ПЕРМСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

И. Е. Полосков

МЕТОДЫ АНАЛИЗА СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Пермь 2020

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

И.Е.Полосков

МЕТОДЫ АНАЛИЗА СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

МОНОГРАФИЯ

Пермь 2020

УДК 571.9: 519.21: 519.6
ББК 22.161.6: 22.171: 22.193
П525

Полосков И. Е.

П525 Методы анализа систем с запаздыванием [Электронный ресурс] : монография / И. Е. Полосков ; Пермский государственный национальный исследовательский университет. – Электронные данные. – Пермь, 2020. – 19 Мб ; 900 с. – Режим доступа: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/poloskov-metody-analiza-sistem.pdf. – Заглавие с экрана.

ISBN 978-5-7944-3511-5

В монографии изложены теоретические основы и методы исследования детерминированных и стохастических систем с сосредоточенными и распределенными параметрами и различными формами запаздывания: дискретными и непрерывными, ограниченными и неограниченными, детерминированными и случайными. В качестве случайного входа для стохастических систем рассматриваются непрерывные, скачкообразные и смешанные возмущения. Кроме того, в монографии приведено большое числор результатов моделирования различных систем.

УДК 571.9: 519.21: 519.6
ББК 22.161.6: 22.171: 22.193

Издается по решению кафедры высшей математики
Пермского государственного национального исследовательского университета

Рецензенты: кафедра высшей математики НИУ ВШЭ – Пермь (рецензент – доцент кафедры, канд. физ.-мат. наук, доцент ***М. В. Радионова***);

главный научный сотрудник кафедры ЭВМ Вятского государственного университета, д-р физ.-мат. наук, профессор ***А. В. Шатров***

© ПГНИУ, 2020
© Полосков И. Е., 2020

ISBN 978-5-7944-3511-5

ВВЕДЕНИЕ

Динамические системы с наличием *запаздывания* (или последействия, или лага, или задержки, или ретардации)[1] широко представлены в технике, природе и обществе. Они встречаются в самых разнообразных физических, химических, инженерных, экономических и биологических системах и т.д. Можно привести много примеров, когда запаздывание играет важную роль.

Среди таких примеров отметим [320, 771]:

1°. Хлопки зрителей, сидящих на футбольном стадионе. Несмотря на то, что они хлопают в ладоши синхронно, те, кто сидит в противоположных концах стадиона, не слышат синхронного хлопания с их собственным из-за задержки распространения звука с одного конца стадиона до другого.

2°. Эхо в аудиториях, возникающее из-за скачков звуковых волн у микрофона после отражения от стенок. Основная причина эха та же – запаздывание.

3°. Течения Эль-Ниньо/Ла-Нинья или Южная осцилляция[2], где запаздывающая обратная связь представляет собой эффект океанских волн: распространяющиеся на запад волны Россби на океаническом слое скачка, которые после отражения от западной границы становятся бегущими на восток волнами Кельвина, которые вновь входят в связанную систему атмосфера–океан после временной задержки, равной их времени прохождения.

4°. Работа оператора системы управления, наблюдающего за состоянием системы и корректирующего параметры функционирования системы на основе поступающих данных. Поскольку эти корректировки никогда не могут быть выполнены мгновенно, между наблюдением и управляющим действием возникает запаздывание.

5°. Активность центральной нервной системы, являющаяся результатом совместного функционирования нейронов. Информационный поток между нейронами обычно не является мгновенным, а следовательно, существует конечная задержка в потоке информации. Например, скорость прохождения сигнала через немиелинизированные аксональные волокна

[1] Англ. delay, aftereffect, lag, retardation соответственно.

[2] *Течения Эль-Ниньо/Ла-Нинья* или *Южная осцилляция* (El Niño/La Niña – Southern Oscillation, ENSO) – колебание температуры поверхностного слоя воды в экваториальной части Тихого океана, имеющее заметное влияние на климат. Ла-Нинья – противоположная фаза осцилляции. Характерное время осцилляции – от 3 до 8 лет.

составляет порядка 1 м/с, что приводит к задержкам времени до 80 мс для распространения через кортикальную сеть. Значительные задержки колебаний частоты нейронов головного мозга более чем на 4% от характерного периода в 40 Гц происходят при передаче сигналов между нейронами, которые находятся на расстоянии менее 1 мм друг от друга.

6°. Задержки соединений в сетях связанных динамических систем из-за запаздывания потока информации между ними, которые могут привести к появлению множества новых типов поведения: бифуркации с фазовым переворотом, бифуркации Неймарка–Сакера и др. Было доказано, что запаздывания в соединениях улучшают синхронизацию сетей.

7°. Многие физические системы, которым свойственны временны́е запаздывания из-за конечной скорости переключения усилителей, фиксированного времени распространения сигналов в биологических сетях и схемах, эффектов памяти и т.д.

8°. Наличие запаздывания в технических системах нередко оказывается причиной явлений, существенно влияющих на функционирование этих систем. Например, в системах автоматического регулирования (САР) запаздыванием является промежуток времени, имеющийся всегда и требующийся системе для реагирования на входной сигнал. Наличие запаздывания в САР может приводить к появлению самовозбуждающихся колебаний, увеличению перерегулирования и даже неустойчивости систем [168].

9°. Принято считать, что наличие времени запаздывания – времени, необходимого для превращения топливной смеси в продукты сгорания, отрицательно влияет на процессы горения в жидкостных ракетных двигателях.

10°. Запаздывание появляется в сложных системах с логическими и вычислительными блоками, где требуется определенное время для обработки информации.

Многие технические, природные и экономические системы обладают свойством последействия, заключающееся в том, что будущие состояния зависят не только от настоящего, но и от прошлой истории. Давно установлено, что наличие последействия необходимо учитывать в моделях механических, физических, химических, биологических и других систем, при решении задач теории управления, медицины, атомной энергии, теории информации и т.д. Такое широкое распространение последействия является основанием считать его универсальным свойством окружающего мира [744]. А вследствие того, что в связи с растущим спросом на более точные прогнозы, управление и производительность существует большая потребность в том, чтобы используемые модели как можно точнее описы-

вали поведение реальных систем [766], естественен вывод о необходимости учета фактора запаздывания в имеющихся и разрабатываемых моделях различных процессов.

Причинами возникновения последействия являются детерминированные и случайные, ограниченные и неограниченные, дискретные и распределенные *транспортные*, *технологические*, *информационные*, *инерционные* и другие формы задержки (при передаче вещества, энергии, сигнала, информации на расстояние); конечность скорости движения носителей электрических зарядов; несвоевременность реакции в системах с человеком-оператором; инкубационный период (инфекционные заболевания), время перемешивания реагентов (химическая кинетика), время распространения лекарств в организме (фармацевтическая кинетика), скрытый период (динамика популяций), период смены температурного режима реактора относительно момента изменения положения регулирующих стержней (ядерная техника) и др. [96, 104, 266].

Если объединить понятия дифференциальных и функциональных уравнений, то можно получить понятие функционально-дифференциального уравнения (ФДУ) или, что то же самое, дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом (ДУсОА). ФДУ – это уравнение, связывающее неизвестную функцию и некоторые ее производные для, вообще говоря, разных значений аргументов, причем эти значения могут быть дискретными, непрерывными или смешанными, что соответствует понятиям дифференциально-разностного уравнения (ДРУ), в частности, дифференциального уравнения с запаздыванием (ДУсЗ), интегро-дифференциального уравнения (ИДУ) и т.д. Однако многие динамические системы зависят не только от нынешних и прошлых состояний, но также включают производные неизвестных функций с запаздывающими аргументами. Для описания таких систем часто используются дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения нейтрального типа (ДУНТ, ИДУНТ). Можно заметить, что в последние десятилетия интерес к системам дифференциальных уравнений, включающих инструменты учета поведения исследуемого объекта о прошлом, неуклонно растет.

Многие важнейшие процессы к науке, технике, экономике и медицине моделируются системами дифференциальных уравнений с запаздыванием (ДУсЗ), которые образуют один из классов функционально-дифференциальных уравнений. В общем случае наличие запаздывания (задержки, лага, памяти, последействия, наследственности) в модели повышает ее надежность при описании соответствующих реальных явлений и прогнозировании поведения соответствующих систем. Но включение характеристик процесса в предшествующие моменты времени в закон

эволюции системы увеличивает ее сложность, поскольку, в отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), даже обыкновенные ДУсЗ (ОДУсЗ) являются объектами исследования теории бесконечномерных динамических систем, а поэтому анализ их поведения во времени и изучение их свойств (существования и единственности решений, устойчивости, периодичности, наличия бифуркаций, самоорганизации и др.) требуют гораздо бóльших усилий при построении соответствующего теоретического аппарата, а также более эффективных приближенных аналитических и численных методов их решения.

Обилие приложений стимулирует бурное развитие теории дифференциальных уравнений с запаздыванием, которые являются основными математическими моделями систем с ретардацией и представляют собой важнейший подкласс привлекающего в последнее время значительный и все увеличивающийся интерес с различных точек зрения класса ФДУ и различных частных форм ФДУ, таких как дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом обыкновенные и в частных производных, в том числе дифференциальные уравнения с запаздыванием (дифференциально-разностные, ДРУ) и нейтральные, а также системами обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений (ОИДУ), дифференциальных уравнений в частных производных с запаздыванием (ДУвЧПсЗ), интегро-дифференциальных уравнений в частных производных (ИДУвЧП) и их различных комбинациями (гибридные модели), не говоря уже о стохастических аналогах этих уравнений.

Достигнутый уровень развития теоретического аппарата анализа поведения детерминированных систем, описываемых ФДУ, представлен во многих хорошо известных монографиях [5,24,157,168,183,266,301,320,334, 368,369,432,521,528,549,583,641,642,745,746,771,773,989,1099], некоторые из которых уже стали классическими, а сама теория ДУсЗ в настоящее время принадлежит к числу наиболее быстро развивающихся разделов теории ДУ (см. обзоры [3,6,16,376]). Отметим, что ФДУ делятся еще на обыкновенные ФДУ (ОФДУ) и ФДУ в частных производных (ФДУвЧП).

В настоящее время также признана важная роль ДУсОА в различных прикладных областях, о чем свидетельствуют многочисленные публикации, посвященные приложениям и численным методам [9,39,96,266,267, 283,376,407,432,502,536,549,583,628,642,684,738,744,757,758,771,844,989, 1005,1126].

Реальные явления могут моделироваться системами уравнений весьма сложной структуры, в т.ч., *гибридными системами дифференциальных уравнений* (*в обыкновенных* и *в частных производных*) [350,1006, 1007], *системами с переменной структурой* [33,83,935,1119], которые

включают уравнения с последействием, содержащими несколько дискретных лагов, распределенных и случайных запаздываний и их иных комбинаций.

Несмотря на то, что первые работы по теории ДУсЗ появились еще во первой половине XVIII столетия (И. Бернулли, 1728 г., а затем П.-С. Лаплас и Л. Эйлер) и в начале следующего (С.Д. Пуассон: запаздывание, зависящее от решения, 1806 г.), актуальные теоретические исследования, направленные на изучение влияния последействия на состояние и поведение различных систем, наряду с регулярным изучением уравнений с запаздыванием, начались лишь в середине XX в. [11]: значительный подъем интереса к ним и развитие их теории в связи с потребностями практики относятся ко времени второй мировой войны. Здесь надо отметить и более ранние довоенные работы: исследования В. Вольтерры, который еще в середине 1920-х гг. [1069][3] изучал модели хищник–жертва в отношении популяции паразитов с запаздыванием, равным времени, необходимому для проявления инфекции в организме хозяина; работы М. Калецкого [713, 714], в 1933 г. представивший на съезде экономического общества доклад, в котором впервые привел уравнение вида:

$$x'(t) = a\,x(t) - b\,x(t-\tau),$$

где $x(t)$ – требуемые капиталовложения или запасы готовой продукции, a, b – положительные постоянные; τ – запаздывание между принятием решения о капиталовложении и его осуществлением или запаздывание между поступлением заказов на продукцию и их учетом для изменения уровня производства; исследования Н. Минорского (N. Minorsky), например, [852], конца 30-х – начала 40-х гг. прошлого века, посвященных стабилизации курса корабля и автоматическому управлению его движением, в которых автор ясно указал на важность рассмотрения запаздывания в механизме обратной связи, а в качестве инструмента использовал уравнение, названное впоследствии его именем:

$$\ddot{x}(t) + 2\,\alpha\,\dot{x}(t) + \omega^2\,x(t) + 2\,\beta\,\dot{x}(t-1) = \varepsilon\,\dot{x}^3(t-1);$$

результаты Г.И. Горелика, который получил последнее уравнение при изучении влияния времени полета электрона на работу электронных ламп типа [53].

[3] В этих мемуарах, до конца части III, автор перестраивал и обогащал различными дополнениями то, что он уже опубликовал с тем же названием в "Memorie della R. Acc. dei Lincei" (сер. VI, 1926, Т. 2, С. 31-113); в части IV он воспроизвел три заметки, уже опубликованные в "Rend. Acc. Dei Lincei" "(сер. VI, 1927, Т.5, С. 3–10, 61–67, 465–470).

Однако особо интенсивно они стали развиваться только в последнее время, в первую очередь вследствие потребностей практики: сначала это были задачи управления [110], а затем и биологии, механики, физики, химии, медицины, экономики, атомной энергии, теории информации и т.д. [156, 156, 168, 183, 409, 528, 641].

Первопроходцами в конце сороковых годов были следующие ученые: А.Д. Мышкис (1920–2009, СССР/Россия), Е.М. Райт (Sir E.M.Wright, 1906 –2005, Великобритания) и Р. Беллман (R.E. Bellman, 1920–1984, США). В дальнейшем важный вклад в развитие этой теории внесли Н.В. Азбелев, А.М. Зверкин, Г.Л. Каменский, В.Б. Колмановский, Н.Н. Красовский, В.П. Максимов, С.Б. Норкин, В.Р. Носов, В.П. Рубаник, Л.Э. Эльсгольц, Р.Д. Драйвер (R.D. Driver), Е. Пинни (E. Pinney), Дж.К. Хейл (J.K. Hale) C.T.H. Baker, H.T. Banks, E. Friedman, T. Insperger, M.Lakshmanan, V. Lakshmikantham и др. Особняком стоит В. Вольтерра (V. Volterra, 1860–1940), который внес огромный вклад в разработку ключевых проблем чистой и прикладной математики, механики, математической физики, экологии и др. наук, заложил основы теории интегральных уравнений и построил теорию интегро-дифференциальных уравнений.

Разнообразие типов ФДУ велико, но несмотря на это, делась попытки построения такого класса общих операторных уравнений, который охватывал бы все эти типы и при этом был интересным и допускающим математическое исследование, в частности, для получения теорем существования, единственности и т.д. Основная трудность этого подхода оказалась обусловлена необходимостью включить в полученное функциональное уравнение все свойства, связанные с исходными дифференциальными уравнениями. При этом весьма сложно проверить, что рассматриваемое конкретное уравнение удовлетворяет всем требуемым предположениям, но, что более важно, при таком подходе некоторая часть динамики и геометрии исходной задачи теряется [301].

Уравнения с запаздыванием, в которых эволюция во времени переменной или переменных состояния может зависеть от прошлого в произвольной форме, описывают свойства объектов, определяемых различными эффектами последействия, и служат математическими моделями значительного числа разнообразных процессов: однородного и гибридного автоматического управления, химико-технологических и других производственных процессов (например, холодной прокатки стали), развития человеко-машинных, экономических и социальных систем, работы электростанций; генерации сигналов в радиосхемах и лазерах, замедления нейтронов; автономной стабилизации курса наземных, водных и воздушных транспортных средств, колебаний в ламповых генераторах, борь-

бы видов за существование в биологии; запаздывающих колебаний рабочих узлов машин, движения роботов; управления поточным производством [96, 104, 1005] и т.д.

ДУсЗ находят множественные приложения в теории автоматического регулирования (ТАР) технических систем; в теории автоколебательных систем и навигационных устройств; при анализе проблем, связанных с горением в жидкостно-реактивных двигателях, радиолокацией, радионавигацией, контролем качества воды, эффектами облучения; при решении задач долгосрочного прогнозирования в экономике, ряда биофизических и биомеханических проблем; в значительном числе других областей науки, техники и общества, спектр которых неуклонно расширяется [757, 989, 1005].

Современный этап развития теории ФДУ – учет влияния случайных возмущений[4], а как следствие, обращение к *стохастическим функционально-дифференциальным уравнениям* (СФДУ) разных типов [267, 306, 690, 824, 859, 884, 1031].

Эти уравнения образуют подкласс в общем классе случайных уравнений[5]. Общая классификация случайных уравнений выглядит так [1032]:

1) случайные алгебраические уравнения;

2) случайные дифференциальные уравнения;

3) случайные разностные уравнения;

4) случайные интегральные уравнения.

К такой классификации необходимо добавить различные смешанные формы перечисленных уравнений. При этом случайные интегро-дифференциальные уравнения можно отнести как к смешанным формам, так и согласиться с мнением некоторых специалистов и считать ИДУ частным случаем ИУ.

Анализ систем, описываемых ФДУ, встречает значительные трудности. Как правило, обычные схемы исследования нелинейных систем (линейный анализ устойчивости, изучение бифуркаций, стандартные методы

[4]В 1998 г. японский ученый Т. Охира написал: "... системы с шумом и запаздыванием начинают привлекать внимание ... Однако понимание сложного поведения, возникающего из-за шума и запаздывания, является далеко не полным".

[5]При классификации уравнений имеется некоторая неопределенность: в каких-то ситуациях слова "стохастические уравнения" и "случайные уравнения" считаются синонимами, в других – нет. Но с логической точки зрения, класс случайных уравнений содержит подкласс стохастических уравнений, т.к. последнее определение, вообще говоря, относится только к различным формам (интегро-)дифференциальных уравнений с четко определенными случайными возмущениями – винеровскими процессами или полями. Случайные, даже чисто дифференциальные уравнения могут включать произвольные случайные возмущения, в частности, случайные параметры, величины которых не зависят от времени, и физические шумы.

возмущений) непригодны для анализа ФДУ, решения которых обладают новыми свойствами (например, возможна автосинхронизация с переменным запаздыванием; даже в системах первого порядка допустимы колебательные режимы за счет наличия периодических запаздываний; возможно появление незатухающих, в том числе, хаотических колебаний). Присутствие последействия может приводить к неустойчивой и неудовлетворительной работе технических устройств, а также их плохой управляемости [425].

Существует несколько численных стратегий для приближенного решения ДУсЗ. Обычная практика – использование специально построенных алгоритмов и подпрограмм для приближенного интегрирования систем ДУсЗ. Но имеются примеры количественных исследований таких систем, где применяются косвенные подходы, в рамках которых тем или иным способом члены с запаздыванием исключаются из ДУсЗ, например, с помощью введения дополнительных переменных [422, 723]. При этом используются следующие идеи [379, 422]:

– классические методы шагов [24, 156, 320] позволяют представить систему ОДУсЗ на последовательных интервалах $[0, \tau]$, $[\tau, 2\,\tau]$, ..., $[(N-1)\tau, N\,\tau]$ эквивалентной цепочкой систем ОДУ без запаздывания возрастающей размерности;

– процесс, представленный запаздыванием, может быть аппроксимирован путем введения ряда промежуточных этапов с использованием системы ОДУ для имитации перехода через этапы [561, 588];

– влияние запаздывания по времени можно смоделировать с помощью переменных подстройки [512];

– использование приближенных эмпирических соотношений между значениями одной и той же переменной состояния, разделенных промежутком времени длиной в запаздывание [1016];

– компенсация временного запаздывания в оптимальных системах по методу Р. Бэсса [90];

– замена исследуемой системы с запаздыванием подобной системой без запаздывания, в которой вместо текущих координат объекта используются их прогнозируемые значения [123].

С другой стороны, вполне естественно предпринимаются попытки замены сложных математических моделей исследуемых явлений последовательностями более простых и удобных для дальнейшего анализа моделей. Представленные в данной монографии наши основные алгоритмы (различные формы расширения пространства состояний, аппроксимация матричных функций Грина и ядер интегро-дифференциальных уравнений и др.), идеологически близки к указанному направлению исследований.

В частности, в основе многих наших методов и схем исследования детерминированных и стохастических систем с запаздыванием лежит сочетание классического метода шагов и расширения пространства состояний (МШРПС) и разнообразные модификации такой комбинации, позволяет строить процедуры исследования различных форм ФДУ с одной точки зрения. При этом в большинстве вариантов схемы ошибка метода отсутствует. Кроме того, исчезают многие проблемы, возникающие при реализации процедур прямого численного интегрирования ДУ с запаздыванием. Например, для стохастических систем цель использования такого аппарата – превратить исходный векторный немарковский случайный процесс в марковской и получить цепочку простых решаемых задач вместо исходной сложной для расчета вероятностных характеристик случайных процессов как решений СФДУ.

На базе таких схем были исследованы различные задачи для детерминированных и стохастических систем с последствием. Среди них: анализ линейных и нелинейных ФДУ с одним и несколькими постоянными и переменными запаздываниями, с аддитивными и мультипликативными шумами; оценка стохастической чувствительности для стохастических ДРУ (СДРУ) др. Кроме того, наша методика в сочетании с методом Монте–Карло (ММК) может быть применена для решения сложных нелинейных стохастических задач.

Эффективность реализации соответствующих алгоритмов обеспечивается регулярным увеличением вычислительной мощности компьютеров, наличием соответствующих средств как в современных языках численного программирования, так и во входных языках систем аналитических вычислений, что позволяет отказаться в ряде случаев от разработки и использования специальных методов и программ интегрирования ДУсЗ.

Важным с нашей точки зрения является ясное и компактное представление излагаемых известных и авторских методов. Поэтому в монографии повсеместно используется векторно-матричная запись уравнений, соотношений и т.д., поддерживаемая применением соответствующих шрифтов. Для этого же при описании схем решения ряда задач используется аппарат трехмерных матриц [282].

Несмотря на то, что за последние годы появился ряд специальных монографий, посвященных различным аспектам исследования дифференциальных уравнений с запаздыванием, методы и задачи прикладного анализа объектов с запаздыванием, за исключением небольшого числа книг, отражены в монографической литературе весьма скудно.

Монография состоит из введения, двух частей ("Детерминированные системы" и "Стохастические системы"), разделенных на разделы (главы),

предметного указателя и библиографического списка.

Первая часть состоит из четырех разделов, названных "Основные понятия" (дифференциальных уравнений с запаздыванием, различные формы, классические и современные методы точного и приближенного решения), "Уравнения с сосредоточенными запаздываниями" (аппарат и алгоритмы анализа различных дифференциальных уравнений с одним и кратными запаздываниями), "Уравнения с распределенными отклонениями аргументов" (методы и примеры анализа интегро-дифференциальных уравнений) и "Прикладные задачи" (анализ детерминированной модели вязкоупругой механики, задачи чувствительности).

Вторая часть монографии является основной, включает пять разделов ("Теоретический аппарат", "Уравнения с сосредоточенными запаздываниями", "Уравнения с распределенными запаздываниями", "Уравнения со смешанными запаздываниями" и "Прикладные задачи анализа систем с запаздыванием"), в которых дан необходимый для дальнейших исследований аппарат теории случайных процессов и полей; введены понятия стохастических аналогов детерминированных дифференциальных уравнений с запаздыванием; приведены обзоры по типам уравнений известных методов приближенного исследования различных классов стохастических дифференциальных уравнений с запаздыванием; изложен аппарат анализа таких уравнений, алгоритмы и их применение. Основными используемыми алгоритмами являются схемы, разработанные автором монографии, а именно, сочетание метода шагов с расширением пространства состояний, аппроксимация матричной функции Грина и интегральное расширение пространства состояний, а также их различные модификации. В качестве примеров объектов исследования выступают, наряду с чисто модельными системами, системы из различных наук: вязкоупругой механики, гидродинамики, биологии, экологии, динамики транспорта и др.

В монографию включены краткие сведения по теории случайных (стохастических) процессов (ТСП). В подразделе 2.1.1 будут введены основные обозначения. представлена терминология из указанных областей и рассмотрены вопросы, связанные с СДУ, включая условия существования и единственности решений таких уравнений, а также свойства этих решений. В более полном объеме такие сведения можно найти в [236] и других источниках. При этом основные обозначения из ТСП, используемые в данной книге, соответствуют введенным в [236].

Цель этого подраздела – дать теоретическую основу для изучения стохастических функционально-дифференциальных уравнений. Если обратиться к таким уравнениям сразу же, не имея такой основы, то мож-

но столкнуться с определенными сложностями. Поэтому случайность в функциональных уравнениях лучше начинать обсуждать, начиная с определения необходимых инструментов прикладной теории случайных процессов и, в частности, аппарата теории *стохастических дифференциальных уравнений* (СДУ), *обыкновенных* (СОДУ) и *в частных производных* (СДУвЧП), которые можно считать частными случаями СФДУ. После того, как основные инструменты СДУ будут определены, и в общих чертах будет понятны свойства и поведение систем, описываемых СДУ, станет проще исследовать характеристики СФДУ, в частности, *стохастических обыкновенных функционально-дифференциальных уравнений* (СОФДУ) и *стохастических функционально-дифференциальных уравнений в частных производных* (СФДУвЧП).

Приложения содержат список сокращений и обозначений, вспомогательный материал, такой, как обыкновенные дифференциальные уравнения для первых моментных функций векторов состояния линейных параметрических систем стохастических обыкновенных дифференциальных уравнений, используемые в разных разделах монографии, и краткая сводка форм систем стохастических дифференциальных уравнений с различными формами запаздывания.

Более подробно с содержанием монографии можно ознакомиться, обратившись к структурированному оглавлению.

Список литературы достаточно широк, но, естественно, не всеобъемлющ.

Наряду с прикладными задачами, в тексте присутствует достаточное количество примеров, позволяющих более глубоко войти в предметную область.

Для облегчения ориентирования в границах текста монографии отметим, что формулы и рисунки нумеруются последовательно в пределах разделов, к номерам которых добавляется номер части: (1-XX.XXX) или (2-XX.XXX). Знаком ◀ обозначается начало примера или доказательства теоремы/леммы, а символом ▶ – окончание примера или доказательства. Использованные в библиографическом списке сокращения объясняются в конце этого списка.

Материалы, содержащиеся в настоящей монографии, предназначены как для профессиональных исследователей, так и для студентов – бакалаврантов и магистрантов. Последними эти материалы могут быть использованы при изучении специальных курсов, в которых рассматриваются различные прикладные аспекты теории уравнений с запаздыванием, а также будут полезны при написании выпускных работ. Молодым исследователям данная книга будет интересна как концентрированный

источник сведений по новому для них направлению.

Содержание монографии основано в работах [19,131,132,134,135,188–252,813–815,898–908,1000].

Текст книги набран в математической редакторской системе MikTeX (версия LaTeX [106] для MS Windows). Весь графический материал получен средствами пакета `Mathematica` [821,1093]. Основная часть расчетов проводились также в среде пакета `Mathematica`, остальные – с помощью программ на языке `Fortran` в средах разработки `Microsoft Visual Studio` или `Intel Parallel Studio`.

Все замечания по содержанию и плану монографии, а также предложения по исправлению отмеченных недостатков могут быть направлены по электронному адресу `polosk@psu.ru`.

Часть 1. Детерминированные системы

1.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

1.1.1. Первичные определения

Введем следующие понятия [319].

Определение 1.1.1. *Обыкновенным дифференциальным уравнением с отклоняющимися аргументами* (ОДУсОА) называется дифференциальное уравнение, в которое неизвестная функция и ее производные входят при различных значениях аргумента.

Примерами таких уравнений являются:

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t), x(t-\tau), t\big), \tag{1.1.1}$$

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t), x(t-\tau(t)), t\big), \tag{1.1.2}$$

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t), x(t-\tau_1), x(t-\tau_2), ..., x(t-\tau_k), t\big), \tag{1.1.3}$$

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t), x(2\,t), x(1+t^2), t\big), \quad t > 0, \tag{1.1.4}$$

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t), x(t/2), x(t-1-\sin t), t\big), \quad t > 0, \tag{1.1.5}$$

$$\ddot{x}(t) = f\big(x(t), \dot{x}(t), x(t-\tau), \dot{x}(t-\tau), t\big), \tag{1.1.6}$$

$$\dot{x}(t-\tau) = f\big(x(t), \dot{x}(t), x(t-\tau), \dot{x}(t-\tau), t\big), \tag{1.1.7}$$

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t), x(t^2), t\big), \tag{1.1.8}$$

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t-\tau), x(t), x(t+\tau), t\big), \tag{1.1.9}$$

$$\ddot{x}(t) = f\big(x(t), \dot{x}(t), x(t-\tau), \dot{x}(t-\tau), \ddot{x}(t-\tau), t\big). \tag{1.1.10}$$

Определение 1.1.2. *Обыкновенным дифференциальным уравнением с запаздывающими аргументами* (ОДУсЗА) или просто *с запаздыванием* (ОДУсЗ) называется ОДУсОА, в которое производные максимального порядка от неизвестной функции входят при одинаковых значениях аргумента, а этот аргумент не меньше, чем все остальные аргументы неизвестной функции и ее производных, входящих в уравнение.

Примеры ОДУсЗА: (1.1.1) и (1.1.6) для $\tau > 0$, (1.1.2) для $\tau(t) \geqslant 0$, (1.1.3) для $\tau_\ell > 0$ $(1 \leqslant \ell \leqslant k)$, (1.1.5).

Определение 1.1.3. *Обыкновенным дифференциальным уравнением с опережающим аргументом* (ОДУсОпА) или более кратко *с опережением* (ОДУсО) называется ОДУсОА, в которое производная максимального

порядка входит при одинаковых значениях аргумента, а этот аргумент не больше всех аргументов неизвестной функции и ее производных, входящих в уравнение.

Укажем на (1.1.2) для $\tau(t) \leqslant 0$, (1.1.7) для $\tau < 0$ и (1.1.4) как на примеры таких уравнений.

Определение 1.1.4. Все остальные формы ОДУсОА с одной неизвестной функцией называются *обыкновенными дифференциальными уравнениями нейтрального типа* (ОДУНТ).

(1.1.9) и (1.1.10) – примеры таких уравнений.

Существуют ОДУсОА, такие, что при некоторых значениях аргументов такие уравнения являются ОДУсЗА, а при других значениях – ОДУсОА или не принадлежит ни к одному из этих типов. Например, уравнение (1.1.8) является ОДУсЗА при $0 < t < 1$ и ОДУсОА при $t > 0$. Еще пример. Рассмотрим случай простого линейного уравнения первого порядка:

$$a_0 \frac{dx(t)}{dt} + a_1 \frac{dx(t-\tau)}{dt} + b_0\, x(t) + b_1\, x(t-\tau) = f(t), \tag{1.1.11}$$

где a_0, a_1, b_0 и b_1 – произвольные постоянные, а $f(t)$ – известная функция. Тогда уравнение (1.1.11) – это: а) ОДУсЗ, если $a_0 \neq 0$ и $a_1 = 0$; б) ОДУНТ, если $a_0 \neq 0$ и $a_1 \neq 0$; в) ОДУсО, если $a_0 = 0$ и $a_1 \neq 0$.

Несколько иную классификацию ОДУсЗА предложил Г.А. Каменский [85, 320]. Пусть

$$\begin{aligned} F\big(&x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t), ..., , x^{(q_0)}(t), x(t-\tau_1), \dot{x}(t-\tau_1), \ddot{x}(t-\tau_1), \\ &..., x^{(q_1)}(t-\tau_1), ...x(t-\tau_m), \dot{x}(t-\tau_m), \ddot{x}(t-\tau_m), ..., \\ &x^{(q_m)}(t-\tau_m), t\big) = 0, \end{aligned} \tag{1.1.12}$$

где $\tau_\ell = \tau_\ell(t) \geqslant 0$ – отклонения, $q = \max_{0 \leqslant i \leqslant m} q_i$, – обыкновенное дифференциальное уравнение q-го порядка с m отклонениями аргумента. Обозначим через λ разность $q_0 - q$. Уравнения, для которых $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ или $\lambda < 0$, называются *обыкновенными дифференциальными уравнениями с запаздывающим аргументом, нейтрального типа* или *с опережающим аргументом* соответственно.

Соответствующая классификация по отношению к производным максимального порядка от всех неизвестных функций применяется и к системам ОДУсОА. Для этого слово "функция" заменяется на "векторная функция".

Определение 1.1.5. Если все отклонения аргументов в уравнениях типа (1.1.12) или в системах аналогичных уравнений постоянны, то такие функциональные уравнения называются *обыкновенным дифференциально-разностными* (ОДРУ).

Отметим, что с точки зрения приложений важнейшим типом таких уравнений являются ОДУсЗА, описывающие процессы с последействием.

Математическое описание динамических систем с последействием естественном образом должно включать специальный параметр запаздывания. Например, такое описание может быть в виде или дифференциальных уравнений с запаздыванием, или разностных уравнений с запаздыванием, или даже включать интегральные формы, такие как интегро-дифференциальные уравнения (Вольтерры).

Определение 1.1.6. *Обыкновенные интегро-дифференциальные уравнения* (ОИДУ) – класс уравнений, в которых неизвестная функция содержится как под знаком интеграла, так и под знаком дифференциала или производной.

Определение 1.1.7. Обыкновенные дифференциальные уравнения с запаздыванием и нейтрального типа, а также обыкновенные интегро-дифференциальные уравнения, ОИДУ с запаздыванием и нейтрального типа, описывающие динамические системы, принадлежат классу *обыкновенных функционально-дифференциальных уравнений с последействием* (ОФДУ, ОФДУсП).

Примерами последних являются:

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t), t\big) + \int\limits_{t_0}^{t} g\big(x(s), s\big)\, ds, \tag{1.1.13}$$

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t), t\big) + \int\limits_{t-\theta}^{t} g\big(x(s), s\big)\, ds, \tag{1.1.14}$$

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t), x(t-\tau), t\big) + \int\limits_{t_0}^{t} g\big(x(s), x(s-\tau), s\big)\, ds, \tag{1.1.15}$$

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t), x(t-\tau), \dot{x}(t-\tau), t\big) + \\ + \int\limits_{t_0}^{t} g\big(x(s), x(s-\tau), \dot{x}(s-\tau), s\big)\, ds. \tag{1.1.16}$$

1.1.2. Постановки начальных задач и свойства решений ДУсЗ

Рассмотрим простейшее дифференциальное уравнение с запаздыванием:

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t), x(t-\tau), t\big), \tag{1.1.17}$$

где $\tau = \text{const} > 0$.

Изменение динамической переменной, удовлетворяющей ОДУсЗ, зависит не только от ее текущего значения $x(t)$, но и от его значений в более ранние моменты времени, например, от $x(t')$, где $t' \in [t-\tau, t)$, $\tau > 0$ – временно́е запаздывание (или задержка). Как следствие, зависящее от времени решение ДУсЗ не может быть однозначно определено своим начальным состоянием только в один заданный момент времени. Вместо этого должна быть задана начальная функция на интервале, длина которого равна максимальной величине запаздывания, а сам интервал примыкает к моменту времени $t = t_0$. Отсюда следует, что нужно задать бесконечное (непрерывное) множество начальных условий для $t_0 - \tau \leqslant t < t_0$, а следовательно, дифференциальные уравнения с запаздыванием являются *бесконечномерными системами* даже в случае, если в наличии только одно скалярное ДУсЗ.

Определение 1.1.8. *Основная начальная задача* (ОНЗ) для уравнения (1.1.17) заключается в следующем: определить непрерывную функцию $x(t)$, которая при $t > t_0$ (t_0 – фиксированное время) удовлетворяет уравнению (1.1.17), а при $t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0$ совпадает с заданной непрерывной функцией $\varphi(t)$. В этом случае функция $x(t)$ называется *решением* уравнения (1.1.17), отрезок $[t_0 - \tau, t_0]$ – *начальным множеством*, которое обозначается EeE_{t_0}, а точка t_0 – *начальной точкой*.

Обычно предполагается, что начальная функция непрерывна или кусочно непрерывна на $\mathscr{E}_{t_0}$. Кроме того, поскольку речь идет о непрерывном решении уравнения, считается, что $x(t_0 + 0) = \varphi(t_0)$ (рис. 1.1.1).

Если запаздывание τ в уравнении (1.1.17) зависит от времени t: $\tau = \tau(t)$, то начальная задача ставится следующим образом: найти решение уравнения (1.1.17) при $t > t_0$, если известна начальная функция $x(t) = \varphi(t)$ при $t_0^{\#} \leqslant t \leqslant t_0$, где $t_0^{\#} = \min_{t \geqslant t_0} \big[t - \tau(t)\big]$.

Определение 1.1.9. Решение $x(t)$ уравнения (1.1.17) называется *нетривиальным осциллирующим*, если $x(t_k) = 0$ для $t_k \to +\infty$, $k = 1, 2, \ldots$ и $x(t) \not\equiv 0$. В противном случае решение называется *неосциллирующим*.

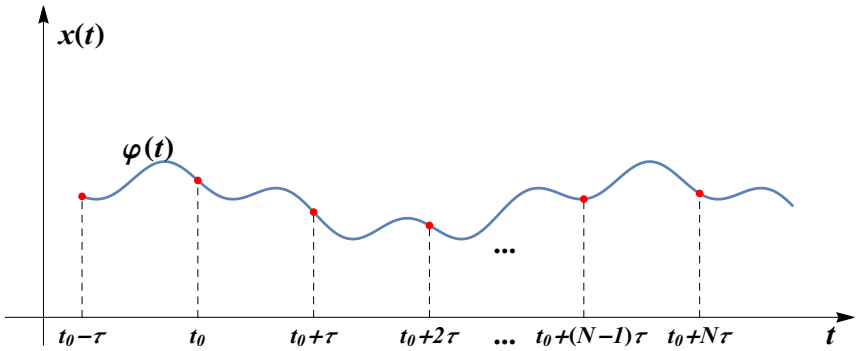


Рис. 1.1.1

Уравнение (1.1.17) называется *осциллирующим*, если все его решения осциллирующие.

Установлено [528], что линейное однородное дифференциальное уравнение с запаздыванием первого порядка с действительными коэффициентами может иметь нетривиальное колебательное решение.

Пример 1.1.1. У уравнения $\dot{x} = -x(t-\pi/2)$ есть решения вида $x(t) = \mathcal{C}_1 \cos t + \mathcal{C}_2 \sin t$ для произвольных постоянных $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$. ►

Рассмотрим ОДУ нейтрального типа:

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t), x(t-\tau), \dot{x}(t-\tau), t\big).$$

Задачей Коши на полуотрезке $[t_0, T]$ $(t_0 < T < \infty)$ для этого уравнения называется задача о нахождении непрерывно дифференцируемой на отрезке $[t_0-\tau, T]$ функции $x(t)$, обращающей уравнение (1.1.1) в тождество при $t \in (t_0, T]$ и удовлетворяющей начальному условию $x(t) = \varphi(t)$ для $t \in [t_0-\tau, t_0]$ $(\varphi \in \mathcal{C}^1[t_0-\tau, t_0])$.

Для разрешимости этой задачи необходимо выполнение так называемого условия "склейки": $\dot{\varphi}(t_0) = f\big(\varphi(t_0), \varphi(t_0-\tau), \dot{\varphi}(t_0-\tau), t_0\big)$. Если это условие выполнено и функция f непрерывна по всем своим аргументам, то задача Коши для уравнения (1.1.1) однозначно разрешима при любой для любой функции $\varphi \in \mathcal{C}^1[t_0-\tau, t_0]$.

Начальная задача для ДУсОА опережающего типа является некорректной.

Нередко в приложениях отклонения аргумента τ зависят от неизвестной функции и от ее производных, например,

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t), x(t-\tau), t\big), \qquad \tau = \tau\big(x(t), \dot{x}(t), t\big). \tag{1.1.18}$$

При этом постановка основной начальной задачи не изменяется. Но зависимость отклонения от неизвестной функции может привести к затруднениям в определении начального множества. В этом случае начальную функцию можно задавать на любом множестве, заведомо содержащем начальное, например, на всей полуоси $(-\infty, t_0]$ [320].

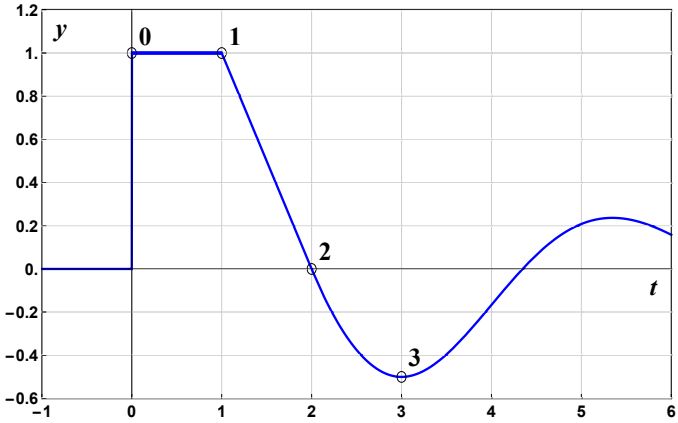


Рис. 1.1.2

Пример 1.1.2. Рассмотрим задачу Коши для скалярного ОДУсЗ с постоянным запаздыванием $\tau = 1$ [628]:

$$y'(t) = -y(t-1), \quad t > 0, \quad y(0) = 1, \quad y(t) = 0, \quad -1 \leqslant t < 0, \qquad (1.1.19)$$

решение которого показано на рис. 1.1.2. Решение можно легко вычислить с помощью так называемого метода шагов (см. следующий подраздел), который заключается в решении последовательности ОДУ $y'(t) = g_k(t)$, где $g_k(t) = -y(t-1)$ для $t \in [k, k+1]$, $k \geqslant 0$.

Некоторые важные особенности решения очевидны: а) чтобы решить задачу Коши, необходимо обеспечить начальную функцию на отрезке $[-1, 0]$; б) решение, даже если правая часть и начальная функция принадлежат классу $\mathscr{C}^\infty$, не является глобально гладким, а только кусочно гладким; в) при $t = 0$ имеется разрыв первого рода у решения, при $t = 1$ – разрыв того же рода у первой производной, при $t = 2$ – у второй, при $t = 0$ – у третьей. ▶

Ситуация, писанная в примере, не является какой-то экзотической для ОДУсЗ. Даже в случае существования непрерывных производных от

функций φ и f сколь угодно высокого порядка решение основной начальной задачи будет, вообще говоря, иметь разрыв первого рода у производной порядка ℓ в точке $t_0 + (\ell - 1)\tau$, но производные более низких порядков в этой точке будут уже непрерывны. Такое сглаживание решений происходит и во внутренних точках. Итак, решение $x(t)$ с возрастанием t сглаживается [320].

В отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений без отклонений аргумента теореме о единственности решения начальной задачи для уравнения n-го порядка с отклоняющимся аргументом не противоречат случаи, когда два различных решения и их производные до порядка $n-1$ включительно совпадают в некоторой точке $t_* > t_0$. Возможны даже случаи, когда два различных решения совпадают на целом отрезке $[t_*, t^*]$ и даже всюду при $\geqslant t^*$. Такая ситуация называется "слипанием" решений.

1.1.3. Классические точные методы решения

Кроме рассматриваемых ниже, к точным методам решения простейших ОДУсЗ относят применение преобразования Фурье, производящих функций и обобщенного метода Эйлера, в котором в отличие от классического случая для однородных линейных ОДУ с постоянными коэффициентами характеристическое уравнения является трансцендентным [1150].

1.1.3.1. Метод шагов

Рассмотрим простейшую систему ОДУсЗА:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(t-\tau), t\big), \quad t_0 < t \leqslant T < +\infty \tag{1.1.20}$$

с начальным условием $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\phi}(t)$ при $t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0$, где $\tau > 0$ – постоянное запаздывание. Естественным методом решения этой задачи является так называемый *метод шагов* (или *метод последовательного интегрирования*), заключающийся в том, что векторное решение $\boldsymbol{x}(t)$ рассматриваемой задачи определяется из дифференциальных уравнений без запаздывания.

Этот метод дает возможность определить решение $\boldsymbol{x}(t)$ на некотором конечном отрезке и одновременно доказать существование решения в окрестности точки $\big(t_0, \boldsymbol{\phi}(t_0)\big)$, если векторные функции $\boldsymbol{\phi}$ и $\boldsymbol{f}$ непрерывны в рассматриваемой области изменения переменных, а также его единственность в случае, когда функция $\boldsymbol{f}$ удовлетворяет, например, условию Липшица по второму аргументу [320].

Для удобства введем следующие обозначения:

$$t_p = t_0 + p\cdot\tau, \qquad s_q = t_{q-1} + s, \quad s\in[0,\tau],$$
$$\Delta_q = (t_{q-1}, t_q], \qquad \overline{\Delta}_q = [t_{q-1}, t_q], \qquad \boldsymbol{x}_q(s) = \boldsymbol{x}(t), \quad t\in\overline{\Delta}_q, \tag{1.1.21}$$
$$p = -1, 0, 1, ..., N, \qquad q = 0, 1, 2, ..., N, \qquad t_N \geqslant T.$$

Тогда решение уравнения на интервалах $\overline{\Delta}_0$, Δ_1, ..., Δ_N может быть найдено шаг за шагом из следующих уравнений:

$$\mathbf{0}^{\circ}.\ \ \boldsymbol{x}_0(s) = \boldsymbol{\phi}(s_0).$$
$$\mathbf{1}^{\circ}.\ \ \dot{\boldsymbol{x}}_1(s) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}_1(s), \boldsymbol{x}_0(s), s_1\big), \quad \boldsymbol{x}_1(0) = \boldsymbol{x}_0(\tau).$$
$$\mathbf{2}^{\circ}.\ \ \dot{\boldsymbol{x}}_2(s) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}_2(s), \boldsymbol{x}_1(s), s_2\big), \quad \boldsymbol{x}_2(0) = \boldsymbol{x}_1(\tau).$$
$$\ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots$$
$$\mathbf{N}^{\circ}.\ \ \dot{\boldsymbol{x}}_N(s) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}_N(s), \boldsymbol{x}_{N-1}(s), s_N\big), \quad \boldsymbol{x}_N(0) = \boldsymbol{x}_{N-1}(\tau).$$

Пример 1.1.3. Построим решение уравнения

$$\dot{x}(t) = -x(t) + x(t-1), \quad 0 < t \leqslant 3, \tag{1.1.22}$$
$$x(t) = 5\,(t+1)^2, \quad -1 \leqslant t \leqslant 0$$

методом шагов. Тогда будем иметь:

$$\mathbf{0}^{\circ}.\ \ x(t) = 5\,(t+1)^2, \quad t\in\overline{\Delta}_0.$$
$$\mathbf{1}^{\circ}.\ \ x(t) = 5 - 5\,e^{-t} + 5\,(t-1)^2, \quad t\in\Delta_1.$$
$$\mathbf{2}^{\circ}.\ \ x(t) = 10 - 5\,e^{-t} - 5\,e^{1-t}\,(4+t) + 5\,(t-3)^2, \quad t\in\Delta_2.$$
$$\mathbf{3}^{\circ}.\ \ x(t) = 15 - 5\,e^{-t} - 5\,e^{1-t}\,(4+t) - 5\,e^{2-t}\,(1+3\,t+t^2/2) + 5\,(t-5)^2,$$
$$t\in\Delta_3.$$

График решения уравнения (1.1.22) приведен на рис. 1.1.3. ▶

Используя метод шагов, можно получить точное решение уравнения:

$$x(t) = \alpha\,x(t) + \beta\,x(t-\tau), \qquad t > 0,$$
$$x(t) = \varphi(t), \qquad -\tau \leqslant t \leqslant 0.$$

Это решение в замкнутой форме для $(m-1)\,\tau < t \leqslant m\,\tau$ $(m \geqslant 1)$ и произвольных α, β, $\varphi(t)$ выглядит так: [593]:

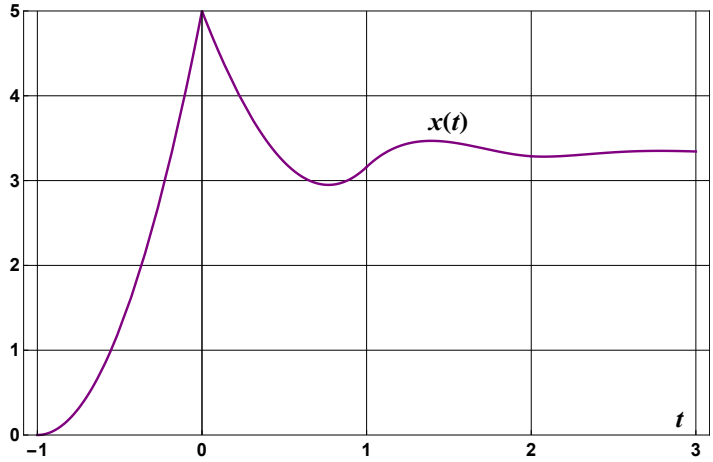


Рис. 1.1.3

$$x(t) = \varphi(0) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\beta^k\,(t-k\tau)^k}{k!}\, e^{\alpha(t-k\tau)} + \\ + \sum_{k=0}^{m-2} \frac{\beta^{k+1}}{k!} \int_{-\tau}^{0} \big[t-(k+1)\,\tau - s\big]\, e^{\alpha\left[t-(k+1)\tau-s\right]}\, \varphi(s)\, ds + \\ + \frac{\beta^m}{(m-1)!} \int_{-\tau}^{t-m\tau} \big(t - m\,\tau - s\big]\, e^{\alpha\left(t-m\tau-s\right)}\, \varphi(s)\, ds.$$

Теперь обратимся к системе ДУНТ в следующей форме:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(t-\tau), \dot{\boldsymbol{x}}(t-\tau), t\big), \quad t_0 < t \leqslant T < +\infty \tag{1.1.23}$$

с начальным условием $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\phi}(t)$ при $t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0$, где $\tau > 0$ – постоянное запаздывание, а $\boldsymbol{\phi}(t)$ – дифференцируемая или кусочно-дифференцируемая функция. Как и выше, для решения этого уравнения применим метод шагов.

Используя те же обозначения (1.1.21), решение уравнения (1.1.23) на интервалах $\overline{\Delta}_0$, Δ_1, ..., Δ_N по-шагово можно найти из следующих уравнений:

$$\mathbf{0}^{\circ}. \quad \boldsymbol{x}_0(s) = \boldsymbol{\phi}(s_0).$$

$$\mathbf{1}^{\circ}. \quad \dot{\boldsymbol{x}}_1(s) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}_1(s), \boldsymbol{x}_0(s), \dot{\boldsymbol{x}}_0(s), s_1\big), \quad \boldsymbol{x}_1(0) = \boldsymbol{x}_0(\tau).$$

$$\mathbf{2}^{\circ}.\quad \dot{\boldsymbol{x}}_2(s) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}_2(s), \boldsymbol{x}_1(s), \dot{\boldsymbol{x}}_1(s), s_2\big), \quad \boldsymbol{x}_2(0) = \boldsymbol{x}_1(\tau).$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\mathbf{N}^{\circ}.\quad \dot{\boldsymbol{x}}_N(s) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}_N(s), \boldsymbol{x}_{N-1}(s), \dot{\boldsymbol{x}}_{N-1}(s), s_N\big), \quad \boldsymbol{x}_N(0) = \boldsymbol{x}_{N-1}(\tau).$$

Пример 1.1.4. Применим метод шагов к построению решения уравнения

$$\dot{x}(t) = -x(t) + x(t-\tau) + \frac{1}{2}\,\dot{x}(t-\tau), \quad 0 < t \leqslant 4\,\tau, \tag{1.1.24}$$

$$x(t) = \frac{5}{2}\,\sin t, \quad -\tau \leqslant t \leqslant 0,$$

где $\tau = \pi/2$. Тогда будем иметь:

$$\mathbf{0}^{\circ}.\quad x(t) = \frac{5}{2}\,\sin t, \quad t \in \overline{\Delta}_0.$$

$$\mathbf{1}^{\circ}.\quad x(t) = \frac{1}{8}\,\big(15\,e^{-t} - 15\,\cos t - 5\,\sin t\big), \quad t \in \Delta_1.$$

$$\mathbf{2}^{\circ}.\quad x(t) = \frac{1}{32}\,\big[60\,e^{-t} + e^{\pi/2-t}\,\big(20 - 15\,\pi + 30\,t\big) + 30\,\cos t - 40\,\sin t\big],$$

$$t \in \Delta_2,$$

$$\mathbf{3}^{\circ}.\quad x(t) = \frac{1}{64}\,\big[120\,e^{-t} + 10\,e^{\pi/2-t}\,\big(4 - 3\,\pi + 6\,t\big) +$$

$$+5\,e^{\pi-t}\,\big(-3 - 10\,\pi + 3\,\pi^2 + 10\,t - 6\,\pi\,t + 3\,t^2\big) + 45\,\cos t + 65\,\sin t\big],$$

$$t \in \Delta_3,$$

$$\mathbf{4}^{\circ}.\quad x(t) = \frac{1}{1024}\,\big[1920\,e^{-t} + 160\,e^{\pi/2-t}\,\big(4 - 3\,\pi + 6\,t\big) +$$

$$+75\,e^{\pi-t}\,\big(-3 - 10\,\pi + 3\,\pi^2 + 10\,t - 6\,\pi\,t + 3\,t^2\big) +$$

$$+5\,e^{3\pi/2-t}\,\big(-152 - 84\,\pi + 144\,\pi^2 - 135\,\pi^3 + 56\,t - 192\,\pi\,t +$$

$$+54\,\pi^2\,t + 64\,t^2 - 36\,\pi\,t^2 + 8\,t^3\big) - 960\,\cos t + 280\,\sin t\big], \quad t \in \Delta_4.$$

График решения уравнения (1.1.24) приведен на рис. 1.1.4. ▶

В заключение данного пункта заметим, что метод шагов несложно распространить и на системы уравнений с кратными запаздываниями

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(t-\tau), \boldsymbol{x}(t-2\,\tau), \ldots, \boldsymbol{x}(t-\nu\,\tau), t\big) \tag{1.1.25}$$

и

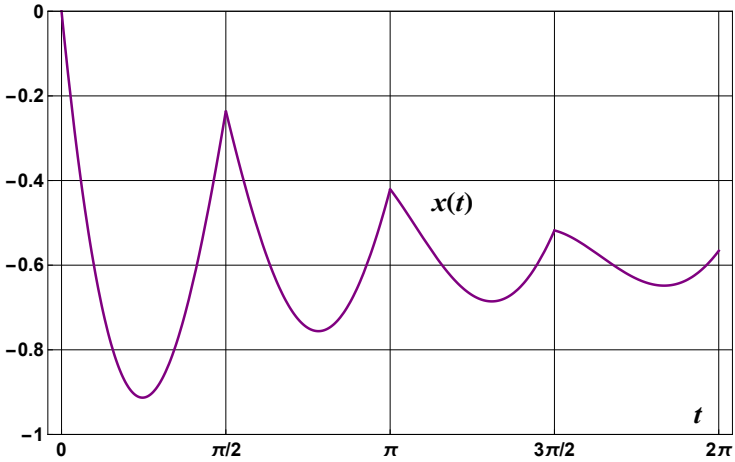


Рис. 1.1.4

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(t-\tau), \dot{\boldsymbol{x}}(t-\tau), \boldsymbol{x}(t-2\,\tau), \dot{\boldsymbol{x}}(t-2\,\tau), ..., \boldsymbol{x}(t-\nu\,\tau), \dot{\boldsymbol{x}}(t-\nu\,\tau), t\big). \quad (1.1.26)$$

где $\nu \in \mathbb{N}$.

Очевидно, что метод шагов не эффективен в том случае, если запаздывание τ достаточно мало по сравнению с интервалом, на котором требуется найти решение. Кроме того, поскольку этим методом трудно установить выражение решения в аналитическом виде, естественно, что его нельзя применить для изучения свойств решений при $t \to \infty$ [318].

1.1.3.2. Использование преобразования Лапласа

Пусть дано дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом с постоянными коэффициентами:

$$x^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, x^{(k)}(t-\tau_k) + f(t), \quad x(0) = x'(0) = ... = x^{(n-1)}(0) = 0, \quad (1.1.27)$$

где $a_k = \text{const}$, $\tau_k = \text{const} \geqslant 0$. Применяя преобразование Лапласа [61], получим, что

$$p^n\, \mathcal{X}(p) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, p^k\, \mathcal{X}(p)\, e^{-\tau_k p} + \mathcal{F}(t) \quad (1.1.28)$$

$(\mathcal{X}(p) \fallingdotseq x(t),\ \mathcal{F}(t) \fallingdotseq f(t))$, откуда

$$\mathcal{X}(p) = \frac{\mathcal{F}(p)}{p^n - \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k\, p^k\, e^{-\tau_k p}}. \tag{1.1.29}$$

После этого от изображения можно перейти к оригиналу $x(t)$.

Пример 1.1.5. Решить уравнение

$$x'(t) = -2\,x(t) + x(t-1) + 1, \qquad x(t) = 0, \quad t \leqslant 0. \tag{1.1.30}$$

◀ В области изображений

$$p\,\mathcal{X}(p) = -2\,\mathcal{X}(p) + \mathcal{X}(p)\,e^{-p} + \frac{1}{p},$$

откуда

$$\mathcal{X}(p) = \frac{1/p}{p + 2 - e^{-p}} = \frac{1}{p^2}\,\frac{1}{1 + 2/p - e^{-p}/p} = \frac{1}{p^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(e^{-p}-2)^k}{p^k}.$$

Переходя к оригиналу и ограничиваясь членами с $k \leqslant 8$, получим

$$\begin{aligned}
x(t) \approx\ & \frac{(t-8)^9\cdot\mathbb{1}(t-8)}{362880} - \frac{(t-7)^9\cdot\mathbb{1}(t-7)}{22680} + \frac{(t-7)^8\cdot\mathbb{1}(t-7)}{40320} + \\
& + \frac{(t-6)^9\cdot\mathbb{1}(t-6)}{3240} - \frac{(t-6)^8\cdot\mathbb{1}(t-6)}{2880} + \frac{(t-6)^7\cdot\mathbb{1}(t-6)}{5040} - \\
& - \frac{1}{810}(t-5)^9\cdot\mathbb{1}(t-5) + \frac{1}{480}(t-5)^8\cdot\mathbb{1}(t-5) - \frac{1}{420}(t-5)^7\cdot\mathbb{1}(t-5) + \\
& + \frac{1}{720}(t-5)^6\cdot\mathbb{1}(t-5) + \frac{1}{324}(t-4)^9\cdot\mathbb{1}(t-4) - \frac{1}{144}(t-4)^8\cdot\mathbb{1}(t-4) + \\
& + \frac{1}{84}(t-4)^7\cdot\mathbb{1}(t-4) - \frac{1}{72}(t-4)^6\cdot\mathbb{1}(t-4) + \frac{1}{120}(t-4)^5\cdot\mathbb{1}(t-4) - \\
& - \frac{2}{405}(t-3)^9\cdot\mathbb{1}(t-3) + \frac{1}{72}(t-3)^8\cdot\mathbb{1}(t-3) - \frac{2}{63}(t-3)^7\cdot\mathbb{1}(t-3) + \\
& + \frac{1}{18}(t-3)^6\cdot\mathbb{1}(t-3) - \frac{1}{15}(t-3)^5\cdot\mathbb{1}(t-3) + \frac{1}{24}(t-3)^4\cdot\mathbb{1}(t-3) + \\
& + \frac{2}{405}(t-2)^9\cdot\mathbb{1}(t-2) - \frac{1}{60}(t-2)^8\cdot\mathbb{1}(t-2) + \frac{1}{21}(t-2)^7\cdot\mathbb{1}(t-2) - \\
& - \frac{1}{9}(t-2)^6\cdot\mathbb{1}(t-2) + \frac{1}{5}(t-2)^5\cdot\mathbb{1}(t-2) - \frac{1}{4}(t-2)^4\cdot\mathbb{1}(t-2) +
\end{aligned}$$

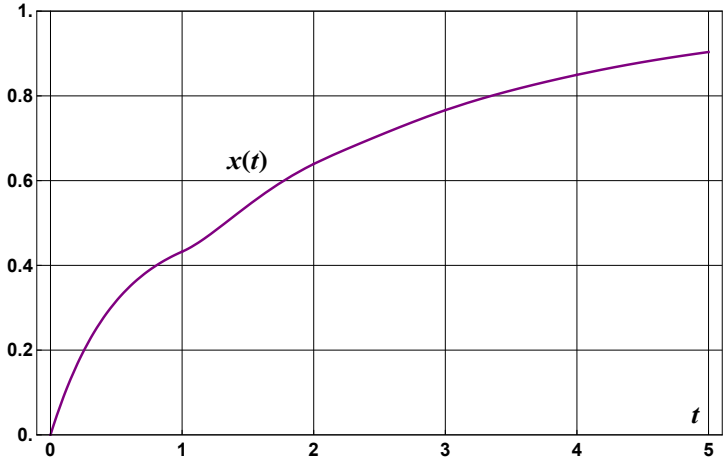


Рис. 1.1.5

$$+\frac{1}{6}(t-2)^3\cdot\mathbb{1}(t-2)-\frac{8(t-1)^9\cdot\mathbb{1}(t-1)}{2835}+\frac{1}{90}(t-1)^8\cdot\mathbb{1}(t-1)-$$
$$-\frac{4}{105}(t-1)^7\cdot\mathbb{1}(t-1)+\frac{1}{9}(t-1)^6\cdot\mathbb{1}(t-1)-\frac{4}{15}(t-1)^5\cdot\mathbb{1}(t-1)+$$
$$+\frac{1}{2}(t-1)^4\cdot\mathbb{1}(t-1)-\frac{2}{3}(t-1)^3\cdot\mathbb{1}(t-1)+\frac{1}{2}(t-1)^2\cdot\mathbb{1}(t-1)+$$
$$+\frac{2\,t^9}{2835}-\frac{t^8}{315}+\frac{4\,t^7}{315}-\frac{2\,t^6}{45}+\frac{2\,t^5}{15}-\frac{t^4}{3}+\frac{2\,t^3}{3}-t^2+t,$$

где $\mathbb{1}(z)$ – функция Хевисайда. График решения для отрезка ряда с $k\leqslant 40$ приведен на рис. 1.1.5.

1.1.4. Уравнения первого порядка

1.1.4.1. Примеры ОДУсОА

Рассмотрим некоторые частные формы ОДУсОА.

1°. Уравнение с постоянным (дискретным, сосредоточенным) запаздыванием:

$$\dot{x}(t)=f\big(x(t),x(t-\tau),t\big),$$

где запаздывание $\tau > 0$.

Пример 1.1.6. *Уравнение Маккея–Гласса*:

$$\dot{x}(t) = -b\,x(t) + a\,\frac{x(t-\tau)}{1+x^n(t-\tau)},$$

является одной из первых моделей циркуляции белых клеток крови с хаотическим поведением (рис. 1.1.6, $a = 0.2$, $b = 0.1$, $c = 10.0$, $\tau = 23.0$, $t \in [4000.0, 5600.0]$). *Уравнение Икеда*:

$$\dot{x}(t) = -a\,x(t) - b\,\sin x(t-\tau)\big],$$

используется для описания динамики оптического бистабильного резонатора (рис. 1.1.7, $a = 1.0$, $b = 20.0$, $\tau = 2.0$, $t \in [250.0, 300.0]$). ►

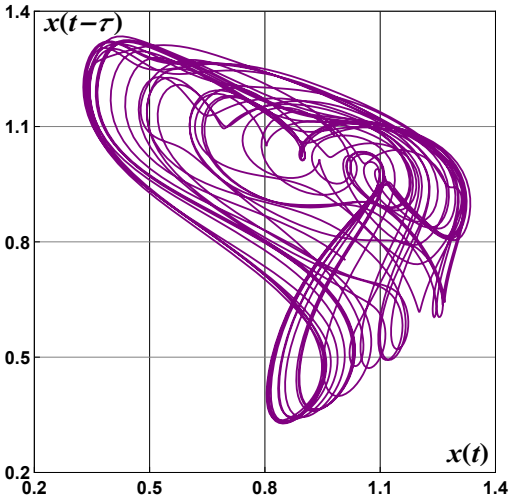


Рис. 1.1.6

2°. Уравнение с переменным запаздыванием:

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t), x(t-\tau(t)), t\big),$$

где запаздывание $\tau(t) > 0$ – заданная функция.

Пример 1.1.7. *Уравнение пантографа*:

$$\dot{x}(t) = a\,x(t) + b\,x(q\,t), \qquad x(t) \in \mathbb{R},$$

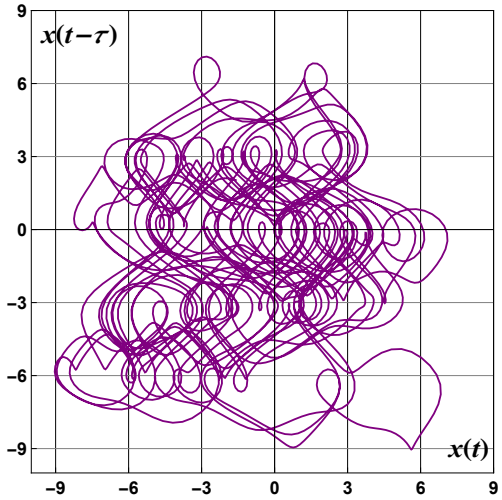


Рис. 1.1.7

где a, b и q – параметры с $q \in (0,1)$, применяется при моделировании пантографов[1]. Здесь $q\,t = t - \tau(t)$ при $\tau(t) = (1-q)\,t$. ►

3°. Уравнение с запаздыванием, зависящим от решения:

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t), x(t - \tau(x(t), t)), t\big),$$

где запаздывание $\tau(\boldsymbol{x}(t), t) > 0$ – заданная функция. Такие уравнения являются предметом многих текущих исследований.

Пример 1.1.8. Уравнение с пилообразным решением:

$$\varepsilon\,\dot{x}(t) = -\alpha\,x(t) - \beta\,x\big(t - a - b\,x(t)\big),$$

[1] *Пантограф* – это механическое устройство, основанное на параллелограммах и предназначенное для воспроизведения движения одного пера другим пером. Если некоторая линия или рисунок отслеживается первым пером, то идентичная, увеличенная или уменьшенная копия будет нарисована вторым пером. Используя тот же принцип, различные формы пантографов используются для дублирования в таких областях, как скульптура, чеканка, гравировка и фрезерование. Из-за формы оригинального устройства пантограф также относится к тем структурам, которые могут сжиматься или расширяться, образуя характерный ромбоидальный рисунок. Пантографы используются в удлинителях для настенных зеркал, временных ограждений, ножничных подъемников и других ножничных (складывающихся) механизмов, таких как пантограф, используемый в токосъемниках электровозов и трамваев.

где $\varepsilon > 0$, $a > 0$, $b > 0$, $\alpha + \beta > 0$. Модельная задача, сформулированная Маллет-Паре и Нуссбаумом, получила свое название от решений со стабильным периодом, получаемых в пределе $\varepsilon \to 0$. В этом уравнении $\tau(x(t), t) = a + b\,x(t)$ – запаздывание при $x(t) \geqslant -a/b$. ►

4°. Уравнение нейтрального типа:

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t), x(t-\tau_1), \dot{x}(t-\tau_2), t\big),$$

где τ_1 и τ_2 – дискретные запаздывания.

Пример 1.1.9. Уравнение:

$$\dot{x}(t) = \dot{x}(t-2) + J^{-1}\left[F\big(x(t) - x(t-2) + \Omega\big) - x(t) - x(t-2) + \Omega\right],$$

представляет собой упрощенную модель бурильной колонны с постоянной скоростью вращения Ω, в которой не учитываются осевые и радиальные режимы этой колонны. ►

5°. Уравнение с конечным (ограниченным) распределенным запаздыванием:

$$\dot{x}(t) = f\Big(x(t), \int_{t-\tau}^{t} g\big(x(s), s\big)\,ds, t\Big).$$

Пример 1.1.10. Уравнение:

$$\dot{x}(t) = -\big[a + h\big(x(t)\big)\big]\,x(t) + \frac{2}{\tau - \tau_0}\int_{\tau_0}^{\tau} h\big(x(t-s)\big)\,x(s)\,ds,$$
$$h(y) = b\,\frac{c^n}{c^n + y^n}, \qquad y \geqslant 0,$$

описывает изменение плотности популяции плюрипотентных стволовых клеток в фазе пролиферации, которая, по сути, является так называемым клеточным циклом. В этом цикле плюрипотентные стволовые клетки совершают деление и в конце этой фазы дают рождение двум дочерним клеткам, которые непосредственно входят в фазу покоя и завершают цикл. ►

6°. Уравнение с неограниченным распределенным запаздыванием:

$$\dot{x}(t) = f\Big(x(t), \int_{t_0}^{t} g\big(x(s), s\big)\,ds, t\Big), \qquad t \geqslant t_0.$$

Пример 1.1.11. Уравнение:

$$(m+m_\infty)\,\ddot{x}(t)+\int_0^t K(t-s)\,\dot{x}(s)\,ds+k\,x(t)=F_1+F_2,$$

описывает вертикальные колебания буя в воде, где m – масса буя; m_∞ – добавленная масса, учитывающая инерцию воды, окружающей тело; k – жесткость буя, создаваемая гидравлической восстанавливающей силой. ▶

7°. Неявное задание запаздывания, например:

$$\int_{t-\tau}^t V\big(\boldsymbol{x}(s)\big)\,ds=a,$$

где a и V – заданные постоянная и функция, а τ должно быть определено.

Пример 1.1.12. В электродинамике Уилера–Фейнмана протон $p(t)$ и электрон $e(t)$ взаимодействуют через световые конусы в пространстве–времени, и запаздывание определяется из соотношения:

$$\tau_p^{\pm}=\frac{1}{c}\,\|p(t)-e(t\pm\tau_p^{\pm})\|.$$

1.1.4.2. Свойства решений ОДУсОА

Рассмотрим систему ОДУсЗ в виде [628]:

$$\boldsymbol{x}'(t)=\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(\alpha),t\big),\quad \alpha=\alpha\big(\boldsymbol{x}(t),t\big),\quad t\in(t_0,T],\qquad(1.1.31)$$
$$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}^0,\quad \boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\varphi}(t),\quad t<t_0,$$

где $T>t_0$ – заданная постоянная; $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d$ $(d\geqslant 1)$; $\boldsymbol{\varphi}(t)\in\mathbb{R}^d$ – заданная начальная функция; $\boldsymbol{f}$ – векторная функция с действительными значениями; функция $\alpha\big(\boldsymbol{x}(t),t\big)$ представляет собой отклоняющийся аргумент (часто записываемый как $\alpha\big(\boldsymbol{x}(t),t\big)=t-\tau\big(\boldsymbol{x}(t),t\big)$ в терминах запаздывания $\tau\big(\boldsymbol{x}(t),t\big)\geqslant 0$); $\boldsymbol{x}(\alpha)$ обозначает решение, вычисленное при $\alpha\big(\boldsymbol{x}(t),t\big)\leqslant t$. Анализ для случая нескольких запаздываний немного сложнее, но не катастрофически. Значение $\boldsymbol{\varphi}(t_0)$ может отличаться от $\boldsymbol{x}^0$, что приводит к разрыву в точке t_0.

Если $\boldsymbol{x}^0\neq\boldsymbol{\varphi}(t_0)$, то решение очевидно будет разрывным при $t=t_0$. Однако, даже когда $\boldsymbol{x}^0=\boldsymbol{\varphi}(t_0)$, правая производная $\boldsymbol{x}'(t_0)$, которая определяется системой ОДУсЗ, не равна в общем случае левой производной $\boldsymbol{\varphi}(t_0)$. Это отсутствие гладкости в точке t_0 обычно распространяется вдоль промежутка интегрирования. В действительности, как только

$\alpha\big(\boldsymbol{x}(s), s\big) = t_0$ для некоторого $s > t_0$, функция $\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(\alpha)\big)$ уже не будет гладкой в точке s. Это формирует дальнейшие разрывы у некоторых производных решения $\boldsymbol{x}(t)$ в s, которые будут распространяться с ростом t. В случае постоянного запаздывания $\alpha(x,t) = t - \tau$ точками разрыва будут точки $s_k = t_0 + k\,\tau$ для $k \geqslant 1$.

Скачок при t_0 приводит, вообще говоря, к разрыву при s_1 в первой производной $\boldsymbol{x}(t)$; это, в свою очередь, определяет скачок при s_2 у второй производной от $\boldsymbol{x}(t)$ и аналогично для дальнейших точек. Заметим, что для численного интегрирования важны лишь некоторые из этих точек излома, так как разрывы у производных решения достаточно высокого порядка несущественны в рамках численного метода.

Для уравнения нейтрального типа

$$x'(t) = f\big(x(t), x(t-\tau), x'(t-\tau), t\big), \qquad t \in (t_0, T], \tag{1.1.32}$$

в отличие от дифференциальных уравнений запаздывающего типа, решения не сглаживаются. Действительно, при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \tau$ из уравнения (1.1.32) для заданной функции $\varphi(t)$ получаем уравнение

$$x'(t) = f\big(x(t), \varphi(t-\tau), \varphi'(t-\tau), t\big),$$

из которого следует, что в точке t_0

$$\varphi'(t_0 - 0) \neq x'(t_0 + 0),$$

но и в точке $t_0 + \tau$ решение будет разрывным вследствие разрывности аргумента $x'(t-\tau)$ при $t_0 + \tau$. Это следует из уравнения

$$x'(t) = f\big(x(t), \varphi_1(t-\tau), \varphi_1'(t-\tau), t\big),$$

полученного из (1.1.32) методом шагов при $t_0 + \tau \leqslant t \leqslant t_0 + 2\,\tau$. Аналогично рассуждая, можно сделать вывод, что точки $t = t_0 + k\,\tau$ ($k = 0,\ 1,\ 2,\ ...$) для решения уравнения нейтрального типа являются точками разрывов. Поэтому, если говорят, что функция является решением уравнения нейтрального типа, имеют в виду, что она удовлетворяет этому уравнению на интервалах $(k\,\tau, (k+1)\,\tau)$, $k = 1,\ 2,\ ...$ Таким образом, если для уравнения с запаздывающим аргументом начальная функция сглаживается (в том смысле, что если она была только непрерывной, то решение может быть, при соответствующих свойствах функции f, какое угодно число раз непрерывно дифференцируемым), то решение ОДУНТ сохраняет степень гладкости начальных значений [318].

1.1.4.3. Теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши

Пусть

$$0 \leqslant \tau_1 < \tau_2 < ... < \tau_m \tag{1.1.33}$$

– набор m положительных чисел, представляющих запаздывания. Рассмотрим ОНЗ для ОДУ с многими постоянными запаздываниями:

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t), x(t-\tau_1), ..., x(t-\tau_m), t\big), \quad t \in (t_0, T], \tag{1.1.34}$$

$$x(t) = \varphi(t), \quad t_0 - \tau_m \leqslant t \leqslant t_0. \tag{1.1.35}$$

Теорема 1.1.1. Пусть множество $\mathscr{D} \in [t_0, t_0+\beta) \times \mathbb{R}^m$ выпуклое, функция $f : \mathscr{D} \mapsto \mathbb{R}$ непрерывна в области $\mathscr{D}$, и что $\varphi(t)$ отображает отрезок $[t_0 - \tau_m, t_0]$ на область $\mathscr{D}$. Тогда, если $\tau_1 \neq 0$, то задача (1.1.34), (1.1.35) имеет единственное решение на полуинтервале $[t_0, t_0 + \alpha)$, где $0 < \alpha \leqslant \beta$. Далее, если $\alpha < \beta$, то $x(t)$ достигает границы области $\mathscr{D}$ при $t \to \alpha$. Если $\tau_1 = 0$, то задача (1.1.34), (1.1.35) имеет по крайней мере одно решение [973].

Рассмотрим ОДУ с m переменными запаздываниями $\tau_i = \tau_i(t)$ ($i = 1, 2, ..., m$) [320]:

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t), x(t-\tau_1), ..., x(t-\tau_m), t\big), \quad t \in (t_0, T], \tag{1.1.36}$$

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in \boldsymbol{\mathscr{E}}_{t_0}.$$

Теорема 1.1.2. Если в уравнении (1.1.36): 1) все $\tau_i(t)$ непрерывны при $t_0 \leqslant t \leqslant T$ ($T > t_0$) и неотрицательны; 2) функция f непрерывна в окрестности точки $\big(\varphi(t_0), \varphi(t_0 - \tau_1(t_0)), ...\varphi(t_0 - \tau_m(t_0)), t_0\big)$ и удовлетворяет условию Липшица по всем аргументам, кроме последнего; 3) начальная функция $\varphi(t)$ непрерывна на $\boldsymbol{\mathscr{E}}_{t_0}$, то существует единственное решение $x(t)$ основной начальной задачи для уравнения (1.1.36) при $t_0 \leqslant t \leqslant T_*$, где разность $T_* - t_0$ достаточно мала.

Можно доказать существование решения основной начальной задачи для уравнения (1.1.36) в случае, когда предполагается лишь непрерывность правых частей уравнений. Значительно сложнее обстоит дело с существованием решения ОНЗ в особом случае для уравнений нейтрального типа, когда множество $\boldsymbol{\mathscr{E}}_{t_0}$ сводится к одной точке t_0.

Рассмотрим уравнение вида:

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t), x(t-\tau(t)), \dot{x}(t-\tau(t)), t\big), \quad t \in (t_0, T]. \tag{1.1.37}$$

Предположим, что имеет место особый случай. Тогда, если решение определяется лишь в достаточно малой правой окрестности точки t_0, то и множество $\mathscr{E}_{t_0}$ сводится к одной точке (так как $\tau(t_0) = 0$ и $\tau(t)$ растет в этой окрестности медленнее t) и, следовательно, начальное условие имеет вид $x(t_0) = x^0$.

Полагая в уравнениях (1.1.37) $t = t_0$, получим уравнение или тождество

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t_0) = f\big(x(t_0), x(t_0), \dot{x}(t_0), t_0\big), \quad t \in (t_0, T]. \tag{1.1.38}$$

Если равенство (1.1.38) не является тождеством, то из этого уравнения определяется единственная неизвестная в нем величина $\dot{x}(t_0)$. Отсутствие действительных решений $\dot{x}(t_0)$ уравнения (1.1.38) означает отсутствие решений основной начальной задачи для уравнения (1.1.37). При наличии одного или нескольких действительных решений $\dot{x}(t_0)$ уравнений (1.1.38) при соответствующих предположениях можно доказать существование единственного решения ОНЗ с непрерывной производной с угловым коэффициентом касательной в точке t_0, равным выбранному действительному корню $\dot{x}(t_0)$ уравнений (1.1.38).

Теорема 1.1.3 (Г.А. Каменский). Пусть в уравнении (1.1.37) $\tau(t_0) = 0$, для некоторого $\theta > 0$ на интервале $(t_0, t0 + \theta)$ верно неравенство $t - \tau(t) > t_0$, и пусть $\mu_\theta = \inf_{[t_0, t0+\theta]} \dot{\tau}(t) > 0$ (если запаздывание $\tau(t)$ недифференцируемо, то $\dot{\tau}(t)$ можно заменить нижним производным числом). Предположим, что $\dot{x}(t_0)$ – действительный корень уравнения (1.1.38), функция f непрерывна в окрестности точки $\big(x(t_0), x(t_0), \dot{x}(t_0), t_0\big)$ по всем своим аргументам и удовлетворяет условию Липшица по всем аргументам, кроме последнего, с константами L_1, L_2, L_3. Если при этом $L_3\,(1 - \mu_\theta) < 1$, то на некотором интервале справа от начальной точки t_0 существует, и притом единственное, непрерывно дифференцируемое решение уравнения (1.1.37) с начальными значениями $x(t_0)$, $\dot{x}(t_0)$.

Заметим, что уже при $L_3\,(1 - \mu_\theta) = 1$ единственность может нарушаться.

Таким образом, через точку $\big(x(t_0), t_0\big)$ может проходить столько решений уравнения (1.1.37), сколько действительных корней имеет уравнение (1.1.38). Если это уравнение обращается в тождество, то при тех же ограничениях существует целый пучок решений, проходящих через точку $\big(x(t_0), t_0\big)$; при этом решение определяется выбором $\dot{x}(t_0)$.

Рассмотрим уравнение вида:

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t), x(t - \tau), t\big), \qquad \tau = \tau\big(x(t), t\big) \geqslant 0. \tag{1.1.39}$$

Теорема 1.1.4 (Р.Д. Драйвер). Если в уравнении (1.1.39): 1) функция $f(x,y,t)$ в окрестности точки $\big(\varphi(t_0),\varphi\big(t_0-\tau(\varphi(t_0),t_0)\big),t_0\big)$ непрерывна; 2) неотрицательная функция $\tau(x,t)$ в некоторой окрестности точки $\big(\varphi(t_0),t_0\big)$ непрерывна; 3) функции τ и f удовлетворяют условию Липшица по всем аргументам, кроме последнего; 4) начальная функция $\varphi(t)$ определена на полуоси $(-\infty,t_0]$ и удовлетворяет условию Липшица на каждом конечном подынтервале, то существует единственное непрерывное решение $x(t;\varphi)$ основной начальной задачи для уравнения (1.1.39) при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0+h$, где h достаточно мало.

1.1.4.4. Линейные ОДУсЗ

Рассмотрим *линейное ОДУсЗ* [320]

$$\sum_{p=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{m} a_{p\ell}\, x^{(p)}(t-\tau_\ell) = f(t), \tag{1.1.40}$$

где все коэффициенты $a_{p\ell}$ и все отклонения аргументов τ_ℓ постоянны. Предположим, что

$$0=\tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_m.$$

Уравнение (1.1.40) является уравнением: 1) с запаздывающим аргументом, если $a_{n0}\neq 0$, а остальные $a_{n\ell}=0$; 2) опережающего типа, если $a_{n0}=0$, но хотя бы для одного $\ell>0$ $a_{n\ell}\neq 0$; 3) нейтрального типа, если $a_{n0}\neq 0$ и хотя бы для одного $\ell>0$ $a_{n\ell}\neq 0$.

Начнем анализ с соответствующего (1.1.40) линейного однородного уравнения:

$$\sum_{p=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{m} a_{p\ell}\, x^{(p)}(t-\tau_\ell) = 0, \tag{1.1.41}$$

(такие уравнения часто называют *стационарными линейными однородными уравнениями с запаздыванием*). Будем искать частные решения, уравнения (1.1.41) в виде

$$x(t)=e^{\lambda t}, \tag{1.1.42}$$

где λ – постоянная. Подставляя (1.1.42) в (1.1.41) и сокращая на $e^{\lambda t}$, получим для определения λ так называемое характеристическое уравнение

$$\sum_{p=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{m} a_{p\ell}\,\lambda^p\, e^{-\lambda\tau_\ell} = 0. \tag{1.1.43}$$

Левая часть последнего уравнения

$$\Phi(\lambda) = \sum_{p=0}^{n} \sum_{\ell=0}^{m} a_{p\ell}\, \lambda^p\, e^{-\lambda\tau_\ell}$$

называется *характеристическим квазиполиномом*, который является целой аналитической функцией. Если функция $\Phi(\lambda)$ не вырождается в полином, то $\Phi(\lambda)$ имеет бесконечное множество нулей, единственной предельной точкой которых является бесконечность.

Уравнение (1.1.43) имеет бесконечное множество корней. Каждому корню λ_i соответствует решение $e^{\lambda_i t}$. Линейные комбинации решений

$$\sum_{s=0}^{q} \mathcal{C}_s\, e^{\lambda_s t}$$

с постоянными коэффициентами $\mathcal{C}_s$ и даже сумма бесконечного ряда

$$\sum_{s=0}^{\infty} \mathcal{C}_s\, e^{\lambda_s t} \tag{1.1.44}$$

решений, если ряд (1.1.44) сходится и допускает n-кратное почленное дифференцирование, также являются решениями уравнения (1.1.41).

Если все коэффициенты $a_{p\ell}$ действительны, то комплексным корням $\lambda = \alpha \pm \beta\, \boldsymbol{i}$ уравнения (1.1.43) соответствуют комплексные решения $e^{(\alpha+\pm\beta\, \boldsymbol{i})t}$ или действительные решения $e^{\alpha t}\, \cos\beta\, t$, $e^{\alpha t}\, \sin\beta\, t$, являющиеся соответственно действительной и мнимой частями решения $e^{(\alpha+\pm\beta\, \boldsymbol{i})t}$.

Кратным корням λ_i уравнения (1.1.43) кратности r_i соответствует не только решение $e^{\lambda_i t}$, но и $t\, e^{\lambda_i t}$, ..., $t^{r_i-1}\, e^{\lambda_i t}$, и, следовательно, если ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} P_i(t)\, e^{\lambda_i t}, \tag{1.1.45}$$

где $P_i(t)$ – многочлены с произвольными постоянными коэффициентами степени $r_i - 1$, сходится и допускает n-кратное почленное дифференцирование, то его сумма является решением уравнения (1.1.41).

Естественно возникает вопрос, можно ли в виде (1.1.45) представить любое решение уравнения (1.1.41). В общем случае ответ на этот вопрос отрицателен, но при некоторых ограничениях такое разложение решения в ряд возможно и может быть использовано для приближенного нахождения решения и для выяснения его асимптотических свойств.

1.1.4.5. Системы линейных ОДУсОА

Рассмотрим систему ОДУ [318]:

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_0\,\boldsymbol{x}'(t)+\boldsymbol{\mathcal{A}}_1\,\boldsymbol{x}'(t-\tau)+\boldsymbol{\mathcal{B}}_0\,\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{\mathcal{B}}_1\,\boldsymbol{x}(t-\tau)=\boldsymbol{f}(t), \tag{1.1.46}$$

где $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$; $\boldsymbol{\mathcal{A}}_0$, $\boldsymbol{\mathcal{A}}_1$, $\boldsymbol{\mathcal{B}}_0$, $\boldsymbol{\mathcal{B}}_1$ – постоянные действительные $(n\times n)$-матрицы; $\boldsymbol{f}$ – векторная функция с действительными значениями.

Если в системе (1.1.46) $|\boldsymbol{\mathcal{A}}_0|\neq 0$, $|\boldsymbol{\mathcal{A}}_1|=0$, то эта система является системой с запаздывающим аргументом; если $|\boldsymbol{\mathcal{A}}_0|\neq 0$, $|\boldsymbol{\mathcal{A}}_1|\neq 0$, то (1.1.46) – система нейтрального типа; если $|\boldsymbol{\mathcal{A}}_1|\neq 0$, $|\boldsymbol{\mathcal{B}}_0|\neq 0$, $|\boldsymbol{\mathcal{A}}_0|=0$, то рассматривая система опережающего типа; если $|\boldsymbol{\mathcal{A}}_0|=|\boldsymbol{\mathcal{A}}_1|=0$, то система называется разностной; если $|\boldsymbol{\mathcal{B}}_0|=|\boldsymbol{\mathcal{B}}_1|=0$, то система легко сводится к разностной. Если $|\boldsymbol{\mathcal{A}}_0|=|\boldsymbol{\mathcal{B}}_0|=0$ или $|\boldsymbol{\mathcal{A}}_1|=|\boldsymbol{\mathcal{B}}_1|=0$, то система (1.1.46) переходит в линейную систему ОДУ с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим случай системы запаздывающего типа:

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_0\,\boldsymbol{x}'(t)+\boldsymbol{\mathcal{B}}_0\,\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{\mathcal{B}}_1\,\boldsymbol{x}(t-\tau)=\boldsymbol{f}(t) \tag{1.1.47}$$

с начальным условием $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\varphi}(t)$ при $t_0-\tau\leqslant t\leqslant t_0$.

Заметим, что переносом $t-t_0=t'$ всегда можно добиться, чтобы начальные условия имели вид

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\varphi}(t),\qquad 0\leqslant t\leqslant\tau. \tag{1.1.48}$$

Для системы вида (1.1.47) справедлива следующая теорема существования и единственности решения.

Теорема 1.1.5. Пусть $\boldsymbol{f}(t)$, $\boldsymbol{\varphi}(t)$ – непрерывные вектор-функции, определенные на полуинтервале $[0,+\infty)$ и отрезке $[0,\tau]$ соответственно. Тогда существует одна и только одна функция $\boldsymbol{x}(t)$, определенная при $t\geqslant 0$, непрерывная при $t\geqslant 0$, удовлетворяющая начальным условиям (1.1.48) и системе (1.1.47) при $t>\tau$. Эта функция непрерывно дифференцируема на $[\tau,+\infty)$, и если $\boldsymbol{f}$ непрерывно дифференцируема, то $\boldsymbol{x}(t)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[2\,\tau,+\infty)$. Если $\boldsymbol{\varphi}(t)$ непрерывно дифференцируема, то $\boldsymbol{x}'(t)$ непрерывна в точке τ тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_0\,\boldsymbol{\varphi}'(\tau-0)+\boldsymbol{\mathcal{B}}_0\,\boldsymbol{\varphi}(\tau)+\boldsymbol{\mathcal{B}}_1\,\boldsymbol{\varphi}(0)=\boldsymbol{f}(\tau). \tag{1.1.49}$$

В дальнейшем для построения решения, условия существования которого установлены в последней теореме, необходимо будет знать оценку

величины решений системы с запаздыванием. Такая оценка устанавливается следующей теоремой [24].

Теорема 1.1.6. Пусть $\boldsymbol{x}(t)$ является непрерывно дифференцируемым решением системы (1.1.47), где $\boldsymbol{f}(t)$ – непрерывная функция, удовлетворяющей неравенству

$$\|\boldsymbol{f}(t)\| \leqslant c_1\, e^{c_2 t}, \quad t \leqslant 0, \quad c_1, c_2 \geqslant 0. \tag{1.1.50}$$

Обозначим $\mu = \max_{0 \leqslant t \leqslant \tau} \|\boldsymbol{\varphi}(t)\|$. Тогда существуют такие постоянные $c_3 > 0$, $c_4 > 0$, зависящие от c_2 и от матриц $\boldsymbol{\mathcal{B}}_0$, $\boldsymbol{\mathcal{B}}_1$, что будет верно неравенство

$$\|\boldsymbol{x}(t)\| \leqslant c_3\, (c_1 + \mu)\, e^{c_4 t}, \quad t \leqslant 0. \tag{1.1.51}$$

Оценки решений для уравнений с переменными коэффициентами и распределенными запаздываниями общего вида найдены А.Д.Мышкисом, а для уравнения нейтрального типа – Е.М. Райтом.

Для системы уравнений (1.1.47) уравнение

$$\left|\boldsymbol{\mathcal{A}}_0\, \lambda + \boldsymbol{\mathcal{B}}_0 + \boldsymbol{\mathcal{B}}_1\, e^{-\lambda\tau}\right| = 0 \tag{1.1.52}$$

будет *характеристическим*. Одно из свойств корней уравнения (1.1.52) устанавливается следующим утверждением.

Лемма 1.1.1. Корни уравнения (1.1.52) на комплексной плоскости переменной λ все лежат слева от некоторой вертикальной прямой, т.е. существует такая действительная постоянная M, что $\operatorname{Re}\lambda < M$.

Решение системы уравнений (1.1.47) с начальным условием $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t)$ при $t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0$ может быть представлено в следующей форме:

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathbb{R}(t-\tau)\, \boldsymbol{\mathcal{A}}_0\, \boldsymbol{\varphi}(\tau) - \boldsymbol{\mathcal{B}}_1 \int_0^{\tau} \mathbb{R}(t-s-\tau)\, \boldsymbol{\varphi}(s)\, ds + \int_{\tau}^{t} \mathbb{R}(t-s)\, \boldsymbol{f}(s)\, ds,$$

где $\mathbb{R}(t,s)$ – матричная функция, обладающая свойствами: 1) $\mathbb{R}(t) = 0$ при $t < 0$; 2) $\mathbb{R}(0) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_0^{-1}$; 3) $\mathbb{R}(t)$ – непрерывная функция на $[0, +\infty)$; 4) при $t > 0$ матрица $\mathbb{R}(t)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_0\, \frac{\partial \mathbb{R}(t)}{\partial t} + \boldsymbol{\mathcal{B}}_0\, \mathbb{R}(t) + \boldsymbol{\mathcal{B}}_1\, \mathbb{R}(t-\tau) = 0. \tag{1.1.53}$$

Определим для системы уравнений (1.1.47) оператор $\mathbb{L}[\boldsymbol{x}]$ с помощью формулы:

$$\mathbb{L}[\boldsymbol{x}] = \boldsymbol{\mathcal{A}}_0\,\boldsymbol{x}'(t) + \boldsymbol{\mathcal{B}}_0\,\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{\mathcal{B}}_1\,\boldsymbol{x}(t-\tau).$$

На основании линейности оператора $\mathbb{L}$ можно получить следующие свойства решений уравнения (1.1.53), а также уравнения

$$\mathbb{L}[\boldsymbol{x}] = 0. \tag{1.1.54}$$

Свойства решений :

1°. Если $\boldsymbol{x}_1(t)$, $\boldsymbol{x}_2(t)$ – любые два решения уравнений (1.1.54), а c_1, c_2 – любые постоянные, то $c_1\,\boldsymbol{x}_1(t) + c_2\,\boldsymbol{x}_2(t)$ – также решение уравнений (1.1.54).

2°. Если $\boldsymbol{x}(t)$ – решение уравнений (1.1.47), а $\boldsymbol{y}(t)$ – решение уравнений (1.1.54), то $\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{y}(t)$ является решением уравнений (1.1.47).

В частности, из свойства 2° следует, что решение неоднородного уравнений (1.1.47), удовлетворяющее начальному условию $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t)$ на начальном множестве $0 \leqslant t \leqslant \tau$, можно получить как результат сложения двух более простых решений:

а) решения $\boldsymbol{x}(t)$ уравнения (1.1.54) с начальным условием $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant \tau$;

б) решения $\boldsymbol{y}(t)$ уравнения (1.1.47) с начальным условием $\boldsymbol{y}(t) = 0$ при $0 \leqslant t \leqslant \tau$.

Будем искать решение уравнений (1.1.54) в виде $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{c}\,e^{\lambda t}$, где $\boldsymbol{c}$ – произвольный постоянный вектор. Подставляя правую часть последней формулы вместо $\boldsymbol{x}(t)$ в уравнения (1.1.54), получаем:

$$\left(\boldsymbol{\mathcal{A}}_0\,\lambda + \boldsymbol{\mathcal{B}}_0 + \boldsymbol{\mathcal{B}}_1\,e^{-\lambda\tau}\right)\boldsymbol{c}\,e^{\lambda t} = 0. \tag{1.1.55}$$

Поскольку $e^{\lambda t} \neq 0$, относительно вектора $\boldsymbol{c}$ получаем систему уравнений:

$$\left(\boldsymbol{\mathcal{A}}_0\,\lambda + \boldsymbol{\mathcal{B}}_0 + \boldsymbol{\mathcal{B}}_1\,e^{-\lambda\tau}\right)\boldsymbol{c} = 0. \tag{1.1.56}$$

Отсюда следует, что для каждого корня λ уравнения

$$\left|\boldsymbol{\mathcal{H}}(\lambda)\right| = \left|\boldsymbol{\mathcal{A}}_0\,\lambda + \boldsymbol{\mathcal{B}}_0 + \boldsymbol{\mathcal{B}}_1\,e^{-\lambda\tau}\right| = 0 \tag{1.1.57}$$

всегда существует ненулевой вектор $\boldsymbol{c}(\lambda)$ такой, что векторная функция $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{c}(\lambda)\,e^{\lambda t}$ является решением уравнения (1.1.54).

Уравнение (1.1.56) называется *характеристическим* для уравнения (1.1.54), а корни уравнения (1.1.56) называются *характеристическими*

корнями уравнения (1.1.54). Таким образом, каждому корню характеристического уравнения (1.1.57) соответствует решение уравнения (1.1.54). Предположим, что кратному корню соответствует несколько независимых решений. Отметим прежде всего, что

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}'(\lambda) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_0 + \tau\,\boldsymbol{\mathcal{B}}_1\,e^{-\lambda\tau}, \qquad \boldsymbol{\mathcal{H}}^{(k)}(\lambda) = (-1)^k\,\tau^k\,\boldsymbol{\mathcal{B}}_1\,e^{-\lambda\tau}. \tag{1.1.58}$$

Пусть $\bar{\lambda} = \lambda$ – корень характеристического уравнения кратности $\nu+1$ ($\nu \geqslant 0$). Тогда, очевидно, всегда существуют векторы c_0, ..., c_ν, удовлетворяющие системе уравнений:

$$\sum_{m=0}^{k} \boldsymbol{\mathcal{H}}^{(k-m)}(\lambda)\,\boldsymbol{c}_m = \boldsymbol{0}, \qquad k = 0, 1, ..., m. \tag{1.1.59}$$

Поэтому всегда существует векторный многочлен степени $n \leqslant \nu$

$$\boldsymbol{R}_n(t) = \sum_{k=0}^{n} t^{n-k}\,\boldsymbol{c}_k$$

такой, что выражение $\boldsymbol{R}_n(t)\,e^{\bar{\lambda}t}$ является решением уравнения (1.1.54).

Поскольку уравнение (1.1.57) трансцендентное и, следовательно, имеет бесконечное множество корней, уравнение (1.1.54) имеет счетную систему решений вида $\boldsymbol{R}_k(t)\,e^{\lambda_k t}$, где $\boldsymbol{R}_k(t)$ – полином степени на единицу меньшей кратности корня λ_k характеристического уравнения (1.1.57).

Отсюда следует следующая теорема.

Теорема 1.1.7. Системе (1.1.54) удовлетворяет функция вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{R}_k(t)\;e^{\lambda_k t}, \tag{1.1.60}$$

где $\{\lambda_k\}$ – любая последовательность корней характеристического уравнения, $\boldsymbol{R}_k(t)$ – векторные полиномы степени меньшей кратности корня λ_k.

Таким образом, получается теория, аналогичная соответствующей теории систем линейных ОДУ с постоянными коэффициентами. Однако характеристическое уравнение (1.1.57) системы (1.1.54) имеет бесконечное множество корней, а значит, уравнение (1.1.54) имеет бесконечное множество экспоненциальных решений.

В некоторых частных случаях можно построить явное решение систем линейных ОДУсЗ. Так для системы с одним запаздыванием $\tau > 0$ вида:

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{\mathcal{A}}\,\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{\mathcal{B}}\,\boldsymbol{x}(t-\tau) + \boldsymbol{f}(t), \qquad t > 0, \tag{1.1.61}$$

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t), \qquad -\tau \leqslant t \leqslant 0, \tag{1.1.62}$$

где $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$; $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ – $n \times n$–матрицы; $\boldsymbol{\varphi}(t) \in \boldsymbol{\mathcal{C}}^1\big([-\tau, 0], \mathbb{R}^n\big)$ – заданная начальная вектор-функция; $\boldsymbol{f}(t) \in \boldsymbol{\mathcal{C}}\big([0, \infty), \mathbb{R}^n\big)$ – заданная вектор-функция, с случае коммутирующих матриц $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ и $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ любое решение задачи (1.1.61), (1.1.62) имеет форму [736, 918]:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t) = {} & e^{\boldsymbol{\mathcal{A}}(t+\tau)}\, e_{\tau}^{\boldsymbol{\mathcal{B}}_1 t}\, \boldsymbol{\varphi}(-\tau) + \\ & + \int_{-\tau}^{0} e^{\boldsymbol{\mathcal{A}}(t-s)}\, e_{\tau}^{\boldsymbol{\mathcal{B}}_1 (t-\tau-s)} \left[\boldsymbol{\varphi}'(s) - \boldsymbol{\mathcal{A}}\,\boldsymbol{\varphi}(s)\right] ds + \\ & + \int_{0}^{t} e^{\boldsymbol{\mathcal{A}}(t-s)}\, e_{\tau}^{\boldsymbol{\mathcal{B}}_1 (t-\tau-s)}\, \boldsymbol{f}(s)\, ds,\end{aligned}$$

где

$$e_{\tau}^{\boldsymbol{\mathcal{B}} t} = \begin{cases} \boldsymbol{\mathcal{O}}, & t < -\tau, \\ \boldsymbol{\mathcal{I}}, & -\tau \leqslant t < 0, \\ \boldsymbol{\mathcal{I}} + \displaystyle\sum_{\ell=1}^{k} \boldsymbol{\mathcal{B}}^{\ell}\, \frac{\big[t - \tau(\ell-1)\big]^{\ell}}{\ell!}, & \tau\,(k-1) \leqslant t < k\,\tau,\ k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$\boldsymbol{\mathcal{O}}$ и $\boldsymbol{\mathcal{I}}$ – нулевая и единичная матрицы порядка n; $\boldsymbol{\mathcal{B}}_1 = e^{-\boldsymbol{\mathcal{A}}\tau}\,\boldsymbol{\mathcal{B}}$.

В случае неединственного постоянного запаздывания, т.е. системы следующего вида:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{\mathcal{A}}\,\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{\mathcal{B}}_1\,\boldsymbol{x}(t-\tau_1) + \ldots + \boldsymbol{\mathcal{B}}_{\nu}\,\boldsymbol{x}(t-\tau_{\nu}) + \boldsymbol{f}(t), \qquad t > 0, \\ &\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t), \qquad -\tau \leqslant t \leqslant 0,\end{aligned}$$

и неединственного переменного запаздывания – системы

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{\mathcal{A}}\,\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{\mathcal{B}}_1\,\boldsymbol{x}\big(g_1(t)\big) + \ldots + \boldsymbol{\mathcal{B}}_{\nu}\,\boldsymbol{x}\big(g_{\nu}(t)\big) + \boldsymbol{f}(t), \qquad t > 0, \\ &\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t), \qquad -\tau \leqslant t \leqslant 0,\end{aligned}$$

представления решений можно найти в [838] и [839] соответственно.

1.1.4.6. Область устойчивости

Одной из основных проблем анализа уравнений является всестороннее изучение их глобальной динамики и связанное с этим прогнозирование долгосрочного поведения в прикладных моделях. При построении математических моделей процессов и явлений в науке, технике, экономике и т.д. в форме дифференциальных и/или интегро-дифференциальных уравнений обычно выделяются основные характеристики таких процессов и явлений, поведение которых требуется исследовать. При этом осуществляются определенные упрощения и идеализации с выделением основных факторов и пренебрежением остальными [320]. Начальные условия для переменных состояния в реальных задачах обычно берутся из результатов экспериментов, а следовательно, включают погрешности различного происхождения. Поэтому для того, чтобы модель адекватно описывала изучаемое явление или процесс, требуется, чтобы малые изменения начальных условий и уравнений модели приводили бы к малому в некотором смысле изменению переменных состояния, что и трактуется как устойчивость отдельных дифференциальных и/или интегро-дифференциальных уравнений и систем таких уравнений.

Поэтому проблема устойчивости конкретного решения играет значительную роль. Последнее обычно сводится к изучению устойчивости нулевого решения преобразованной системы. В случае сложных систем к исследованию локальной устойчивости обычно подходят, рассматривая соответствующую систему, линеаризованную относительно нулевого решения. О изучение устойчивости линейных уравнений представляет собой первый естественный и важный шаг в анализе более сложных нелинейных систем.

При применении математической теории к реальным проблемам жизни простого утверждения об устойчивости системы вряд ли достаточно. В дополнение к самому факту устойчивости очень важно получить конструктивные и проверяемые оценки скорости сходимости решений во времени. Одним из основных доступных инструментов в соответствующих исследованиях является второй метод Ляпунова. Для детерминированных ФДУ метод развивается в последние годы по двум основным направлениям: 1) применение конечных функций Ляпунова с дополнительным предположением Разумихина [261, 304]; 2) использование функционалов Ляпунова–Красовского [104,110]. Для стохастических ФДУ некоторые аспекты этих двух направлений исследования были разработаны в [104,110] и [104,306] соответственно.

Определим основные понятия теории устойчивости применительно к

ОДУсЗ:

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t), x(t-\tau_1), x(t-\tau_2), ..., x(t-\tau_k), t\big), \tag{1.1.63}$$

$(t > t_0)$ с начальным условием

$$x(t) = \varphi(t) \quad \text{при} \quad t_* \leqslant t \leqslant t_0, \tag{1.1.64}$$

где

$$t_* = \min_{t \geqslant t_0, 1 \leqslant \ell \leqslant k} \big[t - \tau_\ell(t)\big].$$

Обозначим решение уравнения (1.1.63) с начальным условием (1.1.64) через $x\big(t; t_0, \varphi(t)\big)$.

Определение 1.1.10. Решение $x(t) = x\big(t; t_0, \varphi(t)\big)$ уравнения (1.1.63) с начальным условием (1.1.64) называется *устойчивым*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что из неравенства $|\varphi(t) - \psi(t)| < \delta(\varepsilon)$ на начальном множестве следует, что $|x\big(t; t_0, \varphi(t)\big) - x\big(t; t_0, \psi(t)\big)| < \varepsilon$ при $t > t_0$, где $\psi(t)$ – любая непрерывная начальная функция.

Определение 1.1.11. Не обладающие свойством из предыдущего определения решения называются *неустойчивыми*.

Определение 1.1.12. Устойчивое решение $x(t) = x\big(t; t_0, \varphi(t)\big)$ называется *асимптотически устойчивым*, если

$$\lim_{t \to \infty} |x\big(t; t_0, \varphi(t)\big) - x\big(t; t_0, \psi(t)\big)| = 0$$

для любой непрерывной начальной функции $\psi(t)$, удовлетворяющей при достаточно малом $\delta_0 > 0$ условию $|\varphi(t) - \psi(t)| < \delta_0$.

Определение 1.1.13. Решение $x(t) = x\big(t; t_0, \varphi(t)\big)$ уравнения (1.1.63) называется *равномерно асимптотически устойчивым*, если существует такое $\delta > 0$, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует $T(\varepsilon)$ такое, что при $t > t_1 + T(\varepsilon)$ $|x\big(t; t_0, \varphi(t)\big) - x\big(t; t_0, \psi(t)\big)| < \varepsilon$ для любой непрерывной начальной функции $\psi(t)$, удовлетворяющей неравенству $|\varphi(t) - \psi(t)| < \delta$ на начальном множестве $\mathfrak{E}_{t_1}$, где δ не зависит от выбора $t_1 \leqslant t_0$.

Определение 1.1.14. Решение $x(t) = x\big(t; t_0, \varphi(t)\big)$ уравнения (1.1.63) называется *асимптотически устойчивым по показательному закону*, если существуют постоянные $\delta > 0$, $\alpha > 0$, $B > 1$ такие, что из неравенства $|\varphi(t) - \psi(t)| < \delta$ следует

$$|x\big(t; t_0, \varphi(t)\big) - x\big(t; t_0, \psi(t)\big)| < B \max_{t \in \mathfrak{E}_{t_0}} |\varphi(t) - \psi(t)|\, e^{-\alpha(t-t_0)}$$

при $t \geqslant T$.

Определение 1.1.15. Решение $x(t) = x\big(t; t_0, \varphi(t)\big)$ уравнения (1.1.63) называется *асимптотически устойчивым в целом*, если оно устойчиво и

$$\lim_{t\to\infty} |x\big(t; t_0, \varphi(t)\big) - x\big(t; t_0, \psi(t)\big)| = 0$$

при любых непрерывных начальных функциях $\psi(t)$.

Все определения сохраняются, если в уравнении (1.1.63) $x(t)$ считать вектором размерности n. При этом всюду знак модуля $|\ |$ следует заменить на знак нормы $\|\ \|$.

Необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости решений стационарных линейных уравнений, за исключением особых критических случаев, и достаточным условием асимптотической устойчивости тривиального решения широкого класса уравнений, стационарных в первом приближении [320], является отрицательность действительных частей всех корней характеристического квазиполинома. Так как приближенное вычисление всех корней квазиполинома является весьма трудоемкой задачей, то большое значение при исследовании на устойчивость имеют различные признаки отрицательности действительных частей всех корней квазиполинома. Среди таких признаков чаще всего применяются следующие [320]:

1) амплитудно-фазовый метод и его видоизменения;
2) метод D-разбиений и его модификации;
3) метод функционалов Ляпунова.

Пример 1.1.13. Продемонстрируем применение метода D-разбиений [320] для анализа устойчивости нулевого решения уравнения, называемого в некоторых публикациях *уравнением Хейса* (N.D. Hayes):

$$x'(t) + a\,x(t) + b\,x(t-\tau) = 0 \tag{1.1.65}$$

(использование функционала Ляпунова для решение этой же задачи см. в [110, 301, 528]).

Характеристический квазиполином, соответствующий рассматриваемому уравнению (1.1.65):

$$h(\lambda) = \lambda + a + b\,e^{-\tau\lambda}, \tag{1.1.66}$$

имеет нулевой корень при

$$a + b = 0. \tag{1.1.67}$$

Эта прямая и является одной из линий, образующих границу D-разбиения.

Пусть теперь квазиполином имеет чисто мнимый корень $y\,\boldsymbol{i}$:

$$y\,\boldsymbol{i} + a + b\,e^{-\tau y \boldsymbol{i}} = 0,$$

или

$$y\,\boldsymbol{i} + a + b\left(\cos\tau\,y - \boldsymbol{i}\,\sin\tau\,y\right) = 0.$$

Разделяя действительную и мнимую части, получим уравнение границ D-разбиения в параметрической форме:

$$a + b\,\cos\tau\,y = 0,$$
$$y - b\,\sin\tau\,y = 0,$$

или

$$b = \frac{y}{\sin\tau\,y},$$
$$a = -\frac{y\,\cos\tau\,y}{\sin\tau\,y},$$

т.е. при $a > 0$ и $b = 0$ получим точку возврата $(-1/\tau, 1/\tau)$. Эта линия и прямая $a + b = 0$ образуют D-разбиение, изображенное на рис. 1.1.8 для $\tau = 1$.

Анализ [320] показывает и соответствующие расчеты подтверждают, что: 1) область I (без границы) – область асимптотической устойчивости; 2) области II–V – области неустойчивости; 3) на части прямой $a + b = 0$ при $a > -1/\tau$ и ветви кривой L при $a > -1/\tau$ область устойчивости. ►

1.1.5. Уравнения нейтрального типа

Опыт математического моделирования различных объектов и явлений показывает, что эволюционные уравнения для реальных процессов с последействием являются почти исключительно функционально-дифференциальные уравнения запаздывающего типа (ФДУЗТ) и функционально-диференциальные уравнения нейтрального типа (ФДУНТ). С другой стороны, решение различных задач для этих уравнений высвечивает тот факт, что ФДУЗТ и ФДУНТ имеют много интересных математических свойств.

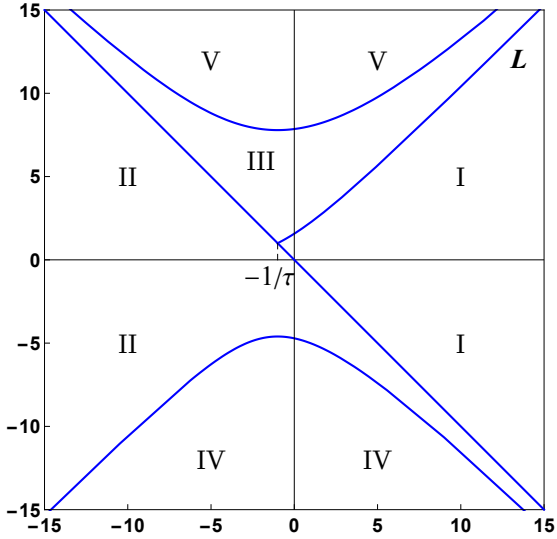


Рис. 1.1.8

Уравнения нейтрального типа по свойствам и по области приложений (небольшой обзор см. в [937]) занимают промежуточное положение между ОДУ, не разрешенными относительно производной, и уравнениями запаздывающего типа.

ФДУНТ часто возникают при моделировании связанных колебательных систем с немгновенным соединением между частями. Иногда для упрощения модели предполагается, что временной лаг незначителен, однако в более реалистичных моделях необходимо учитывать временную задержку. Пример ДУНТсЗ, возникающего из-за редукции начальной краевой задачи для гиперболического уравнения, был рассмотрен в [568]. Представленная модель описывает колебания гибкого стержня с крутящим моментом, приложенным к одному концу стержня, и массы, прикрепленной к другому его концу. Новой областью, где использование ДУсЗ и, в частности, ДУНТ становится все более насущным, является процедура структурного или гибридного тестирования. Этот новый метод тестирования сложных конструкций или механического оборудования сочетает в себе использование вибростендов, приводов и компьютерных расчетов [766]. Основным механизмом неустойчивости такого эксперимента является наличие временны́х задержек, возникающих, в основном, из-за наличия информационного запаздывания в передающих системах.

Проблемы при анализе ФДУЗТ связаны с тем, что, как правило, они обладают определенными свойствами, которые затрудняют их изучение. Дело в том, что существенной особенностью решений задачи Коши для ФДУНТ является отсутствие сглаживающего свойства: даже если правая часть ФДУНТ и ее начальная функция сколь угодно гладкие, то производная (непрерывного) решения имеет скачки для сколь угодно больших значениях времени. Вместе с некоторыми другими это свойство делает нейтральные функционально-дифференциальные уравнения похожими на ДУвЧП гиперболического типа [744].

Детерминированные ОФДУНТ впервые были введены в работе [640][2]; а В.Б. Колмановский и В.Р. Носов [96, 746] в такие ОФДУНТ для учета случайных флуктуаций включили гауссовские белые шумы. Рядом авторов теория ФДУНТ изучалась в банаховых пространствах [508, 649]. Абстрактные ФДУНТ первого порядка с конечным запаздыванием рассматривались в работах [331, 586] и др.

Проблема анализа устойчивости различных уравнений нейтрального типа продолжает привлекать внимание многих специалистов, несмотря на свою долгую историю [603]. Это по-прежнему одна из самых актуальных проблем из-за отсутствия полного решения указанной проблемы. Основным методом анализа устойчивости является метод функционалов типа Ляпунова, используя который получены важные результаты.

Основными причинами того, что в предыдущие десятилетия исследованиям по ФДУНП было оказано большое внимание, являются следующие: 1) дифференциальные уравнения с запаздываниями нередко являются более подходящими моделями для описания природных явлений, чем те, которые не учитывают влияние последействия; 2) ФДУНТ возникают во многих прикладных областях науки.

В качестве иллюстрации формы редкого явного решения системы линейных ОДУНТ продемонстрируем следующий случай. Так для системы с одним запаздыванием $\tau > 0$ вида:

$$\boldsymbol{x}'(t) - \boldsymbol{\mathcal{Q}}\,\boldsymbol{x}'(t-\tau) = \boldsymbol{\mathcal{A}}\,\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{\mathcal{B}}\,\boldsymbol{x}(t-\tau) + \boldsymbol{f}(t), \qquad t > 0, \tag{1.1.68}$$

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t), \qquad -\tau \leqslant t \leqslant 0, \tag{1.1.69}$$

где $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$; $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, $\boldsymbol{\mathcal{B}}$, $\boldsymbol{\mathcal{Q}}$ – попарно коммутирующие $n \times n$–матрицы; $\boldsymbol{\varphi}(t) \in \in \boldsymbol{\mathscr{C}}^1\big([-\tau, 0], \mathbb{R}^n\big)$ – заданная начальная вектор-функция; $\boldsymbol{f}(t) \in \boldsymbol{\mathscr{C}}\big([0, \infty)$,

[2] В. Разван (V. Răsvan) [937] считает, что первые прикладные задачи, связанные с ОФДУНТ, решали И.П. Кабаков и А.А. Соколов. Результаты своих (более ранних – В. Разван) исследований они изложили в трех статьях, опубликованных в журнале "Инженерный сборник" (сейчас "Известия РАН. Механика твердого тела") в 1946 г.

$\mathbb{R}^n\big)$ – заданная вектор-функция, при условии, что

$$\boldsymbol{\varphi}'(0) = \boldsymbol{\mathcal{A}}\,\boldsymbol{\varphi}(0) + \boldsymbol{\mathcal{B}}\,\boldsymbol{\varphi}(-\tau) + \boldsymbol{\mathcal{Q}}\,\boldsymbol{\varphi}'(-\tau) + \boldsymbol{f}(0),$$

любое решение задачи (1.1.68), (1.1.69) имеет форму [918]:

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{cases} \boldsymbol{\varphi}(t), & -\tau \leqslant t < 0, \\ e^{\boldsymbol{\mathcal{A}}t}\,\boldsymbol{\mathcal{H}}(t)\,\big[\boldsymbol{\varphi}(0) - \boldsymbol{\mathcal{Q}}\,\boldsymbol{\varphi}(-\tau)\big] + \\ \quad + \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{B}}}\displaystyle\int_{-\tau}^{0} e^{\boldsymbol{\mathcal{A}}(t-s)}\,\boldsymbol{\mathcal{H}}(t-\tau-s)\,\boldsymbol{\varphi}(s)\,ds + \\ \quad + \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}\displaystyle\int_{-\tau}^{0} e^{\boldsymbol{\mathcal{A}}(t-s)}\,\boldsymbol{\mathcal{H}}'_t(t-\tau-s)\,\boldsymbol{\varphi}(s)\,ds + \boldsymbol{\psi}(t) + \\ \quad + \displaystyle\int_{0}^{t} e^{\boldsymbol{\mathcal{A}}(t-s)}\,\boldsymbol{\mathcal{H}}(t-s)\,\boldsymbol{f}(s)\,ds, & t \geqslant 0, \end{cases}$$

где

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}(t) = \begin{cases} \boldsymbol{\mathcal{O}}, & t < 0, \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{k-j} \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}^{\,i}\,\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{B}}}^{\,j}\,\mathsf{C}_{i+j}^{i}\,\frac{\big[t-\tau(i+j)\big]^j}{j!}, & t \in [k\,\tau, (k+1)\,\tau],\ k \in \mathbb{N}_0, \end{cases}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{B}}} = \big(\boldsymbol{\mathcal{B}} + \boldsymbol{\mathcal{A}}\,\boldsymbol{\mathcal{Q}}\big)\,e^{-\boldsymbol{\mathcal{A}}\tau}, \qquad \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{Q}}} = \boldsymbol{\mathcal{Q}}\,e^{-\boldsymbol{\mathcal{A}}\tau},$$

$$\boldsymbol{\psi}(t) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}^{\lfloor t/\tau \rfloor + 1}\,\boldsymbol{\varphi}\big(t - \tau\,\big\{\lfloor t/\tau \rfloor + 1\big\}\big).$$

1.2. УРАВНЕНИЯ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

1.2.1. Приближенные методы для ОДУсОА

Аналитическое решение ДУсОА, как и любых других более или менее сложных ДУ, может быть получено в очень редких случаях. Классический вариант метода шагов применим для непосредственного построения решения лишь при условии, что число шагов для всего промежутка, на котором вычисляется решение, окажется не слишком большим, а получающиеся при этом на каждом шаге ДУ без отклонений аргумента должны интегрироваться в замкнутой форме, причем в случае неберущихся интегралов естественно не спасает и использование современных пакетов компьютерной алгебры (ПКА), позволяющих производить громоздкие аналитические выкладки на компьютере. Другие известные точные методы также имеют весьма узкую область применения.

Поэтому в настоящее время основными являются различные численные и приближенно-аналитические методы интегрирования ДУсОА.

Если обратиться к последним, сразу же вспоминается хорошо известный *метод последовательных приближений* (МПП). Но несмотря на возможность использования данного метода для решения ДУсЗА, он применяется в основном для теоретического анализа различных проблем, а в практике приближенных вычислений при нахождении решений конкретных уравнений МПП из-за громоздких и разнотипных аналитических выкладок используется очень редко.

Наиболее часто для численного интегрирования ДУсЗА применяются различные явные и неявные экстраполяционные методы, берущие начало в соответствующих приближенных схемах для ОДУ. Скорость сходимости построенных этими методами приближений к точному решению при стремлении шага интегрирования к нулю и оценка погрешности могут быть получены с помощью процедур, сходных с используемыми для ОДУ без отклонений аргумента (см., например, [84, 114, 169, 298, 300, 449, 928]).

Начнем с простейших методов численного интегрирование ОДУсЗ.

Первым из них будет *метод разложения по степеням запаздывания.* Пусть дано уравнение

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t), x(t-\tau), t\big), \tag{1.2.1}$$

где $\tau > 0$. Если его разрешить относительно $x(t-\tau)$, то получим, что: Рассмотрим применение этого метода к уравнению:

$$x(t-\tau) = F\big(x(t), \dot{x}(t), t\big), \tag{1.2.2}$$

Рассматриваемый метод заключается в том, что величина $x(t-\tau)$ заменяется отрезком его ряда Тейлора в окрестности точки t:

$$x(t-\tau) \approx \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k \tau^k}{k!}\, x^{(k)}(t), \tag{1.2.3}$$

а следовательно, уравнение (1.2.2) замещается уравнением m-го порядка без отклонений аргумента:

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k \tau^k}{k!}\, x^{(k)}(t) = F\big(x(t), \dot{x}(t), t\big). \tag{1.2.4}$$

Обычно такая замена выполняется без всякого обоснования ее допустимости, что может привести к неверным результатам [320]. Законность такой процедуры может быть признана сомнительной, исходя из следующих соображений: 1) разложение (1.2.3) предполагает существование производных от решения высокого порядка, а это, как правило, не выполняется в точках $t_0 + k\tau$ при $k \leqslant m$; 2) переход от уравнении (1.2.2) к (1.2.4), вообще говоря, недопустим при $m > 1$, так как этот переход равносилен отбрасыванию в ДУ с малым коэффициентом при старшей производной неустойчивого типа слагаемого с производной максимального, причем в общем случае при $m > 1$ отбрасываемый член отнюдь не мал, а следовательно пренебрегать им нельзя.

Пример 1.2.1. Рассмотрим ОДУсЗ $\dot{x}(t) = -2\,x(t) + x(t-\tau)$ [528]. Каждое решение этого уравнения ограничено и стремится к нулю при $t \to \infty$. Тем не менее, ОДУ

$$\dot{x}(t) = -2\,x(t) + \big[x(t) - \tau\,\dot{x}(t) + \frac{1}{2}\,\tau^2\,\ddot{x}(t)\big],$$

полученное из заданного разложением до второго порядка, имеет экспоненциально возрастающее решение независимо от того, насколько мало значение $\tau > 0$. ►

Поэтому переход к уравнению (1.2.4) при малом τ допустим лишь при $m = 1$, так как при этом, вообще говоря, не возникает уравнения

с малым коэффициентом при старшей производной, и рассматриваемый метод дает приемлемые результаты.

Асимптотический метод решения уравнения (1.2.1), основанный на формальном представлении функции $x(t)$ при малом τ в виде

$$x(t) = x_0(t) + \tau\, x_1(t) + \frac{\tau^2}{2!}\, x_2(t) + ...,$$

примыкает к методу разложения по степеням запаздывания. Если разложить правую часть $f\big(x(t), x(t-\tau), t\big) = f(x, y, t)$ уравнения (1.2.1) по степеням τ:

$$\dot{x}(t) = f\Big(x(t), x(t) - \tau\,\dot{x}(t) + \frac{\tau^2}{2!}\,\dot{x}(t) - ..., t\Big) =$$

$$= f\big(x(t), x(t), t\big) - \tau\,\frac{\partial}{\partial y}\, f\big(x(t), y, t\big)\Big|_{y=x(t)}\,\dot{x}(t) +$$

$$+\frac{\tau^2}{2!}\,\Big[\frac{\partial^2}{\partial y^2}\, f\big(x(t), y, t\big)\Big|_{y=x(t)}\,\dot{x}^2(t) + \frac{\partial}{\partial y}\, f\big(x(t), y, t\big)\Big|_{y=x(t)}\,\ddot{x}^2(t)\Big] + ...,$$

и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях τ в левой и правой части, можно получить систему ОДУ для функций $x_k(t)$, $k = 0, 1, 2, ...$ Существенно, что для $k \geqslant 1$ получаются линейные уравнения первого порядка без запаздывания.

С техникой применения метода Пуанкаре для решения ОДУсЗ и малым запаздыванием можно ознакомиться в [48], а с методом Линдштедта поиска периодических решений нелинейного уравнения – в [932]. Оба эти метода относят к методам нелинейной механики, которые включают и различные асимптотические методы.

Рассмотрим систему ДУсОА с $\tau = \text{const} > 0$ вида:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(t-\tau), t\big), \qquad t \geqslant t_0, \tag{1.2.5}$$

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t), \qquad t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0. \tag{1.2.6}$$

Требуется вычислить решение основной начальной задачи для этого системы на интервале $(t_0, T]$. Точки $t_k = t_0 + k\,\tau$ ($k = 0, 1, 2, ...$, $\big[(T-t_0)/\tau\big]$; $[a]$ – целая часть числа a) разбивают промежуток $[t_0, T]$ на участки длиной в запаздывание, на каждом из которых в соответствии с методом шагов, уравнения (1.2.5) заменяются ОДУ без отклонений аргумента. Для интегрирования таких уравнений на соответствующих участках, очевидно,

могут быть использованы все известные методы численного интегрирования ОДУ без отклонений аргумента при обычных для этих методов предположениях.

К сожалению, ситуация оказывается более сложной, чем кажется. При вычислении правых частей уравнений требуются значения решения в предыдущие моменты времени, причем даже в случае, когда эти моменты совпадают с сеточными, требуется хранение определенного объема информации о прошлом. Еще более неприятна ситуация, как правило, связанная с численными схемами более высокого порядка, чем первый, когда требуются прошлые значения решения в моменты времени, не совпадающие с сеточными. Это приводит к необходимости применения дополнительной интерполяции, что понижает точность получаемого приближения для решения. Схемы с автоматическим выбором шага также приводят к необходимости интерполяции данных предыстории.

Если вычислительная схема не связана с методом шагов, то точки вида $t_k = t_0 + k\,\tau$ могут оказаться внутренними для промежутка, на котором работает схема. В этом случае необходимо учитывать то, что запас гладкости решения в указанных точках может оказаться меньше, чем во внутренних точках интервалов (t_k, t_{k+1}).

Самым простым методом численного интегрирования ОДУ с постоянным запаздыванием является *метод Эйлера*, сетку для которого можно построить так, чтобы проблемы с интерполяцией не возникали. Например, для решения ОНЗ для уравнений (1.2.5) выберем шаг h интегрирования так, чтобы выполнялось равенство $\tau = M\,h$ ($M \in \mathbb{N}$), и введем сетку: $t_k = t_0 + k\,h$, $k = -M, -M+1, ..., -1, 0, 1, ..., N, N+1$ ($t_{N+1} \geqslant T$). Тогда расчетная формула для вычисления значений $\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}(t_k)$ решения в узлах сетки будет выглядеть так:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + h\,\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{x}_{k-M}, t_k\big), \qquad k = 0, 1, ..., N, \\ &\boldsymbol{x}_\ell = \boldsymbol{\varphi}(t_\ell), \qquad -M \leqslant \ell \leqslant 0. \end{aligned} \tag{1.2.7}$$

Ошибка данного метода порядка $O(h)$.

Пример 1.2.2. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x}(t) + 2\,\alpha\,\dot{x}(t) + \beta\,x(t) - \gamma\,x^3(t) + \epsilon\,\big[x(t) - x(t-\tau)\big], \qquad t > 0,$$
$$x(t) = 5, \quad \dot{x}(t) = 0, \quad 0 < t \leqslant T.$$

Решение данного уравнения вычислялось при следующих значениях параметров:

$$\alpha = 0.1; \quad \beta = 1.0; \quad \gamma = 0.15; \quad \epsilon = 0.1;$$

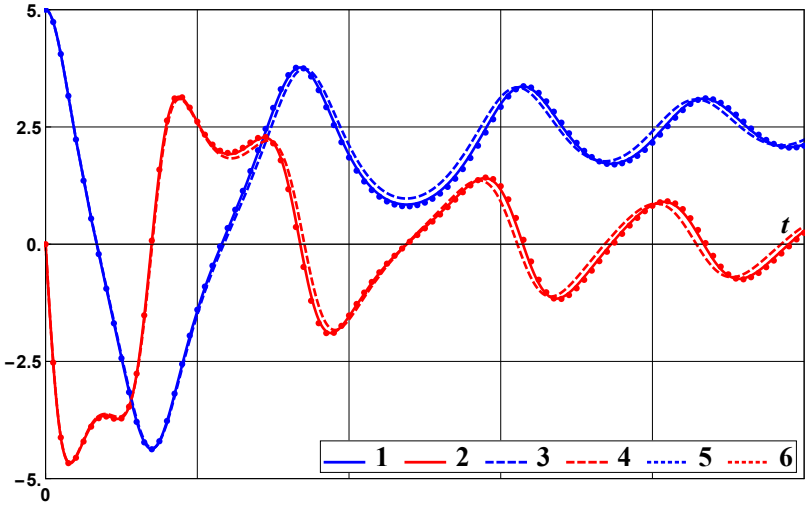


Рис. 1.2.1

$$\tau = 0.05; \quad T = 20.0.$$

На рис. 1.2.1 отображены результаты расчетов с помощью; а) стандартной функции `NDSolve` пакета `Mathematica` в варианте решения ОДУсЗ (1 – $x(t)$, 2 – $\dot{x}(t)$, автоматический выбор шага, погрешность порядка 10^{-7}); б) метода разложения по степеням запаздывания в сочетании с использованием стандартной функции `NDSolve` пакета `Mathematica` в варианте решения ОДУ (3 – $x(t)$, 4 – $\dot{x}(t)$, $m = 1$); в) метода Эйлера (5 – $x(t)$, 6 – $\dot{x}(t)$, постоянный шаг $h = 0.001$). ▶

Подобно ОДУ без запаздывания для систем ОДУ (1.2.5) с одним постоянным запаздыванием можно реализовать *методы Рунге–Кутты* различных порядков. Выберем постоянный шаг так, чтобы выполнялось условие $\tau = M\,h$ ($M \in \mathbb{N}$). Тогда вычислительную схему метода можно записать так:

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + h \sum_{j=1}^{\ell} b_j\, \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{K}_{k+1}^{[j]}, \boldsymbol{x}(t_k + c_j\,h - \tau, t_k + c_j\,h\big), \quad k = 0, 1, ..., N,$$

$$\boldsymbol{K}_{k+1}^{[i]} = \boldsymbol{x}_k + h \sum_{j=1}^{\ell} a_{ij}\, \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{K}_{k+1}^{[j]}, \boldsymbol{x}(t_k + c_j\,h - \tau, t_k + c_j\,h\big), \quad i = 1, 2, ..., \ell,$$

$$\boldsymbol{x}_\ell = \boldsymbol{\varphi}(t_\ell), \qquad -M \leqslant \ell \leqslant 0.$$

где коэффициенты a_{ij}, b_j, c_i удовлетворяют соотношениям:

$$\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} = c_i, \qquad \sum_{j=1}^{\ell} b_j = 1.$$

К сожалению, в отличие от метода Эйлера при использовании методов Рунге–Кутты на каждом шаге требуется расчет на основе интерполяции отсутствующих значений решения в точках $t_k + c_j\, h - \tau$, в которых $c_j \neq 0$ и $c_j \neq 1$ (алгоритм см. [890]).

Еще сложнее случай зависимости запаздывания от времени и переменной состояния:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(\alpha), t\big), \quad \alpha = \alpha\big(\boldsymbol{x}(t), t\big), \quad t \in (t_0, T], \\ \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0, \quad \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t), \quad t < t_0, \end{gathered} \tag{1.2.8}$$

Введем сетку $\Delta = \{t_0, t_1, ..., t_N = T\}$, которая обычно определяется адаптивно. Общий подход должен учитывать, что в общем случае решение в прошлом, требуемое в точках сетки, неизвестно, так как $\alpha(x_k, t_k)$ не являются точками сетки. Это предполагает следующую стратегию [628]:

1°. Выбрать дискретный метод решения ОДУ (1.2.8)

2°. Выбрать непрерывное расширение метода [1125], который обеспечивает равномерное приближение $\underline{\boldsymbol{x}}(t)$ решения $\boldsymbol{x}(t)$.

3°. Вычислить соответствующие точки излома $\{s_j\}_{j \geqslant 1}$ (упорядоченные по возрастанию) и применить последовательно метод к следующим задачам:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}(t), \underline{\boldsymbol{x}}(\alpha), t\big), \quad \alpha = \alpha\big(\boldsymbol{x}(t), t\big), \quad t \in (s_{k-1}, s_k], \\ \boldsymbol{x}(s_{k-1}) = \underline{\boldsymbol{x}}(s_{k-1}). \end{gathered} \tag{1.2.9}$$

Заметим, что это возможно только в том случае, если запаздывание не исчезает[3]. В противном случае точки излома не будут хорошо разделены. Если выбранный метод является непрерывным методом (например, методом коллокации), то шаг 2° выполняется явно.

Для системы ОДУ без запаздывания:

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{x}(t), t\big), \quad t_0 < t \leqslant T, \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0,$$

[3]Проблема учета возможности исчезновения запаздывания, т.е. обращения его в ноль при некоторых значениях независимой переменной, достаточно сложна и требует специального рассмотрения и алгоритмической проработки [685, 890].

r-этапный метод Рунге–Кутты с коэффициентами $\{a_{ij}\}$, а абсциссы $\{c_i\}$ и веса $\{b_i\}$ (i , $j = 1, 2, ..., r$), имеет вид:

$$\widehat{\boldsymbol{x}}_i^{[k]} = \boldsymbol{x}_k + h_k \sum_{j=1}^{r} a_{ij}\, \boldsymbol{g}\big(\widehat{\boldsymbol{x}}_j^{[k]}, t_k + c_j\, h_k\big), \qquad i = 1, 2, ..., s,$$

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + h_k \sum_{j=1}^{r} b_i\, \boldsymbol{g}\big(\widehat{\boldsymbol{x}}_i^{[k]}, t_k + c_i\, h_k\big)$$

(h_k – размер шага), которая дает приближенное решение $\boldsymbol{x}_{k+1}$ решения $\boldsymbol{x}(t_{k+1})$ на основе знания приближенного решения $\boldsymbol{x}_k$ решения $\boldsymbol{x}(t_k)$. Непрерывное расширение $\underline{\boldsymbol{x}}(t)$ метода определяется на каждом подынтервале $[t_k, t_{k+1}]$ сетки Δ по непрерывному квадратурному правилу вида:

$$\underline{\boldsymbol{x}}(t_k + \theta\, h_k) = \boldsymbol{x}_k + h_k \sum_{i=1}^{r'} b_i(\theta)\, \boldsymbol{g}\big(\widehat{\boldsymbol{x}}_i^{[k]}, t_k + c_i\, h_k\big),$$

где $b_i(\theta)$ – многочлен для всех $i = 1, 2, ..., r'$. В общем случае $r' \geqslant r$, и нужно рассматривать дополнительные этапы, но для простоты можно ограничиться анализом случая $r' = r$. Чтобы гарантировать глобальную непрерывность интерполяционного многочлена, предположим, что $b_i(0) = 0, b_i(1) = b_i$ для $i = 1, 2, ..., r$. Полное описание естественных непрерывных расширений методов Рунге–Кутты можно найти в [1125].

Методы аппроксимации численного решения уравнений (1.2.8) получаются применением *непрерывного метода Рунге–Кутты* (1.2.9):

$$\widehat{\boldsymbol{x}}_i^{[k]} = \boldsymbol{x}_k + h_k \sum_{j=1}^{r} a_{ij}\, \boldsymbol{f}\big(\widehat{\boldsymbol{x}}_j^{[k]}, \widehat{\boldsymbol{z}}_j^{[k]}, , t_k + c_i\, h_k\big), \qquad i = 1, 2, ..., r,$$

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + h_k \sum_{i=1}^{r} b_i\, \boldsymbol{f}\big(\widehat{\boldsymbol{x}}_i^{[k]}, \widehat{\boldsymbol{z}}_i^{[k]}, t_k + c_i\, h_k\big),$$

где $\alpha_j^{[k]} = \alpha\big(\underline{\boldsymbol{x}}(t_k + c_j\, h_k), t_k + c_j\, h_k\big)$,

$$\widehat{\boldsymbol{z}}_j^{[k]} = \begin{cases} \varphi\big(\alpha_j^{[k]}\big), & \alpha_j^{[k]} < t_0, \\ \underline{\boldsymbol{x}}\big(\alpha_j^{[k]}\big), & \alpha_j^{[k]} \geqslant t_0. \end{cases}$$

Несложно увидеть, что задача носит неявный характер вследствие зависимости $\alpha_j^{[k]}$ от значений $\{\widehat{\boldsymbol{x}}_i^{[k]},\ i = 1, 2, ..., r\}$ на текущем шаге через соответствующее непрерывное расширение всякий раз, когда $\alpha_j^{[k]} \in [t_k, t_{k+1}]$.

Эта ситуация называется *перекрытием*. Также можно заметить, что в простом случае, где $\alpha\big(\boldsymbol{x}(t),t\big)=t-\tau$ (с $\tau>0$), имеем $\alpha_j^{[k]}=t_k+c_j\,h_k-\tau$.

Важнейшим вопросом для сохранения ожидаемой точности численного метода является корректное вычисление точек разрыва.

Для получения качественных и количественных результатов решения ОДУсЗ в разных формах используют: групповой анализ [621, 925]; сочетания метода шагов и метода Фробениуса [1050], метода шагов и обратного преобразования Лапласа [715]; методы гармонического баланса [796], усреднения [1078], многих масштабов [601], асимптотические [140, 573], дифференциального преобразования [793], анализа гомотопии [363]; обычные [407, 1051], непрерывные [407], неявные [917], с интерполяцией по Эрмиту [873], неявные диагональные итерационные [1131] и др. методы Рунге–Кутты; линейные многошаговые и многошаговые многостадийные методы [674], многошаговые с переменным шагом Martin-2002, формулы дифференцирования назад с переменным шагом [687], θ- [455] и τ-методы [494]; методы Гира [819], Розенброка [490], Милна–Симпсона [520], полудискретизации [684], квантования правых частей ОДУсЗ [466]; методы Галеркина [150]; методы коллокации [102, 394], для ОДУ с переменным запаздыванием [1139], с интерполяцией по Чебышёву [731] и др. формы метода коллокации[4] [272]; сплайны [882]; вейвлеты Хаара [370]; метод квази-Монте-Карло [712]; функции W Ламперта [1113]; полиномиальные квазирешения [309]; упрощения исходных уравнений (линеаризация [352]; замена линейной системы ОДУсЗ уравнениями без запаздывания [406]; переход от произвольных ОДУсЗ к уравнениями с кусочно постоянными запаздываниями, а потом разностными уравнениями [635]; построение иерархии упрощенных моделей [323]) и др.

Для первичного знакомства с рядом приближенных методов решения ФДУ и, в т.ч., ОДУсЗ (описаниями одношаговых и многошаговых схем, общими принципами их построения и компьютерной реализации) можно обратиться к учебному пособию [179]. Обзор публикаций по численным методам, вышедших до 1995 г., представлен в [384], а описание различных алгоритмов – в [385] (см. также [697]). Современные направления развития численных методов решения ФДУсЗ представлены в [408].

Отметим, что большое внимание исследователей уделяется разработке программного обеспечения (ПО) для решения различных ОДУсОА. Это ПО включает как отдельные специализированные процедуры на различных языках программирования `C++`, `Fortran`, `Python`: `Archi`

[4] *Метод коллокации*, относящийся к классу проекционных методов, впервые был предложен в 1934 г. Л.В.Канторовичем для построения решений граничных задач линейных дифференциальных уравнений.

(разработчик C.A.H. Paul), `dde23`, `DDE_SOLVER` (L. Shampine, S. Thompson), `DDVERK` (H. Hayashi, W. Enright), `DELSOL` (D.R. Willé, C.T.H. Baker), `DifEqu` (G. Makay), `DifferentialEquations.jl` (Ch.Rackauckas), `DKLAG6` (S.Thompson), `Dynamics Solver` (J.M. Aguirregabiria), `Knut` (R. Szalai), `PDDE-CONT` (R. Szalai), `Pydelay` (V. Flunkert, E. Schoell), `RADAR5` (N. Guglielmi, E. Hairer), `RETARD` (E. Hairer, G. Wanner), `Solv95` (S.N. Wood), `Time-Delay System Toolbox` (рук-ль А.В. Ким, ИММ УрО РАН), `TRACE-DDE` (D. Breda, S. Maset, R. Vermiglio), `VFGEN` (W. Weckesser), `XPPAUT` (G.B. Ermentrout) и др., так и программы [648] на входных языках пакетов компьютерной алгебры `Maxima` [374] и компоненты математических пакетов `Maple` [647], `Mathematica` [821], `Matlab` [311, 971, 972], `R` [79].

1.2.2. Системы ОДУ с одним постоянным запаздыванием

Рассмотрим систему дифференциально-разностных уравнений вида [200]:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(t-\tau), t\big), \qquad t > t_1 = t_0 + \tau. \tag{1.2.10}$$

Здесь t – время ($t_0 < t \leqslant T < \infty$), $\tau > 0$ – постоянное запаздывание, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $\boldsymbol{f}(\cdot,\cdot) = \{f_i(\cdot,\cdot)\}^{\intercal} : \mathbb{R}^n \times [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ – известная вектор-функция, $^{\intercal}$ – символ транспонирования. Предположим, что на полуинтервале $(t_0, t_1]$ вектор $\boldsymbol{x}(t)$ удовлетворяет системе ОДУ без запаздывания:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}_0\big(\boldsymbol{x}(t), t\big), \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0. \tag{1.2.11}$$

Заметим, что задание на начальном множестве $[t_0, t_0 + \tau]$ вектора состояния $\boldsymbol{x}(t)$ в виде $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}^*$ или $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t)$, где $\boldsymbol{x}^*$ и $\boldsymbol{\varphi}(t)$ – известные постоянный вектор и вектор-функция, легко сводится к указанной выше схеме.

Для того, чтобы изучить изменение вектора $\boldsymbol{x}(t)$ при значениях времени $t > t_0$, расширим пространство состояний системы. В процессе реализации этой процедуры введем следующие обозначения:

$$s \in [0, \tau], \quad t_q = t_0 + q \cdot \tau, \quad q = 0, 1, 2, ..., N, \quad t_{N+1} \geqslant T,$$
$$\Delta_q = [t_q, t_{q+1}], \quad \boldsymbol{x}_q(s) = \boldsymbol{x}(s + t_q), \quad \boldsymbol{x}_q(0) = \boldsymbol{x}_{q-1}(\tau), \quad \boldsymbol{z}_0(s) = \boldsymbol{x}_0(s),$$
$$\boldsymbol{z}_1(s) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{x}_0(s), \boldsymbol{x}_1(s)\big), \qquad \boldsymbol{z}_2(s) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{z}_1(s), \boldsymbol{x}_2(s)\big), \qquad ...,$$
$$\operatorname{col}\big(\boldsymbol{x}_0(s), \boldsymbol{x}_1(s), \boldsymbol{x}_2(s), ...\big) = \big\{x_{01}(s), x_{02}(s), ..., x_{0n}(s),$$

$$x_{11}(s), x_{12}(s), ..., x_{1n}(s), x_{21}(s), x_{22}, ..., x_{2n}(s), ...\}^{\mathsf{T}};$$

и рассмотрим последовательность отрезков Δ_q.

0°. Начнем с Δ_0. Определенный на отрезке Δ_0 вектор $\boldsymbol{x}_0(s)$ удовлетворяет системе ОДУ (точкой здесь и далее обозначена производная по переменной s)вида:

$$\dot{\boldsymbol{x}}_0(s) = \boldsymbol{f}_0\big(\boldsymbol{x}_0(s), s + t_0\big), \qquad \boldsymbol{x}_0(0) = \boldsymbol{x}^0.$$

1°. Проанализируем поведение системы на отрезках Δ_0 и Δ_1. ОДУ для вычисления вектора $\mathrm{col}\,\big(\boldsymbol{x}_0(s), \boldsymbol{x}_1(s)\big)$ можно представить так:

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}}_0(s) &= \boldsymbol{f}_0\big(\boldsymbol{x}_0(s), s + t_0\big), \qquad \boldsymbol{x}_0(0) = \boldsymbol{x}^0.\\
\dot{\boldsymbol{x}}_1(s) &= \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}_1(s), \boldsymbol{x}_0(s), s + t_1\big), \quad \boldsymbol{x}_1(0) = \boldsymbol{x}_0(\tau).\\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots
\end{aligned}$$

N°. Рассмотрим временные отрезки Δ_0, Δ_1, ..., Δ_N. Построим систему ОДУ для вектора $\boldsymbol{z}_N$ в виде

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}}_0(s) &= \boldsymbol{f}_0\big(\boldsymbol{x}_0(s), s + t_0\big), \qquad \boldsymbol{x}_0(0) = \boldsymbol{x}^0.\\
\dot{\boldsymbol{x}}_1(s) &= \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}_1(s), \boldsymbol{x}_0(s), s + t_1\big), \qquad \boldsymbol{x}_1(0) = \boldsymbol{x}_0(\tau).\\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\\
\dot{\boldsymbol{x}}_{N-1}(s) &= \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}_{N-1}(s), \boldsymbol{x}_{N-2}(s), s + t_{N-1}\big), \qquad \boldsymbol{x}_{N-1}(0) = \boldsymbol{x}_{N-2}(\tau).\\
\dot{\boldsymbol{x}}_N(s) &= \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}_N(s), \boldsymbol{x}_{N-1}(s), s + t_N\big), \qquad \boldsymbol{x}_N(0) = \boldsymbol{x}_{N-1}(\tau).
\end{aligned}$$

В результате представленной процедуры получена цепочка систем ОДУ увеличивающейся размерности без запаздывания. Проходя на каждом шаге один и тот отрезок $[0, \tau]$ с помощью обычного численного интегратора, в конце этого шага получаем значения начальных условий для очередного сегмента.

Рассмотрим три задачи, для решения которых применим представленную в предыдущем пункте методику. Эта методика была реализована с помощью процедуры `AfterEffect`, написанной на языке `Wolfram Language` пакета `Mathematica`, а в качестве численного интегратора использовалась функция `NDSolve` с параметром `Method → StiffnessSwitching`, обеспечивающим автоматическое переключение между подалгоритмами решения жестких и нежестких ОДУ.

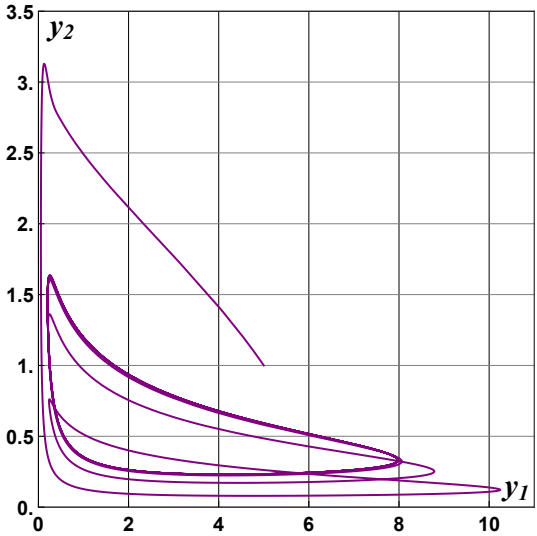


Рис. 1.2.2

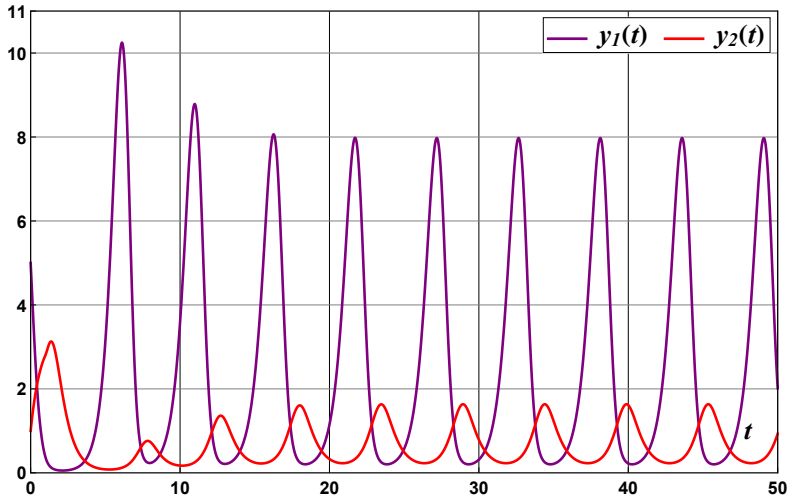


Рис. 1.2.3

Пример 1.2.3. В первом примере будем моделировать борьбу видов

животных за существование с помощью уравнений вида [301]:

$$\dot{y}_1(t) = \alpha\, y_1(t)\left[1 - \frac{y_1(t)}{m}\right] - b\, y_1(t)\, y_2(t), \tag{1.2.12}$$

$$\dot{y}_2(t) = -\beta\, y_2(t) + c\, y_1(t-\tau)\, y_2(t-\tau), \tag{1.2.13}$$

где α, β, b, c – положительные постоянные, $y_1(t)$ и $y_2(t)$ – функции, описывающие количества особей "хищников" и "жертв". Характерной особенностью моделей типа (1.2.12), (1.2.13) является наличие периодических режимов типа предельного цикла.

Использование рассмотренной выше методики позволило без проблем получить такой предельный цикл, изображенный на рис. 1.2.2. На рис. 1.2.3 показана динамика изменения функций $y_1(t)$ и $y_2(t)$, которая предшествовала выходу на предельный цикл. Расчеты проводились при следующих значениях параметров: $\alpha = 2$, $\beta = 1.5$, $b = c = 1$, $m = 4$, $\tau = 1$, $t \in [0, 50]$, $f_0 = \{0, 0\}^\intercal$, $\boldsymbol{x}(-1) = \{5, 1\}^\intercal$. ►

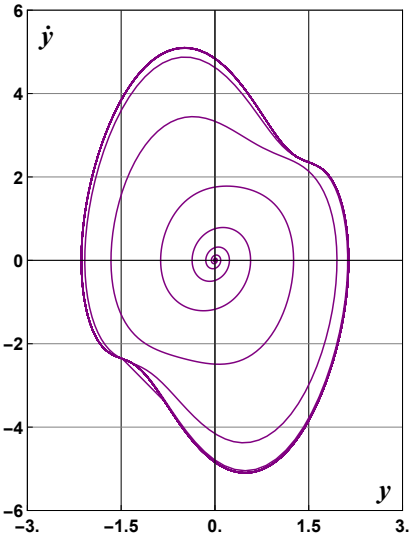


Рис. 1.2.4

Пример 1.2.4. В следующей задаче исследуется переходный режим в системе, описываемой уравнением Ван дер Поля с запаздыванием [266]:

$$\ddot{y}(t) + 2\,\alpha\left[y^2(t-\tau) - 1\right]\dot{y}(t-\tau) + \omega^2\, y(t) = 0, \tag{1.2.14}$$

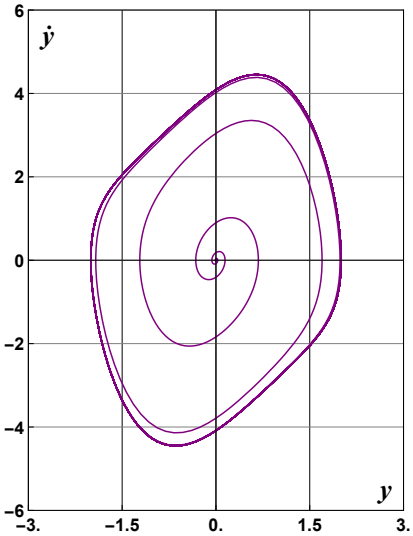


Рис. 1.2.5

где α, ω – положительные постоянные. Как и в предыдущем примере, при увеличении времени система (1.2.14), имеющая в начале координат неустойчивое положение равновесия, выходит на предельный цикл.

Траектория, показанная на рис. 1.2.4, получена при $\alpha = 0.5$, $\omega = 2$, $\tau = 0.5$, $t \in [0, 100]$, $f_0 = \{0, 0\}^\intercal$, $\boldsymbol{x}(-0.5) = \{0.005, 0.005\}^\intercal$. На рис. 1.2.5 приведен переходный режим в соответствующей системе без запаздывания. ►

1.2.3. Системы ОДУ с кратными постоянными запаздываниями

Рассмотрим систему уравнений вида [135, 204, 215]:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}_\nu\big(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(t-\tau), \boldsymbol{x}(t-2\tau), ..., \boldsymbol{x}(t-\nu\tau), t\big), \quad t > t_\nu = t_0 + \nu\tau. \tag{1.2.15}$$

Здесь t – время ($t_0 < t \leqslant T < \infty$); τ – постоянное запаздывание; $\nu > 0$ – целое; $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния; $\boldsymbol{f}_\nu(\cdot,\cdot) = \big\{f_{\nu i}(\cdot,\cdot)\big\}^\intercal : \mathbb{R}^n \times [t_0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}^n$ – детерминированная вектор-функция, $^\intercal$ – символ транспонирования.

Предположим, что на полуинтервалах $(t_0, t_1]$, $(t_1, t_2]$, ..., $(t_\nu - 1, t_\nu]$ вектор состояния $\boldsymbol{x}(t)$ удовлетворяет системам уравнений вида:

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}_0\big(\boldsymbol{x}(t), t\big);\\
&\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}_1\big(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(t-\tau), t\big);\\
&\ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\\
&\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}_\nu\big(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(t-\tau), \boldsymbol{x}(t-2\,\tau), ..., \boldsymbol{x}\big(t-(\nu-1)\,\tau\big), t\big);\\
&\boldsymbol{f}_q(\cdot,\cdot,...) = \big\{f_{qi}(\cdot,\cdot,...)\big\}^{\intercal}, \qquad q = 1, 2, ..., \nu - 1,
\end{aligned} \tag{1.2.16}$$

и пусть $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$.

В связи с отсутствием общепризнанных алгоритмов решения уравнений (1.2.15), (1.2.16) естественными выглядят попытки построения на их основе иных математических моделей явлений, описываемых данными уравнениями.

Воспользуемся схемой, модифицирующей алгоритм, который применялся в предыдущем пункте. Для того чтобы изучить изменение вектора $\boldsymbol{x}(t)$ при значениях времени $t > t_0$ посредством преобразования этого векторного процесса, удовлетворяющего уравнениям с запаздываниями (1.2.15), (1.2.16), в цепочку процессов, удовлетворяющих уравнениям без запаздывания. В процессе реализации этой схемы будем использовать обозначения, введенные в предыдущем пункте. Рассмотрим последовательность отрезков Δ_q.

0°. Начнем с Δ_0. Определенный на отрезке Δ_0 вектор $\boldsymbol{x}_0(s)$ удовлетворяет системе ОДУ (штрихом здесь и далее обозначена производная по переменной s):

$$\dot{\boldsymbol{x}}_0(s) = \boldsymbol{f}_0\big(\boldsymbol{x}_0(s), s + t_0\big), \qquad \boldsymbol{x}_0(0) = \boldsymbol{x}^0.$$

1°. Проанализируем поведение системы на отрезках Δ_0 и Δ_1. ОДУ для вычисления вектора $\boldsymbol{z}_1(s)$ можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{x}}_0(s) = \boldsymbol{f}_0\big(\boldsymbol{x}_0(s), s + t_0\big), \qquad \boldsymbol{x}_0(0) = \boldsymbol{x}^0;\\
&\dot{\boldsymbol{x}}_1(s) = \boldsymbol{f}_1\big(\boldsymbol{x}_1(s), \boldsymbol{x}_0(s), s + t_1\big), \quad \boldsymbol{x}_1(0) = \boldsymbol{x}_0(\tau).\\
&\ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots
\end{aligned}$$

***ν*°**. Рассмотрим отрезки Δ_0, Δ_1, ..., Δ_ν. Построим систему ОДУ для вектора $\boldsymbol{z}_\nu(s)$ в виде:

$$\dot{\boldsymbol{x}}_0(s) = \boldsymbol{f}_0\big(\boldsymbol{x}_0(s), s + t_0\big);$$

$$
\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{x}}_1(s) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}_1(s), \boldsymbol{x}_0(s), s + t_1\big);\\
&\ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\\
&\dot{\boldsymbol{x}}_{\nu-1}(s) = \boldsymbol{f}_{\nu-1}\big(\boldsymbol{x}_{\nu-1}(s), \boldsymbol{x}_{\nu-2}(s), \ldots, \boldsymbol{x}_0(s), s + t_{\nu-1}\big);\\
&\dot{\boldsymbol{x}}_{\nu}(s) = \boldsymbol{f}_{\nu}\big(\boldsymbol{x}_{\nu}(s), \boldsymbol{x}_{\nu-1}(s), \ldots, \boldsymbol{x}_0(s), s + t_{\nu}\big);\\
&\boldsymbol{x}_0(0) = \boldsymbol{x}^0;\quad \boldsymbol{x}_1(0) = \boldsymbol{x}_0(\tau);\quad \ldots\quad \boldsymbol{x}_{\nu-1}(0) = \boldsymbol{x}_{\nu-2}(\tau);\\
&\boldsymbol{x}_{\nu}(0) = \boldsymbol{x}_{\nu-1}(\tau);\\
&\ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots
\end{aligned}
$$

N°. Обратимся к отрезкам Δ_0, Δ_1, ..., Δ_N. Система ОДУ для вектора $\boldsymbol{z}_N(s)$ в виде:

$$
\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{x}}_0(s) = \boldsymbol{f}_0\big(\boldsymbol{x}_0(s), s + t_0\big);\\
&\dot{\boldsymbol{x}}_1(s) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}_1(s), \boldsymbol{x}_0(s), s + t_1\big);\\
&\ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\\
&\dot{\boldsymbol{x}}_{\nu-1}(s) = \boldsymbol{f}_{\nu-1}\big(\boldsymbol{x}_{\nu-1}(s), \boldsymbol{x}_{\nu-2}(s), \ldots, \boldsymbol{x}_0(s), s + t_{\nu-1}\big);\\
&\dot{\boldsymbol{x}}_{\nu}(s) = \boldsymbol{f}_{\nu}\big(\boldsymbol{x}_{\nu}(s), \boldsymbol{x}_{\nu-1}(s), \ldots, \boldsymbol{x}_0(s), s + t_{\nu}\big);\\
&\dot{\boldsymbol{x}}_{\nu+1}(s) = \boldsymbol{f}_{\nu}\big(\boldsymbol{x}_{\nu+1}(s), \boldsymbol{x}_{\nu}(s), \ldots, \boldsymbol{x}_1(s), s + t_{\nu+1}\big);\\
&\ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\\
&\dot{\boldsymbol{x}}_{N}(s) = \boldsymbol{f}_{\nu}\big(\boldsymbol{x}_{N}(s), \boldsymbol{x}_{N-1}(s), \ldots, \boldsymbol{x}_{N-\nu}(s), s + t_{N}\big);\\
&\boldsymbol{x}_0(0) = \boldsymbol{x}^0;\quad \boldsymbol{x}_1(0) = \boldsymbol{x}_0(\tau);\quad \ldots\quad \boldsymbol{x}_{\nu-1}(0) = \boldsymbol{x}_{\nu-2}(\tau);\\
&\boldsymbol{x}_{\nu}(0) = \boldsymbol{x}_{\nu-1}(\tau);\quad \boldsymbol{x}_N(0) = \boldsymbol{x}_{N-1}(\tau).
\end{aligned}
$$

Итак, исходная задача Коши для дифференциально-разностных уравнений сведена к последовательности задач Коши для систем ОДУ без запаздывания для цепочки фазовых векторов увеличивающейся размерности. При этом исследование поведения системы будет состоять в последовательном численном интегрировании уравнений на отрезке $[0, \tau]$ (шаги **0°**–**N°**), включая смену системы уравнений и доопределение недостающих для очередного шага начальных условий с помощью терминальных для предыдущего.

Пример 1.2.5. Рассмотрим уравнения одного из вариантов модели гуморального иммунного ответа [66]:

$$
\dot{u}_1(t) = c_1 - c_2\, u_1(t) - c_3\, u_1(t)\, u_2(t),
$$

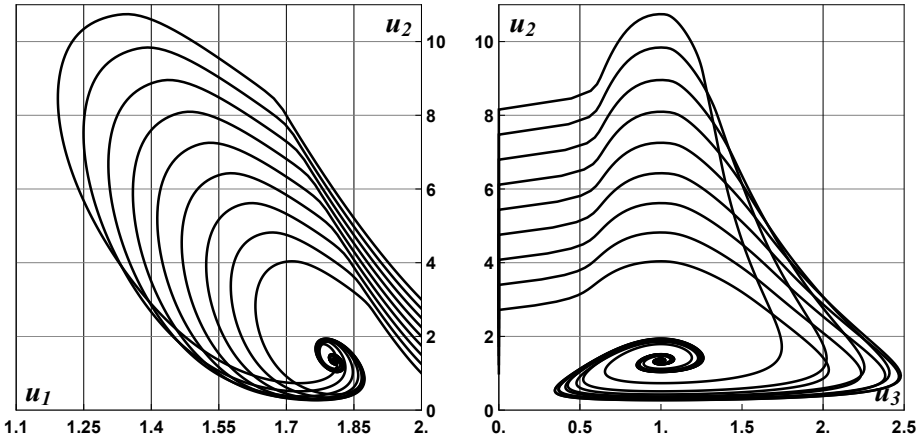


Рис. 1.2.6

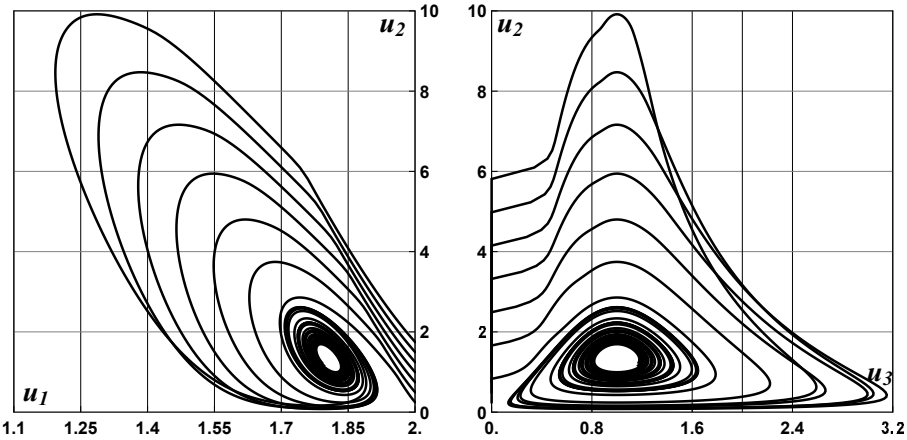


Рис. 1.2.7

$$\dot{u}_2(t) = c_4\, u_2(t) - c_5\, u_2(t)\, u_3(t),$$
$$\dot{u}_3(t) = c_6\, u_1(t-\tau)\, u_2(t-2\,\tau)\, \mathbb{1}(t-2\,\tau) - c_7\, u_3(t) - c_8\, u_2(t)\, u_3(t),$$

где c_k – постоянные.

На рис. 1.2.6 ($\tau = 5$) и 1.2.7 ($\tau = 6$) изображено поведение численности B-лимфоцитов ($u_1(t)$), антигена ($u_2(t)$) и антител ($u_3(t)$) при различных временах запаздывания и начальных условиях. ►

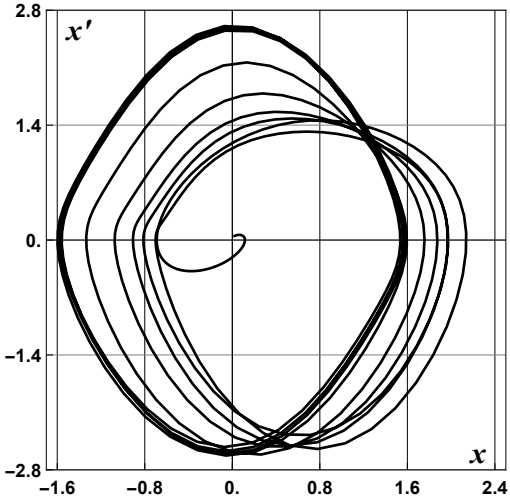


Рис. 1.2.8

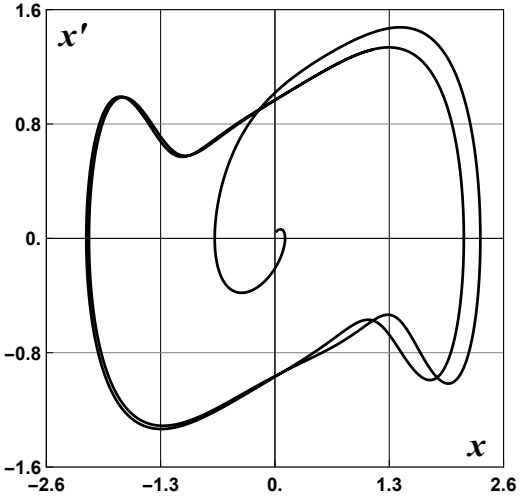


Рис. 1.2.9

Пример 1.2.6. Рассмотрим уравнение Ван дер Поля–Дюффинга [215]:

$$x''(t) + 2\,\alpha\left[x^2(t-2\,\tau) - 1\right]\cdot x'(t) + \omega^2\,x(t) + \gamma\,x^3(t-\tau) = 0, \quad t > 0,$$

$$x'(t) = 0, \qquad x''(t) = 0, \qquad t \in (-2\,\tau, 0],$$
$$x(-2\,\tau) = 0.02, \qquad x'(-2\,\tau) = 0.05,$$

где α, ω, γ – постоянные.

Поведение системы демонстрируется на рис. 1.2.8 ($\tau = 1.0$) и 1.2.9 ($\tau = 0.5$) для $\alpha = 0.5$, $\omega = 1.0$, $\gamma = 0.1$. ►

1.2.4. Системы ОДУ нейтрального типа с кратными постоянными запаздываниями

Рассмотрим систему уравнений вида [135, 204]:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}_\nu\big(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}_\tau(t), ..., \boldsymbol{x}_{\nu\,\tau}(t), \dot{\boldsymbol{x}}_\tau(t), ..., \dot{\boldsymbol{x}}_{\nu\,\tau}(t), t\big), \tag{1.2.17}$$

где $\boldsymbol{x}_\ell(t) = \boldsymbol{x}\big(t - \ell\tau\big)$, $t > t_\nu = t_0 + \nu\,\tau$. Трактовка остальных обозначений соответствует приведенной в предыдущем пункте. Так же, как и там, предполагается, что на полуинтервалах $(t_0, t_1]$, $(t_1, t_2]$, ..., $(t_\nu - 1, t_\nu]$ вектор состояния $\boldsymbol{x}(t)$ удовлетворяет системам уравнений вида:

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}_0\big(\boldsymbol{x}(t), t\big);\\
&\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}_1\big(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}_\tau(t), \dot{\boldsymbol{x}}_\tau(t), t\big);\\
&\quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ...\\
&\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}_{\nu-1}\big(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}_\tau(t), ..., \boldsymbol{x}_{(\nu-1)\tau}(t), \dot{\boldsymbol{x}}_\tau(t), ..., \dot{\boldsymbol{x}}_{(\nu-1)\tau}(t), t\big);\\
&\boldsymbol{f}_q(\cdot, \cdot, ...) = \big\{f_{qi}(\cdot, \cdot, ...)\big\}^{\intercal}, \qquad q = 1, 2, ..., \nu - 1,
\end{aligned} \tag{1.2.18}$$

и пусть $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$.

Воспользуемся схемой, подобной той, которая применялась в предыдущем пункте, и определим цепочку систем ОДУ без запаздывания увеличивающейся размерности в рассматриваемом случае. Опуская комментарии, которые полностью эквивалентны приведенным для шагов $\mathbf{0}^\circ$–$\mathbb{N}^\circ$ предыдущего пункта, выпишем только форму указанных ОДУ.

$\mathbf{0}^\circ$.

$$\dot{\boldsymbol{x}}_0(s) = \boldsymbol{f}_0\big(\boldsymbol{x}_0(s), s + t_0\big), \qquad \boldsymbol{x}_0(0) = \boldsymbol{x}^0.$$

$\mathbf{1}^\circ$.

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{x}}_0(s) = \boldsymbol{f}_0\big(\boldsymbol{x}_0(s), s + t_0\big), \qquad \boldsymbol{x}_0(0) = \boldsymbol{x}^0;\\
&\dot{\boldsymbol{x}}_1(s) = \boldsymbol{f}_1\big(\boldsymbol{x}_1(s), \boldsymbol{x}_0(s), \dot{\boldsymbol{x}}_0(s), s + t_1\big), \quad \boldsymbol{x}_1(0) = \boldsymbol{x}_0(\tau).
\end{aligned}$$

... ...

$\boldsymbol{\nu}$°.

$$\dot{\boldsymbol{x}}_0(s) = \boldsymbol{f}_0\big(\boldsymbol{x}_0(s), s + t_0\big);$$
$$\dot{\boldsymbol{x}}_1(s) = \boldsymbol{f}_1\big(\boldsymbol{x}_1(s), \boldsymbol{x}_0(s), \dot{\boldsymbol{x}}_0(s), s + t_1\big);$$
... ...
$$\dot{\boldsymbol{x}}_{\nu-1}(s) = \boldsymbol{f}_{\nu-1}\big(\boldsymbol{x}_{\nu-1}(s), \boldsymbol{x}_{\nu-2}(s), ..., \boldsymbol{x}_0(s), \dot{\boldsymbol{x}}_{\nu-2}(s), ..., \dot{\boldsymbol{x}}_0(s), s + t_{\nu-1}\big);$$
$$\dot{\boldsymbol{x}}_\nu(s) = \boldsymbol{f}_\nu\big(\boldsymbol{x}_\nu(s), \boldsymbol{x}_{\nu-1}(s), ..., \boldsymbol{x}_0(s), \dot{\boldsymbol{x}}_{\nu-1}(s), ..., \dot{\boldsymbol{x}}_0(s), s + t_\nu\big);$$
$$\boldsymbol{x}_0(0) = \boldsymbol{x}^0; \quad \boldsymbol{x}_1(0) = \boldsymbol{x}_0(\tau); \quad ... \quad \boldsymbol{x}_{\nu-1}(0) = \boldsymbol{x}_{\nu-2}(\tau);$$
$$\boldsymbol{x}_\nu(0) = \boldsymbol{x}_{\nu-1}(\tau);$$
... ...

N°.

$$\dot{\boldsymbol{x}}_0(s) = \boldsymbol{f}_0\big(\boldsymbol{x}_0(s), s + t_0\big);$$
$$\dot{\boldsymbol{x}}_1(s) = \boldsymbol{f}_1\big(\boldsymbol{x}_1(s), \boldsymbol{x}_0(s), \dot{\boldsymbol{x}}_0(s), s + t_1\big);$$
... ...
$$\dot{\boldsymbol{x}}_{\nu-1}(s) = \boldsymbol{f}_{\nu-1}\big(\boldsymbol{x}_{\nu-1}(s), \boldsymbol{x}_{\nu-2}(s), ..., \boldsymbol{x}_0(s), \dot{\boldsymbol{x}}_{\nu-2}(s), ..., \dot{\boldsymbol{x}}_0(s), s + t_{\nu-1}\big);$$
$$\dot{\boldsymbol{x}}_\nu(s) = \boldsymbol{f}_\nu\big(\boldsymbol{x}_\nu(s), \boldsymbol{x}_{\nu-1}(s), ..., \boldsymbol{x}_0(s), \dot{\boldsymbol{x}}_{\nu-1}(s), ..., \dot{\boldsymbol{x}}_0(s), s + t_\nu\big);$$
$$\dot{\boldsymbol{x}}_{\nu+1}(s) = \boldsymbol{f}_\nu\big(\boldsymbol{x}_{\nu+1}(s), \boldsymbol{x}_\nu(s), ..., \boldsymbol{x}_1(s), \dot{\boldsymbol{x}}_\nu(s), ..., \dot{\boldsymbol{x}}_1(s), s + t_{\nu+1}\big);$$
... ...
$$\dot{\boldsymbol{x}}_N(s) = \boldsymbol{f}_\nu\big(\boldsymbol{x}_N(s), \boldsymbol{x}_{N-1}(s), ..., \boldsymbol{x}_{N-\nu}(s), \dot{\boldsymbol{x}}_{N-1}(s), ..., \dot{\boldsymbol{x}}_{N-\nu}(s), s + t_N\big);$$
$$\boldsymbol{x}_0(0) = \boldsymbol{x}^0; \quad \boldsymbol{x}_1(0) = \boldsymbol{x}_0(\tau); \quad ... \quad \boldsymbol{x}_{\nu-1}(0) = \boldsymbol{x}_{\nu-2}(\tau);$$
$$\boldsymbol{x}_\nu(0) = \boldsymbol{x}_{\nu-1}(\tau); \quad \boldsymbol{x}_N(0) = \boldsymbol{x}_{N-1}(\tau).$$

Пример 1.2.7. Рассмотрим модельное уравнение:

$$\dot{u}(t) + k_1\,\dot{u}(t-\tau) = k_2\,u(t) + k_3\,u^3(t) + k_4\,u(t-\tau), \quad t > 0,$$

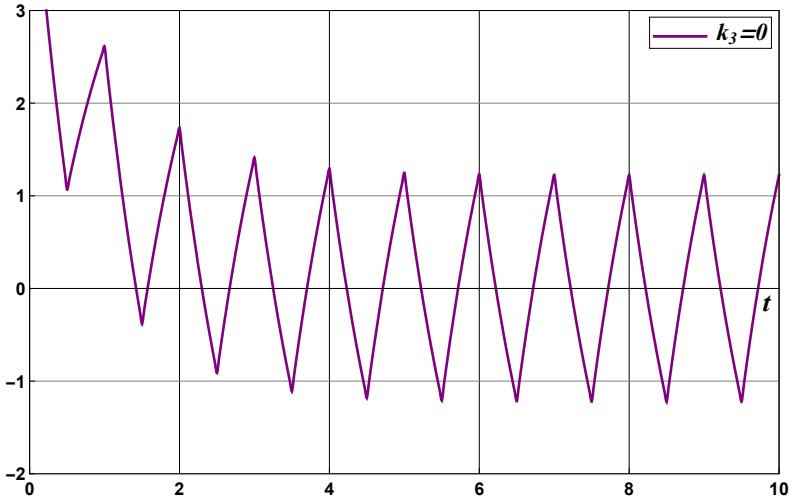


Рис. 1.2.10

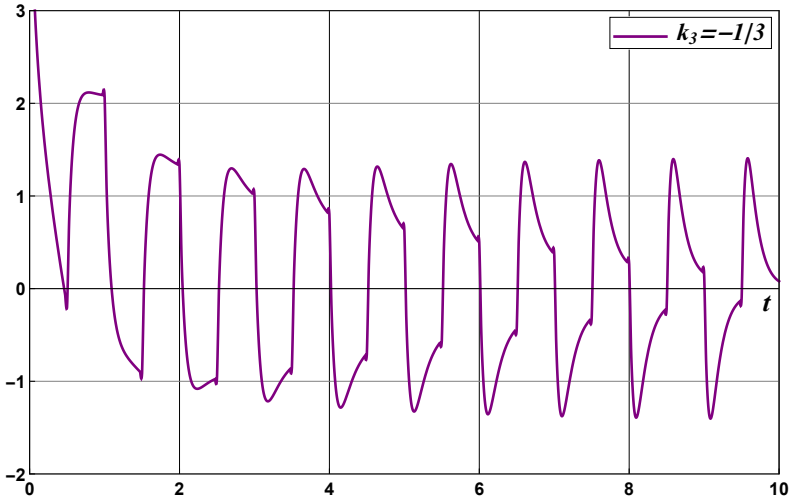


Рис. 1.2.11

$$\dot{u}(t) = 0, \quad -\tau < t \leqslant 0,$$
$$u(-\tau) = 5$$

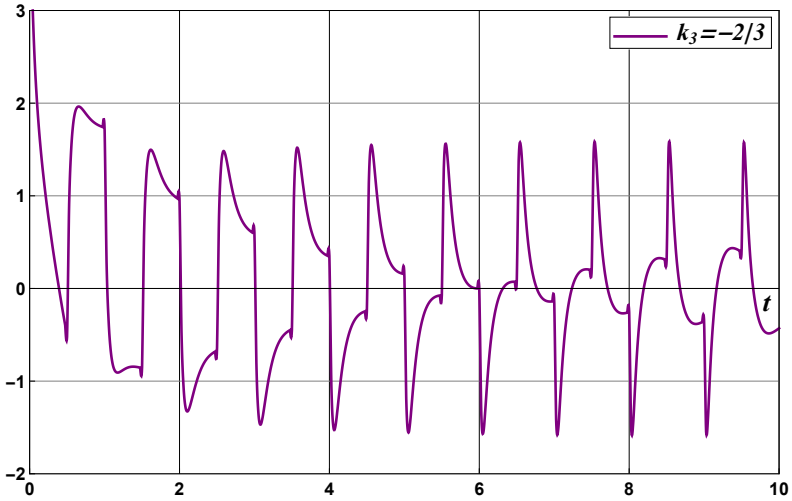


Рис. 1.2.12

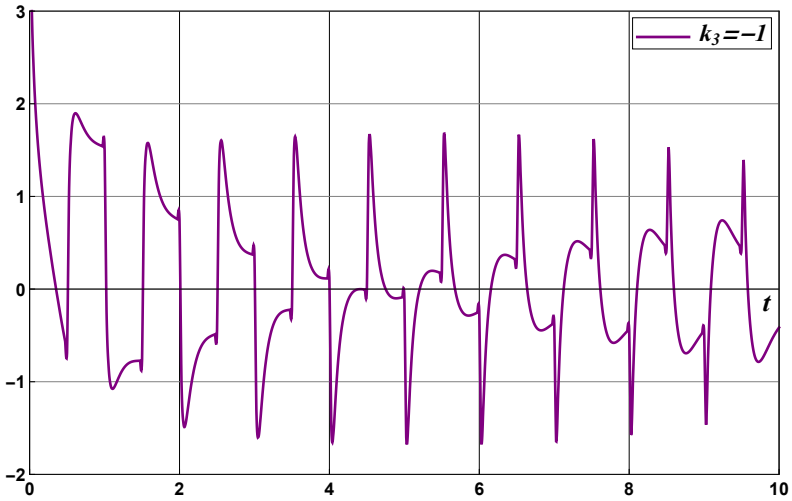


Рис. 1.2.13

Интегральные кривые для рассматриваемой системы при $k_1 = 1$, $k_2 = k_4 = -1$ и различных значениях k_3 приведены на рис. 1.2.10–1.2.13. ▶

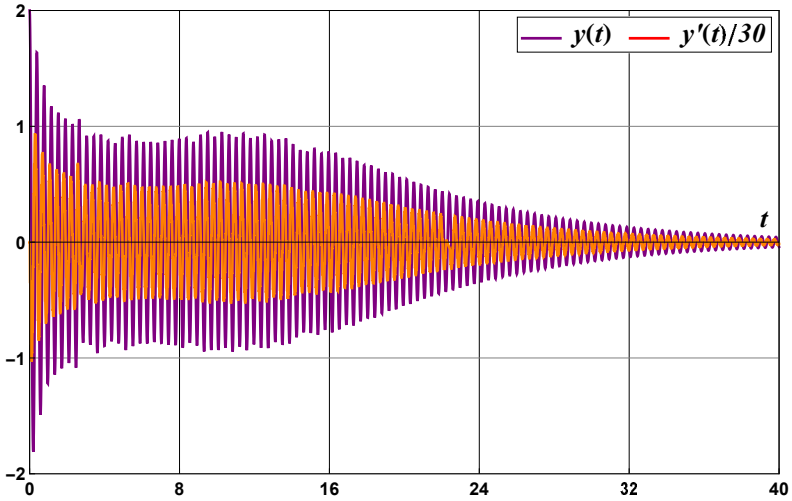


Рис. 1.2.14

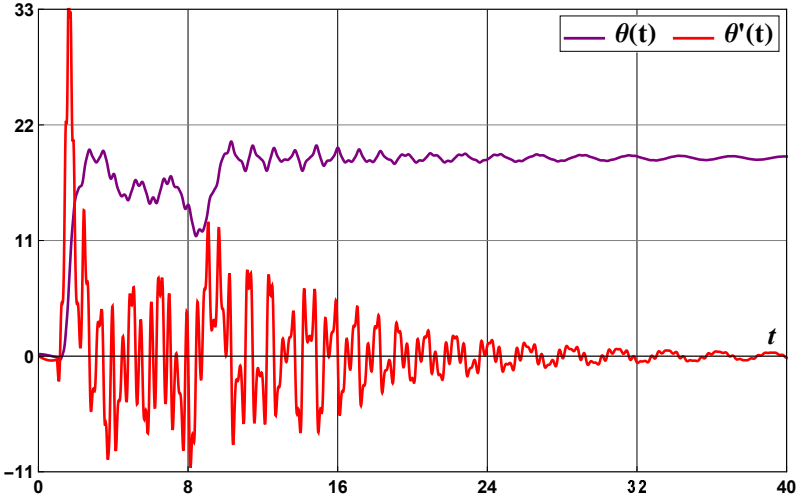


Рис. 1.2.15

Пример 1.2.8. Следующий объект моделирования – механическая система, состоящая из подрессоренной массы M, к которой с помощью безмассового стержня длины L привешен маятник массы m. С учетом за-

паздывания обратной связи уравнения движения системы будут иметь следующий вид [765]:

$$M\,\ddot{y}(t) + C\,\dot{y}(t) + K\,y(t) + m\,\ddot{y}(t-\tau) + m\,L\,\big[\ddot{\theta}(t-\tau)\,\sin\theta(t-\tau) + \\ + \dot{\theta}^2(t-\tau)\,\cos\theta(t-\tau)\big] = 0,$$

$$m\,L^2\,\ddot{\theta}(t) + k\,\dot{\theta}(t) + m\,g\,L\,\sin\theta(t) + m\,L\,\ddot{y}(t)\,\sin\theta(t) = 0,$$

где $y(t)$ – вертикальное перемещение подрессоренной массы; $\theta(t)$ – угол отклонения стержня от вертикали; K и C – параметры системы; g – ускорение свободного падения.

Для расчетов использовались следующие значения параметров:

$$M = 20.0; \qquad m = 1.0; \qquad c = 20.25; \qquad K = 5300.0;$$

$$L = 2.0; \qquad k = 0.5; \qquad g = 9.81; \qquad tau = 1.0;$$

$$\{y(0), \dot{y}(0), \theta(0), \dot{\theta}(0)\} = \{2.0, 0.0, \pi/16, 0.0\}.$$

Поведение компонент вектора состояния системы во времени отображено на рис. 1.2.14, 1.2.15. ▶

Теперь обратимся к системе ДУ нейтрального типа в форме [215]:

$$\boldsymbol{x}'(t) + \sum_{k=1}^{\nu} Q_{\nu k}(t)\,\boldsymbol{x}'_{k\tau}(t) = \boldsymbol{f}_\nu\big(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}_\tau(t), \boldsymbol{x}_{2\tau}(t), ..., \boldsymbol{x}_{\nu\tau}(t), t\big), \qquad (1.2.19)$$

$$t_0 + \nu\,\tau = t_\nu < t \leqslant T < \infty,$$

где основные обозначения соответствуют введенным выше, а матрицы-функции $Q_{ij}(t)$ непрерывны по переменной t.

Как и выше, здесь предполагается, что вектор состояния $\boldsymbol{x}(t)$ на полуинтервалах $(t_0, t_1]$, $(t_1, t_2]$, ..., $(t_{\nu-1}, t_\nu]$ удовлетворяет следующим системам ДУ:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{f}_0\big(\boldsymbol{x}(t), t\big),\\
&\boldsymbol{x}'(t) + Q_{11}(t)\,\boldsymbol{x}'_\tau(t) = \boldsymbol{f}_1\big(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}_\tau(t), t\big),\\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad (1.2.20)\\
&\boldsymbol{x}'(t) + \sum_{k=1}^{\nu-1} Q_{\nu-1,k}(t)\,\boldsymbol{x}'_{k\tau}(t) = \boldsymbol{f}_{\nu-1}\big(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}_\tau(t), ..., \boldsymbol{x}_{(\nu-1)\tau}(t), t\big)
\end{aligned}$$

с начальным условием $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$.

Если воспользоваться той же схемой, что и выше, то можно получить цепочку систем ОДУ, которая подобна последовательности, полученной в первой части этого пункта.

Исключим производные векторов $\boldsymbol{x}_i$ с младшими номерами из левых частей уравнений и получим следующую цепочку уравнений.

0°. Как и выше, начнем с сегмента Δ_0. Вектор $\boldsymbol{x}_0(s)$, определенный на Δ_0, удовлетворяет системе ОДУ вида:

$$\dot{\boldsymbol{x}}_0(s) = \boldsymbol{f}_0^+\big(\boldsymbol{x}_0(s), s_0\big), \qquad \boldsymbol{x}_0(0) = \boldsymbol{x}^0,$$

где

$$\boldsymbol{f}_0^+\big(\boldsymbol{x}_0(s), s_0\big) = \boldsymbol{f}_0\big(\boldsymbol{x}_0(s), s_0\big).$$

1°. Теперь рассмотрим интервалы Δ_0 и Δ_1. Систему ОДУ для вычисления вектора $\mathrm{col}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1)$ можно представить так:

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{x}}_0(s) = \boldsymbol{f}_0^+\big(\boldsymbol{x}_0(s), s_0\big), && \boldsymbol{x}_0(0) = \boldsymbol{x}^0,\\
&\dot{\boldsymbol{x}}_1(s) = \boldsymbol{f}_1^+\big(\boldsymbol{x}_1(s), \boldsymbol{x}_0(s), s_1, s_0\big), && \boldsymbol{x}_1(0) = \boldsymbol{x}_0(\tau),
\end{aligned}$$

с

$$\boldsymbol{f}_1^+\big(\boldsymbol{x}_1(s), \boldsymbol{x}_0(s), s_1, s_0\big) = \boldsymbol{f}_1\big(\boldsymbol{x}_1(s), \boldsymbol{x}_0(s), s_1\big) - Q_{11}(s_1)\, \boldsymbol{f}_0^+\big(\boldsymbol{x}_0(s), s_0\big).$$

... ...

ν°. Здесь мы обозреваем временные отрезки Δ_0, Δ_1, ..., Δ_ν и получаем систему ОДУ для вектора $\boldsymbol{z}_\nu$ в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{x}}_0(s) = \boldsymbol{f}_0^+\big(\boldsymbol{x}_0(s), s_0\big), && \boldsymbol{x}_0(0) = \boldsymbol{x}^0,\\
&\dot{\boldsymbol{x}}_1(s) = \boldsymbol{f}_1^+\big(\boldsymbol{x}_1(s), \boldsymbol{x}_0(s), s_1, s_0\big), && \boldsymbol{x}_1(0) = \boldsymbol{x}_0(\tau),\\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots && \\
&\dot{\boldsymbol{x}}_\nu(s) = \boldsymbol{f}_\nu^+\big(\boldsymbol{x}_\nu(s), ..., \boldsymbol{x}_1(s), \boldsymbol{x}_0(s), s_\nu, ..., s_1, s_0\big), && \boldsymbol{x}_\nu(0) = \boldsymbol{x}_{\nu-1}(\tau),
\end{aligned}$$

где

$$\boldsymbol{f}_\nu^+\big(\boldsymbol{x}_\nu(s), ..., \boldsymbol{x}_1(s), \boldsymbol{x}_0(s), s_\nu, ..., s_1, s_0\big) = \boldsymbol{f}_\nu\big(\boldsymbol{x}_\nu(s), ..., \boldsymbol{x}_1(s), \boldsymbol{x}_0(s), s_\nu\big) -$$
$$- \sum_{k=1}^{\nu} Q_{\nu k}(s_\nu)\, \boldsymbol{f}_{\nu-k}^+\big(\boldsymbol{x}_{\nu-k}(s), ..., \boldsymbol{x}_1(s), \boldsymbol{x}_0(s), s_{\nu-k}, ..., s_1, s_0\big).$$

... ...

N°. Теперь рассматриваются сегменты Δ_0, Δ_1, ..., Δ_N и строится система ОДУ для вектора $\boldsymbol{z}_N$:

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{x}}_0(s) = \boldsymbol{f}_0^+\big(\boldsymbol{x}_0(s), s_0\big), && \boldsymbol{x}_0(0) = \boldsymbol{x}^0,\\
&\dot{\boldsymbol{x}}_1(s) = \boldsymbol{f}_1^+\big(\boldsymbol{x}_1(s), \boldsymbol{x}_0(s), s_1, s_0\big), && \boldsymbol{x}_1(0) = \boldsymbol{x}_0(\tau),\\
&\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\\
&\dot{\boldsymbol{x}}_\nu(s) = \boldsymbol{f}_\nu^+\big(\boldsymbol{x}_\nu(s), ..., \boldsymbol{x}_1(s), \boldsymbol{x}_0(s), s_\nu, ..., s_1, s_0\big), && \boldsymbol{x}_\nu(0) = \boldsymbol{x}_{\nu-1}(\tau),\\
&\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\\
&\dot{\boldsymbol{x}}_N(s) = \boldsymbol{f}_\nu^+\big(\boldsymbol{x}_N(s), ..., \boldsymbol{x}_1(s), \boldsymbol{x}_0(s), s_N, ..., s_1, s_0\big), && \boldsymbol{x}_N(0) = \boldsymbol{x}_{N-1}(\tau)
\end{aligned}$$

с

$$\boldsymbol{f}_\nu^+\big(\boldsymbol{x}_N(s), ..., \boldsymbol{x}_1(s), \boldsymbol{x}_0(s), s_N, ..., s_1, s_0\big) = \boldsymbol{f}_\nu\big(\boldsymbol{x}_N(s), ..., \boldsymbol{x}_{N-\nu}(s), s_N\big) -$$
$$- \sum_{k=1}^{N} Q_{\nu k}(s_N)\, \boldsymbol{f}_{N-k}^+\big(\boldsymbol{x}_{N-k}(s), ..., \boldsymbol{x}_1(s), \boldsymbol{x}_0(s), s_{N-k}, ..., s_1, s_0\big).$$

Итак, цепочка построена, и ее форма пригодна для прямого численного интегрирования с помощью встроенных функций ПКА.

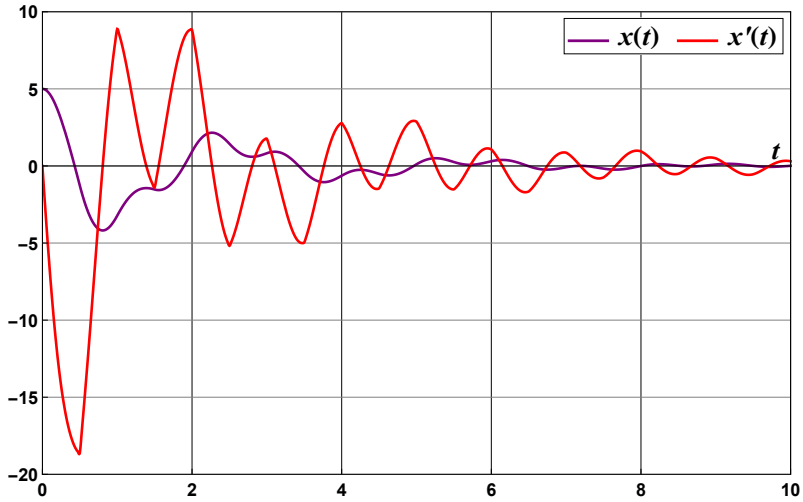


Рис. 1.2.16

Пример 1.2.9. Рассмотрим обобщенное уравнение Дюффинга:

$$x''(t) + c_0\,x''(t-\tau) + 2\,\alpha_1\,x'(t) + 2\,\alpha_2\,x'(t-\tau) + \omega_1^2\,x(t) + \omega_2^2\,x(t-\tau) + \\ +\gamma_1\,x^3(t) + \gamma_2\,x^3(t-\tau) = 0, \qquad t > 0;$$
$$x'(t) = 0, \qquad x''(t) = 0, \qquad t \in (-\tau, 0];$$
$$x(-\tau) = 5.0, \qquad x'(-\tau) = 0.0,$$

где c_0, α_i, ω_i, γ_i $(i = 1, 2)$ – постоянные. На рис. 1.2.16 приведены графики $x(t)$ и $x'(t)$ для рассматриваемой системы с $\tau = 0.5$; $c_0 = 0.75$; $\alpha_1 = 0.2$; $\alpha_2 = 0.1$; $\omega_1^2 = 6.0$; $\omega_2^2 = 1.0$; $\gamma_1 = 0.2$; $\gamma_2 = 0.1$. ►

1.2.5. Системы ОДУ с переменными временны́ми запаздываниями

Обратимся к следующему объекту исследования – системе ДУ с непрерывным переменным запаздыванием $\tau(t) \geqslant 0$ следующего вида [135, 204]:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}\big(t-\tau(t)\big), t\big), \quad t_0 < t \leqslant T < \infty, \quad \boldsymbol{x}\big(t_0\big) = \boldsymbol{x}^0. \qquad (1.2.21)$$

Будем считать, что на интервале $(t_0^{\#}, t_0]$, где $t_0^{\#} \leqslant \min_{t \geqslant t_0}\big[t - \tau(t)\big]$, вектор состояния $\boldsymbol{x}(t)$ совпадает с вектором $\boldsymbol{y}(t) \in \mathbb{R}^n$, который удовлетворяет системе ОДУ без запаздывания:

$$\dot{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{f}_0\big(\boldsymbol{y}(t), t\big), \qquad \boldsymbol{y}\big(t_0^{\#}\big) = \boldsymbol{y}^0. \qquad (1.2.22)$$

Задачей является вычисление вектора $\boldsymbol{x}(t)$ при любом $t > t_0$.

При этом уже использовавшаяся схема расширения пространства состояний для анализа систем с постоянными (одиночными и кратными) запаздываниями может быть применена и для решения поставленной задачи, конечно, при некоторой модификации.

Действительно, приближенно заменим переменное запаздывание $\tau(t)$ кусочно-постоянным $\tau^{\#}(t)$ со "ступеньками", длина которых кратна величине τ^* (выбор τ^* определяется необходимой точностью аппроксимации $\tau(t)$ и всегда может быть произведен так, чтобы абсолютная погрешность $|\tau(t) - \tau^{\#}(t)|$ не превышала наперед заданного значения, а поведение полученной системы ОДУ соответствовало исходной) и рассмотрим равномерную временну́ю сетку $t_q = t_0 + q\,\tau^*$, $q = -N_0, -N_0+1, ..., -2, -1, 0, 1, 2, ..., N, N+1$ $(t_{N+1} \geqslant T)$, причем без потери общности можно считать, что $t_{-N_0} = t_0^{\#}$ (значения вектора $\boldsymbol{y}(t)$ при $t = t_{-N_0}$, если $t_{-N_0} < t_0$, можно получить интегрированием в обратном времени).

После этого введем новую временную переменную s, изменяющуюся на промежутке $[0, \tau^*]$, дополнительно следующие обозначения:

$$\boldsymbol{y}_q(s) = \boldsymbol{y}(s + t_q), \quad \boldsymbol{z}_{-N_0}(s) = \boldsymbol{y}_{-N_0}(s),$$
$$\boldsymbol{z}_{-N_0+1}(s) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{z}_{-N_0}(s), \boldsymbol{y}_{-N_0+1}(s)\big), \quad \ldots \quad \boldsymbol{z}_{-1}(s) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{z}_{-2}(s), \boldsymbol{y}_{-1}(s)\big),$$
$$\boldsymbol{z}_0(s) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{z}_{-1}(s), \boldsymbol{x}_0(s)\big), \quad \boldsymbol{z}_1(s) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{z}_0(s), \boldsymbol{x}_1(s)\big), \quad \ldots$$
$$\ldots \quad \boldsymbol{z}_N(s) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{z}_{N-1}(s), \boldsymbol{x}_N(s)\big);$$

учитывая равенства

$$\boldsymbol{y}_q(0) = \boldsymbol{y}_{q-1}(\tau^*), \quad \boldsymbol{x}_q(0) = \boldsymbol{x}_{q-1}(\tau^*),$$

построим цепочку уравнений для векторов $\boldsymbol{z}_{-N_0}(s)$, $\boldsymbol{z}_{-N_0+1}(s)$, ..., $\boldsymbol{z}_{-1}(s)$, $\boldsymbol{z}_0(s)$, $\boldsymbol{z}_1(s)$, ..., $\boldsymbol{z}_N(s)$, принадлежащих семейству вложенных пространств состояний. Цель построения такой цепочки – вычислить значения для различных компонентов векторов $\boldsymbol{z}_q(s)$ в процессе решения ОДУ без запаздывания.

Заметим, что при небольшом τ^* и значительных N_0 и N количество ОДУ на последовательных этапах расчетов будет велико, но временные потери с лихвой компенсируются простотой алгоритма процедуры и возможностью использования стандартных численных интеграторов.

Используя введенные выше обозначения и последовательно рассматривая полуинтервалы $(t_{-N_0}, t_{-N_0+1}]$, $(t_{-N_0+1}, t_{-N_0+2}]$, ..., $(t_0, t_1]$, ..., $(t_N, t_{N+1}]$, можно записать (для $t > t_0$ аппроксимирующие исходные уравнения) системы ОДУ без запаздывания. Отметим, что в отличие от уравнений с постоянными запаздываниями выписать явную форму формируемой цепочки ОДУ, подобную представленной в предыдущих пунктах в общем случае не представляется возможным, что как раз и является следствием переменности запаздывания. В конкретных же расчетах при автоматическом генерировании указанной цепочки такая проблема не возникает.

Пример 1.2.10. Результат интегрирования модельной системы

$$\dot{x}(t) + a\,x(t) + b\,x\big(t - \tau(t)\big),$$
$$a,\ b = \text{const},$$

представлен на рис. 1.2.17. При расчетах в качестве значений параметров a и b использовались -1.5 и 1.0 соответственно. На указанном рисунке цифрой "1" обозначено решение для $\tau(t) = \sin^4 t$ и цифрой "2" – $\tau(t) = t \cdot \sin^4(2\,t)$. ▶

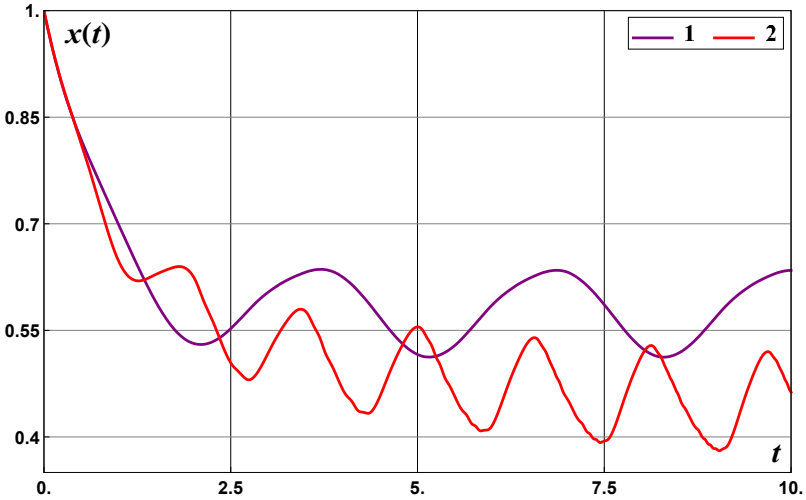


Рис. 1.2.17

1.2.6. Системы ОДУ с кусочно-постоянными временны́ми запаздываниями

Рассмотрим задачу решения нелинейных дифференциальных систем со специальной формой переменного запаздывания – кусочно-постоянной. Важность исследования систем с подобным типом запаздывания следует из возможности аппроксимации на замкнутом множестве с наперед заданной точностью любой непостоянной функции (в частности произвольного непрерывного переменного запаздывания) с помощью линейной комбинации кусочно-постоянных функций.

В данном случае система ДУсЗ принимает форму [215]:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}_{\tau_1}(t), \boldsymbol{x}_{\tau_2}(t-, ..., \boldsymbol{x}_{\tau_d}(t), t\big), \quad \hat{t}_0 < t \leqslant T < \infty, \qquad (1.2.23)$$

где основные обозначения те же, что и выше, а

$$\tau_r(t) = N_{rq}\,\tau, \quad \tilde{t}_q < t \leqslant \tilde{t}_{q+1}, \quad \tilde{t}_q = \hat{t}_0 + q \cdot \tau,$$
$$\tau = \text{const} > 0, \quad N_{rq} \in \{0, 1, 2, ...\}, \quad r = 1, 2, ..., d, \quad q = 0, 1, 2, ...$$

Например, $\lfloor t - M \rfloor$, $M = 0,\ 1,\ 2,\ ...$ – одна из регулярных форм для функций $t - \tau_r(t)$, где $\lfloor z \rfloor$ – целая часть z с округлением вниз [611].

Предположим, что для $t \in (\bar{t}_0, \hat{t}_0)$,

$$\bar{t}_0 = \min_{t \geqslant \hat{t}_0, r, q} (t - N_{rq}\,\tau) = \hat{t}_0 - N_0\tau, \quad N_0 \geqslant 0,$$

вектор $\boldsymbol{x}(t)$ удовлетворяет следующей системе ОДУ:

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{f}_0\big(\boldsymbol{x}(t), t\big), \quad \boldsymbol{x}(\bar{t}_0) = \boldsymbol{x}^0. \tag{1.2.24}$$

Задача состоит в вычислении значений вектора $\boldsymbol{x}$ для любого $t \geqslant \bar{t}_0$.

Как и выше, можно рассмотреть последовательность отрезков Δ_q, но здесь начальной временно́й точкой будет $\bar{t}_0$, а $t_q = \bar{t}_0 + q \cdot \tau$, $q = 0, 1, 2, \ldots, N, N+1$ ($t_{N+1} \geqslant T$.

0°–N$_0$−1°. На всех этих этапах имеется сходная ситуация, связанную с идентичностью ОДУ на сегментах Δ_0, Δ_1, ..., Δ_k, $k = 0, 1, \ldots, N_0 - 1$:

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{x}}_0(s) = \boldsymbol{f}_0\big(\boldsymbol{x}_0(s), s_0\big), && \boldsymbol{x}_0(0) = \boldsymbol{x}^0,\\
&\dot{\boldsymbol{x}}_1(s) = \boldsymbol{f}_0\big(\boldsymbol{x}_1(s), s_1\big), && \boldsymbol{x}_1(0) = \boldsymbol{x}_0(\tau),\\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots && \\
&\dot{\boldsymbol{x}}_k(s) = \boldsymbol{f}_0\big(\boldsymbol{x}_k(s), s_k\big), && \boldsymbol{x}_k(0) = \boldsymbol{x}_{k-1}(\tau).
\end{aligned}$$

N$_0$ − 1°–N° Системы ОДУ для полуотрезков Δ_{N_0}, Δ_{N_0+1}, ..., Δ_k, $k = N_0, N_0{+}1, \ldots, N$ также имеют сходство, но их внутренние структуры, вследствие наличия запаздываний, отличаются:

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{x}}_0(s) = \boldsymbol{f}_0\big(\boldsymbol{x}_0(s), s_0\big), && \boldsymbol{x}_0(0) = \boldsymbol{x}^0,\\
&\dot{\boldsymbol{x}}_1(s) = \boldsymbol{f}_0\big(\boldsymbol{x}_1(s), s_1\big), && \boldsymbol{x}_1(0) = \boldsymbol{x}_0(\tau),\\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots && \\
&\dot{\boldsymbol{x}}_{N_0-1}(s) = \boldsymbol{f}_0\big(\boldsymbol{x}_{N_0-1}(s), s_{N_0-1}\big), && \boldsymbol{x}_{N_0-1}(0) = \boldsymbol{x}_{N_0-2}(\tau).\\
&\dot{\boldsymbol{x}}_{N_0}(s) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}_{N_0}(s), \boldsymbol{x}_{N_0-N_{11}}(s),\\
&\qquad \boldsymbol{x}_{N_0-N_{21}}(s), \ldots, \boldsymbol{x}_{N_0-N_{d1}}(s), s_{N_0}\big), && \boldsymbol{x}_{N_0}(0) = \boldsymbol{x}_{N_0-1}(\tau),\\
&\dot{\boldsymbol{x}}_{N_0+1}(s) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}_{N_0+1}(s), \boldsymbol{x}_{N_0+1-N_{12}}(s),\\
&\qquad \boldsymbol{x}_{N_0+1-N_{22}}(s), \ldots, \boldsymbol{x}_{N_0+1-N_{d2}}(s), s_{N_0+1}\big), && \boldsymbol{x}_{N_0+1}(0) = \boldsymbol{x}_{N_0}(\tau),\\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots && \\
&\dot{\boldsymbol{x}}_k(s) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}_k(s), \boldsymbol{x}_{k-N_{12}}(s),\\
&\qquad \boldsymbol{x}_{k-N_{22}}(s), \ldots, \boldsymbol{x}_{k-N_{d2}}(s), s_{N_0+1}\big), && \boldsymbol{x}_k(0) = \boldsymbol{x}_{k-1}(\tau).
\end{aligned}$$

Очевидно, что проблема алгоритмически решена, т.к. методика без труда может быть реализована в форме программы на входном языке какого-либо ПКА.

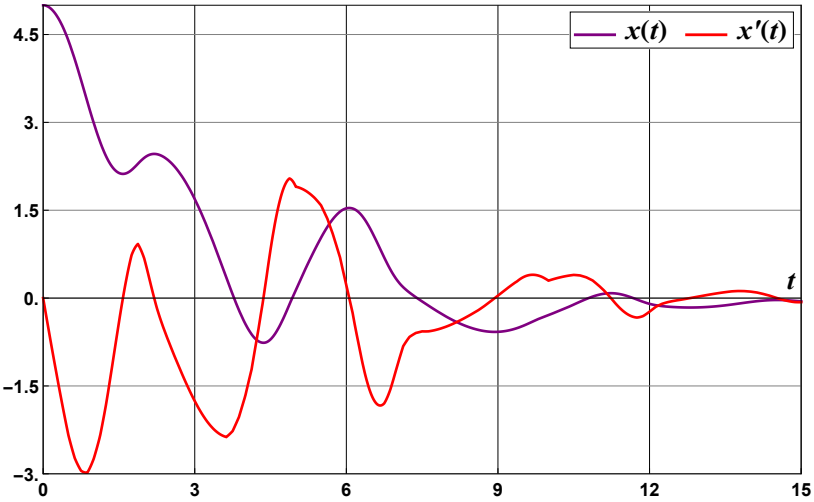


Рис. 1.2.18

Пример 1.2.11. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка с двумя переменными запаздываниями:

$$\begin{gathered} x''(t) + 2\,\alpha_1\,x'(t) + 2\,\alpha_2\,x'\big(t-\tau_1(t)\big) + \\ +\gamma_1\,x(t) + \gamma_2\,x\big(t-\tau_2(t)\big) = 0, \quad t > 0, \qquad (1.2.25) \\ x'(t) = 0, \quad x''(t) = 0, \quad t \in (\bar{t}_0, 0], \quad x(\bar{t}_0) = 5, \quad x'(\bar{t}_0) = 0, \end{gathered}$$

где α_i, γ_i $(i = 1,\ 2)$ – постоянные. Рис. 1.2.18 демонстрирует поведение $x(t)$ и $x'(t)$, описываемых уравнением (1.2.25) с $\tau = 0.125$; $\alpha_1 = 0.05$; $\alpha_2 = -0.04$; $\gamma_1 = 4.0$; $\gamma_2 = -3.0$;, $\tau_1(t) = \lfloor 10\,\sin^2 2t \rfloor \cdot \tau$, $\tau_2(t) = \lfloor 10\,\sin^4 t \rfloor \cdot \tau$. ►

1.2.7. Дифференциальные уравнения в частных производных с последействием

В последние годы, наряду с ОФДУ, исходя из необходимости более полного и качественного изучения явлений природы и общества, многие

исследователи обратилось к математическим моделям в форме функционально–дифференциальных уравнений в частных производных (ФДУвЧП). Их классификация в основном сходна с приведенной выше для ОФДУ, но имеет свою специфику, связанную с наличием нескольких аргументов у искомого решения, по каждому из которых в принципе может быть отклонение.

В то же время до сих пор некоторые исследователи игнорируют эффект "запаздывания" и используют в моделях дифференциальные уравнения без учета последействия. Я. Куанг в одном из пунктов введения, озаглавленном "Небольшие запаздывания могут иметь большое влияние", к своей монографии [757] указал на опасность, которой подвергаются исследователи, если они игнорируют лаги, которые они считают небольшими. Дело в том, что существуют качественные различия между системами дифференциальных уравнений с запаздыванием и без, что делает стратегию игнорирования запаздываний рискованной. Более того, если использовать линейное приближение для члена, содержащего запаздывание, то можно установить, что решения исходного уравнения могут вести себя совершенно иначе, чем решение "аппроксимирующего" ДУвЧП, полученное заменой $u(x,t-\tau)$ через $u(x,t)-\tau\,u'_t(x,t)$ [723]. В частности, такая замена может устойчивое решение ДУвЧПсЗ превратить в неустойчивое [688].

ФДУвЧП используются при математическом моделировании многих биологических, химических и физических систем, которые характеризуются как пространственными, так и временными переменными и демонстрируют различные пространственно-временные закономерности [301, 641, 642, 1099]. Систематическое исследование таких уравнений как с непрерывным, так и с дискретным запаздыванием с точки зрения динамических систем и полугрупп началось в 70-е гг., и с тех пор достигнуты значительные успехи [496,1099]. Большинство существующих результатов по ФДУ было получено с использованием различных методов, понятий и результатов из теории полугрупп, теории динамических систем, линейного и нелинейного функционального анализа, теории дифференциальных уравнений как обыкновенных, так и в частных производных, теории обыкновенных ФДУ (ОФДУ) и др.

К настоящему времени основными процедурами анализа ФДУвЧП являются качественные методы [614, 1099], количественные же (аналитические, приближенные, приближенно-аналитические или численно-аналитические) развиты недостаточно.

Дифференциальные уравнения в частных производных с запаздыванием являются подклассом ФДУвЧП [5, 642, 744], а также подмножеством *дифференциальных уравнений в частных производных с отклоняющими-*

ся аргументами (ДУвЧПсОА), так как в эти уравнения неизвестные решения входят как функциональные аргументы. Кроме того, в ДУвЧПсЗ могут входить неизвестные функции, зависящие от лаговых переменных и/или от некоторых других характеристик решений по запаздывающим интервалам, например средних, и т.д.

Определение 1.2.1. (*Эволюционным*) *Дифференциальным уравнением в частных производных с запаздыванием* (ДУвЧПсЗ) называется уравнение, которое включает по крайней мере две независимые переменные (одну – время-подобную, вторую и далее – пространственно-подобные), неизвестную функцию и ее частные производные по этим переменным, а также представление поведения неизвестной функции и ее производных при одном или нескольких предыдущих значениях время-подобной переменной (ВПП), причем максимальный порядок производных по ВПП членов уравнения с запаздыванием меньше максимального порядка производных по ВПП членов без запаздывания.

Определение 1.2.2. Если в ДУвЧП входит входят один или несколько членов, которые представляют поведения неизвестной функции и ее производных при одном или нескольких предыдущих значениях ВПП, причем порядок производных по ВПП членов уравнения с запаздыванием равен максимальному порядку производных по ВПП членов без запаздывания, то такое уравнение называется (*эволюционным*) *дифференциальным уравнением в частных производных нейтрального типа* (ДУвЧПНТ).

ДУвЧПсЗ используются в качестве моделей в различных областях, таких как механика, физика (нелинейная оптика, электромагнетизм), биология, медицина, теория управления, климатические модели и многие другие, а описывают напряженно-деформированное состояние твердых тел, поведение материалов с памятью, кристаллизацию полимеров, производство клеток крови, динамику распространения популяций животных, изменение климата (см., например, [745, 941, 1099]). В таких моделях независимыми переменными являются время t и одна или более пространственных переменных x, которая может также представлять относительное содержание ДНК, размер клеток или уровень их созревания, а также другие величины. Решения (зависимые переменные) таких уравнений могут описывать поведение температуры, напряжения, плотности различных частиц, например клеток, бактерий, химических веществ, животных и т.д. Отметим еще модели динамики режущего инструмента при фрезеровании; распространения полезного гена в популяции; конкуренции между серой и красной белками в Британии, которая привела к снижению и последующему исчезновению красных белок, увеличения площади

поверхности листьев и побегов виноградной лозы, пораженной грибковым заболеванием под названием "мучнистая роса"; модифицированную систему Лотки–Вольтерры, описывающую диффузию хищников и жертв, причем у последних наблюдается увеличение популяции по логистическому закону [395].

К функционально-дифференциальным уравнениям в частных производных нейтрального типа (ФДУНТвЧП) [16, 320], в семейство которых входят параболические, гиперболические и другие уравнения, естественным образом приводит моделирование различных объектов (гидротурбин, ядерных реакторов, интеллектуальных контроллеров), систем (механических, экологических, управляющих с обратной связью и запаздыванием, обучающих; распределенных и нейронные сетей; линий передачи энергии без потерь), материалов (вязкоупругих, термовязоупругих, аэроупругих, с памятью), процессов (теплопередачи, горения, химической технологии) и явлений (в гидродинамике, химической кинетике, биологии, микробиологии, эпидемиологии, физиологии) и многие другие [375, 433, 603, 744, 746, 757, 1084].

Один из классов квазилинейных ФДУНТвЧП сформировался при решении задачи пространственной стабилизации связанных осцилляторов на периодической решетке [643], другой – при описании движения малой частицы в жидкости [744]. Кроме этого, ФДУвЧПНТ используются при решения задач управления уравнениями в частных производных с помощью граничных условий [845].

Область исследований по инженерными приложениями ФДУЗТ, как правило, связана с ДУвЧПсЗ. Особые значение и интерес как для теории, так и для приложений представляет взаимосвязь между пространством и временны́м запаздыванием, которая может вызвать сложное динамическое поведение и привести к непростым пространственно-временным закономерностям. Из-за трудностей при анализе даже обычных ДУвЧП без запаздываний комбинация последействия и пространственной зависимости делает анализ ДУвЧПсЗ особенно трудоемким. Но к сожалению, поведение многих механических процессов не может быть корректно описано без использования ДУвЧПсЗ, например, вязкоупругие эффекты в некоторых материалах при наличии релаксационных напряжений [766].

Когда в модели присутствует запаздывание по времени, это указывает на отложенное влияние какого-либо фактора, который тормозит динамику процесса. Например, в модели "хищник–жертва" на плотность жертв влияет охота на только взрослых членов популяции жертв, которая происходила некоторое время назад. Далее, в модели, описывающей распространение эпидемического заболевания, вирусу или бактерии тре-

буется некоторое время, прежде чем он станет зрелым и сможет атаковать какой-либо организм. Поэтому в моделях биологических систем ДУвЧП с запаздыванием более естественны для описания динамики различных частей системы, чем ДУвЧП без запаздывания [395].

Приведем примеры некоторых ДУвЧПсЗ и ДУвЧПНТ [489,514,1099].

Пример 1.2.12. *Уравнение реакции–диффузии* с запаздыванием имеет следующий вид:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \Delta\, u(x,t) + f\big(x, u(x,t-\tau)\big), \qquad x \in \mathscr{D}, \quad t \geqslant 0,$$
$$u(x,t) = 0 \ \text{ или } \ \frac{\partial u(x,t)}{\partial n} = 0, \qquad x \in \partial\mathscr{D}, \quad t \geqslant 0,$$
$$u(x,t) = \phi(x,t), \qquad x \in \mathscr{D}, \quad t \in [-\tau, 0],$$

где $\mathscr{D}$ – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей; Δ – оператор Лапласа в $\mathscr{D}$; $\frac{\partial}{\partial n}$ – производная по направлению внешней нормали к границе; ϕ – заданная функция. ►

Пример 1.2.13. Параболическое ДУвЧП с двумя запаздываниями $\tau_1 > 0$ и $\tau_2 > 0$, описывающее процесс термообработки листов металлопроката в автоматически управляемых печах, может быть записано так:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2\, \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f\big(u(x,t-\tau_1)\big) + \\ + \gamma\, \big[g\big(u(x,t-\tau_2)\big) - u(x,t)\big]. \quad (1.2.26)$$

Управляющие сигналы могут запаздывать во времени из-за наличия временных задержек при срабатывании, передаче и обработке информации. При этом начальное условие для уравнения (1.2.26) будет отличаться от начальных условия для ДУвЧП без запаздывания. ►

Пример 1.2.14. Уравнение

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \beta\, \frac{\partial \big[x\, u(x,t)\big]}{\partial x} = -\gamma\, u(x,t) + \\ + \lambda\, u(\alpha\, x, t-\tau)\, \big[1 - u(\alpha\, x, t-\tau)\big] \quad (1.2.27)$$

является гиперболическим ДУвЧП с запаздыванием $\tau > 0$ и сжатым аргументом $\alpha\, x$ $(0 < \alpha < 1)$ и описывает динамику популяции клеток, в которой происходит одновременная размножение и созревание. ►

Пример 1.2.15. Примером системы ДУвЧПсОА (или ФДУвЧП) является система

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} &= k_{11}\, u_4(2\,x,t) + k_{12}\, u_1(x,t),\\
\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} &= k_{21}\, \frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} + k_{22}\, u_2(x,t) +\\
&+ k_{23}\, \frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x} + k_{24}\, u_1(x,t) - I(x,t;\Delta),\\
\frac{\partial u_3(x,t)}{\partial t} &= I(x,t;\Delta) + k_{31}\, u_3(x,t),\\
\frac{\partial u_4(x,t)}{\partial t} &= k_{41}\, u_3(x,t) + k_{42}\, u_4(x,t),
\end{aligned} \tag{1.2.28}$$

где $x > 0$, $t > 0$,

$$I(x,t;\Delta) = \mathbb{1}(t-\Delta) \int_0^\infty h(x,y;\Delta)\, u_1(y,t-\Delta)\, dy. \tag{1.2.29}$$

Это система описывает четыре фазы, которые рассматриваются как части цикла деления раковых клеток. ►

Пример 1.2.16. Уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\big[u(t,x) - q\,u(x,t-\tau)\big] = \tag{1.2.30}$$

$$= a^2\, \frac{\partial^2}{\partial x^2}\big[u(t,x) - q\,u(x,t-\tau)\big] + f\big(u(x,t-\tau)\big) \tag{1.2.31}$$

– пример ДУвЧПНТ, которое получено при рассмотрении континуума диффузионно связанных осцилляторов, причем константа $a^2 > 0$ определяет взаимодействие между соседними осцилляторами. ►

Пример 1.2.17. Упрощенная математическая модель управляемой системы задается уравнением

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D\, \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + g\big(u(x,t-\tau)\big)\, \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + c\,\big[f\big(u(x,t-\tau)\big) - u(x,t)\big],$$

определенным при $0 < x < 1$. ►

Пример 1.2.18. Диффузионное *уравнение Николсона*

$$\frac{\partial u(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} = D\,\Delta u(\boldsymbol{x},t) - \tau\, u(\boldsymbol{x},t) + \beta\,\tau\, u(\boldsymbol{x},t-\tau)\, \exp\big[-u(\boldsymbol{x},t-\tau)\big]$$

описывает динамику размножения австралийских овечьих мух с учетом изменений в пространстве и возрасте. ▶

Для получения частных решений ДУвЧПсЗА дополняются различными начальными и граничными условиями. Например, квазилинейное уравнение (1.2.26) может решаться при

$$u(t,x) = u^0(x,t), \quad -\max\{\tau_1,\tau_2\} \leqslant t \leqslant 0, \quad 0 < x < 1, \tag{1.2.32}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{1.2.33}$$

где u^0 – известная начальная функция.

Для уравнения (1.2.27) допустимы следующие начально–краевые условия:

$$u(t,x) = \varphi(x), \quad -\tau \leqslant t \leqslant 0, \quad 0 < x < 1, \quad u(0,t) = \psi(t), \quad t \geqslant 0, \tag{1.2.34}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(t)$ – известные функции.

Начальные и краевые условия для уравнения (1.3.54) можно задать так:

$$u(t,x) = u^0(x,t), \quad -\tau \leqslant t \leqslant 0, \quad 0 < x < \pi, \tag{1.2.35}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t \geqslant 0. \tag{1.2.36}$$

В соответствии с экспериментальными данными уравнения (1.2.28), (1.2.29) дополняются следующими начальными:

$$u_1(x,0) = \frac{a_0}{\sqrt{2\,\pi}\,\theta_0}\,\exp\Big[-\frac{(x-1)^2}{2\,\theta_0^2}\Big], \quad 0 < x < +\infty, \tag{1.2.37}$$

$$u_2(x,0) = 0, \quad u_3(x,0) = 0, \quad u_4(x,0) = 0, \qquad 0 < x < +\infty \tag{1.2.38}$$

и граничным условием:

$$k_{21}\,\frac{\partial u_2(0,t)}{\partial x} + k_{23}\,u_2(0,t) = 0, \quad t > 0. \tag{1.2.39}$$

1.2.8. (Эволюционные) Дифференциально-разностные уравнения в частных производных

Достаточно общую форму систем таких уравнений с соответствующими краевыми условиями можно представить так:

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} = \mathbb{f}\big[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}'_x(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}''_{xx}(\boldsymbol{x},t), ..., \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau), \boldsymbol{u}'_x(\boldsymbol{x},t-\tau), \boldsymbol{u}''_{xx}(\boldsymbol{x},t-\tau), ..., t\big], \quad (1.2.40)$$

где t – время ($t_0 < t \leqslant T < +\infty$), τ – постоянное запаздывание по времени (уравнения с отклонениями аргумента по пространственным переменным ниже не рассматриваются), $\boldsymbol{x} \in \mathscr{D} \subset \mathbb{R}^n$ – вектор пространственных переменных, $\mathbb{f}$ – линейная или нелинейная функция своих аргументов, $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^d$ –решение системы (1.2.40), являющееся векторной функцией переменных t и $\boldsymbol{x}$. Начальное условие задается следующим образом:

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{x},t), \qquad t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0, \quad \boldsymbol{x} \in \mathscr{D} \subset \mathbb{R}^n, \quad (1.2.41)$$

причем $\boldsymbol{u}^0 \in \mathbb{R}^d$ – известная векторная функция переменных t и $\boldsymbol{x}$.

Примерами *дифференциально-разностных уравнений в частных производных* (ДРУвЧП) являются:

– уравнение свободных колебаний однородной струны, на которую действует с запаздыванием упругая восстанавливающая сила:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + b^2 \frac{\partial^2 u(x,t-\tau)}{\partial x^2}; \quad (1.2.42)$$

– простейшее уравнение диффузии с запаздыванием

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + b^2 \frac{\partial^2 u(x,t-\tau)}{\partial x^2} \quad (1.2.43)$$

и др.

К классу дифференциальных уравнений в частных производных с постоянным запаздыванием τ (ДУвЧПсЗ), в т.ч., рассматриваемых ниже, относятся уравнения реакции–диффузии, фронта распространения волн, динамики популяций [1099], обратной связи, горения в печи, передачи тепла в материалах с памятью, окисления оксида углерода, химических и биохимических реакций; изменения климата, динамической метеорологии, экономики; экологии; адвекции–диффузии (роение насекомых, образование косяков рыб), поступления воды с запаздыванием (конвективный член в уравнении Бюргерса), пространственных диффузионных моделей Лотки–Вольтерры взаимодействия видов, взросления и деления клеток, диффузионной модели с ограниченностью объема пищи в биологии и др. К рассматриваемому классу относятся обобщенные формы известных уравнений Фишера (логистического или Колмогорова–Петровского–Пискунова) и Хатчисона динамики популяций с диффузией, транспортного уравнения первого порядка с запаздыванием, которое описывает динамику размера сообщества, и др.

Запаздывание в подобных уравнениях появляется естественным образом, например, в биологии это время регенерации ресурсов, взросления, вскармливания, реакции на раздражение и др.

Разработка теории ДРУвЧП началась в середине прошлого века, а систематическое изучение таких уравнений – только в 70-х гг. прошлого века. Одними из первых в области доказательства теорем существования были работы И.М. Гуля [319], который, в частности, а) доказал существование и единственность решения задачи Коши для системы ДРУвЧП в случаях, когда ДРУвЧП может быть сведено к ДУвЧП без запаздывания; б) рассмотрел вопросы о возможности продолжения решений; в) доказал применимость метода характеристик для некоторого класса уравнений первого порядка.

Качественная теория таких уравнений в общем виде достаточно хорошо разработана (см., например, работы [614, 1099] и ссылки в них). В работах, посвященных ДУвЧП, обычно рассматриваются вопросы существования, единственности и глобальной устойчивости. Как правило, уравнение переписывается как задача линейной эволюции в банаховом пространстве, а результаты формулируются в терминах сильно непрерывной полугруппы ограниченных линейных операторов.

При анализе ДУвЧПсЗ решаются задачи расчета нормальных форм [558], динамики, оценки устойчивости/неустойчивости, анализа бифуркаций устойчивых состояний, существования, ограниченности, единственности и осцилляции решений и др. Так, для качественного исследования ДУвЧПсЗ применяют групповой [1023] и полугрупповой [397] анализ. Например, в работе [841] выполнено построение полной групповой классификации уравнения реакции–диффузии с запаздыванием, а также построены инвариантные решения этого уравнения

Число известных точных решений таких уравнений невелико. Поэтому важным направлением исследований является поиск новых точных решений ДРУвЧП. Обзор имеющихся методов и новые схемы поиска таких решений представлены в работах А.Д. Полянина и А.И. Журова [910–916].

Наиболее часто применяемыми приближенно-аналитическими методами анализа ФДУвЧПЗТ и ФДУвЧПНТ являются методы последовательных приближений, шагов и разложения решения в ряд по собственным функциям [88, 165, 320, 744].

Как известно, для решения линейных однородных краевых задач математической физики возможно применение метода разделения переменных и разложения решения в ряд по собственным функциям. Такая же процедура приложима и к ДУвЧПсЗ с постоянным запаздывающим аргументом [320]. Например, для случая $n = d = 1$ и начального усло-

вия $u(x,t) = u^0(x,t)$ при $t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0$ представим $u(x,t)$ в виде $u(x,t) = X(x)\,T(t)$.

Далее разделяя переменные (в предположении, что это возможно), для определения $X(x)$ получим обычную задачу Штурма–Лиувилля без запаздывания, а для нахождения $T(t)$ – линейное однородное обыкновенное дифференциальное уравнение первого или второго порядка с запаздывающим аргументом типа

$$\mathbb{L}\big[T(t), T(t-\lambda), \lambda\big] = 0. \tag{1.2.44}$$

Представим решение начально-краевой задачи в виде разложения по собственным функциям $X_k(x)$, соответствующим собственным значениям λ_k задачи Штурма–Лиувилля,

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t)\, X_k(x) \tag{1.2.45}$$

и определим коэффициенты Фурье $u_k^0(t)$ функции $u^0(x,t)$ на начальном множестве из условия

$$u^0(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k^0(t)\, X_k(x). \tag{1.2.46}$$

Зная эти коэффициенты, можно найти решения $T_k(t)$ при $t > t_0$ уравнения (1.2.44), соответствующие собственным числам $\lambda = \lambda_k$ и начальной функции $T_k(t) = u_k^0(t)$ на начальном множестве.

Очевидно, что этот метод может быть применен и в случае бóльшего числа независимых переменных.

1.2.9. Приближенные методы для ДУвЧПсОА

Для исследования различных процессов, математическими моделями которых являются ДУвЧПсЗ, используются разнообразные методы. Но, как и в других областях науки, аналитические решения прикладных уравнений такого типа редки. Поэтому основной интерес в этой области обращен на приближенные методы поиска решений.

Такие методы можно разделить на два основных класса :

1) схемы прямого интегрирования ДУвЧПсЗ и ДУвЧПНТ (явные и неявные варианты конечно-разностных методов [180, 335, 723], включая многосеточные [1044]; метод перекрытия Шварца [1039]; асимптотические методы [36, 295, 296, 573]; метод ренормализации [613]; методы волновой релаксации [1044], подобные итерационным процедурам Пикара и

Гаусса–Зейделя; неявная сеточная схема с кусочно-постоянной интерполяцией [180]; разностная схема, использующая метод дробных шагов, имеющая четвертый порядок точности как во временно́й, так и в пространственным переменным, в сочетании с методами экстраполяции по Ричардсону для линейных и нелинейных задач и использованием различных линеаризованных разностных схем [1134, 1135]; многошаговая конечно-разностная схема по времени и пространству порядка $O(\tau^2 + h^4)$ [1136]; сочетание классических центральных разностей второго порядка для аппроксимации оператора диффузии, линейной интерполяция для аппроксимации члена с запаздыванием и формула обратного дифференцирования второго порядка для дискретизации производной по времени [675]; метод, включающий Фурье-псевдоспектральную полудискретизацию по пространству и явно-неявную адаптивную операторную схему во времени [329]; схема на основе идеи разделения текущего состояния и функции-предыстории [182]; аналог метода переменных направлений [126]; разностные схемы с нелинейной предысторией [181]; дискретизация с помощью центральных разностей по пространству и применение θ-метода по времени [1098]; спектральный метод с коллокациями по Чебышёву в пространственно-временн'ой области [519]; аналоги алгоритмов схем с весами; схема с сеткой, в которой шаг по времени непропорционален запаздыванию; подход к численному решению ДРУвЧП как к непрерывному методу и построение аналога неявного метода трапеций [1027] и др.;

2) приближенные алгоритмы, сводящие задачу решения ДУвЧПсЗ к интегрированию конечной системы ОДУсЗ (спектральные [1088] и псевдоспектральные [431] схемы, в т.ч., на основе метода Галеркина [990]; различные процедуры метода прямых [180,1044]; методы предиктор–корректор [1042] и коллокаций [699]) и др.

Методы конечных разностей (МКР) являются наиболее часто применяемыми явными и неявными (Кранка–Николсона и Рихтмайера) численными схемами для процесса полудискретизации ДУвЧПсОА [651,1042, 1149] в процессе численного решения начально-краевых задач. Весьма популярны метод конечных элементов (МКЭ) [73] и (псевдо)спектральные методы (ПСМ) [456]. Например, МКЭ Галеркина был применен для решения уравнения (1.2.27) в работе [940]. Заметим, что в ряде публикаций (см. например [699]) показано, что ошибки псевдоспектральных методов при решении ДУвЧПсЗ убывают с экспоненциальной скоростью, причем точность МКР и МКЭ серьезно проигрывает точности ПСМ.

В процессе разработки численных методов для ДУвЧПсЗ возникают дополнительные трудности, которые отсутствуют при решении ДУвЧП без запаздываний [1148]. Например, из-за наличия двух запаздываний

в уравнении (1.2.26) ранее вычисленные приближения $u(\xi,\theta)$ для всех ξ и $\bar{t} \leqslant \max(\tau_1,\tau_2) \leqslant \theta \leqslant \bar{t}$ должны храниться так, чтобы следующие аппроксимации можно было вычислить приближения для $t \geqslant \bar{t}$. Вследствие того, что преобразованные значения пространственной переменной в (1.2.27) не могут быть включены в пространственную сетку, то для $u(\alpha\, x,t)$ должны быть построены дополнительные аппроксимации. Интегралы в (1.3.54) должны быть приближенно вычислены для всех точек сетки в (x,t)-области. Бесконечную область интегрирования в (1.2.29), используя структуру ядра h, нужно декомпозировать так, чтобы бесконечные интегралы можно аппроксимировать суммой интегралов по конечным интервалам. К сожалению, как правило, указанные выше алгоритмы наряду с погрешностью дискретизации вносят дополнительную ошибку интерполяции при вычислении значений решения в точке $t-\tau$.

Устойчивость численных методов играет важную роль в приближенном решении начальных задач. В прошлом большая часть работы по анализу асимптотической устойчивости ОФДУЗТ и ОФДУНТ касалась нахождения области устойчивости независимо от величины запаздывания [1102]. Но в последние годы были получены важные результаты по стабильности в зависимости значения лага, например, была проанализирована устойчивость BDF- и θ-методов для линейных ОФДУНТ [1102]. Недавно внимание нескольких авторов привлекли проблемы численного решения ФДУвЧП [672, 1147, 1149], но хотя их результаты напрямую не относятся к исследованию ФДУНТвЧП, алгоритмы интегрирования уравнений обоих классов сходны.

Наиболее часто применяемые численные методы для ДУвЧПсЗ состоят из двух последовательных шагов:

– дискретизация по пространственным переменным;

– интегрирование по t.

Рассмотрим ДУвЧПсЗ параболического типа:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \\ + \mathbb{F}\big[x,t,u(x,t),u'_x(x,t),u(x,t-\tau),u'_x(x,t-\tau)\big], \quad (1.2.47)$$

где $x \in (0,L)$; $0 < t \leqslant T < +\infty$; $\tau > 0$ – постоянное запаздывание; $u(x,t)$ – неизвестная функция. Пусть заданы начальные и граничные условия:

$$u(x,t) = u_0(x,t), \quad x \in [0,L], \quad t \in [-\tau,0], \quad (1.2.48)$$

$$u(0,t) = h_0(t), \quad u(L,t) = h_L(t), \quad t \in (0,T]. \quad (1.2.49)$$

Предположим, что функции $u_0(x,t)$, $h_0(t)$, $h_L(t)$ и функционал $\mathbb{F}$ таковы, что эта задача имеет единственное решение $u(x,t)$, понимаемое в классическом смысле. Отметим, что вопросы существования и единственности подобных задач рассматривались в [1099].

1°. Метод прямых

Разобьем отрезок изменения пространственной переменной $[0, L]$ на части с шагом $h = L/N$ и определим сетку, состоящую из точек $x_i = i\,h$, $i = 0, 1, ..., N$.

Аппроксимации функций $u(x_i, t)$ на сетке будем обозначать через $u_i(t)$. Тогда применяя формулу аппроксимации по трем узлам на середину для второй производной по x и центральную разностную схему для первой при $i = 1, 2, ..., N-1$, получаем систему ОДУсЗ вида:

$$\dot{u}_i(t) = \frac{a^2}{h^2}\left[u_{i-1}(t) - 2\,u_i(t) + u_{i+1}(t)\right] + \mathbb{F}_i\Big[t, u_i(t), \frac{u_{i+1}(t) - u_{i-1}(t)}{2\,h}, u_i(t-\tau), \frac{u_{i+1}(t-\tau) - u_{i-1}(t-\tau)}{2\,h}\Big] \quad (1.2.50)$$

с начальными и граничными условиями

$$u_i(t) = u_0(x_i, t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad (1.2.51)$$

$$u_0(t) = h_0(t), \quad u_N(t) = h_L(t), \quad t \in (0, T]. \quad (1.2.52)$$

Поскольку на этом этапе t является непрерывной переменной, то такие системы, как (1.2.50)–(1.2.52), называются *полудискретными системами*, а первый шаг называется процессом *полудискретизации*.

Отметим, что приведенная выше разностная схема для второй производной по x неединственна. Так в методе, представленном в работе [395] и являющемся специальной формой метода прямых, отличается от стандартного способ аппроксимации второй производной по пространству, а именно, в соответствующей формуле знаменатель равен не квадрату шага сетки h, а квадрату функции $\sin(\rho\,h)/\rho$, где ρ зависит от коэффициентов параболических ДУвЧПсЗ, образующих модель.

Несложно видеть, что уравнения (1.2.50) и условия (1.2.51), (1.2.52) представляют собой стандартную задачу Коши для системы ОДУ с постоянным запаздыванием, численные методы решения которой в настоящее время хорошо разработаны (см., например, работы [89,311,376,384,407] и др.).

Как показывают тестовые задачи, при применении явных схем жесткость систем типа (1.2.50) приводит к необходимости уменьшения шага

численного интегрирования, а слишком мелкий шаг вследствие "лишних" вычислений значений правых частей уравнений ведет к накоплению погрешности и неустойчивости метода. Этого можно избежать, решая задачу (1.2.50)–(1.2.52) специальными полуявными или чисто неявными методами, предназначенными для решения жестких систем, например, методами Гира, Розенброка, неявными методами Эйлера, Рунге–Кутты, диагонально неявными методами Рунге–Кутты [84, 300, 311, 407, 598] и др.

