

Предисловие

Настоящая монография является первой, целиком посвященной исследованию защитной эффективности (ЗЭ) немонолитных преград (с пластинами в контакте и с воздушными зазорами между пластинами) при высокоскоростном проникании, главным образом, с применением аналитических методов. В монографии рассматриваются металлические преграды, но значение используемых подходов существенно шире. Хотя книга базируется на работах авторов, представленный в ней солидный обзор дает общее представление о положении дел в рассматриваемой области.

Книга разбита на крупные тематически однородные Части, в то время как каждая Часть включает Главы, различающиеся конкретными постановками задач. Целесообразность такой структуры вызвана тем, что в настоящее время не удастся исследовать задачу в достаточно общей постановке, учитывающей структуру преграды и механические свойства материалов, из которых она выполнена, форму ударника, скорость удара и другие факторы, и нет оснований надеяться, что такая возможность появится в обозримом будущем. Поэтому конструктивным оказался подход, в соответствии с которым исследуется совокупность задач, в каждой из которых вводятся определенные упрощения.

Части 1-5 (Главы 1-15) и Приложение написаны А.В. Дубинским.

Часть 1 посвящена моделям пробивания отдельных элементов – пластин, составляющих многослойные преграды. Такие субмодели являются как основой при формировании модели проникания в слоистую структуру, так и моделями, используемыми при анализе баллистических свойств монолитной преграды в целом. Часть 1 содержит также обзор публикаций, посвященных сравнению ЗЭ монолитных и слоистых преград с использованием экспериментальных, численных и аналитических методов. Следует отметить, что обзор охватывает работы, посвященные именно сравнению баллистических свойств преград различной структуры, и не включает работы, в которых приводятся лишь результаты расчета пробивания многослойных барьеров.

Части 2-3 посвящены исследованию сравнительной ЗЭ преград на основе моделей локального взаимодействия (МЛВ), описывающих пробивание как отдельных слоев, так и преграды в целом. Исследования в Части 2 базируются на моделях, допускающих одновременное взаимодействие ударника с несколькими слоями (пластины в контакте, пластины, разделенные зазорами небольшой толщины), в то время как в Части 3 рассматривается случай последовательного пробивания слоев (большие зазоры).

Часть 4 базируется на моделях, представляющих собой соотношения между интегральными характеристиками проникания (скорость удара, остаточная скорость, баллистический предел).

Часть 5 посвящена исследованиям, основанным на "гипотезе плоских сечений"; предметом анализа является сравнение монолитных и многослойных преград, выполненных из одного и того же материала.

Часть 6 (Главы 16-18), написанная В.Н. Аптуковым и А.Р. Хасановым, посвящена задачам минимизации удельной массы неоднородной плиты. В исследованиях Части 6 используются методы теории оптимального управления (принцип максимума Понтрягина и метод игольчатых вариаций); предметом анализа является влияние формы ударника, скорости соударения, механических характеристик материалов и других факторов проникания на оптимальную структуру преграды.

В.Н. Аптуков благодарен профессору А.А. Поздееву, по инициативе которого в Перми развернулись исследования по оптимизации защитной эффективности неоднородных преград.

А.В. Дубинский благодарит профессоров Университета им. Д. Бен-Гуриона Т. Эльперина и Г. Бен-Дора за всестороннюю поддержку и многолетнее сотрудничество, которые позволили существенно продвинуться в исследованиях по механике высокоскоростного проникания.

А.Р. Хасанов признателен своему научному руководителю профессору В.Н. Аптукову за выбор тематики исследования и всестороннюю помощь в его осуществлении.

Авторы признательны В.Г. Орловой за проделанную ею кропотливую работу над рукописью с целью сделать книгу более удобочитаемой.

Книга ориентирована, в первую очередь, на научных работников, специализирующихся в области механики проникания. Она будет полезна также аспирантам и их научным руководителям при выборе темы исследований. Подходы, использованные в монографии, можно также использовать в качестве иллюстрации применения математических методов для исследования прикладных задач для студентов соответствующих специальностей.

В.Н. Аптуков
А.В. Дубинский
А.Р. Хасанов

Содержание

Предисловие	i
Содержание	iii
Часть 1	1
Базовые модели	1
Глава 1	2
Модели локального взаимодействия (МЛВ) для монолитных мишеней как основа для моделирования многослойных преград	2
1.1 Формализм теории локального взаимодействия	3
1.2 Краткая предыстория	5
1.3 Общая МЛВ для проникающих тел различной формы	7
1.3.1 Описание области взаимодействия ударника с полубесконечной преградой	7
1.3.2 Описание области взаимодействия ударника с преградой конечной толщины	8
1.3.3 Движение ударника в преграде. Интегральные характеристики проникания	10
1.3.4 Ударник, имеющий форму тела вращения	12
1.4 Двучленная модель	13
1.4.1 Произвольное тело вращения	13
1.4.2 Ударник с конической носовой частью	15
1.5 Усредненные МЛВ	18
1.5.1 Общий подход	18
1.5.2 Преграда конечной толщины	18
1.5.3 Полубесконечная преграда	20
1.5.4 Усредненная двучленная модель	20
1.6 Некоторые ранние конкретные МЛВ	21
Глава 2	23
Использование моделей, описывающих расширение цилиндрической и сферической полостей	33
2.1 Введение	24
2.2 Модели, описывающие расширение полости в металлах	25
2.2.1 Статические модели	25
2.2.2 Квази-динамические модели	26
2.2.3 Динамические модели	28
2.3 Связь между моделями расширения отверстий и МЛВ	29
2.3.1 "Сферическая" аналогия	29
2.3.2 "Цилиндрическая" аналогия	30
Глава 3	33
Модели, основанные на "степенных" соотношениях между интегральными характеристиками проникания	33
3.1 "Квадратичные" соотношения	33
3.2 "Степенные" соотношения	35
3.3 Некоторые модели проникания, приводящие к "степенным"/"квадратичным" соотношениям	36
3.4 Сравнительный анализ "степенной" и "квадратичной" аппроксимаций	38
Глава 4	41
Обзор результатов экспериментальных, численных и теоретических исследований сравнительной эффективности многослойных преград	41
4.1 Введение	42
4.2 Пластины выполнены из одного и того же материала. Анализ влияния перехода к многослойным преградам и ширины зазоров между слоями	44

4.2.1 Экспериментальные исследования	44
4.2.2 Численные исследования	51
4.2.3 Комплексные (экспериментальные и численные) исследования	59
4.2.4 Исследования, включающие теоретический анализ	61
4.3 Преграды со слоями из различных материалов	64
4.3.1 Влияние порядка пластин и зазоров между ними	64
4.3.2 Выбор оптимальной многослойной конфигурации	67
4.4 Некоторые результаты исследования проникания в полубесконечные анизотропные преграды	71
4.5 Выводы и заключительные замечания	72
Литература к Части 1	74
Часть 2	89
МЛВ для многослойных преград и их приложение для анализа преград со слоями в контакте и с малыми воздушными зазорами	89
Глава 5	90
Общая и двучленная МЛВ	90
5.1 Общая МЛВ	90
5.2 Двучленная МЛВ	93
5.3 Об одном свойстве общей МЛВ	95
Глава 6	99
Многослойные преграды со слоями из одного и того же материала. Произвольные зазоры. Конический ударник. Общая МЛВ	99
6.1 Теоретический анализ	100
6.2 Анализ экспериментальных данных	101
Литература к Части 2	105
Часть 3	107
Применение двухчленной МЛВ для анализа и оптимизации преград со слоями из разных материалов.	107
Глава 7	108
Преграды со слоями в контакте и с малыми воздушными зазорами	108
7.1 Многослойные преграды со слоями одинаковой плотности. Ударник в форме тела вращения.	109
7.2 Двухслойная преграда со слоями в контакте или с произвольными зазорами. Произвольные параметры модели. Конический ударник.	111
7.3 Расчеты для ударников оживальной формы на основе двухчленной МЛВ и их анализ.	112
Глава 8	115
Преграды со слоями в контакте и с большими воздушными зазорами (независимое пробивание слоев). Конические ударники.	115
8.1 Общие соотношения для ударника в форме заостренного тела вращения.	116
8.2 Оптимизация последовательности пластин в преграде	118
8.3 Анализ эффективности изменения порядка пластин в двухслойной преграде	120
Глава 9	123
Преграды с большими воздушными зазорами (независимое пробивание слоев). Конические ударники. Оптимизация структуры	123
9.1 Постановка задачи и математическая модель	124
9.2 Общий случай	125
9.3 Двухслойные преграды	127
9.4 Трехслойные преграды	127
Литература к Части 3	140
Часть 4	141
Исследования, основанные на "степенных" соотношениях между интегральными характеристиками проникания	141
Глава 10	142

Баллистические свойства многослойных преград, пробиваемых заостренным ударником.....	142
10.1 Математическая модель.....	143
10.2 Сравнение монолитных и многослойных преград.....	144
10.3 Наихудшее разбиение на слои для заданного числа слоев.....	144
10.4 Влияние количества слоев на баллистическую эффективность преграды.....	146
10.5 Анализ, основанный на модели Rosenberg & Dekel.....	146
10.5.1 Математическая модель и постановка задачи.....	146
10.5.2 Исследование проблемы.....	147
10.6 Анализ, основанный на других моделях.....	148
10.7 Сравнение с результатами экспериментов и численного моделирования.....	149
Глава 11.....	153
Баллистические свойства многослойных преград, пробиваемых цилиндрическим ударником.....	153
11.1 Математическая модель.....	154
11.2 Оптимальная последовательность слоёв.....	154
11.3 Сравнение барьеров с различным количеством слоев.....	156
Литература к Части 4.....	157
Часть 5.....	159
Исследования, основанные на квази-динамической "гипотезе плоских сечений".....	159
Глава 12.....	160
Математические модели для проникания заостренных тел вращения в монолитные преграды.....	160
12.1 Ударники с произвольной формой образующей.....	161
12.2 Ударники в форме острого прямого кругового конуса.....	162
Глава 13.....	165
Сравнение защитной эффективности изотропных (монолитных) и разнесенных преград с большими зазорами между слоями при пробивании заостренными коническими ударниками.....	165
13.1 Модель для многослойной преграды на основе "гипотезы плоских сечений".....	166
13.2 Постановка задачи.....	167
13.3 Некоторые частные случаи.....	168
13.3.1 Первый предельный вариант структуры преграды.....	168
13.3.2 Второй предельный вариант структуры преграды.....	168
13.4 Общий случай (произвольная структура преграды).....	169
Глава 14.....	171
Оптимизация разнесенных преград при пробивании заостренными коническими ударниками.....	171
14.1 Случай заданного количества слоев.....	171
14.2 Анализ влияния заданного количества слоев на оптимальное решение.....	175
Глава 15.....	177
Иллюстративные численные расчеты для острых конических ударников на основе модели А.Я. Сагомояна.....	177
15.1 Расчеты для первого набора данных.....	178
15.2 Расчеты для второго набора данных.....	179
15.3 Заключительные замечания.....	183
Литература к Части 5.....	183
Часть 6.....	185
Оптимизация многослойных преград по критерию минимума удельной массы преграды.....	185
Глава 16.....	186
Непрерывное изменение характеристик материала по толщине преграды.....	186
16.1. Случай линейной зависимости между твердостью и плотностью.....	188
16.1.1. Постановка задачи оптимизации.....	188
16.1.2. Первичный анализ задачи.....	189
16.1.3. Проникание цилиндрического ударника.....	190

16.1.4. Проникание конического ударника.....	193
16.1.5. Проникание цилиндрического ударника с конической головной частью.....	196
16.2. Случай нелинейной зависимости между твердостью и плотностью.....	198
16.2.1. Вводные замечания.....	198
16.2.2. Кусочно-линейная зависимость $\varphi(\rho)$	199
16.2.3. Обобщенная степенная зависимость $\varphi(\rho)$	201
16.3. Квазиоптимизация.....	203
Глава 17.....	205
Дискретное изменение характеристик материала по толщине преграды.....	205
17.1. Численный подход на основе модели А.Я. Сагомоняна.....	207
17.1.1. Постановка задачи оптимизации.....	207
17.1.2. Принцип максимума на базе метода игольчатых вариаций.....	210
17.1.3. Геометрический анализ.....	211
17.1.4. Численная реализация метода.....	212
17.1.5. Численный анализ.....	213
17.2. Аналитический подход на основе эмпирической модели.....	214
17.2.1. Постановка задачи.....	214
17.2.2. Геометрический анализ.....	215
17.2.3. Задача с тремя материалами.....	218
17.2.4. Случай произвольного количества материалов.....	221
Глава 18.....	223
Некоторые другие постановки задачи оптимизации.....	223
18.1. Учет трения.....	225
18.1.1. Постановка задачи оптимизации.....	225
18.1.2. Аналитическое решение задачи.....	226
18.2. Учет вязкости.....	229
18.2.1. Особенности постановки задачи с учетом вязкостных эффектов.....	229
18.2.2. Аналитическое исследование задачи.....	232
18.3. Учет краевых ослабляющих эффектов свободных поверхностей плиты.....	235
18.3.1. Описание лицевого и тыльного ослабляющего эффекта.....	235
18.3.2. Аналитическое исследование задачи.....	237
18.3.3. Численный пример.....	239
18.4. Оптимальное торможение клина при проникании под углом.....	240
18.5. Выводы и заключительные замечания.....	243
Литература к Части 6.....	245
Приложение.....	247
Некоторые свойства выпуклых/вогнутых положительных функций.....	247
П.1 Свойство 1.....	247
П.2 Свойство 2.....	248
П.3 Свойство 3.....	248
П.4 Свойство 4.....	249
П.5 Свойство 5.....	250
П.6 Свойство 6. Линейная модель.....	251
П.7 Свойство 7. Класс нелинейных моделей.....	251
П.7.1 Общие формулы.....	251
П.7.2 Свойство 3 для рассматриваемого класса моделей.....	252
П.7.3 Свойство 4 для класса нелинейных моделей.....	254
Литература к Приложению.....	256

Часть 1

Базовые модели

Модель, представляющая баллистические свойства многослойной преграды, включает в себя два типа соотношений. Соотношения первого типа представляют собой модели отдельных пластин-слоев, в то время как соотношения второго типа описывают связи между слоями, обеспечивающие функционирование преграды как единого объекта. Часть 1 содержит описание соотношений первого типа (базовые модели проникания в пластины), а также обзор результатов исследований, посвященных сравнительному анализу изотропных (монокристаллических) и многослойных преград.

Глава 1 посвящена "локальному" подходу, который позволяет вывести формулы для «интегральных характеристик» (глубина проникания, баллистический предел, остаточная скорость), для наиболее широко используемых моделей, которые многократно применяются далее.

Глава 2 посвящена подходу, основанному на использовании результатов решения задач о расширении полости. На этом подходе основывается наиболее широко используемый и универсальный метод получения «локальных моделей». Он также обеспечивает определение зависимости параметров моделей от механических свойств материала преграды. В этой главе описывается как общая концепция вывода "локальной" модели на основе модели расширения полости (МРП), так и конкретные МРП.

Глава 3 посвящена моделям, основанным на линейных соотношениях между степенями интегральных характеристик (скорость удара, остаточная скорость, баллистический предел) проникания для преграды конечной толщины. Рассмотрены и сопоставлены по точности наиболее известные модели.

Глава 4 содержит обзор результатов экспериментальных, численных и теоретических исследований, посвященных сравнительному анализу (с точки зрения эффективности защиты от высокоскоростного удара) монокристаллических преград и преград, состоящих из пластин, примыкающих друг к другу либо разделенных воздушным зазором, а также сопоставительному анализу преград с различным порядком слоев.

Глава 1

Модели локального взаимодействия (МЛВ) для монолитных мишеней как основа для моделирования многослойных преград

Обозначения

a_0, a_2	параметры, определяющие модель;
A_0, A_2	параметры, уравнения (1.5.23)–(1.5.24);
b	толщина преграды;
D	сила сопротивления, действующая на ударник;
D_0	функция, уравнение (1.5.8);
D_{av}, \tilde{D}_{av}	средняя сила сопротивления;
e_0, e_2	параметры, уравнение (1.4.17);
f_0, f_2	функции, уравнения (1.4.3)–(1.4.5) и (1.4.15);
h	текущая глубина проникания, Рис. 1.3.1;
H	глубина проникания;
k_{cone}	тангенс полуугла ударника конической формы;
L	длина носовой части ударника, Рис. 1.3.1;
L_0	длина цилиндрической части ударника, Рис. 1.3.1;
m	масса ударника;
\bar{n}	вектор внутренней нормали в некоторой точке поверхности ударника;
Q	функция, уравнения (1.4.8), (1.4.22);
r	радиус плоского затупления ударника;
R	максимальный радиус ударника;
t	время;
T	$= Q(b + L)$, уравнения (1.4.12), (1.4.23);
u_0, u_1	функции, уравнение (1.3.7);
u	$= -\vec{v}^0 \cdot \vec{n}^0 = \cos \nu$;
v_{imp}	начальная скорость ударника;
v	текущая (мгновенная) скорость ударника;
\vec{v}	вектор скорости элемента поверхности ударника;
v_{bl}	баллистический предел (БП);
v_{res}	остаточная скорость ударника;
V	функция, описывающая зависимость v от h и v_{imp} , уравнение (1.3.18);
x, ρ, ϕ	цилиндрические координаты, связанные с ударником, Рис. 1.3.1;
δ	функция в выражении для силы сопротивления, действующей на носе ударника, уравнение (1.3.12)–(1.3.13);

θ, Θ	функции, определяющие поверхность взаимодействия ударника и преграды, Рис. 1.3.1, 1.3.2-1.3.6, уравнения (1.3.2) и (1.3.4);
ϑ	полуугол при вершине конуса;
κ	параметр, уравнение (1.4.20);
μ_{fr}	коэффициент трения;
$\Xi^{(\theta)}$	функция, уравнение (1.4.27);
$\Xi^{(\theta)}$	функция, уравнение (1.4.32);
ρ	см. x, ρ, ϕ ;
σ_{nose}	площадь носового затупления ударника;
$\bar{\tau}$	касательный вектор в некоторой точке поверхности ударника;
ν	угол между вектором \bar{n} и вектором $(-\bar{\nu})$, Рис. 1.1.1;
ϕ	см. x, ρ, ϕ ;
φ	функция, уравнение (1.4.16);
Φ	функция, определяющая форму ударника, Рис. 1.3.1;
Φ_x	$= \partial\Phi/\partial x$ или $d\Phi/dx$;
Φ_ϕ	$= \partial\Phi/\partial\phi$;
Ω_n, Ω_τ	функции, определяющие МЛВ;
Ω_0	функция, уравнение (1.1.6);
БП	баллистический предел;
ГП	глубина проникания;
МЛВ	модель локального взаимодействия;
ТЛВ	теория локального взаимодействия.

Примечание. Верхний индекс "0" указывает на единичный вектор.

1.1 Формализм теории локального взаимодействия

Многие инженерные модели, применяемые в прикладной теории проникания, относятся к категории так называемых моделей локального взаимодействия (МЛВ), в рамках которых интегральный эффект взаимодействия между преградой и проникающим ударником описывается в виде суперпозиции независимых локальных взаимодействий между этими объектами. Каждое локальное взаимодействие определяется, главным образом, локальной скоростью элемента поверхности и углом между локальным вектором скорости поверхности и локальным вектором нормали к поверхности ударника, а также некоторыми глобальными параметрами, которые учитывают интегральные характеристики преграды (например, твердость, плотность и т.д.).

Унифицированное описание различных версий МЛВ, которые широко используются в механике проникания, может быть представлено в следующем виде [109,114]:

$$d\vec{F} = \begin{cases} [\Omega_n(u, \nu)\bar{n}^0 + \Omega_\tau(u, \nu)\bar{\tau}^0] ds & \text{если } u_* < u < 1 \\ \Omega_n(1, \nu)\bar{n}^0 ds & \text{если } u = 1 \\ 0 & \text{если } u \leq u_* \end{cases}, \quad (1.1.1)$$

$$\bar{\tau}^0 = -(\bar{\nu}^0 + u \cdot \bar{n}^0) / \sqrt{1 - u^2}, \quad (1.1.2)$$

$$u = -\vec{v}^0 \cdot \vec{n}^0 = \cos \nu, \quad (1.1.3)$$

где (см. Рис. 1.1.1) $d\vec{F}$ - сила, действующая на поверхность элемента ds ударника, который находится в контакте с преградой; \vec{n}^0 и $\vec{\tau}^0$ - внутренние нормальный и касательный единичные векторы в данной точке на поверхности ударника, соответственно; \vec{v}^0 - единичный вектор скорости элемента поверхности ударника \vec{v} ; ν - угол между вектором \vec{n}^0 и вектором $(-\vec{v}^0)$. Неотрицательные функции $\Omega_n(u, \nu)$ и $\Omega_t(u, \nu)$ - нормальное напряжение и касательное напряжение, соответственно, - определяют модель взаимодействия ударника и преграды; они зависят также от параметров, которые характеризуют, в первую очередь, свойства материала преграды. Единичный касательный вектор $\vec{\tau}^0$ лежит в плоскости векторов \vec{v}^0 и \vec{n}^0 и перпендикулярен вектору \vec{n}^0 ; его направление выбирают таким образом, чтобы $\vec{v}^0 \cdot \vec{\tau}^0 < 0$, то есть, чтобы сила трения была направлена в положительном направлении вектора $\vec{\tau}^0$.

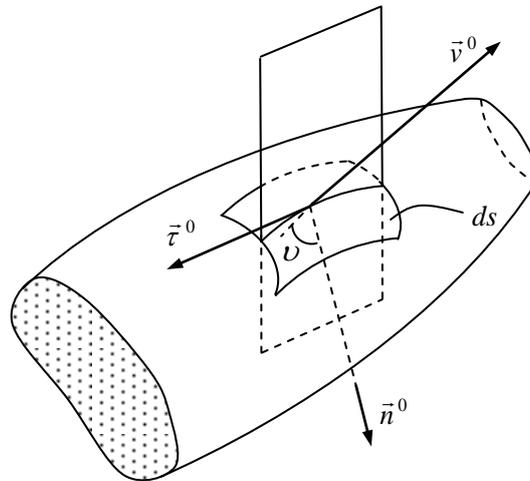


Рис. 1.1.1. К определению МЛВ.

Параметр u_* ($0 \leq u_* < 1$) определяет максимальную величину угла ν , $\nu_* = \arccos u_*$, при котором ударник еще взаимодействует с преградой. Предполагается, что для $\nu = \nu_*$ контакт между боковой поверхностью ударника и преградой нарушается. Поскольку величина ν_* не известна, обычно предполагается, что $u_* = 0$. Учет возможности «кавитации» (потери контакта между частью боковой поверхности ударника и преградой) во время проникания в твердые среды является одним из направлений исследований по совершенствованию МЛВ [25-26].

Первая и вторая формулы в соотношениях (1.1.1) описывают взаимодействие между ударником и преградой при их контакте, в то время как третья формула определяет условие, когда контакт отсутствует; случай $u = 1$ описывается отдельно, потому что выбор направления касательного вектора $\vec{\tau}^0$ в этой ситуации является неопределенным.

Рассмотрим удар твердого (недеформируемого) тела по нормали к поверхности изотропной преграды и предположим, что ударник имеет две взаимно перпендикулярные плоскости симметрии, линия пересечения которых параллельна направлению удара. Такое тело имеет ось симметрии, но не обязательно является телом вращения. Указанные условия обеспечивают поступательное движение ударника в преграде в направлении удара.

Результирующая сила, действующая на ударник в каждый момент времени, определяется путем интегрирования $d\vec{F}$ из уравнения (1.1.1) по поверхности S контакта ударника и преграды в тот же момент:

$$D = (-\vec{v}^0) \cdot \iint_S d\vec{F} = \iint_{S_{perp}} (-\vec{v}^0) \cdot d\vec{F} + \iint_{S_{lat}} (-\vec{v}^0) \cdot d\vec{F}, \quad (1.1.4)$$

где S_{perp} - часть контактной поверхности S , нормально ориентированной по отношению к скорости ударника (как правило, плоское затупление), S_{lat} - боковая поверхность ударника. Подставляя $d\vec{F}$ из уравнения (1.1.1) в уравнение (1.1.4), получим:

$$D = \Omega_n(1, v) \iint_{S_{perp}} dS + \iint_{S_{lat}} \Omega_0(u, v) dS, \quad (1.1.5)$$

где

$$\Omega_0(u, v) = u\Omega_n(u, v) + \sqrt{1-u^2}\Omega_\tau(u, v). \quad (1.1.6)$$

В дальнейшем мы будем использовать следующие обозначения (рис. 1.1.2): h - текущая глубина проникания, определяемая как расстояние между носиком (плоским затуплением) ударника и передней поверхностью преграды; L - длина носовой части ударника. Цилиндрические координаты x, ρ, ϕ связаны с ударником, уравнение $\rho = \Phi(x, \phi)$ определяет его форму, где Φ - некоторая возрастающая по первому аргументу, достаточно гладкая функция, $\Phi(x, 0) = \Phi(x, \pi)$.

Предполагается, что ударник имеет цилиндрическую часть длины L_0 , которая не взаимодействует с преградой. Иными словами, все приведенные выше формулы относятся к носу ударника, который расположен между сечениями $x = 0$ и $x = L$. Несмотря на наличие цилиндрической части, иногда для краткости мы будем использовать термин «конический ударник» или «конус» вместо «ударника с конической носовой частью».

1.2 Краткая предыстория

Концепция и развитие ТЛВ (в первую очередь, для аэродинамических приложений) обсуждались в монографиях [61-62, 129], а также в обзорах [33-34]. Поэтому мы кратко обсудим здесь лишь основные моменты, важные для динамики проникания.

«Классическая» ТЛВ используется, главным образом, в аэромеханике для расчета и анализа интегральных (аэродинамических) характеристик тела, движущегося в газе, когда характеристики среды и движения летящего тела (включая величину и направление скорости) считаются известными.

В 1960-х годах особую важность приобрела проблема быстрого расчета аэродинамических характеристик (АХ) высокоскоростных летательных аппаратов для всего диапазона высот полета. Для больших высот, где среда очень сильно разрежена, расчет АХ может осуществляться с использованием простой модели свободно-молекулярного обтекания [57]. Для малых высот, при которых атмосфера относительно плотная, использовались различные версии модели Ньютона [81]. Модели, которые успешно использовались для этих двух предельных ситуаций, имели теоретическую основу и оказались МЛВ. Что касается промежуточного диапазона высот, то простые

модели для соответствующих режимов обтекания отсутствовали, хотя расчеты для этих условий потока были весьма важны.

Баранцев [32] предложил нетрадиционный подход к проблеме. Авторы постулировали «локальность» требуемой модели для промежуточного диапазона высот полета и нашли класс конкретных моделей, удовлетворяющих ряду требований, наиболее важными из которых являлись простота, плавный переход к моделям для предельных случаев очень больших и очень малых степеней разрежения и адекватность, подтвержденная экспериментально.

Основная проблема заключалась в разработке единой инженерной модели, применимой ко всем режимам полета, и параметры которой позволяли бы учитывать степень разрежения газа. На первом этапе развития ТЛВ [1] эти результаты были встречены с большим интересом не потому, что они использовали нетривиальные рассуждения (от "локальности" к конкретной модели), а потому, что они обеспечили прорыв в области приближенных аэродинамических расчетов в промежуточном диапазоне высот полета. Характерно, что независимо, с теми же целями и практически одновременно с Р. Г. Баранцевым и его коллегами, "локальный" подход был предложен В. С. Галкиным с коллегами (соответствующая работа [42] была опубликована в 1977 г., но, по утверждению авторов, их исследование было осуществлено в 1968 г.).

А. И. Бунимович [35] первым заметил, что значение "локального подхода" выходит за рамки динамики разреженного газа. Исследования в рамках ТЛВ осуществляются в разных направлениях. Анализ развития ТЛВ позволяет сделать следующие выводы.

1) Справедливость «гипотезы локальности» и справедливость конкретной локальной модели - совершенно разные понятия. На методологическом уровне часто уместно рассматривать локальность как фундаментальное свойство взаимодействия между ударником и окружающей средой, в то время как конкретная локальная модель представляет собой лишь один из нескольких возможных способов описания этого взаимодействия. Такой подход особенно оправдан, когда есть несколько более или менее эквивалентных моделей или вообще нет какой-либо конкретной модели. В последнем случае "гипотеза локальности" может быть использована в качестве одного из инструментов для разработки модели. Поскольку "гипотеза локальности" может быть проверена экспериментально независимо от принятия конкретной "локальной модели", возможна удобная двухступенчатая процедура, в рамках которой "гипотеза локальности" проверяется на первом этапе, а отдельные локальные модели разрабатываются на втором этапе. Плодотворность "локального" подхода может быть проиллюстрирована на примере задачи о проникании конического ударника в преграду из разнесенных пластин, изготовленных из одного и того же материала [98]. Показано, что отсутствие зависимости баллистического предела разнесенной преграды от величин зазоров и толщин пластин (при условии, что суммарная толщина пластин постоянна) является следствием "локального характера" взаимодействия ударника и преграды, независимо от выбора конкретной "локальной" модели. Без использования понятия МЛВ такой обобщенный подход к проблеме был бы невозможен.

2) МЛВ могут использоваться в качестве основы для взаимного обогащения различных областей механики. В частности, результаты аэродинамики могут быть применены в динамике удара; соответствующие примеры можно найти в монографиях [109,114]. Не случайно многие авторы, использующие "локальные" или подобные модели в механике высокоскоростного проникания, также имеют опыт исследований в газовой динамике; ряд монографий [38-39,65,129] содержат отдельные разделы, посвященные применению приближенных моделей в обеих областях. На первый взгляд, общим при использовании МЛВ в аэродинамике и механике проникания

является лишь использование аналогичных формул для расчета сопротивления тел в этих средах, однако значение единого подхода выходит за эти рамки. Иллюстрацией этого служат, например, "правила площадей", установленные для обоих режимов, идентичность (при некоторых допущениях) формы тел вращения, обладающих минимальным сопротивлением в гиперзвуковом потоке газа, и проникающих на максимальную глубину в твердые преграды и др. [109,114].

1.3 Общая МЛВ для проникающих тел различной формы

1.3.1 Описание области взаимодействия ударника с полубесконечной преградой

Формализм описания поверхности взаимодействия ударника с преградой в случае полубесконечной преграды (то есть, преграды столь большой толщины, что влиянием тыльной границы можно пренебречь) проиллюстрирован на Рис. 1.3.2. Процесс проникания разбит на два этапа. Первый этап, начало внедрения в преграду, происходит когда $0 \leq h \leq L$ (Рис. 1.3.2а). В этом случае взаимодействуют с преградой плоское затупление ударника (если таковое имеется) и часть его боковой поверхности между поперечными сечениями $x = 0$ и $x = h$. Второй этап (Рис. 1.3.2б) – это движение ударника внутри преграды при его полном погружении в нее, что происходит, когда $x \geq L$. Таким образом, подвижная область взаимодействия ударника и преграды может быть описана следующим образом (см. Рис. 1.3.3.):

$$0 \leq x \leq \Theta(h), \quad (1.3.1)$$

где

$$\Theta(h) = \begin{cases} h & \text{если } 0 \leq h \leq L \\ L & \text{если } h \geq L \end{cases}. \quad (1.3.2)$$

В некоторых случаях удобно определить функцию $\Theta(h)$ также для отрицательных значений переменной h , положив, что $\Theta(h) = 0$ для $h < 0$.

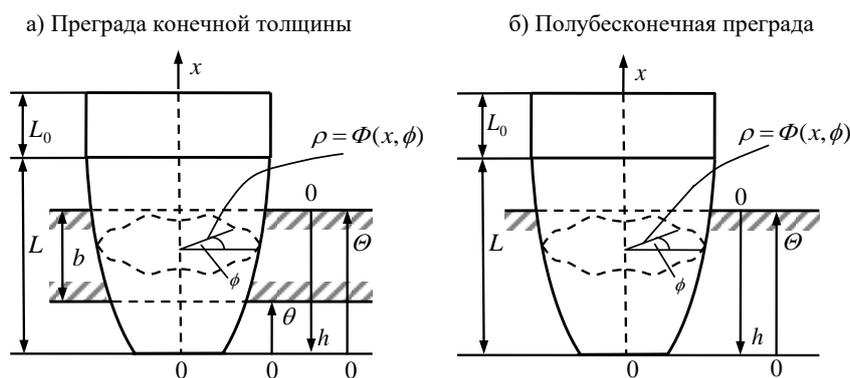


Рис. 1.3.1. Обозначения.

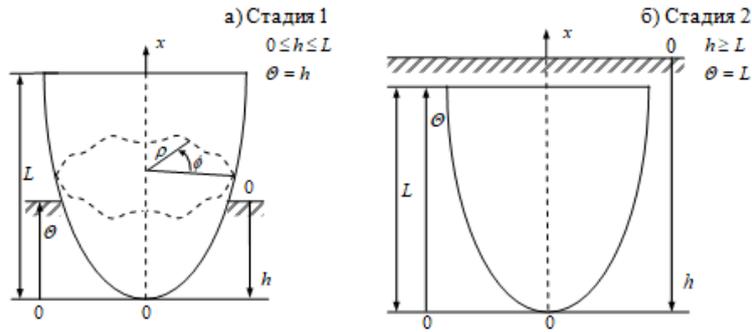


Рис. 1.3.2. Два этапа проникания в полубесконечную преграду.

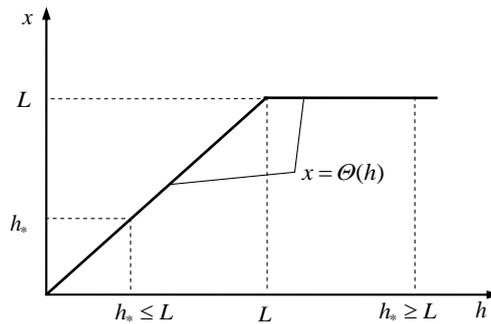


Рис. 1.3.3. Представление области взаимодействия ударника и полубесконечной преграды.

1.3.2 Описание области взаимодействия ударника с преградой конечной толщины

Рассмотрим теперь преграду конечной толщины b . Если $L \leq b$, то процесс перфорации можно рассматривать как трехступенчатый (Рис. 1.3.4). На первом этапе (вход ударника в преграду, $0 \leq h \leq L$) с преградой взаимодействуют плоское затупление ударника (если таковое имеется) и часть боковой поверхности между поперечными сечениями $x = 0$ и $x = h$. На втором этапе (полное погружение ударника в преграду, $L \leq h \leq b$) с преградой взаимодействуют плоское затупление ударника (если имеется) и вся его боковая поверхность ($0 \leq x \leq L$). На третьем этапе (выход ударника из преграды, $b \leq h \leq b + L$) с преградой взаимодействует часть боковой поверхности ударника между поперечными сечениями $x = h - b$ и $x = L$. Случай $L \geq b$ (Рис. 1.3.5) может быть проанализирован аналогичным образом. В обоих случаях, подвижная область взаимодействия ударника и преграды может быть описана следующим образом (см. Рис. 1.3.6):

$$\theta(h) \leq x \leq \Theta(h), \quad (1.3.3)$$

где функция $\Theta(h)$ определяется формулой (1.3.2) и

$$\theta(h) = \begin{cases} 0 & \text{если } 0 \leq h \leq b \\ h - b & \text{если } b \leq h \leq b + L \end{cases}. \quad (1.3.4)$$

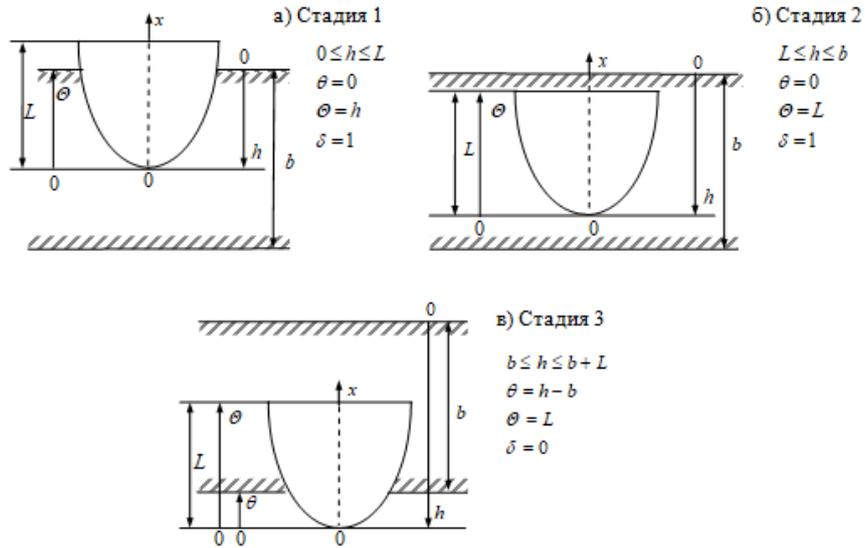


Рис. 1.3.4. Три этапа проникания в преграду конечную толщины, случай $L \leq b$.

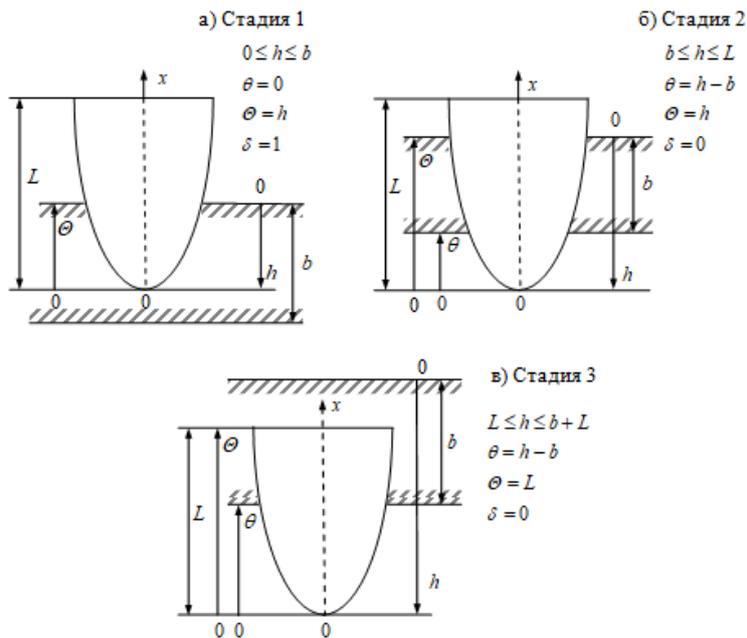


Рис. 1.3.5. Три этапа проникания в преграду, имеющую конечную толщину, случай $L \geq b$.

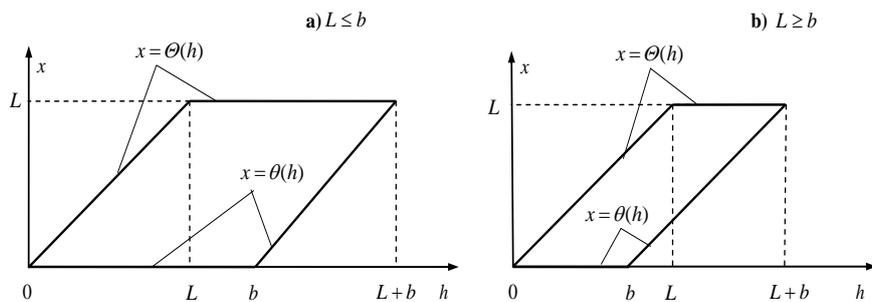


Рис. 1.3.6. Представление области взаимодействия ударника и преграды конечной толщины.

В некоторых случаях удобно доопределять функции $\theta(h)$ и $\Theta(h)$ для преграды конечной толщины следующим образом: $\theta(h) = \Theta(h) = 0$ для $h < 0$ и $\theta(h) = \Theta(h) = L$ для $h > b + L$.

Неравенства (1.3.3) могут быть использованы в качестве единого описания области взаимодействия ударника и преграды, принимая во внимание, что $\theta = 0$ для полубесконечной преграды и $\theta(h)$ определяется формулой (1.3.4) для преграды, имеющей конечную толщину.

Модель может быть упрощена, если не принимать во внимание стадии, где ударник лишь частично погружен в преграду. Поскольку такое упрощение часто используется в теории проникания, этот подкласс моделей будет рассмотрен ниже подробно.

1.3.3 Движение ударника в преграде. Интегральные характеристики проникания

В принятой системе координат уравнение (1.1.5) может быть представлено в следующем виде:

$$D(h, v) = \Omega_n(1, v) \sigma_{nose} \delta(h) + \int_{\theta(h)}^{\Theta(h)} dx \int_0^{2\pi} \Omega_0(u(x, \phi), v) u_0(x, \phi) d\phi, \quad (1.3.5)$$

где

$$u(x, \phi) = \vec{x}^0 \cdot \vec{n}^0 = \frac{u_1(x, \phi)}{u_0(x, \phi)}, \quad dS = u_0(x, \phi) dx d\phi, \quad (1.3.6)$$

$$u_0(x, \phi) = \sqrt{\Phi^2 (\Phi_x^2 + 1) + \Phi_\phi^2}, \quad u_1(x, \phi) = \Phi \Phi_x, \quad (1.3.7)$$

σ_{nose} - площадь носового затупления ударника,

$$\sigma_{nose} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \Phi^2(0, \phi) d\phi. \quad (1.3.8)$$

Трение между ударником и преградой учитывается следующим образом:

$$\Omega_t = \mu_{fr} \Omega_n, \quad (1.3.9)$$

где μ_{fr} - коэффициент трения.

Уравнение (1.3.5) с учетом уравнений (1.1.6), (1.3.6)–(1.3.7) и (1.3.9) можно переписать следующим образом:

$$D(h, v) = \Omega_n(1, v) \sigma_{nose} \delta(h) + \int_{\theta(h)}^{\Theta(h)} dx \int_0^{2\pi} \Omega_n(u(x, \phi), v) U(x, \phi) d\phi, \quad (1.3.10)$$

где

$$U(x, \phi) = (u + \mu_{fr} \sqrt{1 - u^2}) u_0 = \Phi \Phi_x + \mu_{fr} \sqrt{\Phi^2 + \Phi_\phi^2}. \quad (1.3.11)$$

Функция $\delta(h)$ в уравнении (1.3.10) описывает силу, действующую на носовое затупление ударника, причем

$$\delta(h) = 1 \quad (1.3.12)$$

в случае проникания в полубесконечную преграду и

$$\delta(h) = \begin{cases} 0 & \text{если } h \leq 0 \\ 1 & \text{если } 0 \leq h \leq b, \\ 0 & \text{если } h > b \end{cases} \quad (1.3.13)$$

когда ударник проникает в преграду конечной толщины. Ясно, что мы не рассматриваем здесь явления проникания, которые сопровождаются образованием пробки.

Уравнение движения ударника (m - его масса)

$$m\ddot{h} = -D(h, \dot{h}) \quad (1.3.14)$$

с начальными условиями

$$h(0) = 0, \quad \dot{h}(0) = v(0) = v_{imp} \quad (1.3.15)$$

позволяет определить глубину проникания h и скорость ударника v как функции времени t и скорости удара v_{imp} ,

Правая часть уравнения (1.3.14) не зависит от времени в явном виде, благодаря чему порядок этого дифференциального уравнения может быть понижен. Рассматривая v как функцию h , $v = v(h)$, и принимая во внимание, что

$$\ddot{h} = \frac{d^2h}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dh} \frac{dh}{dt} = v'(h)v(h) \quad (1.3.16)$$

уравнение (1.3.14) можно преобразовать к следующему виду:

$$mv \frac{dv}{dh} + D(h, v) = 0. \quad (1.3.17)$$

Пусть

$$v = V(h; v_{imp}) \quad (1.3.18)$$

является решением уравнения (1.3.17) с начальным условием:

$$v(0) = v_{imp}. \quad (1.3.19)$$

Тогда глубина проникания (ГП) в *полубесконечную преграду* H для заданной скорости удара v_{imp} , определяемая как глубина, на которой ударник замедляется до нулевой скорости, определяется из уравнения:

$$0 = V(H; v_{imp}), \quad (1.3.20)$$

а закон движения ударника $h = h(t)$ можно найти как решение дифференциального уравнения с соответствующим начальным условием:

$$\frac{dh(t)}{dt} = V(h; v_{imp}), \quad h(0) = 0. \quad (1.3.21)$$

Это решение можно записать следующим образом:

$$t(h, v_{imp}) = \int_0^h \frac{dz}{V(z; v_{imp})}. \quad (1.3.22)$$

Уравнение (1.3.22) позволяет вывести обратную зависимость $h(t)$, если необходимо. Таким образом, уравнения (1.3.18) и (1.3.22) определяют функцию $v(t)$ в параметрической форме.

В случае *преграды конечной толщины*, баллистический предел (БП) v_{bl} , определяемый в аналитических моделях обычно как начальная скорость ударника (скорость удара), которая требуется, чтобы ударник покинул преграду с нулевой скоростью. Следовательно, v_{bl} находится из следующего уравнения:

$$V(b + L; v_{bl}) = 0, \quad (1.3.23)$$

а остаточная скорость (скорость, с которой ударник выходит из преграды) может быть вычислена по формуле:

$$v_{res} = V(b + L; v_{imp}), \quad v_{imp} \geq v_{bl}. \quad (1.3.24)$$

Таким образом, интегральные характеристики проникания могут быть получены путем решения обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка.

Необходимо отметить, что предметом анализа с использованием инженерных моделей являются, главным образом, именно интегральные характеристики проникания (глубина проникания для полубесконечной преграды, баллистический предел и остаточная скорость для преграды конечной толщины).

1.3.4 Ударник, имеющий форму тела вращения

1.3.4.1 Общие формулы

Если ударник является телом вращения, то

$$\Phi = \Phi(x), \quad (1.3.25)$$

из уравнений (1.3.6), (1.3.7), (1.3.8) и (1.3.11) следует:

$$u = u(x) = \Phi_x / \sqrt{\Phi_x^2 + 1}, \quad U = U(x) = \Phi(\Phi_x + \mu_{fr}), \quad (1.3.26)$$

$$\sigma_{nose} = \pi r^2, \quad (1.3.27)$$

где r - радиус плоского затупления носовой части ударника.

Используя формулы (1.3.25)–(1.3.26), выражение для силы сопротивления (1.3.10) можно переписать следующим образом:

$$\frac{D(h, v)}{\pi} = \Omega_n(1, v) r^2 \delta(h) + 2 \int_{\theta(h)}^{\theta(h)} \Omega_n \left(\frac{\Phi_x}{\sqrt{\Phi_x^2 + 1}}, v \right) (\Phi_x + \mu_{fr}) \Phi dx. \quad (1.3.28)$$

1.3.4.2 Конический ударник. Преграда конечной толщины

Если нос ударника имеет форму острого конуса с полууглом при вершине ϑ , то

$$\Phi(x) = \tan \vartheta x \quad (1.3.29)$$

и уравнение (1.3.28) запишется следующим образом:

$$D(h, v) = 2\pi\Omega_n(\sin \vartheta, v)(\tan \vartheta + \mu_{fr}) \tan \vartheta \int_{\theta(h)}^{\theta(h)} x dx. \quad (1.3.30)$$

Для преграды конечной толщины уравнение (1.3.17) после подстановки D из соотношения (1.3.30) принимает вид:

$$\int_{v_{res}}^v \frac{\tilde{v} d\tilde{v}}{\Omega_n(\sin \vartheta, \tilde{v})} = \frac{2\pi(\tan \vartheta + \mu_{fr}) \tan \vartheta}{m} \zeta(h), \quad (1.3.31)$$

где

$$\zeta(h) = \int_h^{b+L} \left(\int_{\theta(\tilde{h})}^{\theta(\tilde{h})} x dx \right) d\tilde{h}. \quad (1.3.32)$$

Подстановка $v = v_{imp}$ и $h = 0$ в уравнение (1.3.31) приводит к соотношению между начальной v_{imp} и остаточной v_{res} скоростями:

$$\int_{v_{res}}^{v_{imp}} \frac{v dv}{\Omega_n(\sin \vartheta, v)} = \frac{2\pi(\tan \vartheta + \mu_{fr}) \tan \vartheta}{m} \zeta(0), \quad (1.3.33)$$

где выражение для $\zeta(0)$ после изменения порядка интегрирования приобретает вид:

$$\zeta(0) = \int_0^{b+L} \left(\int_{\theta(h)}^{\theta(h)} x dx \right) dh = \int_0^L \left(\int_{h=x}^{h=x+b} dh \right) x dx = \frac{bL^2}{2}. \quad (1.3.34)$$

Уравнение (1.3.33) дает также формулу для v_{bl} после подстановки $v_{res} = 0$ и $v_{imp} = v_{bl}$.

1.4 Двучленная модель

1.4.1 Произвольное тело вращения

В этом разделе мы рассмотрим следующий класс моделей:

$$\Omega_n(u, v) = a_2 u^2 v^2 + a_0, \quad \Omega_r(u, v) = \mu_{fr} \Omega_n(u, v), \quad (1.4.1)$$

где параметры a_0 , a_2 и μ_{fr} определяют модель.

Подставляя Ω_n из уравнения (1.4.1) в уравнение (1.3.28), получим:

$$D(h, v) = f_2(h)v^2 + f_0(h), \quad (1.4.2)$$

где

$$f_0(h) = \pi a_0 \left[r^2 \delta(h) + 2 \int_{\theta(h)}^{\Theta(h)} (\Phi_x + \mu_{fr}) \Phi dx \right], \quad (1.4.3)$$

$$f_2(h) = \pi a_2 \left[r^2 \delta(h) + 2 \int_{\theta(h)}^{\Theta(h)} \frac{\Phi_x^2 (\Phi_x + \mu_{fr}) \Phi}{\Phi_x^2 + 1} dx \right]. \quad (1.4.4)$$

Уравнение движения ударника (1.3.17) с сопротивлением $D(h, v)$, задаваемым формулой (1.4.2), является линейным обыкновенным дифференциальным уравнением относительно v^2 :

$$\frac{m}{2} \frac{dv^2}{dh} + f_2(h) v^2 + f_0(h) = 0, \quad (1.4.5)$$

решение которого с начальным условием

$$v(0) = v_{imp} \quad (1.4.6)$$

имеет вид:

$$v^2(h) = \frac{1}{Q(h)} \left[v_{imp}^2 - \frac{2}{m} \int_0^h f_0(\tilde{h}) Q(\tilde{h}) d\tilde{h} \right], \quad (1.4.7)$$

где

$$Q(h) = \exp \left(\frac{2}{m} \int_0^h f_2(\zeta) d\zeta \right). \quad (1.4.8)$$

В случае *полубесконечной преграды* уравнение (1.4.7) приводит к соотношению для ГП H :

$$\int_0^H f_0(h) Q(h) dh = \frac{m}{2} v_{imp}^2, \quad (1.4.9)$$

где выражения (1.4.3) и (1.4.4) используются с $\delta(h) = 1$.

В случае *преграды конечной толщины*, БП v_{bl} может быть вычислен по формуле (1.4.7) путем подстановки $h = b + L$, $v(h) = 0$ и $v_{imp} = v_{bl}$:

$$v_{bl}^2 = \frac{2}{m} \int_0^{b+L} f_0(h) Q(h) dh, \quad (1.4.10)$$

При условии, что $v_{imp} \geq v_{bl}$, можно записать уравнение (1.4.7) для остаточной скорости $v_{res} = v(b + L)$ следующим образом:

$$v_{res}^2 = \frac{1}{T} \left[v_{imp}^2 - \frac{2}{m} \int_0^{b+L} f_0(h) Q(h) dh \right], \quad (1.4.11)$$

где

$$T = Q(b + L). \quad (1.4.12)$$

Предполагается, что в случае преграды конечной толщины для расчета $\delta(h)$ используется уравнение (1.3.13).

Из уравнений (1.4.10) и (1.4.11) вытекает следующее простое соотношение:

$$\left(\frac{v_{imp}}{v_{bl}}\right)^2 - T\left(\frac{v_{res}}{v_{bl}}\right)^2 = 1, \quad v_{imp} \geq v_{bl}. \quad (1.4.13)$$

1.4.2 Ударник с конической носовой частью

1.4.2.1 Общие соотношения

Если носовая часть ударника имеет форму конического тела вращения с полууглом при вершине $\mathcal{G} = \tan^{-1} k_{cone}$, то

$$\Phi(x) = k_{cone}x \quad (1.4.14)$$

и формулы для функций $f_0(h)$ и $f_2(h)$ в уравнениях (1.4.3) и (1.4.4) можно записать в виде:

$$f_0(h) = e_0\varphi(h), \quad f_2(h) = e_2\varphi(h), \quad (1.4.15)$$

где

$$\varphi(h) = \int_{\theta(h)}^{\Theta(h)} x dx = 0,5[\Theta^2(h) - \theta^2(h)]. \quad (1.4.16)$$

$$e_0 = 2\pi a_0 k_{cone} (k_{cone} + \mu_{fr}), \quad e_2 = \frac{2\pi a_2 k_{cone}^3 (k_{cone} + \mu_{fr})}{k_{cone}^2 + 1}. \quad (1.4.17)$$

С учетом уравнения (1.4.15) производную функции $Q(h)$ из соотношения (1.4.8) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dh} &= \frac{2}{m} f_2(h) \exp\left(\frac{2}{m} \int_0^h f_2(\zeta) d\zeta\right) \\ &= \frac{2}{m} f_2(h) Q(h) = \frac{2e_2}{me_0} f_0(h) Q(h) \end{aligned} \quad (1.4.18)$$

И, следовательно,

$$\int_0^h f_0(\tilde{h}) Q(\tilde{h}) d\tilde{h} = \frac{m\kappa}{2} \int_0^h \frac{dQ(\tilde{h})}{d\tilde{h}} d\tilde{h} = \frac{m\kappa}{2} [Q(h) - 1]. \quad (1.4.19)$$

где

$$\kappa = \frac{e_0}{e_2} = \chi \frac{k_{cone}^2 + 1}{k_{cone}^2} = \chi \frac{1}{\sin^2 \mathcal{G}}, \quad \chi = \frac{a_0}{a_2}. \quad (1.4.20)$$

Тогда соотношение (1.4.7), задающее зависимость $v(h)$ примет вид:

$$v^2(h) = \frac{v_{imp}^2 - \kappa[Q(h) - 1]}{Q(h)}, \quad (1.4.21)$$

где

$$\begin{aligned} Q(h) &= \exp\left(\frac{2e_2}{m} \int_0^h d\hat{h} \int_{\theta(\hat{h})}^{\Theta(\hat{h})} x dx\right) \\ &= \exp\left(\frac{e_2}{m} \int_0^h [\Theta^2(\hat{h}) - \theta^2(\hat{h})] d\hat{h}\right). \end{aligned} \quad (1.4.22)$$

Подставляя в формулу (1.4.21) $h = b + L$, получим соотношение:

$$v_{res}^2 = \frac{v_{imp}^2 - \kappa(T - 1)}{T}, \quad v_{bl}^2 = \kappa(T - 1) \quad (1.4.23)$$

где

$$\begin{aligned} T = Q(b + L) &= \exp\left(\frac{2e_2}{m} \int_0^{b+L} d\hat{h} \int_{\theta(\hat{h})}^{\Theta(\hat{h})} x dx\right) = \exp\left(\frac{e_2 b L^2}{m}\right) \\ &= \exp\left(\frac{2\pi a_2 b L^2 k_{cone}^3 (k_{cone} + \mu_{fr})}{m(k_{cone}^2 + 1)}\right). \end{aligned} \quad (1.4.24)$$

Если μ_{fr} , формула для T примет вид:

$$T = \exp\left(\frac{2\pi a_2 b L^2 \sin^4 \vartheta}{m \cos^2 \vartheta}\right). \quad (1.4.25)$$

1.4.2.2 Полубесконечная преграда

В случае полубесконечной преграды $\theta(h) = 0$, $\Theta(h)$ определяется уравнением (1.3.2) и выражение для $Q(h)$ можно записать следующим образом:

$$Q(h) = \exp\left(\frac{e_2}{m} \Xi^{(\Theta)}(h)\right), \quad (1.4.26)$$

где

$$\begin{aligned} \Xi^{(\Theta)}(h) &= \int_0^h \Theta^2(\hat{h}) d\hat{h} = \begin{cases} \int_0^h \hat{h}^2 d\hat{h} & \text{если } 0 \leq h \leq L \\ \int_0^L \hat{h}^2 d\hat{h} + \int_L^h L^2 d\hat{h} & \text{если } h > L \end{cases} \\ &= \begin{cases} h^3/3 & \text{если } 0 \leq h \leq L \\ L^2(3h - 2L)/3 & \text{если } h > L \end{cases} \end{aligned} \quad (1.4.27)$$

Подставляя $v(h) = 0$ и $h = H$ в соотношение (1.4.21), получим уравнение для глубины проникания H :

$$Q(H) = 1 + v_{imp}^2 / \kappa, \quad (1.4.28)$$

которое имеет следующее решение:

$$H = \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{3m}{e_2} \ln(1 + v_{imp}^2 / \kappa)} & \text{если } 0 \leq v_{imp} \leq \hat{v}_{imp} \\ \frac{m}{e_2 L^2} \ln(1 + v_{imp}^2 / \kappa) + \frac{2}{3} L & \text{если } v_{imp} > \hat{v}_{imp} \end{cases}, \quad (1.4.29)$$

где

$$\hat{v}_{imp} = \sqrt{\kappa \left[\exp\left(\frac{e_2 L^3}{3m}\right) - 1 \right]}, \quad (1.4.30)$$

Зависимость v от h описывается формулой (1.4.21), где $Q(h)$ задается выражением (1.4.26).

1.4.2.3 Преграда конечной толщины

В случае преграды конечной толщины функции $\theta(h)$ и $\Theta(h)$ определяются формулами (1.3.4) и (1.3.2), соответственно; выражение для $Q(h)$ из уравнения (1.4.22) можно записать следующим образом:

$$Q(h) = \exp\left(\frac{e_2}{m} [\Xi^{(\Theta)}(h) - \Xi^{(\theta)}(h)]\right), \quad 0 \leq h \leq b + L, \quad (1.4.31)$$

где $\Xi^{(\Theta)}(h)$ определяется уравнением (1.4.27), в то время как

$$\begin{aligned} \Xi^{(\theta)}(h) &= \int_0^h \theta^2(\hat{h}) d\hat{h} = \begin{cases} 0 & \text{если } 0 \leq h \leq b \\ \int_b^h (\hat{h} - b)^2 d\hat{h} & \text{если } b < h \leq b + L \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{если } 0 \leq h \leq b \\ (h - b)^3 / 3 & \text{если } b < h \leq b + L \end{cases} \end{aligned} \quad (1.4.32)$$

Зависимость $v(h)$ может быть получена путем подстановки $Q(h)$ из выражения (1.4.31) в формулу (1.4.21) с учетом формул (1.4.27) и (1.4.32).

Поскольку

$$\Xi^{(\theta)}(b + L) = L^3 / 3, \quad \Xi^{(\Theta)}(b + L) = L^2 (3b + L) / 3, \quad (1.4.33)$$

то из уравнения (1.4.31) следует, что

$$Q(b + L) = T, \quad T = \exp(e_2 b L^2 / m) \quad (1.4.34)$$

и уравнение (1.4.21) позволяет определить выражение для остаточной скорости:

$$v_{res}^2 = v^2(b + L) = [v_{imp}^2 - \kappa(T - 1)] / T, \quad v_{imp} \geq v_{bl}, \quad (1.4.35)$$

где

$$v_{bl} = \sqrt{\kappa(T-1)} \quad (1.4.36)$$

является БП, потому что $v_{res} = 0$ когда $v_{imp} = v_{bl}$.

1.5 Усредненные МЛВ

1.5.1 Общий подход

Учет изменения области контакта между ударником и преградой на стадиях неполного погружения существенно усложняет модель. Этот недостаток, как правило, устраняется путем замены переменных пределов интегрирования в выражении для силы сопротивления на постоянные величины, полагая $\theta(h) = 0$ и $\Theta(h) = L$, хотя такое упрощение может несколько понизить точность модели [191]. Остапенко с соавторами [66] предложили следующие примерные оценки: стадией неполного погружения ударника в полубесконечную преграду можно пренебречь, если $v_{imp} > 10(L/R)$ для проникания в грунт и $v_{imp} > 130(L/R)$ для проникания в металлические преграды. Ниже мы покажем (для ударников, имеющих форму тел вращения), что такое упрощение может быть интерпретировано как результат применения определенной процедуры усреднения.

Будем исходить из уравнения (1.3.28) для силы сопротивления D , где функция Ω_n является произвольной, а

$$\Omega_r(u, v) = \mu_{fr} \Omega_n(u, v), \quad u = \Phi_x / \sqrt{\Phi_x^2 + 1}. \quad (1.5.1)$$

Уравнение (1.3.28) можно переписать следующим образом:

$$D(h, v) = \pi \Omega_n(1, v) r^2 \delta(h) + \int_{\theta(h)}^{\Theta(h)} \psi(h, v) dx, \quad (1.5.2)$$

где

$$\psi(x, v) = 2\pi \Omega_n \left(\frac{\Phi_x}{\sqrt{\Phi_x^2 + 1}}, v \right) (\Phi_x + \mu_{fr}) \Phi, \quad (1.5.3)$$

1.5.2 Преграда конечной толщины

В случае преграды конечной толщины выражение для средней силы сопротивления D_{av} имеет вид:

$$D_{av}(v) = \frac{1}{b+L} \int_0^{b+L} D(h, v) dh = \frac{\pi \Omega_n(1, v) r^2}{b+L} \int_0^{b+L} \delta(h) dh + \frac{1}{b+L} \int_0^{b+L} dh \int_{\theta(h)}^{\Theta(h)} \psi(x, v) dx. \quad (1.5.4)$$

Принимая во внимание определение функции $\delta(h)$ [см. формулу (1.3.13)], получим:

$$\int_0^{b+L} \delta(h) dh = \int_0^b dh = b. \quad (1.5.5)$$

Двойной интеграл в правой части уравнения (1.5.4) может быть преобразован путем изменения порядка интегрирования:

$$\int_0^{b+L} dh \int_{\theta(h)}^{\Theta(h)} \psi(x, v) dx = \int_0^L \psi(x, v) dx \int_{h=x}^{h=x+b} dh = b \int_0^L \psi(x, v) dx, \quad (1.5.6)$$

Используя формулы (1.5.5)–(1.5.6), мы можем переписать уравнение (1.5.4) следующим образом:

$$D_{av}(v) = \frac{b}{b+L} D_0(v), \quad (1.5.7)$$

где

$$D_0(v) = \pi \Omega_n(1, v) r^2 + \int_0^L \psi(x, v) dx. \quad (1.5.8)$$

Уравнение движения ударника $mv dv/dh + D_{av} = 0$ можно записать в виде следующего дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

$$mv \frac{dv}{dh} + \frac{b}{b+L} D_0(v) = 0, \quad (1.5.9)$$

решение которого с начальным условием $v(0) = v_{imp}$ имеет вид:

$$\int_v^{v_{imp}} \frac{\tilde{v} d\tilde{v}}{D_0(\tilde{v})} = \frac{b}{(b+L)m} h, \quad (1.5.10)$$

Подставляя $h = b+L$, $v = 0$ и $v_{imp} = v_{bl}$ в уравнение (1.5.10), получим выражение для БП:

$$\int_0^{v_{bl}} \frac{\tilde{v} d\tilde{v}}{D_0(\tilde{v})} = \frac{b}{m}, \quad (1.5.11)$$

Для того чтобы получить выражение для остаточной скорости, нужно подставить $h = b+L$ и $v = v_{res}$ в уравнение (1.5.10). В результате получим:

$$\int_{v_{res}}^{v_{imp}} \frac{\tilde{v} d\tilde{v}}{D_0(\tilde{v})} = \frac{b}{m}, \quad (1.5.12)$$

Можно легко показать, что формулы для БП и остаточной скорости совпадают для «точной» и усредненной модели, если ударник имеет форму острого конуса.

1.5.3 Полубесконечная преграда

Осреднение $D(h, v)$, задаваемое формулой (1.5.2), по h ($0 \leq h \leq H$), где H , как и ранее, является ГП и $\delta(h) = 1$, приводит к выражению для средней силы сопротивления, \tilde{D}_{av} :

$$\begin{aligned}\tilde{D}_{av}(v) &= \frac{1}{H} \int_0^H D(h, v) dh \\ &= \pi \Omega_n(1, v) r^2 + \frac{1}{H} \int_0^H dh \int_0^{\Theta(h)} \psi(x, v) dx.\end{aligned}\quad (1.5.13)$$

Предполагая, что $H \gg L$, и меняя порядок интегрирования в формуле (1.5.13), приходим к следующему соотношению:

$$\begin{aligned}\frac{1}{H} \int_0^H dh \int_0^{\Theta(h)} \psi(x, v) dx &= \frac{1}{H} \int_0^L \psi(x, v) dx \int_x^H dh \\ &= \int_0^L \left(1 - \frac{x}{H}\right) \psi(x, v) dx \approx \int_0^L \psi(x, v) dx\end{aligned}\quad (1.5.14)$$

Таким образом, можно считать, что

$$\tilde{D}_{av}(v) = D_0(v), \quad (1.5.15)$$

и записать уравнение движения ударника следующим образом:

$$mv \frac{dv}{dh} + D_0(v) = 0, \quad (1.5.16)$$

Решение уравнения (1.5.16) с начальным условием $v(0) = v_{imp}$

$$\int_v^{v_{imp}} \frac{\tilde{v} d\tilde{v}}{D_0(\tilde{v})} = \frac{h}{m}, \quad (1.5.17)$$

позволяет определить выражение для ГП, положив $v = 0$ и $h = H$:

$$\int_0^{v_{imp}} \frac{\tilde{v} d\tilde{v}}{D_0(\tilde{v})} = \frac{H}{m}. \quad (1.5.18)$$

1.5.4 Усредненная двучленная модель

В случае двучленной модели (1.4.1), которую мы запишем для удобства здесь повторно,

$$\Omega_n(u, v) = a_2 u^2 v^2 + a_0, \quad \Omega_\tau(u, v) = \mu_{fr} \Omega_n(u, v), \quad (1.5.19)$$

после соответствующих подстановок легко получить следующие соотношения.

В случае преграды конечной толщины:

$$v_{bl}^2 = \frac{A_0}{A_2} \left[\exp\left(\frac{2bA_2}{m}\right) - 1 \right], \quad (1.5.20)$$

$$\begin{aligned} v_{res}^2 &= \left(v_{imp}^2 + \frac{A_0}{A_2} \right) \exp\left(-\frac{2bA_2}{m}\right) - \frac{A_0}{A_2} = \\ &= (v_{imp}^2 - v_{bl}^2) \exp\left(-\frac{2bA_2}{m}\right), \quad v_{imp} \leq v_{bl} \end{aligned} \quad (1.5.21)$$

В случае *полубесконечной преграды*:

$$H = \frac{m}{2A_2} \ln \left(1 + \frac{A_2}{A_0} v_{imp}^2 \right), \quad (1.5.22)$$

В обоих случаях:

$$A_0 = \pi a_0 \left[r^2 + 2 \int_0^L (\Phi_x + \mu_{fr}) \Phi dx \right], \quad (1.5.23)$$

$$A_2 = \pi a_2 \left[r^2 + 2 \int_0^L \frac{\Phi_x^2 (\Phi_x + \mu_{fr}) \Phi}{\Phi_x^2 + 1} dx \right], \quad (1.5.24)$$

1.6 Некоторые ранние конкретные МЛВ

Насколько нам известно, первая МЛВ применительно к механике проникания была предложена в 1951 г. Nishiwaki [212]. Это была двучленная модель, учитывающая трение между снарядом и металлической преградой. Используя собственные экспериментальные результаты для конических снарядов, проникающих в алюминиевые преграды, автор пришел к выводу, что свободный член в модели пропорционален толщине мишени, а коэффициент при квадрате нормальной скорости равен ее плотности. Он также обосновал зависимость между скоростью удара и остаточной скоростью конического снаряда, учитывающую изменение поверхности контакта между снарядом и металлической преградой.

Витман и Степанов [41] экспериментально исследовали проникание конических снарядов, имеющих скорость удара до 1000 м/с, в различные металлические преграды. Они обнаружили, что отношение силы сопротивления к площади хвостовой цилиндрической части снаряда линейно зависит от квадрата скорости снаряда, когда текущая глубина проникания превышает длину конической носовой части. Анализ этих зависимостей для снарядов с разными углами при вершине конуса привел к двум интересным выводам. Первый вывод заключался в том, что для конических ударников с одинаковыми углами при вершине наклон прямых, описывающих эти линейные зависимости, был примерно таким же, как и наклон прямых, задающих силу сопротивления конического снаряда, движущегося в гиперзвуковом потоке газа, рассчитанную в соответствии с моделью Ньютона [81]. Второй вывод заключался в том, что все прямые линии, полученные в экспериментах для одного и того же материала преграды, пересекаются в одной точке. На основе этих наблюдений авторы пришли к выводу, что формула для силы сопротивления прониканию конического снаряда может быть записана следующим образом:

$$D_{cone} = \pi R^2 (a_0 + a_2 \sin^2 \vartheta v^2), \quad (1.6.1)$$

где $a_2 = \rho_{sh}$, $a_0 = \tilde{H}_{sh}$ - «динамическая твердость металла для скоростей удара $\tilde{v} \sim 10$ м/с». Некоторые значения \tilde{H}_{sh} , заимствованные из исследования [40], таковы: 350МПа, 1850МПа, 910МПа, 1330МПа, для алюминия, мягкой стали, меди и дюралюминия, соответственно.

Первоначально Витман и Степанов [41] использовали следующее соотношение:

$$a_0 = \tilde{H}_{sh} (v/\tilde{v})^\alpha, \quad (1.6.2)$$

однако впоследствии они пришли к выводу, что зависимостью a_0 от скорости снаряда можно пренебречь, так как $0 < \alpha \ll 1$.

Предположим, что местная сила воздействия внешней среды на снаряд в каждой точке их контакта равна силе, действующей на поверхность касательного конуса в этой точке, то есть, справедлив аналог "метода касательных конусов", известного из аэродинамики [81]. Тогда уравнение (1.6.1), справедливое для снарядов с конической носовой частью, будет иметь место для остроносых снарядов, имеющих различную форму, с $a_2 = \rho_{sh}$ и $a_0 = \tilde{H}_{sh}$ в двухчленной модели. Результат, полученный с использованием формулы [41] часто интерпретируется как МЛВ, хотя описание локального взаимодействия между преградой и поверхностью снаряда не являлось непосредственной целью их исследования.

Заметим, что двухчленная модель вида:

$$\Omega_n(u, v) = a_2 u^2 v^2 + a_0 v^\alpha, \quad \Omega_\tau(u, v) = \mu_{fr} \Omega_n(u, v), \quad (1.6.3)$$

приводит к уравнению Бернулли [59], описывающему движение ударника. Это уравнение имеет аналитическое решение, которое по структуре аналогично решению при $\alpha = 0$. Как следствие, аналоги формул (1.4.8) и (1.4.13) имеют, соответственно, вид [109]:

$$Q(h) = \exp\left(\frac{p}{m} \int_0^h f_2(\zeta) d\zeta\right). \quad (1.6.4)$$

и

$$\left(\frac{v_{imp}}{v_{bl}}\right)^p - T \left(\frac{v_{res}}{v_{bl}}\right)^p = 1, \quad v_{imp} \geq v_{bl}, \quad (1.6.5)$$

где

$$p = 2 - \alpha \quad (1.6.6)$$

Глава 2

Использование моделей, описывающих расширение цилиндрической и сферической полостей

Обозначения

E	модуль Юнга материала преграды;
h	текущая глубина проникания;
k_{plast}	постоянная в модели линейного упрочнения, (2.2.3);
n	параметр в уравнении (2.2.19);
P	нормальное напряжение на поверхности снаряда;
t	время;
u	$= \cos \nu$;
v	текущая скорость снаряда;
v_n	местная нормальная скорость на поверхности снаряда;
V	скорость расширения каверны на ее границе;
x	координата, связанная со снарядом, Рис. 2.3.1;
y	текущий радиус каверны;
Y	предел текучести материала преграды при сдвиге;
α_c	параметр в модели расширения полости с цилиндрической симметрией, уравнения (2.2.13), (2.2.27);
α_s	параметр в модели расширения полости со сферической симметрией, уравнения (2.2.12), (2.2.14);
β_c	параметр в модели расширения полости с цилиндрической симметрией, уравнения (2.2.13), (2.2.27);
β_s	параметр в модели расширения полости со сферической симметрией, уравнения (2.2.12), (2.2.14);
γ_s	параметр в модели расширения полости со сферической симметрией, уравнение (2.2.14);
ξ	координата, Рис. 2.3.1;
ε	истинная деформация;
η_c	параметр в модели расширения полости с цилиндрической симметрией, уравнения (2.2.13), (2.2.27);
μ_{fr}	коэффициент трения;
ν	коэффициент Пуассона материала преграды;
ρ	координата, связанная со снарядом, Рис. 2.3.1;
ρ_{sh}	плотность материала преграды;
σ_c^{stat}	статическая компонента нормального напряжения на границе полости при расширении с цилиндрической симметрией;
σ_s^{stat}	статическая компонента нормального напряжения на границе полости при расширении со сферической симметрией;

σ_r	нормальное напряжение на границе полости;
σ_t	касательное напряжение;
ν	угол между направлением движения снаряда и локальной внешней нормалью в некоторой точке его поверхности;
Φ	функция, определяющая форму снаряда, Рис. 2.3.1;
Ω_n, Ω_r	функции, определяющие МЛВ;
МЛВ	модель локального взаимодействия;
МРП	моделирование расширения полости;

2.1 Введение

Подход, основанный на решении задач моделирования расширения полостей (МРП), представляет собой достаточно универсальный приближенный метод, который обеспечивает возможность разработки аналитических моделей, описывающих локальное взаимодействие между преградой и ударником. Эти модели включают в явном виде параметры, определяющие механические свойства материала преграды.

Применение МРП требует решения двух основных задач.

Первая задача заключается в определении закона расширения полости внутри материала преграды (как правило, от нулевого начального радиуса), которая рассматривается для случаев с осевой или сферической симметрией. Множественность формулировок этой задачи связана с многочисленными моделями материала преграды (сжимаемая/несжимаемая, упругопластическая с различными законами деформации и т.д.).

Обычно различают три класса МРП. *Статические модели* описывают напряжения на поверхности полости в статическом состоянии. *Квази-динамические* модели являются основой для использования в механике проникания. Эти модели определяют напряжения на поверхности полости в зависимости от постоянной увеличения радиуса каверны. *Динамические модели* учитывают ускоренное возрастание радиуса поверхности полости. Иногда *квази-динамические* (в указанном выше смысле) модели также называются *динамическими*.

Вторая проблема оправдывает конкретный способ использования решения задачи о расширении полости в механике проникания. Если используется решение осесимметричной задачи, то будем говорить о "цилиндрической аналогии" (ЦА), в то время как в случае применения сферически-симметричного решения – о "сферической аналогии" (СА). Эта проблема рассматривается в настоящей главе в связи с применением квази-динамических моделей для определения локальных сил взаимодействия между снарядом и преградой во время движения снаряда внутри преграды.

Bishop с соавторами [122] были, насколько нам известно, первыми, кто применил МРП в механике проникания. Они получили решения, описывающие статическое расширение цилиндрических и сферических полостей в бесконечной среде от нулевого начального радиуса, и использовали эти решения для определения силы, действующей на поверхность конического снаряда. Goodier [163] применил динамическую модель расширения полости к проблеме высокоскоростного проникания снаряда со сферическим затуплением. Важную роль сыграл обзор [172], представивший исследования проблем, связанных с расширением полостей в твердых телах, по состоянию на конец 1950-х годов.

Наиболее интенсивные исследования в рассматриваемой области, с прицелом на инженерные приложения, на ранних стадиях проводилось на кафедре Газовой и

волновой динамики Факультета механики и математики МГУ им. М.В. Ломоносова и в Sandia National Laboratories (SNL, США), хотя, конечно, внимание этой тематике уделялось и в других организациях. Результаты исследования, полученные советскими учеными, обобщены в монографиях [67,69,71].

Исследования, проведенные М. Forrestal и его коллегами в SNL и продолжающиеся до настоящего времени, к сожалению, не аккумулированы в обобщающей монографии, однако их работы довольно полно представлены, например, в обзорах, перечисленных ниже. Предложено большое число, главным образом, квази-динамических моделей расширения полости для материалов, имеющих различные механические свойства. Характерными особенностями подхода SNL являются доведение теоретических результатов до конкретных инженерных моделей, сочетание теоретических исследований с экспериментальными и привлечение "точных" численных расчетов. Авторы рассматривали ограниченное число форм носовой части снарядов (конус, сфера, оживало), хотя их результаты легко обобщаются на случай произвольных тел вращения. Еще одна особенность подхода: отказ от рассмотрения стадий неполного погружения снаряда в преграду.

Необходимо отметить, что некоторые результаты в теории проникания и смежных областях были независимо получены в СССР и на Западе. Соответствующие примеры можно найти, например, в [47,181].

Детальное освещение истории развития методов МРП и их применения к задачам проникания выходит за рамки тематики, которой посвящена настоящая монография; здесь мы остановились лишь на некоторых ключевых моментах; для более глубокого анализа могут быть полезны обзоры [88, 116-118,230, 237-238] и обзорные разделы в монографиях [109,114,261]. Некоторые модели, имеющие непосредственное отношение к методам исследования свойств многослойных преград, развиваемым в настоящей монографии, рассмотрены ниже.

2.2 Модели, описывающие расширение полости в металлах

2.2.1 Статические модели

Статические модели расширения полости широко используются в механике проникания либо непосредственно, либо в качестве элементов динамических моделей расширения полости.

Классические результаты в этой области были получены в ранних работах [79,122] с использованием условия текучести Мизеса.

Bishop [122] предложил следующие статические модели расширения цилиндрической и сферической каверны для несжимаемых в пластической области, упруго-пластических материалов и материалов с линейным упрочнением:

$$\sigma_r = \sigma_s^{stat} = \frac{2Y}{\sqrt{3}} \left[1 + \ln \left(\frac{E}{(1+\nu)Y} \right) \right] + \frac{2\pi^2}{27} k_{plast}, \quad (2.2.1)$$

$$\sigma_r = \sigma_c^{stat} = \frac{Y}{\sqrt{3}} \left[1 + \ln \left(\frac{\sqrt{3}E}{2(1+\nu)Y} \right) \right] + \frac{\pi^2}{18} k_{plast}, \quad (2.2.2)$$

где k_{plast} постоянная в модели линейного упрочнения:

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon & \text{если } \varepsilon \leq Y/E \\ Y + k_{plast}\varepsilon & \text{если } \varepsilon > Y/E \end{cases} \quad (2.2.3)$$

В случае идеально упруго-пластического материала $k_{plast} = 0$ уравнения (2.2.1) и (2.2.2) можно переписать следующим образом:

$$\sigma_r = \sigma_s^{stat} = \frac{2Y}{3} \left[1 + \ln \left(\frac{E}{(1+\nu)Y} \right) \right], \quad (2.2.4)$$

$$\sigma_r = \sigma_c^{stat} = \frac{Y}{\sqrt{3}} \left[1 + \ln \left(\frac{\sqrt{3}E}{2(1+\nu)Y} \right) \right]. \quad (2.2.5)$$

В случае несжимаемой во всем диапазоне напряжений идеально упруго-пластических материалов ($\nu = 0,5$) уравнения (2.2.4) и (2.2.5) запишутся следующим образом:

$$\sigma_r = \sigma_s^{stat} = \frac{2Y}{3} \left[1 + \ln \left(\frac{2E}{3Y} \right) \right], \quad (2.2.6)$$

$$\sigma_r = \sigma_c^{stat} = \frac{Y}{\sqrt{3}} \left[1 + \ln \left(\frac{E}{\sqrt{3}Y} \right) \right]. \quad (2.2.7)$$

Наконец, в случае несжимаемого во всем диапазоне напряжений материалов с линейным упрочнением ($\nu = 0,5; k_{plast} > 0$), уравнения (2.2.1) и (2.2.2) приобретут вид:

$$\sigma_r = \sigma_s^{stat} = \frac{2Y}{3} \left[1 + \ln \left(\frac{2E}{3Y} \right) \right] + \frac{2\pi^2}{27} k_{plast}, \quad (2.2.8)$$

$$\sigma_r = \sigma_c^{stat} = \frac{Y}{\sqrt{3}} \left[1 + \ln \left(\frac{E}{\sqrt{3}Y} \right) \right] + \frac{\pi^2}{18} k_{plast}. \quad (2.2.9)$$

Hill [79] предложил следующие модели для сжимаемого во всем диапазоне напряжений идеально упруго-пластического материала:

$$\sigma_r = \sigma_s^{stat} = \frac{2Y}{3} \left[1 + \ln \left(\frac{E}{3(1-\nu)Y} \right) \right], \quad (2.2.10)$$

$$\sigma_r = \sigma_c^{stat} = \frac{Y}{\sqrt{3}} \left[1 + \ln \left(\frac{\sqrt{3}E}{(5-4\nu)Y} \right) \right]. \quad (2.2.11)$$

Различные модификации приведенных выше моделей можно найти в работах [202, [203] и др.

2.2.2 Квази-динамические модели

Большинство квази-динамических моделей расширения полости записывается в одной из следующих форм:

$$\sigma_r = \alpha_s + \beta_s V^2, \quad \alpha_s = \sigma_s^{stat}, \quad (2.2.12)$$

$$\sigma_r = \alpha_c + \beta_c V^2, \quad \alpha_c = \sigma_c^{stat}, \quad (2.2.13)$$

или

$$\sigma_r = \alpha_s + \gamma_s V + \beta_s V^2. \quad (2.2.14)$$

Рассмотрим теперь некоторые конкретные модели.

Forrestal с соавторами [154] предложили модели для сжимаемого упруго-идеально пластического материала, описываемые формулами (2.2.12) и (2.2.13) с использованием уравнений (2.2.10) и (2.2.11) для статической части нормального напряжения, в то время как коэффициенты β_s и β_c предполагалось определять на основе решения задачи о расширении полости [152,158]. В частности, для преграды, изготовленной из материала 7075-T651 ($K = 69 \text{ GPa}$, $\nu = 0,33$, $Y = 400 \text{ MPa}$, $\rho_{sh} = 2710 \text{ kg/m}^3$), значения коэффициентов таковы: $\beta_s / \rho_{sh} = 1,041$ и $\beta_c / \rho_{sh} = 1,837$.

Forrestal с соавторами [155] разработали модель вида (2.2.13) для материала, для которого справедливо не зависящее от скорости упрочнение по степенному закону:

$$\sigma_c^{stat} = \frac{Y}{\sqrt{3}} \left[1 + \left(\frac{E}{\sqrt{3}Y} \right)^n \Psi(1-\eta, n) \right], \quad (2.2.15)$$

$$\beta_c = \frac{\rho_{sh}}{2} \left(\frac{1 + \ln 2}{1 - \nu} + \eta - \ln \eta - 1 \right), \quad (2.2.16)$$

где

$$\eta = \frac{2(\nu+1)Y}{\sqrt{3}E}, \quad (2.2.17)$$

$$\Psi(z, n) = \int_0^z \frac{(-\ln \zeta)^n}{1-\zeta} d\zeta, \quad 0 < z < 1. \quad (2.2.18)$$

Предполагается, что материал в пластической зоне несжимаем, но в упругой области является сжимаемым. Параметр n (как правило, $n < 0,5$) – это коэффициент в эмпирическом уравнении, описывающем степенное упрочнение [130]:

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon & \text{если } \varepsilon \leq Y/E \\ Y(E\varepsilon/Y)^n & \text{если } \varepsilon > Y/E \end{cases}. \quad (2.2.19)$$

Для вычисления интеграла с особенностью при $\zeta = 0$ в уравнении (2.2.18) Forrestal and Romero [153] предложили аппроксимацию:

$$\Psi(z, n) = 2,994 - 3,742n + 3,511n^2 + \frac{0,05^n - (1-z)^n}{n} + \frac{n[0,05^{n+1} - (1-z)^{n+1}]}{2(n+1)}. \quad (2.2.20)$$

Luk с соавторами [197] предложили модель для упруго-пластического материала со степенным законом упрочнения, не учитывающую скорость деформирования. Для несжимаемого материала решение было получено в замкнутой форме:

$$\sigma_s^{stat} = \frac{2Y}{3} \left[1 + \frac{\Psi(1-\eta, n)}{\eta^n} \right], \quad (2.2.21)$$

$$\beta_s = 1,5\rho_{sh}, \quad (2.2.22)$$

$$\eta = 1,5Y/E. \quad (2.2.23)$$

Отмечается, что учет сжимаемости требует численного решения дифференциальных уравнений.

Отметим также работы [156,157,201,256], в которых предложены иные модели вида (2.2.12) и (2.2.13), определены коэффициенты моделей для различных материалов, проведено сопоставление различных моделей.

В ряде работ предложены модели вида, отличного от (2.2.12)-(2.2.14), включая форму (2.2.14); поскольку такие модели не используются нами далее, ограничимся лишь ссылками на некоторые работы [200,227,248-249].

2.2.3 Динамические модели

Динамические модели используются в немногочисленных работах, посвященных анализу баллистических свойств слоистых мишеней (например, [100]).

Норкин [172] отметил, что важные аспекты теории, базирующейся на динамических моделях, были впервые рассмотрены R. Hill в его неопубликованном докладе 1948 года, и предложил следующую динамическую модель для несжимаемого упруго-пластического материала:

$$\sigma_r = \sigma_r(y, \dot{y}, \ddot{y}) = \sigma_s^{stat} + \sigma_s^{dyn}, \quad (2.2.24)$$

где

$$\sigma_s^{dyn} = \sigma_s^{dyn}(y, \dot{y}, \ddot{y}) = \rho_{sh}(y\ddot{y} + 1,5\dot{y}^2), \quad (2.2.25)$$

y - радиус отверстия, σ_s^{stat} определяется уравнением (2.2.6). На основании уравнения (2.2.25) Goodier [163] предложил следующую формулу для нормального напряжения на поверхности снаряда с полусферической формой носовой части:

$$p = \sigma_s^{stat} + \sigma_s^{dyn}(R, v, \dot{v}) \cos \nu = \sigma_s^{stat} + \rho_{sh}(R\dot{v} + 1,5v^2) \cos \tilde{\theta}, \quad (2.2.26)$$

где $\tilde{\theta}$ - угол между направлением движения снаряда и локального вектора нормали к поверхности, R - радиус полусферы. Bernard и Hanagud [121] обобщили модель [163] на случай снарядов, имеющих иную форму носовой части.

Сагомоян [70] рассматривал проникание тонкого твердого снаряда (тело вращения) в несжимаемый, упруго-пластический материал и предложил следующую модель:

$$\sigma_r = \sigma_r(y, \dot{y}, \ddot{y}) = \alpha_c + \beta_c \dot{y}^2 + \eta_c y\ddot{y}, \quad (2.2.27)$$

где

$$\alpha_c = \frac{Y}{2}[1 + \ln(1 + \omega)], \quad \omega = \frac{E}{2Y(1 + \nu)}, \quad (2.2.28)$$

$$\beta_c = \frac{\rho_{sh}}{2} \left[\ln(1 + \omega) - \frac{\omega}{\omega + 1} \right], \quad \eta_c = \frac{\rho_{sh}}{2} \ln(1 + \omega)$$

Эта модель позволяет получить аналитическое решение уравнения движения ударника в мишени и формулы для интегральных характеристик проникания. Сагомоян более подробно рассмотрел случай ударников с конической формой носовой части; в более наглядной и компактной форме соответствующие решения приведены в работе [106].

Аптуков [11] рассмотрел статическую задачу о расширении сферической полости в сжимаемой упругопластической среде при больших деформациях и предложил подход к теоретическому определению коэффициента α_c с учетом влияния нелинейной сжимаемости, свободной поверхности, слоистости.

В следующем сообщении Аптуков [12] получил приближенное решение для случая динамического расширения сферического отверстия в сжимаемой упруго-пластической среде в виде уравнения (2.2.27), предложил формулы для вычисления коэффициентов модели

$$\beta_c = \hat{\beta}_c / v_*^2, \quad \eta_c = \hat{\eta}_c / v_*^2, \quad (2.2.29)$$

и привел значения коэффициентов α_c , $\hat{\beta}_c$, $\hat{\eta}_c$ для нескольких металлов (см. Табл. 2.2.1, которая дополняется значениями v_* (объемная скорость звука), равными 5040 м/с, 5160 м/с и 4650 м/с для алюминия, титана и стали, соответственно).

В дальнейшем Аптуков и Хасанов [5] применили данный подход к решению задачи о расширении цилиндрического отверстия в сжимаемой упругопластической среде.

Таблица 2.2.1. Параметры $\alpha_c, \hat{\beta}_c, \hat{\eta}_c$.

Параметр	Алюминий, Y (ГПа)			Титан, Y (ГПа)			Сталь, Y (ГПа)		
	0,1	0,3	0,5	0,4	0,6	0,8	0,8	1,0	1,2
α_c (ГП)	0,41	1,10	1,70	1,49	2,12	2,70	2,94	3,57	4,18
$\hat{\beta}_c$ (ГП)	76	71	64	122	118	112	170	162	157
$\hat{\eta}_c$ (ГП)	55	50	48	88	85	83	121	118	117

Динамические модели иного вида можно найти в работах [131-132,249].

2.3 Связь между моделями расширения отверстий и МЛВ

2.3.1 "Сферическая" аналогия

Решение задачи моделирования расширения отверстия в условиях сферической симметрии от нулевого начального радиуса в квази-динамической постановке при постоянной скорости на границе полости можно описать в виде:

$$\sigma_r = \sigma_r(V), \quad (2.3.1)$$

где σ_r - как и ранее, нормальное напряжение на границе полости, V - скорость расширения ее границы.

В рамках рассматриваемой аналогии расчет силы взаимодействия между преградой и ударником осуществляется следующим образом. Рассмотрим некоторую точку на поверхности ударника, движущегося с мгновенной скоростью v внутри преграды. Нормальная скорость в этой точке $v_n = v \cos \nu = uv$, где $u = \cos \nu$, а ν - угол между направлением движения снаряда и локальной внешней нормалью к его поверхности. Предполагается, что нормальное напряжение в этой точке поверхности преграды равно напряжению на границе полости, которая расширяется с постоянной скоростью $V = v_n$. Таким образом, нормальное напряжение на поверхности снаряда описывается МЛВ с функцией:

$$\Omega_n(u, v) = \sigma_r(uv) . \quad (2.3.2)$$

Трение между снарядом и преградой может быть учтено традиционным способом – с использованием отношения $\Omega_r(u, v) = \mu_{fr} \Omega_n(u, v)$.

Рассматриваемая "сферическая" аналогия может быть проиллюстрирована с использованием простых геометрических соображений. Рассмотрим сферу, которая имеет ту же касательную плоскость, что и ударник, в некоторой точке его поверхности, находящейся в контакте с преградой. Эта сфера может рассматриваться как поверхность расширяющейся полости. Тогда нормальное напряжение на поверхности снаряда принимается равным нормальному напряжению на поверхности полости. Поскольку σ_r не зависит от радиуса полости, неоднозначность при выборе радиуса сферы не влияет на результат. Очевидно, что в общем случае сферы различны в разных точках поверхности снаряда. Исключение составляют снаряды, имеющие оживальную форму носовой части, что делает для таких ударников геометрическую интерпретацию особенно наглядной.

Применение динамических "сферических" моделей расширения отверстия к снарядам, имеющим несколько типичных форм, можно найти в работе [121]. Однако, расчет силы, действующей на поверхности снаряда, с использованием динамической модели неоднозначен и не допускает универсальную геометрическую интерпретацию, что не способствует их широкому применению в механике проникания.

2.3.2 "Цилиндрическая" аналогия

Другой, широко используемый в механике проникания, подход известен под разными наименованиями: "cylindrical cavity expansion approximation" (используется вне бывшего СССР); "метод плоских сечений" (термин, введенный, по-видимому, Сагомояном [67-68] и используемый в публикациях на русском языке), а также редко используемый термин "disks model" [258]. Ниже мы будем следовать русскоязычной традиции и использовать термин "метод плоских сечений".

МПС допускает довольно наглядную интерпретацию. В основе МПС, ориентированном на тонкие ударники, лежит допущение, что частицы материала преграды движутся в радиальном направлении во время проникания снаряда. Преграду можно рассматривать как состоящую из бесконечного количества тонких слоев, и в каждом слое моделируется расширение полости, вызванное движущимся снарядом.

МПС может быть описан в общем случае динамической модели расширения отверстия для каждого слоя следующим образом:

$$\sigma_r = \sigma_r(y, \dot{y}, \ddot{y}), \quad \dot{y} = V = dy/dt, \quad \ddot{y} = d^2 y / dt^2 , \quad (2.3.3)$$

где y - текущий радиус отверстия.

Пусть $\rho = \Phi(x)$ есть уравнение поверхности снаряда. Тогда для бесконечно малого слоя с координатой ξ (см. Рис. 2.3.1) условия того, что поверхность отверстия совпадает с поверхностью снаряда, и что скорость и ускорение границы отверстия равны радиальным компонентам соответствующих кинематических характеристик снаряда, приводят к соотношениям [67,69,71]:

$$y = \Phi(h - \xi) \quad (2.3.4)$$

$$\dot{y} = \Phi'(x)\dot{h}, \ddot{y} = \Phi''(x)\dot{h}^2 + \Phi'(x)\ddot{h}, \quad x = h - \xi, \quad (2.3.5)$$

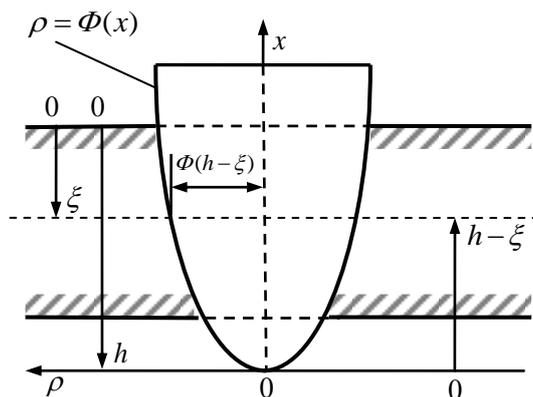


Рис. 2.3.1 Иллюстрация МПС

где точка над символом обозначает производную по времени.

Выражение для нормального напряжения на поверхности снаряда p получается путем подстановки y, \dot{y} и \ddot{y} из уравнений (2.3.4) и (2.3.5) в уравнение (2.3.3):

$$p = \sigma_r(\Phi, \Phi\dot{h}, \Phi''\dot{h}^2 + \Phi'\ddot{h}), \quad \Phi = \Phi(x). \quad (2.3.6)$$

Случай квази-динамической модели аналогичен случаю, описываемому уравнением (2.3.1):

$$\sigma_r = \sigma_r(\dot{y}) = \sigma_r(V), \quad (2.3.7)$$

уравнение (2.3.6) имеет вид:

$$p = \sigma_r(\Phi'v), \quad \dot{h} = v. \quad (2.3.8)$$

После подстановки

$$\Phi' = \cot v = u/\sqrt{1-u^2} \quad (2.3.9)$$

в уравнение (2.3.8), можно сделать вывод о том, что квази-динамическая МПС сводится в этом случае к МЛВ с функцией:

$$\Omega_n(u, v) = \sigma_r\left(\frac{uv}{\sqrt{1-u^2}}\right) \quad (2.3.10)$$

и, поскольку ударник – тонкое тело (u мало), получаем формулу, совпадающую с формулой (2.3.2):

$$\Omega_n(u, v) = \sigma_r(uv) . \quad (2.3.11)$$

Для моделирования проникания нетонких тел Сагомоян предложил [69,71] гипотезу "движения по нормали" (см. также [73]), однако она, как правило, приводит к соотношениям, слишком сложным для аналитических исследований.

Модели, основанные на "степенных" соотношениях между интегральными характеристиками проникания

Обозначения

a	параметр, уравнение (3.1.1);
b	толщина преграды;
c	параметр, уравнение (3.4.1);
d	максимальный диаметр снаряда;
d_{plug}	диаметр пробки;
L_{imp}	длина снаряда;
m	масса снаряда;
m_{plug}	масса пробки;
P	параметр, уравнение (3.2.1);
v	текущая скорость снаряда;
v_{imp}	скорость удара;
\tilde{v}_{imp}	$= v_{imp} / v_{bl}$;
v_{res}	остаточная скорость снаряда;
\tilde{v}_{res}	$= v_{res} / v_{bl}$;
v_{bl}	баллистический предел;
W	работа перфорации, минимальная энергия перфорации;
α	параметр, уравнение (3.3.6);
θ	угол между направлением движения снаряда и местным вектором нормали к поверхности;
ρ_{imp}	плотность материала снаряда;
ρ_{sh}	плотность материала преграды;
БП	баллистический предел.

3.1 "Квадратичные" соотношения

Для относительно тонкой пластины, пробиваемой затупленным ударником, Recht и Irson [225] предложили следующую формулу для остаточной скорости:

$$v_{res} = a(v_{imp}^2 - v_{bl}^2)^{1/2}, \quad v_{imp} \geq v_{bl}, \quad (3.1.1)$$

или

$$\tilde{v}_{res} = a(\tilde{v}_{imp}^2 - 1)^{1/2}, \quad \tilde{v}_{imp} \geq 1, \quad (3.1.2)$$

где

$$a = 1 / \left(1 + \frac{m_{plug}}{m} \right) = 1 / \left(1 + \frac{\rho_{sh} b d_{plug}^2}{\rho_{imp} L_{imp} d^2} \right), \quad (3.1.3)$$

$$\tilde{v}_{imp} = v_{imp} / v_{bl}, \quad \tilde{v}_{res} = v_{res} / v_{bl}, \quad (3.1.4)$$

m_{plug} и d_{plug} - масса и диаметр выбиваемой пробки, соответственно.

