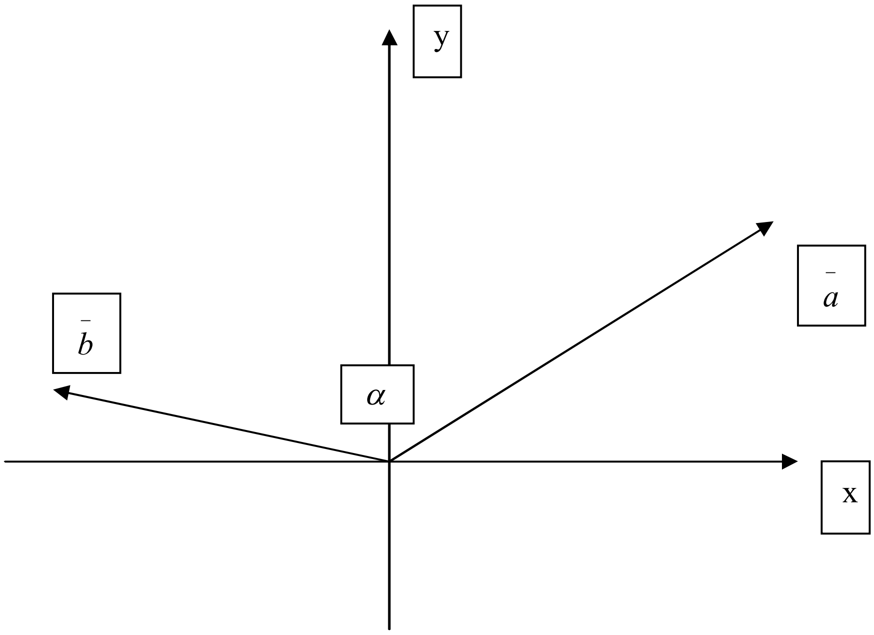

Рис.10.2. Однотипные психологические векторы, направленные на достижение разных целей

Очевидны следующие утверждения.

Теорема 10.1. Если косинус угла между двумя однотипными психологическими векторами положителен, то психологические действия направлены на достижение единой цели.

Следствие 10.1. Если косинус угла между двумя однотипными психологическими векторами равен единице, то психологические действия для достижения единой цели имеют наибольшую эффективность.

Теорема 10.2. Если косинус угла между двумя однотипными психологическими векторами отрицателен, то психологические действия противоречат друг другу и ведут к достижению разных целей.

Следствие 10.2.1. Если косинус угла между двумя однотипными психологическими векторами равен –1, то в совокупности роботов существуют группы с противоположными психологическими характеристиками.

Следствие 10.2.2. Если косинус угла между двумя однотипными психологическими векторами равен –1 и длины этих векторов равны, то в совокупности роботов есть конфликт по психологическим характеристикам, соответствующим рассматриваемым психологическим векторам.

Очевидно, что если выполняется следствие 10.2.2 одновременно для психологических векторов эмоций и воспитаний, то конфликт между двумя группами роботов примет наиболее острую форму. Поэтому можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 10.3. Если косинусы углов между векторами воспитаний и векторами эмоций равны –1, длины векторов воспитаний равны, равны длины векторов эмоций, то налицо в наивысшей степени конфликтная ситуация.

Теорема 10.4. Если косинус угла между однотипными психологическими векторами равен нулю, то имеет место неустойчивая психологическая ситуация, и любая индивидуальная эмоция может привести совокупность роботов либо к сплочению, либо к разобщению (т.е. к достижению либо одной, либо разных целей).

Доказательство очевидно.

Теорема 10.5. У совокупности эмоциональных роботов одновременно не может быть ситуаций, когда модуль косинуса угла между однотипными психологическими векторами равен единице и совокупность находится в неустойчивой психологической ситуации по этому типу векторов.

Доказательство. Пусть совокупность роботов эмоциональна. Тогда ее однотипный психологический вектор не равен нулю.

Так как модуль косинуса угла между психологическими векторами равен единице, то векторы коллинеарны друг другу. Так как коллектив находится в неустойчивой психологической ситуации, то психологические векторы ортогональны. Но одновременное выполнение обоих случаев возможно только при равенстве нулю хотя бы одного из векторов, что противоречит предположению об эмоциональности совокупности роботов. Таким образом, *теорема доказана* методом от противного.

Следствие 10.5. Теорему 10.5 можно перефразировать так: «Совокупность эмоциональных роботов не может одновременно находиться в состоянии конфликта и психологической неопределенности».

11. О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЦЕНКЕ ВЕЛИЧИНЫ ДОСТИЖЕНИЯ ПОСТАВЛЕННОЙ ПЕРЕД РОБОТОМ ЦЕЛИ

Пусть воспитатель поставил перед роботом численно выраженную цель воспитания. В некоторых случаях степень приближения робота к конечной цели воспитания в процессе этого воспитания можно оценить численно.

11.1. ПРАВИЛО ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЕЛИЧИНЫ ДОСТИЖЕНИЯ ПОСТАВЛЕННОЙ ЦЕЛИ

Введем следующие определения.

Определение 11.1. Целью будем называть вектор $A=(a_1,...,a_m)$, характеризующий желаемое конечное состояние робота, достигаемое в результате *K* действий (шагов), причем $\sum_{i=1}^{m} a_i^2 > 0$.

Рассмотрим случай, соответствующий ситуации, когда для достижения цели определено заданное количество шагов *K*.

Определение 11.2. *k*-шагом к цели будем называть вектор $R_k=(r_{k,1},...,r_{k,m})$, определяющий состояние робота, полученное в результате одного шага с порядковым номером *k* при стремлении к цели.

Определение 11.3. Вектором-состоянием робота W_k назовем вектор, соответствующий достижению цели в результате всех выполненных шагов до *k*-шага включительно и удовлетворяющий соотношению $W_k=\sum_{i=1}^{k} R_i$.

Очевидно, что уклонение направления *k*-шага от направления цели будет характеризовать угол β_k, равный углу между целью и *k*-шагом к цели. Косинус этого угла можно вычислить по формуле

$$\cos(\beta_k)=\frac{(A,R_k)}{|A||R_k|}, \tag{11.1}$$

а косинус угла α_k между вектором-состоянием робота и целью, харак-теризующий уклонение от направления цели в результате *k* шагов, – исходя из соотношения

$$\cos(\alpha_k)=\frac{(A,W_k)}{|A||W_k|}. \tag{11.2}$$

После выполнения заданного количества шагов *K*, предусмотренного для достижения цели, можно определить величину δ, характеризующую близость к конечной цели. Формула, определяющая значение δ, является отношением численного значения проекции вектора W_K на вектор *A* к длине *A*.

Таким образом, с учетом (11.2) соотношение для вычисления δ примет вид

$$\delta=\frac{|W_K|\cos(\alpha_K)}{|A|}=\frac{|W_K|}{|A|}\frac{(A,W_K)}{|A||W_K|}=\frac{(A,W_K)}{|A|^2}. \tag{11.3}$$

Легко видеть, что величина δ может принимать любые значения и цель достигается полностью, если $\delta \ge 1$.

Вычислить косинус угла уклонения итогового вектора-состояния от направления цели ψ можно, используя соотношение

$$\cos(\psi) = \frac{(A, W_K)}{|A||W_K|}. \qquad (11.4)$$

Аналогично можно записать формулу, определяющую процентное достижение цели χ_k на каждом k-шаге к цели:

$$\chi_k = \frac{(A, R_k)}{|A|^2}, \qquad (11.5)$$

а достижение цели λ_k в результате k выполненных шагов будет определяться соотношением

$$\lambda_k = \frac{(A, W_k)}{|A|^2}. \qquad (11.6)$$

Пусть t_k – время, необходимое для выполнения k-шага, тогда можно вычислить полное время T, затраченное для достижения величины δ. Оно будет определяться формулой $T = \sum_{k=1}^{K} t_k$.

При сравнении членов одной группы роботов можно определить наиболее способного к воспитанию робота по следующему критерию: при равных с остальными роботами положительных величинах δ он должен обладать меньшим временем T.

Для анализа действий робота при достижении цели можно воспользоваться вышеперечисленными формулами: например, если при каких-то значениях k величины χ_k (см. (11.5)) велики и углы β_k близки к нулю (см. (11.1)), то следует говорить о том, что для шага k выбраны действия робота, обеспечивающие наиболее успешное достижение поставленной цели.

Очевидно, что успешные действия робота на каждом k-шаге влекут набольшие значения величин δ, λ_k (см. (11.3), (11.6)) и значения углов ψ, α_k (см. (11.4), (11.2)), близких к нулю. Иными словами, для успешного достижения конечной цели необходимо на каждом шаге, ведущем к этой цели, получать максимальные результаты.

Рассмотрим вопрос о количественной оценке достижения групповой цели.

Будем считать, что каждый j член группы имеет индивидуальную цель $z_j = (h_{j,1},...h_{j,m})$, где $j = \overline{1,L}$, L – количество роботов в группе.

В этом случае цель A всей группы определим согласно соотношению $A = \sum_{j=1}^{L} z_j$.

Пусть каждый робот группы имеет k-шаг к своей цели, задаваемый вектором $f_{j,k} = (s_{j,1,k},...,s_{j,m,k})$, тогда, очевидно, суммарный k-шаг группы к достижению цели определится формулой $R_k = \sum_{j=1}^{L} f_{j,k}$, а вектор-состояние группы в результате k-шагов будет удовлетворять соотношению

$$W_k = \sum_{i=1}^{k} R_i = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{L} f_{j,i} .$$

После введенных соотношений можно использовать для численной оценки достижения поставленной групповой цели положения, касающиеся одного робота, подразумевая при этом под роботом целую группу.

Пусть робот, достигнув одной цели, ставит перед собой другую. Последующая цель может иметь отличное от предыдущей количество компонентов. Для определения количественной оценки достижения последующей цели можно применять схему, описанную выше, с соответствующим числом компонент новой цели.

Иногда цель действий робота отчетливо не видна. В этом случае ее можно представить матрицей A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{q,1} & \dots & a_{q,m} \end{pmatrix},$$

где каждая строка является одной из целей.

Производя по очереди оценку достижения каждой из целей–строк матрицы A после K-шагов, можно определить ту цель, которая лучше всего достигнута. Решение этой задачи может, например, предостеречь робота от стремления достичь заведомо не выполнимых целей.

Отдельно рассмотрим более простой случай, соответствующий цели и k-шагам к цели, являющимся скалярными величинами. Отметим, что в этом случае цель и k-шаг к цели имеют только два направления: или совпадающее с направлением числовой оси, или противоположное ей. Поэтому соотношения (11.3), (11.5), (11.6) примут вид $\delta = \dfrac{W_K}{A}$, $\chi_k = \dfrac{R_k}{A}$, $\lambda_k = \dfrac{W_k}{A}$ соответственно, где A – число, определяющее значение цели.

Способ индивидуальной оценки достижения цели можно применять для ранжирования роботов по воспитаниям, например в убывающем порядке. Для правильного ранжирования, прежде всего, необходимо поставить максимально возможную цель и ранжирование производить согласно численным величинам достижения цели. Если эти численные величины для некоторых роботов оказываются равными, то вперед в рейтинге необходимо ставить робота с наименьшим уклонением от направления цели. Описанный способ ранжирования воспитаний назовем ранжированием по цели.

Рассмотрим случай, когда численные значения элементов вектора цели неизвестны, но необходимо ранжировать векторы воспитаний согласно достижению этой цели в порядке близости к ней. Не нарушая общности, будем предполагать, что целью действий робота является получение наилучших результатов. Тогда цель *A* можно охарактеризовать вектором с *m* единичных элементов: $A = (1,...,1)$. Дав каждому элементу набора векторов воспитаний номер, соответствующий его близости к единице, получим для каждого воспитания вектор $B_j = (b_{1,j},...,b_{m,j})$, $j = \overline{1,n}$.

Легко видеть, что в этом случае величины проекций δ_j каждого вектора B_j на вектор цели *A* будут удовлетворять соотношению

$$\delta_j = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} B_{i,j}}{\sqrt{m}}, \qquad (11.7)$$

а угол отклонения от достижения цели Ψ_j определится по формуле

$$\cos\Psi_j = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} B_{i,j}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} B_{i,j}^2}\sqrt{m}}.$$

Согласно формуле (11.7) векторы B_j будут тем ближе к цели, чем меньше величина δ_j. Поэтому эти векторы можно ранжировать в порядке возрастания δ_j. Если $\delta_i = \delta_k$, $i \neq k$, то вперед необходимо ставить вектор, соответствующий большему значению $cos\,\Psi_j$.

Учтем одно замечание.

Иногда робот достигает конечной цели поэтапно – от достижения одной части цели – к другой.

Пусть конечная цель робота определяется вектором

$$\overline{A} = \left(a_1,...,a_{k_1}, a_{k_1+1},...,a_{k_j},...,a_{k_{j+1}}, a_{k_{j+1}+1}...,a_{k_{j+1}},...,a_{k_n+1},...,a_m\right),$$

где *n* – количество элементов вектора конечной воспитательной цели.

Не нарушая общности, предположим, что на этапе *i* роботом достигнуто воспитание

$$\overline{W}_i = \left(R_1,...,R_{k_1},...,R_{k_i},...,R_{k_{i+1}},0,...,0\right).$$

Тогда в формуле (11.3) вектор W_i будет удовлетворять соотношению $W_i = \overline{W}_i$, где $i = \overline{1,s}$, s – общее количество этапов достижения цели.

11.2. АЛГОРИТМ ФОРМИРОВАНИЯ РАВНОЦЕННЫХ ГРУПП РОБОТОВ ПО ВЕЛИЧИНЕ ДОСТИЖЕНИЯ ПОСТАВЛЕННОЙ ЦЕЛИ

На основании правила вычисления достижения поставленной цели, приведенного в разделе 11.1, можно предложить следующий алгоритм формирования двух равноценных групп, если цели каждого робота равны и количество членов каждой группы четно:

1) формируем общий одномерный массив, элементами которого являются величины достижения поставленной цели каждым роботом;
2) определяем номера роботов, соответствующие наибольшей и наименьшей величинам достижения поставленной цели, в общем массиве;
3) направляем роботов с этими номерами в первую группу;
4) удаляем из общего массива элементы, соответствующие наибольшей и наименьшей величинам достижения поставленной цели;
5) если полученный общий массив не пустой, то идем к п. 6, иначе – к п.10;
6) определяем номера роботов, соответствующие наибольшей и наименьшей величинам достижения поставленной цели, в полученном общем массиве;
7) направляем роботов с этими номерами во вторую группу;
8) удаляем из общего массива элементы, соответствующие наибольшей и наименьшей величинам достижения поставленной цели;
9) если полученный общий массив не пустой, то идем к п. 2, иначе – к п.10;
10) конец.

12. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭМОЦИОНАЛЬНЫХ СПОСОБНОСТЕЙ РОБОТА

В предыдущем разделе были предложены соотношения, позволяющие вычислять величину достижения роботом поставленной перед ним воспитательной цели. Эти соотношения основанны на методах проек-тивной теории ранжирования векторов.

Выдвинем гипотезу о том, что наиболее способный робот лучше всего поддается воспитанию, т. е. к моменту времени t имеет большую среднюю величину достижения поставленной воспитательной цели, приходящуюся на единицу времени. Исходя из этой гипотезы можно предложить соотношение, определяющее способности F робота:

$$F(t)=\frac{d\left(\frac{\int_0^t \delta(\tau)d\tau}{t}\right)}{dt}=\frac{\frac{\sum_{i=1}^m a_i R_i(t)}{\sum_{i=1}^m a_i^2}t-\frac{\int_0^t\sum_{i=1}^m a_i R_i(\tau)d\tau}{\sum_{i=1}^m a_i^2}}{t^2}. \qquad (12.1)$$

Таким образом, способности робота измеряются в единицах, обратных времени.

На основе раздела 2 можно получить оценку способностей робота, не обладающего абсолютной памятью. Эта оценка имеет вид

$$|F(t))|\le\frac{4q\sum_{i=1}^m |a_i|\frac{1-\theta_i^{j_i}}{1-\theta_i}}{t\sum_{i=1}^m a_i^2},$$

где $q=\max_i |r_i|$; θ_i – значения максимальных коэффициентов памяти робота, соответствующие воспитанию с номером i; j_i – порядковый номер воспитательного такта воспитания с номером i, зависящего от времени воспитания t_k.

Сформулируем и докажем следующую теорему.

<u>Теорема 12.1.</u> Способности F_k забывчивого робота в конце каждого такта k ограниченны.

<u>Доказательство.</u> Пусть $\theta=\max_{i=\overline{1,n}}\theta_i$, τ – минимальное значение из всех тактов. Тогда справедливо неравенство

$$|F_k|\le\frac{4q\sum_{i=1}^m |a_i|\frac{1-\theta_i^{j_i}}{1-\theta_i}}{t_k\sum_{i=1}^m a_i^2}\le\frac{4\frac{q}{1-\theta}\sum_{i=1}^m |a_i|}{\tau\sum_{i=1}^m a_i^2},$$

что требовалось доказать.

Соотношение (12.1) позволяет выявлять наиболее способного из группы роботов, ранжировать роботов согласно их способностям и выявлять роботов с наибольшими склонностями к тем или иным сферам деятельности, определяемым подмножествами элементов вектора воспитания.

Предложим следующий алгоритм выявления сфер деятельности, к которым робот имеет наибольшие склонности (наибольшие способности):

1. В качестве входного параметра алгоритма ставится общая воспитательная цель-вектор $A=(a_1,...,a_m)$.
2. В результате воспитательного процесса к контрольному моменту времени t вычисляется вектор общего воспитания $R=(R_1(t),...,R_m(t))$.
3. Из вектора цели A последовательно выбираются векторы-подцели, являющиеся подмножествами-сочетаниями из множества эле-ментов вектора цели по одному, двум … m элементам.
4. Вычисляются величины способности для каждого из этих множеств-сочетаний при условии, что рассматриваемые воспитания соответствуют номерам элементов векторов подцелей.
5. Выбираются максимальные значения способностей, соответствующие каждому из подмножеств-сочетаний.
6. Определяются номера элементов целей подмножеств-сочетаний, соответствующие этим максимальным значениям способностей. Этим номерам соответствуют виды воспитаний, по которым робот является наиболее успешным, т.е. наиболее способным.

Очевидно, что количество основных операций N, которое необходимо выполнить при компьютерной реализации алгоритма, будет определяться соотношением $N=\sum\limits_{i=1}^{n} C_n^i$.

При изучении способностей робота необходимо ввести понятие широты способностей, определяющее количество воспитаний, соответствующее заданной величине способности. Можно сделать вывод о том, что робот при равных величинах способности будет тем талантливее, чем шире его способности. Следовательно, общие способности робота определяются парой B, удовлетворяющей равенству $B=(p,\quad F)$, где p – широта способностей, F – величина способности.

<u>Теорема 12.2.</u> В одномерном случае при бесконечном возрастании времени способности забывчивого робота при достижении цели стремятся к нулю.

<u>Доказательство.</u> Так как для воспитательных циклов, количество которых равно n, справедливы соотношения

$$V_{l_p,i_p}^{[p]}=\left(\prod_{k=1}^{l_p}\tilde{\tilde{\theta}}_k^{[p]}\right)\left[r_{i_p+1}^{[p]}+\sum_{k=1}^{i_p+1} r_{k-1}^{[p]}\prod_{j=1}^{i_p+1-k}\theta_j^{[p]}+\left(\prod_{i=1}^{i_p}\theta_i^{[p]}V_{l_{p-1},i_{p-1}}^{[p-1]}\right)\right],$$

$p=2,\overline{n}$,

$$V_{i_1,l_1}^{[1]} = \left(\prod_{k=1}^{l_1} \tilde{\tilde{\theta}}_k^{[1]}\right)\left[r_{i_1+1}^{[1]} + \sum_{k=1}^{i_1+1} r_{k-1}^{[1]} \prod_{j=1}^{i_1+1-k} \theta_j^{[1]}\right], \tag{12.2}$$

то для забывчивого робота верны неравенства

$$|V_{l_p,i_p}^{[p]}| \le F_{l_p,i_p},\ F_{l_p,i_p} = \theta^{l_p}\left(q\frac{1}{1-\theta} + \theta^{i_p} F_{l_{p-1},i_{p-1}}\right),\ p = \overline{2,n},$$

$$\left|V_{l_1,i_1}^{[1]}\right| \le F_{l_1,i_1},\ F_{l_1,i_1} = q\theta^{i_1}\frac{1}{1-\theta}, \tag{12.3}$$

где $\theta = \max(\tilde{\tilde{\theta}}_j^{[p]},\ \ \theta_i^{[p]})$, $i = \overline{1,i_p}$, $j = \overline{1,l_p}$, $p = \overline{1,n}$.

В свою очередь, формулы (12.3) влекут цепочку соотношений

$$\left|V_{l_n,i_n}^{[n]}\right| \le \sum_{i=1}^{n+1}\theta^{i-1} q\frac{1}{1-\theta} \le \sum_{i=1}^{\infty}\left(q\frac{1}{1-\theta}\right)\theta^{i-1} = \frac{q}{(1-\theta)^2}. \tag{12.4}$$

В силу определения способности робота для одномерного случая можем записать формулы

$$\lim_{t\to\infty}|Z(t)| = \lim_{t\to\infty}\left|\frac{d\left(\dfrac{\int_0^t V_{l_n,i_n}^{[n]}(\tau)d\tau}{|A|t}\right)}{dt}\right| \le \lim_{t\to\infty}\frac{4\dfrac{q}{(1-\theta)^2}t}{|A|t^2} = \lim_{t\to\infty}\frac{4\dfrac{q}{(1-\theta)^2}}{|A|t} = 0.$$

Таким образом, $\lim\limits_{t\to\infty} Z(t) = 0$, что требовалось доказать.

<u>Теорема 12.3.</u> В многомерном случае при стремлении времени к бесконечности способности забывчивого робота стремятся к нулю.

<u>Доказательство.</u> Так как для каждой j-компоненты воспитания значе-ния $\left|V_{l_{n_j},i_{n_j}}^{[n_j]}\right|$ удовлетворяют соотношениям $|V_{l_{n_j},i_{n_j}}^{[n_j]}| \le F_{l_{n_j},i_{n_j}}$, (где $j = \overline{1,m}$, m – количество компонент векторов цели и текущего воспитания, n_j – количество полных воспитательных циклов, соответствующих компоненте вектора воспитания с номером j) и неравенствам (12.4), то справедливы

соотношения $\lim\limits_{t\to\infty}|Z(t)|\le \lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{4\dfrac{q}{(1-\theta)^2}\sum\limits_{i=1}^{m}|a_i|}{t\sum\limits_{i=1}^{m}a_i^2}=0$, следовательно, $\lim\limits_{t\to\infty} Z(t)=0$.

Таким образом, теорема доказана.

Следствие 12.3. Если бы забывчивый робот существовал бесконечно длительное время, то с течением времени его способности стремились бы к нулю, т. е. пропадали.

13. РАБОТА И СИЛА ВОЛИ ЭМОЦИОНАЛЬНОГО РОБОТА

Легко видеть, что в одномерном случае (цель A определяется одним числом) величина достижения цели к концу полного воспитательного цикла с номером n удовлетворяет соотношению

$$\delta(t)=\frac{V_{l_n,i_n}^{[n]}(t)}{A}.$$

Введем следующие определения.

Определение 13.1. Работой воспитательного процесса при достижении цели A назовем функцию $X(t)=\int\limits_0^t\delta(\tau)d\tau$, где подынтегральная функция – это функция величины достижения цели A.

Определение 13.2. Силой воли робота при достижении цели A назовем функцию $Y(t)=\dfrac{\int\limits_0^t\delta(\tau)d\tau}{t}$.

Легко видеть, что работа измеряется в единицах времени, а сила воли – безразмерная величина.

Сформулируем простые теоремы, доказательство которых с очевидностью следует из формул (12.3).

Теорема 13.1. В одномерном случае работа воспитательного процесса забывчивого робота при достижении цели удовлетворяет неравенству $\left|X(t)\right| \le \frac{2q}{|A|\left(1-\theta\right)^2} t$.

Теорема 13.2. В одномерном случае сила воли забывчивого робота при достижении цели удовлетворяет неравенству $|Y(t)| \le \frac{2q}{|A|\left(1-\theta\right)^2}$.

Теорема 13.3. В многомерном случае (цель является вектором) работа воспитательного процесса забывчивого робота при достижении цели удовлетворяет соотношению

$$|X(t)| \le \frac{2\frac{q}{\left(1-\theta\right)^2}\sum_{i=1}^{m}|a_i|}{\sum_{i=1}^{m}a_i^2} t .$$

Теорема 13.4. В многомерном случае сила воли забывчивого робота при достижении цели удовлетворяет соотношению

$$|Y(t)| \le \frac{2\frac{q}{\left(1-\theta\right)^2}\sum_{i=1}^{m}|a_i|}{\sum_{i=1}^{m}a_i^2} . \qquad (13.1)$$

Следствие 13.4. Не существует забывчивого робота с неограниченной силой воли.

Доказательство. В силу справедливости неравенства (13.1) сила воли забывчивого робота ограничена. Следовательно, следствие доказано.

Предположим, что сила воли человека аналогично силе воли робота описывается определением 13.2.

Введем следующее определение.

Определение 13.3. Будем говорить, что робот опасен для человека, если модуль его силы воли асимптотически (при времени, стремящемся к бесконечности) становится больше модуля силы воли человека в любой момент времени жизни человека.

Теорема 13.5. Робот с абсолютной памятью и равноценными положительными эмоциями опасен для обычного человека.

Доказательство. Так как робот с абсолютной памятью имеет все коэффициенты памяти, равные единице, то для равноценных положительных эмоций робота, с учетом соотношений (11.3), сила воли робота в результате бесконечного количества воспитательных циклов будет равна бесконечности, т. е. удовлетворять соотношению

$$\lim_{t\to\infty} Y(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t \delta(\tau)d\tau}{t} = \infty .$$

Обычный человек, даже при всех положительных эмоциях, не обладает абсолютной памятью, его эмоции ограничены, поэтому согласно теореме 13.4 сила воли человека ограничена, а значит, меньше асимптотической силы воли робота с абсолютной памятью и равноценными положительными эмоциями, что и требовалось доказать.

Так как отдельный человек по своей природе не может существовать вечно, то его сила воли всегда является конечным числом. В компьютерную память нового робота при прекращении существования робота-предтечи, можно записать информацию о численных значениях воспитаний предыдущих «поколений» роботов. Это обеспечивает непрерывное существование интеллекта отдельного робота при времени, стремящемся к бесконечности. В результате непрерывного существования поколений роботов и передачи им равноценных положительных эмоций предшественников при абсолютной памяти всегда наступит момент, когда робот будет опасен для обычного человека. Исходя из сказанного следует вывод о том, что во избежание возникновения опасных ситаций в отношениях робота и человека, необходимо по крайней мере, проектировать забывчивых роботов (роботов с неабсолютной памятью).

Пусть справедливо соотношение

$$\rho(\bar{\theta}_{\max}, t) = \max_{\bar{\theta}} \left| \int_0^t \delta(\bar{\theta}, \tau)d\tau \right|, \tag{13.2}$$

где $\bar{\theta}$ – всевозможные наборы коэффициентов памяти, $\bar{\theta}_{\max}$ – вектор коэффициентов памяти, обеспечивающий максимум функции $\left| \int_0^t \delta(\bar{\theta}, \tau)d\tau \right|$.

Исходя из определения 13.1 и формулы (13.2) можно ввести следующее определение.

Определение 13.4. Коэффициентом полезного действия (КПД) $\mu(t)$ воспитательного процесса робота назовем величину, удовлетворяющую соотношению

$$\mu(t)=\frac{X(t)\,sign[\int_0^t \delta(\bar{\theta}_{\max},\tau)d\tau]}{\rho(\bar{\theta}_{\max},t)}=$$

$$=\frac{\int_0^t \delta(\tau)d\tau\; sign[\int_0^t \delta(\bar{\theta}_{\max},\tau)d\tau]}{\max\limits_{\bar{\theta}}|\int_0^t \delta(\bar{\theta},\tau)d\tau|}.$$

Легко видеть, что КПД воспитательного процесса является безразмерной величиной и для него выполняется условие $\mu(t)\in[-1,1]$. Очевидно, что чем больше значение $\mu(t)$ при заданных коэффициентах памяти робота, тем ближе робот к наиболее эффективному воспитанию.

При выполнении условия $sign[X(t)]\,sign[\int_0^t \delta(\bar{\theta}_{\max},\tau)d\tau]>0$ величина $\mu(t)$ будет удовлетворять соотношению $\mu(t)\in(0,1]$, что говорит о совпадении направлений реального и эффективного воспитательных процессов.

Следует отметить, что коэффициент полезного действия позволяет оценивать «природные» характеристики робота (коэффициенты памяти) с точки зрения обеспечения эффективности воспитательного процесса.

14. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТАЛАНТА

Выдвинем гипотезу о том, что более талантливый субъект (робот) лучше всего поддается воспитанию, т. е. к моменту времени t имеет большую среднюю величину достижения поставленной воспитательной цели, приходящуюся на единицу времени. Исходя из этой гипотезы, можно предложить соотношение, определяющее талант F субъекта:

$$F(t)=\frac{\int_0^t \delta(\tau)d\tau}{t^2}=\frac{\int_0^t \sum_{i=1}^n A_i R_i(\tau)d\tau}{t^2\sum_{i=1}^n A_i^2}. \qquad (14.1)$$

Таким образом, талант измеряется в единицах, обратных времени.

Можно получить оценку таланта для субъекта, не обладающего абсолютной памятью. Эта оценка имеет вид

$$\left|F(t)\right| \le \frac{q\sum_{i=1}^{n}\left|A_i\right|\frac{1-\theta_i^j}{1-\theta_i}}{t\sum_{i=1}^{n}A_i^2},$$

где $q=\max_i\left|R_i\right|$; θ_i – значения максимальных коэффициентов памяти субъекта, соответствующие воспитанию с номером i; j – порядковый номер воспитательного такта, зависящего от текущего времени воспитания (самовоспитания) t.

Соотношение (14.1) позволяет выявлять наиболее талантливого субъекта из группы индивидуумов, ранжировать членов группы согласно их талантам и выявлять субъектов с наибольшими склонностями к тем или иным сферам деятельности, определяемым подмножествами элементов вектора воспитания.

Предложим следующий алгоритм выявления сфер деятельности, к которым субъект имеет наибольшие склонности (наибольший талант).

1. В качестве входного параметра алгоритма ставится общая воспитательная цель-вектор $A=(A_1,...,A_n)$.
2. В результате воспитательного процесса к контрольному моменту времени t вычисляется вектор общего воспитания $R=(R_1(t),...,R_n(t))$.
3. Из вектора цели A последовательно выбираются векторы-подцели, являющиеся подмножествами-сочетаниями из множества элементов вектора цели по одному, двум, …, n элементам.
4. Вычисляются величины талантов для каждого из этих множеств-сочетаний при условии, что рассматриваемые виды воспитания соответствуют номерам элементов векторов подцелей.
5. Выбираются максимальные значения талантов, соответствующие каждому из подмножеств-сочетаний.
6. Определяются номера элементов целей подмножеств-сочетаний, соответствующие этим максимальным значениям талантов. Этим номерам соответствуют виды воспитаний, по которым субъект является наиболее успешным, т.е. наиболее талантливым и имеющим наибольшие склонности.