Кроме того, дополнительную сложность при решении таких систем с автоматическим выбором шага уравнений вносит обычная для ОДУсЗ необходимость достаточно точной интерполяции прошлых по времени значений решения, которые соответствуют точкам переменной t, не вошедшим во временную сетку.

2°. Неявная конечно-разностная схема

Дополнительно к пункту **1°** разобьем отрезок изменения временной переменной $[-\tau, T]$ на части с шагом $\Delta t = \tau/K$, $K \in \mathbb{Z}$. Считая, что $T \geqslant \geqslant M\tau$, где M – целое число, введем точки $t_\ell = \ell\,\Delta t$, $\ell = -K, ..., -1, 0, 1, ..., K \cdot M$, и обозначим приближения функций $u(x_i, t_\ell)$ в узлах через $u_{i\ell}$.

Тогда полностью неявную конечно-разностную схему можно представить так:

$$\frac{u_{i,\ell+1} - u_{i\ell}}{\Delta t} = \frac{a^2}{h^2}\left[u_{i-1,\ell+1} - 2\,u_{i,\ell+1} + u_{i+1,\ell+1}\right] + \\ + \mathbb{F}_i\Big[t, u_{i,\ell+1}, \frac{u_{i+1,\ell+1} - u_{i-1,\ell+1}}{2\,h}, u_{i,\ell+1-K}, \frac{u_{i+1,\ell+1-K} - u_{i-1,\ell+1-K}}{2\,h}\Big], \\ i = 1, 2, ..., N-1, \quad \ell = 0, 1, ..., K\,M - 1 \qquad (1.2.53)$$

с начальными и граничными условиями

$$u_{i\ell} = u_0(x_i, t_\ell), \quad i = 0, 1, ..., N, \quad \ell = -K, ..., -1, 0; \qquad (1.2.54)$$

$$u_{0\ell} = h_0(t_\ell), \quad u_{N\ell} = h_L(t_\ell), \quad \ell = 1, 2, ..., K\,M. \qquad (1.2.55)$$

При условии выполнения условий Липшица по аргументам $u(x,t)$, $u'_x(x,t)$, $u(x, t-\tau)$, $u'_x(x, t-\tau)$ функционала $\mathbb{F}$ метод (1.2.53)–(1.2.55) сходится с порядком $h^2 + \Delta t$. ▶

1.2.10. Схема расширения пространства состояний для ДУвЧПсЗ

Выше был рассмотрен ряд приближенных методов решения ДУвЧП с запаздыванием. К сожалению, как правило, указанные выше алгоритмы

наряду с погрешностью дискретизации вносят дополнительную ошибку интерполяции при вычислении значений решения в точке $t-\tau$. Наша схема анализа ДУвЧПсЗ [216,240], как и ОДУсЗ, ОДУНТ и соответствующих стохастических систем [191, 215, 814], базируется на комбинации классического метода шагов и расширении пространства состояний и позволяет рассматривать процедуры анализа различных форм ФДУ с одной точки зрения. При этом в большинстве вариантов схемы ошибка метода отсутствует. Кроме того, исчезают многие проблемы, возникающие при реализации процедур прямого численного интегрирования ДУвЧП с запаздыванием.

Достаточно общую форму систем ДУвЧП с постоянным запаздыванием (*дифференциально-разностных уравнений в частных производных*) и соответствующими краевыми условиями можно представить так:

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} = \mathbb{F}\big[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau), \boldsymbol{x}, t\big], \quad \boldsymbol{x} \in \mathscr{D}, \quad t_1 < t \leqslant T, \quad (1.2.56)$$

с краевыми условиями (если область $\mathscr{D}$ ограничена)

$$\mathbb{G}\big[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau), \boldsymbol{x}, t\big] = \boldsymbol{O}, \quad \boldsymbol{x} \in \partial\mathscr{D}, \quad t_1 < t \leqslant T, \quad (1.2.57)$$

где t – время ($t_1 = t_0 + \tau < t \leqslant T < +\infty$); τ – постоянное запаздывание; $\boldsymbol{x} = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \in \mathscr{D} \subset \mathbb{R}^n$ – вектор-строка пространственных переменных; $\mathscr{D}$ – открытая ограниченная или неограниченная область; $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = \{u_\ell(\boldsymbol{x},t)\} : \mathscr{D} \times (t_1, T] \to \mathscr{U} \subset \mathscr{C}^d$ – неизвестное векторное поле; $\mathbb{F}$ и $\mathbb{G}$ – линейные или нелинейные непрерывные операторы, имеющие следующую структуру:

$$\mathbb{F}\big[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau), t\big] = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau), \boldsymbol{u}'_x(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}'_x(\boldsymbol{x},t-\tau), \boldsymbol{u}''_{xx}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}''_{xx}(\boldsymbol{x},t-\tau), ..., \boldsymbol{x}, t\big), \quad (1.2.58)$$

$$\mathbb{G}\big[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau), t\big] = \boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau), \boldsymbol{u}'_x(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}'_x(\boldsymbol{x},t-\tau), \boldsymbol{u}''_{xx}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}''_{xx}(\boldsymbol{x},t-\tau), ..., \boldsymbol{x}, t\big); \quad (1.2.59)$$

индекс x обозначает производные по соответствующим (векторным) переменным; $\boldsymbol{f}(\cdot,\cdot,...) = \{f_i(\cdot,\cdot,...)\}^\intercal$ и $\boldsymbol{g}(\cdot,\cdot,...) = \{f_i(\cdot,\cdot,...)\}^\intercal$ – известные непрерывные векторные функции своих аргументов; $d = \{1, d_1, d_2, ..., d_n\}$ – мультииндекс, определяющий максимальные порядки частных производных по t, x_1, x_2, ..., x_n, входящих в уравнения и краевые условия.

Предположим, что на полуинтервале $(t_0, t_1]$ поле $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = \{u_\ell(\boldsymbol{x}, t)\} : \mathscr{D} \times (t_0, t_1] \to \mathscr{U} \subset \mathscr{C}^d$ удовлетворяет системе ДУвЧП в форме:

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} = \mathbb{F}_0\big[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t), \boldsymbol{x}, t\big], \tag{1.2.60}$$

$$\mathbb{F}_0\big[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t), \boldsymbol{x}, t\big] = \boldsymbol{f}_0\big(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t), \boldsymbol{u}'_x(\boldsymbol{x}, t), \boldsymbol{u}''_{xx}(\boldsymbol{x}, t), ..., \boldsymbol{x}, t\big), \tag{1.2.61}$$

а также начальным

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t_0) = \boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathscr{D}, \tag{1.2.62}$$

и краевым

$$\mathbb{G}_0\big[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t), \boldsymbol{x}, t\big] = \boldsymbol{O}, \quad \boldsymbol{x} \in \partial\mathscr{D}, \tag{1.2.63}$$

$$\mathbb{G}_0\big[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t), \boldsymbol{x}, t\big] = \boldsymbol{g}_0\big(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t), \boldsymbol{u}'_x(\boldsymbol{x}, t), \boldsymbol{u}''_{xx}(\boldsymbol{x}, t), ..., \boldsymbol{x}, t\big) \tag{1.2.64}$$

(в случае ограниченной области) условиям, где $\boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{x}) = \{u^0_\ell(\boldsymbol{x})\} : \mathscr{D} \to \mathscr{U}_0 \subset \mathscr{C}^{\bar{d}}$ – заданное векторное поле ($\bar{d} = \{d_1, d_2, ..., d_n\}$); $\mathbb{F}_0$ и $\mathbb{G}_0$ – непрерывные операторы; $\boldsymbol{f}_0(\cdot, \cdot, ...) = \{f_{0i}(\cdot, \cdot, ...)\}^\intercal$ и $\boldsymbol{g}_0(\cdot, \cdot, ...) = \{g_{0i}(\cdot, \cdot, ...)\}^\intercal$ – известные непрерывные векторные функции своих аргументов.

Пусть структура функций $\boldsymbol{u}^0$, $\boldsymbol{f}_0$, $\boldsymbol{g}_0$, $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$ такова, что задача (1.2.56)–(1.2.64) имеет решение и при том единственное. Тогда цель исследования будет состоять в изучении поведения векторного поля $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$, описываемого уравнениями (1.2.56)–(1.2.64) на основе приближенно-аналитических процедур.

Схема, используемая далее, сходна с примененными выше для анализа различных обыкновенных дифференциальных систем с сосредоточенными параметрами и постоянным запаздыванием (запаздываниями) и состоит в следующем. Для того чтобы исследовать изменения поля $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ при значениях времени $t > t_0$ посредством преобразования векторного поля, удовлетворяющего уравнениям с запаздываниями, в цепочку управляющих уравнений без запаздывания, расширим пространство состояний. Для реализации этой процедуры введем следующие переменные и обозначения:

$$s \in [0, \tau], \quad t_q = t_0 + q \cdot \tau, \quad q = 0, 1, 2, ..., N, N+1, \quad t_{N+1} \geqslant T,$$

$$\boldsymbol{u}_q(\boldsymbol{x}, s) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, s_q), \quad s_q = s + t_q, \quad \Delta_q = (t_q, t_{q+1}], \quad \overline{\Delta}_q = [t_q, t_{q+1}],$$

$$\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}, 0) = \boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{u}_q(\boldsymbol{x}, 0) = \boldsymbol{u}_{q-1}(\boldsymbol{x}, \tau),$$

а затем рассмотрим последовательность полуотрезков Δ_q.

0°. Начнем с Δ_0. Определенная на этом полуинтервале векторная функция $\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},s)$ удовлетворяет системе (штрихом здесь и далее обозначена производная по переменной s)

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},s)}{\partial s} = \mathbb{F}_0\big[\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},s),\boldsymbol{x},s_0\big], \quad \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},0) = \boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}\in\mathscr{D},$$
$$\mathbb{G}_0\big[\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},s),\boldsymbol{x},s_0\big] = \boldsymbol{O}, \quad \boldsymbol{x}\in\partial\mathscr{D}.$$

1°. Проанализируем поведение системы на отрезках Δ_0 и Δ_1. ДУвЧП для вычисления векторных полей $\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},s)$ и $\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x},s)$ можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},s)}{\partial s} = \mathbb{F}_0\big[\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},s),\boldsymbol{x},s_0\big], \quad \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},0) = \boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}\in\mathscr{D},$$
$$\mathbb{G}_0\big[\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},s),\boldsymbol{x},s_0\big] = \boldsymbol{O}, \quad \boldsymbol{x}\in\partial\mathscr{D};$$
$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x},s)}{\partial s} = \mathbb{F}\big[\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x},s),\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},s),\boldsymbol{x},s_1\big], \quad \boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x},0) = \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},\tau), \quad \boldsymbol{x}\in\mathscr{D},$$
$$\mathbb{G}\big[\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x},s),\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},s),\boldsymbol{x},s_1\big] = \boldsymbol{O}, \quad \boldsymbol{x}\in\partial\mathscr{D}.$$

... ...

N°. Рассмотрим полусегменты Δ_0, Δ_1, ..., Δ_N. Построим систему уравнений для векторов $\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},s)$, $\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x},s)$, ..., $\boldsymbol{u}_N(\boldsymbol{x},s)$ в виде

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},s)}{\partial s} = \mathbb{F}_0\big[\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},s),\boldsymbol{x},s_0\big], \quad \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},0) = \boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}\in\mathscr{D},$$
$$\mathbb{G}_0\big[\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},s),\boldsymbol{x},s_0\big] = \boldsymbol{O}, \quad \boldsymbol{x}\in\partial\mathscr{D};$$
$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x},s)}{\partial s} = \mathbb{F}\big[\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x},s),\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},s),\boldsymbol{x},s_1\big], \quad \boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x},0) = \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},\tau), \quad \boldsymbol{x}\in\mathscr{D},$$
$$\mathbb{G}\big[\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x},s),\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},s),\boldsymbol{x},s_1\big] = \boldsymbol{O}, \quad \boldsymbol{x}\in\partial\mathscr{D};$$
... ...
$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_N(\boldsymbol{x},s)}{\partial s} = \mathbb{F}\big[\boldsymbol{u}_N(\boldsymbol{x},s),\boldsymbol{u}_{N-1}(\boldsymbol{x},s),\boldsymbol{x},s_N\big], \ \boldsymbol{u}_N(\boldsymbol{x},0) = \boldsymbol{u}_{N-1}(\boldsymbol{x},\tau), \ \boldsymbol{x}\in\mathscr{D},$$
$$\mathbb{G}\big[\boldsymbol{u}_N(\boldsymbol{x},s),\boldsymbol{u}_{N-1}(\boldsymbol{x},s),\boldsymbol{x},s_N\big] = \boldsymbol{O}, \quad \boldsymbol{x}\in\partial\mathscr{D}.$$

Итак, исходная начально-краевая задача для ДРУвЧП сведена к серии начально-краевых задач для систем ДУвЧП без запаздывания для цепочки векторных полей состояний увеличивающейся размерности. При

этом исследование поведения системы будет состоять в последовательном приближенном аналитическом и/или численном интегрировании уравнений на отрезке $[0,\tau]$ (шаги $\mathbf{0}^\circ$–$\mathbf{N}^\circ$), включая смену системы уравнений и доопределение недостающих для очередного шага начальных условий с помощью терминальных значений для предыдущего.

Для реализации данной процедуры в рамках одного шага, исходя из конкретной задачи (вида уравнений, области и заданных начально-краевых условий) можно воспользоваться наиболее пригодным или удобным методом. Далее в примерах для решения соответствующих ДУвЧП в среде ПКА `Mathematica` использовалась функция `NDSolve` с опцией `MethodOfLines`, определяющая применение метода прямых [114] с пространственной дискретизацией.

Пример 1.2.19. В качестве первого примера рассмотрим обобщенное *уравнение Бюргерса* с запаздыванием [878]:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \alpha\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\,u(x,t-\tau)\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \beta\,u(x,t),$$

$$0 < x < 2\,\pi, \quad 0 < t \leqslant 1{,}5;$$

$$u(x,t) = \sin x - \sin 2\,x + \frac{1}{2}\,\sin 4\,x, \quad -\tau \leqslant t \leqslant 0;$$

$$u(0,t) = u(2\,\pi,t), \quad t \geqslant -\tau.$$

3D-график функции $u(x,t)$, рассчитанной при $\alpha = 0.25$, $\beta = 0.2$ и $\tau = 0.25$, приведен на рис. 1.2.19, а соответствующие линии уровня – на рис. 1.2.20. ▶

Пример 1.2.20. Следующий пример посвящен анализу поведения решения *уравнения реакции–диффузии* (или логистического уравнения) с запаздыванием [1100]:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \alpha\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \beta\,u(x,t)\,\bigl[1 - u(x,t-\tau)\bigr],$$

$$0 < x < 1, \quad 0 < t \leqslant 3.5;$$

$$u(x,t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant 0.5, \\ 0, & 0{,}5 < x \leqslant 1, \end{cases} \quad -\tau \leqslant t \leqslant 0;$$

$$u(0,t) = 1, \quad u(1,t) = 0, \quad t \geqslant -\tau,$$

описывающего, кроме всего прочего, и распространение волн в жидкости (гидродинамика), насекомых некоторого вида в пространстве и времени (биология), благоприятных генов в живых организмах (генетика) и др.

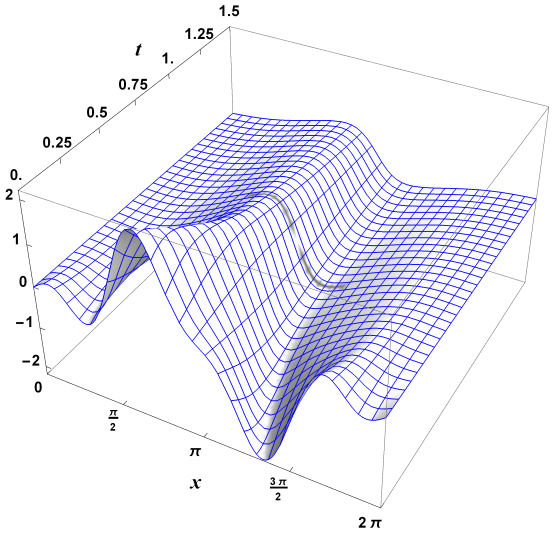


Рис. 1.2.19

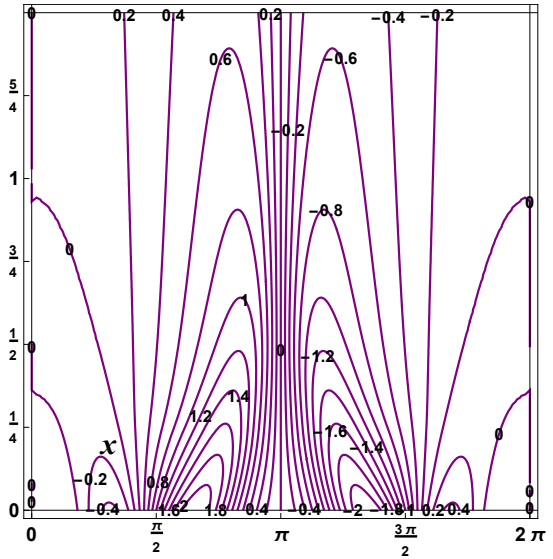


Рис. 1.2.20

3D-визуализация поведения функции $u(x,t)$, которое моделировалось при $\alpha = 0.125$, $\beta = 4$ и $\tau = 0.5$, приведена на рис. 1.2.21, а соответствующие линии уровня – на рис. 1.2.22. ▶

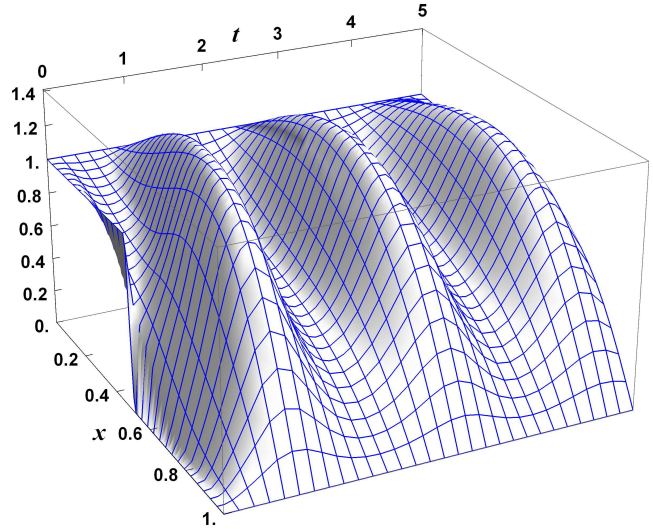


Рис. 1.2.21

Пример 1.2.21. Обратим теперь внимание на процессы, описываемые системой двух ДУвЧП с постоянным запаздыванием следующего вида:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \alpha_1 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \gamma\, u(x,t)\,\bigl[1 - u(x,t) - \beta_1\, v(x,t-\tau)\bigr],$$

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = \alpha_2 \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} - \beta_2\, u(x,t)\, v(x,t),$$

$$0 < x < 1, \quad t > 0;$$

$$u(x,t) = 1 + 0.5\,\sin 2\,\pi\, x - 0.25\,\sin 5\,\pi\, x,$$

$$v(x,t) = 2 - 0.5\,\sin 4\,\pi\, x + 0.25\,\sin 7\,\pi\, x,$$

$$-\tau \leqslant t \leqslant 0;$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 1, \quad v(0,t) = v(1,t) = 2, \quad t \geqslant -\tau.$$

Как известно [1100], уравнения подобного вида возникают при исследовании реакции–диффузии двух компонент. Особый интерес они представля-

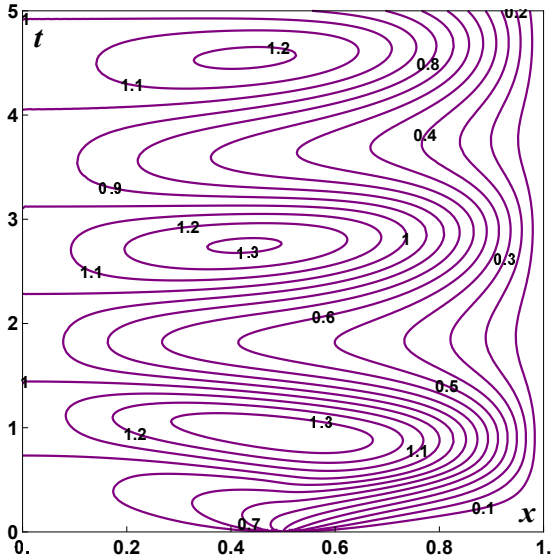


Рис. 1.2.22

ют при изучении автоколебаний в пространственной модели *реакции Белоусова–Жаботинского*. Результаты расчетов при $\alpha_1 = 1/40$, $\alpha_2 = 1/50$, $\gamma = 1/7$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 1/4$ и $\tau = 1/8$ представлены в виде графиков (3D-поверхностей и линий уровня в переменных $x - t$) на рис. 1.2.23–1.2.26. ►

Как и в случае применения сочетания метода шагов с расширением пространства состояний для анализа обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием, реализация данной схемы для исследования ДУвЧПсЗ потребовала минимальных усилий, причем время расчетов для систем, описываемых уравнениями из примеров 1.2.19–1.2.21, было порядка 1 мин на ПК с процессором, имеющим тактовую частоту 2 ГГц. ►

1.2.11. Схема расширения пространства состояний для ДУвЧПНТ

Алгоритм, описанный в предыдущем подразделе, может быть эффективно реализован на основе и любого другого современного ПКА, такого как `Maple` или `Matlab`, и использован для изучения многих типов систем с последействием, описываемых ФДУвЧП.

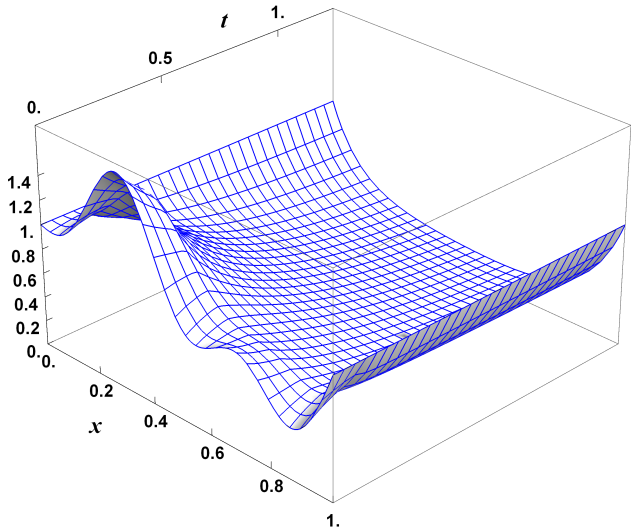


Рис. 1.2.23

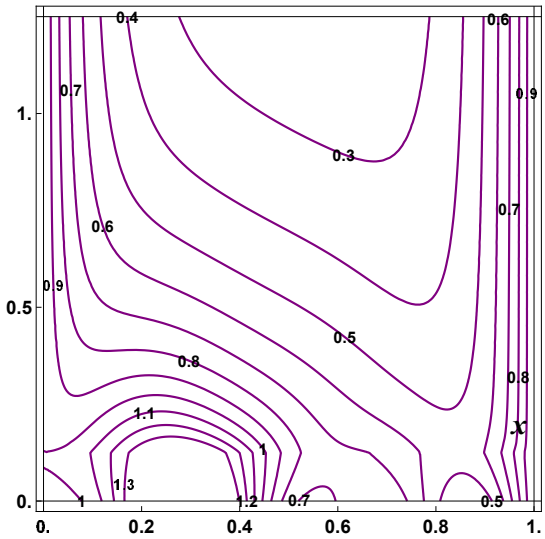


Рис. 1.2.24

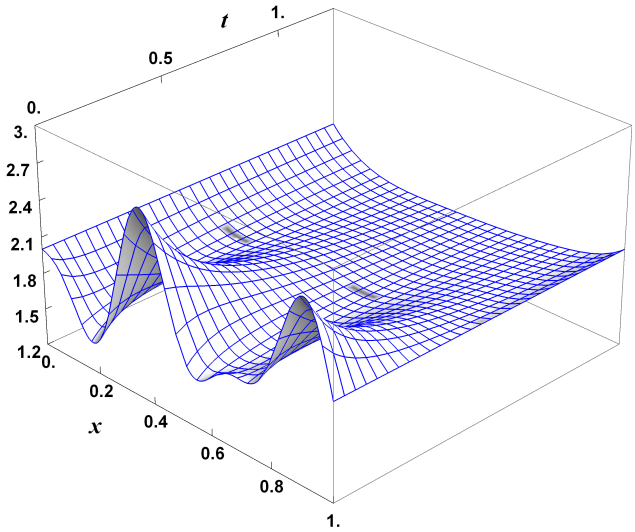


Рис. 1.2.25

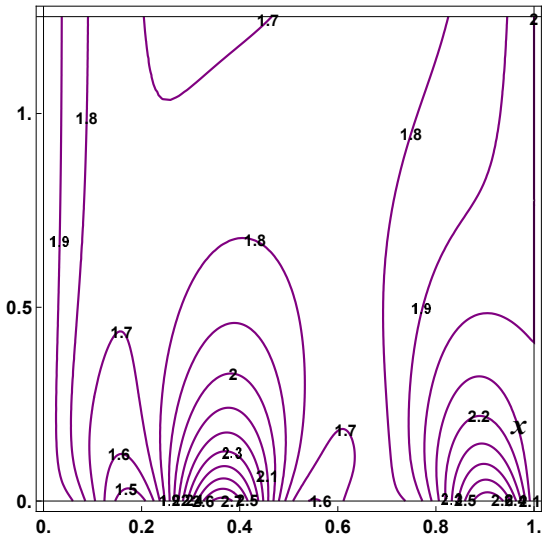


Рис. 1.2.26

Более того, рассмотренный алгоритм легко может быть модифицирован для систем ДУвЧПНТ следующего вида [241]:

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} = \mathbb{F}\big[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau), \boldsymbol{u}'_t(\boldsymbol{x},t-\tau), \boldsymbol{x}, t\big], \quad \boldsymbol{x} \in \mathscr{D}, \quad t_1 < t \leqslant T \tag{1.2.65}$$

с краевыми условиями

$$\mathbb{G}\big[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau), \boldsymbol{u}'_t(\boldsymbol{x},t-\tau), \boldsymbol{x}, t\big] = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{x} \in \partial\mathscr{D}, \quad t_1 < t \leqslant T, \tag{1.2.66}$$

где обозначения те же, что и в предыдущем подразделе, за исключением структур операторов $\mathbb{F}$ и $\mathbb{G}$:

$$\begin{gathered}
\mathbb{F}\big[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau), \boldsymbol{u}'_t(\boldsymbol{x},t-\tau), \boldsymbol{x}, t\big] = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau), \\
\boldsymbol{u}'_t(\boldsymbol{x},t-\tau), \boldsymbol{u}'_x(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}'_x(\boldsymbol{x},t-\tau), \boldsymbol{u}'_{tx}(\boldsymbol{x},t-\tau), \boldsymbol{u}''_{xx}(\boldsymbol{x},t), \\
\boldsymbol{u}''_{xx}(\boldsymbol{x},t-\tau), \boldsymbol{u}'_{txx}(\boldsymbol{x},t-\tau), ..., \boldsymbol{x}, t\big), \\
\mathbb{G}\big[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau), \boldsymbol{u}'_t(\boldsymbol{x},t-\tau), \boldsymbol{x}, t\big] = \boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau), \\
\boldsymbol{u}'_t(\boldsymbol{x},t-\tau), \boldsymbol{u}'_x(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}'_x(\boldsymbol{x},t-\tau), \boldsymbol{u}'_{tx}(\boldsymbol{x},t-\tau), \boldsymbol{u}''_{xx}(\boldsymbol{x},t), \\
\boldsymbol{u}''_{xx}(\boldsymbol{x},t-\tau), \boldsymbol{u}'_{txx}(\boldsymbol{x},t-\tau), ..., \boldsymbol{x}, t\big),
\end{gathered}$$

Предположим, что на полуинтервале $(t_0, t_1]$, неизвестное векторное поле $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ удовлетворяет следующей системе ДУвЧП:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} = \mathbb{F}_0\big[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{x}, t\big], \qquad (1.2.67) \\
\mathbb{F}_0\big[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{x}, t\big] = \boldsymbol{f}_0\big(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}'_x(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}''_{xx}(\boldsymbol{x},t), ..., \boldsymbol{x}, t\big),
\end{gathered}$$

а также начальным

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t_0) = \boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{x}) \tag{1.2.68}$$

и краевым

$$\begin{gathered}
\mathbb{G}_0\big[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t), t\big] = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{x} \in \partial\mathscr{D}, \qquad (1.2.69) \\
\mathbb{G}_0\big[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t), t\big] = \boldsymbol{g}_0\big(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}'_x(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}''_{xx}(\boldsymbol{x},t), ..., t\big)
\end{gathered}$$

(в случае ограниченной области) условиям.

Как и в предыдущем подразделе, пусть структура функций $\boldsymbol{u}^0$, $\boldsymbol{f}_0$, $\boldsymbol{g}_0$, $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$ такова, что задача (1.2.65)–(1.2.69) имеет решение и при том единственное. Тогда цель исследования будет состоять в изучении поведения векторного поля $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$, описываемого уравнениями (1.2.65)–(1.2.69) на основе приближенно-аналитических процедур.

Тем же способом, что и выше, для решения поставленной задачи построим цепочку управляющих векторным полем уравнений без запаздывания, расширив пространство состояний. Для реализации этой процедуры введем используем введенные ранее обозначения и рассмотрим последовательность полуотрезков Δ_q.

0°. Начнем с Δ_0. Определенная на этом полуинтервале векторная функция $\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},s)$ удовлетворяет системе (штрихом здесь и далее обозначена производная по переменной s)

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},s)}{\partial s} = \mathbb{F}_0\big[\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},s),\boldsymbol{x},s_0\big], \quad \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},0) = \boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}\in\mathscr{D},$$
$$\mathbb{G}_0\big[\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},s),\boldsymbol{x},s_0\big] = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{x}\in\partial\mathscr{D}.$$

1°. Проанализируем поведение системы на отрезках Δ_0 и Δ_1. ДУвЧП для вычисления векторных полей $\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},s)$ и $\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x},s)$ можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},s)}{\partial s} = \mathbb{F}_0\big[\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},s),\boldsymbol{x},s_0\big], \quad \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},0) = \boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}\in\mathscr{D},$$
$$\mathbb{G}_0\big[\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},s),\boldsymbol{x},s_0\big] = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{x}\in\partial\mathscr{D},$$
$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x},s)}{\partial s} = \mathbb{F}\big[\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x},s),\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},s),\boldsymbol{u}'_{0s}(\boldsymbol{x},s),\boldsymbol{x},s_1\big], \quad \boldsymbol{x}\in\mathscr{D},$$
$$\mathbb{G}\big[\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x},s),\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},s),\boldsymbol{u}'_{0s}(\boldsymbol{x},s),\boldsymbol{x},s_1\big] = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{x}\in\partial\mathscr{D}.$$

... ...

N°. Рассмотрим полусегменты Δ_0, Δ_1, ..., Δ_N. Построим систему уравнений для векторов $\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},s)$, $\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x},s)$, ..., $\boldsymbol{u}_N(\boldsymbol{x},s)$ в виде

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},s)}{\partial s} = \mathbb{F}_0\big[\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},s),\boldsymbol{x},s_0\big], \quad \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},0) = \boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}\in\mathscr{D},$$
$$\mathbb{G}_0\big[\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},s),\boldsymbol{x},s_0\big] = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{x}\in\partial\mathscr{D},$$
$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x},s)}{\partial s} = \mathbb{F}\big[\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x},s),\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},s),\boldsymbol{u}'_{0s}(\boldsymbol{x},s),\boldsymbol{x},s_1\big], \quad \boldsymbol{x}\in\mathscr{D},$$

$$\mathbb{G}\big[\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x},s),\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},s),\boldsymbol{u}'_{0s}(\boldsymbol{x},s),\boldsymbol{x},s_1\big]=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{x}\in\partial\mathscr{D},$$

$$\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}_N(\boldsymbol{x},s)}{\partial s}=\mathbb{F}\big[\boldsymbol{u}_N(\boldsymbol{x},s),\boldsymbol{u}_{N-1}(\boldsymbol{x},s),\boldsymbol{u}'_{N-1,s}(\boldsymbol{x},s),\boldsymbol{x},s_N\big],\quad \boldsymbol{x}\in\mathscr{D},$$

$$\mathbb{G}\big[\boldsymbol{u}_N(\boldsymbol{x},s),\boldsymbol{u}_{N-1}(\boldsymbol{x},s),\boldsymbol{u}'_{N-1,s}(\boldsymbol{x},s),\boldsymbol{x},s_1\big]=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{x}\in\partial\mathscr{D}.$$

Итак, исходная задача для ДРУвЧПНТ сведена к последовательности начально-краевых задач увеличивающейся размерности для систем ДУвЧП без запаздывания. При этом расчет полей, определяющих состояние системы, будет состоять в пошаговом приближенно-аналитическом и/или численном интегрировании уравнений на отрезке $[0,\tau]$ (шаги $\mathbf{0}^\circ$–$\mathbf{N}^\circ$) в сочетании с изменением структуры уравнений и доопределением начальных условий.

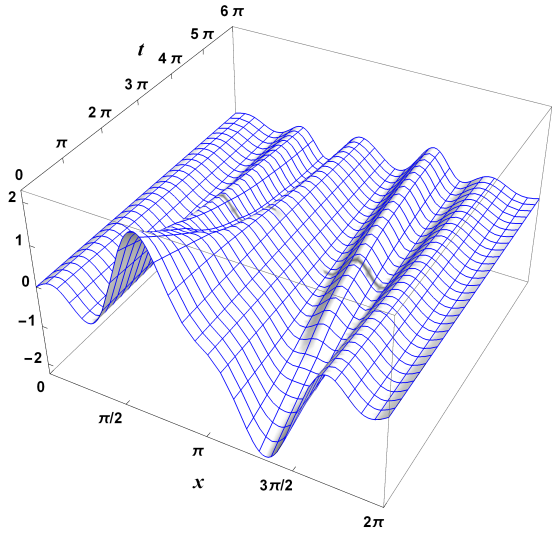


Рис. 1.2.27

Пример 1.2.22. Рассмотрим начально-краевую задачу для модельного ДУвЧПНТ [553]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\big[u(x,t)-\gamma\,u(x,t-\tau)\big]=\alpha^2\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\big[u(x,t)-\gamma\,u(x,t-\tau)\big]+$$

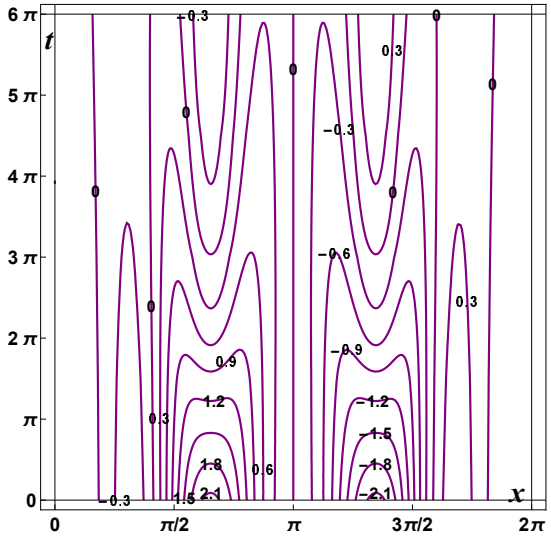


Рис. 1.2.28

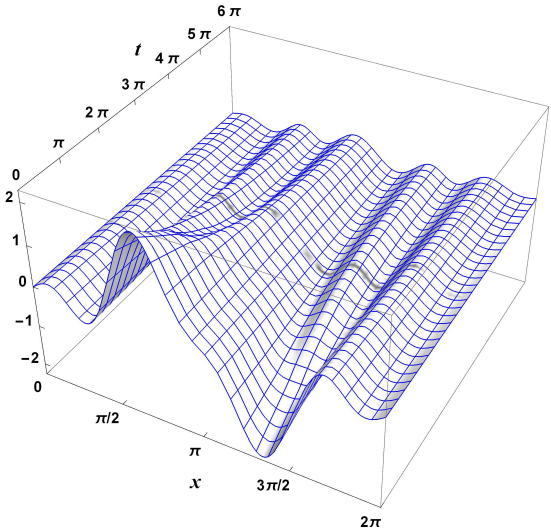


Рис. 1.2.29

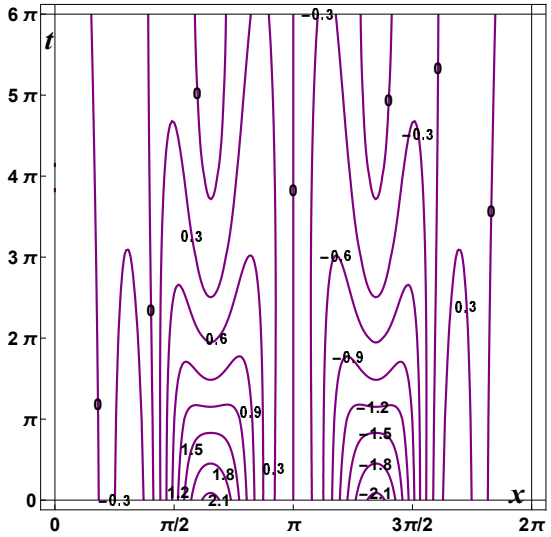


Рис. 1.2.30

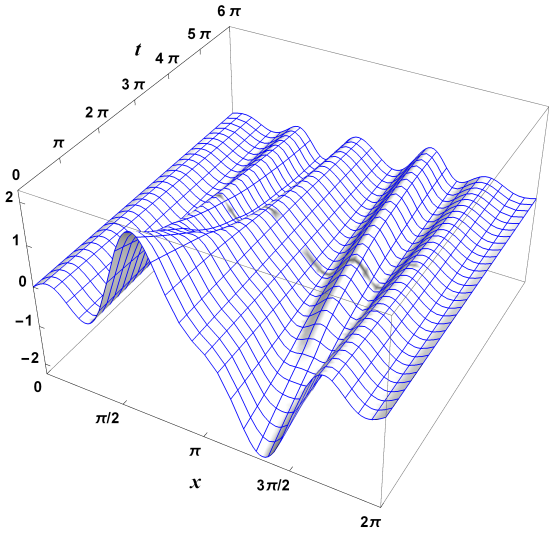


Рис. 1.2.31

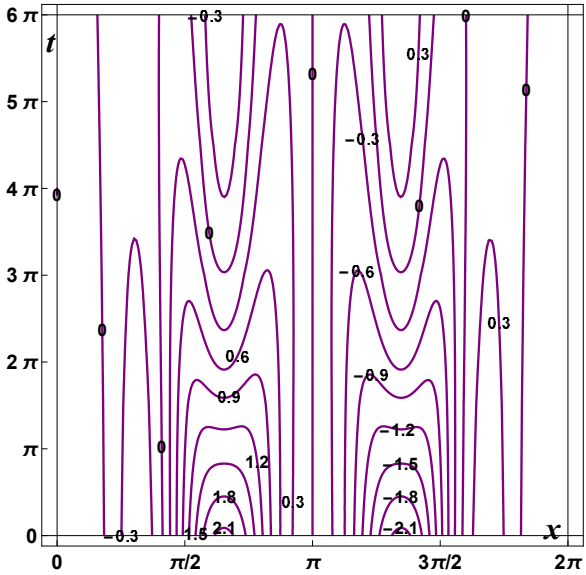


Рис. 1.2.32

$$+f\Big(\frac{\partial}{\partial x}u(x,t-\tau)\Big), \qquad x\in(0,\pi), \quad 0<t\leqslant T,$$

$$u(0,t)=\gamma\,u(0,t-\tau), \qquad u(\pi,t)=\gamma\,u(\pi,t-\tau), \qquad 0<t\leqslant T,$$

$$u(x,t)=u^{\,0}(x), \qquad x\in[0,\pi], \quad -\tau\leqslant t\leqslant 0,$$

где α, γ – положительные постоянные; $f(\cdot)$ и $u^{\,0}(\cdot)$ – непрерывные функции.

Результаты расчетов при

$$\gamma=1/2, \qquad \alpha=1/20, \qquad \beta=1/40, \qquad \tau\in\{\pi/2,\pi,3\,\pi/2\},$$

$$f(\cdot)=-\beta\,(\cdot)^3, \qquad u^{\,0}(x,t)=\sin x-\sin 2\,x+\frac{1}{2}\,\sin 4\,x,$$

представлены в виде графиков (3D-поверхностей и линий уровня в переменных $x-t$) на рис. 1.2.27–1.2.32, причем последовательные пары графиков соответствуют первому, второму и третьему значению запаздывания.

Анализируя приведенные графики, несложно установить явно прослеживающуюся зависимость переходных режимов от величины τ. ►

1.2.12. Схема расширения пространства состояний для ДУвЧПсЗ и ДУвЧПНТ с кратными запаздываниями

Алгоритмы, представленные в подразделах 1.2.10 и 1.2.11, могут быть без труда перестроены для интегрирования систем ДУвЧП с кратными запаздываниями ($\nu \in \mathbb{N}$, $\tau_r = r \cdot \tau$, $1 \leqslant r \leqslant \nu$) следующего вида:

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} = \mathbb{F}^*_\nu\big[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau_1), ..., \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau_\nu), \boldsymbol{x}, t\big], \quad \boldsymbol{x} \in \mathscr{D},$$

$$\mathbb{G}^*_\nu\big[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau_1), ..., \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau_\nu), \boldsymbol{x}, t\big] = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{x} \in \partial\mathscr{D},$$

$$t_\nu < t \leqslant T,$$

$$\mathbb{F}^*_\nu\big[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau_1), ..., \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau_\nu), \boldsymbol{x}, t\big] =$$

$$= \boldsymbol{f}^*_\nu\big(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau_1), ..., \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau_\nu), \boldsymbol{u}'_x(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}'_x(\boldsymbol{x},t-\tau_1), ...,$$

$$\boldsymbol{u}'_x(\boldsymbol{x},t-\tau_\nu), \boldsymbol{u}''_{xx}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}''_{xx}(\boldsymbol{x},t-\tau_1), ..., \boldsymbol{u}''_{xx}(\boldsymbol{x},t-\tau_\nu), ..., \boldsymbol{x}, t\big),$$

$$\mathbb{G}^*_\nu\big[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau_1), ..., \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau_\nu), \boldsymbol{x}, t\big] =$$

$$= \boldsymbol{g}^*_\nu\big(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau_1), ..., \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau_\nu), \boldsymbol{u}'_x(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}'_x(\boldsymbol{x},t-\tau_1), ...,$$

$$..., \boldsymbol{u}'_x(\boldsymbol{x},t-\tau_\nu), \boldsymbol{u}''_{xx}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}''_{xx}(\boldsymbol{x},t-\tau_1), ..., \boldsymbol{u}''_{xx}(\boldsymbol{x},t-\tau_\nu), ..., \boldsymbol{x}, t\big),$$

если

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} = \mathbb{F}^*_{\nu-1}\big[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau_1), ..., \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau_{\nu-1}), \boldsymbol{x}, t\big], \quad \boldsymbol{x} \in \mathscr{D},$$

$$\mathbb{G}^*_{\nu-1}\big[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau_1), ..., \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau_{\nu-1}), \boldsymbol{x}, t\big] = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{x} \in \partial\mathscr{D},$$

$$t_{\nu-1} < t \leqslant t_\nu,$$

$$\mathbb{F}^*_{\nu-1}\big[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau_1), ..., \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau_{\nu-1}), \boldsymbol{x}, t\big] =$$

$$= \boldsymbol{f}^*_{\nu-1}\big(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau_1), ..., \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau_{\nu-1}), \boldsymbol{u}'_x(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}'_x(\boldsymbol{x},t-\tau_1), ...,$$

$$..., \boldsymbol{u}'_x(\boldsymbol{x},t-\tau_{\nu-1}), \boldsymbol{u}''_{xx}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}''_{xx}(\boldsymbol{x},t-\tau_1), ..., \boldsymbol{u}''_{xx}(\boldsymbol{x},t-\tau_{\nu-1}), ..., \boldsymbol{x}, t\big),$$

$$\mathbb{G}^*_{\nu-1}\big[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau_1), ..., \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau_{\nu-1}), \boldsymbol{x}, t\big] =$$

$$= \boldsymbol{g}^*_{\nu-1}\big(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau_1), ..., \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau_{\nu-1}), \boldsymbol{u}'_x(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}'_x(\boldsymbol{x},t-\tau_1), ...,$$

$$..., \boldsymbol{u}'_x(\boldsymbol{x},t-\tau_{\nu-1}), \boldsymbol{u}''_{xx}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}''_{xx}(\boldsymbol{x},t-\tau_1), ..., \boldsymbol{u}''_{xx}(\boldsymbol{x},t-\tau_{\nu-1}), ..., \boldsymbol{x}, t\big),$$

... ...

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} = \mathbb{F}^*_0\big[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{x}, t\big], \quad \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t_0) = \boldsymbol{u}^{\,0}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathscr{D},$$

$$\mathbb{G}_0^*\big[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t),\boldsymbol{x},t\big]=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{x}\in\partial\mathscr{D},\qquad t_0<t\leqslant t_1,$$
$$\mathbb{F}_0^*\big[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t),\boldsymbol{x},t\big]=\boldsymbol{f}_0^*\big(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t),\boldsymbol{u}'_x(\boldsymbol{x},t),\boldsymbol{u}''_{xx}(\boldsymbol{x},t),...,\boldsymbol{x},t\big),$$
$$\mathbb{G}_0^*\big[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t),\boldsymbol{x},t\big]=\boldsymbol{g}_0^*\big(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t),\boldsymbol{u}'_x(\boldsymbol{x},t),\boldsymbol{u}''_{xx}(\boldsymbol{x},t),...,\boldsymbol{x},t\big),$$

и ДУвЧПНТ с кратными запаздываниями:

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}=\mathbb{F}_\nu^+\big[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t),\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau_1),...,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau_\nu),$$
$$\boldsymbol{u}'_t(\boldsymbol{x},t-\tau_1),...,\boldsymbol{u}'_t(\boldsymbol{x},t-\tau_\nu),\boldsymbol{x},t\big],\quad \boldsymbol{x}\in\mathscr{D},$$
$$\mathbb{G}_\nu^+\big[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t),\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau_1),...,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau_\nu),$$
$$\boldsymbol{u}'_t(\boldsymbol{x},t-\tau_1),...,\boldsymbol{u}'_t(\boldsymbol{x},t-\tau_\nu),\boldsymbol{x},t\big]=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{x}\in\partial\mathscr{D},$$
$$t_\nu<t\leqslant T,$$
$$\mathbb{F}_\nu^+\big[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t),\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau_1),...,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau_\nu),\boldsymbol{x},t\big]=$$
$$=\boldsymbol{f}_\nu^+\big(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t),\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau_1),...,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau_\nu),\boldsymbol{u}'_t(\boldsymbol{x},t-\tau_1),...,\boldsymbol{u}'_t(\boldsymbol{x},t-\tau_\nu),$$
$$\boldsymbol{u}'_x(\boldsymbol{x},t),\boldsymbol{u}'_x(\boldsymbol{x},t-\tau_1),...,\boldsymbol{u}'_x(\boldsymbol{x},t-\tau_\nu),\boldsymbol{u}''_{tx}(\boldsymbol{x},t-\tau_1),...,\boldsymbol{u}''_{tx}(\boldsymbol{x},t-\tau_\nu),$$
$$\boldsymbol{u}''_{xx}(\boldsymbol{x},t),\boldsymbol{u}''_{xx}(\boldsymbol{x},t-\tau_1),...,\boldsymbol{u}''_{xx}(\boldsymbol{x},t-\tau_\nu),$$
$$\boldsymbol{u}'''_{txx}(\boldsymbol{x},t),\boldsymbol{u}'''_{txx}(\boldsymbol{x},t-\tau_1),...,\boldsymbol{u}'''_{txx}(\boldsymbol{x},t-\tau_\nu),...,\boldsymbol{x},t\big),$$
$$\mathbb{G}_\nu^+\big[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t),\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau_1),...,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau_\nu),\boldsymbol{x},t\big]=$$
$$=\boldsymbol{g}_\nu^+\big(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t),\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau_1),...,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau_\nu),\boldsymbol{u}'_t(\boldsymbol{x},t-\tau_1),...,\boldsymbol{u}'_t(\boldsymbol{x},t-\tau_\nu),$$
$$\boldsymbol{u}'_x(\boldsymbol{x},t),\boldsymbol{u}'_x(\boldsymbol{x},t-\tau_1),...,\boldsymbol{u}'_x(\boldsymbol{x},t-\tau_\nu),\boldsymbol{u}''_{tx}(\boldsymbol{x},t-\tau_1),...,\boldsymbol{u}''_{tx}(\boldsymbol{x},t-\tau_\nu),$$
$$\boldsymbol{u}''_{xx}(\boldsymbol{x},t),\boldsymbol{u}''_{xx}(\boldsymbol{x},t-\tau_1),...,\boldsymbol{u}''_{xx}(\boldsymbol{x},t-\tau_\nu),$$
$$\boldsymbol{u}'''_{txx}(\boldsymbol{x},t),\boldsymbol{u}'''_{txx}(\boldsymbol{x},t-\tau_1),...,\boldsymbol{u}'''_{txx}(\boldsymbol{x},t-\tau_\nu),...,\boldsymbol{x},t\big),$$

если

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}=\mathbb{F}_{\nu-1}^+\big[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t),\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau_1),...,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau_{\nu-1}),\boldsymbol{x},t\big],\quad \boldsymbol{x}\in\mathscr{D},$$
$$\mathbb{G}_{\nu-1}^+\big[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t),\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau_1),...,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau_{\nu-1}),\boldsymbol{x},t\big]=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{x}\in\partial\mathscr{D},$$
$$t_{\nu-1}<t\leqslant t_\nu,$$
$$\mathbb{F}_{\nu-1}^+\big[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t),\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau_1),...,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau_{\nu-1}),\boldsymbol{x},t\big]=\boldsymbol{f}_{\nu-1}^+\big(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t),$$
$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau_1),...,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau_{\nu-1}),\boldsymbol{u}'_t(\boldsymbol{x},t-\tau_1),...,\boldsymbol{u}'_t(\boldsymbol{x},t-\tau_{\nu-1}),\boldsymbol{u}'_x(\boldsymbol{x},t),$$
$$\boldsymbol{u}'_x(\boldsymbol{x},t-\tau_1),...,\boldsymbol{u}'_x(\boldsymbol{x},t-\tau_{\nu-1}),\boldsymbol{u}''_{tx}(\boldsymbol{x},t-\tau_1),...,\boldsymbol{u}''_{tx}(\boldsymbol{x},t-\tau_{\nu-1}),$$

$$\boldsymbol{u}''_{xx}(\boldsymbol{x},t),\boldsymbol{u}''_{xx}(\boldsymbol{x},t-\tau_1),...,\boldsymbol{u}''_{xx}(\boldsymbol{x},t-\tau_{\nu-1}),$$
$$\boldsymbol{u}'''_{txx}(\boldsymbol{x},t),\boldsymbol{u}'''_{txx}(\boldsymbol{x},t-\tau_1),...,\boldsymbol{u}'''_{txx}(\boldsymbol{x},t-\tau_{\nu-1}),...,\boldsymbol{x},t\big),$$
$$\mathbb{G}^+_{\nu-1}\big[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t),\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau_1),...,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau_{\nu-1}),\boldsymbol{x},t\big]=\boldsymbol{g}^+_{\nu-1}\big(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t),$$
$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau_1),...,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau_{\nu-1}),\boldsymbol{u}'_t(\boldsymbol{x},t-\tau_1),...,\boldsymbol{u}'_t(\boldsymbol{x},t-\tau_{\nu-1}),\boldsymbol{u}'_x(\boldsymbol{x},t),$$
$$\boldsymbol{u}'_x(\boldsymbol{x},t-\tau_1),...,\boldsymbol{u}'_x(\boldsymbol{x},t-\tau_{\nu-1}),\boldsymbol{u}''_{tx}(\boldsymbol{x},t-\tau_1),...,\boldsymbol{u}''_{tx}(\boldsymbol{x},t-\tau_{\nu-1}),$$
$$\boldsymbol{u}''_{xx}(\boldsymbol{x},t),\boldsymbol{u}''_{xx}(\boldsymbol{x},t-\tau_1),...,\boldsymbol{u}''_{xx}(\boldsymbol{x},t-\tau_{\nu-1}),$$
$$\boldsymbol{u}'''_{txx}(\boldsymbol{x},t),\boldsymbol{u}'''_{txx}(\boldsymbol{x},t-\tau_1),...,\boldsymbol{u}'''_{txx}(\boldsymbol{x},t-\tau_{\nu-1}),...,\boldsymbol{x},t\big),$$
$$\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots$$
$$\frac{\partial\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}=\mathbb{F}^+_0\big[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t),\boldsymbol{x},t\big],\quad \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t_0)=\boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}\in\mathscr{D},$$
$$\mathbb{G}^+_0\big[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t),\boldsymbol{x},t\big]=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{x}\in\partial\mathscr{D},\qquad t_0<t\leqslant t_1,$$
$$\mathbb{F}^+_0\big[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t),\boldsymbol{x},t\big]=\boldsymbol{f}^+_0\big(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t),\boldsymbol{u}'_x(\boldsymbol{x},t),\boldsymbol{u}''_{xx}(\boldsymbol{x},t),...,\boldsymbol{x},t\big),$$
$$\mathbb{G}^+_0\big[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t),\boldsymbol{x},t\big]=\boldsymbol{g}^+_0\big(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t),\boldsymbol{u}'_x(\boldsymbol{x},t),\boldsymbol{u}''_{xx}(\boldsymbol{x},t),...,\boldsymbol{x},t\big).$$

Следуя той же схеме и используя приведенные в предыдущих подразделах процедуры, можно по шагам получить решения этих систем ДУвЧПсЗ и ДУвЧПНТ, т.к. и в этом случае получаются цепочки подзадач без последействия.

Пример 1.2.23. Рассмотрим следующую модельную систему, состоящую из двух ДУвЧПНТ с кратными запаздываниями [241]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\big[u_1(x,t)-\gamma_{11}\,u_1(x,t-\pi/2)\big]+\omega_1^2\,\big[u_1(x,t)-\gamma_{12}\,u_1(x,t-\pi)\big]=$$
$$=\alpha_{11}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\big[u_1(x,t)-\gamma_{13}\,u_1(x,t-\pi/2)\big]+$$
$$+\alpha_{12}\,\frac{\partial}{\partial x}\big[u_1(x,t)-\gamma_{14}\,u_1(x,t-\pi)-\gamma_{15}\,u_2(x,t-\pi)\big]+$$
$$+\alpha_{13}\,\big[u_1(x,t)-\gamma_{16}\,u_1(x,t-\pi)-\gamma_{17}\,u_2(x,t-\pi)\big],$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\big[u_2(x,t)-\gamma_{21}\,u_2(x,t-\pi/2)\big]+\omega_2^2\,\big[u_2(x,t)-\gamma_{22}\,u_2(x,t-\pi)\big]=$$
$$=\alpha_{21}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\big[u_2(x,t)-\gamma_{23}\,u_2(x,t-\pi/2)\big]+$$
$$+\alpha_{22}\,\frac{\partial}{\partial x}\big[u_2(x,t)-\gamma_{24}\,u_2(x,t-\pi)-\gamma_{25}\,u_1(x,t-\pi)\big]+$$

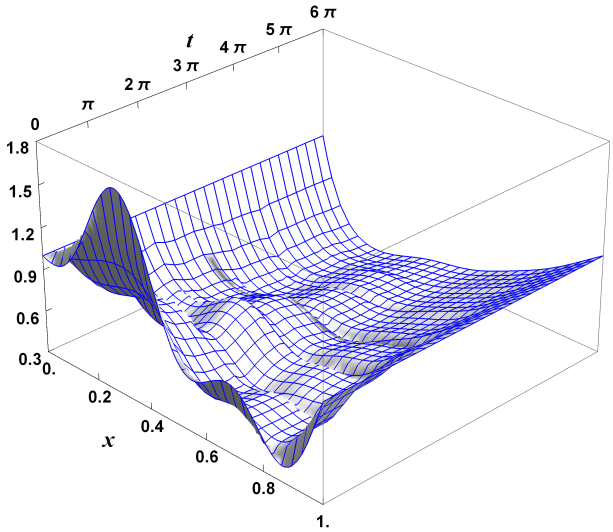


Рис. 1.2.33

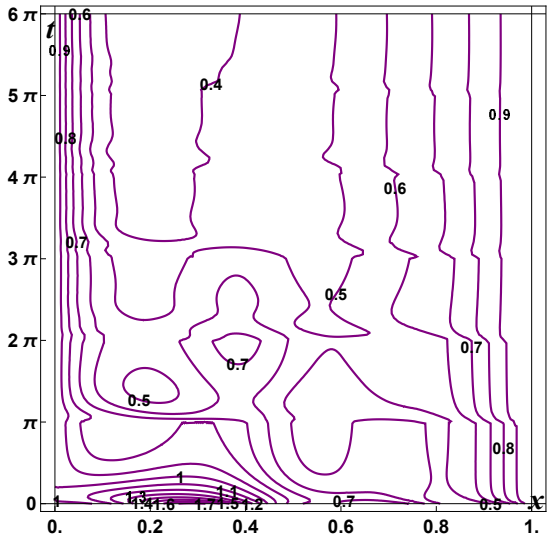


Рис. 1.2.34

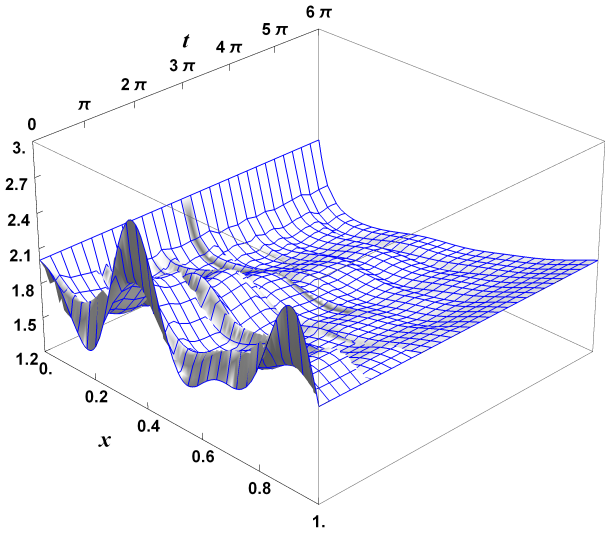


Рис. 1.2.35

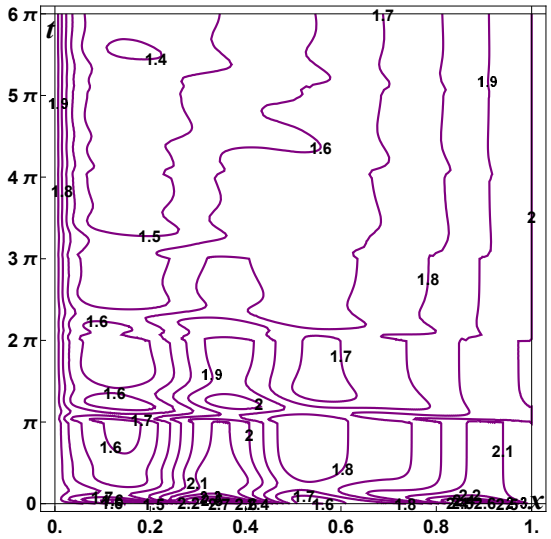


Рис. 1.2.36

$$+\alpha_{23}\left[u_2(x,t)-\gamma_{26}\,u_2(x,t-\pi)-\gamma_{27}\,u_1(x,t-\pi)\right],$$
$$0<x<1,\quad t>0;$$
$$u_1(0,t)=u_1(1,t)=1,\quad u_2(0,t)=u_2(1,t)=2,\quad t\geqslant-\pi,$$
$$u_1(x,t)=1+0{,}5\,\sin 2\pi x-0{,}25\,\sin 5\pi x,$$
$$u_2(x,t)=2-0{,}5\,\sin 4\pi x+0{,}25\,\sin 7\pi x,$$
$$-\pi\leqslant t\leqslant 0.$$

Результаты расчетов при

$$\gamma_{11}=\gamma_{12}=\gamma_{13}=1/2,\qquad \gamma_{14}=\gamma_{15}=\gamma_{16}=\gamma_{17}=1/4,$$
$$\gamma_{21}=\gamma_{22}=\gamma_{23}=2/5,\qquad \gamma_{24}=\gamma_{25}=\gamma_{26}=\gamma_{27}=1/5,$$
$$\alpha_{11}=1/40,\qquad \alpha_{12}=1.4,\qquad \alpha_{13}=1/8,$$
$$\alpha_{21}=1/50,\qquad \alpha_{22}=1/2,\qquad \alpha_{23}=1/10,$$
$$\omega_1=3/4,\qquad \omega_2=3/5,\qquad \tau=\pi$$

представлены в виде графиков (3D-поверхностей и линий уровня в переменных $x-t$) на рис. 1.2.33–1.2.36. ►

1.3. УРАВНЕНИЯ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ОТКЛОНЕНИЯМИ АРГУМЕНТОВ

1.3.1. Интегральные уравнения

Многие задачи математической физики приводятся к уравнениям, в которые входят интегральные зависимости между искомой и заданными функциями, причем сама искомая функция входит также и под знаком интеграла. Типичным примером таких задач являются так называемые стационарные краевые задачи математической физики – задачи отыскания решения данного дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным условиям на краях определенной области. В этом случае решение дифференциального уравнения определяется условиями, заданными на краях рассматриваемой области, т.е., иными словами, решение этого дифференциального уравнения в какой-либо точке области зависит от всей совокупности значений его решения во всех других точках области. Поэтому естественным является формулировка краевых задач математической физики в виде интегральных соотношений.

Теория интегральных уравнений тесно связана с какими разделами анализа как дробное исчисление, теория потенциала, спектральная теория самосопряженных линейных операторов в гильбертовом пространстве, теория вполне непрерывных линейных операторов в банаховом пространстве.

Классический аппарат интегральных уравнений широко используется в физике (теория волн на поверхности жидкостей, проблемы спектроскопии, кристаллографии, акустики, обратные задачи теплопроводности, исследование различного рода полей и сред, анализа и диагностики плазмы и др.), геофизике (задачи гравиметрии, кинематические задачи сейсмики), механике (колебания конструкций), материаловедении (исследование вязкоупругости, ползучести и т.п.), астрономии (распределение масс и светимости в звездных системах, интерпретация кривых блеска затменных звезд и т.д.), теории управления (определение импульсных функций линейных систем, задачи оптимальной линейной фильтрации и др.), теориях надежности и массового обслуживания, при решении задач статистической (стохастической) динамики (определение ковариационных функций стационарных случайных процессов по экспериментальным данным, расчет оптимальных динамических характеристик систем) и т.д.

Развиваются новые научные направления, связанные с применением интегральных уравнений в биологии (редукция наблюдений микрообъектов за аппаратную функцию системы, задачи о распространении эпидемий, кинетики печени, моделирование внутри- и межклеточных взаимодействий и т.д.), иконике (восстановление искаженного изображения), томографии (формирование объемных изображений объектов по наблюдаемым сечениям), экономике производства (динамические макроэкономические модели, включая модели с овеществленным техническим прогрессом, среди которых наиболее известной является модель Солоу; задачи оптимизации распределения рабочих мест между отраслями производства).

Существуют классы задач, для решения которых принципиально невозможно использовать какие-либо иные типы моделей, кроме как основанных на интегральных уравнениях. Применение таких уравнений позволяет: а) понижать размерность ряда задач изучения сплошных сред; б) более компактно, чем с помощью дифференциальных уравнений, формулировать краевые задачи; в) строить устойчивые вычислительные процедуры.

Примерами являются [39]:

– интегральные уравнения газовой динамики в переменных Эйлера и Лагранжа. Достоинства этих моделей состоят в их общности, в том, что они не содержат производных от функций, являющихся характеристиками состояния среды, а следовательно, не накладывают существенных ограничений на гладкость этих функций и допускают существование разрывных решений;

– метод интегральных уравнений для анализа электрических и магнитных полей в задачах электродинамики;

– метод граничных интегральных уравнений, эффективно применяемый для решения пространственных задач.

Известно, что для моделирования динамических процессов традиционно используют аппарат ОДУ. При этом игнорируется такая важная черта интегрального представления, как учет явления последействия. ОДУ также плохо приспособлены для описания динамики замены устаревших элементов системы новыми. Более того, реальные макроэкономические системы описываются негладкими или даже разрывными функциями. Поэтому интегральная форма представления динамических моделей макроэкономики является более удобным инструментом моделирования в таких задачах.

Определение 1.3.1. *Интегральными уравнениями* (ИУ) [37, 107, 270, 280] называют функциональные уравнения, в которых неизвестная функция находится под знаком определенного интеграла.

Интегральные уравнения делятся на линейные и нелинейные.

Определение 1.3.2. Интегральное уравнение называется *линейным*, если в него неизвестная функция входит линейно. В противном случае *нелинейным*.

Линейное обыкновенное интегральное уравнение (ОИУ) можно написать в следующем виде:

$$g(t)\,x(t) = \lambda \int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds + f(t), \quad a \leqslant t \leqslant b, \tag{1.3.1}$$

где $x = x(t) : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ – неизвестная функция, $g(t) : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$, $f(t) : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ и $K(t,s) : [a,b] \times [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ – заданные функции, λ – числовой *параметр*. Функцию $g(t)$ называют *коэффициентом*, $K(t,s)$ – *ядром*, а $f(t)$ – *правой частью*, или *свободным членом* интегрального уравнения (1.3.1). Пределы интегрирования a, b могут быть как конечными, так и бесконечными.

Если $f(t) \equiv 0$, то интегральное уравнение (1.3.1) называется *однородным* и имеет вид

$$g(t)\,x(t) = \lambda \int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds, \tag{1.3.2}$$

в противном случае – *неоднородным*.

Более общий вид линейных ОИУ можно записать так:

$$g(t)\,x(t) = \int\limits_{\mathscr{D}} K(t,s)\,x(s)ds + f(t), \qquad t \in \mathscr{D}, \tag{1.3.3}$$

где $\mathscr{D}$ – ограниченная или неограниченная область евклидова пространства одного или многих измерений, t, s – точки этого пространства, ds – элемент объема. Требуется найти функцию x такую, что уравнение (1.3.3) удовлетворяется при всех (или почти всех, если интеграл рассматривается в смысле Лебега) точек t из $\mathscr{D}$.

Пусть

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\,\boldsymbol{x}(t) = \int\limits_{\mathscr{D}} \boldsymbol{\mathcal{K}}(t,s)\,\boldsymbol{x}(s)ds + \boldsymbol{f}(t), \qquad t \in \mathscr{D}, \tag{1.3.4}$$

где $\boldsymbol{\mathcal{A}}(t)$ и $\boldsymbol{\mathcal{K}}(t)$ – матрицы, $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{x}$ – вектор-функции, то (1.3.4) называется *системой линейных интегральных уравнений*.

Определение 1.3.3. Функция $x = \varphi(t)$, определенная на сегменте $[a, b]$ и при подстановке в уравнение (1.3.1) обращающая его в тождество по переменной t, называется *решением интегрального уравнения* (1.3.1).

Определение 1.3.4. Ядро $K(t, s)$ называется *вырожденным*, если оно может быть представлено в виде

$$K(t, s) = \sum_{i=1}^{N} K_{1i}(t)\, K_{2i}(s),$$

где m – конечное число, под t и s можно понимать точки в пространстве любой конечной размерности, $\{K_{1i}\}$ и $\{K_{2i}\}$ – семейства функций лишь одного (векторного) аргумента. Такое ядро имеет следующие свойства:

1°. $K(x, s)$ имеет конечное число собственных значений.

2°. Если симметричное ядро $\bar{K}(x, s)$ имеет конечное число собственных значений, то оно вырождено.

Определение 1.3.5. Интегральное уравнение (1.3.1) называется *вырожденным*, если в него входят только вырожденные ядра и притом лишь в конечном числе.

Интегрирование в интегральном уравнении может производиться как по ограниченному или неограниченному множеству на прямой, так и по некоторой ограниченной или неограниченной области пространства большей размерности. При этом приведенная выше и ниже классификация форм уравнений не меняется.

Линейные интегральные уравнения (1.3.1) в зависимости от гладкости ядра $K(t, s)$ в замкнутом квадрате $a \leqslant t, s \leqslant b$ делятся на различные подклассы.

Интегральные уравнения Фредгольма

Определение 1.3.6. Если ядро $K(t, s)$ является непрерывным при $a \leqslant t, s \leqslant b$, а $g(t) \neq 0$ для любого t из отрезка $[a, b]$, то линейное интегральное уравнение (1.3.1) принадлежит к семейству *интегральных уравнений Фредгольма второго рода*. Обычно в этом уравнении λ является заданной величиной.

Интегральное уравнение Фредгольма первого рода характеризуется отсутствием слагаемого, содержащего неизвестную функцию вне интеграла. Оно имеет вид:

$$\lambda \int_a^b K(t, s)\, x(s)\, ds + f(t) = 0, \qquad a \leqslant t \leqslant b. \tag{1.3.5}$$

Значения параметра λ, при которых уравнение (1.3.5) имеет нетривиальное решение, называются *собственными значениями* интегрального уравнения (1.3.5) (или *собственными значениями ядра* $K(x,s)$), а отвечающие этим значениям нетривиальные решения называются *собственными функциями* ИУ (*собственными функциями ядра*).

Если обе части ИУ Фредгольма II рода поделить на функцию $g(t)$, а новые ядро $K(t,s)/g(t)$ и правую часть $f(t)/g(t)$ обозначить снова как $K(t,s)$ и $f(t)$ соответственно, то это уравнение и ИУ Фредгольма I рода можно будет записать так:

$$x(t) = \lambda A\, x(t) + f(t), \tag{1.3.6}$$

$$0 = \lambda A\, x(t) + f(t), \tag{1.3.7}$$

где

$$A[\cdot] = \int_a^b K(t,s)\,[\cdot]\,ds. \tag{1.3.8}$$

Определение 1.3.7. Если $A[\cdot]$ – вполне непрерывный линейный интегральный оператор, то он называется *интегральным оператором Фредгольма*. При этом ядро $K(t,s)$ называется *фредгольмовым*.

Важным классом уравнений Фредгольма образуют уравнения, в которых ядро K удовлетворяет условию

$$\int_a^b \int_a^b |\,K(t,s)\,|^2\,dt\,ds < +\infty. \tag{1.3.9}$$

а правая часть f и искомая функция x – измеримые функции, квадраты которых интегрируемы.

Однородное интегральное уравнение всегда имеет решение $x(t) \equiv 0$, которое называется *нулевым* (или *тривиальным*) решением. Значение параметра λ, при котором интегральное уравнение имеет ненулевое решение $x(t)$, называется *собственным* (или *характеристическим*) значением ядра K или интегрального уравнения, а ненулевое решение $x(t)$ – *собственной функцией* ядра K или интегрального уравнения, соответствующей данному собственному значению λ. Если λ не является собственным значением, то его называют *правильным значением* параметра.

Для того, чтобы сформулировать условия существования и единственности решения уравнения Фредгольма II рода

$$x(t) = \lambda \int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds + f(t), \qquad a \leqslant t \leqslant b, \tag{1.3.10}$$

составим степенные ряды [253, 316]

$$D(t,s;\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,\lambda^k}{k!}\,A_k(t,s), \tag{1.3.11}$$

$$D(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,\lambda^k}{k!}\,B_k, \tag{1.3.12}$$

коэффициенты которых определяются формулами:

$$A_0(t,s)=K(t,s),$$

$$A_k(t,s)=\underbrace{\int_a^b\ldots\int_a^b}_{k}\begin{vmatrix} K(t,s) & K(t,s_1) & \ldots & K(t,s_k)\\ K(s_1,s) & K(s_1,s_1) & \ldots & K(s_1,s_k)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ K(s_k,s) & K(s_k,s_1) & \ldots & K(s_k,s_k)\end{vmatrix}ds_1\ldots ds_k,$$

$$B_0=1,$$

$$B_k=\underbrace{\int_a^b\ldots\int_a^b}_{k}\begin{vmatrix} K(s_1,s_1) & K(s_1,s_2) & \ldots & K(s_1,s_k)\\ K(s_2,s_1) & K(s_2,s_2) & \ldots & K(s_2,s_k)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ K(s_k,s_1) & K(s_k,s_2) & \ldots & K(s_k,s_k)\end{vmatrix}ds_1\ldots ds_k.$$

Функция $D(t,s;\lambda)$ называется *минором Фредгольма*, а $D(\lambda)$ – *определителем Фредгольма*. Ряды (1.3.11), (1.3.12) сходятся для всех значений λ и, значит, являются целыми аналитическими функциями от λ. Ряд (1.3.11) сходится абсолютно и равномерно относительно t и s в квадрате $Q=\{(t,s)\,|\,a\leqslant t,s\leqslant b\}$, если в этом квадрате ядро $K(t,s)$ непрерывно. Значения параметра λ, при которых $D(\lambda)\neq 0$, называют *регулярными значениями параметра λ ядра $K(t,s)$*.

В регулярном случае имеет место следующая теорема.

Теорема 1.3.1. Если функции $f(t)$ и $K(t,s)$ непрерывны в квадрате Q и значение λ не является корнем $D(\lambda)$, то интегральное уравнение (1.3.10) имеет в квадрате Q единственное непрерывное решение $x(t)$, которое можно представить в виде

$$x(t)=f(t)+\lambda\int_a^b R(t,s;\lambda)\,f(s)\,ds, \tag{1.3.13}$$

где *резольвента* $R(t,s;\lambda)$ определяется равенством

$$R(t,s;\lambda)=\frac{D(t,s;\lambda)}{D(\lambda)},\qquad D(\lambda)\neq 0. \tag{1.3.14}$$

При этом однородное интегральное уравнение

$$x(t) = \lambda \int_a^b K(t,s)\, x(s)\, ds, \qquad a \leqslant t \leqslant b, \tag{1.3.15}$$

имеет только нулевое решение.

Резольвента $R(t,s;\lambda)$ есть аналитическая функция от λ, кроме тех значений λ, которые являются корнями $D(\lambda)$. Последние совпадают с *характеристическими числами уравнения* и являются полюсами резольвенты $R(t,s;\lambda)$.

Вычисление коэффициентов $A_k(t,s)$ и B_k рядов (1.3.11), (1.3.12) по приведенным выше формулам практически возможно лишь в очень редких случаях, но из этих формул получаются следующие рекуррентные соотношения [253]:

$$A_k(t,s) = B_k\, K(t,s) - k \int_a^b K(t,\theta)\, A_{k-1}(\theta,s)\, d\theta,$$

$$B_k = \int_a^b A_{k-1}(\theta,\theta)\, d\theta$$

Определение 1.3.8. Комплексное ядро K называется *эрмитовым*, если

$$\overline{K(x,s)} = K(s,x), \tag{1.3.16}$$

где черта означает переход к комплексно сопряженному значению. В случае действительного ядра равенство (1.3.16) принимает вид $K(x,s) = K(s,x)$. Такое ядро называется *симметричным*.

Различие между ИУ Фредгольма I и II рода проявляется в том, что первые представляют собой существенно более сложный объект исследования. Причина в следующем. Интегральные операторы в большинстве своем оказываются вполне непрерывными операторами[5]. Для корректной

[5]Пусть $\mathbb{F}$ – оператор, действующий из нормированного пространства YY_1 в нормированное пространство YY_2, и пусть $\mathscr{D}(\mathbb{F})$ – область определения оператора $\mathbb{F}$, являющаяся подмножеством пространства YY_1. Оператор $\mathbb{F}$ называется *непрерывным* в точке $y_0 \in \mathscr{D}(\mathbb{F})$, если для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $y \in \mathscr{D}(\mathbb{F})$ из неравенства $\|y - y_0\|_{\mathbb{Y}_1} < \delta(\varepsilon)$, следует неравенство $\|\mathbb{F}\, y - \mathbb{F}\, y_0\|_{\mathbb{Y}_2} < \delta(\varepsilon)$. Оператор $\mathbb{F}$ называется непрерывным на множестве $\mathscr{D}(\mathbb{F})$ пространства YY_1, если он непрерывен в каждой точке этого множества. Оператор $\mathbb{F}$ называется *вполне непрерывным* в $\mathscr{D}(\mathbb{F})$, если, какова бы ни была ограниченная последовательность точек $\{y_k\} \in \mathscr{D}(\mathbb{F})$, соответствующая последовательность $\{\mathbb{F}\, y_k\} \in \mathbb{Y}_2$ такова, что из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

разрешимости ИУ Фредгольма II рода, т.е. уравнения (1.3.6) при любой функции f необходимо и достаточно обратимости оператора $\mathbb{I}-\mathcal{A}$ и ограниченности $(\mathbb{I}-\mathcal{A})^{-1}$, что в случае вполне непрерывного оператора $\mathcal{A}$ – обычная ситуация. Для разрешимости ИУ Фредгольма I рода необходима обратимость оператора $\mathcal{A}$. В случае же вполне непрерывного оператора оператор $\mathcal{A}^{-1}$, если он и существует, необходимо является неограниченным.

Предположим, что ядро $K(x,s)$ при $x,\ s\in[a,b]$ удовлетворяет следующим условиям:

1°. $K(x,s)$ – вещественная функция.

2°. $K(x,s)\neq 0$.

3°. $K(x,s)$ – непрерывная функция по совокупности аргументов.

4°. $K(x,s)$ – симметричное ядро, т.е. $K(x,s)=K(s,x)$.

Тогда собственные функции и собственные числа однородного уравнения Фредгольма II рода имеют следующие свойства:

1°. Собственные значения ядра $K(x,s)$ вещественны.

2°. Нахождение комплексных собственных функций сводится к определению вещественных собственных функции.

3°. Если $K(x,s)$ непрерывно и $K(x,s)\neq 0$, то норма оператора Фредгольма отлична от нуля.

4°. Существует конечная или бесконечная последовательность линейно независимых собственных функций и соответствующих собственных значений ядра $K(x,s)$.

5°. Собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны. Ранг любого собственного значения конечен. Всю систему собственных функций можно ортонормировать так, чтобы были выполнены соотношения

$$\int_a^b x_i(s)\,x_j(s)\,ds=\delta_{ij},$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

6°. Каково бы ни было $L>0$, может существовать лишь конечное число собственных значений, удовлетворяющих неравенству $|\lambda|<L$. Если число собственных значений бесконечно и их расположить в порядке возрастания абсолютной величины

$$|\lambda_1|\leqslant|\lambda_2|\leqslant\ldots\leqslant|\lambda_n|\leqslant\ldots,$$

то

$$\lim_{n\to+\infty}|\lambda_n|=+\infty.$$

7°. Если $x_1(t)$ – собственная функция ядра $K(x,s)$ и λ_1 – соответствующее собственное значение, то ядро

$$K^{(2)}(x,s) = K(x,s) - \frac{x_1(t)\,x_1(s)}{\lambda_1}$$

имеет те же собственные значения и собственные функции, что и ядро $K(x,s)$, кроме $x_1(t)$ и λ_1.

8° (следствие). Если $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$ – собственные функции ядра $K(x,s)$, а λ_1, λ_2, ..., λ_n – соответствующие собственные значения, то ядро

$$K^{(n+1)}(x,s) = K(x,s) - \sum_{\ell=1}^{n} \frac{x_\ell(t)\,x_\ell(s)}{\lambda_\ell}$$

имеет те же собственные значения и собственные функции, что и ядро $K(x,s)$, кроме $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$ и λ_1, λ_2, ..., λ_n.

В случае вырожденного ядра собственные функции могут быть определены путем решения системы линейных алгебраических уравнений

$$c_m = \lambda \sum_{\ell=1}^{N} c_\ell\, q_{\ell m}, \qquad q_{\ell m} = \int_a^b K_{1\ell}(s)\,K_{2\ell}(s)\,ds,$$

в которой λ находится из уравнения

$$|\boldsymbol{\mathcal{I}} - \lambda\,\boldsymbol{\mathcal{Q}}| = 0, \qquad \boldsymbol{\mathcal{Q}} = \{q_{ij}\}$$

с последующей подстановкой полученных значений c_m и λ в правую часть равенства

$$x(t) = \lambda \sum_{\ell=1}^{N} c_\ell\, K_{1\ell}(t).$$

Определение 1.3.9. Если в уравнении (1.3.1) ядро $K(t,s)$ имеет вид

$$K(t,s) = \frac{Q(t,s)}{|t-s|^\alpha},$$

где $0 < \alpha < 1$, $Q(t,s)$ – непрерывная в квадрате $a \leqslant t,s \leqslant b$ функция, то уравнение (1.3.1) называется *интегральным уравнением со слабой особенностью.*

Известно, что путем равносильных преобразований ИУ со слабой особенностью сводятся к ИУ Фредгольма с непрерывным ядром.

Модели в форме ИУ Фредгольма I рода типичны при математической обработке данных эксперимента, решении задач гравиразведки полезных ископаемых и восстановлении размытого изображения. К однородным ИУ Фредгольма II рода приводят проблемы расчета собственных колебаний систем с распределенными параметрами. При исследовании задач математической физики особенно часто встречаются уравнения II рода. Например, в электростатике, гидростатике и других разделах физики определение неизвестных стационарных по времени полей в отсутствие источников, удовлетворяющих уравнению Лапласа, приводится к решению неоднородных ИУ Фредгольма II рода [37].

Определение 1.3.10. Интегральное уравнение называется *сингулярным* [152], если оно содержит неизвестную функцию под знаком расходящегося интеграла, понимаемого в смысле его главного значения по Коши. Такие интегралы называются *сингулярными*.

Появление в анализе сингулярных интегральных уравнений вызвано в первую очередь тем, что граничные значения интегралов типа Коши и граничные значения первых производных потенциала простого слоя выражаются через некоторые сингулярные интегралы.

По сравнению с уравнениями типа Фредгольма сингулярные интегральные уравнения обладают той существенной особенностью, что входящие в них сингулярные интегралы оказываются операторами ограниченными, но не вполне непрерывными в соответствующих функциональных пространствах. Это делает теорию Фредгольма неприменимой к сингулярным уравнениям. Другая особенность сингулярных уравнений та, что для них небезразлично число независимых переменных. Оказывается необходимым рассматривать отдельно случаи одной и m ($m \geqslant 2$) независимых переменных.

Общая теория Гильберта квадратичных форм с бесконечным числом переменных дает возможность и в этом случае получить ряд важных результатов. Для некоторых конкретных классов сингулярных интегральных уравнений разработаны специальные способы их решения, учитывающие характерные свойства этих уравнений.

Интегральные уравнения Вольтерры

Эти уравнения занимают особо важное место среди всего семейства интегральных уравнений.

Определение 1.3.11. Уравнение вида

$$x(t) = \lambda \int_a^t H(t,s)\,x(s)\,ds + f(t), \quad a \leqslant x \leqslant b, \tag{1.3.17}$$

где $H(t,s)$ и $f(t)$ – заданные и, по крайней мере, непрерывные функции, а λ – некоторая постоянная (*параметр* интегрального уравнения), называется *линейным интегральным уравнением Вольтерры второго рода.* Если $f(t) \equiv 0$, то уравнение (1.3.17) имеет вид

$$x(t) = \lambda \int_a^t H(t,s)\,x(s)\,ds \tag{1.3.18}$$

и называется *однородным уравнением Вольтерры второго рода.*

Определение 1.3.12.Если в уравнении (1.3.17) отсутствует слагаемое, содержащее неизвестную функцию вне интеграла, то это уравнение называется *интегральным уравнением Вольтерры первого рода* и оно принимает вид

$$\lambda \int_a^t H(t,s)\,x(s)\,ds + f(t) = 0, \tag{1.3.19}$$

которое при определенных условиях сводится к интегральному уравнению Вольтерры второго рода.

Определение 1.3.13. Уравнение вида

$$g(t)\,x(t) = \lambda \int_a^t H(t,s)\,x(s)\,ds + f(t), \quad a \leqslant x \leqslant b, \quad g(a) = 0, \tag{1.3.20}$$

где $g(t)$, $H(t,s)$ и $f(t)$ – заданные и, по крайней мере, непрерывные функции, а λ – произвольный числовой параметр, называется *линейным интегральным уравнением Вольтерры третьего рода.*

Отметим, что интегральные уравнения Вольтерры (1.3.17)–(1.3.19) можно рассматривать как частный случай соответствующих уравнений Фредгольма (1.3.1)–(1.3.5), если в них ядро $K(t,s)$ определить следующим образом:

$$K(t,s) = \begin{cases} H(t,s), & s \leqslant t, \\ 0, & s > t. \end{cases}$$

Однако физические задачи, приводящие к интегральным уравнениям Вольтерры и Фредгольма, а также свойства решений этих уравнений существенно различны. Поэтому уравнения Вольтерры выделяют в особый тип уравнений.

К интегральным уравнениям Вольтерры I рода приводят смешанные краевые задачи в теории потенциала, упругости, стационарной теплопроводности, течении идеальных жидкостей [718]. Процессы с последействием [37], сверхтекучести, распространения эпидемий, тепла в материале с памятью [624] и некоторые проблемы управления [495] описываются уравнениями Вольтерры II рода. Ряд важных задач теорий упругости, плазмы, переноса нейтронов, рассеяния частиц, а также теорий уравнений смешанного типа и сингулярных интегральных уравнений с вырождающимся символом приводит к интегральным уравнениям третьего рода [71]. Первые результаты по таким уравнениям, скорее всего, принадлежат Э. Пикару, именно он назвал уравнения вида (1.3.20) интегральными уравнениями третьего рода.

Формальное решение ОИУ Вольтерры II рода дается следующей теоремой [316].

Теорема 1.3.2. Если функции $f(t)$ и $H(t,s)$ непрерывны для всех $t,s \in [a,b]$, то при произвольном значении параметра λ существует единственное непрерывное решение $x(t)$ интегрального уравнения (1.3.17), которое можно представить в виде:

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_a^t R(t,s;\lambda)\, f(s)\, ds, \tag{1.3.21}$$

где функция $R(t,s;\lambda)$, называемая *резольвентой ядра* $H(t,s)$, является суммой абсолютно и равномерно сходящегося при $a \leqslant s \leqslant t \leqslant b$ ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k\, H_k(t,s), \tag{1.3.22}$$

члены которого определяются следующим образом:

$$H_0(t,s) = H(t,s), \quad H_k(t,s) = \int_a^t H(t,s)\, H_{k-1}(t,s), \quad k = 1,2,... \tag{1.3.23}$$

Многие интересные проблемы механики и физики приводят к интегральному уравнению, в котором ядро $K(t,s)$ зависит только от разности

$t-t$: $H(t,s)=H_0(t-s)$, где H_0 – функция одной переменной. В этом случае уравнение Вольтерры II рода

$$x(t)=\lambda\int_a^t H_0(t-s)\,x(s)\,ds+f(t), \tag{1.3.24}$$

и соответствующее уравнение Фредгольма называются *интегральными уравнениями типа свертки*, функция, определяемая интегралом

$$\int_a^t H_0(t-s)\,x(s)\,ds=\int_a^t H_0(s)\,x(t-s)\,ds, \tag{1.3.25}$$

– *сверткой* двух функций H_0 и x, а интегралы в (1.3.25) – *интегралами свертки* [718].

Интегралы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t-s)\,h(s)\,ds=\int_{-\infty}^{+\infty} g(s)\,h(t-s)\,ds \tag{1.3.26}$$

определяют *стандартную свертку* для двух функций $g(t)$ и $h(t)$, определенных при $t\in\mathbb{R}$.

Интегральные уравнения Вольтерры–Фредгольма

ИУ Вольтерры–Фредгольма в научной литературе можно найти в двух формах, а именно [1083]:

$$x(t)=f(t)+\lambda_1\int_a^t H_1(t,s)\,x(s)\,ds+\lambda_2\int_a^b H_2(t,s)\,x(s)\,ds, \tag{1.3.27}$$

$$u(x,t)=f(x,t)+\lambda\int_{t_0}^t\int_\Omega F\big(u(y,s);x,t,y,s\big)\,dy\,ds,\quad (x,t)\in\Omega\times[t_0,T], \tag{1.3.28}$$

где $f(x,t)$ и $F\big(u(y,s);x,t,y,s\big)$ – аналитические функции на $\mathscr{D}=\Omega\times[t_0,T]$, а Ω – замкнутое подмножество в $\mathbb{R}^n$, $n=1,\,2,\,3$. Интересно отметить, что форма (1.3.27) содержит несвязанные части ИУ Вольтерры и Фредгольма, тогда как (1.3.28) – смешанные интегралы из этих ИУ. Кроме того, в обоих случаях это ИУ второго рода. Если неизвестные функции появляются только внутри интегральных знаков, результирующие уравнения имеют первый вид.

ИУ Вольтерры–Фредгольма возникают при решении параболических краевых задач, математическом моделировании пространственно-временного развития эпидемий, в различных физических и биологических моделях.

Преобразование задач Коши для ОДУ в интегральные уравнения

[748]

Рассмотрим начальную задачу для обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка:

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_1(t)\,\frac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n(t)\,x(t) = f(x),$$
$$x(0) = b_0, \quad x'(0) = b_1, \quad \ldots \quad \frac{d^{n-1}x(0)}{dt^{n-1}} = b_{n-1},$$

где $a_i(t)$ – непрерывные функции. Обозначим старшую производную через $u(t)$: $u(x) = x^{(n)}(t)$, – и проинтегрируем последнее выражение с учетом начального условия:

$$\frac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}} = \int_0^t u(s)\,ds + b_{n-1}.$$

Действуя подобным образом, на втором шаге будем иметь:

$$\frac{d^{n-2}x(t)}{dt^{n-2}} = \int_0^t \Big[\int_0^{s_2} u(s_1)\,ds_1\Big]\,ds_2 + b_{n-1}\,t + b_{n-2},$$

а после n-го интегрирования получим:

$$x(t) = \int_0^t \Big[\int_0^{s_n} \Big\{\ldots\Big(\int_0^{s_2} u(s_1)\,ds_1\Big)\ldots\Big\}\,ds_{n-1}\Big]\,ds_n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{k!}\,t^k.$$

Для того, чтобы упростить структуру правой части последнего соотношения, заметим, что при $n = 2$ интеграл принимает следующую форму:

$$I(t) = \int_0^t \Big[\int_0^{s_2} u(s_1)\,ds_1\Big]\,ds_2.$$

Тогда, интегрируя по частям, можно получить, что

$$I(t) = \int_0^t (t-s)\,u(s)\,ds \equiv \int_0^t \frac{(t-s)^1}{1!}\,u(s)\,ds.$$

Отсюда несложно установить, что для произвольного n будет верно равенство

$$\int_0^t \Big[\int_0^{s_n} \Big\{...\Big(\int_0^{s_2} u(s_1)\,ds_1\Big)...\Big\}\,ds_{n-1}\Big]\,ds_n = \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\,u(s)\,ds.$$

Подставляя в исходное дифференциальное уравнение соотношения для производных неизвестной функции с учетом форм полученного интеграла при различных n и приводя подобные, получим

$$u(t) + \int_0^t \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}(t)\,\frac{(t-s)^k}{k!}\,u(s)\,ds = f(t) - \sum_{m=0}^{n-1} a_{m+1} \sum_{k=0}^{m} \frac{b_{n-1-k}}{(m-k)!}\,t^{m-k}.$$

Вводя обозначения

$$K(t,s) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}(t)\,\frac{(t-s)^k}{k!}, \quad F(t) = f(t) - \sum_{m=0}^{n-1} a_{m+1} \sum_{k=0}^{m} \frac{b_{n-1-k}}{(m-k)!}\,t^{m-k},$$

приходим к ИУ Вольтерры II рода:

$$u(t) + \int_0^t K(t,s)\,u(s)\,ds = F(t).$$

Обратную процедуру перехода см. в [1083].

Пример 1.3.1. Уравнение $x''(t) + x(t) = f(t)$ с начальными условиями $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$ с помощью замены $u(t) = x''(t)$ и рассмотренной выше процедуры приводится к ИУ Вольтерры II рода

$$u(t) + \int_0^t (t-s)\,u(s)\,ds = f(t). \qquad \blacktriangleright$$

Преобразование краевых задач в интегральные уравнения

[748, 1083]

Рассмотрим процедуру преобразования краевой задачи в ИУ на примере задачи:

$$x''(t) + p(x)\,x'(t) + q(t)\,x(t) = f(t),$$
$$x(a) = c, \qquad x(b) = d.$$

Сначала выполним замену зависимой переменной $x''(t) = u(t)$ и проинтегрируем это соотношение:

$$\int_a^t x''(s)\,ds = \int_a^t u(s)\,ds,$$

что дает

$$x'(t) = x'(a) + \int_a^t u(s)\,ds.$$

Интегрируя еще один раз и используя первое граничное условие, получим:

$$x(t) = c + (t-a)\,x'(a) + \int_a^t \Big[\int_a^{s_2} u(s_1)\,ds_1\Big]\,ds_2.$$

Поставляя второе граничное условие в предыдущее равенство, находим, что

$$d \equiv x(b) = c + (b-a)\,x'(a) + \int_a^b \Big[\int_a^{s_2} u(s_1)\,ds_1\Big]\,ds_2.$$

Значение $x'(a)$ неизвестно и может быть получено так:

$$x'(a) = \frac{d-c}{b-a} - \frac{1}{b-a}\int_a^b \Big[\int_a^{s_2} u(s_1)\,ds_1\Big]\,ds_2.$$

Отсюда решение краевой задачи выразится следующим образом:

$$x(t) = c + (t-a)\,\Big[\frac{d-c}{b-a} - \frac{1}{b-a}\int_a^b \Big\{\int_a^{s_2} u(s_1)\,ds_1\Big\}\,ds_2\Big] + \\ + \int_a^t \Big[\int_a^{s_2} u(s_1)\,ds_1\Big]\,ds_2.$$

Подставляя полученные x, x' и x'' в исходную краевую задачу, сворачивая двойной интеграл

$$\int_a^t \Big[\int_a^{s_2} u(s_1)\,ds_1\Big]\,ds_2 = \int_a^s (t-s)\,u(s)\,ds$$

и упрощая полученное выражение, окончательно получаем, что ИУ, представляющее рассматриваемую краевую задачу, будет иметь вид:

$$u(t) - \int_a^b K(t,s)\,u(s)\,ds = F(t) \equiv f(t) - (d-c)\,\big[p(t) + t\,q(t)\big] - c\,q(t),$$

где

$$K(t,s)=\begin{cases}\big[p(t)+s\,q(t)\big]\,(1-t), & a\leqslant s\leqslant t,\\ \big[p(t)+t\,q(t)\big]\,(1-s), & t\leqslant s\leqslant b.\end{cases}$$

Обратную процедуру перехода см. в [1083].

Нелинейные интегральные уравнения

Формы нелинейных ИУ весьма разнообразны. Поэтому их классификация затруднительна. Укажем некоторые типы таких уравнений, которые вызывают наибольший теоретический и прикладной интерес.

Определение 1.3.14. *Уравнение Урысона* имеет следующий вид:

$$g(t)\,x(t)=\int_a^b K\big(t,s,x(s)\big)\,ds+f(t),\qquad t\in[a,b],\tag{1.3.29}$$

где $K\big(t,s,x(s)\big)$, как правило, предполагается непрерывной при $a\leqslant t,s\leqslant b$.

Определение 1.3.15. *Уравнение Гаммерштейна*

$$g(t)\,x(t)=\int_a^b K(t,s)\,F\big(s,x(s)\big)\,ds+f(t),,\qquad t\in[a,b],\tag{1.3.30}$$

где функция $K(t,s)$ интегрируема с квадратом в области $a\leqslant t,s\leqslant b$, – это частный случай уравнения Урысона (1.3.29).

Определение 1.3.16. *Уравнение Ляпунова–Лихтенштейна* содержит существенно нелинейные операторы, например, в виде

$$x(t)=f(t)+\int_a^b K_1(t,s)\,x(s)\,ds+\\ +\int_a^b\int_a^b K_2(t,s,\theta)\,x(s)\,x(\theta)\,ds\,d\theta.\tag{1.3.31}$$

Более сложную форму, чем (1.3.31), имеет *уравнение Э. Шмидта* [280]:

$$x(t)=Q[x,t,v],$$

где через Q обозначено выражение, содержащее члены вида

$$\int_a^b \int_a^b \ldots \int_a^b K_\ell(t, s_1, s_2, ..., s_\ell)\, x^{\alpha_0}(t)\, x^{\alpha_1}(s_1)\, x^{\alpha_2}(s_2) \ldots x^{\alpha_\ell}(s_\ell) \times \\ \times\ y^{\beta_0}(t)\, y^{\beta_1}(s_1)\, y^{\beta_2}(s_2) \ldots y^{\beta_\ell}(s_\ell)\, ds_1\, ds_2 \ldots ds_\ell,$$

где α_k, β_k $(0 \leqslant k \leqslant \ell)$ – целые числа, $y(t)$ –заданная функция, $x(t)$ – искомая функция.

Определение 1.3.17. *Нелинейное уравнение Вольтерры* имеет вид

$$x(t) = \int_a^t F\big(t, s, x(s)\big)\, ds + f(t), \tag{1.3.32}$$

где функция $F\big(t, s, x(s)\big)$ непрерывна по совокупности аргументов t, s, x в области $a \leqslant t, s \leqslant b$, $-M \leqslant x \leqslant M$.

Методы решения интегральных уравнений

Регулярное расширение областей применения ИУ с одной и несколькими независимыми переменными стимулировало интенсивные исследования теории, свойств и методов решения функциональных уравнений указанного типа. Необходимо отметить, что аналитические методы, основанные на понятии резольвенты, преобразованиях Лапласа, Фурье, Мелина, Бесселя, Лагерра и др., представляют собой мощный инструмент решения многих теоретических, а часто практических задач. Но как известно, использование этих методов в приложениях существенно ограничено вследствие ориентированности на определенный, достаточно ограниченный круг линейных задач, а их компьютерная реализация затруднена.

В связи с этим быстро развиваются ставшие уже классическими методы: применение механических квадратур, итерационные методы, проекционные методы (моментов, Бубнова–Галеркина, Петрова–Галеркина, коллокации и др.).

С ориентацией на компьютерную реализацию были разработаны методы, основанные на сочетании метода квадратур с аппроксимацией искомых решений, например, на основе сплайнов, или интегральных операторов в целом, численные схемы типа Рунге–Кутты и т.д. Эти и другие методы предоставили возможность решать многие типы линейных и нелинейных ИУ с переменными и/или постоянными пределами интегрирования.

Для примера рассмотрим технику применения *метода последовательных приближений* для решения интегрального уравнения Вольтерры II рода:

$$x(t) = \lambda \int_a^t K(t,s)\, x(s)\, ds + f(t), \quad a \leqslant t \leqslant b, \tag{1.3.33}$$

где $f(t)$, $K(r,s)$ – непрерывные функции, λ – числовой параметр.

При любом значении λ натуральное число n можно выбрать настолько большим, что будет выполняться следующее условие:

$$\frac{|\lambda|^n M^n (b-a)^n}{n!} < 1, \tag{1.3.34}$$

где

$$M = \max_{a \leqslant t,s \leqslant b} |K(t,s)|.$$

Тогда отображение

$$A\, x(t) = \lambda \int_a^t K(t,s)\, x(s)\, ds + f(t) \tag{1.3.35}$$

будет сжимающим. Следовательно, при любом λ уравнение (1.3.33) будет иметь решение и притом единственное [99].

Решение $x(t)$ уравнения (1.3.33) будем искать в виде ряда:

$$x(t) = x_0(t) + \lambda\, x_1(t) + \ldots + \lambda^n\, x_n(t) + \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k\, x_k(t). \tag{1.3.36}$$

Поставляя этот ряд в уравнение (1.3.33) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, получим систему равенств:

$$\begin{gathered} x_0(t) = f(t), \\ x_1(t) = \int_a^t K(t,s)\, x_0(s)\, ds, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_{n+1}(t) = \int_a^t K(t,s)\, x_n(s)\, ds, \end{gathered} \tag{1.3.37}$$

... ...

Если

$$L = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |f(t)|,$$

то

$$|x_1(t)| \leqslant L\,M\,(b-a),$$

$$|x_2(t)| \leqslant \frac{L\,M^2\,(b-a)^2}{2!},$$

... ...

$$|x_2(t)| \leqslant \frac{L\,M^n\,(b-a)^n}{n!},$$

... ...

В качестве приближенного решения уравнения (1.3.33) можно взять частичную сумму ряда (1.3.36):

$$\widehat{x}_N(t) = \sum_{k=0}^{N} \lambda^k\, x_k(t). \tag{1.3.38}$$

Оценка погрешности приближенного решения имеет вид

$$|x(t) - \widehat{x}_N(t)| = \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} \lambda^k\, x_k(t) \right| \leqslant \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{|\lambda|^k\, M^k\,(b-a)^k\, L}{k!} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\big[|\lambda|\,M\,(b-a)\big]^{N+1}\,L}{(N+1)!} \left[1 + \frac{|\lambda|\,M\,(b-a)}{N+2} + \frac{|\lambda|^2\,M^2\,(b-a)^2}{(N+2)(N+3)} + ...\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\big[|\lambda|\,M\,(b-a)\big]^{N+1}\,L}{(N+1)!} \left[\!\!\left[1 + \left\{\frac{|\lambda|\,M\,(b-a)}{N+2}\right\} + \left\{\frac{|\lambda|\,M\,(b-a)}{N+2}\right\}^2 + ...\right]\!\!\right],$$

или окончательно

$$|x(t) - \widehat{x}_N(t)| \leqslant \frac{\big[|\lambda|\,M\,(b-a)\big]^{N+1}\,L}{(N+1)!} \cdot \frac{1}{1 - |\lambda|\,M\,(b-a)/(N+2)}. \tag{1.3.39}$$

Пример 1.3.2. Рассмотрим уравнение

$$x(t) = \lambda \int_0^t e^{s-t}\, x(s)\, ds - 2\,e^{-t} + 2\,e^{-t/2}, \qquad \lambda = \frac{1}{2}. \tag{1.3.40}$$

Используя метод последовательных приближений, для $N = 10$ можно получить следующий результат:

$$\widehat{x}_N(t) = 22\,e^{-t/2} + e^{-t}\Big(-22 - 10\,t - \frac{9\,t^2}{4} - \frac{1\,t^3}{3} - \frac{7\,t^4}{192} - \frac{t^5}{320} - \\ - \frac{t^6}{4608} - \frac{t^7}{80640} - \frac{t^8}{1720320} - \frac{t^9}{46448640} - \frac{t^{10}}{1857945600}\Big).$$

График модуля разности $\epsilon(t)$ между точным решением $x(t) = t\,e^{-t/2}$ и приближенным $\widehat{x}_N(t)$ изображен на рис. 1.3.1. ▶

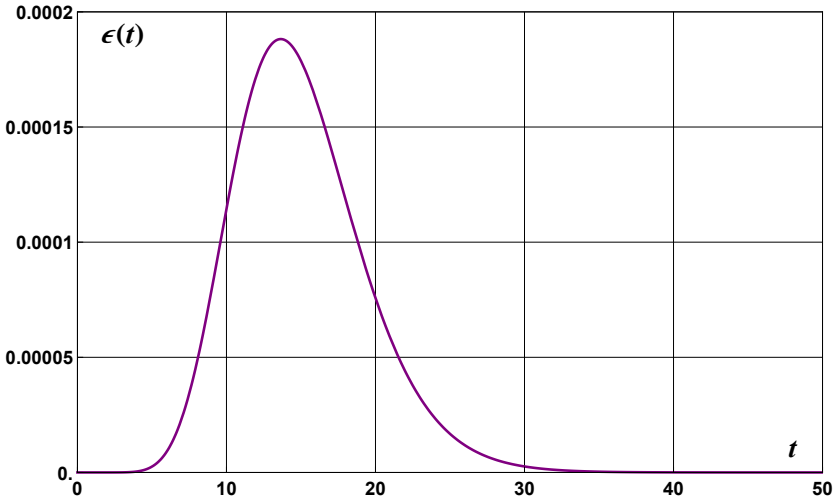


Рис. 1.3.1

Достаточно полное представление о современном состоянии теоретического и прикладного аппарата аналитического и приближенно-аналитического решения ИУ можно получить, если обратиться к справочнику [253] (расширенное издание [909]). Классическое изложение приближенных методов решения ИУ можно найти в справочнике [153], где дано описание методов итераций, применения квадратурных формул, замены ядра вырожденным, Бубнова–Галёркина, наименьших квадратов и др.

Еще один справочник [39] содержит описания, а также алгоритмы и программы расширенного списка методов приближено-аналитического и численного решения различных классов ИУ (Вольтерры I и II рода, Фредгольма I, II и III рода): традиционные процедуры (методы квадратур,

итераций, резольвенты, вырожденных ядер, моментов, коллокации, проекционные, сплайн-аппроксимации, Рунге–Кутты, преобразований Фурье и Меллина, собственных функций и др.) и методы регуляризации (Тихонова, Лаврентьева, Иванова, Фридмана, Бакушинского, Калмана, Винера и др.).

Описание ряда точных и приближенных аналитических методов решения простейших отдельных линейных и нелинейных ИУ Вольтерры, Фредгольма и Вольтерры–Фредгольма и систем таких уравнений дано в [930, 1083], ИУ Вольтерры с одной и несколькими переменными (например, замены ядра вырожденным, последовательных приближений, возмущений в приложении к задачам электростатики, гидродинамики с малым числом Рейнольдса, упругости, теории рассеяния) можно найти в [718]. Для первоначального ознакомления с тематикой подходит [749].

С широким набором методов приближенного решения ИУ различных типов (методы Галеркина, наименьших квадратов, подобластей, коллокации и механических квадратур), включая сингулярные, можно ознакомиться в [1, 767, 792, 872]. Среди других специализированных схем отметим: методы коллокации [438, 463, 1139], Рунге–Кутты [439, 513, 817], вариационно-итеративные [128], спектральные [1021], Галеркина [1138], экстраполяционные [981], регуляризации [774], Монте-Карло [559], дифференциального преобразования [356], конечных элементов в форме Галеркина [401]; применение анализа гомотопии [833], квазилинеаризации [830], степенных рядов [404], систем кусочно постоянных функций (block-pulse functions) [371], различных квадратурных формул [2, 14, 271, 1041, 1094], Паде-аппроксимаций [516], кубических сплайнов [866], полиномов и вейвлетов Лежандра [1013], Чебышёва [417], Хаара [779] и CAS (Cosine And Sine) [1117], τ-метода [600], метода осреднения функциональных поправок Ю.Д. Соколова [113, 281], комбинации разложения по ортонормированному базису, проекционных методов и метода Монте-Карло [75], сочетания методов Рунге–Кутты и квадратурных формул [1047]; блочные методы граничных значений [475] и др.

Из истории появления и развития интегральных уравнений

Отдельные примеры интегральных уравнений начали появляться в первой половине XIX в. Систематическое изучение таких уравнений началось в середине XIX в. после того, как удалось свести решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в теории потенциала к исследованию линейного ИУ II рода. В это же время началось построение общей теории линейных интегральных уравнений.

Основоположниками теории интегральных уравнений на рубеже XIX –XX вв. стали В. Вольтерра (1860–1940) и Э.И. Фредгольм[6] (1866–1927), а также Д. Гильберт (1862–1943), исследовавший интегральные уравнения с симметричными ядрами, и немецкий математик Э. Шмидт (1876–1959). В их трудах были изложены важнейшие результаты по классификации уравнений и ядер, решению задач о собственных значениях и функциях, вопросам существования и единственности решений, введены понятия интегральных операторов Вольтерры и Фредгольма, резольвенты, изучены их свойства и др. Эти результаты послужили основой для создания классических приближенных методов решения интегральных уравнений, включающих методы квадратур, итераций, вырожденных ядер, собственных функций, а также применение интегральных преобразований.

Термин "интегральное уравнение" ввел в 1888 г. П.Д.Г. Дюбуа-Реймон (1831–1889), однако первые задачи, связанные с интегральными уравнениями, решались и ранее. Так еще в 1811 г. в процессе исследований распространения тепла в твердых телах Ж.Б.Ж. Фурье (1768–1830) решил задачу об обращении интеграла, которая теперь носит его имя. Примерно в то же время С.Д. Пуассон (1781–1840) решал задачу о распределении заряда на поверхности проводника.

Кроме того, еще до фундаментальных исследований В. Вольтерры, И. Фредгольма, Д. Гильберта и Э. Шмидта для построения решения интегральных уравнений был предложен метод последовательных приближений. Этот метод применялся сначала для решения нелинейных интегральных уравнений типа уравнений Вольтерры (по современной терминологии) в связи с исследованиями ОДУ в работах Ж. Лиувилля (1838), И. Фукса (1870), Дж. Пеано (1888) и др., а К. Неймана (1877) – для построения решения линейного интегрального уравнения II рода. Общую форму методу последовательных приближений придал Э. Пикар (1893).

Но как правило [8], имена Пуассона и Фурье в литературе по теории интегральных уравнений практически не упоминаются, а пальму первенства в решении интегральных уравнений частного вида (работы 1823 и 1826 гг.) отдают Н.Х. Абелю (1802–1829). Такие уравнения сейчас называют его именем. Ему же принадлежит введение понятия и обозначения производной и интеграла дробного порядка, а также получение формулы для дробной производной. В настоящее время широко используются модели различных явлений на основе ДУ с такими производными, сводящимися к интегро-дифференциальным уравнениям[7].

[6] Мемуары 1900 и 1903 гг.

[7] В середине XX в. Ф. Майнарди и М. Капуто показали, что использование ДУ дробного порядка для построения моделей в задачах термовязкоупругости более адекватно

Необходимо отметить и подход Ж. Лиувилля (1809–1882) на основе использования аппарата дробного исчисления к решению некоторых интегральных уравнений первого рода, в частности, задачи о таутохроне[8]. Ему же (1837) принадлежит идея первого общего метода теории интегральных уравнений – метода последовательных приближений, а также доказательство общих теорем в теории интегральных уравнений с симметризуемым ядром (1845). Эти теоремы были переоткрыты через полвека Д. Гильбертом и Э. Шмидтом [8].

Первое большое и серьезное исследование нелинейных интегральных уравнений было выполнено в работе Л.М. Ляпунова (1857–1918) по фигурам равновесия вращающейся жидкости (1906). В несколько более общей форме результаты Л.М. Ляпунова были получены затем Э. Шмидтом (1908 г.) и Л. Лихтенштейном[9] (1931) [109].

Большой вклад в развитие различных областей теории интегральных уравнений в конце XIX в.– начале XX в. внесли отечественные ученые В.А. Костицын (1883–1963); А.В. Летников (1837–1888); Н.Я. Сонин (1849–1915), предложивший метод решения интегральных уравнений более общего, нежели уравнение Абеля, вида; П.С.Урысон (1898–1924), исследовавший важный для приложений класс интегральных уравнений с переменным верхним пределом и ядром, зависящим от разности аргументов, а начиная с 30-х–40-х гг. XX в., Н.М. Гюнтер (1871–1941), Д.Ф. Егоров (1869–1931), Л.В. Канторович (1912 – 1986), А.Н. Колмогоров (1903–1987), Л.А. Люстерник (1899–1981), С.Г. Михлин (1908–1990), А.И. Некрасов (1883–1957), И.Г. Петровский (1901–1973), Н.С. Смирнов (?–?), С.Л. Соболев (1908–1989), а позднее М.А. Красносельский (1920–1997), В.В. Немыцкий (1900–1967), В.И. Соболев (1913–1995) и др. Большой вклад в развитие методов граничных интегральных уравнений внесли приоритетные исследования Н.А. Кильчевского (1909–1979), В.Д. Купрадзе (1903–1985), С.Г. Михлина, И.Н. Мусхелишвили (1891–1976), который развил, кроме того, теорию одномерных сингулярных интегральных уравнений, Г.Н. Савина (1907–1975) и др.

Важнейшие работы в рассматриваемой области выполнили иностранных ученые: С. Банах (1892–1945), который в своей диссертации "Об операциях в абстрактных множествах и их приложении к интегральным

из физических соображений и позволяет более точно воспроизводить в расчетах экспериментально наблюдаемые данные [136].

[8] Формулировка: найти кривую, скользя вдоль которой без трения тяжелая частица достигает своего самого низкого положения за одно и то же время, независимо от ее начального положения.

[9] Автор одного из первых учебников [784] по нелинейным интегральным и интегродифференциальным уравнениям и их приложениям.

уравнениям" инициировал аксиоматическое построение теории полных нормированных (банаховых) пространств и методом последовательных приближений получил решение интегральных уравнений для широкого класса функций как следствие принципа сжимающих отображений; Ж.М. Ле Ру (1863–1949); Л. Лихтенштейн (1878–1933); Ю. Шаудер (1899–1943), сформулировший принцип существования неподвижной точки при непрерывном преобразовании выпуклого множества; R. Iglisch (1903-1987) и др.

Более подробную историю развития теории нелинейных интегральных уравнений можно найти в [29].

1.3.2. Интегро-дифференциальные уравнения

Определение 1.3.18. К (*обыкновенным*) *интегро-дифференциальным уравнениям* (ИДУ, ОИДУ) относят такие функциональные уравнения, в которых неизвестная функция и ее производные присутствуют как под знаком интеграла, так и под знаком дифференциала или производной:

$$\mathbb{L}_n\big[x(t)\big] - \lambda \int_a^b K\big(t, s, \mathbb{H}_m\big[x(s)\big]\big)\, ds = f(t), \tag{1.3.41}$$

где

$$\mathbb{L}_n\big[x(t)\big] = \frac{d^n x(t)}{dt^n} + p_1(t)\,\frac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + p_{n-1}(t)\,\frac{dx(t)}{dt} + p_n(t)\,x(t),$$

$$\mathbb{H}_n\big[x(t)\big] = \frac{d^m x(t)}{dt^m} + q_1(t)\,\frac{d^{m-1}x(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + q_{m-1}(t)\,\frac{dx(t)}{dt} + q_m(t)\,x(t)$$

– *внешний* и *внутренний дифференциальные операторы* соответственно; $K\big(t, s, \mathbb{H}_m\big[x(t)\big]\big)$ – *ядро ИДУ*; $f(t)$ – *правая часть ИДУ*; $p_i(t)$, $q_j(t)$ $(i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m})$ – заданные функции аргумента t; пределы интегрирования могут быть конечными или бесконечными, постоянными или переменными.

Следовательно, в отличие от интегральных уравнений ИДУ содержат еще и производные неизвестной функции.

Несмотря на приведенное довольно общее определение, хорошо известно, что это определение является чисто формальным [45], так как во многих случаях можно легко перейти от одного типа уравнений к другому. В частности, некоторые ИДУ можно свести к дифференциальным уравнениям в линейном нормированном (банаховом) пространстве. Однако существует ряд эволюционных ИДУ, служащие моделями во многих

областях науки, например, в теории упругости и математической биологии, содержащие интегрирование по времени, для которых такой переход выполнить невозможно или очень сложно. Такие уравнения [45], обыкновенные и в частных производных, описывают сложное поведение объектов в различных средах с учетом предыдущей истории.

Выделяют следующие *основные формы ИДУ*:

– *линейные* (внутренний дифференциальный оператор входит линейно)

$$\mathbb{L}_n\big[x(t)\big] - \lambda \int_a^b K\big(t,s\big)\,\mathbb{H}_m\big[x(s)\big]\,ds = f(t); \tag{1.3.42}$$

– *линейные ИДУ Фредгольма* (уравнения с постоянными пределами интегрирования), включающие *уравнения Фредгольма I рода*

$$\mathbb{L}_n\big[x(t)\big] - \lambda \int_a^b K\big(t,s\big)\,\mathbb{H}_m\big[x(s)\big]\,ds = 0 \tag{1.3.43}$$

и *уравнения Фредгольма II рода*

$$\mathbb{L}_n\big[x(t)\big] - \lambda \int_a^b K\big(t,s\big)\,\mathbb{H}_m\big[x(s)\big]\,ds = f(t); \tag{1.3.44}$$

– *линейные ИДУ Вольтерры* (уравнения с переменным верхним пределом интегрирования), включающие *уравнения Вольтерры I рода*

$$\mathbb{L}_n\big[x(t)\big] - \lambda \int_a^t K\big(t,s\big)\,\mathbb{H}_m\big[x(s)\big]\,ds = 0 \tag{1.3.45}$$

и *уравнения Вольтерры II рода*

$$\mathbb{L}_n\big[x(t)\big] - \lambda \int_a^t K\big(t,s\big)\,\mathbb{H}_m\big[x(s)\big]\,ds = f(t); \tag{1.3.46}$$

– *линейные ИДУ Вольтерры–Фредгольма II рода*

$$\mathbb{L}_n\big[x(t)\big] = f(t) + \lambda_1 \int_a^t H_1(t,s)\,x(s)\,ds + \lambda_2 \int_a^b H_2(t,s)\,x(s)\,ds,$$

$$\mathbb{L}_n\big[u(x,t)\big] = f(x,t) + \lambda \int_{t_0}^t \int_\Omega F\big(u(y,s);x,t,y,s\big)\,dy\,ds, \quad (x,t) \in \Omega \times [t_0,T],$$

(смысл обозначений см. в предыдущем подразделе в описании ИУ Вольтерры–Фредгольма);

– *нелинейные* (внутренний дифференциальный оператор входит нелинейно)

$$\mathbb{L}_n\big[x(t)\big] - \lambda \int_a^b K\big(t, s, \mathbb{H}_m\big[x(s)\big]\big)\, ds = f(t). \tag{1.3.47}$$

Различные формы начальных и краевых условий см. в обзоре [34].

Вообще, классификация интегро-дифференциальных уравнений достаточно трудна [45]. Если производная неизвестной функции берется только по одной переменной, то ИДУ называется *обыкновенным* (ОИДУ). Оно называется уравнением n-го порядка, если n есть порядок старшей производной. ИДУ, содержащие производные по различным переменным, называются *интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных* (ИДУвЧП). Среди последних можно выделить некоторые типы, аналогичные эллиптическим, гиперболическим и параболическим типам дифференциальных уравнений.

Среди ОИДУ и ИДУвЧП присутствуют три основные формы уравнений: с интегралами с переменным верхним пределом по времени (типа Вольтерры), с интегралами по конечному (как правило, это свойственно ОИДУ) или бесконечному (пространственному для ИДУвЧП) промежутку (типа Фредгольма) и смешанными видами интегралов, включая кратные для ИДУвЧП. В теории и приложениях можно найти и другие формы ИДУ, включая комбинации различных структур ИДУ (например Фредгольма и Вольтерры) и промежутков интегрирования (постоянной и переменной длины) в одном уравнении.

Рассмотрим следующую начальную задачу для системы ИДУ вида [773]:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}\big(t, \boldsymbol{x}(t)\big) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{K}\big(t, s, \boldsymbol{x}(s)\big)\, ds, \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0, \tag{1.3.48}$$

где $\boldsymbol{f} \in C\big[J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\big]$, $\boldsymbol{K} \in C\big[J \times J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\big]$ и $J = \big[t_0, t_0 + a\big]$. Эта задача эквивалентна интегральному уравнению:

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}^0 + \int_{t_0}^{t} \Big[\boldsymbol{f}\big(s, \boldsymbol{x}(s)\big) + \int_{s}^{t} K\big(\theta, s, x(s)\big)\, d\theta\Big]\, ds \equiv \mathbb{T}\big[\boldsymbol{x}(t)\big]. \tag{1.3.49}$$

Теорема 1.3.3 (Шаудера). Если $\mathscr{E}$ – замкнутое, ограниченное, выпуклое подмножество банахова пространства $\mathscr{B}$, $A : E \to \mathscr{E}$ – вполне непрерывный оператор. Тогда A имеет неподвижную точку.

Теорема 1.3.4. Пусть $\boldsymbol{f} \in C\big[J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\big]$, $\boldsymbol{K} \in C\big[J \times J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\big]$,

$$\int_s^t |\, K\big(\theta, s, x(s)\big)\,|\, d\theta \leqslant N, \qquad s \in J,$$

$\boldsymbol{x} \in S = \big\{\boldsymbol{z} \in C\big[J, \mathbb{R}^n\big] \,\big|\, \boldsymbol{z}(t_0) = \boldsymbol{x}^0, |\, \boldsymbol{z}(t) - \boldsymbol{x}^0\,| \leqslant b\big\}$. Тогда задача (1.3.48) имеет хотя бы одно решение на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant \alpha$ для некоторого $0 < \alpha \leqslant a$.

Пусть начальная задача для системы ИДУ задана так:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}\big(t, \boldsymbol{x}, \mathbb{K}\,\boldsymbol{x}\big), \quad (\mathbb{K}\,\boldsymbol{x})(t) = \int_{t_0}^t \boldsymbol{\mathcal{K}}(t,s)\,\boldsymbol{x}(s)\,ds, \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0, \tag{1.3.50}$$

$\boldsymbol{\mathcal{K}}(t,s)$ –непрерывная $(n \times n)$–матрица на $J \times J$ и $\boldsymbol{f} \in C\big[J \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\big]$.

Теорема 1.3.5. Предположим, что $|\, \boldsymbol{\mathcal{K}}(t,s)\,| \leqslant K_0$, $(t,s) \in J \times J$,

$$|\, \boldsymbol{f}\big(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\big)\,| \leqslant M, \quad t \in J, \quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S = \big\{\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n \,\big|\, |\, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0\,| \leqslant b\big\}.$$

Тогда существует решение $\boldsymbol{x}(t)$ задачи (1.3.50) на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \alpha$ для некоторого $\alpha > 0$.

Для линейных ОИДУ Вольтерры верна следующая теорема [792].

Теорема 1.3.6. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) = g(t)\,x(t) + f(t) + \int_0^t H_1(t,s)\,x(s)\,ds + \\ + \int_0^t H_2(t,s)\,\dot{x}(s)\,ds, \quad x(0) = x^0, \tag{1.3.51}$$

где $g(t)$, $h(t)$, $H_1(t,s)$, $H_2(t,s)$ – непрерывные функции при $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$. Тогда уравнение (1.3.51) имеет единственное дифференцируемое решение при $0 \leqslant t \leqslant T$.

Рассмотрим систему линейных ОИДУ с ограниченными сосредоточенным и распределенным запаздываниями:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\,\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{\mathcal{B}}(t)\,\boldsymbol{x}(t-\tau) + \int_{-\tau}^{0} \boldsymbol{\mathcal{H}}(t,s)\,\boldsymbol{x}(t+s)\,ds, \tag{1.3.52}$$

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t), \qquad t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0, \quad \boldsymbol{\varphi} \in C\big(t_0 - \tau, t_0], \mathbb{R}^n\big),$$

где $\boldsymbol{\mathcal{A}}(t)$, $\boldsymbol{\mathcal{B}}(t)$ и $\boldsymbol{\mathcal{H}}(\cdot, s)$ при почти каждом значении $s \in [-\tau, 0]$ – локально интегрируемые функции на $\mathbb{R}_+$, при почти каждом значении $t \in \mathbb{R}_+$ матричная функция $\boldsymbol{\mathcal{H}}(t, \cdot)$ – интегрируемая функция на $[-\tau, 0]$. Тогда решение системы (1.3.52) может быть представлено так [63]:

$$\boldsymbol{x}(t; t_0, \boldsymbol{\varphi}) = \boldsymbol{\mathcal{V}}(t, t_0)\,\boldsymbol{\varphi}(t_0) + \int\limits_{t_0-\tau}^{t_0} \Big[\boldsymbol{\mathcal{V}}(t, \theta+\tau)\,\boldsymbol{\mathcal{B}}(\theta+\tau) + \\ + \int\limits_{t_0}^{t_0+\tau} \boldsymbol{\mathcal{V}}(t, s)\,\boldsymbol{\mathcal{H}}(s, \theta-s)\,ds\Big]\,\boldsymbol{\varphi}(\theta)\,d\theta, \qquad t > t_0, \tag{1.3.53}$$

где функция $\boldsymbol{\mathcal{V}}(t, s)$ – решение матричного уравнения:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{V}}(t, s)}{\partial t} = \boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\,\boldsymbol{\mathcal{V}}(t, s) + \boldsymbol{\mathcal{B}}(t)\,\boldsymbol{\mathcal{V}}(t-\tau, s) + \int\limits_{-\tau}^{0} \boldsymbol{\mathcal{H}}(t, \theta)\,\boldsymbol{\mathcal{V}}(t+\theta, s)\,d\theta,$$

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}(t, s) = \boldsymbol{O}_{n\times n}, \quad t < s, \qquad \boldsymbol{\mathcal{V}}(s, s) = \boldsymbol{I}, \quad s > 0.$$

Широкое использование математических моделей, включающих интегро-дифференциальные уравнения, является одной из основных причин, объясняющих быстрое развитие теории этих уравнений (см., например, [450, 624] и ссылки в них).

В настоящее время ИДУ используются при моделировании процессов во многих областях науки, техники, экономики, финансов [502] и др.: процессы коагуляции, стабильность ядерных реакторов [495], задачи управления, проблема флаттера для сечения аэродинамического профиля в двумерном потоке [624], вязкоупругость [77, 473, 536, 554, 624, 939].

В последние годы в связи с усложнением применяемых в различных отраслях науки и техники математических моделей все чаще возникают проблемы, требующие описания исследуемых процессов с помощью ИДУ в частных производных (ИДУвЧП). Среди таких процессов можно выделить следующие: нелинейные колебания пологих тонких оболочек [27]; тепломассоперенос с конечной скоростью распространения тепла [94]; развитие биологических популяций, распространение волн, динамика ядерных реакторов, поведение составных систем, деградация травяной биомассы на пастбищах из-за чрезмерного выпаса скота [773]; наследственная теория упругости [292]; передача тепла в материалах с памятью, биомеханика, расплавы полимеров, сжатие в пористой среде, эпидемии в человеческой среде [473]; нейросети в мозге [680]; эволюция видов микроор-

ганизмов [423]; процессы резания [69]; динамика тяжелой слоистой жидкости [146]; ползучесть и релаксация материалов [101,259,264]; движение заряженных частиц в плазме [624]; распространение предпочтительного гена в популяции, реакционно-транспортные системы с памятью и дальнодействием в биологии [57, 735]; климатология (моделирование вихрей), нейродинамика и др.

Важная группа процессов, описываемая ИДУвЧП, связана с эффектами памяти в фазовых переходах (см. [955], в которой представлена феноменологическая теория динамики фазового перехода с памятью). Интегро-дифференциальными уравнениями описываются процессы распределения тепла с конечной скоростью в средах с памятью (модель Гуртина–Пипкина [634], состоящий из уравнений фазового перехода и баланса энергии).

Приведем два примера ИДУвЧП.

Пример 1.3.3. Уравнение

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \gamma\,u(x,t)\left[1 - \int_{-\tau}^{0} u(x,t+s)\,d\mu(s)\right] \qquad (1.3.54)$$

– параболическое ДУвЧП с интегралом по временно́му отрезку $[t-\tau, t]$ (интегро-дифференциальное уравнение в частных производных по конечному промежутку постоянной длины), предложенное для моделирования однородных популяций. ►

Пример 1.3.4. Математическое описание эволюции пространственно-временной активности внутрикорковых нервных популяций дается интегро-дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + 2\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + u(x,t) = \\ = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K\big(|x-y|\big)\,S\Big[u\Big(y, t - \frac{|x-y|}{d}\Big)\Big]\,dy + I(x,t),$$

$$K\big(|x-y|\big) = \frac{a_e}{2}\,e^{-|x-y|} - \frac{a_i\,r}{2}\,e^{-r|x-y|}, \quad S[u] = \frac{1}{1+\exp[-1.8\,(u-3)]},$$

где $I(x,t)$ – внешнее воздействие. ►

Подходы в изучении устойчивости ИДУ отличаются от классических методов теории устойчивости для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), так как классические методы в основном основаны на локальном характере действия каждого члена в ОДУ.

Из истории появления и развития интегро-дифференциальных уравнений

С задачами, которые приводят к интегро-дифференциальным уравнениям, исследователи впервые столкнулись еще в XVIII–XIX веках. Из первых задач этого типа можно отметить следующие [314]: 1) задачу Вольтерра о крутильных колебаниях; 2) проблему Проктора о равновесии упругой балки; 3) задачу Прандтля расчета крыла самолета. Термин "интегро-дифференциальное уравнение" впервые появилось в трудах Ж.А. Кондорсе (1771) [156] в связи с геометрической задачей, рассмотренной еще в 1740 г. Л. Эйлером: найти, какой может быть линия, подобная своей эволюте.

Истоки изучения интегральных и интегро-дифференциальных уравнений можно проследить до работ Н.Х. Абеля, А.Дж. Лотки, Э.И. Фредгольма, Т. Мальтуса, П. Верхюльста и В. Вольтерры по проблемам механики, математической биологии и экономики [773]. Работа В. Вольтерры о конкурирующих видах животных (публикации 1920-х – 1930-х гг.) имеет фундаментальное значение для развития математического моделирования задач реального мира. С тех пор теория и приложения ИДУ Вольтерры с ограниченными и неограниченными запаздываниями стали важнейшими областями исследования. Добавим, что общая теория и первичная классификация детерминированных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных (ИДУвЧП) была разработана Вито Вольтерра [45, 1070] в первой четверти XX в.

Достаточно сложно оценить сроки начала фундаментальных работ в области ИДУ. Но "пальму первенства", как правило[10], здесь отдают В. Вольтерра. Так авторы [627, 762], указывают, что В. Вольтерра начал свои исследования, связанные с изучением материалов с памятью ("hereditary mechanics", "phénomeènes d'hérédité") и опубликованные в статьях [1054–1056, 1058, 1062, 1064, 1066], в 1909 г. Но из обзорных лекций известного математика Ж. Адамара [639], датируемых 1915 г., можно сделать вывод, что работы В. Вольтерры в области ИДУвЧП (см. [1053, 1057, 1059–1061, 1063, 1065, 1067]) начались раньше – в 1907 г.

Большой вклад в развитие различных классов внесли ученые СССР. Так в 1934 г. были опубликованы серьезные результаты по решению и

[10] Г.А. Шишкин [315], указывая, что "... Разработка теории интегродифференциальных уравнений с обыкновенным аргументом предположительно началась с работ Н. Бурбаки (1903). явно ошибается, так как: 1) французская группа математиков под общим псевдонимом Н. Бурбаки образовалась в 1935 г.; 2) направления работы группы были весьма далеки от проблем прикладной математики, включая функциональные уравнения различных типов.

исследованию интегро-дифференциальных уравнений А.И. Некрасовым. Идеи этой работы затем развивались Я.В. Быковым, В.В. Васильевым, Т.И. Вираненко и др. [314] (обзор других исследований см. во введении к [315, 427]).

1.3.3. Основные методы интегрирования ОИДУ

Математическое моделирование процессов в различных областях, науки, технике и т.д. обычно приводит к функциональным уравнениям, таким как детерминированные ОДУ и ДУвЧП, интегральные и интегро-дифференциальные уравнения и их сложные комбинации. При этом значительная часть математических формулировок указанных процессов содержит детерминированные обыкновенные интегро-дифференциальные уравнения и ИДУвЧП. Отметим, что точные аналитические решения таких проблем, как правило, отсутствуют.

Нелинейные явления имеют фундаментальное значение в различных областях науки и техники. Но нелинейные (и даже линейные) модели реальных явлений до сих пор с трудом поддаются аналитическому и численному исследованию. Поэтому в последнее время большое внимание уделяется поиску лучших и более эффективных методов поиска решений, которые могут аналитическими, приближенными (численными) и приближенными аналитическим.

Основными задачами анализа систем ОИДУ и ИДУвЧП являются поиск критериев существования решений соответствующих уравнений и оценка устойчивости как этих решений, так и схем их численного интегрирования. Естественно, что усложнение используемого математического аппарата ведет и к усложнению применяемых методов и, в первую очередь, приближенных, т.к. возможности получения точных и приближенных аналитических решений серьезных проблем (схемы для простейших отдельных линейных и нелинейных ИДУ Вольтерры, Фредгольма и Вольтерры–Фредгольма и систем таких уравнений см. в [930, 1083]; различные варианты асимптотических методов для решения отдельных ОИДУ Вольтерры и Фредгольма и систем таких уравнений представлены в монографии [316]; для решения ОИУ Фредгольма II рода возможно использование итераций Неймана [280]; для решения ИУ Фредгольма II рода, Вольтерры I и II рода можно применять разложения в степенные ряды), включая указанные выше, весьма ограничены. Поэтому основными численные методами в этой области являются конечно-разностные процедуры, различные варианты методов Рунге–Кутты, трапеций, коллокаций [672, 673] и др.

Качественные приближенные аналитические методы исследования нелинейных ИУ представлены топологическими методами, включающими принцип сжатых отображений, вариационные схемы, метод резольвент нелинейного оператора [109] и др.

Рассмотрим следующий численный метод (одномерный вариант с ядром более простой структуры см. в [510]) решения системы ИДУ вида:

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}(t), t\big) + \int\limits_{t_0}^{t} \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{x}(t), t; \boldsymbol{x}(s), s\big)\, ds, \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0, \tag{1.3.55}$$

где t – время ($t_0 \leqslant t \leqslant T < +\infty$); $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ – неизвестная векторная функция; $\boldsymbol{f}(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^n \times [t_0, T] \mapsto \mathbb{R}$ и $\boldsymbol{F}(\cdot,\cdot;\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^n \times [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \times [t_0, T] \mapsto \mathbb{R}$ – заданные достаточно гладкие функции своих аргументов; $\boldsymbol{x}^0$ – известный вектор.

Обозначим через $\boldsymbol{x}(t_k)$ точное значение векторной функции $\boldsymbol{x}$ при $t_k = t_0 + k\,h$ ($k = 0,\ 1,\ 2,\ ...,\ K$), приближенное значение $\boldsymbol{x}$ в точке t_k – через $\boldsymbol{x}_k$, а аппроксимацию $\boldsymbol{x}'(t_k)$ – через $\boldsymbol{x}'_k$, где $h = T/K$.

Для того, чтобы получить решение при t_{k+1}, если оно известно в точке $t = t_k$, проинтегрируем обе части уравнений (1.3.55) по промежутку $[t_k, t_{k+1}]$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t_{k+1}) = \boldsymbol{x}(t_k) + \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}(\theta), \theta\big)\, d\theta + \\ + \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \Big[\int\limits_{t_0}^{t} \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{x}(\theta), \theta; \boldsymbol{x}(s), s\big)\, ds \Big]\, d\theta \equiv \boldsymbol{x}(t_k) + \boldsymbol{I}_1 + \boldsymbol{I}_2, \end{aligned} \tag{1.3.56}$$

а затем, с учетом прогноза $\boldsymbol{x}^{[p]}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + h\,\boldsymbol{x}'_k$ для $\boldsymbol{x}(t_{k+1})$, причем $\boldsymbol{x}'_0 = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}(t_0), t_0\big)$, применим метод трапеций для аппроксимации интегралов $\boldsymbol{I}_1$ и $\boldsymbol{I}_2$ от векторных функций:

$$\boldsymbol{I}_1 = \frac{h}{2}\,\big[\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}_k, t_k\big) + \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}^{[p]}_{k+1}, t_{k+1}\big)\big] + \boldsymbol{O}\big(h^3\big), \tag{1.3.57}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{I}_2 = \frac{h}{2}\,\Big[\int\limits_{t_0}^{t_k} \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{x}_k, t_k; \boldsymbol{x}(s), s\big)\, ds + \\ + \int\limits_{t_0}^{t_{k+1}} \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{x}^{[p]}_{k+1}, t_{k+1}; \boldsymbol{x}(s), s\big)\, ds \Big] + \boldsymbol{O}\big(h^3\big), \end{aligned} \tag{1.3.58}$$

Для того, чтобы приближенно вычислить остающиеся интегралы, еще раз применим метод трапеций, что дает следующее соотношение:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + \frac{h}{2}\left[\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}_k, t_k\right) + \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}_{k+1}^{[p]}, t_{k+1}\right)\right] + \\ + \frac{h^2}{4}\left[\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{x}_k, t_k; \boldsymbol{x}_0, t_0\right) + 2\,\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{x}_k, t_k; \boldsymbol{x}_1, t_1\right) + ...+\right. \\ \left. + 2\,\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{x}_k, t_k; \boldsymbol{x}_{k-1}, t_{k-1}\right) + \boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{x}_k, t_k; \boldsymbol{x}_k, t_k\right)\right] + \\ + \frac{h^2}{4}\left[\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{x}_{k+1}^{[p]}, t_{k+1}; \boldsymbol{x}_0, t_0\right) + 2\,\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{x}_{k+1}^{[p]}, t_{k+1}; \boldsymbol{x}_1, t_1\right) + ...+\right. \\ \left. + 2\,\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{x}_{k+1}^{[p]}, t_{k+1}; \boldsymbol{x}_k, t_k\right) + \boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{x}_{k+1}^{[p]}, t_{k+1}; \boldsymbol{x}_{k+1}^{[p]}, t_{k+1}\right)\right]. \quad (1.3.59)\end{aligned}$$

Кроме того, для использования для следующем шаге необходимо вычислить

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}'_{k+1} = \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}_{k+1}^{[p]}, t_{k+1}\right) + \\ + \frac{h}{2}\left[\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{x}_{k+1}, t_{k+1}; \boldsymbol{x}_0, t_0\right) + 2\,\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{x}_{k+1}, t_{k+1}; \boldsymbol{x}_1, t_1\right) + ...+\right. \quad (1.3.60) \\ \left. + 2\,\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{x}_{k+1}, t_{k+1}; \boldsymbol{x}_k, t_k\right) + \boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{x}_{k+1}, t_{k+1}; \boldsymbol{x}_{k+1}, t_{k+1}\right)\right].\end{aligned}$$

Пример 1.3.5. Найдем приближенного решение линейного уравнения:

$$x'(t) = 4\,x(t) - \frac{1}{2}\,\sin 2\,t + \frac{3}{2}\,\sin 6\,t - \cos 2\,t + \frac{5}{128}\,\cos 4\,t + \cos 6\,t -$$

$$-\frac{1}{64}\,\cos 8\,t + \frac{1}{384}\,\cos 12\,t - \frac{5}{192} + \int\limits_0^t \sin^3 s\,x(s)\,ds, \qquad x(0) = 0.$$

Результаты применения изложенной схемы приведены на рис. 1.3.2, где кривая 1 представляет точное решение $x = \sin^2 2\,t\,\cos 2\,t$, а линия 2 отображает приближенное решение при $h = 10^{-4}$. На рис. 1.3.3 в логарифмической шкале изображено поведение модуля разности точного и приближенного решений в узлах сетки. Несложно усмотреть, что даже при таком малом шаге после $2/3$ периода T, равного π, погрешность по модулю начинает превышать шаг интегрирования. Заметим, что в случае системы с квадратичной нелинейностью и тем же самым решением ситуация с катастрофической потерей точности приближенного решения возникает уже после $t > \mathsf{T}/6$. ►

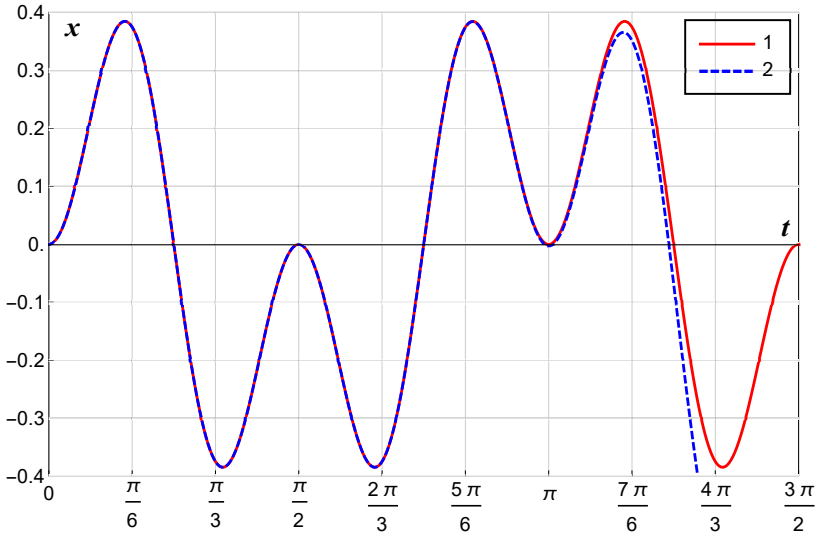


Рис. 1.3.2

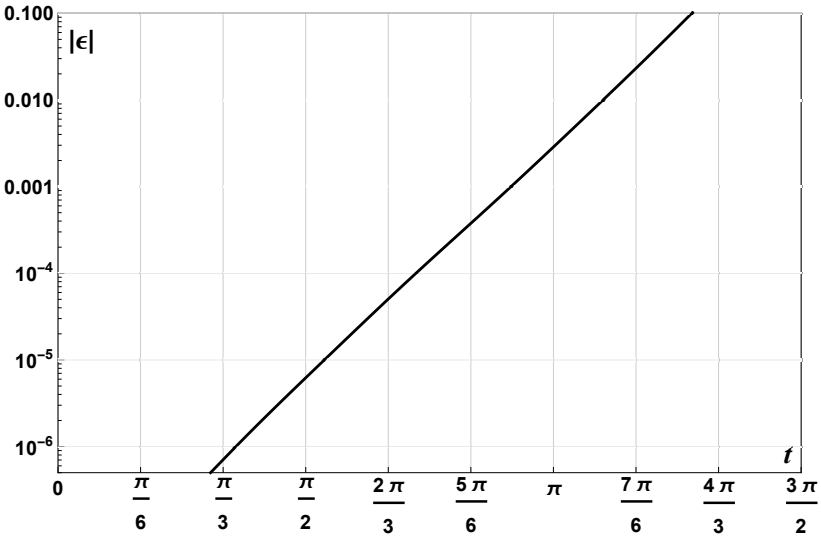


Рис. 1.3.3

Анализируя результаты этих расчетов, а также соотношения (1.3.59), (1.3.60), несложно установить, что одним из источников потери точности при вычислениях служит линейная экстраполяция $\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + h\,\boldsymbol{x}'_k$, дающая прогноз с надежностью порядка шага h. Простейшим улучшением качества прогноза для уравнений типа (1.3.59) может быть использование второй производной, т.е. применение формулы $\boldsymbol{x}^{[p]}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + h\,\boldsymbol{x}'_k + \frac{h}{2}\,\boldsymbol{x}''_k$.

Ряд численных методов для решения нелинейных ОИДУ типа Вольтерры, основанных на квадратурных формулах, представлены в [792]. Так для уравнения:

$$x'(t) = F\big(x(t), z(t), t\big), \quad z(t) = \int\limits_0^t K\big(x(t), t, s\big)\,ds, \quad x(0) = x^0, \qquad (1.3.61)$$

которое, если для $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ и любых x, z, t удовлетворяются условия Липшица

$$\begin{aligned} \big|K(x_1, t, s) - K(x_2, t, s)\big| &\leqslant L_1\,\big|x_1 - x_2\big|, \\ \big|F(x_1, z, t) - F(x_2, z, t)\big| &\leqslant L_2\,\big|x_1 - x_2\big|, \\ \big|F(x, z_1, t) - F(x, z_2, t)\big| &\leqslant L_3\,\big|z_1 - z_2\big|, \end{aligned} \qquad (1.3.62)$$

то начальная задача (1.3.61) имеет единственное непрерывно дифференцируемое решение, показано, что приближенное решение, вычисляемое по формулам, основанных на формуле трапеций:

$$x_k = x_{k-1} + \frac{h}{2}\left[F\big(x_{k-1}, z_{k-1}, t_{k-1}\big) + F\big(x_k, z_k, t_k\big)\right], \qquad x_0 = x^0,$$

$$z_k = \frac{h}{2}\left[K(x_0, t_k, t_0) + 2\sum_{i=1}^{k-1} K(x_i, t_k, t_i) + K(x_k, t_k, t_k)\right], \qquad z_0 = 0,$$

$$k = 1, 2, ...,$$

сходится к точному и имеет погрешность порядка $O(h^2)$.

Использование формул численного интегрирования более высокого порядка позволяет повысить точность получения приближенного решения. Например, можно использовать формулу Симпсона вместо формулы трапеций, что приводит к соотношениям вида:

$$x_k = x_{k-2} + \frac{h}{3}\left[F\big(x_{k-2}, z_{k-2}, t_{k-2}\big) + 4\,F\big(x_{k-1}, z_{k-1}, t_{k-1}\big) +\right.$$

$$+ F\big(x_k, z_k, t_k\big)\big], \qquad x_0 = x^0,$$

$$z_k = h\sum_{i=0}^{k} w_{ki}\, K(x_i, t_k, t_i),$$

$$k = 1, 2, ...,$$

где веса w_{ki} должны давать тот же порядок точности, что и формула Симпсона.

Кроме одношаговых, для решения начальных задач вида (1.3.61) можно применять и многошаговые схемы [792], например:

$$\sum_{i=0}^{\ell} \alpha_i\, x_{k+i} = h\sum_{i=0}^{\ell} \beta_i\, F\big(x_{k+i}, z_{k+i}, t_{k+i}\big),$$

$$z_r = h\sum_{i=0}^{k} w_{ri}\, K(x_r, t_r, t_i).$$

Для решения систем ОИДУ Вольтерры с конечными сосредоточенными и распределенными запаздываниями применяют расчетные схемы на основе использования: группового анализа [621]; рядов Тейлора [608] и Ли [76]; полиномов Бернштейна [880], Лежандра [1048], Уолша [967], Хаара [985], Чебышёва [346]; Sinc-функций [1123]; аппроксимации функции Грина [739]; кусочно постоянных функций (block-pulse functions) [371]; преобразования ОИДУ в ОДУ [450], в т.ч. с помощью разложения разностного ядра в ряд типа Лагерра [811]; представления решения с помощью гауссовой плотности вероятности [80]; методов асимптотического [23], усреднения [322], двухмасштабного разложения [81]; методов Галеркина [472], Петрова–Галеркина [789], коллокаций [438, 463], в т.ч., на основе полиномов Чебышёва [345] и полиномиальных сплайнов [660], спектрального с использованием полиномов Чебышёва [846], псевдоспектрального [1014], наименьших квадратов [326], конечных элементов [589], конечных разностей [1141], квазилинеаризации [339], осреднения функциональных поправок Ю.Д. Соколова [142], дифференциального преобразования [356], сопряженного полуградиента [361], анализа гомотопии [959], итерационно-вариационного [1114]; общих [803], явных [565], неявных [435] и непрерывных методов Рунге–Кутты [970]; блочных [792], многошаговых блочных [857] τ- [728] и θ-методов [750]; линейных [1026, 1041] и гибридных [840] многошаговых методов; комбинации метода декомпозиции с преобразованием Лапласа и Паде-аппроксимацией [373]; блочных методов граничных значений [475]; сочетаний явного метода Эйлера с линейной

интерполяцией [501] и формулой трапеций [481], многошаговых методов Рунге–Кутты для интегрирования ОДУ и составных квадратурных формул [1129], квадратурных формул и явных многошаговых методов (Нистрёма) [1092], методов Рунге–Кутты с линейными многошаговыми методами типа Пузе [673], методов Рунге–Кутты и схемы "предиктор-корректор" (Адамс–Мултон) [1092], квадратурных формул и метода Рунге–Кутты [499], метода "предиктор-корректор" (Адамса–Башфорта и Адамса–Мултона) с квадратурными формулами Ньютона–Котеса и Ньютона–Грегори [846], экстраполяции, квадратурных формул и двухшагового интегратора Адамса–Мултона [468] и др.

Для решения ИДУ Фредгольма в форме:

$$x'(t) + g(t)\,x(t) = f(t) + \lambda \int\limits_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds,$$

где $g(t)$, $f(x)$, $K(t,s)$ – заданные непрерывные функции, используют: методы степенных рядов [708], рядов [540] и полиномов [763] Тейлора, Рунге–Кутты [125], Петрова–Галеркина [344], дискретный Галеркина [893], коллокации [644], в т.ч., матричные схемы [1108], декомпозиции Адомяна [646], дифференциального преобразования [507], минимальных невязок [360], итерационно-вариационный [418, 1114];алгоритм Лежандра–Галеркина [1108]; спектральные элементы [730]; сплайны [308]; τ-метод [661]; полиномы Бесселя [889], Лежандра [560], Фибоначчи [854], Уолша [879], Хаара [985], Чебышева [416]; CAS-вейвлеты [505]; комбинацию Sinc-функций и метода коллокации [860]; блок-импульсные функции [662]; разложения по базису Sinc-функций [934], по радиально базисным функциям [415]; локальную полиномиальную регрессию [1008]; интегральную теорему о среднем [366] и др.

Более сложные проблемы возникают при решении ИДУ Фредгольма с бесконечными пределами, где нередко неограниченную область различными способами заменяют фиктивной конечной, вводя соответствующие искусственные краевые условия. Цель – воспользоваться методами решения ИДУ Фредгольма с конечными пределами. С другой стороны, в этом случае некоторые вышеупомянутые методы, например, представление решения с помощью гауссовой плотности вероятности, можно применять напрямую. Есть и упрощающие схемы, например, преобразующие уравнения типа

$$x'(t) = f\Big(x(t), \int\limits_a^b K(t,s)\,g\big(x(s),s\big)\,ds, t\Big), \quad t \in \mathbb{R},$$

в системы ОДУ [610].

1.3.4. Метод последовательного дифференцирования матриц Грина для систем линейных ОИДУ

Рассмотрим следующую систему линейных ОИДУ :

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\,\boldsymbol{x}(t) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\mathcal{B}}(t,\theta)\,\boldsymbol{x}(\theta)d\theta + \boldsymbol{f}(t), \quad t > t_0, \tag{1.3.63}$$

где t – время ($t_0 \leqslant t \leqslant T < +\infty$); $\boldsymbol{x}(t) = \{x_i(t)\}^{\intercal} \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, причем $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$; $\boldsymbol{f}(t) = \{f_i(t)\}^{\intercal} \in \mathbb{R}^m$ – векторный процесс, представляющий собой детерминированное возмущение; $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ и $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ – известные непрерывные матрицы-функции своих аргументов. Начальное состояние – вектор $\boldsymbol{x}^0$ – считаем известным.

Модели, поведение которых описывается уравнениями вида (1.3.63), используются при изучении роста планктонных сообществ одноклеточных водорослей в озерах и океанах [411], при анализе обратной связи в нейросетях [843], конкуренции между бактериями и иммунными клетками [1140], при исследовании динамики заряженных частиц для некоторых полевых конфигураций [515] и др.

Для приближенного анализа систем рассматриваемого класса разработано множество: 1) численных методов, в том числе, одношаговых [1026], трапеций, многошаговые схемы, блочные методы, сочетающие численное интегрирование и интерполяцию [792], коллокаций [463]; 2) приближенно-аналитических, а именно, асимптотических [23], разложения в ряды Тейлора [608], использования метода наименьших квадратов [161] и др.

Ниже предлагается еще одна приближенная схема вычисления вектора состояния $\boldsymbol{X}(t)$, основанная на итерационной процедуре вычисления матрицы Грина для системы (1.3.63).

Обозначим через $\mathbb{R}(t,s)$ $(t_0 \leqslant s \leqslant t)$ эту функцию, для которой можем записать матричное уравнение следующего вида [625, 668]:

$$\frac{\partial \mathbb{R}(t,s)}{\partial t} = \boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\,\mathbb{R}(t,s) + \int_{s}^{t} \boldsymbol{\mathcal{B}}(t,\theta)\,\mathbb{R}(\theta,s)\,d\theta, \quad t > s \tag{1.3.64}$$

с начальным условием

$$\mathbb{R}(s,s) = \mathbb{I}, \tag{1.3.65}$$

где $\mathbb{I}$ – единичная $n \times n$-матрица. Тогда вектор состояния $\boldsymbol{x}$ может быть представлен следующим образом:

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathbb{R}(t, t_0)\, \boldsymbol{x}^0 + \int_{t_0}^{t} \mathbb{R}(t, s)\, \boldsymbol{f}(s)\, ds. \tag{1.3.66}$$

Отсюда следует, что для практического применения этой формулы требуется вычислить аппроксимацию функцию Грина $\mathbb{R}(t, s)$ наиболее точным способом.

Как правило [668], для этой функции строится интегральное уравнение, для решения которого применяется метод последовательных приближений. К сожалению использование этой схемы затруднено в связи с необходимостью вычисления значительного числа интегралов, причем в аналитическом виде, что не всегда возможно.

Рассмотрим следующий алгоритм расчета $\mathbb{R}(t, s)$, основанный на методе последовательного дифференцирования решения систем ОДУ [108].

Следуя схеме этого метода, представим матрицу $\mathbb{R}(t, s)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}(t, s) = \mathbb{I} + \frac{1}{1!} \left.\frac{\partial \mathbb{R}(t, s)}{\partial t}\right|_{t=s} (t - s) + \frac{1}{2!} \left.\frac{\partial^2 \mathbb{R}(t, s)}{\partial t^2}\right|_{t=s} (t - s)^2 + \\ + \frac{1}{3!} \left.\frac{\partial^3 \mathbb{R}(t, s)}{\partial t^3}\right|_{t=s} (t - s)^3 + \frac{1}{4!} \left.\frac{\partial^4 \mathbb{R}(t, s)}{\partial t^4}\right|_{t=s} (t - s)^4 + \ldots \\ = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathbb{R}_k(s, s)}{k!} (t - s)^k,\end{aligned} \tag{1.3.67}$$

а затем будем один за другим находить коэффициенты в представлении (1.3.67).

Начнем с первого коэффициента. Он естественным образом находится после подстановки переменной s вместо t в обе части уравнения (1.3.64), что дает:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}_1(s, s) \equiv \left.\frac{\partial \mathbb{R}(t, s)}{\partial t}\right|_{t=s} = \left\{ \boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\, \mathbb{R}(t, s) + \int_s^t \boldsymbol{\mathcal{B}}(t, \theta)\, \mathbb{R}(\theta, s)\, d\theta \right\}\Bigg|_{t=s} = \\ = \boldsymbol{\mathcal{A}}(s)\, \mathbb{R}(s, s) + \int_s^s \boldsymbol{\mathcal{B}}(s, \theta)\, \mathbb{R}(\theta, s)\, d\theta = \boldsymbol{\mathcal{A}}(s).\end{aligned} \tag{1.3.68}$$

Для вычисления второго коэффициента продифференцируем обе части уравнения (1.3.64) по t и заменим в них переменную t на s:

$$\mathbb{R}_2(s,s) \equiv \frac{\partial^2 \mathbb{R}(t,s)}{\partial t^2}\Big|_{t=s} = \Big[\boldsymbol{\mathcal{A}}'(t)\,\mathbb{R}(t,s) + \boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\,\frac{\partial \mathbb{R}(t,s)}{\partial t} + \boldsymbol{\mathcal{B}}(t,t)\,\mathbb{R}(t,s) + \\ + \int_s^t \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{B}}(t,\theta)}{\partial t}\,\mathbb{R}(\theta,s)\,d\theta\Big]\Big|_{t=s} = \boldsymbol{\mathcal{A}}'(s) + \boldsymbol{\mathcal{A}}(s)\,\mathbb{R}_1(s,s) + \boldsymbol{\mathcal{B}}(s,s). \quad (1.3.69)$$

Находя третий коэффициент, находим:

$$\frac{\partial^3 \mathbb{R}(t,s)}{\partial t^3}\Big|_{t=s} = \Big\{\boldsymbol{\mathcal{A}}''(t)\,\mathbb{R}(t,s) + 2\,\boldsymbol{\mathcal{A}}'(t)\,\frac{\partial \mathbb{R}(t,s)}{\partial t} + \boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\,\frac{\partial^2 \mathbb{R}(t,s)}{\partial t^2} + \\ + \Big[2\,\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{B}}(t,\theta)}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{B}}(\theta,t)}{\partial t}\Big]\Big|_{\theta=t}\mathbb{R}(t,s) + \boldsymbol{\mathcal{B}}(t,t)\,\frac{\partial \mathbb{R}(t,s)}{\partial t} + \\ + \int_s^t \frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{B}}(t,\theta)}{\partial t^2}\,\mathbb{R}(\theta,s)\,d\theta\Big\}\Big|_{t=s} = \boldsymbol{\mathcal{A}}''(s) + 2\boldsymbol{\mathcal{A}}'(s)\,\mathbb{R}_1(s,s) + \boldsymbol{\mathcal{A}}(s)\,\mathbb{R}_2(s,s) + \\ + \boldsymbol{\mathcal{B}}(s,s)\,\mathbb{R}_1(s,s) + \Big[2\,\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{B}}(s,\theta)}{\partial s} + \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{B}}(\theta,s)}{\partial s}\Big]\Big|_{\theta=s}. \quad (1.3.70)$$

В результате вычисления четвертого коэффициента получим:

$$\frac{\partial^4 \mathbb{R}(t,s)}{\partial t^4}\Big|_{t=s} = \Big\{\boldsymbol{\mathcal{A}}'''(t)\,\mathbb{R}(t,s) + 3\,\boldsymbol{\mathcal{A}}''(t)\,\frac{\partial \mathbb{R}(t,s)}{\partial t} + 3\,\boldsymbol{\mathcal{A}}'(t)\,\frac{\partial^2 \mathbb{R}(t,s)}{\partial t^2} + \\ + \boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\,\frac{\partial^3 \mathbb{R}(t,s)}{\partial t^3} + \Big[3\,\frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{B}}(t,\theta)}{\partial t^2} + 3\,\frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{B}}(t,\theta)}{\partial t\,\partial\theta} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{B}}(t,\theta)}{\partial \theta^2}\Big]\Big|_{\theta=t}\mathbb{R}(t,s) + \\ + \Big[3\,\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{B}}(t,\theta)}{\partial t} + 2\,\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{B}}(t,\theta)}{\partial \theta}\Big]\Big|_{\theta=t}\frac{\partial \mathbb{R}(t,s)}{\partial t} + \boldsymbol{\mathcal{B}}(t,t)\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbb{R}(t,s)] + \\ + \int_s^t \frac{\partial^3 \boldsymbol{\mathcal{B}}(t,\theta)]}{\partial t^3}\,\mathbb{R}(\theta,s)]\,d\theta\Big\}\Big|_{t=s} = \\ = \boldsymbol{\mathcal{A}}'''(s) + 3\,\boldsymbol{\mathcal{A}}''(s)\,\mathbb{R}_1(s,s) + 3\,\boldsymbol{\mathcal{A}}'(s)\,\mathbb{R}_2(s,s) + \\ + \boldsymbol{\mathcal{A}}(s)\,\mathbb{R}_3(s,s) + \Big[3\,\frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{B}}(s,\theta)}{\partial s^2} + 3\,\frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{B}}(s,\theta)}{\partial s\,\partial\theta} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{B}}(s,\theta)}{\partial \theta^2}\Big]\Big|_{\theta=s} \\ + \Big[3\,\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{B}}(s,\theta)}{\partial s} + 2\,\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{B}}(s,\theta)}{\partial \theta}\Big]\Big|_{\theta=s}\mathbb{R}_1(s,s) + \boldsymbol{\mathcal{B}}(s,s)\,\mathbb{R}_2(s,s). \quad (1.3.71)$$

Данная схема позволяет продолжать последовательное вычисление коэффициентов разложения (1.3.67) до любого конечного K порядка по $(t-s)$, чем обеспечить заданную точность вычисления $o\big[(t-s)^K\big]$ [608] функции Грина $\mathbb{R}(t,s)$ в области $\{(t,s)|\,t_0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T\}$ без применения операции интегрирования, а также получать апостериорные оценки погрешности в процессе расчетов.

Обратимся теперь к вопросам практической реализации изложенной схемы. Очевидно, что в случае, когда требуется получить решение на большом промежутке времени ($T \gg 0$), в связи со спецификой представления решения сначала необходимо вычислить значительное число матричных коэффициентов $\mathbb{R}_k(s,s)$, а затем поддерживать высокую точность вычислений. Если воспользоваться инструментами какого-либо пакета компьютерной алгебры, то реализация представленного метода не составит труда, но при решении конкретных задач потребует значительное время для расчетов. С другой стороны, если использовать вычислительные средства обычных языков программирования, то необходимо будет отказываться от расширенной машинной арифметики, что требует уменьшения количества членов разложения матричной функции Грина с целью понижения погрешности вычислений (но увеличивает ошибку метода!). Учет этих соображений приводит к следующей процедуре.

Будем искать не непрерывное решение задачи, а значения вектора состояния только в узлах равномерной или неравномерной сетки:

$$t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_\ell < t_{\ell+1} < ... < t_{N-1} < t_N = T, \qquad \Delta t_\ell = t_{\ell+1} - t_\ell.$$

Обозначим $\boldsymbol{x}(t_\ell)$ через $\boldsymbol{x}_\ell$ ($\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}^0$) и запишем формулу (1.3.66) в следующем виде:

$$\boldsymbol{x}_{\ell+1} = \mathbb{R}(t_{\ell+1}, t_\ell)\, \boldsymbol{x}_\ell + \int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} \mathbb{R}(t_{\ell+1}, s)\, \boldsymbol{f}(s)\, ds, \quad \ell = \overline{0,\ N-1}, \quad (1.3.72)$$

где

$$\mathbb{R}(t_{\ell+1}, s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathbb{R}_k(s,s)}{k!} (t_{\ell+1} - s)^k \equiv$$

$$\equiv \mathbb{R}^{[M]}(t_{\ell+1}, s) + \sum_{k=M+1}^{+\infty} \frac{\mathbb{R}_k(s,s)}{k!} (t_{\ell+1} - s)^k,$$

$$\mathbb{R}(t_{\ell+1}, t_\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathbb{R}_k(t_\ell, t_\ell)}{k!} \Delta t_\ell^k \equiv \mathbb{R}^{[M]}(t_{\ell+1}, t_\ell) + \sum_{k=M+1}^{+\infty} \frac{\mathbb{R}_k(t_\ell, t_\ell)}{k!} \Delta t_\ell^k.$$

В данной форме предложенной схемы для вычисления первого слагаемого в правой части соотношения (1.3.72) достаточно обычных векторно-матричных операций.

Расчет же второго слагаемого – интеграла от известной матричной функции – может быть выполнен любым численным методом, дающим

необходимую точность при небольшом числе вычислений подынтегральных функций, например, методом Симпсона или по правилу трех восьмых.

Пример 1.3.6. Применим изложенную процедуру для исследования поведения обобщенной координаты, соответствующей первой собственной форме в разложении функции $u(x,t)$, которые описываются уравнением вида:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + 2\,\alpha\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \nu\left[K_0(t,t)\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \int_0^t K(t,s)\,\frac{\partial^2 u(x,s)}{\partial x^2}\,ds\right] -$$
$$-\beta\left[K_0(t,t)\,u(x,t) + \int_0^t K(t,s)\,u(x,s)\,ds\right] + \gamma\,\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial t^2\,\partial x^2}, \qquad (1.3.73)$$
$$0 < t \leqslant T, \qquad x \in (0,1)$$

с начальными и краевыми условиями в следующей форме:

$$u(x,0) = u^{[0]}(x), \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = u^{[1]}(x), \qquad x \in (0,1),$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad t \geqslant 0,$$

где $\alpha > 0$, $\beta < 0$, $\gamma > 0$, $\nu > 0$ – постоянные, а функция $K_0(t,s)$ неотрицательна и с функцией $K(t,s)$ равенством

$$K(t,s) = \frac{\partial K_0(t,s)}{\partial s}.$$

Обозначим через $y(t)$ указанную обобщенную координату $u_1(t)$ в разложении

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(t)\,\sin\pi\,m\,x.$$

Тогда уравнение для функции $y(t)$ примет следующий вид:

$$\ddot{y}(t) + 2\,\alpha\,\dot{y}(t) = -\pi^2\nu\left[K_0(t,t)\,\pi^2\,y(t) + \int_0^t K(t,s)\,y(s)\,ds\right] -$$
$$-\beta\left[K_0(t,t)\,y(t) + \int_0^t K(t-s)\,y(s)\,ds\right] - \gamma\,\pi^2\,\ddot{y}(t),$$

или

$$\left(1+\gamma\,\pi^2\right)\ddot{y}(t)+2\,\alpha\,\dot{y}(t)+K_0(t,t)\left(\nu\,\pi^2+\beta\right)y(t)=$$
$$=-\left(\nu\,\pi^2+\beta\right)\int_0^t K(t,s)\,y(s)\,ds. \quad (1.3.74)$$

Приводя это уравнение к виду (1.3.63), получим:

$$x_1=y,\qquad x_2=\dot{y},\qquad t_0=0,$$
$$\boldsymbol{\mathcal{A}}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\beta_0\,K_0(t,t) & -2\,\alpha_0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\mathcal{B}}(t,\theta)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ -\beta_0\,K(t,\theta) & 0\end{bmatrix},$$

где

$$\alpha_0=\frac{\alpha}{1+\gamma\,\pi^2},\qquad \beta_0=\frac{\nu\,\pi^2+\beta}{1+\gamma\,\pi^2}.$$

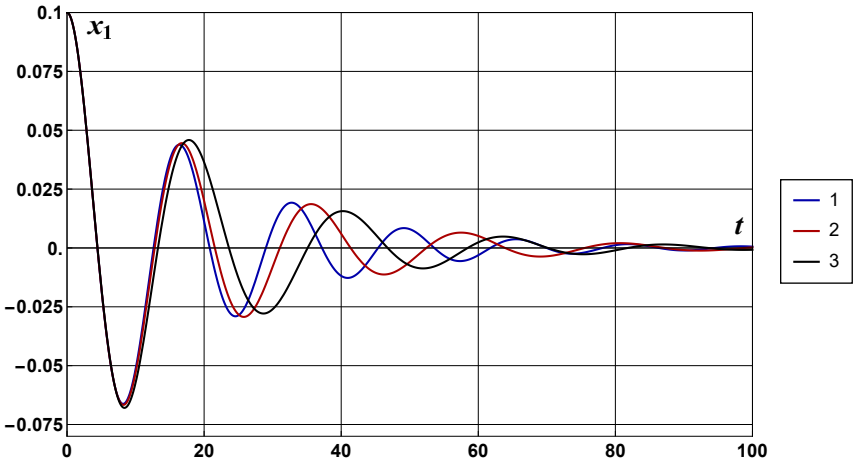


Рис. 1.3.4

Изложенная выше методика была реализована с помощью САВ `Mathematica`, что позволило рассчитать в символьном виде необходимое число (N) коэффициентов представления функции Грина по формуле (1.3.67), а затем без труда использовать эти коэффициенты при разработки программы на языке Fortran 90, предназначенной для вычисления значений вектора $\boldsymbol{x}(t)$ на заданной временно́й сетке. Для вычислений в качестве $K_0(t,s)$ была выбрана функция

$$\lambda_1\,e^{-\mu_1\,(t-s)^2}+\lambda_2\,e^{-\mu_2\,(t-s+\epsilon\,t)^2}.$$

Для получения численных результатов использовались следующие значения параметров задачи:

$$t \in [0, 100.0], \quad \boldsymbol{x}^0 = [0.1, 0.0]^\intercal, \quad \Delta t_\ell = 10^{-3},$$
$$\alpha = 0.1, \quad \beta = 0.5, \quad \gamma = 0.1, \quad \nu = 0.1,$$
$$\epsilon \in \{0.0, 0.1, 0.2\}, \quad \mu_1 = 0.5, \quad \mu_2 = 0.1, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0.1.$$

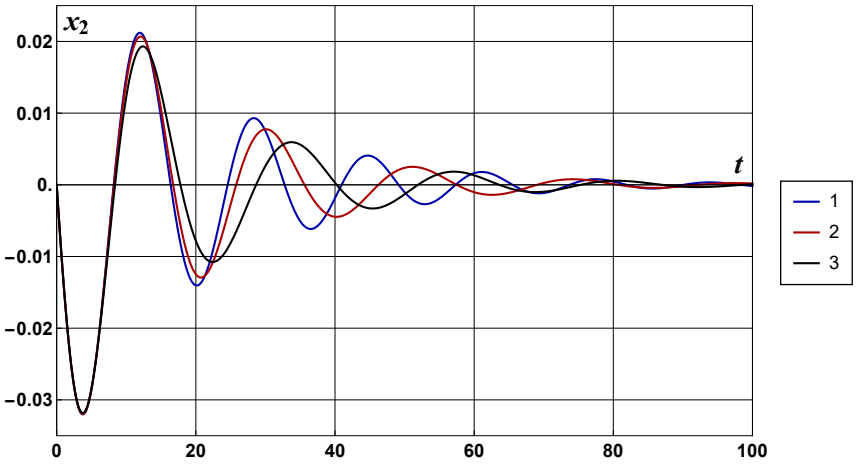


Рис. 1.3.5

Результаты расчетов по изложенной выше методике отображены на рис. 1.3.4 ($x_1(t)$) и 1.3.5 ($x_2(t)$), где цифры 1, 2 и 3 на легенде указывают кривые, соответствующие первому, второму и третьему значениям параметра ϵ. ▶

1.3.5. Метод интегрального расширения пространства состояний для систем ОИДУ

Рассмотрим следующую систему детерминированных обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{y}(t), \boldsymbol{z}(t), t\big), \qquad t_0 < t \leqslant T < +\infty, \tag{1.3.75}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\mathcal{A}}(t, \theta)\, \boldsymbol{x}(\theta)\, d\theta, \qquad \boldsymbol{z}(t) = \int_{t-\tau}^{t} \boldsymbol{\mathcal{B}}(t, \theta)\, \boldsymbol{x}(\theta)\, d\theta, \tag{1.3.76}$$

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t), \qquad t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0, \tag{1.3.77}$$

где t – время; $\tau > 0$, T – постоянные; $\boldsymbol{x}(t) = \{x_i(t)\}^{\intercal} \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния; $\boldsymbol{\varphi}(\cdot) = \{\varphi_i(\cdot)\}^{\intercal}$, $\boldsymbol{f}(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot) = \{f_i(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)\}^{\intercal}$ и $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\cdot,\cdot) = \{\boldsymbol{a}_{ij}(\cdot,\cdot)\}$ ($\boldsymbol{a}_{ij} \geqslant 0$), $\boldsymbol{\mathcal{B}}(\cdot,\cdot) = \{\boldsymbol{b}_{ij}(\cdot,\cdot)\}$ ($\boldsymbol{b}_{ij} \geqslant 0$) – известные векторные и матричные функции своих аргументов соответственно.

Ниже рассматривается схема приближенного сведения (без задания структуры ядра) системы (1.3.75)–(1.3.77) к цепочке систем ОДУ, основанная на процедуре расширения пространства состояний, а также приводится пример применения этой схемы.

Разобьем отрезок $[t_0 - \tau, T]$ точками $t_k = t_0 + k\,h$, $k = -M_0$, ..., -2, -1, 0, 1, 2, ..., M, $h = \tau/M0$ ($t_M \geqslant T$) так, чтобы с достаточной точностью на отрезке $[t_{k-1}, t_k]$, $k \geqslant 1$ можно было заменить ядра $\boldsymbol{\mathcal{A}}(t,\theta)$ и $\boldsymbol{\mathcal{B}}(t,\theta)$ на функции (средние значения) $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_k(t)$ и $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_k(t)$, которые вычислим следующим образом:

$$\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_k(t) = \frac{1}{h}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \boldsymbol{\mathcal{A}}(t,\theta)\,d\theta \approx \frac{1}{h}\,\frac{\Delta\theta}{3}\sum_{s=0}^{2L} c_s\,\boldsymbol{\mathcal{A}}(t,\theta_{ks}) = \frac{1}{6L}\sum_{s=0}^{2L} c_s\,\boldsymbol{\mathcal{A}}(t,\theta_{ks}),$$

$$\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{A}}}^{\,*}_k(t) = \frac{1}{h^*}\int\limits_{t_{k-1}}^{t} \boldsymbol{\mathcal{A}}(t,\theta)\,d\theta \approx \frac{1}{h^*}\,\frac{\Delta\theta^*}{3}\sum_{s=0}^{2L^*} c^*_s\,\boldsymbol{\mathcal{A}}(t,\theta^*_{ks}) = \frac{1}{6L^*}\sum_{s=0}^{2L^*} c^*_s\,\boldsymbol{\mathcal{A}}(t,\theta^*_{ks})$$

$$t < t_k$$

(с точностью порядка $O(\Delta\theta)^4$), где $h^* = t - t_{k-1}$,

$$\theta_{ks} = t_k + s\cdot\Delta\theta, \qquad s = 0, 1, ..., 2L, \qquad h = 2\,L\,\Delta\theta, \qquad L \geqslant 1,$$

$$c_s = \begin{cases} 1, & \text{если } s = 0 \text{ или } 2\,L; \\ 4, & \text{если } s \text{ нечетно}; \\ 2, & \text{иначе}, \end{cases}$$

и аналогично для θ^*_{ks}, L^*, $\Delta\theta^*$ c^*_s, а также в целом для $\boldsymbol{\mathcal{B}}(t,\theta)$.

Таким образом, ядра $\boldsymbol{\mathcal{A}}(t,\theta)$ и $\boldsymbol{\mathcal{B}}(t,\theta)$ представляются кусочно-постоянными по второму аргументу матричными функциями. В результате этого исходная система (1.3.75)– (1.3.76) приводится к виду:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{y}(t), \boldsymbol{z}(t), t\big), \tag{1.3.78}$$

$$\boldsymbol{y}(t) \approx \sum_{\ell=1}^{k-1} \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_\ell(t)\int\limits_{t_{\ell-1}}^{t_\ell} \boldsymbol{x}(\theta)\,d\theta + \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{A}}}^{\,*}_k(t)\int\limits_{t_{k-1}}^{t} \boldsymbol{x}(\theta)\,d\theta, \tag{1.3.79}$$

$$\boldsymbol{z}(t) \approx \begin{cases} I_{k1} + I_{k2} + \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_k^*(t) \displaystyle\int_{t_{k-1}}^{t} \boldsymbol{x}(\theta)\, d\theta, & k \leqslant M_0, \\ J_{k1} + J_{k2} + \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_k^*(t) \displaystyle\int_{t_{k-1}}^{t} \boldsymbol{x}(\theta)\, d\theta, & k > M_0, \end{cases} \tag{1.3.80}$$

$$I_{k1} = \int_{t-\tau}^{t_0} \boldsymbol{\mathcal{B}}(t,\theta)\, \boldsymbol{\varphi}(\theta)\, d\theta, \quad I_{k2} = \sum_{\ell=1}^{k-1} \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_\ell(t) \int_{t_{\ell-1}}^{t_\ell} \boldsymbol{x}(\theta)\, d\theta,$$

$$J_{k1} = -\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_{k-M_0}^*(t) \int_{t_{k-M_0-1}}^{t-\tau} \boldsymbol{x}(\theta)\, d\theta, \quad J_{k2} = \sum_{\ell=k-M_0}^{k-1} \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_\ell(t) \int_{t_{\ell-1}}^{t_\ell} \boldsymbol{x}(\theta)\, d\theta,$$

$$t_{k-1} < t \leqslant t_k, \qquad k = 1, 2, ..., M.$$

Если для $t_{s-1} < t \leqslant t_s$ векторы $\boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{y}(t)$, $\boldsymbol{y}(t)$ обозначить соответственно через $\boldsymbol{x}_s(t)$, $\boldsymbol{x}_s(t)$, $\boldsymbol{x}_s(t)$ и ввести векторы

$$\boldsymbol{u}_k(t) = \int_{t_{k-1}}^{t} \boldsymbol{x}_k(\theta)\, d\theta, \qquad t_{k-1} < t \leqslant t_k, \tag{1.3.81}$$

то с учетом равенств (1.3.81) расширенная система (1.3.78)–(1.3.80) принимает следующую форму:

$$\dot{\boldsymbol{x}}_k(t) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}_k(t), \boldsymbol{y}_k(t), \boldsymbol{z}_k(t), t\big), \tag{1.3.82}$$

$$\boldsymbol{y}_k(t) = \sum_{\ell=1}^{k-1} \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_\ell(t)\, \boldsymbol{u}_\ell(t_\ell) + \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_k^*(t)\, \boldsymbol{u}_k(t), \tag{1.3.83}$$

$$\boldsymbol{z}_k(t) = \begin{cases} I_{k1} + I_{k2} + \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_k^*(t)\, \boldsymbol{u}_k(t), & k \leqslant M_0, \\ J_{k1} + J_{k2} + \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_k^*(t)\, \boldsymbol{u}_k(t), & k > M_0, \end{cases} \tag{1.3.84}$$

$$I_{k1} = \int_{t-\tau}^{t_0} \boldsymbol{\mathcal{B}}(t,\theta)\, \boldsymbol{\varphi}(\theta)\, d\theta, \quad I_{k2} = \sum_{\ell=1}^{k-1} \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_\ell(t)\, \boldsymbol{u}_\ell(t_\ell),$$

$$J_{k1} = -\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_{k-M_0}^*(t)\, \boldsymbol{u}_{k-M_0}(t-\tau), \quad J_{k2} = \sum_{\ell=k-M_0}^{k-1} \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_\ell(t) \boldsymbol{u}_\ell(t_\ell),$$

$$\dot{\boldsymbol{u}}_k(t) = \boldsymbol{x}_k(t), \tag{1.3.85}$$

$$t_{k-1} < t \leqslant t_k, \qquad k = 1, 2, ..., M.$$

причем начальные условия для системы (1.3.82)–(1.3.85) определяются следующим образом:

$$\boldsymbol{x}_k(t_{k-1}) = \boldsymbol{x}_{k-1}(t_{k-1}), \qquad \boldsymbol{u}_k(t_{k-1}) = 0, \qquad k = 2, 3, ..., M,$$
$$\boldsymbol{x}_1(t_0) = \boldsymbol{x}^0, \qquad \boldsymbol{u}_1(t_0) = 0.$$

Среди полученных систем при ненулевом векторе $\boldsymbol{z}(t)$ в исходной системе (1.3.75) присутствуют группы уравнений для неизвестных функций с постоянным запаздыванием. Для получения систем таких уравнений без запаздывания может быть применена процедура, изложенная в подразделе 1.2.3. Если же вектор $\boldsymbol{z}(t)$ нулевой, то применение подобной процедуры не требуется.

Заметим, что положительным свойством данного алгоритма является то, что в нем не используется экстраполяция значений неизвестного вектора состояния.

1.3.6. Метод последовательного дифференцирования для систем ОИДУ

Рассмотрим систему нелинейных ОИДУ следующего вида:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}(t), t\big) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{x}(\theta), \theta\big)\, d\theta, \tag{1.3.86}$$

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0, \tag{1.3.87}$$

где t – время ($t_0 \leqslant t \leqslant T < +\infty$), $\boldsymbol{x}(t) = \{x_\ell(t)\} \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $\boldsymbol{f}(\cdot,\cdot) = \{f_\ell(\cdot,\cdot)\} : \mathbb{R}^n \times [t_0, +\infty) \longmapsto \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{g}(\cdot,\cdot) = \{g_\ell(\cdot,\cdot)\} : \mathbb{R}^n \times [t_0, +\infty) \longmapsto \mathbb{R}^n$ – известные векторные функции, дифференцируемые необходимое число по всем своим аргументам, $\boldsymbol{x}^0$ – известный вектор.

На сегменте $[t_0, T]$ введем сетку

$$t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_N = T \tag{1.3.88}$$

и следующие обозначения:

$$\boldsymbol{x}_\ell(t) = \boldsymbol{x}(t), \qquad t \in [t_{\ell-1}, t_\ell], \qquad \ell = 1, 2, ..., N,$$
$$\boldsymbol{x}_1(t_0) = \boldsymbol{x}^0, \qquad \boldsymbol{x}_\ell(t_{\ell-1}) = \boldsymbol{x}_{\ell-1}(t_{\ell-1}).$$

Если задать натуральные числа M_1, M_2, ..., M_N $(1 \leqslant M_k < +\infty)$, то на сегментах $[t_{\ell-1}, t_\ell]$ приближенное решение $\boldsymbol{x}_\ell^{[M_\ell]}(t)$ задачи (1.3.86), (1.3.87) можно искать в виде отрезков рядов Тейлора:

$$\boldsymbol{x}_\ell(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\boldsymbol{x}_{\ell k}}{k!}\,(t - t_{\ell-1})^k = \boldsymbol{x}_\ell^{[M_\ell]}(t) + \boldsymbol{r}_\ell^{[M_\ell]}(t), \tag{1.3.89}$$

где

$$\boldsymbol{x}_\ell^{[M_\ell]}(t) = \sum_{k=0}^{M_\ell} \frac{\boldsymbol{x}_{\ell k}}{k!}\,(t - t_{\ell-1})^k, \tag{1.3.90}$$

$$\boldsymbol{r}_\ell^{[M_\ell]}(t) = \sum_{k=M_\ell+1}^{+\infty} \frac{\boldsymbol{x}_{\ell k}}{k!}\,(t - t_{\ell-1})^k. \tag{1.3.91}$$

Рассмотрим технику метода последовательного дифференцирования для вычисления коэффициентов $\boldsymbol{x}_{\ell k}$ приближенного решения $\boldsymbol{x}_\ell^{[M_\ell]}(t)$ на полуотрезке $(t_{\ell-1}, t_\ell]$, $\ell = 1, 2, ..., N$:

$$\alpha_\ell = t_{\ell-1}, \qquad \boldsymbol{\beta}_\ell = \boldsymbol{x}_{\ell-1}^{[M_{\ell-1}]}(\alpha_\ell),$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_\ell(t) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}_\ell(t), t\big) + \int_{\alpha_\ell}^{t} \boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{x}_\ell(\theta), \theta\big)\,d\theta \equiv \boldsymbol{h}\big(\boldsymbol{x}_\ell(t), t, \alpha_\ell\big),$$

$$\ddot{\boldsymbol{x}}_\ell(t) = \frac{d}{dt}\,\dot{\boldsymbol{x}}_\ell(t) \equiv \frac{d}{dt}\left[\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}_\ell(t), t\big) + \int_{\alpha_\ell}^{t} \boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{x}_\ell(\theta), \theta\big)\,d\theta\right] =$$

$$= \left\{\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t)}{\partial \boldsymbol{z}^{\mathsf{T}}}\,\dot{\boldsymbol{x}}_\ell(t) + \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t)}{\partial t}\right\}\Bigg|_{\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}_\ell(t)} + \boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{x}_\ell(t), t\big) \equiv \frac{D}{Dt}\,\boldsymbol{h}\big(\boldsymbol{x}_\ell(t), t, \alpha_\ell\big),$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\boldsymbol{x}_\ell^{(k)}(t) = \frac{d^k}{dt^k}\,\boldsymbol{x}_\ell(t) \equiv \frac{D^{k-1}}{Dt^{k-1}}\,\boldsymbol{h}\big(\boldsymbol{x}_\ell(t), t, \alpha_\ell\big),$$

$$\boldsymbol{x}_{\ell 0} = \beta_\ell,$$

$$\boldsymbol{x}_{\ell 1} = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{\beta}_\ell, \alpha_\ell\big),$$

$$\boldsymbol{x}_{\ell 2} = \frac{D}{Dt}\,\boldsymbol{h}\big(\boldsymbol{x}_\ell(t), t, \alpha_\ell\big)\Big|_{\boldsymbol{x}_\ell(t)=\boldsymbol{x}_\ell^{[M_\ell]}(t),\, t=\alpha_\ell},$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\boldsymbol{x}_{\ell k} = \frac{D^{k-1}}{Dt^{k-1}}\, \boldsymbol{h}\big(\boldsymbol{x}_\ell(t), t, \alpha_\ell\big)\Big|_{\boldsymbol{x}_\ell(t)=\boldsymbol{x}_\ell^{[M_\ell]}(t),\, t=\alpha_\ell},$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

Обеспечить заданную точность приближенного решения можно, если сравнивать нормы $\boldsymbol{x}_\ell^{[M_\ell]}(t)$ и $\boldsymbol{x}_\ell^{[M_\ell+1]}(t)$. В случае, когда модуль разности этих норм превысит заданную границу, необходимо увеличить M_ℓ, например, так: $M_\ell \leftarrow M_\ell + 1$.

Разберем частные случаи задачи (1.3.86), (1.3.87).

1°. Пусть уравнения (1.3.86) линейны:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\, \boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{c}(t) + \int\limits_{t_0}^{t} \boldsymbol{\mathcal{B}}(t,\theta)\, \boldsymbol{x}(\theta)\, d\theta, \tag{1.3.92}$$

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0, \tag{1.3.93}$$

где $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\cdot) = \{a_{\ell k}(\cdot)\} : [t_0, +\infty) \longmapsto \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\mathcal{B}}(\cdot,\cdot) = \{b_{\ell k}(\cdot,\cdot)\} : [t_0, +\infty) \times [t_0, +\infty) \longmapsto \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{c}(t) = \{c_\ell(\cdot)\} : [t_0, +\infty) \longmapsto \mathbb{R}^n$ – известные матричные и векторная функции, дифференцируемые необходимое число по всем своим аргументам.

Тогда в обозначениях, введенных выше, будем иметь:

$$\dot{\boldsymbol{x}}_\ell(t) = \boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\, \boldsymbol{x}_\ell(t) + \boldsymbol{c}(t) + \int\limits_{\alpha_\ell}^{t} \boldsymbol{\mathcal{B}}(t,\theta)\, \boldsymbol{x}_\ell(\theta)\, d\theta \equiv \boldsymbol{h}\big(\boldsymbol{x}_\ell(t), t, \alpha_\ell\big),$$

$$\ddot{\boldsymbol{x}}_\ell(t) = \frac{d}{dt}\, \dot{\boldsymbol{x}}_\ell(t) \equiv \frac{d}{dt} \Big[\boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\, \boldsymbol{x}_\ell(t) + \boldsymbol{c}(t) + \int\limits_{\alpha_\ell}^{t} \boldsymbol{\mathcal{B}}(t,\theta)\, \boldsymbol{x}_\ell(\theta)\, d\theta\Big] =$$

$$= \dot{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(t)\, \boldsymbol{x}_\ell(t) + \boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\, \dot{\boldsymbol{x}}_\ell(t) + \dot{\boldsymbol{c}}(t) + \boldsymbol{\mathcal{B}}(t,t)\, \boldsymbol{x}_\ell(t) + \int\limits_{\alpha_\ell}^{t} \dot{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(t,\theta)\, \boldsymbol{x}_\ell(\theta)\, d\theta =$$

$$= \dot{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(t)\, \boldsymbol{x}_\ell(t) + \boldsymbol{\mathcal{A}}(t) \Big[\boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\, \boldsymbol{x}_\ell(t) + \boldsymbol{c}(t) + \int\limits_{\alpha_\ell}^{t} \boldsymbol{\mathcal{B}}(t,\theta)\, \boldsymbol{x}_\ell(\theta)\, d\theta\Big] + \dot{\boldsymbol{c}}(t) +$$

$$+\boldsymbol{\mathcal{B}}(t,t)\,\boldsymbol{x}_\ell(t)+\int\limits_{\alpha_\ell}^{t}\dot{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(t,\theta)\,\boldsymbol{x}_\ell(\theta)\,d\theta\equiv\frac{D}{Dt}\,\boldsymbol{h}\big(\boldsymbol{x}_\ell(t),t,\alpha_\ell\big),$$

$$\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots$$

$$\boldsymbol{x}_\ell^{(k)}(t)=\frac{d^k}{dt^k}\,\boldsymbol{x}_\ell(t)\equiv\frac{D^{k-1}}{Dt^{k-1}}\,\boldsymbol{h}\big(\boldsymbol{x}_\ell(t),t,\alpha_\ell\big),$$

$$\boldsymbol{x}_{\ell0}=\beta_\ell,$$

$$\boldsymbol{x}_{\ell1}=\boldsymbol{\mathcal{A}}(\alpha_\ell)\,\boldsymbol{\beta}_\ell+\boldsymbol{c}(\alpha_\ell),$$

$$\boldsymbol{x}_{\ell2}=\big[\dot{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(\alpha_\ell)+\boldsymbol{\mathcal{A}}^2(\alpha_\ell)+\boldsymbol{\mathcal{B}}(\alpha_\ell,\alpha_\ell)\big]\,\boldsymbol{\beta}_\ell+\boldsymbol{\mathcal{A}}(\alpha_\ell)\,\boldsymbol{c}(\alpha_\ell)+\dot{\boldsymbol{c}}(\alpha_\ell),$$

$$\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots$$

$$\boldsymbol{x}_{\ell k}=\frac{D^{k-1}}{Dt^{k-1}}\,\boldsymbol{h}\big(\boldsymbol{x}_\ell(t),t,\alpha_\ell\big)\Big|_{\boldsymbol{x}_\ell(t)=\boldsymbol{x}_\ell^{[M_\ell]}(t),\,t=\alpha_\ell},$$

$$\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots$$

2°. Еще раз упростим задачу. Пусть матрица $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ постоянна, $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ зависит только от разности аргументов, а вектор $\boldsymbol{c}$ нулевой. Тогда

$$\dot{\boldsymbol{x}}_\ell(t)=\boldsymbol{\mathcal{A}}\,\boldsymbol{x}_\ell(t)+\int\limits_{\alpha_\ell}^{t}\boldsymbol{\mathcal{B}}(t-\theta)\,\boldsymbol{x}_\ell(\theta)\,d\theta\equiv\boldsymbol{h}\big(\boldsymbol{x}_\ell(t),t,\alpha_\ell\big),$$

$$\ddot{\boldsymbol{x}}_\ell(t)=\frac{d}{dt}\,\dot{\boldsymbol{x}}_\ell(t)\equiv\frac{d}{dt}\Big[\boldsymbol{\mathcal{A}}\,\boldsymbol{x}_\ell(t)+\int\limits_{\alpha_\ell}^{t}\boldsymbol{\mathcal{B}}(t-\theta)\,\boldsymbol{x}_\ell(\theta)\,d\theta\Big]=$$

$$=\boldsymbol{\mathcal{A}}\,\dot{\boldsymbol{x}}_\ell(t)+\boldsymbol{\mathcal{B}}(0)\,\boldsymbol{x}_\ell(t)+\int\limits_{\alpha_\ell}^{t}\dot{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(t-\theta)\,\boldsymbol{x}_\ell(\theta)\,d\theta=$$

$$=\boldsymbol{\mathcal{A}}\Big[\boldsymbol{\mathcal{A}}\,\boldsymbol{x}_\ell(t)+\int\limits_{\alpha_\ell}^{t}\boldsymbol{\mathcal{B}}(t-\theta)\,\boldsymbol{x}_\ell(\theta)\,d\theta\Big]+\boldsymbol{\mathcal{B}}(0)\,\boldsymbol{x}_\ell(t)+\int\limits_{\alpha_\ell}^{t}\dot{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(t-\theta)\,\boldsymbol{x}_\ell(\theta)\,d\theta=$$

$$=\big[\boldsymbol{\mathcal{A}}^2+\boldsymbol{\mathcal{B}}(0)\big]\,\boldsymbol{x}_\ell(t)+\int\limits_{\alpha_\ell}^{t}\big[\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{\mathcal{B}}(t-\theta)+\dot{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(t-\theta)\big]\,\boldsymbol{x}_\ell(\theta)\,d\theta\equiv$$

$$\equiv\frac{D}{Dt}\,\boldsymbol{h}\big(\boldsymbol{x}_\ell(t),t,\alpha_\ell\big),$$

$$\dddot{\boldsymbol{x}}_\ell(t) = \frac{d}{dt}\,\ddot{\boldsymbol{x}}_\ell(t) \equiv$$

$$\equiv \frac{d}{dt}\Big\{\big[\boldsymbol{\mathcal{A}}^2 + \boldsymbol{\mathcal{B}}(0)\big]\,\boldsymbol{x}_\ell(t) + \int\limits_{\alpha_\ell}^{t}\big[\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{\mathcal{B}}(t-\theta) + +\dot{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(t-\theta)\big]\,\boldsymbol{x}_\ell(\theta)\,d\theta\Big\} =$$

$$= \big[\boldsymbol{\mathcal{A}}^2 + \boldsymbol{\mathcal{B}}(0)\big]\,\dot{\boldsymbol{x}}_\ell(t) + \big[\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{\mathcal{B}}(0) + \dot{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(0)\big]\,\boldsymbol{x}_\ell(t) +$$

$$+ \int\limits_{\alpha_\ell}^{t}\big[\boldsymbol{\mathcal{A}}\dot{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(t-\theta) + \ddot{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(t-\theta)\big]\,\boldsymbol{x}_\ell(\theta)\,d\theta =$$

$$= \boldsymbol{\mathcal{A}}\Big[\boldsymbol{\mathcal{A}}\,\boldsymbol{x}_\ell(t) + \int\limits_{\alpha_\ell}^{t}\boldsymbol{\mathcal{B}}(t-\theta)\,\boldsymbol{x}_\ell(\theta)\,d\theta\Big] + \boldsymbol{\mathcal{B}}(0)\,\boldsymbol{x}_\ell(t) + \int\limits_{\alpha_\ell}^{t}\dot{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(t-\theta)\,\boldsymbol{x}_\ell(\theta)\,d\theta =$$

$$= \big[\boldsymbol{\mathcal{A}}^2 + \boldsymbol{\mathcal{B}}(0)\big]\,\boldsymbol{x}_\ell(t) + \int\limits_{\alpha_\ell}^{t}\big[\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{\mathcal{B}}(t-\theta) + \dot{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(t-\theta)\big]\,\boldsymbol{x}_\ell(\theta)\,d\theta \equiv$$

$$\equiv \frac{D^2}{Dt^2}\,\boldsymbol{h}\big(\boldsymbol{x}_\ell(t), t, \alpha_\ell\big),$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\boldsymbol{x}_\ell^{(k)}(t) = \frac{d^k}{dt^k}\,\boldsymbol{x}_\ell(t) \equiv \frac{D^{k-1}}{Dt^{k-1}}\,\boldsymbol{h}\big(\boldsymbol{x}_\ell(t), t, \alpha_\ell\big),$$

$$\boldsymbol{x}_{\ell 0} = \beta_\ell,$$

$$\boldsymbol{x}_{\ell 1} = \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{\beta}_\ell,$$

$$\boldsymbol{x}_{\ell 2} = \big[\boldsymbol{\mathcal{A}}^2 + \boldsymbol{\mathcal{B}}(0)\big]\,\boldsymbol{\beta}_\ell,$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\boldsymbol{x}_{\ell k} = \frac{D^{k-1}}{Dt^{k-1}}\,\boldsymbol{h}\big(\boldsymbol{x}_\ell(t), t, \alpha_\ell\big)\Big|_{\boldsymbol{x}_\ell(t) = \boldsymbol{x}_\ell^{[M_\ell]}(t),\; t = \alpha_\ell},$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

1.3.7. Приближенные методы для систем ИДУвЧП типа Вольтерры

В последние годы в связи с усложнением применяемых в различных отраслях науки и техники математических моделей все чаще возника-

ют проблемы, требующие описания исследуемых процессов с помощью интегро-дифференциальные уравнения в частных производных (ИДУвЧП), которые занимают важное место среди моделей в различных областях.

Типичным примером таких уравнений является следующее [430]:

$$\rho\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}+\alpha\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\gamma\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+\int\limits_0^t K(t-s)\,\frac{\partial^2 u(x,s)}{\partial x^2}\,ds+$$
$$+f\big(u(x,t),x,t\big),\quad x\in(a,b),\quad t>0, \tag{1.3.94}$$

где $K(\cdot)$ – скалярная достаточно гладкая функция; $\rho>0$, $\alpha>0$, $\gamma>0$, a, b – постоянные, с начальными и краевыми условиями

$$u(x,0)=u_0(x),\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=u_1(x),\quad x\in(a,b); \tag{1.3.95}$$
$$u(a,t)=u_a(t),\quad u(b,t)=u_b(t),\quad t>0. \tag{1.3.96}$$

Начально-краевая задача (1.3.94)–(1.3.96) возникает в множестве математических моделей в области инженерных и физических наук, в частности, например, в теории вязкоупругости. В этом случае u представляет собой смещение тела с плотностью ρ; α – вязкость и f – внешняя сила, зависящая от смещения.

Еще один пример – система уравнений типа [392]:

$$\frac{\partial c(x,t)}{\partial t}=D_{1i}\,\frac{\partial^2 c(x,t)}{\partial x^2}+\frac{D_{2i}}{\tau_i}\int\limits_0^t e^{-\frac{t-s}{\tau_i}}\,\frac{\partial^2 c(x,s)}{\partial x^2}\,ds,\quad x\in I_i,\quad t>0,$$

описывающая доставку лекарств через кожу (c – концентрация)– проникновение лекарств из внешнего источника–носителя через кожу, переносящую жизнеспособный эпидермис в кровеносные капилляры и лимфатическую систему.

Более общий вид однородной начально-краевой задачи для линейного ИДУвЧП Вольтерры второго порядка параболического типа (ИДУвЧПВП) будет выглядеть так:

$$\frac{\partial u(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}+\mathcal{A}\big[u(\boldsymbol{x},t)\big]=\int\limits_{t_0}^t \mathcal{B}_{ts}\big[u(\boldsymbol{x},s)\big]\,ds+f(\boldsymbol{x},t),$$
$$\boldsymbol{x}\in\Omega,\quad t_0<t\leqslant T<+\infty,$$

$$u(\boldsymbol{x},t_0)=u^{[0]}(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}\in\overline{\Omega},$$
$$u(\boldsymbol{x},t)=0,\quad \boldsymbol{x}\in\partial\Omega,\quad t_0<t\leqslant T$$

где

$$\mathcal{A}\big[u(\boldsymbol{x},t)\big]=-\sum_{i,j=1}^{d}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[a_{i,j}(\boldsymbol{x})\,\frac{\partial u(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_j}\Big]+a_0(\boldsymbol{x})\,u(\boldsymbol{x},t),$$

$$\mathcal{B}_{ts}\big[u(\boldsymbol{x},t)\big]=-\sum_{i,j=1}^{d}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[b_{i,j}(\boldsymbol{x};t,s)\,\frac{\partial u(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_j}\Big]+$$
$$+\sum_{i=1}^{d}b_i(\boldsymbol{x};t,s)\,\frac{\partial u(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_i}+b_0(\boldsymbol{x})\,u(\boldsymbol{x},t),$$

матрица из коэффициентов $a_{i,j}(\boldsymbol{x})$ симметричная и положительно определенная, функция $a_0(\boldsymbol{x})$ неотрицательна в области $\overline{\Omega}$. Кроме того, предполагается, что $a_{i,j}(\boldsymbol{x})$, $a_0(\boldsymbol{x})$, $b_{i,j}(\boldsymbol{x};t,s)$, $b_i(\boldsymbol{x};t,s)$, $b_0(\boldsymbol{x})$, $f(\boldsymbol{x},t)$ и $u(\boldsymbol{x},t)$ – достаточно гладкие вещественные функции.

Такая же задача, но для линейного ИДУвЧП Вольтерры второго порядка гиперболического типа (ИДУвЧПВГ) может иметь следующий вид:

$$\frac{\partial^2u(\boldsymbol{x},t)}{\partial t^2}+\mathcal{A}\big[u(\boldsymbol{x},t)\big]=\int_{t_0}^{t}\mathcal{B}_{ts}\big[u(\boldsymbol{x},s)\big]\,ds+f(\boldsymbol{x},t),$$
$$\boldsymbol{x}\in\Omega,\quad t_0<t\leqslant T<+\infty,$$
$$u(\boldsymbol{x},t_0)=u^{[0]}(\boldsymbol{x}),\quad \frac{\partial u(\boldsymbol{x},t_0)}{\partial t}=u^{[1]}(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}\in\overline{\Omega},$$
$$u(\boldsymbol{x},t)=0,\quad \boldsymbol{x}\in\partial\Omega,\quad t_0<t\leqslant T,$$

с теми же операторами $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ и предположениями о входящих в уравнение функциях.

Естественно, что усложнение используемого математического аппарата ведет и к усложнению применяемых методов и, в первую очередь, приближенных, т.к. возможности получения точных аналитических решений серьезных проблем, включая указанные выше, весьма ограничены. Поэтому вследствие запросов практики в последние десятилетия значительное внимание специалистов уделяется разработке эффективных приближенных методов решения ИДУвЧП .

Несложно заметить, что часть из этих методов является разумной переработкой алгоритмов численного интегрирования обыкновенных ИДУ,

что является следствием наличия в ИДУвЧП интегральных членов типа Вольтерры и Фредгольма. Это приводит к использованию известных из ОИДУ схем явного и неявного методов Эйлера [473], в т.ч., дифференцирования назад, Кранка–Никольсона для параболических ИДУвЧП, Лакса–Вендрофа – для гиперболических. В задачах с интегральными членами типа Вольтерры широко используются специализированные методы Рунке–Кутты (VRK), которые адаптированы под вычисление соответствующих интегралов и которые могут быть: 1) явными PVRK (VRK Пузе [439]); 2) явно-неявными BVRK (VRK Бельтюкова [26,439]); 3) неявными HVRK (VRK де Хоога и Вайса [513]).

Полный разбор каждой из используемых для решения ИДУвЧП схем может быть достаточно пространным, т.к. как правило, для описания необходимо указывать тип уравнения (ИДУвЧПВП, ИДУвЧПВГ или их смесь), используемые методы отдельно (если таковые есть) для дискретизации производной(ых) по времени, пространственных производных и интегральной части. Например, в [564] методы прямоугольников и трапеций используются для аппроксимации интегрального члена в ИДУвЧПВП, конечно-разностная схема для производных по пространству и неявная схема Эйлера для производной по времени. Поэтому далее в обзоре ограничимся краткими сведениями о применяемых процедурах. Общие проблемы, связанные с решением рассматриваемых уравнений, обсуждаются в [976].

Среди других процедур отметим: групповой анализ [621,681]; преобразование Лапласа для одномерной ограниченной пространственной области [711], методы усреднения [292], спектральный [484,557], Петрова–Галеркина [863], конечных разностей, конечных элементов, полудискретизации [473], применение тригонометрических рядов [548], радиальных базисных функций [367] для дискретизации по пространству; дифференцирование назад, симметричные разностные схемы по времени [887], формулы прямоугольников и более сложные схемы интегрирования [680], θ-метод [571] для дискретизации по времени; методы степенных рядов [832], итерационный [423], дифференциальных преобразований [1025], анализа гомотопии [959]; методы Рунге–Кутты [440], блочные методы граничных значений [1127]; метод коллокаций, непрерывные методы Рунге–Кутты, основанные на методе коллокаций [1139], коллокации на основе Sinc-функций [556]; операционный τ-метод [1024], вариационно-итерационный, декомпозиции [1103], квазилинеаризации [340]; стабилизированные явные и неявные методы Эйлера–Чебышёва [1043]; различные конечные разности [1137], двумерные кусочно постоянные функции (блочно-импульсные) [337], полиномы Бернштейна [1118] по времени и по пространству;

сочетание метода конечных разностях, комбинированного метода трапеций с весами взвешенном и B-сплайнов [735]; дискретизация с помощью формул обратного дифференцирования третьего порядка производной по времени и МКЭ по пространству [585], метод PVRK по времени и псевдоспектральный метод или метод прямых по пространству [1090], квадратур интеграла по времени, неявного метода Эйлера и формул дифференцирования назад второго порядка производной по времени, методом конечных элементов пространственных дифференциальных операторов в частных производных [1029], формулы трапеций по времени и метода Галеркина по пространству [40], конечные разности по времени и МКЭ на основе схемы Галеркина по пространству [836], неявного метода Эйлера по времени и метода прямых по пространству [724], неявный метод Эйлера по времени и МКЭ на основе схемы Галеркина по пространству [888], конечные разности по пространству и формула трапеций по времени [1102], разностные методы первого и второго порядка по времени и кусочно-линейные конечные элементы по пространству [804], неявный метод Эйлера по времени и кубические B-сплайны совместно с методом коллокации по пространству [980]; дискретизация по времени (θ-метод, включая неявный метод Эйлера, схему Кранка–Никольсона) и квадратурные формулы для интеграла (схемы прямоугольников, трапеций и Симпсона) [1107]; метод перекрытия Шварца [1039], функции Хаара [965], сплайны высокого порядка [1001], конечно-разностный метод с расщеплением на три части (реакцию, адвекцию–диффузию и диффузию с памятью) на шаге [354] и спектральный метод с использованием коллокации и полиномов Чебышёва [541] по пространству и др.

1.3.7.1. Метод прямых

Рассмотрим следующее интегро-дифференциальное уравнение Вольтерры в частных производных:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \int_0^t K(t,s)\,\frac{\partial^2 u(x,s)}{\partial x^2}\,ds + f(x,t), \tag{1.3.97}$$

$$x \in (0,L), \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = u^{[0]}(x), \quad x \in [0,L], \quad u(0,t) = u(L,t) = 0, \tag{1.3.98}$$

где t – время ($0 \leqslant t \leqslant T < +\infty$), $u(x,t)$ – решение уравнения, $L > 0$, $a > 0$ – постоянные величины, $u^{[0]}(x)$, $K(t,s) > 0$, $f(x,t)$ – известные непрерывные функции.

Для решения задачи (1.3.97), (1.3.98) применим метод прямых [84]. Для этого построим на отрезке $[0, L]$ равномерную сетку

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_k < ... < x_{N-1} < x_N = L, \quad x_k = h\,k, \quad k = \overline{0, N},$$

где h – шаг сетки ($0 < h \ll 1$), обозначим через $u_k(t)$ зависящую от времени величину решения $u(x,t)$ в узле x_k и определим конечно-разностную аппроксимацию для $u''_{xx}(x,t)$ второго порядка точности по h:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \approx \frac{u_{k+1}(t) - 2\,u_k(t) + u_{k-1}(t)}{h^2}, \qquad 0 < k < N,$$

где $u_k(t) = u(x_k, t)$.

В результате получаем следующую систему обыкновенных интегро-дифференциально-алгебраических уравнений (ОИДАУ):

$$\begin{gathered} \dot{u}_k(t) = a^2\,\frac{u_{k+1}(t) - 2\,u_k(t) + u_{k-1}(t)}{h^2} + f_k(t) + \\ + \int_0^t K(t,s)\,\frac{u_{k+1}(s) - 2\,u_k(s) + u_{s-1}(t)}{h^2}\,ds, \quad 1 \leqslant k \leqslant N-1, \qquad (1.3.99) \\ u_0(t) = 0, \quad u_N(t) = 0 \end{gathered}$$

с начальными условиями $u_k(0) = u^{[0]}(x_k)$, решение которой дает аппроксимацию $u(x,t)$ в узлах сетки.

Получим такую аппроксимацию для следующего случая:

$$a = 0.025; \quad L = 1; \quad N = 200; \quad u^{[0]}(x) = (2\,\sin 2\,\pi\,x - \sin 6\,\pi\,x)/80,$$

$$f(x,t) = 0.3\,\sin(2\,\pi\,x + 4\,t); \quad K(t,s) = \beta\,e^{-\gamma(t-s)}; \quad \beta = 0.04; \quad \gamma = 0.125.$$

Если ввести новые неизвестные по формулам:

$$z_k(t) = \int_0^t \beta\,e^{-\gamma(t-s)}\,u_k(s)\,ds, \qquad \dot{z}_k(t) = \beta\,u_k(t) - \gamma\,z_k(t),$$

то уравнения (1.3.99) примут вид:

$$\begin{gathered} \dot{u}_k(t) = a^2\,\frac{u_{k+1}(t) - 2\,u_k(t) + u_{k-1}(t)}{h^2} + \frac{z_{k+1}(t) - 2\,z_k(t) + z_{s-1}(t)}{h^2} + \\ + f_k(t), \quad 1 \leqslant k \leqslant N-1, \qquad (1.3.100) \\ u_0(t) = 0, \quad u_N(t) = 0, \end{gathered}$$

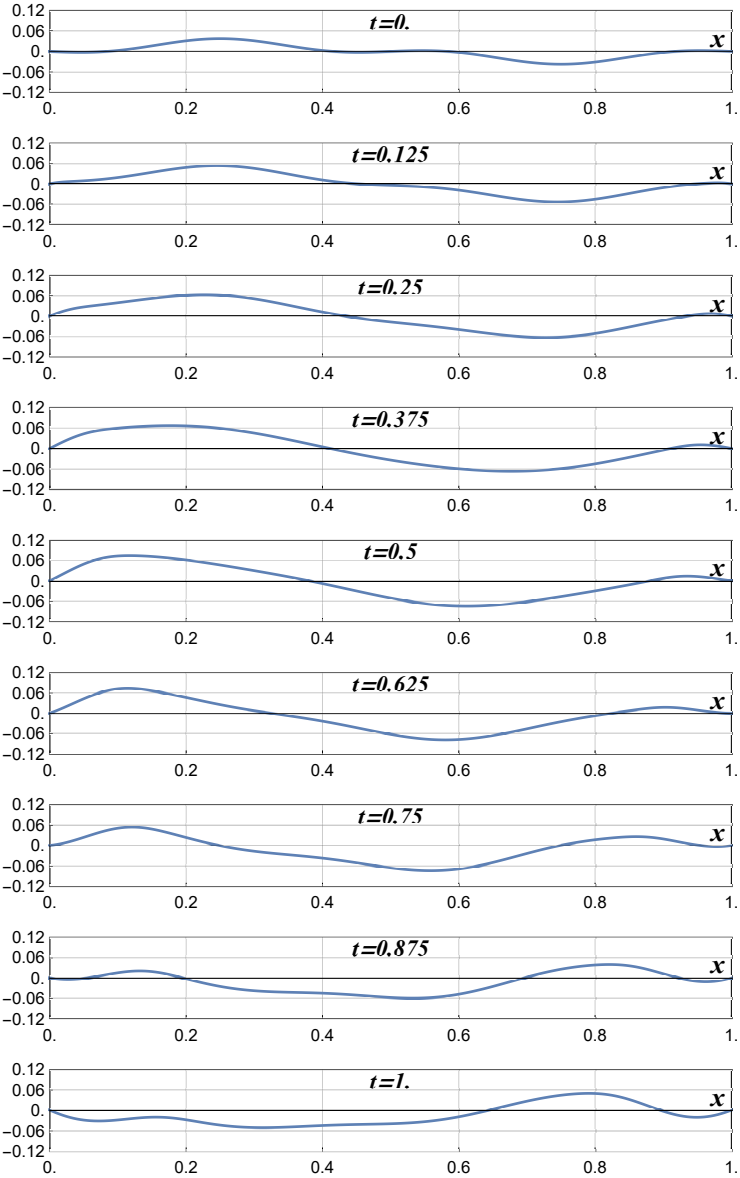

t=0.
t=0.125
t=0.25
t=0.375
t=0.5
t=0.625
t=0.75
t=0.875
t=1.
x
0.12
0.06
0.
−0.06
−0.12
0.
0.2
0.4
0.6
0.8
1.

Рис. 1.3.6

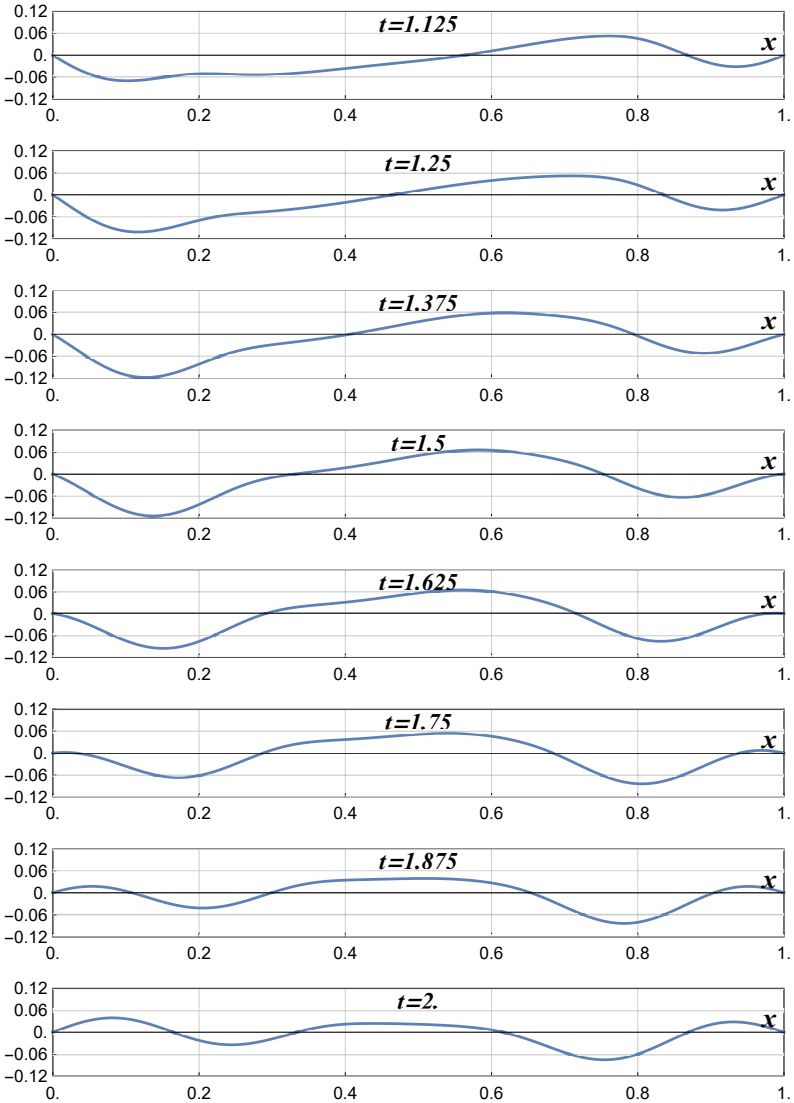


Рис. 1.3.7

$$\dot{z}_k(t) = \beta\, u_k(t) - \gamma\, z_k(t), \quad 0 \leqslant k \leqslant N,$$
$$u_k(0) = u^{[0]}(x_k), \qquad z_k(0) = 0. \tag{1.3.101}$$

На рис. 1.3.6, 1.3.7 демонстрируется поведение сечений решения на промежутке времени от 0 до 2.

1.3.7.2. Расширение пространства состояний (частный нелинейный случай)

Рассмотрим систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных следующего вида:

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}'_x(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}''_{xx}(\boldsymbol{x},t), ..., \boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{\mathcal{Q}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x},t,t_0)\big), \quad (1.3.102)$$

$$\boldsymbol{x} \in \mathscr{D}, \quad t \in (t_0, T];$$

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t_0) = \boldsymbol{u}^{[0]}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \overline{\mathscr{D}} = \mathscr{D} \cup \partial\mathscr{D}; \quad (1.3.103)$$

$$\boldsymbol{h}\big(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}'_x(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}''_{xx}(\boldsymbol{x},t), ..., \boldsymbol{x}, t\big) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \partial\mathscr{D}, \quad t \in (t_0, T], \quad (1.3.104)$$

где

$$\boldsymbol{\mathcal{Q}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x},t,t_0) = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\mathcal{B}}(\boldsymbol{x},t,s)\,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},s)\,ds; \quad (1.3.105)$$

t – время ($t_0 \leqslant t \leqslant T < +\infty$); $\boldsymbol{x} = \{x_i\} \in \overline{\mathscr{D}} \subset \mathbb{R}^n$; $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = \{u_i(\boldsymbol{x},t)\}^{\intercal} \in \mathbb{R}^m$ – неизвестное векторное поле (вектор состояния); $\boldsymbol{f}(...) = \{f_i(...)\}^{\intercal} \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{h}(...) = \{h_i(...)\}^{\intercal} \in \mathbb{R}^r$ и $\boldsymbol{\mathcal{B}}(...) = \{b_{ij}(...)\}$ – известные векторные и матричная функции своих аргументов со свойствами, обеспечивающими существование и единственность решения задачи (1.3.102)–(1.3.104), причем $b_{ij}(\boldsymbol{x},t) \geqslant 0$ для $\boldsymbol{x} \in \overline{\mathscr{D}}$ и $t \in [t_0, T]$.

Уравнения, подобные рассматриваемому, используются в моделях популяционных моделях, теплопроводности в материалах с памятью, (термо)вязкоупругости, экологии, радиофизике, фильтрации жидкости, сейсмических волн и др. [538,574,584,604,825,963,1099]. Как правило, прямое исследование систем типа (1.3.102)–(1.3.104) невозможно. При этом основные трудности с изучением переходных режимов, описываемых моделями указанного типа, связаны с наличием интегрального члена.

Как правило, для аппроксимации такого члена применяют численные процедуры, например: 1) метод трапеций с интегрированием по времени в комбинации с обратным (неявным) методом Эйлера [988] (схема первого порядка точности); 2) интерполяцию по Эрмиту совместно с неявным линейным многошаговым методом численного интегрирования ОДУ, основанном на формуле обратного дифференцирования (BDF) (схема третьего порядка точности) и др. С другой стороны, имеются работы,

где с помощью увеличения размерности векторов состояния интегро-дифференциальных систем, у которых элементы матричных ядер вырождены, исходные системы приводят к формам без интегральных членов, что позволяет для исследования полученных ДУвЧП применить известные точные и приближенные методы [84, 153, 928].

Рассмотрим схему приближенного сведения (без задания структуры ядра) системы (1.3.102)–(1.3.104) к ДУвЧП, основанную на процедуре интегрального расширения пространства состояния.

Разобьем отрезок $[t_0, T]$ точками $t_k = t_0 + k\,h$, $k = 0, 1, 2, ..., K$, $h = (T - t_0)/M$ так, чтобы с достаточной точностью на отрезке $[t_{k-1}, t_k]$, $k \geqslant 1$ можно было заменить матричное ядро $\boldsymbol{\mathcal{B}}(\boldsymbol{x}, t, s)$ на семейство функций (средних значений на отрезках) $\widehat{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_k(\boldsymbol{x}, t)$, которые вычислим по формуле Симпсона:

$$\widehat{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_k(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{h}\int_{t_{k-1}}^{t_k} \boldsymbol{\mathcal{B}}(\boldsymbol{x}, t, s)\,ds \approx$$

$$\approx \frac{1}{h}\,\frac{\Delta s}{3}\sum_{\ell=0}^{2K} c_\ell\,\boldsymbol{\mathcal{B}}(\boldsymbol{x}, t, s_{k\ell}) = \frac{1}{6\,K}\sum_{\ell=0}^{2K} c_\ell\,\boldsymbol{\mathcal{B}}(\boldsymbol{x}, t, s_{k\ell})$$

(с точностью порядка $O(\Delta s)^4$), где

$$s_{k\ell} = t_{k-1} + \ell\cdot\Delta s, \qquad \ell = 0, 1, ..., 2\,K, \qquad h = 2\,K\cdot\Delta s, \qquad K \geqslant 1,$$

$$c_\ell = \begin{cases} 1, & \ell = 0 \text{ или } \ell = 2\,K, \\ 2, & \ell - \text{четное число}, \\ 4, & \ell - \text{нечетное число}. \end{cases}$$

Таким образом, ядра $\boldsymbol{\mathcal{B}}(\boldsymbol{x}, t, s)$ представляются кусочно-постоянными по третьему аргументу матричными функциями. В результате этого система (1.3.102)–(1.3.104) приводится к виду:

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t), \boldsymbol{u}'_x(\boldsymbol{x}, t), \boldsymbol{u}''_{xx}(\boldsymbol{x}, t), ..., \boldsymbol{x}, t, \widehat{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}_k(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}, t, t_{k-1})\big), \tag{1.3.106}$$

$$\boldsymbol{x} \in \mathscr{D}, \quad t \in (t_{k-1}, t_k];$$

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t_{k-1}) = \begin{cases} \boldsymbol{u}^{[0]}(\boldsymbol{x}), & k = 1, \\ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t_{k-1}), & k > 1, \end{cases} \quad \boldsymbol{x} \in \overline{\mathscr{D}}; \tag{1.3.107}$$

$$\boldsymbol{h}\big(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t), \boldsymbol{u}'_x(\boldsymbol{x}, t), \boldsymbol{u}''_{xx}(\boldsymbol{x}, t), ..., \boldsymbol{x}, t\big) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \partial\mathscr{D}, \quad t \in (t_{k-1}, t_k], \tag{1.3.108}$$

где $k = 1, 2, ..., M$;

$$\widehat{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}_k(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}, t, t_{k-1}) = \sum_{i=1}^{k-1} \widehat{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_i(\boldsymbol{x}, t) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, s)\, ds + \widehat{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_k(\boldsymbol{x}, t) \int_{t_{k-1}}^{t} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, s)\, ds.$$

Введем векторы:

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) = \int_{t_{k-1}}^{t} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, s)\, ds, \qquad t_{k-1} < t \leqslant t_k, \tag{1.3.109}$$

удовлетворяющие начальным и краевым условиям вида:

$$\boldsymbol{v}(t_{k-1}) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \overline{\mathscr{D}}; \qquad \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)\Big|_{\boldsymbol{x} \in \partial\, \mathscr{D}} = \int_{t_{k-1}}^{t} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, s)\Big|_{\boldsymbol{x} \in \partial\, \mathscr{D}} ds.$$

С учетом равенства (1.3.109) расширенная система (1.3.106)–(1.3.108) принимает форму:

$$\begin{gathered} \frac{\partial \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t), \boldsymbol{u}'_x(\boldsymbol{x}, t), \boldsymbol{u}''_{xx}(\boldsymbol{x}, t), ..., \boldsymbol{x}, t, \widehat{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}^{\,*}_k(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}, t, t_{k-1})\big); \\ \boldsymbol{h}\big(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t), \boldsymbol{u}'_x(\boldsymbol{x}, t), \boldsymbol{u}''_{xx}(\boldsymbol{x}, t), ..., \boldsymbol{x}, t\big) = 0; \\ \frac{\partial \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t); \\ t_{k-1} < t \leqslant t_k, \qquad k = 1, 2, ..., M, \end{gathered} \tag{1.3.110}$$

где

$$\widehat{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}^{\,*}_k(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}, t, t_{k-1}) = \sum_{i=1}^{k-1} \widehat{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_i(\boldsymbol{x}, t) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, s)\, ds + \widehat{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_k(\boldsymbol{x}, t)\, \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, s).$$

Если для $t_{k-1} < t \leqslant t_k$ $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ и $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ обозначить соответственно через $\boldsymbol{u}_k(\boldsymbol{x}, t)$ и $\boldsymbol{v}_k(\boldsymbol{x}, t)$, то окончательно получим:

$$\begin{gathered} \frac{\partial \boldsymbol{u}_k(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{u}_k(\boldsymbol{x}, t), \boldsymbol{u}'_{kx}(\boldsymbol{x}, t), \boldsymbol{u}''_{kxx}(\boldsymbol{x}, t), ..., \boldsymbol{x}, t, \\ \widehat{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}^{\,*}_k(\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{x}, t, t_{k-1})\big), \quad \boldsymbol{x} \in \mathscr{D}; \end{gathered} \tag{1.3.111}$$

$$\boldsymbol{u}_k(\boldsymbol{x}, t_{k-1}) = \begin{cases} \boldsymbol{u}^{[0]}(\boldsymbol{x}), & k = 1, \\ \boldsymbol{u}_{k-1}(\boldsymbol{x}, t_{k-1}), & k > 1, \end{cases} \quad \boldsymbol{x} \in \overline{\mathscr{D}}; \tag{1.3.112}$$

$$\boldsymbol{h}\big(\boldsymbol{u}_k(\boldsymbol{x}, t), \boldsymbol{u}'_{xx}(\boldsymbol{x}, t), \boldsymbol{u}''_{kxx}(\boldsymbol{x}, t), ..., \boldsymbol{x}, t\big) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \partial\, \mathscr{D}; \tag{1.3.113}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_k(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} = \boldsymbol{u}_k(\boldsymbol{x},t), \qquad \boldsymbol{v}_k(t_{k-1}) = 0 \tag{1.3.114}$$

$$\boldsymbol{v}_k(\boldsymbol{x},t)\Big|_{\boldsymbol{x}\in\partial\mathscr{D}} = \int_{t_{k-1}}^{t} \boldsymbol{u}_k(\boldsymbol{x},s)\Big|_{\boldsymbol{x}\in\partial\mathscr{D}}\, ds; \tag{1.3.115}$$

$$t_{k-1} < t \leqslant t_k, \qquad k = 1,2,...,M,$$

где

$$\widehat{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}_k^*(\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{v}_k,\boldsymbol{x},t,t_{k-1}) = \sum_{i=1}^{k-1} \widehat{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_i(\boldsymbol{x},t_i)\,\boldsymbol{v}_i(\boldsymbol{x},t_i) + \widehat{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_k(\boldsymbol{x},t)\,\boldsymbol{v}_k(\boldsymbol{x},t).$$

Пример 1.3.7. Рассмотрим следующий более общий, чем приведенный в работе [538], вид нелинейного уравнения в частных производных с распределенным запаздыванием:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + 2\,\varepsilon\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \epsilon\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \alpha\,u(x,t) + \beta\,u^3(x,t) + \\ + \gamma\,u^5(x,t) + \int_0^t \frac{\mu}{1+(t-s)^2}\,u(x,s)\,ds \tag{1.3.116}$$

с соответствующими начальным и краевыми условиями:

$$u(x,0) = u^{[0]}(x), \quad u'_t(x,0) = u^{[1]}(x), \quad u(-L,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \tag{1.3.117}$$

где $\varepsilon > 0$, $\epsilon > 0$, $\alpha < 0$, $\beta > 0$, $\gamma < 0$, $\mu > 0$, $L > 0$ – некоторые постоянные. Интегральный член здесь учитывает эффект последействия, зависящий от прошлой истории состояния системы, причем этот эффект затухает полиномиально быстро во времени.

В этом случае система ДУвЧП (1.3.111)–(1.3.115) примет следующую форму:

$$\frac{\partial^2 u_k(x,t)}{\partial t^2} + 2\,\varepsilon\,\frac{\partial u_k(x,t)}{\partial t} = \epsilon\,\frac{\partial^2 u_k(x,t)}{\partial x^2} + \alpha\,u_k(x,t) + \beta\,u_k^3(x,t) + \\ + \gamma\,u_k^5(x,t) + \sum_{i=1}^{k-1} \widehat{\mathcal{B}}_i(t_i)\,v_i(x,t_i) + \widehat{\mathcal{B}}_k^*(t)\,v_k(x,t), \quad x \in (-L,L);$$

$$u_k(x,t_{k-1}) = \begin{cases} u^{[0]}(x), & k = 1, \\ u_{k-1}(x,t_{k-1}), & k > 1, \end{cases} \quad x \in [-L,L];$$

$$\frac{\partial u_k(x,t_{k-1})}{\partial t} = \begin{cases} u^{[1]}(x), & k=1, \\ u'_{k-1,t}(x,t_{k-1}), & k>1, \end{cases} \quad x\in[-L,L]; \tag{1.3.118}$$

$$u_k(-L,t)=0, \qquad u_k(L,t)=0;$$

$$\frac{\partial v_k(x,t)}{\partial t} = u_k(x,t), \quad v_k(t_{k-1})=0, \quad x\in(-L,L);$$

$$v_k(-L,t)=0, \qquad v_k(L,t)=0;$$

$$t_{k-1}<t\leqslant t_k, \qquad k=1,2,...,M,$$

где:

1) при $t_r \leqslant t$

$$\widehat{\mathcal{B}}_r(t) = \frac{1}{h}\int_{t_{r-1}}^{t_r} \frac{\mu}{1+(t-s)^2}\,ds = \frac{\mu}{h}\left[\operatorname{arctg}(t-t_{r-1}) - \operatorname{arctg}(t-t_r)\right] =$$

$$= \frac{\mu}{h}\operatorname{arctg}\frac{h}{1+(t-t_r)(t-t_{r-1})}, \qquad r\geqslant 1;$$

2) при $t_r > t$

$$\widehat{\mathcal{B}}^*_r(t) = \frac{1}{t-t_{r-1}}\int_{t_{r-1}}^{t} \frac{\mu}{1+(t-s)^2}\,ds = \frac{\mu}{t-t_{r-1}}\operatorname{arctg}(t-t_{r-1}).$$

При расчетах с применением изложенного метода в качестве входных данных использовались следующие значения и функции:

$$u^{[0]}(x) = 0.02\,(x+2)(x-2)(x-1)(x+1.5),$$

$$u^{[1]}(x)=0, \qquad L=2,$$

$$T=12, \qquad M=240, \qquad \varepsilon=0.1, \qquad \epsilon=0.01,$$

$$\alpha=-1, \qquad \beta=0.25, \qquad \gamma=-0.1, \qquad \mu=0.5.$$

Для решения системы уравнений (1.3.118) применялся метод прямых (общее число уравнений на шаге равнялось 399) в сочетании с численным интегрированием получившейся системы ОДУ с автоматическим выбором шага (функция `NDSolve` пакета `Mathematica`). Для аппроксимации второй производной использовалась схема третьего порядка точности.

Результаты расчетов приведены на рис. 1.3.8 в виде линий уровня аппроксимации функции $u(x,t)$. ►

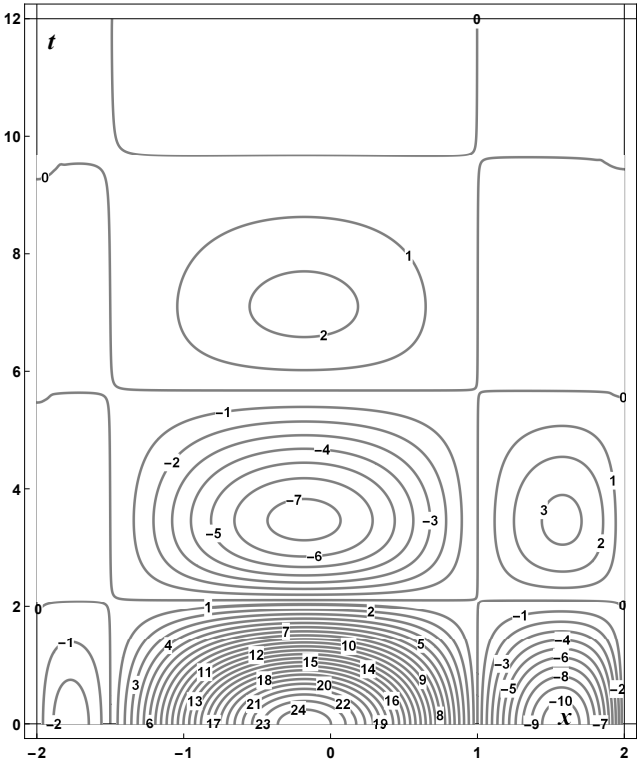


Рис. 1.3.8

1.3.7.3. Расширение пространства состояний (общий линейный случай)

Представляемая ниже приближенная схема сведения системы линейных ИДУвЧП (без задания частной структуры ядра) к последовательности систем дифференциальных уравнений в частных производных (ДУвЧП) увеличивающейся размерности [220] является переработкой процедуры, предложенной ранее для исследования обыкновенных стохастических ИДУ [194, 201]. Далее приводятся необходимые расчетные соотношения и пример применения схемы.

Рассмотрим систему линейных ИДУвЧП типа Вольтерры следующе-

го вида:

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} = \mathbb{L}_t\big[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)\big], \tag{1.3.119}$$

$$\mathbb{L}_t\big[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)\big] = \Big\{ \sum_{k=1}^{m} \sum_{i,j=1}^{n} a_{\ell kij}\, \frac{\partial^2 u_k(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} b_{\ell ki}\, \frac{\partial u_k(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_i} + \\ + \sum_{k=1}^{m} c_{\ell k}\, u_k(\boldsymbol{x},t) + \sum_{k=1}^{m} \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{\ell kij} \int_{t_0}^{t} p_{\ell kij}(t,\theta)\, \frac{\partial^2 u_k(\boldsymbol{x},\theta)}{\partial x_i \partial x_j}\, d\theta + \\ + \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \beta_{\ell ki} \int_{t_0}^{t} q_{\ell ki}(t,\theta)\, \frac{\partial u_k(\boldsymbol{x},\theta)}{\partial x_i}\, d\theta + \sum_{k=1}^{m} \gamma_{\ell k} \int_{t_0}^{t} r_{\ell k}(t,\theta)\, u_k(\boldsymbol{x},\theta)\, d\theta + \\ + f_\ell(\boldsymbol{x},t), \quad \ell = 1,2,...,m \Big\}, \tag{1.3.120}$$

где t – время ($t_0 < t \leqslant T < +\infty$); $\boldsymbol{x} = \{x_i,\ i = 1,2,...,n\}^{\intercal} \in \mathscr{D} \subset \mathbb{R}^n$ – вектор пространственных координат; $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = \{u_\ell(\boldsymbol{x},t),\ \ell = 1,2,...,m\}^{\intercal}$ – вектор состояния; $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t) = \{f_\ell(\boldsymbol{x},t),\ \ell = 1,2,...,m\}^{\intercal}$ – вектор неоднородных членов; $a_{\ell kij} = a_{\ell kij}(\boldsymbol{x},t)$, $b_{\ell ki} = b_{\ell ki}(\boldsymbol{x},t)$, $c_{\ell k} = c_{\ell k}(\boldsymbol{x},t)$, $\alpha_{\ell kij} = \alpha_{\ell kij}(\boldsymbol{x},t)$, $\beta_{\ell ki} = \beta_{\ell ki}(\boldsymbol{x},t)$, $\gamma_{\ell k} = \gamma_{\ell k}(\boldsymbol{x},t)$, $p_{\ell kij}(t,\theta) \geqslant 0$, $q_{\ell ki}(t,\theta) \geqslant 0$, $r_{\ell k}(t,\theta) \geqslant 0$ – заданные непрерывные функции своих аргументов, $\mathscr{D}$ – ограниченная или неограниченная область, а функции $p_{\ell kij}$, $q_{\ell ki}$ и $r_{\ell k}$ – ядра соответствующих интегральных слагаемых.

Для получения решения задачи Коши к уравнению (1.3.119) необходимо добавить начальные условия $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t_0) = \boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{x})$, а в случае начально-краевой задачи – еще и краевые условия в какой-либо форме (пока задавать эту форму не требуется).

Основной проблемой при решении уравнений типа (1.3.119), (1.3.120) является наличие интегральных слагаемых, описывающих влияние предыдущих состояний системы на текущее (распределенное запаздывание). Поэтому все существующие приближенные методы включают алгоритмические составляющие, предназначенные для исключения таких слагаемых (приближенные явные или неявные численные схемы прямого вычисления интегралов, замена форм имеющихся ядер упрощенными и др.) нередко с предварительным переходом от ИДУвЧП к системе обыкновенных ИДУ для коэффициентов разложения компонент вектора состояния в ряды соответствующих функций, например, собственных.

Задача, решаемая далее, состоит в построении такой схемы сведения системы линейных ИДУвЧП к последовательности систем ДУвЧП, которая не предполагает использования информации о структуре ядер и

перехода к системам обыкновенных ИДУ.

