

ПЕРМСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

Н. В. Колчанов, Е. А. Колчанова

**МЕХАНИКА:**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ  
К ОБЩЕМУ ФИЗИЧЕСКОМУ ПРАКТИКУМУ**



Пермь 2020

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Н. В. Колчанов, Е. А. Колчанова

## **МЕХАНИКА:**

### **МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ОБЩЕМУ ФИЗИЧЕСКОМУ ПРАКТИКУМУ**

*Допущено методическим советом  
Пермского государственного национального  
исследовательского университета в качестве  
учебного пособия для студентов  
всех направлений подготовки и специальностей,  
изучающих дисциплины «Физика»,  
«Общий физический практикум»*



Пермь 2020

УДК 531(075.8)  
ББК 22.2я73  
К619

**Колчанов Н. В.**

К619 Механика: методические указания к общему физическому практикуму [Электронный ресурс] : учебное пособие / Н. В. Колчанов, Е. А. Колчанова ; Пермский государственный национальный исследовательский университет. – Электронные данные. – Пермь, 2020. – 4 Мб ; 121 с. – Режим доступа: <http://www.psu.ru/files/docs/science/books/uchebnie-posobiya/kolchanov-kolchanova-mekhanika-metodicheskie-ukazaniya.pdf>. – Заглавие с экрана.

ISBN 978-5-7944-3453-8

Методические указания к общему физическому практикуму содержат лабораторные работы по курсу общей физики (механика). Описание каждой из работ включает краткое теоретическое введение, методику измерений, порядок выполнения практического задания, обработки результатов измерений, список литературы, а также вопросы для самоконтроля.

Издание предназначено для использования в рамках лабораторных практикумов студентами естественнонаучных специальностей учреждений высшего образования. При проведении таких занятий студенты знакомятся с наиболее важными методами измерений, учатся использовать основные физические приборы, анализировать результаты измерений и оценивать их достоверность, приобретают навыки построения графиков, оценки погрешностей измерений, ведения лабораторного журнала, оформление отчета.

**УДК 531(075.8)**  
**ББК 22.2я73**

*Издается по решению ученого совета физического факультета  
Пермского государственного национального исследовательского университета*

*Рецензенты:* кафедра общей физики ПНИПУ (и.о. зав. кафедрой, д-р физ.-мат. наук, профессор **А. В. Перминов**);

доцент кафедры физики и технологии ПГГПУ, канд. физ.-мат. наук **С. В. Субботин**

ISBN 978-5-7944-3453-8

© ПГНИУ, 2020  
© Колчанов Н. В., Колчанова Е. А.,  
2020

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
1. <b>Лабораторная работа № 1.</b> Определение плотности твердого тела цилиндрической формы.....	8
2. <b>Лабораторная работа № 2.</b> Определение коэффициентов трения скольжения тел по горизонтальной плоскости.....	12
3. <b>Лабораторная работа № 3.</b> Изучение законов вращательного движения на крестообразном маятнике Обербека.....	17
4. <b>Лабораторная работа № 5.</b> Изучение движения тел, брошенных под углом к горизонту.....	22
5. <b>Лабораторная работа № 8.</b> Изучение силы трения покоя и определение коэффициента трения.....	25
6. <b>Лабораторная работа № 9.</b> Определение коэффициента трения скольжения тел по наклонной плоскости.....	30
7. <b>Лабораторная работа № 16.</b> Определение модуля Юнга по деформации изгиба.....	35
8. <b>Лабораторная работа № 32.</b> Измерение момента инерции велосипедного колеса.....	41
9. <b>Лабораторная работа № 102.</b> Определение коэффициента трения качения с помощью наклонного маятника.....	48
10. <b>Лабораторная работа № 103.</b> Определение скорости пули методом баллистического маятника.....	53
11. <b>Лабораторная работа № 104.</b> Определение модуля сдвига методом крутильных колебаний.....	57
12. <b>Лабораторная работа № 105.</b> Изучение поступательного движения с помощью машины Атвуда.....	66
13. <b>Лабораторная работа № 106.</b> Определение скорости пули методом физического маятника.....	71
14. <b>Лабораторная работа № 107.</b> Изучение движения гироскопа.....	79
15. <b>Лабораторная работа № 108.</b> Изучение движения маятника Максвелла.....	86
16. <b>Лабораторная работа № 109.</b> Определение ускорения силы тяжести с помощью математического и физического маятников.....	93
17. <b>Лабораторная работа № 110.</b> Изучение собственных колебаний пружинного маятника.....	101
18. <b>Лабораторная работа № 111.</b> Измерение моментов инерции тел и проверка теоремы Гюйгенса-Штейнера.....	107
Приложение.....	115

## ВВЕДЕНИЕ

Любой натурный эксперимент представляет собой проведение измерений с помощью различных приборов. Измеряемые величины (измерения) фиксируются в виде чисел, которые состоят из набора цифр. Количество цифр в наборе всегда ограничено. Оно зависит от свойств объекта экспериментального исследования и точности используемых измерительных приборов. Главная задача экспериментатора – определить, каким цифрам в числах измерений можно доверять, а каким нет.

Недоверие к цифре в измеренном числе вызвано присутствием погрешностей, которые мешают получению истинного значения. По определению погрешность – это отклонение измерения от истинного значения. Под истинным значением понимается такое значение, которое получилось бы в эксперименте, если бы никаких погрешностей не было. Но избавиться абсолютно от всех погрешностей невозможно, поэтому существуют общепринятые правила работы с погрешностями, некоторые из которых будут представлены ниже, а также в приложении.

### Типы погрешностей

Классифицируют погрешности по следующему ряду признаков: по характеру и причинам возникновения, по принадлежности к видам измерений, по способу количественного выражения.

В классификации погрешностей по характеру возникновения выделяют три типа – систематические, случайные и грубые (промахи). Для того чтобы понять различия и сходства характера возникновения перечисленных типов, необходимо представить или вспомнить процесс проведения некоторой серии измерений.

**Систематическая погрешность** – это погрешность, которая возникает во всех измерениях одной серии, ее величина от измерения к измерению одинакова или меняется по определенному систематическому закону. Систематическая погрешность может быть устранена или учтена в виде некоторой поправки после установления ее причин. Если причиной стало несовершенство метода измерений, то такая систематическая погрешность дополнительно называется методической. Если причина в приборах, то – инструментальной и т.д. Существуют различные способы обнаружения систематических погрешностей. Самый быстрый способ – сравнение своего результата эксперимента со справочными данными, если таковые имеются. Если вы являетесь первопроходцем и справочные данные отсутствуют, обнаружение или оценка систематической погрешности проводятся путем измерений той же величины принципиально другими методами, отличными от вашего метода измерений. Рассмотрение предельных случаев также позволяет проанализировать результат измерений на наличие систематических погрешностей. Например, в задаче об ускорении тел при падении в поле тяжести Земли необходимо понимать, что в предельном случае отсутствия

воздуха, который препятствует падению, результат измерения должен совпадать со значением ускорения свободного падения. То есть измерения ускорения в присутствии воздушной среды, как минимум, не должны превышать табличное значение  $9.81 \text{ м/с}^2$ .

**Грубая погрешность (промах)** – это погрешность, которая возникает не во всех измерениях, а лишь в нескольких. Измерения с грубой погрешностью резко выделяются на фоне всей серии, что позволяет избавиться от таких измерений еще на стадии проведения опыта: эти измерения отбрасываются или, при необходимости, переделываются. Промахи нередко могут быть обусловлены некорректной работой экспериментатора, что выражается либо в грубом просчете при проведении измерений (вплоть до использования неисправной аппаратуры), либо в неверной записи показаний прибора.

**Случайная погрешность** – это погрешность, которая, как и систематическая, присутствует во всех измерениях, но, в отличие от систематической, возникает из-за влияния случайных факторов, ее величина различна от измерения к измерению при повторении опыта. Устранить случайную погрешность невозможно. Ее можно только уменьшить путем использования более точных приборов и методик. Такие погрешности оценивают статистическими методами при достаточном количестве повторных измерений.

Тема определения типов погрешностей на основе использования других признаков классификации (например, по причинам возникновения выделяют погрешности экспериментатора, методики, экспериментального оборудования, внешней среды и др.) в данных методических указаниях не рассматривается. Более подробная информация о типах погрешностей содержится в работах [1-4] из списка литературы к введению.

### **Правила работы со значащими цифрами**

Все числа, с которыми приходится работать при проведении эксперимента, делятся на две группы: числа непосредственных измерений и числа результата математической обработки.

Числа первой группы состоят из ограниченного набора цифр, который формируется в результате опыта. Общее количество цифр в наборе может не совпадать с количеством так называемых значащих цифр. *Значащими цифрами* числа называют все цифры, начиная с первой ненулевой. Например, в результате измерения длины получилось число  $0.0205 \text{ м}$ . Это число составлено из 5 цифр, но значащих из них три. Первые два нуля не являются значащими цифрами числа  $0.0205$ , так как не определяют его значение. Их появление обусловлено формой записи, которая может быть изменена. Это же показание в миллиметрах будет иметь другую форму записи –  $20.5 \text{ мм}$ , в которой незначащие нули отсутствуют. Если продолжить апробацию единиц измерения длины, то в микрометрах рассматриваемое число должно быть представлено так:  $20.5 \cdot 10^3 \text{ мкм}$ . Однако форма записи  $20500 \text{ мкм}$  является ошибочной, так как последние два нуля подставлены искусственно и к измерению конкретным

прибором никакого отношения не имеют. Таким образом, можно заключить, что количество значащих цифр не зависит от формы записи числа измерения, а определяется параметрами исследуемого объекта и точностью используемых приборов.

Числа, которые получаются в результате математических вычислений, зачастую являются иррациональными, и у начинающего экспериментатора возникает закономерный вопрос: «А сколько цифр списать с калькулятора (или другого вычислительного устройства)?» На этот случай сформулируем *правило промежуточных вычислений*:

- результат математической обработки округляется до такого количества значащих цифр, которое имеют обрабатываемые исходные числа непосредственных измерений.

Повтор измерений одной и той же физической величины  $x$  проводится с целью оценки случайной погрешности эксперимента  $\Delta x$ . Эта оценка позволяет выделить значащие цифры в числе среднего  $\bar{x}$ , которым следует доверять на 100%, частично или доверять совсем нельзя. Записывая окончательный результат в виде доверительного интервала  $x = \bar{x} \pm \Delta x$ , экспериментатор предоставляет всю необходимую информацию, если руководствуется следующими *правилами записи окончательного результата*:

- оценка погрешности  $\Delta x$  приводится с точностью до одной значащей цифры, если эта цифра больше двойки;
- если первой значащей цифрой в числе  $\Delta x$  окажется единица, то после нее сохраняется еще одна цифра;
- если первой значащей цифрой в числе  $\Delta x$  окажется двойка, то допускается запись погрешности с точностью до одной и двух значащих цифр;
- число  $\bar{x}$  округляется до того разряда, в котором стоит последняя значащая цифра в погрешности.

Примеры правильной и неправильной записи доверительного интервала приведены в таблице 0.1.

**Таблица 0.1**

<b>Неправильно</b>	<b>Правильно</b>
$x = 15.024 \pm 0.33$	$x = 15.0 \pm 0.3$
$x = 2167 \pm 116$	$x = (2.17 \pm 0.12) \cdot 10^3$
$x = 450.016 \pm 2.385$	$x = 450 \pm 2$ или $x = 450.0 \pm 2.4$

### **Рекомендации по оформлению отчетов о лабораторных работах**

Лабораторные отчеты оформляются в соответствии с требованиями ГОСТ 7.32–2017 «Отчет о научно-исследовательской работе. Структура и правила оформления». Приводим некоторые общие рекомендации по оформлению лабораторного журнала:

1. Каждая работа должна начинаться с новой страницы.
2. Заголовок работы должен быть выделен.

3. После заголовка необходимо записать краткое введение, в котором должны быть отражены:
  - цели и задачи работы;
  - явление или зависимость, которые будут исследованы; что ожидается получить в ходе выполнения работы;
  - физические величины, которые будут измеряться в работе; каковы их размерности и единицы измерения.
4. Описание метода измерений, используемого в работе. При этом обязательно следует схематически нарисовать экспериментальную установку и написать рабочую формулу и формулы для вычисления погрешностей.
5. Экспериментальные результаты следует записывать только в рабочую тетрадь, в заранее заготовленные таблицы. Не следует использовать для этих целей черновики. Если измеряемая величина зависит от внешних условий, например от температуры или давления, необходимо записать условия эксперимента.
6. Окончательный результат следует записать в конце отчета с указанием доверительного интервала, коэффициента надежности, единиц измерения и внешних условий. Этот результат должен быть выделен.
7. Написать выводы по работе, где, если возможно, полученный результат необходимо сравнить с имеющимися табличными данными, теоретическими расчетами или результатами экспериментов других авторов, обязательно дать при этом ссылку на источник этих данных. Если в измерениях содержатся систематические погрешности (например, сила трения, не учтенная в формулах), то указывать доверительный интервал не имеет смысла. В этом случае ограничиваются оценкой точности метода измерений.
8. Для характеристики качества результатов и используемого экспериментального метода рекомендуется всегда оценивать относительную погрешность результата.
9. Все записи в тетради должны быть датированы.

#### Литература

1. *Братухин Ю.К., Путин Г.Ф.* Обработка экспериментальных данных: учеб. пособие по лабораторному практикуму «Механика» курса общей физики / Перм. ун-т. Пермь, 2003. 80 с.
2. *Зайдель А.Н.* Ошибки измерений физических величин. СПб.: Лань, 2005. 112 с.
3. *Сойфер Г.Б.* Определение плотности твердого тела цилиндрической формы. Методика обработки результатов измерений: метод. руководство к фронтальной лабораторной работе № 1 / Перм. ун-т. Пермь, 2005. 14 с.
4. *Тейлор Дж.* Введение в теорию ошибок. М.: Мир, 1985. 272 с.

## 1. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

**Цель работы:** на основе измерения массы цилиндрического твердого тела и его объема определить плотность материала этого цилиндра, в процессе чего освоить методику обработки результатов проведенных измерений.

**Принадлежности:** тело цилиндрической формы, штангенциркуль, микрометр, электронные весы.

#### Краткие теоретические сведения

Плотность сплошного твердого тела в форме прямого круглого цилиндра определяется соотношением:

$$\rho = \frac{m}{V}, \quad (1.1)$$

где  $m$  – масса тела,  $V$  – его объем. Объем тела можно выразить через непосредственно измеряемые величины  $V = \frac{\pi d^2 h}{4}$ , где  $d$  – диаметр цилиндра,  $h$  – его высота. Подставляя  $V$  в выражение (1.1), получим рабочую формулу

$$\rho = \frac{4m}{\pi d^2 h}. \quad (1.2)$$

Измерение плотности относится к косвенным, а изменение массы, диаметра и высоты – к прямым измерениям. Возможная деформация цилиндра или недостаточная точность его изготовления могут привести к тому, что диаметр и высота цилиндра в различных местах окажутся неодинаковыми. Поэтому измерения высоты и диаметра следует производить несколько раз в разных местах цилиндра. Определение массы цилиндра взвешиванием на электронных весах достаточно выполнить один раз.

Случайная погрешность при многократных измерениях, например, диаметра цилиндра определяется как среднее квадратичное отклонение среднего значения каждой из измеренных величин, умноженное на коэффициент Стьюдента  $t_{p,n}$  для заданной доверительной вероятности  $p = 0.95$  и числа измерений  $n$  по формуле

$$\Delta d_{ci} = t_{p,n} \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\bar{d} - d_i)^2}. \quad (1.3)$$

Коэффициенты Стьюдента для разного числа измерений, взятые при доверительной вероятности  $p = 0.95$ , приведены в таблице П.2 приложения в конце учебного пособия.

Результирующая абсолютная погрешность прямого измерения, включающая погрешность изготовления прибора и ошибки округления, равна

$$\Delta d = \sqrt{\Delta d_{сл}^2 + \Delta d_{пр}^2 + \Delta d_{окр}^2}. \quad (1.4)$$

Для расчета абсолютной погрешности прибора  $\Delta d_{пр}$  при доверительной вероятности  $p = 0.95$  используют формулу

$$\Delta d_{пр} = \frac{2}{3} \delta, \quad (1.5)$$

где  $\delta$  – предельная ошибка приборов одного класса при коэффициенте надежности 0.997. Значение  $\delta$  обычно приводится в паспорте прибора, но если паспорт по каким-то причинам отсутствует, в качестве  $\delta$  берут цену наименьшего деления прибора;

$\Delta d_{окр}$  обусловлена округлением показаний прибора и вычисляется по формуле

$$\Delta d_{окр} = p \frac{\omega}{2}, \quad (1.6)$$

где  $\omega$  – цена наименьшего деления измерительного прибора.

Абсолютная результирующая погрешность измерения высоты  $\Delta h$  находится с использованием формул (1.3)-(1.6). Погрешность для массы вычисляется по упрощенной формуле

$$\Delta m = \sqrt{(\Delta m_{пр})^2 + (\Delta m_{окр})^2}, \quad (1.7)$$

так как  $\Delta m_{сл} \ll \Delta m_{пр}, \Delta m_{окр}$ .

Погрешность косвенного измерения плотности цилиндра  $\Delta \rho$  с учетом абсолютных погрешностей измерений  $\Delta m$ ,  $\Delta d$  и  $\Delta h$  вычисляется как

$$\Delta \rho = \sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial m} \Delta m\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial d} \Delta d\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial h} \Delta h\right)^2}. \quad (1.8)$$

Отсюда с учетом средних значений этих величин  $m$ ,  $\bar{d}$ ,  $\bar{h}$  получаем для абсолютной погрешности измерения плотности формулу

$$\Delta \rho = \bar{\rho} \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(2 \frac{\Delta d}{\bar{d}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{\bar{h}}\right)^2}. \quad (1.9)$$

В целом результат по определению плотности  $\rho$  материала цилиндра записывают в виде доверительного интервала  $\rho = \bar{\rho} \pm \Delta \rho$ .

### Порядок выполнения работы

1. Определить массу  $m$  цилиндра путем его однократного взвешивания на электронных весах.
2. Многократно (не менее пяти раз) измерить диаметр  $d$  и высоту  $h$  цилиндра, используя штангенциркуль и микрометр.
3. Все результаты измерений и последующих вычислений занести в таблицу 1.1.

Таблица 1.1

№ п/п	$m = \quad \Gamma$			Доверительная вероятность $p = 0.95$		
	$d_i, \text{ мм}$	$\bar{d} - d_i, \text{ мм}$	$(\bar{d} - d_i)^2, \text{ мм}^2$	$h_i, \text{ мм}$	$\bar{h} - h_i, \text{ мм}$	$(\bar{h} - h_i)^2, \text{ мм}^2$
1						
2						
3						
4						
5						
Сумма $\Sigma$						
Ср.знач.						

### Обработка результатов измерений

1. Вычислить для диаметра  $d$  и высоты  $h$  цилиндра средние значения  $\bar{d}$  и  $\bar{h}$  как средние арифметические результатов измерений и записать их в таблицу 1.1.

2. Определить среднюю плотность  $\bar{\rho}$  материала цилиндрического тела по формуле (1.2), подставляя в нее величину массы  $m$  и средние значения диаметра  $\bar{d}$  и высоты  $\bar{h}$  цилиндра.

3. Определить отклонения от среднего и их квадраты для каждого измерения, заполняя столбцы таблицы 1.1.

4. Вычислить случайную погрешность  $\Delta d_{сл}$  и  $\Delta h_{сл}$  по формуле (1.3). Коэффициент Стьюдента взять при доверительной вероятности  $p = 0.95$  (таблица 1.1).

5. Определить при той же доверительной вероятности  $p = 0.95$  погрешности приборов ( $\Delta d_{пр}$ ,  $\Delta h_{пр}$ ,  $\Delta m_{пр}$ ) и погрешности округления показаний приборов ( $\Delta d_{окр}$ ,  $\Delta h_{окр}$ ,  $\Delta m_{окр}$ ) по формулам (1.5) и (1.6).

6. Найти результирующие погрешности результатов измерений для  $d$  и  $h$  по формуле (1.4), а для  $m$  – по формуле (1.7).

7. Записать результаты для  $m$ ,  $d$  и  $h$  в виде доверительного интервала  $x = \bar{x} \pm \Delta x$ .

8. Вычислить величину абсолютной погрешности косвенного измерения плотности  $\bar{\rho}$  по формуле (1.9).

9. Окончательный результат определения плотности цилиндрического твердого тела из выполненных измерений и их обработки представить в виде

$$\rho = (\bar{\rho} \pm \Delta\rho) .$$

10. Записать отдельно величину относительной погрешности в процентах:

$$E = \frac{\Delta\rho}{\bar{\rho}} \cdot 100\% .$$

11. Сравнить полученный результат с табличным значением плотности материала цилиндра и сделать соответствующие выводы.

### **Контрольные вопросы**

1. Опишите известные вам методы определения плотности твердых, жидких и газообразных тел.

2. Каким методом можно определить плотность сплошного твердого тела неправильной геометрической формы?

3. Как определяются погрешности окончательного результата в прямых и косвенных измерениях?

4. Как изменяются границы доверительного интервала с изменением величины доверительной вероятности?

5. Следует ли при определении массы цилиндра в этой работе учитывать систематическую погрешность, создаваемую действием закона Архимеда в воздухе?

### **Литература**

1. *Братухин Ю.К., Путин Г.Ф.* Обработка экспериментальных данных: учеб. пособие по лабораторному практикуму «Механика» курса общей физики / Перм. ун-т. Пермь, 2003. 80 с.
2. *Зайдель А.Н.* Ошибки измерений физических величин. СПб.: Лань, 2005. 112 с.
3. *Сойфер Г.Б.* Определение плотности твердого тела цилиндрической формы. Методика обработки результатов измерений: метод. руководство к фронтальной лабораторной работе № 1 / Перм. ун-т. Пермь, 2005. 14 с.
4. *Тейлор Дж.* Введение в теорию ошибок. М.: Мир, 1985. 272 с.

## 2. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТРЕНИЯ СКОЛЬЖЕНИЯ ТЕЛ ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

**Цель работы:** определение коэффициента трения скольжения при относительном движении одного тела по поверхности другого.

**Принадлежности:** прибор, прямоугольный треугольник с миллиметровыми делениями, набор брусков, гирька массой 200 г.

#### Краткие теоретические сведения

Если к телу (бруску), лежащему на горизонтальной плоскости, приложить небольшую силу  $F$  (рис. 2.1), оно будет покоиться, так как внешняя сила  $F$  будет уравновешена силой трения покоя  $f_{mp}$ . С увеличением силы  $F$  будет в такой же степени расти и сила трения. Последняя, однако, не может расти беспрестанно.



Рис. 2.1

Когда она достигнет максимальной величины, брусок начнет скользить по плоскости. В этом случае сила трения покоя сменяется силой трения скольжения, которая несколько меньше силы трения

покоя (на 10-20%).

Опыт показывает, что сила трения скольжения пропорциональна силе давления  $N$ , с которой тела прижимаются друг к другу, и не зависит от площади соприкосновения тел:

$$f_{mp} = kN, \quad (2.1)$$

где  $k$  – коэффициент силы трения скольжения. Величина его зависит только от свойств трущихся поверхностей и в общем случае от скорости их относительного движения.

Известен простой способ измерения коэффициента силы трения. Для этого наклоняют плоскость с лежащим на ней бруском до тех пор, пока брусок не начнет скользить. В этом случае сила тяжести бруска раскладывается на две составляющие – «скатывающую силу»  $F$  и силу давления  $N$ . Для определения коэффициента силы трения достаточно измерить предельный угол наклона плоскости к горизонту, при котором тело начинает скользить по плоскости, при этом  $F = f_{mp}$ . Тогда коэффициент силы трения можно вычислить по формуле

$$k = \frac{F}{N} = \operatorname{tg}\varphi, \quad (2.2)$$

где  $\varphi$  – предельный угол наклона плоскости.

В данной работе предлагается несколько видоизмененный метод определения коэффициента трения. Его сущность можно пояснить с помощью рис. 2.2. Тело (брусок) помещают на горизонтальную плоскость, по которой

равномерно движется прямоугольный треугольник со скоростью  $v$  вдоль одного из своих катетов и гипотенузой толкает брусок.

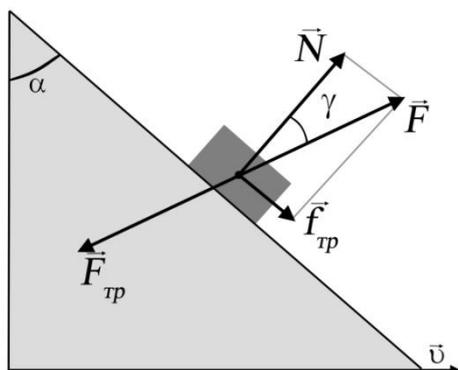


Рис. 2.2

Если сила трения между бруском и гипотенузой треугольника достаточно велика, брусок будет двигаться в ту же сторону, что и треугольник. При достаточно больших углах  $\alpha$  брусок начнет скользить по гипотенузе треугольника и сила трения покоя между ними сменится силой трения скольжения. Брусок начнет двигаться вдоль равнодействующей  $\vec{F}$  двух сил: силы трения скольжения  $\vec{f}_{mp}$  между

бруском и поверхностью гипотенузы треугольника и силой нормального давления  $\vec{N}$ , действующей на брусок со стороны гипотенузы. Направление силы  $\vec{F}$  можно определить по направлению движения бруска. Тангенс угла  $\gamma$  между силами  $\vec{N}$  и  $\vec{F}$  дает значение коэффициента силы трения скольжения бруска о поверхность гипотенузы:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{f_{mp}}{N} = \frac{kN}{N} = k. \quad (2.3)$$

### Описание установки и метода измерений

Установка (рис. 2.3) состоит из горизонтальной доски 1 с зажимами 2 и «рейсшины», имеющей линейку 3 (которая играет роль гипотенузы прямоугольного треугольника в рассматриваемой теории), шариковых направляющих 4 и винтов 5, которыми линейка может закрепляться на направляющих под разными углами  $\alpha$ . Движущимся телом является брусок 6. Линейка рейсшины сделана из металлического уголка, а бруска – из разных материалов.

Линейка рейсшины закрепляется на направляющих под углом  $\alpha$  не менее 45 градусов. Брусок помещается на доске справа от линейки, соприкасаясь с ней. При перемещении рейсшины слева направо наблюдается движение боковой грани бруска по поверхности линейки.

Пусть центр масс бруска переместился по доске на расстояние  $L_1L_2$ . Проекция перемещения на нормаль к уголку будет  $L_1M$ . Сравнивая рисунки 2.2 и 2.3, видим, что коэффициент силы трения скольжения бруска по линейке может быть определен по формуле (2.3).

Для отметок начального и конечного положения центра масс брусок имеет отверстие в своем геометрическом центре. Отметка производится карандашом через это отверстие на листе 7 бумаги, положенном на доску и закрепленном зажимами 2.

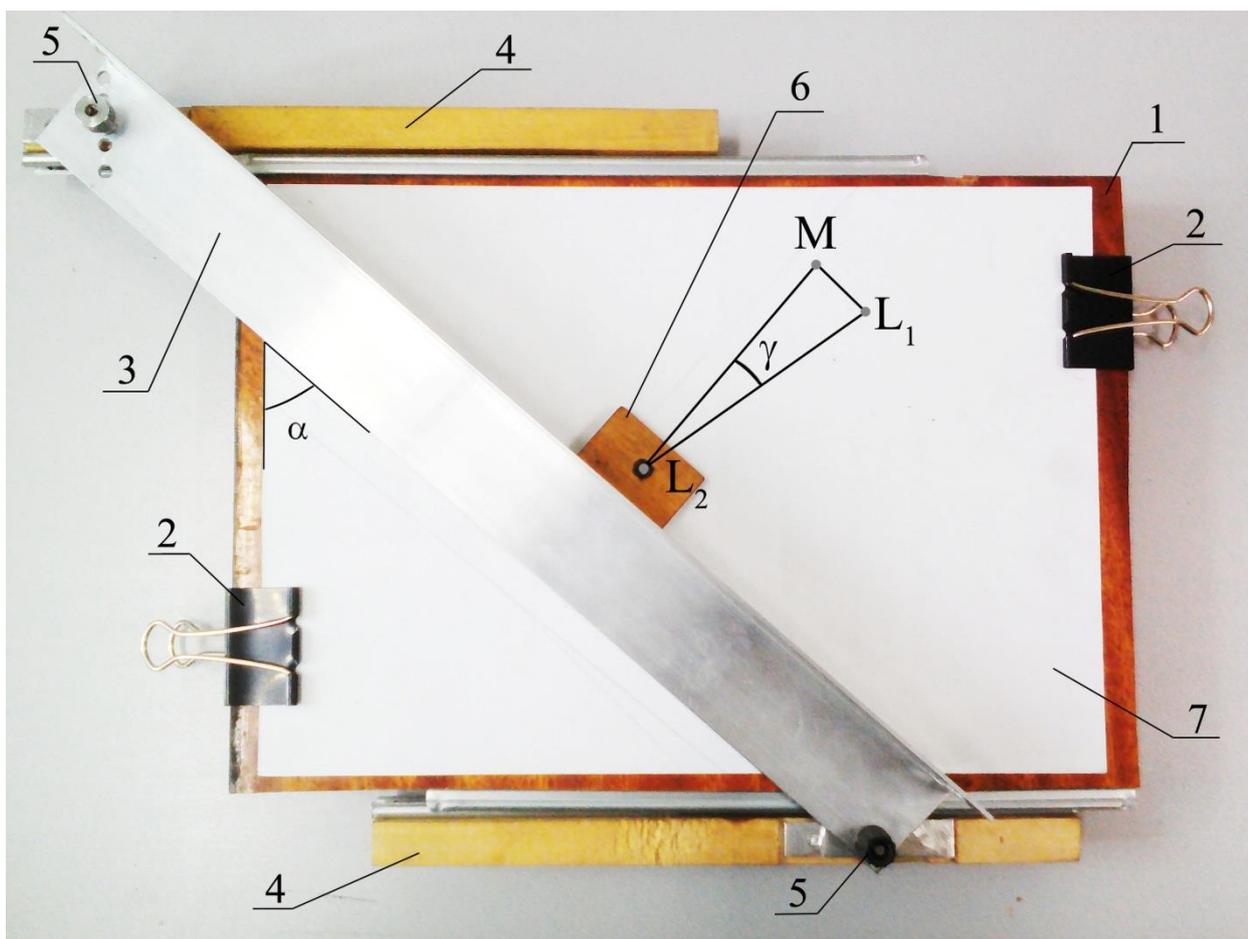


Рис. 2.3

### Порядок выполнения работы и обработка результатов измерений

1. На плоскость доски накладывается лист бумаги и закрепляется зажимом 2.

2. На бумагу помещается линейка рейсшины, направляющие которой до упора сдвинуты влево. К поверхности линейки прикладывается брусок. Очень осторожно, придерживая левой рукой рейсшину и брусок, отмечают остро отточенным карандашом начальное положение центра масс бруска (точка  $L_1$  на рис. 2.3).

3. Плавно и равномерно перемещают рейсшину до предела вправо. Осторожно, не сдвигая при этом бруска, отмечают новое положение центра масс (точка  $L_2$ ).

4. Через точки  $L_1$  и  $L_2$  проводят карандашом прямую, которая является траекторией движения бруска. Смещают линейку влево и с помощью прозрачного прямоугольного треугольника проводят карандашом нормаль к линейке из точки пересечения ее с траекторией. Тангенс угла между этими прямыми будет равен коэффициенту трения скольжения. Тангенс угла  $\gamma$  определяют из соотношения катетов прямоугольного треугольника, который получается путем пересечения этих прямых нормалью к одной из них по формуле

$$k = \operatorname{tg}\gamma = \frac{L_2 M}{L_1 M}. \quad (2.4)$$

5. Описанные в пунктах 3-4 операции повторяют для каждого бруска не менее пяти раз, варьируя в небольших пределах угол  $\alpha$ . Все результаты измерений заносят в таблицу 2.1.

6. После нахождения среднего значения коэффициента трения  $\bar{k}$  и заполнения столбцов таблицы 2.1 для каждого бруска вычисляют абсолютную погрешность определения  $k$  формуле

$$\Delta k = t_{p,n} \sqrt{\frac{\sum (\bar{k} - k_i)^2}{n(n-1)}},$$

где  $t_{p,n}$  - коэффициент Стьюдента при доверительной вероятности  $p = 0.95$  и заданном числе измерений  $n$ . Несмотря на то, что измерения коэффициента трения являются косвенными, полная погрешность результата находится, как при прямых измерениях. При этом оценивается лишь случайная погрешность. Это связано с тем, что условия опыта не повторяются, и измерения приводятся для разных по величине длин  $L_1 M$  и  $L_2 M$ .

7. Записывают окончательный результат в виде

$$k = \bar{k} \pm \Delta k$$

с указанием доверительной вероятности  $p = 0.95$ .

8. Вычисляют относительную погрешность  $E = \frac{\Delta k}{\bar{k}} \cdot 100\%$ .

7. Убедиться, что изменение величины силы трения между нижней поверхностью бруска и поверхностью доски не изменяет величину коэффициента трения. Для этого проводят еще одну серию измерений с одним из брусков, положив на брусок гирьку 200 г. В этом случае необходимо быть особенно осторожным, чтобы при наложении и снятии гирьки и отметке карандашом точек центра масс не сдвинуть брусок. Сопоставляют вычисленный для этого случая коэффициент трения с ранее полученной величиной.

**Таблица 2.1**

№ п/п	$\alpha$	$L_1 M$	$L_2 M$	$k$	$(\bar{k} - k_i)$	$(\bar{k} - k_i)^2$

### Контрольные вопросы

1. Что такое коэффициент трения?
2. Как зависит сила трения скольжения от скорости?
3. Чем отличается сухое трение от вязкого?
4. Нарисуйте схематически экспериментальную установку.

### Литература

1. *Матвеев А.Н.* Механика и теория относительности. М.: ОНИКС 21 век, Мир и Образование, 2003. 432 с.
2. *Савельев И.В.* Курс общей физики. Т.1: Механика, молекулярная физика. СПб.: Лань, 2007. 432 с.
3. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т.1: Механика. М.: ФИЗМАТЛИТ МФТИ; Изд-во МФТИ, 2002. 560 с.
4. *Стрелков С.П.* Механика. СПб.: Лань, 2005. 560 с.

### 3. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

## ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНОВ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ НА КРЕСТООБРАЗНОМ МАЯТНИКЕ ОБЕРБЕКА

#### Цель работы:

1. Проверить выполнение основного закона динамики вращательного движения.
2. Определить момент инерции маятника.
3. Исследовать зависимость момента инерции от расположения грузов на крестовине.

**Принадлежности:** маятник Обербека, секундомер, рулетка, грузики, штангенциркуль.

#### Краткие теоретические сведения

Величиной, характеризующей действие силы на вращающееся тело, является момент силы. Различают момент силы относительно точки и относительно оси. Моментом силы относительно точки  $O$  (рис. 3.1) называют векторное произведение радиус-вектора  $\vec{r}$  на силу  $\vec{F}$ :

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (3.1)$$

Аналогично определяется момент импульса  $\vec{L}$  материальной точки относительно полюса  $O$ :

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}. \quad (3.2)$$

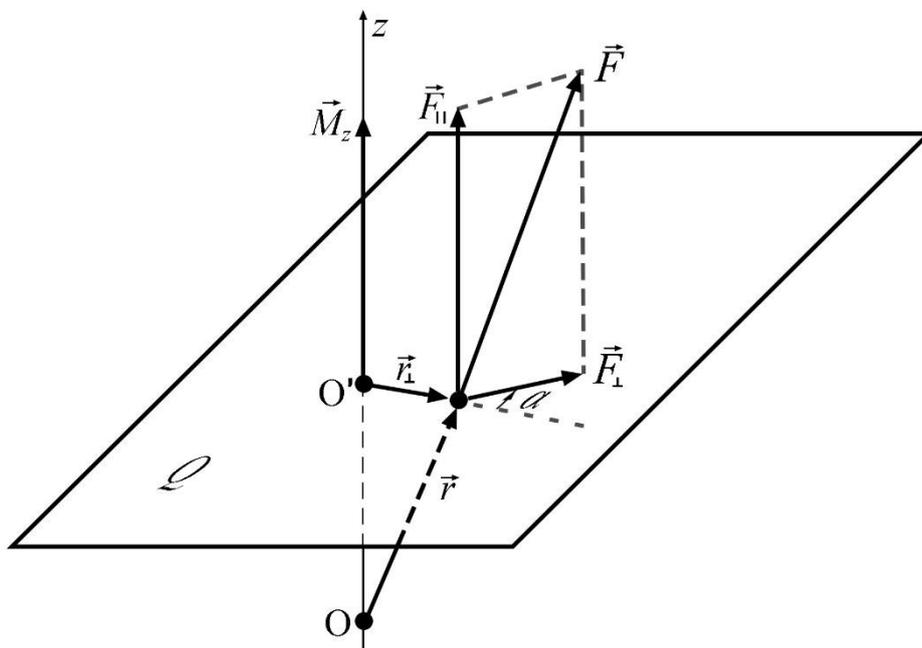


Рис. 3.1

Моменты импульса и силы связаны между собой важным соотношением:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \quad (3.3)$$

которое называется уравнением моментов. Для системы материальных точек под  $\vec{M}$  в уравнении (3.3) понимают момент внешних сил.