Очевидно, что количество основных операций N, которое необходимо выполнить при компьютерной реализации алгоритма, будет определяться соотношением $N=\sum_{i=1}^{n}C_n^i$.

Следующий пример иллюстрирует описанный выше алгоритм.

Пусть по окончании семестра, длящегося четыре месяца (t=4 мес.), робот-студент первого курса по результатам экзаменационной сессии, получил следующие оценки:

– математический анализ – 4;

– математическая логика – 5;

– программирование – 5.

Будем предполагать, что оценка на экзамене является численным значением воспитания (самовоспитания) робота-студента при освоении дисциплины во время семестра. Таким образом, вектор воспитания R примет вид $R = (4, 5, 5)$, где порядковые номера элементов соответствуют наименованиям дисциплин, приведенным в перечне.

Пусть общая цель A, установленная деканатом факультета для каждого робота-студента, сдающего сессию, определяется отличными оценками по всем предметам, т.е. $A = (5, 5, 5)$.

Для вычисления таланта робота-студента по полному вектору цели A, определяемого соотношением (14.1), применим формулу правых прямоугольников. Тогда равенство (14.1) примет вид

$$F(t) \approx \frac{\sum_{i=1}^{3} A_i R_i}{4\sum_{i=1}^{n} A_i^2}. \tag{14.2}$$

Аналогично соотношению (14.2) будут выглядеть равенства, позволяющие вычислять значения таланта студента по векторам подцелей для каждого из множеств-сочетаний.

В табл. 14.1 приведены подцели, соответствующие множествам-сочетаниям, и значения вычисленных талантов робота-студента.

Таблица 14.1.
Расчетные значения алгоритма

№ п/п	Множество-сочетание	Вектор подцели	Вектор воспитания	Талант (мес.$^{-1}$)
1	1	5	4	0,200
2	2	5	5	0,250
3	3	5	5	0,250
4	1, 2	5, 5	4, 5	0,225
5	1, 3	5, 5	4, 5	0,225
6	2, 3	5, 5	5, 5	0,250
7	1, 2, 3	5, 5, 5	4, 5, 5	0,233

Анализ табл. 14.1 позволяет утверждать, что робот-студент является наиболее талантливым в области прикладных наук, т.е. математической логики и программирования, так как его талант F в этих науках равен наибольшему из рассматриваемых значений: F=0,250 мес.$^{-1}$. При освоении всего комплекса дисциплин семестра талант робота-студента оказался ниже, он равен 0,233мес.$^{-1}$.

При изучении таланта субъекта необходимо ввести понятие широты таланта, определяющее количество воспитаний, соответствующее заданной величине таланта. В рассмотренном выше примере (см. табл. 14.1) таланты, соответствующие строкам 2 и 3, равны таланту строки 6. Поэтому при заданной величине F, равной 0,250 мес.$^{-1}$, широта таланта индивидуума будет равна 2. Можно сделать вывод о том, что субъект при равных величинах таланта будет тем талантливее, чем шире его талант. Следовательно, общий талант индивидуума определяется парой B, удовлетворяющей равенству $B = (p, \quad F)$, где p – широта таланта, F – талант.

Разработчик программного обеспечения эмоционального робота может самостоятельно задавать вид функций эмоции и коэффициентов памяти робота в зависимости от времени. Это позволяет проектировать роботов с заданным общим талантом и другими психоэмоциональными характеристиками.

15. МОДЕЛЬ ТЕМПЕРАМЕНТА РОБОТА

Попытаемся дать математическую интерпретацию темперамента робота.

Определение 15.1. Элементарным темпераментом $w_i(t)$ назовем производную от функции модуля моментальных эмоций $M_i(t)$ по времени t, т.е. $w_i(t) = \dfrac{d|M_i(t)|}{dt}$, где i – номер робота в группе, $\dfrac{d|M_i(t)|}{dt} > 0$, $i = \overline{1, n}$, n – количество роботов в группе.

Из психологической науки известно, что люди, аналоги роботов, с ярко выраженным темпераментом одного типа встречаются довольно редко, поэтому очевидно будет введение следующего определения.

15.1. Описание модели

Определение 15.2. Темпераментом L_i робота i назовем величину, удовлетворяющую соотношению

$$L_i = \frac{1}{a} \max_t \left| \frac{dM_i(t)}{dt} \right|, \qquad (15.1)$$

где $a = \max\limits_{i,t} \left| \dfrac{dM_i(t)}{dt} \right|$, $i \in [1, n]$.

Легко видеть, что определение 15.2 позволяет вычислять темперамент отдельного робота только относительно группы роботов.

Результаты исследований, проведенные при вычислении значений темпераментов людей, очевидно, можно перенести на роботов (см. табл. 15.1).

Таблица 15.1

Интервалы изменения значений темперамента роботов

Вид темперамента робота	Интервалы изменения численного значения темперамента
Меланхолик	(0; 0,25)
Флегматик	(0,25; 0,5)
Сангвиник	(0,5; 0,75)
Холерик	(0,75; 1)

Интервалы темпераментов, приведенные в табл.15.1, позволяют ввести понятие темперамента группы роботов.

В разделе 2 был приведен пример так назыаемой гармонической эмоции, которая описывается функцией $M(t) = P\sin\left(\frac{\pi}{t^0}t\right)$, где $P=const$, t^0 – продолжительность такта.

Аналогично этому примеру определим эмоции, каждая из которых для робота j представима на такте i в виде

$$M_{j,i}(t) = A_{j,i}\sin\left(\frac{\pi}{t_{j,i}^0}t\right),$$

где $A_{j,i} = const$, $t_{ij,}^0$ – продолжительность такта i, $i = \overline{1,n}$.

Легко видеть, что в этом случае темперамент робота L_i будет вычисляться по формуле

$$L_{l,i} = \frac{\dfrac{|A_{l,i}|}{t_i - t_{i-1}}}{\max\limits_{l=\overline{1,n}} \dfrac{|A_{l,i}|}{t_i - t_{i-1}}}. \tag{15.2}$$

Очевидно, что темперамент робота является безразмерной величиной, принадлежащей отрезку [0,1].

В разделе 2 дано определение элементарного воспитания робота $r_{l,i}$ на такте i:

$$r_{l,i} = \int_{t_{i-1}}^{t_i} M_{l,i}(\xi)d\xi .$$

Очевидно, что элементарное воспитание робота l, основанное на гармонической эмоции, имеет вид

$$r_{l,i} = \frac{2}{\pi} A_{l,i} \tau_i, \qquad (15.3)$$

где $\tau_i = t_i - t_{i-1}$ – продолжительность такта i.

Рассмотрим задачу вычисления темперамента робота, когда его гармонические эмоции зависят от звукового сигнала, поступающего на аудиовход робота через микрофон.

Выдвинем гипотезу о том, что элементарное воспитание робота при гармонических эмоциях эквивалентно интегральной характеристике от амплитуды $S_{l,i}(t)$ звуковой волны, поступающей на аудиовход робота l для каждого такта i. В этом случае справедливо соотношение

$$r_{l,i} = \int_{t_{i-1}}^{t_i} S_{l,i}(\xi) d\xi . \qquad (15.4)$$

Приравнивая правые части соотношений (15.3) и (15.4) друг к другу, получим равенство

$$\frac{2}{\pi} A_{l,i} \tau_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} S_{l,i}(t) dt,$$

из которого следует формула

$$A_{l,i} = \frac{2\pi}{\tau_i} \int_{t_{i-1}}^{t_i} S_{l,i}(t) dt . \qquad (15.5)$$

При $i = 1$ с учетом соотношения (15.5) формула (15.2) примет вид

$$L_{l,i} = \frac{\int_{t_{i-1}}^{t_i} S_{l,i}(t) dt,}{\max\limits_{l=\overline{1,n}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} S_{l,i}(t) dt} . \qquad (15.6)$$

15.2. Программная реализация вычисления темперамента

Для вычисления значений темперамента робота при реализации модели темперамента для гармонической эмоции была разработана компьютерная программа для ОС Windows 7. Работа программы основывается на обработке голоса человека, поступающего на аудиовход персонального компьютера через микрофон.

Темперамент робота рассчитывается на основе единственного такта при $i = 1$ длительностью 5 с.

Для вычисления интегралов от амплитуды звуковой волны $S_{l,1}(t)$ в формуле (15.6) используется метод прямоугольников.

Применение этого метода обусловливается тем, что в персональном компьютере звуковая волна представляется в виде ступенчатой функции с шагом дискретизации, равным характеристикам записывающего устройства. Именно этот шаг выбирается в качестве шага h численного интегрирования при вычислении интегралов в формуле (15.6). Погрешность замены амплитуды звуковой волны $S_{l,1}(t)$ при её численном интегрировании равна $O(h)$.

Таким образом, приближенная расчетная формула для вычисления темперамента имеет вид

$$L_{l,1} = \frac{h\sum\limits_{j=1}^{m} S_{l,1}(x_j)}{\max\limits_{l=\overline{1,n}} h\sum\limits_{j=1}^{m} S_{l,1}(x_i)} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} S_{l,1}(x_j)}{\max\limits_{l=\overline{1,n}} \sum\limits_{j=1}^{m} S_{l,1}(x_j)}, \qquad (15.7)$$

где $x_j = jh, \quad m = \dfrac{t_1 - t_0}{h}, \quad j = \overline{1,m}$.

15.3. Верификация модели натурными экспериментами

Для определения соответствия предлагаемой математической модели темперамента робота преобладающему типу темперамента человека были проведены эксперименты с использованием описанной выше программы.

В качестве эталона совокупности преобладающих типов темперамента человека использовалась база данных голосов при различных эмоциях, аудиозаписи которых приведены на сайте [Berlin Database of Emotional Speech. URL: http://pascal.kgw.tu-berlin.de/emodb/index-1280.html (дата обращения: 19.02.2014)].

Так как вычисляемое значение темперамента очень сильно зависит от амплитуды звуковой волны, поступающей на аудиовход персонального компьютера через микрофон, то перед проведением экспериментов определялось расстояние от рта до микрофона следующим образом: эксперт-психолог, который знает свой преобладающий тип темперамента, изменяет расстояние от своего рта и микрофона; при этом эксперт периодически повторяет нормальным голосом любую фразу в течение 5 с.; расстояние от микрофона до рта человека считается пригодным для экспериментов, если вычисленный компьютером темперамент совпадает с реальным преобладающим типом темперамента эксперта. После определения необходимого расстояния до микрофона запускается на выполнение программа. Для определения преобладающего типа темперамента исследуемый человек произносит любую фразу нормальным голосом также в течение 5 с. Программа возвращает значение темперамента исследуемого, согласно которому и табл.15.1 определяется преобладающий темперамент человека.

В экспериментах приняли участие 68 человек. В качестве экспертов, определяющих соответствие преобладающего типа темперамента человека вычисленному с помощью программы темпераменту, привлекались преподаватели кафедры общей и клинической психологии Пермского государственного национального исследовательского университета.

На основе компьютерных экспериментов и экспертных оценок специалистов исследования показали, что в 84% вычисленный темперамент соответствует преобладающему типу темперамента исследуемых людей.

Это говорит об адекватности математической модели темперамента робота и правильности выбора диапазонов изменения величин $L_{l,1}$, соответствующих каждому из преобладающих типов темперамента человека.

15.4. Темперамент группы роботов

Определение 15.3. Темпераментом N группы роботов назовем средний темперамент роботов, принадлежащих этой группе.

Исходя из определения для вычисления значения N можно использовать формулу

$$N = \frac{\sum_{j=1}^{n} L_j}{n}. \qquad (15.8)$$

Зная величину N, вычисленную исходя из соотношения (15.8), можно, ставя в соответствие значения из правого столбца табл. 15.1 левому столбцу, определить вид темперамента: в зависимости от интервала, которому принадлежит величина N, группа роботов может быть меланхоличной, или флегматичной, или сангвинической, или холерической.

16. К ИССЛЕДОВАНИЮ ДИНАМИКИ ПСИХОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ГРУППЕ РОБОТОВ

Рассмотрим случаи, когда в группе роботов во времени происходят какие-либо эмоциональные процессы. Условные обозначения, используемые в этой главе, аналогичны обозначениям раздела 10.

Очевидны следующие утверждения.

Теорема 16.1. Если с течением времени $\cos(\alpha(t)) \underset{t \to t_0}{\to} 0$, то группа роботов стремится к неустойчивой эмоциональной ситуации.

Теорема 16.2. Если с течением времени $\cos(\alpha(t)) \underset{t \to t_0}{\to} 1$, то эмоциональная деятельность в группе роботов ведет к сплочению группы.

Теорема 16.3. Если с течением времени $\cos(\alpha(t)) \underset{t \to t_0}{\to} -1$, то эмоциональная деятельность в группе роботов ведет к разобщению группы.

Следствие 16.3.1. Если $\cos(\alpha(t)) \underset{t \to t_0}{\to} -1$ и $\left\| \left|\bar{a}(t)\right| - \left|\bar{b}(t)\right| \right\| \underset{t \to t_0}{\to} 0$, $|a(t)|$ велико, то налицо угроза наступления конфликтной ситуации в группе роботов в наиболее острой форме.

Заметим, что точка t_0, упоминаемая в теоремах 16.1–16.3 и следствии 16.3.1, будет временным значением, соответствующим определяемым событиям в вышеприведенных формулировках.

Следствие 16.3.2. Если выполняются условия следствия 16.3.1 одновременно для векторов эмоций и воспитаний, то существует угроза наступления конфликтной ситуации в группе роботов в наивысшей степени (т.е. одновременно по эмоциям и воспитаниям).

Исходя из вышенаписанного, можно ввести следующее определение.

Определение 16.1. Мерой взаимоотношений между группами совокупности роботов по воспитаниям или эмоциям назовем безразмерные величины $\gamma(t), \varphi(t)$, удовлетворяющие соотношениям $\gamma(t) = \cos\left(\bar{a}(t), \bar{b}(t)\right)$, $\varphi(t) = \cos\left(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\right)$, где в первом случае векторы являются векторами воспитаний, а во втором – векторами эмоций.

Таким образом, эмоциональное состояние совокупности из двух групп роботов можно описать вектором $\bar{c} = (\gamma(t), \varphi(t))$.

Легко видеть, что если в момент времени t выполняются соотношения $\gamma(t) \in (0,1]$ или $\varphi(t) \in (0,1]$, то в совокупности есть дружба между группами по воспитаниям или эмоциям соответственно и, наоборот, если $\gamma(t) \in [-1,0)$ или $\varphi(t) \in [-1,0)$, то в совокупности присутствует вражда по воспитаниям или эмоциям соответственно. Случаи $\gamma(t) = 0$ или $\varphi(t) = 0$ отвечают за пограничные ситуации между враждой и дружбой по воспитаниям или моментальным эмоциям. Случай, соответствующий неравенству $\gamma(t)\varphi(t) < 0$, определяет дружбу по воспитаниям и вражду по эмоциям или наоборот.

Очевидно, что чем больше $\gamma(t)$ или $\varphi(t)$ при их положительных значениях, тем благоприятнее атмосфера в совокупности роботов в целом, а чем они меньше при их отрицательных значениях, тем больше вражды среди роботов. Справедливо утверждение о том, что если $\gamma(t) < 0$ и $\left|\bar{a}(t)\right| > \left|\bar{b}(t)\right|$, то возможно перевоспитание группы, воспитание которой описывает вектор $\bar{b}(t)$, в пользу группы с воспитанием $\bar{a}(t)$.

Сформулируем теорему 16.4:

При *n,* равном 2 или 3, если $\cos\left(\bar{a},\bar{b}\right) = -1$ и $\left|\bar{a}\right| = \left|\bar{b}\right|$, то $\bar{a} = -\bar{b}$.

Доказательство. Так как выполняется первое условие теоремы, то в дву- или трехмерном пространстве векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны, т.е. $\bar{a} = k\bar{b}$. В силу второго условия коэффициент k удовлетворяет равенству $k = \pm 1$, а так как $\cos\left(\bar{a},\bar{b}\right) = -1$, то $k = -1$, следовательно, $\bar{a} = -\bar{b}$.

Очевидно, что при условии $\bar{a} = -\bar{b}$ следует справедливость соотношений $\cos\left(\bar{a},\bar{b}\right) = -1$ и $\left|\bar{a}\right| = \left|\bar{b}\right|$.

Вышеизложенное позволяет сформулировать теорему 16.5 для дву- или трехмерных векторов: для того чтобы $\bar{a} = -\bar{b}$, необходимо и достаточно одновременное выполнение условий $\cos\left(\bar{a},\bar{b}\right) = -1$ и $\left|\bar{a}\right| = \left|\bar{b}\right|$.

Теорема 16.5 позволяет обобщить теорему 16.4: при размерности векторов воспитаний или эмоций, менее четырех, для наивысшей конфронтации в совокупности роботов с ненулевыми векторами психо-эмоциональных состояний необходимо и достаточно равенство суммарного вектора эмоций или воспитаний вектору со всеми нулевыми компонентами.

В заключение отметим, что теоремы 16.1, 16.3 и следствия 16.3.1, 16.3.2 позволяют оценить стремление совокупности роботов к критическим эмоциональным ситуациям и обосновывают в случае нежелательности наступления этих ситуаций необходимость воздействия на роботов сюжетами, способными устранить это стремление.

17. ПРАВИЛА И ПРОГНОЗ ЭМОЦИОНАЛЬНОГО ВЫБОРА РОБОТА

Используя математические определения рассматриваемых в монографии психологических характеристик робота, попытаемся описать один из алгоритмов его эмоционального поведения.

Пусть перед роботом возникает проблема эмоционального выбора: он должен принять в зависимости от воспитания решение в пользу первого или второго игрока (воспитателя).

Ниже предлагаются правила принятия эмоционального решения такими роботами. Будем предполагать, что у робота возникают только положительные эмоции. Пусть его коэффициенты памяти $\theta_{i,j}$ удовлетворяют соотношению $0 \le \theta_{i,j} \le 1$, где $i = \overline{1,\infty}$, равенство $j = 1$ отвечает коэффициентам памяти робота для первого игрока, соотношение $j = 2$ – коэффициентам памяти робота для второго игрока.

Предложим <u>первое правило</u> альтернативного выбора, основанное на эмоциональном выборе. Это правило можно легко реализовать на компьютере при моделировании эмоционального поведения робота.

Пусть на робота не одновременно воздействуют два игрока, вызывающие у него эмоции. Первый игрок порождает в момент времени действия стимула (сюжета) t_i эмоцию $M_{1,i}$, которая влечет элементарное воспитание $R_{1,i}$, равное $\int_0^{t_i} M_{1,i}(\tau)d\tau$, и воспитание $\overline{B}_1 = (R_1, 0)$, где, например, для абсолютной памяти робота справедлива формула $R_1 = \sum_{k=1}^{l} \int_0^{t_k} M_{1,k}(\tau)d\tau$, а второй игрок в это время порождает нулевую эмоцию. Во время t_j второй игрок порождает у робота эмоцию $M_{2,j}$, влекущую элементарное воспитание $R_{2,j} = \int_0^{t_j} M_{2,j}(\tau)d\tau$, где $i \ne j$, и воспитание второго игрока $\overline{B}_2 = (0, R_2)$, где, например, для абсолютной памяти робота справедлива формула $R_2 = \sum_{k=1}^{l} \int_0^{t_k} R_{2,k}(\tau)d\tau$, а эмоция, порождаемая при этом первым игроком, равна нулю.

Введем вектор общего воспитания $\bar{V}$, равный (R_1, R_2), где компоненты вектора – суммарные воспитания, получаемые за все время t действия сюжетов первого и второго игроков, где $t = \sum_{k=1}^{l} t_k$, а l – общее количество эмоциональных воздействий сюжетами обоих игроков на робота.

При введенных обозначениях правило принятия эмоционального решения роботом в пользу первого или второго игрока можно сформулировать следующим образом: если угол между вектором $\bar{V}$ и вектором $\bar{B}_1$ меньше угла между $\bar{V}$ и $\bar{B}_2$, то решение роботом принимается в пользу первого игрока; если первый угол больше второго, то решение принимается в пользу второго игрока; при равенстве углов между векторами выбор вообще не осуществляется.

Описанное выше первое правило нетрудно распространить на количество игроков, большее двух. В этом случае при реализации правила, например для моделирования эмоционального поведения робота, достаточно ввести количество моментальных, суммарных воспитаний, равное количеству игроков, увеличивая при этом количество компонент в векторе общего воспитания. Наименьший угол между общим воспитанием и вектором воспитаний каждого из игроков определит альтернативный выбор робота в пользу того или иного игрока.

Отметим, что первое правило справедливо не только для скалярных величин суммарных воспитаний и эмоций, но и для случаев, когда они имеют векторную форму.

Определение 17.1. Угол между вектором воспитания и вектором общего воспитания, определяющий неопределенность робота в принятии решения в пользу первого или второго игрока, назовем критическим углом альтернативного выбора.

Приведем второе правило альтернативного выбора, основанное на сравнении длин векторов суммарных воспитаний $\bar{R}_1$ и $\bar{R}_2$. Это правило можно сформулировать следующим образом: если выполняется неравенство $|\bar{R}_1| > |\bar{R}_2|$, то решение принимается в пользу первого игрока; если $|\bar{R}_1| < |\bar{R}_2|$, то решение принимается в пользу второго игрока; если $|\bar{R}_1| = |\bar{R}_2|$, то никакое решение не принимается.

Теорема 17.1. Первое и второе правила принятия альтернативного выбора эквивалентны друг другу.

Доказательство. Пусть α – угол между векторами $\bar{B}_1$ и $\bar{V}$, а β – угол между векторами $\bar{B}_2$ и $\bar{V}$. Тогда согласно правилам векторной алгебры справедливы соотношения

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{2n} B_{1,i}^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} R_{1,i}^2 + \sum_{i=n+1}^{2n} R_{2,i}^2}} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} R_{1,i}^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} R_{1,i}^2 + \sum_{i=n+1}^{2n} R_{2,i}^2}} = \frac{\left|\bar{R}_1\right|}{\left|\bar{V}\right|}, \qquad (17.1)$$

$$\cos\beta = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{2n} B_{2,i}^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} R_{1,i}^2 + \sum_{i=n+1}^{2n} R_{2,i}^2}} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} R_{2,i}^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} R_{1,i}^2 + \sum_{i=n+1}^{2n} R_{2,i}^2}} = \frac{\left|\bar{R}_2\right|}{\left|\bar{V}\right|}. \qquad (17.2)$$

Очевидно, что, если $\alpha > \beta$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, то $\left|\bar{R}_1\right| < \left|\bar{R}_2\right|$; если $\alpha < \beta$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, то $\left|\bar{R}_1\right| > \left|\bar{R}_2\right|$; если $\alpha = \beta$, то $\left|\bar{R}_1\right| = \left|\bar{R}_2\right|$. Таким образом, мы доказали, что первое правило влечет выполнение второго правила.

Докажем, что второе правило влечет первое правило.

Пусть справедливо неравенство $\left|\bar{R}_1\right| < \left|\bar{R}_2\right|$. Тогда в силу формул (17.1) и (17.2) неизбежно следует неравенство $\alpha > \beta$ при $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

Аналогично доказывается справедливость утверждений: если $\left|\bar{R}_1\right| > \left|\bar{R}_2\right|$, то $\alpha < \beta$ при $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$; если $\left|\bar{R}_1\right| = \left|\bar{R}_2\right|$, то $\alpha = \beta$, что и требовалось доказать.

Теорема 17.2. Если два вектора не имеют ненулевых общих координат, то эти векторы ортогональны.

Доказательство. Так как по условию теоремы векторы не имеют ненулевых общих координат, то, не нарушая общности, эти векторы можем представить в виде

$$\bar{a} = (a_1, a_2, ..., a_n, 0, 0, ..., 0), \ \bar{b} = (0, 0, ..., 0, b_{n+1}, b_{n+1}, ..., b_m).$$

Очевидно, что скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равно нулю. Следовательно, векторы ортогональны, что и требовалось доказать.

Следствие 17.2. Векторы $\bar{B}_1$ и $\bar{B}_2$ ортогональны.

Доказательство. Так как векторы $\bar{B}_1$ и $\bar{B}_2$ согласно введенным обозначениям первого правила не имеют ненулевых общих координат, то в силу теоремы 17.2 эти векторы ортогональны.

Докажем одно из свойств альтернативного эмоционального выбора.

Теорема 17.3. Критический угол альтернативного выбора равен $\frac{\pi}{4}$.

Доказательство. Отметим справедливость равенства $\bar{V} = \bar{B}_1 + \bar{B}_2$. Согласно правилу параллелограмма сложения двух векторов, вектор $\bar{V}$ является диагональю параллелограмма со смежными сторонами $\bar{B}_1$ и $\bar{B}_2$. В силу следствия 17.2 эти стороны ортогональны, поэтому справедливо равенство $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. По определению 18.1 и в силу первого правила принятия альтернативного решения выполняется равенство $\alpha = \beta$, т. е. критический угол альтернативного выбора равен $\frac{\pi}{4}$.

Определение 17.2. Состояние неопределенности робота при эмоциональном выборе назовем ступором.

Предположим, что воздействия первого и второго игроков на робота соответствуют равноценным эмоциям, влекущим элементарное воспитание R_0. Пусть коэффициенты памяти робота, соответствующие конечным моментам времени эмоций, проявляемым в результате действий первого игрока, постоянны и равны величине θ_1, а соответствующие эмоциональным воздействиям второго игрока – θ_2. Предположим также, что $\theta_i \in [0,1)$, $i \in \{1, 2\}$ и эмоциональная память робота о действиях первого игрока полностью сохраняется во время действий второго игрока и наоборот.

Тогда согласно главе 3 и второму правилу альтернативного выбора очевидно равенство

$$R_0 \frac{1-\theta_1^j}{1-\theta_1} = R_0 \frac{1-\theta_2^q}{1-\theta_2}, \tag{17.3}$$

где j, q – количество воздействий на робота эмоциями, следующими от действий первого и второго игроков соответственно.

Соотношение (17.3) эквивалентно равенству

$$\frac{1-\theta_1^j}{1-\theta_1} = \frac{1-\theta_2^q}{1-\theta_2}. \qquad (17.4)$$

Легко видеть, что при вышеперечисленных предположениях формула (17.4) определяет необходимое и достаточное условие наступления ступора, возникающего под действием эмоции одного типа. Это условие можно легко обобщить на случай, когда рассматриваются эмоции и воспитание, определяемые векторами (при этом необходимо рассматривать всевозможные пары коэффициентов $\theta_{1,k}$ и $\theta_{2,k}$, где индекс k отвечает за порядковый номер эмоции в векторе эмоций робота).

Очевидна <u>теорема 17.4.</u> Если робот обладает только равноценными эмоциями и постоянными коэффициентами памяти, соответствующими каждому из двух игроков, и для каждого воспитания справедливо соотношение (17.4), то робот находится в ступоре по всем имеющимся у него эмоциям.

Очевидно, что робот никогда не придет в ступор, если при любых значениях j и q ($j > 1$, $q > 1$) и заданных θ_1 и θ_2 равенство (17.4) не будет справедливым.

Введем следующее определение.

<u>Определение 17.3.</u> Коэффициенты памяти θ_1 и θ_2, для которых при любых целых значениях j и q ($j > 1$, $q > 1$) равенство (17.4) не становится справедливым, назовем антиступорными коэффициентами памяти.

<u>Теорема 17.5.</u> Антиступорные коэффициенты памяти существуют.

<u>Доказательство.</u> Покажем, что существуют коэффициенты памяти θ_1 и θ_2, не являющиеся решениями уравнения (17.4) при любых целых значениях j и q (j>1, q>1).

Очевидно, что уравнение (17.4) эквивалентно соотношению

$$\theta_2^j(1-\theta_1) - \theta_2\left(1-\theta_1^q\right) + \left(\theta_1 - \theta_1^q\right) = 0. \qquad (17.5)$$

Пусть выполняются равенства

$$\theta_1 = \frac{1}{2}, \quad \theta_2 = \frac{1}{3}. \qquad (17.6)$$

Подставляя соотношения (17.6) в равенство (17.5) и выполняя преобразования, получим уравнение

$$3^j\left(2^{q-1}-1\right) + 3^{j-1}\left(1-2^q\right) + 2^{q-1} = 0. \qquad (17.7)$$

С учетом обозначения $y = 3^{j-1}$ соотношение (17.7) примет вид

$$3y\left(2^{q-1}-1\right)+y\left(1-2^{q}\right)+2^{q-1}=0. \qquad (17.8)$$

Разрешив (17.8) относительно y, получим формулу $y=-\dfrac{2^{q-1}}{2^{q-1}-2}$, которая эквивалентна равенству

$$3^{j-1}=-\frac{2^{q-1}}{2^{q-1}-2}. \qquad (17.9)$$

Так как по условию теоремы справедливо неравенство $j > 1$, то для любых этих значений j и любых $q > 2$ положительное число, находящееся в левой части (17.9), оказывается равным отрицательному числу, стоящему в правой части равенства (17.9). Таким образом, мы получили противоречие. Следовательно, $\theta_1=\frac{1}{2}, \theta_2=\frac{1}{3}$ не являются корнями уравнения (17.4) при любых значениях $j > 1$ и $q > 2$.

Рассмотрим случай, соответствующий равенству $q = 2$.

Легко видеть, что уравнение (17.8) примет вид 2 = 0, то есть, оно при коэффициентах памяти $\theta_1=\frac{1}{2}, \theta_2=\frac{1}{3}$ не имеет решения.

Таким образом, при любых $j > 1$, $q > 1$ существуют такие значения коэффициентов памяти, при которых равенство (17.4) не имеет смысла. Следовательно, антиступорные коэффициенты памяти существуют, что и требовалось доказать.

Следствие 17.5. Для двух игроков коэффициенты памяти $\theta_1=\frac{1}{2}, \theta_2=\frac{1}{3}$ являются антиступорными коэффициентами памяти.

Доказательство следует непосредственно из хода рассуждений в доказательстве теоремы 17.5.

Соотношение (17.4) и следствие 17.5 позволяют делать прогноз поведения робота, определяющий, например, возможность наступления у робота эмоционального ступора.

На основе вышеизложенного можно сказать, что решительным роботом можно назвать машину, для которой угол альтернативного выбора никогда не равен $\frac{\pi}{4}$, или не выполняется соотношение (17.4), или коэффициенты ее памяти являются антиступорными и она не впадает в ступор по всем компонентам вектора воспитания.

18. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВОСПРИИМЧИВОСТИ РОБОТА И ЧЕЛОВЕКА К ВОСПИТАНИЮ

Будем предполагать, что для равноценных эмоций равномерно забывчивого робота в конце каждого такта справедливы соотношения

$$r_i(t_i) = q = const, \theta_i(t_i) = \theta, i = \overline{1, \infty}.$$

Тогда согласно формуле суммы i членов ряда геометрической прогрессии справедливо равенство

$$R_i(t_i) = q\frac{1-\theta^i}{1-\theta}. \tag{18.1}$$

Очевидна справедливость формулы

$$\lim_{i \to \infty} q\frac{1-\theta^i}{1-\theta} = \frac{q}{1-\theta}. \tag{18.2}$$

Понятно, что равенства (18.1) и (18.2) справедливы лишь в том случае, когда робот испытывает эмоции непрерывно – одну за другой. Но в испытывании эмоций роботом могут наступать перерывы. В этом случае он забывает прошлое воспитание.

Легко видеть, что реальный воспитательный процесс робота можно аппроксимировать процессом воспитания равномерно забывчивого робота с равноценными эмоциями.

Приведем пример.

Пусть известны значения воспитаний робота $R_1(t_1), R_2(t_2), ..., R_n(t_n)$ в конце каждого такта и фиктивного такта и коэффициент памяти робота θ.

Для нахождения параметра q воспитательного процесса равномерно забывчивого робота с равноценными эмоциями достаточно решить следующую оптимизационную задачу:

$$\text{найти} \min_q \sum_{i=1}^{n} \left(R_i(t_i) - q - \theta R_{i-1}(t_{i-1})\right)^2, \tag{18.3}$$

где $R_0(t_0) = R_0(0) = 0$.

Применяя методы определения экстремума функции одной переменной, получим равенство

$$q = \frac{\sum_{i=1}^{n} R_i(t_i) - \theta \sum_{i=1}^{n} R_{i-1}(t_{i-1})}{n},$$

являющееся решением задачи (18.3).

Для чередования тактов серии «такты – фиктивные такты – такты» – формула воспитания равномернозабывчивого робота с равноценными эмоциями $R_{i+j+k}(t_{i+j+k})$ примет вид

$$R_{i+j+k}(t_{i+j+k}) \approx q\frac{1-\theta^k}{1-\theta} + \theta^{j+k} q\frac{1-\theta^i}{1-\theta}, \tag{18.4}$$

где i – количество первых тактов в серии, j – количество фиктивных тактов в серии, k – количество тактов в третьей очереди серии.

Если выполняется условие $q > 0$, то восприимчивость к воспитанию ε равномерно забывчивого робота с равноценными эмоциями удовлетворяет соотношению

$$\varepsilon = \frac{q}{1-\theta} - R_L(t_L), \tag{18.5}$$

где q – элементарное воспитание робота с равноценными эмоциями, $q > 0$, θ – коэффициент памяти робота, $R_L(t_L)$ – воспитание робота, при котором робот прочно запомнил прошедшее воспитание, которое определяется близостью к предельному воспитанию.

Относительную восприимчивость к воспитанию робота можно записать в виде равенства

$$\alpha \approx \frac{\varepsilon}{\dfrac{q}{1-\theta}} = \frac{\varepsilon(1-\theta)}{q}. \tag{18.6}$$

Легко видеть, что относительная восприимчивость к воспитанию робота α является безразмерной величиной, $\alpha \in (0, 1]$ и чем меньше значение α, тем хуже восприимчивость робота к воспитанию.

Предположим, что робот в третьей очереди серии тактов и фиктивных тактов (второй серии тактов) прочно запомнил полученное прошедшее воспитание.

Используя формулы (18.2) и (18.5), получим соотношение

$$\varepsilon \approx \frac{q}{1-\theta} - q\frac{1-\theta^k}{1-\theta} - \theta^{j+k} q \frac{1-\theta^i}{1-\theta}. \tag{18.7}$$

Применяя формулу (18.6) для вычисления относительной восприимчивости α к воспитанию с учетом соотношения (18.7), получим равенство

$$\alpha \approx \theta^k \left(1 - \theta^j + \theta^{i+j}\right). \tag{18.8}$$

Анализируя равенство (18.8), можно сделать вывод о том, что при больших значениях i и j величинами θ^j и θ^{i+j} можно пренебречь и вычислять относительную восприимчивость к воспитанию по формуле

$$\alpha \approx \theta^k.$$

Опишем практическое применение полученных выше соотношений.

Остановимся на определении коэффициентов памяти человека, аналогом которого является эмоциональный робот. Для этого можно использовать известную программную систему *Vibraimage 7* (Система Виброизображения) предприятия «ЭЛСИС» (Россия, г. Санкт-Петербург). Программная система *Vibraimage 7* – это система анализа психофизиологического и эмоционального состояния человека. Программная система позволяет на основе микровибраций головы человека, снимаемых с web-камеры, подключенной к программе, определять его эмоциональное состояние, выраженное величиной с диапазоном значений от 0 до 100.

Для измерения коэффициентов памяти, испытуемый помещается в изолированную комнату с web-камерой. Сама программная система установлена на компьютере, который находится в другой комнате. Испытуемого помещают напротив web-камеры, дают инструкции по поведению во время эксперимента, просят расслабиться и ни о чем не думать. Инструкции по поведению во время эксперимента очень просты: человеку необходимо смотреть в web-камеру в течение примерно 2 мин, пока будет работать программа и пока проводящий эксперимент человек не скажет, что эксперимент окончен. После того, как испытуемый подтверждает, что он готов к началу эксперимента, руководитель эксперимента дает испытуемому команду о начале эксперимента, удаляется из комнаты с web-камерой и включает работу программной системы *Vibraimage 7*. Таким образом, испытуемый во время работы программной системы находится в изолированной комнате без внешних раздражителей. Эксперимент продолжается 2 мин. и с интервалом в 1 мин. снимаются показания эмоционального состояния человека, находящегося перед web-камерой. После того как программная система завершает свою работу, руководитель эксперимента приходит в комнату к испытуемому и оповещает последнего об окончании эксперимента. Таким образом, во время эксперимента осуществляется два измерения значений воспитания испытуемого человека, которые отражают эмоциональное состояние испытуемого, меняющееся с течением времени.

Будем считать, что эквивалентом эмоционального состояния человека, измеряемого при помощи программной системы *Vibraimage 7*, является воспитание робота. Таким образом, в ходе эксперимента получаем два значения воспитания: $R_1(t_1), R_2\ (t_2)$. Учитывая, что на испытуемого человека во время работы программной системы, не оказывалось никакого воздействия, на основе первых двух значений $R_1(t_1), R_2\ (t_2)$ и модели воспитания (2.2) при $r_i(\tau) \equiv 0$ можно вычислить коэффициент памяти

$$R_2(t_2) = \theta R_1(t_1), \Rightarrow \theta = \frac{R_2(t_2)}{R_1(t_1)}.$$

Пусть необходимо промоделировать эмоциональное поведение робота при взаимодействии с ним человека, который оказывает влияние на робота путем подачи некоторого звукового сигнала, например посредством встроенного в робота микрофона. Будем считать, что эмоциональным стимулом для робота является такая характеристика звука, как громкость. Таким образом, необходимо некоторым образом определить зависимость между возникающими у робота эмоциями в процессе взаимодействия с человеком и громкостью звукового сигнала, издаваемого человеком и оказывающего воздействие на робота.

Для определения эмоциональной зависимости человека от громкости звукового сигнала была разработана компьютерная программа, описывающая следующую ситуацию: во взаимодействие вовлечен лишь один робот и один человек. Робот должен эмоционально реагировать на звуковые воздействия со стороны человека.

Можно считать, что в качестве потенциального слушателя выступлений оратора выступает робот с неабсолютной памятью, который способен проявлять свою эмоциональную реакцию на выступление оратора, подобную эмоциональной реакции человека-слушателя.

Таким образом, методика постановки голоса сводится к следующим шагам:

1. Задаются верхний и нижний пороги положительной эмоции робота, определяющие диапазон громкости голоса, в который происходит постановка голоса.
2. Осуществляется процесс обучения оратора, в результате которого оказываются воздействия на робота звуковыми стимулами до момента выработки только i положительных последовательно идущих друг за другом эмоций робота.
3. Осуществляется перерыв во взаимодействии человека с роботом, равный по продолжительности j фиктивным тактам.
4. Осуществляется тестирование постановки голоса оратора до выработки первой положительной эмоции робота, что соответствует k тактам.

На основе вышеописанной методики проведена серия экспериментов по постановке голоса ораторов – испытуемых людей, коэффициенты памяти которых определены ранее. Результаты экспериментов и соответствующие значения относительных восприимчивостей α роботов к воспитанию, представлены в табл.18.1.

Таблица 18.1.

Коэффициенты памяти и относительные восприимчивости к воспитанию

№п/п	θ	i	j	k	α
1	0,7	20	20	2	0,49
2	0,9	20	20	1	0,89
3	0,7	20	20	3	0,34
4	0,9	20	20	1	0,89
5	0,6	20	20	1	0,59
6	0,9	20	20	3	0,73
7	0,8	20	20	3	0,51
8	0,9	20	20	2	0,81

Анализируя таблицу, можно сделать вывод о том, что большему коэффициенту памяти робота соответствует большая относительная восприимчивость к воспитанию (за исключением строки 5).

Психологические параметры, описываемые выше для роботов, можно принять в качестве приближенных психологических характеристик человека, поэтому относительную восприимчивость к воспитанию робота можно при первом приближении принять равной относительной восприимчивости к воспитанию человека. Это может помочь при моделировании роботов-гуманоидов, являющихся психологическими аналогами человека.

19. АЛГОРИТМ И ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ИЗМЕРЕНИЯ ЭМОЦИЙ АБОНЕНТА МОБИЛЬНОГО ТЕЛЕФОНА

На современном этапе развития информационных технологий разработка методов автоматического определения эмоционального состояния человека по голосу является актуальной задачей, позволяющей решить ряд экономических, социальных и бытовых проблем, кроме того, играющей важную роль в вопросах безопасности. Эмоциональный речевой сканер может найти широкое применение в различных транспортных и диспетчерских учреждениях, для ограничения или полного запрета доступа к выполнению служебных обязанностей лиц, находящихся в неустойчивом или неадекватном эмоциональном состоянии. Подобные системы контроля позволят также проводить дополнительную проверку пассажиров авиарейсов в рамках мероприятий по противодействию терроризму.

В настоящее время программных продуктов, которые распознают эмоции по голосу, практически не существует. В основном это экспериментальные программы, хотя есть множество алгоритмов, имеющих свои недостатки и достоинства. Рассмотрим, некоторые из существующих алгоритмов. Недавно разработан алгоритм под названием «Классификация эмоционально окрашенной речи с использованием метода опорных векторов» (И.Э. Хейдоров, ЯньЦзинбинь, Уши, А.М. Сорока, А.А. Трус, 2012).

Авторы, рассматривая опорные векторы, для распознавания эмоций, пришли к выводу о том, что применение метода опорных векторов для решения задач классификации эмоционально окрашенной речи позволяет получить высокую точность обученной модели. В сравнении с традиционными статистическими методами классификации влияние методов извлечения векторов – признаков на точность классификации обученной модели позволяет предположить, что модернизация этих методов является одним из путей дальнейшего увеличения точности классификатора.

В современной научной литературе рассмотрены проблемы классификации эмоционально окрашенной речи, извлечения векторов-признаков, предварительной обработки обучающих выборок, выбора параметров алгоритма и оценки свойств полученного классификатора на основе метода опорных векторов (МОВ).

Согласно исследованиям авторов алгоритма «Классификация эмоционально окрашенной речи с использованием метода опорных векторов» точность классификации при правильном выборе оптимальных параметров алгоритма и ядерной функции составляет 96,2%. Сложность выбора параметров является одним из минусов алгоритма, так как в алгоритме отсутствует численное значение некоторой характеристики, которое ставится в соответствие значениям эмоции.

Опишем достоинства и недостатки алгоритма «Автоматическое определение изменений эмоционального состояния по речевому сигналу» (Лукьяница А.А., Шишкин А.Г., 2012).

Авторы этого алгоритма описали технику отделения речи от пауз, а затем рассмотрели способы вычисления признаков, основанные на определении частоты основного тона, значениях трёх первых формант, а также на вычислении кепстра.

Исследования, проведённые авторами алгоритма, показали большую эффективность метода определения изменений в эмоциональном состоянии человека на основе анализа речевого сигнала. Достоинством этого алгоритма является высокая точность его работы (97.2%), к недостаткам можно отнести сложность его настройки (так как алгоритм опирается на базы данных с примерами эмоциональных состояний и зависимость от языка абонента, у которого опознается эмоциональное состояние) и невозможность вычислить с помощью алгоритма численное значение амплитуды эмоции.

19.1. Авторский алгоритм

Для устранения недостатков вышеописанных алгоритмов предлагается авторский алгоритм определения эмоционального состояния абонента мобильного устройства. Этот алгоритм легко настраивается на абонента и дает возможность возвращать численное значение определяемой эмоции.

Одним из источников эмоций, анализируемых алгоритмом, является речевой сигнал. При изменении эмоционального состояния в человеческом организме происходят сложные процессы, которые в конечном итоге находят отражение в виде мышечных сокращений, в том числе и в голосовом тракте. Это даёт возможность бесконтактного определения эмоционального состояния человека по изменениям в системе речеобразования. Авторский алгоритм основывается на оценке амплитуды звуковой волны и на гипотезе, говорящей о том, что при изменении амплитуды звуковой волны меняется эмоциональное состояние абонента.

Приведем шаги авторского алгоритма, определяющего численные характеристики эмоций мобильного устройства:

- звуковая волна, поступающая в мобильное устройство через микрофон, разбивается на такты, равные 1 с.;
- на каждом такте вычисляется максимальное по модулю отклонение он начального значения амплитуды звуковой волны;
- если отклонение отрицательное, то эмоции приписывают отрицательное значение, иначе − положительное. Формула для определения численного значения амплитуды C_t эмоции на такте *[t,t+1)* опи-сывается формулой $C_t = \frac{P_t - A_t}{\Delta t}$, где P_t − максимальное по модулю значение амплитуды звукового сигнала на такте *[t,t+1)*, A_t − амплитуда звукового сигнала на такте *[t-1,t)*, Δt − такт времени.

В результате расчетов, основанных на алгоритме, строится эмоциональная кривая, которая характеризует эмоциональное состояние мобильного устройства. Одним из достоинств алгоритма является возможность определить численное значение эмоции устройства в зависимости от звуковых характеристик голоса абонента, а также независимость значения эмоций мобильного устройства от языка абонента.

Полученное численное значение эмоции можно использовать для определения воспитания мобильного устройства, применяя при этом математические модели теории эмоциональных роботов с неабсолютной памятью.

Используя эти модели, введем соотношения, определяющие эмоцию мобильного устройства, элементарное воспитание и воспитание мобильного устройства в виде $M_t = C_t * \sin(\frac{\pi}{t_0} t)$, где M_t – эмоция мобильного устройства для текущего времени *t*, отсчитываемого от начала проявления эмоции устройством; $r_t = 2C_t \frac{\tau}{\pi}$ – элементарное воспитание (τ – такт, равный 1 с.), $R_i = \frac{2C_t \tau}{\pi} \frac{1-\theta^i}{1-\theta}$ – воспитание мобильного устройства, θ – коэффициент памяти устройства, *i* – порядковый номер воспитательного такта.

19.2. Программная реализации алгоритма

Опишем программу, основанную на применении описанного алгоритма и позволяющую определять значение испытываемых мобильным устройством эмоций по звуковой волне, поступающей в устройство через микрофон.

Для работы программы необходимо задать следующиевходные параметры:

1. Файл с расширением *.wav (11025 Hz, 8bit,Mono), содержащий голо-совую запись абонента.
2. Коэффициент памяти θ для робота (по умолчанию программа устанавливает коэффициент памяти, равный 0,5).

Программа вычисляет и визуализирует:

1. Эмоциональную кривую абонента, построенную для данного звукового файла, отображается синим цветом (измеряется в бит/с).
2. Эмоциональную кривую робота, промоделированную на основе эмоциональной кривой абонента; отображается красным цветом (измеряется в бит/с).
3. Кривую воспитания робота, промоделированную на основе эмоциональной кривой робота; отображается черным цветом (измеряется битами информации).

На основании авторского алгоритма были проведены эксперименты по измерению эмоций абонента по голосу.

В качестве входных данных использовались записи голосов различных людей (как мужчин, так и женщин), которые, находясь в состоянии злости или страха, произносили некоторую фразу. Записи файлов брались из публичной базы данных EmoDB.

На рис. 19.1 приведен результат действия программы на примере измерения эмоций абонента мужского пола, произносящего фразу в состоянии злости.

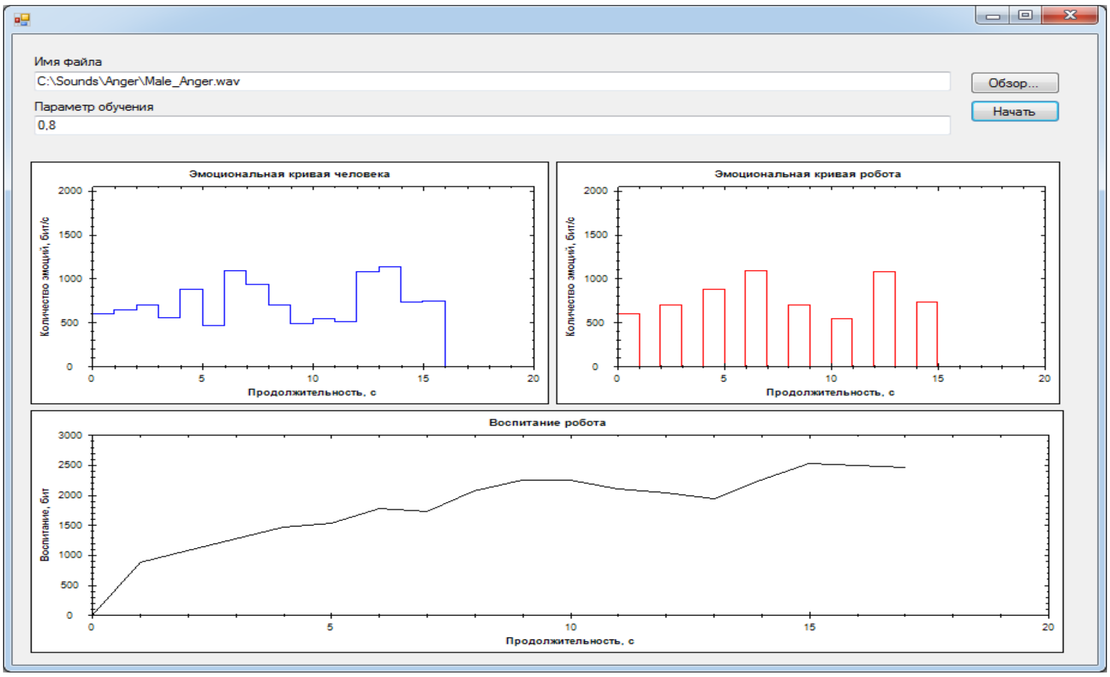

Рис. 19.1 Результат действия программы для звукового файла male_Anger.wav с параметром обучения, равным 0.8.

Результатами программы являются эмоциональная кривая человека (синий цвет), максимальная амплитуда эмоций робота (красный цвет), кривая воспитания робота (черный цвет)

Для сравнения эмоциональных кривых абонента, произносящего одинаковую фразу в разных состояниях, рассмотрим результат измерения эмоций человека (из эксперимента, представленного выше), произносящего фразу в состоянии страха. Соответствующие графические зависимости приведены на рис. 19.2.

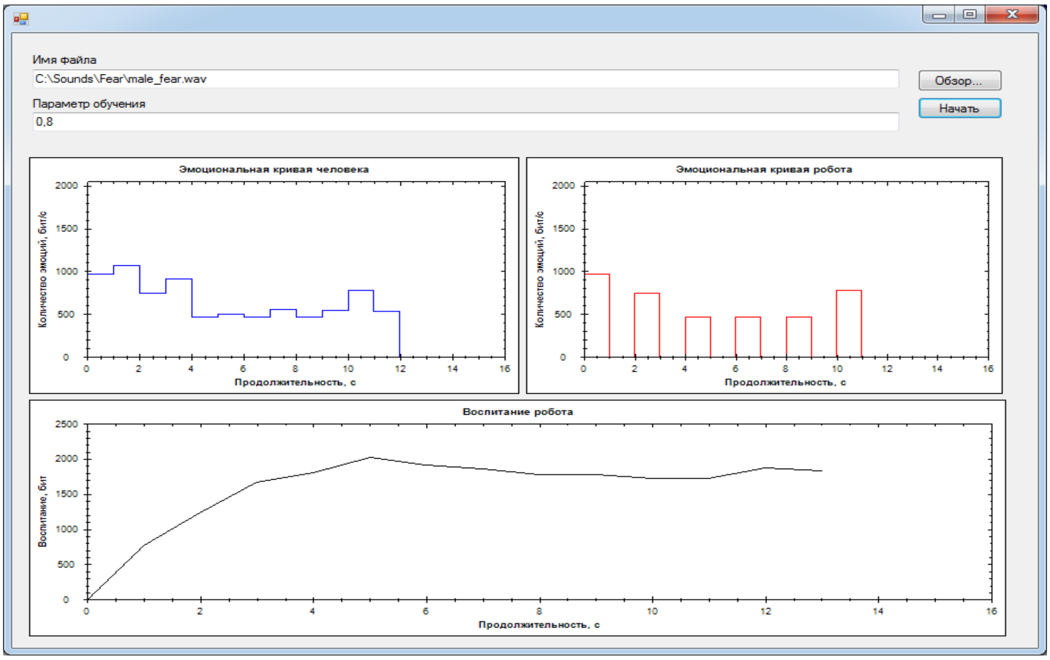

Рис. 19.2. Результат действия программы для звукового файла male_Fear.wav с параметром обучения, равным 0.8.

Результатами программы являются эмоциональная кривая человека (синий цвет), максимальная амплитуда эмоций (красный цвет), кривая воспитания робота (черный цвет)

В результате проведенных экспериментов удалось установить следующее:

- для каждого эмоционального состояния характерна своя эмоциональная кривая;
- для каждого человека характерна своя эмоциональная кривая для определенного эмоционального состояния.

Программа предназначена для использования на персональных компью-терах IBM с операционными системами:Windows 7x64,WindowsXPSP3 x86. Для написания программы использовался язык программирования С++. Объем загрузочного модуля 1.67 Мб.

На основании описанного выше алгоритма была реализована программа, измеряющая численное значение эмоции абонента по голосу человека, записанному в звуковой файл. Результатом программы являются кривая эмоционального состояния человека, произносящего фразу, эмоциональная кривая мобильного устройства, полученная на основе эмоциональной кривой человека, кривая значений воспитания мобильного устройства.

Недостатком описанного алгоритма является то, что он измеряет численное значение эмоции, но не распознает ее тип. К достоинствам представленного алгоритма можно отнести следующее: алгоритм является достаточно простым (настройка происходит автоматически), результаты работы алгоритма не зависят от языка произнесенных человеком фраз, алгоритм возвращает численное значение эмоций мобильного устройства и человека, что является его несомненным преимуществом по отношению к известным алгоритмам.

20. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПСИХОЛОГИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК РОБОТА С ГАРМОНИЧЕСКИМИ ЭМОЦИЯМИ

При разработке мобильных устройств связи, являющихся аналогами психологического поведения человека, возникают задачи разработки наиболее простых математических моделей психологических характеристик устройства, требующих минимального времени проведения необходимых вычислений.

Прежде чем перейти к описанию психологических характеристик робота, основанных на его эмоции, опишем две модели ответной реакции робота на действия человека:

1. Модель моментальной реакции робота при такте, на котором на робота оказывается воздействие сюжетом.
2. Модель реакции робота с запаздыванием на один такт, при которой реакция робота во время текущего такта осуществляется как отклик на воздействие на робота во время предыдущего такта.

Вместо константы A будем использовать численное значение эмоций человека, определенных на такте с порядковым номером i. Рассмотрим функцию гармонических эмоций роботов. Эта функция определяется соотношением

$$M_i(t) = A_i \sin\left(\frac{\pi}{t_i - t_{i-1}}(t - t_{i-1})\right),$$

где A_i – численное значение амплитуды эмоции на такте с порядковым номером i.

Нетрудно заметить, что элементарное воспитание $r_i(t)$ удовлетворяет равенству

$$r_i(t) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} A_i \sin\left(\frac{\pi}{t_i - t_{i-1}}(t - t_{i-1})\right) dt,$$

преобразовывая которое получим

$$r_i = 2A_i \frac{t_i - t_{i-1}}{\pi}. \tag{20.1}$$

Очевидно, что для равноценности гармонических эмоций в воспитательном процессе робота необходимо выполнение равенства

$$A_i \frac{t_i - t_{i-1}}{\pi} = A_{i-1} \frac{t_{i-1} - t_{i-2}}{\pi}.$$

Выделим параметр окончания такта t_i с порядковым номером i следующим образом:

$$t_i = t_{i-1} + \frac{A_{i-1}}{A_i}(t_{i-1} - t_{i-2}),$$

где t_0, t_1 – границы первого такта, котрые задаются разработчиками робота, $i = \overline{1,n}$.

Как было показано выше, воспитание робота R_i определяется формулой

$$R_i = r_i + \theta R_{i-1}, \qquad (20.2)$$

где $\theta \in [0,1]$ – константа.

Будем полагать, что для равноценных гармонических эмоций справедливо соотношение

$$R_0 = 0.$$

На основе равенств (20.1) и (20.2) становится очевидна формула

$$R_1 = \frac{2A_1\tau_1}{\pi} = S,$$

где τ_i – такт с порядковым номером i, $\tau_i = t_i - t_{i-1}$, где $\tau_0 = 0$.

Так как гармонические эмоции робота равноценны, то справедлива цепочка равенств

$$A_1\tau_1 = A_2\tau_2 = \cdots = A_i\tau_i = P = const.$$

Легко видеть, что воспитание в терминах гармонической эмоции будет удовлетворять формулам

$$R_2 = S + \theta S,$$

$$R_3 = S + \theta S + \theta^2 S,$$

$$R_i = S(1 + \theta + \theta^2 + \cdots + \theta^{i-1}) = S * \frac{1-\theta^i}{1-\theta}. \qquad (20.3)$$

Учитывая (20.1) и (20.3), получим равенство

$$R_i = \frac{2}{\pi} A_i (t_i - t_{i-1}) * \frac{1-\theta^i}{1-\theta},$$

где R_i – воспитание робота на такте с порядковым номером i при равноценных гармонических эмоциях.

Вычислим предельное воспитание робота, основанное на гармонических эмоциях. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$R_i = \lim_{i\to\infty} \frac{2}{\pi} A_i (t_i - t_{i-1}) * \frac{1-\theta^i}{1-\theta} = \frac{2P}{\pi(1-\theta)},$$

где $A_i\tau_i = P = const$, $i = \overline{1,n}$.

Опишем воспитание для равномерно забывчивого робота:

$$R_i = \theta^i \frac{2\tau_1 A_1}{\pi}.$$

С учетом фиктивных воспитательных циклов воспитание F_{j_n,k_n} робота с гармоническими эмоциями удовлетворяет формуле

$$F_{j_n,k_n} = \theta^{k_n}\left(\frac{2}{\pi} A_{j_n} \tau_{j_n} \frac{1-\theta^{j_n}}{\theta} + \theta^{j_n} F_{j_{n-1},k_{n-1}}\right).$$

Очевидно, что функция памяти $\Omega_{j_n j_k}$ для роботов с гармоническими эмоциями определяется соотношением

$$\Omega_{j_n j_k} = \frac{F_{j_n k_n}}{\frac{2}{\pi} A_{j_n} \tau_{j_n}}.$$

Рассмотрим функцию эмоций для второй модели реакции роботов. Эта функция определяется соотношением

$$M_i(t) = A_{i-1} \sin\left(\frac{\pi}{t_i - t_{i-1}}(t - t_{i-1})\right),$$

где A_{i-1} – численное значение эмоции на такте с порядковым номером $i-1$.

Опишем психологические характеристики робота для второй модели.

Для этого выполним несложные вычисления. Нетрудно заметить, что элементарное воспитание $r_i(t)$ удовлетворяет равенству

$$r_i(t) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} A_{i-1} \sin\left(\frac{\pi}{t_i - t_{i-1}}(t - t_{i-1})\right) dt,$$

преобразовывая которое получим

$$r_i = 2A_{i-1} \frac{t_i - t_{i-1}}{\pi}. \qquad (20.4)$$

В разделе 2 введено понятие равноценных эмоций. Очевидно, что для равноценности гармонических эмоций в воспитательном процессе робота необходимо выполнение равенства

$$A_{i-1} \frac{t_i - t_{i-1}}{\pi} = A_{i-2} \frac{t_{i-1} - t_{i-2}}{\pi}.$$

Выделим параметр окончания такта t_i с порядковым номером i следующим образом

$$t_i = t_{i-1} + \frac{A_{i-2}}{A_{i-1}}(t_{i-1} - t_{i-2}),$$

где t_0, t_1 – границы первого такта и начальное числовое значение амплитуды эмоции A_0 задаются разработчиками робота, $i = \overline{1,n}$.

Очевидно, что отличительной особенностью моделирования гармонических эмоций и вычисления психологических характеристик, основанных на них, является необходимость малого машинного времени. Этот вывод обусловлен тем, что все психологические характеристики определяются явными аналитическими соотношениями, требующими минимальных вычислительных затрат.

21. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ГАРМОНИЧЕСКОГО ВОСПИТАНИЯ РОБОТА

При разработке мобильных устройств связи, являющихся аналогами психологического поведения человека, возникают задачи разработки наиболее простых математических моделей гармонического воспитания робота и психологических характеристик устройства, требующих минимального времени проведения необходимых вычислений.

В настоящем разделе рассмотрены алгоритмы определения оптимального значения такта, коэффициента памяти, амплитуды гармонической эмоции робота в зависимости от эмоций абонента, общающегося по мобильному устройству.

Пусть значения воспитаний абонента в конце каждого такта задаются величинами R_i, $i = \overline{1,n}$, где n – общее количество воспитательных тактов.

Аппроксимируем реальный процесс воспитания человека гармоническим воспитанием робота.

В общем виде минимизируемая функция будет выглядеть следующим образом:

$$J = \sum_{i=2}^{n}(R_i - \theta^{j-1}R_1 - \frac{2}{\pi}A_i\tau_i * \frac{1-\theta^i}{1-\theta})^2 .$$

21.1. Математические модели робота с отсутствием памяти

Рассмотрим робота с отсутствием памяти, т.е. $\theta = 0$.

Модель 1

Пусть значения эмоций задаются в конце каждого такта величинами A_i, $i = \overline{1,n}$, где n – общее количество воспитательных тактов. Необходимо найти оптимальную продолжительность такта τ, при которой функция J будет достигать минимума:

$$J(\tau) = \sum_{i=2}^{n}(r_i - \frac{2A_i\tau}{\pi})^2 .$$

Таким образом, для нахождения оптимального τ необходимо решить уравнение

$$\frac{\partial J}{\partial \tau} = 0$$.

В результате получаем $\tau_{опт}$:

$$\tau_{опт} = \frac{\pi}{2} \frac{\sum_{i=2}^{n} r_i A_i}{\sum_{i=2}^{n} A_i^2}$$.