Разобьем отрезок $[t_0, T]$ точками $t_s = t_0 + s \cdot h$ ($s = 0, 1, 2, ..., M$, $h = (T - t_0)/M$) так, чтобы с достаточной точностью на отрезке $\Delta_s = [t_{s-1}, t_s]$, $s \geqslant 1$ ядро $g(t, \theta)$, где g – любое из $\{p_{\ell kij}, q_{\ell ki}, r_{\ell k}\}$, можно было заменить на функцию (среднее значение ядра на отрезке Δ_s) $\widetilde{g}_s(t)$, которую (если, конечно, интеграл не берется) можно вычислить следующим образом:

1) если $t_s < t$, то

$$\widetilde{g}_s(t) = \frac{1}{h} \int_{t_{s-1}}^{t_s} g(t, \theta)\, d\theta \approx \frac{1}{h} \frac{\Delta\theta}{3} \sum_{\nu=0}^{2L_0} \bar{c}_\nu g(t, \theta_{s\nu}) = \\ = \frac{1}{6\, L_0} \sum_{\nu=0}^{2L_0} \bar{c}_\nu\, g(t, \theta_{s\nu}) \quad (1.3.121)$$

(с точностью порядка $O(\Delta\theta)^4$), где

$$\theta_{s\nu} = t_{s-1} + \nu \cdot \Delta\theta, \quad \nu = 0, 1, ..., 2\, L_0; \quad h = 2\, L_0 \cdot \Delta\theta, \quad L_0 \geqslant 1;$$

$$\bar{c}_\nu = \begin{cases} 1, & \text{если } \nu = 0 \text{ или } 2L_0; \\ 4, & \text{если } \nu \text{ нечетно}; \\ 2, & \text{иначе}; \end{cases}$$

2) если $t_s > t$, то

$$\widetilde{g}^*_s(t) = \frac{1}{t - t_{s-1}} \int_{t_{s-1}}^{t} g(t, \theta)\, d\theta \approx \frac{1}{t - t_{s-1}} \frac{\Delta\theta^*}{3} \sum_{\nu=0}^{2L_0^*} \bar{c}^*_\nu\, g(t, \theta^*_{s\nu}) = \\ = \frac{1}{6\, L_0^*} \sum_{\nu=0}^{2L_0^*} \bar{c}^*_\nu\, g(t, \theta^*_{s\nu}) \quad (1.3.122)$$

(с точностью порядка $O(\Delta\theta^*)^4$), где

$$\theta^*_{s\nu} = t_{s-1} + \nu \cdot \Delta\theta^*, \quad \nu = 0, 1, ..., 2\, L_0^*; \quad t - t_{s-1} = 2\, L_0^* \cdot \Delta\theta^*, \quad L_0^* \geqslant 1;$$

$$\bar{c}^*_\nu = \begin{cases} 1, & \text{если } \nu = 0 \text{ или } 2L_0^*; \\ 4, & \text{если } \nu \text{ нечетно}; \\ 2, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Таким образом, ядро $g(t, \theta)$ приближенно представляется кусочно-постоянной по второму аргументу матрицей-функцией.

Введем векторы

$$\boldsymbol{v}_s(\boldsymbol{x},t)=\int_{t_{s-1}}^{t}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\theta)\,d\theta,\qquad t\in\Delta_s.$$

В результате этого для $t>t_{s-1}$ ($s=1,2,...,M$) с учетом (1.3.121) система (1.3.119), (1.3.120) принимает следующую форму:

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}=\widetilde{\mathbb{L}}_t\big[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)\big],$$

$$\widetilde{\mathbb{L}}_t\big[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)\big]=\Big\{\sum_{k=1}^{m}\sum_{i,j=1}^{n}a_{\ell kij}\,\frac{\partial^2u_k(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}b_{\ell ki}\,\frac{\partial u_k(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_i}+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}c_{\ell k}\,u_k(\boldsymbol{x},t)+\sum_{\rho=1}^{s-1}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{\ell kij}\,\widetilde{p}_{\rho\ell kij}(t)\,\frac{\partial^2v_{\rho k}(\boldsymbol{x},t_\rho)}{\partial x_i\partial x_j}+$$

$$+\sum_{\rho=1}^{s-1}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\beta_{\ell ki}\,\widetilde{q}_{\rho\ell ki}(t)\,\frac{\partial v_{\rho k}(\boldsymbol{x},t_\rho)}{\partial x_i}+\sum_{\rho=1}^{s-1}\sum_{k=1}^{m}\gamma_{\ell k}\,\widetilde{r}_{\rho\ell k}(t)\,v_{\rho k}(\boldsymbol{x},t_\rho)+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{\ell kij}\,\widetilde{p}_{s\ell kij}(t)\,\frac{\partial^2v_{sk}(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\beta_{\ell ki}\,\widetilde{q}_{s\ell ki}(t)\,\frac{\partial v_{sk}(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_i}+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\gamma_{\ell k}\,\widetilde{r}_{s\ell k}(t)\,v_{sk}(\boldsymbol{x},t)+f_\ell(\boldsymbol{x},t),\quad \ell=1,2,...,m\Big\},$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}_s(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t),$$

причем

$$\boldsymbol{v}_s(\boldsymbol{x},t_{s-1})=0.$$

Если обозначить $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ через $\boldsymbol{u}_s(\boldsymbol{x},t)$ для $t\in\Delta_s$, то окончательный вид цепочки искомых уравнений будет следующим:

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}_s(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}=\widetilde{\mathbb{L}}_t\big[\boldsymbol{u}_s(\boldsymbol{x},t)\big],\qquad s=1,2,...,M,$$

$$\widetilde{\mathbb{L}}_t\big[\boldsymbol{u}_s(\boldsymbol{x},t)\big]=\Big\{\sum_{k=1}^{m}\sum_{i,j=1}^{n}a_{\ell kij}\,\frac{\partial^2u_{sk}(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}b_{\ell ki}\,\frac{\partial u_{sk}(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_i}+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}c_{\ell k}\,u_{sk}(\boldsymbol{x},t)+\sum_{\rho=1}^{s-1}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{\ell kij}\,\tilde{p}_{\rho\ell kij}(t)\,\frac{\partial^2v_{\rho k}(\boldsymbol{x},t_\rho)}{\partial x_i\partial x_j}+$$

$$+\sum_{\rho=1}^{s-1}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\beta_{\ell k i}\,\tilde q_{\rho\ell k i}(t)\,\frac{\partial v_{\rho k}(\boldsymbol{x},t_\rho)}{\partial x_i}+\sum_{\rho=1}^{s-1}\sum_{k=1}^{m}\gamma_{\ell k}\,\tilde r_{\rho\ell k}(t)\,v_{\rho k}(\boldsymbol{x},t_\rho)+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{\ell k\,ij}\,\tilde p_{s\ell k ij}(t)\,\frac{\partial^2 v_{sk}(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\beta_{\ell k i}\,\tilde q_{s\ell k i}(t)\,\frac{\partial v_{sk}(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_i}+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\gamma_{\ell k}\,\tilde r_{s\ell k}(t)\,v_{sk}(\boldsymbol{x},t)+f_\ell(\boldsymbol{x},t),\quad \ell=1,2,...,m\Big\},$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_s(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}=\boldsymbol{u}_s(\boldsymbol{x},t)$$

с начальными условиями

$$\boldsymbol{u}_s(\boldsymbol{x},t_{s-1})=\boldsymbol{u}_{s-1}(\boldsymbol{x},t_{s-1}),\qquad \boldsymbol{v}_s(\boldsymbol{x},t_{s-1})=0.$$

Если, кроме начальных, заданы и краевые условия, то они должны быть переформулированы в терминах функций $\boldsymbol{u}_{\kappa,t}$ и их производных.

Пример 1.3.8. Изложенная выше процедура была применена для расчета переходных режимов динамической системы типа (1.3.119), (1.3.120), представляющей одну из моделей вязкоупругого поведения. Ниже приводятся основные результаты этих расчетов.

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}+2\,\alpha\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+\omega^2 u(x,t)=\epsilon\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-$$

$$-\gamma\int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}\frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2}\,d\tau,\quad 0<x<L,\quad 0<t\leqslant \bar t, \tag{1.3.123}$$

$$u(x,0)=\bar u_0(x),\quad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\bar u_1(x),\quad u(0,t)=u(L,t)=0. \tag{1.3.124}$$

Здесь α, ω, ϵ, γ, λ, L – положительные постоянные.

Сначала для решения задачи (1.3.123), (1.3.124) с учетом ее специфики применим метод Фурье, а именно, будем искать функцию $u(x,t)$ в виде произведения $X(x)\,T(t)$. Подставляя это выражение в уравнение (1.3.123) и разделяя переменные, получим:

$$\frac{T''(t)+2\,\alpha\,T'(t)+\omega^2 T(t)}{\epsilon\,T(t)-\gamma\int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}T(\tau)\,d\tau}=\frac{X''(x)}{X(x)}\equiv-\mu^2,$$

где μ^2 – собственное число. Используя краевые условия и уравнение

$$X''(x)+\mu^2\,X(x)=0,$$

находим счетное множество таких чисел $\mu_k^2 = \pi^2 k^2 / L^2$ и соответствующих собственных функций $X_k(x) = \sin \mu_k x$ $(k = 1, 2, ...)$. Отсюда $u(x,t)$ можно представить следующим образом:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} X_k(x)\, T_k(x),$$

где $T_k(t)$ – решения уравнений

$$T_k''(t) + 2\,\alpha\, T_k'(t) + \omega^2\, T_k(t) = -\mu_k^2 \Big[\epsilon\, T_k(t) - \gamma \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} T_k(\tau)\, d\tau\Big] \tag{1.3.125}$$

с начальными условиями

$$T_k(0) = \frac{2}{L}\int_0^L \bar{u}_0(x)\, \sin \mu_k x\, dx \equiv T_{k0},\ T_k'(0) = \frac{2}{L}\int_0^L \bar{u}_1(x)\, \sin \mu_k x\, dx \equiv T_{k0}'.$$

Несложно увидеть, что вследствие (одинаковых) форм ядер уравнения (1.3.125) с помощью введения вспомогательных переменных

$$\Theta_k(t) = \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}\, T_k(\tau)\, d\tau$$

могут быть приведены каждое к двум ОДУ вида

$$T_k''(t) + 2\,\alpha\, T_k'(t) + \omega^2 T_k(t) = -\mu_k^2 \Big[\epsilon\, T_k(t) - \gamma\, \Theta_k(t)\Big],$$
$$\Theta_k'(t) = T_k(t) - \lambda\, \Theta_k(t)$$

с начальными условиями

$$T_k(0) = T_{k0}, \qquad T_k'(0) = T_{k0}', \qquad \Theta_k(0) = 0.$$

Теперь для решения задачи (1.3.123), (1.3.124) применим алгоритм, представленный выше в данном пункте. Для рассматриваемой задачи его расчетные формулы будут выглядеть так:

$$\frac{\partial w_{s1}(x,t)}{\partial t} = w_{s2}(x,t),$$
$$\frac{\partial w_{s2}(x,t)}{\partial t} = -\big[2\,\alpha\, w_{s2}(x,t) + \omega^2 w_{s1}(x,t)\big] + \epsilon\, \frac{\partial^2 w_{s1}(x,t)}{\partial x^2} -$$

$$-\gamma\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big[\sum_{\rho=1}^{s-1} g_\rho(t)\,w_{s3}(x,t_\rho)+g_s^*(t)\,w_{s3}(x,t)\Big],$$

$$\frac{\partial w_{s3}(x,t)}{\partial t}=w_{s1}(x,t),\qquad s=\overline{1,M},$$

с начальными условиями

$$w_{s1}(x,t_{s-1})=w_{s-1,1}(x,t_{s-1}),$$

$$w_{s2}(x,t_{s-1})=w_{s-1,2}(x,t_{s-1}),\qquad w_{s3}(x,t_{s-1})=0,$$

где

$$w_{s1}(x,t)=u_s(x,t),\quad w_{s2}(x,t)=\frac{\partial u_s(x,t)}{\partial t},\quad w_{s3}(x,t)=\int\limits_{t_{s-1}}^{t} w_{s1}(x,\theta)\,d\theta,$$

$$g_\rho(t)=\frac{1}{h}\int\limits_{t_{\rho-1}}^{t_\rho} e^{-\lambda(t-\theta)}\,d\theta=\frac{1}{\lambda h}\left[e^{-\lambda(t-t_\rho)}-e^{-\lambda(t-t_{\rho-1})}\right]=$$

$$=\frac{1}{\lambda h}\,e^{-\lambda(t-t_{\rho-1})}\left(e^{\lambda h}-1\right),$$

$$g_s^*(t)=\frac{1}{t-t_{s-1}}\int\limits_{t_{s-1}}^{t} e^{-\lambda(t-\theta)}\,d\theta=\frac{1}{\lambda\,(t-t_{s-1})}\left[1-e^{-\lambda(t-t_{s-1})}\right].$$

Исходные однородные краевые условия переносятся и на функций $w_1(x,t)$, $w_2(x,t)$ и $w_3(x,t)$.

Расчеты по обоим методам проводились с помощью программ на входном языке пакета `Mathematica` [821] при следующих общих значениях параметров задачи:

$$\alpha=0.125,\quad \omega=2.0,\quad \epsilon=0.25,\quad \gamma=0.05,$$

$$\lambda=3.0,\quad L=10.0,\quad T=12.0,\quad h=0.05,$$

$$\bar u_0(x)=\frac{1}{20}\left(\sin\frac{\pi x}{L}-\sin\frac{2\pi x}{L}\right),\quad \bar u_1(x)=0.$$

Отметим, что вследствие выбранного начального условия для функции $u(x,t)$ решение, полученное методом Фурье, представлялось только первыми двумя собственными функциями.

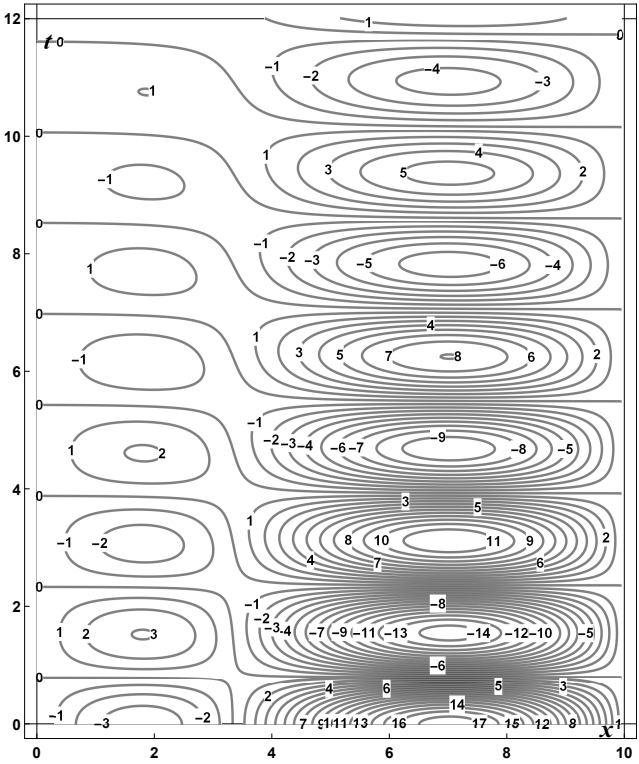


Рис. 1.3.9

Результаты расчетов представлены на рис. 1.3.9 и 1.3.10, где отображен общий переходный процесс в рассматриваемой системе в виде линий уровня аппроксимаций $\widetilde{u}(x,t)$ функции $u(x,t)$, полученных предлагаемым методом и методом Фурье, причем целые числа k в разрывах указанных линий соответствуют значениям функции, приближенно равным $h_c\,k$, где $h_c = (u_{max} - u_{min})/(n_c - 1)$, а n_c – число изолиний. Ввиду специфики задачи было удобно считать, что: 1) $u_{min} = \underline{u} < \min_{x,t} \widetilde{u}(x,t) < 0$, $u_{max} = \overline{u} > \max_{x,t} \widetilde{u}(x,t) > 0$; 2) $k = 0$ соответствует значению $\widetilde{u}(x,t) = 0$. При этом значения $\underline{u} = -0.075$, $\overline{u} = 0.090$ и $n_c = 34$ были выбраны так, чтобы значения уровней имели минимальное количество десятичных знаков.

Сравнение полученных результатов вычислений по обоим методам позволило сделать вывод о корректности предложенного алгоритма, ко-

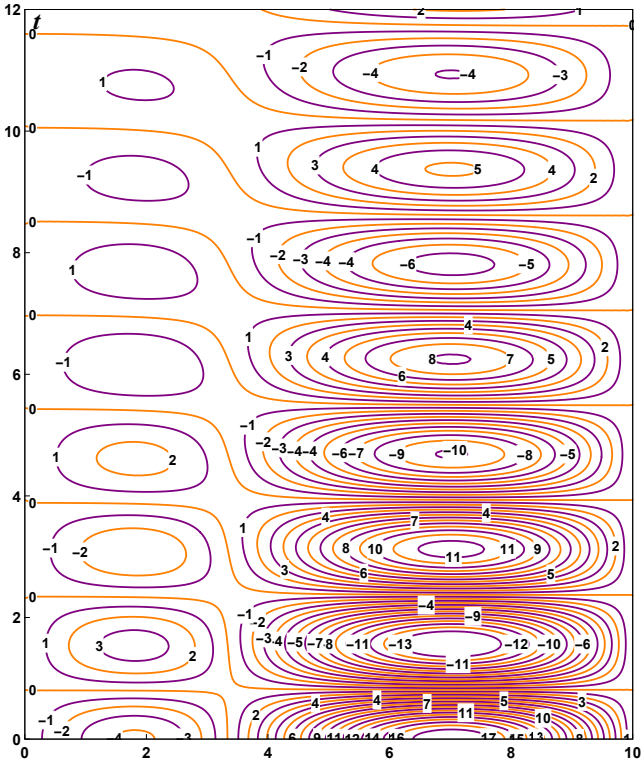


Рис. 1.3.10

торый может быть распространен на некоторые нелинейные и нестационарные задачи, для решения которых метод Фурье неприменим. ▶

В практических исследованиях полученные уравнения можно решать наиболее выгодным и эффективным способом, зависящим как от структуры уравнений, так и от формы области и начально-краевых условий.

1.4. УРАВНЕНИЯ СО СМЕШАННЫМИ ФОРМАМИ ОТКЛОНЯЮЩИХСЯ АРГУМЕНТОВ

1.4.1. Приближенные методы решения систем ОДУ с различными формами запаздывания

Важным направлением исследования сложных явлений является использование гибридных моделей [137], к которым можно отнести системы, описываемые линейными и нелинейными ОДУ и ДУвЧП с запаздываниями в нескольких различных формах и системами таких уравнений, включая уравнения нейтрального типа, а именно: 1) с дискретными (сосредоточенными) постоянными и переменными запаздываниями; 2) с непрерывными (распределенными) ограниченными (конечными) и неограниченными временны́ми запаздываниями и пространственными отклонениями, т.е. в моделях таких систем присутствуют структурные части ОДУсЗ, ДУсЗ, ОИДУ и ИДУвЧП вида:

$$\boldsymbol{x}(t-\tau), \quad \boldsymbol{x}\big(t-\tau(t)\big), \quad \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau), \quad \boldsymbol{u}\big(\boldsymbol{x},t-\tau(t)\big),$$

$$\int\limits_{t-\tau}^{t} \boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{x}(\theta),\theta\big)\,d\theta, \quad \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} \boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{x}(\theta),\theta\big)\,d\theta, \quad \int\limits_{t_0}^{t} \boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{x}(\theta),\theta\big)\,d\theta,$$

$$\int\limits_{t-\tau}^{t} \boldsymbol{g}\big[\boldsymbol{u}\big(\boldsymbol{x}(\theta),\theta\big),\theta\big]\,d\theta, \quad \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} \boldsymbol{g}\big[\boldsymbol{u}\big(\boldsymbol{x}(\theta),\theta\big),\theta\big]\,d\theta, \quad \int\limits_{t_0}^{t} \boldsymbol{g}\big[\boldsymbol{u}\big(\boldsymbol{x}(\theta),\theta\big),\theta\big]\,d\theta,$$

а также соответствующие члены с производными по времени и пространству и интегралами по пространству и др. Кроме того, имеются уравнения и с переключениями [678].

Одним из первых вопросов при анализе таких уравнений, как при исследовании и иных моделей, является оценка устойчивости решений этих уравнений. Рассмотрим, как и для других форм ДУсОА, несложный пример получения такой оценки [672].

Рассмотрим следующее ОДУ с различными формами запаздывания:

$$\dot{x}(t) = \alpha\, x(t) + \beta\, x(t-\tau) + \gamma \int_{-\tau}^{0} x(t+s)\,ds, \quad t>0, \tag{1.4.1}$$

$$x(t) = g(t), \qquad t \leqslant 0,$$

где α, β, γ, $\tau > 0$ – постоянные. Представляя решение $x(t)$ в виде $e^{\lambda t}$, получим характеристическое уравнение:

$$\lambda = \alpha + \beta\, e^{-\tau\lambda} + \gamma \int_{-\tau}^{0} e^{\lambda s}\, ds. \tag{1.4.2}$$

Асимптотическая устойчивость нулевого решения уравнения (1.4.1) эквивалентна условию, что все корни алгебраического уравнения (1.4.2) имеют отрицательные вещественные части.

Представим λ в виде $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2\, \boldsymbol{i}$. Тогда из (1.4.2) следуют уравнения:

$$\lambda_1 = \alpha + \beta\, e^{-\tau\lambda_1}\, \cos\tau\lambda_2 + \gamma \int_{-\tau}^{0} e^{\lambda_1 s}\, \cos\tau\lambda_2\, ds, \tag{1.4.3}$$

$$\lambda_2 = -\beta\, e^{-\tau\lambda_1}\, \sin\tau\lambda_2 + \gamma \int_{-\tau}^{0} e^{\lambda_1 s}\, \sin\tau\lambda_2\, ds. \tag{1.4.4}$$

Далее сконцентрируемся только на чисто мнимых корнях ($\lambda_1 = 0$).

Пусть $\lambda_2 = 0$. Находим, что у характеристического уравнения будет корень $\lambda = 0$, если параметры α, β, γ будут удовлетворять равенству:

$$\alpha + \beta + \gamma\,\tau = 0. \tag{1.4.5}$$

Для заданного β это уравнение задает линию на (α, γ)-плоскости. Обозначим эту линию как $C_*(\beta)$.

Выбирая $\theta = \tau\,\lambda_2$, находим, что соответствующие параметрические множества $\big(\alpha(\theta), \beta, \gamma(\theta)\big)$ с $\theta \neq \pm 2\,\pi\,k$, $k = 1, 2, \ldots$, приводят к чисто мнимым корням λ:

$$\alpha(\theta) = \beta + \frac{\theta\, \sin\theta}{\tau\,(1 - \cos\theta)}, \qquad \gamma(\theta) = -\frac{\theta\,(\theta + \beta\,\tau\, \sin\theta)}{\tau^2\,(1 - \cos\theta)}. \tag{1.4.6}$$

Вследствие того, что эти функции имеют разрывы при $\theta = \pm 2\,\pi\,k$, определим интервалы:

$$J_k = \big(2\,\pi\,k, 2\,\pi\,(k+1)\big), \tag{1.4.7}$$

и обозначим через $C_k(\beta)$ кривую на (α, γ)-плоскости для фиксированного β, параметризованных с помощью θ для $\theta \in J_k$. Далее считается, что $C_0(\beta)$ содержит предельную точку для $\theta \to 0$:

$$\alpha(0) = \beta + \frac{2}{\tau}, \qquad \gamma(0) = -\frac{2\,(1 + \beta\,\tau)}{\tau^2}. \tag{1.4.8}$$

Функции в (1.4.6) являются четными функциями относительно θ, что отражает тот факт, что корни образуют комплексно сопряженные пары. Следовательно, далее можно ограничиться анализом при $k \geqslant 0$, т.е. $\lambda_2 \geqslant 0$. Можно утверждать, что кривые $C_k(\beta)$ обладают следующими свойствами [672]:

1°. Кривые $C_k(\beta)$ не пересекаются.

2°. Кривая $C_k(\beta)$ пересекает прямую $\alpha = \beta$ в единственной точке. γ-координаты γ_k точки пересечения удовлетворяют неравенству $\gamma_{k+1} < \gamma_k$.

3°. Верны следующие равенства:

$$\lim_{\theta \to 2\pi k+0} \alpha(\theta) = +\infty, \qquad \lim_{\theta \to 2\pi k-0} \alpha(\theta) = -\infty,$$

$$\lim_{\theta \to 2\pi k \pm 0} \gamma(\theta) = -\infty, \quad k = 1, 2, \ldots$$

4°. Кривая $C_0(\beta)$ пересекает $C_*(\beta)$ в точке $\big(\alpha(0), \gamma(0)\big)$. Если $\beta\,\tau$, то она пересекает в другой точке $\big(\alpha(\theta_0), \gamma(\theta_0)\big)$, где θ_0 определяется из равенства

$$\beta\,\tau = \frac{\theta_0\,(\theta_0 - \sin\theta_0)}{2 - 2\,\cos\theta_0 - \theta_0\,\sin\theta_0}. \tag{1.4.9}$$

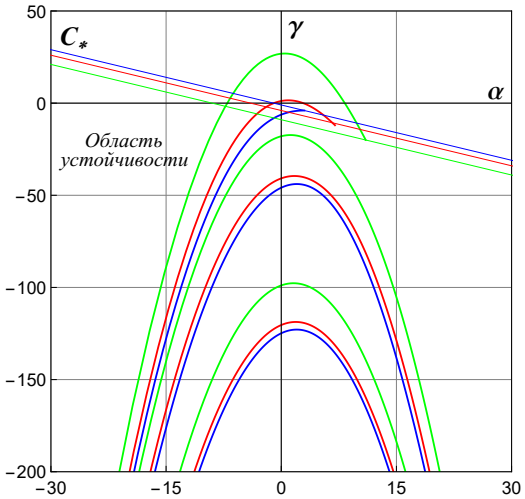


Рис. 1.4.1

На рис. 1.4.1 для $\tau = 1$ изображены кривые $C_k(\beta)$ при $k = 0$, 1, 2 и $\beta = 1$ (синие линии), 5 (красные) и 9 (зеленые), а также прямые $C_*(\beta)$.

Существует ряд форм ОДУ с различными формами запаздывания, для которых существуют представления решений через резольвенты [437, 438,1139]. Например, в [1020] для уравнения в банаховом пространстве $\mathscr{B}$:

$$\boldsymbol{x}'(t) = \mathcal{A}\,x(t) + \mathcal{B}\,\boldsymbol{x}(t-\tau) + \int_{-\tau}^{0} K(s)\,\mathcal{H}\,\boldsymbol{x}(t+s)\,ds + \boldsymbol{f}(t), \qquad (1.4.10)$$

где $\tau > 0$; $\mathcal{A}$ – плотно определенный замкнутый линейный оператор, который генерирует аналитическую полугруппу $\mathbb{T}(t)$ в $\mathscr{B}$ и имеет определенный везде ограниченный обратный оператор; $\mathcal{B}$ и $\mathcal{H}$ – замкнутые линейные, вообще говоря, неограниченные операторы с областями определения $\mathscr{D}(\mathcal{B})$ и $\mathscr{D}(\mathcal{H})$, содержащими область определения $\mathscr{D}(\mathcal{A})$ оператора $\mathcal{A}$; $K(t)$ – равномерно непрерывная по Гёльдеру действительная функция на $[-\tau, 0]$: $K(t) \in \mathscr{L}_1(-\tau, 0)$ или $K(t) \in \mathscr{L}_2(-\tau, 0)$. Тогда фундаментальный оператор $slWW(t)$ для приведенного уравнения (1.4.10) является ограниченным оператором и определяется соотношениями:

$$\mathbb{W}(t) = \begin{cases} \mathbb{T}(t) + \displaystyle\int_0^t \mathbb{T}(t-s)\Big\{\mathcal{B}\;\mathbb{W}(s-\tau) + \int_{-\tau}^{0} K(\theta)\,\mathcal{H}\;\mathbb{W}(s+\theta)\,d\theta\Big\}\,ds, \\ \qquad t \geqslant 0, \\ 0, \qquad\quad t < 0, \end{cases}$$

или

$$\mathbb{W}(t) = \begin{cases} \mathbb{T}(t) + \displaystyle\int_0^t \mathbb{T}(t-s)\Big\{\int_0^s K(\theta-s)\,\mathcal{H}\;\mathbb{W}(\theta)\,d\theta\Big\}\,ds, \quad t \in [0,\tau], \\ \mathbb{T}(t) + \displaystyle\int_\tau^t \mathbb{T}(t-s)\,\mathcal{B}\;\mathbb{W}(s-\tau)\,ds + \\ \qquad + \displaystyle\int_0^t \mathbb{T}(t-s)\int_{s-\tau}^{s} K(\theta-s)\,\mathcal{H}\;\mathbb{W}(\theta)\,d\theta\Big\}\,ds, \quad t > \tau. \end{cases}$$

Верны теоремы [1020].

Теорема 1.4.1. Фундаментальное решение $\mathbb{W}(t)$ уравнения (1.4.10) существует и единственно. Кроме того, $\mathbb{W}(t)$ дифференцируемо при $t \neq k\,\tau$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ и удовлетворяет следующему уравнению:

$$\mathbb{W}'(t) = \mathcal{A}\;\mathbb{W}(t) + \mathcal{B}\;\mathbb{W}(t-\tau) + \int_{-\tau}^{0} K(s)\,\mathcal{H}\;\mathbb{W}(t+s)\,ds + \boldsymbol{f}(t).$$

Функции $\mathbb{W}'(t)$ и $\mathcal{A}\;\mathbb{W}(t)$ строго непрерывны на полуинтервалах $\big(k\,\tau, (k+1)\,\tau\big]$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Теорема 1.4.2. Если $\varphi(t)$ – непрерывная по Гёльдеру функция на $[-\tau, 0]$ со значениями в пространстве $\mathscr{D}(A)$ и нормой графика оператора A, f – непрерывная по Гёльдеру функция на $[0, T]$ со значениями в пространстве $\mathscr{B}$, то

$$x(t) = \mathbb{W}(t)\,\varphi(0) + \int_{-\tau}^{0} \mathbb{U}_t(s)\,\varphi(s)\,ds + \int_{0}^{t} \mathbb{W}(t-s)\,f(s)\,ds$$

– единственное решение уравнения (1.4.10) на $[0, T]$, удовлетворяющее начальному условию $x(s) = \varphi(s)$ при $s \in [-\tau, 0]$, а

$$\mathbb{U}_t(s) = \mathbb{W}(t-s-\tau)\,\mathbb{B} + \int_{-\tau}^{s} \mathbb{W}(t-s+\theta)\,K(\theta)\,\mathbb{H}\,d\theta.$$

Для приближенного решения рассматриваемых в этом подразделе уравнений применяются : полиномы Бернштейна [396, 509], Лагранжа [864], Лежандра [504], Чебышёва [346], ультрасферические [544]; функции Бесселя [881]; методы Рунге–Кутта (обычные [1120] и Пузе [1130]), θ-методы [750], линейные многошаговые типа Пузе [670], дифференциальных преобразований [402], Галеркина [1122], коллокации (простой [1139], дискретной [929]), спектральные [348], Тейлора [1073], анализа гомотопии [403, 936], декомпозиции Адомяна [347]; разложения в ряды по экспонентам [387], по системам кусочно постоянных функций (block-pulse functions) [371], по Sinc-функция [542]; сочетания общих линейных методов решения ОДУ (многошаговые Рунге–Кутты) с составными квадратурными формулами [1129], линейных многошаговых схем для ОДУ с квадратурными формулами соответствующего порядка точности и дифференцированием назад [1128]; сплайны [389], сплайн-коллокации (полиномиальные [660], высокого порядка [868]), сплайн-спектральные методы [543] и др.

Также как и для ОИДУ Фредгольма с бесконечными пределами, решение ИДУвЧП Вольтерра по времени и Фредгольма по неограниченной пространственной области вызывает большие сложности, а поэтому нередко эту область заменяют на конечную с дополнением соответствующих краевых условий [548].

1.4.2. Системы ОДУ с дискретными постоянными и непрерывными конечными распределенными временны́ми запаздываниями

Рассмотрим систему ДУ (ИДУ) следующего вида [215]:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(t-\tau), \mathbb{Y}[\boldsymbol{x}; t, \tau], t\big), \quad t_1 = t_0 + \tau < t \leqslant T < \infty. \quad (1.4.11)$$

Здесь основные обозначения те же, что и выше, а

$$\mathbb{Y}[\boldsymbol{x}; t, \tau] = \int\limits_{t-\tau}^{t} \boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{x}(\theta), \theta\big)\, d\theta,$$

где $\boldsymbol{g}(\cdot, \cdot)$ – заданная, непрерывная по всем аргументам функция. Как и выше, предположим, что для $t \in (t_0, t_1]$ вектор $\boldsymbol{x}(t)$ удовлетворяет следующей системе ОДУ:

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{f}_0\big(\boldsymbol{x}(t), t\big), \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0. \quad (1.4.12)$$

Ясно, что главной причиной, препятствующей применению процедуры расширения пространства состояний для уравнений (1.4.11), является присутствие векторного функционала $\mathbb{Y}[\boldsymbol{x}; t, \tau]$ в правых частях этих уравнений. Но существует возможность обойти эту проблему. Действительно, можно определить новые векторы $\boldsymbol{y}_k(s)$ с помощью следующего соотношения:

$$\boldsymbol{y}_k(s) = \int\limits_{t_k}^{t_k+s} \boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{x}_k(\theta - t_k), \theta\big)\, d\theta, \qquad s \in [0, \tau].$$

Это приводит к тому, что для $t \in \Delta_k$, $s \in [0, \tau]$ и $\theta_k = \theta - t_k$ получим

$$\mathbb{Y}[\boldsymbol{x}; t, \tau] = \int\limits_{t-\tau}^{t} \boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{x}(\theta), \theta\big)\, d\theta =$$

$$= \int\limits_{t-\tau}^{t_k} \boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{x}_{k-1}(\theta_{k-1}), \theta\big)\, d\theta + \int\limits_{t_k}^{t_k+s} \boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{x}_k(\theta_k), \theta\big)\, d\theta =$$

$$= \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{x}_{k-1}(\theta_{k-1}), \theta\big)\, d\theta - \int\limits_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+s} \boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{x}_{k-1}(\theta_{k-1}), \theta\big)\, d\theta + \boldsymbol{y}_k(s) =$$

$$= \boldsymbol{y}_{k-1}(\tau) - \boldsymbol{y}_{k-1}(s) + \boldsymbol{y}_k(s),$$

т.е.

$$\mathbb{Y}[\boldsymbol{x};t,\tau]=\boldsymbol{y}_k(s)+\boldsymbol{y}_{k-1}(\tau)-\boldsymbol{y}_{k-1}(s). \tag{1.4.13}$$

Теперь в рамках схемы можно начинать обход последовательности отрезков Δ_i.

0°. Сегмент Δ_0 будет первым. Векторы $\boldsymbol{x}_0(s)$ и $\boldsymbol{y}_0(s)$, определенные на этом сегменте, удовлетворяют системе:

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{x}}_0(s)=\boldsymbol{f}_0\big(\boldsymbol{x}_0(s),s_0\big), && \boldsymbol{x}_0(0)=\boldsymbol{x}^0,\\
&\dot{\boldsymbol{y}}_0(s)=\boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{x}_0(s),s_0\big), && \boldsymbol{y}_0(0)=0.
\end{aligned}$$

1°. Полуинтервалы Δ_0 и Δ_1 – следующие:

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{x}}_0(s)=\boldsymbol{f}_0\big(\boldsymbol{x}_0(s),s_0\big), && \boldsymbol{x}_0(0)=\boldsymbol{x}^0,\\
&\dot{\boldsymbol{y}}_0(s)=\boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{x}_0(s),s_0\big), && \boldsymbol{y}_0(0)=0.\\
&\dot{\boldsymbol{x}}_1(s)=\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}_1(s),\boldsymbol{x}_0(s),\boldsymbol{y}_1(s)+\boldsymbol{y}_0(\tau)-\\
&\qquad-\boldsymbol{y}_0(s),s_1\big), && \boldsymbol{x}_1(0)=\boldsymbol{x}_0(\tau),\\
&\dot{\boldsymbol{y}}_1(s)=\boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{x}_1(s),s_1\big), && \boldsymbol{y}_1(0)=0.\\
&\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots
\end{aligned}$$

N°. На этом этапе рассматриваются отрезки Δ_0, Δ_1, ..., Δ_N и система ОДУ для вектора $\boldsymbol{z}_N(s)=\operatorname{col}\big(\boldsymbol{z}_{N-1}(s),\boldsymbol{x}_N(s),\boldsymbol{y}_N(s)\big)$:

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{x}}_0(s)=\boldsymbol{f}_0\big(\boldsymbol{x}_0(s),s_0\big), && \boldsymbol{x}_0(0)=\boldsymbol{x}^0,\\
&\dot{\boldsymbol{y}}_0(s)=\boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{x}_0(s),s_0\big), && \boldsymbol{y}_0(0)=0.\\
&\dot{\boldsymbol{x}}_1(s)=\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}_1(s),\boldsymbol{x}_0(s),\boldsymbol{y}_1(s)+\boldsymbol{y}_0(\tau)-\\
&\qquad-\boldsymbol{y}_0(s),s_1\big), && \boldsymbol{x}_1(0)=\boldsymbol{x}_0(\tau),\\
&\dot{\boldsymbol{y}}_1(s)=\boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{x}_1(s),s_1\big), && \boldsymbol{y}_1(0)=0,\\
&\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\\
&\dot{\boldsymbol{x}}_N(s)=\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}_N(s),\boldsymbol{x}_{N-1}(s),\boldsymbol{y}_N(s)+\\
&\qquad+\boldsymbol{y}_{N-1}(\tau)-\boldsymbol{y}_{N-1}(s),s_N\big), && \boldsymbol{x}_N(0)=\boldsymbol{x}_{N-1}(\tau),\\
&\dot{\boldsymbol{y}}_N(s)=\boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{x}_N(s),s_N\big), && \boldsymbol{y}_N(0)=0.
\end{aligned}$$

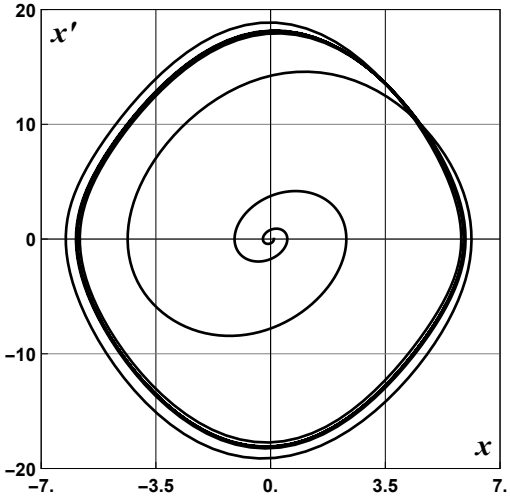


Рис. 1.4.2

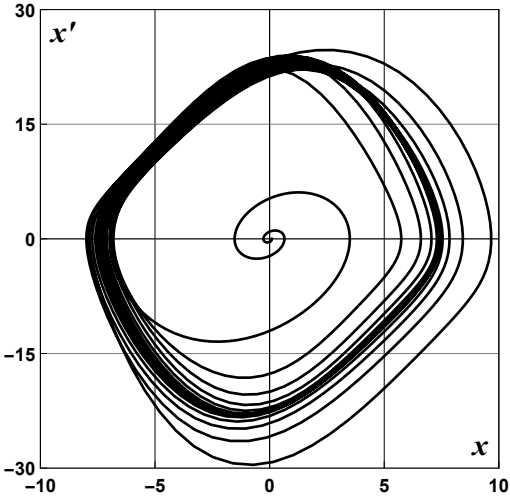


Рис. 1.4.3

Пример 1.4.1. Рассмотрим следующую форму уравнения Ван дер По-

ля:

$$x''(t) + 2\,\alpha\left[x^2(t-\tau) - 1\right]x'(t) + \omega^2\,x(t) + \gamma\int\limits_{t-\tau}^{t} x(\theta)\,d\theta = 0, \quad t > 0;$$

$$x'(t) = 0, \qquad x''(t) = 0, \qquad t \in (-\tau, 0];$$

$$x(-\tau) = 0.02, \qquad x'(-\tau) = 0.05,$$

где α, ω, γ – постоянные величины. Некоторые из результатов вычислений отображены на рис. 1.4.2 ($\tau = 1.0$), 1.4.3 ($\tau = 1.2$) для $\alpha = 0.05$; $\omega = 2.0$; $\gamma = 5.0$. ▶

1.4.3. ИДУ Фредгольма (по пространству) в частных производных с временны́м постоянным запаздыванием

Рассмотрим семейство ДУвЧП со смешанной формой отклонений аргументов, а именно, содержащими фредгольмову часть по пространственному аргументу и дифференциально-разностную по временно́му. В этом случае систему таких уравнений в более или менее общем виде можно представить так [251]:

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} = \boldsymbol{F}\Big(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}'_x(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}''_{xx}(\boldsymbol{x},t), ..., \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau),$$
$$\boldsymbol{u}'_x(\boldsymbol{x},t-\tau), \boldsymbol{u}''_{xx}(\boldsymbol{x},t-\tau), ..., \int_{\mathscr{D}}[\cdot]\,d\boldsymbol{x}\Big),$$

где τ – постоянное запаздывание, а $\mathscr{D}$ – ограниченная или неограниченная область.

Основные вопросы о существовании интегралов линейных и нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в случае любого числа переменных и уравнений и даже в случае бесконечного числа их были исследованы в работах Л. Помейа (1923–1927 гг.) [45], результаты которого позволяют получить решения ИДУ как в ограниченных, так и неограниченных областях.

В настоящее время более интенсивными являются исследования по ОИДУ типа Фредгольма с запаздыванием [672, 958, 1015, 1121]. ИДУвЧП подобного типа рассматриваются реже. Как правило, исследователи обращают внимание на изучение сочетаний фредгольмовой части по пространству с вольтерровой по времени. Заметим, что сходная ситуация наблюдается и в публикациях по ОИДУ: в них основной упор также делается на уравнения с фредгольмовой и вольтерровой частями, а переменной интегрирования в интегралах обоих типов является время.

Семейство уравнений рассматриваемого типа включает: уравнения моделей *реакции–диффузии* роста зрелых популяций единственного биологического вида с учетом возрастной структуры этого вида [1146]:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \alpha\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \beta\,u(x,t) + \gamma\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(x-y)\,h\big(u(y,t-\tau)\big)\,dy;$$

системы нелокальных уравнений реакции–диффузии [1077], моделирующие распространение бактериальных инфекций; нелокальные уравнения реакции–диффузии с запаздыванием [338,883], описывающие распространение бегущих волн; нелинейные уравнения механической обработки (точение, фрезерование) [69]; уравнения колебательных процессов в нейронах мозга [680]; уравнения биологических генных сетей [1049]; уравнения распространения тепла в стержне с обратной связью [398] и др.

Тесно связанными с указанным семейством являются:

а) ИДУвЧП типа Фредгольма по пространству без запаздывания по времени, примерами которых будут: *уравнение Шлесингера* (L.Schlesinger) [704], одно из первых уравнений такого типа, рассмотренных в начале XX в.:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \int_a^b f(x,y,s)\,u(x,s)\,ds;$$

уравнение вибрации струны [487]:

$$u(x,t) = -\frac{1}{T}\int_0^L g(x,x')\,\mu(x')\,\frac{\partial^2 u(x',t)}{\partial t^2}\,dx',$$

где $u(x,t)$ – смещения точек струны, L – длина струны; нелинейное *уравнение Кирхгофа* (G. R. Kirchhoff) поперечных колебаний струны [704]:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \Big[\lambda + \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \Big(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big)^2 dx\Big]\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2};$$

нелинейное ИДУ *поперечных колебаний балки* [413]:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \alpha\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} = \\ = \lambda\Big[\int_0^1 \Big(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big)^2 dx\Big]\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \beta\,P\big(u(x,t),t\big);$$

уравнение Колмогорова–Феллера (КФ-уравнение) [47, 82, 98, 236, 288, 291] для плотности вероятности $p(\boldsymbol{x}, t)$ вектора состояния с возмущениями в форме винеровских и пуассоновских процессов:

$$\frac{\partial p(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} = \mathbb{L}_{xt}^{\dagger}\big[p(\boldsymbol{x}, t)\big], \qquad p(\boldsymbol{x}, t_0) = p^{\,0}(\boldsymbol{x}),$$

где

$$\mathbb{L}_{xt}^{\dagger}\big[p(\boldsymbol{x}, t \,|\, \boldsymbol{y}, \tau)\big] = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\big[a_i(\boldsymbol{x}, t)\, p(\boldsymbol{x}, t)\big]}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2\big[b_{ij}(\boldsymbol{x}, t)\, p(\boldsymbol{x}, t)\big]}{\partial x_i\, \partial x_j} - \\ - c(\boldsymbol{x}, t)\, p(\boldsymbol{x}, t) + \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}, t)\, p(\boldsymbol{z}, t)\, d\boldsymbol{z};$$

нелинейные уравнения Больцмана переноса в различных средах и их вариации [94]; уравнения переноса нейтронов в ядерных реакторах [42], распространения болезней [837], управляемых систем, описываемых одномерным ИДУвЧП параболического типа [991], физиологически структурированных популяционноых моделей с распределенным процессом пополнения [454], гибридной системы, описывающей поведение ядерного реактора [773]; ИДУвЧП типа Барбашина [353], применяемые в физике, теории управления, в моделях мутаций, распространении радиации в атмосфере планет и звезд, в теории случайных процессов как частный случай КФ-уравнений для чисто разрывных марковских процессов в астрофизике; уравнения, моделирующие поведение нейронных сетей [698, 700], эволюционной эпидемиологической модели распространения гриппа A [808], кинетической клеточной модели взаимодействия опухолевой и иммунной систем [686]; нелинейные интегро-параболические уравнения типа Фоккера–Планка, которые возникают при статистическом описании динамики поведения популяции из бесконечного количества нелинейно связанных случайных резонаторов, подверженных взаимодействию типа "основного поля", обобщают и уточняют известную модель Курамото, описывающую эффект самосинхронизации в областях от биологии и медицины до физики и нейросетей [121]; системы стандартных уравнений хемостата [853] и т.д.;

б) ИДУвЧП типа Фредгольма по пространству в сочетании с конечным распределенным запаздыванием по времени, которое в некоторых случаях можно считать малым. Среди них отметим: бистабильное уравнение реакции–диффузии с (малым) нелокальным запаздыванием [1079]; нелинейное ИДУвЧП, представляющее популяционную динамику с эф-

фектами запаздывания [942]; уравнения Максвелла, описывающие проникновение электромагнитного поля в вещество [704], тепловых потоков [704] и т.п.

В обзоре [614] можно найти дополнительные модели связанные с ИДУвЧП, опубликованные до 2003 г.

Проблемы качественного анализа ИДУвЧП рассматриваемого типа включают исследование устойчивости, наличия стационарных состояний, асимптотического поведения, полугрупповых свойств [399] и др.

Что касается точных решений ИДУвЧП в различных формах, то как правило, таковые имеются только для специально построенных уравнений.

Приближенное же решение таких уравнений затруднено, а методы сочетают схемы численного интегрирования эволюционных ДУвЧП с процедурами численного интегрирования для фредгольмовских интегралов по пространству и прогнозные алгоритмы для вольтерровских [906]. Наличие запаздываний в уравнениях приводит к добавлению схем их учета, аналогичных используемым при приближенном решении обыкновенных дифференциально-разностных уравнений [384, 385, 407].

Например, в работе [388] для аппроксимации несобственного интеграла по пространству используется замена переменных в сочетании с применением функций Бесселя. Получившееся ДУвЧП с запаздыванием в дальнейшем решается средствами физико-математического пакета COMSOL. В работе [698] для решения эволюционного ИДУвЧП без запаздывания применяется алгоритм, использующий линейные и нелинейные коллокации, квадратурные формулы Гаусса для бесконечных интервалов и интерполяцию для отображения на равномерную сетку на ограниченном интервале. В работе [700] для решения подобного уравнения применяется процедура, включающая неявную схему Эйлера по времени, разложение по базисным функциям и метод коллокаций на $(-\infty, +\infty)$ для вычисления несобственных интегралов.

Отметим также следующие методы: использование рядов по различным функциям, например, по полиномам Лагерра и Эрмита (для бесконечной области), Чебышёва (для конечной); методы конечных разностей, в частности, схемы Кранка–Николсона, конечных элементов, спектральный и псевдоспектральный; методы разложения решения по собственным функциям линейной краевой задачи, вейвлет-сжатия, статистического моделирования, прямых и Шварца (с перекрытием); применение квадратурных формул (например, Симпсона) в сочетании с методом Ромберга; выделение конечной области при постановке задачи в неограниченной области. Все указанные методы используются для аппроксимации решения

на пространственной сетке и др.

Далее для получения приближенного решения одного из представителей рассматриваемой группы ИДУвЧП для исключения членов с запаздыванием применяется схема, основанная на расширении пространства состояний.

Пример 1.4.2. Рассмотрим следующее нелинейное ИДУ Фредгольма (по пространству) в частных производных с постоянным запаздыванием следующего вида:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + b\,u(x,t) - \mu\,u^3(x,t) +$$

$$+\gamma\left[\alpha - \frac{1}{L}\int_0^L u(x,t-\tau)\,dx\right], \quad x \in (0,L), \quad t > 0, \tag{1.4.14}$$

$$u(x,t) = u^{[0]}(x,t), \quad x \in [0,L], \quad t \in [-\tau,0], \tag{1.4.15}$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} = 0, \tag{1.4.16}$$

где t – время $(-\tau \leqslant t \leqslant T < +\infty)$, $u(x,t)$ – решение уравнения, L, $a > 0$, b, α, γ, μ – постоянные величины, $u^{[0]}(x,t)$ – известная функция.

Для решения задачи (1.4.14)–(1.4.16) применим *метод прямых* [84] в сочетании с расширением пространства состояний. Для этого построим на отрезке $[0,L]$ равномерную сетку:

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < \ldots < x_{K-1} < x_K = L, \quad x_k = h\,k, \quad k = \overline{0,K},$$

где h – шаг сетки $(0 < h \ll 1)$, обозначим через $u_k(t)$ зависящую от времени величину решения $u(x,t)$ в узле x_k и определим конечно-разностную аппроксимацию для $u''_{xx}(x,t)$ второго порядка точности по h:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \approx \frac{u_{k+1}(t) - 2\,u_k(t) + u_{k-1}(t)}{h^2}, \qquad 0 < k < K.$$

Кроме того, используя те же узлы, по формуле Симпсона (считаем, что K – четное число) приблизим интегральный член в уравнении (ошибка порядка h^4) следующим образом:

$$\int_0^L u(x,t-\tau)\,dx \approx \frac{h}{3}\sum_{\ell=0}^{K} c_\ell\,u_\ell(t-\tau),$$

где

$$c_\ell = \begin{cases} 1, & \ell = 0 \text{ или } \ell = K, \\ 2, & \ell - \text{четное число}, \\ 4, & \ell - \text{нечетное число}. \end{cases}$$

Для аппроксимации краевых условий воспользуемся формулами также второго порядка точности по h:

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} \approx \frac{u_0(t) - 4\,u_1(t) + 3\,u_2(t)}{2\,h},$$
$$\frac{\partial u(L,t)}{\partial x} \approx \frac{-3\,u_{K-2}(t) + 4\,u_{K-1}(t) - u_K(t)}{2\,h}.$$

В результате получаем следующую систему обыкновенных дифференциально-алгебраических уравнений с запаздыванием (ОДАУсЗ):

$$\dot u_k(t) = a^2\,\frac{u_{k+1}(t) - 2\,u_k(t) + u_{k-1}(t)}{h^2} + b\,u_k(t) - \mu\,u_k^3(t) +$$
$$+\gamma\left[\alpha - \frac{1}{L}\,\frac{h}{3}\sum_{\ell=0}^{K} c_\ell\,u_\ell(t-\tau)\right], \qquad 1 \leqslant k \leqslant K-1,$$
$$u_0(t) - 4\,u_1(t) + 3\,u_2(t) = 0, \quad -3\,u_{K-2}(t) + 4\,u_{K-1}(t) - u_K(t) = 0$$

с начальными условиями $u_k(0) = u^{[0]}(x_k, 0)$, решение которой дает аппроксимацию $u(x,t)$ в узлах сетки для $t > 0$. Теперь для решения этой системы расширим пространство состояний. Для этого введем следующие обозначения:

$$s \in [0,\tau], \quad t_q = q\,\tau, \quad q = 0,1,2,...,N+1, \quad t_{N+1} \geqslant T,$$
$$\Delta_q = (t_q, t_{q+1}], \quad \overline{\Delta}_q = [t_q, t_{q+1}],$$
$$\boldsymbol{u}_q(s) = \boldsymbol{u}(s + t_q), \qquad \boldsymbol{u}_q(0) = \boldsymbol{u}_{q-1}(\tau),$$
$$\boldsymbol{u}_q(s) = \big\{u_{q0}(s), u_{q1}(s), ..., u_{qN}(s)\big\}^{\mathsf{T}}.$$

0°. Рассмотрим полуинтервал Δ_0. Определённый на Δ_0 векторный процесс $\boldsymbol{u}_0(s)$ удовлетворяет системе ОДАУ вида (теперь точкой обозначается производная по s):

$$\dot u_{0k}(s) = a^2\,\frac{u_{0,k+1}(s) - 2\,u_{0k}(s) + u_{0,k-1}(s)}{h^2} + b\,u_{0k}(s) - \mu\,u_{0k}^3(s) +$$

$$+\gamma\Big[\alpha-\frac{1}{L}\int\limits_0^L u^{[0]}(x,s-\tau)\,dx\Big],\qquad 1\leqslant k\leqslant K-1,$$

$$u_{00}(s)-4\,u_{01}(s)+3\,u_{02}(s)=0,\quad -3\,u_{0,K-2}(s)+4\,u_{0,K-1}(s)-u_{0K}(s)=0.$$

1°. Теперь обратимся к сегментам Δ_0 и Δ_1. Систему ОДФУ для вычисления вектора $\operatorname{col}\big(\boldsymbol{u}_0(s),\boldsymbol{u}_1(s)\big)$ можно представить в следующем виде:

$$\dot u_{0k}(s)=a^2\,\frac{u_{0,k+1}(s)-2\,u_{0k}(s)+u_{0,k-1}(s)}{h^2}+b\,u_{0k}(s)-\mu\,u_{0k}^3(s)+$$

$$+\gamma\Big[\alpha-\frac{1}{L}\int\limits_0^L u^{[0]}(x,s-\tau)\,dx\Big],\qquad 1\leqslant k\leqslant K-1,$$

$$u_{00}(s)-4\,u_{01}(s)+3\,u_{02}(s)=0,\quad -3\,u_{0,K-2}(s)+4\,u_{0,K-1}(s)-u_{0K}(s)=0;$$

$$\dot u_{1k}(s)=a^2\,\frac{u_{1,k+1}(s)-2\,u_{1k}(s)+u_{1,k-1}(s)}{h^2}+b\,u_{1k}(s)-\mu\,u_{1k}^3(s)+$$

$$+\gamma\Big[\alpha-\frac{1}{L}\,\frac{h}{3}\sum_{k=0}^{K}c_k\,u_{0k}(s)\Big],\qquad 1\leqslant k\leqslant K-1,$$

$$u_{10}(s)-4\,u_{11}(s)+3\,u_{12}(s)=0,\quad -3\,u_{1,K-2}(s)+4\,u_{1,K-1}(s)-u_{1K}(s)=0.$$

… … … … … … … … …

N°. Рассмотрим временны́е полуинтервалы Δ_0, Δ_1, ..., Δ_N. Построим систему ОДАУ для вектора $\operatorname{col}\big(\boldsymbol{u}_0(s),\boldsymbol{u}_1(s),...,\boldsymbol{u}_K(s)\big)$ в следующем виде:

$$\dot u_{0k}(s)=a^2\,\frac{u_{0,k+1}(s)-2\,u_{0k}(s)+u_{0,k-1}(s)}{h^2}+b\,u_{0k}(s)-\mu\,u_{0k}^3(s)+$$

$$+\gamma\Big[\alpha-\int\limits_0^L u^{[0]}(x,s-\tau)\Big],\qquad 1\leqslant k\leqslant K-1,$$

$$u_{00}(s)-4\,u_{01}(s)+3\,u_{02}(s)=0,\quad -3\,u_{0,K-2}(s)+4\,u_{0,K-1}(s)-u_{0K}(s)=0;$$

$$\dot u_{1k}(s)=a^2\,\frac{u_{1,k+1}(s)-2\,u_{1k}(s)+u_{1,k-1}(s)}{h^2}+b\,u_{1k}(s)-\mu\,u_{1k}^3(s)+$$

$$+\gamma\Big[\alpha-\frac{1}{L}\,\frac{h}{3}\sum_{\ell=0}^{K}c_\ell\,u_{0\ell}(s)\Big],\qquad 1\leqslant k\leqslant K-1,$$

$$u_{10}(s)-4\,u_{11}(s)+3\,u_{12}(s)=0,\quad -3\,u_{1,K-2}(s)+4\,u_{1,K-1}(s)-u_{1K}(s)=0;$$

$$\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots$$

$$\dot{u}_{Nk}(s) = a^2\,\frac{u_{N,k+1}(s) - 2\,u_{Nk}(s) + u_{N,k-1}(s)}{h^2} + b\,u_{Nk}(s) - \mu\,u_{Nk}^3(s) +$$

$$+\gamma\left[\alpha - \frac{1}{L}\frac{h}{3}\sum_{\ell=0}^{K} c_\ell\,u_{N-1,\ell}(s)\right], \qquad 1 \leqslant k \leqslant K-1,$$

$$u_{N0}(s) - 4\,u_{N1}(s) + 3\,u_{N2}(s) = 0,$$

$$-3\,u_{N,K-2}(s) + 4\,u_{N,K-1}(s) - u_{NK}(s) = 0.$$

Итак, получена система ОДАУ без запаздывания, причем превращение ее в систему ОДУ с целью дальнейшего численного интегрирования не составляет труда.

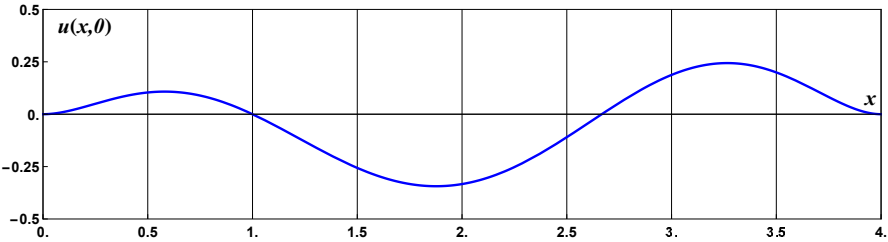


Рис. 1.4.4

Данный алгоритм был реализован в виде программы на входном языке пакета `Mathematica`. При проведении расчетов использовались следующие значения параметров:

$$a = 0.01, \qquad b = 1.0, \qquad \mu = 0.1, \qquad \alpha = 0.5,$$

$$\gamma = 10.0, \qquad L = 4, \qquad T = 5.0, \qquad h = 0.01,$$

$$\tau \in \{0.0, 0.5, 1.0, 2.0\},$$

$$u^{[0]}(x,t) = \frac{1}{32}\,x^2\,(x - L/4)\,(x - 2L/3)\,(x - L)^2.$$

Полученные результаты вычислений отображены на рис. 1.4.4–1.4.9. Первый и последний рисунки показывают начальное и финальное положение функции $u(x,t)$, а остальные последовательно демонстрируют линии уровня для этой функции при $\tau = 0.0,\ 0.5,\ 1.0$ и 2.0. На основании полученных данных несложно установить, что:

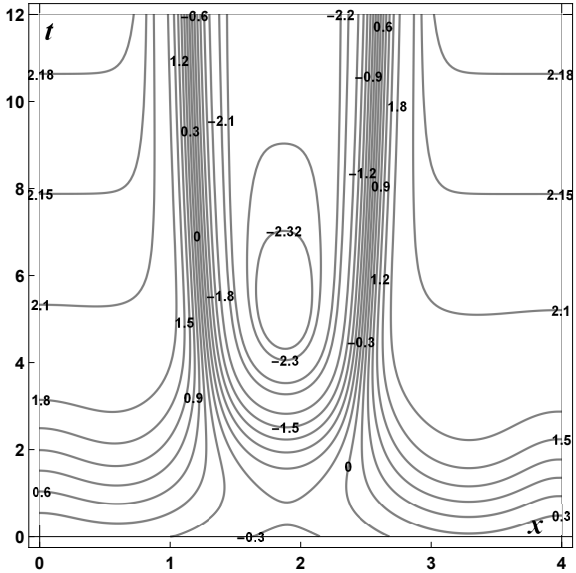


Рис. 1.4.5

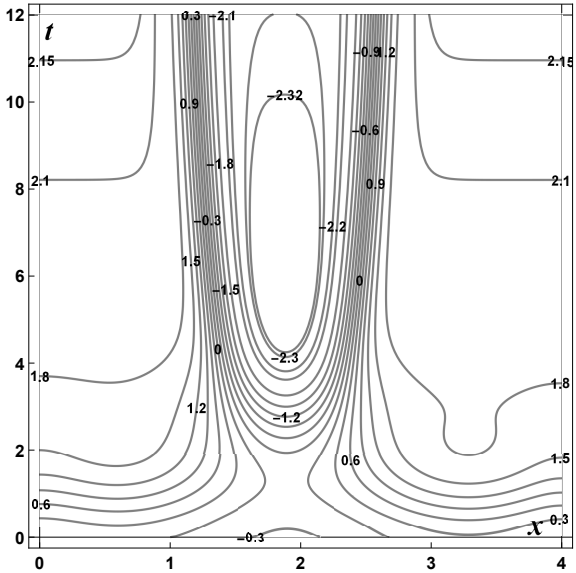


Рис. 1.4.6

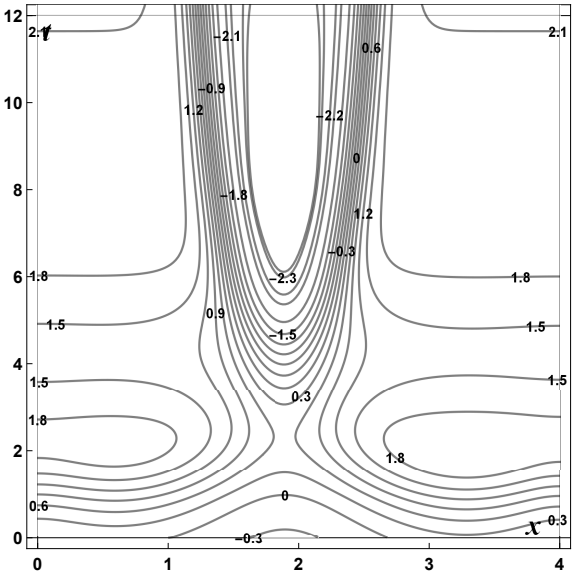


Рис. 1.4.7

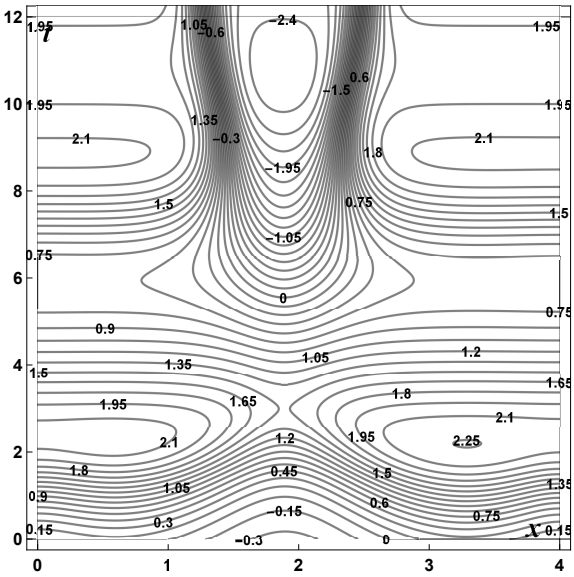


Рис. 1.4.8

– финальные состояния для переходных процессов для $\tau > 0.0$ в рамках времени расчетов находились для $u(x,t)$ в достаточно узкой ограниченной области, что позволяет предположить, что для всех этих переходных процессов предельным является одно и то же состояние;

– с ростом τ наблюдалось увеличение продолжительности переходных процессов;

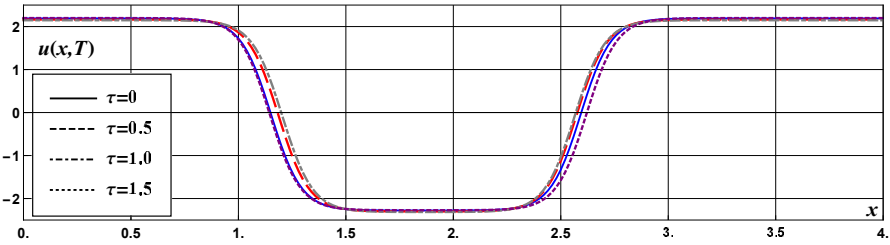


Рис. 1.4.9

– динамика переходных процессов для $\tau > 0.0$ существенно отличалась от случая для $\tau = 0.0$. Если для $\tau = 0.0$ переход в финальное состояние происходил в форме практически монотонного возрастания значений функции $u(x,t)$, то для $\tau > 0.0$ наблюдались колебательные процессы выхода в такое состояние;

– колебательный режим для $\tau = 2.0$ существенно отличался от режимов при $\tau = 0.5$ и 1.0 и 2.0, что в выразилось в наличии в появлении нескольких циклов колебаний. Это позволяет предположить, что с ростом величины запаздывания число таких циклов будет увеличиваться.

1.5. ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ

1.5.1. Интегральное расширение пространства состояний в задачах анализа детерминированных вязкоупругих систем

Ниже представляется процедуру приближенного решения одной из задач вязкоупругой механики сплошной среды (общие понятия см. в п. 2.5.1.1). Поведение таких и подобных (термо)вязкоупругих систем, как правило, описывается системами линейных и/или нелинейными интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных (ИДУвЧП) [45, 77, 112, 258, 262, 529, 530, 778, 895, 1030], т.е. уравнениями с распределенными запаздываниями. Обычно получение точных решений для таких уравнений невозможно, а прямое приближенное интегрирование затруднено. При этом, как правило, схемы решения подобных задач основаны на сведении ДУвЧП к системам обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений (ОИДУ), например, при помощи конечно-элементных представлений, разложений по собственным функциям, применении метода прямых и т.д., с дальнейшим анализом полученных систем методами, характерными для ОИДУ (см. в п. 2.5.1.1).

Предлагаемая процедура представляет собой перенос разработанной ранее [194, 201, 1000] схемы расширения пространства состояний для анализа стохастических ОИДУ. Использование рассмотренной процедуры для изучения поведения системы нелинейных ИДУвЧП позволяет свести исходную задачу к последовательности более простых задач, заключающихся в построении решений ДУвЧП без запаздывания.

Большой класс моделей (термо)вязкоупругости можно записать в виде системы следующих ИДУвЧП [245]:

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t), \tag{1.5.1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} = \boldsymbol{f}\big(\{\boldsymbol{u}\}(\boldsymbol{r},t), \{\boldsymbol{v}\}(\boldsymbol{r},t), t\big) + \\ + \int_{t_0}^{t} \mathbb{L}\big[\{\boldsymbol{u}\}(\boldsymbol{r},s), \{\boldsymbol{v}\}(\boldsymbol{r},s), t, s\big]\, ds, \tag{1.5.2}$$

где t – время ($t_0 < t \leqslant T < +\infty$); $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t) \in \mathbb{R}^n$ и $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t) \in \mathbb{R}^n$ – неизвестные векторные поля, определяющие состояние исследуемого объекта; $\boldsymbol{r} \in \mathscr{D} \subset$

$\mathbb{R}^3$; $\mathscr{D}$ – открытая конечная или бесконечная область;

$$\{\boldsymbol{u}\}(\boldsymbol{r},t|s)=\Big\{\frac{\partial^{k_1+k_2+k_3}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t|s)}{\partial x^{k_1}\,\partial y^{k_2}\,\partial z^{k_3}}\Big\},\quad \{\boldsymbol{v}\}(\boldsymbol{r},t|s)=\Big\{\frac{\partial^{k_1+k_2+k_3}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t|s)}{\partial x^{k_1}\,\partial y^{k_2}\,\partial z^{k_3}}\Big\},$$
$$0\leqslant k_1+k_2+k_3\leqslant K<+\infty,\quad k_1,k_2,k_3\in\mathbb{N}_0,\quad K>0;$$

$\boldsymbol{f}=\{f_i\}$ – векторная функция с дифференцируемыми необходимое число раз по своим аргументам компонентами; $\mathbb{L}\big[\{\boldsymbol{u}\}(\boldsymbol{r},s),\{\boldsymbol{v}\}(\boldsymbol{r},s),t,s\big]$ – линейный дифференциальный оператор, аргументами которого являются векторные поля $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)$ и $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)$, их производные до некоторого порядка, а коэффициентами – матричные функции переменных t и s, что приводит к тому, что оператор $\mathbb{L}$ будет суммой слагаемых вида

$$\boldsymbol{\mathcal{B}}^{[u]}_{k_1k_2k_3}(t,s)\,\frac{\partial^{k_1+k_2+k_3}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t|s)}{\partial x^{k_1}\,\partial y^{k_2}\,\partial z^{k_3}}\quad\text{и}\quad\boldsymbol{\mathcal{B}}^{[v]}_{k_1k_2k_3}(t,s)\,\frac{\partial^{k_1+k_2+k_3}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t|s)}{\partial x^{k_1}\,\partial y^{k_2}\,\partial z^{k_3}};$$

$t|s$ – выбор соответствующей временной переменной в зависимости от присутствия $\{u\}$ и $\{v\}$ в функции $\boldsymbol{f}$ или операторе $\mathbb{L}$. Кроме того, на границе $\partial\mathscr{D}$ ограниченной области $\mathscr{D}$ необходимо добавить соответствующие граничные условия, например, в форме линейного оператора без запаздывания, а при $t=t_0$ указать начальное состояние системы: $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{v}^0(\boldsymbol{r})$.

Задача исследования состоит в изучении поведении векторных полей состояния $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)$ и $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)$ для $t>t_0$.

Как правило, прямое исследование систем типа (1.5.1), (1.5.2) невозможно. С другой стороны, имеются работы, где с помощью увеличения размерности векторов состояния систем ОИДУ и ИДУвЧП, у которых элементы вырожденных матричных ядер представляют собой простейшие функции типа $c\,e^{-\gamma(t-s)}$ (c, γ – постоянные), приводятся к форме, описываемой системами ДУвЧП без запаздывания, что позволяет для их исследования применить известные точные и приближенные методы таких уравнений.

Разобьем отрезок $[t_0,T]$ точками $t_k=t_0+k\cdot h$, $k=0,\,1,\,2,\,...,\,M$, $h=(T-t_0)/M$ так, чтобы с достаточной точностью на отрезке $[t_{k-1},t_k]$, $k\geqslant 1$, можно было заменить матричные ядра $\boldsymbol{\mathcal{B}}^{[u]}_{k_1k_2k_3}(t,s)$ и $\boldsymbol{\mathcal{B}}^{[v]}_{k_1k_2k_3}(t,s)$ на матричные функции (средние значения) $\overline{\boldsymbol{\mathcal{B}}}^{[u]}_{k,k_1k_2k_3}(t)$ и $\overline{\boldsymbol{\mathcal{B}}}^{[v]}_{k,k_1k_2k_3}(t)$, которые вычислим следующим образом:

$$\overline{\boldsymbol{\mathcal{B}}}^{[u,v]}_{k,k_1k_2k_3}(t)=\frac{1}{h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\boldsymbol{\mathcal{B}}^{[u,v]}_{k_1k_2k_3}(t,s)\,ds\approx\frac{1}{h}\cdot\frac{\Delta s}{3}\sum_{\ell=0}^{2L}c_\ell\cdot\boldsymbol{\mathcal{B}}^{[u,v]}_{k_1k_2k_3}(t,s_{k\ell})=$$

$$= \frac{1}{6\,L}\sum_{\ell=0}^{2L} c_\ell \cdot \boldsymbol{\mathcal{B}}^{[u,v]}_{k_1k_2k_3}(t, s_{k\ell})$$

(с точностью порядка $O(\Delta s^4)$, где

$$s_{k\ell} = t_{k-1} + \ell\cdot\Delta s, \quad \ell = 0,1,...,2\,L; \qquad h = 2\,L\cdot\Delta s; \qquad L \geqslant 1;$$

$$c_\ell = \begin{cases} 1, & \ell = 0, 2\,L, \\ 2, & \ell = 2\,q, \quad q = 1,2,...,L-1, \\ 4, & \ell = 2\,q+1 \end{cases}$$

(правило Симпсона).

Таким образом, матричные ядра $\boldsymbol{\mathcal{B}}^{[u]}_{k_1k_2k_3}(t,s)$ и $\boldsymbol{\mathcal{B}}^{[v]}_{k_1k_2k_3}(t,s)$ представляются кусочно-постоянными по второму аргументу матричными функциями. В результате этого система (1.5.1), (1.5.2) приводится к следующему виду:

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t), \tag{1.5.3}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} &= \boldsymbol{f}\big(\{\boldsymbol{u}\}(\boldsymbol{r},t), \{\boldsymbol{v}\}(\boldsymbol{r},t), t\big) + \\ &+ \mathbb{L}\Big[\sum_{k=1}^{q-1}\overline{\boldsymbol{\mathcal{B}}}^{[u]}_k(t)\Big\{\int_{t_{k-1}}^{t_k}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},s)\,ds\Big\}, \sum_{k=1}^{q-1}\overline{\boldsymbol{\mathcal{B}}}^{[v]}_k(t)\Big\{\int_{t_{k-1}}^{t_k}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},s)\,ds\Big\}, \\ &\quad \overline{\boldsymbol{\mathcal{B}}}^{[u]}_q(t)\Big\{\int_{t_{k-1}}^{t}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},s)\,ds\Big\}, \overline{\boldsymbol{\mathcal{B}}}^{[v]}_q(t)\Big\{\int_{t_{k-1}}^{t}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},s)\,ds\Big\}\Big],\end{aligned} \tag{1.5.4}$$

$t_{q-1} < t \leqslant t_q, \qquad q = 1,2,...,M.$

Введем векторы ($t_{k-1} \leqslant t \leqslant t_k$):

$$\underline{\boldsymbol{u}}_k(\boldsymbol{r},t) = \int\limits_{t_{k-1}}^{t}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},s)\,ds, \quad \underline{\boldsymbol{v}}_k(\boldsymbol{r},t) = \int\limits_{t_{k-1}}^{t}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},s)\,ds. \tag{1.5.5}$$

С учетом равенств (1.5.5) расширенная система (1.5.3), (1.5.4) принимает следующую форму:

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t), \tag{1.5.6}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} = \boldsymbol{f}\big(\{\boldsymbol{u}\}(\boldsymbol{r},t), \{\boldsymbol{v}\}(\boldsymbol{r},t), t\big) +$$

$$+\mathbb{L}\Big[\sum_{k=1}^{q-1}\overline{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_k^{[u]}(t)\big\{\underline{\boldsymbol{u}}_k\big\}(\boldsymbol{r},t_k),\sum_{k=1}^{q-1}\overline{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_k^{[v]}(t)\big\{\underline{\boldsymbol{v}}_k\big\}(\boldsymbol{r},t_k),$$

$$\overline{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_q^{[u]}(t)\big\{\underline{\boldsymbol{u}}_q\big\}(\boldsymbol{r},t),\overline{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_q^{[v]}(t)\big\{\underline{\boldsymbol{v}}_q\big\}(\boldsymbol{r},t)\Big], \tag{1.5.7}$$

$$\frac{\partial\underline{\boldsymbol{u}}_q(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t),\qquad \frac{\partial\underline{\boldsymbol{v}}_q(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t), \tag{1.5.8}$$

причем

$$\underline{\boldsymbol{u}}_q(\boldsymbol{r},t_{q-1})=\boldsymbol{0},\qquad \underline{\boldsymbol{v}}_q(\boldsymbol{r},t_{q-1})=\boldsymbol{0}.$$

Если обозначить $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)$ и $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)$ через $\boldsymbol{u}_k(\boldsymbol{r},t)$ и $\boldsymbol{v}_k(\boldsymbol{r},t)$ для $t_{k-1}\leqslant t\leqslant t_k$, то окончательно получим:

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}_q(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=\boldsymbol{v}_q(\boldsymbol{r},t), \tag{1.5.9}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}_q(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=\boldsymbol{f}\big(\big\{\boldsymbol{u}_q\big\}(\boldsymbol{r},t),\big\{\boldsymbol{v}_q\big\}(\boldsymbol{r},t),t\big)+$$

$$+\mathbb{L}\Big[\sum_{k=1}^{q-1}\overline{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_k^{[u]}(t)\big\{\underline{\boldsymbol{u}}_k\big\}(\boldsymbol{r},t_k),\sum_{k=1}^{q-1}\overline{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_k^{[v]}(t)\big\{\underline{\boldsymbol{v}}_k\big\}(\boldsymbol{r},t_k),$$

$$\overline{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_q^{[u]}(t)\big\{\underline{\boldsymbol{u}}_q\big\}(\boldsymbol{r},t),\overline{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_q^{[v]}(t)\big\{\underline{\boldsymbol{v}}_q\big\}(\boldsymbol{r},t)\Big], \tag{1.5.10}$$

$$\frac{\partial\underline{\boldsymbol{u}}_q(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=\boldsymbol{u}_q(\boldsymbol{r},t),\qquad \frac{\partial\underline{\boldsymbol{v}}_q(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=\boldsymbol{v}_q(\boldsymbol{r},t), \tag{1.5.11}$$

причем начальные условия для системы (1.5.9)–(1.5.11) определяются следующим образом:

$$\boldsymbol{u}_q(\boldsymbol{r},t_{q-1})=\boldsymbol{u}_{q-1}(\boldsymbol{r},t_{q-1}),\qquad \boldsymbol{v}_q(\boldsymbol{r},t_{q-1})=\boldsymbol{v}_{q-1}(\boldsymbol{r},t_{q-1}),$$

$$\underline{\boldsymbol{u}}_q(\boldsymbol{r},t_{q-1})=\boldsymbol{0},\qquad \underline{\boldsymbol{v}}_q(\boldsymbol{r},t_{q-1})=\boldsymbol{0}.$$

Пример 1.5.1. Рассмотрим следующую модель [430, 906]:

$$\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial t^2}+\alpha\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\beta\,\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}+b_0(t,t)\,\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}+$$

$$+\int_0^t b(t,s)\,\frac{\partial^2u(x,s)}{\partial x^2}\,ds+\gamma\,u(x,t)\,e^{-u(x,t)},\quad 0<x<1,\quad 0<t\leqslant T,$$

$$u(x,0)=u^{[0]}(x),\quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=u^{[1]}(x),\quad x\in[0,1],$$
$$u(0,t)=u(1,t)=0,\quad 0<t\leqslant T,$$

где

$$u^{[0]}(x)=\begin{cases}0, & x\in[0.00,0.35],\\ x-0.35, & x\in(0.35,0.45],\\ 1, & x\in(0.45,0.55],\\ 0.65-x, & x\in(0.55,0.65],\\ 0, & x\in(0.65,1.00];\end{cases}\qquad u^{[1]}(x)=0;$$

$$\alpha=0.4;\quad \beta=0.01;\quad \gamma=0.5;\quad T=4.0;$$

$$b(t,s)=\frac{\partial b_0(t,s)}{\partial s};\quad b_0(t,s)=h(\theta)\Big[1-\sum_{j=1}^{2}\mu_j(\theta)\Big\{1-e^{-s/T_j(\theta)}\Big\}\Big];$$

$$h(\theta)=h_1/(h_2\,\theta-1);\quad \theta=\theta_1+\theta_2\,t/T_0;$$

$$\mu_1(\theta)=\mu_{10};\quad T_1(\theta)=T_{10};$$

$$\mu_2(\theta)=\mu_{21}-\mu_{22}\,\theta;\quad T_2(\theta)=\frac{T_{21}}{T_{22}\,\theta+(T_{23}/\theta)^{T_{24}}};$$

$$h_1=1.0;\quad h_2=0.004;\quad T_0=10.0;\quad \theta_1=40.0;\quad \theta_2=110.0;$$
$$\mu_{10}=0.08;\quad T_{10}=320.0;\quad \mu_{21}=0.63;\quad \mu_{22}=0.0013;$$
$$T_{21}=60.0;\quad T_{22}=73.0;\quad T_{23}=3.0;\quad T_{24}=11.0.$$

На рис. 1.5.1 приведены кривые, представляющие профили решения задачи в разные моменты времени. Профили получены в результате численных расчетов при $h=0.02$ по времени. ДУвЧП на разных участках интегрировались с помощью метода прямых с автоматическим выбором шага по времени, причем шаг сетки по пространству равнялся 0.005.

При анализе этого рисунка и результатов более длинных по времени расчетов несложно установить, что поведение решения является квазипериодическим, а именно, начальный профиль распадается на две волны, движущиеся в разные стороны. Дойдя до границ пространственной области, эти волны отражаются от границ и инвертируются относительно оси абсцисс, а далее двигаются навстречу друг другу. Затем сливаются, снова распадаются и двигаются к положению, близкое к начальному. После этого процесс повторяется с учетом диссипации.

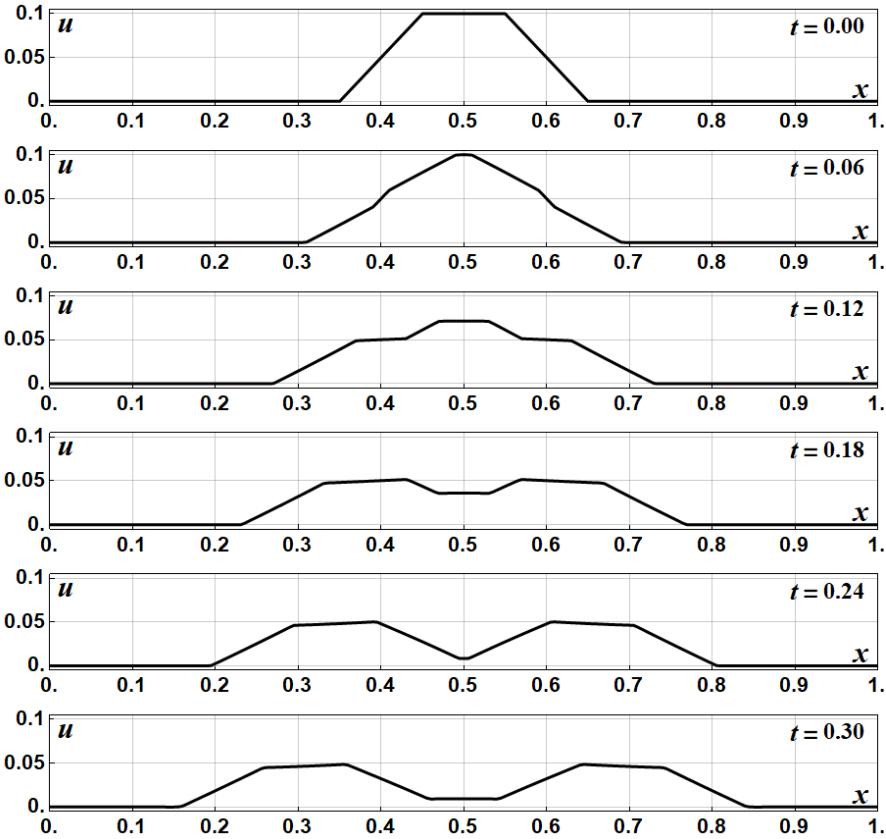


Рис. 1.5.1

Заметим, что при реализации алгоритма решения задачи при подготовке численных расчетов в процессе генерирования символьных представлений ДУвЧП на каждом шаге применялись аналитические выкладки, которые осуществлялись, как и сами приближенные вычисления, в среде пакета `Mathematica`. ▶

Полученные результаты показывают пригодность предложенной схемы для решения задач, рассматриваемого класса, а сама схема может быть распространена на новые классы уравнений, сходные с анализировавшимся, например, на ИДУвЧП с ограниченным распределенным запаздыванием.

1.5.2. Чувствительность нелинейных систем с запаздыванием к изменению параметров

В настоящем подразделе, основанном на работе [218], описывается алгоритм и представлены результаты расчетов чувствительности систем, описываемых ОДУ с запаздыванием, к изменению детерминированных параметров на основе комбинации метода шагов и расширения пространства состояния.

При анализе устойчивости и качества систем обычно предполагается, что значения параметров объектов и устройств управления в процессе эксплуатации остаются постоянными. В действительности по разным причинам параметры системы постоянно меняются со временем, а текущие значения параметров отличаются от расчетных. Кроме того, значения параметров могут иметь разброс вследствие допусков на изготовление. Это приводит к необходимости разработки методов изучения такого разброса.

Известно, что аппарат классической теории чувствительности (ТЧ) [256, 263, 289, 575, 741, 961, 996] является важным средством анализа и синтеза различных систем и теоретической основой построения оптимальных систем. Фундамент методов ТЧ составляют классические методы теории малых возмущений, соответствующим образом дополненные и интерпретированные. Основными задачами, рассматриваемыми в ТЧ, являются проблемы анализа влияния малых изменений конструктивных параметров и внешних условий работы на динамику системы, а также синтез систем, малочувствительных к изменению этих факторов [303]. Например, при исследовании автоматических систем важно знать, как влияет изменение определенного параметра на качество системы.

Теория чувствительности динамических систем совместно с анализом неопределенности изучает зависимость свойств этих систем от их меняющихся параметров и характеристик. Показатель чувствительности служит мерой влияния вариаций параметров на указанные свойства. В основе разнообразных методов ТЧ – использование функций чувствительности, представляющих, по сути, собой градиенты интересных для исследователей показателей качества работы объекта по некоторым совокупностям параметров, характеризующих саму систему и внешнюю среду [256].

Вычислив функции чувствительности, можно решить ряд задач анализа и синтеза систем управления, находящихся под действием параметрических возмущений; изучить структурную устойчивость линейных и нелинейных систем [263], включая бифуркации и искажение формы [876], течения с химическими реакциями в аэродинамике [1004]; оценить влия-

ние краевых условий для дифференциальных уравнений в частных производных; решить задачи численной оптимизации (градиентные методы) и оптимального конструирования [1004], включая синтез оптимальных (адаптивных) систем [284]; минимизировать функционал стоимости; найти решение ряда проблем теории вероятностей, стохастического анализа, нелинейного программирования, теории управления, движения твердых тел, химических физики и кинетики, атмосферных наук, геофизики, социально-экономических и биологических наук, обратных задач электропроводимости и упругости, теплопередачи, термоупругости, пьезоэлектричества, изучения магнитных материалов, модальной идентификации, особых течений жидкости, включая подземные, надежности, хаоса [452] и т.п.

Можно отметить расчеты чувствительности непрерывных и разрывных систем с сосредоточенными и распределенными параметрами; решений вариационных задач и краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных (нулей и полюсов); передаточных функций и частотных характеристик; критериев оптимальности [284]; для оценки характеристик отклика (смещений, напряжений, собственных частот, нагрузок, размеров и форм) [486], механической структуры и геометрии тел, параметров материалов (композитов) и конструкций (балки, пластины, оболочки); при анализе скорости химических реакций; моделировании ядерных реакторов, расчете и использовании обратной связи и др.

Выгоды использования ТЧ основаны на строгом математическом основании (методы возмущений, вариационные принципы) [1004].

Но, наряду с положительными моментами, необходимо отметить и трудности, сопутствующие использованию аппарата ТЧ: сложность получения уравнений для функций чувствительности, учет параметров в моделях нерегулярными способами, необходимость привлечения нестандартных методов для индивидуального анализа систем, проблемы идентификации корректных граничных условий, длительные численные расчеты и др.

В некоторых случаях для уменьшения объема рутинной работы и обеспечение правильности выполнения длинных аналитических выкладок здесь возможно использование систем аналитических вычислений (компьютерной алгебры, САВ, КА) [188, 813].

В настоящее время, наряду с анализом чувствительности обычных систем, значительное внимание привлекают объекты, поведение которых описывается уравнениями с отклоняющимися аргументами как детерминированными, так и стохастическими [190, 196, 206, 377–379] (см. подраздел 2.5.3). Например, в механике сплошных сред важный объект – мате-

риалы с памятью (пластичность), а в биологии важны оценки влияния возмущений начальных данных, управлений, запаздываний и др., которые могут быть не только константами, но и функциями времени [947]. Отмечается [948], что анализ чувствительности важен пр моделировании и интерпретации прогноза, идентификации и проверке моделей, оценке надежности и запаса прочности, принятии решений в условиях неопределенности, упрощении моделей и т.п.

Определим основные объекты, используемые ниже [263, 284, 289].

Определение 1.5.1. Под *чувствительностью* динамической системы понимается зависимость свойств этой системы от изменения (вариации) ее параметров и характеристик; способность объекта реагировать определенным образом на определенное малое воздействие, а также количественная характеристика этой способности.

К параметрам систем в рамках теории чувствительности относят начальные условия, коэффициенты уравнений, величины, меняющие порядок системы, собственные частоты, частоты импульсов, запаздывания и др.

Определение 1.5.2. *Параметрическая чувствительность* – чувствительность объекта к отклонениям параметров его основных частей от номинальных значений основных характеристик объекта.

Определение 1.5.3. Под *вариацией параметров* понимают любые отклонения их от значений, принимаемых за исходные (номинальные).

Эти отклонения могут быть известны полностью и описаны некоторыми функциями времени или же известны только с точностью до принадлежности к определенному множеству или классу функций. Вариации параметров могут быть конечными или бесконечно малыми. При этом порядки описывающих их дифференциальных уравнений могут оставаться неизменным или изменяться.

В качестве оценок чувствительности используются *функции чувствительности*, играющие большую роль в количественной оценке степени влияния разброса параметров системы относительно их номинальных значений на ее динамического свойства. Функции чувствительности (первого порядка) определяются соотношениями

$$\underline{\boldsymbol{\mathcal{X}}}(t;\boldsymbol{\pi}_0) = \{\underline{x}_{ij}(t;\boldsymbol{\pi}_0)\}, \qquad \underline{x}_{ij}(t;\boldsymbol{\pi}_0) = \left.\frac{\partial x_i(t;\boldsymbol{\pi})}{\partial \pi_j}\right|_{\boldsymbol{\pi}=\boldsymbol{\pi}_0}, \tag{1.5.12}$$

где $\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{\pi}) = \{x_i(t;\boldsymbol{\pi})\}^\intercal$ $(i = 1, 2, ..., n)$ – вектор состояния, $\boldsymbol{\pi} = \{\pi_i\}^\intercal$, $\boldsymbol{\pi}_0 = \{\pi_{0i}\}^\intercal$ $(i = 1, 2, ..., p)$ – векторы параметров и их номинальных зна-

чений. По аналогии с (1.5.12) можно ввести функции чувствительности более высокого порядка.

Для непрерывных динамических систем функции чувствительности удовлетворяют дифференциальным уравнениям специального вида, которые получаются формальным дифференцированием исходных уравнений модели по параметрам и должны решаться совместно с последними при $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}_0$, а термин "методы уравнений чувствительности" относится к широкому классу вычислительных методов, которые определяют чувствительность с помощью вывода и решения соответствующих уравнений.

Функции чувствительности содержат ценную информацию, например, для решения задач синтеза систем автоматического управления. Одной из важнейших задач является синтез систем, обладающих минимальной чувствительностью к вариации параметров.

Нетрудно увидеть, что условием существования функции чувствительности является непрерывность вектора состояния системы по отношению к параметрам, которые могут быть как постоянными, так и зависящими от времени.

Кроме того, в теории чувствительности используются понятия *основного* (базового, номинального, невозмущенного) и *дополнительного движений*.

К прямым задачам ТЧ, в которых по известным функциям чувствительности вариациям параметров определяются характеристики дополнительного движения, относятся проблемы анализа точности, инвариантности, устойчивости, управляемости и наблюдаемости возмущенных систем.

Большое практическое значение имеет обратная задача, которая заключается в оценке изменения параметров системы по наблюдению вызванного ими возмущения выходного сигнала. Вычисленные вариации параметров по отклонению выходного сигнала можно использовать для активного воздействия на параметры системы управления с целью улучшения качества работы системы в целом.

Рассмотрим задачу о расчете функций чувствительности вектора состояния системы, удовлетворяющего системе дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием следующего вида:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t;\boldsymbol{\pi}) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{\pi}), \boldsymbol{x}(t-\tau;\boldsymbol{\pi}), \boldsymbol{\pi}, t\big), \qquad t > t_0, \tag{1.5.13}$$

$$\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{\pi}) = \boldsymbol{x}^0(t;\boldsymbol{\pi}), \qquad t \in [t_0 - \tau, t_0], \tag{1.5.14}$$

где t – время, τ – постоянное запаздывание, $\boldsymbol{x}^0(t;\boldsymbol{\pi})$ – заданная векторная функция. Предположим, что запаздывание не является компонентой

вектора $\boldsymbol{\pi}$. Тогда полную систему ОДУ для функций чувствительности в векторно-матричном виде можно записать так:

$$\dot{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{y}(t), \boldsymbol{y}(t-\tau), \boldsymbol{\pi}_0, t\big),$$

$$\dot{\boldsymbol{\mathcal{Y}}}(t) = \frac{\partial \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{y}(t), \boldsymbol{y}(t-\tau), \boldsymbol{\pi}_0, t\big)}{\partial \boldsymbol{y}^{\intercal}(t)}\,\boldsymbol{\mathcal{Y}}(t) +$$

$$+\frac{\partial \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{y}(t), \boldsymbol{y}(t-\tau), \boldsymbol{\pi}_0, t\big)}{\partial \boldsymbol{y}^{\intercal}(t-\tau)}\,\boldsymbol{\mathcal{Y}}(t-\tau) + \frac{\partial \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{y}(t), \boldsymbol{y}(t-\tau), \boldsymbol{\pi}_0, t\big)}{\partial \boldsymbol{\pi}_0^{\intercal}}, \qquad (1.5.15)$$

$$t > t_0,$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{x}^0(t; \boldsymbol{\pi}_0), \quad \boldsymbol{\mathcal{Y}}(t) = \frac{\partial \boldsymbol{x}_0(t; \boldsymbol{\pi}_0)}{\partial \boldsymbol{\pi}_0^{\intercal}}, \quad t \in [t_0 - \tau, t_0],$$

где

$$\boldsymbol{y}(t) = \big\{ y_i(t),\ i = \overline{1,n} \big\}^{\intercal} \equiv \boldsymbol{x}(t; \boldsymbol{\pi}_0),$$

$$\boldsymbol{\mathcal{Y}}(t) = \big\{ y_{ij}(t),\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,p} \big\} \equiv \frac{\partial \boldsymbol{x}(t; \boldsymbol{\pi}_0)}{\partial \boldsymbol{\pi}_0^{\intercal}}.$$

Для решения поставленной задачи применим модификацию схемы метода шагов и расширения пространства состояния (МШРПС) [215], предназначенной для анализа дифференциальных уравнений с постоянными запаздываниями.

Для того чтобы изучить поведение компонент вектора $\boldsymbol{y}(t)$ и матрицы $\boldsymbol{\mathcal{Y}}(t)$ при $t > t_0$ на основе схемы МШРПС посредством исключения запаздывания необходимо расширить пространство состояния системы. Для реализации данной схемы введем следующие переменные и обозначения:

$$s \in [0, \tau], \quad t_q = t_0 + q \cdot \tau, \quad q = 1, 2, ..., \quad \Delta_q = [t_{q-1}, t_q],$$

$$s_q = t_{q-1} + s, \quad \boldsymbol{y}_q(s) = \boldsymbol{y}(s + t_{q-1}), \quad \boldsymbol{y}_q(0) = \boldsymbol{y}_{q-1}(\tau),$$

$$\boldsymbol{\mathcal{Y}}_q(s) = \boldsymbol{\mathcal{Y}}(s + t_{q-1}), \qquad \boldsymbol{\mathcal{Y}}_q(0) = \boldsymbol{\mathcal{Y}}_{q-1}(\tau),$$

$$\boldsymbol{y}_0(s) = \boldsymbol{x}^0(t_0 - \tau + s, \boldsymbol{\pi}_0), \quad \boldsymbol{\mathcal{Y}}_0(s) = \frac{\partial \boldsymbol{x}_0(t_0 - \tau + s, \boldsymbol{\pi}_0)}{\partial \boldsymbol{\pi}_0^{\intercal}},$$

а затем будем последовательно двигаться по указанным отрезкам Δ_q.

Рассмотрим сегмент Δ_1. Определенные на нем вектор $\boldsymbol{y}_1(s)$ и матрица $\boldsymbol{\mathcal{Y}}_1(t)$ удовлетворяют уравнениям вида (точкой здесь и далее обозначена производная по переменной s)

$$\dot{\boldsymbol{y}}_1(s) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{y}_1(s), \boldsymbol{y}_0(s), \boldsymbol{\pi}_0, s_1\big),$$

$$\dot{\boldsymbol{\mathcal{Y}}}_1(t) = \frac{\partial \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{y}_1(s), \boldsymbol{y}_0(s), \boldsymbol{\pi}_0, s_1\big)}{\partial \boldsymbol{y}_1^{\mathsf{T}}(s)}\,\boldsymbol{\mathcal{Y}}_1(s) + \tag{1.5.16}$$

$$+\frac{\partial \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{y}_1(s), \boldsymbol{y}_0(s), \boldsymbol{\pi}_0, s_1\big)}{\partial \boldsymbol{y}_0^{\mathsf{T}}(s)}\,\boldsymbol{\mathcal{Y}}_0(s) + \frac{\partial \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{y}_1(s), \boldsymbol{y}_0(s), \boldsymbol{\pi}_0, s_1\big)}{\partial \boldsymbol{\pi}_0^{\mathsf{T}}}.$$

Следующий этап – анализ поведения системы на отрезках Δ_1 и Δ_2. ОДУ для векторов и матриц $\boldsymbol{y}_1(s)$, $\boldsymbol{\mathcal{Y}}_1(t)$, $\boldsymbol{y}_2(s)$, $\boldsymbol{\mathcal{Y}}_2(t)$ можно представить в следующем виде:

$$\dot{\boldsymbol{y}}_1(s) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{y}_1(s), \boldsymbol{y}_0(s), \boldsymbol{\pi}_0, s_1\big),$$

$$\dot{\boldsymbol{\mathcal{Y}}}_1(t) = \frac{\partial \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{y}_1(s), \boldsymbol{y}_0(s), \boldsymbol{\pi}_0, s_1\big)}{\partial \boldsymbol{y}_1^{\mathsf{T}}(s)}\,\boldsymbol{\mathcal{Y}}_1(s) +$$

$$+\frac{\partial \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{y}_1(s), \boldsymbol{y}_0(s), \boldsymbol{\pi}_0, s_1\big)}{\partial \boldsymbol{y}_0^{\mathsf{T}}(s)}\,\boldsymbol{\mathcal{Y}}_0(s) + \frac{\partial \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{y}_1(s), \boldsymbol{y}_0(s), \boldsymbol{\pi}_0, s_1\big)}{\partial \boldsymbol{\pi}_0^{\mathsf{T}}},$$

$$\dot{\boldsymbol{y}}_2(s) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{y}_2(s), \boldsymbol{y}_1(s), \boldsymbol{\pi}_0, s_2\big), \tag{1.5.17}$$

$$\dot{\boldsymbol{\mathcal{Y}}}_2(t) = \frac{\partial \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{y}_2(s), \boldsymbol{y}_1(s), \boldsymbol{\pi}_0, s_2\big)}{\partial \boldsymbol{y}_2^{\mathsf{T}}(s)}\,\boldsymbol{\mathcal{Y}}_2(s) +$$

$$+\frac{\partial \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{y}_2(s), \boldsymbol{y}_1(s), \boldsymbol{\pi}_0, s_2\big)}{\partial \boldsymbol{y}_0^{\mathsf{T}}(s)}\,\boldsymbol{\mathcal{Y}}_1(s) + \frac{\partial \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{y}_2(s), \boldsymbol{y}_1(s), \boldsymbol{\pi}_0, s_2\big)}{\partial \boldsymbol{\pi}_0^{\mathsf{T}}}.$$

Продолжая подобным образом, мы можем построить (и решить) расширенную систему ОДУ для векторов и матриц $\boldsymbol{y}_1(s)$, $\boldsymbol{\mathcal{Y}}_1(t)$, $\boldsymbol{y}_2(s)$, $\boldsymbol{\mathcal{Y}}_2(t)$, ..., $\boldsymbol{y}_N(s)$, $\boldsymbol{\mathcal{Y}}_N(t)$ для произвольного целого $N \geqslant 1$, причем последняя группа уравнений может быть записана так:

$$\dot{\boldsymbol{y}}_N(s) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{y}_N(s), \boldsymbol{y}_{N-1}(s), \boldsymbol{\pi}_0, s_N\big),$$

$$\dot{\boldsymbol{\mathcal{Y}}}_N(t) = \frac{\partial \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{y}_N(s), \boldsymbol{y}_{N-1}(s), \boldsymbol{\pi}_0, s_N\big)}{\partial \boldsymbol{y}_N^{\mathsf{T}}(s)}\,\boldsymbol{\mathcal{Y}}_N(s) + \tag{1.5.18}$$

$$+\frac{\partial \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{y}_N(s), \boldsymbol{y}_{N-1}(s), \boldsymbol{\pi}_0, s_N\big)}{\partial \boldsymbol{y}_0^{\mathsf{T}}(s)}\,\boldsymbol{\mathcal{Y}}_N(s) + \frac{\partial \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{y}_N(s), \boldsymbol{y}_{N-1}(s), \boldsymbol{\pi}_0, s_N\big)}{\partial \boldsymbol{\pi}_0^{\mathsf{T}}}.$$

Итак, используя интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений без запаздывания (1.5.16)–(1.5.18), можно последовательно получить решение поставленной задачи на отрезках Δ_q, $q = 1, 2, ..., N$, не прибегая к дополнительному упрощению исходной задачи.

Пример 1.5.2. Применим изложенную выше схему к анализу обобщенного *уравнения Матье* [683]:

$$\ddot{x}(t) + 2\,\alpha\,\dot{x}(t) + \left(\omega^2 + \varepsilon\,\cos t\right) x(t) = \gamma\,x(t-\tau), \tag{1.5.19}$$

которое учитывает влияние запаздывания на параметрическую систему с рассеиванием энергии. Уравнениями данного типа, где $\alpha > 0$, ε, γ, $\omega > 0$ – постоянные параметры, в нелинейной и прикладной механике описывают вибрации типа "шимми", колебания судов при морском волнении, дребезг режущих инструментов, динамику роботов с учетом приводов и др. Основное направление исследований – оценка устойчивости нулевого решения на основе применения теории Флоке и построения диаграмм областей устойчивости.

В расчетах оценивалось влияние изменения вектора параметров $\boldsymbol{\pi} = \{\alpha, \varepsilon, \gamma, \omega^2\}^\intercal$ в окрестности точки $\boldsymbol{\pi}_0 = \{0{,}1; 0{,}1; -1/3; \omega_0^2\}^\intercal$, где $\omega_0^2 \in \{1, 2, 3, 4\}$, в случае, когда $\boldsymbol{x}^0(t, \pi) = \{0{,}01; 0{,}00\}^\intercal$ и $\tau = 2\,\pi$.

Самая наглядная часть результатов расчетов (устойчивых) отображена на рис. 1.5.2–1.5.8, на которых непрерывной линией отображены соответствующие характеристики для смещения $x = y_1$, а штриховой – для скорости $\dot{x} = y_2$.

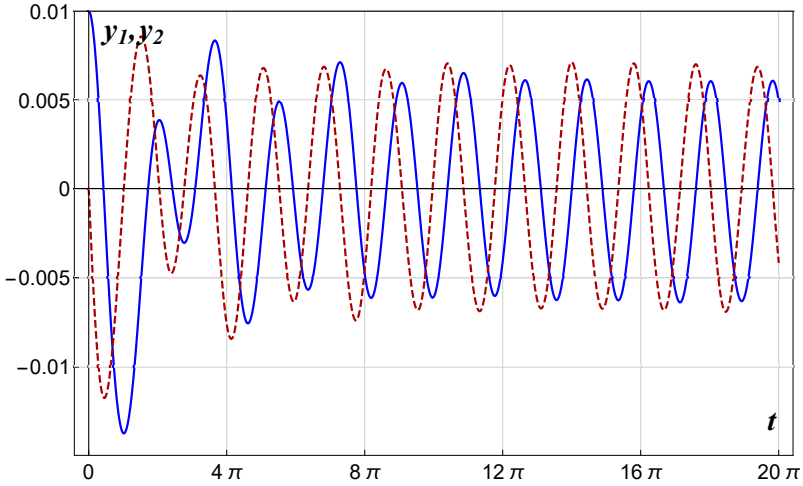


Рис. 1.5.2

Рис. 1.5.2 и 1.5.3 демонстрируют периодический характер поведения вектора $\boldsymbol{y}(t)$ для ω^2, равного 1 и 2. Для остальных ω^2 наблюдались затухающие колебания компонент вектора $\boldsymbol{y}(t)$.

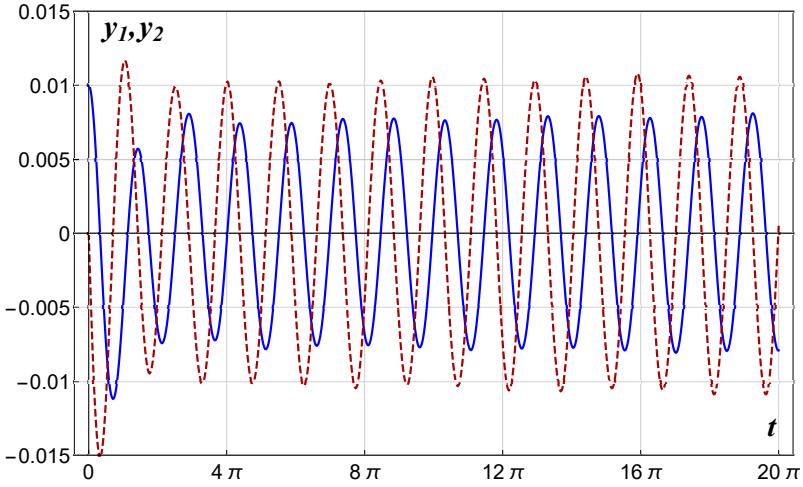


Рис. 1.5.3

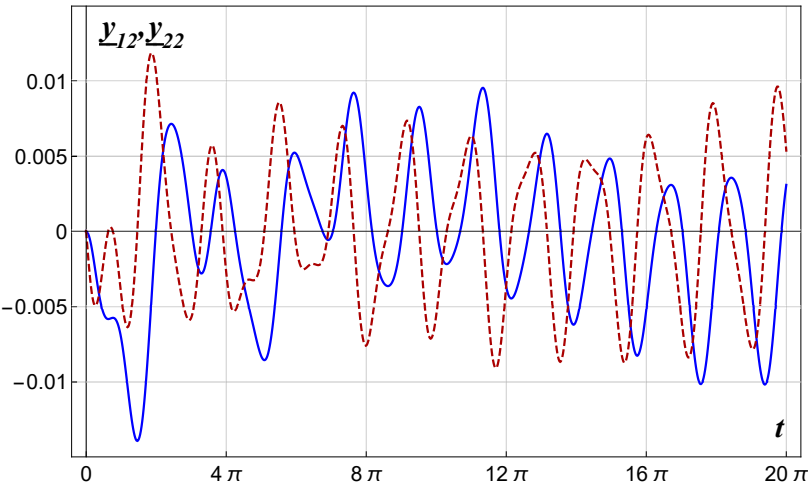


Рис. 1.5.4

Подобные между собой колебания, соответствующие параметрическому резонансу, наблюдались у $\underline{y}_{i1}$, $\underline{y}_{i3}$ и $\underline{y}_{i4}$, $i = 1, 2$, при значениях ω^2, равных 1 и 2. Для тех же случаев переходные процессы для $\underline{y}_{12}$ и $\underline{y}_{22}$ были существенно отличными (рис. 1.5.4 и 1.5.5) от обсуждавшихся выше.

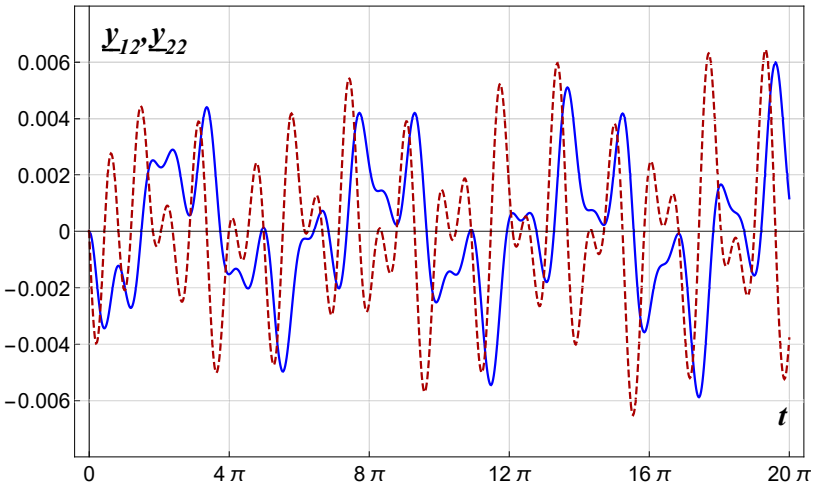


Рис. 1.5.5

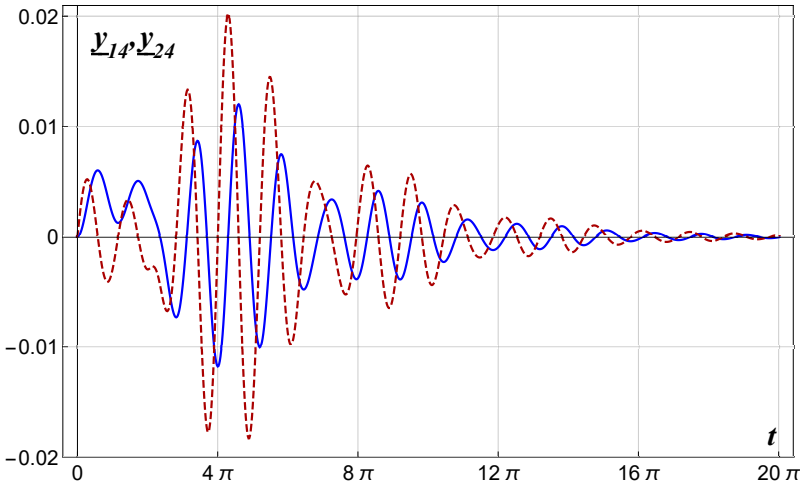


Рис. 1.5.6

Формы переходных процессов для компонент вектора $\boldsymbol{y}(t)$ и матрицы $\underline{\boldsymbol{y}}(t)$ в случае значения ω^2, равного 3, оказались сходными. Представление обо всех таких формах дает рис. 1.5.6.

Поведение же компонент вектора $\boldsymbol{y}(t)$ при $\omega^2 = 4$ существенно отли-

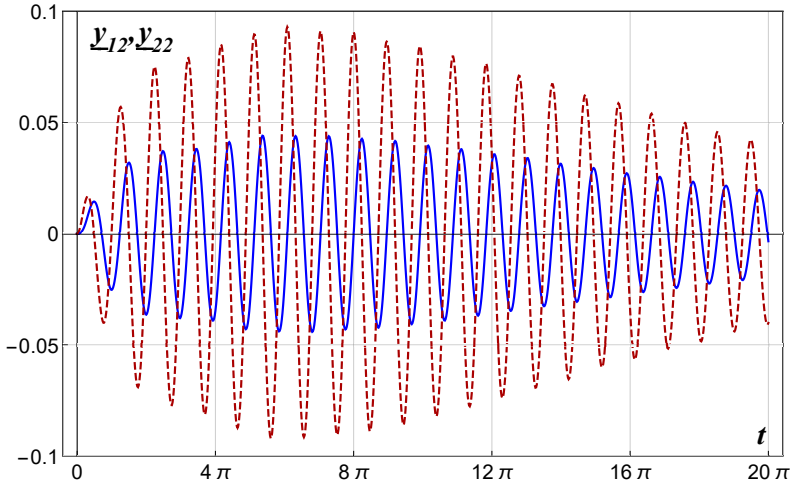


Рис. 1.5.7

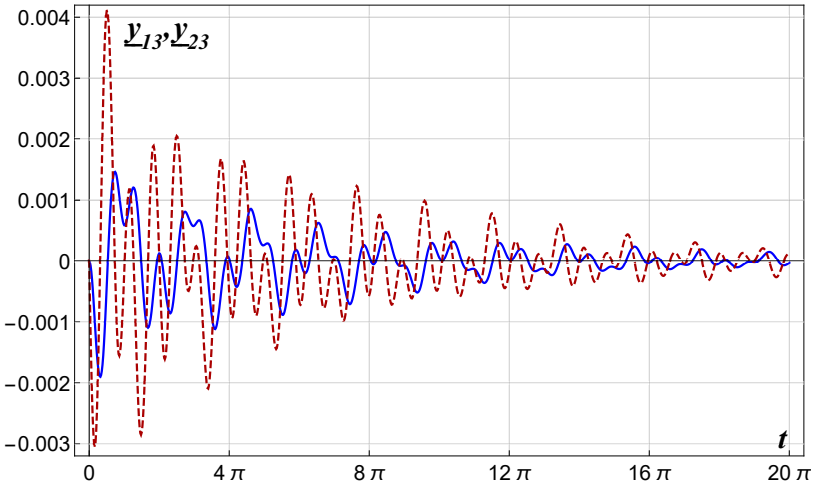


Рис. 1.5.8

чается от форм графиков соответствующих функций чувствительности, которые в свою очередь делятся на две группы (рис. 1.5.7, 1.5.8): 1) $\underline{y}_{i1}$, $\underline{y}_{i3}$ и $\underline{y}_{i4}$; 2) $\underline{y}_{i2}$ $(i = 1, 2)$.

Времена расчетов на ПК с процессором, имеющим тактовую частоту

2 ГГц, для каждого из четырех случаев значений ω^2 не превышали 1..2 секунд.

Рассмотренный алгоритм анализа влияния параметров на поведение детерминированной системы с запаздыванием достаточно прост и без труда может быть реализован на основе не только CAB `Mathematica`, но и любого другого современного ПКА, такого как `Maple` или `Matlab`.

Часть 2. Стохастические системы

Важность и необходимость вероятностно-статистического моделирования процессов в линейных и нелинейных динамических системах различной природы уже давно не вызывают сомнений. Такие исследования актуальны как никогда и сегодня. Необходимость решения соответствующих задач возникает при изучении различных явлений: 1) расчете характеристик полета летательных аппаратов (ЛА) и колебаний конструкций этих ЛА под действием атмосферной турбулентности, а также из-за акустического возбуждения от реактивных двигателей; 2) анализе вибраций, возникающих при движении автомобилей по неровным дорогам, перемещении катящихся по рулежным дорожкам самолетов и поездов по железнодорожным путям; 3) оценке перемещений высотных сооружений (зданий, мачт, промышленных дымовых труб, подвесных и вантовых мостов) при ветровых и сейсмических воздействиях, а также под влиянием ударных волн из-за взрывов; 4) исследовании качки судов и колебаний сооружений вдали и недалеко от берега соответственно под действием нерегулярного морского волнения; 5) реакции мостов на перемещающиеся нагрузки от движения транспортных средств; 6) анализе технологических процессов производства; 7) анализе изменения нагрузок энергосистем, зависящих от потребления энергоресурсов, флуктуационных шумов усилителей в устройствах регулирования и следящих системах, непредсказуемого спроса в экономических системах, шумов в радиоэлектронных устройствах [31, 60, 67, 129, 166, 273, 692, 790, 875, 997, 999, 1002] и т.д.

Вследствие того, что процессе развития методов анализа детерминированных систем функционально-дифференциальных уравнений, быстро ставших уже классическими, возник интерес к стохастическим ФДУ разных типов, потребовался соответствующий теоретический аппарат, основанный на теории случайных процессов (ТСП) и полей. Вторая часть монографии посвящена методам исследования стохастических ФДУ, но начинается эта часть с изложения основных положений ТСП, которые потребуются далее.

В настоящей монографии к классу стохастических (или вероятностных, или случайных, или статистических) отнесены системы со случайными параметрами (в широком смысле). Указанные системы позволяют с необходимой точностью описать функционирование реальных линейных и нелинейных систем, в которых параметры являются случайными величинами, процессами и полями. Основным математическим аппаратом исследования таких систем, описываемых стохастическими обыкновенными дифференциальными уравнениями (СОДУ) и их модификациями, является теория случайных марковских процессов.

2.1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АППАРАТ

2.1.1. Основы прикладной теории случайных процессов

2.1.1.1. Случайные функции и их характеристики

Понятие случайной функции является обобщением понятия случайной величины из теории вероятностей (ТВ).

Определение 2.1.1. Функция $X(t) \in \mathbb{X} \subset \mathbb{R}$ действительного переменного $t \in \mathbb{T} \subset \mathbb{R}$ называется *случайной*, если при каждом значении аргумента t она представляет собой случайную величину. Если роль t играет текущее время, то функция $X(t)$ называется *случайным процессом*.

Далее для удобства предполагается использование терминов "случайная функция" и "случайный процесс" (СП) как синонимов, сами эти функции аргумента t обозначаются прописными буквами $X(t)$, $Y(t)$ и т.д.

Определение 2.1.2. При фиксированном $t = t_0$ значение функции $X(t_0)$ представляет собой обычную случайную величину, называемую *сечением случайной функции* в момент t_0.

В рамках ТВ случайная величина записывается в виде функции элементарного события ω, появляющегося в результате испытания. Случайный процесс также можно представить в виде функции двух переменных $X(t, \omega)$, где $\omega \in \Omega$, $t \in \mathbb{T}$, $X(t, \omega) \in \mathbb{X}$: ω – элементарное событие, Ω – пространство элементарных исходов, t – параметр, $\mathbb{T}$ – множество значений аргумента t, $\mathbb{X}$ – множество возможных значений случайного процесса $X(t, \omega)$.

Случайную функцию можно рассматривать как совокупность случайных величин $\{X_t(\omega)\}$, зависящих от параметра t. Возможно и другое истолкование случайной функции, если ввести понятие ее реализации.

Определение 2.1.3. *Реализацией* (*траекторией*, *выборочной функцией*) случайной функции $X(t, \omega)$ называется неслучайная функция $x(t)$, в которую превращается случайная функция $X(t, \omega)$ в результате испытания (при фиксированном ω), т.е. конкретный вид, принимаемый случайной функцией $X(t)$. Бесконечная совокупность таких реализаций образует *статистический ансамбль реализаций*.

Таким образом, если в опыте наблюдают случайную функцию, то в действительности наблюдают одну из возможных ее реализаций; очевидно, при повторении опыта будет наблюдаться другая реализация. Отсюда следует, что случайная функция характеризуется множеством функций параметра t вида

$$X(t,\omega) = \{x_\omega(t), \quad \omega \in \Omega, \quad t \in \mathbb{T}\} \tag{2.1.1}$$

и вероятностной мерой, заданной на множестве функций (2.1.1). При этом каждая отдельная неслучайная функция $x_\omega(t)$ будет реализацией случайной функции $X(t,\omega)$.

В дальнейшем изложении будем опускать аргумент ω, но он будет подразумеваться по умолчанию.

Определение 2.1.4. Какое-либо значение x является *возможным значением* (или *состоянием*) случайного процесса $X(t)$, если в множестве $\mathbb{T}$ имеется такое t, что

$$\mathcal{P}(x-h < X(t) < x+h) > 0$$

для любого $h > 0$. При этом мощность множества Ω может быть произвольной.

Ниже, среди прочих, рассматриваются и непрерывные случайные процессы (более строгое определение дано ниже), т.е. процессы, у которых множества Ω и $\mathbb{T}$ имеют мощность континуума, а множество $\mathbb{X}$ совпадает с множеством $\mathbb{R}$ действительных чисел. Такие случайные процессы характеризуются тем, что в любом малом интервале Δt имеет место некоторое малое (порядка $\sqrt{\Delta t}$) изменение состояния[1].

При строгом определении случайных процессов нельзя ограничиться понятием σ-алгебры $\mathscr{A}$, состоящей из подмножеств пространства элементарных исходов Ω, понятием, введенным для задания случайных величин. Здесь требуется некоторое обобщение, связанное с развитием процессов во времени.

Определение 2.1.5. Пусть

$$\bar{\mathscr{A}} = \{A \,|\, \exists\, B, C \in \mathscr{A} \text{ такие, что } B \subset A \subset C, \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(C)\}.$$

Тогда $\bar{\mathscr{A}}$ – σ-алгебра, называемая *пополнением* $\mathscr{A}$. Если $\mathscr{A} = \bar{\mathscr{A}}$, то вероятностное пространство $\left(\Omega, \mathscr{A}, \mathcal{P}\right)$ называется *полным*.

[1] Сразу же отметим, что из рассмотрения не исключаются случайные параметры, которые можно трактовать как случайные функции, имеющие реализации вида $x_\omega(t) = \text{const}$ для любого ω.

Определение 2.1.6. *Фильтрация* – это семейство $\{\mathscr{F}_t,\ t \geqslant t_0\}$ неубывающих σ-алгебр из $\mathscr{A}$, т.е. $\mathscr{F}_t \subset \mathscr{F}_s \subset \mathscr{A}$ для всех $t_0 \leqslant t \leqslant s < +\infty$. Фильтрация *непрерывна слева*, если $\bigcup_{t<s} \mathscr{F}_t = \mathscr{F}_s$ для любого $t \geqslant t_0$. Если вероятностное пространство полное, фильтрация непрерывна слева, а $\mathscr{F}_{t_0}$ содержит все события, вероятности которых равны нулю, то говорят, что фильтрация удовлетворяет *обычным условиям*.

Определение 2.1.7. СП $X(t)$ *адаптирован*, если он $\mathscr{F}_t$-измерим.

В ряде задач случайные процессы бывает удобно выражать через простейшие (или "элементарные") случайные функции.

Определение 2.1.8. *Элементарной* (*квазидетерминированной*) *случайной функцией* называется функция аргумента t, зависимость которой от t представлена неслучайной функцией, параметризованной одной или несколькими случайными величинами.

Например, случайная функция, представимая в виде

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} U_i\, h_i(t),$$

где $h_i(t)$ – детерминированные функции, U_i – случайные величины, является элементарной.

Пусть сечение некоторого процесса при данном t является непрерывной случайной величиной. Тогда случайный процесс $X(t)$ при данном t определяется *одноточечной плотностью вероятности* (или *плотностью вероятности первого порядка*)

$$p_X^{[1]}(x,t) \equiv p_X(x,t)$$

или *одноточечной функцией распределения* (*функцией распределения первого порядка*)

$$F_X^{[1]}(x,t) \equiv F_X(x,t).$$

Очевидно, что плотность $p_X^{[1]}(x,t)$ и функция распределения $F_X^{[1]}(x,t)$ не дают исчерпывающее описание случайного процесса $X(t)$, ибо они не отражают зависимость между сечениями этого процесса в разные моменты времени.

Заметим, что функции распределения и плотности вероятности первого порядка часто используются следующие представления:

$$F_X(x,t) = \mathbb{E}\big[\mathbb{1}\big(x - X(t)\big)\big] = \langle \mathbb{1}\big(x - X(t)\big)\rangle,$$

$$p_X(x,t) = \mathbb{E}\big[\delta\big(X(t)-x\big)\big] = \langle\delta\big(X(t)-x\big)\rangle,$$

где $\mathbb{1}(\cdot)$ – *единичная функция* (*Хевисайда*), $\delta(\cdot)$ – *дельта-функция* Дирака.

Случайный процесс $X(t)$ представляет собой совокупность всех сечений при всевозможных значениях t. Поэтому для его описания необходимо рассматривать многомерную случайную величину $\big(X(t_1),\, X(t_2),\, ...,\, X(t_k)\big)$, состоящую из всех сечений этого процесса. В общем случае принципе совокупность таких сечений образует множество мощности континуум, но для описания конкретного случайного процесса нередко удается обойтись относительно небольшим количеством сечений.

Определение 2.1.9. Говорят, что случайный процесс имеет *порядок* k, если он полностью определяется совместной плотностью вероятности

$$p_X^{[k]}(x_1,t_1;x_2,t_2;...;x_k,t_k)$$

k произвольных сечений процесса, т.е. плотностью k-мерной случайной величины $\big(X(t_1),X(t_2),...,X(t_k)\big)$, где $X(t_i)$ – сечение случайного процесса $X(t)$ в момент времени t_i, $i = 1,\, 2,\, ...,\, k$.

Пусть задано произвольное число $s = 1,\, 2,\, 3,\, ...$ моментов времени $\big(t_1,t_2,...,t_s\big\} = \boldsymbol{t} \in \mathbb{T}^s$. Совокупность значений (сечений) случайного процесса в указанные моменты времени образует случайный вектор

$$\boldsymbol{X}^{[s]} = \big(X_1,X_2,...,X_s\big\} \in \mathbb{X}^s, \qquad X_i = X(t_i), \qquad i = 1,2,...,s.$$

Тогда вероятностными характеристиками случайного процесса $X(t)$ являются *s-точечные совместные функции распределения* (*функции распределения s-го порядка*) компонент векторов $\boldsymbol{X}$ (при различных s)

$$F_X^{[s]}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,) \equiv F_X^{[s]}(x_1,t_1;x_2,t_2;...;x_s,t_s) \stackrel{\text{def}}{\equiv}$$

$$\stackrel{\text{def}}{\equiv} \mathcal{P}(X_1 < x_1, X_2 < x_2, ..., X_s < x_s)\,.$$

Последовательность функций

$$\{F_X^{[s]}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\,), s = \overline{1,k}\} \stackrel{\text{def}}{\equiv}$$

$$\stackrel{\text{def}}{\equiv} \{F_X^{[1]}(x_1,t_1), F_X^{[2]}(x_1,t_1;x_2,t_2), ..., F_X^{[s]}(x_1,t_1;x_2,t_2;...;x_k,t_k)\}$$

с ростом s характеризует случайный процесс все более подробно.

Кроме функций распределения, случайные векторы $\boldsymbol{X}$ характеризуются *s-точечными плотностями вероятности* (*плотностями вероятности s-го порядка*):

$$p_X^{[s]}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) \stackrel{\text{def}}{\equiv} p_X^{[s]}(x_1,t_1;x_2,t_2;...;x_s,t_s) = \frac{\partial^s F_X^{[s]}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})}{\partial x_1 \partial x_2 ... \partial x_s}.$$

Свойства s-точечных плотностей вероятности:

1°. $p_X^{[s]}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) \geqslant 0$.

2°.

$$\int\limits_{\mathbb{X}^s} p_X^{[s]}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) d\boldsymbol{x} = 1$$

(*нормировка плотности*).

3°.

$$F_X^{[s]}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) = \int\limits_{-\infty}^{\boldsymbol{x}} p_X^{[s]}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{t})\, d\boldsymbol{z}.$$

4°.

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{X} \in \mathbb{D} \subset \mathbb{X}^s) = \int\limits_{\mathbb{D}} p_X^{[s]}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})\, d\boldsymbol{x}.$$

5°. Для $1 \leqslant m < s$

$$p_X^{[m]}(x_1,t_1;x_2,t_2;...;x_m,t_m) = \int\limits_{\mathbb{X}^{s-m}} p_X^{[s]}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})\, dx_{m+1}...dx_s$$

(*согласованность плотностей распределения*).

На основе s-точечной плотности можно получить различные $(s-m,m)$-*точечные условные плотности* (*условные плотности* $(s-m,m)$-*го порядка*):

$$\pi_X^{[s-m|m]}(x_{m+1},t_{m+1};...;x_s,t_s|x_1,t_1;x_2,t_2;...;x_m,t_m) = \\ = \frac{p_X^{[s]}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})}{p_X^{[m]}(x_1,t_1;...;x_m,t_m)}.$$

В частности, функция $\pi_X^{[1|1]}(x_2,t_2|x_1,t_1) \equiv \pi_X(x_2,t_2|x_1,t_1)$ называется *переходной плотностью вероятности*. Для условных плотностей выполняются условия нормировки типа $\mathbf{2}^\circ$.

Заметим, что если для некоторой функции $h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$ ($\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^s$) не выполняются соотношения

$$\lim_{|\boldsymbol{x}|\to+\infty} h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) = 0, \qquad \lim_{|\boldsymbol{x}|\to+\infty} \frac{\partial h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})}{\partial x_\ell} = 0, \quad \ell = \overline{1,s},$$

то она не будет обладать свойством $\mathbf{2}^\circ$, а следовательно, не будет s-точечной плотностью вероятности.

Для любых x, y, z, t, τ и θ верно соотношение

$$\pi_X(x,t|z,\theta) = \int\limits_{\mathbb{X}} \pi_X^{[1|2]}(x,t|y,\tau;z,\theta)\,\pi_X(y,\tau|z,\theta)\,dy, \tag{2.1.2}$$

являющееся аналогом формулы полной вероятности для случайных событий.

Имеют место следующие предельные свойства безусловных и условных распределений:

$$\lim_{t_1\to t_2} p_X^{[2]}(x_2,t_2;x_1,t_1) = p_X(x_1,t_1)\,\delta(x_2-x_1);$$

$$\lim_{t_1\to t_2} \pi(x_2,t_2|x_1,t_1) = \delta(x_2-x_1);$$

$$\lim_{t_1-t_2\to\infty} p_X^{[2]}(x_2,t_2;x_1,t_1) = p_X(x_1,t_1)\,p_X(x_2,t_2);$$

$$\lim_{t_1-t_2\to\infty} \pi(x_2,t_2|x_1,t_1) = p_X(x_2,t_2).$$

Если к плотности $p_X^{[s]}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$ применить преобразование Фурье (по компонентам вектора $\boldsymbol{x}$), то получим *s-точечную характеристическую функцию* (*характеристическую функцию s-го порядка*):

$$\begin{aligned}
\varphi_X^{[s]}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{t}) &\stackrel{\text{def}}{\equiv} \int\limits_{\mathbb{X}^s} \exp(i\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{x})\,p_X^{[s]}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})\,d\boldsymbol{x} \equiv \\
&\equiv \mathbb{E}[\exp(i\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{x})] \equiv \langle \exp(i\boldsymbol{\lambda}^{\intercal}\boldsymbol{x})\rangle, \qquad (2.1.3)\\
p_X^{[s]}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^s} \exp(-i\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{x})\,\varphi_X^{[s]}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{t}\,)\,d\boldsymbol{\lambda},
\end{aligned}$$

где $\boldsymbol{\lambda} = \big(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s\big)$, $\mathbb{E}[...]$ и $\langle ... \rangle$ – символы математического ожидания, $\boldsymbol{i}$ – мнимая единица.

Если для случайного процесса число s устремить к бесконечности, то совместная плотность вероятности $p_X^{[s]}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})$ превращается в *функционал плотности вероятности* $\mathbb{P}\big[\boldsymbol{x}\big]$, который определяет "континуальную плотность" вероятности, т.е. распределение в функциональном пространстве.

Подобная операция для векторных неслучайной функции $\boldsymbol{\lambda}(t)$ и случайного процесса $\boldsymbol{X}(t)$, для которых интеграл

$$\int_{\mathbb{T}} \boldsymbol{\lambda}(t) \cdot \boldsymbol{X}(t)\, dt$$

существует для почти всех реализаций $\boldsymbol{X}(t)$, приводит к понятию *характеристического функционала*

$$\Phi_X\big[\boldsymbol{\lambda}\big] \stackrel{\text{def}}{\equiv} \langle \exp\Big[\, \boldsymbol{i} \int_{\mathbb{T}} \boldsymbol{\lambda}(t) \cdot \boldsymbol{X}(t)\, dt \,\Big] \rangle, \tag{2.1.4}$$

полностью описывающего поведение случайного процесса.

Для более грубого, чем законы распределения, описания процесса $X(t)$ используют (смешанные) *начальные моментные функции* различных порядков (*корреляторы*)

$$m_{X\alpha_1\alpha_2...\alpha_s}(\boldsymbol{t}) \stackrel{\text{def}}{\equiv} \int\limits_{\mathbb{X}^s} \prod_{\ell=1}^{s} x_\ell^{\alpha_\ell}\, p_X^{[s]}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})\, d\boldsymbol{x}, \tag{2.1.5}$$

и (смешанные) *центральные моментные функции*

$$\mu_{X\alpha_1\alpha_2...\alpha_s}(\boldsymbol{t}) \stackrel{\text{def}}{\equiv} \int\limits_{\mathbb{X}^s} \prod_{\ell=1}^{s} \mathring{x}_\ell^{\alpha_\ell}\, p_X^{[s]}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})\, d\boldsymbol{x}, \qquad \mathring{x}_\ell = x_\ell^\circ = x_\ell - m_{X_\ell}. \tag{2.1.6}$$

Иначе соотношения (2.1.5) и (2.1.6) можно записать так:

$$m_{X\alpha}(\boldsymbol{t}) = \int\limits_{\mathbb{X}^s} x^\alpha\, p_X^{[s]}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})\, d\boldsymbol{x} \equiv \mathbb{E}[X^\alpha] \equiv \langle X^\alpha \rangle, \tag{2.1.7}$$

$$\mu_{X\alpha}(\boldsymbol{t}) = \int\limits_{\mathbb{X}^s} \mathring{x}^\alpha\, p_X^{[s]}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})\, d\boldsymbol{x} \equiv \mathbb{E}\Big[\mathring{X}^\alpha\Big] \equiv \langle \mathring{X}^\alpha \rangle. \tag{2.1.8}$$

Здесь $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s\}$ ($\alpha_i \geqslant 0$, $i = \overline{1,s}$) – мультииндекс, $|\alpha| = \sum_{k=1}^{s} \alpha_k = N \geqslant 0$ – порядок моментной функции, $\overset{\circ}{X}_\ell(t) \equiv X^\circ_\ell(t) = X_\ell(t) - m_{X_\ell}(t)$. При этом нулевой момент $m_{X0}(\boldsymbol{t})$ равен единице, что следует из условия нормировки **2°**.

Моментные функции нескольких порядков у различных процессов могут совпадать. Поэтому такие функции не могут характеризовать случайный процесс однозначно. Заметим, что с повышением порядка физическая значимость многократной корреляции уменьшается, хотя и значения $m_{X\alpha}(\boldsymbol{t})$ при $N \to +\infty$ стремиться к нулю не обязаны.

Исходя из определения характеристической функции $\varphi^{[s]}_X(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{t})$, можно ввести *кумулянтные функции*

$$\varkappa_{X\alpha}(\boldsymbol{t}) = (-1)^N \frac{\partial^N \ln \varphi^{[s]}_X(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{t})}{\partial \lambda^\alpha}\bigg|_{\boldsymbol{\lambda}=0}, \tag{2.1.9}$$

которые представляют собой коэффициенты разложения натурального логарифма характеристической функции в ряд Маклорена:

$$\psi^{[s]}_X(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{t}) = \ln \varphi^{[s]}_X(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{t}) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{i}^N}{\alpha!} \varkappa_{X\alpha}(\boldsymbol{t})\, \lambda^\alpha. \tag{2.1.10}$$

Левую часть равенства (2.1.10) называют *производящей функцией кумулянтов*.

Связь между характеристической и моментными функциями описывается формулой

$$m_{X\alpha}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{i}^{-N} \frac{\partial^N \varphi^{[s]}_X(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{t})}{\partial \lambda^\alpha}\bigg|_{\boldsymbol{\lambda}=0}. \tag{2.1.11}$$

В прикладной теории СП нередко используется еще один класс числовых характеристик – *квазимоментные функции*. Квазимоменты введены в работе [117] и определяются как коэффициенты разложения плотности вероятности в ряд по полиномам Эрмита [21].

Для решения многих задач в рамках *корреляционной теории* достаточно знать только первые моментные функции случайного процесса до второго порядка включительно.

Определение 2.1.10. *Математическим ожиданием* (*функцией математического ожидания*) случайного процесса $X(t)$ называется неслучайная функция $m_X(t)$, которая при любом значении переменной t равна

математическому ожиданию соответствующего сечения случайного процесса $X(t)$, т.е.

$$m_X(t) = \mathbb{E}[X(t)] = \langle\, X(t)\,\rangle = \int\limits_{\mathbb{X}} x\, p_X(x,t)\, dx. \tag{2.1.12}$$

Определение 2.1.11. *Дисперсией* (*функцией дисперсии*) случайного процесса $X(t)$ называется неслучайная функция $\mathcal{D}_X(t)$, которая при любом значении переменной t равна дисперсии соответствующего сечения случайного процесса $X(t)$, т.е.

$$\mathcal{D}_X(t) = \sigma_X^2(t) = \mathbb{D}[X(t)] = \mathbb{E}\Big[\big\{X(t) - m_X(t)\big\}^2\Big] =$$

$$= \langle\, \big[X(t) - m_X(t)\big]^2 \,\rangle = \int\limits_{\mathbb{X}} \big[x - m_X(t)\big]^2\, p_X(x,t)\, dx. \tag{2.1.13}$$

Определение 2.1.12. *Средним квадратичным отклонением* (СКО, *функцией среднего квадратичного отклонения*) $\sigma_X(t)$ случайного процесса $X(t)$ называется арифметическое значение квадратного корня из его дисперсии, т.е. $\sigma_X(t) = \sqrt{\mathcal{D}_X(t)}$.

Математическое ожидание случайного процесса характеризует среднюю траекторию всех возможных его реализаций, а его среднее квадратичное отклонение – разброс реализаций относительно этой средней траектории.

Определение 2.1.13. *Центрированной случайной функцией* называют разность между случайной функцией и ее математическим ожиданием: $\mathring{X}(t) = X(t) - m_X(t)$. Для этой функции

$$\mathbb{E}\big[\mathring{X}(t)\big] \equiv 0.$$

Пусть

$$Y(t) = \frac{\mathring{X}(t)}{\sigma_X(t)}.$$

Тогда

$$\mathbb{E}[Y(t)] = 0, \qquad \mathcal{D}_Y(t) = 1. \tag{2.1.14}$$

Такой процесс $Y(t)$ называется *стандартным*.

Определение 2.1.14. (*Авто*)*Ковариационной функцией* (КФ) случайного процесса $X(t)$ называется неслучайная функция

$$\mathcal{C}_{XX}(t_1,t_2) \equiv \mathbb{E}\Big[\mathring{X}(t_1)\,\mathring{X}(t_2)\Big] \equiv \mathbb{E}[X(t_1)\,X(t_2)] - m_X(t_1)\,m_X(t_2) \equiv$$
$$\equiv \operatorname{cov}\big(X(t_1)\,X(t_2)\big) = \int\limits_{\mathbb{X}^2} \mathring{x}_1\,\mathring{x}_2\,p_X^{[2]}(x_1,t_1;x_2,t_2)\,dx_1\,dx_2 \quad (2.1.15)$$

($\mathring{X}(t_i) \equiv \mathring{X}_i = X(t_i) - m_X(t_i)$, $i = 1, 2$) двух переменных t_1 и t_2, которая для каждой пары значений t_1 и t_2 из множества $\mathbb{T}$ равна ковариации соответствующих сечений $X(t_1)$ и $X(t_2)$ случайного процесса $X(t)$. Дисперсия случайного процесса $X(t)$ равна ковариационной функции при одинаковых значениях аргументов: $\mathcal{D}_X(t) = \mathcal{C}_{XX}(t,t)$.

До сих пор в части русскоязычной технической литературы, в частности по системам автоматического регулирования, для функции $\mathcal{C}_{XX}(t_1,t_2)$ используется термин *корреляционная функция*. Но в настоящее время этот термин правильнее использовать для ссылки на следующее соотношение:

$$\mathcal{R}_{XX}(t_1,t_2) = \mathcal{C}_{XX}(t_1,t_2) + m_X(t_1)\,m_X(t_2) \equiv$$
$$\equiv \int\limits_{\mathbb{X}^2} x_1\,x_2\,p_X^{[2]}(x_1,t_1;x_2,t_2)\,dx_1\,dx_2.$$

КФ $\mathcal{C}_{XX}(t_1,t_2)$ характеризует не только степень тесноты линейной зависимости между двумя сечениями, но и разброс этих сечений относительно математического ожидания $m_X(t)$. Известно, что для оценки связи между случайными величинами X_1 и X_2 более удобен безразмерный коэффициент корреляции $\rho_{X_1X_2}$ ($|\rho_{X_1X_2}| \leqslant 1$). Его аналогами являются нормированная (авто) ковариационные функция случайного процесса.

Определение 2.1.15. *Нормированной (авто)ковариационной функцией* (НАКФ) случайного процесса $X(t)$ называется функция, определяемая соотношением

$$\rho_{XX}(t_1,t_2) = \frac{\mathcal{C}_{XX}(t_1,t_2)}{\sigma_X(t_1)\,\sigma_X(t_2)} = \frac{\mathcal{C}_{XX}(t_1,t_2)}{\sqrt{\mathcal{D}_X(t_1)\,\mathcal{D}_X(t_2)}}\,. \quad (2.1.16)$$

Заметим, что все приведенные определения и свойства справедливы как для непрерывных случайных процессов, так и для случайных последовательностей. Однако для непрерывного процесса моменты t_1, t_2, ... могут быть любыми в непрерывной области определения процесса, а для случайной последовательности они должны совпадать с дискретными моментами существования элементов последовательности.

В конкретных приложениях обычно исследуется поведение совокупности случайных процессов $X_1(t)$, $X_2(t)$, ..., $X_n(t)$. Каждый из процессов $X_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, можно рассматривать как компоненту векторного случайного процесса $\boldsymbol{X}(t)$ со значениями в n-мерном пространстве $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \times ... \times \mathbb{X}_n$ (заметим, то выше вектор состоял из случайных величин). На такие векторные процессы естественным образом переносятся понятия, введенные для отдельных случайных функций:

1) $F_X^{[s]}(\boldsymbol{x}_1, t_1; \boldsymbol{x}_2, t_2; ...; \boldsymbol{x}_s, t_s)$ – *s-точечная функция распределения* (*функция распределения s-го порядка*);

2) $p_X^{[s]}(\boldsymbol{x}_1, t_1; \boldsymbol{x}_2, t_2; ...; \boldsymbol{x}_s, t_s)$ – *s-точечная плотность вероятности* (*плотность вероятности s-го порядка*);

3) $\pi_X^{[k|m]}(\boldsymbol{x}_1, t_1; \boldsymbol{x}_2, t_2; ...; \boldsymbol{x}_k, t_k \,|\, \boldsymbol{y}_1, \tau_1; \boldsymbol{y}_2, \tau_2; ...; \boldsymbol{y}_m, \tau_m)$ – *(k,m)-точечная условная плотность* (*условная плотность (k,m)-го порядка*, $\pi_X(\boldsymbol{x}, t \,|\, \boldsymbol{y}, \tau) \equiv \pi_X^{[1|1]}(\boldsymbol{x}, t \,|\, \boldsymbol{y}, \tau)$ – *переходная плотность вероятности*);

4) $\varphi_X^{[s]}(\boldsymbol{\lambda}_1, t_1; \boldsymbol{\lambda}_2, t_2; ...; \boldsymbol{\lambda}_s, t_s)$ – *s-точечная характеристическая функция* (*характеристическая функция s-го порядка*);

5) $\boldsymbol{m}_X(t) = \mathbb{E}[\boldsymbol{X}(t)]$ – *вектор математических ожиданий* (*вектор средних*, *вектор функций математического ожидания*);

6) $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(t_1, t_2) = \{\mathcal{C}_{X_i X_j}(t_1, t_2)\}$ – *матрица ковариационных функций*, состоящая из *взаимных ковариационных* (*кросс-ковариационных*) и *автоковариационных функций* процессов $X_i(t)$ и $X_j(t)$:

$$\mathcal{C}_{X_i X_j}(t_1, t_2) = \mathbb{E}\big[\{X_i(t_1) - m_{X_i}(t_1)\}\{X_j(t_2) - m_{X_j}(t_2)\}\big];$$

7) $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}(t) = \{\mathcal{K}_{X_i X_j}(t)\} = \boldsymbol{\mathcal{C}}_X(t,t)$ – *матрица дисперсий* (*матрица функций дисперсии*), или *матрица ковариаций* (*матрица функций ковариации*) с компонентами $\mathcal{K}_{X_i X_i}(t) \equiv \mathcal{D}_{X_i}(t)$.

При этом свойства вероятностных характеристик отдельных СП сохраняются, но связи между компонентами векторных случайных процессов влекут необходимость учета дополнительных свойств у вводимых в рассмотрение объектов. Например, рассмотрим взаимную ковариационную функцию $\mathcal{C}_{XY}(t_1, t_2) \equiv \mathcal{C}_{X_1 X_2}(t_1, t_2)$ случайных процессов $X(t) \equiv X_1(t)$ и $Y(t) \equiv X_2(t)$. Используя эту функцию, можно ввести *нормиро-*

ванную взаимную ковариационную функцию $\rho_{XY}(t_1, t_2)$ случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$:

$$\rho_{XY}(t_1, t_2) = \frac{\mathcal{C}_{XY}(t_1, t_2)}{\sigma_X(t_1)\,\sigma_Y(t_2)}.$$

Определение 2.1.16. Если функция $\mathcal{C}_{XY}(t_1, t_2)$ равна нулю при любых t_1 и t_2, то случайные процессы $X(t)$ и $Y(t)$ называются *некоррелированными.*

Определение 2.1.17. Случайные процессы $X(t)$ и $Y(t)$ называются *статистически независимыми*, если для любых t_1 и t_2 из множества $\mathbb{T}$ совместная плотность вероятности $p^{[2]}_{XY}(x, t_1; y, t_2)$ СП $X(t)$ и $Y(t)$ равна произведению частных одноточечных плотностей вероятности $p_X(x, t_1)$ и $p_Y(y, t_2)$ процессов $X(t)$ и $Y(t)$.

Из статистической независимости СП вытекает их некоррелированность. В общем случае обратное утверждение не верно.

Несложно ввести понятие независимых случайной величины и случайного процесса.

Определение 2.1.18. Если компоненты матрицы ковариаций $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}(t)$ ограничены для любого $t \in \mathbb{T}$, то функции $X_1(t)$, $X_2(t)$, ..., $X_n(t)$ называются *случайными процессами второго порядка.*

Представление случайного процесса $X(t)$ в виде суммы

$$X(t) = m_X(t) + \sum_{k=1}^{+\infty} V_k\,\psi_k(t),$$

где V_ν – некоррелированные случайные величины с дисперсиями $\mathcal{D}_k$, а $\psi_k(t)$ – детерминированные координатные функции, называют *каноническим разложением случайного процесса.*

Если в качестве координатных функций использовать комплексные гармоники $\exp(\boldsymbol{i}\,\omega_\nu\,t)$, то получим *спектральное* или *частотное разложение процесса* (на конечном интервале времени).

К специальному классу канонических относится *разложение Карунена–Лоэва* (КЛР, KLD), которое определено на конечном промежутке $[a, b]$, а координатные функции $\psi_k(t)$ являются собственными функциями для ковариационной функции:

$$\int_a^b \mathcal{C}_{XX}(t, \tau)\,\psi_\ell(\tau)\,d\tau = \lambda_\ell\,\psi_\ell(t),$$

где λ_ℓ – собственные числа. При этом

$$\mathcal{D}_X(t) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \lambda_\ell \, \psi_\ell^2(t), \qquad \int_a^b \mathcal{D}_X(\tau)\, d\tau = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \lambda_\ell.$$

2.1.1.2. Классификация случайных процессов

Случайные процессы принято классифицировать по тем или другим признакам, учитывающим плавность или скачкообразность реализаций, фиксированность или случайность моментов, в которые могут происходить скачки, конечность (счетность) или бесконечность множества состояний СП, вид закона распределения отдельного сечения процесса или совокупности его сечений и т.д. Рассмотрим элементарную классификацию случайных процессов – "по времени" и "по состояниям".

Определение 2.1.19. Случайный процесс $X(t)$ называется *процессом с дискретным временем*, если система $\mathbb{S}$, поведение которой он описывает, может менять свои состояния только в моменты t_1, t_2, ..., t_k, ..., число которых *конечно* или *счетно*. Здесь множество $\mathbb{T}$ является дискретным.

Если рассматривается одномерный случайный процесс $X(t)$ с дискретным временем (моменты t_1, t_2, ...), то его сечения в эти моменты образуют *последовательность случайных величин*, или *случайную последовательность*: $X(t_1)$, $X(t_2)$, ..., а сами процессы называют *точечными*. В качестве аргумента последовательности может быть выбран номер значения момента времени перехода: $X(1)$, $X(2)$, ...

Определение 2.1.20. Пусть $\{\, X_k,\ k \in \mathbb{N} \,\}$ – последовательность независимых случайных величин. Тогда случайный процесс с дискретным временем $\{Y_\ell,\ \ell \in \mathbb{N}_0 \}$, где Y_0 – начальное состояние,

$$Y_\ell = Y_0 + \sum_{k=1}^{\ell} X_k, \qquad \ell > 1,$$

называется одномерным дискретным *случайным блужданием*.

Определение 2.1.21. Пусть $\{\, X_k,\ k \in \mathbb{N} \,\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, таких, что $X_k \geqslant 0$, $X_k \neq \text{const}$ почти наверное. Пусть $Y_0 = 0$, $Y_k = Y_{k-1} + X_k$, Тогда процесс $\{\, Z_t,\ t \geqslant 0 \,\}$, где

$$Z_t = \sup_{Y_k \leqslant t} k,$$

называется *процессом восстановления*, построенным по случайным величинам $\{ X_k,\ k \in \mathbb{N} \}$.

Определение 2.1.22. Случайный процесс $X(t)$ называется *процессом с непрерывным временем*, если переходы системы $\mathbb{S}$ из состояния в состояние могут происходить в любой момент t наблюдаемого периода $\mathbb{T}$. Для процесса с непрерывным временем множество $\mathbb{T}^*$ моментов, когда система $\mathbb{S}$ меняет свое состояние, несчетно (т.е. эти моменты непрерывно заполняют рассматриваемый промежуток временно́й оси).

Определение 2.1.23. Случайный процесс, протекающий в системе $\mathbb{S}$, называется *процессом с дискретными состояниями*, если в любой момент времени t множество его состояний $\mathbb{X}$ конечно или счетно; другими словами, если его сечение в любой момент t характеризуется дискретной случайной величиной $X(t)$ (в многомерном случае – несколькими дискретными случайными величинами).

Определение 2.1.24. Одномерный случайный процесс $X(t)$ называется *процессом с непрерывными состояниями*, если его сечение в любой момент t представляет собой не дискретную, а непрерывную (или смешанную) случайную величину и, значит, множество ее значений $\mathbb{X}$ несчетно. Аналогично, многомерный (векторный) случайный процесс называется *процессом с непрерывными состояниями*, если при любом t множество возможных значений случайного вектора, определяющего состояние системы $\mathbb{S}$, в которой протекает процесс, несчетно.

Разумеется, все случайные процессы с "качественными" состояниями относятся к категории процессов с дискретными состояниями; сечение такого процесса представляет собой случайное событие – аналог дискретной случайной величины.

Таким образом, в зависимости от характера множества $\mathbb{T}^*$ значений аргумента t, в которые возможны переходы системы из состояния в состояние, а также множества $\mathbb{X}$ самих состояний все СП можно разделить на четыре класса:

a) процессы с дискретными состояниями и дискретным временем (дискретные случайные последовательности);

b) процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем (непрерывнозначные случайные последовательности);

c) процессы с непрерывными состояниями и дискретным временем (дискретные случайные процессы);

d) процессы с непрерывными состояниями и непрерывным временем (непрерывные в случае отсутствия скачков или смешанные при их наличии (обобщенные) случайные процессы).

Если длины временны́х интервалов между изменениями значений не важны, то случайные последовательности обычно обозначают $\{X_t\}$ ($t = 0, 1, 2, ...$), а их реализации $\{x_t\}$.

Определение 2.1.25. Если множество значений $\mathbb{T}$ индекса t конечно, т.е. $t = 0, 1, 2, ..., N$, то случайную последовательность называют (*стохастическим*) *временны́м рядом*.

При этом предполагается, что как последовательность, так и ряд сформированы на основе равномерно поступающих во времени данных, т.е. $t_k = t_{k-1} + \Delta t$, где $\Delta t = \text{const}$ – так называемый *период дискретизации*.

Возможны более сложные конструкции случайных процессов. Некоторые из таких конструкций будут рассмотрены далее.

2.1.1.3. Формы и типы случайных процессов

Рассмотрим некоторые специальные формы СП.

Определение 2.1.26. $X(t)$ – случайный процесс *с независимыми значениями в несовпадающие моменты времени* (или *совершенно случайным процессом*, или *шумом*), если для любой последовательности t_1, t_2, ..., t_s значений параметра t ($t_i \neq t_j$, $i, j = 1, 2, .., s$) случайные величины $X(t_1)$, ..., $X(t_s)$ независимы в совокупности.

В этом случае

$$p_X^{[s]}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}) = \prod_{k=1}^{s} p_X(x_k, t_k).$$

Определение 2.1.27. Процесс $X(t)$ называют случайным *с некоррелированными приращениями*, если его приращения для любых непересекающихся интервалов $X(t_2) - X(t_1)$ и $X(t_4) - X(t_3)$, $t_1 < t_2 \leqslant t_3 < t_4$, некоррелированы.

Определение 2.1.28. Процесс $X(t)$ называют случайным *с независимыми приращениями*, если для любой последовательности моментов времени $t_1 < t_2 < ... < t_s$ случайные величины

$$X(t_1), \quad \Delta X_1 = X(t_2) - X(t_1), \quad ..., \quad \Delta X_{s-1} = X(t_s) - X(t_{s-1}), \quad ...$$

независимы.

Для такого процесса любое конечномерное распределение определяется двумерным распределением. Заметим, что в случае дискретного времени процесс с независимыми приращениями является случайным блужданием.

Определение 2.1.29. Процесс $X(t)$ с независимыми приращениями называется *однородным*, если распределение случайной величины ΔX_i зависит от разности $t_{i+1} - t_i$ и не зависит от t_{i+1} и t_i в отдельности. В противном случае процесс $X(t)$ называется *неоднородным*.

Определение 2.1.30. Случайный процесс называется *сепарабельным*, если с вероятностью единица поведение траекторий такого процесса может быть восстановлено по их значениям на некотором счетном, всюду плотном множестве точек.

Для сепарабельных процессов вероятности упомянутых множеств однозначно определяются конечномерными распределениями. Дж. Дуб [65] показал, что для любого случайного процесса можно найти эквивалентный ему сепарабельный процесс.

Определение 2.1.31. Случайный процесс $X(t)$ называется:

– *стационарным в узком смысле*, если любые его вероятностные характеристики инвариантны относительно сдвига вдоль временно́й оси: для любых $\tau > 0$ и $s \in \mathbb{N}$

$$p_X^{[s]}(x_1, t_1; x_2, t_2; ...; x_s, t_s) = p_X^{[s]}(x_1, t_1 + \tau; x_2, t_2 + \tau; ...; x_s, t_s + \tau);$$

– *стационарным в широком смысле*, если его среднее $m_X(t)$ постоянно, а ковариационная функция зависит только от разности моментов времени

$$\mathcal{C}_{XX}(t_1, t_2) = \mathcal{C}_{XX}(t_2 - t_1) = \mathcal{C}_{XX}(\tau), \qquad \tau = t_2 - t_1.$$

Одноточечная плотность вероятности для стационарных процессов в узком смысле не зависит от времени. Эти процессы являются и стационарными в широком смысле. Для всех семейств стационарных процессов дисперсия постоянна: $\mathcal{D}_X(t) = \mathcal{C}_{XX}(t, t) = \mathcal{C}_{XX}(0) \equiv \text{const}$.

Для стационарного случайного процесса всегда можно указать такое $\tau_0 < \tau$, при котором величины $X(t)$ и $X(t + \tau)$ для любого t можно считать практически некоррелированными в том смысле, что при $\tau > \tau_0$ абсолютное значение нормированной ковариационной функции остается

меньше заданного, например $|\rho(\tau)| < 0{,}05$. Величину τ_0 называют *интервалом корреляции*. Есть и другие способы определения этой величины, например,

$$\tau_0 = \int_0^{+\infty} |\rho(\tau)|\, d\tau.$$

Понятие стационарности распространяется и на случайные последовательности. Однако в последнем случае необходимо иметь в виду, что расстояние между сечениями представляет собой целое число периодов дискретизации ($\tau = m\,\Delta t$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, ...$), а ковариационная функция является *решетчатой*. Ее обозначают символом $\mathcal{C}_{XX}[m]$.

Определение 2.1.32. Случайные процессы $X(t)$ и $Y(t)$ называются *стационарно связанными в узком смысле*, если их совместная конечномерная функция распределения порядка (s, q), $s, q = 1, 2, ...$, не зависит от положения начала отсчета времени, т.е.

$$F_{XY}^{[s+q]}(x_1, t_1; x_2, t_2; ...; x_s, t_s; y_1, t_1; y_2, t_2; ...; y_q, t_q) =$$
$$= F_{XY}^{[s+q]}(x_1, t_1 + \tau; x_2, t_2 + \tau; ...; x_s, t_s + \tau; y_1, t_1 + \tau; y_2, t_2 + \tau; ...; y_q, t_q + \tau)$$

для любых $\tau > 0$, s, $q = 1, 2, ...$

Определение 2.1.33. Случайные процессы $X(t)$ и $Y(t)$ называются *стационарно связанными в широком смысле*, если $X(t)$ и $Y(t)$ стационарны в широком смысле по отдельности, а $\mathcal{C}_{XY}(t_1, t_2) = \mathcal{C}_{XY}(t_2 - t_1) = \mathcal{C}_{XY}(\tau)$, $\tau = t_2 - t_1$.

Определение 2.1.34. Случайный процесс $X(t)$, который не является стационарным в каком-либо смысле, называется *нестационарным*.

Большую роль в некоторых областях науки, например в радиотехнике, играют так называемые *периодически нестационарные процессы*, у которых одноточечная плотность вероятности, а значит, и моментные функции периодически зависят от t [268].

Определение 2.1.35. Случайный процесс $X(t)$ называется *гауссовским*, если совместная плотность любой конечной совокупности $\boldsymbol{X}$ случайных величин $X_k = X(t_k)$, $k = \overline{1, s}$, нормальна, т.е. ее плотность равна

$$p_X^{[s]}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}) = \mathcal{N}\big(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}; \boldsymbol{m}_X, \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}\big) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^s\,|\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}|}}\,\exp\Big[-\frac{1}{2}\,(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m}_X)^{\intercal}\,\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^{-1}\,(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m}_X)\Big], \quad (2.1.17)$$

где

$$\boldsymbol{m}_X = \mathbb{E}[\boldsymbol{X}]\,, \qquad \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX} = \mathbb{E}[(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{m}_X)(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{m}_X)^{\intercal}]\,, \quad (2.1.18)$$

$$\boldsymbol{X} = \big\{X_1, X_2, ..., X_s\big\}^{\intercal} \equiv \big\{X(t_1), X(t_2), ..., X(t_s)\big\}^{\intercal}, \quad (2.1.19)$$

$$\boldsymbol{m}_X = \big\{m_{X_1}, m_{X_2}, ..., m_{X_s}\big)^{\intercal} \equiv \big\{m_X(t_1), m_X(t_2), ..., m_X(t_s)\big\}^{\intercal}. \quad (2.1.20)$$

С использованием обозначений (2.1.18)–(2.1.20) соотношение для характеристической функции гауссовского процесса выглядит так:

$$\varphi_X(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{t}) = \exp\Big[\boldsymbol{i}\,\boldsymbol{m}_X^{\intercal}\,\boldsymbol{\lambda} - \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\lambda}^{\intercal}\,\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}\,\boldsymbol{\lambda}\Big].$$

Характеристический же функционал этого процесса вычисляется по формуле

$$\Phi_X\big[\lambda\big] = \exp\Big[\boldsymbol{i}\int_{\mathbb{T}} m_X(t)\,\lambda(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}} \mathcal{C}_{XX}(t_1,t_2)\,\lambda(t_1)\,\lambda(t_1)\,dt_1\,dt_2\Big].$$

Из последних соотношений следует, что гауссовский процесс полностью определяется функцией математического ожидания $m_X(t)$ и ковариационной функцией $\mathcal{C}_{XX}(t,\tau)$, например

$$\mu_{X1111}(t_1,t_2,t_3,t_4) = \mathcal{C}_{XX}(t_1,t_2)\,\mathcal{C}_{XX}(t_3,t_4) + \\ + \mathcal{C}_{XX}(t_1,t_3)\,\mathcal{C}_{XX}(t_2,t_4) + \mathcal{C}_{XX}(t_1,t_4)\,\mathcal{C}_{XX}(t_2,t_3).$$

Описание гауссовых процессов с помощью характеристических функций выгодно в тех случаях, когда соответствующая ковариационная матрица $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}$ вырождена.

Гауссовские СП наиболее часто встречаются на практике и поэтому занимают особое положение среди других случайных процессов: большинство физических случайных процессов, таких как дробовой и тепловой шум (см. далее), собственный шум радиоприемников, флуктуационные токи и напряжения в электронных устройствах, атмосферные и космические шумы, представляет собой сумму большого числа сравнительно слабых элементарных импульсов, возникающих в случайные моменты времени. Как известно, на основании центральной предельной теоремы можно ожидать, что гауссовский случайный процесс возникает всякий раз, когда некий процесс представляет собой сумму очень большого числа малых

независимых случайных эффектов в каждый момент времени [1002]. При этом лишь важно, чтобы влияние отдельных слагаемых на сумму было равномерно малым. Отсюда следует, что гауссовские процессы являются моделями или, по крайней мере, идеализациями многих физических явлений.

Линейные комбинации, производные и интегралы гауссовских процессов (см. раздел 3) и любые другие линейные преобразования таких процессов снова приводят к гауссовским процессам, т.е. для анализа линейных систем достаточно использовать корреляционную теорию. Кроме того, можно показать, что гауссовский процесс стационарный в широком смысле является стационарным и в узком смысле.

Пример 2.1.1. Двумерная гауссова плотность определяется соотношением

$$p(x_1,t_1;x_2,t_2) \equiv \mathcal{N}(x_1,t_1;x_2,t_2;\boldsymbol{m}_X,\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}) = \\ = \frac{1}{2\pi\sqrt{|\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}|}}\,\exp\Big[-\frac{u_1^2-2\,r\,u_1\,u_2+u_2^2}{2\,(1-r^2)}\Big],$$

где

$$\boldsymbol{m}_X=\big(m_1,m_2\big)^{\mathsf{T}},\quad \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}=\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & r\,\sigma_1\,\sigma_2\\ r\,\sigma_1\,\sigma_2 & \sigma_2^2,\end{bmatrix},\quad |\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}|=\sigma_1^2\,\sigma_2^2\,(1-r^2),$$

$$r=\rho_X(t_1,t_2),\quad m_i=m_X(t_i),\quad \sigma_i=\sigma_X(t_i),\quad u_i=\frac{x_i-m_i}{\sigma_i},\quad i=1,2,$$

$\rho_X(t_1,t_2)$ – нормированная ковариационная функция. ►

Определение 2.1.36. Случайный процесс, для которого при любых $t_1<<t_2<...<t_s$ верно соотношение

$$F_X^{[1|s-1]}(x_s,t_s|x_{s-1},t_{s-1};...;x_1,t_1)=F_X^{[1|1]}(x_s,t_s|x_{s-1},t_{s-1}), \qquad (2.1.21)$$

где $F(...|...)$ – *условная функция распределения*, называется *марковским*.

Такой процесс полностью характеризуется распределением второго порядка и является процессом без последействия. Это означает, что будущее состояние X_s и прошлые состояния X_{s-2}, X_{s-3}, ... марковского процесса при фиксированном настоящем X_{s-1} независимы. В этом смысле этот процесс "похож" на решение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{dy(t)}{dt}=f\big(y(t),t\big), \qquad t>t_0,$$

которое зависит от $y(t_0)$ и не зависит от производной любого порядка в момент t_0. Это выражается в том, что для марковских процессов эволюция вероятности перехода $\mathsf{P} = \mathcal{P}(X(t) \leqslant x | X(t_0) = x)$ описывается уравнением вида [288]

$$\frac{d\mathsf{P}}{dt} = A\,\mathsf{P},$$

где A – некоторый линейный оператор, что позволяет исследовать поведение таких процессов при помощи хорошо разработанных методов решения соответствующих дифференциальных уравнений.

Определение 2.1.37. Пусть $\{X(t),\ t \in \mathbb{T}\}$ $(\mathbb{T} \subset \mathbb{R})$ – случайный процесс, s-точечные плотности вероятностей распределения этого процесса $p_X^{[s]}(x_1, t_1; x_2, t_2; ...; x_s, t_s)$ заданы для любых $s \geqslant 1$ и $t_k \in \mathbb{T}$, $k = 1, 2, ..., s$, таких, что $t_1 < t_2 < ... < t_s$. Если при этом условная плотность вероятности удовлетворяет равенству

$$\pi_X^{[1|s-1]}(x_s, t_s \,|\, x_{s-1}, t_{s-1}; ...; x_1, t_1) = \pi_X(x_s, t_s | x_{s-1}, t_{s-1}), \qquad (2.1.22)$$

то $X(t)$ называют *марковским процессом*. Соотношение (2.1.22) называется *марковским свойством*.

В связи с тем, что марковские процессы занимают особое положение в теории случайных процессов и ее приложениях, в далее они будут рассмотрены дополнительно. На данном этапе отметим лишь то, что *любой конечномерный закон распределения марковского процесса выражается через его двумерный закон распределения*, так как

$$\begin{aligned}
&p_X^{[s]}(x_1, t_1; x_2, t_2; ...; x_s, t_s) = \\
&= \pi_X^{[1|s-1]}(x_s, t_s | x_{s-1}, t_{s-1}; ...; x_1, t_1) \cdot p_X^{[s-1]}(x_1, t_1; x_2, t_2; ...; x_{s-1}, t_{s-1}) = \\
&\quad = \pi_X(x_s, t_s | x_{s-1}, t_{s-1}) \cdot p_X^{[s-1]}(x_1, t_1; x_2, t_2; ...; x_{s-1}, t_{s-1}) = ... = \\
&\quad\quad = \pi_X(x_s, t_s | x_{s-1}, t_{s-1}) \cdot \pi_X(x_{s-1}, t_{s-1} | x_{s-2}, t_{s-2}) \times \\
&\quad\quad\quad \times ... \times \pi_X(x_2, t_2 | x_1, t_1) \cdot p_X(x_1, t_1).
\end{aligned}$$

Остановимся подробнее на соотношениях, характерных для марковских процессов, получивших широкое применение при решении многих практических задач.

Требование, накладываемое на условную плотность распределения векторного марковского процесса, можно записать так:

$$p_X(\boldsymbol{x}_q, t_q; \boldsymbol{x}_{q-1}, t_{q-1}; ...|\boldsymbol{y}_k, \tau_k; \boldsymbol{y}_{k-1}, \tau_{k-1}; ...) = \\ = p_X(\boldsymbol{x}_q, t_q; \boldsymbol{x}_{q-1}, t_{q-1}; ...|\boldsymbol{y}_k, \tau_k), \quad (2.1.23)$$

где $t_q \geqslant t_{q-1} \geqslant ... \geqslant \tau_k \geqslant \tau_{k-1} \geqslant ....$ Это означает, что плотность распределения любого порядка векторного процесса $\boldsymbol{X}(t)$ можно определить через переходную плотность $\pi(\boldsymbol{x}, t|\boldsymbol{y}, \tau)$ с помощью соотношения

$$p_X^{[q]}(\boldsymbol{x}_q, t_q; \boldsymbol{x}_{q-1}, t_{q-1}; ...; \boldsymbol{x}_1, t_1) = \pi_X(\boldsymbol{x}_q, t_q|\boldsymbol{x}_{q-1}, t_{q-1}) \times \\ \times \pi_X(\boldsymbol{x}_{q-1}, t_{q-1}|\boldsymbol{x}_{q-2}, t_{q-2}) ... \pi_X(\boldsymbol{x}_2, t_2|\boldsymbol{x}_1, t_1)\, p_X(\boldsymbol{x}_1, t_1). \quad (2.1.24)$$

Кроме того, марковский процесс остается таковым и в обратном времени [288, 1002]. Заметим также, что компоненты векторного марковского процесса сами марковскими процессами могут и не быть.

Из равенства

$$\pi_X(\boldsymbol{x}, t \,|\, \boldsymbol{y}, \tau) = \frac{p_X^{[2]}(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{y}, \tau)}{p_X(\boldsymbol{y}, \tau)} \quad (2.1.25)$$

следует, что

$$p_X(\boldsymbol{x}, t) = \int\limits_{\mathbb{X}} \pi_X(\boldsymbol{x}, t \,|\, \boldsymbol{y}, \tau)\, p_X(\boldsymbol{y}, \tau)\, d\boldsymbol{y}. \quad (2.1.26)$$

Кроме того, для любого марковского процесса верно *уравнение Чэпмена–Колмогорова*

$$\pi_X(\boldsymbol{x}, t \,|\, \boldsymbol{z}, \theta) = \int\limits_{\mathbb{X}} \pi_X(\boldsymbol{x}, t \,|\, \boldsymbol{y}, \tau)\, \pi_X(\boldsymbol{y}, \tau \,|\, \boldsymbol{z}, \theta)\, d\boldsymbol{y}, \quad (2.1.27)$$

называемое также *уравнением Смолуховского* и являющееся следствием соотношения (2.1.2). Уравнение (2.1.27) может быть записано и в следующей форме [1002]:

$$\pi_X(\boldsymbol{x}, t|\boldsymbol{y}, \tau; \boldsymbol{z}, \theta) = \int\limits_{\mathbb{X}} \pi_X(\boldsymbol{x}, t \,|\, \boldsymbol{q}, s; \boldsymbol{y}, \tau)\, \pi_X(\boldsymbol{q}, s \,|\, \boldsymbol{y}, \tau; \boldsymbol{z}, \theta)\, d\boldsymbol{q}, \quad (2.1.28)$$

где $t \geqslant s \geqslant \tau \geqslant \theta$.

Определение 2.1.38. Марковский процесс $X(t)$ называется *непрерывным*, если при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\Delta t \to +0} \int\limits_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|>\varepsilon} \pi_X(\boldsymbol{x}, t + \Delta t|\boldsymbol{y}, t)\, d\boldsymbol{x} = 0. \quad (2.1.29)$$

Определение 2.1.39. Марковский процесс будет *однородным во времени*, если переходная плотность вероятности зависит только от разности временны̀х аргументов $\theta = t - \tau$, т.е.

$$\pi_X(\boldsymbol{x}, t \,|\, \boldsymbol{y}, \tau) = \pi_X(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \theta).$$

Определение 2.1.40. Если при $\theta \to \infty$ однототечная плотность вероятности стремится к некоторому пределу $p^{\star}_X(\boldsymbol{x})$, не зависящему от "начального" состояния $\boldsymbol{y}$, то функция $p^{\star}_X(\boldsymbol{x})$ называется *стационарной плотностью вероятности*.

В этом случае двухточечная плотность вероятности зависит только от θ:

$$p^{[2]}_X(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{y}, \tau) = p^{[2]}_X(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \theta) = p^{\star}_X(\boldsymbol{y})\, \pi_X(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \theta).$$

Определение 2.1.41. Если верно соотношение

$$F_X^{[1|s-1]}(x_s, t_s \,|\, x_{s-1}, t_{s-1}; ...; x_1, t_1) = \\ = F_X^{[1|r]}(x_s, t_s \,|\, x_{s-1}, t_{s-1}; ...; x_{s-r}, t_{s-r}), \quad (2.1.30)$$

где $r > 1$, то СП $X(t)$ называется *марковским процессом r-го порядка* [1002].

Частным случаем гауссовского процесса с независимыми приращениями является *винеровский процесс* $W(t)$, $t \in \mathbb{T} = [0, +\infty)$, для которого (пока еще неопределенные характеристики см. далее):

1°. $W(0) = 0$ почти наверное.

2°. $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}\Big(0, \sigma^2\,(t-s)\Big)$ для любых $0 \leqslant s < t < \infty$.

3°. $W(t)$ – СП с непрерывными траекториями:

$$\mathcal{P}\Big(\lim_{s \to t} W(s) = W(t)\Big) = 1,$$

но в любой момент времени реализации недифференцируемы с вероятностью единица. Это следует из того, что

$$\frac{W(t+h) - W(t)}{h} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2/h),$$

а дисперсия дроби стремится к бесконечности при $h \to +0$. Формальная (обобщенная) производная $V(t) = W'(t)$ винеровского процесса называется *белым шумом*.

Определение 2.1.42. Постоянную σ^2 называют *коэффициентом диффузии*. Если эта постоянная равна единице, то такой винеровский процесс называется *стандартным*.

Кроме указанных выше, отметим следующие дополнительные

Свойства винеровских процессов

4°. Винеровский процесс является марковским случайным процессом со стационарными приращениями.

5°. $W(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 t)$.

6°.

$$m_W(t) = 0, \qquad \mathcal{D}_W(t) = \sigma^2\, t, \qquad \varphi_W(\lambda, t) = \exp\big(-\sigma^2\,\lambda^2\, t/2\big),$$

$$\pi_W(x, t\,|\,y, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,\sigma^2\,(t-\tau)}}\,\exp\Big[-\frac{(x-y)^2}{2\,\sigma^2\,(t-\tau)}\Big],$$

$$\mathbb{E}[dW(t)] = 0, \qquad \mathbb{E}[dW(t)\,dW(t')] = \sigma^2\,dt\,\delta(t-t'),$$

$$\mathbb{E}[\{\Delta W(t)\}^m] = \begin{cases} (2\,k-1)!!\cdot(\sigma^2\Delta t)^k, & m = 2\,k, \\ 0, & m = 2\,k+1, \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

7°. $\mathcal{C}_{WW}(t_1, t_2) = \sigma^2 \min(t_1, t_2)$ для любых $t_1, t_2 \in \mathbb{T}$.

8°. Винеровский процесс масштабно инвариантен, или самоподобен: пусть $W(t)$ – винеровский процесс, $q = \mathrm{const} > 0$, тогда СП

$$W^*(t) = \frac{1}{\sqrt{q}}\,W(q\,t)$$

также является винеровским процессом.

9°. Для любого заданного временно́го отрезка траектории винеровского процесса – функции неограниченной вариации на этом отрезке с вероятностью 1.

10°. m-мерный винеровский процесс $\boldsymbol{W}(t) : t \to \mathbb{R}^m$ – это случайный процесс, составленный из m независимых одномерных винеровских процессов, т.е.

$$\boldsymbol{W}(t) = \big\{W_1(t), W_2(t), \ldots, W_m(t)\big\}^{\mathsf{T}}, \quad t \geqslant 0,$$

где процессы $\{W_i(t)\}$, $i = \overline{1, n}$, независимы в группе.

11°. Верна следующая аппроксимация винеровского процесса [12]:

$$W(t) \approx W^{[k]}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,t\,Z_0 + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{m=1}^{N(k)} Z_m\,\frac{1}{m}\,\sin m\,t,$$

$$\mathbb{E}\Big[W^{[k]}(t)\Big] = 0, \quad \mathbb{D}\Big[W^{[k]}(t)\Big] = \frac{1}{\pi}\,t^2 + \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{N(k)}\frac{1}{m^2}\,\sin^2 m\,t,$$
$$t \in [0,\pi],$$

где Z_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ – независимые стандартные нормально распределенные случайные величины; $N(k) \to \infty$ – некоторая целочисленная последовательность. При этом функциональная последовательность $\{W^{[k]}(t)\}$ сходится равномерно по $t \in [0;\pi]$ к почти наверное непрерывной функции – винеровскому процессу на $[0,\pi]$. Разложение Карунена–Лоэва для винеровского процесса на произвольном отрезке $[0,T]$ можно найти в [116].

Примечание 2.1.1. Несложно установить, что $\Delta W(t)$ пропорционально $\sqrt{\Delta t}$. Если бы $\Delta W(t)$ было пропорционально $(\Delta t)^\alpha$, то при $\Delta W(t) \to 0$ реализации процесса при $\alpha \in (0;0{,}5)$ стремились бы к нулю, а при $\alpha > 0{,}5$ быстро нарастали.

Винеровский (или *броуновский*) процесс был значительной вехой на пути построения строгой теории случайных процессов. Многие распределения, используемые в стохастической динамике, можно моделировать процессами, порождаемыми винеровскими процессами (а также пуассоновскими, см. далее).

Определение 2.1.43. *Геометрическое броуновское движение* – случайный процесс с непрерывным временем, логарифм которого представляет собой винеровский процесс (броуновское движение).

Определение 2.1.44. *Простейшим пуассоновским процессом* с параметром $\bar\lambda > 0$ называют случайный процесс $\{P(t), t \in \mathbb{T} = [0,\infty)\}$, обладающий следующими свойствами:

1°. $P(0) = 0$ почти наверное.

2°. Для любых $s > 1$ и $t_k \in T$, $k = 1, 2, ..., s$, таких, что $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_s$, случайные величины $\Delta P_k = P(t_k) - P(t_{k-1})$, $k = 1, 2, ..., s$, являются независимыми, т.е. $P(t)$ – процесс с независимыми приращениями.

3°. Для любых $t, \tau \in \mathbb{T}$ таких, что $0 \leqslant \tau < t$, случайная величина $\Delta P_{t,\tau} = P(t) - P(\tau)$ распределена по закону Пуассона с параметром $\bar\lambda_{t,\tau} = \bar\lambda\,(t-\tau)$, т.е.

$$p_m = \mathcal{P}(\Delta P_{t,\tau} = m) = \frac{\bar\lambda_{t,\tau}^m}{m!}\,e^{-\bar\lambda_{t,\tau}}, \qquad m = 0, 1, 2, ...,$$

где $\bar\lambda$ называется *интенсивностью процесса*, а вероятности p_m не зависят от того, как процесс вел себя до момента времени τ.

Из представленного определения можно получить следующие дополнительные

Свойства простейшего пуассоновского процесса

4°. $P(t)$ – непрерывный слева однородный марковский СП с непрерывным временем, который принимает целые неотрицательные значения, имеет неубывающие кусочно-постоянные реализации, возрастающие *скачками* величины 1.

5°. Время между двумя последовательными скачками – это случайная величина, имеющая показательное распределение с параметром $\bar{\lambda}$.

6°. Вероятность того, что на интервале времени $[\tau, t)$ не наступит изменение состояния процесса (вероятность того, что реализация процесса на этом интервале является константой), равна $p_0 = e^{-\bar{\lambda}_{t,\tau}}$.

7°. Вероятность того, что значение процесса увеличится на 1 (произойдет единичный скачок) на интервале времени $[\tau, t)$, равна

$$p_1 = \bar{\lambda}_{t,\tau}\, e^{-\bar{\lambda}_{t,\tau}}.$$

8°. Пусть T_1, T_2 – две соседние случайные точки скачков реализаций процесса, $T_1 < T_2$. Тогда $\mathcal{P}(T_2 - T_1 < t) = 1 - e^{-\bar{\lambda}\, t}$, т.е. время пребывания процесса в каждом из состояний имеет экспоненциальное распределение.

9°.

$$m_P(t) = D_P(t) = \bar{\lambda}\, t, \qquad \mathcal{C}_{PP}(t_1, t_2) = \bar{\lambda}\, \min(t_1, t_2),$$

$$\varphi_P(\lambda, t) = \exp\left[\bar{\lambda}\, t\left(e^{\boldsymbol{i}\,\lambda} - 1\right)\right],$$

$$\mathbb{E}[dP(t)] = \bar{\lambda}\, dt, \qquad \mathbb{E}[dP(t)\, dP(t')] = \bar{\lambda}\, dt\, \delta(t - t'),$$

$$\mathbb{E}[\{\Delta P(t)\}^m] = e^{-\bar{\lambda}\,\Delta t} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(\bar{\lambda}\,\Delta t\right)^k k^m}{k!} = \left[e^{-u}\left(u\,\frac{d}{du}\right)^m e^u\right]\Big|_{u=\bar{\lambda}\,\Delta t}.$$

10°. Пуассоновский процесс – непрерывный в среднем квадратичном процесс со стационарными приращениями.

11°. Пуассоновский процесс может быть представлен так:

$$P(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{(T_k, +\infty)}(t), \qquad t \geqslant 0,$$

где

$$\mathbb{1}_{(T_k, +\infty)}(t) = \begin{cases} 1, & t > T_k, \\ 0, & t \leqslant T_k, \end{cases} \qquad k \geqslant 1,$$

а $\{T_k\}_{k\geqslant 1}$ – неубывающее семейство моментов времени, когда происходят скачки, таких, что

$$\operatorname*{l.i.m.}_{k\to\infty} T_k = +\infty.$$

12°. СВ T_k имеет плотность вероятности вида

$$p_{T_k}(t) = \bar{\lambda}\,\frac{(\bar{\lambda}\,t)^{k-1}}{(k-1)!}\,e^{-\bar{\lambda}\,t}, \qquad t>0.$$

13°. Пуассоновский процесс – частный случай процессов восстановления.

14°. Пусть $\{\,X_k,\ k\in\mathbb{N}\,\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных по показательному закону случайных величин: $X_k\sim E(\bar{\lambda})$, $\bar{\lambda}>0$. Тогда процесс восстановления $\{\,Z_t,\ t\geqslant 0\,\}$, где

$$Z_t = \sup_{Y_k\leqslant t} k, \qquad Y_0=0, \qquad Y_k = Y_{k-1}+X_k,$$

является пуассоновским процессом с интенсивностью $\bar{\lambda}$.

Наряду с простейшими пуассоновскими процессами существуют их некоторые вариации.

Определим функцию

$$\Lambda(t) = \int\limits_0^t \bar{\lambda}(\upsilon)\,d\upsilon, \quad \bar{\lambda}(\upsilon)\geqslant 0.$$

Определение 2.1.45. Процесс $P^{\dagger}(t)$ называется *неоднородным пуассоновским процессом*, если:

1°. $P^{\dagger}(t)$ – процесс с независимыми приращениями.

2°. Для всех $0\leqslant\tau<t$ приращение $P^{\dagger}(t)-P^{\dagger}(\tau)$ имеет распределение Пуассона с параметром $\Lambda(t)-\Lambda(\tau)$.

Определение 2.1.46. Процесс $P^{-}(t)=P(t)-\bar{\lambda}\,t$ называется *компенсированным пуассоновским процессом*. Для этого процесса $m_{P^-}(t)=0$, $\mathcal{D}_{P^-}(t)=\bar{\lambda}\,t$.

Определение 2.1.47. Пусть T_1, T_2, ..., T_s, ... – случайные моменты изменения состояний пуассоновского процесса. Таким образом, T_1, T_2-T_1, T_3-T_2, ..., T_s-T_{s-1}, ... – независимые случайные величины с одной и той же плотностью распределения $p_{\Delta T}(t)=\bar{\lambda}\,e^{-\bar{\lambda}\,t}$, $t>0$. Далее, пусть

Y_1, Y_2, ..., Y_s, ... – СВ с одной и той же функцией распределения $F_Y(y)$, причем СВ T_1, T_2, ..., T_s, ... и Y_1, Y_2, ..., Y_s, ... независимы в совокупности. Определим новый случайный процесс так:

$$\widehat{P}(t) = \sum_{k=1}^{P(t)} Y_k,$$

где $P(t)$ – простейший пуассоновский процесс с параметром $\bar{\lambda}$. Случайный процесс $\widehat{P}(t)$, определенный последним равенством, называется *обобщенным* (*составным*) *пуассоновским процессом*. Для этого процесса $m_{\widehat{P}}(t) = m_Y\,\bar{\lambda}\,t$ и $\mathcal{D}_{\widehat{P}}(t) = \alpha_{Y2}\,\bar{\lambda}\,t$.

Основное свойство обобщенного пуассоновского процесса – независимость его приращений на непересекающихся интервалах времени. Можно показать [141], что функция распределения этого процесса имеет следующий вид:

$$F_{\widehat{P}}(z,t) = \mathcal{P}\Big(\widehat{P}(t) < z\Big) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\bar{\lambda}\,t)^k}{k!}\, e^{-\bar{\lambda}\,t}\, F_Y^{[k]}(z),$$

где $F_Y^{[k]}(z) = \mathcal{P}(Y_1 + Y_2 + ... + Y_k < z)$.

Пусть $0 = t_0 < t_1 < ... < t_s$. Приращения

$$\widehat{P}(t_1) - \widehat{P}(t_0), \widehat{P}(t_2) - \widehat{P}(t_1), ..., \widehat{P}(t_s) - \widehat{P}(t_{s-1})$$

стационарны и независимы. В частности, $\widehat{P}(t_s) - \widehat{P}(t_{s-1})$ имеет то же распределение, что и $\widehat{P}(t_s - t_{s-1})$.

Определение 2.1.48. Процесс $\widehat{P}^{-}(t) = \widehat{P}(t) - m_Y\,\bar{\lambda}\,t$ называется *компенсированным обобщенным пуассоновским процессом*.

Определение 2.1.49. *Мартингал* – это случайный процесс, такой, что наилучшим (в смысле среднего квадратичного) предсказанием поведения процесса в будущем является его настоящее состояние.

Интерпретации этого понятия таковы: мартингал – это модель честной игры, в которой знание прошлого не может помочь предсказать будущие выигрыши; мартингал – последовательность случайных величин, для которой в данный момент в реализации среднее следующего значения в последовательности равно текущему наблюдаемому значению даже при знании всех предыдущих значений.

Концепцию мартингала в теорию вероятностей ввел П.П. Леви (1886–1971), а Дж.Л. Дуб (1910–2004) выполнил большую часть построения базовой теории.

Определение 2.1.50. Последовательность дискретных случайных величин $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ называется *мартингалом с дискретным временем*, если для любого $n \in \mathbb{N}$ верны следующие соотношения:

1°. $\mathbb{E}[\,|X_n|\,] < \infty$.

2°. $\mathbb{E}[X_{n+1} \mid X_1, \ldots, X_n] = X_n$.

Определение 2.1.51. Пусть дана другая последовательность случайных величин $\{Y_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Тогда последовательность случайных величин $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ называется *мартингалом относительно* $\{Y_n\}$ или $\{Y_n\}$-*мартингалом*, если для любого $n \in \mathbb{N}$ верны следующие соотношения:

1°. $\mathbb{E}[\,|X_n|\,] < \infty$.

2°. $\mathbb{E}[X_{n+1} \mid Y_1, \ldots, Y_n] = X_n$.

Определение 2.1.52. Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{P})$ с заданной на нем фильтрацией $\{\mathscr{F}_t,\ t \in \mathbb{T}\}$, где $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$. Тогда случайный процесс $\{X(t),\ t \in \mathbb{T}\}$ называется *мартингалом относительно* $\{\mathscr{F}_t,\ t \in \mathbb{T}\}$, если для любого $t \in \mathbb{T}$:

1°. $X(t)$ измерим относительно $\mathscr{F}_t$.

2°. $\mathbb{E}[\,|X(t)|\,] < \infty$.

3°. $\mathbb{E}[X(t) \mid \mathscr{F}_s] = X(s)$ для всех $s \in \mathbb{T}$, $s \leqslant t$.

Если в качестве $\{\mathscr{F}_t,\ t \in \mathbb{T}\}$ взята естественная фильтрация $\mathscr{F}_t = \sigma\{X_s, s \leqslant \leqslant t\}$ (см. п. 1.4.3), где $\sigma\{X_t,\ t \in \mathbb{T}\}$ – наименьшая σ-алгебра, порожденная случайными величинами X_t, $t \in \mathbb{T}$, то процесс $\{X(t),\ t \in \mathbb{T}\}$ называют просто *мартингалом*.

Из этих определений следует, что мартингал – это последовательность случайных чисел (дискретный во времени процесс), у которого математическое ожидание следующего значения при условии знания всех предыдущих значений ряда равно последнему значению.

Мартингалы сохраняют достаточно свойств марковских процессов, чтобы для них оставались в силе важные эргодические теоремы. От марковских процессов мартингалы отличаются тем, что когда текущее состояние известно, только математическое ожидание будущего, но необязательно само распределение вероятностей, не зависит от прошлого.

Процесс Леви, названный в честь французского математика П. Леви, является случайным процессом с независимыми и стационарными приращениями. Он представляет собой движение точки, последовательные

перемещения которой являются случайными, независимыми и статистически тождественными через временны́е промежутки одинаковой длины. Поэтому СП Леви может рассматриваться как непрерывно-временно́й аналог случайного блуждания.

Самыми известными примерами процессов Леви являются броуновское движение и процесс Пуассона. За исключением этих и геометрического броуновского движения все другие процессы Леви имеют разрывные траектории.

Определение 2.1.53. Случайный процесс $\{L(t), t \geqslant 0\}$ называется *процессом Леви*, если он обладает следующими свойствами:

1°. $L(0) = 0$ почти наверное.

2°. Для любых $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \infty$ приращения $L(t_2) - L(t_1)$, $L(t_3) - L(t_2)$, ..., $L(t_n) - L(t_{n-1})$ независимы.

3°. Для любых $0 \leqslant s < t$ распределение $L(t) - L(s)$ зависит только от $t - s$ (стационарность приращений или однородность процесса).

4°. Для любого $\varepsilon > 0$ и $t \geqslant 0$ справедливо неравенство

$$\lim_{h \to 0} \mathcal{P}(\, |L(t+h) - L(t)| > \varepsilon \,) = 0.$$

(непрерывность по вероятности).

Кроме того, процессы Леви обладают следующими дополнительными свойствами:

5°. Если $X(t)$ представляет собой процесс Леви, то можно построить такую версию $X(t)$, что отображение $t \longmapsto X(t)$ почти наверное непрерывно слева с наличием предела справа. При этом скачок $\Delta L(t)$ в точке t равен $L(t+0) - L(t)$.

6°. Распределение процесса Леви обладает свойством безграничной делимости: для любого заданного целого числа n закон распределения процесса Леви в момент времени t может быть представлен в виде закона распределения n независимых случайных величин, которые являются приращениями процесса Леви на интервалах времени длины t/n. Эти приращения независимы и одинаково распределены по предположению. С другой стороны, для каждого безгранично делимого распределения вероятностей F существует процесс Леви такой, что закон распределения L задается распределением F.

7°. Для любого процесса Леви с конечными моментами начальный момент k-го порядка является полиномиальной функцией t. Такие функции

удовлетворяют биномиальному тождеству

$$\alpha_k(t+s) = \sum_{\ell=0}^{k} \mathsf{C}_k^\ell \, \alpha_\ell(t) \, \alpha_{k-\ell}(s).$$

8°. Характеристическая функция процесса Леви вычисляется по *формуле Леви–Хинчина*:

$$\varphi_L(\lambda) = \exp\Big[a\,\boldsymbol{i}\,\lambda - \frac{1}{2}\,\sigma^2\,\lambda^2 + \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \big(e^{\boldsymbol{i}\,\lambda\,x} - 1 - \boldsymbol{i}\,\lambda\,x\,\mathbb{1}_{|x|<1}\big)\,\Pi(dx)\Big],$$

где $a \in \mathbb{R}$, $\sigma \geqslant 0$, $\mathbb{1}_{|x|<1}$ – индикатор, Π – мера Леви, для которой

$$\int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \min(1, x^2)\,\Pi(dx) < \infty.$$

Эта мера задает интенсивность пуассоновского процесса со скачком величины x, а представление Леви–Хинчина полностью определяется *тройкой Леви–Хинчина* (a, σ^2, Π).

Любой процесс Леви может быть разложен на сумму трех независимых компонент: броуновского движения, линейного смещения и чисто скачкообразного процесса, который формирует все скачки исходного процесса Леви. Последнюю компоненту можно рассматривать как суперпозицию центрированных составных пуассоновских процессов, имеющих различные распределения длин скачков. Это утверждение известно как *разложение Леви–Ито*.

Теорема 2.1.1. Пусть для заданной тройки Леви–Хинчина (a, σ^2, Π) существуют три независимых процесса Леви $L^{(1)}$, $L^{(2)}$, $L^{(3)}$, определенные на одном и том же вероятностном пространстве и такие, что:

– $L^{(1)}$ является геометрическим броуновским движением, которое соответствует абсолютно непрерывной части меры и формирует дрейф a и диффузию σ^2;

– $L^{(2)}$ представляет собой составной пуассоновский процесс, соответствующий чисто точечной части сингулярной меры;

– $L^{(3)}$ является интегрируемым с квадратом чисто скачкообразным мартингалом, который почти наверное имеет счетное число скачков на конечном интервале, что соответствует непрерывной части сингулярной меры.

Тогда процесс, определяемый равенством $L = L^{(1)} + L^{(2)} + L^{(3)}$, является процессом Леви с тройкой Леви–Хинчина (a, σ^2, Π).

Процесс $L^{(3)}$ можно дополнительно представить в виде суммы двух независимых процессов, первый из которых является чисто скачкообразным центрированным мартингалом со скачками длиной меньше 1 по абсолютной величине и второй – составным пуассоновским процессом, описывающим скачки длиной больше, чем единица.

Для процессов Леви можно построить аналоги стохастических интегралов Ито и формул замен переменных Ито (см. следующий подраздел).

Процессы Феллера являются специальными случаями марковских процессов.

Пусть $\mathbb{X}$ – локально компактное топологическое пространство со счетной базой. Обозначим через $\mathscr{C}_0(\mathbb{X})$ пространство всех вещественных непрерывных функций f на $\mathbb{X}$, которые обращаются в нуль на бесконечности и оснащены *sup*-нормой $\|f\|$.

Определение 2.1.54. *Феллеровской полугруппой* на $\mathscr{C}_0(\mathbb{X})$ называется семейство $\{\mathcal{T}_t,\ t \geqslant 0\}$ положительных линейных отображений $\mathscr{C}_0(\mathbb{X}) \longmapsto \mathscr{C}_0(\mathbb{X})$, таких, что:

1°. $\|\mathcal{T}_t f\| \leqslant \|f\|$ для всех $t \geqslant 0$ и $f \in \mathscr{C}_0(\mathbb{X})$.

2°. $\mathcal{T}_{t+s} = \mathcal{T}_t \circ \mathcal{T}_s$ для всех $s, t \geqslant 0$ (полугрупповое свойство).

3°. $\lim_{t \to +0} \|\mathcal{T}_t f - f\| = 0$ для всех $f \in \mathscr{C}_0(\mathbb{X})$. Вместе с полугрупповым свойством это эквивалентно тому, что отображение $\mathcal{T}_t f$ непрерывно справа для любой функции f из $\mathscr{C}_0(\mathbb{X})$.

Свойства:

1°. Феллеровская переходная плотность вероятности связана с феллеровской полугруппой.

2°. Марковский процесс с феллеровской переходной плотностью является *процессом Феллера*.

Процессы Феллера (или однородные полугруппы) можно описать с помощью инфинитезимальных операторов.

Определение 2.1.55. Говорят, что функция $f \in \mathscr{C}_0(\mathbb{X})$ принадлежит области определения генератора, если равномерный предел

$$Af = \lim_{t \to 0} \frac{\mathcal{T}_t f - f}{t}$$

существует. Оператор A называется *инфинитезимальным оператором* (или *генератором*) полугруппы $\mathcal{T}_t$, а пространство функций, на которых он определен, обозначается как $\mathbb{D}_A$.

Примерами процессов Феллера являются процессы Леви и, как их частные случаи, винеровские и пуассоновские процессы. Если коэффициенты стохастических дифференциальных уравнений (см. ниже) непрерывны и удовлетворяют условиям Липшица, то решения этих уравнений также являются процессами Феллера.

2.1.1.4. Сходимость в среднем квадратичном

Определение 2.1.56. Последовательность случайных величин $\{X_k\}$, $k = 1, 2, ...$, сходится к случайной величине X *по вероятности*:

$$X_k \xrightarrow{\mathcal{P}} X,$$

если для любого $\varepsilon > 0$ существует

$$\lim_{k \to +\infty} \mathcal{P}(|X_k - X| \geqslant \varepsilon) = 0. \tag{2.1.31}$$

Определение 2.1.57. Последовательность СВ $\{X_k(\omega),\ k = 1, 2, ...\}$ сходится к случайной величине $X(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$ *сильно* (*почти наверное*, *почти всюду*, *с вероятностью единица*):

$$X_k(\omega) \xrightarrow{\text{п.н.}} X(\omega), \qquad X_k(\omega) \xrightarrow{\mathbb{P}=1} X(\omega),$$

если

$$\mathcal{P}\big(\{\lim_{k \to +\infty} X_k(\omega) = X(\omega)\}\big) = 1. \tag{2.1.32}$$

Определение 2.1.58. Последовательность СВ $\{X_k,\ k = 1, 2, ...\}$ сходится к случайной величине X *в среднем квадратичном*:

$$X_k \xrightarrow{\text{с.к.}} X, \qquad \operatorname*{l.i.m.}_{k \to +\infty} X_k = X,$$

если

$$\lim_{k \to +\infty} \mathbb{E}\big[\{X_k - X\}^2\big] = 0. \tag{2.1.33}$$

Определение 2.1.59. Последовательность СВ $\{X_k,\ k = 1, 2, ...\}$ сходится к случайной величине X *по распределению* (*слабо*):

$$X_k \xrightarrow{\mathcal{F}} X,$$

если

$$\lim_{k\to+\infty} F_{X_k}(x) = F_X(x) \tag{2.1.34}$$

во всех точках непрерывности функции распределения $F_X(x)$.

Кроме этих типов сходимости последовательностей СВ, можно отметить и другие, например, *сходимость в среднем порядка* r $(0 < r < +\infty)$ [141, 312].

В математическом анализе важным является понятие фундаментальной последовательности, или последовательности Коши. Можно ввести подобное понятие и для последовательности СВ.

Определение 2.1.60. Последовательность $\{X_k,\ k = 1, 2, ...\}$ *фундаментальна по вероятности, с вероятностью единица* или *в среднем квадратичном*, если соответственно выполнены следующие условия: а) для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k,\ell\to+\infty} \mathcal{P}(\,|X_k - X_\ell| \geqslant \varepsilon\,) = 0;$$

б) последовательность $\{X_k,\ k = 1, 2, ...\}$ фундаментальна для почти всех $\omega \in \Omega$; в) последовательность $\{X_k,\ k = 1, 2, ...\}$ фундаментальна в среднем квадратичном, т.е $\mathbb{E}\big[(X_k - X_\ell)^2\big] \to 0$ при $k, \ell\ \to\ +\infty$.

Верны следующие *утверждения*:

1°. Сходимость п.н. влечет за собой сходимость по вероятности. Обратное, вообще говоря, неверно.

2°. Однако, если последовательность $\{X_k,\ k = 1, 2, ...\}$ монотонно возрастает или убывает, то сходимость по вероятности влечёт сходимость п.н.

3°. Из сходимости в среднем квадратичном следует сходимость по вероятности.

4°. Из сходимости по вероятности следует сходимость по распределению.

5°. Для того чтобы последовательность $\{X_k,\ k = 1, 2, ...\}$ сходилась к СВ X почти наверное, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathcal{P}\sup_{k\geqslant n} |X_k - X| \geqslant \varepsilon\ \to 0, \quad n \to +\infty.$$

6°. Для того чтобы последовательность $\{X_k,\ k = 1, 2, ...\}$ была фундаментальной с вероятностью единица, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathcal{P}\Big(\sup_{k,\ell\geqslant n} |X_k - X_\ell| \geqslant \varepsilon\Big) \to 0, \quad n \to +\infty.$$

7°. Для каждого $\varepsilon > 0$ выполнение условия

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathcal{P}(\,|X_k - X| \geqslant \varepsilon\,) < +\infty$$

достаточно для сходимости последовательности $\{X_k,\ k = 1, 2, ...\}$ к СВ X почти наверное.

8°. Пусть $\{\varepsilon_k,\ k = 1, 2, ...\}$ – последовательность положительных чисел таких, что $\varepsilon_k \to +0$ при $k \to +\infty$. Тогда, если

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathcal{P}(\,|X_k - X| \geqslant \varepsilon_k\,) < +\infty,$$

то при $k \to +\infty$

$$X_k \xrightarrow{\text{п.н.}} X.$$

9°. Пусть $\{X_k,\ k = 1, 2, ...\}$ – последовательность неотрицательных СВ таких, что

$$X_k \xrightarrow{\text{п.н.}} X \quad \text{и} \quad \mathbb{E}[X_k] \to \mathbb{E}[X] < +\infty.$$

Тогда при $k \to +\infty$

$$\mathbb{E}[X_k - X] \longrightarrow 0.$$

10°. Стохастический критерий Коши. Для того чтобы последовательность СВ $\{X_k,\ k = 1, 2, ...\}$ была сходящейся с вероятностью единица (по вероятности, в среднем квадратичном) к некоторой СВ X, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальна с вероятностью единица (по вероятности, в среднем квадратичном).

Отметим, что далее, как правило, используется только понятие сходимости в смысле среднего квадратичного, или СК-сходимости, а поэтому тип сходимости в формулировках и утверждениях указывается не всегда. При этом анализ существования пределов, непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости случайных процессов сводится к исследованию соответствующих свойств математических ожиданий и ковариационных функций соответствующих СП. Причина такого внимания к СК-сходимости была указана во введении к этому разделу.

Обратимся теперь к определению понятия сходимости для СП. Несложно видеть, что должны быть введены два класса таких понятий, так

как случайный процесс – это функция двух аргументов: времени $t \in \mathbb{T} \subset \subset \mathbb{R}$ и элементарного исхода $\omega \in \Omega$.

Определение 2.1.61. *Пределом случайного процесса* $\{X(t),\ t \in \mathbb{T}\}$ при $t \to t_0 \in \mathbb{T}$ в смысле СК-сходимости называют случайную величину Y и обозначают

$$\operatorname*{l.i.m.}_{t \to t_0} X(t) = Y,$$

если существует предел

$$\lim_{t \to t_0} \mathbb{E}\big[\{X(t) - Y\}^2\big] = 0.$$

Такое введение сходимости приводит к выбору нормы случайного процесса:

$$\|X(t)\|_{\text{СК}} = \sqrt{\big(X(t), X(t)\big)} = \sqrt{\mathbb{E}[X^2(t)]} \equiv \Big[\int\limits_{\mathbb{R}} x^2\, p_X(x,t)\, dx\Big]^{1/2},$$

причем при конкретном t все аксиомы нормы выполняются.

Ограничимся рассмотрением только таких случайных процессов, для которых так введенная СК-норма является конечной. Случайные процессы, удовлетворяющие этому условию, называют *случайными процессами второго порядка*, или *гильбертовыми случайными процессами*. Последнее связано с тем, что СК-норма соответствует норме гильбертова пространства $\mathbb{L}_2$. С физической точки зрения это означает, что процесс имеет конечную мощность, что характерно для большинства реальных процессов.

Определение 2.1.62. Говорят, что случайные процессы $\{X(t),\ t \in \mathbb{T}\}$ и $\{Y(t),\ t \in \mathbb{T}\}$ *равны*, если $\|X(t) - Y(t)\|_{\text{СК}} = 0$ для любого t из $\mathbb{T}$.

Определение 2.1.63. Случайный процесс $\{X(t),\ t \in \mathbb{T}\}$ называют *пределом последовательности случайных процессов* $\{X_k(t),\ t \in \mathbb{T}\}_{k=1}^{\infty}$ и обозначают

$$\operatorname*{l.i.m.}_{k \to +\infty} X_k(t) = X(t), \qquad t \in \mathbb{T},$$

если существует предел

$$\lim_{k \to \infty} \mathbb{E}\big[\{X_k(t) - X(t)\}^2\big] = 0.$$

Теорема 2.1.2. Если существует предел СП второго порядка $\{X(t),\ t \in \mathbb{T}\}$ при $t \to t_0 \in \mathbb{T}$, равный случайной величине Y, то существует и предел функции $\mathbb{E}[X(t)]$ при $t \to t_0 \in \mathbb{T}$, равный $\mathbb{E}[Y]$.

◀ Предварительно обратим внимание два неравенства. Во-первых, на неравенство

$$\big|\,\mathbb{E}[X(t)]\,\big| \leqslant \mathbb{E}[\,|X(t)|\,],$$

которое доказывается с помощью следующих выкладок:

$$\big|\,\mathbb{E}[X(t)]\big| = \left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,p_X(x,t)\,dx\right| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x|\,p_X(x,t)\,dx = \mathbb{E}[\,|X(t)|\,].$$

Во-вторых, на неравенство Коши–Буняковского:

$$\mathbb{E}[\,|X(t)\cdot Y(t)|\,] \leqslant \sqrt{\mathbb{E}[\,|X(t)|^2\,]}\cdot\sqrt{\mathbb{E}[\,|Y(t)|^2\,]},$$

которое можно рассматривать как неравенство Коши–Буняковского для случайных процессов второго порядка $\{|X(t)|,\ t \in \mathbb{T}\}$ и $\{|Y(t)|,\ t \in \mathbb{T}\}$, доказываемое следующими выкладками:

$$\mathbb{E}[\,|X(t)\cdot Y(t)|\,] = \big(|X(t)|,|Y(t)|\big) \leqslant$$
$$\leqslant \|X(t)\|_{\text{СК}}\ \cdot \|Y(t)\|_{\text{СК}}\ = \sqrt{\mathbb{E}[\,X^2(t)\,]\cdot\mathbb{E}[\,Y^2(t)\,]}.$$

Далее, для доказательства теоремы запишем неравенства

$$\big|\mathbb{E}[X(t)-Y]\,\big| \leqslant \mathbb{E}[\,|X(t)-Y|\,] \leqslant \sqrt{\mathbb{E}[1^2]\cdot\mathbb{E}[\,|X(t)-Y|^2\,]}.$$

По условию при $t \to t_0 \in \mathbb{T}$ случайный процесс $\{X(t),\ t \in \mathbb{T}\}$ сходится к случайной величине Y. Следовательно, при $t \to t_0 \in \mathbb{T}$ правая часть неравенства, а как следствие, и его левая часть стремятся к нулю. Таким образом,

$$\lim_{t\to t_0} \mathbb{E}[\,X(t)-Y\,] = 0,$$

откуда

$$\lim_{t\to t_0} \mathbb{E}[\,X(t)\,] = \mathbb{E}[\,Y\,]. \qquad ▶$$

Теорема 2.1.3. Для последовательности $\{X_k(t),\ t \in \mathbb{T}\}_{k=1}^{+\infty}$ случайных процессов второго порядка из существования предела

$$\operatorname*{l.i.m.}_{k\to\infty} X_k(t) = X(t), \quad t \in \mathbb{T},$$

следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}[X_k(t)] = \mathbb{E}[\,X(t)\,].$$

Теорема 2.1.4. Если $\{X(t),\ t \in \mathbb{T}\}$ – СП второго порядка и существует предел

$$\operatorname*{l.i.m.}_{t\to t_0} X(t) = Y, \qquad t_0 \in \mathbb{T},$$

то существует и предел

$$\lim_{(t,\tau)\to(t_0,t_0)} \mathbb{E}\big[\,|X(t) - X(\tau)|^2\,\big],$$

который равен 0.

Теорема 2.1.5. Для последовательности $\{X_k(t),\ t \in \mathbb{T}\}_{k=1}^{+\infty}$ случайных процессов второго порядка из существования предела

$$\operatorname*{l.i.m.}_{k\to\infty} X_k(t) = X(t)$$

следует существование предела

$$\lim_{k,r\to\infty} \mathbb{E}\big[\,\{X_k(t) - X_r(t)\}^2\big] = 0, \quad t \in \mathbb{T}.$$

Условия, сформулированные в теоремах 2.1.4 и 2.1.5, являются не только необходимыми, но и достаточными для существования соответствующих пределов. Они известны как *стохастические критерии Коши* дл я случайных процессов и для последовательностей СП.

Теорема 2.1.6. Пусть $\{X(t),\ t \in \mathbb{T}\}$ – случайный процесс второго порядка. Предел $\{X(t),\ t \in \mathbb{T}\}$ при $t \to t_0$ существует тогда и только тогда, когда существует конечный предел функции $\mathbb{E}[X(t)\cdot X(\tau)\,]$ двух переменных t и τ при $(t,\tau) \to (t_0,t_0)$.

Следствие 2.1.1. Для СП второго порядка $\{X(t),\ t \in \mathbb{T}\}$, предел

$$\operatorname*{l.i.m.}_{t\to t_0} X(t), \qquad t_0 \in \mathbb{T},$$

существует тогда и только тогда, когда существуют пределы

$$\lim_{t\to t_0} \mathbb{E}[\,X(t)\,] = m_0, \qquad \lim_{t,\tau\to t_0} \mathcal{C}_{XX}(t,\tau) = \mathcal{C}_0.$$

Теорема 2.1.7. Пусть $\{X_k(t),\ t \in \mathbb{T}\}_{k=1}^{+\infty}$ и $\{Y_\ell(t),\ t \in \mathbb{T}\}_{\ell=1}^{+\infty}$ – случайные процессы второго порядка, сходящиеся при $k, \ell \to +\infty$ в среднем квадратичном к случайным процессам $X(t)$ и $Y(t)$ соответственно. Тогда

$$\mathbb{E}[\, X_k(t_1) \cdot Y_\ell(t_2)\,] \longrightarrow \mathbb{E}[\, X(t_1) \cdot Y(t_2)\,], \quad t_1, t_2 \in \mathbb{T}.$$

Теорема 2.1.8. Для того чтобы

$$X_k(t) \xrightarrow{\text{с.к.}} X(t),$$

необходимо и достаточно, чтобы существовал предел

$$\lim_{k,\ell \to +\infty} \mathbb{E}[\, X_k(t) \cdot X_\ell(t)\,] = A, \qquad |A| < +\infty.$$

Следствие 2.1.2. Для того чтобы

$$X_k(t) \xrightarrow{\text{с.к.}} X(t),$$

где $X(t)$ – СП второго порядка, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{k,\ell \to +\infty} \mathbb{E}[\, X_k(t) \cdot X_\ell(t)\,] = \mathbb{E}\big[\, X^2(t)\,\big].$$

2.1.1.5. Непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость случайных процессов

Непрерывность случайных процессов определяется по-разному, в зависимости от выбранного типа сходимости. Сходимость по вероятности определяет стохастическую непрерывность процесса. Это самый слабый вид непрерывности.

Определение 2.1.64. Случайный процесс $\{X(t),\ t \in \mathbb{T}\}$ называют *стохастически непрерывным в точке* $t_0 \in \mathbb{T}$, если существует предел

$$\lim_{t \to t_0} \mathcal{P}(\, |X(t) - X(t_0)| > \varepsilon\,) = 0.$$

Такая непрерывность процесса относится к свойствам, однозначно определяемым его двумерным распределением. Заметим, что стохастическая непрерывность случайного процесса не влечет за собой непрерывность каждой реализации этого процесса.

Теорема 2.1.9. Реализации процесса $X(t)$, заданного на отрезке $a \leqslant t \leqslant\leqslant b$, будут с вероятностью единица непрерывными функциями t, если только при некоторых $\alpha > 0$, $\delta > 0$ и $0 < C < +\infty$ для всех достаточно малых $|h|$ (например, при $|h| < h_0$, где h_0 – фиксированное число) выполняется неравенство

$$\langle |X(t+h) - X(t)|^{\alpha} \rangle < C\,|h|^{1+\delta}.$$

Это *теорема Колмогорова о непрерывности реализаций* СП [324]. Заметим, что неравенство накладывает ограничения также на двумерные распределения процесса $X(t)$.

Определение 2.1.65. Случайный процесс второго порядка $\{X(t),\ t \in \mathbb{T}\}$, называют *непрерывным в среднем квадратичном в точке* $t_0 \in \mathbb{T}$, если существует предел

$$\lim_{t \to t_0} \mathbb{E}\big[\,\{X(t) - X(t_0)\}^2\,\big] = 0,$$

или, что то же самое,

$$\lim_{t \to t_0} \|X(t) - X(t_0)\|^2_{\mathrm{CK}} = 0.$$

Из непрерывности в среднем квадратичном в точке t и неравенства Чебышёва следует стохастическая непрерывность $X(t)$ в той же точке. Обратное утверждение в общем случае неверно.

Определение 2.1.66. Если случайный процесс второго порядка $\{X(t),\ t \in \mathbb{T}\}$ является непрерывным в среднем квадратичном в каждой точке $t \in \mathbb{T}$, то его называют *непрерывным в среднем квадратичном на множестве* $\mathbb{T}$.

Пуассоновский процесс, реализации которого кусочно-постоянны, является примером того, что стохастическая непрерывность и непрерывность в среднем квадратичном не означает, что реализации случайного процесса непрерывны. Причиной этого является то, что скачки каждой реализации происходят в свои моменты времени, а вероятность того, что разрыв будет именно в данной точке t_0, равна 0 [38].

Теорема 2.1.10. Случайный процесс второго порядка $\{X(t),\ t \in \mathbb{T}\}$ непрерывен в среднем квадратичном на $\mathbb{T}$ тогда и только тогда, когда на $\mathbb{T}$ непрерывно его математическое ожидание $m_X(t)$, а на $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$ непрерывна его ковариационная функция $\mathcal{C}_{XX}(t_1, t_2)$.

Теорема 2.1.11. Если ковариационная функция $\mathcal{C}_{XX}(t_1, t_2)$, $t_1, t_2 \in \mathbb{T}$, непрерывна для любого $t = t_1 = t_2 \in \mathbb{T}$, то $\mathcal{C}_{XX}(t_1, t_2)$ непрерывна для любых $t_1, t_2 \in \mathbb{T}$, т.е. из непрерывности ковариационной функции при совпадающих аргументах следует ее непрерывность при несовпадающих аргументах.

Определение 2.1.67. Случайная функция $X(t)$ называется *регулярной*, если ее траектории в каждой точке $t \in \mathbb{T}$ непрерывны слева и имеют конечные пределы справа.

Определение 2.1.68. Случайный процесс второго порядка $\{X(t),\ t \in \mathbb{T}\}$ называют *дифференцируемым в среднем квадратичном в точке* $t_0 \in \mathbb{T}$, если существует случайная величина $\dot{X}(t_0)$, для которой

$$\lim_{t \to t_0} \mathbb{E}\Big[\Big\{\frac{X(t) - X(t_0)}{t - t_0} - \dot{X}(t_0)\Big\}^2\Big] = 0. \tag{2.1.35}$$

Определение 2.1.69. Если случайный процесс второго порядка $\{X(t),\ t \in \mathbb{T}\}$ является дифференцируемым в точке $t_0 \in \mathbb{T}$, то случайную величину $\dot{X}(t_0)$ называют его *производной* в этой точке.

Определение 2.1.70. Если случайный процесс второго порядка $\{X(t),\ t \in \mathbb{T}\}$ является дифференцируемым в каждой точке открытого множества $\mathbb{T}_0 \subset \mathbb{T}$, то его называют *дифференцируемым на множестве* $\mathbb{T}_0$, а случайный процесс $\{\dot{X}(t),\ t \in \mathbb{T}_0\}$ – *производной случайного процесса* $\{X(t),\ t \in \mathbb{T}\}$ *на множестве* $\mathbb{T}_0$.

Теорема 2.1.12. Для того чтобы случайный процесс второго порядка $\{X(t),\ t \in \mathbb{T}\}$ был дифференцируем в точке $t_0 \in \mathbb{T}$, а для случайной величины $\dot{X}(t_0)$ существовали математическое ожидание и дисперсия, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке была дифференцируема функция $m_X(t)$ и существовала вторая смешанная производная функции $\mathcal{C}_{XX}(t_1, t_2)$ при $t_1 = t_2 = t_0$.

Следствие 2.1.3. Для дифференцируемого на множестве $\mathbb{T}$ случайного процесса второго порядка $\{X(t),\ t \in \mathbb{T}\}$ с математическим ожиданием $m_X(t)$ и ковариационной функцией $\mathcal{C}_{XX}(t_1, t_2)$ определен случайный процесс $\{\dot{X}(t),\ t \in \mathbb{T}\}$. При этом, если $\{Y(t) = \dot{X}(t),\ t \in \mathbb{T}\}$ – случайный процесс второго порядка, то

$$m_Y(t) = \frac{dm_X(t)}{dt}, \qquad \mathcal{C}_{YY}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{XX}(t_1, t_2)}{\partial t_1\, \partial t_2} = \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{XX}(t_1, t_2)}{\partial t_2\, \partial t_1}.$$

Следствие 2.1.4. Если $\{X(t),\ t \in \mathbb{T}\}$ – дифференцируемый на $\mathbb{T}$ стационарный случайный процесс второго порядка с математическим ожиданием $m_X = \text{const}$ и ковариационной функцией $\mathcal{C}_{XX}(\tau)$, $\tau = t_2 - t_1$, а $\{Y(t) = \dot{X}(t),\ t \in \mathbb{T}\}$ – случайный процесс второго порядка, то

$$m_Y(t) = 0, \qquad \mathcal{C}_{YY}(\tau) = -\mathcal{C}''_{XX}(\tau).$$

Теорема 2.1.13. Если для всех $t \in \mathbb{T}$ существует вторая смешанная производная от ковариационной функции при совпадающих аргументах

$$\frac{\partial^2 \mathcal{C}_{XX}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}\Big|_{t_1 = t_2 = t},$$

то для любых $t_1, t_2 \in \mathbb{T}$ существуют первые и вторая смешанная производные ковариационной функции

$$\frac{\partial \mathcal{C}_{XX}(t_1, t_2)}{\partial t_1}, \qquad \frac{\partial \mathcal{C}_{XX}(t_1, t_2)}{\partial t_2}, \qquad \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{XX}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}$$

при несовпадающих аргументах t_1 и t_2.

Верны следующие утверждения:

1°. Из дифференцируемости СП $X(t)$ в среднем квадратичном в точке $t_0 \in \mathbb{T}$ следует наличие предела в этой точке.

2°. Если СП $X(t)$ дифференцируем в среднем квадратичном в точке $t_0 \in \mathbb{T}$, то производная $X(t)$ единственна.

3°. Линейная комбинация дифференцируемых случайных процессов в точке $t_0 \in \mathbb{T}$ дифференцируема в этой точке.

4°. Если $h(t)$ и $X(t)$ – неслучайная и случайная дифференцируемые в точке $t_0 \in \mathbb{T}$ функции, то произведение $h(t)\,X(t)$ дифференцируемо в этой точке и

$$\frac{d}{dt}\left[h(t)\,X(t)\right] = \frac{d\,h(t)}{dt}\,X(t) + h(t)\,\frac{d\,X(t)}{dt}.$$

Определение 2.1.71. Случайный процесс $\{X(t),\ t \in \mathbb{T}\}$, второго порядка *аналитическим в среднем квадратичном* на $\mathbb{T}$, если он может быть представлен сходящимся в среднем квадратичном рядом Тейлора

$$X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^{(n)}(t_0)}{n!}\,(t - t_0)^n, \qquad t,\ t_0 \in \mathbb{T}.$$

Теорема 2.1.14. Случайный процесс $\{X(t),\ t \in \mathbb{T}\}$ второго порядка будет аналитическим в среднем квадратичном на $\mathbb{T}$ тогда и только тогда, когда корреляционная функция $\mathcal{R}_{XX}(t_1, t_2)$ аналитична в точке (t, t) для любого $t \in \mathbb{T}$.

Определение 2.1.72. Случайный процесс второго порядка $\{X(t), t \in \mathbb{T} = = [a, b]\}$, называют *интегрируемым* на множестве $\mathbb{T}$ с весом $R(t, \tau)$, где $R(t, \tau)$ – неслучайная функция, определённая и интегрируемая на $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$, если существует случайный процесс $\{Y(t),\ t \in \mathbb{T}\}$, такой, что независимо от выбора разбиения

$$\Pi = \Pi[a, b] = \{t_k,\ k = \overline{0, n}\} \cup \{\tau_k,\ k = \overline{1, n}\},$$
$$a = t_0 \leqslant \tau_1 \leqslant t_1 \leqslant \tau_2 \leqslant t_2 \leqslant ... \leqslant t_{n-1} \leqslant \tau_n \leqslant t_n = b,$$

с параметром

$$d(\Pi) = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \Delta t_k \equiv \max_{1 \leqslant k \leqslant n} (t_k - t_{k-1})$$

существует предел

$$\lim_{d(\Pi) \to 0, n \to \infty} \mathbb{E}\Big[\Big\{ \sum_{k=1}^{n} R(t, \tau_k)\, X(\tau_k)\, \Delta t_k - Y(t) \Big\}^2\Big] \equiv 0, \quad t \in \mathbb{T}. \qquad (2.1.36)$$

Среди свойств интегрируемых случайных процессов второго порядка отметим следующие:

1°. Если случайный процесс $\{X(t),\ t \in \mathbb{T} = [a, b]\}$ является интегрируемым в среднем квадратичном на $\mathbb{T}$ с весом $R(t, \tau)$, то случайный процесс $\{Y(t),\ t \in \mathbb{T}\}$ обозначают как интеграл

$$Y(t) = \int_{\mathbb{T}} R(t, \tau)\, X(\tau)\, d\tau = \int_a^b R(t, \tau)\, X(\tau)\, d\tau, \qquad t \in \mathbb{T}$$

и называют *интегралом Римана в среднем квадратичном.*

2°. Если $R(t, \tau) = \bar{R} = \text{const}$, то для интегрируемого в среднем квадратичном на $\mathbb{T}$ случайного процесса $\{X(t),\ t \in \mathbb{T}\}$,

$$\int_{\mathbb{T}} \bar{R}\, X(\tau)\, d\tau = \bar{R} \int_{\mathbb{T}} X(\tau)\, d\tau = Y^*$$

– случайная величина.

3°. Если $R(t,\tau) = \mathbb{1}(a-\tau) - \mathbb{1}(t-\tau)$, где $\mathbb{1}(\theta)$ – единичная функция, то

$$Y(t) = \int\limits_{\mathbb{T}} R(t,\tau)\, X(\tau)\, d\tau = \int\limits_{a}^{t} X(\tau)\, d\tau, \qquad [a,t] \in \mathbb{T}$$

– случайный процесс, который называют *интегралом в среднем квадратичном с переменным верхним пределом* от интегрируемого случайного процесса.

4°. Непрерывность СП $X(t)$ в среднем квадратичном на $[a,b]$ влечет интегрируемость $X(t)$ в среднем квадратичном на $[a,b]$.

5°. Интеграл $X(t)$ в среднем квадратичном на $[a,b]$ единственен.

6°. Если СП $X(t)$ непрерывен в среднем квадратичном на $[a,b]$, то

$$\left\| \int\limits_{a}^{b} X(t)\, dt \right\|_{\text{СК}} \leqslant \int\limits_{a}^{b} \|X(t)\|_{\text{СК}}\ dt \leqslant M\,(b-a),$$

где

$$M = \max_{t\in[a,b]} \|X(t)\|_{\text{СК}}\ .$$

7°. Для интегралов от СП $X(t)$ и $Y(t)$, интегрируемых в среднем квадратичном на $[a,b]$, верны свойства линейности и аддитивности.

На основе понятия интеграла Римана в среднем квадратичном можно определить *несобственный интеграл в среднем квадратичном.*

Теорема 2.1.15. Случайный процесс второго порядка $\{X(t),\ t \in \mathbb{T} = [a,b]\}$ является интегрируемым в среднем квадратичном на множестве $\mathbb{T}$ с весом $R(t,\tau)$ тогда и только тогда, когда на $\mathbb{T}$ с весом $R(t,\tau)$ интегрируемо его математическое ожидание и на $\mathbb{T}\times\mathbb{T}$ интегрируема с весом $R(t_1,\tau_1)\,R(t_2,\tau_2)$ его ковариационная функция.

Следствие 2.1.5. Если $\{X(t),\ t \in \mathbb{T} = [a,b]\}$ – интегрируемый в среднем квадратичном на множестве $\mathbb{T}$ с весом $R(t,\tau)$ случайный процесс второго порядка и

$$Y(t) = \int\limits_{\mathbb{T}} R(t,\tau)\, X(\tau)\, d\tau, \qquad t \in \mathbb{T},$$

то

$$m_Y(t) = \int\limits_{\mathbb{T}} R(t,\tau)\, m_X(\tau)\, d\tau,$$

$$\mathcal{C}_{YY}(t_1,t_2) = \int\limits_{\mathbb{T}}\int\limits_{\mathbb{T}} R(t_1,\tau_1)\, R(t_2,\tau_2)\, \mathcal{C}_{XX}(\tau_1,\tau_2)\, d\tau_1\, d\tau_2,$$

$$\mathcal{D}_Y(t) = \mathcal{C}_{YY}(t,t) = \int\limits_{\mathbb{T}}\int\limits_{\mathbb{T}} R(t,\tau_1)\, R(t,\tau_2)\, \mathcal{C}_{XX}(\tau_1,\tau_2)\, d\tau_1\, d\tau_2 \geqslant 0.$$

Следствие 2.1.6. Если $\{X(t),\ t \in \mathbb{T} = [a,b]\}$ – случайный процесс второго порядка, непрерывный и интегрируемый в среднем квадратичном на множестве $\mathbb{T}$ с весом $R(t,\tau) = \mathbb{1}(t-\tau)$, то случайный процесс

$$Y(t) = \int\limits_{\mathbb{T}} R(t,\tau)\, X(\tau)\, d\tau = \int\limits_a^t X(\tau)\, d\tau, \qquad a, t \in \mathbb{T}$$

является непрерывным и дифференцируемым в среднем квадратичном на множестве $\mathbb{T}$ и $X(t) = \dot{Y}(t)$.

Следствие 2.1.7. Если случайный процесс второго порядка $\{X(t),\ t \in \in \mathbb{T}\}$ интегрируем в среднем квадратичном на множестве $\mathbb{T}$ с весом $R(t,\tau)$ и

$$Y(t) = \int\limits_{\mathbb{T}} R(t,\tau)\, X(\tau)\, d\tau, \qquad t \in \mathbb{T},$$

то

$$\mathcal{C}_{XY}(t_1,t_2) = \int\limits_{\mathbb{T}} R(t_2,\tau)\, \mathcal{C}_{XX}(t_1,\tau)\, d\tau.$$

Теорема 2.1.16. Пусть СП второго порядка $\{X(t), t \in \mathbb{T}\}$ интегрируем в среднем квадратичном на множестве $\mathbb{T}$ с весом $R(t,\tau)$, неслучайная функция $R(t,\tau)$ непрерывна в области $\mathbb{T}\times\mathbb{T}$ вместе со своей частной производной $R'_t(t,\tau)$. Тогда производная в среднем квадратичном интеграла

$$Y(t) = \int\limits_a^t R(t,\tau)\, X(\tau)\, d\tau$$

существует при любом $t \in \mathbb{T}$ и

$$\dot{Y}(t) = \int_a^t \frac{\partial R(t,\tau)}{\partial t}\, X(\tau)\, d\tau + R(t,t)\, X(t).$$

Теорема 2.1.17. Пусть СП второго порядка $\{X(t),\ t \in \mathbb{T}\}$ дифференцируем в среднем квадратичном на множестве $\mathbb{T}$, неслучайная функция $R(t,\tau)$ непрерывна и дифференцируема по t в области $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$. Если

$$Y(t) = \int_a^t R(t,\tau)\, \dot{X}(\tau)\, d\tau,$$

то

$$Y(t) = R(t,t)\, X(t) - R(t,a)\, X(a) - \int_a^t \frac{\partial R(t,\tau)}{\partial s}\, X(\tau)\, d\tau.$$

Следствие 2.1.8. Если $R(t,\tau) \equiv 1$, то

$$X(t) - X(a) = \int_a^t \dot{X}(\tau)\, d\tau.$$

Наряду с интегралом Римана в среднем квадратичном можно рассматривать интегралы Римана–Стилтьеса в среднем квадратичном:

$$\mathcal{J}_1 = \int_a^b h(t)\, dX(t), \tag{2.1.37}$$

$$\mathcal{J}_2 = \int_a^b X(t)\, dh(t). \tag{2.1.38}$$

Определение 2.1.73. Если последовательности СВ $\{\mathcal{J}_{1n}\}$ и $\{\mathcal{J}_{2n}\}$, где

$$\mathcal{J}_{1n} = \sum_{k=1}^{n} h(\tau_k)\, \big[X(t_k) - X(t_{k-1})\big] \tag{2.1.39}$$

и

$$\mathcal{J}_{2n} = \sum_{k=1}^{n} X(\tau_k)\left[h(t_k) - h(t_{k-1})\right], \tag{2.1.40}$$

сходятся в среднем квадратичном соответственно к $\mathcal{J}_1$ и $\mathcal{J}_2$, то $\mathcal{J}_1$ и $\mathcal{J}_2$ называются *интегралами Римана–Стилтьеса в среднем квадратичном* от $h(t)$ и $X(t)$ на интервале $[a, b]$ по отношению к $X(t)$ и $h(t)$ соответственно.

Теоремы о существовании интегралов (2.1.37) и (2.1.38) и их интегрировании по частям, а также соотношения для математических ожиданий $\mathcal{J}_i$ и $\mathcal{J}_i^2$ $(i = 1, 2)$ представлены в [1002].

2.1.1.6. Спектральный анализ стационарных случайных процессов

Стационарные случайные процессы вследствие неизменности их вероятностных характеристик во времени имеют квазипериодический характер [275]. Это позволяет заменить исследование стационарной функции времени анализом случайной функции некоторой вспомогательной переменной, которая во многих приложениях имеет размерность частоты. Полученные таким способом результаты оказываются полностью эквивалентными результатам, получаемым с помощью ковариационных функций.

Прежде всего отметим, что стационарная в широком смысле случайная функция $X(t)$ может быть представлена в виде:

$$X(t) = m_X + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\boldsymbol{i}\omega t}\, d\mathsf{S}(\omega), \tag{2.1.41}$$

где $\mathsf{S}(\omega)$ – неубывающая комплекснозначная случайная функция, приращения которой обладают следующими свойствами [275]:

$$\mathbb{E}[d\mathsf{S}(\omega)] = 0, \qquad \mathbb{E}\left[d\overline{\mathsf{S}}(\omega)\, d\mathsf{S}(\omega_1)\right] = \mathcal{S}_{XX}(\omega)\,\delta(\omega - \omega_1)\, d\omega\, d\omega_1, \tag{2.1.42}$$

а $\mathcal{S}_{XX}(\omega)$ – неотрицательная функция своего аргумента.

Возможность перехода к спектральному представлению стационарной случайной функции основывается на теореме А.Я. Хинчина [302], которая постулирует, что любая функция, удовлетворяющая условию

$$\mathcal{C}_{XX}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\boldsymbol{i}\omega\tau}\, d\mathcal{S}(\omega), \tag{2.1.43}$$

где $\mathcal{S}(\omega)$ – вещественная неотрицательная монотонно неубывающая ограниченная непрерывная слева функция своего аргумента, является ковариационной функцией соответствующего стационарного случайного процесса и, наоборот, ковариационная функция любого стационарного случайного процесса, обладающего конечной дисперсией, может быть представлена в виде (2.1.43). Функция $\mathcal{S}(\omega)$ называется *спектральной функцией*, причем в наиболее важных случаях эта функция дифференцируема. Кроме того, вследствие единственности представления ковариационной функции можно установить, что $\mathcal{S}_{XX}(\omega) = \mathcal{S}'(\omega)$. Функция $\mathcal{S}_{XX}(\omega)$ называется *спектральной плотностью* и служит характеристикой, описывающей распределение мощности процесса по различным частотам колебаний.

Если к прямой связи ковариационной функции и спектральной плотности в виде преобразования Фурье добавить его обращение, то получим следующие формулы:

$$\mathcal{S}_{XX}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{C}_{XX}(\tau) e^{-\boldsymbol{i}\omega\tau}\, d\tau, \tag{2.1.44}$$

$$\mathcal{C}_{XX}(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{S}_{XX}(\omega) e^{\boldsymbol{i}\omega\tau}\, d\omega. \tag{2.1.45}$$

Соотношения (2.1.44), (2.1.45) называются *формулами Винера–Хинчина* и показывают, что задание спектральной плотности эквивалентно фиксации ковариационной функции и наоборот.

Для проведения выкладок в рамках спектральной теории полезно следующее представление дельта-функции:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\,\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\boldsymbol{i}\omega x}\, d\omega.$$

Примечание 2.1.2. Формально можно ввести спектральную плотность нестационарного СП:

$$\mathcal{S}_{XX}(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{(2\,\pi)^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{C}_{XX}(\tau_1, \tau_2)\, e^{-\boldsymbol{i}(\omega_1\tau_1 - \omega_2\tau_2)}\, d\tau_1\, d\tau_2,$$

$$\mathcal{C}_{XX}(\tau_1, \tau_2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{S}_{XX}(\omega_1, \omega_2)\, e^{\boldsymbol{i}(\omega_1\tau_1 - \omega_2\tau_2)}\, d\omega_1\, d\omega_2.$$

Для действительных случайных процессов функция $\mathcal{S}_{XX}(\omega)$ вещественна и неотрицательна. Несложно установить свойство, что спектральная плотность $\mathcal{S}_{XX}(\omega)$ будет четной функцией ω:

$$\mathcal{S}_{XX}(\omega) = \mathcal{S}_{XX}(-\omega). \tag{2.1.46}$$

Вследствие четности функций $\mathcal{C}_{XX}(\tau)$ и $\mathcal{S}_{XX}(\omega)$ соотношения между ковариационной функцией и спектральной плотностью представимы в следующем виде:

$$\mathcal{S}_{XX}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \mathcal{C}_{XX}(\tau) \cos \omega\tau \, d\tau, \tag{2.1.47}$$

$$\mathcal{C}_{XX}(\tau) = 2 \int\limits_0^{+\infty} \mathcal{S}_{XX}(\omega) \cos \omega\tau \, d\tau. \tag{2.1.48}$$

Иногда спектральной плотностью называют не $\mathcal{S}_{XX}(\omega)$, а $\mathcal{S}^*_{XX}(\omega) = 2\,\mathcal{S}_{XX}(\omega)$, $\omega \geqslant 0$.

Из формулы (2.1.45) следует, что

$$\mathcal{D}_X = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{S}_{XX}(\omega) \, d\omega. \tag{2.1.49}$$

Соотношение (2.1.49) показывает, что если случайная функция имеет конечную дисперсию, то ее спектральная плотность должна убывать с ростом ω не медленнее, чем $\omega^{-\alpha}$, где $\alpha > 1$.

Определение 2.1.74. Функция

$$s_{XX}(\omega) = \frac{\mathcal{S}_{XX}(\omega)}{\mathcal{D}_X}$$

называется *нормированной спектральной плотностью.*

Последнее соотношение показывает, что дисперсия представляет собой полную энергию процесса. Это обстоятельство позволяет следующим образом интерпретировать равенство (2.1.49): стационарный случайный процесс $X(t)$ условно можно представить как линейную комбинацию бесконечного количества составляющих гармонического типа, частоты которых непрерывно заполняют весь диапазон $(-\infty, +\infty)$; тогда величину

$\mathcal{S}_{XX}(\omega)\,d\omega$ можно трактовать как среднюю энергию составляющих процесса, частоты которых принадлежат отрезку $[\omega, \omega + d\omega]$; суммирование (интегрирование) этих мощностей по всему диапазону частот приводит к полной энергии всего процесса. Следовательно, сама спектральная плотность представляет собой плотность распределения энергии гармонических составляющих процесса по частотам.

Отметим еще одно свойство пары ковариационная функция – спектральная плотность: чем шире график ковариационной функции, тем уже график спектральной плотности и наоборот. Объясняется это следующим обстоятельством. Широкий график ковариационной функции говорит о том, что процесс характеризуется большим временем корреляции, т.е. его реализации медленно меняются во времени. Но это означает, что мощность процесса определяют низкочастотные составляющие и график спектральной плотности концентрируется в области низких частот. Узкому графику ковариационной функции соответствует малое время корреляции, реализации процесса меняются быстро и в них превалируют высокочастотные составляющие, что растягивает график спектральной плотности вдоль оси абсцисс. Имеются более строгие доказательства этого свойства.

Спектральное разложение оказывается эффективным и при исследовании системы стационарных случайных функций. Рассмотрим две не только стационарные, но и стационарно связанные случайные функции $X(t)$ и $Y(t)$. Тогда по аналогии с соотношениями (2.1.44), (2.1.45) можно записать:

$$\mathcal{S}_{XY}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{C}_{XY}(\tau) e^{-\boldsymbol{i}\omega\tau}\, d\tau, \tag{2.1.50}$$

$$\mathcal{C}_{XY}(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{S}_{XY}(\omega) e^{\boldsymbol{i}\omega\tau}\, d\tau, \tag{2.1.51}$$

где $\mathcal{S}_{XY}(\omega)$ и $\mathcal{C}_{XY}(\tau)$ – *взаимная спектральная плотность* и *взаимная ковариационная функция* случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$ соответственно.

Функция $\mathcal{S}_{XY}(\omega)$ может быть комплексной даже для действительных $X(t)$ и $Y(t)$, но для нее характерно следующее свойство:

$$\mathcal{S}^*_{XY}(\omega) = \mathcal{S}_{YX}(\omega),$$

где $*$ – символ комплексного сопряжения.