Моментом импульса и силы относительно произвольной оси  $z$  (рис. 3.1) называют проекции векторов  $\vec{L}$  и  $\vec{M}$  на эту ось, в предположении, что точка  $O$ , относительно которой вычислены  $\vec{L}$  и  $\vec{M}$ , лежит на рассматриваемой оси. Уравнение называют уравнением моментов относительно неподвижной оси  $z$ .

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z. \quad (3.4)$$

Величина момента силы относительно оси вычисляется по формуле

$$M_z = r_{\perp} \cdot F_{\perp} \cdot \sin \alpha, \quad (3.5)$$

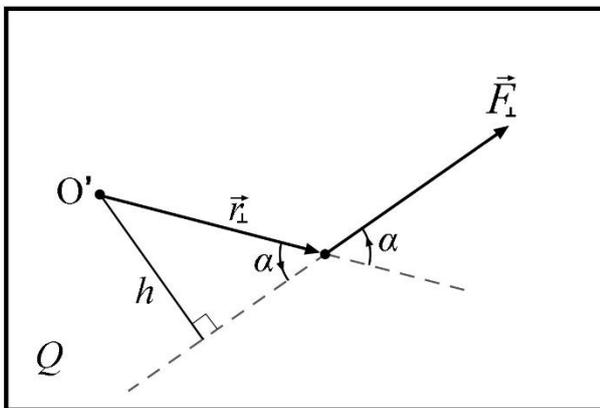


Рис. 3.2

где  $r_{\perp}$  и  $F_{\perp}$  – составляющие радиус-вектора и силы, лежащие в плоскости  $Q$ , перпендикулярной оси  $z$ ;  $\alpha$  – угол между направлениями  $r_{\perp}$  и  $F_{\perp}$ . Из рис. 3.2, на котором отдельно изображена плоскость  $Q$ , видно, что  $r_{\perp} \sin \alpha = h$ . Таким образом,

$$M_z = F_{\perp} \cdot h, \quad (3.6)$$

т.е. величина момента силы относительно оси равна произведению проекции силы на плоскость, перпендикулярную оси вращения, на кратчайшее расстояние (плечо) от оси вращения до линии, вдоль которой направлена составляющая силы  $F_{\perp}$ .

Момент силы относительно оси является алгебраической величиной. Следует приписывать разные знаки моментам сил, стремящимся повернуть тело в противоположных направлениях вокруг оси.

Моментом инерции материальной точки относительно оси вращения называют произведение массы точки на квадрат расстояния ее  $r_i$  от оси. Момент инерции  $I$  тела есть сумма моментов инерции всех его материальных точек:  $I = \sum m_i \cdot r_i^2$ . Если известно распределение плотности тела, то момент инерции тела можно найти интегрированием по объему тела:

$$I = \int_V \rho \cdot r^2 dV. \quad (3.7)$$

Для тел сложной формы момент инерции проще определить экспериментальными методами.

В случае вращающегося вокруг неподвижной оси твердого тела момент импульса  $L_z = I\omega$ , где  $I$  – момент инерции тела относительно оси вращения,  $\omega$  – угловая скорость. Подставляя это выражение в (3.4), получаем основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси:

$$I \frac{d\omega}{dt} = M_z \quad \text{или} \quad I\varepsilon = M_z, \quad (3.8)$$

где  $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$  – угловое ускорение. Уравнение (3.8) напоминает уравнение Ньютона для движения материальной точки: роль массы играет момент инерции, роль скорости – угловая скорость, роль силы – момент силы. Далее индекс у  $M_z$  будет опускаться и под  $\vec{M}$  будет пониматься момент силы относительно оси вращения.

В данной работе экспериментально исследуется основное уравнение динамики вращательного движения.

### Описание установки и метода измерений

Прибор (маятник Обербека) представляет собой маховик крестообразной формы (рис. 3.3). На четырех взаимно перпендикулярных стержнях 1 укреплены грузы 2 массой  $m_0$ . Момент инерции крестовины можно менять, передвигая грузы 2 вдоль стержней. На общей оси с маятником находится шкив 3 радиуса  $R$ . На шкив намотана нить 4 с привязанным к ней грузом 5 массы  $m$ . Опускаясь, груз приводит маятник в равноускоренное вращательное движение.



Рис. 3.3

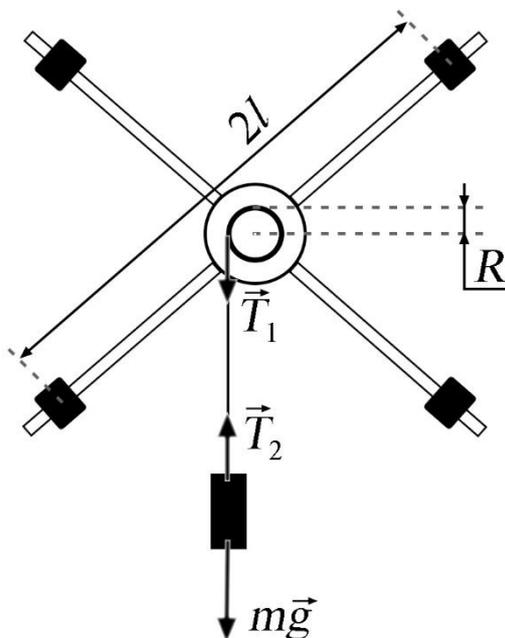


Рис. 3.4

Согласно рис. 3.4, вращательный момент  $\vec{M}$ , действующий на маховик, создается силой натяжения нити  $\vec{T}_1$  и по величине равен  $M = T_1 \cdot R$ . Уравнения движения груза массы  $m$  имеет вид

$$mg - T_2 = ma, \quad (3.9)$$

где  $a$  – его линейное ускорение. Силы натяжения равны  $T_1 = T_2 = T$  по третьему закону Ньютона. Следовательно,

$$M = m(g - a)R. \quad (3.10)$$

Массу  $m$  находят путем взвешивания груза. Измеряя время  $t$  падения груза  $m$  из состояния покоя на расстояние  $h$ , можно найти ускорение груза:

$$a = \frac{2h}{t^2}, \quad (3.11)$$

которое связано с угловым ускорением  $\varepsilon$  соотношением

$$a = \varepsilon R. \quad (3.12)$$

Если момент сил трения  $M_{mp}$  соизмерим с моментом силы натяжения нити  $M$ , то его необходимо учитывать в уравнении динамики вращательного движения:

$$M - M_{mp} = I\varepsilon. \quad (3.13)$$

Уменьшить относительную роль момента сил трения можно было бы, увеличивая массу  $m$ . Однако при этом с увеличением  $m$  уменьшается время падения  $t$  и снижается точность измерения времени.

### Порядок выполнения работы и обработка результатов измерений

1. Штангенциркулем измеряют диаметр шкива  $D = 2R$ .
2. Устанавливают грузы  $m_0$  на концы стержней крестовины на расстоянии  $l_1$  от оси маятника таким образом, чтобы маятник находился в безразличном равновесии. Проверяют, хорошо ли сбалансирован маятник.
3. Укрепляют на нити груз с некоторой массой  $m$ . Отпустив без толчка маятник, с помощью секундомера определяют время падения груза  $m$  с высоты  $h$ . Результаты измерений заносят в таблицу 3.1 (причем масса груза  $m$  записывается с учетом массы стакана, в который помещается груз, при его наличии).
4. Повторяют опыт для различных значений массы  $m$ , не изменяя при этом положение грузиков на крестовине. Данные заносят в таблицу 3.1.
5. Результаты эксперимента представляют в виде графика, по оси абсцисс которого откладывают величину  $\varepsilon$ , по оси ординат –  $M$ .
6. На основании графика определяют  $I_1$  и  $M_{mp}$ . Момент инерции находят как тангенс угла наклона графика к оси абсцисс, а момент сил трения получают, продлив график до пересечения с осью ординат.
7. Повторяют эксперименты, описанные в п. 2-6, для другого положения грузов  $m_0$ . Результаты заносят в таблицу 3.1 и отображают на том же графике. Из графика определяют  $I_2$  и  $M_{mp}$ .

Таблица 3.1

	$h =$	$D = 2R =$		$l =$	
№ п/п	$m$	$t$	$a$	$\varepsilon$	$M$

### Контрольные вопросы

1. Какими физическими величинами характеризуется вращение твердого тела вокруг неподвижной оси?
2. Что такое момент инерции точки, твердого тела? От чего он зависит? В каких единицах измеряется?
3. Чему равен момент инерции цилиндра, диска, стержня, шара?
4. Что такое угловая скорость? Как она связана с линейной скоростью?
5. Что такое угловое ускорение? Как оно связано с линейным ускорением?
6. Что такое момент силы? Плечо силы?
7. Как записывается и читается основной закон динамики вращательного движения твердого тела?
8. Что представляет собой маятник Обербека?
9. В чем заключается в работе проверка основного уравнения динамики твердого тела?
10. Выведите рабочие формулы.
11. При любом ли расположении масс на крестовине их можно считать точечными? Чему равен момент инерции крестовины в предположении точечности масс  $m_0$ ?
12. Укажите возможные причины ошибок эксперимента. Оцените точность измерений.
13. Как практически определяется момент сил трения?

### Литература

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.1: Механика, молекулярная физика. СПб.: Лань, 2007. 432 с.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики: учеб. пособие. Т.1: Механика. М.: ФИЗМАТЛИТ МФТИ; Изд-во МФТИ, 2002. 560 с.
3. Трофимова Т.И. Курс физики: учеб. пособие для вузов. М.: Изд. центр «Академия», 2006. 560 с.

#### 4. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5

### ИЗУЧЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛ, БРОШЕННЫХ ПОД УГЛОМ К ГОРИЗОНТУ

#### Цель работы:

1. Определить начальную скорость пули.
2. Определить зависимость дальности полета пули от угла.

**Принадлежности:** горизонтальная плоскость, пружинный пистолет, набор пуль.

#### Краткие теоретические сведения

Тело, брошенное под углом  $\alpha$  к горизонту с начальной скоростью  $\vec{v}_0$ , будет двигаться по криволинейной траектории, в любой точке которой вектор скорости может быть разложен на две составляющие – горизонтальную и вертикальную (рис. 4.1).

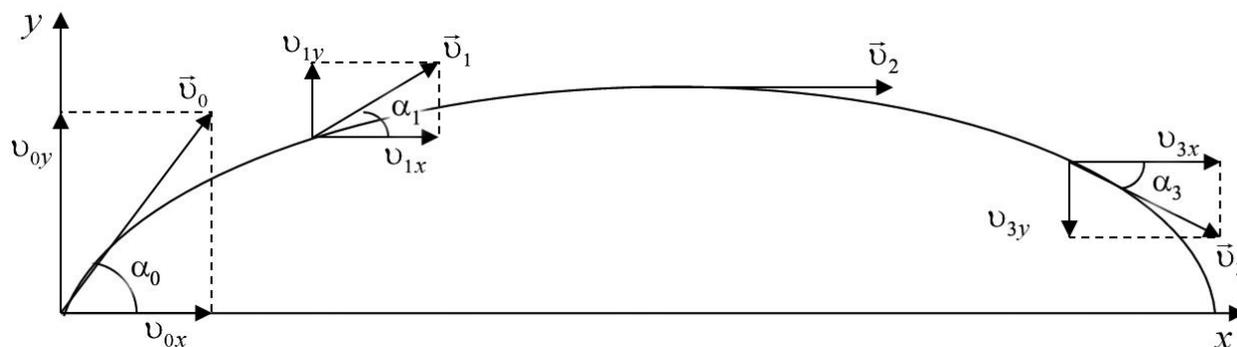


Рис. 4.1

Проекции этих векторов на оси координат, начало которых выбрано в точке бросания, равны:

$$\begin{aligned}v_x &= v_0 \cos \alpha, \\v_y &= v_0 \sin \alpha - gt.\end{aligned}\tag{4.1}$$

При этом горизонтальная составляющая скорости не будет меняться с течением времени, так как ускорение свободного падения не имеет горизонтальной составляющей, а направлено вертикально вниз. Вертикальная составляющая скорости будет меняться по закону равнопеременного движения с ускорением  $a = g$ .

Изменение координат тела имеет вид

$$\begin{aligned}x &= v_0 t \cdot \cos \alpha, \\y &= v_0 t \cdot \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}.\end{aligned}\tag{4.2}$$

Траектория тела, брошенного под углом к горизонту, представляет собой параболу. В вершине этой параболы вертикальная составляющая скорости равна нулю. В точке падения скорость тела равна по абсолютной величине

скорости тела в точке бросания, а направление ее составляет тот же угол, что и в точке бросания. Это следует из симметрии параболы и имеет место в отсутствие сопротивления воздуха.

Начальную скорость тела, брошенного под углом к горизонту можно определить из уравнения (4.2).

$$v_0 = \frac{l}{t \cdot \cos \alpha}, \quad (4.3)$$

где  $l$  – дальность полета, т.е. изменение положения тела по оси  $x$ .

Время полета можно определить из уравнения (4.2). В наивысшей точке траектории движения тела скорость  $v_y = 0$ . Время, соответствующее этому моменту, составляет половину всего времени полета тела, тогда

$$0 = v_0 \sin \alpha - \frac{gt}{2},$$

отсюда время полета тела

$$t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}. \quad (4.4)$$

Подставляя (4.4) в (4.3), получим

$$v_0 = \sqrt{\frac{l \cdot g}{\sin 2\alpha}}. \quad (4.5)$$

### Описание установки и метода измерений

Установка состоит из горизонтальной плоскости, на которой расположен пружинный пистолет. Чтобы зарядить пистолет, необходимо вставить пулю хвостовой частью в ствол пистолета и нажимать на нее до тех пор, пока не сработает фиксатор. Выстрел производится нажатием на рычаг фиксатора. Изменение угла осуществляется при помощи транспортира, закрепленного на горизонтальной плоскости.

### Порядок выполнения работы и обработка результатов измерений

**Внимание!** При выполнении лабораторных работ с применением полетов баллистических тел не следует находиться в области полета тела.

1. Установить на транспортире угол  $\alpha = 5^\circ$ .
2. Зарядить пистолет пулей.
3. Определить по линейке дальность полета пули  $l$  (не менее трех раз).
4. Пункты 1, 2, 3 повторить для других значений угла  $\alpha = 10^\circ, 15^\circ, 20^\circ, 25^\circ, 30^\circ, 35^\circ, 40^\circ, 45^\circ, 50^\circ, 55^\circ$ .
5. Данные измерений записать в таблицу 4.1.
6. По формуле (4.5) определить начальную скорость  $v_0$  для средних значений  $l$ .
7. Найти среднее значение скорости  $v_0$ .
8. Определить полуширину доверительного интервала по формуле Стьюдента

$$\Delta v_0 = t_{p,n} \sqrt{\frac{\sum (\bar{v}_0 - v_{0i})^2}{n(n-1)}},$$

где  $t_{p,n}$  – коэффициент Стьюдента при доверительной вероятности  $p = 0.95$  и числе измерений  $n$ . Поскольку результаты опыта не повторяются (измерения делаем для разных углов), расчет абсолютной погрешности здесь производится как при прямых измерениях, хотя начальная скорость пули определяется косвенным образом через другие непосредственно измеряемые величины.

9. Окончательный результат записать в виде  $v_0 = \bar{v}_0 \pm \Delta v_0$  с указанием доверительной вероятности  $p = 0.95$ .

10. Вычислить относительную погрешность в процентах  $E = \frac{\Delta v_0}{\bar{v}_0} \cdot 100\%$ .

11. Построить график зависимости дальности полета пули  $l$  от угла бросания  $\alpha$ .

12. Построить график зависимости  $l = l(\sin 2\alpha)$ .

13. Повторить пункты 6-13 для другой пули.

**Таблица 4.1**

№ п/п	$\alpha$	$\sin 2\alpha$	$l$ , м	$v_0$ , м/с	$(\bar{v}_0 - v_{0i})$ , м/с	$(\bar{v}_0 - v_{0i})^2$ , (м/с) <sup>2</sup>
1.	5°					
2.	5°					
3.	5°					
Сред.						
...						

### Контрольные вопросы

- Докажите, что траектория движения пули представляет собой параболу.
- Как можно определить высоту подъема пули?
- Изобразите примерные графики зависимости от времени:
  - модуля вектора скорости,
  - модуля тангенциального ускорения,
  - модуля нормального ускорения,
  - модуля вектора скорости.
- Определите угол падения тела.
- Найдите радиус кривизны траектории.

### Литература

- Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т.1: Механика. М.: ФИЗМАТЛИТ МФТИ; Изд-во МФТИ, 2002. 560 с.
- Стрелков С.П. Механика. СПб.: Лань, 2005. 560 с.

## ИЗУЧЕНИЕ СИЛЫ ТРЕНИЯ ПОКОЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТРЕНИЯ

**Цель работы:** определение коэффициента трения покоя тел по горизонтальной поверхности, состоящей из различных материалов.

**Принадлежности:** лабораторная установка, набор грузов, набор пластин

### Краткие теоретические сведения

Силы трения возникают при непосредственном соприкосновении тел. Они препятствуют движению каждого из соприкасающихся тел относительно друг друга или препятствуют самому возникновению этого движения.

Если на поверхность горизонтального стола положить тяжелое тело, то оно будет давить на стол с весом  $P$ , который уравнивается силой нормального давления  $N$ , действующей на тело со стороны стола. Потянем брусок вдоль стола с горизонтальной силой  $F$ . Пока эта сила достаточно мала, тело останется в покое. Значит, кроме силы  $F$  на тело действует другая сила, уравнивающая первую. Это сила трения. Она действует со стороны стола на тело и приложена к поверхности их соприкосновения.

Поскольку эта сила возникает, когда тело еще не скользит по поверхности стола, то она называется *силой трения покоя*. Если немного увеличить силу  $F$  – тело останется в покое. Это означает, что вместе с силой  $F$  увеличивается и сила трения покоя  $F_{\text{тр}}$ , все время оставаясь равной приложенной силе. Сила трения покоя не может быть больше приложенной силы. Очевидно, что под действием силы  $F_{\text{тр}}$  движение тела в направлении, противоположном силе  $F$ , никогда не возникает. Если еще увеличить силу  $F$ , то в итоге тело получит ускорение и начнет скользить по столу в направлении действия этой силы. Отсюда сила трения покоя меньше приложенной силы и может увеличиваться только до некоторого предела. Этот предел является наибольшей силой трения покоя и определяется непосредственно перед моментом, когда только-только начинается движение.

При изменении направления силы  $F$  тело придет в движение только тогда, когда эта сила превысит указанный предел. Таким образом, одновременно с изменением направления приложенной силы  $F$  изменяется и направление силы трения покоя  $F_{\text{тр}}$ . Так что сила трения покоя равна по модулю и противоположна по направлению той внешней силе, которая стремится вызвать скольжение одного тела по поверхности другого.

Часто под силой трения покоя имеют в виду наибольшее значение этой силы. Если нагружать тело грузами различных масс, то значение максимальной силы трения покоя будет изменяться пропорционально силе реакции опоры  $N$  (или силы нормального давления груза на опору). Следовательно, можно записать

$$F_{\text{тр}} = kN, \quad (5.1)$$

где  $k$  – постоянная величина, которая называется *коэффициентом трения покоя*. Для разных материалов коэффициенты трения покоя различны.

С практической точки зрения коэффициент трения покоя для заданных материалов определяется по формуле

$$k = \frac{F_{\text{тр}}}{N}. \quad (5.2)$$

Коэффициент трения покоя зависит от вещества соприкасающихся тел, поэтому его находят для каждой пары материалов (железо – дерево, железо – железо и др.). Кроме того, коэффициент трения для данной пары веществ зависит от свойств их поверхностей. Для гладких поверхностей коэффициент трения значительно меньше.

### Описание установки и метода измерений

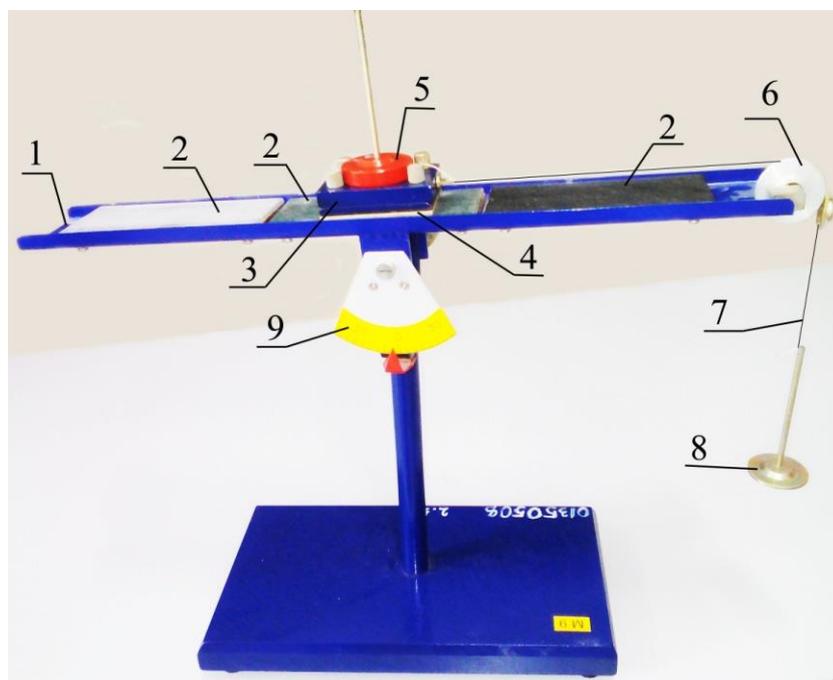


Рис. 5.1

Схема лабораторной установки изображена на рис. 5.1. На плоскости 1, которая может наклоняться, закреплены три поверхности 2 из разных материалов. На этой плоскости устанавливают основание 3, к которому с помощью винтов присоединяют снизу исследуемые пластины 4. На стержень основания надевают груз 5. Плоскость 1 содержит блок 6, через который перекинута нить 7. Нить 7 соединяет основание 3 с подвесом 8. Угол наклона плоскости 1 измеряется с помощью угломера 9. Основание 3 подвижно, его можно устанавливать на каждую из поверхностей 2. В работе определяется масса подвеса 8, необходимая для того, чтобы основание 3 пришло в движение.

На рис. 5.2. показаны силы, действующие на нагруженное основание, лежащее на наклоненной под углом  $\alpha$  к горизонту плоскости. Согласно второму закону Ньютона, если основание находится в состоянии покоя, силы уравновешивают друг друга:

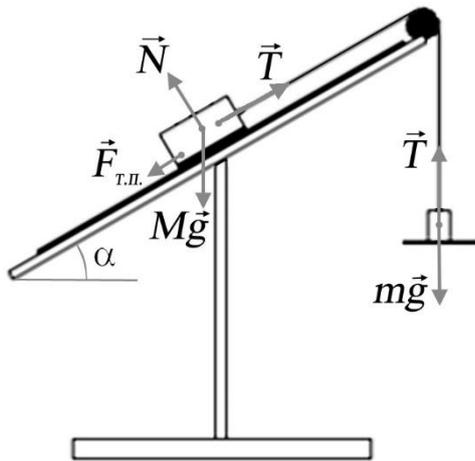


Рис. 5.2

$$F_{\text{тр}} + Mg \sin \alpha = T, \quad (5.3)$$

где  $M = M_0 + M_{\text{пл}} + M_{\text{гр}}$  – масса основания 3 с пластиной 4 и грузом 5,  $T$  – сила натяжения нити.

Или с учетом (5.1)

$$kN + Mg \sin \alpha = T, \quad (5.4)$$

$$N = Mg \cos \alpha.$$

На неподвижный подвес с общей массой  $m = m_0 + m_{\text{гр}}$  действуют силы:

$$T = mg. \quad (5.5)$$

Подставляя (5.5) в (5.4), получаем выражение для коэффициента трения

покоя:

$$k = \frac{m - M \sin \alpha}{M \cos \alpha}. \quad (5.6)$$

Если плоскость расположена горизонтально ( $\alpha = 0$ ), коэффициент трения покоя определяется отношением масс подвеса и основания:

$$k = \frac{m}{M}. \quad (5.7)$$

### Порядок выполнения работы и обработка результатов измерений

По согласованию с преподавателем выбрать одну из пластин 4 и закрепить ее снизу к основанию 3 с помощью винтов (рис. 5.1). Скорректировать длину нити 7 так, чтобы подвес 8 не касался стола, на котором находится установка.

#### Упражнение № 1

#### Определение коэффициента трения при нулевом угле наклона плоскости

1. На технических весах измерить массы основания  $M_0$ , выбранной пластины  $M_{\text{пл}}$  и подвеса  $m_0$ . Данные записать над таблицей 5.1.

2. Положить основание на поверхность, находящуюся на горизонтальной плоскости (рис. 5.1).

3. Положить на подвес груз наименьшей массы.

4. Добавляя грузы и устанавливая их на подвес, увеличивать массу до того момента, пока основание не начнет свое движение. Записать общую массу добавленных грузов  $m_{\text{гр}}$  в таблицу 5.1, предварительно взвесив их на технических весах.

5. Провести измерения пунктов 3-4 для следующих масс дополнительных грузов  $M_{\text{гр}}$  на основании: 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700 г. Заносить в таблицу 5.1 данные о массе дополнительных грузов  $M_{\text{гр}}$  на основании.

6. Повторить пункты 2-5 для оставшихся двух поверхностей 2 (рис. 5.1). Данные опытов записать в таблицу 5.1.

7. Вычислить общую массу подвеса  $m = m_0 + m_{ep}$  и общую массу основания  $M = M_0 + M_{nl} + M_{ep}$ . Заполнить таблицу 5.1.

8. Построить графики зависимости общей массы подвеса  $m$ , при которых основание начинает свое движение, от общей массы основания  $M$  для трех разных поверхностей. По графикам определить коэффициент трения покоя для каждой поверхности, как тангенс угла наклона графика к оси абсцисс.

9. По усмотрению преподавателя выполнить пункты 1-8 для другой пластины 4, которая закрепляется на основании 3.

**Таблица 5.1**

$m_0 =$  кг;  $M_0 =$  кг;  $M_{nl} =$  кг

№ п/п	$M_{ep}$ , кг	$m_{ep}$ , кг	$M$ , кг	$m$ , кг
Поверхность А				
1				
...				
6				
Поверхность Б				
1				
...				
6				
Поверхность С				
1				
...				
6				

### Упражнение № 2

#### **Определение коэффициента трения при разных углах наклона плоскости**

1. Ослабляя винт и используя угломер 9 (рис. 5.1), повернуть плоскость 1 на угол  $\alpha = 5^\circ$  так, как показано на рис. 5.2. Тем же винтом зафиксировать наклонную плоскость 1.

2. Провести измерения для выбранной в упражнении № 1 пластины 4, закрепив ее снизу на основание 3, и одной поверхности 2 (рис. 5.1). Выполнить пункты 2-7 упражнения № 1, используя три разных груза на основании массой  $M_{ep}$  (например,  $M_{ep} = 100, 200$  и  $300$  г), и занести данные опытов в таблицу 5.2.

3. Выполнить измерения в пунктах 1-2 для других углов наклона плоскости  $\alpha = 10^\circ, 15^\circ, 20^\circ, 25^\circ$  и заполнить таблицу 5.2.

4. Вычислить коэффициент трения покоя  $k$  по формуле (5.6). Найти его среднее значение  $\bar{k}$  для каждого угла  $\alpha$ .

5. При каждом заданном угле  $\alpha$  определить полуширину доверительного интервала по формуле Стьюдента

$$\Delta k = t_{p,n} \sqrt{\frac{\sum (\bar{k} - k_i)^2}{n(n-1)}},$$

где  $t_{p,n}$  – коэффициент Стьюдента при доверительной вероятности  $p = 0.95$  и числе измерений  $n$ .

6. Для каждого угла записать окончательный результат в виде  $k = \bar{k} \pm \Delta k$  с указанием доверительной вероятности  $p = 0.95$  и величины угла  $\alpha$ .

7. Построить график зависимости коэффициента трения покоя  $k$  от угла наклона плоскости  $\alpha$  с указанием на графике найденных доверительных интервалов. Сделать выводы по графику.

**Таблица 5.2**

№ п/п	$\alpha$	$M_{sp}$ , кг	$m_{sp}$ , кг	$k$	$(\bar{k} - k_i)$	$(\bar{k} - k_i)^2$
	0°					
	0°					
	0°					
Сред.						
$\Sigma$						
...						

### Контрольные вопросы

1. Что такое коэффициент трения покоя?
2. От чего зависит максимальная сила трения покоя?
3. Чем отличается сухое трение от вязкого?
4. Отличаются ли коэффициенты трения покоя и скольжения по величине?

Если да, то почему.

5. Как влияет угол наклона плоскости на максимальную силу трения покоя и коэффициент трения покоя?

6. Нарисуйте схематически экспериментальную установку.

### Литература

1. Ландсберг Г.С. Элементарный учебник физики.. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2018. Т.1. 612 с.
2. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности. М.: ООО Издат. дом ОНИКС 21 век: ООО Изд-во Мир и Образование, 2003. 432 с.
3. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.1: Механика, молекулярная физика. СПб.: Лань, 2007. 432 с.
4. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т.1: Механика. М.: ФИЗМАТЛИТ МФТИ; Изд-во МФТИ, 2002. 560 с.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТРЕНИЯ СКОЛЬЖЕНИЯ ТЕЛ ПО НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ

**Цель работы:** определить коэффициент трения скольжения между бруском с деревянной и металлической поверхностями и деревянной поверхностью.

**Принадлежности:** установка ЛТЭ (наклонная плоскость, исследуемый брусок с деревянной и металлической поверхностями).

### Краткие теоретические сведения

Если твердое тело скользит по поверхности, то между телом и поверхностью возникают силы трения скольжения. Сила трения скольжения  $\vec{F}_{\text{тс}}$ , действующая на тело, направлена противоположно относительной скорости этого тела. На поверхность, по которой скользит тело, также действует сила трения скольжения, направленная противоположно силе трения скольжения, действующей на тело (в соответствии с третьим законом Ньютона). Если соприкасающиеся поверхности достаточно гладкие, то сила трения скольжения  $\vec{F}_{\text{тс}}$  пропорциональна силе нормального давления  $\vec{N}$  и практически не зависит от скорости скольжения тела. В этом случае выполняется закон

$$F_{\text{тс}} = k N, \quad (6.1)$$

где безразмерный множитель  $k$  называется коэффициентом трения.

Если твердое тело лежит на поверхности, то оно может оставаться в покое и в том случае, когда на тело действуют достаточно малые тангенциальные силы, т. е. силы, действующие вдоль поверхности. В этом случае между телом и поверхностью возникает сила трения покоя, которая компенсирует приложенную силу.

При возрастании внешней силы увеличивается и сила трения покоя. Однако сила трения покоя не может расти беспредельно. Существует максимальная сила трения покоя, которая для достаточно гладких поверхностей пропорциональна силе нормального давления. Максимальная сила трения покоя  $F_{\text{макс}}$  несколько меньше  $F_{\text{тс}}$ , но для достаточно гладких поверхностей это различие может быть несущественным. Если внешняя сила превысит  $F_{\text{макс}}$ , то тело начнет скользить по поверхности.

Рассмотрим движение груза массой  $m$  по наклонной плоскости (рис 6.1). Уравнение движения груза по наклонной плоскости имеет вид

$$ma = mg \sin \alpha - F_{\text{тс}}, \quad (6.2)$$

где  $\alpha$  – угол наклона плоскости.

Определим значение коэффициента  $k$  и скорость движения груза  $v$ . Предполагая, что зависимость  $k(v)$  в пределах условий эксперимента будет незначительной, можно считать, что ускорение движения не изменится. Тогда для случаев, когда начальная скорость  $v_0 = 0$ ,

$$a = \frac{2S}{t^2}. \quad (6.3)$$

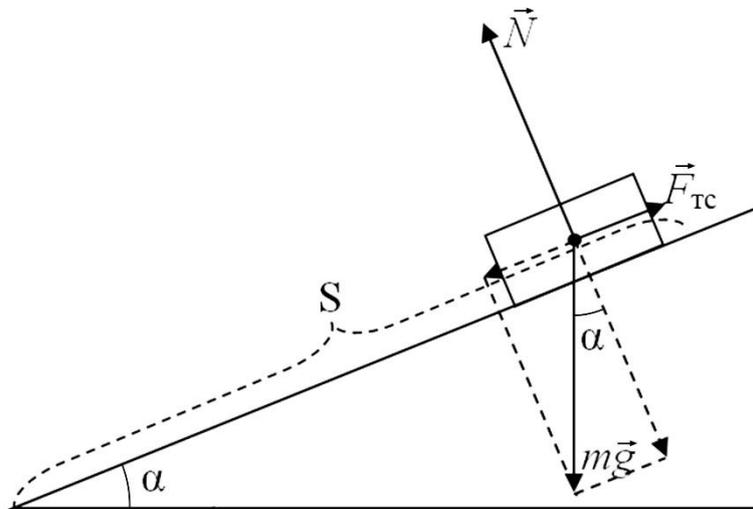


Рис. 6.1

Используя формулы (6.1), (6.2) и (6.3), получим

$$k = \operatorname{tg} \alpha - \frac{2S}{gt^2 \cos \alpha}. \quad (6.4)$$

### Описание установки и метода измерений

Для проведения лабораторной работы используется установка ЛТЭ. Установка состоит из механического блока БМ2-02 и электронного секундомера СЭ1. Механический блок состоит из наклонной плоскости 1 (рис. 6.2). Стопорный винт 2 позволяет изменять угол наклона плоскости и устанавливать заданный угол с помощью отчетного устройства 3 и указателя 4. Электромагнит 5 служит для фиксации исследуемого бруска 6. Кнопка «СТОП» с ограничителем 7 используется для остановки образца. Для определения времени движения исследуемого образца по наклонной плоскости используется электронный секундомер 8. Включение секундомера производится кнопкой «СЕТЬ». При этом загорается индикатор времени и индикатор первого режима (в данной лабораторной работе используется только первый режим, не следует бездумно нажимать другие кнопки, это может привести к порче прибора!). Для включения отчета времени используется кнопка «ПУСК». После нажатия «ПУСК» включается электромагнит, начинается отсчет времени. После срабатывания фотодатчика отсчет времени прекращается, выключается электромагнит. Остановку счета времени можно произвести нажатием кнопки «СТОП/СБРОС». Повторное нажатие этой кнопки приведет к сбросу показаний индикатора.