Очевидно, что удовлетворяется условие минимума функции

$$\frac{\partial^2 J}{\partial^2 \tau}(\tau_{опт}) > 0$$,

так как справедливо неравенство

$$\frac{\partial^2 J}{\partial^2 \tau} = \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{8A_i^2}{\pi^2}\right) > 0$$.

Очевидно соотношение

$$J(\tau_{опт}) = \sum_{i=2}^{n} \left(r_i - A_i \frac{\sum_{j=2}^{n} r_j A_j}{\sum_{j=2}^{n} A_j^2}\right)^2$$.

Модель 2

Пусть продолжительности тактов задаются величинами τ_i, $i = \overline{1,n}$, где n – общее количество воспитательных тактов. Необходимо найти оптимальное значение A, при котором функция J будет достигать минимума, где

$$J(A) = \sum_{i=2}^{n} \left(r_i - \frac{2A\tau_i}{\pi}\right)^2$$.

Таким образом, для нахождения оптимального A необходимо решить уравнение

$$\frac{\partial J}{\partial A} = 0$$.

В результате решения уравнения, получаем $A_{опт}$

$$A_{опт} = \frac{\pi}{2} \frac{\sum_{i=2}^{n} r_i \tau_i}{\sum_{i=2}^{n} \tau_i^2}$$.

Нетрудно видеть, что удовлетворяется условие минимума функции

$$\frac{\partial^2 J}{\partial^2 A}(A_{опт}) > 0$$,

так как верно неравенство

$$\frac{\partial^2 J}{\partial^2 A}=\sum_{i=2}^{n}(\frac{8\tau_i^2}{\pi^2})>0$$

Очевидно соотношение

$$J(A_{опт})=\sum_{i=2}^{n}(r_i-\tau_i\frac{\sum_{j=2}^{n}r_j\tau_j}{\sum_{j=2}^{n}\tau_j^2})^2$$

Модель 3

Необходимо найти оптимальные A и τ, при которых функция J будет достигать минимума, где

$$J(A,\tau)=\sum_{i=2}^{n}(r_i-\frac{2A\tau}{\pi})^2$$

Таким образом, для нахождения оптимального A и τ необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases}\frac{\partial J}{\partial A}=0\\ \frac{\partial J}{\partial \tau}=0\end{cases}$$

В результате получаем, что явно выразить оба параметра нельзя, они зависят друг от друга:

$$A_{опт}\tau_{опт}=\frac{\pi}{2(n-1)}\sum_{i=2}^{n}\mathrm{r_i}$$

Нетрудно видеть, что удовлетворяется условие минимума функции:

$$\forall A\neq A_{опт};\forall\tau\neq\tau_{опт},$$

$$\sum_{i=2}^{n}(r_i-\frac{2A\tau}{\pi})^2>\sum_{i=2}^{n}(r_i-\frac{2A_{опт}\tau_{опт}}{\pi})^2$$

Подставим в вышеприведенную формулу полученные значения $\tau_{опт}$ и $A_{опт}$:

$$\left(A\tau-\frac{\pi}{2(n-1)}\sum_{i=2}^{n}\mathrm{r_i}\right)^2>0$$

Справедливо соотношение

$$J(A_{опт},\tau_{опт})=\sum_{i=2}^{n}(r_i-\frac{\sum_{j=2}^{n}\mathrm{r_j}}{n-1})^2$$

21.2. Математические модели робота с абсолютной памятью

Рассмотрим робота с абсолютной памятью, т.е. $\theta = 1$.

Модель 4

Пусть значения человеческих эмоций задаются в конце каждого такта величинами A_i, $i = \overline{1,n}$, где n – общее количество воспитательных тактов. Необходимо найти оптимальное τ, при котором функция J будет достигать минимума:

$$J(\tau) = \sum_{i=2}^{n} (R_i - R_1 - (i-1)\frac{2A_i\tau}{\pi})^2.$$

Таким образом, для нахождения оптимального τ необходимо решить уравнение

$$\frac{\partial J}{\partial \tau} = 0.$$

В результате решения уравнения, получаем:

$$\tau_{опт} = \frac{\pi}{2} \frac{\sum_{i=2}^{n} (i-1) R_i A_i - R_1 \sum_{i=2}^{n} (i-1) A_i}{\sum_{i=2}^{n} (i-1)^2 A_i^2}.$$

Нетрудно видеть, что удовлетворяется условие минимума функции:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial^2 \tau}(\tau_{опт}) > 0,$$

так как справедливо соотношение

$$\frac{\partial^2 J}{\partial^2 \tau} = \sum_{i=2}^{n} (\frac{8(i-1)^2 A_i^2}{\pi^2}) > 0.$$

Очевидно равенство

$$J(\tau_{опт}) = \sum_{i=2}^{n} \left(R_i - R_1 - (i-1) A_i \left(\frac{\sum_{j=2}^{n} (j-1) R_j A_j - R_1 \sum_{j=2}^{n} (j-1) A_j}{\sum_{j=2}^{n} (j-1)^2 A_j^2} \right) \right)^2.$$

Модель 5

Пусть продолжительность такта задается величинами τ_i, $i = \overline{1,n}$, где n – общее количество воспитательных тактов.

Необходимо найти оптимальное A, при котором функция J будет достигать минимума:

$$J(A) = \sum_{i=2}^{n} (R_i - R_1 - (i-1)\frac{2A\tau_i}{\pi})^2.$$

Для нахождения оптимального A необходимо решить уравнение

$$\frac{\partial J}{\partial A} = 0 .$$

В результате решения уравнения, получаем:

$$A_{pnm} = \frac{\pi}{2} \frac{\sum_{i=2}^{n}(i-1)R_i\tau_i - R_1\sum_{i=2}^{n}(i-1)\tau_i}{\sum_{i=2}^{n}(i-1)^2\tau_i^2} .$$

Нетрудно видеть, что удовлетворяется условие минимума функции:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial^2 A}(A_{onm}) > 0 ,$$

т.к. справедливо неравенство $\frac{\partial^2 J}{\partial^2 A} = \sum_{i=2}^{n}(\frac{8(i-1)^2\tau_i^2}{\pi^2}) > 0$.

Очевидна формула

$$J(A_{onm}) = \sum_{i=2}^{n}\left(R_i - R_1 - (i-1)\tau_i\left(\frac{\sum_{j=2}^{n}(j-1)R_j\tau_j - R_1\sum_{j=2}^{n}(j-1)\tau_j}{\sum_{j=2}^{n}(j-1)^2\tau_j^2}\right)\right)^2 .$$

Модель 6

Необходимо найти оптимальные A и τ, при которых функция J будет достигать минимума:

$$J(A,\tau) = \sum_{i=2}^{n}(R_i - R_1 - (i-1)\frac{2A\tau}{\pi})^2 .$$

Таким образом, для нахождения оптимального A и τ необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial J}{\partial A} = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial \tau} = 0 \end{cases} .$$

В результате решения системы уравнений получаем, что явно выразить оба параметра нельзя, они зависят друг от друга:

$$A_{onm}\tau_{onm} = \frac{3\pi}{(n-1)n(n+\frac{1}{2})}\left(\sum_{i=2}^{n}(R_i(i-1)) - R_1\frac{n(n-1)}{2}\right) .$$

Нетрудно видеть, что для удовлетворения условия минимума функции должны выполняться соотношения

$$\forall A \neq A_{onm}; \forall \tau \neq \tau_{onm} ,$$

$$\sum_{i=2}^{n}(R_i - R_1 - (i-1)\frac{2A\tau}{\pi})^2 > \sum_{i=2}^{n}(R_i - R_1 - (i-1)\frac{2A_{onm}\tau_{onm}}{\pi})^2 .$$

После несложных преобразований получим

$$\left(A\tau-\frac{3\pi}{2(n-1)n(n+\frac{1}{2})}\left(\sum_{i=2}^{n}(R_i(i-1))-R_1\frac{n(n-1)}{2}\right)\right)^2>0.$$

Очевидна следующая формула:

$$J(A_{onm},\tau_{onm})=\sum_{i=2}^{n}\left(R_i-R_1-\frac{6(i-1)}{(n-1)n(n+\frac{1}{2})}\left(\sum_{j=2}^{n}(R_j(j-1))-R_1\frac{n(n-1)}{2}\right)\right)^2.$$

21.3. Математические модели робота с неабсолютной памятью

Рассмотрим робота с неабсолютной памятью, т.е. $0<\theta<1$.

Модель 7

Пусть значения ампилитуд эмоций задаются в конце каждого такта величинами A_i, $i=\overline{1,n}$, где n – общее количество воспитательных тактов. Необходимо найти оптимальное τ и θ, при которых функция J будет достигать минимума, где

$$J(\theta,\tau)=\sum_{i=2}^{n}(R_i-\theta R_{i-1}-\frac{2A_i\tau}{\pi})^2.$$

Таким образом, для нахождения оптимального τ и θ необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{\partial J}{\partial\theta}=0\\ \dfrac{\partial J}{\partial\tau}=0\end{cases}$$

В результате решения системы уравнений, получаем τ_{onm} и θ_{onm}:

$$\begin{cases} \theta_{опт} = \dfrac{\sum\limits_{i=2}^{n} A_i^2 \sum\limits_{i=2}^{n}(R_i R_{i-1}) - \sum\limits_{i=2}^{n}(R_i A_i)\sum\limits_{i=2}^{n} A_i R_{i-1}}{(\sum\limits_{i=2}^{n} A_i^2 \sum\limits_{i=2}^{n} R_{i-1}^2 - \sum\limits_{i=2}^{n} A_i R_{i-1} \sum\limits_{i=2}^{n} A_i R_{i-1})} \\ \tau_{опт} = \dfrac{\pi}{2} \dfrac{\sum\limits_{i=2}^{n}(R_i A_i) + \dfrac{\sum\limits_{i=2}^{n} A_i^2 \sum\limits_{i=2}^{n}(R_i R_{i-1}) - \sum\limits_{i=2}^{n}(R_i A_i)\sum\limits_{i=2}^{n} A_i R_{i-1}}{(\sum\limits_{i=2}^{n} A_i^2 \sum\limits_{i=2}^{n} R_{i-1}^2 - \sum\limits_{i=2}^{n} A_i R_{i-1} \sum\limits_{i=2}^{n} A_i R_{i-1})} \sum\limits_{i=2}^{n} A_i R_{i-1}}{\sum\limits_{i=2}^{n} A_i^2} \end{cases}.$$

Нетрудно видеть, что удовлетворяется условие минимума функции:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 J}{\partial^2 \theta}(\theta_{опт}, \tau_{опт}) * \dfrac{\partial^2 J}{\partial^2 A}(\theta_{опт}, \tau_{опт}) - (\dfrac{\partial^2 J}{\partial\theta\partial A}(\theta_{опт}, \tau_{опт}))^2 > 0 \\ \dfrac{\partial^2 J}{\partial^2 \theta}(\theta_{опт}, \tau_{опт}) > 0 \end{cases},$$

так как выполняются неравенства

$$\begin{cases} 4\sum\limits_{\substack{i=2 \\ j=2 \\ j\neq 2}}^{n} R_{i-1}^2 A_j^2 + 2\sum\limits_{i=2}^{n} R_{i-1}^2 A_i^2 + (\sum\limits_{i=2}^{n} A_i R_{i-1})^2 > 0 \\ \sum\limits_{i=2}^{n}(2R_{i-1}^2) > 0 \end{cases}.$$

Очевидна формула:

$$J(\theta_{опт}, \tau_{опт}) = \sum_{j=2}^{n}\left(R_j - \left(\frac{\sum\limits_{i=2}^{n} A_i^2 \sum\limits_{i=2}^{n}(R_i R_{i-1}) - \sum\limits_{i=2}^{n}(R_i A_i)\sum\limits_{i=2}^{n} A_i R_{i-1}}{(\sum\limits_{i=2}^{n} A_i^2 \sum\limits_{i=2}^{n} R_{i-1}^2 - \sum\limits_{i=2}^{n} A_i R_{i-1} \sum\limits_{i=2}^{n} A_i R_{i-1})} \right) R_{j-1} - A_j \left(\frac{\sum\limits_{i=2}^{n}(R_i A_i) + \theta_{опт}\sum\limits_{i=2}^{n} A_i R_{i-1}}{\sum\limits_{i=2}^{n} A_i^2} \right) \right)^2.$$

Модель 8

Пусть продолжительность такта задается величинами τ_i, $i = \overline{1,n}$, где n – общее количество воспитательных тактов. Необходимо найти оптимальное A и θ, при котором функция J будет достигать минимума, где

$$J(\theta, A) = \sum_{i=2}^{n}(R_i - \theta R_{i-1} - \frac{2A\tau_i}{\pi})^2.$$

Таким образом, для нахождения оптимального A и θ необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial J}{\partial \theta} = 0 \\ \dfrac{\partial J}{\partial A} = 0 \end{cases}.$$

В результате решения уравнений получаем $A_{опт}$ и $\theta_{опт}$:

$$\begin{cases} \theta_{опт} = \dfrac{\sum_{i=2}^{n}\tau_i^2\sum_{i=2}^{n}(R_iR_{i-1}) - \sum_{i=2}^{n}(R_i\tau_i)\sum_{i=2}^{n}\tau_iR_{i-1}}{(\sum_{i=2}^{n}\tau_i^2\sum_{i=2}^{n}R_{i-1}^2 - \sum_{i=2}^{n}\tau_iR_{i-1}\sum_{i=2}^{n}\tau_iR_{i-1})} \\ A_{опт} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{\sum_{i=2}^{n}(R_i\tau_i) + \dfrac{\sum_{i=2}^{n}\tau_i^2\sum_{i=2}^{n}(R_iR_{i-1}) - \sum_{i=2}^{n}(R_i\tau_i)\sum_{i=2}^{n}\tau_iR_{i-1}}{(\sum_{i=2}^{n}\tau_i^2\sum_{i=2}^{n}R_{i-1}^2 - \sum_{i=2}^{n}\tau_iR_{i-1}\sum_{i=2}^{n}\tau_iR_{i-1})}\sum_{i=2}^{n}\tau_iR_{i-1}}{\sum_{i=2}^{n}\tau_i^2} \end{cases}.$$

Нетрудно видеть, что удовлетворяется условие минимума функции:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 J}{\partial^2\theta}(\theta_{опт}, A_{опт}) * \dfrac{\partial^2 J}{\partial^2 A}(\theta_{опт}, A_{опт}) - (\dfrac{\partial^2 J}{\partial\theta\partial A}(\theta_{опт}, A_{опт}))^2 > 0 \\ \dfrac{\partial^2 J}{\partial^2\theta}(\theta_{опт}, A_{опт}) > 0 \end{cases},$$

так как справедливы соотношения

$$\begin{cases} 4\sum_{\substack{i=2 \\ j=2 \\ j\neq 2}}^{n} R_{i-1}^2\tau_j^2 + 2\sum_{i=2}^{n} R_{i-1}^2\tau_i^2 + (\sum_{i=2}^{n}\tau_iR_{i-1})^2 > 0 \\ \sum_{i=2}^{n}(2R_{i-1}^2) > 0 \end{cases},$$

Очевидно равенство

$$J(\theta_{опт}, A_{опт}) = \sum_{j=2}^{n}\left(R_j - \left(\frac{\sum_{i=2}^{n}\tau_i^2\sum_{i=2}^{n}(R_iR_{i-1}) - \sum_{i=2}^{n}(R_i\tau_i)\sum_{i=2}^{n}\tau_iR_{i-1}}{(\sum_{i=2}^{n}\tau_i^2\sum_{i=2}^{n}R_{i-1}^2 - \sum_{i=2}^{n}\tau_iR_{i-1}\sum_{i=2}^{n}\tau_iR_{i-1})}\right)R_{j-1} - \tau_j\left(\frac{\sum_{i=2}^{n}(R_i\tau_i) + \theta_{опт}\sum_{i=2}^{n}\tau_iR_{i-1}}{\sum_{i=2}^{n}\tau_i^2}\right)\right)^2.$$

Модель 9

Пусть значения эмоций задаются в конце каждого такта величинами A_i, $i = \overline{1,n}$, где n – общее количество воспитательных тактов. Пусть продолжительность такта задается величинами τ_i, $i = \overline{1,n}$. Необходимо найти оптимальные A, τ и θ, при которых функция J будет достигать минимума, где

$$J(\theta, A, \tau) = \sum_{i=2}^{n} (R_i - \theta R_{i-1} - \frac{2A\tau}{\pi})^2 .$$

Таким образом, для нахождения оптимальных A, τ и θ необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial J}{\partial \theta} = 0 \\ \dfrac{\partial J}{\partial A} = 0 \\ \dfrac{\partial J}{\partial \tau} = 0 \end{cases} .$$

В результате решения уравнения получаем $A_{опт}, \tau_{опт}$ и $\theta_{опт}$

$$\begin{cases} \theta_{опт} = \dfrac{(n-1)\sum\limits_{i=2}^{n}(R_{i-1}R_i) - \sum\limits_{i=2}^{n} R_i \sum\limits_{i=2}^{n} R_{i-1}}{(n-1)\sum\limits_{i=2}^{n} R_{i-1}^2 - (\sum\limits_{i=2}^{n} R_{i-1})^2} \\ A_{опт}\tau_{опт} = \dfrac{\pi}{2} \dfrac{\sum\limits_{i=2}^{n} R_i \sum\limits_{i=2}^{n} R_{i-1}^2 - \sum\limits_{i=2}^{n}(R_{i-1}R_i)\sum\limits_{i=2}^{n} R_{i-1}}{(n-1)\sum\limits_{i=2}^{n} R_{i-1}^2 - (\sum\limits_{i=2}^{n} R_{i-1})^2} \end{cases} .$$

Доказать аналитическим путем, что оптимальные значения доставляют минимум целевой функции затруднительно, поэтому были проведены серии экспериментов, которые показали что полученная точка, скорее всего, доставляет минимум целевой функции.

Подставив полученную точку в $J(A, \tau, \theta)$, определим минимум целевой функции

$$J(\theta_{опт}, A_{опт}, \tau_{оат}) = \sum_{j=2}^{n} \left(\begin{matrix} R_j - \dfrac{(n-1)\sum\limits_{i=2}^{n}(R_{i-1}R_i) - \sum\limits_{i=2}^{n} R_i \sum\limits_{i=2}^{n} R_{i-1}}{(n-1)\sum\limits_{i=2}^{n} R_{i-1}^2 - (\sum\limits_{i=2}^{n} R_{i-1})^2} R_{j-1} \\ - \dfrac{\sum\limits_{i=2}^{n} R_i \sum\limits_{i=2}^{n} R_{i-1}^2 - \sum\limits_{i=2}^{n}(R_{i-1}R_i)\sum\limits_{i=2}^{n} R_{i-1}}{(n-1)\sum\limits_{i=2}^{n} R_{i-1}^2 - \left(\sum\limits_{i=2}^{n} R_{i-1}\right)^2} \end{matrix} \right)^2 .$$

21.4. Примеры оценки точности моделей

Рассмотрим пример построения гармонического воспитания робота. Пусть реальный воспитательный процесс содержит четыре такта, при этом $R_1 = 2, R_2 = 3, R_3 = 5, R_4 = 7$; $A_1 = 4, A_2 = 6, A_3 = 2, A_4 = 1$; $\tau_1 = 1, \tau_2 = 2, \tau_3 = 3, \tau_4 = 4$.

Оценим точность каждой модели и полученные значения отобразим в табл. 21.1.

Таблица 21.1

Оценка точности моделей

Наименование модели	Численное значение J при оптимальных параметрах
Модель 1	53,1
Модель 2	0,25
Модель 3	8
Модель 4	19,91
Модель 5	0,22
Модель 6	38,9
Модель 7	166
Модель 8	43,6
Модель 9	0,29

Исходя из анализа значений, приведенных в табл.21.1, можно сформулировать гипотезу о том, что наиболее точной является модель 5.

Очевидно, что отличительной особенностью моделирования гармонического воспитания является необходимость малого машинного времени. Этот вывод обусловлен тем, что оптимальные параметры определяются явными аналитическими соотношениями, требующими минимальных вычислительных затрат.

Отметим тот факт, что полученные математические модели могут быть применимы, например, для определения психологических параметров абонента мобильной связи во время его разговора по телефону.

22. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОЦЕНКИ ДОСТИЖЕНИЯ ПОСТАВЛЕННОЙ ЦЕЛИ РОБОТОМ С ГАРМОНИЧЕСКИМИ ЭМОЦИЯМИ

Напомним, что целью воспитания называется вектор $A = (a_1, \ldots, a_m)$, характеризующий желаемое конечное состояние робота, достигаемое в результате K действий (шагов), причем $\sum_{i=1}^{m} a_i^2 > 0$.

k-шагом к цели будем называть вектор $R_k = (r_{k,1},...,r_{k,m})$, определяющий воспитание робота, полученное в результате одного шага с порядковым номером k при стремлении к цели воспитания.

Вектором-состоянием робота W_k назовем вектор, соответствующий достижению цели в результате всех выполненных шагов до k-шага включительно и удовлетворяющий соотношению $W_k = \sum_{i=1}^{k} R_i$.

Вектор R_k, определяющий состояние робота с гармонической эмоцией, полученной в результате одного шага с порядковым номером k при стремлении к цели, равен $R_k = \left(\frac{2}{\pi} A_{k,1}\tau_{k,1},...,\frac{2}{\pi} A_{k,1}\tau_{k,1}\right)$.

Вектор-состояние робота W_k, соответствующий достижению цели в результате всех выполненных шагов до k-шага включительно, удовлетворяет соотношению $W_k = \sum_{i=1}^{k} R_i = \left(\frac{2k}{\pi}\sum_{i=1}^{k} A_{i,1}\tau_{i,1},...,\frac{2k}{\pi}\sum_{i=1}^{k} A_{i,m}\tau_{i,m}\right)$.

Очевидно, что уклонение направления k-шага от направления цели будет характеризовать угол β_k, равный углу между целью и k-шагом к цели. Косинус этого угла можно вычислить по формуле

$$\cos(\beta_k) = \frac{\sum_{i=1}^{k} a_i A_{k,i}\tau_{k,i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{k}(a_i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{k}(A_{k,i}\tau_{k,i})^2}},$$

а косинус угла α_k между вектором-состоянием робота и целью, характеризующий уклонение от направления цели в результате k шагов, – исходя из соотношения

$$\cos(\alpha_k) = \frac{\sum_{i=1}^{k}\left(a_i \sum_{j=1}^{k} A_{j,i}\tau_{j,i}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{k}(a_i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{k}(\sum_{j=1}^{k} A_{j,i}\tau_{j,i})^2}}. \tag{22.1}$$

После выполнения заданного количества шагов K, предусмотренного для достижения цели, можно определить величину δ, характеризующую близость к конечной цели. Формула, определяющая значение δ, является отношением численного значения проекции вектора W_K на вектор A к длине A.

Таким образом, с учетом (22.1) соотношение для вычисления δ примет вид

$$\delta = \frac{\sum_{i=1}^{k}\left(a_i \sum_{j=1}^{k} A_{j,i}\tau_{j,i}\right)}{\sum_{i=1}^{k}(a_i)^2}.$$

Величина δ может принимать любые значения и цель достигается полностью, если $\delta \geq 1$.

Вычислить косинус угла уклонения итогового вектора-состояния от направления цели ψ можно, используя соотношение

$$\cos(\psi) = \frac{\sum_{i=1}^{k}\left(a_i \sum_{j=1}^{k} A_{j,i}\tau_{j,i}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{k}(a_i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{k}(\sum_{j=1}^{k} A_{j,i}\tau_{j,i})^2}}.$$

Аналогично можно записать формулу, определяющую процентное достижение цели χ_k на каждом *k*-шаге к цели:

$$\chi_k = \frac{\sum_{i=1}^{k} a_i A_{k,i}\tau_{k,i}}{\sum_{i=1}^{k}(a_i)^2},$$

а достижение цели λ_k в результате *k* выполненных шагов будет определяться соотношением

$$\lambda_k = \frac{\sum_{i=1}^{k}\left(a_i \sum_{j=1}^{k} A_{j,i}\tau_{j,i}\right)}{\sum_{i=1}^{k}(a_i)^2}.$$

23. ОБОБЩЕНИЕ ПРАВИЛ ЭМОЦИОНАЛЬНОГО ПОВЕДЕНИЯ РОБОТА НА СЛУЧАЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО КОЛИЧЕСТВА ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ С РОБОТОМ ИГРОКОВ

23.1. ПЕРВОЕ ПРАВИЛО АЛЬТЕРНАТИВНОГО ВЫБОРА

Пусть на робота неодновременно воздействует n игроков. Будем предполагать, что у робота возникают только положительные эмоции и робот обладает абсолютной эмоциональной памятью, т.е. коэффициенты памяти $\theta_{i,j}$ удовлетворяют тождеству $\theta_{i,j} \equiv 1$, где $i = \overline{1, m_j}$, $j = \overline{1, n}$. Соответственно, m_j – количество действий сюжетов игрока j.

Первый игрок порождает в момент времени $t_{1,k}$, где $k=\overline{1,m_1}$, у робота эмоцию $M_{1,k}$, которая влечет элементарное воспитание $R_{1,k}=\int\limits_0^{t_{1,k}} M_{1,k}(\tau)d\tau$, и воспитание $\overline{B_1}=(R_1,\underbrace{0,...,0}_{n-1})$, где $R_1=\sum\limits_{l=1}^{m_1}\int\limits_0^{t_{1,l}} M_{1,l}(\tau)d\tau$. В это время все остальные $n-1$ игроков порождают у робота нулевые эмоции.

Во время $t_{i,k}$, где $k=\overline{1,m_i}$, $t_{i,k}>t_{i_1,k_1}$, где $i>i_1$ и $k_1=\overline{1,m_{i_1}}$, игрок i порождает у робота эмоцию $M_{i,k}$, которая влечет элементарное воспитание $R_{i,k}=\int\limits_0^{t_{i,k}} M_{i,k}(\tau)d\tau$ и воспитание $\overline{B_i}=(0,...,0,\underbrace{R_i}_{i-элемент},0,...,0)$, где $R_i=\sum\limits_{l=1}^{m_i}\int\limits_0^{t_{i,l}} M_{i,l}(\tau)d\tau$. В это время все остальные $n-1$ игроков порождают у робота нулевые эмоции.

Введем вектор общего воспитания робота $\overline{V}=(R_1,R_2,...,R_n)$, где компоненты вектора – это суммарные воспитания, получаемые за все время t действия сюжетов всех игроков, где $t=\sum\limits_{l=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{m_l} t_{l,k}$.

При введенных обозначениях правило принятия эмоционального решения роботом в пользу того или иного игрока можно сформулировать следующим образом: эмоциональное решение принимается в пользу того игрока, для которого достигается $\min\angle(\overline{V},\overline{B_i})$, где $i=\overline{1,n}$ (эмоциональный выбор будет принят в пользу игрока i). Если минимум достигается сразу при нескольких i, то выбор не осуществляется.

Приведенное правило можно обобщить на случай, когда воздействие игрока вызывает у робота не одну эмоцию, а сразу вектор эмоций. Таким образом, во время $t_{i,k}$, где $k=\overline{1,m_i}$, $t_{i,k}>t_{i_1,k_1}$, где $i>i_1$ и $k_1=\overline{1,m_{i_1}}$, игрок i порождает у робота вектор эмоций $\overline{M}_{1,k}=(M_{i,k}^1,...,M_{i,k}^r)$, который влечет вектор элементарных воспитаний $\overline{R}_{i,k}=(R_{i,k}^1,...,R_{i,k}^r), R_{i,k}^j=\int\limits_0^{t_{i,k}} M_{i,k}^j(\tau)d\tau$ и воспитание $\overline{B_i}=(0,...,0,\underbrace{\overline{R_i}}_{i-элемент},0,...,0)=(0,...,0,R_i^1,...,R_i^r,0,...,0)$, где $R_i^j=\sum\limits_{l=1}^{m_i}\int\limits_0^{t_{i,l}} M_{i,l}^j(\tau)d\tau$. В это время все остальные $n-1$ игроков порождают у робота нулевые эмоции.

В этом случае вектор общего воспитания робота имеет вид $\overline{V} = (\overline{R}_1, \overline{R}_2, ..., \overline{R}_n) = (R_1^1, ..., R_1^r, ..., R_n^1, ..., R_n^r)$.

Дальнейшие рассуждения в точности совпадают с вышепредставленными, когда воздействие игрока вызывает у робота одну эмоцию.

23.2. ВТОРОЕ ПРАВИЛО АЛЬТЕРНАТИВНОГО ВЫБОРА

Второе правило альтернативного выбора основано на сравнении длин векторов суммарных воспитаний $\overline{B}_i$, где $i = \overline{1,n}$. Правило можно сформулировать следующим образом: эмоциональное решение принимается в пользу того игрока, для которого достигается $\max\left|\overline{B}_i\right|$, где $i = \overline{1,n}$ (эмоциональный выбор будет принят в пользу игрока i). Если максимум длины достигается сразу при нескольких значениях i, то выбор роботом игрока не осуществляется.

23.3. ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ ВЕКТОРОВ ВОСПИТАНИЙ И ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ПРАВИЛ АЛЬТЕРНАТИВНОГО ВЫБОРА

Прежде всего напомним, что будем использовать прямоугольную декартову систему координат. Согласно теореме 17.2 два вектора, не имеющие ненулевых общих координат, ортогональны.

Таким образом, каждая пара векторов $\overline{B}_1, ..., \overline{B}_n$ ортогональна.

Теорема 23.1. Первое и второе правила принятия альтернативного решения эквивалентны друг другу.

Доказательство. Пусть $\alpha_i = \angle(\overline{V}, \overline{B}_i)$, $0 < \alpha_i < \dfrac{\pi}{2}$, $i = \overline{1,n}$ – это угол между векторами $\overline{V}$ и $\overline{B_i}$. Согласно правилам векторной алгебры и ортогональности векторов $\overline{B}_1, ..., \overline{B}_n$ справедливо следующее соотношение: $\cos\alpha_i = \dfrac{\left|\overline{B}_i\right|}{\left|\overline{V}\right|}$.

Очевидно, что если $\min\angle(\overline{V}, \overline{B}_i)$ достигается при $i = k$, то по первому правилу альтернативного выбора решение принимается в пользу игрока k. При этом из представленной выше формулы следует: $\left|\overline{B}_k\right| > \left|\overline{B}_j\right|$ при $j \neq k$. Таким образом, $\max\left|\overline{B}_i\right|$ достигается при $i = k$. Последнее описывает второе правило альтернативного выбора.

С другой стороны, если $\max\left|\overline{B}_i\right|$ достигается при $i = k$, то по второму правилу альтернативного выбора решение принимается в пользу игрока k. При этом справедливо $\left|\overline{B}_k\right| > \left|\overline{B}_j\right|$ при $j \neq k$ и, следуя представленной выше формуле, получаем, что $\alpha_k < \alpha_j$ при $j \neq k$. Исходя из сказанного следует вывод о том, что $\min \angle(\overline{V}, \overline{B}_i)$ достигается при $i = k$. Это соответствует первому правилу альтернативного выбора, что и требовалось доказать.