Для БП предложена [225] следующая формула:

$$v_{bl} = \frac{4\zeta_1 \rho_{sh} b^2 \psi \eta}{L_{imp} d} \left[1 + \sqrt{\left(1 + \frac{L_{imp} \rho_{imp}}{b \rho_{sh}} \right) \left(1 + \frac{\zeta_2 d}{4 \rho_{sh} b \psi^2 \eta} \right)} \right], \quad (3.1.5)$$

где

$$\psi = \frac{1}{\rho_{imp} C_{imp}} + \frac{1}{\rho_{sh} C_{sh}}, \quad (3.1.6)$$

C_{sh} , C_{imp} - продольные скорости акустических волн в материале снаряда и преграды, соответственно, ζ_1 , ζ_2 - константы, зависящие от выбранных единиц измерения для параметров, η - коэффициент, связанный с динамической прочностью на сдвиг.

В случае пробивания толстой пластины цилиндрическим ударником предложена [225] формула для параметра a в уравнениях (3.1.1) и (3.1.2):

$$a = 1 / \sqrt{\left(1 + \frac{\hat{m}_{plug}}{m} \right) \left(1 + \frac{\rho_{sh} b d_{plug}^2}{\rho_{imp} L_{imp} d^2} \right)}, \quad (3.1.7)$$

где \hat{m}_{plug} - экспериментальное значение массы выбитой пробки.

С использованием различных допущений Kasano и Abe [185] предложили использовать уравнение (3.1.8) вместо уравнения (3.1.1):

$$v_{res} = \hat{a} (v_{imp}^2 - v_{bl}^2)^{1/2}, \quad v_{imp} \geq v_{bl}, \quad (3.1.8)$$

где $\hat{a} = \sqrt{a}$,

Коняев [58] предложил ввести эмпирический коэффициент в члене m_{plug}/m в уравнении (3.1.3).

Модель [225] для случая проникания заостренного снаряда без образования пробки основана на законе сохранения энергии, который может быть записан следующим образом:

$$0.5 m v_{imp}^2 - 0.5 m v_{res}^2 = W, \quad (3.1.9)$$

где W - работа по перфорации преграды. Предположение, что W не зависит от скорости соударения, приводит к уравнениям (3.1.1) и (3.1.2), с параметром $a = 1$:

$$v_{res} = (v_{imp}^2 - v_{bl}^2)^{1/2}, \quad v_{imp} \geq v_{bl}, \quad (3.1.10)$$

$$\tilde{v}_{res} = (\tilde{v}_{imp}^2 - 1)^{1/2}, \quad \tilde{v}_{imp} \geq 1, \quad (3.1.11)$$

и формуле для БП:

$$v_{bl} = \sqrt{2W/m}, \quad (3.1.12)$$

Ясно, что для замыкания системы соотношений необходимо задать функциональную зависимость БП от толщины преграды и параметров, определяющих форму ударника и свойства материала преграды, аналогичные соотношению (3.1.5). Здесь мы ограничимся ссылками на некоторые работы, посвященные решению или анализу этой проблемы [49,133,146,160,168,175,192,242,246,252-254]. Более подробная информация, при необходимости, будет дана в соответствующих разделах книги.

3.2 "Степенные" соотношения

Lambert и Jonas [190] предложили следующую аппроксимацию результатов, полученных в баллистических испытаниях:

$$v_{res} = \begin{cases} 0 & \text{если } 0 \leq v_{imp} \leq v_{bl} \\ a(v_{imp}^p - v_{bl}^p)^{1/p} & \text{если } v_{imp} > v_{bl} \end{cases}, \quad (3.2.1)$$

или

$$\tilde{v}_{res} = \begin{cases} 0 & \text{если } 0 \leq \tilde{v}_{imp} \leq 1 \\ a(\tilde{v}_{imp}^p - 1)^{1/p} & \text{если } \tilde{v}_{imp} > 1 \end{cases}, \quad (3.2.2)$$

где параметры a , p и v_{bl} определяются путем обработки экспериментальных данных.

Lambert [189] (см. также [54]) предложил формулы для расчета a , p и v_{bl} в уравнении (3.2.1), которые могут быть записаны в системе единиц СИ следующим образом:

$$v_{bl} = \alpha_{10} \left(\frac{L_{imp}}{d} \right)^{0,15} \sqrt{f(z) d^3 / m}, \quad (3.2.3)$$

$$a = 1 / \left(1 + \frac{\pi \rho_{sh} d^3 z}{12m} \right), \quad (3.2.4)$$

$$p = 2 + z/3, \quad (3.2.5)$$

где

$$z = (b/d)(\sec\theta)^{0,5}, \quad f(z) = z + \exp(z) - 1 \quad (3.2.6)$$

α_{10} - константа, зависящая от материала преграды; для алюминия и катаной гомогенной однородной брони рекомендованы значения $\alpha_{10} = 1750$ и $\alpha_{10} = 4000$, соответственно. Значения параметров для некоторых типов стали можно найти в работе [159].

Предложенная стандартизация [190] до настоящего времени широко используется для представления результатов экспериментальных исследований и "точных" численных расчетов по прониканию не только в металлы, но и в различные другие материалы (см., например, ([125,174,186,207,226,257])).

Erice с соавторами [149] предложил следующую формулу для a в уравнении (3.2.2):

$$a = \frac{k}{1 + m_{plug}/m}, \quad (3.2.7)$$

где k - эмпирический коэффициент.

Nennstiel [210], исходя из нужд криминалистической экспертизы, предложил эмпирические формулы, основанные на корреляции [190], позволяющие предсказать остаточную скорость и БП некоторых видов обычных пистолетных и револьверных пуль, проникающих в тонкие металлические пластины ($b/d \leq 0.2$). Предложенная модель была основана на уравнении (3.2.1), где

$$a = k / \left(1 + \frac{\pi \rho_{sh} d^2 \tilde{b}}{4m} \right), \quad (3.2.8)$$

$$v_{bl} = 100 \xi \tilde{b} \sqrt{d/m}, \quad (3.2.9)$$

$$\tilde{b} = b / \cos^\kappa \theta, \quad (3.2.10)$$

k - безразмерный параметр, близкий к 1; ρ_{sh} измеряется в г/см³; m - в г; линейные размеры - в см; скорости - в м/с. Значения безразмерных эмпирических параметров k , ξ , κ в уравнениях (3.2.8)-(3.2.10), вычисленные на основе экспериментальных данных, приведены автором для нескольких типов пуль.

3.3 Некоторые модели проникания, приводящие к "степенным"/"квадратичным" соотношениям

Успешное применение аппроксимации [190] приводит к задаче поиска модели проникания, приводящей к аппроксимации такого вида. В качестве одной из таких моделей можно рассматривать "локальную" модель вида (1.6.3), приводящую к соотношению (1.6.5). К соотношению (3.2.1) с $a=1$ приводит ([60,206]) допущение о степенной зависимости между силой лобового сопротивления ударника и его скоростью. Nixdorff [213-216] показала, что при определенных предположениях модель [92-93]) приводит к соотношению (1.6.5).

Ven-Doг с коллегами предложили [99,107] модель проникания, которая основана на следующих предположениях.

1) Во время проникания ударник может изменять свою форму, а также накапливать и/или терять массу. Предполагается, что масса ударника зависит от текущей глубины проникания h , которая является расстоянием от передней поверхности преграды до точки ударника, имеющей координату $h=0$ в начале своего движения:

$$m = m(h), m^- = m^-(h), m^+ = m^+(h), \quad (3.3.1)$$

где m - масса ударника, m^+ и m^- - накопление и потеря массы за период от начала движения, соответственно. Предполагается также, что

$$v^+ = 0, v^- = v, \quad (3.3.2)$$

где v^+ - скорость присоединяемых частиц и v^- - скорость потерянных частиц.

2) Выражение для дифференциала силы сопротивления dD , действующей на элемент поверхности ударника между секциями x , а также $x+dx$, имеет вид:

$$dD = [P_2(x, h)v^2 + P_0(x, h)v^\alpha] dx, \quad (3.3.3)$$

где P_0 и P_2 - некоторые положительные функции, параметр $0 \leq \alpha < 2$, координата x связана с ударником (см. Рис. 51.1.2).

3) Часть поверхности ударника, взаимодействующая с мишенью, зависит только от текущей глубины проникания, т.е.,

$$x = \theta_*(h), \quad x = \Theta_*(h). \quad (3.3.4)$$

Взаимодействие ударника и преграды начинается при $h=0$ и завершается, когда $h=b+L$, функции $\theta_*(h)$ и $\Theta_*(h)$ имеют смысл $\theta(h)$ и $\Theta(h)$ из главы 1, соответственно, но их конкретный вид не задается.

4) Ударник может изменять свою форму во время проникания. В общем случае, функции m , m^- , m^+ , G_0 , G_2 , θ_* , Θ_* зависят от текущей формы ударника, то есть, от его деформации, накопления и потери массы.

Уравнение движения тела с переменной массой может быть записано в виде (см., например, [36]):

$$m \frac{dv}{dt} + (v - v^+) \frac{dm^+}{dt} + (v - v^-) \frac{dm^-}{dt} = -D(h, v). \quad (3.3.5)$$

Выражение для силы сопротивления может быть получено из уравнений (3.3.3) и (3.3.4):

$$D(h, v) = \hat{f}_2(h)v^2 + \hat{f}_0(h)v^\alpha, \quad (3.3.6)$$

где

$$\hat{f}_i(h) = \int_{\theta_*(h)}^{\Theta_*(h)} P_i(x, h) dx, \quad i=0,2. \quad (3.3.7)$$

Модель также включает в себя уравнение баланса массы:

$$m(h) = m_{imp} + m^-(h) + m^+(h), \quad (3.3.8)$$

где $m_{imp} = m(0)$ и $m_{res} = m(b+L)$.

После подстановки D из выражения (3.3.6), v^+ и v^- из (3.3.2) и используя замену переменных $d/dt = v d/dh$, можно записать уравнение (3.3.5) следующим образом:

$$\frac{dv}{dh} + f_2(h)v + f_0(h)v^{\alpha-1} = 0, \quad (3.3.9)$$

где

$$f_2(h) = \frac{1}{m(h)} \left[\frac{dm^+}{dh} + \hat{f}_2(h) \right], \quad f_0(h) = \frac{\hat{f}_0(h)}{m(h)}. \quad (3.3.10)$$

Уравнение (3.3.9) – это уравнение Бернулли, решение которого позволяет написать зависимость между скоростью удара, остаточной скоростью и БП в виде (3.2.1), где

$$a = \exp\left(p \int_0^{b+L} f_2(h) dh\right) = \exp\left(p \int_0^{b+L} \left[\frac{dm^+}{dh} + \hat{f}_2(h)\right] \frac{dh}{m(h)}\right), \quad (3.3.11)$$

$$p = 2 - \alpha. \quad (3.3.12)$$

Дифференцирование уравнения (3.3.8) дает:

$$\frac{1}{m(h)} \frac{dm^+}{dh} = \frac{1}{m(h)} \left[\frac{dm}{dh} - \frac{dm^-}{dh} \right] = \frac{d \ln(m(h))}{dh} - \frac{1}{m(h)} \frac{dm^-}{dh}, \quad (3.3.13)$$

и уравнение (3.3.11) можно записать в следующем виде:

$$a = \left(\frac{m_{res}}{m_{imp}}\right)^p \exp\left(p \int_0^{b+L} \left[\hat{f}_2(h) - \frac{dm^-}{dh}\right] \frac{dh}{m(h)}\right), \quad (3.3.14)$$

Рассмотрим случай, когда $P_2(x, h) = 0$ и, следовательно, $\hat{f}_2(h) = 0$. Такую модель можно рассматривать как обобщение модели [60,206].

Если при этом ударник только накапливает массу ($m^- = 0$), то из уравнения (3.3.14) следует, что

$$a = \left(\frac{m_{res}}{m_{imp}}\right)^p. \quad (3.3.15)$$

Если же ударник только теряет массу ($m^+ = 0$), то из уравнения (3.3.11) следует, что:

$$a = 1, \quad (3.3.16)$$

В обоих случаях параметр a не зависит от истории изменения массы, определяемой функциями m^+ а также m^- .

3.4 Сравнительный анализ "степенной" и "квадратичной" аппроксимаций

Сравним [108] точность версий модели (3.2.1) с $p = 2$ и версий модели с $p \neq 2$. Перепишем уравнение (3.2.1) в виде:

$$v_{res} = c(v_{imp}^p - v_{bl}^p)^{1/p}, \quad v_{imp} \geq v_{bl}, \quad c = (1/a)^{1/p}, \quad (3.4.1)$$

и предположим, что это «точная» модель. Наша ближайшая задача состоит в том, чтобы определить наилучшее приближение к «точной степенной» модели "квадратичной" модели вида:

$$\hat{v}_{res} = \hat{c}(v_{imp}^2 - \hat{v}_{bl}^2)^{1/2}, \quad v_{imp} \geq \hat{v}_{bl} \quad (3.4.2)$$

для $\hat{v}_{bl} \leq v_{imp} \leq 2\hat{v}_{bl}$ где \hat{c} и \hat{v}_{bl} являются неизвестными коэффициентами модели с $p = 2$ (\hat{v}_{bl} интерпретируется как БП), и \hat{v}_{res} - остаточная скорость, рассчитываемая с использованием "квадратичной" модели.

Разницу между этими моделями можно оценить с помощью следующего критерия:

$$\varepsilon = \frac{1}{c v_{bl}^2} \int_{v_{bl}}^{2v_{bl}} |v_{res} - \hat{v}_{res}| dv_{imp}, \quad (3.4.3)$$

Подставим v_{res} и \hat{v}_{res} из уравнений (3.4.1) и (3.4.2) и введем переменную z , где $v_{imp} = z v_{bl}$. Тогда выражение (3.4.3) для ε можно переписать в виде:

$$\varepsilon = \int_1^2 |(z^\beta - 1)^{1/p} - \lambda_c (z^2 - \lambda_v^2)^{1/2}| dz, \quad (3.4.4)$$

где

$$\lambda_c = \hat{c}/c, \quad \lambda_v = \hat{v}_{bl}/v_{bl}, \quad (3.4.5)$$

Значения параметров λ_c и λ_v можно найти путем минимизации ε , принимая во внимание условия $\lambda_c > 0$ и $0 < \lambda_v \leq 1$. Результаты расчетов приведены в Табл. 3.4.1, в которой разница результатов, полученных с помощью двух сравниваемых моделей оценивается с помощью параметра:

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{c v_{bl}} (v_{res} - \hat{v}_{res}) = (z^p - 1)^{1/p} - \lambda_c (z^2 - \lambda_v^2)^{1/2}, \quad (3.4.6)$$

Таблица 3.4.1. Оценка различия в моделях $\tilde{\varepsilon}$.

z	p					
	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
1,0	-0,144	-0,250	-0,291	-0,328	-0,362	-0,444
1,1	-0,001	-0,018	-0,016	-0,015	-0,014	-0,026
1,2	0,004	-0,002	0,004	0,009	0,012	0,009
1,3	0,004	0,002	0,010	0,015	0,018	0,018
1,4	0,003	0,003	0,010	0,015	0,017	0,018
1,5	0,001	0,002	0,008	0,012	0,013	0,014
1,6	-0,001	0,0	0,005	0,008	0,008	0,008
1,7	-0,003	-0,003	0,001	0,002	0,001	0,0
1,8	-0,005	-0,006	-0,003	-0,003	-0,006	-0,008
1,9	-0,008	-0,009	-0,008	-0,009	-0,013	-0,017
2,0	-0,010	-0,013	-0,013	-0,016	-0,021	-0,026
λ_c	1,020	1,030	1,040	1,050	1,060	1,070
λ_v	0,990	0,970	0,960	0,950	0,093	0,910

Из Таблицы 3.4.1 видно, что уравнения (3.4.1) и (3.4.2) дают оценки остаточной скорости практически с одинаковой точностью. Что касается окрестности БП, где остаточная скорость быстро меняется, то ни одно из этих приближений не является надежным.

Результаты расчетов с использованием экспериментальных данных [124] представлены в Табл. 3.4.2 (цилиндр) и в Табл. 3.4.3 (цилиндр с полусферическим затуплением).

В этих таблицах величина ошибки $\varepsilon_i^{[2]}$ определяется следующим образом:

$$\varepsilon_i^{[2]} = \hat{c} (v_{imp,i}^2 - \hat{v}_{bl}^2)^{1/2} - v_{res,i}, \quad (3.4.7)$$

где $v_{imp,i}$ и $v_{res,i}$ - скорость удара и остаточная скорости в i -м эксперименте, соответственно; параметры. Значения ошибок $\sum |\varepsilon_i^{[2]}|$ /минимизируют сумму \hat{v}_{bl} и \hat{c} аким образом: яются твычисл $\varepsilon_i^{[p]}$

$$\varepsilon_i^{[p]} = a(v_{imp,i}^p - v_{bl}^p)^{1/p} - v_{res,i}, \quad (3.4.8)$$

где параметры a, β, v_{bl} в этих моделях были вычислены [124] с использованием метода наименьших квадратов.

Таблица 3.4.2 и Таблица 3.4.3 показывают, что точность рассматриваемых моделей примерно одинакова.

Таблица 3.4.2. Обработка результатов экспериментов [124] для цилиндрических ударников.

	Скорость удара (м/с)					
	303,5	285,4	244,2	224,7	200,4	189,6
$\varepsilon^{[p]}$	1,1	1,5	4,6	-1,6	0,2	0,4
$\varepsilon^{[2]}$	0,2	-0,0	2,0	-4,3	-0,5	4,8

Таблица 3.4.3. Обработка результатов экспериментов [124] для цилиндрических ударников с полусферическим затуплением.

	Скорость удара (м/с)				
	452,0	420,6	362,9	326,7	300,0
$\varepsilon^{[p]}$	-5,2	2,6	-2,2	6,6	-6,3
$\varepsilon^{[2]}$	1,0	4,1	-8,3	-0,6	0,9

Обзор результатов экспериментальных, численных и теоретических исследований сравнительной эффективности многослойных преград

Обозначения

A_{sh}	удельная плотность преграды;
b	толщина монолитной преграды или суммы толщин плит в слоистой преграде;
$b^{(i)}$	толщина i -го слоя (номера порядковых слоев приведены в направлении проникания ударника) слоистой преграды;
D	диаметр ударника;
D_0	диаметр плоского затупления ударника;
E	модуль Юнга;
НВ	число твердости по Бринеллю;
HRC	число твердости по Роквеллу;
L	длина ударника;
L_{nose}	длина носовой части ударника;
m	масса ударника;
v_{bl}	баллистический предел (БП);
v_{imp}	начальная скорость ударника;
v_{res}	остаточная скорость ударника;
VHN	число твердости по Виккерсу;
Δv	$= v_{imp} - v_{res}$ (падение скорости ударника);
\mathcal{G}	полуугол при вершине конического ударника;
θ	угол, задающий направление удара (угол отклонения от нормали к поверхности преграды);
ρ	плотность материала;
σ_u	предел прочности на растяжение;
σ_y	предел текучести;
$\tilde{\sigma}_y$	0,2% условный предел текучести;
ψ	геометрическая характеристика оживального ударника, формула (4.1.1);
БП	баллистический предел;
ДП	двухслойная преграда;
ДЧМ	двучленная МЛВ, формула (4.3.1);
ЗЭ	защитная эффективность;
ИП	монолитная (изотропная) преграда;
КБ	катаная гомогенная броня;
КП	преграды, состоящие из нескольких пластин "в контакте";

- РП разнесенная преграда;
СП многослойная (слоистая) преграда.

4.1 Введение

Различным аспектам проблемы, связанной с анализом эффективности в условиях высокоскоростного удара по многослойным преградам, по сравнению с монолитными (изотропными) преградами, посвящено большое число публикаций. Многие исследования направлены на сравнение баллистических характеристик монолитных преград с преградами, состоящими из нескольких слоев-пластин, имеющих такую же суммарную толщину и изготовленных из того же материала. Соседние пластины могут находиться в контакте друг с другом или быть разделены воздушными зазорами. В дальнейшем преграды с воздушными зазорами будем называть "разнесенными". Следовательно, в качестве альтернативы монолитной преграде, могут выступать многие варианты преград той же толщины (той же массы), имеющих различное количество пластин различной толщины, с зазорами либо без таковых. Анализ влияния на защитную эффективность (ЗЭ) преграды порядка расположения в преграде пластин, изготовленных из различных материалов, и выбора их толщин (при заданной суммарной толщине или массе преграды) также является актуальной задачей. Представляет интерес также изучение влияния на ЗЭ комбинированных вариантов структуры.

Настоящий обзор включает в себя аналитические, численные и экспериментальные исследования, которые могут быть полезны для выявления общих свойств многослойных металлических преград, а также исследования, в которых предложены аналитические методы оптимизации многослойных преград. Исследования, посвященные другим аспектам проблемы, например, анализу и сравнению баллистических характеристик различных конкретных мишеней, не включены в обзор (исключением является небольшой раздел 4.3.2.1).

Несмотря на большой интерес к проблеме, ей посвящены лишь отдельные разделы в монографиях [9,27,56,110,114] и несколько обзоров [113,119]; результаты экспериментальных исследований многослойных преград можно найти в справочнике [120]. Информация, представленная в этих изданиях, как правило, в отредактированном виде и расширенном объеме, также нашла свое отражение в настоящем обзоре, наряду с новыми результатами.

Строго говоря, под баллистическим пределом (БП) понимают скорость подлетающего к преграде ударника, при которой преграда пробивается с вероятностью 50% [54]. Однако, следование этому определению БП требует большого количества экспериментов и, соответственно, больших финансовых затрат. Поэтому в подавляющем большинстве работ "экспериментальный" БП вычисляется следующим образом: в экспериментах определяются пары значений v_{imp} и v_{res} , по которым строится аппроксимирующая функция (обычно используется аппроксимация [190]), и БП определяется как значение v_{imp} , при котором $v_{res} = 0$.

В обзоре широко используются различные аббревиатуры, что позволяет уменьшить его объем и сделать более наглядным, хотя и несколько снижается "художественный уровень" материала.

В качестве русскоязычного аналога английского термина "areal density" используется термин "удельная плотность" – масса мысленно "вырезанного" из преграды цилиндра единичной площади основания с осью, параллельной направлению удара.

Еще одно замечание касается ситуаций, когда результаты экспериментов либо расчетов представлены в публикациях в графической форме. В обзоре эти данные даются в цифровом виде, причем точность снятия точек с графиков не ниже точности их нанесения на график.

Наименования материалов даны в обзоре такими, как в оригинальных публикациях; в большинстве случаев приводятся значения важнейших механических характеристик материалов; дополнительную информацию можно извлечь из оригинальной статьи, Интернета (например, с сайта <http://www.matweb.com>); в поиске российских аналогов может помочь справочник [80].

Для полноты картины, обзор содержит, наряду с описанием результатов других исследователей, аннотации работ авторов настоящей монографии, многие из которых в более подробном виде представлены в последующих главах.

В качестве ударников рассматриваются, как правило, цилиндры и цилиндры с конической, оживальной или полусферической формой носовой части. Образующая оживальной носовой части показана на Рис. 4.1.1. В качестве характеристики формы часто используется показатель:

$$\psi = \frac{\rho_{og}}{D} \quad (4.1.1)$$

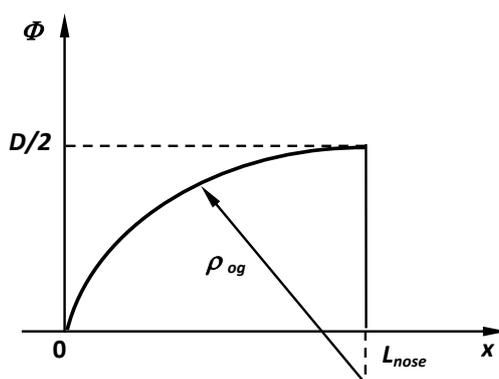


Рис. 4.1.1 . Образующая оживальной носовой части.

Для краткости ударники с конической (оживальной) формой носовой части называются коническими (оживальными).

Несмотря на то, что за прошедшие 30 лет выполнено большое число исследований по сопоставительному анализу монолитных и многослойных преград, сохраняет актуальность проблема, на которой акцентировали внимание Radin и Goldsmith еще в 1988 г. [222]: большой разброс при выборе ударников и преград в различных работах.

Очевидно, проблемы, о которых идет речь, не связаны с задачей выбора наилучшей преграды из данного набора против ударника, имеющего заданную форму, которая может быть решена путем проведения серии экспериментов или расчетов. Проблема заключается в том, чтобы выявить общие закономерности, которые позволили бы прогнозировать изменение баллистических характеристик преграды при изменении ее структуры. К настоящему времени наметились лишь подходы к решению этой проблемы по некоторым направлениям.

Обозначения, используемые при описании структуры преград, продемонстрированы на примерах, приведенных в Таблице 4.1.1.

Мы рассматриваем несколько типов преград, для которых используется следующая терминология: монолитные (изотропные) преграды (ИП); преграды, состоящие из

нескольких пластин "в контакте", то есть, соседние пластины примыкают друг к другу (КП); разнесенные преграды, то есть преграды из нескольких пластин, разделенных воздушным зазором (РП); многослойные преграды (СП) – либо КП (что чаще), либо РП, либо и те и другие (смысл бывает ясен из контекста). Для двухслойных преград, ввиду их широкой распространенности, используется аббревиатура ДП.

Можно выделить два подхода к моделированию проникания в многослойные преграды. В рамках первого подхода учитывается возможность одновременного взаимодействия ударника с несколькими слоями; в рамках второго предполагается, что остаточная скорость после перфорации некоторого слоя является скоростью удара для следующего слоя. Строго говоря, последнее предположение справедливо в случае больших воздушных зазоров между слоями, в результате чего проникание в очередную пластину начинается после того, как взаимодействия с предыдущей пластиной прекращается. Очевидно, второй подход повышает адекватность модели взаимодействия ударника и преграды, но, как правило, значительно усложняет исследование проблемы. Поэтому в большинстве работ второй подход принимается "по умолчанию" и, как правило, принятие соответствующего допущения не комментируется.

Таблица 4.1.1 Условные обозначения, используемые в описании структуры преград.

Обозначение	Описание структуры преграды
1х3мм; 3мм	Монолитная преграда, имеющая толщину 3мм.
2мм+4мм	Преграда, состоящая из двух пластин (в контакте, если не указано иное); первая и вторая имеют толщину 2мм, и 4мм (пластины занумерованы в направлении движения ударника).
3х2мм	То же, что 2мм + 2мм + 2мм.
2х1мм+3х2мм	То же, что 1мм + 1мм + 2мм + 2мм + 2мм.
2мм+3мм+4мм (5мм)	Преграда, состоящая из трех пластин толщиной 2мм, 3мм и 4мм, имеющая воздушные зазоры шириной 5мм между всеми соседними слоями.
1мм+(2мм)+3мм+4мм	Преграда, состоящая из трех пластин толщины 1мм, 3мм и 4мм с воздушным зазором шириной 2мм между первым и вторым слоями.
[St-1]2мм+(10мм)+[Al-3]5мм	Преграда, состоящая из двух пластин толщины 2мм и 5мм с зазором 10мм между ними. Первая и вторая пластины изготовлены из St-1 и Al-3, соответственно.

4.2 Пластины выполнены из одного и того же материала. Анализ влияния перехода к многослойным преградам и ширины зазоров между слоями

4.2.1 Экспериментальные исследования

Zaid и Travis [263] ссылаются на работу Arisaka 1916 года как на самую раннюю из известных им работ, посвященных использованию СП при высокоскоростном ударе, в которой отмечается, что ИП имеет преимущество по сравнению с СП.

Honda с соавторами [171] (см. также [46]) экспериментально исследовали проникание в стальные пластины снарядов, имеющих коническую носовую часть, при скорости удара $v_{imp} \approx 500$ м/с. При испытании ИП толщины b от 5 мм до 12 мм и КП\СП со слоями толщиной 1 мм слоев ($b^{(i)}=1$ мм) было установлено, что преграда, состоящая из тонких пластин толщины 1 мм, имела более низкую ЗЭ, чем монолитная (изотропная) преграда (ИП) той же толщины. При сравнении (РП) с толщинами пластин, равными половине толщины ИП, первая оказалась более эффективной.

В том же году Nagiwaга осуществил аналогичные эксперименты с алюминиевыми преградами и не обнаружил различия в ЗЭ ИП и СП [263].

Hurlich [173] отметил, что самое раннее исследование использования разнесенной брони, которое он обнаружил, датируется 1913 годом и касается брони военно-морских судов. Он представил некоторые качественные аргументы в пользу многослойной брони (в основном для танков), ряд таблиц с результатами экспериментов, некоторые ссылки и любопытный исторический материал.

Awerbuch [91] провел несколько серий экспериментов с СП и ИП, пробиваемыми свинцовыми пулями калибра 0.22" при $v_{imp} \approx 390$ м/с. Чтобы оценить ЗЭ преград, автор использовал показатель "падение скорости" $\Delta v = v_{imp} - v_{res}$. Результаты первой серии испытаний (слои имеют одинаковую толщину) неоднозначны (Таблица 4.2.1). ДП с пластинами в контакте и с разнесенными пластинами (воздушный зазор 20 мм), когда слои выполнены из различных материалов (1100-Н14АА, $\sigma_u = 145$ МПа и малоуглеродистой стали, $\sigma_u = 686$ МПа), рассматриваются во второй серии экспериментов (Таблицы 4.2.2 и 4.2.3). Анализ этих таблиц показывает, что (I) если фронтальный слой выполнен из стали, то зазор снижает ЗЭ преграды, в то время как обратный порядок пластины приводят к противоположной ситуации; (II) преграда с фронтальным стальным слоем является более эффективной, чем преграда, имеющая обратный порядок слоев.

Таблица 4.2.1. Скорость удара (м/с), для преград, изготовленных из 1100-Н14АА ([91]).

Количество слоев →	1	2	3	4	5	6
b (мм) ↓						
1,8	33	31	-	-	-	-
2,0	40	34; 44	-	-	-	-
2,7	56	-	52	-	-	-
3,0	63	-	71	-	-	-
3,6	85	-	-	88	-	-
4,0	100	106	-	101	-	-
4,5	117	-	-	-	107	-
5,0	135	-	-	-	148	-
5,4	159	-	-	-	-	166
6,0	200	-	189; 192; 222	-	-	218

Таблица 4.2.2. Скорость удара (м/с) для ДП, состоящих из мягкого стального листа толщиной 0,9 мм и алюминиевой пластины ([91]).

b (мм)	Сталь + алюминий		Алюминий + сталь	
	В контакте	Разнесенные	В контакте	Разнесенные
1,9	98	86	73	68; 76
2,9	163	117	104	119
3,9	214	164	136	173; 176; 190
4,9	398	391	217; 222; 227	298; 302

Таблица 4.2.3. Скорость удара (м/с), для ДП, состоящих из мягкой стали пластины толщиной 1,5мм и чистой алюминиевой пластины ([91]).

<i>b</i> (мм)	Сталь + алюминий		Алюминий + сталь	
	В контакте	Разнесенные	В контакте	Разнесенные
2,5	169	138	113; 134; 160	147
3,5	274; 277; 314	230	165; 168; 172	232
4,5	406	315	207; 234; 247	304
5,5	-	405	382; 392	402

Zaid и Travis [263] экспериментально исследовали одно- и двухслойные стальные КП, имеющие эквивалентную суммарную толщину *b* от 1,1мм до 9,5мм, на которые воздействует цилиндрический снаряд со скоростью до 500 м/с. Результаты, полученные нами после обработки графического материала [263] приведены в Таблице 4.2.4. Авторы пришли к выводу, что тонкие ИП более эффективны, чем СП той же толщины, в то время как увеличение толщины преград приводит к увеличению сопротивления СП по сравнению с ИП.

Таблица 4.2.4. Результаты испытаний (v_{bl} , м/с), полученные [263] для ИП и СП, имеющих одинаковые толщины слоев.

<i>b</i> (мм)	ИП	ДП
11,2	467	56
11,7	994	89
22,1	1101	95
22,5	1115	109
33,2	1125	134
44,7	2160	175
66,5	4195	222
99,5	+277	315

Согласно с соавторами [136-137], используя экспериментальные результаты по прониканию в пластины из мягкой стали ($\sigma_y = 260 \pm 15\%$ МПа, $\sigma_y = 337 \pm 7\%$ МПа; для пластин $b = 6,4$ мм, $\sigma_y = 360$ МПа, $\sigma_y = 500$ МПа) стальных (НВ 320-850), практически не деформируемых цилиндрических снарядов ($D = 12,5$ мм, $L = 50$ мм, $m = 35$ г), представил кривую, отражающую зависимость энергии перфорации w_{crit} от суммарной толщины пластины. Результаты этих экспериментов, имеющие отношение к рассматриваемой проблематике, представлены в Таблице 4.2.5.

Таблица 4.2.5. Результаты испытаний из работы [136].

<i>b</i> (мм)	Структура преграды	w_{crit} (Дж)	Структура преграды	w_{crit} (Дж)
2,36	2x1,18мм	168	2x1,18мм (12мм)	180
3,54	3x1,18мм	372	3x1,18мм (12мм)	328
3,92	2x1,96мм	395	2x1,96мм (12мм)	436
4,2	3,0мм + 1,2мм	481	1,2мм + 3,0мм	701
5,88	3x1,96мм	+878	3x1,96мм (12мм)	801
6,0	2x3,0мм	940	2x3,0мм (12мм)	+817

Для всех рассмотренных преград авторы нашли «излом» на упомянутой выше кривой, который объяснили изменением характера поглощения энергии. Авторы пришли к выводу, что порядок пластин, имеющих разные толщины, имеет

существенное значение. Преимуществ СП ниже излома обнаружено не было. Проведенные эксперименты показали преимущество КП по сравнению с РП.

Liaghat [194] представил результаты экспериментов с алюминиевыми КП, имеющими слои толщиной 3,175мм, 4,725мм и 6,35мм перфорируемыми затупленными ударниками со скоростью около 600 м/с в момент удара. Автор обнаружил, что для преград с постоянной толщиной лучший ЗЭ получается, если пластины расположены в порядке уменьшения их толщины.

Almohandes с соавторами [86] провели комплексное экспериментальное исследование перфорации барьеров из мягких сталей стандартными 7,62мм пулями. Они исследовали ИП, а также СП как в условиях слоев в контакте, так и РП с одинаковыми воздушными зазорами между каждой парой смежных пластин. Первый набор протестированных конфигураций включал ИП толщиной 6мм и СП 2мм + 6мм, 6мм + 2мм, и 2х4мм преграды "в контакте" и с воздушным зазором 6мм. Во второй комплект входили преграды 6мм + 8мм и 8мм + 6мм с пластинами в контакте и следующие РП: 2х4мм (24мм), 4мм + 8мм + 4мм (8мм), 2мм + 3мм + 2мм + 3мм + 4мм (4,5мм), 2мм + 3х (4мм) + 2мм (4мм), 2х2мм + 4мм (12мм), 2мм + 6мм (8мм), 2мм + 4мм + 2мм (12мм), 2мм + 3мм + 4мм + 3мм + 2мм (4,5мм), 4мм + 6мм + 4мм (9мм), 2мм + 4мм + 2мм + 4мм + 4мм (4,5мм). Третий набор преград РП, состоящий из пластин, изготовленных из стали с другими механическими свойствами (по сравнению с пластинами, используемых в тестовых наборах 1 и 2): 4мм + 4мм (24мм), 4мм + 5мм + 4мм (9,5мм), 3х4мм (10мм), 2мм + 5мм + 6мм (9,5мм), 2мм + 4мм + 6мм (10мм), 4х2мм + 4мм (5мм), 2х2мм + 4мм (12мм), 2мм + 2,5мм + 2мм + 2,5мм + 4мм (4,75мм).

Было обнаружено, что ИП более эффективны, чем СП, независимо от конфигурации или скорости удара, а также, что разница в баллистических характеристиках уменьшается при возрастании скорости удара. Кроме того, эффективность многослойных преград, как КП, так и РП, увеличивается при уменьшении количества пластин в преграде. ЗЭ СП улучшается, если самую толстую пластину расположить в конце.

Gogolewski с соавторами [162] провели эксперименты по перфорации преград из алюминиевого сплава 6061-T6 ($\sigma_y = 276$ МПа) затупленными ударниками ($m = 6,83$ г, $D = 7,62$ мм), изготовленными из твердой стали (HRC 38), подлетающими со скоростью в диапазоне от 150 м/с до 500 м/с. Они изучили следующие преграды: (1) 1х6,72мм; (2) 3х2,24мм со слоями в контакте; (3) 3х2,24мм с 1мм тефлоновыми прокладками между пластинами и смазанными поверхностями контакта слоев для исключения влияния трения; (4) 3х2,24мм (2,54); (5) 3х2,24мм (7,62). Они получили следующие значения БП: (1) 233 м/с; (2) 287 м/с; (3) 268 м/с; (4) 228 м/с; (5) 217 м/с. Авторы пришли к следующим выводам: (а) трехслойная КП является лучшей среди протестированных преград; (б) устранение трения между пластинами ухудшает ЗЭ преграды, хотя она все-таки превосходит таковые для ИП.

В работах [164,198] представлены результаты экспериментов с преградами из мягкой стали, пробиваемыми ударниками с оживальной формой носовой части. Испытаниям подверглись ДП 10мм+16мм, 10мм+20мм, 16мм+20мм и преграды, состоящие из тех же пар пластин, расположенных в обратном порядке, а также конфигурации 3х4,7мм с пластинами в контакте и с воздушными зазорами 30мм и 40мм. Были исследованы также алюминиевые преграды, 3х6,1мм с пластинами в контакте и с воздушными зазорами 20мм и 30мм. Используя некоторые экспериментальные результаты по ИП, авторы пришли к выводу, что для ИП, имеющих промежуточную толщину, переход к СП не приводит к существенному изменению ЗЭ. Для тонких преград, КП дали более высокую остаточную скорость по сравнению с монолитными преградами, изготовленными из алюминия или стали.

В опытах [254] изучалась перфорация преград ($b=9,53\text{мм}$) из алюминиевого сплава 2024-T351 ($\sigma_y=550\text{МПа}$) цилиндрическими ($m=3,83\text{г}$) и коническими ($m=3,80\text{г}$, $\vartheta=45^\circ$) снарядами, имеющими диаметр $D=6,35\text{мм}$. Тестируемые конфигурации и результаты испытаний представлены в Таблице 4.2.6. В случае конического ударника максимальное уменьшение БП составляло 9%, по сравнению с ИП и имело место для ДП 3,18мм+6,35мм, в то время как увеличение БП для некоторых СП было незначительным. Для цилиндрического ударника БП СП возрастал до 13%.

Таблица 4.2.6. Экспериментальные результаты [254] по БП (м/с).

Преграда	Конический снаряд	Цилиндрический снаряд
1x9,53мм	462	392
3,18мм + 6,35	421	404
6,35 + 3,18мм	474	421
2x4,76мм	484	445
3x3,18мм	473	433
6x 1,59мм	454	401

Copland и Scheffler [135] экспериментально исследовали проникание урано-титановых снарядов с полусферическим носиком в преграды из КБ (НВ 255) и измеряли глубину проникания. Были испытаны следующие преграды ($b=152,4\text{мм}$) при скорости удара $v_{imp}\approx 1600\text{м/с}$: 1x152,4мм, 6x25,4мм, 6x25,4мм (1,55мм), 6x25,4мм (3.0мм), 6x25,4мм (6.0мм). Авторы пришли к выводу, что (I) СП имели значительно более низкую ЗЭ, чем ИП; (II) воздушные зазоры уменьшают ЗЭ преграды. Компьютерное моделирование показало те же тенденции [134]. Аналогичные эксперименты, проведенные с использованием ударника со сферическим затуплением из вольфрамового сплава X-15С и преград из КБ: 1x150мм, 7x25мм, 7x25мм (1,5мм), 7x25мм (3мм) также подтвердили, что КП и РП не имеют преимуществ по отношению к ИП. Результаты этих экспериментов также подтвердили, что КП и РП не имеют преимуществ по отношению к ИП.

Vørvik с соавторами [126] сравнили БП стальной ИП толщиной 12мм и ДП, состоящей из двух пластин толщиной по 6мм в контакте и с воздушным зазором 30мм, пробиваемых пульей калибра 7,62мм. Они обнаружили, что не было различия в значениях баллистического предела ИП и КП, но наличие зазора заметно уменьшало БП.

Jena с соавторами [183] сравнили значения удельной плотности двух ДП (КП и РП с воздушным зазором 20мм), необходимых для остановки 7,62мм ударника при ударе под углом $\theta=30^\circ$ при скорости удара $v_{imp}\approx 840\text{м/с}$. Первый и второй слои были выполнены из броневой стали (VHN 430, $\sigma_y=1045\text{МПа}$) и Al-7017 (VHN 135, $\sigma_y=458\text{МПа}$), соответственно. Эксперименты показали, что воздушный зазор улучшил ЗЭ преграды.

Abdel-Wahed с соавторами [85] провели эксперименты по перфорации стальных преград ($\sigma_y=305\text{МПа}$) 7,62x39мм пулями. Форма пули близка к оживальной ($\psi=2,33$) и изготовлена из высокопрочной стали ($\sigma_y=1500\text{МПа}$). В экспериментах скорость удара изменялась в диапазоне $v_{imp}=340\text{--}560\text{м/с}$. Были испытаны следующие преграды: 1x3,0мм, 3x1,0мм, 3x1,0мм (6,0мм), 3x1,0мм (10,0мм), 2x1,5мм, 2x1,5мм (5,0мм). Авторы пришли к следующему выводу: БП ИП больше, чем БП КП и РП.

Durmuş с соавторами [147] сравнили ЗЭ преград 1x2мм и 2x1мм, изготовленных из холоднокатаного металлического листа, против 9мм стандартного ударника НАТО и обнаружили, что ИП имеют преимущество по сравнению с КП.

Nia и Hoseini [211] экспериментально исследовали ИП толщиной 3мм и трехслойные преграды той же суммарной толщины из Al 1100. В качестве ударника был выбран цилиндр с полусферическим носом ($D = 8,7\text{мм}$, $L = 27,55\text{мм}$, $m = 12,15\text{г}$), изготовленный из высокоуглеродистой стали (silver steel, HRC 56). Исследовались эффекты, вызванные изменением порядка слоев и ширины воздушных зазоров между слоями; протестированные структуры перечислены в Таблице 4.2.7; там же приведены значения БП, определенные путем обработки экспериментальных данных. Основные выводы, полученные в данном исследовании, таковы: (I) ЗЭ монолитных преград выше, чем таковая у КП и РП; (II) ЗЭ у пластин "в контакте" выше, чем у РП; (III) порядок слоев влияет на ЗЭ преграды; (IV) увеличение ширины воздушного зазора между первой и второй пластиной вызвало уменьшение БП преграды.

Таблица 4.2.7. Экспериментальные результаты [211] по БП.

Структура преграды	v_{bl} (м/с)
1x3,0мм	125
0,5мм + 1,0мм + 1,5мм	144
0,5мм + 1,5мм + 1,0мм	112
1,0мм + 1,5мм + 0,5мм	115,5
1,5мм + 0,5мм + 1,0мм	119
1,5мм + 1,0мм + 0,5мм	120,5
1,0мм + 0,5мм + 1,5мм	115
1,0мм (1,0мм) + 0,5мм (5,0мм) + 1,5мм	107,5
1,0мм (2,0мм) + 0,5 + (5,0мм) + 1,5мм	105
1,0мм (3,0мм) + 0,5 + (3,0мм) + 1,5мм	103
1,0мм (4,0мм) + 0,5 + (2,0мм) + 1,5мм	101,5
1,0мм (5,0мм) + 0,5 + (1,0мм) + 1,5мм	100,5

Zhang с соавторами [268] провели эксперименты со стальными преградами 1x2мм, 2x1мм, 2x1мм (6мм), 2x1мм (100мм), пробиваемыми снарядом с полусферический носиком, и построили зависимости между начальной и остаточной скоростями. Результаты экспериментов показали, что (I) ЗЭ ИП выше, чем у ДП с воздушным зазором либо без него; (II) ширина воздушного зазора оказывает лишь небольшое влияние на БП РП; (III) БП у КП близок или больше, чем у РП.

Zhang с соавторами [269] исследовали ЗЭ низкоуглеродистой стали Q235 ($\sigma_y = 229\text{МПа}$) при перфорации цилиндрическими ударниками из закаленной стали 38CrSi (HRC 55). Результаты экспериментов были представлены в виде пар значений v_{res}/v_{imp} , которые были использованы для определения БП с использованием аппроксимации [190] (Таблица 4.2.8). Анализ полученных значений БП позволил сделать следующие выводы: (I) ИП более эффективны, чем СП; (II) БП СП уменьшается с увеличением количества слоев; (III) ЗЭ у РП с большим воздушным зазором выше, чем у РП, имеющих небольшой воздушный зазор; (IV) БП преграды выше, когда толщина первого слоя больше, чем толщина второго слоя. В целом, результаты анализа аналогичны представленным в работе [268].

Таблица 4.2.8. Результаты испытаний преград толщиной 2мм и 6мм [269].

№	Структура преграды	v_{bl} (м/с)	№	Структура преграды	v_{bl} (м/с)
1	1x2,0мм	124	2	2x1,0мм	116
3	0,5мм + 1,5мм	110	4	1,5мм + 0,5мм	119
5	4x0,5мм	105	6	2x1,0мм (100,0мм)	110-116
7	2x1,0мм (6,0мм)	101	8	1x6,0мм	220
9	3x2,0мм (2,0мм)	203			

Deng с соавторами [138-142] провели баллистические эксперименты по перфорации стальных СП цилиндрическими ударниками с полусферическим носиком и носовой частью оживальной ($\psi = 3$) формы. Более подробная информация о преградах и ударниках приведена в Таблице 4.2.9. Следующие типы стали были использованы для изготовления преград и ударников: Сталь-1 (сталь Q235, $\sigma_y = 229$ МПа), Сталь-2 (сталь 45, $\sigma_y = 714$ МПа, HRC 29), Сталь-3 (HRC 58), низкопрочная сталь (НПС, HRC 19,1) и высокопрочная сталь (ВПС, HRC 53,1). Как и в работе [269], результаты экспериментов были представлены в виде пар значений v_{res}/v_{imp} с последующим использованием для определения БП на основе аппроксимации [190].

Таблица 4.2.9. Преграды и снаряды в экспериментах, [138-142].

Публикация	Материал преграды	Материал ударника	Форма носа ударника
[138]	Сталь-1	Сталь-3	Полусферический
[139]	Сталь-1	Сталь-3	Оживальный
[140]	Сталь-2	НПС; ВПС	Оживальный
[141]	Сталь-2	НПС; ВПС	Плоский
[142]	Сталь-1; Сталь-2	Сталь-3	Плоский, оживальный

Авторы работ [138-139] пришли к следующим выводам (Таблица 4.2.10): (I) среди тонких преград, имеющих одинаковую суммарную толщину, ИП имеют больший БП по сравнению с СП; БП у СП уменьшается с увеличением количества слоев одинаковой толщины; воздушные зазоры снижают БП у СП; (II) СП умеренной толщины имели более низкий БП, чем у ИП.

Таблица 4.2.10. Результаты испытаний [138,139].

Источник → b (мм) → Преграда ↓	[138]			[139]	
	2мм	3мм	6мм	2мм	6мм
1xT	134	187	275	116	245
2x0,5T	128	-	-	107	-
0,25T + 0,75T	123	-	-	108	-
0,75T + 0,25T	125	-	-	101	-
4x0,25T	131	-	-	94	-
2x0,5T (3T)	113	-	-	98	-
6x0,1667T	-	158	-	-	-
3x0,333T	-	-	285	-	265

Результаты [140-141] (Таблица 4.2.11) привели к следующим заключениям: (I) ИП имеют более высокий БП, чем у СП для ударников с оживальным и плоским носиком, изготовленных из материала с низкой прочностью, и для ударников с оживальным носиком, изготовленных из высокопрочного материала (для цилиндрических снарядов, изготовленных из высокопрочного материала, наблюдалась противоположная тенденция); (II) увеличение числа одинаковых слоев снижает БП для ударников с оживальным носиком, но увеличивает БП для цилиндрических снарядов с плоским затуплением.

Таблица 4.2.11. Результаты испытаний на БП (м/с) для преград толщины 6мм [140,141].

Источник → Материал ударника → Преграда ↓	[140]		[141]	
	Низкопрочная сталь	Высокопрочная сталь	Низкопрочная сталь	Высокопрочная сталь
1x6мм	482	325	485	215
2x3мм	358	294	424	237
3x2мм	-	276	-	252

Abdel-Kader и Fouda [83] на основании экспериментов с затупленными цилиндрическими стальными ударниками (НВ 475, $\sigma_y=1726$ МПа, $\sigma_u=1900$ МПа; $D=23$ мм, $L=64$ мм), пробивающими стальные преграды (НВ 102, $\sigma_y=240$ МПа, $\sigma_u=360$ МПа), обнаружили отсутствие существенных изменений ЗЭ преград 50мм + 10мм и 30мм + 30мм.

Godzimirski с соавторами [161] сравнил ЗЭ 1x3мм и 10x0.3мм преград из 2024-T3 алюминия, пробиваемых шариком диаметра 8мм, и получил значения поглощенной энергии 142Дж и 146Дж, соответственно. Очевидно, что ЗЭ у КП оказалась выше, чем у ИП.

Алексенцева [2] исследовала ЗЭ от пуль РП с пластинами, изготовленными из Стали-3 (НВ 120-150, $\sigma_u=380-470$ МПа). Оказалось, что монолитная преграда, имеющая толщину 12мм осталась непробитой стальным шариком диаметра 7,62мм, тогда как набор пластин, имеющих одинаковые толщины и общую толщину 11мм, была перфорирована. Было проведено также сравнение БП преград: *Преграда-1* (2,5мм+(40мм)+2,5мм+6мм) и *Преграда-2* (2,5мм+6мм+(40мм)+2,5мм). Оказалось, что *Преграда-1* осталась непробитой, в то время как *Преграда-2* была перфорирована.

Vokhari с соавторами [123] экспериментировали с использованием стальных пуль 7,62x51мм с $v_{imp}=850$ м/с, проникающих в ДП из катаной гомогенной брони различной толщины, варьировались также расстояние между пластинами и наклонение фронтальной пластины. Пластины в преграде были организованы следующим образом: задняя пластина сохраняла свое положение, в то время как вертикальная фронтальная пластина была наклонена по отношению к линии съёмки и к тыльной пластине для того, чтобы можно было менять воздушные зазоры между пластинами от кадра к кадру. Авторы пришли к следующим рекомендациям: (I) фронтальная пластина должна быть существенно тоньше, чем тыльная; (II) воздушные зазоры должны быть не шире, чем 10 калибров; (III) наклон фронтальной пластины не должен превышать 45°.

Tiwari с соавторами [244] исследовали ЗЭ преград из 1100-H12 алюминия: ИП (1x1мм), ДП в-контакте (2x0,5мм) и разнесенных преград. Преграды пробивались цилиндрическим ударником с полусферическим затуплением ($D=19$ мм). Авторы обнаружили, что ЗЭ у ИП была наилучшей ($v_{bl}=56,2$ м/с); затем, в порядке снижения ЗЭ шла КП ($v_{bl}=53,6$ м/с) и, наконец, разнесенные преграды ($v_{bl}=49,5$ м/с для 2x0,5мм (4,5мм) и $v_{bl}=49,0$ м/с когда воздушные зазоры шириной более 10мм).

4.2.2 Численные исследования

Zukas и Scheffler [272-273] на основе численного моделирования проникания в металлические преграды установили, что замена ИП на КП резко снижает ЗЭ для тонких преград ($b/D < 1$), и преград промежуточной толщины ($3 < b/D < 10$), в то время как для толстых преград ($b/D > 10$) имеют место небольшие изменения в значениях остаточной массы и остаточной скорости ударника по сравнению с ИП.

Численные расчеты Partom с соавторами [221] показали, что ЗЭ 6061-TВ алюминиевой преграды из двух пластин толщиной 3мм каждая, разделенных воздушным зазором незначительно отличается от ЗЭ соответствующей ИП при пробивании затупленным ударником.

Yossifon с соавторами [260] обобщили модель [259] на случай нормального проникания твердого ударника в металлическую СП. С помощью предложенной модели и коммерческой программы Autodyn2D авторы провели две небольшие серии расчетов для ДП, имеющих слои толщиной 60мм, пробиваемых ударниками

яйцевидной формы. Первая серия выполнена для ДП из пластин, изготовленных из алюминиевых сплавов и различающихся по твердости. Вторая - для пластин, изготовленных из различных материалов (катаная гомогенная сталь и алюминий). Авторы пришли к выводу, что в рассматриваемых случаях нет существенной разницы в значениях остаточной скорости, когда порядок двух слоев из различных материалов меняется.

В серии численных исследований [44-45,63] сравнивается ЗЭ металлических ИП и СП, различающихся взаимным расположением пластин. Рассматривается проникание цилиндрических, сферических, конических и оживальных снарядов в преграды различной структуры. Глызин и Орлов [44] рассматривают преграды 2мм+4мм, 4мм+2мм, 1х6мм и анализируют влияние различных условий на контактной поверхности между слоями. К сожалению, для оценки ЗЭ авторы вводят используемый также впоследствии специфический критерий "ударной стойкости", что затрудняет интерпретацию результатов с использованием традиционных критериев. Глызин с соавторами [45] представили результаты численного исследования баллистических характеристик следующих преград, имеющих одинаковую общую толщину: 1мм+5мм, 2мм+4мм, 3х2мм, 2х3мм, 4мм+2мм, и 1х6мм. Снаряд имел оживальную форму носовой части. Моделирование показало, что только 2мм+4мм преграда имеет преимущество над ИП, в то время как ЗЭ конфигурации 4мм+2мм была худшей. Орлов [63] провел аналогичные расчеты для следующих преград: 3х2мм, 2х1мм+2х2мм, 2мм+2мм+2х1мм и 2х2мм+2х1мм. Результаты численного моделирования показали, что 3х2мм преграда имеет самую высокую баллистическую стойкость, в то время как 2х1мм+2х2мм преграда имеет наименьшее баллистическое сопротивление. Следует отметить, что различия между всеми показателями сопротивления были очень малы. Обобщенную информацию о результатах исследований в этой области до 2007 года, которые проводились в Институте прикладной математики и механики Томского государственного университета можно найти в монографии [43].

Teng с соавторами [239] сравнивал ЗЭ следующих металлических преград: 1х6мм, 2х3мм, 2х3мм(3мм). Рассматривались «тяжелый» ($v_{bl}=186\text{м/с}$ для ИП) и «легкий» ($v_{bl}=306\text{м/с}$) цилиндрические снаряды, а также «тяжелый» ($v_{bl}=487\text{м/с}$) и «легкий» ($v_{bl}=526\text{м/с}$) конические снаряды. С помощью численного моделирования было обнаружено, что (I) нет существенной разницы между значениями БП для КП и РП; (II) в случае «тяжелых» снарядов, наличие зазора повысило БП на 25% для цилиндрического ударника и снизило БП на 8% для ударника конической формы; (III) в случае «легких» снарядов, переход к КП повысило БП на 7% для цилиндрического ударника и не повлияло на БП ударника конической формы.

Abdelshafy и Oyadiji [84] провели численные расчеты пробивания ИП, БП и трехслойных преград из закаленной стали, имеющих толщину 25мм, с помощью вольфрамовых цилиндрических снарядов и снарядов с полусферическим затуплением при скоростях удара 1000 м/с и 1200 м/с. Они пришли к выводу, что СП имеет лучшую ЗЭ, чем ИП.

Teng с соавторами [241] численно исследовали баллистические характеристики брони 1х6,35мм и двухслойных разнесенных преград, имеющих толщину слоев 3,175мм. Преграды пробивались стальным шаром ($D=8\text{мм}$), имеющим начальную скорость 1300 м/с. Для РП с воздушными зазорами 0,1мм, 1мм, 10мм, 30мм и 40мм авторы получили следующие значения остаточной скорости: 455м/с, 443м/с, 348м/с, 311м/с, 310м/с, соответственно, в то время как остаточная скорость для ИП составляла 422м/с. Следовательно, РП имели преимущество над ИП при относительно большой ширине воздушных зазоров, в то время как небольшие воздушные зазоры позволяли лишь немного ухудшить ЗЭ преграды. После того, как ширина воздушного зазора

достигала определенного порогового значения, остаточная скорость оставалась постоянной. Дополнительные расчеты для преград 1,59мм+4,76мм(30мм) и 4,76мм+1,59мм(30мм) дали значение остаточной скорости 297м/с и 366м/с соответственно. Поэтому есть основания предположить, что при одинаковой общей толщине преграды, остаточная скорость увеличивается при увеличении толщины лобового слоя.

Rosenberg и Dekel [228] выполнили численное моделирование проникания снаряда оживальной формы в преграды нескольких видов: 1х40мм и 2х20мм при скоростях удара 900м/с и 1000м/с; 1х60мм, 2х30мм, 3х20мм при скоростях удара 1150м/с и 1250м/с; 3х20мм(30мм) при скоростях удара 1250м/с. На основании этих результатов, анализа имеющихся данных из литературы и физических соображений авторы пришли к выводу, что переход к КП снижает ЗЭ преград против заостренных снарядов, и использование РП дополнительно ухудшает их баллистические характеристики.

Таблица 4.2.12. Результаты по остаточным скоростям (м/с) [64]

Снаряд → Преграда ↓	Оживальный	Конический, $\vartheta = 45^\circ$	Цилиндрический
6мм	444	349	240
3х2мм	472	382	226
2х1мм + 2х2мм	491	302	232
2мм + 2мм 2х1мм	483	390	238
2х2мм + 2х1мм	528	392	237

Таблица 4.2.12 дает представление об экспериментах и их результатах, опубликованных в работах [48,64]; снаряды имели диаметр 6,1мм, $v_{imp}=700$ м/с; материал ударника – сталь ШХ-15, преграды - низкоуглеродистая Сталь-3. Анализ Таблицы 4.2.12 показывает, что переход к КП снижает ЗЭ преграды при пробивании оживальным снарядом, в то время как эффект от этого неоднозначен для конического ударника и ничтожно мал для цилиндрического ударника.

Flores-Johnson с соавторами [151] представили результаты численного исследования баллистических характеристик монолитных, двух- и трехслойных металлических преград, включающих в себя пластины одинаковой толщины, изготовленных из стали (Weldox 700E, $\sigma_y = 819$ МПа) и алюминия (Al 7075_T651, $\sigma_y \approx 500$ МПа); в качестве ударников рассматривались 7,62мм снаряды, подлетающие к преграде со скоростью в диапазоне между 775м/с и 950м/с. Рассмотренные конфигурации удобно классифицировать следующим образом. Серия 1 включает монолитные, двух- и трехслойные стальные преграды, имеющие суммарную толщину 12мм, 14мм, 16мм, 18мм, 20мм. Серия 2 включает монолитные, двух- и трехслойные алюминиевые преграды с суммарной толщиной 12мм, 20мм, 30мм, 36мм, 40мм. Серия 3 включала три трехслойные преграды толщины 20мм, состоящие из одной алюминиевой пластины и двух стальных пластин, расположенных в различном порядке. Серия 4 включала две ДП, состоящие из стальной пластины толщиной 13,33мм и пластины толщиной 6,66мм из алюминия, образующих две возможные конфигурации. Результаты моделирования позволили авторам прийти к следующим выводам: (I) ИП, изготовленные из Weldox 700E, обладают лучшей ЗЭ, чем трехслойные преграды из того же материала, и разница становится более выраженной с уменьшением скорости удара; различие в ЗЭ между ИП и ДП оказалось незначительным; (II) для преград из алюминия 7075-T651 различие в ЗЭ между ИП и СП не было статистически значимым, если толщина преграды составляла менее 20мм, но различие было существенным, если толщина преграды становилась больше 30мм; (III) порядок пластин, изготовленных из различных материалов, сильно влияет на ЗЭ преград.

Iqbal с соавторами [178] провели численные исследование ЗЭ ИП и ДП преград из стали Weldox 460E ($\sigma_y=490$ МПа, $\rho = 7850$ кг/м³) и алюминия 1100-Н12 ($\sigma_y=148$ МПа, $\rho = 2700$ кг/м³), пробиваемых коническим ($m = 197$ г, $D = 20$ мм) либо оживальным ($m = 52,5$ г, $D = 19$ мм, $\psi = 1,58$) стальным снарядом, соответственно, под углом $\theta = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ$. Исходные данные и результаты моделирования для $\theta = 0^\circ$ показаны в Таблицах 4.2.13 и 4.2.14. Авторы не обнаружили существенного различия в ЗЭ ИП и ДП как при нормальном, так и при наклонном ударе.

Таблица 4.2.13. Численные результаты [178] по остаточной скорости (м/с); конический ударник, преграда из стали Weldox 460E, нормальный удар.

Скорость удара (м/с) →	600	406	356	318	300	281
Преграда структура ↓						
1x12мм	555	333	269	217	189	154
2x6мм	554	337	273	221	195	163

Таблица 4.2.14. Численные результаты [178] по остаточной скорости (м/с); оживальный ударник, преграда из алюминия 1100 - Н12, нормальный удар.

Скорость удара (м/с) →	150	113	97	83	82	73	66	57
Преграда структура ↓								
1x1мм	141	100	81	64	62	49	32	15
2x0.5мм	145	101	84	67	65	54	40	20

Iqbal с соавторами [179] провели расчеты для СП и ДП, в контакте и разнесенных, из алюминия 1100-Н12 ($\sigma_y=148$ МПа) суммарной толщины 1мм под ударным воздействием цилиндрических и оживальных ($\psi = 6$) стальных снарядов ($D = 19$ мм, $L = 50,8$ мм). Анализ результатов, частично представленных в Таблице 4.2.15, показывает, что переход от ИП к КП уменьшает БП, а переход к РП с зазором 2мм приводит к дальнейшему снижению БП для обоих снарядов, но эти эффекты являются более значимыми для оживального ударника.

Таблица 4.2.15. Численные результаты [179] по БП (м/с).

Воздушный зазор (мм) →	ИП	0	2,0	5,0	10,0	20,0	30,0
Форма ударника ↓							
Оживальный	56,5	48,0	44,9	44,6	44,5	44,5	44,5
Цилиндр	74,9	72,9	69,3	68,7	68,1	65,0	65,0

Результаты численного моделирования, проведенного Flis и Sperski [150], наряду с описанием структуры преград, представлены в Таблицах 4.2.16-4.2.18. В качестве ударника рассматривалась пуля калибра 12.7мм, подлетающая со скоростью $v_{imp}=786$ м/с. Пластины сделаны из стали 10GHMBA ($\sigma_u = 759$ МПа) или стали ST41 ($\sigma_u = 410$ МПа). Результаты расчетов позволили прийти к следующим выводам: (I) переход от ИП к СП снижает ЗЭ преграды (чтобы в этом убедиться, достаточно сравнить результаты расчета №1 для ИП преграды с результатами №№2-7 для КП из Таблицы 4.2.16, а также результаты расчета №1 для ИП преграды с результатами №№2-3 для КП из Таблицы 4.2.18); (II) ЗЭ КП ухудшается с увеличением числа слоев одинаковой толщины (это подтверждается результатами расчетов №№1,4,5,7 из Таблицы 4.2.16 и расчетов №№1,2,3 из Таблицы 4.2.18); (III) фронтальная пластина с более низким значением σ_u , как правило, предпочтительнее при выборе порядка пластин в ДП со слоями из различных материалов (это утверждение подтверждают результаты №1 и №2, результаты №3 и №4 из Таблицы 4.2.17; результаты №4 и №5,

№6 и №7, №8 и №9 из Таблицы 4.2.18, но в единственном случае, результаты №5 и №6 из Таблицы 4.2.17, выявленная закономерность нарушается).

Таблица 4.2.16. Результаты [150] для 24мм 10GHMBA стальных преград.

№	Преграда	V_{res} (м/с)	№	Преграда	V_{res} (м/с)	№	Преграда	V_{res} (м/с)
1	24мм	371	2	8мм + 16мм	375	3	2x4мм + 16мм	388
4	12мм + 12мм	411	5	3x8мм	413	6	16мм + 8мм	416
7	76x4мм	461						

Таблица 4.2.17. Результаты [150] для 24мм 10GHMBA и ST41 преград.

№	Преграда	V_{res} (м/с)	№	Преграда	V_{res} (м/с)
1	[ST41] 8мм + [10GHMBA] 16мм	437	2	[10GHMBA] 16мм + [ST41] 8мм	455
3	[ST41] 12мм + [10GHMBA] 12мм	484	4	[10GHMBA] 12мм + [ST41] 12мм	504
5	[10GHMBA] 8мм + [ST41] 16мм	510	6	[ST41] 16мм + [10GHMBA] 8мм	522
7	[ST41] 24мм	547			

Таблица 4.2.18. Результаты [150] для 30мм 10GHMBA и ST41 преград.

№	Преграда	V_{res} (м/с)	№	Преграда	V_{res} (м/с)
1	[10GHMBA] 30мм	113	2	[10GHMBA] 2x15мм	204
3	[10GHMBA] 5x6мм	283	4	[ST41] 10мм + [10GHMBA] 20мм	315
5	[10GHMBA] 20мм + [ST41] 10мм	338	6	[10GHMBA] 15мм + [ST41] 15мм	373
7	[ST41] 15мм + [10GHMBA] 15мм	369	8	[ST41] 20мм + [10GHMBA] 10мм	419
9	[10GHMBA] 10мм + [ST41] 20мм	429	10	[ST41] 30мм	488

Jankowiak с соавторами [182] провели численное моделирование перфорации жестким коническим ударником под углом $\theta = 36^\circ$ следующих стальных преград: 1x4мм, 2x2мм, 2x2мм(15мм). Результаты показали, что ИП является наиболее эффективной.

Senthil и Iqbal [232], а также Senthil с соавторами [233] использовали метод конечных элементов для моделирования пробивания преград 1x1,0мм и 2x0,5мм из алюминия 1100-H12 ($\sigma_y = 148$ МПа) стальными (сталь EN 24, $\sigma_y = 141$ МПа) оживальными ударниками со следующими геометрическими характеристиками: D = 15мм ($\psi = 1,9$), 19мм ($\psi = 1,28$) и 24мм ($\psi = 0,9$). Результаты вычислений в виде пар значений скорости удара и остаточной скорости были использованы для определения БП на основе аппроксимации [190]. Для ударника диаметром 19мм прогнозируемые значения БП для ИП и ДП оказались равными 47,3м/с и 43,5м/с, соответственно. Для ударника диаметром 24мм аналогичные значения получились 65,6м/с и 59,6м/с. Трение в этих расчетах не учитывалось. При моделировании проникания ударника диаметром 15мм расчеты были выполнены для двух вариантов модели: (а) учитывалось трение между слоями (коэффициент трения составлял 0,1) и трение между снарядом и преградой (были рассмотрены несколько значений) и (б) трение не учитывалось. Анализ результатов (Таблица 4.2.19) показывает, что ИП имеют более высокий БП, чем ДП, независимо от того, учитывается или не учитывается трение.

Таблица 4.2.19. Результаты расчетов по БП (м/с) для 15мм ударника [231].

Коэффициент трения →	0	0,05	0,1	0,2
Преграда ↓				
1x1.0мм	47,3 / 46,4*	49,5	51,2	62,7
2x0.5мм	43,5 / 43,5*	45,0	47,6	50,0

* Знаменатель показывает значение для деформируемого ударника.

Kumar и Ramana [188] провели численное моделирование нормального проникновения в преграды толщиной 12мм из Weldox 460E: ИП, ДП с пластинами "в контакте" и с воздушными зазорами. В качестве ударника рассматривались цилиндр ($L = 80\text{мм}$), конический снаряд с небольшим плоским затуплением ($L_{nose} = 30\text{мм}$, $L = 98\text{мм}$, $D_0 = 2\text{мм}$) и снаряд с полусферическим затуплением ($L = 98\text{мм}$), изготовленные из Arne Tool Steel (HRC 53). Все ударники имели одинаковые массу и диаметр ($m = 197\text{г}$, $D = 20\text{мм}$). Авторы пришли к следующим выводам относительно БП КП и РП по сравнению с БП ИП: (I) для цилиндрического ударника БП на 55% больше для КП и на 80% больше для РП; (II) для конических снарядов соответствующие значения составляли 10% и 6%, соответственно; (III) для снарядов с полусферическим затуплением БП на 32% больше для КП и на 35% больше для РП.

Kumar с соавторами [187] осуществили расчеты по прониканию вольфрамового фрагмента в форме куба размером 15мм в двухслойную ($b^{(1)} = b^{(2)} = 3\text{мм}$) титановую РП при скорости удара $v_{imp} = 680\text{м/с}$. Установлено, что БП изменялся немонотонно, когда ширина воздушного зазора изменялась от 50 мм до 300мм,

Ramakrishna и Bhanu Prakash [224] провели численное моделирование пробивания следующих преград, изготовленных из алюминия 1100:

- **ИП** 1x3,0мм,
- **трехслойных КП** 0,5мм+1,0мм+1,5мм; 0,5мм+1,5мм+1,0мм; 1,0мм+0,5мм+1,5мм; 1,0мм+1,5мм+0,5мм; 1,5мм+0,5мм+1,0мм; 1,5мм+1,0мм+0,5мм,
- **РП** 1,0мм(1мм)+0,5+(5мм)+1,5мм; 1,0мм+(2мм)+0,5+(4мм)+1,5мм; 1,0мм+(3мм)+0,5мм+(3мм)+1,5мм; 1,0мм+(4мм)+0,5мм+(2мм)+1,5мм; 1,0мм+(5мм)+0,5+(1мм)+1,5мм.

Удары осуществлялись как по нормали к поверхности преграды, так и под углом ($\theta = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ$) цилиндрическими ударниками с полусферическим носиком диаметра 8,7мм при скорости удара $v_{imp} = 107\text{--}140\text{м/с}$. Авторы пришли к следующим выводам: (I) БП у ИП при высоких скоростях выше, чем у КП; БП у РП ниже, чем у КП; (II) уменьшение ширины зазора между слоями трехслойной преграды от 5мм до 1мм существенно улучшает ее ЗЭ; (III) при каждом угле θ БП у ИП немного выше, чем у преград других конфигураций.

Balaban и Kurtoğlu [95] численно исследовали ЗЭ ИП 1x20мм и ДП 2x10мм из AA7075-T651 ($\sigma_y \approx 500\text{МПа}$), пробиваемых затупленным снарядом и снарядом оживальной формы ($D = 20\text{мм}$, $m = 197\text{г}$) из закаленной стали ($\sigma_y = 1900\text{МПа}$). Остаточная скорость для затупленного ударника при $v_{imp} = 320\text{м/с}$ оказалась равной 241/214м/с, в то время как для оживального ударника при $v_{imp} = 337\text{м/с}$ – 195/237м/с, где значения в числителе и знаменателе соответствуют ИП и ДП, соответственно. Авторы отмечают, что ДП имели более высокую ЗЭ по сравнению с ИП в случае проникновения затупленных снарядов, в то время как в случае перфорации заостренными ударниками имела место обратная картина.

Vasko [245] сравнивал ИП с СП различной конфигурации (Таблица 4.2.20). Преграды были из титана 6Al-4V, а снаряд - жестким шаром ($D = 76,2\text{мм}$). Результаты численных расчетов представлены в таблице 4.2.20. Анализ результатов (Таблица 4.2.20) показывает, что самый высокий БП достигается для ДП/КП.

Таблица 4.2.20. Результаты численного моделирования [245].

Преграда	v_{bl} (м/с)	Преграда	v_{bl} (м/с)	Преграда	v_{bl} (м/с)
1x50,8мм	462	2x25,4мм	505	4x12,7мм	423
2x25,4мм (12,7мм)	409	4x12,7мм (6,35)	409		

Senthil с соавторами [234] провели численные расчеты соударения стального сердечника 7.62мм ударника ($D = 6,06\text{мм}$, $L_{nose} = 7,65\text{мм}$, $L = 28,4\text{мм}$, $\sigma_y = 2700\text{МПа}$) и стальных преград ($\sigma_y = 304\text{МПа}$). ЗЭ КП 2х4,7мм, 3х4,7мм, 4х4,7мм, 5х4,7мм и 6х4,7мм сравнивалась с ЗЭ ИП той же толщины при $v_{imp} = 821\text{м/с}$. Оказалось, что преграды с 1-4 слоями практически эквивалентны, а ЗЭ у ИП выше по сравнению с пяти- и шестислойными преградами. Так, например, 28.2мм ИП остановила снаряд, а 6х4.7мм преграда этого не обеспечила и снаряд вылетел из преграды с остаточной скоростью $v_{imp} = 308\text{м/с}$. Численное моделирование было выполнено также для следующих СП: 3х4,7мм (10мм), 3х4,7мм (20мм), 3х4,7мм (30мм), 3х4,7мм (40мм), 3х4,7мм (50мм), 3х4,7мм (60мм) и 3х6мм (10мм), 3х6мм (20мм), 3х6мм (30мм), 3х6мм (40мм), 3х6мм (50мм), 3х6мм (60мм), а также для ИП 3х4,7мм и 3х6мм при скорости удара $v_{imp} = 825\text{м/с}$. Авторы установили, что остаточная скорость v_{res} увеличивается почти линейно с увеличением ширины воздушных зазоров для преград, имеющих толщину $b = 4,7\text{мм}$; для преград, имеющих толщину $b = 6\text{мм}$, остаточная скорость увеличивается, когда ширина зазоров возрастает с 0 до 20мм, и практически не изменяется в дальнейшем. Авторы отметили, что изменение остаточной скорости прекращается, когда ширина воздушного зазора достигает длины ударника.

Iqbal с соавторами [180] проведено численное моделирование ИП, КП, РП из мягкой стали при нормальном и наклонном ударе 7,62мм пульей (характеристики ударника и преграды такие же, как и в работе [234] - см. выше). Пробивание преград 1х10мм, 3х3,33мм, 3х3,33мм(10мм) моделировалось при следующих значениях угла наклона: $\theta = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$. Результаты моделирования таковы. Для нормального удара, $\theta = 0^\circ$ ЗЭ всех видов преград практически одинакова. Для угла наклона $\theta = 30^\circ$ различие в значениях БП для трех исследуемых преград таково: 447, 431, 416м/с для ИП, КП, РП, соответственно. Для $\theta = 45^\circ$ соответствующие значения таковы: 575, 515, 437м/с, то есть, различия стали более выраженными. Для $\theta = 60^\circ$ и $v_{imp} = 821\text{м/с}$ численное моделирование предсказало рикошет в случае ИП и застревание ударника в 3х3,33мм преграде. В тех же условиях ($\theta = 60^\circ$ и $v_{imp} = 821\text{м/с}$) 3х3,33мм(10мм) преграда была перфорирована с остаточной скоростью $v_{res} = 272\text{м/с}$ Авторы пришли к выводу, что причиной различия в баллистических сопротивлениях трех конфигураций является изменение траектории ударника во время проникания.

Моhammad с соавторами [208] моделировали проникание в 1х1мм и 2х1мм алюминиевую 1100 Н12 преграды ($\sigma_y = 148\text{МПа}$, $E = 66\text{ГПа}$) изготовленного из стали EN-24 оживального ударника ($D = 19\text{мм}$, $m = 52,5\text{г}$) под углами $\theta = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ и скорости удара в диапазоне $v_{imp} = 43\text{--}116\text{м/с}$. Было обнаружено, что ИП более эффективна, чем ДП той же толщины для всех рассматриваемых углов наклона подлетающего ударника: БП у ИП оказался на 9,1%, 10,4% и 5,7% выше, чем у ДП для $\theta = 0^\circ, 30^\circ$ и 45° , соответственно. Gupta с соавторами [167] сравнивали ЗЭ преград 1х1,0мм, 1х1,5мм, 2х0,5мм, 3х0,5мм из 1100-Н12 ($\sigma_y = 148\text{МПа}$, $E = 66\text{ГПа}$) при пробивании стальным (сталь EN-24) оживальным снарядом ($D = 19\text{мм}$, $m = 52,5\text{г}$) при $\theta = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ$. Трение между снарядом и преградой не учитывалось, в то время как коэффициент трения между слоями был введен в модель. Полученные значения БП представлены в Таблице 4.2.21; ее анализ показывает, что ИП имеют более высокий БП, чем КП той же толщины для всех тестируемых углов удара.

Таблица 4.2.21. Результаты [167] по БП (м/с).

Преграда	$\theta = 0^\circ$	$\theta = 30^\circ$	$\theta = 60^\circ$
1x1мм	52,4	59,5	65,0
2x0,5мм	48,0	53,8	61,5
1x1,5мм	72,5	74,5	85,6
3x0,5мм	62,9	67,5	78,6

Хiao с соавторами [255] исследовали ЗЭ ИП и ДП из стали Weldox 460E, пробиваемых коническими ударниками ($D = 20\text{мм}$, $D_0 = 2\text{мм}$, $L = 98\text{мм}$, $L_{nose} = 30\text{мм}$) из инструментальной стали Aгne ($\sigma_y = 1900\text{МПа}$) при скорости удара $v_{imp} = 80\text{--}406\text{м/с}$. Полученные результаты представлены в Таблице 4.2.22. Авторы пришли к следующим выводам: (I) Среди преград, имеющих одинаковую общую толщину и разное количество слоев, ИП являются более эффективными; снижение БП для СП становилось более выраженным при увеличении количества слоев; (II) Среди ДП, имеющих одинаковую толщину, преграда из слоев с одинаковой толщиной является наилучшей.

Таблица 4.2.22. Результаты [255] по БП.

Преграда	b (мм)	v_{bl} (м/с)
1x4мм	4	114,6
2x2мм	4	95,5
1x8мм	8	113,3
2x4мм	8	169,6
1x12мм	12	277,5
2x6мм	12	242,6
2мм + 10мм	12	265,6
10мм + 2мм	12	261,7
4мм + 8мм	12	245,8
8мм + 4мм	12	249,6
3x4мм	12	215,6
4x3мм	12	200,5

Palta с соавторами [219] численно исследовали ЗЭ ИП и КП из стали Weldox 700E ($\rho = 7850\text{кг/м}^3$, $\sigma_y = 818\text{МПа}$), пробиваемых пулями с цельнометаллической оболочкой (full metal jacket; $D = 5,56\text{мм}$, $L = 22,45\text{мм}$; латунная оболочка, $\rho = 8520\text{кг/м}^3$, $\sigma_y = 206\text{МПа}$; 4340-сталь сердечник, $\rho = 7850\text{кг/м}^3$, $\sigma_y = 792\text{МПа}$; свинцовый наполнитель, $\rho = 11270\text{кг/м}^3$, $\sigma_y = 24\text{МПа}$) при $v_{imp} = 900\text{м/с}$. Авторы пришли к следующим выводам, которые поддерживаются результатами, представленными в Таблице 4.2.23: (I) за исключением преграды 2мм+6мм, СП проигрывают по эффективности ИП; (II) БП у КП снижается с возрастанием числа слоев; (III) ДП с более толстым тыльным слоем имеет большую ЗЭ, чем преграда с обратным порядком слоев.

Таблица 4.2.23. Результаты моделирования [219].

b (мм)	Преграда	v_{res} (м/с)
4	1x4мм	583
4	2x2мм	613
6	1x6мм	371
6	2мм + 4мм	381
6	4мм + 2мм	429

b (мм)	Преграда	v_{res} (м/с)
6	3x2мм	448
8	1x8мм	257
8	2мм + 6мм	190
8	6мм + 2мм	334
8	2x4мм	332
8	2x2мм + 4мм	336
8	4мм + 2x2мм	375
8	4x2мм	378

4.2.3 Комплексные (экспериментальные и численные) исследования

Weidemaier с соавторами [250] провел экспериментальное и численное исследование перфорации стальных (НВ 280-322) преград ударниками с полусферической формой носика ($\sigma_y = 1180$ МПа, HRC 40-42, $\rho = 1810$ кг/м³, $m = 214$ г, $D = 17$ мм). Авторы изучили ИП и КП одинаковой толщины 43мм. Результаты экспериментов представлены в Таблице 4.2.24 (данные были взяты с рисунка, за исключением значений, связанных с ИП) в виде дробей v_{imp}/v_{res} , в числителе и в знаменателе приведены значения v_{imp} и v_{res} в м/с, соответственно. Было установлено, что БП СП сильно зависят от порядка пластин, имеющих различную толщину, и что переход от ИП к КП может улучшить или ухудшить ЗЭ преграды.

Таблица 4.2.24. Экспериментальные результаты [250].

Структура преграды				
1x43мм	31мм + 2x6мм	6мм + 31мм + 6мм	2x6мм + 31мм	3x14,3мм
1000/400	1000/490	1000/325	1000/300	1000/300
–	839/0	–	–	–
–	952/400	996/315	982/259	1015/321 1015/360
–	1131/674	1122/627	1127/543	–
–	1241/842	1237/809	1240/788	–

Buchan с соавторами [128] численно и экспериментально исследовали влияние прослойки толщиной 0,5мм из углеродистой стали на БП преграды, в котором фронтальная пластина выполнена из стали более высокой твердости по сравнению с тыльной стальной пластиной. Следующие комбинации толщин фронтальных и стальной пластин с промежуточным слоем и без него были испытаны против пули калибра 7,62мм: 2мм + 4мм, 3мм + 3мм, 4мм + 2мм и 5мм + 1мм. Было установлено, что прослойка улучшила баллистические характеристики преграды.

В работах [165-166,176-177] были представлены результаты экспериментальных и численных исследований защитных свойств ИП и СП из алюминия под воздействием стальных ударников с плоским, оживальным и полусферическими затуплениями. Для сравнения ИП и КП использовали данные по следующим преградам: 1x1,0мм, 2x0,5мм; 1x1,5мм, 3x0,5мм; 1x2,0мм, 2x1,0мм, 4x0,5мм; 1x2,5мм, 5x0,5мм; 1x3,0мм, 2x1,5мм, 3x1,0мм. Основные результаты заключаются в следующем: (I) ИП имеет самую высокую устойчивость к перфорации по сравнению с КП той же толщины и (II) ЗЭ КП уменьшается с увеличением количества слоев.

Iqbal с соавторами [179] изучали баллистические свойства алюминиевых 1100-Н12 преград толщиной 1мм при пробивании цилиндрическими и оживальными снарядами. Рассматривались ИП, КП и РП/ДП с различной шириной воздушного зазора между

слоями, имеющими суммарную толщину 2мм, 5мм, 10мм, 20мм и 30мм. Самый высокий БП наблюдался для СП, за которым следовали КП и РП. Изменение ширины воздушного зазора не оказывало существенного влияния на БП для оживального ударника, в то время для затупленного ударника небольшое влияние наблюдалось.

Deu с соавторами [144] (см. также [127,143]) экспериментально и численно исследовали 3Э преград 1x12мм, 2x6мм, 2x6мм (24мм), изготовленных из стальных пластин (Weldox 700E) цилиндрическими ($D=20\text{мм}$, $m=197\text{г}$, $L=20\text{мм}$) и оживальными ($L_{nose}=33\text{мм}$, $L=95\text{мм}$, $\psi=3$) ударниками (HRC 52), имеющих одинаковые диаметр и массу. Полученные значения БП приведены в таблице 4.2.25. Результаты этих исследований (Таблица 4.2.25) таковы: (I) имело место увеличение БП почти на 50% для КП и почти на 40% для РП по сравнению с ИП в случае проникания цилиндрических снарядов; (II) наблюдалось уменьшение БП примерно на 10% для КП и РП по сравнению с ИП в случае проникновения заостренного ударника.

Таблица 4.2.25. Результаты экспериментов [144] по БП (м/с).

Преграда → Ударник ↓	1x12мм	2x6мм	2x6мм (24мм)
Цилиндрический	168	247	235
Оживальный	318	288	280

Zhou и Stronge [270] экспериментально и численно исследовали баллистические свойства ИП и ДП/КП из нержавеющей стали 316L при нормальном и наклонном ударе цилиндрическим и цилиндрическим с полусферическим носом снарядов ($D=12,7\text{мм}$). Основные результаты, полученные для угла θ в диапазоне между 0° и 45° таковы: (I) КП поглощали больше энергии, чем ИП при перфорировании цилиндрическим снарядом; (II) не обнаружено существенного различия в БП между ИП и КП в случае перфорации цилиндрическим снарядом с полусферическим носом.

Senthil с соавторами [232] экспериментально и численно исследовали 3Э тонких преград из алюминия 1100-H12 ($\sigma_y=148\text{МПа}$) против нормального удара со скоростью $v_{imp}=64,5\text{м/с}$ цилиндрического, цилиндрического с полусферическим носом и оживального ($\psi=1,0; 1,58; 2,0; 2,5$) ударников ($D=19\text{мм}$). Для сопоставления ИП и КП рассматривались следующие преграды: 1x1,5мм, 3x0,5мм, 2x0,71мм; 1x2,0мм, 4x0,5мм, 3x0,71мм, 2x1,0мм; 1x2,5мм, 5x0,5мм, 4x0,71мм; 1x3,0мм, 3x1,0мм, 2x1,5мм, Изучено влияние воздушных зазоров при нормальном ударе оживальных и цилиндрических снарядов на преграды из тонких пластин, отстоящих друг от друга на 2, 5, 10, 20 и 30мм. Авторы пришли к следующим основным выводам: (I) ИП более эффективны по сравнению с КП и СП; (II) БП ИП 1x1,0мм был на 18% и 26% выше, чем у КП 2x0,5мм и РП 2x0,5мм (2,0мм), соответственно, при пробивании оживальным снарядом. Значения этих показателей для перфорации этих преград цилиндрическим снарядом равны 3% и 8%, соответственно.

Weiss и Stan [251] экспериментально и численно исследовали 3Э ИП и СП ($b=10\text{мм}$) из броневой стали высокой твердости (НВ 500) против нормального удара оживальным ударником 7,62x51мм ($\psi=6$). Полученные результаты приведены в Таблице 4.2.26. Анализ этих результатов позволяет сделать следующие выводы: (I) СП менее эффективны по сравнению с ИП; (II) увеличение числа одинаковых слоев ухудшает 3Э преграды; (III) зазоры между слоями улучшают 3Э преграды.

Таблица 4.2.26. Результаты исследований [251].

Преграда	Эксперименты		Расчеты	
	v_{imp}/v_{res} (м/с)	Δv (м/с)	v_{imp}/v_{res} (м/с)	Δv (м/с)
1x10мм	938/527	411	930/509	421
2x5мм	939/584	355	930/540	390
3x3,3мм	943/736	207	930/623	307
3,3мм + 6,7мм	935/608	327	930/547	383
2x5мм (20мм)	931/556	375	–	–
3x3,3мм (20мм)	937/632	305	–	–
3,3мм + (20мм) + 6,7мм	934/516	418	–	–

Holmen с соавторами [169-170] экспериментально и численно исследовали ЗЭ СП и СП из горячекатаной конструкционной стали (номинальное значение $\sigma_y = 355$ МПа), как в полученном виде (ПВ), так и после поверхностной закалки (ПЗ). В своем исследовании авторы использовали пули 7,62мм ($m = 10,5$ г, масса закаленного стального сердечника 5,0г) при скорости удара в диапазоне $v_{imp} = 465-915$ м/с. Экспериментальные результаты (БП, м/с) для преград 1x12мм, 2x6мм и 3x4мм из материала ПВ (числитель) и ПЗ (знаменатель), соответственно, таковы: 579/737, 592/719 и 571/703.

4.2.4 Исследования, включающие теоретический анализ

Iyushin [55] предложил аналитический метод расчета баллистических характеристик тонких ИП и СП и пришел к выводам, что (I) ИП менее эффективны, чем СП и (II) воздушные зазоры улучшают ЗЭ преграды.

Marom и Vodner [199] провели комбинированное аналитическое и экспериментальное сравнительное исследование ИП, КП, РП. Экспериментальное исследование было проведено с преградами из алюминиевого сплава, пробиваемых свинцовыми пулями при средней скорости удара 375 м/с. РП состояли из пластин в контакте, имеющих толщину от 1мм до 3,6мм и воздушные зазоры 13мм. Авторы обнаружили, что баллистическое сопротивление ИП выше, чем у КП и ниже, чем у РП. Преимущество РП над ИП было обнаружено Фоминым [74] на основе численных расчетов с использованием данных [199].

Nixdorff [214-217] сравнила баллистические характеристики ИП и КП. Используя теорию [93], автор показала, что разделение однородной преграды на несколько слоев, приводит к уменьшению БП.

Kasano [184] предложена простая модель для описания проникания в N -слойный алюминиевый экран. Модель включает соотношение для БП i -го слоя:

$$v_{bi}^{(i)} = \beta^{(i)} b^{(i)}, i = 1, 2, \dots, N \quad (4.2.1)$$

где $\beta^{(i)}$ - эмпирические коэффициенты. Результаты расчетов были сопоставлены с результатами эксперимента (Таблица 4.2.27) со стальными шариками ($m = 0,51$ г, $D = 5$ мм). Столбцы 2-3 и 4-5 в Таблице 4.2.27 соответствуют различным способам закрепления преграды (детали – в оригинальной статье). Автор пришел к выводу, что баллистические характеристики ИП лучше, чем у КП.

Таблица 4.2.27. Экспериментальные результаты [184].

Преграда	1-й способ		2-й способ	
	закрепления		закрепления	
	V_{imp} (м/с)	V_{res} (м/с)	V_{imp} (м/с)	V_{res} (м/с)
0,5мм + 1,0мм	303,1	154,7	295,3	173,0
1,0мм + 0,5мм	300,6	143,9	296,0	165,0
1х1,5мм	312,4	105,0	316,4	112,8
0,5мм + 1,0мм	316,0	188,8	310,3	191,1
1,0мм + 0,5мм	316,0	168,6	305,8	180,0
1х1,5мм	322,9	134,1	326,7	139,8
0,5мм + 1,0мм	328,3	205,5	322,9	201,4
1,0мм + 0,5мм	330,0	188,2	323,2	205,0

Исследование, проведенное Radin и Goldsmith [222] было основано на полуэмпирических моделях и экспериментальных исследованиях. Экспериментальные исследования проводились с преградами из алюминия 2024-0 (НВ 42-52), пробиваемыми со скоростью 50–210м/с цилиндрическими ($m = 35$ г) и коническими ($\vartheta = 30^\circ$, $m = 29$ г) ударниками диаметром 12,7мм. Структура тестируемых преград и результаты экспериментов показаны в Таблицах 4.2.28 и 4.2.29. Было обнаружено, что (I) ИП имеет преимущество по отношению к СП при пробивании ударниками обоих типов и (II) РП менее эффективны, чем КП.

Таблица 4.2.28. Экспериментальные результаты [222] по БП для конических ударников.

$b = 3,2$ мм	V_{bl} (м/с)	$b = 4,8$ мм	V_{bl} (м/с)	$b = 6,4$ мм	V_{bl} (м/с)
Преграда		Преграда		Преграда	
1х3,2мм	95	1х4,8мм	4,8	1х6,4мм	184
2х1,6мм	93	1,6мм + 3,2мм	1,6 + 3,2	2х3,2мм	160
2х1,6мм (6,4мм)	91	3х1,6мм	3х1,6	4х1,6мм	158
				2х3,2мм (6,4мм)	153

Таблица 4.2.29. Экспериментальные результаты [222] по БП для цилиндрических ударников.

$b = 3,2$ мм	V_{bl} (м/с)	$b = 4,8$ мм	V_{bl} (м/с)	$b = 6,4$ мм	V_{bl} (м/с)
Преграда		Преграда		Преграда	
1х3,2мм	93	1х4,8мм	135	1х6,4мм	142
2х1,6мм	90	3х1,6мм	114	4х1,6мм	137

Nurick и Walters [218] использовали энергетический подход для моделирования баллистической стойкости ДП и сравнили экспериментально ИП, КП и РП из холоднокатаной мягкой стали, пробиваемые коническим и цилиндрическими ($L = 36,0$ мм) ударниками, имеющими одинаковые массу и диаметр ($m = 35$ г, $D = 12,6$ мм). Использовались конические ударники двух типов: с $L_{cyl} = 32,35$ мм, $L_{nose} = 10,9$ мм, $\vartheta = 30^\circ$ и $L_{cyl} = 34,75$ мм, $L_{nose} = 3,65$ мм, $\vartheta = 60^\circ$. Теоретический анализ показал, что ЗЭ СП ниже, чем у ИП. Для того, чтобы оценить эффективность РП, были проведены эксперименты со следующими преградами: 1х1мм, 2х0,5мм, 2х0,5мм (2мм), 2х0,5мм (5мм), 2х0,5мм (10мм), 2х0,5мм (15мм), 2х0,5мм (25мм). Полученные результаты приведены в таблице 4.2.30. Было обнаружено, что (I) БП ИП на 4-8% выше, чем у КП; (II) РП менее эффективны по сравнению с КП; (III) БП РП уменьшается, когда ширина воздушного зазора между пластинами увеличивается.

Таблица 4.2.30. Результаты [218] по БП (м/с) для конических ($\vartheta = 30^\circ, 60^\circ$) и цилиндрических ($\vartheta = 90^\circ$) ударников, $b = 1\text{мм}$.

Преграда	$\vartheta = 30^\circ$	$\vartheta = 60^\circ$	$\vartheta = 90^\circ$
$1 \times 1,0\text{мм}$	61	85	54
$2 \times 0,5\text{мм}$	57	78	55
$2 \times 0,5\text{мм} (2,0\text{мм})$	56	79	55
$2 \times 0,5\text{мм} (5,0\text{мм})$	55	78	53
$2 \times 0,5\text{мм} (10,0\text{мм})$	55	75	52
$2 \times 0,5\text{мм} (15,0\text{мм})$	54	73	51
$2 \times 0,5\text{мм} (25,0\text{мм})$	53	72	48

Ben-Dog с соавторами [98] теоретически изучали на базе *общей* МЛВ проникание 3D жесткого острого конического ударника в СП и РП со слоями из одного и того же материала в ситуации, допускающей взаимодействие ударника в процессе проникания с несколькими слоями одновременно. Было доказано аналитически, что ЗЭ ИП, КП и РП одинакова, если суммарная толщина пластин одна и та же. Следует подчеркнуть, что этот результат был получен на основе весьма общей модели, описывающей взаимодействие ударника с преградой. Так как приведенные выше результаты были получены для конических снарядов, Ben-Dog с соавторами [110] численно (на основе ДЧМ) исследовали влияние на ЗЭ отклонения формы ударника от конической формы для РП и обнаружили, что это влияние незначительно (порядка нескольких процентов для БП).

Ben-Dog с соавторами [100,109] также исследовали влияние воздушных зазоров по баллистическим свойствам РП. В отличие от [98], в этих работах авторы рассматривали конические снаряды и использовали трехчленную модель динамического расширения цилиндрической полости вида (61.7.5). Было обнаружено, что РП "работает" лучше, чем ИП. Кроме того, доказано [109], что БП преграды растет с увеличением числа одинаковых слоев при заданной суммарной толщине преграды.

Ben-Dog с соавторами [111] исследовали влияние толщины и числа слоев на ЗЭ КП против заостренных жестких снарядов. Особенность использованного подхода в том, что он не требует замкнутой математической модели, описывающей процесс пробивания. Было показано, что сравнивать по ЗЭ ИП и КП можно на основе общих свойств функции, определяющей зависимость БП от толщины пластины, без привлечения конкретных выражений для этих функций, что весьма важно, поскольку качественное поведение баллистических характеристик в механике проникания, как правило, определяется с помощью простых моделей, которые включают в себя аппроксимацию экспериментальных данных. Основные результаты этого исследования могут быть сформулированы следующим образом: (I) переход к КП оказывает неблагоприятное воздействие на ЗЭ преграды; (II) увеличение числа слоев, имеющих одинаковые толщины, снижает ЗЭ преграды. Эти утверждения были подтверждены с помощью анализа результатов экспериментов и численных расчетов, имеющихся в литературе, что позволило сравнить защитные свойства монолитных и слоистых щитов. Теоретическое исследование Masti с соавторами [203] привело к тем же выводам. Amde с соавторами [97] показали неэффективность перехода к КП с использованием эмпирических моделей.

Liang с соавторами [195-196] предложили приближенную модель проникания цилиндра в СП, основанную на концепции сохранения импульса и энергии. Анализ адекватности модели с широким привлечением экспериментальных результатов дал положительные результаты. Используя предложенную модель и экспериментальные данные из литературы (главным образом [86]), авторы провели сравнительный анализ

преград, имеющих разную структуру. Оказалось, что (I) ЗЭ для ДП была лучшей при $b^{(1)}/b = 0,75$, а худшей $b^{(1)}/b = 0,5$; (II) воздушный зазор лишь незначительно влияет на ЗЭ.

Elek с соавторами [148] разработали простую модель для описания перфорации тонких металлических ИП и СП цилиндрическими ударниками и использовали свою модель для анализа баллистических свойств КП. Основные результаты данного исследования могут быть суммированы следующим образом. Предложенная модель предсказывает, что ИП имеет лучшую ЗЭ, чем любая другая СП той же общей массы. Анализ проникания ДП показал, что максимальную ЗЭ можно получить при очень низких (<20% от общей толщины) или очень высоких (> 80% от общей толщины) относительных толщинах лобового слоя. Увеличение количества слоев в РП приводит к дальнейшему снижению баллистической стойкости. Ухудшение баллистических характеристик тонких стальных преград против цилиндрических снарядов, вызванное слоистостью, было замечено ранее [262].