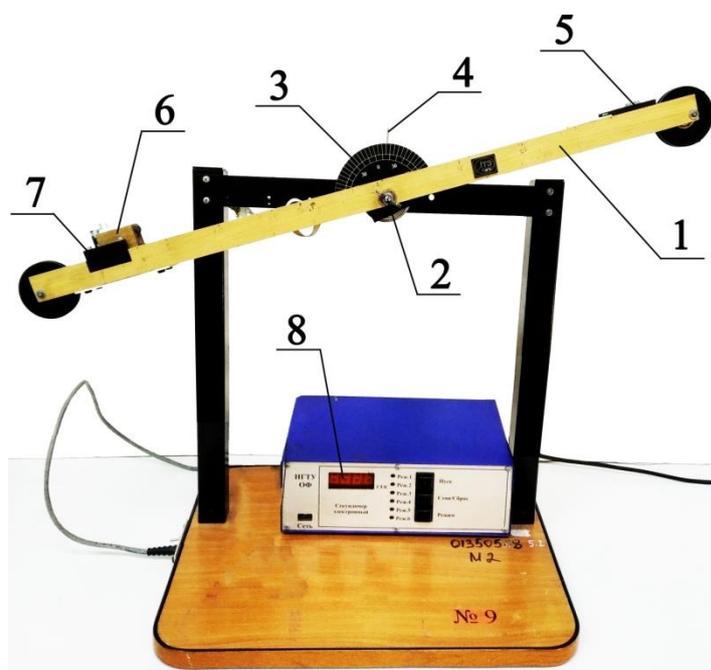


Рис.6.2

### Порядок выполнения работы

1. Протереть поверхность плоскости 1 (рис. 6.2) ватным тампоном.
2. На плоскости 1 установить брусок 6 металлической поверхностью вниз. Увеличивая угол наклона плоскости, найти минимальный угол  $\alpha_{\min}$ , при котором брусок начинает скользить.
3. Для установки угла нужно ослабить стопорный винт 2 и повернуть плоскость на требуемый угол по часовой стрелке. Контроль угла осуществляется при помощи указателя 4 и отсчетного устройства 3. Зафиксировать положение стопорным винтом 2. Значение угла записать в таблицу 6.1.
4. Секундомер 8 перевести в режим 1.
5. На верхний правый конец наклонной плоскости установить брусок металлической поверхностью вниз, где он будет зафиксирован электромагнитом 5.
6. Включить кнопку «ПУСК» секундомера. Записать значение времени движения образца в таблицу 6.1. Опыт провести не менее 3 раз. Отсчет пройденного расстояния  $S$  провести по линейке.
7. Повторить пункты 2-6, каждый раз устанавливая новый угол с шагом  $5^\circ$  вплоть до  $50^\circ$ .
8. Перевернуть брусок деревянной поверхностью вниз. Повторить пункты 2-7. Данные для материала дерево – дерево записать в таблицу, аналогичную таблице 6.1.

### Обработка результатов измерений

1. По формуле (6.4) определить коэффициент трения скольжения  $k$  для бруска с металлической поверхностью.

Таблица 6.1

 $S =$ 

№ п/п	Материал	$t$	$\alpha$	$k$	$(\bar{k} - k_i)$	$(\bar{k} - k_i)^2$
	Дерево – алюминий		$\alpha = \alpha_{\min}$			
1						
2						
3						
Сред.						
	Дерево – алюминий		$\alpha = \alpha_{\min} + 5^\circ$			
1						
2						
3						
Сред.						
...	...	...	...	...	...	...
	Дерево – алюминий		$\alpha = 50^\circ$			
1						
2						
3						
Сред.						
Среднее значение $\bar{k}$ по всем углам						
Сумма $(\bar{k} - k_i)^2$ по всем углам						

2. Найти среднее арифметическое коэффициента  $k$  для каждого из углов и построить график зависимости этого значения от угла  $k(\alpha)$ .

3. Определить  $\bar{k} = \frac{\sum k_i}{n}$  как среднее арифметическое коэффициентов трения по всем углам, где  $n$  – общее число измерений для данного материала. Найти отклонения коэффициентов  $k_i$  от  $\bar{k}$ . Результаты записать в таблицу 6.1.

4. Определить полуширину доверительного интервала по формуле Стьюдента

$$\Delta k = t_{p,n} \sqrt{\frac{\sum (\bar{k} - k_i)^2}{n(n-1)}},$$

где  $t_{p,n}$  – коэффициент Стьюдента при доверительной вероятности  $p = 0.95$  и числе измерений  $n$ . Поскольку результаты опыта не повторяются (измерения делаем для разных углов), расчет абсолютной погрешности здесь производится как при прямых измерениях, хотя коэффициент трения определяется косвенным образом через другие непосредственно измеряемые величины.

5. Окончательный результат записать в виде  $k = \bar{k} \pm \Delta k$  с указанием доверительной вероятности  $p = 0.95$ .

6. Записать относительную погрешность в процентах  $E = \frac{\Delta k}{\bar{k}} \cdot 100\%$ .

7. Повторить пункты 1-6 для бруска с деревянной поверхностью.

### Контрольные вопросы

1. Какие виды трения Вам известны?
2. Перечислите все факторы, от которых зависит сила трения скольжения.
3. Зависит ли сила трения скольжения от ускорения?
4. Какие законы, определяющие силу трения, Вам известны?
5. Выведите формулу (6.4).
6. Зависит ли от угла наклона плоскости  $\alpha$  коэффициент трения скольжения?
7. Какие выводы можно сделать на основании проведенного эксперимента?

### Литература

1. Детлаф А. А., Яворский Б. М., Милковская Л. Б. Курс физики. Механика. Основы молекулярной физики и термодинамики. М.: Высшая школа, 1973. 384 с.
2. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.1: Механика, молекулярная физика. СПб.: Лань, 2007. 432 с.
3. Сивухин Д.В. Общий курс физики: учеб. пособие. Т.1: Механика. М.: ФИЗМАТЛИТ МФТИ; Изд-во МФТИ, 2002. 560 с.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОДУЛЯ ЮНГА ПО ДЕФОРМАЦИИ ИЗГИБА

### Цель работы:

1. Экспериментально определить модуль Юнга для исследуемых пластин.
2. Проверить выполнимость закона Гука для деформации изгиба.

**Принадлежности:** набор грузов, исследуемые образцы (пластины), часовой индикатор, штангенциркуль, микрометр.

### Краткие теоретические сведения

*Деформация* – это изменение взаимного положения точек тела. Деформации могут возникать в твердых телах при воздействии внешних сил. При этом изменяются форма и размер тела и в теле возникают упругие силы. Если после прекращения действия сил тело восстанавливает свою форму, то деформация упругая. Если же форма тела не восстанавливается, то деформация пластическая. Деформация растяжения (сжатия) характеризуется абсолютным удлинением  $\Delta l = l - l_0$  и относительным удлинением (например, стержня)  $\varepsilon$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}, \quad (7.1)$$

где  $l_0$  – первоначальный размер тела,  $\Delta l$  – изменение этого размера.

Величина, равная отношению силы к величине поверхности, на которую действует сила, называется *напряжением*. Благодаря взаимодействию частей тела друг с другом напряжение передается во все точки тела – весь объем тела оказывается в напряженном состоянии. Если сила направлена по нормали к поверхности, напряжение называется нормальным. Если сила направлена по касательной к поверхности, на которую она действует, напряжение называется тангенциальным.

Механическое напряжение при деформации сжатия и растяжения равно

$$\sigma = \frac{F_{\text{упр}}}{S}, \quad (7.2)$$

где  $F_{\text{упр}}$  – упругая сила;  $S$  – площадь сечения тела.

Для упругих деформаций справедлив закон Гука:

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (7.3)$$

где  $E$  – модуль упругости (модуль Юнга). Или  $\frac{F_{\text{упр}}}{S} = E \frac{\Delta l}{l_0}$ . При  $\Delta l = l_0$  модуль упругости

$$E = \frac{F_{\text{упр}}}{S}. \quad (7.4)$$

То есть модуль Юнга численно равен механическому напряжению, возникающему в теле при относительной деформации, равной единице, т.е. при увеличении размеров тела в два раза.

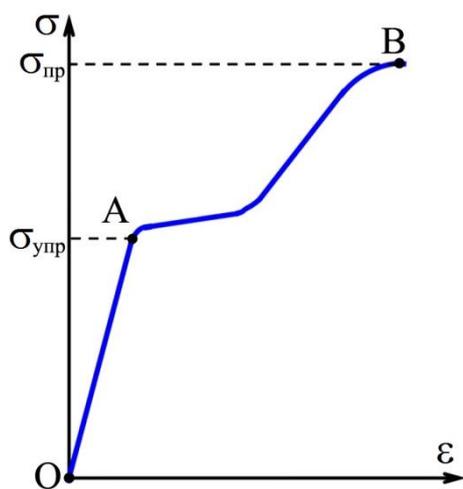


Рис. 7.1

Зависимость механического напряжения от относительной деформации показана на рис. 7.1. При относительно небольших значениях напряжения деформация имеет упругий характер, что выражается на графике прямо пропорциональной зависимостью (участок OA). При этом выполняется закон Гука. Наибольшее механическое напряжения  $\sigma_{упр}$ , при котором деформация сохраняет упругий характер, называется *пределом упругости*. При дальнейшем увеличении напряжения деформация имеет пластический характер (участок AB), и при напряженности  $\sigma_{пр}$  (*предел прочности*) происходит разрушение образца.

Механическое напряжение в продольном направлении, кроме удлинения, вызывает поперечное сжатие тела, при этом

$$\frac{\Delta d}{d} = -\mu \frac{\Delta l}{l} \quad \text{или} \quad \varepsilon_n = \mu \varepsilon, \quad (7.5)$$

где  $\mu$  - коэффициент Пуассона,  $d$  - поперечный размер стержня (диаметр, толщина стержня и т.д.);  $\Delta d$  - изменение поперечного размера;  $\varepsilon_n$  - относительное изменение поперечного размера тела (стержня). Модуль Юнга и коэффициент Пуассона полностью характеризуют упругие свойства материала и не зависят от размеров и формы тела. Все прочие упругие постоянные выражаются через  $E$  и  $\mu$ .

При *всестороннем сжатии тела* относительное изменение его объема можно представить в виде

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{K} p, \quad (7.6)$$

где  $p$  - давление,  $K$  - модуль всестороннего сжатия тела, связанный с модулем Юнга  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\mu$  соотношением

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)}. \quad (7.7)$$

*Деформация сдвига* показана на рис. 7.2 и возникает, когда к параллельным плоскостям тела приложены касательные силы, направленные в противоположные стороны. Деформация сдвига характеризуется углом сдвига  $\gamma$ . При упругой деформации

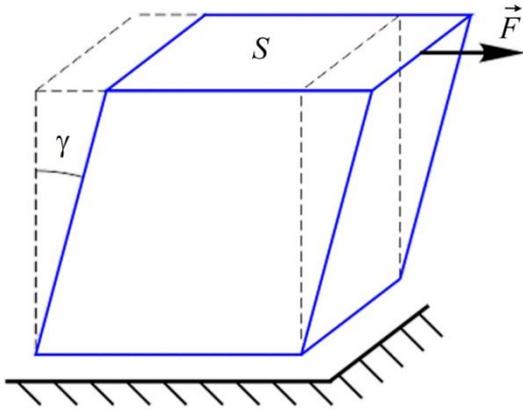


Рис. 7.2

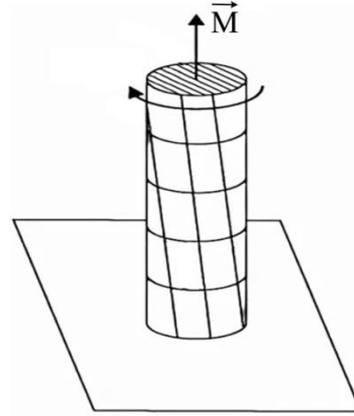


Рис. 7.3

$$\gamma = \frac{1}{G} \cdot \frac{F}{S} \text{ или } \tau = G\gamma, \quad (7.8)$$

где  $F$  – сила, параллельная плоскости  $S$ ;  $S$  – площадь поверхности;  $\tau$  – касательное натяжение;  $G$  – модуль сдвига.

*Деформация кручения* представляет собой неоднородный сдвиг – отдельные слои тела, как и при сдвиге, остаются параллельными, но поворачиваются на некоторый угол относительно друг друга (рис. 7.3). Момент сил  $M$ , необходимый для закручивания круглого стержня на угол  $\varphi$ , пропорционален углу

$$M = f\varphi, \quad (7.9)$$

где  $f$  – модуль кручения, который выражается через модуль сдвига  $G$  для материала стержня, длину  $l$  и радиус  $R$  поперечного сечения стержня:

$$f = \frac{\pi G}{2l} R^4. \quad (7.10)$$

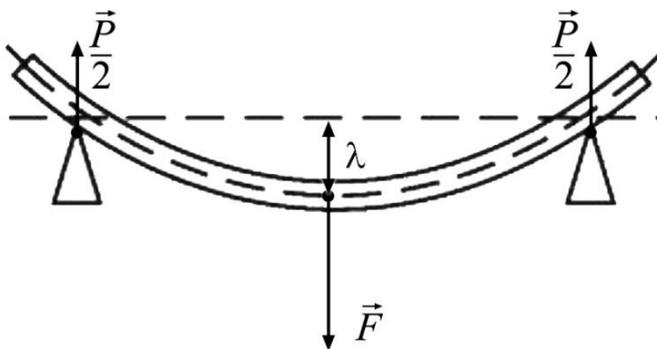


Рис. 7.4

*Деформация изгиба* сводится к растяжениям и сжатиям в различных частях тела (рис. 7.4). Если на середину прямого упругого стержня, свободно положенного на твердые опоры, действует сила  $\vec{F}$ , то стержень изгибается. Легко понять, что при таком изгибе верхние слои стержня сжимаются, нижние – растягиваются, а некоторый

средний слой, который называют *нейтральным*, сохраняет длину и только претерпевает искривление.

Перемещение  $\lambda$ , которое получает середина стержня, называется *стрелой прогиба*. Она тем больше, чем больше нагрузка, и, кроме того, зависит от формы и размеров стержня и от модуля упругости. В теории сопротивления

материалов доказываем, что если к стержню длиной  $l$ , шириной  $a$  и толщиной  $b$  приложить в середине силу  $\vec{F}$ , то стрелу прогиба находят по формуле

$$\lambda = \frac{Fl^3}{4ab^3E}. \quad (7.11)$$

Отсюда модуль Юнга равен

$$E = \frac{Fl^3}{4ab^3\lambda}. \quad (7.12).$$

### Описание установки и метода измерений

Установка «Модуль Юнга» представлена на рис. 7.5. Она включает в свой состав: основание 1; стойку 2; кронштейн 3 с двумя призматическими опорами 4, на которые устанавливается исследуемый образец 5 (пластина); груз 6; устройство 7 для закрепления образца, представляющее собой скобу с призматической опорой; часовой индикатор 8. Индикатор – это съемное отсчетное устройство с измерительным механизмом, преобразующим малые отклонения в большие перемещения стрелки. С целью измерения индикатор устанавливают на стойке с помощью специальных приспособлений для обеспечения точности и удобства при выполнении работы.

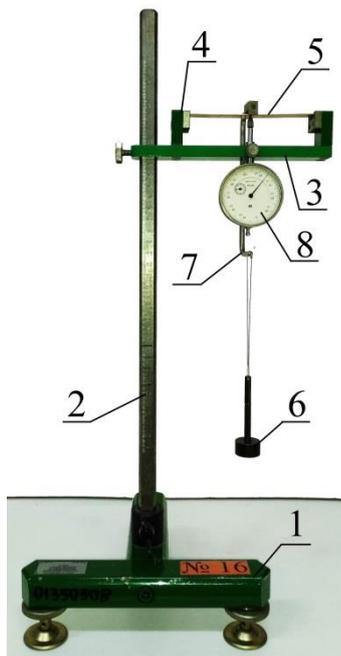


Рис. 7.5

Устройство часового индикатора представлено на рис. 7.6: 1 – измерительный наконечник, 2 – гильза (используется для крепления), 3 – циферблат (измерительная шкала), 4 – ободок (вращением ободка устанавливают нулевое положение). Внимание! Часовой индикатор является точным измерительным прибором. Не допускать падения прибора.

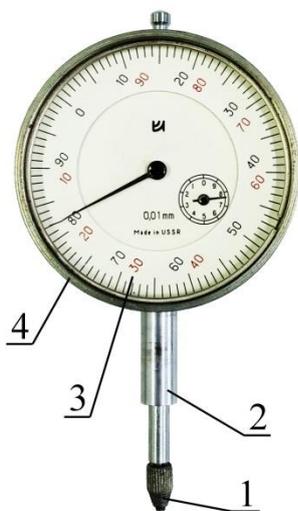


Рис. 7.6

### Порядок выполнения работы

1. Положить одну из исследуемых пластин 5 на призматические опоры 4 (рис. 7.5).

2. Установить часовой индикатор 8 на кронштейн 3 (рис. 7.5) таким образом, чтобы его измерительный наконечник 1 (устройство часового индикатора представлено на рис. 7.6) коснулся пластины. Крепление индикатора в кронштейне производится за гильзу 2 (рис. 7.6).

3. Аккуратно повесить скобу 7 с платформой (без грузов) посередине пластины (рис. 7.5). На циферблате

3 часового индикатора установить нулевое положение (рис. 7.6). Установка шкалы индикатора на нуль производится вращением шкалы за ободок 4.

4. Повесить на платформу груз массой  $m_2$  и определить  $\lambda_2$ . Опыт повторить для всех грузов. Результаты измерений записать в таблицу 7.1.

5. Измерить штангенциркулем расстояние  $l$  между призмами, ширину  $a$  исследуемой пластины. Определить микрометром толщину  $b$  исследуемой пластины в различных местах (не менее трех раз). Результаты записать в таблицу 7.2.

6. Повторить пункты 3- 5 с другой исследуемой пластиной.

**Таблица 7.1**

№ п/п	$m$ , кг	$\lambda$ , м	$F$ , Н	$\frac{F}{\lambda}, \left(\frac{H}{m}\right)$	$E, \left(\frac{H}{m^2}\right)$	$(\bar{E} - E_i)$	$(\bar{E} - E_i)^2$
1							
2							
3							
4							
5							
Сред.							
$\Sigma$							

**Таблица 7.2**

№ п/п	$l$ , м	$a$ , м	$b$ , м
1			
2			
3			

### Обработка результатов измерений

1. Определить нагрузку  $F$ , вызывающую прогиб пластины по формуле  $F = mg$ .

2. Вычислить отношение  $\frac{F}{\lambda}$ .

3. По результатам каждого измерения вычислить модуль Юнга по формуле (7.12), взяв средние значения величин  $a$ ,  $b$ ,  $l$ .

4. Найти среднее значение модуля Юнга  $\bar{E}$ .

5. Используя результаты измерений и табличные значения, определить из какого материала сделаны образцы.

6. Определить полуширину доверительного интервала по формуле Стьюдента

$$\Delta E = t_{p,n} \sqrt{\frac{\sum (\bar{E} - E_i)^2}{n(n-1)}}$$

где  $t_{p,n}$  – коэффициент Стьюдента при доверительной вероятности  $p = 0.95$  и числе измерений  $n$ . Поскольку результаты опыта не повторяются (измерения делаем для разных масс грузов), расчет абсолютной погрешности здесь производится как при прямых измерениях, хотя модуль Юнга определяется косвенным образом через другие непосредственно измеряемые величины.

7. Окончательный результат записать в виде  $E = \bar{E} \pm \Delta E$  с указанием доверительной вероятности  $p = 0.95$ .

8. Записать относительную погрешность в процентах  $\frac{\Delta E}{\bar{E}} \cdot 100\%$ .

9. Построить график зависимости деформации  $\lambda$  от нагрузки  $F$ .

10. Записать вывод о проделанной работе. В выводе указать табличное и измеренное значения образцов.

### Контрольные вопросы

1. Что называется деформацией? Перечислите виды деформаций и охарактеризуйте их. Сделайте рисунки. В чем отличие деформации растяжения от деформации изгиба? Что представляет собой деформации сдвига и кручения?

2. Что такое механическое напряжение? Единицы измерения.

3. Сформулируйте закон Гука. Когда он справедлив? Запишите закон Гука при деформации сдвига, кручения.

4. Коэффициент Пуассона. Запишите формулу, определение.

5. Дайте объяснение качественной диаграммы напряжений. Что такое пределы пропорциональности, упругости и прочности?

6. Каков физический смысл модуля Юнга? От чего зависит модуль Юнга? Как он связан с другими модулями? Единицы измерения.

7. Как в данной работе измеряется стрела прогиба?

8. Проанализируйте экспериментальный график.

9. Как изменится модуль упругости бедренной кости человека, если при напряжении 5 Па относительная деформация составляет 0,025, а при увеличении напряжения до 11 Па она стала равной 0,055?

10. Определите предел прочности кости диаметром 30 мм и толщиной 3 мм, если для ее разрушения требуется сила 400 кН.

### Литература

1. Детлаф А. А., Яворский Б. М., Милковская Л. Б. Курс физики. Механика. Основы молекулярной физики и термодинамики. М.: Высшая школа, 1973. 384 с.
2. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.1: Механика, молекулярная физика. СПб.: Лань, 2007. 432 с.
3. Сивухин Д.В. Общий курс физики: учеб. пособие. Т.1: Механика. М.: ФИЗМАТЛИТ МФТИ; Изд-во МФТИ, 2002. 560 с.
4. Стрелков С.П. Механика. СПб.: Лань, 2005. 560 с.
5. Трофимова Т.И. Курс физики: учеб. пособие для вузов М.: Изд. центр «Академия», 2006. 560 с.

## ИЗМЕРЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ВЕЛОСИПЕДНОГО КОЛЕСА

**Цель работы:** определить момент инерции велосипедного колеса различными способами.

**Принадлежности:** установка, секундомер, штангенциркуль и миллиметровая линейка.

### Краткие теоретические сведения

Уравнение динамики вращательного движения твердого тела имеет вид

$$I \vec{\varepsilon} = \vec{M}, \quad (8.1)$$

где  $I$  – момент инерции тела,  $\vec{\varepsilon}$  – его угловое ускорение,  $\vec{M}$  – момент приложенных к телу сил.

Момент инерции – аналог массы. Как масса – мера инертности при поступательном движении, так и момент инерции – мера инертности при вращательном движении. При вращении тела вокруг различных осей моменты инерции различны. Величина момента инерции относительно какой-либо оси определяется пространственным распределением элементарных масс тела – геометрией масс. Аналитическое вычисление величины момента инерции производится путем интегрирования выражения

$$I = \int r^2 \rho dV, \quad (8.2)$$

где  $\rho$  – плотность вещества в элементарном объеме  $dV$ , находящегося на расстоянии  $r$  от оси вращения.

При сложной форме поверхности, ограничивающей тело, и неравномерном распределении плотности аналитический подсчет величины момента инерции может быть достаточно сложной задачей. Экспериментально же определение момента инерции осуществимо легко.

В настоящей задаче измерятся момент инерции колеса двумя различными способами.

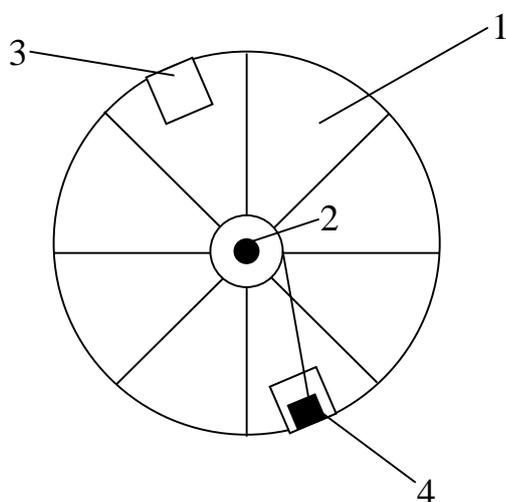


Рис. 8.1

### Упражнение №1

#### Определение момента инерции колеса методом колебаний

#### Описание установки и метода измерений

Велосипедное колесо 1 может вращаться с малым трением вокруг горизонтальной оси 2 (рис. 8.1). На внутренней стороне обода колеса симметрично по диаметру укреплены два очень легких и одинаковых по весу металлических стаканчика 3. К колесу на

нити прикреплен груз 4. Помещая груз в один из стаканчиков, получаем физический маятник, который может колебаться вокруг положения равновесия, отклоняясь влево и вправо от вертикали, проходящей через центр колеса.

Пренебрегая моментом сил трения, можем записать уравнение движения колеса вместе с грузом

$$(I + I_{cp})\ddot{\varphi} = -mgL \sin \varphi, \quad (8.3)$$

где  $I$  – момент инерции колеса со стаканчиками,  $I_{cp}$  – момент инерции груза относительно оси колеса,  $m$  – масса груза,  $L$  – расстояние между центром груза и осью колеса,  $g$  – ускорение силы тяжести,  $\varphi$  – угол отклонения колеса от положения равновесия,  $\ddot{\varphi}$  – угловое ускорение колеса.

Если  $\sin \varphi \approx \varphi$  (малые углы отклонения), то можно написать

$$(I + I_{cp})\ddot{\varphi} = -mgL\varphi. \quad (8.4)$$

Уравнение (8.4) является уравнением гармонических колебаний. Решением его будет функция вида

$$\varphi = \varphi_0 \sin \omega t, \quad (8.5)$$

где  $\varphi_0$  – амплитуда колебаний,  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  – циклическая частота,  $T$  – период колебаний колеса.

Из уравнения (8.5), дифференцируя его по времени, получаем

$$\ddot{\varphi} = -\omega^2 \varphi. \quad (8.6)$$

Сопоставляя уравнения (8.4) и (8.6), находим выражение для квадрата циклической частоты колебаний

$$\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{mgL}{(I + I_{cp})}. \quad (8.7)$$

Учитывая, что диаметр грузика во много раз меньше диаметра колеса, можем считать грузик материальной точкой и положить

$$I_{cp} = mL^2. \quad (8.8)$$

Тогда из уравнений (8.7) и (8.8) получаем

$$I = \left( \frac{gT^2}{4\pi^2} - L \right) mL. \quad (8.9)$$

### Порядок выполнения работы и обработка результатов измерений

1. Определяют массу груза  $m$  путем его взвешивания на технических весах. Измеряют расстояние  $L$  от оси вращения до центра грузика, помещенного в стаканчик. Значение записать над таблицей 8.1.

2. Поместив грузик в один из стаканчиков колеса, отклоняют его от положения равновесия на угол не более  $10^\circ$ – $15^\circ$  и отпускают. Не менее пяти раз определяют по секундомеру время  $N = 10$  полных колебаний.

3. По полученным данным, пользуясь уравнением (8.9), вычисляют момент инерции колеса. Результаты измерений и вычислений заносят в таблицу 8.1.

Убедитесь в том, что все физические величины, входящие в формулу (8.9) указаны в единицах системы СИ.

4. Расчет погрешности  $\Delta I$  в определении момента инерции производят как для косвенных измерений, вычислив абсолютные погрешности для непосредственно измеряемых величин: массы груза  $\Delta m = \sqrt{\Delta_{np}^2 + \Delta_{окр}^2}$ , расстояния  $L$  от оси вращения до центра груза  $\Delta L = \sqrt{\Delta_{np}^2 + \Delta_{окр}^2}$  и периода колебаний  $T$ :

$$\Delta T = \sqrt{\Delta T_{сл}^2 + \left(\frac{\Delta_{np}}{N}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_{окр}}{N}\right)^2},$$

где случайная погрешность в определении периода колебаний

$$\Delta T_{сл} = t_{p,n} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{T} - T_i)^2}{n(n-1)}},$$

с коэффициентом Стьюдента  $t_{p,n}$  при доверительной вероятности  $p = 0.95$  и числе измерений  $n$ . Максимальная абсолютная погрешность прибора при доверительной вероятности  $p = 0.95$  выражается через предельную погрешность прибора  $\delta$  как

$$\Delta_{np} = \frac{2}{3} \delta,$$

где  $\delta$  – это предельная ошибка приборов одного класса при коэффициенте надежности 0.997. Значение  $\delta$  обычно приводится в паспорте прибора, но в том случае, если паспорт по каким-то причинам отсутствует, в качестве  $\delta$  берут цену наименьшего деления прибора.

Погрешность, обусловленная округлением показаний прибора, определяется для полуширины соответствующего доверительного интервала при заданной доверительной вероятности  $p = 0.95$  по формуле

$$\Delta_{окр} = p \frac{\omega}{2},$$

где  $\omega$  – цена наименьшего деления шкалы прибора.

Из формулы для относительно погрешности в определении момента инерции как для косвенных измерений

$$\frac{\Delta I}{\bar{I}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{\bar{m}}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta T}{\bar{T}} \left\{1 + \frac{\bar{m}\bar{L}^2}{\bar{I}}\right\}\right)^2 + \left(\frac{\Delta L}{\bar{L}} \left\{1 - \frac{\bar{m}\bar{L}^2}{\bar{I}}\right\}\right)^2},$$

получаем искомую абсолютную погрешность  $\Delta I$ .

5. Окончательный результат записать в виде  $I = \bar{I} \pm \Delta I$  с указанием доверительной вероятности  $p = 0.95$ .

6. При аккуратном выполнении работы относительная погрешность  $\frac{\Delta I}{I}$  не должна превышать 10%.

Таблица 8.1

$L =$ м;		$m =$ кг				
№ п/п	$t, c$	$N$	$T = t/N, c$	$(\bar{T} - T_i)$	$(\bar{T} - T_i)^2$	$I, кг \cdot м^2$
1						
...						
5						
Сред.						
$\Sigma$						

### Упражнение №2

#### Определение момента инерции колеса методом вращения

##### Описание установки и метода измерений

Велосипедное колесо 1 может вращаться с малым трением вокруг горизонтальной оси 2 (рис. 8.2). Колесо имеет соосный с ним цилиндр 5, на который наматывается нить с прикрепленным к ней грузом 4. Под действием силы тяжести грузик будет опускаться, приводя колесо во вращение. Уравнения движения системы без учета сил трения имеют вид

$$ma = mg - f,$$

$$I\varepsilon = f \cdot r, \quad (8.10)$$

$$a = \varepsilon r,$$

где  $m$  – масса грузика,  $I$  – момент инерции колеса со стаканчиками 3 (см. рис. 8.1),  $g$  – ускорение силы тяжести,  $f$  – натяжение нити,  $r$  – радиус шкива, на который намотана нить.

Решая систему уравнений (8.10), получаем

$$a = \frac{mg}{m + I/r^2}. \quad (8.11)$$

Ускорение грузика  $a$  можно найти, пользуясь формулой  $h = \frac{at^2}{2}$ . Тогда из уравнения (8.11) можно получить

$$I = \frac{md^2}{4} \left( \frac{gt^2}{2h} - 1 \right), \quad (8.12)$$

где  $d = 2r$  – диаметр шкива.

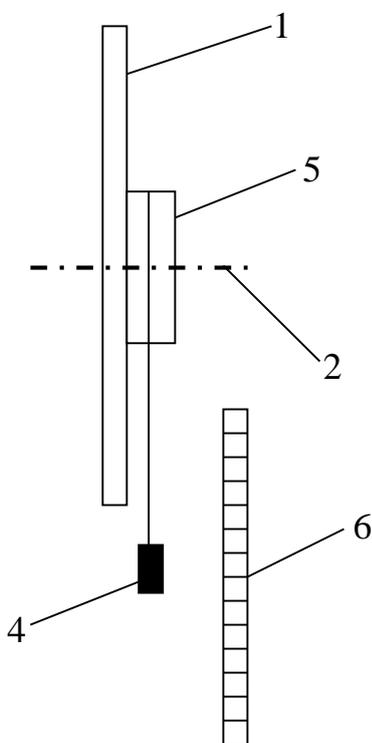


Рис. 8.2

## Порядок выполнения работы и обработка результатов измерений

1. Штангенциркулем измеряют диаметр шкива  $d$ , на который намотана нить.

2. Секундомером не менее 5 раз измеряется время опускания груза  $t$  на величину  $h$ .

3. Высота  $h$ , с которой падает груз 4, определяется по шкале 6 (рис. 8.2). Все измерения производятся записываются в таблицу 8.2.

Таблица 8.2

$d =$ м;		$m =$ кг;		$h =$ м.	
№ п/п	$t$ , с	$(\bar{t} - t_i)$ , с	$(\bar{t} - t_i)^2$ , с <sup>2</sup>	$I$ , кг·м <sup>2</sup>	
1					
5					
Сред.					
$\Sigma$					

4. По полученным данным, пользуясь уравнением (8.12), вычисляют момент инерции колеса. Убедитесь в том, что все физические величины, входящие в формулу (8.12), указаны в единицах системы СИ.

5. Расчет погрешности  $\Delta I$  в определении момента инерции производят как для косвенных измерений, вычислив абсолютные погрешности для непосредственно измеряемых величин: массы груза  $\Delta m = \sqrt{\Delta_{np}^2 + \Delta_{окр}^2}$ , диаметра шкива  $\Delta d = \sqrt{\Delta_{np}^2 + \Delta_{окр}^2}$ , высоты  $\Delta h = \sqrt{\Delta_{np}^2 + \Delta_{окр}^2}$ , с которой падает груз, и времени падения  $t$ :

$$\Delta t = \sqrt{\Delta t_{сл}^2 + \Delta_{np}^2 + \Delta_{окр}^2},$$

где случайная погрешность в определении времени падения груза

$$\Delta t_{сл} = t_{p,n} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{t} - t_i)^2}{n(n-1)}},$$

с коэффициентом Стьюдента  $t_{p,n}$  при доверительной вероятности  $p = 0.95$  и числе измерений  $n$ .

Из формулы для относительно погрешности в определении момента инерции как для косвенных измерений

$$\frac{\Delta I}{\bar{I}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{\bar{m}}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta d}{\bar{d}}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta t}{\bar{t}} \left\{1 + \frac{\bar{m}\bar{d}^2}{4\bar{I}}\right\}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{\bar{h}} \left\{1 + \frac{\bar{m}\bar{d}^2}{4\bar{I}}\right\}\right)^2}$$

получаем искомую абсолютную погрешность  $\Delta I$ .

6. Окончательный результат записать в виде  $I = \bar{I} \pm \Delta I$  с указанием доверительной вероятности  $p = 0.95$ .

7. При аккуратном выполнении работы относительная погрешность  $\frac{\Delta I}{I}$  не должна превышать 10%.

8. Найденное значение  $\bar{I}$  необходимо сопоставить с величиной, получающейся из уравнения (8.9).

### **Упражнение №3** **Учет сил трения**

В упражнении № 2 наиболее просто может быть произведен учет сил трения. При опускании грузика с высоты  $h$  (на полную длину нити) его потенциальная энергия переходит в кинетическую энергию системы и работу против сил трения:

$$mgh = E + \varphi M, \quad (8.13)$$

где  $M$  – момент сил трения,  $\varphi$  – полный угол поворота колеса,  $E$  – кинетическая энергия системы.

После того, как грузик опустился на полную длину нити  $h$ , колесо будет продолжать вращаться и нить начнет наматываться на цилиндр. В результате грузик поднимется на максимальную высоту  $h_1 < h$ . Очевидно, что

$$E = mgh_1 + \varphi_1 M_1, \quad (8.14)$$

где  $\varphi_1$  – полный угол поворота колеса при подъеме грузика.

Учитывая, что  $h = r\varphi$ ,  $h_1 = r\varphi_1$ , получаем

$$M = \frac{mgr(h - h_1)}{h + h_1}. \quad (8.15)$$

Эта формула позволяет вычислить величину момента сил трения. Считая его известным, можно вместо системы уравнений (8.10) написать

$$\begin{aligned} ma &= mg - f, \\ I\varepsilon &= f \cdot r - M, \\ a &= \varepsilon r, \end{aligned} \quad (8.16)$$

где по-прежнему  $a = \frac{2h}{t^2}$ . Уравнения (8.15) и (8.16) дают

$$I = mr^2 \left[ \frac{gt^2}{2h} \left( 1 - \frac{h - h_1}{h + h_1} \right) - 1 \right]. \quad (8.17)$$

Этим выражением пользуются для вычисления момента инерции колеса с учетом сил трения. Для этого требуется дополнительно измерить величину  $h_1$ . Измерения провести не менее трех раз. Результаты измерений записать в таблицу 8.3.

**Таблица 8.3**

№ п/п	$t$ , с	$h_1$ , м	$(h - h_1)$ , м	$(h + h_1)$ , м	$I$ , кг·м <sup>2</sup>
1					
2					
3					
Сред.					
$\Sigma$					

**Контрольные вопросы**

1. Запишите основной закон динамики вращательного движения.
2. Что называется угловой скоростью, угловым ускорением? Какой формулой выражается связь углового ускорения и линейного ускорения?
3. Что называется моментом вращающейся силы? Момент какой силы вызывает колебания колеса, вращение колеса?
4. Что такое момент инерции тела? Единицы измерения момента инерции.
5. Выведите формулы (8.9), (8.12), (8.17).
6. Запишите закон сохранения энергии.