24. ЭМОЦИОНАЛЬНЫЙ ВЫБОР И КОНФЛИКТ МЕЖДУ РОБОТАМИ

Нетрудно заметить, что соотношение (17.4) полностью совпадает с формулой (3.7), полученной нами при описании конфликта между двумя роботами при условии равенства их равноценных эмоций. Этот факт дает основание для вывода о том, что внутренние эмоциональные конфликты робота описываются теми же соотношениями, что и конфликты между разными роботами, и, следовательно, теоретические положения, пригодные для групп роботов, могут быть без изменения перенесены на внутренние конфликты единичного робота.

Примером этого переноса может быть следующая теорема.

Теорема 24.1. Если два равномерно забывчивых робота обладают одинаковыми равноценными эмоциями, то существуют такие коэффициенты памяти роботов, что роботы никогда не вступят в конфликт по воспитаниям.

Доказательство. Для конфликтующих роботов справедливо равенство (3.7), которое при равенстве равноценных эмоций преобразуется в соотношение (17.4). Согласно теореме 17.5 существуют антиступорные коэффициенты, обращающие формулу (17.4) в строгое неравенство. Но в то же время эти антиступорные коэффициенты являются коэффициентами памяти двух различных роботов, причем такими, что роботы никогда не будут конфликтовать. Таким образом, теорема доказана.

Логика изложения требует ввода нового определения.

Определение 24.1. Коэффициенты памяти двух роботов, при которых никогда не наступает конфликт между роботами, назовем антиконфликтными коэффициентами памяти.

Сформулируем следующую теорему.

Теорема 24.2. Антиконфликтные коэффициенты памяти двух равномерно забывчивых роботов с одинаковыми равноценными эмоциями совпадают с антиступорными коэффициентами.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 24.1.

Следствие 24.2. При выполнении условий теоремы 24.2 коэффициенты памяти двух роботов θ_1 и θ_2, равные $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$ соответственно, являются антиконфликтными.

Доказательство. Согласно следствию 17.5 антиступорные коэффициенты удовлетворяют соотношениям $\theta_1 = \frac{1}{2}$, $\theta_2 = \frac{1}{3}$. В силу теоремы 17.2 антиступорные коэффициенты памяти являются анти-конфликтными. Таким образом, следствие доказано.

25. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ «ПСИХИЧЕСКИХ ЗАБОЛЕВАНИЙ» РОБОТОВ

Повторим определение эмоции робота, данное ранее.

Пусть t – время.

Определение 25.1. Функцию внутренних переживаний робота *f(t)* назовем эмоцией *M(t)*, если она удовлетворяет условиям:

1) область определения *M(t)*: $t \in \left[0, t^0\right]$, $t^0 > 0$;
2) $|M(t)|$ - дифференцируемая функция на $(0, t^0)$;
3) $M(t)$ - однозначная и непрерывная функция на $\left[0, t^0\right]$;
4) $M(0) = 0$;
5) $M(t^0) = 0$;
6) в области определения существует единственная точка z, такая, что $z \neq 0$, $z \neq t^0$ и $\frac{d|M(t)|}{dt}_{/\,t=z} = 0$.

Легко видеть что, например функция

$$M(t) = P \sin\left(\frac{\pi}{t^0} t\right) \qquad (25.1)$$

для $t \in \left[0, t^0\right]$, $P = const$ является эмоцией.

Функцию вида (25.1) назовем гармонической эмоцией.

Введем следующие определения.

Определение 25.2. Будем считать, что робот здоров, если его функция внутренних переживаний является эмоцией.

Определение 25.3. Будем считать, что эмоциональный робот болен, если его функция внутренних переживаний не удовлетворяет хотя бы одному из условий, определяющих эмоцию.

Данное определение позволяет ввести такое понятие, как тяжесть заболевания робота.

Так как в определении эмоции существует 6 условий, то величину тяжести заболевания робота можно охарактеризовать числом *H*, принимающим целые значения от 1 до 6 и показывающим количество не выполняющихся условий для принадлежности функции внутренних переживаний робота к эмоции. Будем считать, что чем тяжелее заболевание, тем больше значение *H*.

Определение 25.4. Вектором X симптомов заболевания назовем вектор с номерами невыполняющихся условий эмоций, принятых согласно номерам условий в определении эмоции.

Определение 25.5. Заболевание робота с вектором симптомов X_1 будем считать частным случаем заболевания робота с вектором симптомов X_2, если все элементы вектора симптомов X_2 встречаются среди элементов вектора симптомов X_1.

Приведем примеры заболеваний роботов.

1. Выберем функцию внутренних переживаний робота *f(t)*, удовлетворяющую всем условиям принадлежности к эмоциям, кроме условия 5, т. е. существует отличие от эмоции, которое задано соотношением $M(t^0) \neq 0$. Очевидно, что в этом случае тяжесть заболевания равна единице. Будем считать, что робот с такой функцией внутренних переживаний страдает неврастенией. Очевидно, что для неврастении вектор симптомов заболевания робота имеет вид X=(5).
2. Выберем функцию внутренних переживаний робота *f(t)*, удовлетворяющую всем условиям принадлежности к эмоциям, кроме условий 5, 6. Примером такой функции может служить функция вида $f(t) = t$. Очевидно, что в этом случае тяжесть заболевания равна двум. Робота, чья функция внутренних переживаний не совпадает с эмоцией по пунктам 5, 6, будем считать страдающим психастенией. Вектор симптомов психастении робота имеет вид X=(5, 6).

Исходя из значений векторов симптомов неврастении и психастении робота, можно сделать вывод о том, что общим для них является невыполнение условия 5, и, согласно определению 7, психастения является частным случаем неврастении робота.

Рассмотрим функцию внутренних переживаний робота, которая имеет вид

$$f(t) = P\sin\left(\frac{\pi}{t^0}t\right) - \frac{1}{2}P,\ \ P = const, \quad P > 0, \quad t \in \left[0, t^0\right]. \qquad (25.2)$$

Нетрудно заметить, тяжесть заболевания робота равна двум, а вектор симптомов удовлетворяет соотношению X=(4, 5).

Рассмотрим вопрос о лечении заболеваний роботов.

Пусть $f(t)$ – функция внутренних переживаний робота, не являющаяся эмоцией.

Наша задача состоит в том, чтобы, зная функцию эмоций $M(t)$, воздействовать дополнительной функцией $g(t)$ на функцию внутренних переживаний робота таким образом, чтобы результирующая функция стала эмоцией $M(t)$.

Сказанное можно, например, записать в виде формулы

$$M(t) = f(t) + g(t).$$

Легко видеть, что записанное соотношение эквивалентно равенству

$$g(t) = M(t) - f(t). \qquad (25.3)$$

Введем два определения.

<u>Определение 25.6.</u> Функцию $g(t)$, удовлетворяющую соотношению (25.3), где $M(t)$ – эмоция, $f(t)$ – функция внутренних переживания робота, назовем таблеткой.

<u>Определение 25.7.</u> Воздействие таблеткой на функцию внутренних переживаний робота назовем лечением.

Исходя из равенства (25.3), можно сказать, что таблетка существует всегда, т.е. любая болезнь робота, связанная с его эмоциями, излечима.

Зададим $M(t)$ в виде функции (25.1) и поставим цель: определить значение P таким образом, чтобы функция внутренних переживаний $f(t)$ как можно меньше отличалась от $M(t)$.

Предположим, что существуют интегралы $\int\limits_0^{t^0} \sin\left(\frac{\pi}{t^0}\tau\right) f(\tau)d\tau$ и $\int\limits_0^{t^0} f^2(\tau)d\tau$.

Очевидно, что в этом случае для нахождения величины P необходимо решить оптимизационную задачу: найти

$$\min_P J(P) = \min_P \int\limits_0^{t^0} \left[P\sin\left(\frac{\pi}{t^0}\tau\right) - f(\tau)\right]^2 d\tau .$$

Находя безусловный экстремум функции $J(P)$ и выражая из полученных формул величину *P*, получим соотношение, определяющее на основе вида эмоции (28.1) значение $P = P_{\min}$, которое дает наименьшее отклонение *M(t)* от функции внутренних переживаний робота:

$$P_{\min} = \frac{2\int\limits_0^{t^0} \sin\left(\frac{\pi}{t^0}\tau\right) f(\tau)d\tau}{t^0}. \qquad (25.4)$$

Введем следующее определение.

<u>Определение 25.8.</u> Остаточным болезненным явлением Ω после лечения назовем соотношение

$$\Omega = \int\limits_0^{t^0} \left[P_{\min} \sin\left(\frac{\pi}{t^0}\tau\right) - f(\tau)\right]^2 d\tau.$$

Предположим, что существует интеграл $\int\limits_0^{t^0} f(\tau)d\tau$.

Для определения значения *P*, позволяющего лечить робота так, чтобы элементарное воспитание, полученное от эмоции, минимально отличалось от элементарного воспитания от его функции переживаний, необходимо решить следующую оптимизационную задачу: найти

$$\min_P I(P) = \min_P \left[\int\limits_0^{t^0} P \sin\left(\frac{\pi}{t^0}\tau\right) d\tau - \int\limits_0^{t^0} f(\tau)d\tau\right]^2.$$

Легко видеть, что функция $I(P)$ принимает минимальное значение при величине $P = P^*$, удовлетворяющей соотношению

$$P^* = \frac{\pi \int\limits_0^{t^0} f(\tau)d\tau}{2t^0}. \qquad (25.5)$$

Нетрудно заметить, что величина $P = P^*$, задаваемая соотношением (28.5), обращает минимум функции $I(P)$ в нуль, что говорит о возможности лечения робота таким образом, что его элементарное воспитание от функций внутренних переживаний $f(t)$, не являющейся эмоцией, становится равным элементарному воспитанию от соответствующей гармонической эмоции.

Таким образом, если функцию внутренних переживаний робота можно описать с помощью математических формул, то возможно лечение любых психических заболеваний робота с помощью гармонической эмоции в аспекте равенства элементарных воспитаний, влекомых функцией переживаний и гармонической эмоцией. В этом случае таблетка определяется формулой

$$g(t) = P^* \sin\left(\frac{\pi}{t^0} t\right) - f(t).$$

Очевидно, что в зависимости от вида функции $f(t)$ таблетка $g(t)$ может быть знакопеременной функцией.

Введем <u>определение 25.9</u>.

Коэффициентом тяжести заболевания назовем величину α, удовлетворяющую соотношению

$$\alpha = \left| \frac{\int\limits_0^{t_0} f(t)dt}{\int\limits_0^{t_0} P_{\min} \sin\left(\frac{\pi}{t_0} t\right)dt} \right| = \frac{\pi \left| \int\limits_0^{t_0} f(t)dt \right|}{2t_0 \, | P_{\min} |}. \qquad (25.6)$$

Легко видеть, что α является безразмерной величиной.

Будем считать, что чем больше $|\alpha - 1|$, тем тяжелее болеет робот.

В качестве примера использования предложенных выше определений и формул были проведены эксперименты с участием практикующих врачей по оценке тяжести заболевания у больных психастенией.

В экспериментах приняли участие 24 пациента.

Суть экспериментов заключалась в следующем. Прежде всего, задавалось время продолжительности эмоции t_0, равное 5 с. Затем пациенту сообщалась информация (в терминах теории роботов сообщался сюжет), способная вызвать у него незначительные щадящие внутренние переживания (в терминах теории роботов формировалась функция внутренних переживаний $f(t)$). Фиксировалось изменение внутренних переживаний пациента в заданном отрезке времени $[0, t_0]$. Согласно соотношению (28.4) вычислялось значение $P_{\min}$, а затем вычислялась величина α по формуле (25.6).

Обработка результатов экспериментов показала, что наибольшему значению $|\alpha - 1|$ соответствовало наиболее тяжелое течение заболевания у пациентов в 87,5% случаев. При этом коэффициент α принадлежал отрезку $\alpha \in [1{,}18; 1{,}52]$.

Эксперименты показали, что предложенные математические модели «психических заболеваний» роботов можно в первом приближении применять при описании психастении у человека. Это говорит в пользу адекватности предлагаемых математических моделей и для описания «психических заболеваний» роботов.

26. МОДЕЛИ КОМПЛЕКСНЫХ ЭМОЦИЙ РОБОТОВ

Пусть задан вектор эмоций роботов $\bar{M}(\tau)$, определяющий комплексные эмоции. Этот вектор имеет вид

$$\bar{M}^{j}(\tau) = \left(M_i^j(\tau), \ldots, M_n^j(\tau)\right),$$

где n – количество проявляемых эмоций в комплексной эмоции робота, τ – текущее время действия эмоции.

Если известна цель воспитания, определяемая соотношением $\bar{A} = \left(A_1, \ldots, A_n\right)$, где $A_i = const$, $i = \overline{1, n}$, то величина достижения цели δ воспитательного процесса задается равенством

$$\delta(t) = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i R_i^j(t)}{\sum_{i=1}^{n} A_i^2}, \qquad (26.1)$$

где $R_i^j(t)$– воспитание робота, получаемое в результате действия эмоции с порядковым номером *i*, причем $R_i^j(t) = r_i^j(t) + \theta_i^j(t) R_i^{j-1}(t)$; $\theta_i^j(t)$– коэффициент памяти, удовлетворяющий соотношению $\theta_i^j(t) \in [0, 1]$; j – порядковый номер воспитательного такта; t – время воспитательного процесса; $r_i^j(t)$ - элементарное воспитание, удовлетворяющее соотношению $r_i^j(\tau) = \int_0^{\tau} M_i^j(\zeta) d\zeta$, $t = t_{i-1} + \tau$.

Дифференцируя равенство (26.1) по параметру t на отрезке $[t_{j-1}, t_j]$, получим формулу

$$\frac{d\delta(t)}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \frac{dR_i^j(t)}{dt}}{\sum_{i=1}^{n} A_i^2}. \qquad (26.2)$$

Согласно разделу 2 суммарная эмоция робота $V_i^j(t)$ удовлетворяет соотношению

$$V_i^j(t) = \frac{dR_i^j(t)}{dt} = \frac{dr_i^j(t)}{dt} + R_i^{j-1}(t)\frac{d\theta_i^j(t)}{dt} + \frac{dR_i^{j-1}(t)}{dt}\theta_i^j(t). \qquad (26.3)$$

Легко видеть, что для робота с абсолютной памятью формула (26.3) эквивалентна равенству

$$V_i^j(t) = \frac{dR_i^j(t)}{dt} = M_i^j(t).$$

Таким образом, соотношение (26.2) примет вид

$$\frac{d\delta(t)}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i V_i^j(t)}{\sum_{i=1}^{n} A_i^2}. \qquad (26.4)$$

Современные психологи считают, что эмоция положительна, если она приближает субъекта к намеченной цели. Таким образом, при справедливости неравенства $\frac{d\delta(t)}{dt} > 0$ комплексная эмоция-вектор будет положительна; при справедливости неравенства $\frac{d\delta(t)}{dt} < 0$ – отрицательна; а при выполнении условия $\frac{d\delta(t)}{dt} = 0$ – не будет иметь знака.

Но в современной векторной алгебре в общем случае не существует понятий «положительный» или «отрицательный» вектор. Поэтому выдвинем гипотезу о существовании единой характеристики для комплексных эмоций, которая определяет знак этой комплексной эмоции-вектора. Очевидно, что этой характеристикой будет знак величины $\frac{d\delta(t)}{dt}$.

Введем ряд определений.

<u>Определение 26.1.</u> Средней функцией $[f(t)]$ внутренних переживаний робота назовем функцию вида

$$[f(t)] = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i V_i^j(t)}{\sum_{i=1}^{n} A_i} \qquad (26.5)$$

при условии, что $\sum_{i=1}^{n} A_i \neq 0$, $t \in [0, t_0]$, t_0 – минимальное значение из всех тактов эмоций-компонент вектора амбивалентной эмоции.

Таким образом, средняя функция внутренних переживаний робота представляет собой функцию, при замене на которую всех суммарных эмоций-компонент в векторе комплексной эмоции получается величина $\frac{d\delta(t)}{dt}$, равная этой величине без замены. То есть для замены справедливо соотношение

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} A_i V_i^j(t)}{\sum_{i=1}^{n} A_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i [f(t)]}{\sum_{i=1}^{n} A_i^2}.$$

Определение 26.2. Среднюю функцию внутренних переживаний, являющуюся эмоцией, будем называть средней эмоцией $[M(t)]$.

Определение 26.3. Если средняя функция внутренних переживаний робота не является эмоцией, то будем считать, что робот психически болен и комплексная эмоция влечет заболевание.

Определение 26.4. Средним элементарным воспитанием $[D]$ назовем величину, удовлетворяющую соотношению

$$[D] = \int_0^{t_0} [M(\tau)] d\tau .$$

Определение 26.5. Средним воспитанием $[R]$ назовем величину, задаваемую формулой $[R] = \frac{\sum_{i=1}^n A_i R_i^j}{\sum_{i=1}^n A_i}$, при условии, что $\sum_{i=1}^n A_i \neq 0$.

Определение 26.6. Превалирующей эмоцией $M_k(t)$ в векторе амбивалентной эмоции будем называть эмоцию, для которой ее порядковый номер k в векторе комплексных эмоций влечет выполнение условия

$$\left| r_k^j - [D] \right| = \min_{i=\overline{1,n}} \left| r_i^j - [D] \right| .$$

Определение 26.7. Превалирующим элементарным воспитанием будем называть элементарное воспитание, соответствующее превалирующей эмоции.

Очевидно, что для каждого текущего такта j воспитания робота могут быть свои: средняя функция внутренних переживаний робота, средняя эмоция, превалирующая эмоция, превалирующее элементарное воспитание, среднее элементарное воспитание, среднее воспитание и величина, характеризующая знак амбивалентной эмоции.

Пусть эмоции $M_i^j(t), i = \overline{1,n}$ вектора комплексных эмоций имеют вид

$$M_i^j(t) = P_i^j \sin\left(\frac{\pi}{t_0} t\right), \; P_i^j = const \neq 0, \quad i = \overline{1,n}, \quad t \in [0, t_0]. \qquad (26.6)$$

Докажем теорему.

Теорема 26.1. Если $\sum_{i=1}^n A_i P_i^j \neq 0$, то для робота с абсолютной памятью средняя функция внутренних переживаний робота для эмоций, удовлетворяющих соотношениям (29.6), является эмоцией.

Доказательство. Легко видеть, что при условиях (29.6) величина $[f(t)]$ удовлетворяет соотношению

$$[f(t)] = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} A_i P_i^j}{\sum\limits_{i=1}^{n} A_i} \sin\left(\frac{\pi}{t_o} t\right). \qquad (26.7)$$

Очевидно, что формула (26.7) удовлетворяет определению эмоции, что и требовалось доказать.

Теорема 26.2. Если $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i > 0$, то знак средней эмоции совпадает со знаком комплексной эмоции.

Доказательство следует из сравнения формул (26.4) и (26.5).

Теорема 26.3. Если $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i < 0$, то знак средней эмоции противоположен знаку комплексной эмоции.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 26.2.

27. РОБОТЫ С АБСОЛЮТНОЙ ПАМЯТЬЮ

Рассмотрим роботов, для которых коэффициенты памяти удовлетворяют соотношениям $\theta_i \equiv 1, \quad i = \overline{1,n}$, где n – количество тактов воспитательного процесса.

Очевидно, что в этом случае воспитание R_n определяется формулой

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} r_i \,, \qquad (27.1)$$

где r_i – элементарное воспитание, соответствующее такту с порядковым номером i.

Согласно равенству (27.1) бесконечный воспитательный процесс R описывается соотношением

$$R = \lim_{n \to \infty} R_n = \sum_{i=1}^{\infty} r_i \,. \qquad (27.2)$$

Сформулируем следующие теоремы.

Теорема 27.1. Бесконечный воспитательный процесс на равноценных эмоциях для робота с абсолютной памятью расходится.

Доказательство. Так как эмоции равноценны, то справедливы равенства $r_i = q, \quad i = \overline{1,\infty}$. В силу этих равенств соотношение (27.2) примет вид

$$R = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} q = q \lim_{n\to\infty} n = \pm\infty,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 27.2. Если бесконечный воспитательный процесс сходится, то элементарные воспитания, на которых он основан, с бесконечным увеличением количества тактов стремятся к нулю.

Доказательство. Так как воспитательный процесс сходится, то справедливо неравенство $|\sum_{i=1}^{\infty} r_i| < \infty$. Следовательно, $\lim_{i\to\infty} r_i = 0$, что и требовалось доказать.

Сделаем одно замечание: сходимость воспитательного процесса соответствует наличию пресыщения воспитания при увеличении количества воспитательных тактов. С учетом этого замечания теорему 30.2 можно перефразировать так: если воспитательный процесс имеет пресыщение, то элементарные воспитания, на которых основан процесс, с бесконечным увеличением количества тактов стремятся к нулю.

В разделе 1 был приведен пример эмоции, которая описывается функцией $M(t) = P\sin\left(\frac{\pi}{t^0}t\right)$, где $P=const$, t^0 – продолжительность такта.

Аналогично этому примеру определим эмоции, соответствующие такту с порядковым номером i, в виде

$$M_i(t) = P_i \sin\left(\frac{\pi}{t_i^0}t\right), \tag{27.3}$$

где $P_i = const, t_i^0$ – продолжительность такта i, $i = \overline{1,\infty}$.

Легко видеть, что элементарное воспитание r_i, соответствующее эмоции (27.3), удовлетворяет соотношению $r_i = \frac{2}{\pi} P_i t_i^0$.

Таким образом, в силу теоремы 27.2 необходимым условием сходимости воспитания является выполнение равенства

$$\lim_{i\to\infty} P_i t_i^0 = 0.$$

Докажем следующие теоремы.

Теорема 27.3. Если $\lim\limits_{i\to\infty} t_i^0 = 0$, то $\lim\limits_{i\to\infty} r_i = 0$.

Доказательство. Согласно определению 1.3 справедливо неравенство $|P_i| < L < \infty$.

Следовательно, верна цепочка соотношений

$\left|\lim\limits_{i\to\infty} r_i\right| = \left|\lim\limits_{i\to\infty} P_i t_i^0\right| \le L \lim\limits_{i\to\infty} t_i^0 = 0$. Что требовалось доказать.

Теорема 27.4. Если $\lim\limits_{i\to\infty} P_i = 0$, то $\lim\limits_{i\to\infty} r_i = 0$.

Доказательство. Согласно определению 1.3 справедливо неравенство $\left|t_i^0\right| < S < \infty$. Следовательно, верна цепочка соотношений $\left|\lim\limits_{i\to\infty} r_i\right| = \left|\lim\limits_{i\to\infty} P_i t_i^0\right| \le S \,|\lim\limits_{i\to\infty} P_i| = 0$. Что требовалось доказать.

Исходя из вышеизложенного, можно сказать, что необходимое условие сходимости воспитания выполняется, если справедливы равенства $\lim\limits_{i\to\infty} t_i^0 = 0$, или $\lim\limits_{i\to\infty} P_i = 0$, или $\lim\limits_{i\to\infty} P_i t_i^0 = 0$.

Очевидно следующее утверждение: если существуют пределы t_i^0 и P_i при бесконечном увеличении количества тактов, справедливы соотношения $\lim\limits_{i\to\infty} t_i^0 \ne 0$ и $\lim\limits_{i\to\infty} P_i \ne 0$, то воспитательный процесс расходится.

Доказанные выше теоремы указывают на один из путей проектирования роботов с абсолютной памятью и не имеющих пресыщения воспитания. Например, для проектирования таких роботов достаточно выбрать последовательности амплитуд P_i и тактов t_i^0 такие, чтобы их пределы при бесконечном увеличении количества тактов i не были равны нулю. Одним из примеров расходящегося воспитания, как гласит теорема 27.1, является воспитание с равноценными эмоциями робота, т.е. когда выполняются условия

$$P_i = P = const, \quad t_i^0 = t^0 = const, \quad i = \overline{1,\infty}.$$

Для проектирования роботов с пресыщенным воспитанием можно в качестве бесконечного воспитания выбрать заранее известный сходящийся ряд, затем на его основе определить последовательности P_i, t_i^0, $i = \overline{1,\infty}$, которые удовлетворяют определению 1.3 и условиям теорем 27.3 или 27.4, и на основе этого выбора по формуле (27.3) задать эмоции робота для каждого из тактов.

На основе раздела 3 настоящего пособия можно утверждать, что конфликт по воспитаниям к моменту времени t двух роботов с абсолютной памятью наступает при выполнении условий

$$\sum_{k=1}^{i} r_k^{[1]} = \sum_{k=1}^{j} r_k^{[2]}, \quad t = \sum_{k=1}^{i} \tau_k^{[1]} = \sum_{k=1}^{j} \tau_k^{[2]}, \qquad (27.4)$$

где $r_k^{[1]}$, $r_k^{[2]}$ – элементарные воспитания первого и второго роботов соответственно, $\tau_k^{[1]}$, $\tau_k^{[2]}$ – соответствующие воспитательные такты этих роботов.

Пусть роботы воспитываются на равноценных эмоциях с соответствующими элементарными воспитаниями $r_0^{[1]}$ и $r_0^{[2]}$. Следовательно, исходя из соотношений конфликта (27.4), можем записать формулу $ir_0^{[1]} = jr_0^{[2]}$, т. е. условия наступления конфликта между двумя роботами в момент времени t примут вид

$$\frac{i}{j} = \frac{r_0^{[2]}}{r_0^{[1]}}, \quad t = \sum_{k=1}^{i} \tau_k^{[1]} = \sum_{k=1}^{j} \tau_k^{[2]}. \qquad (27.5)$$

Если справедливы соотношения

$$\tau_k^{1]} = \tau^{[1]} = const, \ \tau_k^{[2]} = \tau^{[2]} = const, \qquad (27.6)$$

то соотношения (27.5) эквивалентны формуле

$$\frac{i}{j} = \frac{r_0^{[2]}}{r_0^{[1]}} = \frac{\tau^{[2]}}{\tau^{[1]}},$$

которая определяет условие наступления конфликта по воспитаниям двух роботов с абсолютной памятью при равноценных эмоциях для каждого робота и равенстве тактов этих эмоций.

Для эмоций, принятых в виде формулы (27.3) с учетом соотношений (30.6), получим равенство

$$\frac{i}{j} = \frac{P^{[2]} t_{[2]}^0}{P^{[1]} t_{[1]}^0} = \frac{t_{[2]}^0}{t_{[1]}^0}, \qquad (27.7)$$

где $P^{[1]}, P^{[2]}, t_{[1]}^0, t_{[2]}^0$ – амплитуды эмоций и величины тактов первого и второго роботов соответственно. Из равенств (27.7) следует, что в этом случае конфликт между роботами возникает только при выполнении условий

$$P^{[1]} = P^{[2]} \text{ и } \frac{i}{j} = \frac{t_{[2]}^0}{t_{[1]}^0}.$$

Остановимся на выводе соотношений, определяющих дружбу роботов (см. раздел 4) с абсолютной памятью. В этом случае при равноценных эмоциях количество воспитательных тактов, необходимых для достижения дружбы роботов двух групп с одинаковым значением дружбы, находится из решения задачи

$$\text{найти} \min_{j \geq 1} \left(jq + R_0 - P_0 \right), \tag{27.8}$$

$$\text{при условии } jq + R_0 - P_0 \geq 0 .$$

Легко видеть, что задача (27.8) всегда имеет решение и, следовательно, роботов с абсолютной памятью всегда можно подружить друг с другом с обеспечением любого заданного значения дружбы.

Решим задачу построения эквивалентного воспитательного процесса (см. раздел 6) для роботов с абсолютной памятью.

Очевидно, что для определения значения элементарного воспитания q, соответствующего эквивалентному процессу, необходимо решить задачу

$$\text{найти} \min_{q} J(q) = \min_{q} \sum_{j=2}^{n} \left[R_j - R_1 - (j-1)q \right]^2 . \tag{27.9}$$

Задача (27.9) сводится к решению уравнения $\dfrac{dJ(q)}{dq} = 0$, которое в развернутой форме имеет вид

$$\sum_{j=2}^{n} \left[R_j - R_1 - (j-1)q \right] (j-1) = 0 . \tag{27.10}$$

Легко показать, что решение q уравнения (27.10) определяется соотношением

$$q = \frac{\sum\limits_{j=2}^{n} R_j (j-1) - R_1 \sum\limits_{j=2}^{n} (j-1)}{\sum\limits_{j=2}^{n} (j-1)^2} .$$

28. АЛГОРИТМ ЭМОЦИОНАЛЬНЫХ КОНТАКТОВ В ГРУППЕ РОБОТОВ

В настоящей главе предлагается правило взаимного контакта роботов в группе.

В разделе 2 показано, что воспитание робота R_i к концу такта i определяется формулой

$$R_i = r_i + \theta_i R_{i-1}, \qquad (28.1)$$

где θ_i – коэффициент памяти робота, характеризующий запоминание воспитания R_{i-1} к концу воспитательного такта с порядковым номером *i*.

Предположим, что роботы контактируют друг с другом, случайно обмениваясь эмоциями, порождающими элементарные воспитания.

Обозначим воспитание робота с порядковым номером *L* к концу такта *i* как $R_i^{[L]}$, а соответствующее этому такту элементарное воспитание – $r_i^{[L]}$. Аналогичным образом введем соответствующие обозначения для робота с порядковым номером *j*: $R_i^{[j]}$ и $r_i^{[j]}$.

Пусть на обоих роботов действует сюжет *S(t)*, порождающий эмоции: у робота *L* – $M_i^{[L]}$, у робота *j* – $M_i^{[j]}$.

Будем считать, что при выполнении условия $R_{i-1}^{[L]} R_{i-1}^{[j]} < 0$ справедливо соотношение $M_i^{[L]} M_i^{[j]} < 0$, а из формулы $R_{i-1}^{[L]} R_{i-1}^{[j]} > 0$ следует неравенство $M_i^{[L]} M_i^{[j]} > 0$.

Эмоции $M_i^{[L]}$ и $M_i^{[j]}$ порождают элементарные воспитания $r_i^{[L]}$ и $r_i^{[j]}$ соответственно, причем $r_i^{[L]} = \int_0^{t_i} M_i^{[L]}(\tau)d\tau$ и $r_i^{[j]} = \int_0^{t_i} M_i^{[j]}(\tau)d\tau$, где t_i - продолжительность такта с порядковым номером *i*. Очевидно, что знак элементарного воспитания равен знаку эмоции, порождающей это воспитание, и наоборот.

Будем считать, что знак воспитания к концу такта *i*-1 равен текущему знаку эмоции во время текущего такта *i* и элементарного индивидуального воспитания к концу этого такта.

Введем следующее определение.

Определение 28.1. Коэффициентом внушаемости будем называть число $k_i^{[j,L]}$, позволяющее делать замену эмоции *i* робота *L* на соответствующую эмоцию робота *j*, умноженную на величину этого числа, если $\left|r_i^{[L]}\right| < k_i^{[j,L]} \left|r_i^{[j]}\right|$, где $k_i^{[j,L]} > 0$.

Очевидно, что $k_i^{[j,j]} \equiv 1$.