Liaghat с соавторами [193] предложили аналитическую модель для нормального и наклонного проникания конических снарядов в тонкие СП, которая основана на вычислении энергии, необходимой для деформации материала преграды и образования "звездочки". Промоделировав различные варианты проникания с помощью этой приближенной модели, авторы пришли к следующим выводам: (I) переход от ИП к КП и РП не улучшают ЗЭ преграды; (II) РП не имеет преимущество перед КП; (III) увеличение числа слоев одинаковой толщины, ухудшает ЗЭ преграды.

Zatorski [264-267] предложил метод обработки экспериментальных данных и его применение для вычисления энергии, поглощаемой ИП и СП. В частности, этот метод был применен для изучения влияния воздушных зазоров на БП ДП толщиной 6мм, пробиваемых 7,62мм пулями при скорости удара $v_{imp} \approx 820$ м/с. Материал слоев – алюминиевый сплав AlZn5Mg2CrZr ($\sigma_y = 378$ МПа) и корабельная сталь ($\sigma_y = 230$ МПа). Расчеты показали, воздушный зазор 6мм ухудшил ЗЭ всех конфигураций (сталь-сталь, сталь-алюминий, алюминий-алюминий), однако дальнейшее его увеличение до 12мм привело к повышению ЗЭ преграды.

Ben-Dog с соавторами [115] аналитически доказали, что модель [229] приводит к выводу о преимуществе ИП над любой КП той же общей толщины; для слоев, имеющих одинаковую толщину, это свойство было установлено ранее [229].

Masri [204-205] сопоставлял, с использованием предложенной модели взаимодействия ударника и преграды, ИП и КП, пробиваемые остроносими жесткими ударниками, и показал, что (I) любая КП хуже соответствующей ИП; (II) увеличение числа слоев одинаковой толщины снижает ЗЭ преграды; (III) среди КП с одинаковым числом слоев различной толщины наихудшая структура – со слоями одинаковой толщины.

Zagoriansky [51-52] предложен упрощенный подход к анализу и оптимизации баллистических характеристик преград из пластин, сваренных взрывом, который основан на усреднении механических характеристик преград.

4.3 Преграды со слоями из различных материалов

4.3.1 Влияние порядка пластин и зазоров между ними

Mullin с соавторами [209] провели эксперименты по пробиванию ДП цилиндрическими ударниками из 4340 стали ($\sigma_y = 1764$ МПа, HRC 51) при

$v_{imp}=710-925$ м/с. Следующие материалы были использованы для слоев преграды: МП-А-12560 (здесь и далее КБ; $\sigma_y=1245$ МПа), мягкая сталь А36 (МС; $\sigma_y=447$ МПа) и 5083-Н115 алюминий (Ал; $\sigma_y=264$ МПа). Были протестированы следующие КП: [КБ] 9,53мм + [Ал] 19,05мм, [Ал] 19,05мм + [КБ] 9,53мм, [МС] + 6,35 [Ал] 19,05мм, [Ал] 19,05мм + [МС] 6,35мм – под нулевым давлением и зажатые под давлением около 133 МПа. Результаты экспериментов показали, что ЗЭ преград зависит от порядка пластин из разных материалов.

Ben-Dog с соавторами [103] рассматривали проникание 3D жесткого острого конического ударника в КП со слоями из различных материалов, для которых использовалась ДЧМ, задающая нормальное напряжение на поверхности ударника в точках контакта с преградой в виде:

$$\Omega_n = a_2^{(i)} v_n^2 + a_0^{(i)}, \quad (4.3.1)$$

где $a_0^{(i)}$ и $a_2^{(i)}$ - параметры, задающие свойства материала i -й пластины (в большинстве моделей, $a_2^{(i)}$ пропорциональна плотности материала); v_n - нормальная составляющая скорости ударника в заданной точке на его поверхности. Авторы доказали следующее важное свойство КП: максимальный БП достигается, когда пластины расположены в порядке возрастания значений параметра χ , а минимальный - когда пластины расположены в обратном порядке, где

$$\chi^{(i)} = a_0^{(i)} / a_2^{(i)}. \quad (4.3.2)$$

Для ДП это свойство было доказано с учетом возможности одновременного взаимодействия ударника с несколькими слоями. Для более общей модели:

$$\Omega_n = a_2^{(i)} \omega(u) v^2 + a_0^{(i)}, \quad u = -\vec{v}^0 \cdot \vec{n}^0, \quad (4.3.3)$$

где ω - функция, определяющая МЛВ, а остальные обозначения поясняются в начале Главы 1, указанное свойство было доказано при допущении, что коэффициенты $a_2^{(i)}$ (значения плотности) одинаковы для всех слоев (естественно, в этом случае можно принять $\chi^{(i)} = a_0^{(i)}$). Установлено, что оно также справедливо, если используется трехчленная цилиндрическая динамическая модель расширения полости [101].

В частном случае ДП, когда предполагается, что слои перфорируются независимо друг от друга, вышеуказанный критерий был получен в работе [31]. [72] попытался найти общий принцип, определяющий оптимальный порядок пластин в КП, используя те же предположения.

Используя те же предположения, что и в работе [103], Ben-Dog с соавторами [104] обобщили результаты [103] на случай ДП, имеющих воздушные зазоры произвольной ширины. Следующие утверждения были доказаны аналитически: (I) если $\chi^{(1)} < \chi^{(2)}$, то БП возрастает с увеличением ширины воздушного зазора до значения, при котором ударник еще взаимодействует с фронтальной пластиной; после этого БП остается постоянным; (II) если $\chi^{(1)} > \chi^{(2)}$, то вместо увеличения БП уменьшается; (III) если $\chi^{(1)} = \chi^{(2)}$ то БП не зависит от ширины воздушного зазора.

С помощью численного моделирования Teng с соавторами [240] проанализировал ЗЭ стальных ДП при ударе со скоростями 400м/с и 800м/с. В экспериментах авторы использовали «тяжелый» и «легкий» конические снаряды и цилиндрические снаряды и ДП, включающие пластины шириной 6мм из различных материалов: Domex Protect 500 (НВ 477-550, $\sigma_y=1500$ МПа) и Weldox 460E ($\sigma_y=490$ МПа). Было установлено, что лучшей является конфигурация преграды, когда фронтальный слой выполнен из

высокопластичного и низкопрочного материала, а тыльный слой - из низкопластичного и высокопрочного материала.

Babaei с соавторами [94] экспериментально и численно исследовали ЗЭ тонких ДП при нормальном ударе цилиндрического ударника при скорости удара в диапазоне от 50 до 400 м/с. Сравнение преград со слоями из стали и алюминия, расположенных в двух возможных последовательностях показало, что порядок пластин имеет важное значение: конфигурация с фронтальной стальной пластиной обеспечивает лучшую ЗЭ, чем преграда с обратным порядком пластин.

Deu с соавторами [145] сравнили результаты трех серий численных расчетов БП для следующих металлических ИП и ДП, имеющих общую толщину 12 мм, при пробивании цилиндрическими и оживальными ударниками (теми же, что и работе [144]):

Серия 1:

[Weldox 700E] 1x12 мм,

[Weldox 700E] 2x6 мм,

[Weldox 700E] 2x6 мм;

Серия 2:

[Weldox 700E] 6 мм + [Armoх 560Т] 6 мм,

[Armoх 560Т] 6 мм + [Weldox 700E] 6 мм,

[Weldox 460E] 6 мм + [Armoх 560Т] 6 мм,

[Armoх 560Т] 2x6 мм;

Серия 3:

[Armoх 560Т] 12x1 мм,

[Weldox 700E] 8 мм + [Armoх 560Т] 4 мм,

[Weldox 700E] 4 мм + [Armoх 560Т] 8 мм,

[Weldox 700E] 2 мм + [Armoх 560Т] 10 мм,

[Armoх 560Т] 4 мм + [Armoх 560Т] 8 мм.

Для некоторых из рассмотренных преград авторами обнаружены большие расхождения между результатами численного моделирования и результатами экспериментов, которые они объясняют фрагментацией преграды и ударника, которые не были приняты во внимание при численном моделировании. Поэтому здесь мы приводим лишь результаты экспериментов (Таблица 4.3.1), проведенных для анализа адекватности модели с ДП со слоями из Weldox 700E ($\tilde{\sigma}_y \approx 860 \text{ МПа}$) и Armoх 560Т ($\tilde{\sigma}_y \approx 1700 \text{ МПа}$).

Таблица 4.3.1. Значения БП, полученные [145] в эксперименте.

Ударник	Преграда	V_{bl} (м/с)
Цилиндрический	[Weldox 700E] 6,0мм + [Armoх 560Т] 6,0мм	291
Цилиндрический	[Armoх 560Т] 6,0мм + [Weldox 700E] 6,0мм	> 354
Оживальный	[Weldox 700E] 6,0мм + [Armoх 560Т] 6,0мм	294
Оживальный	[Armoх 560Т] 6,0мм + [Weldox 700E] 6,0мм	> 341

Экспериментальные результаты Deng с соавторами [142] (Таблица 4.3.2) показали, что при пробивании ДП оживальными и цилиндрическими ударниками БП ДП выше для преград, в которых лобовой слой выполнен из материала с высокой прочностью (сталь-2: сталь 45, $\sigma_y = 714 \text{ МПа}$), а тыльный - из материала с низкой прочностью (сталь-1: Q235 сталь, $\sigma_y = 229 \text{ МПа}$), чем для преград с обратным порядком слоев.

Таблица 4.3.2. Результаты испытаний [142] (БП, м/с).

Преграда ↓	Ударник →	Цилиндрический	Оживальный
[Сталь-2] 6,0мм + [Сталь-1] 6,0мм		679	428
[Сталь-1] + 6,0мм	[Сталь-2] 6,0мм	632	419

Шаш и Зузов [82,235] проанализировали ЗЭ преград, включающих стальные пластины из Armoх560Т (НВW 530-590, $\sigma_y = 2030 \text{ МПа}$), Hardox 400 (НВW 370-430, $\sigma_y = 1350 \text{ МПа}$) и Weldox 700Е (НВW 260-310, $\sigma_y = 819 \text{ МПа}$), которые используются в бронированных транспортных средствах. Расчеты проведены для монолитных, двухслойных и трехслойных КП и КП трехслойных преград с одинаковыми суммарными толщинами пластин, пробиваемых 7,62мм АРМ2-пулей с начальной скоростью 830м/с. Результаты расчетов представлены в Таблице 4.3.3.

Таблица 4.3.3. Результаты расчетов [235].

Структура преграды	V_{res} (м/с)
1x[Armoх 560Т] 12,0мм	–
2x[Armoх 560Т] 6,0мм	–
3x[Armoх 560Т] 4,0мм	–
3x[Armoх 560Т] 4,0мм(5мм)	351
1x[Hardox 400] 12,0мм	–
2x[Hardox 400]6,0мм	114
3x[Hardox 400]4,0мм	201
3x[Hardox 400]4,0мм(5мм)	428
1x[Weldox 700Е]12,0мм	457
2x[Weldox 700Е]6,0мм	461
3x[Weldox 700Е]4,0мм	515
3x[Weldox 700Е]4,0мм(5мм)	577
[Armoх 560Т]6,0мм+[Hardox 400]6,0мм	–
[Hardox 400]6,0мм+[Armoх 560Т]6,0мм	–
[Armoх 560Т]6,0мм+[Weldox 700Е]6,0мм	262
[Weldox 700Е]6,0мм+[Armoх 560Т]6,0мм	316
[Hardox 400]6,0мм+[Weldox 700Е]6,0мм	320
[Weldox 700Е]6,0мм+[Hardox 400]6,0мм	342
4x[Armoх 560Т]3,0мм	–
[Hardox 400]6,0мм+[Armoх 560Т]6,0мм+[Weldox 700Е]6,0мм	255
[Hardox 400]6,0мм+[Weldox 700Е]6,0мм+[Armoх 560Т]6,0мм	271
[Armoх 560Т]6,0мм+[Hardox 400]6,0мм+[Weldox 700Е]6,0мм	274
[Weldox 700Е]6,0мм+[Hardox 400]6,0мм+[Armoх 560Т]6,0мм	300
[Armoх 560Т]6,0мм+[Weldox 700Е]6,0мм+[Hardox 400]6,0мм	301
[Weldox 700Е]6,0мм+[Armoх 560Т]6,0мм+[Hardox 400]6,0мм	319

Авторы пришли к следующим основным выводам: (i) двухслойные преграды с пластинами из одинаковых материалов имеют худшую ЗЭ, чем однослойные преграды, и лучшую, чем трехслойные КП и РП; (ii) если поменять местами первую и третью пластины в трехслойной смешанной конфигурации, то это может заметно сказаться на ЗЭ преграды; воздушные зазоры негативно сказываются на ЗЭ преграды. Расчеты показывают, что рациональное расположение пластин – в порядке убывания их сопротивляемости прониканию.

4.3.2 Выбор оптимальной многослойной конфигурации

4.3.2.1 Выбор на основе сопоставления конкретных структур

В настоящем разделе рассматриваются некоторые работы, в которых выбор рациональной структуры преграды осуществляется путем сопоставления ЗЭ нескольких вариантов структуры преграды. Перечень работ, в которых используется

такой подход, можно было бы расширить, однако мы не будем этого делать, поскольку монография посвящена методам, применимость которых носит более общий характер.

Zhou с соавторами [271] экспериментально и численно исследовали ЗЭ ДП ($b = 5\text{мм}$) из сваренных взрывом слоев различной толщины при $v_{imp} = 260\text{--}900\text{м/с}$ и $\theta = 0^\circ\text{--}60^\circ$ Сталь 304L ($\rho = 7850\text{кг/м}^3$) и алюминий LJ12 ($\rho = 2730\text{кг/м}^3$) использованы в качестве материалов первого слоя и второго слоя, соответственно, в то время как снарядом был стальной шарик диаметром $D = 6\text{мм}$. Значения БП, полученные при численном моделировании (сняты с фигур) и дополненные данными по удельной плотности преград A_{sh} , представлены в Таблицах 4.3.4-4.3.6. Таблицы позволяют сравнивать преграды различной конфигурации по БП, однако, как отметили авторы, при этом должны быть приняты во внимание значения удельной плотности преград.

Таблица 4.3.4. Значения БП (м/с), полученные при численном моделировании [271].

Преграда	A_{sh} (кг/м ²)	Угол, определяющий направление удара θ			
		0°	30°	45°	60°
[St] 1мм + [Al] 4мм	18,8	390	431	513	782
[St] 2мм + [Al] 3мм	23,9	374	425	502	772
[St] 3мм + [Al] 2мм	29,0	424	460	550	861
[St] 4мм + [Al] 1мм	34,1	508	514	620	921

Таблица 4.3.5. Результаты экспериментов для нормального воздействия [271].

Преграда	БП (м/с)	Преграда	БП (м/с)
[St] 1мм + [Al] 4мм	<445	[St] 2мм + [Al] 3мм	279-333
[St] 3мм + [Al] 2мм	588-618	[St] 4мм + [Al] 1мм	485-646

Таблица 4.3.6. БП (м/с) в зависимости от соотношения толщин слоев [271].

$b^{(1)}/b^{(2)}$	A_{sh} (кг/м ²)	Угол, определяющий направление удара θ			
		0°	30°	45°	60°
0,25	18,8	389	430	509	781
0,67	23,9	375	426	501	770
1,00	26,4	381	430	531	842
1,50	29,0	425	460	550	861
2,30	+31,5	470	481	600	902
4,00	34,1	513	515	620	922

Wang и Zhou [247] экспериментально и численно исследовали ЗЭ сваренных взрывом ДП ($b = 5\text{мм}$), имеющих различную толщину слоев, при ударе стальными шаром ($D = 1\text{мм}$) и кубом (с длиной ребра 4,2мм). Фронтальная и тыльная пластины были изготовлены из стали 304L и алюминия LY12, соответственно. Авторы обнаружили, что БП максимальный, когда отношение $b^{(1)}/b^{(2)}$ около 3 для сферических снарядов и 1,5 для кубических ударников.

Rahman с соавторами [223], проведя серию численных расчетов, сравнил значения БП для различных двухслойных и трехслойных преград, имеющих общую толщину $b = 25\text{мм}$ (см. Таблицу 4.3.7), при пробивании 7,62мм пулями при скорости удара $v_{imp} = 700\text{--}1200\text{м/с}$. Преграды были скомпонованы из высокопрочной стали (HSS; $\rho = 7860\text{кг/м}^3$, $\sigma_y = 1250\text{МПа}$) и алюминия Al7075-T6 (Al; $\rho = 2804\text{кг/м}^3$, $\sigma_y = 480\text{МПа}$).

Таблица 4.3.7. Результаты экспериментов [223].

Структура щита	A_{sh} (кг/м ²)	v_{bl} (м/с)
[HSS] 25мм	196,5	1150
[Al] 25мм	70,1	760
[HSS] 17мм + [Al] 8мм	156,1	980
[HSS] 16мм + [Al] 9мм	151	960
[HSS] 15мм + [Al] 10мм	145,9	940
[HSS] 14мм + [Al] 11мм	140,9	920
[HSS] 13мм + [Al] 12мм	135,8	900
[HSS] 9мм + [Al] 8мм + [HSS] 8мм	156,1	1050
[HSS] 8мм + [Al] 9мм + [HSS] 8мм	151	1020
[HSS] 8мм + [Al] 10мм + [HSS] 7мм	145,9	1020
[HSS] 7мм + [Al] 11мм + [HSS] 7мм	140,9	975
[HSS] 7мм + [Al] 12мм + [HSS] 6мм	135,8	975

Результаты расчетов приведены в таблице 4.37. Авторы пришли к выводу, что трехслойные конфигурации, выполненные из комбинации HSS и Al7075-T6, являются перспективными при проектировании защитных конструкций, поскольку потенциально могут привести к экономии веса при одновременном повышении баллистических характеристик структуры.

4.3.2.2 Оптимизация на основе математических методов

Постановка задачи поиска механических характеристик неоднородной плиты в терминах теории оптимального управления впервые была выполнена в работах [14-15]. Инициатором развития такого рассмотрения проблем проникания был А.А. Поздеев, им же были предложены два подхода к их решению. На основе первого (минимаксного) подхода, не получившего дальнейшего развития, была получена оптимальная структура плиты минимальной толщины при заданной удельной плотности [6].

Второй подход (оптимизационный) содержал большой потенциал и позволял достаточно эффективно решать задачи оптимизации в различных постановках.

В рамках этого подхода Аптуков [10,90] и Аптуков с соавторами [7] получили аналитическое решение и предложили основанные на принципе максимума Понтрягина численные процедуры для определения оптимального распределения механических характеристик неоднородной пластины при условии, что эти характеристики могут непрерывно меняться вдоль направления проникания. С использованием традиционной терминологии механики проникания задача может быть сформулирована как минимизация удельной плотности преграды для заданного БП. Авторы использовали ДЧМ, в которой было использовано предположение об универсальной зависимости между коэффициентами модели (динамической твердостью и плотностью материала пластины). В перечисленных работах рассматривались различные формы ударника, изучалось влияние связи между динамической твердостью и плотностью на итоговое решение. Этот подход был обобщен на случаи учета трения [3] и вязкостных эффектов [78].

Аналогичный подход использовался при решении задач дискретной оптимизации; в этом случае щит состоит из нескольких слоев, а материалы для слоев выбирались из заданного набора. Подобные задачи были решены с использованием цилиндрической модели расширения полости Аптуковым с соавторами [8] и Аптуковым и Белоусовым [89]. Это направление также получило развитие в ряде недавних публикаций [4, 75-77]. Целью исследования являлась минимизация удельной плотности преграды для

заданного БП; слои могли иметь различную толщину и быть изготовлены из различных материалов (из известного списка). Авторы использовали ДЧМ, были проанализированы различные варианты задачи: нормальный удар тел вращения, косоугольный удар клина, учет трения и ослабляющего влияния свободных поверхностей. В работе [75] авторы суммировали основные результаты предыдущих исследований. Многие из перечисленных результатов представлены также в монографии Аптукова с соавторами [9]. С применением принципа максимума Понтрягина для оптимизации многослойных преград можно познакомиться также по книге [56].

Ben-Dor с соавторами [102] решили аналитически следующую задачу оптимизации для СП. Предполагается, что существует несколько материалов с различными свойствами, которые могут быть использованы для изготовления пластин-слоев в СП. Цель состоит в том, чтобы определить структуру преграды, то есть порядок и толщины пластин, изготовленных из различных материалов, которые обеспечивали бы максимальный БП преграды, имеющей заданную удельную плотность, при нормальном ударе конического 3D ударника. Авторы использовали модель взаимодействия ударника с преградой вида (4.3.3), где $a_2^{(i)}$ – плотность материалов i -й пластины. Авторы доказали аналитически, что преграда, имеющая максимальный БП состоит из одной пластины или нескольких смежных пластин (эти случаи эквивалентны в модели), изготовленных из материала с максимальным значением параметра χ (см. формулу (4.3.2)).

Используя ту же модель взаимодействия ударника с преградой, Ben-Dor с соавторами [105] обобщили результаты [103] для ДП в контакте на случай, когда преграда состоит из смежных пластин, изготовленных из одного из двух возможных материалов и общая толщина пластин, изготовленных из любого материала, задана. Авторы доказали, что максимальным БП обладает преграда, состоящая из двух блоков, каждый из которых включает в себя пластины, изготовленные из одного и того же материала. Порядок блоков определяется правилом, установленным в работе [103].

Используя упрощенную модель взаимодействия ударник-преграда, Ben-Dor с соавторами [112,115] исследовали проблему оптимизации СП, когда задан набор материалов с известными механическими свойствами и пластины, изготовленные из различных материалов, могут быть расположены в различном порядке в преграде. Цель состоит в том, чтобы определить последовательность материалов в слоях и толщины слоев, которые обеспечивают максимальный БП преграды, когда заданы удельная плотность, верхняя граница общей толщины преграды и ограничения по толщине пластин для каждого материала. Эта задача сведена к задаче геометрического программирования, которая может быть решена с использованием существующих методов. Для наиболее интересных случаев преград из двух и трех слоев, решения получены аналитически в явном виде.

Park с соавторами [220] предложил многоступенчатую процедуру оптимизации ДП на основе численного моделирования. Предполагалось, что преграда состоит из алюминиевой ($\rho=2770\text{кг/м}^3$, $\sigma_y=265\text{МПа}$) фронтальной пластины и тыльного слоя из мягкой стали ($\rho=7870\text{кг/м}^3$, $\sigma_y=532\text{МПа}$). В качестве ударника рассматривался упругий ($\rho=7880\text{кг/м}^3$, $E=200\text{ГПа}$) шарик ($D=10\text{мм}$) при скорости $v_{imp}=300\text{м/с}$. На первом этапе с помощью численного моделирования проникания в преграды с различной толщиной слоев, $b^{(1)}$ и $b^{(2)}$, авторы определяли среднюю температуру щита T_{ave} , среднюю эквивалентную пластическую деформацию ε_{ave} и максимальную эквивалентную пластическую деформацию в критическом элементе щита ε_{max} . На втором этапе строились приближенные функции, описывающие зависимости T_{ave} , ε_{ave} и ε_{max} от $b^{(1)}$ и $b^{(2)}$. На третьем этапе, используя сведение многокритериальной задачи

к задаче с одним критерием путем перехода к линейной комбинации критериев, решалась оптимизационная задача. Авторы рассматривали две пары критериев: первый критерий в паре - T_{ave} или ε_{ave} , второй - масса преграды. Учитывались ограничения на толщины слоев, общую толщину преграды, а также на ε_{max} .

Баничук с соавторами [29,96-97], Баничук и Иванова [27] сформулировали и решили задачу многоцелевой оптимизации СП, пробиваемой затупленным снарядом. БП, удельная плотность и общая толщина преграды рассматривались как компоненты векторного критерия оптимизации. Для решения задачи использован генетический алгоритм; применение предлагаемого подхода проиллюстрировано на примере.

Banichuk с соавторами [30], на основе двухчленной модели взаимодействия снаряд-преграда, аналитически исследовали задачу оптимизации СП, имеющей заданную толщину, пробиваемую снарядом не цилиндрической формы. Слои могут иметь различную толщину, и выполнены из различных материалов (из данного перечня). Цель состояла в том, чтобы определить кусочно-постоянное распределение материалов по толщине преграды, которое обеспечило бы максимум БП.

Sinitsin с соавторами [236] исследовал многоцелевую задачу оптимизации для СП, состоящей из пластин с заданной суммарной толщиной, изготовленных из различных материалов (набор материалов и их механические характеристики известны). В своем исследовании авторы использовали двухчленную модель взаимодействия снаряд-преграда и предположили, что форма ударника известна. БП и общая масса преграды рассматривались как компоненты критерия векторной оптимизации (оптимизация Парето), и эта задача была решена с помощью свертки критериев на базе весовых коэффициентов. Оптимальная структура преграды (последовательность и толщины пластин) определялись численно с использованием генетического алгоритма.

Баничуком и Ивановой [27-28] решены задачи оптимизации формы ударника (недеформируемого тела вращения) и оптимизации преград, имеющих общую слоистую структуру (материал для слоев выбирался из заданного набора материалов). При анализе авторы использовали двухчленную модель взаимодействия снаряд-преграда; в качестве критериев векторной оптимизации рассматривались БП и удельная плотность преграды. Были проанализированы два варианта задачи: (I) масса ударника известна; (II) задано ограничение на массу ударника. Процедура решения полученной задачи базировалась на методах теории игр и использовала генетический алгоритм.

Дубинский [50] обосновал критерий, регламентирующий порядок расположения пластин в многослойной мишени, обеспечивающий ее максимальное сопротивление пробиванию цилиндрическим ударником; в частности, если пластины изготовлены из одного и того же материала, они должны быть расположены в порядке возрастания их толщин. Для барьеров со слоями одинаковой толщины из одинакового материала установлено, что, как правило, увеличение количества слоев снижает БЭ барьера.

4.4 Некоторые результаты исследования проникания в полубесконечные анизотропные преграды

Исследования Асатрян с соавторами [16], Багдоева[24], Багдоева с соавторами, Багдоева и Ванцяна[17-19], Ванцяна [37] посвящены моделированию нормального проникновения жесткого, острого снаряда в упругие поперечно-изотропные преграды, т.е. преграды, имеющие разные пределы текучести в направлении проникновения и в перпендикулярной ему плоскости.

Багдоев и Ванцян [17], Багдоев с соавторами [23], Ванцян [37] изучали проникание удлиненных снарядов на основе статической "модели плоских сечений" (см. Главу 2). Авторы предложили следующую модель:

$$\sigma_r = -\frac{\Psi_2}{\Psi_1} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\mu^2 \frac{\Psi_1^2}{\Psi_2^2} \right) + 1 \right], \quad (4.4.1)$$

где

$$\Psi_1 = \sqrt{4Y^{(x)2} - Y^{(r)2}}, \quad \Psi_2 = Y^{(x)}Y^{(r)}, \quad (4.4.2)$$

$Y^{(x)}$ и $Y^{(r)}$ - значения предела текучести материала преграды в направлении проникания и в перпендикулярном направлении, соответственно; μ - коэффициент Ламе.

Авторы обратили внимание на то, что $\sigma_r \rightarrow \infty$, когда $Y^{(r)}/Y^{(x)} \rightarrow 2$. Это означает, что баллистическое сопротивление может быть значительно увеличено путем рационального проектирования преграды. Предсказанный теоретически эффект был исследован Багдоевым с соавторами [20], Багдоевым и Ванцяном [19] и нашел экспериментальное подтверждение.

В работах Багдоева с соавторами [20-21,23] и Ванцяна [37] представлены результаты моделирования проникновения в поперечно-изотропные преграды. Авторы изготавливали многослойные преграды из большого числа (30-50 штук) склеенных тонких пластин. Использовались пластины двух различных металлов, которые чередовались в преграде. Среднее значение предела текучести многослойного барьера в направлении, перпендикулярном к направлению проникания $Y^{(r)}$ рассчитывалось следующим образом:

$$Y^{(r)} = (Y^{(r,1)}h_1 + Y^{(r,2)}h_2)/(h_1 + h_2), \quad (4.4.3)$$

где $Y^{(r,i)}$ и h_i - значения предела текучести i -го металла ($i = 1,2$) и суммарная толщина изготовленных из него пластин, соответственно. Среднее значение предела текучести многослойного барьера в направлении проникновения $Y^{(x,av)}$ было определено экспериментально.

Эксперименты, проведенные при скорости удара $v_{imp} \approx 800 \text{ m/s}$, показали, что глубина проникания (ГП) значительно уменьшается при $1,6 \leq Y^{(r)}/Y^{(x)} \leq 3,5$. Так, например, ГП в многослойную преграду, изготовленную из алюминиевых пластин толщины 1,6мм и свинцовых пластин толщины 2,0мм ($Y^{(r)}/Y^{(x)} \leq 2,3$) составила 68мм, в то время как значения ГП в монолитные алюминиевые и свинцовые преграды оказались 100мм и больше 120мм, соответственно.

Аптуков [13] разработал алгоритм и компьютерную программу для моделирования проникания жесткого ударника в анизотропную преграду после удара под углом к поверхности преграды. Расчеты показали, что анизотропия может существенно влиять на траекторию движения ударника.

4.5 Выводы и заключительные замечания

Результаты экспериментальных исследований обобщены в Таблицах 4.5.1–4.5.3. Они разделены на две группы в зависимости от формы ударника: остроносые снаряды (конические, оживальные, большинство видов пуль и бронебойных снарядов) и

затупленные снаряды (цилиндрические, шары, снаряды с полусферическим или плоским носом).

Важно отметить, что здесь термин "результат" означает не результат одного эксперимента (численного расчета), а результат серии экспериментов (расчетов), опубликованных, как правило, в одном источнике. Следовательно, данные, представленные в таблицах, получены в большом количестве экспериментов (расчетов).

Заголовок второго столбца (ИП>КП) указывает на обработанные результаты, которые позволяют сравнивать ЗЭ ИП и КП. Обозначения X/Y/Z означает, что X% результатов указывают на лучшие характеристики ИП по сравнению с КП, Y% результатов указывают на лучшие характеристики КП, а Z% результатов не позволяют обнаруживать заметную разницу между ЗЭ ИП и КП. В третьем и в четвертом столбцах приведены аналогичные данные, которые позволяют сравнивать ЗЭ ИП и РП (ИП>РП), а также КП и РП (КП>РП). В последней колонке (ИП>КП, РП), сравнивается ЗЭ монолитных и немонолитных преград.

Для каждой группы ударников в Таблицах 4.5.1-4.5.2 даны две группы параметров. Первая и вторая группы касаются результатов экспериментов (расчетов), в которых $\bar{b} \leq \bar{b}^*$ и $b > b^*$, соответственно, где $\bar{b} = b/D$, $\bar{b}^* = b^*/D$, а \bar{b}^* - пороговое значение, которое позволяет различать информацию для тонких и толстых щитов. Таблицы 4.5.1-4.5.2 отличаются по выбору величины \bar{b}^* . Ясно, что это разбиение основано на оценке общей толщины преграды, не учитывает толщины отдельных слоев и, следовательно, не позволяет выделить ситуации с одним и тем же механизмом перфорации слоев и преграды в целом.

В каждой строке Таблицы 4.5.3, которая соответствует определенной группе ударников, не делаются различия между тонкими и толстыми преградами, а в последней строке – также между типами ударников.

Таблица 4.5.1. Обобщенные данные для $\bar{b}^* = 1.0$,

Форма ударника	ИП > КП	ИП > РП	КП > РП	ИП > РП, КП
Остроносые ударники				
$b \leq b^*$	80%/20%/0	85%/15%/0	73%/18%/9%	80%/20%/0
$b > b^*$	70%/15%/15%	86%/0%/14%	58%/28%/14%	75%/10%/15%
Затупленные ударники				
$b \leq b^*$	70%/26%/4%	75%/25%/0	83%/0%/17%	71%/26%/3%
$b > b^*$	62%/38%/0	0/100%/0	67%/33%/0	56%/44%/0

Таблица 4.5.2. Обобщенные данные для $\bar{b}^* = 0.5$,

Форма ударника	ИП > КП	ИП > РП	КП > РП	ИП > РП, КП
Остроносые ударники				
$b \leq b^*$	78%/22%/0	86%/14%/0	83%/0%/17%	80%/20%/0
$b > b^*$	75%/17%/8%	84%/8%/8%	58%/33%/9%	78%/13%/9%
Затупленные ударники				
$b \leq b^*$	86%/7%/7%	100%/0%/0	80%/0%/20%	90%/5%/5%
$b > b^*$	53%/47%/0	20%/60%/20%	75%/25%/0	48%/52%/0

Таблица 4.5.3. Обобщенные данные.

Форма ударника	ИП > КП	ИП > РП	КП > РП	ИП > РП, КП
Остроносые ударники	76%/19%/5%	85%/10%/5%	67%/22%/11%	79%/16%/5%
Затупленные ударники	68%/29%/3%	67%/33%/0	78%/11%/11%	68%/30%/2%
Все формы	72%/24%/4%	79%/17%/4%	68%/20%/12%	75%/22%/3%

Анализ Таблицы 4.5.3 позволяет прийти к следующим выводам. Если не принимать во внимание форму ударника, получается, что переход от ИП к СП не улучшает ЗЭ преграды. Однако, ситуация несколько отличается для остроносых и затупленных снарядов. В подавляющем большинстве случаев проникания остроносых снарядов ИП превосходят по ЗЭ СП. ИП более эффективны также и против затупленных снарядов, их превосходство является существенным, но не подавляющим. Аналогичная ситуация имеет место при сравнении ЗЭ ИП и СП. Анализ Таблицы 4.5.3 также показывает преимущество КП по сравнению с РП.

Сопоставление данных в Таблицах 4.5.1 и 4.5.2 показывает, что изменение \bar{b}^* слабо влияет на результаты анализа.

Следует отметить, что ряд авторов [232,243] пришли, по существу, к аналогичным выводам, хотя их анализ был основан на значительно меньших объемах экспериментальных и численных данных.

Анализ публикаций также позволяет прийти к некоторым выводам относительно ситуаций, которые не отражены в Таблицах 4.5.1-4.5.3: (I) увеличение количества одинаковых слоев РП негативно сказывается на ее ЗЭ; (II) ЗЭ СП со слоями из одного и того же материала зависит от порядка слоев; (III) изменение порядка пластин в СП может заметно влиять на баллистические характеристики; (IV) эффект от перехода к СП уменьшается с увеличением скорости удара; (V) характер и величина эффекта от перехода к КП и РП зависят от характера разрушения ИП и отдельных слоев в СП.

Очевидно, что эффективность и условия рационального использования СП требуют дальнейших систематических исследований с использованием теоретических, численных и экспериментальных подходов.

Литература к Части 1

1. Алексеева Е. В., Баранцев Р. Г. Локальный метод аэродинамического расчета в разреженном газе. Ленинградский Государственный Университет, 1976.
2. Алексенцева С.Е. Ударно-волновые процессы взаимодействия высокоскоростных элементов с конденсированными средами: дис. ... док. техн. наук. Самарский Государственный Технический Университет, 2015. - 173 с.
3. Аптуков, В.Н., Хасанов, А. Р. Оптимальное торможение жесткого цилиндра неоднородной преградой при ударе по нормали с учетом трения. // Вестник Пермского Университета. Математика. Механика. Информатика. 2011. № 3(7). С. 19-27.
4. Аптуков, В.Н., Хасанов, А. Р. Оптимизация параметров слоистых плит при динамическом проникании жесткого индентора с учетом трения и ослабляющего эффекта свободных поверхностей. // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2014. № 2. С. 48–75.
5. Аптуков, В.Н., Хасанов, А.Р. Расширение цилиндрической полости в сжимаемой упругопластической среде. // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2017. № 1. С. 5-23.
6. Аптуков В.Н., Поздеев А.А. Некоторые минимаксные задачи технологии и прочности конструкций // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1982. № 1. С. 47-55.

7. Аптуков В.Н., Петрухин Г.И., Поздеев А.А. Оптимальное торможение твердого тела неоднородной пластиной при ударе по нормали // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1985. № 1. С. 165-170.
8. Аптуков В.Н., Белоусов В.Л., Каниболотский М.А. Оптимизация слоистой плиты при проникании жесткого ударника // Механика композитных материалов. 1986. № 2. С. 252-257.
9. Аптуков В.Н., Мурзакаев Р.Т., Фонарев А.В. Прикладная теория проникания. М.: Наука, 1992.
10. Аптуков В.Н. Оптимальная структура неоднородной пластины с непрерывным распределением свойств по толщине // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1985. № 3. С. 148-151.
11. Аптуков В.Н. Расширение сферической полости в упругопластической среде при конечных деформациях. Сообщение 1. Влияние механических характеристик, свободной поверхности, слойности. // Проблемы прочности. 1991. № 12. С. 1262-1268.
12. Аптуков В.Н. Расширение сферической полости в упругопластической среде при конечных деформациях. Сообщение 2. Влияние инерционных характеристик. Температурные эффекты // Проблемы прочности. 1991. № 12. С. 1269-1274.
13. Аптуков В.Н. Взаимодействие ударника с анизотропной преградой. В кн.: Статические и динамические задачи упругости и вязкоупругости, // УНЦ АН СССР, Свердловск, 1983. С. 103-110.
14. Аптуков В.Н. Исследование сопротивления пластин динамическому внедрению жестких ударников: автореф. дисс. ...канд. техн. наук. Пермь: ППИ, 1979. 16 с.
15. Аптуков В.Н. Взаимодействие ударника с преградой как игровая ситуация // 5-й Всес. съезд по теоретической и прикладной механике. Алма-Ата: Наука. 1981. С. 29.
16. Асатрян В. Л., Багдоев А. Г., Ванцян А.А. Решение динамической задачи проникания твердого конуса в первоначально-упругую трансверсально-изотропную среду. // Известия Академии Наук Армянской ССР, Механика. 1996. 49(4). С. 77-85.
17. Багдоев А.Г., Ванцян А.А. Проникание тонкого тела в упругие анизотропные среды. // Известия Академии Наук Армянской ССР. 1983. 36(6). С. 23-30
18. Багдоев А.Г., Ванцян А.А. Исследование проникания тонкого твердого тела в трансверсально-изотропную среду. // Известия Академии Наук Армянской ССР. Механика. 1987. 40(4). С. 3-6.
19. Багдоев А.Г., Ванцян А.А., Григорян М.С. Исследование особенности напряжений в анизотропной пластической среде при проникании конуса. // Известия Академии Наук Армянской ССР. Механика. 1989. 42(4). С. 52-57.
20. Багдоев А.Г., Ванцян А.А., Григорян М.С. Влияние антиизотропных свойств металлических слоистых образцов на проникание. // Известия Академии Наук Армянской ССР. Механика. 1988. 41(6). С. 28-34.
21. Багдоев А.Г., Ванцян А.А., Григорян М.С. Исследование особенности напряжений в анизотропной пластической среде при проникании конуса. // Известия Академии Наук Армянской ССР. Механика. 1989. 42(4). С. 52-57
22. Багдоев А.Г., Ванцян А.А., Хачатрян Б.К., Хачатрян Л.А. Динамическая задача проникания твердого индентора в антиизотропную среду по гипотезе нормальных сечений. // Известия Академии Наук Армянской ССР. Механика. 1997. 50(1). С. 44-52.
23. Багдоев А.Г., Ванцян А.А., Григорян М.С. Учет влияния анизотропных свойств композитных преград и стохастических процессов при проникании инденторов. // Механика композиционных материалов и конструкций. (Сборник трудов IV-го Всероссийского симпозиума. Том 1. Москва, 4-6 Декабря 2012 г. – М.: ИМПРИМ РАН). 2012. С. 16-29.
24. Багдоев А.Г. Проникание тонкого тела вращения в упругую среду. // Известия Академии Наук Армянской ССР. Механика. 1977. 30(5). С. 17-37.
25. Баженов В. Г., Котов В. Л. Решение задач о наклонном проникании осесимметричных ударников в мягкие грунтовые среды на основе моделей локального взаимодействия // Прикладная математика и механика. 2010. № 3. С. 278-285.

26. Баженов В.Г., Котов В.Л. Математическое моделирование нестационарных процессов удара и проникания и идентификация свойств мягких грунтовых сред, // Механика деформируемого твердого тела Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4 (4). С. 1377–1379.
27. Баничук Н.В., Иванова С.Ю. Оптимизация. Контактные задачи и высокоскоростное проникание. М.: Физматлит, 2016. - 176 с.
28. Баничук Н.В., Иванова С.Ю. Игровой подход к решению задачи оптимизации формы ударника и структуры слоистой среды при высокоскоростном пробивании. // Проблемы прочности и пластичности. 2016. № 4(78). С. 426-435.
29. Баничук Н.В., Иванова С.Ю., Макеев Е.В. Проникание жестких ударников в слоистые пластины и некоторые задачи глобальной многоцелевой структурной оптимизации. // Проблемы прочности и пластичности. 2012. № 74. С. 124-133.
30. Баничук Н.В., Иванов С.Ю., Макеев Е.В., Турутько А.И. Некоторые аналитические и численные оценки параметров оптимальной структуры защитной плиты. // Проблемы прочности и пластичности. 2013. № 3(75). С. 206-214.
31. Баранов А.В., Конаныхин Ю.П., Пасечник Л.П., Сугак С.Г. Исследование динамического воздействия ударника на многослойные преграды. Университет Дружбы Народов, Черногловка, 1991. - 16 с.
32. Баранцев Р. Г., Васильев Л. А., Иванов Е. В., Козачек В. В., Минайчев А. Д., Михайлов Л. В., Мурзинов Н. В. Аэродинамический расчет в разреженном газе на основе гипотезы локальности. // Аэродинамика разреженных газов: Сб. ст./ЛГУ—Л. 1969. Вып. 4. С. 170-184.
33. Бунимович А.И., Дубинский А.В. Развитие, современное состояние и приложения теории локального взаимодействия (обзор). // Известия РАН, МЖГ. 1996. № 3. С. 3-18.
34. Бунимович А.И., Дубинский А.В. Развитие теории локального взаимодействия. В кн.: Исследования по истории физики и механики. М.: Наука. 1997. С. 198-219.
35. Бунимович А.И. Соотношения между силами, действующими на тела, движущиеся в разреженном газе, в потоке света и в гиперзвуковом ньютоновском потоке. // Изв.АН СССР. МЖГ. 1973. № 4. С. 89-95.
36. Бухгольц Н.Н. (1969) Основной курс теоретической механики. Часть 2. Динамика системы материальных точек. М.: Наука, 1969. - 332 с.
37. Ванцян А.А. Влияние анизотропных свойств среды и электромагнитных полей на процесс проникания твердых инденторов. Диссертация на соискание учёной степени доктора физико-математических наук. Институт Механики Академии Наук Армении. 1997.
38. Ведерников Ю.А., Худяков Ю.С., Омелаев А.И., Дулов В.Г. Баллистика от стрел до ракет. Наука, Новосибирск. 1995.- 236 с.
39. Ведерников Ю.А., Щепановский В.А. Оптимизация реогазодинамических систем. Новосибирск: Наука, 1995.- 236 с.
40. Витман Ф.Ф., Иоффе Б.С. Простой метод нахождения динамической твердости металлов с помощью двустороннего конуса. // Заводская лаборатория. 1948. 14(6). С. 727-732.
41. Витман Ф.Ф., Степанов В.А. Влияние скорости деформирования на сопротивление деформированию металлов при скоростях удара 100-1000 м/с. // Некоторые проблемы прочности твердого тела. АН СССР. 1959. С. 207-221.
42. Галкин В.С., Ерофеев А.И., Толстых А.И. Приближенный метод расчета эродинических характеристик тел в гиперзвуковом разреженном газе. // Труды ЦАГИ. 1977. Вып. 1833. С. 6–10.
43. Герасимов А.В. ред. Теоретические и экспериментальные исследования высокоскоростного взаимодействия тел. Томск: Изд-во Томского Гос. Университета, 2007.- 572 с.
44. Глазырин В.П., Орлов М.Ю. Моделирование процесса пробития слоистых преград. // Вычислительные технологии. 2003. т.8, ч.4. С. 143-151.

45. Глазырин В.П., Орлов М.Ю., Орлов Ю.Н. Особенности пробития слоистых преград удлиненным ударником, // В сб. Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики: Материалы всероссийской конференции. – Томск: Томского Гос. Университета, 2006. С. 251-253.
46. Гольдсмит Р. Удар. М.: Мир, 1965.- 448 с.
47. Гольдштейн Р.В., Демьянов Ю.А., Никитин Л.В., Смирнов Н.Н., Шемякин Е.И. Научное наследие Х.А. Рахматулина в области механики деформируемых твердых тел. // Известия РАН. Механика твердого тела. 2010. Том 45, № 1. С. 5-12,
48. Горельский В.А., Орлов М.Ю., Орлов Ю.Н., Богомолов Г.Н. Исследование процесса пробития слоистых преград удлиненными ударниками. // Известия Кабардино-Балкарского Гос. Университета. 2014. Том 4, № 3, С. 55-59.
49. Григорян В.А., Кобылкин И.Ф., Маринин В.М., Чистяков, Е.Н. Материалы и защитные структуры для локального и индивидуального бронирования. М.: РадиоСофт, 2008. – 407 с.
50. Дубинский А. Некоторые баллистические свойства многослойных преград при высокоскоростном ударе цилиндра. // Вестник Пермского Университета. Математика. Механика. Информатика. 2018. Вып. 3(42). С. 26-30.
51. Загорянский В.Г. Оптимизация характеристик противоположной биметаллической брони по критерию предельной скорости пробития. // Обработка сплошных и слоистых материалов. 2015. 1(42). С. 28-34
52. Загорянский, В.Г. Обоснование применимости биметалла сталь-алюминий по расчетным критериям противоположной бронестойкости. // Вісник Національного технічного університету України Київський політехнічний інститут. Серія: Машинобудування. 2015. № 3(75). С. 37-41.
53. Златин Н.А., Красильщиков А.П., Мишин Г.И., Попов Н.Н. Баллистические установки и их применение в экспериментальных исследованиях. М.: Физматлит, 1974. - 344 с.
54. Зукас Дж. А., Николас Т., Свифт Х. Ф., Грещук Л. Б., Курран Д.Р. Динамика удара. М.: Мир, 1985. - 297 с.
55. Ильюшин А.А. О применении многослойных броней и способы их расчета на пробивание. В кн.: Ильюшина, Е.А., Короткина Н.Р. «Ильюшин А. А. Труды. Т. 1 (1935 – 1945)». М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. С. 285-294.
56. Каниболотский М. А., Уржумцев Ю. С. Оптимальное проектирование слоистых конструкций. Новосибирск: Наука. Сиб. отделене, 1989.— 176 с.
57. Коган М.Н. Динамика разреженного газа (кинетическая теория). М.: Наука, 1967. - 440 с.
58. Коняев А.А. Физическое моделирование высокоскоростного соударения твердых тел и сопутствующих явлений. // Герасимов А.В. (ред.) Теоретические и экспериментальные исследования высокоскоростного взаимодействия тел. Томск: Издательство Томского университета, 2007. Глава 3. С. 94-153.
59. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М.: Наука, 1974. - 832с.
60. Милейко В. П., Саркисян О. А. (1981). Феноменологическая модель пробивания. // Журнал прикладной механики и технической физики. 1981. № 5. С. 140-142.
61. Мирошин Р. Н., Халидов И. А. Теория локального взаимодействия. Санкт-Петербург: Издательство Санкт-Петербургского университета, 1991. – 274 с.
62. Мирошин Р. Н., Халидов И. А. Локальные методы в механике сплошных сред. Санкт-Петербург: Издательство Санкт-Петербургского университета, 2002. – 304 с.
63. Орлов М.Ю. Особенности пробития стальных слоистых преград. // В сб. Материалы VI Всероссийской Научной Конференции «Фундаментальные и Прикладные Проблемы Современной Механики». 30 сентября – 2 октября 2008 г. Томск, 2008. С. 277-278
64. Орлов М.Ю. Влияние дополнительного слоя на процесс пробития и разрушения слоистых преград. // В сб. Материалы Всероссийской Научной Конференции

«Фундаментальные основы баллистического проектирования». (Санкт-Петербург. 28.06-02.07.2010.) СПб. Балтийский Технический университет, 2010. С. 121-123.

65. Остапенко Н.А. Оптимальные формы тел, движущихся в плотных средах. М.: ВладДар: Христианское изд-во, 1997. – 104 с.

66. Остапенко Н.А., Романенко В.И., Якунина Г.Е. Оптимальные формы трехмерных тел, проникающих в плотные среды. // Прикладная механика и техническая физика. 1994. № 4. С. 515-521.

67. Рахматуллин Х.А., Сагомоян А.Я., Алексеев Н.А. Вопросы динамики грунтов. Москва: Изд-во Московского Государственного Университета, 1964. – 239 с.

68. Сагомоян, А.Я. Проникание заостренных осесимметричных тел в грунты. // Доклады АН СССР. 1960. Т.134, № 6. С. 1320-1323.

69. Сагомоян А.Я. Проникание. Проникание твердых тел в сжимаемые сплошные среды. М.: МГУ, 1974. – 298 с.

70. Сагомоян А.Я. Пробивание плиты тонким твердым снарядом. // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1975(5). С. 104-111.

71. Сагомоян А.Я. Динамика пробивания преград. М.: МГУ, 1988. – 219 с.

72. Селиверстов В.С. Оценка и оптимизация стойкости к пробитию многослойных преград. // В сб.: VI Забабахинские научные чтения (ЗНЧ-2001). 24-28 сентября 2001 г., г. Снежинск Челябинской обл. 2001.

73. Степанов Ю.С., Барсуков Г.В., Михеев А.В. Математическое моделирование процессов сверхзвукового удара и проникания тел в металлические преграды. Орел: Изд. дом "Орлик", 2012. - 152 с.

74. Фомин В.М. отв. ред. Высокоскоростное взаимодействие тел Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. – 600 с.

75. Хасанов А. Р., Аптуков В. Н. Решение задачи оптимизации защитных свойств неоднородных плит при динамическом проникании жесткого бойка с помощью методов оптимального управления. // Вестник Пермского Университета. Математика. Механика. Информатика. 2016. Вып. 2(33). С. 106-113.

76. Хасанов А. Р. Применение методов оптимального управления к задаче повышения защитных свойств слоистых систем. // В сб. Вестник Молодых Ученых ПГНИУ. Пермский Государственный Национальный Исследовательский Университет, 2013. Вып. 3. С. 156-163.

77. Хасанов А. Р. Оптимальное торможение жесткого плоского клина при ударе под углом. // В сб. Вестник Молодых Ученых ПГНИУ, Пермский Государственный Национальный Исследовательский Университет. 2014. Вып. 4. С. 323-331.

78. Хасанов А.Р. Оптимальное торможение жесткого конического ударника слоистой плитой при ударе по нормали с учетом вязкостных эффектов. // Вестник Пермского Университета. Математика. Механика. Информатика. 2018. Вып. 2(41). С. 54-60.

79. Хилл Р. Математическая теория пластичности: пер. с англ. М.: Гостехизд., 1956. - 407 с.

80. Цвияк А. Справочник машиностроителя-международника. Израиль. 2005. – 320 с.

81. Чёрный Г.Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматлит, 1959. - 220 с.

82. Шаш Н. Метод создания бронекابين грузовых автомобилей на стадии проектирования с требуемыми параметрами по защите от стрелкового оружия. Диссертация кандидата технических наук. Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э.Баумана, 2018.

83. Abdel-Kader, M., Fouda, A. (2014). Mild steel plates impacted by hard projectiles, *J. of Constructional Steel Research*, **99**: 57–71.

84. Abdelshafy, M.H., Oyadiji S.O. (2007). Penetration behaviour of steel plates. In: *Proc. of ASME Int. Design Engineering Technical Conf. and 6th Int. Conf. on Multibody Systems, Nonlinear Dynamics, and Control* (September 4–7, 2007, Las Vegas, Nevada, USA), paper No. DETC2007-35229, pp. 1131-1139.

85. Abdel-Wahed, M.A., Salem, A.M., Zidan, A.S., Riad, A.M. (2010). Penetration of a small caliber projectile into single and multi-layered targets. In: *Proc. of 4th European Conf. on Computational Mechanics* (May 16-21, 2010, Paris, France).
86. Almohandes, A.A., Abdel-Kader, M.S., Eleiche, A.M. (1996). Experimental investigation of the ballistic resistance of steel-fiberglass reinforced polyester laminated plates. *Composites. Part B*, **27**(5): 447-458.
87. Amde, A.M., Mirmiran, A., Walter, T.A. (1997). Local damage assessment of turbine missile impact on composite and multiple barriers. *Nuclear Engineering and Design*, **178**(1/2): 145–156.
88. Anderson, C.E. Jr. (2017). Analytical models for penetration mechanics: a review. *Int. J. of Impact Engineering*, **108**: 3-26.
89. Aptukov, V.N., Belousov, V.L. (1991). Analysis of the optimal laminated target made up of discrete set of materials. Third Int. Conf. on Inverse Design Concepts and Optimization in Engineering Sciences. Ed. G.S. Dulikravich. (Washington D.C. Oct.23-25, 1991) p.489-494.
90. Aptukov, V.N. Optimal interaction of indenter with inhomogeneous plate. In: Dulikravich, G.S. (ed.). *Proc. of 3rd Int. Conf. on Inverse Design Concepts and Optimization in Engineering Science* (October 23-25, 1991, Washington, DC), pp. 481-488.
91. Awerbuch, J. (1969). Projectile penetration in metals and composite materials. Master Thesis, Israel Institute of Technology, Haifa, Israel (in Hebrew).
92. Awerbuch, J. (1970). A mechanical approach to projectile penetration. *Israel J. of Technology*, **8**(4): 375-383.
93. Awerbuch, J., Bodner, S.R. (1974). Analysis of the mechanics of perforation of projectiles in metallic plates. *Int. J. of Solids and Structures*, **10**(6): 671-684.
94. Babaei, B., Shokrieh, M.M., Daneshjou, K. (2011). The ballistic resistance of multi-layered targets impacted by rigid projectiles. *Materials Science and Engineering A*, **530** (1): 208-217.
95. Balaban, B., Kurtoglu, İ. (2015). An investigation of AA7075-T651 plate perforation using different projectile nose shapes. In: *Proc. of 10th European LS-DYNA Conf.* (15-17 June, 2015, Würzburg, Germany).
96. Banichuk, N.V., Ivanova, S.Yu., Makeev, E.V. (2012). Nonlocal optimization of multi-layered spaced shields. In: *Proceedings of the XL Summer School "Advanced Problems In Mechanics" – Conf. APM 2012* (July 2-8, St. Petersburg, Russia), pp. 35-42.
97. Banichuk, N.V., Ivanova, S.Yu., Ragnedda, F., Serra, M. (2013). Multiobjective approach for optimal design of layered plates against penetration of strikers. *Mechanics Based Design of structures and Machines*, **41**(2): 189-201.
98. Ben-Dor, G., Dubinsky, A., Elperin, T. (1998). On the ballistic resistance of multi-layered targets with air gaps. *Int. J. of Solids and Structures*, **35**(23): 3097-3103.
99. Ben-Dor, G., Dubinsky, A., Elperin, T. (1998). A model of high speed penetration into ductile targets. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, **28**(3): 237-239.
100. Ben-Dor, G., Dubinsky, A., Elperin, T. (1998). Effect of air gaps on ballistic resistance of targets for conical impactors. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, **30**(3): 243-249.
101. Ben-Dor, G., Dubinsky, A., Elperin, T. (1998). Analysis of ballistic properties of layered targets using cavity expansion model. *Int. J. of Fracture*, **90**(4): L63-L67.
102. Ben-Dor, G., Dubinsky, A., Elperin, T. (1998). Optimization of layered shields with a given areal density. *Int. J. of Fracture*, **91**(1): L9-L14.
103. Ben-Dor, G., Dubinsky, A., Elperin, T. (1999). On the order of plates providing the maximum ballistic limit velocity of a layered armor. *Int. J. of Impact Engineering*, **22**(8): 741-755.
104. Ben-Dor, G., Dubinsky, A., Elperin, T. (1999). Effect of air gap and order of plates on ballistic resistance of two layered armor. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, **31**(3): 233-241.
105. Ben-Dor, G., Dubinsky, A., Elperin, T. (2000). The optimum arrangement of the plates in a multilayered shield. *Int. J. of Solids and Structures*, **37**(4): 687-696.

106. Ben-Dor, G., Dubinsky, A., Elperin, T. (2000). Analytical solution for penetration by rigid conical impactors using cavity expansion models. *Mechanics Research Communications*, **27**(2): 185-189.
107. Ben-Dor, G., Dubinsky, A., Elperin, T. (2001). A class of models implying the Lambert-Jonas relation. *Int. J. of Solids and Structures*, **38**(40-41): 7113-7119.
108. Ben-Dor, G., Dubinsky, A., Elperin, T. (2002). On the Lambert-Jonas approximation for ballistic impact. *Mechanics Research Communications*, **29**(2-3): 137-139.
109. Ben-Dor, G., Dubinsky, A., Elperin, T. (2006). *Applied High-Speed Plate Penetration Dynamics*. Springer, Dordrecht.
110. Ben-Dor, G., Dubinsky, A., Elperin, T. (2006). Effect of air gaps on the ballistic resistance of ductile shields perforated by nonconical impactors. *J. of Mechanics of Materials and Structures*, **1**(2): 279-299.
111. Ben-Dor, G., Dubinsky, A., Elperin, T. (2010). Effect of layering on ballistic properties of metallic shields against sharp-nosed rigid projectiles. *Engineering Fracture Mechanics*, **77**(14): 2791–2799.
112. Ben-Dor, G., Dubinsky, A., Elperin, T. (2011). Optimization of multi-layered metallic shield. *Nuclear Engineering and Design*, **241**(6): 2020-2025.
113. Ben-Dor, G., Dubinsky, A., Elperin, T. (2012). Investigation and optimization of protective properties of metal multi-layered shields: A Review. *Int. J. of Protective Structures*, **3**(3): 275 -291.
114. Ben-Dor, G., Dubinsky, A., Elperin, T. (2013). *High-Speed Penetration Dynamics: Engineering Models and Methods*. World Scientific.
115. Ben-Dor, G., Dubinsky, A., Elperin, T. (2013). About effect of layering on ballistic properties of metal shields against sharp-nosed rigid projectiles. *Engineering Fracture Mechanics*, **102**: 358–361.
116. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. (2013). Analytical engineering models of high speed normal impact by hard projectiles on metal shields: Review. *Central European Journal of Engineering*, **3**(3): 349-373.
117. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. (2014). Engineering models of high speed penetration into geological shields. *Central European Journal of Engineering*, **4**(1): 1-19.
118. Ben-Dor, G., Dubinsky, A., Elperin, T. (2015). Analytical engineering models for predicting high speed penetration of hard projectiles into concrete shields: A review. *International Journal of Damage Mechanics*, **24**(1): 76-94.
119. Ben-Dor, G., Dubinsky, A., Elperin, T. (2017). New results on ballistic performance of multi-layered metal shields: review. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, **88**: 1-8.
120. Ben-Dor, G., Dubinsky, A., Elperin, T. (2018). *World Scientific Handbook of Experimental Results on High Speed Penetration into Metals, Concrete and Soils*. World Scientific.
121. Bernard, R.S., Hanagud S.V. (1975). Development of a projectile penetration theory. Rep. S-75-9. . Penetration Theory for shallow to moderate depths (Rep. 1 of Series). U.S. Army Engineer Waterways Experiment Station, Vicksburg, MS.
122. Bishop, R.F., Hill, R., Mott, N.F. (1945). The theory of indentation and hardness tests. *Proc.of the Physical Society*, **57**(321), Part 3: 147-155.
123. Bokhari, D., Teagle, M., Horsfall, I. (2016). Terminal ballistics of 7.62 mm armour piercing projectiles against spaced, oblique RHA plates. *In: Proc. of 29th Int. Symp. on Ballistics* (May 9-13, 2016, Edinburgh, Scotland, UK), pp. 2316-2322.
124. Børvik, T., Langseth, M., Hopperstad, O.S., Malo, K.A. (2002). Perforation of 12mm thick steel plates by 20mm diameter projectiles with flat, hemispherical and conical noses. Part I: Experimental study. *Int. J. of Impact Engineering*, **27**(1): 19–35.
125. Børvik, T., Forrestal, M.J., Hopperstad, O.S., Warren, T.L., Langseth, M. (2009). Perforation of AA5083-H116 aluminum plates with conical-nose steel projectiles – calculations. *Int. J. of Impact Engineering*, **36**(3): 426–437.
126. Børvik, T., Dey, S., Clausen, A.H. (2009). Perforation resistance of five different high-strength steel plates subjected to small-arms projectiles. *Int. J. of Impact Engineering*; **36**(7): 948–964.

127. Børvik, T., Dey, S., Hopperstad, O.S., Langseth, M. (2009). On the main mechanisms in ballistic perforation of steel plates at sub-ordnance impact velocities. In: Hiermaier, A.S. (ed.). *Predictive Modeling of Dynamic Processes. A Tribute to Professor Klaus Thoma*. Springer, pp.189-219.
128. Buchar, J., Voldřich, J., Rolc, S., Lazar, M. (2002). Ballistic performance of the dual hardness armor. In: *Proc. of the 20th Int. Symp. on Ballistics* (23-27 September, 2002, Orlando, FL).
129. Bunimovich, A.I., Dubinsky, A. (1995). *Mathematical Models and Methods of Localized Interaction Theory*. World Scientific.
130. Chakrabarty, J. (2010). *Applied Plasticity*. Springer, New York.
131. Chen, X.W., Li, X.L., Deng, K.W. (2008). Damping function in the penetration/perforation dynamics of rigid projectiles. In: Jones, N. and Brebbia, C.A. (eds.). *Structures Under Shock and Impact X*. WIT Press, Southampton, pp. 263-272.
132. Chen, X.W., Li, X.L., Huang, F.L., Wu, H.J., Chen, Y.Z. (2008). Damping function in the penetration/perforation struck by rigid projectiles. *Int. J. of Impact Engineering*, **35**(11): 1314–1325.
133. Cimpoeru, S.J. (2002). Analytical modelling of the perforation of multi-layer metallic targets by fragment simulating projectiles. In: *Proc. of the 20th Int. Symp. on Ballistics* (September 23-27, 2002, Orlando, FL).
134. Copland, A., Bjerke, T.W., Weeks, D. (2005). Semi-infinite target design effects on terminal ballistics performance - influence of plate spacing on penetrator energy partitioning. Rep. No. ARL-TR-3688, Army Research Laboratory, Aberdeen Proving Ground, MD.
135. Copland, A., Scheffler, D. (2003). Influence of air gaps on long rod penetrators attacking multi-plate target arrays, Rep. No. ARL-TR-2906. U.S. Army Research Laboratory, Aberdeen Proving Ground MD.
136. Corran, R.S.J., Ruiz, C., Shadbolt, P.J. (1983). On the design of containment shield. *Computers and Structures*, **16**(1-4): 563-572.
137. Corran, R.S.J., Shadbolt, P.J., Ruiz, C. (1983). Impact loading of plates-an experimental investigation. *Int. J. of Impact Engineering*, **1**(1): 3-22.
138. Deng, Y., Zhang, W., Cao, Z. (2012). Experimental investigation on the ballistic resistance of monolithic and multi-layered plates against hemispherical-nosed projectiles impact. *Materials and Design*, **41**: 266–281.
139. Deng, Y., Zhang, W., Cao, Z. (2013). Experimental investigation on the ballistic resistance of monolithic and multi-layered plates against ogival-nosed rigid projectiles impact. *Materials and Design*, **44**: 228–239.
140. Deng, Y., Zhang, W., Qing, G., Wei, G., Yang, Y., Hao, P. (2014). The ballistic performance of metal plates subjected to impact by blunt-nosed projectiles of different strength. *Materials and Design*, **54**: 1056–1067.
141. Deng, Y., Zhang, W., Yang, Y., Wei, G. (2014). The ballistic performance of metal plates subjected to impact by projectiles of different strength. *Materials and Design*, **58**: 305-315.
142. Deng, Y., Zhang, W., Yang, Y., Shi, L., Wei, G. (2014). Experimental investigation on the ballistic performance of double-layered plates subjected to impact by projectile of high strength. *Int. J. of Impact Engineering*, **70**: 38-49.
143. Dey, S., Børvik, T. (2007). Ballitic penetration and perforation of layered steel plates: An experimental and numerical investigation. In: *Proc. of the 23rd Int. Symp.on Ballistics* (April 16-20, 2007, Tarragona, Spain). pp. 1365-1372.
144. Dey, S., Børvik, T., Teng, X., Wierzbicki, T., Hopperstad, O.S. (2007). On the ballistic resistance of double-layered steel plates: an experimental and numerical investigation. *Int. J. of Solids and Structures*, **44**(20): 6701–6723.
145. Dey, S., Børvik, T., Hopperstad, O.S. (2011). Computer-aided design of protective structures: Numerical simulations and experimental validation. *Applied Mechanics and Materials*, **82**: 686-691.
146. Dikshit, S.N., Sundararajan, G. (1995). Author's reply to Liaghat and Malekzadeh. *Int. J. of Impact Engineering*, **16**(4): 693-695.

147. Durmuş, A., Güden, M., Gülçimen, B., Ülkü, S., Musa, E. (2011). Experimental investigations on the ballistic impact performances of cold rolled sheet metals. *Materials and Design*, **32**(3): 1356–1366.
148. Elek, P., Jaramaz, S., Mickovic, D. (2005). Modeling of perforation of plates and multi-layered metallic targets. *Int. J. of Solids and Structures*, **42**(3-4): 1209–1224.
149. Erice, B., Gálvez, F., Cendón, D.A., Sánchez-Gálvez, V., Børvik, T. (2011). An experimental and numerical study of ballistic impacts on a turbine casing material at varying temperatures. *J. of Applied Mechanics by ASME*, **78**: 051019-1-11.
150. Flis, L., Sperski, M. (2013). An investigation of the resistance of multi-layered ships steel shields to 12.7 mm projectiles. *Scientific J. of Polish Naval Academy*, **4** (195): 31-49.
151. Flores-Johnson, E.A., Saleh, M., Edwards, L. (2011). Ballistic performance of multi-layered metallic plates impacted by a 7.62-mm ARM2 projectile. *Int. J. of Impact Engineering*, **38**(12): 1022-1032.
152. Forrestal, M.J., Luk, V.K. (1988). Dynamic spherical cavity-expansion in a compressible elastic-plastic solid. *J. of Applied Mechanics*, **55**(2): 275-279.
153. Forrestal, M.J., Romero, L.A. (2007). Comment on "Perforation of aluminum plates with ogive-nose steel rods at normal and oblique impacts" (*Int. J. of Impact Engineering* 1996; **18**: 877-887). *Int. J. of Impact Engineering*, **34**(12): 1962–1964.
154. Forrestal, M.J., Okajima, K., Luk, V.K. (1988). Penetration of 6061-T651 aluminum target with rigid long rods. *J. of Applied Mechanics*, **55**(4): 755-760.
155. Forrestal, M.J., Luk, V.K., Brar, N.S. (1990). Perforation of aluminum armor plates with conical-nose projectiles. *Mechanics of Materials*, **10**(1-2): 97-105.
156. Forrestal, M.J., Brar, N.S., Luk, V.K. (1991). Perforation of strain-hardening targets with rigid spherical-nose rods. *J. of Applied Mechanics*, **58**(1): 7-10.
157. Forrestal, M.J., Luk, V.K., Rosenberg, Z., Brar, N.S. (1992). Penetration of 7075-T651 aluminum targets with ogival-nose rods. *Int. J. of Solids and Structures*, **29**(14-15): 1729-1736.
158. Forrestal, M.J. (1986). Penetration into dry porous rock. *Int. J. of Solids and Structures*, **22**(12): 1485-1500.
159. Frueh, P., Heine, A., Riedel, W. (2017). Assessment of the protective properties of two different UHA steels based on material testing and numerical simulation. *Procedia Engineering*, **197**: 119-129.
160. Giere, A.C. (1964). Some energy and momentum considerations in the perforation of plates. *AIAA J.*, **2**(8): 1471-1472.
161. Godzimirski, J., Janiszewski, J., Rośkiewicz, M., Surma Z. (2015). Ballistic resistance tests of multi-layer protective panels. *Eksploatacja i Niezawodność– Maintenance and Reliability*, **17**(3): 416–421.
162. Gogolewski, R.P., Cunningham, B.J., Riddle, R.O., Lesuer, D. R., Syn, C.K. (1996). On the importance of target material interfaces during low speed impact. In: *Proc. of the 16th Int. Symp. on Ballistics* (September 23-28, 1996, San Francisco, CA), **3**, pp. 751–760.
163. Goodier, J.N. (1965). On the mechanics of indentation and cratering in solid targets of strain-hardening metal by impact of hard and soft spheres. In: *Proc. of 7th Hypervelocity Impact Symp.* (November 17-19, 1964, Tampa, FL), **3**, pp. 215-260.
164. Gupta, N.K., Madhu, V. (1997). An experimental study of normal and oblique impact of hard-core projectile on single and layered plates. *Int. J. of Impact Engineering*, **19**(5-6): 395-414.
165. Gupta, N.K., Iqbal, M.A., Sekhon, G.S. (2007). Effect of projectile nose shape, impact velocity, and target thickness on deformation behavior of aluminum plates. *Int. J. of Solids and Structures*, **44**(10): 3411–3439.
166. Gupta, N.K., Iqbal, M.A., Sekhon, G.S. (2008). Effect of projectile nose shape, impact velocity, and target thickness on the deformation behavior of layered plates. *Int. J. of Impact Engineering*, **35**(1): 37-60.
167. Gupta, P.K., Iqbal, M.A., Mohammad, Z. (2017). Energy dissipation in plastic deformation of thin aluminum targets subjected to projectile impact. *Int. J. of Impact Engineering*, **110**: 85-96.

168. Haque, B.Z.(Gama), Gillespie, J.W. Jr. (2015) A new penetration equation for ballistic limit analysis. *J. of Thermoplastic Composite Materials*, **28**(7): 950–972.
169. Holmen, J.K., Solberg, J.K., Hopperstad, O.S., Børvik, T. (2016) Ballistic perforation of layered and surface-hardened steel plates. *1st Int. Conf. on Impact Loading of Structures and Materials - ICILSM 2016*. (May 22-26, 2016, Politecnico di Torino, Turin, Italy).
170. Holmen, J.K., Solberg, J.K., Hopperstad, O.S., Børvik, T. (2017) Ballistic impact of layered and case-hardened steel plates. *Int. J. of Impact Engineering*, **110**: 4-14.
171. Honda, K., Takamae, G., Watanabe, T. (1930). On the measurement of the resistance of shield plates to penetration by a rifle bullet. *Tohoku Imperial University. 1st Series*, **19**: 703-725.
172. Hopkins, H.G. (1960). Dynamic expansion of spherical cavities in metals. In: Hill, R. and Sneddon, I.N. (eds.). *Progress in Solid Mechanics*, **1**. Pergamon Press, Oxford, pp. 84-164.
173. Hurlich, A. (1950). Spaced armor. Rep. WAL-710/930-1. Watertown Arsenal Laboratory, Watertown, MA.
174. Ignatova, A.V., Sapozhnikov, S.B., Dolganina, N.Yu. (2017). Development of microstructural and voxel based models of deformation and failure of the porous ceramics for assessment of ballistic performance. *Int. J. of Mechanical Sciences*, **131-132**: 672-682.
175. Ipson, T.W., Recht, R.F. (1975). Ballistic-penetration resistance and its measurement. *Experimental Mechanics*, **15**(7): 249–257.
176. Iqbal, M.A., Gupta, N.K. (2008). Energy absorption characteristics of aluminum plates subjected to projectile impact. *Latin American J. of Solids and Structures*, **5**(4): 259–287.
177. Iqbal, M.A., Gupta, N.K. (2011). Ballistic limit of single and layered aluminium plates. *Strai*, **47**: e205-e219.
178. Iqbal, M.A., Chakrabarti, A., Beniwal, S., Gupta, N.K. (2010). 3D numerical simulations of sharp nosed projectile impact on ductile targets. *Int. J. of Impact Engineering*, **37**(2): 185–195.
179. Iqbal, M.A., Gupta, P.K., Deore, V.S., Tak, S.K., Tiwari, G., Gupta, N.K. (2012). Effect of target span and configuration on the ballistic limit. *Int. J. of Impact Engineering*, **42**: 11-24.
180. Iqbal, M.A., Senthil, K., Madhu, V., Gupta, N.K. (2017). Oblique impact on single, layered and spaced mild steel targets by 7.62 AP projectiles. *Int. J. of Impact Engineering*, **110**: 26-38.
181. Isbell, W.M., Anderson, C.E, Jr., Asay, J.R., Bless, S.J., Grady, D.E., Sternberg, J. (1992). Penetration mechanics research in the former Soviet Union. Technical Assessment Rep.. Science Applications Int. Corporation, San Diego, CA. Foreign Applied Sciences Assessment Center.
182. Jankowiak, T., Rusinek, A., Wood, P. (2013). A numerical analysis of the dynamic behavior of sheet steel perforated by a conical projectile under ballistic conditions. *Finite Elements in Analysis and Design*, **65**: 39–49.
183. Jena, P.K., Ramanjeneyulu, K., Kumar, K.S., Bhat T.B. (2009). Ballistic studies on layered structures. *Materials and Design*, **30**: 1922–1929.
184. Kasano, H. (1997). Perforation characteristics of aluminum plates subjected to high velocity impact. *Proc. of 5th Int. SAMPE Symp.* (October 28-31, 1997, Tokyo, Japan), pp. 1013-1018.
185. Kasano, H., Abe, K. (1997). Perforation characteristics prediction of multi-layered composite plates subjected to high velocity impact. In: *Proc. of 11th Int. Conf. on Composite Materials* (July 14-18, 1997, Gold Coast, Australia), **2**, pp. 522-531.
186. Kudryavtsev, O.A., Sapozhnikov, S.B. (2016). Numerical simulations of ceramic target subjected to ballistic impact using combined DEM/FEM approach. *Int. J. of Mechanical Sciences*, **114**: 60-70.
187. Kumar, A.S., Kishore, N.P., Narasamma, G.V., Rao, H.R., Vijaya, K. Experimental investigations on composite material casualty of plates under multi-fragment impact load conditions. *Int. J. of Engineering and Innovative Technology*, **3**(3): 317-323.

188. Kumar, G., Ramana, G.V. (2013). FE study on effect of target span and configuration on the ballistic limit. *Int. J. of Research in Engineering and Advanced Technology*, **1**(4).
189. Lambert, J.P. (1978). A residual velocity predictive model for long rod penetrators. Rep. ARBRL-MR-02828. Army Ballistic Research Laboratory, Aberdeen Proving Ground, MD.
190. Lambert, J.P., Jonas, G.H. (1976). Towards standardization of in terminal ballistic testing: velocity representation. Rep. BRL-R-1852. Army Ballistic Research Laboratory, Aberdeen Proving Ground, MD.
191. Li, Q.M., Weng, H.J., Chen, X.W. (2004). A modified model for the penetration into moderately thick plates by a rigid, sharp-nosed projectile. *Int. J. of Impact Engineering*, **30**(2): 193-204.
192. Liaghat, G.H., Malekzadeh, A. (1999). A modification to the mathematical model of perforation by Dikshit and Sundararajan. *Int. J. of Impact Engineering*, **22**(5): 543–550.
193. Liaghat, G. H., Naeini, H.M., Felli, S. (2005). The mechanics of normal and oblique penetration of conical projectiles into multi layer metallic targets. *Iranian J. of Science & Technology, Transaction B, Engineering*, **29**(B2): 241-251.
194. Liaghat, G.H. (1992). Comparison of perforation theories and some experimental results. *J. of Engineering (Iran)* **5**(3-4): 119-127.
195. Liang, C.C., Yang, M.-F., Wu, P.W., Teng, T.L. (2005). Resistant performance of perforation of multi-layered targets using an estimation procedure with marine application, *Ocean Engineering*, **32**(3-4): 441–468.
196. Liang, C.-C., Teng, T.-L., Wu, P.-W. (2005). Resistant performance of perforation of layered targets using an estimation procedure with marine application. In: *Computational Ballistics II* (ed. by A.A. Motta, C. A. Brebbia, V. Sanchez-Galvez), WIT Press, Southampton, United Kingdom, pp. 193-203.
197. Luk, V.K., Forrestal, M.J., Amos, D.E. (1991). Dynamic spherical cavity expansion of strain-hardening materials. *J. of Applied Mechanics*, **58**(1): 1-6.
198. Madhu, V., Bhat, T.B., Gupta, N.K. (2003). Normal and oblique impacts of hard projectiles on single and layered plates – an experimental study. *Defence Science J.*, **53**(2): 147-156.
199. Marom, I., Bodner, S.R. (1979). Projectile perforation of multi-layered beams. *Int. J. of Mechanical Science*, **21**(8): 489-504.
200. Masri, R., Durban, D. (2005). Dynamic spherical cavity expansion in an elastoplastic compressible mises solid. *J. of Applied Mechanics*, **72**(6): 887-898.
201. Masri, R., Durban, D. (2006). Dynamic cylindrical cavity expansion in an incompressible elastoplastic medium. *Acta Mechanica*, **181**(1-2): 105-123.
202. Masri, R., Durban, D. (2007). Cylindrical cavity expansion in compressible Mises and Tresca solids. *European J. of Mechanics. A/Solids*, **26**(4): 712-727.
203. Masri, R., Cohen, T., Durban, D. (2010). Enlargement of a circular hole in a thin plastic sheet: Taylor–Bethe controversy in retrospect. *Quarterly J. of Mechanics and Applied Mathematics*, **63**(4): 589-616.
204. Masri, R. (2014). The effect of adiabatic thermal softening on specific cavitation energy and ductile plate perforation. *Int. J. of Impact Engineering*, **68**: 15-27.
205. Masri, R. (2015). Ballistically equivalent aluminium targets and the effect of hole slenderness ratio on ductile plate perforation. *Int. J. of Impact Engineering*, **80**: 45-55.
206. Mileiko, S.T., Sarkisyan, O.A., Kondakov, S.F. (1994). Ballistic limits of Al-6% Mg alloy laminated by diffusion bonding. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, **21**(1): 9-16.
207. Mohagheghian, I., McShane, G. J., Stronge, W. J. (2015). Impact perforation of monolithic polyethylene plates: Projectile nose shape dependence. *Int. J. of Impact Engineering*, **80**: 162-176.
208. Mohammad, Z., Gupta, P.K., Iqbal, M.A., Baqi, A. (2017). Energy absorption in metallic targets subjected to oblique impact. *Procedia Engineering*, **173**: 145-152.

209. Mullin, S.A., Riegel, J.P., Tenenbaum, D.A., Erdley, D.W. (1991). Dynamic plasticity modeling of conical and blunt nosed projectiles and dual layer armor, *TACOM Combat Vehicle Survivability Symp.* (April 15-17, 1991 Gaithersburg, MD).
210. Nennstiel, R. (1999). Prediction of the remaining velocity of some handgun bullets perforating thin metal sheets. *Forensic Science Int.*, **102**: 121–132.
211. Nia, A.A., Hoseini, G.R. (2011). Experimental study of perforation of multi-layered targets by hemispherical-nosed projectiles. *Materials and Design*, **32**(2): 1057-1065.
212. Nishiwaki, J. (1951). Resistance to the penetration of a bullet through an aluminium plate. *J. of Physics Society of Japan*, **6**(5): 374-378.
213. Nixdorff, K. (1983). Some remarks on the penetration theory of J. Awerbuch and S.R. Bodner. *Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering*, **7**(3): 148-153.
214. Nixdorff, K. (1984). Application of the penetration theory of J. Awerbuch and S. R. Bodner on multilayered targets. *J. of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, **64**(4): T147-T149.
215. Nixdorff, K. (1984). Some applications of the impact theory of J. Awerbuch and S. R. Bodner. *Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering*, **8**(1): 16-20.
216. Nixdorff, K. (1987). Discussion of two theories on the penetration of multilayer metallic targets. *Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering*, **11**(3): 161-178.
217. Nixdorff, K. (1987). On the efficiency of different head shapes to perforate thin targets. *Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering*, **11**(2): 109-112.
218. Nurick, G.N., Walters, C.E. (1990). The ballistic penetration of multiple thin plates separated by an air gap. In: *Proc. of the SEM Spring Conf. on Experimental Mechanics* (June 3-6, 1990, Albuquerque, NM), pp. 631-637.
219. Palta, E., Gutowski, M., Fang, H. (2018). A numerical study of steel and hybrid armor plates under ballistic impacts. *Int. J. of Solids and Structures*, **136-137**: 279-294.
220. Park, M., Yoo, J., Chung, D.-T. (2005). An optimization of a multi-layered plate under ballistic impact. *Int. J. of Solids and Structures*, **42**(1): 123-137.
221. Partom, Y., Anderson, C.E. Jr., Yaziv, D. (2001). Penetration of AP projectiles into spaced ceramic targets. In: *Proc. of the 19th Int. Symp. on Ballistics* (May, 7-11, 2001, Interlaken, Switzerland), pp. 1175-1181.
222. Radin, J., Goldsmith, W. (1988). Normal projectile penetration and perforation of layered targets. *Int. J. of Impact Engineering*, **7**(2): 229-259.
223. Rahman, N.A., Abdullah, S., Zamri, W.F.H., Abdullah, M.F., Omar, M.Z., Sajuri, Z. (2016). Ballistic limit of high-strength steel and Al7075-T6 multi-layered plates under 7.62-mm armour piercing projectile impact. *Latin American J. of Solids and Structures*, **13**: 1658-1676.
224. Ramakrishna, B., Bhanu Prakash, T.V.K. (2014). Numerical studies on perforation of multi-layered targets by hemispherical-nosed projectiles. *IOSR J. of Mechanical and Civil Engineering*, **11**(4), Ver. VI (July-August 2014): 80-94.
225. Recht, R.F., Ipson, T.W. (1963). Ballistic perforation dynamics. *J. of Applied Mechanics*, **30**(3): 384-390.
226. Riedel, W., Nöldgen, M., Straßburger, E., Thoma, K., Fehling, F. (2010). Local damage to ultra high performance concrete structures caused by an impact of aircraft engine missiles. *Nuclear Engineering and Design*, **240**(10): 2633-2642.
227. Rosenberg, Z., Dekel, E. (2008). A numerical study of the cavity expansion process and its application to long-rod penetration mechanics. *Int. J. of Impact Engineering*, **35**(3): 147-154.
228. Rosenberg, Z., Dekel, E. (2010). Revisiting the perforation of ductile plates by sharp-nosed rigid projectiles. *Int. J. of Solids and Structures*, **47**(22-23): 3022-3033.
229. Rosenberg, Z., Dekel, E. (2012). *Terminal ballistics*, Springer.
230. Satapathy, S. (1997). Application of cavity expansion analysis to penetration problems. Rep. IAT.R-0136. The University of Texas at Austin, Institute for Advanced Technology, Austin, TX.

231. Senthil, K., Iqbal, M.A. (2013). Effect of projectile diameter on ballistic resistance and failure mechanism of single and layered aluminum plates, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, **67–68**: 53–64.
232. Senthil, K., Tiwari, G., Iqbal, M.A., Gupta N.K. (2013). Impact response of single and layered thin plates. In: *Proc. of the Indian National Science Academy, Special Issue – Part A*, **79**(4): 705-716.
233. Senthil, K., Iqbal, M.A., Gupta, N.K. (2014). Thin metallic plates subjected to projectile impact. In: *Programme & Abstract Book of the 4th Int. Conf. on Impact Loading of Lightweight Structures - ICILLS 2014* (January 12-16, 2014, Cape Town, South Africa), pp.130-134.
234. Senthil, K., Iqbal, M.A., Gupta, N.K. (2017). Ballistic resistance of mild steel plates of various thicknesses against 7.62 AP projectiles. *Int. J. of Protective Structures*, **8**(2): 177-198.
235. Shash, N., Zuzov, V.N. (2018) Protection performance of the monolayer and Multi-layered steel plates against 7.62-mm APM2 projectile in armored vehicles. *ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences*, **13**(6): 2051-2057.
236. Sinitsin, A., Ivanova, S., Makeev, E., Banichuk, N. (2016). Some problems of multipurpose optimization for deformed bodies and structures. In: Neittaanmäki P., Repin, S., Tuovinen, T. (eds.). *Mathematical Modeling and Optimization of Complex Structures* (pp. 313-328). Springer.
237. Sobeski, R., Urgessa, G. (2015). Review of quasi-analytical and cavity expansion methods for projectiles penetration of concrete targets. *Int. J. of Protective Structures*, **6**(1): 43–64.
238. Teland, J.A. (1999). A review of analytical penetration mechanics. Rep. FFI/RAPPORT-99/01264. Norwegian Defence Research Establishment (FFI), Kjeller, Norway.
239. Teng, X., Dey, S., Børvik, T., Wierzbicki, T. (2007). Protection performance of double-layered metal shield against projectile impact. *J. of Mechanics of Materials and Structures*, **2**(7): 1309–1331.
240. Teng, X., Wierzbicki, T., Huang, M. (2008). Ballistic resistance of double-layered armor plates. *Int. J. of Impact Engineering*, **35**(8): 870–884.
241. Teng, T.-L., Shih, T.-M., Lu C.-C. (2008). Effect of design parameters on the anti-penetration properties of space armor. *Structural Engineering and Mechanics*, **28**(6): 715-725.
242. The formation and enlargement of a circular hole in a thin plastic sheet. *Quarterly J. of Mechanics and Applied Mathematics*, **1**(1): 103-124.
243. Tiwari, G., Iqbal, M.A., Gupta P.K. (2014). Impact response of single and layered thin plates-review. *Int. J. of Latest Technology in Engineering, Management and Applied Science*, **3**(2): 8-21.
244. Tiwari, G., Iqbal, M.A., Gupta, P.K. (2018). Energy absorption characteristics of thin aluminium plate against hemispherical nosed projectile impact. DOI: 10.1016/j.tws.2017.04.014. *Thin-Walled Structures* (in press).
245. Vasko, T.J. (2016). A comparison of monolithic and layered-plate configurations for containment. In: *Proc. of 14th Int. LS-DYNA Conf.* (June 12-14, 2016, Detroit, MI).
246. Vershinin, V.V. (2015). Validation of metal plasticity and fracture models through numerical simulation of high velocity perforation. *Int. J. of Solids and Structures*, **67–68**: 127–138.
247. Wang, J., Zhou, N. (2013). Damage mechanism and anti-penetration performance of explosively welded plates impacted by projectiles with different shapes. *Materials and Design*, **49**: 966–973.
248. Warren, T.L. (1999). The effect of strain rate on the dynamic expansion of cylindrical cavities. *J. of Applied Mechanics*, **66**(3): 818-821.
249. Warren, T.L., Forrestal, M.J. (1998). Effect of strain hardening and strain rate sensitivity on penetration of aluminum targets with spherical-nosed rods. *Int. J. of Solids and Structures*, **35**(28-29): 3737-3753.

250. Weidemaier, P., Senf, H., Rothenhäusler, H., Filbey, G.L., Gooch, W.A. (1993). On the ballistic resistance of laminated steel targets: experiments and numerical calculations. In: *Proc. of the 14th Int. Symp. On Ballistics* (September 26-29, 1993, Quebec, Canada), pp. 681-690.
251. Weiss, A., Stan, G.B.-M. (2016). Behavior of multi-layered metal plates under ballistic impact. In: *Proc. of 29th Int. Symp. on Ballistics* (May 9-13, 2016, Edinburgh, Scotland, UK), pp.1925-1935.
252. Woodward, R.L. (1978). The penetration of metal targets by conical projectiles. *Int. J. of Mechanical Science*, **20**(6): 349-359.
253. Woodward, R.L. (1978). The penetration of metal targets which fail by adiabatic shear plugging. *Int. J. of Mechanical Science*, **20**(9): 599-607.
254. Woodward, R.L., Cimpoeu, S.J. (1998). A study of the perforation of aluminium laminate targets. *Int. J. of Impact Engineering*, **21**(3): 117-131.
255. Xiao, Y., Dong, H., Zhou, J., Wang, J. (2017). Studying normal perforation of monolithic and layered steel targets by conical projectiles with SPH simulation and analytical method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **75**: 12–20.
256. Xiao, Y.K., Wu, H., Fang, Q., Kong, X.Z. (2017). A rigid projectile perforation model for metallic targets with the free-surface and fracture effects. *Int. J. of Protective Structures*, **8**(1): 109–124.
257. Yaghoubi, A.S., Liaw, B. (2012). Thickness influence on ballistic impact behaviors of GLARE 5 fiber-metal laminated beams: Experimental and numerical studies. *Composite Structures*, **94**(8): 2585–2598.
258. Yankelevsky, D.Z., Adin, M.A. (1980). A simplified analytical method for soil penetration analysis. *Int. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, **4**(3): 233-254.
259. Yarin, A.L., Rubin, M.B., Roisman, I.V. (1995). Penetration of a rigid projectile into an elastic-plastic target of finite thickness. *Int. J. of Impact Engineering*, **16**(5/6): 801–831.
260. Yossifon, G., Yarin, A.L., Rubin, M.B. (2002). Penetration of a rigid projectile into a multi-layered target: theory and numerical computations. *Int. J. of Engineering Science*, **40**(12): 1381-1401.
261. Yu, H.S. (2000). *Cavity Expansion Methods in Geomechanics*. Kluwer, Dordrecht.
262. Zaid, A.I.O., El-Kalai, A., Travis, F.W. (1973). An examination of the perforation of mild steel plate by a flat-ended cylindrical projectile. *Int. J. of Mechanical Science*, **15**(2): 129-143.
263. Zaid, A.I.O., Travis, F.W. (1974). A comparison of single and multi-plate shields subjected to impact by a high speed projectile. In: Harding, J., ed., *Proc. of the Conf. of Mechanical Properties at High Rates of Strain*. Institute of Physics (UK) Conf. Series, No. 21, pp. 417–428.
264. Zatorski, Z. (2006). Design of ballistic multi-layered steel shields. *Marine Technology Transactions. Technika Morska*, **17**: 189-199.
265. Zatorski, Z. (2007). Modelling and experimental verifications under firing of energy density absorbed through constructional shields. *The Archive of Mechanical Engineering*, **54**(1): 17-25.
266. Zatorski, Z. (2007). Diagnostics of ballistic resistance multi-layered shields. *The Archive of Mechanical Engineering*, **54**(3): 205-218.
267. Zatorski, Z. (2013). Experimental verification of numerical simulation of projectile impact on ballistic shields. *Archive of Mechanical Engineering*, **60**(4): 545-555.
268. Zhang, W., Deng, Y., Cao, Z., Wei, G. (2012). Experimental investigation on the ballistic performance of monolithic and layered metal plates subjected to impact by blunt projectiles. *Int. J. of Impact Engineering*, **49**: 115-129.
269. Zhang, W., Deng, Y.-F., Cao, Z.-S., Wei, G., Zhang, B.-X. (2011). Effect of air gap on penetration of double-layered A3 steel shields against hemispherical-nosed projectiles. *Acta Armamentarii*, **32**(SUPPL. 2): 325-329 (in Chinese).
270. Zhou, D.W., Stronge, W.J. (2008). Ballistic limit for oblique impact of thin sandwich panels and spaced plates. *Int. J. of Impact Engineering*, **35**(11): 1339–1354.

271. Zhou, N., Wang, J., Yang, R. (2013). Study on the anti-penetration performance of two-layer explosively welded plates impacted by a spherical projectile. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*, **49**(3): 374–381.
272. Zukas, J.A. (1996). Effect of lamination and spacing on finite thickness plate perforation. In: Jones, N., Brebbia, C.A., Watson, J.A., eds. *Structures Under Shock and Impact IV*. WIT Press, Southampton, pp. 103-115.
273. Zukas, J.A., Scheffler, D.R. (2001). Impact effects in multilayered plates. *Int. J. of Solids and Structures*. **38**(19): 3321-3328.

Часть 2

МЛВ для многослойных преград и их приложение для анализа преград со слоями в контакте и с малыми воздушными зазорами

В терминологии, касающейся моделирования многослойных преград, имеет место парадокс. В большинстве работ, посвященных исследованию баллистических свойств преград со слоями в контакте на основе инженерных моделей по умолчанию предполагается, что слои пробиваются последовательно, а реально это имеет место лишь в случае пробивания разнесенных преград с большими (большими, чем длина ударника) воздушными зазорами между пластинами. Чтобы избежать путаницы, в качестве ключевой характеристики модели мы будем обращать внимание на то, рассматривается или нет взаимодействие ударника с несколькими слоями одновременно. Таким образом, когда речь идет о преградах со слоями в контакте или со слоями с "малыми зазорами", то предполагается, что взаимодействие ударника с несколькими слоями одновременно учитывается в модели, а если рассматриваются преграды с "большими зазорами", то предполагается, что слои пробиваются последовательно. Необходимо подчеркнуть, что сейчас обсуждается терминология при описании моделей, а не корректность тех или иных принимаемых допущений.

Часть 2 включает в себя Главы 5 и 6.

В Главе 5 представлена общая Модель Локального Взаимодействия (МЛВ) для многослойных преград и наиболее важный ее частный случай – двучленная модель.

Глава 6 посвящена анализу влияния воздушных зазоров между пластинами на ее защитные функции. Особенностью подхода, реализованного в этой главе, является отсутствие требования конкретизации МЛВ, что делает результаты более обоснованными. Исследование проведено применительно к коническим ударникам и преградам со слоями из одного и того же материала.

Глава 5

Общая и двучленная МЛВ

Обозначения

$a_i^{(j)}$	параметры, определяющие модель;
b	сумма толщин плит в слоистой преграде;
$b^{(i)}$	толщина i -го слоя (номера порядковых слоев приведены в направлении проникания ударника) слоистой преграды;
D	сила сопротивления, действующая на ударник;
h	текущая глубина проникания, Рис. 5.1.1;
k	тангенс полуугла раствора ударника конической формы;
k_1, k_2	параметры, формула (5.1.14);
L	длина носовой части ударника;
N	количество слоев;
u	см. уравнение (1.1.3);
v	текущая (мгновенная) скорость ударника;
x	координата, связанная с ударником, Рис. 5.1.1;
ϑ	полуугол при вершине конического ударника;
θ, Θ	функции, определяющие поверхность взаимодействия ударника и преграды, Рис. 1.3.1, 1.3.2.-1.3.6, уравнения (1.3.2) и (1.3.4);
ξ	координата, Рис.5.1.1-5.1.2;
ρ	координата, связанная с ударником, Рис. 5.1.1;
ϕ	координата, связанная с ударником, Рис. 5.1.1;
Φ	функция, определяющая форму ударника, Рис. 1.3.1;
Ω_n, Ω_r	функции, определяющие МЛВ, формула (1.1.1);
Ω_0	функция, уравнение (1.1.6);
СП	многослойная (слоистая) преграда.

5.1 Общая МЛВ

МЛВ можно обобщить на случай СП, предположив, что функции Ω_n и Ω_r в выражении (1.1.1) также зависят от местоположения точки контакта ударника и преграды в системе координат, связанной с преградой [3-4]. Эта зависимость может быть описана через зависимость параметров a_i от координаты ξ (Рис.5.1.1). Предполагается, что проникание осуществляется по нормали к поверхности преграды конечной толщины, ударник имеет заостренную форму и не деформируется, а механические свойства преграды изменяются только по направлению движения ударника.

Таким образом, предполагается, что

$$\bar{a} = \bar{a}(\xi), \quad (5.1.1)$$

где \bar{a} является вектором с компонентами $a_0(\xi), a_1(\xi), \dots$, и

$$\Omega_n = \Omega_n(\bar{a}(\xi), u, v), \quad \Omega_\tau = \Omega_\tau(\bar{a}(\xi), u, v), \quad (5.1.2)$$

причем без ограничения общности можно считать, что

$$\Omega_n(0, u, v) = \Omega_\tau(0, u, v) = 0. \quad (5.1.3)$$

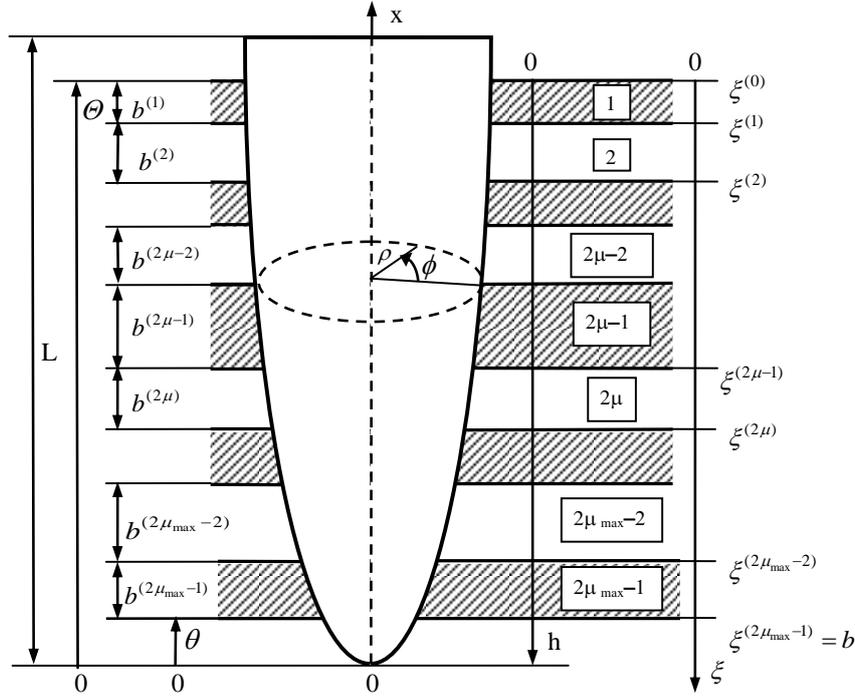


Рис. 5.1.1. Обозначения, $\rho = \Phi(x)$.