**Литература**

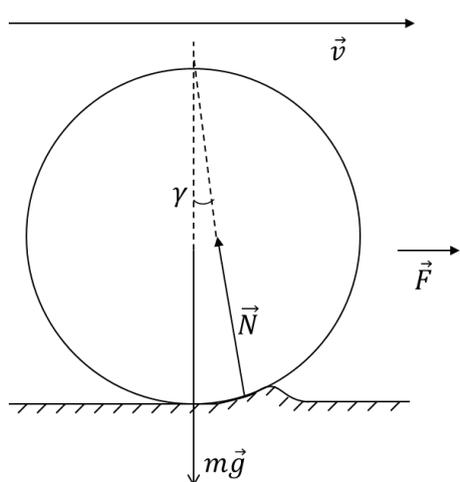
1. *Савельев И.В.* Курс общей физики. Т.1: Механика, молекулярная физика. СПб.: Лань, 2007. 432 с.
2. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики: учеб. пособие. Т.1. Механика. М.: ФИЗМАТЛИТ МФТИ; Изд-во МФТИ, 2002. 560 с.
3. *Трофимова Т.И.* Курс физики: учеб. пособие для вузов. М.: Изд. центр «Академия», 2006. 560 с.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТРЕНИЯ КАЧЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ НАКЛОННОГО МАЯТНИКА

**Цель работы:** определить коэффициент трения качения с помощью наклонного маятника

**Принадлежности:** лабораторная установка, набор пластин, штангенциркуль

### Краткие теоретические сведения



**Рис. 9.1**

При качении цилиндра (шара) без скольжения всегда имеет место сила качения – сила, связанная с «потерями» энергии, т.е. с переходом механической энергии в тепловую. Потери энергии связаны с неупругой деформацией цилиндра и плоскости (рис. 9.1, деформация цилиндра для простоты не изображена).

Вследствие неупругой деформации линия соприкосновения цилиндра и плоскости будет смещена вперед по ходу движения цилиндра и сила реакции  $\vec{N}$  будет создавать тормозящий момент. Таким образом, обуславливает отрицательное ускорение центра масс цилиндра

$a$  и его отрицательное угловое ускорение  $\varepsilon$ , которые связаны условием отсутствия скольжения  $a = \varepsilon R$ .

Для поддержания равномерного качения цилиндра надо приложить к нему некоторую силу  $\vec{F}$ . Относительно линии, вдоль которой цилиндр в данный момент соприкасается с плоскостью, эта сила создает момент  $\vec{M}$ . Величина момента  $M$  является мерой трения качения. Существует закономерность, согласно которой момент  $M$  пропорционален силе  $N$ , прижимающей катящееся тело к поверхности качения:

$$M = \mu N. \quad (9.1)$$

Коэффициент  $\mu$  характеризует трущиеся тела: он имеет, очевидно, размерность длины и называется коэффициентом трения качения. Так как угол  $\gamma$  отклонения силы  $N$  от вертикали очень мал, то абсолютную величину силы реакции можно считать практически равной весу цилиндра  $mg$ .

### Описание установки и метода измерений

Принципиальная схема установки изображена на рис. 9.2. Установка представляет собой математический маятник, затухание колебаний которого обусловлено катанием подвешенного на нити 1 шарика 2 по наклонной

плоскости 3, наклон которой задается при помощи винта 4. Степень затухания колебаний будет, очевидно, зависеть от коэффициента силы трения качения.

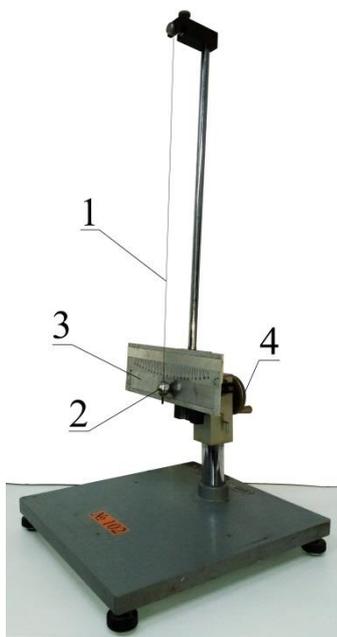


Рис. 9.2

Для установления связи между коэффициентом трения качения и изменением амплитуды колебания маятника воспользуемся законом сохранения энергии.

Если шар отвести из положения равновесия (ось  $OO'$ ) на угол  $\alpha$  и затем отпустить, он будет колебаться, катаясь около положения равновесия (рис. 9.3, а). Из-за трения колебания будут постепенно затухать. При качении шара по наклонной плоскости сила трения качения совершает работу

$$A = M\varphi = \mu N\varphi, \quad (9.2)$$

где  $M$  – момент сил трения качения,  $\varphi$  – угловое перемещение шара, связанное с линейным перемещением  $S$  центра шара радиуса  $R$  соотношением  $S = R\varphi$ .

Эта работа приводит к уменьшению полной энергии шара. Полная энергия шара складывается из кинетической и потенциальной энергии. В тех положениях, где маятник максимально отклонен от положения равновесия, его скорость равна нулю; следовательно, и кинетическая энергия тоже равна нулю. Эти точки называются точками поворота. В них маятник останавливается и меняет направление движения. В момент остановки энергия маятника равна только потенциальной энергии, поэтому уменьшение потенциальной энергии маятника при его движении от одной точки поворота до другой равно работе силы трения качения на пути между точками поворота.

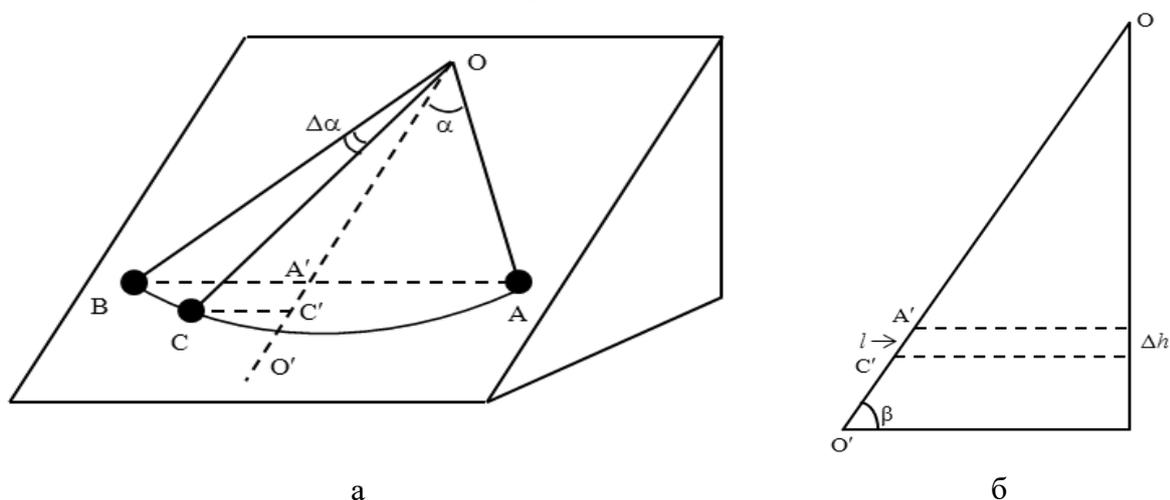


Рис. 9.3

Пусть  $A$  – точка поворота (рис. 9.3, а). В этом положении нить маятника составляет угол  $\alpha$  с осью  $OO'$ . Если бы трения не было, то через половину периода маятник оказался бы в точке  $B$ , а угол отклонения был бы равен  $\alpha$ . Но из-за трения шар немного не докатится до точки  $B$  и остановится в точке  $C$ . Это

и будет следующая точка поворота. В этой точке угол нити с осью  $OO'$  будет  $(\alpha - \Delta\alpha)$ . За половину периода угол поворота маятника уменьшился на  $\Delta\alpha$ . Точка  $C$  расположена несколько ниже, чем точка  $A$ , и поэтому потенциальная энергия маятника в точке  $C$  меньше, чем в точке  $A$ .

Найдем связь между уменьшением угла точки поворота  $\Delta\alpha$  и потерей энергии. Для этого спроектируем точки  $A$  и  $C$  на ось  $OO'$ . Это будут точки  $A'$  и  $C'$  соответственно. Очевидно, что длина отрезка

$$l = |A'C'| = L \cos(\alpha - \Delta\alpha) - L \cos \alpha, \quad (9.3)$$

где  $L$  – длина маятника, равная радиусу дуги окружности  $AO$ . При этом угол этой дуги равен  $(2\alpha - \Delta\alpha)$ , а длина дуги

$$S = L(2\alpha - \Delta\alpha). \quad (9.4)$$

Так как ось  $OO'$  наклонена под углом  $\beta$  к горизонту, то проекция отрезка  $l$  на вертикальную ось будет равна  $\Delta h$  (рис. 9.3, б):

$$\Delta h = l \sin \beta = L \sin \beta [\cos(\alpha - \Delta\alpha) - \cos \alpha]. \quad (9.5)$$

Следовательно, изменение потенциальной энергии маятника между точками  $A$  и  $C$  равно

$$\Delta W = mg \Delta h = mgL \sin \beta [\cos(\alpha - \Delta\alpha) - \cos \alpha], \quad (9.6)$$

где  $m$  – масса шара,  $g$  – ускорение свободного падения.

Вычислим теперь работу момента силы трения качения:

$$A = M\varphi = \mu N\varphi, \quad (9.7)$$

где  $\mu$  – коэффициент трения качения,  $N = mg \cos \beta$  – сила нормального давления на плоскость,  $\varphi$  – угловое перемещение шара на участке  $S = \overset{\frown}{AC}$ . Очевидно, что

$$S = R\varphi = L(2\alpha - \Delta\alpha), \quad (9.8)$$

где  $R$  – радиус шара. Откуда

$$\varphi = \frac{L(2\alpha - \Delta\alpha)}{R}. \quad (9.9)$$

Подставляя (9.9) в (9.7), получим

$$A = \mu mg \cos \beta \frac{L(2\alpha - \Delta\alpha)}{R}. \quad (9.10)$$

Так как  $\Delta W = A$ , имеем

$$mgL \sin \beta [\cos(\alpha - \Delta\alpha) - \cos \alpha] = \mu mg \cos \beta \frac{L(2\alpha - \Delta\alpha)}{R}. \quad (9.11)$$

Из последнего уравнения следует, что

$$\mu = R \operatorname{tg} \beta \frac{\cos(\alpha - \Delta\alpha) - \cos \alpha}{2\alpha - \Delta\alpha}. \quad (9.12)$$

Выражение (9.12) можно существенно упростить, если учесть, угол  $\Delta\alpha$  очень мал по сравнению с  $\alpha$ . При малых углах, как известно,  $\cos \Delta\alpha \approx 1$ , а  $\sin \Delta\alpha \approx \Delta\alpha$ . Поэтому

$$\cos(\alpha - \Delta\alpha) = \cos \alpha \cos \Delta\alpha + \sin \alpha \sin \Delta\alpha \approx \cos \alpha + \Delta\alpha \sin \alpha$$

и

$$\mu = R \operatorname{tg} \beta \frac{\Delta \alpha \sin \alpha}{2\alpha - \Delta \alpha}. \quad (9.13)$$

Однако из-за малости угла  $\Delta \alpha$  измерение его затруднительно и поэтому использовать выражение (9.13) для определения  $\mu$  практически невозможно. Поэтому в работе рекомендуется измерять изменение угла точки поворота  $\Delta \alpha_n$  за  $n = 10 - 15$  полных колебаний.

Установим связь между  $\Delta \alpha_n$  и  $\mu$ . Из уравнения (9.13) изменение угла точки поворота маятника за половину периода равно

$$\Delta \alpha = \frac{2\mu}{R \operatorname{tg} \beta}. \quad (9.14)$$

За полный период изменение угла, очевидно, равно

$$\Delta \alpha_1 = \frac{4\mu}{R \operatorname{tg} \beta}. \quad (9.15)$$

Но утверждать, что за  $n$  полных колебаний  $\Delta \alpha_n = n \Delta \alpha_1$  без доказательства нельзя, так как амплитуда маятника меняется по экспоненциальному закону.

Кинематическое уравнение затухающих колебаний имеет вид

$$\alpha = \alpha_0 \exp\{-\delta t\} \cos \omega t = A(t) \cos \omega t. \quad (9.16)$$

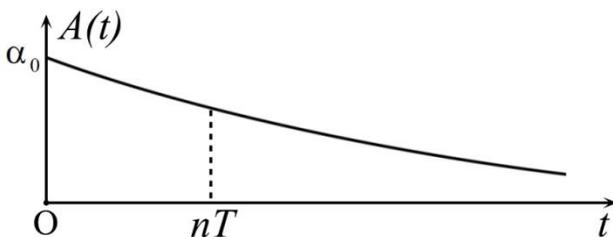


Рис. 9.4

При слабом затухании и небольшом  $n$  изменение амплитуды можно считать практически линейным (рис. 9.4). Это позволяет считать, что  $\Delta \alpha_n = n \Delta \alpha_1$  или

$$\Delta \alpha_n = \alpha_0 - \alpha_n = n \frac{4\mu}{R \operatorname{tg} \beta}. \quad (9.16)$$

Откуда для определения коэффициента трения качения получаем формулу

$$\mu = \frac{\pi}{180} \cdot \frac{(\alpha_0 - \alpha_n)}{8n} D \operatorname{tg} \beta, \quad (9.17)$$

где  $D = 2R$  – диаметр шара. В формуле (9.17) учтено, что углы  $\alpha_0$  и  $\alpha_n$  измеряются в градусах.

### Порядок выполнения работы и обработка результатов измерений

1. Штангенциркулем измеряют диаметр шара и заносят в таблицу 9.1.
2. Укрепляют на плоскости одну из сменных пластин и устанавливают плоскость под углом  $\beta = 45^\circ$ , измерив угол транспортиром. Шар отводят от положения равновесия на угол  $\alpha_0 = 6^\circ - 10^\circ$  и без толчка отпускают. Подсчитывают число  $n$  полных колебаний, за которое амплитуда уменьшается на  $4^\circ - 5^\circ$ . Опыт повторяют не менее 5 раз для различных  $\alpha_0$  и  $\alpha_n$ . Результаты записывают в таблицу 9.1.

Таблица 9.1

$$D = \quad \text{м}; \quad \beta = \quad .$$

№ п/п	$\alpha_0$	$\alpha_n$	$n$	$\alpha_0 - \alpha_n$	$\mu$	$(\bar{\mu} - \mu_i)$	$(\bar{\mu} - \mu_i)^2$
1.							
...							

3. По формуле (9.17) вычисляют  $\mu$ . Находят его среднее значение  $\bar{\mu}$ .

4. Определяют полуширину доверительного интервала по формуле Стьюдента

$$\Delta\mu = t_{p,n} \sqrt{\frac{\sum (\bar{\mu} - \mu_i)^2}{n(n-1)}},$$

где  $t_{p,n}$  – коэффициент Стьюдента при доверительной вероятности  $p = 0.95$  и числе измерений  $n$ . Поскольку результаты опыта не повторяются (измерения делаем для разных углов), расчет абсолютной погрешности здесь производится как при прямых измерениях, хотя коэффициент трения качения определяется косвенным образом через другие непосредственно измеряемые величины.

5. Окончательный результат записывают в виде  $\mu = \bar{\mu} \pm \Delta\mu$  с указанием доверительной вероятности  $p = 0.95$ .

6. Записать относительную погрешность в процентах  $E = \frac{\Delta\mu}{\bar{\mu}} \cdot 100\%$ .

7. Меняют на наклонной плоскости пластину и повторяют пункты 2-6.

8. Физикам рекомендуется повторить опыт еще для другого угла  $\beta$ , лежащего в интервале  $30^\circ - 60^\circ$ , используя одну из пластин.

### Контрольные вопросы

1. Чему равен коэффициент трения качения, если деформации шара и плоскости абсолютно упругие?

2. Чему равна кинетическая энергия шара при прохождении им положения равновесия, если в точке поворота его энергия равна  $E$ ?

3. Предложите другие методы измерения коэффициента трения качения.

### Литература

1. Ландау Л. Д., Ахиезер А. И., Лифшиц Е. М. Курс общей физики. М., 1969. 400 с.
2. Стрелков С.П. Механика. СПб: Лань, 2005. 560 с.
3. Физический энциклопедический словарь. М.: Сов. энцикл., 1962. Т. 2. С. 49.
4. Хайкин С.Э. Общий курс физики. Физические основы механики. 2-е изд. М.: Наука, 1971. 752 с.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ПУЛИ МЕТОДОМ БАЛЛИСТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

**Цель работы:** используя законы сохранения энергии и импульса, определить скорость пули.

**Принадлежности:** установка ЛТЭ, набор пуль.

### Краткие теоретические сведения

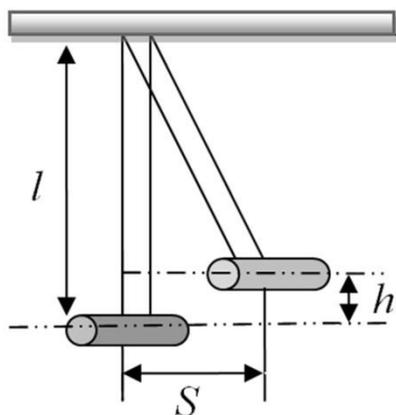


Рис. 10.1

Баллистический маятник представляет собой цилиндр, наполненный пластилином и подвешенный в горизонтальном положении на длинных и легких нитях (рис. 10.1). Масса цилиндра с пластилином  $M$ . В маятник в горизонтальном направлении стреляют из пружинного пистолета пулей, имеющей массу  $m$  и скорость  $v$ . Пуля входит в пластилин и сообщает маятнику некоторую скорость, в результате чего маятник отклоняется. Центр массы маятника поднимается на высоту  $h$  (рис. 10.1). Существенной особенностью баллистического маятника является

то, что время действия силы со стороны пули на маятник (время удара) мало по сравнению с периодом колебания маятника. Поэтому систему «пуля-цилиндр» можно считать замкнутой, а удар пули в цилиндр – неупругим и применять для этой системы закон сохранения импульса.

Когда пуля прекратит свое движение в слое пластилина, система «пуля-цилиндр» станет не только замкнутой, но и консервативной. Следовательно, для нее будет применим закон механической энергии.

Обозначим массу цилиндра с веществом –  $M$ , массу пули –  $m$ , скорость пули –  $v$ , скорость цилиндра с пулей –  $V$ . Применяя закон сохранения импульса и механической энергии, запишем

$$mv = (M + m)V, \quad (10.1)$$

$$\frac{(M + m)V^2}{2} = (M + m)gh. \quad (10.2)$$

Решая (10.1) и (10.2) относительно  $v$ , найдем

$$v = \frac{M + m}{m} \sqrt{2gh}. \quad (10.3)$$

Экспериментально трудно определить высоту подъема тела после удара. Можно выразить  $h$  через величину отклонения маятника по горизонтали –  $S$ . Из рис. 10.1 следует:

$$S^2 = l^2 - (l - h)^2 = 2hl - h^2 \approx 2hl. \quad (10.4)$$

Отсюда

$$h \cong \frac{S^2}{2l}. \quad (10.5)$$

Подставляя значение  $h$  из формулы (10.5) в (10.3), получим

$$v = \frac{(M + m)S}{m} \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (10.6)$$

Формула (10.6) является окончательной формулой, которая используется в данной работе для определения скорости пули.

### Порядок выполнения работы и обработка результатов измерений

*При выполнении лабораторных работ с применением полетов баллистических тел следует соблюдать следующие предосторожности: до выстрела необходимо точно ориентировать направление движения тела в мишень; не следует находиться в области полета тела.*

Далее приводится порядок выполнения работы, который согласован с рис. 10.2.

1. Измерить:

а) длину нити 1 маятника –  $l$ ;

б) массу цилиндра 2 с

веществом –  $M$ ;

в) массу пули 3 –  $m$ .

Длина нити измеряется от точки подвеса до центра массы цилиндра.

2. Расположить указатель 4 вплотную к неподвижному цилиндру 2 и по шкале горизонтальной линейки 5 определить положение указателя  $n_0$ .

Данные записать в таблицу 10.1.

3. Зарядить пружинный пистолет 6 пулей 3. Чтобы зарядить пистолет, необходимо вставить пулю, хвостовой частью, в ствол пистолета и нажимать на нее до тех пор, пока не сработает фиксатор. Выстрел производится нажатием на рычаг фиксатора.

4. Соблюдая правила техники безопасности, выстрелить из пружинного пистолета в слой пластилина (пуля должна застрять в пластилине).

5. Определить положение указателя 4 при максимальном отбросе  $n$  на шкале линейки 5.

6. Истинное значение отклонения цилиндра  $S = n - n_0$ .

7. Повторите опыт по измерению отклонения  $S$  не менее пяти раз. При повторных выстрелах цилиндр и указатель необходимо возвращать в начальное положение (выстрел производится только по неподвижному цилиндру).

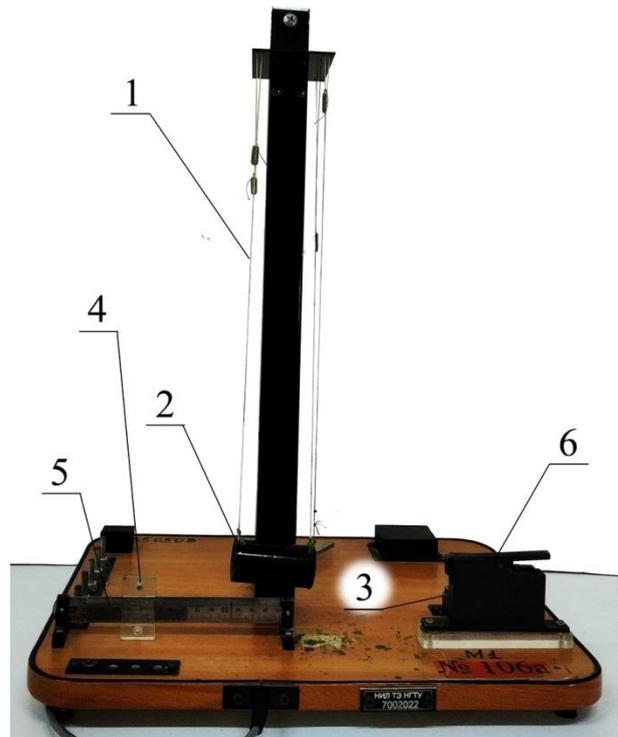


Рис. 10.2

8. По формуле (10.6) определите скорость пули  $v$ .

9. Найти среднее значение  $v$ .

10. Расчет погрешности  $\Delta v$  в определении скорости пули произвести как для косвенных измерений, вычислив абсолютные погрешности для непосредственно измеряемых величин: массы пули  $\Delta m = \sqrt{\Delta_{np}^2 + \Delta_{окр}^2}$ , массы цилиндра  $\Delta M = \sqrt{\Delta_{np}^2 + \Delta_{окр}^2}$ , длины маятника  $\Delta l = \sqrt{\Delta_{np}^2 + \Delta_{окр}^2}$  и отклонения маятника по горизонтали  $S$ :

$$\Delta S = \sqrt{\Delta S_{сл}^2 + \Delta_{np}^2 + \Delta_{окр}^2}, \quad (10.7)$$

где случайная погрешность в определении величины  $S$

$$\Delta S_{сл} = t_{p,k} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{S} - S_i)^2}{k(k-1)}}, \quad (10.8)$$

с коэффициентом Стьюдента  $t_{p,k}$  при доверительной вероятности  $p = 0.95$  и числе измерений  $k$ . Максимальная абсолютная погрешность прибора при доверительной вероятности  $p = 0.95$  выражается через предельную погрешность прибора  $\delta$  как

$$\Delta_{np} = \frac{2}{3} \delta,$$

где  $\delta$  – предельная ошибка приборов одного класса при коэффициенте надежности 0.997. Значение  $\delta$  обычно приводится в паспорте прибора, но в том случае, если паспорт по каким-то причинам отсутствует, в качестве  $\delta$  берут цену наименьшего деления прибора.

Погрешность, обусловленная округлением показаний прибора, определяется для полуширины соответствующего доверительного интервала при заданной доверительной вероятности  $p = 0.95$  по формуле

$$\Delta_{окр} = p \frac{\omega}{2},$$

где  $\omega$  – цена наименьшего деления шкалы прибора.

Из формулы для относительно погрешности в определении скорости пули как для косвенных измерений

$$\frac{\Delta v}{\bar{v}} = \sqrt{\left( \frac{\Delta m}{\bar{m}} \left\{ 1 - \frac{\bar{S} \sqrt{g/l}}{\bar{v}} \right\} \right)^2 + \left( \frac{\Delta M}{\bar{M}} \left\{ 1 - \frac{\bar{S} \sqrt{g/l}}{\bar{v}} \right\} \right)^2 + \left( \frac{1}{2} \frac{\Delta l}{\bar{l}} \right)^2 + \left( \frac{\Delta S}{\bar{S}} \right)^2} \quad (10.9)$$

получаем искомую абсолютную погрешность  $\Delta v$ . Относительная погрешность в определении величины  $S$  будет вносить основной вклад в погрешность  $\frac{\Delta v}{\bar{v}}$ ,

поэтому формулу (10.9) можно существенно упростить:

$$\frac{\Delta v}{\bar{v}} \approx \frac{\Delta S}{\bar{S}}. \quad (10.10)$$

11. Окончательный результат записать в виде

$$v = \bar{v} \pm \Delta v$$

с указанием доверительной вероятности  $p = 0.95$ .

12. Записать относительную погрешность в процентах  $E = \frac{\Delta v}{\bar{v}} \cdot 100\%$ .

13. Повторить пункты 2-12 для других пуль.

**Таблица 10.1**

$l =$  м;  $M =$  м;  $m =$  м.

№ п/п	$n_0$	$n$	$S = (n - n_0)$	$(\bar{S} - S_i)$	$(\bar{S} - S_i)^2$	$v$
1						
2						
...						
Сред.						
$\Sigma$						

### Контрольные вопросы

1. Сформулируйте закон сохранения момента количества движения.
2. Запишите закон сохранения момента количества движения для случая абсолютно упругого удара пули.
3. При каких взаимодействиях можно применить в механике совместно законы
4. Почему в работе рекомендуется стрелять только по неподвижному цилиндру?
5. Что и как меняется в формуле для  $v$  при увеличении массы сохранения энергии и импульса?

### Литература

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.1: Механика, молекулярная физика. СПб.: Лань, 2007. 432 с.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики: учеб. пособие. Т.1: Механика. М.: ФИЗМАТЛИТ МФТИ; Изд-во МФТИ, 2002. 560 с.
3. Трофимова Т.И. Курс физики: учеб. пособие для вузов. М.: Изд. центр «Академия», 2006. 560 с.

## 11. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 104

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОДУЛЯ СДВИГА МЕТОДОМ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

**Цель:** изучение крутильных колебаний и определение модуля сдвига методом крутильных колебаний.

**Принадлежности:** крутильный маятник, набор грузов, микрометр, штангенциркуль, технические весы.

#### Краткие теоретические сведения

*Деформация* – это изменение взаимного положения точек тела. Деформации могут возникать в твердых телах при воздействии внешних сил. При этом изменяются форма и размер тела и в теле возникают упругие силы. Если после прекращения действия сил тело восстанавливает свою форму, то деформация упругая. Если же форма тела не восстанавливается, то деформация пластическая. Деформация растяжения (сжатия) характеризуется абсолютным удлинением  $\Delta l = l - l_0$  и относительным удлинением (например, стержня)  $\varepsilon$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}, \quad (11.1)$$

где  $l_0$  – первоначальный размер тела,  $\Delta l$  – изменение этого размера.

Величина, равная отношению силы к величине поверхности, на которую действует сила, называется *напряжением*. Благодаря взаимодействию частей тела друг с другом напряжение передается во все точки тела – весь объем тела оказывается в напряженном состоянии. Если сила направлена по нормали к поверхности, напряжение называется нормальным. Если сила направлена по касательной к поверхности, на которую она действует, напряжение называется тангенциальным.

Механическое напряжение при деформации сжатия и растяжения равно

$$\sigma = \frac{F_{\text{упр}}}{S}, \quad (11.2)$$

где  $F_{\text{упр}}$  – упругая сила;  $S$  – площадь сечения тела.

Для упругих деформаций справедлив закон Гука:

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (11.3)$$

где  $E$  – модуль упругости (модуль Юнга). Или  $\frac{F_{\text{упр}}}{S} = E \frac{\Delta l}{l_0}$ . При  $\Delta l = l_0$  модуль упругости

$$E = \frac{F_{\text{упр}}}{S}. \quad (11.4)$$

То есть модуль Юнга численно равен механическому напряжению, возникающему в теле при относительной деформации, равной единице, т.е. при увеличении размеров тела в два раза.

Зависимость механического напряжения от относительной деформации показана на рис. 11.1.

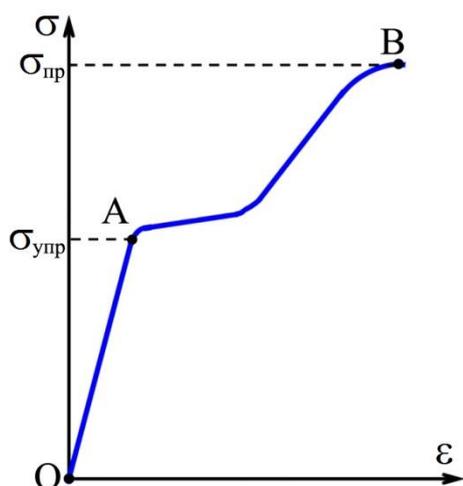


Рис. 11.1

При относительно небольших значениях напряжения деформация имеет упругий характер, что выражается на графике прямо пропорциональной зависимостью (участок ОВ). При этом выполняется закон Гука. Наибольшее механическое напряжения  $\sigma_{упр}$ , при котором деформация сохраняет упругий характер, называется *пределом упругости*. При дальнейшем увеличении напряжения деформация имеет пластический характер (участок ВС) и при напряженности  $\sigma_{пр}$  (*предел прочности*) происходит разрушение образца.

Механическое напряжение в продольном направлении, кроме удлинения, вызывает поперечное сжатие тела, при этом

$$\frac{\Delta d}{d} = -\mu \frac{\Delta l}{l} \quad \text{или} \quad \varepsilon_n = \mu \varepsilon, \quad (11.5)$$

где  $\mu$  - коэффициент Пуассона;  $d$  - поперечный размер стержня (диаметр, толщина стержня и т.д.);  $\Delta d$  - изменение поперечного размера;  $\varepsilon_n$  - относительное изменение поперечного размера тела (стержня). Модуль Юнга и коэффициент Пуассона полностью характеризуют упругие свойства материала и не зависят от размеров и формы тела. Все прочие упругие постоянные выражаются через  $E$  и  $\mu$ .

При *всестороннем сжатии тела* относительное изменение его объема можно представить в виде

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{K} p, \quad (11.6)$$

где  $p$  - давление,  $K$  - модуль всестороннего сжатия тела, связанный с модулем Юнга  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\mu$  соотношением

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)}. \quad (11.7)$$

*Деформация изгиба* сводится к растяжениям и сжатиям в различных частях тела (рис. 11.2). Если на середину прямого упругого стержня, свободно положенного на твердые опоры, действует сила  $\vec{F}$ , то стержень изгибается. Легко понять, что при таком изгибе верхние слои стержня сжимаются, нижние - растягиваются, а некоторый средний слой, который называют *нейтральным*, сохраняет длину и только претерпевает искривление.

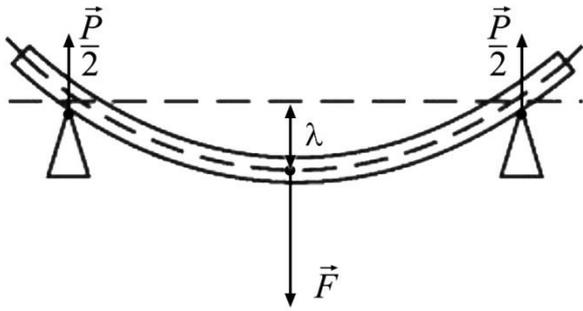


Рис. 11.2

Перемещение  $\lambda$ , которое получает середина стержня, называется *стрелой прогиба*. Она тем больше, чем больше нагрузка, и, кроме того, зависит от формы и размеров стержня и от модуля упругости. В теории сопротивления материалов доказывается, что если к стержню длиной  $l$ , шириной  $a$  и толщиной  $b$  приложить в середине силу  $\vec{F}$ , то стрелу прогиба находят по

формуле

$$\lambda = \frac{Fl^3}{4ab^3E}. \quad (11.8)$$

Отсюда модуль Юнга равен

$$E = \frac{Fl^3}{4ab^3\lambda}. \quad (11.9)$$

Деформация сдвига показана на рис. 11.3 и возникает, когда к параллельным плоскостям тела приложены касательные силы, направленные в противоположные стороны.

Деформация сдвига происходит под действием сил, касательных к поверхности тела. Под действием этих сил слои тела сдвигаются относительно друг друга в направлении действия сил и любая прямая, проведенная в теле перпендикулярно к этим слоям, поворачивается на некоторый угол  $\gamma$ .

При малых деформациях справедлив закон Гука

$$\gamma = \frac{1}{G} \cdot \frac{F}{S} \quad \text{или} \quad \tau = G\gamma, \quad (11.10)$$

где  $F$  – сила, параллельная плоскости  $S$ ;  $S$  – площадь поверхности;  $\tau$  – касательное натяжение;  $G$  – модуль сдвига.

Из теории упругости известно, что для изотропных материалов модуль Юнга и модуль сдвига связаны между собой соотношением

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}, \quad (11.11)$$

где  $\mu$  – коэффициент Пуассона. Для однородных и изотропных тел коэффициент Пуассона лежит в пределах от 0 до 0.5.

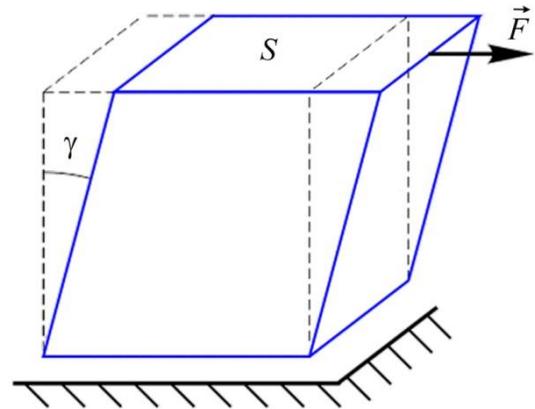


Рис. 11.3

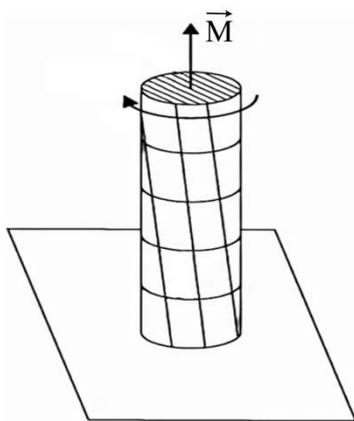


Рис. 11.4

Практически важным случаем деформации, представляющим неоднородную деформацию сдвига, является *деформация кручения*. При деформации кручения отдельные слои тела, как и при сдвиге, остаются параллельными, но поворачиваются на некоторый угол относительно друг друга (рис. 11.4).

Если к торцам упругого цилиндрического тела приложить вращающие моменты  $M$ , направленные вдоль оси цилиндра в разные стороны, то основания цилиндра повернутся относительно друг друга на угол  $\varphi$ . В пределах

упругой деформации здесь также можно написать закон, аналогичный закону Гука:

$$M = f\varphi, \quad (11.12)$$

где  $f$  – модуль кручения, который выражается через модуль сдвига  $G$  для материала цилиндра, длину  $l$  и диаметр  $d$  цилиндра формулой

$$f = \frac{\pi G}{32l} d^4. \quad (11.13)$$

Эта связь позволяет определить модуль сдвига путем измерения модуля кручения, что практически оказывается удобнее.

### Описание установки и метода измерений

Крутильный маятник представлен на рис. 11.5. На основании 2, оснащенном четырьмя ножками с регулируемой высотой, прикреплен к секундомеру 1. В основании закреплена колонка 3, на которой при помощи винтов закреплены кронштейны 4,5,6. Кронштейны 4 и 6 имеют зажимы, служащие для закрепления стальной проволоки, на которой подвешена рамка 7. На кронштейне 5 закреплена стальная плита 8, которая служит основанием фотоэлектрическому датчику 9, электромагниту 10 и угловой шкале 11. Электромагнит 10 может изменять положение на плите 8, а его положение относительно фотоэлектрического датчика 9, показывает на угловой шкале 11 стрелка, прикрепленная к электромагниту.

Конструкция рамки 7 позволяет закреплять грузы, значительно отличающиеся друг от друга по внешним размерам. Грузы крепятся при помощи подвижной балки, которая перемещается по направляющим между неподвижными балками. Балка устанавливается путем затягивания гаек на втулках, помещенных на подвижной балке. Фотоэлектрический датчик 9 и электромагнит 10 соединены с секундомером 1. Электронная схема крутильного маятника состоит из фотоэлектрического датчика, электромагнита и универсального секундомера.