Будем считать, что при общении (контакте) двух эмоциональных роботов воспитания каждого из них, согласно формуле (28.1), удовлетворяют соотношениям $R_i^{[L]} = \bar{r}_i^{[L]} + \theta_i R_{i-1}^{[L]}$, $R_i^{[j]} = \bar{r}_i^{[j]} + \theta_i R_{i-1}^{[j]}$, где

$$\overline{r}_i^{[L]} = \max\left\{\left|r_i^{[L]}\right|, k_i^{[j,L]}\left|r_i^{[j]}\right|\right\} sign\begin{cases} r_i^{[j]}, если\ k_i^{[j,L]}\left|r_i^{[L\}}\right| = \max\left\{\left|r_i^{[L]}\right|, k_i^{[j,L]}\left|r_i^{[j]}\right|\right\} \\ r_i^{[L]}, если \left|r_i^{[L]}\right| = \max\left\{\left|r_i^{[L]}\right|, k_i^{[j,L]}\left|r_i^{[j]}\right|\right\} \end{cases},$$

$$\overline{r}_i^{[j]} = \max\left\{\left|r_i^{[j]}\right|, k_i^{[L,j]}\left|r_i^{[L]}\right|\right\} sign\begin{cases} r_i^{[L]}, если\ k_i^{[L,j]}\left|r_i^{[j\}}\right| = \max\left\{\left|r_i^{[j]}\right|, k_i^{[L,j]}\left|r_i^{[L]}\right|\right\} \\ r_i^{[j]}, если \left|r_i^{[j]}\right| = \max\left\{\left|r_i^{[j]}\right|, k_i^{[L,j]}\left|r_i^{[L]}\right|\right\} \end{cases},$$

$k_i^{[j,L]}$– коэффициент внушаемости для робота L эмоций от робота j,

$k_i^{[L,j]}$– коэффициент внушаемости для робота j эмоций от робота L, $k_i^{[j,L]} > 0$, $k_i^{[L,j]} > 0$.

Введем следующие определения.

Определение 28.2. Если выполняется условие
$k_i^{[j,L]}\left|r_i^{[L\}}\right| = \max\left\{\left|r_i^{[L]}\right|, k_i^{[j,L]}\left|r_i^{[j]}\right|\right\}$, то робота с номером j назовем роботом-агитатором.

Определение 28.3. Изменение знака индивидуального воспитания робота на противоположный назовем перевоспитанием робота.

Очевидно, что знаки индивидуальных воспитаний роботов группы могут меняться только при наличии в группе роботов с разнознаковыми воспитаниями и присутствии в группе роботов-агитаторов.

В разделе 3 введена гипотеза, говорящая о том, что конфликт в группе роботов возникает лишь при суммарном воспитании группы, равном нулю. Исходя из этого и сказанного выше, следует нижеприведенная теорема.

Теорема 28.1. Конфликт в группе роботов может наступить лишь при первоначальных разнознаковых индивидуальных воспитаниях роботов и наличии роботов-агитаторов.

Настоящий раздел дает путь к моделированию на компьютере эмоционального поведения замкнутой группы роботов, общающихся друг с другом. Входными параметрами соответствующей компьютерной программы должны быть коэффициенты памяти каждого из роботов, их первоначальные индивидуальные воспитания и парные коэффициенты внушаемости. В ходе работы программы случайным образом вырабатываются эмоции роботов и соответствующие им элементарные воспитания при случайных контактах роботов. Результатами работы программы могут быть, например вычисляемое суммарное воспитание группы роботов, определяющее конфликты в этой группе, и индивидуальные воспитания каждого из роботов группы. Численные эксперименты могут позволить найти критические значения коэффициентов внушаемости и памяти роботов, влекущие наступление конфликтов в группе роботов после нескольких парных контактов.

Алгоритм поведения роботов в группе с лидером отличается от алгоритма поведения роботов в группе без лидера тем, что в первом случае при определении номера робота-учителя в группе, который является главным роботом-агитатором, необходимо находить порядковый номер наибольшей величины индивидуальных воспитаний роботов. Робот с этим значением номера будет выполнять роль постоянного робота-агитатора-лидера-учителя.

29. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЛАНА ТРАНСЛЯЦИИ ПЕРЕДАЧ СРЕДСТВ МАССОВОЙ ИНФОРМАЦИИ

Одна из задач государства – формирование общественного сознания. Немаловажную роль в ее решении играют средства массовой информации. Но зачастую проекты СМИ, например проекты телевидения, которые, прежде всего, воздействуют на эмоции человека и которые первоначально вызывали положительные эмоции и интерес у зрителей, с течением времени начинают вызывать отторжение у тех же зрителей, а поэтому теряют свою эффективность при формировании нужного государству общественного сознания у граждан и даже меняют первоначальную воспитательную цель на противоположную.

Настоящий раздел посвящен описанию математического способа оценки популярности программ СМИ и математическим рекомендациям по построению оптимального плана выпуска передач этих программ в эфир.

Предлагаемые в разделе математические модели основаны на моделях эмоциональных роботов, приведенных в предыдущих главах.

Соотношение, позволяющее вычислять воспитание человека (или робота), получаемое им в результате непрерывного воздействия на него сюжетами и порождающимися в результате этого у него эмоциями, имеет вид:

$$R_i = r_i + \theta_i R_{i-1}, \tag{29.1}$$

где i – порядковый номер сюжета, воздействующего на человека и порождающего у него элементарное воспитание r_i, R_i – суммарное воспитание человека, полученное им в результате воздействия на него общего количества сюжетов, равных величине i, θ_i – коэффициент памяти, характеризующий долю предыдущего суммарного воспитания, которую помнит человек к моменту воздействия на него сюжетом с порядковым номером i, $\theta_i \in (0,1-\delta]$, $0 < \delta < 1, \delta = const$.

Предположим, что $r_i = q = const$, $q > 0$, $\theta_i = \theta$, $R_0 = 0$. Легко видеть, что в рамках этих допущений соотношение (29.1) представляет собой сумму членов геометрической прогрессии, которая описывается известной формулой:

$$R_i = q\frac{1-\theta^i}{1-\theta}. \qquad (29.2)$$

Пусть значение i определяет порядковый номер передачи проекта, транслируемого в СМИ, т. е. каждая передача является сюжетом, порождающим положительное элементарное воспитание q.

Очевидно, что согласно законам геометрической прогрессии суммарное воспитание при непрерывной трансляции передач проекта СМИ имеет предел R, который удовлетворяет соотношению

$$R = \lim_{i\to\infty} R_i = \frac{q}{1-\theta}.$$

Таким образом, воспитание обладает сходимостью.

Ю.А. Шарапов предложил в качестве показателя α сходимости воспитания к своему предельному значению использовать соотношение, которое для положительной величины q принимает вид

$$\alpha = R_i - R_{i-1} = q\left(\frac{1-\theta^i}{1-\theta} - \frac{1-\theta^{i-1}}{1-\theta}\right) = q\frac{\theta^{i-1}-\theta^i}{1-\theta} = q\theta^{i-1}. \qquad (29.3)$$

Отметим, что согласно соотношению (29.2), с ростом i скорость увеличения значений суммарного воспитания R_i становится медленней, $\lim_{i\to\infty}\alpha = 0$, а поэтому воспитательный эффект передач на зрителя уменьшается.

Согласно гипотезе грузинского психолога Д.Н. Узнадзе эффект от воспитания при неправильном проведении воспитательных мероприятий может мгновенно поменяться на противоположный. В нашем случае гипотеза Г.М. Узнадзе эквивалента тому, что положительный знак суммарного воспитания R_i меняется на отрицательный тогда, когда передача надоела зрителю.

Величину α в формуле (29.3) назовем параметром «надоело».

Нетрудно заметить, что, зная величины параметра «надоело» α, элементарного воспитания q и коэффициента памяти θ, можно согласно равенству (29.3) определить порядковый номер i трансляции передачи, начиная с которого положительное отношение зрителей к передаче может поменяться на отрицательное, а, значит, передача может потерять свою популярность, что повлечет падение ее рейтинга.

Легко видеть, что этот порядковый номер определяется формулой

$$i = 1 + \log_\theta \frac{\alpha}{q}. \qquad (29.4)$$

Отметим, что для того, чтобы передачи оставили положительное воспоминание у зрителей после их завершения, их количество не должно превышать величину i, удовлетворяющую равенству (29.4).

Опишем математическую модель, позволяющую определять величину ожидания зрителями трансляции передачи после ее последнего выпуска в эфир.

Во время перерыва трансляции зритель частично забывает эмоциональное состояние, которое возникло у него после последней передачи в эфире.

Согласно формулам (29.1) и (29.2) через j временных пропусков трансляции передач воспитание зрителя R_j будет определяться формулой

$$R_j = \theta^j q \frac{1-\theta^i}{1-\theta}.$$

Эта формула соответствует формуле расчета фиктивных воспитательных тактов.

Пусть величина β, задаваемая соотношением

$$\beta = R_j - R_{j+1} = q\left(1-\theta^i\right)\theta^j, \qquad (29.5)$$

определяет величину ожидания передачи после перерыва трансляции передач.

Очевидно, что чем меньше величина ожидания β, тем с большим желанием зритель воспримет начало трансляции передач в эфире.

Количество временных пропусков j трансляции передач в эфире, необходимое для доброжелательного восприятия зрителями возобновления трансляции передач, можно получить из равенства (29.5):

$$j = \log_\theta \frac{\beta}{q\left(1-\theta^i\right)}.$$

Предложенная модель является математической записью гипотезы советского психолога Д.Н. Узнадзе о так называемых психологических установках человека.

Однако для необходимых расчетов возникает проблема разработки методов измерения таких психологических параметров, как элементарное воспитание q, коэффициент памяти θ, параметр «надоело» α, величина ожидания β.

В приближенном варианте можно считать справедливым равенство

$$\alpha = \beta, \qquad (29.6)$$

так как и α, и β определяют в общем одно и то же понятие «надело», только в первом случае «надоело» соответствует наступлению эмоционального отрицания передачи, а во втором случае – ситуации, когда зрителю «надоело» то, что в эфире нет передачи.

Исходя из соотношения (29.6) и учитывая формулы (29.3) и (29.5), можем записать следующее равенство:

$$q\theta^{i-1} = q\left(1-\theta^i\right)\theta^j. \qquad (29.7)$$

Разрешив уравнение (29.7) относительно j, получим соотношение

$$j = i - 1 - \log_\theta\left(1-\theta^i\right). \qquad (29.8)$$

Отметим, что формула (29.8) определяет необходимое количество пропусков передачи j при выполнении условий $j > 0$ и положительного восприятия аудиторией передачи в результате ее непрерывной трансляции i раз, что соответствует выполнению неравенства $q > 0$.

Заметим также, что, для практического использования можно определять количество пропусков передач J, большее на единицу расчетного количества пропусков j, при этом J вычисляется по формуле

$$J = ant[j] + 1. \qquad (29.9)$$

Легко видеть, что в силу выполнения условия $\theta \in (0, 1-\delta]$ при больших значениях величины i соотношение (29.8) можно записать в приближенном виде следующим образом:

$$j \approx i - 1. \qquad (29.10)$$

Коэффициенты памяти человека θ в большинстве случаев удовлетворяют условию $\theta \in [0.7, 0.9]$. Несложные вычисления, выполненные на основе формулы (32.8), позволяют построить таблицу, описывающую план оптимального количества выходов i и пропусков J передач в эфире для этих коэффициентов памяти.

Таблица 29.1

План оптимальной трансляции передач в эфире

Коэффициент памяти θ	Количество непрерывных выходов i передач в эфире	Количество пропусков J передач в эфире
0,7	3	1
-	5	4
-	7	6
-	9	8
-	11	10
-	31	30
0,9	9	4
-	11	7
-	13	10
-	15	12
-	17	15
-	19	17
-	21	20
-	25	24
-	27	26
-	29	28
-	31	30

Анализ табл. 29.1 позволяет утверждать, что при $\theta = 0.7$, начиная с передачи 5, а при значении $\theta = 0.9$, начиная с передачи 21, формула (29.9) дает те же результаты вычислений, что и соотношение (29.10).

<u>Назовем полным воспитательным циклом</u> суммарное количество непрерывных выходов передач в эфире и пропусков передач до их нового возобновления в эфире.

Пусть n - количество полных воспитательных циклов трансляции передачи, m_n - количество непрерывных трансляций передачи в воспитательном цикле с номером n, k_n - количество пропущенных трансляций в этом же воспитательном цикле.

Нетрудно заметить, что для вышеописанных соотношений справедливы равенства $i = m_1$, $j = k_1$.

Воспитание $W_{m_n,k_{n-1}}$, полученное в результате непрерывных трансляций m_n в воспитательном цикле n, удовлетворяет соотношению

$W_{m_n,k_{n-1}} = q\dfrac{1-\theta^{m_n}}{1-\theta} + \theta^{m_n} F_{m_{n-1},k_{n-1}}$, где

$$F_{m_1,k_1} = q\theta^{k_1}\frac{1-\theta^{m_1}}{1-\theta}, \quad F_{m_{n-1},k_{n-1}} = \theta^{k_{n-1}}\left(q\frac{1-\theta^{m_{n-1}}}{1-\theta} + \theta^{m_{n-1}} F_{m_{n-2},k_{n-2}}\right), \ F_{m_0,n_0} = 0 .$$

(29.11)

Аналогично формуле (29.3) можем написать соотношение для параметра «надоело» α_n для полного воспитательного цикла с порядковым номером n:

$$\alpha_n = W_{m_n,k_{n-1}} - W_{m_n-1,k_{n-1}} = q\theta^{m_n-1} + \theta^{m_n-1}(\theta-1)F_{m_{n-1},k_{n-1}} . \qquad (29.12)$$

Соотношение (29.12) позволяет вычислить величину m_n:

$$m_n = 1 + \log_\theta\left[\frac{\alpha_n}{q + (\theta-1)F_{m_{n-1},k_{m-1}}}\right].$$

Аналогично равенству (29.5) можем записать формулу величины ожидания β_n для этого же полного воспитательного цикла:

$$\beta_n = F_{m_n,k_n} - F_{m_n,k_n+1} = \theta^{k_n}(1-\theta)\left(q\frac{1-\theta^{m_n}}{1-\theta} + \theta^{m_n} F_{m_{n-1},k_{n-1}}\right). \qquad (29.13)$$

Соотношение (29.13) дает возможность вычислить значение k_n:

$$k_n = \log_\theta\left[\frac{\beta_n}{(1-\theta)\left(q\dfrac{1-\theta^{m_n}}{1-\theta} + \theta^{m_n} F_{m_{n-1},k_{n-1}}\right)}\right].$$

Пусть справедлива цепочка равенств

$$\alpha_l = \beta_l, \ l = \overline{1,n},$$

которая влечет соотношение

$$q\theta^{m_n-1}+\theta^{m_n-1}(\theta-1)F_{m_{n-1},k_{n-1}}=\theta^{k_n}(1-\theta)\left(q\frac{1-\theta^{m_n}}{1-\theta}+\theta^{m_n}F_{m_{n-1},k_{n-1}}\right). \quad (29.14)$$

Равенство (29.14) позволяет записать формулу для вычисления k_n:

$$k_n=\log_\theta\left[\frac{q\theta^{m_n-1}+\theta^{m_n-1}(\theta-1)F_{m_{n-1},k_{n-1}}}{(1-\theta)\left(q\frac{1-\theta^{m_n}}{1-\theta}+\theta^{m_n}F_{m_{n-1},k_{n-1}}\right)}\right]. \quad (29.15)$$

На основе соотношения (29.15) можно рассчитать приближенное количество k_n необходимых пропусков в трансляции передач, зная коэффициент памяти θ зрителя передачи, количество передач m_l, вызывающих положительные эмоции в каждом полном воспитательном цикле. При этом необходимо использовать рекуррентные формулы (29.11). Для вычисления параметра k_n целесообразно разработать компьютерную программу, позволяющую определять значения k_l и F_{m_l,k_l}, последовательно увеличивая l от 1 до n. Очевидно, что эта программа также позволит оперативно управлять планом выхода передач в эфире.

Легко видеть, что при преобразовании соотношения (29.15) его правая часть перестает зависеть от величины q. Поэтому в программе можно задать входной параметр q равным любому положительному числу.

В частности, предложенная в настоящем разделе модель позволяет сделать качественный вывод о том, что в любом долгосрочном проекте для хорошего восприятия передач зрителями необходимы перерывы в вещании, и предлагает приближенные формулы для вычисления длительности перерывов в зависимости от памяти зрителя и количества выпущенных в эфир передач проекта.

Отметим, что описанные математические модели могут также использоваться при воспитании роботов с неабсолютной памятью с помощью средств массовой информации.

30. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИНТЕРЕСА К ПРОЕКТАМ СМИ

30.1. Формула интереса

В рассматриваемой ниже математической модели будем предполагать последовательную смену одного полного воспитательного цикла другим полным воспитательным циклом.

Пусть n – количество полных воспитательных циклов трансляции передачи, m_n – количество непрерывных трансляций передачи в воспитательном цикле с номером n, k_n – количество пропущенных трансляций в этом же воспитательном цикле, θ_n– коэффициент памяти зрителя или радиослушателя в полном воспитательном цикле с номером n, q_n – элементарное воспитание (эмоциональное воздействие) у зрителя в результате ознакомления с передачей в полном воспитательном цикле с номером n.

Поделив обе части соотношения (29.12) на соотношение (29.13), получим

$$\gamma_n = \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{q_n \theta_n^{m_n - 1} + \theta_n^{m_n - 1}(\theta_n - 1) F_{m_{n-1}, k_{n-1}}}{\theta_n^{k_n}(1 - \theta_n)\left(q_n \dfrac{1 - \theta_n^{m_n}}{1 - \theta_n} + \theta_n^{m_n} F_{m_{n-1}, k_{n-1}}\right)}. \tag{30.1}$$

Величину $\Delta_n = \dfrac{1}{\gamma_n} = \dfrac{\beta_n}{\alpha_n}$ назовем параметром интереса к передаче. Будем считать, что большему интересу к передаче соответствует большее значение Δ_n, и наоборот.

Зная величину γ_n, из равенства (30.1) нетрудно найти величину k_n, которая будет удовлетворять формуле

$$k_n = \log_{\theta_n} \frac{q_n \theta_n^{m_n - 1} + (\theta_n - 1)\theta_n^{m_n - 1} F_{m_{n-1}, k_{n-1}}}{\gamma_n (1 - \theta_n)\left(q_n \dfrac{1 - \theta_n^{m_n}}{1 - \theta_n} + \theta_n^{m_n} F_{m_{n-1}, k_{n-1}}\right)}. \tag{30.2}$$

Отметим, что при известных величинах γ_i, q_i, θ_i, m_i, где $i = \overline{1, n}$, можно вычислить количество необходимых пропусков k_n передач в полном воспитательном цикле с порядковым номером n, обеспечивающих заданную величину γ_n.

30.2. Программа реализации модели

В настоящем разделе приведем описание программы при условии $\gamma_i = \gamma = const$, $i = \overline{1, n}$, позволяющей при известных γ, q_i, θ_i, m_i, где $i = \overline{1, n}$, вычислять необходимое количество k_n пропусков передач в полном воспитательном цикле с порядковым номером n.

Отметим, что при выполнении условия $\gamma_i = \gamma_1 = const$, где $i = \overline{1, n}$, согласно формуле (30.1), справедливо соотношение

$$\gamma_1 = \gamma_i = \frac{\theta_1^{m_1 - 1}}{\theta_1^{k_1}\left(1 - \theta_1^{m_1}\right)}. \tag{30.3}$$

Программа предполагает выполнение равенства (30.3) и позволяет вычислять значения k_n при $n > 1$.

Приведем краткое описание алгоритма программы:

1. В качестве входных параметров программы задаются численные значения n, q_i, θ_i, m_i, где $i = \overline{1,n}$, k_j, где $j = \overline{1,n-1}$.

2. По формуле (30.3) вычисляется значение γ.

3. Согласно соотношению (30.2) вычисляется параметр k_n.

4. Конец.

Заметим, что программа, прежде всего, позволяет оперативно планировать выход медиапроектов в эфир за счет вычисления необходимого числа пропусков k_n трансляции передач в текущем полном воспитательном цикле n, где $n > 1$, при условии поддержания заданного интереса γ_1, вычисленного по результатам оценки популярности проекта в первом полном воспитательном цикле. Для расчета всех параметров полного воспитательного цикла с порядковым номером n программу необходимо отправить на выполнение $n-1$ раз, последовательно рассчитывая воспитательные циклы, начиная со второго.

Программа написана на языке программирования *Delphi 7*, выполняется под управлением ОС не ниже *Wndows XP*. Объем загрузочного модуля программы равен 368 Кб. Время выполнения программы при расчете сотого полного воспитательного цикла не превышает 3 с. Для работы программы можно использовать компьютеры небольшой вычислительной мощности.

На рис. 30.1 приведена форма программы.

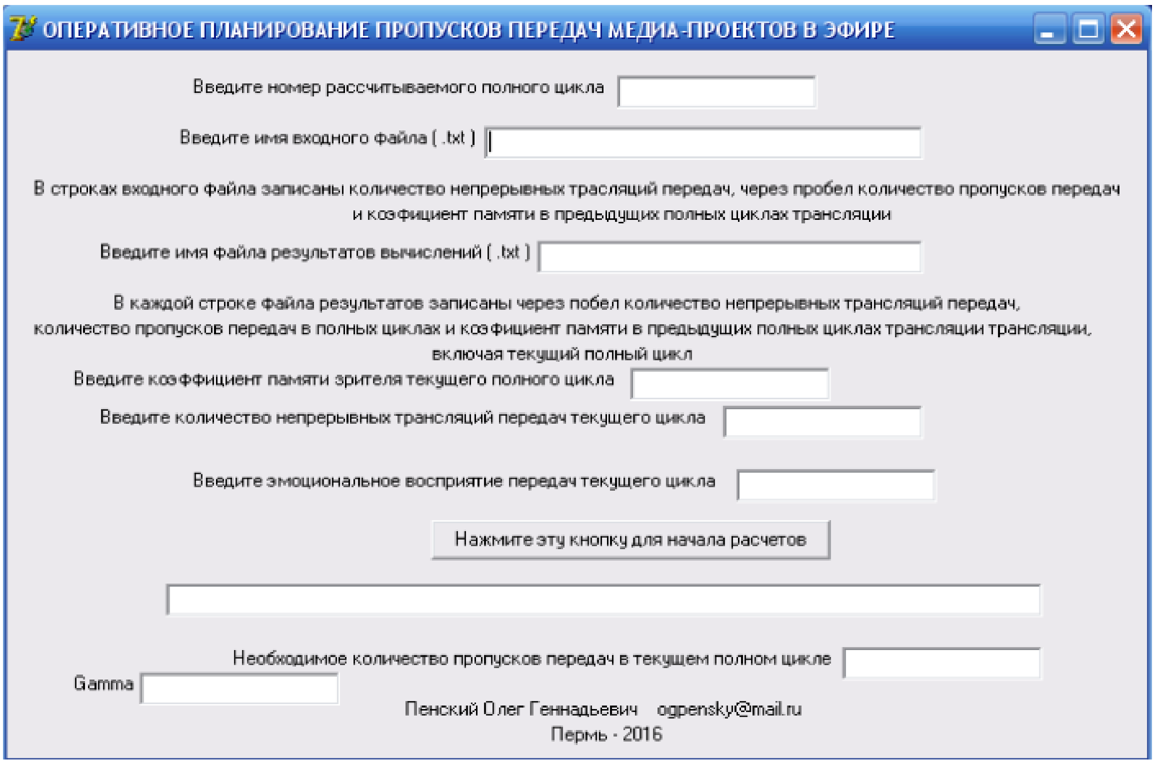

Рис. 30.1. Форма программы

30.3. Способ приближенного определения входных параметров модели и вычислительный эксперимент

Для выполнения программы необходим ввод входных параметров модели q_i, θ_i, где $i=\overline{1,n}$. Для определения этих параметров предложим использовать программу Санкт-Петербургской компании ЭЛСИС, позволяющую численно измерять эмоциональное состояние человека с помощью количества микровибраций его головы.

Мы предлагаем в каждом полном воспитательном цикле производить три измерения эмоционального состояния человека с помощью программы компании «ЭЛСИС»: в начале трансляции первой передачи полного воспитательного цикла, в конце передачи трансляции первой передачи полного воспитательного цикла и через один пропуск передачи после второго измерения.

Пусть $R_i^{[j]}$ – соответствующие измеренные значения для воспитательного цикла с порядковым номером i, где j – порядковый номер измерения в этом цикле, $j=\overline{1,3}$.

Согласно соотношениям (29.11), можем записать формулы, определяющие эмоциональные состояния для трех измерений:

$$R_i^{[1]} = F_{m_{i-1}.k_{i-1}}, \tag{30.4}$$

$$R_i^{[2]} = q_i + \theta_i F_{m_{i-1},k_{i-1}}, \tag{30.5}$$

$$R_i^{[3]} = \theta_i q_i + \theta_i^2 F_{m_{i-1},k_{i-1}}. \tag{33.6}$$

Решая систему уравнений (30.4) – (30.6), получим соотношения

$$\theta_i = \frac{R_i^{[3]}}{R_i^{[2]}},\ q_i = R_i^{[2]} - \theta_i R_i^{[1]}. \tag{30.7}$$

Заметим, что при предположениях $\theta_i = \theta_1 = const$, $q_i = q_1 = const$, где $i=\overline{1,n}$, для работы программы достаточно измерить $R_1^{[2]}$ и $R_1^{[3]}$, а значению q_1 присвоить любое положительное число. Возможность произвольного численного присвоения q_1 объясняется тем, что при перечисленных предположениях правые части расчетных формул (30.1) и (30.2), используемых в алгоритме программы, перестают зависеть от величины q_1.

В качестве примера использования математической модели приведем таблицу расчетов, выполненных с помощью описанной выше программы. В табл. 30.1 размещены числа, полученные при постоянных коэффициентах памяти и эмоциональных воздействиях передач для четырех полных воспитательных циклов ($n=4$).

Таблица 30.1

Пример использования математической модели

θ	0,6	0,7	0,8	0,9
m_1	5	5	5	5
k_1	6	6	4	4
m_2	5	5	5	5
k_2	7	7	7	11
m_3	5	5	5	5
k_3	7	7	6	9
m_4	5	5	5	5
k_4	7	7	6	9

Пока вопрос о построении плана выпуска медиапроектов, обеспечивающего постоянный интерес массовой аудитории к проекту для разных коэффициентов памяти зрителей или слушателей передач, остается открытым. Но описанный способ построения такого плана может использоваться главными редакторами проектов для оценки аудиторией эмоционального восприятия долговременных медиапроектов на основе личного восприятия этих проектов самими главными редакторами или экспертами.

31. ПРОСТЕЙШИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОПАГАНДЫ И КОНТРПРОПАГАНДЫ

В настоящее время не изучен вопрос построения математических моделей вычисления воспитания группы субъектов с помощью СМИ. Предложим простейшие модели одновременного воспитания этой группы.

31.1. Математическая модель одновременного воспитания группы субъектов

Пусть n – количество субъектов в группе (количество членов группы), j – порядковый номер субъекта в этой группе, $j = \overline{1,n}$, $\theta_{j,i}$ – коэффициент памяти субъекта к моменту воздействия на него передачи СМИ с порядковым номером i, $\theta_{ij,} \in (0,1-\delta_j]$, $0 < \delta_j < 1, \delta_j = const$, $r_{j,i}$ – элементарное воспитание субъекта j, $R_{j,i}$ – суммарное воспитание члена группы, полученное им в результате воздействия на него общего количества передач.

При данных обозначениях введем следующее равенство:

$$R_{j,i} = r_{j,i} + \theta_{j,i} R_{j,i-1}. \qquad (31.1)$$

По аналогии с формулой (31.1) будем считать, что суммарное воспитание группы субъектов определяется формулой

$$\sum_{j=1}^{n} R_{j,i} = \sum_{j=1}^{n} r_{j,i} + \sum_{j=1}^{n} \theta_{j,i} R_{j,i-1}\,. \tag{31.2}$$

Разделив обе части равенства (31.2) на величину n, получим соотношение

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} R_{j,i}}{n} = \frac{\sum_{j=1}^{n} r_{j,i}}{n} + \frac{\sum_{j=1}^{n} \theta_{j,i} R_{j,i-1}}{n}\,. \tag{31.3}$$

Введем следующие обозначения: $\bar{R}_i = \dfrac{\sum_{j=1}^{n} R_{j,i}}{n}$, $\bar{r}_i = \dfrac{\sum_{j=1}^{n} r_{j,i}}{n}$.

Согласно введенным обозначениям равенство (31.3) примет вид

$$\bar{R}_i = \bar{r}_i + \frac{\sum_{j=1}^{n} \theta_{j,i} R_{j,i-1}}{n}\,. \tag{31.4}$$

31.2. Математическая модель групповой памяти

Пусть

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} \theta_{j,i} R_{j,i-1}}{n} = \bar{\theta}_i \frac{\sum_{j=1}^{n} R_{j,i-1}}{n} = \bar{\theta}_i \bar{R}_{i-1}\,. \tag{31.5}$$

С учетом (31.5) формула (31.4) примет вид

$$\bar{R}_i = \bar{r}_i + \bar{\theta}_i \bar{R}_{i-1}\,. \tag{31.6}$$

Нетрудно заметить, что согласно соотношению (31.5) справедливо равенство

$$\bar{\theta}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} \theta_{j,i} R_{j,i-1}}{\sum_{j=1}^{n} R_{j,i-1}}\,. \tag{31.7}$$

Коэффициент $\bar{\theta}_i$ назовем коэффициентом групповой памяти.

Очевидно, что коэффициент групповой памяти при $r_{j,i} > 0$ удовлетворяет соотношению $\bar{\theta}_i \in (0{,}1-\delta]$, $0 < \delta < 1$, $\delta = \mathrm{const}$.

Пусть каждый член группы имеет равноценные эмоции и каждый субъект является равномерно забывчивым, т.е. справедливы равенства $\theta_{j,i} = \theta_j$, $r_{j,i} = q_j > 0$.

Легко видеть, что при этих условиях соотношение (31.7) примет вид

$$\bar{\theta}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} \theta_j q_j \frac{1-\theta_j^{i-1}}{1-\theta_j}}{\sum_{j=1}^{n} q_j \frac{1-\theta_j^{i-1}}{1-\theta_j}}. \qquad (31.8)$$

31.3. Модель пропаганды и контрпропаганды

Пусть непрерывная пропаганда порождает у группы непрерывное положительное воспитание, задаваемое следующей формулой:

$$\bar{R}_i = \bar{r}_i + \bar{\theta}_i \bar{R}_{i-1}. \qquad (31.9)$$

Одновременно непрерывная контрпропаганда порождает у той же группы отрицательное воспитание B_i , удовлетворяющее соотношению

$$\bar{B}_i = \bar{b}_i + \bar{a}_i \bar{B}_{i-1}, \qquad (31.10)$$

где $\bar{b}_i$ – элементарное воспитание группы, получаемое в результате воздействия передачи СМИ с порядковым номером i, $\bar{a}_i$ – коэффициент групповой памяти при запоминании передач контрпропаганды.