Для СП, состоящей из N не взаимодействующих между собой пластин с толщинами $b^{(1)}, b^{(2)}, \dots, b^{(N)}$ (Рис.5.1.1 и 5.1.2), $\bar{a}(\xi) = (a_0(\xi), a_1(\xi), \dots)$, где $a_i(\xi)$ являются кусочно-постоянными (ступенчатыми) функциями:

$$a_i(\xi) = \begin{cases} a_i^{(1)} & \text{если } \xi^{(0)} \leq \xi < \xi^{(1)} \\ \dots & \dots \\ a_i^{(j)} & \text{если } \xi^{(j-1)} \leq \xi < \xi^{(j)} \\ \dots & \dots \\ a_i^{(N)} & \text{если } \xi^{(N-1)} \leq \xi \leq \xi^{(N)} \end{cases}, \quad (5.1.4)$$

где $\xi^{(j)}$ ($j=1, 2, \dots, N$) – суммарная толщина первых j слоев (в направлении оси ξ),

$$\xi^{(j)} = \sum_{\kappa=1}^j b^{(\kappa)}, \quad \xi^{(0)} = 0, \quad (5.1.5)$$

верхний индекс в скобках обозначает номер пластины в СП, в то время как нижний индекс указывает на номер параметра в наборе параметров, определяющих свойства этой пластины. Если пластина с номером j является воздушным зазором, то

$$a_0^{(j)} = a_1^{(j)} = \dots = 0 \quad (5.1.6)$$

и имеет место уравнение (5.1.3).

Из определения координат x, h и ξ вытекает следующее соотношение:

$$\xi = h - x, \quad (5.1.7)$$

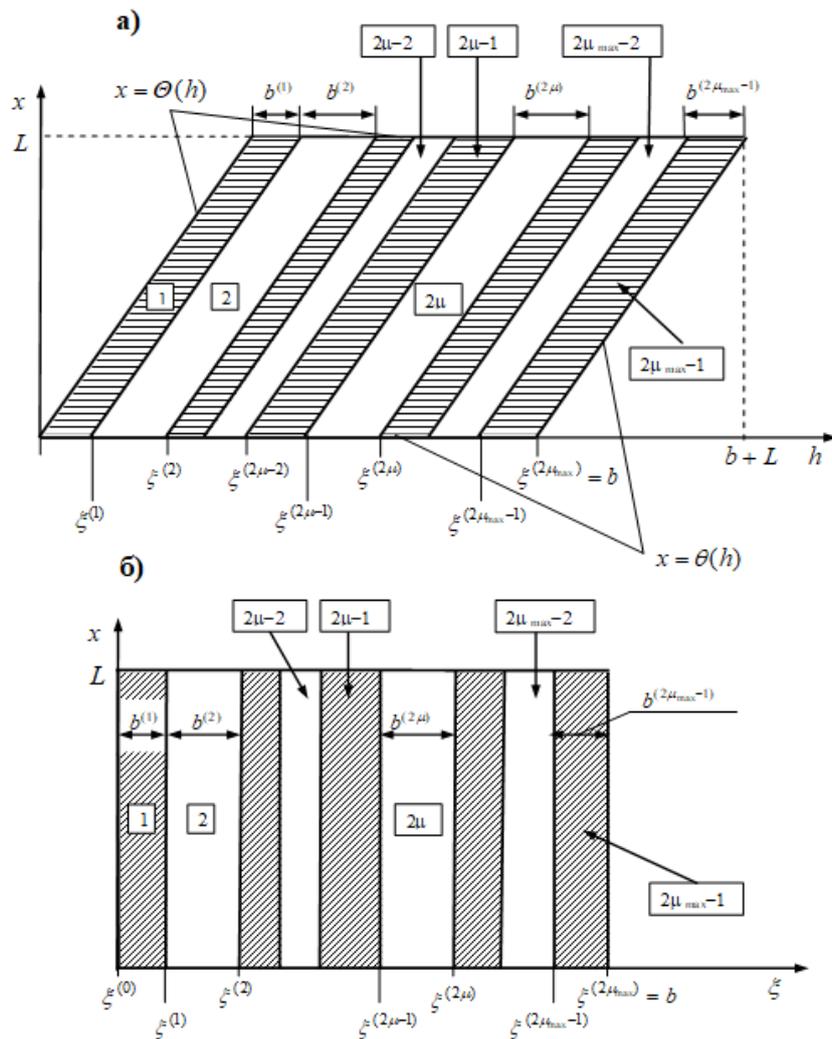


Рис. 5.1.2. Модель многослойной преграды.

Аналог уравнения (1.3.5) можно записать в виде:

$$D(h, v) = \int_{\theta(h)}^{\Theta(h)} dx \int_0^{2\pi} \Omega_0(\bar{a}(h-x), u(x, \phi), v) u_0(x, \phi) d\phi \quad (5.1.8)$$

где для Ω_0 справедлива формула, аналогичная формуле (1.1.6):

$$\Omega_0(\bar{a}(\xi), u, v) = u\Omega_n(\bar{a}(\xi), u, v) + \sqrt{1-u^2}\Omega_\tau(\bar{a}(\xi), u, v), \quad (5.1.9)$$

а $u(x, \phi)$, $u_0(x, \phi)$, $\theta(h)$, $\Theta(h)$ определяются соотношениями (1.3.6), (1.3.7), (1.3.4), (1.3.2), соответственно.

Если ударник является телом вращения, то

$$\Phi = \Phi(x), \quad u = u(x) = \frac{\Phi_x}{\sqrt{\Phi_x^2 + 1}}, \quad u_0 = u_0(x) = \Phi\sqrt{\Phi_x^2 + 1}, \quad (5.1.10)$$

и

$$D(h, v) = 2\pi \int_{\theta(h)}^{\Theta(h)} \Omega_0(\bar{a}(h-x), u(x), v) u_0(x) dx \quad (5.1.11)$$

Для ударника с носовой частью в виде прямого кругового конуса:

$$\Phi = kx, \quad u = \frac{k}{\sqrt{k^2 + 1}}, \quad u_0 = (k\sqrt{k^2 + 1})x, \quad (5.1.12)$$

и

$$D(h, v) = k_1 \int_{\theta(h)}^{\Theta(h)} \Omega_0(\bar{a}(h-x), k_2, v) x dx \quad (5.1.13)$$

где

$$k_1 = 2\pi k \sqrt{k^2 + 1} = \frac{2\pi \sin \mathcal{G}}{\cos^2 \mathcal{G}}, \quad k_2 = \frac{k}{\sqrt{k^2 + 1}} = \sin \mathcal{G} \quad (5.1.14)$$

5.2 Двучленная МЛВ

Рассмотрим двучленную модель:

$$\Omega_n(\bar{a}(\xi), u, v) = a_2(\xi)u^2v^2 + a_0(\xi), \quad \Omega_\tau = 0. \quad (5.2.1)$$

Для ударника, имеющего форму тела вращения, формулы (5.1.10) и (5.1.11) приводят к следующему соотношению для силы сопротивления:

$$D = \frac{m}{2} [f_2(h)v^2 + f_0(h)], \quad (5.2.2)$$

где

$$f_2(h) = \frac{4\pi}{m} \int_{\theta(h)}^{\Theta(h)} \frac{a_2(h-x)\Phi\Phi'^3}{\Phi'^2 + 1} dx, \quad (5.2.3)$$

$$f_0(h) = \frac{4\pi}{m} \int_{\theta(h)}^{\Theta(h)} a_0(h-x)\Phi\Phi' dx$$

Уравнение движения ударника $m\ddot{h} = -D(h, \dot{h})$ с учетом соотношения $\ddot{h} = v'(h)v(h) = 0.5dv^2/dh$ приобретает вид обыкновенного линейного дифференциального уравнения относительно v^2 :

$$dv^2/dh + f_2(h)v^2 + f_0(h) = 0, \quad (5.2.4)$$

Решение уравнения (5.2.4) с начальным условием $v(0) = v_{imp}$, которое соответствует началу движения снаряда со скоростью удара v_{imp} , можно записать в виде:

$$v^2(h) = \frac{1}{q(h)} [v_{imp}^2 - g(h)], \quad (5.2.5)$$

где

$$q(h) = \exp\left(\int_0^h f_2(\eta)d\eta\right), \quad g(h) = \int_0^h f_0(H)q(H)dH, \quad (5.2.6)$$

Выражение (5.2.5) приводит к формулам для остаточной скорости, $v_{res} = v(b+L)$ и БП v_{bl} :

$$v_{res}^2 = \frac{1}{q(b+L)} [v_{imp}^2 - g(b+L)], \quad v_{bl}^2 = g(b+L), \quad (5.2.7)$$

Иногда удобно применять версию двучленной модели, когда линейные размеры приведены к безразмерному виду с использованием единого характерного размера L . В этом случае формулы (5.2.3), (5.2.5)-(5.2.7) преобразуются к виду:

$$\bar{f}_2(\bar{h}) = \alpha \int_{\bar{\theta}(\bar{h})}^{\bar{\Theta}(\bar{h})} \frac{a_2(\bar{h} - \bar{x})\bar{\Phi}\bar{\Phi}'^3}{\bar{\Phi}'^2 + 1} d\bar{x}, \quad (5.2.8)$$

$$\bar{f}_0(\bar{h}) = \alpha \int_{\bar{\theta}(\bar{h})}^{\bar{\Theta}(\bar{h})} a_0(\bar{h} - \bar{x})\bar{\Phi}\bar{\Phi}' d\bar{x}$$

$$v^2(\bar{h}) = \frac{1}{\bar{q}(\bar{h})} [v_{imp}^2 - \bar{g}(\bar{h})], \quad (5.2.9)$$

$$\bar{q}(\bar{h}) = \exp\left(\alpha \int_0^{\bar{h}} \bar{f}_2(\eta)d\eta\right), \quad \bar{g}(\bar{h}) = \alpha \int_0^{\bar{h}} \bar{f}_0(H)\bar{q}(H)dH, \quad (5.2.10)$$

$$v_{res}^2 = \frac{1}{\bar{q}(\bar{b}+1)} [v_{imp}^2 - \bar{g}(\bar{b}+1)], \quad v_{bl}^2 = \bar{g}(\bar{b}+1), \quad (5.2.11)$$

где

$$\bar{\theta}(\bar{h}) = \begin{cases} 0 & \text{если } 0 \leq \bar{h} \leq \bar{b} \\ \bar{h} - \bar{b} & \text{если } \bar{b} \leq \bar{h} \leq \bar{b} + 1 \end{cases}, \quad \bar{\Theta}(\bar{h}) = \begin{cases} \bar{h} & \text{если } 0 \leq \bar{h} \leq 1 \\ 1 & \text{если } \bar{h} \geq 1 \end{cases}, \quad (5.2.12)$$

$$a_i(\bar{\xi}) = \begin{cases} a_i^{(1)} & \text{если } \bar{\xi}^{(0)} \leq \bar{\xi} < \bar{\xi}^{(1)} \\ \dots \\ a_i^{(j)} & \text{если } \bar{\xi}^{(j-1)} \leq \bar{\xi} < \bar{\xi}^{(j)} \\ \dots \\ a_i^{(N)} & \text{если } \bar{\xi}^{(N-1)} \leq \bar{\xi} \leq \bar{\xi}^{(N)} \end{cases}, \quad (5.2.13)$$

$$\alpha = \frac{4\pi L^3}{m}, \bar{x} = \frac{x}{L}, \bar{\Phi} = \frac{\Phi}{L}, \bar{\Phi}' = \frac{d\bar{\Phi}}{d\bar{x}}, \bar{h} = \frac{h}{L}, \bar{b} = \frac{b}{L}. \quad (5.2.14)$$

5.3 Об одном свойстве общей МЛВ

Докажем тождество, которое далее используется при обосновании свойств многослойных преград. Пусть $\Xi(x)$ - произвольная функция, $a_i(\xi)$ - как и ранее, ступенчатая функция, описывающая изменение параметра многослойной преграды. Тогда имеет место тождество:

$$\int_{\theta(h)}^{\Theta(h)} \Xi(x) a_i(h-x) dx = \sum_{j=1}^N a_i^{(j)} \int_{x_*(h-\xi^{(j)})}^{x_*(h-\xi^{(j-1)})} \Xi(x) dx, \quad (5.3.1)$$

где

$$x_*(z) = \begin{cases} 0 & \text{если } z \leq 0 \\ z & \text{если } 0 \leq z \leq L \\ L & \text{если } z \geq L \end{cases}. \quad (5.3.2)$$

Сначала докажем следующее тождество для любой функции $\tilde{\Xi}(x)$ и любой $0 \leq h_0 \leq b+L$:

$$\int_{\theta(h_0)}^{\Theta(h_0)} \tilde{\Xi}(x) dx = \sum_{j=1}^N \int_{x_*(h_0-\xi^{(j)})}^{x_*(h_0-\xi^{(j-1)})} \tilde{\Xi}(x) dx, \quad (5.3.3)$$

Для этого достаточно рассмотреть четыре возможных расположения прямой $h = h_0$ по отношению к границам области $0 \leq h \leq b+L$, $\theta(h) \leq x \leq \Theta(h)$ (см. Рис. 5.3.1).

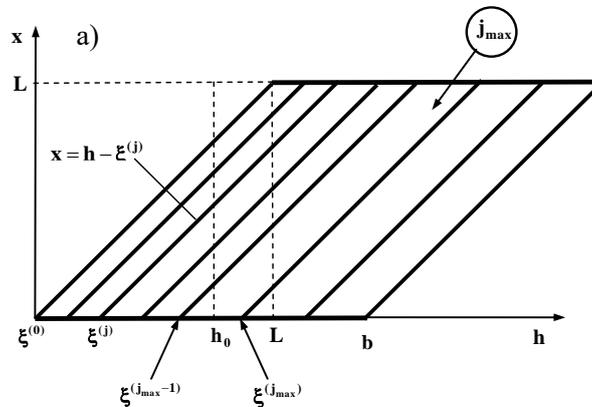


Рис. 5.3.1. Возможные варианты расположения прямой $h = h_0$ по отношению к границам области $0 \leq h \leq b+L$, $\theta(h) \leq x \leq \Theta(h)$.

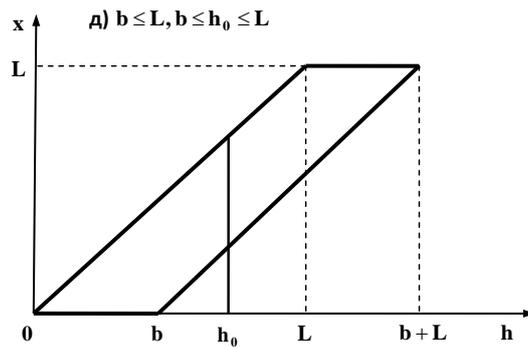
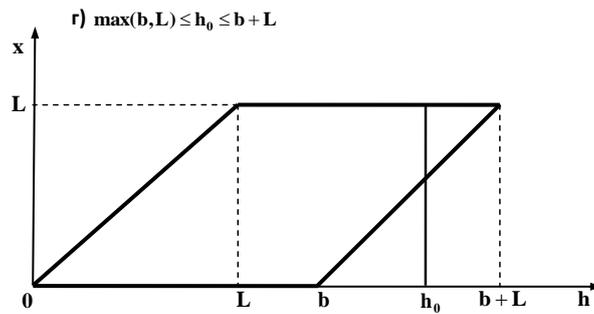
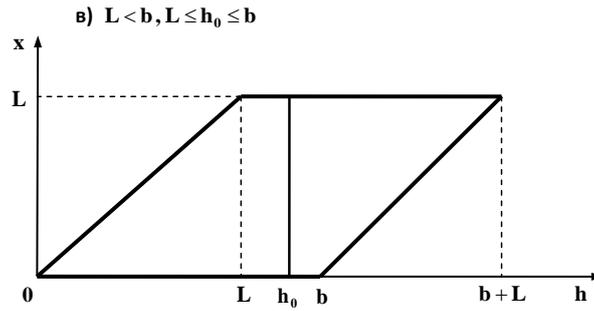
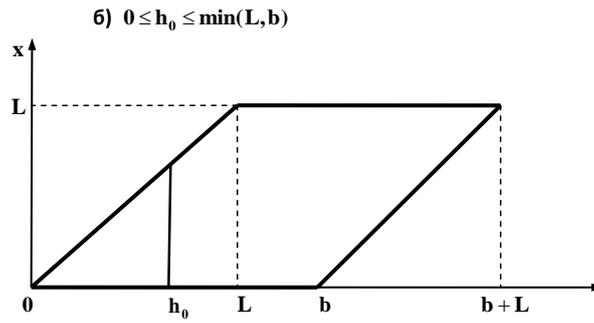


Рис. 5.3.1. Продолжение.

Рассмотрим случай $0 \leq h_0 \leq \min(L, b)$, когда $\theta(h) = 0$, $\Theta(h) = h$ (Рис.5.3.1а); через j_{max} обозначен такой номер j , что $\xi^{(j_{max}-1)} \leq h_0 \leq \xi^{(j_{max})}$. Тогда:

$$\int_{\theta(h_0)}^{\Theta(h_0)} \tilde{\Xi}(x) dx = \int_0^{h_0 - \xi^{(j_{max}-1)}} \tilde{\Xi}(x) dx + \sum_{j=j_{max}-1}^1 \int_{h_0 - \xi^{(j)}}^{h_0 - \xi^{(j-1)}} \tilde{\Xi}(x) dx. \quad (5.3.4)$$

Поскольку $x_*(h_0 - \xi^{(j_{max})}) = 0$ для $j_{max} \leq j \leq N$, а также $x_*(h_0 - \xi^{(j)}) = h_0 - \xi^{(j)}$ для $1 \leq j \leq j_{max} - 1$, мы можем переписать уравнение (5.3.4) следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{\theta(h_0)}^{\theta(h_0)} \tilde{\Xi}(x) dx &= \int_{x_*(h_0 - \xi^{(j_{max})})}^{x_*(h_0 - \xi^{(j_{max}-1)})} \tilde{\Xi}(x) dx + \sum_{j=j_{max}-1}^1 \int_{x_*(h_0 - \xi^{(j)})}^{x_*(h_0 - \xi^{(j-1)})} \tilde{\Xi}(x) dx \\ &+ \sum_{j=j_{max}}^N \int_{x_*(h_0 - \xi^{(j)})}^{x_*(h_0 - \xi^{(j-1)})} \tilde{\Xi}(x) dx = \sum_{j=1}^N \int_{x_*(h_0 - \xi^{(j)})}^{x_*(h_0 - \xi^{(j-1)})} \tilde{\Xi}(x) dx. \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

Таким образом, уравнение (5.3.3) справедливо, если $0 \leq h_0 \leq \min(L, b)$, случаи, приведенные на Рис.5.3.1 рассматриваются аналогичным образом.

Уравнение (5.3.3) можно записать для $\tilde{\Xi}(x) = \Xi(x) a_i(h-x)$:

$$\int_{\theta(h)}^{\theta(h)} \Xi(x) a_i(h-x) dx = \sum_{j=1}^N \int_{x_*(h - \xi^{(j)})}^{x_*(h - \xi^{(j-1)})} \Xi(x) a_i(h-x) dx, \quad (5.3.6)$$

где h_0 заменяется на h . Поскольку $a_i(h-x) = a_i^{(j)}$, если $x_*(h - \xi^{(j)}) \leq x \leq x_*(h - \xi^{(j-1)})$ и $x_*(h - \xi^{(j)}) = x_*(h - \xi^{(j-1)})$ для $x \leq x_*(h - \xi^{(j)})$ и для $x \geq x_*(h - \xi^{(j-1)})$, мы получаем:

$$\int_{x_*(h - \xi^{(j)})}^{x_*(h - \xi^{(j-1)})} \Xi(x) a_i(h-x) dx = a_i^{(j)} \int_{x_*(h - \xi^{(j)})}^{x_*(h - \xi^{(j-1)})} \Xi(x) dx, \quad (5.3.7)$$

Складывая уравнения (5.3.6) и (5.3.7), получаем соотношение (5.3.1), что завершает доказательство.

Еще одно полезное соотношение может быть легко доказано для некоторых функций $\Xi(x)$ и $\hat{\Xi}(h)$ посредством изменения порядка интегрирования и замены переменных $x \rightarrow x$, $h - \xi^{(j)} - x \rightarrow h$ в интегралах:

$$\int_0^{b+L} dh \hat{\Xi}(h) \int_{x_*(h - \xi^{(j)})}^{x_*(h - \xi^{(j-1)})} dx \Xi(x) = \int_0^L dx \Xi(x) \int_0^{b^{(j)}} dh \hat{\Xi}(h + \xi^{(j)} + x). \quad (5.3.8)$$

Глава 6

Многослойные преграды со слоями из одного и того же материала. Произвольные зазоры. Конический ударник. Общая МЛВ.

Обозначения

$a_i^{(j)}$	параметры, определяющие модель;
b	сумма толщин плит (включая зазоры) в слоистой преграде;
$b^{(i)}$	толщина i -го слоя (номера порядковых слоев приведены в направлении проникания ударника) слоистой преграды (включая зазоры);
b_{sum}	суммарная толщина всех пластин;
D	сила сопротивления, действующая на ударник;
h	текущая глубина проникания, Рис. 5.1.1;
НВ	число твердости по Бринеллю;
k_1, k_2	параметры, формула (5.1.14);
L	длина носовой части ударника;
m	масса ударника;
v	текущая (мгновенная) скорость ударника;
v_{bl}	баллистический предел (БП);
v_{imp}	начальная скорость ударника;
v_{res}	остаточная скорость ударника;
x	координата, связанная с ударником, Рис. 5.1.1;
ε	функция, уравнение (6.1.1);
η	см. формулу (6.1.9);
θ, Θ	функции, определяющие поверхность взаимодействия ударника и преграды, уравнения (1.3.2) и (1.3.4);
Λ	функция, уравнение (6.1.8);
μ_{max}	количество пластин в СП;
ξ	координата, Рис.5.1.1-5.1.2;
σ_u	предел прочности на растяжение;
σ_y	предел текучести;
ω	функция, уравнение (6.1.4);
Ψ	функция, уравнение (6.1.4);
Ω_0	функция, уравнение (1.1.6);
БП	баллистический предел;
ИП	монолитная (изотропная) преграда;
КП	преграда, состоящая из нескольких пластин "в контакте";
МЛВ	модель локального взаимодействия;
РП	разнесенная преграда;
СП	многослойная (слоистая) преграда.

6.1 Теоретический анализ

Рассмотрим [2] преграду, состоящую из μ_{\max} пластин, изготовленных из одного и того же материала, с воздушными зазорами между пластинами. Преграда пробивается ударником с прямым, острым, круговым конусом в качестве носовой части. Ограничений на размеры воздушных зазоров нет, так что ударник может взаимодействовать с несколькими пластинами одновременно. Предполагается, что для всех слоев справедлива одна и та же общая МЛВ с параметрами $a_0^{(1)}, a_1^{(1)}, \dots$, конкретный вид которой не задается.

Определим функцию $\varepsilon(\xi)$ следующим образом: $\varepsilon(\xi) = 1$, если точка с координатой ξ (см. Рис. 5.1.1) расположена внутри какой-либо пластинки, и $\varepsilon(\xi) = 0$, если эта точка попадает в воздушный зазор, т.е.:

$$\varepsilon(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{если } \xi^{(2j)} \leq \xi \leq \xi^{(2j+1)}, j = 0, 1, \dots, \mu_{\max} - 1 \\ 0, & \text{если } \xi^{(2j+1)} \leq \xi \leq \xi^{(2j+2)}, j = 0, 1, \dots, \mu_{\max} - 2 \end{cases}. \quad (6.1.1)$$

Тогда функцию Ω_0 в выражении (1.1.6) можно представить в виде:

$$\Omega_0(\bar{a}(h-x), k_2, v) = \varepsilon(\xi) \cdot \Omega_0(a_0^{(1)}, a_1^{(1)}, \dots, k_2, v), \quad (6.1.2)$$

а формулу для силы сопротивления в виде:

$$D(h, v) = \omega(v) \Psi(h), \quad (6.1.3)$$

где

$$\omega(v) = k_1 \Omega_0(a_0^{(1)}, a_1^{(1)}, \dots, k_2, v), \quad \Psi(h) = \int_{\theta(h)}^{\Theta(h)} x \varepsilon(h-x) dx \quad (6.1.4)$$

Уравнение движения ударника:

$$mv \frac{dv}{dh} = -D(h, v), \quad (6.1.5)$$

с учетом выражения (6.1.3) для $D(h, v)$, представляет собой уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{mv}{\omega(v)} dv = - \left(\int_{\theta(h)}^{\Theta(h)} x \varepsilon(h-x) dx \right) dh, \quad (6.1.6)$$

Интегрируя его левую часть по v от $v = v_{\text{imp}}$ до $v = v_{\text{res}}$, а правую – по h от $h = 0$ до $h = b + L$, получим зависимость между начальной и остаточной скоростями ударника:

$$\Lambda(v_{\text{imp}}) - \Lambda(v_{\text{res}}) = \eta, \quad (6.1.7)$$

где

$$\Lambda(z) = m \int_0^z \frac{v dv}{\omega(v)}, \quad (6.1.8)$$

$$\eta = \int_0^{b+L} dh \int_{\theta(h)}^{\Theta(h)} x \varepsilon(h-x) dx, \quad (6.1.9)$$

Уравнение (6.1.7) после подстановки $v_{imp} = v_{bl}$ и $v_{res} = 0$ приводит к формуле для БП:

$$\Lambda(v_{bl}) = \eta. \quad (6.1.10)$$

Интеграл в формуле (6.1.9) может быть преобразован путем замены переменных $x = x$, $h = x + \xi$ (см. Рис. 5.1.2):

$$\eta = \int_0^L x dx \int_0^b \varepsilon(\xi) d\xi = \int_0^L x dx \left(\sum_{\mu=1}^{\mu_{max}} \int_{\xi^{(2\mu-2)}}^{\xi^{(2\mu-1)}} \varepsilon(\xi) d\xi + \sum_{\mu=1}^{\mu_{max}-1} \int_{\xi^{(2\mu-1)}}^{\xi^{(2\mu)}} \varepsilon(\xi) d\xi \right). \quad (6.1.11)$$

Вторая сумма в правой части соотношения (6.1.11) равна нулю, в то время как интегралы в первой сумме дают толщины соответствующих пластин. После несложных преобразований из уравнения (6.1.11) получаем:

$$\eta = \int_0^L x dx \sum_{\mu=1}^{\mu_{max}} (\xi^{(2\mu-1)} - \xi^{(2\mu-2)}) = \int_0^L b_{sum} x dx = 0.5L^2 b_{sum}, \quad (6.1.12)$$

где b_{sum} – это общая толщина всех пластин:

$$b_{sum} = \sum_{\mu=1}^{\mu_{max}} b^{(2\mu-1)}. \quad (6.1.13)$$

Таким образом, из соотношений (6.1.7), (6.1.10) и (6.1.12) следует, что:

$$v_{bl} = \Lambda^{-1}(0.5L^2 b_{sum}), \quad (6.1.14)$$

$$v_{res} = \Lambda^{-1}(\Lambda(v_{imp}) - 0.5L^2 b_{sum}), \quad v_{imp} \geq v_{bl}. \quad (6.1.15)$$

Уравнения (6.1.14) и (6.1.15) показывают, что остаточная скорость для данной скорости удара и БП являются одинаковыми для всех преград (ИП, КП, РП), если их суммарная толщина одинакова. Следует подчеркнуть, что этот результат был получен при использовании общей МЛВ.

Естественно, к этому результату надо относиться с осторожностью из-за приближенного характера МЛВ (в частности, необходимо принимать во внимание, что корректное применение МЛВ предполагает, что пластины в СП не являются тонкими) и, имея в виду его практическое значение, правильнее говорить не о независимости, а об относительно слабой зависимости баллистических свойств преград от их структуры. Анализ показывает, что полученные теоретические результаты, как правило, не противоречат результатам экспериментов, если учесть, что точность последних обычно лежит в пределах 10%.

6.2 Анализ экспериментальных данных

В нашем анализе мы воспользуемся результатами экспериментов [1], проведенных с РП ($b_{sum} = 8 \text{ мм}$) из мягкой стали (НВ 96-105, $\sigma_y = 210 - 247 \text{ МПа}$,

$\sigma_u = 316 - 346 \text{ МПа}$), пробиваемыми стандартными 7,62мм пулями. Экспериментальные данные и результаты нашей обработки в соответствии с целями анализа представлены в Таблицах 6.2.1-6.2.3. Но сначала – два замечания. (1) Форма ударника-пули несколько отличается от конической, которой посвящен анализ, проведенный в предыдущем разделе, однако, как показывают представленные ниже результаты, теоретические выводы, полученные для "модельных" конических ударников оказались справедливыми для пуль, что важно с практической точки зрения. (2) Мы сознательно ограничились рассмотрением РП, хотя в работе имеются результаты для ИП и КП, чтобы сосредоточиться на анализе влияния зазоров, исключив влияние иных факторов (трение между слоями и пр.). (3) Мы не используем в анализе формально более строгие статистические методы, поскольку, во-первых, обоснование предпосылок для их использования является самостоятельной проблемой, и, во-вторых, не хотим загромождать изложение применением методов, уводящих далеко в сторону от основной темы.

Обратимся вначале к Таблице 6.2.1. В первом столбце приводится номер мишени (под таким номером она фигурирует в работе [1]). Структура преграды (второй столбец) закодирована в соответствии со схемой, описанной в Таблице 4.1.1. В заголовке столбцов 3-7 указаны значения скорости удара, для которых проводились эксперименты: $v_{imp}^{(1)}, \dots, v_{imp}^{(5)}$. На пересечении строки для преграды с номером i и скорости удара с номером j стоит дробь, в числителе которой значение соответствующей остаточной скорости ударника $v_{res}^{(i,j)}$ ($i = 5, 6, \dots, 13; j = 1, 2, \dots, 5$); в знаменателе – результаты наших расчетов, которые описаны ниже. В последней строке, для каждого значения скорости удара, приведены усредненные по преградам значения остаточной скорости:

$$\bar{v}_{res}^{(j)} = \frac{1}{9} \sum_{i=5}^{13} v_{res}^{(i,j)}, \quad (6.2.1)$$

а в знаменателях для каждой преграды и каждого значения скорости удара – отклонение от среднего значения остаточной скорости:

$$\varepsilon_{res}^{(i,j)} = \left(\frac{v_{res}^{(i,j)} - \bar{v}_{res}^{(j)}}{\bar{v}_{res}^{(j)}} \right) \cdot 100\%. \quad (6.2.2)$$

Анализ результатов расчетов показывает, что разброс значений остаточной скорости при изменении структуры РП не превышает нескольких процентов, то есть лежит в пределах обычной погрешности экспериментов.

В столбце 8 информация также представлена в форме дробей. Для каждой преграды рассчитывается среднее значение БП:

$$\bar{v}_{bl}^{(i)} = \frac{1}{5} \sum_{j=1}^5 v_{bl}^{(i,j)}, \quad (6.2.4)$$

которое приведено в числителе, после чего осуществляется усреднение еще и по преградам:

$$\bar{v}_{bl} = \frac{1}{9} \sum_{i=5}^9 \bar{v}_{bl}^{(i)} = 505,3 \text{ м/с}. \quad (6.2.5)$$

Значения в знаменателе в дробях последнего столбца (индивидуальные по преградам отклонения от среднего значения БП) – цель наших расчетов – определяются по формуле:

$$\varepsilon_{bl}^{(i)} = \left(\frac{\bar{v}_{bl}^{(i)} - \bar{v}_{bl}}{\bar{v}_{bl}} \right) \times 100\% . \quad (6.2.6)$$

Таблица 6.2.1. Анализ вариации остаточной скорости при изменении структуры РП на основании экспериментальных результатов [1].

Номер преграды	Структура преграды	$v_{imp}^{(j)}$ (м/с)				
		706,0	754,5	775,4	804,5	826,2
5	2мм+6мм(6мм)	474,3	521,8	544,6	611,9	653,7
		-----	-----	-----	-----	-----
		3,7%	-2,9%	-4,6%	-4,5%	-2,5%
6	6мм+2мм(6мм)	476,9	522,6	550,2	615,4	665,4
		-----	-----	-----	-----	-----
		-3,2%	-2,7%	-3,6%	-3,9%	-0,7%
7	4мм+4мм(6мм)	488,0	535,4	562,2	644,3	668,9
		-----	-----	-----	-----	-----
		-0,9%	-0,4%	-1,5%	0,6%	-0,4%
8	1мм+1мм+6мм(6мм)	483,9	538,4	565,5	644,3	667,4
		-----	-----	-----	-----	-----
		-1,7%	0,1%	-1,0%	0,5%	-0,4%
9	6мм+1мм+1мм(6мм)	475,7	509,9	536,4	637,6	663,9
		-----	-----	-----	-----	-----
		-3,4%	-5,1%	-6,1%	-0,5%	-0,9%
10	2мм+2мм+4мм(6мм)	492,9	538,9	580,1	654,7	679,5
		-----	-----	-----	-----	-----
		0,1%	0,3%	1,6%	2,2%	1,4%
11	4мм+2мм+2мм(6мм)	494,6	542,1	578,6	643,6	673,6
		-----	-----	-----	-----	-----
		0,4%	0,9%	1,3%	0,5%	0,5%
12	4x1мм+4мм(6мм)	527,4	573,3	608,7	653,5	683,8
		-----	-----	-----	-----	-----
		7,1%	6,7%	6,6%	2,0%	2,0%
13	4мм+4x1мм(6мм)	518,8	553,1	613,1	660,5	675,4
		-----	-----	-----	-----	-----
		5,3%	2,9%	7,4%	3,1%	0,8%
Средние значения $\bar{v}_{res}^{(j)}$		492,5	537,3	571,0	640,6	670,2

Анализ результатов расчетов показывает, что разброс значений БП при изменении структуры РП также не превышает нескольких процентов.

Таблица 6.2.2. Анализ вариации БП при изменении структуры РП на основании экспериментальных результатов [1].

Номер преграды	Структура преграды	$V_{imp}^{(j)}$ (м/с)					$\bar{V}_{bl}^{(i)}$
		706.0	754.5	775.4	804.5	826.2	$\mathcal{E}_{bl}^{(i)}$
5	2мм+6мм(6мм)	474,3	521,8	544,6	611,9	653,7	529,5
		-----	-----	-----	-----	-----	-----
		522,9	545,0	552,0	522,3	505,3	+4,8%
6	6мм+2мм(6мм)	476,9	522,6	550,2	615,4	665,4	523,8
		-----	-----	-----	-----	-----	-----
		520,6	544,2	546,4	518,2	489,7	+3,7%
7	4мм+4мм(6мм)	488,0	535,4	562,2	644,3	668,9	508,5
		-----	-----	-----	-----	-----	-----
		510,2	531,6	534,0	481,8	485,0	+0,6%
8	1мм+1мм+6мм(6мм)	483,9	538,4	565,5	644,3	667,4	508,4
		-----	-----	-----	-----	-----	-----
		514,1	528,6	530,5	481,8	487,0	+0,6%
9	6мм+1мм+1мм(6мм)	475,7	509,9	536,4	637,6	663,9	524,0
		-----	-----	-----	-----	-----	-----
		521,7	556,1	559,9	490,6	491,8	+3,7%
10	2мм+2мм+4мм(6мм)	492,9	538,9	580,1	654,7	679,5	497,1
		-----	-----	-----	-----	-----	-----
		505,5	528,1	514,5	467,5	470,0	-1,6%
11	4мм+2мм+2мм(6мм)	494,6	542,1	578,6	643,6	673,6	501,2
		-----	-----	-----	-----	-----	-----
		503,8	524,8	516,2	482,7	478,4	-0,8%
12	4x1мм+4мм(6мм)	527,4	573,3	608,7	653,5	683,8	474,6
		-----	-----	-----	-----	-----	-----
		469,3	490,5	480,3	469,2	463,7	-6,1%
13	4мм+4x1мм(6мм)	518,8	553,1	613,1	660,5	675,4	480,4
		-----	-----	-----	-----	-----	-----
		478,8	513,2	474,7	459,3	475,9	-4,9%

В Таблице 6.2.3 даны результаты анализа для некоторых дополнительных структур преград и $v_{imp} = 826,2 \text{ м/с}$. Схема обработки результатов экспериментов не отличается от изложенной выше. Сформулированные выше выводы также остаются в силе.

Таблица 6.2.3. Анализ вариации остаточной скорости и БП при изменении структуры РП на основании экспериментальных результатов [1] ($v_{imp} = 826,2 \text{ м/с}$).

Номер преграды	Структура преграды	$v_{res}^{(i)}$	$v_{bl}^{(i)}$	$\varepsilon_{res}^{(i)}$	$\varepsilon_{bl}^{(i)}$
17	4мм+4мм(24mm)	638.0	524.9	-1.6%	2.5%
21	2мм+2мм+4мм(12mm)	651.3	508.3	0.5%	-0.7%
25	2мм+4мм+2мм(12mm)	668.1	486.1	3.1%	-5.1%
30	2мм+6мм(24mm)	635.0	528.6	-2.0%	3.2%
Средние значения		648.1	512.0		

Литература к Части 2

1. Almohandes, A.A., Abdel-Kader, M.S., Eleiche, A.M. (1996). Experimental investigation of the ballistic resistance of steel-fiberglass reinforced polyester laminated plates. *Composites. Part B*, **27**(5): 447-458.

2. Ben-Dor, G., Dubinsky, A., Elperin, T. (1998). On the ballistic resistance of multi-layered targets with air gaps. *Int. J. of Solids and Structures*, **35**(23): 3097-3103.

3. Ben-Dor, G., Dubinsky, A., Elperin, T. (1999). On the order of plates providing the maximum ballistic limit velocity of a layered armor. *Int. J. of Impact Engineering*, **22**(8): 741-755.

4. Ben-Dor, G., Dubinsky, A., Elperin, T. (2006). *Applied High-Speed Plate Penetration Dynamics*. Springer, Dordrecht.

Часть 3

Применение двухчленной МЛВ для анализа и оптимизации преград со слоями из разных материалов.

В Части 3 на основе двухчленной МЛВ исследуются защитные свойства многослойных преград со слоями с разными механическими свойствами. Рассматриваются как ситуации, когда учитывается одновременное взаимодействие ударника с несколькими пластинами, так и независимое пробивание слоев. Даны решения оптимизационных задач, допускающие аналитическое исследование.

В Главе 7 исследуются защитные свойства многослойных преград в условиях, когда учитывается одновременное взаимодействие ударника с несколькими пластинами, что имеет место для преград с пластинами в контакте и с малыми зазорами. Целью анализа является определение оптимального порядка пластин, выбираемых из заданного набора. Рассматриваются несколько постановок задач: (1) произвольное число пластин в контакте, имеющих одинаковую толщину; плотность материала всех пластин одинакова, ударник – в общем случае, заостренное неконическое тело вращения; (2) двухслойная преграда из пластин в контакте или с произвольными зазорами, пробиваемая коническим ударником.

В Главе 8 исследуются защитные свойства многослойных преград в условиях, когда не учитывается одновременное взаимодействие конического ударника с несколькими пластинами (разнесенные преграды). Целью анализа является определение оптимального порядка пластин, выбираемых из заданного набора.

В Главе 9 решается более общая оптимизационная задача по сравнению с той, что рассматривается в Главе 8: определению подлежит не только порядок пластин, но и их толщины.

Глава 7

Преграды со слоями в контакте и с малыми воздушными зазорами.

Обозначения

$a_i^{(j)}$	параметры, определяющие модель;
b	сумма толщин плит в слоистой преграде;
\bar{b}	$= b/L$;
$b^{(i)}$	толщина i -го слоя (номера порядковых слоев приведены в направлении проникания ударника) слоистой преграды;
g	толщина зазора между пластинами;
h	текущая глубина проникания, Рис. 5.1.1;
L	длина носовой части ударника;
m	масса ударника;
N	количество слоев;
Q	см. уравнение (7.1.5);
U	см. уравнение (7.1.2);
\hat{U}	см. уравнение (7.1.6);
v_{bl}	баллистический предел БП;
$v_{bl}^{[s,t]}$	БП преграды, в которой пластины первоначально находятся в преграде на местах с номерами s и t ($t > s$);
$v_{bl}^{[t,s]}$	БП преграды с обратным порядком пластин с номерами s и t ;
x_*	см. уравнение (5.3.2);
α	см. уравнение (5.2.14);
β	$= 1/\bar{\rho}_{og}$;
δ	$= v_{bl}^{[2,1]} / v_{bl}^{[1,2]}$;
θ, Θ	функции, определяющие поверхность взаимодействия ударника и преграды, Рис. 1.3.1, 1.3.2-1.3.6, уравнения (1.3.2) и (1.3.4);
Λ	см. уравнение (7.1.9);
ξ	координата, Рис.5.1.1-5.1.2;
$\bar{\rho}_{og}$	ρ_{og}/L ;
ρ_{og}	радиус дуги оживала;
τ	$= d/(2L)$;
Φ	функция, определяющая форму ударника, Рис. 1.3.1;
$\chi^{(j)}$	$= a_0^{(j)} / a_2^{(j)}$;
Ψ	см. уравнение (7.1.13);
БП	баллистический предел БП).

7.1 Многослойные преграды со слоями одинаковой плотности. Ударник в форме тела вращения.

В этом разделе мы рассмотрим проникание в многослойную преграду, состоящую из N пластин в контакте при следующих предположениях: (I) ударник, в общем случае, заостренное *неконическое* тело вращения; (II) пластины имеют одинаковую толщину; (III) взаимодействие ударника и преграды описывается двухчленной МЛВ; (IV) параметр a_2 в МЛВ одинаков для всех пластин, т.е.:

$$a_2(\xi) = a_2 = \text{const} \quad (7.1.1)$$

Эта модель ориентирована на ситуацию, когда пластины изготовлены из различных типов функционально-градиентного материала, так что пластины имеют приблизительно одинаковую плотность, но их прочностные характеристики существенно различаются.

Воспользуемся формулами из Разделов 5.2 и 5.3.

Если положить

$$\Xi(x) = U(x) = \Phi\Phi' \quad (7.1.2)$$

в соотношении (5.3.1), то выражение (5.2.3) для функции $f_0(h)$ можно записать в виде,

$$f_0(h) = \frac{4\pi}{m} \sum_{j=1}^N a_0^{(j)} \int_{x_*(h-\xi^{(j)})}^{x_*(h-\xi^{(j-1)})} U(x) dx. \quad (7.1.3)$$

Тогда выражение для БП представляется в форме:

$$\frac{m}{4\pi} v_{bl}^2 = \int_0^{b+L} \left[\sum_{j=1}^N a_0^{(j)} \int_{x_*(h-\xi^{(j)})}^{x_*(h-\xi^{(j-1)})} U(x) dx \right] Q(h) dh, \quad (7.1.4)$$

где

$$Q(h) = \exp \left(\frac{4\pi a_2}{m} \int_0^h \tilde{d}\tilde{h} \int_{\theta(\tilde{h})}^{\Theta(\tilde{h})} \hat{U}(x) dx \right), \quad (7.1.5)$$

$$\hat{U}(x) = \frac{\Phi'^3}{\Phi'^2 + 1}. \quad (7.1.6)$$

Воспользовавшись тождеством (5.3.8), соотношение (7.1.4) можно переписать следующим образом:

$$\frac{m}{4\pi} v_{bl}^2 = \int_0^L \left[\sum_{j=1}^N a_0^{(j)} \int_0^B Q(h + \xi^{(j-1)} + x) dh \right] U(x) dx, \quad (7.1.7)$$

Исследуем теперь, как изменится БП преграды, если две пластины, первоначально находящимися в преграде на местах с номерами s и t ($t > s$) поменять местами.

Уравнение (7.1.7) БП преграды первоначальной структуры можно переписать в виде:

$$\frac{m}{4\pi} \left(v_{bl}^{[s,t]} \right)^2 = \int_0^L \left[\Lambda(x) + a_0^{(s)} \int_0^B Q(h + \xi^{(s-1)} + x) dh + a_0^{(t)} \int_0^B Q(h + \xi^{(t-1)} + x) dh \right] U(x) dx \quad (7.1.8)$$

где

$$\Lambda(x) = \sum_{\substack{0 \leq j \leq N \\ j \neq s, j \neq t}} a_0^{(j)} \int_0^B Q(h + \xi^{(j-1)} + x) dh. \quad (7.1.9)$$

Рассмотрим теперь преграду с обратным порядком пластин с номерами s и t . Формула для БП $v_{bl}^{[t,s]}$ может быть получена из уравнения (7.1.8), если поменять местами $\xi^{(t-1)}$ и $\xi^{(s-1)}$:

$$\frac{m}{4\pi} \left(v_{bl}^{[t,s]} \right)^2 = \int_0^L \left[\Lambda(x) + a_0^{(t)} \int_0^B Q(h + \xi^{(s-1)} + x) dh + a_0^{(s)} \int_0^B Q(h + \xi^{(t-1)} + x) dh \right] U(x) dx \quad (7.1.10)$$

Уравнения (7.1.8) и (7.1.10) приводят к соотношению:

$$\frac{m}{4\pi} \left[\left(v_{bl}^{[t,s]} \right)^2 - \left(v_{bl}^{[s,t]} \right)^2 \right] = \left(a_0^{(s)} - a_0^{(t)} \right) \Psi, \quad (7.1.11)$$

где

$$\Psi = \int_0^L \left[\int_0^B \Delta Q dh \right] U(x) dx, \quad \Delta Q = Q(h + \xi^{(t-1)} + x) - Q(h + \xi^{(s-1)} + x). \quad (7.1.12)$$

Поскольку $Q(h)$ является возрастающей функцией и $\xi^{(t-1)} > \xi^{(s-1)}$, то $\Delta Q > 0$ и, следовательно, $\Psi > 0$. Таким образом, из уравнения (7.1.11) следует, что

$$\text{sign} \left(v_{bl}^{[t,s]} - v_{bl}^{[s,t]} \right) = \text{sign} \left(a_0^{(s)} - a_0^{(t)} \right), \quad (7.1.13)$$

Легко показать, что для обеспечения максимального БП пластины в преграде должны быть расположены по возрастанию характеристики a_0 . Для доказательства допустим обратное: пусть для пластин, занимающих позиции s и t ($s < t$), это условие нарушается, то есть, $a_0^{(s)} > a_0^{(t)}$. Тогда, как это следует из уравнения (7.1.13), $v_{bl}^{[t,s]} > v_{bl}^{[s,t]}$, то есть перестановка пластин приводит к возрастанию БП, а это противоречит предположению об оптимальном порядке пластин в исходной структуре, что и доказывает сформулированное выше утверждение. Очевидно, минимальный БП достигается тогда, когда пластины расположены в преграде в обратном порядке.

7.2 Двухслойная преграда со слоями в контакте или с произвольными зазорами. Произвольные параметры модели. Конический ударник.

В этом разделе рассматривается проникание в преграду, состоящую из двух пластин в контакте или с зазорами при следующих предположениях: (I) ударник имеет коническую форму; (II) взаимодействие ударника и преграды описывается двухчленной МЛВ; (III) не вводятся какие-либо дополнительные предположения относительно параметров МЛВ a_0 и a_2 . Ниже приводятся результаты исследования; доказательства, ввиду их громоздкости, опущены, их можно найти в работах [5-7].

Если между параметрами двухчленной МЛВ имеет место соотношение:

$$\chi^{(1)} > \chi^{(2)}, \quad (7.2.1)$$

то

$$v_{bl}^{[1,2]}(0) < v_{bl}^{[2,1]}(0) \quad (7.2.2)$$

и $v_{bl}^{[1,2]}(g)$ – убывающая, а $v_{bl}^{[2,1]}(g)$ – возрастающая функция толщины воздушного зазора g при $g < L$.

Если выполняется обратное соотношение:

$$\chi^{(1)} < \chi^{(2)}, \quad (7.2.3)$$

то

$$v_{bl}^{[1,2]}(0) > v_{bl}^{[2,1]}(0), \quad (7.2.4)$$

$v_{bl}^{[1,2]}(g)$ – возрастающая, а $v_{bl}^{[2,1]}(g)$ – убывающая функция при $g < L$.

Если, наконец,

$$\chi^{(1)} = \chi^{(2)}, \quad (7.2.5)$$

то БП преграды не зависит от порядка пластин и величины зазора между ними.

При $g > L$ БП во всех случаях перестает зависеть от толщины зазора; через $v_{bl}^{[1,2]}(\infty)$ и $v_{bl}^{[2,1]}(\infty)$ будем обозначать значение БП при $g \geq L$.

В формулах, выписанных выше в настоящем разделе, приняты следующие обозначения:

$$\chi^{(j)} = a_0^{(j)} / a_2^{(j)} \quad (7.2.6)$$

где j – порядковый номер пластины в первоначальной структуре преграды; $a_0^{(j)}$, $a_2^{(j)}$ – параметры модели (см. Раздел 5.2); $v_{bl}^{[1,2]}$ – БП преграды первоначальной структуры, $v_{bl}^{[2,1]}$ – БП преграды после изменения порядка пластин в первоначальной структуре.

Из представленных выше соотношений и свойств следует, что

$$v_{bl}^{[1,2]}(\infty) < v_{bl}^{[1,2]}(g) < v_{bl}^{[1,2]}(0) < v_{bl}^{[2,1]}(0) < v_{bl}^{[2,1]}(g) < v_{bl}^{[2,1]}(\infty), \quad (7.2.7)$$

и, следовательно, наилучшей защитной структурой является преграда с обратным порядком пластин и большим зазором, если справедливо неравенство (7.2.1), в то время как

$$v_{bl}^{[1,2]}(\infty) > v_{bl}^{[1,2]}(g) > v_{bl}^{[1,2]}(0) > v_{bl}^{[2,1]}(0) > v_{bl}^{[2,1]}(g) > v_{bl}^{[2,1]}(\infty), \quad (7.2.8)$$

и, следовательно, максимум БП обеспечивает структура с обратным порядком пластин и большим зазором, если справедливо неравенство (7.2.3); если имеет место условие (7.2.5), то

$$v_{bl}^{[1,2]}(\infty) = v_{bl}^{[1,2]}(g) = v_{bl}^{[1,2]}(0) = v_{bl}^{[2,1]}(0) = v_{bl}^{[2,1]}(g) = v_{bl}^{[2,1]}(\infty). \quad (7.2.9)$$

Поскольку наличие зазоров не оказывает решающее влияние на баллистические свойства преграды, особый интерес представляют доказанные свойства, представленные соотношениями (7.2.2) и (7.2.4). Их можно сформулировать следующим образом: для обеспечения максимального значения БП пластины должны располагаться в порядке возрастания параметра χ . Очевидно, что в случае, когда $a_2^{(1)} = a_2^{(2)}$ и $N = 2$, имеет место ситуация, рассмотренная в Разделе 7.1, применительно к коническим ударникам и пластинам одинаковой толщины, то есть результаты Разделов 7.1 и 7.2 не противоречат друг другу.

7.3 Расчеты для ударников оживальной формы на основе двухчленной МЛВ и их анализ.

Численные расчеты осуществлялись применительно к двухслойной преграде, в которой первая и вторая пластины изготовлены из мягкой стали и алюминия, соответственно. Использовалась двухчленная модель с параметрами $a_0^{(1)} = 1850 \text{ МПа}$, $a_2^{(1)} = 7830 \text{ кг/м}^3$, $a_0^{(2)} = 350 \text{ МПа}$ а также $a_2^{(2)} = 2765 \text{ кг/м}^3$; значения динамической жесткости $a_0^{(i)}$ заимствованы из работы [2]. Расчеты проводились для ударников с оживальной формой образующей носовой части при различных значениях кривизны $\beta = 1/\bar{\rho}_{og}$, где $\bar{\rho}_{og} = \rho_{og}/L$ (см. Рис. 4.1.1); выбор параметров осуществлялся таким образом, чтобы БП был менее 1000 м/с .

Цель расчетов - оценить влияние параметра β , который характеризует отклонение формы ударника от конической, на параметр $\delta = v_{bl}^{[2,1]}/v_{bl}^{[1,2]}$, характеризующий эффект от изменения порядка пластин. Типичные результаты этих вычислений показаны на Рис. 7.3.1а-с. Следует отметить, что $\beta = 0$ соответствует коническому снаряду; в этом случае, в соответствии с результатами, изложенными в Разделе 7.2, $v_{bl}^{[2,1]} \geq v_{bl}^{[1,2]}$, поскольку $\chi^{(2)} < \chi^{(1)}$ ($\chi^{(2)} = 0,127 \cdot 10^6 \text{ м}^2/\text{с}^2$, $\chi^{(1)} = 0,236 \cdot 10^6 \text{ м}^2/\text{с}^2$). На всех рисунках показана зависимость δ от β для $\tau = 0,5$.

Обратимся к Рис. 7.3.1а, как типичному для всей серии. Кривые зависимостей δ от β выпуклы вниз, то есть в начале увеличение кривизны образующей ударника вызывает уменьшение параметра различия в величинах БП преград δ , в то время как дальнейшее увеличение β сопровождается увеличением параметра δ . Следует отметить, что для относительно больших β величина параметра δ может стать больше, чем для конусообразного снаряда. Расчеты показывают, что влияние изменения порядка пластин (величины параметра δ) существенно зависит от соотношения толщин пластин в преграде. В рассматриваемом случае для всех оживальных ударников этот эффект максимален при $b^{(1)}/b \approx 0,3$. Рис.7.3.1б,в иллюстрируют те же закономерности.

Расчеты показывают, что замена конической головки снаряда выпуклой головкой оживальной формы может сопровождаться либо увеличением, либо уменьшением эффективности изменения порядка пластин в преграде. Однако не обнаружены ситуации, когда оптимальный порядок пластин в преграде отличался бы для этих двух различных форм снаряда.

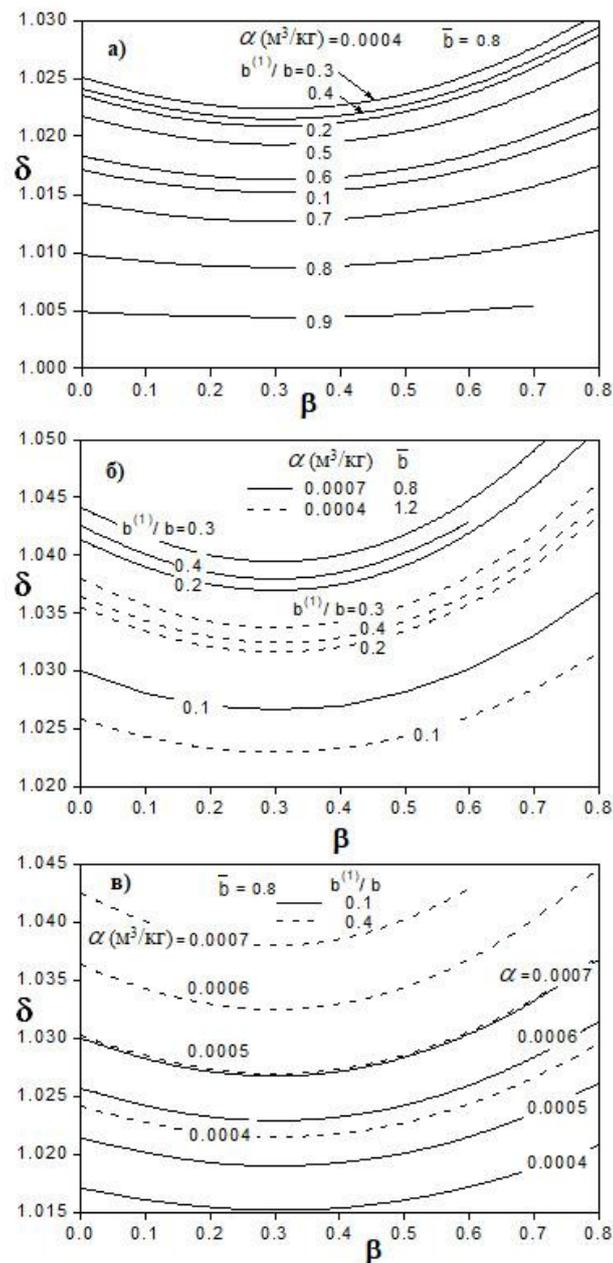


Рис. 7.3.1. Влияние кривизны образующей носовой части ударника на изменение баллистических характеристик из-за перестановки пластин; $\tau = 0,5$

Таким образом, на основе расчетов по приближенной МЛВ можно сделать вывод, что критерий оптимального расположения пластин в щите, ранее определенный для конических ударников, справедлив также и для тел остроносых тел вращения иной формы.

В литературе удалось найти весьма скудные и противоречивые данные (см. Главу 4), которые позволили бы проверить справедливость представленных выше теоретических предсказаний. Расчеты [11] указывают на существенное влияние порядка пластин, изготовленных из различных материалов, на ЗЭ преград. Результаты расчетов [10] подтверждают теоретические выводы. В то время пара экспериментов [9], расчеты [14] и эксперименты [8] приводят к противоположным выводам.

Очевидно, что эти выводы должны быть подтверждены дальнейшими экспериментальными исследованиями и «точными» численными расчетами.

Глава 8

Преграды со слоями в контакте и с большими воздушными зазорами (независимое пробивание слоев). Конические ударники.

Обозначения

$a_i^{(j)}$	параметры, определяющие модель;
$A^{(j)}$	удельная плотность j -й пластины;
$\bar{A}^{(j)}$	см. уравнение (8.3.4);
\bar{A}	безразмерная удельная плотность преграды;
$b^{(j)}$	толщина j -го слоя (номера порядковых слоев приведены в направлении проникания ударника) слоистой преграды;
$E^{(j)}$	см. уравнение (8.1.1);
f_0	функция, см. уравнение (8.3.11);
f_1	функция, см. уравнение (8.3.15);
$F^{(j)}$	см. уравнение (8.1.1);
g	см. уравнение (8.3.10);
k_{cone}	коэффициент в уравнении образующей конуса;
L	длина носовой части ударника;
m	масса ударника;
N	количество слоев;
$T^{(j)}$	см. уравнение (8.1.11);
$T_*^{(1)}, T_{**}^{(1)}$	см. уравнение (8.3.17);
v_{bl}	баллистический предел преграды;
$v_{res}^{(j)}$	остаточная скорость ударника после пробивания j -й пластины;
v_{res}	остаточная скорость ударника после пробивания преграды;
$v_{imp}^{(j)}$	скорость удара на входе в j -ю пластину;
v_{imp}	скорость удара на входе в преграду;
$v_{bl}^{[s,t]}$	БП преграды, в которой пластины первоначально находятся в преграде на местах с номерами s и t ($t > s$);
$v_{bl}^{[t,s]}$	БП преграды с обратным порядком пластин с номерами s и t ;
w_{bl}	см. уравнение (8.1.12);

δ	$= v_{bl}^{[2,1]} / v_{bl}^{[1,2]}$;
δ_{\max}	см. уравнение (8.3.23);
ε	см. уравнение (8.3.6);
ε_{\max}	см. уравнение (8.3.20);
η	см. уравнение (8.1.10);
ξ	см. уравнение (8.3.12);
μ	параметр модели; см. уравнение (8.3.3);
μ_{fr}	коэффициент трения между ударником и преградой;
$\rho^{(j)}$	плотность материала j -й пластины;
$\chi^{(j)}$	$= a_0^{(j)} / a_2^{(j)}$;
БП	баллистический предел БП);
МЛВ	модель локального взаимодействия.

В Главе 8 на основе двучленной МЛВ исследуются защитные свойства многослойных преград со слоями разных механических свойств в условиях, когда не учитывается одновременное взаимодействие ударника с несколькими пластинами. Последнее предположение более или менее справедливо, если длина ударника намного меньше толщины пластин. Для МЛВ это предположение соответствует разнесенной преграде, когда ширина воздушных зазоров больше, чем длина ударника L . Основное содержание главы относится к ударникам конической формы. Целью анализа является определение оптимального порядка пластин, выбираемых из заданного набора.

8.1 Общие соотношения для ударника в форме заостренного тела вращения.

Формулы, полученные в настоящем разделе, можно вывести, исходя из общих соотношений для многослойных преград, представленных выше. Однако, в дальнейшем изложении мы используем более простой и наглядный метод. Поскольку пластины в преграде пробиваются независимо друг от друга, мы можем представить модель СП как совокупность двух суб-моделей: первая описывает проникание в отдельную пластину:

$$v_{res}^{(j)2} = E^{(j)} v_{imp}^{(j)2} - F^{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (8.1.1)$$

а вторая – связь между остаточной скоростью после перфорации некоторой пластины $v_{res}^{(j)}$, скоростью на входе в следующую пластину $v_{imp}^{(N+1)}$, скоростью удара по преграде в целом v_{imp} и скоростью выхода из преграды v_{res} (см. Рис. 8.1.1):

$$v_{res}^{(j)} = v_{imp}^{(j+1)}, \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad v_{res}^{(0)} = v_{imp}^{(1)} = v_{imp}, \quad v_{res}^{(N)} = v_{imp}^{(N+1)} = v_{res} \quad (8.1.2)$$

Для дальнейшего уравнение (8.1.1) с использованием соотношений (8.1.2) удобно переписать также в виде:

$$v_{imp}^{(j+1)2} = E^{(j)} v_{imp}^{(j)2} - F^{(j)}, \quad j = 1 \div N, \quad (8.1.3)$$

Модель (8.1.1) охватывает как МЛВ, так и модель (1.3.6).

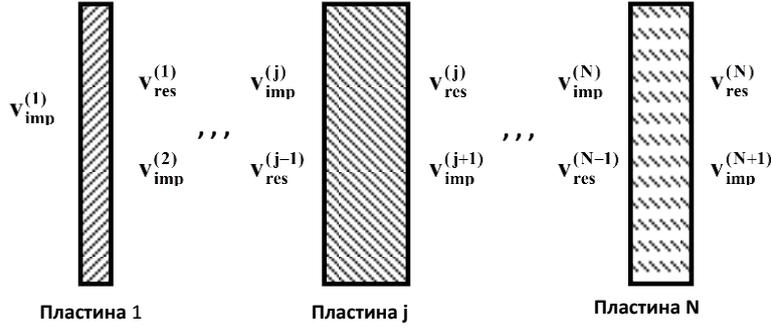


Рис.8.1.1. К модели многослойной преграды с большими воздушными зазорами.

Из соотношений (8.1.1) и (8.1.2) можно получить соотношение между скоростью удара по преграде $v_{imp}^{(j)} = v_{imp}^{(j)}$ и остаточной скоростью $v_{res}^{(j)} = v_{res}^{(j)}$:

$$v_{imp}^{(N+1)2} = \left[\prod_{j=1}^N E^{(j)} \right] v_{imp}^{(1)2} - \sum_{j=1}^{N-1} F^{(j)} \prod_{v=j+1}^N E^{(v)} - F^{(N)}, \quad N \geq 2, \quad (8.1.4)$$

Справедливость формулы (8.1.4) докажем по индукции. Запишем уравнение (8.1.3) для $j=1$ и $j=2$:

$$v_{imp}^{(2)2} = E^{(1)} v_{imp}^{(1)2} - F^{(1)}, \quad v_{imp}^{(3)2} = E^{(2)} v_{imp}^{(2)2} - F^{(2)} \quad (8.1.5)$$

и исключим $v_{imp}^{(2)}$. В результате получим:

$$v_{imp}^{(3)2} = E^{(1)} E^{(2)} v_{imp}^{(1)2} - E^{(2)} F^{(1)} - F^{(2)} \quad (8.1.6)$$

Так как уравнение (8.1.4) для $N=2$ дает ту же формулу, то заключаем, что оно справедливо для $N=2$.

Предположим, что уравнение (8.1.4) справедливо для N -слойной преграды ($N > 2$) и докажем его справедливость для преграды, состоящей из $N+1$ пластины. Другими словами, мы предполагаем, что уравнение (8.1.4) справедливо для преграды, состоящей из первых N пластин, и доказываем, используя уравнение (8.1.3), что соотношение (8.1.4) справедливо для всей преграды.

Уравнение (8.1.3) для $j = N+1$ таково:

$$v_{imp}^{(N+2)2} = E^{(N+1)} v_{imp}^{(N+1)2} - F^{(N+1)}, \quad j = 1 \div N, \quad (8.1.7)$$

Подставляя $v_{imp}^{(N+1)}$ из уравнения (8.1.4) в уравнение (8.1.7), находим, что:

$$v_{imp}^{(N+2)2} = E^{(N+1)} \left[\prod_{j=1}^N E^{(j)} v_{imp}^{(1)2} - \sum_{j=1}^{N-1} F^{(j)} \prod_{v=j+1}^N E^{(v)} - E^{(N+1)} F^{(N)} - F^{(N+1)} \right] - E^{(N+1)} F^{(N)} - F^{(N+1)} = \left[\prod_{j=1}^{N+1} E^{(j)} v_{imp}^{(1)2} - \sum_{j=1}^N F^{(j)} \prod_{v=j+1}^{N+1} E^{(v)} - F^{(N+1)} \right]. \quad (8.1.8)$$

Так как формула для $v_{imp}^{(N+2)}$ из уравнения (8.1.8) совпадает с формулой (8.1.4) после замены N на $N+1$, то, в силу заключения метода математической индукции, можно сделать вывод, что уравнение (8.1.4) справедливо для произвольных значений N .

Подставляя $v_{imp}^{(N+1)} = 0$ и $v_{imp}^{(1)} = v_{bl}$ в уравнение (8.1.4), получаем формулу для БП преграды v_{bl} :

$$v_{bl}^2 = \left[\prod_{j=1}^N \frac{1}{E^{(j)}} \right] \cdot \left[\sum_{j=1}^{N-1} F^{(j)} \prod_{\nu=j+1}^N E^{(\nu)} + F^{(N)} \right] = \sum_{j=1}^N F^{(j)} \prod_{\nu=1}^j \frac{1}{E^{(\nu)}}, \quad (8.1.9)$$

Формулу (8.1.9) можно найти в работах [12-13].

В случае конического ударника из соотношений (1.4.20), (1.4.23) и (1.4.24) вытекают формулы:

$$E^{(j)} = \frac{I}{T^{(j)}}, \quad F^{(j)} = \eta \chi^{(j)} \left[1 - \frac{1}{T^{(j)}} \right], \quad \chi^{(j)} = \frac{a_0^{(j)}}{a_2^{(j)}}, \quad \eta = \frac{k_{cone}^2 + 1}{k_{cone}^2}, \quad (8.1.10)$$

$$T^{(j)} = \exp \left(\frac{2\pi a_2^{(j)} b^{(j)} L^2 k_{cone}^3 (k_{cone} + \mu_{fr})}{m(k_{cone}^2 + 1)} \right) \quad (8.1.11)$$

и уравнение (8.1.9) можно переписать в форме:

$$w_{bl} = \sum_{j=1}^N \chi^{(j)} [T^{(j)} - 1] \prod_{\nu=0}^{j-1} T^{(\nu)}, \quad T^{(0)} = 1, \quad w_{bl} = \frac{1}{\eta} v_{bl}^2 \quad (8.1.12)$$

8.2 Оптимизация последовательности пластин в преграде

Рассмотрим, как меняется БП преграды, если соседние пластины с номерами s и $s+1$ поменять местами. Прежде всего, перепишем формулу (8.1.12) таким образом, чтобы отделить члены с верхними индексами s и $s+1$ от суммы:

$$w_{bl}^{[s,s+1]} = U_{1 \div s-1} + U_{s \div s+1} + U_{s+2} + U_{s+3 \div N}, \quad (8.2.1)$$

где

$$U_{1 \div s-1} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{s-1} \chi^{(j)} [T^{(j)} - 1] \prod_{\nu=0}^{j-1} T^{(\nu)} & \text{если } s > 1 \\ 0 & \text{если } s = 1 \end{cases}, \quad (8.2.2)$$

$$U_{s \div s+1} = \{ \chi^{(s)} [T^{(s)} - 1] + \chi^{(s+1)} [T^{(s+1)} - 1] T^{(s)} \} \prod_{\nu=0}^{s-1} T^{(\nu)}, \quad (8.2.3)$$

$$, U_{s+2} = \begin{cases} \chi^{(s+2)} [T^{(s+2)} - 1] T^{(s)} T^{(s+1)} \prod_{\nu=0}^{s-1} T^{(\nu)} & \text{если } s \leq N-2 \\ 0 & \text{если } s = N-1 \end{cases} \quad (8.2.4)$$

$$U_{s+3\div N} = \begin{cases} T^{(s)}T^{(s+1)} \sum_{j=s+3}^N \chi^{(j)} [T^{(j)} - 1] \prod_{\substack{0 \leq \nu \leq s-1 \\ s+2 \leq \nu \leq j-1}} T^{(\nu)} & \text{если } s \leq N-3 \\ 0 & \text{если } s > N-3 \end{cases}, \quad (8.2.5)$$

Рассмотрим теперь преграду с обратным порядком пластин s и $s+1$. Формула для БП такой преграды $w_{bl}^{[s+1,s]}$ может быть получена из уравнений (8.2.1)-(8.2.5) перестановкой $T^{(s)} \leftrightarrow T^{(s+1)}$ и $\chi^{(s)} \leftrightarrow \chi^{(s+1)}$, в результате получаем:

$$w_{bl}^{[s+1,s]} = \tilde{U}_{1\div s-1} + \tilde{U}_{s\div s+1} + \tilde{U}_{s+2} + \tilde{U}_{s+3\div N}, \quad (8.2.6)$$

где

$$\tilde{U}_{1\div s-1} = U_{1\div s-1}, \quad \tilde{U}_{s+2} = U_{s+2}, \quad \tilde{U}_{s+3\div N} = U_{s+3\div N}, \quad (8.2.7)$$

$$\tilde{U}_{s\div s+1} = \{ \chi^{(s+1)} [T^{(s+1)} - 1] + \chi^{(s)} [T^{(s)} - 1] T^{(s+1)} \} \prod_{\nu=0}^{s-1} T^{(\nu)}, \quad (8.2.8)$$

Из уравнений (8.2.1), (8.2.6) и (8.2.7) следует:

$$w_{bl}^{[s+1,s]} - w_{bl}^{[s,s+1]} = \tilde{U}_{s\div s+1} - U_{s\div s+1}. \quad (8.2.9)$$

Подставив $U_{s\div s+1}$ и $\tilde{U}_{s\div s+1}$ из уравнений (8.2.3) и (8.2.8), соответственно, в уравнение (8.2.9), получим после некоторых преобразований:

$$w_{bl}^{[s+1,s]} - w_{bl}^{[s,s+1]} = \left\{ [T^{(s)} - 1] [T^{(s+1)} - 1] \prod_{\nu=0}^{s-1} T^{(\nu)} \right\} [\chi^{(s)} - \chi^{(s+1)}]. \quad (8.2.10)$$

Поскольку $T^{(\nu)} > 1$ для всех ν , а также $\eta > 0$, из уравнения (8.2.10) следует, что

$$\text{sign}(v_{bl}^{[s+1,s]} - v_{bl}^{[s,s+1]}) = \text{sign}(\chi^{(s)} - \chi^{(s+1)}). \quad (8.2.11)$$

Таким образом, мы доказали, что если две соседние пластины в многослойной преграде с большими воздушными зазорами, пробиваемой коническим ударником, расположены таким образом, что значение параметра χ для первой пластины больше, чем для второй, то БП преграды может быть повышен путем перестановки этих пластин. Можно легко показать, что максимальный БП преграды достигается, когда пластины расположены в порядке возрастания значений χ . Чтобы доказать последнее утверждение, предположим, что это требование не выполняется, то есть БП для некоторой последовательности пластин максимален, но для некоторого $0 < s < N$ выполняется условие $\chi^{(s)} > \chi^{(s+1)}$. Тогда изменение порядка этих пластин приводит к увеличению БП, что противоречит исходному предположению. Таким образом, утверждение доказано. Очевидно, что минимальный БП достигается, когда пластины расположены в преграде в обратном порядке. Следует отметить, что оптимальный порядок пластин не зависит от их толщины.

Критерий, определяемый формулой (8.2.11) для случая двухслойной преграды, обоснован в работе [1]; попытку найти общее правило оптимальной компоновки пластин в многослойной преграде, установленной выше, можно найти в работе [4].

8.3 Анализ эффективности изменения порядка пластин в двухслойной преграде

Рассмотрим ЗЭ двухслойной пластины с большими воздушными зазорами, пробиваемой коническим ударником. Формулы для БП в случае прямого (оригинального) и обратного порядка пластин определяется, соответственно, формулами, вытекающими из уравнения (8.1.12):

$$w_{bl}^{[1,2]} = \chi^{(1)} [T^{(1)} - 1] + \chi^{(2)} [T^{(2)} - 1] T^{(1)}, \quad (8.3.1)$$

$$w_{bl}^{[2,1]} = \chi^{(2)} [T^{(2)} - 1] + \chi^{(1)} [T^{(1)} - 1] T^{(2)}, \quad (8.3.2)$$

где верхний индекс в круглых скобках соответствует номеру пластины в оригинальной преграде.

Предположив, что

$$a_2^{(j)} = \mu \rho^{(j)}, \quad (8.3.3)$$

где $\rho^{(j)}$ - плотность материала j -й пластины, а μ - параметр модели (значение μ близко к единице), формулу (8.1.11) для $T^{(j)}$ можно записать в форме:

$$T^{(j)} = \exp(\bar{A}^{(j)}), \quad \bar{A}^{(j)} = \frac{2\pi\mu L^2 k_{cone}^3 (k_{cone} + \mu_{fr})}{m(k_{cone}^2 + 1)} A^{(j)}, \quad A^{(j)} = \rho^{(j)} b^{(j)} \quad (8.3.4)$$

где $A^{(j)}$ - удельная плотность j -й пластины.

Пусть

$$\chi^{(1)} > \chi^{(2)}. \quad (8.3.5)$$

Тогда $w_{bl}^{[2,1]} > w_{bl}^{[1,2]}$ и мы можем рассмотреть отношение

$$\varepsilon = w_{bl}^{[2,1]} / w_{bl}^{[1,2]} \quad (8.3.6)$$

в качестве характеристики эффективности перестановки пластин в преграде.

Определим максимальную величину этого параметра, то есть, максимальное значение $\tilde{\varepsilon}$, которое может быть достигнуто при заданной удельной плотности преграды \bar{A} :

$$\bar{A} = \bar{A}^{(1)} + \bar{A}^{(2)}, \quad (8.3.7)$$

Эта проблема может быть сведена к максимизации

$$\varepsilon = \frac{\chi^{(2)} [T^{(2)} - 1] + \chi^{(1)} [T^{(1)} - 1] T^{(2)}}{\chi^{(1)} [T^{(1)} - 1] + \chi^{(2)} [T^{(2)} - 1] T^{(1)}}, \quad (8.3.8)$$

при следующих ограничениях:

$$T^{(1)} T^{(2)} = g, \quad 1 \leq T^{(1)} \leq g, \quad 1 \leq T^{(2)} \leq g, \quad (8.3.9)$$

где

$$g = \exp(\bar{A}), \quad (8.3.10)$$

Подставляя $T^{(2)} = g/T^{(1)}$ в уравнение (8.3.8), получаем, после несложных преобразований, следующую задачу:

$$\varepsilon = f_0(T^{(1)}) = \frac{g(1-\xi) + (g\xi-1)T^{(1)}}{(\xi-1)T^{(1)2} + (g-\xi)T^{(1)}} \rightarrow \max \quad (8.3.11)$$

где

$$\xi = \chi^{(1)}/\chi^{(2)} > 1 \quad (8.3.12)$$

g задано и

$$1 \leq T^{(1)} \leq g. \quad (8.3.13)$$

Чтобы исследовать эту задачу, вычислим первую производную:

$$f_0'(T^{(1)}) = \frac{(1-\xi)f_1(T^{(1)})}{[(\xi-1)T^{(1)2} + (g-\xi)T^{(1)}]^2}, \quad (8.3.14)$$

где

$$f_1(T^{(1)}) = (g\xi-1)T^{(1)2} - 2g(\xi-1)T^{(1)} - g(g-\xi). \quad (8.3.15)$$

Уравнение $f_1(T^{(1)}) = 0$ имеет два корня:

$$T_*^{(1)} = \frac{\sqrt{g\xi} + g}{\sqrt{g\xi} + 1}, \quad T_{**}^{(1)} = 1 - \frac{g-1}{\sqrt{g\xi} - 1}. \quad (8.3.16)$$

Поскольку $g > 1$ и $\xi > 1$, можно сделать вывод о том, что корень $T_{**}^{(1)} < 1$, то есть, находится вне области, определяемой условием (8.3.13). Формула для корня $T_*^{(1)}$ может быть записана в двух формах:

$$T_*^{(1)} = 1 + \frac{g-1}{\sqrt{g\xi} + 1}, \quad T_*^{(1)} = g - \frac{(g-1)\sqrt{g\xi}}{\sqrt{g\xi} + 1}. \quad (8.3.17)$$

Очевидно, что этот корень удовлетворяет ограничениям (8.3.13). Поскольку на границах интервала $[1, g]$:

$$f_1(1) = -(g-1)^2 < 0, \quad f_1(g) = g\xi(g-1)^2 > 0, \quad (8.3.18)$$

то $f_1(T^{(1)}) < 0$, когда $1 \leq T^{(1)} < T_*^{(1)}$, и $f_1(T^{(1)}) > 0$, когда $T_*^{(1)} < T^{(1)} \leq g$. Следовательно, как видно из уравнения (8.3.14), функция $f_0(T^{(1)})$ возрастает в интервале $1 \leq T^{(1)} < T_*^{(1)}$ и убывает при $T_*^{(1)} < T^{(1)} \leq g$. Максимум этой функции достигается в точке:

$$T_{\max}^{(1)} = T_*^{(1)} = \frac{\sqrt{g\xi} + g}{\sqrt{g\xi} + 1}. \quad (8.3.19)$$

Максимальное значение ε_{\max} отношения ε может быть получено подстановкой $T^{(1)} = T_{\max}^{(1)}$ в уравнение (8.3.11):

$$\varepsilon_{\max} = \left[\frac{\sqrt{g\xi} + 1}{\sqrt{g} + \sqrt{\xi}} \right]^2, \quad (8.3.20)$$

Уравнение (8.3.20) для ε_{\max} можно переписать в виде:

$$\varepsilon_{\max} = \left[\sqrt{\xi} - \frac{\xi - 1}{\sqrt{g} + \sqrt{\xi}} \right]^2, \quad (8.3.21)$$

Уравнение (8.3.21) показывает, что ε_{\max} возрастает с увеличением удельной плотности преграды $\bar{A} = \ln(g)$. Интересно отметить, что существует предельное значение ε_{\max} , которое может быть получено при $g \rightarrow \infty$, То есть, всегда

$$\varepsilon_{\max} \leq \xi. \quad (8.3.22)$$

Рис. 8.3.1. иллюстрирует полученные результаты: показано изменение параметра

$$\delta_{\max} = \sqrt{\varepsilon_{\max}} = \left[v_{bl}^{[2,1]} / v_{bl}^{[1,2]} \right]_{\max} \quad (8.3.23)$$

в зависимости от безразмерной удельной плотности для двухслойных преград, составленных из пластин, изготовленных из различных материалов, среди которых (см. Табл. 8.3.1) алюминий ($\chi = 0.127 \cdot 10^6 \text{ м}^2/\text{с}^2$), мягкая сталь ($\chi = 0.236 \cdot 10^6 \text{ м}^2/\text{с}^2$) и дюралюминий ($\chi = 0.481 \cdot 10^6 \text{ м}^2/\text{с}^2$). Некоторые кривые обрываются из-за приближенного ограничения сверху на БП. Рисунок 8.3.1 показывает, что ожидаемый эффект растет с ростом различия между значениями параметра χ .

Таблица 8.3.1. Параметры модели [2].

Материал	Динамическая жесткость, $H/\text{м}^2$	Плотность, $\text{кг}/\text{м}^3$	χ $\text{м}^2/\text{с}^2$
Алюминий	350·106	2765	0,127·106
Мягкая сталь	1850·106	7830	0,236·106
Дюралюминий	1330·106	2765	0,481·106

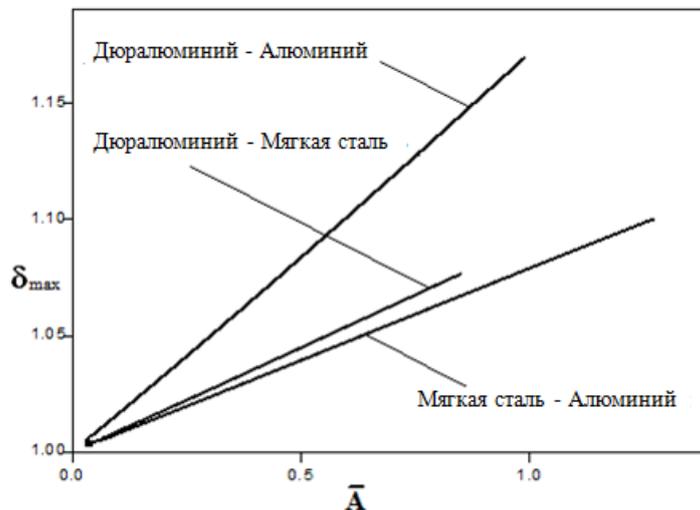


Рис. 8.3.1. Максимальный эффект от перемены мест пластин в двухслойной преграде.

Глава 9

Преграды с большими воздушными зазорами (независимое пробивание слоев). Конические ударники. Оптимизация структуры

Обозначения

\bar{A}	$= A/(b_* \rho_*)$;
b_v	толщина V -го слоя;
b_v^{\min}	нижняя граница для толщины V -й пластины;
b_v^{\max}	верхняя граница для толщины V -й пластины;
BLV	баллистический предел скорости;
B_{\max}	верхняя граница для общей толщины преграды;
\bar{B}_{\max}	$= B_{\max} / L$;
c	параметр, см. уравнение (9.4.5);
k	$= -\eta_1 / \eta_2$;
L	длина носовой части снаряда;
m	масса снаряда;
n	количество материалов, использованных для пластин;
p_v	характеристика материала V -го слоя, см. уравнение (9.1.3);
\bar{p}_v	$= p_v / p_*$;
p_*	характерное значение, см. уравнение (9.1.2);
T_v	параметр, см. уравнение (9.1.2);
v_{bl}	баллистический предел (БП);
v_*	$= 1.m/c$;
\bar{w}	см. уравнение (9.1.2);
\bar{W}	функция, см. уравнение (9.2.3);
x_i	переменная, уравнение (9.2.5);
x_j^{opt}	оптимальное значение x_j ;
α_i	параметр, уравнение (9.2.11);
β_i^{\min}	параметр, уравнение (9.2.11);
β_i^{\max}	параметр, уравнение (9.2.11);
γ_{\min}	параметр, уравнение (9.2.11);
γ_{max}	параметр, уравнение (9.2.11);
η_i	параметр, уравнение (9.2.11);
ϑ	полуугол конической носовой части ударника;
λ_{\max}	параметр, определяемый в уравнении (9.2.11);

μ	параметр модели, см. формулу (9.1.3);
ξ_v	$= p_v / \rho_v$;
$\bar{\xi}_v$	$= \bar{p}_v / \bar{\rho}_v$;
Ξ_j	обозначение j -го материала;
ρ_v	плотность материала V -го слоя;
$\bar{\rho}_v$	$= \rho_v / \rho_*$;
ρ_*	характерное значение плотности, см. формулу (9.1.2);
σ_j	параметр в уравнении (9.4.6), $j = 1, \dots, 7$;
БП	баллистический предел;
УП	удельная плотность.

Замечание. Черточка над параметром указывает на то, что он нормирован с использованием длины носика снаряда L .

9.1 Постановка задачи и математическая модель.

Рассматриваются n материалов (металлы) $\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_n$; здесь и далее нижний индекс указывает порядковый номер материала. Анализируются различные многослойные преграды, которые состоят из расположенных в разном порядке пластин, изготовленных из этих материалов и имеющих различную толщину. Таким образом, структура преграды определяется последовательностями j_1, j_2, \dots, j_n и $b_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_n}$, где j_i это номер материала i -й пластины в направлении проникновения, а b_{j_i} - толщина этой пластины.

Рассматривается высокоскоростное проникание жесткого конического тела вращения в многослойную преграду по нормали к ее поверхности. Анализ основан на модели, представленной в разделе 8.1, в соответствии с которой уравнение для БП в безразмерных переменных можно записать следующим образом:

$$\bar{w} = \sum_{i=1}^n \bar{\xi}_{j_i} (T_{j_i} - 1) \prod_{v=0}^{j_i-1} T_v, \quad T_0 = 1, \quad (9.1.1)$$

где

$$T_v = \exp(\bar{b}_v \bar{\rho}_v), \quad \bar{\rho}_v = \frac{\rho_v}{\rho_*}, \quad \bar{p}_v = \frac{p_v}{p_*}, \quad \bar{b}_v = \frac{b_v}{L}, \quad \bar{w} = \frac{1}{\text{tg } \mathcal{G} (\text{tg } \mathcal{G} + \mu_{fr})} \left(\frac{v_{bl}}{v_*} \right)^2, \quad (9.1.2)$$

$$\xi_v = \frac{p_v}{\rho_v}, \quad \bar{\xi}_v = \frac{\bar{p}_v}{\bar{\rho}_v}, \quad \rho_* = \frac{m \cos \mathcal{G}}{2\pi \mu L^3 \sin^3 \mathcal{G} (\text{tg } \mathcal{G} + \mu_{fr})}, \quad p_* = \frac{m v_*^2}{2\pi L^3}, \quad v_* = 1 \text{ м/с},$$

параметры m, L, \mathcal{G} - это масса, длина конической носовой части и полуугол раствора конуса, соответственно; ρ_v - плотность материала; p_v - это параметр, который определяет механические свойства материала; μ - постоянная; v_{bl} - БП. Уравнение (9.1.1) вытекает из предположения, что взаимодействие между снарядом и v -й пластиной описывается следующей двучленной моделью:

$$d\vec{F} = [\mu \rho_v v_n^2 + p_v] \vec{n}^0 dS, \quad (9.1.3)$$

где $d\vec{F}$ - сила, действующая на части боковой поверхности элемента dS снаряда, который находится в контакте с пластиной, \vec{n}^0 - единичный вектор внутренней

нормали в заданной точке поверхности снаряда, v_n - нормальная компонента мгновенной скорости снаряда. Таким образом, это двучленная модель вида (1.4.1), где $p_v = a_0$, $\mu \rho_v = a_2$, $v_n = uv$ (индексы, которые указывают на порядковый номер слоя, опущены).

Целью является определение последовательности пластин, изготовленных из различных материалов, и их толщин, которые обеспечивают максимальный БП преграды заданной удельной плотности (УП) с учетом ограничений на толщину пластин и общую толщину преграды. Математически задача состоит в нахождении таких последовательностей j_1, j_2, \dots, j_n ($j_r \neq j_s$ для любого $r \neq s$) и $b_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_n}$, что \bar{w} в уравнении (9.1.1) достигает максимума для ударника заданной массы и формы, которые определяются параметрами m, L, \mathcal{G} , а также параметров, определяющих модель.

Максимизация выполняется при следующих ограничениях:

$$\sum_{i=1}^n \bar{b}_{j_i} \bar{\rho}_{j_i} = \bar{A}, \quad \sum_{i=1}^n \bar{b}_{j_i} \leq \bar{B}_{\max}, \quad \bar{b}_{j_i}^{\min} \leq \bar{b}_{j_i} \leq \bar{b}_{j_i}^{\max}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (9.1.4)$$

где

$$\bar{A} = \frac{A}{b_* \rho_*}, \quad \bar{B}_{\max} = \frac{B_{\max}}{L}, \quad \bar{b}_v^{\min} = \frac{b_v^{\min}}{L}, \quad \bar{b}_v^{\max} = \frac{b_v^{\max}}{L}, \quad (9.1.5)$$

A - УП преграды, B_{\max} - верхняя граница общей толщины преграды, b_v^{\min} и b_v^{\max} - нижние и верхние границы для толщин пластин, изготовленных из v -го материала, соответственно, и

$$\begin{aligned} \bar{A} > 0, \quad \bar{B}_{\max} > 0, \quad \sum_{v=1}^n \bar{b}_v^{\min} < \bar{B}_{\max}, \\ 0 \leq \bar{b}_v^{\min} < \bar{b}_v^{\max}, \quad v = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (9.1.6)$$

Сформулированная выше задача включает в себя неизвестные дискретные и непрерывные параметры. Универсальные методы решения таких задач оптимизации отсутствуют. В дальнейшем будет показано, что в общем случае с произвольным числом слоев исходная задача может быть преобразована в задачу, которая допускает решение с использованием методов геометрического программирования, а в случаях, трехслойных и двухслойных преград получены аналитические решения с использованием традиционных методов математического анализа.

9.2 Общий случай

Предположим, что в некоторой многослойной преграде ограничения, заданные уравнением (9.1.4), удовлетворены. Если переставить некоторые пластины, эти ограничения по-прежнему будут выполняться для новой преграды, то есть структура этой преграды остается приемлемой. В Разделе 8.2 доказано, что в случае, когда толщины пластин заданы, максимальный БП преграды достигается, если пластины расположены в порядке возрастания значений параметра ξ_{j_i} , т.е., j_1, j_2, \dots, j_n должны быть выбраны таким образом, что $\xi_{j_1} < \xi_{j_2} < \dots < \xi_{j_n}$. Ясно, что это - порядок материалов слоев в оптимальной преграде. Таким образом, задача максимизации сводится к определению только толщин пластин. Для того, чтобы упростить обозначения, мы предполагаем, что материалы $\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_n$ первоначально

упорядочены таким образом, что $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n$, Тогда критерий оптимизации и ограничения можно переписать следующим образом:

$$\bar{w} = \sum_{i=1}^n \bar{\xi}_i (T_i - 1) \prod_{v=0}^{i-1} T_v, \quad T_0 = 1, \quad (9.2.1)$$

$$\sum_{i=1}^n \bar{b}_i \bar{\rho}_i = \bar{A}, \quad \sum_{i=1}^n \bar{b}_i \leq \bar{B}_{\max}, \quad \bar{b}_i^{\min} \leq \bar{b}_i \leq \bar{b}_i^{\max} \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (9.2.2)$$

После некоторых преобразований выражение для \bar{w} можно записать в следующем виде:

$$\bar{w} = \bar{\xi}_n T_1 T_2 \dots T_n - \bar{\xi}_1 - \bar{W}, \quad \bar{W} = \sum_{i=1}^{n-1} (\bar{\xi}_{i+1} - \bar{\xi}_i) \prod_{v=1}^i T_v, \quad (9.2.3)$$

Так как произведение

$$T_1 T_2 \dots T_n = \exp\left(\sum_{v=1}^n \bar{b}_v \bar{\rho}_v\right) = \exp(\bar{A}), \quad (9.2.4)$$

а \bar{A} задано, задача сводится к минимизации функции \bar{W} ,

Введем новые переменные

$$x_i = \prod_{v=1}^i T_v = \exp\left(\sum_{v=1}^i \bar{b}_v \bar{\rho}_v\right), \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (9.2.5)$$

и исключим переменную \bar{b}_n , используя ограничение на УП. Подставляя

$$\bar{b}_i = \frac{1}{\bar{\rho}_i} \ln\left(\frac{x_i}{x_{i-1}}\right), \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad \bar{b}_n = \frac{\bar{A} - \ln x_{n-1}}{\bar{\rho}_n}, \quad x_0 = 1 \quad (9.2.6)$$

в выражение для функции \bar{W} в уравнении (9.2.3) и в неравенство в уравнении (9.2.2), получаем следующую формулировку модифицированной задачи оптимизации:

$$\bar{W} = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i \rightarrow \min, \quad (9.2.7)$$

$$\beta_1^{\min} \leq x_1 \leq \beta_1^{\max}, \quad \gamma_{\min} \leq x_{n-1} \leq \gamma_{\max}, \quad (9.2.8)$$

$$\beta_i^{\min} \leq x_i / x_{i-1} \leq \beta_i^{\max}, \quad i = 2, 3, \dots, n-1, \quad n > 2, \quad (9.2.9)$$

$$\prod_{i=1}^{n-1} x_i^{\eta_i} \leq \lambda_{\max}, \quad (9.2.10)$$

где

$$\begin{aligned}
\alpha_i &= \bar{\xi}_{i+1} - \bar{\xi}_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \\
\beta_i^{\min} &= \exp(\bar{\rho}_i \bar{b}_i^{\min}), \quad \beta_i^{\max} = \exp(\bar{\rho}_i \bar{b}_i^{\max}), \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \\
\gamma_{\min} &= \exp(\bar{A} - \bar{\rho}_n \bar{b}_n^{\max}), \quad \gamma_{\max} = \exp(\bar{A} - \bar{\rho}_n \bar{b}_n^{\min}), \\
\eta_i &= \frac{1}{\bar{\rho}_i} - \frac{1}{\bar{\rho}_{i+1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad \lambda_{\max} = \exp\left(\bar{B}_{\max} - \frac{\bar{A}}{\bar{\rho}_n}\right).
\end{aligned} \tag{9.2.11}$$

Соотношения (9.2.7)-(9.2.10) формализуются как задача геометрического программирования [3]; для решения таких задач существуют численные методы. Для большинства практически интересных случаев двухслойных и трехслойных преград, решение может быть получено аналитически в явном виде.

После определения оптимальных значений x_1, x_2, \dots, x_{n-1} оптимальные значения \bar{b}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) и критерия \bar{w} можно найти с использованием формул (9.2.3), (9.2.4) и (9.2.6).

9.3 Двухслойные преграды

Если $n = 2$, то из уравнений (9.2.7), (9.2.8) и (9.2.10) вытекает:

$$\bar{W} = \alpha_i x_i \rightarrow \min, \tag{9.3.1}$$

$$\beta_1^{\min} \leq x_1 \leq \beta_1^{\max}, \quad \gamma_{\min} \leq x_1 \leq \gamma_{\max}, \quad x_1^{\eta_1} \leq \lambda_{\max}, \tag{9.3.2}$$

Задача не имеет решения, если оба условия $\eta_1 = 0$ ($\rho_1 = \rho_2$) и $\lambda_{\max} < 1$ ($\bar{B}_{\max} < \bar{A}/\bar{\rho}_2$) выполняются. В противном случае оптимальное решение $x_1^{opt} = x_1^{\min}$ существует, если $x_1^{\min} \leq x_1^{\max}$, где

$$x_1^{\min} = \begin{cases} \max(\beta_1^{\min}, \gamma_{\min}) & \text{если } \eta_1 \geq 0 (\rho_1 \leq \rho_2), \\ \max(\beta_1^{\min}, \gamma_{\min}, \lambda_{\max}^{1/\eta_1}) & \text{если } \eta_1 < 0 (\rho_1 > \rho_2), \end{cases} \tag{9.3.3}$$

$$x_1^{\max} = \begin{cases} \min(\beta_1^{\max}, \gamma_{\max}, \lambda_{\max}^{1/\eta_1}) & \text{если } \eta_1 > 0 (\rho_1 < \rho_2), \\ \min(\beta_1^{\max}, \gamma_{\max}) & \text{если } \eta_1 \leq 0 (\rho_1 \geq \rho_2), \end{cases} \tag{9.3.4}$$

9.4 Трехслойные преграды

Если $n = 3$, то из уравнений (9.2.7) - (9.2.10) следует:

$$\bar{W} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \rightarrow \min, \tag{9.4.1}$$

$$\beta_1^{\min} \leq x_1 \leq \beta_1^{\max}, \quad \gamma_{\min} \leq x_2 \leq \gamma_{\max}, \quad \beta_2^{\min} \leq x_2/x_1 \leq \beta_2^{\max}, \tag{9.4.2}$$

$$x_1^{\eta_1} x_2^{\eta_2} \leq \lambda_{\max}, \tag{9.4.3}$$

Чтобы не останавливаться на громоздких второстепенных деталях, рассмотрим случай, когда ограничения по толщине пластин отсутствуют, т.е.

$$b_i^{\min} = 0, \quad b_i^{\max} = +\infty, \quad i = 1, 2, \tag{9.4.4}$$

В этом случае

$$\beta_1^{\min} = \beta_2^{\min} = 1, \quad \beta_1^{\max} = \beta_2^{\max} = +\infty, \quad (9.4.5)$$

$$\gamma_{\min} = 0, \quad \gamma_{\max} = c, \quad c = \exp(\bar{A}) > 1,$$

и область, определяемая соотношениями (9.4.2), показана на Рис. 9.4.1. Область допустимых значений x_1 и x_2 определяется путем исключения суб-области, в которой неравенство (9.4.3) нарушается. Так как эта процедура приводит к большому количеству различных вариантов области допустимых значений x_1 и x_2 , мы опустим соответствующий детальный анализ и представим только результаты с иллюстрациями типичных ситуаций.

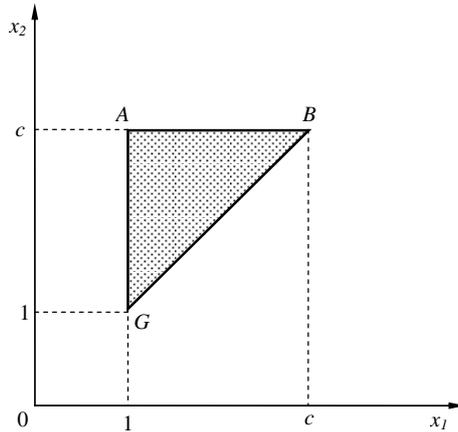


Рис. 9.4.1. Область допустимых значений x_1 и x_2 определяемая соотношениями (9.4.2).

Процедура поиска оптимального решения путем последовательного рассмотрения различных конфигураций в зависимости от значений исходных параметров показана на Рис. 9.4.2-9.4.5. Рис. 9.4.6-9.4.9 иллюстрируют конкретные ситуации, которые рассмотрены в процедуре. На рисунках показана затененная область допустимых значений x_1 и x_2 ; Отсутствие этой области указывает на противоречия в исходных данных и, следовательно, указывает на отсутствие решения. Оптимальные значения x_1 и x_2 показаны на рисунках жирными точками.