В таблице 2.1.1 приведены некоторые другие часто встречающиеся формы ковариационных функций и соответствующих им спектральных плотностей.

Таблица 2.1.1

№	$\mathcal{C}(\tau)$	$\mathcal{S}(\omega)$
1	$2\,\pi\delta(\tau)$	1
2	$\sigma^2\,e^{-\alpha^2\tau^2}$	$\dfrac{\sqrt{\pi}\,\sigma^2}{\alpha}\,e^{-w^2/(4\alpha^2)}$
3	$\sigma^2\,\dfrac{\sin\alpha\,\tau}{\alpha\,\tau}$	$\dfrac{\sigma^2}{2\,a}\,\mathbb{1}_{[-a,a]}$
4	$\sigma^2\,\dfrac{\beta\,e^{-\alpha\lvert\tau\rvert}-\alpha\,e^{-\beta\lvert\tau\rvert}}{\beta-\alpha}$	$\dfrac{2\,\alpha\,\beta\,(\alpha+\beta)\,\sigma^2}{(\alpha^2+\omega^2)(\beta^2+\omega^2)}$
5	$\sigma^2\,e^{-\alpha\lvert\tau\rvert}\,\left(\cos\beta\tau+\dfrac{\alpha}{\beta}\,\sin\lvert\beta\tau\rvert\right)$	$\dfrac{4\,\alpha\,\sigma^2\,(\alpha^2+\beta^2)}{(\omega^2-\alpha^2-\beta^2)^2+4\,\alpha^2\,\beta^2}$
6	$\sigma^2\,e^{-\alpha\lvert\tau\rvert}\,\left(\cos\beta\tau-\frac{\alpha}{\beta}\,\sin\lvert\beta\tau\rvert\right)$	$\dfrac{4\,\alpha\,\sigma^2\,\omega^2}{(\omega^2-\alpha^2-\beta^2)^2+4\,\alpha^2\,\beta^2}$

Чем шире спектр случайного процесса, тем меньше интервал корреляции и, соответственно, чем больше интервал корреляции, тем уже спектр процесса.

Определение 2.1.75. Стационарный в широком смысле случайный процесс называется *узкополосным*, если его спектральная плотность сосредоточена в относительно узкой полосе частот около некоторой фиксированной частоты ω_0.

Ковариационная функция такого процесса представляет собой осциллирующую с частотой ω_0 функцию с медленно меняющейся огибающей, а сам процесс представляют соотношением вида

$$X(t) = A(t)\,\cos[\omega_0\,t + \Theta(t)],$$

где ω_0 – центральная частота спектра шума, а амплитуда $A(t)$, мгновенная частота $\omega(t) = \omega_0 + \dot{\Theta}(t)$ и фаза $\Theta(t)$ являются случайными функциями времени [52].

Определение 2.1.76. Если спектральная плотность стационарного процесса отлична от нуля на значительном интервале частот (на практике это соответствует покрытию полосы пропускания исследуемой системы), то такой процесс называется *широкополосным*.

При построении стохастических дифференциальных уравнений (см. далее) важное значение имеет понятие широкополосного стационарного процесса, определяемого ниже.

Определение 2.1.77. Непрерывный случайный процесс $\{V(t),\ t \in \mathbb{T} = [0, +\infty)\}$, называется *гауссовским белым шумом* (далее просто "белым шумом"), если $V(t)$ – стационарный в широком смысле процесс, обладающий постоянной спектральной плотностью S_0, называемой *интенсивностью* белого шума, а его сечения имеют гауссовское нормальное распределение. Если $S_0 = 1/(2\pi)$, то белый шум называется *стандартным*.

Примечание 2.1.3. Если исключить условие гауссовости шума, то можно ввести понятия *пуассоновского белого шума*, *белого шума Коши* и др. Если же рассматривать процессы с дискретным временем, то можно определить *дискретный белый шум*, который представляет собой последовательность независимых центрированных случайных величин с постоянной дисперсией $\mathcal{D}_0$. Кроме того, в научных работах прикладного характера нередко упоминаются различные варианты *нестационарных белых шумов*, которые определяются как произведения специальных детерминированных функций времени (*огибающих*) на $V(t)$.

Свойства белого шума

1°. Ковариационная функция белого шума имеет следующий вид:

$$\mathcal{C}_{VV}(\tau) = 2\,\pi\,S_0\,\delta(\tau). \tag{2.1.52}$$

2°. Если ковариационная функция стационарного случайного процесса $\{X(t),\ t \in \mathbb{T} = [0, +\infty)\}$ имеет вид (2.1.52), то этот случайный процесс является белым шумом.

3°. Белый шум $V(t)$ является производной в обобщенном смысле (недифференцируемого) винеровского процесса $W(t)$.

4°. Случайные величины, являющиеся сечениями белого шума, некоррелированы, а следовательно, вследствие гауссовости, и независимы.

5°. Белый шум обладает бесконечной дисперсией.

6°. Для стандартного белого шума верны следующие соотношения:

$$\mathbb{E}[V(t)] = 0, \quad \mathbb{E}[V(t_1)\,V(t_2)] = \delta(t_2 - t_1),$$

$$\mathbb{E}[V(t_1)\,V(t_2)\,V(t_3)] = 0,$$

$$\mathbb{E}[V(t_1)\,V(t_2)\,V(t_3)\,V(t_4)] = \delta(t_2 - t_1)\,\delta(t_4 - t_3) + \\ + \delta(t_2 - t_3)\,\delta(t_4 - t_1) + \delta(t_2 - t_4)\,\delta(t_1 - t_3),$$

$$dW(t) = V(t)\,dt, \quad W(t) = \int_0^t V(\tau)\,d\tau.$$

Все другие случайные процессы, у которых функция $\mathcal{S}_{XX}(\omega)$ меняется по частоте, можно называть *окрашенными*, или *цветными, шумами*[2]. На практике в качестве белого рассматривают любой окрашенный шум, спектральная плотность которого остается постоянной в пределах полосы пропускания системы, на которую этот шум действует. В частности, свойства цветного шума $V^c(t)$ можно определить так:

$$\mathbb{E}[V^c(t)] = 0, \qquad \mathbb{E}[V(t)\,V(t+\tau)] = \mathcal{g}(\tau),$$

где $\mathcal{g}(\tau)$ – некоторая непрерывная функция, такая, что

$$\mathcal{g}(|\tau|) \leqslant \mathcal{g}(0) < +\infty \quad \forall\,\tau, \qquad \lim_{\tau\to+\infty} \mathcal{g}(|\tau|) = 0.$$

В этом случае для $W^c(t) = \int_0^t V^c(\tau)\,d\tau$ получим, что

$$\mathbb{E}\Big[\big\{W^c(t+h) - W^c(t)\big\}^2\Big] \leqslant \mathcal{g}(0) \int_t^{t+h} dt_1 \int_t^{t+h} dt_2 = \mathcal{g}(0)\,h^2,$$

а следовательно,

$$\mathbb{E}\left[\frac{\big\{W^c(t+h) - W^c(t)\big\}^2}{h^2}\right] \leqslant \mathcal{g}(0),$$

откуда следует дифференцируемость $V^c(t)$ в некотором смысле.

Определенные трудности при численных расчетах, связанные с неограниченностью реализаций белого шума, приводят к необходимости приближенных замен возмущений в форме белого шума на конструкции типа $a(t)\,\cos\big[\omega_0\,t + \alpha\,V(t)\big]$ или $a(t)\,\cos\big[\omega_0\,t + \alpha\,W(t)\big]$, где $a(t)$ – детерминированная функция времени, в частности константа, а $\omega_0 > 0$ и α – некоторые постоянные.

Модель белого шума используют для описания воздействия шумов с малым временем корреляции (меньшим всех характерных времен) на физические системы (сигналы), обладающие конечной шириной полосы пропускания (спектра), в пределах которой спектр реального шума можно считать приближенно равномерным. Примером белого шума является *дробовой шум*, время корреляции которого определяется временем пролета электрона от катода к аноду. Другой пример – *тепловой шум*, спектр

[2]Кроме того, встречается ряд вариантов цветного шума типа розовый, коричневый (броуновский, красный), синий (лазурный, голубой), фиолетовый, серый, оранжевый, зеленый, черный [1112] и др., которые различаются формой спектральной плотности.

которого равномерен в том интервале частот, где постоянно сопротивление источника шума. В области слышимых частот примером белого шума является шум водопада.

Пусть стационарная случайная функция $X(t)$ имеет производную. Тогда первая производная ее ковариационной функции непрерывна при $\tau = 0$, а вторая производная $\mathcal{C}''_{XX}(\tau)$ при $\tau = 0$ существует. Можно установить, что производная $Y(t) = X'(t)$ также стационарна, ее ковариационная функция определяется равенством $\mathcal{C}_{YY}(\tau) = -\mathcal{C}''_{XX}(\tau)$, а спектральная плотность – соотношением

$$\mathcal{S}_{YY}(\omega) = \omega^2 \, \mathcal{S}_{XX}(\omega). \tag{2.1.53}$$

Сформулированное выше правило нахождения спектральной плотности производной случайного процесса позволяет получить формулу и для производных высшего порядка, так как, применяя это правило n раз, для спектральной плотности случайной функции $Y(t) = X^{(n)}(t)$ получим

$$\mathcal{S}_{YY}(\omega) = \omega^{2n} \, \mathcal{S}_{XX}(\omega), \tag{2.1.54}$$

если только интеграл в бесконечных пределах, взятый от правой части последнего выражения, сходится, т.е. если n-я производная $X(t)$ существует.

Рассмотрим линейное выражение с постоянными коэффициентами, содержащее производные различных порядков:

$$Y(t) = b_0 \, \frac{d^m X(t)}{dt^m} + b_1 \, \frac{d^{m-1} X(t)}{dt^{m-1}} + ... + b_{m-1} \, \frac{dX(t)}{dt} + b_m \, X(t), \tag{2.1.55}$$

которое, если заменить производные соответствующими степенями переменной p, можно записать так:

$$Y(t) = b_0 \, p^m X(t) + b_1 \, p^{m-1} X(t) + ... + b_{m-1} \, p \, X(t) + b_m \, X(t) \equiv$$
$$\equiv P_m(p) \, X(t), \tag{2.1.56}$$

где

$$P_m(p) = b_0 \, p^m + b_1 \, p^{m-1} + ... + b_{m-1} \, p + b_m.$$

Если считать, что $\mathcal{S}_{XX}(\omega)$ – спектральная плотность случайной функции $X(t)$, и воспользоваться соотношениями типа (2.1.53) и (2.1.54), легко можно установить, что

$$\mathcal{S}_{YY}(\omega) = \left(b_0^2 \, \omega^{2m} + b_1^2 \, \omega^{2(m-1)} + ... + b_{m-1}^2 \, \omega^2 + b_m^2 \right) \mathcal{S}_{XX}(\omega). \tag{2.1.57}$$

Применяя форму многочлена P_m с аргументом $\boldsymbol{i}\omega$, последнее соотношение можно записать так:

$$\mathcal{S}_{YY}(\omega) = |P_m(\boldsymbol{i}\omega)|^2\, \mathcal{S}_{XX}(\omega). \tag{2.1.58}$$

Воспользуемся полученными результатами для нахождения спектральной плотности стационарного решения $Y(t)$ неоднородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, содержащего в правой части стационарную функцию $X(t)$, и рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$\begin{aligned} a_0\,\frac{d^nY(t)}{dt^m} + a_1\,\frac{d^{n-1}Y(t)}{dt^{n-1}} + ... + a_{n-1}\,\frac{dY(t)}{dt} + a_n\,Y(t) = \\ = b_0\,\frac{d^mX(t)}{dt^m} + b_1\,\frac{d^{m-1}X(t)}{dt^{m-1}} + ... + b_{m-1}\,\frac{dX(t)}{dt} + b_m\,X(t), \end{aligned} \tag{2.1.59}$$

или, если записать символически, то

$$Q_n(p)\,Y(t) = P_m(p)\,X(t). \tag{2.1.60}$$

Если предположить, что решение уравнения (2.1.59) обладает свойством стационарности, случайные функции $Y(t)$ и $X(t)$ по t дифференцируемы n и m раз соответственно, то соотношение (2.1.58) позволяет сразу же выразить спектральную плотность $\mathcal{S}_{YY}(\omega)$ через спектральную плотность $\mathcal{S}_{XX}(\omega)$. Действительно, на основании этой формулы левая часть уравнения (2.1.60) имеет спектральную плотность $|Q_n(\boldsymbol{i}\omega)|^2\,\mathcal{S}_{YY}(\omega)$, а правая – $|P_m(\boldsymbol{i}\omega)|^2\,\mathcal{S}_{XX}(\omega)$. Следовательно, можно написать уравнение

$$|Q_n(\boldsymbol{i}\omega)|^2\,\mathcal{S}_{YY}(\omega) = |P_m(\boldsymbol{i}\omega)|^2\,\mathcal{S}_{XX}(\omega). \tag{2.1.61}$$

Полученное уравнение является обычным алгебраическим, решение которого относительно $\mathcal{S}_{YY}(\omega)$ дает искомое соотношение

$$\mathcal{S}_{YY}(\omega) = \frac{|P_m(\boldsymbol{i}\omega)|^2}{|Q_n(\boldsymbol{i}\omega)|^2}\,\mathcal{S}_{XX}(\omega). \tag{2.1.62}$$

Используя последнее соотношение и вторую из формул Винера–Хинчина (2.1.45), можно получить, что

$$\mathcal{C}_{YY}(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|P_m(\boldsymbol{i}\omega)|^2}{|Q_n(\boldsymbol{i}\omega)|^2}\,\mathcal{S}_{XX}(\omega)\,e^{\boldsymbol{i}\omega\tau}\,d\omega, \quad \mathcal{D}_Y = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|P_m(\boldsymbol{i}\omega)|^2}{|Q_n(\boldsymbol{i}\omega)|^2}\,\mathcal{S}_{XX}(\omega)\,d\omega.$$

Определим линейное стационарное преобразование как действие линейного дифференциального оператора $\mathbb{L}$ порядка n с постоянными коэффициентами вида:

$$\mathbb{L}_t\big[\,\cdot\,\big] \stackrel{\text{def}}{\equiv} a_0\,\frac{d^n}{dt^n}\big[\,\cdot\,\big] + a_1\,\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\big[\,\cdot\,\big] + \\ + a_{n-1}\,\frac{d}{dt}\big[\,\cdot\,\big] + a_n\big[\,\cdot\,\big] \equiv \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}}\big[\,\cdot\,\big] \quad (2.1.63)$$

на некоторый случайный стационарный процесс $X(t)$:

$$Y(t) = \mathbb{L}_t\big[X(t)\big], \quad (2.1.64)$$

то математическое ожидание случайного процесса $Y(t)$ может быть вычислено по формуле

$$m_Y(t) = \mathbb{L}_t\big[m_X\big] = a_n\, m_X, \qquad m_X = \text{const}, \quad (2.1.65)$$

а его ковариационная функция определится соотношением

$$\mathcal{C}_{YY}(t_1,t_2) = \mathbb{L}_{t_1}\big[\mathbb{L}_{t_2}\big[\mathcal{C}_{XX}(t_1,t_2)\big]\big], \quad \mathcal{C}_{XX}(t_1,t_2) = \mathcal{C}_{XX}(t_2-t_1). \quad (2.1.66)$$

Если рассмотреть задачу о преобразовании случайного процесса при его прохождении через линейную динамическую (вообще говоря, нестационарную) систему, то несложно установить, что при анализе даже простейших моделей возникнут определенные трудности, не позволяющие в общем случае довести такой анализ до конечного результата. Спектральная же теория стационарных (в широком смысле) случайных процессов открывает новые возможности исследования подобных задач. Они аналогичны инструментам теории интегральных преобразований применительно к решению задач математической физики и задач Коши для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, а также систем таких уравнений.

2.1.1.7. Марковские процессы с непрерывным временем и непрерывным множеством состояний

Рассмотрим данный класс случайных процессов. Состояния таких процессов могут изменяется как непрерывно, так и скачками. Если скачки отсутствуют, то соответствующие процессы образуют класс *непрерывных марковских процессов*, широко используемых в качестве моделей различных реальных процессов.

Среди непрерывных марковских процессов особую роль играют диффузионные процессы. Такие процессы служат не только математическими моделями диффузионного движения частиц, но также и предельными моделями для дискретных процессов, описывающих различные биологические явления. В настоящее время они находят широкое применение при моделировании случайных механических колебаний, физических явлений, процессов в экономике, финансах и др.

Определение 2.1.78. Марковский процесс $X(t)$ называется *диффузионным*, если его переходная плотность удовлетворяет следующим условиям:

1°. При любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\Delta t\to 0} \int\limits_{|x-y|>\varepsilon} \pi_X(x, t+\Delta t \,|\, y, t)\, dx = 0. \tag{2.1.67}$$

Это более точное условие непрерывности марковского случайного процесса. Оно требует, чтобы вероятность того, что $|X(t+\Delta t)-X(t)| > \varepsilon$, была величиной более высокого порядка малости, чем Δt.

2°. Существует функция $a(x,t)$ такая, что при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\Delta t\to 0} \int\limits_{|x-y|\leqslant\varepsilon} (x-y)\, \pi_X(x, t+\Delta t \,|\, y, t)\, dx = a(x,t). \tag{2.1.68}$$

3°. Существует функция $b(x,t)$ такая, что при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\Delta t\to 0} \int\limits_{|x-y|\leqslant\varepsilon} (x-y)^2\, \pi_X(x, t+\Delta t \,|\, y, t)\, dx = b(x,t). \tag{2.1.69}$$

Заметим, что левые части равенств (2.1.68), (2.1.69) зависят от ε, но вследствие определения непрерывности процесса (2.1.67) эта зависимость кажущаяся.

Для того чтобы выяснить смысл функций $a(x,t)$ и $b(x,t)$, предположим, что $X(t)$ является координатой точки, движущейся под влиянием случайных воздействий.

Усилим требование к непрерывности рассматриваемого случайного процесса, а именно, предположим, что вместо равенства (2.1.67) при любом $\varepsilon > 0$ имеет место соотношение

$$\lim_{\Delta t\to 0} \int\limits_{|x-y|>\varepsilon} (x-y)^2\, \pi_X(x, t+\Delta t \,|\, y, t)\, dx = 0. \tag{2.1.70}$$

Несложно показать, что (2.1.67) следует из (2.1.70). Как следствие, условия (2.1.68) и (2.1.69) теперь могут быть записаны в следующем виде:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-y)\,\pi_X(x,t+\Delta t\,|\,y,t)\,dx = a(x,t). \tag{2.1.71}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-y)^2\,\pi_X(x,t+\Delta t\,|\,y,t)\,dx = b(x,t). \tag{2.1.72}$$

Отсюда, учитывая соотношения для условных математических ожиданий

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-y)\,\pi_X(x,t+\Delta t\,|\,y,t)\,dx = \mathbb{E}[X(t+\Delta t)-X(t)\,|\,X(t)]$$

изменения процесса $X(t)$ за время ΔT и

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-y)^2\,\pi_X(x,t+\Delta t\,|\,y,t)\,dx = \mathbb{E}\big[\{X(t+\Delta t)-X(t)\,|\,X(t)\}^2\big]$$

квадрата изменения процесса, можно сделать вывод, что функция $a(x,t)$, называемая *коэффициентом сноса*, – это средняя скорость изменения процесса $X(t)$, а *коэффициент диффузии* $b(x,t)$ пропорционален средней кинетической энергии того же процесса.

2.1.1.8. Стохастические интегралы и стохастические дифференциальные уравнения

Большой класс научно-технических и иных важных задач описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ). Но современные требования к моделированию сложных объектов и явлений науки, техники и экономики приводят к необходимости учета различных случайных эффектов, влияющие на поведение изучаемых режимов. Поэтому ОДУ с наличием случайных элементов, т.е. *случайные ОДУ*, играют в различных приложениях все более и более заметную роль, а задачей теории случайных процессов является распространение методов стохастического анализа на системы таких ОДУ, которые можно представить в следующей форме:

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{X}(t),\boldsymbol{Y}(t),t\big),\quad t\in\mathbb{T},\qquad \boldsymbol{X}(t_0)=\boldsymbol{X}^0, \tag{2.1.73}$$

где $\boldsymbol{X}(t) = \{X_1(t), X_2(t), ..., X_n(t)\}^\intercal$ – неизвестный векторный случайный процесс, определяющий состояние объекта; $\boldsymbol{f}(\cdot,\cdot,\cdot) = \{f_1(\cdot,\cdot,\cdot), f_2(\cdot,\cdot,\cdot), ..., f_n(\cdot,\cdot,\cdot)\}^\intercal$ – известная неслучайная векторная функция своих аргументов; $\boldsymbol{Y}(t) = \{Y_1(t), Y_2(t), ..., Y_m(t)\}^\intercal$ – векторный случайный процесс, включающий случайные факторы, которые влияют на поведение объекта; $\boldsymbol{X}^0 = \{X_1^0, X_2^0, ..., X_n^0\}^\intercal$ – случайный вектор с известными характеристиками, определяющий начальное состояние объекта исследования. Систему уравнений (2.1.73) можно записать и в форме *случайных обыкновенных интегральных уравнений* (ОИУ):

$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{X}^0 + \int\limits_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{X}(\tau), \boldsymbol{Y}(\tau), \tau\big)\, d\tau, \tag{2.1.74}$$

но при этом требуется определить, что понимается под решением уравнений (2.1.73) и (2.1.74), а также определить условия его существования [358].

Рассмотрим для начала более простую форму уравнений (2.1.73), а именно [1002]:

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{X}(t), t\big), \quad t \in \mathbb{T}, \qquad \boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}^0. \tag{2.1.75}$$

Определение 2.1.79. Пусть вектор функция $\boldsymbol{f}$ непрерывно отображает пространство $\mathbb{L}_2^n \times \mathbb{T}$ в $\mathbb{L}_2^n$ и $\boldsymbol{X}^0 \in \mathbb{L}_2^n$. Тогда векторный СП $\boldsymbol{X}^\star(t)$ называется *решением в среднем квадратичном* системы уравнений (2.1.75) при $t \in \mathbb{T}$, если:

(a) $\boldsymbol{X}^\star(t)$ непрерывен в среднем квадратичном на $\mathbb{T}$;

(b) $\boldsymbol{X}^\star(t_0) = \boldsymbol{X}^0$ п.н.;

(c) $\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{X}^\star(t), t\big)$ – производная в среднем квадратичном СП $\boldsymbol{X}^\star(t)$ на $\mathbb{T}$.

Ниже и для других форм систем случайных уравнений при определении решений в среднем квадратичном на векторы $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{X}^0$ накладываются условия типа (a)–(c).

Теорема 2.1.18. СП $\boldsymbol{X}^\star(t)$ тогда и только тогда будет решением в среднем квадратичном уравнений (2.1.75), когда для всех $t \in \mathbb{T}$

$$\boldsymbol{X}^\star(t) = \boldsymbol{X}^0 + \int\limits_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{X}^\star(\tau), \tau\big)\, d\tau,$$

где интеграл понимается в среднем квадратичном.

Теорема 2.1.19. Если вектор-функция $\boldsymbol{f}$ удовлетворяет *условию Липшица*

$$\| \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}, t) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{Y}, t) \| \leqslant k(t) \| \boldsymbol{X} - \boldsymbol{Y} \|,$$

где

$$\int_{t_0}^{t} k(\tau)\, d\tau < +\infty,$$

то решение системы уравнений (2.1.75) существует и единственно для любых начальных условий $\boldsymbol{X}^0 \in \mathbb{L}_2^n$.

Теперь рассмотрим систему линейных случайных ОДУ вида

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{\mathcal{H}}(t)\, \boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{Y}(t), \quad t \in \mathbb{T}, \qquad \boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}^0, \tag{2.1.76}$$

где $\boldsymbol{\mathcal{H}}(t)$ – неслучайная действительная матрица размерности $n \times n$ с непрерывными элементами; случайный векторный процесс $\boldsymbol{Y}(t) \in \mathbb{L}_2^n$ непрерывен в среднем квадратичном, а $\boldsymbol{X}^0 \in \mathbb{L}_2^n$, причем $\boldsymbol{Y}(t)$ и $\boldsymbol{X}^0$ независимы.

Теорема 2.1.20. При этих условиях существует единственное решение в среднем квадратичном системы (2.1.76) вида

$$\boldsymbol{X}^\star(t) = \boldsymbol{\Phi}(t, t_0)\, \boldsymbol{X}^0 + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\Phi}(t, \tau)\, \boldsymbol{Y}(\tau)\, d\tau, \tag{2.1.77}$$

в котором интеграл понимается как интеграл в среднем квадратичном, а функция $\boldsymbol{\Phi}(t, \tau)$ является решением матричного ОДУ

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}(t, \tau)}{\partial t} = \boldsymbol{\mathcal{H}}(t)\, \boldsymbol{\Phi}(t, \tau), \quad t, \tau \in \mathbb{T}, \quad \tau < t, \qquad \boldsymbol{\Phi}(\tau, \tau) = \boldsymbol{\mathcal{I}}. \tag{2.1.78}$$

Теперь обратимся к другому частному случаю системы уравнений (2.1.73) – форме, когда случайное возмущение является векторным винеровским процессом, который аффинно входит в правые части уравнений. Для этого нужно ввести дополнительные структуры.

Пусть детерминированная система описывается обыкновенным дифференциальным уравнением вида

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) + g(x(t), t)\, r(t), \qquad x(t_0) = x^0, \tag{2.1.79}$$

где $x(t)$ и x^0 – характеристики текущего и начального состояний системы, $f(\cdot,\cdot)$ и $g(\cdot,\cdot)$ – некоторые детерминированные функции, $r(t)$ – неслучайное внешнее возмущение. При таких условиях состояние системы изменяется чисто детернинистически и может быть полностью определено из уравнения (2.1.79). Это уравнение можно переписать в эквивалентных дифференциальной

$$dx(t) = f(x(t),t)\,dt + g(x(t),t)\,dq(t), \qquad x(t_0) = x^0 \tag{2.1.80}$$

и интегральной

$$x(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} f(x(\tau),\tau)\,d\tau + \int_{t_0}^{t} g(x(\tau),\tau)\,dq(\tau), \tag{2.1.81}$$

формах, где $dq(t) = r(t)\,dt$.

Влияние случайных факторов на поведение некоторой системы может быть учтено несколькими путями (естественно, существует множество других, а также комбинаций):

– заданием случайных начальных условий, т.е. случайного начального состояния;

– фиксацией внешних и/или внутренних возмущений системы как случайных функций времени;

– трактовкой всех или некоторых параметров системы как случайных, т.е. рассмотрение системы как системы уравнений со случайными параметрами (можно рассматривать как частный случай предыдущей позиции).

Перепишем формально (без обоснования законности такого действия) уравнения (2.1.73)–(2.1.76) с отражением факта наличия случайности:

$$\dot{X}(t) = f\big(X(t),t\big) + g\big(X(t),t\big)\,R(t), \qquad X(t_0) = X^0, \tag{2.1.82}$$

$$dX(t) = f\big(X(t),t\big)\,dt + g\big(X(t),t\big)\,dQ(t), \qquad X(t_0) = X^0, \tag{2.1.83}$$

$$X(t) = X^0 + \int_{t_0}^{t} f\big(X(\tau),\tau\big)\,d\tau + \int_{t_0}^{t} g\big(X(\tau),\tau\big)\,dQ(\tau). \tag{2.1.84}$$

Определение 2.1.80. Уравнение типа (2.1.82) в ситуации, когда $R(t)$ – произвольный ("физический") случайный процесс, называется *уравнением Ланжевена*.

Первое уравнение, изученное Ланжевеном, описывало движение тяжелой частицы массы m в жидкости под действием суммы силы вязкого трения, пропорциональной скорости частицы, случайной силы, возникающей за счет непрерывных соударений частицы с молекулами жидкости, и систематической силы, формируемой внутримолекулярными и межмолекулярными взаимодействиями.

Определение 2.1.81. При наличии возмущений системы в виде специальных случайных процессов, например, если в уравнении (2.1.82) $R(t)$ – гауссовский белый шум $V(t)$, а в уравнениях (2.1.83), (2.1.84) $Q(t)$ – винеровский процесс $W(t)$ или пуассоновский процесс $P(t)$, то уравнения (2.1.82), (2.1.83) называются *стохастическими обыкновенными дифференциальными* (СОДУ, СДУ), а уравнение (2.1.84) – *стохастическим обыкновенным интегральным* (СОИУ, СИУ).

Естественно, определение интегралов в уравнении (2.1.84) отличается от их детерминированных аналогов в уравнении (2.1.74).

Рассмотрим интегралы из уравнения (2.1.84):

$$\mathcal{I}_R = \int_{t_0}^{t} f\big(X(\tau),\tau\big)\,d\tau, \tag{2.1.85}$$

$$\mathcal{I}_{St} = \int_{t_0}^{t} g\big(X(\tau),\tau\big)\,dQ(\tau), \tag{2.1.86}$$

где $X(t)$, $Q(t)$ – случайные процессы второго порядка. Эти интегралы, включающие случайные функции, могут быть определены через пределы соответствующих интегральных сумм, если будут выполняться следующие условия:

1°. Случайные функции $f\big(X(t),t\big)$ и $g\big(X(t),t\big)$ равномерно непрерывны в среднем квадратичном на временно́м отрезке $[t_0,t]$, т.е.

$$\mathbb{E}\big[\big\{f\big(X(\tau+\Delta),\tau+\Delta\big)-f\big(X(\tau),\tau\big)\big\}^2\big]\to 0 \text{ при } \Delta\to 0$$

равномерно по $\tau\in[t_0,t]$. Подобное соотношение должно выполняться и для $g\big(X(t),t\big)$.

2°. Следующие интегралы существуют и конечны:

$$\mathbb{E}\Big[\int_{t_0}^{t} f^2\big(X(\tau),\tau\big)\,d\tau\Big]<+\infty, \qquad \mathbb{E}\Big[\int_{t_0}^{t} g^2\big(X(\tau),\tau\big)\,d\tau\Big]<+\infty.$$

Определение интегралов от случайных функций типа (2.1.85) незначительно отличается от построения интегралов от неслучайных функций:

$$\mathcal{I}_R = \underset{\Delta\to 0}{\text{l.i.m.}} \sum_{k=1}^{n} f\big(X(\tau_k),\tau_k\big)\,(t_k - t_{k-1}), \tag{2.1.87}$$

где

$$t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t, \quad \Delta = \max_k \Delta_k, \quad \Delta_k = t_k - t_{k-1}, \quad \tau_k \in [t_{k-1}, t_k],$$

т.е. данная конструкция представляет собой расширение на нелинейные подынтегральные функции случайного процесса определения интеграла от линейной подынтегральной функции случайного процесса, введенного в пункте 2.1.1.5.

Однако определение значения интеграла (2.1.86) в виде

$$\mathcal{I}_{St} = \underset{\Delta\to 0}{\text{l.i.m.}} \sum_{k=1}^{n} g(X(\tau_k),\tau_k)\,\big[Q(t_k) - Q(t_{k-1})\big] \tag{2.1.88}$$

существенно зависит от схемы выбора точек τ_k, а также от типа процесса $Q(t)$. Если в качестве $Q(t)$ выбать стандартный винеровский процесс $W(t)$, то интеграл (2.1.86) можно записать так:

$$\mathcal{J}_\nu = \int_{t_0}^{t} g\big(X(\tau),\tau\big)\,d_\nu W(\tau) = \underset{\Delta\to 0}{\text{l.i.m.}}\ \mathcal{J}_{\nu n} =$$

$$= \underset{\Delta\to 0}{\text{l.i.m.}} \sum_{k=1}^{n} g\big((1-\nu)\,X(t_{k-1}) + \nu\,X(t_k), (1-\nu)\,t_{k-1} + \nu\,t_k\big)\times$$

$$\times\,\big[W(t_k) - W(t_{k-1})\big]. \tag{2.1.89}$$

Примечание 2.1.4. Здесь и далее считается, что винеровский процесс $W(t)$ определен при $t \geqslant t_0$, причем $W(t_0) = 0$ почти наверное. Кроме того, $X(t)$ является функцией $W(\tau)$ при $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$. Альтернативой является дальнейший анализ с предварительным смещением точки отсчета параметра t.

Определение 2.1.82. Если $\nu = 0$, то выражение (2.1.89) определяет *стохастический интеграл Ито*:

$$\mathcal{J}_0 = \int\limits_{t_0}^{t} g\big(X(\tau),\tau\big)\, d_\nu W(\tau) = \operatorname*{l.i.m.}_{\Delta\to 0} \mathcal{J}_{0n} =$$

$$= \operatorname*{l.i.m.}_{\Delta\to 0} \sum_{k=1}^{n} g\big(X(t_{k-1}), t_{k-1}\big)\big[W(t_k) - W(t_{k-1})\big]. \quad (2.1.90)$$

Интеграл $\mathcal{J}_0$ широко используется в работах по теории марковских случайных процессов. Но необходимо отметить, что стохастический интеграл Ито, определенный для прямого времени, не совпадает с таким же интегралом, записанным для обратного времени. Имеются и другие отклонения от соответствующих свойств обычного интеграла Стилтьеса, одно из которых продемонстрировано ниже в примере 2.1.2.

Свойства интеграла Ито

1°. При каждом фиксированном t последовательность $\mathcal{J}_{0n}$ сходится к $\mathcal{J}_0$ по вероятности, в среднем и в среднем квадратичном.

2°. Пусть функция $g(\cdot,\cdot)$ непрерывна, имеет кусочно-постоянную и непрерывную слева аппроксимацию, совместимую с интегральной суммой $\mathcal{J}_{0n}$ и удовлетворяющую критерию сходимости в среднем квадратичном, а функции $g(\cdot,\cdot)$ и $G(\cdot,\cdot)$ непрерывно дифференцируемы. Тогда

$$d\Big[\int\limits_{t_0}^{t} g\big(X(\tau),\tau\big)\, dW(\tau)\Big] = g\big(X(t),t\big)\, dW(t)$$

и

$$\int\limits_{t_0}^{t} dG\big(X(\tau),\tau\big) = G(X(t),t) - G(X(t_0),t_0)$$

при $t \geqslant t_0$ в смысле сходимости в среднем квадратичном.

3°. Если

$$\mathbb{E}\Big[\int\limits_{t_0}^{t} g^2\big(X(\tau),\tau\big)\, d\tau\Big] < +\infty, \quad (2.1.91)$$

то

$$\mathbb{E}\Big[\int\limits_{t_0}^{t} g\big(X(\tau),\tau\big)\, dW(\tau)\Big] = 0, \qquad t_0 \leqslant t.$$

4°. В случае интегрируемости с квадратом в форме (2.1.91) функций $g_1\bigl(X(\tau),\tau\bigr)$ и $g_2\bigl(X(\tau),\tau\bigr)$ верно равенство

$$\mathbb{E}\Bigl[\int\limits_{t_0}^{t} g_1\bigl(X(\tau_1),\tau_1\bigr)\,dW(\tau_1)\times\int\limits_{t_0}^{t} g_2\bigl(X(\tau_2),\tau_2\bigr)\,dW(\tau_2)\Bigr]=$$

$$=\int\limits_{t_0}^{t}\mathbb{E}\bigl[g_1\bigl(X(\tau),\tau\bigr)\,g_2\bigl(X(\tau),\tau\bigr)\bigr]\,d\tau,\qquad t_0\leqslant t.$$

Отсюда

$$\mathbb{E}\Bigl[\Bigl\{\int\limits_{t_0}^{t} g\bigl(X(\tau),\tau\bigr)\,dW(\tau)\Bigr\}^2\Bigr]=\int\limits_{t_0}^{t}\mathbb{E}\bigl[g^2\bigl(X(\tau),\tau\bigr)\bigr]\,d\tau,\qquad t_0\leqslant t.$$

5°. Линейность:

$$\int\limits_{t_0}^{t}\bigl[c_1\,g_1\bigl(X(\tau),\tau\bigr)+c_2\,g_2\bigl(X(\tau),\tau\bigr)\bigr]\,dW(\tau)=$$

$$=c_1\int\limits_{t_0}^{t} g_1\bigl(X(\tau),\tau\bigr)\,dW(\tau)+c_2\int\limits_{t_0}^{t} g_2\bigl(X(\tau),\tau\bigr)\,dW(\tau).$$

6°. Аддитивность: для $t_0\leqslant s\leqslant t$ верно равенство

$$\int\limits_{t_0}^{t} g\bigl(X(\tau),\tau\bigr)\,dW(\tau)=\int\limits_{t_0}^{s} g\bigl(X(\tau),\tau\bigr)\,dW(\tau)+\int\limits_{s}^{t} g\bigl(X(\tau),\tau\bigr)\,dW(\tau).$$

7°. Реализации интеграла $\mathcal{J}_0$ непрерывны с вероятностью единица.

Для преодоления некоторых проблем, возникающих при использовании интеграла Ито в прикладных исследованиях, Р.Л. Стратонович[3] ввел стохастический интеграл, который был назван его именем. Одним из важнейших свойств стохастических интегралов Стратоновича является то, что при их использовании можно применять обычные правила

[3] *Руслан Леонтьевич Стратонович* (1930–1997) – советский и российский ученый. Один из создателей теории стохастических дифференциальных уравнений.

математического анализа (замена переменных, интегрирование по частям и т.д.).

Определение 2.1.83. Если $\nu = 0{,}5$, то выражение (2.1.89) определяет (симметризованный) *стохастический интеграл Стратоновича*

$$\mathcal{J}_{0,5} = \int\limits_{t_0}^{t} g(X(\tau),\tau)\, d_{0,5}W(\tau) = \operatorname*{l.i.m.}_{\Delta\to 0} \sum_{k=1}^{n} g\big(\widehat{X}_k, \widehat{t}_k\big)\, \Delta W(t_k), \qquad (2.1.92)$$

где

$$\widehat{X}_k = \frac{X(t_{k-1})+X(t_k)}{2}, \quad \widehat{t}_k = \frac{t_{k-1}+t_k}{2}, \quad \Delta W(t_k) = W(t_k)-W(t_{k-1}).$$

Пример 2.1.2. Вычислим интеграл

$$\mathcal{J}_{\nu}^{*} = \int\limits_{t_0}^{t} W(\tau)\, dW(\tau),$$

где $W(t)$ – стандартный винеровский процесс:

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_0^* &= \operatorname*{l.i.m.}_{\Delta\to 0} \sum_{k=1}^{n} W(t_{k-1})\big[W(t_k) - W(t_{k-1})\big] = \\
&= \operatorname*{l.i.m.}_{\Delta\to 0} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left[W^2(t_k) - W^2(t_{k-1}) - \{W(t_k) - W(t_{k-1})\}^2\right] = \\
&= \frac{1}{2} \operatorname*{l.i.m.}_{\Delta\to 0} \left[W^2(t) - W^2(t_0) - \sum_{k=1}^{n} \{W(t_k) - W(t_{k-1})\}^2\right] = \\
&= \frac{1}{2} \left[W^2(t) - W^2(t_0) - \operatorname*{l.i.m.}_{\Delta\to 0} \sum_{k=1}^{n} \{W(t_k) - W(t_{k-1})\}^2\right] = \\
&= \frac{1}{2} \left[W^2(t) - W^2(t_0) - \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1})\right] = \\
&= \frac{1}{2} \big[W^2(t) - W^2(t_0) - (t - t_0)\big].
\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\mathcal{J}^*_{0,5} = \operatorname*{l.i.m.}_{\Delta\to 0} \sum_{k=1}^{n} \frac{W(t_{k-1}) + W(t_k)}{2} \big[W(t_k) - W(t_{k-1})\big] =$$

$$= \operatorname*{l.i.m.}_{\Delta\to 0} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \big[W^2(t_k) - W^2(t_{k-1})\big] =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname*{l.i.m.}_{\Delta\to 0} \big[W^2(t) - W^2(t_0)\big] = \frac{1}{2} \big[W^2(t) - W^2(t_0)\big].$$

Сравнивая значения $\mathcal{J}^*_0$ и $\mathcal{J}^*_{0,5}$, несложно установить, что величина второго интеграла находится в согласии со значением интеграла Стилтьеса из классического математического анализа от соответствующей детерминированной функции. ►

Разность между $\mathcal{J}_\nu$ и $\mathcal{J}_0$ для произвольного $\nu \in (0, 1]$ определяется соотношением вида:

$$\mathcal{J}_\nu - \mathcal{J}_0 = \nu \int_{t_0}^{t} \frac{g\big(X(\tau), \tau\big)}{\partial X}\, g\big(X(\tau), \tau\big)\, d\tau. \tag{2.1.93}$$

Определение 2.1.84. Дифференциальное уравнение, для которого соответствующий интеграл понимается в смысле Ито, называется *СДУ Ито* (СОДУ Ито) и записывается так:

$$dX(t) = f\big(X(t), t\big)\, dt + g\big(X(t), t\big)\, dW(t), \qquad X(t_0) = X^0, \tag{2.1.94}$$

где X^0 – случайная или неслучайная величина.

Если случайный процесс $X(t)$ является решением уравнения (2.1.94), то дифференциал случайного процесса $Z(t) = h\big(X(t), t\big)$, где $h(\cdot, \cdot) : \mathbb{R} \times [t_0, \infty) \to \mathbb{R}$ – некоторая детерминированная вектор-функция, можно определить из следующего соотношения:

$$dZ = \Big(\frac{\partial h}{\partial t} + f\, \frac{\partial h}{\partial X} + \frac{1}{2}\, g^2\, \frac{\partial^2 h}{\partial X^2}\Big)\, dt + \frac{1}{2}\, \frac{\partial h}{\partial X}\, g\, dW. \tag{2.1.95}$$

Это соотношение называется *формулой Ито замены переменных.*

Определение 2.1.85. Уравнение

$$dX(t) = f\big(X(t), t\big)\, dt + g\big(X(t), t\big) \circ dW(t), \tag{2.1.96}$$

для которого соответствующий стохастический интеграл понимается в смысле Стратоновича, называется *СДУ Стратоновича*, или *стохастическим уравнением в симметризованной форме.*

Формула Стратоновича замены переменных будет иметь следующий вид: если $Z(t) = h\big(X(t), t\big)$, то

$$dZ = \Big(\frac{\partial h}{\partial t} + f\,\frac{\partial h}{\partial X}\Big)\,dt + \frac{1}{2}\,\frac{\partial h}{\partial X}\,g\,dW. \tag{2.1.97}$$

Пример 2.1.3. Рассмотрим следующее СОДУ

$$dX(t) = -\lambda\,X(t)\,dt + \gamma\,dW(t), \qquad X(0) = X^0,$$

где $\lambda > 0$, γ – параметры, X_0 – случайная величина с известной плотностью вероятности, а следовательно, и первыми моментами. Решением $X(t)$ этого уравнения является случайный *процесс Орнштейна–Уленбека*[4]. Определим вероятностные характеристики этого процесса.

◀ Если воспользоваться формулой для решения этого уравнения

$$X(t) = X^0\,e^{-\lambda t} + \int\limits_0^t \gamma\,e^{\lambda(s-t)}\,dW(s),$$

то прямым усреднением обеих частей последнего равенства и применением соотношений из пунктов 2.1.1.5 и 2.1.1.6 можно получить:

– функцию математического ожидания

$$m_X(t) = m_0\,e^{-\lambda t}, \qquad m_0 = \mathbb{E}\big[X^0\big]\,;$$

– ковариационную функцию

$$\mathcal{C}_{XX}(t_1, t_2) = \sigma^2_{X_0}\,e^{-\lambda(t_1+t_2)} + \frac{\gamma^2}{2\lambda}\,e^{-\lambda(t_1+t_2)}\big[e^{2\lambda\min(t_1,t_2)} - 1\big];$$

– дисперсию

$$\mathcal{D}_X(t) = \sigma^2_{X_0}\,e^{-2\lambda t} + \frac{\gamma^2}{2\,\lambda}\,\big[1 - e^{-2\lambda t}\big];$$

– математическое ожидание, ковариационную функцию, дисперсию и спектральную плотность после окончания переходного процесса

$$m_X = 0, \quad \mathcal{C}_{XX}(\tau) = \frac{\gamma^2}{2\lambda}\,e^{-\lambda|\tau|}, \quad \mathcal{D}_X = \frac{\gamma^2}{2\,\lambda}, \quad \mathcal{S}_{XX}(\omega) = \frac{\gamma^2}{2\,\pi}\,\frac{1}{\omega^2 + \lambda^2}.$$

[4] *Леонард Саломон Орнштейн* (Leonard Salomon Ornstein; 1880–1941) – голландский физик, ученик Лоренца. *Джордж Юджин Уленбек* (George Eugene Uhlenbeck; 1900–1988) – американский физик–теоретик голландского происхождения.

При этом переходная и стационарная плотности вероятности будут иметь следующий вид:

$$\pi_s(x, t+\tau \,|\, y, t) = \Big[\frac{\pi\,\gamma^2}{\lambda}\,(1-e^{-2\lambda\,\tau})\Big]^{-1/2}\,\exp\Big[-\frac{1}{2}\,\frac{(x-y\,e^{-\lambda\,\tau})^2}{\gamma^2/(2\lambda)\,(1-e^{-2\lambda\,\tau})}\Big],$$

$$p_s(x) = \Big(\frac{\pi\,\gamma^2}{\lambda}\Big)^{-1/2}\,\exp\Big(-\frac{\lambda}{\gamma^2}\,x^2\Big). \qquad \blacktriangleright$$

При решении значительного числа теоретических и практических задач считается, что состояние исследуемого объекта описывается векторным случайным процессом $\boldsymbol{X}(t)$, удовлетворящим системе стохастических дифференциальных уравнений вида (Ито или Стратоновича, что необходимо указывать, если это неясно из контекста)

$$d\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{X}(t), t\big)\,dt + \boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{X}(t), t\big)\,d\boldsymbol{W}(t) \tag{2.1.98}$$

с начальным условием $\boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}^0$, где $\boldsymbol{X} \in \mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \times \ldots \times \mathbb{X}_n \subset \mathbb{R}^n$; $\boldsymbol{W}(t) \in \in \mathbb{R}^m$ – векторный случайный процесс, компонентами которого являются независимые стандартные винеровские процессы; $\boldsymbol{f}(\cdot,\cdot) = \{f_i(\cdot,\cdot)\}^{\intercal} : \mathbb{R}^n \times [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ и $\boldsymbol{\mathcal{G}}(\cdot,\cdot) = \{g_{ij}(\cdot,\cdot)\} : \mathbb{R}^n \times [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ – неслучайные векторная и матричная функции. При этих предположениях процесс $\boldsymbol{X}(t)$ – решение системы СОДУ (2.1.98) будет непрерывным марковским процессом, который называется также *диффузионным*.

Менее строгая с математической точки зрения, но популярная в прикладных исследованиях форма уравнений (2.1.98) выглядит так:

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{X}(t), t\big) + \boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{X}(t), t\big)\,\boldsymbol{V}(t), \tag{2.1.99}$$

где $\boldsymbol{V}(t) \in \mathbb{R}^m$ – векторный случайный процесс, компонентами которого являются независимые белые шумы с единичными интенсивностями:

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{V}(t)] = \boldsymbol{O}, \qquad \mathbb{E}\big[\boldsymbol{V}(t_1)\,\boldsymbol{V}^{\intercal}(t_2)\big] = \delta(t_1 - t_2)\,\boldsymbol{\mathcal{I}}_m,$$

$\boldsymbol{\mathcal{I}}_m$ – единичная матрица порядка m.

Определение 2.1.86. Если все элементы j-го столбца матрицы $\boldsymbol{\mathcal{G}}$ не зависят от компонент вектора $\boldsymbol{X}(t)$, то соответствующий случайный шум $W_j(t)$ называется *аддитивным*, иначе – *мультипликативным*.

Как правило, в моделях одни возмущения являются аддитивными, а другие – мультипликативными, причем задачи изучения систем с мультипликативными шумами, как правило, сложнее проблем анализа объектов с аддитивными флуктуациями.

Диффузионный процесс, описываемый уравнениями (2.1.98), можно интерпретировать как движение потока частиц, определяемое регулярным векторным полем $\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{X}(t),t\big)$ и малым случайным векторным полем $\boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{X}(t),t\big)\,\boldsymbol{V}(t)$, которое вызывает отклонение траекторий системы от интегральных линий соответствующего детерминированного объекта.

Заметим, что уравнения (2.1.98) не являются самыми общими. Так, большой интерес в последнее время проявляется к стохастическим системам специального типа. К ним относятся уравнения, в правых частях которых присутствуют возмущения пуассоновского типа, системы с переменной структурой, обобщенные марковские и немарковские системы, интегро-дифференциальные и общие функционально-дифференциальные уравнения, а также их частные случаи – уравнения с запаздыванием (как детерминированным, так и случайным) и др.

Как и в случае детерминированных дифференциальных уравнений, первой основной задачей анализа СОДУ является выяснение условий существования и единственности решения СОДУ [358]. Приведем строгое определение и формулировку соответствующей теоремы [47, 824] для уравнения Ито.

Пусть $0\leqslant t_0<T<+\infty$; $\big(\Omega,\mathscr{A},\mathscr{F},\mathscr{P}\big)$ – полное вероятностное пространство с фильтрацией $\{\mathscr{F}_t,\ t\geqslant t_0\}$, удовлетворяющей обычным условиям; $\boldsymbol{X}^0\in\mathbb{R}^n$ – $\mathscr{F}_{t_0}$–измеримый случайный вектор, такой, что $\mathbb{E}\big[\|\boldsymbol{X}^0\|^2\big]<+\infty$; $\boldsymbol{f}:\mathbb{R}^n\times[t_0,T]\to\mathbb{R}^n$ и $\boldsymbol{\mathcal{G}}:\mathbb{R}^n\times[t_0,T]\to\mathbb{R}^{n\times m}$ – борелевские измеримые функции.

Определение 2.1.87. n-мерный векторный СП $\{\boldsymbol{X}^\star(t),\ t_0\leqslant t\leqslant T\}$ называется *решением системы СОДУ Ито* (2.1.98), если он удовлетворяет следующим условиям:

(a) $\boldsymbol{X}^\star(t)$ непрерывен в среднем квадратичном и $\mathscr{F}_t$-адаптирован;

(b) $\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{X}^\star(t),t\big)\in\mathbb{L}^1\big([t_0,T];\mathbb{R}^n\big)$ и $\boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{X}^\star(t),t\big)\in\mathbb{L}^2\big([t_0,T];\mathbb{R}^{n\times m}\big)$;

(c) векторное стохастическое обыкновенное интегральное уравнение (СОИУ) Ито

$$\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{X}^0+\int\limits_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{X}(\tau),\tau\big)\,d\tau+ \\ +\int\limits_{t_0}^{t}\boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{X}(\tau),\tau\big)\,d\boldsymbol{W}(\tau),\qquad t_0<t\leqslant T,\quad (2.1.100)$$

при подстановке $\boldsymbol{X}^\star(t)$ вместо $\boldsymbol{X}(t)$ с вероятностью 1 обращается в тождество.

Определение 2.1.88. Говорят, что решение $\boldsymbol{X}^\star(t)$ *единственно*, если любое другое решение стохастически эквивалентно $\boldsymbol{X}^\star(t)$.

Теорема 2.1.21. Предположим, что существуют положительные константы C_1 и C_2, такие, что:

(a) для всех $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ и $t \in [t_0, T]$

$$\max\left[\left\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y},t)\right\|^2, \left\|\boldsymbol{\mathcal{G}}(\boldsymbol{x},t)-\boldsymbol{\mathcal{G}}(\boldsymbol{y},t)\right\|^2\right] \leqslant C_1\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2; \quad (2.1.101)$$

(b) для всех $(\boldsymbol{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times [t_0, T]$

$$\max\left[\left\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)\right\|^2 + \left\|\boldsymbol{\mathcal{G}}(\boldsymbol{x},t)\right\|^2\right] \leqslant C_2\left(1+\|\boldsymbol{x}\|\right). \quad (2.1.102)$$

где

$$\left\|\boldsymbol{\mathcal{G}}(\boldsymbol{x},t)\right\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} |g_{ij}(\boldsymbol{x},t)|^2.$$

Тогда система уравнений Ито (2.1.100) при заданном начальном условии $\boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}^0$ имеет единственное и почти наверное непрерывное решение $\{\boldsymbol{X}(t),\ t_0 \leqslant t \leqslant T\}$, такое, что

$$\mathbb{E}\Big[\int_{t_0}^{T} \|\boldsymbol{X}(t)\|^2\, dt\Big] < +\infty.$$

Условия (2.1.101) и (2.1.102) достаточны для того, чтобы решение $\boldsymbol{X}(t)$ не ушло в бесконечность за конечное время и было единственным соответственно.

В прикладных исследованиях обычно предполагается, что при фиксированных реализациях процесса $\boldsymbol{W}(t)$ существует единственное решение системы СОДУ (2.1.98).

2.1.1.9. Прямое и обратное уравнения Колмогорова

Переходные плотности для непрерывных векторных марковских процессов, кроме интегрального уравнения Чэпмена–Колмогорова (2.1.27), при некоторых условиях можно описывать и дифференциальными уравнениями в частных производных.

Определение 2.1.89. Уравнения для нахождения функции $\pi(\boldsymbol{x}, t \,|\, \boldsymbol{y}, \tau)$, в которых независимыми переменными являются $\boldsymbol{x}$ и t, а аргументы $\boldsymbol{y}$ и

τ фиксированы, называются *прямыми*. Уравнения, в которых независимыми переменными являются $\boldsymbol{y}$ и τ, а аргументы $\boldsymbol{x}$ и t фиксированы, называются *обратными*.

Обратимся к системе СОДУ (2.1.98). Можно показать, что если все элементы вектора

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x},t)=\big\{a_1(\boldsymbol{x},t),a_2(\boldsymbol{x},t),...,a_n(\boldsymbol{x},t)\big\}^{\mathsf{T}},$$

где

$$a_i(\boldsymbol{x},t)=f_i(\boldsymbol{x},t)+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial g_{ik}(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_j}\,g_{jk}(\boldsymbol{x},t), \tag{2.1.103}$$

дифференцируемы[5], а компоненты матрицы $\boldsymbol{\mathcal{G}}(\boldsymbol{x},t)$ дважды дифференцируемы, то переходная плотность $\pi(\boldsymbol{x},t\,|\,\boldsymbol{y},\tau)$ удовлетворяет *уравнению Фоккера–Планка–Колмогорова* (*ФПК–уравнению*)

$$\frac{\partial\pi(\boldsymbol{x},t\,|\,\boldsymbol{y},\tau)}{\partial t}=\mathbb{L}_{xt}\pi(\boldsymbol{x},t\,|\,\boldsymbol{y},\tau) \tag{2.1.104}$$

с начальным условием

$$\lim_{t\to\tau+0}\pi(\boldsymbol{x},t\,|\,\boldsymbol{y},\tau)=\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{2.1.105}$$

и является непрерывной по $\boldsymbol{x}$. Уравнение (2.1.104) называется также *вторым*, или *прямым*, *уравнением Колмогорова*, *уравнением Фоккера–Планка*, *уравнением Эйнштейна–Фоккера*, *диффузионным уравнением* и т.д.

Оператор $\mathbb{L}_{xt}$, называемый *оператором Фоккера–Планка–Колмогорова*, в уравнении (2.1.104) имеет вид

$$\mathbb{L}_{xt}\big[\,\cdot\,\big]=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\big\{a_i(\boldsymbol{x},t)\,\big[\,\cdot\,\big]\big\}}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2\big\{b_{ij}(\boldsymbol{x},t)\,\big[\,\cdot\,\big]\big\}}{\partial x_i\,\partial x_j}, \tag{2.1.106}$$

где функции $a_i(\boldsymbol{x},t)$ называются *коэффициентами сноса* (или *дрейфа*) и характеризуют средние значения локальных скоростей компонент марковского процесса, а *коэффициенты диффузии* $b_{ij}(\boldsymbol{x},t)$ ($i,\,j=1,\,2,\,...,\,n$)

[5]Здесь и далее, если не сказано противное, для вычисления коэффициентов a_i и b_{ij} (см. ниже) используются формулы Стратоновича (2.1.103) и (2.1.107). В формулах Ито в выражении для коэффициентов $a_i(\boldsymbol{x},t)$ отсутствует двойная сумма.

являются элементами неотрицательно определенной *матрицы* или *тензора диффузии*

$$\boldsymbol{\mathcal{B}}(\boldsymbol{x},t)=\{b_{ij}(\boldsymbol{x},t)\}=\boldsymbol{\mathcal{G}}(\boldsymbol{x},t)\,\boldsymbol{\mathcal{G}}^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{x},t)=\Big\{\sum_{k=1}^{m}g_{ik}(\boldsymbol{x},t)\,g_{jk}(\boldsymbol{x},t)\Big\}. \quad (2.1.107)$$

Одноточечная плотность распределения $p\,(\boldsymbol{x},t)\equiv p_X^{[1]}(\boldsymbol{x},t)$ также удовлетворяет уравнению типа (2.1.104):

$$\frac{\partial p(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}=\mathbb{L}_{xt}p(\boldsymbol{x},t), \quad (2.1.108)$$

но с начальным условием

$$p(\boldsymbol{x},t_0)=p^{\,0}(\boldsymbol{x}), \quad (2.1.109)$$

где $p^{\,0}(\boldsymbol{x})$ – заданная *начальная плотность вероятности*.

Вектор $\boldsymbol{\mathcal{J}}$ с компонентами

$$\mathcal{J}_i=a_i(\boldsymbol{x},t)\,p(\boldsymbol{x},t)-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\big[b_{ij}(\boldsymbol{x},t)\,p(\boldsymbol{x},t)\big]}{\partial x_j} \quad (2.1.110)$$

называется *вектором потока вероятности*, а ФПК–уравнение в таких обозначениях превращается в *уравнение неразрывности*

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\operatorname{div}\boldsymbol{\mathcal{J}}(\boldsymbol{x},t)=0. \quad (2.1.111)$$

ФПК–уравнение в такой форме позволяет интерпретировать его как уравнение переноса вероятности в пространстве состояний: этот перенос происходит через поток вероятности, который в соответствии с уравнением (2.1.111) происходит на основе вкладов процесса дрейфа, характеризуемого полем скоростей дрейфа, и диффузионного процесса в пространстве состояний, характеризуемого матрицей диффузии.

Для получения частных решений ФПК–уравнений (2.1.108), кроме начальных условий типа (2.1.109), необходимо задавать и граничные условия на границе $\partial\mathscr{D}$ области $\overline{\mathscr{D}}$ изменения векторного СП $\boldsymbol{X}(t)$. Простейшие нулевые условия на бесконечности (натуральные) были представлены ранее. Предположим, что область $\overline{\mathscr{D}}$ ограничена, и рассмотрим различные типы граничных условий.

Определение 2.1.90. Если поток вероятности через границу $\partial\mathscr{D}$ области $\overline{\mathscr{D}}$ равен нулю, то граница называется *отражающей*.

Определение 2.1.91. Если плотность вероятности на границе $\partial\mathscr{D}$ области $\overline{\mathscr{D}}$ равна нулю, то граница называется *поглощающей*.

Если устремить t к бесконечности, то при выполнении некоторых условий (независимость коэффициентов сноса и диффузии от времени и др. [47, 286]) существует решение *стационарного ФПК–уравнения*

$$\mathbb{L}_x p_s(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{\mathcal{B}} = \boldsymbol{\mathcal{B}}(\boldsymbol{x}), \tag{2.1.112}$$

$$\mathbb{L}_x\big[\,\cdot\,\big] = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\big\{a_i(\boldsymbol{x})\,\big[\,\cdot\,\big]\big\}}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2\big\{b_{ij}(\boldsymbol{x})\,\big[\,\cdot\,\big]\big\}}{\partial x_i\,\partial x_j}, \tag{2.1.113}$$

которое не зависит от начального распределения.

Кроме уравнения (2.1.104), переходная плотность $\pi(\boldsymbol{x}, t\,|\,\boldsymbol{y}, \tau)$, как функция $\boldsymbol{y}$ и τ, удовлетворяет *обратному* (или *первому*) *уравнению Колмогорова*

$$-\frac{\partial\pi(\boldsymbol{x}, t\,|\,\boldsymbol{y}, \tau)}{\partial\tau} = \mathbb{L}^*_{y\tau}\pi(\boldsymbol{x}, t\,|\,\boldsymbol{y}, \tau) \tag{2.1.114}$$

с условием

$$\lim_{\tau\to t-0}\pi(\boldsymbol{x}, t\,|\,\boldsymbol{y}, \tau) = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}), \tag{2.1.115}$$

где оператор $\mathbb{L}^*_{y\tau}$ имеет вид

$$\mathbb{L}^*_{y\tau}\big[\,\cdot\,\big] = \sum_{i=1}^{n} a_i(\boldsymbol{y}, \tau)\,\frac{\partial\big[\,\cdot\,\big]}{\partial y_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(\boldsymbol{y}, \tau)\,\frac{\partial^2\big[\,\cdot\,\big]}{\partial y_i\,\partial y_j} \tag{2.1.116}$$

и является сопряженным к оператору $\mathbb{L}_{xt}$.

Если $\mathsf{P}(\boldsymbol{x}, t)$ – вероятность того, что система, находившаяся первоначально в точке $\boldsymbol{x}$, расположенной внутри области $\mathscr{D}$ с границей $\partial\mathscr{D}$, в течение промежутка времени t не выйдет за границы этой области, то эволюция функции $\mathsf{P}(\boldsymbol{x}, t)$ будет описываться уравнением

$$\frac{\partial\mathsf{P}}{\partial t} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(\boldsymbol{x})\,\frac{\partial^2\mathsf{P}}{\partial x_i\,\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(\boldsymbol{x})\,\frac{\partial\mathsf{P}}{\partial x_i}, \tag{2.1.117}$$

$$\mathsf{P}(\boldsymbol{x}, 0) = 0, \quad \boldsymbol{x}\in\mathscr{D}, \qquad \mathsf{P}(\boldsymbol{x}, t) = 1, \quad \boldsymbol{x}\in\partial\mathscr{D}. \tag{2.1.118}$$

Пусть при этом $\mathsf{T}(\boldsymbol{x})$ – среднее время достижения границы. Тогда $\mathsf{T}(\boldsymbol{x})$ будет удовлетворять уравнению

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(\boldsymbol{x})\,\frac{\partial^2\mathsf{T}}{\partial x_i\,\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(\boldsymbol{x})\,\frac{\partial\mathsf{T}}{\partial x_i} + 1 = 0, \tag{2.1.119}$$

$$\mathsf{T}(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \partial\mathscr{D}. \tag{2.1.120}$$

Уравнения (2.1.117) и (2.1.119) называются *первым* и *вторым уравнениями Понтрягина* соответственно.

В связи с тем, что на практике входные случайные возмущения часто не являются белыми шумами, что препятствует применению теории СОДУ, удобным и полезным оказывается понятие *формирующего фильтра*, т.е. динамической системы, которая преобразует белый шум в случайный процесс с заданными статистическими характеристиками (средним и ковариационной функцией). Другими словами, можно сказать, что с математической точки зрения под формирующим фильтром понимают некоторое стохастическое уравнение (или систему уравнений), решение которого (которой), будучи обусловленным порождающим скалярным или векторным белым шумом, представляет собой (векторный) случайный процесс с заданными вероятностными свойствами. Это позволяет перейти от рассмотрения систем с произвольным случайным входом к анализу эквивалентных систем, на вход которых действует белый шум, что достигается присоединением к уравнениям исследуемой системы уравнений формирующего фильтра.

В общем случае, когда данный случайный процесс имеет произвольную непрерывную ковариационную функцию, задача определения формирующего фильтра не решена. Так, среди процессов, допускающих строгое решение этой проблемы, присутствует класс стационарных случайных процессов с дробно-рациональными спектральными плотностями.

Известно, что спектральная плотность произвольного стационарного случайного процесса может быть аппроксимирована с любой точностью рациональной функцией, а немарковский гауссовский процесс приближенно представим как компонента многомерного марковского процесса. Увеличение числа составляющих последнего позволяет добиться большей точности аппроксимации.

Обычно для вероятностного изучения нелинейного объекта сначала составляется детерминированная модель, а затем постулируется, что некоторые ее параметры являются случайными. Дальнейший ее анализ проводится методами статистической (стохастической) динамики. Но в последнее время, особенно при моделировании механических систем, прослеживается тенденция к изначально вероятностной трактовке динамики объекта и соответственно к выводу уравнений его движения по правилам стохастического анализа.

Традиционно в задачах статистической динамики предполагается, что задана система СОДУ, описывающая поведение объекта, известны вероятностные характеристики случайных флуктуаций и распределение

$p_X^0(\boldsymbol{x})$ вектора состояния $\boldsymbol{X}(t)$ в начальный момент времени t_0. Наилучшим решением проблемы анализа поведения объекта является вычисление плотности вероятности $p_X(\boldsymbol{x}, t)$ в любой момент времени t ($t_0 \leqslant t \leqslant T < \infty$). На практике часто приходится ограничиваться расчетом на том же самом временно́м промежутке смешанных моментов фазовых координат до некоторого порядка. При этом задача считается решенной, если метод ее решения доведен до процедур, которые легко реализуются на существующей или перспективной вычислительной технике.

Обычно для вероятностного изучения нелинейного объекта сначала составляется детерминированная модель, а затем постулируется, что некоторые ее параметры являются случайными. Дальнейший ее анализ проводится методами статистической динамики. Но в последнее время, особенно при моделировании механических систем, прослеживается тенденция к изначально вероятностной трактовке динамики объекта и соответственно к выводу уравнений его движения по правилам стохастического анализа.

2.1.1.10. Недиффузионные и немарковские процессы

В работе [286] представлен вывод второго уравнения Колмогорова (2.1.104), основанный на использовании уравнения Чэпмена–Колмогорова (2.1.27), для случая $n = 1$[6], которое принимает следующую форму:

$$\frac{\partial \pi(x, t \,|\, y, \tau)}{\partial t} = \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \frac{\partial^s}{\partial x^s} \big[K_s(x, t)\, \pi(x, t \,|\, y, \tau)\big], \tag{2.1.121}$$

где

$$K_s(x, t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\, \mathbb{E}[\{X(t + \Delta t) - X(t)\}^s \,|\, X(t)] = \\ = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (z - x)^s\, \pi(z, t + \Delta t \,|\, x, t)\, dz \tag{2.1.122}$$

– *кинетические* или *инфинитиземальные коэффициенты* марковского процесса. Здесь важно заметить, что раз для вывода *прямого кинетического уравнения* (2.1.121) использовалось только уравнение Чэпмена–

[6] Схема вывода уравнения (2.1.104) для переходной плотности векторного случайного процесса $\boldsymbol{X}(t)$ произвольной размерности остается той же, но в процессе выкладок возникает больше чисто технических трудностей.

Колмогорова, то полученное уравнение будет верно для любого марковского процесса, если все коэффициенты $K_s(z,t)$ существуют. При таких условиях верна следующая теорема [892].

Теорема 2.1.22. Для произвольных марковских процессов возможны три случая: 1) $K_s(x,t) \equiv 0$ для $s > 1$; 2) $K_s(x,t) \equiv 0$ для $s > 2$; 3) бесконечное число коэффициентов $K_s(x,t)$ не равно нулю.

Случай 1 соответствуют отсутствию случайных возмущений (уравнение Лиувилля). Для непрерывных марковских процессов верен случай 2. При этом уравнение (2.1.121) превращается в одномерное ФПК–уравнение, причем $a(x,t) = K_1(x,t)$, $b(x,t) = K_2(x,t)$. Отметим, что непрерывность марковского процесса, как это следует из соотношения (2.1.122), означает, что математическое ожидание

$$\mathbb{E}[\{X(t+\Delta t) - X(t)\}^s | X(t)]$$

для $s \geqslant 3$ при $\Delta t \to 0$ стремится к нулю быстрее, чем Δt, т.е. большие отклонения случайного процесса за время Δt существенно менее вероятны, чем малые. Случай же 3 соответствует *недиффузионным марковским процессам*, т.е. процессам, которым характерно как непрерывное, так и скачкообразное изменение.

Определение 2.1.92. *Немарковский процесс* – это случайный процесс с памятью, эволюция которого после любого заданного значения времени t зависит от эволюции, предшествовавшей этому моменту времени.

Это означает, что будущие состояния немарковского процесса зависит от его прошлых состояний при известных настоящих.

В общем случае немарковскими будут процессы, полученные сложением и интегрированием марковских, а также воздействием таких процессов на динамические системы. Принципиально немарковскими процессами являются случайные процессы в сложных системах, например, колебания курсов акций, валют и рейтингов финансовых институтов, эпидемии среди крайне разнородного населения, поведение неравновесных релятивистских полей (особенно в квантовых механике и космологии, а также физике твердого тела), изменения средней температуры Земли, молекулярная динамика и др.

Пусть $X(t)$ – немарковский СП. Рассмотрим последовательность моментов времени

$$t > \tau > \tau_1 > \tau_2 > ... > \tau_{q-1}, \qquad q \geqslant 2,$$

и введем обозначения:

$$Z = X(t+\Delta t), \quad X = X(t), \quad Y = X(\tau), \quad X_\ell = X(\tau_\ell), \quad \ell = \overline{1, q-1},$$
$$\mathcal{X}_q = \{y, x_1, x_2, ..., x_q\}, \qquad \mathcal{t}_q = \{\tau, \tau_1, \tau_2, ..., \tau_q\}.$$

Тогда переходная плотность $\pi_{1|q}\big(x, t \,|\, \mathcal{X}_q, \mathcal{t}_q\big)$ процесса $X(t)$ удовлетворяет *прямому кинетическому уравнению Р.Ф. Павулы* следующего вида [944]:

$$\frac{\partial \pi_{1|q}\big(x, t \,|\, \mathcal{X}_q, \mathcal{t}_q\big)}{\partial t} = \\ = \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \frac{\partial^s}{\partial x^s} \big[\bar{K}_s\big(x, t \,|\, \mathcal{X}_q, \mathcal{t}_q\big)\, \pi_{1|q}\big(x, t \,|\, \mathcal{X}_q, \mathcal{t}_q\big)\big], \quad (2.1.123)$$

где

$$\bar{K}_s\big(x, t \,|\, \mathcal{X}_q, \mathcal{t}_q\big) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\, \mathbb{E}\big[\big(Z - X\big)^s \,|\, X, Y, X_1, ..., X_{q-1}\big] = \\ = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (z - x)^s\, \pi_{1|q+1}\big(z, t+\Delta t \,|\, x, t; \mathcal{X}_q, \mathcal{t}_q\big)\, dz. \quad (2.1.124)$$

Система начальных условий для уравнения (2.1.123) может быть записана так:

$$\lim_{t \to \tau} \pi_{1|q}\big(x, t \,|\, \mathcal{X}_q, \mathcal{t}_q\big) = \delta(x - y), \quad (2.1.125)$$

$$\lim_{t \to \tau_\ell} \pi_{1|q}\big(x, t \,|\, \mathcal{X}_q, \mathcal{t}_q\big) = \delta(x - x_\ell), \quad \ell = 1, 2, ..., q-1. \quad (2.1.126)$$

В своей докторской диссертации (PhD) [891] Р.Ф. Павула представил еще более общую структуру, чем (2.1.123), прямого и соответствующего обратного уравнений для переходной плотности. Это обобщение состоит в том, что множества $\mathcal{X}_q$ и $\mathcal{t}_q$ имеют следующий вид:

$$\mathcal{X}_q = \{x_{11}, x_{12}, ..., x_{1r_1}, x_{21}, x_{22}, ..., x_{2r_2}, ..., x_{k1}, x_{k2}, ..., x_{kr_k}\},$$
$$\mathcal{t}_q = \{\tau_{11}, \tau_{12}, ..., \tau_{1r_1}, \tau_{21}, \tau_{22}, ..., \tau_{2r_2} ..., \tau_{k1}, \tau_{k2}, ..., \tau_{kr_k}\},$$
$$\tau_{j\ell} < t, \qquad r_1 + r_2 + ... + r_k = q,$$

где реализации сечений $\mathcal{X}_q$ соответствуют произвольному множеству сечений не только процесса $X(t) = X_1(t)$, но других СП $X_2(t)$, ..., $X_k(t)$. Кроме

того, в [891] представлены многомерные варианты построенных уравнений как для непрерывных, так и дискретно-непрерывных состояний, а также формы уравнений для решения задачи Дарлинга–Зигерта [944].

Если выбрать аргументы переходной плотности в необходимой форме, то уравнение (2.1.123) может быть решено относительно любой функции $\pi_{1|\ell}\big(x_\ell, t_\ell \,|\, x_{\ell-1}, t_{\ell-1}; ...; x_1, t_1; x_0, t_0\big)$, после чего $(k+1)$-точечная совместная плотность вероятности $p^{[k+1]}\big(x_k, t_k; x_{k-1}, t_{k-1}; ...; x_1, t_1; x_0, t_0\big)$ вычисляется из соотношения

$$p^{[k+1]}\big(x_k, t_k; x_{k-1}, t_{k-1}; ...; x_1, t_1; x_0, t_0\big) = \\ = p\big(x_0, t_0\big) \prod_{\ell=1}^{k} \pi_{1|\ell}\big(x_\ell, t_\ell \,|\, x_{\ell-1}, t_{\ell-1}; ...; x_1, t_1; x_0, t_0\big).$$

Современные модели поведения немарковских систем, в частности, включают интегро-дифференциальные уравнения в различных формах.

2.1.1.11. Случайные поля

Случайные скалярные $U(q_1, q_2, ..., q_L)$ и векторные $\boldsymbol{U}(q_1, q_2, ..., q_L)$ *поля* [172, 269, 317, 1040], где q_1, q_2, ..., q_L – некоторые детерминированные параметры, являются обобщениями случайных функций. Заметим, что в этом случае среди q_ℓ $(1 \leqslant \ell \leqslant L)$ могут быть как временны́е, так и пространственные аргументы. Например, в стохастических моделях сплошной среды аргументами значений случайного поля U в некоторой точке пространства $\mathbb{R}^4$, как правило, является радиус-вектор точки $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ (x, y, z – пространственные координаты точки) и время t: $U = U(x, y, z, t) \equiv U(\boldsymbol{r}, t)$ $(L = 4)$.

Обозначим через $\boldsymbol{q}$ вектор с координатами q_1, q_2, ..., q_L.

Определение 2.1.93. *Случайное поле* $\{U(\boldsymbol{q}, \omega)$, $\boldsymbol{q} \in \mathbb{K} \subset \mathbb{R}^L$, $\omega \in \Omega\}$ – это функция, значениями которой являются случайные величины для любого $\boldsymbol{q} \in \mathbb{K}$.

Так же, как для случайных процессов: а) при фиксировании результата случайного эксперимента получаем *реализацию* $u(\boldsymbol{q})$ случайного поля $U(\boldsymbol{q})$; б) не вводя строгого определения, можно считать, что если реализации поля непрерывны, то соответствующее случайное поле будет стохастически непрерывным; в) аргумент ω в обозначении случайного поля будем далее опускать, если в указании этого аргумента нет необходимости.

Вероятностное описание случайных полей и большинство основных понятий (конечномерные распределения, математическое ожидание, ковариационная функция, непрерывность, производные, интегралы и т.д.) подобны определенным в рамках классической теории случайных процессов. Различия и дополнительные концепции возникают в связи с тем, что пространство параметров многомерно.

Полное описание случайного поля было бы возможно осуществить путем построения всех конечномерных распределений вероятностей этого поля в различных точках пространства.

Определение 2.1.94. *Полное задание* непрерывного скалярного случайного поля $U(\boldsymbol{q})$ означает, что известны все его *s-точечные* ($s = 1, 2, ...$) *плотности вероятности*, т.е. для любого числа натурального s произвольно выбранных точек $\boldsymbol{q}_k$ известны функции

$$p_U^{[s]}(u_1, u_2, ..., u_s \,|\, \boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, ..., \boldsymbol{q}_s)\, du_1\, du_2 \ldots du_s = \\ = \mathcal{P}\big(u_1 \leqslant U(\boldsymbol{q}_1) < u_1 + du_1, u_2 \leqslant U(\boldsymbol{q}_2) < u_2 + du_2, ..., \\ u_s \leqslant U(\boldsymbol{q}_s) < u_s + du_s\big). \quad (2.1.127)$$

Кроме того, характеристики случайного поля $U(\boldsymbol{q})$ можно задать *функциями распределения*

$$F_U^{[s]}\big(u_1, u_2, ..., u_s \,|\, \boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, ..., \boldsymbol{q}_s\big) = \\ = \mathcal{P}(U(\boldsymbol{q}_1) < u_1, U(\boldsymbol{q}_2) < u_2, ..., U(\boldsymbol{q}_s) < u_s) \quad (2.1.128)$$

и *характеристическими функционалами* [994]

$$\Phi_U[\lambda] = \langle \exp\Big[\boldsymbol{i} \int \lambda(\boldsymbol{q})\, U(\boldsymbol{q})\, d\boldsymbol{q}\Big] \rangle, \quad (2.1.129)$$

где $\lambda(\boldsymbol{q})$ – неслучайная функция. Последние включают все конечноточечные характеристические функции, например,

$$\varphi_U(\lambda \,|\, \boldsymbol{q}_1) = \Phi_U\big[\lambda\, \delta(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}_1)\big]$$

и

$$\varphi_U(\lambda_1, \lambda_2 \,|\, \boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2) = \Phi_U\big[\lambda_1\, \delta(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}_1) + \lambda_2\, \delta(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}_2)\big].$$

Аналогично совокупностью *$s \times M$-точечных плотностей вероятности* задается полное статистическое описание M-мерного случайного

поля $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{q})$. Все эти плотности подчинены условиям неотрицательности, симметрии, согласованности и нормировки.

Определим, как для случайных процессов, основные характеристики случайных полей.

Определение 2.1.95. *Математическое ожидание* скалярного случайного поля $U(\boldsymbol{q},\omega)$ вычисляется из соотношения

$$m_U(\boldsymbol{q}) = \mathbb{E}[U(\boldsymbol{q},\omega)] = \int\limits_{\Omega} U(\boldsymbol{q},\omega)\, d\mathscr{P}(\omega) = \int\limits_{\mathbb{R}} u\, p_U(u \,|\, \boldsymbol{q})\, du.$$

Определение 2.1.96. (*Авто*) *ковариационная функция* случайного поля $U(\boldsymbol{q},\omega)$ выражается так:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{UU}(\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2) &= \operatorname{cov}\big(U(\boldsymbol{q}_1,\omega), U(\boldsymbol{q}_2,\omega)\big) = \\ &\equiv \mathbb{E}[\{U(\boldsymbol{q}_1,\omega) - m_U(\boldsymbol{q}_1)\}\{U(\boldsymbol{q}_2,\omega) - m_U(\boldsymbol{q}_2)\}] = \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} \big[u_1 - m_U(\boldsymbol{q}_1)\big]\,\big[u_2 - m_U(\boldsymbol{q}_2)\big]\, p_U^{[2]}(u_1,u_2 \,|\, \boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2)\, du_1\, du_2.\end{aligned}$$

На основе ковариационной функции можно получить *дисперсию* случайного поля

$$\mathcal{D}_U(\boldsymbol{q}) = \mathcal{C}_{UU}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}).$$

Гауссовские случайные поля играют важную роль в теории и практике по нескольким причинам: а) простота спецификации конечномерных распределений; б) эти поля являются подходящими моделями многих реальных явлений; в) их изучение,несложно а модель определяется математическими ожиданиями и ковариациями.

Определение 2.1.97. *Гауссовское случайное поле* – это поле, у которого все конечномерные плотности вероятности $p_U^{[s]}(u_1,u_2,...,u_s \,|\, \boldsymbol{q}_1,\ \boldsymbol{q}_2,\ ...,\ \boldsymbol{q}_s)$ являются многомерными нормальными распределениями для любых s и $\{\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2,...,\boldsymbol{q}_s\}$.

При обобщении марковской теории на случайные поля в отсутствие пространственной причинности можно рассматривать эти поля как марковские процессы со значениями в гильбертовом пространстве.

Очевидным образом распространяется на случайные поля и понятие статистической стационарности и однородности.

Пусть $\mathbb{K}$ – линейное векторное пространство. Тогда для любых $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2 \in \mathbb{K}$ верно $\boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_2 \in \mathbb{K}$.

Определение 2.1.98. Случайное поле $U(\boldsymbol{q})$ называется *стационарным в узком смысле*, если конечномерные плотности вероятности $p_U^{[s]}(u_1, u_2, ..., u_s \,|\, \boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, ..., \boldsymbol{q}_s)$ инвариантны при произвольных сдвигах аргументов:

$$p_U^{[s]}(u_1, u_2, ..., u_s \,|\, \boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}_2 + \boldsymbol{q}, ..., \boldsymbol{q}_s + \boldsymbol{q}) = \\ = p_U^{[s]}(u_1, u_2, ..., u_s \;\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, ..., \boldsymbol{q}_s) \quad \forall \boldsymbol{q} \in \mathbb{K}.$$

Определение 2.1.99. Случайное поле $U(\boldsymbol{q})$ называется *стационарным в широком смысле*, если

$$m_U(\boldsymbol{q}) = \text{const}, \quad \mathcal{C}_{UU}(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2) = \mathcal{C}_{UU}(\boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{q}_1) = \mathcal{C}_{UU}(\boldsymbol{q}), \quad \boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{q}_1.$$

В этом случае $\mathcal{D}_U(\boldsymbol{q}) = \text{const}$, а $\mathcal{C}_{UU}(\boldsymbol{q})$ называют *стационарной ковариационной функцией*.

Важным примером стационарного поля является поле с ковариационной функцией $\mathcal{C}(x_1, x_2) = \sigma_0^2 \exp\left[-\alpha\,|x_2 - x_1|\,\right]$, $\alpha > 0$. Другим важным для практики является поле с ковариационной функцией

$$\mathcal{C}(x_1, x_2) = \frac{\sin\left[\omega_0\,(x_2 - x_1)\right]}{\pi\,(x_2 - x_1)}, \qquad \omega_0 = \text{const} > 0,$$

у которого спектральная плотность равна $1/2\pi$ на отрезке $[-\omega_0, \omega_0]$.

Из стационарности в узком смысле следует стационарность в широком смысле, но не наоборот. Некоторых авторы различают инвариантность сдвига по временно́й и пространственным координатам.

Определение 2.1.100. Случайное поле $U(\boldsymbol{q})$ называется *однородным в узком смысле*, т.е. стационарным по t и однородным по пространственным координатам, если все s-мерные плотности вероятности инвариантны относительно преобразования сдвига $\boldsymbol{q}_k \to \boldsymbol{q}_k + \boldsymbol{q}$.

Предположим, что $\mathbb{K}$ – линейное нормированное пространство.

Определение 2.1.101. Случайное поле $U(\boldsymbol{q})$ называется *изотропным*, если

$$\mathcal{C}_{UU}(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2) = \mathcal{C}_{UU}(\|\boldsymbol{q}\|), \qquad \boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{q}_1.$$

В этом случае $\mathcal{C}_{UU}(\boldsymbol{q})$ называется *изотропной ковариационной функцией*. Класс таких функций является подклассом стационарных ковариационных функций.

Определение 2.1.102. Стационарная ковариационная функция в $\mathbb{R}^L$ называется *анизотропной ковариационной функцией*, если

$$\mathcal{C}_{UU}(\boldsymbol{q}) = \mathcal{C}(\|\boldsymbol{q}\|_{\mathcal{A}}), \qquad \|\boldsymbol{q}\|_{\mathcal{A}} = \boldsymbol{q}^{\mathsf{T}}\,\boldsymbol{\mathcal{A}}\,\boldsymbol{q},$$

где $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ – положительно полуопределенная матрица.

В этом случае $\mathcal{C}_{UU}(\boldsymbol{q})$ называют *эллипсоидальной ковариационной функцией*.

Во многих задачах наибольший интерес представляют низшие моменты первого и второго порядка, с которыми оперирует *корреляционная теория случайных полей*. Основные понятия этой теории те же, что и в корреляционной теории случайных функций. В рамках стохастической сплошной среды эти моменты будут функциями координат $\boldsymbol{q}_\ell = (\boldsymbol{r}_\ell, t_\ell)$, $\ell = \overline{1,s}$. Но, зная многомерные (многоточечные) плотности вероятностей, можно вычислить моменты случайного поля $U(\boldsymbol{q})$ любого порядка. Так можно определить *s-точечные начальные*

$$\alpha^{[s]}_{Uk_1k_2\ldots k_s}(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, ..., \boldsymbol{q}_s) = \mathbb{E}\big[U^{k_1}(\boldsymbol{q}_1)\,U^{k_2}(\boldsymbol{q}_2)\ldots U^{k_s}(\boldsymbol{q}_s)\big]$$

и *s-точечные центральные моменты*

$$\mu^{[s]}_{Uk_1k_2\ldots k_s}(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, ..., \boldsymbol{q}_s) = \mathbb{E}\Big[\mathring{U}^{k_1}(\boldsymbol{q}_1)\,\mathring{U}^{k_2}(\boldsymbol{q}_2)\ldots \mathring{U}^{k_s}(\boldsymbol{q}_s)\Big]$$

k-го порядка ($k = k_1 + k_2 + ... + k_s$), $\mathring{U}(\boldsymbol{q}) = U(\boldsymbol{q}) - m_U(\boldsymbol{q})$.

Определение 2.1.103. *Пространственно-временны́м белым шумом* называется случайное поле $\{V(\boldsymbol{x},t),\ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n,\ t\in\mathbb{T}\}$, для которого

$$V(\boldsymbol{x},t) = \frac{\partial^{n+1}W(\boldsymbol{x},t)}{\partial t\,\partial x_1\ldots\partial x_n}, \qquad \mathbb{E}[V(\boldsymbol{x},t)] = 0,$$

$$\mathbb{E}[V(\boldsymbol{x},t)\,V(\boldsymbol{x}',t')] = \sigma^2\,\delta(t-t')\,\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'), \qquad \sigma = \mathrm{const} > 0,$$

где $W(\boldsymbol{x},t)$ – *пространственно-временно́й винеровский процесс*, $\delta(...)$ – одно- или многомерная функция Дирака.

Определение 2.1.104. Векторное поле $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t) = \{V_k(\boldsymbol{x},t)\} \in \mathbb{R}^m$ – *вектор пространственно-временны́х белых шумов*, если

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)] = 0, \qquad \mathbb{E}[V_i(\boldsymbol{x}_1,t_1)\,V_j(\boldsymbol{x}_2,t_2)] = \delta_{ij}\,\delta(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1)\,\delta(t_2-t_1).$$

2.1.2. Стохастические функционально-дифференциальные уравнения

Цель этого подраздела – дать общую информацию о стохастических функционально-дифференциальных уравнениях.

Реально существующие системы с последействием различного типа, для описания которых привлекаются ДУсОА, неизбежно в той или иной степени подвергаются случайным возмущениям. Когда случайные флуктуации невелики и их влиянием можно пренебречь, анализ появления таких систем осуществляется с помощью моделей на основе детерминированных ДУсОА. В противном случае приходится привлекать *стохастические функционально-дифференциальные уравнения* (СФДУ), *стохастические дифференциальные уравнения с запаздыванием* (СДУсЗ), *стохастические дифференциальные уравнения нейтрального типа* (СДУНТ), *стохастические интегро-дифференциальные уравнения* (СИДУ) и всевозможные их комбинации, причем (интегро-)дифференциальные уравнения и системы таких уравнений могут быть как в обыкновенных, так в частных производных (СОФДУ, СОДУсЗ, СОДУНТ, СОИДУ, СФДУвЧП, СДУвЧПсЗ, СДУвЧПНТ, СИДУвЧП), а также гибридными.

Стохастическое моделирование играет важную роль во многих областях науки, таких как физика, экология или химия [769], математическая биология [1068]. Случайность может возникнуть из-за отсутствия полного знания обо всех соответствующих переменных, точной динамики системы или взаимодействия с окружающей средой. В некоторых случаях можно получить компактное описание сложной системы с учетом лишь нескольких соответствующих переменных, но за счет потери детерминированной предсказуемости. Часто вероятности некоторых фундаментальных процессов могут быть заданы на основе симметрии и других соображений или эмпирического анализа, а динамика процессов может быть получена снизу вверх.

Известно, что в процессе развития методов анализа детерминированных систем функционально-дифференциальных уравнений, быстро ставших уже классическими, возник интерес (начало 1960-х гг., одна из первых работ [111]) к стохастическим ФДУ разных типов [5, 104, 124, 149, 267, 306, 307, 320, 425, 764, 769, 824, 859, 884, 1031], с помощью которых могут исследоваться новые любопытные эффекты (например, возможность приведения неустойчивой линейной системы СОДУ с мультипликативным шумом к классу систем, асимптотически устойчивых в среднеквадратическом, если добавить терм с запаздыванием [320]; частые нестабильность и низкая производительность систем [816] вследствие временно́го запаз-

дывания и неопределенности параметров, которые являются неотъемлемыми характеристиками многих физических процессов; разрушение или формирование колебательных движений; запаздывание может генерировать множественные устойчивые состояния, а также хаотическое поведение; возникновение стохастического резонанса в системах без внешнего сигнала) и моделироваться случайные процессы с памятью. Разработки методов исследования таких уравнений, как это случилось ранее для детерминированных систем, стали важными для теории и практики.

Анализ СФДУ вызывает существенные трудности, так как такие уравнения, возникающие во многих приложениях, как правило, не могут быть решены точно. Кроме того, проблемами на пути изучения СФДУ будут и следующие:

– даже для стохастических систем без последействия до сих пор отсутствуют универсальные точные и приближенные методы анализа;

– нет соответствующего эффективного прямого аналитического аппарата, аналогичного обратному и прямому[7] ДУвЧП Колмогорова (параболического типа) для марковских систем[8].

Многие реальные случайные процессы не могут считаться марковскими, поскольку их будущее поведение зависит не только от их настоящего, но и от их прежних состояний. Причины могут состоять в наличии гистерезиса (физика), запаздывающей обратной связи (оптимальное управление), времени взросления и инкубации (науки о жизни), времени на разработку или перевозку (экономика), зависимости от волатильности в прошлом (финансовые рынки) и др.

Заметим, что известные модели немарковских систем [891, 892, 944] относятся на самом деле к классу обобщенных марковских, но соответствующий теоретический аппарат не позволяет исследовать даже самые простые системы с постоянным запаздыванием.

В настоящее время существует только несколько областей исследования стохастических ФДУ, где ведутся интенсивные научные разработки. Среди них: качественный анализ существования и устойчивости решений (стабилизации) ФДУ, стохастической управляемости, наблюдаемости, бифуркаций, синхронизации и резонанса; прямое количественное исследование линейных систем, в первую очередь, на основе применения класси-

[7] Напоминаем, что уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК-уравнение) – другое название для прямого уравнения Колмогорова.

[8] Имеющиеся редкие примеры построения ФПК-уравнений для СОДУсЗ носят частный характер: 1) в некоторых случаях используются упрощающие предположения типа малости запаздывания [629, 799]; 2) в других – результатом являются (незамкнутые) отдельные уравнения или цепочки ДУвЧПсЗ и даже ИДУвЧП Фредгольма в неограниченных областях [477, 576, 577, 579, 580, 582].

ческого метода шагов и др.

Стохастические обыкновенные дифференциальные уравнения с запаздыванием

Моделирование физических систем с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений игнорирует стохастические эффекты. Путем добавления случайных процессов в дифференциальные уравнения получаем математические объекты, называемые СДУ, СОДУ, а указанные процессы – шумами или флуктуациями. Такие модели обеспечивают более точное описание явлений. Начальные условия, как правило, также являются также случайными. В результате этого решение одного уравнения или системы СОДУ будет скалярным или векторным случайным процессом. При этом СОДУ играют важнейшую роль при моделировании процессов во многих прикладных областях.

Стохастические обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянным запаздыванием и, в частности, *стохастические дифференциально-разностные уравнения* (СДРУ), являются обобщениями и детерминистических уравнений с постоянным запаздыванием, и стохастических обыкновенных дифференциальных уравнений [267, 306, 824, 859].

Различают СОДУ (дифференциально-разностные и нейтральные) с конечными одиночными или множественными дискретными запаздываниями (постоянными или переменными, детерминированными или случайными) и ограниченными или неограниченными распределенными запаздываниями. Последние формы СОДУсЗ описываются стохастическими обыкновенными интегро-дифференциальными уравнениями Вольтерры (СОИДУ). Дальнейшее усложнение моделей приводит к использованию смешанных форм СОДУсЗ, включающих как дискретные, так и распределенные запаздывания. Такую расширенную классификацию можно перенести и на СДУвЧПсЗ.

Определение 2.1.105. *Стохастическое дифференциальное уравнение с запаздыванием* есть СДУ относительно некоторого случайного процесса или поля, приращение которого зависит от значений процесса (а, возможно, и других функций) в прошлом.

Под названием "стохастическое (обыкновенное) дифференциальное уравнение с запаздыванием"[9] (СОДУсЗ, stochastic ordinary delay differen-

[9]Другие часто используемые названия: стохастическое (обыкновенное) дифференциальное уравнение с временным лагом/памятью/последействием, stochastic (ordinary) differential equations with time lag/memory/aftereffect, стохастическое (обыкно-

tial equation) обычно понимается уравнение типа:

$$dX(t) = f(X_t, t)\,dt + g(X_t, t)\,dW(t), \qquad 0 < t \leqslant T < +\infty,$$
$$X(s) = X^0(s), \qquad -\tau \leqslant s \leqslant 0,$$

где t – время; $X(t)$ – случайный процесс, определяющий состояние системы, решение СОДУсЗ; $X_t \stackrel{\text{def}}{\equiv} \{X(t+s),\ -\tau \leqslant s \leqslant 0\}$ – часть решения $X(t)$ на отрезке $[t-\tau, t]$; $f(\cdot,\cdot)$, $g(\cdot,\cdot)$ – функции, определенные на множестве $\mathscr{C}([-\tau, 0]) \times [0, T]$; $W(t)$ обозначает стандартный винеровский случайный процесс; $X^0(s)$ является заданным начальным процессом; $\tau > 0$ – запаздывание (лаг). В случае $\tau = 0$ (отсутствие памяти) $X(t)$ будет марковским диффузионным процессом.

Простейшее стохастическое обыкновенное дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом (сводку различных форм СДУ см. в П.3) имеет вид:

$$dX(t) = f\big(X(t), X(t-\tau_1), t\big)\,dt + g\big(X(t), X(t-\tau_2), t\big)\,dW(t), \quad t > 0, \tag{2.1.130}$$

где непрерывные функции $f(x, y, t)$ и $g(x, y, t)$ удовлетворяют условию Липшица по первому и второму аргументам, а постоянные запаздывания $\tau_i > 0$ $(i = 1{,}2)$. Детерминированное начальное условие можно задать так:

$$X(t) = \varphi(t), \qquad -\tau_0 \leqslant t \leqslant 0, \tag{2.1.131}$$

где $\tau_0 = \max\{\tau_1, \tau_2\}$; $\varphi(t)$ – непрерывная начальная функция. Начальное условие может быть и случайным. В этом случае оно будет выглядеть так:

$$X(t) = \Phi(t), \qquad -\tau_0 \leqslant t \leqslant 0, \tag{2.1.132}$$

где $\Phi(t)$ – непрерывная и $\mathscr{F}_0$–измеримая случайная функция, такая что

$$\big[ME \sup_{t\in[-\tau_0,0]} |\Phi(t)\big]^2 < \infty.$$

Как и в случае СОДУ, уравнение (2.1.130) следует понимать лишь как символическую запись интегрального уравнения

$$X(t) = \varphi(0) + \int_0^t f\big(X(s), X(s-\tau_1), s\big)\,ds + \int_0^t g\big(X(s), X(s-\tau_2), s\big)\,dW(s), \tag{2.1.133}$$

венное) функционально-дифференциальное уравнение, СОФДУ, stochastic (ordinary) functional differential equation.

$$X(s-\tau_i) \equiv \varphi(s-\tau_i), \qquad s-\tau_i \leqslant 0, \tag{2.1.134}$$

где последний интеграл понимается в смысле Ито или Стратоновича.

Как показано в [689], в случае интеграла Ито при сделанных предположениях начальная задача (2.1.130), (2.1.131) имеет, и притом единственное, решение. Это означает, что существует непрерывный с вероятностью 1 процесс $X(t)$, совпадающий на начальном множестве с $\varphi(t)$ и удовлетворяющий с вероятностью 1 интегральному уравнению (2.1.133). При этом, если $X_1(t)$, $X_2(t)$ – два непрерывных решения в указанном смысле уравнения (2.1.133) с фиксированной начальной функцией $\varphi(t)$, то для любого $T > 0$ вероятность

$$\mathcal{P}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|X_1(t)-X_2(t)\right| > 0\right) = 0.$$

В качестве простого примера приведем следующее дифференциальное уравнение, являющееся частным случаем СОДУсЗ (2.1.130):

$$dX(t) = \alpha\, X(t)\left[K - X(t-\tau)\right] dt + \beta\, dW(t), \qquad 0 < t \leqslant T,$$

которое часто используется для моделирования динамики размера популяции с учетом времени до взросления особей и случайных возмущений.

В значительном числе отраслей науки и техники СОДУ с запаздыванием, используются для описания явлений, где как и в детерминированном случае, существенное влияние на поведение объектов оказывают задержки в различных формах. При этом для построения стохастических моделей случайные возмущения нередко просто вводятся в соответствующие детерминированные дифференциальные уравнения, получая таким образом СОДУсЗ.

При моделировании систем, которые не оказывают заметного влияния на окружающую среду, стохастические переменные часто используются для учета колебаний окружающей среды, что приводит к СОДУсЗ. Модели, поведение которых описывают с помощью таких уравнений, применяются во многих областях, таких как физиология и оптика. Стохастичность вместе с запаздыванием появляется во многих представляющих интерес биологических процессах, таких как регуляция генов [782], физиологические изменения [800], контроль положения тела [426], изменение численности популяций [862] и др.

Чаще всего запаздывание считается константой без каких-то флуктуаций. Но это не всегда соответствует сути явлений в различных приложениях, так как неестественно иметь детерминированное запаздывание, когда остальная динамика стохастическая.

Пример 2.1.4. Рассмотрим объединенную модель климата "атмосфера–океан" [428]. Поскольку океаны имеют высокую теплоемкость, а транспортные процессы могут занять долгие годы, то океаны имеют "длинную память" по сравнению с атмосферой: тепловая обратная связь от океанов до атмосферы может зависеть от условий, определяемыми предыдущими десятилетиями или даже столетиями.

В простейшей форме осциллятора с запаздывающим действием модель ENSO для моделирования возможного эффекта океанских волн Россби имеет вид:

$$\frac{d\widetilde{T}(\widetilde{t})}{d\widetilde{t}} = k\,\widetilde{T}(\widetilde{t}) - b\,\widetilde{T}^3(\widetilde{t}) - a\,\widetilde{T}(\widetilde{t}-\widetilde{\tau})$$

где $\widetilde{t}$ – время, $\widetilde{T}$ – температурная аномалия, k, b, a, τ – положительные постоянные. Изменяя время соответствующим образом и переопределяя константы, получим уравнение в безразмерной форме:

$$\frac{dT(t)}{dt} = T(t) - T^3(t) - \alpha\,T(t-\tau).$$

Данная модель представляет движение экваториально захваченных океанских волн, распространяющихся по Тихому океану и взаимодействующих с центральным тихоокеанским регионом после некоторой временной задержки. Эти океанские волны являются "скрытыми" волнами Россби, которые движутся на запад на термоклину[10], отражаются от жесткой континентальной границы на Западе, а затем возвращаются на восток вдоль экватора в виде волн Кельвина.

Для учета таких процессов, как штормы, циклоны и океанские течения, которые пересекают Тихоокеанский регион и влияют на систему, в уравнение добавляют случайное возмущение [539]. ►

Условия существования и единственности для сильных и слабых решений нелинейных стохастических систем с запаздыванием рассматриваются в работах [305, 306, 824, 859]. Различные условия непрерывности, устойчивости, ограниченности моментных функций и наличия других свойств решения представлены во многих работах и, в частности, в [690, 824, 858, 859, 1080].

[10] *Термоклин*, или слой температурного скачка – слой воды, в котором градиент температуры резко отличается от градиентов выше- и нижележащих слоев. Возникает при наличии неперемешивающихся слоев воды с разной температурой. Может иметь мощность от нескольких метров до десятков метров.

Введем строгое понятие системы СОДУ с постоянным запаздыванием и ее решения [824]. Для этого определим полное вероятностное пространство $\big(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{P}\big)$ с фильтрацией $\{\mathscr{F}_t,\ t \geqslant t_0\}$, где Ω – пространство элементарных исходов, $\mathscr{A}$ – σ-алгебра, $\mathscr{P}$ – вероятностная мера. Пусть $\boldsymbol{W}(t)$ – m-мерный векторный стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами, определенный на этом вероятностном пространстве. Пусть $\tau = \mathrm{const} > 0$ и $0 \leqslant t_0 < T < +\infty$. Обозначим через $\boldsymbol{\mathscr{C}}([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$ семейство непрерывных векторных функций $\boldsymbol{\varphi}(t) : [-\tau, 0] \mapsto \mathbb{R}^n$ с нормой $\|\boldsymbol{\varphi}\| = \sup_{-\tau \leqslant \theta \leqslant 0} |\boldsymbol{\varphi}(\theta)|$. Пусть

$$\boldsymbol{f} : \boldsymbol{\mathscr{C}}([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n) \times [t_0, T] \mapsto \mathbb{R}^n, \quad \boldsymbol{\mathcal{G}} : \boldsymbol{\mathscr{C}}([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n) \times [t_0, T] \mapsto \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

– борелевские измеримые вектор- и матрица-функции. Рассмотрим *систему* n СДРУ вида

$$d\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{X}_t, t\big)\, dt + \boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{X}_t, t\big)\, d\boldsymbol{W}(t), \quad t \in (t_0, T], \tag{2.1.135}$$

где $\boldsymbol{X}_t = \big\{\boldsymbol{x}(t+\theta) :\ -\tau \leqslant \theta \leqslant 0\big\}$ – $\boldsymbol{\mathscr{C}}([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$-значный векторный случайный процесс. Начальные данные определяются так:

$$\boldsymbol{X}_{t_0} = \boldsymbol{\Xi} = \big\{\boldsymbol{\Xi}(\theta) :\ -\tau \leqslant \theta \leqslant 0\big\} \tag{2.1.136}$$

– $\mathscr{F}_{t_0}$-измеримый $\boldsymbol{\mathscr{C}}([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$-значная векторная случайная переменная, такая что $Me\, \|\boldsymbol{\Xi}\|^2 < \infty$.

Определение 2.1.106. $\mathbb{R}^n$-значный векторный случайный процесс $\boldsymbol{X}(t)$ называется *сильным решением* системы уравнений (2.1.135) с начальными условиями (2.1.136) на промежутке $t_0 - \tau \leqslant t \leqslant T$, если этот процесс имеет следующие свойства:

а) он непрерывен, и $\big\{\boldsymbol{X}_t\big\}_{t_0 \leqslant t \leqslant T}$ является $\mathscr{F}_t$-адаптированным;

б) $\big\{\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{X}_t, t\big)\big\} \in \boldsymbol{\mathscr{L}}_2\big([t_0, T]; \mathbb{R}^n\big)$, $\big\{\boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{X}_t, t\big)\big\} \in \boldsymbol{\mathscr{L}}_2\big([t_0, T]; \mathbb{R}^{n \times m}\big)$;

в) $\boldsymbol{X}_{t_0} = \boldsymbol{\Xi}$, и для каждого $t \in [t_0, T]$

$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{\Xi}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{X}_s, s\big)\, ds + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{X}_s, s\big)\, d\boldsymbol{W}(s) \quad \text{п.н.}$$

Определение 2.1.107. Говорят, что решение $\boldsymbol{X}(t)$ *единственно*, если любое другое решение $\boldsymbol{X}_*(t)$ решение неотличимо от $\boldsymbol{X}(t)$, то есть

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{X}_*(t),\ t_0 - \tau \leqslant t \leqslant T) = 1.$$

Сформулируем теорему существования и единственности решения [824]. Как и для систем ОДУ, условие Липшица и условие линейного роста гарантируют эти характеристики.

Теорема 2.1.23. Предположим, что существуют две положительные константы K_1 и K_2 такие, что:

(a) (*равномерное условие Липшица*) для всех $\boldsymbol{\varphi}$ и $\boldsymbol{\phi} \in \mathscr{C}([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$ и $t \in [t_0, T]$

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}, t) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\phi}, t)\|^2 \bigvee \|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\varphi}, t) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\phi}, t)\|^2 \leqslant K_1 \|\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\phi}\|; \qquad (2.1.137)$$

(b) (условие линейного роста) для всех $\big(\boldsymbol{\varphi}, t\big) \in \mathscr{C}([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n) \times [t_0, T]$

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}, t)\|^2 \bigvee \|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\varphi}, t)\|^2 \leqslant K_1 \big(1 + \|\boldsymbol{\varphi}\|^2\big). \qquad (2.1.138)$$

Тогда существует единственное сильное решение $\boldsymbol{X}(t)$ уравнения (2.1.135) с начальными условиями (2.1.136). Более того, решение принадлежит множеству векторных случайных процессов второго порядка при $t \in [t_0 - \tau, T]$.

Далее предполагается, что каждая из рассматриваемых ниже систем СФДУ имеет единственное решение.

Основными формами *устойчивости* в случае стохастических систем с запаздыванием будут: устойчивость по моментам, но вероятности и т.д. Рассмотрим эти формы по отношению к уравнению:

$$dX(t) = \big[a_1 X_(t) + a_2 X(t - \tau_1)\big]\, dt + a_3 X(t - \tau_2)\, dW(t), \quad t > 0, \ (2.1.139)$$

с постоянными коэффициентами и постоянными запаздываниями $\tau_i \geqslant 0$ с начальными условиями (2.1.131).

Определение 2.1.108. Тривиальное решение уравнения (2.1.139) называется *устойчивым в среднеквадратическом*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что из неравенства $\big|\varphi(t)\big| < \delta(\varepsilon)$ на начальном множестве следует, что $\mathbb{E}\big[X^2(t; \varphi\big] < \varepsilon$ для всех $t \geqslant 0$, где $\varphi(t)$ – любая непрерывная начальная функция.

Определение 2.1.109. Устойчивое в среднеквадратическом тривиальное решение уравнения (2.1.139) называется *асимптотически устойчивым в среднеквадратическом*, если

$$\lim_{t \to \infty} \mathbb{E}\big[X^2(t; \varphi\big] = 0$$

для любой непрерывной начальной функции $\varphi(t)$, удовлетворяющей на начальном множестве при достаточно малом $\delta_1 > 0$ условию $\left|\varphi(t)\right| < \delta_1$.

Определение 2.1.110. Тривиальное решение уравнения (2.1.139) называется устойчивым но вероятности, если для любых $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что любое решение $X(t;\varphi)$ уравнения (2.1.139) удовлетворяет неравенству

$$\mathcal{P}\left(\sup_{t\geqslant 0}\left|X(t;\varphi)\right| \leqslant \varepsilon_1\right) \geqslant 1-\varepsilon_2,$$

если на начальном множество $\left|\varphi(t)\right| < \delta$.

Для устойчивости решений СОДУ с запаздывающим аргументом может быть разработана общая теория второго метода Ляпунова в терминах функционалов Ляпунова–Красовского. Для конкретных уравнений эти методы позволяют получить условия устойчивости в терминах коэффициентов. Так, для уравнения (2.1.139) верна теорема.

Теорема 2.1.24. Пусть выполнены условия

$$\left[2\left(a_1+a_2\right)\left(1-\left|a_2\right|\tau_1\right)+a_3^2\right] < 0, \qquad \left|a_2\right|\tau_1 < 1.$$

Тогда тривиальное решение уравнения (2.1.139) асимптотически устойчиво в среднеквадратическом.

Основными вероятностными характеристиками векторов состояния стохастических систем как с запаздыванием, так и без запаздывания являются плотности вероятности распределения этих векторов, зависящие от пространственных и временных координат. К сожалению, для произвольных систем СДУ получение точных аналитических представлений таких плотностей в настоящее время невозможно. В ряде случаев можно ограничиться вычислением стационарных плотностей, если таковые существуют. Исследование системы еще более упрощается, если ее можно описать линейными обыкновенными СДУ с постоянными коэффициентами и аддитивными возмущениями [236]. Это связано с тем, что для последних стационарными плотностями будут одно- и многомерные нормальные гауссовы распределения, параметризуемые векторами математических ожиданий и матрицами ковариаций (дисперсий) соответствующего порядка.

Если взглянуть на СОДУсЗ с точки зрения теории случайных процессов, то можно сделать вывод, что вследствие наличия запаздывания случайный векторный процесс $\boldsymbol{X}(t)$, являющийся решением этих уравнений,

в общем случае не будет случайным марковским векторным процессом [305]. Поэтому классическая корреляционная теория и известный аналитический аппарат теории марковских процессов, основанный на использовании уравнений Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК-уравнения) для плотностей вероятности $p(\boldsymbol{x}, t)$ и переходных плотностей $\pi(\boldsymbol{x}, t \,|\, \boldsymbol{y}, \theta)$ векторов состояний линейных или нелинейных динамических систем, не может использоваться для получения статистических характеристик $\boldsymbol{X}(t)$, таких как функции математического ожидания, ковариационные функции и т.д. Поэтому в качестве одного из способов упрощения исходной задачи необходимо иметь способы преобразования различных стохастических задач в проблемы марковского типа.

Известно, что случайные возмущения оказывают значительное влияние на системы, описываемые ОДУ без запаздывания, приводя к качественным изменениям поведения системы. То же самое ожидается и от использования СОДУсЗ, и это может быть проверено численно. Однако аналитические инструменты для СОДУсЗ недостаточны, поскольку методы, которые используются для изучения СОДУ без запаздывания в общем не могут быть непосредственно применены к СОДУсЗ. Значительная работа была проделана в отношении анализа экспоненциальной устойчивости СОДУсЗ и поиска условий существования гладких плотностей вероятности. Однако, как правило, нет способа оценить плотности вероятностей векторов состояния, изменение которых описывается СОДУсЗ.

Важным исключением является линейное СОДУсЗ. Действительно, когда рассматривается аддитивный белый шум, линейность уравнения позволяет точно определять выборочные траектории и стационарные статистические свойства решений. Эта линейность была использована для изучения устойчивости первых двух моментов стационарной плотности вероятности при воздействии аддитивного/мультипликативного белого / цветного шума. Кроме того, было установлено соответствие между линейным СОДУсЗ и случайным блужданием с запаздыванием, что было применено к выводу приближенного ФПК-уравнения и дало возможность получить аппроксимацию стационарной плотности вероятности.

К сожалению, инструменты, основанные на линейности СОДУсЗ, не могут быть использованы для нелинейных СОДУсЗ. Расчетные сетки со связанными отображениями были предложены в качестве альтернативного подхода для изучения как детерминированных, так и стохастических дифференциальных уравнений с запаздыванием. Такие отображения могут быть установлены с произвольной точностью, регулируя количество переменных. Этот подход особенно пригоден, когда эволюция плотности

вероятности осуществляется с помощью численного моделирования. Тем не менее, большое количество переменных, участвующих в таких системах, препятствует прогрессу в получении аналитических результатов. В общем случае этой проблемы не избежать, поскольку СДУсЗ являются в основном функционально-дифференциальными уравнениями и, таким образом, эффективно включают бесконечное число степеней свободы.

Стохастические дифференциальные уравнения в частных производных с запаздыванием

Интенсивное изучение стохастических дифференциальных уравнений с частными производными [594] началось сравнительно недавно. Причины этого состоят в том, что эти уравнения используются при моделировании физических явлений, процессов в популяционной биологии и финансах [482], при решении проблем фильтрации [820] и т.д.

Современным этапом развития теории дифференциальных уравнений является разработка теоретического аппарата и методов решения СДУвЧП в различных формах. Эти уравнения используются как математические модели в физике (тепловая диффузия в материалах, функционирование линий передачи различного назначения), машиностроении, теории управления, экономике, теории управления, теории устойчивости [702, 798, 805] и, в частности, нейронных сетей [470, 590, 886], вязкоупругости, колебаний в случайной среде [462] и др.

Из-за особой сложности анализа подобных уравнений особый интерес представляют редкие модели, форма которых позволяет получить точные вероятностные характеристики соответствующих векторных случайных полей состояния.

Пусть $\big(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{P}\big)$ – полное вероятностное пространство с фильтрацией $\{\mathscr{F}_t,\ t \geqslant 0\}$, удовлетворяющей обычным условиям, где, как и выше, Ω – пространство элементарных исходов, $\mathscr{A}$ – σ-алгебра, $\mathscr{P}$ – вероятностная мера. Обозначим:

$$\|\boldsymbol{u}(.,t)\| = \sup_x |\boldsymbol{u}(x,t)|.$$

$\boldsymbol{\mathscr{L}}_p$-норму векторно-значной $\boldsymbol{\mathscr{L}}_p$-интегрируемой случайной переменной $\boldsymbol{Y} \in \boldsymbol{\mathscr{L}}_p\big(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{P}\big)$ определим формулой:

$$\|Y\|_p = \big(\mathbb{E}[\|Y\|^p]\big)^{1/p}, \qquad 1 \leqslant p < \infty.$$

Пусть $\boldsymbol{W}(t)$ – r-мерный $\mathscr{F}_t$-адаптированный векторный стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами, определенный на вероятностном пространстве $\big(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{P}\big)$ и .

Рассмотрим *систему* СДУвЧПсЗ ($0 = t_0 < T < \infty$) [343]:

$$d\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{f}\big(U(\boldsymbol{x},t), U(\boldsymbol{x},t-\tau), \boldsymbol{x}, t\big)\,dt+$$
$$+\,\boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},t-\tau), \boldsymbol{x}, t\big)\,d\boldsymbol{W}(t), \qquad t \in (0,T], \tag{2.1.140}$$
$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},t), \qquad t \in [-\tau,0], \tag{2.1.141}$$

где $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^{2m+n+1} \mapsto \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^{2m+n+1} \mapsto \mathbb{R}^{m\times m}$, $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},t) : \mathbb{R}^n \times [-\tau,0] \mapsto \mathbb{R}^m$ – $\mathscr{F}_{t_0}$-измеримая $\boldsymbol{\mathcal{C}}\big(\mathbb{R}^n \times [-\tau,0], \mathbb{R}^m\big)$-значная случайная величина, такая что $\mathbb{E}[\,\|\Psi\|\,] < \infty$, $\boldsymbol{\mathcal{C}}\big(\mathbb{R}^n \times [-\tau,0], \mathbb{R}^m\big)$ – банахово пространство всех непрерывных траекторий из $\mathbb{R}^n \times [-\tau,0] \mapsto \mathbb{R}^m$ с нормой

$$\|\boldsymbol{\eta}\|_{\boldsymbol{C}} = \sup_{t\in[-\tau,0]} \|\boldsymbol{\eta}(.,t)\|, \qquad \|\boldsymbol{\eta}(.,t)\| = \sup_x |\boldsymbol{\eta}(x,t)|.$$

С учетом начального условия (2.1.141) уравнение (2.1.140) можно записать так:

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{U}_\circ(\boldsymbol{x}) + \int_0^t \boldsymbol{f}\big(U(\boldsymbol{x},s), U(\boldsymbol{x},s-\tau), \boldsymbol{x}, s\big)\,ds+$$
$$+\int_0^t \boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},s), \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},s-\tau), \boldsymbol{x}, s\big)\,d\boldsymbol{W}(s) \quad \text{п.н.}, \quad t \in (0,T]. \tag{2.1.142}$$

Пусть функции $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$, удовлетворяют следующим условиям:

(A1) функции $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{g}$ непрерывны;

(A2) функции $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{g}$ удовлетворяют равномерным условиям Липшица, а именно, существуют положительные постоянные L_1, L_2, L_3 и L_4 такие, что для $\boldsymbol{\varphi}_1$, $\boldsymbol{\varphi}_2$, $\boldsymbol{\phi}_1$, $\boldsymbol{\phi}_2 \in \mathbb{R}^m$ и $t \in [0,T]$

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{x}, t) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}_2, \boldsymbol{\phi}_2, \boldsymbol{x}, t)\| \leqslant L_1\,\|\boldsymbol{\varphi}_1 - \boldsymbol{\varphi}_2\| + L_2\,\|\psi_1 - \boldsymbol{\phi}_2\|,$$
$$\|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{x}, t) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\varphi}_2, \boldsymbol{\phi}_2, \boldsymbol{x}, t)\| \leqslant L_3\,\|\boldsymbol{\varphi}_1 - \boldsymbol{\varphi}_2\| + L_4\,\|\boldsymbol{\phi}_1 - \boldsymbol{\phi}_2\|;$$

(A3) функция $\boldsymbol{\phi}$ непрерывна по Гёльдеру с показателем γ, т.е. для $t, s \in [-\tau, 0]$

$$\mathbb{E}[\,\|\varphi(.,t) - \varphi(.,s)\|^p\,] \leqslant L_5\,\|t-s\|^{p\gamma}, \qquad p = 1,2;$$

(A4) функции $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{g}$ удовлетворяют условию линейного роста, т.е. существуют положительные константы K_1 и K_2 такие, что для $\boldsymbol{\varphi}_1$, $\boldsymbol{\varphi}_2$, $\boldsymbol{\phi}_1$, $\boldsymbol{\phi}_2 \in \mathbb{R}^m$ и $t \in [0,T]$

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{x}, t)\|^2 \leqslant K_1\,\big(1 + \|\boldsymbol{\varphi}_1\|^2 + \|\boldsymbol{\phi}_1\|^2\big),$$

$$\|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\varphi}_2, \boldsymbol{\phi}_2, \boldsymbol{x}, t)\|^2 \leqslant K_2 \left(1 + \|\boldsymbol{\varphi}_2\|^2 + \|\boldsymbol{\phi}_2\|^2\right).$$

Определение 2.1.111. $\mathbb{R}^m$-значный случайный процесс $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}, t)$ называется *решением* системы уравнений (2.1.140) с начальными условиями (2.1.141) на промежутке $-\tau \leqslant t \leqslant T$, если этот процесс имеет следующие свойства:

а) он непрерывен, и $\left\{\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}, t)\right\}_{0 \leqslant t \leqslant T}$ является $\mathscr{F}_t$-адаптированным;

б) $\left\{\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}, t), \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}, t-\tau), \boldsymbol{x}, t\big)\right\} \in \mathscr{C}\big(\mathbb{R}^{2m+n} \times [0, T], \mathbb{R}^m\big)$, $\left\{\boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}, t), \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}, t-\tau), \boldsymbol{x}, t\big)\right\} \in \mathscr{C}\big(\mathbb{R}^{2m+n} \times [0, T], \mathbb{R}^{m \times r}\big)$;

в) $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}, t)$ при $t \in [-\tau, 0]$, и для каждого $t \in [0, T]$ верно равенство (2.1.142).

С учетом определения решения и условий, наложенных на вектор-функции $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{g}$, а также на $\mathbb{R}^m$-значный случайный процесс $\boldsymbol{\Phi}$ можно показать, что решение $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}, t)$ задачи (2.1.140), (2.1.140) существует и единственно [615, 616].

Стохастические интегральные и интегро-дифференциальные уравнения

На первом этапе исследований изучались *случайные интегральные уравнения* [414, 1031, 1032], а только после этого стали появляться работы [884, 1032], где стали анализироваться линейные и нелинейные случайные ИДУ в обычных и частных производных. Естественно, теоретические исследования включают изучение существования и единственности решений таких уравнений, асимптотического поведения и др., а прикладные – проблемы химиотерапии, химической кинетики, физиологических систем, роста населения, телефонной инженерии, турбулентности, теории систем и т.д.

Достаточно общие формы случайных интегральных уравнений Вольтерры, Фредгольма и их смеси выглядят так:

$$X(t, \omega) = h(t, \omega) + \int_0^t K(t, s; \omega)\, g\big(X(s; \omega), s\big)\, ds, \tag{2.1.143}$$

$$X(t, \omega) = h(t, \omega) + \int_0^\infty H(t, s; \omega)\, q\big(X(s; \omega), s\big)\, ds, \tag{2.1.144}$$

$$X(t, \omega) = h(t, \omega) + \int_0^t K(t, s; \omega)\, g\big(X(s; \omega), s\big)\, ds + \\ + \int_0^\infty H(t, s; \omega)\, q\big(X(s; \omega), s\big)\, ds, \tag{2.1.145}$$

где t – время ($t \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$); $\omega \in \Omega$; Ω – пространство элементарных исходов, компонента вероятностного пространства $(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{P})$; $X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \longmapsto \mathbb{R}_+$ – неизвестный случайный процесс; $K : \mathbb{R}_+ \times [0, t] \times \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ – случайное ядро, определенное при $0 \leqslant s \leqslant t < \infty$ и $\omega \in \Omega$; $H : \mathbb{R}_+ \times [0, t] \times \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ – случайное ядро, определенное при $0 \leqslant t, s < \infty$ и $\omega \in \Omega$; $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R}$ и $q : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R}$ – известные функции, своих аргументов.

Интегралы в уравнениях (2.1.143)–(2.1.145) понимается в среднем квадратичном. Предполагается, что $X(t, \omega)$ и $h(t, \omega)$ являются функциями аргумента $t \in \mathbb{R}_+$ со значениями в пространстве $\boldsymbol{\mathcal{L}}_2\big(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{P}\big)$. Функции $g\big(X(s; \omega), s\big)$ и $q\big(X(s; \omega), s\big)$ будут функциями от $t \in \mathbb{R}_+$ со значениями в $\boldsymbol{\mathcal{L}}_2\big(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{P}\big)$. Случайные ядра $K(t, s; \omega)$ и $H(t, s; \omega)$ будут существенно ограниченными функциями относительно вероятностной меры для любых t и s таких, что $0 \leqslant s \leqslant t < \infty$ и $0 \leqslant t, s < \infty$ соответственно. Значения *случайного ядра* $K(t, s; \omega)$ при фиксированных t и s принадлежат пространству $\boldsymbol{\mathcal{L}}_\infty\big(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{P}\big)$, так что произведение $K(t, s; \omega)$ и $g\big(X(s; \omega), s\big)$ будет принадлежать $\boldsymbol{\mathcal{L}}_2\big(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{P}\big)$. Аналогичные предположения выполняются для $H(t, s; \omega)$ при фиксированных t и s.

Определение 2.1.112. *Случайным решением* любого из случайных интегральных уравнений (2.1.143)–(2.1.145) понимается функция $X(s; \omega)$, которая принадлежит $\boldsymbol{\mathcal{C}}_c\big(\mathbb{R}_+, \boldsymbol{\mathcal{L}}_2\big(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{P}\big)\big)$[11] и удовлетворяет соответствующему уравнению почти наверное.

Достаточно общая форма *случайных ИДУ Вольтерры* выглядит так:

$$X'(t, \omega) = h\big(X(t; \omega), t\big) + \int_0^t K(t, s; \omega)\, g\big(X(s; \omega), s\big)\, ds, \qquad (2.1.146)$$

где t – время ($t \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$); $X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \longmapsto \mathbb{R}_+$ – неизвестный случайный процесс; $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R}$ и $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \Longmapsto \mathbb{R}$ – известные функции; $K : \mathbb{R}_+ \times [0, t] \times \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ – случайное ядро, определенное при $0 \leqslant s \leqslant t < \infty$ и $\omega \in \Omega$.

Предполагается, что $X(t, \omega)$, $h\big(X(t; \omega), t\big)$ и $g\big(X(s; \omega), s\big)$ являются функциями аргумента $t \in \mathbb{R}_+$ со значениями в пространстве $\boldsymbol{\mathcal{L}}_2\big(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{P}\big)$. При этом $X(t, \omega)$ представляет собой случайный процесс второго порядка, определенный на $\mathbb{R}_+$.

Определим общие условия [884, 1032], которые касаются стохастических процессов, описываемых уравнением (2.1.146), и которые гарантируют существование и единственность решения $X(t; \omega)$.

[11] $\boldsymbol{\mathcal{C}}_c\big(\mathbb{R}_+, \boldsymbol{\mathcal{L}}_2\big(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{P}\big)\big)$ – пространство непрерывных функций из $\mathbb{R}_+$ в $\boldsymbol{\mathcal{L}}_2\big(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{P}\big)$ с равномерной сходимостью на интервалах $[0, T]$ для $T > 0$.

Относительно случайного ядра положим, что для всех t и s таких, что $0 \leqslant s \leqslant t < \infty$, $K(t,s;\omega)$ существенно ограничено, т.е. $K(t,s;\omega) \in \mathbb{L}_\infty^\Omega = \mathbb{L}_\infty(\Omega,\mathscr{A},\mathscr{P})$ для t и s, удовлетворяющих неравенству $0 \leqslant s \leqslant \leqslant t < \infty$. Тогда норму ядра $K(t,s;\omega)$ в $\mathbb{L}_\infty^\Omega$ можно определить следующим соотношением:

$$\|K(t,s;\omega)\|_{\mathbb{L}_\infty^\Omega} = \mathbb{P}\text{-}\operatorname*{ess\,sup}_{\omega\in\Omega}|K(t,s;\omega)|.$$

Также предполагается, что для любых фиксированных t и s

$$\|K(t,s;\omega)\|_{\mathbb{L}_\infty^\Omega} \leqslant M_{(t,s)} \quad \text{равномерно для} \quad s \leqslant \theta \leqslant t,$$

где $M_{(t,s)} > 0$ – некоторая постоянная, зависящая от t и s, $0 \leqslant s \leqslant t < \infty$.

Определим операторы $\mathbb{T}_1$ и $\mathbb{T}_2$, которые действуют в пространстве $\mathscr{C}_c\big(\mathbb{R}_+,\mathscr{L}_2\big(\Omega,\mathscr{A},\mathscr{P}\big)\big)$:

$$\mathbb{T}_1\big[X(t;\omega)\big] = \int_0^t X(s;\omega)\,ds,$$

$$\mathbb{T}_2\big[X(t;\omega)\big] = \int_0^t \overline{K}(t,s;\omega)\,X(s;\omega)\,ds,$$

где

$$\overline{K}(t,s;\omega) = \int_s^t K(\theta,s;\omega)\,d\theta.$$

Проинтегрируем уравнение (2.1.146) от 0 до t:

$$\begin{aligned} X(t,\omega) &= X_\circ(\omega) + \int_0^t h\big(X(s;\omega),s\big)\,ds + \\ &+ \int_0^t \Big[\int_s^t K(\theta,s;\omega)\,d\theta\Big]\,g\big(X(s;\omega),s\big)\,ds = \\ &= X_\circ(\omega) + \int_0^t h\big(X(s;\omega),s\big)\,ds + \int_0^t \overline{K}(t,s;\omega)\,g\big(X(s;\omega),s\big)\,ds, \end{aligned} \quad (2.1.147)$$

Теорема 2.1.25. Предположим, что уравнение (2.1.146) удовлетворяет следующим условиям:

(а) $\mathscr{B}$ и $\mathscr{D}$ – банаховы пространства, более сильные, чем прстранство $\mathscr{C}_c\big(\mathbb{R}_+,\mathscr{L}_2\big(\Omega,\mathscr{A},\mathscr{P}\big)\big)$ и пара $(\mathscr{B},\mathscr{D})$ допустима относительно каждого из интегральных операторов $\mathbb{T}_1\big[X(t;\omega)\big]$ и $\mathbb{T}_2\big[X(t;\omega)\big]$, $t \geqslant 0$;

(b) $X(t;\omega) \longmapsto h\big(X(t;\omega),t\big)$ – оператор на множестве

$$\boldsymbol{\mathcal{S}} = \big\{X(t;\omega) \in \boldsymbol{\mathcal{D}} \mid \|X(t;\omega)\|_D \leqslant \rho\big\}$$

со значениями в $\boldsymbol{\mathcal{B}}$, причем

$$\|h\big(X(t;\omega),t\big) - h\big(Y(t;\omega),t\big)\|_B \leqslant \lambda_1 \|X(t;\omega) - Y(t;\omega)\|_D$$

для $X(t;\omega)$, $Y(t;\omega) \in \boldsymbol{\mathcal{S}}$ и постоянной λ_1;

(c) $X(t;\omega) \longmapsto g\big(X(t;\omega),t\big)$ – оператор на множестве $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ со значениями в $\boldsymbol{\mathcal{B}}$, причем $g\big(0,t\big) = 0$ и

$$\|g\big(X(t;\omega),t\big) - h\big(Y(t;\omega),t\big)\|_B \leqslant \lambda_2 \|X(t;\omega) - Y(t;\omega)\|_D$$

для $X(t;\omega)$, $Y(t;\omega) \in \boldsymbol{\mathcal{S}}$ и постоянной λ_2;

(d) $X_\circ(\omega) \in \boldsymbol{\mathcal{D}}$.

Тогда существует единственное решение $X(t;\omega) \in \boldsymbol{\mathcal{S}}$ уравнения (2.1.147), если

$$\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 < 1,$$
$$\|X_\circ(\omega)\|_D + K_1 \|h(0,t)\|_B \leqslant \rho\,(1 - \lambda_1 K_1 - \lambda_2 K_2),$$

где K_1 и K_2 – нормы $\mathbb{T}_1$ и $\mathbb{T}_2$ соответственно.

Среди стохастических ФДУ можно выделить класс линейных и нелинейных СДУ с конечными сосредоточенными, ограниченными и неограниченными распределенными запаздываниями (СИДУсЗ) и их смешанными формами. Детерминированные аналоги таких уравнений представлены как обыкновенными дифференциальными уравнениями, так и дифференциальными уравнениями в частных производных [672], а использоваться при моделировании различных операций [621]; наследственных систем и явлений, таких как рост населения, загрязнение окружающей среды, поведение финансовых рынков и вязкоупругих материалов [17, 451]; процессов в электрических цепях и химических реакторах [1105]; для регулирования соотношения глюкоза–инсулин при диабете [812]; анализа поведения нейронных сетей, человеческих чувств и др. Кроме того, системы стохастических ИДУ часто появляются как результат применения процедур типа метода конечных элементов или метода конечных разностей к *стохастическим интегро-дифференциальным уравнениям в частных производных* (СИДУвЧП) [1000], которые описывают непрерывную вязкоупругую среду.

Если обратиться к *стохастическим обыкновенным интегро-дифференциальным уравнениям* (СОИДУ), которые охватывают значительную

область динамики систем, то модели с их использованием применяются для решения анализа динамики реакторов [781], задач управления [9], автоматического регулирования [95, 874] (включают подструктуры, аналогичные ПИД-регуляторам для технических устройств), математической экономики (проблемы долгосрочного планирования) [95], нелинейной фильтрации с запаздыванием в уравнениях состояния и наблюдений [1036], электромагнетизма, сетей связи [970], для описания роста биологических популяций [848], обратной связи, транспортных потоков, работы лазеров, реакторов, теплообмена за счет теплопроводности и излучения, резки металла, гистерезиса, вязкоупругости, генного регулирования, передачи нервных импульсов и инфекционных заболеваний; исследования динамических рекламных задач в условиях неопределенности при наличии переноса и распределенных эффектов забывания [619], поведения популяций [659], нейронных полей и сетей [1028, 1081], плюрипотентных гемопоэтических стволовых клеток [332], динамики упругих движений аэродинамического профиля в двумерном несжимаемом потоке [459], системы регулирования глюкоза–инсулин [970], клеточной населенности [390] и др.

Кроме того, системы подобных уравнений, сами по себе важные для моделирования различных объектов и процессов, могут быть результатом линеаризации нелинейных стохастических систем с различными формами запаздывания и мультипликативными флуктуациями.

Многие реальные объекты подвержены случайным возмущениям в течение длительных промежутков времени. Например, погодные условия могут негативно влиять на опоры мостов, что ведет к изменению целостности конструкций [968]. Исследование таких процессов, например, для оценки стабильности стохастических систем (см., например, [823]) и получения их численных решений, является естественным продолжением изучения детерминированных явлений.

Как известно и было представлено в первой части монографии, к началу 1970-х гг. был проведен значительный объем исследований, относящихся к выявлению условий существования, единственности и асимптотических свойств решений нестационарных детерминированных ОИДУ типа Вольтерры (см., например, [773, 933]). Однако во многих приложениях из-за сложного случайного характера изучаемого явления для более реалистичного анализа необходимо использовать стохастические модели, а это приводит к стохастическим ОИДУ. Для этого потребовалось основные неслучайные результаты перенести на более общую стохастическую постановку задачи.

Рассмотрим следующую систему СОИДУ [894]:

$$d\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{X}(t), \mathbb{T}[\boldsymbol{X}], t\big) + \boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{X}(t), \mathbb{T}[\boldsymbol{X}], t\big)\, d\boldsymbol{W}(t), \qquad (2.1.148)$$
$$\boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}_\circ,$$

где $t_0 < t \leqslant T$; $\boldsymbol{X}(t) \in \mathbb{R}^n$ – случайный векторный случайный процесс, определенный на полном вероятностном пространстве $\big(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{P}\big)$ с фильтрацией $\{\mathscr{F}_t,\ t \geqslant t_0\}$; $\boldsymbol{X}_\circ \in \mathbb{R}^n$ – случайный вектор; $\boldsymbol{W}(t) \in \mathbb{R}^m$ – векторный случайный винеровский процесс с независимыми компонентами, статистически независимый от $\boldsymbol{X}_\circ$; $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{\mathcal{G}}$ – векторная и матричная функции, измеримые по Борелю на множестве $\mathbb{R}^n \times \mathscr{C}\big([t_0, T], \mathbb{R}^n\big) \times [t_0, T]$;

$$\mathbb{T}[\boldsymbol{X}] = \int_{t_0}^{t} \mathbb{K}\big(\boldsymbol{X}(s), t, s\big)\, ds;$$

$\mathbb{K}\big(\boldsymbol{X}(s), t, s\big)$ – функция, измеримая по Борелю на множестве $\mathbb{R}^n \times [t_0, T] \times$ $\times [t_0, T]$ $(s \leqslant t)$.

Предполагается, что при фиксированных $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, t функции $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t)$ и $\boldsymbol{\mathcal{G}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t)$ являются детерминированными. То же само считается относительно $K(\boldsymbol{x}, t, s)$ при фиксированных $\boldsymbol{x}$, t, s.

Заметим, что в квазилинейном случае имеем:

$$\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{X}(t), \mathbb{T}[\boldsymbol{X}], t\big) = \boldsymbol{f}_0\big(\boldsymbol{X}(t), t\big) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{K}\big(\boldsymbol{X}(s), t, s\big)\, ds;$$
$$\boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{X}(t), \mathbb{T}[\boldsymbol{X}], t\big) = \boldsymbol{\mathcal{G}}_0\big(\boldsymbol{X}(t), t\big) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\mathcal{H}}\big(\boldsymbol{X}(s), t, s\big)\, ds,$$

где $\boldsymbol{f}_0$, $\boldsymbol{\mathcal{G}}_0$, $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ – детерминированные измеримые по Борелю в соответствующих областях отображения. Для этого случая теоремы существования и единственности решения $\boldsymbol{X}(t)$ приведены в [412].

Пусть выполнены следующие условия:

(В-1) $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{\mathcal{G}}$ удовлетворяют локальным условиям Липшица: для $t \in [t_0, T]$ существует положительная постоянная L_1, такая что

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}, t)\| + \|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}, t)\| +$$
$$+ \|\boldsymbol{\mathcal{G}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t) - \boldsymbol{\mathcal{G}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}, t)\| + \|\boldsymbol{\mathcal{G}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t) - \boldsymbol{\mathcal{G}}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}, t)\| \leqslant$$
$$\leqslant L_1 \big(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}\| + \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}\|\big), \qquad (2.1.149)$$

где $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$;

(B-2) $\boldsymbol{\mathcal{G}}$ удовлетворяет условию роста: для $t \in [t_0, T]$ существует положительная постоянная L_2, такая что

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t)\| + \|\boldsymbol{\mathcal{G}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t)\| \leqslant L_2 \big(1 + \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|\big). \tag{2.1.150}$$

(B-3) $\mathbb{K}(\boldsymbol{x}, t, s)$ удовлетворяет условиям Липшица и роста: для $t \in [t_0, T]$ существуют положительные постоянные L_3, L_4, такие что

$$\begin{gathered} \|\mathbb{K}(\boldsymbol{x}, t, s) - \mathbb{K}(\boldsymbol{y}, t, s)\| \leqslant L_3 \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|, \\ \|\mathbb{K}(\boldsymbol{x}, t, s)\| \leqslant L_4 \big(1 + \|\boldsymbol{x}\|\big); \end{gathered} \tag{2.1.151}$$

(B-4) интеграл Ито–Дуба

$$\boldsymbol{\mathcal{J}}(t) = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{X}(s), \mathbb{T}[\boldsymbol{X}], s\big)\, d\boldsymbol{W}(s) \tag{2.1.152}$$

существует и может рассматриваться как непрерывный мартингал. Отсюда следует, что почти все выборочные функции $\boldsymbol{\mathcal{J}}\big(t, \boldsymbol{W}(s)\big)$ являются измеримыми по Борелю функциями, ограниченными на компактных интервалах $[t_0, T]$. Следовательно, интеграл от $\boldsymbol{\mathcal{J}}\big(t, \boldsymbol{W}(s)\big)$ в пределах от t_0 до t существует, конечен п.н. и является абсолютно непрерывным процессом.

Верна следующая теорема [894].

Теорема 2.1.26. Пусть выполнены предположения (B-1), (B-2), (B-3), (B-4) и пусть $\mathbb{E}\big[\|\boldsymbol{X}_\circ\|^2\big] < \infty$. Тогда существует п.н. непрерывное решение $\boldsymbol{X}(t)$ уравнений (2.1.148) и

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t_0 \leqslant t \leqslant T} \|\boldsymbol{X}(t)\|^2\right] < \infty.$$

Более того, если $\boldsymbol{Y}(t)$ – другое почти наверное непрерывное решение уравнений (2.1.148) с $\boldsymbol{Y}(t_0) = \boldsymbol{X}_\circ$, то

$$\sup_{t_0 \leqslant t \leqslant T} \|\boldsymbol{X}(t) - \boldsymbol{Y}(t)\| = 0 \quad \text{п.н.} \qquad \blacktriangleright$$

Подобные вопросы для абстрактного СИДУ (частными случаями которого являются СИДУвЧП) вида

$$\begin{aligned} dX(t;\omega) = \mathbb{L}\big[X(t;\omega)\big]\, dt + \mathbb{F}\big[X(t;\omega), t;\omega\big]\, dt + \\ + \mathbb{G}\big[X(t;\omega), t;\omega\big]\, dW(s), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T; \end{aligned} \tag{2.1.153}$$

$$X(0;\omega) = X_\circ(\omega),$$

рассматриваются в [727].

Уравнение изучается в действительном сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ и в полном вероятностном пространстве $\big(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{P}\big)$, оснащенном фильтрацией $\{\mathscr{F}_t,\ t \geqslant 0\}$. При этом оператор $\mathbb{L}$ может иметь одну из следующих форм:

$$\mathbb{L}\big[X(t;\omega)\big] = \int_0^t \mathbb{J}(t-s;\omega)\big[\!\big[A\big[X(s;\omega)\big]\big]\!\big]\,ds, \tag{2.1.154}$$

$$\mathbb{L}\big[X(t;\omega)\big] = A\Big[\!\Big[X(t;\omega) + \int_0^t \mathbb{J}(t-s;\omega)\big[X(s;\omega)\big]\,ds\Big]\!\Big], \tag{2.1.155}$$

В уравнении (2.1.153) и соотношениях (2.1.154), (2.1.155): A – линейный замкнутый плотно определенный оператор с областью определения $\mathscr{D}(A) \subset \mathscr{H} \longmapsto \mathscr{H}$; $X : [0,T] \times \Omega \longmapsto \mathscr{H}$; $\mathbb{F} : [0,T] \times \mathscr{H} \times \Omega \longmapsto \mathscr{H}$; $\mathbb{G} : [0,T] \times \mathscr{H} \times \Omega \longmapsto \mathscr{L}_2(\mathscr{K}, \mathscr{H})$ ($\mathscr{K}$ – другое действительное сепарабельное гильбертово пространство); $\mathscr{L}_2(\mathscr{K}, \mathscr{H})$ пространство всех операторов Гильберта–Шмидта из $\mathscr{K}$ в $\mathscr{H}$; $\mathbb{J} : [0,T] \times \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ – стохастическое ядро. Кроме того, W – $\mathscr{K}$-значный цилиндрический винеровский процесс, а $X_\circ$ – $\mathscr{F}_0$-измеримая $\mathscr{H}$-значная случайная величина, независимая от W. Далее в обозначениях указание на зависимость от ω опускается.

Определим детерминированные формы рассматриваемого уравнения и соотношений в виде:

$$x'(t) + \mathbb{L}\big[x(t)\big] = \mathbb{F}\big[x(t), t\big], \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad x(0) = x_\circ; \tag{2.1.156}$$

$$\mathbb{L}\big[x(t)\big] = \int_0^t \mathbb{J}(t-s)\big[\!\big[A\big[x(s)\big]\big]\!\big]\,ds, \tag{2.1.157}$$

$$\mathbb{L}\big[x(t)\big] = A\Big[\!\Big[x(t) + \int_0^t \mathbb{J}(t-s)\big[x(s)\big]\,ds\Big]\!\Big], \tag{2.1.158}$$

причем оператор $\mathbb{L}$ при соответствующих условиях в любой из форм допускает семейство резольвент $\big\{\mathbb{R}(t) :\ t \geqslant 0\big\}$ в следующем смысле.

Определение 2.1.113. Семейство $\big\{\mathbb{R}(t) :\ t \geqslant 0\big\}$ ограниченных линейных операторов в $\mathscr{H}$ является *резольвентой* для (2.1.156), если:

a) $\mathbb{R}(t)$ строго непрерывен по t;

b) $\mathbb{R}(0) = \mathbb{I}$;

c) $\mathbb{R}(t)\big[\mathscr{D}(A)\big] \subset \mathscr{D}(A)$ и $A\big[\!\big[\mathbb{R}(t)\big[z\big]\big]\!\big] = \mathbb{R}(t)\big[\!\big[A\big[z\big]\big]\!\big]$ для всех $z \in \mathscr{D}(A)$ и $t \geqslant 0$;

d) $\frac{d\mathbb{R}(t)}{dt}\big[z\big] = z + (\mathbb{J} \star \mathcal{A}\big[\mathbb{R}\big])\big[z\big] = z + (\mathbb{R} \star \mathcal{A}\big[\mathbb{J}\big])\big[z\big]$, где $\star$ – свертка операторов по отношению к отрезку $[0,t]$.

В предположении удовлетворения классического условия Липшица для $\mathbb{F}$ может быть показано [924], что существует единственное слабое решение на $[0,T]$ для любого $T > 0$, которое может быть представлено так:

$$x(t) = \mathbb{R}(t)\big[x_\circ\big] + \int_0^t \mathbb{R}(t-s)\big[\!\big[\mathbb{F}\big[x(s),s\big]\big]\!\big]\,ds, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{2.1.159}$$

Определение 2.1.114.

(i) $\boldsymbol{\mathscr{H}}$-значный случайный процесс $\big\{X(t) : 0 \leqslant t \leqslant T\big\}$ – *слабое решение* уравнения (2.1.153) с оператором $\mathbb{L}$, определенным равенством (2.1.154), если:

1) $X(t)$ – $\mathscr{F}_t$-адаптированный процесс,

2) $X(t) \in \mathscr{C}\big([0,T], \boldsymbol{\mathscr{H}}\big)$,

3) $\overline{\mathbb{J}} \star X \in \mathscr{C}\big([0,T], (\boldsymbol{\mathscr{D}}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})\big)$, где $\overline{\mathbb{J}} = \int_0^t \mathbb{J}(s)\,ds$,

4) $X(t) = X_\circ + \mathcal{A}\big[(\overline{\mathbb{J}} \star X)(t)\big] + \int_0^t \mathbb{F}\big[X(s),s\big]\,ds + \int_0^t \mathbb{G}\big[X(s),s\big]\,dW(s)$;

(ii) $\boldsymbol{\mathscr{H}}$-значный случайный процесс $\big\{X(t) : 0 \leqslant t \leqslant T\big\}$ – слабое решение уравнения (2.1.153) с оператором $\mathbb{L}$, определенным равенством (2.1.155), если оно удовлетворяет условиям (i), в которых пункты 3) и 4) заменены на:

3') X и $\overline{\mathbb{J}} \star X \in \mathscr{C}\big([0,T], (\boldsymbol{\mathscr{D}}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})\big)$,

4') $X(t) = X_\circ + \int_0^t \mathcal{A}\big[X(s)\big]\,ds + \int_0^t (\mathbb{J} \star \mathcal{A}\big[X\big])(s)\,ds + \int_0^t \mathbb{G}\big[X(s),s\big] \times$ $\times dW(s)$.

В случае, когда уравнение (2.1.153) допускает семейство резольвент, слабое решение в обоих случаях последнего определения может быть представлено стохастической версией соотношения (2.1.159):

$$X(t) = \mathbb{R}(t)\big[X_\circ\big] + \int_0^t \mathbb{R}(t-s)\big[\!\big[\mathbb{F}\big[X(s),s\big]\big]\!\big]\,ds + \\ + \int_0^t \mathbb{R}(t-s)\big[\!\big[\mathbb{G}\big[X(s),s\big]\big]\!\big]\,dW(s), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{2.1.160}$$

Формулировка соответствующей теоремы о существовании и единственности решения уравнения (2.1.153) [727] достаточно объемна, и поэтому здесь она опущена.

2.2. УРАВНЕНИЯ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

2.2.1. Основные методы исследования

В настоящее время существует немного областей исследований, которые связанных с поиском статистических характеристик случайных процессов, являющихся решениями СФДУ, и где получены серьезные результаты. Эти области включают класс простейших линейных систем с постоянными запаздываниями, для которых первые моментные функции построены на основе аналога классического метода шагов. Поэтому актуальной задачей является разработка эффективных как прямых (получение траекторий решений), так и косвенных (вероятностных характеристик) приближенных численных алгоритмов анализа систем СФДУ.

К настоящему времени разработан достаточно широкий класс методов решения детерминированных ФДУ [407], а также их программных реализаций, которые включают и процедуры из математических пакетов `Maple` [647], `Matlab` [311,971,972] и `Mathematica` [821]. На основе этих процедур и методов численного решения стохастических дифференциальных уравнений [116,145,503,742,743,851,897] интенсивно развиваются приближенные алгоритмы прямого численного интегрирования СФДУ различных классов [441, 446, 760, 823] в связке с процедурами статистического моделирования (метод Монте-Карло) [127,349] и др. Есть и качественные методы, например, анализ СОДУсЗ с помощью полугрупп [1045].

Модели с переменным лагом являются более сложными (по аппроксимации запаздываний см. [764]), и, как правило, у них отсутствуют аналитические решения в замкнутой форме. Поэтому для интегрирования даже неслучайных ДРУ требуются приближенные численные процедуры, а анализ явлений с изменяющимся запаздыванием является в основном количественным. Дополнительный уровень адекватности моделей (но и усложнения тоже) можно получить, если перейти от неслучайных к стохастическим моделям.

Методы для решения СОДУсЗ

Среди приближенных аналитических методов поиска решений СФДУ следует отметить технику перехода от немарковских систем с малым запаздыванием τ (в том числе переменным и случайным) или памятью

с помощью метода усреднения к марковским системам без запаздывания [105,149,164,267,297]. Процедура применения этого метода при малом τ основана на усреднении нефлуктуационных членов и опускании запаздывания у медленных переменных, что приводит к системе СОДУ для векторного марковского процесса без запаздывания, а затем к обычному усреднению по быстрым переменным или в СОДУ, или в уравнении Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК-уравнении) для плотности вероятности. Конечно, нельзя забывать и о прямом численном интегрировании стохастических ФДУ [764].

Единственно более или менее широким классом стохастических систем с постоянным запаздыванием, допускающих точное решение, является класс линейных систем с аддитивным шумом. Так уравнения для первых моментов переменных состояния были построены и решались в работе [260] с помощью аналога метода шагов.

Универсальной приближенной схемой, позволяющей исследовать СФДУ всех классов, является метод Монте-Карло (статистического моделирования) [116, 145, 716, 742, 743, 851] для прямого численного интегрирования стохастических ФДУ. Но различные алгоритмы, предназначенные для численного интегрирования даже простейших стохастических дифференциально-разностных уравнений, как правило, весьма сложны [380, 547, 764] и предназначены только для решения достаточно узких классов задач. При этом даже алгоритм основного метода – простейшей схемы Эйлера–Маруямы с постоянным шагом, приводящий к значительным объемам расчетов, существенно сложнее своего аналога, предназначенного для анализа СОДУ без запаздывания [383].

Пусть $\big(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{P}\big)$ – полное вероятностное пространство с фильтрацией $\{\mathscr{F}_t,\ t \geqslant t_0\}$, удовлетворяющей обычным условиям. Далее считается, что $X \in \boldsymbol{\mathscr{L}}_2\big(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{P}\big)$, если $\mathbb{E}\big[|X|^2\big] < \infty$, причем $\|X\|_2 = \big\{\mathbb{E}\big[|X|^2\big]\big\}^{1/2}$; $0 = t_0 < T < \infty$; $W(t)$ – одномерный стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами, определенный на этом вероятностном пространстве. Рассмотрим СДРУ вида [441]:

$$dX(t) = f\big(X(t), X(t-\tau)\big)\,dt + g\big(X(t), X(t-\tau)\big)\,dW(t), \qquad (2.2.1)$$
$$t \in (0, T],$$
$$X(t) = \Psi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \qquad (2.2.2)$$

где $\Psi(t)$ – $\mathscr{F}_{t_0}$-измеримый $\mathscr{C}([-\tau, 0], \mathbb{R})$-значная случайная переменная, такая что $\mathbb{E}\big[\,\|\Psi\|^2\big] < \infty$, а $\mathscr{C}([-\tau, 0]; \mathbb{R})$ – банахово пространство всех непрерывных траекторий $[-\tau, 0] \longmapsto \mathbb{R}$, снабженное sup-нормой; $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times$

$[0,T] \longmapsto \mathbb{R}$ и $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0,T] \longmapsto \mathbb{R}$ – непрерывные функции. Уравнение (2.2.1) можно переписать в более строгом виде:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t f\big(X(s), X(s-\tau)\big)\, ds + \\ + \int_0^t g\big(X(s), X(s-\tau)\big)\, dW(s), \quad t \in (0,T], \quad (2.2.3)$$

где второй интеграл в правой части – стохастический интеграл Ито.

Определим равномерную сетку с шагом h на отрезке $[0,T]$ и пусть $h = T/N$, $t_k = h\,k$, $k = 0, 1, 2, ..., N$. Предположим, что существует целое число M, такое что $\tau = M \cdot h$, и рассмотрим сильную *аппроксимацию* $\widetilde{X}_k$ *решения* $X(t)$ уравнения (2.2.1) в точке t_k, т.е. $X(t_k)$, на основе стохастического одношагового метода с функцией приращения ϕ, включающей приращения $\Delta W_{k+1} = W\big(h\,(k+1)\big) - W\big(h\,k\big)$ винеровского процесса. Для всех индексов k, таких что $k - M \leqslant 0$ определим $\widetilde{X}_{k-M}$ как $\Psi(t_k - \tau)$, иначе

$$\widetilde{X}_{k+1} = \widetilde{X}_k + \phi\big(\widetilde{X}_k, \widetilde{X}_{k-M}, \Delta W_{k+1}, h\big), \quad k = 0, 1, ..., N-1. \quad (2.2.4)$$

Обозначим через $\widetilde{X}(t_{k+1})$ решение, полученное по формуле (2.2.4) для одного шага, т.е.

$$\widetilde{X}(t_{k+1}) = X(t_k) + \phi\big(X(t_k), X(t_{k-M}), \Delta W_{k+1}, h\big),$$

Определение 2.2.1. *Локальная погрешность* аппроксимации $\big\{\widetilde{X}(t_k)\big\}$ – это последовательность случайных величин $\delta_{k+1} = X(t_{k+1}) - \widetilde{X}(t_{k+1})$, $k = 0, 1, ..., N-1$. *Глобальная погрешность* аппроксимации $\big\{\widetilde{X}_k\big\}$ – это последовательность случайных величин $\epsilon_k = X(t_k) - \widetilde{X}_k$, $k = 1, ..., N$.

Заметим, что ϵ_k – $\mathcal{F}_{t_k}$-измеримой последовательностью, поскольку и $X(t_k)$, и $\widetilde{X}_k$ являются $\mathcal{F}_{t_k}$-измеримыми случайными величинами.

Определение 2.2.2. Метод (2.2.4) *согласован с порядком* p_1 *в среднем* и с порядком p_2 среднем квадратическом, если следующие оценки верны с $p_2 \geqslant 1/2$ и $p_1 \geqslant p_2 + 1/2$:

$$\max_{0 \leqslant k \leqslant N-1} \big|\mathbb{E}[\delta_{k+1}]\big| \leqslant C\,h^{p_1} \quad \text{при } h \to 0, \quad (2.2.5)$$

$$\max_{0 \leqslant k \leqslant N-1} \Big\{\mathbb{E}\Big[\big|\delta_{k+1}\big|^2\Big]\Big\}^{1/2} \leqslant C\,h^{p_2} \quad \text{при } h \to 0, \quad (2.2.6)$$

где (общая) постоянная C не зависит от h, но может зависеть от T и начальных данных.

Пусть функция приращения имеет следующие свойства: предположим, что существуют положительные константы C_1 и C_2 такие, что для всех x, x', y, $y' \in \mathbb{R}$

$$\left|\mathbb{E}\left[\phi\left(x,y,\Delta W_{k+1},h\right)-\phi\left(x',y',\Delta W_{k+1},h\right)\right]\right| \leqslant C_1\, h\left(|x-x'|+|y-y'|\right), \tag{2.2.7}$$

$$\mathbb{E}\left[\left|\phi\left(x,y,\Delta W_{k+1},h\right)-\phi\left(x',y',\Delta W_{k+1},h\right)\right|^2\right] \leqslant C_2\, h\left(|x-x'|^2+|y-y'|^2\right). \tag{2.2.8}$$

Верна следующая теорема [441].

Теорема 2.2.1. Пусть выполнены условия существования и единственности строгого решения задачи (2.2.1) , (2.2.2), а функция приращения в (2.2.4) удовлетворяет оценкам (2.2.7) и (2.2.8). Предположим, что метод, определенный в соотношением (2.2.4), совместим с порядком p_1 в среднем и порядком p_2 в среднем квадратическом, так что выполняются неравенства (2.2.5) и (2.2.7) (где постоянная C не зависит от h). Тогда приближение (2.2.4) для уравнения (2.2.1) сходится в $\boldsymbol{\mathcal{L}}_2$ (при $h \to 0$ и $\tau/h \in \mathbb{N}$) с порядком $p = p_2 - 1/2$, т.е. сходимость в среднем квадратичном смысле, и

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N}\left\{\mathbb{E}\left[\left|\epsilon_k\right|^2\right]\right\}^{1/2} \leqslant C\, h^p \quad \text{при } h \to 0, \tag{2.2.9}$$

где $p = p_2 - 1/2$.

Рассмотрим *сильный метод Эйлера–Маруямы* [441]. Для уравнения (2.2.1) инкрементная функция ϕ_{EM} для рассматриваемого метода имеет следующую форму:

$$\phi_{EM}\left(\widetilde{X}_k,\widetilde{X}_{k-M},\Delta W_{k+1},h\right) = h\, f\left(\widetilde{X}_k,\widetilde{X}_{k-M}\right) + g\left(\widetilde{X}_k,\widetilde{X}_{k-M}\right)\Delta W_{k+1}$$

для $0 \leqslant k \leqslant N-1$ и с $\Delta W_{k+1} = W\left(h\,(k+1)\right) - W\left(h\,k\right) \sim \mathcal{N}(0,h)$.

Теорема 2.2.2. Пусть выполнены условия существования и единственности строгого решения задачи (2.2.1) , (2.2.2), тогда аппроксимация Эйлера–Маруямы согласован с порядком $p_1 = 2$ в среднем и с порядком $p_2 = 1$ среднем квадратическом.

Применим *метод предиктор–корректор* [870] для решения скалярного СОДУ Ито с запаздыванием:

$$dX(t) = f\big(X(t), X(t-\tau)\big)\,dt + g\big(X(t), X(t-\tau)\big)\,dW(t), \qquad (2.2.10)$$
$$t \in (0, T],$$
$$X(t) = \Phi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \qquad (2.2.11)$$

где $\Phi(t)$ – $\mathcal{F}_{t_0}$- измеримая $\mathscr{C}\big([-\tau, 0], \mathbb{R}\big)$–значная случайная величина, причем $\mathbb{E}\big[\|\Phi(t)\|^2\big] < \infty$, где $\|\Phi(s)\| = \sup_{s\in[-\tau,0]} |\mu(s)|$; функции f и g непрерывны по всем аргументам. Если эти функции удовлетворяют условиям Липшица и роста, то задача (2.2.10), (2.2.11) имеет единственное сильное решение.

Если ввести равномерную сетку сетке $t_k = t_0 + k\,h$, $k = 0, 1, ..., N$, $t_0 = 0$, $t_N = T$, $h = \tau/L$ ($L \in \mathbb{N}$), обозначить сильную аппроксимацию для $X(t_k)$ через X_k и предположить, что приращение винеровского процесса $\Delta W_k = W(t_{k+1}) - W(t_k)$ – гауссова случайная величина с распределением $\mathcal{N}(0, h)$. При этих предположениях и с учетом обозначений сильный метод предиктор–корректор Эйлера с параметром $p \in [0, 1]$ будет определяться соотношениями:

$$Y_{k+1} = X_k + f(X_k, X_{k-L})\,h + g(X_k, X_{k-L})\,\Delta W_k, \qquad (2.2.12)$$
$$X_{k+1} = X_k + \big[p\,f(Y_{k+1}, X_{k+1-L}) + (1-p)\,f(X_k, X_{k-L})\big]\,h + \\ + g(X_k, X_{k-L})\,\Delta W_k, \qquad (2.2.13)$$

причем этот метод является сходящимся в среднем квадратичном порядка $\min\big\{1/2, \hat{p}\big\}$, где $\hat{p}$ – показатель Гёльдера для начальной функции.

Рассмотрим *метод полудискретизации* [1010] в приложении к следующей системе СОДУ Ито с запаздыванием:

$$d\boldsymbol{X}(t) = \big[\boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{\mathcal{B}}(t)\,\boldsymbol{X}(t-\tau)\big]\,dt + \boldsymbol{\mathcal{G}}(t)\,d\boldsymbol{W}(t), \qquad (2.2.14)$$

формальное решение которой на сетке $t_k = k\,\Delta t$ имеет следующую форму:

$$\boldsymbol{X}(t_{k+1}) = \boldsymbol{X}(t_k) + \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\,\boldsymbol{X}(t)\,dt + \\ + \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \boldsymbol{\mathcal{B}}(t)\,\boldsymbol{X}(t-\tau)\,dt + \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \boldsymbol{\mathcal{G}}(t)\,d\boldsymbol{W}(t). \qquad (2.2.15)$$

Хотя уравнение (2.2.15) является точным, оно не обеспечивает каких-либо упрощений для вычисления решения в форме отображения. Чтобы получить необходимые соотношения, вводятся следующие обозначения (изменены, как и другие, по сравнению с [1010]), которые будут далее использоваться:

$$\boldsymbol{X}(t_k-\tau)=\boldsymbol{X}\big((k-\ell)\,\Delta t\big)=\boldsymbol{X}_{k-\ell},\quad \boldsymbol{X}(t_k)=\boldsymbol{X}_k,\quad \boldsymbol{\mathcal{A}}(t_k)=\boldsymbol{\mathcal{A}}_k,$$
$$\boldsymbol{\mathcal{B}}(t_k)\,\boldsymbol{X}(t_k-\tau)=\boldsymbol{\mathcal{B}}_k\,\boldsymbol{X}_{k-\ell},\quad \boldsymbol{\mathcal{G}}(t_k)=\boldsymbol{\mathcal{G}}_k,$$

где запаздывание τ пропорционально шагу сетки Δt. Используя квадратурные формулы левых прямоугольников, находим:

$$\boldsymbol{X}_{k+1}=\boldsymbol{X}_k+\boldsymbol{\mathcal{A}}_k\,\boldsymbol{X}_k\,\Delta t+\boldsymbol{\mathcal{B}}_k\,\boldsymbol{X}_{k-\ell}\,\Delta t+\boldsymbol{R}_k,\qquad \boldsymbol{R}_k=\boldsymbol{\mathcal{G}}_k\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}d\boldsymbol{W}(t).$$

Определим расширенный вектор состояния $\boldsymbol{Z}_k\in\mathbb{R}^{n(\ell+1)}$ в виде:

$$\boldsymbol{Z}_k=\operatorname{col}\big(\boldsymbol{X}_k,\boldsymbol{X}_{k-1},...,\boldsymbol{X}_{k-\ell}\big).$$

Тогда отображение $\boldsymbol{Z}_k$ на отрезок $[t_k,t_{k+1}]$ будет иметь следующую форму:

$$\boldsymbol{Z}_{k+1}=\boldsymbol{\mathcal{Q}}_k\,\boldsymbol{Z}_k+\boldsymbol{H}_k,$$

где

$$\boldsymbol{\mathcal{Q}}_k=\begin{bmatrix} I+\boldsymbol{\mathcal{A}}_k\,\Delta t & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & ... & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{B}}_k\,\Delta t\\ I & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & ... & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n}\\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & I & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & ... & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n}\\ ... & ... & ... & ... & ... & ...\\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & ... & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n}\\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & ... & I & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{H}_k=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_k\\ \boldsymbol{O}_{\ell n}\end{bmatrix}.$$

Отметим также следующие методы и их модификации: итерации Пикара [740]; метод многих масштабов [960]; использование рядов Тейлора [849]; слабую схему Эйлера [446]; неявный метод Эйлера дробных шагов [1132]; полунеявный метод Эйлера [1075]; явный и неявный сильные методы Эйлера порядка 0.5, явный и неявный сильные методы аппроксимации Тейлора порядка 1.0 [760]; явные слабые схемы второго порядка [761]; двухшаговый метод Муруямы [457]; многошаговые методы Маруямы [448]; сильную схему Мильштейна порядка 1 [669]; θ-метод Мильштейна дробных шагов [632]; двухэтапный метод Рунге–Кутты [954]; стабилизированные ортогональные явные методы Рунге–Кутты–Чебышёва

(RKC–SROCK) с расширенными среднеквадратичными областями устойчивости, пригодные для решения жестких задач [747]; методы Хойна и балансировки [1143]; схему предиктор-корректор, средней точки и схему, подобную методу Мильштейна, которая получена на основе аппроксимации Вонга–Закаи (Wong–Zakai) как промежуточного шага [458]; *theta*-методы [671]; спектальные коллокации на основе полиномов Чебышёва [1115] и Лежандра [550]; аппроксимации решений СОДУсЗ в виде GARCH-моделей временных рядов [801] и др.

Методы для решения СДУвЧПсЗ

Наряду с детерминированными ДУвЧПсЗ и обыкновенными стохастическими ДУсЗ (СДУсЗ) [109, 267, 306, 764], в настоящее время актуален анализ стохастических ДУвЧПсЗ (СДУвЧПсЗ). При изучении таких уравнений (основные понятия и строгую постановку см. в [470]) получено значительное количество качественных результатов для решений СДУвЧПсЗ [476, 587]. Например, была доказана теорема об экспоненциальной устойчивости в среднеквадратичном для сильных решений линейных уравнений с конечными постоянными запаздываниями; для эволюционных уравнений рассматривалась устойчивость сильных решений квазилинейных уравнений; изучались существование и устойчивость слабых решений на основе теорем сравнения, неравенства Гронуолла, принципа неподвижной точки и др. Существенно меньше результатов получено для уравнений нейтрального типа.

СДУвЧПсЗ являются моделями поведения различных физических, биологических, инженерных и социальных систем [386], например, описывают явления самоорганизации, распространение тепловых фронтов в бистабильных системах типа реакции–диффузии [709], влияние случайных возмущений на электрический ток в наноструктурных полупроводниках [810], распределение лекарственных средств, функционирование сердца совместно с кровяной системой и др.

Поскольку, как и СДУвЧП, большинство СДУвЧПсЗ не могут быть решены явно, важной задачей при изучении таких уравнений (существования и единственности решения, управляемости, устойчивости и др. [476, 1022, 1111]) является разработка различных алгоритмов их аналитического, приближенного и приближенного аналитического решения, таких как численный метод Эйлера–Маруямы [342]; тот же метод по времени и схема Галеркина по пространству [783]; схема сведения СДУвЧПсЗ к СДУвЧП, включая метод прямых [1145]; техника получения последовательности линейных задач для нелинейного параболического СДУвЧП с

помощью линеаризации [1095]; асимптотический метод [151]; разложение решения в ряд по ортонормированной системе функций пространственных переменных [617,618,1111]; применение метода Галеркина по времени и по пространству с использованием полиномов Чебышёва [650] и др. Если остановиться на специфичных для СДУвЧПсЗ методах, то спектр их невелик и включает, в первую очередь, процедуры, основанные на методе Монте-Карло (например, явный одношаговый метод [341]), итерационные методы, основанные на применении полугрупп операторов [617] и др.

Методы для решения СИУ, СОИДУ и СИДУвЧП

Естественно, что усложнение используемого математического аппарата ведет и к усложнению применяемых методов и, в первую очередь, приближенных, так как возможности получения точных аналитических решений серьезных проблем, включая указанные выше, весьма ограничены. Поэтому в последние десятилетия значительное внимание специалистов уделяется диктуемой практикой разработке эффективных приближенных методов решения СИУ и СИДУ.

Отметим ряд методов, применяемых для решения стохастических ИУ: методы Галеркина [719], Петрова–Галеркина [977], коллокации [460, 555] и вариационно-итерационный [357]; разложения по полиномам Бернштейна [364], по функциям Хаара [856], CAS-вейвлетам [979]; использование рядов Тейлора [734] и по полиномам Чебышёва [962], кусочно-постоянных (block pulse functions) [818] и треугольных функций [733], полиномиальных хаотических разложений и итераций Неймана [545] и др.

Отметим, что основными приближенными методами в области решения СИДУ являются конечно-разностные процедуры, различные варианты методов Рунге–Кутты, трапеций, коллокации [438, 672, 673] и др. Несмотря на наличие некоторого количества результатов, связанных с построением алгоритмов решения стохастических ИДУ (см. [682, 768, 1000, 1033]), методы численного или приближенного аналитического интегрирования стохастических систем рассматриваемой структуры развиты недостаточно. При этом полезно адаптировать существующие методы анализа детерминированных ИДУ для изучения стохастических, так как основная часть алгоритмов качественного и количественного исследования явлений, описываемых стохастическими ИДУ, состоит из детерминированных схем.

При этом одним из важнейших направлений исследований является оценка как устойчивости самих СИДУсЗ [822], так и сходимости и устойчивости различных методов их приближенного решения, например, обратного метода Эйлера с расщеплением [1018], θ-методов стохастических

нелинейных СИДУсЗ [786], полунеявного метода Эйлера [524] и т.д. При анализе стохастических задач приближенные алгоритмы, как правило, используются для прямого построения реализаций случайных процессов как решений стохастических ИДУ.

В процессе исследований был разработан ряд процедур для получения численных аппроксимаций решений детерминированных и стохастических ИДУ. Наряду со значительным спектром процедур решения СОДУ с различными типами запаздываний, алгоритмы численного или приближенного аналитического интегрирования стохастических систем с распределенным запаздыванием развиты недостаточно.

Среди известных схем решения СИДУ отметим:

– полностью численные методы (классические и модифицированные гибридные), такие как явные и неявные (обратные) схемы Эйлера [473, 720], методы конечных разностей, прямых, конечных элементов, полудискретизации [473, 609, 1096], τ-метод [728, 1024], θ-метод [732], одношаговые методы Рунге–Кутты и многошаговые схемы для ИДУ [175, 510, 840, 867, 920, 1094], метод Рунге–Кутты [307] для вычисления ковариационных функций, экстраполяционные схемы [468], методы Галеркина [791], в т.ч., в сочетании с квадратурами [974], метод итераций на последнем шаге [25], использование вейвлетов [505], глобально определенные базисные Sinc-функции [703], приближенное преобразование СОИДУ в СОДУ на основе усреднения ядра [194, 201, 1000] и разложений гамма-распределения [721], метод прямоугольников и более сложные схемы интегрирования [680], сбалансированные неявные методы [850, 1101];

– приближенно-аналитические методы, включающие методы рядов Тейлора [608, 705], в т.ч., в сочетании с дискретизацией по времени [706], метод последовательных приближений (Z-алгоритм) [707], тот же метод, но для вычисления функции Грина [668], асимптотический метод [162,184] для ИДУ, детерминированный и стохастический методы усреднения для СИДУ [163, 285, 292, 355], метод многих масштабов [1106], метод коллокаций [436, 438], теория возмущений [625], принцип неподвижной точки на основе биортогональных систем для банаховых пространств [410], итерационный метод [423], непрерывные методы Рунге–Кутты, основанные на методе коллокаций [1139], преобразование Лапласа для одномерной ограниченной пространственной области [711], методы Эйлера–Чебышёва [1043], Эйлера–Эрмита [931] и др.

Как правило, прямое исследование систем СОИДУ невозможно, а аналитическая теория, аналогичная созданной для марковских случайных процессов [236], отсутствует. С другой стороны, имеются работы, где с помощью увеличения размерности вектора состояния интегро-диф-

ференциальные системы, у которых элементы вырожденных матричных ядер представляют собой простейшие функции типа $c\,e^{-\nu(t-\tau)}$ (c, ν – постоянные), приводят к формам, описываемым СДУ, что позволяет для их исследования применить известные точные и приближенные методы [236].

Более того, кроме точных, существует и ряд приближенных схем для упрощения интегральных ядер, таких как использование рядов Прони [372] и аппроксимации полиномами Лагерра для представления функций релаксации [885], метод приближения переходных функций экспонентами [25], приближенный вывод уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова для СОИДУ [118], переход от СОИДУ к СОДУ с помощью статистической линеаризации [148], схемы расширения пространства состояний и преобразования к СДУ введением новых переменных [721,1089], в случае ограниченности носителя ядра [213] и т.д. Основная цель таких упрощений та же, что и вышеупомянутая.

Известно [1101], что большинство численных методов для СИДУсЗ являются явными или полунеявными, которые неявны только по отношению к коэффициентам сноса. Последние методы хорошо приспособлены для анализа жестких систем, возмущаемых шумами с малой интенсивностью или аддитивными шумами. В случае же систем с большими мультипликативными шумами применение полностью неявных методов является неизбежным.

Семейство специализированных методов для исследования стохастических систем с конечными сосредоточенными и распределенными запаздываниями является достаточно ограниченым. Так для численного интегрирования применяются аналоги схемы Эйлера, Эйлера–Маруямы, θ-Маруямы и Мильштейна [442,443,659,869], комбинация схемы Эйлера–Маруямы для первой стохастической дифференциальной части уравнений и θ-метода для аппроксимации интеграла квадратурами [969], сильные и слабые сбалансированные неявные методы [1101].

2.2.2. Комбинация метода шагов и расширения пространства состояний для анализа стохастических систем с непрерывными возмущениями

Общие положения данной схемы (комбинация метода шагов и расширении фазового пространства) представим в форме методики исследования стохастических дифференциально-разностных систем с одним постоянным запаздыванием [189, 191, 238, 899–901, 904, 907]. Далее будет показано, как применять сочетание МШРПС для анализа систем СФДУ с другими формами запаздывания. В отличие от известных методов [547]

изложенная схема не предполагает предварительного изменения уравнений исследуемого объекта с целью исключения запаздывания.

Наша схема анализа некоторых классов систем стохастических дифференциальных уравнений с запаздыванием базируется на МШРФП и позволяет строить процедуры исследования различных форм ФДУ с одной точки зрения. При этом в большинстве вариантов схемы ошибка метода отсутствует. Кроме того, исчезают многие проблемы, возникающие при реализации процедур прямого численного интегрирования ДУ с запаздыванием.

2.2.2.1. Системы СОДУ с одним постоянным запаздыванием

Рассмотрим систему стохастических обыкновенных дифференциально-разностных уравнений в смысле Стратоновича следующего вида:

$$d\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{X}(t), \boldsymbol{X}(t-\tau), t\big)\,dt + \boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{X}(t), \boldsymbol{X}(t-\tau), t\big) \circ d\boldsymbol{W}(t), \qquad t_0 + \tau = t_1 < t \leqslant T < +\infty, \quad (2.2.16)$$

Здесь $\boldsymbol{X}(t) = \{X_\ell(t)\} \in \mathbb{R}^n$ – векторный случайный процесс, представляющий состояние системы; $\boldsymbol{W}(t) = \{W_\ell(t)\} \in \mathbb{R}^m$ – вектор независимых стандартных винеровских процессов; τ – постоянное запаздывание, $\boldsymbol{f}(\cdot,\cdot,\cdot) = \{f_i(\cdot,\cdot,\cdot)\} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\mathcal{G}}(\cdot,\cdot,\cdot) = \{g_{ij}(\cdot,\cdot,\cdot)\} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ – детерминированные векторная и матричная функции, дифференцируемые необходимое число раз по всем своим аргументам, соответственно. Будем считать, что на отрезке $(t_0, t_1]$ вектор состояния $\boldsymbol{X}(t)$ удовлетворяет системе СОДУ без запаздывания

$$d\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{f}_0\big(\boldsymbol{X}(t), t\big)\,dt + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0\big(\boldsymbol{X}(t), t\big) \circ d\boldsymbol{W}(t), \qquad \boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}^0, \quad (2.2.17)$$

где $\boldsymbol{f}_0(\cdot,\cdot) = \{f_{0i}(\cdot,\cdot)\} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\mathcal{G}}_0(\cdot,\cdot) = \{g_{0ij}(\cdot,\cdot)\} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, а при $t = t_0$ задана плотность вероятности $p^0(\boldsymbol{x})$ распределения вектора $\boldsymbol{X}^0$.

Заметим, что задание на начальном множестве $[t_0, t_0 + \tau]$ вектора состояния $\boldsymbol{X}(t)$ в виде $\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{X}^0$ или $\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t)$, где $\boldsymbol{\varphi}(t)$ – заданная детерминированная векторная функция, легко сводится к указанной выше схеме.

Задачей исследования является вычисление основных вероятностных характеристик вектора состояния $\boldsymbol{X}(t)$ при любом $t \geqslant t_0$ и, в частности, плотности вероятности $p_X(\boldsymbol{X}, t)$ и моментных функций случайного векторного процесса $\boldsymbol{X}(t)$.

Вопрос о существовании и единственности сильных и слабых решений систем типа (2.2.16), (2.2.17) (в случае, когда на начальном множестве $[t_0, t_1]$ непосредственно задается вектор $\boldsymbol{X}(t)$) рассматривался в монографии [306].

Известно [22], что один из подходов к детерминированным обыкновенным дифференциальным уравнениям с запаздывающим аргументом (ОДУсЗА) состоит в рассмотрении движения, соответствующего такому уравнению, как движение в бесконечномерном функциональном пространстве, в то время как переменные состояния образуют конечномерный вектор. Другой подход – сведение ОДУсЗА к ОДУ в подходящем функциональном пространстве. С этой целью определяется однопараметрическое семейство вложенных банаховых пространств. Исходное ОДУсЗА порождает соответствующее ОДУ на каждом из пространств однопараметрического семейства. Решение порожденного уравнения, удовлетворяющее некоторым дополнительным ограничениям, соответствует тем решениям исходного уравнения, которые растут не быстрее, чем некоторая экспонента. Показатель экспоненты определяется индексом пространства. Например, в [176] показано, что ОДУсЗА может сводиться к одному ОДУ в бесконечном пространстве $\mathscr{C}^1[t_0, t_1]$ сильно непрерывных функций по норме в $\mathscr{C}[t_0, t_1]$, а в [177] отмечено, что ОДУсЗА, как правило, порождают бесконечномерные динамические системы.

Если посмотреть на уравнения (2.2.16), (2.2.17) с точки зрения обобщенной теории случайных процессов, можно сделать вывод о том, что вследствие наличия запаздывания случайные векторы $\boldsymbol{X}$ – решения этих уравнений – в общем случае не являются марковскими векторными случайными процессами [305], а следовательно, для получения статистических характеристик векторных случайных процессов $\boldsymbol{X}(t)$ (функций математического ожидания, ковариации и др.) не может быть применен хорошо известный аналитический аппарат теории марковских процессов [236], основанный на использовании уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК–уравнения) для (переходной) плотности вероятности распределения фазового вектора нелинейной динамической системы.

С другой стороны, естественными выглядят попытки построения на основе уравнений (2.2.16), (2.2.17) иных математических моделей явлений, описываемых данными уравнениями, моделей, более удобных для дальнейших исследований.

Для получения плотности вероятности $p(\boldsymbol{X}, t)$ при любом $t > t_0$ расширим пространство состояний исследуемой системы (сведя немарковский векторный процесс к марковскому). Для этого введем следующие

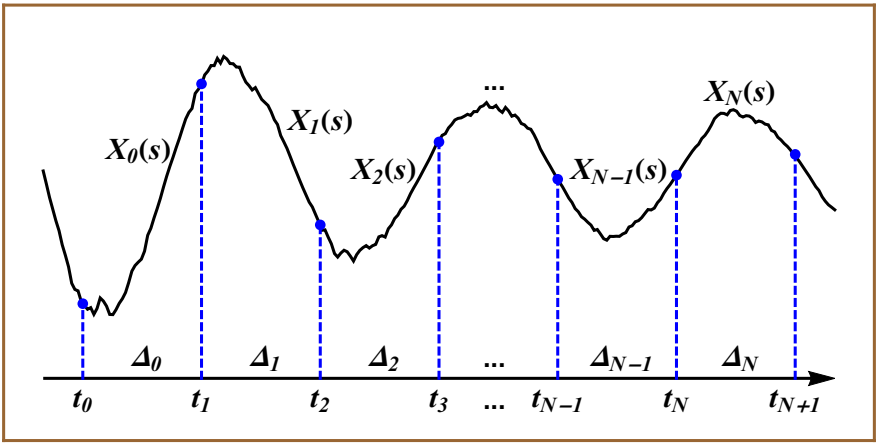


Рис. 2.2.1

обозначения:

$$s \in [0,\tau], \quad t_q = t_0 + q\,\tau, \quad q = 0,1,2,...,N+1, \quad t_{N+1} \geqslant T,$$

$$\Delta_q = (t_q, t_{q+1}], \quad \overline{\Delta}_q = [t_q, t_{q+1}], \quad s_q = t_q + s,$$

$$p_q(\boldsymbol{x}_q, s) = p_X(\boldsymbol{x}_q, s + t_q), \quad p_q(\boldsymbol{x}_q, 0) = p_{q-1}(\boldsymbol{x}_q, \tau), \quad p_0(\boldsymbol{x}, 0) = p_X^0(\boldsymbol{x}),$$

$$\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{X}_q(s), \boldsymbol{X}_{q-1}(s), s_q\big) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{X}(s+t_q), \boldsymbol{X}(s+t_{q-1}), s+t_q\big),$$

$$\boldsymbol{X}_q(s) = \boldsymbol{X}(s+t_q), \quad \boldsymbol{X}_q(0) = \boldsymbol{X}_{q-1}(\tau), \quad \boldsymbol{Y}(s) \equiv \boldsymbol{X}^0, \qquad (2.2.18)$$

$$\boldsymbol{W}_q(s) = \boldsymbol{W}(s+t_q), \quad \boldsymbol{W}_q(0) = \boldsymbol{W}_{q-1}(\tau),$$

$$\boldsymbol{V}_q(s) = \boldsymbol{V}(s+t_q), \quad \boldsymbol{V}_q(0) = \boldsymbol{V}_{q-1}(\tau), \quad \boldsymbol{Z}_0(s) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{Y}(s), \boldsymbol{X}_0(s)\big),$$

$$\boldsymbol{Z}_1(s) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{Y}(s), \boldsymbol{X}_0(s), \boldsymbol{X}_1(s)\big) \equiv \operatorname{col}\big(\boldsymbol{Z}_0(s), \boldsymbol{X}_1(s)\big),$$

$$\boldsymbol{Z}_2(s) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{Z}_1(s), \boldsymbol{X}_2(s)\big), \quad ...$$

(см. рис. 2.2.1), причем $p_0(\boldsymbol{x}_0, 0) = p_X^0(\boldsymbol{x}_0)$, а равенство векторных случайных процессов понимается в смысле сходимости *почти наверное*, и построим цепочку уравнений типа ФПК для плотностей распределения векторов $\boldsymbol{Z}_0(s)$, $\boldsymbol{Z}_1(s)$, $\boldsymbol{Z}_2(s)$, ..., $\boldsymbol{Z}_N(s)$, принадлежащих семейству вложенных пространств состояния $\mathbb{R}^{2n} \subset \mathbb{R}^{3n} \subset \mathbb{R}^{3n} \subset ... \subset \mathbb{R}^{n(N+2)}$. Цель построения такой цепочки – получить совместные статистические характеристики вектора состояния при различных значениях времени.

0°. Рассмотрим полуинтервал Δ_0 (рис. 2.2.1). Определённый на Δ_0

случайный векторный процесс $\boldsymbol{Z}_0(s)$ удовлетворяет системе СОДУ вида:

$$
\begin{aligned}
&d\boldsymbol{Y}(s) = \boldsymbol{O}_n\, ds,\\
&d\boldsymbol{X}_0(s) = \boldsymbol{f}_0\big(\boldsymbol{X}_0(s), s_0\big)\, ds + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0\big(\boldsymbol{X}_0(s), s_0\big) \circ d\boldsymbol{W}_0(s),\\
&\boldsymbol{Y}(0) = \boldsymbol{X}^0, \quad \boldsymbol{X}_0(0) = \boldsymbol{X}^0.
\end{aligned}
$$

ФПК–уравнение для одноточечной плотности распределения расширенного вектора $\boldsymbol{Z}_0(s)$ имеет вид:

$$
\frac{\partial\big[\,\cdot\,\big]}{\partial s} = \mathbb{L}_0\big[\,\cdot\,\big] \equiv \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2n} \frac{\partial^2\big\{b_{0ij}\big[\,\cdot\,\big]\big\}}{\partial z_{0i}\,\partial z_{0j}} - \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial\big\{a_{0i}\big[\,\cdot\,\big]\big\}}{\partial z_{0i}}, \tag{2.2.19}
$$

где

$$
a_{0i} = f_{0i}^{+} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2n}\sum_{k=1}^{2m} \frac{\partial g_{0ik}^{+}}{\partial z_{0j}}\, g_{0jk}^{+}, \qquad b_{0ij} = \sum_{k=1}^{2m} g_{0ik}^{+}\, g_{0jk}^{+},
$$

$$
\boldsymbol{f}_0^{+}(\boldsymbol{z}_0, s) = \big\{\boldsymbol{f}_{0\ell}^{+}(\boldsymbol{z}_0, s)\big\} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O}_n \\ \boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{x}_0, s_0) \end{bmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{\mathcal{G}}_0^{+}(\boldsymbol{z}_0, s) = \big\{g_{0\ell k}^{+}(\boldsymbol{z}_0, s)\big\} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(\boldsymbol{x}_0, s_0) \end{bmatrix}.
$$

1°. Теперь обратимся к сегментам Δ_0 и Δ_1. Систему СОДУ для вычисления вектора $\boldsymbol{Z}_1(s)$ можно представить в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
&d\boldsymbol{Y}(s) = \boldsymbol{O}_n\, ds,\\
&d\boldsymbol{X}_0(s) = \boldsymbol{f}_0\big(\boldsymbol{X}_0(s), s_0\big)\, ds + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0\big(\boldsymbol{X}_0(s), s_0\big) \circ d\boldsymbol{W}_0(s),\\
&d\boldsymbol{X}_1(s) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{X}_1(s), \boldsymbol{X}_0(s), s_1\big)\, ds + \boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{X}_1(s), \boldsymbol{X}_0(s), s_1\big) \circ d\boldsymbol{W}_1(s),\\
&\boldsymbol{Y}(0) = \boldsymbol{X}^0, \quad \boldsymbol{X}_0(0) = \boldsymbol{X}^0, \quad \boldsymbol{X}_1(0) = \boldsymbol{X}_0(\tau).
\end{aligned}
$$

Поэтому плотность вероятности расширенного вектора состояния $\boldsymbol{Z}_1(s)$ будут удовлетворять ФПК–уравнению вида

$$
\frac{\partial\big[\,\cdot\,\big]}{\partial s} = \mathbb{L}_1\big[\,\cdot\,\big] \equiv \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3n} \frac{\partial^2\big\{b_{1ij}\big[\,\cdot\,\big]\big\}}{\partial z_{1i}\,\partial z_{1j}} - \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial\big\{a_{1i}\big[\,\cdot\,\big]\big\}}{\partial z_{1i}}, \tag{2.2.20}
$$

где

$$
a_{1i} = f_{1i}^{+} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3n}\sum_{k=1}^{3m} \frac{\partial g_{1ik}^{+}}{\partial z_{1j}}\, g_{1jk}^{+}, \qquad b_{1ij} = \sum_{k=1}^{3m} g_{1ik}^{+}\, g_{1jk}^{+},
$$

$$\boldsymbol{f}_1^+(\boldsymbol{z}_1,s)=\bigl\{\boldsymbol{f}_{1\ell}^+(\boldsymbol{z}_1,s)\bigr\}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{f}_0^+(\boldsymbol{z}_0,s)\\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_0,s_1)\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}_1^+(\boldsymbol{z}_1,s)=\bigl\{g_{1\ell k}^+(\boldsymbol{z}_1,s)\bigr\}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{G}}_0^+(\boldsymbol{z}_0,s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{2n\times m}\\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times 2m} & \boldsymbol{\mathcal{G}}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_0,s_1)\end{bmatrix}.$$

... ...

N°. Рассмотрим временны́е полуинтервалы Δ_0, Δ_1, ..., Δ_N. Построим систему СОДУ для вектора $\boldsymbol{Z}_N(s)$ в виде:

$$\begin{aligned}
&d\boldsymbol{Y}(s)=\boldsymbol{O}_n\,ds,\\
&d\boldsymbol{X}_0(s)=\boldsymbol{f}_0\bigl(\boldsymbol{X}_0(s),s_0\bigr)\,ds+\boldsymbol{\mathcal{G}}_0\bigl(\boldsymbol{X}_0(s),s_0\bigr)\circ d\boldsymbol{W}_0(s),\\
&d\boldsymbol{X}_1(s)=\boldsymbol{f}\bigl(\boldsymbol{X}_1(s),\boldsymbol{X}_0(s),s_1\bigr)\,ds+\boldsymbol{\mathcal{G}}\bigl(\boldsymbol{X}_1(s),\boldsymbol{X}_0(s),s_1\bigr)\circ d\boldsymbol{W}_1(s),\\
&\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\\
&d\boldsymbol{X}_N(s)=\boldsymbol{f}\bigl(\boldsymbol{X}_N(s),\boldsymbol{X}_{N-1}(s),s_N\bigr)ds+\boldsymbol{\mathcal{G}}\bigl(\boldsymbol{X}_N(s),\boldsymbol{X}_{N-1}(s),s_N\bigr)\circ d\boldsymbol{W}_N(s),\\
&\boldsymbol{Y}(0)=\boldsymbol{X}^0,\quad \boldsymbol{X}_0(0)=\boldsymbol{X}^0,\quad \boldsymbol{X}_1(0)=\boldsymbol{X}_0(\tau),\quad ...,\quad \boldsymbol{X}_N(0)=\boldsymbol{X}_{N-1}(\tau).
\end{aligned}$$

Для плотности распределения векторного СП $\boldsymbol{Z}_N(s)$ можно записать следующее уравнение:

$$\frac{\partial\bigl[\,\cdot\,\bigr]}{\partial s}=\mathbb{L}_N\bigl[\,\cdot\,\bigr]\equiv\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n\,(N+2)}\frac{\partial^2\bigl\{b_{Nij}\bigl[\,\cdot\,\bigr]\bigr\}}{\partial z_{Ni}\,\partial z_{Nj}}-\sum_{i=1}^{n\,(N+2)}\frac{\partial\bigl\{a_{Ni}\bigl[\,\cdot\,\bigr]\bigr\}}{\partial z_{Ni}}.\qquad(2.2.21)$$

В этом уравнении коэффициенты сноса и диффузии имеют вид:

$$a_{Ni}=f_{Ni}^+\!+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n\,(N+2)}\sum_{k=1}^{m\,(N+2)}\frac{\partial g_{Nik}^+}{\partial z_{Nj}}\,g_{Njk}^+,\qquad b_{Nij}^+=\sum_{k=1}^{m\,(N+2)}g_{Nik}^+\,g_{Njk}^+,$$

$$\boldsymbol{f}_N^+(\boldsymbol{z}_N,s)=\bigl\{\boldsymbol{f}_{N\ell}^+(\boldsymbol{z}_N,s)\bigr\}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{f}_{N-1}^+(\boldsymbol{z}_{N-1},s)\\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_N,\boldsymbol{x}_{N-1},s_N)\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}_N^+(\boldsymbol{z}_N,s)=\bigl\{g_{N\ell k}^+(\boldsymbol{z}_N,s)\bigr\}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{G}}_{N-1}^+(\boldsymbol{z}_{N-1},s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n(N+1)\times m}\\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m(N+1)} & \boldsymbol{\mathcal{G}}(\boldsymbol{x}_N,\boldsymbol{x}_{N-1},s_N)\end{bmatrix}.$$

Для решения поставленной выше задачи определим следующие стохастические аналоги классического метода шагов [320], которые основаны на построенных ФПК–уравнениях.

Вычисление плотности вероятности $p(\boldsymbol{x},t)$ через переходные плотности

Шаг 0. Переходная плотность $\pi_0(\boldsymbol{x}_0,s\,|\,\boldsymbol{y}_0,0)$ распределения вектора состояния $\boldsymbol{X}_0(s)$ удовлетворяет уравнению (2.2.19) с начальным условием

$$\lim_{s\to+0}\pi_0(\boldsymbol{x}_0,s\,|\,\boldsymbol{y}_0,0)=\delta(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{y}_0).$$

После вычисления функции π_0 можно определить плотность вероятности $p(\boldsymbol{x},t)$ на полуинтервале $(t_0,t_1]$:

$$p(\boldsymbol{x},s+t_0)\equiv p_0(\boldsymbol{x},s)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\pi_0(\boldsymbol{x},s\,|\,\boldsymbol{y}_0,0)\,p^{\,0}(\boldsymbol{y}_0)\,d\boldsymbol{y}_0.$$

Шаг 1. Переходная плотность $\pi_1(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_0,s\,|\,\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_0,0)$ будет удовлетворять уравнению (2.2.20) с начальным условием

$$\lim_{s\to+0}\pi_1(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_0,s\,|\,\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_0,0)=\delta(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{y}_1)\,\delta(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{y}_0),$$

Знание функции $\pi_1(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_0,s\,|\,\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_0,0)$ позволяет вычислить неизвестную плотность вероятности $p(\boldsymbol{x},t)$ на полуинтервале $(t_1,t_2]$:

$$p(\boldsymbol{x},s+t_1)\equiv p_1(\boldsymbol{x},s)=$$
$$=\int\limits_{\mathbb{R}^{3n}}\pi_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0,s\,|\,\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_0,0)\,p_1(\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_0,0)\,d\boldsymbol{x}_0\,d\boldsymbol{y}_1\,d\boldsymbol{y}_0,$$

где

$$p_1(\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_0,0)=\pi_0(\boldsymbol{y}_1,\tau\,|\,\boldsymbol{y}_0,0)\,p^{\,0}(\boldsymbol{y}_0).$$

… … … … … … … … …

Шаг N. Переходная плотность $\pi_N(\boldsymbol{x}_N,...,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_0,s\,|\,\boldsymbol{y}_N,...,\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_0,0)$ будет удовлетворять уравнению (2.2.21) с начальным условием

$$\lim_{s\to+0}\pi_N(\boldsymbol{x}_N,...,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_0,s\,|\,\boldsymbol{y}_N,...,\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_0,0)=$$
$$=\delta(\boldsymbol{x}_N-\boldsymbol{y}_N)\,...\,\delta(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{y}_1)\,\delta(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{y}_0).\quad(2.2.22)$$

После вычисления функции π_N можно определить значения искомой плотности $p(\boldsymbol{x},t)$ на полуинтервале $(t_N,t_{N+1}]$:

$$p(\boldsymbol{x}, s+t_N) \equiv p_N(\boldsymbol{x}, s) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{(2N+1)n}} \widehat{p}_N(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_{N-1}, ..., \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_0, s; \boldsymbol{y}_N, \boldsymbol{y}_{N-1}, ..., \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_0, 0) \times$$

$$\times\, d\boldsymbol{x}_{N-1} \dots d\boldsymbol{x}_1\, d\boldsymbol{x}_0\, d\boldsymbol{y}_N\, d\boldsymbol{y}_{N-1} \dots d\boldsymbol{y}_1\, d\boldsymbol{y}_0, \quad (2.2.23)$$

где

$$\widehat{p}_N(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_{N-1}, ..., \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_0, s; \boldsymbol{y}_N, \boldsymbol{y}_{N-1}, ..., \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_0, 0) =$$

$$= \pi_N(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_{N-1}, ..., \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_0, s \,|\, \boldsymbol{y}_N, \boldsymbol{y}_{N-1}, ..., \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_0, 0) \times$$

$$\times\, p_N(\boldsymbol{y}_N, \boldsymbol{y}_{N-1}, ..., \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_0, 0),$$

$$p_N(\boldsymbol{y}_N, \boldsymbol{y}_{N-1}, ..., \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_0, 0) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \pi_{N-1}(\boldsymbol{x}_{N-1}, \boldsymbol{x}_{N-2}, ..., \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_0 \,|\, \boldsymbol{y}_{N-1}, \boldsymbol{y}_{N-2}, ..., \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_0, 0) \times$$

$$\times\, p_{N-1}(\boldsymbol{y}_{N-1}, \boldsymbol{y}_{N-2}, ..., \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_0, 0)\, d\boldsymbol{x}_{N-2} \dots d\boldsymbol{x}_1\, d\boldsymbol{x}_0\big|_{s=\tau}.$$

Заметим, что при прямом применении соотношений, приведенных в [891, 892, 944] и основанных на использовании условной характеристической функции, к системам рассматриваемого типа получается аналог ФПК–уравнения с запаздыванием, но это уравнение оказывается незамкнутым. Его же замыкание приводит к цепочке ФПК–уравнений построенного типа.

Вычисление плотности вероятности $p(\boldsymbol{x}, t)$ через совместные плотности

Шаг 0. Плотность вероятности $p_0(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}, s)$ распределения вектора состояния $\boldsymbol{Z}_0(s)$ удовлетворяет уравнению (2.2.19) с начальным условием

$$p_0(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}, 0) = p^{\,0}(\boldsymbol{x}_0)\, \delta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}_0).$$

Искомая плотность вероятности $p(\boldsymbol{x}, t)$ при $t \in (t_0, t_1]$ будет равна $p_0(\boldsymbol{x}, t - t_0)$.

Шаг 1. Плотность $p_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}, s)$ вектора $\boldsymbol{Z}_1(s)$ является решением уравнения (2.2.20) с начальным условием

$$p_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}, 0) = p_0(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_0, \tau)\, \delta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}_0).$$

После вычисления $p_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}, s)$ плотность $p(\boldsymbol{x}, t)$ при $t \in (t_1, t_2]$ можно будет определить по формуле:

$$p(\boldsymbol{x}, t) = \int\limits_{\mathbb{R}^{2n}} p_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}, t - t_1)\, d\boldsymbol{x}_0\, d\boldsymbol{y}.$$

… … … … … … … … …

Шаг N. Основная характеристика вектора $\boldsymbol{Z}_N(s)$ – плотность распределения $p_N(\boldsymbol{x}_N, ..., \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}, s)$ – будет удовлетворять уравнению (2.2.21) с начальным условием

$$p_N(\boldsymbol{x}_N, ..., \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}, 0) = p_{N-1}(\boldsymbol{x}_N, ..., \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_0, \tau)\, \delta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}_0). \qquad (2.2.24)$$

После вычисления функции p_N находим значения искомой плотности на полуинтервале $(t_N, t_{N+1}]$ по формуле

$$p(\boldsymbol{x}, t) = \int\limits_{\mathbb{R}^{Nn}} p_N(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_{N-1}, ..., \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}, t - t_N)\, d\boldsymbol{x}_{N-1}\, d\boldsymbol{x}_1\, d\boldsymbol{x}_0\, d\boldsymbol{y}.$$

При практическом применении рассмотренных процедур (наряду с трудностями решения собственно ФПК–уравнений) может оказаться необходимым ограничить количество координат объединённого вектора состояния. Поэтому возникает проблема освобождения от "лишних" координат. В принципе решить эту проблему можно несколькими способами:

– учесть малость каких-либо параметров (и, в частности, запаздывания);

– использовать другие процедуры замыкания или известное соотношение

$$\lim_{t_2 - t_1 \to \infty} p_X^{[2]}(x_1, t_1; x_2, t_2) = p_X(x_1, t_1)\, p_X(x_2, t_2)$$

(здесь $p_X^{[2]}(\cdot, \cdot; \cdot, \cdot)$ и $p_X(\cdot, \cdot)$ – двухточечная и одноточечная плотности вероятности случайного процесса $X(t)$ соответственно) и др.

Метод гауссовой аппроксимации (ГА) для систем с постоянным запаздыванием

Для систем без запаздывания данный метод состоит в приближённой замене фактической плотности вероятности гауссовым нормальным распределением $\widetilde{p}(\underline{\boldsymbol{x}}, t) = \mathcal{N}\big(\underline{\boldsymbol{x}}; \underline{\boldsymbol{m}}(t), \underline{\boldsymbol{K}}(t)\big)$ с теми же, что и у искомой, первыми моментами [236]. При этом уравнения для вектора функций математического ожидания $\boldsymbol{m}(t)$ и матрицы функций ковариации $\underline{\boldsymbol{K}}(t)$ могут

быть приведены к виду

$$\dot{\underline{\boldsymbol{m}}}(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \underline{\boldsymbol{a}}(\underline{\boldsymbol{x}}, t)\, \widetilde{p}(\underline{\boldsymbol{x}}, t)\, d\underline{\boldsymbol{x}}, \qquad \underline{\boldsymbol{m}}(t_0) = \underline{\boldsymbol{m}}^0,$$

$$\dot{\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}}(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big\{ \big[\underline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{m}}(t)\big]\, \underline{\boldsymbol{a}}^{\intercal}(\underline{\boldsymbol{x}}, t) + \underline{\boldsymbol{a}}(\underline{\boldsymbol{x}}, t)\, \big[\underline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{m}}(t)\big]^{\intercal} + \\ + \underline{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\underline{\boldsymbol{x}}, t) \Big\}\, \widetilde{p}(\underline{\boldsymbol{x}}, t)\, d\underline{\boldsymbol{x}}, \qquad \underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}(t_0) = \underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^0.$$

Здесь $\underline{\boldsymbol{a}}(\underline{\boldsymbol{x}}, t) = \{\underline{a}_i(\underline{\boldsymbol{x}}, t)\}$ и $\underline{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\boldsymbol{x}, t) = \{\underline{b}_{ij}(\underline{\boldsymbol{x}}, t)\}$ – вектор коэффициентов сноса и матрица коэффициентов диффузии соответственно.

Распространяя метод ГА на системы с постоянным запаздыванием, на N-м шаге для первых моментов вектора $\boldsymbol{Z}_N(s)$ получим следующие системы ОДУ:

$$\dot{\boldsymbol{m}}_N(s) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n(N+1)}} \boldsymbol{a}_N(\boldsymbol{z}_N, s_N)\, \mathcal{N}\big(\boldsymbol{z}_N; \boldsymbol{m}_N(s), \boldsymbol{\mathcal{K}}_N(s)\big)\, d\boldsymbol{z}_N,$$

$$\dot{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_N(s) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n(N+1)}} \Big\{ \big[\boldsymbol{z}_N - \boldsymbol{m}_N(s)\big]\, \boldsymbol{a}_N^{\intercal}(\boldsymbol{z}_N, s_N) + \boldsymbol{a}(\boldsymbol{z}_N, s_N)\, \big[\boldsymbol{z}_N - \boldsymbol{m}_N(s)\big]^{\intercal} + \\ + \boldsymbol{\mathcal{B}}_N(\boldsymbol{z}_N, s_N) \Big\}\, \mathcal{N}\big(\boldsymbol{z}_N; \boldsymbol{m}_N(s), \boldsymbol{\mathcal{K}}_N(s)\big)\, d\boldsymbol{z}_N.$$

Начальные условия для этих систем имеют следующий вид:

$$\boldsymbol{m}_N(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}^0 \\ \boldsymbol{m}^0 \\ \boldsymbol{m}_0(\tau) \\ \dots \\ \boldsymbol{m}_{N-1}(\tau) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_N(0) =$$

$$= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{K}}^0 & \boldsymbol{\mathcal{K}}^0 & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_0}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_1}(\tau) & \dots & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_{N-1}}(\tau) \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}^0 & \boldsymbol{\mathcal{K}}^0 & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_0}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_1}(\tau) & \dots & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_{N-1}}(\tau) \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0Y}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0Y}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0X_0}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0X_1}(\tau) & \dots & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0X_{N-1}}(\tau) \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_1Y}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_1Y}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_1X_0}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_1X_1}(\tau) & \dots & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_1X_{N-1}}(\tau) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{N-1}Y}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{N-1}Y}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{N-1}X_0}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{N-1}X_1}(\tau) & \dots & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{N-1}X_{N-1}}(\tau) \end{bmatrix}.$$

Линейные системы

Наряду с СОДРУ (2.2.16) определим ее частный случай – систему линейных стохастических обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием следующего вида:

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{\mathcal{H}}(t)\,\boldsymbol{X}(t-\tau) + \boldsymbol{c}(t) + \boldsymbol{\mathcal{G}}(t)\,\boldsymbol{V}(t), \\ t_0 + \tau = t_1 < t \leqslant T < +\infty. \quad (2.2.25)$$

Как и выше, $\boldsymbol{X}(t) = \{X_\ell(t)\} \in \mathbb{R}^n$ – векторный случайный процесс, представляющий состояние системы; $\boldsymbol{V}(t) = \{V_\ell(t)\} \in \mathbb{R}^m$ – вектор независимых белых шумов с единичными интенсивностями; τ – постоянное запаздывание. Будем считать, что на отрезке $(t_0, t_1]$ вектор состояния $\boldsymbol{X}(t)$ удовлетворяет системе СОДУ без запаздывания

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_0(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{c}_0(t) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(t)\,\boldsymbol{V}(t), \qquad \boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}^0. \quad (2.2.26)$$

В уравнениях (2.2.25) и (2.2.26) $\boldsymbol{\mathcal{Q}}(t)$, $\boldsymbol{\mathcal{Q}}_0(t)$, $\boldsymbol{\mathcal{H}}(t) : [t_0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\mathcal{G}}(t)$, $\boldsymbol{\mathcal{G}}_0(t) : [t_0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ и $\boldsymbol{c}(t)$, $\boldsymbol{c}_0(t) : [t_0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}^n$ – известные непрерывные матричные и векторные функции переменной t. Пусть при $t = t_0$ задана плотность вероятности $p^0(\boldsymbol{x})$ распределения вектора $\boldsymbol{X}^0$.

Как и выше, для исследования системы (2.2.25),(2.2.26) применимо расширение пространства состояний. При этом, если начальное распределение является нормальным гауссовым, то при любом $t \in (t_0, T]$ распределения расширенных векторов состояния будут иметь тот же тип, а для их полного описания достаточно вычислить векторы функций математических ожиданий и матрицы функций ковариации для $t \in (t_0, T]$. Если же начальное распределение не является нормальным гауссовым, то при значениях t, близких к t_0, распределения расширенных векторов состояния не будут еще нормализованными, но в рамках корреляционной теории мы можем ограничиться вычислением первых моментных функций, т.е. расчетом векторов функций математических ожиданий и матриц функций ковариации для $t \in (t_0, T]$.

0°. Рассмотрим полуинтервал Δ_0. Определённый на Δ_0 случайный векторный процесс $\boldsymbol{Z}_0^+(s)$ удовлетворяет следующей системе СОДУ:

$$\dot{\boldsymbol{Y}}(s) = \boldsymbol{O}_n,$$
$$\dot{\boldsymbol{X}}_0(s) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_0(s_0)\,\boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{c}_0(s_0) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s_0)\,\boldsymbol{V}_0(s),$$
$$\boldsymbol{Y}(0) = \boldsymbol{X}^0, \quad \boldsymbol{X}_0(0) = \boldsymbol{X}^0.$$

1°. Теперь обратимся к сегментам Δ_0 и Δ_1. Систему СОДУ для вычисления вектора $\boldsymbol{Z}_1(s)$ можно представить в следующем виде:

$$\dot{\boldsymbol{Y}}(s) = \boldsymbol{O}_n,$$
$$\dot{\boldsymbol{X}}_0(s) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_0(s_0)\,\boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{c}_0(s_0) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s_0)\,\boldsymbol{V}_0(s),$$
$$\dot{\boldsymbol{X}}_1(t) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_1)\,\boldsymbol{X}_1(s) + \boldsymbol{\mathcal{H}}(s_1)\,\boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{c}(s_1) + \boldsymbol{\mathcal{G}}(s_1)\,\boldsymbol{V}_1(s),$$
$$\boldsymbol{Y}(0) = \boldsymbol{X}^0, \quad \boldsymbol{X}_0(0) = \boldsymbol{X}^0, \quad \boldsymbol{X}_1(0) = \boldsymbol{X}_0(\tau).$$

... ...

N°. Рассмотрим временны́е полуинтервалы Δ_0, Δ_1, ..., Δ_N. Построим систему СОДУ для вектора $\boldsymbol{Z}_N(s)$ в виде:

$$\dot{\boldsymbol{Y}}(s) = \boldsymbol{O}_n,$$
$$\dot{\boldsymbol{X}}_0(s) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_0(s_0)\,\boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{c}_0(s_0) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s_0)\,\boldsymbol{V}_0(s),$$
$$\dot{\boldsymbol{X}}_1(t) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_1)\,\boldsymbol{X}_1(s) + \boldsymbol{\mathcal{H}}(s_1)\,\boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{c}(s_1) + \boldsymbol{\mathcal{G}}(s_1)\,\boldsymbol{V}_1(s),$$
... ...
$$\dot{\boldsymbol{X}}_N(t) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_N)\,\boldsymbol{X}_N(s) + \boldsymbol{\mathcal{H}}(s_N)\,\boldsymbol{X}_{N-1}(s) + \boldsymbol{c}(s_N) + \boldsymbol{\mathcal{G}}(s_N)\,\boldsymbol{V}_N(s),$$
$$\boldsymbol{Y}(0) = \boldsymbol{X}^0, \quad \boldsymbol{X}_0(0) = \boldsymbol{X}^0, \quad \boldsymbol{X}_1(0) = \boldsymbol{X}_0(\tau), \quad ..., \quad \boldsymbol{X}_N(0) = \boldsymbol{X}_{N-1}(\tau).$$

Для определения расширенных векторов функций математических ожиданий и матриц функций ковариации введем следующие обозначения:

$$\boldsymbol{m}_{Z_k}(s) = \mathbb{E}[\boldsymbol{Z}_k(s)] = \operatorname{col}\left(\mathbb{E}[\boldsymbol{Y}(s)], \mathbb{E}[\boldsymbol{X}_0(s)], \mathbb{E}[\boldsymbol{X}_1(s)], ..., \mathbb{E}[\boldsymbol{X}_k(s)]\right) =$$
$$= \operatorname{col}\left(\boldsymbol{m}_Y(s), \boldsymbol{m}_{X_0}(s), \boldsymbol{m}_{X_1}(s), ..., \boldsymbol{m}_{X_k}(s)\right),$$
$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_kZ_k}(s) = \mathbb{E}\left[\left\{\boldsymbol{Z}_k(s) - \boldsymbol{m}_{Z_k}(s)\right\}\left\{\boldsymbol{Z}_k(s) - \boldsymbol{m}_{Z_k}(s)\right\}^{\intercal}\right] =$$
$$= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YY}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_0}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_1(s)} & ... & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_k}(s) \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0Y}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0X_0}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0X_1}(s) & ... & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0X_k}(s) \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_1Y}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_1X_0}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_1X_1}(s) & ... & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_1X_k}(s) \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_kY}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_kX_0}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_kX_1}(s) & ... & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_kX_k}(s) \end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{\mathcal{Q}}_k^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & ... & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{Q}}_0(s_0) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & ... & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{H}}(s_1) & \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_1) & ... & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & ... & \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_{k-1}) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & ... & \boldsymbol{\mathcal{H}}(s_k) & \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_k) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{c}_k^+(s) = \operatorname{col}\left(\boldsymbol{O}_n, \boldsymbol{c}_0(s_0), \boldsymbol{c}(s_1), ..., \boldsymbol{c}(s_k)\right),$$
$$\boldsymbol{\mathcal{G}}_k^+(s) = \operatorname{diag}\left(\boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m}, \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s_0), \boldsymbol{\mathcal{G}}(s_1), ..., \boldsymbol{\mathcal{G}}(s_k)\right),$$

где $k = 0, 1, 2, ..., N$.

В связи с тем, что вектор $\boldsymbol{m}_X(t - t_k) = \boldsymbol{m}_{X_k}(s)$ и матрица $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}(t - t_k) = \boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_kZ_k}(s)$ $(t \in \Delta_k)$являются блоками расширенных вектора $\boldsymbol{m}_{Z_k}(s)$ и матрицы $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_kZ_k}(s)$ соответственно, то необходимо вычислить последние, а затем выбрать их требуемые элементы. Определим следующую пошаговую процедуру.

Шаг 0. Числовые характеристики вектора $\boldsymbol{Z}_0(s)$ удовлетворяют системам ОДУ вида:

$$\dot{\boldsymbol{m}}_{Z_0}(s) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_0^+(s)\,\boldsymbol{m}_0(s) + \boldsymbol{c}_0^+(s),$$
$$\dot{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_{Z_0Z_0}(s) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_0^+(s)\,\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_0Z_0}(s) + \left[\boldsymbol{\mathcal{Q}}_0^+(s)\,\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_0Z_0}(s)\right]^{\mathsf{T}} + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0^+(s)\,\boldsymbol{\mathcal{G}}_0^{+\mathsf{T}}(s)$$

с начальными условиями

$$\boldsymbol{m}_{Z_0}(0) = \begin{bmatrix}\boldsymbol{m}_X^0\\ \boldsymbol{m}_X^0\end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_0Z_0}(0) = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0\\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0\end{bmatrix}.$$

Шаг 1. Вектор функций математических ожиданий и матрица функций ковариаций вектора $\boldsymbol{Z}_1(s)$ являются решениями объединенной системы ОДУ:

$$\dot{\boldsymbol{m}}_{Z_1}(s) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_1^+(s)\,\boldsymbol{m}_1(s) + \boldsymbol{c}_1(s),$$
$$\dot{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_{Z_1Z_1}(s) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_1^+(s)\,\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_1Z_1}(s) + \left[\boldsymbol{\mathcal{Q}}_1^+(s)\,\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_1Z_1}(s)\right]^{\mathsf{T}} + \boldsymbol{\mathcal{G}}_1^+(s)\,\boldsymbol{\mathcal{G}}_1^{+\mathsf{T}}(s)$$

с начальными условиями

$$\boldsymbol{m}_{Z_1}^+(0) = \begin{bmatrix}\boldsymbol{m}_X^0\\ \boldsymbol{m}_X^0\\ \boldsymbol{m}_{X_0}(\tau)\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_1Z_1}(0) = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_0}(\tau)\\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_0}(\tau)\\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0Y}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0Y}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0X_0}(\tau)\end{bmatrix}.$$

… … … … … … … … …

Шаг N. Вектор функций математических ожиданий и матрица функций ковариаций вектора $\boldsymbol{Z}_N(s)$ являются решениями систем ОДУ:

$$\dot{\boldsymbol{m}}_N(s) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_N^+(s)\,\boldsymbol{m}_N(s) + \boldsymbol{c}_N(s),$$

$$\dot{\mathcal{K}}_{Z_N Z_N}(s) = \mathcal{Q}_N^+(s)\,\mathcal{K}_{Z_N Z_N}(s) + \left[\mathcal{Q}_N^+(s)\,\mathcal{K}_{Z_N Z_N}(s)\right]^{\mathsf{T}} + \mathcal{G}_N^+(s)\,\mathcal{G}_N^{+\mathsf{T}}(s)$$

с начальными условиями

$$\boldsymbol{m}_{Z_N}(0) = \operatorname{col}\left(\boldsymbol{m}_X^0, \boldsymbol{m}_X^0, \boldsymbol{m}_{X_0}(\tau), ..., \boldsymbol{m}_{X_{N-1}}(\tau)\right),$$

$$\mathcal{K}_{Z_N Z_N}(0) =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathcal{K}_{XX}^0 & \mathcal{K}_{XX}^0 & \mathcal{K}_{YX_0}(\tau) & ... & \mathcal{K}_{YX_{N-1}}(\tau) \\ \mathcal{K}_{XX}^0 & \mathcal{K}_{XX}^0 & \mathcal{K}_{YX_0}(\tau) & ... & \mathcal{K}_{YX_{N-1}}(\tau) \\ \mathcal{K}_{X_0Y}(\tau) & \mathcal{K}_{X_0Y}(\tau) & \mathcal{K}_{X_0X_0}(\tau) & ... & \mathcal{K}_{X_0X_{N-1}}(\tau) \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ \mathcal{K}_{X_{N-1}Y}(\tau) & \mathcal{K}_{X_{N-1}Y}(\tau) & \mathcal{K}_{X_{N-1}X_0}(\tau) & ... & \mathcal{K}_{X_{N-1}X_{N-1}}(\tau) \end{bmatrix}.$$

Пример 2.2.1. Исследуем простейшую линейную систему вида:

$$\dot{X}(t) + k_0\,X(t) = g_0\,V(t), \qquad t \in (-\tau_0, 0],$$

$$\dot{X}(t) + k_1\,X(t) + k_2\,X(t-\tau) = g\,V(t), \qquad t > 0.$$

Здесь $dW(t) = V(t)\,dt$; $V(t)$ – гауссовский белый шум с интенсивностью, равной $1/2\pi$; k_0, k_1, k_2, g_0, g – постоянные.

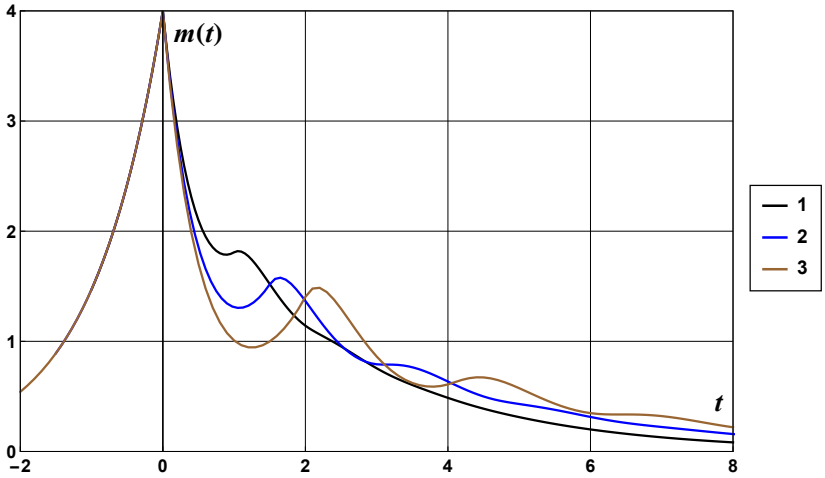


Рис. 2.2.2

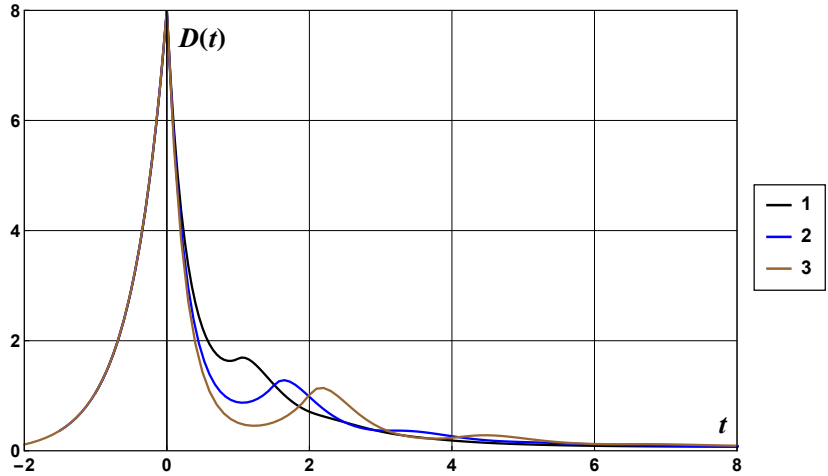


Рис. 2.2.3

Используя процедуру для линейных систем, при некоторых параметрах задачи были рассчитаны значения функций математического ожидания $m_X(t)$ и дисперсии $\mathcal{D}_X(t)$ смещения $X(t)$ и построены графики изменения функций математических ожиданий (рис. 2.2.2) и дисперсии (рис. 2.2.3). Неизменяемыми параметрами расчетов были: $k_0 = -1.0$; $g_0 = 0.25$; $k_1 = 2.0$; $k_2 = -1.0$; $g = 0.25$. Варьировавшаяся величина запаздывания при вычислениях принимала следующие значения: 1) $\tau = 1.0$ (соответствующие графики изображены черным цветом); 2) $\tau = 1.0$ (синий цвет); 3) $\tau = 2.0$ (коричневый цвет). Начальные значения m_X^0 и $\mathcal{D}_X^0$ выбирались так, чтобы в момент времени $t = 0{,}0$ для всех вариантов выполнялись равенства $m_X(0) = 4.0$ и $\mathcal{D}_X(0) = 8.0$.

Анализ результатов этих расчетов показывает: 1) наличие колебательных переходных режимов у функций математического ожидания и дисперсии; 2) существенную зависимость переходных процессов от величины запаздывания; 3) существенное отличие рассчитанных переходных режимов от процессов в соответствующих линейных системах без запаздывания. ▶

Пример 2.2.2. В качестве второго примера рассмотрим случайный переходный режим, возникающий в системе, описываемой СОДУсЗ вида:

$$\ddot{X}(t) + 2\,\alpha\,\dot{X}(t) + \omega^2\,X(t) = \gamma_1\,X(t-\tau) + \gamma_2\,\dot{X}(t-\tau) + g\,V(t),$$

где $\alpha > 0$, $\omega > 0$, γ_1, γ_2, g – некоторые постоянные. Предположим, что на промежутке $t < 0$ движение происходит согласно СОДУ

$$\ddot{X}(t) + 2\,\alpha_0\,\dot{X}(t) + \omega_0^2\,X(t) = g_0\,V(t).$$

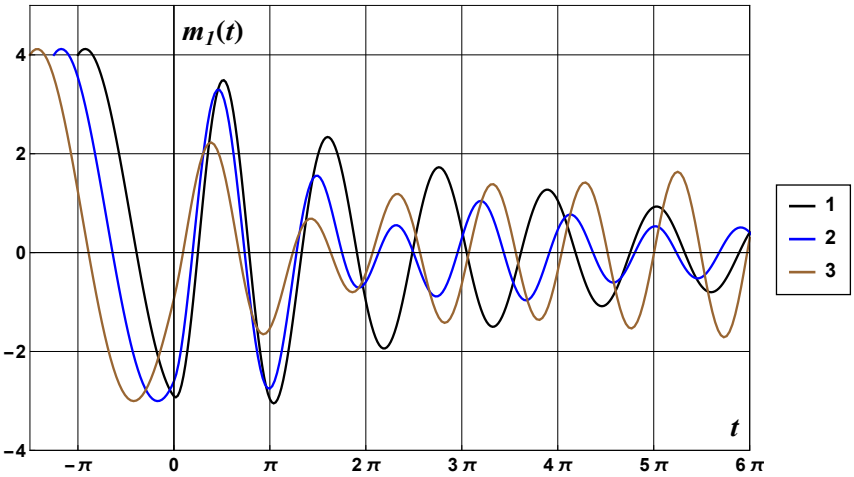


Рис. 2.2.4

Сравнивая с формой уравнений (2.2.25), (2.2.26), можно установить, что в этом случае

$$\mathcal{Q}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\,\alpha \end{bmatrix}, \quad \mathcal{H}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{G}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{Q}_0(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\,\alpha_0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c}_0(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{G}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ g_0 \end{bmatrix}.$$

Естественно, что для расчетов использовалась та же процедура, что и в предыдущем примере. При этом варьировалось запаздывание, значения которого были выбраны так: 1) $\tau = \pi$; 2) $\tau = 1.25\,\pi$; 3) $\tau = 1.5\,\pi$. Для всех трех случаев остальные коэффициенты уравнений задавались следующим образом:

$$\alpha = 0.1; \quad \omega = 2.0; \quad \gamma_1 = 0.5; \gamma_2 = -0.25; \quad g = 0.1;$$
$$\alpha_0 = 0.1; \quad \omega_0 = 1.0; \quad g_0 = 0.125.$$

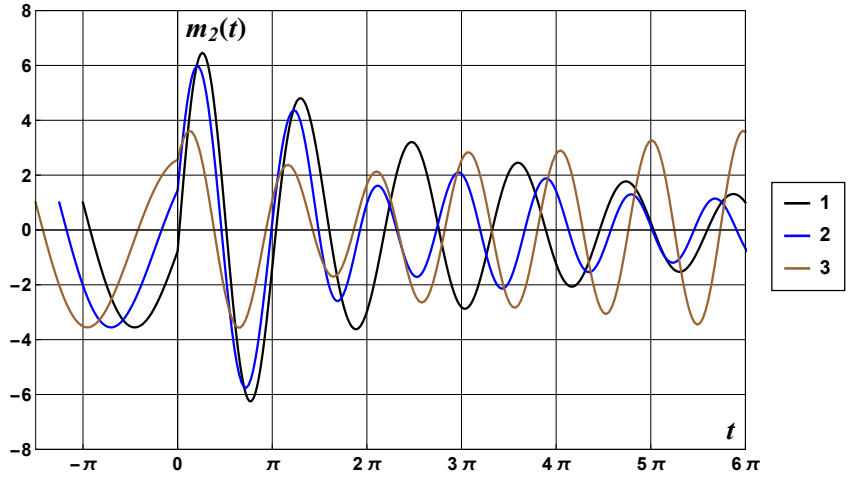


Рис. 2.2.5

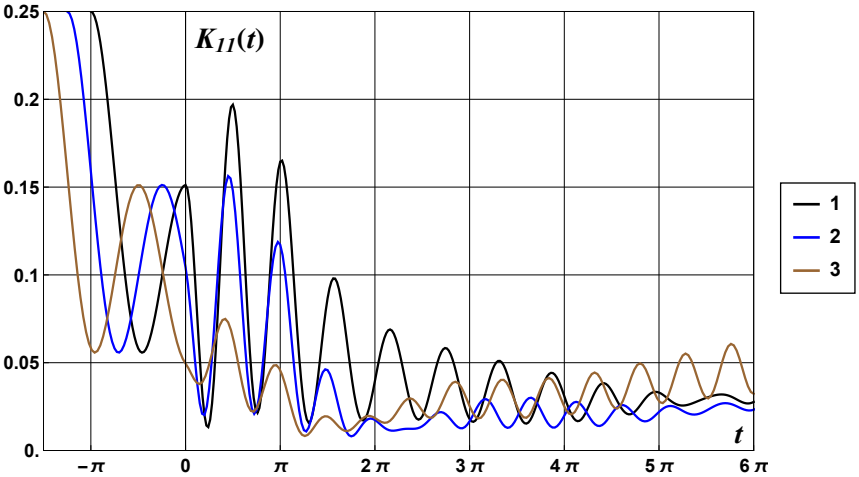


Рис. 2.2.6

Начальные же значения $\boldsymbol{m}^0$ и $\boldsymbol{\mathcal{K}}^0$ были заданы так:

$$\boldsymbol{m}_X^0 = \begin{bmatrix} 4.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 = \begin{bmatrix} 0.2500 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0625 \end{bmatrix}.$$

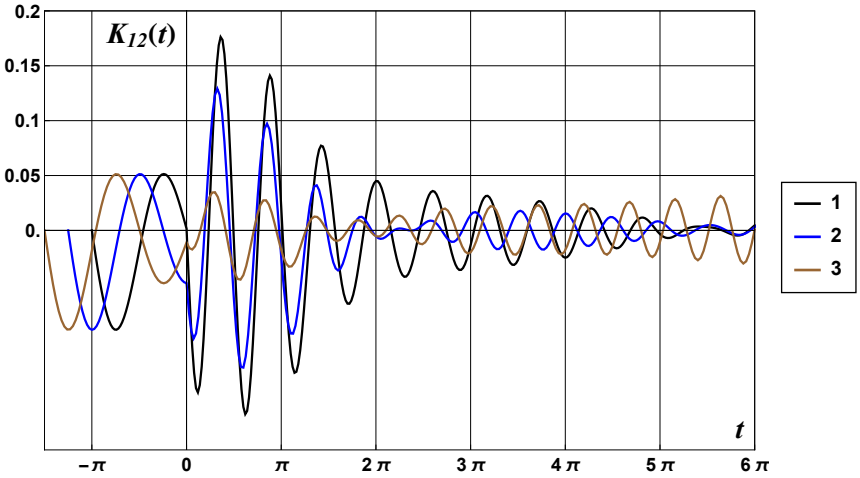


Рис. 2.2.7

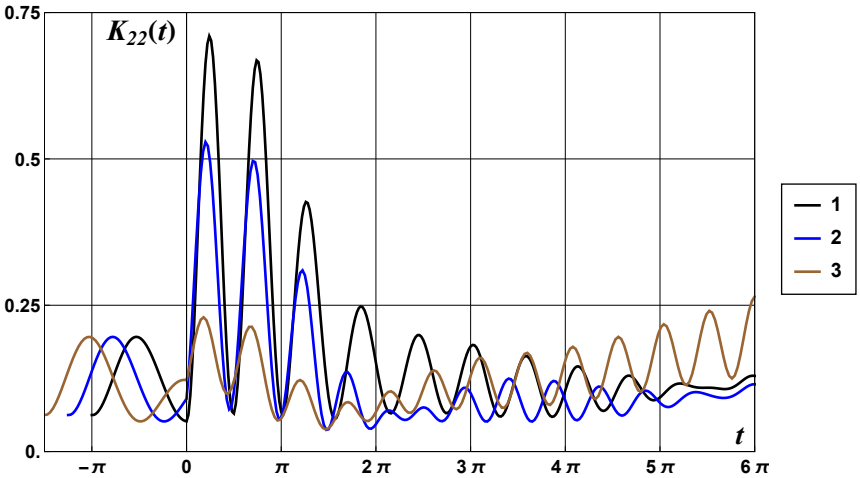


Рис. 2.2.8

Рассчитанные для трех случаев приближенные характеристики представлены на рис. 2.2.4–2.2.8, где изображено поведение элементов вектора функций математических ожиданий $m_{X1}(t) = m_1(t)$, $m_{X2}(t) = m_2(t)$ и матрицы функций ковариации $\mathcal{K}_{X_1X_1}(t) = \mathcal{K}_{11}(t)$, $\mathcal{K}_{X_1X2}(t) = \mathcal{K}_{12}(t)$,

$\mathcal{K}_{X_2X_2}(t) = \mathcal{K}_{22}(t)$. При этом для различения графиков набор цветов кривых совпадает с подборкой цветов и их порядком в предыдущем примере.

Как показали расчеты, изменение запаздывания существенно влияет на поведение полученных моментных характеристик, а вследствие гауссовости векторного случайного процесса $\boldsymbol{X}(t)$, и на поведение его плотностей распределения различных порядков. ►

Расчеты и визуализация результатов производились с помощью программы на входном языке системы аналитических вычислений `Mathematica`. При этом автоматически строились (в символьном виде) соответствующие системы ОДУ для векторов функций математического ожидания и матриц функций дисперсий, формировались начальные условия, осуществлялось численное интегрирование методом Рунге–Кутты построенных систем ОДУ, а затем строились графики.

2.2.2.2. Системы СОДУ с кратными постоянными запаздываниями

Рассматривается система стохастических дифференциально-разностных уравнений (в смысле Стратоновича) следующего вида [197, 202]:

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{f}_\nu\big(\boldsymbol{X}(t), \boldsymbol{X}(t-\tau), \boldsymbol{X}(t-2\tau), ..., \boldsymbol{X}(t-\nu\,\tau), t\big)\,dt + \\ + \boldsymbol{\mathcal{G}}_\nu\big(\boldsymbol{X}(t), \boldsymbol{X}(t-\tau), \boldsymbol{X}(t-2\tau), ..., \boldsymbol{X}(t-\nu\,\tau), t\big) \circ d\boldsymbol{W}(t), \\ t_\nu = t_0 + \nu\,\tau < t \leqslant T < +\infty. \quad (2.2.27) \end{aligned}$$

Здесь τ – постоянное запаздывание, $\nu > 0$ – целое, $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $\boldsymbol{W} \in \mathbb{R}^m$ – вектор независимых стандартных винеровских процессов.

Предположим, что на полуинтервалах $(t_0, t_1]$, $(t_1, t_2]$, ..., $(t_{\nu-1}, t_\nu]$ вектор состояния $\boldsymbol{X}(t)$, характеризуемый одноточечной плотностью вероятности $p_X(\boldsymbol{x}, t)$, удовлетворяет следующим системам СОДУ И СОДРУ:

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{X}(t) &= \boldsymbol{f}_0\big(\boldsymbol{X}(t), t\big)\,dt + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0\big(\boldsymbol{X}(t), t\big) \circ d\boldsymbol{W}(t), \\ d\boldsymbol{X}(t) &= \boldsymbol{f}_1\big(\boldsymbol{X}(t), \boldsymbol{X}(t-\tau), t\big)\,dt + \boldsymbol{\mathcal{G}}_1\big(\boldsymbol{X}(t), \boldsymbol{X}(t-\tau), t\big) \circ d\boldsymbol{W}(t), \\ &\ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots \quad (2.2.28) \\ d\boldsymbol{X}(t) &= \boldsymbol{f}_{\nu-1}\big(\boldsymbol{X}(t), \boldsymbol{X}(t-\tau), \boldsymbol{X}(t-2\tau), ..., \boldsymbol{X}(t-(\nu-1)\,\tau), t\big)\,dt + \\ &+ \boldsymbol{\mathcal{G}}_{\nu-1}\big(\boldsymbol{X}(t), \boldsymbol{X}(t-\tau), \boldsymbol{X}(t-2\tau), ..., \boldsymbol{X}(t-(\nu-1)\,\tau), t\big) \circ d\boldsymbol{W}(t), \\ \boldsymbol{f}_r &= \{f_{ri}\}^\intercal, \qquad \boldsymbol{\mathcal{G}}_r = \{g_{rij}\}, \qquad r = 0, 1, 2, ..., \nu-1. \end{aligned}$$

В уравнениях (2.2.27) и (2.2.28) $\boldsymbol{f}_\nu(\cdot,...,\cdot)=\{f_{\nu i}(\cdot,...,\cdot)\}^\intercal:\mathbb{R}^n\times...\times\mathbb{R}^n\times[t_0,\infty)\mapsto\mathbb{R}^n$ и $\boldsymbol{\mathcal{G}}(\cdot,...,\cdot)=\{g_{ij}(\cdot,...,\cdot)\}:\mathbb{R}^n\times...\times\mathbb{R}^n\times[t_0,\infty)\mapsto\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ – дифференцируемые детерминированные векторная и матричная функции своих аргументов.

Пусть при $t=t_0$ плотность вероятности $p_X(\boldsymbol{x},t_0)$ вектора $\boldsymbol{X}(t_0)=\boldsymbol{X}^0$ равна $p^{\,0}(\boldsymbol{x})$.

Для систем уравнений (2.2.27)–(2.2.28) определим их специальные случаи как линейные системы:

$$\begin{gathered}\dot{\boldsymbol{X}}(t)=\boldsymbol{\mathcal{Q}}_{00}(t)\,\boldsymbol{X}(t)+\boldsymbol{c}_0(t)+\boldsymbol{\mathcal{G}}_0(t)\,\boldsymbol{V}(t),\quad t\in(t_0,t_1],\\ \dot{\boldsymbol{X}}(t)=\boldsymbol{\mathcal{Q}}_{10}(t)\,\boldsymbol{X}(t-\tau)+\boldsymbol{\mathcal{Q}}_{11}(t)\,\boldsymbol{X}(t)+\boldsymbol{c}_1(t)+\boldsymbol{\mathcal{G}}_1(t)\,\boldsymbol{V}(t),\quad t\in(t_1,t_2],\\ \dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\\ \dot{\boldsymbol{X}}(t)=\sum_{\ell=0}^{\nu}\boldsymbol{\mathcal{Q}}_{\nu\ell}(t)\,\boldsymbol{X}(t-(\nu-\ell)\,\tau)+\boldsymbol{c}_1(\nu)+\boldsymbol{\mathcal{G}}_\nu(t)\,\boldsymbol{V}(t),\quad t\in(t_\nu,t_{\nu+1}],\end{gathered}\tag{2.2.29}$$

где $\boldsymbol{\mathcal{Q}}_{r\ell}(t)$, $\boldsymbol{\mathcal{G}}_r(t)$ и $\boldsymbol{c}_r(t)$ $(r=0,1,2,...,\nu,\ \ell=0,1,2,...,r)$ – заданные непрерывные матричные и векторные функции. Как и выше, $\boldsymbol{X}(t)=\{X_\ell(t)\}\in\mathbb{R}^n$ – векторный случайный процесс, представляющий состояние системы; $\boldsymbol{V}(t)=\{V_\ell(t)\}\in\mathbb{R}^m$ – вектор независимых белых шумов с единичными интенсивностями; τ – постоянное запаздывание.

Путь, представленный в данном пункте, распространяет методологию МШРПС (см. предыдущий пункт) на новый класс задач [197, 202]. Для того, чтобы изучить случайное изменение вектора $\boldsymbol{X}(t)$ при значениях времени $t>t_0$ посредством преобразования немарковского векторного процесса в марковский, как и выше, мы расширяем пространство состояния системы.

Воспользуемся обозначениями (2.2.18) и рассмотрим последовательность полуотрезков Δ_q.