Будем считать, что справедливо неравенство

$$r_i b_i < 0.$$

Пусть пропаганда побеждает контрпропаганду, если выполняется условие $|B_i| < R_i$; если справедливо соотношение $|B_i| > R_i$, то контр-пропаганда побеждает пропаганду; если справедливо равенство $|B_i| = R_i$, то группа находится в состоянии эмоционального ступора, при котором не может принять решения ни в пользу пропаганды, ни в пользу контр-пропаганды.

Рассмотрим последний из перечисленных случаев, так как он описывает ситуацию, после наступления которой группа может принять решение, как в пользу пропаганды, так и в пользу контрпропаганды.

Согласно соотношениям (31.9) и (31.10) этот случай описывается формулой

$$\bar{r}_i + \bar{\theta}_i \bar{R}_{i-1} + \bar{b}_i + \bar{a}_i \bar{B}_{i-1} = 0. \qquad (31.11)$$

Пусть в условиях наступления ступора справедливо соотношение

$$\bar{r}_i + \bar{b}_i = 0. \qquad (31.12)$$

Очевидно, что в этом случает соотношение (31.11) примет вид

$$\bar{\theta}_i \bar{R}_{i-1} = -\bar{a}_i \bar{B}_{i-1}.$$

Предположим, что ступор группы длится на протяжении двух следующих друг за другом передач СМИ: передачи с порядковым номером i и передачи порядковым номером $i-1$.

Легко видеть, что в этом случае справедливо соотношение

$$\bar{\theta}_i = \bar{a}_i\,, \tag{31.13}$$

которое согласно соотношениям (31.7) и (31.12) при равномерной забывчивости и равноценности эмоций при воздействии средств контрпропаганды и пропаганды на каждого члена группы эквивалентно равенству

$$\frac{\sum_{j=1}^{n}\theta_j q_j \frac{1-\theta_j^{i-1}}{1-\theta_j}}{\sum_{j=1}^{n} q_j \frac{1-\theta_j^{i-1}}{1-\theta_j}} = -\frac{\sum_{j=1}^{n} a_j h_j \frac{1-a_j^{i-1}}{1-a_j}}{\sum_{j=1}^{n} h_j \frac{1-a_j^{i-1}}{1-a_j}}\,, \tag{31.14}$$

где a_j – коэффициент памяти каждого члена группы для передач контрпропаганды, h_j – элементарное воспитание, порожденное отдельной контрпропагандистской передачей у члена группы с порядковым номером j.

Анализ равенства (31.14) позволяет сформулировать следующую теорему.

<u>Теорема 31.1</u>

При равенстве коэффициентов памяти каждого члена группы и равенстве модулей равноценных эмоций каждого члена группы для каждой непрерывно транслируемой передачи контрпропаганды и пропаганды группа будет находиться в постоянном эмоциональном ступоре, то есть не сможет принять решения ни в пользу контрпропаганды, ни в пользу пропаганды.

Нетрудно заметить, что, объединяя равенства (31.12) и (31.14), можно сформулировать более общее условие эмоционального ступора групп:

для равномерно забывчивых членов группы и равноценности их эмоций от просмотра каждой передачи пропаганды и контрпропаганды ступор после просмотра передач с порядковыми номерами i *и* $i-1$ *наступает тогда, когда одновременно выполняются равенства*

$$\frac{\sum_{j=1}^{n}\theta_j q_j \frac{1-\theta_j^{i-1}}{1-\theta_j}}{\sum_{j=1}^{n} q_j \frac{1-\theta_j^{i-1}}{1-\theta_j}} = -\frac{\sum_{j=1}^{n} a_j h_j \frac{1-a_j^{i-1}}{1-a_j}}{\sum_{j=1}^{n} h_j \frac{1-a_j^{i-1}}{1-a_j}}\,, \tag{31.15}$$

$$\sum_{j=1}^{n} q_j = -\sum_{j=1}^{n} h_j \ .$$

Отметим, что соотношения (31.15) позволяют найти такой порядковый номер i при непрерывной трансляции передач, при котором может наступить изменение группового сознания в пользу или пропаганды, или контрпропаганды.

Для определения численного значения i необходимо знать коэффициенты памяти θ_j, a_j и элементарные воспитания q_j, h_j для каждого члена группы. Эти величины можно измерить, используя методику, приведенную в предыдущем разделе.

Предложенные математические модели могут применяться при построении плана трансляции передач в условиях пропаганды и одновременной контрпропаганды, в том числе среди групп роботов, с целью предотвращения наступления эмоционального ступора и устранения нежелательных эффектов, связанных с изменением взглядов при формировании нужного общественного сознания.

32. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ИНДИВИДУАЛЬНОЙ ПСИХОЭМОЦИОНАЛЬНОЙ АДАПТАЦИИ К СПОРТИВНЫМ ТРЕНИРОВКАМ ДЕТЕЙ-ИНВАЛИДОВ ПО ЗРЕНИЮ

Настоящий раздел написан на основе работ Л.В. Шаровой, А.В.Шарова и Ф.Д. Рудакова и является одним из примеров применения описанных выше моделей в такой сфере деятельности человека, как спорт.

Проблема адаптации организма человека, своевременной оперативной диагностики, профилактики и коррекции переходных состояний сегодня является одной из важнейших в биологии, физиологии и медицине.

Интересно изучение вопросов психоэмоциональной адаптации школьников с ограниченными возможностями к зимним видам экстремального туризма, связанного с техникой, например снегоходным туризмом.

Изучение важности адаптационных возможностей организма к экстремальным видам спорта школьников с ограниченными возможностями здоровья связано с тем, что, во-первых, зимний туризм обеспечивает непосредственное общение с природной средой и техническими средствами, являющимися обязательным условием занятий экстремальными видами снегоходного туризма; во-вторых, научное изучение этого феномена позволит решить ряд социальных задач, связанных с улучшением адаптации школьников-снегоходчиков в социуме.

Говоря о возможностях адаптации школьников-инвалидов по зрению к этому виду спорта, важно отметить следующие ограничения на управление автотранспортными средствами, касающиеся именно этой категории инвалидов.

В первую очередь это хронические заболевания глаз, которые сопровождаются значительными нарушениями функции зрения, а также воспаление слезного мешка.

К глазным проблемам, которые препятствуют осуществлению желания стать водителем, также относятся: диплопия и косоглазие, ограничение поля зрения больше чем на 20^0 и понижение остроты зрения ниже 0,6 на глазу, который видит лучше, и ниже 0,2 на глазу, который видит хуже, полное отсутствие зрения на одном глазу, заболевания зрительного нерва и сетчатки. В подтверждение этого приведем медицинские критерии, согласно которым устанавливаются группы инвалидности по зрению. **I группа инвалидности** устанавливается при IV степени нарушений функций зрительного анализатора (см. табл. 32.1) – значительно выраженных нарушениях функций (абсолютная или практическая слепота) и снижении одной из основных категорий жизнедеятельности до 3-й степени с необходимостью социальной защиты. Основные критерии IV степени нарушений функций зрительного анализатора: а) слепота (зрение равно 0) на оба глаза; б) острота зрения с коррекцией лучшего глаза не выше 0,04; в) двустороннее концентрическое сужение границ поля зрения до 10-0° от точки фиксации независимо от состояния остроты центрального зрения. **II группа инвалидности** устанавливается при III степени нарушений функций зрительного анализатора – выраженные нарушения функций (слабовидение высокой степени) и снижении одной из основных категорий жизнедеятельности до II степени с необходимостью социальной защиты. Основными критериями выраженных нарушений функций зрения являются: острота зрения лучшего глаза от 0,05 до 0,1; двустороннее концентрическое сужение границ поля зрения до 10–20° от точки фиксации, когда трудовая деятельность возможна лишь в специально созданных условиях. **III группа инвалидности** устанавливается при II степени – умеренных нарушениях функций (слабовидение средней степени) и снижении одной из основных категорий жизнедеятельности до 2-й степени с необходимостью социальной защиты. Основными критериями умеренных нарушений функций зрения являются: а) снижение остроты зрения лучше видящего глаза от 0,1 до 0,3; б) одностороннее концентрическое сужение границ поля зрения от точки фиксации менее 40°, но более 20°. Отметим, что школьники-инвалиды по зрению страдают в большинстве случаев именно перечисленными симптомами заболеваний.

Таким образом, согласно требованиям к установлению групп инвалидности по зрению и ограничений на вождение автотранспортных средств, инвалиды по зрению, в частности инвалиды I и II групп, не имеют права выступать в качестве водителей, например снегоходов.

Выходом из этой ситуации является привлечение инвалидов по зрению к зимнему туризму с использованием снегоходов в качестве пассажиров автотранспортного средства.

Основным из критериев необходимости привлечения школьников-инвалидов по зрению к снегоходному туризму, на наш взгляд, является необходимость социальной адаптации детей-инвалидов и устранение у них страха перед окружающим миром, связанным с невозможностью школьников-инвалидов полноценно оценить опасности, идущие от этого мира в незнакомых ситуациях. Зимний снегоходный экстремальный туризм позволит в некоторой степени это устранить, сделать детей более адаптированными к изменяющимся реалиям действительности. Для социальной адаптации детей необходимо постепенно и планомерно устранять страх с одновременным сохранением интереса к зимнему снегоходному туризму, т. е. важна прежде всего психоэмоциональная оценка школьников этого вида спорта.

Таблица 32.1

Критерии установления групп инвалидности по зрению

Функции зрения	Степень нарушения функций			
Единственного или лучше видящего глаза с коррекцией	I. Незначительные (малая степень слабовидения)	II. Умеренные (средняя степень слабовидения)	III. Выраженные (высокая степень слабовидения)	IV. Значительно выраженные (практическая или абсолютная слепота)
Острота зрения	**От 0,4 до 0,7**	**более 0,1 менее или равно 0,3**	**От 0,05 до 0,1**	**От 0 до 0,04**
Поле зрения (периферические границы по меридиану от точки фиксации)	Сужено до 40 град.	Менее 40 град., но шире 20 град	Равно или менее 20 град., но шире 10 град.	10 град.- 0
Скотомы в центральном поле зрения	нет	Единичные относительные скотомы	а) единичные абсолютные скотомы; б) множественные не сливные скотомы	а) центральная скотома 10 град. и более; б) парацентральные абсолютные сливные скотомы
Показатели ЭФИ Пороги ЭЧ (мкА) Лабильность (Гц) КЧСМ (Гц)	до 80 до 45	до 120 до 30 до 30	до 300 до 20 до 20	более 300-0 менее 20-0 менее 20-0
Зрительная работоспособность	нет снижения	умеренное снижение	выраженное снижение	значительно выраженное снижение - отсутствие

Адаптируем описанные выше математические модели оценки психоэмоционального влияния передач СМИ на человека к оценке психо-эмоционального влияния спортивных тренировок на спортсменов.

Соотношение, позволяющее вычислять воспитание человека, получаемое им в результате непрерывного воздействия на него сюжетами и порождающимися в результате этого у него эмоциями, имеет вид

$$R_i = r_i + \theta_i R_{i-1}, \qquad (32.1)$$

где i – порядковый номер сюжета, воздействующего на человека и порождающего у него элементарное воспитание r_i, R_i – суммарное воспитание человека, полученное им в результате воздействия на него общего количества сюжетов, равных величине i, θ_i – коэффициент памяти, харак-теризующий долю предыдущего суммарного воспитания, которую помнит человек к моменту воздействия на него сюжетом с порядковым номером i, $\theta_i \in (0,1-\delta]$, $0 < \delta < 1, \delta = const$.

В нашем случае будем считать сюжетом проведенную со спортсменом тренировку.

Предположим, что $r_i = q = const,\ \ q > 0,\ \ \theta_i = \theta,\ \ R_0 = 0$. Легко видеть, что в рамках этих допущений соотношение (32.1) представляет собой сумму членов геометрической прогрессии, которая описывается известной формулой:

$$R_i = q\frac{1-\theta^i}{1-\theta}. \qquad (32.2)$$

Пусть значение i определяет порядковый номер тренировки, т. е. каждая тренировка является сюжетом, порождающим положительное элементарное воспитание q.

Очевидно, что согласно законам геометрической прогрессии суммарное эмоциональное воспитание при непрерывных спортивных тренировках имеет предел R, который удовлетворяет соотношению

$$R = \lim_{i\to\infty} R_i = \frac{q}{1-\theta}.$$

Таким образом, воспитание обладает сходимостью.

В качестве показателя α сходимости воспитания к своему предельному значению используем соотношение, которое для положительной величины q принимает вид

$$\alpha = R_i - R_{i-1} = q\left(\frac{1-\theta^i}{1-\theta} - \frac{1-\theta^{i-1}}{1-\theta}\right) = q\frac{\theta^{i-1}-\theta^i}{1-\theta} = q\theta^{i-1}. \qquad (32.3)$$

Отметим, что согласно соотношению (32.3), с ростом i скорость увеличения значений суммарного воспитания R_i становится медленней, $\lim_{i\to\infty}\alpha = 0$, а поэтому эффект эмоционального воспитания спортсмена с ростом количества непрерывных тренировок уменьшается.

Согласно гипотезе грузинского психолога Д.Н.Узнадзе эффект от воспитания при неправильном проведении воспитательных мероприятий может мгновенно поменяться на противоположный. В нашем случае гипотеза Г.М. Узнадзе эквивалента тому, что положительный знак суммарного воспитания R_i меняется на отрицательный тогда, когда тренировки надоели спортсмену.

Величину α в формуле (32.3) назовем параметром «надоело».

Нетрудно заметить, что, зная величины параметра «надоело» α, элементарного воспитания q и коэффициента памяти θ, можно согласно равенству (32.3) определить порядковый номер i тренировки, начиная с которой положительное отношение спортсмена к спорту может поменяться на отрицательное, а, значит, спортсмен может прекратить занятия спортом.

Легко видеть, что этот порядковый номер определяется формулой

$$i = 1 + \log_\theta \frac{\alpha}{q}. \qquad (32.4)$$

Отметим, что для того, чтобы тренировки оставляли положительное воспоминание у спортсмена после их завершения, их количество не должно превышать величину i, удовлетворяющую равенству (32.4).

Опишем формулы, позволяющие определять величину ожидания спортсменом следующей тренировки после предыдущей.

Во время перерыва в тренировках спортсмен частично забывает эмоциональное состояние, которое возникло у него после последней тренировки.

Согласно формулам (32.1) и (32.2) через j пропусков тренировок воспитание спортсмена R_j будет определяться формулой

$$R_j = \theta^j q \frac{1-\theta^i}{1-\theta}.$$

Эта формула соответствует формуле расчета фиктивных воспитательных тактов.

Пусть величина β, задаваемая соотношением

$$\beta = R_j - R_{j+1} = q\left(1-\theta^i\right)\theta^j, \qquad (32.5)$$

определяет величину ожидания тренировки спортсменом после их перерыва.

Очевидно, что чем меньше величина ожидания β, тем с большим желанием спортсмен воспримет начало нового цикла тренировок.

Количество временных пропусков j тренировок, необходимое для доброжелательного восприятия спортсменом новых тренировок, можно получить из равенства (32.5):

$$j = \log_\theta \frac{\beta}{q\left(1-\theta^i\right)}.$$

Предложенная модель является математической записью гипотезы советского психолога Д.Н. Узнадзе о так называемых психологических установках человека.

Однако для необходимых расчетов возникает проблема разработки методов измерения таких психологических параметров, как элементарное воспитание q, коэффициент памяти θ, параметр «надоело» α, величина ожидания β.

В приближенном варианте можно считать справедливым равенство

$$\alpha = \beta, \qquad (32.6)$$

так как и α, и β определяют в общем одно и то же понятие – «надоели тренировки», только в первом случае «надоело» соответствует наступлению эмоционального отрицания тренировок, а во втором – ситуации, когда спортсмену «надоело» то, что тренировок нет.

Исходя из соотношения (32.6) и учитывая формулы (32.3) и (32.5), можем записать следующее равенство:

$$q\theta^{i-1} = q\left(1-\theta^{i}\right)\theta^{j}. \qquad (32.7)$$

Разрешив уравнение (32.7) относительно j, получим соотношение

$$j = i - 1 - \log_{\theta}\left(1-\theta^{i}\right). \qquad (32.8)$$

Отметим, что формула (32.8) определяет необходимое количество пропусков спортивных тренировок j при выполнении условий $j > 0$ и положительного эмоционального восприятия спортсменом тренировок в результате их непрерывного повторения i раз, что соответствует выполнению неравенства $q > 0$.

Заметим также, что, для практического использования можно определять количество пропусков тренировок J, большее на единицу расчетного количества пропусков j, при этом J вычисляется по формуле

$$J = ant[j] + 1. \qquad (32.9)$$

Легко видеть, что в силу выполнения условия $\theta \in \left(0, 1-\delta\right]$ при больших значениях величины i соотношение (32.8) можно записать в приближенном виде следующим образом:

$$j \approx i - 1. \qquad (32.10)$$

Назовем тренировочным циклом суммарное количество непрерывных тренировок и пропусков тренировок до их возобновления.

Пусть n – количество полных тренировочных циклов, m_n – количество непрерывных тренировок в тренировочном цикле с номером n, k_n – количество пропущенных тренировок в этом же тренировочном цикле.

Нетрудно заметить, что для вышеописанных соотношений справедливы равенства $i = m_1$, $j = k_1$.

Эмоциональное воспитание спортсмена $W_{m_n,k_{n-1}}$, полученное в результате непрерывных тренировок m_n в тренировочном цикле n, можно записать в виде соотношения

$$W_{m_n,k_{n-1}} = q\frac{1-\theta^{m_n}}{1-\theta} + \theta^{m_n} F_{m_{n-1},k_{n-1}}, \text{ где}$$

$$F_{m_1,k_1} = q\theta^{k_1}\frac{1-\theta^{m_1}}{1-\theta}, \quad F_{m_{n-1},k_{n-1}} = \theta^{k_{n-1}}\left(q\frac{1-\theta^{m_{n-1}}}{1-\theta} + \theta^{m_{n-1}} F_{m_{n-2},k_{n-2}}\right), \; F_{m_0,n_0} = 0. \qquad (32.11)$$

Аналогично формуле (31.3) можем написать соотношение для параметра «надоело» α_n для тренировочного цикла с порядковым номером n:

$$\alpha_n = W_{m_n, k_{n-1}} - W_{m_n - 1, k_{n-1}} = q\theta^{m_n - 1} + \theta^{m_n - 1}(\theta - 1)F_{m_{n-1}, k_{n-1}}. \qquad (32.12)$$

Соотношение (32.12) позволяет вычислить величину m_n:

$$m_n = 1 + \log_\theta \left[\frac{\alpha_n}{q + (\theta - 1)F_{m_{n-1}, k_{m-1}}} \right].$$

Аналогично равенству (31.5) можем записать формулу величины ожидания β_n для этого же тренировочного цикла:

$$\beta_n = F_{m_n, k_n} - F_{m_n, k_n + 1} = \theta^{k_n}(1 - \theta)\left(q\frac{1 - \theta^{m_n}}{1 - \theta} + \theta^{m_n} F_{m_{n-1}, k_{n-1}} \right). \qquad (32.13)$$

Соотношение (32.13) дает возможность вычислить значение k_n:

$$k_n = \log_\theta \left[\frac{\beta_n}{(1 - \theta)\left(q\frac{1 - \theta^{m_n}}{1 - \theta} + \theta^{m_n} F_{m_{n-1}, k_{n-1}} \right)} \right].$$

Пусть справедлива цепочка равенств

$$\alpha_l = \beta_l, \ l = \overline{1, n},$$

которая влечет соотношение

$$q\theta^{m_n - 1} + \theta^{m_n - 1}(\theta - 1)F_{m_{n-1}, k_{n-1}} = \theta^{k_n}(1 - \theta)\left(q\frac{1 - \theta^{m_n}}{1 - \theta} + \theta^{m_n} F_{m_{n-1}, k_{n-1}} \right). \qquad (32.14)$$

Равенство (36.14) позволяет записать формулу для вычисления k_n:

$$k_n = \log_\theta \left[\frac{q\theta^{m_n - 1} + \theta^{m_n - 1}(\theta - 1)F_{m_{n-1}, k_{n-1}}}{(1 - \theta)\left(q\frac{1 - \theta^{m_n}}{1 - \theta} + \theta^{m_n} F_{m_{n-1}, k_{n-1}} \right)} \right]. \qquad (32.15)$$

На основе соотношения (32.15) можно рассчитать приближенное количество k_n необходимых пропусков тренировок, зная коэффициент памяти θ спортсмена, количество тренировок m_l, вызывающих положительные эмоции в каждом тренировочном цикле и используя рекуррентные формулы (32.11).

Легко видеть, что при преобразовании соотношения (32.15) его правая часть перестает зависеть от величины q. Поэтому в расчетах можно задать входной параметр q равным любому положительному числу.

Для выполнения расчетов необходимо знание психоэмоциональных параметров спортсмена: q, θ. Для определения этих параметров предложим использовать программу Санкт-Петербургской компании «ЭЛСИС», позволяющую численно измерять эмоциональное состояние человека с помощью подсчета количества микровибраций его головы.

Мы предлагаем в каждом тренировочном цикле производить три измерения эмоционального состояния спортсмена – в начале первой тренировки тренировочного цикла, в конце этой тренировки и через один пропуск тренировки после второго измерения.

Пусть $R^{[j]}$ – соответствующие измеренные значения для первого тренировочного цикла, где j – порядковый номер измерения в этом цикле, $j = \overline{1,3}$.

Согласно соотношениям (32.1) можем записать формулы, определяющие эмоциональные состояния спортсмена для трех измерений:

$$R^{[1]} = F_{m_{i-1}.k_{i-1}}, \tag{32.16}$$

$$R^{[2]} = q + \theta F_{m_{i-1},k_{i-1}}, \tag{32.17}$$

$$R^{[3]} = \theta q + \theta F_{m_{i-1},k_{i-1}}. \tag{32.18}$$

Решая систему уравнений (32.16) – (32.18), получим соотношения

$$\theta = \frac{R^{[3]}}{R^{[2]}},\ q = R^{[2]} - \theta_i R^{[1]}. \tag{32.19}$$

Коэффициенты памяти человека θ в большинстве случаев удовлетворяют условию $\theta \in [0.7, 0.9]$. Несложные вычисления, выполненные на основе формулы (32.19), позволяют построить табл.32.2, описывающую план оптимального количества тренировок i и их пропусков J для этих коэффициентов памяти.

Анализ табл. 32.2 позволяет утверждать, что при $\theta = 0.7$ начиная с тренировки 5, а при значении $\theta = 0.9$ начиная с тренировки 21 формула (32.9) дает те же результаты вычислений, что и соотношение (32.10).

На основе экспертного оценивания можно сделать вывод о том, что дети-инвалиды по зрению обладают небольшим коэффициентом эмоциональной памяти, т.е. их коэффициент памяти в большинстве случаев удовлетворяет соотношению $\theta = 0.7$.

Первые 7 строк табл.32.2 предлагают один из путей сохранения постоянного интереса к тренировкам у детей-инвалидов по зрению, в частности к зимнему снегоходному туризму при коэффициенте памяти $\theta = 0.7$, за счет планирования количества тренировок, не причиняющих эмоциональный стресс детям, что обеспечивается учетом в вышеприведенных формулах положительного восприятия каждой тренировки тренировочного цикла у спортсменов. Однако предложенные в статье формулы дают возможность планировать индивидуальные тренировки спортсменов-инвалидов (и не только инвалидов) с учетом любых значений их коэффициентов эмоциональной памяти.

Таблица 32.2

План оптимального плана количества тренировок

Коэффициент памяти θ	Количество i непрерывных тренировок	Количество J пропусков тренировок
0,7	3	1
-	5	4
-	7	6
-	9	8
-	11	10
-	31	30
0,9	9	4
-	11	7
-	13	10
-	15	12
-	17	15
-	19	17
-	21	20
-	25	24
-	27	26
-	29	28
-	31	30

Отметим, что описанные выше математические модели оценки эмоционального влияния тренировок на начинающих спортсменов, и, в частности, на детей-инвалидов по зрению, позволяют планировать индивидуальные тренировочные циклы согласно измеренным коэффициентам эмоциональной памяти спортсмена с сохранением положительного восприятия каждой тренировки; также могут использоваться для построения планов тренировок не только для экстремальных, но и других видов спорта.

33. АНОМАЛЬНОЕ ВОСПИТАНИЕ РОБОТА

Введем следующие определения.

Определение 33.1. Аномальным воспитанием робота R_i на сюжетах *S(t)* назовем последовательность вида

$$R_i = r_i + \theta_i R_{i-1}, \tag{33.1}$$

для которой справедливо равенство $\lim\limits_{i \to \infty} R_i = \infty$, где i – порядковый номер такта, R_i – воспитание, полученное роботом в конце такта i, r_i –

элементарное воспитание в конце такта i, причем, справедливы соотношения $0<\theta_i \le Z$, Z − некоторая положительная постоянная, $Z \ge 1$.

Сформулируем и докажем следующие теоремы.

<u>Теорема 33.1</u>

Если $\lim\limits_{i\to\infty} R_i = A = const < \infty$, $\lim\limits_{i\to\infty}\theta_i = 1$, то $\lim\limits_{i\to\infty} r_i = 0$.

Доказательство

Согласно равенству (33.1) справедлива формула

$$r_i = R_i - \theta_i R_{i-1}. \qquad (33.2)$$

Переходя в соотношении (39.2) к пределу и учитывая условия теоремы, получим последовательность формул

$$\lim_{i\to\infty} r_i = \lim_{i\to\infty} R_i - \lim_{i\to\infty}\theta_i \lim_{i\to\infty} R_{i-1} = A - 1A = 0,$$

что и требовалось доказать.

<u>Теорема 33.2</u>

Для робота с равноценными положительными эмоциями при выполнении условий $\lim\limits_{i\to\infty}\theta_i = 1$, $\theta_{i+1} > \theta_i$ воспитание робота аномальное.

Доказательство

Сформулируем теорему несколько иначе:

если $r_i = q > 0,\quad i = \overline{1,\infty}$ и $\lim\limits_{i\to\infty}\theta_i = 1$, то $\lim\limits_{i\to\infty} R_i = \infty$.

Пусть $\lim\limits_{i\to\infty} R_i = A = const$. Согласно теореме 40.1 справедливо равенство $\lim\limits_{i\to\infty} r_i = 0$, но $\lim\limits_{i\to\infty} r_i = q$. Поэтому $q = 0$, что противоречит условию теоремы 33.2 : $q > 0$. Поэтому последовательность R_i расходится.

Нетрудно заметить, что при выполнении условия $r_i = q > 0,\quad i = \overline{1,\infty}$ соотношение (33.1) принимает вид

$$R_i = q(1 + \theta_i + \theta_i\theta_{i-1} + \theta_i\theta_{i-1}\theta_{i-2} + \ldots + \theta_i\theta_{i-1}\theta_{i-2}\ldots\theta_2\theta_1) = qD_i. \qquad (33.3)$$

Так как последовательность R_i расходится, то в силу соотношения (33.3) расходится последовательность

$$D_i = 1 + \theta_i + \theta_i\theta_{i-1} + \theta_i\theta_{i-1}\theta_{i-2} + \ldots + \theta_i\theta_{i-1}\theta_{i-2}\ldots\theta_2\theta_1.$$

Отметим справедливость неравенства $D_i > 0$.

Докажем, что последовательность D_i монотонно возрастающая.

Справедливо равенство

$$D_i - D_{i-1} = (\theta_i - \theta_{i-1}) + \theta_{i-1}(\theta_i - \theta_{i-2}) + \theta_{i-1}\theta_{i-2}(\theta_i - \theta_{i-3}) + \ldots + \theta_{i-1}\theta_{i-2}\ldots\theta_2(\theta_i - \theta_1). \qquad (33.4)$$

В силу условия теоремы 33.2 справедливы неравенства $\theta_{i+1} > \theta_i$, $i = \overline{1,\infty}$, а поэтому согласно соотношению (33.4) $D_i - D_{i-1} > 0$ или $D_i > D_{i-1}$, а, значит, согласно свойству расходящейся монотонно возрастающей последовательности

$$\lim_{i\to\infty} D_i = \infty.$$

С учетом последнего равенства и соотношения (33.3) справедлива цепочка формул

$$\lim_{i\to\infty} R_i = q\lim_{i\to\infty} D_i = \infty .$$

Таким образом, робот обладает аномальным воспитанием.

<u>Теорема 33.3</u>

Если $r_i \geq q > 0$ и $\lim_{i\to\infty}\theta_i = 1$, $\theta_{i+1} > \theta_i$ то воспитание робота аномальное.

Доказательство

Записав равенство (33.1) в развернутой форме и учитывая условие $r_i > q > 0$, получим следующую цепочку соотношений:

$$\lim_{i\to\infty} R_i = \lim_{i\to\infty}(r_i + \theta_i R_{i-1}) = \lim_{i\to\infty}(r_i + \theta_i r_{i-1} + \theta_i\theta_{i-1}r_{i-2} + \theta_i\theta_{i-1}\theta_{i-2}r_{i-3} + \theta_i\theta_{i-1}\theta_{i-2}...\theta_2\theta_1 r_0) \geq$$

$$\geq \lim_{i\to\infty}[q(1+\theta_i + \theta_i\theta_{i-1} + \theta_i\theta_{i-1}\theta_{i-3} + ... + \theta_i\theta_{i-1}\theta_{i-3}...\theta_2\theta_1)] = \infty , \qquad (33.4)$$

что и требовалось доказать.

<u>Теорема 33.4</u>

Если $\theta_i \geq 1$, $r_i \geq q > 0$, $i = \overline{1,\infty}$, то воспитание робота аномальное.

Доказательство

Аналогично формуле (33.4) можем записать цепочку соотношений

$$\lim_{i\to\infty} R_i = \lim_{i\to\infty}(r_i + \theta_i R_{i-1}) = \lim_{i\to\infty}(r_i + \theta_i r_{i-1} + \theta_i\theta_{i-1}r_{i-2} + \theta_i\theta_{i-1}\theta_{i-2}r_{i-3} + \theta_i\theta_{i-1}\theta_{i-2}...\theta_2\theta_1 r_0) \geq$$

$$\geq \lim_{i\to\infty}[q(1+\theta_i + \theta_i\theta_{i-1} + \theta_i\theta_{i-1}\theta_{i-3} + ... + \theta_i\theta_{i-1}\theta_{i-3}...\theta_2\theta_1)] \geq$$

$$\geq \lim_{i\to\infty}[q(1+1+1+1+...+1)] \geq \lim_{i\to\infty} qi = \infty .$$

Следовательно, $\lim_{i\to\infty} R_i = \infty$, т. е. воспитание робота аномально.

Выше было показано, что групповая память роботов записывается формулой

$$\bar{R}_i = \bar{r}_i + \bar{\theta}_i \bar{R}_{i-1} , \qquad (33.5)$$

где коэффициент групповой памяти определяется соотношением

$$\bar{\theta}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n}\theta_{j,i}R_{j,i-1}}{\sum_{j=1}^{n}R_{j,i-1}} . \qquad (33.6)$$

Отметим, что справедливо неравенство $R_{j,i-1} > 0$.

Сформулируем и докажем следующую теорему.