На рисунках используются следующие условные обозначения:

$$k = -\frac{\eta_1}{\eta_2}, \quad \sigma_1 = \lambda_{\max}^{1/\eta_1}, \quad \sigma_2 = \lambda_{\max}^{1/\eta_2}, \quad \sigma_3 = \sigma_2^{1/(1-k)}, \quad \sigma_4 = c^{1-k}, \quad (9.4.6)$$

$$\sigma_5 = \left(-\frac{\alpha_1}{k\alpha_2\sigma_2} \right)^{1/(k-1)}, \quad \sigma_6 = \left(\frac{c}{\sigma_2} \right)^{1/k}, \quad \sigma_7 = \sigma_2\sigma_5^k, \quad \sigma_8 = \sigma_2c^k$$

где σ_3 - абсцисса точки пересечения кривой $x_2 = \sigma_2x_1^k$ и прямой $x_2 = x_1$; σ_6 - абсцисса точки на кривой $x_2 = \sigma_2x_1^k$, имеющая ординату $x_2 = c$; σ_5 и σ_7 - абсцисса и ордината, соответственно, точки на гиперболе $x_2 = \sigma_2x_1^k$ ($k < 0$), в которой касательная перпендикулярна прямой $\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 = const$; σ_8 - ордината точки на кривой $x_2 = \sigma_2x_1^k$ с абсциссой $x_1 = c$.

Рассмотрим подробно случай, когда $\eta_1 < 0, \eta_2 < 0$ ($k < 0$) и гипербола $x_2 = \sigma_2/x_1^{|k|}$ пересекается со сторонами AG и BG треугольника ABG (см. Рис. 9.4.6 б-г); случай, когда гипербола проходит через точку (1,1), показан на Рис. 9.4.6а.

Рассмотрим набор параллельных прямых, $\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 = \bar{W}$, Очевидно, что чем

меньше расстояние от начала координат до этой прямой (по нормали к ней), тем меньше значение критерия, \bar{W} . Таким образом, задача сводится к нахождению прямой, имеющей минимальное расстояние от начала координат (далее "минимальная прямая") среди всех прямых $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \bar{W}$, которые проходят через заштрихованную область.

Точка пересечения этой прямой с допустимыми значениями x_1 и x_2 реализует оптимальные значения x_1 и x_2 , а значение \bar{W} , соответствующее этой прямой, является минимальным значением критерия.

Выделим среди прямых $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \bar{W}$ касательную к гиперболе $x_2 = \sigma_2 / x_1^{|k|}$ (DEF на Рис.9.4.6 б-г). Следовательно, σ_5 - абсцисса точки касания (точка E). Три случая должно быть рассмотрено.

Если $\sigma_5 < 1$ (Рис. 9.4.6 б), то минимальная прямая – это прямая $D^*E^*F^*$, которая проходит через точку E^* , где точка E^* является пересечением вертикальной границы допустимой области и гиперболы; следовательно, $x_1^{opt} = 1, x_2^{opt} = \sigma_2$,

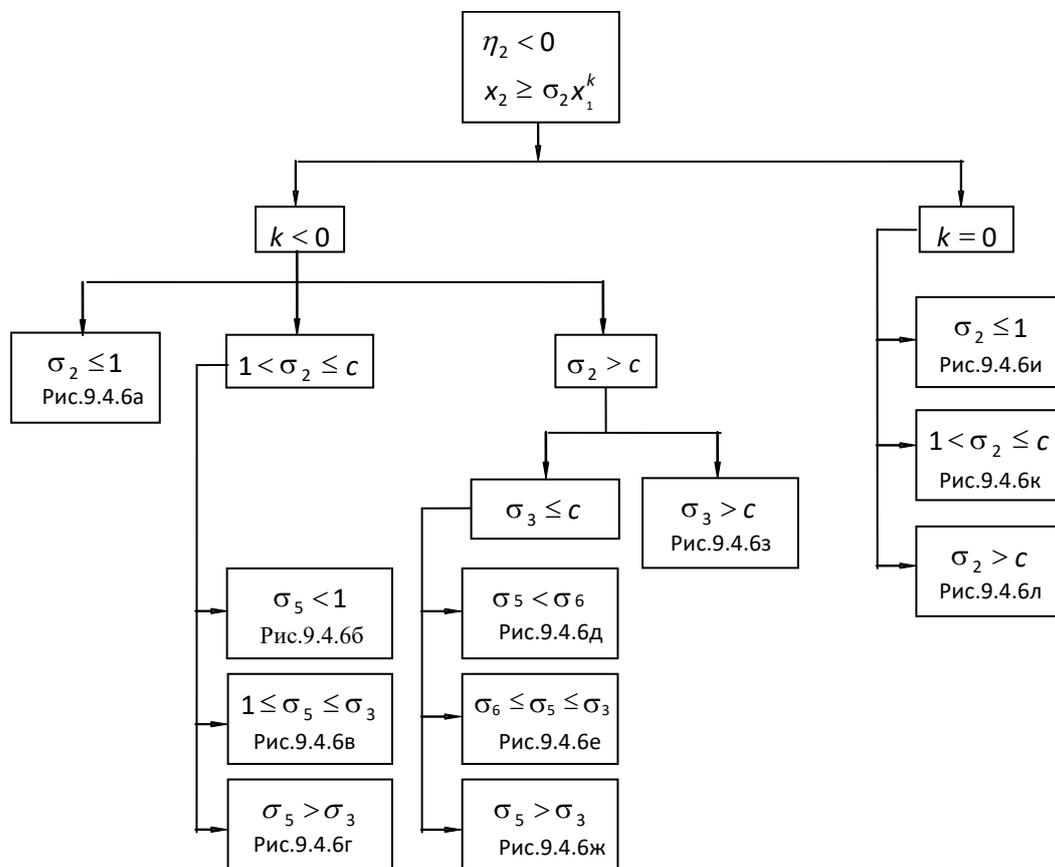


Рис. 9.4.2. Схема поиска решения в случае $\eta_2 < 0, k \leq 0$,

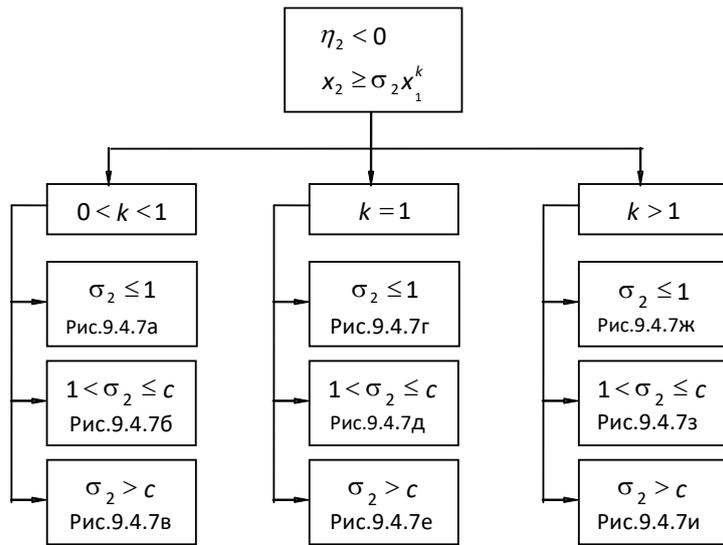


Рис. 9.4.3. Схема поиска решения, если $\eta_2 < 0, k > 0$,

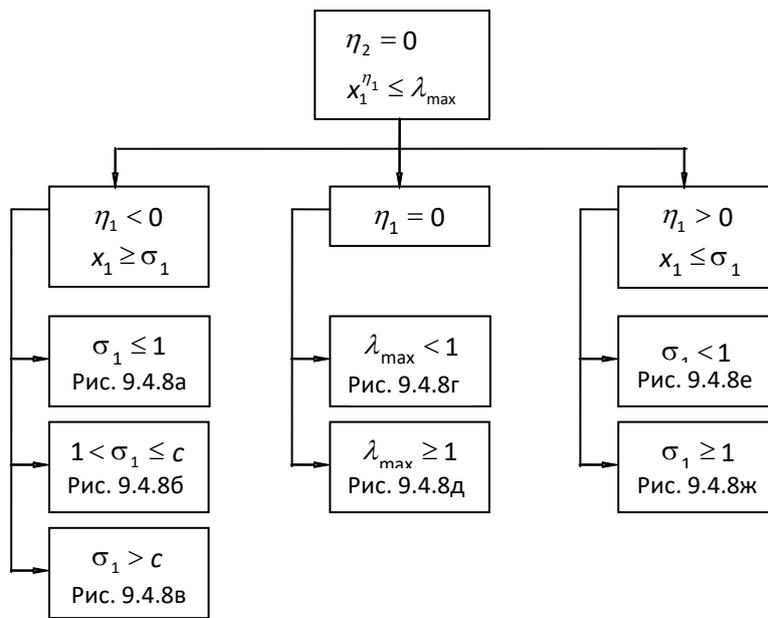


Рис. 9.4.4. Схема поиска решения, если $\eta_2 = 0$,

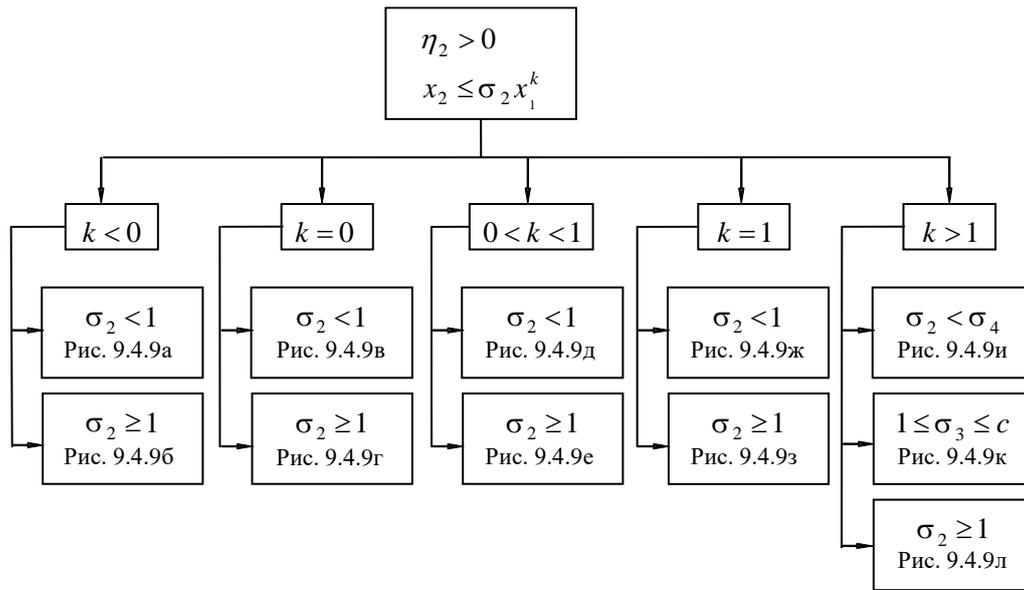


Рис. 9.4.5. Схема поиска решения, если $\eta_2 > 0$,

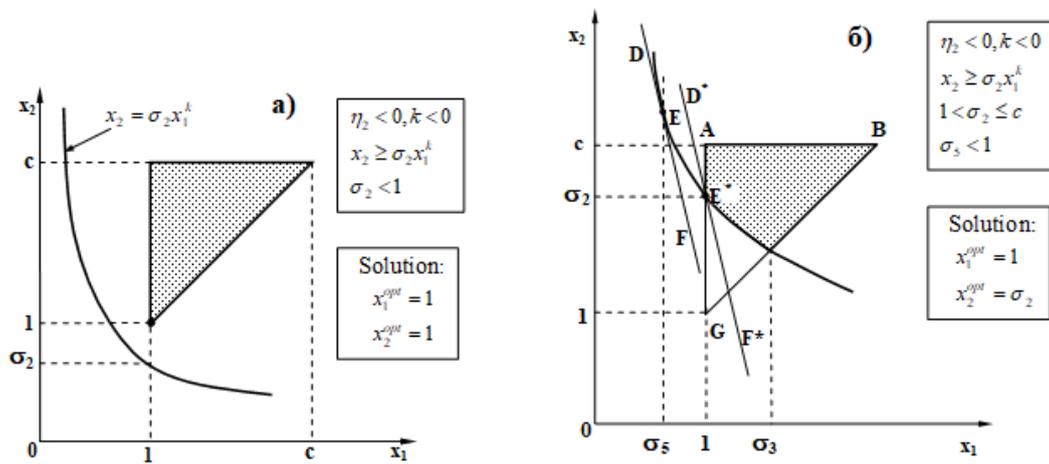


Рис. 9.4.6. Иллюстрация решения в случае $\eta_2 < 0, k \leq 0$.

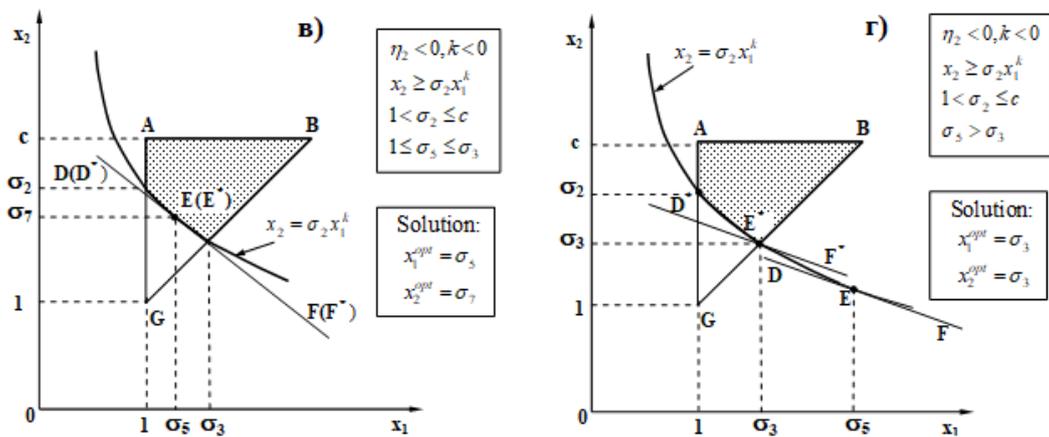


Рис. 9.4.6. Продолжение.

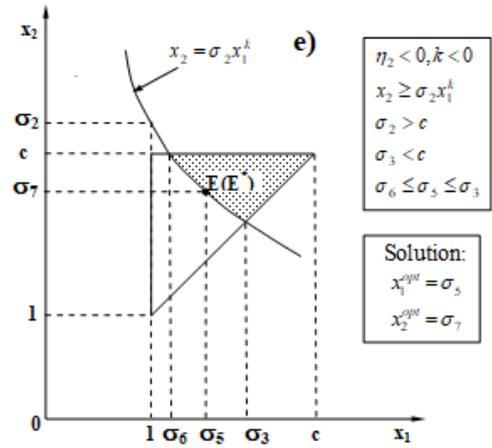
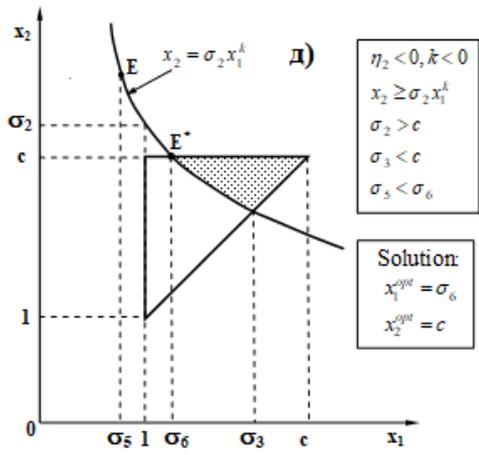


Рис. 9.4.6. Продолжение.

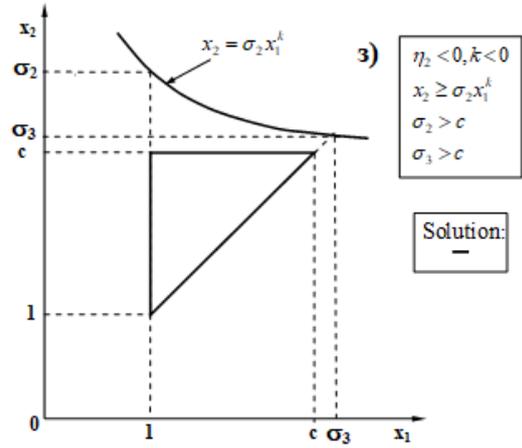
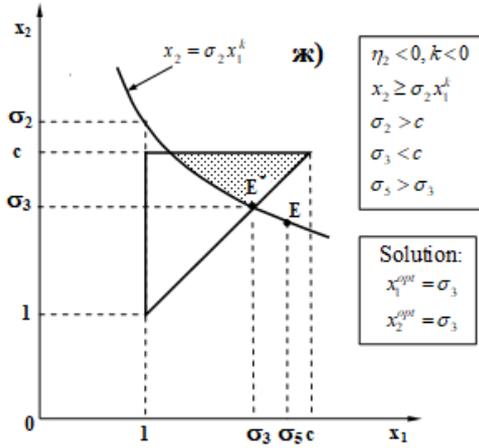


Рис. 9.4.6. Продолжение.

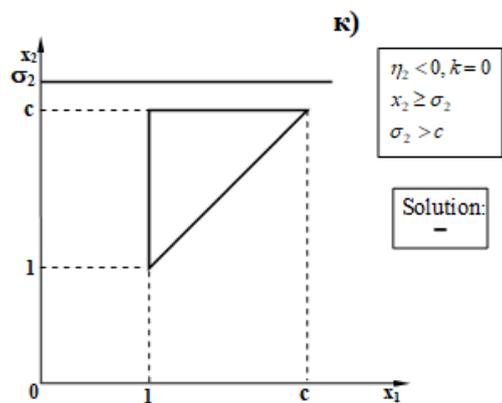
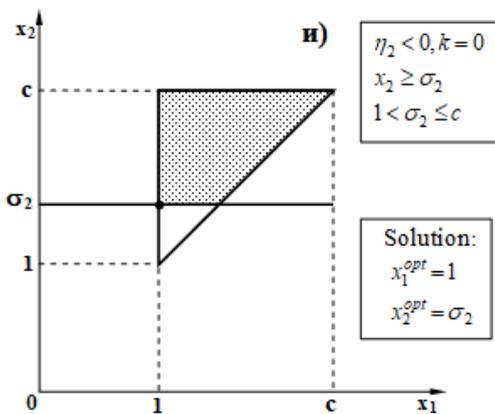


Рис. 9.4.6. Продолжение.

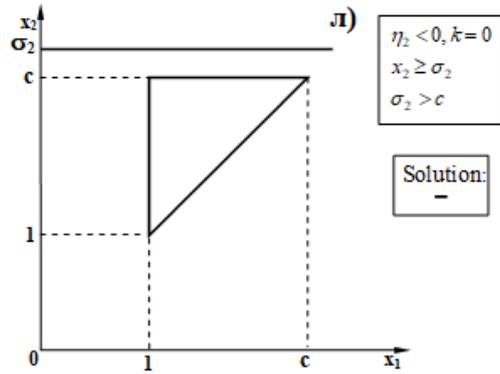


Fig.9.4.6. Продолжение.

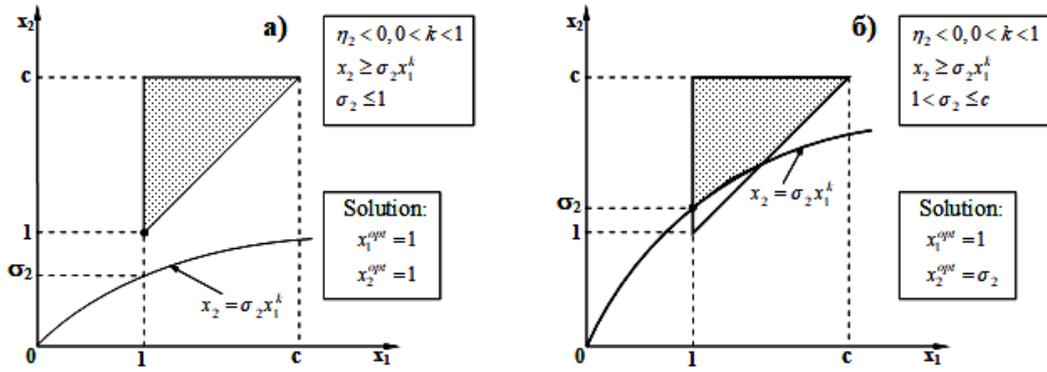


Рис. 9.4.7. Иллюстрация решения в случае $\eta_2 < 0, k > 0$

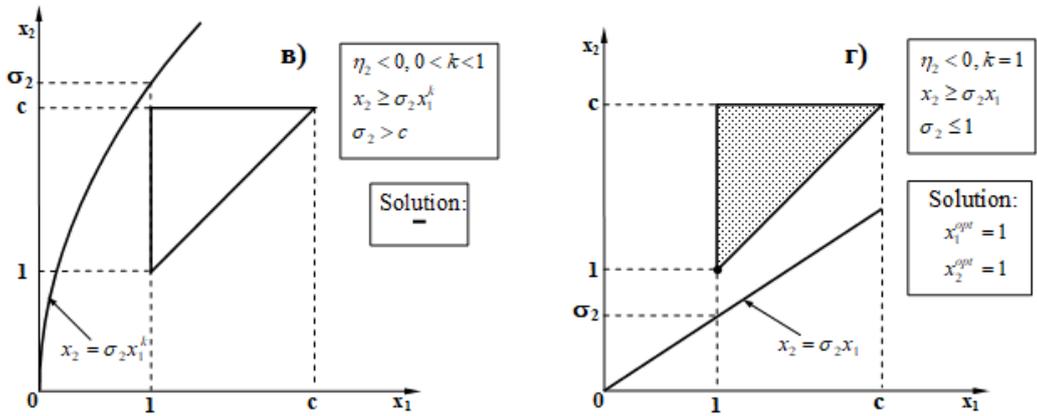


Рис. 9.4.7. Продолжение

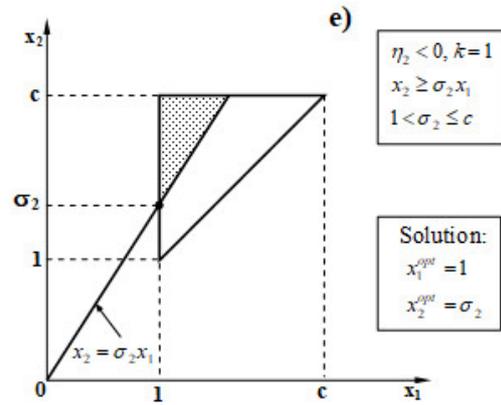
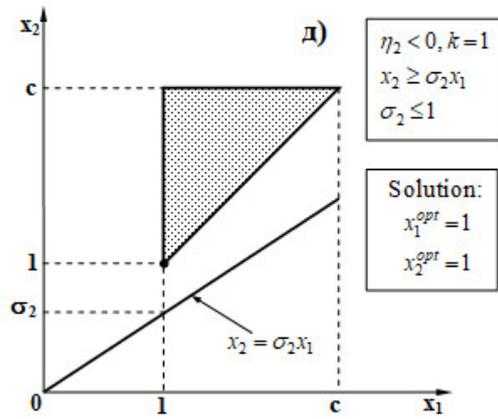


Рис. 9.4.7. Продолжение.

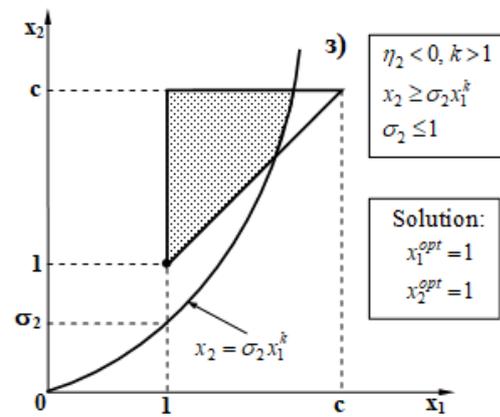
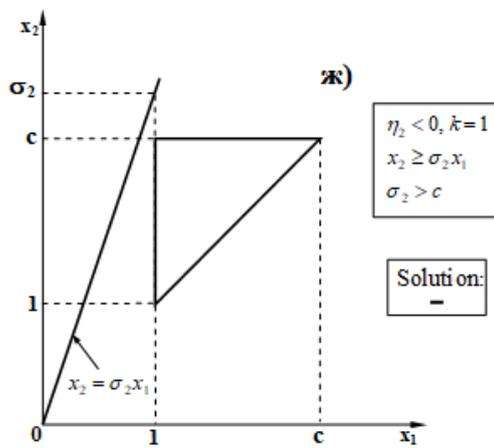


Рис. 9.4.7. Продолжение.

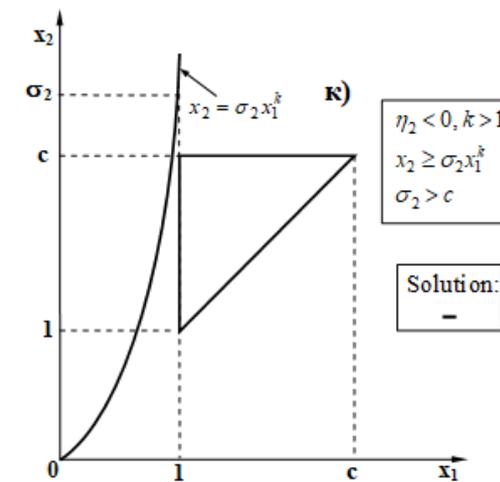
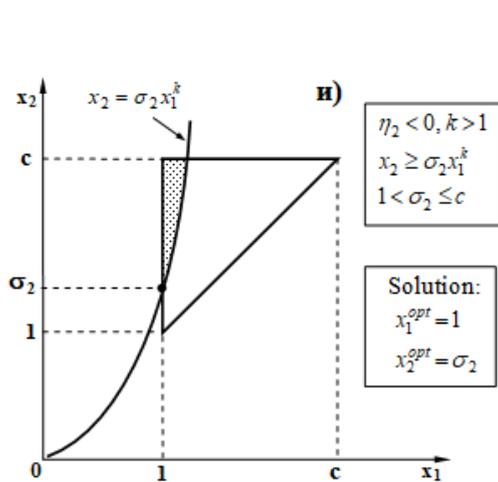


Рис. 9.4.7. Продолжение.

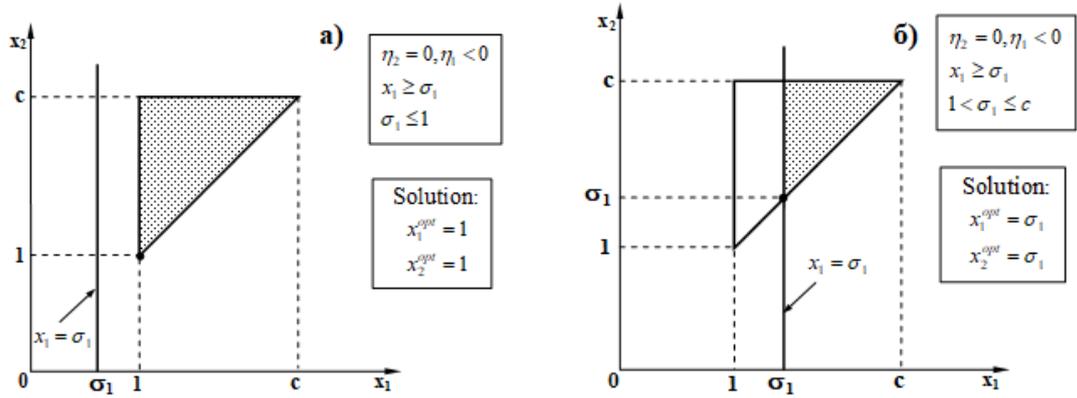


Рис. 9.4.8. Иллюстрация решения в случае $\eta_2 = 0$,

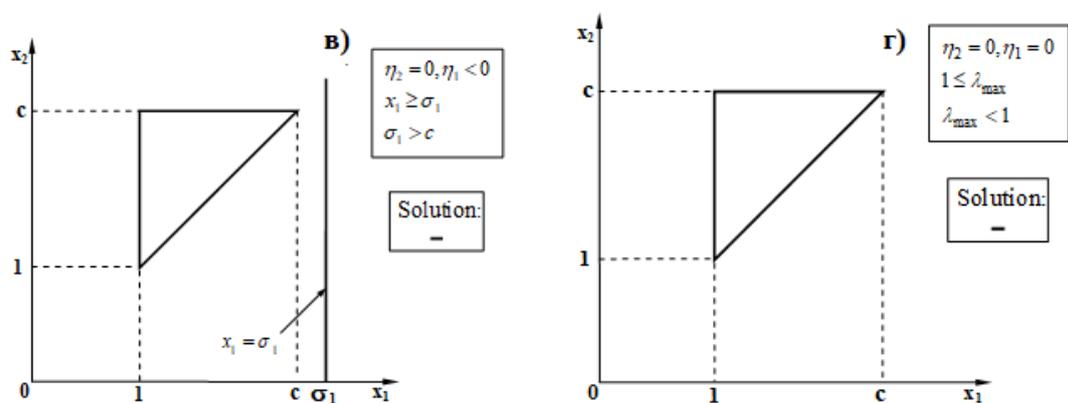


Рис. 9.4.8. Продолжение.

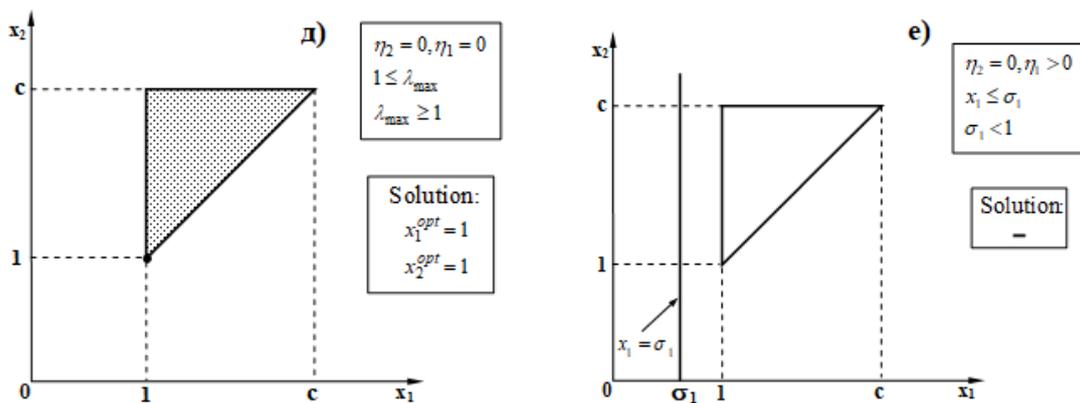


Рис. 9.4.8. Продолжение.

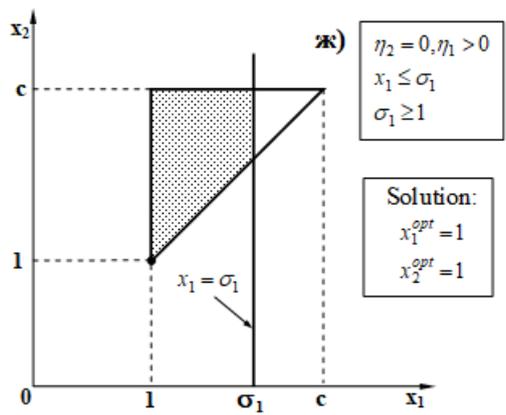


Рис. 9.4.8. Продолжение.

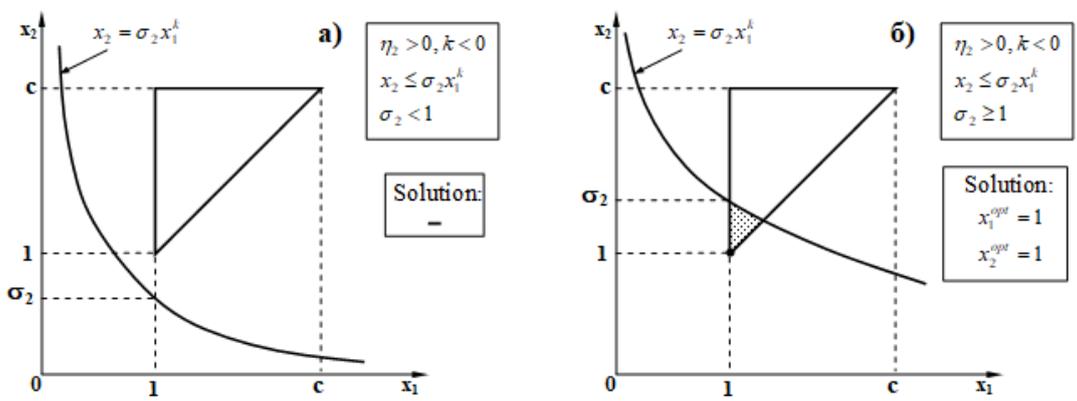


Рис. 9.4.9. Иллюстрация решения в случае $\eta_2 > 0$

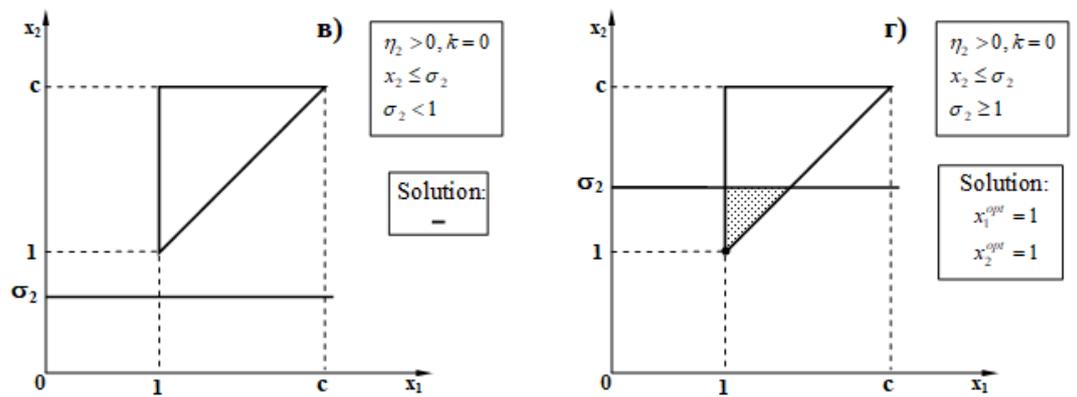


Рис. 9.4.9. Продолжение.

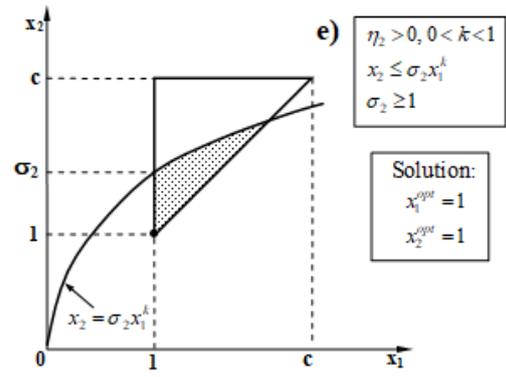
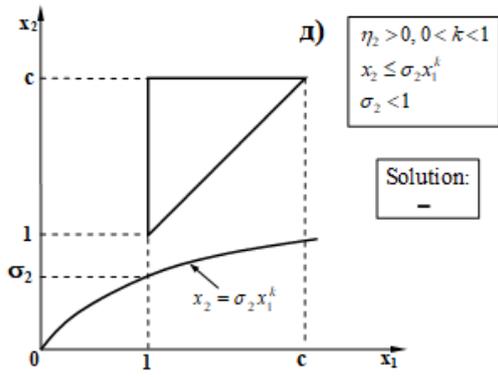


Рис. 9.4.9. Продолжение.

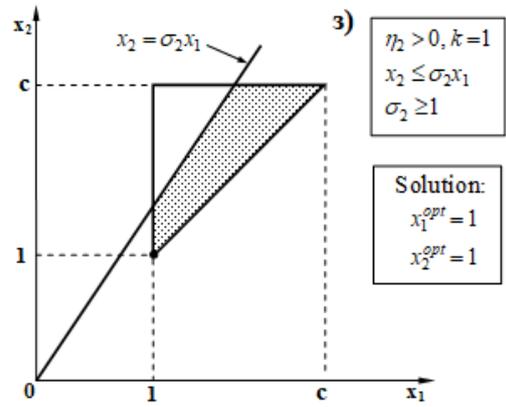
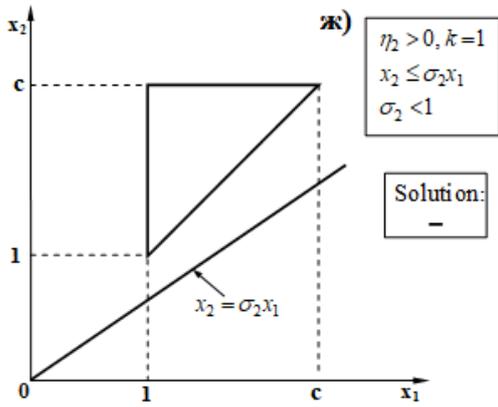


Рис. 9.4.9. Продолжение.

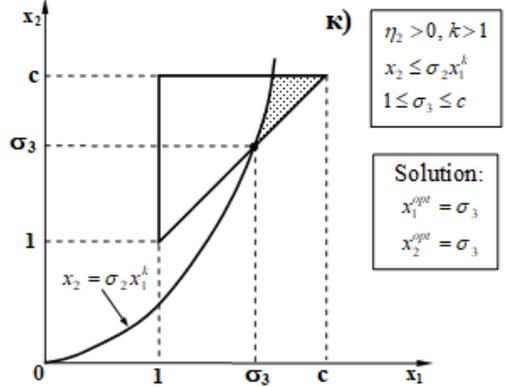
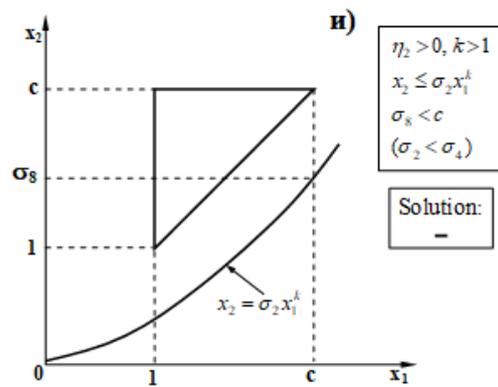


Рис. 9.4.9. Продолжение.

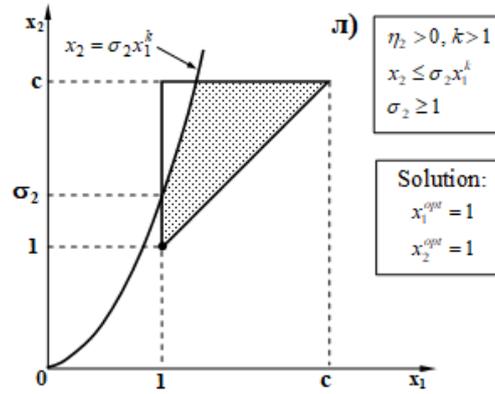


Рис. 9.4.9. Продолжение.

Таблица 9.4.1. Краткая характеристика решений, показанных на Рис. 9.4.6-9.4.9.

Рисунок	η_2	η_1, k	σ_1, σ_2	Другие параметры	x_1^{opt}	x_2^{opt}
9.4.6a	$\eta_2 < 0$	$k < 0$	$\sigma_2 \leq 1$		1	1
9.4.6b	$\eta_2 < 0$	$k < 0$	$1 < \sigma_2 \leq c$	$\sigma_5 < 1$	1	σ_2
9.4.6c	$\eta_2 < 0$	$k < 0$	$1 < \sigma_2 \leq c$	$1 \leq \sigma_5 \leq \sigma_3$	σ_5	σ_7
9.4.6d	$\eta_2 < 0$	$k < 0$	$1 < \sigma_2 \leq c$	$\sigma_3 < \sigma_5$	σ_3	σ_3
9.4.6e	$\eta_2 < 0$	$k < 0$	$c < \sigma_2$	$\sigma_3 \leq c,$ $\sigma_5 < \sigma_6$	σ_6	c
9.4.6f	$\eta_2 < 0$	$k < 0$	$c < \sigma_2$	$\sigma_3 \leq c,$ $\sigma_6 \leq \sigma_5 \leq \sigma_3$	σ_5	σ_7
9.4.6g	$\eta_2 < 0$	$k < 0$	$c < \sigma_2$	$\sigma_3 \leq c,$ $\sigma_3 < \sigma_5$	σ_3	σ_3
9.4.6h	$\eta_2 < 0$	$k < 0$	$c < \sigma_2$	$c < \sigma_3$	–	–
9.4.6i	$\eta_2 < 0$	$k = 0$	$\sigma_2 \leq 1$		1	1
9.4.6j	$\eta_2 < 0$	$k = 0$	$1 < \sigma_2 \leq c$		1	σ_2
9.4.6k	$\eta_2 < 0$	$k = 0$	$c < \sigma_2$		–	–
9.4.7a	$\eta_2 < 0$	$0 < k < 1$	$\sigma_2 \leq 1$		1	1
9.4.7b	$\eta_2 < 0$	$0 < k < 1$	$1 < \sigma_2 \leq c$		1	σ_2
9.4.7c	$\eta_2 < 0$	$0 < k < 1$	$c < \sigma_2$		–	–
9.4.7d	$\eta_2 < 0$	$k = 1$	$\sigma_2 \leq 1$		1	1
9.4.7e	$\eta_2 < 0$	$k = 1$	$1 < \sigma_2 \leq c$		1	σ_2
9.4.7f	$\eta_2 < 0$	$k = 1$	$c < \sigma_2$		–	–
9.4.7g	$\eta_2 < 0$	$k > 1$	$\sigma_2 \leq 1$		1	1
9.4.7h	$\eta_2 < 0$	$k > 1$	$1 \leq \sigma_2 \leq c$		1	σ_2
9.4.7i	$\eta_2 < 0$	$k > 1$	$c < \sigma_2$		–	–
9.4.8a	$\eta_2 = 0$	$\eta_1 < 0$	$\sigma_1 \leq 1$		1	1
9.4.8b	$\eta_2 = 0$	$\eta_1 < 0$	$1 < \sigma_1 \leq c$		σ_1	σ_1
9.4.8c	$\eta_2 = 0$	$\eta_1 < 0$	$c < \sigma_1$		–	–
9.4.8d	$\eta_2 = 0$	$\eta_1 = 0$		$\lambda_{\max} < 1$	–	–
9.4.8e	$\eta_2 = 0$	$\eta_1 = 0$		$\lambda_{\max} \geq 1$	1	1

Рисунок	η_2	η_1, k	σ_1, σ_2	Другие параметры	x_1^{opt}	x_2^{opt}
9.4.8f	$\eta_2 = 0$	$\eta_1 > 0$	$\sigma_1 < 1$		–	–
9.4.8g	$\eta_2 = 0$	$\eta_1 > 0$	$\sigma_1 \geq 1$		1	1
9.4.9a	$\eta_2 > 0$	$k < 0$	$\sigma_2 < 1$		–	–
9.4.9b	$\eta_2 > 0$	$k < 0$	$\sigma_2 \geq 1$		1	1
9.4.9c	$\eta_2 > 0$	$k = 0$	$\sigma_2 < 1$		–	–
9.4.9d	$\eta_2 > 0$	$k = 0$	$\sigma_2 \geq 1$		1	1
9.4.9e	$\eta_2 > 0$	$0 < k < 1$	$\sigma_2 < 1$		–	–
9.4.9f	$\eta_2 > 0$	$0 < k < 1$	$\sigma_2 \geq 1$		1	1
9.4.9g	$\eta_2 > 0$	$k = 1$	$\sigma_2 < 1$		–	–
9.4.9h	$\eta_2 > 0$	$k = 1$	$\sigma_2 \geq 1$		1	1
9.4.9i	$\eta_2 > 0$	$k > 1$	$\sigma_2 < \sigma_4$		–	–
9.4.9j	$\eta_2 > 0$	$k > 1$		$1 \leq \sigma_3 \leq c$	σ_3	σ_3
9.4.9k	$\eta_2 > 0$	$k > 1$	$\sigma_2 \geq 1$		1	1

Таблица 9.4.2. Решение задачи оптимизации для трехслойной преграды.

Условия	Решение
$\eta_2 = 0, \eta_1 = 0, \lambda_{\max} < 1$	Не существует
$\eta_2 = 0, \eta_1 > 0, \sigma_1 < 1$	То же
$\eta_2 = 0, \eta_1 < 0, c < \sigma_1$	То же
$\eta_2 > 0, k \leq 1, \sigma_2 < 1$	То же
$\eta_2 > 0, k > 1, \sigma_2 < \sigma_4$	То же
$\eta_2 < 0, k \geq 0, c < \sigma_2$	То же
$\eta_2 < 0, k < 0, c < \sigma_2, c < \sigma_3$	То же
$\eta_2 = 0, \eta_1 = 0, \lambda_{\max} \geq 1$	$x_1^{opt} = x_2^{opt} = 1$
$\eta_2 = 0, \eta_1 > 0, \sigma_1 \geq 1$	То же
$\eta_2 > 0, \sigma_2 \geq 1$	То же
$\eta_2 < 0, \sigma_2 \leq 1$	То же
$\eta_2 = 0, \eta_1 < 0, \sigma_1 \leq 1$	То же
$\eta_2 = 0, \eta_1 < 0, 1 < \sigma_1 \leq c$	$x_1^{opt} = x_2^{opt} = \sigma_1$
$\eta_2 > 0, k > 1, 1 \leq \sigma_3 \leq c$	$x_1^{opt} = x_2^{opt} = \sigma_3$
$\eta_2 < 0, k < 0, 1 < \sigma_2 \leq c, \sigma_3 < \sigma_5$	То же
$\eta_2 < 0, k < 0, c < \sigma_2, \sigma_3 \leq c, \sigma_3 < \sigma_5$	То же
$\eta_2 < 0, k > 0, 1 < \sigma_2 \leq c$	$x_1^{opt} = 1, x_2^{opt} = \sigma_2$
$\eta_2 < 0, k < 0, 1 < \sigma_2 \leq c, \sigma_5 \leq 1$	То же
$\eta_2 < 0, k < 0, 1 < \sigma_2 \leq c, 1 \leq \sigma_5 \leq \sigma_3$	$x_1^{opt} = \sigma_5, x_2^{opt} = \sigma_7$
$\eta_2 < 0, k < 0, c < \sigma_2, \sigma_3 \leq c, \sigma_6 \leq \sigma_5 \leq \sigma_3$	То же
$\eta_2 < 0, k < 0, c < \sigma_2, \sigma_3 \leq c, \sigma_5 < \sigma_6$	$x_1^{opt} = \sigma_6, x_2^{opt} = c$

Если $1 \leq \sigma_5 \leq \sigma_3$ (Рис. 9.4.6в), то минимальная прямая $D^*E^*F^*$ является касательной к гиперболе (точка E^*) на границе допустимой области; вследствие этого $x_1^{opt} = \sigma_5, x_2^{opt} = \sigma_7$.

Если $\sigma_5 > \sigma_3$ (Рис. 9.4.6г), то минимальная прямая $D^*E^*F^*$ проходит через точку E^* , являющуюся точкой пересечения отрезка BG и гиперболы; следовательно, $x_1^{opt} = x_2^{opt} = \sigma_3$.

Ситуации, показанные на Рис.9.4.6-9.4.9, описаны в таблице 9.4.1. Для того, чтобы представить решение в сжатой и систематической форме, удобно объединить несколько наборов решений. Например, решения, показанные на Рис. 9.4.9а, 9.4.9в, 9.4.9д, 9.4.9ж, можно представить более кратко следующим образом: $\eta_2 > 0$, $k \leq 1$, $\sigma_2 < 1$. Решения, которые представлены в таком преобразованном виде, приведены в Таблице 9.4.2.

Литература к Части 3

1. Баранов А.В., Конаныхин Ю.П., Пасечник Л.П., Сугак С.Г. Исследование динамического воздействия ударника на многослойные преграды. Университет Дружбы Народов, Черноголовка, 1991. - 16 с.

2. Витман Ф.Ф., Иоффэ Б.С. Простой метод нахождения динамической твердости металлов с помощью двустороннего конуса. // Заводская лаборатория. 1948. 14(6). С. 727-732.

3. Даффин Р., Петерсон Э., Зенер К. Геометрическое программирование. Москва: Мир, 1972. – 311 с.

4. Селиверстов В.С. Оценка и оптимизация стойкости к пробитию многослойных преград. // В сб.: VI Забабахинские научные чтения (ЗНЧ-2001). 24-28 сентября 2001 г., г. Снежинск Челябинской обл. 2001.

5. Ben-Dor, G., Dubinsky, A., Elperin, T. (1999). On the order of plates providing the maximum ballistic limit velocity of a layered armor. *Int. J. of Impact Engineering*, **22**(8): 741-755.

6. Ben-Dor, G., Dubinsky, A., Elperin, T. (1999). Effect of air gap and order of plates on ballistic resistance of two layered armor. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, **31**(3): 233-241.

7. Ben-Dor, G., Dubinsky, A., Elperin, T. (2006). *Applied High-Speed Plate Penetration Dynamics*. Springer, Dordrecht.

8. Deng, Y., Zhang, W., Yang, Y., Shi, L., Wei, G. (2014). Experimental investigation on the ballistic performance of double-layered plates subjected to impact by projectile of high strength. *Int. J. of Impact Engineering*, **70**: 38-49.

9. Dey, S., Børvik, T., Hopperstad, O.S. (2011). Computer-aided design of protective structures: Numerical simulations and experimental validation. *Applied Mechanics and Materials*, **82**: 686-691.

10. Flis, L., Sperski, M. (2013). An investigation of the resistance of multi-layered ships steel shields to 12.7 mm projectiles. *Scientific J. of Polish Naval Academy*, **4** (195): 31-49.

11. Flores-Johnson, E.A., Saleh, M., Edwards, L. (2011). Ballistic performance of multi-layered metallic plates impacted by a 7.62-mm ARM2 projectile. *Int. J. of Impact Engineering*, **38**(12): 1022-1032.

12. Liaghat, G.H. (1992). Comparison of perforation theories and some experimental results. *J. of Engineering (Iran)* **5**(3-4): 119-127.

13. Nixdorff, K. (1984). Some applications of the impact theory of J. Awerbuch and S. R. Bodner. *Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering*, **8**(1): 16-20.

14. Shash, N., Zuzov, V.N. (2018) Protection performance of the monolayer and Multi-layered steel plates against 7.62-mm APM2 projectile in armored vehicles. *ARP Journal of Engineering and Applied Sciences*, **13**(6): 2051-2057.

Часть 4

Исследования, основанные на "степенных" соотношениях между интегральными характеристиками проникания

Часть 4 состоит из двух глав.

В Главе 10 рассматривается пробивание заостренными ударниками. Сравняется защитная эффективность монолитных и многослойных преград; показано, что наихудшее разбиение на слои при их заданном количестве реализуется, когда все слои имеют одинаковую толщину; рассмотрено влияние количества одинаковых слоев на баллистическую эффективность преграды. Для подтверждения выявленных закономерностей привлечены существующие конкретные модели, результаты экспериментов и "точных" численных расчетов.

В Главе 11 рассматривается пробивание ударниками цилиндрической формы. Выявлен критерий, регламентирующий порядок расположения заданного набора пластин в многослойной мишени, обеспечивающий ее максимальное сопротивление пробиванию. В частности, показано, что если пластины изготовлены из одного и того же материала, они должны быть расположены в порядке возрастания их толщин. Для барьеров со слоями одинаковой толщины из одинакового материала установлено, что увеличение количества слоёв снижает баллистическое сопротивление барьера, но в некоторых случаях замена монолитного барьера на слоистый с небольшим количеством слоев может увеличивать БП барьера.

Глава 10

Баллистические свойства многослойных преград, пробиваемых заостренным ударником

Обозначения

b_{\min}	нижняя граница для толщины слоя;
b_{\max}	верхняя граница для толщины слоя;
b_{sum}	общая (суммарная) толщина слоев в преграде;
$b^{(j)}$	толщина j -й пластины (слоя);
g	функция, уравнение (10.4.1);
G	функция, уравнение (10.1.2);
$H^{(\nu)}$	см. формулу (10.3.6);
$H^{(\nu, \mu)}$	см. формулу (10.3.7);
N	количество пластин в слоистой преграде;
v_{bl}	БП монолитной преграды с общей толщиной b_{sum} ;
V_{bl}	БП слоистой преграды;
$V_{bl}^{(j)}$	БП j -й пластины;
V_{imp}	скорость удара по слоистой преграде;
$V_{\text{imp}}^{(j)}$	скорость удара по j -й пластине;
V_{res}	остаточная скорость для слоистой преграды;
$V_{\text{res}}^{(j)}$	остаточная скорость j -й пластин (слоя);
\bar{V}_{bl}	$= V_{bl} / V_{bl}^*$;
V_{bl}^*	см. формулу (10.5.2);
Y	предел текучести материала преграды;
δ	параметр, уравнение (10.1.7);
$\delta_{\nu\mu}$	см. формулу (10.3.8);
$\eta_{\text{res}}, \eta_{bl}$	параметры, уравнения (10.7.1), (10.7.2);
μ_0, μ_1	параметры, уравнение. (10.2.4);
φ	функция, уравнение (10.2.2);
ЗЭ	защитная эффективность;
ИП	монолитная преграда;
СП	многослойная преграда.

10.1 Математическая модель.

Рассмотрим высокоскоростное проникание по нормали жесткого остроносого бойка в многослойную преграду (СП), состоящую из N металлических пластин, изготовленных из одного и того же материала. Формально речь идет о последовательном пробивании слоев, однако, обычно модель применяется для пластин в контакте (более детально этот вопрос обсуждается во введении к Части 2). Пластины пронумерованы в направлении движения ударника, а толщина j -й пластины равна $b^{(j)}$, остаточная скорость ударника, покидающего j -ю пластину, $V_{res}^{(j)}$, равна скорости удара по $(j+1)$ -й пластине $V_{imp}^{(j+1)}$ для $j=1 \div N-1$. Тогда скорость удара по преграде в целом V_{imp} равна $V_{imp}^{(1)}$, а остаточная скорость ударника, вылетающего из преграды, V_{res} , равна $V_{res}^{(N)} = V_{imp}^{(N+1)}$ (обозначение $V_{imp}^{(N+1)}$ вводится для удобства). Здесь и далее верхний индекс в скобках обозначает порядковый номер слоя.

Мы используем следующую зависимость между скоростью удара $V_{imp}^{(j)}$, остаточной скоростью $V_{res}^{(j)}$ и баллистическим пределом (БП) (дополнительную информацию о модели можно найти в Главе 3):

$$V_{imp}^{(j)2} - V_{res}^{(j)2} = V_{bl}^{(j)2}. \quad (10.1.1)$$

Поскольку пластины изготовлены из одного и того же материала, то БП пластины является функцией ее толщины:

$$V_{bl}^{(j)2} = G(b^{(j)}), \quad G(0) = 0, \quad j=1,2,\dots,N, \quad (10.1.2)$$

где G - возрастающая, положительная функция. Естественно, функция G зависит также от параметров, характеризующих механические свойства материала, которые в качестве аргументов не указываются.

Суммируя уравнения (10.1.1), выписанные для j от 1 до N , получаем:

$$V_{imp}^2 - V_{res}^2 = \sum_{j=1}^N G(b^{(j)}), \quad (10.1.3)$$

и, следовательно, выражение для БП СП V_{bl} таково:

$$V_{bl}^2 = \sum_{j=1}^N G(b^{(j)}). \quad (10.1.4)$$

Очевидно, что в рамках используемой модели БП СП не зависит от порядка слоев.

В случае монолитной преграды (ИП), имеющей толщину

$$b_{sum} = b^{(1)} + b^{(2)} + \dots + b^{(N)}, \quad (10.1.5)$$

соотношение между ее БП v_{bl} и толщиной может быть получено из уравнения (10.1.4) заменой $V_{bl} = v_{bl}$, $N=1$ и $b^{(1)} = b_{sum}$:

$$v_{bl}^2 = G(b_{sum}) = G\left(\sum_{j=1}^N b^{(j)}\right). \quad (10.1.6)$$

Нашей целью является сравнение значений БП для СП и ИП, а также сравнение СП различной структуры при условии их одинаковой толщины. Очевидно, вместо разности значений БП можно рассмотреть разность их квадратов:

$$\delta = v_{bl}^2 - V_{bl}^2 = G\left(\sum_{j=1}^N b^{(j)}\right) - \sum_{j=1}^N G(b^{(j)}). \quad (10.1.7)$$

10.2 Сравнение монолитных и многослойных преград

В настоящем разделе мы предполагаем (обоснование этого предположения будет дано ниже), что $G(b)$ является выпуклой вниз, дважды дифференцируемой функцией, которая определена в интервале $b \geq b_{\min} \geq 0$ и удовлетворяет следующему неравенству (b_{\min} дано):

$$\varphi(b_{\min}) \geq 0, \quad (10.2.1)$$

где

$$\varphi(b) = bG'(b) - G(b). \quad (10.2.2)$$

Геометрическую интерпретацию уравнения (10.2.1) можно найти в разделе П.1 Приложения. Из Свойства 3 (см. Приложение) следует, что $\delta > 0$ для

$$b^{(j)} \geq b_{\min}, b^{(j)} > 0, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (10.2.3)$$

Если $G(b)$ является линейной функцией,

$$G(b) = \mu_1 b + \mu_0, \quad (10.2.4)$$

то (см. Приложение) $\delta > 0$, если $\mu_0 < 0$, и $\delta = 0$, если $\mu_0 = 0$.

Следовательно, ИП превосходит по ЗЭ любую СП, имеющую ту же общую толщину, если $G(b)$ является выпуклой вниз функцией и выполняются условия (10.2.1) и (10.2.3), или если $G(b)$ является линейной функцией с отрицательным μ_0 . Если $G(b)$ прямо пропорциональна b , то переход к СП не влияет на баллистические свойства преграды.

10.3 Наихудшее разбиение на слои для заданного числа слоев

Покажем, что максимальное ухудшение ЗЭ СП возникает, когда слои имеют одинаковые толщины. Предполагается, что число пластин в преграде N и общая толщина преграды b_{sum} заданы, а $G(b)$ является выпуклой вниз функцией. Задача заключается в минимизации V_{bl} в уравнении (10.1.4) при ограничениях, заданных условиями (10.1.5) и (10.2.3). Мы также предполагаем, что $b_{sum}/N \geq b_{\min}$, то есть структура с одинаковыми слоями $b^{(j)} = b_{sum}/N$, $j = 1, 2, \dots, N$ допустима.

Если $G(b)$ является линейной функцией, задаваемой уравнением (10.2.4), то

$$V_{bl}^2 = \sum_{j=1}^N (\mu_1 b^{(j)} + \mu_0) = \mu_1 b_{sum} + \mu_0 N, \quad (10.3.1)$$

т.е., толщины слоев не влияют на баллистические свойства преграды.

В общем случае задача сводится к минимизации функции:

$$\tilde{\Lambda}(b^{(1)}, b^{(2)}, \dots, b^{(N)}) = \sum_{j=1}^N G(b^{(j)}), \quad (10.3.2)$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^N b^{(j)} = b_{sum}, \quad b^{(i)} \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (10.3.3)$$

где общая толщина пластин b_{sum} известна. В дальнейшем изложении используется эквивалентная формулировка задачи:

$$\Lambda(b^{(1)}, \dots, b^{(N-1)}) = \sum_{j=1}^{N-1} G(b^{(j)}) + G\left(b_{sum} - \sum_{j=1}^{N-1} b^{(j)}\right) \rightarrow \min \quad (10.3.4)$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{N-1} b^{(j)} < b_{sum}, \quad b^{(i)} > 0, \quad i = 1, \dots, N-1. \quad (10.3.5)$$

Изучим поведение функции Λ . Уравнения для первых и вторых производных Λ таковы:

$$H^{(\nu)} \equiv \frac{\partial \Lambda}{\partial b^{(\nu)}} = G'(b^{(\nu)}) - G'\left(b_{sum} - \sum_{j=1}^{N-1} b^{(j)}\right), \quad (10.3.6)$$

$$H^{(\nu, \mu)} \equiv \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial b^{(\nu)} \partial b^{(\mu)}} = \delta_{\nu\mu} G''(b^{(\nu)}) + G''\left(b_{sum} - \sum_{j=1}^{N-1} b^{(j)}\right), \quad (10.3.7)$$

где $\nu = 1, \dots, N-1$, $\mu = 1, \dots, N-1$ и

$$\delta_{\nu\mu} = \begin{cases} 1 & \text{если } \nu = \mu \\ 0 & \text{если } \nu \neq \mu \end{cases}. \quad (10.3.8)$$

Свойства гессиана (матрица с элементами $H^{(\nu\mu)}$) связаны с выпуклостью функции Λ , которая зависит от знаков корней характеристического уравнения [1]:

$$\begin{vmatrix} H^{(1,1)} - \eta & H^{(1,2)} & \dots & H^{(1,N-1)} \\ H^{(2,1)} & H^{(2,2)} - \eta & \dots & H^{(2,N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H^{(N-1,1)} & H^{(N-1,2)} & \dots & H^{(N-1,N-1)} - \eta \end{vmatrix} = 0. \quad (10.3.9)$$

Так как последний член в выражении (10.3.7) одинаков для всех $H^{(\nu, \mu)}$, то он может быть отброшен в определителе (10.3.9). Ненулевые элементы остаются только на диагонали, а характеристическое уравнение имеет вид:

$$\prod_{j=1}^{N-1} [G''(b^{(j)}) - \eta] = 0. \quad (10.3.10)$$

Область, определяемая линейными неравенствами (10.3.5), выпукла. Поскольку в этой области $G''(z) \leq 0$, все корни уравнения (10.3.10) положительны, и, следовательно, гессиан – положительно определенная форма, откуда следует, что L -вогнутая функция. Здесь и далее мы используем понятия выпуклости/вогнутости, принятые в классическом математическом анализе (как известно, в математическом программировании используется иная терминология, что может вносить путаницу).

Из формулы (10.3.6) видно, что при одинаковых $b^{(j)} = b_{sum}/N$ все $H^{(j)} = 0$, т.е., эта точка является точкой локального минимума. Более того, этот локальный минимум также является глобальным минимумом, поскольку область, определяемая линейными неравенствами (10.3.5) выпукла. Таким образом, доказано, что разбиение преграды на одинаковые слои приводит к наилучшей из возможных слоистых структур.

10.4 Влияние количества слоев на баллистическую эффективность преграды

Проанализируем зависимость БП от количества пластин, на которое разбивается ИП, предполагая, что все пластины имеют одинаковые толщины. Тогда выражение для БП СП таково:

$$v_{bl}^2 = g(N) = N G(b_{sum}/N). \quad (10.4.1)$$

Предположим, что N изменяется непрерывно, и мы можем вычислить производную:

$$g'(N) = G(b) - bG'(b), \quad b = b_{sum}/N. \quad (10.4.2)$$

Предположим, что функция $G(b)$ удовлетворяет условиям из раздела 10.2. Используя формулу (П.10) из Приложения, и неравенство (10.2.1) заключаем, что $g'(N) < 0$, если $b_{sum}/N > b_{min}$. Следовательно, $g(N)$ убывает при

$$1 < N \leq b_{sum}/b_{min}. \quad (10.4.3)$$

Таким образом, приходим к выводу, что БП уменьшается с увеличением количества слоев, если все пластины имеют одинаковые толщины.

В случае линейной функции $G(b)$ из уравнения (10.3.1) следует, что БП уменьшается с увеличением количества слоев при $\mu_0 < 0$ ($N < -\mu_1 b_{sum}/\mu_0$) и не зависит от количества слоев, если $\mu_0 = 0$.

10.5 Анализ, основанный на модели Rosenberg & Dekel

10.5.1 Математическая модель и постановка задачи

Рассмотрим теперь модель [17-18], которая может быть описана с использованием следующего выражения для функции G :

$$\bar{V}_{bl}^2 = G(\bar{b}) = \begin{cases} (1/3 + 2\bar{b})\bar{b} & \text{если } 0 < \bar{b} < 1/3 \\ \bar{b} & \text{если } 1/3 \leq \bar{b} \leq 1, \\ (1 + 0.4 \ln \bar{b})\bar{b} & \text{если } \bar{b} > 1 \end{cases} \quad (10.5.1)$$

где черта над переменными, определяющими линейные размеры, показывает, что параметры приведены к безразмерной форме с использованием характерного размера d , и

$$\bar{V}_{bl} = V_{bl}/V_{bl}^*, \quad V_{bl}^* = d\sqrt{\pi Yd/m} \quad (10.5.2)$$

Наша цель состоит в том, чтобы определить знак δ для различных комбинаций $\bar{b}^{(j)}$. Критерии, предложенные в Приложении, не применимы непосредственно к данной модели из-за нарушения свойства гладкости функции G . Ниже мы приводим строгое математическое доказательство гипотезы, что слоистость не улучшает баллистические свойства преград против высокоскоростных остроносых снарядов. Когда безразмерная толщина монолитной преграды (отношение толщины преграды к диаметру снаряда) к толщине слоев принимает значения в диапазоне от 1/3 до 1, слоистость не влияет на баллистические свойства преграды. В других случаях ИП всегда превосходят СП, имеющие ту же общую толщину.

10.5.2 Исследование проблемы

10.5.2.1 Применение результатов из Приложения

Если общая толщина преграды и толщины слоев принимают значения внутри одного и того же подынтервала в выражении (10.5.1) для функции $G(\bar{T})$, то результаты Приложения могут быть непосредственно применены в анализе.

Пусть $\bar{b}_{\min} = 0$, $\bar{b}_{\max} = 1/3$, Тогда, в соответствии со Свойством 1 из Приложения, $\delta > 0$, т.е., монолитная преграда всегда лучше слоистой.

Если $\bar{b}_{\min} = 1/3$, $\bar{b}_{\max} = 1$, то, в соответствии со Свойством 2 из Приложения, $\delta = 0$, т.е. слоистость не влияет на баллистические свойства преграды.

Пусть теперь $\bar{b}_{\min} = 1$, $\bar{b}_{\max} = \infty$. Тогда

$$\begin{aligned} G(\bar{b}) &= (1 + 0.4 \ln \bar{b})\bar{b} > 0, \quad G'(\bar{b}) = 1.4 + 0.4 \ln \bar{b} > 0, \\ G''(\bar{T}) &= 0.4/\bar{b} > 0, \quad \varphi(\bar{b}_{\min}) = 0.4 > 0 \end{aligned} \quad (10.5.3)$$

и, в соответствии со Свойством 1 из Приложения, $\delta > 0$, т.е., ИП всегда превосходит по ЗЭ СП.

10.5.2.2 Общий случай, когда $1/3 \leq \bar{b}_{sum} \leq 1$

Рассматривается ситуация, когда толщина ИП принимает значения внутри второго подынтервала, в то время как толщины слоев могут принимать значения в первом и во втором подынтервалах:

$$1/3 \leq \bar{b}_{sum} \leq 1, \quad \bar{b}_{sum} = S_1 + S_2, \quad S_1 = \sum_{0 < \bar{b}^{(j)} < 1/3} \bar{b}^{(j)}, \quad S_2 = \sum_{1/3 \leq \bar{b}^{(j)} \leq 1.0} \bar{b}^{(j)}. \quad (10.5.4)$$

Тогда

$$\delta = (S_1 + S_2) - (u_1 + S_1) = 2w_1, \quad (10.5.5)$$

где

$$u_1 = \sum_{0 < \bar{b}^{(j)} < 1/3} (1/3 + 2\bar{b}^{(j)})\bar{b}^{(j)}, \quad w_1 = \sum_{1/3 \leq \bar{b}^{(j)} \leq 1.0} (1/3 - \bar{b}^{(j)})\bar{b}^{(j)}, \quad (10.5.6)$$

Поскольку $w_1 > 0$, то $\delta > 0$, т.е., ИП превосходит СП.

10.5.2.3 Общий случай, когда $\bar{b}_{sum} > 1$

В этом случае толщина ИП принимает значения внутри третьего подынтервала, в то время как толщины слоев могут принимать значения внутри любого субинтервала:

$$\bar{b}_{sum} > 1.0, \quad \bar{b}_{sum} = S_1 + S_2 + S_3, \quad S_3 = \sum_{\bar{b}^{(j)} > 1.0} \bar{b}^{(j)}. \quad (10.5.7)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \delta &= [1 + 0.4 \ln(S_1 + S_2 + S_3)](S_1 + S_2 + S_3) \\ &- [u_1 + S_2 + \sum_{\bar{b}^{(j)} > 1.0} (1 + 0.4 \ln \bar{b}^{(j)})\bar{b}^{(j)}] \\ &= 2w_1 + 0.4 \left[(S_1 + S_2 + S_3) \ln(S_1 + S_2 + S_3) - \sum_{\bar{b}^{(j)} > 1.0} \bar{b}^{(j)} \ln \bar{b}^{(j)} \right] \end{aligned} \quad (10.5.8)$$

Поскольку $u_1 \geq 0$, $S_1 \geq 0$, $S_2 \geq 0$, из формулы (10.5.8) следует, что

$$\delta \geq 0.4u_3, \quad u_3 = S_3 \ln S_3 - \sum_{\bar{b}^{(j)} > 1.0} \bar{b}^{(j)} \ln \bar{b}^{(j)}, \quad (10.5.9)$$

Для того, чтобы доказать, что $u_3 > 0$, рассмотрим модель, в которой

$$G(\bar{b}) = \bar{b} \ln \bar{b}, \quad \bar{b}_{min} = 1, \quad \bar{b}_{max} = \infty. \quad (10.5.10)$$

Тогда

$$G'(\bar{b}) = 1 + \ln \bar{b} > 0, \quad G''(\bar{b}) = 1/\bar{b} > 0, \quad \varphi(\bar{b}_{min}) = 1 > 0, \quad (10.5.11)$$

и по Свойству 1 из Приложения $u_3 > 0$, т.е., ИП превосходит СП по ЗЭ.

10.6 Анализ, основанный на других моделях

В литературе имеется лишь небольшое количество моделей для анализа поведения функции $G(b)$ в случае остроносых снарядов.

Обратимся к степенным моделям. Напомним, что согласно Свойству 5а из Приложения, в случае степенной функции $G(b) \sim b^\alpha$ ($V_{bl} \sim b^{0.5\alpha}$) при $\alpha > 1$ ИП превосходит любую СП той же толщины.

Модель, предложенная Ohte с соавторами [16] для конических снарядов, что $G(b) \sim b^\varepsilon$, где $\varepsilon \geq 1.5$, т.е., Свойство 5а из Приложения имеет место.

Gupta с соавторами [9] описал степенную зависимость между БП оживального снаряда и толщиной алюминиевой пластины в виде $v_{bl} = kb^{0.89}$, где k является константой. Очевидно, что Свойство 5а справедливо и в этом случае.

Хiao с соавторами [21], рассматривая проникание в стальные преграды из Weldox 460E конических снарядов, на основе результатов численного моделирования построили функцию $G(b)$:

$$G(b) = 9.43 \cdot 10^7 b^{1.6}, \quad (10.6.1)$$

и доказали, что она удовлетворяет Свойству 3 Приложения. Одной из целей исследования являлась проверка теоретических результатов Ven-Dog с соавторами [4]; результаты их расчетов (таблица 4.2.22) подтвердили качественные свойства СП, установленные в работе [4].

10.7 Сравнение с результатами экспериментов и численного моделирования

Результаты некоторых экспериментальных исследований и численных расчетов, используемых далее при анализе наших теоретических предсказаний, приведены в Таблицах 10.7.1, 10.7.2, 4.2.13, 4.2.14, 4.2.28, Таблице 4.2.25 (для оживальных снарядов).

Таблица 10.7.1. Экспериментальные результаты [2] по остаточным скоростям (7,62мм пули, преграда из мягкой стали).

Скорость удара (м/с) → Преграда ↓	706	755	775	805	826
1x8мм	446	489	528	611	647
2 мм + 6 мм	477	514	549	609	658
6мм + 2мм	471	522	-	616	654
2x4мм	486	533	567	643	667

Таблица 10.7.2. Экспериментальные результаты [11-12] по БП (заостренные снаряды, алюминиевые преграды из 1100-H12).

Преграда	v_{bl} (м/с)	Преграда	v_{bl} (м/с)
1x1.0мм	45,3	2x0.5мм	39,2
1x1.5мм	54,3	3x0.5мм	51,0
1x2.0мм	67,1	2x1.0мм	62,9
4x0.5мм	61,7	3x0.5мм	51,0
1x2.5мм	79,3	5x0.5мм	66,0
1x3.0мм	90,4	2x1.5мм	78,6
3x1.0мм	74,2		

Таблица 10.7.3 составлена на основе данных об остаточной скорости из Таблиц 4.2.13, 4.2.14, 10.7.1, где

$$\eta_{res} = \frac{v_{res}^{(mono)} - v_{res}^{(layer)}}{v_{res}^{(mono)}}, \quad (10.7.1)$$

$v_{res}^{(mono)}$ а также $v_{res}^{(layer)}$ являются значением остаточной скорости монолитной и слоистой преград, соответственно.

Таблица 10.7.4 показывает результаты по БП из таблиц 4.2.13, 4.2.14, 10.7.1, где

Таблица 10.7.3. Проверка теоретических результатов по остаточной скорости.

Таблица	Сравниваемые преграды	v_{imp} (м/с)	η_{res} (%)
4.2.13	1x12мм; 2x6мм	600	+0,2
	1x12мм; 2x6мм	406	-1,2
	1x12мм; 2x6мм	356	-1,5
	1x12мм; 2x6мм	318	-1,8
	1x12мм; 2x6мм	300	-3,2
4.2.14	1x12мм; 2x6мм	281	-5,9
	1x1мм; 2x0.5мм	150	-2,8
	1x1мм; 2x0.5мм	113	-1,0
	1x1мм; 2x0.5мм	97	-3,7
	1x1мм; 2x0.5мм	83	-4,7
	1x1мм; 2x0.5мм	82	-4,8
	1x1мм; 2x0.5мм	73	-6,8
	1x1мм; 2x0.5мм	66	-25,0
10.7.1	1x1мм; 2x0.5мм	57	-33,3
	1x8мм; 2 мм + 6 мм	706	-7,0
	1x8мм; 6мм + 2мм	706	-5,6
	1x8мм; 2x4мм	706	-9,0
	1x8мм; 2 мм + 6 мм	755	-5,1
	1x8мм; 6мм + 2мм	755	-6,7
	1x8мм; 2x4мм	755	-9,0
	1x8мм; 2 мм + 6 мм	775	-4,0
	1x8мм; 2x4мм	775	-7,4
	1x8мм; 2 мм + 6 мм	805	0,3
	1x8мм; 6мм + 2мм	805	-0,8
	1x8мм; 2x4мм	805	-5,2
	1x8мм; 2 мм + 6 мм	826	-1,7
	1x8мм; 6мм + 2мм	826	-1,1
	1x8мм; 2x4мм	826	-3,1

$$\eta_{bl} = \frac{v_{bl}^{(layer)} - v_{bl}^{(mono)}}{v_{bl}^{(mono)}}, \quad (10.7.2)$$

$v_{bl}^{(mono)}$ и $v_{bl}^{(layer)}$ являются значениями БП монолитной и слоистой преград, соответственно.

Неравенства $\eta_{res} < 0$ и $\eta_{bl} < 0$ указывают на согласованность между теоретическими и экспериментальными или численными результатами, в то время, как $\eta_{res} > 0$ и $\eta_{bl} > 0$ означают отклонение от теоретических предсказаний. Анализ Таблиц 10.7.3 и 10.7.4 показывает, что теоретические прогнозы относительно сравнения ЗЭ монолитных и слоистых преград подтверждаются экспериментальными или численными данными в 90% случаях.

Анализ Таблицы 10.7.1 показывает, что для всех значений скорости удара остаточная скорость для двухслойной преграды больше, чем для любого другого разбиения преграды, что соответствует теоретическим прогнозам. В то же время, в Таблице 10.7.4 БП для 2×4.76 мм преграды, вопреки теоретическим предсказаниям, больше, чем для двух других вариантов преград с неравными толщинами слоев.

Таблица 10.7.4. Проверка теоретических результатов на БП.

Таблица	Сравниваемые преграды	η_{bl} (%)
4.2.28	1x3.2мм; 2x1.6мм	-2,1
	1x4.8мм; 1.6мм + 3.2мм	-9,7
	1x4.8мм; 3x1.6мм	-13,9
	1x6.4мм; 2x3.2мм	-13,0
	1x6.4мм; 4x1.6мм	-16,5
10.7.2	1x1.0мм; 2x0.5мм	-13,5
	1x1.5мм; 3x0.5мм	-6,1

Таблица	Сравниваемые преграды	η_{bl} (%)
	1x2.0мм; 2x1.0мм	-6,3
	1x2.0мм; 4x0.5мм	-8,0
	1x2.5мм; 5x0.5мм	-16,8
	1x3.0мм; 2x1.5мм	-13,1
	1x3.0мм; 3x1.0мм	-20,4
4.2.25	1x12мм; 2x6мм	-9,4
4.2.6	1x9.53; 3.18мм + 6,35	-8,9
	1x9.53; 6,35+3.18мм	+2,6
	1x9.53; 2x4.76мм	+4,8
	1x9.53; 3x3.18мм	+2,4
	1x9.53; 6x1.59мм	-1,7
4.2.8	1x12мм; 2x6мм	-9,4
4.2.30◇	1x1мм; 2x0.5мм	-6,6

Сравнение структур 2x3.2мм и 4x1.6мм в таблице 4.2.28; 2x1.0мм и 4x0.5мм и 2x1.5мм и 3x1.0мм в таблице 10.7.2 подтверждает теоретические предсказания раздела 10.4: увеличение числа одинаковых слоев ухудшает баллистические свойства преграды.

Таким образом, имеющиеся экспериментальные и численные результаты, в целом, подтверждают теоретические предсказания.

Глава 11

Баллистические свойства многослойных преград, пробиваемых цилиндрическим ударником

Обозначения

$A^{(v)}$	$= \rho_{sh}^{(v)} b^{(v)}$ (удельная масса преграды);
b	толщина преграды (слоя) при описании модели;
b_{sum}	общая (суммарная) толщина слоев в преграде;
$b^{(j)}$	толщина j -й пластины (слоя);
g	функция, см. уравнение (10.4.1);
G	функция, задающая зависимость квадрата БП пластины от ее толщины;
L_{imp}	длина ударника;
m	масса снаряда;
$m^{(i)}$	масса составного ударника после перфорации i -го слоя;
$m_{plug}^{(i)}$	масса пробки, выбитой из i -го слоя ;
N	количество пластин в слоистой преграде;
v_{bl}	БП монолитной преграды с общей толщиной b_{sum} ;
v_{bl}	БП слоистой преграды;
$v_{bl}^{(j)}$	БП j -й пластины;
v_{imp}	скорость удара по слоистой преграде;
$v_{imp}^{(i)}$	скорость удара по i -й пластине;
v_{res}	остаточная скорость для слоистой преграды;
$v_{res}^{(i)}$	остаточная скорость для i -й пластины (слоя);
α_i, β_i	параметры, формула (11.2.6);
Δ	см. формулу (11.2.3);
$\mu^{(v)}$	см. формулу (11.1.3);
ρ_{imp}	плотность материала ударника;
$\rho_{sh}^{(v)}$	плотность материала v -го слоя;
Ψ	см. формулу (11.2.5);
$\omega^{(v)}$	см. формулу (11.2.4);

11.1 Математическая модель

Рассмотрим проникание цилиндрического ударника в многослойную преграду, состоящую из N металлических пластин разной толщины, изготовленных из разных, в общем случае, материалов, и воспользуемся моделью [14].

В соответствии с принятой схемой проникания ударник пробивает первый слой (пластину), выбивая "пробку", и продолжает двигаться вместе с ней. Затем конструкция, состоящая из ударника и выбитой "пробки" (далее – "составной ударник"), пробивает второй слой, соединяется с "пробкой", выбитой из второго слоя, и движется дальше, и т.д. Предполагается, что перфорация слоев осуществляется последовательно, независимо друг от друга, что, строго говоря, справедливо, когда слои разделены большими зазорами (например, воздушными), сопротивлением которых можно пренебречь, однако, такая схема традиционно применяется и в случае слоев, находящихся в контакте друг с другом. Очевидно, в рамках используемой схемы справедливы соотношения ($i = 1, 2, \dots, N$):

$$v_{imp}^{(N+1)} = v_{res}, v_{imp}^{(1)} = v_{imp}, v_{res}^{(i)} = v_{imp}^{(i+1)}, \quad (11.1.1)$$

где индекс в скобках указывает на порядковый номер слоя в направлении движения ударника; $v_{imp}^{(i)}, v_{res}^{(i)}, v_{imp}, v_{res}$ - скорости составного ударника до и после пробития i -го слоя, перед началом проникания и после вылета из мишени, соответственно.

Модель [14] для i -го слоя ($i = 1, 2, \dots, N$) включает следующие соотношения:

$$v_{res}^{(i)2} = \left[\frac{m^{(i-1)}}{m^{(i)}} \right] (v_{imp}^{(i)2} - v_{bl}^{(i)2}), \quad m^{(0)} = m, \quad (11.1.2)$$

$$m^{(i)} = m + \sum_{v=1}^i m_{plug}^{(v)}, \quad \frac{m_{plug}^{(v)}}{m} = \mu^{(v)} = \frac{\rho_{sh}^{(v)} b^{(v)}}{\rho_{imp} L_{imp}}, \quad (11.1.3)$$

где $m^{(i)}$ - масса составного ударника после перфорации, $v_{bl}^{(i)}$ - баллистический предел (БП); $m_{plug}^{(v)}$ - масса выбитой "пробки"; $\rho_{sh}^{(v)}$ и $b^{(v)}$ - плотность слоя и его толщина, соответственно; ρ_{imp} - плотность материала ударника, L_{imp} - его длина. БП мишени (отдельного слоя или барьера в целом) - это минимальная скорость удара по мишени, приводящая к ее перфорации, или скорость удара, при которой скорость вылета из мишени равна нулю. Предполагается, что диаметр пробиваемых отверстий равен диаметру снаряда.

Соотношения (11.1.1)–(11.1.2) после исключения промежуточных скоростей приводят к следующему выражению для БП многослойного барьера:

$$v_{bl}^2 = (v_{bl}^{(1)})^2 + \sum_{i=2}^N (v_{bl}^{(i)})^2 \left[1 + \sum_{v=1}^{i-1} \mu^{(v)} \right]. \quad (11.1.4)$$

11.2 Оптимальная последовательность слоёв

Оценим, как изменится БП барьера, если поменять местами соседние пластины, имеющие порядковые номера s и $s+1$. Из соотношения (11.1.4) вытекают следующие

выражения для БП "исходного" барьера $V_{bl}^{(s,s+1)}$, и барьера с обратным порядком пластин: $V_{bl}^{(s+1,s)}$

$$\begin{aligned}
(v_{bl}^{(s,s+1)})^2 &= (v_{bl}^{(1)})^2 + (v_{bl}^{(2)})^2 [1 + \mu^{(1)}] + \dots + \\
&+ (v_{bl}^{(*)})^2 [1 + \mu^{(1)} + \dots + \mu^{(s-1)}] + \\
&+ (v_{bl}^{(**)})^2 [1 + \mu^{(1)} + \dots + \mu^{(s-1)} + \mu^{(*)}] + \\
&+ (v_{bl}^{(s+2)})^2 [1 + \mu^{(1)} + \dots + \mu^{(s-1)} + \mu^{(*)} + \mu^{(**)}] + \\
&+ \dots + (v_{bl}^{(N)})^2 [1 + \mu^{(1)} + \dots + \mu^{(N-1)}],
\end{aligned} \tag{11.2.1}$$

$$\begin{aligned}
(v_{bl}^{(s+1,s)})^2 &= (v_{bl}^{(1)})^2 + (v_{bl}^{(2)})^2 [1 + \mu^{(1)}] + \dots + \\
&+ (v_{bl}^{(**)})^2 [1 + \mu^{(1)} + \dots + \mu^{(s-1)}] + \\
&+ (v_{bl}^{(*)})^2 [1 + \mu^{(1)} + \dots + \mu^{(s-1)} + \mu^{(**)}] + \\
&+ (v_{bl}^{(s+2)})^2 [1 + \mu^{(1)} + \dots + \mu^{(**)} + \mu^{(*)}] + \dots \\
&+ (v_{bl}^{(N)})^2 [1 + \mu^{(1)} + \dots + \mu^{(N-1)}].
\end{aligned} \tag{11.2.2}$$

где $b^{(*)} = b^{(s)}$ и $b^{(**)} = b^{(s+1)}$, причем номера слоёв s и $s+1$ связаны с оригинальным барьером.

Из выражений (11.2.1)–(11.2.2) вытекает следующее соотношение:

$$\begin{aligned}
\Delta &= \left[v_{bl}^{(s,s+1)} \right]^2 - \left[v_{bl}^{(s+1,s)} \right]^2 = \\
&= (v_{bl}^{(**)})^2 \mu^{(*)} - (v_{bl}^{(*)})^2 \mu^{(**)} = , \\
&= \frac{A^{(s)} A^{(s+1)}}{\rho_{imp} L_{imp}} [\omega^{(s+1)} - \omega^{(s)}]
\end{aligned} \tag{11.2.3}$$

где

$$\omega^{(v)} = \frac{(v_{bl}^{(v)})^2}{A^{(v)}}, \quad A^{(v)} = \rho_{sh}^{(v)} b^{(v)}, \tag{11.2.4}$$

$A^{(v)}$ - масса пластины, отнесенная к площади ее поверхности, перпендикулярной направлению удара ("удельная масса").

Из соотношения (11.2.3) вытекает, что оптимальный порядок пластин (то есть, их расположение, обеспечивающее максимум БП) достигается, когда пластины расположены в порядке возрастания параметра ω , что нетрудно доказать "от противного": предположение, что оптимальным является некоторое другое расположение пластин, приводит к противоречию, поскольку БП может быть увеличен путем перестановки соседних пластин в «неправильной» паре. Очевидно, наименьшее значение БП имеет место при их упорядочении по убыванию ω . Более наглядный вид полученный критерий приобретает для случая, когда пластины изготовлены из одного и того же материала плотности ρ_{sh} . Тогда выражение для Δ представляется в виде:

$$\Delta = \frac{\rho_{sh} b^{(s)} b^{(s+1)}}{\rho_{imp} L_{imp}} [\Psi(b^{(s+1)}) - \Psi(b^{(s)})], \quad \Psi(x) = G(x)/x, \tag{11.2.5}$$

где функция $G(b)$ задает зависимость квадрата БП некоторой пластины от ее толщины b .

Следовательно, если Ψ - возрастающая функция (здесь и далее – "первый сценарий"), то оптимальным является расположение пластин по возрастанию их толщин, а если – убывающая ("второй сценарий"), то наилучшим является их обратный порядок; если же $G(b) \sim \sqrt{b}$, то БП не зависит от порядка пластин.

Существующие модели в подавляющем большинстве указывают на то, что имеет место первый сценарий. На это указывают, в частности, данные Таблицы 11.2.1, в которой приведены коэффициенты моделей вида:

$$G(b) = \sum_{i=1}^2 \beta_i b^{\alpha_i}, \quad \beta_i \geq 0. \quad (11.2.6)$$

Таблица 11.2.1 Коэффициенты моделей

Источник	α_1	α_2	Примечания
[10]	1,3-2,0	0	Модификации De-Magge формулы
[8]	1,8-7,0	0	THOR уравнения
[7]	2,0	1,0	SRI уравнение
[6]	1,5	0	BRL модель
[16]	1,5	0	-
[15]	1,7	0	-
[3,13]	0,8; 1,6; 1,7	0	-
[19]	2,0	1,5	-
[5]	2,0	0	-
[20]	1,0	2,0	-
[14]	2,0	0	-

Вычислив производную

$$\Psi'(b) = \sum_{i=1}^2 \beta_i (\alpha_i) b^{\alpha_i - 2}, \quad (11.2.7)$$

закключаем, что во всех случаях, за одним исключением, $\Psi'(b) > 0$, то есть, функция Ψ - возрастающая.

11.3 Сравнение барьеров с различным количеством слоев

Оценим, как влияет количество слоев на защитную эффективность барьера, предполагая, что слои имеют одинаковую толщину $b^{(i)} = b_{sum}/N$ (b_{sum} - суммарная толщина барьера, которая предполагается одинаковой для всех сравниваемых вариантов) и изготовлены из одного и того же материала. Анализ будем проводить для класса моделей:

$$G(b) = \beta b^\alpha, \quad \alpha > 1. \quad (11.3.1)$$

В этом случае формула (11.1.4) запишется в виде:

$$v_{bl}^2 = \beta b^\alpha \psi(N), \quad \psi(N) = \frac{N^2 + g(N-1)}{N^{\alpha+1}}, \quad (11.3.2)$$

где функция g определяется формулой (10.4.1).

Будем считать аргумент x непрерывным аналогом целого N . Тогда

$$\psi(x) = \frac{x^2 + g(x-1)}{x^\theta}, \quad \theta = \alpha + 1 > 2 \quad (11.3.3)$$

и

$$\psi'(x)x^{\theta+1} = (2-\theta)x^2 + g(\theta-1)\left[1 + \frac{1}{\theta-1} - x\right] < 0 \quad (11.3.4)$$

для $x \geq 2$.

Предположим, что

$$g < 2^\theta - 4. \quad (11.3.5)$$

Тогда $\psi(2) < \psi(1)$ и с учетом неравенства (11.3.4) можно заключить, что $\psi(x)$ убывает при $x \geq 2$, оставаясь меньше, чем $\psi(1)$.

Если

$$g > 2^\theta - 4, \quad (11.3.6)$$

то $\psi(2) > \psi(1)$; $\psi(x)$ также убывает при $x \geq 2$, но $\psi(x) > \psi(1)$, когда $2 < x < x_0$, и $\psi(x) < \psi(1)$, когда $x > x_0$, где x_0 - корень уравнения $\psi(x) = \psi(1)$,

$$x^2 + g(x-1) - x^\theta = 0, \quad (11.3.7)$$

который существует, поскольку $\psi(x) \rightarrow 0$, когда $x \rightarrow +\infty$.

Если, наконец,

$$g = 2^\theta - 4, \quad (11.3.8)$$

то $\psi(2) = \psi(1)$ и $\psi(x)$ убывает при $x \geq 2$.

Вернувшись к целым значениям аргумента функции ψ , на основании проведенного анализа приходим к следующим выводам. БП многослойного барьера уменьшается с увеличением числа слоёв. Если справедливо условие (11.3.5), то БП многослойного барьера всегда меньше БП монолитного барьера той же толщины. Если же имеет место условие (11.3.6), то БП многослойного барьера больше или меньше БП монолитного барьера в зависимости от того, выполняется условие $1 < N \leq [x_0]$ или условие $N \geq [x_0] + 1$, соответственно, где обозначение $[x_0]$ используется для целой части x_0 . В случае же справедливости условия (11.3.8) БП монолитного и двухслойного барьеров одинаковы, но при $N > 2$ БП убывает.

Литература к Части 4

1. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М.: Наука, 1974. - 832 с.
2. Almohandes, A.A., Abdel-Kader, M.S., Eleiche, A.M. (1996). Experimental investigation of the ballistic resistance of steel-fiberglass reinforced polyester laminated plates. *Composites. Part B*, **27**(5): 447-458.
3. Aly, S.Y., Li, Q.M. (2008). Critical impact energy for the perforation of metallic plates. *Nuclear Engineering and Design*, **238**(10): 2521-2528.
4. Ben-Dor, G., Dubinsky, A., Elperin, T. (2010). Effect of layering on ballistic properties of metallic shields against sharp-nosed rigid projectiles. *Engineering Fracture Mechanics*, **77**(14): 2791-2799.

5. Cloete, T.J., Curry, R.J., Balden, V.H., Maree, H., Basson, I. (2014). A scaling approach to assess mining cage roof performance under sub-ordnance projectile impact. In: *Programme & Abstract Book of the 4th Int. Conf. on Impact Loading of Lightweight Structures - ICILLS 2014* (January 12-16, 2014 Cape Town, South Africa), pp.202-206.
6. Corbett, G.G., Reid, S.R. (1993). Quasi-static and dynamic local loading of monolithic flat-faced long projectiles. *Int. J. of Impact Engineering*, **13**(3): 423-441.
7. Corbett, G.G., Reid, S.R., Johnson, W. (1996). Impact loading of plates and shells by free-flying projectiles: a review. *Int. J. of Impact Engineering*, **18**(2): 141-230.
8. Crull, M., Swisdak, M.M. Jr. (2005). Methodologies for calculating primary fragment characteristics. Technical Paper No. 16 (Technical Rep. DDESB TP 16), Revision 2. Department of Defense Explosives, Safety Board, Alexandria, VA.
9. Gupta, N.K., Ansari, R., Gupta, S.K. (2001). Normal impact of ogive nosed projectiles on thin plates. *Int. J. of Impact Engineering*, **25**(7): 641-660.
10. Herrmann, W., Jones, A.H. (1961). Survey of hypervelocity impact information. Rep. No. 99-1. Massachusetts Institute of Technology (MIT), Aeroelastic and Structures Research Laboratory, Cambridge, MA.
11. Iqbal, M.A., Gupta, N.K. (2008). Energy absorption characteristics of aluminum plates subjected to projectile impact. *Latin American J. of Solids and Structures*, **5**(4): 259-287.
12. Iqbal, M.A., Gupta, N.K. (2011). Ballistic limit of single and layered aluminium plates. *Strai*, **47**: e205-e219.
13. Jowett, J. (1986). The effects of missile impact on thin metal structures. Rep. S.R.D.R 378. United Kingdom Atomic Energy Authority (UKAEA), Safety and Reliability Directorate, Culcheth, UK.
14. Kasano, H., Abe, K. (1997). Perforation characteristics prediction of multi-layered composite plates subjected to high velocity impact. In: *Proc. of 11th Int. Conf. on Composite Materials* (July 14-18, 1997, Gold Coast, Australia), **2**, pp. 522-531.
15. Neilson, A.J. (1985). Empirical equations for the perforation of mild steel plates. *Int. J. of Impact Engineering*, **3**(2): 137-142.
16. Ohte, S., Yoshizawa, H., Chiba, N., Shida, S. (1982). Impact strength of steel plates struck by projectiles. *Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineering*, **25**(206): 1226-1231.
17. Rosenberg, Z., Dekel, E. (2010). Revisiting the perforation of ductile plates by sharp-nosed rigid projectiles. *Int. J. of Solids and Structures*, **47**(22-23): 3022-3033.
18. Rosenberg, Z., Dekel, E. (2012). *Terminal ballistics*, Springer.
19. Wen, H.M., Jones, N. (1992). Semi-empirical equations for the perforation of plates struck by the mass. In: Bulson, P.S., ed. *Structures Under Shock and Impact II*. WIT Press, Southampton, pp. 369-380.
20. Woodward, R.L., Cimpoeru, S.J. (1998). A study of the perforation of aluminium laminate targets. *Int. J. of Impact Engineering*, **21**(3): 117-131.
21. Xiao, Y., Dong, H., Zhou, J., Wang, J. (2017). Studying normal perforation of monolithic and layered steel targets by conical projectiles with SPH simulation and analytical method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **75**: 12-20.

Часть 5

Исследования, основанные на квази-динамической "гипотезе плоских сечений"

В Главе 12 представлены модели для ударников с произвольной формой образующей и для ударников, представляющих собой острые прямые конуса вращения.

В Главе 13 показано, что разнесенная преграда превосходит по баллистическим характеристикам монолитную с той же суммарной толщиной пластин.

В Главе 14 решен ряд задач оптимизации структуры немонолитных преград.

В Главе 15 представлены в виде графиков некоторые результаты расчетов на основе модели А.Я. Сагомояна, иллюстрирующие и подтверждающие результаты проведенного теоретического анализа.

Математические модели для проникания заостренных тел вращения в монолитные преграды

Обозначения

a_0, a_1, a_2	параметры, определяющие модель;
b	толщина преграды;
D_{imp}	сопротивления прониканию;
g_0, g_1, g_2	функции, формулы (12.1.6)-(12.1.8) и (12.2.1)-(12.2.3);
G	функция, формула (12.2.15);
h	текущая глубина проникания;
\bar{I}	формула (12.2.14);
k_{cone}	тангенс полуугла ударника конической формы;
m	масса ударника;
\bar{m}_{imp}	формула (12.2.10);
P	нормальное напряжение на границе полости;
Q	функция, формула (12.1.10);
T	формула (12.1.12);
\hat{T}	формула (12.2.6);
v	текущая скорость ударника;
v_{bl}	баллистический предел;
y	текущий радиус каверны;
λ_0	параметр, формула (12.2.8);
λ_1	параметр, формула (12.2.16);
λ_2	параметр, формула (12.2.18);
$\bar{\Theta}(\bar{h}), \bar{\theta}(\bar{h})$	формула (12.2.11);
σ_n	нормальное напряжение на поверхности снаряда;
Φ	функция, определяющая форму ударника, Рис. 2.3.1.
χ	$= a_0/a_2$;
Ψ	функция, формула (12.2.13);

12.1 Ударники с произвольной формой образующей.