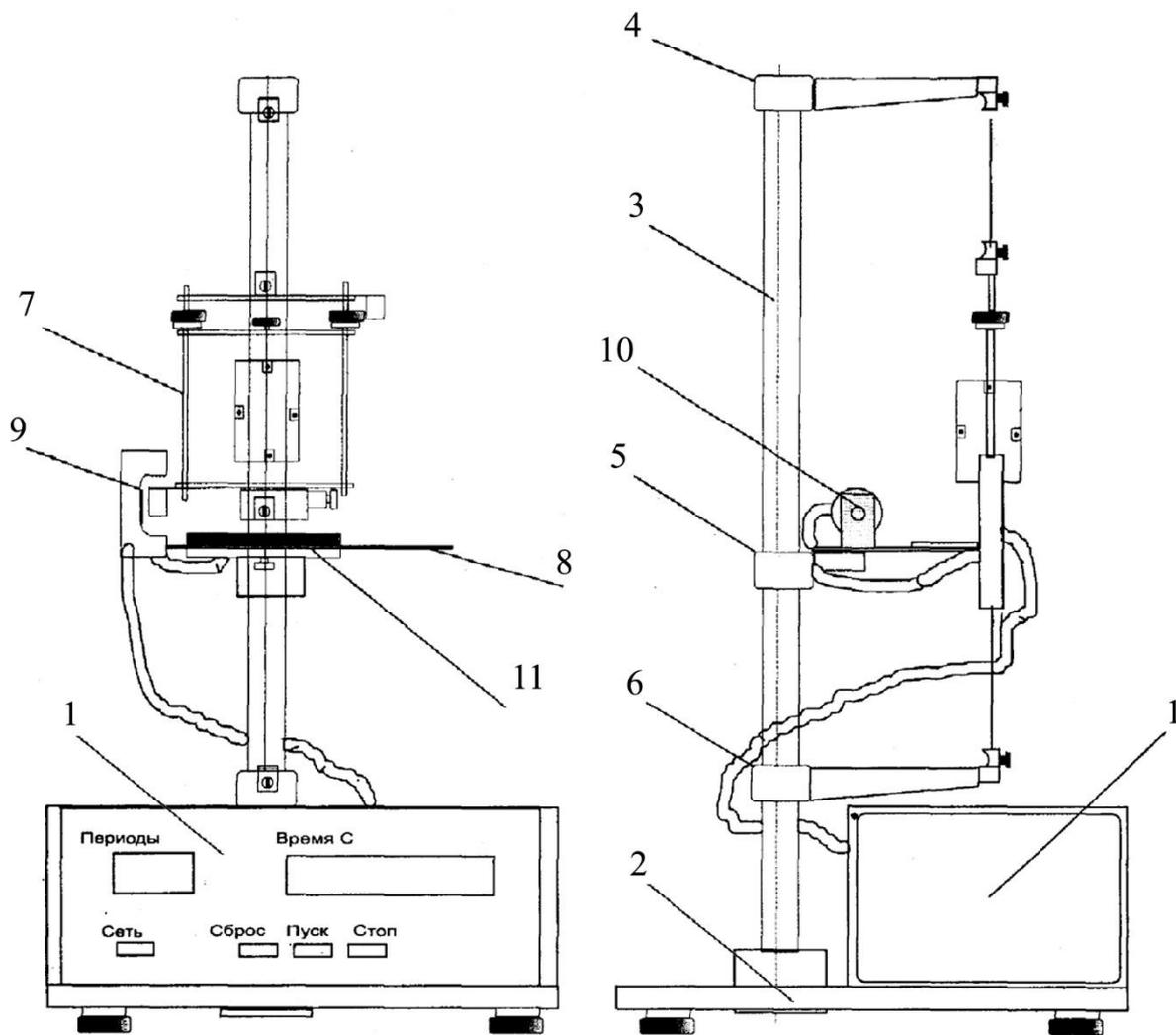


Рис. 11.5

Световой поток от лампочки падает на фототранзистор датчика. Во время колебаний крутильного маятника стрелка рамки прерывает световой поток, в результате чего генерируются электрические импульсы, которые после усиления подводятся к входу секундомера.

На лицевой стороне панели секундомера размещены клавиши: СЕТЬ, СБРОС, ПУСК, СТОП, функциональное назначение которых ясно из их названия.

Если повернуть рамку маятника на некоторый угол вокруг вертикальной оси, закрутив тем самым проволоку, а затем отпустить, то будут совершаться крутильные колебания с периодом  $T$ .

Уравнение динамики вращательного движения маятника относительно неподвижной оси имеет вид

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M, \quad (11.14)$$

где  $I$  – момент инерции маятника,  $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$  – угловое ускорение маятника,  $M$  – момент упругих сил, возникающих при кручении,  $\varphi$  – угол отклонения маятника от положения равновесия.

При малых углах  $\varphi$  выполняется закон Гука:

$$M = -f\varphi, \quad (11.15)$$

где  $f$  – модуль кручения, а знак «минус» означает, что момент сил вызывает вращения в сторону уменьшения угла отклонения  $\varphi$ . Подставив (11.15) в (11.14), получим уравнение гармонических колебаний маятника

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2\varphi = 0, \quad (11.16)$$

где  $\omega_0 = \sqrt{\frac{f}{I}}$  – циклическая частота колебаний маятника.

Отсюда период колебаний маятника выражается формулой

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{f}}, \quad (11.17)$$

где момент инерции маятника  $I = I_0 + I_{ep}$  равен сумме момента инерции маятника без нагрузки  $I_0$  и момента инерции  $I_{ep}$  тела, которым нагружается маятник (в нашем случае диска).

Момент инерции груза (диска) относительно оси вращения маятника равен

$$I_{ep} = \frac{1}{2}m(R^2 + r^2), \quad (11.18)$$

где  $m$  – масса диска,  $R$  – внешний радиус диска,  $r$  – внутренний радиус диска.

Модуль кручения подвески маятника задается формулой

$$f = f_1 + f_2, \quad (11.19)$$

где  $f_1$  – модуль кручения верхней проволоки с диаметром  $D_1$  и длиной  $L_1$ ,  $f_2$  – модуль кручения нижней проволоки с диаметром  $D_2$  и длиной  $L_2$ .

Формула (11.19) получается с учетом того, что суммарный момент упругих сил складывается из моментов сил, действующих на каждую проволоку:

$$M = M_1 + M_2 = -(f_1\varphi + f_2\varphi) = -f\varphi. \quad (11.20)$$

Измерив периоды колебаний ненагруженного  $T_0$  и нагруженного  $T$  маятника

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{f}}, \quad (11.21)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(I_0 + I_{ep})}{f}}, \quad (11.22)$$

можно определить модуль кручения  $f$  подвески маятника, учитывая (11.18):

$$f = \frac{2\pi^2 m(R^2 + r^2)}{(T^2 - T_0^2)}. \quad (11.23)$$

Модуль сдвига  $G$  для материала подвески маятника в соответствии с формулами (11.13), (11.19) и (11.23) определяются выражением

$$G = \frac{64\pi l_1 l_2}{(d_1^4 l_2 + d_2^4 l_1)} \cdot \frac{m(R^2 + r^2)}{(T^2 - T_0^2)}. \quad (11.24)$$

### Порядок выполнения работы

1. Измерить длины  $l_1$ ,  $l_2$  верхней и нижней проволоки и их диаметры  $d_1$ ,  $d_2$ . Записать в таблицу 11.1.
2. Установить электромагнит в заданном положении на плато под углом  $90^\circ$  и зафиксировать его, затягивая гайку.
3. Включить прибор в сеть (на секундомере появятся нули).
4. Поворачивая рамку прибора, приблизить его стрелку к электромагниту таким образом, чтобы магнитная сила зафиксировала положение рамки.
5. Нажать кнопку ПУСК. При этом выключается электромагнит, начинаются колебания.
6. Нажать кнопку СБРОС и после  $N_0 = 10$  колебаний нажать кнопку СТОП, значения числа колебаний  $N_0$  и времени  $t_0$ , за которое они были совершены, записать в таблицу 11.1.
7. Пункты 5, 6 повторить 5 раз.
8. Аналогично определяют периоды колебаний маятника с 3-5 различными грузами, предварительно определив массу каждого из них  $m$  и все внешние  $R$  и внутренние радиусы  $r$ . Все измерения занести в таблицу 11.2.

### Обработка результатов измерений

1. Определяют период колебаний ненагруженного маятника по формуле  $T_0 = \frac{t_0}{N_0}$ . Находят его среднее значение  $\bar{T}_0$ .
2. Для каждого из грузов  $m$  определяют период колебаний маятника  $T = \frac{N}{t}$ . Записывают значения в таблицу 11.2.
3. Модуль сдвига вычисляют по формуле (11.24) для каждого груза со средним значением измеренных величин.
4. После нахождения среднего значения модуля сдвига  $\bar{G}$  и заполнения столбцов таблицы 11.2 вычисляют абсолютную погрешность определения  $G$  по формуле

$$\Delta G = t_{p,n} \sqrt{\frac{\sum (\bar{G} - G_i)^2}{n(n-1)}},$$

где  $t_{p,n}$  - коэффициент Стьюдента при доверительной вероятности  $p = 0.95$  и заданном числе измерений  $n$ . Несмотря на то, что измерения модуля сдвига являются косвенными, полная погрешность результата находится как при прямых измерениях. При этом оценивается лишь случайная погрешность. Это связано с тем, что условия опыта не повторяются и измерения приводятся для грузов разной массы и диаметра.

5. Записывают окончательный результат в виде

$$G = \bar{G} \pm \Delta G$$

с указанием доверительной вероятности  $p = 0.95$ .

6. Вычисляют относительную погрешность  $\delta = \frac{\Delta G}{\bar{G}} \cdot 100\%$ .

7. Сравнивают полученное среднее значение модуля сдвига с табличным значением для материала, из которого изготовлена проволока подвеса маятника (сталь).

8. Записывают вывод о проделанной работе.

**Таблица 11.1**

$l_1 =$  м;  $l_2 =$  м;  $d_1 =$  м;  $d_2 =$  м.

№ п/п	$N_0$	$t_0$ , с	$T_0 = t_0/N_0$ , с
1			
...			
5			
Сред.			

**Таблица 11.2**

№ п/п	$m$ , кг	$R$ , м	$r$ , м	$N$	$t$ , с	$T = t/N$ , с	$G$ , Па	$(\bar{G} - G_i)$ , Па	$(\bar{G} - G_i)^2$ , Па <sup>2</sup>
1									
...									
5									
Сред.									
$\Sigma$									

### Контрольные вопросы

1. Что называется деформацией? Перечислите виды деформаций и охарактеризуйте их. Сделайте рисунки. В чем отличие деформации растяжения от деформации изгиба? Что представляют собой деформации сдвига и кручения?

2. Что такое механическое напряжение? Единицы измерения.

3. Сформулируйте закон Гука. Когда он справедлив? Запишите закон Гука при деформации сдвига, кручения.

4. Коэффициент Пуассона. Запишите формулу, определение.

5. Дайте объяснение качественной диаграммы напряжений. Что такое пределы пропорциональности, упругости и прочности?

6. Каков физический смысл модуля Юнга? От чего зависит модуль Юнга? Как связан с другими модулями? Единицы измерения.

7. Каков физический смысл модуля сдвига? От чего зависит модуль сдвига? Как связан с другими модулями? Единицы измерения.

8. Каков физический смысл модуля кручения? От чего зависит модуль кручения? Как связан с другими модулями? Единицы измерения.

9. Как с помощью крутильного маятника можно определить модуль сдвига?

10. Вывод формул (11.23) и (11.24).

11. Момент инерции. Как момент инерции влияет на колебания рамки?

12. Что называют моментом сил? Момент какой силы вызывает поворот рамки? Как направлен момент сил?

13. Что называют угловым ускорением?

14. Запишите уравнение гармонических колебаний и его решение.

#### Литература

1. *Детлаф А. А., Яворский Б. М., Милковская Л. Б.* Курс физики. Механика. Основы молекулярной физики и термодинамики. М.: Высшая школа, 1973. 384 с.
2. *Савельев И.В.* Курс общей физики. Т.1: Механика, молекулярная физика. СПб.: Лань, 2007. 432 с.
3. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики: учеб. пособие. Т.1: Механика. М.: ФИЗМАТЛИТ МФТИ; Изд-во МФТИ, 2002. 560 с.
4. *Стрелков С.П.* Механика. СПб.: Лань, 2005. 560 с.
5. *Трофимова Т.И.* Курс физики: учеб. пособие для вузов. М.: Изд. центр «Академия», 2006. 560 с.

## ИЗУЧЕНИЕ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ МАШИНЫ АТВУДА

**Цель работы:** проверить выполнение второго закона Ньютона при поступательном движении.

**Принадлежности:** установка, набор грузов, штангенциркуль.

### Краткие теоретические сведения

Поступательное движение – движение, при котором любая прямая, жестко связанная с движущимся телом, остается параллельной своему первоначальному положению. Поступательное движение твердого тела описывается законами Ньютона. Уравнение второго закона в общем случае записывается в следующем виде:

$$\sum_i \vec{F}_i = \frac{d(m\vec{v})}{dt}, \quad (12.1)$$

где  $\sum_i \vec{F}_i$  – векторная сумма всех сил, действующих на тело.

Если на тело с постоянной массой  $m$  действуют постоянные силы, то уравнение (12.1) можно записать так:

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}, \quad (12.2)$$

где  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$  – ускорение тела.

Если известны все силы, действующие на тело, и известны начальные условия (положение тела и его скорость в какой-либо момент времени), то путем двукратного интегрирования уравнения (12.2) можно получить кинематическое уравнение движения, т.е. уравнение, выражающее координаты тела (или его радиус-вектор) как функцию времени. Зная уравнение движения, можно найти положение тела и его скорость в любой момент времени

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2}, \quad (12.3)$$

где  $\vec{r}_0$  – радиус-вектор, определяющий положение тела в начальный момент времени,  $\vec{v}_0$  – скорость тела в то же момент времени.

Пусть через блок машины Атвуда (рис. 12.1) перекинута нить, на концах которой подвешены грузы массами  $m_1$  и  $m_2$ , причем  $\Delta m = (m_2 - m_1) \ll m_1$ . Величину  $\Delta m$  в дальнейшем будем называть перегрузком. Запишем для этих грузов 2-й закон Ньютона с учетом того, что масса блока  $m_0$  имеет ненулевое значение и, следовательно, сила натяжения нити слева  $T_1$  и справа  $T_2$  различна. Выберем направление оси  $z$  совпадающим с ускорением свободного падения. Кроме того (поскольку нить нерастяжима), будем учитывать, что ускорения, с

которыми движутся грузы, равны по величине и противоположны по знаку  $a_2 = -a_1 = a$ .

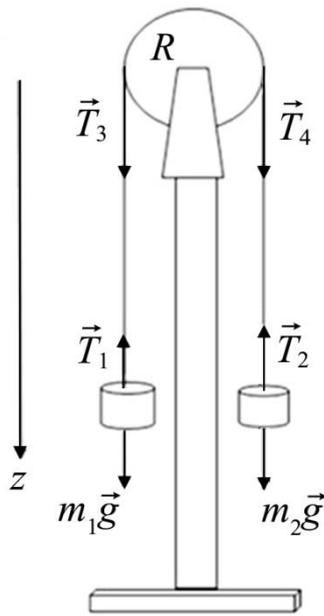


Рис. 12.1

В проекции на ось  $z$  уравнение движения грузов имеют вид

$$\begin{cases} m_2 g - T_2 = m_2 a, \\ m_1 g - T_1 = -m_1 a. \end{cases} \quad (12.4)$$

За счет разности сил натяжения нити блок движется с угловым ускорением  $\varepsilon = \frac{a}{r}$ , где  $r$  – радиус блока. Согласно основному закону динамики для блока, вращающегося вокруг неподвижной оси,

$$(T_2 - T_1)r - M_{mp} = I\varepsilon, \quad (12.5)$$

где  $M_{mp}$  – момент сил трения.

Момент инерции блока относительно оси симметрии равен

$$I = \frac{1}{2} m_0 r^2. \quad (12.6)$$

Таким образом,

$$(T_2 - T_1) - \frac{M_{mp}}{r} = \frac{1}{2} m_0 a. \quad (12.7)$$

Исключая  $T_1$  и  $T_2$  из системы уравнений (12.4) и используя (12.7), получим

$$g\Delta m - \frac{M_{mp}}{r} = \left( m_1 + m_2 + \frac{m_0}{2} \right) a. \quad (12.8)$$

Величиной  $\frac{m_0}{2}$  в правой части уравнения (12.8) можно пренебречь по сравнению с величиной  $(m_1 + m_2)$ . Окончательно получаем

$$a \approx \frac{g\Delta m - M_{mp}/r}{m_1 + m_2}. \quad (12.9)$$

Зная высоту падения груза  $h$  за время  $t$ , можно рассчитать его ускорение по формуле

$$a = \frac{2h}{t^2}. \quad (12.10)$$

### Описание лабораторной установки.

Машина Атвуда представлена на рис. 12.2. На стойке 1 штатива в верхней части закреплен кронштейн, на котором размещается малоинерционный шкив 2 с электромагнитным тормозом. Через шкив 2 перекинута капроновая нить 3 с двумя основаниями 4. Электромагнитный тормоз предназначен для фиксации исходного положения оснований 4 с дополнительными грузами. Для отсчета времени движения грузов 4 используется фотодатчик 5 и электронный блок 6.

Управление блоком осуществляется кнопками СТАРТ и СТОП. Выключатель сети расположен на задней панели блока. Положение грузов определяется по шкале на стойке 1 при помощи металлического флажка 7.

### Порядок выполнения работы и обработка результатов измерений

1. Перекинуть через шкив 2 нить 3 с двумя основаниями 4 равной массы. Штангенциркулем измерить радиус шкива  $r$  и записать над таблицей 12.1.

2. Выложить дополнительные грузы по 25 г на каждое основание. В таких условиях массы левого и правого грузов равны ( $m_1 = m_2 = 75$  г), и система находится в положении равновесия.

**Перед выкладыванием грузов на основания обязательно убедитесь, что ваш набор грузов полный, т.е. в нем присутствуют следующие грузы: 2.5 г (2 штуки), 5.0 г (2 штуки), 10 г (2 штуки), 20 г (2 штуки). Если набор неполный, обратитесь к преподавателю или лаборанту.**

3. Установить правый груз  $m_2$  в крайнее верхнее положение. Используя указатель 7, определить  $h$  – расстояние от нижней плоскости груза в верхнем положении до оптической оси фотодатчика 5 (соответствует плоскости кронштейна, окрашенной в красный свет). Показания  $h$  записать над таблицей 12.1.

4. Включить электронный блок в сеть 220 В. Нажать кнопку «Сеть», которая находится на задней панели блока.

5. Переложить с левого груза на правый перегрузок массой  $\Delta m = 2.5$  г. Записать массы левого  $m_1$  и правого  $m_2$  грузов в таблицу 12.1. При нажатии кнопки СТАРТ электронного блока происходит растормаживание электромагнитного тормоза, правый груз начинает опускаться и секундомер начинает отсчет времени. При пересечении правым грузом оптической оси фотодатчика отсчет времени прекратится. Сброс показаний секундомера происходит автоматически при включении кнопки СТАРТ. Повторить измерения времени движения груза  $m_2$  3 раза и записать их в таблицу 12.1.

6. Измерение пункта 5 проделать еще для 9 перегрузков  $\Delta m$  (5.0, 7.5, 10.0, 12.5, 15.0, 17.5, 20.0, 22.5, 25.0 г). **В процессе измерений необходимо понимать, что суммарная масса левого и правого грузов ( $m_1 + m_2 = 150$  г) остается неизменной при любом значении массы перегрузка  $\Delta m$ .**

7. Вычислить ускорение  $a$  по формуле (12.10) для каждого перегрузка, предварительно усреднив значение времени  $t$ .

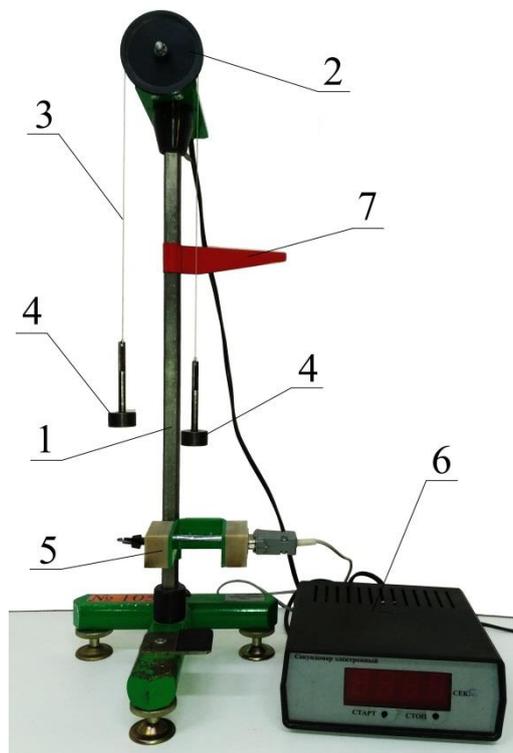


Рис. 12.2

8. Построить график зависимости ускорения грузов от массы перегрузка  $a(\Delta m)$ . При отсутствии сил трения этот график должен пройти через начало координат.

9. По графику определить угловой коэффициент  $k$  как тангенс угла наклона прямой к оси абсцисс ( $\Delta m$ ). Приравнять значение  $k$ , полученное экспериментально, к теоретическому значению  $\frac{g}{(m_1 + m_2)}$  из формулы (12.9) и найти ускорение свободного падения  $g$ .

10. Найти по графику отношение  $\frac{M_{mp}}{r(m_1 + m_2)}$ , которое получается при его пересечении с осью ординат. Откуда оценить момент сил трения  $M_{mp}$ .

**Таблица 12.1**

$h =$		$m;$		$r =$		$M.$	
№ п/п	$m_1$	$m_2$	$\Delta m = (m_2 - m_1)$	$t$	$a = \frac{2h}{t^2}$		

**Контрольные вопросы**

1. По каким признакам можно классифицировать движение материальной точки? Приведите соответствующую классификацию движения.
2. Запишите кинематическое уравнение. Напишите определения для основных кинематических величин.
3. Какие виды движения Вы знаете? Охарактеризуйте их?
4. Сформулируйте первый, второй и третий законы Ньютона. Где проявляется каждый из них в условиях данной лабораторной работы?
5. От чего зависит ускорение?
6. Нарисуйте графики ускорения, скорости и пути груза  $m_2$  как функции времени.
7. Выведите формулу для ускорения (12.9).
8. Почему полученное Вами значение ускорения свободного падения не совпадает с табличным?
9. Как изменится измеренное значение  $g$ , если учесть инерцию блока, масса которого 16 г?
10. Оцените случайную погрешность измерения времени для различных перегрузок  $\Delta m$ . Какие выводы после оценки можно сделать?

### Литература

1. *Савельев И.В.* Курс общей физики. Т.1: Механика, молекулярная физика. СПб.: Лань, 2007. 432 с.
2. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики: учеб. пособие. Т.1: Механика. М.: ФИЗМАТЛИТ МФТИ; Изд-во МФТИ, 2002. 560 с.
3. *Трофимова Т.И.* Курс физики: учеб. пособие для вузов. М.: Изд. центр «Академия», 2006. 560 с.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ПУЛИ МЕТОДОМ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

**Цель работы:** используя законы сохранения энергии и момента импульса, определить скорость пули.

**Принадлежности:** лабораторная установка, набор пуль, миллиметровая линейка.

### Краткие теоретические сведения

Для определения скорости тел при их соударении применяются законы сохранения импульса, момента импульса и энергии. Момент импульса связан с вращательным движением тела.

Моментом импульса  $\vec{L}$  материальной точки относительно некоторой точки называют векторное произведение радиус-вектора  $\vec{r}$  на импульс  $\vec{p}$ :

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}. \quad (13.1)$$

Величиной, характеризующей действие силы на вращающееся тело, является момент силы. Моментом силы относительно точки называют векторное произведение радиус-вектора  $\vec{r}$  на силу  $\vec{F}$ :

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (13.2)$$

Моменты импульса и силы связаны между собой соотношением

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \quad (13.3)$$

которое называется уравнением моментов. Для системы материальных точек под  $\vec{M}$  в уравнении (13.3) понимают момент внешних сил. Из (13.3) видно, что если  $\vec{M} = 0$ , то  $d\vec{L}/dt = 0$  и  $\vec{L} = const$ . То есть при равенстве нулю момента внешних сил момент импульса системы остается постоянным во времени. Это положение называют *законом сохранения момента импульса*.

Моментом импульса и силы относительно произвольной оси  $z$  называют проекции векторов  $\vec{L}$  и  $\vec{M}$  на эту ось в предположении, что точка, относительно которой вычислены  $\vec{L}$  и  $\vec{M}$ , лежит на рассматриваемой оси. Уравнение называют уравнением моментов относительно неподвижной оси  $z$ :

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z. \quad (13.4)$$

Величина момента силы, действующей на материальную точку  $A$  (рис. 13.1), относительно оси  $z$  вычисляется по формуле

$$M_z = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin \alpha,$$

где вектора  $\vec{r}$  и  $\vec{F}$  лежат в плоскости, перпендикулярной оси  $z$ ;  $\alpha$  – угол между направлениями  $\vec{r}$  и  $\vec{F}$ , а  $r \sin \alpha = l$ . Таким образом,

$$M_z = F \cdot l, \quad (13.5)$$

где  $l$  – кратчайшее расстояние (плечо) от оси вращения до линии действия силы  $\vec{F}$ .

Моментом инерции материальной точки относительно оси вращения называют произведение массы точки на квадрат расстояния ее  $r_i$  от оси. Момент инерции  $I$  тела есть сумма моментов инерции всех его материальных точек:  $I = \sum_i m_i \cdot r_i^2$ . Момент инерции твердого тела при известном распределении плотности находится интегрированием по объему тела:

$$I = \int_V \rho \cdot r^2 dV. \quad (13.6)$$

В случае вращающегося вокруг неподвижной оси твердого тела момент импульса  $L_z = I\omega$ , где  $I$  – момент инерции тела относительно оси вращения,  $\omega$  – угловая скорость тела. Подставляя это выражение в (13.4), получаем основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси:

$$I \frac{d\omega}{dt} = M_z. \quad (13.7)$$

В случае, когда сумма моментов внешних сил, действующих на твердое тело, относительно оси вращения  $z$  равна нулю  $\sum_i M_{zi}$ , его момент импульса сохраняется:  $I\omega = const$ .

При движении твердого тела его кинетическая энергия  $E$  складывается из энергии поступательного движения его центра масс

$$E_n = \frac{mv_c^2}{2} \quad (13.8)$$

и энергии вращательного движения:

$$E_{ep} = \frac{I\omega^2}{2}, \quad (13.9)$$

где  $I$  – момент инерции тела относительно оси вращения,  $\omega$  – угловая скорость тела.

Потенциальная энергия тела определяется его взаимодействием с полем внешних сил. В поле силы тяжести твердое тело массой  $m$  обладает энергией  $W = mgh$ ,  $h$  – положение тела относительно уровня, принятого за нулевой уровень энергии (например, его высота над поверхностью Земли).

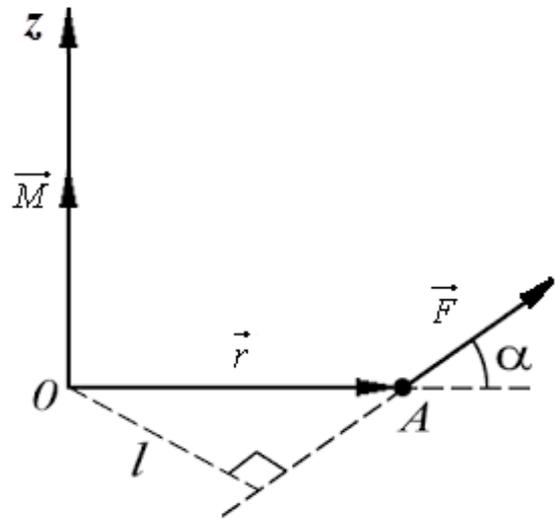


Рис. 13.1

В отсутствие диссипации энергии (ее рассеивание, переход в другие виды энергии) полная механическая энергия замкнутой системы тел не меняется:

$$E + W = const . \quad (13.10)$$

Это соотношение называется *законом сохранения энергии в механике*.

Положение центра масс системы твердых тел определяется радиус-вектором от оси вращения. Радиус-вектор центра масс системы тел задается соотношением

$$\vec{R}_C = \frac{\sum_i m_i \vec{R}_{Ci}}{\sum_i m_i} , \quad (13.11)$$

где  $m_i$  – масса каждого из тел, составляющих систему,  $\vec{R}_{Ci}$  – радиус-вектор центра масс каждого из тел системы.

### Описание установки и метода измерений

Физический маятник, показанный на рис. 13.2, представляет собой длинный стержень 1, один из концов которого закреплен на оси в точке подвеса. На другом конце стержня установлена ловушка для пули 2. На ловушке имеются указатель положения маятника 3, неподвижный относительно ловушки, и подвижный фиксатор крайнего положения маятника 4.

Положение маятника определяется с помощью измерительной линейки 5. Выстрел производится посредством пружинного ружья, которое состоит из цилиндра с пружиной 6 и рукоятки 7. Последняя используется для сжатия пружины и фиксации ее в сжатом положении. Выстрелы производятся цилиндрическими пулями разной массы. Подвижный груз 8 установлен на стержне и может перемещаться вдоль него. Изменение положения груза позволяет менять момент инерции маятника.

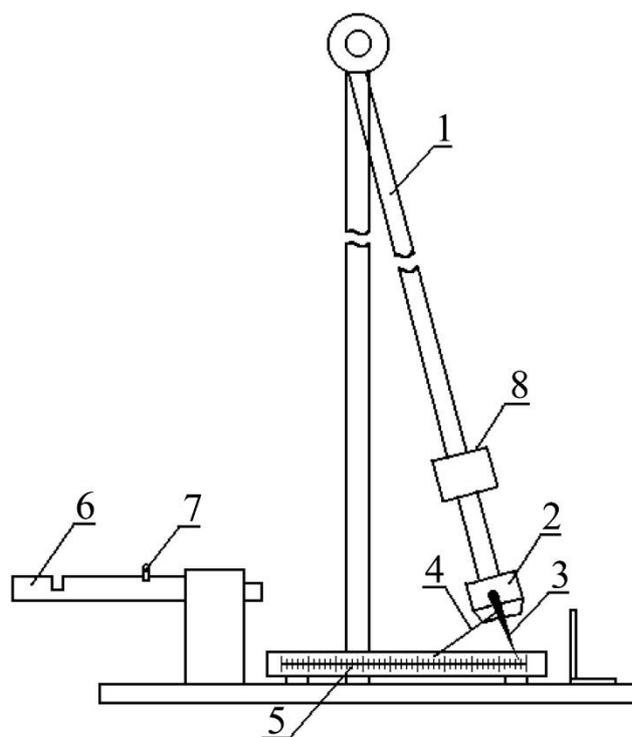


Рис. 13.2

Схематически опыт представлен на рис. 13.3. Пуля попадает в ловушку физического маятника, застревает в ней и сообщает маятнику некоторую угловую скорость  $\omega$ , при этом маятник отклоняется на угол  $\alpha$  относительно его вертикального положения равновесия. Центр массы маятника  $C$  поднимается на высоту  $h$  (рис. 13.3). Особенностью используемого физического

маятника является то, что время действия силы со стороны пули на маятник (время удара) мало по сравнению с периодом колебания маятника, поэтому во время удара маятник не успевает существенно отклониться от положения равновесия. Момент внешних сил, действующих на маятник при попадании в него пули, относительно оси  $z$  равен нулю, поэтому можно применить закон сохранения момента импульса для системы маятник-пуля.

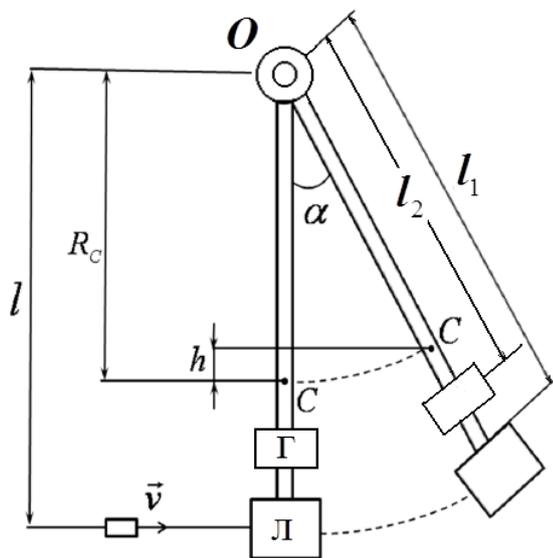


Рис. 13.3

Момент импульса до удара определяется моментом импульса пули массой  $m$ , имеющей скорость  $v$ , а после удара – моментом импульса маятника с пулей относительно оси вращения, проходящей через точку  $O$  (рис. 13.3) перпендикулярно плоскости рисунка. Получим

$$mvl = I\omega, \quad (13.12)$$

где  $l$  – расстояние от оси вращения до линии движения пули,  $I$  – момент инерции маятника с пулей относительно оси вращения,  $\omega$  – угловая скорость, которую приобретает маятник с пулей после удара.

Считаем, что полная механическая энергия сохраняется и кинетическая энергия маятника с пулей переходит в потенциальную энергию при поднятии его центра масс на максимальную высоту  $h$ :

$$\frac{I\omega^2}{2} = Mgh, \quad (13.13)$$

где  $M = (m_1 + m_2 + m_3 + m)$  – масса маятника с пулей, равная сумме масс стержня  $m_1$ , груза  $m_2$ , ловушки  $m_3$  и пули  $m$ .

Выразив из (13.13) угловую скорость маятника с пулей после удара и подставив полученное выражение в (13.12), получим искомую скорость, которую имела пуля до удара:

$$v = \frac{\sqrt{2MghI}}{ml}. \quad (13.14)$$

Максимальную высоту  $h$ , на которую поднимается маятник с пулей, определим через расстояние от точки подвеса  $O$  до центра масс системы маятник-пуля:

$$R_C = \frac{m_1 l_1 / 2 + m_2 l_2 + (m_3 + m)l}{M}, \quad (13.15)$$

где  $l_1$  – длина стержня маятника,  $l_2$  – расстояние от точки подвеса до центра масс груза. Считаем, что масса пули мала по сравнению с массой ловушки

$m \ll m_3$ , а размер ловушки мал по сравнению с длиной стержня так, что  $l_1 \approx l$ . Тогда соотношение (13.15) примет более простой вид

$$R_c = \frac{(m_1 + 2m_3)l + 2m_2l_2}{2M}. \quad (13.16)$$

Выразив высоту  $h$  через расстояние до центра масс системы, получим

$$h = R_c - R_c \cos \alpha = 2R_c \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \quad (13.17)$$

Учитывая соотношение (13.16), имеем

$$h = 2R_c \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{(m_1 + 2m_3)l + 2m_2l_2}{M} \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \quad (13.18)$$

Момент инерции для системы маятник-пули относительно оси вращения, проходящей через точку подвеса  $O$ , по определению равен

$$I = \frac{m_1 l_1^2}{3} + m_2 l_2^2 + (m_3 + m) l^2 \approx \left( \frac{m_1}{3} + m_3 \right) l^2 + m_2 l_2^2. \quad (13.19)$$

Подставляя выражения (13.18) и (13.19) в уравнение (13.14) и учитывая, что для малых углов отклонения маятника после попадания в него пули  $\sin \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}$ , окончательно получим скорость пули в виде

$$v = \frac{\alpha}{m} \sqrt{\frac{gl}{6} (m_1 + 2m_3 + 2m_2\delta) (m_1 + 3m_3 + 3m_2\delta^2)}. \quad (13.20)$$

где  $\delta = l_2/l$ , а угол  $\alpha$  записывается в радианах.

### Порядок выполнения работы и обработка результатов измерений

1. **ВНИМАНИЕ!!!** При выполнении лабораторной работы следует соблюдать следующие меры предосторожности: **до выстрела необходимо точно ориентировать направление движения пули в ловушку 2 (рис. 13.2); не следует находиться в зоне полета пули; в момент выстрела рука, производящая спуск пружины, должна находиться слева относительно рукоятки 7.**

2. Записать массу стержня  $m_1$ , массу груза  $m_2$ , массу ловушки  $m_3$  и длину подвеса  $l$  над таблицей 13.1. Данные приводятся на установке. Массы измерены с помощью технических весов с точностью 0.01 г, а длины – с помощью миллиметровой линейки.