<u>Теорема 33.5</u>

Если $\exists l$ такое, что $\lim_{i\to}\theta_{l,i} = 1$ и $r_{l,i} \geq q > 0$, $R_{r,i} < \infty$ при $k \neq l$, то воспитание группы аномальное.

Доказательство

Так как $\lim_{i\to}\theta_{ji} = 1$ и $r_i \geq q > 0$, то согласно теореме 33.3 справедливо соотношение

$$\lim_{i\to\infty} R_{l,i} = \infty . \qquad (33.7)$$

С учетом формулы (33.7), переходя к пределу при $i \to \infty$ в обеих частях соотношения (33.6), получим

$$\lim_{i\to\infty}\bar{\theta}_i = \frac{\lim\limits_{i\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n}\theta_{j,i}R_{j,i}}{\lim\limits_{i\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n}R_{j,i}} = \frac{\lim\limits_{i\to\infty}\theta_{l,i}\lim\limits_{i\to\infty}R_{l,i}}{\lim\limits_{i\to\infty}R_{l,i}} = \lim_{i\to\infty}\theta_{l,i} = 1. \qquad (33.8)$$

В силу равенства (33.8) и согласно теореме 36.3 справедлива формула

$$\lim_{i\to\infty}\bar{R}_i = \infty,$$

т.е. воспитание группы роботов является аномальным, что и требовалось доказать.

Также нетрудно доказать утверждение о том, что если существует по крайней мере одно анамальное воспитание в группе роботов при возрастающем и монотонном бесконечном стремлении индивидуальных коэффициентов памяти роботов к единице с увеличением количества тактов или не меньшем единицы хотя бы одного индивидуального коэффициента памяти, то воспитание всей группы будет аномальным.

Будем считать, что индивидуальное аномальное воспитание соотвествует психическому заболеванию отдельного робота, а групповое аномальное воспитание означает психоз группы роботов в целом (психоз толпы).

34. ОБ ИНФОРМАЦИОННЫХ АСПЕКТАХ Е-СУЩЕСТВА

В настоящее время ученые США рассматривают вопрос о создании электронной копии человека, которую называют Е-существом или «цифровой копией».

Попробуем исследовать идею американцев с информационной точки зрения.

Сделаем ряд замечаний:

1. Любой человек не обладает абсолютной памятью, т. е. часть полученной информации он забывает: это его природное свойство.
2. Существующий человек способен накапливать информацию, моментально не забывая часть ее, конечными порциями.

Приведем следующие определения.

Определение 34.1. Порцией будем называть количество новой информации, которая полностью запоминается человеком.

Определение 34.2. Время поступления порции назовем информационным тактом.

Отметим одно очевидное свойство порции: количество бит s_i в порции i ограничено, т.е. существует такое число q, для которого всегда справедливы неравенства

$$s_i \le q, \quad q \ge 0, \quad i = \overline{0, \infty}.$$

Аналогично методике, изложенной в разделе 2, запишем формулу

$$S_{i+1} = s_{i+1} + \lambda_{i+1} S_i, \qquad (34.1)$$

где i – номер информационного такта, $i = \overline{0, n}$; s_{i+1} – порция с порядковым номером $i+1$; S_{i+1} – вся информация, которую запомнил человек в результате i+1 информационного такта; λ_{i+1} – коэффициент информационной памяти человека (характеризует часть запоминаемой полной информации от предыдущих i информационных тактов). Очевидно, что коэффициент информационной памяти человека, соответствующий концу информационного такта, удовлетворяет соотношению $0 \le \lambda < 1 - \delta$, $\delta > 0, \quad \delta = const$, $\lambda \ge \lambda_i, \quad i = \overline{0, \infty}$, причем существует такое число $\lambda < 1$, что $\lambda \ge \lambda_i, \quad i = \overline{0, \infty}$, $\lambda \in (0, 1)$.

В силу свойства информации справедливо неравенство $s_i \ge 0$, следовательно, вся накопленная информация больше или равна нулю.

Предположим, что создана электронная копия человека. Докажем одно из информационных свойств этой копии.

Теорема 34.1. Полная информация S, которую может запомнить чип копии, ограничена.

Доказательство. Используя методику, изложенную в разделе 2, свойства порции и соотношение (37.1), легко получить неравенство

$$S_{i+1} \le q \frac{1 - \lambda^{i+1}}{1 - \lambda}. \qquad (34.2)$$

Переходя в неравенстве (34.2) к пределу при бесконечном увеличении количества тактов (времени существования бессмертного человека), получим цепочку соотношений

$$S = \lim_{i \to \infty} S_i \le q \lim_{i \to \infty} \frac{1 - \lambda^i}{1 - \lambda} = \frac{q}{1 - \lambda} < \infty.$$

Таким образом, теорема доказана.

Следствие 34.1. Невозможно создать Е-существо с неабсолютной памятью, которое имело бы способность бесконечно накапливать информацию.

Доказательство следует из формулировки теоремы 34.1.

Таким образом, следует важный вывод о том, что *единственное бесконечно существующее Е-существо, котрое является развивающейся, эволюционирующей копией обычного земного человека, невозможно, хотя бы из информационных соображений*.

Бессмертное электронное существо со способностями неограниченного накопления информации возможно только в том случае, если оно будет обладать абсолютной информационной памятью (при выполнении условий $\lambda_i \equiv 1, \quad i=\overline{1,\infty}$), но это существо будет уже не копией обычного забывчивого человека, а роботом.

Для бесконечной информационной эволюции Е-существа с неабсолютной памятью можно сказать, что «перезаписывать» информацию из чипа электронного Е-существа – предка с неабсолютной памятью в чип потомка с неабсолютной памятью необходимо в тот момент, когда величина накопленной информации будет близка к величине *S*. С целью дальнейшего накопления информации Е-существом (копией обычного земного человека с неабсолютной памятью) необходимо регулярно переписывать в чипе существа-потомка полученную конечную информацию существа-предка, т.е. полагать s_0 равным S_k, где k – количество информационных тактов Е-существа-предка за все время его существования.

Отметим одно свойство информационных коэффициентов памяти, изменяющихся во время t длительности информационного такта, где $t \in [t_i, t_{i+1}]$.

<u>Теорема 34.2.</u> $\lambda_{i+1}(0) = 1$.

<u>Доказательство.</u> Аналогично соотношению (34.1) можем записать формулу

$$S_{i+1}(0) = s_{i+1}(0) + \lambda_{i+1}(0) S_i . \qquad (34.3)$$

Но в начальный момент информационного такта справедливы соотношения

$$S_{i+1}(0) = S_i, \quad s_{i+1}(0) = 0 . \qquad (34.4)$$

Подставляя равенства (34.4) в формулу (34.3) и решая полученное уравнение относительно $\lambda_{i+1}(0)$, получим соотношение $\lambda_{i+1}(0) = 1$, что и требовалось доказать.

Определим линейную зависимость, позволяющую приближенно описывать изменение информационного коэффициента памяти во время информационного такта.

Очевидно, что $S_{i+1} = s_{i+1} + \lambda_{i+1}(t_{i+1}) S_i$. Следовательно, справедлива формула

$$\lambda_{i+1} = \lambda_{i+1}(t_{i+1}) = \frac{S_{i+1} - s_{i+1}}{S_i}. \qquad (34.5)$$

Предположим справедливость равенства

$$\lambda_{i+1}(t) = at + b.$$

В силу теоремы 34.2 и соотношения (34.5) справедлива система линейных уравнений

$$\lambda_{i+1}(0) = b = 1, \qquad (34.6)$$

$$\lambda_{i+1}(t_{i+1}) = \lambda_{i+1} = a(t_{i+1} - t_i) + b. \qquad (34.7)$$

Решая систему уравнений, получим соотношения

$$a = \frac{\lambda_{i+1} - 1}{t_{i+1} - t_i}, \quad b = 1.$$

Таким образом, можем записать формулу

$$\lambda_{i+1}(t) \approx \frac{\dfrac{S_{i+1} - s_{i+1}}{S_i} - 1}{t_{i+1} - t_i} t + 1,$$

где $t \in [t_i, t_{i+1}]$.

Легко видеть, что многие положения теории эмоциональных роботов, изложенные в предыдущих главах настоящей монографии, можно без труда адаптировать к аспектам накапливания информации Е-существом. Мы предлагаем читателям сделать это самим в качестве интеллектуальных упражнений.

<u>Определение 34.3</u>. Функцию $C(t)$ будем назвать стимулом, если она обладает следующими свойствами:

1) область определения *C(t)*: $t \in \left[0, t^*\right]$, $t^* > 0$, $t^* < \infty$;
2) *C(t)*>0 для любого $t \in \left[0, t^*\right]$;
3) *C(t)* – однозначная и непрерывная функция;
4) *C(t)* – ограниченная функция.

<u>Определение 34.4</u>. Функцию *S(t)* будем называть сюжетом, если она обладает следующими свойствами:

1) область определения *S(t):* $t \in \left[0, t^*\right]$, $t^* > 0$, $t^* < \infty$;
2) *S(t)*>0 для любого $t \in \left[0, t^*\right]$;
3) *S(t)* – взаимнооднозначная функция;
4) *S(t)* – ограниченная функция.

Исходя из введенных выше определений очевидна теорема 37.3.

<u>Теорема 34.3.</u> Функция $\int_0^t C(\tau)d\tau$ является сюжетом, где $t \in \left[0, t^*\right]$.

<u>Доказательство</u> очевидно.

Будем предполагать справедливость равенства $s_i = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} C_i(\tau)d\tau$, где $C_i(\tau)$ – стимул с областью определения $\tau \in [t_{i-1}, t_i]$.

Легко доказать следующую теорему.

Теорема 34.4. Если $C_i(\tau)$ есть скорость потока информации, то величина S_i является численным значением сюжета, соответствующего концу информационного такта с порядковым номером i.

Доказательство очевидно.

Определение 34.5. Логическим действием робота назовем процесс, который можно описать в виде алгоритма.

Определение 34.6. Робота, способного действовать логически, назовем информационным роботом.

Определение 34.7. Робота, запоминание информации которым описывается с помощью информационных коэффициентов памяти, назовем роботом с неабсолютной информационной памятью.

Пусть в результате действия сюжета S_i робот должен принять логическое альтернативное решение. Введем гипотезу о том, что робот оценивает логический результат своих интеллектуальных действий на основе знака и величины информационного воспитания H_i, которое порождается в его чипах полученным логическим действием.

Не нарушая общности, можем записать соотношение

$$H_i = b_i S_i,$$

где $b_i = const$.

Введем еще одну гипотезу: коэффициент b_i определяет знак эмоционального результата, влекущего информационное воспитание логического действия робота.

Теорема 34.5. Если последовательность коэффициентов $|b_i|$, $i = \overline{1,\infty}$ равномерно ограничена и справедливы соотношения (34.1), то справедливы неравенства

$$|H_i| \le bs\frac{1-\lambda^{i+1}}{1-\lambda},\ |H| = \lim_{i\to\infty}|H_i| \le bs\lim_{i\to\infty}\frac{1-\lambda^i}{1-\lambda} = b\frac{s}{1-\lambda} < \infty,$$

где $|b_i| \le b$.

Доказательство. Справедливость неравенства $|H_i| \le bs\dfrac{1-\lambda^{i+1}}{1-\lambda}$ следует из соотношения (34.1). Доказательство справедливости второго неравенства в формулировке теоремы следует из цепочки соотношений $|H| = \lim_{i\to\infty} |H_i| \le bs \lim_{i\to\infty} \frac{1-\lambda^i}{1-\lambda} = b\frac{s}{1-\lambda} < \infty$. Таким образом, теорема доказана.

Следствие 34.2. При условиях теоремы 37.5 информационные воспитания, соответствующие концам информационных тактов, ограничены и стремятся к постоянной величине при бесконечном увеличении времени существования робота с неабсолютной памятью.

Доказательство очевидно.

Будем считать, что существует такое число $J > 0$, что для любых эмоций робота выполняется условие $|M(t)| \le J$.

Рассмотрим случай, когда вывод, полученный в результате интеллектуальной деятельности робота, влечет одновременно и эмоциональное воспитание, порожденное эмоцией робота, и информационное воспитание, являющееся результатом оценивания логических действий.

В этом случае возможен ступор (ситуация, соответствующая психологическому конфликту между эмоциональной и логической сферами мышления робота), обусловливающий следующее равенство:

$$R_j + H_i = 0, \tag{34.8}$$

где j – порядковый номер эмоционального такта.

Будем считать, что выполнение условия $|R_j| > |H_i|$ влечет принятие решения роботом на основе эмоций, а справедливость неравенства $|R_j| < |H_i|$ – принятие решения на основе логики.

Введем определения.

Определение 34.8. Фиктивным информационным тактом назовем временной интервал, равный информационному такту, но при отсутствии информационного воздействия на робота.

Определение 34.9. Информационного робота, у которого порции равны для любого информационного такта, назовем равноинформационным роботом.

Определение 34.10. Информационного робота с неабсолютной памятью, у которого все информационные коэффициенты памяти равны между собой, назовем равноценно забывчивым роботом.

Сформулируем следующую теорему.

Теорема 34.6. Для равномерно забывчивого робота с равноценными эмоциями, одновременно являющегося равноинформационным и равноценно забывчивым, условие наступления ступора при выборе альтернативного решения между логическим и эмоциональным решениями определяется равенством

$$q\frac{1-\theta^j}{1-\theta}=-b_i s\frac{1-\lambda^i}{1-\lambda},$$

где j – порядковый номер эмоционального такта, i – порядковый номер информационного такта, $\theta_j=\theta, \quad \lambda_i=\lambda$.

Доказательство следует из условия (34.8), формулы воспитания равномерно забывчивых роботов с равноценными эмоциями и условия теоремы 34.5.

Заметим, что на основе теоремы об антиступорных коэффициентах при выполнении тождества $b_i s\equiv -q$ существуют коэффициенты θ и λ, для которых условие ступора не наступит ни при каких значениях j и i. Примером таких коэффициентов могут быть $\theta=\frac{1}{2}$ и $\lambda=\frac{1}{3}$.

Очевидно, что при выполнении условия $q\frac{1-\theta^j}{1-\theta}>-b_i s\frac{1-\lambda^i}{1-\lambda}$ альтернативное решение роботом будет приниматься в пользу эмоций, а при справедливости неравенства $q\frac{1-\theta^j}{1-\theta}<-b_i s\frac{1-\lambda^i}{1-\lambda}$ – в пользу логики.

Рассмотрим конфликт между равномерно забывчивым роботом с равноценными эмоциями и роботом с абсолютной памятью с равноценными эмоциями.

Очевидно, что условие конфликта между этими роботами примет вид

$$q\frac{1-\theta^j}{1-\theta}+zi=0. \tag{34.9}$$

Пусть справедливо равенство q=-z, тогда соотношение (34.9) эквивалентно формуле

$$\frac{1-\theta^j}{1-\theta}=i. \tag{34.10}$$

Сформулируем и докажем теоремы.

Теорема 34.7. Конфликт между равномерно забывчивым роботом с равноценными эмоциями q и роботом с абсолютной памятью с равноценными эмоциями $-q$ возможен на первом такте воспитательного процесса.

Доказательство. Очевидно, что при выполнении равенств $j=1, i=1$ равенство (34.10) обращается в тождество, которое доказывает теорему.

Теорема 34.8. Существуют антиконфликтные коэффициенты памяти, при которых конфликт между равномерно забывчивым роботом с равноценными эмоциями и элементарными воспитаниями, равными q, и роботом с абсолютной памятью с равноценными эмоциями и элементарными воспитаниями, равными $-q$, при выполнении условия $i > 1$ невозможен.

<u>Доказательство.</u> Покажем, что при условиях теоремы 34.8 существует такой коэффициент памяти θ, для которого соотношение (34.10) никогда не обращается в тождество.

Очевидно, что равенство (34.10) эквивалентно формуле

$$\theta^j - i\theta + i - 1 = 0 . \qquad (34.11)$$

Пусть справедливо равенство $\theta = \frac{1}{2}$.

Подставляя последнее равенство в соотношение (34.11), получим равенство

$$1 - i2^{j-1} + (i-1)2^j = 0 , \qquad (37.12)$$

откуда следует запись

$$2^{j-1} = \frac{1}{2-i} . \qquad (34.13)$$

Для $i > 2$ в правой части соотношения (34.13) стоит отрицательное число, а в левой – положительное, что говорит о невозможности тождества (34.10) при $\theta = \frac{1}{2}$.

Рассмотрим соотношение (34.12) при $i = 2$. Очевидно, что в этом случае формула (34.12) примет вид неправильного числового тождества: $1 = 0$.

Таким образом, $\theta = \frac{1}{2}$ является антиконфликтным коэффициентом.

Теорема доказана.

Легко показать, что при неопределенности альтернативного выбора между равноценными забывающимися эмоциями и незабывающимися равноценными эмоциями коэффициент $\theta = \frac{1}{2}$ является антиступорным коэффициентом памяти.

При справедливости тождества $b_i s \equiv -q$ конфликт между эмоциональной и логической составляющими результатов интеллектуального процесса равноинформационного равномерно забывчивого робота с абсолютной логической памятью никогда не наступит (при количестве информационных тактов, большем 1) для коэффициента памяти, удовлетворяющего равенству $\theta = \frac{1}{2}$.

Аналогично можно сформулировать следующее: при справедливости тождества $b_i s \equiv -q$ конфликт между эмоциональной и логической составляющими результатов интеллектуального процесса равноинформационного равноценнозабывчивого робота с абсолютной эмоциональной памятью никогда не наступит при количестве тактов, большем 1, для коэффициента памяти, удовлетворяющего равенству $\theta = \frac{1}{2}$.

Исходя из написанного можно сказать, что мы нашли универсальный антиступорный и антиконфликтный коэффициент памяти $\theta = \frac{1}{2}$, который позволяет избежать ступоров и конфликтов, если робот не обладает или логической, или эмоциональной абсолютной памятью.

Определение 34.11. Постоянное состояние конфликта при любых значениях i и j назовем вечным конфликтом.

Очевидно, что состояние вечного конфликта для забывчивых роботов с равноценными и равноинформационными характеристиками будет описывать равенство

$$q\frac{1-\theta^j}{1-\theta} = -b_i s\frac{1-\lambda^i}{1-\lambda},$$

которое эквивалентно соотношению

$$\frac{1-\theta^j}{1-\theta} = -\frac{b_i s}{q}\frac{1-\lambda^i}{1-\lambda}. \qquad (34.14)$$

Зафиксируем i и введем следующее обозначение: $A = -\frac{b_i s}{q}\frac{1-\lambda^i}{1-\lambda}$.

Равенство (34.14) примет вид

$$\frac{1-\theta^j}{1-\theta} = A. \qquad (34.15)$$

Легко видеть, что соотношение (34.15) влечет равенство

$$\frac{1-\theta^j}{1-\theta} = \frac{1-\theta^{j+k}}{1-\theta},\ k>0. \qquad (34.16)$$

Решением уравнения (34.16) является значение $\theta = 0$.

Таким образом, соотношение (34.16) эквивалентно равенству

$$q = -b_i s\frac{1-\lambda^i}{1-\lambda},$$

причем справедлива формула $-\frac{b_i s}{q}\frac{1-\lambda^i}{1-\lambda} = 1$.

Следовательно, необходимым условием вечного конфликта является выполнение равенства

$$b_i = const\frac{1-\lambda}{1-\lambda^i}. \qquad (34.17)$$

Рассмотрим случай, когда один из роботов обладает абсолютной информационной памятью.

Аналогично предыдущим математическим выкладкам можно показать, что в этом случае условием вечного конфликта является выполнение равенства

$$q = -b_i s i\,.$$

Таким образом, необходимое условие вечного конфликта примет вид

$$b_i = \frac{const}{i}\,. \tag{34.18}$$

Для роботов мы можем сами задавать значения q, s, θ, λ и зависимости $b_i = b_i(\lambda, i)$, моделируя этим поведение роботов при принятии альтернативных решений.

Заметим, что при вечном конфликте постоянно осуществляется неразрешимый выбор при принятии альтернативного решения между информационным и эмоциональным воспитанием, что влечет неуверенность робота в поступке, порождаемом альтернативным выбором.

Изучим свойства накапливания информации роботом.

Очевидно, что для робота с неабсолютной информационной памятью информация, остающаяся в его памяти при отсутствии дополнительно поступающей информации в его чипы, удовлетворяет неравенствам

$$S_k \le s \prod_{i=1}^{k} \lambda_i \le s\lambda^k\,,$$

где k – количество фиктивных информационных тактов, характеризующих временные этапы забывания информации роботом.

<u>Определение 34.12.</u> Полным информационным циклом назовем количество информационных тактов, равное сумме количества тактов при воздействии поступающей информации и количества тактов, соответствующих отсутствию воздействий информации на робота до наступления следующего информационного воздействия.

Таким образом, информация, накопленная роботом в результате нескольких информационных тактов, описывается соотношением

$$\Lambda^{[w]}_{f_w, j_w} = \left(\prod_{k=1}^{f_w} \overset{\approx}{\lambda}{}^{[w]}_k \right) \left[s^{[w]}_{j_w+1} + \sum_{k=1}^{j_w+1} s^{[w]}_{k-1} \prod_{j=1}^{j_w+1-k} \lambda^{[w]}_j + \left(\prod_{i=1}^{j_w} \lambda^{[w]}_i \Lambda^{[w-1]}_{f_{w-1}, j_{w-1}} \right) \right],$$

$$w = \overline{2, m}\,,$$

$$\Lambda^{[1]}_{f_1, j_1} = \left(\prod_{k=1}^{f_1} \overset{\approx}{\lambda}{}^{[1]}_k \right) \left[s^{[1]}_{j_1+1} + \sum_{k=1}^{j_1+1} s^{[1]}_{k-1} \prod_{j=1}^{j_1+1-k} \lambda^{[1]}_j \right],$$

где $[w]$ – обозначение переменных, соответствующих информационному циклу с номером *w*, $w = \overline{1, m}$, $\overset{\approx}{\lambda}{}^{[w]}_k$ соответствует коэффициентам информационной памяти цикла с номером *w* для информационных тактов без эмоциональных воспитаний, k – номер информационного такта, f_w– количество информационных тактов цикла с номером w без информационных воздействий, j_w – количество информационных тактов цикла с номером w при непрерывных информационных воздействиях.

Введем следующее определение.

Определение 34.13. Информационным коэффициентом полезного действия (ИКПД) χ_i назовем величину, удовлетворяющую соотношению

$$\chi_i = \frac{\Lambda^{[m]}_{f_m, j_m}}{\sum\limits_{k=1}^{i} s_k},$$

где $i = \sum\limits_{w=1}^{m} j_w$.

Очевидно, что величины $\chi_i \in [0, 1]$.

Легко видеть, что чем ближе значение χ_i к единице, тем робот успешнее запоминает сюжеты.

Определение 34.14. Логическим коэффициентом полезного действия (ЛКПД) ϑ_i назовем величину, удовлетворяющую равенству

$$\vartheta_i = \chi_i sign(b_i).$$

Легко видеть, что значения ϑ_i удовлетворяют условию $\vartheta_i \in [-1, 1]$.

При положительном эмоциональном восприятии результата информационного действия ЛКПД больше нуля, при отрицательном эмоциональном восприятии логический коэффициент полезного действия меньше нуля.

Рассмотрим свойства ИКПД равноценнозабывчивого равноинформационного робота. Очевидно, что χ_i для такого робота определяется формулой

$$\chi_i = \frac{1-\lambda^i}{i(1-\lambda)}. \qquad (34.18)$$

Сформулируем следующую теорему.

Теорема 34.9. Для равноинформационного равноценнозабывчивого робота информационный коэффициент полезного действия стремится к нулю при бесконечном увеличении количества информационных тактов.

Доказательство. На основе формулы (34.18) можем записать цепочку соотношений

$$\lim_{i\to\infty} \chi_i = \lim_{i\to\infty} \frac{1-\lambda^i}{i(1-\lambda)} = \frac{1}{1-\lambda} \lim_{i\to\infty} \frac{1}{i} = 0,$$

которая доказывает теорему.

Сформулируем и докажем несколько общих теорем, посвященных роботам с неабсолютной информационной памятью.

Теорема 34.10. Если существует такое число g>0, причем $s_i \geq g$, то ИКПД робота с неабсолютной информационной памятью стремится к нулю с увеличением количества информационных тактов.

Доказательство. Очевидна цепочка соотношений

$$\lim_{i\to\infty}\chi_i = \lim_{i\to\infty}\frac{\Lambda^{[m]}_{f_m, j_m}}{\sum_{k=1}^{i} s_k} \leq \lim_{i\to\infty}\frac{s\frac{1-\lambda^i}{1-\lambda}}{ig} = \frac{\frac{s}{1-\lambda}}{g\lim_{i\to\infty} i} = 0,$$

где $i = \sum_{w=1}^{m} j_w$.

Теорема 34.10 доказана.

Теорема 34.11. Если выполняются условия теоремы 34.9, то для робота с неабсолютной информационной памятью справедлива формула $\lim_{i\to\infty}\vartheta_i = 0$.

Доказательство. Легко видеть, что справедлива цепочка соотношений

$$\lim_{i\to\infty}|\vartheta_i| = \lim_{i\to\infty}|sign(b_i)|\chi_i = \lim_{i\to\infty}\chi_i.$$

Согласно теореме 34.9 верна формула $\lim_{i\to\infty}\chi_i = 0$, следовательно,

$$\lim_{i\to\infty}|\vartheta_i| = \lim_{i\to\infty}\chi_i = 0,\ i = \sum_{w=1}^{m} j_w.$$

Теорема доказана.

Теоремы 34.10 и 34.11 можно перефразировать следующим образом: при некоторых мягких условиях информационный коэффициент полезного действия и логический коэффициент полезного действия робота с неабсолютной информационной памятью с течением времени стремятся к нулю, то есть эффективность накапливания информации роботом и логическая реакция робота на поступающую информацию с течением времени становятся незначительными.

Полученные теоретические результаты позволяют строить прогноз поведения Е-существа при некоторых допущениях математических моделей. В отличие от существующих математических методов, посредством котрых ученые пытаются напрямую копировать интеллектуальную и эмоциональную сферы деятельности человека на роботов, мы строим упрощенную модель копии человека. Но эта модель, на наш взгляд, позволяет выявить общие особенности поведения человека или робота с неабсолютной механической памятью и не учитывает индивидуальных особенностей психологии человека.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Даны простейшие математические модели психологии роботов и математически описан виртуальный мир роботов, обладающих эмоциями и зачатками логики, оценены возможности применинения математического описания «психологии» роботов к описанию психологии человеческого социума.

Если касаться реальных психических процессов, протекающих в живом организме, то задача определения зависимостей эмоций от времени довольно сложна и, наверное, в общем случае неразрешима. Но при создании роботов проектировщик может сам устанавливать математические функции изменения значений эмоций во времени (так же, как и коэффициенты памяти, и производные величины от функции эмоций). В этом случае теория, приведенная в пособии, позволяет проектировать роботов с заданными психологическими характеристиками, а затем анализировать и определять их эмоциональное и логическое поведение на основе считываемых из их памяти числовых данных.

В качестве примера дадим описание хаотического замкнутого виртуального мира эмоционально-логических роботов, основанного на компьютерной реализации математических моделей, приведенных в пособии.

Пусть виртуальный мир включает в себя роботов, количество которых конечно. Каждый из роботов обладает собственной памятью, характеризующейся индивидуальными коэффициентами эмоциональной и информационной памяти. В процессе существования мира роботы случайным образом воздействуют друга на друга сюжетами, порождая эмоции, приобретая опыт и изменяя воспитания друг друга. Причем роботом-воспитателем, от которого воспитуемому передаются эмоции, является робот с наибольшим по модулю воспитанием. В результате эмоциональных контактов роботов создаются дружественные группировки, и чем больше их значения дружбы, тем прочнее группировки. Некоторые группировки вступают в конфликты друг с другом, в том числе логически-эмоциональные. Эти конфликты возникают, например, в том случае, если суммарные воспитания группировок становятся равными нулю. Каждый робот имеет цель, общую для всего мира. В результате ее наличия с течением времени выявляются лидеры – роботы с наибольшей силой воли и способностями. Эффективность воспитания каждого робота характеризуется коэффициентом полезного действия воспитательного процесса. В результате вычисления КПД определяются роботы, которые по своим природным характеристикам наиболее склонны к воспитанию. Некоторые роботы обладают пресыщенным воспитанием; по отношению к таким роботам при достижении определенного значения пресыщения прекращается воздействие эмоциями других роботов. Если в виртуальном мире существуют роботы, которые не имеют пресыщения воспитания, то другие роботы воспитывают их *наиболее активно, благодаря этому формируются лидеры мира роботов. Лидер мира роботов на основе построения эквивалентных процессов каждого из роботов и последующего ранжирования предельных воспитаний выявляет своего дальнего преемника на пост лидера. В результате сбоя компьютеров или вирусов роботы могут «заболевать». Врач мира роботов лечит заболевших роботов, корректируя их эмоции. В результате общения роботов друг с другом с течением времени меняются воспитания о опыт роботов – членов виртуального мира. Это влечет смену лидеров и формирование новых дружественных и конфликтующих группировок. Параллельно у роботов формируют необходимое общественное сознание с помощью средств массовой информации. Так существует во времени виртуальный мир эмоционально-логических роботов…*

Помимо «психологии» роботов в данном пособии описаны приложения, посвященные применению теории роботов к человеческому социуму.

Учебное пособие является результатом исследований, приведенных в работах О.Г. Пенского, К.В. Черникова, Ю.А.Шарапова, А.В.Шафера, В.М.Михайлова и др.

Пособие может быть полезно не только студентам и аспирантам механико-математических факультетов университетов, изучающих математическое моделирование, но и специалистам-психологам.

ЛИТЕРАТУРА ДЛЯ УГЛУБЛЕННОГО ИЗУЧЕНИЯ КУРСА

1. *Пенский О.Г., Шарапов Ю.А., Ощепкова Н.В.* Математические модели роботов с неабсолютной памятью и приложения моделей: монография. Пермь: Изд-во Перм.гос.нац.исслед.ун-та, 2018 310 с.
2. *Пенский О.Г.* Верификация математических моделей роботов с неабсолютной памятью: учеб.-метод. пособие. Пермь: Изд-во Перм.гос.нац.исслед.ун-та, 2017. 20 с.
3. *Пенский О.Г.* Приложения математических моделей эмоциональных роботов: учеб.-метод. пособие. Пермь: Изд-во Перм.гос.нац.исслед.ун-та, 2017. 14 с.
4. *Pensky O, Chernikov K.* Fundamentals of Mathematical Theory of Emotional Robots. URL: https://arxiv.org/abs/1011.1841 (дата обращения 10.01.2019)..

Учебное издание

Пенский Олег Геннадьевич

Математические модели цифровых двойников

Учебное пособие

Редактор *М. А. Шемякина*
Корректор *Н. А. Антонова*
Вёрстка: *О. Г. Пенский*

Подписано в печать 22.03.2019. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 9,12. Тираж 50 экз. Заказ № 50

Издательский центр
Пермского государственного
национального исследовательского университета.
614990 г. Пермь, ул. Букирева, 15

Типография ООО «Ризо-Эксперт».
614990, г. Пермь, ул. Героев Хасана, 9, оф. 10