0°. Начнем с Δ_0. Определенный на нем случайный вектор состояния $\operatorname{col}\big(\boldsymbol{Y}(s),\boldsymbol{X}_0(s)\big)$ удовлетворяет соответствующей системе СОДУ (точкой здесь и далее обозначена производная по переменной s):

$$\begin{aligned}&d\boldsymbol{Y}(s)=0,\\ &d\boldsymbol{X}_0(s)=\boldsymbol{f}_0\big(\boldsymbol{X}_0(s),s_0\big)\,ds+\boldsymbol{\mathcal{G}}_0\big(\boldsymbol{X}_0(s),s_0\big)\circ d\boldsymbol{W}_0(s)\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}&\dot{\boldsymbol{Y}}(s)=0,\\ &\dot{\boldsymbol{X}}_0(s)=\boldsymbol{\mathcal{Q}}_{00}(s_0)\,\boldsymbol{X}_0(s)+\boldsymbol{c}_0(s_0)+\boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s_0)\,\boldsymbol{V}_0(s).\end{aligned}$$

ФПК-уравнение для плотности распределения вектора $\boldsymbol{Z}_0(s)$ будет иметь следующий вид:

$$\frac{\partial p_{Z_0}}{\partial s} = \mathbb{L}_0\big[p_{Z_0}\big], \tag{2.2.30}$$

где

$$\mathbb{L}_0\big[p_{Z_0}\big] = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2n}\frac{\partial^2\big(b^*_{0ij}\,p_{Z_0}\big)}{\partial z_{0i}\partial z_{0j}} - \sum_{i=1}^{2n}\frac{\partial\big(a^*_{0i}p_{Z_0}\big)}{\partial z_{0i}},$$

$$a^*_{0i} = f^*_{0i} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2n}\sum_{k=1}^{2m}\frac{\partial g^*_{0ik}}{\partial z_{0j}}g^*_{0jk}, \qquad b^*_{0ij} = \sum_{k=1}^{2m} g^*_{0ik}\,g^*_{0jk},$$

$$\boldsymbol{f}^*_0(\boldsymbol{z}_0,s) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{O}_n, \boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{x}_0,s_0)\big), \qquad \boldsymbol{\mathcal{G}}^*_0(\boldsymbol{z}_0,s) = \operatorname{diag}\big(\boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m}, \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(\boldsymbol{x}_0,s)\big).$$

1°. Проанализируем поведение системы на полуотрезках Δ_0 и Δ_1. СОДУ для вычисления вектора $\operatorname{col}\big(\boldsymbol{Y}(s), \boldsymbol{X}_0(s), \boldsymbol{X}_1(s)\big)$ можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&d\boldsymbol{Y}(s) = 0,\\
&d\boldsymbol{X}_0(s) = \boldsymbol{f}_0\big(\boldsymbol{X}_0(s), s_0\big)\,ds + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0\big(\boldsymbol{X}_0(s), s_0\big)\circ d\boldsymbol{W}_0(s),\\
&d\boldsymbol{X}_1(s) = \boldsymbol{f}_1\big(\boldsymbol{X}_1(s), \boldsymbol{X}_0(s), s_1\big)\,ds + \boldsymbol{\mathcal{G}}_1\big(\boldsymbol{X}_1(s), \boldsymbol{X}_0(s), s_1\big)\circ d\boldsymbol{W}_1(s)
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{Y}}(s) = 0,\\
&\dot{\boldsymbol{X}}_0(s) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{00}(s_0)\,\boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{c}_0(s_0) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s_0)\,\boldsymbol{V}_0(s),\\
&\dot{\boldsymbol{X}}_1(s) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{10}(s_1)\,\boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{11}(s_1)\,\boldsymbol{X}_1(s) + \boldsymbol{c}_1(s_1) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_1(s_1)\,\boldsymbol{V}_1(s).
\end{aligned}$$

В этом случае плотность распределения вектора $\boldsymbol{Z}_1(s)$ будет удовлетворять ФПК-уравнению вида

$$\frac{\partial p_{Z_1}}{\partial s} = \mathbb{L}_1\big[p_{Z_1}\big], \tag{2.2.31}$$

где

$$\mathbb{L}_1\big[p_{Z_1}\big] = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3n}\frac{\partial^2\big(b^*_{1ij}\,p_{Z_1}\big)}{\partial z_{1i}\partial z_{1j}} - \sum_{i=1}^{3n}\frac{\partial\big(a^*_{1i}p_{Z_1}\big)}{\partial z_{1i}},$$

$$a^*_{1i} = f^*_{1i} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3n}\sum_{k=1}^{3m}\frac{\partial g^*_{1ik}}{\partial z_{1j}}g^*_{1jk}, \qquad b^*_{1ij} = \sum_{k=1}^{3m} g^*_{1ik}\, g^*_{1jk},$$

$$\boldsymbol{f}^*_1(\boldsymbol{z}_1, s) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{O}_n, \boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{x}_0, s_0), \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_0, s_1)\big),$$

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}^*_1(\boldsymbol{z}_1, s) = \operatorname{diag}\big(\boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m}, \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(\boldsymbol{x}_0, s), \boldsymbol{\mathcal{G}}_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_0, s)\big).$$

... ...

ν°. Рассмотрим временны́е полуинтервалы Δ_0, Δ_1, ..., Δ_ν. Построим системы СОДУ для вектора $\boldsymbol{Z}_\nu$ в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&d\boldsymbol{Y}(s) = 0,\\
&d\boldsymbol{X}_0(s) = \boldsymbol{f}_0\big(\boldsymbol{X}_0(s), s_0\big)\,dt + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0\big(\boldsymbol{X}_0(s), s_0\big)\circ d\boldsymbol{W}_0(s),\\
&d\boldsymbol{X}_1(s) = \boldsymbol{f}_1\big(\boldsymbol{X}_1(s), \boldsymbol{X}_0(s), s_1\big)\,ds + \boldsymbol{\mathcal{G}}_1\big(\boldsymbol{X}_1(s), \boldsymbol{X}_0(s), s_1\big)\circ d\boldsymbol{W}_1(s),\\
&\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\\
&d\boldsymbol{X}_{\nu-1}(s) = \boldsymbol{f}_{\nu-1}\big(\boldsymbol{X}_{\nu-1}(s), \boldsymbol{X}_{\nu-2}(s), ..., \boldsymbol{X}_1(s), \boldsymbol{X}_0(s), s_{\nu-1}\big)\,ds+\\
&\qquad\qquad + \boldsymbol{\mathcal{G}}_{\nu-1}\big(\boldsymbol{X}_{\nu-1}(s), ..., \boldsymbol{X}_1(s), \boldsymbol{X}_0(s), s_{\nu-1}\big)\circ d\boldsymbol{W}_{\nu-1}(s),\\
&d\boldsymbol{X}_\nu(s) = \boldsymbol{f}_\nu\big(\boldsymbol{X}_\nu(s), \boldsymbol{X}_{\nu-1}(s), ..., \boldsymbol{X}_1(s), \boldsymbol{X}_0(s), s + t_\nu\big)\,ds+\\
&\qquad\qquad + \boldsymbol{\mathcal{G}}_\nu\big(\boldsymbol{X}_\nu(s), \boldsymbol{X}_{\nu-1}(s), ..., \boldsymbol{X}_1(s), \boldsymbol{X}_0(s), s_\nu\big)\circ d\boldsymbol{W}_\nu(s)
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{Y}}(s) = 0,\\
&\dot{\boldsymbol{X}}_0(s) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{00}(s_0)\,\boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{c}_0(s_0) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s_0)\,\boldsymbol{V}_0(s),\\
&\dot{\boldsymbol{X}}_1(s) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{10}(s_1)\,\boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{11}(s_1)\,\boldsymbol{X}_1(s) + \boldsymbol{c}_1(s_1) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_1(s_1)\,\boldsymbol{V}_1(s),\\
&\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\\
&\dot{\boldsymbol{X}}_{\nu-1}(s) = \sum_{\ell=0}^{\nu-1}\boldsymbol{\mathcal{Q}}_{\nu-1,\ell}(s_{\nu-1})\,\boldsymbol{X}_\ell(s) + \boldsymbol{c}_{\nu-1}(s_{\nu-1}) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_{\nu-1}(s_{\nu-1})\,\boldsymbol{V}_{\nu-1}(s),\\
&\dot{\boldsymbol{X}}_\nu(s) = \sum_{\ell=0}^{\nu}\boldsymbol{\mathcal{Q}}_{\nu\ell}(s_\nu)\,\boldsymbol{X}_\ell(s) + \boldsymbol{c}_\nu(s_\nu) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_\nu(s_\nu)\,\boldsymbol{V}_\nu(s).
\end{aligned}$$

Для плотности распределения случайного вектора $\boldsymbol{Z}_\nu(s)$ можно записать уравнение вида:

$$\frac{\partial p_{Z_\nu}}{\partial s} = \mathbb{L}_\nu\big[p_{Z_\nu}\big], \tag{2.2.32}$$

где

$$\mathbb{L}_\nu\big[p_{Z_\nu}\big] = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n(\nu+2)} \frac{\partial^2\big(b^*_{\nu ij}\, p_{Z_\nu}\big)}{\partial z_{\nu i}\partial z_{\nu j}} - \sum_{i=1}^{n(\nu+2)} \frac{\partial\big(a^*_{\nu i} p_{Z_\nu}\big)}{\partial z_{\nu i}},$$

а коэффициенты сноса и диффузии имеют следующую форму:

$$a^*_{\nu i} = f^*_{\nu i} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n(\nu+2)}\sum_{k=1}^{m(\nu+2)} \frac{\partial g^*_{\nu ik}}{\partial z_{\nu j}}\, g^*_{\nu jk}, \qquad b^*_{\nu ij} = \sum_{k=1}^{m(\nu+2)} g^*_{\nu ik}\, g^*_{\nu jk},$$

$$\boldsymbol{f}^*_\nu(\boldsymbol{z}_\nu, s) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{O}_n, \boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{x}_0, s_0), \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_0, s_1), ..., \boldsymbol{f}_\nu(\boldsymbol{x}_\nu, \boldsymbol{x}_{\nu-1}, ..., \boldsymbol{x}_0, s_\nu)\big),$$

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}^*_\nu(\boldsymbol{z}_\nu, s) = \operatorname{diag}\big(\boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m}, \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(\boldsymbol{x}_0, s), \boldsymbol{\mathcal{G}}_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_0, s), ..., \boldsymbol{\mathcal{G}}_\nu(\boldsymbol{x}_\nu, \boldsymbol{x}_{\nu-1}, ..., \boldsymbol{x}_0, s_\nu)\big).$$

... ...

N°. Рассмотрим временны́е полуинтервалы Δ_0, Δ_1, ..., Δ_N. Построим системы СОДУ для вектора $\boldsymbol{Z}_N(s)$:

$$\begin{aligned}
&d\boldsymbol{Y}(s) = 0,\\
&d\boldsymbol{X}_0(s) = \boldsymbol{f}_0\big(\boldsymbol{X}_0(s), s_0\big)\, dt + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0\big(\boldsymbol{X}_0(s), s_0\big) \circ d\boldsymbol{W}_0(s),\\
&d\boldsymbol{X}_1(s) = \boldsymbol{f}_1\big(\boldsymbol{X}_1(s), \boldsymbol{X}_0(s), s_1\big)\, ds + \boldsymbol{\mathcal{G}}_1\big(\boldsymbol{X}_1(s), \boldsymbol{X}_0(s), s_1\big) \circ d\boldsymbol{W}_1(s),\\
&\ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\\
&d\boldsymbol{X}_{\nu-1}(s) = \boldsymbol{f}_{\nu-1}\big(\boldsymbol{X}_{\nu-1}(s), ..., \boldsymbol{X}_1(s), \boldsymbol{X}_0(s), s_{\nu-1}\big)\, ds+\\
&\quad + \boldsymbol{\mathcal{G}}_{\nu-1}\big(\boldsymbol{X}_{\nu-1}(s), ..., \boldsymbol{X}_1(s), \boldsymbol{X}_0(s), s_{\nu-1}\big) \circ d\boldsymbol{W}_{\nu-1}(s),\\
&d\boldsymbol{X}_\nu(s) = \boldsymbol{f}_{\nu-1}\big(\boldsymbol{X}_\nu(s), \boldsymbol{X}_{\nu-1}(s), ..., \boldsymbol{X}_1(s), \boldsymbol{X}_0(s), s_\nu\big)\, ds+\\
&\quad + \boldsymbol{\mathcal{G}}_\nu\big(\boldsymbol{X}_\nu(s), \boldsymbol{X}_{\nu-1}(s), ..., \boldsymbol{X}_1(s), \boldsymbol{X}_0(s), s + t_\nu\big) \circ d\boldsymbol{W}_\nu(s),\\
&\ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\\
&d\boldsymbol{X}_{N-1}(s) =\\
&\quad = \boldsymbol{f}_\nu\big(\boldsymbol{X}_{N-1}(s), \boldsymbol{X}_{N-2}(s), ..., \boldsymbol{X}_{N-\nu-1}(s), s_{N-1}\big)\, ds+\\
&\quad + \boldsymbol{\mathcal{G}}_\nu\big(\boldsymbol{X}_{N-1}(s), \boldsymbol{X}_{N-2}(s), ..., \boldsymbol{X}_{N-\nu-1}(s), s_{N-1}\big) \circ d\boldsymbol{W}_{N-1}(s),\\
&d\boldsymbol{X}_N(s) = \boldsymbol{f}_\nu\big(\boldsymbol{X}_N(s), \boldsymbol{X}_{N-1}(s), ..., \boldsymbol{X}_{N-\nu}(s), s_N\big)\, ds+\\
&\quad + \boldsymbol{\mathcal{G}}_\nu\big(\boldsymbol{X}_N(s), \boldsymbol{X}_{N-1}(s), ..., \boldsymbol{X}_{N-\nu}(s), s_N\big) \circ d\boldsymbol{W}_N(s)
\end{aligned}$$

или

$$\dot{\boldsymbol{Y}}(s) = 0,$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}_0(s) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{00}(s_0)\,\boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{c}_0(s_0) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s_0)\,\boldsymbol{V}_0(s),$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}_1(s) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{10}(s_1)\,\boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{11}(s_1)\,\boldsymbol{X}_1(s) + \boldsymbol{c}_1(s_1) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_1(s_1)\,\boldsymbol{V}_1(s),$$

... ...

$$\dot{\boldsymbol{X}}_{\nu-1}(s) = \sum_{\ell=0}^{\nu-1} \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{\nu-1,\ell}(s_{\nu-1})\,\boldsymbol{X}_\ell(s) + \boldsymbol{c}_{\nu-1}(s_{\nu-1}) +$$

$$+ \boldsymbol{\mathcal{G}}_{\nu-1}(s_{\nu-1})\,\boldsymbol{V}_{\nu-1}(s),$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}_\nu(s) = \sum_{\ell=0}^{\nu} \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{\nu\ell}(s_\nu)\,\boldsymbol{X}_\ell(s) + \boldsymbol{c}_\nu(s_\nu) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_\nu(s_\nu)\,\boldsymbol{V}_\nu(s),$$

... ...

$$\dot{\boldsymbol{X}}_{N-1}(s) = \sum_{\ell=0}^{\nu} \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{\nu\ell}(s_{N-1})\,\boldsymbol{X}_{N-\nu+\ell-1}(s) + \boldsymbol{c}_\nu(s_{N-1}) +$$

$$+ \boldsymbol{\mathcal{G}}_\nu(s_{N-1})\,\boldsymbol{V}_{N-1}(s),$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}_N(s) = \sum_{\ell=0}^{\nu} \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{\nu\ell}(s_N)\,\boldsymbol{X}_{N-\nu+\ell}(s) + \boldsymbol{c}_\nu(s_N) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_\nu(s_N)\,\boldsymbol{V}_N(s).$$

Тогда плотность распределения случайного вектора $\boldsymbol{Z}_N(s)$ будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial p_{Z_N}}{\partial s} = \mathbb{L}_N\big[p_{Z_N}\big]. \tag{2.2.33}$$

В этом уравнении

$$\mathbb{L}_N\big[p_{Z_N}\big] = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n(N+2)} \frac{\partial^2\big(b^*_{Nij}\,p_{Z_N}\big)}{\partial z_{Ni}\partial z_{Nj}} - \sum_{i=1}^{n(N+2)} \frac{\partial\big(a^*_{Ni}p_{Z_N}\big)}{\partial z_{Ni}},$$

$$a^*_{Ni} = f^*_{Ni} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n(N+2)}\sum_{k=1}^{m(N+2)} \frac{\partial g^*_{Nik}}{\partial z_{Nj}}\,g^*_{Njk}, \qquad b^*_{Nij} = \sum_{k=1}^{m(N+2)} g^*_{Nik}\,g^*_{Njk},$$

$$\boldsymbol{f}^*_N(\boldsymbol{z}_N, s) =$$

$$= \operatorname{col}\big(\boldsymbol{O}_n, \boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{x}_0, s_0), \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_0, s_1), ..., \boldsymbol{f}_\nu(\boldsymbol{x}_N, \boldsymbol{x}_{N-1}, ..., \boldsymbol{x}_0, s_N)\big),$$

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}^*_N(\boldsymbol{z}_N, s) =$$

$$= \operatorname{diag}\big(\boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m}, \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(\boldsymbol{x}_0, s), \boldsymbol{\mathcal{G}}_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_0, s), ..., \boldsymbol{\mathcal{G}}_\nu(\boldsymbol{x}_N, \boldsymbol{x}_{N-1}, ..., \boldsymbol{x}_0, s_N)\big).$$

Но в случае линейных стохастических ОДУ нет необходимости в использовании ФПК-уравнений, так как имеется возможность построить уравнения для первых моментов векторных случайных процессов состояния $\boldsymbol{Z}_q(s)$ прямо из исходных СОДУ. Так, используя введенные обозначения, определим следующий алгоритм, являющийся стохастическим аналогом классического метода шагов и развивающий идеи предыдущего пункта.

Рассмотрим линейную систему (2.2.29) с гауссовой начальной плотностью

$$\bar{p}_X^0(\boldsymbol{x}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{m}_X^0, \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0) \equiv$$
$$\equiv \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^s \, |\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0|}} \exp\Big[-\frac{1}{2} \, (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m}_X^0)^{\intercal} \, (\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0)^{-1} \, (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m}_X^0) \Big].$$

Известно, что при таких условиях все плотности распределения векторов $\boldsymbol{Z}_0$, $\boldsymbol{Z}_1$, ..., $\boldsymbol{Z}_N$ при любом s будут нормальными гауссовыми и полностью определяться векторами функций математического ожидания

$$\boldsymbol{m}_{Z_k}(s) = \mathbb{E}[\boldsymbol{Z}_k] = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{m}_Y(s), \boldsymbol{m}_{X_0}(s), \boldsymbol{m}_{X_1}(s), ..., \boldsymbol{m}_{X_k}(s)\big)$$

и матрицами ковариаций ковариаций

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_k Z_k}(s) = \mathbb{E}\big[\big(\boldsymbol{Z}_k(s) - \boldsymbol{m}_k(s)\big)\big(\boldsymbol{Z}_k(s) - \boldsymbol{m}_k(s)\big)^{\intercal}\big] =$$
$$= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YY}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_0}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_1}(s) & ... & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_k}(s) \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0Y}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0X_0}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0X_1}(s) & ... & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0X_k}(s) \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_1Y}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_1X_0}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_1X_1}(s) & ... & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_1X_k}(s) \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_kY}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_kX_0}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_kX_1}(s) & ... & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_kX_k}(s) \end{bmatrix},$$

где $k = 0, 1, 2, ..., N$.

В связи с тем, что вектор $\boldsymbol{m}_{X_k}(s)$ и матрица $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_kX_k}(s)$ являются блоками вектора $\boldsymbol{m}_{Z_k}(s)$ и матрицы $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_kZ_k}(s)$ соответственно, достаточно вычислить только последние, а затем выбрать их необходимые элементы.

0°. Числовые характеристики вектора $\boldsymbol{Z}_0(s)$ удовлетворяют следующим системам обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{\boldsymbol{m}}_{Z_0}(s) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_0^+(s_0) \, \boldsymbol{m}_{Z_0}(s) + \boldsymbol{c}_0^+(s_0),$$
$$\dot{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_{Z_0Z_0}(s) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_0^+(s_0) \, \boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_0Z_0}(s) + \big[\boldsymbol{\mathcal{Q}}_0^+(s_0) \, \boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_0Z_0}(s)\big]^{\intercal} + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0^+(s_0) \, \boldsymbol{\mathcal{G}}_0^{+\intercal}(s_0),$$

$$\boldsymbol{m}_{Z_0}(0)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{m}_X^0\\ \boldsymbol{m}_X^0\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_0Z_0}(0)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0\\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0\end{bmatrix},$$

где

$$\boldsymbol{\mathcal{Q}}_0^+(s_0)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n}\\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{00}(s_0)\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{c}_0^+(s_0)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}_n\\ \boldsymbol{c}_0(s_0)\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}_0^+(s_0)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m}\\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s_0)\end{bmatrix}.$$

1°. Вектор средних и матрица дисперсий вектора $\boldsymbol{Z}_1(s)$ являются решениями систем ОДУ вида:

$$\dot{\boldsymbol{m}}_{Z_1}(s)=\boldsymbol{\mathcal{Q}}_1^+(s_1)\,\boldsymbol{m}_{Z_1}(s)+\boldsymbol{c}_1^+(s_1),$$

$$\dot{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_{Z_1Z_1}(s)=\boldsymbol{\mathcal{Q}}_1^+(s_1)\,\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_1Z_1}(s)+\left[\boldsymbol{\mathcal{Q}}_1^+(s_1)\,\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_1Z_1}(s)\right]^{\mathsf{T}}+\boldsymbol{\mathcal{G}}_{Z_1}^+(s_1)\,\boldsymbol{\mathcal{G}}_{Z_1}^{+\mathsf{T}}(s_1),$$

$$\boldsymbol{m}_{Z_1}(0)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{m}_X^0\\ \boldsymbol{m}_X^0\\ \boldsymbol{m}_{X_0}(\tau)\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_1Z_1}(0)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_0}(\tau)\\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_0}(\tau)\\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0Y}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0Y}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0X_0}(\tau)\end{bmatrix},$$

где

$$\boldsymbol{\mathcal{Q}}_1^+(s_1)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n}\\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{00}(s_0) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n}\\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{10}(s_1) & \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{11}(s_1)\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{c}_1^+(s_1)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}_n\\ \boldsymbol{c}_0(s_0)\\ \boldsymbol{c}_1(s_1)\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}_1^+(s_1)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m}\\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s_0) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m}\\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{G}}_1(s_1)\end{bmatrix},$$

... ...

ν°. Числовые характеристики вектора $\boldsymbol{Z}_\nu(s)$ найдем из следующих систем ОДУ:

$$\dot{\boldsymbol{m}}_{Z_\nu}(s)=\boldsymbol{\mathcal{Q}}_\nu^+(s_\nu)\,\boldsymbol{m}_{Z_\nu}(s)+\boldsymbol{c}_\nu^+(s_\nu),$$

$$\dot{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_{Z_\nu Z_\nu}(s)=\boldsymbol{\mathcal{Q}}_\nu^+(s_\nu)\,\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_\nu Z_\nu}(s)+\left[\boldsymbol{\mathcal{Q}}_\nu^+(s_\nu)\,\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_\nu Z_\nu}(s)\right]^{\mathsf{T}}+\boldsymbol{\mathcal{G}}_\nu^+(s_\nu)\,\boldsymbol{\mathcal{G}}_\nu^{+\mathsf{T}}(s_\nu),$$

$$\boldsymbol{m}_{Z_\nu}(0)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{m}_{Z_{\nu-1}}(0)\\ \boldsymbol{m}_{X_{\nu-1}}(\tau)\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_\nu Z_\nu}(0)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_{\nu-1}Z_{\nu-1}}(0) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{\nu 12}\\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{\nu 21} & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{\nu-1}X_{\nu-1}}(\tau)\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_{\nu 12} = \operatorname{col}\left(\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Y X_{\nu-1}}(\tau), \boldsymbol{\mathcal{K}}_{Y X_{\nu-1}}(\tau), \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0 X_{\nu-1}}(\tau), ..., \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{\nu-2} X_{\nu-1}}(\tau)\right),$$

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_{\nu 21} = \left[\boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{\nu-1} Y}(\tau) \;\; \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{\nu-1} Y}(\tau) \;\; \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{\nu-1} X_0}(\tau) \;\; ... \;\; \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{\nu-1} X_{\nu-2}}(\tau)\right],$$

где

$$\boldsymbol{\mathcal{Q}}^{+}_{\nu}(s_\nu) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{Q}}^{+}_{\nu-1}(s_{\nu-1}) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\nu\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{\nu 21} & \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{\nu\nu}(s_\nu) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c}^{+}_{\nu}(s_\nu) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}^{+}_{\nu-1}(s_{\nu-1}) \\ \boldsymbol{c}_{\nu}(s_\nu) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}^{+}_{\nu}(s_\nu) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{G}}^{+}_{\nu-1}(s_{\nu-1}) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\nu\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m\nu} & \boldsymbol{\mathcal{G}}_{\nu}(s_\nu) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{Q}}_{\nu 21} = \left[\boldsymbol{\mathcal{Q}}_{\nu 0}(s_\nu) \;\; \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{\nu 1}(s_\nu) \;\; ... \;\; \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{\nu,\nu-1}(s_\nu)\right].$$

$\boldsymbol{(\nu+1)^{\circ}}$. Числовые характеристики вектора $\boldsymbol{Z}_{\nu+1}(s)$ найдем из следующих систем ОДУ:

$$\dot{\boldsymbol{m}}_{Z_{\nu+1}}(s) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}^{+}_{\nu+1}(s_{\nu+1})\, \boldsymbol{m}_{\nu+1}(s) + \boldsymbol{c}^{+}_{\nu+1}(s_{\nu+1}),$$

$$\dot{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_{Z_{\nu+1} Z_{\nu+1}}(s) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}^{+}_{\nu+1}(s_{\nu+1})\, \boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_{\nu+1} Z_{\nu+1}}(s) + \left[\boldsymbol{\mathcal{Q}}^{+}_{\nu+1}(s_{\nu+1})\, \boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_{\nu+1} Z_{\nu+1}}(s)\right]^{\intercal} +$$

$$+ \boldsymbol{\mathcal{G}}^{+}_{\nu+1}(s_{\nu+1})\, \boldsymbol{\mathcal{G}}^{+\intercal}_{\nu+1}(s_{\nu+1}),$$

$$\boldsymbol{m}_{Z_{\nu+1}}(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_{\nu}(0) \\ \boldsymbol{m}_{X_\nu}(\tau) \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_{\nu+1} Z_{\nu+1}}(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_\nu Z_\nu}(0) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{\nu+1,12} \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{\nu+1,21} & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_\nu X_\nu}(\tau) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_{\nu+1,12} = \operatorname{col}\left(\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Y X_\nu}(\tau), \boldsymbol{\mathcal{K}}_{Y X_\nu}(\tau), \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0 X_\nu}(\tau), ..., \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{\nu-1} X_\nu}(\tau)\right),$$

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_{\nu+1,21} = \left[\boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_\nu Y}(\tau) \;\; \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_\nu Y}(\tau) \;\; \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_\nu X_0}(\tau) \;\; ... \;\; \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_\nu X_{\nu-1}}(\tau)\right],$$

где

$$\boldsymbol{\mathcal{Q}}^{+}_{\nu+1}(s_{\nu+1}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{Q}}^{+}_{\nu-1}(s_{\nu-1}) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n(\nu+1)\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{\nu+1,21} & \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{\nu\nu}(s_{\nu+1}) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c}^{+}_{\nu+1}(s_{\nu+1}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}^{+}_{\nu}(s_\nu) \\ \boldsymbol{c}_{\nu}(s_{\nu+1}) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}^{+}_{\nu+1}(s_{\nu+1}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{G}}^{+}_{\nu}(s_\nu) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n(\nu+1)\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m(\nu+1)} & \boldsymbol{\mathcal{G}}_{\nu}(s_{\nu+1}) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{Q}}_{\nu+1,21} = \left[\boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \;\; \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{\nu 0}(s_{\nu+1}) \;\; \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{\nu 1}(s_{\nu+1}) \;\; ... \;\; \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{\nu,\nu-1}(s_{\nu+1})\right].$$

... ...

$\mathbf{N}^{\circ}$. Числовые характеристики вектора $\boldsymbol{Z}_N(t)$ найдем из следующих систем ОДУ:

$$\dot{\boldsymbol{m}}_{Z_N}(s) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}^{+}_{N}(s_N)\, \boldsymbol{m}_{Z_N}(s) + \boldsymbol{c}^{+}_{N}(s_N),$$

$$\dot{\mathcal{K}}_{Z_N Z_N}(s) = \mathcal{Q}_N^+(s_N)\,\mathcal{K}_{Z_N Z_N}(s) + \bigl[\mathcal{Q}_N^+(s_N)\,\mathcal{K}_{Z_N Z_N}(s)\bigr]^{\mathsf{T}} + \mathcal{G}_N^+(s_N)\,\mathcal{G}_N^{+\mathsf{T}}(s_N),$$

$$\boldsymbol{m}_{Z_N}(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_{N-1}(0) \\ \boldsymbol{m}_{X_{N-1}}(\tau) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{K}_{Z_N Z_N}(0) = \begin{bmatrix} \mathcal{K}_{Z_{N-1} Z_{N-1}}(0) & \mathcal{K}_{N12} \\ \mathcal{K}_{N21} & \mathcal{K}_{X_{N-1} X_{N-1}}(\tau) \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{K}_{N12} = \operatorname{col}\bigl(\mathcal{K}_{Y X_{N-1}}(\tau), \mathcal{K}_{Y X_{N-1}}(\tau), \mathcal{K}_{X_0 X_{N-1}}(\tau), ..., \mathcal{K}_{X_{N-2} X_{N-1}}(\tau)\bigr),$$

$$\mathcal{K}_{N21} = \bigl[\mathcal{K}_{X_{N-1} Y}(\tau) \;\; \mathcal{K}_{X_{N-1} Y}(\tau) \;\; \mathcal{K}_{X_{N-1} X_0}(\tau) \;\; ... \;\; \mathcal{K}_{X_{N-1} X_{N-2}}(\tau)\bigr],$$

где

$$\mathcal{Q}_N^+(s_N) = \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_{N-1}^+(s_{N-1}) & \mathcal{O}_{nN\times n} \\ \mathcal{Q}_{N21} & \mathcal{Q}_{N-1,N-1}(s_N) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c}_N^+(s_N) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_{N-1}^+(s_{N-1}) \\ \boldsymbol{c}_\nu(s_N) \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{G}_N^+(s_N) = \begin{bmatrix} \mathcal{G}_{N-1}^+(s_{N-1}) & \mathcal{O}_{nN\times m} \\ \mathcal{O}_{n\times mN} & \mathcal{G}_\nu(s_N) \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{Q}_{N21} = \bigl[\mathcal{O}_{n\times n(n-\nu)} \;\; \mathcal{Q}_{\nu 0}(s_N) \;\; \mathcal{Q}_{\nu 1}(s_N) \;\; ... \;\; \mathcal{Q}_{\nu,\nu-1}(s_N)\bigr].$$

Теперь обратимся к нелинейному варианту и будем использовать аналог классического метода шагов, который основан на построенных ФПК-уравнениях.

0°. Плотность вероятности $p_{Z_0}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}, s)$ распределения расширенного вектора $\boldsymbol{Z}_0(s)$ удовлетворяет уравнению (2.2.30) с начальным условием

$$p_{Z_0}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}, 0) = p_{X_0}(\boldsymbol{x}_0, 0)\,\delta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}_0) = p^0(\boldsymbol{x}_0, 0)\,\delta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}_0).$$

Тогда для моментов $m_{Z_0\alpha}(s) = \mathbb{E}[Z_0^\alpha] = \mathbb{E}\bigl[Z_{01}^{\alpha_1}\, Z_{02}^{\alpha_2} \,...\, Z_{0,2n}^{\alpha_{2n}}\bigr]$ вектора $\boldsymbol{Z}_0(s)$ ($\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{2n}\}$, $\alpha_i \geqslant 0$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_{2n} \leqslant K$) различных порядков можно построить следующие ОДУ:

$$\dot{m}_{Z_0\alpha}(s) = \sum_{i=1}^{2n} \alpha_i\, \mathbb{E}\bigl[a_{0i}^*(\boldsymbol{Z}_0)\, Z_0^{\alpha - e_i}\bigr] + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n} \alpha_i\,(\alpha_i - 1)\, \mathbb{E}\bigl[b_{0ii}^*(\boldsymbol{Z}_0)\, Z_0^{\alpha - 2e_i}\bigr] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{2n-1} \sum_{j=i+1}^{2n} \alpha_i\,\alpha_j\, \mathbb{E}\Bigl[b_{0ij}^*(\boldsymbol{Z}_0)\, Z_0^{\alpha - e_i - e_j}\Bigr],$$

а начальные условия определяются соотношениями

$$m_{Z_0\alpha}(0) = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} z_0^\alpha\, p_{Z_0}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}, 0)\, d\boldsymbol{x}_0\, d\boldsymbol{y} =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} x_{01}^{\alpha_1 + \alpha_{n+1}} \,...\, x_{0n}^{\alpha_n + \alpha_{2n}}\, p^0(\boldsymbol{x}_0, 0)\, d\boldsymbol{x}_0.$$

При этом моменты $m_{X\beta}(t) = \mathbb{E}\big[X^{\beta}(t)\big]$ $(\beta = \{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n\})$ при $t \in \Delta_0$ будут равны $m_{Z_0\gamma}(t - t_0)$, где $\gamma = \{0, 0, ..., 0, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n\}$.

1°. Плотность $p_{Z_1}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}, 0)$ вектора состояния $\boldsymbol{Z}_1(s)$ является решением уравнения (2.2.31) с начальным условием

$$p_{Z_1}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}, 0) = p_{X_1X_0}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_0, 0)\,\delta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}_0) = p_{Z_0}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_0, \tau)\,\delta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}_0).$$

Отсюда для моментов $m_{Z_1\alpha}(s) = \mathbb{E}[Z_1^{\alpha}] = \mathbb{E}\big[Z_{11}^{\alpha_1}\, Z_{12}^{\alpha_2} \ldots z_{1,3n}^{\alpha_{3n}}\big]$ расширенного вектора состояния $\boldsymbol{Z}_1(s)$ $(\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{3n}\})$ получаем ОДУ и начальные условия следующего вида:

$$\dot{m}_{Z_1\alpha}(s) = \sum_{i=1}^{3n} \alpha_i\, \mathbb{E}\big[a_{1i}^{*}(\boldsymbol{Z}_1)\, Z_1^{\alpha - e_i}\big] + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3n} \alpha_i\,(\alpha_i - 1)\,\mathbb{E}\big[b_{1ii}^{*}(\boldsymbol{Z}_1)\, Z_1^{\alpha - 2e_i}\big] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{3n-1}\sum_{j=i+1}^{3n} \alpha_i\,\alpha_j\,\mathbb{E}\Big[b_{1ij}^{*}(\boldsymbol{Z}_1)\, Z_1^{\alpha - e_i - e_j}\Big],$$

$$m_{Z_1\alpha}(0) = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} z_1^{\alpha}\, p_{Z_1}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}, 0)\, d\boldsymbol{x}_1\, d\boldsymbol{x}_0\, d\boldsymbol{y} =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} x_{11}^{\alpha_1} \ldots x_{1n}^{\alpha_n}\, x_{01}^{\alpha_{n+1}+\alpha_{2n+1}}\, x_{0n}^{\alpha_{2n}+\alpha_{3n}}\, p_{X_1X_0}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_0, 0)\, d\boldsymbol{x}_1\, d\boldsymbol{x}_0.$$

Тогда при $t \in \Delta_1$ искомые моменты $m_{X\beta}(t)$ определяются как $m_{Z_1\gamma}(t - t_1)$, где $\gamma = \{0, 0, ..., 0, 0, 0, ..., 0, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n\}$.

… … … … … … … …

N°. Основная характеристика вектора $\boldsymbol{Z}_N(s)$ – плотность распределения $p_{Z_N}(\boldsymbol{x}_N, \boldsymbol{x}_{N-1}, ..., \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}, s)$ – будут удовлетворять уравнению (2.2.33) с начальным условием

$$p_{Z_N}(\boldsymbol{x}_N, \boldsymbol{x}_{N-1}, ..., \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}, 0) =$$

$$= p_{X_NX_{N-1}\ldots X_1X_0}(\boldsymbol{x}_N, \boldsymbol{x}_{N-1}, ..., \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_0, 0)\,\delta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}_0) =$$

$$= p_{Z_{N-1}}(\boldsymbol{x}_N, \boldsymbol{x}_{N-1}, ..., \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_0, \tau)\,\delta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}_0).$$

Тогда на данном шаге моменты $m_{Z_N\alpha}(s) = \mathbb{E}[Z_N^{\alpha}]$ вектора $\boldsymbol{Z}_N^{(}s)$ $(\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{(N+2)n}\})$ будут удовлетворять ОДУ и начальным условиям вида:

$$\dot{m}_{Z_N\alpha}(s) = \sum_{i=1}^{(N+2)n} \alpha_i \, \mathbb{E}\big[a^*_{Ni}(\boldsymbol{Z}_N)\, Z_N^{\alpha-e_i}\big] +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{(N+2)n} \alpha_i \, (\alpha_i - 1) \, \mathbb{E}\big[b^*_{Nii}(\boldsymbol{Z}_N)\, Z_N^{\alpha-2e_i}\big] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{(N+2)n-1} \sum_{j=i+1}^{(N+2)n} \alpha_i \, \alpha_j \, \mathbb{E}\Big[b^*_{Nij}(\boldsymbol{Z}_N)\, Z_N^{\alpha-e_i-e_j}\Big],$$

$$m_{Z_N\alpha}(0) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (N+2) \int\limits_{\mathbb{R}^n} z_N^{\alpha} \times$$

$$\times \; p_{Z_N}(\boldsymbol{x}_N, \boldsymbol{x}_{N-1}, ..., \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}, 0)\, d\boldsymbol{x}_N \, d\boldsymbol{x}_{N-1} ... d\boldsymbol{x}_1 \, d\boldsymbol{x}_0 \, d\boldsymbol{y} =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} (N+1) \int\limits_{\mathbb{R}^n} x_{N1}^{\alpha_1} ... \, x_{Nn}^{\alpha_n} \, x_{N-1,1}^{\alpha_{n+1}} ... \, x_{N-1,n}^{\alpha_{2n}} ... \, x_{11}^{\alpha_{(N-1)n+1}} ... \, x_{1n}^{\alpha_{Nn}} \times$$

$$\times \; x_{01}^{\alpha_{Nn+1}+\alpha_{(N+1)n+1}} ... \, x_{0n}^{\alpha_{(N+1)n}+\alpha_{(N+2)n}} \times$$

$$\times \; p_{X_N X_{N-1} ... X_1 X_0}(\boldsymbol{x}_N, \boldsymbol{x}_{N-1}, ..., \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_0, 0)\, d\boldsymbol{x}_N \, d\boldsymbol{x}_{N-1} ... d\boldsymbol{x}_1 \, d\boldsymbol{x}_0.$$

В результате при $t \in \Delta_N$ искомые моменты $m_{X\beta}(t)$ будут вычислены как $m_{Z_N\gamma}(t - t_N)$, где $\gamma = \{0, 0, ..., 0, 0, 0, ..., 0, ..., 0, 0, ..., 0, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n\}$.

Пример 2.2.3. Изложенная выше схема была применена для анализа системы вида:

$$\dot{X}(t) + k_1 \, X(t) = g_0 \, V(t), \qquad t \in (0, \tau], \qquad X(0) = X^0,$$

$$\dot{X}(t) + k_2 \, X(t) + k_3 \, X(t - \tau) = g_1 \, V(t), \qquad t \in (\tau, 2\tau],$$

$$\dot{X}(t) + k_2 \, X(t) + k_3 \, X_(t - \tau) + k_4 \, X^3(t - 2\,\tau) = g_2 \, V(t), \qquad t > 2\tau,$$

где k_i $(i = 1, 2, 3, 4)$, g_j $(j = 0, 1, 2)$ – постоянные.

Для учета нелинейности системы рассчитывались начальные моменты до четвертого порядка. Как известно, для объектов рассматриваемого типа ОДУ для моментов являются зацепляющимися, т.е. в уравнения для младших моментов входят старшие. Для замыкания строившихся на каждом шаге уравнений применялся метод кумулянтного замыкания. Для генерирования ОДУ для моментных функций применялся пакет ProbRel [192, 902]. При этом моменты более высокого порядка представлялись через моменты до шестого порядка с помощью приравнивания кумулянтов порядка выше шестого к нулю.

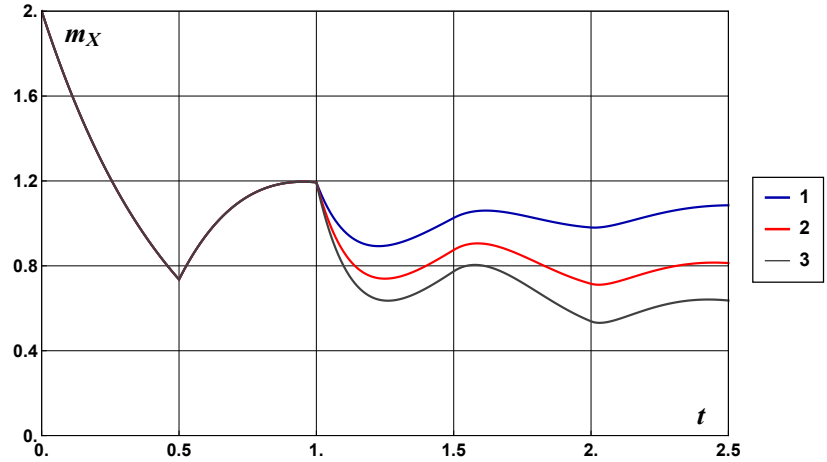


Рис. 2.2.9

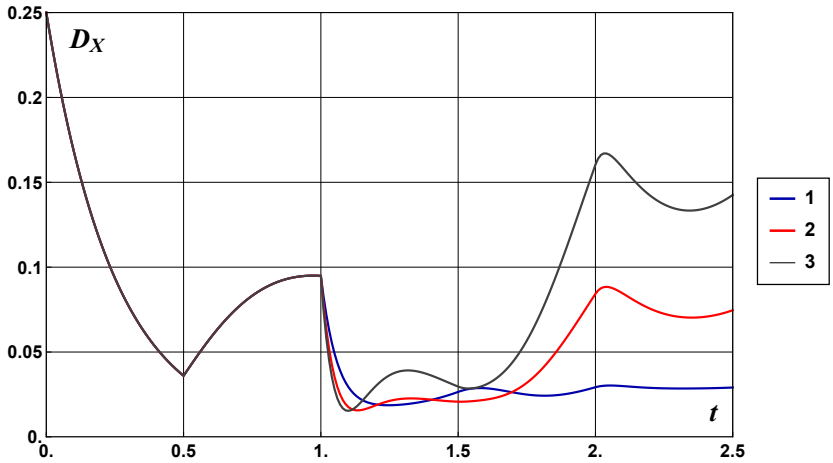


Рис. 2.2.10

Алгоритм решения задачи (как и пакет ProbRel) был реализован с помощью системы аналитических вычислений `Mathematica`.

В предположении, что начальное смещение X^0 нормально распределено с математическим ожиданием m_0 и дисперсией $\mathcal{D}_0$, расчеты произ-

водились при следующих значениях параметров:

$$N = 4, \quad k_1 = 2, \quad k_2 = 1.25, \quad k_3 = -1.5, \quad k_4 \in \{0.35, 0.5, 0.6\},$$
$$g_0 = g_1 = g_2 = 0.1, \quad \tau = 0.5, \quad m_0 = 2, \quad \mathcal{D}_0 = 0.25.$$

Заметим, что на последнем шаге генерировались и интегрировались 923 нелинейных ОДУ для моментов.

Динамика изменения математического ожидания и дисперсии смещения $X(t)$ представлена на рис. 2.2.9 и 2.2.10 соответственно, где цифрами 1, 2, 3 отмечены кривые, соответствующие указанным последовательным значениям параметра k_4. ►

2.2.2.3. Системы СОДУ нейтрального типа с одним постоянным запаздыванием

Выше была представлена схема расширения пространства состояния в приложении к исследованию стохастических систем с постоянным запаздыванием. Здесь эта схема модифицируется для исследования нового класса систем с запаздыванием, а именно, стохастических систем нейтрального типа [209], а затем применение этой методики демонстрируется на примерах.

Рассмотрим линейную систему СОДУ нейтрального типа с одним постоянным запаздыванием $\tau > 0$ следующего вида:

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{\mathcal{R}}(t)\,\boldsymbol{X}(t-\tau) + \boldsymbol{\mathcal{H}}(t)\,\dot{\boldsymbol{X}}(t-\tau) + \boldsymbol{c}(t) + \boldsymbol{\mathcal{G}}(t)\,\boldsymbol{V}(t),$$
$$t_1 = t_0 + \tau < t \leqslant T < +\infty, \tag{2.2.34}$$
$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_0(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{c}_0(t) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(t)\,\boldsymbol{V}(t), \quad t \in (t_0, t_1],$$
$$\boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}^0, \tag{2.2.35}$$

где $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния; $\boldsymbol{V} \in \mathbb{R}^m$ – вектор независимых случайных процессов типа белого шума с единичными интенсивностями.

Пусть в момент времени t_0 заданы значения элементов вектора математических ожиданий $\boldsymbol{m}^0 = \mathbb{E}\big[\boldsymbol{X}^0\big]$ и ковариационной матрицы $\boldsymbol{\mathcal{K}}^0 = \mathbb{E}\big[\big(\boldsymbol{X}^0 - \boldsymbol{m}^0\big)\big(\boldsymbol{X}^0 - \boldsymbol{m}^0\big)^{\intercal}\big]$. Построим системы ОДУ для компонент вектора функций математического ожидания $\boldsymbol{m}_X(t) = \mathbb{E}[\boldsymbol{X}(t)]$ и матрицы ковариаций $\boldsymbol{\mathcal{K}}(t) = \mathbb{E}[\{\boldsymbol{X}(t) - \boldsymbol{m}_X(t)\}\{\boldsymbol{X}(t) - \boldsymbol{m}_X(t)\}^{\intercal}]$ вектора состояний $\boldsymbol{X}$ при любом $t > t_0$.

Как и выше, для того чтобы получить СОДУ без запаздывания, применим метод расширения пространства состояний. Для этого воспользуемся обозначениями, введенными ранее, а к ним добавим следующие:

$$\boldsymbol{Y}(s) \equiv \boldsymbol{Y} \equiv \boldsymbol{X}^0, \quad \boldsymbol{Z}_0 = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}_0\big), \quad \boldsymbol{Z}_1 = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}_0, \boldsymbol{X}_1\big),$$
$$\boldsymbol{Z}_2 = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}_0, \boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2\big), \quad ..., \quad \boldsymbol{U}_0 = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{O}_m, \boldsymbol{V}_0\big),$$
$$\boldsymbol{U}_1 = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{O}_m, \boldsymbol{V}_0, \boldsymbol{V}_1\big), \quad \boldsymbol{U}_2 = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{O}_m, \boldsymbol{V}_0, \boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2\big), ...$$

Рассмотрим последовательность полуинтервалов (сегментов) Δ_q.

0°. На сегменте Δ_0 систему СОДУ, решением которой является случайная векторная функция $\boldsymbol{Z}_0(s)$, можно записать в следующем виде (здесь и далее точкой обозначена производная по переменной s):

$$\dot{\boldsymbol{Z}}_0(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_0(s)\, \boldsymbol{Z}_0(s) + \boldsymbol{f}_0(s) + \boldsymbol{\mathcal{B}}_0(s)\, \boldsymbol{U}_0(s), \tag{2.2.36}$$

где

$$\boldsymbol{Z}_0(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Y}(s) \\ \boldsymbol{X}_0(s) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{U}_0(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O}_n \\ \boldsymbol{V}_0(s) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_0(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O}_n \\ \boldsymbol{c}_0(s_0) \end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_0(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{Q}}_0(s_0) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{B}}_0(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s_0) \end{bmatrix}.$$

1°. На сегментах Δ_0 и Δ_1 систему СОДУ для вычисления вектора $\boldsymbol{Z}_1(s)$ можно представить так:

$$\dot{\boldsymbol{Z}}_1(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_1(s)\, \boldsymbol{Z}_1(s) + \boldsymbol{f}_1(s) + \boldsymbol{\mathcal{B}}_1(s)\, \boldsymbol{U}_1(s) + \boldsymbol{\mathcal{J}}_1(s)\, \dot{\boldsymbol{Z}}_1(s), \tag{2.2.37}$$

где

$$\boldsymbol{Z}_1(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Z}_0(s) \\ \boldsymbol{X}_1(s) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{U}_1(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{U}_0(s) \\ \boldsymbol{V}_1(s) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_1(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_0(s) \\ \boldsymbol{c}(s_1) \end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_1(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{A}}_0(s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{2n\times n} \\ [\boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \,|\, \boldsymbol{\mathcal{R}}(s_1)] & \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_1) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{B}}_1(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{B}}_0(s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{2n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times 2m} & \boldsymbol{\mathcal{G}}(s_1) \end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{\mathcal{J}}_1(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{2n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{2n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{2n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{H}}(s_1) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \end{bmatrix}.$$

где $|$ – символ горизонтального сцепления матриц.

2°. Рассматривая сегменты Δ_0, Δ_1 и Δ_2 совместно, запишем систему СОДУ для вычисления вектора $\boldsymbol{Z}_2(s)$:

$$\dot{\boldsymbol{Z}}_2(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_2(s)\, \boldsymbol{Z}_2(s) + \boldsymbol{f}_2(s) + \boldsymbol{\mathcal{B}}_2(s)\, \boldsymbol{U}_2(s) + \boldsymbol{\mathcal{J}}_2(s)\, \dot{\boldsymbol{Z}}_2(s), \tag{2.2.38}$$

где

$$\boldsymbol{Z}_2(s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Z}_1(s)\\ \boldsymbol{X}_2(s)\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{U}_2(s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{U}_1(s)\\ \boldsymbol{V}_2(s)\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{f}_2(s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{f}_1(s)\\ \boldsymbol{c}(s_2)\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_2(s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{A}}_1(s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{3n\times n}\\ [\boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times 2n}|\boldsymbol{\mathcal{R}}(s_2)] & \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_2)\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{\mathcal{B}}_2(s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{B}}_1(s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{3n\times m}\\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times 3m} & \boldsymbol{\mathcal{G}}(s_2)\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{J}}_2(s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{J}}_1(s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{3n\times n}\\ [\boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times 2n}\,|\,\boldsymbol{\mathcal{H}}(s_2)] & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n}\end{bmatrix}.$$

... ...

N°. Рассматривая по аналогии сегменты Δ_0, Δ_1, ..., Δ_N, получим

$$\dot{\boldsymbol{Z}}_N(s)=\boldsymbol{\mathcal{A}}_N(s)\,\boldsymbol{Z}_N(s)+\boldsymbol{f}_N(s)+\boldsymbol{\mathcal{B}}_N(s)\,\boldsymbol{U}_N(s)+\boldsymbol{\mathcal{J}}_N(s)\,\dot{\boldsymbol{Z}}_N(s),\quad (2.2.39)$$

где

$$\boldsymbol{Z}_N(s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Z}_{N-1}(s)\\ \boldsymbol{X}_N(s)\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{U}_N(s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{U}_{N-1}(s)\\ \boldsymbol{V}_N(s)\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{f}_N(s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{f}_{N-1}(s)\\ \boldsymbol{c}(s_N)\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_N(s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{A}}_{N-1}(s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n(N+1)\times n}\\ [\boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times nN}\,|\,\boldsymbol{\mathcal{R}}(s_N)] & \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_N)\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{B}}_N(s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{B}}_{N-1}(s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n(N+1)\times m}\\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m(N+1)} & \boldsymbol{\mathcal{G}}(s_N)\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{J}}_N(s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{J}}_{N-1}(s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n(N+1)\times n}\\ [\boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times nN}\,|\,\boldsymbol{\mathcal{H}}(s_N)] & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n}\end{bmatrix}.$$

Заметим, что если необходимо исключить производные компонент векторов $\boldsymbol{Z}_0(s)$, $\boldsymbol{Z}_1(s)$, ..., $\boldsymbol{Z}_N(s)$ по s, присутствующих в правых частях систем уравнений (2.2.37)–(2.2.39), их достаточно заменить соответствующими представлениями правых частей уравнений с предыдущего шага, в частности, систему уравнений для шага ℓ можно записать в следующем виде:

$$\dot{\boldsymbol{Z}}_\ell(s)=\boldsymbol{\mathcal{A}}^+_\ell(s)\,\boldsymbol{Z}_\ell(s)+\boldsymbol{f}^+_\ell(s)+\boldsymbol{\mathcal{B}}^+_\ell(s)\,\boldsymbol{U}_\ell(s),\qquad (2.2.40)$$

причем блочные матрицы $\boldsymbol{\mathcal{A}}^+_\ell(s)=\{\boldsymbol{\mathcal{A}}^+_{\ell ij}(s)\}$, $\boldsymbol{\mathcal{B}}^+_\ell(s)=\{\boldsymbol{\mathcal{B}}^+_{\ell ij}(s)\}$ и блочный вектор $\boldsymbol{f}^+_\ell(s)=\{\boldsymbol{f}^+_{\ell i}(s)\}$ будут выглядеть так:

$\boldsymbol{\mathcal{A}}^+_{\ell ij}(s)=$

$$= \begin{cases} \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\ell ij}(s), & (j=1) \bigvee (1 \leqslant i \leqslant j \leqslant \ell+2), \\ \boldsymbol{\mathcal{R}}(s_{i-2}) + \boldsymbol{\mathcal{H}}(s_{i-2})\, \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\ell,i-1,i-2}(s), & 3 \leqslant i \leqslant \ell+2, \\ \boldsymbol{\mathcal{H}}(s_{i-2})\, \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\ell,i-1,j}(s), & (4 \leqslant i \leqslant \ell+2) \bigwedge (2 \leqslant j < i-1); \end{cases}$$

$$\boldsymbol{f}^{+}_{\ell i}(s) = \begin{cases} \boldsymbol{f}_{\ell i}(s), & i = 1,2, \\ \boldsymbol{c}(s_{i-2}) + \boldsymbol{\mathcal{H}}(s_{i-2})\, \boldsymbol{f}_{\ell,i-1}(s), & 3 \leqslant i \leqslant \ell+2; \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{B}}^{+}_{\ell ij}(s) = \begin{cases} \boldsymbol{\mathcal{B}}_{\ell ij}(s), & (j=1) \bigvee (1 \leqslant i \leqslant j \leqslant \ell+2), \\ \boldsymbol{\mathcal{H}}(s_{i-2})\, \boldsymbol{\mathcal{B}}_{\ell,i-1,j}(s), & (3 \leqslant i \leqslant \ell+2) \bigwedge (2 \leqslant j < i); \end{cases}$$

$$i,j = 1,2,...,\ell+2.$$

Теперь построенную выше цепочку линейных СДУ без запаздывания на основе применяемой схемы можно использовать для получения новой последовательности уравнений – последовательности систем ОДУ для первых моментов векторов $\boldsymbol{Z}_0(s)$, $\boldsymbol{Z}_1(s)$, ..., $\boldsymbol{Z}_N(s)$. Для этого введем следующие обозначения

$$\boldsymbol{m}_\ell(s) = \mathbb{E}[\boldsymbol{Z}_\ell(s)] = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{m}_Y(s), \boldsymbol{m}_{X_0}(s), \boldsymbol{m}_{X_1}(s), ..., \boldsymbol{m}_{X_\ell}(s)\big),$$

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_\ell(s) = \mathbb{E}[\{\boldsymbol{Z}_\ell(s) - \boldsymbol{m}_\ell(s)\}\{\boldsymbol{Z}_\ell(s) - \boldsymbol{m}_\ell(s)\}^{\mathsf{T}}] =$$

$$= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YY}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_0}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_1}(s) & ... & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_{\ell-1}}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_\ell}(s) \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0Y}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0X_0}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0X_1}(s) & ... & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0X_{\ell-1}}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0X_\ell}(s) \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_1Y}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_1X_0}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_1X_1}(s) & ... & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_1X_{\ell-1}}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_1X_\ell}(s) \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{\ell-1}Y}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{\ell-1}X_0}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{\ell-1}X_1}(s) & ... & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{\ell-1}X_{\ell-1}}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{\ell-1}X_\ell}(s) \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_\ell Y}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_\ell X_0}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_\ell X_1}(s) & ... & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_\ell X_{\ell-1}}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_\ell X_\ell}(s) \end{bmatrix},$$

$$\ell = 0,1,2,...,N.$$

В связи с тем, что вектор $\boldsymbol{m}_{X_\ell}(s)$ и матрица $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_\ell X_\ell}(s)$ являются блоками вектора $\boldsymbol{m}_\ell(s)$ и матрицы $\boldsymbol{\mathcal{K}}_\ell(s)$ соответственно, достаточно вычислить только последние, а затем выбрать их необходимые элементы.

Из предыдущих рассуждений и на основании корреляционной теории следует, что на шаге ℓ числовые характеристики вектора $\boldsymbol{Z}^{+}_\ell(s)$ являются решениями следующих задач Коши:

$$\frac{d}{ds}\, \boldsymbol{m}_\ell(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}^{+}_\ell(s)\, \boldsymbol{m}_\ell(s) + \boldsymbol{f}^{+}_\ell(s), \tag{2.2.41}$$

$$\boldsymbol{m}_\ell(0) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{m}^0, \boldsymbol{m}^0, \boldsymbol{m}_{X_0}(\tau), \boldsymbol{m}_{X_1}(\tau), ..., \boldsymbol{m}_{X_{\ell-2}}(\tau), \boldsymbol{m}_{X_{\ell-1}}(\tau)\big),$$

$$\frac{d}{ds}\,\boldsymbol{\mathcal{K}}_\ell(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_\ell^+(s)\,\boldsymbol{\mathcal{K}}_\ell(s) + \left[\boldsymbol{\mathcal{A}}_\ell^+(s)\,\boldsymbol{\mathcal{K}}_\ell(s)\right]^{\intercal} + \boldsymbol{\mathcal{B}}_\ell^+(s)\left[\boldsymbol{\mathcal{B}}_\ell^+(s)\right]^{\intercal}, \qquad (2.2.42)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_\ell(0) =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathcal{K}^0 & \mathcal{K}^0 & \mathcal{K}_{YX_0}(\tau) & ... & \mathcal{K}_{YX_{\ell-2}}(\tau) & \mathcal{K}_{YX_{\ell-1}}(\tau) \\ \mathcal{K}^0 & \mathcal{K}^0 & \mathcal{K}_{YX_0}(\tau) & ... & \mathcal{K}_{YX_{\ell-2}}(\tau) & \mathcal{K}_{YX_{\ell-1}}(\tau) \\ \mathcal{K}_{X_0Y}(\tau) & \mathcal{K}_{X_0Y}(\tau) & \mathcal{K}_{X_0X_0}(\tau) & ... & \mathcal{K}_{X_0X_{\ell-2}}(\tau) & \mathcal{K}_{X_0X_{\ell-1}}(\tau) \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ \mathcal{K}_{X_{\ell-2}Y}(\tau) & \mathcal{K}_{X_{\ell-2}Y}(\tau) & \mathcal{K}_{X_{\ell-2}X_0}(\tau) & ... & \mathcal{K}_{X_{\ell-2}X_{\ell-2}}(\tau) & \mathcal{K}_{X_{\ell-2}X_{\ell-1}}(\tau) \\ \mathcal{K}_{X_{\ell-1}Y}(\tau) & \mathcal{K}_{X_{\ell-1}Y}(\tau) & \mathcal{K}_{X_{\ell-1}X_0}(\tau) & ... & \mathcal{K}_{X_{\ell-1}X_{\ell-2}}(\tau) & \mathcal{K}_{X_{\ell-1}X_{\ell-1}}(\tau) \end{bmatrix},$$

$$\ell = 0, 1, 2, ..., N.$$

Продемонстрируем изложенную методику на следующих примерах анализа поведения ряда стохастических систем различной размерности.

Пример 2.2.4. Рассмотрим одномерную систему в следующей форме:

$$\dot{X}(t) = q\,X(t) + r\,X(t-\tau) + h\,\dot{X}(t-\tau) + g\,V(t), \qquad t > 0;$$

$$\dot{X}(t) = 0, \qquad t \leqslant 0;$$

$$m_X(-\tau) = m^0, \qquad \mathcal{D}_X(-\tau) = \mathcal{D}^0,$$

где q, r, h, g – постоянные. На рис. 2.2.11 и 2.2.12 изображено поведение математического ожидания и дисперсии $X(t)$ при следующих значениях параметров:

$$q = -1, \qquad r \in \{0.2, 0.4, 0.6\}, \qquad h = -1, \qquad g = 0.1,$$

$$\tau = 0.5, \qquad t_0 = -\tau, \qquad m^0 = 5, \qquad \mathcal{D}^0 = 0.25,$$

причем цифры 1, 2 и 3 в легендах графиков указывают на варианты значений r. Анализируя построенные кривые, несложно заметить такие же их существенные изломы в моменты времени, соответствующие точкам $k\,\tau$, $k = 1, 2, 3, ...$, и характерные для детерминированных систем подобного типа.

Пример 2.2.5. Изучим поведение первых моментных функций системы с одной степенью свободы (второго порядка), модель которой может быть представлена так:

$$\ddot{X}(t) + \nu\,\ddot{X}(t-\tau) + 2\,\alpha_1\,\dot{X}(t) + 2\,\alpha_2\,\dot{X}(t-\tau) + \\ + \beta_1\,X(t) + \beta_2\,X(t-\tau) = \gamma\,V(t), \quad t > 0;$$

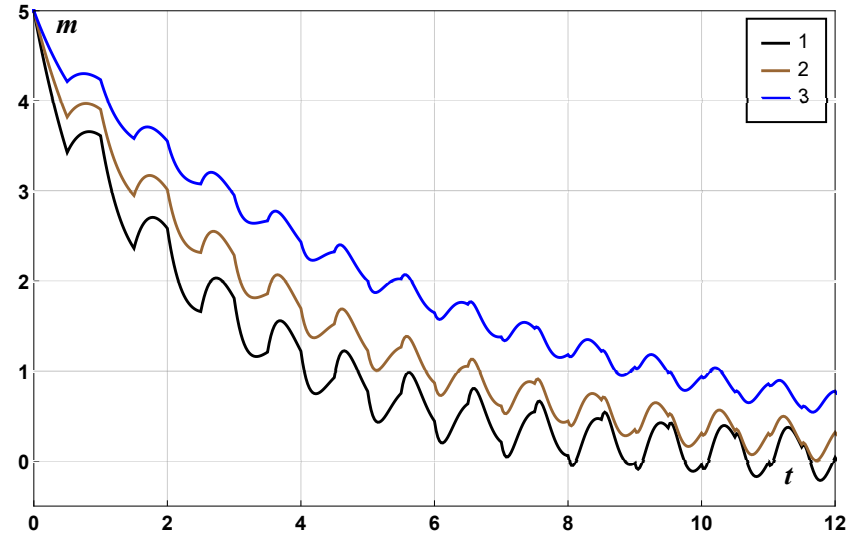


Рис. 2.2.11

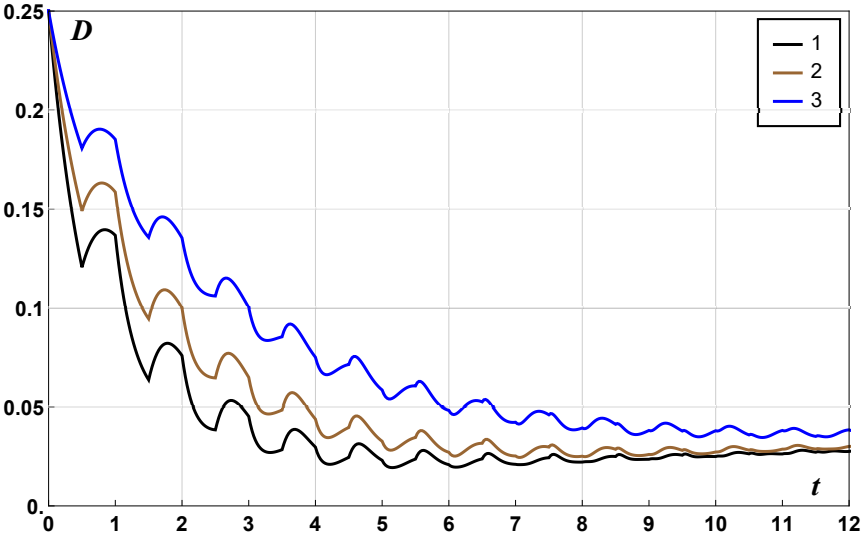


Рис. 2.2.12

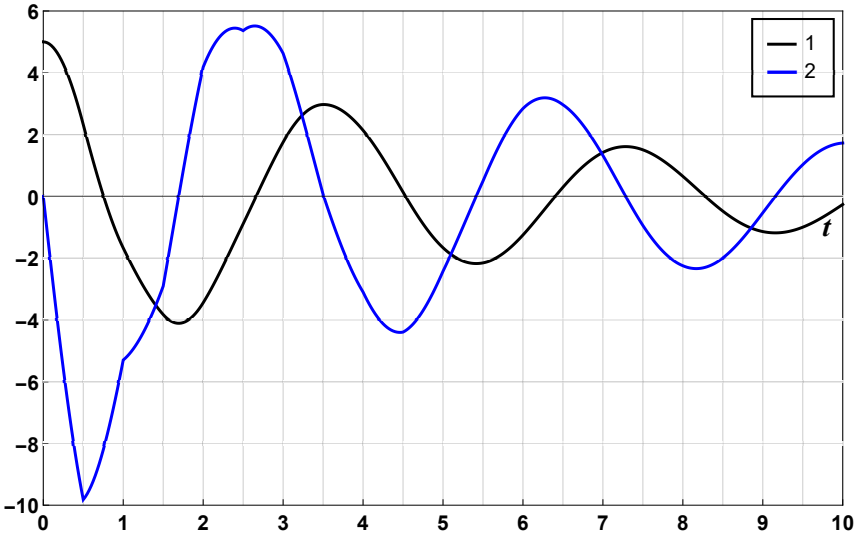


Рис. 2.2.13

$$\ddot{X} = 0, \qquad t \leqslant 0;$$
$$\boldsymbol{m}(-\tau) = \boldsymbol{m}^0, \qquad \boldsymbol{\mathcal{K}}(-\tau) = \boldsymbol{\mathcal{K}}^0,$$

где ν, α_i, β_i, γ – постоянные ($i = 1, 2$). На рис. 2.2.13 и 2.2.14 изображено поведение компонент вектора функций математического ожидания и матрицы ковариаций для вектора состояния $\boldsymbol{X}(t) = \{X_1(t), X_2(t)\}^\intercal = \{X(t), \dot{X}(t)\}^\intercal$ при следующих значениях параметров:

$$\nu = 0.75, \qquad \alpha_1 = 0.125, \qquad \alpha_2 = 0.167, \qquad \gamma = 0.1,$$
$$\beta_1 = 3, \qquad \beta_2 = 2, \qquad \tau = 0.5, \qquad t_0 = -\tau,$$
$$\boldsymbol{m}^0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\mathcal{K}}^0 = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 0.125 \end{bmatrix}.$$

Пример 2.2.6. Третья модель – система с двумя степенями свободы (четвертого порядка с вектором состояния $\boldsymbol{X}(t) = \{X_1(t), X_2(t), X_3(t), X_4(t)\}^\intercal$). Если ее уравнения записать в форме (2.2.34), (2.2.35), то соот-

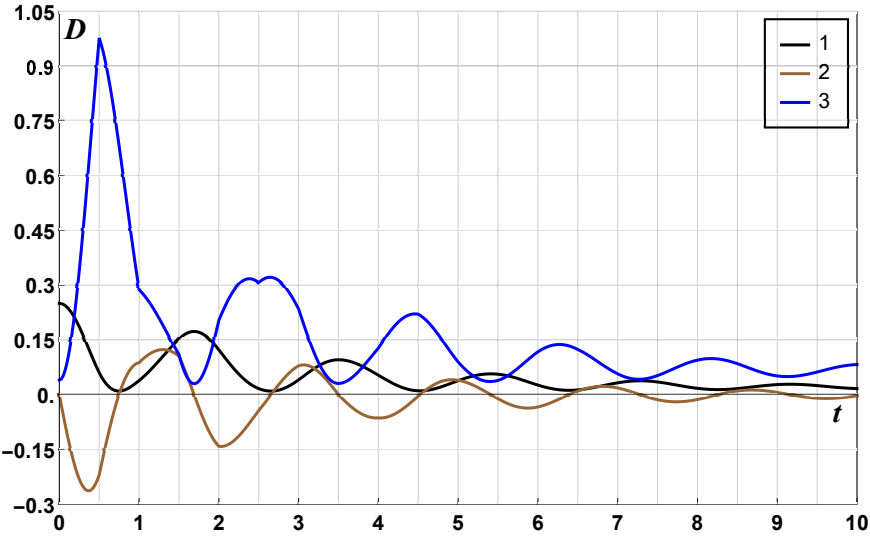


Рис. 2.2.14

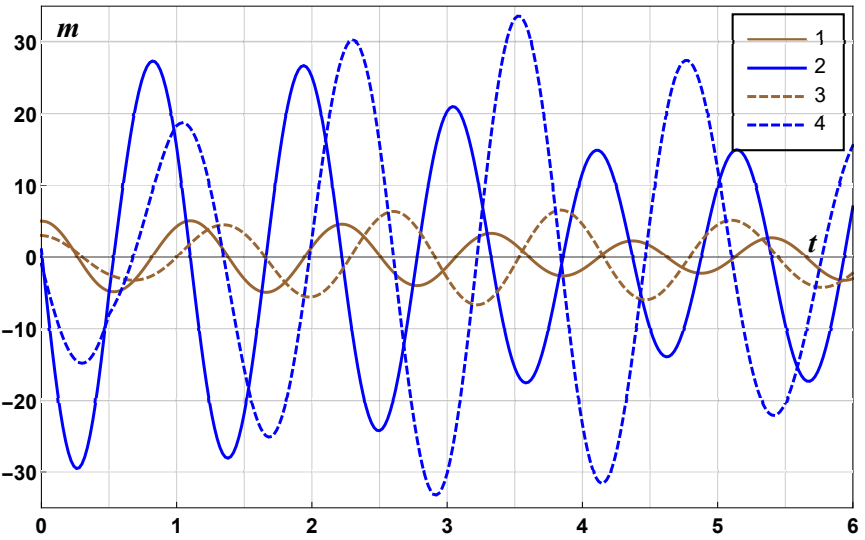


Рис. 2.2.15

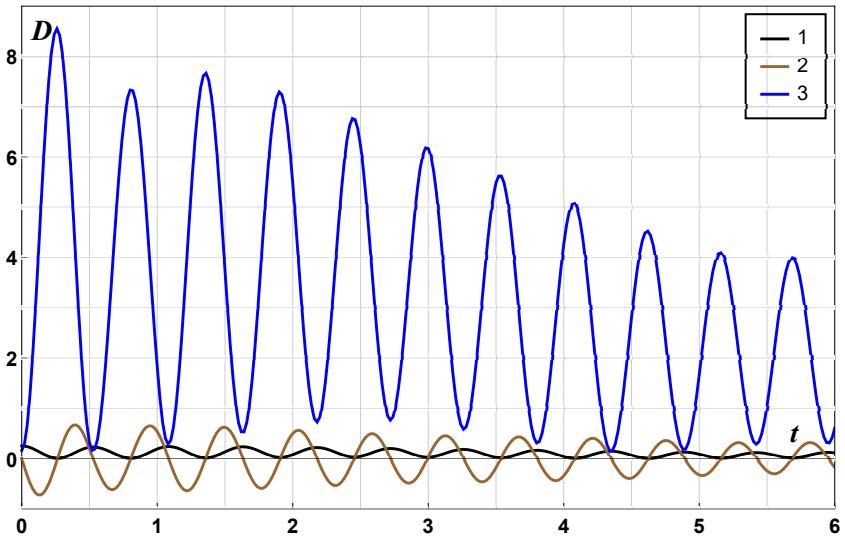


Рис. 2.2.16

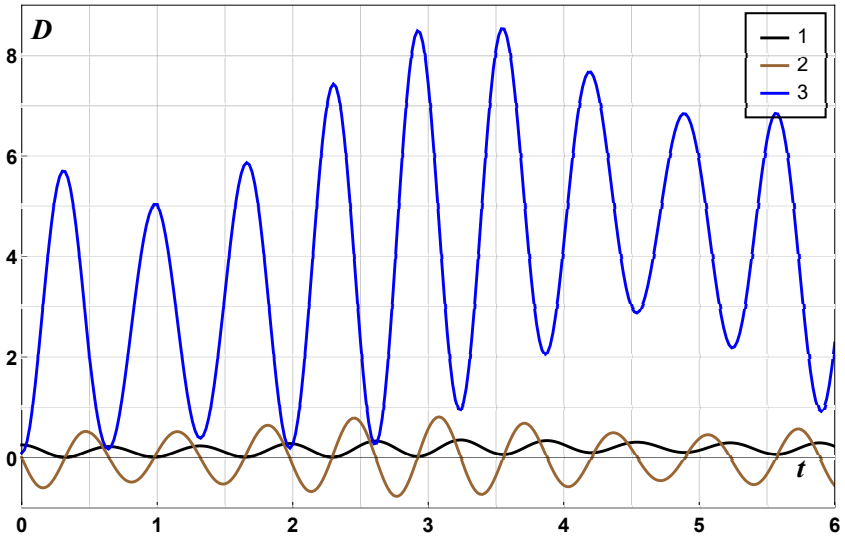


Рис. 2.2.17

ветствующие матрицы и векторы примут следующий вид

$$\boldsymbol{\mathcal{Q}}(t) = \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ q_{41} & q_{42} & q_{43} & q_{44} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\mathcal{R}}(t) = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & r_{23} & r_{24} \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ r_{41} & r_{42} & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}(t) = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{c}(t) = \boldsymbol{O}_4, \qquad \boldsymbol{\mathcal{G}}(t) = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 \\ g_{21} & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & g_{42} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{Q}}_0(t) = \boldsymbol{\mathcal{O}}_{4\times 4}, \qquad \boldsymbol{c}_0(t) = \boldsymbol{O}_4, \qquad \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(t) = \boldsymbol{\mathcal{O}}_{4\times 2},$$

где q_{21}, q_{22}, q_{23}, q_{24}, q_{41}, q_{42}, q_{43}, q_{44}, r_{23}, r_{24}, r_{41}, r_{42}, h_{21}, h_{22}, h_{23}, h_{24}, h_{41}, h_{42}, h_{43}, h_{44}, g_{21}, g_{42} – постоянные. Поведение компонент вектора функций математического ожидания (соответствующие кривые обозначены цифрами 1, 2, 3, 4) отображено на рис. 2.2.15. Рис. 2.2.16 показывает динамику изменения компонент $\mathcal{D}_{11}(t)$, $\mathcal{K}_{12}(t)$, $\mathcal{D}_{22}(t)$ матрицы функций ковариации, графики которых обозначены цифрами 1, 2, 3 соответственно. Те же самые обозначения использованы на рис. 2.2.17 для представления переходных режимов для $\mathcal{D}_{33}(t)$, $\mathcal{K}_{34}(t)$, $\mathcal{D}_{44}(t)$. При расчетах использовались следующие значения параметров:

$$q_{21} = -36.0, \quad q_{22} = -0.2, \quad q_{23} = -0.15, \quad q_{24} = 0.1,$$
$$q_{41} = 0.1, \quad q_{42} = 0.15, \quad q_{43} = -25.0, \quad q_{44} = -0.30,$$
$$r_{23} = -0.15, \quad r_{24} = -0.1, \quad r_{41} = 0.15, \quad r_{42} = 0.15,$$
$$h_{21} = -0.1, \quad h_{22} = 0.12, \quad h_{23} = 0.15, \quad h_{24} = 0.1,$$
$$h_{41} = 0.1, \quad h_{42} = 0.15, \quad h_{43} = 0.1, \quad h_{44} = 0.08,$$
$$g_{21} = 0.125, \quad g_{42} = 0.1, \quad \tau = 0.5, \quad t_0 = -\tau, \quad T = 6.0,$$
$$\boldsymbol{m}^0 = \mathrm{col}(5.0, 1.0, 3.0, -1.0), \qquad \boldsymbol{\mathcal{K}}^0 = \mathrm{diag}(0.25, 0.16, 0.25, 0.09).$$

2.2.2.4. Расчет старших моментов решения линейных СОДУ с запаздыванием и аддитивно-мультипликативными флуктуациями

Рассмотрим следующую систему линейных стохастических обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием в смысле Стратоновича [246, 908]:

$$d\boldsymbol{X}(t) = \left[\boldsymbol{\mathcal{A}}_0(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{c}_0(t)\right] dt + \left[\,[\![\boldsymbol{\mathcal{B}}_0(t)]\!] :: \boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(t)\,\right] \circ d\boldsymbol{W}(t),$$

$$t_0 < t \leqslant t_0 + \tau, \tag{2.2.43}$$

$$\boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}^0, \tag{2.2.44}$$

$$d\boldsymbol{X}(t) = \big[\boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{\mathcal{Q}}(t)\,\boldsymbol{X}(t-\tau) + \boldsymbol{c}(t)\big]\,dt + \big[\,[\![\boldsymbol{\mathcal{B}}(t)]\!] :: \boldsymbol{X}(t) + [\![\boldsymbol{\mathcal{H}}(t)]\!] :: \boldsymbol{X}(t-\tau) + \boldsymbol{\mathcal{G}}(t)\,\big] \circ d\boldsymbol{W}(t), \quad t_0 + \tau < t \leqslant T, \tag{2.2.45}$$

где t – время, t_0 и T – начальное и конечное время, $t_0 < T < +\infty$, а $\tau > 0$ – постоянное запаздывание. Вектор $\boldsymbol{X}(t) = \big(X_1(t), X_2(t),\ ...,\ X_n(t)\big) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния системы. Начальное условие $\boldsymbol{X}^0 = \big(X_1^0, X_2^0,\ ...,\ X_n^0\big)$ – гильбертов случайный вектор, распределенный согласно плотности вероятности $p^{\,0}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Его вектором математических ожиданий, ковариационной матрицей и моментами являются $\boldsymbol{m}_X^0 = \mathbb{E}\big[\boldsymbol{X}^0\big]$, $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 = \mathbb{E}\big[(\boldsymbol{X}^0 - \boldsymbol{m}_X^0)(\boldsymbol{X}^0 - \boldsymbol{m}_X^0)^{\intercal}\big]$ и $M_{X\alpha}^0 = \mathbb{E}\big[(X^0)^{\alpha}\big]$ соответственно. Вход $\{\boldsymbol{W}(t) = \big(W_1(t), W_2(t),\ ...,\ W_m(t)\big),\ t \geqslant t_0\} \in \mathbb{R}^m$ – векторный винеровский случайный процесс, который состоит из независимых компонент и не зависит от $\boldsymbol{X}^0$. Обобщенная производная от $\boldsymbol{W}(t)$ по t, обозначаемая $\{\dot{\boldsymbol{W}}(t) = \big(\dot{W}_1(t), \dot{W}_2(t), ..., \dot{W}_m(t)\big),\ t \geqslant t_0\}$, – векторный гауссовский белый шум с независимыми компонентами, такой, что

$$\mathbb{E}\Big[\dot{\boldsymbol{W}}(t)\Big] = 0, \quad \mathbb{E}\Big[\dot{\boldsymbol{W}}(t)\,\dot{\boldsymbol{W}}^{\intercal}(t')\Big] = \boldsymbol{\mathcal{I}}_m\,\delta_0(t-t'). \tag{2.2.46}$$

В уравнениях (2.2.43), (2.2.45), $\boldsymbol{\mathcal{A}}_0(t) = \{a_{0ij}(t)\}$, $\boldsymbol{\mathcal{A}}(t) = \{a_{ij}(t)\}$, $\boldsymbol{\mathcal{Q}}(t) = \{q_{ij}(t)\}$, $\boldsymbol{\mathcal{A}}_0$, $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, $\boldsymbol{\mathcal{Q}} \in \mathbb{M}_{n\times n}$, $[\![\boldsymbol{\mathcal{B}}_0(t)]\!] = \{b_{0ijk}(t)\}$, $[\![\boldsymbol{\mathcal{B}}(t)]\!] = \{b_{ijk}(t)\}$, $[\![\boldsymbol{\mathcal{H}}(t)]\!] = \{h_{ijk}(t)\}$, $[\![\boldsymbol{\mathcal{B}}_0]\!]$, $[\![\boldsymbol{\mathcal{B}}]\!]$, $[\![\boldsymbol{\mathcal{H}}]\!] \in \mathbb{M}_{n\times m\times n}$, $\boldsymbol{\mathcal{G}}_0(t) = \{g_{ij}(t)\}$, $\boldsymbol{\mathcal{G}}(t) = \{g_{ij}(t)\}$, $\boldsymbol{\mathcal{G}}_0$, $\boldsymbol{\mathcal{G}} \in \mathbb{M}_{n\times m}$ – заданные детерминированные вещественные матрицы, $\boldsymbol{c}_0(t) = \{c_{0i}(t)\}$ и $\boldsymbol{c}(t) = \{c_i(t)\}$ – заданные детерминированные вещественные векторы в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что элементы всех этих матриц и векторов являются непрерывными функциями аргумента t.

Вследствие того, что уравнения (2.2.43), (2.2.45) линейны, вектор $\boldsymbol{X}^0$ является случайным вектором второго порядка, то согласно [824], $\{\boldsymbol{X}(t),\ t \in [t_0, T]\}$, т.е. решение уравнений (2.2.43), (2.2.45), существует.

Принимая во внимание предыдущие определения и обозначения, можно констатировать, что проблема, решаемая ниже, заключается в построении схемы вычисления ряда различных моментных функций $M_{X\alpha}(t) = \mathbb{E}[X^{\alpha}(t)]$ (α – мультииндекс), вектор-функции $\boldsymbol{m}_X(t) \equiv \{m_{X_i}(t)\} = \mathbb{E}[\boldsymbol{X}(t)]$, а также матричной функции

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}(t) = \{\boldsymbol{\mathcal{K}}_{ij}(t)\} \equiv \mathbb{E}\big[\big\{\boldsymbol{X}(t) - \boldsymbol{m}_X(t)\big\}\,\big\{\boldsymbol{X}(t) - \boldsymbol{m}_X(t)\big\}^{\intercal}\big]$$

для всех t из $(t_0, T]$.

Чтобы получить ОДУ для необходимых статистических характеристик вектора $\boldsymbol{X}(t)$ при любом $t > t_0$, расширим пространство состояний исследуемой системы, преобразовав немарковскую систему в марковскую. Чтобы сделать такое преобразование, воспользуемся обозначениями, введенными ранее. Тогда используя пошаговую процедуру, построим цепочку систем СОДУ и соответствующие ФПК-уравнения для плотностей вероятности векторов $\boldsymbol{Z}_0(s)$, $\boldsymbol{Z}_1(s)$, $\boldsymbol{Z}_2(s)$, ..., $\boldsymbol{Z}_N(s)$, принадлежащих семейству вложенных пространств состояний $\mathbb{R}^{2n} \subset \mathbb{R}^{3n} \subset ... \subset \mathbb{R}^{n(N+2)}$.

0°. Рассмотрим полуинтервал Δ_0. Компоненты векторного случайного процесса $\boldsymbol{Z}_0(s)$, определенные на Δ_0, удовлетворяют системе СОДУ вида:

$$\begin{aligned} &d\boldsymbol{Y}(s) = \boldsymbol{O}_n\, ds, \qquad \boldsymbol{Y}(0) = \boldsymbol{X}^0, \\ &d\boldsymbol{X}_0(s) = \big[\boldsymbol{\mathcal{A}}_0(s_0)\, \boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{c}_0(s_0)\big]\, ds + \\ &\quad + \big[[\![\boldsymbol{\mathcal{B}}_0(s_0)]\!] :: \boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s_0)\big] \circ d\boldsymbol{W}_0(s), \qquad \boldsymbol{X}_0(0) = \boldsymbol{X}^0. \end{aligned} \tag{2.2.47}$$

Если воспользоваться объединенной формой уравнений (2.2.47)

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{Z}_0(s) = \big[\boldsymbol{\mathcal{A}}_0^+(s)\, \boldsymbol{Z}_0(s) + \boldsymbol{c}_0^+(s)\big]\, ds + \big[\, [\![\boldsymbol{\mathcal{B}}_0^+(s)]\!] :: \boldsymbol{Z}_0(s) + \\ + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0^+(s)\,\big] \circ d\boldsymbol{W}_0(s), \quad \boldsymbol{Z}_0(0) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{X}^0, \boldsymbol{X}^0\big), \end{aligned} \tag{2.2.48}$$

где

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\mathcal{A}}_0^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{A}}_0(s_0) \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{c}_0^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O}_n \\ \boldsymbol{c}_0(s_0) \end{bmatrix}, \\ &[\![\boldsymbol{\mathcal{B}}_0^+(s)]\!] = \begin{bmatrix} [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \end{bmatrix} \ddagger \begin{bmatrix} [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{B}}_0(s_0)]\!] \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{G}}_0^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s_0) \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{2.2.49}$$

($\ddagger$ – символ сцепления трехмерных матриц относительно последней размерности) и сравнить системы СОДУ (2.2.48), (2.2.49) и (П.2.1), (П.2.2), то можно заключить, что эти системы будут одинаковы, если

$$\begin{aligned} &r = 2\,n, \quad q = m, \quad s_* = 0, \quad s^* = \tau, \quad \underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_0^+(s), \\ &\underline{\boldsymbol{c}}(s) = \boldsymbol{c}_0^+(s), \quad [\![\underline{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(s)]\!] = [\![\boldsymbol{\mathcal{B}}_0^+(s)]\!], \quad \underline{\boldsymbol{\mathcal{G}}}(s) = \boldsymbol{\mathcal{G}}_0^+(s). \end{aligned} \tag{2.2.50}$$

Отсюда можно записать уравнение для плотности вероятности $p_{Z_0}(\boldsymbol{z}_0, s)$ расширенного векторного процесса состояния $\boldsymbol{Z}_0(s)$:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial p_{Z_0}}{\partial s} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2n} \frac{\partial^2 \big(\tilde{b}_{0ij}\, p_{Z_0}\big)}{\partial z_{0i}\, \partial z_{0j}} - \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial \big(\tilde{a}_{0i}\, p_{Z_0}\big)}{\partial z_{0i}}, \\ &p_{Z_0}(\boldsymbol{z}_0, 0) \equiv p_{Z_0}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_0, 0) = p^{\,0}(\boldsymbol{x}_0)\, \delta_0(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}_0), \end{aligned} \tag{2.2.51}$$

где коэффициенты $\tilde{a}_{0i}$ и $\tilde{b}_{0ij}$ могут быть вычислены по формулам (П.2.5), (П.2.6) как $\hat{a}_i$ and $\hat{b}_{ij}$ соответственно.

Более того, этот факт дает нам возможность построить явный вид уравнений (П.2.7), (П.2.8) и (П.2.9). Конечной точкой этого этапа является определение начальных условий для $\boldsymbol{m}_{Z_0}(s)$, $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_0Z_0}(s)$ и $M_{Z_0\alpha}(s)$. Первые две группы таких условий таковы:

$$\boldsymbol{m}_{Z_0}(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}^0_X \\ \boldsymbol{m}^0_X \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_0Z_0}(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{K}}^0_{XX} & \boldsymbol{\mathcal{K}}^0_{XX} \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}^0_{XX} & \boldsymbol{\mathcal{K}}^0_{XX} \end{bmatrix}. \tag{2.2.52}$$

Далее надо вычислить $\boldsymbol{m}_{Z_0}(s)$ как $\underline{\boldsymbol{m}}_Z(s)$ и $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_0Z_0}(s)$ как $\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_{ZZ}(s)$.

Теперь добавим начальные условия для произвольных моментных функций $M_{Z_0\alpha}(s) = \mathbb{E}[Z_0^{\alpha_0}(s)]$ вектора $\boldsymbol{Z}_0(s)$, где

$$\alpha_0 = \langle \alpha_Y, \alpha_{X0} \rangle \equiv \{\alpha_{Y1}, \alpha_{Y2}, ..., \alpha_{Yn}, \alpha_{X01}, \alpha_{X02}, ..., \alpha_{X0n}\},$$

– мультииндекс. Тогда получим, что

$$M_{Z_0\alpha_0}(0) = \int\limits_{\mathbb{R}^{2n}} z_0^{\alpha_0}\, p_{Z_0}(\boldsymbol{z}_0, 0)\, d\boldsymbol{z}_0 \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^{2n}} y^{\alpha_Y}\, x_0^{\alpha_{X0}}\, p^0(\boldsymbol{x}_0)\, \delta_0(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}_0)\, d\boldsymbol{y}\, d\boldsymbol{x}_0 =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} x_0^{\alpha_Y + \alpha_{X0}}\, p^0(\boldsymbol{x}_0)\, d\boldsymbol{x}_0 = M^0_{X_0, \alpha_Y + \alpha_{X0}}. \tag{2.2.53}$$

1°. Теперь обратимся к сегментам Δ_0 и Δ_1. Система СОДУ для вычисления вектора расширенного состояния $\boldsymbol{Z}_1(s)$ может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&d\boldsymbol{Y}(s) = \boldsymbol{O}_n\, ds, && \boldsymbol{Y}(0) = \boldsymbol{X}^0,\\
&d\boldsymbol{X}_0(s) = \big[\boldsymbol{\mathcal{A}}_0(s_0)\, \boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{c}_0(s_0)\big]\, ds + \\
&\quad + \big[\, [\![\boldsymbol{\mathcal{B}}_0(s_0)]\!] :: \boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s_0)\,\big] \circ d\boldsymbol{W}_0(s), && \boldsymbol{X}_0(0) = \boldsymbol{X}^0,\\
&d\boldsymbol{X}_1(s) = \big[\boldsymbol{\mathcal{A}}(s_1)\, \boldsymbol{X}_1(t) + \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_1)\, \boldsymbol{X}_0(s) + \\
&\quad + \boldsymbol{c}(s_1)\big]\, ds + \big[\, [\![\boldsymbol{\mathcal{B}}(s_1)]\!] :: \boldsymbol{X}_1(s) + \\
&\quad + [\![\boldsymbol{\mathcal{H}}(s_1)]\!] :: \boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{\mathcal{G}}(s_1)\big] \circ d\boldsymbol{W}_1(s), && \boldsymbol{X}_1(0) = \boldsymbol{X}_0(\tau).
\end{aligned} \tag{2.2.54}$$

Действуя так же, как на шаге $\mathbf{0^0}$, мы можем записать компактную форму уравнений (2.2.54):

$$d\boldsymbol{Z}_1(s) = \big[\boldsymbol{\mathcal{A}}_1^+(s)\, \boldsymbol{Z}_1(s) + \boldsymbol{c}_1^+(s)\big]\, ds + \big[\, [\![\boldsymbol{\mathcal{B}}_1^+(s)]\!] :: \boldsymbol{Z}_1(s) +$$

$$+\,\boldsymbol{\mathcal{G}}_1^+(s)\,]\circ d\boldsymbol{W}_1^+(s),\quad \boldsymbol{Z}_1(0)=\operatorname{col}\big(\boldsymbol{Z}_0(0),\boldsymbol{X}_0(\tau)\big),\quad (2.2.55)$$

где

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_1^+(s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n}\\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{A}}_0(s_0) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n}\\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_1) & \boldsymbol{\mathcal{A}}(s_1)\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{c}_1^+(s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}_n\\ \boldsymbol{c}_0(s_0)\\ \boldsymbol{c}(s_1)\end{bmatrix},$$

$$[\![\boldsymbol{\mathcal{B}}_1^+(s)]\!]=\begin{bmatrix}[\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n}\\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n}\\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n}\end{bmatrix}\ddagger\begin{bmatrix}[\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n}\\ [\![\boldsymbol{\mathcal{B}}_0(s_0)]\!]\\ [\![\boldsymbol{\mathcal{H}}(s_1)]\!]\end{bmatrix}\ddagger\begin{bmatrix}[\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n}\\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n}\\ [\![\boldsymbol{\mathcal{B}}(s_1)]\!]\end{bmatrix},\quad (2.2.56)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}_1^+(s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m}\\ \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s_0) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m}\\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{G}}(s_1)\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{W}_1^+(s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{W}_0(s)\\ \boldsymbol{W}_1(s)\end{bmatrix}.$$

Как и выше, сравниваем структуры уравнений (2.2.55), (2.2.56) и (П.2.1), (П.2.2) и заключаем, что эти системы идентичны, если

$$\begin{gathered}r=3\,n,\quad q=2\,m,\quad s_*=0,\quad s^*=\tau,\quad \underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(s)=\boldsymbol{\mathcal{A}}_1^+(s),\\ \underline{\boldsymbol{c}}(s)=\boldsymbol{c}_1^+(s),\quad [\![\underline{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(s)]\!]=[\![\boldsymbol{\mathcal{B}}_1^+(s)]\!],\quad \underline{\boldsymbol{\mathcal{G}}}(s)=\boldsymbol{\mathcal{G}}_1^+(s).\end{gathered}\quad (2.2.57)$$

Это позволяет построить уравнение для плотности вероятности $p_{Z_1}(\boldsymbol{z}_1,s)$ расширенного вектора состояния $\boldsymbol{Z}_1(s)$ в следующем виде:

$$\frac{\partial p_{Z_1}}{\partial s}=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3n}\frac{\partial^2\big(\tilde{b}_{1ij}\,p_{Z_1}\big)}{\partial z_{1i}\,\partial z_{1j}}-\sum_{i=1}^{3n}\frac{\partial\big(\tilde{a}_{1i}\,p_{Z_1}\big)}{\partial z_{1i}},\quad (2.2.58)$$

$$p_{Z_1}(\boldsymbol{z}_1,0)\equiv p_{Z_1}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_1,0)=p_{Z_0}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_1,\tau)\;\delta_0(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}_0).$$

Очевидно,что коэффициенты $\tilde{a}_{1i}$ и $\tilde{b}_{1ij}$ можно найти по формулам (П.2.5), (П.2.6) как $\hat{a}_i$ и $\hat{b}_{ij}$ соответственно.

Теперь можно построить явный вид уравнений (П.2.7)–(П.2.9). А заканчивается этот шаг фиксацией начальных условий для искомых функций $\boldsymbol{m}_{Z_1}(s)$ и $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_1Z_1}(s)$ для $\boldsymbol{Z}_1(s)$ следующим образом:

$$\boldsymbol{m}_{Z_1}(0)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{m}_X^0\\ \boldsymbol{m}_X^0\\ \boldsymbol{m}_{X_0}(\tau)\end{bmatrix},\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_1Z_1}(0)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_0}(\tau)\\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_0}(\tau)\\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0Y}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0Y}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0X_0}(\tau)\end{bmatrix}\quad (2.2.59)$$

и оценкой $\boldsymbol{m}_{Z_1}(s)$ как $\underline{\boldsymbol{m}}_Z(s)$ и $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_1Z_1}(s)$ как $\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_{ZZ}(s)$.

Подобная процедура устанавливает начальные условия для любых моментных функций $M_{Z_1\alpha}(s) = \mathbb{E}[Z_1^{\alpha_1}(s)]$, где

$$\alpha_1 = \langle \alpha_Y, \alpha_{X0}, \alpha_{X1} \rangle \equiv \{\alpha_{Y1}, ..., \alpha_{Yn}, \alpha_{X01}, ..., \alpha_{X0n}, \alpha_{X11}, ..., \alpha_{X1n}\},$$

– мультииндекс. Остюда можно получить соотношение

$$\begin{aligned} M_{Z_1\alpha_1}(0) &= \int\limits_{\mathbb{R}^{3n}} z_1^{\alpha_1}\, p_{Z_1}(\boldsymbol{z}_1, 0)\, d\boldsymbol{z}_1 \equiv \\ &\equiv \int\limits_{\mathbb{R}^{3n}} y^{\alpha_Y}\, x_0^{\alpha_{X0}}\, x_1^{\alpha_{X1}}\, p_{Z_0}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \tau)\, \delta_0(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}_0)\, d\boldsymbol{y}\, d\boldsymbol{x}_0\, d\boldsymbol{x}_1 = \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} x_0^{\alpha_Y + \alpha_{X0}}\, x_1^{\alpha_{X1}}\, p_{Z_0}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \tau)\, d\boldsymbol{x}_0\, d\boldsymbol{x}_1 = M_{Z_0, \langle \alpha_Y + \alpha_{X0}, \alpha_{X1} \rangle}(\tau). \end{aligned}$$

... ...

N°. На последнем шаге рассматриваются промежутки времени Δ_0, Δ_1, ..., Δ_N и строится система СОДУ для вектора состояния $\boldsymbol{Z}_N(s)$ в виде:

$$\begin{aligned} &d\boldsymbol{Y}(s) = \boldsymbol{O}_n\, ds, \qquad \boldsymbol{Y}(0) = \boldsymbol{X}^0, \\ &d\boldsymbol{X}_0(s) = \big[\boldsymbol{\mathcal{A}}_0(s_0)\, \boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{c}_0(s_0)\big]\, ds + \\ &\quad + \big[\, [\![\boldsymbol{\mathcal{B}}_0(s_0)]\!] :: \boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s_0)\,\big] \circ d\boldsymbol{W}_0(s), \qquad \boldsymbol{X}_0(0) = \boldsymbol{X}^0, \\ &d\boldsymbol{X}_1(s) = \big[\boldsymbol{\mathcal{A}}(s_1)\, \boldsymbol{X}_1(t) + \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_1)\, \boldsymbol{X}_0(s) + \\ &\quad + \boldsymbol{c}(s_1)\big]\, ds + \big[[\![\boldsymbol{\mathcal{B}}(s_1)]\!] :: \boldsymbol{X}_1(s) + \\ &\quad + [\![\boldsymbol{\mathcal{H}}(s_1)]\!] :: \boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{\mathcal{G}}(s_1)\big] \circ d\boldsymbol{W}_1(s), \qquad \boldsymbol{X}_1(0) = \boldsymbol{X}_0(\tau). \qquad (2.2.60) \\ &\quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ &d\boldsymbol{X}_N(s) = \big[\boldsymbol{\mathcal{A}}(s_N)\, \boldsymbol{X}_N(t) + \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_N)\, \boldsymbol{X}_{N-1}(s) + \\ &\quad + \boldsymbol{c}(s_N)\big]\, ds + \big[\, [\![\boldsymbol{\mathcal{B}}(s_N)]\!] :: \boldsymbol{X}_N(s) + \\ &\quad + [\![\boldsymbol{\mathcal{H}}(s_N)]\!] :: \boldsymbol{X}_{N-1}(s) + \boldsymbol{\mathcal{G}}(s_N)\,\big] \circ dW_N(s), \qquad \boldsymbol{X}_N(0) = \boldsymbol{X}_{N-1}(\tau). \end{aligned}$$

Последующие действия аналогичны действиям, выполненным в процессе выполнения шагов **0°**, **1°**, ..., **(N-1)°**, и включают следующие этапы:

(1) записать сжатую форму уравнений (2.2.60):

$$d\boldsymbol{Z}_N(s) = \big[\boldsymbol{\mathcal{A}}_N^+(s)\,\boldsymbol{Z}_N(s) + \boldsymbol{c}_N^+(s)\big]\,ds + \big[\,[\![\boldsymbol{\mathcal{B}}_N^+(s)]\!] :: \boldsymbol{Z}_N(s) + \\ + \boldsymbol{\mathcal{G}}_N^+(s)\,\big]\circ d\boldsymbol{W}_N^+(s), \quad \boldsymbol{Z}_N(0) = \mathrm{col}\,\big(\boldsymbol{Z}_{N-1}(0), \boldsymbol{X}_{N-1}(\tau)\big) \qquad (2.2.61)$$

где используемые матрицы и векторы вычисляются следующим образом:

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_N^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{A}}_{N-1}^+(s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{(N+1)n\times n} \\ [\boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times Nn} \;\; \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_N)] & \boldsymbol{\mathcal{A}}(s_N) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c}_N^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_{N-1}^+(s) \\ \boldsymbol{c}(s_N) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}_N^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{G}}_{N-1}^+(s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{(N+1)n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times Nm} & \boldsymbol{\mathcal{G}}(s_N) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{W}_N^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{W}_{N-1}^+(s) \\ \boldsymbol{W}_N(s) \end{bmatrix};$$

$$[\![\boldsymbol{\mathcal{B}}_N^+(s)]\!] = \begin{bmatrix} [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ \cdots \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \end{bmatrix} \ddagger \begin{bmatrix} [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{B}}_0(s_0)]\!] \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{H}}(s_1)]\!] \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ \cdots \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \end{bmatrix} \ddagger \begin{bmatrix} [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{B}}(s_1)]\!] \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{H}}(s_2)]\!] \\ \cdots \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \end{bmatrix} \ddagger \qquad (2.2.62)$$

$$\ddagger \ldots \ddagger \begin{bmatrix} [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ \cdots \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{B}}(s_{N-1})]\!] \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{H}}(s_N)]\!] \end{bmatrix} \ddagger \begin{bmatrix} [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ \cdots \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{B}}(s_N)]\!] \end{bmatrix};$$

(2) сравнить структуры систем СОДУ (2.2.61), (2.2.62) и (П.2.1), (П.2.2) и установить, что эти системы одинаковы, если

$$r = (N+2)\,n, \quad q = (N+1)\,m, \quad s_* = 0, \quad s^* = \tau, \quad \underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_N^+(s), \\ \underline{\boldsymbol{c}}(s) = \boldsymbol{c}_N^+(s), \quad [\![\underline{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(s)]\!] = [\![\boldsymbol{\mathcal{B}}_N^+(s)]\!], \quad \underline{\boldsymbol{\mathcal{G}}}(s) = \boldsymbol{\mathcal{G}}_N^+(s);$$

(3) построить ФПК-уравнение для плотности распределения вероятностей $p_{Z_N}(\boldsymbol{z}_N, s)$ векторного процесса состояния $\boldsymbol{Z}_N(s)$ следующим образом:

$$\frac{\partial p_{Z_N}}{\partial s} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{(N+2)n} \frac{\partial^2\big(\tilde{b}_{Nij}\,p_{Z_N}\big)}{\partial z_{Ni}\,\partial z_{Nj}} - \sum_{i=1}^{(N+2)n} \frac{\partial\big(\tilde{a}_{Ni}\,p_{Z_N}\big)}{\partial z_{Ni}}, \\ p_{Z_N}(\boldsymbol{z}_N, 0) \equiv p_{Z_N}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{N-1}, \boldsymbol{x}_N, 0) = \\ = p_{Z_{N-1}}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{N-1}, \boldsymbol{x}_N, \tau)\,\delta_0(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}_0); \qquad (2.2.63)$$

(4) вычислить коэффициенты $\tilde{a}_{Ni}$ и $\tilde{b}_{Nij}$ из формул (П.2.5), (П.2.6) как $\hat{a}_i$ и $\hat{b}_{ij}$ соответственно;

(5) построить явный вид уравнений (П.2.7), (П.2.8), (П.2.9);

(6) установить начальные условия для $\boldsymbol{m}_{Z_N}(s)$ и $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_N Z_N}(s)$ из $\boldsymbol{Z}_N(s)$ в виде:

$$\boldsymbol{m}_{Z_N}(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_{Z_{N-1}}(0) \\ \boldsymbol{m}_{X_{N-1}}(\tau) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_N Z_N}(0) =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathcal{K}^0_{XX} & \mathcal{K}^0_{XX} & \mathcal{K}_{YX_0}(\tau) & ... & \mathcal{K}_{YX_{N-1}}(\tau) \\ \mathcal{K}^0_{XX} & \mathcal{K}^0_{XX} & \mathcal{K}_{YX_0}(\tau) & ... & \mathcal{K}_{YX_{N-1}}(\tau) \\ \mathcal{K}_{X_0Y}(\tau) & \mathcal{K}_{X_0Y}(\tau) & \mathcal{K}_{X_0X_0}(\tau) & ... & \mathcal{K}_{X_0X_{N-1}}(\tau) \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ \mathcal{K}_{X_{N-1}Y}(\tau) & \mathcal{K}_{X_{N-1}Y}(\tau) & \mathcal{K}_{X_{N-1}X_0}(\tau) & ... & \mathcal{K}_{X_{N-1}X_{N-1}}(\tau) \end{bmatrix} \tag{2.2.64}$$

и вычислить $\boldsymbol{m}_{Z_N}(s)$ как $\underline{\boldsymbol{m}}_Z(s)$ и $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_N Z_N}(s)$ как $\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_{ZZ}(s)$.

Тогда начальные условия состояния для произвольных моментных функций $M_{Z_N\alpha}(s) = \mathbb{E}[Z_N^{\alpha_N}(s)]$, где

$$\alpha_N = \langle \alpha_Y, \alpha_{X0}, \alpha_{X1}, ..., \alpha_{XN} \rangle$$

– мультииндекс, будут иметь следующую форму:

$$M_{Z_N\alpha_N}(0) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n(N+1)}} z_N^{\alpha_N}\, p_{Z_N}(\boldsymbol{z}_N, 0)\, d\boldsymbol{z}_N \equiv$$

$$\equiv \int\limits_{\mathbb{R}^{n(N+1)}} y^{\alpha_Y}\, x_0^{\alpha_{X0}}\, x_1^{\alpha_{X1}} ... x_N^{\alpha_{XN}} \times$$

$$\times\, p_{Z_{N-1}}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_{N-1}, \tau)\, \delta_0(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}_0)\, d\boldsymbol{y}\, d\boldsymbol{x}_0\, d\boldsymbol{x}_1 ... d\boldsymbol{x}_{N-1} =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{n(N+1)}} x_0^{\alpha_Y+\alpha_{X0}}\, x_1^{\alpha_{X1}} ... x_N^{\alpha_{XN}} \times$$

$$\times\, p_{Z_{N-1}}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_{N-1}, \tau)\, d\boldsymbol{x}_0\, d\boldsymbol{x}_1 ... d\boldsymbol{x}_{N-1} =$$

$$= M_{Z_{N-1},\langle \alpha_Y+\alpha_{X0}, \alpha_{X1}, ..., \alpha_{XN} \rangle}(\tau).$$

Пример 2.2.7. Рассмотрим следующую колебательную стохастическую систему, записанную в нестрогой форме:

$$\ddot{X}(t) = 0, \quad -\tau < t \leqslant 0, \tag{2.2.65}$$

$$\ddot{X}(t) + 2\,\alpha_1\left[1 + \beta_1\,V_1(t)\right]\dot{X}(t) + 2\,\alpha_2\left[1 + \beta_2\,V_2(t)\right]\dot{X}(t-\tau)$$
$$+\omega_0^2\,X(t) + \alpha_3\left[1 + \beta_3\,V_3(t)\right]X(t-\tau) = \gamma\,V_4(t), \quad 0 < t \leqslant N\,\tau, \qquad (2.2.66)$$

где $\alpha_1 > 0$, β_1, α_2, β_2, $\omega_0 > 0$, α_3, β_3, γ – постоянные, $N \in \mathbb{N}$, $N < +\infty$. Обозначая $X(t)$ через $X_1(t)$ и $\dot{X}(t)$ через $X_2(t)$, можно записать уравнения (2.2.65), (2.2.66) в виде (2.2.43), (2.2.45). В этом случае

$$n = 2, \quad m = 4, \quad t_0 = -\tau, \quad T = N\,\tau, \quad \boldsymbol{\mathcal{G}}_0 = \boldsymbol{\mathcal{O}}_{2\times 4},$$

$$\boldsymbol{X}(t) = \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{A}}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c}_0 = \boldsymbol{O}_2, \quad [\![\boldsymbol{\mathcal{B}}_0]\!] = [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{2\times 4\times 2},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\,\alpha_1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{Q}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\alpha_3 & -2\,\alpha_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \boldsymbol{O}_2,$$

$$[\![\boldsymbol{\mathcal{B}}]\!] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ddagger \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\,\alpha_1\,\beta_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{G}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix},$$

$$[\![\boldsymbol{\mathcal{H}}]\!] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_3\,\beta_3 & 0 \end{bmatrix} \ddagger \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\,\alpha_2\,\beta_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

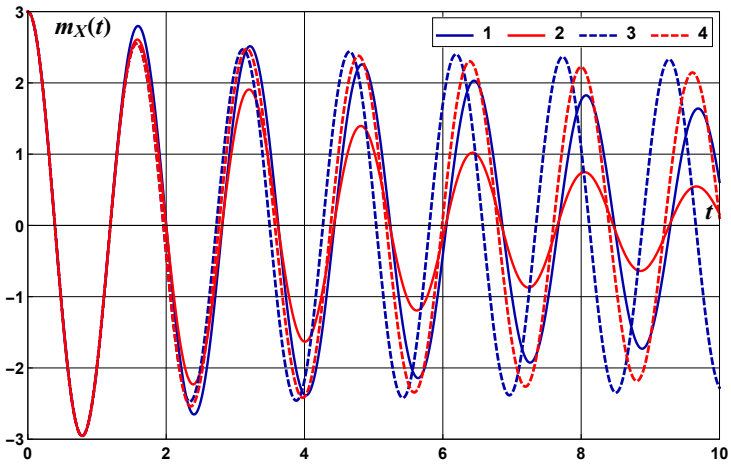


Рис. 2.2.18

Расчеты статистических характеристик вектора $\boldsymbol{X}(t)$ выполнялись при следующих значениях параметров:

$$\alpha_1 = 0.1, \quad \beta_1 = 0.1, \quad \alpha_2 = 0.1, \quad \beta_2 = 0.05, \quad \omega_0 = 4.0,$$

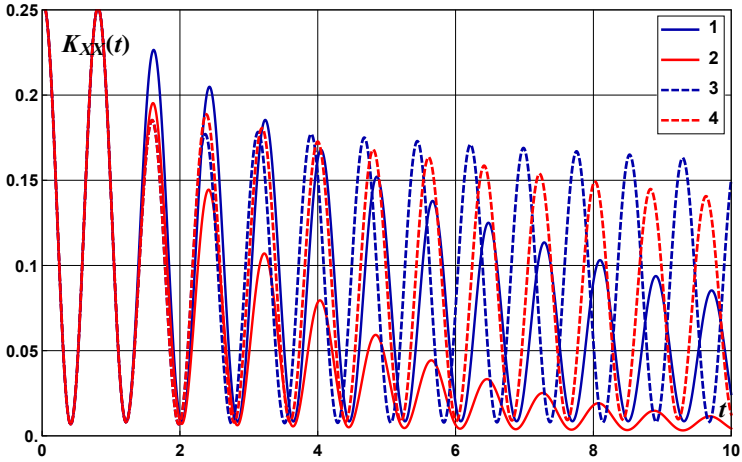


Рис. 2.2.19

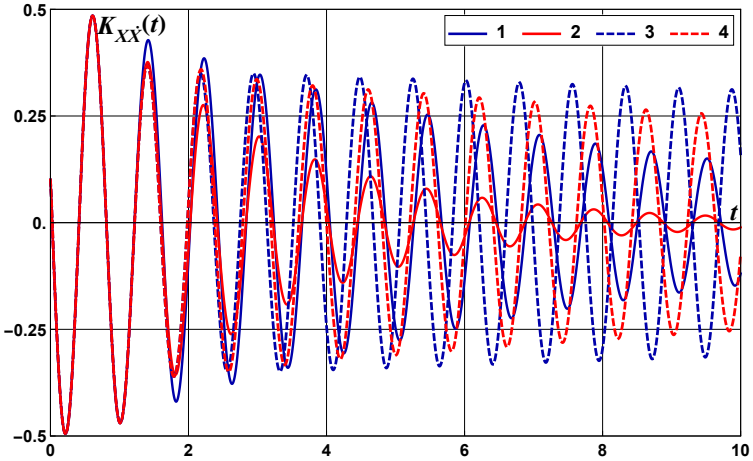


Рис. 2.2.20

$$\alpha_3 = 0.5, \quad \beta_3 = 0.1, \quad \gamma = 0.1, \quad \tau \in \{1.0, 1.25, 2.0, 2.5\},$$

$$\boldsymbol{m}_X^0 = \begin{bmatrix} 3.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.10 \\ 0.10 & 0.16 \end{bmatrix}.$$

Часть результатов этих расчетов представлена на рис. 2.2.18–2.2.25.

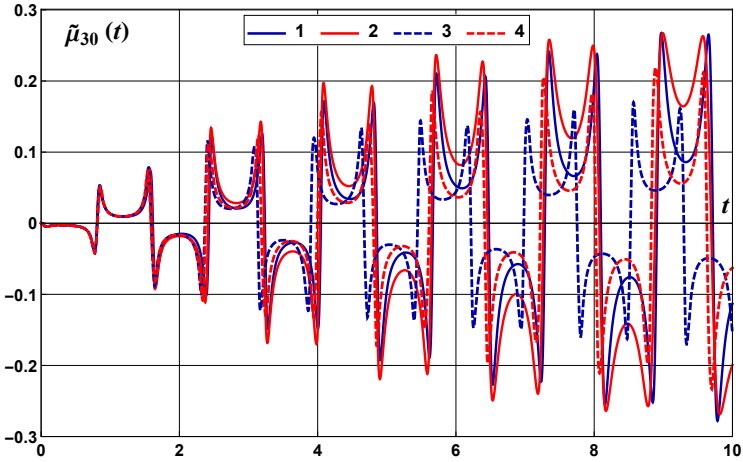


Рис. 2.2.21

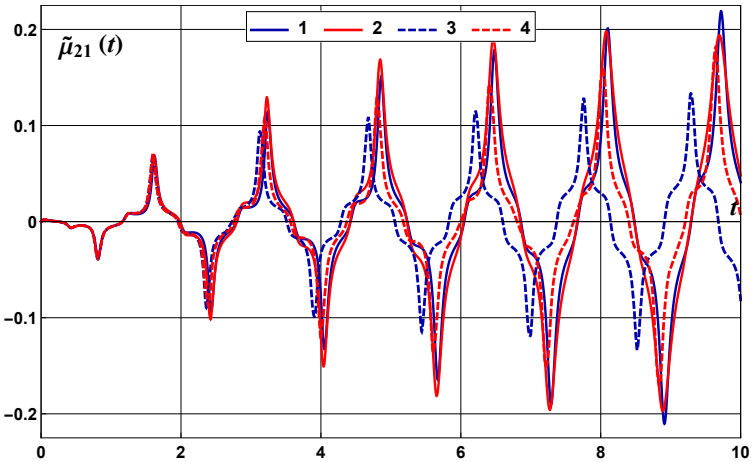


Рис. 2.2.22

Рис. 2.2.18 показывают динамику изменения функций математического ожидания $m_X(t)$, рис. 2.2.19 – дисперсии $\mathcal{K}_{XX}(t)$, 2.2.20 – ковариации $\mathcal{K}_{X\dot{X}}(t)$, нормированных центральных моментов:

2.2.21 – $\widetilde{\mu}_{30}(t) = \mathbb{E}\big[\widetilde{X}^3(t)\big]$, 2.2.22 – $\widetilde{\mu}_{21}(t) = \mathbb{E}\big[\widetilde{X}^2(t)\,\widetilde{\dot{X}}(t)\big]$,

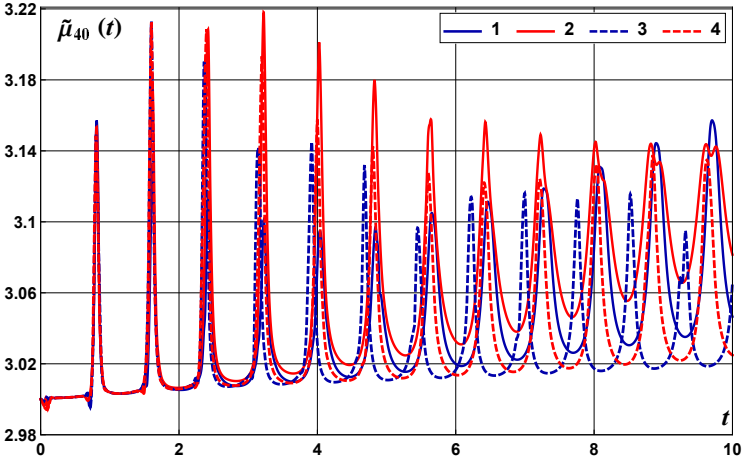


Рис. 2.2.23

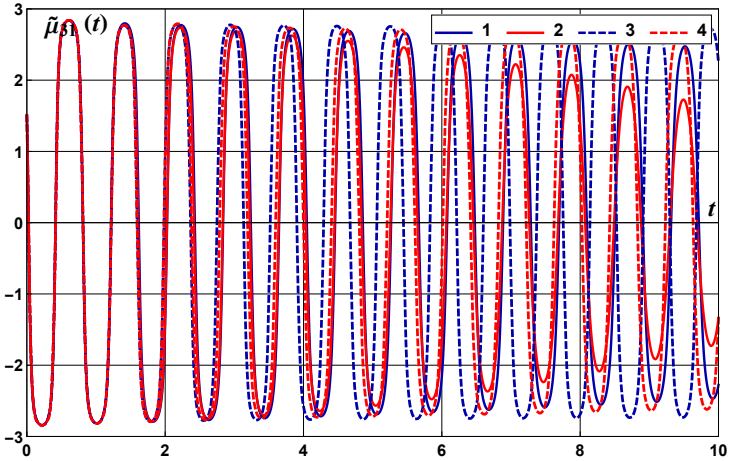


Рис. 2.2.24

2.2.23 – $\widetilde{\mu}_{40}(t) = \mathbb{E}\big[\widetilde{X}^4(t)\big]$, 2.2.24 – $\widetilde{\mu}_{31}(t) = \mathbb{E}\big[\widetilde{X}^3(t)\,\dot{\widetilde{X}}(t)\big]$,

2.2.25 – $\widetilde{\mu}_{22}(t) = \mathbb{E}\big[\widetilde{X}^2(t)\,\dot{\widetilde{X}}^2(t)\big]$,

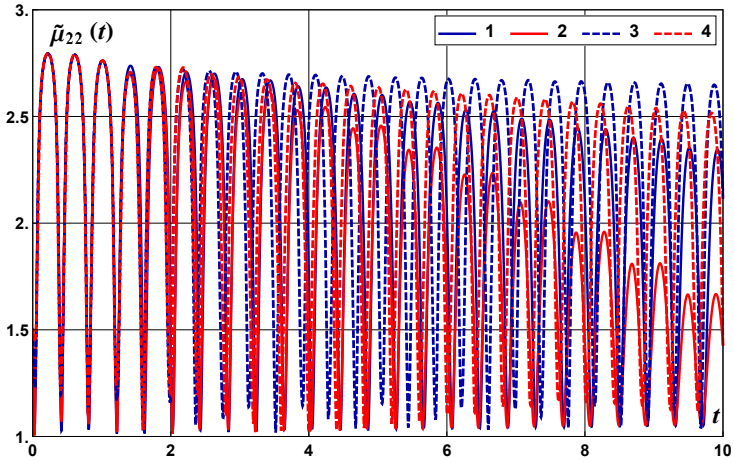


Рис. 2.2.25

где

$$\widetilde{X}(t)=\frac{X(t)-m_X(t)}{\sigma_X(t)},\qquad \widetilde{\dot{X}}(t)=\frac{\dot{X}(t)-m_{\dot{X}}(t)}{\sigma_{\dot{X}}(t)}.$$

Поведение функции $m_{\dot{X}}(t)$ подобно $m_X(t)$, $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{\dot{X}\dot{X}}(t)$ – $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}(t)$, $\widetilde{\mu}_{03}(t)$ – $\widetilde{\mu}_{30}(t)$, $\widetilde{\mu}_{12}(t)$ – $\widetilde{\mu}_{21}(t)$, $\widetilde{\mu}_{04}(t)$ – $\widetilde{\mu}_{04}(t)$, $\widetilde{\mu}_{13}(t)$ – $\widetilde{\mu}_{31}(t)$. Номера линий соответствуют порядку длин запаздываний.

Анализируя полученные результаты расчетов, несложно установить, что увеличение запаздывания ведет к потере устойчивости рассматриваемой системы по моментам. ►

2.2.2.5. Системы СОДУ нейтрального типа с кратными постоянными запаздываниями

Модифицируем теперь схему расширения пространства состояния на стохастические системы нейтрального типа с кратными постоянными запаздываниями [814], а затем продемонстрируем применение этой методики на примерах.

Рассмотрим линейную систему СОДУ нейтрального типа с кратными постоянными запаздываниями $\tau>0$ следующего вида:

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t)=\sum_{\ell=0}^{\nu}\boldsymbol{\mathcal{Q}}_{\nu\ell}(t)\,\boldsymbol{X}\big(t-(\nu-\ell)\,\tau\big)+\sum_{\ell=0}^{\nu-1}\boldsymbol{\mathcal{R}}_{\nu\ell}(t)\,\dot{\boldsymbol{X}}\big(t-(\nu-\ell)\,\tau\big)+$$

$$+\boldsymbol{c}_\nu(t)+\boldsymbol{\mathcal{G}}_{\nu\nu}(t)\,\boldsymbol{V}(t),\quad t_\nu=t_0+\nu\,\tau<t\leqslant T<+\infty, \tag{2.2.67}$$

где τ – постоянное запаздывание, $\nu>0$ – целое, $\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $\boldsymbol{V}\in\mathbb{R}^m$ – вектор независимых белых шумов, $\boldsymbol{\mathcal{Q}}_{\nu\ell}(\cdot)=\{q_{\nu\ell ij}(\cdot)\}$, $\boldsymbol{\mathcal{R}}_{\nu\ell}(\cdot)=\{r_{\nu\ell ij}(\cdot)\}\colon[t_0,\infty)\mapsto\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\mathcal{G}}_{\nu\nu}(\cdot)=\{g_{\nu\nu ij}(\cdot)\}:[t_0,\infty)\mapsto\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ и $\boldsymbol{c}_\nu(\cdot)=\{c_{\nu i}(\cdot)\}:[t_0,\infty)\mapsto\mathbb{R}^n$ – детерминированные непрерывные матричные и векторная функции аргумента t.

Предположим, что на полуинтервалах $(t_0,t_1]$, $(t_1,t_2]$, ..., $(t_{\nu-1},t_\nu]$ вектор состояния $\boldsymbol{X}(t)$, характеризуемый одноточечной плотностью вероятности $p(\boldsymbol{x},t)$, удовлетворяет следующим системам СОДУ и СОДУНТ:

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t)=\boldsymbol{\mathcal{Q}}_{00}(t)\,\boldsymbol{X}(t)+\boldsymbol{c}_0(t)+\boldsymbol{\mathcal{G}}_{00}(t)\,\boldsymbol{V}(t),\quad t_0<t\leqslant t_1,\quad \boldsymbol{X}(t_0)=\boldsymbol{X}^0,$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t)=\sum_{\ell=0}^{k}\boldsymbol{\mathcal{Q}}_{k\ell}(t)\,\boldsymbol{X}\big(t-(k-\ell)\,\tau\big)+\sum_{\ell=0}^{k-1}\boldsymbol{\mathcal{R}}_{k\ell}(t)\,\dot{\boldsymbol{X}}\big(t-(k-\ell)\,\tau\big)+$$

$$+\,\boldsymbol{c}_k(t)+\boldsymbol{\mathcal{G}}_{kk}(t)\,\boldsymbol{V}(t),\qquad t_k<t\leqslant t_{k+1},$$

$$t_k=t_0+k\,\tau,\qquad k=1,2,...,\nu-1,$$

где $\boldsymbol{\mathcal{Q}}_{00}(\cdot)=\{q_{00ij}(\cdot)\}$, $\boldsymbol{\mathcal{Q}}_{k\ell}(\cdot)=\{q_{k\ell ij}(\cdot)\}$, $\boldsymbol{\mathcal{R}}_{k\ell}(\cdot)=\{r_{k\ell ij}(\cdot)\}\colon[t_0,\infty)\mapsto\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\mathcal{G}}_{00}(\cdot)=\{g_{00ij}(\cdot)\}$, $\boldsymbol{\mathcal{G}}_{kk}(\cdot)=\{g_{kkij}(\cdot)\}:[t_0,\infty)\mapsto\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ и $\boldsymbol{c}_0(\cdot)=\{c_{0i}(\cdot)\}$, $\boldsymbol{c}_k(\cdot)=\{c_{ki}(\cdot)\}:[t_0,\infty)\mapsto\mathbb{R}^n$ – детерминированные непрерывные матричные и векторные функции аргумента t.

Построим системы ОДУ для компонент вектора функций математического ожидания $\boldsymbol{m}_X(t)=\mathbb{E}[\boldsymbol{X}(t)]$ и матрицы ковариаций $\boldsymbol{\mathcal{K}}(t)=\mathbb{E}[\{\boldsymbol{X}(t)-\boldsymbol{m}_X(t)\}\{\boldsymbol{X}(t)-\boldsymbol{m}_X(t)\}^\intercal]$ вектора состояний $\boldsymbol{X}$ при любом $t>t_0$, если в момент времени t_0 заданы значения элементов вектора математических ожиданий $\boldsymbol{m}^0=\mathbb{E}\big[\boldsymbol{X}^0\big]$ и ковариационной матрицы $\boldsymbol{\mathcal{K}}^0=\mathbb{E}\big[\big(\boldsymbol{X}^0-\boldsymbol{m}^0\big)\big(\boldsymbol{X}^0-\boldsymbol{m}^0\big)^\intercal\big]$.

Для получения СОДУ без запаздывания и получения марковских систем, как и выше, применим метод расширения пространства состояний. Для этого воспользуемся обозначениями, введенными ранее.

Рассмотрим последовательность полуинтервалов (сегментов) Δ_q.

0°. На сегменте Δ_0 систему СОДУ, решением которой является случайная векторная функция $\boldsymbol{Z}_0(s)$, можно записать в следующем виде (здесь и далее точкой обозначена производная по переменной s):

$$\dot{\boldsymbol{Z}}_0(s)=\boldsymbol{\mathcal{A}}_0(s)\,\boldsymbol{Z}_0(s)+\boldsymbol{f}_0(s)+\boldsymbol{\mathcal{B}}_0(s)\,\boldsymbol{U}_0(s), \tag{2.2.68}$$

где

$$\boldsymbol{Z}_0(s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Y}(s)\\ \boldsymbol{X}_0(s)\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{U}_0(s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}_n\\ \boldsymbol{V}_0(s)\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{f}_0(s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}_n\\ \boldsymbol{c}_0^+\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_0(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{00}^{+} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{B}}_0(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{G}}_{00}^{+} \end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{c}_0^{+} = \boldsymbol{c}_0(s_0), \qquad \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{00}^{+} = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{00}(s_0), \qquad \boldsymbol{\mathcal{G}}_{00}^{+} = \boldsymbol{\mathcal{G}}_{00}(s_0).$$

1°. На сегментах Δ_0 и Δ_1 систему СОДУ для вычисления вектора $\boldsymbol{Z}_1(s)$ можно представить так:

$$\dot{\boldsymbol{Z}}_1(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_1(s)\,\boldsymbol{Z}_1(s) + \boldsymbol{f}_1(s) + \boldsymbol{\mathcal{B}}_1(s)\,\boldsymbol{U}_1(s), \tag{2.2.69}$$

где

$$\boldsymbol{Z}_1(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Y}(s) \\ \boldsymbol{X}_0(s) \\ \boldsymbol{X}_1(s) \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{U}_1(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O}_n \\ \boldsymbol{V}_0(s) \\ \boldsymbol{V}_1(s) \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{f}_1(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O}_n \\ \boldsymbol{c}_0^{+} \\ \boldsymbol{c}_1^{+} \end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_1(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{00}^{+} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{10}^{+} & \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{11}^{+} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{B}}_1(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{G}}_{00}^{+} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{G}}_{10}^{+} & \boldsymbol{\mathcal{G}}_{11}^{+} \end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{\mathcal{Q}}_{10}^{+} = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{10}(s_1) + \boldsymbol{\mathcal{R}}_{10}(s_1)\,\boldsymbol{\mathcal{Q}}_{00}^{+}, \qquad \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{11}^{+} = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{11}(s_1),$$
$$\boldsymbol{c}_1^{+} = \boldsymbol{c}_1(s_1) + \boldsymbol{\mathcal{R}}_{10}(s_1)\,\boldsymbol{c}_0^{+},$$
$$\boldsymbol{\mathcal{G}}_{10}^{+} = \boldsymbol{\mathcal{R}}_{10}(s_1)\,\boldsymbol{\mathcal{G}}_{00}^{+}, \qquad \boldsymbol{\mathcal{G}}_{11}^{+} = \boldsymbol{\mathcal{G}}_{11}(s_1).$$

2°. Рассматривая сегменты Δ_0, Δ_1 и Δ_2 совместно, запишем систему СОДУ для вычисления вектора $\boldsymbol{Z}_2(s)$:

$$\dot{\boldsymbol{Z}}_2(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_2(s)\,\boldsymbol{Z}_2(s) + \boldsymbol{f}_2(s) + \boldsymbol{\mathcal{B}}_2(s)\,\boldsymbol{U}_2(s),$$

где

$$\boldsymbol{Z}_2(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Z}_1(s) \\ \boldsymbol{X}_2(s) \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{U}_2(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{U}_1(s) \\ \boldsymbol{V}_2(s) \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{f}_2(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_1(s) \\ \boldsymbol{c}_2^{+} \end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_2(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{A}}_1(s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{3n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{A}}_2^{+} & \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{22}^{+} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\mathcal{B}}_2(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{B}}_1(s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{3n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{B}}_2^{+} & \boldsymbol{\mathcal{G}}_{22}^{+} \end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_2^{+} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{20}^{+} & \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{21}^{+} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\mathcal{B}}_2^{+} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{G}}_{20}^{+} & \boldsymbol{\mathcal{G}}_{21}^{+} \end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{\mathcal{Q}}_{20}^{+} = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{20}(s_2) + \boldsymbol{\mathcal{R}}_{20}(s_2)\,\boldsymbol{\mathcal{Q}}_{00}^{+} + \boldsymbol{\mathcal{R}}_{21}(s_2)\,\boldsymbol{\mathcal{Q}}_{10}^{+},$$
$$\boldsymbol{\mathcal{Q}}_{21}^{+} = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{21}(s_2) + \boldsymbol{\mathcal{R}}_{21}(s_2)\,\boldsymbol{\mathcal{Q}}_{11}^{+}, \qquad \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{22}^{+} = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{22}(s_2),$$
$$\boldsymbol{c}_2^{+} = \boldsymbol{c}_2(s_2) + \boldsymbol{\mathcal{R}}_{20}(s_2)\,\boldsymbol{c}_0^{+} + \boldsymbol{\mathcal{R}}_{21}(s_2)\,\boldsymbol{c}_1^{+},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}_{20}^{+} = \boldsymbol{\mathcal{R}}_{20}(s_2)\,\boldsymbol{\mathcal{G}}_{00}^{+} + \boldsymbol{\mathcal{R}}_{21}(s_2)\,\boldsymbol{\mathcal{G}}_{10}^{+}, \qquad \boldsymbol{\mathcal{G}}_{21}^{+} = \boldsymbol{\mathcal{R}}_{21}(s_2)\,\boldsymbol{\mathcal{G}}_{11}^{+},$$
$$\boldsymbol{\mathcal{G}}_{22}^{+} = \boldsymbol{\mathcal{G}}_{22}(s_2).$$

... ...

$\boldsymbol{\nu}^{\circ}$. Продолжая подобным образом и далее, для сегментов Δ_0, Δ_1, Δ_2, ..., Δ_ν запишем систему СОДУ для вычисления вектора $\boldsymbol{Z}_\nu(s)$:

$$\dot{\boldsymbol{Z}}_\nu(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_\nu(s)\,\boldsymbol{Z}_\nu(s) + \boldsymbol{f}_\nu(s) + \boldsymbol{\mathcal{B}}_\nu(s)\,\boldsymbol{U}_\nu(s),$$

где

$$\boldsymbol{Z}_\nu(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Z}_{\nu-1}(s) \\ \boldsymbol{X}_\nu(s) \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{U}_\nu(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{U}_{\nu-1}(s) \\ \boldsymbol{V}_\nu(s) \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{f}_\nu(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_{\nu-1}(s) \\ \boldsymbol{c}_\nu^{+} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_\nu(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\nu-1}(s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{(\nu+1)n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{A}}_\nu^{+} & \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{\nu\nu}^{+} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\mathcal{B}}_\nu(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{B}}_{\nu-1}(s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{(\nu+1)n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{B}}_\nu^{+} & \boldsymbol{\mathcal{G}}_{\nu\nu}^{+} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_\nu^{+} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{\nu 0}^{+} & \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{\nu 1}^{+} & \ldots & \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{\nu,\nu-1}^{+} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{B}}_\nu^{+} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{G}}_{\nu 0}^{+} & \boldsymbol{\mathcal{G}}_{\nu 1}^{+} & \ldots & \boldsymbol{\mathcal{G}}_{\nu,\nu-1}^{+} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{Q}}_{\nu j}^{+} = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{\nu j}(s_\nu) + \sum_{\ell=j}^{\nu-1} \boldsymbol{\mathcal{R}}_{\nu\ell}(s_\nu)\,\boldsymbol{\mathcal{Q}}_{\ell j}^{+}, \quad j = 0, 1, ..., \nu-1, \quad \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{\nu\nu}^{+} = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{\nu\nu}(s_\nu),$$

$$\boldsymbol{c}_\nu^{+} = \boldsymbol{c}_\nu(s_\nu) + \sum_{\ell=0}^{\nu-1} \boldsymbol{\mathcal{R}}_{\nu\ell}(s_\nu)\,\boldsymbol{c}_\ell^{+},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}_{\nu j}^{+} = \sum_{\ell=j}^{\nu-1} \boldsymbol{\mathcal{R}}_{\nu\ell}(s_\nu)\,\boldsymbol{\mathcal{G}}_{\ell j}^{+}, \quad j = 0, 1, ..., \nu-1, \quad \boldsymbol{\mathcal{G}}_{\nu\nu}^{+} = \boldsymbol{\mathcal{G}}_{\nu\nu}(s_\nu).$$

... ...

$\boldsymbol{(\nu{+}1)}^{\circ}$. Теперь сегменты Δ_0, Δ_1, Δ_2, ..., Δ_ν, $\Delta_{\nu+1}$ запишем систему СОДУ для вычисления вектора $\boldsymbol{Z}_{\nu+1}(s)$:

$$\dot{\boldsymbol{Z}}_{\nu+1}(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\nu+1}(s)\,\boldsymbol{Z}_{\nu+1}(s) + \boldsymbol{f}_{\nu+1}(s) + \boldsymbol{\mathcal{B}}_{\nu+1}(s)\,\boldsymbol{U}_{\nu+1}(s),$$

где

$$\boldsymbol{Z}_{\nu+1}(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Z}_\nu(s) \\ \boldsymbol{X}_{\nu+1}(s) \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{U}_{\nu+1}(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{U}_\nu(s) \\ \boldsymbol{V}_{\nu+1}(s) \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{f}_{\nu+1}(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_\nu(s) \\ \boldsymbol{c}_{\nu+1}^{+} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\nu+1}(s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\nu}(s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{(\nu+2)n\times n}\\ \boldsymbol{\mathcal{A}}^{+}_{\nu+1} & \boldsymbol{\mathcal{Q}}^{+}_{\nu+1,\nu+1}\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{\mathcal{B}}_{\nu+1}(s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\nu}(s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{(\nu+2)n\times m}\\ \boldsymbol{\mathcal{B}}^{+}_{\nu+1} & \boldsymbol{\mathcal{G}}^{+}_{\nu+1,\nu+1}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}^{+}_{\nu+1}=\bigl[\boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n}\ \ \boldsymbol{\mathcal{Q}}^{+}_{\nu+1,0}\ \ \boldsymbol{\mathcal{Q}}^{+}_{\nu+1,1}\ \ \ldots\ \ \boldsymbol{\mathcal{Q}}^{+}_{\nu+1,\nu}\bigr],$$

$$\boldsymbol{\mathcal{B}}^{+}_{\nu+1}=\bigl[\boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m}\ \ \boldsymbol{\mathcal{G}}^{+}_{\nu+1,0}\ \ \boldsymbol{\mathcal{G}}^{+}_{\nu+1,1}\ \ \ldots\ \ \boldsymbol{\mathcal{G}}^{+}_{\nu+1,\nu}\bigr],$$

$$\boldsymbol{\mathcal{Q}}^{+}_{\nu+1,j}=(1-\delta_{j0})\,\boldsymbol{\mathcal{Q}}_{\nu,j-1}(s_{\nu+1})+\sum_{\ell=\max\{0,j-1\}}^{\nu-1}\boldsymbol{\mathcal{R}}_{\nu\ell}(s_{\nu+1})\,\boldsymbol{\mathcal{Q}}^{+}_{\ell+1,j},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}^{+}_{\nu+1,j}=\sum_{\ell=\max\{0,j-1\}}^{\nu-1}\boldsymbol{\mathcal{R}}_{\nu\ell}(s_{\nu+1})\,\boldsymbol{\mathcal{G}}^{+}_{\ell+1,j},\qquad j=0,1,...,\nu,$$

$$\boldsymbol{c}^{+}_{\nu+1}=\boldsymbol{c}_{\nu}(s_{\nu+1})+\sum_{\ell=0}^{\nu-1}\boldsymbol{\mathcal{R}}_{\nu\ell}(s_{\nu+1})\,\boldsymbol{c}^{+}_{\ell+1},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{Q}}^{+}_{\nu+1,\nu+1}=\boldsymbol{\mathcal{Q}}_{\nu\nu}(s_{\nu+1}),\qquad \boldsymbol{\mathcal{G}}^{+}_{\nu+1,\nu+1}=\boldsymbol{\mathcal{G}}_{\nu\nu}(s_{\nu+1}).$$

... ...

$(\boldsymbol{\nu}+k)^{\circ}$. Рассматривая по аналогии сегменты Δ_0, Δ_1, ..., Δ_ν, $\Delta_{\nu+1}$, ..., $\Delta_{\nu+k}$ ($k=1, 2, ..., N-\nu$), получим

$$\dot{\boldsymbol{Z}}_{\nu+k}(s)=\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\nu+k}(s)\,\boldsymbol{Z}_{\nu+k}(s)+\boldsymbol{f}_{\nu+k}(s)+\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\nu+k}(s)\,\boldsymbol{U}_{\nu+k}(s),$$

где

$$\boldsymbol{Z}_{\nu+k}(s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Z}_{\nu+k-1}(s)\\ \boldsymbol{X}_{\nu+k}(s)\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{U}_{\nu+k}(s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{U}_{\nu+k-1}(s)\\ \boldsymbol{V}_{\nu+k}(s)\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{f}_{\nu+k}(s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{f}_{\nu+k-1}(s)\\ \boldsymbol{c}^{+}_{\nu+k}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\nu+k}(s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\nu+k-1}(s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{(\nu+k+1)n\times n}\\ \boldsymbol{\mathcal{A}}^{+}_{\nu+k} & \boldsymbol{\mathcal{Q}}^{+}_{\nu+k,\nu+k}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\nu+k}(s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\nu+k-1}(s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{(\nu+k+1)n\times m}\\ \boldsymbol{\mathcal{B}}^{+}_{\nu+k} & \boldsymbol{\mathcal{G}}^{+}_{\nu+k,\nu+k}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}^{+}_{\nu+k}=\bigl[\boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n}\ \ \boldsymbol{\mathcal{Q}}^{+}_{\nu+k,0}\ \ \boldsymbol{\mathcal{Q}}^{+}_{\nu+k,1}\ \ \ldots\ \ \boldsymbol{\mathcal{Q}}^{+}_{\nu+k,\nu+k-1}\bigr],$$

$$\boldsymbol{\mathcal{B}}^{+}_{\nu+k}=\bigl[\boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m}\ \ \boldsymbol{\mathcal{G}}^{+}_{\nu+k,0}\ \ \boldsymbol{\mathcal{G}}^{+}_{\nu+k,1}\ \ \ldots\ \ \boldsymbol{\mathcal{G}}^{+}_{\nu+k,\nu+k-1}\bigr],$$

$$\boldsymbol{\mathcal{Q}}^{+}_{\nu+k,j} = \mathbb{1}(j-k)\,\boldsymbol{\mathcal{Q}}_{\nu,j-k}(s_{\nu+k}) + \sum_{\ell=\max\{0,j-k\}}^{\nu-1} \boldsymbol{\mathcal{R}}_{\nu\ell}(s_{\nu+k})\,\boldsymbol{\mathcal{Q}}^{+}_{\ell+k,j},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}^{+}_{\nu+k,j} = \sum_{\ell=\max\{0,j-k\}}^{\nu-1} \boldsymbol{\mathcal{R}}_{\nu\ell}(s_{\nu+k})\,\boldsymbol{\mathcal{G}}^{+}_{\ell+k,j}, \qquad j = 0,1,...,\nu+k-1,$$

$$\boldsymbol{c}^{+}_{\nu+k} = \boldsymbol{c}_{\nu}(s_{\nu+k}) + \sum_{\ell=0}^{\nu-1} \boldsymbol{\mathcal{R}}_{\nu\ell}(s_{\nu+k})\,\boldsymbol{c}^{+}_{\ell+k},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{Q}}^{+}_{\nu+k,\nu+k} = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{\nu\nu}(s_{\nu+k}), \qquad \boldsymbol{\mathcal{G}}^{+}_{\nu+k,\nu+k} = \boldsymbol{\mathcal{G}}_{\nu\nu}(s_{\nu+k}),$$

где $\mathbb{1}(\cdot)$ – функция единичного скачка.

Теперь построенную выше цепочку линейных СДУ без запаздывания на основе применяемой схемы можно использовать для получения новой последовательности уравнений – последовательности систем ОДУ для первых моментов векторов $\boldsymbol{Z}_0(s)$, $\boldsymbol{Z}_1(s)$, ..., $\boldsymbol{Z}_N(s)$. Для этого введем следующие обозначения

$$\boldsymbol{m}_{\ell}(s) = \mathbb{E}[\boldsymbol{Z}_{\ell}(s)] = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{m}_{Y}(s), \boldsymbol{m}_{X_0}(s), \boldsymbol{m}_{X_1}(s), ..., \boldsymbol{m}_{X_{\ell}}(s)\big),$$

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_{\ell}(s) = \mathbb{E}[\{\boldsymbol{Z}_{\ell}(s) - \boldsymbol{m}_{\ell}(s)\}\{\boldsymbol{Z}_{\ell}(s) - \boldsymbol{m}_{\ell}(s)\}^{\mathsf{T}}] =$$

$$= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YY}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_0}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_1}(s) & ... & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_{\ell-1}}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_{\ell}}(s) \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0Y}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0X_0}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0X_1}(s) & ... & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0X_{\ell-1}}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0X_{\ell}}(s) \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_1Y}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_1X_0}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_1X_1}(s) & ... & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_1X_{\ell-1}}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_1X_{\ell}}(s) \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{\ell-1}Y}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{\ell-1}X_0}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{\ell-1}X_1}(s) & ... & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{\ell-1}X_{\ell-1}}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{\ell-1}X_{\ell}}(s) \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{\ell}Y}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{\ell}X_0}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{\ell}X_1}(s) & ... & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{\ell}X_{\ell-1}}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{\ell}X_{\ell}}(s) \end{bmatrix},$$

$$\ell = 0,1,2,...,N.$$

В результате этого решение остающейся части поставленной задачи можно привести к уже стандартной процедуре, тем более, что как и выше, вектор $\boldsymbol{m}_{X_{\ell}}(s)$ и матрица $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{\ell}X_{\ell}}(s)$ являются блоками вектора $\boldsymbol{m}_{\ell}(s)$ и матрицы $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{\ell}(s)$ соответственно, а поэтому после вычисления последних просто требуется выбрать из них необходимые блоки.

Если применить соотношения корреляционной теории, то из предыдущих рассуждений следует, что на шаге ℓ числовые характеристики вектора $\boldsymbol{Z}^{+}_{\ell}(s)$ являются решениями следующих задач Коши:

$$\frac{d\boldsymbol{m}_{\ell}(s)}{ds} = \boldsymbol{\mathcal{A}}^{+}_{\ell}(s)\,\boldsymbol{m}_{\ell}(s) + \boldsymbol{f}^{+}_{\ell}(s),$$

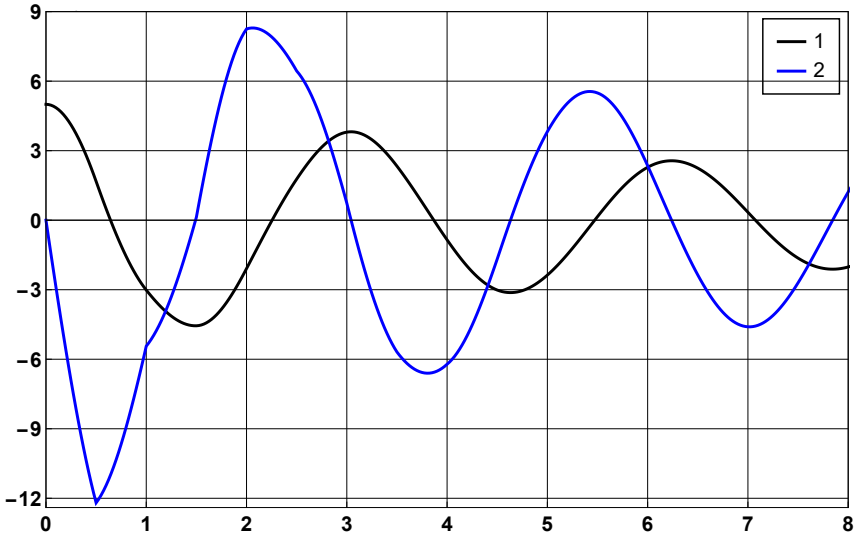


Рис. 2.2.26

$$\boldsymbol{m}_\ell(0) = \operatorname{col}\left(\boldsymbol{m}^0, \boldsymbol{m}^0, \boldsymbol{m}_{X_0}(\tau), \boldsymbol{m}_{X_1}(\tau), ..., \boldsymbol{m}_{X_{\ell-2}}(\tau), \boldsymbol{m}_{X_{\ell-1}}(\tau)\right),$$

$$\frac{d\boldsymbol{\mathcal{K}}_\ell(s)}{ds} = \boldsymbol{\mathcal{A}}_\ell^+(s)\,\boldsymbol{\mathcal{K}}_\ell(s) + \left[\boldsymbol{\mathcal{A}}_\ell^+(s)\,\boldsymbol{\mathcal{K}}_\ell(s)\right]^\intercal + \boldsymbol{\mathcal{B}}_\ell^+(s)\left[\boldsymbol{\mathcal{B}}_\ell^+(s)\right]^\intercal,$$

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_\ell(0) =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathcal{K}^0 & \mathcal{K}^0 & \mathcal{K}_{YX_0}(\tau) & ... & \mathcal{K}_{YX_{\ell-2}}(\tau) & \mathcal{K}_{YX_{\ell-1}}(\tau) \\ \mathcal{K}^0 & \mathcal{K}^0 & \mathcal{K}_{YX_0}(\tau) & ... & \mathcal{K}_{YX_{\ell-2}}(\tau) & \mathcal{K}_{YX_{\ell-1}}(\tau) \\ \mathcal{K}_{X_0Y}(\tau) & \mathcal{K}_{X_0Y}(\tau) & \mathcal{K}_{X_0X_0}(\tau) & ... & \mathcal{K}_{X_0X_{\ell-2}}(\tau) & \mathcal{K}_{X_0X_{\ell-1}}(\tau) \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ \mathcal{K}_{X_{\ell-2}Y}(\tau) & \mathcal{K}_{X_{\ell-2}Y}(\tau) & \mathcal{K}_{X_{\ell-2}X_0}(\tau) & ... & \mathcal{K}_{X_{\ell-2}X_{\ell-2}}(\tau) & \mathcal{K}_{X_{\ell-2}X_{\ell-1}}(\tau) \\ \mathcal{K}_{X_{\ell-1}Y}(\tau) & \mathcal{K}_{X_{\ell-1}Y}(\tau) & \mathcal{K}_{X_{\ell-1}X_0}(\tau) & ... & \mathcal{K}_{X_{\ell-1}X_{\ell-2}}(\tau) & \mathcal{K}_{X_{\ell-1}X_{\ell-1}}(\tau) \end{bmatrix},$$

$$\ell = 0, 1, 2, ..., N.$$

Продемонстрируем изложенную методику на следующих примерах анализа поведения ряда стохастических систем различной размерности.

Пример 2.2.8. Изучим поведение первых моментных функций системы с одной степенью свободы (второго порядка), модель которой может

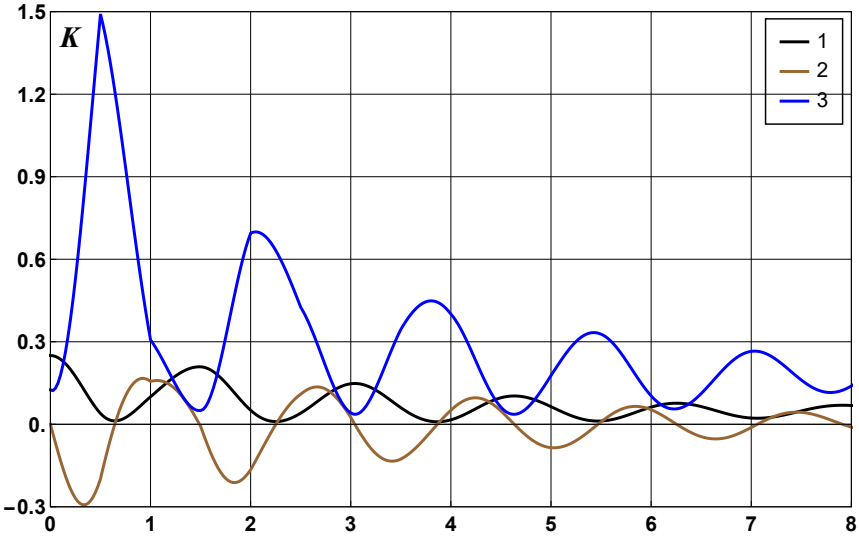


Рис. 2.2.27

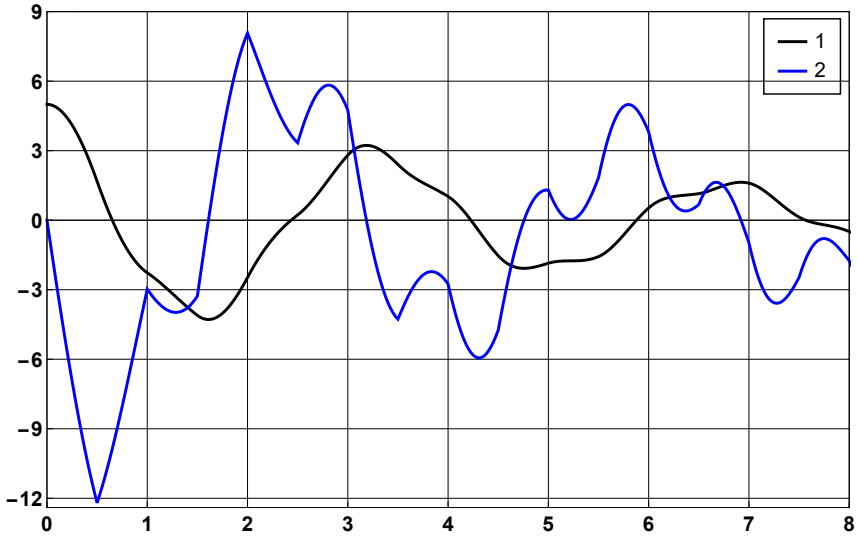


Рис. 2.2.28

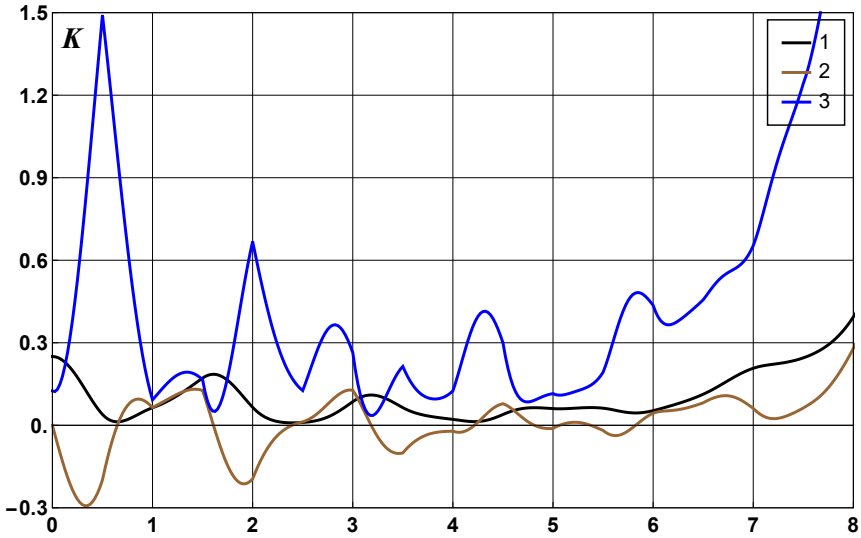


Рис. 2.2.29

быть представлена так:

$$\begin{aligned}
&\ddot{X}(t) + \nu_1\,\ddot{X}(t-\tau) + \nu_2\,\ddot{X}(t-2\,\tau) + \\
&\qquad + 2\,\alpha_1\,\dot{X}(t) + 2\,\alpha_2\,\dot{X}(t-\tau) + 2\,\alpha_3\,\dot{X}(t-2\,\tau) + \\
&\qquad + \beta_1\,X(t) + \beta_2\,X(t-\tau) + \beta_3\,X(t-2\,\tau) = \gamma\,V(t), \quad t > 0; \\
&\ddot{X} = 0, \qquad t \leqslant 0; \\
&\boldsymbol{m}(-2\,\tau) = \boldsymbol{m}^0, \qquad \boldsymbol{\mathcal{K}}(-2\,\tau) = \boldsymbol{\mathcal{K}}^0,
\end{aligned}$$

где ν_i, α_i, β_i, γ – постоянные ($i = 1, 2, 3$). На рис. 2.2.26 и 2.2.27 ($\nu_1 = \nu_{11}$) и 2.2.28, 2.2.29 ($\nu_1 = \nu_{12}$) изображено поведение компонент вектора функций математического ожидания и матрицы ковариаций для вектора состояния $\boldsymbol{X}(t) = \{X_1(t), X_2(t)\}^\intercal = \{X(t), \dot{X}(t)\}^\intercal$ при следующих значениях параметров:

$$\begin{gathered}
\nu_1 \in \{3/4, 1\} \equiv \{\nu_{11}, \nu_{12}\}, \quad \nu_2 = 1/10, \quad t_0 = -2\,\tau, \\
\alpha_1 = 1/8, \quad \alpha_2 = 1/6, \quad \alpha_3 = 1/3, \quad \gamma = 1/16, \\
\beta_1 = 3, \quad \beta_2 = 2, \quad \beta_3 = 9/10, \quad \tau = 1/2,
\end{gathered}$$

$$\boldsymbol{m}^0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{K}}^0 = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 0.125 \end{bmatrix},$$

причем на рис. 2.2.26 и 2.2.28 цифрами 1 и 2 обозначены графики функций $m_{X_1}(t)$ и $m_{X_2}(t)$ соответственно, а на рис. 2.2.27 и 2.2.29 цифрами 1, 2, 3 – графики функций $K_{X_1X_1}(t)$, $K_{X_1X_2}(t)$ и $K_{X_2X_2}(t)$. ►

Модифицированная, более прозрачная схема решаемой в этом пункте задачи приведена в [243].

2.2.2.6. Системы линейных параметрических СОДУ с кратными запаздываниями

Системы с запаздыванием

Рассмотрим записанную в нестрогой форме систему линейных стохастических обыкновенных дифференциальных уравнений в смысле Стратоновича с кратными запаздываниями (ЛСОДУсКЗ), подвергающихся воздействию аддитивных и мультипликативных шумов [203]:

$$\dot{X}_i(t) = \sum_{\ell=0}^{\nu} \sum_{j=1}^{n} h_{ij}^{[\nu,\ell]}(t)\, X_j(t-\ell\,\tau) + b_{1i}^{[\nu]}(t) + \sum_{j=1}^{m} b_{2ij}^{[\nu]}(t)\, V_j(t), \qquad (2.2.70)$$

$$h_{ij}^{[\nu,\ell]}(t) = a_{1ij}^{[\nu,\ell]}(t) + \sum_{k=1}^{m} a_{2ijk}^{[\nu,\ell]}(t)\, V_k(t),$$

$$i = 1, 2, ..., n, \qquad t > t_\nu = t_0 + \nu\,\tau,$$

где $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния; $\boldsymbol{V} \in \mathbb{R}^m$ – вектор независимых гауссовых шумов; τ – постоянное запаздывание; $\nu > 0$ – целое.

Предположим, что на полуинтервалах $(t_0, t_1]$, $(t_1, t_2]$, ..., $(t_{\nu-1}, t_\nu]$ вектор состояния удовлетворяет системам ЛСОДУсКЗ вида:

$$\dot{X}_i(t) = \sum_{\ell=0}^{q} \sum_{j=1}^{n} h_{ij}^{[q,\ell]}(t)\, X_j(t-\ell\,\tau) + b_{1i}^{[q]}(t) + \sum_{j=1}^{m} b_{2ij}^{[q]}(t)\, V_j(t), \qquad (2.2.71)$$

$$i = 1, 2, ..., n, \qquad q = 0, 1, ..., \nu - 1$$

соответственно.

В уравнениях (2.2.70) и (2.2.71) $a_{1i\ell}^{[q,\ell]}$, $a_{2irq}^{[q,\ell]}$, $b_{1i}^{[q]}$, $b_{2ij}^{[q]}$ – известные непрерывные функции времени.

Пусть в момент времени t_0 заданы значения элементов вектора математических ожиданий $\boldsymbol{m}_X^0$ и матрицы $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0$. Построим систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) для компонент вектора функций математического ожидания $\boldsymbol{m}_X(t)$ и матрицы функций ковариации $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}(t)$ вектора состояния $\boldsymbol{X}(t)$ для любого t из промежутка $(t_0, T]$ $(t_0 < T < +\infty)$.

Как и выше, для того чтобы получить СОДУ без запаздывания, применим метод расширения пространства состояний. Для этого введем следующие обозначения, часть из которых подобна используемым в предыдущих пунктах:

$$s \in [0,\tau], \quad t_q = t_0 + q\cdot\tau, \quad q = 0,1,2,...,N \quad (t_{N+1} \geqslant T), \quad s_q = s + t_q,$$

$$\Delta_q = (t_q, t_{q+1}], \quad \boldsymbol{X}_q(s) = \boldsymbol{X}(s_q), \quad \boldsymbol{V}_q(s) = \boldsymbol{V}(s_q),$$

$$\boldsymbol{Y}(s) \equiv \boldsymbol{X}^0, \quad \boldsymbol{X}_q(0) = \boldsymbol{X}_{q-1}(\tau), \quad \boldsymbol{V}_q(0) = \boldsymbol{V}_{q-1}(\tau),$$

$$\boldsymbol{Z}_0(s) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{Y}(s), \boldsymbol{X}_0(s)\big), \quad \boldsymbol{Z}_1(s) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{Y}(s), \boldsymbol{X}_0(s), \boldsymbol{X}_1(s)\big),$$

$$\boldsymbol{Z}_2(s) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{Z}_1(s), \boldsymbol{X}_2(s)\big), ...,$$

$$a_{1ij}^{[q,\ell]}(s_q) = a_{1ij}^{[q,\ell]}(s + t_q), \qquad a_{2ijk}^{[q,\ell]}(s_q) = a_{2ijk}^{[q,\ell]}(s + t_q),$$

$$b_{1i}^{[q]}(s_q) = b_{1i}^{[q]}(s + t_q), \qquad b_{2ij}^{[q]}(s_q) = b_{2ij}^{[q]}(s + t_q),$$

Рассмотрим последовательность полуинтервалов (сегментов) Δ_q.

0°. Систему СОДУ, решением которой на интервале Δ_0 является случайная векторная функция $\boldsymbol{Z}_0(s)$, можно записать в следующем виде (здесь и далее точкой обозначена производная по переменной s):

$$\dot{Y}_i(s) = 0,$$

$$\dot{X}_{0i}(s) = \sum_{j=1}^{n} h_{ij}^{[0,0]}(s_0)\, X_{0j}(s) + b_{1i}^{[0]}(s_0) + \sum_{j=1}^{m} b_{2ij}^{[0]}(s_0)\, V_{0j}(s),$$

$$i = 1,2,...,n.$$

1°. Систему СОДУ для вычисления вектора $\boldsymbol{Z}_1(s)$, определенного на полусегментах Δ_0 и Δ_1, можно представить так:

$$\dot{Y}_i(s) = 0,$$

$$\dot{X}_{0i}(s) = \sum_{j=1}^{n} h_{ij}^{[0,0]}(s_0)\, X_{0j}(s) + b_{1i}^{[0]}(s_0) + \sum_{j=1}^{m} b_{2ij}^{[0]}(s_0)\, V_{0j}(s),$$

$$\dot{X}_{1i}(s) = \sum_{\ell=0}^{1}\sum_{j=1}^{n} h_{ij}^{[1,\ell]}(s_1)\, X_{1-\ell,j}(s) + b_{1i}^{[1]}(s_1) + \sum_{j=1}^{m} b_{2ij}^{[1]}(s_1)\, V_{1j}(s),$$

$$i = 1, 2, ..., n.$$

... ...

ν°. Векторный случайный процесс $\boldsymbol{Z}_\nu(s)$, заданный на полусегментах Δ_0, Δ_1, ..., Δ_ν, удовлетворяет системе СОДУ следующего вида:

$$\dot{Y}_i(s) = 0,$$

$$\dot{X}_{0i}(s) = \sum_{j=1}^{n} h_{ij}^{[0,0]}(s_0)\, X_{0j}(s) + b_{1i}^{[0]}(s_0) + \sum_{j=1}^{m} b_{2ij}^{[0]}(s_0)\, V_{0j}(s),$$

$$\dot{X}_{1i}(s) = \sum_{\ell=0}^{1}\sum_{j=1}^{n} h_{ij}^{[1,\ell]}(s_1)\, X_{1-\ell,j}(s) + b_{1i}^{[1]}(s_1) + \sum_{j=1}^{m} b_{2ij}^{[1]}(s_1)\, V_{1j}(s),$$

... ...

$$\dot{X}_{\nu i}(t) = \sum_{\ell=0}^{\nu}\sum_{j=1}^{n} h_{ij}^{[\nu,\ell]}(s_\nu)\, X_{\nu-\ell,j}(s) + b_{1i}^{[\nu]}(s_\nu) + \sum_{j=1}^{m} b_{2ij}^{[\nu]}(s_\nu)\, V_{\nu j}(s),$$

$$i = 1, 2, ..., n.$$

... ...

N°. Сегменты Δ_0, Δ_1, ..., Δ_ν..., Δ_N. Расширенный вектор состояния $\boldsymbol{Z}_N(s)$ является решением системы СОДУ вида:

$$\dot{Y}_i(s) = 0,$$

$$\dot{X}_{0i}(s) = \sum_{j=1}^{n} h_{ij}^{[0,0]}(s_0)\, X_{0j}(s) + b_{1i}^{[0]}(s_0) + \sum_{j=1}^{m} b_{2ij}^{[0]}(s_0)\, V_{0j}(s),$$

$$\dot{X}_{1i}(s) = \sum_{\ell=0}^{1}\sum_{j=1}^{n} h_{ij}^{[1,\ell]}(s_1)\, X_{1-\ell,j}(s) + b_{1i}^{[1]}(s_1) + \sum_{j=1}^{m} b_{2ij}^{[1]}(s_1)\, V_{1j}(s),$$

... ...

$$\dot{X}_{\nu i}(t) = \sum_{\ell=0}^{\nu}\sum_{j=1}^{n} h_{ij}^{[\nu,\ell]}(s_\nu)\, X_{\nu-\ell,j}(s) + b_{1i}^{[\nu]}(s_\nu) + \sum_{j=1}^{m} b_{2ij}^{[\nu]}(s_\nu)\, V_{\nu j}(s),$$

$$\dot{X}_{\nu+1,i}(t) = \sum_{\ell=0}^{\nu}\sum_{j=1}^{n} h_{ij}^{[\nu,\ell]}(s_{\nu+1})\, X_{\nu+1-\ell,j}(s) + b_{1i}^{[\nu]}(s_\nu) + \sum_{j=1}^{m} b_{2ij}^{[\nu]}(s_\nu)\, V_{\nu+1,j}(s),$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\dot{X}_{Ni}(t) = \sum_{\ell=0}^{\nu}\sum_{j=1}^{n} h_{ij}^{[\nu,\ell]}(s_N)\, X_{N-\ell,j}(s) + b_{1i}^{[\nu]}(s_N) + \sum_{j=1}^{m} b_{2ij}^{[\nu]}(s_N)\, V_{Nj}(s),$$

$$i = 1, 2, ..., n.$$

Итак, на шаге ρ расширенная система СОДУ имеет следующую структуру:

$$\dot{U}_i(s) = \sum_{k=1}^{K}\Big[\alpha_{1ik}(s) + \sum_{j=1}^{J}\alpha_{2ikj}(s)\,\Upsilon_j(s)\Big]\,U_k(s) + \\ + \beta_{1i}(s) + \sum_{j=1}^{J}\beta_{2ij}(s)\,\Upsilon_j(s), \quad i = \overline{1,K}, \quad (2.2.72)$$

где $\boldsymbol{U}(s)$ и $\boldsymbol{\Upsilon}(s)$ – вектор состояния и вектор стандартных некоррелированных белых шумов с единичными интенсивностями, которые представляют на указанном шаге векторы $\boldsymbol{Z}_\rho(s)$ и $\boldsymbol{V}_\rho(s)$. Коэффициентами этих уравнений служат соответствующие функции $a_{1i\ell}^{[q,\ell]}$, $a_{2irq}^{[q,\ell]}$, $b_{1i}^{[q]}$, $b_{2ij}^{[q]}$. Тогда, используя уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова для плотности вероятности распределения вектора $\boldsymbol{U}(s)$, можно получить замкнутую систему уравнений для первых моментов этого вектора – $m_i(s) = \mathbb{E}[U_i(s)]$, $m_{ij}(s) = \mathbb{E}[U_i(s)\,U_j(s)]$ [134]:

$$\dot{m}_i = \sum_{k=1}^{K}\alpha_{1ik}\,m_k + \beta_{1i} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{J}\alpha_{2ikj}\,\Big(\beta_{2kj} + \sum_{\ell=1}^{K}\alpha_{2k\ell j}\,m_\ell\Big),$$

$$\dot{m}_{ii} = \sum_{j=1}^{J}\Big(\beta_{2ij}^2 + 2\,\beta_{2ij}\sum_{k=1}^{K}\alpha_{2ikj}\,m_k + \sum_{\ell,k=1}^{K}\alpha_{2i\ell j}\,\alpha_{2ikj}\,m_{\ell k}\Big) + \\ + 2\Big[\sum_{k=1}^{K}\alpha_{1ik}\,m_{ik} + \beta_{1i}\,m_i + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{J}\alpha_{2ikj}\Big(\beta_{2kj}\,m_i + \sum_{\ell=1}^{K}\alpha_{2k\ell j}\,m_{i\ell}\Big)\Big],$$

$$i = 1, 2, ..., K,$$

$$\dot{m}_{ip} =$$

$$= \sum_{j=1}^{J}\Big[\beta_{2ij}\,\beta_{2pj} + \sum_{k=1}^{K}\big(\beta_{2ij}\,\alpha_{2pkj} + \beta_{2pj}\,\alpha_{2ikj}\big)\,m_k + \sum_{k,\ell=1}^{K}\alpha_{2ikj}\,\alpha_{2p\ell j}\,m_{k\ell}\Big] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{K}\alpha_{1ik}\,m_{pk} + \beta_{1i}\,m_p + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{J}\alpha_{2ikj}\,\big(\beta_{2kj}\,m_p + \sum_{\ell=1}^{K}\alpha_{2k\ell j}\,m_{p\ell}\big) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{K}\alpha_{1pk}\,m_{ik} + \beta_{1p}\,m_i + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{J}\alpha_{2pkj}\,\big(\beta_{2kj}\,m_s + \sum_{\ell=1}^{K}\alpha_{2j\ell k}\,m_{i\ell}\big),$$

$$1 \leqslant i < p \leqslant K.$$

При этом компоненты матрицы функций ковариации можно вычислить по формуле:

$$\mathcal{K}_{X_{\rho i}X_{\rho j}}(s) = m_{ij}(s) - m_i(s)\,m_j(s).$$

Теперь рассмотрим вопрос о начальных условиях для уравнений на каждом шаге. Искомыми характеристиками будут векторы функций математического ожидания

$$\boldsymbol{m}_{Z_k}(s) = \mathbb{E}[\boldsymbol{Z}_k(s)] = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{m}_Y(s), \boldsymbol{m}_{X_0}(s), \boldsymbol{m}_{X_1}(s), ..., \boldsymbol{m}_{X_k}(s)\big)$$

и матрицы функций ковариации

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_kZ_k}(s) = \mathbb{E}[\boldsymbol{Z}_k(s)\,\boldsymbol{Z}_k^{\intercal}(s)] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YY}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_0}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_1}(s) & ... & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_k} \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0Y}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0X_0}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0X_1}(s) & ... & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0X_k} \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_1Y}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_1X_0}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_1X_1}(s) & ... & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_1X_k} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_kY}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_kX_0}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_kX_1}(s) & ... & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_kX_k} \end{bmatrix},$$

где $k = 0,\ 1,\ 2,\ ...,\ N$. В связи с тем что вектор $\boldsymbol{m}_X(s + t_k) = \boldsymbol{m}_{X_k}(s)$ и матрица $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}(s + t_k) = \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_kX_k}(s)$ являются блоками вектора $\boldsymbol{m}_k(s)$ и матрицы $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_kZ_k}(s)$ соответственно, достаточно вычислить последние, а затем выбрать из них необходимые элементы.

При этом для вычисления числовых характеристик векторов $\boldsymbol{Z}_k(s)$ получаем следующие начальные условия.

0°. Для полусегмента Δ_0:

$$\boldsymbol{m}_{Z_0}(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_X^0 \\ \boldsymbol{m}_X^0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_0Z_0}(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 \end{bmatrix}.$$

1°. Для полусегментов Δ_0 и Δ_1:

$$\boldsymbol{m}_{Z_1}(0)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{m}_X^0\\ \boldsymbol{m}_X^0\\ \boldsymbol{m}_{X_0}(\tau)\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_1Z_1}(0)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_0}(\tau)\\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_0}(\tau)\\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0Y}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0Y}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0X_0}(\tau)\end{bmatrix}.$$

$$\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots$$

N°. Для полусегментов Δ_0, Δ_1, ..., Δ_N:

$$\boldsymbol{m}_{Z_N}(0)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{m}_{Z_{N-1}}(0)\\ \boldsymbol{m}_{X_0}(\tau)\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_NZ_N}(0)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_{N-1}Z_{N-1}}(0) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{N12}\\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{N21} & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{N-1}X_{N-1}}(\tau)\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_{N12}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_{N-1}}(\tau)\\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_{N-1}}(\tau)\\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0X_{N-1}}(\tau)\\ \ldots\\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{N-2}X_{N-1}}(\tau)\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_{N21}=\big[\boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{N-1}Y}(\tau)\ \ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{N-1}Y}(\tau)\ \ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{N-1}X_0}(\tau)\ \ldots\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{N-1}X_{N-2}}(\tau)\big].$$

Системы нейтрального типа

Рассмотрим последовательность систем линейных параметрических СОДУ Стратоновича нейтрального типа с кратными постоянными запаздываниями следующего вида ($r=0,\,1,\,\ldots,\,\nu<+\infty$, при $r=0$ без запаздывания) [219]:

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t)=\sum_{\ell=0}^{r}\boldsymbol{\mathcal{Q}}_{r,r-\ell}(t)\,\boldsymbol{X}(t-\ell\,\tau)+\sum_{\ell=1}^{r}\boldsymbol{\mathcal{R}}_{r,r-\ell}(t)\,\dot{\boldsymbol{X}}(t-\ell\,\tau)+\boldsymbol{c}_r(t)+$$

$$+\Big[\sum_{\ell=0}^{r}[\![\boldsymbol{\mathcal{H}}_{r,r-\ell}(t)]\!]::\boldsymbol{X}(t-\ell\,\tau)+\boldsymbol{\mathcal{G}}_r(t)\Big]\circ\boldsymbol{V}(t),\qquad(2.2.73)$$

$$t>t_r=t_0+r\cdot\tau;\quad \boldsymbol{X}(t_0)=\boldsymbol{X}^0,$$

где t – время ($t_0\leqslant t\leqslant T<+\infty$); $\tau=\mathrm{const}>0$; $\boldsymbol{X}(t)=\{X_i(t)\}\in\mathbb{R}^n$ – вектор состояния; $\boldsymbol{X}^0=\{X_i^0\}\in\mathbb{R}^n$ – случайный вектор с известными вероятностными характеристиками; $\boldsymbol{V}(t)=\{V_j(t)\}\in\mathbb{R}^m$ – вектор независимых случайных функций типа белого шума с единичными интенсивностями; $\boldsymbol{c}_r(t)=\{\underline{c}_{ri}(t)\}$, $\boldsymbol{\mathcal{Q}}_{r,r-\ell}(t)=\{\underline{q}_{r,r-\ell,ij}(t)\}$, $\boldsymbol{\mathcal{R}}_{r,r-\ell}(t)=\{\underline{r}_{r,r-\ell,ij}(t)\}$,

$[\![\boldsymbol{\mathcal{H}}_{r,r-\ell}(t)]\!] = \{\underline{h}_{r,r-\ell,ikj}(t)\}$, $\boldsymbol{\mathcal{G}}_r(t) = \{\underline{g}_{rik}(t)\}$ – неслучайные векторы и матрицы; $i,\ j = 1,\ 2,\ ...,\ n$; $k = 1,\ 2,\ ...,\ m$; символ :: обозначает умножение трехмерной матрицы на вектор:

$$[\![\boldsymbol{\mathcal{H}}(t)]\!] :: \boldsymbol{X}(t) = \Big\{ \sum_{\ell=1}^{n} h_{ij\ell}(t)\, X_\ell(t),\ \ i = \overline{1,n},\ \ j = \overline{1,m} \Big\}.$$

Пусть в момент времени t_0 заданы значения элементов вектора математических ожиданий $\boldsymbol{m}_X^0 = \mathbb{E}\big[\boldsymbol{X}^0\big]$ и матрицы ковариаций $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 = \mathbb{E}\big[\big(\boldsymbol{X}^0 - \boldsymbol{m}_X^0\big)\big(\boldsymbol{X}^0 - \boldsymbol{m}_X^0\big)^\intercal\big]$. Задачей исследования является построение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) для компонентов вектора функций математического ожидания $\boldsymbol{m}_X(t) = \mathbb{E}[\boldsymbol{X}(t)]$ и матрицы функций ковариации

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}(t) = \mathbb{E}\big[\big\{\boldsymbol{X}(t) - \boldsymbol{m}_X(t)\big\}\big\{\boldsymbol{X}(t) - \boldsymbol{m}_X(t)\big\}^\intercal\big]$$

случайного векторного процесса $\boldsymbol{X}(t)$, определяющего состояние системы, при любом $t > t_0$.

Как и выше в данном подразделе, для того чтобы получить СОДУ без запаздывания, применим метод расширения пространства состояний. Для этого воспользуемся обозначениями (2.2.18) и рассмотрим последовательность полуинтервалов (полусегментов) Δ_q.

0°. На полусегменте Δ_0 систему СОДУ Стратоновича, решением которой является случайная векторная функция $\boldsymbol{Z}_0(s)$, можно записать в следующем виде (здесь, как и ранее, точкой далее обозначена производная по переменной s):

$$\dot{\boldsymbol{Y}}(s) = 0,$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}_0(s) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{00}(s_0)\, \boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{c}_0(s_0) + \Big[[\![\boldsymbol{\mathcal{H}}_{00}(s_0)]\!] :: \boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s_0)\Big] \circ \boldsymbol{V}_0(s).$$

1°. На сегментах Δ_0 и Δ_1 систему СОДУ для вычисления вектора $\boldsymbol{Z}_1(s)$ можно представить так:

$$\dot{\boldsymbol{Y}}(s) = 0,$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}_0(s) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{00}(s_0)\, \boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{c}_0(s_0) + \Big[[\![\boldsymbol{\mathcal{H}}_{00}(s_0)]\!] :: \boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s_0)\Big] \circ \boldsymbol{V}_0(s),$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}_1(s) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{10}(s_1)\, \boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{11}(s_1)\, \boldsymbol{X}_1(s) + \boldsymbol{\mathcal{R}}_{10}(s_1)\, \dot{\boldsymbol{X}}_0(s) + \boldsymbol{c}_1(s_1) +$$

$$+ \Big[[\![\boldsymbol{\mathcal{H}}_{10}(s_1)]\!] :: \boldsymbol{X}_0(s) + [\![\boldsymbol{\mathcal{H}}_{11}(s_1)]\!] :: \boldsymbol{X}_1(s) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_1(s_1)\Big] \circ \boldsymbol{V}_1(s),$$

... ...

$\boldsymbol{\nu}^{\circ}$. Рассматривая сегменты Δ_0, Δ_1, ..., Δ_ν совместно, запишем систему СОДУ для определения вектора $\boldsymbol{Z}_\nu(s)$:

$$\dot{\boldsymbol{Y}}(s) = 0,$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}_0(s) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{00}(s_0)\,\boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{c}_0(s_0) + \Big[[\![\boldsymbol{\mathcal{H}}_{00}(s_0)]\!] :: \boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s_0)\Big] \circ \boldsymbol{V}_0(s),$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}_1(s) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{10}(s_1)\,\boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{11}(s_1)\,\boldsymbol{X}_1(s) + \boldsymbol{\mathcal{R}}_{10}(s_1)\,\dot{\boldsymbol{X}}_0(s) + \boldsymbol{c}_1(s_1) +$$
$$+ \Big[[\![\boldsymbol{\mathcal{H}}_{10}(s_1)]\!] :: \boldsymbol{X}_0(s) + [\![\boldsymbol{\mathcal{H}}_{11}(s_1)]\!] :: \boldsymbol{X}_1(s) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_1(s_1)\Big] \circ \boldsymbol{V}_1(s),$$

... ...

$$\dot{\boldsymbol{X}}_\nu(s) = \sum_{\ell=0}^{\nu} \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{\nu,\nu-\ell}(s_\nu)\,\boldsymbol{X}_{\nu-\ell}(s) + \sum_{\ell=1}^{\nu} \boldsymbol{\mathcal{R}}_{\nu,\nu-\ell}(s_\nu)\,\dot{\boldsymbol{X}}_{\nu-\ell}(s) + \boldsymbol{c}_\nu(s_\nu) +$$
$$+ \Big[\sum_{\ell=0}^{\nu} [\![\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\nu,\nu-\ell}(s_\nu)]\!] :: \boldsymbol{X}_{\nu-\ell}(s) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_\nu(s_\nu)\Big] \circ \boldsymbol{V}_\nu(s).$$

$(\boldsymbol{\nu}+1)^{\circ}$. На полуинтервалах Δ_0, Δ_1, ..., Δ_ν, $\Delta_{\nu+1}$ уравнения для компонентов случайной векторной функции $\boldsymbol{Z}_{\nu+1}(s)$ можно записать в следующем виде:

$$\dot{\boldsymbol{Y}}(s) = 0,$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}_0(s) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{00}(s_0)\,\boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{c}_0(s_0) + \Big[[\![\boldsymbol{\mathcal{H}}_{00}(s_0)]\!] :: \boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s_0)\Big] \circ \boldsymbol{V}_0(s),$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}_1(s) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{10}(s_1)\,\boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{11}(s_1)\,\boldsymbol{X}_1(s) + \boldsymbol{\mathcal{R}}_{10}(s_1)\,\dot{\boldsymbol{X}}_0(s) + \boldsymbol{c}_1(s_1) +$$
$$+ \Big[[\![\boldsymbol{\mathcal{H}}_{10}(s_1)]\!] :: \boldsymbol{X}_0(s) + [\![\boldsymbol{\mathcal{H}}_{11}(s_1)]\!] :: \boldsymbol{X}_1(s) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_1(s_1)\Big] \circ \boldsymbol{V}_1(s),$$

... ...

$$\dot{\boldsymbol{X}}_\nu(s) = \sum_{\ell=0}^{\nu} \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{\nu,\nu-\ell}(s_\nu)\,\boldsymbol{X}_{\nu-\ell}(s) + \sum_{\ell=1}^{\nu} \boldsymbol{\mathcal{R}}_{\nu,\nu-\ell}(s_\nu)\,\dot{\boldsymbol{X}}_{\nu-\ell}(s) + \boldsymbol{c}_\nu(s_\nu) +$$
$$+ \Big[\sum_{\ell=0}^{\nu} [\![\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\nu,\nu-\ell}(s_\nu)]\!] :: \boldsymbol{X}_{\nu-\ell}(s) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_\nu(s_\nu)\Big] \circ \boldsymbol{V}_\nu(s),$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}_{\nu+1}(s) = \sum_{\ell=0}^{\nu} \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{\nu,\nu-\ell}(s_{\nu+1})\,\boldsymbol{X}_{\nu-\ell+1}(s) + \sum_{\ell=1}^{\nu} \boldsymbol{\mathcal{R}}_{\nu,\nu-\ell}(s_{\nu+1})\,\dot{\boldsymbol{X}}_{\nu-\ell+1}(s) +$$

$$+\boldsymbol{c}_\nu(s_{\nu+1}) + \Big[\sum_{\ell=0}^{\nu} [\![\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\nu,\nu-\ell}(s_{\nu+1})]\!] :: \boldsymbol{X}_{\nu-\ell+1}(s) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_\nu(s_{\nu+1})\Big] \circ \boldsymbol{V}_{\nu+1}(s).$$

... ...

$\boldsymbol{N}^\circ$. Наконец, на полусегментах Δ_0, Δ_1, ..., Δ_ν, $\Delta_{\nu+1}$, ..., Δ_N систему СОДУ для вычисления вектора $\boldsymbol{Z}_N(s)$ можно представить так:

$$\dot{\boldsymbol{Y}}(s) = 0,$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}_0(s) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{00}(s_0)\,\boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{c}_0(s_0) + \Big[[\![\boldsymbol{\mathcal{H}}_{00}(s_0)]\!] :: \boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s_0)\Big] \circ \boldsymbol{V}_0(s),$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}_1(s) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{10}(s_1)\,\boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{11}(s_1)\,\boldsymbol{X}_1(s) + \boldsymbol{\mathcal{R}}_{10}(s_1)\,\dot{\boldsymbol{X}}_0(s) + \boldsymbol{c}_1(s_1) +$$
$$+ \Big[[\![\boldsymbol{\mathcal{H}}_{10}(s_1)]\!] :: \boldsymbol{X}_0(s) + [\![\boldsymbol{\mathcal{H}}_{11}(s_1)]\!] :: \boldsymbol{X}_1(s) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_1(s_1)\Big] \circ \boldsymbol{V}_1(s),$$

... ...

$$\dot{\boldsymbol{X}}_\nu(s) = \sum_{\ell=0}^{\nu} \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{\nu,\nu-\ell}(s_\nu)\,\boldsymbol{X}_{\nu-\ell}(s) + \sum_{\ell=1}^{\nu} \boldsymbol{\mathcal{R}}_{\nu,\nu-\ell}(s_\nu)\,\dot{\boldsymbol{X}}_{\nu-\ell}(s) + \boldsymbol{c}_\nu(s_\nu) +$$
$$+ \Big[\sum_{\ell=0}^{\nu} [\![\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\nu,\nu-\ell}(s_\nu)]\!] :: \boldsymbol{X}_{\nu-\ell}(s) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_\nu(s_\nu)\Big] \circ \boldsymbol{V}_\nu(s),$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}_{\nu+1}(s) = \sum_{\ell=0}^{\nu} \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{\nu,\nu-\ell}(s_{\nu+1})\,\boldsymbol{X}_{\nu-\ell+1}(s) + \sum_{\ell=1}^{\nu} \boldsymbol{\mathcal{R}}_{\nu,\nu-\ell}(s_{\nu+1})\,\dot{\boldsymbol{X}}_{\nu-\ell+1}(s) +$$
$$+ \boldsymbol{c}_\nu(s_{\nu+1}) + \Big[\sum_{\ell=0}^{\nu} [\![\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\nu,\nu-\ell}(s_{\nu+1})]\!] :: \boldsymbol{X}_{\nu-\ell+1}(s) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_\nu(s_{\nu+1})\Big] \circ \boldsymbol{V}_{\nu+1}(s).$$

... ...

$$\dot{\boldsymbol{X}}_N(s) = \sum_{\ell=0}^{\nu} \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{\nu,\nu-\ell}(s_N)\,\boldsymbol{X}_{N-\ell}(s) + \sum_{\ell=1}^{\nu} \boldsymbol{\mathcal{R}}_{\nu,\nu-\ell}(s_N)\,\dot{\boldsymbol{X}}_{N-\ell}(s) + \boldsymbol{c}_\nu(s_N) +$$
$$+ \Big[\sum_{\ell=0}^{\nu} [\![\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\nu,\nu-\ell}(s_N)]\!] :: \boldsymbol{X}_{N-\ell}(s) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_\nu(s_N)\Big] \circ \boldsymbol{V}_N(s),$$

Теперь построенную выше на основе применяемой схемы цепочку параметрических линейных СОДУ без запаздывания можно использовать для получения новой последовательности уравнений – последовательности ОДУ для первых моментов расширенных векторов состояния $\boldsymbol{Z}_0(s)$,

$\boldsymbol{Z}_1(s)$, ..., $\boldsymbol{Z}_N(s)$:

$$\boldsymbol{m}_{Z_k}(s) = \mathbb{E}[\boldsymbol{Z}_k(s)] \equiv \operatorname{col}\big(\boldsymbol{m}_Y(s), \boldsymbol{m}_{X_0}(s), \boldsymbol{m}_{X_1}(s), ..., \boldsymbol{m}_{X_k}(s)\big),$$

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_k Z_k}(s) = \mathbb{E}\big[\big\{\boldsymbol{Z}_k(s) - \boldsymbol{m}_{Z_k}(s)\big\}\big\{\boldsymbol{Z}_k(s) - \boldsymbol{m}_{Z_k}(s)\big\}^{\intercal}\big] =$$

$$= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YY}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_0}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_1}(s) & ... & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_k}(s) \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0Y}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0X_0}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0X_1}(s) & ... & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0X_k}(s) \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_1Y}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_1X_0}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_1X_1}(s) & ... & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_1X_k}(s) \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_kY}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_kX_0}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_kX_1}(s) & ... & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_kX_k}(s) \end{bmatrix},$$

$$k = 0, 1, 2, ..., N.$$

Несложно увидеть, что на каждом этапе k ($k = 0, 1, ..., N$) структура систем СОДУ принимает следующую форму:

$$\dot{\boldsymbol{Z}}_k(s) = \boldsymbol{f}_k^+\big(\boldsymbol{Z}_k(s), s\big) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_k^+\big(\boldsymbol{Z}_k(s), s\big) \circ \boldsymbol{V}_k^+(s), \tag{2.2.74}$$

где

$$\boldsymbol{f}_k^+(s) = \{f_{ki}(s)\}, \qquad f_{ki}(s) = f_{ki0}(s) + \sum_{\ell=1}^{n(k+2)} f_{ki\ell}(s)\, Z_{k\ell}(s),$$

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}_k^+(s) = \{g_{kij}(s)\}, \qquad g_{kij}(s) = g_{kij0}(s) + \sum_{\ell=1}^{n(k+2)} g_{kij\ell}(s)\, Z_{k\ell}(s),$$

$$i = 1, 2, ..., n\,(k+2), \qquad j = 1, 2, ..., m\,(k+2).$$

Используя компоненты векторов $\boldsymbol{f}_k^+(s)$ и матриц $\boldsymbol{\mathcal{G}}_k^+(s)$ и заменяя в них элементы случайного вектора $\boldsymbol{Z}_k(s)$ их возможными значениями, по формулам Стратоновича можно вычислить коэффициенты сноса и диффузии:

$$a_{ki} = f_{ki} + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n(k+2)} \sum_{\ell=1}^{m(k+1)} \frac{\partial g_{ki\ell}}{\partial z_{kr}}\, g_{kr\ell}, \qquad b_{kij} = \sum_{\ell=1}^{m(k+2)} g_{ki\ell}\, g_{kj\ell},$$

$$i, j = 1, 2, ..., n\,(k+2).$$

уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова для плотности вероятности вектора $\boldsymbol{Z}_k(s)$. В свою очередь, на основе этого уравнения может быть построена замкнутая система ОДУ для элементов векторов $\boldsymbol{m}_{Z_k}(s)$ и матриц $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_k Z_k}(s)$ в следующем виде:

$$\dot{\boldsymbol{m}}_{ki}(s) = \mathbb{E}[a_{ki}]\,,$$

$$\dot{\mathcal{K}}_{Z_{ki}Z_{kj}}(s) = \mathbb{E}\big[\big(Z_{ki} - m_{Z_{ki}}\big)\cdot a_{kj} + \big(Z_{kj} - m_{Z_{kj}}\big)\cdot a_{ki} + b_{kij}\big].$$

К этим уравнениям необходимо добавить начальные условия, форма которых будет такова:

$$\boldsymbol{m}_{Z_0}(0) = \begin{bmatrix}\boldsymbol{m}_X^0\\ \boldsymbol{m}_X^0\end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_0Z_0}(0) = \begin{bmatrix}\mathcal{K}^{\mathbf{0}}_{\mathbf{XX}} & \mathcal{K}^{\mathbf{0}}_{\mathbf{XX}}\\ \mathcal{K}^{\mathbf{0}}_{\mathbf{XX}} & \mathcal{K}^{\mathbf{0}}_{\mathbf{XX}}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{m}_{Z_k}(0) = \begin{bmatrix}\boldsymbol{m}_{Z_{k-1}}(0)\\ \boldsymbol{m}_{X_{k-1}}(\tau)\end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_kZ_k}(0) = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_kZ_k}(0) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{k12}\\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{k21} & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{k-1}X_{k-1}}(\tau)\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_{k12} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_{k-1}}(\tau)\\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_{k-1}}(\tau)\\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0X_{k-1}}(\tau)\\ \ldots\\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{k-2}X_{k-1}}(\tau)\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_{k21} = \big[\boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{k-1}Y}(\tau)\ \ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{k-1}Y}(\tau)\ \ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{k-1}X_0}(\tau)\ \ldots\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{k-1}X_{k-2}}(\tau)\big].$$

Для демонстрации изложенной методики был осуществлен анализ поведения нескольких стохастических систем различной размерности. Некоторая часть полученных результатов приводится ниже. Все численно-аналитические расчеты были проведены с помощью программ на входном языке пакета `Mathematica`.

Пример 2.2.9. В качестве демонстрационной модели была выбрана система вида:

$$\begin{aligned}
&\dot{X}(t) = q_{00}\,X(t) + \big[h_{00}\,X(t) + g_0\big]\,V(t), \quad t\in(0,\tau],\\
&\qquad m_X(0) = m^0, \qquad \mathcal{D}_X(0) = \mathcal{D}^0;\\
&\dot{X}(t) = q_{10}\,X(t-\tau) + q_{11}\,X(t) + r_{10}\,\dot{X}(t-\tau) +\\
&\qquad + \big[h_{10}\,X(t-\tau) + h_{11}\,X(t) + g_1\big]\,V(t), \quad t\in(\tau,2\,\tau];\\
&\dot{X}(t) = q_{20}\,X(t-2\,\tau) + q_{21}\,X(t-\tau) + q_{22}\,X(t) +\\
&\qquad + r_{20}\,\dot{X}(t-2\,\tau) + r_{21}\,\dot{X}(t-\tau) +\\
&\qquad + \big[h_{20}\,X(t-2\,\tau) + h_{21}\,X(t-\tau) + h_{22}\,X(t) + g_2\big]\,V(t), \quad t > 2\,\tau,
\end{aligned}$$

где q_{ij}, r_{ij}, h_{ij}, g_i, – постоянные. На рис. 2.2.30 и 2.2.31 изображено поведение математического ожидания и дисперсии $X(t)$ при следующих неизменных значениях параметров:

$$h_{00} = 0.1, \quad g_0 = 0.125,$$

$$q_{10} = 0.25, \quad q_{11} = 1.0, \quad r_{10} = 0.25,$$
$$h_{10} \in \{0.25, -0.125\}, \quad h_{11} = 0.1, \quad g_1 = 0.1,$$
$$q_{20} = 0.25, \quad q_{21} = -0.25, \quad q_{22} = -1, \quad r_{20} = 0.25, \quad r_{21} = -0.125,$$
$$h_{20} = 0.1, \quad h_{21} = 0.05, \quad h_{22} = 0.05, \quad g_2 = -0.125,$$
$$\tau = 0.5, \quad t_0 = 0, \quad m^0 = 2, \quad \mathcal{D}^0 = 0.25,$$

а также при варьировании ряда коэффициентов:

1. $q_{00} = -1$, $q_{22} = -1$, $r_{21} = -1/8$;
2. $q_{00} = -1$, $q_{22} = -1/2$, $r_{21} = -1/2$;
3. $q_{00} = -2$, $q_{22} = -1$, $r_{21} = -1/8$;
4. $q_{00} = -2$, $q_{22} = -1$, $r_{21} = -1/2$.

На этих рисунках перечисленным вариантам соответствуют линии с номерами 1..4. ►

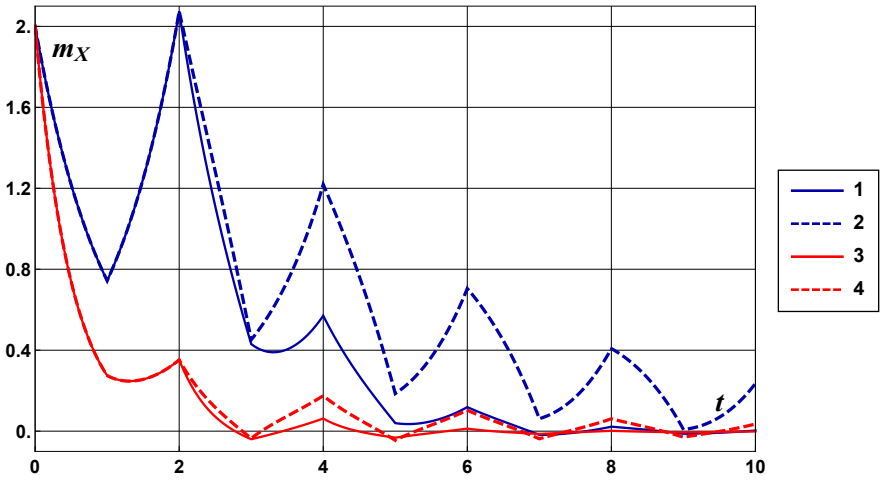


Рис. 2.2.30

Данная методика может быть эффективно реализована на основе любого современного ПКА, такого как `Maple` [327] или `Matlab` [971], и использована для изучения многих типов систем с последействием как на основе полученных ОДУ для первых моментов, так и с помощью метода

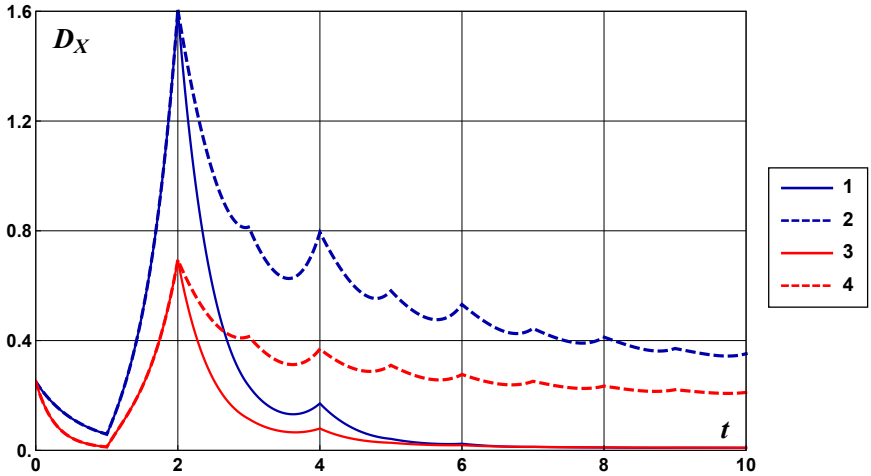


Рис. 2.2.31

статистического моделирования (Монте-Карло) [127] в случае нелинейных систем. Более того, данная схема позволяет вычислять моментные функции и более высоких порядков.

2.2.2.7. Системы СОДУ с переменными временными запаздываниями

Рассматривается система линейных СОДУ с непрерывным переменным запаздыванием $\tau(t) \geqslant 0$ вида [208]:

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{\mathcal{R}}(t)\,\boldsymbol{X}(t-\tau) + \boldsymbol{c}(t) + \boldsymbol{\mathcal{G}}(t)\,\boldsymbol{V}(t), \quad t > t^*, \qquad (2.2.75)$$

где t – время ($t \leqslant T < \infty$); $\boldsymbol{X}(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния; $\boldsymbol{V}(t) \in \mathbb{R}^m$ – вектор независимых случайных функций типа белого шума с единичными интенсивностями.

Будем считать, что на полуинтервале $(t_*, t^*]$, где

$$t_* \leqslant \min_{t \geqslant t^*} \big[t - \tau(t)\big],$$

вектор состояния $\boldsymbol{X}(t)$ удовлетворяет системе СОДУ без запаздывания

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_0(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{c}_0(t) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(t)\,\boldsymbol{V}(t), \qquad \boldsymbol{X}(t_*) = \boldsymbol{X}^0, \qquad (2.2.76)$$

причем в уравнениях (2.2.75) и (2.2.76) $\boldsymbol{\mathcal{Q}}(t)$, $\boldsymbol{\mathcal{R}}(t)$, $\boldsymbol{\mathcal{G}}(t)$, $\boldsymbol{\mathcal{Q}}_0(t)$, $\boldsymbol{\mathcal{G}}_0(t)$ и $\boldsymbol{c}(t)$, $\boldsymbol{c}_0(t)$ – известные непрерывные матричные и векторные функции. Кроме того, предположим, что известны все необходимые числовые характеристики случайного вектора $\boldsymbol{X}^0$. В частности, пусть в начальный момент времени t_* для вектора $\boldsymbol{X}(t)$ заданы вектор математических ожиданий $\boldsymbol{m}_X^0 = \mathbb{E}\big[\boldsymbol{X}^0\big]$ и матрица ковариаций $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 = \mathbb{E}\big[\big(\boldsymbol{X}^0 - \boldsymbol{m}_X^0\big)\big(\boldsymbol{X}^0 - \boldsymbol{m}_X^0\big)^{\mathsf{T}}\big]$.

Задачей исследования будет вычисление вектора $\boldsymbol{m}_X(t) = \mathbb{E}[\boldsymbol{X}(t)]$ и матрицы $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}(t) = \mathbb{E}\big[\big\{\boldsymbol{X}(t) - \boldsymbol{m}_X(t)\big\}\big\{\boldsymbol{X}(t) - \boldsymbol{m}_X(t)\big\}^{\mathsf{T}}\big]$ – первых моментов вектора состояние $\boldsymbol{X}(t)$ при любом $t > t_*$.

В принципе, прямое получение систем обыкновенных дифференциальных уравнений для вектора $\boldsymbol{m}_X(t)$ и матрицы $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}(t)$ не представляет особого труда [260], но построенные системы, как и исходная система СОДУ (2.2.75), будут содержать члены с запаздыванием. При этом хорошо известно то множество проблем, которые обычно возникают при практической реализации алгоритмов численного решения систем ОДУ с отклоняющимися аргументами.

Несложно увидеть, что последовательно излагаемая в данном разделе схема расширения фазового пространства может быть применена и для решения поставленной задачи, но при некоторой модификации.

Действительно, приближенно заменим переменное запаздывание $\tau(t)$ кусочно-постоянным $\bar{\tau}(t)$ со "ступеньками", длина которых кратна величине τ^* (выбор τ^* определяется необходимой точностью аппроксимации $\tau(t)$ и всегда может быть произведен так, чтобы абсолютная погрешность $|\tau(t) - \bar{\tau}(t)|$ не превышала наперед заданного значения, а поведение полученной системы СОДУ соответствовало исходной), и рассмотрим равномерную временную сетку $t_q = t_* + q \cdot \tau^*$, $q = 0, 1, 2, ..., N_0 - 1, N_0, N_0 + 1, ..., N, N + 1$, причем $t_{N+1} \geqslant T$, $\tau^* = (t^* - t_*)/N_0$.

После этого введем новую временную переменную s, изменяющуюся на промежутке $[0, \tau^*]$, и будем использовать обозначения (2.2.18). На основе этого построим цепочку уравнений для первых моментных функций расширенных векторов состояния $\boldsymbol{Z}_0(s)$, $\boldsymbol{Z}_1(s)$, ..., $\boldsymbol{Z}_{N_0-1}(s)$, $\boldsymbol{Z}_{N_0}(s)$, $\boldsymbol{Z}_{N_0+1}(s)$, ..., $\boldsymbol{Z}_N(s)$, принадлежащих семейству вложенных пространств состояния $\mathbb{R}^{2n} \subset \mathbb{R}^{3n} \subset \mathbb{R}^{4n} \subset ... \subset \mathbb{R}^{n(N+2)}$. Цель построения такой цепочки – вычислить значения смешанных первых моментов для различных компонентов векторов $\boldsymbol{Z}_q(s)$ в процессе решения ОДУ без запаздывания.

Примечание 2.2.1. Конечно, при небольшом τ^* и значительных N_0 и N количество ОДУ на последовательных этапах расчетов будет велико, но временные потери с лихвой компенсируются простотой алгоритма процедуры и возможностью использования стандартных численных интеграторов.

Используя введенные в п. 2.2.2.1 основные обозначения с добавлением новых: δ_{mk} – символ Кронекера,

$$K_q = q - \left\lfloor \frac{\bar\tau(t_q)}{\tau_*} \right\rfloor, \qquad 0 \leqslant K_q \leqslant N_0,$$

где $\lfloor h \rfloor$ – наибольшее целое, не превышающее h, и последовательно рассматривая полуинтервалы $(t_0, t_1]$, $(t_1, t_2]$, ..., $(t_0, t_1]$, ..., $(t_N, t_{N+1}]$, можно записать нижележащие (для $t > t_*$ аппроксимирующие исходные уравнения) линейные системы СОДУ без запаздывания.

0°. Рассматриваем полуинтервал Δ_0 и изменение векторного процесса $\boldsymbol{Z}_0(s) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{Y}(s), \boldsymbol{X}_0(s)\big)$ на нем:

$$\dot{\boldsymbol{Z}}_0(s) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_0^+(s)\,\boldsymbol{Z}_0(s) + \boldsymbol{c}_0^+(s) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0^+(s)\,\boldsymbol{V}_0(s),$$

$$\boldsymbol{\mathcal{Q}}_0^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{Q}}_0(s+t_0) \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{c}_0^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O}_n \\ \boldsymbol{c}_0(s+t_0) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}_0^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s+t_0) \end{bmatrix}.$$

1°. Оцениваем изменение расширенного случайного вектора $\boldsymbol{Z}_1(s) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{Z}_0(s), \boldsymbol{X}_1(s)\big)$ на полуотрезках Δ_0, Δ_1:

$$\dot{\boldsymbol{Z}}_1(s) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_1^+(s)\,\boldsymbol{Z}_1(s) + \boldsymbol{c}_1^+(s) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_1^+(s)\,\boldsymbol{V}_1(s),$$

$$\boldsymbol{\mathcal{Q}}_1^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{Q}}_0(s+t_0) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{Q}}_0(s+t_1) \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{c}_1^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O}_n \\ \boldsymbol{c}_0(s+t_0) \\ \boldsymbol{c}_0(s+t_1) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}_1^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s+t_0) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s+t_1) \end{bmatrix}.$$

... ...

(N_0-1)°. Рассматриваемые поведение случайного вектора состояния $\boldsymbol{Z}_{N_0-1}(s) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{Z}_{N_0-2}(s), \boldsymbol{X}_{N_0-1}(s)\big)$ на полусегментах Δ_0, Δ_0, ..., Δ_{N_0-1}:

$$\dot{\boldsymbol{Z}}_{N_0-1}(s) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{N_0-1}^+(s)\,\boldsymbol{Z}_{N_0-1}(s) + \boldsymbol{c}_{N_0-1}^+(s) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_{N_0-1}^+(s)\,\boldsymbol{V}_{N_0-1}(s),$$

$$\boldsymbol{\mathcal{Q}}_{N_0-1}^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{N_0-2}^+(s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{nN_0\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times nN_0} & \boldsymbol{\mathcal{Q}}_0(s+t_{N_0-1}) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c}_{N_0-1}^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_{N_0-2}^+(s) \\ \boldsymbol{c}_0(s+t_{N_0-1}) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}^{+}_{N_0-1}(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{G}}^{+}_{N_0-2}(s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{nN_0\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times mN_0} & \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s+t_{N_0-1}) \end{bmatrix}.$$

$\boldsymbol{N_0}^{\circ}$. Переходим к анализу поведения расширенного вектора $\boldsymbol{Z}_{N_0}(s) = \mathrm{col}\left(\boldsymbol{Z}_{N_0-1}(s), \boldsymbol{X}_{N_0}(s)\right)$ на промежутках $\Delta_0, \Delta_0, ..., \Delta_{N_0-1}, \Delta_{N_0}$ с учетом запаздывания:

$$\dot{\boldsymbol{Z}}_{N_0}(s) = \left[\boldsymbol{\mathcal{Q}}^{+}_{N_0}(s) + \boldsymbol{\mathcal{R}}^{+}_{N_0}(s)\right] \boldsymbol{Z}_{N_0}(s) + \boldsymbol{c}^{+}_{N_0}(s) + \boldsymbol{\mathcal{G}}^{+}_{N_0}(s)\, \boldsymbol{V}_{N_0}(s),$$

$$\boldsymbol{\mathcal{Q}}^{+}_{N_0}(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{Q}}^{+}_{N_0-1}(s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n(N_0+1)\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n(N_0+1)} & \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s+t_{N_0}) \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{c}^{+}_{N_0}(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}^{+}_{N_0-1}(s) \\ \boldsymbol{c}(s+t_{N_0}) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}^{+}_{N_0}(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{G}}^{+}_{N_0-1}(s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n(N_0+1)\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m(N_0+1)} & \boldsymbol{\mathcal{G}}(s+t_{N_0}) \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\mathcal{R}}_{N_0} = \boldsymbol{\mathcal{R}}(s+t_{N_0}),$$

$$\boldsymbol{\mathcal{R}}^{+}_{N_0}(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n(N_0+1)\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n(N_0+1)\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n(N_0+1)\times n} & ... & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n(N_0+1)\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \delta_{0,K_{N_0}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{R}}_{N_0} & \delta_{1,K_{N_0}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{R}}_{N_0} & ... & \delta_{N_0,K_{N_0}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{R}}_{N_0} \end{bmatrix}.$$

$$... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ...$$

$\boldsymbol{N}^{\circ}$. На заключительном шаге оцениваем поведение вектора состояния $\boldsymbol{Z}_N(s) = \mathrm{col}\left(\boldsymbol{Z}_{N-1}(s), \boldsymbol{X}_N(s)\right)$ на промежутках $\Delta_0, \Delta_0, ..., \Delta_{N_0-1}, \Delta_{N_0}..., \Delta_N$:

$$\dot{\boldsymbol{Z}}_N(s) = \left[\boldsymbol{\mathcal{Q}}^{+}_{N}(s) + \boldsymbol{\mathcal{R}}^{+}_{N}(s)\right] \boldsymbol{Z}_N(s) + \boldsymbol{c}^{+}_{N}(s) + \boldsymbol{\mathcal{G}}^{+}_{N}(s)\, \boldsymbol{V}_N(s),$$

$$\boldsymbol{\mathcal{Q}}^{+}_{N}(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{Q}}^{+}_{N}(s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n(N+1)\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n(N+1)} & \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s+t_N) \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{c}^{+}_{N}(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}^{+}_{N-1}(s) \\ \boldsymbol{c}(s+t_N) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}^{+}_{N}(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{G}}^{+}_{N_0-1}(s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n(N+1)\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m(N+1)} & \boldsymbol{\mathcal{G}}(s+t_N) \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\mathcal{R}}_{N} = \boldsymbol{\mathcal{R}}(s+t_N),$$

$$\boldsymbol{\mathcal{R}}^{+}_{N}(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{R}}^{+}_{N-1}(s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n(N+1)\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{R}}^{*}_{N} & \delta_{N,K_N} \cdot \boldsymbol{\mathcal{R}}_N \end{bmatrix}.$$

$$\boldsymbol{\mathcal{R}}^{*}_{N} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n(N-N_0+1)} & \delta_{N-N_0,K_N} \cdot \boldsymbol{\mathcal{R}}_N \\ & \delta_{N-N_0+1,K_N} \cdot \boldsymbol{\mathcal{R}}_N \quad ... \quad \delta_{N-1,K_N} \cdot \boldsymbol{\mathcal{R}}_N \end{bmatrix}.$$

Теперь построенную цепочку линейных СОДУ без запаздывания можно использовать для получения новой последовательности уравнений – ОДУ для первых моментов векторов $\boldsymbol{Z}_0(s)$, $\boldsymbol{Z}_1(s)$, ..., $\boldsymbol{Z}_N(s)$, включающих уравнения для компонент вектора функций математического ожидания

$$\boldsymbol{m}_{Z_k}(s) = \mathbb{E}[\boldsymbol{Z}_k(s)] = \mathrm{col}\left(\boldsymbol{m}_Y(s), \boldsymbol{m}_{X_0}(s), \boldsymbol{m}_{X_1}(s), ..., \boldsymbol{m}_{X_N}(s)\right),$$

и матрицы функций ковариации

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_kZ_k}(s) = \mathbb{E}\big[\big\{\boldsymbol{Z}_k(s) - \boldsymbol{m}_{Z_k}(s)\big\}\big\{\boldsymbol{Z}_k(s) - \boldsymbol{m}_{Z_k}(s)\big\}^{\mathsf{T}}\big] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YY}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_0}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_1}(s) & ... & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_k}(s) \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0Y}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0X_0}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0X_1}(s) & ... & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0X_k}(s) \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_kY}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_kX_0}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_kX_1}(s) & ... & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_kX_k}(s) \end{bmatrix},$$

где $k = 0, 1, ..., N$.

Из предыдущих рассуждений следует, что числовые характеристики вектора $\boldsymbol{Z}_k(s)$ удовлетворяют системам ОДУ:

– для $k < N_0$

$$\dot{\boldsymbol{m}}_{Z_k}(s) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_k^+(s)\,\boldsymbol{m}_{Z_k}(s) + \boldsymbol{c}_k^+(s),$$

$$\dot{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_{Z_kZ_k}(s) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_k^+(s)\,\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_kZ_k}(s) + \big\{\boldsymbol{\mathcal{Q}}_k^+(s)\,\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_kZ_k}(s)\big\}^{\mathsf{T}} + \boldsymbol{\mathcal{G}}_k^+(s)\,\boldsymbol{\mathcal{G}}_k^{+\mathsf{T}}(s),$$

– для $k \geqslant N_0$

$$\dot{\boldsymbol{m}}_{Z_k}(s) = \big[\boldsymbol{\mathcal{Q}}_k^+(s) + \boldsymbol{\mathcal{R}}_k^+(s)\big]\,\boldsymbol{m}_{Z_k}(s) + \boldsymbol{c}_k^+(s),$$

$$\dot{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_{Z_kZ_k}(s) = \big[\boldsymbol{\mathcal{Q}}_k^+(s) + \boldsymbol{\mathcal{R}}_k^+(s)\big]\,\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_kZ_k}(s) + \big\{\big[\boldsymbol{\mathcal{Q}}_k^+(s) + \boldsymbol{\mathcal{R}}_k^+(s)\big]\,\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_kZ_k}(s)\big\}^{\mathsf{T}} + \boldsymbol{\mathcal{G}}_k^+(s)\,\boldsymbol{\mathcal{G}}_k^{+\mathsf{T}}(s)$$

с начальными условиями

$$\boldsymbol{m}_{Z_0}(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_X^0 \\ \boldsymbol{m}_X^0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_0Z_0}(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{m}_{Z_1}(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_X^0 \\ \boldsymbol{m}_X^0 \\ \boldsymbol{m}_{X_0}(\tau^*) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_1Z_1}(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_0}(\tau^*) \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_0}(\tau^*) \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0Y}(\tau^*) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0Y}(\tau^*) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0X_0}(\tau^*) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{m}_{Z_k}(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_{Z_{k-1}}(0) \\ \boldsymbol{m}_{X_{k-1}}(\tau^*) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_kZ_k}(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_{k-1}Z_{k-1}}(0) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{k12}^0(\tau^*) \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{k21}^0(\tau^*) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{k-1}X_{k-1}}(\tau^*) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_{k12}^0(\tau^*) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_{k-1}}(\tau^*) \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_{k-1}}(\tau^*) \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0X_{k-1}}(\tau^*) \\ ... \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{k-2}X_{k-1}}(\tau^*) \end{bmatrix},$$

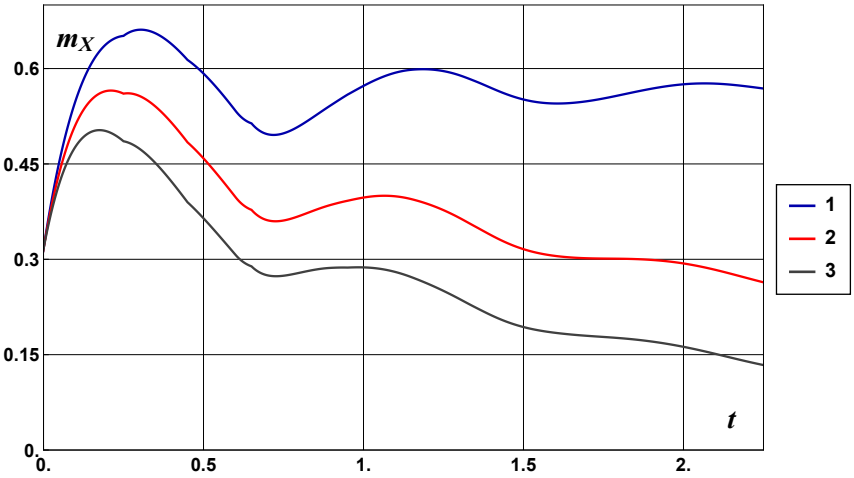


Рис. 2.2.32

$$\mathcal{K}^0_{k21}(\tau^*) = \big[\mathcal{K}_{X_{k-1}Y}(\tau^*)\ \ \mathcal{K}_{X_{k-1}Y}(\tau^*)\ \ \mathcal{K}_{X_{k-1}X_0}(\tau^*)\ \ \ldots\ \ \mathcal{K}_{X_{k-1}X_{k-2}}(\tau^*)\big].$$

Пример 2.2.10. Изучим случайный переходный режим, описываемый стохастическим уравнением

$$\dot{X}(t) = a\,X(t) + b\,X\big(t-\tau(t)\big) + c\,V(t), \quad t_* < t \leqslant T, \quad X(t_*) = X^0 \tag{2.2.77}$$

$(a, b, c = \text{const})$.

Предложенный выше алгоритм был реализован с помощью программы на входном языке пакета `Mathematica`. При этом на каждом шаге в символьном виде генерировались соответствующие ОДУ для элементов вектора математических ожиданий и матрицы ковариаций, а также требуемые начальные условия. Для численного интегрирования этой системы ОДУ использовалась стандартная процедура пакета `NDSolve`. Отметим, что на последнем шаге алгоритма численно интегрировалась система 1952 линейных ОДУ.

В процессе проведения расчетов использовались следующие значения параметров задачи:

$$\tau^* = 0.05, \quad t_* = -0.75, \quad T = 2.25, \quad m^0_X = 3.0, \quad \mathcal{D}^0_X \equiv \mathcal{K}^0_{XX} = 0.25,$$

$$a = \begin{cases} -3, & t \leqslant 0, \\ \{-3, -4, -5\}, & t > 0, \end{cases} \quad b = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0, \\ -3, & t > 0, \end{cases} \quad c = \begin{cases} 0.1, & t \leqslant 0, \\ 0.1, & t > 0. \end{cases}$$

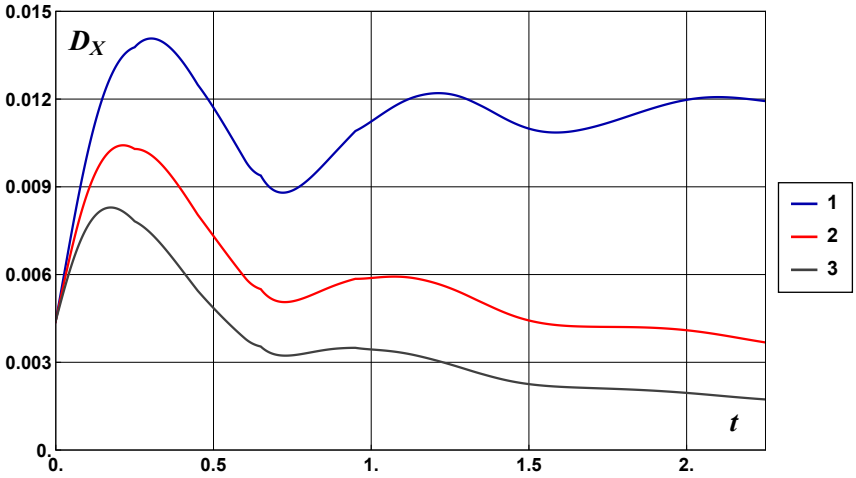


Рис. 2.2.33

Результаты этих расчетов для

$$\tau(t) = \begin{cases} 0.0, & t \leqslant 0, \\ 0.5 + 0.25\,\sin t, & t > 0. \end{cases}$$

приведены на рис. 2.2.32 (функции математического ожидания) и 2.2.32 (соответствующие функции дисперсии). Кривые, обозначенные цифрами 1..3, соответствуют различным значениям параметра a. ►

Выше была представлена схема и алгоритм исследования линейных стохастических систем с переменным запаздыванием. В отличие от известных процедур анализа подобных систем [382] предложенная схема не требует разработки специальных процедур интегрирования дифференциальных уравнений с запаздыванием (в расчетном примере использовалась стандартная функция `NDSolve` пакета `Mathematica`) и не предполагает хранения и/или аппроксимации предыстории.

Конечно, при численной реализации представленного алгоритма объем расчетов существенно зависит от отношения длины временного промежутка исследования к τ^*, что напрямую определяет порядок систем ОДУ для вторых центральных моментов. Но для медленно меняющихся или кусочно-постоянных запаздываний резкого нарастания этого объема можно избежать даже в случае повышенных требований к точности получаемых результатов.

Если же роста порядка систем ОДУ для вторых моментов обойти не удается, то можно предложить переработку прямого использования алгоритма с целью: а) эмпирического учета некоррелированности значений фазового вектора системы в далеко отстоящие друг от друга моменты времени; б) применения вычислительных систем для параллельных и распределенных вычислений (например, в рамках пакета `Mathematica`).

2.2.2.8. Линейные СОДУ с кусочно-постоянными временны́ми запаздываниями

В данном пункте рассматривается методика исследования линейных (афинных [945]) стохастических дифференциальных систем с кусочно-постоянными запаздываниями, основанная на модификации схемы расширения пространства состояний [214].

Рассмотрим систему СОДУ с кусочно-постоянными запаздываниями $\tau_\ell(t) \geqslant 0$ следующего вида:

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \sum_{\ell=1}^{\nu} \boldsymbol{\mathcal{H}}_\ell(t)\,\boldsymbol{X}(t-\tau_\ell) + \boldsymbol{c}(t) + \boldsymbol{\mathcal{G}}(t)\,\boldsymbol{V}(t), \qquad (2.2.78)$$

где t – время ($t_0 \leqslant t \leqslant T < +\infty$); $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния; $\boldsymbol{V} \in \mathbb{R}^m$ – вектор независимых случайных функций типа белого шума с единичными интенсивностями;

$$\tau_\ell(t) = N_{\ell q}\,\tau, \qquad t_{q-1} < t \leqslant t_q, \qquad N_{\ell q} \in \mathbb{N}_0,$$
$$t_q = t_0 + q \cdot \tau, \qquad \tau = \mathrm{const} > 0, \qquad q = 1, 2, \ldots.$$

Например, одна из регулярных форм функций $t - \tau_\ell(t)$ имеет вид $\lfloor t - d \rfloor$, где $d = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, $\lfloor z \rfloor$ – целая часть z [611].

Заметим, что в последнее время наблюдается значительный интерес к анализу детерминированных систем типа (2.2.78). Среди них преобладают работы, посвященные исследованию устойчивости [62, 612], осциллируемости решений [612], стабильности моделей экономики [277] и др.

Будем считать, что на интервале $(\bar{t}_0, t_0)$, где

$$\bar{t}_0 = \min_{t \geqslant t_0, \ell, q} (t - N_{\ell q}\,\tau) = t_0 - N_0 \tau, \qquad N_0 > 0,$$

вектор состояния $\boldsymbol{X}(t)$ удовлетворяет системе СОДУ без запаздываний

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_0(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{c}_0(t) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(t)\,\boldsymbol{V}_0(t), \qquad \boldsymbol{X}(\bar{t}_0) = \boldsymbol{X}^0, \qquad (2.2.79)$$

причем в уравнениях (2.2.78) и (2.2.79) $\boldsymbol{\mathcal{Q}}(t)$, $\boldsymbol{\mathcal{H}}_r(t)$, $\boldsymbol{\mathcal{G}}(t)$, $\boldsymbol{\mathcal{Q}}_0(t)$, $\boldsymbol{\mathcal{G}}_0(t)$ и $\boldsymbol{c}(t)$, $\boldsymbol{c}_0(t)$ – известные непрерывные матричные и векторные функции своих аргументов. Кроме того, предположим, что известны все необходимые числовые характеристики случайного вектора $\boldsymbol{X}^0$. В частности, пусть в фактический начальный момент времени $\bar{t}_0$ для вектора $\boldsymbol{X}$ заданы вектор математических ожиданий $\boldsymbol{m}^0 = \mathbb{E}\big[\boldsymbol{X}^0\big]$ и матрица ковариаций $\mathcal{D}^0 = \mathbb{E}\big[(\boldsymbol{X}^0 - \boldsymbol{m}^0)(\boldsymbol{X}^0 - \boldsymbol{m}^0)^{\intercal}\big]$.

Примечания. 1°. В излагаемой методике ничего не изменится, если в правых частях уравнений (2.2.79) будут отсутствовать случайные возмущения. 2°. По аналогии с детерминированными дифференциально-разностными уравнениями промежуток $[\bar{t}_0, t_0)$ можно называть начальным множеством.

Задача состоит в построении систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) без запаздывания для компонентов векторной функции средних $\boldsymbol{m}(t) = \mathbb{E}[\boldsymbol{X}(t)]$ и матрицы функций ковариации $\boldsymbol{\mathcal{D}}(t) = \mathbb{E}\big[\big\{\boldsymbol{X}(t) - \boldsymbol{m}(t)\big\}\big\{\boldsymbol{X}(t) - \boldsymbol{m}(t)\big\}^{\intercal}\big]$ векторного процесса $\boldsymbol{X}(t)$ при любом $t \geqslant \bar{t}_0$.

Как и выше, для того чтобы получить СОДУ без запаздывания, применим сочетание метода расширения пространства состояний и метода шагов.

Рассмотрим равномерную временную сетку $\bar{t}_q = \bar{t}_0 + q \cdot \tau$, $q = 0, 1, 2, \ldots, N+1$ ($\bar{t}_{N+1} \geqslant T$, $\bar{t}_{N_0} = t_0$) и воспользуемся введенными ранее обозначениями с небольшой коррекцией:

$$s_q = s + \bar{t}_q, \qquad \Delta_q = (\bar{t}_q, t_{q+1}].$$

Как и ранее, обратимся к последовательности полуинтервалов (сегментов) Δ_q.

0°. На сегменте Δ_0 систему СОДУ

$$\dot{\boldsymbol{Y}}(s) = 0, \quad \boldsymbol{Y}(0) = \boldsymbol{X}^0;$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}_0(s) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_0(s_0)\,\boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{c}_0(s_0) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s_0)\,\boldsymbol{V}_0(s), \quad \boldsymbol{X}_0(0) = \boldsymbol{X}^0,$$

решением которой является расширенная случайная векторная функция состояния $\boldsymbol{Z}_0(s) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{Y}(s), \boldsymbol{X}_0(s)\big)$, можно записать в следующем виде (здесь и далее точкой обозначена производная по переменной s):

$$\dot{\boldsymbol{Z}}_0(s) = \big[\boldsymbol{\mathcal{Q}}_0^+(s) + \boldsymbol{\mathcal{H}}_0^+(s)\big]\,\boldsymbol{Z}_0(s) + \boldsymbol{c}_0^+(s) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0^+(s)\,\boldsymbol{V}_0^+(s),$$

$$\boldsymbol{\mathcal{Q}}_0^+(s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n}\\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{Q}}_0(s_0)\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{\mathcal{H}}_0^+(s)=\boldsymbol{\mathcal{O}}_{2n\times 2n},$$

$$\boldsymbol{c}_0^+(s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}_n\\ \boldsymbol{c}_0(s_0)\end{bmatrix},\quad \bar{\boldsymbol{\mathcal{G}}}_0^+(s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m}\\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s_0)\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{V}_0^+(s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}_m\\ \boldsymbol{V}_0(s)\end{bmatrix},$$

1°. На промежутках Δ_0 и Δ_1 систему СОДУ для $\boldsymbol{Z}_0(s)=\operatorname{col}\big(\boldsymbol{Y}(s),\ \boldsymbol{X}_0(s),\ \boldsymbol{X}_1(s)\big)$

$$\dot{\boldsymbol{Y}}(s)=0,\quad \boldsymbol{Y}(0)=\boldsymbol{X}^0;$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}_0(s)=\boldsymbol{\mathcal{Q}}_0(s_0)\,\boldsymbol{X}_0(s)+\boldsymbol{c}_0(s_0)+\boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s_0)\,\boldsymbol{V}_0(s),\quad \boldsymbol{X}_0(0)=\boldsymbol{X}^0;$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}_1(s)=\boldsymbol{\mathcal{Q}}_0(s_1)\,\boldsymbol{X}_1(s)+\boldsymbol{c}_0(s_1)+\boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s_1)\,\boldsymbol{V}_1(s),\quad \boldsymbol{X}_1(0)=\boldsymbol{X}_0(\tau)$$

можно представить так:

$$\dot{\boldsymbol{Z}}_1(s)=\big[\boldsymbol{\mathcal{Q}}_1^+(s)+\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^+(s)\big]\,\boldsymbol{Z}_1(s)+\boldsymbol{c}_1^+(s)+\boldsymbol{\mathcal{G}}_1^+(s)\,\boldsymbol{V}_1^+(s),$$

$$\boldsymbol{\mathcal{Q}}_1^+(s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n}\\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{Q}}_0(s_0) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n}\\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{Q}}_0(s_1)\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{\mathcal{H}}_1^+(s)=\boldsymbol{\mathcal{O}}_{3n\times 3n},$$

$$\boldsymbol{c}_1^+(s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}_n\\ \boldsymbol{c}_0(s_0)\\ \boldsymbol{c}_0(s_1)\end{bmatrix},\quad \bar{\boldsymbol{\mathcal{G}}}_1^+(s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m}\\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s_0) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m}\\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s_1)\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{V}_1^+(s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}_m\\ \boldsymbol{V}_0(s)\\ \boldsymbol{V}_1(s)\end{bmatrix}.$$

... ...

(N_0-1)°. На полуинтервалах Δ_0, Δ_1, ..., Δ_{N_0-1} систему СОДУ

$$\dot{\boldsymbol{Y}}(s)=0,\quad \boldsymbol{Y}(0)=\boldsymbol{X}^0;$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}_0(s)=\boldsymbol{\mathcal{Q}}_0(s_0)\,\boldsymbol{X}_0(s)+\boldsymbol{c}_0(s_0)+\boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s_0)\,\boldsymbol{V}_0(s),\quad \boldsymbol{X}_0(0)=\boldsymbol{X}^0;$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}_1(s)=\boldsymbol{\mathcal{Q}}_0(s_1)\,\boldsymbol{X}_1(s)+\boldsymbol{c}_0(s_1)+\boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s_1)\,\boldsymbol{V}_1(s),\quad \boldsymbol{X}_1(0)=\boldsymbol{X}_0(\tau);$$

... ...

$$\dot{\boldsymbol{X}}_{N_0-1}(s)=\boldsymbol{\mathcal{Q}}_0(s_{N_0-1})\,\boldsymbol{X}_{N_0-1}(s)+\boldsymbol{c}_0(s_{N_0-1})+\boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s_{N_0-1})\,\boldsymbol{V}_{N_0-1}(s),$$
$$\boldsymbol{X}_{N_0-1}(0)=\boldsymbol{X}_{N_0-2}(\tau)$$

можно записать так:

$$\dot{\boldsymbol{Z}}_{N_0-1}(s)=\big[\boldsymbol{\mathcal{Q}}_{N_0-1}^+(s)+\boldsymbol{\mathcal{H}}_{N_0-1}^+(s)\big]\,\boldsymbol{Z}_{N_0-1}(s)+\boldsymbol{c}_{N_0-1}^+(s)+$$
$$+\boldsymbol{\mathcal{G}}_{N_0-1}^+(s)\,\boldsymbol{V}_{N_0-1}^+(s),$$

$$\mathcal{Q}^+_{N_0-1}(s)=\begin{bmatrix}\mathcal{O}_{n\times n} & \mathcal{O}_{n\times n} & \mathcal{O}_{n\times n} & \dots & \mathcal{O}_{n\times n}\\ \mathcal{O}_{n\times n} & \mathcal{Q}_0(s_0) & \mathcal{O}_{n\times n} & \dots & \mathcal{O}_{n\times n}\\ \mathcal{O}_{n\times n} & \mathcal{O}_{n\times n} & \mathcal{Q}_0(s_1) & \dots & \mathcal{O}_{n\times n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \mathcal{O}_{n\times n} & \mathcal{O}_{n\times n} & \mathcal{O}_{n\times n} & \dots & \mathcal{Q}_0(s_{N_0-1})\end{bmatrix},$$

$$\mathcal{H}^+_{N_0-1}(s)=\mathcal{O}_{N_0n\times N_0n},$$

$$c^+_{N_0-1}(s)=\begin{bmatrix}O_n\\ c_0(s_0)\\ c_0(s_1)\\ \dots\\ c_0(s_{N_0-1})\end{bmatrix},\qquad V^+_{N_0-1}(s)=\begin{bmatrix}O_m\\ V_0(s)\\ V_1(s)\\ \dots\\ V_{N_0-1}(s)\end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathcal{G}}^+_{N_0-1}(s)=\begin{bmatrix}\mathcal{O}_{n\times m} & \mathcal{O}_{n\times m} & \mathcal{O}_{n\times m} & \dots & \mathcal{O}_{n\times m}\\ \mathcal{O}_{n\times m} & \mathcal{G}_0(s_0) & \mathcal{O}_{n\times m} & \dots & \mathcal{O}_{n\times m}\\ \mathcal{O}_{n\times m} & \mathcal{O}_{n\times m} & \mathcal{G}_0(s_1) & \dots & \mathcal{O}_{n\times m}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \mathcal{O}_{n\times m} & \mathcal{O}_{n\times m} & \mathcal{O}_{n\times m} & \dots & \mathcal{G}_0(s_{N_0-1})\end{bmatrix}.$$

N_0°. На полуотрезках Δ_0, Δ_1, ..., Δ_{N_0} система СОДУ

$$\dot{Y}(s)=0,\quad Y(0)=X^0;$$

$$\dot{X}_0(s)=\mathcal{Q}_0(s_0)\,X_0(s)+c_0(s_0)+\mathcal{G}_0(s_0)\,V_0(s),\quad X_0(0)=X^0;$$

$$\dot{X}_1(s)=\mathcal{Q}_0(s_1)\,X_1(s)+c_0(s_1)+\mathcal{G}_0(s_1)\,V_1(s),\quad X_1(0)=X_0(\tau);$$

$$\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots$$

$$\dot{X}_{N_0-1}(s)=\mathcal{Q}_0(s_{N_0-1})\,X_{N_0-1}(s)+c_0(s_{N_0-1})+\mathcal{G}_0(s_{N_0-1})\,V_{N_0-1}(s),$$
$$X_{N_0-1}(0)=X_{N_0-2}(\tau);$$

$$\dot{X}_{N_0}(s)=\mathcal{Q}(s_{N_0})\,X_{N_0}(s)+\sum_{\ell=1}^{\nu}\mathcal{H}_\ell(s_{N_0})\,X_{N_0-N_{\ell1}}(s)+$$
$$+c(s_{N_0})+\mathcal{G}(s_{N_0})\,V_{N_0}(s),\quad X_{N_0}(0)=X_{N_0-1}(\tau)$$

принимает вид

$$\dot{Z}_{N_0}(s)=\left[\mathcal{Q}^+_{N_0}(s)+\mathcal{H}^+_{N_0}(s)\right]Z_{N_0}(s)+c^+_{N_0}(s)+\mathcal{G}^+_{N_0}(s)\,V^+_{N_0}(s),$$
$$Z_{N_0}(s)=\operatorname{col}\left(Z^+_{N_0-1}(s),X_{N_0}(s)\right),\quad V^+_{N_0}(s)=\operatorname{col}\left(V^+_{N_0-1}(s),V_{N_0}(s)\right),$$
$$\mathcal{Q}^+_{N_0}(s)=\begin{bmatrix}\mathcal{Q}^+_{N_0-1}(s) & \mathcal{O}_{N_0n\times n}\\ \mathcal{O}_{n\times N_0n} & \mathcal{Q}(s_{N_0})\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}^{+}_{N_0}(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{H}}^{+}_{N_0-1}(s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{N_0 n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{H}}^{*}_{N_0}(s) & \check{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_{N_0 N_0}(s) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}^{*}_{N_0}(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \check{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_{N_0,1}(s) & \check{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_{N_0,2}(s) & \ldots & \check{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_{N_0,N_0-1}(s) \end{bmatrix},$$

$$\check{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_{N_0,k}(s) = \sum_{\ell=1}^{\nu} \boldsymbol{\mathcal{H}}_{\ell}(s_{N_0})\,\delta_{k,N_0-N_{\ell 1}}, \quad k = 1,2,\ldots,N_0-1,$$

$$\boldsymbol{c}^{+}_{N_0}(s) = \operatorname{col}\left(\boldsymbol{c}^{+}_{N_0-1}(s), \boldsymbol{c}(s_{N_0})\right), \quad \boldsymbol{\mathcal{G}}^{+}_{N_0}(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{G}}^{+}_{N_0-1}(s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{N_0 n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times N_0 m} & \boldsymbol{\mathcal{G}}(s_{N_0}) \end{bmatrix}.$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

N°. На сегментах Δ_0, Δ_1, ..., Δ_{N_0-1}, Δ_{N_0}, ..., Δ_N система СОДУ

$$\dot{\boldsymbol{Y}}(s) = 0, \quad \boldsymbol{Y}(0) = \boldsymbol{X}^0;$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}_0(s) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_0(s_0)\,\boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{c}_0(s_0) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s_0)\,\boldsymbol{V}_0(s), \quad \boldsymbol{X}_0(0) = \boldsymbol{X}^0;$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}_1(s) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_0(s_1)\,\boldsymbol{X}_1(s) + \boldsymbol{c}_0(s_1) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s_1)\,\boldsymbol{V}_1(s), \quad \boldsymbol{X}_1(0) = \boldsymbol{X}_0(\tau);$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}_{N_0-1}(s) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_0(s_{N_0-1})\,\boldsymbol{X}_{N_0-1}(s) + \boldsymbol{c}_0(s_{N_0-1}) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s_{N_0-1})\,\boldsymbol{V}_{N_0-1}(s),$$
$$\boldsymbol{X}_{N_0-1}(0) = \boldsymbol{X}_{N_0-2}(\tau);$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}_{N_0}(s) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_{N_0})\,\boldsymbol{X}_{N_0}(s) + \sum_{\ell=1}^{\nu} \boldsymbol{\mathcal{H}}_{\ell}(s_{N_0})\,\boldsymbol{X}_{N_0-N_{\ell 1}}(s) +$$
$$+ \boldsymbol{c}(s_{N_0}) + \boldsymbol{\mathcal{G}}(s_{N_0})\,\boldsymbol{V}_{N_0}(s), \quad \boldsymbol{X}_{N_0}(0) = \boldsymbol{X}_{N_0-1}(\tau);$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}_N(s) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_N)\,\boldsymbol{X}_N(s) + \sum_{\ell=1}^{\nu} \boldsymbol{\mathcal{H}}_{\ell}(s_N)\,\boldsymbol{X}_{N-N_{\ell,N-N_0}}(s) +$$
$$+ \boldsymbol{c}(s_N) + \boldsymbol{\mathcal{G}}(s_N)\,\boldsymbol{V}_N(s), \quad \boldsymbol{X}_N(0) = \boldsymbol{X}_{N-1}(\tau)$$

записывается так:

$$\dot{\boldsymbol{Z}}_N(s) = \left[\boldsymbol{\mathcal{Q}}^{+}_N(s) + \boldsymbol{\mathcal{H}}^{+}_N(s)\right]\boldsymbol{Z}_N(s) + \boldsymbol{c}^{+}_N(s) + \boldsymbol{\mathcal{G}}^{+}_N(s)\,\boldsymbol{V}^{+}_N(s),$$
$$\boldsymbol{Z}_N(s) = \operatorname{col}\left(\boldsymbol{Z}^{+}_{N-1}(s), \boldsymbol{X}_N(s)\right), \quad \boldsymbol{V}^{+}_N(s) = \operatorname{col}\left(\boldsymbol{V}^{+}_{N-1}(s), \boldsymbol{V}_N(s)\right),$$
$$\boldsymbol{\mathcal{Q}}^{+}_N(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{Q}}^{+}_{N-1}(s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{Nn\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times Nn} & \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_N) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}_N^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{H}}_{N-1}^+(s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{Nn\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{H}}_N^*(s) & \check{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_{NN}(s) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}_N^*(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \check{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_{N,1}(s) & \check{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_{N,2}(s) & ... & \check{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_{N,N-1}(s) \end{bmatrix},$$

$$\check{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_{N,k}(s) = \sum_{\ell=1}^{\nu} \boldsymbol{\mathcal{H}}_\ell(s_N)\, \delta_{\ell,N-N_{\ell,N-N_0}}, \quad k = 1,2,...,N-1,$$

$$\boldsymbol{c}_N^+(s) = \operatorname{col}\left(\boldsymbol{c}_{N-1}^+(s), \boldsymbol{c}(s_N)\right), \quad \boldsymbol{\mathcal{G}}_N^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{G}}_{N-1}^+(s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{Nn\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times Nm} & \boldsymbol{\mathcal{G}}(s_N) \end{bmatrix}.$$

Итак, получена цепочка систем линейных СДУ для расширенных фазовых векторов $\boldsymbol{Z}_1$, $\boldsymbol{Z}_2$, ..., $\boldsymbol{Z}_N$, ... увеличивающейся размерности и одинаковой структуры без запаздывания.