Наш анализ будет осуществляться применительно к широко распространенной модели [5,6,10,11] вида:

$$p = a_2 \dot{y}^2 + a_1 y \ddot{y} + a_0, \quad (12.1.1)$$

где p - нормальное напряжение на границе полости; параметры a_0, a_1, a_2 определяются свойствами материала преграды. Сагомоян [5] следующим образом представляет модель: "Плита моделируется упруго-пластической средой без упрочнения. В процессе проникания область плиты, примыкающая к поверхности снаряда, находится в пластическом состоянии. Частицы среды, приходящие в соприкосновение с поверхностью расширяющейся части жесткого снаряда, получают скорость, равную нормальной составляющей скорости проникания к поверхности снаряда. Вследствие этого происходит смещение и сжатие материала плиты в направлении этой нормали. Для ... тонких снарядов нормаль заменяется направлением, перпендикулярным скорости проникания. Смещение частиц материала плиты в ее плоскости считаем основным и полагаем, что частицы преграды остаются в плоскостях, перпендикулярных направлению проникания. Иными словами, принимаем, что движение частиц плиты происходит в условиях плоского деформирования с цилиндрической симметрией".

Тогда формулы для нормального напряжения на поверхности снаряда σ_n и сопротивления прониканию D_{imp} записываются, с учетом соотношений (2.3.5), следующим образом:

$$\sigma_n = (a_2 \Phi'^2 + a_1 \Phi \Phi'') \dot{h}^2 + a_1 \Phi \Phi' \ddot{h} + a_0, \quad (12.1.2)$$

$$D_{imp} = 2\pi \int_{\theta(h)}^{\Theta(h)} \sigma_n \Phi \Phi' dx \quad (12.1.3)$$

и уравнение движения ударника можно представить в виде:

$$\frac{dv^2}{dh} + \alpha(h)v^2 + \beta(h) = 0, \quad (12.1.4)$$

где

$$\alpha(h) = \frac{2g_2(h)}{\zeta(h)}, \beta(h) = \frac{2g_0(h)}{\zeta(h)}, \zeta(h) = m + 2g_1(h), \quad (12.1.5)$$

$$g_0(h) = 2\pi a_0 \int_{\theta(h)}^{\Theta(h)} \Phi \Phi' dx, \quad (12.1.6)$$

$$g_1(h) = \pi a_1 \int_{\theta(h)}^{\Theta(h)} \Phi^2 \Phi'^2 dx, \quad (12.1.7)$$

$$g_2(h) = 2\pi \left[\int_{\theta(h)}^{\Theta(h)} [a_2 \Phi \Phi'^3 dx + a_1 \Phi^2 \Phi' \Phi''] dx \right]. \quad (12.1.8)$$

Решение линейного относительно v^2 уравнения (12.1.4) с начальным условием $v^2(0) = v_{imp}^2$ таково:

$$v^2(h) = \frac{1}{Q(h)} \left[v_{imp}^2 - \int_0^h g_0(\tilde{h}) Q(\tilde{h}) d\tilde{h} \right], \quad (12.1.9)$$

где

$$Q(h) = \exp \left(\int_0^h g_2(\zeta) d\zeta \right). \quad (12.1.10)$$

Из соотношений (12.1.9)-(12.1.10) следует связь между v_{imp} , v_{res} и v_{bl} ($v_{imp} \geq v_{bl}$):

$$v_{res}^2 = \frac{1}{T} \left[v_{imp}^2 - \int_0^{b+L} g_0(h) Q(h) dh \right], \quad (12.1.11)$$

где

$$T = Q(b+L). \quad (12.1.12)$$

12.2 Ударники в форме острого прямого кругового конуса.

В случае острого прямого кругового конуса с уравнением образующей $\Phi(x) = k_{cone} x$ формулы Раздела 12.1 преобразуются к следующим:

$$g_0(h) = \pi a_0 [\Theta^2(h) - \theta^2(h)], \quad (12.2.1)$$

$$g_1(h) = \frac{\pi a_1 k_{cone}^4}{3} [\Theta^3(h) - \theta^3(h)], \quad (12.2.2)$$

$$g_2(h) = \pi a_2 k_{cone}^4 [\Theta^2(h) - \theta^2(h)], \quad (12.2.3)$$

$$\alpha(h) = \frac{2g_2(h)}{m + 2g_1(h)}, \quad (12.2.4)$$

$$v_{imp}^2 - \hat{T} v_{res}^2 = \lambda_0 (\hat{T} - 1), \quad (12.2.5)$$

$$\hat{T} = \exp \left(\int_0^{b+L} \alpha(h) dh \right), \quad (12.2.6)$$

$$v_{bl}^2 = \lambda_0 (\hat{T} - 1), \quad (12.2.7)$$

$$\lambda_0 = \frac{\chi}{k_{cone}^2}, \quad \chi = \frac{a_0}{a_2}. \quad (12.2.8)$$

В рассматриваемом случае интеграл в уравнении (12.2.6) может быть выражен через элементарные функции. Для этого удобно использовать безразмерные переменные и представить интеграл в виде:

$$\int_0^{b+L} \alpha(h) dh = \frac{3a_2}{a_1} \bar{I}, \quad \bar{I} = \int_0^{\bar{b}+1} \frac{\bar{\Theta}^2(\bar{h}) - \bar{\theta}^2(\bar{h})}{\bar{m}_{imp} + \bar{\Theta}^3(\bar{h}) - \bar{\theta}^3(\bar{h})} d\bar{h}, \quad (12.2.9)$$

где

$$\bar{m}_{imp} = \frac{3m}{2\pi a_1 k_{cone}^4 L^3}, \quad \bar{h} = \frac{h}{L}, \quad \bar{b} = \frac{b}{L}, \quad (12.2.10)$$

$$\bar{\Theta}(\bar{h}) = \begin{cases} 0 & \text{если } \bar{h} \leq 0 \\ \bar{h} & \text{если } 0 \leq \bar{h} \leq 1 \\ 1 & \text{если } \bar{h} \geq 1 \end{cases}, \quad \bar{\theta}(\bar{h}) = \begin{cases} 0 & \text{если } \bar{h} \leq \bar{b} \\ \bar{h} - \bar{b} & \text{если } \bar{b} \leq \bar{h} \leq \bar{b} + 1 \\ 1 & \text{если } \bar{h} \geq \bar{b} + 1 \end{cases}. \quad (12.2.11)$$

Интеграл \bar{I} можно также представить в более удобной для дальнейшего анализа форме, разбив область интегрирования на подынтервалы (пояснения на Рис. 12.2.1а-б.):

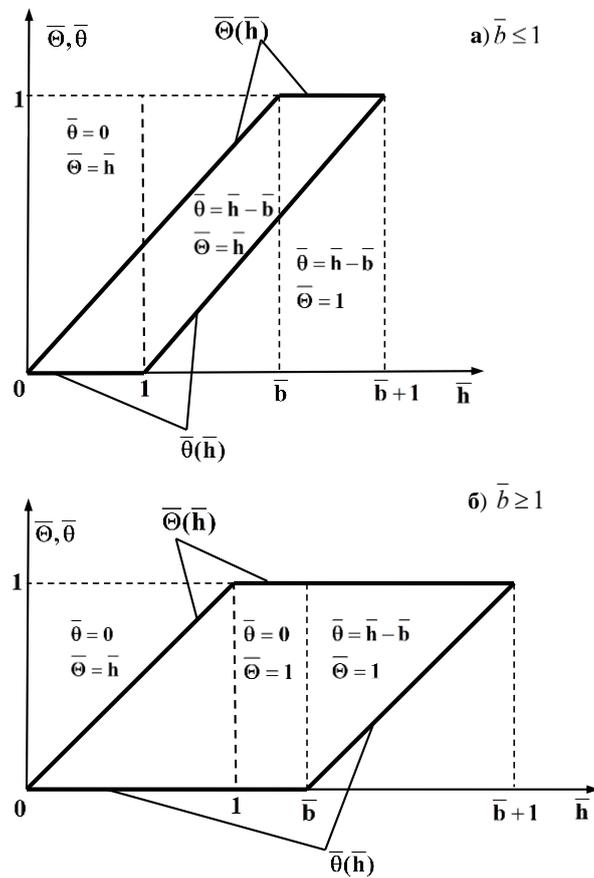


Рис. 12.2.1а-б. Пояснение к формулам (12.2.12).

$$\bar{I} = \begin{cases} \int_0^{\bar{b}} \frac{\bar{h}^2 d\bar{h}}{\bar{m}_{imp} + \bar{h}^3} + \int_{\bar{b}}^1 \frac{\bar{h}^2 - (\bar{h} - \bar{b})^2}{\bar{m}_{imp} + \bar{h}^3 - (\bar{h} - \bar{b})^3} d\bar{h} \\ + \int_{\bar{b}}^1 \frac{\bar{h}^2 - (\bar{h} - \bar{b})^2}{\bar{m}_{imp} + \bar{h}^3 - (\bar{h} - \bar{b})^3} d\bar{h} = \int_1^{\bar{b}+1} \frac{d\bar{h}}{\bar{m}_{imp} + 1 - (\bar{h} - \bar{b})^3} \text{ если } \bar{b} \leq 1 \\ \\ \int_0^1 \frac{\bar{h}^2 d\bar{h}}{\bar{m}_{imp} + \bar{h}^3} + \int_1^{\bar{b}} \frac{d\bar{h}}{\bar{m}_{imp} + 1} + \int_{\bar{b}}^{\bar{b}+1} \frac{1 - (\bar{h} - \bar{b})^2}{\bar{m}_{imp} + 1 - (\bar{h} - \bar{b})^3} d\bar{h} \\ = \frac{\bar{b} - 1}{\bar{m}_{imp} + 1} + \int_0^1 \frac{d\bar{h}}{\bar{m}_{imp} + \bar{h}^3} \text{ если } \bar{b} \geq 1 \end{cases} \quad (12.2.12)$$

Тогда, введя функцию

$$\Psi(z) = \int_0^z \frac{dt}{1-t^3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \left(\frac{2z+1}{\sqrt{3}} \right) - \frac{1}{6} \ln \left[\frac{(z-1)^2}{z^2+z+1} \right] - \frac{\pi}{6\sqrt{3}} \quad (12.2.13)$$

можно представить выражение для \bar{I} следующим образом:

$$\bar{I} = \lambda_1^2 G(\lambda_1, \bar{b}), \quad (12.2.14)$$

где

$$G(\lambda_1, z) = \begin{cases} \Psi(\lambda_1) - \Psi(\lambda_1(z-1)) & \text{если } z \leq 1 \\ \Psi(\lambda_1) + \lambda_1(z-1) & \text{если } z \geq 1 \end{cases}, \quad (12.2.15)$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{\bar{m}_{imp} + 1}} < 1, \quad (12.2.16)$$

а выражение для \hat{T} можно записать так:

$$\hat{T} = \exp(\lambda_2 G(\lambda_1, \bar{b})), \quad (12.2.17)$$

где

$$\lambda_2 = \frac{3a_2 \lambda_1^2}{a_1}. \quad (12.2.18)$$

Сравнение защитной эффективности изотропных (монолитных) и разнесенных преград с большими зазорами между слоями при пробивании заостренными коническими ударниками

Обозначения

$a_i^{(j)}$	параметры, определяющие модель для j -й пластины, формула (13.1.1);
$b^{(j)}$	толщина j -го слоя (номера порядковых слоев приведены в направлении проникания ударника) слоистой преграды;
b_{sum}	толщина монолитной преграды и суммарная толщина пластин СП;
$E^{(j)}$	см. уравнение (13.1.3);
G	функция, формула (12.2.15);
k_{cone}	тангенс полуугла ударника конической формы;
L	длина носовой части ударника, взаимодействующая с преградой;
N	количество слоев;
P	нормальное напряжение на границе полости, уравнение (13.1.1);
\hat{T}	формула (12.2.6);
v_{bl}	баллистический предел СП;
v_{blmon}	баллистический предел СП с той же толщиной, что и суммарная толщина пластин в РП;
y	текущий радиус каверны;
Γ	функция, формула (13.2.4);
κ	параметр, $0 < \kappa < 1$;
λ_0	параметр, формула (12.2.8);
λ_1	параметр, формула (12.2.16);
λ_2	параметр, формула (12.2.18);
$\xi^{(j)}$	см. Рис.5.1.1-5.1.2;
$\chi^{(j)}$	$= a_0^{(j)} / a_2^{(j)}$;
Ψ	функция, формула (12.2.13);
БП	баллистический предел;
МЛВ	модель локального взаимодействия;
РП	распределенная преграда;
СП	слоистая преграда.

13.1 Модель для многослойной преграды на основе "гипотезы плоских сечений"

Рассмотрим случай больших зазоров между слоями, когда ударник не взаимодействует с двумя или более пластинами одновременно. Такой вариант структуры преграды был рассмотрен выше применительно к МЛВ; в этом разделе мы используем модель (3.30), которая для многослойных преград может быть записана следующим образом:

$$p = a_2^{(j)} \dot{y}^2 + a_1^{(j)} y \ddot{y} + a_0^{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (13.1.1)$$

Для j -й пластины уравнение (12.2.5) можно записать в виде:

$$[v_{res}^{(j)}]^2 = E^{(j)} [v_{imp}^{(j)}]^2 - F^{(j)}, \quad (13.1.2)$$

где

$$E^{(j)} = \frac{1}{\hat{T}^{(j)}}, \quad F^{(j)} = \frac{\chi^{(j)}}{k_{cone}^2} \left[1 - \frac{1}{\hat{T}^{(j)}} \right], \quad \chi^{(j)} = \frac{a_0^{(j)}}{a_2^{(j)}} \quad (13.1.3)$$

а также $\hat{T}^{(j)} > 1$ определяются формулами Раздела 12.2, написанными для j -й пластины.

Заметим, что указание на возможность построения модели для многослойных пластин на основе модели для монолитной пластины, основанной на "гипотезе плоских сечений", можно найти в работах [5-6].

Очевидно, что модель, описываемая уравнениями (13.1.2)-(13.1.3), отличается от модели, определяемой в Разделе 12.2 на основе МЛВ, только коэффициентом в формуле для $F^{(j)}$ и использованием $\hat{T}^{(j)}$ в этой записи вместо $T^{(j)}$. Следовательно, сразу можно записать соотношение для БП многослойной преграды, аналогичное формуле (8.1.12):

$$k_{cone}^2 v_{bl}^2 = \sum_{j=1}^N \chi^{(j)} [\hat{T}^{(j)} - 1] \prod_{\nu=0}^{j-1} \hat{T}^{(\nu)}, \quad \hat{T}^{(0)} = 1. \quad (13.1.4)$$

Таким образом, ряд закономерностей, выявленных на основе МЛВ, остается в силе и в рассматриваемом случае. Для двух смежных пластин, расположенных таким образом, что значение параметра χ для первой пластины больше, чем для второй, БП преграды может быть увеличен путем перестановки пластин. Максимальный БП преграды достигается, когда пластины расположены в порядке возрастания параметра χ , а минимальный БП - когда пластины расположены в преграде в обратном порядке. Поскольку $\chi^{(j)}$ в модели (13.1.1) не зависит от коэффициента $a_1^{(j)}$, сформулированные выше баллистические свойства преграды действительны для произвольного выбора этого коэффициента.

Если же значения $\chi^{(j)}$ одни и те же для всех пластин, то есть, *все пластины изготовлены из одного и того же материала*, то соотношение (13.1.4) можно записать следующим образом:

$$\frac{1}{\lambda_0} v_{bl}^2 = S_1 - S_2, \quad (13.1.5)$$

где

$$S_1 = \sum_{j=1}^N \prod_{v=0}^j \hat{T}^{(v)} = \sum_{j=1}^{N-1} \prod_{v=0}^j \hat{T}^{(v)} + \prod_{v=0}^N \hat{T}^{(v)}, \quad (13.1.6)$$

$$S_2 = \sum_{j=1}^N \prod_{v=0}^{j-1} \hat{T}^{(v)} = \sum_{j=2}^N \prod_{v=0}^{j-1} \hat{T}^{(v)} + 1 = \sum_{j=1}^{N-1} \prod_{v=0}^j \hat{T}^{(v)} + 1. \quad (13.1.7)$$

Тогда:

$$\frac{1}{\lambda_0} v_{bl}^2 = \prod_{v=1}^N \hat{T}^{(v)} - 1 = \exp \left[\lambda_2 \sum_{j=1}^N G(\bar{b}^{(j)}) \right] - 1, \quad (13.1.8)$$

где аргумент λ_l у функции G не указывается, когда преграда состоит из пластин, изготовленных из того же материала.

Уравнение (13.1.8) показывает, что БП многослойной преграды не зависит от порядка пластин. Однако, в отличие от результатов анализа на основе МЛВ, анализ на основе "гипотезы плоских сечений" приводит к следующему выводу: когда пластины в РП изготовлены из того же самого материала, то БП преграды против конического ударника, в общем случае, зависит от толщин отдельных пластин при сохранении их суммарной толщины.

13.2 Постановка задачи.

Сравним БП монолитных и разнесенных преград на основе модели (13.1.1), предположив, что все рассматриваемые преграды изготовлены из того же материала, а суммарная толщина пластин равна толщине монолитной преграды, т.е.

$$\sum_{j=1}^N \bar{b}^{(j)} = \bar{b}_{sum}. \quad (13.2.1)$$

Для монолитной преграды уравнение (13.1.8) можно записать в виде:

$$\frac{1}{\lambda_0} v_{bl\ mon}^2 = \exp \left[\lambda_2 G(\bar{b}_{sum}) \right] - 1. \quad (13.2.2)$$

Из уравнений (13.1.8) и (13.2.2) следует, что

$$v_{bl}^2 - v_{bl\ mon}^2 = \lambda_0 \exp \left[\lambda_2 G(\bar{b}_{sum}) \right] \cdot \left[\exp(\lambda_2 \Gamma) - 1 \right], \quad (13.2.3)$$

где

$$\Gamma = \Gamma(\bar{b}^{(1)}, \bar{b}^{(2)}, \dots, \bar{b}^{(N)}) = \sum_{j=1}^N G(\bar{b}^{(j)}) - G \left(\sum_{j=1}^N \bar{b}^{(j)} \right). \quad (13.2.4)$$

Поскольку

$$\text{sign}(v_{bl} - v_{bl\ mon}) = \text{sign}(v_{bl}^2 - v_{bl\ mon}^2) = \text{sign}(\Gamma), \quad (13.2.5)$$

то функция $\Gamma(\bar{b}^{(1)}, \bar{b}^{(2)}, \dots, \bar{b}^{(N)})$ характеризует разницу между БП монолитных и разнесенных преград. В дальнейшем изложении мы исследуем поведение этой функции.

13.3 Некоторые частные случаи

Прежде чем перейти к общему случаю, мы рассмотрим два предельных варианта структуры преграды. Мы докажем, что в двух рассматриваемых случаях РП превосходит ИП по ЗЭ. Другие варианты структуры преграды можно проанализировать аналогично, однако мы используем другой подход, который позволяет исследовать эту проблему для общего случая.

13.3.1 Первый предельный вариант структуры преграды

Пусть $\bar{b}^{(j)} \geq 1$ ($b^{(j)} \geq L$) для всех $1 \leq j \leq N$. Тогда в рассматриваемом диапазоне изменения аргумента:

$$G(z) = \Psi(\lambda_1) + \lambda_1(z-1) \quad (13.3.1)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \Gamma &= \sum_{j=1}^N [\Psi(\lambda_1) + \lambda_1(\bar{b}^{(j)} - 1)] - \Psi(\lambda_1) - \lambda_1 \left[\sum_{j=1}^N \bar{b}^{(j)} - 1 \right] = \\ &= (N-1)[\Psi(\lambda_1) - \lambda_1] = (N-1) \left[\int_0^{\lambda_1} \frac{dz}{1-z^3} - \int_0^{\lambda_1} dz \right] = (N-1) \int_0^{\lambda_1} \frac{z^3 dz}{1-z^3} > 0. \end{aligned} \quad (13.3.2)$$

13.3.2 Второй предельный вариант структуры преграды

Рассмотрим теперь второй предельный случай, когда все $\bar{b}^{(j)} \leq 1$, а также $\bar{b}_{sum} \leq 1$. Тогда:

$$G(z) = \Psi(\lambda_1) - \Psi(\lambda_1(1-z)). \quad (13.3.3)$$

Воспользовавшись тождеством:

$$\Psi(\lambda_1(1-z)) = \Psi(\lambda_1) + \int_{\lambda_1}^{\lambda_1(1-z)} \frac{dt}{1-t^3} \quad (13.3.4)$$

для $z = \bar{b}^{(j)}$, а также условием (13.2.1) получаем:

$$\Gamma = \sum_{j=1}^N \int_{\lambda_1(1-\bar{b}^{(j)})}^{\lambda_1} \frac{dt}{1-t^3} - \int_{\lambda_1(1-\bar{\xi}^{(N)})}^{\lambda_1} \frac{dt}{1-t^3}, \quad (13.3.5)$$

где

$$\bar{\xi}^{(j)} = \sum_{v=0}^j \bar{b}^{(v)}, \quad \bar{\xi}^{(0)} = \bar{b}^{(0)} = 0, \quad j = 0 \div N. \quad (13.3.6)$$

Второй интеграл в уравнении (13.3.5) можно записать в виде:

$$\int_{\lambda_j(I-\bar{\xi}^{(N)})}^{\lambda_j} \frac{dt}{I-t^3} = \sum_{j=0}^N \int_{\lambda_j(I-\bar{\xi}^{(j)})}^{\lambda_j(I-\bar{\xi}^{(j-1)})} \frac{dt}{I-t^3} = \sum_{j=0}^N \int_{\lambda_j(I-\bar{b}^{(j)})}^{\lambda_j} \frac{d\tilde{t}}{I-(\tilde{t}-\lambda_j\bar{\xi}^{(j-1)})^3}. \quad (13.3.7)$$

В уравнении (13.3.7) j -й член в последней сумме получается из соответствующего члена в предыдущей сумме путем замены переменных, $t = \tilde{t} - \lambda_j\bar{\xi}^{(j-1)}$. Подставляя интеграл из левой части формулы (13.3.7) в уравнение (13.3.5), после несложных преобразований получим:

$$\Gamma = \lambda_1 \sum_{j=1}^N \bar{\xi}^{(j-1)} \int_{\lambda_j(I-\bar{b}^{(j)})}^{\lambda_j} \frac{t^2 + t(t - \lambda_1\bar{\xi}^{(j-1)}) + (t - \lambda_1\bar{\xi}^{(j-1)})^2}{(I-t^3) \left[I - (t - \lambda_1\bar{\xi}^{(j-1)})^3 \right]} dt. \quad (13.3.8)$$

Так как переменная t варьируется в диапазоне от $\lambda_j(I-\bar{b}^{(j)})$ до λ_j ,

$$\lambda_j(I-\bar{\xi}^{(j)}) \leq t - \lambda_1\bar{\xi}^{(j-1)} \leq \lambda_j(I-\bar{\xi}^{(j-1)}), \quad (13.3.9)$$

то, принимая во внимание, что $\lambda_1 < I$ и $0 < \bar{\xi}^{(v)} \leq \bar{b}_{sum} \leq I$ для $v = I \div N$, из уравнения (13.3.9) следует, что $0 \leq t - \lambda_1\bar{\xi}^{(j-1)} < I$. Таким образом, каждый интеграл в уравнении (13.3.8) положителен, и, следовательно, $\Gamma > 0$.

13.4 Общий случай (произвольная структура преграды)

Воспользовавшись формулами (12.2.13) и (12.2.15), вычислим производные функции G :

$$G'(z) = \begin{cases} \frac{\lambda_1}{1 - (\lambda_1(1-z))^3} & \text{если } z \leq 1, \\ \lambda_1 & \text{если } z \geq 1 \end{cases}, \quad (13.4.1)$$

$$G''(z) = \begin{cases} -\frac{3\lambda_1^4(1-z)^2}{[1 - (\lambda_1(1-z))^3]^2} & \text{если } z \leq 1, \\ 0 & \text{если } z \geq 1 \end{cases}, \quad (13.4.2)$$

Анализ показывает, что функции $G(z)$, $G'(z)$ и $G''(z)$ непрерывны в точке $z = 1$, т.е. непрерывная функция $G(z)$ имеет непрерывные первую и вторую производные. Вследствие этого, $\Gamma(\bar{b}^{(1)}, \bar{b}^{(2)}, \dots, \bar{b}^{(N)})$ является достаточно гладкой функцией, допускающей разложение в ряд Тейлора:

$$\Gamma(\bar{b}^{(1)}, \bar{b}^{(2)}, \dots, \bar{b}^{(N)}) = \Gamma(0, 0, \dots, 0) + \sum_{v=1}^N \Gamma_v(\kappa\bar{b}^{(1)}, \kappa\bar{b}^{(2)}, \dots, \kappa\bar{b}^{(N)})\bar{b}^{(v)}, \quad (13.4.3)$$

где $0 < \kappa < 1$,

$$\Gamma_v(\bar{b}^{(1)}, \bar{b}^{(2)}, \dots, \bar{b}^{(N)}) = \frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{b}^{(v)}} = G'(\bar{b}^{(v)}) - G' \left(\sum_{j=1}^N \bar{b}^{(j)} \right) \quad (13.4.4)$$

остаточный член записывается в форме Лагранжа [3].

Из выражений (13.4.2) следует, что $G''(z) \leq 0$, т.е. $G'(z)$ является невозрастающей функцией. Поскольку $\bar{b}^{(v)} < \bar{b}_{sum} = \bar{b}^{(1)} + \bar{b}^{(2)} + \dots + \bar{b}^{(N)}$, то $G'(\kappa\bar{b}^{(v)}) - G'(\kappa\bar{b}_{sum}) \geq 0$ и

$$\Gamma_{\nu}(\kappa\bar{b}^{(1)}, \kappa\bar{b}^{(2)}, \dots, \kappa\bar{b}^{(N)}) \geq 0. \quad (13.4.5)$$

Т.к. $\Gamma(0,0,\dots,0)=0$ и все $\bar{b}^{(j)} > 0$, неравенство (13.4.5) позволяет сделать вывод о том, что

$$\Gamma(\bar{b}^{(1)}, \bar{b}^{(2)}, \dots, \bar{b}^{(N)}) \geq 0. \quad (13.4.6)$$

Докажем теперь, что равенство в выражении (13.4.6) невозможно. Предположим противное, т.е. что $\Gamma(\bar{b}_*^{(1)}, \bar{b}_*^{(2)}, \dots, \bar{b}_*^{(N)})=0$ для некоторого положительного набора $\bar{b}_*^{(1)}, \bar{b}_*^{(2)}, \dots, \bar{b}_*^{(N)}$. Тогда из уравнения (13.4.3) с $\Gamma(0,0,\dots,0)=0$ следует, что все $\Gamma_{\nu}(\kappa\bar{b}_*^{(1)}, \kappa\bar{b}_*^{(2)}, \dots, \kappa\bar{b}_*^{(N)})=0$, т.е. $G'(\kappa\bar{b}_*^{(\nu)})=G'(\kappa\bar{b}_*)$, где $\bar{b}_* = \bar{b}_*^{(1)} + \bar{b}_*^{(2)} + \dots + \bar{b}_*^{(N)}$. Поскольку $\kappa\bar{b}_*^{(\nu)} < \kappa\bar{b}_*$ последнее условие может выполняться только в случае, если

$$\kappa\bar{b}_*^{(\nu)} \geq 1, \quad \nu = 1, \dots, N. \quad (13.4.7)$$

Т.е. когда $G' = const$. Очевидно, что из неравенства (13.4.7) следует, что $\bar{b}_*^{(\nu)} > 1$. Этот случай был рассмотрен в предыдущем разделе, и было доказано, что $\Gamma > 0$. Последний результат находится в противоречии с предположением, что равенство в уравнении (13.4.6) может быть достигнуто. Вследствие этого

$$\Gamma(\bar{b}^{(1)}, \bar{b}^{(2)}, \dots, \bar{b}^{(N)}) > 0 \quad (13.4.8)$$

для произвольного набора $\bar{b}^{(1)}, \bar{b}^{(2)}, \dots, \bar{b}^{(N)}$.

Итак, мы доказали, что защитная эффективность разнесенной преграды с большими воздушными промежутками между слоями выше, чем у монолитной преграды той же суммарной толщины пластин. В работе [7] доказано, что БП возрастает с ростом величины зазоров.

Глава 14

Оптимизация разнесенных преград при пробивании заостренными коническими ударниками.

Обозначения

a_0, a_1, a_2	параметры, определяющие модель;
$b^{(j)}$	толщина j -го слоя (номера порядковых слоев приведены в направлении проникания ударника) слоистой преграды;
b_{sum}	суммарная толщина пластин преграды;
G	функция, формула (12.2.15);
$H^{(\nu, \mu)}$	элементы матрицы гессiana;
N	количество слоев в преграде;
v_{bl}	баллистический предел многослойной преграды;
$\delta_{\nu\mu}$	см. формулу (14.1.7)
λ_0	параметр, формула (12.2.8);
λ_1	параметр, формула (12.2.16);
Λ	функция, формула (14.1.3);
Λ_*	максимальное значение функции Λ ;
Ψ	функция, формула (12.2.13);
БП	баллистический предел (БП).

14.1 Случай заданного количества слоев

Рассмотрим следующую задачу: пластины какой толщины (их количество задано) целесообразно выбрать в многослойной преграде с большими воздушными промежутками между слоями, суммарная толщина которых известна, чтобы достичь максимального БП.

Из формулы (13.1.8) следует, что задача сводится к максимизации следующей функции:

$$\tilde{\Lambda}(\bar{b}^{(1)}, \bar{b}^{(2)}, \dots, \bar{b}^{(N)}) = \sum_{j=1}^N G(\bar{b}^{(j)}) \quad (14.1.1)$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^N \bar{b}^{(j)} = \bar{b}_{sum}, \quad \bar{b}^{(j)} > 0, \quad j = 1, \dots, N, \quad (14.1.2)$$

где общая толщина пластин \bar{b}_{sum} известна. Это – задача сепарабельного программирования; для решения таких задач разработаны специальные методы (см., например, [1-2]). Однако, особенность данной задачи (во всех слагаемых суммы (14.1.1) фигурирует одна и та же функция G) позволяет обойти необходимость использования соответствующих громоздких методов и получить решение, имеющее универсальный характер.

В дальнейшем используется эквивалентная формулировка задачи:

$$\Lambda(\bar{b}^{(1)}, \dots, \bar{b}^{(N-1)}) = \sum_{j=1}^{N-1} G(\bar{b}^{(j)}) + G\left(\bar{b}_{sum} - \sum_{j=1}^{N-1} \bar{b}^{(j)}\right) \rightarrow \max \quad (14.1.3)$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{N-1} \bar{b}^{(j)} < \bar{b}_{sum}, \quad \bar{b}^{(j)} > 0, \quad j = 1, \dots, N-1. \quad (14.1.4)$$

Изучим поведение функции Λ , выписав уравнения для ее первых и вторых производных:

$$H^{(\nu)} \equiv \frac{\partial \Lambda}{\partial \bar{b}^{(\nu)}} = G'(\bar{b}^{(\nu)}) - G'\left(\bar{b}_{sum} - \sum_{j=1}^{N-1} \bar{b}^{(j)}\right), \quad (14.1.5)$$

$$H^{(\nu, \mu)} \equiv \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \bar{b}^{(\nu)} \partial \bar{b}^{(\mu)}} = \delta_{\nu\mu} G''(\bar{b}^{(\nu)}) + G''\left(\bar{b}_{sum} - \sum_{j=1}^{N-1} \bar{b}^{(j)}\right), \quad (14.1.6)$$

где $\nu = 1, \dots, N-1$, $\mu = 1, \dots, N-1$ и

$$\delta_{\nu\mu} = \begin{cases} 1 & \text{если } \nu = \mu \\ 0 & \text{если } \nu \neq \mu \end{cases}. \quad (14.1.7)$$

Гессиан (матрица с элементами $H^{(\nu\mu)}$) играет роль второй производной Λ , рассматриваемой как функция многих переменных [3]. Свойства гессиана связаны с выпуклостью функции Λ и они зависят от знаков корней характеристического уравнения:

$$\begin{vmatrix} H^{(1,1)} - \eta & H^{(1,2)} & \dots & H^{(1,N-1)} \\ H^{(2,1)} & H^{(2,2)} - \eta & \dots & H^{(2,N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H^{(N-1,1)} & H^{(N-1,2)} & \dots & H^{(N-1,N-1)} - \eta \end{vmatrix} = 0. \quad (14.1.8)$$

Так как последний член в уравнении (14.1.6) одинаков для всех $H^{(\nu, \mu)}$, он может быть отброшен в определителе (14.1.8). Ненулевые элементы остаются только на диагонали, и характеристическое уравнение имеет вид:

$$\prod_{j=1}^{N-1} [G''(\bar{b}^{(j)}) - \eta] = 0. \quad (14.1.9)$$

Область, определяемая линейными неравенствами (14.1.4) выпукла. Поскольку в этой области $G''(z) \leq 0$, все корни уравнения (14.1.9) неположительны, и, следовательно, гессен полуотрицателен. В классическом математическом анализе такие функции, как известно, называются невогнутыми (мы используем эту терминологию), в то время как в математическом программировании они определяются как «вогнутые функции».

Докажем сначала, что рассматриваемая задача всегда имеет единственное решение, если выполняется условие

$$\bar{b}_{sum} \leq N. \quad (14.1.10)$$

Используя равенство (14.1.5), перепишем условия $H^{(\nu)} = 0 (\nu = 1, \dots, N-1)$ в следующем виде:

$$G'(\bar{b}^{(\nu)}) = G'(\bar{b}^{(1)}), \quad \nu = 2, \dots, N-1, \quad (14.1.11)$$

$$G' \left(\bar{b}_{sum} - \sum_{j=1}^{N-1} \bar{b}^{(j)} \right) = G'(\bar{b}^{(1)}). \quad (14.1.12)$$

Предположим, что существует решение уравнений (14.1.11) и (14.1.12), при которых

$$\bar{b}^{(1)} \geq 1. \quad (14.1.13)$$

Поскольку $G'(z)$ убывает на интервале $0 < z < 1$ и является постоянной при $z \geq 1$, соотношения (14.1.11) и (14.1.12) дают, соответственно:

$$\bar{b}^{(\nu)} > 1, \quad \nu = 2, \dots, N-1, \quad (14.1.14)$$

$$\bar{b}_{sum} - \sum_{j=1}^{N-1} \bar{b}^{(j)} > 1. \quad (14.1.15)$$

Суммирование уравнений (14.1.13) и (14.1.14) приводит к неравенству:

$$\bar{b}_{sum} > N, \quad (14.1.16)$$

которое находится в противоречии с допущением (14.1.10).

Альтернативное неравенству (14.1.13) предположение, что $\bar{b}^{(1)} < 1$, приводит к единственному решению уравнений (14.1.11) и (14.1.12):

$$\bar{b}^{(\nu)} = \bar{b}_*^{(\nu)} = \bar{b}_{sum} / N, \quad \nu = 1 \div N. \quad (14.1.17)$$

Поскольку $\bar{b}_*^{(\nu)} < 1$, то $G''(\bar{b}_*^{(\nu)}) < 0$, уравнение (14.1.9) имеет только отрицательные корни и гессен отрицательно определен. Следовательно, Λ является строго выпуклой в точке $\bar{b}^{(\nu)} = \bar{b}_*^{(\nu)}$, и эта точка является точкой локального максимума. В выпуклом программировании (рассматриваемая задача относится к классу задач, рассматриваемых в выпуклом программировании), локальный максимум (если он существует) является также и глобальным максимумом (см, например, [4]). Таким образом, можно сделать вывод о том, что глобальный максимум функции Λ достигается в точке, определенной по формуле (14.1.17), то есть тогда, когда толщины пластин одинаковы. Уравнение для максимального значения Λ_* функции Λ таково:

$$\Lambda_* = N \left[\Psi(\lambda_1) - \Psi\left(\lambda_1 \left(1 - \frac{\bar{b}_{sum}}{N}\right)\right) \right]. \quad (14.1.18)$$

Рассмотрим теперь вариант, когда

$$\bar{b}_{sum} > N. \quad (14.1.19)$$

В этом случае существует непустая подобласть, определяемая неравенствами (14.1.4), для которых выполняются условия (14.1.13)-(14.1.15). Чтобы доказать последнее утверждение, достаточно найти такую подобласть. Можно проверить непосредственно, что такая подобласть может быть описана неравенствами:

$$1 < \bar{b}^{(\nu)} \leq \bar{b}_{sum}/N, \quad \nu = 1, \dots, N-1. \quad (14.1.20)$$

Структура подобласти, определяемая этими соотношениями, показана на Рис.14.1.1 и 14.1.2 для $N=2$ и $N=3$, соответственно.

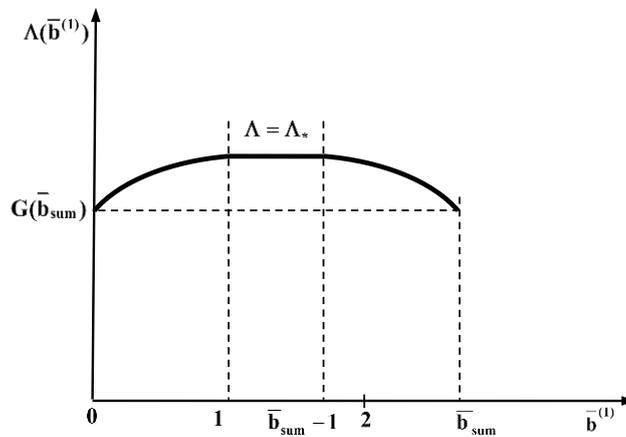


Рис.14.1.1 Подобласть, определяемая соотношениями (14.1.4) и (14.1.13)-(14.1.15); $N=2$

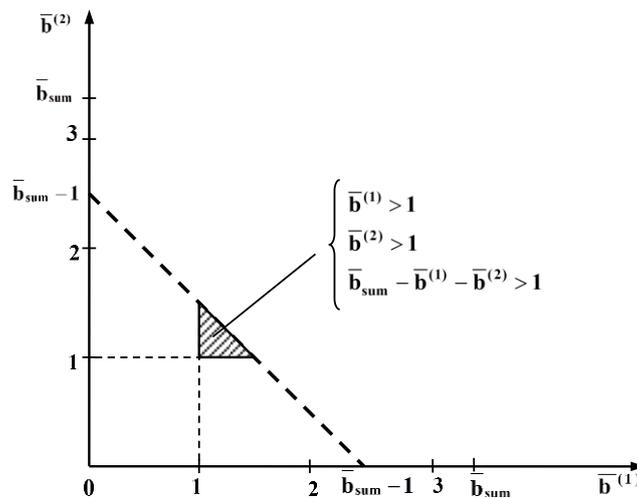


Рис.14.1.2 Подобласть, определяемая соотношениями (14.1.4) и (14.1.13)-(14.1.15); $N=3$

Поскольку $G(z) = \Psi(\lambda_1) + \lambda_1(z-1)$ для $z > 1$, значение функции Λ в точках, которые принадлежат подобласти, задается следующей формулой:

$$\Lambda_* = N[\Psi(\lambda_1) - \lambda_1] + \lambda_1 \bar{b}_{sum}, \quad (14.1.21)$$

т.е., Λ_* постоянна.

Подобласть является связной и выпуклой, поскольку задается линейными неравенствами. Очевидно, что если невогнутая функция Λ принимает в ней постоянное значение, то это значение равно максимуму Λ . Поэтому, если $\bar{b}_{sum} > N$, то существует подобласть в пространстве переменных $\bar{b}^{(v)} > 1$, которая определяется неравенствами (14.1.4). В этой подобласти БП достигает своего максимального значения Λ_* , которое определяется по формуле (14.1.21).

14.2 Анализ влияния заданного количества слоев на оптимальное решение

Решение, задаваемое формулами (14.1.18) и (14.1.21), может быть представлено в следующем виде (все слои одинаковой толщины):

$$\Lambda_* = \begin{cases} N[\Psi(\lambda_1) - \lambda_1] + \lambda_1 \bar{b}_{sum} & \text{если } N < \bar{b}_{sum} \\ N \left[\Psi(\lambda_1) - \Psi \left(\lambda_1 \left(1 - \frac{\bar{b}_{sum}}{N} \right) \right) \right] & \text{если } N \geq \bar{b}_{sum} \end{cases}, \quad (14.2.1)$$

Изучим поведение Λ_* в зависимости от N , предположив, что N меняется непрерывно [строго говоря, последствия этого допущения требуют внимательного анализа (см. для примера Раздел 11.3)].

Вычислим первую производную:

$$\frac{d\Lambda_*}{dN} = \begin{cases} \Psi(\lambda_1) - \lambda_1 & \text{если } N < \bar{b}_{sum} \\ \Psi(\lambda_1) - \Psi \left(\lambda_1 - \frac{\lambda_1 \bar{b}_{sum}}{N} \right) - \frac{\lambda_1 \bar{b}_{sum}}{N} \Psi' \left(\lambda_1 - \frac{\lambda_1 \bar{b}_{sum}}{N} \right) & \text{если } N \geq \bar{b}_{sum} \end{cases}. \quad (14.2.2)$$

Поскольку

$$\Psi(\lambda_1) - \lambda_1 = \int_0^{\lambda_1} \frac{z^3 dz}{1 - z^3} > 0, \quad (14.2.3)$$

$d\Lambda_*/dN > 0$ для $N < \bar{b}_{sum}$. Выражение $d\Lambda_*/dN$ для $N \geq \bar{b}_{sum}$ может быть дважды преобразовано с помощью теоремы Лагранжа [3]. На первом этапе мы получим:

$$\Psi(\lambda_1) - \Psi \left(\lambda_1 - \frac{\lambda_1 \bar{b}_{sum}}{N} \right) = \frac{\lambda_1 \bar{b}_{sum}}{N} \Psi' \left(\lambda_1 - \frac{\lambda_1 \bar{b}_{sum}}{N_*} \right), \quad N_* > N, \quad (14.2.4)$$

на втором:

$$\begin{aligned} \frac{d\Lambda_*}{dN} &= \frac{\lambda_1 \bar{b}_{sum}}{N} \left[\Psi' \left(\lambda_1 - \frac{\lambda_1 \bar{b}_{sum}}{N_*} \right) - \Psi' \left(\lambda_1 - \frac{\lambda_1 \bar{b}_{sum}}{N} \right) \right] \\ &= \left(\frac{\lambda_1 \bar{b}_{sum}}{N} \right)^2 \frac{N_* - N}{N_*} \Psi'' \left(\lambda_1 - \frac{\lambda_1 \bar{b}_{sum}}{N_{**}} \right), \quad N < N_{**} < N_*. \end{aligned} \quad (14.2.5)$$

Поскольку $\Psi''(z) = 3z^2/(1-z^3)^2 > 0$, $d\Lambda_*/dN < 0$ для $N \geq \bar{b}_{sum}$. Следовательно, Λ_* является возрастающей функцией переменной N .

Используя формулы (14.2.1) и (14.2.4), можно вычислить предел:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \Lambda_* &= \lim_{N \rightarrow \infty} N \left[\Psi(\lambda_1) - \Psi\left(\lambda_1 - \frac{\bar{b}_{sum} \lambda_1}{N}\right) \right] = \\ &= \bar{b}_{sum} \lambda_1 \lim_{N \rightarrow \infty} \Psi'\left(\lambda_1 - \frac{\lambda_1 \bar{b}_{sum}}{N_*}\right) = \bar{b}_{sum} \lambda_1 \Psi'(\lambda_1) = \frac{\lambda_1 \bar{b}_{sum}}{1 - \lambda_1^3}. \end{aligned} \quad (14.2.6)$$

Следовательно, БП возрастает, если количество пластин с одинаковыми толщинами в преграде возрастает, и стремится к конечному значению, когда число слоев приближается к бесконечности.

Изучим поведение БП для больших N . В этом случае БП v_{bl} определяется следующим уравнением:

$$\frac{1}{\lambda_0} v_{bl}^2 = \exp\left(\frac{3a_2 \lambda_1^2}{a_1} \Lambda_*\right) - 1, \quad (14.2.7)$$

где Λ_* задается формулой уравнением (14.1.18). Дифференцируя обе части этого уравнения по N , получаем:

$$\frac{2}{\lambda_0} v_{bl} \frac{dv_{bl}}{dN} = \frac{3a_2 \lambda_1^2}{a_1} \exp\left(\frac{3a_2 \lambda_1^2}{a_1} \Lambda_*\right) \frac{d\Lambda_*}{dN}. \quad (14.2.8)$$

Из уравнения (14.2.5) следует, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{d\Lambda_*}{dN} = 0. \quad (14.2.9)$$

Используя уравнение (14.2.8), находим, что $dv_{bl}/dN \rightarrow 0$, когда $N \rightarrow \infty$. Таким образом, можно ожидать, что БП слабо зависит от количества одинаковых пластин для больших N .

**Иллюстративные численные расчеты для
острых конических ударников на основе
модели А.Я. Сагомояна.**

Обозначения

A	параметр, формула (15.1.2);
b_{sum}	суммарная толщина пластин преграды;
\bar{b}_{sum}	$= b_{sum}/L$
$b^{(i)}$	толщины пластин в разнесенной преграде; на Рис.15.1.1 - 15.1.2; предполагаются одинаковыми;
$\bar{b}^{(i)}$	$= b^{(i)}/L$;
k_{cone}	коэффициент в уравнении образующей конуса, $k_{cone} = tg \mathcal{G}$;
L	длина носовой части ударника;
m	масса ударника;
\bar{m}_{imp}	формула (12.2.10);
N	количество слоев в преграде;
$v_{bl\ mon}$	баллистический предел монолитной преграды;
Y	предел текучести материала преграды при сдвиге;
v_{bl}	баллистический предел многослойной преграды;
β_c	параметр в модели заданной соотношениями (2.2.27)-(2.2.28);
$\Delta^{(i)}$	толщины зазоров в разнесенной преграде; на Рис.15.1.1 - 15.1.2 предполагаются одинаковыми;
$\bar{\Delta}^{(i)}$	$= \Delta^{(i)}/L$;
$\varepsilon, \tilde{\varepsilon}$	показатели, характеризующие отличие величин БП многослойной и монолитной преград, формулы (15.1.1) и (15.2.1);
\mathcal{G}	полуугол при вершине конического ударника;
μ_{fr}	коэффициент трения;
ν	коэффициент Пуассона материала преграды;
ρ_{sh}	плотность материала преграды;
БП	баллистический предел БП);
МЛВ	Модель локального взаимодействия;
ТВЗ	толщина воздушных зазоров.

В настоящей главе приводятся результаты двух серий иллюстративных численных расчетов на основе модели А.Я. Сагомояна применительно к ударникам, имеющим форму острого, прямого, кругового конуса. Использовалась модель, заданная соотношениями (2.2.27)-(2.2.28).

15.1 Расчеты для первого набора данных

На Рис.15.1.1 - 15.1.2 представлены результаты проведенных нами расчетов [7] для алюминиевых (7075-T6) преград и преград из мягкой стали, соответственно. Данные о свойствах материала взяты из книги [9]. Целью расчетов являлся анализ влияния зазоров между слоями на отличие величин БП разнесенной и монолитной преград в зависимости от полуугла при вершине конического ударника и количества слоев. В качестве оценки различия в значениях БП использовался показатель:

$$\mathcal{E} = \frac{v_{bl} - v_{bl\,mon}}{v_{bl\,mon}} \quad (15.1.1)$$

где v_{bl} и $v_{bl\,mon}$ - БП разнесенной и монолитной преград, соответственно;

$$A = \frac{m}{2\pi k_{cone}^3 (k_{cone} + \mu_{fr}) L^3 \beta_c}; \quad (15.1.2)$$

параметры, определяющие структуру преград, представлены на рисунках, обозначения описаны в таблице.

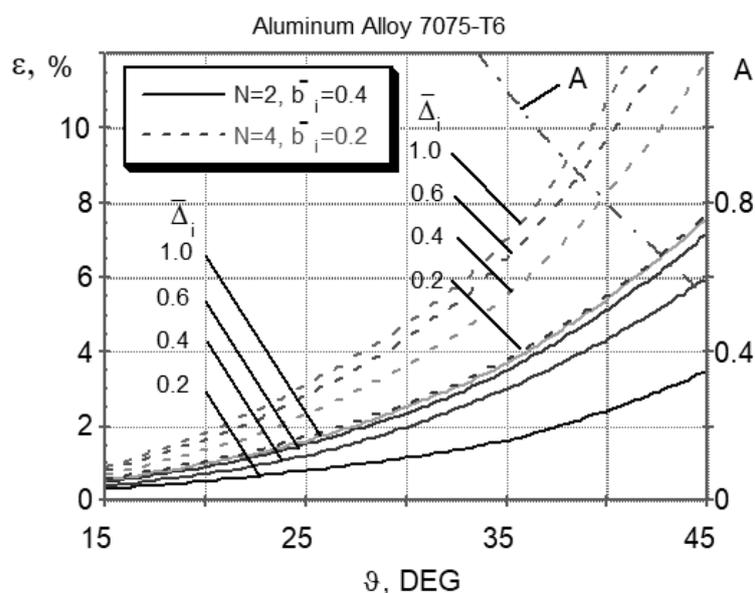


Рис.15.1.1. Результаты расчетов для алюминиевых преград.

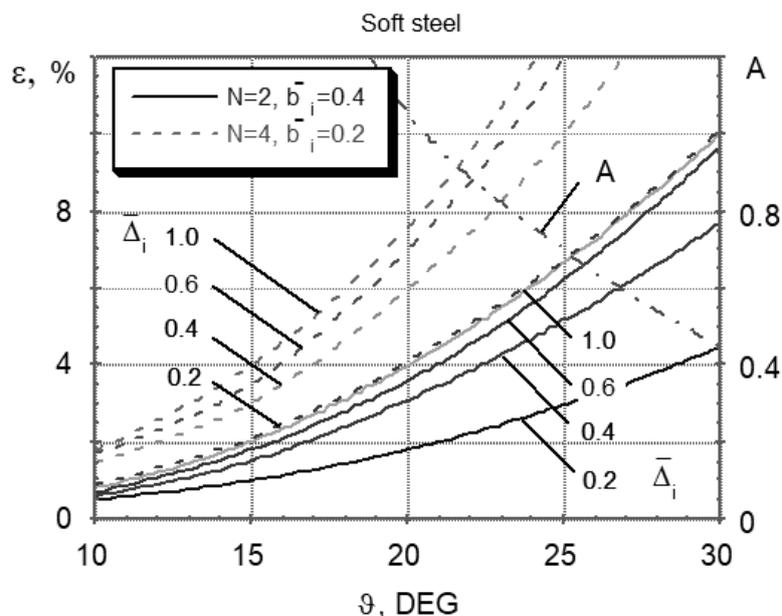


Рис.15.1.2. Результаты расчетов для преград из мягкой стали.

Приведенные результаты численного моделирования подтверждают теоретический вывод о возрастании БП при увеличении толщины воздушных зазоров (ТВЗ). ТВЗ ошутимее влияют на БП, если $A < 1$ (для малых ϑ). Формула (15.1.2) показывает, что последнее справедливо для относительных больших значений коэффициента β_c , который, как правило, пропорционален плотности материала мишени.

Таким образом, два фактора приводят к увеличению БП, а именно, увеличение ТВЗ и увеличение числа пластин в преграде при сохранении их общей толщины. При анализе Рис.15.1.1 - 15.1.2 надо принимать во внимание, что "гипотеза плоских сечений" оправдана в большей степени для тонких ударников (конических ударников с малым ϑ).

15.2 Расчеты для второго набора данных

Второй набор [8] включает данные для преград из алюминиевого сплава AA5083-H116 и мягкой стали. Для алюминия использовались следующие значения параметров, характеризующих механические свойства материалов, взятые с сайта <http://www.matweb.com>: $\rho_{sh} = 2660 \text{ кг/м}^3$, $E = 71 \text{ ГПа}$, $Y = 190 \text{ МПа}$; для мягкой стали – данные из книги [9]: $\rho_{sh} = 7830 \text{ кг/м}^3$, $E = 206 \text{ ГПа}$, $Y = 206 \text{ МПа}$. Для характеристики различия между величинами БП разнесенных и монолитных преград используется показатель:

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{v_{bl}}{v_{bl\ mon}}. \quad (15.2.1)$$

Результаты моделирования представлены на Рис. 15.2.1-15.2.4.

Влияние толщины воздушного зазора (ТВЗ) на БП преграды, состоящей из двух пластин, показано на Рис.15.2.1. Это влияние возрастает с увеличением ТВЗ, причем эффект от изменения порядка пластин выражен слабо при $\bar{\Delta}_i^{(1)} \leq 1$.

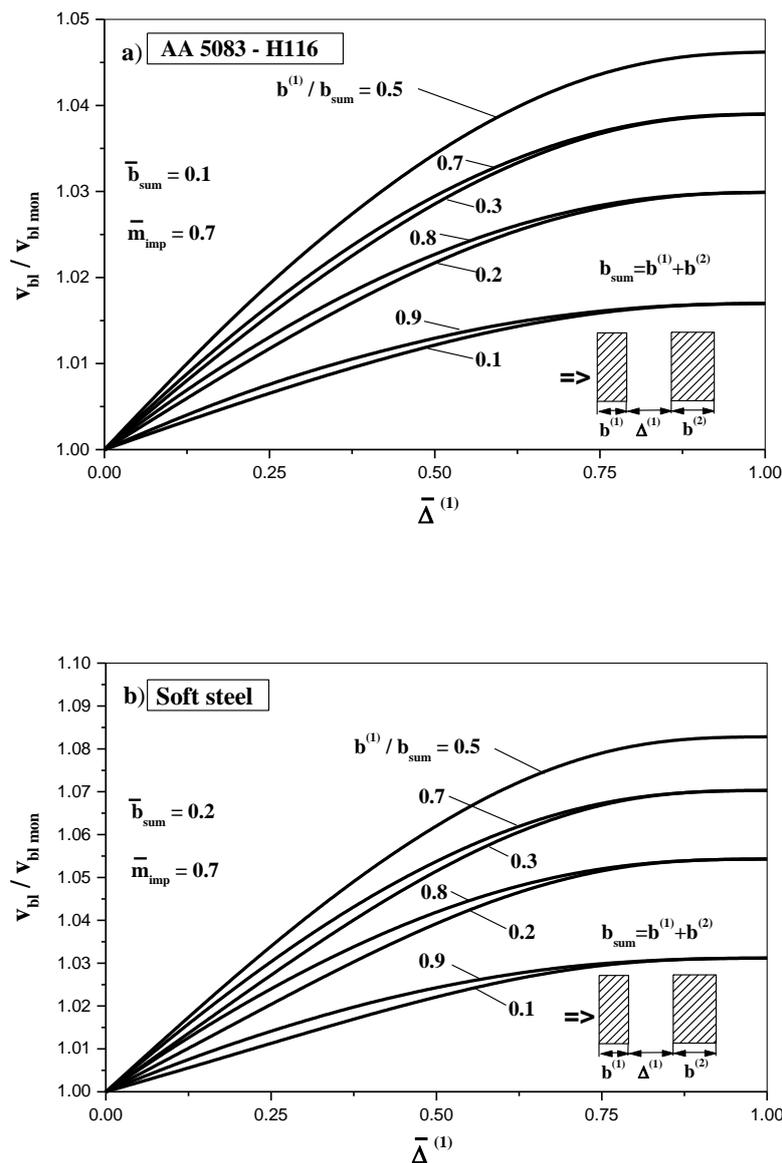


Рис. 15.2.1. Влияние ТВЗ на БП разнесенных двухслойных преград.

Рис. 15.2.2. относится к ситуации, когда ТВЗ между пластинами двухслойной преграды велика (слои пробиваются последовательно), и анализируется влияние относительной толщины первого слоя на БП. Видно, что в соответствии с теоретическими предсказаниями максимальная эффективность слоистости достигается тогда, когда пластины в РП имеют одинаковые толщины, причем максимум хорошо выражен. На Рис. 15.2.3 приведены результаты расчетов, аналогичных представленным на Рис. 15.2.3, но применительно к трехслойной РП. Эти результаты подтверждают теоретическое предсказание, что максимальный БП достигается при одинаковых толщинах слоев. Каждая кривая на этом рисунке отражает зависимость БП от безразмерной толщины второй пластины, когда толщина первой пластины задана.

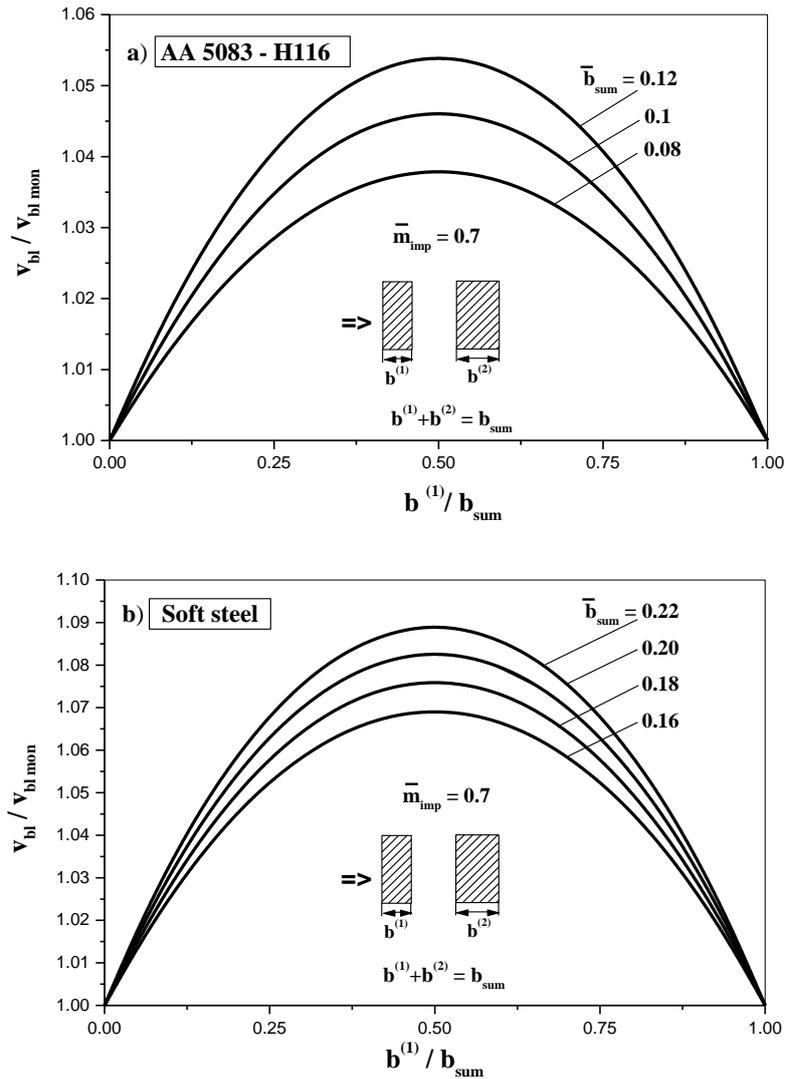


Рис. 15.2.2. Влияние распределения суммарной толщины двухслойной разнесенной преграды по ее слоям при большой ТВЗ ($\bar{\Delta}^{(1)} > 1$)

Рис. 15.2.3 иллюстрирует эффект разделения монолитной преграды на N одинаковых слоев с толщинами воздушных зазоров, обеспечивающими их последовательное пробивание. Этот эффект ярко выражен для небольшого количества слоев и стабилизируется при возрастании N .

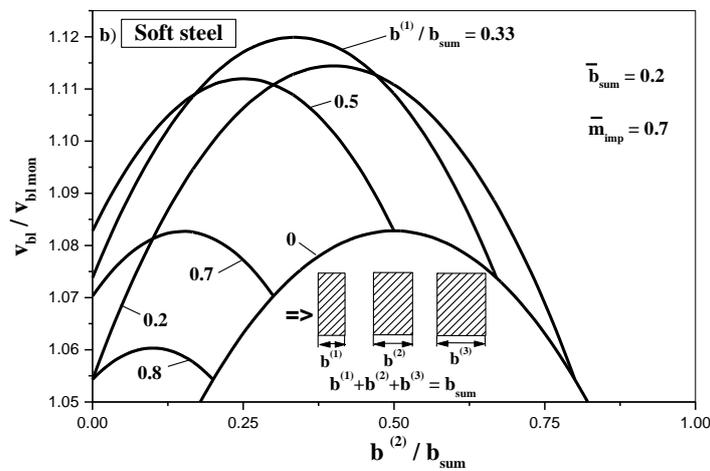
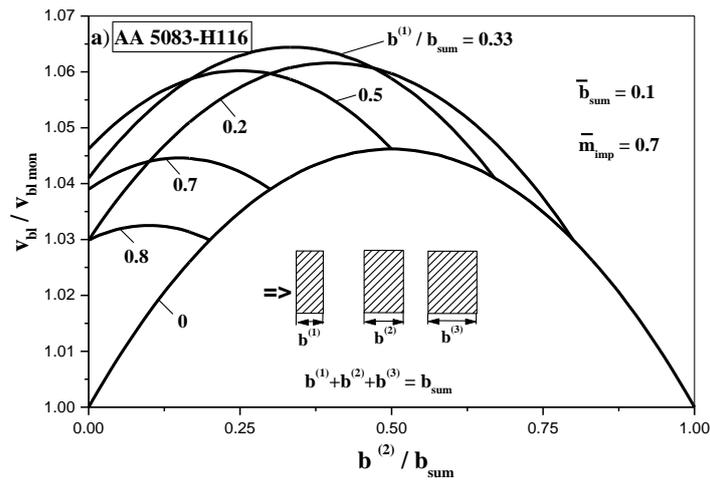


Рис. 15.2.3. Влияние распределения суммарной толщины трехслойной разнесенной преграды по ее слоям при большой ТВЗ ($\Delta^{(1)} > 1$)

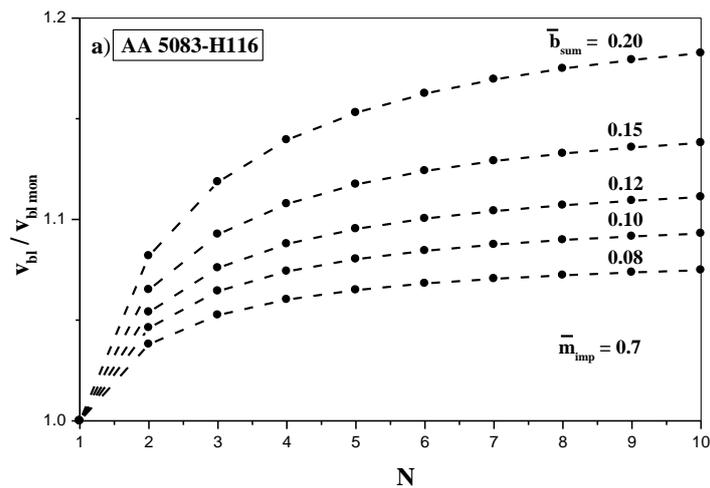


Рис. 15.2.4. Влияние количества одинаковых, последовательно пробиваемых слоев при заданной их суммарной толщине на БП преграды.

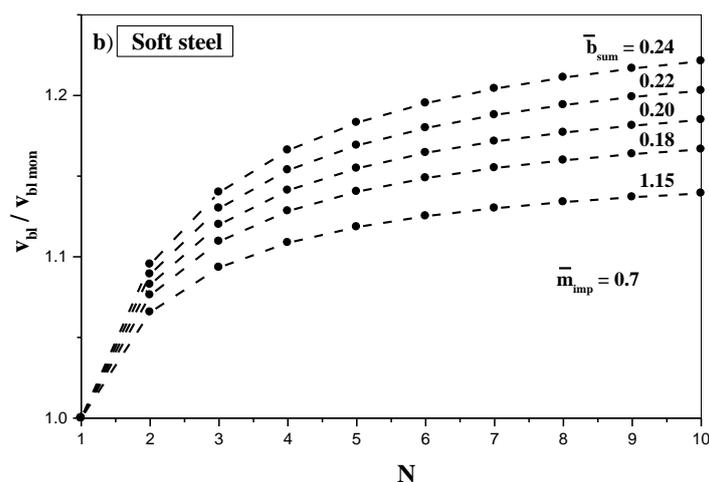


Рис. 15.2.4 Продолжение.

15.3 Заключительные замечания

При сопоставлении результатов исследования баллистических свойств преград различной структуры со слоями из одного и того же материала на основе МЛВ и на базе "гипотезы плоских сечений" нетрудно заметить, что в ряде ситуаций закономерности, обоснованные с привлечением этих моделей, противоречат друг другу. Традиционный подход, призванный снять такие противоречия – это детальный анализ приближенных моделей с выявлением областей их рационального применения. При кажущейся очевидности такого подхода его практическая реализация является весьма сложной задачей, ввиду многообразия возникающих ситуаций при пробивании преград различной структуры, изготовленных из различных материалов, при использовании ударников различной формы и при различных скоростях удара. Однако, несмотря на описанные выше методологические проблемы, проведенный анализ позволяет сделать, хотя и строго обоснованный, но весьма правдоподобный вывод: различия между защитной эффективностью монолитных, многослойных в-контакте и разнесенных преград являются, как правило, незначительными и лежат в пределах погрешностей используемых для их анализа моделей. В пользу такого вывода свидетельствуют также результаты экспериментальных исследований и "точных" расчетов с использованием сложных программных пакетов, которые также часто противоречивы. Отметим, что приведенные рассуждения относятся к анализу преград, элементы которых изготовлены из одного и того же материала; в случае использования различных материалов (особенно с сильно отличающимися свойствами) можно ожидать большей надежности результатов анализа на основе приближенных моделей.

Литература к Части 5

1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. М.: Высшая школа, 1986. – 316 с.
2. Ефимова Г. А., Страхов Е. М. Методы оптимизации и исследование операций: Методические указания для самостоятельной работы к разделам «Дробно-линейное программирование», «Сепарабельное программирование», «Квадратичное программирование» для студентов специальности «Прикладная математика». Одесса: Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова, 2015. – 38 с.

3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М., 1974. - 832 с.
4. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. – 472 с.
5. Сагомонян А.Я. Пробивание плиты тонким твердым снарядом. // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1975(5). С. 104-111.
6. Сагомонян, А.Я. Динамика пробивания преград. МГУ, 1988. – 221 с.
7. Ben-Dor, G., Dubinsky, A., Elperin, T. (1998). Effect of air gaps on ballistic resistance of targets for conical impactors. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, **30**(3): 243-249.
8. Ben-Dor, G., Dubinsky, A., Elperin, T. (2006). *Applied High-Speed Plate Penetration Dynamics*. Springer, Dordrecht.
9. Recht, R.F. High velocity impact dynamics: Analytical modeling of plate penetration dynamics. In: Zukas, J.A., ed., *High Velocity Impact Dynamics*. John Wiley and Sons, New York, 1990, p. 443-513.
10. Satapathy, S. (1997). Application of cavity expansion analysis to penetration problems. Rep. IAT.R-0136. The University of Texas at Austin, Institute for Advanced Technology, Austin, TX. 153 pp.
11. Sobeski, R., Urgessa, G. (2015). Review of quasi-analytical and cavity expansion methods for projectiles penetration of concrete targets. *Int. J. of Protective Structures*, **6**(1): 43–64.

Часть 6

Оптимизация многослойных преград по критерию минимума удельной массы преграды

В Части 6 рассматриваются задачи поиска оптимальных или рациональных параметров неоднородных плит при ударном проникании по критерию минимума удельной массы преграды. В одних случаях задача сформулирована в рамках теории оптимального управления и использованы эффективные методы ее решения (принцип максимума Понтрягина, метод игольчатых вариаций), в других – наилучший вариант выбирается среди заданного конечного набора.

Часть 6 включает три главы.

В Главе 16 предложен подход к решению оптимизационной задачи на основе принципа максимума Понтрягина. Используется допущение о существовании определенной связи между основными параметрами модели проникания. Такое допущение уменьшает количество управляющих функций до одной, а также позволяет осуществлять поиск оптимальных структур преграды в широком диапазоне – от слоистых мишеней до пластин с непрерывным распределением свойств по толщине. Найдены простые критерии оптимальной структуры преграды, имеющие ясный физический смысл, введено понятие качества материала, которое играет существенную роль в формировании оптимальной структуры преграды минимального веса.

В Главе 17 аналогичная задача оптимизации исследуется с привлечением метода игольчатых вариаций. Этот подход сужает область поиска оптимальных структур мишеней до слоистых плит, однако имеется также и ряд преимуществ по сравнению с классическим принципом максимума. В частности, несмотря на численную суть метода, на его основе аналитически получены критерии оптимальной структуры плиты. Эти критерии позволяют найти решение общей задачи об ударе конуса для произвольного набора материалов, а также сформулировать достаточно простой алгоритм построения оптимальной структуры плиты на качественном уровне.

Глава 18 посвящена анализу влияния дополнительных факторов проникания на оптимальную структуру преграды. Рассмотрены такие факторы, как трение, вязкость, краевые эффекты свободных поверхностей плиты. При решении оптимизационных задач используются методы, развитые в главах 16 и 17.

Непрерывное изменение характеристик материала по толщине преграды

Обозначения

a_0, a_2	параметры модели;
a	см. формулу (16.2.13);
A, B	параметры, определяющие линейную зависимость (16.1.8);
b	толщина преграды;
$b^{[j]}$	толщина j -го слоя преграды;
C_i	см. формулы (16.1.7), (16.1.37);
D, B_1, B_2	параметры, определяющие кусочно-линейную зависимость в соотношении (16.2.7);
E_1	$= 2S / M > 0$, см. уравнения (16.1.10), (16.2.1);
E_2	$= 4\pi g^2 \alpha / M > 0$, см. уравнения (16.1.29), (16.1.42);
f	$= \tilde{\rho}_k / \varphi(\tilde{\rho}_k)$;
f_m	$= \tilde{\rho}_k / (B + A\tilde{\rho}_k^m)$;
F	константа, формула (16.1.48);
G_{\min}	минимальная удельная масса преграды, формула (16.1.3);
G	удельная масса преграды;
H	динамическая твердость материала преграды;
H_B	твердость по Бринеллю;
$H^{[j]}$	динамическая твердость материала j -го слоя преграды;
H_{\min}, H_{\max}	минимальное и максимальное значения динамической твердости для распределения Ξ , формула (16.1.2);
H_{mid}, ρ_{mid}	см. соотношения (16.2.7)-(16.2.10) и Рис. 16.2.1;
h	длина конической головной части ударника;
K	$= E_1 / m$, см. уравнение (16.2.22);
k	$= \sin^2 \alpha$;
L	текущая глубина внедрения ударника в преграду;
L_k	конечная глубина внедрения ударника;
M	масса ударника;
m	положительная степень в нелинейной зависимости $H = \varphi(\rho)$, формула (16.2.14);
P_c	сила сопротивления прониканию, правая часть уравнения (16.1.1);
p_n	удельное сопротивление прониканию;
Q	$= H / \rho$, параметр, введенный для характеристики качества материала;
r	см. Рис. 16.1.1;
S	площадь поперечного сечения цилиндрического ударника;

s	$= 1/(m-1)$, см. уравнение (16.2.20);
t	$= L$, аналог времени (обозначение в терминах ТОУ);
t_*	точка переключения (обозначение в терминах ТОУ);
$v(L)$	текущая (мгновенная) скорость ударника;
$v_{[0]}$	начальная скорость ударника;
$W_{[0]}$	начальная кинетическая энергия ударника;
x	см. Рис. 16.1.1;
\vec{y}	вектор фазовых координат;
$y^{(i)}$	i -я фазовая координата (обозначение в терминах ТОУ);
Z	функция, см. формулу (16.2.6);
α	полуугол при вершине ударника конической формы;
\hat{H}	функция Гамильтона (гамильтониан) (обозначение в терминах ТОУ);
μ_{fr}	коэффициент трения между поверхностями ударника и преграды в области их контакта;
ξ	см. Рис. 16.1.1;
$\rho^{[j]}$	плотность материала j -го слоя преграды;
ρ_{\min}, ρ_{\max}	минимальное и максимальное значения плотности для распределения Ω , формула (16.1.2);
$\bar{\Phi}$	функция, см. формулы (16.1.6), (16.1.7);
Φ_1, Φ_2	функции, см. формулу (16.2.6);
Φ	функция, см. формулы (16.1.5), (16.1.18), (16.2.16);
$\Phi_{[0]}$	$= \Phi(0)$;
φ	функция, задающая связь между параметрами двучленной МЛВ;
$\psi^{(i)}$	i -я сопряженная переменная (обозначение в терминах ТОУ);
$\vec{\psi}$	вектор сопряженных переменных;
Ω, Ξ	см. формулу (16.1.2);
Ω_0	множество внутренних точек множества Ω ;
МЛВ	модель локального взаимодействия;
ТОУ	теория оптимального управления.

Примечание. Символ " \sim " над параметром указывает на оптимальный параметр. Символ k , используемый в качестве нижнего индекса для некоторой функции указывает на значение этой функции при $t = t_k$ (время окончания процесса). Верхний индекс в квадратных скобках указывает на номер слоя, в круглых – на координату вектора. Символ "0" в квадратных скобках, используемый в качестве нижнего индекса, указывает на начальное значение.

В данной главе рассмотрен широкий класс задач оптимизации, основанный на приближенной эмпирической зависимости, которая представляет собой двучленную МЛВ вида (1.4.1) при следующих значениях параметров: $a_0 = H$, $a_2 = \rho$, $\mu_{fr} = 0$. Основное внимание уделяется влиянию на оптимальную структуру плиты таких факторов, как форма ударника и выбор универсальной связи между ключевыми параметрами (динамической твердостью и плотностью) модели.

16.1. Случай линейной зависимости между твердостью и плотностью.

16.1.1. Постановка задачи оптимизации.

В случае произвольного распределения плотности $\rho(x)$ и динамической твердости $H(x)$ по толщине плиты, уравнение движения ударника массой M согласно эмпирической модели (1.4.1) можно представить в виде:

$$\frac{1}{2} M \frac{d(v^2)}{dL} = -2\pi \int_0^L \left\{ H(x) + \frac{(r'(\xi))^2}{1 + (r'(\xi))^2} \rho(x) v^2(L) \right\} r(\xi) r'(\xi) d\xi, \quad (16.1.1)$$

где L, v – текущая глубина и скорость внедрения ударника, соответственно; $r(\xi)$ – уравнение образующей ударника, имеющего форму тела вращения; $\xi = L - x$ – координата, отсчитываемая от кончика ударника до лицевой поверхности плиты; выражение в фигурных скобках отвечает удельному сопротивлению проникания p_n (Рис. 16.1.1).

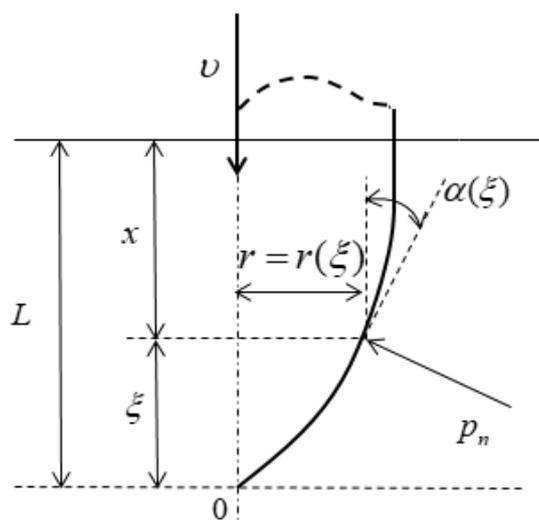


Рис. 16.1.1. Схема проникания ударника

Вводятся ограничения на распределения плотности и твердости:

$$\begin{aligned} \rho \in \Omega, \quad \Omega &= \{ \rho(x) : \rho_{\min} \leq \rho(x) \leq \rho_{\max}, (x \in [0, L_k]) \} \\ H \in \Xi, \quad \Xi &= \{ H(x) : H_{\min} \leq H(x) \leq H_{\max}, (x \in [0, L_k]) \} \end{aligned} \quad (16.1.2)$$

В этой главе ограничимся таким классом материалов, для которых существует взаимно–однозначное соответствие (функция) φ множества Ω в множество Ξ : $H = \varphi(\rho)$, $H_{\min} = \varphi(\rho_{\min})$, $H_{\max} = \varphi(\rho_{\max})$, причем справедливо условие $\partial\varphi/\partial\rho > 0$ (Рис. 16.1.2), то есть, рассматриваются только те материалы, для которых твердость увеличивается с ростом удельного веса.

Граничные условия для уравнения (16.1.1) таковы: ударник с начальной скоростью $v(0) = v_{[0]}$ начинает движение в преграде и достигает некоторой, заранее не заданной, конечной глубины внедрения L_k , при которой $v(L_k) = 0$. Величина L_k принимается за искомую толщину преграды b .

Минимум удельной массы преграды:

$$G_{\min} = \min_{\rho \in \Omega} \left\{ \int_0^{L_k} \rho(x) dx \right\}, \quad (16.1.3)$$

является в рассматриваемой задаче критерием качества.

Обозначив правую часть уравнения (16.1.1) через P_c и проинтегрировав его на сегменте $[0, L_k]$, получим соотношение:

$$W_{[0]} \equiv \frac{1}{2} M v_{[0]}^2 = \int_0^{L_k} P_c(L) dL, \quad (16.1.4)$$

которое представляет собой равенство между начальной кинетической энергией ударника и работой по образованию кратера в преграде и служит ограничением. В динамических задачах условие (16.1.4) заключается в задании начальной скорости $v_{[0]}$. Можно рассмотреть и обратную задачу максимизации $v_{[0]}$ (или $W_{[0]}$) при ограничении $G = const$.

16.1.2. Первичный анализ задачи.

Покажем, что поставленная задача корректна. Для двухслойной преграды с толщинами слоев $b^{[1]}$ и $b^{[2]}$ ($b^{[1]} + b^{[2]} = b$) (материалы слоев имеют свойства $\rho^{[1]}, H^{[1]}, \rho^{[2]}, H^{[2]}$) и конического ударника с углом при вершине 2α определяющими параметрами процесса являются $\alpha, v_{[0]}, M, \rho^{[1]}, \rho^{[2]}, H^{[1]}, H^{[2]}, b^{[1]}, b$ (величины $b^{[1]}$ и b связаны условием постоянства удельной массы преграды $G = b^{[1]} \rho^{[1]} + (b - b^{[1]}) \rho^{[2]}$).

Так как базовых переменных три (расстояние, масса, время), то согласно π -теореме (см., например, [15]) имеется шесть независимых комплексов переменных, описывающих процесс:

$$\frac{\rho^{[1]} v_{[0]}^2}{H^{[1]}} = \Phi \left(\alpha, \frac{\rho^{[1]}}{\rho^{[2]}}, \frac{b^{[1]}}{b}, \frac{H^{[1]}}{H^{[2]}}, \frac{\rho^{[1]} (b^{[1]})^3}{M} \right). \quad (16.1.5)$$

Пусть параметры $\rho^{[1]}, \rho^{[2]}, H^{[1]}, H^{[2]}, \alpha, M$ фиксированы; тогда, с учетом соотношения между общей толщиной плиты b и ее удельной массой G , выражение (16.1.5) можно записать в виде:

$$\frac{\rho^{[1]} v_{[0]}^2}{H^{[1]}} = \bar{\Phi} \left(\frac{b^{[1]} \rho^{[2]}}{G + b^{[1]} (\rho^{[2]} - \rho^{[1]})}, \frac{\rho^{[1]} (b^{[1]})^3}{M} \right). \quad (16.1.6)$$

При заданных материалах слоев и форме ударника нас интересует влияние толщины лицевого слоя $b^{[1]}$ на начальную скорость $v_{[0]}$, при которой конечная глубина внедрения L_k совпадает с толщиной плиты b , определяемой через заданную удельную массу G .

Разложив функцию $\bar{\Phi}$ в ряд Маклорена и, ограничиваясь степенями первого порядка малости, получим:

$$\bar{\Phi} \approx \bar{\Phi}(0,0) + C_1 \frac{b^{[1]} \rho^{[2]}}{G + b^{[1]} (\rho^{[2]} - \rho^{[1]})} + C_2 \frac{\rho^{[1]} (b^{[1]})^3}{M}. \quad (16.1.7)$$

Анализ выражения (16.1.7) показывает, что если $\rho^{[2]} > \rho^{[1]}$ (тыльный слой тяжелее лицевого), то может существовать такое значение $b^{[1]} > 0$, для которого $\bar{\Phi}$ достигает минимума – наихудший вариант. Но если $\rho^{[2]} < \rho^{[1]}$ (лицевой слой тяжелее тыльного), то второе слагаемое в правой части (16.1.7) стремится к $-\infty$ при стремлении толщины первого слоя к $G/(\rho^{[1]} - \rho^{[2]})$. Следовательно, существует интервал $0 < b^{[1]} < G/(\rho^{[1]} - \rho^{[2]})$, на котором функция $\bar{\Phi}$ достигает максимума.

16.1.3. Проникание цилиндрического ударника.

Перейдем [1] к рассмотрению некоторых конкретных вариантов динамической оптимизационной задачи (16.1.1)–(16.1.4) в условиях линейного приближения зависимости $H = \varphi(\rho)$:

$$H(x) = A\rho(x) + B, \quad (16.1.8)$$

где

$$A = (H_{\max} - H_{\min}) / (\rho_{\max} - \rho_{\min}), \quad B = (H_{\min} \rho_{\max} - H_{\max} \rho_{\min}) / (\rho_{\max} - \rho_{\min}). \quad (16.1.9)$$

Выбор линейной связи (16.1.8) продиктован следующим наблюдением – для большинства макрогетогенных конструкционных материалов можно заметить прямую корреляцию между плотностью и твердостью (Рис. 16.1.2). Такая корреляция проиллюстрирована, например, на Рис. 16.1.2, на котором вертикальными линиями показаны интервалы изменения твердости по Бринеллю H_B (ГПа) для различных сплавов на основе магния, алюминия, титана и сталей и указаны конкретные марки сплавов [9], а по оси абсцисс отложены соответствующие значения плотности ρ ($10^{-3} \times \text{кг/м}^3$).

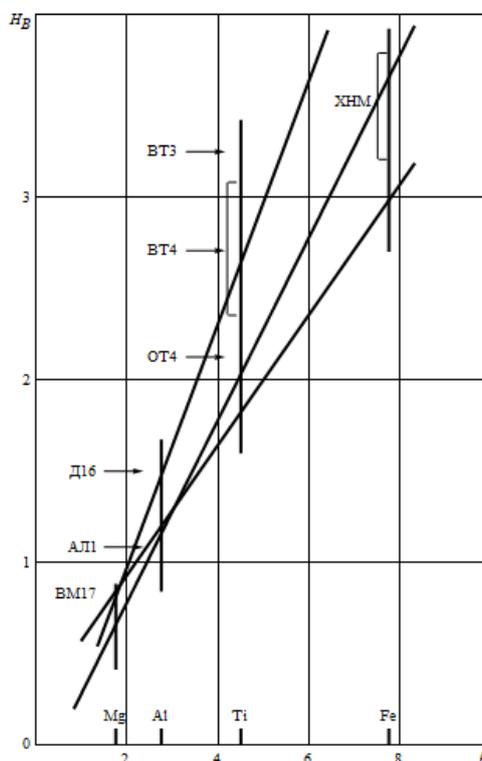


Рис. 16.1.2. Зависимость между твердостью и плотностью

Рассмотрим ударное внедрения цилиндра в условиях вязкого образования кратера, что наблюдается для сравнительно мягких металлов. В этом случае уравнение (16.1.1) значительно упрощается.

Сформулируем задачу в терминах ТОУ ($y^{(1)} = v^2$ – фазовая координата; $t = L$ – аналог времени):

$$\frac{dy^{(1)}}{dt} = -E_1(\rho(A + y^{(1)}) + B), \quad E_1 = 2S/M, \quad (16.1.10)$$

предполагая закрепленным левый конец траектории, $y^{(1)}(0) \equiv y_{[0]}^{(1)} = v_{[0]}^2$ и свободным ее правый конец, $y^{(1)}(t_k) = 0$, где t_k – нефиксированное «время» (толщина плиты) окончания процесса.

Управление $\rho(t)$, ограниченное условием (16.1.2), ищется из соображений достижения минимума функционала (16.1.3), который запишется в форме:

$$G_{\min} = \int_0^{t_k} \rho(\tau) d\tau. \quad (16.1.11)$$

Гамильтониан системы (16.1.10) имеет вид:

$$\hat{H} = \psi^{(0)}\rho - \psi^{(1)}E_1(\rho(A + y^{(1)}) + B), \quad (16.1.12)$$

сопряженные переменные $\psi^{(0)}$, $\psi^{(1)}$ определяются дифференциальными уравнениями:

$$\frac{d\psi^{(0)}}{dt} = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial y^{(0)}} = 0, \quad \frac{d\psi^{(1)}}{dt} = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial y^{(1)}} = E_1\psi^{(1)}\rho. \quad (16.1.13)$$

Для оптимальности процесса ($\tilde{\rho}(t)$, $\tilde{y}(t)$) необходимо существование таких неотрицательной константы $\psi^{(0)} \leq 0$ и ненулевой вектор-функции $\psi^{(1)}(t)$, чтобы выполнилось условие максимума [13]:

$$\max_{\rho \in \Omega} \hat{H}(\tilde{\psi}(t), \tilde{y}(t), t, \rho(t)) = \hat{H}(\tilde{\psi}(t), \tilde{y}(t), t, \tilde{\rho}(t)), \quad (16.1.14)$$

и условие трансверсальности:

$$\hat{H}(\tilde{\psi}(t_k), \tilde{y}(t_k), t_k, \tilde{\rho}(t_k)) = 0. \quad (16.1.15)$$

Последнее условие, с учетом выражения для \hat{H} и зависимости

$$\psi^{(1)}(t) = C_1 \exp\left(E_1 \int_0^t \rho d\tau\right), \quad (16.1.16)$$

вытекающей из второго уравнения (16.1.13), дает связь между постоянными $\psi^{(0)}$, C_1 :

$$\psi^{(0)}\tilde{\rho}_k - C_1 E_1 (B + A\tilde{\rho}_k) \exp\left(E_1 \int_0^{t_k} \tilde{\rho} d\tau\right) = 0, \quad \tilde{\rho}_k = \tilde{\rho}(t_k). \quad (16.1.17)$$

Выразим $\psi^{(0)}$ из уравнения (16.1.17) и представим функцию \hat{H} в виде $\hat{H}/(-\psi_0)$ ($\psi^{(0)} < 0$; при этом случай $\psi^{(0)} = 0$ исключается, т.к. тогда $C_1 = 0$, $\psi^{(1)} \equiv 0$ и нарушаются необходимые условия принципа максимума), которую обозначим \tilde{H} :

$$\ddot{H} = \tilde{\rho}\Phi + B\Phi_2, \quad \Phi = -1 + \tilde{\rho}_k \frac{A + y^{(1)}}{B + A\tilde{\rho}_k} \exp\left(-E_1 \int_t^{t_k} \tilde{\rho} d\tau\right), \quad (16.1.18)$$

где Φ_2 – функция, не зависящая от $\tilde{\rho}$.

В силу линейности гамильтониана \ddot{H} как функции $\tilde{\rho}$, оптимальное управление достигается на границах области допустимых управлений:

$$\tilde{\rho} = \begin{cases} \rho_{\max}, & \text{если } \Phi > 0 \\ \rho_{\min}, & \text{если } \Phi < 0 \end{cases}. \quad (16.1.19)$$

Выясним условия, определяющие знак функции $\Phi(t)$ на сегменте $[0, t_k]$, для чего рассмотрим полную производную:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\tilde{\rho}_k}{B + A\tilde{\rho}_k} \left(\frac{dy^{(1)}}{dt} + E_1 \tilde{\rho} (A + y^{(1)}) \right) \exp\left(-E_1 \int_t^{t_k} \tilde{\rho} d\tau\right). \quad (16.1.20)$$

С учетом уравнения (16.1.10) можно показать, что

$$\operatorname{sgn}\left(\frac{d\Phi}{dt}\right) = -\operatorname{sgn}(B). \quad (16.1.21)$$

Таким образом, при условии $B < 0$ функция $\Phi(t)$ возрастает всюду на сегменте $[0, t_k]$, а в случае $B > 0$ функция $\Phi(t)$ – убывает; если же $B = 0$, то функция $\Phi = \text{const}$. Знак функции $\Phi(t)$ в конечный момент времени также определяется знаком постоянной B , как это следует из соотношений (16.1.18):

$$\Phi(t_k) = -B / (B + A\tilde{\rho}_k). \quad (16.1.22)$$

Из анализа соотношений (16.1.21) и (16.1.22) следует, что существует такой интервал $(t_*, t_k]$, внутри которого оптимальное управление постоянно, $\tilde{\rho} = \text{const}$. Для определения точки переключения t_* (то есть, точки, в которой $\Phi(t_*) = 0$), рассмотрим значение $\Phi_{[0]} = \Phi(0)$:

$$\Phi_{[0]} = -1 + \tilde{\rho}_k \frac{A + y_{[0]}^{(1)}}{B + A\tilde{\rho}_k} \exp\left(-E_1 \int_0^{t_k} \tilde{\rho} d\tau\right). \quad (16.1.23)$$

Будем искать условия существования постоянного оптимального управления $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_k = \text{const}$ при котором $t_* \notin (0, t_k]$. В этом случае общее решение уравнения движения имеет вид:

$$y^{(1)} = \exp(-E_1 \tilde{\rho} t) \left\{ y_{[0]}^{(1)} - (B + A\tilde{\rho})(-1 + \exp(E_1 \tilde{\rho} t)) / \tilde{\rho} \right\}. \quad (16.1.24)$$

Полагая в соотношении (16.1.24) $t = t_k$, $y^{(1)} = 0$, преобразуем с его помощью выражение (16.1.23) к виду:

$$\Phi_{[0]} = -B / (B + \tilde{\rho}(A + y_{[0]}^{(1)})). \quad (16.1.25)$$

Поведение функции Φ (Рис. 16.1.3) исключает существование точки переключения на сегменте $[0, t_k]$. Таким образом, в области $B > 0$ оптимальной является однородная легкая преграда $\tilde{\rho} = \rho_{\min}$, $\ddot{H} = H_{\min}$, а в области $B < 0$ – однородная тяжелая преграда

$\tilde{\rho} = \rho_{\max}, \tilde{H} = H_{\max}$. Отметим, что этот результат получен в классе произвольных кусочно-непрерывных функций.

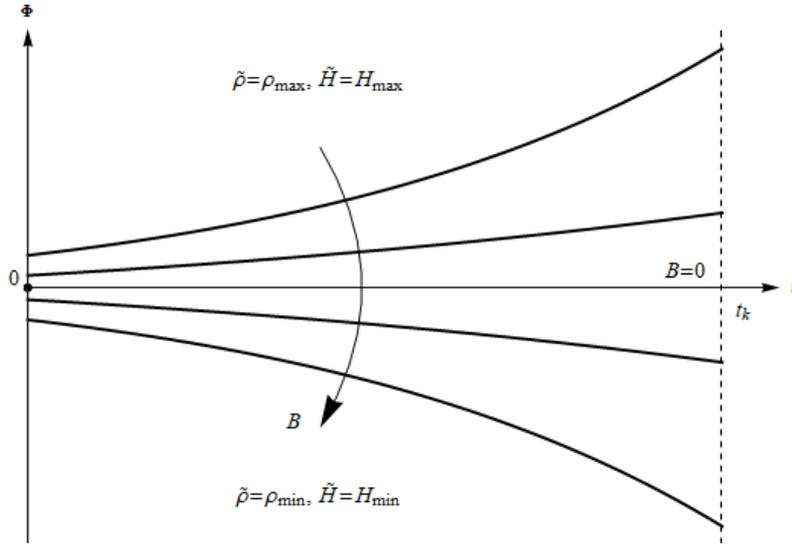


Рис. 16.1.3. Поведение функции Φ

16.1.4. Проникание конического ударника.

Рассмотрим аналогичную исследованной в Разделе 16.1.3 задачу, но применительно к коническому ударнику с углом полураствора α . Уравнение движения (16.1.1) в этом случае примет вид:

$$\frac{d(v^2)}{dL} = -E_2 \left\{ \frac{1}{2} BL^2 + (A + kv^2) \int_0^L \rho(x)(L-x) dx \right\}, \quad (16.1.26)$$

где

$$E_2 = 4\pi g^2 \alpha / M > 0, \quad k = \sin^2 \alpha. \quad (16.1.27)$$

Непосредственное применение принципа максимума в этом случае невозможно, т.к. правая часть уравнения движения (уравнения для фазовой координаты) содержит в явной форме функционал (16.1.3), т.е. содержит дополнительную фазовую координату $y^{(0)}$. При этом сопряженная переменная $\psi^{(0)}$ уже не будет постоянной величиной:

$$\frac{d\psi^{(0)}}{dt} = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial y^{(0)}} \neq 0. \quad (16.1.28)$$

Чтобы обойти это затруднение, введем дополнительные фазовые координаты $y^{(2)}, y^{(3)}$ так, что основная система уравнений запишется в виде:

$$\frac{dy^{(1)}}{dt} = -E_2 \left[\frac{1}{2} Bt^2 + (A + ky^{(1)})y^{(2)} \right], \quad \frac{dy^{(2)}}{dt} = y^{(3)}, \quad \frac{dy^{(3)}}{dt} = \rho. \quad (16.1.29)$$

В начальный момент времени вектор фазовых координат закреплён: если $t=0$, то $y^{(1)} = y_0^{(1)}, y^{(2)} = y^{(3)} = 0$. Конечное значение вектора фазовых координат \vec{y}_k

принадлежит гладкому двумерному многообразию S_k евклидова пространства размерности $n = 3$:

$$S_k : F_k(y_k^{(1)}, y_k^{(2)}, y_k^{(3)}) \equiv y_k^{(1)} = 0. \quad (16.1.30)$$

Многообразие S_k представляет собой гиперплоскость, имеющую единственный нормальный вектор $grad(F_k) = (1, 0, 0)$. Тогда два линейно независимых вектора, принадлежащих касательной плоскости многообразия S_k , таковы $\vec{\theta}_1 = (0, \theta_1^{(2)}, 0)$, $\vec{\theta}_2 = (0, 0, \theta_2^{(3)})$. Следовательно, условие трансверсальности [13] для вектора сопряженных переменных $\vec{\psi} = (\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \psi^{(3)})$ (условие ортогональности $\vec{\psi}$ к касательной плоскости многообразия S_k) дает два соотношения: $(\vec{\psi}, \vec{\theta}_1) = 0$ и $(\vec{\psi}, \vec{\theta}_2) = 0$, откуда следует

$$t = t_k : \psi^{(2)} = 0, \psi^{(3)} = 0. \quad (16.1.31)$$

Принцип максимума формулируется теперь в виде соотношений (16.1.14), (16.1.31), условия, аналогичного равенству (16.1.15):

$$\hat{H}(\vec{\psi}(t_k), \vec{y}(t_k), t_k, \vec{\rho}(t_k)) = \sum_n \psi^{(n)}(t_k) q^{(n)} \quad (16.1.32)$$

и ограничения:

$$\psi^{(0)} = const \leq 0, \quad (16.1.33)$$

в уравнении (16.1.32):

$$\vec{q} = \left\{ 0, \frac{dy^{(2)}}{dt}, \frac{dy^{(3)}}{dt} \right\} \Big|_{t=t_k}. \quad (16.1.34)$$

Поэтому, в силу соотношений (16.1.31), равенства (16.1.32) и (16.1.15) совпадают.

Гамильтониан системы имеет вид:

$$\hat{H} = (\psi^{(0)} + \psi^{(3)})\rho - \psi^{(1)}E_2 \left[\frac{1}{2}Bt^2 + (A + ky^{(1)})y^{(2)} \right] + \psi^{(2)}y^{(3)}, \quad (16.1.35)$$

сопряженные переменные определяются дифференциальными уравнениями:

$$\frac{d\psi^{(1)}}{dt} = E_2ky^{(2)}\psi^{(1)}, \quad \frac{d\psi^{(2)}}{dt} = E_2(A + ky^{(1)})\psi^{(1)}, \quad \frac{d\psi^{(3)}}{dt} = -\psi^{(2)}. \quad (16.1.36)$$

Интегрирование уравнений (16.1.36) дает следующий результат:

$$\left. \begin{aligned} \psi^{(1)} &= C_1 \exp \left(E_2k \int_0^t y^{(2)} d\tau \right) \\ \psi^{(2)} &= C_2 + C_1 E_2 \int_0^t (A + ky^{(1)}) \exp \left(E_2k \int_0^{\tau} y^{(2)} d\xi \right) d\tau \\ \psi^{(3)} &= C_3 - C_2 t - C_1 E_2 \int_0^t \int_0^{\tau} (A + ky^{(1)}) \exp \left(E_2k \int_0^{\xi} y^{(2)} d\xi \right) d\tau d\tau' \end{aligned} \right\} \quad (16.1.37)$$

Используя соотношения (16.1.31) и (16.1.32), можно определить связь между константами:

$$\left. \begin{aligned} \psi^{(0)} &= C_1 \frac{E_2}{\tilde{\rho}_k} \left(\frac{1}{2} B t_k^2 + A y_k^{(2)} \right) \exp \left(E_2 k \int_0^{t_k} y^{(2)} d\tau \right) \\ C_2 &= -C_1 E_2 \int_0^{t_k} (A + k y^{(1)}) \exp \left(E_2 k \int_0^{\tau} y^{(2)} d\xi \right) d\tau \\ C_3 &= -C_1 E_2 \int_0^{t_k} \tau (A + k y^{(1)}) \exp \left(E_2 k \int_0^{\tau} y^{(2)} d\xi \right) d\tau \end{aligned} \right\} \quad (16.1.38)$$

Гамильтониан \hat{H} представляет собой линейную функцию от ρ (16.1.35) с угловым коэффициентом $\Phi = \psi^{(0)} + \psi^{(3)}$. Из соотношения (16.1.31) вытекает, что $\Phi(t_k) = \psi^{(0)} < 0$. Следовательно, существует интервал $(t_*, t_k]$ в котором оптимальное управление $\tilde{\rho} = \rho_{\min}$, т.е. тыльный слой всегда выполнен из более легкого и менее прочного материала.