3. Перевести груз 8 (рис. 13.2) в крайнее нижнее положение на стержне. Измерить:

а) массу пули –  $m$ ;

б) расстояние от точки подвеса до центра масс груза –  $l_2$ .

4. Рукояткой 7 сжать и зафиксировать пружину ружья. Перевести маятник в вертикальное неподвижное положение (положение равновесия). Отметить на шкале измерительной линейки 5 абсолютное положение  $n_0$  указателя 3. Измерить расстояние  $L$  от точки подвеса  $O$  до измерительной линейки 5 (рис. 13.2).

5. Зарядить ружье пулей, вставив пулю в цилиндр 6. Соблюдая правила техники безопасности, выстрелить из ружья, резко повернув рукоятку 7.

6. Определить абсолютное положение  $n$  указателя 3 по шкале линейки 5 после отклонения маятника.

7. Вычислить значение отклонения маятника  $S = n - n_0$ .

8. Определить значение угла отклонения маятника от положения равновесия по формуле  $\alpha = S/L$ .

9. По формуле (13.20) определите скорость пули  $v$ .

10. Повторить п. 3-8 не менее 5 раз.

11. Найти среднее значение  $v$ .

12. Расчет погрешности  $\Delta v$  в определении скорости пули производится как для косвенных измерений путем вычисления абсолютных погрешностей в непосредственно измеряемых величинах: массы стержня  $\Delta m_1 = \sqrt{\Delta_{np}^2 + \Delta_{окр}^2}$ ,

массы груза  $\Delta m_2 = \sqrt{\Delta_{np}^2 + \Delta_{окр}^2}$ , массы ловушки  $\Delta m_3 = \sqrt{\Delta_{np}^2 + \Delta_{окр}^2}$ , массы пули  $\Delta m = \sqrt{\Delta_{np}^2 + \Delta_{окр}^2}$ , длины подвеса  $\Delta l = \sqrt{\Delta_{np}^2 + \Delta_{окр}^2}$ , расстояния от точки подвеса до центра масс груза  $\Delta l_2 = \sqrt{\Delta_{np}^2 + \Delta_{окр}^2}$ , расстояния от точки подвеса О до измерительной линейки  $\Delta L = \sqrt{\Delta_{np}^2 + \Delta_{окр}^2}$ , отклонения маятника  $\Delta S$ :

$$\Delta S = \sqrt{\Delta S_{сл}^2 + \Delta_{np}^2 + \Delta_{окр}^2}, \quad (13.21)$$

где случайная погрешность в определении величины  $S$

$$\Delta S_{сл} = t_{p,k} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{S} - S_i)^2}{k(k-1)}}, \quad (13.22)$$

с коэффициентом Стьюдента  $t_{p,k}$  при доверительной вероятности  $p = 0.95$  и числе измерений  $k$ . Максимальная абсолютная погрешность прибора при доверительной вероятности  $p = 0.95$  выражается через предельную погрешность прибора  $\delta$  как

$$\Delta_{np} = \frac{2}{3} \delta,$$

где  $\delta$  – это предельная ошибка приборов одного класса при коэффициенте надежности 0.997. Значение  $\delta$  обычно приводится в паспорте прибора, но в том случае, если паспорт по каким-то причинам отсутствует, в качестве  $\delta$  берут цену наименьшего деления прибора.

Погрешность, обусловленная округлением показаний прибора, определяется для полуширины соответствующего доверительного интервала при заданной доверительной вероятности  $p = 0.95$  по формуле

$$\Delta_{окр} = p \frac{\omega}{2},$$

где  $\omega$  – цена наименьшего деления шкалы прибора.

Из формулы для относительной погрешности в определении скорости пули как для косвенных измерений, которая является функцией относительных погрешностей, измеряемых прямым способом величин:

$$\frac{\Delta v}{\bar{v}} = f\left(\frac{\Delta S}{\bar{S}}, \frac{\Delta m_1}{\bar{m}_1}, \frac{\Delta m_2}{\bar{m}_2}, \frac{\Delta m_3}{\bar{m}_3}, \frac{\Delta m}{\bar{m}}, \frac{\Delta l}{\bar{l}}, \frac{\Delta l_2}{\bar{l}_2}, \frac{\Delta L}{\bar{L}}\right), \quad (13.23)$$

получаем искомую абсолютную погрешность  $\Delta v$ . Относительная погрешность в определении величины  $S$  будет вносить основной вклад в погрешность  $\frac{\Delta v}{\bar{v}}$ , поэтому формулу (13.23) можно существенно упростить:

$$\frac{\Delta v}{\bar{v}} \approx \frac{\Delta S}{\bar{S}}. \quad (13.24)$$

13. Окончательный результат записать в виде

$$v = \bar{v} \pm Dv$$

с указанием доверительной вероятности  $p = 0,95$ .

14. Записать относительную погрешность в процентах  $E = \frac{\Delta v}{\bar{v}} \cdot 100\%$ .

15. Повторить пункты 2-13 для крайнего верхнего положения груза 8.

16. Все данные измерений и их обработки занести в таблицу 13.1.

17. По усмотрению преподавателя опыт можно повторить с пулей другой массы.

**Таблица 13.1**

$m_1 =$              $m_2 =$              $m_3 =$              $l =$   
 $m =$              $l_2 =$              $L =$

№ п/п	$n_0$	$n$	$S = n - n_0$	$\alpha = S/L$	$(\bar{S} - S_i)$	$(\bar{S} - S_i)^2$	$v$
1							
2							
...							
Сред.							
$\Sigma$							

### Контрольные вопросы

1. Сформулируйте законы сохранения механической энергии и момента импульса.

2. Запишите закон сохранения момента импульса для случая абсолютно неупругого удара пули.

3. Оцените систематические погрешности, возникающие при использовании приближений:  $\alpha \approx S/L$ ,  $m \ll m_3$ ,  $l_1 \approx l$ . Почему в данной работе эти погрешности можно не учитывать?

4. Как меняются момент инерции и положение центра масс системы маятник-пуля при перемещении груза 8 вдоль стержня (рис.13.2)? Когда момент инерции системы будет максимальным, когда минимальным?

### Литература

1. *Савельев И.В.* Курс общей физики. Т.1: Механика, молекулярная физика. СПб.: Лань, 2007. 432 с.
2. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики: учеб. пособие. Т.1: Механика. М.: ФИЗМАТЛИТ МФТИ; Изд-во МФТИ, 2002. 560 с.
3. *Трофимова Т.И.* Курс физики: учеб. пособие для вузов. М.: Изд. центр «Академия», 2006. 560 с.

## ИЗУЧЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСКОПА

**Цель работы:** изучение прецессионного движения гироскопа.

**Принадлежности:** лабораторная установка.

## Краткие теоретические сведения

*Гироскоп* – быстровращающееся симметричное твердое тело, ось вращения (ось симметрии) которого может изменять свое направление в пространстве. Свойствами гироскопа обладают вращающиеся небесные тела, артиллерийские снаряды, роторы турбин, устанавливаемых на судах, винты самолетов и т. д. В современной технике гироскоп – основной элемент всевозможных гироскопических устройств или приборов, широко применяемых для автоматического управления движением самолетов, судов, торпед, ракет и в ряде других систем гироскопической стабилизации, для целей навигации (указатели курса, поворота, горизонта, стран света), для измерения угловых или поступательных скоростей движущихся объектов (ракет) и во многих других случаях.

Чтобы ось гироскопа могла поворачиваться в любом направлении, его помещают в карданов подвес (рис. 14.1). Все три оси подвеса пересекаются в одной точке  $O$  – центре карданова подвеса. Закрепленный в таком подвесе гироскоп имеет три степени свободы и может совершать любой поворот около центра подвеса. Если центр тяжести совпадает с центром подвеса, гироскоп называют уравновешенным.

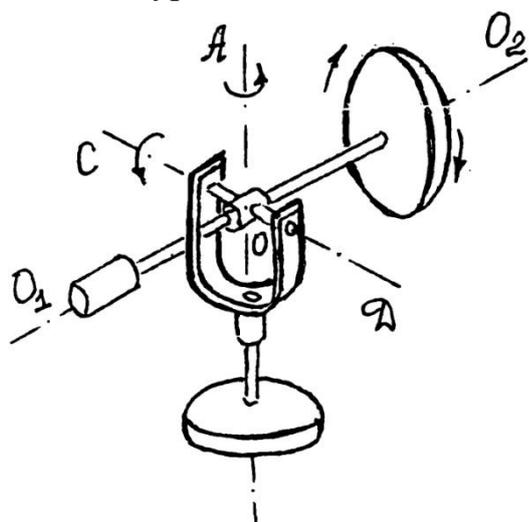


Рис. 14.1

Теория гироскопа относится к разделу динамики твердого тела. В общем виде движение гироскопа представляет собой одну из самых трудных задач механики. Однако в тех случаях, когда гироскоп быстро вращается относительно главной оси инерции и медленно относительно других осей, возможен элементарный анализ его движения. Движение твердого тела, имеющего одну закрепленную точку, описывается уравнением

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (14.1)$$

Для анализа движения гироскопа уравнение (14.1) удобно записать в такой форме:

$$d\vec{L} = \vec{M}dt. \quad (14.2)$$

Отсюда следует, что изменение момента количества движения за время  $dt$  равно произведению суммарного момента всех внешних сил  $\vec{M}$  на время его действия  $dt$  и совпадает с ним по направлению.

В гироскопе различают три направления (оси), проходящие через неподвижную точку тела: 1) направление мгновенной оси вращения, определяемое направлением вектора мгновенной угловой скорости; 2) направление главного момента количества движения (момента импульса); 3) ось симметрии тела. Все три оси в общем случае могут не совпадать по направлению, что значительно усложняет анализ движения гироскопа. Только при очень быстром вращении его вокруг оси симметрии вектор главного момента количества движения и вектор мгновенной угловой скорости практически совпадают с направлением оси симметрии. Поэтому о движении мгновенной оси вращения можно судить по движению оси симметрии гироскопа.

При отсутствии момента внешних сил ( $\vec{M} = 0$ ) из уравнения (14.1) следует  $\vec{L} = const$ , т.е. главный момент количества движения (ось симметрии гироскопа) остается в пространстве неподвижным. При кратковременном воздействии внешних сил (при ударе)  $\Delta t$  очень мало, поэтому на основании уравнения (14.2) будут очень малы и изменения ориентации  $\Delta \vec{L} = \vec{M} \Delta t$ , и оси симметрии гироскопа. При длительном воздействии внешних сил направление в пространстве вектора главного момента количества движения, мгновенной угловой скорости и оси симметрии гироскопа будут изменяться. В том случае, когда направление внешних сил все время одно и то же, ось гироскопа описывает круговую коническую поверхность (рис. 14.2). Такое движение гироскопа называют *прецессией*.

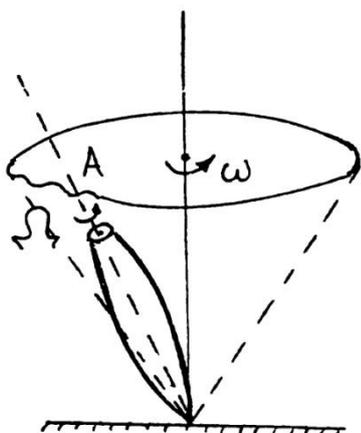


Рис. 14.2

Пусть гироскоп быстро вращается вокруг оси ОУ с угловой скоростью  $\omega$  (рис. 14.3). Если  $I$  – его момент инерции относительно оси ОУ, то момент импульса (момент количества движения) гироскопа есть вектор, направленный по оси ОУ.

$$\vec{L} = I\vec{\omega}. \quad (14.3)$$

Если к концу оси гироскопа подвесить груз на расстоянии  $a$  от центра О, то на гироскоп будет действовать момент силы тяжести, направленный горизонтально перпендикулярно плоскости, в которой лежат ось гироскопа и сила тяжести.

$$\vec{M} = \vec{a} \times m\vec{g}. \quad (14.4)$$

Под действием момента силы тяжести ось гироскопа будет прецессировать вокруг вертикальной оси ОZ и в горизонтальной плоскости. За малый промежуток времени  $dt$  вектор момента импульса гироскопа вместе с осью гироскопа повернется на малый угол  $d\varphi$ . Изменение  $d\vec{L}$  вектора момента импульса (разность векторов  $\vec{L}_1$  и  $\vec{L}_2$  момента импульса в конечном и начальном положениях) лежит в горизонтальной плоскости и направлено в сторону прецессии (рис. 14.3).

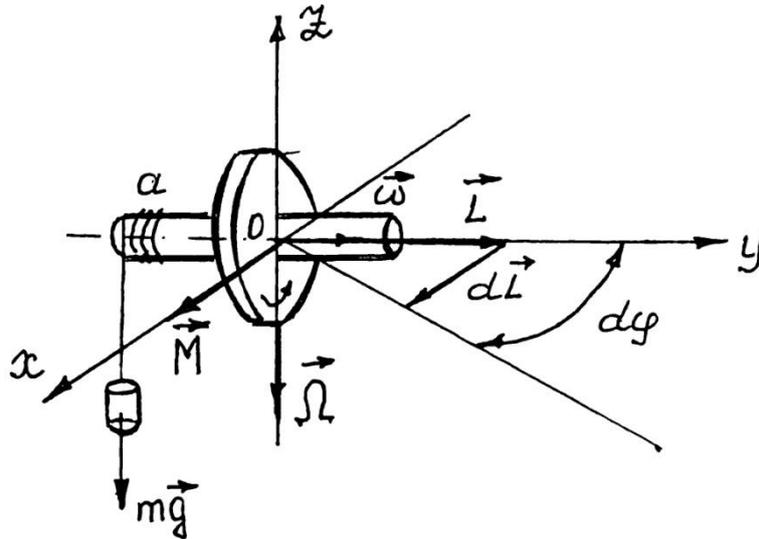


Рис. 14.3

Если момент внешних сил достаточно мал, то можно считать, что вектор  $\vec{L}$  постоянен по модулю, он изменяется лишь по направлению, поэтому

$$|d\vec{L}| = |\vec{L}| d\varphi. \quad (14.5)$$

Разделим обе части последнего равенства на  $dt$

$$\left| \frac{d\vec{L}}{dt} \right| = |\vec{L}| \frac{d\varphi}{dt}, \quad (14.6)$$

где  $\frac{d\varphi}{dt} = |\vec{\Omega}|$  – угловая скорость вращения гироскопа вокруг вертикальной оси OZ (угловая скорость прецессии).

Уточним, что значит достаточно малый момент внешних сил.

Если угловая скорость  $|\vec{\Omega}| \ll |\vec{\omega}|$ , то  $|\vec{L}|$  определяется в основном значением  $\vec{\omega}$ , т.е.  $|\vec{L}| \approx I|\vec{\omega}| = I\omega$ , а это значит, что  $|\vec{L}| = const$ . Таким образом,  $|\vec{M}|$  должен быть таким, чтобы гироскоп вращался вокруг оси OZ гораздо медленнее, чем вокруг оси OY.

Из уравнения моментов (14.1) следует, что

$$\left| \frac{d\vec{L}}{dt} \right| = |\vec{M}|. \quad (14.7)$$

Подставляя это выражение в (14.6), получаем связь между угловой скоростью прецессии  $\vec{\Omega}$  и приложенным моментом  $|\vec{M}|$

$$\Omega = \frac{|\vec{M}|}{|\vec{L}|} = \frac{mga}{I\omega}, \quad (14.8)$$

где  $m$  – масса груза,  $a$  – плечо силы тяжести  $m\vec{g}$  груза,  $I$  – момент инерции гироскопа относительно горизонтальной оси,  $\omega$  – угловая скорость вращения

гироскопа. Учитывая связь линейной и угловой частот вращения гироскопа  $\omega = 2\pi\nu$ , получим рабочую формулу

$$\Omega = \frac{mg}{2\pi\nu I} a. \quad (14.9)$$

### Описание установки и метода измерений

Гироскоп представлен на рис. 14.4. На основании 1, оснащенном ножками с регулируемой высотой, позволяющим произвести выравнивание прибора, закреплена колонна 2. На колонне установлен кронштейн 3 с закрепленными на нем фотоэлектрическим датчиком 4 и внешней втулкой вращательного соединения 5.

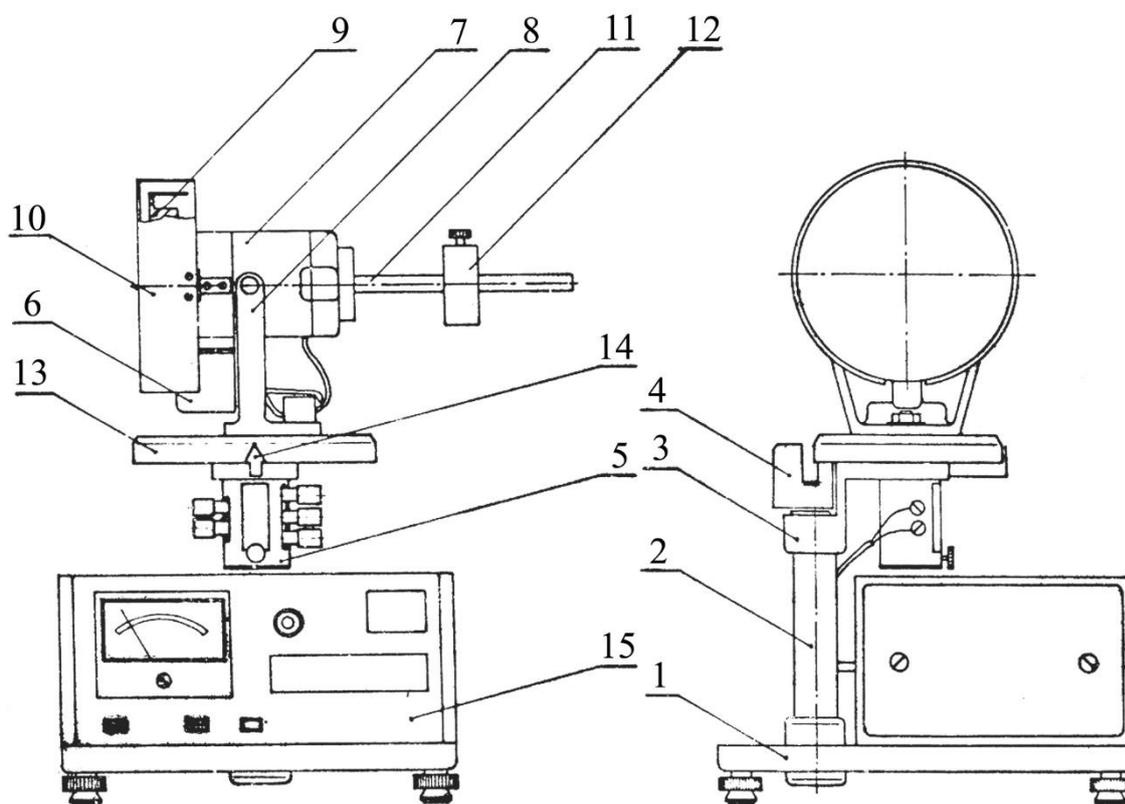


Рис. 14.4

Вращательный соединитель позволяет гироскопу обращаться вокруг вертикальной оси и обеспечивает питание электрическим током фотоэлектрический датчик 6 и электрического двигателя 7.

Электрический двигатель закреплен на кронштейне 8 таким образом, что позволяет неограниченный оборот в вертикальной плоскости. На вале двигателя закреплен диск 9, защищаемый экраном 10. На рычаге 11 закреплен груз 12. При помощи перемещения груза по рычагу можно уравновесить гироскоп.

Оборот гироскопа вокруг вертикальной оси можно считать с диска 13 с нанесенной угловой шкалой при помощи указателя 14. Диск 13 имеет на окружности отверстия через каждые  $5^\circ$ . С помощью этих отверстий

фотоэлектрический датчик 4 фиксирует угол поворота вокруг вертикальной оси гироскопа и передает информацию в блок управления и измерений 15.

Диск 9 имеет отверстия, которые подсчитываются фотоэлектрическим датчиком 6. Это позволяет блоку управления и измерений определять скорость вращения электрического двигателя.

### Порядок выполнения работы и обработка результатов измерений

1. С помощью регулировочных винтов установить стойку гироскопа вертикально. Включить питание двигателя гироскопа.

2. Задать значение частоты вращения гироскопа  $\nu_1$  в диапазоне  $(2.0 \div 6.8) \cdot 10^3$  об/мин. **ВНИМАНИЕ! Плавно вращайте ручку регулировки скорости вращения гироскопа, чтобы не сломать электродвигатель. Для установления частоты вращения выше  $1.5 \cdot 10^3$  об/мин значение задается не сразу, а постепенно в несколько этапов с шагом  $\sim 0.4 \cdot 10^3$  об/мин.**

3. Выбрать начало отсчета координаты  $x$  груза 12 вдоль стержня 11.

4. Установить груз в начальное положения и с помощью блока 15 определить время  $t$ , за которое гироскоп совершит поворот на угол  $\varphi$  вокруг вертикальной оси. Повторить данный пункт не менее 3 раз.

5. Занести результаты измерений в таблицу 14.1.

6. Повторить действия пунктов 4,5 для 8-10 других значений  $x$ , не отключая питание электродвигателя и не изменяя частоту вращения гироскопа  $\nu_1$ . Следующее значение координаты  $x$  задается при помощи штангенциркуля путем смещения груза 12 вдоль стержня 11 на 1.0-1.5 см относительно текущего значения  $x$ . При различных  $x$  гироскоп будет прецессировать по-разному. Если направление прецессии меняется на противоположное, то значения угла поворота  $\varphi$  необходимо заносить в таблицу 14.1 со знаком «минус».

7. Вычислить угловую скорость прецессии  $\Omega = \frac{\varphi}{t}$  и найти ее среднее значение для каждого положения груза 12.

8. Повторить действия пунктов 2-7 для еще двух значений частоты вращения гироскопа  $\nu_2$  и  $\nu_3$ .

9. Построить графики зависимости средней угловой скорости прецессии  $\bar{\Omega}$  от значения координаты  $x$  для всех частот вращения гироскопа.

10. Учитывая, что плечо силы тяжести  $a$  определяется модулем разности текущей координаты  $x$  и координаты  $x_0$ , при которой гироскоп сбалансирован и не прецессирует ( $a = |x - x_0|$ ), найти с помощью построенных графиков и уравнения (14.9)  $x_0$  и угловой коэффициент  $k$  как тангенс угла наклона прямой к оси абсцисс.

11. Данные занести в таблицу 14.2.

12. Учитывая, что  $k = \frac{mg}{2\pi\nu I}$ , вычислить момент инерции  $I$ .

13. Вычислить среднее значение  $x_0$  и момента инерции  $\bar{I}$ .

14. Определить полуширину доверительного интервала  $\Delta x_0$  и  $\Delta I$  по формуле Стюдента. Поскольку результаты опыта не повторяются (измерения делаем для разных значений плеча  $a$  и частот вращения гироскопа  $\nu$ ), расчет абсолютной погрешности здесь производится как при прямых измерениях, хотя момент инерции гироскопа определяется косвенным образом через другие непосредственно измеряемые величины.

15. Окончательный результат записать в виде

$$I = \bar{I} \pm \Delta I$$

$$x_0 = \bar{x}_0 \pm \Delta x_0$$

с указанием доверительной вероятности  $p = 0.95$ .

16. Записать относительные погрешности в процентах.

**Таблица 14.1**

$\nu =$                       Гц

№ п/п	$x$ , м	$\varphi$ , рад	$t$ , с	$\Omega$ , рад/с	$\bar{\Omega}$ , рад/с

**Таблица 14.2**

№ п/п	$\nu$ , Гц	$x_0$ , см	$(\bar{x}_0 - x_{0i})^2$ , см	$k$ , рад/(с·м)	$I$ , кг·м <sup>2</sup>	$(\bar{I} - I_i)^2$ , (кг·м <sup>2</sup> ) <sup>2</sup>
1						
2						
3						
Сред.						
$\Sigma$						

### Контрольные вопросы

1. Сформулируйте уравнение динамики вращательного движения твердого тела.
2. Что такое момент импульса твердого тела? Как определяется направление момента импульса? Что называют моментом инерции?
3. Что такое свободные оси (главные оси инерции)? Какие из них являются устойчивыми?
4. Что такое гироскоп? Каковы его основные свойства?
5. Какое движение называется прецессией? Чем объясняется «необычное» поведение движения гироскопа? Укажите на рисунке направление момента силы, момента импульса.
6. Что называют угловой скоростью прецессии? Вывод формулы.
7. Если ударить карандашом по вращающемуся гироскопу, то ось гироскопа не изменит своего направления. Почему?
8. Что называют гироскопическими силами?

9. Что называют нутацией?

10. Объясните поведение «китайского волчка».

#### **Литература**

1. *Савельев И.В.* Курс общей физики. Т.1: Механика, молекулярная физика. СПб.: Лань, 2007. 432 с.
2. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики: учеб. пособие. Т.1: Механика. М.: ФИЗМАТЛИТ МФТИ; Изд-во МФТИ, 2002. 560 с.

## ИЗУЧЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ МАЯТНИКА МАКСВЕЛЛА

**Цель:**

1. Изучение движения маятника Максвелла.
2. Определение момента инерции маятника.

**Принадлежности:** лабораторная установка, сменные кольца.

### Краткие теоретические сведения

Движение маятника Максвелла – один из примеров колебательных процессов в механике. Как и другие маятники, маятник Максвелла характеризуется повторением всех фаз своего движения через некоторый интервал времени (период колебаний) и переходом потенциальной энергии в кинетическую и обратно. Однако, в отличие от математического, физического или пружинного маятников, маятник Максвелла совершает принципиально негармонические колебания. Маятник Максвелла представляет собой диск, насаженный на ось и подвешенный с помощью бифилярного подвеса к опоре. Характерные графики изменения координаты, скорости и ускорения маятника представлены на рис. 15.1.

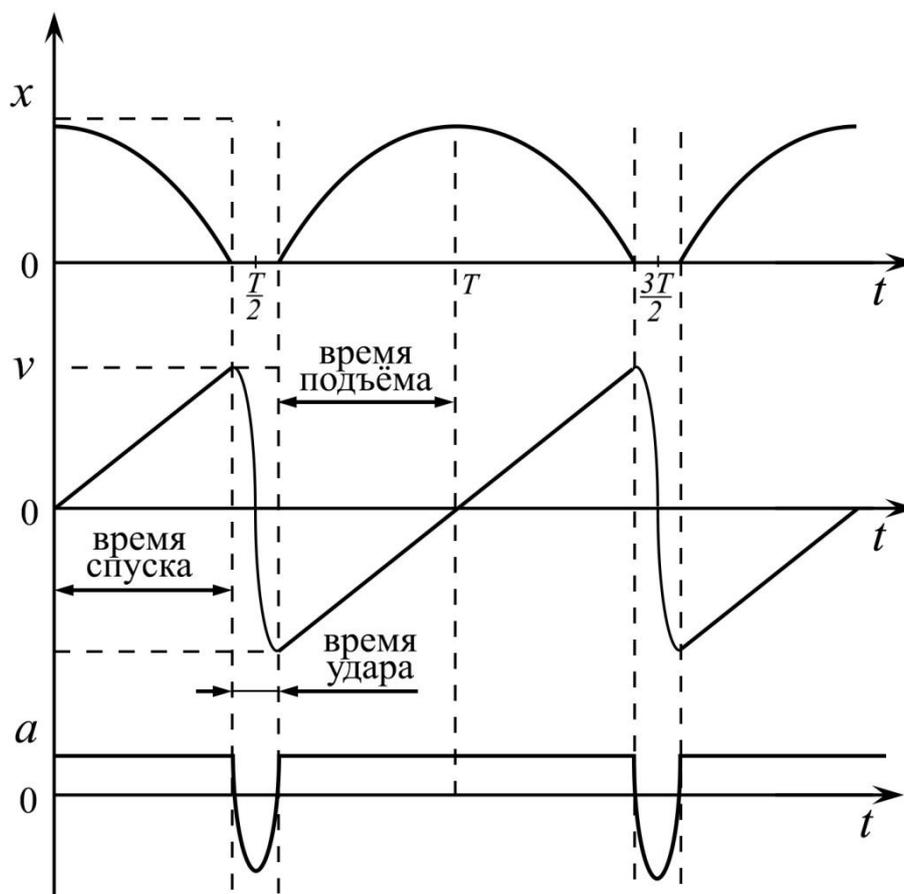


Рис. 15.1

В верхнем положении маятника нити намотаны на ось, в нижнем (положении равновесия) – полностью размотаны. Графики на рис. 15.1 относятся к прямолинейному движению центра инерции. Опускание маятника из верхнего в нижнее положение и подъем обратно представляют собой одно полное колебание, имеющее период  $T$ . Движение из верхнего положения в нижнее (или наоборот) составляет половину колебания и длится  $T/2$  с. Поскольку движение маятника является периодическим, то вполне достаточно исследовать движение в течение одного периода. Более того, опускание и подъем маятника происходят по одинаковым сценариям, а это означает, что характер движения можно изучить на примере только опускания (или только подъема) маятника.

Кинетическая энергия маятника равна

$$W = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{Iv^2}{2r^2} = \frac{mv^2}{2} \left( 1 + \frac{I}{mr^2} \right), \quad (15.1)$$

где  $\omega = v/r$  – угловая скорость маятника,  $I$  – момент инерции маятника.

Поскольку  $\frac{I}{mr^2} \gg 1$ , кинетическая энергия  $\frac{mv^2}{2}$ , связанная с поступательным движением, мала по сравнению с энергией вращательного движения  $\frac{I\omega^2}{2}$ . Это является главным отличительным признаком маятника Максвелла.

Характерной особенностью маятника Максвелла является малая потеря энергии при ударе  $\Delta W_{y0} \ll W_k$ , т.е. близкий к единице коэффициент восстановления скорости  $k = \frac{v_2}{v_1}$ . Именно благодаря этому в данной системе можно наблюдать колебания, т.е. многократное повторение цикла движения вниз – вверх, а сама система называется «маятником».

### Описание установки и метода измерений

Маятник Максвелла представлен на рис. 15.2 и включает в свой состав: штатив 1; кронштейны с фотодатчиком 2 и электромагнитами 3; диск 4 с осью, подвешенной на двух нитях 5; узел 6 подвески и регулировки исходного положения маятника; комплект из трех сменных колец с различными моментами инерции; блок электронный 7; металлический флажок 8 для определения верхнего положения маятника. На передней панели электронного блока 7 находится табло. Управление блоком осуществляется кнопками СТАРТ и СТОП. При нажатии кнопки СТАРТ на блоке электромагниты 3 должны отключиться и маятник будет раскручиваться. Таймер производит отсчет времени в момент пересечения маятником оптической оси фотодатчика 2.

Для количественного исследования движения маятника Максвелла

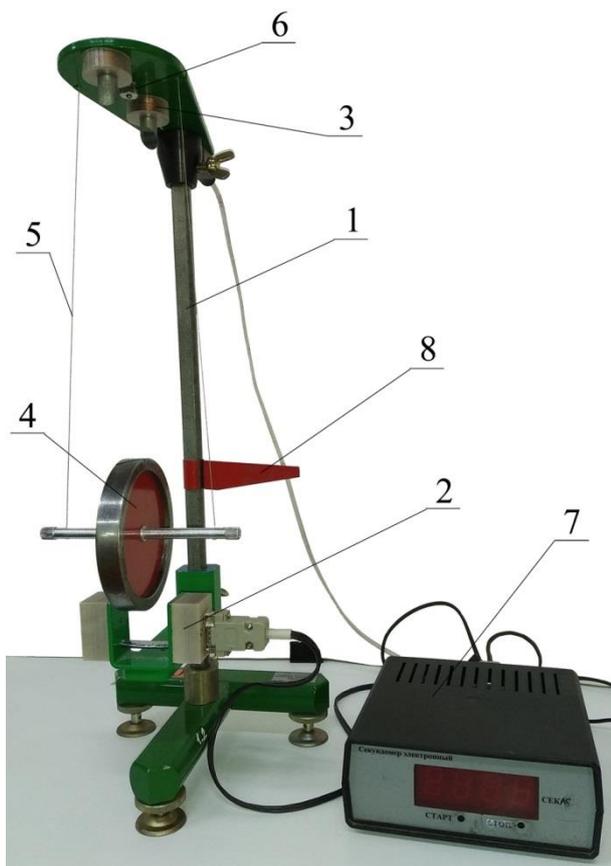


Рис. 15.2

используем уравнения динамики твердого вращающегося тела. Эти уравнения представляют собой второй закон Ньютона для поступательного и уравнение вращательного движения

$$M \vec{a} = \sum_i \vec{F}_i, \quad (15.2)$$

$$I \vec{\varepsilon} = \sum_j \vec{L}_j, \quad (15.3)$$

где  $M$  и  $I$  – масса и момент инерции маятника,  $\vec{a}$  и  $\vec{\varepsilon}$  – линейное и угловое ускорения, и  $\vec{F}_i$ ,  $\vec{L}_j$  – силы и моменты сил, действующих на маятник.

Поскольку вектора ускорения и сил направлены вдоль вертикальной прямой, то можно выбрать систему координат, в которой из всех проекций уравнения (15.2) останется только одна ненулевая проекция на ось  $z$  (рис. 15.3). То же самое можно сказать об уравнении (15.3), так как вращение происходит вокруг оси  $x$ , не меняющей своей ориентации в пространстве. Тогда система уравнений будет выглядеть так:

$$Ma = \sum_i F_{iz}, \quad (15.4)$$

$$I \varepsilon = \sum_j L_{jx}. \quad (15.5)$$

Рассмотрим силы и моменты сил, действующих на маятник (рис. 15.3). Определим момент сил относительно оси симметрии маятника. Тогда уравнения движения будут выглядеть следующим образом:

$$Ma = Mg - N, \quad (15.6)$$

$$I \varepsilon = Nr, \quad (15.7)$$

где  $r$  – радиус оси маятника,  $N$  – сила натяжения нити,  $g$  – ускорение свободного падения. Кроме того, как нетрудно заметить, характеристики вращательного и поступательного движения связаны между собой:

$$a = \varepsilon r. \quad (15.8)$$

Из уравнений (15.6)–(15.8) можно определить любую из величин, если известны остальные. Например, можно рассчитать ускорение свободного падения, если знать параметры маятника  $M$ ,  $I$ ,  $r$  и измерить ускорение его движения  $a$  (остальные переменные в уравнениях исключаются). Можно

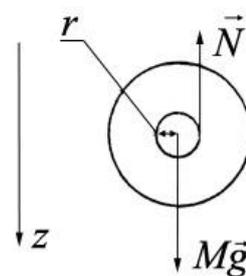


Рис. 15.3

рассчитать вес  $P$  маятника в движении, который будет равняться силе натяжения нитей подвеса  $N$ .

Применим систему (15.6)–(15.8) для вычисления момента инерции маятника Максвелла. Преобразования системы дадут следующую формулу для момента инерции:

$$I = Mr^2 \left( \frac{g}{a} - 1 \right). \quad (15.9)$$

Для определения ускорения  $a$ , воспользуемся известной формулой кинематики поступательного движения

$$a = \frac{2h}{t^2}, \quad (15.10)$$

где  $h$  – путь, проходимый телом за время  $t$ .

Измеряя время, за которое маятник проходит некоторый путь, зная массу маятника и радиус его оси, можно рассчитать момент инерции маятника по формуле

$$I = \frac{Md^2}{4} \left( \frac{gt^2}{2h} - 1 \right), \quad (15.11)$$

где  $d = 2r$  – диаметр оси маятника.

Этот же момент инерции можно рассчитать, если знать массы и геометрические размеры составных частей маятника (при известной оси вращения). Считая, что маятник вращается вокруг своей оси симметрии, момент инерции определим по формуле

$$I = I_0 + I_d + I_k, \quad (15.12)$$

где  $I_0$  – момент инерции оси маятника,  $I_d$  – момент инерции диска маятника,  $I_k$  – момент инерции сменного кольца маятника, надеваемого на диск.

Отдельные моменты инерции вычислим следующим образом:

$$I_0 = \frac{1}{2} m_0 r^2, \quad (15.13)$$

$$I_d = \frac{1}{2} m_d (r^2 + r_d^2), \quad (15.14)$$

$$I_k = \frac{1}{2} m_k (r_d^2 + r_k^2), \quad (15.15)$$

где  $m_0$ ,  $m_d$ ,  $m_k$  – соответственно массы оси, диска, кольца,  $r$ ,  $r_d$ ,  $r_k$  – внешние радиусы оси, диска, кольца.