Теперь построенную последовательность систем линейных СДУ без запаздывания можно использовать для получения новой цепочки уравнений – ОДУ для первых моментов векторов $\boldsymbol{Z}_0$, $\boldsymbol{Z}_1$, ..., $\boldsymbol{Z}_N$, причем

$$\boldsymbol{m}_k^+(s) = \mathbb{E}[\boldsymbol{Z}_k(s)] \equiv \operatorname{col}\left(\boldsymbol{Y}(s), \boldsymbol{m}_{X_0}(s), \boldsymbol{m}_{X_2}(s), ..., \boldsymbol{m}_{X_k}(s)\right),$$

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_{kk}^+(s) = \mathbb{E}\left[\left\{\boldsymbol{Z}_k(s) - \boldsymbol{m}_k^+(s)\right\}\left\{\boldsymbol{Z}_k(s) - \boldsymbol{m}_k(s)\right\}^\intercal\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YY}(s) & \mathcal{D}_{YX_0}(s) & \mathcal{D}_{YX_1}(s) & ... & \mathcal{D}_{YX_k}(s) \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0Y}(s) & \mathcal{D}_{X_0X_0}(s) & \mathcal{D}_{X_0X_1}(s) & ... & \mathcal{D}_{X_0X_k}(s) \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_1Y}(s) & \mathcal{D}_{X_1X_0}(s) & \mathcal{D}_{X_1X_1}(s) & ... & \mathcal{D}_{X_1X_k}(s) \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_kY}(s) & \mathcal{D}_{X_kX_0}(s) & \mathcal{D}_{X_kX_1}(s) & ... & \mathcal{D}_{X_kX_k}(s) \end{bmatrix},$$

$$k = 0,1,2,...,N.$$

В связи с тем, что вектор $\boldsymbol{m}_k(s)$ и матрица $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{kk}(s)$ являются блоками вектора $\boldsymbol{m}_k^+(s)$ и матрицы $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{kk}^+(s)$ соответственно, то достаточно вычислить только последние, а затем выбрать их необходимые блоки.

Из предыдущих рассуждений и из соответствующих соотношений [236] следует, что числовые характеристики вектора $\boldsymbol{Z}_k(s)$ удовлетворяют следующим системам ОДУ:

$$\dot{\boldsymbol{m}}_k^+(s) = \left[\boldsymbol{\mathcal{Q}}_k^+(s) + \boldsymbol{\mathcal{H}}_k^+(s)\right] \boldsymbol{m}_k^+(s) + \boldsymbol{c}_k^+(s),$$

$$\dot{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_{kk}^+(s) = \left\{\boldsymbol{\mathcal{Q}}_k^+(s) + \boldsymbol{\mathcal{H}}_k^+(s)\right\} \boldsymbol{\mathcal{K}}_{kk}^+(s) +$$

$$+ \left[\left\{\boldsymbol{\mathcal{Q}}_k^+(s) + \boldsymbol{\mathcal{H}}_k^+(s)\right\} \boldsymbol{\mathcal{K}}_{kk}^+(s)\right]^\intercal + \boldsymbol{\mathcal{G}}_k^+(s)\, \boldsymbol{\mathcal{G}}_k^{+\intercal}(s)$$

с соответствующими начальными условиями

$$\boldsymbol{m}_k^+(0) = \operatorname{col}\left(\boldsymbol{m}^0, \boldsymbol{m}^0, \boldsymbol{m}_1(\tau), ..., \boldsymbol{m}_{k-1}(\tau)\right),$$

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_{kk}^+(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{K}}^0 & \boldsymbol{\mathcal{K}}^0 & \mathcal{D}_{YX_0}(\tau) & ... & \mathcal{D}_{YX_{k-1}}(\tau) \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}^0 & \boldsymbol{\mathcal{K}}^0 & \mathcal{D}_{YX_0}(\tau) & ... & \mathcal{D}_{YX_{k-1}}(\tau) \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0Y}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0Y}(\tau) & \mathcal{D}_{X_0X_0}(\tau) & ... & \mathcal{D}_{X_0X_{k-1}}(\tau) \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{k-1}Y}(\tau) & \mathcal{D}_{X_{k-1}Y}(\tau) & \mathcal{D}_{X_{k-1}X_0}(\tau) & ... & \mathcal{D}_{X_{k-1}X_{k-1}}(\tau) \end{bmatrix}.$$

Для демонстрации применимости представленной схемы было проанализировано поведение нескольких стохастических систем различной размерности. Некоторая часть полученных результатов приводится ниже. Все численно-аналитические расчеты были проведены с помощью программ на входном языке пакета `Mathematica`.

Пример 2.2.11. В качестве первой исследуемой модели была выбрана система

$$\dot{X}(t) = p\,X(t) + q\,X\left(t - \lfloor 10\sin^2 t\rfloor \cdot \tau\right) + h\,V(t), t > 0;$$
$$\dot{X}(t) = 0, \qquad \bar{t}_0 < t \leqslant 0;$$
$$m(\bar{t}_0) = m^0, \qquad \mathcal{D}(\bar{t}_0) = \mathcal{D}^0,$$

где p, q, h – постоянные. На рис. 2.2.34 и 2.2.35 изображено поведение математического ожидания и дисперсии $X(t)$ при следующих значениях параметров:

$$p = -1; \quad q = 0.2; \qquad h = 0.2; \qquad \bar{t}_0 = -3;$$
$$m^0 = 5; \qquad \mathcal{D}^0 = 0.25; \qquad \tau \in \{0.50; 0.75; 1.00\},$$

причем первому значению τ соответствуют кривые, отмеченные цифрой 1, второму – 2, третьему – 3. ►

Пример 2.2.12. Уравнения второй из представленных систем выглядели так:

$$\ddot{X}(t) + 2\,\alpha_1\,\dot{X}(t) + 2\,\alpha_2\,\dot{X}(t - \tau_1(t)) + \beta_1\,X(t) +$$
$$+\beta_2\,X(t - \tau_2(t)) = \gamma\,V(t), \quad t > 0;$$
$$\ddot{X}(t) = 0, \qquad t \leqslant 0;$$
$$\boldsymbol{m}(\bar{t}_0) = \boldsymbol{m}^0, \qquad \boldsymbol{\mathcal{K}}(\bar{t}_0) = \boldsymbol{\mathcal{K}}^0,$$

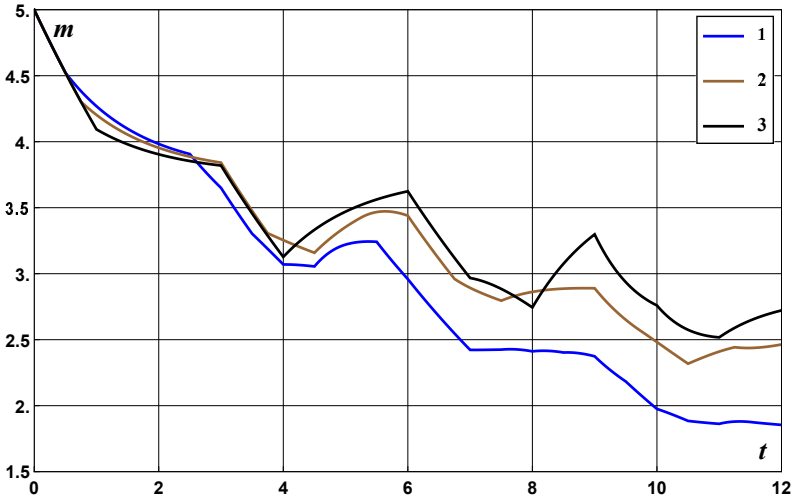


Рис. 2.2.34

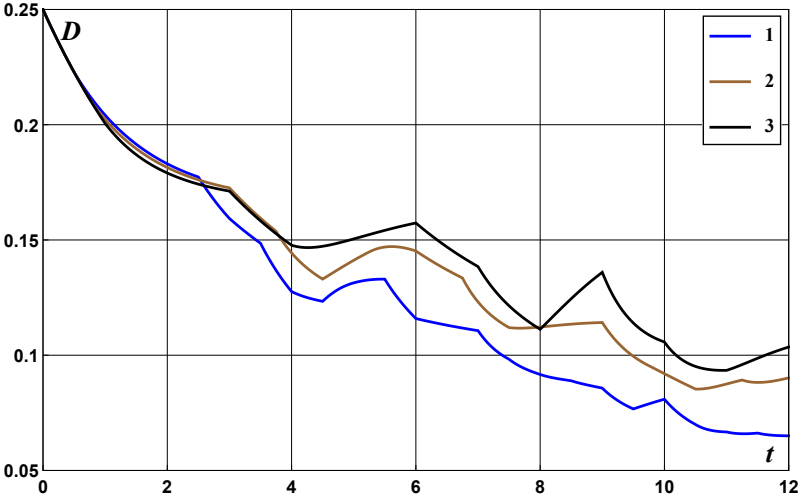


Рис. 2.2.35

где α_i, β_i, γ – постоянные. На рис. 2.2.36, 2.2.37 и 2.2.38, 2.2.38 изображено поведение компонент вектора математических ожиданий и ковариационной матрицы для вектора состояния $\boldsymbol{X}(t) = \{X_1(t), X_2(t)\}^{\mathsf{T}} =$

$\{X(t), \dot{X}(t)\}^{\intercal}$ при следующих значениях параметров:

$$\alpha_1 = 0{,}125; \qquad \alpha_2 = -0{,}1; \qquad \gamma = 0{,}1;$$
$$\beta_1 = 4, \qquad \beta_2 = 1, \qquad \tau = \pi/4,$$
$$\boldsymbol{m}^0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\mathcal{K}}^0 = \begin{bmatrix} 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0{,}16 \end{bmatrix}.$$

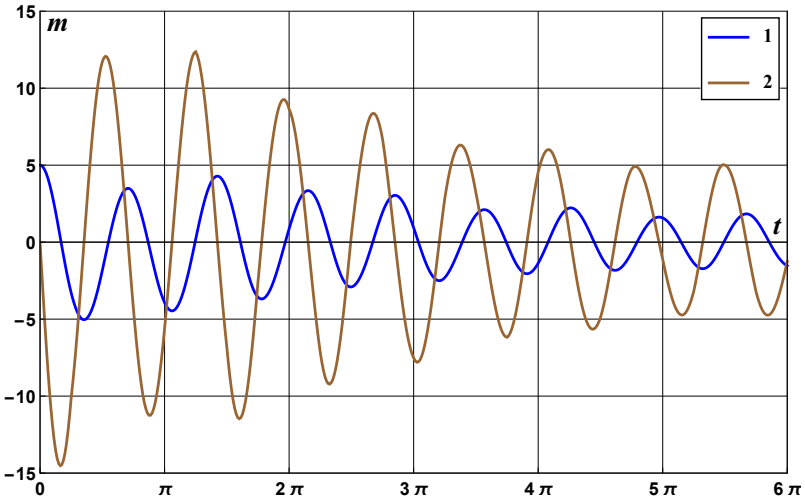


Рис. 2.2.36

Рисунки 2.2.36 и 2.2.38 соответствуют случаю, когда для запаздываний $\tau_1(t)$ и $\tau_2(t)$ константы N_{rq} образуют циклические последовательности

$$N_{1q} \sim \{1, 3, 5, 7, 5, 3, 1, 3, 5, 7, 5, 3, 1\},$$
$$N_{2q} \sim \{0, 2, 4, 6, 4, 2, 0, 2, 4, 6, 4, 2, 0\},$$

а 2.2.37 и 2.2.39 –

$$N_{1q} \sim \{1, 1, 3, 3, 5, 5, 7, 7, 5, 5, 3, 3, 1, 1\},$$
$$N_{2q} \sim \{0, 0, 2, 2, 4, 4, 6, 6, 4, 4, 2, 2, 0, 0\}.$$

При этом на рис. 2.2.36 и 2.2.37 функции математического ожидания случайных процессов $X_1(t)$ и $X_2(t)$ отмечены линиями 1 и 2, а на 2.2.38

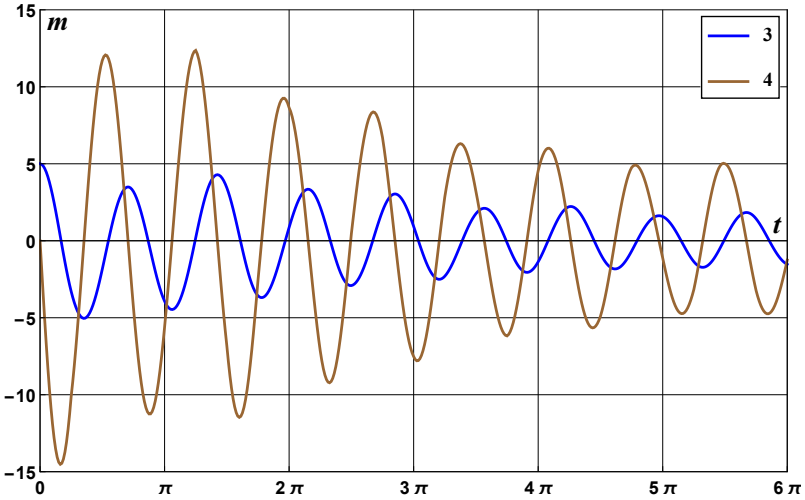


Рис. 2.2.37

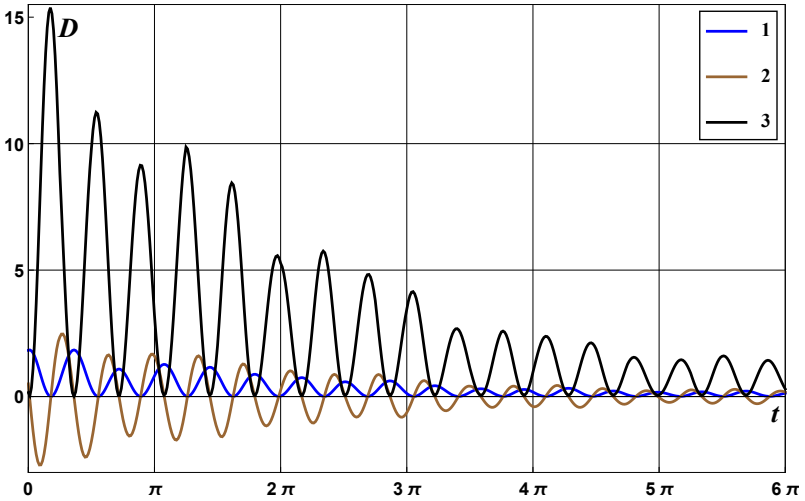


Рис. 2.2.38

и 2.2.39 линии 1, 2 и 3 демонстрируют поведение функций ковариации $\mathcal{D}_{11}(t)$, $\mathcal{D}_{12}(t)$ и $\mathcal{D}_{22}(t)$ соответственно. ▶

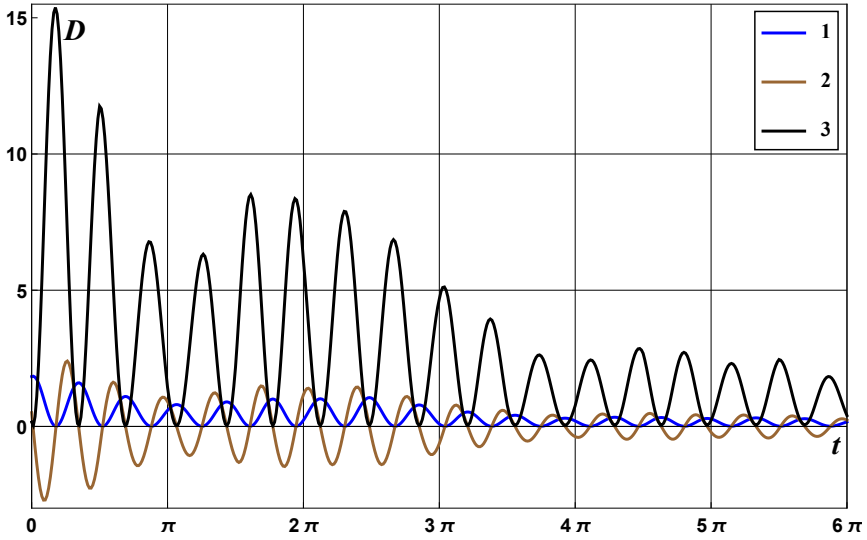


Рис. 2.2.39

2.2.2.9. Сочетание схемы МШРПС с процедурой линеаризации при анализе систем нелинейных СОДУ с постоянными запаздываниями

Рассмотрим следующую систему нелинейных СОДУсЗ [224], решением которой является векторный случайный процесс $\boldsymbol{X}(t)$:

$$d\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{f}_0\big(\boldsymbol{X}(t), t\big) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(t)\, d\boldsymbol{W}(t), \quad t_0 < t \leqslant t_1 = t_0 + \tau, \tag{2.2.80}$$

$$\boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}^0, \tag{2.2.81}$$

$$d\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{X}(t), \boldsymbol{X}(t-\tau), t\big) + \boldsymbol{\mathcal{G}}(t)\, d\boldsymbol{W}(t), \quad t_1 < t \leqslant T. \tag{2.2.82}$$

Здесь $\boldsymbol{f}_0 : \mathbb{R}^n \times (t_0, t_1] \mapsto \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times (t_1, T] \mapsto \mathbb{R}^n$ и $\boldsymbol{\mathcal{G}}_0 : (t_0, t_1] \mapsto \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{\mathcal{G}} : (t_1, T \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ – детерминированные векторные и матричные функции своих аргументов. Далее, кроме представлений (2.2.80), (2.2.82), используются СОДУ и СОДУсЗ в форме с производными. При этом начальные условия для вектора математических ожиданий $\boldsymbol{m}_X(t)$ и матрицы функции ковариаций $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}(t)$ при $t = t_0$ задаются вектором $\boldsymbol{m}^0$ и ковариационной матрицей $\boldsymbol{\mathcal{K}}_X^0$ соответственно.

Используя ранее введенные обозначения и соотношения, можно получить цепочку систем стохастических ОДУ без запаздывания, которым

удовлетворяют векторные марковские процессы $\boldsymbol{Z}_0(s) = \boldsymbol{X}_0(s)$, $\boldsymbol{Z}_1(s) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{Z}_0(s), \boldsymbol{X}_1(s)\big)$, $\boldsymbol{Z}_2(s) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{Z}_1(s), \boldsymbol{X}_2(s)\big)$, ..., $\boldsymbol{Z}_N(s) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{Z}_{N-1}(s), \boldsymbol{X}_N(s)\big)$ $(t_{N+1} \geqslant T)$. Эти системы или соответствующие уравнения типа Фоккера–Планка–Колмогорова для функций плотности вероятности векторов $\boldsymbol{Z}_\ell$ могут быть использованы, например, для построения обыкновенных дифференциальных уравнений, решениями которых будут моментные функции $\boldsymbol{m}_{Z_\ell}(s)$.

Анализ нелинейных стохастических систем сложен даже в случае отсутствия запаздывания. Поэтому нередко единственным путем получения желаемых результатов, за исключением метода статистического моделирования (Монте-Карло), является применение одной из форм линеаризации модели [997]. Общая процедура анализа нелинейных систем СОДУсЗ на основе схемы МШРПС была разработана в работах [191,202]. Но практическая реализация данной схемы достаточно трудна. Поэтому ниже для достижения поставленной цели применяется комбинация схемы МШРПС и метода линеаризации.

Предположим, что с достаточной точностью векторнозначные функции $\boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{X}(t), t)$ и $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}(t), t)$ на полуинтервалах Δ_0, Δ_1, ..., Δ_N[12] могут быть на линеаризованы в окрестности вектора математических ожиданий:

$$\boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{X}(t), t) \approx \boldsymbol{\mathcal{A}}_0(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{c}_0(t),$$
$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}(t), \boldsymbol{X}(t-\tau), t) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_\ell(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{\mathcal{B}}_\ell(t)\,\boldsymbol{X}(t-\tau) + \boldsymbol{c}_\ell(t),$$

причем матричные функции $\boldsymbol{\mathcal{A}}_0(t)$, $\boldsymbol{\mathcal{A}}_\ell(t)$, $\boldsymbol{\mathcal{B}}_\ell(t)$ и векторные функции $\boldsymbol{c}_0(t)$, $\boldsymbol{c}_\ell(t)$ зависят только от t, соответствующих векторов $\boldsymbol{m}_{X\ell}(t)$ и матриц $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX\ell}(t)$ $(0 \leqslant \ell \leqslant N)$.

Тогда линеаризованную систему СОДУсЗ (2.2.80), (2.2.82) можно записать в следующей форме:

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_0(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{c}_0(t) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(t)\,\boldsymbol{V}(t), \quad t \in \Delta_0, \tag{2.2.83}$$
$$\boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}^0 \equiv \boldsymbol{Y}(t), \qquad \dot{\boldsymbol{Y}}(t) = \boldsymbol{0},$$
$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_\ell(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{\mathcal{B}}_\ell(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{c}_\ell(t) + \boldsymbol{\mathcal{G}}(t)\,\boldsymbol{V}(t), \tag{2.2.84}$$
$$t \in \Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_N,$$

где матричные функции $\boldsymbol{\mathcal{A}}_0$, $\boldsymbol{\mathcal{G}}_0(t)$, $\boldsymbol{\mathcal{A}}_\ell(t)$, $\boldsymbol{\mathcal{B}}_\ell$, $\boldsymbol{\mathcal{G}}(t)$ и векторные функции $\boldsymbol{c}_0(t)$, $\boldsymbol{c}_\ell(t)$ непрерывны по t.

[12] В случае недостаточной точности линеаризации на всем полуинтервале необходимо осуществлять аппроксимацию на более мелких участках, образующих данный полуинтервал. При этом основная схема не изменится.

Рассмотрим теперь последовательность полуотрезков $\{\Delta_\ell\}$, обозначая дифференцирование по s точкой над соответствующим символом.

0°. Начнем с Δ_0. Векторный случайный процесс $\boldsymbol{X}_0(s)$, определенный на Δ_0, является решением системы СОДУ

$$\dot{\boldsymbol{X}}_0(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_0(s_0)\,\boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{c}_0(s_0) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s_0)\,\boldsymbol{V}_0(s).$$

Эта система может быть переписана следующим образом:

$$\dot{\boldsymbol{Z}}_0(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_0^*(s)\,\boldsymbol{Z}_0(s) + \boldsymbol{c}_0^*(s) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0^*(s)\,\boldsymbol{V}_0^*(s),$$
$$\boldsymbol{Z}_0(s) = \boldsymbol{X}_0(s), \qquad \boldsymbol{\mathcal{A}}_0^*(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_0(s_0), \qquad \boldsymbol{c}_0^*(s) = \boldsymbol{c}_0(s_0),$$
$$\boldsymbol{\mathcal{G}}_0^*(s) = \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s_0), \qquad \boldsymbol{V}_0^*(s) = \boldsymbol{V}_0(s) = \boldsymbol{V}(s_0).$$

1°. Теперь рассмотрим полуинтервалы Δ_0 и Δ_1 совместно. В этом случае возможно представление системы СДУ для определения векторного случайного процесса $\boldsymbol{Z}_1(s) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{X}_0(s), \boldsymbol{X}_1(s)\big)$ в виде

$$\dot{\boldsymbol{X}}_0(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_0(s_0)\,\boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{c}_0(s_0) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s_0)\,\boldsymbol{V}_0(s),$$
$$\dot{\boldsymbol{X}}_1(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_1(s_1)\,\boldsymbol{X}_1(s) + \boldsymbol{\mathcal{B}}_1(s_1)\,\boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{c}_1(s_1) + \boldsymbol{\mathcal{G}}(s_1)\,\boldsymbol{V}_1(s).$$

Отсюда получим

$$\dot{\boldsymbol{Z}}_1(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_1^*(s)\,\boldsymbol{Z}_1(s) + \boldsymbol{c}_1^*(s_1) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_1^*(s)\,\boldsymbol{V}_1^*(s),$$
$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_1^*(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{A}}_0(s_0) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{B}}_1(s_1) & \boldsymbol{\mathcal{A}}_1(s_1) \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{c}_1^*(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_0(s_0) \\ \boldsymbol{c}_1(s_1) \end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{\mathcal{G}}_1^*(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s_0) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{G}}(s_1) \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{V}_1^*(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_0(s) \\ \boldsymbol{V}_1(s) \end{bmatrix}.$$

... ...

N°. Уравнения на интервалах Δ_0, Δ_1, ..., Δ_N для вектора $\boldsymbol{Z}_N(s) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{X}_0(s),\ \boldsymbol{X}_1(s), ..., \boldsymbol{X}_N(s)\big)$ можно представить в следующей удобной форме:

$$\dot{\boldsymbol{Z}}_N(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_N^*(s)\,\boldsymbol{Z}_N(s) + \boldsymbol{c}_N^*(s) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_1^*(s)\,\boldsymbol{V}_1^*(s),$$
$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_N^*(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{A}}_{N-1}^*(s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{nN\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{B}}_N^+(s_1) & \boldsymbol{\mathcal{A}}_N(s_N) \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{c}_N^*(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_{N-1}(s) \\ \boldsymbol{c}_N(s_N) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}_N^*(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{G}}_{N-1}^*(s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{nN\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times mN} & \boldsymbol{\mathcal{G}}(s_N) \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{V}_N^*(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_{N-1}^*(s) \\ \boldsymbol{V}_N(s) \end{bmatrix}.$$

Теперь цепочка полученных систем линейных СОДУ без запаздывания может быть использована для вывода новой последовательности уравнений, а именно, ОДУ для первых моментных функций векторов $\boldsymbol{Z}_0^+$, $\boldsymbol{Z}_1^+$, ..., $\boldsymbol{Z}_N^+$, где $\boldsymbol{Z}_0^+(s) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{Y}(s), \boldsymbol{Z}_0(s)\big)$, $\boldsymbol{Z}_1^+(s) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{Y}(s), \boldsymbol{Z}_1(s)\big)$, ..., $\boldsymbol{Z}_N^+(s) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{Y}(s), \boldsymbol{Z}_N(s)\big)$.

Введем дополнительные обозначения:

$$\mathring{\boldsymbol{Z}}_\ell^+(s) = \boldsymbol{Z}_\ell^+(s) - \boldsymbol{m}_\ell^+(s),$$

$$\boldsymbol{m}_\ell(s) = \mathbb{E}[\boldsymbol{Z}_\ell(s)] \equiv \operatorname{col}\big(\boldsymbol{m}_{X_0}(s), ..., \boldsymbol{m}_{X_\ell}(s)\big),$$

$$\boldsymbol{m}_\ell^+(s) = \mathbb{E}\big[\boldsymbol{Z}_\ell^+(s)\big] \equiv \operatorname{col}\big(\boldsymbol{m}_Y(s), \boldsymbol{m}_\ell(s)\big),$$

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_\ell^+(s) = \mathbb{E}\Big[\{\mathring{\boldsymbol{Z}}_\ell^+(s)\}\{\mathring{\boldsymbol{Z}}_\ell^+(s)\}^{\mathsf{T}}\Big] =$$

$$= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YY}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_0}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_1}(s) & ... & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_\ell}(s) \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0Y}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0X_0}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0X_1}(s) & ... & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0X_\ell}(s) \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_1Y}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_1X_0}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_1X_1}(s) & ... & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_1X_\ell}(s) \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_\ell Y}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_\ell X_0}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_\ell X_1}(s) & ... & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_\ell X_\ell}(s) \end{bmatrix},$$

$$\ell = 0, 1, 2, ..., N.$$

Тогда, используя СОДУ для векторов $\boldsymbol{Z}_\ell(s)$ и последние обозначения, искомые системы ОДУ для первых моментных функций могут быть записаны так:

$$\dot{\boldsymbol{m}}_\ell^+(s) = \underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_\ell^*(s)\, \boldsymbol{m}_\ell^+(s) + \underline{\boldsymbol{c}}_\ell^*(s),$$

$$\dot{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_\ell^+(s) = \underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_\ell^*(s)\, \boldsymbol{\mathcal{K}}_\ell^+(s) + \big[\underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_\ell^*(s)\, \boldsymbol{\mathcal{K}}_\ell^+(s)\big]^{\mathsf{T}} + \underline{\boldsymbol{\mathcal{G}}}_\ell^*(s)\, \underline{\boldsymbol{\mathcal{G}}}_\ell^{*\mathsf{T}}(s),$$

где для $\ell = 0, 1, 2, ..., N$

$$\underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_\ell^*(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n(\ell+1)} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n(\ell+1)\times n} & \boldsymbol{\mathcal{A}}_\ell^*(s) \end{bmatrix}, \quad \underline{\boldsymbol{c}}_\ell^*(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{c}_\ell^*(s) \end{bmatrix},$$

$$\underline{\boldsymbol{\mathcal{G}}}_\ell^*(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m(\ell+1)} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n(\ell+1)\times m} & \boldsymbol{\mathcal{G}}_\ell^*(s) \end{bmatrix}.$$

Заметим, что внутренние структуры уравнений, подобных последним, для случая линейных систем СДРУ (I) и рассматриваемого здесь нелиненого случая (II) существенно различаются: дело в том, что такие

уравнения для систем типа I линейны по $m^{+}_{\ell i}(s)$ и $\mathcal{K}^{+}_{\ell ij}(s)$, а для II, вообще говоря, нелинейны по отношению к указанным функциям.

Изложенная выше процедура была применена для расчета переходных режимов ряда динамических систем с размерностью пространства состояния, равной двум. В первом и втором из представленных ниже примеров отдельные СДРУ второго порядка приводились к системам СДРУ первого порядка с помощью перехода от $\{X(t), \dot{X}(t)\}$ к $\{X_1(t), X_2(t)\}$.

При анализе всех систем для контроля расчетов по предложенной в работе схеме применялся метод статистического моделирования (Монте-Карло) [127, 236] на основе модификации схемы Эйлера–Маруямы [742] численного интегрирования систем СДРУ. При этом для оценки требуемых моментных функций обработка результатов моделирований (не менее 2000 имитаций) проводилась методами математической статистики [127]. Для линеаризации нелинейностей использовались методы простой и статистической линеаризации [236].

Ниже приводятся основные результаты этих расчетов, выполненных с помощью программ, написанных на входном языке пакета `Mathematica` [821], с применением пакета ProbRel [276, 902] для получения коэффициентов линеаризации. На графиках, где соответствие кривых отображаемым характеристикам дано в легендах, результаты расчетов, полученные на основе метода Монте-Карло (МСМ, точечные кривые) и описанного в данной статье алгоритма, представлены совместно. Отсутствие на некоторых из этих графиков точечных кривых означает, что последние полностью совпали со своими аналогами. Во всех примерах параметры расчетов выбирались из областей устойчивости. Для численного интегрирования систем ОДУ для моментных функций, которые генерировались программно, использовались стандартные средства пакета `Mathematica`.

Пример 2.2.13. Исследуем поведение нелинейной системы типа Дюффинга с запаздыванием:

$$\ddot{X}(t) + 2\,\alpha\,\dot{X}(t) + \omega_0^2\,X(t) + \mu\,X^3(t) = \beta\,\Delta\,X(t) + \gamma\,V(t),$$

где α, ω_0, β, γ, μ – постоянные, $\Delta\,X(t) = X(t) - X(t-\tau)$. Предположим, что на начальном множестве состояние системы не меняется, а потому СОДУ для $X(t)$ будет иметь вид:

$$\ddot{X}(t) = 0,$$

причем неслучайную начальную скорость будем считать равной нулю.

В качестве значений расчетных параметров были выбраны следующие:

$$\omega_0 = 2; \quad \alpha = 0.125; \quad \gamma = 0.125; \quad \beta = -0.2; \quad \mu = 0.1;$$
$$\tau = \pi/4; \quad t_0 = -\tau; \quad T = 15\,\tau;$$
$$\boldsymbol{m}^0 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad \boldsymbol{\mathcal{K}}^0 = \begin{bmatrix} 1/16 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Результаты вычислений, полученные с применением метода простой линеаризации, приведены на рис. 2.2.40 и 2.2.41.

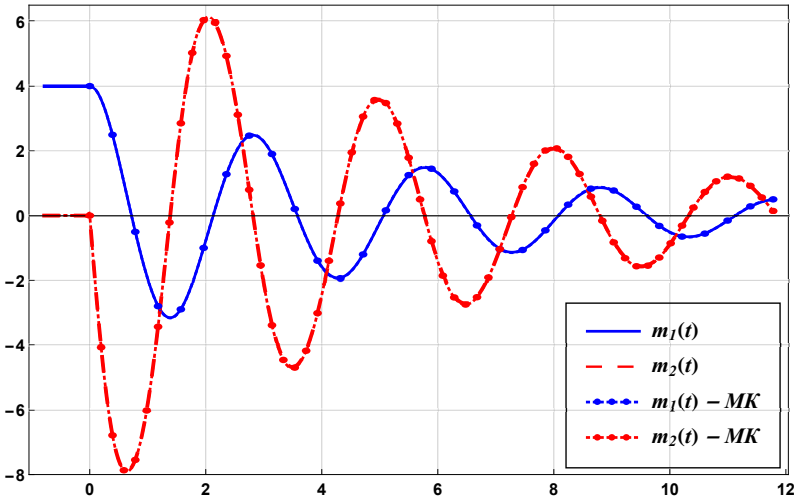


Рис. 2.2.40

Пример 2.2.14. Рассмотрим поведение системы, описывающей управление с обратной связью в уравнении Ван дер Поля:

$$\ddot{X}(t) + 2\,\alpha\left[X^2(t) - 1\right]\dot{X}(t) + \omega_0^2\,X(t) = \beta\left[\dot{X}(t) - \dot{X}(t-\tau)\right]^2 + \gamma\,V(t), \quad t > 0,$$

где $\omega_0 > 0$, $\alpha > 0$, β, γ – постоянные. Будем считать, что на начальном множестве случайный процесс $X(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\ddot{X}(t) + 2\,\alpha\left[X^2(t) - 1\right]\dot{X}(t) + \omega_0^2 X(t) = \gamma\,V(t), \quad -\tau < t \leqslant 0.$$

Расчеты производились при следующих значениях параметров:

$$\omega_0 = 1; \quad \alpha = 0.1; \quad \beta = 0.2;$$

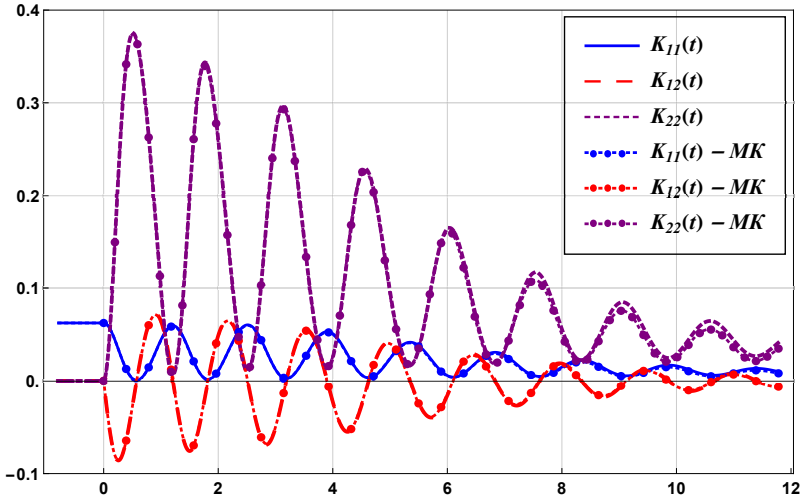


Рис. 2.2.41

$$\gamma = 0.125; \quad \tau = 0.5; \quad t_0 = -\tau; \quad T = 20;$$

$$\boldsymbol{m}^0 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad \boldsymbol{\mathcal{K}}^0 = \begin{bmatrix} 1/16 & 0 \\ 0 & 1/25 \end{bmatrix}.$$

Результаты вычислений, полученные с применением метода статистической линеаризации, приведены на рис. 2.2.42 и 2.2.43. По ним несложно увидеть выход на предельные циклы всех моментов, вычисленных по схеме МШРПС, что соответствует переходным процессам в детерминированных уравнениях Ван дер Поля, и значительное отклонение ковариаций при сходном поведении математических ожиданий, полученных на основе расчетов по МСМ. Этот факт пополняет список тех стохастических систем, при анализе которых МСМ применим ограничено.

Пример 2.2.15. В данном примере изучается модель нелинейного взаимодействия между температурой поверхности моря и слоем температурного скачка (the thermocline depth) в некоторой области южной части Тихого океана [471]:

$$\dot{X}_i(t) = a_i\, X_i(t) - b_i\, X_i^3(t) + c_i\, X_{3-i}(t-\tau) + \gamma_i\, V_i(t), \qquad i = 1, 2,$$

где a_i, b_i, c_i, γ_i – постоянные. В этой модели случайные возмущения представляют воздействие ветра на поверхность моря. Как и в предыдущем

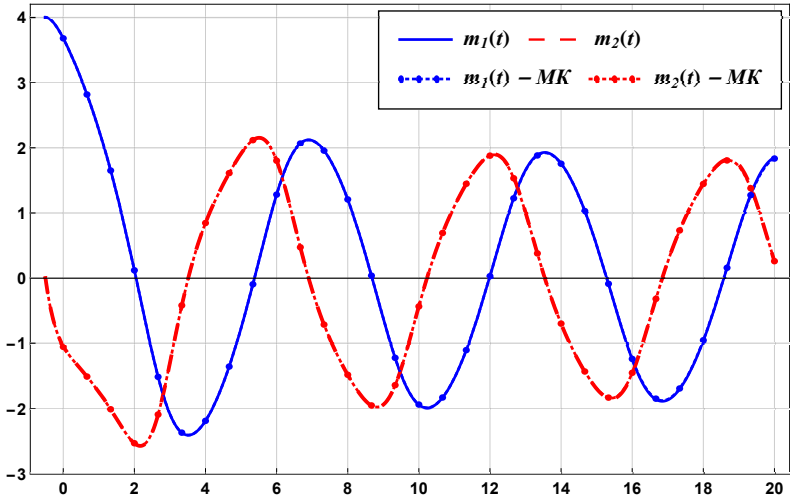


Рис. 2.2.42

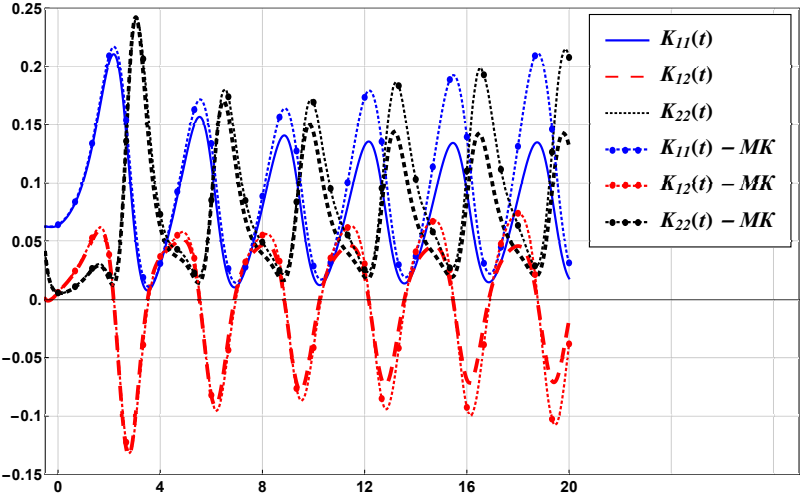


Рис. 2.2.43

примере, предположим, что на начальном множестве состояние системы

не меняется, а потому СОДУ для $X(t)$ также будет иметь следующий вид:

$$\dot{X}_1(t) = 0, \quad \dot{X}_2(t) = 0.$$

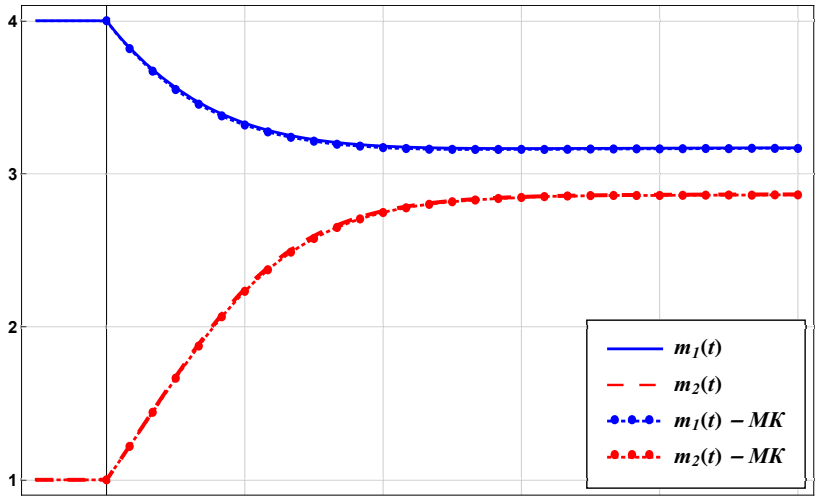


Рис. 2.2.44

Расчетные параметры были следующими:

$$a_1 = 1; \qquad b_1 = 1/6; \qquad c_1 = 3/4; \qquad \gamma_1 = 1/5;$$
$$a_2 = 3; \qquad b_2 = 1/2; \qquad c_2 = 1; \qquad \gamma_2 = 1/4;$$
$$\tau = 0.1; \qquad t_0 = -\tau; \qquad T = 1;$$
$$\boldsymbol{m}^0 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad \boldsymbol{\mathcal{K}}^0 = \begin{bmatrix} 4/25 & 0 \\ 0 & 1/25 \end{bmatrix}.$$

Результаты вычислений, полученные с применением метода простой линеаризации, приведены на рис. 2.2.44 и 2.2.45. Использование небольшого значения T связано с быстрым переходом вероятностных характеристик $X_1(t)$ и $X_2(t)$ в стационарное состояние. ▶

В процессе расчетов обнаружено, что важным вопросом технической реализации, влияющим на точность результатов, является решение проблемы правильного априорного выбора метода линеаризации из имеющихся. С другой стороны, данная проблема до сих пор не решена окончательно даже для стохастических систем без запаздывания.

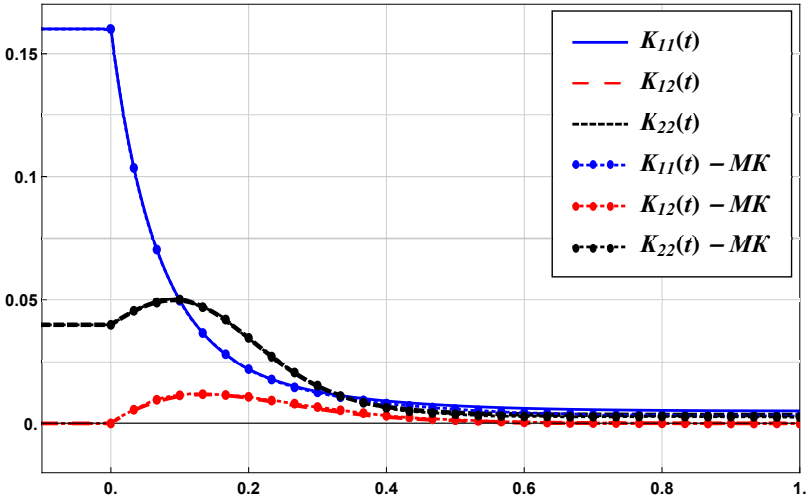


Рис. 2.2.45

2.2.2.10. Комбинация схемы МШРПС с методом Монте-Карло

В параграфе 2.2.2.2 задача Коши для системы стохастических обыкновенных дифференциально-разностных уравнений с кратными запаздываниями была сведена к последовательности задач Коши для систем СОДУ без запаздывания для цепочки векторов состояния увеличивающейся размерности. При этом численное исследование поведения исходной системы теперь будет состоять в последовательном численном интегрировании построенных уравнений на отрезке $[0, \tau]$ (шаги $\mathbf{0}^\circ$–$\boldsymbol{N}^\circ$), включая смену систем уравнений цепочке и доопределение недостающих для очередного шага начальных условий с помощью терминальных для предыдущего.

Если проанализировать структуру алгоритмов реализации численного интегрирования систем СОДУ, то становится ясно, что основными узлами многих из них являются: 1) одношаговые или многошаговые численные интеграторы для для систем СОДУ; 2) генераторы псевдослучайных чисел (ПСЧ) для получения реализаций для начальных случайных векторов; 3) генераторы ПСЧ для расчета реализаций приращений векторных винеровских процессов. Эта же структура пригодна для полной схемы численного анализа систем СОДРУ рассматриваемого типа.

В качестве упомянутого выше интегратора сначала была выбрана

простейшая схема Эйлера–Маруямы [742]:

$$Y_{k+1,i} = Y_{ki} + \underline{f}_i(\boldsymbol{Y}_k, t_k)\,\Delta t_k + \sum_{j=1}^{m} \underline{g}_{ij}(\boldsymbol{Y}_k, t_k)\,\Delta \underline{W}_{k+1,j},$$

$$k = 0, 12, ..., \quad i = 1, 2, ..., n, \quad \Delta t_k = t_{k+1} - t_k, \quad \Delta \underline{W}_{k+1,j} \sim \mathcal{N}(0, \Delta t_k)$$

– приращение стандартного винеровского процесса ($\mathcal{N}(\underline{m}, \underline{\mathcal{D}})$ – нормальная плотность распределения с математическим ожиданием $\underline{m}$ и дисперсией $\underline{\mathcal{D}}$). Это схема предназначена для приближенного решения системы СОДУ

$$dY_i(t) = \underline{f}_i\big(\boldsymbol{Y}(t), t\big)\,dt + \sum_{j=1}^{m} \underline{g}_{ij}\big(\boldsymbol{Y}(t), t\big) \circ d\underline{W}_j(t),$$

восходит к усеченному разложению Ито–Тейлора и дает сильную аппроксимацию порядка 0.5.

Вопрос о генерировании реализации вектора ПСЧ для начального случайного вектора был решен с помощью стандартных средств пакета `Mathematica` (функция `RandomReal[MultinormalDistribution[m,K]]`). При проведении расчетов считалось, что этот вектор имеет многомерное нормальное распределение с заданными вектором математических ожиданий `m` и матрицей ковариаций `K` (несложно расширить спектр используемых распределений).

Проблема же получения ПСЧ для генерирования реализации приращений стандартных винеровских процессов технически сложнее. Согласно используемой схеме расширения пространства состояний необходимо параллельно получать значительное число связанных последовательностей таких приращений (потоков), причем при повторных прохождениях полуинтервала $(0, \tau]$ требуется сгенерировать вычисленные ранее последовательности.

Как известно, базисным распределением для получения многих других является стандартное равномерное распределение $U(0, 1)$. При этом хороший генератор ПСЧ с $U(0, 1)$ [127], кроме построения собственно последовательности чисел, равномерно распределенных на указанном промежутке, отсутствия корреляции между ними и возможности точного воспроизведения, должен обладать свойством получения отдельных потоков ПСЧ.

К сожалению, многие математические пакеты, обладая хорошими и удобными встроенными генераторами ПСЧ, которые вырабатывают числа, имеющие всевозможные часто используемые вероятностные распреде-

ления, не предоставляют пользователю способа организовывать на основе этих генераторов такие потоки.

Для решения подобной проблемы и для получения длинного периода в рамках настоящего исследования стандартными средствами пакета `Mathematica` был реализован двухкомпонентный многократный рекурсивный генератор [776], имеющий следующую структуру:

$$Z_{i1} = (1403580\, Z_{i-2,1} - 810728\, Z_{i-3,1}) \left[(2^{32} - 209)\right],$$
$$Z_{i2} = (527612\, Z_{i-2,2} - 1370589\, Z_{i-3,2}) \left[(2^{32} - 22853)\right],$$
$$Z_i = (Z_{i1} - Z_{i2}) \left[(2^{32} - 209)\right],$$
$$U_i = Z_i/(2^{32} - 209).$$

Данный генератор имеет период, приблизительно равный 2^{191}, а также прекрасные статистические свойства [127]. Его инициализация осуществляется с помощью стандартной функции `RandomInteger[1,m]` пакета `Mathematica`, где $m \sim 2^{30}$.

В целом программа оформлена в виде процедуры типа `Module`, причем параметры записываются в стандартном для пакета `Mathematica` виде.

Изложенная выше схема была применена для анализа ряда систем.

Пример 2.2.16. Первой из них была система с мультипликативным возмущением [380]:

$$\dot{X}(t) = -X(t) + 0.5\, X(t-1) + \left[\gamma_0 + \gamma_1\, X(t) + \gamma_2\, X(t-1)\right] V(t), \quad t > 1;$$
$$\dot{X}(t) = 0, \quad t > 0.$$

При проведении расчетов (шаг $\Delta t = 0.01$, временной промежуток [0,40]) считалось, что начальное смещение $X(0)$ имело нормальное распределение $\mathcal{N}(m^0, \mathcal{D}^0)$ со средним $m^0 = 1.0$ и дисперсией $\mathcal{D}^0 = 0.09$. На основе результатов вычислений были построены графики трех траекторий (рис. 2.2.46), которые соответствуют следующим значениям параметров:

$$1)\ \gamma_0 = 0.125, \quad \gamma_1 = -0.25, \quad \gamma_2 = 0.125;$$
$$2)\ \gamma_0 = 0.125, \quad \gamma_1 = 0.25, \quad \gamma_2 = 0.125;$$
$$3)\ \gamma_0 = 0.125, \quad \gamma_1 = 0.0, \quad \gamma_2 = 0.125.$$

Пример 2.2.17. В качестве второго демонстрационного примера рассмотрим стохастический аналог уравнения ван дер Поля–Дюффинга с

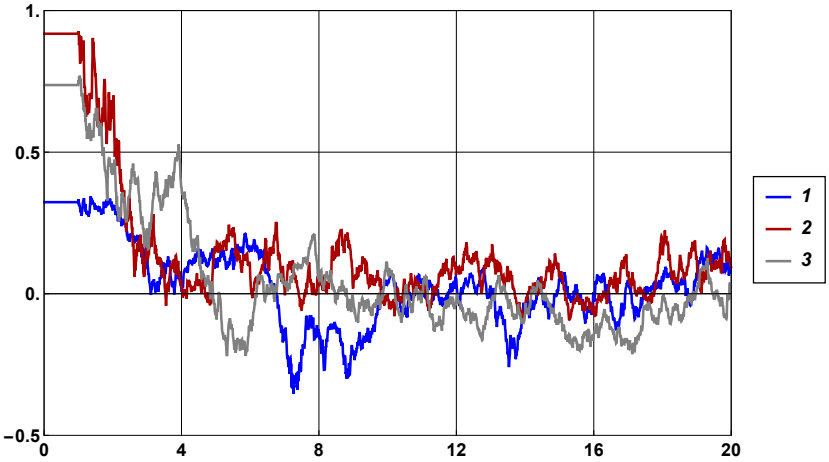


Рис. 2.2.46

кратными запаздываниями:

$$\ddot{X}(t) + 0.2\left[X^2(t) - 1\right]\dot{X}(t) + X(t) - 0.05\,X(t - 0.5) + \\ +0.025\,X^3(t - 1) = 0.1\,V(t), \quad t > 1.0;$$

$$\ddot{X}(t) + 0.2\left[X^2(t) - 1\right]\dot{X}(t) + X(t) - 0.05\,X(t - 0.5) = 0.1\,V(t), \quad t > 0.5;$$

$$\ddot{X}(t) + 0.2\left[X^2(t) - 1\right]\dot{X}(t) + X(t) = 0.1\,V(t), \quad t > 0.$$

После перехода к переменным состояния $\boldsymbol{X}(t) = \{X_1(t), X_2(t)\}^{\mathsf{T}} \equiv \{X(t), \dot{X}(t)\}^{\mathsf{T}}$ и выбора начальных условий

$$\boldsymbol{X}(0) \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{m}^0, \boldsymbol{\mathcal{K}}^0), \qquad \boldsymbol{m}^0 = \{0.0, 0.0\}^{\mathsf{T}}, \qquad \boldsymbol{\mathcal{K}}^0 = \begin{bmatrix} 0.0625 & 0.0 \\ 0.0 & 0.04 \end{bmatrix}$$

были произведены расчеты с шагом $\Delta t = 0.01$. Три полученные фазовые траектории ($0 \leqslant t \leqslant 50$) изображены на рис. 2.2.47. ▶

На этапе расчетов вследствие невысокой точности схемы Эйлера–Маруямы и относительно быстрого возрастания погрешности вычислений было признано необходимым увеличить число используемых значащих цифр, что, наряду с ограничением схемы на величину шага Δt, существенно увеличило время расчетов. Для его уменьшения можно заменить схему Эйлера–Маруямы интегратором более высокого порядка. При этом

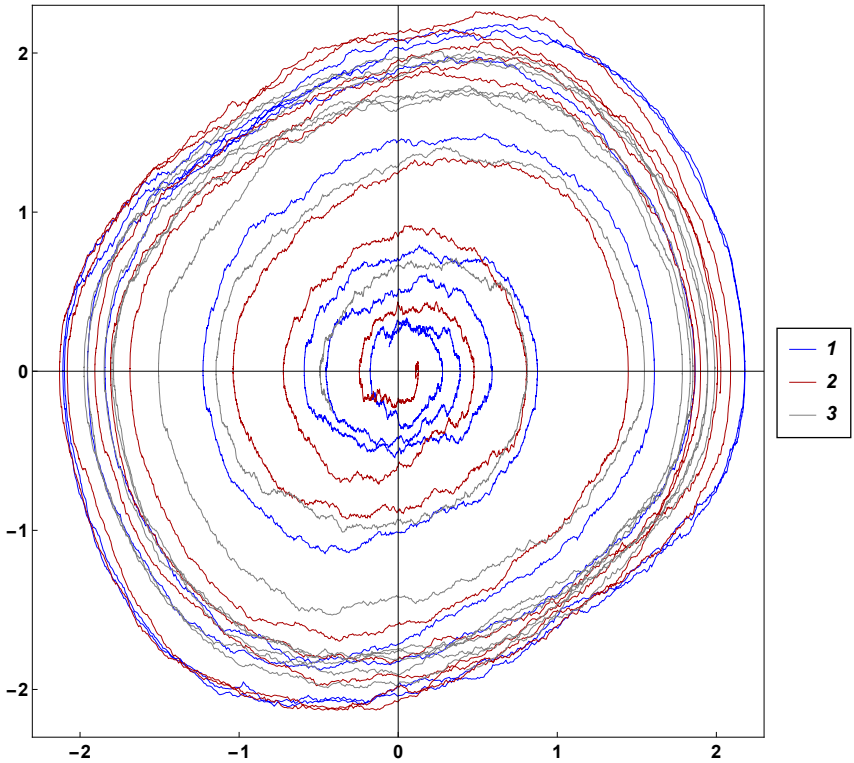


Рис. 2.2.47

рассмотренный алгоритм позволяет произвести такую замену и без серьезных изменений может быть реализован с помощью других математических пакетов, в том числе свободно распространяемых.

Пример 2.2.18. Рассмотрим стохастическую модель [1071] поведения экосистемы, состоящей из трех видов животных, два из которых (с численностями $X_1(t)$ и $X_2(t)$), конкурирующие друг с другом, – жертвы, а третье ($X_3(t)$) – хищники:

$$dX_1(t) = X_1(t)\left[r_1 - a_{11}\,X_1(t-\tau) - a_{12}\,X_2(t-\tau) - \right.$$
$$\left. - \frac{a_{13}\,X_3(t)}{1+\beta_1\,X_1(t)+\gamma_1\,X_3(t)}\right]dt + \sigma_1\,X_1(t)\,dW_1(t),$$

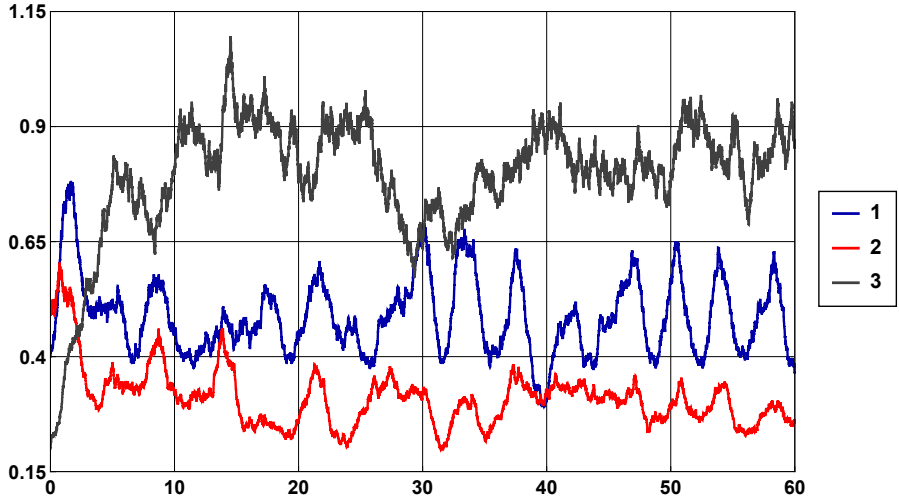


Рис. 2.2.48

$$dX_2(t) = X_2(t)\Big[r_2 - a_{21}\,X_1(t-\tau) - a_{22}\,X_2(t-\tau) - \\ - \frac{a_{23}\,X_3(t)}{1+\beta_2\,X_2(t)+\gamma_2\,X_3(t)}\Big]\,dt + \sigma_2\,X_2(t)\,dW_2(t),$$

$$dX_3(t) = X_3(t)\Big[-r_3 + \frac{a_{31}\,X_3(t)}{1+\beta_1\,X_1(t)+\gamma_1\,X_3(t)} + \\ + \frac{a_{32}\,X_3(t)}{1+\beta_2\,X_2(t)+\gamma_2\,X_3(t)}\Big]\,dt + \sigma_3\,X_3(t)\,dW_3(t)$$

при $t > 0$ и $X_i(t) = x_{i0}$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$ при $t \in [-\tau, 0]$. В этих уравнениях коэффициенты r_i $(i = 1,\ 2)$ представляют естественные темпы прироста популяций жертв, r_3 – уровень смертности популяции хищников, a_{ii} $(i = 1,\ 2)$ – потери при конкуренции в популяции, a_{12} и a_{21} – потери при конкуренции между популяциями жертв, a_{13} и a_{23} – параметры истребления популяций жертв хищниками, a_{31} и a_{32} – параметры трансформации популяции хищников под влиянием популяций жертв.

При расчетах использовались следующие значения параметров:

$$r_1 = 0.4, \quad r_2 = 0.5, \quad r_3 = 0.2,$$
$$a_{11} = 2.5, \quad a_{12} = 0.5, \quad a_{13} = 1.2, \quad a_{31} = 0.8,$$
$$a_{21} = 1.2, \quad a_{22} = 1.5, \quad a_{23} = 1.0, \quad a_{32} = 1.5,$$

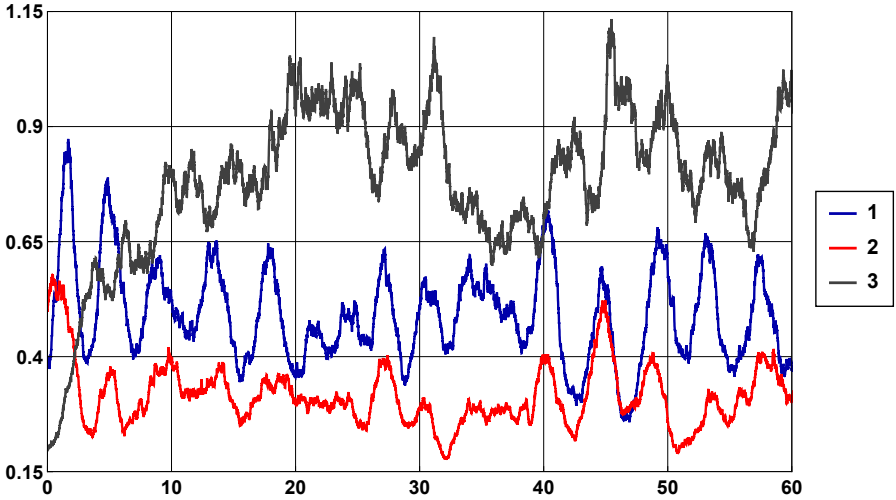


Рис. 2.2.49

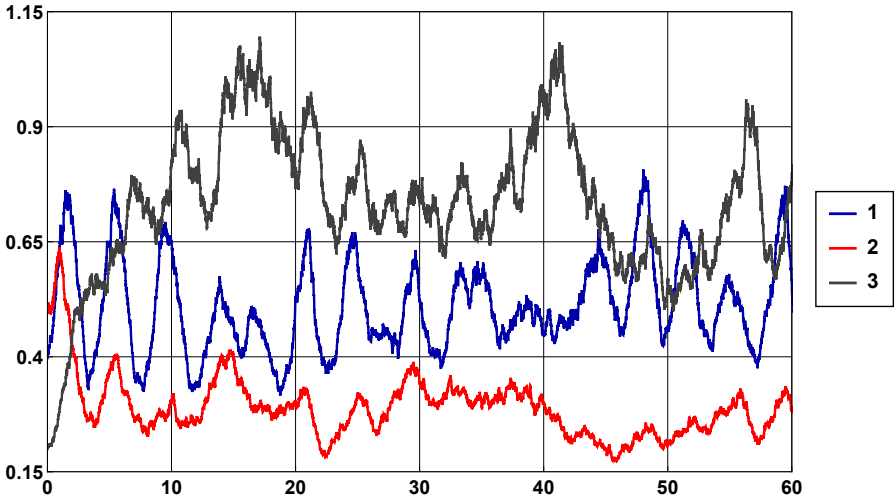


Рис. 2.2.50

$$\beta_1 = 0.75, \quad \gamma_1 = 0.25, \quad \beta_2 = 0.25, \quad \gamma_2 = 0.75,$$
$$x_{10} = 0.4, \quad x_{20} = 0.5, \quad x_{30} = 0.2, \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0.1.$$

Результаты расчетов представлены на рис. 2.2.48–2.2.50, где показаны реализации случайных процессов $X_1(t)$, $X_2(t)$ и $X_3(t)$ (номера 1..3) при последовательных значениях запаздывания из множества $\{0.8, 0.9, 0.95\}$. ►

При необходимости полученные в результате множества моделирований результаты с помощью процедур дескриптивной статистики могут быть использованы для расчета оценок моментных функций различных порядков, а также для аппроксимации плотностей распределения посредством гистограмм или ядерных аппроксимаций [467].

2.2.2.11. Линейное СДУвЧП с постоянным временны́м запаздыванием

Первой части настоящей монографии была рассмотрена схема, сочетающая классический метод шагов и расширение пространства состояния (МШРПС), в приложении к исследованию систем, описываемых детерминированными ДУсЧП с постоянными запаздываниями. Ниже рассматривается методика исследования линейных СДУвЧПсЗ [221], являющаяся адаптацией МШРПС для нового класса моделей, и представляется процедура построения уравнений для первых моментов случайного поля, представляющего собой решение линейного параболического уравнения с одним постоянным запаздыванием, а также приводятся некоторые результаты численно-аналитических расчетов для модельной задачи.

Рассмотрим линейное стохастическое дифференциальное уравнение Стратоновича [317] в частных производных (параболического типа) с запаздываниями $\tau = \mathrm{const} > 0$ следующего вида:

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} + \alpha\, U(x,t) = \nu\, \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} + \beta\, U(x,t-\tau) + \gamma\, V(x,t), \qquad (2.2.85)$$

$$x \in (0,1), \quad t_1 = t_0 + \tau < t \leqslant T < +\infty,$$

где $t_0 = -\tau$; $U(x,t)$ – случайное поле, представляющее состояние системы с распределенными параметрами; $V(x,t)$ – пространственно-временно́й белый шум:

$$\mathbb{E}[V(x,t)] = 0, \qquad \mathbb{E}[V(x,t)\, V(x',t')] = \delta(x-x')\, \delta(t-t');$$

$\alpha > 0$, β, $\gamma > 0$, $\nu > 0$ – постоянные.

Предположим, что на интервале $(t_0, t_1]$ поле $U(x,t)$ удовлетворяет уравнению того же типа, что и (2.2.85), но без запаздывания:

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} + \alpha_0\, U(x,t) = \nu_0\, \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} + \gamma_0\, V(x,t), \quad x \in (0,1) \qquad (2.2.86)$$

($\alpha_0 > 0$, γ_0, $\nu_0 > 0$ – постоянные), с начальным условием

$$U(x, t_0) = U^0(x), \tag{2.2.87}$$

где $U^0(x)$ – случайное поле с известными статистическими характеристиками, а именно, будем считать, что заданы все необходимые числовые характеристики (функции) $U^0(x)$. В частности, пусть в начальный момент времени t_0 для поля $U(x,t)$ известны математическое ожидание

$$m^0(x) = \mathbb{E}\big[U^0(x)\big]$$

и коррелятор

$$\mathcal{K}^0(x,y) = \mathbb{E}\big[\{U^0(x) - m^0(x)\}\,\{U^0(y) - m^0(y)\}\big]\,.$$

Кроме того, пусть для любого $t \geqslant t_0$ неизвестное случайное поле $U(x,t)$ удовлетворяет однородным краевым условиям:

$$U(0,t) = U(1,t) = 0. \tag{2.2.88}$$

Заметим, что если поле $U^0(x)$ гауссово, то и случайное поле $U(x,t)$ для любого $t \geqslant t_0$ вследствие линейности СДУвЧП (2.2.85) и (2.2.86) также будет гауссовым, и для его описания в момент времени t достаточно моментных функций первого и второго порядков, которыми в рамках корреляционного анализа (с добавлением ковариационных функций) ограничиваются и для описания произвольных полей.

Поэтому на первом этапе исследования системы (2.2.85)–(2.2.88) сосредоточимся на построении системы ДУвЧП без запаздывания для математического ожидания

$$m(x,t) = \mathbb{E}[U(x,t)]$$

и коррелятора

$$\mathcal{K}(x,y,t) = \mathbb{E}[\{U(x,t) - m(x,t)\}\{U(y,t) - m(y,t)\}]$$

поля $U(x,t)$, имеющего функционал плотности вероятности $\mathbb{P}(u,t)$ ($t \geqslant t_0$), причем $\mathbb{P}(u,t_0) = \mathbb{P}^0(u)$. Зафиксируем, что вследствие формы заданных краевых условий

$$m(0,t) = m(1,t) = 0$$

и

$$\mathcal{K}(0,y,t) = \mathcal{K}(1,y,t) = \mathcal{K}(x,0,t) = \mathcal{K}(x,1,t) = 0.$$

Для того чтобы, как и выше, получить СДУвЧП без запаздывания, применим процедуру, сочетающую метод шагов и расширение пространства состояний системы (МШРПС), что позволяет преобразовать немарковское случайное поле $U(x,t)$ в марковское посредством расширения пространства состояний.

Рассмотрим равномерную временную сетку $t_q = t_0 + q\cdot\tau$, $q = 0, 1, 2, \ldots$, N, $N+1$ ($t_{N+1} \geqslant T$), и введем новую локальную временну́ю переменную s, изменяющуюся на промежутке $[0,\tau]$, а также следующие обозначения:

$$s_q = s + t_q, \qquad \Delta_q = (t_q, t_{q+1}],$$
$$U_q(x,s) = U(x,s_q), \quad V_q(x,s) = V(x,s_q), \quad U^*(x,s) \equiv U^0(x),$$

причем для всех $q \geqslant 1$

$$U_q(x,0) = U_{q-1}(x,\tau), \qquad V_q(x,0) = V_{q-1}(x,\tau).$$

Здесь и далее равенство сечений соответствующих компонент случайных полей понимается в смысле стохастической сходимости "почти наверное".

Обратимся к последовательности полуинтервалов (сегментов) Δ_q.

0°. На сегменте Δ_0 систему СДУвЧП для компонент векторного случайного поля $\boldsymbol{U}_0(x,s) = \{U^*(x,s), U_0(x,s)\}^\intercal$ представим в виде:

$$\frac{\partial U^*(x,s)}{\partial s} = 0, \qquad U^*(x,0) = U^0(x),$$
$$\frac{\partial U_0(x,s)}{\partial s} + \alpha_0\, U_0(x,s) = \nu_0\, \frac{\partial^2 U_0(x,s)}{\partial x^2} + \gamma_0\, V_0(x,s), \tag{2.2.89}$$
$$U_0(x,0) = U^0(x).$$

1°. Рассмотрим теперь полуинтервалы Δ_0 и Δ_1. Систему СДУвЧП для вычисления компонент для компонент поля $\boldsymbol{U}_1(x,s) = \{U^*(x,s), U_0(x,s), U_1(x,s)\}^\intercal$ можно записать так:

$$\frac{\partial U^*(x,s)}{\partial s} = 0, \quad U^*(x,0) = U^0(x),$$
$$\frac{\partial U_0(x,s)}{\partial s} + \alpha_0\, U_0(x,s) = \nu_0\, \frac{\partial^2 U_0(x,s)}{\partial x^2} + \gamma_0\, V_0(x,s),$$
$$U_0(x,0) = U^0(x). \tag{2.2.90}$$
$$\frac{\partial U_1(x,s)}{\partial s} + \alpha\, U_1(x,s) = \nu\, \frac{\partial^2 U_1(x,s)}{\partial x^2} + \beta\, U_0(x,s) + \gamma\, V_1(x,s),$$

$$U_1(x,0) = U_0(x,\tau).$$

2°. Определенное на полуинтервалах Δ_0, Δ_1 и Δ_2 векторное поле $\boldsymbol{U}_2(x,s) = \{U^*(x,s), U_0(x,s), U_1(x,s), U_2(x,s)\}^\intercal$ будет удовлетворять системе СДУвЧП (2.2.90), к которой добавлено уравнение следующего вида:

$$\frac{\partial U_2(x,s)}{\partial s} + \alpha\, U_2(x,s) = \nu\, \frac{\partial^2 U_2(x,s)}{\partial x^2} + \beta\, U_1(x,s) + \gamma\, V_2(x,s), \qquad (2.2.91)$$

$$U_2(x,0) = U_1(x,\tau).$$

... ...

***k*°**. Обозначая через $\boldsymbol{U}_k(x,s)$, $k = 3, 4, ..., N$, векторное поле $\boldsymbol{U}_k(x,s) = \{U^*(x,s), U_0(x,s), U_1(x,s), U_2(x,s), ..., U_{k-1}(x,s), U_k(x,s)\}^\intercal$ и применяя к нему излагаемую схему, находим, что вектор $\boldsymbol{U}_k(x,s)$, представляющий поведение поля $U(x,t)$ на сегментах Δ_0, Δ_1, Δ_2, ..., Δ_k, будет решением системы СДУвЧП, полученной добавлением к уравнениям для векторного поля $\boldsymbol{U}_{k-1}(x,s)$ уравнения:

$$\frac{\partial U_k(x,s)}{\partial s} + \alpha\, U_k(x,s) = \nu\, \frac{\partial^2 U_k(x,s)}{\partial x^2} + \beta\, U_{k-1}(x,s) + \gamma\, V_k(x,s), \qquad (2.2.92)$$

$$U_k(x,0) = U_{k-1}(x,\tau).$$

Итак, результатом выкладок стала цепочка систем линейных стохастических ДУвЧП (2.2.89)–(2.2.92) для расширенных векторных полей состояния $\boldsymbol{U}_0(x,s)$, $\boldsymbol{U}_1(x,s)$, $\boldsymbol{U}_2(x,s)$, ..., $\boldsymbol{U}_N(x,s)$, увеличивающейся размерности и одинаковой структуры без запаздывания, для дальнейшего исследования которой можно применить различные пригодные для данного класса уравнений методы.

Построенную последовательность систем линейных СДУвЧП без запаздывания можно использовать для получения новой цепочки уравнений – ДУвЧП для первых моментов (математических ожиданий и корреляторов) векторных полей $\boldsymbol{U}_0(x,s)$, $\boldsymbol{U}_1(x,s)$, $\boldsymbol{U}_2(x,s)$, ..., $\boldsymbol{U}_N(x,s)$.

Для построения такой цепочки можно воспользоваться обобщенным уравнением Фоккера–Планка–Колмогорова [236] для одноточечного функционала плотности вероятности. В нашем случае это уравнение для функционала $\mathbb{P}_k(u_k, s)$ векторного поля $\boldsymbol{U}_k(x,s)$ примет следующий вид ($\mathbb{D} = (0,1)$):

$$\frac{\partial \mathbb{P}_k}{\partial s} = -\sum_{i=0}^{k} \int\limits_{\mathbb{D}} \frac{\delta\big(\boldsymbol{a}_i\, \mathbb{P}_k\big)}{\delta u_i(x)}\, dx + \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^{k} \int\limits_{\mathbb{D}} \int\limits_{\mathbb{D}} \frac{\delta^2\big(\boldsymbol{b}_{ij}\, \mathbb{P}_k\big)}{\delta u_i(x)\, \delta u_j(y)}\, dx\, dy, \qquad (2.2.93)$$

где коэффициенты сноса и диффузии вычисляются из соотношений:

$$\boldsymbol{a}_i(u_k, x, s) = -\bar{\alpha}_i\, u_i(x) + \bar{\nu}_i\, \frac{\partial^2 u_i(x)}{\partial x^2} + \bar{\beta}_i\, u_{i-1}(x),$$

$$\boldsymbol{b}_{ij}(u_k, x, y, s) = \bar{\gamma}_i\, \bar{\gamma}_j\, \delta_{ij},$$

$$\bar{\alpha}_i, \bar{\nu}_i, \bar{\beta}_i, \bar{\gamma}_i = \begin{cases} \alpha, \nu, \beta, \gamma, & i > 0, \\ \alpha_0, \nu_0, 0, \gamma_0, & i = 0 \end{cases}$$

(δ_{ij} – символ Кронекера).

При этом уравнения для первых моментов векторного поля будут иметь вид [195]:

$$\frac{\partial m_i(x,s)}{\partial s} = \int \boldsymbol{a}_i(u_k, x, s)\, \mathbb{P}(u_k, s)\, du_k,$$

$$\frac{\partial \mathcal{K}_{ij}(x,y,s)}{\partial s} = \int \Big\{ \big[u_i(x) - m_i(x,s)\big]\, \boldsymbol{a}_j(u_k, y, s) +$$

$$+ \big[u_j(y) - m_j(y,s)\big]\, \boldsymbol{a}_i(u_k, x, s) + \boldsymbol{b}_{ij}(u_k, x, y, s) \Big\}\, \mathbb{P}(u_k, s)\, du_k,$$

$$i, j = 0, 1, 2, ..., k.$$

Для рассматриваемой задачи эти уравнения примут следующую форму:

$$\frac{\partial m_*(x,s)}{\partial s} = 0,$$

$$\frac{\partial m_i(x,s)}{\partial s} = -\bar{\alpha}_i\, m_i(x,s) + \bar{\nu}_i\, \frac{\partial^2 m_i(x,s)}{\partial x^2} + \bar{\beta}_i\, m_{i-1}(x,s),$$

$$\frac{\partial \mathcal{K}_{**}(x,y,s)}{\partial s} = 0, \tag{2.2.94}$$

$$\frac{\partial \mathcal{K}_{*j}(x,y,s)}{\partial s} = -\bar{\alpha}_j\, \mathcal{K}_{*j}(x,y,s) + \bar{\nu}_j\, \frac{\partial^2 \mathcal{K}_{*j}(x,y,s)}{\partial y^2} + \bar{\beta}_j\, \mathcal{K}_{*,j-1}(x,y,s),$$

$$\frac{\partial \mathcal{K}_{i*}(x,y,s)}{\partial s} = -\bar{\alpha}_i\, \mathcal{K}_{i*}(x,y,s) + \bar{\nu}_i\, \frac{\partial^2 \mathcal{K}_{i*}(x,y,s)}{\partial x^2} + \bar{\beta}_i\, \mathcal{K}_{i-1,*}(x,y,s),$$

$$\frac{\partial \mathcal{K}_{ij}(x,y,s)}{\partial s} = -\bar{\alpha}_i\, \mathcal{K}_{ij}(x,y,s) + \bar{\nu}_i\, \frac{\partial^2 \mathcal{K}_{ij}(x,y,s)}{\partial x^2} + \bar{\beta}_i\, \mathcal{K}_{i-1,j}(x,y,s) -$$

$$-\bar{\alpha}_j\, \mathcal{K}_{ij}(x,y,s) + \bar{\nu}_j\, \frac{\partial^2 \mathcal{K}_{ij}(x,y,s)}{\partial y^2} + \bar{\beta}_j\, \mathcal{K}_{i,j-1}(x,y,s) + \bar{\gamma}_i\, \bar{\gamma}_j\, \delta_{ij}.$$

Теперь определим структуру начальных условий для неизвестного векторного поля математических ожиданий:

$$\boldsymbol{m}_k(x,0)=\begin{bmatrix} m^0(x)\\ m^0(x)\\ m_0(x,\tau)\\ \dots\\ m_{k-1}(x,\tau)\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\mathcal{K}}_0(x,y,0)=\begin{bmatrix}\mathcal{K}^0(x,y) & \mathcal{K}^0(x,y)\\ \mathcal{K}^0(x,y) & \mathcal{K}^0(x,y)\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_1(x,y,0)=\begin{bmatrix}\mathcal{K}^0(x,y) & \mathcal{K}^0(x,y) & \mathcal{K}_{*0}(x,y,\tau)\\ \mathcal{K}^0(x,y) & \mathcal{K}^0(x,y) & \mathcal{K}_{*0}(x,y,\tau)\\ \mathcal{K}_{0*}(x,y,\tau) & \mathcal{K}_{0*}(x,y,\tau) & \mathcal{K}_{00}(x,y,\tau)\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_k(x,y,0)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{K}}_{k-1}(x,y,0) & \bar{\mathcal{K}}_{k12}\\ \bar{\mathcal{K}}_{k21} & \mathcal{K}_{k-1,k-1}(x,y,\tau)\end{bmatrix}, \tag{2.2.95}$$

$$\bar{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_{k21}=\big[\mathcal{K}_{k-1,*}(x,y,\tau)\ \mathcal{K}_{k-1,*}(x,y,\tau)\ \mathcal{K}_{k-1,0}(x,y,\tau)\ \dots\ \mathcal{K}_{k-1,k-2}(x,y,\tau)\big],$$

$$\bar{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_{k12}=\big[\mathcal{K}_{*,k-1}(x,y,\tau)\ \mathcal{K}_{*,k-1}(x,y,\tau)\ \mathcal{K}_{0,k-1}(x,y,\tau)\ \dots\ \mathcal{K}_{k-2,k-1}(x,y,\tau)\big]^{\mathsf{T}}.$$

Заметим, что для всех моментных функций краевые условия однородны.

Итак, полученные в данном пункте уравнения (2.2.94) с начальными условиями (2.2.95) полностью определяют математические ожидания и корреляторы компонент векторного поля состояния на любом заданном временно́м промежутке.

Пример 2.2.19. Для расчетов использовались следующие значения параметров:

$$\alpha=3/2,\quad \tau=1/4,\quad \nu=1/20,\quad \beta=2,\quad \gamma=1/10.$$

Результаты расчетов приведены на рис.2.2.51–2.2.54, причем на рис.2.2.51, 2.2.52 показаны поверхность и изолинии функции переменных x и t, представляющей математическое ожидание случайного поля $U(x,t)$, а на рис. 2.2.53, 2.2.54 – те же самые объекты, но для функции дисперсии $\mathcal{D}_U(x,t)\equiv$ $\equiv\ \mathcal{K}_{UU}(x,x,t)$, причем на последнем рисунке для наглядности значения функции увеличены в 100 раз. Уравнения построенной цепочки для математических ожиданий интегрировались методом прямых, для функций ковариации – методом конечных элементов (опции `MethodOfLines` и `FiniteElement` встроенной функции `NDSolve` языка пакета `Mathematica` соответственно). ►

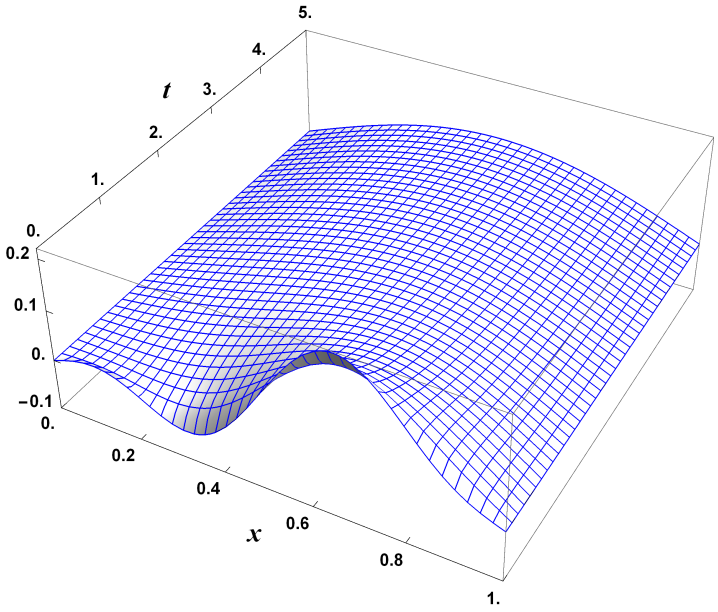


Рис. 2.2.51

2.2.2.12. Колебания в линейной стохастической гиперболической системе с кратными запаздываниями

В данной пункте схема, сочетающая классический метод шагов и расширение пространства состояния, применяется для исследования переходного процесса, описываемого стохастическим дифференциальным уравнением в частных производных гиперболического типа с кратными постоянными запаздываниями [247].

Рассмотрим линейное стохастическое дифференциальное уравнение Стратоновича [317] в частных производных (гиперболического типа) с кратными запаздываниями ($\tau = \mathrm{const} > 0$) следующего вида:

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} + 2\,\alpha\,\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} + a^2\,U(x,t) =$$
$$= b_1\,\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} + b_2\,\frac{\partial^2 U(x,t-\tau)}{\partial x^2} + b_3\,\frac{\partial^2 U(x,t-2\,\tau)}{\partial x^2} +$$
$$+ 2\,\epsilon_1\,\frac{\partial U(x,t-\tau)}{\partial t} + 2\,\epsilon_2\,\frac{\partial U(x,t-2\,\tau)}{\partial t} + c_1\,U(x,t-\tau) +$$

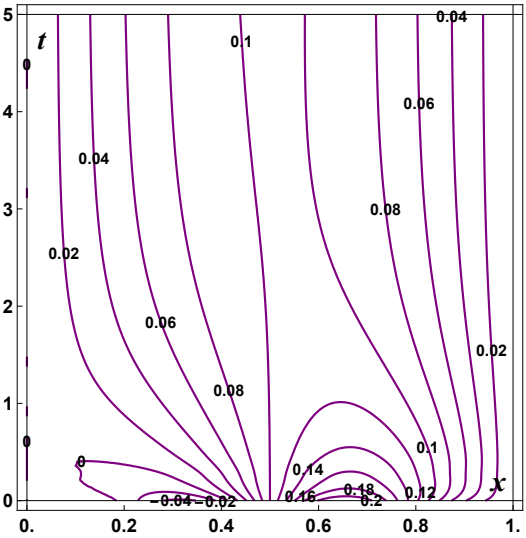


Рис. 2.2.52

$$+ c_2\,U(x,t-2\,\tau) + g_0\,\widetilde{V}(x,t), \quad 0 < x < L, \quad 0 < t \leqslant T < +\infty, \quad (2.2.96)$$

где t – время; x – пространственная координата; $U(x,t)$ – случайное поле, представляющее состояние системы с распределенными параметрами; $\alpha > 0$, $a > 0$, $b_1 > 0$, b_2, b_3, ϵ_1, ϵ_2, c_1, c_2, g_0, $L > 0$ – постоянные; $\widetilde{V}(x,t)$ – цилиндрический белый шум, являющейся формальной производной цилиндрического винеровского процесса $\widetilde{W}(x,t)$:

$$\mathbb{E}\Big[\widetilde{V}(x,t)\Big] = 0, \qquad \mathbb{E}\Big[\widetilde{V}(x,t)\,\widetilde{V}(y,t')\Big] = C(x,y)\,\delta(t-t'),$$

$\mathbb{E}[\cdot]$ – оператор математического ожидания, $C(x,y)$ – некоторая функция, конкретизируемая ниже. Будем считать, что на начальном множестве $\mathbb{E}_0 = \{(x,t)\,|\,0 \leqslant x \leqslant L, -2\,\tau \leqslant t \leqslant 0\}$, случайная функция $U(x,t)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$U(x,t) = U^0(x), \qquad \frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = 0, \quad (2.2.97)$$

$$U(0,t) = U(L,t) = 0. \quad (2.2.98)$$

Кроме того, пусть краевые условия для $U(x,t)$ при $t > 0$ также будут однородными:

$$U(0,t) = U(L,t) = 0. \quad (2.2.99)$$

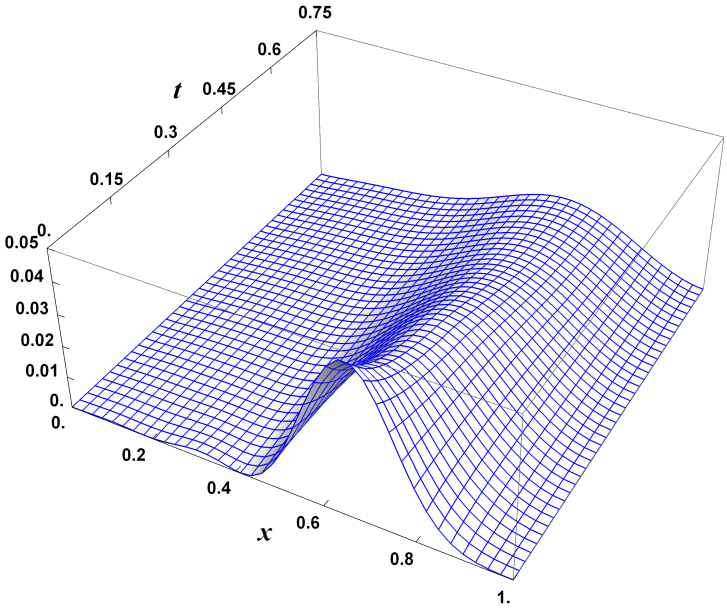


Рис. 2.2.53

Заметим, что уравнение (2.2.96) записано в нестрогой форме. Для уточнения понятий см. [506, 596] и др.

Предположим, что заданы все необходимые числовые характеристики (функции) случайного поля $U^0(x)$. В частности, пусть для поля $U(x,t)$ известны функции математического ожидания

$$m^0(x) = \mathbb{E}\big[U^0(x)\big] \tag{2.2.100}$$

и ковариации

$$\mathcal{C}^0(x,y) = \mathbb{E}\Big[\mathring{U}^0(x)\,\mathring{U}^0(y)\Big], \tag{2.2.101}$$

где $\mathring{U}^0(\cdot) = U^0(x)(\cdot) - m^0(\cdot)$. При этом вследствие заданных краевых условий

$$m(0,t) = m(L,t) = 0 \tag{2.2.102}$$

и

$$\mathcal{C}(0,y,t) = \mathcal{C}(L,y,t) = \mathcal{C}(x,0,t) = \mathcal{C}(x,L,t) = 0. \tag{2.2.103}$$

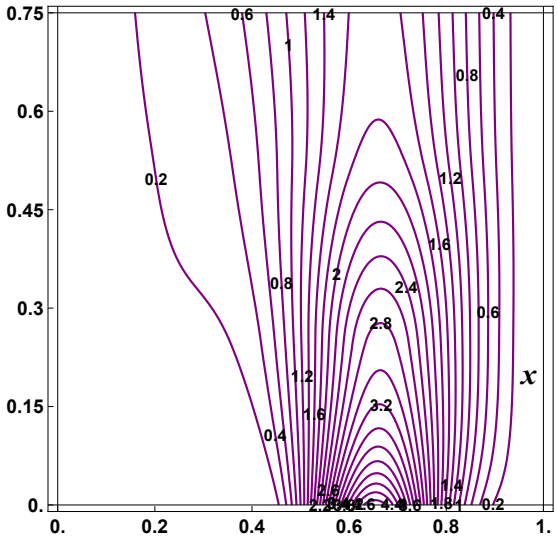


Рис. 2.2.54

Задачей исследования является построение систем дифференциальных уравнений в частных производных без запаздывания (ДУвЧП) для функций математического ожидания

$$m_1(x,t) = \mathbb{E}[U(x,t)]\,, \qquad m_2(x,t) = \mathbb{E}[U'_t(x,t)]$$

и матрицы функций ковариаций

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}(x,y,t) = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_{11}(x,y,t) & \mathcal{C}_{12}(x,y,t) \\ \mathcal{C}_{21}(x,y,t) & \mathcal{C}_{22}(x,y,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}\big[\mathring{U}(x)\,\mathring{U}(y)\big] & \mathbb{E}\big[\mathring{U}(x)\,\mathring{U}'_t(y)\big] \\ \mathbb{E}\big[\mathring{U}'_t(x)\,\mathring{U}(y)\big] & \mathbb{E}\big[\mathring{U}'_t(x)\,\mathring{U}'_t(y)\big] \end{bmatrix}$$

случайных полей $U(x,t)$ и $U'_t(x,t)$, имеющих совместный функционал плотности вероятности $\mathbb{P}(u_1,u_2,t)$ [236, 317], для любого $t > 0$, причем $\mathbb{P}(u_1,u_2,t) = \mathbb{P}_0(u_1,u_2)$ при $-2\,\tau \leqslant t \leqslant 0$, где $\mathbb{P}_0(u_1,u_2)$ – некоторый заданный функционал.

Обозначим $U(x,t)$ и $U'_t(x,t)$ через $U_1(x,t)$ и $U_2(x,t)$ соответственно и для дальнейшего использования введем векторные поля $\boldsymbol{U}(x,t) = \big(U_1(x,t), U_2(x,t)\big)$ и $\boldsymbol{U}^0(x) = \big(U_1^0(x), U_2^0(x)\big) \equiv \big(U^0(x), 0\big)$. Тогда уравнения и начально-краевые условия (2.2.96)–(2.2.99) примут следующую форму:

$$\frac{\partial U_1(x,t)}{\partial t} = U_2(x,t),$$

$$\frac{\partial U_2(x,t)}{\partial t} = -2\,\alpha\,U_2(x,t) - a^2\,U_1(x,t) +$$
$$+b_1\,\frac{\partial^2 U_1(x,t)}{\partial x^2} + b_2\,\frac{\partial^2 U_1(x,t-\tau)}{\partial x^2} + b_3\,\frac{\partial^2 U_1(x,t-2\,\tau)}{\partial x^2} +$$
$$+2\,\epsilon_1\,U_2(x,t-\tau) + 2\,\epsilon_2\,U_2(x,t-2\,\tau) + c_1\,U_1(x,t-\tau) +$$
$$+c_2\,U_1(x,t-2\,\tau) + g_0\,\widetilde{V}(x,t), \qquad 0 < x < L, \quad t > 0,$$
$$U_1(x,t) = U^0(x), \quad U_2(x,t) = 0, \quad 0 < x < L, \quad -2\,\tau \leqslant t \leqslant 0,$$
$$U_k(0,t) = U_k(L,t) = 0, \quad k = 1,2, \quad t \geqslant -2\,\tau.$$

Выберем на отрезке $[0, L]$ ортонормированную систему функций

$$\{e_k(x),\ k = 1,2,...\} \equiv \Big\{\sqrt{\frac{2}{L}}\,\sin\frac{\pi\,k\,x}{L},\ k = 1,2,...\Big\},$$

состоящую из синусов с кратными аргументами. В этом случае цилиндрический белый шум $\widetilde{V}(x,t)$ можно представить так:

$$\widetilde{V}(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} V_k(t)\,e_k(x),$$

а функция $\mathcal{C}(x,y)$ примет следующую форму:

$$\mathcal{C}(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} e_k(x)\,e_k(y). \tag{2.2.104}$$

Для получения СДУвЧП без запаздывания, как и в ряде других наших работ, применим метод расширения пространства состояний, сводя немарковское векторное поле к марковскому. Для этого воспользуемся следующими обозначениями:

$$s \in [0,\tau], \quad t_q = q\,\tau, \quad \Delta_q = (t_q, t_{q+1}],$$
$$q = -2,-1,0,1,2,...,N+1, \quad t_{N+1} \geqslant T,$$
$$\boldsymbol{U}_q(x,s) = \boldsymbol{U}(x,s+t_q), \qquad \boldsymbol{U}_q(x,0) = \boldsymbol{U}_{q-1}(x,\tau),$$
$$\boldsymbol{U}_{-2}(x,0) = \boldsymbol{U}_{-1}(x,0) = \boldsymbol{U}_0(x,0) \equiv \boldsymbol{U}^0(x),$$
$$\widetilde{V}_q(x,s) = \widetilde{V}(x,s+t_q), \qquad \widetilde{V}_q(x,0) = \widetilde{V}_{q-1}(x,\tau),$$
$$\widetilde{\boldsymbol{V}}_q(x,s) = \big(\widetilde{V}_0(x,s), \widetilde{V}_1(x,s), ..., \widetilde{V}_q(x,s)\big),$$

$$\boldsymbol{Z}_0(x,s)=\operatorname{col}\big(\boldsymbol{Y}(x,s),\boldsymbol{U}_0(x,s)\big),\quad \boldsymbol{Z}_1(x,s)=\operatorname{col}\big(\boldsymbol{Z}_0(x,s),\boldsymbol{U}_1(x,s)\big),$$
$$\boldsymbol{Z}_2(x,s)=\operatorname{col}\big(\boldsymbol{Z}_1(x,s),\boldsymbol{U}_2(x,s)\big),\ ...,\ \boldsymbol{Z}_N(x,s)=\operatorname{col}\big(\boldsymbol{Z}_{N-1}(x,s),\boldsymbol{U}_N(x,s)\big),$$
$$\mathbb{H}\big[\boldsymbol{\Upsilon}_\nu(\xi,\theta)\big]=-2\,\alpha\,\Upsilon_{\nu 2}(\xi,\theta)-a^2\,\Upsilon_{\nu 1}(\xi,\theta)+$$
$$+b_1\,\frac{\partial^2\Upsilon_{\nu 1}(\xi,\theta)}{\partial\xi^2}+b_2\,\frac{\partial^2\Upsilon_{\nu-1,1}(\xi,\theta)}{\partial\xi^2}+b_3\,\frac{\partial^2\Upsilon_{\nu-2,1}(\xi,\theta)}{\partial\xi^2}+$$
$$+2\,\epsilon_1\,\Upsilon_{\nu-1,2}(\xi,\theta)+2\,\epsilon_2\,\Upsilon_{\nu-2,2}(\xi,\theta)+c_1\,\Upsilon_{\nu-1,1}(\xi,\theta)+$$
$$+c_2\,\Upsilon_{\nu-2,1}(\xi,\theta),$$

причем равенство векторных случайных полей в точке понимается в смысле сходимости почти наверное, и построим цепочку уравнений линейных СДУвЧП без запаздывания для полей $\boldsymbol{Z}_0(x,s)$, $\boldsymbol{Z}_1(x,s)$, $\boldsymbol{Z}_2(x,s)$, ..., $\boldsymbol{Z}_N(x,s)$, принадлежащих семейству вложенных пространств состояния $\mathbb{R}^4\subset\mathbb{R}^6\subset\mathbb{R}^8\subset\ldots\subset\mathbb{R}^{2N+4}$.

Рассмотрим последовательность полуинтервалов (сегментов) Δ_q.

0°. На сегменте Δ_0 систему СДУвЧП, решением которой является векторное случайное поле $\boldsymbol{Z}_0(x,s)$, можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial U_{-k,j}(x,s)}{\partial s}=0,\quad k,j=1,2,$$
$$\frac{\partial U_{01}(x,s)}{\partial s}=U_{02}(x,s),\quad \frac{\partial U_{02}(x,s)}{\partial s}=\mathbb{H}\big[\boldsymbol{U}_0(x,s)\big]+g_0\,\widetilde{V}_0(x,s),\quad (2.2.105)$$
$$U_{-2,1}(x,0)=U_{-1,1}(x,0)=U_{01}(x,0)=U^0(x),$$
$$U_{-2,2}(x,0)=U_{-1,2}(x,0)=U_{02}(x,0)=0,\qquad 0<x<L.$$

1°. На сегментах Δ_0 и Δ_1 систему СДУвЧП для вычисления векторного поля $\boldsymbol{Z}_1(x,s)$ можно получить, если к предыдущим уравнениям добавить следующие:

$$\frac{\partial U_{11}(x,s)}{\partial s}=U_{12}(x,s),\quad \frac{\partial U_{12}(x,s)}{\partial s}=\mathbb{H}\big[\boldsymbol{U}_1(x,s)\big]+g_0\,\widetilde{V}_1(x,s),\quad (2.2.106)$$
$$U_{11}(x,0)=U_{01}(x,\tau),\quad U_{12}(x,0)=U_{02}(x,\tau),\qquad 0<x<L.$$

2°. Теперь, рассматривая сегменты Δ_0, Δ_1 и Δ_2 совместно, объединяя уравнения (2.2.105), (2.2.106) с уравнениями

$$\frac{\partial U_{21}(x,s)}{\partial s}=U_{22}(x,s),\quad \frac{\partial U_{22}(x,s)}{\partial s}=\mathbb{H}\big[\boldsymbol{U}_2(x,s)\big]+g_0\,\widetilde{V}_2(x,s),\quad (2.2.107)$$
$$U_{21}(x,0)=U_{11}(x,\tau),\quad U_{22}(x,0)=U_{12}(x,\tau),\qquad 0<x<L,$$

можно записать систему СДУвЧП для расчета вектора $\boldsymbol{Z}_2(x,s)$.

... ...

N°. Теперь для сегментов Δ_0, Δ_1, Δ_2, ..., Δ_{N-1}, Δ_N можно получить полную систему СДУвЧП для вычисления векторного случайного поля $\boldsymbol{Z}_N(x,s)$, если соединить уравнения с предыдущих шагов со следующими уравнениями:

$$\frac{\partial U_{N1}(x,s)}{\partial s} = U_{N2}(x,s), \quad \frac{\partial U_{N2}(x,s)}{\partial s} = \mathcal{H}\left[\boldsymbol{U}_N(x,s)\right] + g_0\,\widetilde{V}_N(x,s), \tag{2.2.108}$$

$$U_{N1}(x,0) = U_{N-1,1}(x,\tau), \quad U_{N2}(x,0) = U_{N-1,2}(x,\tau), \quad 0 < x < L.$$

Далее построенную выше на основе применяемой схемы цепочку линейных СДУвЧП без запаздывания можно использовать для получения новой последовательности уравнений – последовательности систем ДУвЧП для первых моментов векторов $\boldsymbol{Z}_0(x,s)$, $\boldsymbol{Z}_1(x,s)$, ..., $\boldsymbol{Z}_N(x,s)$. Для этого введем следующие обозначения:

$$\boldsymbol{m}_q(x,s) = \mathbb{E}[\boldsymbol{Z}_q(x,s)] = \operatorname{col}\left(\boldsymbol{m}_{U_{-2}}(x,s),\right.$$

$$\left.\boldsymbol{m}_{U_{-1}}(x,s), \boldsymbol{m}_{U_0}(x,s), \boldsymbol{m}_{U_1}(x,s), ..., \boldsymbol{m}_{U_q}(x,s)\right),$$

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_q(x,y,s) = \mathbb{E}\left[\mathring{\boldsymbol{Z}}_q(x,s)\,\mathring{\boldsymbol{Z}}_q^{\mathsf{T}}(y,s)\right] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{C}}_{q11} & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{q12} \\ \boldsymbol{\mathcal{C}}_{q21} & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{q22} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{q11} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{C}}_{U_{-2}U_{-2}}(x,y,s) & ... & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{U_{-2}U_0}(x,y,s) \\ ... & ... & ... \\ \boldsymbol{\mathcal{C}}_{U_0U_{-2}}(x,y,s) & ... & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{U_0U_0}(x,y,s) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{q12} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{C}}_{U_{-2}U_1}(x,y,s) & ... & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{U_{-2}U_q}(x,y,s) \\ ... & ... & ... \\ \boldsymbol{\mathcal{C}}_{U_0U_1}(x,y,s) & ... & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{U_0U_q}(x,y,s) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{q21} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{C}}_{U_1U_{-2}}(x,y,s) & ... & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{U_1U_0}(x,y,s) \\ ... & ... & ... \\ \boldsymbol{\mathcal{C}}_{U_qU_{-2}}(x,y,s) & ... & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{U_qU_0}(x,y,s) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{q22} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{C}}_{U_1U_1}(x,y,s) & ... & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{U_1U_q}(x,y,s) \\ ... & ... & ... \\ \boldsymbol{\mathcal{C}}_{U_qU_1}(x,y,s) & ... & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{U_qU_q}(x,y,s) \end{bmatrix},$$

$$\ell = 0, 1, 2, ..., N.$$

С помощью прямого усреднения и использования обобщенного уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова для совместного функционала плотности вероятности [236, 317] построим ДУвЧП для указанных функций математического ожидания и ковариаций на q-м шаге:

1) уравнения и начальные условия для полей математического ожидания:

$$\frac{\partial m_{U_{-k,j}}(x,s)}{\partial s}=0,\quad k,\ j=1,2,$$

$$\frac{\partial m_{U_{k1}}(x,s)}{\partial s}=m_{U_{k2}}(x,s),\quad \frac{\partial m_{U_{k2}}(x,s)}{\partial s}=\mathbb{H}\big[\boldsymbol{m}_{U_k}(x,s)\big],\quad k=\overline{0,q},$$

$$m_{U_{k1}}(x,0)=m^0(x),\quad m_{U_{k1}}(x,0)=0,\qquad k=-2,-1,0,$$

$$m_{U_{k\ell}}(x,0)=m_{U_{k-1,\ell}}(x,\tau),\qquad k=\overline{1,q},\quad \ell=1,2,\quad 0<x<L;$$

2) уравнения для полей ковариации и начальные условия (у ковариаций опущены аргументы x, y, s):

$$\frac{\partial \mathcal{C}_{U_{k\ell}U_{ij}}}{\partial s}=0,\quad \frac{\partial \mathcal{C}_{U_{ij}U_{k\ell}}}{\partial s}=0,\quad k=-2,-1,\quad i=\overline{-2,q},\quad \ell,j=1,2,$$

$$\frac{\partial \mathcal{C}_{U_{k1}U_{i1}}}{\partial s}=\mathcal{C}_{U_{k2}U_{i1}}+\mathcal{C}_{U_{k1}U_{i2}},\quad 0\leqslant k,i\leqslant q,$$

$$\frac{\partial \mathcal{C}_{U_{k1}U_{i2}}}{\partial s}=\mathcal{C}_{U_{k2}U_{i2}}-2\,\alpha\,\mathcal{C}_{U_{k1}U_{i2}}-a^2\,\mathcal{C}_{U_{k1}U_{i1}}+b_1\,\frac{\partial^2\mathcal{C}_{U_{k1}U_{i1}}}{\partial y^2}+$$

$$+b_2\,\frac{\partial^2\mathcal{C}_{U_{k1}U_{i-1,1}}}{\partial y^2}+b_3\,\frac{\partial^2\mathcal{C}_{U_{k1}U_{i-2,1}}}{\partial y^2}+$$

$$+2\,\epsilon_1\,\mathcal{C}_{U_{k1}U_{i-1,2}}+2\,\epsilon_2\,\mathcal{C}_{U_{k1}U_{i-2,2}}+c_1\,\mathcal{C}_{U_{k1}U_{i-1,1}}+c_2\,\mathcal{C}_{U_{k1}U_{i-2,1}},$$

$$\frac{\partial \mathcal{C}_{U_{k2}U_{i1}}}{\partial s}=\mathcal{C}_{U_{k2}U_{i2}}-2\,\alpha\,\mathcal{C}_{U_{k2}U_{i1}}-a^2\,\mathcal{C}_{U_{k1}U_{i1}}+b_1\,\frac{\partial^2\mathcal{C}_{U_{k1}U_{i1}}}{\partial x^2}+$$

$$+b_2\,\frac{\partial^2\mathcal{C}_{U_{k-1,1}U_{i1}}}{\partial x^2}+b_3\,\frac{\partial^2\mathcal{C}_{U_{k-2,1}U_{i1}}}{\partial x^2}+2\,\epsilon_1\,\mathcal{C}_{U_{k-1,2}U_{i1}}+$$

$$+2\,\epsilon_2\,\mathcal{C}_{U_{k-2,2}U_{i1}}+c_1\,\mathcal{C}_{U_{k-1,1}U_{i1}}+c_2\,\mathcal{C}_{U_{k-2,1}U_{i1}},\quad 0\leqslant k,i\leqslant q,$$

$$\frac{\partial \mathcal{C}_{U_{k2}U_{i2}}}{\partial s}=-4\,\alpha\,\mathcal{C}_{U_{k2}U_{i2}}-a^2\,\big(\mathcal{C}_{U_{k1}U_{i2}}+\mathcal{C}_{U_{k2}U_{i1}}\big)+$$

$$+b_1\Big(\frac{\partial^2\mathcal{C}_{U_{k1}U_{i2}}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathcal{C}_{U_{k2}U_{i1}}}{\partial y^2}\Big)+$$

$$+b_2\Big(\frac{\partial^2\mathcal{C}_{U_{k-1,1}U_{i2}}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathcal{C}_{U_{k2}U_{i-1,1}}}{\partial y^2}\Big)+b_3\Big(\frac{\partial^2\mathcal{C}_{U_{k-2,1}U_{i2}}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathcal{C}_{U_{k2}U_{i-2,1}}}{\partial y^2}\Big)+$$

$$+2\,\epsilon_1\big(\mathcal{C}_{U_{k-1,2}U_{i2}}+\mathcal{C}_{U_{k2}U_{i-1,2}}\big)+2\,\epsilon_2\big(\mathcal{C}_{U_{k-2,2}U_{i2}}+\mathcal{C}_{U_{k2}U_{i-2,2}}\big)+$$
$$+c_1\,\big(\mathcal{C}_{U_{k-1,1}U_{i2}}+\mathcal{C}_{U_{k2}U_{i-1,1}}\big)+c_2\,\big(\mathcal{C}_{U_{k-2,1}U_{i2}}+\mathcal{C}_{U_{k2}U_{i-2,1}}\big)+$$
$$+\,g_0^2\,C(x,y)\,\delta_{ki},\quad 0\leqslant k,i\leqslant q,\ 0<x,y<L,$$

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_q(x,y,0)=\mathbb{E}\big[\mathring{\boldsymbol{Z}}_q(x,0)\,\mathring{\boldsymbol{Z}}_q^{\intercal}(y,0)\big]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{C}}^0_{q11} & \boldsymbol{\mathcal{C}}^0_{q12}\\ \boldsymbol{\mathcal{C}}^0_{q21} & \boldsymbol{\mathcal{C}}^0_{q22}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}^0_{q11}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{C}}^0(x,y) & \ldots & \boldsymbol{\mathcal{C}}^0(x,y)\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \boldsymbol{\mathcal{C}}^0(x,y) & \ldots & \boldsymbol{\mathcal{C}}^0(x,y)\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}^0_{q12}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{C}}_{U_{-2}U_0}(x,y,\tau) & \ldots & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{U_{-2}U_{q-1}}(x,y,\tau)\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \boldsymbol{\mathcal{C}}_{U_{-1}U_0}(x,y,\tau) & \ldots & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{U_{-1}U_{q-1}}(x,y,\tau)\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}^0_{q21}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{C}}_{U_0U_{-2}}(x,y,\tau) & \ldots & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{U_0U_{-1}}(x,y,\tau)\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \boldsymbol{\mathcal{C}}_{U_{q-1}U_{-2}}(x,y,\tau) & \ldots & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{U_{q-1}U_{-1}}(x,y,\tau)\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}^0_{q22}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{C}}_{U_0U_0}(x,y,\tau) & \ldots & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{U_0U_{q-1}}(x,y,0)\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \boldsymbol{\mathcal{C}}_{U_{q-1}U_0}(x,y,\tau) & \ldots & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{U_{q-1}U_{q-1}}(x,y,\tau)\end{bmatrix},$$

где

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}^0(x,y)=\begin{bmatrix}\mathcal{C}^0(x,y) & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

В результате этого решение остающейся части поставленной задачи будет заключаться в том, чтобы в конце каждого шага из вектора $\boldsymbol{m}_q(x,s)$ и матрицы $\boldsymbol{\mathcal{C}}_q(x,y,s)$ выделить вектор $\boldsymbol{m}_{U_q}(x,s)$ и матрицу $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{U_qU_q}(x,y,s)$, которые являются последними блоками вектора $\boldsymbol{m}_q(x,s)$ и матрицы $\boldsymbol{\mathcal{C}}_q(x,y,s)$ соответственно, и заменить локальный аргумент s на абсолютный t, что и позволит получить искомые характеристики вектора $\boldsymbol{U}(t)$ на полуинтервале Δ_q.

Пример 2.2.20. Предложенная схема была применена для исследования поведения системы типа (2.2.96)–(2.2.103) при следующих значениях параметров:

$$\alpha=0{,}1;\quad a=2{,}0;\quad b_1=0{,}2;\quad b_2=0{,}05;\quad b_3=0{,}025;$$
$$\epsilon_1=-1/16;\quad \epsilon_2=-1/30;\quad c_1=0{,}5;\quad c_2=0{,}5;\quad g_0=0{,}002;$$

$$L = 1{,}0; \quad T = 10{,}0; \quad \tau \in \{0{,}75; 1{,}0\}; \quad m^0(x) = \frac{x\,(x - 2L/3)\,(x - L)}{2\,L^3};$$

$$\mathcal{C}^0(x, y) = h(x)\,h(y), \quad h(x) = \frac{0{,}0027\,x^2(x - L)}{4\,L^3}.$$

Вследствие того, что формальной суммой ряда (2.2.104) является функция $\delta(x - y)$, использовать которую в вычислениях затруднительно, при расчетах в качестве $\mathcal{C}(x, y)$ использовалась функция

$$\mathcal{C}^*(x, y) = \begin{cases} A - A^2\,|x - y|, & |x - y| < 1/A, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

При этом значение A равнялось 200.

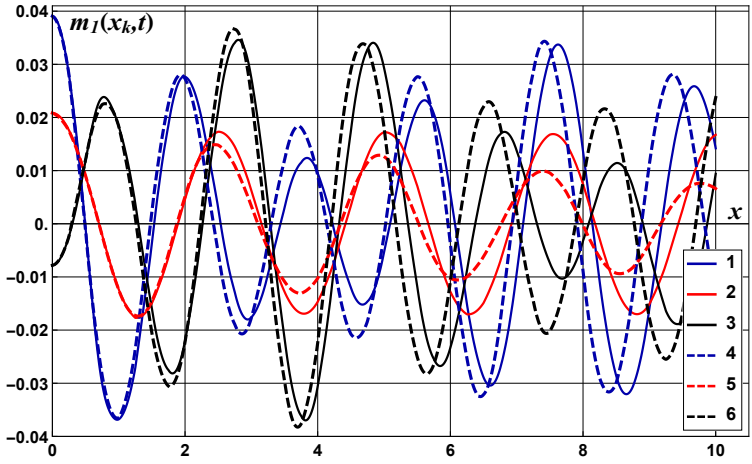


Рис. 2.2.55

Расчеты производились в среде пакета `Mathematica`. ДУвЧП для моментных полей генерировались программно в символьном виде, а затем интегрировались численно с помощью функции пакета NDSolve с опцией FiniteElement, соответствующей использованию метода конечных элементов.

Некоторые из результатов расчетов функций $m_i(x, t)$, $\mathcal{C}_{ij}(x, y, t)$, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 2$, приведены на рис. 2.2.55–2.2.59 соответственно. Из-за того, что решениями построенных ДУвЧП являются функции двух (математические ожидания) и трех (ковариации) переменных, а кроме того, было необходимо отобразить результаты для двух значений запаздывания, для

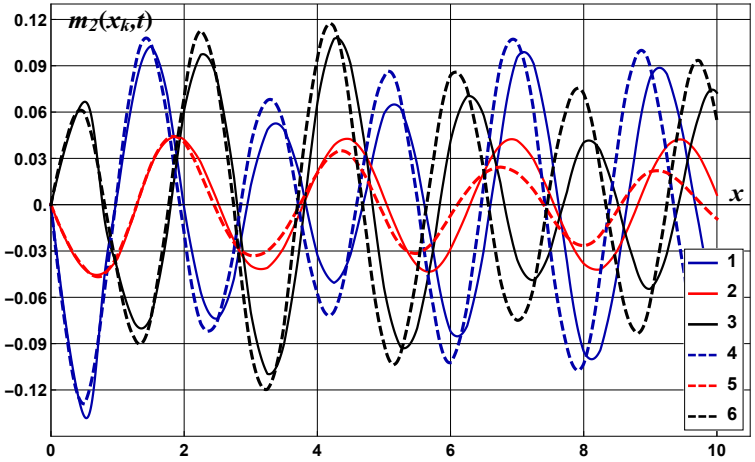


Рис. 2.2.56

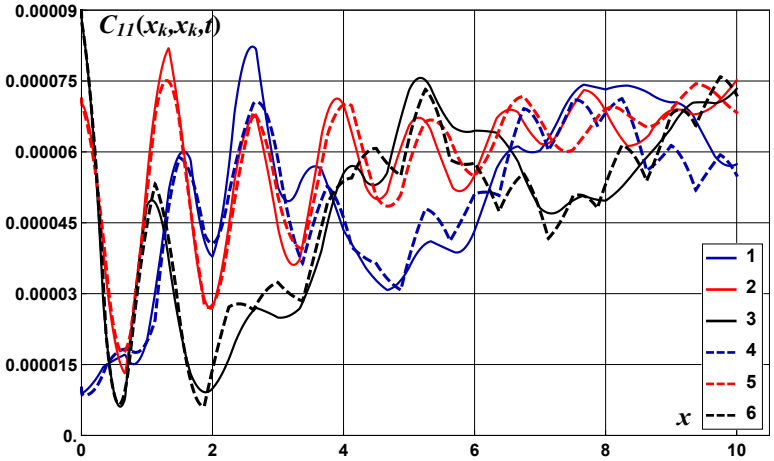


Рис. 2.2.57

ограничения объема иллюстративного материала было решено представлять поведение во времени только в отдельных точках $x_1 = 0{,}25$; $x_2 = 0{,}50$; $x_3 = 0{,}75$ отрезка $[0, L]$ ($k = 1, 2, 3$ соответственно) и (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) ($y_k = x_k$) области $[0, L] \times [0, L]$. Кривые, соответствующие $\tau = 0{,}75$ и $\tau = 1{,}0$, отображены непрерывными и штриховыми линиями соответ-

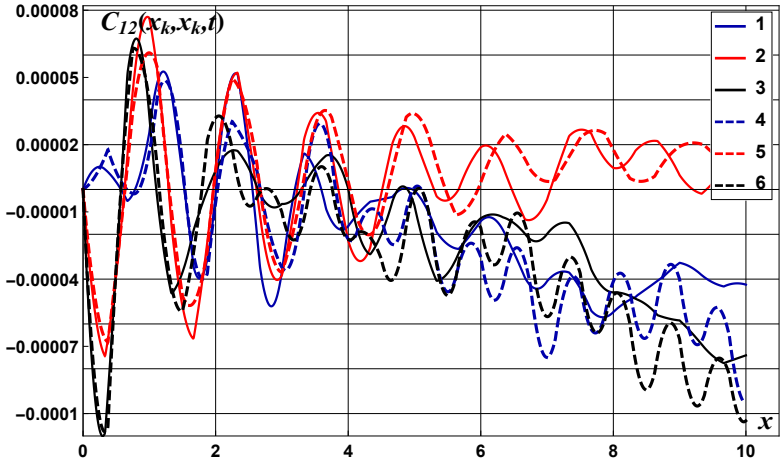


Рис. 2.2.58

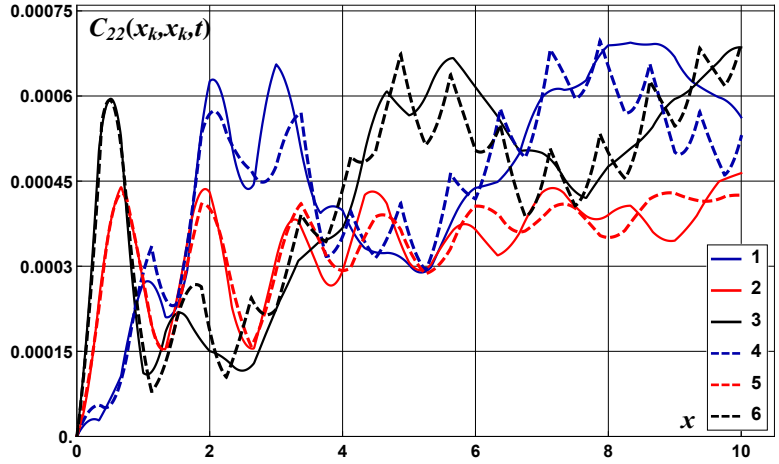


Рис. 2.2.59

ственно. Для значений $k = 1, 2, 3$ в свою очередь использовались синие, красные и черные линии.

Анализируя представленные графики, несложно усмотреть существенную зависимость поведения искомых моментных полей от величины запаздывания. Вторым, по нашему мнению, которое основывается на

представленных и других результатах расчетов, по величине влияния на динамику системы является коэффициент b_3, а затем ϵ_2. ►

Изложенная схема может быть использована для анализа и других классов систем эволюционного типа.

2.2.3. Комбинация метода шагов и расширения пространства состояний для анализа стохастических систем с непрерывными и дискретными возмущениями

Стохастический подход к рассмотрению большинства практических задач стал доминирующим в течение последних четырех десятилетий, а основным инструментом такого подхода являются стохастические дифференциальные уравнения (СДУ), решения которых представляют собой непрерывные случайные процессы [50, 358, 995, 1002, 1010]. Долгое время СДУ использовались для построения реалистичных моделей в экономике, финансах, биологии, социальных науках, химии, физике и других областях. Но относительно недавно было обнаружено, что непрерывные стохастические дифференциальные модели не могут адекватно описать все многообразие реальных случайных процессов в природе и обществе.

В наиболее современных областях применения стохастическая динамика с возможными непредсказуемыми изменениями состояния становится все более важной. Модели скачков появились во многих различных прикладных областях и оказались полезными для описания неожиданных, резких и внезапных изменений состояния, структур и параметров динамических систем во многих технических устройствах из-за отказов и ремонтов компонентов, изменений во взаимосвязях подсистем, резких возмущений, непредсказуемых колебания режимов работы, внезапных пертурбаций среды, смещения рабочих точек линеаризованных моделей для нелинейных систем [787, 995]. Таким образом, важной задачей является исследование свойств решений этих задач, где базовая случайность включает случайные скачки.

Модели, включающие скачки, становятся все более популярными в естественных науках (климатические изменения, фотоэлектронная эмиссия, радиоактивность, радиоизотопные системы измерения, сейсмические события), технике (внезапное изменение структуры и параметров динамических систем во многих технических системах из-за отказов, резких возмущений, внезапных вибраций рабочего режима, управление движущимися объектами, процессы фильтрации, изменения в надежности, гибридные системы, обработка нейронных сигналов, радиолокационные системы с подавлением радиопомех, электрические цепи с коммутируемой

мощностью, нагрузки на мосты вследствие дорожного движения, скачкообразные возбуждения хвостового оперения самолетов, воздействия порывов ветра, ударные волновые воздействия на корпуса судов и морские конструкции, возмущения от существенно негладких микропрофилей дорог на движущиеся транспортные средства, процессы роста зерна), математические финансы (динамика цен на акции и цен опционов, процессы хеджирования, управление финансами, моделирование стоимостей активов, процентных ставок, волатильности), математическая биология и медицина [131, 132, 492, 645, 692, 694, 787, 802, 807, 809, 897, 950, 987, 993] и др.

Процедурами исследования таких систем являются различные схемы методов конечных элементов [865], Эйлера–Маруямы [391], включая неявные [655], Мильштейна [788], Рунге–Кутты [447], обобщенного спектрального метода [93] и др.

Различные формы случайных возбуждений в динамических системах обычно рассматриваются в различных областях науки и техники как фильтрованные белые шумы. В качестве основных моделей непрерывных и быстро меняющихся флуктуаций широко используются гауссовские белые шумы как формальные производные винеровских процессов. В таких случаях плотность вероятности вектора состояния нелинейного осциллятора будет решением уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК-уравнения). Пуассоновские белые шумы являются представителями других типов белых шумов и представляют типичные дискретные негауссовские модели скачкообразных возмущений. В этом случае плотность вероятности соответствующего векторного процесса состояния будет удовлетворять интегро-дифференциальному уравнению в частных производных Колмогорова–Феллера (КФ-уравнению), или обобщенному уравнению Фоккера–Планка–Колмогорова (ОФПК-уравнению). Если рассматриваемая динамическая система возмущена непуассоновской распределенной последовательностью импульсов общей формы, то вектор состояния этой системы не является векторным марковским случайным процессом. В этих случаях были разработаны различные точные и приближенные методы для преобразования исходных немарковских импульсных задач в марковские [695].

Как и для непрерывного случая, вследствие практической важности теория и вычислительные методы для СОДУ со скачками (СОДУсоС) в настоящее время интенсивно развиваются. Общая теория стохастических точечных процессов рассматривается в [993]. Условия единственности и существования решений, а также другие направления исследований СОДУсоС рассматриваются в [871, 877, 987]. Прикладное введение в предмет можно найти в монографии [995]. Подробное изложение теоретиче-

ских инструментов и реальных методов анализа динамических систем, на которые воздействуют случайные последовательности импульсов, было представлено в [692, 694]. В монографии [897] изложены построение и использование многочисленных общих приближений в дискретном времени для СОДУ с винеровскими и пуассоновскими процессами на входе.

Важность анализа воздействия случайных импульсов на механические системы понималась уже давно [696]. Основными направлениями разработки схем приближенного исследования являются процедуры решения ОФПК-уравнений, СОДУ и расчета различных моментных и кумулянтных функций с использованием различных схем замыкания. Например, в работе [951] получено обобщение ФПК-уравнения, управляющего совместной плотностью распределения недиффузионного векторного марковского процесса, который представляет динамический отклик нелинейного осциллятора на случайные импульсы, распределенные по закону Пуассона. В [1037] реакция осциллятора Дюффинга на пуассоновские импульсы исследуется с помощью метода эквивалентной линеаризации. В работе [992] рассмотрены колебания линейной структуры, управляемой случайным потоком импульсов и разработан аналитический метод для определения основных вероятностных характеристик, включая функции математического ожидания, ковариации, кумулянтов, характеристические функции и плотность распределения отклика структуры. В [691] для случая нелинейной системы, возбуждаемой пуассоновскими импульсами, с помощью обобщенной формулы Ито были получены уравнения для моментных функций.

Выше уже отмечалось, что еще в начале 1960-х годов возник интерес к исследованию стохастических ФДУ (СФДУ) различных типов. На основе таких уравнений удалось исследовать новые и известные эффекты, для анализа которых инструментов, предоставляемых моделями в форме детерминированных ФДУ, было недостаточно. При этом, как и для случая СОДУ, для СОФДУ изначально изучались системы только с непрерывными возмущениями на входе. Но потребности практики потребовали применения моделей, в которых необходимо было учитывать и дискретные скачкообразные флуктуации. Так в семействе СФДУ выделился класс линейных СОДРУ с постоянными запаздываниями и смешанными случайными возмущениями (скачками, СОДУсоССЗ) – непрерывными винеровскими и скачкообразными составными пуассоновскими стохастическими процессами. Такие ДУ, несомненно, являются естественным расширением класса СДРУ.

Как и во многих других прикладных задачах, явные решения СОДУ можно получить очень редко [995]. Поэтому первая проблема во мно-

гих исследованиях заключается в создании эффективных приближенных методов для решения таких уравнений. Последние годы ознаменовались появлением широкого спектра подходящих численных схем для СОДУ (см. [116, 145, 742, 851, 995].

Естественно, подобные схемы образуют основной класс инструментов для изучения СОДУсоС. Среди них: неявные и полуявные численные методы [652, 653, 897, 1076]; различные двухшаговые обратные методы Эйлера [652]; ряд θ-методов [653] и методов Рунге–Кутты [447]; адаптивный метод шагов по времени, который основан на алгоритме Монте-Карло Эйлера–Маруямы с добавлением учета скачков [861]; неявные сбалансированные методы [663]; обратный метод Эйлера [654]; стохастические θ-методы Маруямы; семейства стохастических интеграторов Рунге–Кутты без использования производных с сильной аппроксимацией порядка 0.5 [946]; θ-метод с дробными шагами, который является более общим, чем обратный метод Эйлера с дробными шагами [525]; метод математического программирования, который не требует получения выборочных траекторий, может использоваться для численного расчета оценок верхней и нижней границ требуемых средних и включает процедуру оптимизации, использующую алгоритм полиномиального программирования [722]. Теория обратных СОДУсоС и некоторые численные алгоритмы их анализа рассматриваются в [517]. В качестве дополнительных инструментов исследователи используют статистическое моделирование и различные методы замыкания моментных уравнений [667, 693].

Класс приближенных аналитических схем включает: метод стохастической линеаризации [826]; процедуру стохастического усреднения квазилинейных систем [1124]; метод эквивалентной линеаризации [694, 923]; обобщенный метод эквивалентной линеаризации [622]; метод полиномиального разложения [694]; модифицированный эквивалентный метод линеаризации [694]; процедура эквивалентной кубизации [694] и др.

Семейство схем, основанных на решениях ОФПК-уравнений, включают: метод возмущений [453, 951]; технику седловых точек [952]; методы интегрирования по траекториям [523, 694, 752, 753]; алгоритм решения прямого и обратного КФ-уравнения методами Петрова–Галеркина [694, 751]; метод приближенного решения, включающий преобразование КФ-уравнения в дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка посредством применения переходной плотности вероятности [1046].

Естественно, что рассмотренные методы для непрерывно-дискретных стохастических систем служат источниками новых схем для анализа подобных систем с различными формами отклоняющихся аргументов.

Как и обычные СОДУ, для большинства СОФДУ и СОДРУ невозможно получить явное решение. Поэтому различные схемы численных решений являются важными инструментами для изучения таких уравнений [381, 391, 441, 444, 524, 666, 797, 1075, 1132]. Среди других приближенных методов для СОФДУ следует упомянуть методику преобразования немарковских систем с малыми постоянными, переменными и случайными запаздываниями $\tau > 0$ в марковские системы без запаздываний на основе метода усреднения. Конечно, существуют хорошо известные и широко используемые схемы численного интегрирования СОФДУ с помощью метода статистического моделирования [764]. Однако даже базовый алгоритм, т.е. простейшая схема Эйлера–Маруямы с постоянным шагом, приводящая к значительному объему вычислений, является гораздо более сложной, чем его аналог для моделирования СОДУ без запаздывания [383].

Что касается СОДУсоССЗ, то большинство существующих публикаций посвящено анализу сходимости численных методов (см., например, [701, 794, 953, 1072]), исследованиям явного метода Эйлера для линейных СОДУсоССЗ [1019], компенсированным стохастическим θ-методам для нелинейных СОДУ со скачками [785]. Список практических процедур для изучения таких систем включает следующие схемы:

– процедуры для решения ОФПК-уравнений, такие как различные формы метода конечных элементов [865], обобщенного спектрального метода [93] и численного метода, использующего прямое и обратное преобразования Фурье для получения решения начально-краевой задачи для характеристической функции, которая решается с помощью схемы конечных разностей высокого порядка [1091], метод интегралов по траекториям [896], метод экспоненциально-полиномиального замыкания для вычисления стационарной плотности вероятности [1142];

– методы для численного интегрирования СОДУсоССЗ, таких как схемы Мильштейна [665] и Рунге–Кутты [447], алгоритмы Эйлера–Маруямы [391], включая неявные [652], класс дрейфовых неявных одношаговых схем для ОДУсоССЗ нейтрального типа [664], полуявный метод Эйлера [1087], компенсированные стохастические θ-методы [785], приближения решений через ряды Тейлора [710, 849] и т.д.

В предыдущем подразделе данной монографии была представлена схема, которая сочетает в себе классический метод шагов и расширение пространства состояний (МШРПС) для анализа стохастических систем с непрерывными флуктуациями и различными формами сосредоточенных запаздываний, включая одиночные и кратные, постоянные и переменные. Настоящий подраздел посвящен описанию некоторых модификаций схе-

мы МШПРС, позволяющих исследовать поведение ряда линейных систем СОДУ с одиночными и кратными постоянными запаздываниями, причем возмущения на входе этих систем моделируются как непрерывными случайными винеровскими, так и скачкообразными пуассоновскими процессами.

2.2.3.1. Анализ модификаций модели Блэка–Шоулза

Известно, что основной функцией финансово-кредитной системы является регулирование финансовых потоков, и поэтому это быстро развивающаяся отрасль рыночной экономики. Способствует этому расширение и усложнение финансовых рынков [143]. Используемые на рынках финансовые инструменты становятся более разнообразными и порождают сложные потоки платежей и движения цен. Ситуация отягощается и тем, что изменение процентных ставок и индексов на рынках стохастические, а в качестве математических моделей этих процессов необходимо использовать случайные процессы различных типов [313]. Поэтому основная задача участников финансовых рынков – определение цен финансовых инструментов – может быть решена только с привлечением вероятностных методов. Одной из таких задач является нахождение справедливой цены производных ценных бумаг.

Начало исследованиям подобного типа положили статьи Ф. Блэка и М. Шоулса [421] и Р. Мертона [842]. Результатом этих работ стала формула стоимости опциона, которая в отличие от известных на то время формул, во-первых, была основана только на наблюдаемых или оцениваемых рыночных показателях и, во-вторых, определяла стоимость опциона единственным образом независимо от рыночных предпочтений инвесторов. В качестве модели изменения стоимости акции Ф. Блэк и М. Шоулс применяли диффузионной процесс, который является геометрическим броуновским движением:

$$\dot{X}(t) = X(t)\left[\alpha(t) + \beta(t)\,V(t)\right], \qquad t > t_0, \qquad X(t_0) = X^0, \qquad (2.2.109)$$

где t – время; $X(t) > 0$ – цена опциона; $V(t)$ – белый шум с единичной интенсивностью; $\alpha(t)$, $\beta(t)$ – известные функции.

В течение последних тридцати лет модель (2.2.109) обобщалась в различных направлениях путем применения разнообразных математических средств стохастического анализа и уравнений в частных производных.

Одним из таких обобщений является попытка с помощью добавления в квадратную скобку в правой части (мультипликативного) разрывного

возмущения в форме пуассоновского процесса для учета возможных скачкообразных изменений цен.

Далее сначала рассматривается модель с аддитивным пуссоновским потоком скачков, а затем для учета последействия к ней добавляется член с запаздыванием. Целью исследования [205] является получение уравнений для вероятностных моментов цены опциона в обоих случаях.

1°. Модель с аддитивными скачками. Рассмотрим совместное воздействие на цену опциона мультипликативного белого и аддитивного пуассоновского шумов. Последний представляется суммой дельта-импульсов вида $\sum A_i\,\delta(t-t_i)$, где $\delta(u)$ – дельта-функция Дирака, t_i – момент появления i-го импульса, в предположении, что "амплитуды" импульсов A_i являются взаимно независимыми случайными величинами с известной плотностью распределения, моменты появления импульсов t_i не зависят от амплитуд A_i и описываются законом Пуассона, а интенсивность скачков определяется функцией $\mu(t)>0$.

Стохастическое обыкновенное дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет цена, запишем в виде:

$$dX(t)=\alpha(t)\,X(t)\,dt+\beta(t)\,X(t)\circ dW(t)+P(t)\,dt,\quad X(t_0)=X^0,\quad (2.2.110)$$

где $W(t)$ – стандартный винеровский процесс; $P(t)$ – пуассоновский шум. Начальное положение X^0 считается случайным с плотностью распределения $p^0(x)$, имеющей все необходимые начальные моменты. Случайные флуктуации $W(t)$, $P(t)$ и случайную величину X^0 предполагаем независимыми.

В данном случае интегро-дифферециальное уравнение Колмогорова–Феллера (КФ–уравнение) для плотности вероятности $p(x,t)$ [288] цены $X(t)$ принимает следующую форму:

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t}=\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2\big[\beta^2\,x^2\,p(x,t)\big]}{\partial x^2}-\frac{\partial\big[\big(\alpha+\beta^2/2\big)\,x\,p(x,t)}{\partial x}+$$

$$+\mu(t)\Big[-p(x,t)+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(x-x',t)\,p(x',t)\,dx'\Big],\qquad (2.2.111)$$

$$p(x,t_0)=p^0(x).\qquad (2.2.112)$$

Заметим, что ядро $K(\cdot)$, определяющее вероятности сохранения и смены состояний, удовлетворяет условию нормировки:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(x-x',t)\,dx'=1.$$

Домножим обе части уравнения (2.2.111) на x^k и проинтегрируем по переменной x в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. В результате будем иметь:

$$\dot{m}_k(t) = \Big(\frac{k^2\,\beta^2}{2} + k\,\alpha - \mu\Big)\,m_k(t) + \\ + \mu \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k \Big[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(x-x')\,p(x',t)\,dx' \Big]\,dx, \quad k = 1,2,..., \quad (2.2.113)$$

где $m_k(t)$ – функция начального момента порядка k ($m_0(t) = 1$).

Вычислим двойной интеграл в правой части уравнения (2.2.113). Для нахождения внутреннего интеграла сделаем замену переменной интегрирования $y = x - x'$, обозначим через $m_s^{[P]}(t)$ интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^s\,K(u,t)\,du, \qquad s \geqslant 0$$

(s-й "начальный момент" функции K) и изменим порядок интегрирования. Тогда в результате выкладок получим, что

$$\mu \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k\,K(x-x')\,dx \Big]\,p(x',t)\,dx' = \mu \sum_{s=0}^{k} \mathsf{C}_k^s\,m_s^{[P]}\,m_{k-s},$$

где C_k^s – число сочетаний.

Отсюда окончательный вид уравнений (2.2.113) таков:

$$\dot{m}_k = \Big(\frac{k^2\,\beta^2}{2} + k\,\alpha\Big)\,m_k + \mu \sum_{s=1}^{k} \mathsf{C}_k^s\,m_s^{[P]}\,m_{k-s}, \qquad k \geqslant 1, \qquad (2.2.114)$$

а начальные условия для системы (2.2.114) могут быть получены из соотношений

$$m_k(t_0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k\,p^{\,0}(x)\,dx \equiv m_{k0}. \qquad (2.2.115)$$

Заметим, что любая конечная часть системы (2.2.114) является замкнутой, т.е. в нее не входят моменты высших по отношению к этой части порядков. Поэтому уравнения (2.2.114) можно решить последовательно.

Например, в случае постоянных α, β, μ, m_s^P для первых двух моментов будем иметь:

$$m_1(t) = e^{t(\alpha+\beta^2/2)}\left(m_{10}+H_0\right) - H_0,$$
$$m_2(t) = e^{t(2\alpha+2\beta^2)}\left(m_{20}+H_1+H_2\right) - e^{t(\alpha+\beta^2/2)}\,H_1 - H_2,$$

где

$$H_0 = \frac{\mu\, m_1^{[P]}}{\alpha+\beta^2/2}, \qquad H_1 = \frac{4\,\mu\, m_1^{[P]}\left(m_{10}\,(2\,\alpha+\beta^2)+2\,\mu\, m_1^{[P]}\right]}{(2\,\alpha+\beta^2)(2\,\alpha+3\,\beta^2)},$$
$$H_2 = \frac{\mu\left[-4\,\mu\, m_1^{[P]2}+m_2^{[P]}\,(2\,\alpha+\beta^2)\right]}{2\,(\alpha+\beta^2)(2\,\alpha+\beta^2)}.$$

Соотношения для моментов более высокого порядка (которые, конечно, носят существенно более сложный вид) могут быть построены, например, с помощью одной из систем аналитических вычислений (компьютерной алгебры).

В условиях постоянства коэффициентов из уравнений (2.2.114) следуют и выражения для расчета стационарных моментов (если последние существуют):

$$m_{sk} = m_k(+\infty) = -\frac{\mu\,\sum\limits_{s=1}^{k}\mathsf{C}_k^s\, m_s^{[K]}\, m_{k-s}}{k^2\,\beta^2/2+k\,\alpha}, \qquad k\geqslant 1, \tag{2.2.116}$$

откуда находим ($\alpha<0$, $\alpha+\beta^2/2<0$), что

$$m_{s1} = -\frac{\mu\, m_1^{[P]}}{\alpha+\beta^2/2},$$
$$m_{s2} = -\frac{\mu\left[-4\,\mu\, m_1^{[P]2}+m_2^{[P]}\,(2\,\alpha+\beta^2)\right]}{2\,(\alpha+\beta^2)(2\,\alpha+\beta^2)},$$
$$m_{s3} = -\frac{2\,\mu\left[-6\,\mu\, m_1^{[R]}\, m_2^{[P]}+m_3^{[P]}\,(2\,\alpha+\beta^2)\right]}{3\,(2\,\alpha+\beta^2)(2\,\alpha+3\,\beta^2)},$$
$$\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots$$

Заметим, что: 1) при $\alpha>0$ стационарных режимов не существует; 2) случай $\alpha<0$ представляет, в основном, академический интерес, т.к.

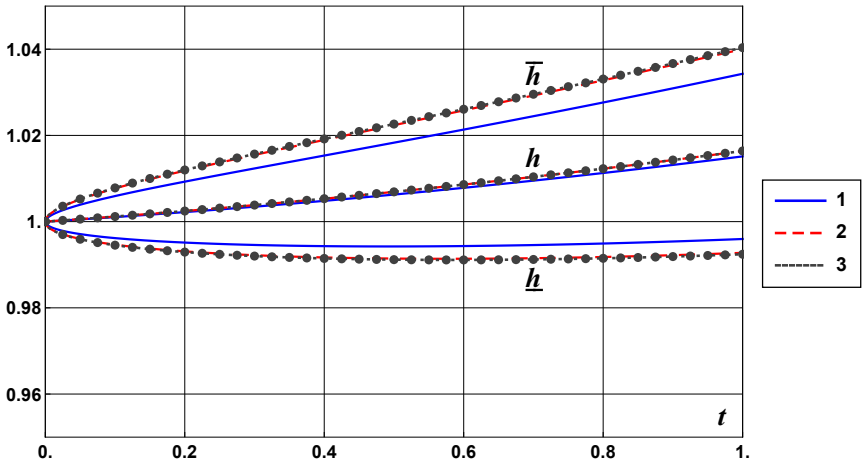


Рис. 2.2.60

постоянное убывание цены актива не соответствует нормальной практике финансового рынка.

Пример 2.2.21. Воспользуемся полученными результатами для расчета на основе "правила $3\,\sigma$" (в данном случае это правило приложимо, конечно, весьма приближенно, т.к. распределение процесса $X(t)$ не является гауссовым) границ, в которых с вероятностью, близкой к единице, будет находится цена актива $([\underline{h}\,,\overline{h}\,] = [h(t) - 3\sigma(t), h(t) + 3\sigma(t)]$, $h(t) = m_1(t)$, $\sigma(t) = \sqrt{m_2(t) - m_1^2(t)})$.

Расчеты, отображенные на рис. 2.2.60, производились для трех случаев: 1) скачки отсутствуют ($\mu = 0$); 2) функция $K(z)$ совпадает с плотностью равномерного распределение на промежутке $[-a^+/2, 3a^+/2]$, $a^+ = 1/40$, $\mu = 1/10$; 3) функция $K(z)$ совпадает с плотностью гауссового распределения $\mathcal{N}(a^*, \sigma^{*2})$, $a^* = 1/80$, $\sigma^* = 1/120$, $\mu = 1/10$.

Заметим, что ненулевые первые моменты функции $K(z)$ в случаях 2 и 3 совпадают, а $a^+ = 3\,\sigma^*$. Другие параметры были выбраны следующим образом: $p^0(x) = \delta(x-1)$ ($m_{10} = m_{20} = 1$), $\alpha = (1+t)/100$, $\beta = (1 + t/2)/200$, $t \in [0,1]$.

Результаты расчетов для скачков с равномерным и гауссовым законом практически не отличались: различие по первому моменту порядка 10^{-15}, а по второму – 10^{-6}, причем разница монотонно нарастает в "пользу" гауссового распределения. ►

2°. Модель с аддитивными скачками с учетом запаздывания. Рассмот-

рим теперь СОДУ для цены опциона в следующей форме:

$$dX(t) = \big[\alpha(t)\,X(t) + \gamma(t)\,X(t-\tau)\big]\,dt + \beta(t)\,x(t)\circ dW_1(t) + \\ + \nu(t)\,X(t-\tau)\circ dW_2(t) + dP(t), \qquad t > t_1 = t_0 + \tau, \quad (2.2.117)$$

где t – время ($t_0 \leqslant l \leqslant T < +\infty$); $W_1(t)$, $W_2(t)$ – стандартные винеровские процессы; $P(t)$ – пуассоновский шум; $\gamma(t)$, $\nu(t)$ – известные функции. Начальное положение X^0 считается случайным с плотностью распределения $p^0(x)$, имеющей все необходимые начальные моменты.

Предположим, что на отрезке $(t_0, t_1]$ цена $X(t)$ удовлетворяет СОДУ без запаздывания следующего вида:

$$dX(t) = \bar\alpha(t)\,X(t)\,dt + \bar\beta(t)\,X(t)\circ dW_1(t) + P(t)\,dt, \quad X(t_0) = X^0, \ (2.2.118)$$

где $\bar\alpha(t)$, $\bar\beta(t)$ – известные функции. Пусть в момент времени $t = t_0$ задана плотность вероятности $\bar p^0(x)$ распределения цены X ($p(x,t)$ – одноточечная плотность вероятности). Случайные флуктуации $W_1(t)$, $W_2(t)$, $P(t)$ и случайную величину X^0 считаем независимыми.

Заметим, что: 1) случай задания $x(t)$ на отрезке $(t_0, t_1]$ в виде некоторой дифференцируемой функции $\varphi(t)$ легко сводится к (2.2.118); 2) учет современных тенденций в развитии теории детерминированных функционально-дифференциальных уравнений (например, того, что значение $\varphi(t_1)$ не обязательно должно совпадать с начальным условием $x(t_1)$ [4]) также возможен.

В таких условиях задачей дальнейшего исследования будет вычисление математического ожидания $m_1(t)$ и второго начального момента $m_2(t)$ цены $X(t)$ при любом $t \geqslant t_0$.

Для решения поставленной задачи применим модификацию схемы, изложенной в предыдущем подразделе. Для реализации этой процедуры введем обозначения ($s \in [0,\tau]$, $t_q = t_0 + q\,\tau$, $q = 0, 1, 2, ..., N$, $t_{N+1} \geqslant T$):

$$X_q(s) = X(s+t_q), \quad W_{1q}(s) = W_1(s+t_q), \quad W_{2q}(s) = W_2(s+t_q),$$
$$P_q(s) = P(s+t_q), \quad \alpha_0(s) = \bar\alpha(s+t_0), \quad \alpha_q(s) = \alpha(s+t_q),$$
$$\beta_0(s) = \bar\beta(s+t_0), \quad \beta_q(s) = \beta(s+t_q), \quad \gamma_q(s) = \gamma(s+t_q),$$
$$\nu(s_q) = \nu(s+t_q), \quad \mu(s_q) = \mu(s+t_q), \quad p_q(x,s) = p(x,s+t_q),$$
$$W_{1q}(0) = W_{1,q-1}(\tau), \quad W_{2q}(0) = W_{2,q-1}(\tau), \quad P_q(0) = P_{q-1}(\tau),$$
$$\boldsymbol{Z}_0(s) = \operatorname{col}\big(Y(s), X_0(s)\big), \quad \boldsymbol{Z}_1(s) = \operatorname{col}\big(Y(s), X_0(s), X_1(s)\big),$$
$$\boldsymbol{Z}_2(s) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{Z}_1(s), X_2(s)\big), \quad ..., \quad Y(s) = X_0, \quad p_q(x,0) = p_{q-1}(x,\tau),$$

$$\bar{p}_q(\boldsymbol{z}_q, s) = \bar{p}_q(x_q, x_{q-1}, ..., x_0, y, s), \quad \bar{p}_0(x_0, y, 0) = p^0(x_0, \tau) \cdot \delta(y - x_0),$$
$$\bar{p}_q(x_q, x_{q-1}, ..., x_0, y, 0) = \bar{p}_{q-1}(x_q, x_{q-1}, ..., x_1, x_0, \tau) \cdot \delta(y - x_0),$$
$$K_q(x - x', s) = K(x - x', s + t_q)$$

$(q > 0)$, причем $p_0(x_0, 0) = \bar{p}^0(x_0)$, а случайные процессы $W_{1i}(s)$ и $W_{2j}(s)$ независимы в совокупности. Построим цепочку уравнений для числовых характеристик векторов $\boldsymbol{Z}_0(s)$, $\boldsymbol{Z}_1(s)$, $\boldsymbol{Z}_2(s)$, ..., $\boldsymbol{Z}_N(s)$, ..., принадлежащих семейству вложенных пространств состояний $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4 \subset ... \subset \mathbb{R}^{N+1} \subset ....$ Цель построения такой цепочки – получить последовательность систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) для первых моментов вектора состояния при различных значениях времени.

Используя введенные выше обозначения, запишем уравнение (2.2.118) для компонент определенного на полуинтервале $\Delta_0 = (t_0, t_1]$ случайного вектора $\boldsymbol{Z}_0(s)$ в следующем виде:

$$dY(s) = 0,$$
$$dX_0(s) = \alpha_0(s)\, X_0(s)\, ds + \beta_0(s)\, X_0(s) \circ dW_{10}(s) + dP_0(s).$$

Рассмотрим теперь полуинтервалы Δ_0 и $\Delta_1 = (t_1, t_2]$. Систему СОДУ для вычисления компонент векторного процесса $\boldsymbol{Z}_1(s)$ можно представить так:

$$dY(s) = 0,$$
$$dX_0(s) = \alpha_0(s)\, X_0(s)\, ds + \beta_0(s)\, X_0(s) \circ dW_{10}(s) + dP_0(s),$$
$$dX_1(s) = \big[\alpha_1(s)\, X_1(s) + \gamma_1(s)\, X_0(s)\big]\, ds +$$
$$+ \beta_1(s)\, X_1(s) \circ dW_{11}(s) + \nu_1(s)\, X_0(s) \circ dW_{21}(s) + dP_1(s).$$

Продолжая подобным образом и далее, на временных полуинтервалах Δ_0, Δ_1, ..., $\Delta_N = (t_N, t_{N+1}]$ построим систему СОДУ для компонент вектора состояния $\boldsymbol{Z}_N(s)$ в виде:

$$dY(s) = 0,$$
$$dX_0(s) = \alpha_0(s)\, X_0(s)\, ds + \beta_0(s)\, X_0(s) \circ dW_{10}(s) + dP_0(s),$$
$$dX_1(s) = \big[\alpha_1(s)\, X_1(s) + \gamma_1(s)\, X_0(s)\big]\, ds +$$
$$+ \beta_1(s)\, X_1(s) \circ dW_{11}(s) + \nu_1(s)\, X_0(s) \circ dW_{21}(s) + dP_1(s),$$
$$... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ...$$
$$dX_N(s) = \big[\alpha_N(s)\, X_N(s) + \gamma_N(s)\, X_{N-1}(s)\big]\, ds +$$

$$+\,\beta_N(s)\,X_N(s)\circ dW_{1N}(s)+\nu_N(s)\,X_{N-1}(s)\circ dW_{1N}(s)+dP_N(s).$$

Тогда цепочка КФ–уравнений для соответствующих плотностей вероятности будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial p_0}{\partial s}=\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2\big(\beta_0^2\,x_0^2\,p_0\big)}{\partial x_0^2}\;-\;\frac{\partial\big[\big(\alpha_0+\beta_0^2/2\big)\,x_0\,p_0\big]}{\partial x_0}+$$

$$+\mu_0\Big[-p_0+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(y_0-y_0')\,K_0(x_0-x_0',s)\,p_0(x_0',y_0',s)\,dy_0'\,dx_0'\Big];$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial s}=\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2\big(\beta_0^2\,x_0^2\,p_1\big)}{\partial x_0^2}+\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2\big[\big(\beta_1^2\,x_1^2+\nu_1^2\,x_0^2\big)\,p_1\big]}{\partial x_1^2}-$$

$$-\frac{\partial\big[\big(\alpha_0+\beta_0^2/2\big)\,x_0\,p_1\big]}{\partial x_0}-\frac{\partial\big[\big(\alpha_1\,x_1+\beta_1^2\,x_1/2+\gamma_1\,x_0\big)\,p_1\big]}{\partial x_1}+$$

$$+\sum_{k=0}^{1}\mu_k\Big[-p_1+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(y_0-y_0')\,\delta(x_{1-k}-x_{1-k}')\times$$

$$\times K_k(x_k-x_k',s)\,p_1(x_1',x_0',y_0',s)\,dx_1'\,dx_0'\,dy_0'\Big];$$

$$\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots$$

$$\frac{\partial p_N}{\partial s}=\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2\big(\beta_0^2\,x_0^2\,p_N\big)}{\partial x_0^2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial^2\big[\big(\beta_k^2\,x_k^2+\nu_k^2\,x_{k-1}^2\big)\,p_N\big]}{\partial x_k^2}-$$

$$-\frac{\partial\big[\big(\alpha_0+\beta_0^2/2\big)\,x_0\,p_N\big]}{\partial x_0}-\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial\big[\big(\alpha_k\,x_k+\beta_k^2\,x_k/2+\gamma_k\,x_{k-1}\big)\,p_N\big]}{\partial x_k}+$$

$$+\sum_{k=0}^{N}\mu_k\Big[-p_N+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(y_0-y_0')\prod_{q=0,q\neq k}^{N}\delta(x_q-x_q')\times$$

$$\times K_k(x_k-x_k',s)\,p_N(x_N',\ldots,x_1',x_0',y_0',s)\,dx_N'\ldots dx_1'\,dx_0'\,dy_0'\Big].$$

Теперь, если учесть рассуждения, приведенные в предыдущем пункте, и ввести обозначения $m_Y(t)=\mathbb{E}[Y(t)]$, $m_{X_i}(t)=\mathbb{E}[X_i(t)]$, $m_{YX_i}(t)=\mathbb{E}[Y(t)\,X_i(t)]$, $m_{X_iX_j}(t)=\mathbb{E}[X_i(t)\,X_j(t)]$, $m_{iq}^{[P]}=m_i^{[P]}(s+t_q)$, то на основе этих КФ–уравнений можно записать ОДУ для искомых моментов на

полуинтервалах Δ_0, Δ_1, ..., Δ_N, ... в виде:

$$\dot m_Y(s)=0,\quad \dot m_{X_0}(s)=\left(\alpha_0+\beta_0^2/2\right)m_{X_0}(s)+\mu_0\,m_{10}^{[P]}(s),$$
$$\dot m_{YY}(s)=0,\quad \dot m_{YX_0}(s)=\left(\alpha_0+\beta_0^2/2\right)m_{YX_0}(s)+\mu_0\,m_{10}^{[P]}(s)\,m_Y(s),$$
$$\dot m_{X_0X_0}(s)=\left(2\,\alpha_0+2\,\beta_0^2\right)m_{X_0X_0}(s)+\mu_0\left[m_{20}^{[P]}(s)+2\,m_{10}^{[P]}(s)\,m_{X_0}(s)\right];$$

$$\dot m_Y(s)=0,\quad \dot m_{X_0}(s)=\left(\alpha_0+\beta_0^2/2\right)m_{X_0}(s)+\mu_0\,m_{10}^{[P]}(s),$$
$$\dot m_{X_1}(s)=\left(\alpha_1+\beta_1^2/2\right)m_{X_1}(s)+\gamma_1\,m_{X_0}(s)+\mu_1\,m_{11}^{[P]}(s),$$
$$\dot m_{YY}(s)=0,\quad \dot m_{YX_0}(s)=\left(\alpha_0+\beta_0^2/2\right)m_{YX_0}(s)+\mu_0\,m_{10}^{[P]}(s)\,m_Y(s),$$
$$\dot m_{YX_1}(s)=\left(\alpha_1+\beta_1^2/2\right)m_{YX_1}(s)+\gamma_1\,m_{YX_0}(s)+\mu_1\,m_{11}^{[P]}(s)\,m_Y(s)(s),$$
$$\dot m_{X_0X_0}(s)=\left(2\,\alpha_0+2\,\beta_0^2\right)m_{X_0X_0}(s)+\mu_0\left(m_{20}^{[P]}(s)+2\,m_{10}^{[P]}(s)\,m_{X_0}(s)\right],$$
$$\dot m_{X_0X_1}(s)=\left(\alpha_0+\beta_0^2/2\right)m_{X_0X_1}(s)+\left(\alpha_1+\beta_1^2/2\right)m_{X_0X_1}(s)+$$
$$+\gamma_1\,m_{X_0X_0}(s)+\mu_0\,m_{10}^{[P]}(s)\,m_{X_1}(s)+\mu_1\,m_{11}^{[P]}(s)\,m_{X_0}(s),$$
$$\dot m_{X_1X_1}(s)=\left(2\alpha_1+2\,\beta_1^2\right)m_{X_1X_1}(s)+\nu_1^2\,m_{X_0X_0}(s)+$$
$$+2\,\gamma_1\,m_{X_0X_1}(s)+\mu_1\left[m_{21}^{[P]}(s)+2\,m_{11}^{[P]}(s)\,m_{X_1}(s)\right];$$

... ...

$$\dot m_Y(s)=0,\quad \dot m_{X_0}(s)=\left(\alpha_0+\beta_0^2/2\right)m_{X_0}(s)+\mu_0\,m_{10}^{[P]}(s),\quad ...$$
$$\dot m_{X_k}(s)=\left(\alpha_k+\beta_k^2/2\right)m_{X_k}(s)+\gamma_k\,m_{X_{k-1}}(s)+\mu_k\,m_{1k}^{[P]}(s),$$
$$\dot m_{YY}(s)=0,\quad \dot m_{YX_0}(s)=\left(\alpha_0+\beta_0^2/2\right)m_{YX_0}(s)+\mu_0\,m_{10}^{[P]}(s)\,m_Y(s),$$
$$\dot m_{YX_k}(s)=\left(\alpha_k+\beta_k^2/2\right)m_{YX_k}(s)+\gamma_k\,m_{YX_{k-1}}(s)+\mu_k\,m_{1k}^{[P]}(s)\,m_Y(s),$$
$$\dot m_{X_0X_0}(s)=\left(2\,\alpha_0+2\,\beta_0^2\right)m_{X_0X_0}(s)+\mu_0\left[m_{20}^{[P]}(s)+2\,m_{10}^{[P]}(s)\,m_{X_0}(s)\right],$$
$$\dot m_{X_0X_k}(s)=\left(\alpha_0+\beta_0^2/2\right)m_{X_0X_k}(s)+\left(\alpha_k+\beta_k^2/2\right)m_{X_0X_k}(s)+$$
$$+\gamma_k\,m_{X_0X_{k-1}}(s)+\mu_0\,m_{10}^{[P]}(s)\,m_{X_k}(s)+\mu_k\,m_{1k}^{[P]}(s)\,m_{X_0}(s),$$
$$\dot m_{X_kX_k}(s)=\left(2\,\alpha_k+2\,\beta_k^2\right)m_{X_kX_k}(s)+\nu_k^2\,m_{X_{k-1}X_{k-1}}(s)+$$
$$+2\,\gamma_k\,m_{X_{k-1}X_k}(s)+\mu_k\left[m_{2k}^{[P]}(s)+2\,m_{1k}^{[P]}(s)\,m_{x_k}\right],$$
$$\dot m_{X_iX_j}(s)=\left(\alpha_i+\beta_i^2/2\right)m_{X_iX_j}(s)+\left(\alpha_j+\beta_j^2/2\right)m_{X_iX_j}(s)+$$

$$+\gamma_i\, m_{X_{i-1}X_j}(s) + \gamma_j\, m_{X_iX_{j-1}}(s) + \mu_i\, m_{1i}^{[P]}(s)\, m_{X_j}(s) + \mu_j\, m_{1j}^{[P]}(s)\, m_{X_i}(s);$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

где $k = \overline{1,N}$, $1 \leqslant i < j \leqslant N$. Начальными условиями для этих групп уравнений будут следующие соотношения:

$$m_Y(0) = m_{X_0}(0) = m_{10},$$
$$m_Y Y(0) = m_{YX_0}(0) = m_{X_0X_0}(0) = m_{20};$$

$$m_Y(0) = m_{X_0}(0) = m_{10}, \quad m_{X_1}(0) = m_{X_0}(\tau),$$
$$m_Y(0) = m_{YX_0}(0) = m_{20}, \quad m_{YX_1}(0) = m_{YX_0}(\tau),$$
$$m_{X_0X_0}(0) = m_{20}, \quad m_{X_0X_1}(0) = m_{YX_0}(\tau), \quad m_{X_1X_1}(0) = m_{X_0X_0}(\tau);$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$m_Y(0) = m_{X_0}(0) = m_{10}, \quad m_{X_k}(0) = m_{X_{k-1}}(\tau),$$
$$m_Y Y(0) = m_{YX_0}(0) = m_{20}, \quad m_{YX_k}(0) = m_{YX_{k-1}}(\tau),$$
$$m_{X_0X_0}(0) = m_{20}, \quad m_{X_0X_k}(0) = m_{YX_{k-1}}(\tau),$$
$$m_{X_kX_k}(0) = m_{X_{k-1}X_{k-1}}(\tau), \quad m_{X_iX_j}(0) = m_{X_{i-1}X_{j-1}}(\tau);$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

Пример 2.2.22. Будем рассматривать модель (2.2.117) при условиях и в постановке, совпадающих с использовавшимися в примере 2.2.21. Специфические для данной модели параметры были выбраны следующим образом: $\tau = 1/12$, $t_0 = -\tau$, $\bar{\alpha}(t) = \bar{\beta}(t) = \mu_0(s) = 0$ ($X_0(s) = X^0$), $\gamma(t) = 0.005$, $\nu(t) = 0.0025$.

Результаты расчетов (показаны на рис. 2.2.61, где обозначения аналогичны рис. 2.2.60) для рассматриваемой проблемы отличаются от тех, что получены при решении задачи в примере 2.2.21. Если поведение математического ожидания и второго момента при численном моделировании для скачков с равномерным и гауссовым законом практически не отличалось (примерно с теми же различиями, как и в примере 2.2.21), то учет запаздывания привел к значимому изменению характера поведения и формы коридора для цены, а именно, к повороту трубки против часовой стрелки.

Заметим, что рассмотренные модели с помощью схемы расширения пространства состояний могут быть распространены и на случаи наличия кратных и переменных запаздываний.

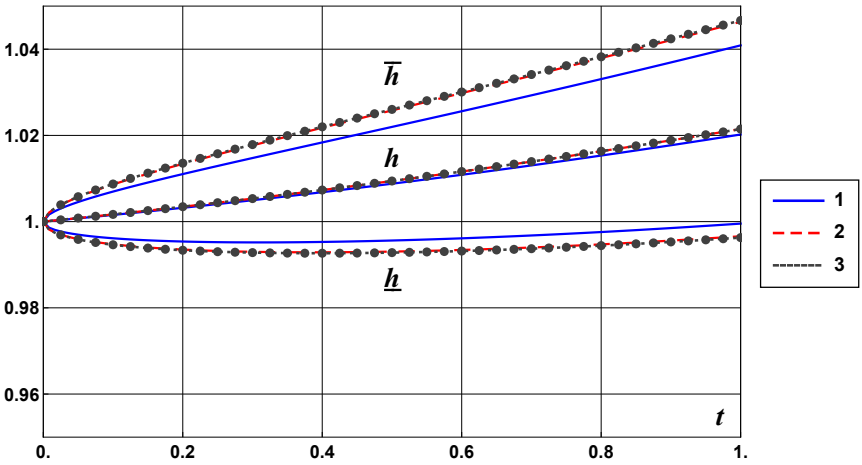


Рис. 2.2.61

2.2.3.2. Системы с постоянными запаздываниями и дискретно-непрерывными возмущениями

Ниже рассматривается методика [223] исследования линейных СОДУ с постоянными запаздываниями и смешанными случайными возмущениями, основанная на модификации схемы, которая сочетает классический метод шагов и расширение пространства состояний и последовательно излагается в этом разделе в приложении к методам решения различных задач.

Рассмотрим систему линейных стохастических дифференциальных уравнений (СОДУ) Ито с запаздываниями $\tau = \text{const} > 0$ следующего вида:

$$d\boldsymbol{X}(t) = \big[\boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{\mathcal{B}}(t)\,\boldsymbol{X}(t-\tau) + \boldsymbol{c}(t)\big]\,dt + \boldsymbol{\mathcal{G}}(t)\,d\boldsymbol{W}(t) + \boldsymbol{\mathcal{H}}(t)\,d\boldsymbol{P}(t),$$
$$t_1 = t_0 + \tau < t \leqslant T < +\infty, \qquad (2.2.119)$$

где $\boldsymbol{X}(t) = \{X_i(t),\ i = \overline{1,n}\}^{\intercal}$ – вектор состояния; $\boldsymbol{W}(t) = \{W_i(t),\ i = \overline{1,m}\}^{\intercal}$ – вектор независимых стандартных случайных винеровских процессов; $\boldsymbol{P}(t) = \{P_i(t),\ i = \overline{1,r}\}^{\intercal}$ – вектор независимых составных случайных пуассоновских процессов [313, Т. 1], представляющих собой последовательности случайных импульсов прямоугольного вида постоянной

ширины [865]:

$$P_i(t) = \sum_{j=1}^{N_i(t)} U_{ij} \cdot \delta(t - t_{ij}),$$

причем случайные амплитуды импульсов U_{ij} имеют плотности вероятности $p_{Vi}(v)$, сами импульсы появляются с постоянными интенсивностями $\lambda_i > 0$, а их число на полуотрезке $(t_0, t]$ равно $N_i(t)$. Здесь $\boldsymbol{\mathcal{I}}$ – единичная матрица.

Предположим, что векторные случайные процессы $\boldsymbol{W}(t)$ и $\boldsymbol{P}(t)$ независимы, а на интервале $(t_0, t_1]$ вектор состояния $\boldsymbol{X}(t)$ удовлетворяет системе СОДУ без запаздывания вида:

$$d\boldsymbol{X}(t) = \big[\boldsymbol{\mathcal{A}}_0(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{c}_0(t)\big]\,dt + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(t)\,d\boldsymbol{W}(t) + \boldsymbol{\mathcal{H}}_0(t)\,d\boldsymbol{P}(t),$$
$$\boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}^0, \qquad (2.2.120)$$

причем в уравнениях (2.2.119) и (2.2.120) $\boldsymbol{\mathcal{A}}(t) = \{a_{ij}(t)\}$,$\boldsymbol{\mathcal{A}}_0(t) = \{a_{0ij}(t)\}$, $\boldsymbol{\mathcal{G}}(t) = \{g_{ij}(t)\}$, $\boldsymbol{\mathcal{G}}_0(t) = \{g_{0ij}(t)\}$, $\boldsymbol{\mathcal{H}}(t) = \{h_{ij}(t)\} = \{\boldsymbol{H}_j(t)\}$, $\boldsymbol{\mathcal{H}}_0(t) = \{h_{0ij}(t)\} = \{\boldsymbol{H}_{0j}(t)\}$, $\boldsymbol{\mathcal{B}}(t) = \{b_{ij}(t)\}$ и $\boldsymbol{c}(t) = \{c_i(t)\}$, $\boldsymbol{c}_0(t) = \{c_{0i}(t)\}$ – известные непрерывные матрицы-функции и векторы-функции. Кроме того, будем считать, что заданы все необходимые числовые характеристики случайного вектора $\boldsymbol{X}^0$. В частности, пусть в начальный момент времени t_0 для вектора $\boldsymbol{X}$ известны вектор математических ожиданий $\boldsymbol{m}^0 = \mathbb{E}\big[\boldsymbol{X}^0\big]$ и ковариационная матрица $\boldsymbol{\mathcal{C}}^0 = \mathbb{E}\big[(\boldsymbol{X}^0 - \boldsymbol{m}^0)(\boldsymbol{X}^0 - \boldsymbol{m}^0)^{\intercal}\big]$.

Задачей исследования является построение систем ОДУ без запаздывания для компонентов вектора функций математических ожиданий $\boldsymbol{m}(t) = \mathbb{E}[\boldsymbol{X}(t)]$ и матрицы функций ковариации

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}(t) = \mathbb{E}[\{\boldsymbol{X}(t) - \boldsymbol{m}(t)\}\{\boldsymbol{X}(t) - \boldsymbol{m}(t)\}^{\intercal}]$$

вектора состояния $\boldsymbol{X}$, имеющего плотность распределения $p(\boldsymbol{x}, t)$ при любом $t > t_0$, причем $p(\boldsymbol{x}, t_0) = p_0(\boldsymbol{x}, t_0) = \bar{p}^{\,0}(\boldsymbol{x})$.

Как и в предыдущих случаях, для того чтобы получить СОДУ без запаздывания, применим сочетание метода расширения пространства состояний и метода шагов, что позволит преобразовать немарковский векторный процесс в марковский посредством расширения пространства состояний системы.

Рассмотрим равномерную временную сетку $t_q = t_0 + q\cdot\tau$, $q = 0, 1, 2, ...$, N $(t_{N+1} \geqslant T)$ и введем новую временну̀ю переменную s, изменяющуюся на промежутке $[0, \tau]$, а также следующие обозначения:

$$s_q = s + t_q, \quad \Delta_q = (t_q, t_{q+1}], \quad \boldsymbol{X}_q(s) = \boldsymbol{X}(s_q), \quad \boldsymbol{W}_q(s) = \boldsymbol{W}(s_q),$$

$$\boldsymbol{P}_q(s)=\boldsymbol{P}(s_q),\quad \boldsymbol{Y}(s)\equiv\boldsymbol{X}^0,\quad \boldsymbol{\mathcal{A}}_q(s)=\boldsymbol{\mathcal{A}}(s+t_q),\quad \boldsymbol{\mathcal{B}}_q(s)=\boldsymbol{\mathcal{B}}(s+t_q),$$
$$\boldsymbol{\mathcal{G}}_q(s)=\boldsymbol{\mathcal{G}}(s+t_q),\quad \boldsymbol{\mathcal{H}}_q(s)=\boldsymbol{\mathcal{H}}(s+t_q),\quad \boldsymbol{c}_q(s)=\boldsymbol{c}(s+t_q),$$

причем для всех $q\geqslant 1$

$$\boldsymbol{X}_q(0)=\boldsymbol{X}_{q-1}(\tau),\quad \boldsymbol{W}_q(0)=\boldsymbol{W}_{q-1}(\tau),\quad \boldsymbol{P}_q(0)=\boldsymbol{P}_{q-1}(\tau).$$

Здесь и далее равенство сечений соответствующих компонент векторных случайных процессов понимается в смысле "почти наверное".

Рассмотрим последовательность полуинтервалов (сегментов) Δ_q.

На сегменте Δ_0 систему СОДУ для вектора $\boldsymbol{Z}_0(s)=\operatorname{col}\big(\boldsymbol{Y}(s),\boldsymbol{X}_0(s)\big)$ представим в виде:

$$\begin{aligned}
&d\boldsymbol{Y}(s)=0,\\
&d\boldsymbol{X}_0(s)=\big[\boldsymbol{\mathcal{A}}_0(s)\,\boldsymbol{X}_0(s)+\boldsymbol{c}_0(s)\big]\,ds+\boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s)\,d\boldsymbol{W}_0(s)+\\
&\qquad\qquad+\boldsymbol{\mathcal{H}}_0(s)\,d\boldsymbol{P}_0(s),\\
&\boldsymbol{Y}(0)=\boldsymbol{X}^0,\quad \boldsymbol{X}_0(0)=\boldsymbol{X}^0.
\end{aligned}$$

Рассмотрим теперь полуинтервалы Δ_0 и Δ_1. Систему СОДУ для вычисления компонент вектора $\boldsymbol{Z}_1(s)=\operatorname{col}\big(\boldsymbol{Y}(s),\boldsymbol{X}_0(s),\,\boldsymbol{X}_1(s)\big)$ можно представить так:

$$\begin{aligned}
&d\boldsymbol{Y}(s)=0,\\
&d\boldsymbol{X}_0(s)=\big[\boldsymbol{\mathcal{A}}_0(s)\,\boldsymbol{X}_0(s)+\boldsymbol{c}_0(s)\big]\,ds+\boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s)\,d\boldsymbol{W}_0(s)+\\
&\qquad\qquad+\boldsymbol{\mathcal{H}}_0(s)\cdot d\boldsymbol{P}_0(s),\\
&d\boldsymbol{X}_1(t)=\big[\boldsymbol{\mathcal{A}}_1(s)\,\boldsymbol{X}_1(s)+\boldsymbol{\mathcal{B}}_1(s)\,\boldsymbol{X}_0(s)+\boldsymbol{c}_1(s)\big]\,ds+\\
&\qquad\qquad+\boldsymbol{\mathcal{G}}_1(s)\,d\boldsymbol{W}_1(s)+\boldsymbol{\mathcal{H}}_1(s)\,d\boldsymbol{P}_1(s),\\
&\boldsymbol{Y}(0)=\boldsymbol{X}^0,\quad \boldsymbol{X}_0(0)=\boldsymbol{X}^0,\quad \boldsymbol{X}_1(0)=\boldsymbol{X}_0(\tau).
\end{aligned}$$

Определенный на полуинтервалах Δ_0, Δ_1 и Δ_2 векторный случайный процесс $\boldsymbol{Z}_2(s)=\operatorname{col}\big(\boldsymbol{Z}_1(s),\boldsymbol{X}_2(s)\big)$ будет удовлетворять системе СОДУ следующего вида:

$$\begin{aligned}
&d\boldsymbol{Y}(s)=0,\\
&d\boldsymbol{X}_0(s)=\big[\boldsymbol{\mathcal{A}}_0(s)\,\boldsymbol{X}_0(s)+\boldsymbol{c}_0(s)\big]\,ds+\boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s)\,d\boldsymbol{W}_0(s)+\\
&\qquad\qquad+\boldsymbol{\mathcal{H}}_0(s)\cdot d\boldsymbol{P}_0(s),\\
&d\boldsymbol{X}_1(t)=\big[\boldsymbol{\mathcal{A}}_1(s)\,\boldsymbol{X}_1(s)+\boldsymbol{\mathcal{B}}_1(s)\,\boldsymbol{X}_0(s)+\boldsymbol{c}_1(s)\big]\,ds+
\end{aligned}$$

$$+ \boldsymbol{\mathcal{G}}_1(s)\, d\boldsymbol{W}_1(s) + \boldsymbol{\mathcal{H}}_1(s)\, d\boldsymbol{P}_1(s),$$

$$d\boldsymbol{X}_2(t) = \left[\boldsymbol{\mathcal{A}}_2(s)\, \boldsymbol{X}_2(s) + \boldsymbol{\mathcal{B}}_2(s)\, \boldsymbol{X}_1(s) + \boldsymbol{c}_2(s)\right] ds +$$

$$+ \boldsymbol{\mathcal{G}}_2(s)\, d\boldsymbol{W}_2(s) + \boldsymbol{\mathcal{H}}_2(s)\, d\boldsymbol{P}_2(s),$$

$$\boldsymbol{Y}(0) = \boldsymbol{X}^0, \quad \boldsymbol{X}_0(0) = \boldsymbol{X}^0, \quad \boldsymbol{X}_1(0) = \boldsymbol{X}_0(\tau), \quad \boldsymbol{X}_2(0) = \boldsymbol{X}_1(\tau).$$

Обозначая через $\boldsymbol{Z}_k(s)$, $k = 3, 4, ..., N$ вектор $\mathrm{col}\left(\boldsymbol{Z}_{k-1}(s), \boldsymbol{X}_k(s)\right)$ и применяя к нему излагаемую схему, находим, что вектор $\boldsymbol{Z}_k(s)$, представляющий поведение вектора состояния $\boldsymbol{X}(t)$ на сегментах Δ_0, Δ_1, Δ_2, ..., Δ_k, будет решением системы СОДУ, полученной добавлением к уравнениям для вектора $\boldsymbol{Z}_{k-1}(s)$ уравнений следующего вида:

$$d\boldsymbol{X}_k(t) = \left[\boldsymbol{\mathcal{A}}_k(s)\, \boldsymbol{X}_k(s) + \boldsymbol{\mathcal{B}}_k(s)\, \boldsymbol{X}_{k-1}(s) + \boldsymbol{c}_k(s)\right] ds +$$

$$+ \boldsymbol{\mathcal{G}}_k(s)\, d\boldsymbol{W}_k(s) + \boldsymbol{\mathcal{H}}_k(s)\, d\boldsymbol{P}_k(s), \quad \boldsymbol{X}_k(0) = \boldsymbol{X}_{k-1}(\tau).$$

Итак, получена цепочка систем линейных СОДУ для расширенных векторов состояния $\boldsymbol{Z}_0$, $\boldsymbol{Z}_1$, $\boldsymbol{Z}_2$, ..., $\boldsymbol{Z}_N$ увеличивающейся размерности $L_k = n\,(k+2)$, $k = 0, 1, 2, ..., N$, и одинаковой структуры без запаздывания, для дальнейшего исследования которой можно применить различные пригодные для данного класса уравнений методы [236].

В частности, построенную последовательность систем линейных СОДУ без запаздывания можно использовать для получения новой цепочки уравнений – ОДУ для первых моментов (математических ожиданий и ковариационных матриц) векторов $\boldsymbol{Z}_0$, $\boldsymbol{Z}_1$, $\boldsymbol{Z}_2$, ..., $\boldsymbol{Z}_N$.

Выясним структуру этих систем. Для этого воспользуемся интегро-дифференциальным уравнением Колмогорова–Феллера для одноточечной плотности вероятности $p_k(\boldsymbol{z}_k, s)$ вектора $\boldsymbol{Z}_k(s)$ в форме [645], которое в нашем случае примет следующий вид:

$$\frac{\partial p_k(\boldsymbol{z}_k, s)}{\partial s} = -\sum_{i=1}^{L_k} \frac{\partial\left[\underline{a}_{ki}\, p_k(\boldsymbol{z}_k, s)\right]}{\partial z_{ki}} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{L_k} \frac{\partial\left[\underline{b}_{kij}\, p_k(\boldsymbol{z}_k, s)\right]}{\partial z_{ki}\, \partial z_{kj}} -$$

$$+ \sum_{\ell=1}^{r(k+2)} \lambda_\ell^+ \int_{-\infty}^{+\infty} \left[p_k(\boldsymbol{z}_k - \boldsymbol{d}_{k\ell}, s) - p_k(\boldsymbol{z}_k, s)\right] p_{U\ell}^+(u_\ell^+)\, du_\ell^+, \quad (2.2.121)$$

где

$$\underline{\boldsymbol{a}}_k \equiv \mathrm{col}\left(\underline{a}_{ki}, i = \overline{1,\ L_k}\right) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_k^+(s)\, \boldsymbol{z}_k + \boldsymbol{c}_k^+(s),$$

$$\underline{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_k \equiv \{\underline{b}_{kij}, i, j = \overline{1,\ L_k}\} = \boldsymbol{\mathcal{G}}_k^+(s)\, \boldsymbol{\mathcal{G}}_k^{+\intercal}(s),$$

$$\boldsymbol{d}_{k\ell} \equiv \operatorname{col}\left(d_{ki\ell}, i = \overline{1,\ L_k}\right) = \boldsymbol{H}^{+}_{k\ell}(s)\, u^{+}_{\ell},$$
$$p^{+}_{U\ell}(u^{+}_{\ell}) = p_{Ui}(u_i), \quad \lambda^{+}_{\ell} = \lambda_i, i = \operatorname{mod}(\ell, r), \quad \ell > r,$$

а матрицы $\boldsymbol{\mathcal{A}}^{+}_{k}(s)$, $\boldsymbol{\mathcal{G}}^{+}_{k}(s)$ и $\boldsymbol{\mathcal{H}}^{+}_{k}(s) = \{\boldsymbol{H}^{+}_{k\ell}(s)\}$, а также вектор $\boldsymbol{c}^{+}_{k}(s)$ будут иметь блочную структуру, которая формируется следующим образом:

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}^{+}_{0}(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{A}}_0(s) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{A}}^{+}_{1}(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{A}}_0(s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{B}}_1(s) & \boldsymbol{\mathcal{A}}_1(s) \end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{\mathcal{A}}^{+}_{k}(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{A}}^{+}_{k-1}(s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n(k+1)\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{A}}_{k12} & \boldsymbol{\mathcal{A}}_k(s) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{A}}_{k12} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n\,k} & \boldsymbol{\mathcal{B}}_k(s) \end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{\mathcal{G}}^{+}_{0}(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{G}}^{+}_{1}(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{G}}_1(s) \end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{\mathcal{G}}^{+}_{k}(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{G}}^{+}_{k-1}(s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n(k+1)\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m(k+1)} & \boldsymbol{\mathcal{G}}_k(s) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{H}}^{+}_{0}(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times r} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times r} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times r} & \boldsymbol{\mathcal{H}}_0(s) \end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{\mathcal{H}}^{+}_{1}(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times r} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times r} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times r} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times r} & \boldsymbol{\mathcal{H}}_0(s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times r} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times r} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times r} & \boldsymbol{\mathcal{H}}_1(s) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{H}}^{+}_{k}(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{H}}^{+}_{k-1}(s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n(k+1)\times r} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times r(k+1)} & \boldsymbol{\mathcal{H}}_k(s) \end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{c}^{+}_{0}(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O}_n \\ \boldsymbol{c}_0(s) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c}^{+}_{1}(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O}_n \\ \boldsymbol{c}_0(s) \\ \boldsymbol{c}_1(s) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c}^{+}_{k}(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}^{+}_{k-1}(s) \\ \boldsymbol{c}_k(s) \end{bmatrix}.$$

Отсюда можно увидеть, что для любого $\boldsymbol{Z}_k$, $k = 0, 1, 2, ..., N$, структуры соответствующих систем ОДУ будут иметь вид:

$$\dot{\boldsymbol{m}}_k(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}^{+}_{k}(s)\, \boldsymbol{m}_k(s) + \boldsymbol{c}^{+}_{k}(s) + \boldsymbol{\mathcal{H}}^{+}_{k}(s)\, \hat{\boldsymbol{m}}^{+}_{Pk}, \tag{2.2.122}$$
$$\dot{\boldsymbol{\mathcal{C}}}_k(s) = \underline{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_k + \boldsymbol{\mathcal{A}}^{+}_{k}(s)\, \boldsymbol{\mathcal{C}}_k(s) + \left[\boldsymbol{\mathcal{A}}^{+}_{k}(s)\, \boldsymbol{\mathcal{C}}_k(s)\right]^{\mathsf{T}} + \hat{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^{+}_{k}(s)\, \hat{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^{+\mathsf{T}}_{k}(s), \tag{2.2.123}$$

где

$$\boldsymbol{m}_k(s) = \mathbb{E}[\boldsymbol{Z}_k] \equiv \operatorname{col}\left(\boldsymbol{m}_Y, \boldsymbol{m}_{X_0}, \boldsymbol{m}_{X_1}, ..., \boldsymbol{m}_{X_k}\right),$$
$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_k(s) = \mathbb{E}\left[\left(\boldsymbol{Z}_k - \boldsymbol{m}_k\right)\left(\boldsymbol{Z}_k - \boldsymbol{m}_k\right)^{\mathsf{T}}\right] \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{C}}_{YY} & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{YX_0} & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{YX_1} & ... & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{YX_k} \\ \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_0Y} & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_0X_0} & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_0X_1} & ... & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_0X_k} \\ \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_1Y} & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_1X_0} & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_1X_1} & ... & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_1X_k} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_kY} & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_kX_0} & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_kX_1} & ... & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_kX_k} \end{bmatrix},$$

$$\hat{\boldsymbol{m}}^{+}_{Pk} = \operatorname{col}\left(\lambda^{+}_{\ell}\, m^{+}_{P\ell}\,,\ \ell = \overline{1,\ r\,(k+2)}\right), \quad m^{+}_{P\ell} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^{+}_{\ell}\, p^{+}_{U\ell}(u^{+}_{\ell})\, du^{+}_{\ell},$$

$$\hat{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^{+}_{k} = \{\hat{\boldsymbol{H}}^{+}_{k\ell}\,,\ \ell = \overline{1,\ r\,(k+2)}\}, \quad \hat{\boldsymbol{H}}^{+}_{k\ell} = \sqrt{\lambda^{+}_{\ell}}\, \boldsymbol{H}^{+}_{k\ell}\, \sqrt{m^{+}_{P2\ell}}\,,$$

$$m^{+}_{P2\ell} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (u^{+}_{\ell})^2\, p^{+}_{U\ell}(u^{+}_{\ell})\, du^{+}_{\ell}.$$

Теперь определим вид начальных условий для построенных ОДУ:

$$\boldsymbol{m}_k(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}^0 \\ \boldsymbol{m}^0 \\ \boldsymbol{m}_0(\tau) \\ \ldots \\ \boldsymbol{m}_{k-1}(\tau) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_0(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{C}}^0 & \boldsymbol{\mathcal{C}}^0 \\ \boldsymbol{\mathcal{C}}^0 & \boldsymbol{\mathcal{C}}^0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{C}}_1(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{C}}^0 & \boldsymbol{\mathcal{C}}^0 & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{YX_0}(\tau) \\ \boldsymbol{\mathcal{C}}^0 & \boldsymbol{\mathcal{C}}^0 & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{YX_0}(\tau) \\ \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_0Y}(\tau) & \mathcal{C}_{X_0Y}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_0X_0}(\tau) \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{C}_k(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{C}}_{k-1}(0) & \bar{\boldsymbol{\mathcal{C}}}_{12} \\ \bar{\boldsymbol{\mathcal{C}}}_{21} & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_{k-1}X_{k-1}}(\tau) \end{bmatrix},$$

$$\bar{\boldsymbol{\mathcal{C}}}_{21} = \left[\boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_{k-1}Y}(\tau)\ \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_{k-1}Y}(\tau)\ \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_{k-1}X_0}(\tau)\ \ldots\ \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_{k-1}X_{k-2}}(\tau)\right],$$

$$\bar{\boldsymbol{\mathcal{C}}}_{12} = \left[\boldsymbol{\mathcal{C}}_{YX_{k-1}}(\tau)\ \boldsymbol{\mathcal{C}}_{YX_{k-1}}(\tau)\ \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_0X_{k-1}}(\tau)\ \ldots\ \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_{k-2}X_{k-1}}(\tau)\right]^{\mathsf{T}}.$$

Итак, полученные уравнения с начальными условиями полностью определяют математические ожидания и ковариации компонент вектора состояния на любом заданном временно́м промежутке.

2.2.3.3. Системы с кратными постоянными запаздываниями и дискретно-непрерывными возмущениями

Рассмотрим систему линейных СОДУ Ито с несколькими кратными запаздываниями следующего вида [905]:

$$d\boldsymbol{X}(t) = \Big[\sum_{\ell=0}^{\nu} \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\nu,\nu-\ell}(t)\, \boldsymbol{X}(t-\ell\,\tau) + \boldsymbol{c}_{\nu}(t)\Big]dt + \boldsymbol{\mathcal{G}}_{\nu}(t)\, d\boldsymbol{W}(t) + \boldsymbol{\mathcal{H}}_{\nu}(t)\, d\boldsymbol{P}(t),$$

$$t > t_{\nu} = t_0 + \nu\,\tau, \tag{2.2.124}$$

где $1 \leqslant \nu \leqslant K \in \mathbb{N}$; t – время $(t_0 \leqslant t \leqslant T < +\infty)$; $\boldsymbol{X}(t) = \{X_i(t),\ t \geqslant t_0,\ i = \overline{1,n}\}^\intercal$ – вектор состояния; $\boldsymbol{W}(t) = \{W_i(t),\ t \geqslant t_0,\ i = \overline{1,m}\}^\intercal$ – вектор независимых стандартных винеровских процессов; $\boldsymbol{P}(t) = \{P_i(t),\ t \geqslant t_0,\ i = \overline{1,r}\}^\intercal$ – вектор независимых непрерывных справа составных пуассоновских процессов [692], которые представляют собой последовательности случайных прямоугольных импульсов постоянной ширины [865]:

$$P_i(t) = \sum_{j=1}^{N_i(t)} U_{ij} \cdot \mathbb{1}(t - t_{ij}).$$

Предположим, что для каждого $P_i(t)$, $i = \overline{1,r}$ амплитуды случайных импульсов U_{ij}, являющихся копиями случайных величин U_i, имеют плотности распределения $p_{U_i}(u)$, сами импульсы появляются с постоянными интенсивностями $\lambda_i > 0$, их количество в интервале $(t_0, t]$ равно $N_i(t)$, а случайные величины U_{ij} статистически не зависят от случайных времен t_{ij}. Согласно [694]

$$\mathbb{E}[dP_i(t)] = \lambda_i\, m_{U_i}\, dt, \quad \mathbb{E}[dP_i(t_1)\, dP_j(t_2)] = \delta_{ij}\, \lambda_i^2\, \mathbb{E}\big[P_i^2\big]\ dt_1\, dt_2,$$
$$i, j = 1, 2, ..., r,$$

где δ_{ij} – символ Кронекера,

$$\mathbb{1}(z) = \begin{cases} 1, & z > 0, \\ 0, & z \leqslant 0. \end{cases}$$

Предположим, что векторные случайные процессы $\boldsymbol{W}(t)$ и $\boldsymbol{P}(t)$ независимы, $\boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}^0$ п.н. ("почти наверное") и для $t \in (t_k, t_{k+1}]$, $k = 0$, 1, ..., $\nu - 1$, вектор состояния $\boldsymbol{X}(t)$ удовлетворяет следующим системам СОДУсЗ:

$$d\boldsymbol{X}(t) = \Big[\sum_{\ell=0}^{k} \boldsymbol{\mathcal{A}}_{k,k-\ell}(t)\, \boldsymbol{X}(t - \ell\,\tau) + \boldsymbol{c}_k(t)\Big] dt + \boldsymbol{\mathcal{G}}_k(t)\, d\boldsymbol{W}(t) + \boldsymbol{\mathcal{H}}_k(t)\, d\boldsymbol{P}(t). \tag{2.2.125}$$

В уравнениях (2.2.124), (2.2.125) $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{qd}(t) = \{\underline{a}_{qdij}(t)\}$, $\boldsymbol{\mathcal{G}}_q(t) = \{\underline{g}_{qij}(t)\}$, $\boldsymbol{\mathcal{H}}_q(t) = \{\underline{h}_{qij}(t)\}$, $\boldsymbol{c}_q(t) = \{\underline{c}_{qi}(t)\}$ $(0 \leqslant d \leqslant q \leqslant \nu)$ – известные непрерывные детерминированные матричные и векторная функции. Кроме того, предположим, что заданы все необходимые статистические характеристики начального случайного вектора $\boldsymbol{X}^0$, в частности, вектор математических ожиданий $\boldsymbol{m}_X^0 = \mathbb{E}\big[\boldsymbol{X}^0\big]$ и матрица ковариаций $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}^0 = \mathbb{E}\big[(\boldsymbol{X}^0 - \boldsymbol{m}^0)(\boldsymbol{X}^0 - \boldsymbol{m}^0)^\intercal\big]$.

Исходя из вышеизложенных предположений, можно сделать вывод, что зависящий от времени вектор состояния $\boldsymbol{X}(t)$ является недиффузионным векторным немарковским процессом. Условия существования, единственности и непрерывности выборочных траекторий справа для $\boldsymbol{X}(t)$ как решения СОДУсоС с запаздыванием или без сформулированы в [995].

Целью дальнейшего исследования является построение системы ОДУ без запаздывания для компонентов вектора функций математического ожидания $\boldsymbol{m}_X(t) = \mathbb{E}[\boldsymbol{X}(t)]$ и матрицы функций ковариации $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(t) = \mathbb{E}[\{\boldsymbol{X}(t) - \boldsymbol{m}(t)\}\{\boldsymbol{X}(t) - \boldsymbol{m}(t)\}^{\intercal}]$ вектора состояния $\boldsymbol{X}(t)$ для $t > t_0$.

Как и ранее, применяемая ниже схема основана на расширении пространства состояний исследуемой системы и применении комбинации этой процедуры и классического метода шагов.

Для этого опять вводится равномерная временная сетка $t_q = t_0 + q \cdot \tau$, $q = 0,\ 1,\ 2,\ ...,\ N,\ N+1$ $(t_{N+1} \geqslant T)$, новая временная переменная $s \in [0, \tau]$ и в добавление к введенным в предыдущем подпункте следующие обозначения:

$$\underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_{q\ell}(s) = \begin{cases} \boldsymbol{\mathcal{A}}_{q\ell}(s_q), & 0 \leqslant \ell \leqslant q \leqslant \nu, \\ \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\nu,\ell-q+\nu}(s_q), & (q > \nu) \cap (q - \nu \leqslant \ell \leqslant q), \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n}, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$\underline{\boldsymbol{\mathcal{G}}}_{q\ell}(s) = \begin{cases} \boldsymbol{\mathcal{G}}_q(s_q), & 0 \leqslant \ell = q \leqslant \nu, \\ \boldsymbol{\mathcal{G}}_\nu(s_q), & \ell = q > \nu, \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m}, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$\underline{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_{q\ell}(s) = \begin{cases} \boldsymbol{\mathcal{H}}_q(s_q), & 0 \leqslant \ell = q \leqslant \nu, \\ \boldsymbol{\mathcal{H}}_\nu(s_q), & \ell = q > \nu, \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times r}, & \text{иначе;} \end{cases} \qquad \underline{\boldsymbol{c}}_q(s) = \begin{cases} \boldsymbol{c}_q(s_q), & 0 \leqslant q \leqslant \nu, \\ \boldsymbol{c}_\nu(s_q), & q > \nu; \end{cases}$$

$$\boldsymbol{Z}_k(s) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{Y}(s), \boldsymbol{X}_0(s), \boldsymbol{X}_1(s), ..., \boldsymbol{X}_k(s)\big),$$

$$\boldsymbol{W}_k(s) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{W}_0(s), \boldsymbol{W}_1(s), ..., \boldsymbol{W}_k(s)\big),$$

$$\boldsymbol{P}_k(s) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{P}_0(s), \boldsymbol{P}_0(s), ..., \boldsymbol{P}_k(s)\big),$$

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_k^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & ... & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_{00}(s) & \underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_{01}(s) & ... & \underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_{0k}(s) \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_{10}(s) & \underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_{11}(s) & ... & \underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_{1k}(s) \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_{k0}(s) & \underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_{k1}(s) & ... & \underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_{kk}(s) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}_k^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & ... & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times r} \\ \underline{\boldsymbol{\mathcal{G}}}_{00}(s) & \underline{\boldsymbol{\mathcal{G}}}_{01}(s) & ... & \underline{\boldsymbol{\mathcal{G}}}_{0k}(s) \\ \underline{\boldsymbol{\mathcal{G}}}_{10}(s) & \underline{\boldsymbol{\mathcal{G}}}_{11}(s) & ... & \underline{\boldsymbol{\mathcal{G}}}_{1k}(s) \\ ... & ... & ... & ... \\ \underline{\boldsymbol{\mathcal{G}}}_{k0}(s) & \underline{\boldsymbol{\mathcal{G}}}_{M1}(s) & ... & \underline{\boldsymbol{\mathcal{G}}}_{kk}(s) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}_k^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times r} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times r} & ... & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times r} \\ \underline{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_{00}(s) & \underline{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_{01}(s) & ... & \underline{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_{0k}(s) \\ \underline{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_{10}(s) & \underline{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_{11}(s) & ... & \underline{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_{1k}(s) \\ ... & ... & ... & ... \\ \underline{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_{k0}(s) & \underline{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_{k1}(s) & ... & \underline{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_{kk}(s) \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{c}_k^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O}_n \\ \underline{\boldsymbol{c}}_0(s) \\ \underline{\boldsymbol{c}}_1(s) \\ ... \\ \underline{\boldsymbol{c}}_k(s) \end{bmatrix},$$

с учетом того, что $\boldsymbol{X}_q(0) = \boldsymbol{X}_{q-1}(\tau)$, $\boldsymbol{W}_q(0) = \boldsymbol{W}_{q-1}(\tau)$, $\boldsymbol{P}_q(0) = \boldsymbol{P}_{q-1}(\tau)$. Здесь и далее равенства соответствующих компонент векторных случайных процессов понимаются в смысле *почти наверняка*.

Рассмотрим последовательность полуинтервалов $\{\Delta_k = (t_k, t_{k+1}], k = 0, 1, 2, ...\}$. Очевидно, что векторный случайный процесс $\boldsymbol{Z}_k(s)$, определенный на Δ_k, удовлетворяет следующей системе СОДУ:

$$d\boldsymbol{Z}_k(s) = \left[\boldsymbol{\mathcal{A}}_k^+(s)\,\boldsymbol{Z}_k(s) + \boldsymbol{c}_k^+(s)\right] ds + \boldsymbol{\mathcal{G}}_k^+(s)\, d\boldsymbol{W}_k(s) + \boldsymbol{\mathcal{H}}_k^+(s)\, d\boldsymbol{P}_k(s), \quad 0 < s \leqslant \tau \tag{2.2.126}$$

с начальными условиями

$$\boldsymbol{Z}_k(0) = \begin{cases} \operatorname{col}\left(\boldsymbol{X}^0, \boldsymbol{X}^0\right), & k = 0, \\ \operatorname{col}\left(\boldsymbol{Z}_{k-1}(0), \boldsymbol{X}_{k-1}(\tau)\right), & k > 0. \end{cases} \tag{2.2.127}$$

Таким образом получена цепочка линейных СОДУ для расширенных векторов состояния $\boldsymbol{Z}_0(s)$, $\boldsymbol{Z}_1(s)$, $\boldsymbol{Z}_2(s)$,, ..., $\boldsymbol{Z}_N(s)$ увеличивающейся размерности $L_k = n\,(k+2)$, $k = 0, 1, 2, ..., N$ и сходной структуры без запаздываний. Для дальнейшего анализа этих уравнений можно применять различные методы [236,692,995], подходящие для этого класса уравнений.

Теперь цепочку линейных СОДУ можно использовать для получения новой последовательности уравнений, т.е. ОДУ для первых функций моментных векторов $\boldsymbol{Z}_k(s)$, $k = 0, 1, 2, ..., N$, таких как математические ожидания и ковариации.

Введем обозначения:

$$\boldsymbol{m}_{Z_k}(s) = \mathbb{E}[\boldsymbol{Z}_k(s)] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_Y(s) \\ \boldsymbol{m}_0(s) \\ \boldsymbol{m}_1(s) \\ ... \\ \boldsymbol{m}_k(s) \end{bmatrix}, \tag{2.2.128}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{Z_k Z_k}(s) = \mathbb{E}\big[\big\{\boldsymbol{Z}_k(s) - \boldsymbol{m}_k(s)\big\}\big\{\boldsymbol{Z}_k(s) - \boldsymbol{m}_k(s)\big\}^{\mathsf{T}}\big] =$$

$$= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{C}}_{YY}(s) & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{YX_0}(s) & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{YX_1}(s) & \ldots & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{YX_k}(s) \\ \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_0Y}(s) & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_0X_0}(s) & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_0X_1}(s) & \ldots & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_0X_k}(s) \\ \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_1Y}(s) & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_1X_0}(s) & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_1X_1}(s) & \ldots & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_1X_k}(s) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_kY}(s) & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_kX_0}(s) & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_kX_1}(s) & \ldots & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_kX_k}(s) \end{bmatrix}. \qquad (2.2.129)$$

Очевидно,что вектор $\boldsymbol{m}_x(t) = \boldsymbol{m}_{X_k}(t_k+s)$ и матрица $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(t) = \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_kX_k}(t_k+$ $+s)$ $(t \in \Delta_k)$ являются блоками $\boldsymbol{m}_{Z_k}(s)$ and $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{Z_kZ_k}(s)$ соответственно.

Усредняя обе части уравнения (2.2.126), можно получить следующий результат:

$$\dot{\boldsymbol{m}}_{Z_k}(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_k^+(s)\,\boldsymbol{m}_{Z_k}(s) + \boldsymbol{c}_k^+(s) + \boldsymbol{\mathcal{H}}_k^+(s)\,\boldsymbol{m}_{P_k}, \quad 0 < s \leqslant \tau, \qquad (2.2.130)$$

where

$$\boldsymbol{m}_{P_k} = \operatorname{col}\big(\lambda_\ell^+\, m_{P_\ell}^+,\ \ell = \overline{1,\ r\,(k+2)}\big),$$

$$\lambda_\ell^+ = \lambda_i, \quad m_{P+ell}^+ = m_{P_i}, \quad i = \operatorname{mod}(\ell, r), \quad \ell > r,$$

$$\lambda_\ell^+ = 0, \quad m_{P_\ell}^+ = 0, \quad 1 \leqslant \ell \leqslant r,$$

$$m_{P_i} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u\, p_{U_i}(u)\, du.$$

Аналогичным образом можно вывести уравнения, которым удовлетворяют компоненты расширенной матрицы ковариаций:

$$\dot{\boldsymbol{\mathcal{C}}}_{Z_kZ_k}(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_k^+(s)\,\boldsymbol{\mathcal{C}}_{Z_kZ_k}(s) + \Big[\boldsymbol{\mathcal{A}}_k^+(s)\,\boldsymbol{\mathcal{C}}_{Z_kZ_k}(s)\Big]^{\mathsf{T}} +$$

$$+\ \boldsymbol{\mathcal{G}}_k^+(s)\,\boldsymbol{\mathcal{G}}_k^{+\mathsf{T}}(s) + \boldsymbol{\mathcal{H}}_k^+(s)\,\boldsymbol{\mathcal{S}}_{P_k}\,\boldsymbol{\mathcal{H}}_k^{+\mathsf{T}}(s), \quad (2.2.131)$$

где

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}_{P_k} = \operatorname{diag}\big(\lambda_\ell^+\,\{\sigma_{P_\ell}^{+2} + m_{P_\ell}^{+2}\},\ \ell = \overline{1,\ r\,(k+2)}\big),$$

$$\sigma_{P_\ell}^{+2} = \begin{cases} \sigma_{P_i}^2, & i = \operatorname{mod}(\ell, r), \quad \ell > r, \\ 0, & 1 \leqslant \ell \leqslant r, \end{cases} \qquad \sigma_{P_i}^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^2\, p_{U_i}(u)\, du - m_{P_i}^2.$$

Начальные условия для функций $\boldsymbol{m}_{Z_k}(s)$ и $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{Z_kZ_k}(s)$ имеют вид:

$$\boldsymbol{m}_{Z_k}(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_X^0 \\ \boldsymbol{m}_X^0 \\ \boldsymbol{m}_{X_0}(\tau) \\ \dots \\ \boldsymbol{m}_{X_{k-1}}(\tau) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{Z_kZ_k}(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}^0 & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}^0 & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{YX_0}(\tau) & \dots & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{YX_{k-1}}(\tau) \\ \boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}^0 & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}^0 & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{YX_0}(\tau) & \dots & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{YX_{k-1}}(\tau) \\ \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_0Y}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{YX_0}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_0X_0}(\tau) & \dots & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_0X_{k-1}}(\tau) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_{k-1}Y}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_{k-1}Y}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_{k-1}X_0}(\tau) & \dots & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_{k-1}X_{k-1}}(\tau) \end{bmatrix}.$$

Пример 2.2.23. Применим описанную выше схему для изучения следующей системы:

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= X_2(t)\,dt, \\ dX_2(t) &= \big[-2\,\alpha\,X_2(t) - \omega^2\,X_1(t) + \beta\,X_1(t-\tau) + \gamma\,X_1(t-2\,\tau)\big]\,dt + \\ &\quad + g_0\,dW(t) + h_0\,dP(t), \qquad t > 0, \\ \dot{X}_1(t) &= 0, \quad \dot{X}_2(t) = 0, \quad -2\,\tau < t \leqslant 0, \end{aligned}$$

где $\alpha > 0$, $\omega > 0$, β, γ, g_0, h_0 – постоянные.

На рис. 2.2.62, 2.2.63 и 2.2.64, 2.2.65, 2.2.66 показано поведение функций математического ожидания и ковариации $X_1(t)$ и $X_2(t)$ соответственно. При моделировании системы использовались следующие значения параметров:

$$\alpha = 0.1, \quad \omega = 2.0, \quad g_0 = 0.1,$$

$$\lambda = 2.0, \quad m_P = 0.5, \quad \sigma_P = 0.2, \quad \tau = 0.5,$$

$$\boldsymbol{m}_X^0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}^0 = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0625 \end{bmatrix},$$

(1) $\beta = 0.0,\ \gamma = 0.0,\ h_0 = 0.0,$
(2) $\beta = 0.5,\ \gamma = 0.5,\ h_0 = 0.0,$
(3) $\beta = 0.0,\ \gamma = 0.0,\ h_0 = 0.3,$
(4) $\beta = 0.5,\ \gamma = 0.5,\ h_0 = 0.3.$

Номерам вариантов (1)..(4) на рисунках соответствуют кривые, отмеченные цифрами 1..4.

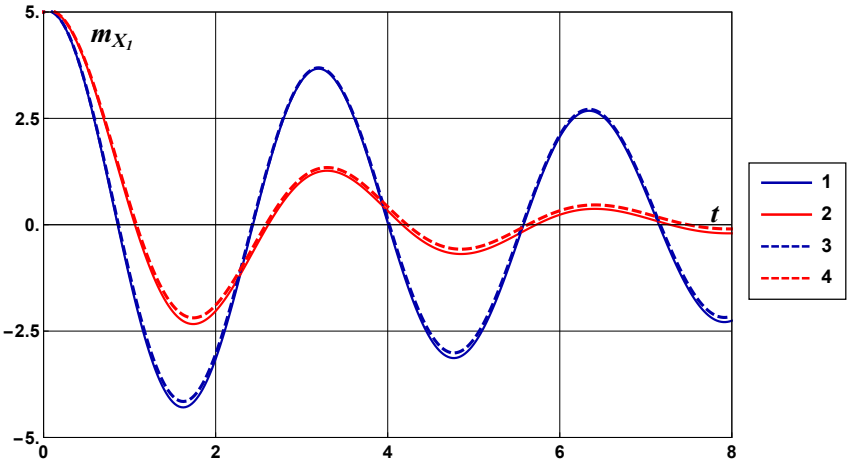


Рис. 2.2.62

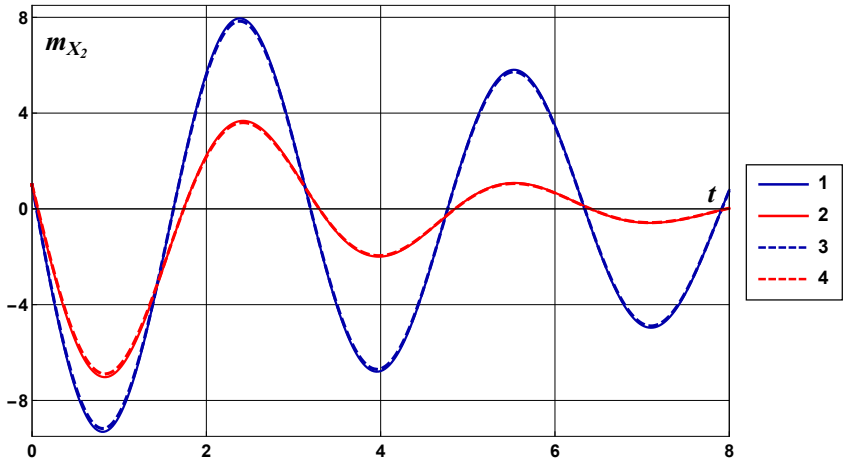


Рис. 2.2.63

Несложно увидеть, что представленные рисунки указывают на существенную зависимость результатов от запаздывания для выбранных параметров. С другой стороны, влияние скачков можно увидеть только в поведении дисперсий переменных состояния.

Представленная здесь схема и предыдущем пункте исследования в

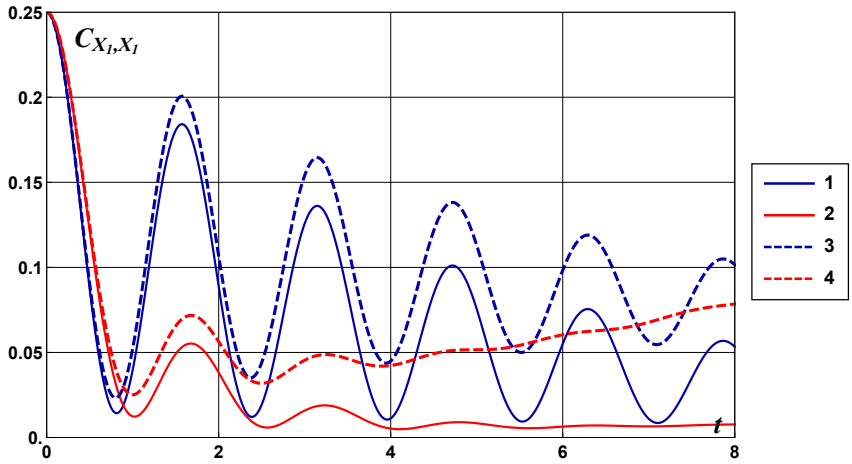


Рис. 2.2.64

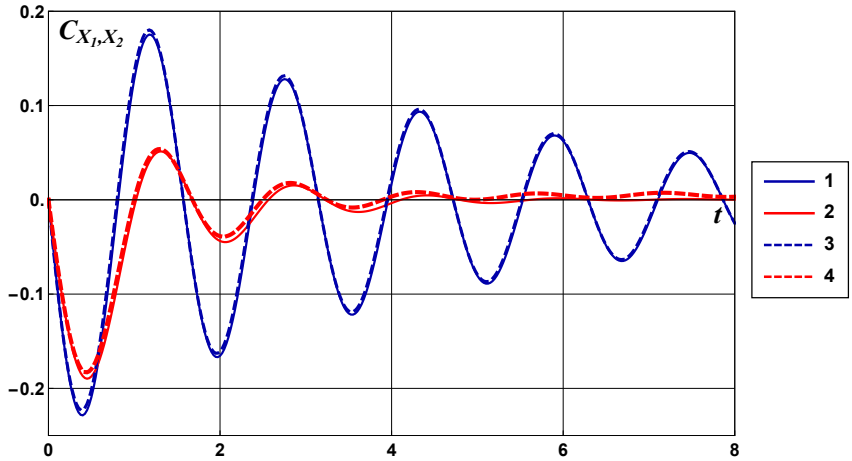


Рис. 2.2.65

отличие от известных методов не предполагает предварительного изменения уравнений исследуемого объекта с целью исключения запаздывания или разработки специальных интеграторов. Точность расчетов полностью определяется погрешностью применяемых стандартных процедур численного решения систем ОДУ, причем ошибка метода отсутствует. При необ-

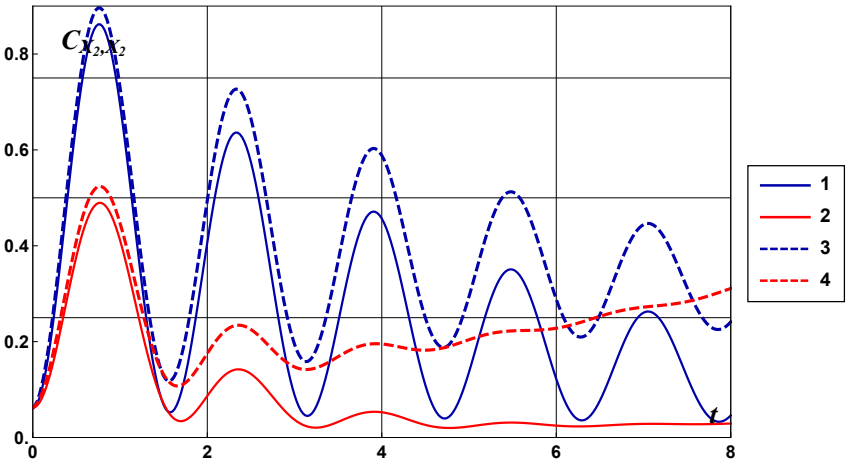


Рис. 2.2.66

ходимости более глубокого изучения подобных систем, например, для того чтобы проанализировать негауссову структуру вектора состояния, изложенная схема может быть применена для построения систем ОДУ для высших моментов компонент этого вектора. В этом случае могут быть использованы усреднение ОФПК-уравнений и метод, описанный в [694], но получаемые при этом системы уравнений уже не будут иметь такую прозрачную векторно-матричную структуру, как в полученных соотношениях (2.2.130) и (2.2.131).

2.2.4. Схема расчета ковариационных функций векторов состояния нестационарных систем линейных СОДУ с запаздыванием

Важной теоретической и практической задачей является построение схем расчета ковариационных функций векторов состояния систем СФДУ различных типов. Даже для простых линейных систем СОДУ с одним постоянным запаздыванием использование схем, не связанных с применением статистического моделирования, далеко не прост (см., например, алгоритм из работы [260]).

Ниже описана методика и алгоритм исследования во временно́й области систем линейных СОДУ с переменными коэффициентами и постоянным запаздыванием, предназначенные для получения ковариационных

функций векторов состояния. В предположении, что стохастические возмущения являются гауссовскими нестационарными случайными шумами, разработана схема, состоящая из трех этапов [249]. Первый, основанный на классическом методе шагов и расширении пространства состояний (см. [191, 215, 907]), позволяет получить цепочку систем линейных СОДУ без запаздывания; второй, использующий корреляционнную теорию, дает возможность построить системы линейных ОДУ для векторных функций математического ожидания и матричных функций ковариации, и, наконец, третий этап приводит к требуемому результату.

Рассмотрим следующую систему линейных СОДУ в смысле Стратоновича с запаздыванием (в нестрогой форме):

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_0(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{c}_0(t) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(t)\,\boldsymbol{V}(t), \quad t_0 < t \leqslant t_0 + \tau, \tag{2.2.132}$$

$$\boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}^0, \tag{2.2.133}$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{\mathcal{Q}}(t)\,\boldsymbol{X}(t-\tau) + \boldsymbol{c}(t) + \boldsymbol{\mathcal{G}}(t)\,\boldsymbol{V}(t), \quad t > t_0 + \tau, \tag{2.2.134}$$

где t – время; t_0 и T – начальное и конечное время, $t_0 < t \leqslant T < +\infty$; $\tau > 0$ – постоянное запаздывание; $\boldsymbol{X}(t) = \big(X_1(t), X_2(t), ..., X_n(t)\big)^{\intercal} \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния. Начальное условие $\boldsymbol{X}^0 = \big(X_1^0, X_2^0, ..., X_n^0\big)^{\intercal}$ – нормальный случайный вектор второго порядка с плотностью вероятности $p^0(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Его среднее значение равно $\boldsymbol{m}_X^0 = \mathbb{E}\big[\boldsymbol{X}^0\big]$, а ковариационная матрица – $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 = \mathbb{E}\big[(\boldsymbol{X}^0 - \boldsymbol{m}_X^0)(\boldsymbol{X}^0 - \boldsymbol{m}_X^0)^{\intercal}\big]$, т.е. $p^0(\boldsymbol{x}) = \mathcal{N}\big(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{m}_X^0, \boldsymbol{\mathcal{D}}_{XX}^0\big)$. Вход $\boldsymbol{V}(t) = \big(V_1(t), V_2(t), ..., V_m(t)\big)^{\intercal}$, – m-мерный гауссовским случайный белый шум, который не зависит от $\boldsymbol{X}^0$ и состоит из независимых компонент. В системах уравнениях (2.2.132), (2.2.134) $\boldsymbol{\mathcal{A}}_0(t) = \{a_{0ij}(t)\}$, $\boldsymbol{\mathcal{A}}(t) = \{a_{ij}(t)\}$, $\boldsymbol{\mathcal{Q}}(t) = \{q_{ij}(t)\}$, $\boldsymbol{\mathcal{G}}_0(t) = \{g_{ij}(t)\}$, $\boldsymbol{\mathcal{G}}(t) = \{g_{ij}(t)\}$ – детерминированные вещественные матрицы, $\boldsymbol{c}_0(t) = \{c_{0i}(t)\}$ и $\boldsymbol{c}(t) = \{c_i(t)\}$ – детерминированные действительные векторные функции в $\mathbb{R}^n$. Предполагается, что элементы всех этих матриц и векторов являются непрерывными функциями аргумента t.

Поскольку системы уравнений (2.2.132), (2.2.134) являются линейными, вектор $\boldsymbol{X}^0$ является нормальным случайным вектором второго порядка, то в соответствии с [824], $\{\boldsymbol{X}(t),\ t \in [t_0, T]\}$, т.е. решение уравнений (2.2.132), (2.2.134), является гауссовским непрерывным в среднем квадратичном случайным процессом второго порядка.

Принимая во внимание предыдущие определения и обозначения,можно утверждать, что решаемая проблема состоит в построении схемы для

вычисления векторной функции $\boldsymbol{m}_X(t) \equiv \{m_{X_i}(t)\} = \mathbb{E}[\boldsymbol{X}(t)]$, а также матричных функций $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}(t) = \{\mathcal{K}_{X_iX_j}(t)\} \equiv \mathbb{E}\Big[\mathring{\boldsymbol{X}}(t)\,\mathring{\boldsymbol{X}}^{\intercal}(t)\Big]$ и

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(t_1,t_2) = \{\mathcal{C}_{X_iX_j}(t_1,t_2)\} \equiv \mathbb{E}\big[\mathring{\boldsymbol{X}}(t_1)\,\mathring{\boldsymbol{X}}^{\intercal}(t_2)\big]$$

для всех t, t_1 and t_2 in $(t_0,T]$, где $\mathring{X}(t) = \boldsymbol{X}(t) - \boldsymbol{m}_X(t)$. Вследствие этого предлагаемая схема состоит из трех этапов: 1) построение цепочки систем линейных СОДУ без запаздывания; 2) расчет зависимости $\boldsymbol{m}_X(t)$ и $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}(t)$ от времени; 3) вычисление $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(t_1,t_2)$.

Чтобы получить системы ОДУ для необходимых статистических характеристик вектора $X(t)$ для любого $t > t_0$, расширим пространство состояний исследуемой системы путем преобразования немарковской системы в марковскую. Чтобы выполнить такое преобразование, воспользуемся следующими обозначениями:

$$s \in [0,\tau], \quad t_k = t_0 + k\,\tau, \quad k = 0,1,2,...,N+1, \quad t_{N+1} \geqslant T,$$
$$s_k = s + t_k, \quad \Delta_k = (t_k, t_{k+1}],$$
$$\boldsymbol{X}_k(s) = \boldsymbol{X}(s+t_k), \quad \boldsymbol{X}_k(0) = \boldsymbol{X}_{k-1}(\tau) \text{ п.н.},$$
$$\boldsymbol{W}_k(s) = \boldsymbol{W}(s+t_k), \quad \boldsymbol{W}_k(0) = \boldsymbol{W}_{k-1}(\tau) \text{ п.н.},$$
$$\boldsymbol{Y}(s) \equiv \boldsymbol{X}^0, \quad \boldsymbol{Z}_0(s) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{Y}(s), \boldsymbol{X}_0(s)\big),$$
$$\boldsymbol{Z}_1(s) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{Y}(s), \boldsymbol{X}_0(s), \boldsymbol{X}_1(s)\big) \equiv \operatorname{col}\big(\boldsymbol{Z}_0(s), \boldsymbol{X}_1(s)\big),$$
$$\boldsymbol{Z}_2(s) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{Z}_1(s), \boldsymbol{X}_2(s)\big), \quad ... \quad \boldsymbol{Z}_N(s) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{Z}_{N-1}(s), \boldsymbol{X}_N(s)\big).$$

Для формирования систем искомых систем ОДУ по шагам потребуется общие системы ОДУ, управляющие во времени поведением векторной функции математических ожиданий $\underline{\boldsymbol{m}}_Z(s) = \{\underline{m}_{X_i}(s)\} = \mathbb{E}[\underline{\boldsymbol{Z}}(s)]$, матрицы функций ковариации $\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_{ZZ}(s) = \{\underline{\mathcal{K}}_{X_iX_j}(s)\} = \mathbb{E}\big[\mathring{\underline{\boldsymbol{Z}}}(s)\,\mathring{\underline{\boldsymbol{Z}}}^{\intercal}(s)\big]$ и матрицы ковариационных функций

$$\underline{\boldsymbol{\mathcal{C}}}_{ZZ}(s,s') = \{\underline{\mathcal{C}}_{X_iX_j}(s,s')\} = \mathbb{E}\big[\mathring{\underline{\boldsymbol{Z}}}(s)\,\mathring{\underline{\boldsymbol{Z}}}^{\intercal}(s')\big]$$

вектора состояния $\underline{\boldsymbol{Z}}(s) = \{\underline{Z}_i(s)\} \in \mathbb{R}^r$, для которого $\mathring{\underline{\boldsymbol{Z}}}(s) = \underline{\boldsymbol{Z}}(s) - \underline{\boldsymbol{m}}_Z(s)$, линейной стохастической дифференциальной системы с аддитивными шумами в форме Стратоновича:

$$\dot{\underline{\boldsymbol{Z}}}(s) = \underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(s)\,\underline{\boldsymbol{Z}}(s) + \underline{\boldsymbol{c}}(s) + \underline{\boldsymbol{\mathcal{G}}}(s)\,\underline{\boldsymbol{V}}(s), \qquad s_* < s \leqslant s^*, \tag{2.2.135}$$
$$\underline{\boldsymbol{Z}}(s_*) = \underline{\boldsymbol{Z}}^{\#}, \tag{2.2.136}$$

где основная часть обозначений аналогична введенным в первых разделах выше, а точка сверху обозначает производную по s. Построим такие системы.

Пусть начальный вектор $\underline{\boldsymbol{Z}}^{\#} = \left(\underline{Z}_1^{\#}, \underline{Z}_2^{\#}, ..., \underline{Z}_r^{\#}\right)$ является случайным и имеет математическое ожидание $\underline{\boldsymbol{m}}_Z^{\#} = \mathbb{E}[\underline{\boldsymbol{Z}}^{\#}]$ и матрицу ковариаций $\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_{ZZ}^{\#} = \mathbb{E}\left[\mathring{\underline{\boldsymbol{Z}}}^{\#}\, \mathring{\underline{\boldsymbol{Z}}}^{\#\intercal}\right]$. Вход $\{\underline{\boldsymbol{V}}(s) = \{\underline{V}_i(s)\},\ s_* \leqslant s \leqslant s^*\}$ – q–мерный векторный гауссовский белый шум с независимыми компонентами. В уравнениях (2.2.135) $\underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(s) = \{\underline{a}_{ij}(s)\}$, $\underline{\boldsymbol{\mathcal{G}}}(s) = \{\underline{g}_{ij}(s)\}$ и $\underline{\boldsymbol{c}}(s) = \{\underline{c}_i(s)\}$ – детерминированные матрицы и вектор соответственно. Предполагается, что элементы этих матриц и вектора являются непрерывными функциями аргумента s.

Применяя корреляционную теорию (см., например, [15, 236]), можно получить необходимые системы ОДУ для $\underline{\boldsymbol{m}}_Z(s)$ и $\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_{ZZ}(s)$ в следующей форме:

$$\dot{\underline{\boldsymbol{m}}}_Z(s) = \underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(s)\, \underline{\boldsymbol{m}}_Z(s) + \underline{\boldsymbol{c}}(s), \tag{2.2.137}$$

$$\dot{\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}}_{ZZ}(s) = \underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(s)\, \underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_{ZZ}(s) + \left[\underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(s)\, \underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_{ZZ}(s)\right]^{\intercal} + \underline{\boldsymbol{\mathcal{G}}}(s)\, \underline{\boldsymbol{\mathcal{G}}}^{\intercal}(s), \tag{2.2.138}$$

$$s_* < s' \leqslant s^*,$$

с начальными условиями

$$\underline{\boldsymbol{m}}_Z(s_*) = \underline{\boldsymbol{m}}_Z^{\#}, \qquad \underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_{ZZ}(s_*) = \underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_{ZZ}^{\#} \tag{2.2.139}$$

соответственно.

По не раз уже использованной ранее в этом разделе схеме, используя пошаговую процедуру, построим цепочку систем линейных СОДУ без запаздывания для расширенных векторных случайных процессов $\boldsymbol{Z}_0(s)$, $\boldsymbol{Z}_1(s)$, $\boldsymbol{Z}_2(s)$, ..., $\boldsymbol{Z}_N(s)$, которых принадлежат семейству вложенных пространств состояний $\mathbb{R}^{2n} \subset \mathbb{R}^{3n} \subset ... \subset \mathbb{R}^{n(N+2)}$.

0°. Рассмотрим полуинтервал Δ_0. Компоненты случайного векторного процесса $\boldsymbol{Z}_0(s)$, определенного на Δ_0, удовлетворяют следующей системе СОДУ:

$$\begin{aligned} &\dot{\boldsymbol{Y}}(s) = \boldsymbol{O}_n, \\ &\dot{\boldsymbol{X}}_0(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_0(s_0)\, \boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{c}_0(s_0) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s_0)\, \boldsymbol{V}_0(s), \\ &\boldsymbol{Y}(0) = \boldsymbol{X}^0, \qquad \boldsymbol{X}_0(0) = \boldsymbol{X}^0 \end{aligned} \tag{2.2.140}$$

(здесь и далее точка над символом обозначает производную по s).

Если объединить уравнения (2.2.140) в виде

$$\dot{\boldsymbol{Z}}_0(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_0^+(s)\,\boldsymbol{Z}_0(s) + \boldsymbol{c}_0^+(s) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0^+(s)\,\boldsymbol{V}_0(s), \tag{2.2.141}$$

$$\boldsymbol{Z}_0(0) = \operatorname{col}\left(\boldsymbol{X}^0, \boldsymbol{X}^0\right), \tag{2.2.142}$$

где

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_0^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{A}}_0(s_0) \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{c}_0^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O}_n \\ \boldsymbol{c}_0(s_0) \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\mathcal{G}}_0^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s_0) \end{bmatrix},$$

и сравнить структуру систем стохастических ОДУ (2.2.141), (2.2.142) и (2.2.135), (2.2.136), можно заключить, что эти системы будут одинаковы в случае, когда

$$r = 2\,n; \quad q = m; \quad s_* = 0; \quad s^* = \tau;$$

$$\underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_0^+(s); \quad \underline{\boldsymbol{c}}(s) = \boldsymbol{c}_0^+(s); \quad \underline{\boldsymbol{\mathcal{G}}}(s) = \boldsymbol{\mathcal{G}}_0^+(s).$$

Кроме того, этот факт дает возможность построить явную форму уравнений (2.2.137), (2.2.138), определить начальные условия для $\boldsymbol{m}_{Z_0}(s)$ и $\mathcal{K}_{Z_0Z_0}(s)$ в форме

$$\boldsymbol{m}_{Z_0}(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_X^0 \\ \boldsymbol{m}_X^0 \end{bmatrix}; \qquad \boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_0Z_0}(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 \end{bmatrix}$$

соответственно, а затем вычислить $\boldsymbol{m}_{Z_0}(s)$ как $\underline{\boldsymbol{m}}_Z(s)$ и $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_0Z_0}(s)$ как $\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_{ZZ}(s)$, причем рассчитывать $\boldsymbol{m}_{Z_0}(s)$ и $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_0Z_0}(s)$ как функции s можно как одновременно, так и последовательно, что одновременно даст $\boldsymbol{m}_X(t)$ и $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}(t)$ для $t_0 < t \leqslant t_1$.

1°. Теперь обратимся к сегментам Δ_0 и Δ_1. Система СОДУ для вычисления расширенного вектора состояния $\boldsymbol{Z}_1(s)$ может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{Y}}(s) = \boldsymbol{O}_n, \\
&\dot{\boldsymbol{X}}_0(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_0(s_0)\,\boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{c}_0(s_0) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s_0)\,\boldsymbol{V}_0(s), \\
&\dot{\boldsymbol{X}}_1(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}(s_1)\,\boldsymbol{X}_1(t) + \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_1)\,X_0(s) + \boldsymbol{c}(s_1) + \boldsymbol{\mathcal{G}}(s_1)\,\boldsymbol{V}_1(s), \\
&\boldsymbol{Y}(0) = \boldsymbol{X}^0, \qquad \boldsymbol{X}_0(0) = \boldsymbol{X}^0, \qquad \boldsymbol{X}_1(0) = \boldsymbol{X}_0(\tau).
\end{aligned} \tag{2.2.143}$$

Действуя как на шаге **0°**, мы можем написать краткую форму уравнений (2.2.143):

$$\dot{\boldsymbol{Z}}_1(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_1^+(s)\,\boldsymbol{Z}_1(s) + \boldsymbol{c}_1^+(s) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_1^+(s)\,\boldsymbol{V}_1^+(s), \tag{2.2.144}$$

$$\boldsymbol{Z}_1(0) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{Z}_0(0), \boldsymbol{X}_0(\tau)\big), \tag{2.2.145}$$

где

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_1^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{A}}_0(s_0) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_1) & \boldsymbol{\mathcal{A}}(s_1) \end{bmatrix}; \qquad \boldsymbol{c}_1^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O}_n \\ \boldsymbol{c}_0(s_0) \\ \boldsymbol{c}(s_1) \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}_1^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s_0) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{G}}(s_1) \end{bmatrix}; \qquad \boldsymbol{V}_1^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_0(s) \\ \boldsymbol{V}_1(s) \end{bmatrix}.$$

Как и выше, сравниваем структуры уравнений (2.2.144), (2.2.145) с (2.2.135), (2.2.136) и находим, что эти системы будут идентичны, если

$$r = 3\,n; \quad q = 2\,m; \quad s_* = 0; \quad s^* = \tau;$$

$$\underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_1^+(s); \quad \underline{\boldsymbol{c}}(s) = \boldsymbol{c}_1^+(s); \quad \underline{\boldsymbol{\mathcal{G}}}(s) = \boldsymbol{\mathcal{G}}_1^+(s).$$

Из этого следует, что и в этом случае есть возможность построить подобную шагу $\mathbf{0}^\circ$ форму систем ОДУ на основе уравнений (2.2.137), (2.2.138), зафиксировать начальные условия для $\boldsymbol{m}_{Z_1}(s)$ и $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_1Z_1}(s)$ в виде:

$$\boldsymbol{m}_{Z_1}(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_X^0 \\ \boldsymbol{m}_X^0 \\ \boldsymbol{m}_{X_0}(\tau) \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_1Z_1}(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_0}(\tau) \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_0}(\tau) \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0Y}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0Y}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0X_0}(\tau) \end{bmatrix},$$

и вычислить $\boldsymbol{m}_{Z_1}(s)$ как $\underline{\boldsymbol{m}}_Z(s)$ и $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_1Z_1}(s)$ как $\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_{ZZ}(s)$, что позволит одномоментно получить $\boldsymbol{m}_X(t)$ и $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}(t)$ как $\boldsymbol{m}_{X_1}(s)$ и $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_1X_1}(s)$ соответственно для $t_1 < t \leqslant t_2$.

... ...

$\boldsymbol{N}^\circ$. На последнем шаге рассматриваем временные полуинтервалы Δ_0, Δ_1, ..., Δ_N и строим систему СОДУ для вектора состояния $\boldsymbol{Z}_N(s)$ в следующей форме:

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{Y}}(s) = \boldsymbol{O}_n, \\
&\dot{\boldsymbol{X}}_0(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_0(s_0)\,\boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{c}_0(s_0) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s_0)\,\boldsymbol{V}_0(s), \\
&\dot{\boldsymbol{X}}_1(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}(s_1)\,\boldsymbol{X}_1(t) + \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_1)\,X_0(s) + \boldsymbol{c}(s_1) + \boldsymbol{\mathcal{G}}(s_1)\,\boldsymbol{V}_1(s), \\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots
\end{aligned} \tag{2.2.146}$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}_N(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}(s_N)\,\boldsymbol{X}_N(t) + \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_N)\,X_{N-1}(s) + \boldsymbol{c}(s_N) + \boldsymbol{\mathcal{G}}(s_N)\,\boldsymbol{V}_N(s),$$
$$\boldsymbol{Y}(0) = \boldsymbol{X}^0, \quad \boldsymbol{X}_0(0) = \boldsymbol{X}^0, \quad \boldsymbol{X}_1(0) = \boldsymbol{X}_0(\tau),\ \ldots\ \boldsymbol{X}_N(0) = \boldsymbol{X}_{N-1}(\tau).$$

Дальнейшие действия аналогичны тем, которые выполнены в рамках шагов $\mathbf{0}^\circ$, $\mathbf{1}^\circ$, ..., $(\boldsymbol{N}\text{-}\mathbf{1})^\circ$:

1) запись уравнений (2.2.146) в сжатой форме:

$$\dot{\boldsymbol{Z}}_N(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}^+_N(s)\,\boldsymbol{Z}_N(s) + \boldsymbol{c}^+_N(s) + \boldsymbol{\mathcal{G}}^+_N(s)\,\boldsymbol{V}^+_N(s), \tag{2.2.147}$$
$$\boldsymbol{Z}_N(0) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{Z}_{N-1}(0), \boldsymbol{X}_{N-1}(\tau)\big), \tag{2.2.148}$$

где используемые матрицы и векторы рассчитываются так:

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}^+_N(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{A}}^+_{N-1}(s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{(N+1)n\times n} \\ [\boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times Nn} \quad \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_N)] & \boldsymbol{\mathcal{A}}(s_N) \end{bmatrix}; \qquad \boldsymbol{c}^+_N(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}^+_{N-1}(s) \\ \boldsymbol{c}(s_N) \end{bmatrix};$$
$$\boldsymbol{\mathcal{G}}^+_N(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{G}}^+_{N-1}(s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{(N+1)n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times Nm} & \boldsymbol{\mathcal{G}}(s_N) \end{bmatrix}; \qquad \boldsymbol{V}^+_N(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}^+_{N-1}(s) \\ \boldsymbol{V}_N(s) \end{bmatrix};$$

2) сравнение уравнений (2.2.147), (2.2.148) с уравнениями (2.2.135), (2.2.136) и вывод о том, что эти системы будут подобны, если

$$r = (N+2)\,n; \quad q = (N+1)\,m; \quad s_* = 0; \quad s^* = \tau; \quad \underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}^+_N(s);$$
$$\underline{\boldsymbol{c}}(s) = \boldsymbol{c}^+_N(s); \qquad \underline{\boldsymbol{\mathcal{G}}}(s) = \boldsymbol{\mathcal{G}}^+_N(s);$$

3) построение явной формы уравнений (2.2.137), (2.2.138);

4) установка начальных условий для $\boldsymbol{m}_{Z_N}(s)$ и $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_NZ_N}(s)$ в виде:

$$\boldsymbol{m}_{Z_N}(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_{Z_{N-1}}(0) \\ \boldsymbol{m}_{X_{N-1}}(\tau) \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_NZ_N}(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_{N-1}Z_{N-1}}(0) & \boldsymbol{\mathcal{K}}^{[12]}_{Z_NZ_N}(0) \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}^{[21]}_{Z_NZ_N}(0) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{N-1}X_{N-1}}(\tau) \end{bmatrix};$$
$$\boldsymbol{\mathcal{K}}^{[12]}_{Z_NZ_N}(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_{N-1}}(\tau) \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_{N-1}}(\tau) \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0X_{N-1}}(\tau) \\ \ldots \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{N-2}X_{N-1}}(\tau) \end{bmatrix};$$
$$\boldsymbol{\mathcal{K}}^{[21]}_{Z_NZ_N}(0) = \big[\boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{N-1}Y}(\tau) \ \ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{N-1}Y}(\tau) \ \ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{N-1}X_0}(\tau) \ \ \ldots \ \ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{N-1}X_{N-2}}(\tau)\big];$$

5) расчет $\boldsymbol{m}_{Z_N}(s)$ как $\underline{\boldsymbol{m}}_Z(s)$ и $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_NZ_N}(s)$ как $\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_{ZZ}(s)$, что позволит одномоментно получить $\boldsymbol{m}_X(t)$ и $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}(t)$ как $\boldsymbol{m}_{X_N}(s)$ и $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_NX_N}(s)$ соответственно для $t_{N-1} < t \leqslant t_N$.

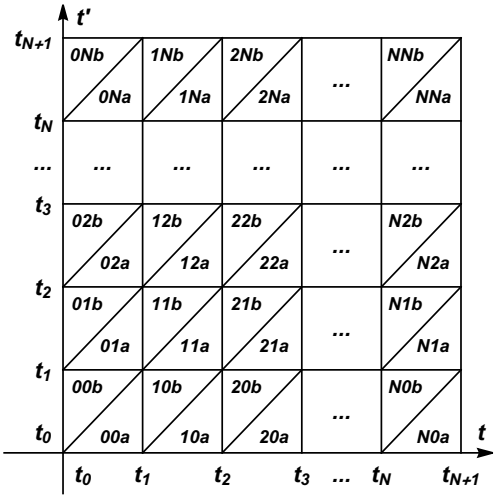


Рис. 2.2.67

Расчет матрицы ковариационных функций $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(t,t')$ представляет собой более сложную задачу, но в рамках используемой схемы она решаема. Разобьем область $\mathbb{D}_N = \{t_0 \leqslant t, t' \leqslant T\}$ решения задачи на подобласти и будем далее использовать указанные на рис. 2.2.67 обозначения. При этом ограничимся половиной рассматриваемой области $\mathbb{D}_N^r = \{t_0 \leqslant t' \leqslant t \leqslant T\}$.