Полная производная:

$$\frac{d\Phi}{dt} = -C_2 - C_1 E_2 \int_0^t (A + k y^{(1)}) \exp \left(E_2 k \int_0^{\tau} y^{(2)} d\xi \right) d\tau \quad (16.1.39)$$

отрицательна при $t = 0$ и достигает нуля при $t = t_k$. Последнее утверждение вытекает из связи (16.1.38). Следовательно, функция Φ является монотонно убывающей, достигающей отрицательной величины $\psi^{(0)}$ при $t = t_k$. Если $\Phi(0) \leq 0$, то оптимальной является однородная легкая пластина; в противном случае функция Φ будет менять знак при $t = t_* \in (0, t_k)$, что соответствует двухслойной преграде с лицевым твердым и тяжелым слоем.

Выявим условия, при которых $\Phi(0) \leq 0$ и $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_k = \rho_{\min}$. В этом случае можно получить решение уравнения движения в конечном виде:

$$y^{(1)} = \exp \left(-\frac{1}{6} E_2 k \rho_{\min} t^3 \right) \left\{ y_0^{(1)} - \frac{A \rho_{\min} + B}{k \rho_{\min}} \left[-1 + \exp \left(\frac{1}{6} E_2 k \rho_{\min} t^3 \right) \right] \right\} \quad (16.1.40)$$

Используя последнее соотношение при $t = t_k$ для преобразования выражения $\Phi(0)$, получим:

$$\Phi(0) = \frac{C_1 E_2}{\tilde{\rho}_k} B \int_0^{t_k} \tau \exp \left(\frac{1}{6} E_2 k \rho_{\min} \tau^3 \right) d\tau. \quad (16.1.41)$$

Из первого соотношения (16.1.38) следует, что $C_1 < 0$ и поэтому условие $\Phi(0) \leq 0$ выполняется при $B \geq 0$. Таким образом, при $B \geq 0$ оптимальной является легкая преграда $\tilde{\rho} = \rho_{\min}$ (как и в случае удара цилиндром), при $B < 0$ оптимальная преграда состоит из двух слоев: твердый и тяжелый лицевой слой, мягкий и легкий тыльный слой. При любых обстоятельствах вблизи тыльной поверхности должен располагаться более легкий материал.

16.1.5. Проникание цилиндрического ударника с конической головной частью.

Рассмотрим динамическое внедрение в неоднородную преграду цилиндрического ударника с конической головной частью высотой h . Система дифференциальных уравнений, описывающих поведение фазовых координат, разбивается в этом случае на две подсистемы:

$$\frac{dy^{(1)}}{dt} = \begin{cases} -E_2 \left[\frac{1}{2} Bt^2 + (A + ky^{(1)})y^{(2)} \right], & \text{если } t < h, \\ -E_2 \left[\frac{1}{2} Bh^2 + (A + ky^{(1)})y^{(2)} \right], & \text{если } t \geq h, \end{cases} \quad (16.1.42)$$

и

$$\frac{dy^{(2)}}{dt} = \begin{cases} y^{(3)}, & \text{если } t < h, \\ y^{(3)} - h\rho(t-h), & \text{если } t \geq h, \end{cases} \quad \frac{dy^{(3)}}{dt} = \begin{cases} \rho(t), & \text{если } t < h, \\ \rho(t) - \rho(t-h), & \text{если } t \geq h. \end{cases} \quad (16.1.43)$$

Начальное и конечное положение вектора фазовых координат совпадают с соответствующими положениями в предыдущей задаче. Несмотря на то, что гамильтониан системы имеет более сложный вид:

$$\hat{H} = \begin{cases} (\psi^{(0)} + \psi^{(3)})\rho(t) - \psi^{(1)}E_2 \left[\frac{1}{2} Bt^2 + (A + ky^{(1)})y^{(2)} \right] + \psi^{(2)}y^{(3)}, & \text{если } t < h, \\ (\psi^{(0)} + \psi^{(3)})\rho(t) - (h\psi^{(2)} + \psi^{(3)})\rho(t-h) - \\ - \psi^{(1)}E_2 \left[\frac{1}{2} Bh^2 + (A + ky^{(1)})y^{(2)} \right] + \psi^{(2)}y^{(3)}, & \text{если } t \geq h, \end{cases} \quad (16.1.44)$$

сопряженные переменные определяются выражениями (16.1.37) для $\forall t \in [0, t_k]$. Предполагается, что начальное значение скорости $\sqrt{y_{[0]}^{(1)}}$ таково, что заведомо выполняется условие $t_k \geq h$.

Имеет место связь между постоянными (16.1.38); отличие возникает лишь для $\psi^{(0)}$:

$$\psi^{(0)} = C_1 \frac{E_2}{\tilde{\rho}_k} \left(\frac{1}{2} Bh^2 + Ay_k^{(2)} \right) \exp \left(E_2 k \int_0^{t_k} y^{(2)} d\tau \right). \quad (16.1.45)$$

Как и ранее, $\hat{H}(t_k) = \psi^{(0)}\rho_k$, откуда следует:

$$\tilde{\rho}_k = \rho_{\min}, \quad \left. \frac{d\Phi}{dt} \right|_{t=0} = -C_2 < 0, \quad \left. \frac{d\Phi}{dt} \right|_{t=t_k} = 0. \quad (16.1.46)$$

Анализ общего решения уравнений движения на первом и втором этапах позволяет заключить, что для выполнения неравенства $\Phi(0) \leq 0$ необходимо выполнение условия:

$$B \geq \frac{(H_{\min} + k\rho_{\min} y_{[0]}^{(1)})(t_k^2 - h^2)}{2F} > 0, \quad (16.1.47)$$

где

$$F = \int_0^h \tau \exp\left(\frac{1}{6} E_2 k \rho_{\min} \tau^3\right) d\tau + \exp\left(-\frac{1}{3} E_2 k \rho_{\min} h^3\right) \int_h^{t_k} \tau \exp\left(\frac{1}{2} E_2 k \rho_{\min} h^2 \tau^2\right) d\tau. \quad (16.1.48)$$

Если $B < 0$, то условие (16.1.47) заведомо нарушается и оптимальной становится двухслойная преграда с лицевым более твердым и тяжелым слоем $\tilde{\rho}_k = \rho_{\max}$. Более того, двухслойная преграда будет оптимальной и для некоторых положительных значений B , не удовлетворяющих неравенству (16.1.47). Оценим F :

$$F < \frac{t_k^2}{2} \exp\left(\frac{1}{6} E_2 k \rho_{\min} h^2 (3t_k - 2h)\right). \quad (16.1.49)$$

С учетом неравенства (16.1.49) и соотношения, полученного из общего решения уравнения движения:

$$H_{\min} + k\rho_{\min} y_{[0]}^{(1)} = H_{\min} \exp\left(\frac{1}{6} E_2 k \rho_{\min} h^2 (3t_k - 2h)\right), \quad (16.1.50)$$

можно получить оценку снизу правой части неравенства (16.1.47):

$$B \geq \frac{(H_{\min} + k\rho_{\min} y_{[0]}^{(1)})(t_k^2 - h^2)}{2F} > H_{\min} \frac{t_k^2 - h^2}{t_k^2}, \quad (16.1.51)$$

откуда, с учетом $H_{\min} = A\rho_{\min} + B$, следует, что

$$B > A\rho_{\min} [(t_k / h)^2 - 1]. \quad (16.1.52)$$

Время окончания процесса при $\rho = const$ следует из общего решения:

$$t_k = \frac{2}{3} h + \frac{2}{E_2 k \rho_{\min} h^2} \ln\left(1 + \frac{k\rho_{\min} y_{[0]}^{(1)}}{H_{\min}}\right). \quad (16.1.53)$$

Таким образом, с ростом начальной скорости внедрения $\sqrt{y_{[0]}^{(1)}}$ время окончания процесса возрастает пропорционально $\ln(y_{[0]}^{(1)})$, что определяет соответствующий рост нижней границы области параметра B , в котором справедливо условие $\tilde{\rho} = \rho_{\min} = const$.

Объединяя результаты решения задач из разделов 16.1.4 и 16.1.5, получим области значения параметра B , определяющие структуру оптимальной преграды в зависимости от начальной скорости внедрения (Рис. 16.1.4).

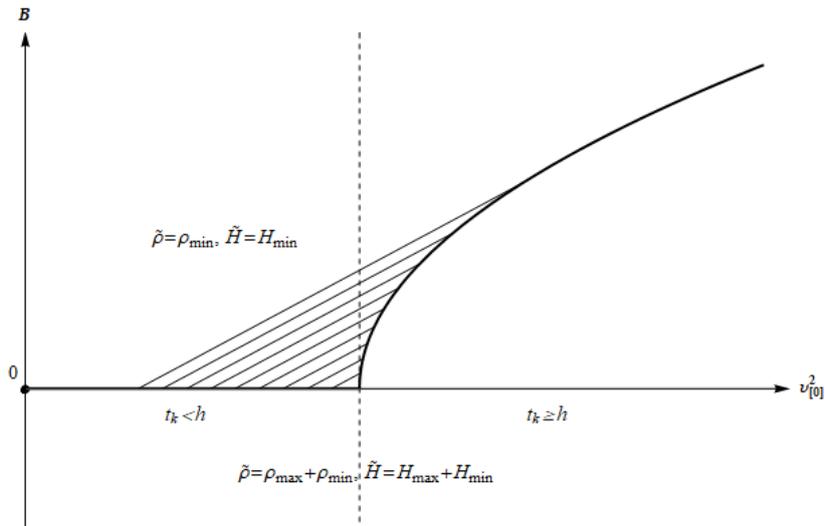


Рис. 16.1.4. Области оптимальной структуры преграды в пространстве параметров B и $v_{[0]}^2$

Раскроем физический смысл параметра B , от значения которого (прежде всего от знака) зависит оптимальная структура преграды. Из второго соотношения (16.1.9) следует:

$$B = \rho_{\min} \rho_{\max} (H_{\min} / \rho_{\min} - H_{\max} / \rho_{\max}) / (\rho_{\max} - \rho_{\min}). \quad (16.1.54)$$

Так как $\rho_{\max} - \rho_{\min} > 0$, то знак параметра B определяется выражением стоящим в круглых скобках, представляющим собой разность качества граничных материалов $Q(\rho_{\min}) - Q(\rho_{\max})$. Условие $B > 0$ говорит о более высоком качестве наиболее легкого материала $Q(\rho_{\min})$ среди всех материалов с качеством $Q = H / \rho, \forall \rho \in [\rho_{\min}, \rho_{\max}]$. Обратно, неравенство $B < 0$ дает приоритет тяжелому материалу $\{\rho_{\max}, H_{\max}\}$. При $B = 0$ качество $Q = A = const$, т.е. все материалы обладают одинаковым качеством – удельной динамической твердостью.

Результаты данного раздела позволяют заключить, что оптимальная с точки зрения критерия минимума удельной массы преграда может объединять материалы с различным качеством, и это приводит к наилучшему результату. Показано, что форма ударника и его скорость также оказывают влияние на оптимальную структуру преграды.

16.2. Случай нелинейной зависимости между твердостью и плотностью.

16.2.1. Вводные замечания.

Предположение о линейном характере зависимости $H = \varphi(\rho)$, введенное в разделе 16.1, упрощает оптимизационную задачу, что приводит к однослойной или двухслойной оптимальной конструкции преграды. Настоящий раздел посвящен анализу критериев оптимальной структуры преграды при нелинейной зависимости $H = \varphi(\rho)$ [2] применительно к цилиндрическому ударнику, движение которого описывается уравнением, аналогичным (16.1.10):

$$\frac{dy^{(1)}}{dt} = -E_1 [\varphi(\rho) + \rho y^{(1)}], \quad (16.2.1)$$

гамильтониан системы в этом случае:

$$\hat{H} = \psi^{(0)} \rho - \psi^{(1)} E_1 [\varphi(\rho) + \rho y^{(1)}]. \quad (16.2.2)$$

Так как $\psi^{(0)} \neq 0$ (альтернативное допущение, $\psi^{(0)} = 0$, ведет к нарушению необходимых условий оптимальности [13]), то без ограничения общности можно положить $\psi^{(0)} = -1$ в соотношении (16.2.2). Тогда, с учетом дифференциальных связей для сопряженных переменных (16.1.13), гамильтониан примет вид:

$$\hat{H} = \rho \left[-1 - C_1 E_1 y^{(1)} \exp \left(E_1 \int_0^t \rho d\tau \right) \right] - C_1 E_1 \varphi(\rho) \exp \left(E_1 \int_0^t \rho d\tau \right). \quad (16.2.3)$$

Из условия (16.1.15) следует, что

$$C_1 = -(f / E_1) \exp \left(-E_1 \int_0^{t_k} \tilde{\rho} d\tau \right), \quad f = \tilde{\rho}_k / \varphi(\tilde{\rho}_k), \quad \tilde{\rho}_k = \tilde{\rho}(t = t_k). \quad (16.2.4)$$

и окончательное выражение для гамильтониана при $\rho = \tilde{\rho}$ имеет вид:

$$\hat{H} = \tilde{\rho} \Phi_1 + \varphi(\tilde{\rho}) \Phi_2, \quad (16.2.5)$$

где

$$\Phi_1 = -1 + y^{(1)} f Z, \quad \Phi_2 = f Z, \quad Z = \exp \left(-E_1 \int_t^{t_k} \tilde{\rho} d\tau \right). \quad (16.2.6)$$

Отметим, что $\Phi_1(t_k) = -1$, а Φ_2 является положительной, монотонно возрастающей функцией.

16.2.2. Кусочно-линейная зависимость $\varphi(\rho)$.

Рассмотрим частный случай зависимости $\varphi(\rho)$, когда она представляется кусочно-линейной функцией (Рис. 16.2.1):

$$\varphi(\rho) = A\rho + B \quad (\rho \in \Omega_1), \quad \varphi(\rho) = D\rho + B_1 \quad (\rho \in \Omega_2), \quad (16.2.7)$$

где

$$\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega, \quad B_1 = B + \rho_{mid} (A - D), \quad (16.2.8)$$

$$\Omega_1 = \{ \rho(t) : \rho_{min} \leq \rho(t) \leq \rho_{mid}, (t \in [0, t_k]) \}, \quad (16.2.9)$$

$$\Omega_2 = \{ \rho(t) : \rho_{mid} \leq \rho(t) \leq \rho_{max}, (t \in [0, t_k]) \}. \quad (16.2.10)$$

В этом случае гамильтониан становится кусочно-линейной функцией от $\tilde{\rho}$, причем:

$$\Phi = \begin{cases} -1 + (Z \tilde{\rho}_k / (B + A \tilde{\rho}_k)) (A + y^{(1)}), & \text{если } \rho \in \Omega_1 \\ -1 + (Z \tilde{\rho}_k / (B_1 + D \tilde{\rho}_k)) (D + y^{(1)}), & \text{если } \rho \in \Omega_2 \end{cases} \quad (16.2.11)$$

и в конечный момент времени $t = t_k$:

$$\Phi_k = \begin{cases} -B/(B + A\tilde{\rho}_k), & \text{если } \rho \in \Omega_1 \\ -B_1/(B_1 + D\tilde{\rho}_k), & \text{если } \rho \in \Omega_2 \end{cases} \quad (16.2.12)$$

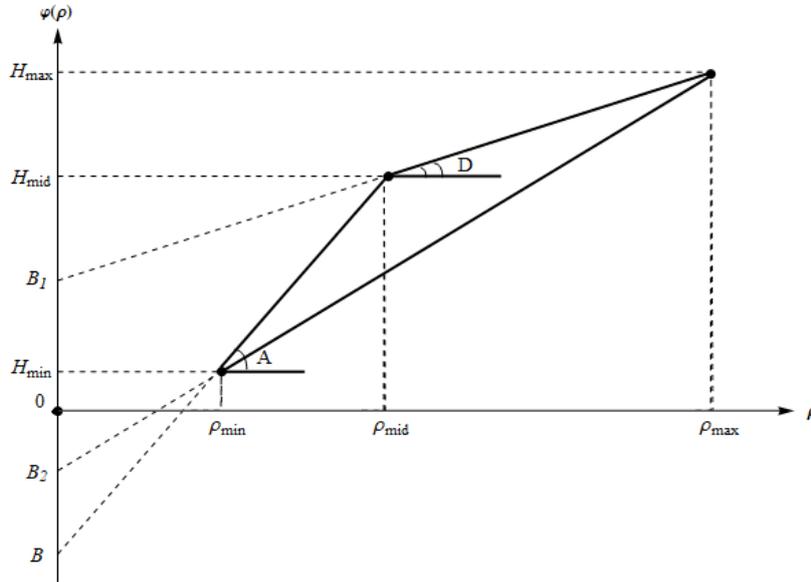


Рис. 16.2.1. Кусочно-линейная зависимость $\varphi(\rho)$

Таблица 16.2.1. Варианты оптимального управления в окрестности $(t_*, t_k]$, $0 < t_* < t_k$.

№	Область	Варианты оптимального управления
1	$B > 0 \wedge B_1 < 0$	$[\forall \rho \in \Omega_2 \rightarrow \tilde{\rho} = \rho_{mid}] \wedge [\forall \rho \in \Omega_1 \rightarrow \tilde{\rho} = \rho_{min}] \rightarrow \tilde{\rho} = \rho_{min}$
2	$B < 0 \wedge B_1 < 0$	$\tilde{\rho} = \rho_{max}$
3	$B < 0 \wedge B_1 > 0$	$\tilde{\rho} = \rho_{mid}$
4	$B > 0 \wedge B_1 < 0$	$\tilde{\rho} = \rho_{min}; \tilde{\rho} = \rho_{max}$

Сопоставим для последнего случая качество материалов с характеристиками ρ_{min} , H_{min} и ρ_{max} , H_{max} . В разделе 16.1 показано, что в случае линейной функции $H(\rho)$ максимальное значение Q достигается на тяжелом материале при ρ_{max} , H_{max} , если ордината пересечения прямой $H(\rho)$ с осью $\rho = 0$ отрицательна (Рис. 16.2.1).

Ордината B_2 прямой, проходящей через рассматриваемые точки, $B_2 = [B\rho_{max}(\rho_{mid} - \rho_{min}) + B_1\rho_{min}(\rho_{max} - \rho_{mid})]/[\rho_{mid}(\rho_{max} - \rho_{min})]$. Отсюда следует, что если $B < aB_1$, то $\tilde{\rho} = \rho_{min}$, иначе $\tilde{\rho} = \rho_{max}$, где

$$a = -(\rho_{min} / \rho_{max})(\rho_{max} - \rho_{mid})/(\rho_{mid} - \rho_{min}). \quad (16.2.13)$$

Если $\rho_{mid} \rightarrow \rho_{max}$, то $a \rightarrow 0$ и управление $\tilde{\rho} = \rho_{min}$ справедливо при $\forall B_1 \wedge B > 0$. Если $\rho_{mid} \rightarrow \rho_{min}$, то $a \rightarrow -\infty$ и управление $\tilde{\rho} = \rho_{max}$ справедливо при $\forall B \wedge B_1 < 0$.

Как и в разделе 16.1, используя решение уравнения движения при $\rho = const$, можно показать, что оптимальное управление $\tilde{\rho}_k$ остается оптимальным при любом $t \in [0, t_k]$. Области значений параметров B и B_1 , определяющих характеристики оптимальной однородной плиты, показаны на Рис. 16.2.2.

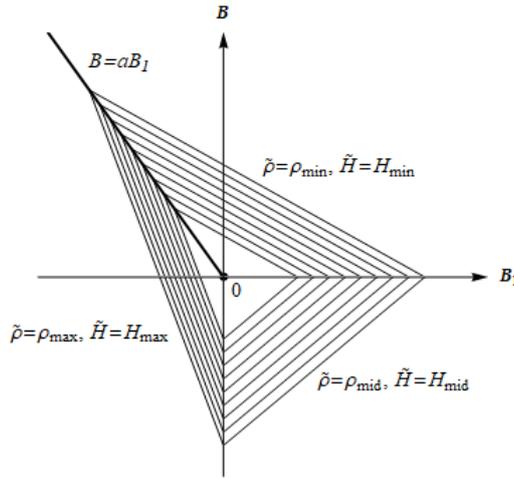


Рис. 16.2.2. Области оптимальной структуры преграды в пространстве параметров B и B_1

16.2.3. Обобщенная степенная зависимость $\varphi(\rho)$.

Рассмотрим случай нелинейной зависимости $\varphi(\rho)$ вида:

$$\varphi(\rho) = B + A\rho^m, \quad A > 0, \quad m > 0. \quad (16.2.14)$$

Выясним, прежде всего, условие существования материала с максимальным качеством Q , достигаемым во внутренней точке допустимой области управления $\Omega_0 = \{\rho(t) : \rho_{\min} < \rho(t) < \rho_{\max}, (t \in [0, t_k])\}$.

Требование существования локального максимума функции Q приводит к следующим условиям: $Q'(\tilde{\rho}) = 0$, $Q''(\tilde{\rho}) < 0$. Из первого условия следует, что $\tilde{\rho}^m = B/[A(m-1)]$, второе преобразуется к виду $Bm < 0$. Таким образом, требование $\max\{Q\} = Q(\tilde{\rho})$, $\tilde{\rho} \in \Omega_0$ может выполняться лишь при условии $B < 0 \wedge (0 < m < 1)$.

^{$\rho \in \Omega_0$} Гамильтониан (16.2.5) имеет следующий вид:

$$\dot{H} = \tilde{\rho}\Phi(\tilde{\rho}) + B\Phi_2, \quad (16.2.15)$$

где

$$\Phi = -1 + f_m Z(y^{(1)} + A\tilde{\rho}^{m-1}), \quad f_m = \tilde{\rho}_k / (B + A\tilde{\rho}_k^m). \quad (16.2.16)$$

Заметим, что $\Phi(t_k) = -(B/\tilde{\rho}_k)f_m$. Полная производная с учетом уравнения движения (16.2.1) равна:

$$\frac{d\Phi}{dt} = f_m Z \left[-E_1 B + A(m-1)\tilde{\rho}^{m-2} \frac{d\tilde{\rho}}{dt} \right]. \quad (16.2.17)$$

В случае $\tilde{\rho} = const$ знак производной $d\Phi/dt$ определяется знаком постоянной B . Используя решение уравнения движения для случая постоянного управления, можно показать, что $\Phi(0) = -B[B + \tilde{\rho}(y^{(1)} + A\tilde{\rho}^{m-1})]^{-1}$. Таким образом, существуют подозрительные на оптимальность постоянные управления $\tilde{\rho} = \rho_{\min}$ (если $B > 0$) и $\tilde{\rho} = \rho_{\max}$ (если $B < 0$).

Рассмотрим условия существования других решений при $\tilde{\rho} \neq const$:

$$\hat{H}'(\tilde{\rho})=0, \quad \hat{H}'(\tilde{\rho})=\Phi_1 + Am\Phi_2\tilde{\rho}^{m-1}, \quad (16.2.18)$$

$$\hat{H}''(\tilde{\rho})<0, \quad \hat{H}''(\tilde{\rho})=Am(m-1)\Phi_2\tilde{\rho}^{m-2}. \quad (16.2.19)$$

Из уравнения (16.2.18) следует:

$$\tilde{\rho} = [-\Phi_1/(Am\Phi_2)]^{1/s}, \quad s=1/(m-1), \quad (16.2.20)$$

откуда вытекает условие $\Phi_1 < 0$. Неравенство (16.2.19) справедливо при $m < 1$.

Таким образом, для $m < 1$, когда кривая, задаваемая уравнением (16.2.14), выпукла кверху, в окрестности $(t_*, t_k]$, $0 < t_* < t_k$ всегда выполняются необходимые условия существования непрерывного управления. Интервал $(t_*, t_k]$ будет совпадать с общим временным интервалом $(0, t_k]$, если $\Phi_1(0) < 0$. Уравнение (16.2.20) представим в виде:

$$Am\tilde{\rho}^{m-1} = (f_m Z)^{-1} - y^{(1)}. \quad (16.2.21)$$

После дифференцирования уравнения (16.2.21) по времени с учетом (16.2.1) преобразуем его к виду:

$$\frac{d\tilde{\rho}}{dt} = -K\tilde{\rho}^2 \left[1 + \frac{B}{A(1-m)} \tilde{\rho}^{-m} \right], \quad K = E_1 / m. \quad (16.2.22)$$

Для анализа решений уравнения (16.2.22) воспользуемся методом последовательных приближений. Первое приближение определяется как решение дифференциального уравнения $d\tilde{\rho}/dt = -K\tilde{\rho}^2$, которое имеет вид:

$$\tilde{\rho}^{-1} = \tilde{\rho}_{\max}^{-1} + K(t - t_*), \quad (16.2.23)$$

и является точным при $B = 0$. Второе приближение является решением уравнения:

$$\frac{d\tilde{\rho}}{dt} = -K\tilde{\rho}^2 \left\{ 1 + \frac{B}{A(1-m)} \left[K(t - t_*) + \tilde{\rho}_{\max}^{-1} \right]^m \right\}. \quad (16.2.24)$$

Оно таково:

$$\tilde{\rho}^{-1} = \rho_{\max}^{-1} + K(t - t_*) + \frac{B}{A(1-m)^2} \left\{ \left[\rho_{\max}^{-1} + K(t - t_*) \right]^{m+1} - \rho_{\max}^{-(m+1)} \right\}. \quad (16.2.25)$$

При получении решений (16.2.23) и (16.2.25) предполагалось выполнение условия $\tilde{\rho}(t_*) = \rho_{\max}$. Характер изменения второго приближения в зависимости от параметра B и оптимальное управление на всем сегменте $[0, t_k]$ показаны на Рис. 16.2.3. Чем больше B , тем меньше размеры участка с непрерывным распределением плотности $\tilde{\rho}$ по толщине плиты. Положение точки t_* определяется численно, оно может совпадать ($t_* = 0$) или не совпадать с началом процесса ($t_* < 0$). Последнее означает отсутствие максимально допустимого управления ρ_{\max} в оптимальном решении. В любом случае при $m < 1$ справедливо неравенство $t_* < t_k$.

Сравнивая полученные результаты с условием локального максимума качества Q в области Ω_0 , можно заметить наличие общего условия $m < 1$. Однако результаты, показанные на Рис. 16.2.3, свидетельствуют о наличии в структуре «подозрительной» на оптимальность преграды материалов с различным значением качества, не обязательно максимальным.

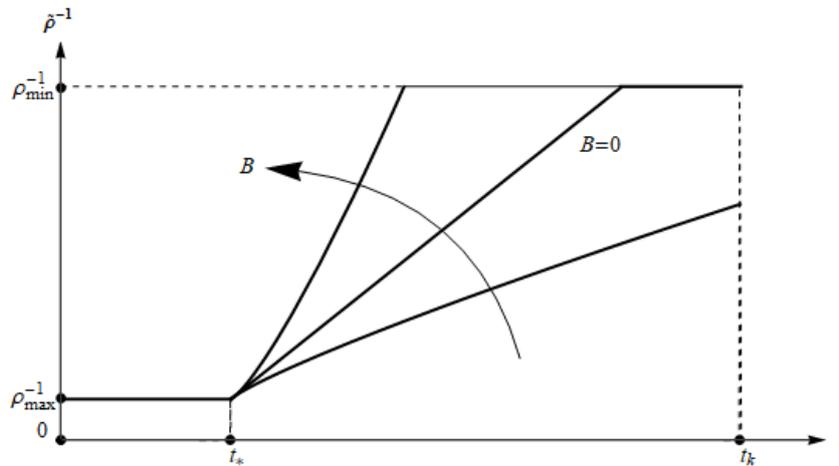


Рис. 16.2.3. Зависимость размера участка с непрерывным распределением механических характеристик от параметра B

16.3. Квазиоптимизация.

В настоящем разделе представлены результаты поиска оптимальных структур путем перебора двухслойных вариантов преград на основе численных расчетов. Помимо проверки полученных ранее качественных результатов и оценки эффективности перехода к слоистым преградам, результаты таких расчетов представляют также самостоятельный интерес.

Процедура анализа такова. Задаются начальные значения кинематических параметров, механические и геометрические характеристики ударника и преграды, затем осуществляется перебор различных значений точки переключения $t_* \in [0, t_k]$, для каждого значения которой интегрируется уравнение движения (16.1.1) до момента полной остановки ударника. Иными словами, варьируется толщина лицевого слоя плиты $b^{[1]}$, интегрирование уравнения движения дает $b = L_k$, и для данной конструкции преграды вычисляется ее удельная масса $G = b^{[1]}\rho^{[1]} + (b - b^{[1]})\rho^{[2]}$. Наилучшая преграды выбирается исходя из критерия (16.1.3).

Численные расчеты проведены с использованием значений параметров модели, указанных в Табл. 16.3.1. Рассмотрено динамическое внедрение цилиндрического ударника с конической головной частью. При расчетах использовались следующие значения основных величин: $v_{[0]} = 500$ м/с, $\alpha = 15^\circ$, $M = 30$ г, $h = 2,5$ см. Результаты численных расчетов представлены на Рис. 16.3.1.

Таблица 16.3.1. Параметры модели [11]

№	Материал	Динамическая твердость, Н/м ²	Плотность, кг/м ³	Качество материала Q , м ² /с ²
1	Алюминий	$350 \cdot 10^6$	2765	$0,127 \cdot 10^6$
2	Мягкая сталь	$1850 \cdot 10^6$	7830	$0,236 \cdot 10^6$
3	Дюралюминий	$1330 \cdot 10^6$	2765	$0,481 \cdot 10^6$

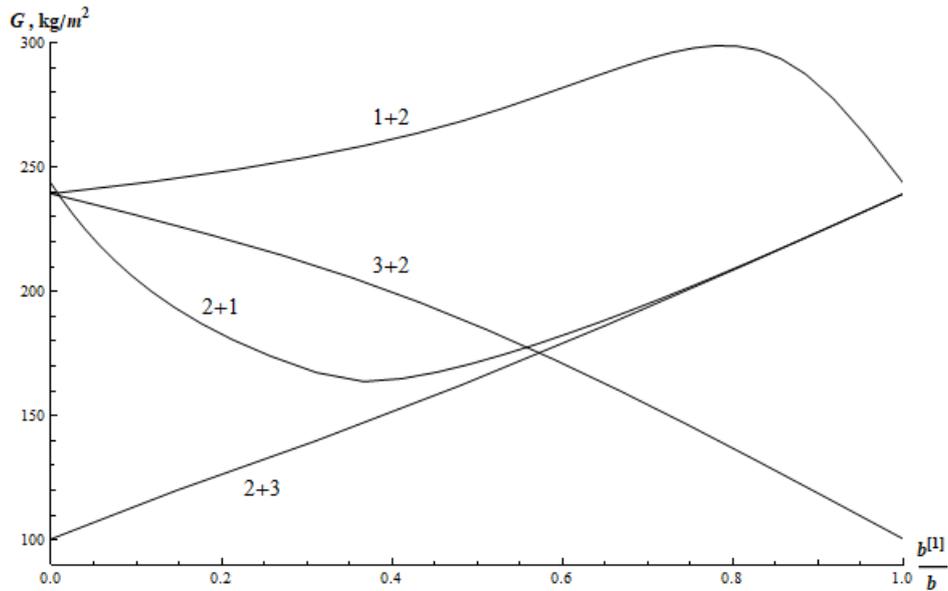


Рис. 16.3.1. Зависимость удельной массы плиты от относительной толщины лицевого слоя

Сравним полученные результаты с основными выводами предыдущих разделов Главы 16. Во-первых, сопоставляя качество Q различных материалов, приходим к выводу, что двухслойные варианты преград в качестве оптимальных возможны лишь в одном случае – «2+1». Результаты численных расчетов не противоречат этому аналитическому решению. Во-вторых, подтверждается вывод, что с тыльной стороны оптимальной преграды всегда должен располагаться более легкий материал. Например, среди всех вариантов преград вида «2+3» и «3+2» оптимальной является однослойная, представленная более легким материалом №3. Также практически все двухслойные структуры вида «1+2» являются худшими по сравнению с однослойными вариантами, тогда как двухслойная структура «2+1» выигрывает по массе у однослойных плит. Относительный выигрыш по удельной массе двухслойной преграды «2+1» может составлять более 30% по сравнению с однослойными плитами. Рассматривать структуры вида «1+3» и «3+1» не имеет смысла, поскольку материалы №1 и №3 имеют одинаковую плотность, поэтому оптимальная преграда всегда будет представлена более прочным сплавом из материала №3.

Дискретное изменение характеристик материала по толщине преграды

Обозначения

a_0, a_2	параметры модели;
a	$= -(\rho_1 / \rho_3)(\rho_3 - \rho_2) / (\rho_2 - \rho_1)$;
A_i	$= (H_{i+1} - H_i) / (\rho_{i+1} - \rho_i)$, формула (17.2.11);
B_i	$= (H_i \rho_{i+1} - H_{i+1} \rho_i) / (\rho_{i+1} - \rho_i)$, формула (17.2.11);
\bar{B}_i	$= B_i - A_i \rho_i \chi_i$;
b	толщина преграды;
$b^{[j]}$	толщина j -го слоя преграды;
C	$= \rho[\tilde{u}(\tilde{b})] / f^{(1)}[\bar{y}(\tilde{b}), \tilde{u}]$;
C_1, C_2, C_3	функции, формулы (17.1.6)-(17.1.8);
d_3	$= \frac{\rho(b)}{E_2 y^{(2)}(b)}$, формула (17.2.9);
d_1	$= ctg^2 \alpha$;
d_2	$= M d_1^2 / \pi$;
E_0	функция Хевисайда;
E	$= E(x) = E[u(x)]$, модуль Юнга материала преграды;
E_2	$= 4\pi g^2 \alpha / M > 0$, см. уравнение (17.2.1);
F_0	функционал, удельная масса плиты (критерий качества управления), формула (17.1.11);
\bar{F}_0	относительный проигрыш по массе однослойной плиты по сравнению с оптимальной слоистой преградой, Рис. 17.1.1;
F_1	функционал, граничное условие, формула (17.1.12);
\bar{f}	правая часть векторного дифференциального уравнения, формулы (17.1.10), (17.2.5);
$f^{(i)}$	правая часть i -го дифференциального уравнения системы, см. \bar{f} ;
H	$= H(x) = H[u(x)]$, динамическая твердость материала преграды;
H_i	динамическая твердость i -го материала из заданного набора, формула (17.2.11);
h	длина конической головной части ударника;
I, I_1	интегралы, формулы (17.1.23)-(17.1.25);
k	$= \sin^2 \alpha$;
L	текущая глубина внедрения ударника в преграду;
L_k	конечная глубина внедрения ударника;
L_k^{-i}	конечная глубина проникания в однослойную плиту из материала ρ_i, H_i ;

M	масса ударника;
m, m_1	множество малой меры, формула (17.1.15);
N	число кусочно-линейных связей между динамической твердостью и плотностью, см. формулу (17.2.10);
n	число слоев в преграде;
P	удельное сопротивление прониканию;
Q, K	многогранник исходных материалов и гиперконус (вспомогательные структуры, используемые при геометрическом анализе);
q	количество материалов в заданном наборе U ;
r	уравнение образующей ударника;
S	количество узлов сетки;
U	область значений управляющей функции u ;
U_i	номер материала из заданного набора U ;
u	номер материала, управляющая функция (в терминах ТОУ);
$u^{[s]}$	номер материала s -го слоя преграды;
\bar{u}_j	значение управляющей функции между j -м и $(j+1)$ -м узлами сетки;
$v(L)$	текущая (мгновенная) скорость ударника;
$v_{[0]}$	начальная скорость ударника;
w	возмущенное управление, формула (17.1.15);
x	координата, отсчитываемая от лицевой поверхности по толщине слоистой плиты;
x_j	j -й узел сетки;
x_s, x_{s+1}	границы s -го слоя плиты;
x^-, x^+	границы отрезка m ;
\bar{y}	вектор фазовых координат;
$y^{(i)}$	i -я фазовая координата (обозначение в терминах ТОУ);
α	полуугол при вершине ударника конической формы;
γ	$= \arctg((A_1 \rho_1 \chi_1)/(A_2 \rho_2 \chi_2))$;
Δx	шаг сетки;
δ	вариация;
ε	$= E/[\sigma_s(1+\nu)]$;
\hat{H}	функция Гамильтона (гамильтониан) (обозначение в терминах ТОУ);
$\theta(\varepsilon)$	$= \ln(1+\varepsilon)$;
μ_{fr}	коэффициент трения между поверхностями ударника и преграды в области их контакта;
μ_i	функции в формуле для \hat{H} , не зависящие от управляющих функций, формула (17.1.29);
ν	$= \nu(x) = \nu[u(x)]$, коэффициент Пуассона материала преграды;
ρ	$= \rho(x) = \rho[u(x)]$, плотность материала преграды;
ρ_i	плотность i -го материала из заданного набора, формула (17.2.11);
σ_s	$= \sigma_s(x) = \sigma_s[u(x)]$, предел текучести материала преграды;
Φ	функция, не зависящая от управляющих функций, формула (17.2.8);
φ_i	функции в формуле для \hat{H} , зависящие от управляющих функций, формула (17.1.29);
φ	функция, задающая связь между параметрами двучленной МЛВ;
χ	$= \sqrt{(A_1 \rho_1 \chi_1)^2 + (A_2 \rho_2 \chi_2)^2}$;
χ_i	$= \left(\left(L_k^{i-} / h \right)^2 - 1 \right)$, формула (17.2.14);

$\psi^{(i)}$	i -я сопряженная переменная (обозначение в терминах ТОУ);
$\vec{\psi}$	вектор сопряженных переменных;
ω	см. формулу (17.1.29)
МЛВ	модель локального взаимодействия;
ТОУ	теория оптимального управления.

Примечание. В Главе 74 остается справедливым примечание Главы 73. Звездочкой * отмечается сопряженная матрица (оператор).

В отличие от предыдущей главы здесь не будет использоваться связь между твердостью и плотностью материала. Область значений управляющей функции будет принадлежать некоторому конечному дискретному множеству. Решение задачи основано на методе игольчатых вариаций [18] и представлено в работах [3]; [23]; используют метод, развитый в работе [12].

В разделе 17.1 представлена численная методика решения оптимизационной задачи. Используется модель А.Я. Сагомояна, которая получена на основе решения задачи о расширении цилиндрической полости [14]. Эта модель не является МЛВ, а представляет собой более сложный тип зависимости.

В разделе 17.2 с использованием подхода, основанного на методе игольчатых вариаций, аналитически получены качественные результаты для задачи оптимизации на произвольном наборе материалов [6]. Применяется эмпирическая зависимость Ф.Ф. Витмана и В.А. Степанова.

17.1. Численный подход на основе модели А.Я. Сагомояна.

17.1.1. Постановка задачи оптимизации.

Рассматривается процесс динамического проникания жесткого тела вращения в слоистую плиту при ударе по нормали и ставится следующая задача: требуется из заданного конечного набора материалов составить слоистую преграду минимальной удельной массы, которая обеспечивает остановку движущегося в ней ударника в момент выхода его головной части на тыльную сторону плиты.

В качестве управляющей функции выбрана пара $\{u(x), b\}$, при этом характеристики материалов (плотность ρ , модуль Юнга E , коэффициент Пуассона ν , предел текучести σ_s) являются функциями от $u(x)$.

Область значений управляющей функции принадлежит конечному дискретному множеству $u \in U$. Критерий качества управления представляет собой минимум удельной массы плиты – аналог (16.1.3), граничные условия записываются, как и ранее, в виде:

$$v(0) = v_{[0]}, \quad F_1[\rho(\cdot), b] \equiv v(b) = 0. \quad (17.1.1)$$

где второе соотношение представляет собой условие непробиваемости преграды.

Для приближенного описания процесса проникания используется не эмпирическая зависимость, а теоретическая модель радиального расширения отверстия в плите при проникании [14]. Модель радиального расширения отверстия основана на предположении о радиальном смещении частиц материала плиты в условиях плоского

деформирования с цилиндрической симметрией, выполняемого для случая проникания жесткого тонкого заостренного тела ("гипотеза плоских сечений").

Выражение для определения давления, действующего на ударник на расстоянии x от лицевой поверхности плиты, записывается в форме [14]:

$$p = \frac{1}{2} \rho v^2 \left\{ (r')^2 \left[\theta(\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \right] + r r'' \right\} + \frac{1}{2} \rho v \theta(\varepsilon) r r' + \frac{1}{2} \sigma_s [1 + \theta(\varepsilon)], \quad (17.1.2)$$

где $r = r(L-x)$ – уравнение образующей ударника; $\theta(\varepsilon) = \ln(1 + \varepsilon)$; $\varepsilon = E / [\sigma_s (1 + \nu)]$.

Уравнение движения ударника имеет вид, аналогичный (16.1.1):

$$\frac{1}{2} M \frac{d(v^2)}{dL} = -2\pi \int_0^L p(x) r(L-x) r'(L-x) dx. \quad (17.1.3)$$

Введем дополнительные фазовые координаты (как и в разделе 16.1), тогда процесс проникания цилиндрического ударника с конической головной частью высотой h описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy^{(1)}}{dL} &= -2(y^{(1)}y^{(2)} + d_1y^{(3)}) / (d_2 + y^{(4)}), \\ \frac{dy^{(2)}}{dL} &= y^{(5)} - C_1(L-h)h, & \frac{dy^{(3)}}{dL} &= y^{(6)} - C_2(L-h)h, \\ \frac{dy^{(4)}}{dL} &= 2y^{(7)} - C_3(L-h)h^2, & \frac{dy^{(5)}}{dL} &= C_1(L) - C_1(L-h), \\ \frac{dy^{(6)}}{dL} &= C_2(L) - C_2(L-h), & \frac{dy^{(7)}}{dL} &= y^{(8)} - C_3(L-h)h, \\ \frac{dy^{(8)}}{dL} &= C_3(L) - C_3(L-h) \end{aligned} \right\} \quad (17.1.4)$$

$$y^{(i)}(0) = v_{[0]}^2, \quad y^{(i)}(0) = 0, \quad i = 2, 3, \dots, 8. \quad (17.1.5)$$

где $d_1 = ctg^2 \alpha$, $d_2 = M d_1^2 / \pi$.

В системе (17.1.4) компоненты вектор-функции фазовых координат $y^{(i)}$ и функции C_1, C_2, C_3 выражаются следующим образом:

$$C_1(\tau) = \begin{cases} 0, & \text{если } \tau < 0 \\ \rho(\tau) \left[\theta(\varepsilon(\tau)) - \frac{\varepsilon(\tau)}{1 + \varepsilon(\tau)} \right], & \text{если } \tau \geq 0 \end{cases} \quad (17.1.6)$$

$$C_2(\tau) = \begin{cases} 0, & \text{если } \tau < 0 \\ \sigma_s(\tau) [1 + \theta(\varepsilon(\tau))], & \text{если } \tau \geq 0 \end{cases} \quad (17.1.7)$$

$$C_3(\tau) = \begin{cases} 0, & \text{если } \tau < 0 \\ \rho(\tau) \theta(\varepsilon(\tau)), & \text{если } \tau \geq 0 \end{cases} \quad (17.1.8)$$

$$\left. \begin{aligned}
y^{(1)} &= v^2, & y^{(2)} &= \int_{\max(0, L-h)}^L (L-x)\rho \cdot \left(\theta - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right) dx, \\
y^{(3)} &= \int_{\max(0, L-h)}^L (L-x)\sigma_s \cdot (1+\theta) dx, & y^{(4)} &= \int_{\max(0, L-h)}^L (L-x)^2 \rho \theta dx, \\
y^{(5)} &= \int_{\max(0, L-h)}^L \rho \cdot \left(\theta - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right) dx, & y^{(6)} &= \int_{\max(0, L-h)}^L \sigma_s \cdot (1+\theta) dx, \\
y^{(7)} &= \int_{\max(0, L-h)}^L (L-x)\rho \theta dx, & y^{(8)} &= \int_{\max(0, L-h)}^L \rho \theta dx
\end{aligned} \right\} (17.1.9)$$

Использование в формулах (17.1.9) функции максимума в нижнем пределе интегрирования позволяет описать в единой форме оба этапа проникания – частичное погружение в преграду конической части ударника (интегрирование в пределах от 0 до L) и полное вхождение конуса в плиту (интегрирование по носовой части от $L-h$ до L). Также отметим, что функции C_1, C_2, C_3 зависят только от механических характеристик материалов плиты.

Сформулируем задачу оптимизации. Пусть процесс проникания жесткого ударника в неоднородную плиту описывается системой дифференциальных уравнений с управлением:

$$\frac{d\bar{y}}{dL} = \bar{f}(\bar{y}, u), \quad \bar{y}(0) = \bar{y}_{[0]}, \quad (17.1.10)$$

и определены дифференцируемые в смысле Фреше функционалы, которые в терминах ТОУ имеют вид:

$$F_0[u(\cdot), b] \equiv \int_0^b \rho(x) dx, \quad (17.1.11)$$

$$F_1[u(\cdot), b] \equiv y^{(1)}(b) = 0. \quad (17.1.12)$$

Количество, размеры и материалы слоев задаются распределением некоторого характерного свойства материалов:

$$u(x) = \left\{ u^{[s]} : x \in [x_s, x_{s+1}), s = 1, 2, \dots, n \right\}, \quad (17.1.13)$$

$$x_1 = 0, x_{n+1} = b, \quad x_{s+1} - x_s = b^{[s]}, \quad (17.1.14)$$

где n – число слоев. Значение $u^{[s]}$ принадлежит конечному множеству U , соответствующему заданному набору материалов $u \in U = \{U_1, \dots, U_q\}$; $u^{[s]}$ – номер материала s -го слоя; U_i – номер материала из заданного набора; q – количество материалов. Распределение остальных характеристик материалов определяется распределением $u(x)$, оптимальное управление $\{\tilde{u}(x), \tilde{b}\}$ автоматически определяет количество, размеры и материалы слоев.

Ставится задача оптимизации: среди всех кусочно-постоянных функций $u(x) \in U$ и чисел $b > 0$ найти управление $\{\tilde{u}(x), \tilde{b}\}$, доставляющее минимум функционалу (17.1.11) при ограничениях на фазовые координаты (17.1.10) и граничном условии (17.1.12).

Дискретность области значений управлений не позволяет, как это обычно принято, строить малые вариации в норме $\|\delta u\| = \max_{x \in [0, b]} |\delta u|$. Поэтому, при выводе необходимых условий оптимальности и конструировании вычислительного алгоритма используется метод игольчатых вариаций [18]; [17].

17.1.2. Принцип максимума на базе метода игольчатых вариаций.

Получим необходимые условия оптимальности. Пусть $\{\tilde{u}(x), \tilde{b}\}$ – оптимальное управление, минимизирующее функционал (17.1.11) и удовлетворяющее ограничению (17.1.12). Возмущенное управление $w \in U$ задается на некотором множестве малой меры следующим образом:

$$u(x) = \begin{cases} w, & \text{если } x \in m, \\ \tilde{u}, & \text{если } x \notin m \end{cases} \quad (17.1.15)$$

где $m \in [0, \tilde{b}]$ – множество малой меры.

Выпишем для системы (17.1.10) уравнение в вариациях и главные части приращения функционала (17.1.11) и ограничения (17.1.12):

$$\delta \frac{d\bar{y}}{dL} - \bar{f}'_{\bar{y}} \delta \bar{y} = \bar{f}(\bar{y}, u) - \bar{f}(\bar{y}, \tilde{u}), \quad (17.1.16)$$

$$\delta F_0 = \int_m [\rho(w) - \rho(\tilde{u})] dx + \rho[\tilde{u}(\tilde{b})] \delta \tilde{b}, \quad (17.1.17)$$

$$\delta F_1 = \delta y^{(1)}(\tilde{b}) + f^{(1)}[\bar{y}(\tilde{b}), \tilde{u}] \delta \tilde{b}. \quad (17.1.18)$$

Используя тождество Лагранжа:

$$\int_0^{\tilde{b}} \left[\bar{\psi} \left(\delta \frac{d\bar{y}}{dx} - \bar{f}'_{\bar{y}} \delta \bar{y} \right) + \delta \bar{y} \left(\frac{d\bar{\psi}}{dx} + \bar{f}'_{\bar{y}}^* \bar{\psi} \right) \right] dx - \bar{\psi} \delta \bar{y} \Big|_0^{\tilde{b}} = 0, \quad (17.1.19)$$

и ограничения на возмущенной траектории:

$$F_1[u(\cdot), \tilde{b} + \delta \tilde{b}] \approx F_1[u(\cdot), \tilde{b}] + \delta F_1 = \delta F_1 = 0, \quad (17.1.20)$$

найдем выражение для вариации $\delta \tilde{b}$. Потребуем для этого, чтобы сопряженная вектор-функция $\bar{\psi}$ удовлетворяла системе уравнений и граничным условиям:

$$\frac{d\bar{\psi}}{dL} = -\bar{f}'_{\bar{y}}^* \bar{\psi}, \quad (17.1.21)$$

$$\psi^{(1)}(\tilde{b}) = 1, \quad \psi^{(j)}(\tilde{b}) = 0, \quad j = 2, 3, \dots, 8. \quad (17.1.22)$$

Прибавляя к правой части (17.1.18) левую часть (17.1.19) с учетом (17.1.16), (17.1.20) и (17.1.21), получим:

$$\delta \tilde{b} = \frac{1}{f^{(1)}[\bar{y}(\tilde{b}), \tilde{u}]} \int_0^{\tilde{b}} \bar{\psi} [\bar{f}(\bar{y}, \tilde{u}) - \bar{f}(\bar{y}, u)] dx = \frac{1}{f^{(1)}[\bar{y}(\tilde{b}), \tilde{u}]} I. \quad (17.1.23)$$

Рассмотрим подробнее интеграл I в выражении (17.1.23) для системы (17.1.4) в зависимости от области варьирования.

(1) Если $m = [x^-, x^+] \subset [\tilde{b} - h, \tilde{b}]$, то

$$I = I_1 \equiv \int_{x^-}^{x^+} \left\{ \psi^{(5)}(x)[C_1(w) - C_1(\tilde{u})] + \psi^{(6)}(x)[C_2(w) - C_2(\tilde{u})] + \right. \\ \left. + \psi^{(8)}(x)[C_3(w) - C_3(\tilde{u})] \right\} dx \quad (17.1.24)$$

(2) Если $m = [x^-, x^+] \subset [0, \tilde{b} - h]$, то

$$I = I_1 + \int_{x^-+h}^{x^++h} \left\{ \psi^{(2)}(x)h + \psi^{(5)}(x) \right\} [C_1(\tilde{u}) - C_1(w)] + \\ + \left\{ \psi^{(3)}(x)h + \psi^{(6)}(x) \right\} [C_2(\tilde{u}) - C_2(w)] + \\ + \left\{ \psi^{(4)}(x)h^2 + \psi^{(7)}(x)h + \psi^{(8)}(x) \right\} [C_3(\tilde{u}) - C_3(w)] dx \quad (17.1.25)$$

Подставляя выражение (17.1.23) в (17.1.17) с учетом формул для I , вариацию минимизируемого функционала представим в форме:

$$\delta F_0[u(\cdot), b] = \int_m \left[\hat{H}(\bar{y}, \bar{\psi}, \tilde{u}) - \hat{H}(\bar{y}, \bar{\psi}, w) \right] dx, \quad (17.1.26)$$

$$\hat{H}(\bar{y}, \bar{\psi}, w) = \begin{cases} C[\psi^{(5)}(x)C_1(w) + \psi^{(6)}(x)C_2(w) + \psi^{(8)}(x)C_3(w)] - \\ - \rho(w), & \text{если } m \in [\tilde{b} - h, \tilde{b}] \\ C\{\psi^{(5)}(x) - \psi^{(2)}(x+h)h - \psi^{(5)}(x+h)\}C_1(w) + \\ + \{\psi^{(6)}(x) - \psi^{(6)}(x+h) - \psi^{(3)}(x+h)h\}C_2(w) + \\ + \{\psi^{(8)}(x) - \psi^{(8)}(x+h) - \psi^{(7)}(x+h)h - \psi^{(4)}(x+h)h^2\}C_3(w) - \\ - \rho(w), & \text{если } m \in [0, \tilde{b} - h] \end{cases} \quad (17.1.27)$$

где $C = \rho[\tilde{u}(\tilde{b})] / f^{(1)}[\bar{y}(\tilde{b}), \tilde{u}]$, $x \in m$.

Для оптимальности варьируемого управления необходимо выполнение принципа максимума:

$$\hat{H}(\bar{y}, \bar{\psi}, \tilde{u}) = \max_{w \in U} \hat{H}(\bar{y}, \bar{\psi}, w). \quad (17.1.28)$$

17.1.3. Геометрический анализ.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию необходимых условий оптимальности следуя подходу [12]. Функция \hat{H} представима в виде:

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{\omega} \mu_i(\bar{y}, \bar{\psi}) \varphi_i(w), \quad (17.1.29)$$

где ω определяется числом функция φ_i , зависящих только от w ; φ_i – непрерывные по x функции (в силу $w = w(x)$). При каждом фиксированном $x \in [0, b]$ функция \hat{H} линейно зависит от переменных φ_i , поэтому в координатах φ_i функция \hat{H} является опорной гиперплоскостью вектор–градиента, указывающего направление возрастания $grad(\hat{H}) = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\omega\}$. Отсюда вытекает, что функция \hat{H} достигает максимума на одной из вершин выпуклого многогранника Q , представляющего собой выпуклую оболочку множества точек $\varphi_i(w_s)$, $w_s \in U$, $s = 1, 2, \dots, q$. Остальные материалы из множества U можно заранее исключить из рассмотрения.

Так как функции μ_i непрерывны, то при малом изменении x незначительно изменится и направление вектора $grad(\hat{H})$. Таким образом, для любой вершины многогранника Q существует некоторый гиперконус K , внутри которого может лежать $grad(\hat{H})$ при соответствующем изменении $x \in (x^*, x^{**}) \in [0, b]$ и может быть выполнено условие:

$$\hat{H}(w) \rightarrow \max_{w \in U}. \quad (17.1.30)$$

Отсюда следует, что оптимальная плита содержит ограниченное число слоев конечной толщины.

В точках $x^* \in [0, b]$, где гиперконус K касается одного из ребер многогранника Q , происходит смена материала, причем рядом могут находиться материалы, соответствующие лишь смежным вершинам многогранника.

Можно показать, что если $x = b$, то в силу условий (17.1.22) и равенств (17.1.27) и (17.1.29) следует $grad(\hat{H}) = \{-1, 0, \dots, 0\}$. Так как $\varphi_1(w) \approx \rho$, то приходим к выводу, что в окрестности тыльной поверхности плиты всегда располагается материал с минимальной из множества допустимых материалов плотностью.

17.1.4. Численная реализация метода.

Численный алгоритм решения оптимизационной задачи состоит в следующем. Выбираются некоторое допустимое управление $u(x) \in U$ и малый параметр Δx , моделирующий множество малой меры m . С шагом Δx вводится равномерная сетка $x_0 = 0$, $x_j = x_{j-1} + \Delta x$, $j = 1, 2, \dots, S$ ($x_{S-1} < b < x_S$). Значения \bar{y} и $\bar{\psi}$ вычисляются в точках $x_j + \Delta x/2$ и предполагаются постоянными для всего отрезка $[x_j, x_{j+1}]$. Построение приближения включает в себя следующие этапы:

(1) Интегрируется система уравнений (17.1.10) и находятся значения переменных $\bar{y}(x)$ и b в узлах сетки.

(2) В точке $x = b$ задаются граничные условия (17.1.22) для сопряженных функций и решается система (17.1.21).

(3) На отрезке $[x_j, x_{j+1}]$ ищется новое значение \bar{u}_j из условия:

$$\hat{H}(\bar{y}, \bar{\psi}, \bar{u}_j) = \max_{w \in U} \hat{H}(\bar{y}, \bar{\psi}, w). \quad (17.1.31)$$

Если $\bar{u}_j = u(x_j + \Delta x/2)$, то этап повторяется для $[x_{j+1}, x_{j+2}]$, иначе в качестве нового управления выбирается:

$$\bar{u} = \begin{cases} \bar{u}_j, & \text{если } x \in [x_j, x_{j+1}] \\ u(x), & \text{если } x \notin [x_j, x_{j+1}] \end{cases} \quad (17.1.32)$$

и выполняется переход к этапу (1) при $x = x_{j+1}$.

Таким образом, управление улучшается до правого конца интервала $x = x_S$. Процесс заканчивается если $u(x)$ не меняется ни при каких j .

В ходе численных экспериментов установлено, что для данного типа задач при достаточно малых $\Delta x \approx b/400$ алгоритм оптимизации обладает хорошей сходимостью, а 70–80 % затрат машинного времени приходится на первые две–три итерации. При большом шаге $\Delta x \approx b/100 - b/50$ нарушается выполнение линейных соотношений (17.1.16)–(17.1.18) и после двух–трех итераций процесс перестает сходиться.

В целях уменьшения времени счета при сохранении достаточной эффективности алгоритма оптимизации предложен следующий прием: выбирается достаточно малый шаг $\Delta x \approx b/500$, но оптимизация проводится одновременно на множестве отрезков m_1 ($m_1 \approx 10m$), расположенных друг от друга на некотором расстоянии. На следующих итерациях значение m_1 может быть увеличено.

17.1.5. Численный анализ.

Рассмотрим задачу оптимизации структуры слоистой плиты при динамическом внедрении жесткого цилиндра с конической головной частью. Множество допустимых материалов и их характеристики представлены в таблице 17.1.1.

Таблица 17.1.1. Множество допустимых материалов и их свойства

№	Марка	Плотность ρ , кг/см ³	Модуль Юнга E , ГПа	Предел текучести σ_s , МПа	Коэффициент Пуассона ν
1	Алюминий отожженный	2750	70	60	0,33
2	Алюминиевый сплав В-95	2800	70	450	0,32
3	Титан отожженный	4500	110	80	0,30
4	Титановый сплав ВТ-6	4500	120	830	0,32
5	Сталь Ст.8	7850	200	210	0,28
6	Сталь 12Х2И4А	7850	200	1110	0,30

Как и следует из результатов раздела 17.1.3, а также из результатов аналитических исследований, представленных в предыдущей главе, оптимальная плита состоит из двух материалов (№ 4 – с лицевой поверхности, № 2 – с тыльной). С увеличением начальной скорости проникания $v_{[0]}$ и угла α при вершине конуса относительная толщина лицевого слоя $b^{[1]}$ возрастает (см. Рис. 17.1.1а). На Рис. 17.1.1б показан относительный проигрыш по массе \bar{F}_0 однородной плиты из материалов № 2, № 4, № 6 по сравнению с оптимальной плитой для разных скоростей удара. Проигрыш тяжелых материалов № 4 и № 6 с ростом скорости уменьшается, так как в оптимальной плите растет их доля. Отметим также, что однородная алюминиевая плита № 2 выигрывает перед однородной титановой плитой № 4 при скоростях удара не превышающих 600 м/с и проигрывает при больших скоростях.

Если вместо материала № 6 взять сталь с пределом текучести $\sigma_s \approx 1500$ МПа, то оптимальная плита будет трехслойной с убывающей плотностью слоев от лицевой поверхности к тыльной. В случае большего количества материалов можно получить многослойную оптимальную плиту. Однако основной качественный признак

оптимальности слоистой плиты – убывание плотности слоев от лицевой поверхности к тыльной – сохранится.

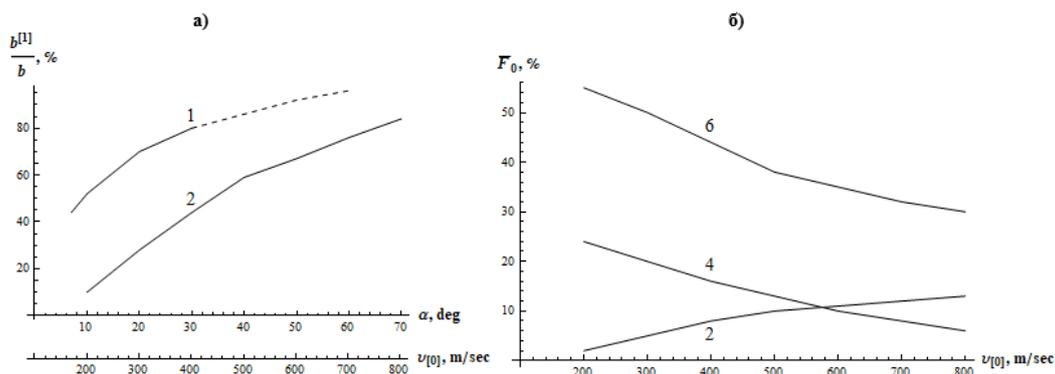


Рис. 17.1.1. Результаты численных расчетов (а: кривая 1 получена при $v_{[0]} = 500$ м/сек, кривая 2 – при $\alpha = 12^\circ$; б: номера кривых соответствуют нумерации марок из Табл. 17.1.1).

Таким образом, предлагаемый подход к оптимальному синтезу ударопрочных слоистых плит позволяет выбирать материалы для пластин-слоев и их толщины, оценивать влияние условий динамического проникания (начальная скорость, форма ударника и т.п.) на оптимальную структуру. Последние результаты согласуются с результатами предыдущей главы, полученными на основе двучленной МЛВ и принципа максимума Понтрягина.

17.2. Аналитический подход на основе эмпирической модели.

17.2.1. Постановка задачи.

Как и в предыдущем разделе 17.1 рассмотрим задачу оптимизации удельной массы слоистой плиты в условиях динамического проникания в нее цилиндрического ударника с конической головной частью. Для описания процесса динамического проникания будем использовать эмпирическую зависимость Ф.Ф. Витмана и В.А. Степанова, которая является двучленной МЛВ (1.4.1) при следующих значениях параметров $a_0 = H$, $a_2 = \rho$, $\mu_{fr} = 0$. Отметим, что такая же МЛВ для удельной силы сопротивления прониканию p применялась в Главе 16.

Уравнение движения ударника в преграде имеет следующий вид:

$$\frac{d(v^2)}{dL} = -E_2 \int_{\max(0; L-h)}^L (L-x)[H(x) + k\rho(x)v^2(L)] dx. \quad (17.2.1)$$

Основные соотношения, сформулированные в терминах ТОУ, получены по аналогии с разделом 17.1. Вводятся дополнительные фазовые координаты:

$$\left. \begin{aligned} y^{(1)} &= v^2, & y^{(2)} &= \int_{\max(0;L-h)}^L (L-x)H(x)dx, \\ y^{(3)} &= \int_{\max(0;L-h)}^L H(x)dx, & y^{(4)} &= \int_{\max(0;L-h)}^L (L-x)\rho(x)dx, \\ y^{(5)} &= \int_{\max(0;L-h)}^L \rho(x)dx \end{aligned} \right\} \quad (17.2.2)$$

с помощью которых уравнение (17.2.1) можно записать в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений, а полный процесс движения с учетом начальных условий описать в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy^{(1)}}{dL} &= -E_2(y^{(2)} + ky^{(1)}y^{(4)}), & \frac{dy^{(2)}}{dL} &= y^{(3)} - hH(L-h)E_0(L-h), \\ \frac{dy^{(3)}}{dL} &= H(L) - H(L-h)E_0(L-h), & \frac{dy^{(4)}}{dL} &= y^{(5)} - h\rho(L-h)E_0(L-h), \\ \frac{dy^{(5)}}{dL} &= \rho(L) - \rho(L-h)E_0(L-h) \end{aligned} \right\} \quad (17.2.3)$$

$$y^{(1)}(0) = v_{[0]}^2, \quad y^{(j)}(0) = 0, \quad j = 2, 3, \dots, 5. \quad (17.2.4)$$

Систему уравнений (17.2.3) запишем в векторной форме:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\vec{y}}{dL} &= \vec{f}(\vec{y}, u), \quad L \geq 0, \\ y^{(1)}(0) &= v_{[0]}^2, \quad y^{(j)}(0) = 0, \quad j = 2, 3, \dots, 5 \end{aligned} \right\} \quad (17.2.5)$$

Соотношения (17.2.5) определяют управляемую систему; роль управления, как и ранее, играет пара $\{u(x), b\}$. Управляющая функция u принадлежит классу кусочно-постоянных функций с областью значений из конечного дискретного множества U .

Критерий качества и условие непробиваемости преграды записываются в виде функционалов (17.1.11) и (17.1.12).

Поскольку область значений управляющей функции представляет собой дискретную структуру, то при решении задачи используется метод игольчатых вариаций. По аналогии с разделом 17.1 можно построить конечные вариации управления на множестве малой меры, где вектор сопряженных переменных $\vec{\psi}$ находится по уравнениям (17.1.21), при этом оптимальное управление $\{\tilde{u}(x), \tilde{b}\}$ достигается при условии выполнения принципа максимума Понтрягина (17.1.28).

Соотношения (17.2.5), (17.1.11) и (17.1.12) определяют математическую постановку оптимизационной задачи.

17.2.2. Геометрический анализ.

Рассмотрим сначала вариант неполного вхождения конической головной части ударника в преграду, $L < h$, который можно трактовать как проникание конуса в слоистую плиту. В этом случае приведенные в подразделе 17.2.1 соотношения принимают более простой вид, в частности, нижний предел интегрирования в

обозначениях для фазовых координат и функция Хевисайда в (17.2.3) равны нулю. Сопряженная система уравнений примет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\psi^{(1)}}{dL} &= E_2 k y^{(4)} \psi^{(1)}, & \frac{d\psi^{(2)}}{dL} &= E_2 \psi^{(1)}, & \frac{d\psi^{(3)}}{dL} &= -\psi^{(2)}, \\ \frac{d\psi^{(4)}}{dL} &= E_2 k y^{(1)} \psi^{(1)}, & \frac{d\psi^{(5)}}{dL} &= -\psi^{(4)} \end{aligned} \right\} \quad (17.2.6)$$

$$\psi^{(1)}(b) = 1, \quad \psi^{(i)}(b) = 0 \quad i = 2, 3, \dots, 5. \quad (17.2.7)$$

Гамильтониан системы выражается в форме:

$$\hat{H}(\bar{y}, \bar{\psi}, w) = -(1 + d_3 \psi^{(5)}) \rho(w) - d_3 \psi^{(3)} H(w) + \Phi(\bar{y}, \bar{\psi}), \quad (17.2.8)$$

где

$$d_3 = \frac{\rho(b)}{E_2 y^{(2)}(b)}, \quad (17.2.9)$$

причем функция Φ не зависит от управления w .

Анализируя полученное выражение для гамильтониана \hat{H} , можно сделать ряд качественных выводов относительно оптимальной структуры слоистой преграды. В подразделе 17.1.3 предложен геометрический анализ функции Гамильтона \hat{H} . Этот подход в настоящем разделе 17.2 приобретает наглядную геометрическую интерпретацию, поскольку рассматриваемая здесь МЛВ зависит только от двух основных механических характеристик преграды – динамической твердости и плотности.

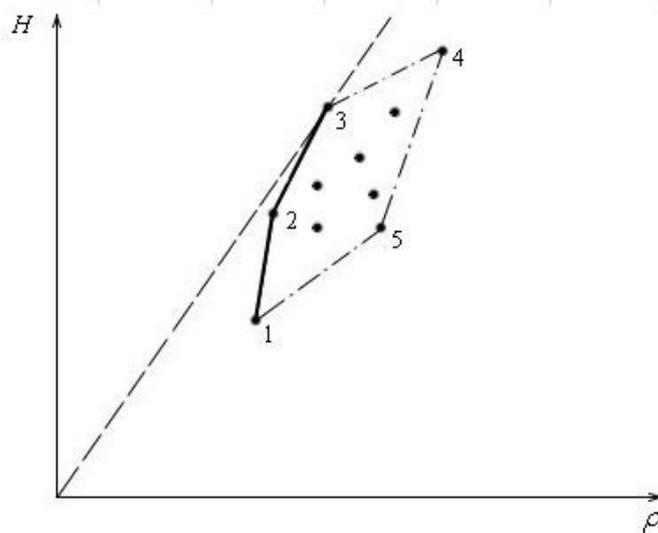


Рис. 17.2.1. Многоугольник исходных материалов

Отложим в прямоугольной системе координат по оси абсцисс плотность ρ , а по оси ординат – динамическую твердость H . Материалу из заданного множества U будет соответствовать точка на плоскости. Таким образом, множеству исходных материалов соответствует совокупность точек на плоскости, выпуклая оболочка которой образует многоугольник (Рис. 17.2.1). Согласно геометрическому анализу, проведенному в 17.1.3, максимум гамильтониана достигается на одной из вершин

многоугольника. Это означает, что в оптимальную преграду входят только материалы, лежащие на границе множества исходных материалов. При этом смена материала в слоистой плите осуществляется лишь по смежным вершинам многоугольника.

Заметим, что при прочих равных условиях, увеличение H и уменьшение ρ приводит к улучшению качества материала, следовательно, максимум гамильтониана \dot{H} достигается на выпуклой вверх оболочке многоугольника исходных материалов. Также следует отметить, что выбор между двумя материалами, геометрическая интерпретация которых представляет собой смежные вершины многоугольника, можно осуществить с опорой на результаты Главы 16, следовательно, в задаче с двумя материалами для конического ударника оптимальная структура слоистой плиты определяется с помощью параметра V_1 (в обозначениях настоящей главы).

Подчеркнем геометрический смысл полученных в предыдущей главе результатов. Если для двух материалов с параметрами ρ_1, H_1 и ρ_2, H_2 , $\rho_1 < \rho_2$ выполняется соотношение $H_2/\rho_2 < H_1/\rho_1$, то оптимальная преграда – однослойная легкая $\tilde{\rho} = \rho_1, \tilde{H} = H_1$. В противном случае оптимальная преграда является двухслойной с лицевым твердым и тыльным легким слоем $\tilde{\rho} = \rho_2 + \rho_1, \tilde{H} = H_2 + H_1$. Условие $H_2/\rho_2 < H_1/\rho_1$ в эквивалентной форме имеет вид $V_1 > 0$. Условие $V_1 > 0$ геометрически означает, что прямая, проходящая через точки (ρ_1, H_1) и (ρ_2, H_2) , пересекает ось H выше оси ρ . В противном случае при условии $V_1 < 0$ прямая пересечёт ось H ниже оси ρ . Отсюда, в частности, следует, что материал №4 из Рис. 17.2.1 не войдет в оптимальную структуру, поскольку прямая, соединяющая материалы №3 и №4, пересечет ось H выше оси ρ .

Необходимо обратить внимание на два момента,

(1) Обозначения настоящей главы несколько отличаются от обозначений Главы 16. К примеру, вместо зависимостей (16.1.8), (16.1.9) и (16.2.7) используется связь (17.2.10) при заданном N .

(2) Принципиальное отличие логических построений Главы 17 от предыдущей главы заключается в том, что зависимость (17.2.10) не является корреляцией между механическими характеристиками материалов. В этой главе предлагается подход, который позволяет с применением геометрического анализа заранее исключить определенные материалы из рассмотрения. Анализ оставшихся материалов производится с помощью соотношений (17.2.10). Таким образом, из геометрического анализа настоящей главы вытекают ключевые связи (17.2.10), которые в Главе 16 представляли собой приближенные зависимости, заданные изначально. Однако, поскольку по форме соотношения (17.2.10) совпадают с приближенными зависимостями предыдущей главы, то качественные результаты, связанные с значениями V_i , остаются верными и для новой постановки задачи с дискретным множеством значений управляющей функции.

Из проведенного геометрического анализа следует ряд свойств оптимальной структуры слоистой плиты:

Свойство 1. В допустимый набор могут входить только материалы, которым соответствуют вершины части границы многоугольника, заключенной между вершиной, соответствующей материалу с минимальной плотностью, и вершиной, через которую проходит касательная (пунктирная линия на Рис. 17.2.1), проведенная через начало координат.

Свойство 2. С тыльной стороны плиты всегда расположен материал с наименьшей плотностью.

Свойство 3. В оптимальной плите материалы могут располагаться только в такой же последовательности, в которой расположены соответствующие им вершины на части границы многоугольника, соответствующей допустимому набору.

Свойство 4. Если касательная к многоугольнику проходит через точку, соответствующую материалу с минимальной плотностью, то оптимальная плита является однослойной из материала с минимальной плотностью.

Из свойств 1-4 следует, что в оптимальной конструкции плиты слои из разных материалов располагаются в порядке убывания плотности в направлении от лицевой поверхности к тыльной.

Используя свойства 1-4, можно получить качественные результаты оптимизационной задачи с несколькими материалами при динамическом проникании конуса в слоистую плиту.

17.2.3. Задача с тремя материалами.

Обобщим результат на случай задачи о трех материалах $q=3$. Требуется из заданного набора трех материалов ρ_1, H_1 ; ρ_2, H_2 и ρ_3, H_3 , $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$ сконструировать плиту минимальной удельной массы, обеспечивающую полную остановку конического ударника в момент его выхода из преграды. Такую задачу необходимо рассматривать в условиях связи динамической твердости H и плотности ρ при $N=2$:

$$H(\rho) = A_i \rho + B_i \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (17.2.10)$$

где

$$A = (H_{i+1} - H_i) / (\rho_{i+1} - \rho_i), \quad B = (H_i \rho_{i+1} - H_{i+1} \rho_i) / (\rho_{i+1} - \rho_i). \quad (17.2.11)$$

Анализируя свойства оптимальной преграды, можно получить критерии оптимальной структуры в зависимости от параметров B_1 и B_2 . Рассмотрим варианты оптимальной структуры плиты для различных значений параметров B_1 и B_2 .

(1) $B_1 > 0, B_2 > 0$. В этом случае обе прямые, проходящие через точки (ρ_1, H_1) , (ρ_2, H_2) и точки (ρ_2, H_2) , (ρ_3, H_3) , пересекают ось H выше оси ρ . Это означает, что касательная к многоугольнику проходит через точку (ρ_1, H_1) , и оптимальной является однослойная плита из материала ρ_1, H_1 (Рис. 17.2.2а).

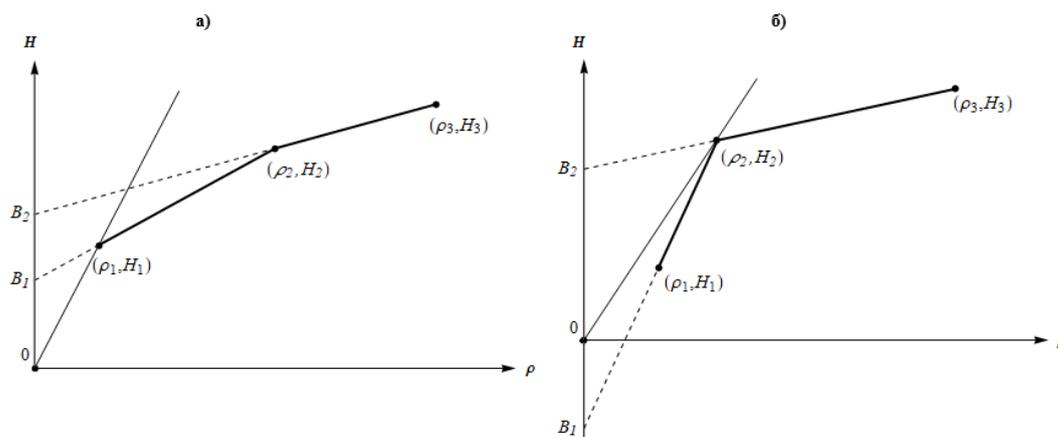


Рис. 17.2.2. Расположение материалов в случае (1) – а) и (2) – б)

(2) $B_1 < 0, B_2 > 0$. Для этого случая получен следующий результат: прямая, проходящая через точки (ρ_1, H_1) , (ρ_2, H_2) , пересекает ось H ниже оси ρ , а прямая, проходящая через точки (ρ_2, H_2) , (ρ_3, H_3) , пересекает ось H выше оси ρ . Следовательно, касательная к многоугольнику проходит через точку (ρ_2, H_2) , и оптимальной является двухслойная плита вида $\tilde{\rho} = \rho_2 + \rho_1, \tilde{H} = H_2 + H_1$ (Рис. 17.2.2б).

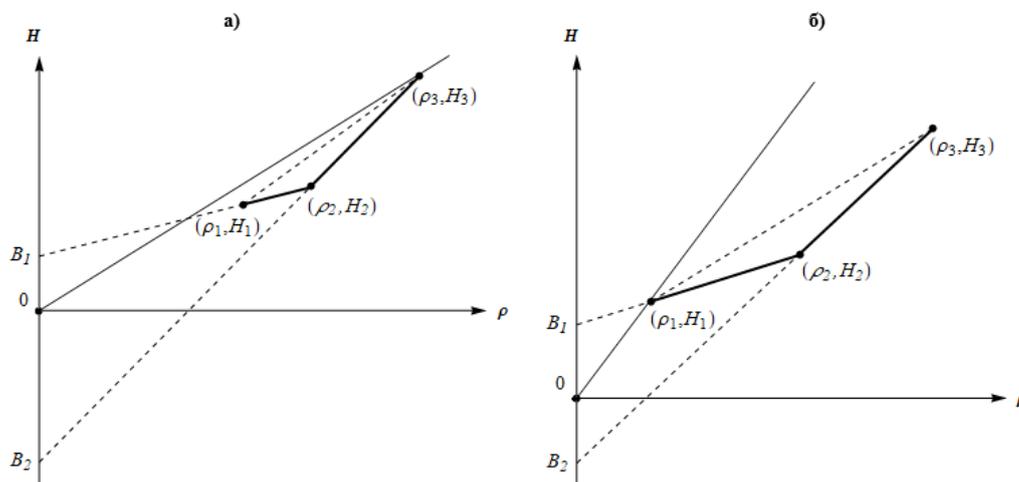


Рис. 17.2.3. Расположение материалов в случае (3): а) – вариант 1, б) – вариант 2

(3) $B_1 > 0, B_2 < 0$. В этом случае прямая, проходящая через точки (ρ_1, H_1) , (ρ_2, H_2) , пересекает ось H выше оси ρ , а прямая, проходящая через точки (ρ_2, H_2) , (ρ_3, H_3) , пересекают ось H ниже оси ρ . Возможны два варианта: касательная к многоугольнику проходит через точку (ρ_3, H_3) , тогда оптимальная плита имеет двухслойную структуру вида $\tilde{\rho} = \rho_3 + \rho_1, \tilde{H} = H_3 + H_1$ (Рис. 17.2.3а); касательная к многоугольнику проходит через точку (ρ_1, H_1) , при этом оптимальной является однослойная преграда из материала ρ_1, H_1 (Рис. 17.2.3б).

Граничное положение оптимальных областей соответствует следующему случаю: обе точки (ρ_1, H_1) и (ρ_3, H_3) лежат на касательной к многоугольнику. Отсюда следует, что если $B_1 < aB_2$, то оптимальная преграда – двухслойная вида $\tilde{\rho} = \rho_3 + \rho_1, \tilde{H} = H_3 + H_1$, иначе – однослойная $\tilde{\rho} = \rho_1, \tilde{H} = H_1$. Способ нахождения значения параметра a описан в подразделе 16.2.2.

(4) $B_1 < 0, B_2 < 0$. Этому случаю геометрически соответствует следующая ситуация: обе прямые, проходящие через точки (ρ_1, H_1) , (ρ_2, H_2) и точки (ρ_2, H_2) , (ρ_3, H_3) , пересекают ось H ниже оси ρ . Касательная к многоугольнику проходит через точку (ρ_3, H_3) .

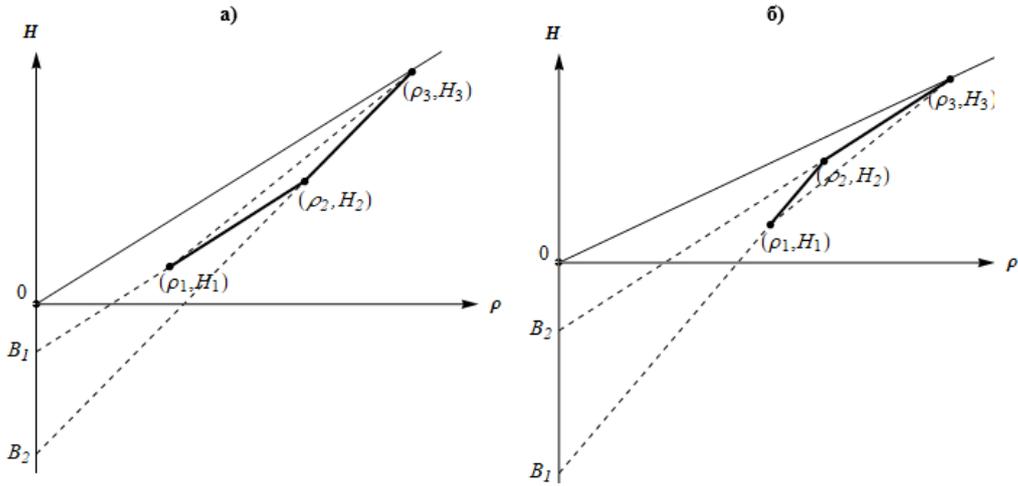


Рис. 17.2.4. Расположение материалов в случае (4): а) – вариант 1, б) – вариант 2

В рассматриваемом случае также возможны два варианта: точка (ρ_2, H_2) лежит ниже прямой, проходящей через точки (ρ_1, H_1) и (ρ_3, H_3) , при этом в оптимальную плиту входят два материала $\tilde{\rho} = \rho_3 + \rho_1$, $\tilde{H} = H_3 + H_1$ (рис. 17.2.4а); точка (ρ_2, H_2) лежит выше прямой, проходящей через точки (ρ_1, H_1) и (ρ_3, H_3) , при этом в оптимальную плиту входят три материала $\tilde{\rho} = \rho_3 + \rho_2 + \rho_1$, $\tilde{H} = H_3 + H_2 + H_1$ (Рис. 17.2.4б).

Граничное положение оптимальных областей определяет условие $B_1 = B_2$. Следовательно, при условии $B_1 < B_2$ оптимальной является трехслойная плита вида $\tilde{\rho} = \rho_3 + \rho_2 + \rho_1$, $\tilde{H} = H_3 + H_2 + H_1$, а при условии $B_1 > B_2$ – двухслойная плита $\tilde{\rho} = \rho_3 + \rho_1$, $\tilde{H} = H_3 + H_1$. Основные результаты представлены на Рис. 17.2.5а.

Рассмотрим теперь случай полного погружения конической головной части ударника в слоистую плиту. Функция Гамильтона примет различный вид на отрезках $[0, b-h]$ и $[b-h, b]$:

$$\left. \begin{aligned} \hat{H}(\bar{y}, \bar{\psi}, w) &= -\rho(w) - d_3 \left\{ \left[\psi^{(5)}(x) - h\psi^{(4)}(x+h) - \psi^{(5)}(x+h) \right] \cdot \rho(w) + \right. \\ &+ \left. \left[\psi^{(3)}(x) - h\psi^{(2)}(x+h) - \psi^{(3)}(x+h) \right] \cdot H(w) \right\} + \Phi(\bar{y}, \bar{\psi}), \quad x \in [0, b-h] \\ \hat{H}(\bar{y}, \bar{\psi}, w) &= -\rho(w) - d_3 \left[\psi^{(3)}(x) \cdot H(w) + \psi^{(5)}(x) \cdot \rho(w) \right] + \Phi(\bar{y}, \bar{\psi}), \quad x \in [b-h, b] \end{aligned} \right\} \quad (17.2.12)$$

Несмотря на более сложную постановку, подобную задачу также можно трактовать как задачу с тремя материалами для конуса.

С учетом ключевых соотношений (16.1.52), (17.2.10) и (17.2.11) приходим к выводу, что оптимальная плита будет однослойной при выполнении следующих условий:

$$\begin{cases} B_1 > A_1 \rho_1 \chi_1, \\ B_2 > A_2 \rho_2 \chi_2, \end{cases} \quad (17.2.13)$$

где

$$\chi_i = \left(\left(L_k^{-i-} / h \right)^2 - 1 \right), \quad (17.2.14)$$

L_k^{-i-} – конечная глубина внедрения ударника в однослойную плиту, изготовленную из материала с характеристиками ρ_i, H_i .

Следовательно, проводя анализ зависимости оптимальной конструкции слоистой плиты от параметров B_1 и B_2 , можно, подобно задаче об ударе конуса, получить решение в пространстве параметров B_1 и B_2 . Отметим, что величины $\chi = \sqrt{(A_1 \rho_1 \chi_1)^2 + (A_2 \rho_2 \chi_2)^2}$ и $\gamma = \arctg((A_1 \rho_1 \chi_1)/(A_2 \rho_2 \chi_2))$ на Рис. 17.2.5б зависят от конечной глубины проникания (начальной скорости ударника). Параметр a , как и ранее (Рис. 16.2.2), равен $a = -(\rho_1 / \rho_3)(\rho_3 - \rho_2) / (\rho_2 - \rho_1)$. Таким образом, налицо эффект, который можно характеризовать как масштабный. В зависимости от соотношения между конечной глубиной внедрения L_k и высотой конической головной части ударника h , при заданном наборе материалов оптимальная структура преграды может быть различной. Она может содержать один, два или три материала в разных комбинациях.

На Рис. 17.2.5 представлены результаты анализа оптимизационной задачи при динамическом проникании конуса и цилиндра с конической головной частью в слоистую плиту при условии $N = 2$ в формулах (17.2.10)-(17.2.11).

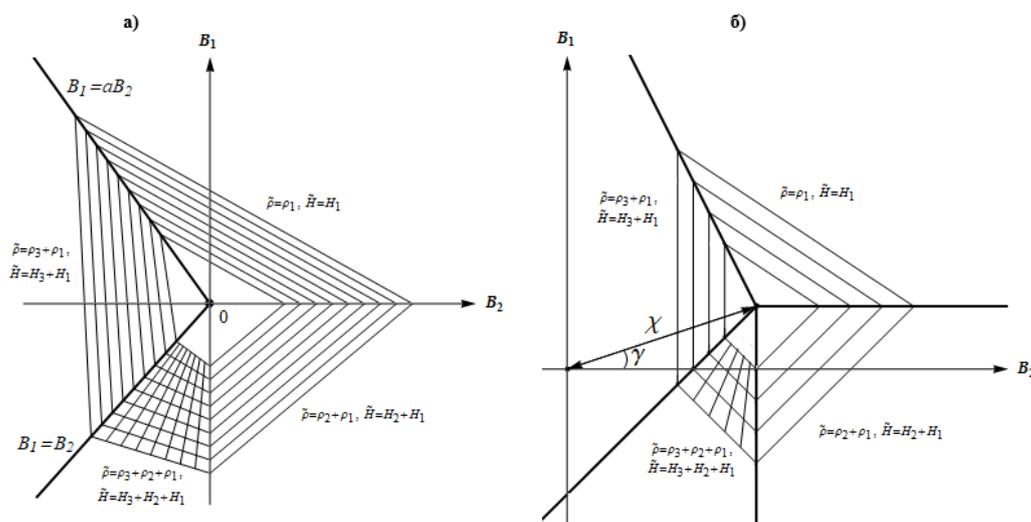


Рис. 17.2.5. Результат решения задачи о трех материалах: а) – внедрение конуса, б) – полное погружение конической головной части в плиту

17.2.4. Случай произвольного количества материалов.

Рассмотрим задачу с произвольным заданным числом материалов q при проникании конуса. Предположим, что проектировщик располагает набором из q материалов $\rho_1, H_1; \rho_2, H_2; \dots; \rho_q, H_q$, $\rho_1 < \rho_2 < \dots < \rho_q$ из которого нужно синтезировать плиту минимальной удельной массы, гасящую скорость конического ударника до нулевой.

Методика получения оптимального решения и критериев оптимальной структуры аналогична подходу, использованному в подразделе 17.2.3. Свойства, сформулированные в 17.2.2, и методика решения, изложенная в 17.2.3, позволяют отобрать материалы, которые входят в оптимальную плиту. Таким образом, можно получить качественное решение динамической оптимизационной задачи для общего случая – задачи с q материалами. Отметим, что справедлива следующая связь между q и N :

$$N = q - 1. \quad (17.2.15)$$

Рассмотрим варианты оптимальной структуры плиты в зависимости от параметров B_i ; $i = 1, 2, \dots, N$.

(1) $B_1 < 0, B_2 < 0, \dots, B_N < 0; B_1 < B_2 < \dots < B_N$. Только в этом случае возможен q -слойный вариант структуры в качестве оптимальной. Касательная к многоугольнику проходит через точку (ρ_q, H_q) , а точки множества исходных материалов $(\rho_1, H_1), \dots, (\rho_q, H_q)$ лежат на выпуклой вверх части границы многоугольника. В случае нарушения одного из условий случая (1) из оптимального набора исключаются определенные материалы.

(2) $B_i > 0$ или $B_i > B_{i+1}$. В этом случае $(i+1)$ -й материал исключается из оптимального набора, и задача сводится к задаче с $q-1$ материалами. Геометрическая интерпретация случая (2) соответствует следующей картине: точка (ρ_{i+1}, H_{i+1}) лежит ниже выпуклой вверх оболочки точечного множества. Так как точки, которым соответствуют материалы из оптимального набора, лежат на границе многоугольника, то материал ρ_{i+1}, H_{i+1} не войдет в оптимальную структуру плиты.

Суммируя вышесказанное, можно предложить следующий алгоритм определения оптимальной структуры плиты для задачи с q материалами. Вычисляем значения параметров B_1, \dots, B_N , последовательно проверяя условия (1). Если условия (1) верны, то в оптимальную структуру входит q материалов. В противном случае, при выполнении условия (2), из оптимального набора исключается $(i+1)$ -й материал, $(i+2)$ -й материал становится $(i+1)$ -м, вычисляется новое значение параметра B_i и данная процедура повторяется снова. В итоге останется некоторое количество материалов, которые войдут в оптимальную плиту, либо задача сведется к разобранной выше задаче о трех материалах.

В случае полного погружения головной части в слоистую плиту ключевые условия оптимальности однослойной легкой плиты примут следующий вид:

$$B_i > A_i \rho_i \chi_i \quad (i=1, 2, \dots, N). \quad (17.2.16)$$

Так же как и для задачи с тремя материалами, условия (17.2.16) определяют сдвиг начала координат в N -мерном пространстве параметров B_i в сторону положительного гипероктанта (2-мерный случай представлен на Рис. 17.2.5б). Таким образом, вводя новые переменные $\bar{B}_i = B_i - A_i \rho_i \chi_i$, задачу можно свести к проверке условий (1) и (2) относительно значений параметров \bar{B}_i . Следовательно, задача построения оптимальной конструкции слоистой плиты минимальной удельной массы из заданного набора N материалов при динамическом проникании цилиндрического ударника с конической головной частью сводится к следующему алгоритму.

Рассчитываются значения глубин проникания ударника $L_k^{-i}, i=1, 2, \dots, N$ в однослойные преграды:

$$L_k^{-i} = \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{6}{E_2 k \rho_i} \ln \left(1 + \frac{k \rho_i y_0^{(1)}}{H_i} \right)}, & \text{если } L_k^{-i} \leq h \\ \frac{2}{3} h + \frac{2}{E_2 k \rho_i h^2} \ln \left(1 + \frac{k \rho_i y_0^{(1)}}{H_i} \right), & \text{если } L_k^{-i} > h \end{cases} \quad (17.2.17)$$

Если выполняется условие неполного вхождения головной части ударника в плиту ($L_k^{-i} \leq h$), то задача решается по алгоритму, приведенному в начале настоящего подраздела 17.2.4 (шаги (1) и (2)).

В случае полного вхождения конуса в преграду ($L_k^{-i} > h$) вычисляются значения χ_i , затем \bar{B}_i . После чего выполняются те же самые шаги алгоритма, что и в задаче об ударе конуса, но проверка условий (1) и (2) осуществляется для параметров \bar{B}_i . По окончании проверки условий (1) и (2) будут отобраны те материалы, которые войдут в оптимальную структуру плиты. Конкретные толщины слоев определяются численно.

Глава 18

Некоторые другие постановки задачи оптимизации

Обозначения

a_0, a_2	параметры модели;
A^*	$= (k_v^{-2-} - k_v^{-1-}) / (\rho_2 - \rho_1) < 0$, формула (18.2.10);
A, B	параметры, определяющие линейную зависимость между параметрами двучленной МЛВ;
b	толщина преграды;
$b^{[j]}$	толщина j -го слоя преграды;
B^*	$= (k_v^{-1-} \rho_2 - k_v^{-2-} \rho_1) / (\rho_2 - \rho_1) > 0$, формула (18.2.10);
C_i	постоянные интегрирования, формулы (18.1.6), (18.2.13);
E_0	функция Хевисайда;
E_4	$= 4\pi g \alpha / M > 0$, см. уравнения (18.3.3), (18.3.12);
E_2	$= 4\pi g^2 \alpha / M > 0$, см. уравнения (18.2.11), (18.3.3), (18.3.12);
E_1	$= 2\pi R^2 / M > 0$, см. уравнения (18.1.2);
E_3	$= 4\pi R / M > 0$, см. уравнения (18.1.2);
\bar{f}	правая часть векторного дифференциального уравнения (18.4.8);
G_{\min}	минимальная удельная масса преграды;
G	удельная масса преграды;
H	динамическая твердость материала преграды;
H_d^*	$\approx H_B$, твердость по Бринеллю, формулы (18.2.5), (18.2.6);
H_{\min}, H_{\max}	минимальное и максимальное значения динамической твердости для распределения Ξ ;
H_i	динамическая твердость i -го материала из заданного набора;
h	длина конической головной части ударника;
I	момент инерции клина;
K	момент сил сопротивления прониканию, действующих на клин;
k	$= \sin^2 \alpha$;
k_v	коэффициент влияния скорости проникания, формулы (18.2.2), (18.2.8), (18.2.9);
k_v^{-i-}	коэффициент влияния скорости проникания для материала с характеристиками ρ_i, H_i ;
k_{weak}	коэффициент ослабления, Рис. 18.3.1, формулы (18.3.1), (18.3.2);
k_f, k_r	значения коэффициента ослабления k_{weak} в моменты входа кончика ударника в плиту и его выхода, соответственно, Рис. 18.3.1, формула (18.3.2);
l_C	расстояние от кончика до центра тяжести клина, Рис. 18.4.1;

L	текущая глубина внедрения ударника в преграду;
L_k	конечная глубина внедрения ударника;
L_k^{-i}	глубина проникания в однослойную плиту из материала ρ_i, H_i ;
L_f, L_r	границы областей ослабляющего влияния лицевого и тыльного краевых эффектов, соответственно, Рис. 18.3.1, формула (18.3.2);
M	масса ударника;
P	сила сопротивления прониканию, направленная вдоль оси клина;
q_1	см. формулу (18.3.9);
q_2	см. формулу (18.4.10);
R	радиус цилиндра (или цилиндрической части ударника);
r	уравнение образующей ударника;
t^*	точка экстремума функции Φ ;
t	$= L$, аналог времени (обозначение в терминах ТОУ);
t_*	точка переключения (обозначение в терминах ТОУ);
$v(L)$	текущая (мгновенная) скорость ударника;
$v_{[0]}$	начальная скорость ударника;
w	возмущенное управление;
x	координата, отсчитываемая от лицевой поверхности по толщине слоистой плиты;
\vec{y}	вектор фазовых координат;
$y^{(i)}$	i -я фазовая координата (обозначение в терминах ТОУ);
α	полуугол при вершине ударника конической формы;
γ	$= \gamma(t)$, функция, формула (18.2.14);
Δ_{fr}	$= 2H_2\mu_{fr}L_k^{-2-} / (R + 4\mu_{fr}L_k^{-2-}) > 0$, параметр, определяющий оптимальную структуру плиты при учете трения;
Δ_{visc}	$= \Delta_{visc}(B^*, v_0) > 0$, параметр, определяющий оптимальную структуру плиты при учете вязкости;
$\dot{\epsilon}_m$	средняя скорость деформации материала в окрестности кратера;
$\dot{\epsilon}$	скорость деформации материала;
\hat{H}	функция Гамильтона (гамильтониан) (обозначение в терминах ТОУ);
μ_{fr}	коэффициент трения между поверхностями ударника и преграды в области их контакта;
μ_{visc}	коэффициент вязкости;
ξ	координата, отсчитываемая от кончика ударника;
ρ	плотность материала преграды;
ρ_{\min}, ρ_{\max}	минимальное и максимальное значения плотности для распределения Ω ;
ρ_i	плотность i -го материала из заданного набора;
σ_s	предел текучести материала;
σ	удельное сопротивление прониканию;
τ	удельная сила трения;
Φ_1	функция, не зависящая от оптимального управления;
Φ	функция, формулы (18.1.9), (18.2.17);
$\Phi_{[0]}$	$= \Phi(0)$;
φ^*	функция, задающая связь между параметрами двучленной МЛВ;
φ	угол «денормализации» клина, Рис. 18.4.1;
$\varphi_{[0]}$	угол соударения (угол между осью ударника и нормалью к преграде в начальный момент удара);

χ	коэффициент пропорциональности между B и B^* ;
$\psi^{(i)}$	i -я сопряженная переменная (обозначение в терминах ТОУ);
$\bar{\psi}$	вектор сопряженных переменных;
Ω, Ξ	область допустимых управлений (обозначение в терминах ТОУ);
ω	$= \dot{\varphi}$, угловая скорость поворота клина при его «денормализации»;
ω_L	см. формулу (18.4.5);
МЛВ	модель локального взаимодействия;
ТОУ	теория оптимального управления.

Примечание. В Главе 18 остается справедливым примечание Главы 16. Точка над символом означает дифференцирование по времени. Символ *, используемый в качестве нижнего индекса для некоторой функции, указывает на значение этой функции при $t = t^*$ (точка экстремума функции Φ).