Сравнение момента инерции, определенного экспериментально с помощью формулы (15.11), и момента инерции, рассчитанного теоретически по формуле (15.12), должно дать одинаковые результаты (с учетом погрешности измерений).

## Порядок выполнения работы и обработка результатов измерений

**Внимание! Во избежание перегревания катушек электромагнитов время непрерывной работы электромагнитов не должно превышать 15 секунд, перерыв – 5 секунд.**

1. Измерить массу маятника без кольца  $m = (m_0 + m_d)$ , взвесив его на технических весах. Штангенциркулем измерить внешние диаметры оси  $d$ , диска  $d_d$ , длину оси маятника  $l$  и толщину диска  $l_d$ . Записать данные над таблицей 15.1.

2. Учитывая, что ось и диск изготовлены из одного материала, определить массы оси  $m_0$  и диска  $m_d$  по формуле

$$\frac{m}{(V_0 + V_d)} = \frac{m_0}{V_0} = \frac{m_d}{V_d}, \quad (15.16)$$

где  $V_0, V_d$  – объемы оси и диска соответственно.

Отсюда

$$m_0 = \frac{m}{\left\{ 1 + \frac{l_d}{l} \left( \frac{d_d}{d} \right)^2 \right\}}, \quad (15.17)$$

$$m_d = \frac{m}{\left\{ 1 + \frac{l}{l_d} \left( \frac{d}{d_d} \right)^2 \right\}}. \quad (15.18)$$

2. Измерить внешний диаметр одного из колец  $d_k$  и его массу  $m_k$ . Записать значения над таблицей 15.2.

3. Установить нижний кронштейн с фотодатчиком 3 в крайнее нижнее положение шкалы так, чтобы плоскость кронштейна, окрашенная в синий цвет, совпадала с одной из рисок шкалы (рис.15.3).

4. Надеть сменное кольцо на диск 5.

5. Установить с помощью устройства 7 необходимую длину бифилярного подвеса таким образом, чтобы край среза сменного кольца маятника находился на 4-5 мм ниже оптической оси фотодатчика 3, при этом ось маятника должна занимать горизонтальное положение.

6. Нажать кнопку СЕТЬ измерительного блока 8. При этом включаются электромагниты и табло индикации.

7. Вращая маятник по часовой стрелке, зафиксировать его в верхнем положении при помощи левого (ближе к стойке) электромагнита, при этом необходимо следить за тем, чтобы нить наматывалась на ось виток к витку.

8. Нажать кнопку СТАРТ на блоке. После остановки секундомера определить время движения маятника. Показания секундомера  $t$  записать в таблицу 15.2.

9. Повторить измерения для выбранного кольца 5-8 раз.

10. Определить по миллиметровой шкале при помощи визира путь  $h$  маятника и записать значение над таблицей 15.2.

11. Вычислить момент инерции  $I$  маятника с кольцом по формуле (15.11), учитывая массу диска с осью и массу кольца, т.е.  $M = m + m_k$ . Найти среднее значение  $\bar{I}$ .

12. Расчет погрешности  $\Delta I$  в определении момента инерции маятника производится как для косвенных измерений путем вычисления абсолютных погрешностей в непосредственно измеряемых величинах: массы маятника без кольца  $\Delta m = \sqrt{\Delta_{np}^2 + \Delta_{окр}^2}$ , массы кольца  $\Delta m_k = \sqrt{\Delta_{np}^2 + \Delta_{окр}^2}$ , диаметра оси  $\Delta d = \sqrt{\Delta_{np}^2 + \Delta_{окр}^2}$ , высоты опускания маятника  $\Delta h = \sqrt{\Delta_{np}^2 + \Delta_{окр}^2}$  и времени его движения  $\Delta t$ :

$$\Delta t = \sqrt{\Delta t_{сл}^2 + \Delta_{np}^2 + \Delta_{окр}^2}, \quad (15.19)$$

где случайная погрешность в определении времени

$$\Delta t_{сл} = t_{p,n} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{t} - t_i)^2}{n(n-1)}}, \quad (15.20)$$

с коэффициентом Стьюдента  $t_{p,n}$  при доверительной вероятности  $p = 0.95$  и числе измерений  $n$ . Максимальная абсолютная погрешность прибора при доверительной вероятности  $p = 0.95$  выражается через предельную погрешность прибора  $\delta$  как

$$\Delta_{np} = \frac{2}{3} \delta,$$

где  $\delta$  – предельная ошибка приборов одного класса при коэффициенте надежности 0.997. Значение  $\delta$  обычно приводится в паспорте прибора, но в том случае, если паспорт по каким-то причинам отсутствует, в качестве  $\delta$  берут цену наименьшего деления прибора.

Погрешность, обусловленная округлением показаний прибора, определяется для полуширины соответствующего доверительного интервала при заданной доверительной вероятности  $p = 0.95$  по формуле

$$\Delta_{окр} = p \frac{\omega}{2},$$

где  $\omega$  – цена наименьшего деления шкалы прибора.

Из формулы для относительной погрешности в определении момента инерции маятника как для косвенных измерений, которая является функцией относительных погрешностей, измеряемых прямым способом величин,

$$\frac{\Delta I}{\bar{I}} = \sqrt{2 \left( \frac{\Delta m}{\bar{M}} \right)^2 + \left( \frac{2 \Delta d}{\bar{d}} \right)^2 + \left( \frac{2 \Delta t}{\bar{t}} \left( 1 + \frac{\bar{M} \bar{d}^2}{4 \bar{I}} \right) \right)^2 + \left( \frac{\Delta h}{\bar{h}} \left( 1 + \frac{\bar{M} \bar{d}^2}{4 \bar{I}} \right) \right)^2}$$

получаем искомую абсолютную погрешность  $\Delta I$ . Здесь  $\Delta m = \Delta m_k$ , так как массы  $m$  и  $m_k$  измеряются один раз и с помощью одного и того же прибора.

13. Окончательный результат записать в виде  $I = \bar{I} \pm DI$  с указанием доверительной вероятности  $p = 0,95$ .

14. Записать относительную погрешность в процентах  $E = \frac{\Delta I}{\bar{I}} \cdot 100\%$

15. Рассчитать момент инерции маятника по формуле (15.12) и сравнить его с полученным экспериментально значением.

16. Провести эксперименты с другими сменными кольцами, повторив пункты 2-15.

**Таблица 15.1**

$m$ , кг	$d$ , м	$d_d$ , м	$l$ , м	$l_d$ , м	$m_0$ , кг	$m_d$ , кг

**Таблица 15.2**

$d_k =$  м;  $m_k =$  кг;  $h =$  м.

№ п/п	$t$ , с	$(\bar{t} - t_i)$ , с	$(\bar{t} - t_i)^2$ , с <sup>2</sup>	$I$ , кг·м <sup>2</sup>
1				
...				
5				
Сред.				
$\Sigma$				

### Контрольные вопросы

1. В чем особенность маятника Максвелла?
2. Постройте графики изменения координаты, скорости и ускорения для математического маятника. Сравните с графиками для маятника Максвелла.
3. Какие основные законы используются для исследования движения маятника Максвелла? Выведите формулу (15.11).
4. Дайте определение момента инерции. Как можно изменить эту величину ходе эксперимента. Какую роль играет момент инерции при вращении? Выведете формулы (15.14), (15.15).
5. Оцените вес маятника.

### Литература

1. Матвеев А.Н. Общий физический практикум. Механика. М.: Изд-во МГУ, 1991. 272 с.
2. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.1: Механика, молекулярная физика. СПб.: Лань, 2007. 432 с.
3. Стрелков С.П. Механика. СПб.: Лань, 2005. 560 с.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЯ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ С ПОМОЩЬЮ МАТЕМАТИЧЕСКОГО И ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКОВ

### Цель работы:

1. Изучить работу физического маятника и связанные с ним основные понятия и законы.
2. Экспериментально определить ускорение силы тяжести с помощью физического маятника.
3. Экспериментально определить момент инерции тела относительно произвольной оси вращения.

**Принадлежности:** лабораторная установка.

### Краткие теоретические сведения

Физическим маятником называется твердое тело, способное совершать колебания вокруг некоторой оси. Период малых колебаний физического маятника определяется формулой

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}}, \quad (16.1)$$

где  $I$  – момент инерции маятника относительно оси подвеса (или оси вращения),  $m$  – его масса,  $l$  – расстояние от оси подвеса до центра инерции маятника,  $g$  – ускорение свободного падения.

В формуле (16.1) величину

$$l_{np} = \frac{I}{ml} \quad (16.2)$$

называют приведенной длиной физического маятника, так как математический маятник длины  $l_{np}$  будет иметь одинаковый период с данным физическим маятником. *Приведенной длиной* физического маятника называется длина такого математического маятника, период колебаний которого одинаков с периодом физического маятника. Отсюда получаем формулу для определения ускорения силы тяжести

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2} l_{np}. \quad (16.3)$$

Период колебаний  $T$  физического маятника можно измерить непосредственно с помощью секундомера, а приведенную длину  $l_{np}$  непосредственно измерить нельзя. Поэтому необходимо выразить приведенную длину через величины, доступные прямому измерению. По теореме Гюйгенса-Штейнера, момент инерции  $I$  маятника относительно любой оси подвеса равен

$$I = I_0 + ml^2, \quad (16.4)$$

где  $I_0$  – момент инерции маятника относительно оси, параллельной оси подвеса и проходящей через центр инерции маятника,  $l$  – расстояние от оси подвеса до центра инерции.

Подставив (16.4) в формулу (16.1), получим

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{mgl} + \frac{l}{g}}. \quad (16.5)$$

График зависимости периода колебаний  $T$  от расстояния  $l$  представляет кривую, имеющую минимум (рис. 16.1).

Решив уравнение  $\frac{dT}{dl} = 0$  относительно  $l$ , найдем, что в точке минимума

$$l_m = \sqrt{\frac{I_0}{m}} = a_0, \quad (16.6)$$

где  $a_0$  – радиус инерции маятника относительно оси, проходящей через его центр инерции. Подставив (16.6) в формулу (16.5), получим выражение для минимального периода:

$$T_m = 2\pi \sqrt{\frac{2}{g} \sqrt{\frac{I_0}{m}}} = 2\pi \sqrt{\frac{2a_0}{g}}. \quad (16.7)$$

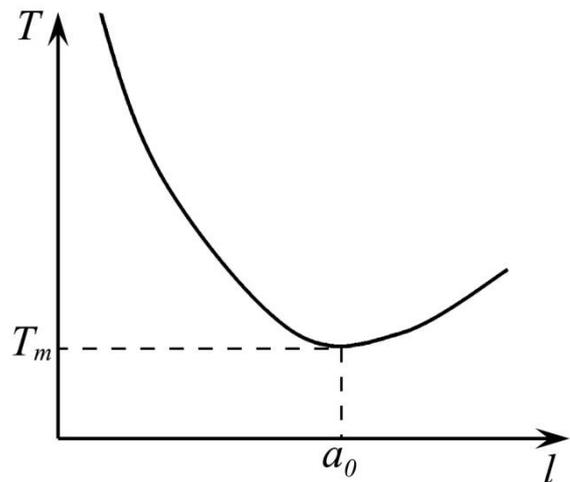


Рис. 16.1

Таким образом: а) если маятник колеблется относительно оси, проходящей на расстоянии радиуса инерции  $a_0$  от центра инерции, то период колебаний маятника будет наименьшим из всех возможных; б) если же ось подвеса удаляется от  $l = a_0$ , то период колебаний будет увеличиваться до бесконечности при приближении оси подвеса к центру инерции и до некоторой конечной величины, зависящей от центра инерции.

Прямая  $T = const$  на рис. 16.2 пересечет кривую  $T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{mgl} + \frac{l}{g}}$  в двух точках  $l_1$  и  $l_2$ , т.е. существуют такие две оси подвеса по одну сторону от центра инерции, периоды колебаний которых совпадают. Решая уравнение (16.5), найдем, что эти оси находятся от центра инерции на расстояниях

$$l_1 = \frac{gT^2}{8\pi^2} + \sqrt{\left(\frac{gT^2}{8\pi^2}\right)^2 - \frac{I_0}{m}}, \quad l_2 = \frac{gT^2}{8\pi^2} - \sqrt{\left(\frac{gT^2}{8\pi^2}\right)^2 - \frac{I_0}{m}}. \quad (16.8)$$

Сумма расстояний  $l_1$  и  $l_2$  равна приведенной длине физического маятника

$$l_1 + l_2 = \frac{gT^2}{4\pi^2} = l_{np}. \quad (16.9)$$

Таким образом, измерив период  $T$  и найдя  $l_{np}$  из графика, можно вычислить ускорение силы тяжести по формуле (16.3).

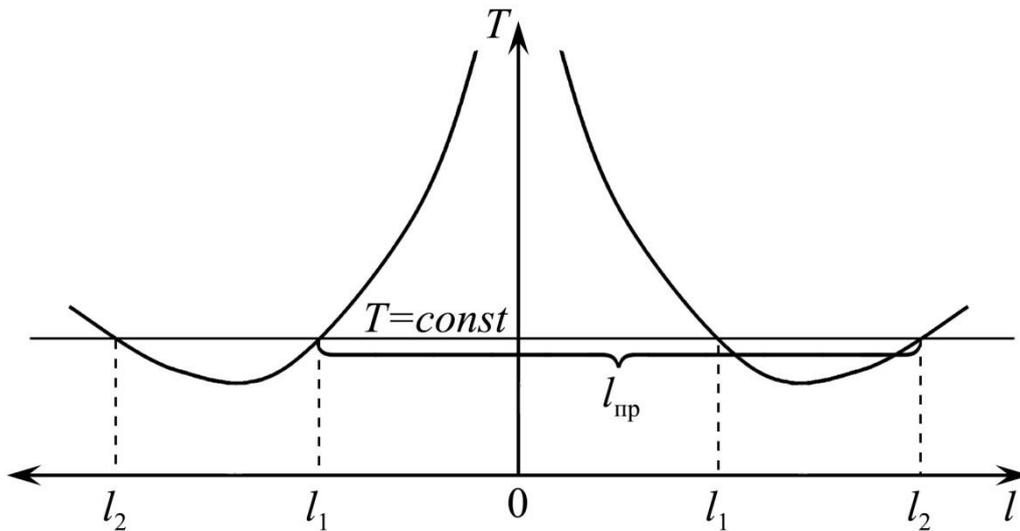


Рис.16.2

Перемножая в (16.8) расстояния  $l_1$  и  $l_2$ , получим формулу для определения момента инерции маятника относительно оси, проходящей через его центр инерции,

$$I_0 = ml_1l_2 = ma_0^2. \quad (16.10)$$

отсюда

$$a_0^2 = l_1l_2. \quad (16.11)$$

Зная  $I_0$ , по теореме Гюйгенса-Штейнера (16.4) можно вычислить момент инерции  $I$  относительно любой оси подвеса или определить его экспериментально, пользуясь формулой (16.1).

### Описание установки и метода измерений

Общий вид универсального маятника представлен на рис. 16.3. Маятник универсальный представляет собой штатив 1, математический и физический маятники, имеющие узлы подвеса на едином кронштейне 2.

Математический маятник имеет бифилярный подвес, выполненный из капроновой нити 3, на которой подвешен груз в виде металлического шарика 4, и устройство 5 для изменения длины подвеса маятника.

Физический (оборотный) маятник имеет жесткий металлический стержень 6 с рисками через каждые 10 мм для

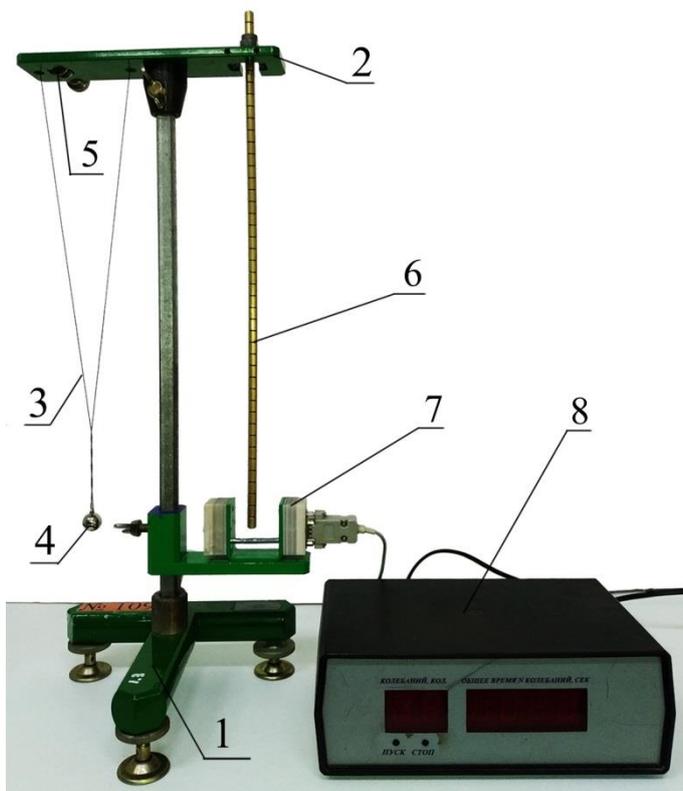


Рис. 16.3

отсчета длины, две призматические опоры два груза (для работы с обратным маятником, на рисунке не указаны) с возможностью перемещения и фиксации по всей длине стержня.

Узлы подвески математического и физического маятников расположены на диаметрально противоположных, относительно вертикальной стойки, сторонах кронштейна. С помощью фотодатчика 7 колебания маятника фиксируются и подсчитываются блоком управления 8.

Блок электронный включает в свой состав корпус 8, на передней панели которого находится электронное табло и счетчика колебаний. Управление блоком осуществляется кнопками (ПУСК и СТОП). Принцип работы заключается в подсчете времени между нажатием кнопки ПУСК и сигналом от срабатывания фотодатчика, при подсчете полных колебаний от момента пуска таймера до нажатия кнопки СТОП.

### **Упражнение №1**

#### **Определение ускорения силы тяжести при помощи математического маятника**

##### **Порядок выполнения работы**

1. Установить нижний кронштейн с фотодатчиком 7 в крайнее нижнее положение шкалы так, чтобы плоскость кронштейна, окрашенная в синий свет, совпадала с одной из рисок шкалы (рис. 16.3).

2. Установить верхний кронштейн таким образом, чтобы шарик 4 математического маятника оказался в рабочей зоне фотодатчика. Вращая ролик устройства 5, добиться такого положения шарика, при котором его центральная риска будет совпадать по высоте с риской на фотодатчике.

3. По шкале вертикальной стойки определить длину математического маятника  $L$ .

4. Нажать кнопку СЕТЬ блока. При этом должно включиться табло индикации.

5. Отклонить шарик математического маятника на угол 5-6 градусов и отпустить. Нажать кнопку ПУСК на блоке. По показанию таймера определить значение времени при  $N = 20$  колебаниях маятника. Нажать кнопку СТОП.

6. Повторить пункт 5 не менее пяти раз. Данные измерений записать в таблицу 16.1.

##### **Обработка результатов измерений**

1. По формуле  $T = \frac{t}{N}$  найти период колебаний математического маятника.

2. Вычислить значение ускорения силы тяжести  $g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$ .

Таблица 16.1

L =		M				
№ п/п	N	t, с	T, с	$(\bar{T} - T_i), с$	$(\bar{T} - T_i)^2, с^2$	g, м/с <sup>2</sup>
1						
...						
5						
Сред.						
Σ						

3. Найти среднее значение ускорения свободного падения  $\bar{g}$ .

4. Расчет погрешности  $\Delta g$  в определении ускорения свободного падения произвести как для косвенных измерений, вычислив абсолютные погрешности для измеряемых величин: длины маятника  $\Delta L = \sqrt{\Delta_{np}^2 + \Delta_{окр}^2}$  и периода колебаний  $\Delta T$ :

$$\Delta T = \sqrt{\Delta T_{сл}^2 + \left(\frac{\Delta_{np}}{N}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_{окр}}{N}\right)^2},$$

где случайная погрешность в определении периода колебаний

$$\Delta T_{сл} = t_{p,n} \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\bar{T} - T_i)^2},$$

с коэффициентом Стьюдента  $t_{p,n}$  при доверительной вероятности  $p = 0.95$  и числе измерений  $n$ . Максимальная абсолютная погрешность прибора при доверительной вероятности  $p = 0.95$  выражается через предельную погрешность прибора  $\delta$  как

$$\Delta_{np} = \frac{2}{3} \delta,$$

где  $\delta$  – это предельная ошибка приборов одного класса при коэффициенте надежности 0.997. Значение  $\delta$  обычно приводится в паспорте прибора, но если паспорт по каким-то причинам отсутствует, в качестве  $\delta$  берут цену наименьшего деления прибора.

Погрешность, обусловленная округлением показаний прибора, определяется для полуширины соответствующего доверительного интервала при заданной доверительной вероятности  $p = 0.95$  по формуле

$$\Delta_{окр} = p \frac{\omega}{2},$$

где  $\omega$  – цена наименьшего деления шкалы прибора.

Из формулы для относительно погрешности в определении ускорения свободного падения как для косвенных измерений

$$\frac{\Delta g}{\bar{g}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta L}{\bar{L}}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta T}{\bar{T}}\right)^2}$$

получаем искомую абсолютную погрешность  $\Delta g$ .

5. Окончательный результат записать в виде  $g = \bar{g} \pm \Delta g$  с указанием доверительной вероятности  $p = 0.95$ .

6. Вычисляем относительную погрешность в процентах  $E = \frac{\Delta g}{\bar{g}} \cdot 100\%$ .

### Упражнение №2

#### Определение ускорения силы тяжести при помощи физического маятника

##### Порядок выполнения работы

1. Взвешиванием на технических весах определить массу стержня  $m$ , используемого в качестве физического маятника.

2. При помощи кольцевых нарезок на стержне определить его длину  $L$  и все возможные расстояния  $l$  от центра инерции до каждой кольцевой метки по одну сторону от центра инерции.

3. Опустить кронштейн с фотоэлектрическим датчиком в нижнее положение.

4. Закрепить опорную призму на стержне так, чтобы ее ребро оказалось против самой удаленной кольцевой метки.

5. Установить маятник-стержень опорной призмой на вкладыше верхнего кронштейна

6. Нижний кронштейн вместе с фотоэлектрическим датчиком переместить таким образом, чтобы стержень маятника пересекал оптическую ось.

7. Определить период колебаний физического маятника  $T$ . Для этого отклонить стержень на 4-5 градусов от положения равновесия и отпустить. Нажать клавишу ПУСК. После подсчета времени при 10 полных колебаниях нажать клавишу СТОП. Записать число полных колебаний  $N$  и время  $t$ , в течение которого они совершаются, в таблицу 16.2. (Если фотодатчика нет, то количество колебаний отсчитывать самостоятельно.)

8. Произвести измерения периода колебаний для всех остальных расстояний  $l$  между центром инерции и осью подвеса (п. 4-8). Данные измерений записать в таблицу 16.2.

##### Обработка результатов измерений

1. По формуле  $T = \frac{t}{N}$  найти период колебаний.

2. Вычислить момент инерции  $I$  физического маятника по формуле  $I = \frac{mgl}{4\pi^2} T^2$ .

3. На миллиметровой бумаге построить график зависимости периода колебаний от расстояния между центром инерции и осью подвеса  $T = f(l)$ .

**Таблица 16.2**

$m =$  кг

№ п/п	$l$ , м	$N$	$t$ , с	$T$ , с	$I$ , кг·м <sup>2</sup>

4. На графике провести прямую  $T = const$  и найти  $l_1$  и  $l_2$  (прямую следует проводить там, где ветви кривой являются более надежными). Данные занести в таблицу 16.3.

5. Найти приведенную длину физического маятника по формуле  $l_{np} = l_1 + l_2$

6. По формуле (16.3) вычислить ускорение силы тяжести.

7. Операцию, указанную в пунктах 4-6, повторить для трех значений  $T$ .

8. Найти среднее значение ускорения свободного падения  $\bar{g}$ .

9. Вычислить абсолютную погрешность по формуле

$$\Delta g = t_{p,n} \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\bar{g} - g_i)^2},$$

где  $t_{p,n}$  - коэффициент Стьюдента при доверительной вероятности  $p = 0.95$  и заданном числе измерений  $n$ . Несмотря на то, что измерения ускорения свободного падения являются косвенными, полная погрешность результата находится как при прямых измерениях. При этом оценивается лишь случайная погрешность. Это связано с тем, что условия опыта не повторяются (период колебаний  $T$  разный для разных  $l$ ).

10. Записать окончательный результат в виде

$$g = \bar{g} \pm \Delta g$$

с указанием доверительной вероятности  $p = 0.95$ .

11. Определить относительную погрешность в процентах  $E = \frac{\Delta g}{\bar{g}} \cdot 100\%$ .

12. На миллиметровой бумаге построить график зависимости момента инерции от квадрата расстояния  $I = f(l^2)$ . Из графика методом экстраполяции определить момент инерции, согласно формуле (16.4), при  $l^2 = 0$ .

**Таблица 16.3**

№ п/п	$T$ , с	$l_1$ , м	$l_2$ , м	$l_{np}$ , м	$g$ , м/с <sup>2</sup>	$(\bar{g} - g_i)$ , м/с <sup>2</sup>	$(\bar{g} - g_i)^2$ , м <sup>2</sup> /с <sup>4</sup>
1							
2							
3							
Сред.							
$\Sigma$							

13. Из экспериментальных данных определить момент инерции  $I_0$ . По формуле  $I_0 = ml_1l_2$  определить момент инерции маятника относительно оси, проходящей через центр инерции тела. Сравнить эту величину с теоретически найденной по формуле  $I_0 = \frac{1}{12}mL^2$ .

14. Записать вывод о проделанной работе. Указать теоретическое и экспериментальное значения момента инерции, полученное значение для ускорения свободного падения, анализ графиков.

### Контрольные вопросы

1. Что такое колебания? Запишите уравнение гармонических колебаний. Запишите уравнение смещения, скорости и ускорения при гармонических колебаниях.

2. Дайте определения амплитуды, фазы, периода, частоты, циклической частоты колебания.

3. Что называется математическим, физическим маятниками?

4. Выведите формулы для периодов колебаний физического и математического маятников. От каких величин и как зависит период колебаний маятников.

5. Запишите основное уравнение динамики вращательного движения для физического маятника.

6. Что такое приведенная длина физического маятника?

7. Что называется моментом инерции материальной точки и моментом инерции твердого тела? Какова его роль в колебательном движении?

8. Как определить момент инерции тел неправильной геометрической формы относительно оси, не проходящей через его центр масс? Запишите теорему Гюйгенса-Штейнера.

9. Как зависят период колебаний и момент инерции физического маятника от расстояния между точкой подвеса и центром инерции маятника?

10. Как определить ускорение силы тяжести при помощи физического маятника?

11. Поясните формулу для определения абсолютной погрешности ускорения свободного падения (упражнение № 1). Как определить погрешности длины маятника и времени?

### Литература

1. *Савельев И.В.* Курс общей физики. Т.1: Механика, молекулярная физика. СПб.: Лань, 2007. 432 с.
2. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики: учеб. пособие. Т.1: Механика. М.: ФИЗМАТЛИТ МФТИ; Изд-во МФТИ, 2002. 560 с.
3. *Стрелков С.П.* Механика. СПб.: Лань, 2005. 560 с.
4. *Трофимова Т.И.* Курс физики: учеб. пособие для вузов. М.: Изд. центр «Академия», 2006. 560 с.

## ИЗУЧЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРУЖИННОГО МАЯТНИКА

### Цель работы:

1. Определить жесткость пружины.
2. Определить частоту собственных колебаний пружинного маятника.
3. Исследовать зависимость собственных колебаний пружинного маятника от массы груза.

**Принадлежности:** лабораторная установка, набор грузов, пружина.

### Краткие теоретические сведения

Колебания, которые происходят в системе, выведенной каким-либо образом из положения равновесия и предоставленной затем самой себе, называются *собственными* или *свободными* колебаниями, а частота собственных колебаний – *собственной частотой*.

Механическая система может совершать собственные колебания, если при выведении системы из положения равновесия возникают силы, возвращающие систему к положению равновесия. Такими силами являются, в частности, силы упругих деформаций, например сила, действующая, со стороны пружины на прикрепленное к этой пружине тело.

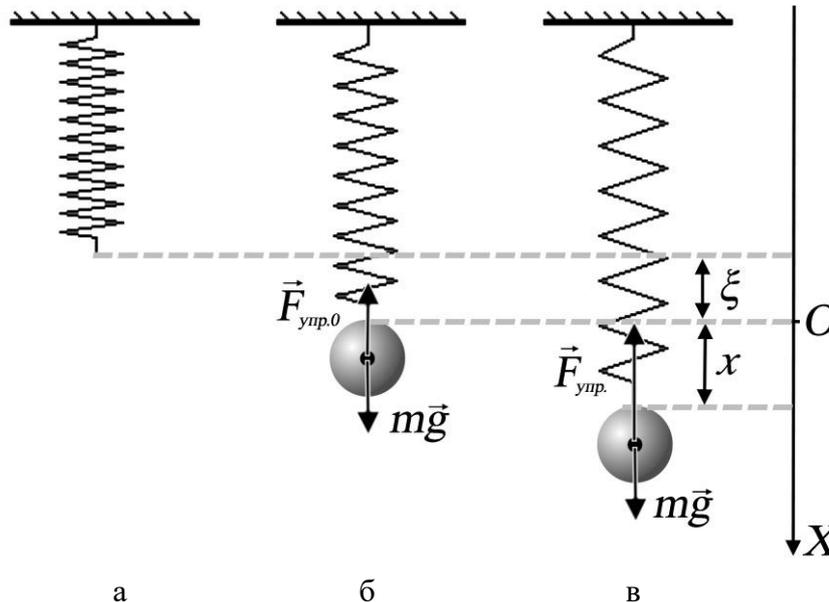


Рис. 17.1

Рассмотрим механическую систему, состоящую из шарика массой  $m$  и невесомой пружины с коэффициентом жесткости  $k$ . Шарик подвешен на пружине в поле сил тяжести. В отсутствии каких-либо воздействий на систему шарик остается в состоянии покоя. Направим ось  $X$  вертикально вниз и примем за начало отсчета по этой оси точку  $O$ , находящуюся на одном уровне с грузом, когда груз висит неподвижно (рис. 17.1, б). При этом положении груза пружина

растянута на величину  $\xi$  по сравнению с недеформированным состоянием, когда координата груза равна  $-\xi$  (рис. 17.1, а).

При равновесии на груз действуют упругая сила  $\vec{F}_{\text{упр.0}}$  со стороны пружины и сила тяжести  $m\vec{g}$ . Эти силы равны по величине и противоположны по направлению. Согласно закону Гука, величина упругой силы определяется соотношением  $\vec{F}_{\text{упр.0}} = k\xi$ . Таким образом, получим

$$k\xi = mg. \quad (17.1)$$

Если груз сместить вверх или вниз, то равенство (17.1) нарушается, так как величина упругой силы зависит от растяжения пружины. В этих условиях возникает сила  $\vec{F}_* = \vec{F}_{\text{упр.}} + m\vec{g}$ , действие которой на груз зависит от координаты  $x$ . При  $x > 0$  сила  $\vec{F}_*$  направлена вверх против оси  $OX$ , а ее проекция  $F_{*x} < 0$ . При  $x < 0$  сила  $\vec{F}_*$  направлена вниз по оси  $OX$ , а ее проекция  $F_{*x} > 0$ . Пусть в некоторый момент при движении груза (вверх или вниз) координата груза равна  $x$  (рис.17.1, в). Растяжение пружины в этот момент времени равно  $(\xi + x)$ . Проекция упругой силы определяется выражением  $F_{\text{упр.}x} = -k(\xi + x)$ .

В проекциях на ось  $OX$  второй закон Ньютона для груза в некоторый произвольный момент времени будет иметь вид

$$ma_x = -k(\xi + x) + mg. \quad (17.2)$$

Так как, согласно равенству (17.1), сила тяжести и сила начального растяжения пружины компенсируют друг, то

$$ma_x = -kx. \quad (17.3)$$

Учитывая, что  $a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$ , получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x. \quad (17.4)$$

Обозначив здесь  $\frac{k}{m} = \omega^2$ , придем к уравнению

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2x. \quad (17.5)$$

Выражение (17.5) представляет собой дифференциальное уравнение. Левая часть этого уравнения будет равна правой в любой момент времени, если

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (17.6)$$

То есть решением уравнения (17.5) является функция  $x(t)$ , описывающая колебания по гармоническому закону (17.6), в котором  $A$ ,  $\omega$ ,  $\varphi_0$  – амплитуда, циклическая частота и начальная фаза колебаний соответственно. Уравнение (17.5) называют уравнение гармонических колебаний и записывают в общем виде

$$\ddot{x} + \omega^2x = 0. \quad (17.7)$$

Следовательно, закон движения груза (зависимость его координаты  $x$  от времени  $t$ ) представляет собой гармоническое колебание, циклическая частота которого зависит только от механических свойств (параметров) колеблющейся системы – массы груза  $m$  и коэффициента жесткости  $k$  данной пружины, но не зависит от амплитуды колебаний и времени. Так как циклическая частота  $\omega$  связана с линейной частотой  $\nu$  соотношением  $\omega = 2\pi\nu$ , то для линейной частоты собственных колебаний пружинного маятника получим выражение

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (17.8)$$

Задача данной работы заключается в экспериментальной проверке этой теоретической закономерности.

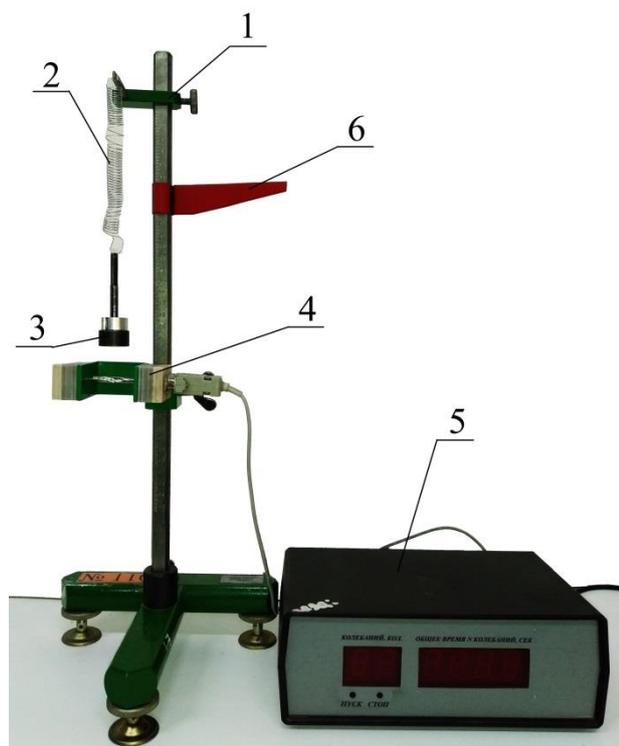


Рис. 17.2

### Описание установки и метода измерений

Экспериментальная установка изображена на рис. 17.2. Пружинный маятник включает в свой состав: кронштейн 1 с узлом крепления для вертикального подвешивания пружины 2; наборный груз 3; фотодатчик 4 для подсчета периода колебаний груза на пружине; блок электронный 5; металлический флажок 6 для определения положения груза 3. На передней панели электронного блока 5 находится табло, на которое выводится информация о времени и количестве колебаний. Управление блоком осуществляется кнопками ПУСК и СТОП. Принцип работы блока заключается в подсчете времени некоторого количества полных

колебаний груза на пружине между моментом срабатывания фотодатчика после нажатия кнопки ПУСК и моментом остановки таймера после нажатия кнопки СТОП.

### Порядок выполнения работы

1. Закрепить пружину в лапке штатива (рис. 17.2). Подвесить к пружине платформу для грузов и определить ее начальное положение  $x_0$  по шкале. Записать массу платформы  $M$  и значение  $x_0$  над таблицей 17.1.

2. Измерить положение платформы  $x$  в присутствии дополнительного груза с массой  $m$ . Провести измерения  $x$  для грузов с массами 10 г, 20 г, 30 г, 40 г, 50 г и записать их в таблицу 17.1.

3. Включить электронный блок в сеть 220 В и нажать кнопку СЕТЬ, которая находится на задней панели блока.

4. Установить платформу так, чтобы ее нижний край был точно на уровне фотодатчика.

5. Вывести пружинный маятник из положения равновесия. Для этого сместить платформу на 0.5-1,0 см вниз и отпустить. Сразу после возникновения свободных колебаний нажать кнопку ПУСК блока.