Начнем с подобласти, обозначенной как 00a. В ней уравнения и начальные условия для $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(t,t') = \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_0X_0}(t-t_0, t'-t_0)$ будут выглядеть так:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_0X_0}(s,s')}{\partial s} = \boldsymbol{\mathcal{A}}_0(s_0)\,\boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_0X_0}(s,s'), \quad 0 \leqslant s' < s \leqslant \tau, \tag{2.2.149}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_0X_0}(s',s') = \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0X_0}(s'). \tag{2.2.150}$$

Рассмотрим теперь подобласти 10a, 20a, ..., N0a. Для них получим:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_iX_0}(s,s')}{\partial s} = \boldsymbol{\mathcal{A}}(s_i)\,\boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_iX_0}(s,s') + \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_i)\,\boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_{i-1}X_0}(s_i,s'), \tag{2.2.151}$$

$$s > s', \quad \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_iX_0}(s',s') = \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_iX_0}(s'); \qquad 0 < i \leqslant N. \tag{2.2.152}$$

Для подобласти 10b будем иметь:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_1X_0}(s,s')}{\partial s} = \boldsymbol{\mathcal{A}}(s_1)\,\boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_1X_0}(s,s') + \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_1)\,\boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_0X_0}(s,s'), \tag{2.2.153}$$

$$0 \leqslant s < s' \leqslant \tau, \quad \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_1X_0}(0, s') = \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_0X_0}(\tau, s'). \tag{2.2.154}$$

Несложно увидеть, что для замыкания уравнений (2.2.153) необходимо иметь возможность получать значения $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_0X_0}(s, s')$ при $0 \leqslant s \leqslant s' \leqslant \tau$. Этого можно добиться, воспользовавшись уравнениями (2.2.149), в которых требуется выполнить замену переменных $r = s - s'$. Тогда получим:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_0X_0}(r, s')}{\partial r} = \boldsymbol{\mathcal{A}}_0(t_0 + r)\, \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_0X_0}(r, s'), \quad 0 < r \leqslant s' \leqslant \tau,$$
$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_0X_0}(0, s') = \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_0}(s').$$

После этого можно получить уравнения для подобластей 20b, ..., N0b. Для них получим:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_iX_0}(s, s')}{\partial s} = \boldsymbol{\mathcal{A}}(s_i)\, \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_iX_0}(s, s') + \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_i)\, \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_{i-1}X_0}(s, s'), \tag{2.2.155}$$

$$s < s', \quad \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_iX_0}(0, s') = \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_{i-1}X_0}(0, s'); \qquad 1 < i \leqslant N. \tag{2.2.156}$$

Учитывая форму уже полученных уравнений рассмотрим подобласти ija ($1 \leqslant j \leqslant i \leqslant N$) и ijb ($1 \leqslant j < i \leqslant N$):

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_iX_i}(s, s')}{\partial s} = \boldsymbol{\mathcal{A}}(s_i)\, \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_iX_i}(s, s') + \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_i)\, \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_{i-1}X_i}(s, s'), \tag{2.2.157}$$

$$s > s', \quad \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_iX_i}(s', s') = \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_iX_i}(s'); \qquad 1 \leqslant i \leqslant N. \tag{2.2.158}$$

Итак основной проблемой для практической реализации метода является расчет ковариационных функций по формулам (2.2.155)–(2.2.158) в небольшом числе подобластей, где невозможно применять стандартную форму уравнений для этих функций. В рамках вычисления присутствующих в формулах (2.2.155)–(2.2.158) интегралов можно рекомендовать аппроксимацию матричной функции Грина итерационным методом [199].

Несложно установить, что изложенный алгоритм может быть перенесен на область анализа систем кратными постоянными запаздываниями.

2.2.5. Алгоритмы вычисления ковариационных функций векторов состояния нестационарных систем линейных параметрических СОДУ с запаздыванием

Рассмотрим следующую систему линейных параметрических СОДУ в смысле Стратоновича с запаздыванием:

$$d\boldsymbol{X}(t) = \left[\boldsymbol{\mathcal{A}}_0(t)\, \boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{c}_0(t)\right] dt +$$

$$+\big[[\![\boldsymbol{\mathcal{B}}_0(t)]\!]::\boldsymbol{X}(t)+\boldsymbol{\mathcal{G}}_0(t)\big]\circ d\boldsymbol{W}(t),\quad t_0<t\leqslant t_0+\tau, \tag{2.2.159}$$

$$\boldsymbol{X}(t_0)=\boldsymbol{X}^0, \tag{2.2.160}$$

$$d\boldsymbol{X}(t)=\big[\boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\,\boldsymbol{X}(t)+\boldsymbol{\mathcal{Q}}(t)\,\boldsymbol{X}(t-\tau)+\boldsymbol{c}(t)\big]\,dt+$$
$$+\big[[\![\boldsymbol{\mathcal{B}}(t)]\!]::\boldsymbol{X}(t)+[\![\boldsymbol{\mathcal{H}}(t)]\!]::\boldsymbol{X}(t-\tau)+\boldsymbol{\mathcal{G}}(t)\big]\circ d\boldsymbol{W}(t), \tag{2.2.161}$$
$$t_0+\tau<t\leqslant T.$$

где t – время; t_0 и T – начальное и конечное время, $t_0<t\leqslant T<+\infty$; $\tau>0$ – постоянное запаздывание; $\boldsymbol{X}(t)=\big(X_1(t),X_2(t),...,X_n(t)\big)^{\intercal}\in\mathbb{R}^n$ – вектор состояния. Начальное условие $\boldsymbol{X}^0=\big(X_1^0,X_2^0,...,X_n^0\big)^{\intercal}$ – случайный вектор второго порядка с плотностью вероятности $p^0(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$. Его вектор математических ожиданий обозначим через $\boldsymbol{m}_X^0=\mathbb{E}\big[\boldsymbol{X}^0\big]$, а ковариационную матрицу – через $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0=\mathbb{E}\big[(\boldsymbol{X}^0-\boldsymbol{m}_X^0)(\boldsymbol{X}^0-\boldsymbol{m}_X^0)^{\intercal}\big]$, т.е. $p^0(\boldsymbol{x})=\mathcal{N}\big(\boldsymbol{x};\boldsymbol{m}_X^0,\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0\big)$. Случайный вход $\{\boldsymbol{W}(t)=\big(W_1(t),W_2(t),\,...,\,W_m(t)\big),\,t\geqslant t_0\}$ является векторным стандартным винеровским процессом с независимыми компонентами. Далее предполагается, что векторы $\boldsymbol{X}^0$ и $\boldsymbol{W}(t)$ независимы. Обобщенная производная процесса $\boldsymbol{W}(t)$ – векторный гауссовский случайный белый шум, как и ранее, обозначается через $\boldsymbol{V}(t)=\big(V_1(t),V_2(t),...,V_m(t)\big)^{\intercal}$ и имеет следующие свойства:

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{V}(t)]=0,\qquad \mathbb{E}[\boldsymbol{V}(t)\,\boldsymbol{V}^{\intercal}(t')]=2\,\pi\,\boldsymbol{\mathcal{I}}_m\,\delta(t-t'). \tag{2.2.162}$$

В системах СОДУсЗ (2.2.159), (2.2.161) $\boldsymbol{\mathcal{A}}_0(t)=\{a_{0ij}(t)\}$, $\boldsymbol{\mathcal{A}}(t)=\{a_{ij}(t)\}$, $\boldsymbol{\mathcal{Q}}(t)=\{q_{ij}(t)\}$, $[\![\boldsymbol{\mathcal{B}}_0(t)]\!]=\{b_{0ijk}(t)\}$, $[\![\boldsymbol{\mathcal{B}}(t)]\!]=\{b_{ijk}(t)\}$, $[\![\boldsymbol{\mathcal{H}}(t)]\!]=\{h_{ijk}(t)\}$, $\boldsymbol{\mathcal{G}}_0(t)=\{g_{ij}(t)\}$, $\boldsymbol{\mathcal{G}}(t)=\{g_{ij}(t)\}$ – детерминированные действительные матрицы, $\boldsymbol{c}_0(t)=\{c_{0i}(t)\}$ и $\boldsymbol{c}(t)=\{c_i(t)\}$ – детерминированные действительные векторные функции в $\mathbb{R}^n$. Как и выше,предполагается, что элементы всех этих матриц и векторов являются непрерывными функциями аргумента t.

Принимая во внимание предыдущие определения и обозначения,можно утверждать, что решаемая проблема состоит в построении схемы для вычисления векторной функции $\boldsymbol{m}_X(t)\equiv\{m_{X_i}(t)\}=\mathbb{E}[\boldsymbol{X}(t)]$, а также матричных функций

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}(t)=\{\mathcal{K}_{ij}(t)\}\equiv\mathbb{E}\big[\big[\boldsymbol{X}(t)-\boldsymbol{m}_X(t)\big]\,\big[\boldsymbol{X}(t)-\boldsymbol{m}_X(t)\big]^{\intercal}\big]$$

и

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(t_1,t_2)=\{\mathcal{C}_{ij}(t)\}\equiv\mathbb{E}\big[\big\{\boldsymbol{X}(t_1)-\boldsymbol{m}_X(t_1)\big\}\,\big\{\boldsymbol{X}(t_2)-\boldsymbol{m}_X(t_2)\big\}^{\intercal}\big]$$

для всех t, t_1 and t_2 in $(t_0, T]$. Предлагаемая схема состоит из двух этапов: 1) расчета поведения $\boldsymbol{m}_X(t)$ и $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}(t)$; 2) определение $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(t_1, t_2)$.

В дополнение к введенным в предыдущем подразделе, будем использовать следующие обозначения:

$$p_k(\boldsymbol{x}_k, s) = p(\boldsymbol{x}_k, s + t_k), \quad p_k(\boldsymbol{x}_k, 0) = p_{k-1}(\boldsymbol{x}_k, \tau), \quad p_0(\boldsymbol{x}_0, 0) = p^0(\boldsymbol{x}_0),$$
$$\boldsymbol{V}_k(s) = \boldsymbol{V}(s + t_k), \quad \boldsymbol{V}_k(0) = \boldsymbol{V}_{k-1}(\tau) \quad \text{п.н.}$$

По не раз уже использованной ранее в этом разделе схеме, используя пошаговую процедуру, построим цепочку систем линейных СОДУ без запаздывания для расширенных векторных случайных процессов $\boldsymbol{Z}_0(s)$, $\boldsymbol{Z}_1(s)$, $\boldsymbol{Z}_2(s)$, ..., $\boldsymbol{Z}_N(s)$.

0°. Рассмотрим полуинтервал Δ_0. Компоненты случайного векторного процесса $\boldsymbol{Z}_0(s)$, определенного на Δ_0, удовлетворяют следующей системе СОДУ:

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{Y}}(s) = \boldsymbol{O}, \\
&d\boldsymbol{X}_0(s) = \left[\boldsymbol{\mathcal{A}}_0(s_0)\, \boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{c}_0(s_0)\right] ds + \\
&\qquad + \left[[\![\boldsymbol{\mathcal{B}}_0(s_0)]\!] :: \boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s_0)\right] \circ d\boldsymbol{W}_0(s), \\
&\boldsymbol{Y}(0) = \boldsymbol{X}^0, \qquad \boldsymbol{X}_0(0) = \boldsymbol{X}^0
\end{aligned} \tag{2.2.163}$$

(здесь и далее точка над символом обозначает производную по s).

Если объединить уравнения (2.2.163) в виде

$$\begin{aligned}
&d\boldsymbol{Z}_0(s) = \left[\boldsymbol{\mathcal{A}}_0^+(s)\, \boldsymbol{Z}_0(s) + \boldsymbol{c}_0^+(s)\right] ds + \\
&\qquad + \left[[\![\boldsymbol{\mathcal{B}}_0^+(s)]\!] :: \boldsymbol{Z}_0(s) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0^+(s)\right] \circ d\boldsymbol{W}_0(s), \\
&\boldsymbol{Z}_0(0) = \operatorname{col}\left(\boldsymbol{X}^0, \boldsymbol{X}^0\right),
\end{aligned} \tag{2.2.164}$$

где

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_0^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{A}}_0(s_0) \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{c}_0^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O}_n \\ \boldsymbol{c}_0(s_0) \end{bmatrix}, \tag{2.2.165}$$
$$[\![\boldsymbol{\mathcal{B}}_0^+(s)]\!] = \begin{bmatrix} [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \end{bmatrix} \ddagger \begin{bmatrix} [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{B}}_0(s_0)]\!] \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{G}}_0^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s_0) \end{bmatrix},$$

и сравнить структуру систем СОДУ (2.2.164), (2.2.165) и (П.2.1), (П.2.2), можно заключить, что эти системы будут одинаковы в случае, когда

$$r = 2\,n, \qquad q = m, \qquad s_* = 0, \qquad s^* = \tau, \tag{2.2.166}$$

$$\underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_0^+(s), \quad \underline{\boldsymbol{c}}(s) = \boldsymbol{c}_0^+(s), \quad [\![\underline{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(s)]\!] = [\![\boldsymbol{\mathcal{B}}_0^+(s)]\!], \quad \underline{\boldsymbol{\mathcal{G}}}(s) = \boldsymbol{\mathcal{G}}_0^+(s).$$

Поэтому можно получить ФПК-уравнение для плотности вероятности $p_{Z_0}(\boldsymbol{z}_0, s)$ расширенного вектора состояния $\boldsymbol{Z}_0(s)$:

$$\frac{\partial p_{Z_0}}{\partial s} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2n} \frac{\partial^2\bigl(\tilde{b}_{0ij}\, p_{Z_0}\bigr)}{\partial z_{0i}\,\partial z_{0j}} - \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial\bigl(\tilde{a}_{0i}\, p_{Z_0}\bigr)}{\partial z_{0i}}, \tag{2.2.167}$$

$$p_{Z_0}(\boldsymbol{z}_0, 0) \equiv p_{Z_0}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_0, 0) = p^0(\boldsymbol{x}_0)\,\delta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}_0),$$

где коэффициенты $\tilde{a}_{0i}$ и $\tilde{b}_{0ij}$ могут быть вычислены по формулам (П.2.5), (П.2.6) как $\hat{a}_i$ и $\hat{b}_{ij}$ соответственно.

Более того, это позволяет построить явную форму уравнений (П.2.8), (П.2.9). Финишной точкой этого шага является определение начальных условий для $\boldsymbol{m}_{Z_0}(s)$ и $\mathcal{K}_{Z_0Z_0}(s)$ в следующей форме:

$$\boldsymbol{m}_{Z_0}(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_X^0 \\ \boldsymbol{m}_X^0 \end{bmatrix}; \qquad \boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_0Z_0}(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 \end{bmatrix}$$

соответственно, а также вычисление $\boldsymbol{m}_{Z_0}(s)$ как $\underline{\boldsymbol{m}}_Z(s)$ и $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_0Z_0}(s)$ как $\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_{ZZ}(s)$.

1°. Перейдем к сегментам Δ_0 и Δ_1. Система СОДУ для вычисления расширенного вектора состояния $\boldsymbol{Z}_1(s)$ может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{Y}}(s) = \boldsymbol{O},\\
&d\boldsymbol{X}_0(s) = \bigl[\boldsymbol{\mathcal{A}}_0(s_0)\,\boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{c}_0(s_0)\bigr]\,ds+\\
&\qquad + \bigl[[\![\boldsymbol{\mathcal{B}}_0(s_0)]\!] :: \boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s_0)\bigr]\circ d\boldsymbol{W}_0(s),\\
&d\boldsymbol{X}_1(s) = \bigl[\boldsymbol{\mathcal{A}}(s_1)\,\boldsymbol{X}_1(t) + \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_1)\,\boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{c}(s_1)\bigr]\,ds+\\
&\qquad + \bigl[[\![\boldsymbol{\mathcal{B}}(s_1)]\!] :: \boldsymbol{X}_1(s) + [\![\boldsymbol{\mathcal{H}}(s_1)]\!] :: \boldsymbol{X}_1(s) + \boldsymbol{\mathcal{G}}(s_1)\bigr]\circ d\boldsymbol{W}_1(s),\\
&\boldsymbol{Y}(0) = \boldsymbol{X}^0, \qquad \boldsymbol{X}_0(0) = \boldsymbol{X}^0, \qquad \boldsymbol{X}_1(0) = \boldsymbol{X}_0(\tau).
\end{aligned} \tag{2.2.168}$$

Действуя как на шаге **0°**, можно написать краткую форму уравнений (2.2.168):

$$\begin{aligned}
d\boldsymbol{Z}_1(s) &= \bigl[\boldsymbol{\mathcal{A}}_1^+(s)\,\boldsymbol{Z}_1(s) + \boldsymbol{c}_1^+(s)\bigr]\,ds+\\
&\quad + \bigl[[\![\boldsymbol{\mathcal{B}}_1^+(s)]\!] :: \boldsymbol{Z}_1(s) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_1^+(s)\bigr]\circ d\boldsymbol{W}_1^+(s),
\end{aligned} \tag{2.2.169}$$

$$\boldsymbol{Z}_1(0) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{Z}_0(0), \boldsymbol{X}_0(\tau)\big),$$

где

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_1^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{A}}_0(s_0) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_1) & \boldsymbol{\mathcal{A}}(s_1) \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{c}_1^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O}_n \\ \boldsymbol{c}_0(s_0) \\ \boldsymbol{c}(s_1) \end{bmatrix},$$

$$[\![\boldsymbol{\mathcal{B}}_1^+(s)]\!] = \begin{bmatrix} [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \end{bmatrix} \ddagger \begin{bmatrix} [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{B}}_0(s_0)]\!] \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{H}}(s_1)]\!] \end{bmatrix} \ddagger \begin{bmatrix} [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{B}}(s_1)]\!] \end{bmatrix}, \tag{2.2.170}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}_1^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s_0) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{G}}(s_1) \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{W}_1^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{W}_0(s) \\ \boldsymbol{W}_1(s) \end{bmatrix}.$$

Как и выше,можно сравнить структуры уравнений (2.2.169),(2.2.170) с (П.2.1), (П.2.2). Как результат, находим, что эти системы будут идентичны, если

$$r = 3\,n, \qquad q = 2\,m, \qquad s_* = 0, \qquad s^* = \tau, \tag{2.2.171}$$

$$\underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_1^+(s), \quad \underline{\boldsymbol{c}}(s) = \boldsymbol{c}_1^+(s), \quad [\![\underline{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(s)]\!] = [\![\boldsymbol{\mathcal{B}}_1^+(s)]\!], \quad \underline{\boldsymbol{\mathcal{G}}}(s) = \boldsymbol{\mathcal{G}}_1^+(s).$$

Это позволяет построить уравнение для плотности вероятности $p_{Z_1}(\boldsymbol{z}_1, s)$ расширенного вектора состояния $\boldsymbol{Z}_1(s)$ следующего вида:

$$\frac{\partial p_{Z_1}}{\partial s} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3n} \frac{\partial^2\big(\tilde{b}_{1ij}\, p_{Z_1}\big)}{\partial z_{1i}\,\partial z_{1j}} - \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial\big(\tilde{a}_{1i}\, p_{Z_1}\big)}{\partial z_{1i}}, \tag{2.2.172}$$

$$p_{Z_1}(\boldsymbol{z}_1, 0) \equiv p_{Z_1}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, 0) = p_{Z_0}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \tau)\ \delta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}_0).$$

При этом коэффициенты $\tilde{a}_{1i}$ и $\tilde{b}_{1ij}$ могут быть вычислены по формулам (П.2.5), (П.2.6) как $\hat{a}_i$ и $\hat{b}_{ij}$ соответственно.

Отсюда следует, что несложно построить явную форму уравнений (П.2.8), (П.2.9). Конечной точкой этого шага является определение начальных условий для $\boldsymbol{m}_{Z_1}(s)$ и $\mathcal{K}_{Z_1Z_1}(s)$ в следующей форме:

$$\boldsymbol{m}_{Z_1}(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_X^0 \\ \boldsymbol{m}_X^0 \\ \boldsymbol{m}_{X_0}(\tau) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_1Z_1}(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_0}(\tau) \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_0}(\tau) \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0Y}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0Y}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0X_0}(\tau) \end{bmatrix},$$

а также вычисление $\boldsymbol{m}_{Z_1}(s)$ как $\underline{\boldsymbol{m}}_Z(s)$ и $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_1Z_1}(s)$ как $\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_{ZZ}(s)$.

... ...

$\boldsymbol{N}^{\circ}$. На последнем шаге рассматриваются временные полуинтервалы Δ_0, Δ_1, ..., Δ_N и строится система СОДУ для вектора состояния $\boldsymbol{Z}_N(s)$ в следующей форме:

$$
\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{Y}}(s) = \boldsymbol{O},\\
&d\boldsymbol{X}_0(s) = \big[\boldsymbol{\mathcal{A}}_0(s_0)\,\boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{c}_0(s_0)\big]\,ds+\\
&\qquad + \big[[\![\boldsymbol{\mathcal{B}}_0(s_0)]\!] :: \boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s_0)\big]\circ d\boldsymbol{W}_0(s),\\
&d\boldsymbol{X}_1(s) = \big[\mathcal{A}(s_1)\,\boldsymbol{X}_1(t) + \mathcal{Q}(s_1)\,X_0(s) + \boldsymbol{c}(s_1)\big]\,ds+\\
&\qquad + \big[[\![\boldsymbol{\mathcal{B}}(s_1)]\!] :: \boldsymbol{X}_1(s) + [\![\boldsymbol{\mathcal{H}}(s_1)]\!] :: X_1(s) + \mathcal{G}(s_1)\big]\circ d\boldsymbol{W}_1(s),\\
&\text{... ... ...}\\
&d\boldsymbol{X}_N(s) = \big[\boldsymbol{\mathcal{A}}(s_N)\,\boldsymbol{X}_N(t) + \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_N)\,\boldsymbol{X}_{N-1}(s) + \boldsymbol{c}(s_N)\big]\,ds+\\
&\qquad + \big[[\![\boldsymbol{\mathcal{B}}(s_N)]\!] :: \boldsymbol{X}_N(s) + [\![\boldsymbol{\mathcal{H}}(s_N)]\!] :: \boldsymbol{X}_{N-1}(s) + \boldsymbol{\mathcal{G}}(s_N)\big]\circ d\boldsymbol{W}_N(s),\\
&\boldsymbol{Y}(0) = \boldsymbol{X}^0,\quad \boldsymbol{X}_0(0) = \boldsymbol{X}^0,\quad \boldsymbol{X}_1(0) = \boldsymbol{X}_0(\tau),\quad \text{....}\quad \boldsymbol{X}_N(0) = \boldsymbol{X}_{N-1}(\tau).
\end{aligned}
\tag{2.2.173}
$$

Последующие действия аналогичны тем, которые выполнены в рамках шагов $\boldsymbol{0}^{\circ}$, $\boldsymbol{1}^{\circ}$, ..., $(\boldsymbol{N\text{-}1})^{\circ}$:

1) запись уравнений (2.2.173) в компактной форме:

$$
\begin{aligned}
&d\boldsymbol{Z}_N(s) = \big[\boldsymbol{\mathcal{A}}^{+}_N(s)\,\boldsymbol{Z}_N(s) + \boldsymbol{c}^{+}_N(s)\big]\,ds+\\
&\qquad + \big[[\![\boldsymbol{\mathcal{B}}^{+}_N(s)]\!] :: \boldsymbol{Z}_N(s) + \boldsymbol{\mathcal{G}}^{+}_N(s)\big]\circ d\boldsymbol{W}^{+}_N(s),\\
&\boldsymbol{Z}_N(0) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{Z}_{N-1}(0), \boldsymbol{X}_{N-1}(\tau)\big),
\end{aligned}
\tag{2.2.174}
$$

где требуемые матрицы и векторы определяются формулами:

$$
\boldsymbol{\mathcal{A}}^{+}_N(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{A}}^{+}_{N-1}(s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{(N+1)n\times n} \\ [\boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times Nn} \;\; \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_N)] & \boldsymbol{\mathcal{A}}(s_N) \end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{c}^{+}_N(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}^{+}_{N-1}(s) \\ \boldsymbol{c}(s_N) \end{bmatrix},
$$

$$
[\![\boldsymbol{\mathcal{B}}^{+}_N(s)]\!] = \begin{bmatrix} [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ \text{...} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \end{bmatrix} \ddagger \begin{bmatrix} [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{B}}_0(s_0)]\!] \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{H}}(s_1)]\!] \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ \text{...} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \end{bmatrix} \ddagger \begin{bmatrix} [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{B}}(s_1)]\!] \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{H}}(s_2)]\!] \\ \text{...} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \end{bmatrix} \ddagger \text{...}
\tag{2.2.175}
$$

$$\ddagger \begin{bmatrix} [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ \dots \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{B}}(s_{N-1})]\!] \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{H}}(s_N)]\!] \end{bmatrix} \ddagger \begin{bmatrix} [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ \dots \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{B}}(s_N)]\!] \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}_N^+(s) = \begin{bmatrix} \mathcal{G}_{N-1}^+(s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{(N+1)n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times Nm} & \boldsymbol{\mathcal{G}}(s_N) \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{W}_N^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{W}_{N-1}^+(s) \\ \boldsymbol{W}_N(s) \end{bmatrix};$$

2) сравнение структур уравнений (2.2.174), (2.2.175) с уравнениями (П.2.1), (П.2.2) и вывод о том, что эти системы будут подобны, если

$$r = (N+2)\,n, \quad q = (N+1)\,m, \quad s_* = 0, \quad s^* = \tau,$$

$$\underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_N^+(s), \quad \underline{\boldsymbol{c}}(s) = \boldsymbol{c}_N^+(s), \quad [\![\underline{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(s)]\!] = [\![\boldsymbol{\mathcal{B}}_N^+(s)]\!], \quad \underline{\boldsymbol{\mathcal{G}}}(s) = \boldsymbol{\mathcal{G}}_N^+(s);$$

3) построение ФПК-уравнения для плотности вероятности $p_{Z_N}(\boldsymbol{z}_N, s)$ расширенного вектора состояния $\boldsymbol{Z}_N(s)$ в виде:

$$\frac{\partial p_{Z_N}}{\partial s} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{(N+2)n} \frac{\partial^2 \big(\tilde{b}_{Nij}\, p_{Z_N}\big)}{\partial z_{Ni}\, \partial z_{Nj}} - \sum_{i=1}^{(N+2)n} \frac{\partial \big(\tilde{a}_{Ni}\, p_{Z_N}\big)}{\partial z_{Ni}}, \tag{2.2.176}$$

$$p_{Z_N}(\boldsymbol{z}_N, 0) \equiv p_{Z_N}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_{N-1}, \boldsymbol{x}_N, 0) =$$
$$= p_{Z_{N-1}}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_{N-1}, \boldsymbol{x}_N, \tau)\, \delta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}_0);$$

4) вычисление коэффициентов $\tilde{a}_{Ni}$ и $\tilde{b}_{Nij}$ на основе формул (П.2.5), (П.2.6) как $\hat{a}_i$ и $\hat{b}_{ij}$ соответственно;

5) построение явной формы уравнений (П.2.8), (П.2.9);

6) установка начальных условий для $\boldsymbol{m}_{Z_N}(s)$ и $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_N Z_N}(s)$ в виде:

$$\boldsymbol{m}_{Z_N}(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_{Z_{N-1}}(0) \\ \boldsymbol{m}_{X_{N-1}}(\tau) \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_N Z_N}(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_{N-1} Z_{N-1}}(0) & \boldsymbol{\mathcal{K}}^{[12]}_{Z_N Z_N}(0) \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}^{[21]}_{Z_N Z_N}(0) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{N-1} X_{N-1}}(\tau) \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}^{[12]}_{Z_N Z_N}(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{K}}_{Y X_{N-1}}(\tau) \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{Y X_{N-1}}(\tau) \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0 X_{N-1}}(\tau) \\ \dots \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{N-2} X_{N-1}}(\tau) \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}^{[21]}_{Z_N Z_N}(0) = \big[\boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{N-1} Y}(\tau) \;\; \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{N-1} Y}(\tau) \;\; \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{N-1} X_0}(\tau) \;\; \dots \;\; \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{N-1} X_{N-2}}(\tau)\big];$$

7) расчет $\boldsymbol{m}_{Z_N}(s)$ как $\underline{\boldsymbol{m}}_Z(s)$ и $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_N Z_N}(s)$ как $\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_{ZZ}(s)$.

Второй этап схемы основан на свойствах непрерывных марковских случайных процессов. Напомним, что ФПК-уравнение (П.2.3) с начальным условием (П.2.4) управляет не только плотностью распределения $\hat{p}(\underline{\boldsymbol{z}}, s)$, но и переходной плотностью вероятности $\hat{\pi} = \hat{\pi}(\underline{\boldsymbol{z}}, s \,|\, \underline{\boldsymbol{z}}', s')$, $s \geqslant s'$, $\underline{\boldsymbol{z}}$, $\underline{\boldsymbol{z}}' \in \mathbb{R}^r$. В этом случае можно записать ФПК-уравнение или второе уравнение Колмогорова в виде:

$$\frac{\partial \hat{\pi}}{\partial s} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{r} \frac{\partial^2 \big(\hat{b}_{ij}\, \hat{\pi} \big)}{\partial \underline{\boldsymbol{z}}_i \, \partial \underline{\boldsymbol{z}}_j} - \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial \big(\hat{a}_i\, \hat{\pi} \big)}{\partial \underline{\boldsymbol{z}}_i}, \qquad (2.2.177)$$

$$\lim_{s \downarrow s'} \hat{\pi}(\underline{\boldsymbol{z}}, s \,|\, \underline{\boldsymbol{z}}', s') = \delta(\underline{\boldsymbol{z}} - \underline{\boldsymbol{z}}'),$$

где $\hat{a}_i$ и $\hat{b}_{ij}$ определяются равенствами (П.2.5), (П.2.6).

Помня, что цель состоит в том, чтобы создать общие ОДУ для ковариационных функций, легко установить, что уравнения (П.2.5), (П.2.6), (2.2.177) не могут помочь нам достигнуть цель. Но простое умножение уравнений (2.2.177) на $\hat{p}(\underline{\boldsymbol{z}}', s')$ дает нам необходимый инструмент, т.е. уравнение, управляющее $\check{p}(\underline{\boldsymbol{z}}, s; \underline{\boldsymbol{z}}', s') = \hat{\pi}(\underline{\boldsymbol{z}}, s \,|\, \underline{\boldsymbol{z}}', s')\, \hat{p}(\underline{\boldsymbol{z}}', s')$ и имеющее следующую форму:

$$\frac{\partial \check{p}}{\partial s} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{r} \frac{\partial^2 \big(\hat{b}_{ij}\, \check{p} \big)}{\partial \underline{\boldsymbol{z}}_i \, \partial \underline{\boldsymbol{z}}_j} - \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial \big(\hat{a}_i\, \check{p} \big)}{\partial \underline{\boldsymbol{z}}_i}, \qquad (2.2.178)$$

$$\lim_{s \downarrow s'} \check{p}(\underline{\boldsymbol{z}}, s; \underline{\boldsymbol{z}}', s') = \delta(\underline{\boldsymbol{z}} - \underline{\boldsymbol{z}}')\, \hat{p}(\underline{\boldsymbol{z}}', s').$$

Отсюда можно формально записать соотношение для матрицы ковариационных функций в виде:

$$\underline{\boldsymbol{\mathcal{C}}}_{ZZ}(s, s') = \{\underline{\mathcal{C}}_{ij}(s, s')\} \equiv \mathbb{E}\big[\big\{ \underline{\boldsymbol{Z}}(s) - \underline{\boldsymbol{m}}_Z(s) \big\} \big\{ \underline{\boldsymbol{Z}}(s') - \underline{\boldsymbol{m}}_Z(s') \big\}^{\intercal} \big] =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^r} \int\limits_{\mathbb{R}^r} \big[\underline{\boldsymbol{z}} - \underline{\boldsymbol{m}}_Z(s) \big] \big[\underline{\boldsymbol{z}}' - \underline{\boldsymbol{m}}_Z(s') \big]^{\intercal} \check{p}(\underline{\boldsymbol{z}}, s; \underline{\boldsymbol{z}}', s')\, d\underline{\boldsymbol{z}}\, d\underline{\boldsymbol{z}}'. \qquad (2.2.179)$$

Зафиксируем s' и получим уравнения для компонент $\underline{\mathcal{C}}_{ij}(s, s')$ матрицы $\underline{\boldsymbol{\mathcal{C}}}_{ZZ}(s, s')$. Хорошо известно, что

$$\underline{\boldsymbol{\mathcal{C}}}_{ZZ}(s, s') = \underline{\boldsymbol{\mathcal{R}}}_{ZZ}(s, s') - \underline{\boldsymbol{m}}_Z(s)\, \underline{\boldsymbol{m}}_Z^{\intercal}(s'), \qquad (2.2.180)$$

где $\underline{\boldsymbol{\mathcal{R}}}_{ZZ}(s, s') = \{\underline{\mathcal{R}}_{ij}(s, s')\} \in \mathbb{M}_{r \times r}$ – матрица корреляционных функций. Тогда уравнение для $\underline{\mathcal{R}}_{ij}(s, s')$ может быть получено следующим образом:

$$\frac{\partial \underline{\mathcal{R}}_{ij}(s,s')}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}\int\limits_{\mathbb{R}^r}\int\limits_{\mathbb{R}^r} \underline{\boldsymbol{z}}_i\,\underline{\boldsymbol{z}}'_j\,\check{p}(\underline{\boldsymbol{z}},s;\underline{\boldsymbol{z}}',s')\,d\underline{\boldsymbol{z}}\,d\underline{\boldsymbol{z}}' =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^r}\int\limits_{\mathbb{R}^r} \underline{\boldsymbol{z}}_i\,\underline{\boldsymbol{z}}'_j\,\frac{\partial \check{p}(\underline{\boldsymbol{z}},s;\underline{\boldsymbol{z}}',s')}{\partial s}\,d\underline{\boldsymbol{z}}\,d\underline{\boldsymbol{z}}' =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^r}\int\limits_{\mathbb{R}^r} \underline{\boldsymbol{z}}_i\,\underline{\boldsymbol{z}}'_j\,\Big[\frac{1}{2}\sum_{\ell_1,\ell_2=1}^{r}\frac{\partial^2\big(\hat{b}_{\ell_1\ell_2}\,\check{p}\big)}{\partial \underline{z}_{\ell_1}\,\partial \underline{z}_{\ell_2}} - \sum_{\ell=1}^{r}\frac{\partial\big(\hat{a}_\ell\,\check{p}\big)}{\partial \underline{z}_\ell}\Big]\,d\underline{\boldsymbol{z}}\,d\underline{\boldsymbol{z}}' =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^r}\int\limits_{\mathbb{R}^r} \hat{a}_i\,\underline{\boldsymbol{z}}'_j\,\check{p}(\underline{\boldsymbol{z}},s;\underline{\boldsymbol{z}}',s')\,d\underline{\boldsymbol{z}}\,d\underline{\boldsymbol{z}}'. \quad (2.2.181)$$

Используя соотношения (П.2.5) для $\hat{a}_i$, получим, что

$$\frac{\partial \underline{\mathcal{R}}_{ij}(s,s')}{\partial s} = \sum_{\ell=1}^{r}\underline{a}_{i\ell}(s)\,\underline{\mathcal{R}}_{\ell j}(s,s') + \underline{c}_i(s)\,\underline{m}_j(s')$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{k=1}^{q}\underline{b}_{ik\nu}(s)\Big[\sum_{\ell=1}^{r}\underline{b}_{\nu k\ell}(s)\,\underline{\mathcal{R}}_{\ell j}(s,s') + \underline{g}_{\nu k}(s)\,\underline{m}_j(s')\Big]. \quad (2.2.182)$$

Отсюда

$$\frac{\partial \underline{\mathcal{C}}_{ij}(s,s')}{\partial s} = \frac{\partial \underline{\mathcal{R}}_{ij}(s,s')}{\partial s} - \frac{\partial \underline{m}_i(s)}{\partial s}\,\underline{m}_j(s') =$$

$$= \sum_{\ell=1}^{r}\underline{a}_{i\ell}(s)\,\underline{\mathcal{R}}_{\ell j}(s,s') + \underline{c}_i(s)\,\underline{m}_j(s') +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{k=1}^{q}\underline{b}_{ik\nu}(s)\Big[\sum_{\ell=1}^{r}\underline{b}_{\nu k\ell}(s)\,\underline{\mathcal{R}}_{\ell j}(s,s') + \underline{g}_{\nu k}(s)\,\underline{m}_j(s')\Big] -$$

$$-\underline{m}_j(s')\Big[\sum_{\ell=1}^{r}\underline{a}_{i\ell}(s)\,\underline{m}_\ell(s) + \underline{c}_i(s) +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{k=1}^{q}\underline{b}_{ik\nu}(s)\Big\{\sum_{\ell=1}^{r}\underline{b}_{\nu k\ell}(s)\,\underline{m}_\ell(s) + \underline{g}_{\nu k}(s)\Big\}\Big]$$

$$= \sum_{\ell=1}^{r}\underline{a}_{i\ell}(s)\,\underline{\mathcal{C}}_{\ell j}(s,s') + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{k=1}^{q}\underline{b}_{ik\nu}(s)\sum_{\ell=1}^{r}\underline{b}_{\nu k\ell}(s)\,\underline{\mathcal{C}}_{\ell j}(s,s').$$

И наконец,

$$\frac{\partial \underline{\mathcal{C}}_{ij}(s,s')}{\partial s} = \sum_{\ell=1}^{r}\Big[\underline{a}_{i\ell}(s) + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{k=1}^{q}\underline{b}_{ik\nu}(s)\,\underline{b}_{\nu k\ell}(s)\Big]\,\underline{\mathcal{C}}_{\ell j}(s,s'),$$

$$\underline{\mathcal{C}}_{ij}(s',s') = \underline{K}_{ij}(s'), \quad i,j = 1,2,...,r. \tag{2.2.183}$$

Рассмотрим область $\mathbb{A} = \big\{(t,t')\,|\,t_0 \leqslant t, t' \leqslant T = t_{N+1}\big\}$ (рис. 2.2.67). Если целью является вычисление матричной функции $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(t,t')$ во всей области, достаточно вычислить эту функцию в нижней части $\mathbb{A}$ и использовать свойство симметрии для $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(t,t')$.

Для доведения рассмотренного алгоритма до практической реализации необходимо задать следующую временную сетку:

$$t_k = t_{i0} < t_{k1} < ... < t_{k,\ell-1} < t_{k\ell} < ... < t_{kL} = t_{k+1}, \quad k = 0,1,...,N,$$

$$h_{k\ell} = t_{k\ell} - t_{k,\ell-1}, \quad \text{for} \quad \ell = 1,2,...,M \quad \text{with} \quad \max_{\ell} h_{k\ell} = h_k^* \ll 1.$$

Поэтому полная схема решения задачи будет состоять из последовательных действий для $t \in [t_k, t_{k+1}]$, включая следующие элементы:

а) использование ОДУ для $\boldsymbol{m}_{Z_k}(s)$,$\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_kZ_k}(s)$ для вычисления $\boldsymbol{m}_{X_k}(s+$ $+t_k)$, $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_kX_k}(t_k+s)$ с фиксированными значениями для $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_kX_k}(t_{k\ell})$;

б) согласование ОДУ для $\underline{\boldsymbol{\mathcal{C}}}_{ZZ}(s,s')$ с подобластями kja и kjb, $k \leqslant$ $\leqslant j \leqslant N$ (рис. 2.2.67) и использование их соответствующих вариантов для for $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_kX_j}(s,s')$ с фиксированными $s' = t_{k\ell}$ и $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_kX_j}(t_{k\ell})$ как начальных условий.

2.2.6. Системы со случайными запаздываниями

В данном подразделе, основанном на работах [230,231,250], рассматриваются некоторые подходы к приближенному анализу линейных и нелинейных динамических систем, описываемых детерминистическими и стохастическими дифференциальными уравнениями со случайными запаздываниями. Используемые подходы базируются на сочетании классического метода шагов, расширения пространства состояния и метода статистического моделирования (Монте-Карло). В некоторых случаях это позволяет упростить задачу и привести исходные уравнения к системам стохастических дифференциальных уравнений без запаздывания.

В последние десятилетия в различных областях прикладной математики активно используются уравнения с последействием (запаздыванием, запозданием, сдвигом, лагом), подклассы которых именуются функционально-дифференциальными уравнениями (ФДУ), дифференциально-разностными уравнениями (ДРУ), дифференциальными уравнениями

с отклоняющимся аргументом, уравнениями с запаздыванием, нейтральными уравнениями, интегро-дифференциальными уравнениями (обыкновенными и в частных производных) [5,24,158,266,320,528,583,642,771,989] и т.д.

Реальные явления могут моделироваться системами уравнений с последействием и более сложной структуры, например уравнениями, содержащими несколько дискретных запаздываний, распределенные и случайные запаздывания и их иные комбинации. Различные формы учета запаздывания в дифференциальных уравнениях используются для математического моделирования эволюции во многих приложениях, где требуется принимать во внимание влияние событий прошлого.

Так, составные части с чистым (транспортным) запаздыванием часто встречаются в различных процессах, например, когда что-то перемещается из одной точки в другую с помощью ленточного транспортера, в системах магнитной записи и воспроизведения и др. [144]. Процессы в системах с транспортным запаздыванием описываются дифференциально-разностными уравнениями. Во многих тепловых процессах, а также при передаче сигналов на большие расстояния электрическими, гидравлическими и другими линиями наблюдается запаздывание, которое распределено по всей длине линии и, в отличие от чистого запаздывания, часто ведет к искажению передаваемого сигнала.

Стохастические обыкновенные дифференциальные уравнения (СОДУ) с запаздыванием (СОДУсЗ) и, в частности, дифференциально-разностные уравнения (СОДРУ) являются обобщениями и детерминистических уравнений с запаздыванием, и стохастических обыкновенных дифференциальных уравнений [267, 306, 380, 441, 764]. Функционально-дифференциальные уравнения, учитывающие эффекты последействия, представляют собой более реалистичные модели явлений из множества областей науки, таких как проблемы народонаселения, материалы с памятью и др., чем их одноточечные аналоги. Как известно, задачи с переменным лагом имеют более богатую структуру, но, как правило, у них отсутствуют аналитические решения в замкнутой форме, даже содержащей интегралы или суммы бесконечных рядов, а также возможности точного расчета точек равновесия и бифуркации, которые в виде явных аналитических формул удается получить лишь в исключительных случаях. Поэтому для интегрирования даже детерминистических ОДРУ требуются приближенные численные процедуры, а анализ явлений с запаздыванием является, в основном, количественным. Дополнительный уровень адекватности (но и усложнения) вводится, если перейти от детерминистических к стохастическим моделям (соответственно к СОДУ, СОДРУ и др.). Круг

основных стохастических концепций и их теоретические основания, включая СОДУ, рассматриваются в [47,91,133,134,236,257,275,306,358,824,859]. Численные схемы анализа детерминистических ДРУ [311, 407] и СОДУ [742, 851] являются основой соответствующих алгоритмов для исследования СОДРУ.

Следующим шагом в сторону усложнения моделей различных процессов является трактовка запаздываний как случайных величин и функций. В частности, модели такого вида возникают при описании систем, меняющих свою структуру под воздействием случайных факторов. Несмотря на широкие поля приложений (см. ниже), уравнения подобного вида недостаточно исследованы.

При изучении стохастических систем с запаздыванием можно использовать следующую терминологию [283]: если на систему со случайными запаздываниями действуют случайные возмущения, то модель такой системы называется *системой стохастических дифференциальных уравнений с запаздыванием*; если случайны только входные воздействия, а все остальные параметры, включая запаздывания, детерминистические, то *системой со случайными входными воздействиями*; если параметры, входные воздействия и начальная функция детерминистические, а запаздывание случайно, то *системой со случайным запаздыванием*. При этом сложность исследования систем с переменными детерминистическими запаздываниями и случайными возмущениями обычно близка к сложности анализа динамических систем, находящихся под влиянием случайных флуктуаций. Специфику здесь определяет наличие начальной функции, которая требует особого определения и которая может быть как детерминистической, так и случайной.

Обычно целями исследования указанных выше систем является получение различных вероятностных характеристик векторов состояния систем как векторных случайных процессов. Наиболее полным будет решение, приводящее к определению одноточечной или многоточечной (переходной) плотности вероятности или характеристической функции изучаемого процесса, которые в зависимости от постановки задачи могут быть получены с разной степенью детализации. Но, как правило, на практике ограничиваются числовыми характеристиками векторов состояния, включающими векторы функций математического ожидания, матрицы функций ковариации (дисперсии) и матрицы ковариационных функций.

Далее в данном подразделе представлен спектр явлений, для математического описания которых требуется учет случайности запаздывания в различных формах, краткий обзор решавшихся задач и существующих методов исследования, а затем предлагаются различные схемы анализа

некоторых из определенных выше систем и, в частности, анализа стохастических систем с запаздываниями в виде дискретных цепей Маркова [230, 231]. Эти схемы основаны на сочетании классического метода шагов [320], расширения пространства состояния [191, 215, 904] и метода статистического моделирования (Монте-Карло) [127].

Объекты со случайным запаздыванием и методы их анализа

Необходимость рассмотрения случайности запаздывания при анализе различных физических, технологических, экономических и других явлений исследователями была установлена еще в середине XX в. Прежде всего такой вывод был сделан по отношению к транспортному запаздыванию, где проявление эффекта последействия зависит из конечности скорости электрических зарядов, передачи сигналов и энергии на расстояние в неоднородной среде (например, при наличии препятствий, отражений и вообще в неоднородных средах акустические сигналы приходят в точку наблюдения многократно отраженными и искаженными по сравнению со своим первоначальным видом), протекания различных процессов и др.

Среди физических процессов (электроника, использование сверхвысоких частот), анализ которых связан с учетом влияния рассматриваемого эффекта, отметим следующие: возникновение тока в газе с нерегулярной задержкой по времени при подаче на разрядник (электроды) напряжения, превышающего пробивное [321], причем запаздывание обусловлено вероятностным характером выхода из катода электронов, инициирующих развитие лавин; электрический разряд в твердых, жидких и газообразных диэлектриках [279]; срабатывание реле, реверсивных устройств и дифференциаторов; подобные ситуации в других газоразрядных и электронно-лучевых приборах,в т.ч. в газовых ионизационных детекторах [321], газоразрядных стабилитронах и импульсных водородных тиратронах, в низковакуумных газоразрядных электронных пушках [290]; импульсные режимы электронных индикаторов и датчиков; работа газоразрядных индикаторных панелей [274], полупроводниковых лазеров с запаздывающей обратной связью, сильноточных генераторов плазмы [287], функционирующих при атмосферном давлении; пробой воздушной или жидкой изоляции; намагничивание спина, на который действует внешнее магнитное поле, и никель–цинк–кобальтовых ферритов; испытание вязкоупругих материалов, в которых случайны времена запаздывания и релаксации деформаций и напряжений; задержка приливов вследствие того, что приливное трение смещает прилив в направлении вращения Земли, в результате чего максимум приливного горба в данном месте запаздывает по времени относительно прохождения внешнего тела через местный меридиан; процессы

размножения нейронов, делающие возможным осуществление цепной реакции деления, при этом небольшое количество нейтронов, вылетающих не в момент акта деления, а несколько позже, называются *запаздывающими*; атмосферная турбулентность, вызывающая задержку оптических сигналов, передаваемых по воздуху, что влияет на точность измерения лазерных дальномеров [754]; та же причина, искажающая характеристики радиосигналов и импульсов пикосекундных лазеров, используемых для определения расстояний до наземных, воздушных и космических объектов [922] и др.

Необходим учет случайности запаздывания в задачах биологии, например при оценке сроков беременности у людей и других живых существ из-за условий существования и внешнего влияния [572], времен заражения [775] и иммунного ответа [493], генетических изменений [497]; в моделях динамики эпидемий и миграции населения [831], регуляции генов, физиологических процессов, контроля осанки, рождения–гибели [769]. В нейронных сетях статистически задержки появляются вследствие наличия расстояний между нейронами, синаптических связей между ними, зависящих от распространения биопотенциала на значительные расстояния [831].

В экономике и финансах присутствуют задержки заказов товаров и их доставки на рынок [186], поступления платежей по поставкам товаров, возврата кредитов [469, 497] и информации на фондовой бирже [497, 978], учета коррупции и подобных действий после обнаружения [497]; необходимо принимать во внимание случайное запаздывание в моделях типа Блэка–Шоулза–Мертона–Самуэлсона [359, 726] и др.

Значительная часть современных систем автоматического управления (САУ) представляют собой технически сложные устройства, включающие в свой состав большое количество подсистем и обязанные обеспечивать решение комплексных задач [35, 677]. В современных промышленных системах компоненты САУ (объекты управления, регуляторы, датчики, исполнительные элементы) практически невозможно расположить в одном месте. Поэтому обычно эти компоненты размещены на некотором расстоянии друг от друга, а для связи компонентов используются сетевые каналы связи, а сами системы называются *сетевыми системами управления* (ССУ) [1116]. В отличие от традиционных САУ с прямой обратной связью, ССУ обладают многими преимуществами: низкой стоимостью, простотой установки и диагностики, возможностью изменения конфигурации, высокой надежностью и быстродействием, меньшими весом и затратами энергии. Но наличие в ССУ сетей связи в цепи управления обладает и рядом недостатков, таких как случайные задержки передачи

данных, потери пакетов данных, многопакетная передача и разупорядочение пакетов, что приводит к неустойчивости ССУ и низкой эффективности [10, 597].

В связи с важностью человеческого фактора с позиции управляющей системы оператор САУ может рассматриваться как "инерционное звено с переменной (случайной) задержкой", реализующее переданные оператору некоторые функции автоматического управления, которые невозможно или нежелательно применять в автоматическом режиме.

Чтобы компенсировать недостатки ССУ, как и при решении других проблем, необходимо строить математические модели случайных лагов, которые обычно выбираются в форме независимых случайных величин, однородных и неоднородных, дискретных и непрерывных цепей Маркова, скрытых цепей Маркова [597], линейной функции случайных величин, имеющих распределение Бернулли, а также в виде более общих стационарных и нестационарных случайных процессов, в том числе и функций векторов состояния динамических систем. В статье [1035] предлагается схема генерации случайных запаздываний, которая увеличивает десинхронизацию по сравнению со случайными лагами равномерно распределенной длины.

В коммуникационных сетях присутствуют переменные случайные задержки сигналов обратной связи при прохождении через информационные сети [855] (что требует синхронизации элементов в сети [828]), в больших распределенных вычислительных системах с разнесенными в пространстве узлами – значительные по величине случайно меняющиеся лаги. К переменности случайных лагов приводят динамические смены станций и переключения коммуникационных каналов сетевых мобильных систем контроля наземного, воздушного и водного транспорта. Мобильный агент (беспилотный летательный аппарат, станция связи на транспортном средстве (ТС) и т.п.) перемещается по району с изменяющимся ландшафтом (здания, другие ТС, различные погодные условия). Сигналы, в том числе отраженные от ландшафта, транслируются от агента по множеству различных путей передачи и, наконец, собираются в приемнике (другом мобильном агенте). Задержки сигналов меняются случайным образом из-за динамично меняющейся среды, выстрых и медленных стохастических возмущающих источников и др.

И наконец, отметим случайные опоздания транспорта (поездов, самолетов, автобусов), включая специальный (машины скорой помощи, пожарные машины), вследствие флуктуаций дорожного и воздушного трафика; случайные задержки подачи топлива в двигатель автомобиля при разгоне, движении, торможении и остановках; задачи актуарной матема-

тики (страхования) и др.

Но заметим, что последействие может оказывать не только отрицательное, но иногда и положительное воздействие, например, случайные задержки, включая синхронизацию, применимы для получения эффективных протоколов многоадресной передачи при обслуживании мобильным оператором [780], подавления хаотических возмущений и стабилизации устройств управления и др.

Вопросы, связанные с влиянием случайных запаздыванием на динамику детерминистических и стохастических систем, привлекли внимание теоретиков уже более пятидесяти лет назад. Среди работ, где рассматривались такие вопросы, отметим следующие: [124] (запаздывание – непрерывный справа марковский скачкоообразный процесс, исследовались достаточные условия асимптотической устойчивости вектора состояния по вероятности в терминах функционала Ляпунова); [87] (запаздывание – однородный чисто скачкоообразный марковский процесс, анализировалась асимптотическая устойчивость по вероятности вектора состояния нелинейной системы по первому приближению); [100, 105] (исследование нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка со случайным запаздыванием); [167] (запаздывание – сумма константы и случайного процесса с малой интенсивностью; в работе изучалось влияние случайного запаздывания на колебательные процессы в нелинейных системах, описываемых дифференциальными уравнениями первого порядка с помощью асимптотических методов нелинейной механики и метода уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова, ФПК-уравнения); [595] (запаздывание – неограниченное случайное; в статье исследовалось существование и единственность решения случайного дифференциального уравнения, которое порождает коцикл, и показано существование аттрактора, что позволяет доказать порождение случайной динамической системы решением этого уравнения); [755] (запаздывание – случайный процесс, имеющий в каждый момент времени t равномерное распределение на промежутке $[0, t]$; в работе продемонстрирована эквивалентность исходных детерминистических дифференциальных уравнений n-го порядка с таким запаздыванием ОДУ $(n+1)$-го порядка); [491] (запаздывание – случайная дискретная последовательность; в статье распространена мультипликативная эргодическая теорема Оселедеца о спектре Ляпунова и подпространствах Оселедеца на линейные случайные разностные уравнения со случайным запаздыванием, доказано, что случайная динамическая система, порожденная разностным уравнением со случайным запаздыванием, не может иметь бесконечно много показателей Ляпунова). Вопросы аппроксимации случайных запаздываний рассматривались в [764].

В работе [461] доказано существование стационарного случайного решения случайной обыкновенной дифференциальной системы с запаздыванием, которое притягивает все другие решения. Уравнение содержит односторонний диссипативный член Липшица без запаздывания, в то время как случайное запаздывание появляется в глобально липшицевом другом. При этом требуется, чтобы функция запаздывания была непрерывной во времени. Кроме того, утверждается, что расщепленная неявная схема Эйлера–Маруямы, связанная со случайной дифференциальной системой с запаздыванием, порождает дискретную по времени случайную динамическую систему, которая обладает стохастическим стационарным решением с тем же притягивающим свойством, и которая сходится к стационарному решению случайного дифференциального уравнения с запаздыванием потраекторно в случае, когда длина шага интегрирования стремится к нулю.

К этому спектру задач изучения систем со случайным запаздыванием добавим прикладные области: проблему фильтрации (оценки состояния), которая решается с помощью преобразования системы к форме без запаздывания [1074, 1133]; анализ стохастического резонанса в ионном канале, описываемого линейным уравнением Ланжевена с дробной производной [591], и в бистабильной системе [592]; задачу оценки влияния запаздывания на систему взаимосвязанных частиц, включая анализ бифуркаций [847]. В работе [35] решается задача стабилизации модельной ССУ в условиях возможного появления запаздывания передачи данных и потери пакетов данных в сетевом канале, причем в качестве моделей случайных лагов использованы однородные дискретные цепи Маркова; анализ влияния случайных запаздываний на сихронизацию простой модели хаотических осцилляторов и стохастической линейной устойчивости нейронной сети рассматривается в [831]. В работе [1097] изучаются условия моментной экспоненциальной устойчивости ССУ, моделируемой системой со случайными запаздываниями – непрерывными цепями Маркова, и критерии устойчивости ССУ в зависимости от запаздываний. В [676] рассматривается устойчивость линейной неопределенной ССУ со случайными задержками времени связи в виде марковских процессов, предложен автоматический регулятор, зависящий от состояния.

В связи со сложностью задач методы исследования стохастических систем со случайным запаздыванием нетривиальны и немногочисленны. Прямые аналитические схемы анализа таких систем типа уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК-уравнения) [288] отсутствуют, а приближенные ориентируются на исключение случайного запаздывания или полностью (например, с помощью процедуры усреднения, см. ниже, что

возможно далеко не всегда и существенно искажает вероятностные характеристики вектора состояния), или сведением к системам с неслучайным постоянным или переменным запаздыванием (к СОДУ с запаздыванием или нейтральным СОДУ), а также на чисто численные схемы типа Эйлера–Маруямы [742], причем в отличие от систем с неслучайными запаздываниями, алгоритмы, отличные от различных вариаций схемы Эйлера–Маруямы, в научной литературе отсутствуют. При этом только при применении процедуры усреднения для вычисления характеристик вектора состояния не требуется совмещение выбранной схемы исследования с методом Монте-Карло.

На практике целью построения численных интеграторов для СОДУ, СОДРУ и других классов стохастических уравнений является вычисление после дискретизации этих уравнений с использованием метода статистического моделирования (Монте-Карло) [127] сеточных представлений $\{\widehat{\boldsymbol{x}}_k\}$ ($k = 1, 2, ..., N$) одной или многих реализаций $\boldsymbol{x}(t)$ вектора состояния системы в узлах сетки. Во втором случае эти реализации служат для оценки вероятностных характеристик вектора $\boldsymbol{X}(t)$ на основе методов математической статистики.

В монографии [283], посвященной исследованию как детерминистических, так и стохастических систем с переменным запаздыванием, рассмотрен ряд задач и для ДУ и СДУ со случайными запаздываниями.

Сначала в § 26 представлен приближенный метод определения дисперсии выхода линейного уравнения n-го порядка с переменными коэффициентами и единственным термом $X\bigl(t - \mathcal{T}(t)\bigr)$ с запаздыванием, величина которого флуктуирует относительно некоторого постоянного значения: $\mathcal{T}(t) = \tau_0 + \Theta(t)$, где $\tau_0 = \text{const}$, а $\Theta(t)$ – малая центрированная случайная функция с заданной ковариационной функцией. После замены

$$X\bigl(t - \mathcal{T}(t)\bigr) \approx X\bigl(t - \tau_0\bigr) - X'\bigl(t - \tau_0\bigr)\,\Theta(t)$$

решение преобразованного уравнения представляется в виде суммы неслучайной и случайной составляющей. Для этих составляющих строятся свои уравнения, после решения которых с использованием последовательных приближений и определяется искомая характеристика.

Еще более узкая задача рассматривается во второй части § 26, а именно, вычисление дисперсии широкополосной радиотехнической системы с запаздыванием в виде узкополосного случайного процесса.

В § 27 рассматривается представление периодического процесса в нелинейной системе со случайным запаздыванием методом гармонического баланса с целью определения плотности вероятности выходного процесса системы. Полученные уравнения (теперь это уже СОДУ без запаздыва-

ния) для амплитуды–фазы в § 28 позволяют применить аппарат диффузионных марковских процессов [288] для определения плотности вероятности распределения амплитуды и фазы выходного процесса нелинейной системы.

В монографии [147], наряду с другими рассмотренными задачами, упоминается более общая проблема, чем в [283, § 28], исследования системы дифференциально-разностных уравнений с одним или многими запаздываниями, которые представляют собой случайные функции времени типа $\mathcal{T}_k(t) = \tau_{k0} + \varepsilon\,\sigma_k\,\Theta_k(t)$ ($\boldsymbol{X}(t) = 0$ при $t - \mathcal{T}_k(t) < 0$), где $\Theta_k(t)$ – центрированный стационарный случайный процесс, $1 \leqslant k \leqslant r$; ε – малый параметр; σ – постоянная величина. Для анализа одночастотных и многочастотных случайных колебаний рекомендуется сначала привести систему к стандартному виду (с помощью процедуры усреднения), а затем применить аналитический метод ФПК-уравнений.

В работе [725] исследуется СДУ с запаздыванием, которое зависит от вектора состояния, а этот вектор, в свою очередь, от момента времени, сдвинутого в прошлое от текущего на случайную величину. Результатом исследования является доказательство существования решения, строгой сходимости (обеспечивающей единственность решения) модификации приближенной схемы Эйлера–Маруямы и применение разработанной модификации для моделирования волатильности с использованием метода Монте-Карло.

Авторы [186] рассматривают рынок одного товара, описываемый модификацией динамической модели Вальраса [46], в которую внесено изменение, учитывающее то, что объем продаж зависит от цены товара в некоторый предыдущий момент времени, отстоящий от текущего на время τ, а запаздывание (временно́й лаг) τ появляется в силу того, что на заказ товара и на доставку его на рынок требуется некоторое время, причем это время может быть случайным. Для анализа указанной и других моделей в работе предлагается метод решения, обобщающий метод Эйлера–Маруямы с уравниванием при отсутствии запаздывания, при постоянном запаздывании на случай переменного (в том числе случайного) запаздывания. Идея разработанной схемы заключается в решении уравнения на каждом элементарном отрезке методом последовательных приближений (простых итераций). Реализация этого метода применяет в качестве предиктора решение, полученное по явной схеме Эйлера, и использует вычисление стохастических интегралов по формуле прямоугольников, а также линейную интерполяцию решений внутри соответствующего отрезка.

В работе [70] система дифференциальных уравнений со случайным запаздыванием дискретизируется, после чего предполагается, что запаз-

дывание представляется случайной последовательностью, реализация которой строится на основе заданного дискретного распределения.

2.2.6.1. Системы с запаздываниями в форме положительных случайных величин

Нелинейные стохастические системы со случайными запаздываниями в виде случайных величин

Рассмотрим систему СОДРУ Стратоновича вида

$$d\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{X}(t), \boldsymbol{X}(t-\mathcal{T}), t\big)\,dt + \boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{X}(t), \boldsymbol{X}(t-\mathcal{T}), t\big) \circ d\boldsymbol{W}(t), \quad t_0 < t \leqslant T < +\infty, \quad (2.2.184)$$

где $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_{\mathcal{T}}(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $\boldsymbol{W}(\cdot) \in \mathbb{R}^m$ – вектор независимых стандартных винеровских процессов, $\mathcal{T}$ – положительная случайная величина (запаздывание) с заданным законом распределения $F_{\mathcal{T}}(\tau)$, возможные значения которой τ сконцентрированы на отрезке $[\tau_{min}, \tau_{\max}]$,

$$\boldsymbol{f} = \{f_i\}^{\mathsf{T}} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times (t_0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^n$$

и

$$\boldsymbol{\mathcal{G}} = \{g_{ij}\} \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times (t_0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

– детерминированистические векторная и матричная функции соответственно. Предположим, что при $t \leqslant t_0$ вектор состояния $\boldsymbol{X}(t)$ почти наверное совпадает с векторной случайной величиной (ВСВ) $\boldsymbol{\Xi}$ с известными вероятностными характеристиками, в частности, с заданной плотностью вероятности $\bar{p}^{\,0}(\boldsymbol{x})$. Случайное возмущение $\boldsymbol{W}(t)$, величину $\mathcal{T}$ и вектор $\boldsymbol{\Xi}$ считаем независимыми.

Задача исследования состоит в вычислении необходимых статистических характеристик векторного случайного процесса $\boldsymbol{X}(t)$.

Для того чтобы применить аналитический аппарат ФПК–уравнения для решения данной задачи, заметим, что для каждого возможного значения τ СВ $\mathcal{T}$ система СОДРУ (2.2.184) со случайным запаздыванием $\mathcal{T}$ превращается в систему СОДРУ с постоянным запаздыванием τ, что позволяет применить сочетание метода шагов и схемы расширения вектора состояния (МШРПС).

Итак, будем считать, что мы проводим серию из некоторого (вообще говоря – бесконечного) числа опытов, состоящих в разыгрывании СВ $\mathcal{T}$,

которая в этих опытах принимает значения $\tau^{[\ell]} \in [\tau_{min}, \tau_{\max}]$, где ℓ – формальный индекс. Тогда условный вектор состояния для фиксированного значения $\mathcal{T} = \tau^{[\ell]}$ будем обозначать так:

$$\boldsymbol{X}^{[\ell]}(t) = \boldsymbol{X}_{\mathcal{T}=\tau^{[\ell]}}(t).$$

Для того чтобы изучить случайное изменение вектора $\boldsymbol{X}(t)$ при значениях времени $t > t_0$ посредством преобразования немарковского векторного процесса в марковский, мы расширяем пространство состояния системы. В процессе реализации этой процедуры введем дополнительные обозначения:

$$s \in [0, \tau^{[\ell]}], \quad t_q^{[\ell]} = t_0 + q \cdot \tau^{[\ell]}, \quad t^{[\ell]}_{N_T^{[\ell]}+1} \geqslant T,$$

$$\Delta_q^{[\ell]} = (t_{q-1}^{[\ell]}, t_q^{[\ell]}], \quad q = -1, 0, 1, 2, ..., N_T^{[\ell]}, N_T^{[\ell]} + 1, \quad s_{q+1}^{[\ell]} = s + t_q^{[\ell]},$$

$$\boldsymbol{X}_q^{[\ell]}(s) = \boldsymbol{X}(s_q^{[\ell]}), \qquad \boldsymbol{W}_q(s) = \boldsymbol{W}(s_q^{[\ell]}),$$

$$\boldsymbol{X}_q^{[\ell]}(0) = \boldsymbol{X}_{q-1}^{[\ell]}(\tau^{[\ell]}), \qquad \boldsymbol{W}_q(0) = \boldsymbol{W}_{q-1}(\tau^{[\ell]}),$$

$$p_q^{[\ell]}(\boldsymbol{x}, s) = p^{[\ell]}(\boldsymbol{x}, s_q^{[\ell]}), \quad p_1^{[\ell]}(\boldsymbol{x}, 0) = \bar{p}^{\,0}(\boldsymbol{x}), \quad p_q^{[\ell]}(\boldsymbol{x}, 0) = p_{q-1}^{[\ell]}(\boldsymbol{x}, \tau^{[\ell]}),$$

$$\boldsymbol{Z}_{-1}^{[\ell]} = \boldsymbol{X}_{-1}^{[\ell]}(s) \equiv \boldsymbol{\Xi}, \qquad \boldsymbol{Z}_0^{[\ell]} = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{Z}_{-1}^{[\ell]}, \boldsymbol{X}_0^{[\ell]}\big),$$

$$\boldsymbol{Z}_1^{[\ell]} = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{Z}_0^{[\ell]}, \boldsymbol{X}_1^{[\ell]}\big), \qquad \boldsymbol{Z}_2^{[\ell]} = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{Z}_1^{[\ell]}, \boldsymbol{X}_2^{[\ell]}\big), \quad ...$$

Рассмотрим последовательность полуотрезков $\Delta_q^{[\ell]}$, $q = -1$, 0, 1, 2, ..., $N_T^{[\ell]}$.

0°. Начнем с $\Delta_{-1}^{[\ell]}$, $\Delta_0^{[\ell]}$. Определенный на полуинтервалах $\Delta_{-1}^{[\ell]}$, $\Delta_0^{[\ell]}$ случайный вектор $\boldsymbol{Z}_0^{[\ell]}(s)$ удовлетворяет следующей системе СОДУ (точкой здесь и далее обозначена производная по переменной s):

$$\dot{\boldsymbol{X}}_{-1}^{[\ell]}(s) = 0, \qquad \boldsymbol{X}_{-1}^{[\ell]}(0) = \boldsymbol{\Xi},$$

$$d\boldsymbol{X}_0^{[\ell]}(s) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{X}_0^{[\ell]}(s), \boldsymbol{X}_{-1}^{[\ell]}(s), s_0^{[\ell]}\big)\, ds + \\ + \boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{X}_0^{[\ell]}(s), \boldsymbol{X}_{-1}^{[\ell]}(s), s_0^{[\ell]}\big) \circ d\boldsymbol{W}_0(s).$$

ФПК–уравнение для плотности распределения расширенного вектора состояния $\boldsymbol{Z}_0^{[\ell]}(s)$ имеет вид:

$$\frac{\partial \tilde{p}_0^{[\ell]}(\boldsymbol{z}_0, s)}{\partial s} = \mathbb{L}_0^{[\ell]}\big[\tilde{p}_0^{[\ell]}(\boldsymbol{z}_0, s)\big], \quad \tilde{p}_0^{[\ell]}(\boldsymbol{z}_0, 0) = \bar{p}^{\,0}(\boldsymbol{x}_0)\, \delta(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_{-1}),$$

где

$$\mathbb{L}_0^{[\ell]}\big[\tilde{p}_0^{[\ell]}\big] = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2n}\frac{\partial^2\big(b_{0ij}^{[\ell]}\tilde{p}_0^{[\ell]}\big)}{\partial z_{0i}\,\partial z_{0j}} - \sum_{i=1}^{2n}\frac{\partial\big(a_{0i}^{[\ell]}\,\tilde{p}_0^{[\ell]}\big)}{\partial z_{0i}},$$

$$a_{0i}^{[\ell]} = f_{0i}^{[\ell]} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2n}\sum_{k=1}^{2m}\frac{\partial g_{0ik}^{[\ell]}}{\partial z_{0j}}\,g_{0jk}^{[\ell]}, \qquad b_{0ij}^{[\ell]} = \sum_{k=1}^{2m} g_{0ik}^{[\ell]}\,g_{0jk}^{[\ell]},$$

$$\boldsymbol{f}_0^{[\ell]}(\boldsymbol{z}_0, s) = \{f_{0i}^{[\ell]}\} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{O}_n\\ \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_{-1}, s_0^{[\ell]}\big)\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}_0^{[\ell]}(\boldsymbol{z}_0, s) = \{g_{0ik}^{[\ell]}\} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m}\\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_{-1}, s_0^{[\ell]}\big)\end{bmatrix}.$$

1°. Продолжим с полуотрезками $\Delta_{-1}^{[\ell]}$, $\Delta_0^{[\ell]}$, $\Delta_1^{[\ell]}$. Определенный на них случайный вектор $\boldsymbol{Z}_1^{[\ell]}(s)$ удовлетворяет системе СОДУ в следующей форме:

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{X}}_{-1}^{[\ell]}(s) &= 0, \qquad \boldsymbol{X}_{-1}^{[\ell]}(0) = \boldsymbol{\Xi},\\
d\boldsymbol{X}_0^{[\ell]}(s) &= \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{X}_0^{[\ell]}(s), \boldsymbol{X}_{-1}^{[\ell]}(s), s_0^{[\ell]}\big)\,ds +\\
&\quad + \boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{X}_0^{[\ell]}(s), \boldsymbol{X}_{-1}^{[\ell]}(s), s_0^{[\ell]}\big)\circ d\boldsymbol{W}_0(s),\\
d\boldsymbol{X}_1^{[\ell]}(s) &= \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{X}_1^{[\ell]}(s), \boldsymbol{X}_0^{[\ell]}(s), s_1^{[\ell]}\big)\,ds +\\
&\quad + \boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{X}_1^{[\ell]}(s), \boldsymbol{X}_0^{[\ell]}(s), s_1^{[\ell]}\big)\circ d\boldsymbol{W}_1(s).
\end{aligned}$$

ФПК-уравнение для плотности распределения векторного случайного процесса $\boldsymbol{Z}_1^{[\ell]}(s)$ будет выглядеть так:

$$\frac{\partial\tilde{p}_1^{[\ell]}(\boldsymbol{z}_1, s)}{\partial s} = \mathbb{L}_1^{[\ell]}\big[\tilde{p}_1^{[\ell]}(\boldsymbol{z}_1, s)\big], \quad \tilde{p}_1^{[\ell]}(\boldsymbol{z}_1, 0) = \tilde{p}_0^{[\ell]}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \tau^{[\ell]})\,\delta(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_{-1}),$$

где

$$\mathbb{L}_1^{[\ell]}\big[\tilde{p}_1^{[\ell]}\big] = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3n}\frac{\partial^2\big(b_{1ij}^{[\ell]}\tilde{p}_1^{[\ell]}\big)}{\partial z_{1i}\,\partial z_{1j}} - \sum_{i=1}^{3n}\frac{\partial\big(a_{1i}^{[\ell]}\,\tilde{p}_1^{[\ell]}\big)}{\partial z_{1i}},$$

$$a_{1i}^{[\ell]} = f_{1i}^{[\ell]} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3n}\sum_{k=1}^{3m}\frac{\partial g_{1ik}^{[\ell]}}{\partial z_{1j}}\,g_{1jk}^{[\ell]}, \qquad b_{1ij}^{[\ell]} = \sum_{k=1}^{3m} g_{1ik}^{[\ell]}\,g_{1jk}^{[\ell]},$$

$$\boldsymbol{f}_1^{[\ell]}(\boldsymbol{z}_1,s)=\{f_{1i}^{[\ell]}\}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}_n\\ \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_{-1},s_0^{[\ell]}\big)\\ \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_0,s_1^{[\ell]}\big)\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}_1^{[\ell]}(\boldsymbol{z}_1,s)=\{g_{1ik}^{[\ell]}\}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m}\\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_{-1},s_0^{[\ell]}\big) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m}\\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_0,s_1^{[\ell]}\big)\end{bmatrix}.$$

... ...

N°. Рассмотрим временные полуинтервалы $\Delta_{-1}^{[\ell]}$, $\Delta_0^{[\ell]}$, $\Delta_1^{[\ell]}$, ..., $\Delta_N^{[\ell]}$ ($N=N_T^{[\ell]}$). Построим систему СОДУ для расширенного процесса $\boldsymbol{Z}_N(s)$ в виде:

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{X}}_{-1}^{[\ell]}(s)&=0,\qquad \boldsymbol{X}_{-1}^{[\ell]}(0)=\boldsymbol{\Xi},\\
d\boldsymbol{X}_0^{[\ell]}(s)&=\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{X}_0^{[\ell]}(s),\boldsymbol{X}_{-1}^{[\ell]}(s),s_0^{[\ell]}\big)\,ds+\\
&\quad+\boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{X}_0^{[\ell]}(s),\boldsymbol{X}_{-1}^{[\ell]}(s),s_0^{[\ell]}\big)\circ d\boldsymbol{W}_0(s),\\
d\boldsymbol{X}_1^{[\ell]}(s)&=\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{X}_1^{[\ell]}(s),\boldsymbol{X}_0^{[\ell]}(s),s_1^{[\ell]}\big)\,ds+\\
&\quad+\boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{X}_1^{[\ell]}(s),\boldsymbol{X}_0^{[\ell]}(s),s_1^{[\ell]}\big)\circ d\boldsymbol{W}_1(s),\\
&\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\\
d\boldsymbol{X}_N^{[\ell]}(s)&=\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{X}_N^{[\ell]}(s),\boldsymbol{X}_{N-1}^{[\ell]}(s),s_N^{[\ell]}\big)\,ds+\\
&\quad+\boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{X}_N^{[\ell]}(s),\boldsymbol{X}_{N-1}^{[\ell]}(s),s_N^{[\ell]}\big)\circ d\boldsymbol{W}_N(s).
\end{aligned}$$

Тогда плотность распределения случайного вектора $\boldsymbol{Z}_N(s)$ будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial\tilde{p}_N^{[\ell]}(\boldsymbol{z}_N,s)}{\partial s}=\mathbb{L}_N^{[\ell]}\big[\tilde{p}_N^{[\ell]}(\boldsymbol{z}_N,s)\big],$$
$$\tilde{p}_N^{[\ell]}(\boldsymbol{z}_N,0)=\tilde{p}_{N-1}^{[\ell]}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_N,\tau^{[\ell]})\,\delta(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}_{-1}).$$

В этом уравнении

$$\mathbb{L}_N^{[\ell]}\big[\tilde{p}_N^{[\ell]}\big]=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n(N+2)}\frac{\partial^2\big(b_{Nij}^{[\ell]}\tilde{p}_N^{[\ell]}\big)}{\partial z_{Ni}\,\partial z_{Nj}}-\sum_{i=1}^{n(N+2)}\frac{\partial\big(a_{Ni}^{[\ell]}\,\tilde{p}_N^{[\ell]}\big)}{\partial z_{Ni}},$$

$$a_{Ni}^{[\ell]} = f_{Ni}^{[\ell]} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n(N+2)}\sum_{k=1}^{m(N+2)} \frac{\partial g_{Nik}^{[\ell]}}{\partial z_{Nj}}\, g_{Njk}^{[\ell]}, \qquad b_{Nij}^{[\ell]} = \sum_{k=1}^{m(N+2)} g_{Nik}^{[\ell]}\, g_{Njk}^{[\ell]},$$

$$\boldsymbol{f}_N^{[\ell]}(\boldsymbol{z}_N, s) = \{f_{Ni}^{[\ell]}\} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O}_n \\ \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_{-1}, s_0^{[\ell]}\big) \\ \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_0, s_1^{[\ell]}\big) \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}_N, \boldsymbol{x}_{N-1}, s_N^{[\ell]}\big) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}_N^{[\ell]}(\boldsymbol{z}_N, s) = \{g_{Nik}^{[\ell]}\} =$$

$$= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \ldots & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_{-1}, s_0^{[\ell]}\big) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \ldots & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_0, s_1^{[\ell]}\big) & \ldots & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots. \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \ldots & \boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{x}_N, \boldsymbol{x}_{N-1}, s_N^{[\ell]}\big) \end{bmatrix}.$$

Оценка характеристик

Получить необходимые условные моментные характеристики можно воспользовавшись как построенными ФПК–уравнениями, так и напрямую получить ОДУ для этих моментных функций.

Обозначим через

$$\widetilde{m}_{q\alpha_q}^{[\ell]}(s) = \mathbb{E}\big[z_q^{\alpha_q}\big] = \mathbb{E}\Big[z_{q1}^{\alpha_{q1}} z_{q2}^{\alpha_{q2}} \ldots z_{q,n(q+1)}^{\alpha_{q,n(q+1)}}\Big] =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} (q+1) \int\limits_{\mathbb{R}^n} z_q^{\alpha_q}\, \tilde{p}_q^{[\ell]}(\boldsymbol{z}_q, s)\, d\boldsymbol{x}_0 \ldots d\boldsymbol{x}_q$$

смешанную моментную функцию порядка

$$|\alpha_q| = \alpha_{q1} + \alpha_{q2} + \ldots + \alpha_{q,n(q+1)}$$

($\alpha_q = \{\alpha_{q1}, \alpha_{q2}, \ldots, \alpha_{q,n(q+1)}\}$, $\alpha_{qi} \geqslant 0$). При этом у выделенных моментов нужно заменить локальное время s на истинное.

В первом случае достаточно последовательно на участках $\Delta_q^{[\ell]}$, $q = 0$, 1, 2, ..., $N_T^{[\ell]}$, вычислить только требуемые моментные функции $m_{q\overline{\alpha}_q}^{[\ell]}(s)$, представляющие моменты вектора состояния $\boldsymbol{X}^{[\ell]}(t)$ до некоторого порядка ($|\overline{\alpha}_q| \leqslant K_0$):

$$\overline{\alpha}_q = \{0, \ldots, 0, \overline{\alpha}_{q,q\,n+1}, \overline{\alpha}_{q,q\,n+2}, \ldots, \overline{\alpha}_{q,n(q+1)}\}.$$

К сожалению, получить решение многомерного ФПК–уравнения в неограниченной области с приемлемой точностью даже на современных компьютерах удается лишь в редких случаях.

Во втором случае необходимо шаг за шагом на участках $\Delta_q^{[\ell]}$, $q = 0, 1, 2, \ldots, N_T^{[\ell]}$, строить и решать последовательность систем уравнений увеличивающейся размерности следующего вида:

$$\dot{\widetilde{m}}^{[\ell]}_{q\alpha_q}(s) = \sum_{i=1}^{n(q+1)} \alpha_{qi}\, \mathbb{E}\Big[a_{qi}^{[\ell]}\, z_q^{\alpha_q - e_i}\Big] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n(q+1)} \alpha_{qi}(\alpha_{qi}-1)\, \mathbb{E}\Big[b_{qii}^{[\ell]}\, z_q^{\alpha_q - 2e_i}\Big] + \\ + \sum_{i=1}^{n(q+1)-1} \sum_{j=i+1}^{n(q+1)} \alpha_{qi}\, \alpha_{qj}\, \mathbb{E}\Big[b_{qij}^{[\ell]}\, z_q^{\alpha_q - e_i - e_j}\Big],$$

а затем, как и выше, отобрать из всех только требуемые моментные функции, исключив вспомогательные.

Кроме собственно вывода уравнений для конкретных нелинейных систем, в процессе которого обязательно потребуется проводить процедуру урезания числа моментных функций [236], технически сложной проблемой на этом пути является реализация схемы задания начальных условий для неизвестных функций $m^{[\ell]}_{q\alpha_q}(s)$ при $s = 0$ по участкам. Продемонстрируем эту схему для первых двух этапов и $n = 2$:

$$\widetilde{m}^{[\ell]}_{1,\alpha_{01}\alpha_{02}\alpha_{11}\alpha_{12}}(0) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} h_1(x_{01}, x_{02})\, \bar{p}^{\,0}(x_{01}, x_{02})\, dx_{01}\, dx_{02} \equiv \\ \equiv \bar{m}^0_{\alpha_{01}+\alpha_{11},\alpha_{02}+\alpha_{12}},$$

где $h_1(x_{01}, x_{02}) = x_{01}^{\alpha_{01}+\alpha_{11}}\, x_{02}^{\alpha_{02}+\alpha_{12}}$;

$$\widetilde{m}^{[\ell]}_{2,\alpha_{01}\alpha_{02}\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{22}}(0) = \int\limits_{\mathbb{R}^6} z_2^{\alpha_2}\, \tilde{p}_2^{[\ell]}(\boldsymbol{z}_2, 0)\, d\boldsymbol{z}_2 = \\ = \int\limits_{\mathbb{R}^6} z_2^{\alpha_2}\, \tilde{p}_1^{[\ell]}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \tau^{[\ell]})\, \delta(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0)\, d\boldsymbol{z}_2 = \\ = \int\limits_{\mathbb{R}^4} h_2(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)\, \tilde{p}_1^{[\ell]}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \tau^{[\ell]})\, d\boldsymbol{x}_1\, d\boldsymbol{x}_2 = \widetilde{m}^{[\ell]}_{1,\alpha_{01}+\alpha_{11},\alpha_{02}+\alpha_{12},\alpha_{21}\alpha_{22}}(\tau^{[l\,]}),$$

где

$$h_2(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = x_{11}^{\alpha_{01}+\alpha_{11}}\, x_{12}^{\alpha_{02}+\alpha_{12}}\, x_{21}^{\alpha_{21}}\, x_{22}^{\alpha_{22}}.$$

Если бы вычисления для обоих случаев можно было выполнить с $\tau^{[\ell]}$ как символьным параметром, то для расчета безусловных плотностей вероятности и моментных функций были бы пригодны следующие соотношения:

$$\tilde{p}_q(\boldsymbol{z}_q, s) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{p}_q^{[\ell]}(\boldsymbol{z}_q, s)\, d\mathcal{F}_{\mathcal{T}}(\tau), \qquad \widetilde{m}_{q\alpha_q}(s) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{m}_{q\alpha_q}^{[\ell]}(s)\, d\mathcal{F}_{\mathcal{T}}(\tau).$$

Как правило, даже для не очень сложных задач указанная процедура невозможна. Поэтому вероятностное усреднение должно быть заменено статистическим. А именно, будем проводить серию из M моделирований, состоящих в компьютерном разыгрывании СВ $\mathcal{T}$, которая в этих симулированиях будет принимать значения $\widehat{\tau}^{[\ell]}$, $\ell = 1, 2, ..., M$. Если оценки для условных векторов состояния, плотностей вероятности и моментных функций для $\mathcal{T} = \widehat{\tau}^{[\ell]}$ обозначить так:

$$\widehat{\boldsymbol{X}}^{[\ell]}(t) = \boldsymbol{X}_{\mathcal{T}=\widehat{\tau}^{[\ell]}}(t), \quad \widehat{\tilde{p}}_q^{[\ell]}(\boldsymbol{z}_q, s) = \tilde{p}_q^{[\ell]}(\boldsymbol{z}_q, s)\Big|_{\mathcal{T}=\widehat{\tau}^{[\ell]}},$$
$$\widehat{\widetilde{m}}_{q\alpha_q}^{[\ell]}(s) = \widetilde{m}_{q\alpha_q}^{[\ell]}(s)\Big|_{\mathcal{T}=\widehat{\tau}^{[\ell]}},$$

то расчетные формулы для оценок безусловных их аналогов примут следующие формы:

$$\widehat{\boldsymbol{X}}(t) = \frac{1}{M}\sum_{\ell=1}^{M} \widehat{\boldsymbol{X}}^{[\ell]}(t), \quad \widehat{\tilde{p}}_q(\boldsymbol{z}_q, s) = \frac{1}{M}\sum_{\ell=1}^{M} \widehat{\tilde{p}}_q^{[\ell]}(\boldsymbol{z}_q, s), \tag{2.2.185}$$
$$\widehat{\widetilde{m}}_{q\alpha_q}(s) = \frac{1}{M}\sum_{\ell=1}^{M} \widehat{\widetilde{m}}_{q\alpha_q}^{[\ell]}(s).$$

В заключение этого подпункта заметим, что существует достаточно много ситуаций, когда построить уравнения даже для моментных функций по СДПУ (2.2.184) затруднительно, и основным инструментом количественного анализа становятся методы прямого численного интегрирования таких уравнений. Определим такую процедуру в рамках изложенной выше схемы. С целью достижения приемлемого по точности результата разобьем точками $\bar{t}_{qk}^{[\ell]}$:

$$\bar{t}_{qk}^{[\ell]} = t_{q-1}^{[\ell]} + k\, h^{[\ell]}, \qquad k = 0, 1, ..., L^{[\ell]}$$

($L^{[\ell]}$ – положительное целое) каждый участок $\Delta_q^{[\ell]}$ на части настолько малой длины $h^{[\ell]} = (t_q^{[\ell]} - t_{q-1}^{[\ell]})/L^{[\ell]}$, чтобы в рамках этих частей вектор $\boldsymbol{X}^{[\ell]}(t)$ можно было бы считать неизменным, т.е. векторной случайной величиной. Обозначим через $\widetilde{\boldsymbol{X}}_\jmath^{[\ell]}$ значения приближенного решения уравнения (2.2.184) в точке $\bar{t}_{qk}^{[\ell]}$, где $\jmath = q\,L^{[\ell]} + k$.

Тогда модификацию хорошо известной явной одноточечной схемы Эйлера–Маруямы [742] для вычисления реализации $\widetilde{\boldsymbol{x}}_\jmath$ вектора $\widetilde{\boldsymbol{X}}_\jmath$ из этих уравнений можно будет записать так:

$$\widetilde{\boldsymbol{x}}_{\jmath+1}^{[\ell]} = \widetilde{\boldsymbol{x}}_\jmath^{[\ell]} + h^{[\ell]}\,\boldsymbol{f}\big(\widetilde{\boldsymbol{x}}_\jmath^{[\ell]}, \widetilde{\boldsymbol{x}}_{\jmath-L^{[\ell]}}^{[\ell]}, t_\jmath^{[\ell]}\big) + \boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\widetilde{\boldsymbol{x}}_\jmath^{[\ell]}, \widetilde{\boldsymbol{x}}_{\jmath-L^{[\ell]}}^{[\ell]}, t_\jmath^{[\ell]}\big)\,(h^{[\ell]})^{1/2}\Delta\boldsymbol{w}_{k+1}^{[\ell]},$$

$$\Delta\boldsymbol{w}_{\jmath+1}^{[\ell]} = \boldsymbol{w}^{[\ell]}(t_{\jmath+1}^{[\ell]}) - \boldsymbol{w}^{[\ell]}(t_\jmath^{[\ell]}), \quad \jmath = L^{[\ell]}, ..., L^{[\ell]}(N_T^{[\ell]}+1) - 1,$$

$$\widetilde{\boldsymbol{x}}_\jmath^{[\ell]} = \widetilde{\boldsymbol{\xi}}^{[\ell]}, \quad \jmath = 0, 1, ..., L^{[\ell]},$$

где $\widetilde{\boldsymbol{\xi}}^{[\ell]}$ – результат статистического разыгрывания векторной СВ $\boldsymbol{\Xi}$ в ℓ-м моделировании, $\Delta\boldsymbol{w}_{\jmath+1}^{[\ell]}$ – величина, рассчитанная с помощью датчика псевдослучайных стандартных нормально расределенных чисел. После расчета всех M временны́х разверток $\{\widetilde{\boldsymbol{x}}_\jmath^{[\ell]}\}$, $\ell = \overline{1, M}$, $\jmath = 0,\ 1,\ ...,\ L^{[\ell]}(N_T^{[\ell]}+1)$ с помощью формул типа (2.2.185) можно определить оценки всех необходимых вероятностных характеристик вектора состояния, например, оценки математического ожидания и дисперсии компоненты $X_i(t)$ вектора состояния будут выглядеть так:

$$\widehat{m}_{i\jmath} = \frac{1}{M}\sum_{\ell=1}^{M} \widetilde{x}_{i\jmath}^{[\ell]}, \qquad \widehat{\mathcal{D}}_{i\jmath} = \frac{1}{M-1}\sum_{\ell=1}^{M}\big(\widetilde{x}_{i,\jmath}^{[\ell]} - \widehat{m}_{i\jmath}\big)^2, \tag{2.2.186}$$

а для аппроксимации плотностей вероятности можно применять ядерные оценки [122].

Замечание. В общем случае $\bar{t}_{qk}^{[\ell]}$ для разных ℓ совпадать не будут. При малом расхождении различия можно игнорировать, а при относительно большом для приведения вычисленных величин к единой сетке предлагается использовать интерполяцию.

Нелинейные детерминистические системы со случайными запаздываниями в виде случайных величин

Самый простой вариант расширения пространства может быть применен в случае, когда исследуемая система со случайным запаздыванием

является детерминистической, т.е.

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}(t), \boldsymbol{X}(t-\mathcal{T}), t), \qquad t_0 < t \leqslant T < +\infty. \tag{2.2.187}$$

Как и выше, предположим, что при $t \leqslant t_0$ вектор состояния $\boldsymbol{X}(t)$ п.н. совпадает с векторной случайной величиной (СВ) с известными вероятностными характеристиками.

Заметим, что при фиксировании возможных значений τ СВ $\mathcal{T}$ и $\boldsymbol{\xi}$ СВ $\boldsymbol{\Xi}$ система (2.2.187) превращается в систему детерминистических ОДРУ с постоянными запаздыванием τ и начальным условием $\boldsymbol{\Xi}$, что позволяет применить изложенную выше схему для вычисления необходимых статистических характеристик векторного случайного процесса $\boldsymbol{X}(t)$. При этом в качестве численного интегратора можно выбрать любую стандартную схему для систем ОДУ, а для получения оценок характеристик – применить формулы типа (2.2.186).

Линейные стохастические системы с запаздываниями в виде случайных величин

Воспользовавшись предположениями и обозначениями из предыдущего подпункта, если не оговорено противное, рассмотрим систему СОДРУ вида

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{\mathcal{B}}(t)\,\boldsymbol{X}(t-\mathcal{T}) + \boldsymbol{c}(t) + \boldsymbol{\mathcal{H}}(t)\,\boldsymbol{V}(t), \qquad t_0 < t \leqslant T < +\infty, \tag{2.2.188}$$

где $\boldsymbol{c}(t) = \{c_i(t)\}^{\mathsf{T}} : (t_0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^n$ и $\boldsymbol{\mathcal{A}} = \{a_{ij}\}, \boldsymbol{\mathcal{B}} = \{b_{ij}\} : (t_0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\mathcal{H}} = \{h_{ij}\} : (t_0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ – детерминининистические векторная и матричные функции соответственно.

Учитывая, что для каждого возможного значения τ СВ $\mathcal{T}$ система (2.2.188) со случайным запаздыванием $\mathcal{T}$ превращается в линейную систему СОДРУ с постоянным неслучайным запаздыванием τ, а следовательно, при практически любом распределении $\boldsymbol{\Xi}$ с течением времени происходит нормализация процесса $\boldsymbol{X}(t)$, что позволяет в рамках настоящего исследования ограничиться оценкой функций математического ожидания $\boldsymbol{m}_X(t) = \mathbb{E}[\boldsymbol{X}(t)]$ и ковариаций $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}(t) = \mathbb{E}\left[\mathring{\boldsymbol{X}}(t)\,\mathring{\boldsymbol{X}}^{\mathsf{T}}(t)\right]$ векторного случайного процесса $\boldsymbol{X}(t)$, где $\mathring{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{X}(t) - \boldsymbol{m}_X(t)$, и применить сочетание метода шагов и схемы расширения пространства состояния.

Как и выше, рассмотрим последовательность полуотрезков $\Delta_q^{[\ell]}$, $q = -1, 0, 1, 2, \ldots, N_T^{[\ell]}$.

0°. Стартуем с $\Delta_{-1}^{[\ell]}$ и $\Delta_{0}^{[\ell]}$. Определенный на этих полуотрезках случайный векторный процесс $\boldsymbol{Z}_0^{[\ell]}(s)$ удовлетворяет системе СОДУ:

$$\dot{\boldsymbol{X}}_{-1}^{[\ell]}(s) = 0,$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}_{0}^{[\ell]}(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}(s_0^{[\ell]})\,\boldsymbol{X}_0^{[\ell]}(s) + \boldsymbol{\mathcal{B}}(s_0^{[\ell]})\,\boldsymbol{X}_{-1}^{[\ell]}(s) + \boldsymbol{c}(s_0^{[\ell]}) + \boldsymbol{\mathcal{H}}(s_0^{[\ell]})\,\boldsymbol{V}_0(s).$$

1°. Рассмотрим поведение системы на полуотрезках $\Delta_{-1}^{[\ell]}$, $\Delta_{0}^{[\ell]}$ и $\Delta_{1}^{[\ell]}$. СОДУ для вычисления вектора $\operatorname{col}\big(\boldsymbol{X}_{-1}(s), \boldsymbol{X}_0(s), \boldsymbol{X}_1(s)\big)$ можно представить так:

$$\dot{\boldsymbol{X}}_{-1}^{[\ell]}(s) = 0,$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}_{0}^{[\ell]}(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}(s_0^{[\ell]})\,\boldsymbol{X}_0^{[\ell]}(s) + \boldsymbol{\mathcal{B}}(s_0^{[\ell]})\,\boldsymbol{X}_{-1}^{[\ell]}(s) + \boldsymbol{c}(s_0^{[\ell]}) + \boldsymbol{\mathcal{H}}(s_0^{[\ell]})\,\boldsymbol{V}_0(s),$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}_{1}^{[\ell]}(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}(s_1^{[\ell]})\,\boldsymbol{X}_1^{[\ell]}(s) + \boldsymbol{\mathcal{B}}(s_1^{[\ell]})\,\boldsymbol{X}_{0}^{[\ell]}(s) + \boldsymbol{c}(s_1^{[\ell]}) + \boldsymbol{\mathcal{H}}(s_1^{[\ell]})\,\boldsymbol{V}_1(s).$$

... ...

N°. Рассмотрим временные полуотрезки $\Delta_{-1}^{[\ell]}$, $\Delta_{0}^{[\ell]}$, $\Delta_{1}^{[\ell]}$, ..., $\Delta_{N}^{[\ell]}$ ($N = N^{[\ell]}$). Построим систему СОДУ для вектора $\boldsymbol{Z}_N(s)$ в следующем виде:

$$\dot{\boldsymbol{X}}_{-1}^{[\ell]}(s) = 0,$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}_{0}^{[\ell]}(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}(s_0^{[\ell]})\,\boldsymbol{X}_0^{[\ell]}(s) + \boldsymbol{\mathcal{B}}(s_0^{[\ell]})\,\boldsymbol{X}_{-1}^{[\ell]}(s) + \boldsymbol{c}(s_0^{[\ell]}) + \boldsymbol{\mathcal{H}}(s_0^{[\ell]})\,\boldsymbol{V}_0(s),$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}_{1}^{[\ell]}(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}(s_1^{[\ell]})\,\boldsymbol{X}_1^{[\ell]}(s) + \boldsymbol{\mathcal{B}}(s_1^{[\ell]})\,\boldsymbol{X}_{0}^{[\ell]}(s) + \boldsymbol{c}(s_1^{[\ell]}) + \boldsymbol{\mathcal{H}}(s_1^{[\ell]})\,\boldsymbol{V}_1(s),$$

... ...

$$\dot{\boldsymbol{X}}_{N}^{[\ell]}(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}(s_N^{[\ell]})\,\boldsymbol{X}_N^{[\ell]}(s) + \boldsymbol{\mathcal{B}}(s_1^{[\ell]})\,\boldsymbol{X}_{N-1}^{[\ell]}(s) + \boldsymbol{c}(s_N^{[\ell]}) + \boldsymbol{\mathcal{H}}(s_N^{[\ell]})\,\boldsymbol{V}_N(s).$$

Оценка моментных функций.Получим необходимые условные моментные функции из ОДУ для этих моментных функций, для чего построим требуемые уравнения на основе цепочки уравнений для векторных случайных процессов $\boldsymbol{Z}_q^{[\ell]}(s)$.

Для функций условного математического ожидания

$$\widetilde{m}_{Z_q}^{[\ell]}(s) = \operatorname{col}\big(m_{X_{-1}}^{[\ell]}(s), m_{X_0}^{[\ell]}(s), m_{X_1}^{[\ell]}(s), ..., m_{X_q}^{[\ell]}(s)\big)$$

на участке $\Delta_q^{[\ell]}$, $q = 0, 1, 2, ..., N_T^{[\ell]}$, система управляющих уравнений будет выглядеть так:

$$\dot{\widetilde{m}}_{Z_q}^{[\ell]}(s) = \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_q(s)\,\widetilde{m}_{Z_q}^{[\ell]}(s) + \widetilde{\boldsymbol{c}}_q(s),$$

а для условных функций ковариации подобная система – так:

$$\widetilde{\mathcal{K}}^{[\ell]}_{Z_qZ_q}(s)=\begin{bmatrix}\mathcal{K}^{[\ell]}_{X_{-1}X_{-1}}(s) & \mathcal{K}^{[\ell]}_{X_{-1}X_0}(s) & \mathcal{K}^{[\ell]}_{X_{-1}X_1}(s) & \dots & \mathcal{K}^{[\ell]}_{X_{-1}X_q}(s)\\ \mathcal{K}^{[\ell]}_{X_0X_{-1}}(s) & \mathcal{K}^{[\ell]}_{X_0X_0}(s) & \mathcal{K}^{[\ell]}_{X_0X_1}(s) & \dots & \mathcal{K}^{[\ell]}_{X_0X_q}(s)\\ \mathcal{K}^{[\ell]}_{X_1X_{-1}}(s) & \mathcal{K}^{[\ell]}_{X_1X_0}(s) & \mathcal{K}^{[\ell]}_{X_1X_1}(s) & \dots & \mathcal{K}^{[\ell]}_{X_1X_q}(s)\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \mathcal{K}^{[\ell]}_{X_qX_{-1}}(s) & \mathcal{K}^{[\ell]}_{X_qX_0}(s) & \mathcal{K}^{[\ell]}_{X_qX_1}(s) & \dots & \mathcal{K}^{[\ell]}_{X_qX_q}(s)\end{bmatrix}$$

на том же участке –

$$\dot{\widetilde{\mathcal{K}}}^{[\ell]}_{Z_qZ_q}(s)=\widetilde{\mathcal{A}}_q(s)\,\widetilde{\mathcal{K}}^{[\ell]}_{Z_qZ_q}(s)+\bigl[\widetilde{\mathcal{A}}_q(s)\,\widetilde{\mathcal{K}}^{[\ell]}_{Z_qZ_q}(s)\bigr]^{\mathsf{T}}+\widetilde{\mathcal{H}}_q(s)\,\widetilde{\mathcal{H}}^{\mathsf{T}}_q(s),$$

где

$$\widetilde{\mathcal{A}}^{[\ell]}_q(s)=\begin{bmatrix}\mathcal{O}_{n\times n} & \mathcal{O}_{n\times n} & \mathcal{O}_{n\times n} & \dots & \mathcal{O}_{n\times n} & \mathcal{O}_{n\times n}\\ \mathcal{B}(s^{[\ell]}_0) & \mathcal{A}(s^{[\ell]}_0) & \mathcal{O}_{n\times n} & \dots & \mathcal{O}_{n\times n} & \mathcal{O}_{n\times n}\\ \mathcal{O}_{n\times n} & \mathcal{B}(s^{[\ell]}_1) & \mathcal{A}(s^{[\ell]}_1) & \dots & \mathcal{O}_{n\times n} & \mathcal{O}_{n\times n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \mathcal{O}_{n\times n} & \mathcal{O}_{n\times n} & \mathcal{O}_{n\times n} & \dots & \mathcal{B}(s^{[\ell]}_q) & \mathcal{A}(s^{[\ell]}_q)\end{bmatrix},$$

$$\widetilde{\mathcal{H}}^{[\ell]}_q(s)=\begin{bmatrix}\mathcal{O}_{n\times m} & \mathcal{O}_{n\times m} & \mathcal{O}_{n\times m} & \dots & \mathcal{O}_{n\times m}\\ \mathcal{O}_{n\times m} & \mathcal{H}(s^{[\ell]}_0) & \mathcal{O}_{n\times m} & \dots & \mathcal{O}_{n\times m}\\ \mathcal{O}_{n\times m} & \mathcal{O}_{n\times m} & \mathcal{H}(s^{[\ell]}_1) & \dots & \mathcal{O}_{n\times m}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \mathcal{O}_{n\times m} & \mathcal{O}_{n\times m} & \mathcal{O}_{n\times m} & \dots & \mathcal{H}(s^{[\ell]}_q)\end{bmatrix}.$$

После решения этих систем, как и выше, необходимо отобрать из всех только требуемые моментные функции, исключив вспомогательные.

Если бы эти вычисления можно было выполнить с $\tau^{[\ell]}$ как символьным параметром, то для расчета безусловных математического ожидания и ковариаций были бы пригодны следующие соотношения:

$$\widetilde{m}_{Z_q}(s)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{m}^{[\ell]}_{Z_q}(s)\,d\mathcal{F}_{\mathcal{T}}(\tau),\qquad \widetilde{\mathcal{K}}_{Z_qZ_q}(s)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{\mathcal{K}}^{[\ell]}_{Z_qZ_q}(s)\,d\mathcal{F}_{\mathcal{T}}(\tau).$$

Как уже было отмечено выше, даже для не очень сложных задач такая процедура невозможна. Поэтому и здесь вероятностное усреднение должно быть заменено статистическим. А именно, будем проводить серию из M моделирований, состоящих в компьютерном разыгрывании СВ $\mathcal{T}$,

которая в этих симулированиях будет принимать значения $\widehat{\tau}^{[\ell]}$, $\ell = 1, 2, ..., M$. Если оценки для условных математического ожидания и ковариаций для $\mathcal{T} = \widehat{\tau}^{[\ell]}$ обозначить так:

$$\widehat{\widetilde{m}}^{[\ell]}_{Z_q}(s) = \widetilde{m}^{[\ell]}_{Z_q}(s)\Big|_{\mathcal{T}=\widehat{\tau}^{[\ell]}}, \qquad \widehat{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{K}}}}^{[\ell]}_{Z_q Z_q}(s) = \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^{[\ell]}_{Z_q Z_q}(s)\Big|_{\mathcal{T}=\widehat{\tau}^{[\ell]}},$$

то расчетные формулы для оценок безусловных их аналогов примут следующие формы:

$$\widehat{\widetilde{m}}_{Z_q}(s) = \frac{1}{M}\sum_{\ell=1}^{M} \widehat{\widetilde{m}}^{[\ell]}_{Z_q}(s), \qquad \widehat{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{K}}}}_{Z_q Z_q}(s) = \frac{1}{M}\sum_{\ell=1}^{M} \widehat{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{K}}}}^{[\ell]}_{Z_q Z_q}(s). \qquad (2.2.189)$$

Линейные детерминистические системы со случайными запаздываниями в виде случайных величин

Еще один простой вариант расширения пространства может быть применен в случае, когда исследуемая линейная система со случайным запаздыванием детерминистическая, т.е.

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{\mathcal{B}}(t)\,\boldsymbol{X}(t-\mathcal{T}) + \boldsymbol{c}(t), \quad t_0 < t \leqslant T < +\infty,$$
$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{\Xi}, \quad t \leqslant t_0.$$

При фиксировании возможных значений τ СВ $\mathcal{T}$ и $\boldsymbol{\xi}$ СВ $\boldsymbol{\Xi}$ эта система превращается в систему линейных детерминистических ДРУ с постоянными запаздыванием τ и начальным условием $\boldsymbol{\Xi}$, что позволяет применить рассматриваемую схему для вычисления необходимых статистических характеристик векторного случайного процесса $\boldsymbol{X}(t)$. При этом, как и в нелинейном случае, в качестве численного интегратора можно выбрать любую стандартную схему для ОДУ, а для получения оценок характеристик – применить формулы типа (2.2.189).

Выше представлен аппарат анализа линейных и нелинейных систем СДУ со случайными запаздываниями в виде случайных величин. Но необходимо отметить, что своей разработки требует направление построения удобной процедуры вывода уравнений для моментных уравнений более высокого порядка (выше второго) для линейных систем СОДУ с запаздываниями рассмотренного типа. Необходимость такой разработки диктуется тем, что наличие указанных запаздываний приводит к негауссовости вектора состояния $\boldsymbol{X}(t)$, а следовательно, ограничиться только функциями математического ожидания и ковариаций для более или менее адекватного описания $\boldsymbol{X}(t)$ не представляется возможным.

2.2.6.2. Системы с запаздываниями в форме дискретных цепей Маркова

Нелинейные стохастические системы

Рассмотрим систему СОДРУ (в смысле Стратоновича [288]) вида

$$d\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{X}(t), \boldsymbol{X}(t-\mathcal{T}(t)), t\big)\,dt + \\ + \boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{X}(t), \boldsymbol{X}(t-\mathcal{T}(t)), t\big) \circ d\boldsymbol{W}(t), \quad t_0 < t \leqslant T < +\infty, \tag{2.2.190}$$

$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{\Xi}, \qquad t \leqslant t_0, \tag{2.2.191}$$

где точкой сверху обозначена производная по времени t; $\boldsymbol{X}(\cdot) = \boldsymbol{X}_{\mathcal{T}(\cdot),\boldsymbol{\Xi}}(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, векторный случайный процесс (ВСП); $\boldsymbol{W}(\cdot) \in \mathbb{R}^m$ – вектор независимых стандартных винеровских процессов; $\boldsymbol{f} = \{f_i\}^{\intercal}$: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times (t_0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^n$ и $\boldsymbol{\mathcal{G}} = \{g_{ij}\} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times (t_0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ – детерминированистические векторная и матричная функции соответственно; $\boldsymbol{\Xi}$ – векторная случайная величина (ВСВ) с известными вероятностными характеристиками, в частности, с заданной плотностью вероятности $\bar{p}^{\,0}(\cdot)$; $\mathbb{R}^r$ – стандартное евклидово пространство размерности r, $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

Пусть $\mathbb{S}$ – однородная дискретная цепь Маркова, которая управляет случайным процессом–запаздыванием $\mathcal{T}(t)$ и обладает следующими свойствами:

1) в любой момент времени $t \geqslant t_0$ цепь $\mathbb{S}$ может находиться в одном из состояний S_1, S_2, ..., S_M, $1 \leqslant M < +\infty$;

2) переходы цепи $\mathbb{S}$ из состояния в состояние могут происходить только в моменты времени $t_k = t_0 + k \cdot h$, $h > 0$, $k = 0, 1, 2, ...$;

3) изменения состояния цепи описываются матрицей переходных вероятностей $\mathbb{P} = \{\pi_{ij}\}$, $i, j = 1, 2, ..., M$, где

$$\pi_{ij} = \mathcal{P}(\mathbb{S} = S_j \,|\, \mathbb{S} = S_i)\,, \qquad \pi_{ij} \geqslant 0, \qquad \sum_{j=1}^{M} \pi_{ij} = 1, \qquad i = \overline{1, M}\,,$$

$\mathcal{P}(\cdot\,|\,\cdot)$ – условная вероятность события;

4) вектор вероятностей $\boldsymbol{p}_{\mathbb{S}k}$ нахождения системы $\mathbb{S}$ в состояниях S_1, S_2, ..., S_M при $t \in [t_k, t_{k+1})$, $k = 0, 1, 2, ...$, вычисляется из соотношения $\boldsymbol{p}_{\mathbb{S},k+1} = \mathbb{P}^{\intercal}\boldsymbol{p}_{\mathbb{S}k}$, причем $\boldsymbol{p}_{\mathbb{S}0}$ – заданный вектор начальных вероятностей нахождения системы $\mathbb{S}$ в состояниях S_1, S_2, ..., S_M в начальный момент времени $t = t_0$.

Свяжем с состояниями системы $\mathbb{S}$ реализации $\tau = \tau(t)$ случайного процесса $\mathcal{T}(t)$ следующим образом: $\tau(t) = q_i\,\tau_*$ $(0 \leqslant q_i \leqslant N_1 < +\infty)$, если

$\mathbb{S} = S_i$ при $t \in [t_k, t_{k+1})$, $k = 0, 1, 2, ..., i = 1, 2, ..., M$, где $\tau_* > 0$, $h = \bar{N} \cdot \tau_*$, $T - t_0 \leqslant N_2 \cdot \tau_*$, $t_* = t_0 - \tau_* N_1$, а $\bar{N} > 0$, $N_1 > 0$, $N_2 > 0$, q_i — целые числа.

Предположим, что векторное случайное возмущение $\boldsymbol{W}(t)$, случайный процесс $\mathcal{T}(t)$ и вектор $\boldsymbol{\Xi}$ независимы в совокупности, а решение задачи (2.2.190), (2.2.191) существует и единственно для каждого возможного значения $\boldsymbol{\xi}$ ВСВ $\boldsymbol{\Xi}$ и всех реализаций $\tau(t)$ СП $\mathcal{T}(t)$. Тогда задача исследования будет состоять в вычислении необходимых вероятностных и числовых характеристик векторного случайного процесса $\boldsymbol{X}(t)$.

Для того чтобы применить аналитический аппарат уравнения ФПК–уравнения для решения данной задачи, заметим, что для каждой возможной реализации $\tau(t)$ СП $\mathcal{T}(t)$ система СОДРУ (2.2.190) со случайным запаздыванием $\mathcal{T}(t)$ превращается в систему СОДРУ с кусочно-постоянным неслучайным запаздыванием $\tau(t)$, что позволяет применить схему, сочетающую классический метод шагов и расширение вектора состояния.

Итак, будем считать, что проводится серия из некоторого числа опытов, состоящих в разыгрывании значений $\boldsymbol{\xi}^{[\ell]}$ ВСВ $\boldsymbol{\Xi}$ и вероятностной структуры цепи $\mathbb{S}$, а следовательно, и СП $\mathcal{T}(t)$, который в этих опытах принимает форму функций $\tau^{[\ell]}(t)$, где ℓ — формальный индекс, определенный на, вообще говоря, несчетном множестве. Тогда условный вектор состояния для фиксированных значений $\boldsymbol{\Xi} = \boldsymbol{\xi}^{[\ell]}$ и $\mathcal{T}(t) = \tau^{[\ell]}(t)$ будем обозначать так:

$$\boldsymbol{X}^{[\ell]}(t) = \boldsymbol{X}_{\mathcal{T}(t)=\tau^{[\ell]}(t),\, \boldsymbol{\Xi}=\boldsymbol{\xi}^{[\ell]}}(t).$$

Для того чтобы изучить случайное изменение вектора $\boldsymbol{X}^{[\ell]}(t)$ при значениях времени $t > t_0$ посредством преобразования немарковского векторного процесса в марковский, расширим пространство состояний системы и для реализации этой процедуры введем дополнительные обозначения:

$$s \in [0, \tau_*], \quad \tau_r = t_0 + r \cdot \tau_*, \quad \Delta_r = (\tau_{r-1}, \tau_r],$$

$$r = -N_1 + 1, -N_1 + 2, ..., -1, 0, 1, 2, ..., N_2, \quad s_{r+1} = s + \tau_r,$$

$$\boldsymbol{X}_r^{[\ell]}(s) = \boldsymbol{X}(s_r), \quad \boldsymbol{W}_r(s) = \boldsymbol{W}(s_r), \quad p_r^{[\ell]}(\boldsymbol{x}, s) = p^{[\ell]}(\boldsymbol{x}, s_r),$$

$$p_1^{[\ell]}(\boldsymbol{x}, 0) = \bar{p}^{\,0}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{X}_{-N_1+1}^{[\ell]}(s) = \boldsymbol{X}_{-N_1+2}^{[\ell]}(s) = ... = \boldsymbol{X}_0^{[\ell]}(s) = \boldsymbol{\Xi},$$

$$\boldsymbol{Z}_0^{[\ell]}(s) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{X}_{-N_1+1}^{[\ell]}, \boldsymbol{X}_{-N_1+2}^{[\ell]}, ..., \boldsymbol{X}_0^{[\ell]}\big),$$

$$\boldsymbol{Z}_1^{[\ell]}(s) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{Z}_0^{[\ell]}(s), \boldsymbol{X}_1^{[\ell]}(s)\big), \quad \boldsymbol{Z}_2^{[\ell]}(s) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{Z}_1^{[\ell]}(s), \boldsymbol{X}_2^{[\ell]}(s)\big), \quad ...,$$

$$\boldsymbol{X}_r^{[\ell]}(0) = \boldsymbol{X}_{r-1}^{[\ell]}(\tau_*), \quad \boldsymbol{W}_r(0) = \boldsymbol{W}_{r-1}(\tau_*), \quad p_r^{[\ell]}(\boldsymbol{x}, 0) = p_{r-1}^{[\ell]}(\boldsymbol{x}, \tau_*),$$

$p(\cdot,\cdot)$ – одноточечная плотность вероятности. При этом реализацию последовательности запаздываний по полуинтервалам Δ_r, $0 < r \leqslant N_2$, обозначим через $\bar\tau^{[\ell]} = \{\bar q_{\ell 1}, \bar q_{\ell 2}, ..., \bar q_{\ell N_2}\}$, причем значения $\bar q_{\ell r}$ при $t \in [t_k, t_{k+1})$ одинаковы.

Рассмотрим последовательность полуотрезков Δ_r, $r = -N_1{+}1, -N_1{+}2, ..., -1, 0, 1, 2, ..., N_2$.

1°. Начнем с подпоследовательности Δ_{-N_1+1}, ..., Δ_0, Δ_1. Определенный на этой подпоследовательности ВСП $\boldsymbol{Z}_1^{[\ell]}(s)$ удовлетворяет системе СОДУ:

$$\dot{\boldsymbol{Z}}_0^{[\ell]}(s) = 0, \qquad \boldsymbol{Z}_0^{[\ell]}(0) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{\Xi}, \boldsymbol{\Xi}, ..., \boldsymbol{\Xi}\big),$$

$$d\boldsymbol{X}_1^{[\ell]}(s) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{X}_1^{[\ell]}(s), \boldsymbol{X}_{1-\bar q_{\ell 1}}^{[\ell]}(s), s_1\big)\,dt +$$

$$+\boldsymbol{\mathcal{G}}(\boldsymbol{X}_1^{[\ell]}(s), \boldsymbol{X}_{1-\bar q_{\ell 1}}^{[\ell]}(s), s_1\big) \circ d\boldsymbol{W}_1(s), \quad \boldsymbol{X}_1^{[\ell]}(0) = \boldsymbol{\Xi}$$

(здесь и далее в пределах пункта точкой обозначена производная по переменной s).

ФПК–уравнение для плотности вероятности расширенного вектора состояния $\boldsymbol{Z}_1^{[\ell]}(s)$ имеет вид

$$\frac{\partial \tilde p_1^{[\ell]}(\boldsymbol{z}_1, s)}{\partial s} = \mathbb{L}_1^{[\ell]} \tilde p_1^{[\ell]}(\boldsymbol{z}_1, s),$$

$$\tilde p_1^{[\ell]}(\boldsymbol{z}_1, 0) = \bar p^{\,0}(\boldsymbol{x}_1) \prod_{r=-N_1+1}^{0} \delta(\boldsymbol{x}_r - \boldsymbol{x}_1),$$

где

$$\mathbb{L}_1^{[\ell]} \tilde p_1^{[\ell]} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{J_1} \frac{\partial^2 \big(b_{1ij}^{[\ell]} \tilde p_1^{[\ell]}\big)}{\partial z_{1i} \partial z_{1j}} - \sum_{i=1}^{J_1} \frac{\partial \big(a_{1i}^{[\ell]} \tilde p_1^{[\ell]}\big)}{\partial z_{1i}},$$

$$a_{1i}^{[\ell]} = f_{1i}^{[\ell]} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{J_1} \sum_{k=1}^{K_1} \frac{\partial g_{1ik}^{[\ell]}}{\partial z_{1j}}\, g_{1jk}^{[\ell]}, \qquad b_{1ij}^{[\ell]} = \sum_{k=1}^{K_1} g_{1ik}^{[\ell]}\, g_{1jk}^{[\ell]},$$

$$\boldsymbol{f}_1^{[\ell]}(\boldsymbol{z}_1, s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O}_n \\ ... \\ \boldsymbol{O}_n \\ \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_{1-\bar q_{\ell 1}}, s_1\big) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}_1^{[\ell]}(\boldsymbol{z}_1,s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \ldots & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \ldots & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m}\\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \ldots & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_{1-\bar{q}_{\ell 1}},s_1\big)\end{bmatrix},$$

$$J_1=n\,(N_1+1),\qquad K_1=m\,(N_1+1).$$

2°. Проанализируем поведение системы на полуотрезках Δ_{-N_1+1}, ..., Δ_0, Δ_1 и Δ_2. СОДУ для вычисления вектора $\boldsymbol{Z}_2(s)$ можно представить так:

$$\dot{\boldsymbol{Z}}_0^{[\ell]}(s)=0,\qquad \boldsymbol{Z}_0^{[\ell]}(0)=\operatorname{col}\big(\boldsymbol{\Xi},\boldsymbol{\Xi},...,\boldsymbol{\Xi}\big),$$

$$d\boldsymbol{X}_1^{[\ell]}(s)=\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{X}_1^{[\ell]}(s),\boldsymbol{X}_{1-\bar{q}_{\ell 1}}^{[\ell]}(s),s_1\big)\,dt+$$

$$+\boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{X}_1^{[\ell]}(s),\boldsymbol{X}_{1-\bar{q}_{\ell 1}}^{[\ell]}(s),s_1\big)\circ d\boldsymbol{W}_1(s),\quad \boldsymbol{X}_1^{[\ell]}(0)=\boldsymbol{\Xi},$$

$$d\boldsymbol{X}_2^{[\ell]}(s)=\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{X}_2^{[\ell]}(s),\boldsymbol{X}_{2-\bar{q}_{\ell 2}}^{[\ell]}(s),s_2\big)\,dt+$$

$$+\boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{X}_2^{[\ell]}(s),\boldsymbol{X}_{2-\bar{q}_{\ell 2}}^{[\ell]}(s),s_2\big)\circ d\boldsymbol{W}_2(s),\quad \boldsymbol{X}_2^{[\ell]}(0)=\boldsymbol{X}_1^{[\ell]}(\tau_*).$$

Поэтому плотность распределения ВСП $\boldsymbol{Z}_2(s)$ будет удовлетворять ФПК–уравнению вида

$$\frac{\partial\tilde{p}_2^{[\ell]}(\boldsymbol{z}_2,s)}{\partial s}=\mathbb{L}_2^{[\ell]}\tilde{p}_2^{[\ell]}(\boldsymbol{z}_2,s),$$

$$\tilde{p}_2^{[\ell]}(\boldsymbol{z}_2,0)=\tilde{p}_1^{[\ell]}(\boldsymbol{x}_{-N_1+2},...,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\tau_*)\,\delta(\boldsymbol{x}_{-N_1+1}-\boldsymbol{x}_1),$$

где

$$\mathbb{L}_2^{[\ell]}\tilde{p}_2^{[\ell]}=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{J_2}\frac{\partial^2\big(b_{2ij}^{[\ell]}\,\tilde{p}_2^{[\ell]}\big)}{\partial z_{2i}\partial z_{2j}}-\sum_{i=1}^{J_2}\frac{\partial\big(a_{2i}^{[\ell]}\,\tilde{p}_2^{[\ell]}\big)}{\partial z_{2i}},$$

$$a_{2i}^{[\ell]}=f_{2i}^{[\ell]}+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{J_2}\sum_{k=1}^{K_2}\frac{\partial g_{2ik}^{[\ell]}}{\partial z_{2j}}\,g_{2jk}^{[\ell]},\quad b_{2ij}^{[\ell]}=\sum_{k=1}^{K_2}g_{2ik}^{[\ell]}\,g_{2jk}^{[\ell]},$$

$$\boldsymbol{f}_2^{[\ell]}(\boldsymbol{z}_2,s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{f}_1^{[\ell]}(\boldsymbol{z}_1,s)\\ \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_{2-\bar{q}_{\ell 2}},s_2\big)\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}_2^{[\ell]}(\boldsymbol{z}_2,s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{G}}_1^{[\ell]}(\boldsymbol{z}_1,s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{J_2\times m}\\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times K_2} & \boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_{2-\bar{q}_{\ell 2}},s_2\big)\end{bmatrix},$$

$$J_2=n\,(N_1+2),\qquad K_2=m\,(N_1+2).$$

... ...

$\mathbf{N}_2^\circ$. Рассмотрим временные полуотрезки Δ_{-N_1+1}, ..., Δ_0, Δ_1, ..., Δ_{N_2}. Построим систему СДУ для вектора $\boldsymbol{Z}_{N_2}(s)$ в виде

$$\dot{\boldsymbol{Z}}_0^{[\ell]}(s) = 0, \qquad \boldsymbol{Z}_0^{[\ell]}(0) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{\Xi}, \boldsymbol{\Xi}, ..., \boldsymbol{\Xi}\big),$$

$$d\boldsymbol{X}_1^{[\ell]}(s) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{X}_1^{[\ell]}(s), \boldsymbol{X}_{1-\bar{q}_{\ell 1}}^{[\ell]}(s), s_1\big)\, dt +$$

$$+\boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{X}_1^{[\ell]}(s), \boldsymbol{X}_{1-\bar{q}_{\ell 1}}^{[\ell]}(s), s_1\big) \circ d\boldsymbol{W}_1(s), \quad \boldsymbol{X}_1^{[\ell]}(0) = \boldsymbol{\Xi},$$

$$d\boldsymbol{X}_2^{[\ell]}(s) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{X}_2^{[\ell]}(s), \boldsymbol{X}_{2-\bar{q}_{\ell 2}}^{[\ell]}(s), s_2\big)\, dt +$$

$$+\boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{X}_2^{[\ell]}(s), \boldsymbol{X}_{2-\bar{q}_{\ell 2}}^{[\ell]}(s), s_2\big) \circ d\boldsymbol{W}_2(s), \quad \boldsymbol{X}_2^{[\ell]}(0) = \boldsymbol{X}_1^{[\ell]}(\tau_*),$$

... ...

$$d\boldsymbol{X}_{N_2}^{[\ell]}(s) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{X}_{N_2}^{[\ell]}(s), \boldsymbol{X}_{N_2-\bar{q}_{\ell N_2}}^{[\ell]}(s), s_{N_2}\big)\, dt +$$

$$+\boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{X}_{N_2}^{[\ell]}(s), \boldsymbol{X}_{N_2-\bar{q}_{\ell N_2}}^{[\ell]}(s), s_{N_2}\big) \circ d\boldsymbol{W}_{N_2}(s), \quad \boldsymbol{X}_{N_2}^{[\ell]}(0) = \boldsymbol{X}_{N_2-1}^{[\ell]}(\tau_*).$$

Тогда плотность распределения случайного вектора $\boldsymbol{Z}_{N_2}$ будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial \tilde{p}_{N_2}^{[\ell]}(\boldsymbol{z}_{N_2}, s)}{\partial s} = \mathbb{L}_{N_2}^{[\ell]} \tilde{p}_{N_2}^{[\ell]}(\boldsymbol{z}_{N_2}, s),$$

$$\tilde{p}_{N_2}^{[\ell]}(\boldsymbol{z}_{N_2}, 0) = \tilde{p}_{N_2-1}^{[\ell]}(\boldsymbol{x}_{-N_1+2}, ..., \boldsymbol{x}_{N_2-1}, \boldsymbol{x}_{N_2}, \tau_*)\, \delta(\boldsymbol{x}_{-N_1+1} - \boldsymbol{x}_1).$$

В этом уравнении

$$\mathbb{L}_{N_2}^{[\ell]} \tilde{p}_{N_2}^{[\ell]} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{J_{N_2}} \frac{\partial^2 \big(b_{N_2 ij}^{[\ell]}\, \tilde{p}_{N_2}^{[\ell]}\big)}{\partial z_{N_2 i} \partial z_{N_2 j}} - \sum_{i=1}^{J_{N_2}} \frac{\partial \big(a_{N_2 i}^{[\ell]}\, \tilde{p}_{N_2}^{[\ell]}\big)}{\partial z_{N_2 i}},$$

$$a_{N_2 i}^{[\ell]} = f_{N_2 i}^{[\ell]} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{J_{N_2}} \sum_{k=1}^{K_{N_2}} \frac{\partial g_{N_2 ik}^{[\ell]}}{\partial z_{N_2 j}}\, g_{N_2 jk}^{[\ell]}, \quad b_{N_2 ij}^{[\ell]} = \sum_{k=1}^{K_{N_2}} g_{N_2 ik}^{[\ell]}\, g_{N_2 jk}^{[\ell]},$$

$$\boldsymbol{f}_{N_2}^{[\ell]}(\boldsymbol{z}_{N_2}, s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_{N_2-1}^{[\ell]}(\boldsymbol{z}_{N_2-1}, s) \\ \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}_{N_2}, \boldsymbol{x}_{N_2-\bar{q}_{\ell N_2}}, s_{N_2}\big) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}_{N_2}^{[\ell]}(\boldsymbol{z}_{N_2}, s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{G}}_{N_2-1}^{[\ell]}(\boldsymbol{z}_{N_2-1}, s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{J_{N_2} \times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n \times K_{N_2}} & \boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_{N_2-\bar{q}_{\ell N_2}}, s_{N_2}\big) \end{bmatrix},$$

$$J_{N_2} = n\,(N_1 + N_2), \qquad K_{N_2} = m\,(N_1 + N_2).$$

Для определения необходимых условных моментных характеристик можно, с одной стороны, воспользоваться решениями построенных ФПК–уравнений, с другой – напрямую получить ОДУ для этих моментных функций.

Обозначим через

$$\widetilde{m}^{[\ell]}_{r\alpha_r}(s) = \mathbb{E}[z_r^{\alpha_r}] = \mathbb{E}\Big[\prod_{k=-k_1+1}^{k_2} z_{rk}^{\alpha_{rk}}\Big] =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{k_1+k_2}} z_r^{\alpha_r}\, \tilde{p}_r^{[\ell]}(\boldsymbol{z}_r, s)\, d\boldsymbol{z}_r, \quad k_1 = n\,N_1, \quad k_2 = n\,r,$$

смешанную моментную функцию порядка $|\alpha_r| = \alpha_{r,-k_1+1}+...+\alpha_{r,k_2}$ ($\alpha_r = \{\alpha_{r,-k_1+1}, ..., \alpha_{r,k_2}\}$, $\alpha_{rk} \geqslant 0$). При этом у выделенных моментов нужно заменить локальное время s на истинное.

В первом случае достаточно последовательно на участках Δ_r, $r = 1, 2, ..., N_2$, вычислить только требуемые функции $m^{[\ell]}_{r\overline{\alpha}_r}(s)$, представляющие собой моменты вектора состояния $\boldsymbol{X}^{[\ell]}(t)$ до некоторого порядка ($|\overline{\alpha}_r| \leqslant I$): $\overline{\alpha}_r = \{0, ..., 0, \overline{\alpha}_{r1}, \overline{\alpha}_{r2}, ..., \overline{\alpha}_{rk_2}\}$. К сожалению, получить решение многомерного ФПК–уравнения в неограниченной области с приемлемой точностью даже на современных компьютерах удаётся лишь в редких случаях.

Во втором случае необходимо шаг за шагом на участках Δ_r, $r = 1, 2, ..., N_2$, строить и решать последовательность систем уравнений увеличивающейся размерности следующего вида:

$$\dot{\tilde{m}}^{[\ell]}_{r\alpha_r}(s) =$$

$$= \Big\{ \sum_{i=1}^{k_1+k_2} \alpha_{ri}\, \mathbb{E}\Big[a^{[\ell]}_{ri}\, z_r^{\alpha_r - e_i}\Big] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k_1+k_2} \alpha_{ri}(\alpha_{ri}-1)\, \mathbb{E}\Big[b^{[\ell]}_{rii}\, z_r^{\alpha_r - 2e_i}\Big] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k_1+k_2-1} \sum_{j=i+1}^{k_1+k_2} \alpha_{ri}\,\alpha_{rj}\, \mathbb{E}\Big[b^{[\ell]}_{rij}\, z_r^{\alpha_r - e_i - e_j}\Big] \Big\}\Big|_{\boldsymbol{z}_r \to \boldsymbol{Z}_r},$$

$$e_i = \{\delta_{ik}\}, \quad k = 1, 2, ..., k_1 + k_2$$

(δ_{ik} – символ Кронекера), а затем, как и выше, отобрать из всех только требуемые моментные функции, исключив вспомогательные.

Если бы вычисления для обоих случаев можно было выполнить с $\tau^{[\ell]}(t)$ и $\boldsymbol{\xi}^{[\ell]}$ как символьными параметрами, то для расчёта безусловных

плотностей вероятности и моментных функций были пригодны следующие формальные соотношения:

$$\tilde{p}_r(\boldsymbol{z}_r, s) = \langle\, \tilde{p}_r^{[\ell]}(\boldsymbol{z}_r, s)\,\rangle, \quad \widetilde{m}_{r\alpha_r}(s) = \langle\, \tilde{m}_{r\alpha_r}^{[\ell]}(s)\,\rangle,$$

где $\langle ... \rangle$ – символ усреднения по распределению.

Как правило, даже для не очень сложных задач указанная процедура невозможна. Поэтому вероятностное усреднение должно быть заменено статистическим. А именно, будем проводить серию из L моделирований, состоящих в компьютерном разыгрывании ВСВ $\boldsymbol{\Xi}$, которая в этих симулированиях будет принимать значения $\widehat{\boldsymbol{\xi}}^{[\ell]}$, и векторного СП $\mathcal{T}(t)$ с получением реализаций $\widehat{\tau}^{[\ell]}(t)$, $\ell = 1, 2, ..., L$ (согласно принципам метода Монте-Карло). Если оценки для условных векторов состояния, плотностей вероятности и моментных функций для $\Sigma = \{\mathcal{T}(t) = \widehat{\tau}^{[\ell]}(t), \boldsymbol{\Xi} = \widehat{\boldsymbol{\xi}}^{[\ell]}\}$ обозначить так:

$$\widehat{\boldsymbol{X}}^{[\ell]}(t) = \boldsymbol{X}_\Sigma(t), \quad \widehat{\tilde{p}}_r^{[\ell]}(\boldsymbol{z}_r, s) = \tilde{p}_r^{[\ell]}(\boldsymbol{z}_r, s)\Big|_\Sigma, \quad \widehat{\widetilde{m}}_{r\alpha_r}^{[\ell]}(s) = \widetilde{m}_{r\alpha_r}^{[\ell]}(s)\Big|_\Sigma,$$

то расчетные формулы для оценок безусловных их аналогов примут следующие формы:

$$\widehat{\boldsymbol{X}}(t) = \frac{1}{L}\sum_{\ell=1}^{L} \widehat{\boldsymbol{X}}^{[\ell]}(t), \quad \widehat{\tilde{p}}_r(\boldsymbol{z}_r, s) = \frac{1}{L}\sum_{\ell=1}^{L} \widehat{\tilde{p}}_r^{[\ell]}(\boldsymbol{z}_r, s),$$

$$\widehat{\widetilde{m}}_{r\alpha_r}(s) = \frac{1}{L}\sum_{\ell=1}^{L} \widehat{\widetilde{m}}_{r\alpha_r}^{[\ell]}(s).$$

Линейные стохастические системы

Воспользовавшись предположениями и обозначениями из предыдущего подпункта, если не оговорено противное, рассмотрим систему СОДРУ вида

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{\mathcal{B}}(t)\,\boldsymbol{X}(t - \mathcal{T}(t)) + \boldsymbol{c}(t) + \boldsymbol{\mathcal{H}}(t)\,\boldsymbol{V}(t), \qquad (2.2.192)$$

$$t_0 < t \leqslant T < +\infty,$$

где $\boldsymbol{c}(t) = \{c_i\}\colon (t_0, \infty) \longmapsto \mathbb{R}^n$ и $\boldsymbol{\mathcal{A}} = \{a_{ij}\}$, $\boldsymbol{\mathcal{B}} = \{b_{ij}\}\colon (t_0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\mathcal{H}} = \{h_{ij}\}\colon (t_0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ – детерминистические векторная и матричные функции соответственно; $\boldsymbol{V}$ – вектор независимых гауссовских белых шумов с единичными интенсивностями.

Учитывая, что для каждых возможного значения $\boldsymbol{\xi}$ ВСВ $\boldsymbol{\Xi}$ и реализации $\tau(t)$ СП $\mathcal{T}(t)$ система (2.2.192) со случайными запаздыванием $\mathcal{T}(t)$ и начальным условием $\boldsymbol{\Xi}$ превращается в линейную систему СОДРУ с неслучайным переменным запаздыванием $\tau(t)$, а следовательно, при практически любом распределении $\boldsymbol{\Xi}$ с течением времени происходит нормализация процесса $\boldsymbol{X}(t)$, что позволяет в рамках настоящего исследования ограничиться оценками вектора функций математического ожидания $\boldsymbol{m}_X(t) = \mathbb{E}[\boldsymbol{X}(t)]$ и матрицы функций ковариации $\boldsymbol{\mathcal{K}}_X(t) = \mathbb{E}\Big[\mathring{\boldsymbol{X}}(t)\,\mathring{\boldsymbol{X}}^{\mathsf{T}}(t)\Big]$ векторного случайного процесса $\boldsymbol{X}(t)$, где $\mathring{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{X}(t) - \boldsymbol{m}(t)$, и применить сочетание метода шагов и схемы расширения вектора состояния.

Как и выше, рассмотрим последовательность полуотрезков Δ_r, $r = -N_1+1, -N_1+2, ..., -1, 0, 1, 2, ..., N_2$.

1°. Стартуем сразу же с Δ_{-N_1+1}, ..., Δ_0, Δ_1. Определённый на этих полуотрезках случайный вектор $\boldsymbol{Z}_1^{[\ell]}(s)$ удовлетворяет системе СОДУ:

$$\dot{\boldsymbol{Z}}_0^{[\ell]}(s) = 0, \quad \boldsymbol{Z}_0^{[\ell]}(0) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{\Xi}, \boldsymbol{\Xi}, ..., \boldsymbol{\Xi}\big),$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}_1^{[\ell]}(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}(s_1)\,\boldsymbol{X}_1^{[\ell]}(s) + \boldsymbol{\mathcal{B}}(s_1)\,\boldsymbol{X}_{1-\bar{q}_{\ell 1}}^{[\ell]}(s) + \boldsymbol{c}(s_1) + \boldsymbol{\mathcal{H}}(s_1)\,\boldsymbol{V}_1(s),$$

$$\boldsymbol{X}_1^{[\ell]}(0) = \boldsymbol{\Xi}$$

(опять здесь и далее в пределах подпункта точкой обозначена производная по переменной s).

2°. Рассмотрим поведение системы на полуотрезках Δ_{-N_1+1}, ..., Δ_0, Δ_1 и Δ_2. СОДУ для вычисления вектора $\boldsymbol{Z}_2(s)$ можно представить так:

$$\dot{\boldsymbol{Z}}_0^{[\ell]}(s) = 0, \quad \boldsymbol{Z}_0^{[\ell]}(0) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{\Xi}, \boldsymbol{\Xi}, ..., \boldsymbol{\Xi}\big),$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}_1^{[\ell]}(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}(s_1)\,\boldsymbol{X}_1^{[\ell]}(s) + \boldsymbol{\mathcal{B}}(s_1)\,\boldsymbol{X}_{1-\bar{q}_{\ell 1}}^{[\ell]}(s) + \boldsymbol{c}(s_1) + \boldsymbol{\mathcal{H}}(s_1)\,\boldsymbol{V}_1(s),$$

$$\boldsymbol{X}_1^{[\ell]}(0) = \boldsymbol{\Xi},$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}_2^{[\ell]}(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}(s_2)\,\boldsymbol{X}_2^{[\ell]}(s) + \boldsymbol{\mathcal{B}}(s_2)\,\boldsymbol{X}_{2-\bar{q}_{\ell 2}}^{[\ell]}(s) + \boldsymbol{c}(s_2) + \boldsymbol{\mathcal{H}}(s_2)\,\boldsymbol{V}_2(s),$$

$$\boldsymbol{X}_2^{[\ell]}(0) = \boldsymbol{X}_1^{[\ell]}(\tau_*).$$

... ...

$\mathbf{N}_2^\circ$. Проанализируем поведение системы на полуотрезках Δ_{-N_1+1}, ..., Δ_0, Δ_1, ..., Δ_{N_2}. Построим систему СОДУ для вектора $\boldsymbol{Z}_{N_2}(s)$ в виде

$$\dot{\boldsymbol{Z}}_0^{[\ell]}(s) = 0, \quad \boldsymbol{Z}_0^{[\ell]}(0) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{\Xi}, \boldsymbol{\Xi}, ..., \boldsymbol{\Xi}\big),$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}_1^{[\ell]}(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}(s_1)\,\boldsymbol{X}_1^{[\ell]}(s) + \boldsymbol{\mathcal{B}}(s_1)\,\boldsymbol{X}_{1-\bar{q}_{\ell 1}}^{[\ell]}(s) + \boldsymbol{c}(s_1) + \boldsymbol{\mathcal{H}}(s_1)\,\boldsymbol{V}_1(s),$$

$$\boldsymbol{X}_1^{[\ell]}(0) = \boldsymbol{\Xi},$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}_2^{[\ell]}(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}(s_2)\,\boldsymbol{X}_2^{[\ell]}(s) + \boldsymbol{\mathcal{B}}(s_2)\,\boldsymbol{X}_{2-\bar{q}_{\ell 2}}^{[\ell]}(s) + \boldsymbol{c}(s_2) + \boldsymbol{\mathcal{H}}(s_2)\,\boldsymbol{V}_2(s),$$

$$\boldsymbol{X}_2^{[\ell]}(0) = \boldsymbol{X}_1^{[\ell]}(\tau_*).$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}_{N_2}^{[\ell]}(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}(s_{N_2})\,\boldsymbol{X}_{N_2}^{[\ell]}(s) + \boldsymbol{\mathcal{B}}(s_{N_2})\,\boldsymbol{X}_{N_2-\bar{q}_{\ell N_2}}^{[\ell]}(s) + \boldsymbol{c}(s_{N_2}) +$$

$$+\boldsymbol{\mathcal{H}}(s_{N_2})\,\boldsymbol{V}_{N_2}(s), \qquad \boldsymbol{X}_{N_2}^{[\ell]}(0) = \boldsymbol{X}_{N_2-1}^{[\ell]}(\tau_*).$$

Получим необходимые условные моментные функции из ОДУ для этих моментных функций, для чего построим требуемые уравнения на основе цепочки уравнений для векторных случайных процессов $\boldsymbol{Z}_q^{[\ell]}(t)$.

Для функций условного математического ожидания

$$\widetilde{\boldsymbol{m}}_{Z_r}^{[\ell]}(s) = \operatorname{col}\left(\boldsymbol{m}_{X_{-N_1+1}}^{[\ell]}(s), \ldots, \boldsymbol{m}_{X_0}^{[\ell]}(s), \boldsymbol{m}_{X_1}^{[\ell]}(s), \ldots, \boldsymbol{m}_{X_r}^{[\ell]}(s)\right)$$

на участках Δ_{-N_1+1}, ..., Δ_0, Δ_1, ..., Δ_r, $r = 1, 2, \ldots, N_2$, система управляющих уравнений будет выглядеть так:

$$\dot{\widetilde{\boldsymbol{m}}}_{Z_r}^{[\ell]}(s) = \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_r(s)\,\widetilde{\boldsymbol{m}}_{Z_r}^{[\ell]}(s) + \widetilde{\boldsymbol{c}}_r(s), \tag{2.2.193}$$

а для условных функций ковариации

$$\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_{Z_r Z_r}^{[\ell]}(s) =$$

$$= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{-N_1-1}X_{-N_1-1}}^{[\ell]}(s) & \ldots & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{-N_1-1}X_0}^{[\ell]}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{-N_1-1}X_1}^{[\ell]}(s) & \ldots & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{-N_1-1}X_r}^{[\ell]}(s) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0X_{-N_1-1}}^{[\ell]}(s) & \ldots & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0X_0}^{[\ell]}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0X_1}^{[\ell]}(s) & \ldots & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0X_r}^{[\ell]}(s) \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_1X_{-N_1-1}}^{[\ell]}(s) & \ldots & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_1X_0}^{[\ell]}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_1X_1}^{[\ell]}(s) & \ldots & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_1X_r}^{[\ell]}(s) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_rX_{-N_1-1}}^{[\ell]}(s) & \ldots & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_rX_0}^{[\ell]}(s) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_rX_1}^{[\ell]}(s) & \ldots & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_rX_r}^{[\ell]}(s) \end{bmatrix}$$

на тех же участках –

$$\dot{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{K}}}}_r^{[\ell]}(s) = \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_r(s)\,\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_r^{[\ell]}(s) + \left[\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_r(s)\,\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_r^{[\ell]}(s)\right]^{\mathsf{T}} + \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_r(s)\,\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_r^{\mathsf{T}}(s), \tag{2.2.194}$$

где

$$\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_r^{[\ell]}(s)=\sum_{k=0}^{r}\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_{rk}^{[\ell]}(s),\quad \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_{r0}^{[\ell]}(s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \dots & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \dots & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \dots & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \dots & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n}\\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \dots & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{A}}(s_1) & \dots & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \dots & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \dots & \boldsymbol{\mathcal{A}}(s_r)\end{bmatrix},$$

$\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_{rk}^{[\ell]}(s)$ – блочная матрица, единственным ненулевым блоком которой является матрица $\boldsymbol{\mathcal{B}}(s_k)$, находящаяся в строке N_1+r и столбце $N_1+r-\bar{q}_{\ell r}$,

$$\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_r^{[\ell]}(s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \dots & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \dots & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \dots & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \dots & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m}\\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \dots & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{H}}(s_1) & \dots & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \dots & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \dots & \boldsymbol{\mathcal{H}}(s_r)\end{bmatrix},\quad \widetilde{\boldsymbol{c}}_r(s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}_n\\ \dots\\ \boldsymbol{O}_n\\ \boldsymbol{c}(s_1)\\ \dots\\ \boldsymbol{c}(s_r)\end{bmatrix}.$$

Начальные условия для неизвестных функций в уравнениях (2.2.193), (2.2.194) будут выглядеть так:

$$\widetilde{\boldsymbol{m}}_1^{[\ell]}(0)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{m}^0\\ \dots\\ \boldsymbol{m}^0\\ \boldsymbol{m}^0\end{bmatrix},\quad \widetilde{\mathcal{K}}_{Z_1Z_1}^{[\ell]}(0)=\begin{bmatrix}\mathcal{K}^0 & \dots & \mathcal{K}^0 & \mathcal{K}^0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \mathcal{K}^0 & \dots & \mathcal{K}^0 & \mathcal{K}^0\\ \mathcal{K}^0 & \dots & \mathcal{K}^0 & \mathcal{K}^0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{m}^0=\mathbb{E}[\boldsymbol{\Xi}],\quad \mathcal{K}^0=\mathbb{E}\big[\mathring{\boldsymbol{\Xi}}\,\mathring{\boldsymbol{\Xi}}^{\mathsf{T}}\big],$$

$$\widetilde{\boldsymbol{m}}_{Z_r}^{[\ell]}(0)=\begin{bmatrix}\widetilde{\boldsymbol{m}}_{Z_{r-1}}^{[\ell]}(0)\\ \boldsymbol{m}_{X_{r-1}}^{[\ell]}(\tau_*)\end{bmatrix},\quad \widetilde{\mathcal{K}}_{Z_rZ_r}^{[\ell]}(0)=\begin{bmatrix}\widetilde{\mathcal{K}}_{X_{r-1}Z_{r-1}}^{[\ell]}(0) & \bar{\mathcal{K}}_{r12}\\ \bar{\mathcal{K}}_{r21} & \mathcal{K}_{X_{r-1}X_{r-1}}^{[\ell]}(\tau_*)\end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathcal{K}}_{r12}=\operatorname{col}\big(\mathcal{K}^0,\dots,\mathcal{K}^0,\mathcal{K}_{X_0X_{r-1}}^{[\ell]}(\tau_*),\dots,\mathcal{K}_{X_{r-2}X_{r-1}}^{[\ell]}(\tau_*)\big),$$

$$\bar{\mathcal{K}}_{r21}=\big[\mathcal{K}^0\ \dots\ \mathcal{K}^0\ \mathcal{K}_{X_{r-1}X_0}^{[\ell]}(\tau_*)\ \dots\ \mathcal{K}_{X_{r-1}X_{r-2}}^{[\ell]}(\tau_*)\big],\quad r>1.$$

После решения этих систем, как и выше, необходимо отобрать из всех только требуемые моментные функции, исключив вспомогательные.

Если бы эти вычисления можно было выполнить с $\tau^{[\ell]}(t)$ и $\boldsymbol{\xi}^{[\ell]}$ как символьными параметрами, то для расчета безусловных математического ожидания и ковариаций были пригодны следующие формальные соотношения:

$$\widetilde{\boldsymbol{m}}_{Z_r}(s)=\langle\,\widetilde{\boldsymbol{m}}_{Z_r}^{[\ell]}(s)\,\rangle,\qquad \widetilde{\mathcal{K}}_{Z_rZ_R}(s)=\langle\,\widetilde{\mathcal{K}}_{Z_rZ_r}^{[\ell]}(s)\,\rangle.$$

Как отмечалось выше, даже для не очень сложных задач такая процедура невозможна. Поэтому и здесь вероятностное усреднение должно быть заменено статистическим. А именно, будем проводить серию из L моделирований, состоящих в компьютерном разыгрывании ВСВ $\boldsymbol{\Xi}$, которая в этих симулированиях будет принимать значения $\widehat{\boldsymbol{\xi}}^{[\ell]}$, и векторного СП $\mathcal{T}(t)$ с получением реализаций $\widehat{\tau}^{[\ell]}(t)$, $\ell = 1, 2, ..., L$. Если оценки для условных математических ожиданий и ковариаций для $\Sigma = \{\mathcal{T}(t) = \widehat{\tau}^{[\ell]}(t), \boldsymbol{\Xi} = \widehat{\boldsymbol{\xi}}^{[\ell]}\}$ обозначить так:

$$\widehat{\widetilde{\boldsymbol{m}}}^{[\ell]}_{Z_r}(s) = \widetilde{\boldsymbol{m}}^{[\ell]}_{Z_r}(s)\Big|_{\Sigma}, \quad \widehat{\widetilde{\mathcal{K}}}^{[\ell]}_{Z_r Z_r}(s) = \widetilde{\mathcal{K}}^{[\ell]}_{Z_r Z_r}(s)\Big|_{\Sigma},$$

то расчетные формулы для оценок безусловных их прототипов примут следующие формы:

$$\widehat{\widetilde{\boldsymbol{m}}}_{Z_r}(s) = \frac{1}{L}\sum_{\ell=1}^{L}\widehat{\widetilde{\boldsymbol{m}}}^{[\ell]}_{Z_r}(s), \quad \widehat{\widetilde{\mathcal{K}}}_{Z_r Z_r}(s) = \frac{1}{L}\sum_{\ell=1}^{L}\widehat{\widetilde{\mathcal{K}}}^{[\ell]}_{Z_r Z_r}(s).$$

Пример 2.2.24. Рассмотрим линейную систему СОДРУ со следующими характеристиками:

$$n = 2, \quad m = 2, \quad M = 5, \quad h = 1.0, \quad \tau_* = 0.2,$$

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}(t) = \begin{bmatrix} -2.0 & 0.4 \\ -0.2 & -1.0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{B}}(t) = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.3 \\ 0.1 & 0.0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c}(t) = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}(t) = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.0 \\ 0.0 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.2 & 0.0 & 0.1 & 0.3 & 0.4 \\ 0.4 & 0.2 & 0.0 & 0.1 & 0.3 \\ 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.0 & 0.1 \\ 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0.0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_{\mathbb{S}0} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 0.3 \\ 0.3 \\ 0.1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{p}^{\,0}(y_1, y_2) = \mathcal{N}(y_1; 5, 0.25)\,\mathcal{N}(y_2; 3, 0.64),$$

$$t_0 = 0.0, \quad T = 12.0, \quad N_1 = 5, \quad N_2 = 60, \quad \bar{N} = 5,$$

где $\mathcal{N}(\cdot; a, \sigma^2)$ – нормальное распределение с математическим ожиданием a и дисперсией σ^2.

Численные расчеты проводились с помощью программы, написанной на входном языке пакета `Mathematica` [821]. На рис. 2.2.68–2.2.73 представлены результаты этих расчетов для реализаций условных функций математических ожиданий и ковариации компонент вектора состояния

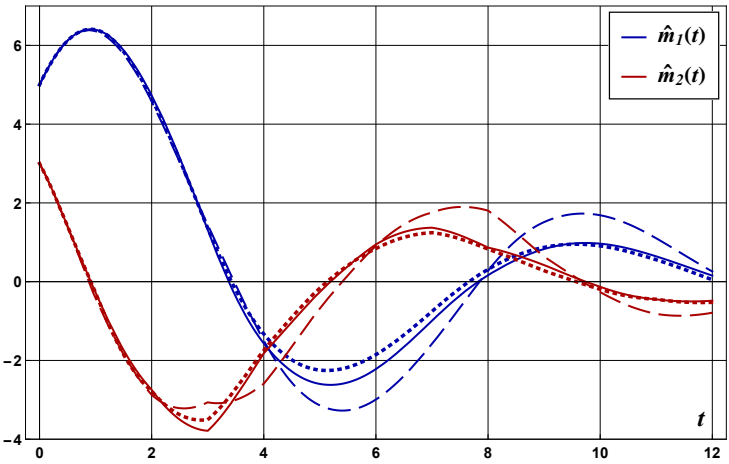


Рис. 2.2.68. Поведение реализаций условных функций математических ожиданий $X_1(t)$ и $X_2(t)$ (I)

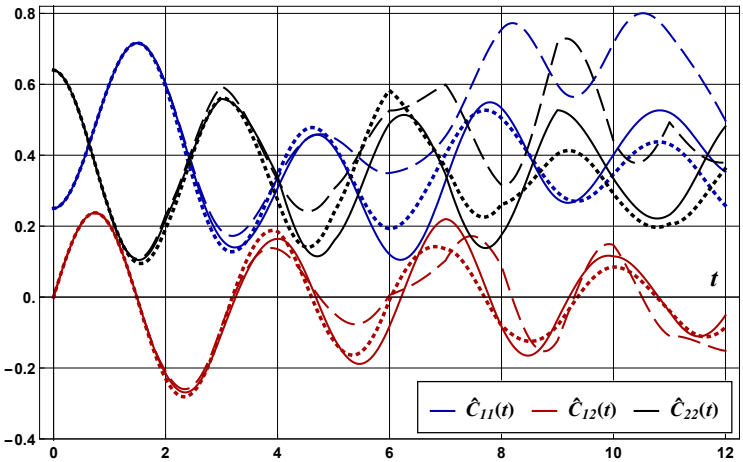


Рис. 2.2.69. Поведение реализаций условных функций ковариации $X_1(t)$ и $X_2(t)$(i)

для трех наборов (I, II, III) множителей для запаздываний:

$$\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\} \in \big\{ \{1,2,3,4,5\}, \{3,4,5,1,2\}, \{5,1,2,3,4\} \big\}.$$

На этих рисунках графики, соответствующие отдельным реализаци-

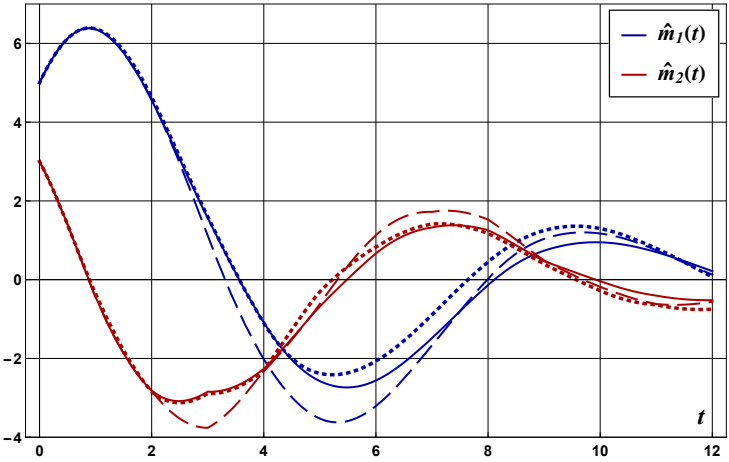


Рис. 2.2.70. Поведение реализаций условных функций математических ожиданий $X_1(t)$ и $X_2(t)$ (II)

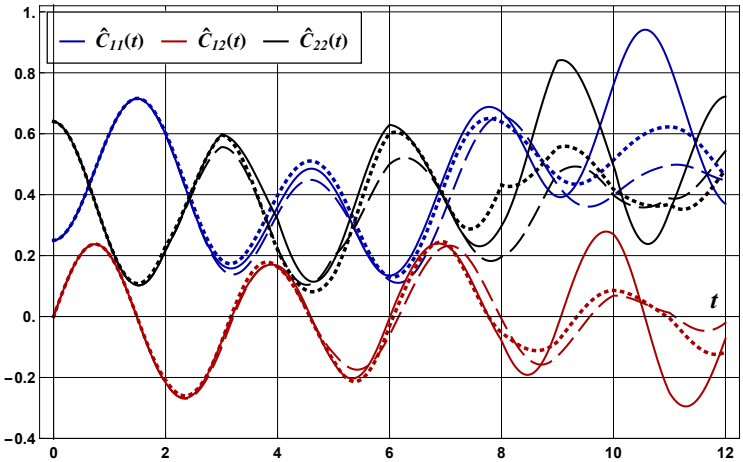


Рис. 2.2.71. Поведение реализаций условных функций ковариации $X_1(t)$ и $X_2(t)$ (II)

ям каждой из характеристик из различных наборов данных, изображены непрерывными, пунктирными и точечными линиями. Конкретные обозначения указаны в подписях к рисункам.

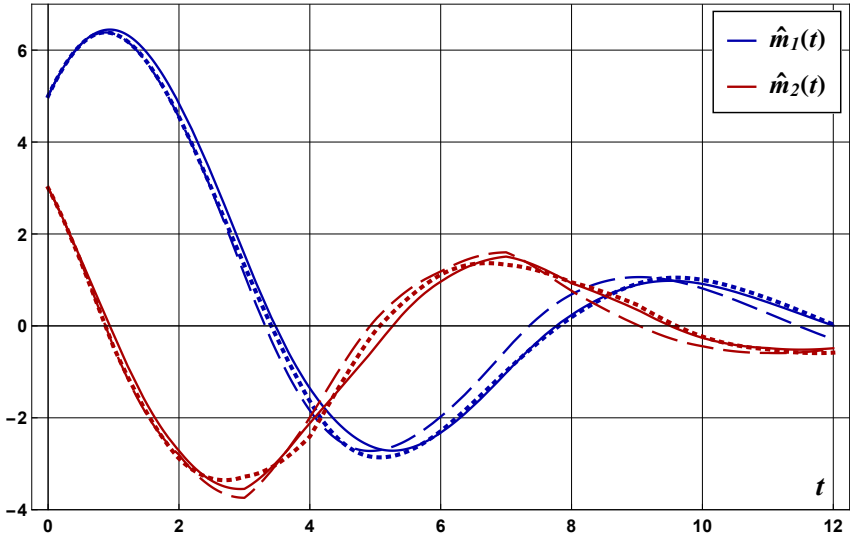


Рис. 2.2.72. Поведение реализаций условных функций математических ожиданий $X_1(t)$ и $X_2(t)$ (III)

2.2.6.3. Численное моделирование динамических систем со случайными запаздываниями

Модели различных процессов, в которых требуется трактовка запаздываний как случайных величин и функций, достаточно сложны. В частности, модели такого вида возникают при описании систем, меняющих свою структуру под воздействием случайных факторов. Несмотря на широкое поле приложений в физике, биологии, экономике, финансах, системах управления, технологии и др. (см. обзор в начале подраздела), системы подобного вида недостаточно исследованы.

Чтобы решать многочисленные проблемы, необходимо строить математические модели случайных лагов, которые выбираются в форме независимых случайных величин, однородных и неоднородных, дискретных и непрерывных цепей Маркова, скрытых цепей Маркова, а также в виде более общих стационарных и нестационарных случайных процессов, в том числе и функций векторов состояния динамических систем.

Вследствие сложности задач методы исследования стохастических систем со случайными запаздываниями нетривиальны и немногочисленны. Прямые аналитические схемы анализа таких систем типа уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова, как правило, отсутствуют, а приближен-

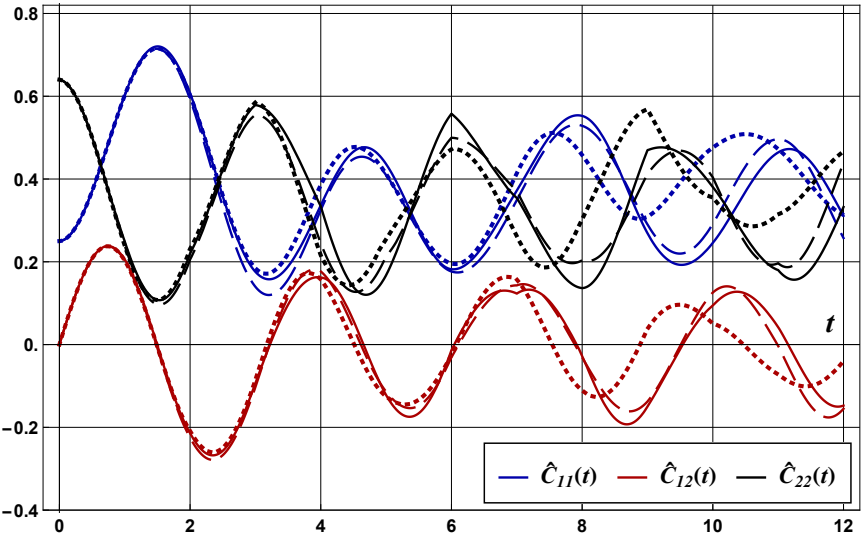


Рис. 2.2.73. Поведение реализаций условных функций ковариации $X_1(t)$ и $X_2(t)$ (III)

ные ориентируются на исключение случайного запаздывания или полностью, или сведением к системам с неслучайным постоянным или переменным запаздыванием.

На практике целью построения численных интеграторов для СОДУ, СОДРУ и других классов стохастических уравнений [116, 897], кроме построения реализаций переходных процессов, является вычисление (после дискретизации этих уравнений) с использованием метода статистического моделирования (Монте-Карло) [127] сеточных представлений $\{\widehat{\boldsymbol{x}}_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ множества реализаций $\boldsymbol{x}(t)$ вектора состояния системы в узлах сетки, которые служат для оценки вероятностных характеристик вектора $\boldsymbol{X}(t)$ на основе методов математической и прикладной статистики.

Трудности с решением задачи прямого численного моделирования различных систем со случайными запаздываниями частично могут быть сняты при использовании современных математических пакетов, таких как `Maple` [647], `Mathematica` [821], `Matlab` [927], `Maxima` [834] и др. Далее дано описание некоторых новых средств пакета `Mathematica`, которые можно использовать для моделирования динамических систем с различными формами случайных запаздываний, приведены примеры расчета

переходных режимов, представлены фрагменты программ для таких расчетов и результаты последних.

Для начала рассмотрим средства моделирования (псевдо)случайных возмущений в стохастических уравнениях. Для этого построим модель ограниченного шума [286] на основе стандартного винеровского процесса, для чего воспользуемся следующими командами пакета Mathematica:

```
T = 50; h = 0.001; nt = 50000;
q1 = TransformedProcess[1-0.9 Sin[t+w[t]],w ≈ WienerProcess[],t];
Q1 = Interpolation[RandomFunction[q1, {0, T, h}]];
```

График реализации случайной функции, обозначенной `Q1`, приведен на рис. 2.2.74.

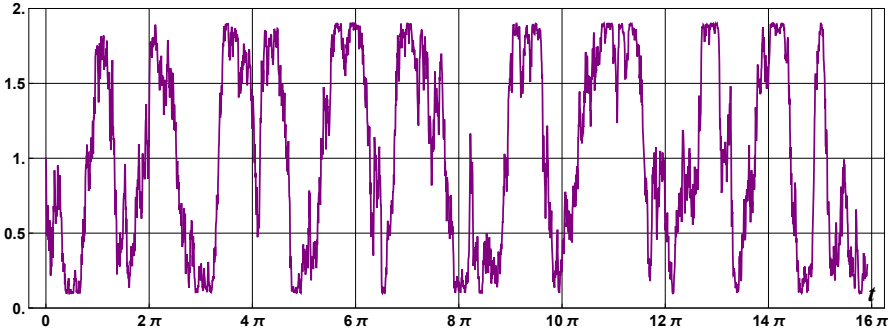


Рис. 2.2.74

Пример 2.2.25. Оценим влияние шума рассмотренного типа на колебательную систему, описываемую уравнением Дюффинга типа:

$$\dddot{X}(t) + 2\,\alpha\,\ddot{X}(t) + \omega_0^2\,X(t) + \beta\,X^3(t) = 4\,Q_2(t),$$

где α, ω, β – постоянные. Для этого предназначен следующий фрагмент программы:

```
q2 = TransformedProcess[Sin[t+w[t]], w ≈ WienerProcess[],t];
Q2 = Interpolation[RandomFunction[q2, {0, T, h}]];
{sol2} = NDSolve[ {x1'[t]==x2[t], x2'[t]==-0.1 x2[t] - 4 x1[t] -
x1[t]^3/2 + 4 Q2[t], x1[0]==3, x2[0]==1},{x1[t],x2[t]},{t,0,T}]
```

где введены обозначения $X_1(t) = X(t)$, $X_2(t) = \dot{X}(t)$, а для численного интегрирования системы используется встроенная функция `NDSolve`. Графики реализаций случайных функций $X_1(t)$ и $X_2(t)$ приведены на рис. 2.2.75. ►

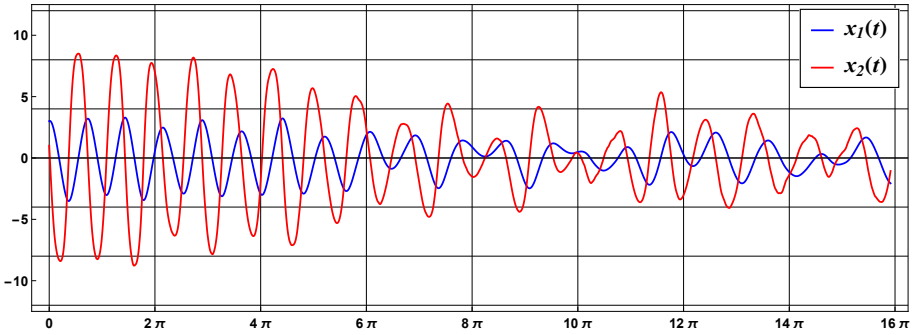


Рис. 2.2.75

Теперь рассмотрим системы с различными формами случайного запаздывания. Все они, если не считать запаздывание, являются детерминированными по форме. Поэтому, с одной стороны, ничто не может помешать использовать стандартные методы интегрирования детерминированных систем ОДУ, а с другой, наличие случайного запаздывания и его моделирования накладывает определенные ограничения, в частности, на возможность применения встроенной функция пакета `NDSolve`, предназначенной для численного интегрирования дифференциальных уравнений разных типов. Это приводит к необходимости использования пользовательских процедур. В настоящей работе из соображений простоты реализации алгоритмов применяются методы Эйлера и Хойна (то же, что и улучшенный метод Эйлера) [84] для расчетов с малым постоянным шагом интегрирования. Вследствие отсутствия прямого вхождения в модели случайных процессов, модификации указанных методов для численного решения СОДУ не применяются. Вопросы качества получаемых реализаций случайных запаздываний и допустимости неучета их стохастичности на настоящем этапе исследований не рассматривались, так как цель данной параграфа – продемонстрировать соответствующие инструменты пакета Mathematica в действии.

Пример 2.2.26. Следующая из рассмотренных систем описывается нелинейным уравнением типа Ван дер Поля–Дюффинга с гармоническим возмущением:

$$\ddot{X}(t) + 2\,\alpha\left[X^2(t) - 1\right]\dot{X}(t) + \omega_0^2\,X(t) + \beta\,X^3\big(t - \Upsilon(t)\big) = \\ = A\,\cos\big(2\,\pi\,\gamma\,t\big), \qquad t > 0,$$

$$\dot{X}(t) = c_1, \qquad \ddot{X}(t) = c_2, \qquad t \in [t_0, 0],$$

где α, ω, β, A, γ, c_1, c_2 – постоянные. В этом случае фрагмент программного кода для моделирования будет выглядеть так:

```
T = 50; h = 0.001; nt = 50000; t0=-4; ntau=4000; nnn=nt+ntau;
alpha = 0.1; w0 = 2.5; beta = 3/8; A = 0.305; gamma = 0.05;
xx1[s_]:=1; xx2[s_]:=0.1; xxx=Table[{0, 0}, {nt + ntau + 1}];
ttt = Table[t0 + k h, {k, 0, nt + ntau}];
For[ k=1,k<=ntau+1,k++tt=ttt[[k]]; xxx[[k]]={xx1[tt],xx2[tt]} ];
q3 = TransformedProcess[2+1.9 Sin[3 t+2 w[t]],
  w ≈ WienerProcess[],t];
Q3 = Interpolation[RandomFunction[q3, {0,T,0.001}]];
rhs[tx_, yy1_, yy2_] := Block[{},
{yy1[[2]],-2 alpha (yy1[[1]]^2-1) yy1[[2]]-w0^2 yy1[[1]]-
beta yy2[[1]]^3 + A Cos[2 Pi gamma tx]} ];
euler[] := Block[{ff1, ff2, yy},
ff1 = rhs[ttt[[k]],xxx[[k]],xxx[[k-m]]];
xxx[[k]] + h ff1 ];
For[ k=ntau+1, k<=nt+ntau, k++,
m = Round[ Q3[ttt[[k]]]/h ]; xxx[[k + 1]] = euler[] ]
```

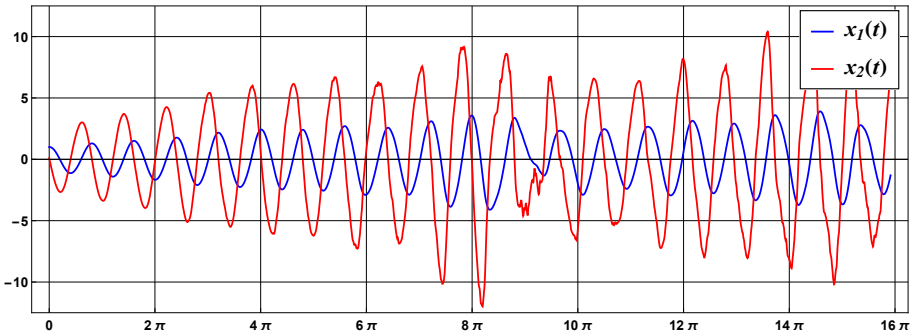


Рис. 2.2.76

Здесь случайное запаздывание, как и в предыдущем разделе, формируется на основе винеровского процесса, а для численного интегрирования системы (после введения обозначений $X_1(t) = X(t)$, $X_2(t) = \dot{X}(t)$) используется схема Эйлера. Графики реализаций случайных функций $X_1(t)$ и $X_2(t)$ приведены на рис. 2.2.76. ▶

Пример 2.2.27. Как известно, точность указанной выше схемы для детерминированных задач равна $O(h)$. Поэтому использовать ее на длин-

ных временны́х промежутках не эффективно из-за необходимости применения мелкого шага. Вследствие этого в следующем примере (и далее) для анализа той же системы Ван дер Поля–Дюффинга применяется схема Хойна. Случайное запаздывание, как и в предыдущем примере, формируется на основе винеровского процесса, а для моделирования применяется следующий фрагмент программного кода (показаны только отличия от предыдущего фрагмента):

```
T=100; h=0.001; nt=100000;
...
q4 = TransformedProcess[2 + 1.9 Sin[3 t + 2 w[t]],
  w ≈ WienerProcess[], t];
Q4 = Interpolation[RandomFunction[q4, {0, T, 0.001}]];
...
heun[] := Block[{ff1, ff2, yy},
ff1 = rhs[ttt[[k]],xxx[[k]],xxx[[k-m]]]; yy = xxx[[k]] + h ff1;
ff2 = rhs[ttt[[k+1]],yy,xxx[[k-m+1]]]; xxx[[k]]+ h/2(ff1+ff2)];
For[ k = ntau + 1, k <= nnn, k++,
m = Round[ Q4[ttt[[k]]]/h]; xxx[[k + 1]] = heun[] ];
```

Графики реализаций случайных функций $X_1(t)$ и $X_2(t)$ приведены на рис. 2.2.77. ▶

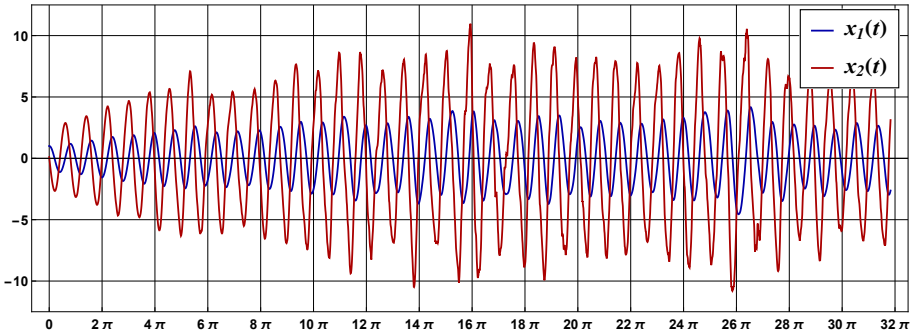


Рис. 2.2.77

Пример 2.2.28. Теперь рассмотрим варианты формирования случайных запаздываний на основе использования случайных процессов с дискретным множеством состояний и непрерывным временем. В качестве таких процессов были выбраны телеграфный (ТГП) и простейший пуассоновский (ППП) процессы, а также цепь Маркова с тремя состояния-

ми (ЦМЗ). Пример реализации первого из этих процессов приведен на рис. 2.2.78.

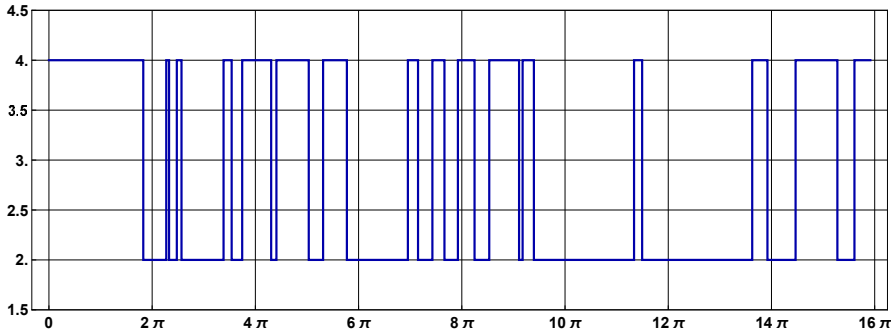


Рис. 2.2.78

В процессе расчетов параметры процессов выбирались так, чтобы для ТГМ запаздывание принимало значения 2 и 4, а для ППП и ЦМЗ – 1, 2 и 3. Для этого применялся следующий фрагмент программного кода (показаны только отличия от предыдущего фрагмента в этом разделе):

```
T=50; h=0.001; nt=50000;
...
q5 = TelegraphProcess[2/3];
QQ = 3+RandomFunction[q5,{0,T,h}];
Q5 = Interpolation[QQ["Path"], InterpolationOrder -> 0];
q6 = TransformedProcess[1+Mod[p[t],3],p ≈ PoissonProcess[3/4],t];
Q6 = Interpolation[RandomFunction[q6, {0, T, h}],
  InterpolationOrder->0];
q7 = ContinuousMarkovProcess[{1,0,0},
  {{-2,1/2,3/2},{1/2,-1,1/2},{1/2,1,-3/2}}];
Q7=Interpolation[RandomFunction[q7,{0,T}],InterpolationOrder->0];
...
For[ k = ntau + 1, k <= nnn, k++,
m = Round[ Q5[ttt[[k]]]/h]; xxx[[k + 1]] = heun[] ];
For[ k = ntau + 1, k <= nnn, k++,
m = Round[ Q6[ttt[[k]]]/h]; xxx[[k + 1]] = heun[] ];
For[ k = ntau + 1, k <= nnn, k++,
m = Round[ Q7[ttt[[k]]]/h]; xxx[[k + 1]] = heun[] ];
```

Результаты расчетов для запаздываний как функций ТГР, ППП и ЦМЗ отображены на рис. 2.2.79–2.2.81, где показано поведение реализаций случайных функций $X_1(t)$ и $X_2(t)$. ►

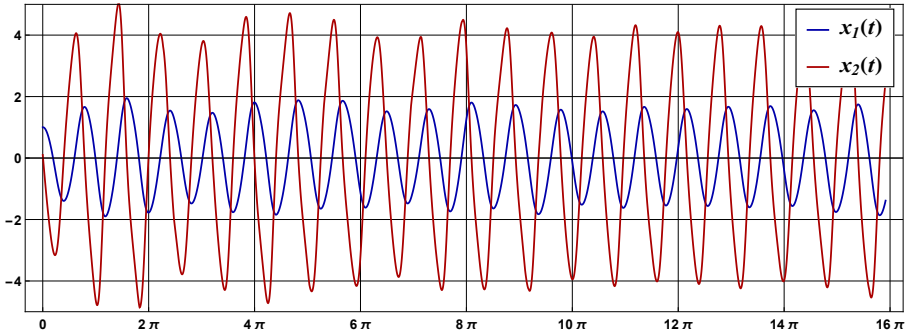


Рис. 2.2.79

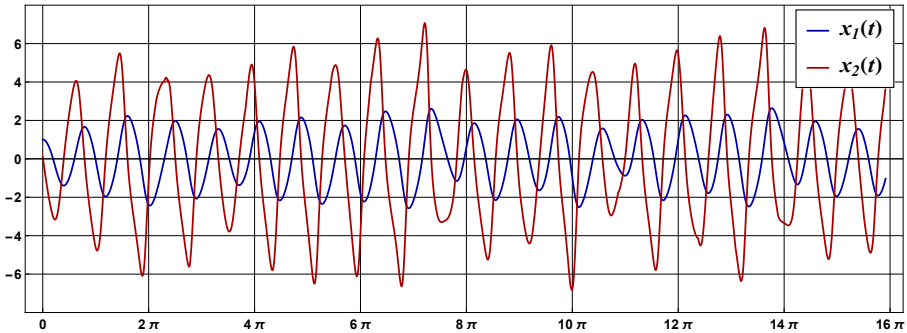


Рис. 2.2.80

2.2.7. Расчет характеристик стационарных режимов

Как уже не раз отмечалось выше, основными вероятностными характеристиками векторов состояния стохастических систем с сосредоточенными параметрами как с запаздыванием, так и без него являются пространственно-временные плотности вероятности распределения этих векторов. К сожалению, на достигнутом уровне научных исследований для произвольных систем СОДУ и СОДУсЗ невозможно получить точные аналитические представления для таких для векторов состояния произвольных систем СОДУ. В ряде случаев задача может быть упрощена, и мы можем ограничиться вычислением стационарных плотностей вероятности, если таковые существуют. Анализ систем еще более упрощается, если рассматриваются линейные стохастические системы с постоянными коэффициентами и аддитивными возмущениями [236]. Это связано с тем,

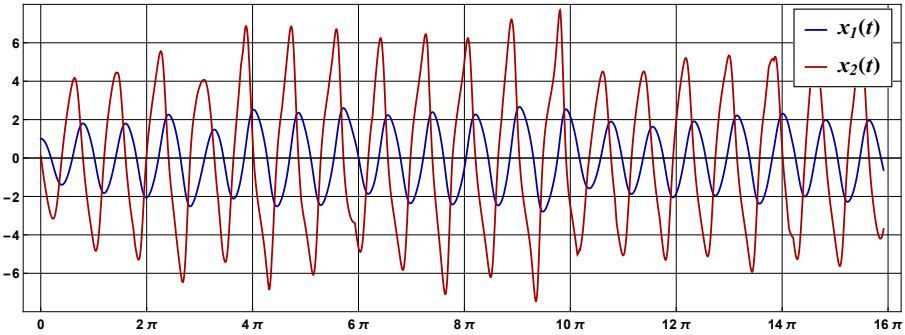


Рис. 2.2.81

что для последних стационарными плотностями будут одно- и многомерные нормальные гауссовы распределения, параметризуемые векторами математических ожиданий и матрицами ковариаций (дисперсий) соответствующего порядка.

Чтобы преодолеть трудности учета эффекта запаздывания, используют несколько подходов. Самый простой – это анализ стационарных режимов в линейных системах.

Ряд простых проблем для СОДУ с одним постоянным запаздыванием был решен С. Гийюзиком (S. Guillouzic), Т.Д. Франком и У. Кюхлером [576, 578, 579, 581, 582, 629–631, 759]. В частности, С. Гийюзик предложил интересную и очень полезную схему расчета ковариационных функций и спектральных плотностей в установившемся состоянии, а также параметров одномерных стационарных гауссовских распределений. Кроме того, Т.Д. Франк использовал эту схему для получения двухточечной плотности вероятности искомого решения в моменты времени, разделенные запаздыванием. Заметим, что другой способ вывода ФПК-уравнения для одномерной линейной системы СОДУ с постоянными коэффициентами, с одним и несколькими постоянными запаздываниями и стационарным белым шумом на входе предложен в работе [605, 606].

Далее в настоящем подразделе рассматриваются некоторые задачи вычисления стационарных характеристик (спектральных плотностей и ковариационных функций) линейных систем стохастических дифференциальных уравнений (обыкновенных, нейтральных, в частных производных) с постоянными (кратными) запаздываниями. Сначала схема Гийюзика распространяется на отдельные уравнения: 1) с кратными запаздываниями; 2) нейтрального типа; 3) высших порядков. Далее эта схема

применяется для анализа установившихся колебаний в линейной стохастической системе, которая возмущается стационарными шумами, дифференцируемыми в среднем квадратическом. Целью является построение матрицы спектральных плотностей вектора состояния рассматриваемой системы. В третьем параграфе подраздела та же схема переносится еще на одну новую область применения, а именно, на линейные системы стохастических обыкновенных дифференциальных уравнений нейтрального типа с кратными запаздываниями.

Важным классом СФДУвЧПсЗ являются семейство линейных стохастических эволюционных дифференциальных уравнения в частных производных с несколькими постоянными запаздываниями. Из-за особой сложности анализа таких уравнений особый интерес представляют редкие модели, форма которых позволяет получить точные вероятностные характеристики соответствующих векторных случайных полей состояния. В последнем параграфе подраздела рассматривается задача построения спектральной плотности стационарного случайного поля – решения гиперболического уравнения с двумя постоянными коэффициентами и стационарным случайным входом. Несмотря на то, что рассматривается только частный случай гиперболических уравнений, его легко перенести на более сложные отдельные линейные эволюционные СДУвЧПсЗ и на системы таких уравнений.

2.2.7.1. Отдельные линейные СОДУ с запаздыванием

Рассмотрим следующее СОДУ s-го порядка с q запаздываниями [222]:

$$\sum_{k=0}^{s}\sum_{r=0}^{q}\alpha_{s-k,r}\,X^{(s-k)}(t-\tau_r)=\gamma\,V(t),\quad \alpha_{s-k,r},\gamma=\mathrm{const},\qquad (2.2.195)$$

где $\alpha_{s0}\neq 0$; $X(t)$ – переменная (вектор) состояния; $V(t)$ – стационарный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием ($m_V=0$) и известными автоковариационной функцией $\mathcal{C}_{VV}(t)$ и спектральной плотностью $\mathcal{S}_{VV}(\omega)$; $\tau=\mathrm{const}>0$ ($\tau_i=\mathrm{const}>0$, $i=0,\,2,\,...,\,q$) – запаздывание (запаздывания, $0=\tau_0<\tau_1<\tau_2<...<\tau_q$). Заметим, что если хотя бы один коэффициент $\alpha_{s\ell}\neq 0$ ($\ell>0$), то (2.2.195) будет уравнением нейтрального типа.

Кроме того, введем следующие обозначения: $\mathcal{C}_{XX}(t_1,t_2)$, $\mathcal{C}_{VV}(t_1,t_2)$ и $\mathcal{C}_{XX}(\theta)$, $\mathcal{C}_{VV}(\theta)$ – автоковариационные функции случайных процессов $X(t)$ и $V(t)$ в переходном и стационарном ($\theta=t_2-t_1$) режимах соответственно; $\mathcal{C}_{VX}(t_1,t_2)$ и $\mathcal{C}_{VX}(\theta)$ – взаимные ковариационные функции СП

$X(t)$ и $V(t)$ в переходном и стационарном режимах; $\mathcal{S}_{XX}(\omega)$ и $\mathcal{S}_{VV}(\omega)$ – спектральные плотности СП $X(t)$ и $V(t)$ в установившемся режиме; $\mathcal{S}_{VX}(\omega)$ – взаимная спектральная плотность случайных процессов $V(t)$ и $X(t)$ в установившемся режиме.

При проведении выкладок ниже будут использоваться следующие соотношения:

$$\frac{\partial^{2r-1}}{\partial t_1^{2r-1}} = -\frac{\partial^{2r-1}}{\partial t^{2r-1}};\quad \frac{\partial^{2r-1}}{\partial t_2^{2r-1}} = \frac{\partial^{2r-1}}{\partial t^{2r-1}};\quad \frac{\partial^{2r}}{\partial t_1^{2r}} = \frac{\partial^{2r}}{\partial t^{2r}} = \frac{\partial^{2r}}{\partial t_2^{2r}};$$

$$\mathcal{C}_{XX}(t_1,t_2) = \mathbb{E}\big[\big\{X(t_1) - m_X(t_1)\big\}\big\{X(t_2) - m_X(t_2)\big\}\big]$$

$$\mathcal{C}_{XV}(t_1,t_2) = \mathbb{E}\big[\big\{X(t_1) - m_X(t_1)\big\}\, V(t_2)\big]\,;$$

$$\mathcal{C}_{VV}(t_1,t_2) = \mathbb{E}[V(t_1)\, V(t_2)]\,;$$

$$\mathcal{S}_{YZ}(\omega) = \frac{1}{2\,\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\boldsymbol{i}\omega\theta}\, \mathcal{C}_{YZ}(t)\, dt; \tag{2.2.196}$$

$$e^{\pm\boldsymbol{i}\omega\tau}\, \mathcal{S}_{YZ}(\omega) = \frac{1}{2\,\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\boldsymbol{i}\omega\theta}\, \mathcal{C}_{YZ}(\theta \pm \tau)\, d\theta; \tag{2.2.197}$$

$$(\boldsymbol{i}\,\omega)^r\, \mathcal{S}_{YZ}(\omega) = \frac{1}{2\,\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\boldsymbol{i}\omega\theta}\, \mathcal{C}_{YZ}^{(r)}(\theta)\, d\theta, \quad r \in \mathbb{N}; \tag{2.2.198}$$

$$\mathcal{C}_{YZ}(\theta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\boldsymbol{i}\omega\theta}\, \mathcal{S}_{YZ}(\omega)\, d\omega; \tag{2.2.199}$$

$$\mathcal{D}_X(t) \equiv \sigma_X^2(t) = \mathcal{C}_X(t,t); \tag{2.2.200}$$

$$\rho_{XX}(t_1,t_2) = \frac{\mathcal{C}_{XX}(t_1,t_2)}{\sigma_X(t_1)\,\sigma_X(t_2)}, \quad \rho_{XX}(\theta) = \frac{\mathcal{C}_{XX}(\theta)}{\bar{\sigma}_X^2}, \tag{2.2.201}$$

где $\mathcal{D}_X(t)$ – дисперсия процесса $X(t)$ ($\sigma_X(t)$ – среднее квадратическое отклонение), причем для стационарного режима $\mathcal{D}_X(t) \equiv \bar{\mathcal{D}}_X = \mathcal{C}_X(0) \equiv \text{const}$ ($\sigma_X^2(t) \equiv \bar{\sigma}_X^2 = \mathcal{C}_X(0) \equiv \text{const}$); $\rho_{XX}(t_1,t_2)$ и $\rho_{XX}(\theta)$ – нормированная ковариационная функция в переходном и установившемся режимах.

Предположим, что коэффициенты уравнения (2.2.195) таковы, что при $t \to +\infty$ после переходного режима в системе, описываемой этим уравнением, устанавливается стационарный режим, при котором $X(t)$, как и $V(t)$, будет стационарным случайным процессом с нулевым мате-

матическим ожиданием $m_X = 0$) и неизвестными ковариационной функцией $\mathcal{C}_{XX}(\theta)$ и спектральной плотностью $\mathcal{S}_{XX}(\omega)$, а оба эти процесса – стационарно связанными.

Вследствие утверждений корреляционного анализа [43] и сделанных предположений ясно, что для полного описания гауссовского стационарного случайного процесса $X(t)$ достаточно вычислить спектральную плотность $\mathcal{S}_{XX}(\omega)$, а все остальные необходимые характеристики этого случайного процесса можно получить по приведенным выше формулам.

Применим идею С. Гийюзика для выполнения общей части выкладок по решению поставленной задачи. Для этого сначала обе части уравнения (2.2.195) для моментов времени $t = t_1$ и $t = t_2$ умножим на $X(t_2)$ и $V(t_1)$ соответственно, а затем усредним. В результате будем иметь следующие уравнения для нестационарных ковариационных функций $\mathcal{C}_{XX}(t_1, t_2)$ и $\mathcal{C}_{VX}(t_1, t_2)$:

$$\sum_{k=0}^{s}\sum_{r=0}^{q}\alpha_{s-k,r}\,\frac{\partial^{s-k}\mathcal{C}_{XX}(t_1-\tau_r,t_2)}{\partial t_1^{s-k}} = \gamma\,\mathcal{C}_{VX}(t_1,t_2),$$

$$\sum_{k=0}^{s}\sum_{r=0}^{q}\alpha_{s-k,r}\,\frac{\partial^{s-k}\mathcal{C}_{VX}(t_1,t_2-\tau_r)}{\partial t_2^{s-k}} = \gamma\,\mathcal{C}_{VV}(t_1,t_2).$$

В установившемся режиме с учетом соотношений (2.2.195) эти уравнения можно записать так:

$$\sum_{k=0}^{s}\sum_{r=0}^{q}\beta(s-k)\,\alpha_{s-k,r}\,\mathcal{C}_{XX}^{(s-k)}(\theta+\tau_r) = \gamma\,\mathcal{C}_{VX}(\theta),$$

$$\sum_{k=0}^{s}\sum_{r=0}^{q}\alpha_{s-k,r}\,\mathcal{C}_{VX}^{(s-k)}(\theta-\tau_r) = \gamma\,\mathcal{C}_{VV}(\theta),$$

где

$$\beta(\ell) = \begin{cases} 1, & \ell - \text{четное}, \\ -1, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Если теперь левые и правые части последних уравнений умножить на $e^{-\boldsymbol{i}\omega\theta}/(2\,\pi)$, а затем проинтегрировать по θ от $-\infty$ до $+\infty$, то получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных спектральных плотностей $\mathcal{S}_{XX}(\omega)$ и $\mathcal{S}_{VX}(\omega)$:

$$\sum_{k=0}^{s}\sum_{r=0}^{q}\beta(s-k)\,\alpha_{s-k,r}\,(\boldsymbol{i}\,\omega)^{s-k}\,e^{\boldsymbol{i}\omega\tau_r}\,\mathcal{S}_{XX}(\omega) = \gamma\,\mathcal{S}_{VX}(\omega), \qquad (2.2.202)$$

$$\sum_{k=0}^{s}\sum_{r=0}^{q}\alpha_{s-k,r}\,(\boldsymbol{i}\,\omega)^{s-k}\,e^{-\boldsymbol{i}\omega\tau_r}\,\mathcal{S}_{VX}(\omega)=\gamma\,\mathcal{S}_{VV}(\omega), \tag{2.2.203}$$

из которой находим

$$\mathcal{S}_{XX}(\omega)=\frac{H_1}{H_2}\,\mathcal{S}_{VV}(\omega), \tag{2.2.204}$$

где

$$H_1=\gamma^2,$$

$$H_2=\sum_{k=0}^{s}\sum_{r=0}^{q}\beta(s-k)\,\alpha_{s-k,r}\,(\boldsymbol{i}\,\omega)^{s-k}\,e^{\boldsymbol{i}\omega\tau_r}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{s}\sum_{r=0}^{q}\alpha_{s-k,r}\,(\boldsymbol{i}\,\omega)^{s-k}\,e^{-\boldsymbol{i}\omega\tau_r}.$$

Теперь, получив $\mathcal{S}_{XX}(\omega)$, с помощью формулы (2.2.204) (для $Y=Z=X$) можно вычислить $\mathcal{C}_{XX}(t)$, а следовательно, и стационарную дисперсию $\bar{\sigma}_X^2=\mathcal{C}_{XX}(0)$, что позволяет записать ковариационную матрицу

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}=\bar{\sigma}_X^2\begin{bmatrix}1 & r_{01} & r_{02} & \ldots & r_{0,q-1} & r_{0q}\\ r_{10} & 1 & r_{12} & \ldots & r_{1,q-1} & r_{1q}\\ r_{20} & r_{21} & 1 & \ldots & r_{2,q-1} & r_{2q}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ r_{q-1,0} & r_{q-1,1} & r_{q-1,2} & \ldots & 1 & r_{q-1,q}\\ r_{q0} & r_{q1} & r_{q2} & \ldots & r_{q,q-1} & 1\end{bmatrix} \tag{2.2.205}$$

для формирования замкнутого вида нормальной плотности

$$\mathcal{N}\big(\boldsymbol{x};\boldsymbol{0},\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}\big)=\frac{1}{(2\,\pi)^{q/2}\,|\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}|^{1/2}}\,\exp\Big[-\frac{1}{2}\,\boldsymbol{x}^{\intercal}\,\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^{-1}\,\boldsymbol{x}\Big]$$

распределения центрированного случайного вектора

$$\boldsymbol{X}=\big\{X_0,X_1,\ldots,X_q\big\}^{\intercal},\quad X_k=X(t+\tau_k),\quad k=0,1,\ldots,q; \tag{2.2.206}$$

$$r_{ij}=r_{ji}=\rho_{XX}(\tau_j-\tau_i),\quad 0\leqslant i<j\leqslant q.$$

Далее общие результаты, полученные выше, прилагаются к конкретным системам, для которых после получения H_2 и приближенного вычисления интеграла (2.2.199) для $\mathcal{C}_{XX}(t)$ (аналитическое определение первообразной возможно только в редких случаях) приводятся графики ковариационных функций случайного процесса $X(t)$ для τ от 0,25 до 2,00 с

шагом 0,25 (метки 1 .. 8) при $\gamma = 0{,}1$ и $\mathcal{S}_{VV}(\omega) = 1$ ($V(t)$ – белый шум). Для проведения численно-аналитических расчетов применялся пакет `Mathematica` [328].

Пример 2.2.29. Начнем с уравнения первого порядка с двумя кратными запаздываниями:

$$X'(t) + \alpha_{00}\, X(t) + \alpha_{01}\, X(t-\tau) + \alpha_{02}\, X(t-2\tau) = \gamma\, V(t).$$

Здесь

$$H_2 = \bigl(-\boldsymbol{i}\,\omega + \alpha_{00} + \alpha_{01}\, e^{\boldsymbol{i}\omega\tau} + \alpha_{02}\, e^{2\boldsymbol{i}\omega\tau}\bigr)\times \\ \times \bigl(\boldsymbol{i}\,\omega + \alpha_{00} + \alpha_{01}\, e^{-\boldsymbol{i}\omega\tau} + \alpha_{02}\, e^{-2\boldsymbol{i}\omega\tau}\bigr),$$

или

$$H_2 = \alpha_{00}^2 + \alpha_{01}^2 + \alpha_{02}^2 + \omega^2 + 2\,\bigl[\alpha_{01}(\alpha_{00}+\alpha_{02})\,\cos\tau\,\omega + \\ + \alpha_{00}\,\alpha_{02}\,\cos 2\,\tau\,\omega - \alpha_{10}\,\omega\,\bigl(\alpha_{01}\sin\tau\,\omega + \alpha_{02}\,\sin 2\,\tau\,\omega\bigr)\bigr].$$

Поведение функции $\mathcal{C}_{XX}(t)$ при $\alpha_{00} = 4.0$, $\alpha_{01} = 0.5$ и $\alpha_{02} = -0.25$ и различных τ приведено на рис. 2.2.82. Стационарные дисперсии при этом будут равны $7.2617\cdot 10^{-3}$, $7.4175\cdot 10^{-3}$, $7.5161\cdot 10^{-3}$, $7.5617\cdot 10^{-3}$, $7.5810\cdot 10^{-3}$, $7.5889\cdot 10^{-3}$, $7.5921\cdot 10^{-3}$ и $7.5934\cdot 10^{-3}$ соответственно.

Пример 2.2.30. Следующий объект анализа – система, описываемая уравнением первого порядка нейтрального типа с одним запаздыванием:

$$X'(t) + \alpha_{11}\, X'(t-\tau) + \alpha_{00}\, X(t) + \alpha_{01}\, X(t-\tau) = \gamma\, V(t).$$

В данном случае

$$H_2 = \bigl(-\boldsymbol{i}\,\omega - \boldsymbol{i}\,\omega\,\alpha_{11}\, e^{\boldsymbol{i}\omega\tau} + \alpha_{00} + \alpha_{01}\, e^{\boldsymbol{i}\omega\tau}\bigr)\times \\ \times \bigl(\boldsymbol{i}\,\omega + \boldsymbol{i}\,\omega\,\alpha_{11}\, e^{-\boldsymbol{i}\omega\tau} + \alpha_{00} + \alpha_{01}\, e^{-\boldsymbol{i}\omega\tau}\bigr),$$

откуда получим

$$H_2 = \alpha_{00}^2 + \alpha_{01}^2 + (\alpha_{11}^2 + 1)\,\omega^2 + \\ + 2\,\bigl[\cos\tau\,\omega\,\bigl(\alpha_{00}\,\alpha_{01} + \alpha_{11}\,\omega^2\bigr) - \omega\,(\alpha_{01} - \alpha_{00}\,\alpha_{11})\,\sin\tau\,\omega\bigr].$$

В данном случае по сравнению с предыдущим поведение функции $\mathcal{C}_{XX}(t)$ существенно изменилось, но тенденция уменьшения $\bar{\sigma}^2$ с ростом τ

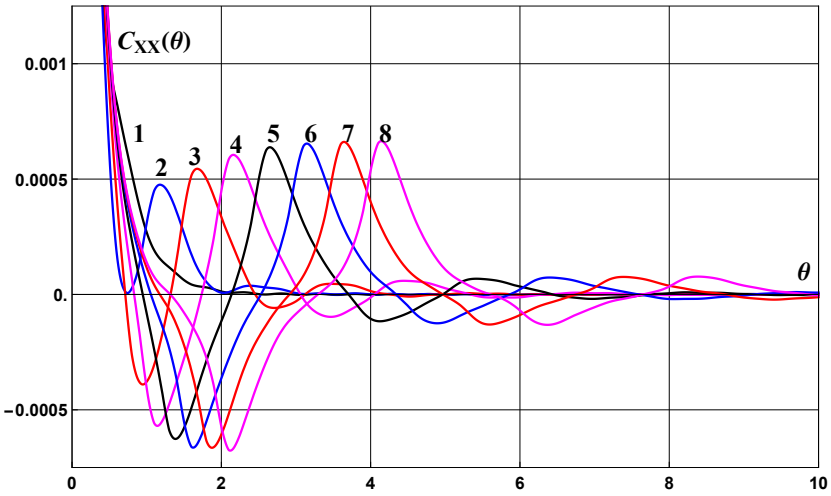


Рис. 2.2.82

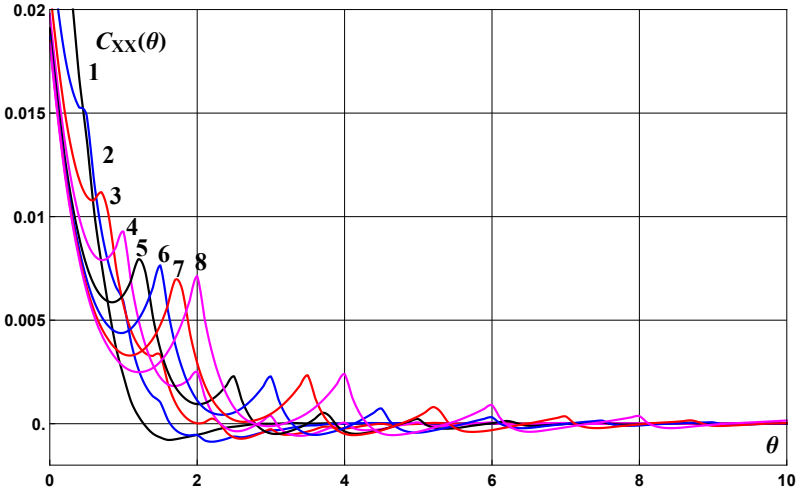


Рис. 2.2.83

осталась. Соответствующие графики для $\alpha_{00} = 2.0$, $\alpha_{11} = -0.25$ и $\alpha_{01} = -0.25$ и различных τ приведены на рис. 2.2.83. Стационарные дисперсии при этом будут равны $2.8654 \cdot 10^{-2}$, $2.3538 \cdot 10^{-2}$, $2.1074 \cdot 10^{-2}$, $1.9788 \cdot 10^{-2}$,

$1.9090 \cdot 10^{-2}$, $1.8701 \cdot 10^{-2}$, $1.8483 \cdot 10^{-2}$ и $1.8359 \cdot 10^{-2}$.

Пример 2.2.31. Рассмотрим уравнение третьего порядка с одним запаздыванием, применяемое в качестве модели движения простого робота [1005]:

$$X'''(t) + \alpha_{20}\, X''(t) + \alpha_{21}\, X''(t-\tau) + \alpha_{10}\, X'(t) + \alpha_{01}\, X(t-\tau) = \gamma\, V(t).$$

В данном случае

$$H_2 = \big[-(\boldsymbol{i}\,\omega)^3 + (\boldsymbol{i}\,\omega)^2\,\alpha_{20} + (\boldsymbol{i}\,\omega)^2\,\alpha_{21}\, e^{\boldsymbol{i}\omega\tau} - (\boldsymbol{i}\,\omega)\,\alpha_{10} + \alpha_{01}\, e^{\boldsymbol{i}\omega\tau}\big] \times \\ \times \big[(\boldsymbol{i}\,\omega)^3 + (\boldsymbol{i}\,\omega)^2\,\alpha_{20} + (\boldsymbol{i}\,\omega)^2\,\alpha_{21}\, e^{-\boldsymbol{i}\omega\tau} + (\boldsymbol{i}\,\omega)\,\alpha_{10} + \alpha_{01}\, e^{-\boldsymbol{i}\omega\tau}\big],$$

или

$$H_2 = \alpha_{01}^2 + (\alpha_{10}^2 - 2\,\alpha_{01}\,\alpha_{21})\,\omega^2 + (\alpha_{20}^2 + \alpha_{21}^2 - 2\,\alpha_{10})\,\omega^4 + \omega^6 - \\ - 2\,\omega\,\left(\alpha_{01} - \alpha_{21}\,\omega^2\right)\,\big[\left(\alpha_{10} - \omega^2\right)\,\sin\tau\,\omega + \alpha_{20}\,\omega\,\cos\tau\,\omega\big].$$

Для данной системы тенденция уменьшения σ_0^2 с ростом τ также сохраняется. Графики для $\alpha_{20} = 2.0$, $\alpha_{21} = -1.0$, $\alpha_{10} = 4.0$ и $\alpha_{01} = -1.0$ и различных τ приведены на рис. 2.2.83. Стационарные дисперсии при этом будут равны $7.7702 \cdot 10^{-3}$, $7.4226 \cdot 10^{-3}$, $7.1037 \cdot 10^{-3}$, $6.8354 \cdot 10^{-3}$, $6.6200 \cdot 10^{-3}$, $6.4550 \cdot 10^{-3}$, $6.3365 \cdot 10^{-3}$ и $6.2597 \cdot 10^{-3}$ соответственно.

2.2.7.2. Линейные системы с многими запаздываниями

Рассмотрим линейную систему СОДУ с многими постоянными запаздываниями τ_s следующего вида [228]:

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}\,\ddot{\boldsymbol{X}}(t) + \boldsymbol{\mathcal{B}}\,\dot{\boldsymbol{X}}(t) + \boldsymbol{\mathcal{Q}}\,\boldsymbol{X}(t) = \\ = \sum_{\ell=0}^{k} \big[\boldsymbol{\mathcal{G}}_\ell\,\dot{\boldsymbol{V}}(t-\tau_\ell) + \boldsymbol{\mathcal{H}}_\ell\,\boldsymbol{V}(t-\tau_\ell)\big], \quad (2.2.207)$$

где t – время; $\tau_0 = 0$; $\tau_\ell > 0$, $\ell = 1, 2, ..., k$; $\boldsymbol{X}(t) = \{X_1(t), X_2(t), ..., X_n(t)\}^\intercal$ – вектор состояния ($n \in \mathbb{N}$); $\boldsymbol{V}(t) = \{V_1(t), V_2(t), ..., V_m(t)\}^\intercal$ – векторный случайный процесс ($m \in \mathbb{N}$), возмущающий соответствующую систему и имеющий стационарные в широком смысле и стационарно связанные, дифференцируемые в среднем квадратическом компоненты, что отражается в соотношениях для вектора математических ожиданий и матриц

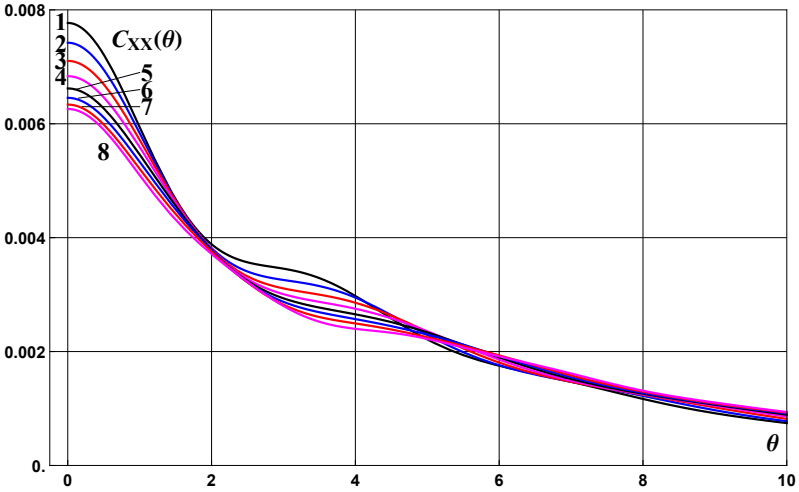


Рис. 2.2.84

ковариационных функций и спектральных плотностей следующим образом:

$$\boldsymbol{m}_V(t) = \{m_{V1}(t), m_{V2}(t), ..., m_{Vq}(t)\}^{\intercal} \equiv \mathbb{E}[\boldsymbol{V}(t)] = \boldsymbol{m}_V^0 \equiv \text{const},$$
$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{VV}(t_1, t_2) = \{\mathcal{C}_{V_iV_j}(t_1, t_2)\} \equiv \mathbb{E}[\boldsymbol{V}^{\circ}(t_1)\boldsymbol{V}^{\circ\intercal}(t_2)] =$$
$$= \boldsymbol{\mathcal{C}}_{VV}(t_2 - t_1) = \boldsymbol{\mathcal{C}}_{VV}(\theta), \quad \theta = t_2 - t_1,$$
$$\boldsymbol{V}^{\circ}(t) = \boldsymbol{V}(t) - \boldsymbol{m}_V(t),$$
$$\boldsymbol{\mathcal{S}}_{VV}(\omega) = \{\mathcal{S}_{V_iV_j}(\omega)\} \equiv \frac{1}{2\,\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\boldsymbol{i}\omega\theta}\, \boldsymbol{\mathcal{C}}_{VV}(\theta)\, d\theta;$$

$\boldsymbol{\mathcal{A}} = \{a_{ij}\}$, $\boldsymbol{\mathcal{B}} = \{b_{ij}\}$, $\boldsymbol{\mathcal{Q}} = \{q_{ij}\}$ и $\boldsymbol{\mathcal{G}}_s = \{g_{sij}\}$, $\boldsymbol{\mathcal{H}}_s = \{h_{sij}\}$ $(s = \overline{0,k})$ – постоянные $n \times n$- и $n \times m$-матрицы соответственно, причем $\boldsymbol{\mathcal{Q}}$ обратима.

Задача исследования состоит в построении соотношений для вектора математических ожиданий $\boldsymbol{m}_X(t) = \{m_{X_1}(t), m_{X_2}(t), ..., m_{X_n}(t)\}^{\intercal}$, матрицы ковариационных функций $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(t_1, t_2) = \{\mathcal{C}_{X_iX_j}(t_1, t_2)\}$ и матрицы спектральных плотностей

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}_{XX}(\omega) = \{\mathcal{S}_{X_iX_j}(\omega)\} \equiv \frac{1}{2\,\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\boldsymbol{i}\omega\theta}\, \boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(\theta)\, d\theta$$

вектора состояния при условии, что все переходные процессы в системе завершились.

Предположим, что коэффициенты уравнения (2.2.207) таковы, что при $t \to +\infty$ после переходного режима в системе, описываемой этим уравнением, устанавливается стационарный режим, при котором вектор $\boldsymbol{X}(t)$, как и $\boldsymbol{V}(t)$, будет стационарным векторным случайным процессом (со стационарно связанными компонентами) с неизвестными постоянным вектором математических ожиданий $\boldsymbol{m}_X$ и матрицами ковариационных функций $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(\theta)$ и спектральных плотностей $\boldsymbol{\mathcal{S}}_{XX}(\omega)$, а оба эти векторных процесса – стационарно связанными.

Вследствие утверждений корреляционного анализа [43] и сделанных предположений ясно, что для полного описания гауссовского стационарного векторного случайного процесса $\boldsymbol{X}(t)$ достаточно вычислить вектор $\boldsymbol{m}_X$ и матрицу $\boldsymbol{\mathcal{S}}_{XX}(\omega)$, а все остальные необходимые характеристики этого случайного процесса (матрицу ковариационных функций $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(\theta)$ и матрицу ковариаий $\mathbb{D}_X$) можно получить по известным формулам [43, 236].

С учетом предположений первая часть задачи решается без труда на основании соотношения

$$\boldsymbol{m}_X = \boldsymbol{\mathcal{Q}}^{-1} \sum_{\ell=0}^{k} \mathcal{H}_\ell \, \boldsymbol{m}_V^0. \tag{2.2.208}$$

Воспользуемся идеей С. Гийюзика для выполнения общей части выкладок по решению второй части поставленной задачи. Для этого сначала получим векторно-матричное уравнение для центрированного процесса $\boldsymbol{X}^\circ(t) = \boldsymbol{X}(t) - \boldsymbol{m}_X(t)$, которое будет выглядеть следующим образом:

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}\,\ddot{\boldsymbol{X}}^\circ(t) + \boldsymbol{\mathcal{B}}\,\dot{\boldsymbol{X}}^\circ(t) + \boldsymbol{\mathcal{Q}}\,\boldsymbol{X}^\circ(t) = \\ = \sum_{\ell=0}^{k} \left[\boldsymbol{\mathcal{G}}_\ell\,\dot{\boldsymbol{V}}^\circ(t-\tau_\ell) + \boldsymbol{\mathcal{H}}_\ell\,\boldsymbol{V}^\circ(t-\tau_\ell)\right]. \tag{2.2.209}$$

Тогда, если обе части последнего уравнения для момента времени $t = t_1$ умножить справа на $\boldsymbol{X}^{\circ\intercal}(t_2)$, транспонированное уравнение (2.2.209), записанное для $t = t_2$, – на вектор $\boldsymbol{V}^\circ(t_1)$ слева, а затем усреднить полученные соотношения, то в результате будем иметь следующие уравнения для матриц нестационарных ковариационных функций $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(t_1, t_2)$ и $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{VX}(t_1, t_2)$:

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}\,\frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(t_1,t_2)}{\partial t_1^2}+\boldsymbol{\mathcal{B}}\,\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(t_1,t_2)}{\partial t_1}+\boldsymbol{\mathcal{Q}}\,\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(t_1,t_2)=$$

$$=\sum_{\ell=0}^{k}\Big[\boldsymbol{\mathcal{G}}_\ell\,\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{C}}_{VX}(t_1-\tau_\ell,t_2)}{\partial t_1}+\boldsymbol{\mathcal{H}}_\ell\,\boldsymbol{\mathcal{C}}_{VX}(t_1-\tau_\ell,t_2)\Big],\quad (2.2.210)$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{C}}_{VX}(t_1,t_2)}{\partial t_2^2}\,\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\mathsf{T}}+\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{C}}_{VX}(t_1,t_2)}{\partial t_2}\,\boldsymbol{\mathcal{B}}^{\mathsf{T}}+\boldsymbol{\mathcal{C}}_{VX}(t_1,t_2)\,\boldsymbol{\mathcal{Q}}^{\mathsf{T}}=$$

$$=\sum_{\ell=0}^{k}\Big[\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{C}}_{VV}(t_1,t_2-\tau_\ell)}{\partial t_2}\,\boldsymbol{\mathcal{G}}_\ell^{\mathsf{T}}+\boldsymbol{\mathcal{C}}_{VV}(t_1,t_2-\tau_\ell)\,\boldsymbol{\mathcal{H}}_\ell^{\mathsf{T}}\Big].\quad (2.2.211)$$

В установившемся режиме с учетом соотношений

$$\frac{\partial}{\partial t_1}=-\frac{\partial}{\partial t},\quad \frac{\partial}{\partial t_2}=\frac{\partial}{\partial t},\quad \frac{\partial^2}{\partial t_1^2}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}=\frac{\partial^2}{\partial t_2^2},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(t_1,t_2)=\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(t_2-t_1)=\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(\theta),$$

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XV}(t_1,t_2)=\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XV}(t_2-t_1)=\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XV}(\theta),$$

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{VX}(t_1,t_2)=\boldsymbol{\mathcal{C}}_{VX}(t_2-t_1)=\boldsymbol{\mathcal{C}}_{VX}(\theta)\equiv\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XV}^{\mathsf{T}}(\theta)$$

эти уравнения можно записать так:

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{\mathcal{C}}''_{XX}(\theta)-\boldsymbol{\mathcal{B}}\,\boldsymbol{\mathcal{C}}'_{XX}(\theta)+\boldsymbol{\mathcal{Q}}\,\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(\theta)=$$

$$=\sum_{\ell=0}^{k}\big[-\boldsymbol{\mathcal{G}}_\ell\,\boldsymbol{\mathcal{C}}'_{VX}(\theta+\tau_\ell)+\boldsymbol{\mathcal{H}}_\ell\,\boldsymbol{\mathcal{C}}_{VX}(\theta+\tau_\ell)\big],\quad (2.2.212)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}''_{VX}(\theta)\,\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\mathsf{T}}+\boldsymbol{\mathcal{C}}'_{VX}(\theta)\,\boldsymbol{\mathcal{B}}^{\mathsf{T}}+\boldsymbol{\mathcal{C}}_{VX}(\theta)\,\boldsymbol{\mathcal{Q}}^{\mathsf{T}}=$$

$$=\sum_{\ell=0}^{k}\big[\boldsymbol{\mathcal{C}}'_{VV}(\theta-\tau_\ell)\,\boldsymbol{\mathcal{G}}_\ell^{\mathsf{T}}+\boldsymbol{\mathcal{C}}_{VV}(\theta-\tau_\ell)\,\boldsymbol{\mathcal{H}}_\ell^{\mathsf{T}}\big].\quad (2.2.213)$$

Если теперь левые и правые части векторно-матричных уравнений (2.2.212), (2.2.213) умножить на $e^{-i\omega\theta}/(2\,\pi)$, а затем проинтегрировать по θ от $-\infty$ до $+\infty$ и учесть равенства (2.2.196)–(2.2.201), то получим следующую систему матричных уравнений для неизвестных матриц спектральных плотностей $\boldsymbol{\mathcal{S}}_{XX}(\omega)$ и $\boldsymbol{\mathcal{S}}_{VX}(\omega)$:

$$\big[(\boldsymbol{i}\,\omega)^2\,\boldsymbol{\mathcal{A}} - \boldsymbol{i}\,\omega\,\boldsymbol{\mathcal{B}} + \boldsymbol{\mathcal{Q}}\big]\,\boldsymbol{\mathcal{S}}_{XX}(\omega) =$$

$$= \sum_{\ell=0}^{k} \big(- \boldsymbol{i}\,\omega\, e^{\boldsymbol{i}\omega\tau_\ell}\,\boldsymbol{\mathcal{G}}_\ell + e^{\boldsymbol{i}\omega\tau_\ell}\,\boldsymbol{\mathcal{H}}_\ell\big)\,\boldsymbol{\mathcal{S}}_{VX}(\omega), \quad (2.2.214)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}_{VX}(\omega)\,\big[(\boldsymbol{i}\,\omega)^2\,\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\mathsf{T}} + \boldsymbol{i}\,\omega\,\boldsymbol{\mathcal{B}}^{\mathsf{T}} + \boldsymbol{\mathcal{Q}}^{\mathsf{T}}\big] =$$

$$= \boldsymbol{\mathcal{S}}_{VV}(\omega)\,\sum_{\ell=0}^{k} \big(\boldsymbol{i}\,\omega\, e^{-\boldsymbol{i}\omega\tau_\ell}\,\boldsymbol{\mathcal{G}}_\ell^{\mathsf{T}} + e^{-\boldsymbol{i}\omega\tau_\ell}\,\boldsymbol{\mathcal{H}}_\ell^{\mathsf{T}}\big). \quad (2.2.215)$$

Введем обозначения:

$$\boldsymbol{\Lambda}_1(\omega) = \boldsymbol{\mathcal{Q}} - \omega^2\,\boldsymbol{\mathcal{A}} - \boldsymbol{i}\,\omega\,\boldsymbol{\mathcal{B}},$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_2(\omega) = \sum_{\ell=0}^{k} \big(- \boldsymbol{i}\,\omega\, e^{\boldsymbol{i}\omega\tau_\ell}\,\mathcal{G}_\ell + e^{\boldsymbol{i}\omega\tau_\ell}\,\boldsymbol{\mathcal{H}}_\ell\big),$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_3(\omega) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}^{\mathsf{T}} - \omega^2\,\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\mathsf{T}} + \boldsymbol{i}\,\omega\,\boldsymbol{\mathcal{B}}^{\mathsf{T}},$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_4(\omega) = \sum_{\ell=0}^{k} \big(\boldsymbol{i}\,\omega\, e^{-\boldsymbol{i}\omega\tau_\ell}\,\boldsymbol{\mathcal{G}}_\ell^{\mathsf{T}} + e^{-\boldsymbol{i}\omega\tau_\ell}\,\boldsymbol{\mathcal{H}}_\ell^{\mathsf{T}}\big),$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_5(\omega) = \boldsymbol{\Lambda}_1^{-1}(\omega)\,\boldsymbol{\Lambda}_2(\omega), \qquad \boldsymbol{\Lambda}_6(\omega) = \boldsymbol{\Lambda}_4(\omega)\,\boldsymbol{\Lambda}_3^{-1}(\omega)$$

(последние – в предположении, что матрицы $\boldsymbol{\Lambda}_1$ и $\boldsymbol{\Lambda}_3$ обратимы). Тогда получим:

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}_{XX}(\omega) = \boldsymbol{\Lambda}_5(\omega)\,\boldsymbol{\mathcal{S}}_{VV}(\omega)\,\boldsymbol{\Lambda}_6(\omega), \quad (2.2.216)$$

а отсюда по формулам

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(\theta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\boldsymbol{i}\omega\theta}\,\boldsymbol{\mathcal{S}}_{XX}(\omega)\,d\omega, \quad (2.2.217)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_X = \boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(0) \quad (2.2.218)$$

определим искомые матрицу ковариационных функций и ковариационную матрицу.

Пример 2.2.32. Рассмотрим следующую систему линейных СОДУ с запаздыванием:

$$\ddot{X}_1(t) + 2\,\alpha_1\,\dot{X}_1(t) + \omega_1^2\,X_1(t) =$$

$$= k_1\, X_2(t) + \beta_{11}\, \dot{V}_1(t) + \beta_{12}\, \dot{V}_1(t-\tau) + \beta_{13}\, V_1(t) + \beta_{14}\, V_1(t-\tau),$$

$$\ddot{X}_2(t) + 2\,\alpha_2\, \dot{X}_2(t) + \omega_2^2\, X_2(t) =$$

$$= k_2\, X_1(t) + \beta_{21}\, \dot{V}_2(t) + \beta_{22}\, \dot{V}_2(t-\tau) + \beta_{23}\, V_2(t) + \beta_{24}\, V_2(t-\tau),$$

где $\alpha_i > 0$, $\omega_i > 0$, k_i, β_{ij} – постоянные ($i = 1, 2$; $j = 1, 2, 3, 4$).

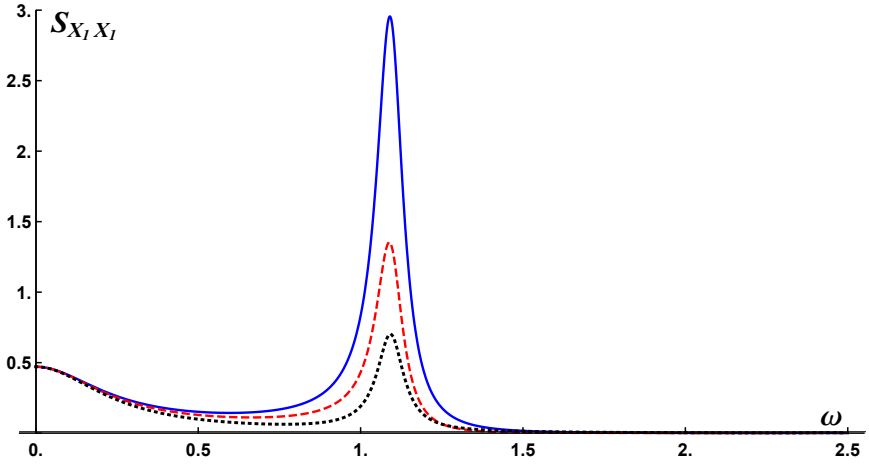
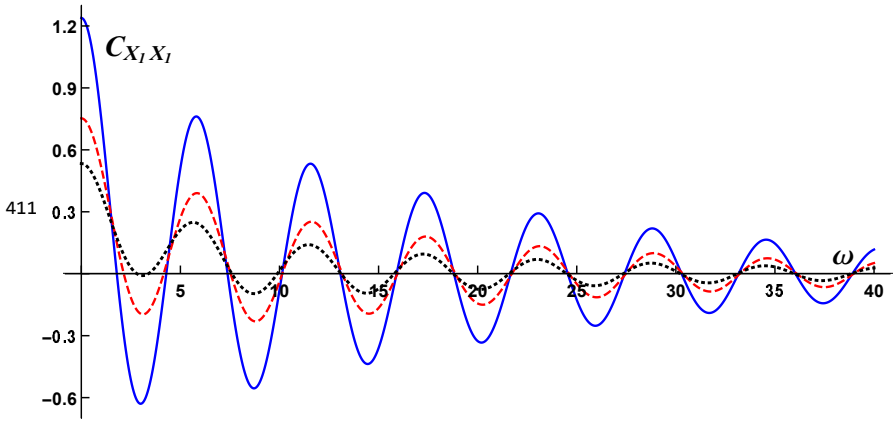


Рис. 2.2.85



411

Рис. 2.2.86

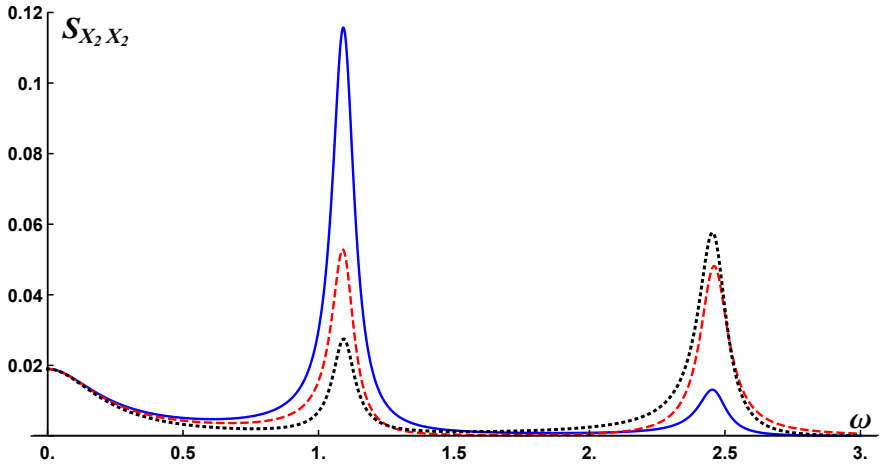


Рис. 2.2.87

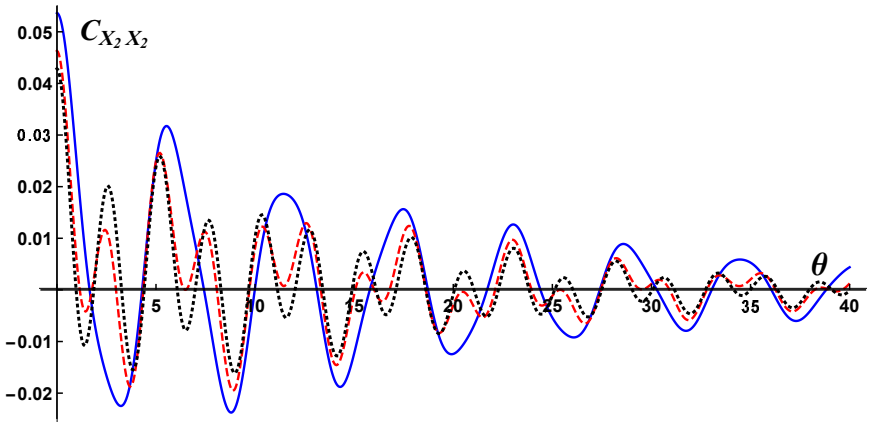


Рис. 2.2.88

Будем считать, что случайные возмущения – случайные процессы $V_1(t)$ и $V_2(t)$ получаются в результате прохождения через фильтры

$$\dot{V}_1(t) + \gamma_1 V_1(t) = \epsilon_1 V_0(t), \qquad \dot{V}_2(t) + \gamma_2 V_2(t) = \epsilon_2 V_0(t)$$

стационарного белого шума $V_0(t)$, имеющего ковариационную функцию $\sigma_0^2 \delta(\theta)$ и спектральную плотность $\sigma_0^2/(2\pi)$. В результате этого в стацио-

нарном состоянии процессы $V_1(t)$ и $V_2(t)$ будут иметь стационарные плотности

$$\mathcal{S}_{X_iX_i}(\omega) = \frac{1}{2\,\pi}\,\frac{\epsilon_i^2\,\sigma_0^2}{\omega^2+\gamma_i^2}, \qquad i=1,2.$$

Используя выше полученные соотношения, были проведены численно-аналитические расчеты, позволившие получить явные выражения для $\mathcal{S}_{X_iX_j}(\omega)$ и табличные значения на выбранной сетке $\mathcal{C}_{X_iX_j}(\theta)$. В качестве параметров были выбраны следующие значения:

$$\alpha_1 = 0.1; \quad \omega_1^2 = 1.0; \quad k_1 = 1.0;$$
$$\beta_{11} = 0.1; \quad \beta_{12} = 0.25; \quad \beta_{13} = 0.2; \quad \beta_{14} = 0.5;$$
$$\alpha_2 = 0.125; \quad \omega_2^2 = 6.25; \quad k_2 = -1.0;$$
$$\beta_{21} = 0.125; \quad \beta_{22} = 0.2; \quad \beta_{23} = 0.25; \quad \beta_{24} = 0.4;$$
$$\sigma_0^2 = 2; \quad \epsilon_1 = 0.5; \quad \epsilon_2 = 1/3; \quad \gamma_1 = 0.25; \quad \gamma_2 = 0.2.$$

Часть результатов вычислений представлены на рис. 2.2.85–2.2.88, где на рис. 2.2.86 и 2.2.88 отображено поведение ковариационных функций $C_{X_1X_1}(\theta)$ и $C_{X_2X_2}(\theta)$, а на рис. 2.2.85 и 2.2.87 – спектральных плотностей $S_{X_1X_1}(\omega)$ и $S_{X_2X_2}(\omega)$. На всех этих рисунках запаздываниям $\tau = 1.0$, 2.0 и 3.0 соответствуют непрерывные, штриховые и точечные кривые.

Отметим, что функции $S_{X_1X_1}(\omega)$ (при разных τ) также имеют локальные максимумы в окрестности частоты $\omega = \omega_2$, но эти максимумы не так явно выражены как у $S_{X_2X_2}(\omega)$.

2.2.7.3. Линейные системы СОДУ нейтрального типа

Рассмотрим следующую систему линейных ОДУ нейтрального типа с q кратными запаздываниями и случайными возмущениями [252]:

$$\boldsymbol{X}'(t) = \sum_{\ell=0}^{q} \boldsymbol{\mathcal{A}}_\ell\,\boldsymbol{X}(t-\tau_\ell) + \sum_{k=1}^{q} \boldsymbol{\mathcal{B}}_k\,\boldsymbol{X}'(t-\tau_k) + \boldsymbol{\mathcal{H}}\,\boldsymbol{V}(t), \qquad (2.2.219)$$

где t – время; $\tau_k = k\,\tau$ – запаздывания, $k = 1, 2, ..., q$, $q \in \mathbb{Z}$, $\tau = \text{const} > 0$; $\boldsymbol{X}(t) = \{X_1(t), X_2(t), ..., X_n(t)\}^\intercal$ – вектор состояния; $\boldsymbol{V}(t) = \{V_i(t)\} \in \mathbb{R}^m$ – центрированный стационарный векторный случайный процесс с независимыми компонентами, известными автоковариационными функциями $\mathcal{C}_{V_jV_j}(\theta)$ и спектральными плотностями $\mathcal{S}_{V_jV_j}(\omega)$ процессов $V_j(t)$ ($j = 1, 2,$

..., m), являющихся компонентами диагональных матриц $\mathcal{C}_{VV}(\theta)$ и $\mathcal{S}_{VV}(\omega)$ соответственно и связанных формулами Винера–Хинчина [43]:

$$\mathcal{C}_{V_jV_j}(\theta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\boldsymbol{i}\omega\theta}\,\mathcal{S}_{V_jV_j}(\omega)\,d\omega, \quad \mathcal{S}_{V_jV_j}(\omega) = \frac{1}{2\,\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\boldsymbol{i}\omega\theta}\,\mathcal{C}_{V_jV_j}(\theta)\,d\theta;$$

$\boldsymbol{\mathcal{A}}_\ell = \{a_{\ell ij}\}$, $\boldsymbol{\mathcal{B}}_k = \{b_{kij}\}$ и $\boldsymbol{\mathcal{H}} = \{h_{ij}\}$ – постоянные матрицы соответствующей размерности; $\intercal$ – символ транспонирования матрицы (вектора); $\mathbb{E}[\cdot]$ – оператор математического ожидания.

Предположим, что коэффициенты уравнений (2.2.219) таковы, что при $t \to +\infty$ после переходного режима в системе, описываемой этими уравнениями, устанавливается стационарный режим, при котором $\boldsymbol{X}(t)$, как и $\boldsymbol{V}(t)$, будет стационарным СП с нулевым вектором математических ожиданий $\boldsymbol{m}_X = \mathbb{E}[\boldsymbol{X}(t)] = \boldsymbol{0}$ и неизвестными матрицами ковариационных функций $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(\omega) = \{\mathcal{C}_{X_iX_k}(\omega)\}$ и спектральных плотностей $\boldsymbol{\mathcal{S}}_{XX}(\omega) = \{\mathcal{S}_{X_iX_k}(\omega)\}$, а оба эти векторных процесса – стационарно связанными, которые характеризуются матрицами ковариационных функций $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XV}(\omega) = \{\mathcal{C}_{X_iV_j}(\omega)\}$ и спектральных плотностей $\boldsymbol{\mathcal{S}}_{XV}(\omega) = \{\mathcal{S}_{X_iV_j}(\omega)\}$, где

$$\mathcal{C}_{X_iX_k}(\theta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\boldsymbol{i}\omega\theta}\,\boldsymbol{\mathcal{S}}_{X_iX_k}(\omega)\,d\omega, \quad \boldsymbol{\mathcal{S}}_{X_iX_k}(\omega) = \frac{1}{2\,\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\boldsymbol{i}\omega\theta}\,\mathcal{C}_{X_iX_k}(\theta)\,d\theta,$$

$$\mathcal{C}_{X_iV_j}(\theta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\boldsymbol{i}\omega\theta}\,\boldsymbol{\mathcal{S}}_{X_iV_j}(\omega)\,d\omega, \quad S_{X_iV_j}(\omega) = \frac{1}{2\,\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\boldsymbol{i}\omega\theta}\,C_{X_iV_j}(\theta)\,d\theta,$$

$$i,k = 1,2,...,n, \quad j = 1,2,...,m.$$

Вследствие утверждений корреляционного анализа [43] и сделанных предположений ясно, что для полного описания гауссовского стационарного векторного случайного процесса $\boldsymbol{X}(t)$ достаточно вычислить матрицу спектральных плотностей $\boldsymbol{\mathcal{S}}_{XX}(\omega)$, а затем через нее и все остальные необходимые характеристики этого векторного случайного процесс.

Ниже для решения поставленной задачи дополнительно будем использовать следующие соотношения:

$$\mathcal{C}_{X_iX_k}(t_1,t_2) = \mathbb{E}\big[\big\{X_i(t_1) - m_{X_i}(t_1)\big\}\big\{X_k(t_2) - m_{X_k}(t_2)\big\}\big];$$
$$\mathcal{C}_{X_iV_j}(t_1,t_2) = \mathbb{E}\big[\big\{X_i(t_1) - m_{X_i}(t_1)\big\}\big\{V_j(t_2) - m_{V_j}(t_2)\big\}\big];$$
$$\mathcal{C}_{V_jV_j}(t_1,t_2) = \mathbb{E}\big[\big\{V_j(t_1) - m_{V_j}(t_1)\big\}\big\{V_j(t_2) - m_{V_j}(t_2)\big\}\big];$$

$$\frac{\partial}{\partial t_1} = -\frac{\partial}{\partial \theta}; \qquad \frac{\partial}{\partial t_2} = \frac{\partial}{\partial \theta};$$

$$e^{\pm \boldsymbol{i}\omega\tau}\, \mathcal{S}_{X_i X_k}(\omega) = \frac{1}{2\,\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\boldsymbol{i}\omega\theta}\, \mathcal{C}_{X_i X_k}(\theta \pm \tau)\, d\theta;$$

$$\boldsymbol{i}\,\omega\, \mathcal{S}_{X_i X_k}(\omega) = \frac{1}{2\,\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\boldsymbol{i}\omega\theta}\, \mathcal{C}'_{X_i X_k}(\theta)\, d\theta, \quad r \in \mathbb{N},$$

где $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(t_1, t_2) = \{\mathcal{C}_{X_i X_k}(t_1, t_2)\}$,$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XV}(t_1, t_2) = \{\mathcal{C}_{X_i V_j}(t_1, t_2)\}$, $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{VV}(t_1, t_2) = {}$ $= \operatorname{diag}\big(\mathcal{C}_{V_j V_j}(t_1, t_2)\big)$ – матрицы авто- и кросс-ковариационных функций векторных случайных процессов $\boldsymbol{X}(t)$ и $\boldsymbol{V}(t)$ в переходном режиме ($\theta = t_2 - t_1$ в стационарном). Кроме указанных, далее используются еще следующие символы:

$\boldsymbol{\mathcal{K}}_Z = \{\mathcal{K}_{Z_i Z_j}\}$ ($\mathcal{K}_{Z_i Z_j} = \mathbb{E}\big[(Z_i - m_{Z_i})(Z_j - m_{Z_j})\big]$) – матрица ковариаций;

$$\mathcal{N}(\boldsymbol{z}; \boldsymbol{m}_Z, \boldsymbol{\mathcal{K}}_Z) = \frac{1}{(2\,\pi)^{r/2}\, |\boldsymbol{\mathcal{K}}_Z|^{1/2}}\, \exp\Big[-\frac{1}{2}\, (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{m}_Z)^{\intercal}\, \boldsymbol{\mathcal{K}}_Z^{-1}\, (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{m}_Z) \Big]$$

– невырожденная многомерная нормальная плотность случайного вектора $\boldsymbol{Z}$ (i, $j = 1, 2, \ldots, r$.