В разделах 18.1-18.3 изучено влияние различных факторов, сопутствующих прониканию, на оптимальную структуру преграды (трение, вязкость, краевые эффекты свободных поверхностей плиты) на основе модифицированной эмпирической зависимости, которая в базовом варианте является двучленной МЛВ (1.4.1).

В разделе 18.4 рассмотрена возможность использования метода игольчатых вариаций в оптимизационной задаче проникания тела под углом в простейшей постановке – косою удар плоского ударника [19].

При изложении частично использован материал, представленный в работах [6, 7, 20-22], в которых также можно найти более детальные обоснования ряда соотношений.

18.1. Учет трения.

18.1.1. Постановка задачи оптимизации.

Рассмотрим задачу оптимизации по критерию минимума удельной массы слоистой плиты при динамическом проникании цилиндрического ударника. Поскольку вопрос об учете трения при высокоскоростном проникании в настоящее время далек от однозначного решения, используем простейшую модель, включив в уравнение движения дополнительное слагаемое, описывающее действие силы трения на боковую поверхность ударника:

$$\frac{1}{2} M \frac{d(v^2)}{dL} = -\pi R^2 [H(L) + \rho(L)v^2(L)] - 2\pi R \int_0^L \tau(x) dx, \quad (18.1.1)$$

где R – радиус цилиндра, τ – удельная сила трения (сила трения на единицу площади контакта). Будем считать (в отличие от [7]), что удельная сила трения пропорциональна удельному сопротивлению прониканию с коэффициентом μ_{fr} согласно (1.3.9).

Следующий вопрос связан с выбором метода решения оптимизационной задачи. В Главе 16 показано, что связь (16.1.8) приводит к линейной зависимости гамильтониана \hat{H} от $\tilde{\rho}$, поэтому в оптимальную структуру входят материалы, лежащие на границах области допустимых управлений Ω , а значит, при ограничениях (16.1.2) можно получить оптимальные слоистые плиты только с материалами ρ_{\min}, H_{\min} и ρ_{\max}, H_{\max} . В таких условиях исходную задачу можно трактовать как задачу с двумя материалами, а решение искать с привлечением метода, основанного на классическом

принципе максимума Понтрягина. Чтобы полученный результат было проще обобщить на произвольное число материалов, будем считать $\rho_1 = \rho_{\min}$, $H_1 = H_{\min}$ и $\rho_2 = \rho_{\max}$, $H_2 = H_{\max}$.

Итак, рассмотрим задачу с двумя материалами ρ_1, H_1 и ρ_2, H_2 с учетом линейного приближения (16.1.8) и ограничений (16.1.2). Ударник начинает движение в плите с начальной скоростью $v_{[0]}$ и останавливается в момент $L_k = b$. Критерием качества является минимальная удельная масса плиты (16.1.3).

Запишем задачу в обозначениях ТОО. Поскольку удельная сила трения τ зависит от плотности ρ , то уравнение движения (18.1.1) содержит в явной форме функционал (16.1.3). Введем (как и в подразделе 16.1.4) дополнительную фазовую координату $y^{(2)}$ и получим систему основных дифференциальных уравнений, описывающих процесс проникания:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy^{(1)}}{dt} &= -E_1 [B + \rho(A + y^{(1)})] - E_3 \mu_{fr} [Bt + (A + y^{(1)})y^{(2)}] \\ \frac{dy^{(2)}}{dt} &= \rho, \end{aligned} \right\} \quad (18.1.2)$$

где $E_1 = 2\pi R^2 / M > 0$, $E_3 = 4\pi R / M > 0$.

18.1.2. Аналитическое решение задачи.

Перейдем к решению поставленной в 18.1.1 задачи с помощью принципа максимума Понтрягина.

Вектор фазовых координат \vec{y} в начальный момент времени закреплен $t=0$: $y^{(1)} = y_{[0]}^{(1)}$, $y^{(2)} = 0$. В конечный момент выполняется равенство $y^{(1)}(t_k) = 0$. Для сопряженной переменной $\psi^{(2)}$ в конечный момент времени имеем:

$$t = t_k : \psi^{(2)} = 0. \quad (18.1.3)$$

Необходимо выполнение условий максимума (16.1.14) и трансверсальности (16.1.15). Гамильтониан системы (18.1.2) принимает вид:

$$\hat{H} = \psi^{(0)} \rho - \psi^{(1)} E_1 (\rho(A + y^{(1)}) + B) - \psi^{(1)} E_3 \mu_{fr} (Bt + (A + y^{(1)})y^{(2)}) + \psi^{(2)} \rho \quad (18.1.4)$$

Дифференциальные уравнения для определения сопряженных переменных имеют следующий вид:

$$\frac{d\psi^{(1)}}{dt} = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial y^{(1)}} = E_1 \psi^{(1)} \rho + E_3 \mu_{fr} \psi^{(1)} y^{(2)}, \quad \frac{d\psi^{(2)}}{dt} = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial y^{(2)}} = E_3 \mu_{fr} (A + y^{(1)}) \psi^{(1)}. \quad (18.1.5)$$

Проинтегрировав систему уравнений (18.1.5), получим:

$$\left. \begin{aligned} \psi^{(1)} &= C_1 \exp \left(\int_0^t (E_1 \rho + E_3 \mu_{fr} y^{(2)}) d\xi \right) \\ \psi^{(2)} &= C_2 + C_1 E_3 \mu_{fr} \int_0^t (A + y^{(1)}) \exp \left(\int_0^{t'} (E_1 \rho + E_3 \mu_{fr} y^{(2)}) d\xi \right) dt' \end{aligned} \right\} \quad (18.1.6)$$

Между постоянными $\psi^{(0)}$, C_1 , C_2 имеет место следующая связь:

$$\left. \begin{aligned} \psi^{(0)} &= C_1 \exp\left(\int_0^{t_k} (E_1 \rho + E_3 \mu_{fr} y^{(2)}) d\xi\right) [E_1 (B + A \tilde{\rho}_k) + E_3 \mu_{fr} (B t_k + A y_k^{(2)})] / \tilde{\rho}_k \\ C_2 &= -C_1 E_3 \mu_{fr} \int_0^{t_k} (A + y^{(1)}) \exp\left(\int_0^{t'} (E_1 \rho + E_3 \mu_{fr} y^{(2)}) d\xi\right) dt' \end{aligned} \right\} (18.1.7)$$

вытекающая из условий (18.1.3) и (16.1.15). В силу ограничения $\psi^{(0)} = const \leq 0$ и с учетом первого равенства (18.1.7) получаем, что $C_1 < 0$, так как случай $C_1 = 0$ невозможен из-за нарушения необходимого условия принципа максимума.

Представим функцию \hat{H} в виде:

$$\hat{H} = \Phi \rho - \psi^{(1)} (E_1 B + E_3 \mu_{fr} (A + y^{(1)}) y^{(2)} + E_3 \mu_{fr} B t), \quad (18.1.8)$$

где

$$\Phi = \psi^{(0)} - E_1 (A + y^{(1)}) \psi^{(1)} + \psi^{(2)}. \quad (18.1.9)$$

Таким образом, в силу условия максимума (16.1.14), соотношения (18.1.8), (18.1.9) сводят исходную задачу оптимизации к исследованию поведения функции Φ на отрезке $[0, t_k]$, а именно, определению ее знака:

$$\tilde{\rho} = \begin{cases} \rho_{\max}, & \text{если } \Phi > 0 \\ \rho_{\min}, & \text{если } \Phi < 0 \end{cases} \quad (18.1.10)$$

Исследуем функцию Φ на наличие экстремумов. Первая производная с учетом системы уравнений (18.1.2) и вторая производная в точке экстремума t^* с учетом неравенства $C_1 < 0$, а следовательно, $\psi^{(1)} < 0$, что следует из (18.1.6), примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} &= \psi^{(1)} (E_3 \mu_{fr} (A + y^{(1)}) + B E_1^2 + E_1 E_3 \mu_{fr} B t) \\ \frac{d^2\Phi}{dt^2} \Big|_{t=t^*} &= -\psi_*^{(1)} E_3 \mu_{fr} (A E_1 \tilde{\rho} + y_*^{(1)} (E_1 \tilde{\rho} + E_3 \mu_{fr} y_*^{(2)})) + \\ &+ E_3 \mu_{fr} \int_0^{t^*} (B + A \tilde{\rho}) d\xi \end{aligned} \right\} > 0 \quad (18.1.11)$$

Из второго соотношения (18.1.11) получаем, что функция Φ может иметь в точке t^* только локальный минимум. Из первого равенства (18.1.11) следует, что при $B = -E_3 \mu_{fr} (A + y_*^{(1)}) / (E_1^2 + E_1 E_3 \mu_{fr} t^*)$ функция Φ достигает своего минимума.

Исследуем поведение функции Φ на концах отрезка $[0, t_k]$. В конечный момент времени с учетом (18.1.3) и первого равенства (18.1.7) получаем:

$$\Phi(t_k) = \psi^{(1)}(t_k) \cdot (B E_1 + E_3 \mu_{fr} B t_k + A E_3 \mu_{fr} y_k^{(2)}) / \tilde{\rho}_k. \quad (18.1.12)$$

Из (18.1.12) с учетом неравенства $\psi^{(1)} < 0$, следует, что $\Phi(t_k) > 0$ при условии $B < -A E_3 \mu_{fr} y_k^{(2)} / (E_1 + E_3 \mu_{fr} t_k)$, и $\Phi(t_k) < 0$ при условии $B > -A E_3 \mu_{fr} y_k^{(2)} / (E_1 + E_3 \mu_{fr} t_k)$. Таким образом, найдены критерии оптимальной структуры с тыльной стороны плиты.

Знак $\Phi_{[0]}$ будем определять при условии существования постоянного оптимального управления $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_k = const$. Используя решение уравнения движения при постоянном управлении и связи (18.1.7), найдем, что:

$$\Phi_{[0]} = \frac{C_1}{\tilde{\rho}_k} B \left\{ E_1 + E_3 \mu_{fr} \int_0^{t_k} \exp(\tilde{\rho}_k (E_1 \xi + E_3 \mu_{fr} \xi^2 / 2)) d\xi \right\}, \quad (18.1.13)$$

а так как выражение в фигурных скобках положительно и $C_1 < 0$, то знак $\Phi_{[0]}$ определяется знаком постоянной B :

$$\text{sgn } \Phi_{[0]} = -\text{sgn } B. \quad (18.1.14)$$

Таким образом, $\Phi_{[0]} > 0$ при условии $B < 0$, и $\Phi_{[0]} < 0$ при условии $B > 0$.

Рассмотрим варианты поведения функции Φ на отрезке $[0, t_k]$ в зависимости от параметра B и получим критерии для оптимальной структуры слоистой плиты.

(1) $B < -AE_3 \mu_{fr} y_k^{(2)} / (E_1 + E_3 \mu_{fr} t_k)$. В этом случае $\Phi_{[0]} > 0$ и $\Phi(t_k) > 0$ и функция Φ может быть как монотонной на всем отрезке, так и иметь минимум в точке $t^* \in [0, t_k]$. Анализ показал, что $\Phi(t^*) > 0$, поэтому поведение Φ исключает существование точки переключения (Рис. 18.1.1а) на сегменте $[0, t_k]$, и оптимальной является однородная тяжелая преграда $\tilde{\rho} = \rho_2$, $\tilde{H} = H_2$. Отсюда также следует, что $y_k^{(2)} = \rho_2 t_k$.

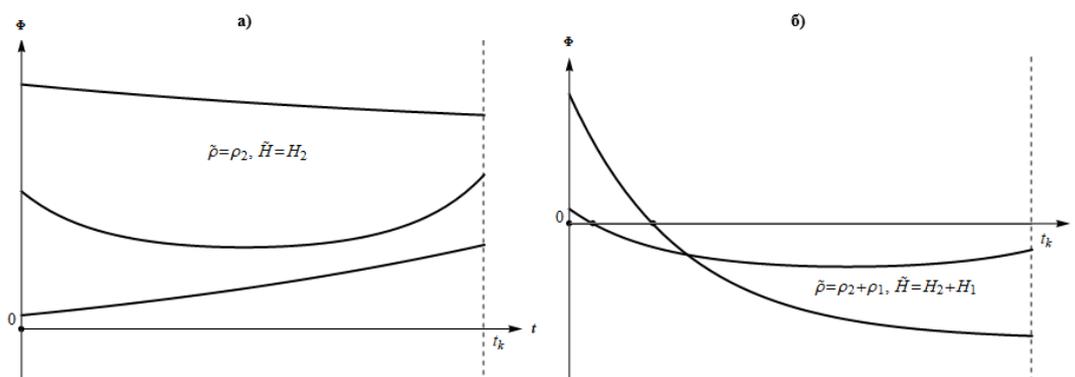


Рис. 18.1.1. Поведение функции Φ в случае (1) – а) и (2) – б)

(2) $-AE_3 \mu_{fr} y_k^{(2)} / (E_1 + E_3 \mu_{fr} t_k) < B < 0$. Для этого случая получены (см. соотношения (18.1.12)-(18.1.14) и пояснения к ним) следующие неравенства $\Phi_{[0]} > 0$ и $\Phi(t_k) < 0$. Функция Φ либо убывает всюду, либо имеет минимум (следует из анализа производной функции Φ). Возможные варианты поведения функции в случае (2) представлены на Рис. 18.1.1б. Таким образом, оптимальная плита состоит из двух слоев – тыльного легкого мягкого и лицевого тяжелого твердого $\tilde{\rho} = \rho_2 + \rho_1$, $\tilde{H} = H_2 + H_1$.

(3) $B > 0$. В этом случае $\Phi_{[0]} < 0$ и $\Phi(t_k) < 0$. В силу первого равенства (18.1.11) функция Φ убывает на всем отрезке $[0, t_k]$. Поведение функции иллюстрирует Рис. 18.1.2а. Оптимальной является однородная легкая преграда $\tilde{\rho} = \rho_1$, $\tilde{H} = H_1$.

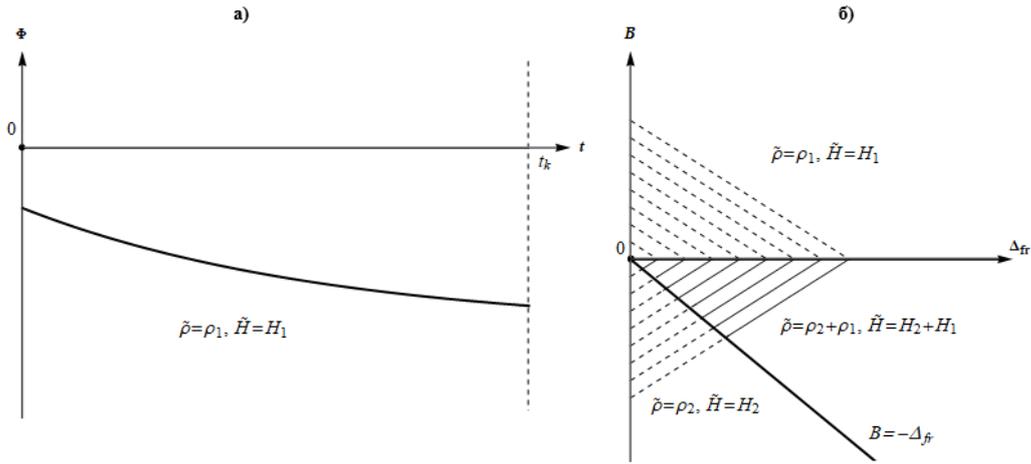


Рис. 18.1.2. Поведение функции Φ в случае (3) – а), и решение оптимизационной задачи в пространстве параметров B и Δ_{fr} – б)

Полученные результаты с учетом соотношения $y_k^{(2)} = \rho_2 t_k$ можно представить в следующем виде:

$$\tilde{\rho} = \begin{cases} \rho_2, & \text{если } B < -\Delta_{fr} \\ \rho_2 + \rho_1, & \text{если } -\Delta_{fr} < B < 0. \\ \rho_1, & \text{если } B > 0 \end{cases} \quad (18.1.15)$$

Отметим, что получен результат, который качественно отличается от решения задачи об ударе цилиндра без учета силы трения (см. подраздел 16.1.3) – оптимальной может являться двухслойная преграда с лицевым тяжелым твердым и тыльным легким мягким слоем $\tilde{\rho} = \rho_2 + \rho_1$, $\tilde{H} = H_2 + H_1$. Область значений параметра B , на которой реализуется оптимальный двухслойный вариант плиты, зависит от величины $\Delta_{fr} = 2H_2\mu_{fr}L_k^{-2-} / (R + 4\mu_{fr}L_k^{-2-})$ (Рис. 18.1.2б). Отсюда можно заключить, что размеры новой области зависят от динамической твердости второго материала H_2 , коэффициента трения μ_{fr} и конечной глубины внедрения ударника L_k^{-2-} (или начальной скорости удара), т.е., в частности, новый качественный результат зависит от количественной оценки коэффициента трения. Также отметим, что величина Δ_{fr} (размер новой области) возрастает по мере уменьшения радиуса цилиндрического ударника, этот результат объясняется тем, что с ростом R площадь основания цилиндра увеличивается пропорционально R^2 , тогда как площадь боковой поверхности цилиндра – пропорционально R . Таким образом, чем меньше радиус цилиндра, тем больше вклад трения (качественный и количественный) на оптимальную структуру плиты.

Учет трения в случае ударного внедрения конического ударника рассмотрен в разделе 18.3.

18.2. Учет вязкости.

18.2.1. Особенности постановки задачи с учетом вязкостных эффектов.

Рассмотрим задачу оптимизации удельной массы слоистой плиты при динамическом проникании конического ударника с учетом эффекта вязкости.

Уравнение движения ударника в преграде можно записать в форме (17.1.3). Удельное сопротивление прониканию σ в Части 6 в разделах, предшествовавших разделу 18.2, представляло собой базовый вариант эмпирической зависимости [10]:

$$\sigma = H + k\rho v^2. \quad (18.2.1)$$

Одним из направлений обобщения этой зависимости является учет вязкости [5]. Модернизированная эмпирическая зависимость (18.2.1) далее используется в виде:

$$\sigma = H + k\rho v^2 + k_v v, \quad (18.2.2)$$

где k_v – коэффициент влияния скорости проникания; трением пренебрегаем.

Как и в разделе 18.1, рассматривается оптимизационная задача с двумя материалами ρ_1, H_1 и ρ_2, H_2 с учетом линейного приближения (16.1.8) и ограничений (16.1.2). Граничными условиями уравнения (17.1.3) являются начальная скорость ударника $v_{[0]}$ и условие непробиваемости преграды $L_k = b$. Оптимизация осуществляется по критерию минимума удельной массы плиты (16.1.3).

Отметим некоторые особенности, возникающие при учете вязкостных эффектов. Вязкость обычно учитывается в физических уравнениях в виде зависимости предела текучести от скорости деформации, поэтому следует учитывать характер данной зависимости, т.е. необходимо найти связь параметров физических уравнений с параметрами оптимизационной задачи – коэффициентом k_v и скоростью ударника v .

Рассмотрим вариант линейной зависимости предела текучести от скорости деформации:

$$\sigma_{s1} = \sigma_{s2} + \mu_{visc}(\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2), \quad (18.2.3)$$

где σ_{s1}, σ_{s2} – пределы текучести при скоростях деформации $\dot{\epsilon}_1$ и $\dot{\epsilon}_2$, соответственно; параметр μ_{visc} будем называть коэффициентом вязкости.

Анализ экспериментальных данных [16] о влиянии скорости деформации на сопротивление металлов деформации позволяет сформулировать следующие свойства.

Свойство 1. Влияние скорости деформации $\dot{\epsilon}$ (коэффициента вязкости) на предел текучести металлов σ_s отличается в различных характерных диапазонах скоростей деформаций.

Свойство 2. В диапазоне квазистатического (динамического) нагружения ($\dot{\epsilon} = 10^2 - 10^3 \text{ c}^{-1}$) влияние меньше, чем при переходе к ударному диапазону ($\dot{\epsilon} = 10^4 - 10^5 \text{ c}^{-1}$).

Свойство 3. При очень высоких скоростях деформирования (более $\dot{\epsilon} = 10^5 \text{ c}^{-1}$) происходит уменьшение влияния, коэффициент вязкости практически постоянен.

Свойство 4. В классе рассматриваемых металлов, например, стали, чем меньше квазистатический предел текучести, тем больше влияние скорости деформации. Поэтому, для броневого (достаточно прочного) алюминиевого сплава коэффициент вязкости меньше, чем для мягкой стали.

Свойство 5. Для сплавов с близкими значениями предела текучести с ростом твердости (удельной массы), коэффициент вязкости уменьшается.

Из соотношения (18.2.3) следует:

$$\mu_{visc} = \frac{\sigma_{s1} - \sigma_{s2}}{\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2}. \quad (18.2.4)$$

Используя данные [16], можно получить оценки, представленные в Табл. 18.1.1.

Таблица 18.1.1. Значения коэффициента вязкости по данным [16]

№	Материал	Коэффициент вязкости, МПа·с
1	Армко-железо	$\mu_{visc} \approx (80-100) \cdot 10^{-4}$
2	Сталь 45	$\mu_{visc} \approx (40-60) \cdot 10^{-4}$
3	Алюминиевый сплав Д16	$\mu_{visc} \approx 200 \cdot 10^{-4}$
4	Сталь 20	$\mu_{visc} \approx 50 \cdot 10^{-4}$

Обратимся к проблеме перехода от коэффициента вязкости μ_{visc} к коэффициенту k_v из соотношения (18.2.2).

Поскольку последнее слагаемое в выражении (18.2.2) по физическому смыслу отражает влияние динамической твердости H , представим динамическую твердость в виде зависимости, аналогичной (18.2.3):

$$H = H_d^* + k_v v, \quad (18.2.5)$$

или в виде:

$$H = H_d^* + \mu_{visc} \dot{\epsilon}, \quad (18.2.6)$$

где $H_d^* \approx H_B$ – твердость по Бринеллю, зависящая от (материала) удельной массы в оптимизационной задаче.

При проникании цилиндрического ударника диаметра $2R$ с конической (оживальной) головной частью справедлива следующая приближенная оценка средней скорости деформации материала в окрестности кратера:

$$\dot{\epsilon}_m \approx \frac{v}{R}. \quad (18.2.7)$$

Сравнивая соотношения (18.2.5), (18.2.6) и (18.2.7), получим связь между коэффициентом вязкости μ_{visc} и коэффициентом k_v :

$$k_v \approx \frac{\mu_{visc}}{R}. \quad (18.2.8)$$

Таким образом, получено соотношение (18.2.8), которое позволяет оценивать значение k_v по заданным механическим и геометрическим характеристикам ударника и плиты.

Для некоторых видов материалов можно предположить рост динамической твердости H с уменьшением k_v , например, при условии свойства 5. Такое допущение будет оправданным, в частности, для класса броневых материалов. Следовательно, при данном допущении и с учетом зависимости (16.1.8) можно предположить линейную зависимость k_v от ρ :

$$k_v(x) = A^* \rho(x) + B^*, \quad (18.2.9)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A^* &= (k_v^{-2-} - k_v^{-1-}) / (\rho_2 - \rho_1) \\ B^* &= (k_v^{-1-} \rho_2 - k_v^{-2-} \rho_1) / (\rho_2 - \rho_1) \end{aligned} \right\}, \quad (18.2.10)$$

где k_v^{-1} и k_v^{-2} – коэффициенты влияния скорости проникания для материалов ρ_1, H_1 и ρ_2, H_2 , соответственно; параметр k_v убывает по мере роста плотности ρ , т.е. $A^* < 0$, $B^* > 0$.

18.2.2. Аналитическое исследование задачи.

Поставленную задачу оптимизации будем решать с помощью принципа максимума Понтрягина. Уравнение движения запишем в виде системы дифференциальных уравнений для фазовых координат (в обозначениях ГОУ):

$$\begin{cases} \frac{dy^{(1)}}{dt} = -E_2 \left(\frac{1}{2} B t^2 + \frac{1}{2} B^* t^2 \sqrt{y^{(1)}} + \left(A + k y^{(1)} + A^* \sqrt{y^{(1)}} \right) y^{(2)} \right), \\ \frac{dy^{(2)}}{dt} = y^{(3)}, \quad \frac{dy^{(3)}}{dt} = \rho(t), \end{cases} \quad (18.2.11)$$

где $E_2 = 4\pi \operatorname{tg}^2 \alpha / M$.

Отметим, что система уравнений (18.2.11) нелинейная в силу наличия квадратного корня $\sqrt{y^{(1)}}$, обусловленного появлением в эмпирическом соотношении (18.2.2) вязкостной составляющей.

Граничные условия для системы уравнений (18.2.11) таковы:

$$\begin{cases} y^{(1)}(0) = v_{[0]}^2, \\ y^{(i)}(0) = 0, \quad i = 2, 3, \\ y^{(i)}(t_k) = 0. \end{cases} \quad (18.2.12)$$

Как и ранее, задается сопряженная система уравнений, которая в квадратурах примет вид:

$$\left. \begin{aligned} \psi^{(1)} &= C_1 \exp(\gamma(t)), \\ \psi^{(2)} &= C_2 + C_1 E_2 \int_0^t \left(A + k y^{(1)} + A^* \sqrt{y^{(1)}} \right) \exp(\gamma(\xi)) d\xi, \\ \psi^{(3)} &= C_3 - C_2 t - C_1 E_2 \int_0^t \int_0^\xi \left(A + k y^{(1)} + A^* \sqrt{y^{(1)}} \right) \exp(\gamma(\zeta)) d\zeta d\xi \end{aligned} \right\}, \quad (18.2.13)$$

$$\gamma(t) = E_2 \left(k \int_0^t y^{(2)} d\xi + \frac{1}{4} B^* \int_0^t \frac{\xi^2}{\sqrt{y^{(1)}}} d\xi + \frac{1}{2} A^* \int_0^t \frac{y^{(2)}}{\sqrt{y^{(1)}}} d\xi \right). \quad (18.2.14)$$

Можно показать сходимость несобственных интегралов при $t = t_k$ в соотношении для $\gamma(t_k)$, проинтегрировав уравнения (18.2.11). Неизвестные константы в (18.2.13) находятся из граничных условий и условия трансверсальности:

$$\psi^{(0)} < 0, \quad \psi^{(i)}(t_k) = 0, \quad i = 2, 3. \quad (18.2.15)$$

$$\hat{H} \Big|_{t=t_k} = \psi^{(0)} \tilde{\rho}_k - E_2 \psi_k^{(1)} \left(\frac{1}{2} B t_k^2 + A y_k^{(2)} \right) = 0. \quad (18.2.16)$$

Функция Гамильтона принимает следующий вид:

$$\hat{H} = \Phi \tilde{\rho} + \Phi_1, \quad \Phi = \psi^{(0)} + \psi^{(3)}, \quad (18.2.17)$$

где остаток Φ_1 – функция, не зависящая от $\tilde{\rho}$.

Таким образом, оптимальное решение, выбираемое по условию (16.1.14), зависит от поведения функции Φ на отрезке $[0, t_k]$, т.е. сводится к условию (16.1.19). Анализ поведения функции Φ приводит к таким предварительным результатам:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d\Phi}{dt} < 0, \\ \Phi(t_k) < 0. \end{array} \right\} \quad (18.2.18)$$

Согласно неравенствам (18.2.18) функция Φ является убывающей с отрицательными значениями на конце отрезка $[0, t_k]$. Это означает, что возможно существование на нем не более одной точки переключения, а с тыльной стороны преграды всегда будет располагаться более легкий материал $\tilde{\rho} = \rho_1$. Таким образом, всего возможны две структуры преграды в качестве оптимальной: двухслойная с лицевым тяжелым твердым и тыльным легким мягким слоем $\tilde{\rho} = \rho_2 + \rho_1$, $\tilde{H} = H_2 + H_1$ или однослойная легкая мягкая $\tilde{\rho} = \rho_1$, $\tilde{H} = H_1$. Чтобы определить, какая именно структура будет оптимальной, необходимо определить знак функции Φ при $t = 0$.

Для дальнейшего анализа потребуется решение системы дифференциальных уравнений (18.2.11). Поскольку удобнее оперировать соотношениями, которые соответствуют решению задачи проникания в однослойную преграду, то в качестве основного выберем условие:

$$\Phi(0) < 0, \quad (18.2.19)$$

которое соответствует оптимальной однослойной преграде. В случае нарушения условия (18.2.19) автоматически получается второй вариант – оптимальная двухслойная преграда.

Отметим, что анализ системы уравнений (18.2.11) представляет определенные трудности, поскольку выразить переменную $y^{(1)}$ в явном виде невозможно. Тем не менее, ее анализ позволяет получить критерий для ключевого условия (18.2.19). Опуская промежуточные выкладки (более подробный анализ можно найти в работе [20]), приведем соотношение для определения знака функции Φ в точке $t = 0$:

$$\text{sgn}(\Phi_{[0]}) = -\text{sgn} \left(\int_0^{t_k} (B + B^* \nu(\xi)) \xi \exp(\gamma(\xi)) d\xi \right). \quad (18.2.20)$$

Знак функции в (18.2.20) зависит от подынтегрального выражения, стоящего в круглых скобках, поэтому в этом выражении находятся основные параметры, влияющие на ключевое условие (18.2.19), и, следовательно, на выбор оптимальной конструкции преграды.

Исходя из анализа поведения функции Φ , можно сделать ряд качественных выводов.

Вывод 1. Если пренебречь вязкостью, положив $B^* = 0$, то получается тот же критерий выбора оптимальной структуры преграды, который был получен в подразделе 16.1.4 в рамках модели (18.2.1). Согласно этому критерию выбор в пользу определенной оптимальной структуры осуществляется на основе анализа знака параметра B .

Вывод 2. Поскольку $B^* \sqrt{y^{(1)}} > 0$, то в случае $B > 0$ условие (18.2.19) выполняется, что соответствует оптимальной однослойной преграде. Заметим, что в подразделе 16.1.4 условие $B > 0$ также соответствовало однослойной преграде в качестве оптимальной.

Вывод 3. Поскольку второе слагаемое в выражении, стоящем под интегралом в круглых скобках в (18.2.20), достигает максимума при $t = 0$, то в случае $B < -B^* \sqrt{y_{[0]}^{(1)}}$ подынтегральное выражение будет меньше нуля и можно однозначно утверждать, что условие (18.2.19) будет нарушаться. Этот вариант соответствует оптимальной двухслойной структуре преграды с лицевым тяжелым твердым и тыльным легким мягким слоем.

Вывод 4. В случае $-B^* \sqrt{y_{[0]}^{(1)}} < B < 0$ возможна как однослойная, так и двухслойная преграда в качестве оптимальной. Граница между областями оптимальных однослойных и двухслойных плит определяется параметром B , который пропорционален коэффициенту B^* , отражающего влияние вязкости. Также этот параметр зависит прямо пропорционально (с коэффициентом пропорциональности B^*) от величины начальной скорости удара $\sqrt{y_{[0]}^{(1)}}$, и, следовательно, от конечной толщины преграды t_k . Таким образом существует такое положительное значение $\Delta_{visc} = \Delta_{visc}(B^*, v_{[0]})$, что при $B < -\Delta_{visc}$ оптимальной является двухслойная преграда с лицевым тяжелым твердым и тыльным легким мягким слоем $\tilde{\rho} = \rho_2 + \rho_1$, $\tilde{H} = H_2 + H_1$, а при $B > -\Delta_{visc}$ оптимальной будет однослойная легкая мягкая плита $\tilde{\rho} = \rho_1$, $\tilde{H} = H_1$. Учитывая условие (18.2.20), можно заключить, что граница, разделяющая области оптимальных решений для однослойных и двухслойных плит, такова:

$$B = -\chi(v_{[0]})B^*, \quad (18.2.21)$$

где χ – коэффициент пропорциональности, зависящий от начальной скорости удара $v_{[0]}$ и определяемый формулой (18.2.20).

Вывод 5. При выводе основных соотношений, в частности (18.2.18) и (18.2.20), не использовалось условие $B^* > 0$, которое задается линейной зависимостью (18.2.9). Это условие используется только при анализе соотношения (18.2.20). Следовательно, полученные выше для класса броневого материалов критерии обобщаются на произвольные металлические сплавы.

Например, рассмотрим задачу с двумя материалами, где более легкий алюминиевый сплав ρ_1, H_1 имеет меньший коэффициент k_v^{-1-} по сравнению с более тяжелой сталью ρ_2, H_2 с коэффициентом k_v^{-2-} . В этом случае в линейную зависимость (18.2.9) входит условие $A^* > 0$, тогда знак параметра B^* зависит от следующего соотношения:

$$B^* = \rho_1 \rho_2 (k_v^{-1-} / \rho_1 - k_v^{-2-} / \rho_2) / (\rho_2 - \rho_1), \quad (18.2.22)$$

откуда следует, что при $k_v^{-1-} / \rho_1 > k_v^{-2-} / \rho_2$, т.е. $B^* > 0$, справедлив тот же качественный результат, что и для класса броневого материалов. Однако в случае $k_v^{-1-} / \rho_1 < k_v^{-2-} / \rho_2$, что приводит к условию $B^* < 0$, возрастает область двухслойных оптимальных плит относительно однослойных (Рис. 18.2.1). В случае большего числа материалов можно заранее исключить из оптимального набора ряд материалов, используя попарное сравнение согласно подходу, изложенному в разделе 17.2.

В качестве общего вывода отметим, что влияние вязкости увеличивает приоритет материалов с более высоким значением коэффициента k_v . В частности, для класса броневого сплавов увеличивается область оптимальных однослойных преград относительно оптимальных двухслойных по сравнению с решением оптимизационной задачи в базовой постановке.

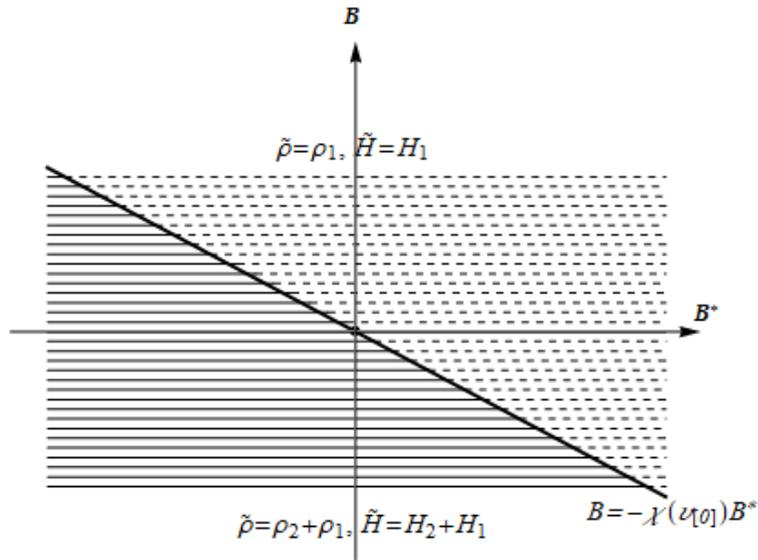


Рис. 18.2.1. Решение оптимизационной задачи в пространстве параметров B и B^*

18.3. Учет краевых ослабляющих эффектов свободных поверхностей плиты.

18.3.1. Описание лицевого и тыльного ослабляющего эффекта.

В исследовании [4] был проведен анализ эмпирического соотношения (18.2.1) и сделан качественный вывод о динамической твердости H как об осредненной характеристике, определяющей силовую сторону взаимодействия ударника и преграды. Динамическая твердость имеет смысл удельной работы вытеснения объема материала пластины при внедрении в ее поверхностные слои и характеризует собственное (статическое) сопротивление преграды. Вследствие слабого влияния скорости деформации на динамическую твердость (для определенных металлов и сплавов) в работе [4] также была сделана попытка определить краевые эффекты свободных поверхностей при статическом внедрении. Были проведены испытания по внедрению проникающего с оживальной головной частью в пластину из сплава АМГ. Проведенные эксперименты подтвердили наличие лицевого и тыльного краевых эффектов свободных поверхностей пластины.

Основываясь на установленном экспериментальном факте, можно заключить, что значение динамической твердости вблизи свободных поверхностей плиты будет существенно отличаться от такового в глубинных слоях. Для учёта этого в эмпирическую модель (18.2.1) вводится коэффициент ослабления k_{weak} :

$$\sigma = k_{weak} H + k \rho v^2. \quad (18.3.1)$$

Коэффициент k_{weak} , используемый для корректировки собственного удельного сопротивления преграды вблизи ее краев, является функцией текущей глубины L . В момент входа кончика ударника в плиту его значение $k_f < 1$; в области ослабляющего влияния лицевого краевого эффекта ($0 < L < L_f$) коэффициент k_{weak} возрастает по мере увеличения L ; в глубинных слоях ($L_f < L < L_r$) выполняется условие $k_{weak} = 1$, и

соотношение (18.3.1) совпадает по форме с базовым (18.2.1); в области ослабляющего влияния тыльного краевого эффекта ($b - L_r < L < b$) коэффициент k_{weak} убывает и достигает значения $k_r < 1$ в момент выхода кончика ударника на тыльную поверхность плиты (Рис. 18.3.1).

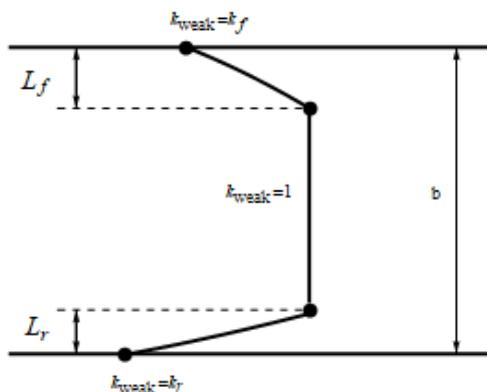


Рис. 18.3.1. Зависимость коэффициента k_{weak} от глубины внедрения

Более детальное изучение краевых эффектов свободных поверхностей пластины при *статическом* проникании было проведено в работе [8]. В этом исследовании предложены аппроксимирующие зависимости для оценки силы сопротивления пластины статическому прониканию. Тем не менее проблема связи результатов статических испытаний с динамическими задачами остается нерешенной. Таким образом, в рамках динамической оптимизационной задачи возможен только анализ качественного влияния краевых эффектов свободных поверхностей на оптимальную структуру слоистой плиты.

Коэффициент k_{weak} оценивается в первом приближении линейной зависимостью [8]:

$$k_{weak}(L) = \begin{cases} \frac{1-k_f}{L_f} \cdot L + k_f, & \text{если } 0 < L \leq L_f \\ 1, & \text{если } L_f < L \leq b - L_r \\ \frac{k_r - 1}{L_r} \cdot (L - b) + k_r, & \text{если } b - L_r < L \leq b \end{cases} \quad (18.3.2)$$

Испытаниям подвергались преграды значительной толщины [8], так что тыльный краевой эффект, действуя в границах $b - L_r < L < b$, не оказывает своего влияния в области $0 < L < L_f$, то есть области ослабляющего влияния лицевой и тыльной свободной поверхности не «перекрывались» ($L_f + L_r < b$). Проникание в пластины малой толщины также сопровождается ослабляющим влиянием свободных поверхностей, однако в этом случае процесс не описывается моделью (18.3.1), поскольку вязкое образование кратера не является основным механизмом разрушения тонких преград. С другой стороны, в случае толстых (полубесконечных) преград ослабляющее влияние свободных поверхностей пластины незначительно и его влиянием можно пренебречь.

В разделе 18.3 представлен анализ влияния краевых эффектов свободных поверхностей плиты на оптимальную слоистую систему, базирующийся на исследовании [6].

18.3.2. Аналитическое исследование задачи.

Рассмотрим процесс ударного внедрения конического тела в слоистую преграду с учетом влияния краевых эффектов свободных поверхностей и трения на сопротивление прониканию.

Решение будем искать с помощью метода игольчатых вариаций.

Уравнение движения ударника в преграде примет вид:

$$\frac{d(v^2)}{dL} = -E_2 \int_0^L (L-x)[k_{weak}(x)H(x) + k\rho(x)v^2(L)]dx - E_4 \int_0^L (L-x)\tau(x)dx, \quad (18.3.3)$$

где $E_2 = 4\pi \operatorname{tg}^2 \alpha / M$, $E_4 = 4\pi \operatorname{tg} \alpha / M$.

Как и ранее, в постановку задачи входят граничные условия – начальная скорость удара $v_{[0]}$ и условие непробиваемости плиты $L_k = b$. Уравнение (18.3.3) с помощью новых переменных запишем в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy^{(1)}}{dL} &= -E_2 (y^{(2)} + ky^{(1)}y^{(4)}) - E_4 y^{(6)}, \\ \frac{dy^{(2)}}{dL} &= y^{(3)}, \quad \frac{dy^{(3)}}{dL} = k_{weak} H, \\ \frac{dy^{(4)}}{dL} &= y^{(5)}, \quad \frac{dy^{(5)}}{dL} = \rho, \\ \frac{dy^{(6)}}{dL} &= y^{(7)}, \quad \frac{dy^{(7)}}{dL} = \tau, \end{aligned} \right\} \quad (18.3.4)$$

$$y^{(1)}(0) = v_{[0]}^2, \quad y^{(i)}(0) = 0 \quad i = 2, 3, \dots, 7. \quad (18.3.5)$$

Сопряженная система уравнений имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\psi^{(1)}}{dL} &= E_2 ky^{(4)}\psi^{(1)}, \quad \frac{d\psi^{(2)}}{dL} = E_2 \psi^{(1)}, \quad \frac{d\psi^{(3)}}{dL} = -\psi^{(2)}, \\ \frac{d\psi^{(4)}}{dL} &= E_2 ky^{(1)}\psi^{(1)}, \quad \frac{d\psi^{(5)}}{dL} = -\psi^{(4)}, \quad \frac{d\psi^{(6)}}{dL} = E_4 \psi^{(1)}, \\ \frac{d\psi^{(7)}}{dL} &= -\psi^{(6)} \end{aligned} \right\} \quad (18.3.6)$$

$$\psi^{(1)}(b) = 1, \quad \psi^{(i)}(b) = 0, \quad i = 2, 3, \dots, 7. \quad (18.3.7)$$

Аналогично подходу, изложенному в разделе 17, задается возмущенное управление w на множестве малой меры (17.1.15), далее, варьируются уравнения системы (18.3.4), и определяются главные части приращений ключевых функционалов. В итоге, согласно принципу максимума, оптимизационная задача сводится к поиску максимума функции Гамильтона по параметру w (17.1.28), где w выбирается из заданного набора материалов. Гамильтониан системы (18.3.4) запишется в виде:

$$\hat{H}(\vec{y}, \vec{\psi}, w) = -\left(1 + q_1 \psi^{(5)}\right) \rho(w) - q_1 \psi^{(3)} k_{weak} H(w) - q_1 \psi^{(7)} \tau(w) + \Phi_1(\vec{y}, \vec{\psi}), \quad (18.3.8)$$

$$q_1 = \frac{\rho(b)}{E_2 y^{(2)}(b) + E_4 y^{(6)}(b)}. \quad (18.3.9)$$

Анализируя коэффициенты при ρ , H и τ в выражении (18.3.8), можно сформулировать свойства оптимальной структуры слоистой плиты. Рассмотрим по отдельности каждый из случаев – учет трения и учет краевых эффектов свободных поверхностей.

При учете трения гамильтониан (18.3.8) принимает вид:

$$\hat{H}(\bar{y}, \bar{\psi}, w) = -(1 + q_1 \psi^{(5)}) \rho(w) - q_1 \psi^{(3)} H(w) - q_1 \psi^{(7)} \tau(w) + \Phi_1(\bar{y}, \bar{\psi}). \quad (18.3.10)$$

Функции $\psi^{(3)}$, $\psi^{(5)}$ и $\psi^{(7)}$ являются отрицательными и монотонно возрастающими. Следовательно, коэффициенты при H и τ положительны и монотонно убывают, коэффициент при ρ убывает, достигая на правом конце значения -1. Это означает, в предположении, что материал с большим значением H имеет и большее значение τ , что в оптимальной слоистой плите материалы могут располагаться лишь по мере убывания плотности в направлении от лицевой поверхности к тыльной, причем в окрестности тыльной поверхности располагается материал с минимальной плотностью. Отметим, что для получения этого результата не привлекалась конкретная зависимость для удельной силы трения, а использовалось лишь предположение о росте τ с увеличением H , что включает в себя и более общие виды связей τ и H . С целью поиска условий выбора оптимальной структуры слоистой плиты с применением классического принципа максимума Понтрягина, аналогично подходу из раздела 18.1, также была решена задача об ударном внедрении конуса с учетом трения по закону (1.3.9). Полученные условия выбора оптимальной конструкции плиты совпали с результатами решения задачи об ударе конуса в базовой постановке из подраздела 16.1.4. Таким образом, учет трения для конуса не приводит к качественно новым результатам по сравнению с базовой постановкой задачи.

При учете фактора ослабляющего влияния свободных поверхностей преграды на сопротивление прониканию, гамильтониан приводится к следующему виду:

$$\hat{H}(\bar{y}, \bar{\psi}, w) = -(1 + q_1 \psi^{(5)}) \rho(w) - q_1 \psi^{(3)} k_{weak} H(w) + \Phi_1(\bar{y}, \bar{\psi}). \quad (18.3.11)$$

Коэффициенты при H и ρ ведут себя подобно тому, как в разобранный выше случае учета трения, на промежутке $[L_f, L_k]$; следовательно, с тыльной стороны плиты на толщине $[L_f, L_k]$ справедлив тот же качественный результат – материалы располагаются в порядке убывания плотности. Так как функция $q_1 \psi^{(3)}$ отрицательна и монотонно возрастает, а k_{weak} положительна и монотонно возрастает в области влияния лицевого краевого эффекта, то учет эффекта ослабления приводит к тому, что с лицевой стороны поверхности оптимальной преграды (в области $[0, L_f]$) материалы могут расположиться в порядке возрастания – это качественно новый результат. Стоит также отметить, что для получения этого результата не использовалось линейное приближение (18.3.2), использовалась более общая зависимость k_{weak} от L , характер которой проиллюстрирован на Рис. 18.3.1. Варианты конструкций оптимальной слоистой плиты для задачи с двумя материалами ρ_1, H_1 и ρ_2, H_2 с учетом краевых эффектов представлены на Рис. 18.3.2.

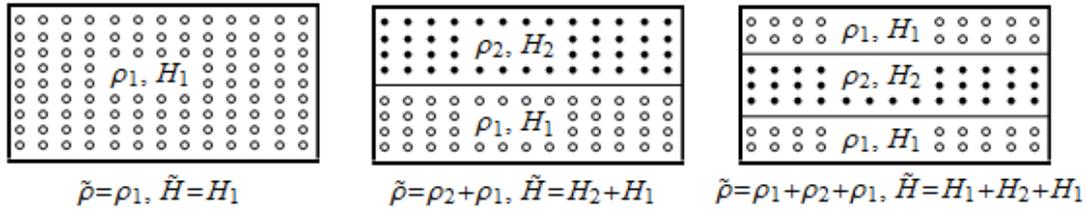


Рис. 18.3.2. Три варианта оптимальных конструкций слоистой плиты для задачи с двумя материалами с учетом краевых эффектов свободных поверхностей

18.3.3. Численный пример.

В качестве численного примера рассмотрим динамическое внедрение в слоистую преграду цилиндрического ударника с конической головной частью высотой h . Приведем постановку задачи в общем виде – удельная сила сопротивления вычисляется по уточненной эмпирической зависимости (18.3.1), в соотношении для силы сопротивления учтено трение. Подчеркнем, что сила трения учитывается через кулоновскую зависимость, а коэффициент ослабления по формулам (18.3.2). Уравнение движения ударника при этом будет иметь вид:

$$\frac{d(v^2)}{dL} = \begin{cases} -E_2 \int_0^L (L-x)[k_{weak}(x)H(x) + k\rho(x)v^2(L)]dx - \\ -E_4 \int_0^L (L-x)\tau(x)dx, & \text{если } L \leq h \\ -E_2 \int_{L-h}^L (L-x)[k_{weak}(x)H(x) + k\rho(x)v^2(L)]dx - \\ -E_4 \int_{L-h}^L (L-x)\tau(x)dx, & \text{если } L > h \end{cases} \quad (18.3.12)$$

Введя новые переменные в соответствии с подходом, аналогичным таковому из раздела 17.2, запишем уравнение (18.3.12) в виде системы дифференциальных уравнений, где E_0 – функция Хевисайда:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy^{(1)}}{dL} &= -E_2(y^{(2)} + ky^{(1)}y^{(4)}) - E_4y^{(6)}, \\ \frac{dy^{(2)}}{dL} &= y^{(3)} - hk_{weak}(L-h)H(L-h)E_0(L-h), \\ \frac{dy^{(3)}}{dL} &= k_{weak}(L)H(L) - k_{weak}(L-h)H(L-h)E_0(L-h), \\ \frac{dy^{(4)}}{dL} &= y^{(5)} - h\rho(L-h)E_0(L-h), & \frac{dy^{(5)}}{dL} &= \rho(L) - \rho(L-h)E_0(L-h), \\ \frac{dy^{(6)}}{dL} &= y^{(7)} - h\tau(L-h)E_0(L-h), & \frac{dy^{(7)}}{dL} &= \tau(L) - \tau(L-h)E_0(L-h) \end{aligned} \right\} \quad (18.3.13)$$

$$y^{(1)}(0) = v_{[0]}^2, \quad y^{(j)}(0) = 0, \quad j = 2, 3, \dots, 7. \quad (18.3.14)$$

Данную систему уравнений можно записать в векторной форме аналогичной (17.2.5). Далее вводятся сопряженные переменные и составляется сопряженная система уравнений. Функция Гамильтона примет различный вид на отрезках $[0, b-h]$ и $[b-h, b]$:

$$\left. \begin{aligned} \hat{H}(\bar{y}, \bar{\psi}, w) &= -\rho(w) - q_1 \left\{ \left[\psi^{(5)}(x) - h\psi^{(4)}(x+h) - \psi^{(5)}(x+h) \right] \cdot \rho(w) + \right. \\ &+ \left[\psi^{(3)}(x) - h\psi^{(2)}(x+h) - \psi^{(3)}(x+h) \right] \cdot k_{weak} H(w) + \\ &+ \left. \left[\psi^{(7)}(x) - h\psi^{(6)}(x+h) - \psi^{(7)}(x+h) \right] \cdot \tau(w) \right\} + \Phi_1(\bar{y}, \bar{\psi}), \text{ если } x \in [0, b-h] \\ \hat{H}(\bar{y}, \bar{\psi}, w) &= -\rho(w) - q_1 \left[\psi^{(3)}(x) \cdot H(w) + \psi^{(5)}(x) \cdot \rho(w) + \right. \\ &+ \left. \psi^{(7)}(x) \cdot \tau(w) \right] + \Phi_1(\bar{y}, \bar{\psi}), \text{ если } x \in [b-h, b] \end{aligned} \right\} \quad (18.3.15)$$

Численный алгоритм решения оптимизационной задачи описан в подразделе 17.1.4. В качестве примера рассмотрен цилиндрический ударник с конической головной частью высотой $1,6 \cdot 10^{-2}$ м при угле полураствора конуса 15^0 , начальной скоростью 500 м/с и массой 0,02 кг. Численные расчеты подтвердили, что учет ослабляющего краевого эффекта может привести к качественно новому результату. При данных $k_f = k_r = 0,5$ и $L_f = L_r = 1,5$ см и двух исходных материалах $H_2 = 13200$ кг/см², $\rho_2 = 7,95$ г/см³, $H_1 = 4500$ кг/см², $\rho_1 = 2,8$ г/см³ в задаче об ударе цилиндрического ударника с конической головкой оптимальной является трехслойная преграда вида $\tilde{\rho} = \rho_1 + \rho_2 + \rho_1$, $\tilde{H} = H_1 + H_2 + H_1$. Относительная толщина составляет соответственно (%) 16,85 : 54,20 : 28,95. В задаче о трех материалах при исходных данных $k_f = k_r = 0,1$, $L_f = L_r = 1,0$ см, $H_3 = 13200$ кг/см², $\rho_3 = 7,95$ г/см³, $H_2 = 6500$ кг/см², $\rho_2 = 4,59$ г/см³, $H_1 = 2500$ кг/см², $\rho_1 = 2,8$ г/см³ оптимальная плита синтезируется из пяти слоев $\tilde{\rho} = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_2 + \rho_1$, $\tilde{H} = H_1 + H_2 + H_3 + H_2 + H_1$ при процентном соотношении их относительной толщины 5,70 : 0,62 : 65,67 : 0,44 : 27,57.

18.4. Оптимальное торможение клина при проникании под углом.

Угол встречи ударника и плиты – еще один фактор, который может оказывать существенное влияние на характер ударно-проникающего взаимодействия двух тел. Проникание под углом приводит к силовой асимметрии, что может вызвать «денормализацию» (увеличение текущего угла φ между осью ударника и нормалью к преграде по отношению к начальному углу $\varphi_{[0]}$ при ударе) ударника или рикошет.

В разделе 18.4 рассмотрена простейшая постановка оптимизационной задачи при наклонном ударе треугольного клина. Угол соударения таков, что осуществляется пробитие преграды без рикошета. Требуется из заданного набора материалов сконструировать слоистую плиту минимальной удельной массы.

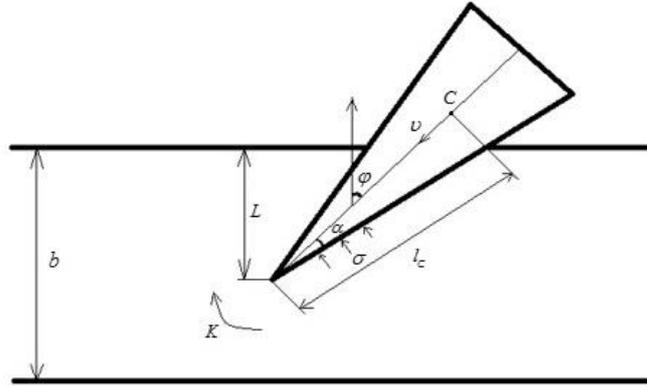


Рис. 18.4.1. Схема внедрения клина в преграду под углом φ

Для описания процесса динамического проникания используется эмпирическая зависимость (18.2.1). Движение клина в преграде описывается двумя уравнениями – уравнением поступательного движения вдоль оси клина и уравнением поворота относительно центра масс C :

$$M\dot{v} = -P, \quad I\ddot{\varphi} = K, \quad (18.4.1)$$

где M – масса клина, v, φ – текущие скорость и угол «денормализации» клина при внедрении, $\omega = \dot{\varphi}$ – угловая скорость поворота клина при его «денормализации», P – сила сопротивления прониканию, направленная вдоль оси клина, I и K – момент инерции и момент сил относительно прямой, перпендикулярной плоскости движения и проходящей через центр тяжести клина (Рис. 18.4.1).

Вычисляя проекции силы сопротивления прониканию и момента сил на боковую поверхность клина, получим следующие выражения для определения величин P и K :

$$P = \frac{2 \sin 2\alpha \cdot \cos \varphi}{\cos^2 \varphi - \sin^2 \alpha} \cdot \int_0^L \sigma(x) dx, \quad (18.4.2)$$

$$K = \frac{2l_c \cdot \sin \varphi \cdot \sin \alpha}{\cos^2 \varphi - \sin^2 \alpha} \cdot \int_0^L \sigma(x) dx - \frac{2 \sin 2\varphi \cdot \sin \alpha}{(\cos^2 \varphi - \sin^2 \alpha)^2} \cdot \int_0^L (L-x)\sigma(x) dx, \quad (18.4.3)$$

где l_c – расстояние от кончика до центра тяжести клина.

Используя полученные выше соотношения, можно решить прямую задачу проникания клина в преграду под углом. Полученные результаты подтвердили эффект разворачивания ударника при наклонном проникании в плиту.

Для применения метода игольчатых вариаций задача формулируется в терминах ТОУ. Вводятся дополнительные фазовые координаты:

$$\left. \begin{aligned} y^{(1)} &= v^2, & y^{(2)} &= \varphi, & y^{(3)} &= \omega_L, \\ y^{(4)} &= \int_0^L (L-x)H(x)dx, & y^{(5)} &= \int_0^L H(x)dx, \\ y^{(6)} &= \int_0^L (L-x)\rho(x)dx, & y^{(7)} &= \int_0^L \rho(x)dx, \end{aligned} \right\} \quad (18.4.4)$$

где

$$\omega_L = \frac{d\varphi}{dL}. \quad (18.4.5)$$

С учетом соотношений:

$$\dot{v} = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dL} \cdot \cos \varphi, \quad (18.4.6)$$

$$\dot{\omega} = \frac{d^2\varphi}{dL^2} \cdot v^2 \cos^2 \varphi + \frac{d\varphi}{dL} \frac{dv}{dL} \cdot v \cos^2 \varphi - \left(\frac{d\varphi}{dL} \right)^2 \sin \varphi \cdot v^2 \cos \varphi, \quad (18.4.7)$$

уравнения поступательного движения и поворота с помощью новых переменных $y^{(i)}$; $i=1,2,\dots,7$ записываются в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений с управлением. Полагая вектор \vec{f} правой частью этой системы, представим управляемую систему в векторной форме:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\vec{y}}{dL} &= \vec{f}(\vec{y}, u), \quad L \geq 0, \\ y^{(1)}(0) &= v_{[0]}^2, \quad y^{(2)}(0) = \varphi_{[0]}, \quad y^{(j)}(0) = 0, \quad j = 3, 4, \dots, 7 \end{aligned} \right\} \quad (18.4.8)$$

Ключевые функционалы имеют вид (17.1.11) и (17.1.12); также аналогично подходу, изложенному в Главе 17, строится сопряженная система уравнений и формулируется условие максимума. Функция Гамильтона примет вид:

$$\hat{H}(\vec{y}, \vec{\psi}, w) = -\left(1 + q_2 \psi^{(7)}\right) \rho(w) - q_2 \psi^{(5)} H(w) + \Phi_1(\vec{y}, \vec{\psi}), \quad (18.4.9)$$

$$q_2 = \frac{M \cdot (\cos^2 y^{(2)}(b) - \sin^2 \alpha)}{2 \sin 2\alpha \cdot y^{(5)}(b)} \rho(b). \quad (18.4.10)$$

Заметим, что применительно к задаче в данной постановке справедлив тот же качественный результат – распределение слоев по толщине оптимальной плиты в порядке убывания плотности.

Для решения поставленной задачи использовался численный подход как в подразделе 17.1.4. В приведенном ниже примере были использованы следующие значения механических характеристик материалов: сталь $H_1 = 13200$ кг/см², $\rho_1 = 7,8$ г/см³; титановый сплав $H_2 = 6500$ кг/см², $\rho_2 = 4,5$ г/см³; алюминиевый сплав $H_3 = 4500$ кг/см², $\rho_3 = 2,8$ г/см³. Клинь имеет характеристики: $M = 20$ г, $\alpha = 15^\circ$, $v_{[0]} = 500$ м/с, $l_c = 10$ см.

Оптимальная структура плиты синтезировалась из двух заданных материалов. Кривая 1 соответствует оптимальной двухслойной преграде вида сталь + алюминиевый сплав; кривая 2 – преграде вида сталь + титановый сплав; кривая 3 – титановый сплав + алюминиевый сплав. Приведенные результаты показывают, что величина $b^{[1]}/b$ остается приблизительно постоянной в зависимости от начального угла внедрения, однако общая толщина преграды b уменьшается с увеличением угла соударения $\varphi_{[0]}$ (Рис. 18.4.2). Это доказывает существование эффекта «денормализации», который все же не оказывает значительного влияния на относительное соотношение толщин слоев преграды оптимальной конструкции.

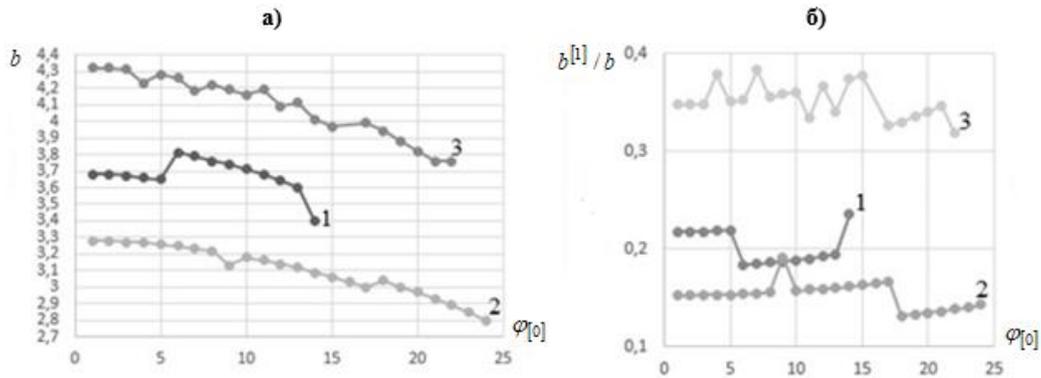


Рис. 18.4.2. Зависимость конечной глубины (см) – а), и относительной толщины лицевого слоя плиты оптимальной конструкции – б), от угла соударения (град.)

Представленные результаты численного анализа оптимизационной задачи о проникании клина в преграду под углом свидетельствуют о потенциале и эффективности метода игольчатых вариаций в вопросах исследования защитных свойств слоистых систем.

18.5. Выводы и заключительные замечания.

Приведем сводку основных результатов, полученных в Части 6.

Прежде всего отметим, что ключевые характеристики оптимальной структуры плиты определяются параметром B . В конце раздела 16.1 был раскрыт физический смысл этого параметра и введено понятие качества материала. Для базовых постановок задач ключевые условия зависят от знака параметра B , однако учет дополнительных условий проникания показал, что новые факторы проникания могут увеличивать приоритет материалов с меньшим качеством и наоборот, причем в оптимальную конструкцию могут входить материалы с различным качеством.

Таблица 18.5.1. Связь оптимальной структуры пластины с условиями проникания

№	Форма ударника	Цилиндрический ударник (A)	Конический ударник (B)	Цилиндр с конической головкой (C)
1	Базовый вариант	2, 1	2+1, 1	2+1, 1
2	Учет трения, $\mu_{fr} \neq 0$	2, 2+1, 1	2+1, 1	-
3	Учет краевых эффектов, $k_{weak} \neq 1$	1+2+1, 2+1, 1	1+2+1, 2+1, 1	-
4	Учет вязкости, $k_v \neq 0$	-	2+1, 1	-
5	Кусочно-линейная связь $H = \varphi^*(\rho)$	3, 2, 1	3+2+1, 3+1, 2+1, 1	3+2+1, 3+1, 2+1, 1
6	Степенная связь $H = \varphi^*(\rho)$	2, 2+...+1, 1	-	-
7	Дискретный набор Ω	$n, n-1, \dots, 2, 1$	$n+...+1, \dots, 2+1$	$n+...+1, \dots, 2+1$

В Части 6 были рассмотрены разнообразные постановки задачи оптимизации по критерию минимума удельной массы с учетом различных факторов проникания. Полученные результаты систематизированы в Табл. 18.5.1. В таблице приняты следующие обозначения: двухслойная преграда с лицевым тяжелым твердым и

тыльным легким мягким слоем – «2+1» (вместо записи $\tilde{\rho} = \rho_2 + \rho_1$, $\tilde{H} = H_2 + H_1$), однослойная легкая мягкая – «1» (вместо $\tilde{\rho} = \rho_1$, $\tilde{H} = H_1$), однослойная твердая тяжелая – «2» (вместо $\tilde{\rho} = \rho_2$, $\tilde{H} = H_2$). В случае кусочно-линейной зависимости возможно появление трехслойных «3+2+1» или n -слойных « $n+\dots+1$ » преград, причем обратная нумерация говорит о расположении слоев в преграде в порядке убывания плотности по толщине. В случае степенной зависимости запись «2+...+1» означает непрерывное распределение механических свойств по толщине пластины. Если в ячейке таблицы стоит прочерк, значит, аналитическое решение не получено. Для ссылки на соответствующую ячейку в таблице используется следующая нотация: столбцы именуется латинскими прописными буквами А, В, С, строки – последовательно нумеруются 1-7. Пример ссылки на результат задачи оптимизации с учетом вязкости для конического ударника – В4. Остальные пояснения даны ниже.

Первые исследования, связанные с базовым вариантом эмпирической зависимости, представлены в подразделах 16.1.3-16.1.5. В случае проникания цилиндра получается тривиальный результат (А1), зависящий от качества граничных материалов ρ_1, H_1 и ρ_2, H_2 , для конического ударника оптимальной может являться двухслойная плита (В1), а в случае цилиндрического ударника с конической головкой появляется зависимость параметра B от скорости удара и высоты головной части h (С1). Причем в варианте С1 увеличивается область оптимальных двухслойных плит по сравнению с однослойными (Рис. 16.1.4).

Наиболее простые постановки оптимизационной задачи получаются в случае проникания цилиндра. Цилиндрический ударник с конической головной частью имеет более сложную форму, что приводит к более сложным уравнениям описания процесса, поэтому для данной формы ударника аналитические результаты получены только для базового варианта эмпирической зависимости. Это замечание касается только аналитических результатов, в рамках численного анализа для вариантов столбца С получены те же оптимальные структуры плит, что и для вариантов столбца В.

Влияние трения исследовалось в разделах 18.1 и 18.3. В случае конического ударника качественно нового результата не получено (В2), а в случае цилиндра помимо тривиальных результатов появляется область оптимальных двухслойных преград (А2), граница которой зависит от скорости v , коэффициента трения μ_{fr} , радиуса цилиндра R , динамической твердости H (18.1.15).

Анализ ослабляющего влияния свободных поверхностей преграды на оптимальное решение для варианта В3 представлен в разделе 18.3. Вывод результатов варианта А3 в настоящей монографии не представлен. Заметим, что это единственное решение, в котором может быть нарушена последовательность слоев по убыванию плотности ρ , что приводит к оптимальной трехслойной структуре преграды при линейной связи $H = \varphi^*(\rho)$ (Рис. 18.3.2).

Влияние вязкости изучено в разделе 18.2 (В4). Установлено, что влияние вязкости увеличивает приоритет материалов с более высоким коэффициентом вязкости k_v , что, в зависимости от его значения, приводит к увеличению области оптимальности однослойных пластин по сравнению с двухслойными, или наоборот (Рис. 18.2.1).

Поиск критериев оптимальной структуры пластины минимальной удельной массы с нелинейной связью $H = \varphi^*(\rho)$ проведен в разделе 16.2, а результат обобщен на случай n материалов в разделе 17.2. При ударном проникании цилиндрического тела, в случае кусочно-линейной связи $H = \varphi^*(\rho)$ оптимальная плита – однослойная (А5), соответствующие значения характеристик материалов лежат на стыках линейных связей типа (16.2.7)-(16.2.10), решение задачи приведено в пункте 16.2.2. В подразделе 16.2.3 рассмотрена степенная зависимость, которая может привести к непрерывному

распределению механических свойств по толщине плиты (А6). Также в подразделе 17.2.3 рассмотрена кусочно-линейная связь для цилиндрического ударника с конической головной частью (В5, С5). Поскольку материалы, входящие в оптимальную структуру преграды лежат на стыках соответствующих линейных зависимостей (17.2.10)-(17.2.11), то логично задать дискретный набор Ω и использовать при решении метод игольчатых вариаций. Таким способом, результат решения задач (В5, С5) был обобщен на случай n материалов в подразделе 17.2.4 (В7, С7). В этом случае возможны n -слоиные структуры преград в качестве оптимальных. Таким же образом обобщается на случай n материалов результат задачи о трех материалах для цилиндра, однако решение будет тривиальным – однослойные пластины (А7).

Использование кусочно-линейной связи в случае цилиндрического ударника с конической головкой приводит к появлению масштабного эффекта (С5, С7). В зависимости от соотношения конечной глубины внедрения и высоты конуса меняется оптимальная структура преграды.

Табл. 18.5.1 позволяет сделать следующие выводы. Во-первых, различные условия проникания могут качественно влиять на оптимальную структуру плиты. Во-вторых, обращает на себя внимание общее свойство оптимальных неоднородных структур преграды: распределение механических характеристик в порядке убывания плотности по толщине пластины. Краевой ослабляющий эффект свободных поверхностей – единственный фактор, который нарушает это правило, однако его влияние на оптимальную конструкцию сказывается только вблизи лицевой поверхности преграды (в области ослабляющего влияния лицевого краевого эффекта), начиная с глубинных слоев действует то же правило убывания плотности по толщине плиты.

Литература к Части 6

1. Аптуков В.Н., Петрухин Г.И., Поздеев А.А. Оптимальное торможение твердого тела неоднородной пластиной при ударе по нормали // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1985. № 1. С. 165-170.
2. Аптуков В.Н. Оптимальная структура неоднородной пластины с непрерывным распределением свойств по толщине // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1985. № 3. С. 149-152.
3. Аптуков В.Н., Белоусов В.Л., Каниболотский М.А. Оптимизация структуры слоистой плиты при проникании жесткого ударника // Механика композитных материалов. 1986. № 2. С. 252-257.
4. Аптуков В.Н., Гладковский В.А., Лесниченко Ю.Ю. Взаимодействие ударника с преградой конечной толщины // Упругое и вязкоупругое поведение материалов и конструкций. Свердловск: УНЦ АН СССР. 1981. С. 68-73.
5. Аптуков В.Н. Проникание: механические аспекты и математическое моделирование (обзор) // Проблемы прочности. 1990. №2. С. 60-68.
6. Аптуков В.Н., Хасанов А.Р. Оптимизация параметров слоистых плит при динамическом проникании жесткого индентора с учетом трения и ослабляющего эффекта свободных поверхностей // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2014. № 2. С. 48-75.
7. Аптуков В.Н., Хасанов А.Р. Оптимальное торможение жесткого цилиндра неоднородной преградой при ударе по нормали с учетом трения // Вестник ПГУ. Математика. Механика. Информатика. Сборник научных трудов. 2011. Вып. 3 (7). С. 19-28.

8. Аптуков В. Н., Хасанов А. Р., Мерзляков А. Ф. Аналитико-экспериментальное определение удельного сопротивления прониканию, описание лицевого и тыльного ослабляющего эффекта // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2019. Т.21 (в печати).
9. Бельский Е.И., Дмитриевич А.М., Ложечников Е.Б. Новые материалы в технике. Минск: Беларусь, 1971. - 271 с.
10. Витман Ф.Ф., Степанов В.А. Влияние скорости деформации на сопротивление деформированию металлов при скоростях удара 102–103 м/с // Некоторые проблемы прочности твердого тела. М.: Изд. АН СССР, 1959. С. 208-221.
11. Витман Ф.Ф., Иоффе Б.С. Простой метод нахождения динамической твердости металлов с помощью двухстороннего конуса // Заводская лаборатория. 1948. Т. XIV. № 6. С. 727-732.
12. Каниболотский М.А. Оптимизация слоистых конструкций из дискретного набора материалов (препринт) // Якутск: ЯФ СО АН СССР. 1983. - 24 с.
13. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкредидзе Р.В. и др. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976. - 392 с.
14. Сагомоян А.Я. Пробивание плиты тонким твердым снарядом // Вестник МГУ. Математика. Механика. 1975. № 5. С. 104-111.
15. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1981. - 338 с.
16. Степанов Г.В. Упруго-пластическое деформирование и разрушение материалов при импульсном нагружении. Киев: Наукова думка, 1991. - 287 с.
17. Уржумцев Ю.С., Каниболотский М.А. Эффект синергизма в механике многослойных конструкций // Механика композиционных материалов. 1984. № 2. С. 289–295.
18. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. - 486 с.
19. Хасанов А.Р. Оптимальное торможение жесткого плоского клина при ударе под углом // Вестник молодых ученых ПГНИУ. Сборник научных трудов. 2014. Вып. 4. С. 323-331.
20. Хасанов А.Р. Оптимальное торможение жесткого конического ударника слоистой плитой при ударе по нормали с учетом вязкостных эффектов // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2018. Вып. 2 (41). С. 54-60.
21. Хасанов А.Р., Аптуков В.Н., Мерзляков А.Ф. Аналитико-экспериментальная оценка параметров оптимальной структуры неоднородной пластины при проникании жесткого индентора // Материалы XIII Международного симпозиума «Фундаментальные и прикладные проблемы науки». М.: РАН. 2018. С. 112-122.
22. Хасанов А.Р., Аптуков В.Н. Решение задачи оптимизации защитных свойств неоднородных плит при динамическом проникании жесткого бойка с помощью методов оптимального управления // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2016. Вып. 2 (33). С. 106-112.
23. Aptukov V.N., Belousov V.L. (1991). Analysis of the optimal laminated target made up of discrete set of materials. In: Dulikracich, G.S., ed., *Proc. of 3rd Int. Conf. on Inverse Design Concepts Optimization in Engineering Science* (October 23-25, 1991, Washington DC), pp. 489-495.

Приложение

Некоторые свойства выпуклых/вогнутых положительных функций

В этом Приложении мы докажем некоторые неравенства, которые используются в книге; в Приложение этот материал вынесен, чтобы не загромождать изложение основного материала, относящегося к тематике монографии. Вполне возможно, что некоторые или даже все нижеперечисленные свойства были доказаны и опубликованы в математической литературе. Если это так, мы приносим свои извинения авторам этих публикаций. Но так как мы не смогли найти ссылки на эти исследования, мы представили все необходимые доказательства.

П.1 Свойство 1

Пусть $y = f(x)$ выпуклая вниз, положительная, возрастающая функция на интервале $0 \leq x_{\min} < x < x_{\max}$ и она удовлетворяет условию:

$$x_{\min} f'(x_{\min}) - f(x_{\min}) \geq 0. \quad (\text{П.1})$$

Поясним смысл неравенства (П.1). Оно означает, что касательная к кривой $y = f(x)$ в точке $x = x_{\min}$ (линия AB на рис. П.1а), пересекается с осью x в области положительных значений x .

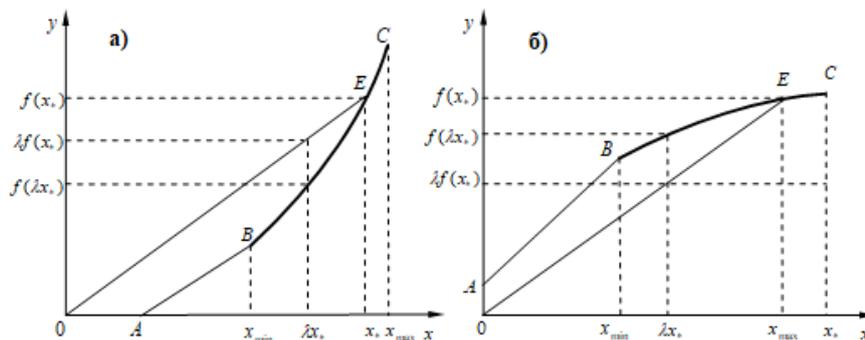


Рис. П.1. Основные свойства функции f : а) случай выпуклой вниз функции, б) случай выпуклой вверх функции.

Другая интерпретация этого неравенства такова: функция $f(x)$ может быть доопределена на интервале $0 \leq x < x_{\min}$ таким образом, что она остается выпуклой вниз и $f(0) = 0$. Если $f(x)$ задается в явном виде и является выпуклой вниз функцией для $0 \leq x < x_{\max}$ и $f(0) = 0$, то условие (П.1) может быть опущено.

Для некоторой функции $y = f(x)$, которая не является выпуклой вверх в промежутке $x_{\min} < x < x_{\max}$, справедливо следующее свойство [1]: для любого $x_{\min} < x_1 < x_{\max}$, $x_{\min} < x_2 < x_{\max}$ и $0 < \lambda < 1$:

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2). \quad (\text{П.2})$$

Рассмотрим произвольное x_* , но такое, что $x_{\min} < x_* < x_{\max}$ (Рис. П.1а). Поскольку *OABEC* не является выпуклой вверх кривой и O - это начало координат, после подстановки $x_1 = 0$, $x_2 = x_*$, $f(x_1) = 0$ в уравнение. (П.2) находим, что

$$f(\lambda x_*) \leq \lambda f(x_*). \quad (\text{П.3})$$

Ясно, что имеет место сильное неравенство

$$f(\lambda x_*) < \lambda f(x_*), \quad (\text{П.4})$$

если $x_{\min}/x_* < \lambda < 1$.

П.2 Свойство 2

Пусть $y = f(x)$ - выпуклая вверх, положительная, возрастающая функция при $0 \leq x_{\min} < x < x_{\max}$, удовлетворяющая следующему условию:

$$x_{\min} f'(x_{\min}) - f(x_{\min}) \leq 0. \quad (\text{П.5})$$

Это означает, что касательная к кривой $y = f(x)$ в точке $x = x_{\min}$ (линия *AB* на Рис.П.1б) пересекается с положительной полуосью оси x .

Используя те же аргументы, что и в анализе Свойства 1, можно прийти к заключению, что

$$f(\lambda x_*) \geq \lambda f(x_*), \quad (\text{П.6})$$

если $0 < \lambda < 1$ и имеет место сильное неравенство при $x_{\min}/x_* < \lambda < 1$.

Если $x_{\min} = 0$ и $f(0) = 0$, то условие (П.5) может быть опущено.

П.3 Свойство 3

Пусть $G(T)$ выпуклая вниз, дважды дифференцируемая функция, которая определена в интервале $T \geq T_{\min} \geq 0$ и удовлетворяет неравенству:

$$T_{\min} G'(T_{\min}) - G(T_{\min}) \geq 0, \quad (\text{П.7})$$

где T_{\min} задано.

Тогда

$$\delta = G\left(\sum_{j=1}^N T^{(j)}\right) - \sum_{j=1}^N G(T^{(j)}) > 0, \quad (\text{П.8})$$

для

$$T^{(j)} \geq T_{\min}, T^{(j)} > 0, j = 1, 2, \dots, N. \quad (\text{П.9})$$

Чтобы доказать это утверждение, используем метод математической индукции. Для наглядности можно считать, что $T^{(j)}$ ($j = 1, 2, \dots, N$) - толщины пластин.

В качестве первого шага докажем, что утверждение справедливо для случая двух пластин ($N = 2$).

Рассмотрим функцию $F(T) = TG'(T) - G(T)$, поскольку $G(T)$ является выпуклой вниз функцией, $F'(T) = TG''(T) > 0$ и, следовательно,

$$TG'(T) - G(T) > T_{\min}G'(T_{\min}) - G(T_{\min}) > 0, \quad T > T_{\min}. \quad (\text{П.10})$$

Предположим, что $T_1 \geq T_2$ (если $T_1 < T_2$ нам нужно только заменить, $T_1 \leftrightarrow T_2$). Используя теорему о среднем значении и неравенства (П.10) получаем, что

$$\begin{aligned} \delta &= G(T_1 + T_2) - G(T_1) - G(T_2) \\ &= [G(T_1 + T_2) - G(T_1)] - G(T_2) \\ &= T_2G'(\xi) - G(T_2) > T_2G'(\xi) - T_2G'(T_2) \\ &= T_2[G'(\xi) - G'(T_2)] = T_2G''(\theta), \end{aligned} \quad (\text{П.11})$$

где

$$T_1 < \xi < T_1 + T_2, \quad T_2 < \theta < \xi, \quad (\text{П.12})$$

поскольку $\theta > T_{\min}$. Мы доказали, что $\delta > 0$,

На втором этапе доказательства мы предполагаем, что утверждение верно для N -слойной преграды ($\delta = \delta_N > 0$), и докажем, что утверждение справедливо и для преграды из $N + 1$ слоев ($\delta_{N+1} > 0$). Используя справедливость свойства двух пластин, имеющих толщину $T^{(1)} + T^{(2)} + \dots + T^{(N)}$ и $T^{(N+1)}$, мы можем написать, что

$$G\left(\sum_{j=1}^{N+1} T^{(j)}\right) = G\left(\sum_{j=1}^N T^{(j)} + T^{(N+1)}\right) > G\left(\sum_{j=1}^N T^{(j)}\right) + G(T^{(N+1)}). \quad (\text{П.13})$$

Теперь, опираясь на справедливость свойства для N пластин, получим:

$$\begin{aligned} \delta_{N+1} &= G\left(\sum_{j=1}^{N+1} T^{(j)}\right) - \sum_{j=1}^{N+1} G(T^{(j)}) \\ &> G\left(\sum_{j=1}^N T^{(j)}\right) + G(T^{(N+1)}) - \sum_{j=1}^{N+1} G(T^{(j)}) \\ &= G\left(\sum_{j=1}^N T^{(j)}\right) - \sum_{j=1}^N G(T^{(j)}) > 0 \end{aligned} \quad (\text{П.14})$$

Это завершает доказательство свойства 3.

П.4 Свойство 4

Пусть $G(T)$ - выпуклая вверх, дважды дифференцируемая функция, которая определена при $T \geq T_{\min} \geq 0$ и удовлетворяет неравенству:

$$T_{\min}G'(T_{\min}) - G(T_{\min}) \leq 0, \quad (\text{П.15})$$

где T_{\min} задано.

Тогда

$$\delta = G\left(\sum_{j=1}^N T^{(j)}\right) - \sum_{j=1}^N G(T^{(j)}) < 0, \quad (\text{П.16})$$

для

$$T^{(j)} \geq T_{\min}, T^{(j)} > 0, j = 1, 2, \dots, N. \quad (\text{П.17})$$

Свойство 4 можно доказать по индукции аналогично доказательству свойства 3.

П.5 Свойство 5

Рассмотрим степенную модель:

$$G(T) = \beta T^\alpha, \beta > 0, \alpha > 1. \quad (\text{П.18})$$

Тогда

$$G'(T) = \alpha \beta T^{\alpha-1} > 0, G''(T) = \alpha(\alpha-1)\beta T^{\alpha-2} > 0, T > 0. \quad (\text{П.19})$$

Из соотношений (П.18) - (П.19) следует, что $G(T)$ является выпуклой вниз, дважды дифференцируемая функцией, которая определена для $T \geq T_{\min} = 0$ и удовлетворяет неравенству (П.7).

Тогда, в соответствии со Свойством 4, для рассматриваемой функции и для любого $T^{(j)} > 0, j = 1, 2, \dots, N$, справедливо неравенство (П.8):

$$\delta = \beta^\alpha \left(\sum_{j=1}^N T^{(j)}\right)^\alpha - \beta^\alpha \sum_{j=1}^N T^{(j)\alpha} > 0. \quad (\text{П.20})$$

В дальнейшем мы будем называть неравенство (П.20) Свойством 5а.

Рассмотрим теперь следующую модель:

$$G(T) = \beta T^\alpha, \beta > 0, 0 < \alpha < 1. \quad (\text{П.21})$$

В этом случае

$$G'(T) = \alpha \beta T^{\alpha-1} > 0, G''(T) = \alpha(\alpha-1)\beta T^{\alpha-2} < 0, T > 0, \quad (\text{П.22})$$

$G(T)$ является выпуклой вверх, дважды дифференцируемой функцией, которая определена для $T \geq T_{\min} = 0$ и удовлетворяет неравенству (П.7).

Тогда из Свойства 4 следует, что

$$\delta = \beta^\alpha \left(\sum_{j=1}^N T^{(j)}\right)^\alpha - \beta^\alpha \sum_{j=1}^N T^{(j)\alpha} < 0, \quad (\text{П.23})$$

для любого $T^{(j)} > 0, j = 1, 2, \dots, N$.

В дальнейшем мы будем называть неравенство (П.20) Свойством 5б.

Отметим, что Свойства 5а и 5б вытекают из неравенства Йенсена [2], которые могут быть записаны следующим образом:

$$\left(\sum_{j=1}^N T_j^{(j)p} \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^N T_j^{(j)r} \right)^{1/r}, \quad 0 < r < p, \quad x_j > 0, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (\text{П.24})$$

Тогда для $r = 1$:

$$\left(\sum_{j=1}^N T_j \right)^p - \sum_{j=1}^N T_j^p \geq 0, \quad p > 1, \quad (\text{П.25})$$

то есть имеет место Свойство 5а, в то время как для $p = 1$:

$$\left(\sum_{j=1}^N T_j^{(j)} \right)^r - \sum_{j=1}^N T_j^{(j)r} \leq 0, \quad 0 < r < 1, \quad (\text{П.26})$$

т.е., справедливо Свойство 5б.

Разница в знаках $>$ и \geq в формулах (П.20) и (П.25), а также разница в знаках $<$ и \leq в формулах (П.23) и (П.26) не имеют практического значения, и мы не будем останавливаться здесь на этих деталях.

П.6 Свойство 6. Линейная модель

Если $G(T)$ является линейной функцией,

$$G(T) = \mu_1 T + \mu_0, \quad (\text{П.27})$$

тогда

$$\delta = \left(\mu_1 \sum_{j=1}^N T_j^{(j)} + \mu_0 \right) - \sum_{j=1}^N (\mu_1 T_j^{(j)} + \mu_0) = \mu_0 (1 - N). \quad (\text{П.28})$$

Следовательно, $\delta > 0$ если $\mu_0 < 0$ и $\delta = 0$ если $\mu_0 = 0$.

П.7 Свойство 7. Класс нелинейных моделей

П.7.1 Общие формулы

Рассмотрим следующую функцию:

$$G(T) = v_*^2 g(T/d)^2, \quad \alpha > 0, \quad (\text{П.29})$$

где v_* , α , β являются параметрами, d - для определенности, диаметра снаряда, g - функция, которая определяет модель. Очевидно, что эта функция соответствует модели:

$$v_{bl} = v_* g(\bar{T}), \quad \bar{T} = T/d. \quad (\text{П.30})$$

Очевидно:

$$G'(T) = \frac{2v_*^2}{d} g\dot{g}, \quad G''(T) = \frac{2v_*^2}{d^2} (\dot{g}^2 + g\ddot{g}), \quad (\text{П.31})$$

$$TG'(T) - G(T) = v_*^2 g(2\bar{T}\dot{g} - g), \quad (\text{П.32})$$

где $\dot{g} = dg/d\bar{T}$, $\ddot{g} = d^2g/d\bar{T}^2$,

П.7.2 Свойство 3 для рассматриваемого класса моделей

Свойство 3 справедливо, если

$$g(\bar{T}_{\min})[2\bar{T}_{\min}\dot{g}(\bar{T}_{\min}) - g(\bar{T}_{\min})] \geq 0, \quad \bar{T}_{\min} = T_{\min}/d \geq 0 \quad (\text{П.33})$$

и

$$g(\bar{T}) > 0, \quad g(\bar{T})\dot{g}(\bar{T}) > 0, \quad \dot{g}(\bar{T})^2 + g(\bar{T})\ddot{g}(\bar{T}) > 0, \quad \bar{T} > \bar{T}_{\min}. \quad (\text{П.34})$$

Рассмотрим более подробно случай, когда

$$v_{bl} = v_*(\bar{T}^\alpha + \beta), \quad g(\bar{T}) = \bar{T}^\alpha + \beta. \quad (\text{П.35})$$

Поскольку

$$\dot{g}(\bar{T}) = \alpha\bar{T}^{\alpha-1}, \quad \ddot{g}(\bar{T}) = \alpha(\alpha-1)\bar{T}^{\alpha-2}. \quad (\text{П.36})$$

Из соотношений (П.33) и (П.34) следует, что свойство 3 справедливо, если

$$(\bar{T}_{\min}^\alpha + \beta)[(2\alpha-1)\bar{T}_{\min}^\alpha - \beta] \geq 0, \quad (\text{П.37})$$

$$\bar{T}^\alpha + \beta > 0, \quad \bar{T} > \bar{T}_{\min}, \quad (\text{П.38})$$

$$(2\alpha-1)\bar{T}^\alpha + (\alpha-1)\beta > 0, \quad \bar{T} > \bar{T}_{\min}. \quad (\text{П.39})$$

Для дальнейшего анализа удобно ввести следующие обозначения:

$$\bar{T}^\alpha = z, \quad \bar{T}_{\min}^\alpha = z_{\min}, \quad (\text{П.40})$$

Тогда соотношения (П.37) - (П.39) можно переписать следующим образом:

$$(z_{\min} + \beta)[(2\alpha-1)z_{\min} - \beta] \geq 0, \quad (\text{П.41})$$

$$z + \beta > 0, \quad z > z_{\min}, \quad (\text{П.42})$$

$$(2\alpha-1)z + (\alpha-1)\beta > 0, \quad z > z_{\min}. \quad (\text{П.43})$$

Рассмотрим теперь различные комбинации значений параметров α и β . Очевидно, что условия $z_{\min} \geq 0$ и $z > 0$ должны удовлетворяться.

П.7.2.1. Случай, когда $\beta > 0$, $0 < \alpha < 0.5$

Отметим, что неравенства (П.42) всегда справедливы, когда $\beta > 0$. В рассматриваемом случае выражение в квадратных скобках в неравенстве (П.41) всегда отрицательно и неравенство (П.41) нарушается.

П.7.2.2. Случай, когда $\beta < 0$, $0.5 < \alpha < 1.0$

Из неравенств (П.41) и (П.43) следует, соответственно, что

$$z_{\min} \geq \beta / (2\alpha - 1), \quad (\text{П.44})$$

$$z > z_0, z > z_{\min}, \quad (\text{П.45})$$

где

$$z_0 = [(1 - \alpha)\beta] / (2\alpha - 1). \quad (\text{П.46})$$

Поскольку $z_0 < z_{\min}$, неравенство (П.43) удовлетворяется. Следовательно, неравенства (П.41) - (П.43) выполняются, если выполняется неравенство (П.44). Поскольку мы заинтересованы в поиске максимального интервала, где условия (П.41) - (П.43) удовлетворяются, то целесообразно выбрать

$$z_{\min} = z_1, \quad (\text{П.47})$$

где

$$z_1 = \beta / (2\alpha - 1). \quad (\text{П.48})$$

П.7.2.3. Случай, когда $\beta > 0, \alpha > 1.0$

Из неравенства (П.41) следует, что $z > z_1$, в то время как неравенство (П.43) справедливо для любого $z > 0$. Таким образом, можно положить $z_{\min} = z_1$.

П.7.2.4. Случай, когда $\beta < 0, 0 < \alpha < 0.5$

В этом случае неравенства (П.42) и (П.43) представляют собой противоречивую систему неравенств:

$$-\beta < z < z_0, z_0 < -\beta. \quad (\text{П.49})$$

П.7.2.5. Случай, когда $\beta < 0, 0.5 < \alpha < 1.0$

Из неравенства (П.41) следует, что

$$z_{\min} \geq -\beta, \quad (\text{П.50})$$

в то время как неравенство (П.43) выполняется для каждого $z > 0$ и из неравенств (П.42) следует:

$$z > -\beta. \quad (\text{П.51})$$

Следовательно, в этом случае можно выбрать $z_{\min} = -\beta$.

П.7.2.6. Случай, когда $\beta < 0, \alpha > 1.0$

Из неравенства (П.41) следует, что неравенства (П.50) выполняется. Неравенства (П.42) и (П.43) приводят к условиям:

$$z > -\beta, z > z_0, \quad (\text{П.52})$$

которые можно записать как одно неравенство (П.51), поскольку $z_0 < -\beta$. Очевидно, что в этом случае можно выбрать $z_{\min} = -\beta$.

П.7.2.7. Случай, когда $\alpha = 0.5$

В этом случае неравенство (П.41) можно записать следующим образом:

$$(z_{\min} + \beta)\beta \leq 0. \quad (\text{П.53})$$

Из неравенства (П.53) следует, что β не может быть положительным. Если $\beta < 0$, то неравенство (П.41) выполняется, в то время как неравенство (П.53) показывает, что $z_{\min} \geq -\beta$. Таким образом, мы можем выбрать $z_{\min} = -\beta$.

П.7.2.8. Случай, когда $\alpha = 1.0$

В этом случае из неравенства (П.41) вытекает, что $z_{\min}^2 \geq \beta^2$ и, следовательно,

$$z_{\min} \geq |\beta|. \quad (\text{П.54})$$

Таким образом, условие (П.43) выполняется, в то время как из неравенства (П.42) следует, что

$$z > -\beta. \quad (\text{П.55})$$

Сравнение неравенств (П.54) и (П.55) показывает, что $z_{\min} = |\beta|$,

Приведенный выше анализ неравенств (П.37) - (П.39) позволяет сделать вывод о том, что они выполняются, если выполняется один из следующих наборов условий:

$$0.5 \leq \alpha < 1.0, \beta < 0, \bar{T}_{\min} = [-\beta]^{1/\alpha}, \quad (\text{П.56})$$

$$0.5 < \alpha < 1.0, \beta > 0, \bar{T}_{\min} = [\beta/(2\alpha - 1)]^{1/\alpha}, \quad (\text{П.57})$$

$$\alpha = 1.0, \bar{T}_{\min} = |\beta|^{1/\alpha}, \quad (\text{П.58})$$

$$\alpha > 1.0, \beta < 0, \bar{T}_{\min} = [-\beta]^{1/\alpha}. \quad (\text{П.59})$$

В дальнейшем мы будем ссылаться на Свойства П.7.2.1-П.7.2.8 как на Свойства 7а.

П.7.3 Свойство 4 для класса нелинейных моделей

Свойство 4 выполняется, если

$$g(\bar{T}_{\min})[2\bar{T}_{\min}\dot{g}(\bar{T}_{\min}) - g(\bar{T}_{\min})] \leq 0, \bar{T}_{\min} \geq 0, \quad (\text{П.60})$$

$$g(\bar{T}) > 0, g(\bar{T})\dot{g}(\bar{T}) > 0, \dot{g}(\bar{T})^2 + g(\bar{T})\ddot{g}(\bar{T}) < 0, \bar{T} > \bar{T}_{\min}. \quad (\text{П.61})$$

В случае модели (П.35) неравенства, аналогичные неравенствам (П.41) - (П.43), запишутся следующим образом:

$$(z_{\min} + \beta)[(2\alpha - 1)z_{\min} - \beta] \leq 0, \quad (\text{П.62})$$

$$z + \beta > 0, z > z_{\min}, \quad (\text{П.63})$$

$$(2\alpha - 1)z + (\alpha - 1)\beta < 0, z > z_{\min}. \quad (\text{П.64})$$

Как и при анализе Свойств 7а, рассмотрим различные комбинации значений параметров α и β .

П.7.3.1. Случай, когда $\beta > 0$, $0 < \alpha < 0.5$

В этом случае неравенство (П.62) справедливо для всех $z_{\min} \geq 0$; неравенства (П.63) и (П.64) имеют место для всех $z > 0$. Таким образом, мы можем выбрать $z_{\min} = 0$.

П.7.3.2. Случай, когда $\beta > 0$, $0.5 < \alpha < 1.0$

Неравенство (П.62) справедливо для

$$z_{\min} \leq z_1, \quad (\text{П.65})$$

в то время как неравенства (П.63) - (П.64) для

$$z < z_0, \quad (\text{П.66})$$

поскольку $z_1 > z_0$. Интервал, определяемый неравенствами (П.62) - (П.64), пуст.

П.7.3.3. Случай, когда $\beta > 0$, $\alpha > 1.0$

В этом случае неравенства (П.64) не выполняются.

П.7.3.4. Случай, когда $\beta < 0$, $0 < \alpha < 0.5$

В этом случае неравенство (П.62) дает два набора неравенств:

$$z_{\min} > -\beta, \quad (2\alpha - 1)z_{\min} < \beta \quad (\text{П.67})$$

и

$$z_{\min} < -\beta, \quad (2\alpha - 1)z_{\min} > \beta. \quad (\text{П.68})$$

В случае справедливости неравенства (П.67)

$$-\beta < z_{\min} < z_1, \quad (\text{П.69})$$

где $z_1 > -\beta$.

Когда справедливо неравенство (П.68), то

$$z_{\min} < \min(-\beta, z_1) = -\beta. \quad (\text{П.70})$$

Из неравенств (П.64) следует, что

$$z > z_0. \quad (\text{П.71})$$

Анализ неравенств (П.69) - (П.71) показывает, что в данном случае можно выбрать $z_{\min} = z_0$.

П.7.3.5. Случай, когда $\beta < 0$, $0.5 < \alpha < 1.0$

В этом случае неравенства (П.64) не выполняются для всех $z > 0$.

П.7.3.6. Случай, когда $\beta < 0$, $\alpha > 1.0$

В этом случае из неравенств (П.63) - (П.64) следует, что

$$-\beta < z < z_0 \quad (\text{П.72})$$

и, поскольку $z_0 < -\beta$, система неравенств противоречива.

П.7.3.7. Случай, когда $\alpha = 0.5$.

Если $\beta < 0$, то из неравенств (П.62) следует, что $z_{\min} \leq -\beta$, а если $\beta > 0$, то $z_{\min} \geq -\beta$ и в обоих случаях можно выбрать значение $z_{\min} = 0$. Из неравенства (П.64) следует, что $\beta > 0$, в то время как из неравенств (П.63) следует, что $z > -\beta$. Принимая во внимание последние неравенства, заключаем, что $\beta > 0$ и выбирается $z_{\min} = 0$.

П.7.3.8. Случай, когда $\alpha = 1.0$

Неравенства (П.64) выполняются только тогда, когда $z < 0$, то есть допустимое решение не существует.

Приведенный выше анализ неравенств (П.62) - (П.64) позволяет сделать вывод о том, что они будут удовлетворены, если имеет место один из следующих наборов условий:

$$0 < \alpha \leq 0.5, \beta > 0, \bar{T}_{\min} = 0, \quad (\text{П.73})$$

$$0 < \alpha < 0.5, \beta < 0, \bar{T}_{\min} = \left[\frac{(1-\alpha)\beta}{2\alpha-1} \right]^{1/\alpha}. \quad (\text{П.74})$$

Литература к Приложению

1. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. – 472 с.
2. Backenbach E.F., Bellman, R. *Inequalities*. Springer. Berlin-Göttingen-Heldelberg, 1961.