6. Определить значение времени десяти полных колебаний маятника ( $N=10$ ) по секундомеру после нажатия кнопки СТОП. Сброс показаний секундомера происходит автоматически при последующем нажатии кнопки СТАРТ.

**Внимание!** Во время измерений необходимо следить за тем, чтобы:

- платформа с грузом при колебаниях пересекала оптическую ось фотодатчика;
- амплитуда колебаний маятника была небольшой (отклонение маятника от положения равновесия – не более 1 см);
- маятник не раскачивался.

7. Провести измерения времени десяти полных колебаний маятника для 6-10 различных масс  $m$  в пределах всего диапазона от 0 до 50 г. Данные измерений записать в таблицу 17.2. Опыт повторять не менее 3 раз для одного и того же значения  $m$ .

### Обработка результатов измерений

1. Рассчитать удлинение пружины и силу упругости по формулам  $\Delta x = (x - x_0)$  и  $F = (m + M)g$ .

2. Проверить выполнение закона Гука путем построения графика зависимости  $F$  от  $\Delta x$ .

3. Определить коэффициент жесткости по формуле  $k = \frac{F - F_0}{(x - x_0)}$ , где

$$F_0 = Mg.$$

4. Записать результаты вычислений  $\Delta x$ ,  $F$  и  $k$  в таблицу 17.1.

5. Найти среднее значение коэффициента жесткости  $\bar{k}$ .

6. Вычислить абсолютную погрешность определения  $k$  по формуле

$$\Delta k = t_{p,n} \sqrt{\frac{\sum (\bar{k} - k_i)^2}{n(n-1)}},$$

где  $t_{p,n}$  – коэффициент Стьюдента при доверительной вероятности  $p = 0.95$  и заданном числе измерений  $n$ . Несмотря на то, что измерения коэффициента жесткости пружины являются косвенными, полная погрешность результата находится как при прямых измерениях. При этом оценивается лишь случайная погрешность. Это связано с тем, что условия опыта не повторяются, так как измерения проводятся для разных масс грузов  $m$ .

7. Записать окончательный результат в виде

$$k = \bar{k} \pm \Delta k$$

с указанием доверительной вероятности  $p = 0.95$ .

8. Вычислить относительную погрешность  $E = \frac{\Delta k}{\bar{k}} \cdot 100\%$ .

9. По формуле  $\nu = \frac{N}{t}$  по экспериментальным данным определить частоту колебаний пружинного маятника для всех масс маятника.

10. По формуле  $\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\bar{k}}{M+m}}$  рассчитать теоретическое значение частоты колебаний пружинного маятника.

11. Заполнить таблицу 17.2 полностью. По средним значениям построить графики зависимости  $\nu$  и  $\nu_0$  от  $\frac{1}{\sqrt{M+m}}$ . Сравнить экспериментальную и теоретическую зависимости.

**Таблица 17.1**

$x_0 =$  м;  $M =$  кг.

№ п/п	$m,$ кг	$x,$ м	$\Delta x,$ м	$F,$ Н	$k,$ Н/м	$(\bar{k} - k_i)^2,$ (Н/м) <sup>2</sup>
1						
...						
5						
Сред.						
$\Sigma$						

**Таблица 17.2**

№ п/п	$m,$ кг	$M + m,$ кг	$\frac{1}{\sqrt{M+m}},$ кг <sup>-1/2</sup>	$N$	$t,$ с	$\nu = N/t,$ Гц	$\nu_0,$ Гц
1	$m_1$						
2	$m_1$						
3	$m_1$						
Сред.							
	и т.д.						

### Контрольные вопросы

1. Какие процессы называются колебаниями? Назовите основные виды и характеристики колебаний.

2. Какие колебания называются гармоническими? Запишите уравнение гармонических колебаний.

3. Что представляет собой пружинный маятник? Запишите уравнение движения пружинного маятника. Вывод формулы (17.9).

4. Постройте графики изменения координаты, скорости и ускорения маятника.

5. От чего зависит частота колебаний пружинного маятника? Сравните с математическим маятником.

6. Постройте график зависимости потенциальной энергии груза от смещения.

7. Зависит ли частота колебаний пружинного маятника от амплитуды колебаний?

8. Как влияет масса пружины на колебания маятника?

9. Груз массой  $m = 200$  г подвешен к пружине с коэффициентом жесткости  $k = 9.8$  Н/м. Найдите длину математического маятника, имеющего такой же период колебаний, как данный пружинный маятник.

#### Литература

1. *Савельев И.В.* Курс общей физики. Т.1: Механика, молекулярная физика. СПб.: Лань, 2007. 432 с.
2. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики: учеб. пособие. Т.1: Механика. М.: ФИЗМАТЛИТ МФТИ; Изд-во МФТИ, 2002. 560 с.
3. *Стрелков С.П.* Механика. СПб.: Лань, 2005. 560 с.

## ИЗМЕРЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТЕЛ И ПРОВЕРКА ТЕОРЕМЫ ГЮЙГЕНСА-ШТЕЙНЕРА

### Цель:

1. Измерение момента инерции ненагруженного стола и с грузами.
2. Измерение зависимости момента инерции стола от расположения грузов.
3. Измерение моментов инерции произвольных тел.
4. Проверка теоремы Гюйгенса-Штейнера.

**Принадлежности:** лабораторный комплекс ЛКМ, стержень с отверстиями, полушар, два эталонных цилиндра, штангенциркуль, технические весы.

### Краткие теоретические сведения

На практике часто требуется знание моментов инерции тел различной геометрической формы, так как они играют роль меры инертности при вращении.

Момент инертности материальной точки

$$I = mr^2, \quad (18.1)$$

где  $m$  – масса точки,  $r$  – расстояние от оси вращения.

Если тело можно представить как совокупность точек, тогда момент инерции тела определяют как сумму моментов инерции составляющих его точек, т.е.

$$I = \sum_i m_i r_i^2. \quad (18.2)$$

Для произвольного тела расчет момента инерции может быть заменен в формуле (18.2) суммированием на интегрирование:

$$I = \int_m r^2 dm. \quad (18.3)$$

Из формулы (18.3) видно, что момент инерции тел одинаковой массы, но различной конфигурации различен в зависимости от распределения массы относительно оси вращения. Если тело неправильной геометрической формы, то его момент инерции можно определить экспериментально, например, используя метод крутильных колебаний.

Если ось вращения смещена относительно центра масс на расстояние  $d$ , то момент инерции определяется теоремой Гюйгенса-Штейнера

$$I = I_0 + md^2, \quad (18.4)$$

где  $I_0$  – момент инерции тела относительно его центра масс;  $m$  – масса данного тела.

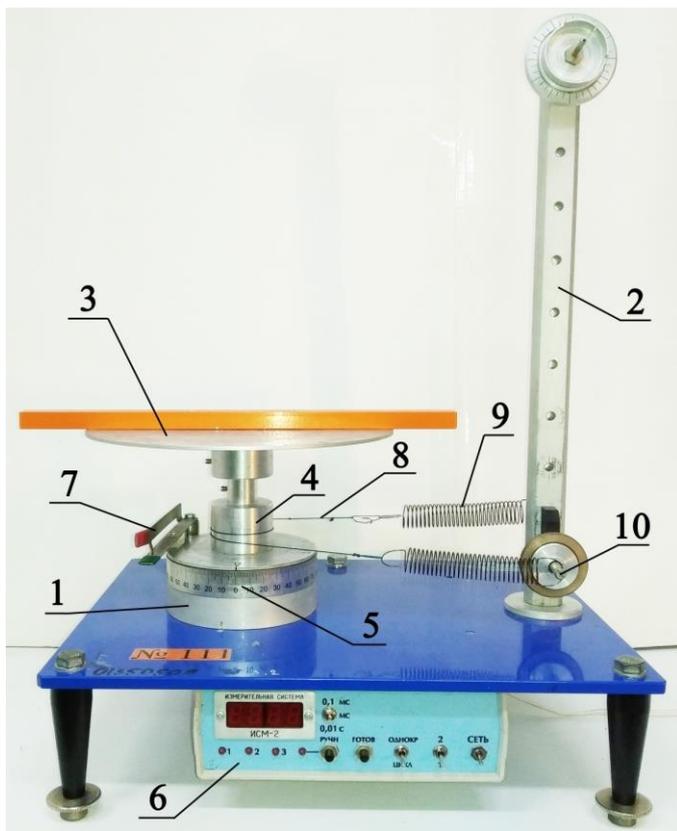


Рис. 18.1

## Описание установки и метода измерений

Общий вид установки приведен на рис. 18.1. Поворотный стол 1 и стойка 2 смонтированы на плите – основании. Стол поворотный представляет собой платформу 3 с отверстиями для фиксации изучаемых объектов. Платформа, закреплена на стойке 4. Стойка 4 вращается на подшипниках на вертикальной оси, закрепленной в основании со шкалой 5. Снизу к стойке прикреплен диск с диаметрально противоположными радиальной прорезью и меткой-указателем. Указатель перемещается вдоль

шкалы, по которой отсчитывается угловая координата стола с разрешением  $1^\circ$ . При торможении прорези через зазор фотодатчика срабатывает таймер измерительной системы ИМС 6, что позволяет фиксировать время поворота стола на  $360^\circ$  или измерять период колебаний стола.

Механический тормоз 7 состоит из упругой планки с резиновой шайбой. При нажатии пальцем на планку шайба прижимается к диску и тормозит движение стола.

Измерительная система 6 выполнена в виде электронного блока в пластмассовом корпусе. Органы управления и индикации вынесены на переднюю панель. Измерение времени выполняется электронным секундомером. Разрешение таймера выбирается тумблером 2 и может быть равным 0.1, 1 или 10 мс. Запуск счета времени и запись показаний производятся при выходе щели диска из зазора фотодатчика. ЦИКЛ/ОДНОКР - тумблер выбора числа измерений ЦИКЛ – система реагирует на все поступающие сигналы запуска и остановки секундомера, ОДНОКР – система производит однократное измерение. При нажатии кнопки ГОТОВ схема измерений приводится в состояние готовности к измерениям и вырабатывается сигнал «Уст.0», который обнуляет счетчик и индикатор. Отсчет времени начнется при поступлении первого сигнала ПУСК.

Для получения колебательной системы через нижний шкив стойки 4 перекидывается нить 8, концы которой посредством двух пружин 9 прикрепляются к штырям 10 на оси нижнего ролика стойки 2. Стол может совершать крутильные колебания вокруг вертикальной оси, перпендикулярной

к его плоскости и проходящей через центр. При отклонении стола от первоначального положения (положения равновесия) возникает момент  $M$  сил упругости, пропорциональной, по закону Гука, углу  $\varphi$  закручивания и направленной в противоположную сторону. Для упругой силы и ее момента получим

$$F = 2kx, \quad (18.5)$$

$$M = 2kxR = 2kR^2\varphi, \quad (18.6)$$

где  $k$  – коэффициент жесткости пружин;  $x$  – величина растяжения и сжатия пружин;  $R$  – радиус шкива, через который перекинута нить.

Уравнение движения имеет вид

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -2kR^2\varphi. \quad (18.7)$$

Уравнение (18.7) можно записать в виде

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2kR^2\varphi = 0. \quad (18.8)$$

Это уравнение описывает гармонические колебания малой амплитуды без трения.

Величина  $\omega = \sqrt{\frac{2kR^2}{I}}$  называется собственной частотой колебательной системы. Так как  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , где  $T$  – период колебаний, то

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{2kR^2}{I}. \quad (18.9)$$

Отсюда определим

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{I}{2kR^2}, \quad (18.10)$$

а для момента инерции колебательной системы имеем

$$I = \frac{2kR^2}{4\pi^2} T^2. \quad (18.11)$$

В лабораторной работе предлагается экспериментально определить  $I$  момент инерции стола с эталонными грузами по формуле (18.11). Теоретически момент инерции стола с грузами можно рассчитать по формуле

$$I = I_0 + I_1, \quad (18.12)$$

где  $I_0$  – момент инерции ненагруженного стола, а  $I_1$  – момент инерции грузов. Момент инерции двух грузов в виде сплошных цилиндров радиусами  $R_0$  и массами  $m$ , находящихся на расстоянии  $r$  от оси стола до центра масс каждого груза, можно определить по теореме Гюйгенса-Штейнера

$$I_1 = 2m \left( r^2 + \frac{R_0^2}{2} \right). \quad (18.13)$$

Сравнивают экспериментальное и теоретическое значение моментов инерции тел.

### Упражнение №1

#### Определение периода колебаний $T_0$ ненагруженного стола

##### Порядок выполнения работы

1. Перекинуть нить через нижний шкив стола 4. Концы нити соединить с пружинами. Пружины присоединить к штырям на оси нижнего ролика стойки 2. Необходимо, чтобы в свободном состоянии обе пружины были натянуты равномерно (не допускать провисания пружины).

2. Измерить радиус  $R$  нижнего шкива стола с помощью штангенциркуля. Записать значение над таблицей 18.1.

3. На измерительной системе 6 установить режим ОДНОКРАТНО, тумблер «1/2» в положение «2», тумблер таймера установить в среднее положение.

4. Провернуть платформу 3 стола 1. Рискю [∇] диска-указателя установить на 30°. Зафиксировать положение стола тормозом 7.

5. Нажать кнопку ГОТОВ, затем отпустить тормоз стола. Записать показания секундомера  $T_0$  (время одного колебания) в таблицу 18.1.

6. Повторить пункты 3-5 не менее пяти раз.

##### Обработка результатов измерений

1. Вычислить момент инерции ненагруженного стола по формуле

$$I_0 = \frac{2kR^2}{4\pi^2} T_0^2,$$

где  $k = 21.8$  Н/м – коэффициент жесткости пружины,  $T_0$  – период колебаний ненагруженного стола,  $R$  – радиус нижнего шкива стола.

2. Найти среднее значение момента инерции  $\bar{I}_0$ .

3. Расчет погрешности  $\Delta I_0$  в определении момента инерции ненагруженного стола произвести как для косвенных измерений путем вычисления абсолютных погрешностей в непосредственно измеряемых величинах: радиуса шкива  $\Delta R = \sqrt{\Delta_{np}^2 + \Delta_{окр}^2}$  и периода колебаний  $\Delta T_0$ :

$$\Delta T_0 = \sqrt{\Delta T_{0сл}^2 + \Delta_{np}^2 + \Delta_{окр}^2},$$

где случайная погрешность в определении величины  $T_0$

$$\Delta T_{0сл} = t_{p,n} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{T}_0 - T_{0i})^2}{n(n-1)}},$$

с коэффициентом Стьюдента  $t_{p,n}$  при доверительной вероятности  $p = 0.95$  и числе измерений  $n$ . Максимальная абсолютная погрешность прибора при

доверительной вероятности  $p = 0.95$  выражается через предельную погрешность прибора  $\delta$  как

$$\Delta_{np} = \frac{2}{3} \delta,$$

где  $\delta$  – это предельная ошибка приборов одного класса при коэффициенте надежности 0.997. Значение  $\delta$  обычно приводится в паспорте прибора, но в том случае, если паспорт по каким-то причинам отсутствует, в качестве  $\delta$  берут цену наименьшего деления прибора.

Погрешность, обусловленная округлением показаний прибора, определяется для полуширины соответствующего доверительного интервала при заданной доверительной вероятности  $p = 0.95$  по формуле

$$\Delta_{окр} = p \frac{\omega}{2},$$

где  $\omega$  – цена наименьшего деления шкалы прибора.

Из формулы для относительной погрешности в определении момента инерции как для косвенных измерений, которая является функцией относительных погрешностей измеряемых прямым способом величин

$$\frac{\Delta I_0}{\bar{I}_0} = 2 \sqrt{\left(\frac{\Delta R}{\bar{R}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta T_0}{\bar{T}_0}\right)^2},$$

получаем искомую абсолютную погрешность  $\Delta I_0$ .

4. Окончательный результат записать в виде

$$I_0 = \bar{I}_0 \pm \Delta I_0$$

с указанием доверительной вероятности  $p = 0.95$ .

5. Записать относительную погрешность в процентах  $E = \frac{\Delta I_0}{\bar{I}_0} \cdot 100\%$ .

**Таблица 18.1**

$k = 21,8 \text{ Н/м}; \quad R = \quad \text{м.}$

№ п/п	$T_0,$ с	$(\bar{T}_0 - T_{0i}),$ с	$(\bar{T}_0 - T_{0i})^2,$ с <sup>2</sup>	$I_0,$ кг·м <sup>2</sup>
1				
2				
3				
4				
5				
Сред.				
$\Sigma$				

## Упражнение №2

### Определение момента инерции стола с грузами

#### Порядок выполнения работы

1. На столе симметрично установить два груза (цилиндра). Записать в таблицу 18.2 показатель расстояния  $r$  от оси вращения стола до оси, проходящей через центр масс груза параллельно оси вращения.

2. Определить период  $T$  колебаний нагруженного стола. Для этого повторить пункты 3-5 упражнения №1 для нагруженного стола, выполнив по 3 измерения периода. Данные записать в таблицу 18.2.

3. Изменить расстояние  $r$ , сместив грузы на столе. Для каждого расстояния  $r = 10$  см, 8 см, 6 см, 4 см определить период не менее трех раз. Данные измерений записать в таблицу 18.2.

#### Обработка результатов измерений

1. Измерить массу  $m$  одного груза (цилиндра) и записать значение над таблицей 18.2.

2. Вычислить момент инерции стола с двумя грузами по формуле  $I = \frac{2kR^2}{4\pi^2} T^2$ . Данные записать в таблицу 18.2.

3. Построить график зависимости момента инерции  $I$  для различных расстояний от оси вращения  $r$ .

4. Найти момент инерции  $I_1$  грузов по формуле (18.13). Результат записать в таблицу 18.2.

5. Общий момент инерции стола с грузами (теоретич.) находим по формуле  $I = \bar{I}_0 + I_1$ , где  $\bar{I}_0$  – средний момент инерции ненагруженного стола, вычисленный в упражнении №1.

6. Сравнить теоретическое и экспериментальные значения моментов инерции и записать вывод.

Таблица 18.2

$\bar{I}_0 =$  кг·м<sup>2</sup>;       $m =$  кг;       $R =$  м.

№ п/п	$T$ , с	$r$ , 10 <sup>-2</sup> м	$I$ , кг·м <sup>2</sup> Эксперимен.	$I_1$ , кг·м <sup>2</sup>	$I$ , кг·м <sup>2</sup> Теоретич.
1		10			
2		10			
3		10			
Сред.					
И т.д.					

## Обработка результатов измерений

1. Вычислить момент инерции стержня (полушара) по формуле

$$I = \left( \frac{2kR^2}{4\pi^2} T^2 - \bar{I}_0 \right),$$

где  $\bar{I}_0$  – среднее значение момента инерции ненагруженного стола, определенное в упражнении №1. Результат записать в таблицу 18.3.

2. Найти среднее значение момента инерции тела  $\bar{I}$ .

3. Расчет погрешности  $\Delta I$  в определении момента инерции тела произвести как для косвенных измерений путем вычисления абсолютных погрешностей в величинах: радиусе шкива  $\Delta R = \sqrt{\Delta_{np}^2 + \Delta_{окр}^2}$ , моменте инерции стола  $\Delta I_0$  (значение получено при обработке результатов измерений в упражнении №1) и периоде колебаний  $\Delta T$ :

$$\Delta T = \sqrt{\Delta T_{сл}^2 + \Delta_{np}^2 + \Delta_{окр}^2},$$

где случайная погрешность в определении величины  $T$

$$\Delta T_{сл} = t_{p,n} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{T} - T_i)^2}{n(n-1)}},$$

с коэффициентом Стьюдента  $t_{p,n}$  при доверительной вероятности  $p = 0.95$  и числе измерений  $n$ .

Из формулы для относительной погрешности в определении момента инерции

$$\frac{\Delta I}{\bar{I}} = \sqrt{\left( \frac{2\Delta R}{\bar{R}} \left( 1 + \frac{\bar{I}_0}{\bar{I}} \right) \right)^2 + \left( \frac{2\Delta T}{\bar{T}} \left( 1 + \frac{\bar{I}_0}{\bar{I}} \right) \right)^2 + \left( \frac{\Delta I_0}{\bar{I}} \right)^2}$$

получаем искомую абсолютную погрешность  $\Delta I$ .

4. Окончательный результат записать в виде

$$I = \bar{I} \pm \Delta I$$

с указанием доверительной вероятности  $p = 0.95$ .

5. Записать относительную погрешность в процентах  $E = \frac{\Delta I}{\bar{I}} \cdot 100\%$ .

6. Теоретический момент инерции вычислить по формуле для стержня

$$I = \frac{mR_0^2}{12},$$

где  $R_0$  – длина стержня,  $m$  – масса стержня.

Для полушара момент инерции равен

$$I = \frac{mR_0^2}{5},$$

где  $R_0$  – радиус шара,  $m$  – масса полушара.

7. Сравнить теоретическое и экспериментальные значения.

Таблица 18.3

№ п/п	$\bar{I}_0 =$ $T,$ с	$m =$ $(\bar{T} - T_i),$ с	кг	$R =$ $(\bar{T} - T_i)^2,$ с <sup>2</sup>	м	$I,$ кг·м <sup>2</sup> Эксперимен.	$I,$ кг·м <sup>2</sup> Теоретич.
1							
2							
3							
Сред.							
$\Sigma$							

### Контрольные вопросы

1. Что называется моментом инерции? Запишите формулу для момента инерции материальной точки, произвольного тела.
2. Какова роль момента инерции во вращательном движении? Запишите основной закон динамики вращательного движения.
3. Вывод формулы (18.11).
4. Момент какой силы вызывает колебания стола? Запишите, чему равен момент силы. Как направлен момент силы?
5. Что называется угловым ускорением? Как можно изменить угловое ускорение?
6. Запишите уравнение гармонических колебаний в дифференциальной форме.
7. Сформулируйте теорему Гюйгенса-Штейнера. Как проверяется эта теорема в данной лабораторной работе?
8. Получите формулу для определения момента инерции стержня.
9. Как определить коэффициент жесткости пружины? Как влияет коэффициент жесткости пружины на колебания стола?

### Литература

1. Детлаф А. А., Яворский Б. М., Милковская Л. Б. Курс физики. Механика. Основы молекулярной физики и термодинамики. М.: Высшая школа, 1973. 384 с.
2. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.1: Механика, молекулярная физика. СПб.: Лань, 2007. 432 с.
3. Сивухин Д.В. Общий курс физики: учеб. пособие. Т.1: Механика. М.: ФИЗМАТЛИТ МФТИ; Изд-во МФТИ, 2002. 560 с.
4. Стрелков С.П. Механика. СПб.: Лань, 2005. 560 с.
5. Трофимова Т.И. Курс физики: учеб. пособие для вузов. М.: Изд. центр «Академия», 2006. 560 с.

## ПРИЛОЖЕНИЕ\*

### Характеристики погрешностей

Измерения бывают прямые и косвенные. Например, масса и геометрические размеры цилиндрического тела определяются непосредственно приборами (штангенциркулем, микрометром, весами), измерения которых называют **прямыми**, тогда как определение плотности относят к **косвенным** измерениям, поскольку эта величина может быть найдена только с помощью вычислений как функция других величин, измеренных непосредственно. Расчет погрешностей в прямых и косвенных измерениях имеет свою специфику. Так как и в тех и в других измерениях результат всегда содержит некоторую погрешность, искомая величина  $x$  не может быть найдена совершенно точно. Наиболее вероятное значение величины  $x$  устанавливается из ряда равноточных измерений как среднее арифметическое  $\bar{x}$ . Соответственно, в задачу входит не только определение этой величины  $\bar{x}$ , но также и оценка для полученного результата погрешности  $\Delta x$ , выражающей отклонение от среднего значения  $\bar{x}$ , которую называют **абсолютной погрешностью**. При этом точность измерений характеризует не сама абсолютная погрешность, а ее отношение к измеряемой величине, т.е.  $\frac{\Delta x}{\bar{x}}$ , называемое **относительной погрешностью**.

В целом результат измерений с учетом погрешностей может быть представлен **доверительным интервалом**  $x = \bar{x} \pm \Delta x$ , в котором заключено истинное значение измеряемой величины  $x$ . Степень надежности того, что измеренная величина не будет отклоняться от истинного значения более чем на величину  $\Delta x$ , определяется **доверительной вероятностью** (в технике такую характеристику называют надежностью). Доверительная вероятность выражается числом  $p$ , указывающим, с какой вероятностью истинное значение  $x$  находится в доверительном интервале  $\bar{x} \pm \Delta x$ . Понятно, что эта вероятность растет с расширением границ доверительного интервала.

При физических измерениях для определения доверительных границ погрешности результата измерений принимается доверительная вероятность  $p = 0.95$ , т.е. полагается указывать такой доверительный интервал, в котором будет лежать 95% результатов всех однотипных измерений. Итак, *при представлении любого измеренного значения следует привести доверительный интервал и доверительную вероятность, соответствующую этому интервалу.*

### Погрешности в прямых измерениях

При непосредственных измерениях для получения количественной оценки случайной погрешности, т.е. для нахождения величин, определяющих доверительный интервал, удобно представить исходные данные, полученные в

---

\* Приложение составлено на основе теоретической части методического руководства: Сойфер Г.Б. Определение плотности твердого тела цилиндрической формы [3].

измерениях, и их первичную обработку в виде таблицы П.1. Среднее квадратичное отклонение результата измерений рассчитывается по формуле (П.2).

**Таблица П.1**

Обработка результатов измерений величины  $x$  ( $n$  – число измерений)

№ п/п $i$	$x_i$	$\bar{x} - x_i$	$(\bar{x} - x_i)^2$
1	$x_1$	$\bar{x} - x_1$	$(\bar{x} - x_1)^2$
2	$x_2$	$\bar{x} - x_2$	$(\bar{x} - x_2)^2$
3	$x_3$	$\bar{x} - x_3$	$(\bar{x} - x_3)^2$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
$n$	$x_n$	$\bar{x} - x_n$	$(\bar{x} - x_n)^2$
Сумма $\Sigma$	$\sum_{i=1}^n x_i$	–	$\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2$
Среднее $\bar{x}$	$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$	–	–

В этой таблице приведены результаты выполненных в одних и тех же условиях  $n$  прямых измерений (содержащих случайные погрешности) некоторой физической величины  $x$  с последующим вычислением среднего арифметического  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  как наиболее вероятного значения измеряемой величины. Далее найдены абсолютные погрешности отдельных измерений  $\Delta x_i = \bar{x} - x_i$ , характеризующие отклонения  $x_i$  от  $\bar{x}$ , и их квадраты  $(\bar{x} - x_i)^2$ , которые в отличие от значения  $\Delta x_i$  образуют набор только положительных чисел. Сумма последних используется для вычисления средней квадратичной погрешности  $\sigma$  отдельного измерения, называемой также средним квадратичным отклонением, или стандартным отклонением, или стандартной ошибкой:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}. \quad (\text{П.1})$$

Квадрат этой величины  $\sigma^2$  называется дисперсией измерений (от лат. *dispersus* – «рассеяние») и является мерой отклонения измеряемой величины  $x_i$  от среднего значения  $\bar{x}$ , т.е. мерой рассеивания результатов измерений.

Наряду со средней квадратичной погрешностью  $\sigma$  отдельного (индивидуального) измерения важным является вычисление средней квадратичной погрешности  $\sigma_m$  результата измерений, за который принимают

среднее  $\bar{x}$  из  $n$ -измерений (отсюда другие названия погрешности  $\sigma_m$ : среднеквадратичное отклонение среднего, стандартное отклонение среднего, стандартная ошибка среднего). Эти два среднеквадратичных отклонения – отдельного измерения и результата  $n$ -измерений (т.е. среднего значения) – связаны между собой:

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}. \quad (\text{П.2})$$

Из выражения (П.2) видно, что стандартное отклонение среднего в  $\sqrt{n}$  меньше стандартного отклонения отдельного измерения (П.1), откуда следует возможность понижения погрешности путем увеличения числа измерений. Однако лучше уменьшать погрешность  $\sigma_m$ , повышая точность измерений, т.е. снизив величину  $\sigma$  посредством уменьшения абсолютных погрешностей отдельных измерений.

В то же время при небольшом числе измерений абсолютную случайную среднеквадратичную погрешность среднего  $\Delta_{cl}x$ , представляющую собой полуширину доверительного интервала, следует оценивать на основе стандартного отклонения (П.2) по формуле Стьюдента (*Student* – псевдоним английского исследователя В.С. Госсета, что в переводе здесь означает «ученый»). Эта формула, соотносясь с выражением (П.2), имеет вид

$$\Delta_{cl}x = t_{p,n} \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}, \quad (\text{П.3})$$

где  $t_{p,n}$  – коэффициент Стьюдента, зависящий от величины доверительной вероятности  $p$  и числа измерений  $n$ . Для значения  $p = 0.95$  коэффициенты  $t_{p,n}$  при различных  $n$  приведены в таблице П.2.

**Таблица П.2**

Коэффициенты Стьюдента  $t_{p,n}$  при доверительной вероятности  $p = 0.95$  и числе измерений  $n$

$n$	$t_{p,n}$	$n$	$t_{p,n}$	$n$	$t_{p,n}$	$n$	$t_{p,n}$
2	12.71	7	2.45	12	2.20	17	2.12
3	4.30	8	2.36	13	2.18	18	2.11
4	3.18	9	2.31	14	2.16	19	2.10
5	2.78	10	2.26	15	2.14	20	2.09
6	2.57	11	2.23	16	2.13	$\infty$	1.96

### Погрешности приборов

Кроме рассмотренных погрешностей прямых измерений на их результат влияют также ошибки, которые вносят непосредственно измерительные приборы. К этим ошибкам относятся погрешности, связанные с устройством, состоянием и условиями функционирования самого прибора, а также с округлением его показаний.

Максимальная абсолютная погрешность прибора при доверительной вероятности  $p = 0.95$  выражается через предельную погрешность прибора  $\delta$  как

$$\Delta_{np} = \frac{2}{3}\delta. \quad (\text{П.4})$$

Величина  $\delta$  обычно указывается на самом приборе или в его паспорте.

Погрешность, обусловленная округлением показаний прибора, определяется для полуширины соответствующего доверительного интервала при заданной доверительной вероятности  $p = 0.95$  по формуле

$$\Delta_{окр} = p \frac{\omega}{2}, \quad (\text{П.5})$$

где  $\omega$  – цена наименьшего деления шкалы прибора.

Значения  $\delta$  и  $\omega$  и соответственно погрешности  $\Delta_{np}$  и  $\Delta_{окр}$  для некоторых приборов приведены в таблице П.3.

**Таблица П.3**

Погрешности приборов при  $p = 0.95$

Прибор	Предельная погрешность прибора, $\delta$	Абсолютная погрешность прибора, $\Delta_{np}$	Цена наименьшего деления прибора, $\omega$	Погрешность округления показания прибора, $\Delta_{окр}$
Микрометр, мм	0.01	0.007	0.01	0.005
Штангенциркуль, мм	0.1	0.07	0.1	0.05
Весы Электронные, г	0.01	0.007	0.01	0.005

Погрешности, вносимые ошибками, которые дают прибор и округление его показаний, суммируются с абсолютной случайной погрешностью измерений, определяемой по формуле (П.3) (суммирование производится по правилу, называемому квадратичным сложением). Тогда *результатирующая погрешность прямых измерений* имеет вид

$$\Delta x = \sqrt{\Delta x_{сл}^2 + \Delta_{np}^2 + \Delta_{окр}^2}. \quad (\text{П.6})$$

### Запись окончательного результата

Вычисление величины абсолютной погрешности  $\Delta x$  проводится с точностью до одной значащей цифры, если эта цифра больше двойки. Если первой значащей цифрой в записи абсолютной погрешности окажется 1 или 2, то после нее сохраняется еще одна цифра. Значащими называются цифры от 1 до 9 и 0 в середине или в конце числа, а нули впереди этого числа не являются значащими. Они определяют лишь порядок числа. Например, при измерении

длины проволоки миллиметровой линейкой получили число  $x$ , которое в разных единицах имеет вид

$$x = \underline{150} \text{ мм} = \underline{15.0} \text{ см} = \underline{0.150} \text{ м} = \underline{0.000150} \text{ км}$$

В приведенном примере значащие цифры подчеркнуты. Местоположение разделительной точки в записи числа не определяет количество значащих цифр в нем. Точку всегда можно убрать, выделив порядок числа:

$$x = 150 \text{ мм} = 150 \cdot 10^{-1} \text{ см} = 150 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 150 \cdot 10^{-6} \text{ км}$$

Количество значащих цифр среднего значения  $\bar{x}$  при округлении определяется абсолютной погрешностью. Округляем  $\bar{x}$  таким образом, чтобы последняя цифра (слева направо) погрешности  $\Delta x$  приходилась лишь на последний разряд числа среднего  $\bar{x}$ .

*Окончательный результат измерений* записывается в виде

$$x = \bar{x} \pm \Delta x \quad (\text{П.7})$$

с указанием **единиц измерения**.

$$\text{Например: } x = (15.0 \pm 0.3) \text{ см} = (150 \pm 3) \cdot 10^{-3} \text{ м},$$

$$x = (0.150 \pm 0.003) \text{ м}.$$

### Погрешности в косвенных измерениях

Как говорилось выше, если измеряемая величина является функцией нескольких непосредственно измеренных параметров, то измерение такой величины называется косвенным, а соответствующая погрешность результата обуславливается видом функциональной зависимости. При этом погрешности входящих в данную зависимость величин в процессе обработки результатов измерений «распространяются», приводя к погрешности в конечном результате. Отсюда двухэтапность процедуры: сначала определение погрешностей непосредственно измеренных величин, а затем расчет погрешности искомой величины, функционально связанной с ними. Такой расчет погрешности в косвенных измерениях может быть представлен как последовательность определенных шагов, каждый из которых включает в себя только один из следующих видов операций: нахождение сумм и разностей, расчет произведений и частных, вычисление функции одного переменного (например, возведение в степень).

Когда величина  $z$  функционально связана с величинами  $a$  и  $b$ , погрешности которых *случайны, независимы и сравнительно малы*, погрешность результата косвенного измерения выражается через погрешности  $\Delta a$  и  $\Delta b$  следующим образом:

$$\text{при } z = a + b \text{ и } z = a - b, \quad \Delta z = \sqrt{(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2};$$

$$\text{при } z = a \cdot b \text{ и } z = \frac{a}{b}, \quad \frac{\Delta z}{z} = \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2};$$

$$\text{при } z = a^n \cdot b^m, \quad \frac{\Delta z}{z} = \sqrt{n^2 \left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + m^2 \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2}.$$

Из приведенных формул видно, что при сложении и вычитании измеряемых величин складываются квадраты абсолютных погрешностей, в то время как при умножении и делении – складываются квадраты относительных погрешностей. Соответственно в первом случае из найденной абсолютной погрешности результата косвенного измерения рассчитывают относительную погрешность, а во втором случае, наоборот, сначала находят относительную погрешность, а затем определяют абсолютную (как делается, в частности, в настоящей работе).

В общем случае, если искомая величина  $z$  является произвольной функцией  $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  измеряемых величин  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , то абсолютная погрешность вычисляется по формуле

$$\Delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n\right)^2}, \quad (\text{П.8})$$

где  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$  – абсолютные погрешности в прямых измерениях величин  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

#### Литература

1. Братухин Ю.К., Путин Г.Ф. Обработка экспериментальных данных: учеб. пособие по лабораторному практикуму «Механика» курса общей физики / Перм. ун-т. Пермь, 2003. 80 с.
2. Зайдель А.Н. Ошибки измерений физических величин. СПб.: Лань, 2005. 112 с.
3. Сойфер Г.Б. Определение плотности твердого тела цилиндрической формы. Методика обработки результатов измерений: метод. руководство к фронтальной лабораторной работе № 1 / Перм. ун-т. Пермь, 2005. 14 с.
4. Тейлор Дж. Введение в теорию ошибок. М.: Мир, 1985. 272 с.

*Учебное издание*

**Колчанов** Николай Викторович  
**Колчанова** Екатерина Андреевна

**Механика:**  
**методические указания**  
**к общему физическому практикуму**

Учебное пособие

Редактор *Л. В. Хлебникова*  
Корректор *М. Н. Демидова*  
Компьютерная вёрстка: *Н. В. Колчанов, Е. А. Колчанова*

---

Объем данных 4 Мб  
Подписано к использованию 08.04.2020

---

Размещено в открытом доступе  
на сайте [www.psu.ru](http://www.psu.ru)  
в разделе НАУКА / Электронные публикации  
и в электронной мультимедийной библиотеке ELiS

Издательский центр  
Пермского государственного  
национального исследовательского университета  
614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15