Применим идею С. Гийюзика для выполнения общей части выкладок по решению поставленной задачи. Для этого сначала из обеих частей уравнений (2.2.219) вычтем векторно-матричное уравнение для функции математического ожидания, имеющее следующий вид:

$$\boldsymbol{m}'_X(t) = \sum_{\ell=0}^{q} \boldsymbol{\mathcal{A}}_\ell\, \boldsymbol{m}_X(t - \tau_\ell) + \sum_{k=1}^{q} \boldsymbol{\mathcal{B}}_k\, \boldsymbol{m}'_X(t - \tau_k), \tag{2.2.220}$$

что дает уравнение для центрированного векторного процесса $\boldsymbol{X}(t)$:

$$\mathring{\boldsymbol{X}}'(t) = \sum_{\ell=0}^{q} \boldsymbol{\mathcal{A}}_\ell\, \mathring{\boldsymbol{X}}(t - \tau_\ell) + \sum_{k=1}^{q} \boldsymbol{\mathcal{B}}_k\, \mathring{\boldsymbol{X}}'(t - \tau_k) + \boldsymbol{\mathcal{H}}\, \boldsymbol{V}(t) \tag{2.2.221}$$

($\mathring{\boldsymbol{V}}(t) = \boldsymbol{V}(t)$). Далее обе части уравнений (2.2.221) для моментов времени $t = t_1$ и $t = t_2$ умножим на $\mathring{\boldsymbol{X}}^{\intercal}(t_2)$ (справа) и $\boldsymbol{V}(t_1)$ (слева после транспонирования системы уравнений) соответственно, а затем усредним. В результате будем иметь следующие уравнения для матриц (пока еще) нестационарных ковариационных функций $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(t_1, t_2)$ и $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{VX}(t_1, t_2)$:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(t_1,t_2)}{\partial t_1} = \sum_{\ell=0}^{q} \boldsymbol{\mathcal{A}}_\ell \, \boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(t_1-\ell\,\tau,t_2) + \\ + \sum_{k=1}^{q} \boldsymbol{\mathcal{B}}_k \, \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(t_1-k\,\tau,t_2)}{\partial t_1} + \boldsymbol{\mathcal{H}}\, \boldsymbol{\mathcal{C}}_{VX}(t_1,t_2),$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{C}}_{VX}(t_1,t_2)}{\partial t_2} = \sum_{\ell=0}^{q} \boldsymbol{\mathcal{C}}_{VX}(t_1,t_2-\ell\,\tau)\, \boldsymbol{\mathcal{A}}_\ell^{\mathsf{T}} + \\ + \sum_{k=1}^{q} \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{C}}_{VX}(t_1,t_2-k\,\tau)}{\partial t_2} \, \boldsymbol{\mathcal{B}}_k^{\mathsf{T}} + \boldsymbol{\mathcal{C}}_{VV}(t_1,t_2)\, \boldsymbol{\mathcal{H}}^{\mathsf{T}}.$$

В установившемся режиме с учетом соотношений, приведенных выше, эти уравнения можно записать так:

$$-\boldsymbol{\mathcal{C}}'_{XX}(\theta) = \sum_{\ell=0}^{q} \boldsymbol{\mathcal{A}}_\ell \, \boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(\theta+\ell\,\tau) - \sum_{k=1}^{q} \boldsymbol{\mathcal{B}}_k \, \boldsymbol{\mathcal{C}}'_{XX}(\theta+k\,\tau) + \boldsymbol{\mathcal{H}}\, \boldsymbol{\mathcal{C}}_{VX}(\theta),$$

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}'_{VX}(\theta) = \sum_{\ell=0}^{q} \boldsymbol{\mathcal{C}}_{VX}(\theta-\ell\,\tau)\, \boldsymbol{\mathcal{A}}_\ell^{\mathsf{T}} + \sum_{k=1}^{q} \boldsymbol{\mathcal{C}}'_{VX}(\theta-k\,\tau)\, \boldsymbol{\mathcal{B}}_k^{\mathsf{T}} + \boldsymbol{\mathcal{C}}_{VV}(\theta)\, \boldsymbol{\mathcal{H}}^{\mathsf{T}}.$$

Если теперь левые и правые части последних уравнений умножить на $e^{-\boldsymbol{i}\omega\theta}/(2\pi)$, а затем проинтегрировать по θ от $-\infty$ до $+\infty$, то получим систему линейных алгебраических уравнений для неизвестных матриц спектральных плотностей $\boldsymbol{\mathcal{S}}_{XX}(\omega)$ и $\boldsymbol{\mathcal{S}}_{VX}(\omega)$:

$$-\boldsymbol{i}\,\omega\, \boldsymbol{\mathcal{S}}_{XX}(\omega) = \\ = \sum_{\ell=0}^{q} e^{\boldsymbol{i}\omega\ell\tau}\, \boldsymbol{\mathcal{A}}_\ell \, \boldsymbol{\mathcal{S}}_{XX}(\omega) - \boldsymbol{i}\,\omega \sum_{k=1}^{q} e^{\boldsymbol{i}\omega k\tau}\, \boldsymbol{\mathcal{B}}_k \, \boldsymbol{\mathcal{S}}_{XX}(\omega) + \boldsymbol{\mathcal{H}}\, \boldsymbol{\mathcal{S}}_{VX}(\omega),$$

$$\boldsymbol{i}\,\omega\, \boldsymbol{\mathcal{S}}_{VX}(\omega) = \\ = \sum_{\ell=0}^{q} e^{-\boldsymbol{i}\omega\ell\tau}\, \boldsymbol{\mathcal{S}}_{VX}(\omega)\, \boldsymbol{\mathcal{A}}_\ell^{\mathsf{T}} + \boldsymbol{i}\,\omega \sum_{k=1}^{q} e^{-\boldsymbol{i}\omega k\tau}\, \boldsymbol{\mathcal{S}}_{VX}(\omega)\, \boldsymbol{\mathcal{B}}_k^{\mathsf{T}} + \boldsymbol{\mathcal{S}}_{VV}(\omega)\, \boldsymbol{\mathcal{H}}^{\mathsf{T}},$$

или

$$\Big[\boldsymbol{i}\,\omega \sum_{k=1}^{q} e^{\boldsymbol{i}\omega k\tau}\, \boldsymbol{\mathcal{B}}_k - \boldsymbol{i}\,\omega\, I - \sum_{\ell=0}^{q} e^{\boldsymbol{i}\omega\ell\tau}\, \boldsymbol{\mathcal{A}}_\ell\Big]\, \boldsymbol{\mathcal{S}}_{XX}(\omega) = \boldsymbol{\mathcal{H}}\, \boldsymbol{\mathcal{S}}_{VX}(\omega),$$

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}_{VX}(\omega)\Big[-\boldsymbol{i}\,\omega\sum_{k=1}^{q}e^{-\boldsymbol{i}\omega k\tau}\,\boldsymbol{\mathcal{B}}_k^{\intercal}+\boldsymbol{i}\,\omega\,\boldsymbol{\mathcal{I}}-\sum_{\ell=0}^{q}e^{-\boldsymbol{i}\omega\ell\tau}\,\boldsymbol{\mathcal{A}}_\ell^{\intercal}\Big]=\boldsymbol{\mathcal{S}}_{VV}(\omega)\,\boldsymbol{\mathcal{H}}^{\intercal}$$

($\boldsymbol{\mathcal{I}}$ –единичная матрица), из которой в предположении обратимости соответствующих матриц находим

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}_{XX}(\omega)=\boldsymbol{\mathcal{G}}_1(\omega)\,\boldsymbol{\mathcal{S}}_{VV}(\omega)\,\boldsymbol{\mathcal{G}}_2(\omega),\tag{2.2.222}$$

где

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}_1(\omega)=\Big[\boldsymbol{i}\,\omega\sum_{k=1}^{q}e^{\boldsymbol{i}\omega k\tau}\,\boldsymbol{\mathcal{B}}_k-\boldsymbol{i}\,\omega\,\boldsymbol{\mathcal{I}}-\sum_{\ell=0}^{q}e^{\boldsymbol{i}\omega\ell\tau}\,\boldsymbol{\mathcal{A}}_\ell\Big]^{-1}\boldsymbol{\mathcal{H}},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}_2(\omega)=\boldsymbol{\mathcal{H}}^{\intercal}\Big[-\boldsymbol{i}\,\omega\sum_{k=1}^{q}e^{-\boldsymbol{i}\omega k\tau}\,\boldsymbol{\mathcal{B}}_k^{\intercal}+\boldsymbol{i}\,\omega\,\boldsymbol{\mathcal{I}}-\sum_{\ell=0}^{q}e^{-\boldsymbol{i}\omega\ell\tau}\,\boldsymbol{\mathcal{A}}_\ell^{\intercal}\Big]^{-1}.$$

После получения $\boldsymbol{\mathcal{S}}_{XX}(\omega)$ с помощью покомпонентного применения формулы Винера–Хинчина для ковариационных функций можно вычислить матрицу $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(\theta)$, а следовательно, и стационарную дисперсию матрицу ковариаций $\boldsymbol{\mathcal{K}}_0=\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(0)$, что позволяет построить как одноточечные, так и различные многоточечные (со сдвигом на τ) стационарные нормальные плотности распределения подмножеств компонент центрированного случайного вектора

$$\mathbb{X}^{[\ell]}=\operatorname{col}\big(\boldsymbol{X}_0,\boldsymbol{X}_1,...,\boldsymbol{X}_\ell\big),\quad \boldsymbol{X}_k=\boldsymbol{X}(t+k\,\tau),\quad k=0,1,...,\ell,\quad \ell\geqslant 0,$$

в частности, в качестве матрицы ковариации $\boldsymbol{\mathcal{K}}_Z$, где $\boldsymbol{Z}=\mathbb{X}^{[\ell]}$, будем иметь:

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_Z=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{K}}_Z^{[11]} & ... & \boldsymbol{\mathcal{K}}_Z^{[12]}\\ ... & ... & ...\\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_Z^{[21]} & ... & \boldsymbol{\mathcal{K}}_Z^{[22]}\end{bmatrix}$$

где

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_Z^{[11]}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{K}}_0 & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(2\,\tau)\\ \boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_0 & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(\tau)\\ \boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(2\,\tau) & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_Z^{[12]}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}((\ell-1)\,\tau) & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(\ell\,\tau)\\ \boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}((\ell-2)\,\tau) & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}((\ell-1)\,\tau)\\ \boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}((\ell-3)\,\tau) & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}((\ell-2)\,\tau)\end{bmatrix},$$

$$\mathcal{K}_Z^{[21]} = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_{XX}((\ell-1)\tau) & \mathcal{C}_{XX}((\ell-2)\tau) & \mathcal{C}_{XX}((\ell-3)\tau) \\ \mathcal{C}_{XX}(\ell\tau) & \mathcal{C}_{XX}((\ell-1)\tau) & \mathcal{C}_{XX}((\ell-2)\tau) \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{K}_Z^{[22]} = \begin{bmatrix} \mathcal{K}_0 & \mathcal{C}_{XX}(\tau) \\ \mathcal{C}_{XX}(\tau) & \mathcal{K}_0 \end{bmatrix}.$$

Пример 2.2.33. Рассмотрим систему второго порядка с двумя кратными запаздываниями, структурные матрицы модели которой имеют вид:

$$\mathcal{A}_0 = \begin{bmatrix} a_{011} & a_{012} \\ a_{021} & a_{022} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_1 = \begin{bmatrix} a_{111} & a_{112} \\ a_{121} & a_{122} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_2 = \begin{bmatrix} a_{211} & 0 \\ 0 & a_{222} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B}_1 = \begin{bmatrix} b_{111} & 0 \\ 0 & b_{122} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}_2 = \begin{bmatrix} b_{211} & 0 \\ 0 & b_{222} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & 0 \\ 0 & h_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{S}_{VV} = \begin{bmatrix} s_{11} & 0 \\ 0 & s_{22} \end{bmatrix}.$$

Расчеты производились при следующих значениях параметров:

$$\begin{gathered} a_{011} = -5.0; \quad a_{012} = 1.0; \quad a_{021} = -2.0; \quad a_{022} = -3.0; \\ a_{111} = -1.0; \quad a_{112} = 0.5; \quad a_{121} = -0.5; \quad a_{122} = -1.0; \\ a_{211} = 0.2; \quad a_{212} = 0.0; \quad a_{221} = 0.0; \quad a_{222} = 0.1; \\ b_{111} = 0.5; \quad b_{112} = 0.0; \quad b_{121} = 0.0; \quad b_{122} = 0.5; \\ b_{211} = 0.2; \quad b_{212} = 0.0; \quad b_{221} = 0.0; \quad b_{222} = 0.1; \\ h_{11} = 1.0; \quad h_{12} = 0.0; \quad h_{21} = 0.0; \quad h_{22} = 1.5; \\ s_{11} = 1.0; \quad s_{22} = 0.5; \quad \tau \in \{1.0, 1.5, 2.0\} \end{gathered}$$

При получении $\mathcal{C}_{X_1X_1}(\theta)$, $\mathcal{C}_{X_1X_2}(\theta)$ и $\mathcal{C}_{X_2X_2}(\theta)$ через спектральные плотности $\mathcal{S}_{X_1X_1}(\omega)$, $\mathcal{S}_{X_1X_2}(\omega)$ и $\mathcal{S}_{X_2X_2}(\omega)$ применялись формулы Винера-Хинчина. При этом учитывалась четность действительных функций – плотностей $\mathcal{S}_{X_1X_1}(\omega)$ и $\mathcal{S}_{X_2X_2}(\omega)$, а также четность действительной части комплексной функции $\mathcal{S}_{X_1X_2}(\omega)$ и нечетность мнимой ее части, что позволило использовать указанные выше формулы в следующей форме:

$$\mathcal{C}_{X_iX_i}(\theta) = 2\int\limits_0^{+\infty} \mathcal{S}_{X_iX_i}(\omega)\cos\omega\,\theta\,d\omega, \quad i = 1, 2; \tag{2.2.223}$$

$$\mathcal{C}_{X_1X_2}(\theta) = 2\int\limits_0^{+\infty} \left[\operatorname{Re}\left\{\mathcal{S}_{X_1X_2}(\omega)\right\}\cos\omega\theta - \operatorname{Im}\left\{\mathcal{S}_{X_1X_2}(\omega)\right\}\sin\omega\theta\right] d\omega, \tag{2.2.224}$$

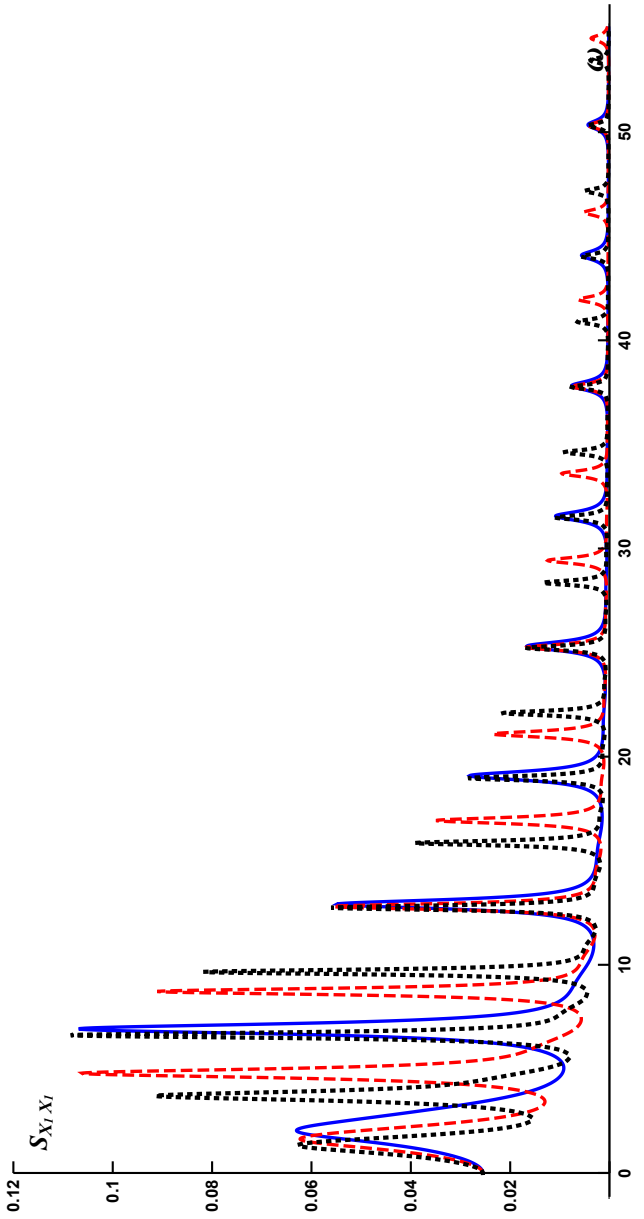


Рис. 2.2.89

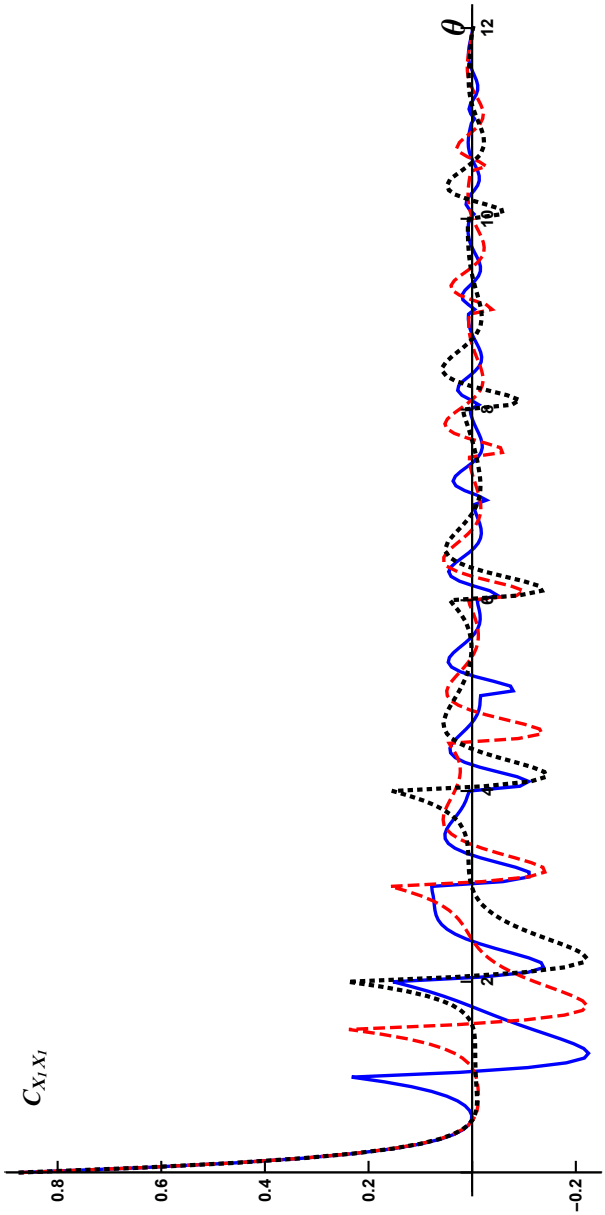


Рис. 2.2.90

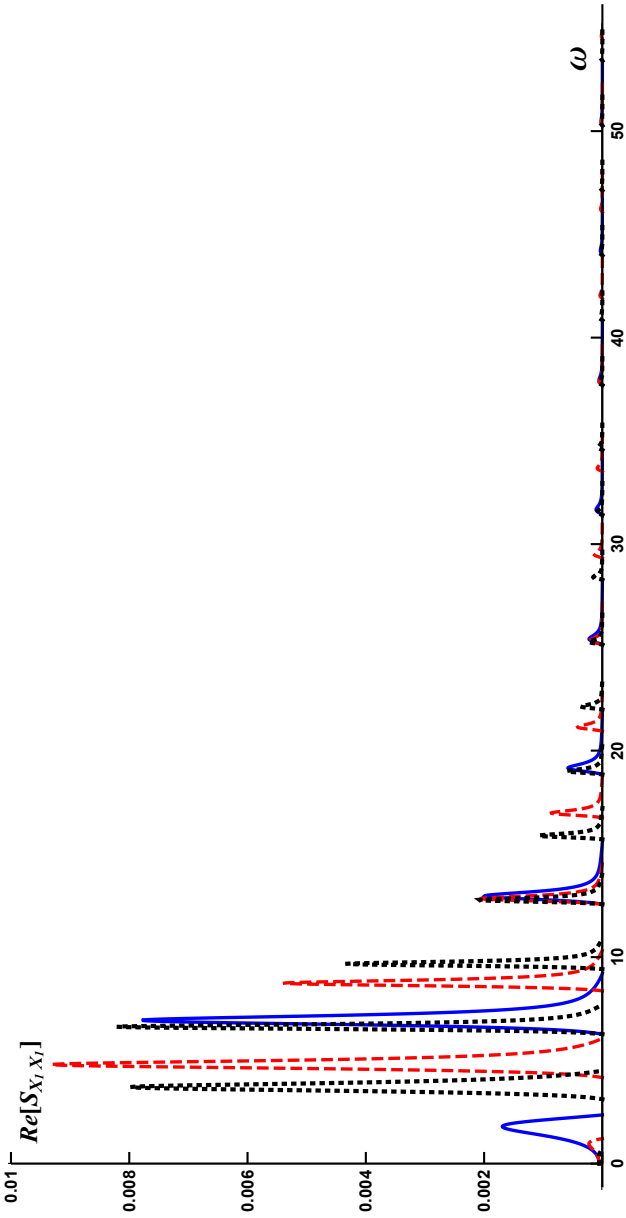


Рис. 2.2.91

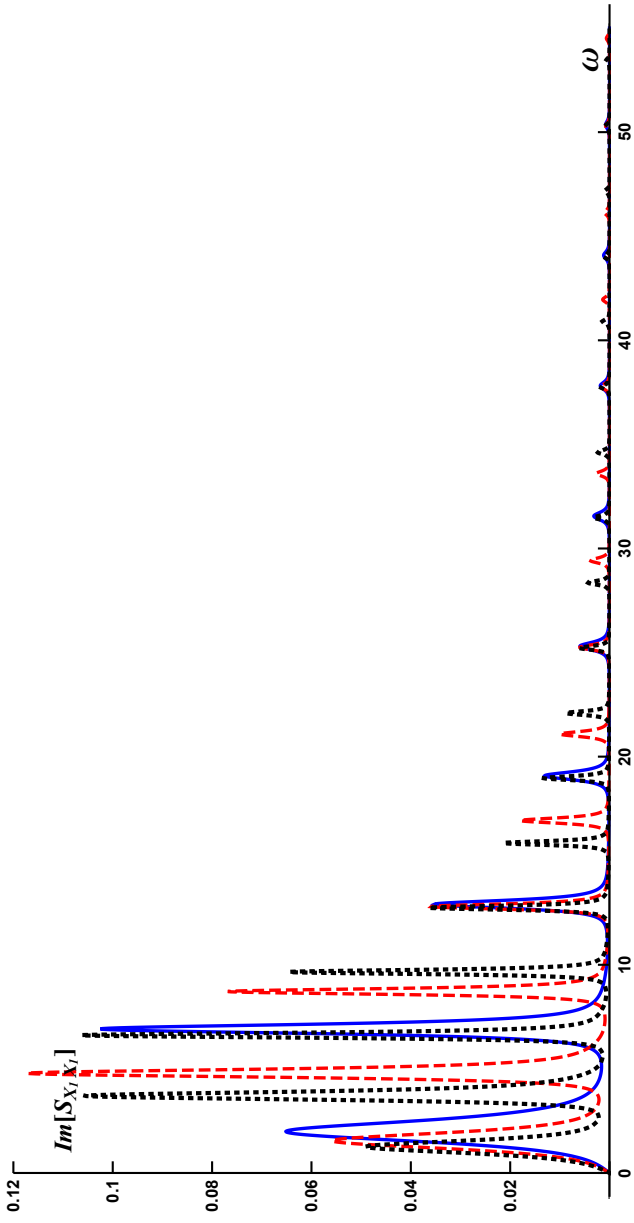


Рис. 2.2.92

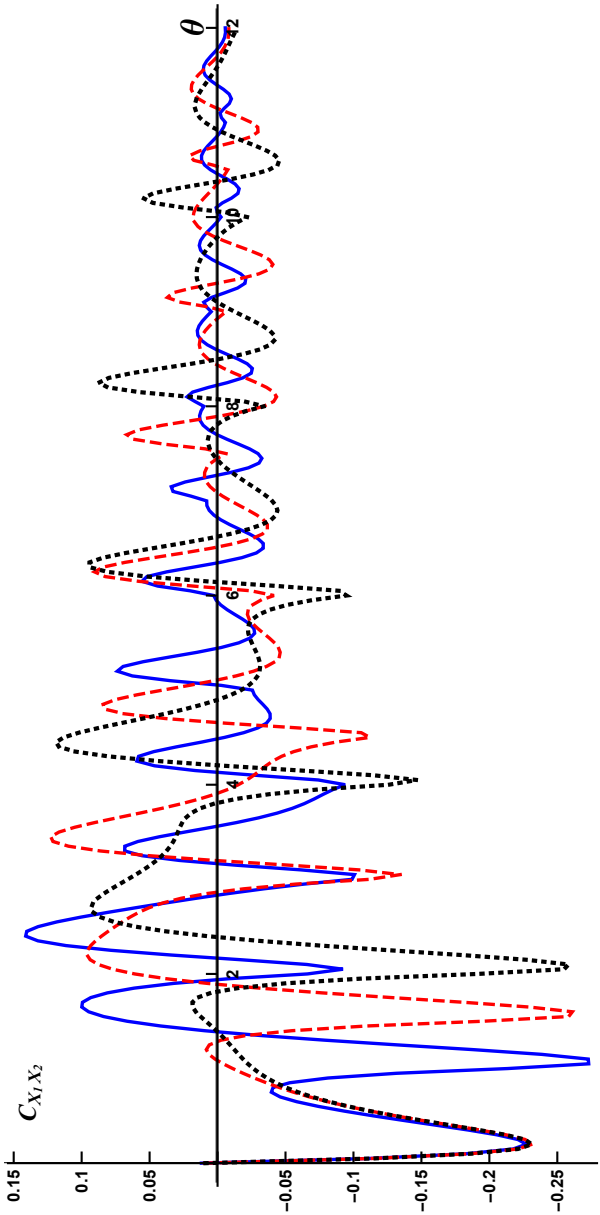


Рис. 2.2.93

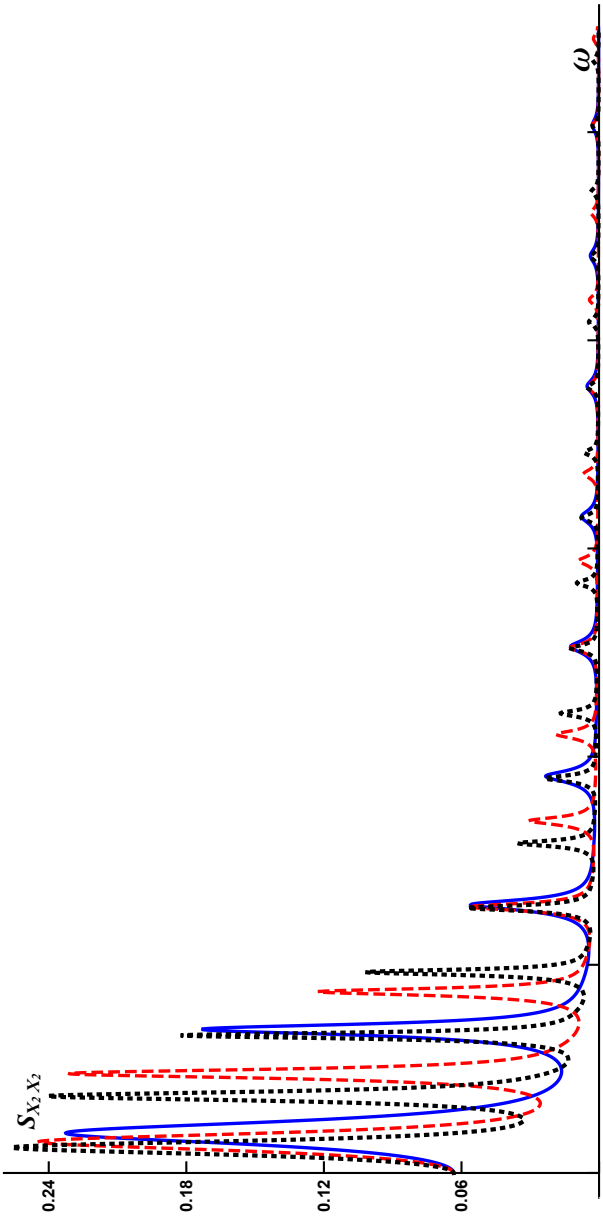


Рис. 2.2.94

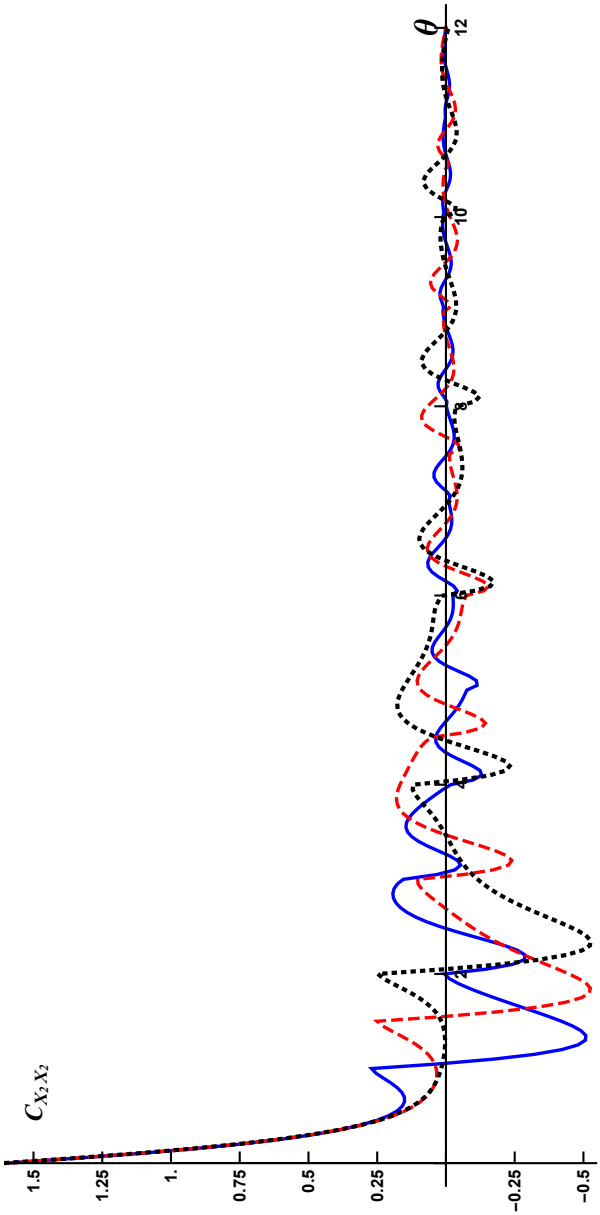


Рис. 2.2.95

что при учете свойств функций $\mathcal{C}_{X_1X_1}(\theta)$, $\mathcal{C}_{X_1X_2}(\theta)$ и $\mathcal{C}_{X_2X_2}(\theta)$ при численных расчетах позволило ограничиться таблицей значений этих функций на заданной сетке только для $\theta \geqslant 0$.

Для приближенного вычисления интегралов в формулах (2.2.223), (2.2.224) применялась замена полубесконечного интервала интегрирования $[0, +\infty)$ конечным $[0, L]$ ($L \gg 1$), который разбивался на более мелкие части $[L_{m-1}, L_m]$: $[0, L] = \bigcup_{m=1}^{M} [L_{m-1}, L_m]$, и встроенная функция `NIntegrate` пакета `Mathematica` с параметром метода `GaussKronrodRule` с автоматическим выбором количества разбиений каждого отрезка интегрирования $[L_{m-1}, L_m]$. Для получения большей точности расчеты велись с 40 значащими цифрами.

Результаты вычислений представлены на рис. 2.2.89–2.2.95, где на рис. 2.2.90, 2.2.93, 2.2.95 отображено поведение ковариационных функций $\mathcal{C}_{X_1X_1}(\theta)$, $\mathcal{C}_{X_1X_2}(\theta)$ и $\mathcal{C}_{X_2X_2}(\theta)$, а на рис. 2.2.89, 2.2.94, 2.2.91, 2.2.92 – спектральных плотностей $\mathcal{S}_{X_1X_1}(\omega)$, $\mathcal{S}_{X_2X_2}(\omega)$ и $\mathcal{S}_{X_1X_2}(\omega)$ (действительная и мнимая части). На всех этих рисунках запаздываниям $\tau = 1.0, 1.5$ и 2.0 соответствуют непрерывные, штриховые и точечные кривые соответственно.

Стационарные дисперсии $\mathcal{D}_{X_1}^{[s]} = \mathcal{C}_{X_1X_1}(0)$, $\mathcal{D}_{X_2}^{[s]} = \mathcal{C}_{X_2X_21}(0)$ и ковариации $\mathcal{K}_{X_1X_2}^{[s]} = \mathcal{C}_{X_1X_2}(0)$ при этом будут равны:

Характеристика	$\tau = 1.0$	$\tau = 1.5$	$\tau = 2.0$
$\mathcal{D}_{X_1}^{[s]}$	0.8695669982	0.8708367623	0.8715484372
$\mathcal{K}_{X_1X_2}^{[s]}$	0.0119059989	0.0096128103	0.0089303070
$\mathcal{D}_{X_2}^{[s]}$	1.6013575257	1.6094588646	1.6112101630

Из таблицы несложно увидеть, что с ростом запаздывания стационарные дисперсии увеличиваются, а ковариация уменьшается.

Линии уровня совместной нормальной плотности сечений $Z_1 = X_1(t)$ и $Z_2 = X_1(t+\tau)$ случайного процесса X_1 в стационарном состоянии изображены на рис. 2.2.96. ►

2.2.7.4. Линейное СДУвЧП гиперболического типа с запаздыванием

Рассмотрим следующее уравнение [242]:

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} + 2\,\alpha_1 \frac{\partial U(x,t)}{\partial t} + 2\,\alpha_2 \frac{\partial U(x,t-\tau_1)}{\partial t} +$$

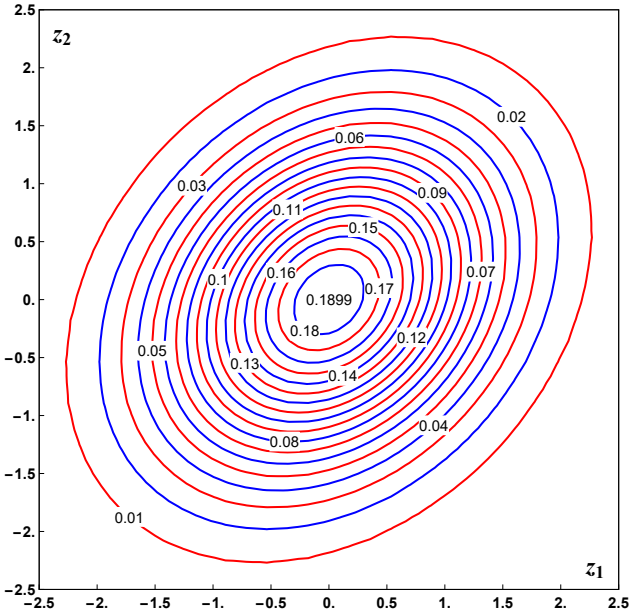


Рис. 2.2.96

$$+\,\beta_1\,U(x,t)+\beta_2\,U(x,t-\tau_2)=\gamma\,\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}+\sigma_0\,V(x,t), \quad (2.2.225)$$

где t – время ($t \geqslant 0$), τ_1, τ_2 – постоянные положительные запаздывания, $\{U(x,t),\ x \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0\}$ – случайное поле с неизвестными вероятностными характеристиками, $\{V(x,t),\ x \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0\}$ – стационарное поле с известной пространственно-временной ковариационной функцией $\{\mathcal{C}_{VV}(\bar{x},\bar{t}),\ \bar{x},\ \bar{t} \in \mathbb{R}\}$ и спектральной плотностью $\{\mathcal{S}_{VV}(\omega_1,\omega_2),\ \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}\}$, связанными формулами Винера–Хинчина [1040]:

$$\mathcal{S}_{VV}(\omega_1,\omega_2)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\boldsymbol{i}(\omega_1\theta_1+\omega_2\theta_2)}\,\mathcal{C}_{VV}(\theta_1,\theta_2)\,d\theta_1\,d\theta_2, \quad (2.2.226)$$

$$\mathcal{C}_{VV}(\theta_1,\theta_2)=\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{\boldsymbol{i}(\omega_1\theta_1+\omega_2\theta_2)}\,\mathcal{S}_{VV}(\omega_1,\omega_2)\,d\omega_1\,d\omega_2, \quad (2.2.227)$$

$\boldsymbol{i}$ – мнимая единица, $\alpha_1 > 0$, α_2, $\beta_1 > 0$, β_2, $\gamma > 0$, $\sigma_0 > 0$ – постоянные, $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

Предположим, что $U(x,t)$ – случайное поле второго порядка, дважды дифференцируемое по x и t в среднеквадратичном. Зададимся целью по-

строить спектральную плотность поля $U(x,t)$, определяющего состояние исследуемой системы и являющегося решением уравнения (2.2.225).

Запишем уравнение (2.2.225) в переменных $x = x_1$, $t = t_1$ и $x = x_2$, $t = t_2$:

$$\frac{\partial^2 U(x_1,t_1)}{\partial t_1^2} + 2\,\alpha_1\,\frac{\partial U(x_1,t_1)}{\partial t_1} + 2\,\alpha_2\,\frac{\partial U(x_1,t_1-\tau_1)}{\partial t_1} + \beta_1\,U(x_1,t_1)+$$

$$+\,\beta_2\,U(x_1,t_1-\tau_2) = \gamma\,\frac{\partial^2 U(x_1,t_1)}{\partial x_1^2} + \sigma_0\,V(x_1,t_1), \qquad (2.2.228)$$

$$\frac{\partial^2 U(x_2,t_2)}{\partial t_2^2} + 2\,\alpha_1\,\frac{\partial U(x_2,t_2)}{\partial t_2} + 2\,\alpha_2\,\frac{\partial U(x_2,t_2-\tau_1)}{\partial t_2} + \beta_1\,U(x_2,t_2)+$$

$$+\,\beta_2\,U(x_2,t_2-\tau_2) = \gamma\,\frac{\partial^2 U(x_2,t_2)}{\partial x_2^2} + \sigma_0\,V(x_2,t_2), \qquad (2.2.229)$$

и усредним левые и правые стороны уравнений (2.2.228) и (2.2.229) во всему пространству состояний. Тогда получим следующие уравнения:

$$\frac{\partial^2 m_U(x_1,t_1)}{\partial t_1^2} + 2\,\alpha_1\,\frac{\partial m_U(x_1,t_1)}{\partial t_1} + 2\,\alpha_2\,\frac{\partial m_U(x_1,t_1-\tau_1)}{\partial t_1} + \beta_1\,m_U(x_1,t_1)+$$

$$+\,\beta_2\,m_U(x_1,t_1-\tau_2) = \gamma\,\frac{\partial^2 m_U(x_1,t_1)}{\partial x_1^2}) + \sigma_0\,m_V(x_1,t_1), \qquad (2.2.230)$$

$$\frac{\partial^2 m_U(x_2,t_2)}{\partial t_2^2} + 2\,\alpha_1\,\frac{\partial m_U(x_2,t_2)}{\partial t_2} + 2\,\alpha_2\,\frac{\partial m_U(x_2,t_2-\tau_1)}{\partial t_2} + \beta_1\,m_U(x_2,t_2)+$$

$$+\,\beta_2\,m_U(x_2,t_2-\tau_2) = \gamma\,\frac{\partial^2 m_U(x_2,t_2)}{\partial x_2^2} + \sigma_0\,m_V(x_2,t_2), \qquad (2.2.231)$$

В уравнениях (2.2.230) и (2.2.231) для функций математического ожидания использованы обозначения:

$$m_U(x,t) = \langle U(x,t)\rangle, \qquad m_V(x,t) = \langle V(x,t)\rangle,$$

где $\langle ...\rangle$ – символ усреднения.

Если теперь вычесть уравнение (2.2.230) из уравнения (2.2.228) и (2.2.231) из уравнения (2.2.229), умножить результаты вычислений на разности $U(x_2,t_2)-m_U(x_2,t_2)$ и $V(x_1,t_1)-m_V(x_1,t_1)$ соответственно, а затем дополнительно усреднить их, то получим:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{C}_{UU}(x_1,t_1,x_2,t_2)}{\partial t_1^2}+$$

$$+2\,\alpha_1\,\frac{\partial \mathcal{C}_{UU}(x_1,t_1,x_2,t_2)}{\partial t_1}+2\,\alpha_2\,\frac{\partial \mathcal{C}_{UU}(x_1,t_1-\tau_1,x_2,t_2)}{\partial t_1}+$$

$$\beta_1\,\mathcal{C}_{UU}(x_1,t_1,x_2,t_2)+\beta_2\,\mathcal{C}_{UU}(x_1,t_1-\tau_2,x_2,t_2)=$$

$$\gamma\,\frac{\partial^2 \mathcal{C}_{UU}(x_1,t_1,x_2,t_2)}{\partial x_1^2}+\ \sigma_0\,\mathcal{C}_{VU}(x_1,t_1,x_2,t_2), \tag{2.2.232}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{C}_{VU}(x_1,t_1,x_2,t_2)}{\partial t_2^2}+$$

$$+\ 2\,\alpha_1\,\frac{\partial \mathcal{C}_{VU}(x_1,t_1,x_2,t_2)}{\partial t_2}+2\,\alpha_2\,\frac{\partial \mathcal{C}_{VU}(x_1,t_1,x_2,t_2-\tau_1)}{\partial t_2}+$$

$$+\ \beta_1\,\mathcal{C}_{VU}(x_1,t_1,x_2,t_2)+\beta_2\,\mathcal{C}_{VU}(x_1,t_1,x_2,t_2-\tau_2)=$$

$$=\ \gamma\,\frac{\partial^2 \mathcal{C}_{VU}(x_1,t_1,x_2,t_2)}{\partial x_2^2}+\ \sigma_0\,\mathcal{C}_{VV}(x_1,t_1,x_2,t_2), \tag{2.2.233}$$

где

$$\mathcal{C}_{UU}(x_1,t_1,x_2,t_2)=\langle\{U(x_1,t_1)-m_U(x_1,t_1)\}\,\{U(x_2,t_2)-m_U(x_2,t_2)\}\rangle,$$
$$\mathcal{C}_{VU}(x_1,t_1,x_2,t_2)=\langle\{V(x_1,t_1)-m_V(x_1,t_1)\}\,\{U(x_2,t_2)-m_U(x_2,t_2)\}\rangle,$$
$$\mathcal{C}_{VV}(x_1,t_1,x_2,t_2)=\langle\{V(x_1,t_1)-m_V(x_1,t_1)\}\,\{V(x_2,t_2)-m_V(x_2,t_2)\}\rangle.$$

Предположим, что после завершения переходного процесса исследуемая система пришла в стационарное состояние, а случайное поле $U(x,t)$ стало стационарным пространственно-временным в широком смысле. Тогда уравнения (2.2.232), (2.2.233) примут следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{C}_{UU}(\xi,\theta)}{\partial\theta^2}-2\,\alpha_1\,\frac{\partial \mathcal{C}_{UU}(\xi,\theta)}{\partial\theta}-2\,\alpha_2\,\frac{\partial \mathcal{C}_{UU}(\xi,\theta+\tau_1)}{\partial\theta}+\ \beta_1\,\mathcal{C}_{UU}(\xi,\theta)+$$

$$+\beta_2\,\mathcal{C}_{UU}(\xi,\theta+\tau_2)=\gamma\,\frac{\partial^2 \mathcal{C}_{UU}(\xi,\theta)}{\partial\xi^2}+\ \sigma_0\,\mathcal{C}_{VU}(\xi,\theta), \tag{2.2.234}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{C}_{VU}(\xi,\theta)}{\partial\theta^2}\ +\ 2\,\alpha_1\,\frac{\partial \mathcal{C}_{VU}(\xi,\theta)}{\partial\theta}\ +2\,\alpha_2\,\frac{\partial \mathcal{C}_{VU}(\xi,\theta-\tau_1)}{\partial\theta}\ +\ \beta_1\,\mathcal{C}_{VU}(\xi,\theta)+$$

$$+\beta_2\,\mathcal{C}_{VU}(\xi,\theta-\tau_2)=\ \gamma\,\frac{\partial^2 \mathcal{C}_{VU}(\xi,\theta)}{\partial\xi^2}+\ \sigma_0\,\mathcal{C}_{VV}(\xi,\theta), \tag{2.2.235}$$

где $\xi=x_2-x_1$, $\theta=t_2-t_1$.

Пусть $Y(x,t)$ и $Z(x,t)$ – дважды дифференцируемые по x и t в среднеквадратичном, стационарные в широком смысле пространственно-временны́е случайные поля второго порядка с известными ковариационными

функциями и спектральными плотностями. Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\mathcal{S}_{YZ}(\omega_1,\omega_2)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\boldsymbol{i}(\omega_1\xi+\omega_2\theta)}\,\mathcal{C}_{YZ}(\xi,\theta)\,d\xi\,d\theta,$$

$$e^{\pm\boldsymbol{i}\omega_2\tau}\,\mathcal{S}_{YZ}(\omega_1,\omega_2)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\boldsymbol{i}(\omega_1\xi+\omega_2\theta)}\,\mathcal{C}_{YZ}(\xi,\theta\pm\tau)\,d\xi\,d\theta,$$

$$(\boldsymbol{i}\,\omega_1)^2\,\mathcal{S}_{YZ}(\omega_1,\omega_2)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\boldsymbol{i}(\omega_1\xi+\omega_2\theta)}\,\frac{\partial^r\mathcal{C}_{YZ}(\xi,\theta)}{\partial\xi^2}\,d\xi\,d\theta,$$

$$(\boldsymbol{i}\,\omega_2)^r\,\mathcal{S}_{YZ}(\omega_1,\omega_2)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\boldsymbol{i}(\omega_1\xi+\omega_2\theta)}\,\frac{\partial^r\mathcal{C}_{YZ}(\xi,\theta)}{\partial\theta^r}\,d\xi\,d\theta$$

для $r=1,\,2$.

Воспользовавшись последними соотношениями, перейдем в уравнениях (2.2.234), (2.2.235) от ковариационных функций к спектральным плотностям:

$$\begin{aligned}
&-\omega_2^2\,\mathcal{S}_{UU}(\omega_1,\omega_2)\;-\;2\,\boldsymbol{i}\,\alpha_1\,\omega_2\,\mathcal{S}_{UU}(\omega_1,\omega_2)-2\,\boldsymbol{i}\,\alpha_2\,\omega_2\,e^{\boldsymbol{i}\omega_2\tau_1}\,\mathcal{S}_{UU}(\omega_1,\omega_2)+\\
&\quad+\;\beta_1\,\mathcal{S}_{UU}(\omega_1,\omega_2)+\beta_2\,e^{\boldsymbol{i}\omega_2\tau_2}\,\mathcal{S}_{UU}(\omega_1,\omega_2)=\\
&\quad=\;-\gamma\,\omega_1^2\,\mathcal{S}_{UU}(\omega_1,\omega_2)+\;\sigma_0\,\mathcal{S}_{VU}(\omega_1,\omega_2),\\
&-\omega_2^2\mathcal{S}_{VU}(\omega_1,\omega_2)\;+\;2\,\boldsymbol{i}\,\alpha_1\,\omega_2\,\mathcal{S}_{VU}(\omega_1,\omega_2)+2\,\boldsymbol{i}\,\alpha_2\,\omega_2\,e^{-\boldsymbol{i}\omega_2\tau_1}\,\mathcal{S}_{VU}(\omega_1,\omega_2)+\\
&\quad+\beta_1\,\mathcal{S}_{VU}(\omega_1,\omega_2)+\beta_2\,e^{-\boldsymbol{i}\omega_2\tau_2}\,\mathcal{S}_{VU}(\omega_1,\omega_2)=\\
&\quad=\;-\gamma\,\omega_1^2\,\mathcal{S}_{VU}(\omega_1,\omega_2)+\;\sigma_0\,\mathcal{S}_{VV}(\omega_1,\omega_2),
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
Q_1(\omega_1,\omega_2)\,\mathcal{S}_{UU}(\omega_1,\omega_2)&=\sigma_0\,\mathcal{S}_{VU}(\omega_1,\omega_2),\\
Q_2(\omega_1,\omega_2)\,\mathcal{S}_{VU}(\omega_1,\omega_2)&=\sigma_0\,\mathcal{S}_{VV}(\omega_1,\omega_2),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
Q_1(\omega_1,\omega_2)&=-\omega_2^2-2\,\boldsymbol{i}\,\omega_2\left(\alpha_1+\alpha_2\,e^{\boldsymbol{i}\omega_2\tau_1}\right)+\;\beta_1+\beta_2\,e^{\boldsymbol{i}\omega_2\tau_2}+\gamma\,\omega_1^2,\\
Q_2(\omega_1,\omega_2)&=-\omega_2^2+2\,\boldsymbol{i}\,\omega_2\left(\alpha_1+\alpha_2\,e^{-\boldsymbol{i}\omega_2\tau_1}\right)+\;\beta_1+\beta_2\,e^{-\boldsymbol{i}\omega_2\tau_2}+\;\gamma\,\omega_1^2.
\end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$\mathcal{S}_{UU}(\omega_1,\omega_2)=\frac{\sigma_0^2}{Q(\omega_1,\omega_2)}\,\mathcal{S}_{VV}(\omega_1,\omega_2),\qquad(2.2.236)$$

где

$$\begin{aligned} Q(\omega_1,\omega_2) = \; & Q_1(\omega_1,\omega_2)\, Q_2(\omega_1,\omega_2) = \\ = \; & \left[\gamma\,\omega_1^2 - \omega_2^2 + 2\,\alpha_2\,\omega_2\,\sin\omega_2\tau_1 + \beta_1 + \beta_2\,\cos\omega_2\tau_2\right]^2 + \\ + \; & \left[-2\,\omega_2\left(\alpha_1 + \alpha_2\,\cos\omega_2\tau_1\right) + \beta_2\,\sin\omega_2\tau_2\right]^2 \equiv \\ \equiv \; & H_1^2(\omega_1,\omega_2) + H_2^2(\omega_1,\omega_2). \end{aligned}$$

Заметим, что $\mathcal{S}_{UU}(\omega_1,\omega_2) > 0$ для всех ω_1 и ω_2, H_1 и H_2 являются четной и нечетной функциями относительно ω_1 и ω_2 соответственно, а следовательно, H_1^2 и H_2^2, как и $\mathcal{S}_{UU}(\omega_1,\omega_2)$ в целом, – четными функциями, что согласуется с общими свойствами спектральных плотностей. Поэтому структуру спектральной плотности можно рассматривать только для $\omega_1 \geqslant 0$ и $\omega_2 \geqslant 0$.

Напомним, что одним из необходимых условий существования спектральной плотности (2.2.236) является интегрируемость этой функции на множестве $\{(\omega_1,\omega_2)\,|\,-\infty < \omega_1,\omega_2 < +\infty\}$.

Рассмотрим ситуацию с особенностями правой части соотношения (2.2.236). Эти особенности совпадают с нулями функции $Q(\omega_1,\omega_2)$ или, что то же самое, с нулями функций $H_1(\omega_1,\omega_2)$ и $H_2(\omega_1,\omega_2)$. Если искать точки бесконечных разрывов, то простейшая точка локального минимума $Q(\omega_1,\omega_2)$ совпадает с точкой $P_0(0,0)$, где $H_1(0,0) = \beta_1 + \beta_2$ и $H_2(0,0) = 0$. Поэтому, если $\beta_1 + \beta_2 \neq 0$, то $Q(0,0) \neq 0$. Вторая подобная точка на оси $O\omega_1$ будет отсутствовать, если будет выполнено неравенство $(\beta_1+\beta_2)/\gamma > 0$.

Рассмотрим еще один частный случай, а именно, ограничимся поиском условия необращения в нуль функции H_2. Вследствие того, что

$$-H_2 = 2\,\alpha_1\,\omega_2 + 2\,\alpha_2\,\omega_2\,\cos\omega_2\,\tau_1 - \beta_2\,\sin\omega_2\,\tau_2,$$

то из истинности неравенства $2\,(\alpha_1 - |\alpha_2|) \; > |\beta_2|\,\tau_2$ следует, что $H_2 < 0$ и $Q(\omega_1,\omega_2) \neq 0$ для всех ω_1, ω_2.

Если существуют другие возможные особенности, то их положения трансцендентно зависят от коэффициентов уравнения (2.2.225) и не могут быть найдены в общем случае. Но некоторые вспомогательные инструменты анализа можно все-таки получить. Для этого, предполагая, что $\alpha_1 + \alpha_2\,\cos\omega_2\,\tau_1 \neq 0$, разрешим уравнение $H_2 = 0$ относительно переменной ω_2, не входящей в аргументы синуса и косинуса:

$$\omega_2 = \frac{\beta_2\,\sin\omega_2\,\tau_2}{2\,(\alpha_1 + \alpha_2\,\cos\omega_2\,\tau_1)}. \qquad (2.2.237)$$

Далее, из уравнении $H_1 = 0$ находим, что

$$\omega_1^2 = \frac{1}{\gamma}\left(\omega_2^2 - 2\,\alpha_2\,\omega_2\,\sin\omega_2\tau_1 - \beta_1 - \beta_2\,\cos\omega_2\tau_2\right).$$

Подставим в правую часть последнего равенства соотношение для ω_2 из (2.2.237), что после приведения к общему знаменателю и преобразований дает следующее выражение для ω_1^2:

$$\begin{aligned}\omega_1^2 = {} & \frac{1}{4\,\gamma\,(\alpha_1 + \alpha_2\,\cos\omega_2\,\tau_1)} \times \\ & \times\,\big[\beta_2^2 - 4\,\beta_1\left\{2\,\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 4\,\alpha_1\,\alpha_2\,\cos\omega_2\,\tau_1 + \alpha_2^2\,\cos 2\,\omega_2\,\tau_1\right\} - \\ & - \beta_2\big\{8\,\alpha_1^2\,\cos\omega_2\,\tau_2 + 4\,\alpha_2^2\,\cos\omega_2\,\tau_2 + \beta_2\,\cos 2\,\omega_2\,\tau_2 + 12\,\alpha_1\,\alpha_2\,\cos\omega_2\,(\tau_2 - \tau_1) + \\ & + 4\,\alpha_2^2\,\cos\omega_2\,(\tau_2 - 2\,\tau_1) + 4\,\alpha_1\,\alpha_2\,\cos\omega_2\,(\tau_1 + \tau_2)\big\}\,\big]. \qquad (2.2.238)\end{aligned}$$

Для отсутствия действительных ω_1, а следовательно, и вещественных корней уравнений $H_1 = 0$, $H_2 = 0$, с учетом $\gamma > 0$, $\alpha_1 > 0$ и $\alpha_1 > |\alpha_2|$ требуется, чтобы выражение в квадратных скобках в правой части соотношения (2.2.238) было отрицательным при любом ω_2 и заданных α_1, α_2, β_1, β_2 γ, τ_1, τ_2.

Пример 2.2.34. Продемонстрируем вид спектральных плотностей при некоторых значениях параметров уравнения (2.2.225). Вследствие симметрии спектральной плотности относительно плоскостей $\omega_1 = 0$ и $\omega_2 = 0$ на рисунках в этой секции поверхности $\mathcal{S}_{UU}(\omega_1, \omega_2)$ показаны лишь для $\omega_1 \geqslant 0$ и $\omega_2 \geqslant 0$. Линии же уровня приведены полностью.

Основная группа значений параметров, которые использовались при визуализации спектральных плотностей, состояла из следующих величин:

$$\alpha_1 = 0.5; \quad \beta_1 = 4.0; \quad \gamma = 0.1; \quad \tau_1 = 1.0; \quad \sigma_0 = 1.0.$$

Изменения в значениях трех параметров менялись, что можно зафиксировать как следующие варианты:

$$\begin{aligned}&(a)\ \alpha_2 = -0.1; \quad \beta_2 = -1.0; \quad \tau_2 = 0.5;\\ &(b)\ \alpha_2 = -0.3; \quad \beta_2 = -2.0; \quad \tau_2 = 0.5;\\ &(c)\ \alpha_2 = -0.3; \quad \beta_2 = -1.0; \quad \tau_2 = 1.0.\end{aligned}$$

Рис. 2.2.97–2.2.102 показывают вид поверхностей и отвечающих им линий уровня спектральных плотностей для вариантов (a), (b) и (c) соответственно.

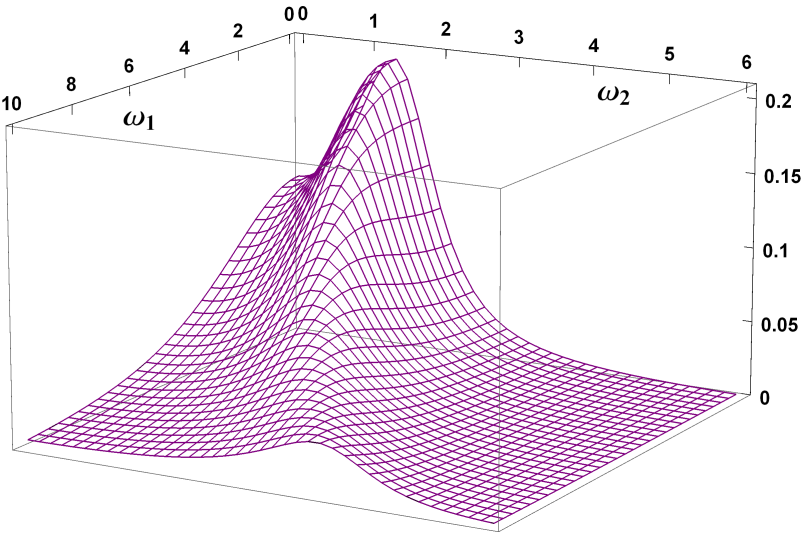


Рис. 2.2.97

2.2.7.5. Линейное СДУвЧП параболического типа с запаздыванием

Рассмотрим СДУвЧП следующего вида [235]:

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} + \alpha\, U(x,t) + \beta\, U(x,t-\tau) = \nu\, \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} + \gamma\, \Xi(x,t), \qquad (2.2.239)$$

где t – время ($t \geqslant 0$); $U(x,t)$ – случайное поле с неизвестными характеристиками ($x \in \mathbb{R}$); $\Xi(x,t)$ – стационарное поле с известными пространственно-временными ковариационной функцией $\mathcal{C}_{\Xi\Xi}(\bar{x},\bar{t})$ и спектральной плотностью $\mathcal{S}_{\Xi\Xi}(\omega_1,\omega_2)$,

$$\mathcal{S}_{\Xi\Xi}(\omega_1,\omega_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\boldsymbol{i}(\omega_1\bar{x}+\omega_2\bar{t})}\, \mathcal{C}_{\Xi\Xi}(\bar{x},\bar{t})\, d\bar{x}\, d\bar{t}, \qquad (2.2.240)$$

$$\mathcal{C}_{\Xi\Xi}(\bar{x},\bar{t}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\boldsymbol{i}(\omega_1\bar{x}+\omega_2\bar{t})}\, \mathcal{S}_{\Xi\Xi}(\omega_1,\omega_2)\, d\omega_1\, d\omega_2; \qquad (2.2.241)$$

$\alpha > 0$, $\nu > 0$, β, γ – константы; $\tau > 0$ – постоянное запаздывание.

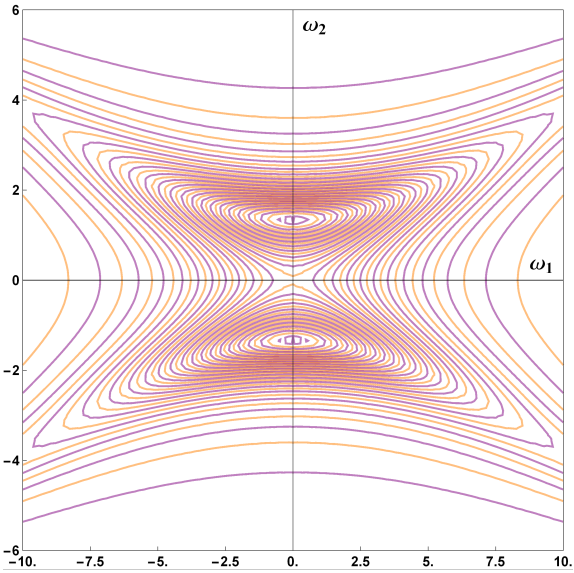


Рис. 2.2.98

Целью исследования является построение спектральной плотности случайного поля $U(x,t)$, определяющего состояние рассматриваемой системы и являющегося решением уравнения (2.2.239).

Запишем уравнение (2.2.239) для моментов времени t_1 и t_2:

$$\frac{\partial U(x_1,t_1)}{\partial t_1}+\alpha\,U(x_1,t_1)+\beta\,U(x_1,t_1-\tau)=\nu\,\frac{\partial^2 U(x_1,t_1)}{\partial x_1^2}+\gamma\,\Xi(x_1,t_1),$$
$$\frac{\partial U(x_2,t_2)}{\partial t_2}+\alpha\,U(x_2,t_2)+\beta\,U(x_2,t_2-\tau)=\nu\,\frac{\partial^2 U(x_2,t_2)}{\partial x_2^2}+\gamma\,\Xi(x_2,t_2).$$

После этого умножим уравнение обе части первого из этих уравнений на функцию $U(x_2,t_2)$, а второго – на $U(x_1,t_1)$ и усредним оба по пространству элементарных исходов. В результате получим:

$$\frac{\partial\langle U(x_1,t_1)\,U(x_2,t_2)\rangle}{\partial t_1}+\alpha\,\langle U(x_1,t_1)\,U(x_2,t_2)\rangle+\beta\,\langle U(x_1,t_1-\tau)\,U(x_2,t_2)\rangle=$$
$$=\nu\,\frac{\partial^2\langle U(x_1,t_1)\,U(x_2,t_2)\rangle}{\partial x_1^2}+\gamma\,\langle\Xi(x_1,t_1)\,U(x_2,t_2)\rangle,$$

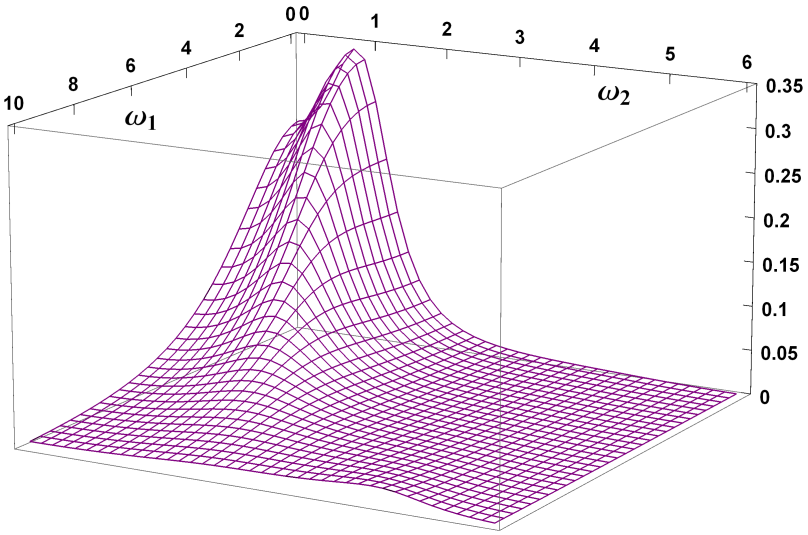


Рис. 2.2.99

$$\frac{\partial\langle\Xi(x_1,t_1)\,U(x_2,t_2)\rangle}{\partial t_2}+\alpha\,\langle\Xi(x_1,t_1)\,U(x_2,t_2)\rangle+\beta\,\langle\Xi(x_1,t_1)\,U(x_2,t_2-\tau)\rangle=$$
$$=\nu\,\frac{\partial^2\langle\Xi(x_1,t_1)\,U(x_2,t_2)\rangle}{\partial x_2^2}+\gamma\,\langle\Xi(x_1,t_1)\,\Xi(x_2,t_2)\rangle,$$

или

$$\frac{\partial\mathcal{C}_{UU}(x_1,t_1;x_2,t_2)}{\partial t_1}+\alpha\,\mathcal{C}_{UU}(x_1,t_1;x_2,t_2)+\beta\,\mathcal{C}_{UU}(x_1,t_1-\tau;x_2,t_2)=$$
$$=\nu\,\frac{\partial^2\mathcal{C}_{UU}(x_1,t_1;x_2,t_2)}{\partial x_1^2}+\gamma\,\mathcal{C}_{VU}(x_1,t_1;x_2,t_2),\qquad(2.2.242)$$
$$\frac{\partial\mathcal{C}_{\Xi U}(x_1,t_1;x_2,t_2)}{\partial t_2}+\alpha\,\mathcal{C}_{\Xi U}(x_1,t_1;x_2,t_2)+\beta\,\mathcal{C}_{\Xi U}(x_1,t_1;x_2,t_2-\tau)=$$
$$=\nu\,\frac{\partial^2\mathcal{C}_{\Xi U}(x_1,t_1;x_2,t_2)}{\partial x_2^2}+\gamma\,\mathcal{C}_{\Xi\Xi}(x_1,t_1;x_2,t_2).\qquad(2.2.243)$$

Предположим, что после завершения переходного режима в система перешла в стационарное состояние, а случайное поле $U(x,t)$ стало стационарным в широком смысле. Тогда уравнения (2.2.242), (2.2.243) примут

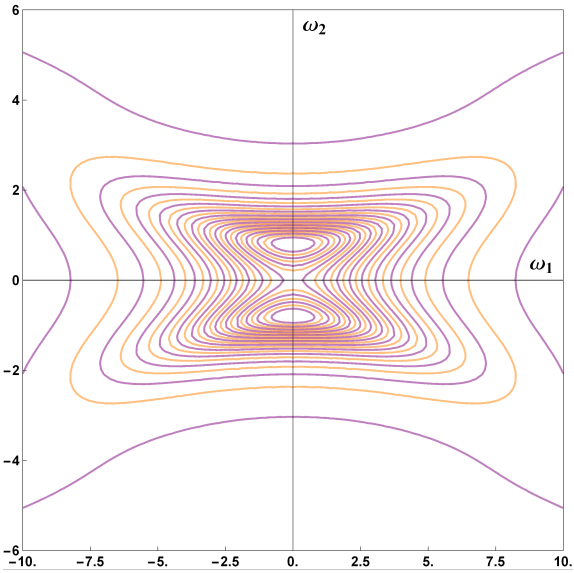


Рис. 2.2.100

следующую форму:

$$-\frac{\partial \mathcal{C}_{UU}(\bar{x},\bar{t})}{\partial \bar{t}} + \alpha\,\mathcal{C}_{UU}(\bar{x},\bar{t}) + \beta\,\mathcal{C}_{UU}(\bar{x},\bar{t}+\tau) = \\ = \nu\,\frac{\partial^2 \mathcal{C}_{UU}(\bar{x},\bar{t})}{\partial \bar{x}^2} + \gamma\,\mathcal{C}_{\Xi U}(\bar{x},\bar{t}), \quad (2.2.244)$$

$$\frac{\partial \mathcal{C}_{\Xi U}(\bar{x},\bar{t})}{\partial \bar{t}} + \alpha\,\mathcal{C}_{\Xi U}(\bar{x},\bar{t}) + \beta\,\mathcal{C}_{\Xi U}(\bar{x},\bar{t}-\tau) = \\ = \nu\,\frac{\partial^2 \mathcal{C}_{\Xi U}(\bar{x},\bar{t})}{\partial \bar{x}^2} + \gamma\,\mathcal{C}_{\Xi\Xi}(x,t), \quad (2.2.245)$$

где $\bar{x} = x_2 - x_1$, $\bar{t} = t_2 - t_1$.

Перейдем в уравнениях (2.2.244), (2.2.245) к спектральным плотностям и воспользуемся соотношениями из предыдущего параграфа. Тогда получим:

$$-\boldsymbol{i}\,\omega_2\,\mathcal{S}_{UU}(\omega_1,\omega_2) + \alpha\,\mathcal{S}_{UU}(\omega_1,\omega_2) + \beta\,e^{\boldsymbol{i}\omega_2\tau}\,\mathcal{S}_{UU}(\omega_1,\omega_2) = \\ = \nu\,(\boldsymbol{i}\,\omega_1)^2\,\mathcal{S}_{UU}(\omega_1,\omega_2) + \gamma\,\mathcal{S}_{\Xi U}(\omega_1,\omega_2), \\ \boldsymbol{i}\,\omega_2\,\mathcal{S}_{\Xi U}(\omega_1,\omega_2) + \alpha\,\mathcal{S}_{\Xi U}(\omega_1,\omega_2) + \beta\,e^{-\boldsymbol{i}\omega_2\tau}\,\mathcal{S}_{\Xi U}(\omega_1,\omega_2) =$$

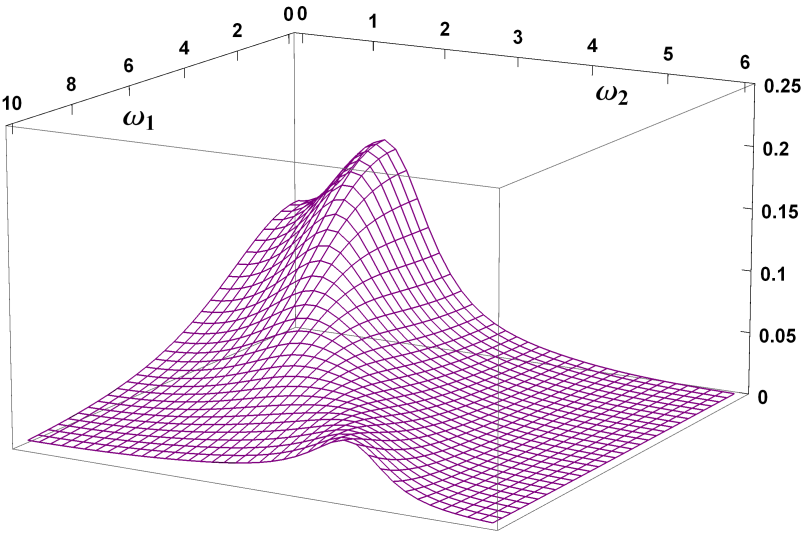


Рис. 2.2.101

$$= \nu\,(\boldsymbol{i}\,\omega_1)^2\,\mathcal{S}_{\Xi U}(\omega_1,\omega_2) + \gamma\,\mathcal{S}_{\Xi\Xi}(\omega_1,\omega_2),$$

или

$$\left(\nu\,\omega_1^2 - \boldsymbol{i}\,\omega_2 + \alpha + \beta\,e^{\boldsymbol{i}\omega_2\tau}\right)\mathcal{S}_{UU}(\omega_1,\omega_2) = \gamma\,\mathcal{S}_{\Xi U}(\omega_1,\omega_2),$$
$$\left(\nu\,\omega_1^2 + \boldsymbol{i}\,\omega_2 + \alpha + \beta\,e^{-\boldsymbol{i}\omega_2\tau}\right)\mathcal{S}_{\Xi U}(\omega_1,\omega_2) = \gamma\,\mathcal{S}_{\Xi\Xi}(\omega_1,\omega_2).$$

Отсюда

$$\mathcal{S}_{UU}(\omega_1,\omega_2) =$$
$$= \frac{\gamma^2}{\left(\nu\,\omega_1^2 - \boldsymbol{i}\,\omega_2 + \alpha + \beta\,e^{\boldsymbol{i}\omega_2\tau}\right)\left(\nu\,\omega_1^2 + \boldsymbol{i}\,\omega_2 + \alpha + \beta\,e^{-\boldsymbol{i}\omega_2\tau}\right)}\,\mathcal{S}_{\Xi\Xi}(\omega_1,\omega_2),$$

или

$$\mathcal{S}_{UU}(\omega_1,\omega_2) = \frac{\gamma^2}{Q(\omega_1,\omega_2)}\,\mathcal{S}_{\Xi\Xi}(\omega_1,\omega_2), \qquad (2.2.246)$$

где

$$Q(\omega_1,\omega_2) = \nu^2\,\omega_1^4 + 2\,\alpha\,\nu\,\omega_1^2 + \omega_2^2 + \alpha^2 + \beta^2 +$$

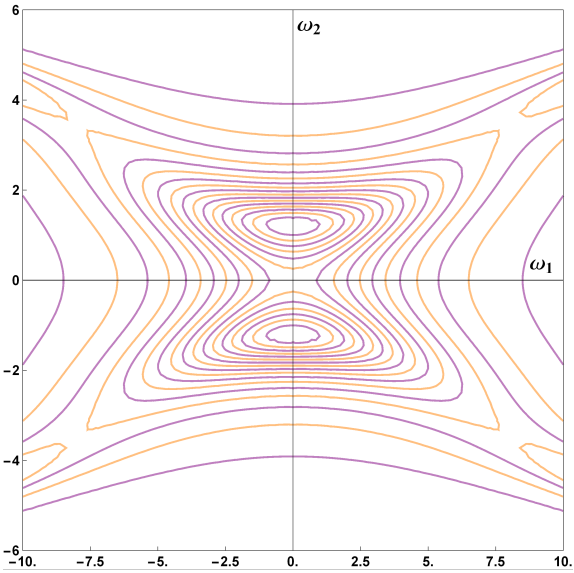


Рис. 2.2.102

$$+2\,\beta\,\left[\,\left(\alpha+\nu\,\omega_1^2\right)\,\cos\,\omega_2\tau-\omega_2\,\sin\,\omega_2\tau\,\right]=$$

$$=\nu^2\,\omega_1^4+2\,\alpha\,\nu\,\omega_1^2+\omega_2^2+\alpha^2+\beta^2+2\,\beta\,\sqrt{\left(\alpha+\nu\,\omega_1^2\right)^2+\omega_2^2}\,\sin\,\left(\omega_2\tau+\phi\right)\,],$$

$$\mathrm{tg}\,\phi=\frac{-\omega_2}{\alpha+\nu\,\omega_1^2}.$$

Для того, чтобы спектральная плотность $\mathcal{S}_{UU}(\omega_1,\omega_2)$ существовала, необходимо, чтобы множитель (дробь) перед $\mathcal{S}_{\Xi\Xi}(\omega_1,\omega_2)$ был положительным. Числитель дроби положителен при $\gamma\neq 0$, а следовательно, должно выполняться неравенство:

$$\nu^2\,\omega_1^4+2\,\alpha\,\nu\,\omega_1^2+\omega_2^2+\alpha^2+\beta^2>2\,\beta\,\sqrt{\left(\alpha+\nu\,\omega_1^2\right)^2+\omega_2^2}.$$

Если возвести в квадрат обе положительные части этого неравенства, собрать все члены в левой части и сгруппировать их, то получим следующее неравенство:

$$\nu^4\,\omega_1^8+4\,\alpha\,\nu^3\,\omega_1^6+2\,\nu^2\,\omega_1^4\,\omega_2^2+4\,\alpha^2\,\nu^2\,\omega_1^4+4\,\alpha\,\nu\,\omega_1^2\,\omega_2^2+\omega_2^4+$$
$$+2\,\left[\nu^2\,\omega_1^4+2\,\alpha\,\nu\,\omega_1^2+\omega_2^2\right]\,(\alpha^2-\beta^2)+(\alpha^2-\beta^2)^2>0,$$

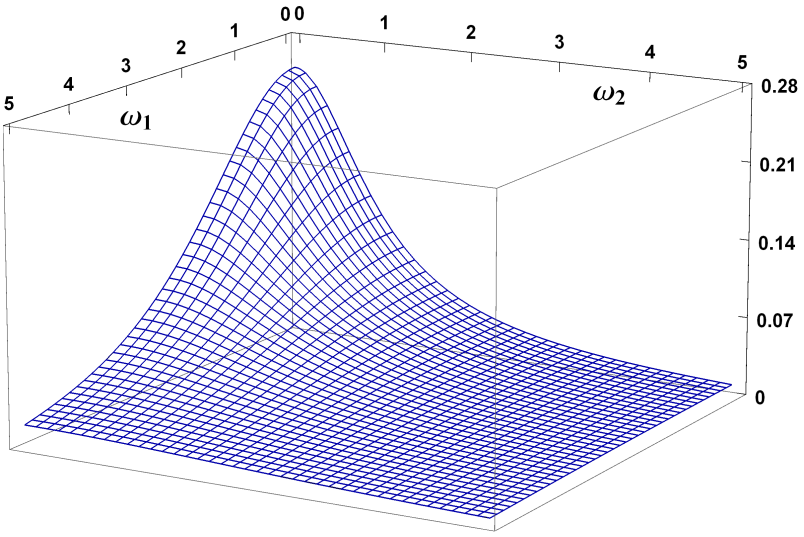


Рис. 2.2.103

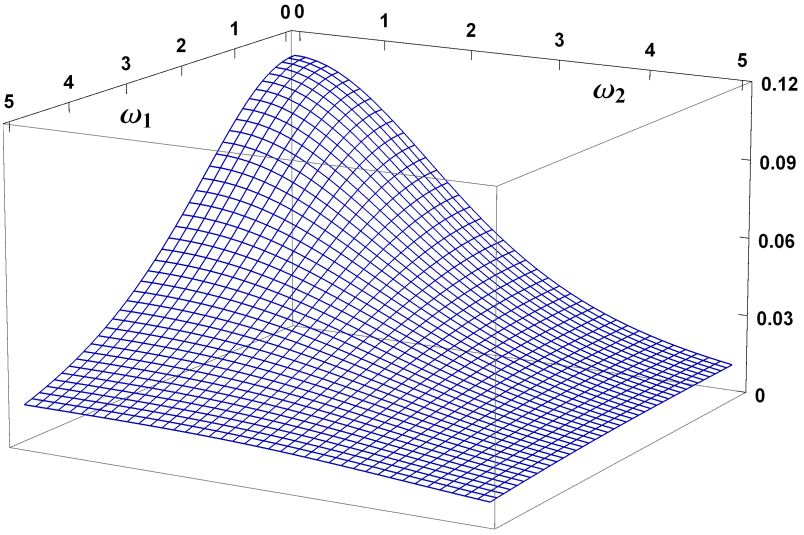


Рис. 2.2.104

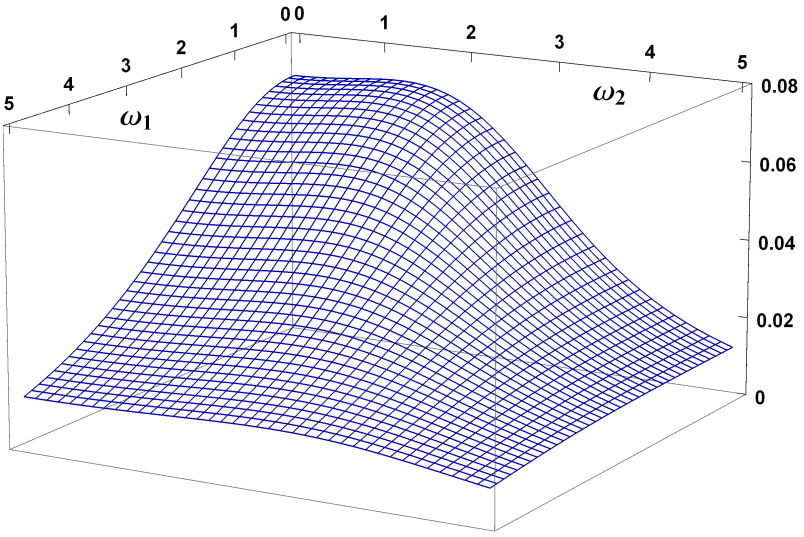


Рис. 2.2.105

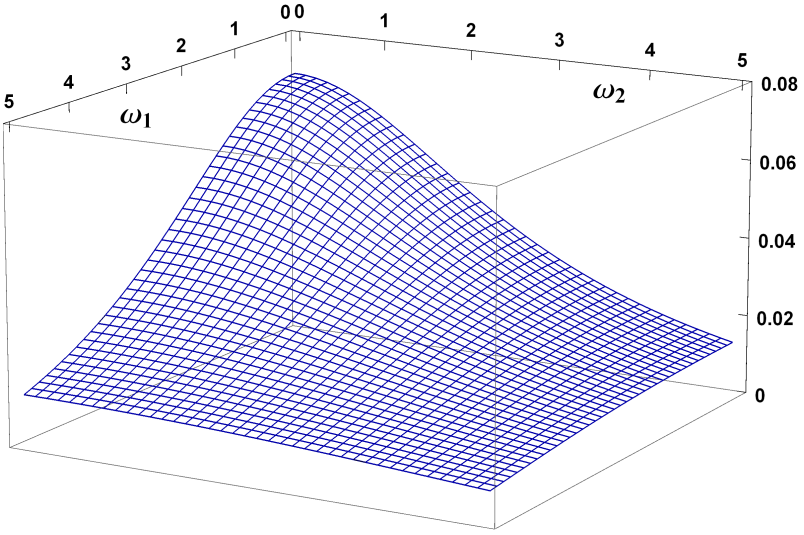


Рис. 2.2.106

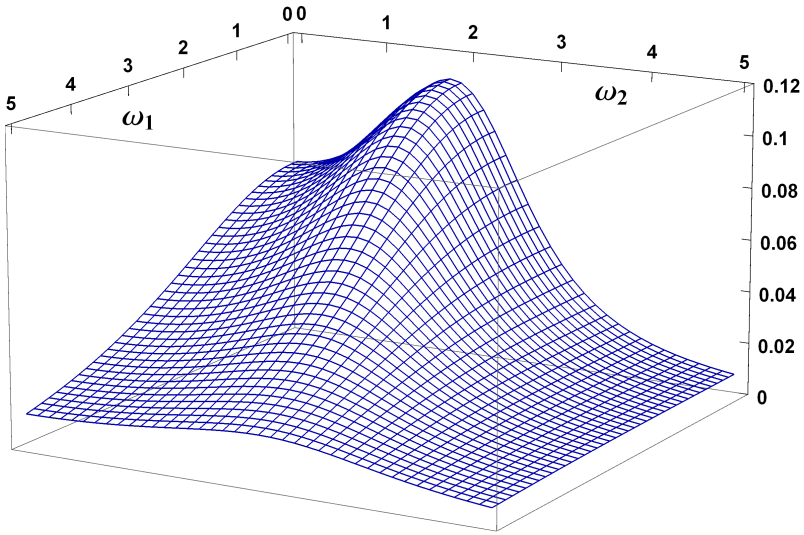


Рис. 2.2.107

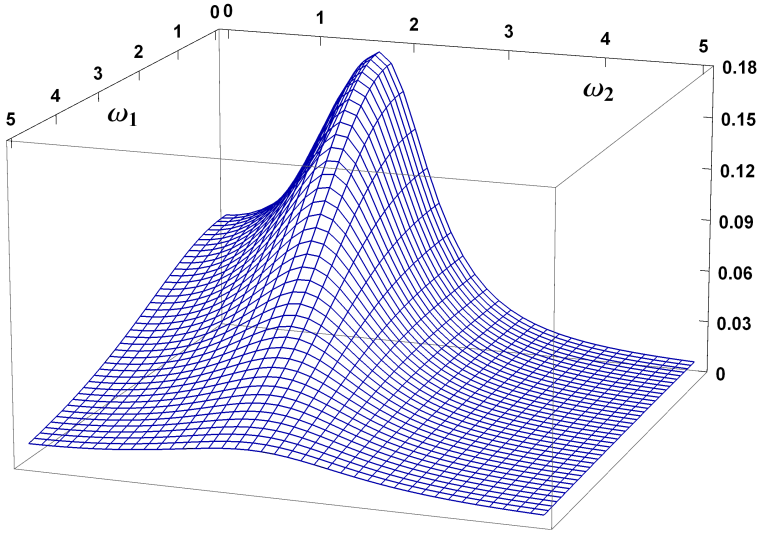


Рис. 2.2.108

которое верно при

$$\alpha > |\beta|$$

и любых действительных ω_1, ω_2.

Пример 2.2.35. На рис. 2.2.103–2.2.105 приведены формы спектральных плотностей типа (2.2.246) при $\alpha = 1.0$, $\gamma = 0.5$, $\nu = 0.1$, $\mathcal{S}_{\Xi\Xi}(\omega_1, \omega_2) = 1.0$, $\tau = 0.5$ и $\beta = 0.0, 0.5, 0.9$ соответственно. Рис. 2.2.106, 2.2.105, 2.2.107 и 2.2.108 представляют поверхности $\mathcal{S}_{UU}(\omega_1, \omega_2)$ при $\beta = 0.9$, тех же значениях α, γ, ν, $\mathcal{S}_{\Xi\Xi}(\omega_1, \omega_2)$ и $\tau = 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$ соответственно. Приведенные рисунки наглядно демонстрируют существенное влияние варьируемых параметров на поведение полученной стационарной спектральной плотности. Кроме того, из сравнения из рис. 2.2.106, 2.2.105, 2.2.107 и 2.2.108 несложно установить, что при увеличении запаздывания локальный максимум этой плотности становится все более выраженным, а его нарастание при линейном росте τ ускоряется. ►

2.3. УРАВНЕНИЯ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

2.3.1. Уравнения для первых моментов компонент вектора состояния системы линейных СОИДУ

Рассмотрим следующую систему стохастических линейных обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений [193] (где анализ полностью производился в покомпонентной форме):

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \int\limits_{t_0}^{t} \boldsymbol{\mathcal{B}}(t,\theta)\,\boldsymbol{X}(\theta)\,d\theta + \boldsymbol{\mathcal{G}}(t)\,\boldsymbol{V}(t), \tag{2.3.1}$$

где t – время ($t_0 \leqslant t \leqslant T < +\infty$); $\boldsymbol{X}(t) = \{X_\ell(t)\} : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}^n$ – вектор состояния; $\boldsymbol{V}(t) = \{V_\ell(t)\} : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}^m$ – вектор независимых белых шумов с единичными интенсивностями, $\langle \boldsymbol{V}(t) \rangle = 0$, $\langle \boldsymbol{V}(t)\,\boldsymbol{V}^{\intercal}(t') \rangle = \boldsymbol{\mathcal{I}}\,\delta(t-t')$; $\langle ... \rangle$ и $^{\intercal}$ – символы математического ожидания и транспонирования соответственно, $\boldsymbol{\mathcal{I}}$ – единичная матрица; $\delta(z)$ – дельта-функция Дирака; $\boldsymbol{\mathcal{A}}(t) = \{a_{ij}(t)\} : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\mathcal{B}}(t,\theta) = \{b_{ij}(t,\theta)\} : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ и $\boldsymbol{\mathcal{G}}(t) = \{g_{ij}(t)\} : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ – известные непрерывные функции своих аргументов. Начальное состояние $\boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}^0$ считаем случайным вектором с известными числовыми характеристиками.

Задача, которая решается ниже, состоит в построении систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), которым удовлетворяют вектор математических ожиданий (средних) $\boldsymbol{m}_X(t) = \{m_{Xi}(t)\} = \langle \boldsymbol{X}(t) \rangle$ ($t_0 \leqslant t \leqslant T$) и обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений (ОИДУ) для элементов матрицы корреляционных функций $\boldsymbol{\mathcal{R}}(t_1,t_2) = \{r_{ij}(t_1,t_2)\} = \langle \boldsymbol{X}(t_1)\,\boldsymbol{X}^{\intercal}(t_2) \rangle : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ($r_{ij}(t_1,t_2) = r_{ji}(t_2,t_1)$) компонентов векторного случайного процесса $\boldsymbol{X}(t)$. Несмотря на то, что, например, в работе [1052], имеются соотношения для вычисления вторых моментов через матричную функцию Грина (для близкой системы уравнений), данная задача важна вследствие того, что при практическом использовании схема анализа случайных режимов, основанная на выводимых уравнениях, при прочих равных условиях позволит осуществить этот анализ более точно.

Прежде всего получим уравнения вектора математических ожиданий $\boldsymbol{m}_X(t)$. Для этого достаточно усреднить обе части уравнения (2.3.1):

$$\dot{\boldsymbol{m}}_X(t) = \boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\,\boldsymbol{m}_X(t) + \int\limits_{t_0}^{t} \boldsymbol{\mathcal{B}}(t,\theta)\,\boldsymbol{m}_X(\theta)\,d\theta, \tag{2.3.2}$$

Вывод уравнений для корреляционных моментов естественным образом разбивается на три части: 1) для $t_1 > t_2 \geqslant t_0$; 2) для $t_2 > t_1 \geqslant t_0$; 3) для $t_1 = t_2 = t \geqslant t_0$, которые ниже последовательно рассматриваются.

Для получения уравнений для матричной функции $\boldsymbol{\mathcal{R}}(t_1,t_2)$ в первых двух случаях продифференцируем соответствующие соотношения по переменным t_1 и t_2, а затем усредним. В результате будем иметь:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{R}}(t_1,t_2)}{\partial t_1} &= \frac{\partial}{\partial t_1}\langle \boldsymbol{X}(t_1)\,\boldsymbol{X}^{\mathsf{T}}(t_2)\rangle = \langle \frac{d\boldsymbol{X}(t_1)}{dt_1}\,\boldsymbol{X}^{\mathsf{T}}(t_2)\rangle = \\
&= \boldsymbol{\mathcal{A}}(t_1)\,\boldsymbol{\mathcal{R}}(t_1,t_2) + \int\limits_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{\mathcal{B}}(t_1,\theta)\,\boldsymbol{\mathcal{R}}(\theta,t_2)\,d\theta = \boldsymbol{\mathcal{A}}(t_1)\,\boldsymbol{\mathcal{R}}(t_1,t_2) + \\
&+ \int\limits_{t_0}^{t_2} \boldsymbol{\mathcal{B}}(t_1,\theta)\,\boldsymbol{\mathcal{R}}(\theta,t_2)\,d\theta + \int\limits_{t_2}^{t_1} \boldsymbol{\mathcal{B}}(t_1,\theta)\,\boldsymbol{\mathcal{R}}(\theta,t_2)\,d\theta;
\end{aligned} \tag{2.3.3}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{R}}(t_1,t_2)}{\partial t_2} &= \frac{\partial}{\partial t_2}\langle \boldsymbol{X}(t_1)\,\boldsymbol{X}^{\mathsf{T}}(t_2)\rangle = \langle \boldsymbol{X}(t_1)\,\frac{d\boldsymbol{X}^{\mathsf{T}}(t_2)}{dt_2}\rangle = \\
&= \boldsymbol{\mathcal{R}}(t_1,t_2)\,\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\mathsf{T}}(t_2) + \int\limits_{t_0}^{t_2} \boldsymbol{\mathcal{R}}(t_1,\theta)\,\boldsymbol{\mathcal{B}}^{\mathsf{T}}(t_2,\theta)\,d\theta = \boldsymbol{\mathcal{R}}(t_1,t_2)\,\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\mathsf{T}}(t_2) + \\
&+ \int\limits_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{\mathcal{R}}(t_1,\theta)\,\boldsymbol{\mathcal{B}}^{\mathsf{T}}(t_2,\theta)\,d\theta + \int\limits_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{\mathcal{R}}(t_1,\theta)\,\boldsymbol{\mathcal{B}}^{\mathsf{T}}(t_2,\theta)\,d\theta.
\end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Рассмотрим третий случай. Для проведения необходимых выкладок нам потребуется следующее выражение:

$$\boldsymbol{X}(t) = \mathbb{R}(t,t_0)\,\boldsymbol{m}_X(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \mathbb{R}(t,\theta)\,\boldsymbol{\mathcal{G}}(\theta)\,\boldsymbol{V}(\theta)\,d\theta, \tag{2.3.5}$$

где матричная-функция Грина $\mathbb{R}(t,s) = \{\mathbb{r}_{ij}(t,s)\} : [t_0,+\infty)\times[t_0,+\infty) \longmapsto$

$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ является решением задачи Коши вида:

$$\frac{\partial \mathbb{R}(t,s)}{\partial t} = \boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\,\mathbb{R}(t,s) + \int\limits_s^t \boldsymbol{\mathcal{B}}(t,\theta)\,\mathbb{R}(\theta,s)\,d\theta, \qquad t > s, \tag{2.3.6}$$

$$\mathbb{R}(s,s) = \mathbb{I}. \tag{2.3.7}$$

Это представление может быть получено как следствие из соотношений, приведенных в [1052], так и проверено непосредственно. Другая схема построения функции Грина рассмотрена в работе [668].

Как и в предыдущем случае, воспользуемся соотношением для функции $\boldsymbol{\mathcal{R}}(t,t)$ и продифференцируем его по переменной t:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{R}}(t,t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\langle \boldsymbol{X}(t)\,\boldsymbol{X}^{\intercal}(t)\rangle = \langle \frac{d\boldsymbol{X}(t)}{dt}\,\boldsymbol{X}^{\intercal}(t)\rangle + \langle \boldsymbol{X}(t)\,\frac{d\boldsymbol{X}^{\intercal}(t)}{dt}\rangle = \\ &= \boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\,\boldsymbol{\mathcal{R}}(t,t) + \int\limits_{t_0}^t \boldsymbol{\mathcal{B}}(t,\theta)\,\boldsymbol{\mathcal{R}}(\theta,t)\,d\theta + \boldsymbol{\mathcal{G}}(t)\,\langle \boldsymbol{V}(t)\,\boldsymbol{X}^{\intercal}(t)\rangle + \\ &+ \boldsymbol{\mathcal{R}}(t,t)\,\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\intercal}(t) + \int\limits_{t_0}^t \boldsymbol{\mathcal{R}}(t,\theta)\,\boldsymbol{\mathcal{B}}^{\intercal}(t,\theta)\,d\theta + \langle \boldsymbol{X}(t)\,\boldsymbol{V}^{\intercal}(t)\rangle\,\boldsymbol{\mathcal{G}}^{\intercal}(t). \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

Уравнения (2.3.8) пока не замкнуты, т.к. в них присутствуют корреляции векторов $\boldsymbol{X}(t)$ и $\boldsymbol{V}(t)$. Для размыкания этих корреляций воспользуемся формулой Фуруцу–Новикова [317] и соотношением (2.3.5) в компонентной форме:

$$\begin{aligned}\langle V_\alpha(t)\,X_\beta(t)\rangle &= \langle V_\alpha(t)\rangle\,\langle X_\beta(t)\rangle + \sum_{\gamma=1}^m \int\limits_{t_0}^t \langle V_\alpha(t)\,X_\gamma(\theta)\rangle\,\langle \frac{\delta X_\beta(t)}{\delta V_\gamma(\theta)}\rangle\,d\theta = \\ &= \sum_{\gamma=1}^m \int\limits_{t_0}^t \delta_{\alpha\gamma}\,\delta(t-\theta)\,\langle \int\limits_{t_0}^t \sum_{\nu=1}^n r_{\beta\nu}(t,s)\,\sum_{\mu=1}^m g_{\nu\mu}(s)\frac{\delta V_\mu(s)}{\delta V_\gamma(\theta)}\,ds\rangle\,d\theta = \\ &= \sum_{\gamma=1}^m \int\limits_{t_0}^t \delta_{\alpha\gamma}\,\delta(t-\theta)\,\langle \int\limits_{t_0}^t \sum_{\nu=1}^n r_{\beta\nu}(t,s)\,\sum_{\mu=1}^m g_{\nu\mu}(s)\delta_{\mu\gamma}\,\delta(s-\theta)\,ds\rangle\,d\theta = \\ &= \sum_{\gamma=1}^m \int\limits_{t_0}^t \delta_{\alpha\gamma}\,\delta(t-\theta)\,\sum_{\nu=1}^n r_{\beta\nu}(t,\tau)\,g_{\nu\gamma}(\theta)\,d\theta = \end{aligned}$$

$$= \int_{t_0}^{t} \delta(t-\theta) \sum_{\nu=1}^{n} r_{\beta\nu}(t,\theta)\, g_{\nu\alpha}(\theta)\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n} r_{\beta\nu}(t,t)\, g_{\nu\alpha}(t) = \frac{1}{2}\, g_{\beta\alpha}(t). \qquad (2.3.9)$$

Здесь учтены свойства дельта-функции и равенство (2.3.7) для функции Грина. Подставляя соотношение (2.3.9) в правую часть уравнений (2.3.8), получим окончательный вид этих уравнений:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{R}}(t,t)}{\partial t} = \boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\, \boldsymbol{\mathcal{R}}(t,t) + \left[\boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\, \boldsymbol{\mathcal{R}}(t,t)\right]^{\mathsf{T}} +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \left[\boldsymbol{\mathcal{B}}(t,\theta)\, \boldsymbol{\mathcal{R}}(\theta,t) + \boldsymbol{\mathcal{R}}(t,\theta)\, \boldsymbol{\mathcal{B}}^{\mathsf{T}}(t,\theta)\right] d\theta + \boldsymbol{\mathcal{G}}(t)\, \boldsymbol{\mathcal{G}}^{\mathsf{T}}(t). \qquad (2.3.10)$$

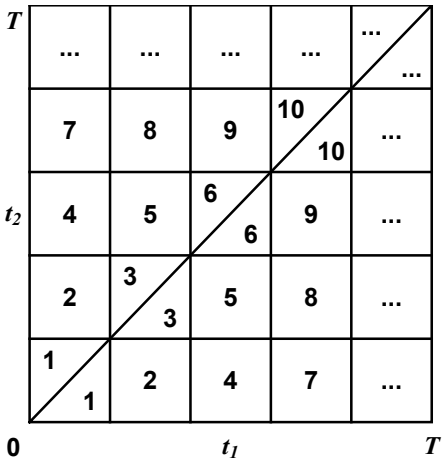


Рис. 2.3.1

При практическом использовании полученных уравнений основные проблемы могут возникнуть при интегрировании уравнений для ковариационных функций. При этом последовательность прохождения областей на плоскости переменных (t_1, t_2) при вычислении этих функций соответствует обычной схеме анализа линейных СОДУ с постоянным запаздыванием [260]. Как известно, эта последовательность имеет вид, приведенный на рис. 2.3.1.

2.3.2. Проблема редукции СОИДУ к СОДУ

Среди методов анализа стохастических обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений (СОИДУ) выделяются процедуры упрощения (редукции) таких уравнений. Среди таких процедур важнейшими являются точные методы приведения СОИДУ к стохастическим обыкновенным дифференциальным уравнениям (СОДУ). Ниже представлены две точные и одна приближенная схемы такого сведения, приводится пример применения одной из схем [194, 904].

Рассмотрим следующую систему СОИДУ в смысле Стратоновича:

$$\begin{gathered} d\boldsymbol{X}(t) = \Big[\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{X}(t),t\big) + \int\limits_{t_0}^{t} \boldsymbol{q}\big(\boldsymbol{X}(t),t;\boldsymbol{X}(\theta),\theta\big)\,d\theta\Big]\,dt + \\ +\boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{X}(t),t\big)\circ d\boldsymbol{W}(t), \qquad (2.3.11) \\ t\in(t_0,T], \qquad \boldsymbol{X}(t_0)=\boldsymbol{X}^0, \end{gathered}$$

где t – время; $\boldsymbol{X}(t)=\{X_i(t)\}\in\mathbb{R}^n$ – вектор состояния; $\boldsymbol{W}(t)=\{W_j(t)\}^{\intercal}\in\mathbb{R}^m$ – вектор независимых стандартных случайных винеровских процессов; $\boldsymbol{f}=\{f_i(\cdot,\cdot)\}$, $\boldsymbol{q}=\{q_i(\cdot,\cdot;\cdot,\cdot)\}$ и $\boldsymbol{\mathcal{G}}=\{g_{ij}(\cdot,\cdot)\}$ – известные векторные и матричная функции своих аргументов. Начальное состояние $\boldsymbol{X}^0$ считаем случайным вектором с известной плотностью вероятности $p^0(\cdot)$.

Как правило, прямое исследование систем вида (2.3.11) невозможно, а аналитическая теория, аналогичная созданной для марковских случайных процессов [288], отсутствует. С другой стороны, имеются работы, где с помощью расширения пространства состояния рассматриваемые системы (где вектор $\boldsymbol{q}$, как правило, имеет вид $\boldsymbol{\mathcal{B}}(t,\tau)\,\boldsymbol{X}(\tau)$, а элементы ядра $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ представляют собой функции типа $c\,e^{-\nu(t-\tau)}$, c, ν – постоянные) принимают форму, описываемую СОДУ, что позволяет для их исследования применить известные точные и приближенные методы [236].

1°. Случай вырожденного ядра. Пусть ядра q_i, $i=\overline{1,n}$, имеют следующую форму:

$$q_i = \sum_{s=1}^{N_i} q_{is1}\big(\boldsymbol{X}(t),t\big)\,q_{is2}\big(\boldsymbol{X}(\tau),\tau\big). \qquad (2.3.12)$$

Тогда, как и в более простых, но часто исследуемых линейных моделях [254], здесь применимо расширение пространства состояния с помощью

введения новых переменных

$$Z_{is}(t) = \int\limits_{t_0}^{t} q_{is2}\big(\boldsymbol{X}(\theta),\theta\big)\,d\theta, \qquad i=\overline{1,n}, \qquad s=\overline{1,N_i},$$

в результате чего исходная система (2.3.11) приводится к следующему виду:

$$dX_i(t) = \big[f_i\big(\boldsymbol{X}(t),t\big) + \sum_{s=1}^{N_i} q_{is1}\big(\boldsymbol{X}(t),t\big)\,Z_{is}(t)\big]\,dt + \\ + \sum_{j=1}^{m} g_{ij}\big(\boldsymbol{X}(t),t\big)\circ dW_j(t), \tag{2.3.13}$$

$$\dot{Z}_{is}(t) = q_{is2}\big(\boldsymbol{X}(t),t\big), \tag{2.3.14}$$

причем начальными условиями для последней группы уравнений будут равенства

$$Z_{is}(t_0) = 0.$$

Плотность же распределения расширенного вектора состояния в начальный момент времени будет равна

$$p^*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) = p^{\,0}(\boldsymbol{x}) \prod_{i=1}^{n}\prod_{s=1}^{N_i} \delta(z_{is}).$$

Пример 2.3.1. Рассмотрим следующее СОИДУ Дюффинга

$$\ddot{X}(t) + 2\,\alpha\,\dot{X}(t) + \omega_0^2\,X(t) + \beta \int\limits_{0}^{t} e^{-\gamma(t-\theta)}\,X^3(\theta)\,d\theta = g_0\,V(t),$$

которое описывает колебания груза на пружине с "памятью". Это уравнение приводится к системе СОИДУ с ядром вида (2.3.12):

$$\dot{X}_1(t) = X_2(t), \tag{2.3.15}$$

$$\dot{X}_2(t) = -\omega_0^2\,X_1(t) - 2\,\alpha\,X_2(t) - \beta \int\limits_{0}^{t} e^{-\gamma(t-\theta)} X_1^3(\theta)\,d\theta + g_0\,V_1(t). \tag{2.3.16}$$

Здесь

$$f_1 = X_2(t), \qquad f_2 = -\omega_0^2\, X_1(t) - 2\,\alpha\, X_2(t),$$
$$q_1 = 0, \qquad q_2 = -\beta\, e^{-\gamma(t-\theta)}\, X_1^3(\theta) \equiv -\beta\, e^{-\gamma t}\, e^{\gamma\theta}\, X_1^3(\theta),$$
$$g_{11} = 0, \qquad g_{21} = g_0$$

и поэтому

$$N_2 = 1, \qquad q_{211} = -\beta\, e^{-\gamma t}, \qquad q_{212} = e^{\gamma\theta}\, X_1^3(\theta),$$
$$z_{21}(t) = \int\limits_0^t e^{\gamma\theta}\, X_1^3(\theta)\, d\theta.$$

В результате система (2.3.15), (2.3.16) принимает вид

$$\dot X_1(t) = X_2(t),$$
$$\dot X_2(t) = -\omega_0^2\, X_1(t) - 2\,\alpha\, X_2(t) - \beta\, e^{-\gamma t}\, Z_{21}(t) + g_0\, V_1(t),$$
$$\dot Z_{21}(t) = e^{\gamma\, t}\, X_1^3(t).$$

Для приближенного вычисления вектора $\boldsymbol{m}(t) = \operatorname{col}\big(m_1(t), m_2(t)\big)$ математических ожиданий и матрицы дисперсий $\boldsymbol{\mathcal{K}}(t) = \{\mathcal{K}_{ij}(t)\}$ вектора $\big(X_1, X_2\big)^{\intercal}$ был применен метод моментов [236]. Урезание бесконечной системы для моментов различных порядков осуществлялось с помощью метода квазигауссового замыкания [236] с сохранением моментов не выше восьмого порядка. Расчеты проводились при следующих значениях параметров:

$$\alpha = g_0 = 0.1, \qquad \gamma = 1/8, \qquad \omega_0 = 1, \qquad \beta = 1/100.$$

Предполагалось, что в начальный момент времени фазовый вектор имел гауссово распределение с параметрами

$$\mathbb{E}\big[\boldsymbol{X}^0\big] = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \equiv \boldsymbol{m}^0, \qquad \mathbb{E}\big[\big(\boldsymbol{X}^0 - \boldsymbol{m}^0\big)\big(\boldsymbol{X}^0 - \boldsymbol{m}^0\big)^{\intercal}\big] = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix}.$$

Все расчеты, результаты которых приведены на рис. 2.3.2 и 2.3.3, производились с помощью пакета `Mathematica`, причем для получения формул замыкания использовался пакет ProbRels, описанный, в частности, в [236].

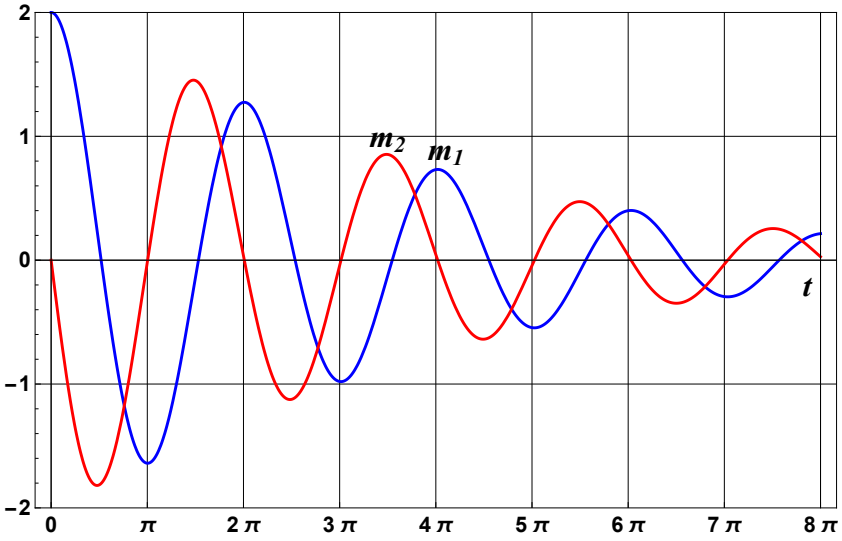


Рис. 2.3.2

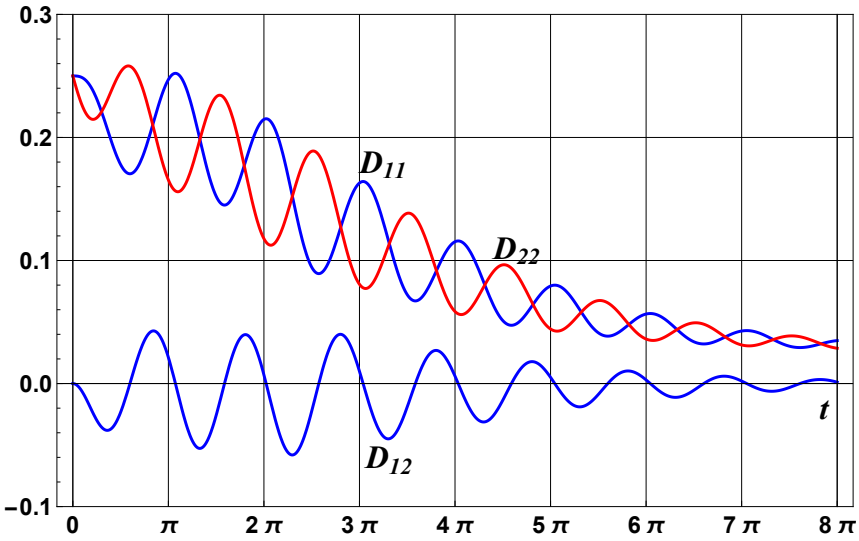


Рис. 2.3.3

2°. Замкнутость относительно дифференцирования. Пусть ядра q_i, $i = \overline{1,n}$, таковы, что

$$q_i = \sum_{s=1}^{N_i} q_{is}\big(\boldsymbol{X}(t),t;\boldsymbol{X}(\theta),\theta\big),$$

причем

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{N_i} r_{iks}\big(\boldsymbol{X}(t),t\big)\, q_{is}\big(\boldsymbol{X}(t),t;\boldsymbol{X}(\theta),\theta\big),$$

где $r_{iks}(\cdot,\cdot)$ –некоторые функции. Тогда, вводя переменные

$$Z_{is}(t) = \int_{t_0}^{t} q_{is}\big(\boldsymbol{X}(t),t;\boldsymbol{X}(\theta),\theta\big)\,d\theta, \qquad i=\overline{1,n}, \qquad s=\overline{1,N_i},$$

вместо (2.3.11) получим систему уравнений вида

$$dX_i(t) = \big[f_i\big(\boldsymbol{X}(t),t\big) + \sum_{s=1}^{N_i} Z_{is}(t)\big]\,dt + \sum_{j=1}^{m} g_{ij}\big(\boldsymbol{X}(t),t\big)\circ dW_j(t), \qquad (2.3.17)$$

$$\dot{Z}_{is}(t) = q_{is}\big(\boldsymbol{X}(t),t;\boldsymbol{X}(t),t\big) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{N_i} r_{iks}\big(\boldsymbol{X}(t),t\big)\, Z_{ks}(t), \qquad (2.3.18)$$

причем

$$Z_{is}(t_0) = 0.$$

3°. Линейное ядро. Рассмотрим частный случай системы (2.3.11):

$$d\boldsymbol{X}(t) = \big[\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{X}(t),t\big) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\mathcal{B}}(t,\theta)\,\boldsymbol{X}(\theta)\,d\theta\big]\,dt + \boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{X}(t),t\big)\circ d\boldsymbol{W}(t) \qquad (2.3.19)$$

с тем же начальным условием $\boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}^0$. Считая, что все элементы матрицы $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ неотрицательны, разобьем отрезок $[t_0,T]$ точками $t_k = t_0 + k\,h$, $k = 0,1,2,...,M$, $h = (T-t_0)/M$ так, чтобы с достаточной точностью на отрезке $[t_{k-1},t_k]$, $k \geqslant 1$ можно было заменить $\boldsymbol{\mathcal{B}}(t,\theta)$ на $\widehat{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_k(t) =$

$\boldsymbol{\mathcal{B}}(t,(t_{k-1}+t_k)/2)$. Таким образом, ядро $\boldsymbol{\mathcal{B}}(t,\theta)$ представляется кусочно-постоянной по второму аргументу матрицей-функцией. В результате этого система (2.3.19) приводится к виду

$$d\boldsymbol{X}(t)=\Big[\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{X}(t),t\big)+\sum_{\ell=1}^{k}\widehat{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_\ell(t)\int\limits_{t_{\ell-1}}^{t_\ell}\boldsymbol{X}(\theta)\,d\theta+\widehat{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_{k+1}(t)\int\limits_{t_k}^{t}\boldsymbol{X}(\theta)\,d\theta\Big]\,dt+$$

$$+\boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{X}(t),t\big)\circ d\boldsymbol{W}(t),\qquad t_k<t\leqslant t_{k+1},\qquad k=0,1,...,M-1. \quad (2.3.20)$$

Введем векторы

$$\boldsymbol{Z}_s(t)=\int\limits_{t_{s-1}}^{t}\boldsymbol{X}(\theta)\,d\theta,\qquad t_{s-1}<t\leqslant t_s. \quad (2.3.21)$$

С учетом равенств (2.3.21) расширенная система (2.3.11) принимает форму:

$$d\boldsymbol{X}(t)=\Big[\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{X}(t),t\big)+\sum_{\ell=1}^{k}\widehat{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_\ell(t)\,\boldsymbol{Z}_\ell(t_\ell)+\widehat{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_{k+1}(t)\,\boldsymbol{Z}_{k+1}(t)\Big]\,dt+$$

$$+\boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{X}(t),t\big)\circ d\boldsymbol{W}(t),$$

$$\dot{\boldsymbol{Z}}_{k+1}(t)=\boldsymbol{X}(t),$$

причем

$$\boldsymbol{Z}_{k+1}(t_k)=0.$$

Если обозначить $\boldsymbol{X}(t)$ через $\boldsymbol{X}_s(t)$ для $t_{s-1}<t\leqslant t_s$, то окончательно получим:

$$d\boldsymbol{X}_{k+1}(t)=\Big[\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{X}_{k+1}(t),t\big)+\sum_{\ell=1}^{k}\widehat{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_\ell(t)\,\boldsymbol{Z}_\ell(t_\ell)+\widehat{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_{k+1}(t)\,\boldsymbol{Z}_{k+1}(t)\Big]\,dt+$$

$$+\boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{X}_{k+1}(t),t\big)\circ d\boldsymbol{W}(t), \quad (2.3.22)$$

$$\dot{\boldsymbol{Z}}_{k+1}(t)=\boldsymbol{X}_{k+1}(t),$$

причем начальные условия для системы (2.3.22) имеют следующий вид:

$$\boldsymbol{X}_{k+1}(t_k)=\boldsymbol{X}_k(t_k),\qquad \boldsymbol{Z}_{k+1}(t_k)=0. \quad (2.3.23)$$

2.3.3. Применение функций Грина для приближённого анализа систем линейных СОИДУ

Рассмотрим следующую систему линейных СОИДУ [199,238,904,907]:

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\mathcal{B}}(t,\theta)\,\boldsymbol{X}(\theta)d\theta + \boldsymbol{\mathcal{G}}(t)\,\boldsymbol{U}(t), \quad t > t_0, \qquad (2.3.24)$$

где t – время ($t_0 \leqslant t \leqslant T < +\infty$); $\boldsymbol{X}(t) = \{X_i(t)\}^{\intercal} \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, причем $\boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}^0$; $\boldsymbol{U}(t) = \{U_i(t)\}^{\intercal} \in \mathbb{R}^m$ – векторный процесс, представляющий собой случайное возмущение,

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{U}(t)] = 0, \qquad \mathbb{E}[\boldsymbol{U}(t)\,\boldsymbol{U}^{\intercal}(t')] = \boldsymbol{\mathcal{C}}_{UU}(t,t');$$

$\mathbb{E}[...]$ и $^{\intercal}$ – символы математического ожидания и транспонирования соответственно; $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ и $\boldsymbol{\mathcal{G}}$ – известные непрерывные матрицы-функции своих аргументов. Начальное состояние $\boldsymbol{X}^0$ считаем случайным вектором с известными числовыми характеристиками:

$$\mathbb{E}\big[\boldsymbol{X}^0\big] = \boldsymbol{m}^0, \qquad \mathbb{E}\big[(\boldsymbol{X}^0 - \boldsymbol{m}^0)\,(\boldsymbol{X}^0 - \boldsymbol{m}^0)^{\intercal}\big] = \boldsymbol{\mathcal{C}}^0.$$

Объекты, поведение которых описывается уравнениями вида (2.3.24), изучаются в аэроавтоупругости [25], теории колебаний с учетом наследственности материала [119], вязкой упругости конструкций [254] и жидкости [626, 1052] и др.

Для приближенного анализа систем рассматриваемого класса разработаны методы итераций на последнем шаге [25], аппроксимации переходных функций экспонентами [25], усреднения [119], численного интегрирования [307] и последовательных приближений для вычисления функций Грина [668].

Ниже предлагается еще одна приближенная схема вычисления первых моментов вектора $\boldsymbol{X}(t)$, основанная на итерационной процедуре вычисления матрицы Грина для системы (2.3.24).

Обозначим через $\mathbb{R}(t,s)$ ($t_0 \leqslant s \leqslant t$) матричную функцию Грина. По аналогии с работами [625, 1052] можно записать детерминированное матричное уравнение для $\mathbb{R}(t,s)$:

$$\frac{\partial \mathbb{R}(t,s)}{\partial t} = \boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\,\mathbb{R}(t,s) + \int_{s}^{t} \boldsymbol{\mathcal{B}}(t,\theta)\,\mathbb{R}(\theta,s)\,d\theta, \quad t > s \qquad (2.3.25)$$

с начальным условием

$$\mathbb{R}(s,s) = \mathbb{I}, \qquad (2.3.26)$$

где $\mathbb{I}$ – единичная $n \times n$-матрица. Тогда вектор состояния $\boldsymbol{X}$ может быть представлен следующим образом:

$$\boldsymbol{X}(t) = \mathbb{R}(t, t_0)\, \boldsymbol{X}^0 + \int_{t_0}^{t} \mathbb{R}(t, s)\, \boldsymbol{\mathcal{G}}(s)\, \boldsymbol{U}(s)\, ds,$$

а, следовательно, первые моменты этого вектора будут иметь вид:

$$\boldsymbol{m}(t) \equiv \mathbb{E}[\boldsymbol{X}(t)] = \mathbb{R}(t, t_0)\, \boldsymbol{m}^0, \tag{2.3.27}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(t_1, t_2) \equiv \mathbb{E}\big[\big\{\boldsymbol{X}(t_1) - \boldsymbol{m}(t_1)\big\}\, \big\{\boldsymbol{X}(t_2) - \boldsymbol{m}(t_2)\big\}^{\intercal}\big] = \\ = \mathbb{R}(t_1, t_0)\, \boldsymbol{\mathcal{C}}^0\, \mathbb{R}^{\intercal}(t_2, t_0) + \\ + \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_2} \mathbb{R}(t_1, s_1)\, \boldsymbol{\mathcal{G}}(s_1)\, \boldsymbol{\mathcal{C}}_{UU}(s_1, s_2)\, \big[\mathbb{R}(t_2, s_2)\, \boldsymbol{\mathcal{G}}(s_2)\big]^{\intercal}\, ds_1\, ds_2.\end{aligned} \tag{2.3.28}$$

При этом, если $\boldsymbol{U}(t) \equiv \boldsymbol{V}(t)$ – вектор независимых белых шумов с одинаковыми интенсивностями, равными $1/2\,\pi$: $\mathbb{E}[\boldsymbol{U}(t)\, \boldsymbol{U}^{\intercal}(t')] = \mathbb{I}\, \delta(t - t')$, то

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(t_1, t_2) = \mathbb{R}(t_1, t_0)\, \boldsymbol{\mathcal{C}}^0\, \mathbb{R}^{\intercal}(t_2, t_0) + \\ + \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_2} \mathbb{R}(t_1, s_1)\, \boldsymbol{\mathcal{G}}(s_1)\, \mathbb{I}\, \delta(s_1 - s_2)\, \big[\mathbb{R}(t_2, s_2)\, \boldsymbol{\mathcal{G}}(s_2)\big]^{\intercal}\, ds_1\, ds_2 = \\ = \mathbb{R}(t_1, t_0)\, \boldsymbol{\mathcal{C}}^0\, \mathbb{R}^{\intercal}(t_2, t_0) + \\ + \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_2} \mathbb{R}(t_1, s_1)\, \boldsymbol{\mathcal{G}}(s_1)\, \delta(s_1 - s_2)\, \big[\mathbb{R}(t_2, s_2)\, \boldsymbol{\mathcal{G}}(s_2)\big]^{\intercal}\, ds_1\, ds_2,\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(t_1, t_2) = \mathbb{R}(t_1, t_0)\, \boldsymbol{\mathcal{C}}^0\, \mathbb{R}^{\intercal}(t_2, t_0) + \\ + \int_{t_0}^{t_*} \mathbb{R}(t_1, s)\, \boldsymbol{\mathcal{G}}(s)\, \big[\mathbb{R}(t_2, s)\, \boldsymbol{\mathcal{G}}(s)\big]^{\intercal}\, ds, \quad t_* = \min(t_1, t_2).\end{aligned} \tag{2.3.29}$$

Из предыдущих соотношений следует, что для практического применения этих формул требуется вычислить функцию Грина $\mathbb{R}(t, s)$ наиболее точным способом.

Как правило [668], для этой функции строится интегральное уравнение, для решения которого применяется метод последовательных приближений. К сожалению использование этой схемы затруднено в связи с

необходимостью вычисления значительного числа интегралов, причем в аналитическом виде, что не всегда возможно.

Рассмотрим следующий алгоритм расчета $\mathbb{R}(t,s)$, основанный на методе последовательного дифференцирования решения систем ОДУ [59], [103], [108].

Следуя схеме этого метода, представим матрицу $\mathbb{R}(t,s)$ в виде:

$$\mathbb{R}(t,s) = \mathbb{I} + \frac{1}{1!}\frac{\partial \mathbb{R}(t,s)}{\partial t}\bigg|_{t=s}(t-s) + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 \mathbb{R}(t,s)}{\partial t^2}\bigg|_{t=s}(t-s)^2 + \\ + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 \mathbb{R}(t,s)}{\partial t^3}\bigg|_{t=s}(t-s)^3 + \ldots \quad (2.3.30)$$

и будем один за другим находить коэффициенты в представлении (2.3.30).

Первый неизвестный коэффициент естественным образом находится после подстановки s вместо t в обе части уравнения (2.3.25):

$$\frac{\partial \mathbb{R}(t,s)}{\partial t}\bigg|_{t=s} = \boldsymbol{\mathcal{A}}(s)\,\mathbb{R}(s,s) + \int_s^s \boldsymbol{\mathcal{B}}(s,\theta)\,\mathbb{R}(\theta,s)\,ds = \boldsymbol{\mathcal{A}}(s). \quad (2.3.31)$$

Для вычисления второго коэффициента продифференцируем обе части уравнения (2.3.25) по t и заменим в них переменную t на s:

$$\frac{\partial^2 \mathbb{R}(t,s)}{\partial t^2}\bigg|_{t=s} = \Big[\boldsymbol{\mathcal{A}}'(t)\,\mathbb{R}(t,s) + \boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\,\frac{\partial \mathbb{R}(t,s)}{\partial t} + \boldsymbol{\mathcal{B}}(t,t)\,\mathbb{R}(t,s) + \\ + \int_s^t \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{B}}(t,\theta)}{\partial t}\,\mathbb{R}(\theta,s)\,ds\Big]\bigg|_{t=s} = \boldsymbol{\mathcal{A}}'(s) + \boldsymbol{\mathcal{A}}^2(s) + \boldsymbol{\mathcal{B}}(s,s). \quad (2.3.32)$$

Третий же коэффициент будет выглядеть так:

$$\frac{\partial^3 \mathbb{R}(t,s)}{\partial t^3}\bigg|_{t=s} = \Big\{\boldsymbol{\mathcal{A}}''(t)\,\mathbb{R}(t,s) + 2\,\boldsymbol{\mathcal{A}}'(t)\,\frac{\partial \mathbb{R}(t,s)}{\partial t} + \boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\,\frac{\partial^2 \mathbb{R}(t,s)}{\partial t^2} + \\ + \Big[\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{B}}(t,\theta)}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{B}}(\theta,t)}{\partial t}\Big]\bigg|_{\theta=t} + \boldsymbol{\mathcal{B}}(t,t)\,\frac{\partial \mathbb{R}(t,s)}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{B}}(t,\theta)}{\partial t}\bigg|_{\theta=t}\mathbb{R}(t,s) + \\ + \int_s^t \frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{B}}(t,\theta)}{\partial t^2}\,\mathbb{R}(\theta,s)\,ds\Big\}\bigg|_{t=s} = \boldsymbol{\mathcal{A}}''(s) + 2\boldsymbol{\mathcal{A}}'(s)\boldsymbol{\mathcal{A}}(s) + \boldsymbol{\mathcal{B}}(s,s)\boldsymbol{\mathcal{A}}(s,s) + \\ + \boldsymbol{\mathcal{A}}(s)\Big[\boldsymbol{\mathcal{A}}'(s) + \boldsymbol{\mathcal{A}}^2(s) + \boldsymbol{\mathcal{B}}(s,s)\Big] + \Big[2\,\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{B}}(s,\theta)}{\partial s} + \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{B}}(\theta,s)}{\partial s}\Big]\bigg|_{\theta=s}. \quad (2.3.33)$$

Продолжая выкладки подобным образом далее, мы сможем вычислить функцию Грина $\mathbb{R}(t,s)$ в области $\{(t,s)|\,t_0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T\}$ с любой заданной наперед точностью без применения операции интегрирования.

Пример 2.3.2. Применим изложенную процедуру для анализа системы, которая описывается уравнением

$$\ddot{X} + 2\,\alpha\,\dot{X} + \omega_0^2\,X + \beta \int_0^t e^{-\gamma(t-\theta)}\,X(\theta)\,d\theta = g_0\,V(t), \tag{2.3.34}$$

причем начальное состояние имеет совместное гауссово распределение $\mathcal{N}(\boldsymbol{m}^0, \boldsymbol{\mathcal{C}}^0)$.

Приводя это уравнение к виду (2.3.24), получим:

$$X_1 = X, \qquad X_2 = \dot{X}, \qquad t_0 = 0, \qquad \boldsymbol{U} = \big\{V(t)\big\},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\,\alpha \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{B}}(t,\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\beta\,e^{-\gamma(t-\theta)} & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{G}}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ g_0 \end{bmatrix}.$$

Изложенная выше методика была реализована с помощью системы аналитических вычислений `Mathematica`,что позволило рассчитать в символьном виде необходимое число (N) коэффициентов представления функции Грина по формуле (2.3.30), а затем использовать эту формулу для вычисления вектора $\boldsymbol{m}(t)$ и матрицы $\boldsymbol{\mathcal{K}}(t) = \boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(t,t) \equiv \{d_{ij}(t)\}$ для $0 \leqslant t \leqslant T$.

Для получения численных результатов использовались следующие значения параметров задачи:

$$\boldsymbol{m}^0 = [5,0]^{\intercal}, \quad \boldsymbol{\mathcal{C}}^0 = \mathrm{diag}(1/4, 1/9), \quad \alpha = 1/8, \quad \omega_0^2 = 389/400,$$
$$\gamma = 19/20, \quad g_0 = 1/10, \quad \beta = 689/8000, \qquad T = 4\,\pi, \qquad N = 80.$$

Для сравнения полученных результатов была использована возможность сведения задачи (2.3.34) к системе СОДУ с аддитивными шумами на основе замены переменных:

$$Y_1 = X, \qquad Y_2 = \dot{X}, \qquad Y_3 = \int_0^t e^{-\gamma(t-\theta)}\,X(\theta)\,d\theta.$$

Такая система будет иметь вид:

$$\dot{\boldsymbol{Y}}(t) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_0\,\boldsymbol{Y}(t) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0\,\boldsymbol{U}(t),$$

где

$$\boldsymbol{Y}(t) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{A}}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\omega_0^2 & -2\,\alpha & -\beta \\ 1 & 0 & -\gamma \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{G}}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ g_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{U} = \big\{V(t)\big\}.$$

Напомним [265], что в данных условиях вектор функций математического ожидания $\boldsymbol{m}^*(t) = \mathbb{E}[\boldsymbol{Y}(t)]$ и матрица функций ковариации $\boldsymbol{\mathcal{K}}^*(t)$ будут удовлетворять следующим системам ОДУ:

$$\dot{\boldsymbol{m}}^*(t) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_0\, \boldsymbol{m}^*(t), \qquad \boldsymbol{m}^*(0) = [5, 0, 0]^\intercal,$$

$$\dot{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^*(t) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_0\, \boldsymbol{\mathcal{K}}^*(t) + \left[\boldsymbol{\mathcal{A}}_0\, \boldsymbol{\mathcal{K}}^*(t)\right]^\intercal + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0\, \boldsymbol{\mathcal{G}}_0^\intercal, \quad \boldsymbol{\mathcal{K}}^*(0) = \operatorname{diag}(1.4, 1.9, 0).$$

Выбранные параметры позволили получить точные аналитические решения этих систем ОДУ.

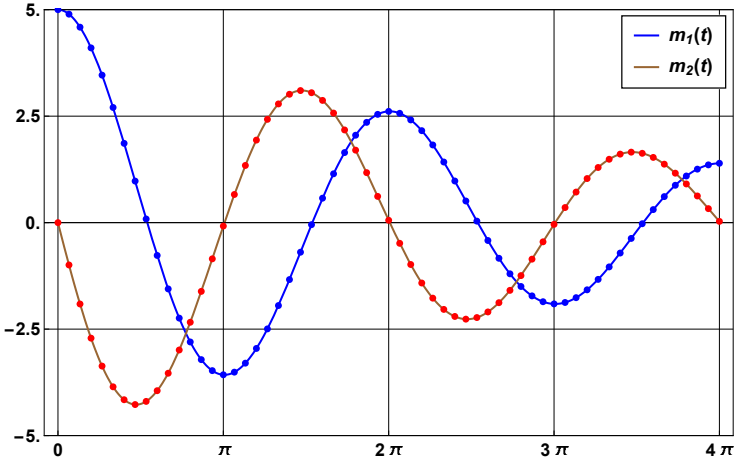


Рис. 2.3.4

Результаты расчетов по изложенной выше методике отображены на рис. 2.3.4 (математические ожидания) и 2.3.5 (элементы матрицы дисперсий), где точками отображены соответствующие точные моментные функции. Максимальные уклонения полученных приближенных кривых от точных не превысило $6.0 \cdot 10^{-11}$ для обеих первых и $9.0 \cdot 10^{-9}$, $1.3 \cdot 10^{-8}$, $9.0 \cdot 10^{-9}$ для вторых характеристик соответственно.

2.3.4. Модификация итерационной схемы вычисления матричной функции Грина

Рассмотрим систему линейных СОИДУ [212] той же структуры, что и в предыдущем подразделе, за исключением случайного возмущения:

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\, \boldsymbol{X}(t) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\mathcal{B}}(t, \theta)\, \boldsymbol{X}(\theta) d\theta + \boldsymbol{\mathcal{G}}(t)\, \boldsymbol{V}(t), \quad t > t_0, \qquad (2.3.35)$$

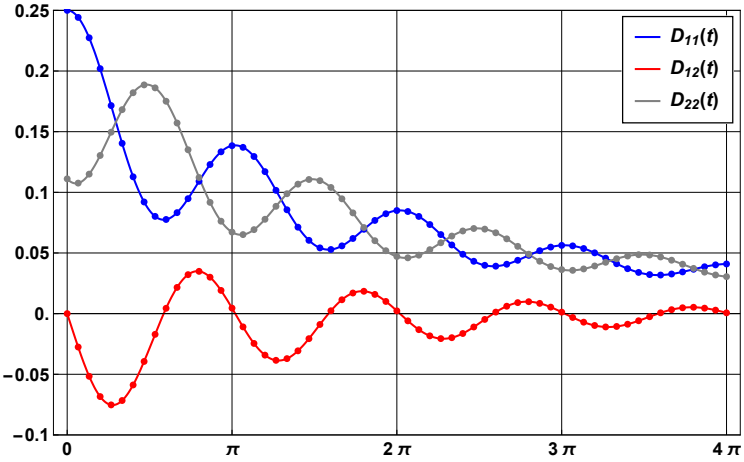


Рис. 2.3.5

где t – время $(t_0 \leqslant t \leqslant T < +\infty)$; $\boldsymbol{X}(t) = \{X_i(t)\}^\intercal \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, причем $\boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}^0$; $\boldsymbol{V}(t) = \{V_i(t)\}^\intercal \in \mathbb{R}^m$ – вектор независимых белых шумов с единичными интенсивностями; $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ и $\boldsymbol{\mathcal{G}}$ – известные непрерывные матрицы-функции своих аргументов. Начальное состояние $\boldsymbol{X}^0$ считаем случайным вектором с известными числовыми характеристиками:

$$\mathbb{E}\big[\boldsymbol{X}^0\big] = \boldsymbol{m}^0, \qquad \mathbb{E}\big[(\boldsymbol{X}^0 - \boldsymbol{m}^0)\,(\boldsymbol{X}^0 - \boldsymbol{m}^0)^\intercal\big] = \boldsymbol{\mathcal{K}}^0.$$

В подразделе 2.3.3 была изложена приближенная схема вычисления первых моментов вектора $\boldsymbol{X}(t)$, основанная на итерационной процедуре вычисления матричной функции Грина для системы (2.3.35). Ниже рассматривается модификация данной схемы. Целью модификации является уменьшение погрешности вычисления моментных функций вектора состояния системы.

Как и выше, с помощью последовательного дифференцирования уравнения (2.3.25) можно построить необходимое конечное число членов разложения (2.3.30).

Ранее, в частности в работе [199], для решения конкретных задач использовалась прямая реализация этой схемы, что требовало для получения приемлемой точности на всем расчетном временном участке находить большое число членов в разложении (2.3.30). Ситуация, та же, что и при использовании формулы Тейлора для аппроксимации значений

дифференцируемой функции: чем дальше точка аппроксимации находится от точки разложения, тем больше членов в формуле нужно брать для достижения одной и той же точности.

Если посмотреть с другой стороны, а именно, через призму одношаговых методов численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений [169], то необходимой теоретической точности при разработке подобных методов (а их расчетные формулы для линейных систем, как правило, совпадают с отрезками соответствующих рядов Тейлора) добиваются небольшим числом вычислений правых частей ОДУ. Но при этом приближенное решение строится на сетке с достаточно мелким шагом.

Если действовать подобным образом при использовании итерационной процедуры вычисления матрицы Грина, то необходимо задаться числом N – длиной отрезка ряда (2.3.30), шагом h временно́й сетки:

$$t_m = t_0 + h \cdot m, \qquad m = 0, 1, 2, ..., M, \qquad h = \frac{T - t_0}{M}$$

(M – натуральное число) и модифицировать расчетные формулы (2.3.27), (2.3.29) для первых моментов:

$$\boldsymbol{m}_{X,k+1} \equiv \boldsymbol{m}_X(t_{k+1}) \approx \mathbb{R}_N(t_{k+1}, t_k)\, \boldsymbol{m}_{Xk}, \tag{2.3.36}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX,k+1} \equiv \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}(t_{k+1}) \approx \mathbb{R}_N(t_{k+1}, t_k)\, \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XXk}\, \mathbb{R}_N^{\intercal}(t_{k+1}, t_k) + \\ + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbb{R}_N(t_{k+1}, s)\, \boldsymbol{\mathcal{G}}(s)\, \boldsymbol{\mathcal{G}}^{\intercal}(s)\, \mathbb{R}_N^{\intercal}(t_{k+1}, s)\, ds. \tag{2.3.37}$$

Пример 2.3.3. Применим изложенную модификацию для анализа системы, (2.3.34). Для получения численных результатов использовались следующие значения параметров задачи:

$$\boldsymbol{m}^0 = \{2.0, 0.0\}^{\intercal}, \quad \boldsymbol{\mathcal{K}}^0 = \operatorname{diag}\big(0.25, 0.25\big), \quad \alpha = 0.1, \quad \omega_0^2 = 4.0,$$
$$\gamma = 0.1, \quad g_0 = 0.1, \quad \beta = 0.05, \quad T = 10.0, \quad N = 4, \quad M = 5000.$$

Результаты расчетов по изложенной выше методике отображены на рис. 2.3.6 (функции математического ожидания: $m_{X_1}(t) - 1$, $m_{X_2}(t) - 2$) и 2.3.7 (элементы матрицы функций ковариации: $K_{X_1X_1}(t) - 1$, $K_{X_1X_2}(t) - 2$, $K_{X_2X_2}(t) - 3$).

Максимальные величины полученных невязок для моментных функций на шаге длиной 0.01 при $N = 4$ не превышали $5.0 \cdot 10^{-9}$ для $m_1(t)$ и $5.5 \cdot 10^{-8}$ для $m_2(t)$. ►

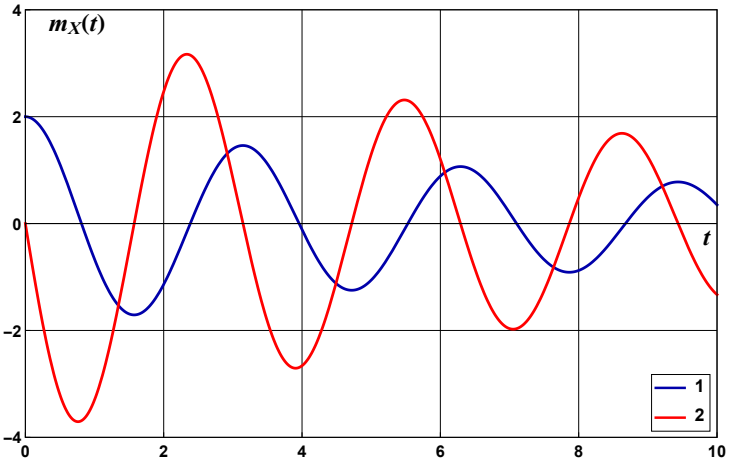


Рис. 2.3.6

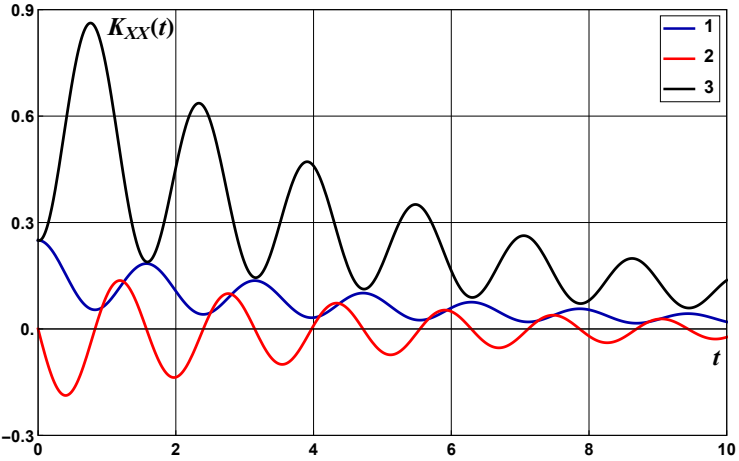


Рис. 2.3.7

Пример 2.3.4. В качестве второго примера рассмотрим систему следующего вида:

$$\ddot{Z}_k + 2\,\alpha_k\,\dot{Z}_k + \omega_k^2\,Z_k + \beta_k \int_0^t e^{-\gamma_k (t-\theta)^2}\,Z_k(\theta)\,d\theta =$$

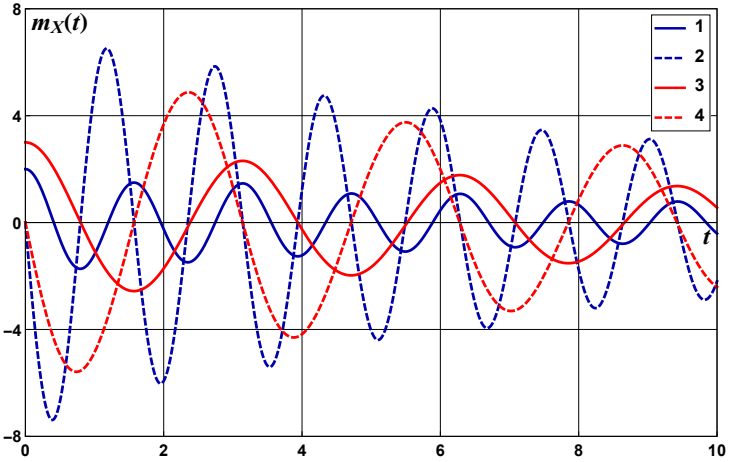


Рис. 2.3.8

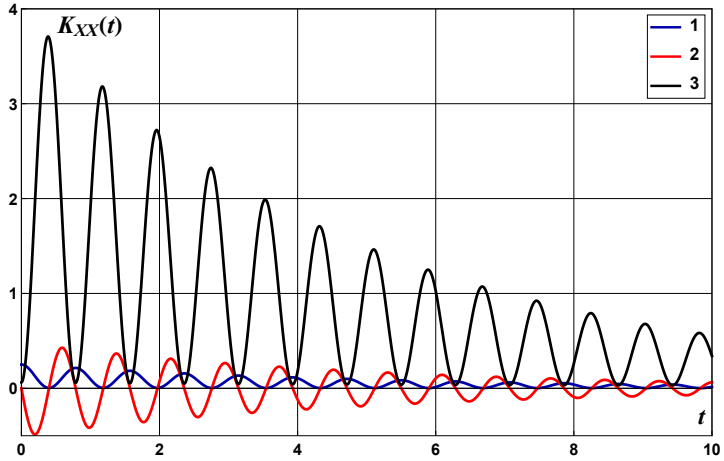


Рис. 2.3.9

$$= r_k\, Z_{3-k}\, g_k\, V_k(t), \quad k = 1, 2, \quad t > 0, \qquad (2.3.38)$$

где $\alpha_k > 0$, $\omega_k > 0$, $\gamma_k > 0$, β_k, r_k, g_k – постоянные. Случайное начальное состояние $\{Z_1(0), \dot{Z}_1(0), Z_2(0), \dot{Z}_2(0)\}$ совместное имеет гауссово распределение $\mathcal{N}(\boldsymbol{m}^0, \boldsymbol{\mathcal{K}}^0)$.

После учета новых обозначений $X_1(t) = Z_1(t)$, $X_2(t) = \dot{Z}_1(t)$, $X_3(t) =$

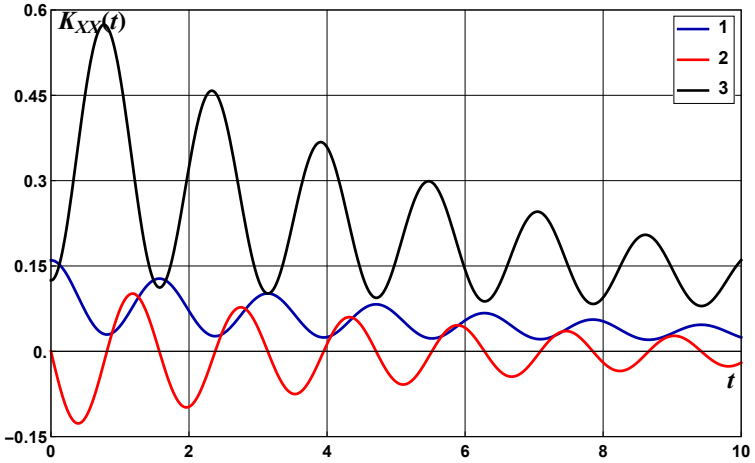


Рис. 2.3.10

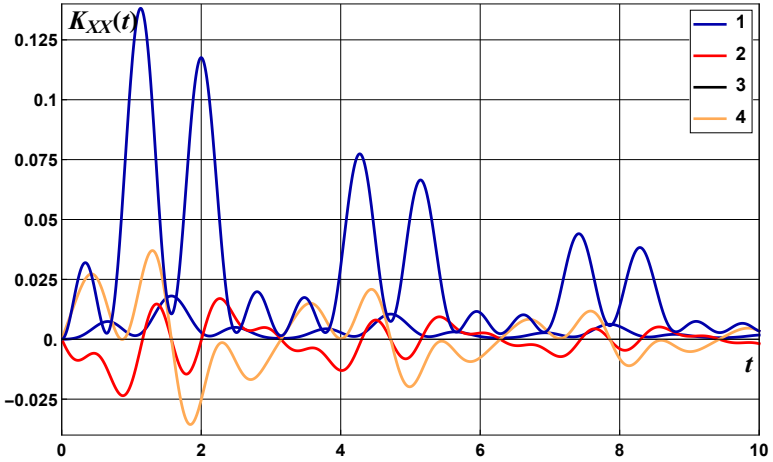


Рис. 2.3.11

$Z_2(t)$, $X_4(t) = \dot{Z}_4(t)$, расчеты производились по той же схеме, что и в первом примере, при следующих значениях параметров задачи:

$$\alpha_1 = 0.1, \quad \alpha_2 = 1/12, \quad \beta_1 = 0.1, \quad \beta_2 = -0.2,$$
$$\gamma_1 = 0.1, \quad \gamma_2 = 1/15, \quad g_1 = 0.1, \quad g_2 = 0.15,$$

$$\omega_1^2 = 16.0, \quad \omega_2^2 = 4.0, \quad r_1 = 0.5, \quad r_2 = -0.25;$$
$$\boldsymbol{m}^0 = \{2.0, 0.0, 3.0, 0.0\}^\intercal, \quad \boldsymbol{\mathcal{K}}^0 = \operatorname{diag}\big(0.25, 0.0625, 0.16, 0.125\big),$$
$$T = 10.0, \quad N = 6, \quad M = 5000.$$

Результаты расчетов методике отображены на рис. 2.3.8 (функции математического ожидания: $m_{X_1}(t) - 1$, $m_{X_2}(t) - 2$, $m_{X_3}(t) - 3$, $m_{X_4}(t) - 4$), 2.3.9 (элементы матрицы функций ковариации: $\mathcal{K}_{X_1X_1}(t) - 1$, $\mathcal{K}_{X_1X_2}(t) - 2$, $\mathcal{K}_{X_2X_2}(t) - 3$), 2.3.10 ($\mathcal{K}_{X_3X_3}(t) - 1$, $\mathcal{K}_{X_3X_4}(t) - 2$, $\mathcal{K}_{X_4X_4}(t) - 3$) и 2.3.11 ($\mathcal{K}_{X_1X_3}(t) - 1$, $\mathcal{K}_{X_1X_4}(t) - 2$, $\mathcal{K}_{X_2X_3}(t) - 3$, $\mathcal{K}_{X_2X_4}(t) - 4$). ►

2.3.5. Расчет первых моментов линейных интегро-дифференциальных систем с параметрическими возмущениями

Рассмотрим следующую систему стохастических обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений (СОИДУ):

$$d\boldsymbol{X}(t) = \Big[\boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{r}(t) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\mathcal{B}}(t,\theta)\,\boldsymbol{X}(\theta)\,d\theta\Big]\,dt +$$
$$+ \boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{X}(t), t\big) \circ d\boldsymbol{W}(t), \quad t \in (t_0, T], \qquad \boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}^0, \quad (2.3.39)$$

где t – время; $\boldsymbol{X}(t) = \{X_i(t)\}^\intercal \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния; $\boldsymbol{W}(t) = \{W_j(t)\}^\intercal \in \in \mathbb{R}^d$ – вектор независимых стандартных винеровских случайных процессов; $\boldsymbol{r}(\cdot) = \{r_i(\cdot)\}^\intercal$, $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\cdot) = \{\mathcal{a}_{ij}(\cdot)\}$, $\boldsymbol{\mathcal{B}}(\cdot,\cdot) = \{\mathcal{b}_{ij}(\cdot,\cdot)\}$ ($\mathcal{b}_{ij} \geqslant 0$) и $\boldsymbol{\mathcal{G}}(\cdot,\cdot) = \{\mathcal{g}_{ij}(\cdot,\cdot)\}$ – известные векторные и матричные функции своих аргументов,

$$\boldsymbol{\mathcal{G}} = \sum_{s=1}^{n} \boldsymbol{\mathcal{G}}_s(t)\,X_s(t) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(t), \qquad \boldsymbol{\mathcal{G}}_\ell(t) = \big[\mathcal{g}_{\ell ij}(t)\big], \qquad \ell = \overline{0,n}.$$

Начальное состояние $\boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}^0$ считаем случайным вектором с известной плотностью вероятности $p^0(\cdot)$.

Как правило, прямое исследование систем (2.3.39) невозможно, а аналитическая теория, аналогичная созданной для марковских случайных процессов [236,288], отсутствует. С другой стороны, имеются работы, где с помощью увеличения размерности фазового вектора интегро-дифференциальные системы, у которых элементы вырожденного матричного ядра

$\boldsymbol{\mathcal{B}}$ представляют собой простейшие функции типа $c\,e^{-\nu(t-\tau)}$ (c, ν – постоянные), приводят к форме, описываемой стохастическими обыкновенными дифференциальными уравнениями (СОДУ), что позволяет для их исследования применить известные точные и приближенные методы [236].

Ниже рассматривается схема приближенного сведения (без задания структуры ядра) системы (2.3.39) к СОДУ [194, 201, 238, 904, 907, 1000], основанная на процедуре расширения пространства состояний, а также приводится пример применения этой схемы.

Разобьем отрезок $[t_0, T]$ точками $t_k = t_0 + k\,h$, $k = 0,\ 1,\ 2,\ ...,\ M$, $h = (T - t_0)/M$ так, чтобы с достаточной точностью на отрезке $[t_{k-1}, t_k]$, $k \geqslant 1$ можно было заменить $\boldsymbol{\mathcal{B}}(t,\tau)$ на функцию (среднее значение) $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_k(t)$, которую вычислим следующим образом:

$$\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_k(t) = \frac{1}{h}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \boldsymbol{\mathcal{B}}(t,\theta)\,d\theta \approx \frac{1}{h}\,\frac{\Delta\theta}{3}\sum_{s=0}^{2L} c_s\,\boldsymbol{\mathcal{B}}(t,\theta_{ks}) = \frac{1}{6L}\sum_{s=0}^{2L} c_s\,\boldsymbol{\mathcal{B}}(t,\theta_{ks}),$$

$$\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{B}}}^{\,*}_k(t) = \frac{1}{h^*}\int\limits_{t_{k-1}}^{t} \boldsymbol{\mathcal{B}}(t,\theta)\,d\theta \approx \frac{1}{h^*}\,\frac{\Delta\theta^*}{3}\sum_{s=0}^{2L^*} c^*_s\,\boldsymbol{\mathcal{B}}(t,\theta^*_{ks}) = \frac{1}{6L^*}\sum_{s=0}^{2L^*} c^*_s\,\boldsymbol{\mathcal{B}}(t,\theta^*_{ks}),$$

$$t < t_k$$

(с точностью порядка $O(\Delta\theta)^4$), где $h^* = t - t_{k-1}$,

$$\theta_{ks} = t_{k-1} + s\cdot\Delta\theta, \qquad s = 0, 1, ..., 2L, \qquad h = 2\,L\,\Delta\theta, \qquad L \geqslant 1,$$

$$c_s = \begin{cases} 1, & \text{если } s = 0 \text{ или } 2\,L; \\ 4, & \text{если } s \text{ нечетно}; \\ 2, & \text{иначе}, \end{cases}$$

и аналогично для θ^*_{ks}, L^*, $\Delta\theta^*$ c^*_s.

Таким образом, ядро $\boldsymbol{\mathcal{B}}(t,\tau)$ представляется кусочно-постоянной по второму аргументу матричной функцией. В результате этого исходная система (2.3.39) приводится к виду

$$d\boldsymbol{X}(t) = \Big[\boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{r}(t) + \sum_{\ell=1}^{k-1}\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_\ell(t)\int\limits_{t_{\ell-1}}^{t_\ell}\boldsymbol{X}(\theta)\,d\theta +$$

$$+\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{B}}}^{\,*}_k(t)\int\limits_{t_{k-1}}^{t}\boldsymbol{X}(\theta)\,d\theta\Big]\,dt + \boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{X}(t),t\big)\,d\boldsymbol{W}(t), \qquad (2.3.40)$$

$$t_{k-1} < t \leqslant t_k, \qquad k = 1, 2, ..., M.$$

Введем векторы

$$\boldsymbol{Z}_k(t) = \int\limits_{t_{k-1}}^{t} \boldsymbol{X}(\theta)\, d\theta, \qquad t_{k-1} < t \leqslant t_k. \tag{2.3.41}$$

С учетом равенств (2.3.41) расширенная система (2.3.40) принимает форму

$$d\boldsymbol{X}(t) = \Big[\boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\, \boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{r}(t) + \sum_{\ell=1}^{k-1} \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_\ell(t)\, \boldsymbol{Z}_\ell(t_\ell) + \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_k^*(t)\, \boldsymbol{Z}_k(t)\Big]\, dt +$$
$$+ \boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{X}(t), t\big)\, d\boldsymbol{W}(t),$$
$$\dot{\boldsymbol{Z}}_k(t) = \boldsymbol{X}(t),$$

причем

$$\boldsymbol{Z}_k(t_{k-1}) = 0.$$

Если обозначить $\boldsymbol{X}(t)$ через $\boldsymbol{X}_s(t)$ для $t_{s-1} < t \leqslant t_s$, то окончательно получим

$$d\boldsymbol{X}_k(t) = \Big[\boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\, \boldsymbol{X}_k(t) + \boldsymbol{r}(t) + \sum_{\ell=1}^{k-1} \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_\ell(t)\, \boldsymbol{Z}_\ell(t_\ell) + \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_k^*(t)\, \boldsymbol{Z}_k(t)\Big]\, dt +$$
$$+ \boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{X}_k(t), t\big)\, d\boldsymbol{W}(t), \tag{2.3.42}$$
$$\dot{\boldsymbol{Z}}_k(t) = \boldsymbol{X}_k(t),$$

причем начальные условия для системы (2.3.42) определяются следующим образом:

$$\boldsymbol{X}_k(t_{k-1}) = \boldsymbol{X}_{k-1}(t_{k-1}), \qquad \boldsymbol{Z}_k(t_{k-1}) = 0, \qquad k = 1, 2, ..., M.$$

Теперь построим уравнения для первых моментных функций.

Рассмотрим временно́й отрезок $[t_{k-1}, t_k]$ $(k \geqslant 1)$ и построим системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) для вектора функций математического ожидания и матрицы функций ковариации векторных случайный процессов

$$\boldsymbol{Y}_k(t) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{Z}_1(t_1), \boldsymbol{Z}_2(t_2), ..., \boldsymbol{Z}_k(t), \boldsymbol{X}_k(t)\big),$$

имеющего размерность $N = n\,(k+1)$.

Систему стохастических обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ) для вектора $\boldsymbol{Y}(t)$ запишем следующим образом:

$$d\boldsymbol{Y}_k(t) = \big[\boldsymbol{\mathcal{A}}_k(t)\,\boldsymbol{Y}_k(t) + \boldsymbol{r}_k(t)\big]\,dt + \boldsymbol{\mathcal{G}}_k\big(\boldsymbol{Y}_k(t),t\big)\circ d\boldsymbol{W}(t), \tag{2.3.43}$$

где

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_k(t) = \big\{\underline{a}_{kij}\big\} \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \ldots & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \ldots & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \ldots & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \ldots & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{I}}_{n} \\ \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_1(t) & \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_2(t) & \ldots & \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_{k-1}(t) & \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{B}}}^{+}_{k}(t) & \boldsymbol{\mathcal{A}}_k(t) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}_k\big(\boldsymbol{Y}_k(t),t\big) = \big\{\underline{g}_{kij}\big\} \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times d} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times d} \\ \ldots \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times d} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times d} \\ \boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{X}_k(t),t\big) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{r}_k(t) = \big\{\underline{r}_{ki}\big\} \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{O}_n \\ \boldsymbol{O}_n \\ \ldots \\ \boldsymbol{O}_n \\ \boldsymbol{O}_n \\ \boldsymbol{r}(t) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{Y}_k(t_{k-1}) = \boldsymbol{Y}_{k-1}(t_{k-1}) \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{Z}_1(t_1) \\ \boldsymbol{Z}_2(t_2) \\ \ldots \\ \boldsymbol{O}_n \\ \boldsymbol{X}_{k-1}(t_{k-1}) \end{bmatrix}.$$

Вследствие того, что уравнения (2.3.43) – СОДУ в смысле Стратоновича, то коэффициенты сноса a_{ki} и диффузии $\mathbb{b}_{kij}$ ФПК–уравнения для плотности распределения вектора $\boldsymbol{Y}_k$ могут быть найдены по следующим формулам:

$$a_{ki} = \sum_{\ell=1}^{N} \underline{a}_{ki\ell}\, y_{k\ell} + \underline{r}_{ki} + \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{N}\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \underline{g}_{kij}}{\partial y_{k\ell}}\, \underline{g}_{k\ell j},$$

$$\mathbb{b}_{kij} = \sum_{\ell=1}^{d} \underline{g}_{ki\ell}\, \underline{g}_{kj\ell},$$

а само уравнение для плотности распределения $p_{Y_k}(\boldsymbol{y}_k, t)$ будет иметь вид:

$$\frac{\partial p_{Y_k}}{\partial t} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial^2\bigl(\mathbb{b}_{kij}\, p_{Y_k}\bigr)}{\partial y_{ki}\partial y_{kj}} - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial\bigl(\mathbb{a}_{ki}\, p_{Y_k}\bigr)}{\partial y_{ki}}, \tag{2.3.44}$$

$$p_{Y_k}(\boldsymbol{y}_k, t_{k-1}) = p_{Y_{k-1}}(\boldsymbol{y}_{k-1}, t_{k-1})\big|_{\boldsymbol{x}_{k-1}\to\boldsymbol{x}_k}\, \delta(\boldsymbol{z}_k), \tag{2.3.45}$$

где $p_{Y_1}(\boldsymbol{y}_0, t_0) = p^0(\boldsymbol{x}_1)\,\delta(\boldsymbol{z}_1)$.

Введем следующие обозначения:

$$m_{ks}(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} y_{ks}\, p_{Y_k}(\boldsymbol{y}_k, t)\, d\boldsymbol{y}_k,$$

$$m_{ksq}(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} y_{ks}\, y_{kq}\, p_{Y_k}(\boldsymbol{y}_k, t)\, d\boldsymbol{y}_k,$$

$$\bar{m}_{ks} = m_{*k-1,s}(t_{k-1}), \qquad \bar{m}_{ksq} = m_{*k-1,sq}(t_{k-1}),$$

где

$$m_{*1s}(t_0) = \begin{cases} 0, & 1 \leqslant s \leqslant n, \\ \displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^n} x_{1,s-n}\, p^0(\boldsymbol{x}_1)\, d\boldsymbol{x}_1, & n+1 \leqslant s \leqslant 2\,n; \end{cases}$$

$$m_{*1sq}(t_0) = \begin{cases} 0, & 1 \leqslant s \leqslant n \text{ или } 1 \leqslant q \leqslant n, \\ \displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^n} x_{1,s-n}\, x_{1,q-n}\, p^0(\boldsymbol{x}_1)\, d\boldsymbol{x}_1, & n+1 \leqslant s, q \leqslant 2\,n. \end{cases}$$

Теперь последовательно домножим обе части уравнения (2.3.44) на y_{ks} и $y_{ks}\, y_{kq}$ и проинтегрируем по всему пространству $\mathbb{R}^N$. В результате сначала получим уравнения для функций математического ожидания компонент вектора $\boldsymbol{y}_k$:

$$\dot{m}_{ks}(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathbb{a}_{ks}\, p_{Y_k}(\boldsymbol{y}_k, t)\, d\boldsymbol{y}_k \equiv f_{1ks}, \tag{2.3.46}$$

а затем – для начальных моментов второго порядка:

$$\dot{m}_{ksq}(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \bigl[\mathbb{b}_{ksq} + y_{ks}\, \mathbb{a}_{kq} + y_{kq}\, \mathbb{a}_{ks}\bigr]\, p_{Y_k}(\boldsymbol{y}_k, t)\, d\boldsymbol{y}_k \equiv f_{2ksq}, \tag{2.3.47}$$

$(s, q = \overline{1, N})$. Начальными условиями для уравнений моментных функций будут:

$$m_{ks}(t_{k-1}) = \bar{m}_{ks}, \qquad m_{ksq}(t_{k-1}) = \bar{m}_{ksq}. \tag{2.3.48}$$

На основе уравнений (2.3.47), используя известные соотношения между начальными и центральными моментами случайных величин, можно без труда построить ОДУ для элементов матрицы функций ковариации $\boldsymbol{\mathcal{K}}_k(t) = \{\mathcal{K}_{ksq}(t)\}$ вектора $\boldsymbol{y}_k$:

$$\dot{\mathcal{K}}_{ksq}(t) = f_{2ksq} - f_{1ks}\, m_{kq}(t) - f_{1kq}\, m_{ks}(t), \tag{2.3.49}$$

причем в правых частях последних уравнений функции $m_{ksq}(t)$ необходимо заменить выражениями $\mathcal{K}_{ksq}(t) + m_{ks}(t)\, m_{kq}(t)$.

Пример 2.3.5. Исследуем переходный процесс, описываемый модельным уравнением

$$\ddot{U}(t) + 2\,\alpha\,\dot{U}(t) + \omega^2\, U(t) + \beta \int_0^t e^{-\gamma(t-\theta)^2} U(\theta)\, d\theta =$$

$$= \mu_1\, V_1(t) + \mu_2\, U(t) \circ V_2(t), \qquad U(0) = U^0, \quad \dot{U}(0) = \dot{U}^0, \tag{2.3.50}$$

где α, ω, β, γ, μ_1, μ_2 – постоянные величины ($\alpha > 0$, $\omega > 0$, $\gamma > 0$).

Если обозначить $U(t)$ через $X_1(t)$, а $\dot{U}(t)$ – через $X_2(t)$ $(n = 2)$, то, приводя уравнение (2.3.50) к виду(2.3.39), получим

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\,\alpha \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{r}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{B}}(t, \theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\beta\, e^{-\gamma(t-\theta)^2} & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{G}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mu_1 & \mu_2\, X_1 \end{bmatrix}.$$

Форма ядра интегральной части уравнения позволила выразить его средние значения на различных участках через функцию ошибок:

$$\frac{1}{h} \int_{t_{\ell-1}}^{t_\ell} \beta\, e^{-\gamma(t-\theta)^2} d\theta = \frac{\beta}{2\,h} \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} \left[\operatorname{erf}\left(\sqrt{\gamma}\,(t - t_{\ell-1})\right) - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\gamma}\,(t - t_\ell)\right) \right],$$

$$\frac{1}{t - t_{\ell-1}} \int_{t_{\ell-1}}^{t} \beta\, e^{-\gamma(t-\theta)^2} d\theta = \frac{\beta}{2\,h} \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}\, \operatorname{erf}\left(\sqrt{\gamma}\,(t - t_{\ell-1})\right), \quad t > t_{\ell-1}.$$

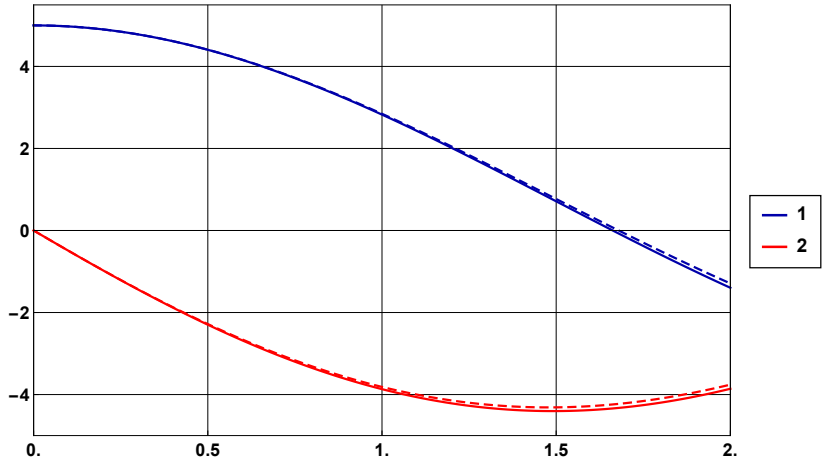


Рис. 2.3.12

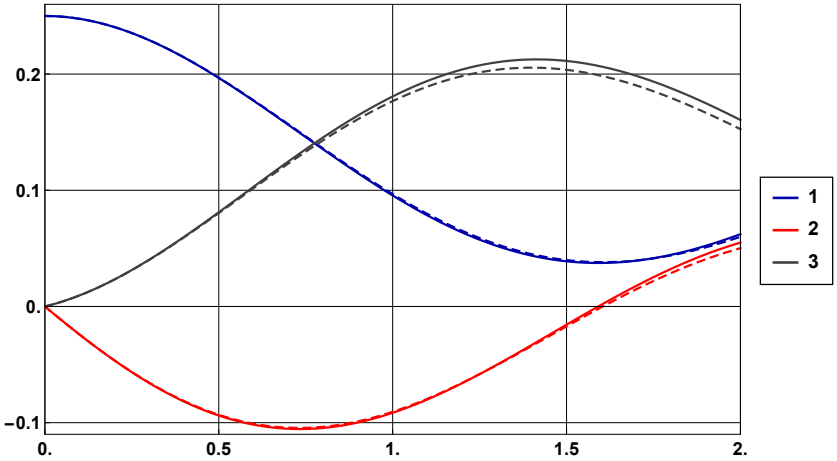


Рис. 2.3.13

Результаты расчета функций математического ожидания и компоненты матрицы функций ковариации были выполнены с помощью программы на языке Wolfram Language пакета `Mathematica` для следующих значений параметров:

$$\alpha = 0.1, \quad \beta = 0.2, \quad \gamma = 0.125, \quad T = 2,$$

$$\omega = 1, \quad \mu_1 = 0.1, \quad \mu_2 = 0.05, \quad h = 0.02,$$

$$\boldsymbol{m}_X^0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

На рис. 2.3.12, 2.3.13 непрерывными линиями отображено поведение функций математического ожидания $m_{X_1}(t)$ (линия 1), $m_{X_2}(t)$ (2) и ковариации $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_1X_1}(t)$ (линия 1), $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_1X_2}(t)$ (2), $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_2X_2}(t)$ (3). Там же, но штриховыми кривыми показано изменение средних в случае $\beta = 0$. ▶

2.3.6. Численно-аналитическая схема применения матричной функции Грина для анализа линейных СОДУ

Еще раз обратимся к линейной системе СОИДУ в следующем виде [237]:

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\mathcal{B}}(t,\tau)\,\boldsymbol{X}(\tau)\,d\tau + \boldsymbol{c}(t) + \\ + \mathcal{G}(t)\,\boldsymbol{U}(t), \quad \boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}^0. \tag{2.3.51}$$

В этих уравнениях t – время, $t \in [t_0, T]$, $T < +\infty$; $\boldsymbol{X}(t) = \operatorname{col}\big(X_1(t), X_2(t), ..., X_n(t)\big)$ и $\boldsymbol{U}(t) = \operatorname{col}\big(U_1(t), U_2(t), ..., U_m(t)\big)$ – случайные векторные процессы, определяющие состояние системы (вектор состояния) и случайные возмущения соответственно; $\boldsymbol{c}(t) = \operatorname{col}\big(c_1(t), c_2(t), ..., c_n(t)\big)$, $\boldsymbol{\mathcal{A}}(t) = \{a_{ij}(t)\} \in \mathbb{M}_{n\times n}$, $\boldsymbol{\mathcal{B}}(t,\tau) = \{b_{ij}(t,\tau)\} \in \mathbb{M}_{n\times n}$, $\boldsymbol{\mathcal{G}}(t) = \{g_{ij}(t)\} \in \mathbb{M}_{n\times m}$ – неслучайные векторная и матричные функции, компоненты которых дифференцируемы необходимое число раз по каждому из своих аргументов; $\boldsymbol{X}^0$ – случайный вектор с известными характеристиками, причем векторы $\boldsymbol{X}^0$ и $\boldsymbol{V}(t)$ статистически независимы; $\mathbb{M}_{s\times q}$ – множество действительных $s \times q$-матриц.

Пусть $\boldsymbol{X}^0$ – гауссов случайный вектор со значениями в $\mathbb{R}^n$,

$$\boldsymbol{m}_X^0 = \mathbb{E}\big[\boldsymbol{X}^0\big], \quad \boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}^0 = \mathbb{E}\big[\{\boldsymbol{X}^0 - \boldsymbol{m}_X^0\}\{\boldsymbol{X}^0 - \boldsymbol{m}_X^0\}^{\intercal}\big];$$

а $\boldsymbol{U}(t)$ – стохастический процесс, удовлетворяющий векторному линейному стохастическому дифференциальному уравнению Ито

$$d\boldsymbol{U}(t) = \boldsymbol{\mathcal{H}}\,\boldsymbol{U}(t)\,dt + \boldsymbol{\mathcal{Q}}\,d\boldsymbol{W}(t), \qquad t \in (t_0, T] \tag{2.3.52}$$

со случайным начальным условием $\boldsymbol{U}(t_0) = \boldsymbol{U}^0$. В уравнении (2.3.52) $\boldsymbol{\mathcal{H}} = \{h_{ij}\} \in \mathbb{M}_{m\times m}$ и $\boldsymbol{\mathcal{Q}} = \{q_{ij}\} \in \mathbb{M}_{m\times r}$ – заданные постоянные матрицы;

$\boldsymbol{W}(t) = \operatorname{col}\big(W_1(t),\, W_2(t), ..., W_r(t)\big)$ – векторный винеровский случайный процесс с независимыми компонентами, такой, что его обобщенная производная по времени t, обозначаемая через $\boldsymbol{V}(t) = \operatorname{col}\big(V_1(t), V_2(t), ..., V_r(t)\big)$, есть векторный гауссовский белый шум с независимыми компонентами, $\mathbb{E}[\boldsymbol{W}(t)] = \boldsymbol{O}_r$, $\mathbb{E}[\boldsymbol{V}(t)\,\boldsymbol{V}^{\intercal}(t')] = 2\,\pi\,\boldsymbol{\mathcal{I}}\,\delta(t-t')$; $\boldsymbol{U}^0$ – начальный вектор, представляющий собой центрированную гауссову случайную величину со значениями в $\mathbb{R}^m$. Предполагается, что плотность вероятности вектора $\boldsymbol{U}^0$ – гауссово стационарное распределение, ассоциированное с уравнением (2.3.52). Параметрами этого распределения являются вектор математических ожиданий $\boldsymbol{m}_U^0 = \mathbb{E}\big[\boldsymbol{U}^0\big] = 0$ и ковариационная матрица $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{UU}^0 = \mathbb{E}\big[\boldsymbol{U}^0\,\boldsymbol{U}^{0\intercal}\big]$. Кроме того, в уравнении (2.3.52) матрицы $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ и $\boldsymbol{\mathcal{Q}}$ таковы, что $\boldsymbol{U}(t)$ – случайный процесс второго порядка. Следовательно, $\{\boldsymbol{U}(t),\ t \in [t_0, T]\}$ – стационарный центрированный непрерывный в среднем квадратичном гауссовский случайный процесс, для которого

$$\boldsymbol{m}_U(t) = \mathbb{E}[\boldsymbol{U}(t)] = \boldsymbol{m}_U^0 = \boldsymbol{O}_m,$$

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{UU}(t_1 - t_2) = \boldsymbol{\mathcal{C}}_{UU}(t_1, t_2) = \mathbb{E}[\boldsymbol{U}(t_1)\,\boldsymbol{U}^{\intercal}(t_2)]\,, \qquad \boldsymbol{\mathcal{C}}_{UU}(0) = \boldsymbol{\mathcal{C}}_{UU}^0.$$

Учитывая, что $\boldsymbol{X}^0$ и $\boldsymbol{U}(t)$ – гауссовские случайные вектор и процесс соответственно, линейность уравнений (2.3.51) и (2.3.52), а также высказанные выше предположения, можно установить, что $\{\boldsymbol{X}(t),\ t \in [t_0, T]\}$ – непрерывный в среднем квадратичном гауссовский векторный случайный процесс второго порядка. При этом для всех непустых и неупорядоченных точечных подмножеств отрезка $[t_0, T]$ многомерные распределения расширенных случайных векторов состояния будут гауссовыми, определяемыми соответствующими векторами средних и ковариационными матрицами.

Найдем теперь вектор функций математического ожидания и матрицу ковариационных функций векторного случайного процесса $\boldsymbol{X}(t)$, а также все взаимные матрицы ковариационных функций $\boldsymbol{X}(t)$ и векторного возмущения $\boldsymbol{U}(t)$:

$$\boldsymbol{m}_X(t) = \mathbb{E}[\boldsymbol{X}(t)]\,, \qquad \boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(t_1, t_2) = \mathbb{E}[\boldsymbol{X}(t_1)\,\boldsymbol{X}^{\intercal}(t_2)] - \boldsymbol{m}_X(t_1)\,\boldsymbol{m}_X^{\intercal}(t_2),$$

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XU}(t_1, t_2) = \mathbb{E}[\boldsymbol{X}(t_1)\,\boldsymbol{U}^{\intercal}(t_2)]\,, \qquad \boldsymbol{\mathcal{C}}_{UX}(t_1, t_2) = \mathbb{E}[\boldsymbol{U}(t_1)\,\boldsymbol{X}^{\intercal}(t_2)]\,.$$

Если принять во внимание введенные определения и обозначения, то несложно установить, что решение поставленной задачи заключается в создании схемы для вычисления векторной функции $\boldsymbol{m}_X(t)$ и матричной функции $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(t_1, t_2)$ для любых $t, t_1, t_2 \in (t_0, T]$.

Применение оператора математического ожидания к обеим частям уравнений (2.3.51) дает:

$$\dot{\boldsymbol{m}}_X(t) = \boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\,\boldsymbol{m}_X(t) + \int\limits_{t'}^{t} \boldsymbol{\mathcal{B}}(t,\tau)\,\boldsymbol{m}_X(\tau)\,d\tau + \boldsymbol{c}(t), \tag{2.3.53}$$

$$t_0 \leqslant t' < t \leqslant T,$$

$$\boldsymbol{m}_X(t') = \boldsymbol{m}_{X'}, \qquad \boldsymbol{m}_X(t') = \boldsymbol{m}_{X^0} \quad \text{для} \quad t' = t_0.$$

Чтобы получить уравнение для $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(t_1,t_2)$, необходимо расширить вектор состояния системы (2.3.51) до нового случайного вектора $\boldsymbol{Y}(t) = \operatorname{col}(\boldsymbol{X}(t),\boldsymbol{U}(t))$ со значениями в $\mathbb{R}^{n+m}$. Тогда векторная функция $\boldsymbol{m}_Y(t)$ со значениями в $\mathbb{R}^{n+m}$ и матричная функция $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{YY}(t_1,t_2) \in \mathbb{M}_{(n+m)\times(n+m)}$ случайного процесса $\boldsymbol{Y}(t)$ определятся соотношениями:

$$\boldsymbol{m}_Y(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_X(t) \\ \boldsymbol{O}_m \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\mathcal{C}}_{YY}(t_1,t_2) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(t_1,t_2) & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{XU}(t_1,t_2) \\ \boldsymbol{\mathcal{C}}_{UX}(t_1,t_2) & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{UU}(t_1,t_2) \end{bmatrix}. \tag{2.3.54}$$

Введенный случайный процесс $\boldsymbol{Y}(t)$ (2.3.54) будет удовлетворять системе СИДУ

$$d\boldsymbol{Y}(t) = \Big[\underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(t)\,\boldsymbol{Y}(t) + \int\limits_{t'}^{t} \underline{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(t,\tau)\,\boldsymbol{Y}(\tau)\,d\tau + \underline{\boldsymbol{c}}(t)\Big]\,dt + \\ + \underline{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}\,d\boldsymbol{W}(t), \qquad t_0 \leqslant t' < t \leqslant T \tag{2.3.55}$$

со случайным начальным условием

$$\boldsymbol{Y}(t') = \boldsymbol{Y}', \qquad \boldsymbol{Y}' = \operatorname{col}(\boldsymbol{X}^0,\boldsymbol{U}^0) \quad \text{для} \quad t' = t_0. \tag{2.3.56}$$

В уравнении (2.3.55) матрицы $\underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(t) \in \mathbb{M}_{(n+m)\times(n+m)}$, $\underline{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(t) \in \mathbb{M}_{(n+m)\times(n+m)}$, $\underline{\boldsymbol{\mathcal{Q}}} \in \mathbb{M}_{(n+m)\times r}$ и вектор $\underline{\boldsymbol{c}}(t) \in \mathbb{R}^{n+m}$ имеют блочную структуру и определяются так:

$$\underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{A}}(t) & \boldsymbol{\mathcal{G}}(t) \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{m\times n} & \boldsymbol{\mathcal{H}} \end{bmatrix}, \qquad \underline{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{B}}(t) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{m\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{m\times m} \end{bmatrix},$$

$$\underline{\boldsymbol{\mathcal{Q}}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times r} \\ \boldsymbol{\mathcal{Q}} \end{bmatrix}, \qquad \underline{\boldsymbol{c}}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}(t) \\ \boldsymbol{O}_m \end{bmatrix}.$$

Для получения уравнений для ковариационных функций равенством $\boldsymbol{Z}(t) = \boldsymbol{Y}(t) - \boldsymbol{m}_Y(t)$ введем центрированный случайный процесс $\boldsymbol{Z}(t)$, $t \in$

$\in [t_0, T]$, со значениями в $\mathbb{R}^{n+m}$, где $\boldsymbol{m}_Y(t)$ – математическое ожидание, определенное равенством (2.3.54). Поэтому центрированный векторный случайный процесс $\boldsymbol{Z}(t)$ будет решением системы СОИДУ

$$d\boldsymbol{Z}(t) = \Big[\underline{\boldsymbol{A}}(t)\, \boldsymbol{Z}(t) + \int_{t'}^{t} \underline{\boldsymbol{B}}(t,\tau)\, \boldsymbol{Z}(\tau)\, d\tau \Big]\, dt + \\ +, \underline{\boldsymbol{Q}}\, d\boldsymbol{W}(t), \quad t_0 \leqslant t' < t \leqslant T \quad (2.3.57)$$

со случайным начальным условием $\boldsymbol{Z}(t') = \boldsymbol{Y}' - \boldsymbol{m}_{Y'}$.

Вследствие того, что

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{YY}(t_1, t_2) = \boldsymbol{\mathcal{C}}^{\top}_{YY}(t_2, t_1) = \boldsymbol{\mathcal{C}}_{ZZ}(t_1, t_2) = \mathbb{E}[\boldsymbol{Z}(t_1)\, \boldsymbol{Z}^{\intercal}(t_2)]\,,$$

при заданном $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{YY}(t', t')$ из (2.3.57) могут быть получены следующие уравнения ($t_0 \leqslant t' < t \leqslant T$):

$$\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\mathcal{C}}_{YY}(t, t') = \frac{\partial}{\partial t}\, \mathbb{E}[\boldsymbol{Z}(t)\, \boldsymbol{Z}^{\intercal}(t')] = \mathbb{E}\Big[\dot{\boldsymbol{Z}}(t)\, \boldsymbol{Z}^{\intercal}(t') \Big] = \\ = \underline{\boldsymbol{A}}(t)\, \boldsymbol{\mathcal{C}}_{YY}(t, t') + \int_{t'}^{t} \underline{\boldsymbol{B}}(t,\tau)\, \boldsymbol{\mathcal{C}}_{YY}(\tau, t')\, d\tau; \quad (2.3.58)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\mathcal{C}}_{YY}(t', t) = \frac{\partial}{\partial t}\, \mathbb{E}[\boldsymbol{Z}(t')\, \boldsymbol{Z}^{\intercal}(t)] = \mathbb{E}\Big[\boldsymbol{Z}(t')\, \dot{\boldsymbol{Z}}^{\intercal}(t) \Big] = \\ = \boldsymbol{\mathcal{C}}_{YY}(t', t)\, \underline{\boldsymbol{A}}^{\intercal}(t) + \int_{t'}^{t} \boldsymbol{\mathcal{C}}_{YY}(t', \tau)\, \underline{\boldsymbol{B}}^{\intercal}(t,\tau)\, d\tau; \quad (2.3.59)$$

$$\frac{d}{dt} \boldsymbol{\mathcal{C}}_{YY}(t, t) = \frac{d}{dt}\, \mathbb{E}[\boldsymbol{Z}(t)\, \boldsymbol{Z}^{\intercal}(t)] = \mathbb{E}\Big[\dot{\boldsymbol{Z}}(t)\, \boldsymbol{Z}^{\intercal}(t) \Big] + \mathbb{E}\Big[\boldsymbol{Z}(t)\, \dot{\boldsymbol{Z}}^{\intercal}(t) \Big] = \\ = \underline{\boldsymbol{A}}(t)\, \boldsymbol{\mathcal{C}}_{YY}(t, t) + \big\{ \underline{\boldsymbol{A}}(t)\, \boldsymbol{\mathcal{C}}_{YY}(t, t) \big\}^{\intercal} + \\ + \int_{t'}^{t} \Big[\underline{\boldsymbol{B}}(t,\tau)\, \boldsymbol{\mathcal{C}}_{YY}(\tau, t) + \big\{ \underline{\boldsymbol{B}}(t,\tau)\, \boldsymbol{\mathcal{C}}_{YY}(\tau, t) \big\}^{\intercal} \Big]\, d\tau + 2\,\pi\, \underline{\boldsymbol{Q}}\, \underline{\boldsymbol{Q}}^{\intercal}. \quad (2.3.60)$$

Заметим, что уравнение (2.3.59) может быть получено транспонированием уравнения (2.3.58), а также заменой t' на t и наоборот в ряде мест.

Уравнения (2.3.58)–(2.3.60) должны решаться с учетом начальных условий

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{YY}(t', t') = \boldsymbol{\mathcal{C}}_{Y'Y'},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{Y'Y'} = \boldsymbol{\mathcal{C}}_{YY}(t_0, t_0) = \boldsymbol{\mathcal{C}}^0_{YY} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{m\times n} & \boldsymbol{\mathcal{C}}^0_{UU} \end{bmatrix} \quad \text{для} \quad t' = t_0.$$

Предположим, что необходимо решить систему ОИДУ

$$\dot{\boldsymbol{z}}(t) = \boldsymbol{\mathcal{A}}^\star(t)\,\boldsymbol{z}(t) + \int\limits_{t'}^{t} \boldsymbol{\mathcal{B}}^\star(t,\tau)\,\boldsymbol{z}(\tau)\,d\tau + \boldsymbol{f}^\star(t), \qquad t_0 \leqslant t' < t \tag{2.3.61}$$

с начальным условием

$$\boldsymbol{z}(t') = \boldsymbol{z}', \qquad \boldsymbol{z}' = \boldsymbol{z}^0 \quad \text{для} \quad t' = t_0. \tag{2.3.62}$$

Тогда решение уравнений (2.3.61) с учетом (2.3.62) может быть записано так (см., например, [668]):

$$\boldsymbol{z}(t) = \mathbb{R}(t,t')\,\boldsymbol{z}' + \int\limits_{t'}^{t} \mathbb{R}(t,\theta)\,\boldsymbol{f}^\star(\theta)\,d\theta, \qquad t' < t, \tag{2.3.63}$$

где $\mathbb{R}(t,s)$ – матричная функция Грина, ассоциированная с уравнением (2.3.61) и являющаяся решением уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\mathbb{R}(t,s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}^\star(t)\,\mathbb{R}(t,s) + \int\limits_{s}^{t} \boldsymbol{\mathcal{B}}^\star(t,\theta)\,\mathbb{R}(\theta,s)\,d\theta, \quad s < t, \tag{2.3.64}$$

$$\mathbb{R}(s,s) = \boldsymbol{\mathcal{I}}.$$

В подразделе 2.3.3 была представлена схема вычисления $\mathbb{R}(t,s)$ в следующей форме:

$$\mathbb{R}(t,s) = \boldsymbol{\mathcal{I}} + \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{\mathbb{R}_\ell(s,s)}{\ell!}\,(t-s)^\ell, \qquad \mathbb{R}_\ell(t,s) = \frac{\partial^\ell \mathbb{R}(t,s)}{\partial t^\ell}. \tag{2.3.65}$$

Применяя этот подход, коэффициенты ряда Тейлора в равенстве (2.3.65) могут быть получены последовательным дифференцированием обеих частей уравнения (2.3.64) по t. Ограничиваясь на практике L-й производной, из равенства (2.3.65) можно получить, что с точностью $O[(t-s)^L]$

$$\widehat{\mathbb{R}}(t,s) \approx \widehat{\mathbb{R}}_{[L]}(t,s) = \boldsymbol{\mathcal{I}} + \sum_{\ell=1}^{L} \frac{\mathbb{R}_\ell(s,s)}{\ell!}\,(t-s)^\ell. \tag{2.3.66}$$

Сравнивая уравнения (2.3.61) и (2.3.62) с уравнениями (2.3.53) и используя уравнение (2.3.63), можно установить, что ВФМО $\boldsymbol{m}_X(t)$ выражается соотношением

$$\boldsymbol{m}_X(t) = \mathbb{R}^{[m]}(t,t')\,\boldsymbol{m}'_X + \int\limits_{t'}^{t} \mathbb{R}^{[m]}(t,\theta)\,\boldsymbol{f}^{\star}(\theta)\,d\theta, \tag{2.3.67}$$

в котором вектор $\boldsymbol{f}^{\star}(\theta)$ определяется равенством $\boldsymbol{f}^{\star}(\theta) = \boldsymbol{c}(\theta)$, а матричная функция Грина $\mathbb{R}(t,s)$, ассоциированная с векторной функцией $\boldsymbol{m}_X(t)$, записывается как $\mathbb{R}^{[m]}(t,s)$ и вычисляется из уравнения (2.3.64) и соотношения (2.3.66) при

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\star}(t) = \boldsymbol{\mathcal{A}}(t), \qquad \boldsymbol{\mathcal{B}}^{\star}(t,\tau) = \boldsymbol{\mathcal{B}}(t,\tau).$$

Построение соотношений для вычисления компонент матрицы ковариационных функций начнем с уравнения (2.3.58) для $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{YY}(t,t')$ при $t > t'$. Заметим, что решение уравнений (2.3.61) и (2.3.62), которое дается равенством (2.3.63), а матричная функция Грина $\mathbb{R}(t,s)$ удовлетворяет (2.3.64), записано для векторной функции. Рассматривая матрицу $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{YY}(t,t')$ как множество векторов-столбцов $\{\boldsymbol{C}^{[\gamma]}_{YY}(t,t'),\ \gamma = 1,2,...,n+m\}$, получим

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}^{[\gamma]}_{YY}(t,t') = \mathbb{R}^{[C]}(t,t')\,\boldsymbol{\mathcal{C}}^{[\gamma]}_{YY}(t',t'), \qquad t_0 \leqslant t' < t \leqslant T, \tag{2.3.68}$$

где матричная функция Грина $\mathbb{R}(t,s)$, ассоциированная с $\boldsymbol{C}^{[\gamma]}_{YY}(t_1,t_2)$, не зависит от γ, записана как $\mathbb{R}^{[C]}(t,t')$ и вычисляется из уравнения (2.3.64) и соотношения (2.3.66) при

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\star}(t) = \underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(t), \qquad \boldsymbol{\mathcal{B}}^{\star}(t,\tau) = \underline{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(t,\tau).$$

Применяя выражение (2.3.68) для всех значений $\gamma = 1,2,...,n+m$, можно установить, что матрица $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{YY}(t,t')$ определяется так:

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{YY}(t,t') = \mathbb{R}^{[C]}(t,t')\,\boldsymbol{\mathcal{C}}_{YY}(t',t'), \qquad t_0 \leqslant t' < t \leqslant T. \tag{2.3.69}$$

Теперь обратимся к уравнению (2.3.59) для матрицы ковариационных функций $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{YY}(t',t)$ $(t' < t)$. Принимая во внимание замечание о возможности транспонирования обеих частей векторно-матричного уравнения (2.3.69) и перемены местами t' и t, получим:

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{YY}(t',t) = \boldsymbol{\mathcal{C}}_{YY}(t',t')\,\mathbb{R}^{[C]\mathrm{T}}(t,t'), \qquad t_0 \leqslant t' < t \leqslant T. \tag{2.3.70}$$

Более сложной задачей является вычисление матрицы ковариационных функций $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{YY}(t,t)$, удовлетворяющей уравнению (2.3.60) для $t_0 < t \leqslant T$. Причина этого – присутствие $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{YY}(\tau,t)$ и $\boldsymbol{\mathcal{C}}^{\intercal}_{YY}(\tau,t)$ для $t' < \tau < t$ в подынтегральной функции интеграла в правой части этого уравнения. Поэтому здесь требуется схема, основанная на использовании $\mathbb{R}^{[C]}(\cdot,\cdot)$ для представления векторного случайного процесса $\boldsymbol{Z}(t)$ – решения уравнения (2.3.57) в виде:

$$\boldsymbol{Z}(t) = \mathbb{R}^{[C]}(t,t')\,\boldsymbol{Z}(t') + \int\limits_{t'}^{t} \mathbb{R}^{[C]}(t,\tau)\,\underline{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}\,d\boldsymbol{W}(\tau), \qquad t' < t.$$

Это соотношение позволяет представить матричную функцию ковариаций $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{YY}(t,t)$ для всех $t_0 \leqslant t' < t \leqslant T$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mathcal{C}}_{YY}(t,t) &= \mathbb{R}^{[C]}(t,t')\,\boldsymbol{\mathcal{C}}_{YY}(t',t')\,\mathbb{R}^{[C]\intercal}(t,t') + \\
&+ \int\limits_{t'}^{t}\int\limits_{t'}^{t} \left\{\mathbb{R}^{[C]}(t,\tau_1)\,\underline{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}\right\} \cdot 2\,\pi\,\boldsymbol{\mathcal{I}}\,\delta(\tau_1-\tau_2) \cdot \left\{\mathbb{R}^{[C]}(t,\tau_2)\,\underline{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}\right\}^{\intercal} d\tau_1\,d\tau_2 = \\
&= \mathbb{R}^{[C]}(t,t')\,\boldsymbol{\mathcal{C}}_{YY}(t',t')\,\mathbb{R}^{[C]\intercal}(t,t') + \\
&+ 2\,\pi \int\limits_{t'}^{t} \mathbb{R}^{[C]}(t,\tau)\,\underline{\boldsymbol{\mathcal{Q}}} \cdot \left\{\mathbb{R}^{[C]}(t,\tau)\,\underline{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}\right\}^{\intercal} d\tau. \qquad (2.3.71)
\end{aligned}$$

Введем временну́ю сетку

$$t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_{k-1} < \tau_k < \ldots < \tau_N = T,$$
$$h_k = \tau_k - \tau_{k-1}, \qquad k = 1,2,...,N, \qquad \max_k h_k = h_* \ll 1.$$

Далее, полученные выше соотношения (2.3.67), (2.3.69), (2.3.70), (2.3.71) для первых и вторых моментных функций в непрерывном времени адаптируются для расчета этих же функций в узлах сетки: $\boldsymbol{m}_{Xk} = \boldsymbol{m}_X(\tau_k)$, $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{YYk\nu} = \boldsymbol{\mathcal{C}}_{YY}(\tau_k,\tau_\nu)$, $k,\ \nu = 1,2,...,N$.

Численная аппроксимация векторной функции $\boldsymbol{m}_X(t)$, определяемой равенством (2.3.67), для $t' = \tau_{k-1}$, $t = \tau_k$ может быть записана так:

$$\widehat{\boldsymbol{m}}_{Xk} = \widehat{\mathbb{R}}^{[m]}_{[L]}(\tau_k,\tau_{k-1})\,\widehat{\boldsymbol{m}}_{X,k-1} + \int\limits_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \widehat{\mathbb{R}}^{[m]}_{[L]}(\tau_k,\theta)\,\boldsymbol{c}(\theta)\,d\theta,$$

$$k = 1, 2, ..., N, \quad \widehat{\boldsymbol{m}}_{X0} = \boldsymbol{m}_X^0, \quad (2.3.72)$$

где

$$\widehat{\mathbb{R}}_{[L]}^{[m]}(\tau_k, s) = \boldsymbol{\mathcal{I}} + \sum_{\ell=1}^{L} \frac{1}{\ell!} \frac{\partial^\ell \mathbb{R}^{[m]}(t,s)}{\partial t \ell}\bigg|_{t=s} (\tau_k - s)^\ell, \quad \tau_{k-1} \leqslant s < \tau_k,$$

а для $s = \tau_{k-1}$

$$\widehat{\mathbb{R}}_{[L]}^{[m]}(\tau_k, \tau_{k-1}) = \boldsymbol{\mathcal{I}} + \sum_{\ell=1}^{L} \frac{1}{\ell!} \frac{\partial^\ell \mathbb{R}^{[m]}(t,\tau_{k-1})}{\partial t^\ell}\bigg|_{t=\tau_{k-1}} h_k^\ell.$$

Интеграл в (2.3.72) может быть вычислен, например, с помощью правила Симпсона [115] (K – число интервалов разбиения шага h_k).

Подобным образом матрица функций ковариаций, которая для $t_0 \leqslant t' < t \leqslant T$ определяется соотношениями (2.3.69), (2.3.70), для $k = 0, 1, 2, ..., N-1$ и $\nu = k+1, k+2, ..., N$ может быть приближенно рассчитана по формулам:

$$\widehat{\boldsymbol{\mathcal{C}}}_{YY\nu k} = \widehat{\mathbb{R}}^{[C]}(\tau_\nu, \tau_{\nu-1})\, \widehat{\boldsymbol{\mathcal{C}}}_{YY,\nu-1,k}, \quad \widehat{\boldsymbol{\mathcal{C}}}_{YYk\nu} = \widehat{\boldsymbol{\mathcal{C}}}_{YYk,\nu-1}\, \mathbb{R}^{[C]\intercal}(\tau_\nu, \tau_{\nu-1}),$$

в которых

$$\widehat{\mathbb{R}}_{[L]}^{[C]}(\tau_\nu, \tau_{\nu-1}) = \boldsymbol{\mathcal{I}} + \sum_{\ell=1}^{L} \frac{1}{\ell!} \frac{\partial^\ell \mathbb{R}^{[C]}(t,\tau_{\nu-1})}{\partial t^\ell}\bigg|_{t=\tau_{\nu-1}} h_k^\ell. \quad (2.3.73)$$

Наконец, для $t_0 \leqslant t' < t \leqslant T$ матрица функций ковариаций $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{YY}(t,t)$, которая находится из соотношения (2.3.71), для $k = 1, 2, ..., N$ приближенно вычисляется по формуле

$$\widehat{\boldsymbol{\mathcal{C}}}_{YYkk} = \widehat{\mathbb{R}}_{[L]}^{[C]}(\tau_k, \tau_{k-1})\, \widehat{\boldsymbol{\mathcal{C}}}_{YY,k-1,k-1}\, \widehat{\mathbb{R}}_{[L]}^{[C]\intercal}(\tau_k, \tau_{k-1}) + \\ + 2\,\pi \int\limits_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \left\{ \mathbb{R}_L^{[C]}(\tau_k, \tau)\, \underline{\boldsymbol{\mathcal{Q}}} \right\} \cdot \left\{ \mathbb{R}_L^{[C]}(\tau_k, \tau)\, \underline{\boldsymbol{\mathcal{Q}}} \right\}^\intercal d\tau$$

с учетом начального условия $\widehat{\boldsymbol{\mathcal{C}}}_{YY00} = \boldsymbol{\mathcal{C}}_{YY}^0$, причем

$$\widehat{\mathbb{R}}_{[L]}^{[C]}(\tau_k, s) = \boldsymbol{\mathcal{I}} + \sum_{\ell=1}^{L} \frac{1}{\ell!} \frac{\partial^\ell \mathbb{R}^{[C]}(t,s)}{\partial t^\ell}\bigg|_{t=\tau} (\tau_k - s)^\ell, \qquad \tau_{k-1} \leqslant s < \tau_k,$$

а матрица $\widehat{\mathbb{R}}^{[C]}_{[L]}(\tau_k, \tau_{k-1})$ должна быть определена из (2.3.73) после замены индекса ν на k.

Пример 2.3.6. Рассмотрим модель, которая является упрощенным вариантом системы, исследованной в работе [906], и описывается следующей системой СОИДУ:

$$\ddot{\mathcal{X}}_1(t) + 2\,\alpha_1\left[\dot{\mathcal{X}}_1(t) - \dot{\mathcal{X}}_2(t)\right] + \omega_1^2\left[\mathcal{X}_1(t) - \mathcal{X}_2(t)\right] + \\ + b_0(t,\tau)\,\mathcal{X}_1(t) + \int\limits_0^t b(t,\tau)\,\mathcal{X}_1(\tau)\,d\tau = g_0(t)\,U(t), \qquad (2.3.74)$$

$$\ddot{\mathcal{X}}_2(t) + 2\,\alpha_2\left[\dot{\mathcal{X}}_2(t) - \dot{\mathcal{X}}_1(t)\right] + \omega_2^2\left[\mathcal{X}_2(t) - \mathcal{X}_1(t)\right] = g_0(t)\,U(t).$$

где $t \in [0,T]$, $\alpha_i > 0$, $\omega_i > 0$ – постоянные ($i = 1, 2$), $g_0(t)$ – действительная функция, определенная на $[0,T]$, $\{U(t),\ t \in [0,\ T]\}$ – стационарный центрированный гауссов случайный процесс второго порядка, непрерывный в среднем квадратическом, $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, являющийся решением СОДУ

$$dU(t) = -c_U\,U(t)\,dt + d_U\,dW(t) \qquad (2.3.75)$$

со случайными начальным условием $U(0) = U^0$, причем случайная величина U^0 имеет распределение, соответствующее равновесному для $U(t)$, т.е. гауссову плотность вероятности с нулевым математическим ожиданием и средним квадратичным отклонением $\bar{\sigma}_U$:

$$\bar{\sigma}_U^2 = \int\limits_{\mathbb{R}} S_{UU}(\omega)\,d\omega, \qquad S_{UU}(\omega) = \frac{d_U^2}{c_U^2 + \omega^2}, \qquad c_U > 0, \quad d_U > 0$$

($S_{UU}(\omega)$ – спектральная плотность). Далее, структура функций $b_0(t,\tau)$ и $b(t,\tau)$ была выбрана в следующей форме:

$$b_0(t,\tau) = \gamma_0\left[1 - \mu_1\,e^{-\beta_1\,(t-\tau)^2}\,(h_0 + h_1\,t + h_2\,t^2) - \mu_2\,e^{-\beta_2\,(t-\tau)^2}\right],$$

$$b(t,\tau) = \frac{\partial b_0(t,\tau)}{\partial \tau},$$

где γ_0, $\mu_i > 0$, $\beta_i > 0$, h_0, h_1, h_2 – постоянные ($i = 1, 2$).

Сравнивая уравнения модели с системой (2.3.51), (2.3.52) и вводя обозначения $X_1(t) = \mathcal{X}_1(t)$, $X_2(t) = \mathcal{X}_2(t)$, $X_3(t) = \dot{\mathcal{X}}_1(t)$, $X_4(t) = \dot{\mathcal{X}}_2(t)$, находим, что $n = 4$, $m = 1$, $\boldsymbol{c}(t) = \boldsymbol{O}_4$, $\boldsymbol{\mathcal{H}} = \{-c_U\}$, $\boldsymbol{\mathcal{Q}} = \{d_U\}$,

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\omega_1^2 - b_0(t,t) & \omega_1^2 & -2\,\alpha_1 & 2\,\alpha_1 \\ \omega_2^2 & -\omega_2^2 & 2\,\alpha_2 & -2\,\alpha_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B}(t,\tau] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b(t,\tau) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{G}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g_0(t) \\ g_0(t) \end{bmatrix},$$

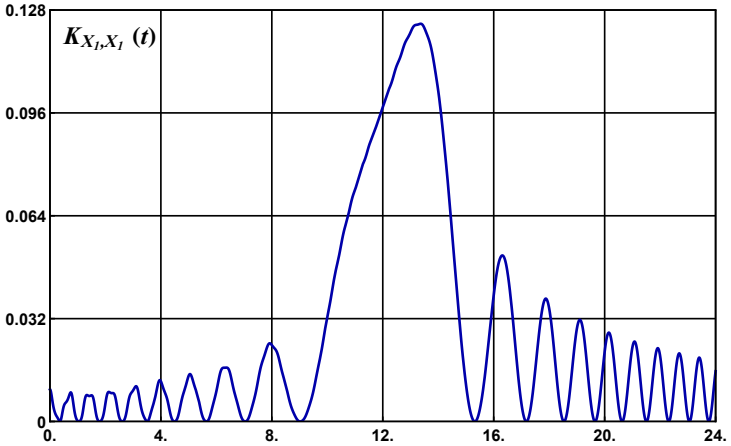


Рис. 2.3.14

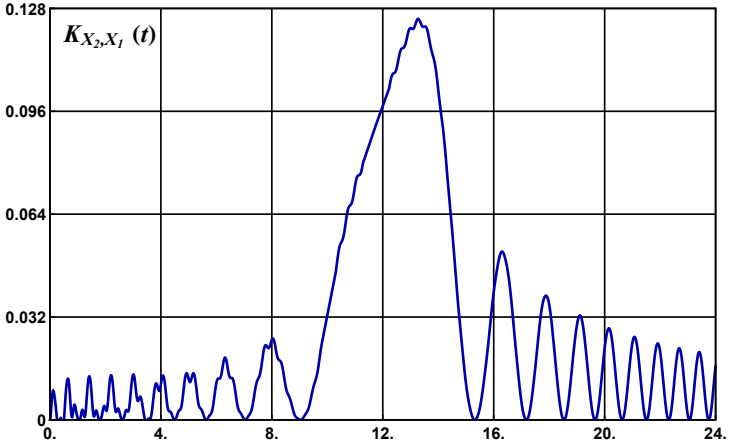


Рис. 2.3.15

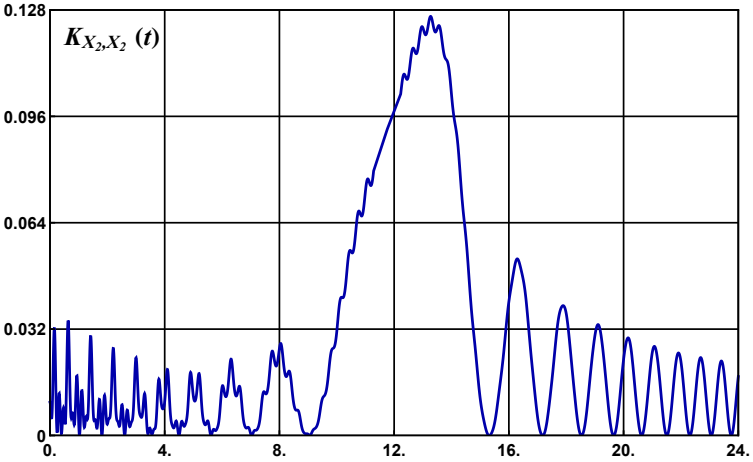


Рис. 2.3.16

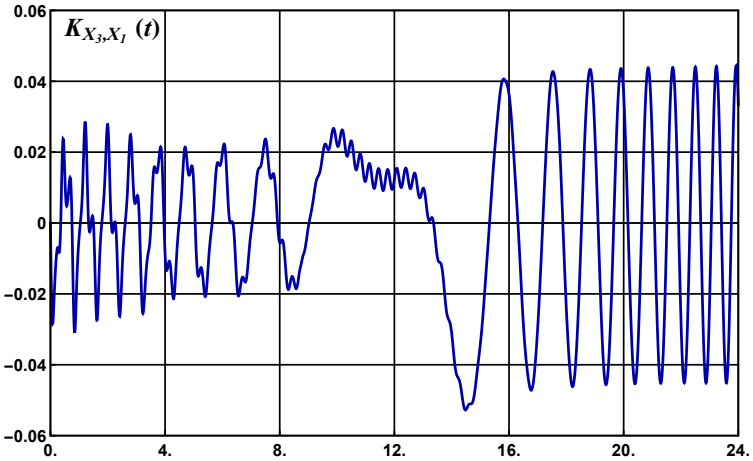


Рис. 2.3.17

В расчетах использовались следующие значения параметров:

$$\boldsymbol{m}_{X^0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X^0X^0} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

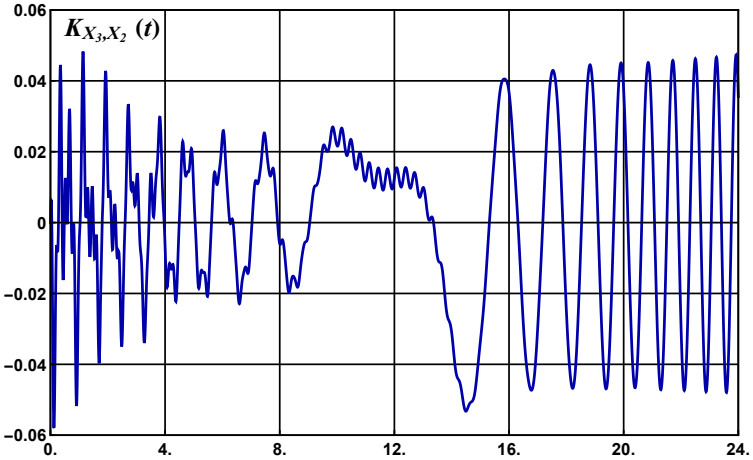


Рис. 2.3.18

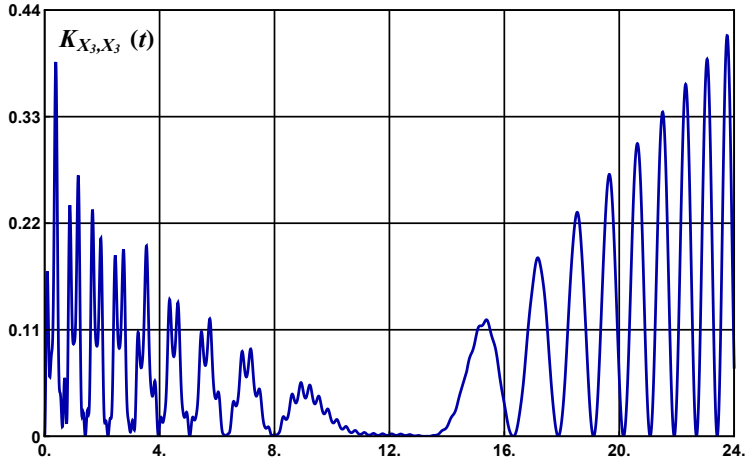


Рис. 2.3.19

$$\omega_1 = 2\,\pi, \qquad \omega_2 = 6\,\pi, \qquad \alpha_1 = \xi\,\omega_1, \qquad \alpha_2 = \xi\,\omega_2, \qquad \xi = 0.01,$$
$$c_U = d_U = 0.5/\pi, \qquad h_0 = 1.0, \qquad h_1 = 1/6, \qquad h_2 = -1/144,$$
$$\gamma_0 = 100.0, \qquad \mu_1 = 0.25, \qquad \beta_1 = 2.0, \qquad \mu_2 = 0.5, \qquad \beta_2 = 4.0,$$

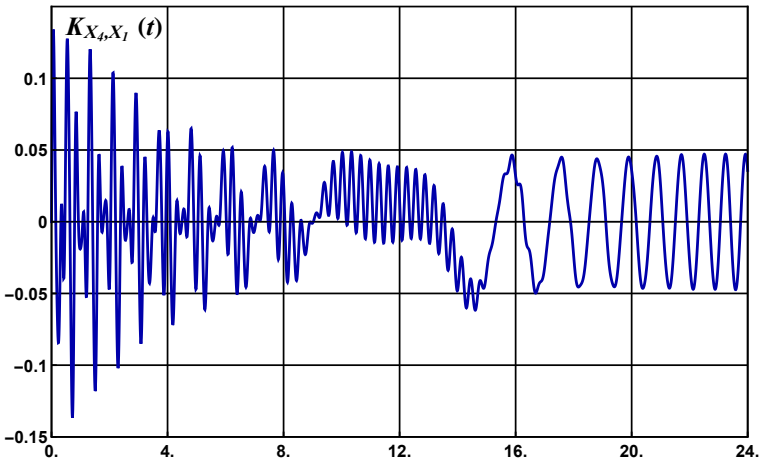


Рис. 2.3.20

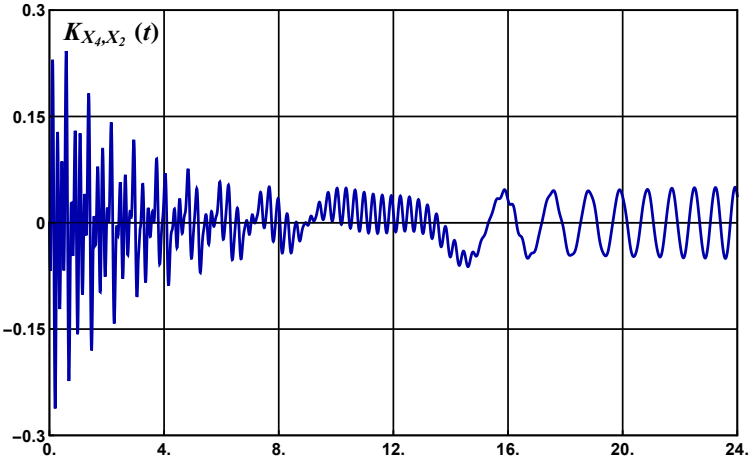


Рис. 2.3.21

$$g_0(t) = -\frac{27}{27+t^3}, \quad T = 24.0, \quad h_k = h_* = 0.001, \quad L = 4, \qquad K = 8.$$

Несложно установить, что при выбранных значениях параметров вектор функций математического ожидания $\boldsymbol{m}_X(t)$ будет нулевым для любо-

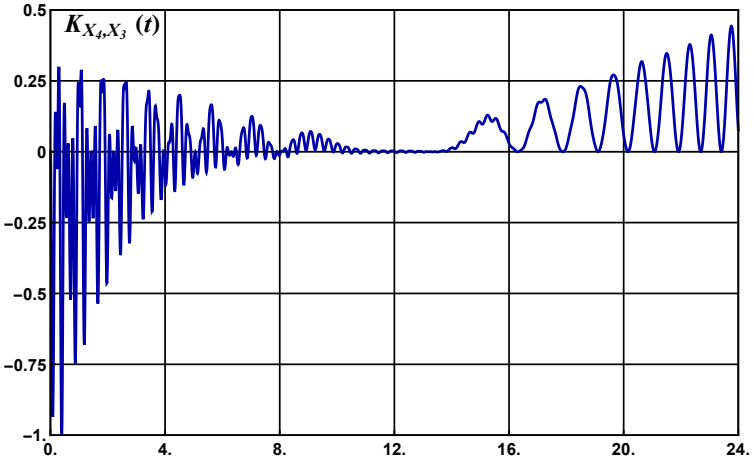


Рис. 2.3.22

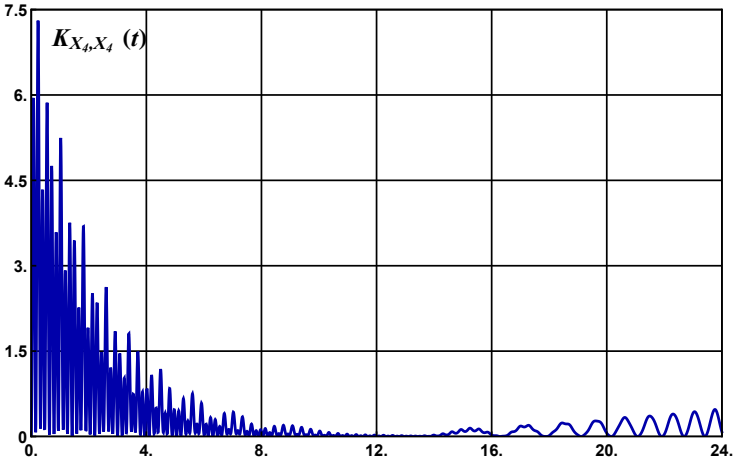


Рис. 2.3.23

го $t > 0$, т.е. не требует расчета. Кроме того, на этапе подготовки вычислений было решено ограничиться получением компонент матрицы ковариаций $\mathcal{K}_{XX}(t) = \mathcal{C}_{XX}(t,t)$, как более информативных и более сложных для определения.

Рассмотренная выше расчетная схема была реализована в виде кон-

сольной программы на языке Intel Fortran [7]. Необходимые аналитические выкладки и построение графиков проводились в среде пакета Mathematica.

Переходные режимы, демонстрируюшие хаотические колебания в исследуемой системе, показаны на рис. 2.3.14–2.3.23, причем на рис. 2.3.14, 2.3.16, 2.3.19, 2.3.23 приведены кривые, соответствующие дисперсиям выбранных компонент вектора состояния, а на остальных – функции ковариации.

Для проверки адекватности полученного решения задачи вычисления производились с уменьшенными десятикратно шагами сетки, но результаты расчетов, полученные для различных величин шагов, отличались несущественно. ▶

Заметим, что структура построенных расчетных формул позволяет использовать переменный шаг h_k с целью поддержания необходимой точности оценивания $\boldsymbol{m}_X(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$, и $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(t,t')]$, $t_0 \leqslant t' \leqslant t \leqslant T$, а также, при необходимости, применить параллельные вычисления для получения сеточных значений МКФ.

2.3.7. Анализ линейных интегро-дифференциальных систем с неограниченными запаздываниями

Рассмотрим следующую общую форму линейных систем СОИДУ:

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\mathcal{B}}(t,\theta)\,\boldsymbol{X}(\theta)\,d\theta + \\ + \ \boldsymbol{c}(t) + \boldsymbol{\mathcal{G}}(t)\,\boldsymbol{U}(t), \quad \boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}_0. \quad (2.3.76)$$

В этих уравнениях t – время, $t \in \mathbb{T} = [t_0, T]$, $T < +\infty$; $\boldsymbol{X}(t) = \operatorname{col}\big(X_1(t), X_2(t), ..., X_n(t)\big)$ и $\boldsymbol{U}(t) = \operatorname{col}\big(U_1(t), U_2(t), ..., U_m(t)\big)$ – случайные векторные процессы, определяющие состояние системы (вектор состояния) и случайные возмущения; $\boldsymbol{c}(t) = \operatorname{col}\big(c_1(t), c_2(t), ..., c_n(t)\big)$, $\boldsymbol{\mathcal{A}}(t) = \{a_{ij}(t),\ i,j = 1,2,...,n\}$, $\boldsymbol{\mathcal{B}}(t,\theta) = \{b_{ij}(t,\theta),\ i,j = 1,2,...,n\}$ ($b_{ij}(t,\theta) \geqslant 0$ для всех θ, $t \in \mathbb{T}$), $\boldsymbol{\mathcal{G}}(t) = \{g_{ij}(t),\ i = 1,2,...,n, j = 1,2,...,m\}$ – неслучайные вектор и матрицы, компоненты которых дифференцируемы необходимое число раз по каждому из своих аргументов; $\boldsymbol{X}^0$ – случайный вектор с известными характеристиками, причем вектор $\boldsymbol{U}(t)$ статистически независим от $\boldsymbol{X}^0$; точкой или точками сверху символа обозначаются производные по переменной t соответствующего порядка.

Известно, что существует ряд приближенных схем для упрощения интегральных ядер, такие как использование рядов Прони и алгоритм

аппроксимации полиномами Лагерра для представления функций релаксации [885], метод приближения переходных функций экспонентами [25], приближенный вывод уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова для СОИДУ [118], расширения фазового пространства для случая ограниченности носителя ядра [213] и т.д. Основная цель таких упрощений – получить вырожденные в том или ином смысле ядра, что позволяет на основе расширения пространства состояния привести исходные СОИДУ к системе стохастических обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ). Методика, представленная ниже [229], предназначена для анализа линейных динамических систем, описываемых стохастическими обыкновенными интегро-дифференциальными уравнениями, созвучна идеям алгоритмов данного направления, близка к схемам, изложенным в работах [194, 201], и базируется на локальной аппроксимации ядер СОИДУ, что позволяет построить цепочку замкнутых обыкновенных дифференциальных уравнений для вычисления первых моментных функций вектора состояния системы.

Пусть $\boldsymbol{X}^0$ – гауссов случайный вектор со значениями в $\mathbb{R}^n$,

$$\boldsymbol{m}_X^0 = \mathbb{E}\big[\boldsymbol{X}^0\big], \qquad \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 = \mathbb{E}\big[\{\boldsymbol{X}^0 - \boldsymbol{m}_X^0\}\{\boldsymbol{X}^0 - \boldsymbol{m}_X^0\}^{\intercal}\big];$$

$\boldsymbol{U}(t)$ – случайный процесс, удовлетворяющий векторному линейному СОДУ Ито

$$d\boldsymbol{U}(t) = \boldsymbol{\mathcal{H}}\,\boldsymbol{U}(t)\,dt + \boldsymbol{\mathcal{Q}}\,d\boldsymbol{W}(t), \qquad t \in (t_0, T] \tag{2.3.77}$$

со случайным начальным условием

$$\boldsymbol{U}(t_0) = \boldsymbol{U}^0. \tag{2.3.78}$$

В уравнении (2.3.77) $\boldsymbol{\mathcal{H}} = \{h_{ij},\ i,j = 1,2,...,m\}$ и $\boldsymbol{\mathcal{Q}} = \{q_{ij}\ i = 1,2,...,m,\ j = 1,2,...,r\}$ – заданные постоянные матрицы; $\boldsymbol{W}(t) = \operatorname{col}\big(W_1(t), W_2(t),\ ...,\ W_r(t)\big)$ – векторный винеровский случайный процесс с независимыми компонентами, такой, что его обобщенная производная по времени t, обозначаемая через $\boldsymbol{V}(t) = \operatorname{col}\big(V_1(t), V_2(t), ..., V_r(t)\big)$, есть векторный гауссовский белый шум с независимыми компонентами, причем

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{V}(t)] = 0, \qquad \mathbb{E}[\boldsymbol{V}(t)\,\boldsymbol{V}^{\intercal}(t')] = 2\,\pi\,\boldsymbol{\mathcal{I}}_r\,\delta(t - t');$$

$\boldsymbol{U}^0$ – начальный вектор, представляющий собой центрированную гауссову случайную величину со значениями в $\mathbb{R}^m$. Предполагается, что плотность вероятности вектора $\boldsymbol{U}^0$ – гауссово стационарное распределение, ассоциированное с уравнением (2.3.77). Параметрами этого распределения являются среднее $\boldsymbol{m}_U^0 = \mathbb{E}\big[\boldsymbol{U}^0\big] = 0$ и матрица ковариаций $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{UU}^0 =$

$= \mathbb{E}\left[\boldsymbol{U}^0\,(\boldsymbol{U}^0)^{\intercal}\right]$. Кроме того, в уравнении (2.3.77) матрицы $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ и $\boldsymbol{\mathcal{Q}}$ таковы, что $\boldsymbol{U}$ – случайный процесс второго порядка. Следовательно, $\{\boldsymbol{U}(t), t \in [t_0, T]\}$ – стационарный центрированный непрерывный в среднем квадратическом гауссовский случайный процесс, для которого

$$\boldsymbol{m}_U(t) = \mathbb{E}[\boldsymbol{U}(t)] = \boldsymbol{m}_U^0 = 0,$$

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{UU}(t_1, t_2) = \mathbb{E}[\boldsymbol{U}(t_1)\,\boldsymbol{U}^{\intercal}(t_2)] = \boldsymbol{\mathcal{C}}_{UU}(t_1 - t_2),\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{UU}(t) = \boldsymbol{\mathcal{C}}_{UU}(0) = \boldsymbol{\mathcal{K}}_{UU}^0.$$

Учитывая, что $\boldsymbol{X}^0$ и $\boldsymbol{V}(t)$ – гауссовские случайные вектор и процесс соответственно, линейность уравнений (2.3.76) и (2.3.77), а также высказанные выше предположения, можно установить, что $\{\boldsymbol{X}(t), t \in [t_0, T]\}$ – непрерывный в среднем квадратическом гауссовский случайный процесс второго порядка. При этом для всех непустых и неупорядоченных точечных подмножеств отрезка $[t_0, T]$ многомерные распределения расширенных случайных векторов состояния будут гауссовыми, определяемыми соответствующими векторами средних и матрицами ковариационных функций.

Определим теперь векторную функцию математического ожидания, матрицы ковариационных функций и дисперсий векторного случайного процесса $\boldsymbol{X}(t)$, а также все взаимные ковариационные функции $\boldsymbol{X}(t)$ с вектором возмущения $\boldsymbol{U}(t)$:

$$\boldsymbol{m}_X(t) = \mathbb{E}[\boldsymbol{X}(t)]\,,$$

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(t_1, t_2) = \mathbb{E}\left[\boldsymbol{X}(t_1)\,\boldsymbol{X}^{\top}(t_2)\right] - \boldsymbol{m}_X(t_1)\,\boldsymbol{m}_X^{\intercal}(t_2),\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}(t) = \boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(t, t),$$

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XU}(t_1, t_2) = \mathbb{E}[\boldsymbol{X}(t_1)\,\boldsymbol{U}^{\intercal}(t_2)]\,, \qquad \boldsymbol{\mathcal{C}}_{UX}(t_1, t_2) = \mathbb{E}[\boldsymbol{U}(t_1)\,\boldsymbol{X}^{\intercal}(t_2)]\,.$$

Если принять во внимание введенные определения и обозначения, то несложно увидеть, что решение поставленной задачи заключается в создании схемы для вычисления векторной функции математического ожидания $\boldsymbol{m}_X(t)$ и матрицы ковариационных функций $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(t_1, t_2)$ для любых $t, t_1, t_2 \in (t_0, T]$.

Для получения требуемых уравнений необходимо расширить вектор состояния системы (2.3.76) до нового случайного вектора $\boldsymbol{Y}(t) = \mathrm{col}(\boldsymbol{X}(t), \boldsymbol{U}(t))$ со значениями в $\mathbb{R}^{n+m}$. Тогда вектор-функция математического ожидания $\boldsymbol{m}_Y(t)$ со значениями в $\mathbb{R}^{n+m}$ и матрица ковариационных функций $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{YY}(t_1, t_2)$ случайного процесса $\boldsymbol{Y}(t)$ определятся соотношениями:

$$\boldsymbol{m}_Y(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_X(t) \\ \boldsymbol{O}_m \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{C}}_{YY}(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(t_1, t_2) & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{XU}(t_1, t_2) \\ \boldsymbol{\mathcal{C}}_{UX}(t_1, t_2) & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{UU}(t_1, t_2) \end{bmatrix}. \qquad (2.3.79)$$

Введенный случайный процесс $\boldsymbol{Y}(t)$ будет удовлетворять системе СО-ИДУ:

$$d\boldsymbol{Y}(t) = \Big[\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\star}(t)\,\boldsymbol{Y}(t) + \int_{t'}^{t} \boldsymbol{\mathcal{B}}^{\star}(t,\theta)\,\boldsymbol{Y}(\theta)\,d\theta + \boldsymbol{c}^{\star}(t)\Big]\,dt + \\ + \boldsymbol{\mathcal{Q}}^{\star}\,d\boldsymbol{W}(t), \quad t_0 \leqslant t' < t \leqslant T, \tag{2.3.80}$$

со случайным начальным условием

$$\boldsymbol{Y}(t') = \boldsymbol{Y}', \quad \boldsymbol{Y}' = \mathrm{col}(\boldsymbol{X}^0, \boldsymbol{U}^0) \quad \text{для} \quad t' = t_0. \tag{2.3.81}$$

В уравнении (2.3.80) матрицы $\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\star}(t)$, $\boldsymbol{\mathcal{B}}^{\star}(t)$, $\boldsymbol{\mathcal{G}}^{\star}(t)$, $\boldsymbol{\mathcal{Q}}^{\star}$ и вектор $\boldsymbol{c}^{\star}(t)$ имеют блочную структуру и определяются так:

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\star}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{A}}(t) & \boldsymbol{\mathcal{G}}(t) \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{m\times n} & \boldsymbol{\mathcal{H}} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{B}}^{\star}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{B}}(t) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{m\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{m\times m} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c}^{\star}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}(t) \\ \boldsymbol{O}_m \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}^{\star}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{G}}(t) \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{m\times m} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\mathcal{Q}}^{\star} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times r} \\ \boldsymbol{\mathcal{Q}} \end{bmatrix}.$$

Введем временную сетку

$$t_0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{k-1} < t_k < \ldots < t_N = T,$$
$$h_k = t_k - t_{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots, N, \qquad \max_k h_k = h_* \ll 1,$$

так, чтобы матричное ядро $\boldsymbol{\mathcal{B}}^{\star}(t,\theta)$ на отрезке $\Delta_k = [t_{k-1}, t_k]$, $k \geqslant 1$ с достаточной точностью можно было заменить на

$$\widehat{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_k(t,\theta) = \sum_{\ell=0}^{L} \widehat{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_{k\ell}(t)\,(\theta - t_{k-1/2})^{\ell},$$

где

$$\widehat{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_{k\ell}(t) = \frac{1}{\ell!}\,\frac{\partial^{\ell}\boldsymbol{\mathcal{B}}^{\star}(t,\theta)}{\partial\theta^{\ell}}\bigg|_{\theta=t_{k-1/2}}, \qquad t_{k-1/2} = \frac{t_{k-1}+t_k}{2}.$$

Тогда для отрезка Δ_k аппроксимацию системы (2.3.80) с начальным условием (2.3.81) можно записать так:

$$d\boldsymbol{Y}_k(t) = \Big[\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\star}(t)\,\boldsymbol{Y}_k(t) + \int_{t_{k-1}}^{t} \widehat{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_k(t,\theta)\,\boldsymbol{Y}_k(\theta)\,d\theta + \boldsymbol{c}^{\star}(t)\Big]\,dt +$$

$$+ \boldsymbol{\mathcal{Q}}^{\star}\, d\boldsymbol{W}(t), \qquad t_{k-1} < t \leqslant t_k, \tag{2.3.82}$$

$$\boldsymbol{Y}_k(t_{k-1}) = \boldsymbol{Y}_{k-1}(t_{k-1}). \tag{2.3.83}$$

Введем дополнительные неизвестные случайные векторные функции $\{\boldsymbol{Z}_{k\ell}(t),\ \ell = \overline{0, L},\ t \in \Delta_k\}$ с помощью соотношения

$$\boldsymbol{R}_{k\ell}(t) = \int_{t_{k-1}}^{t} (\tau - t_{k-1/2})^{\ell}\, \boldsymbol{X}_k(\theta)\, d\theta.$$

Тогда система стохастических ОДУ для векторного случайного процесса $\boldsymbol{Z}_k(t) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{Y}_k(t),\ \boldsymbol{R}_{k\ell}(t),\ \ell = \overline{0, L},\ t \in \Delta_k\big)$ будет иметь вид:

$$d\boldsymbol{Z}_k(t) = \big[\underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_k(t)\, \boldsymbol{Z}_k(t) + \underline{\boldsymbol{c}}_k(t)\big]\, dt + \underline{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}_k\, d\boldsymbol{W}(t), \tag{2.3.84}$$

$$\boldsymbol{Z}_k(t_{k-1}) = \boldsymbol{Z}_{k-1}(t_{k-1}), \tag{2.3.85}$$

где

$$\underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_k(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{A}}(t) & \boldsymbol{\mathcal{G}}(t) & \widehat{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_{k0}(t) & \ldots & \widehat{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_{kL}(t) \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{m\times n} & \boldsymbol{\mathcal{H}} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{m\times n} & \ldots & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{m\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{I}}_n & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \ldots & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \\ (t - t_{k-1/2})\, \boldsymbol{\mathcal{I}}_n & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \ldots & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (t - t_{k-1/2})^{L}\, \boldsymbol{\mathcal{I}}_n & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \ldots & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \end{bmatrix},$$

$$\underline{\boldsymbol{c}}_k(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}^{\star}(t) \\ \boldsymbol{O}_{n(L+1)} \end{bmatrix}, \qquad \underline{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}_k = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{Q}}^{\star} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n(L+1)\times r} \end{bmatrix}.$$

Используя уравнения (2.3.84), (2.3.85) и соотношения из [15, §1.3], можно получить системы ОДУ для вектора функций математического ожидания

$$\dot{\boldsymbol{m}}_{Z_k}(t) = \underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_k(t)\, \boldsymbol{m}_{Z_k}(t) + \underline{\boldsymbol{c}}_k(t), \tag{2.3.86}$$

матрицы ковариационных функций

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{C}}_{Z_k Z_k}(t, s)}{\partial t} = \underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_k(t)\, \boldsymbol{\mathcal{C}}_{Z_k Z_k}(t, s), \qquad t_{k-1} \leqslant s < t \leqslant t_k, \tag{2.3.87}$$

матрицы функций ковариации

$$\dot{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_{Z_k Z_k}(t) = \underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_k(t)\, \boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_k Z_k}(t) + \big[\underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_k(t)\, \boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_k Z_k}(t)\big]^{\mathsf{T}} + 2\,\pi\, \underline{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}_k\, \underline{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}_k^{\mathsf{T}} \tag{2.3.88}$$

расширенного вектора состояния на промежутке Δ_k. Начальными условиями для указанных векторных и матричных функций будут:

$$\boldsymbol{m}_{Z_k}(t_{k-1}) = \boldsymbol{m}_{Z_{k-1}}(t_{k-1}), \tag{2.3.89}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{Z_k Z_k}(s,s) = \boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_k Z_k}(s), \quad \boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_k Z_k}(t_{k-1}) = \boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_{k-1} Z_{k-1}}(t_{k-1}). \tag{2.3.90}$$

Итак, последовательно решая уравнения (2.3.86)–(2.3.88) с начальными условиями (2.3.89)–(2.3.90), мы получим характеристики случайного векторного процесса $\boldsymbol{Z}(t)$ на сегментах Δ_1, Δ_1, ..., Δ_N. По построению искомые характеристики процесса $\boldsymbol{X}(t)$ представляют собой первые блоки вектора $\boldsymbol{m}_Z(t)$ и матриц $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{ZZ}(t,s)$ и $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{ZZ}(t)$ размерностей n и $n \times n$ соответственно.

Пример 2.3.7. Исследуем переходный процесс, описываемый модельным уравнением

$$\ddot{\Upsilon}(t) + 2\,\alpha\,\dot{\Upsilon}(t) + \omega_0^2\,\Upsilon(t) + \beta \int_0^t e^{-\gamma(t-s)^2}\,\dot{\Upsilon}(s)\,ds = \mu\,U(t),$$

$$\Upsilon(0) = \Upsilon^0, \quad \dot{\Upsilon}(0) = \dot{\Upsilon}^0,$$

где $\alpha > 0$, $\omega > 0$, β, $\gamma > 0$, μ – постоянные величины.

Если обозначить $\Upsilon(t)$ через $X_1(t)$, а $\dot{\Upsilon}(t)$ – через $X_2(t)$ $(n = 2)$, то, приводя данное уравнение к виду (2.3.76), получим:

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\,\alpha \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{c}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{B}}(t,s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\beta e^{-\gamma(t-s)^2} & 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\mathcal{G}}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \mu \end{bmatrix}.$$

Будем считать, что процесс $U(t)$ удовлетворяет уравнению

$$dU(t) = -\nu\,U(t)\,dt + \sigma_0\,dW(t), \quad \nu > 0$$

$(m = r = 1)$, а следовательно, спектральная плотность и дисперсия процесса $U(t)$ будут соответственно равны

$$\mathcal{S}_{UU}(\omega) = \frac{\sigma_0^2}{\omega^2 + \nu^2}, \qquad \mathcal{K}_{UU}(s) = \pi\,\frac{\sigma_0^2}{\nu}\,e^{-\nu|s|}.$$

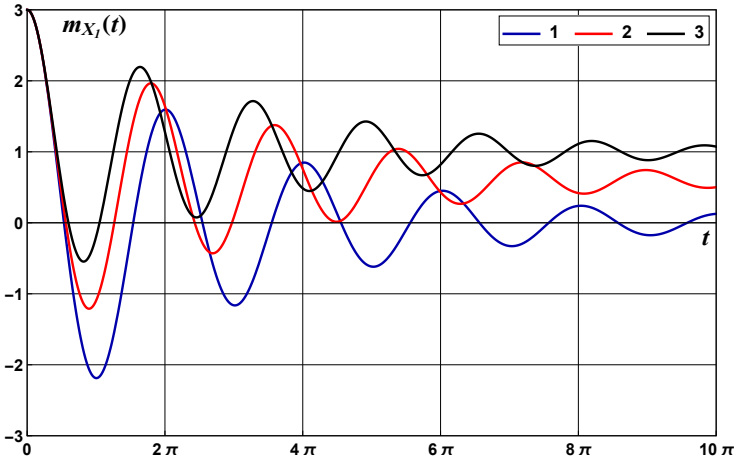


Рис. 2.3.24

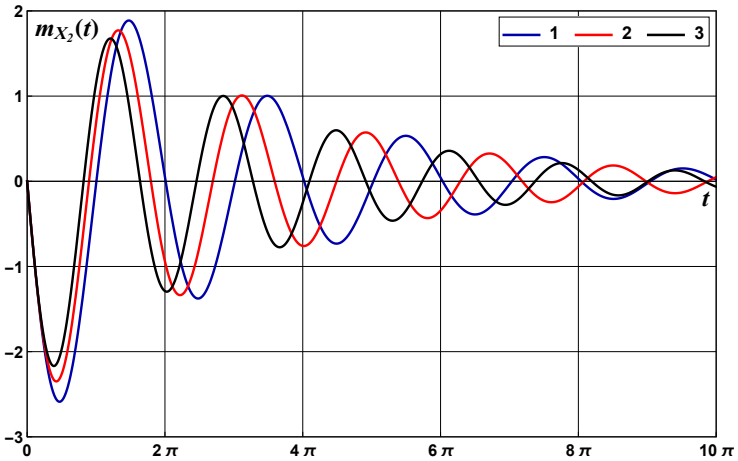


Рис. 2.3.25

Результаты расчетов функций математического ожидания и элементов матрицы ковариаций, проводившихся с помощью программы на входном языке пакета `Mathematica`, для следующих значений параметров:

$$\alpha = 0.1, \quad \beta = 0.2, \quad \omega_0 = 1.0, \quad \gamma = 0.125, \quad \mu = 1.0,$$

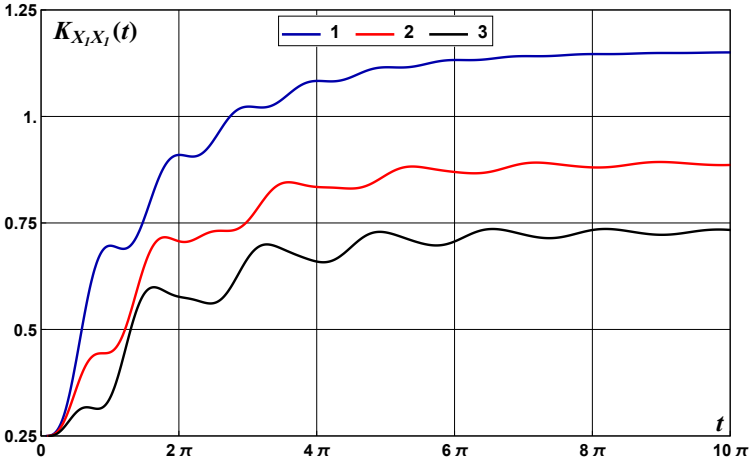


Рис. 2.3.26

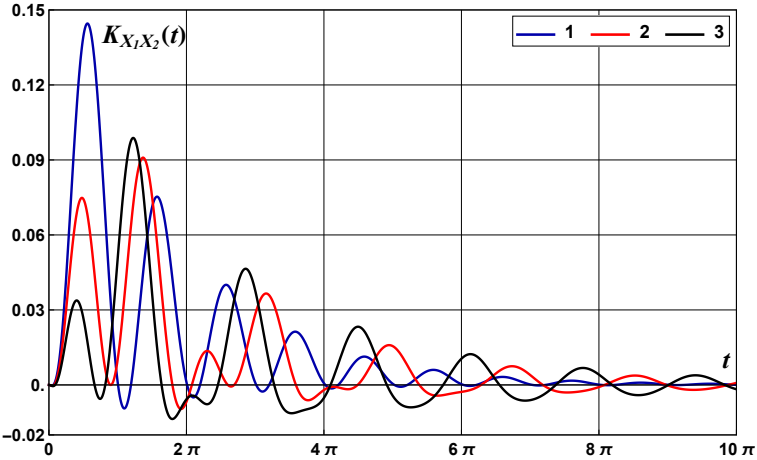


Рис. 2.3.27

$$\nu = 2.0, \quad \sigma_0 = 0.6, \quad L = 4, \quad T = 10.0\,\pi, \quad h_* = h_k = 0.005\,\pi,$$
$$\boldsymbol{m}_X(0) = \mathrm{col}(3.0, 0.0), \quad \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}(0) = \mathrm{diag}(0.25, 0.25)$$

отображены средние на рис. 2.3.24 ($m_{X_1}(t)$), 2.3.25 ($m_{X_2}(t)$); ковариации на рис. 2.3.26 ($\mathcal{K}_{X_1X_1}(t)$), 2.3.27 ($\mathcal{K}_{X_1X_2}(t)$), 2.3.28 ($\mathcal{K}_{X_2X_2}$) при $\beta = 0.0$,

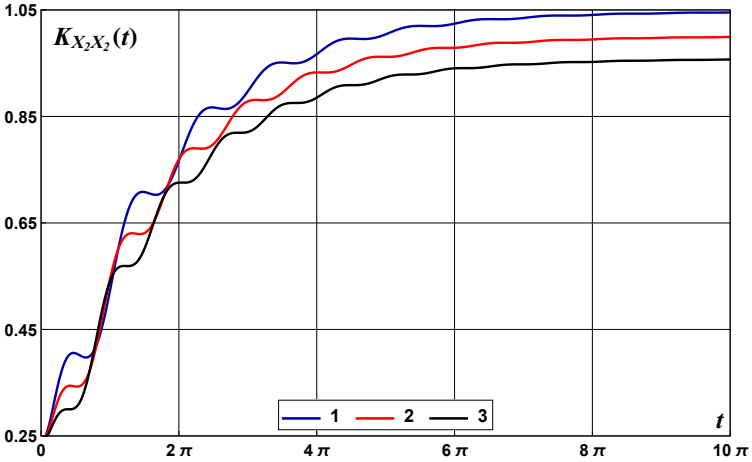


Рис. 2.3.28

0.25 и 0.5 линиями под номерами 1, 2 и 3 соответственно.

Анализ приведенных рисунков показывает, что интегральный член играет роль добавочного демпфирования, а его величина существенно влияет на величины частот колебаний и смещений равновесных значений функций математического ожидания и элементов матрицы ковариаций. ►

Рассмотренную выше процедуру можно отнести к схемам как расширения пространства состояний, так и анализа систем с изменяющейся структурой, причем если расширение такого пространства осуществляется единожды на этапе выбора точности аппроксимации $\sim O\big((0.5h_*)^L\big)$ матричного ядра системы, то изменение структуры (уравнений) происходит на каждом из сегментов Δ_k, $k = 1, 2, ..., N$, причем для решения ОДУ для математических ожиданий и элементов матрицы дисперсий на этих сегментах применимы стандартные численные интеграторы.

Используемое в данной работе тейлоровское разложение матричного ядра системы возможно только при наличии достаточного числа двусторонних производных у этого ядра внутри сегментов Δ_k и односторонних на его концах. В случае слабосингулярных ядер, которые нередко используются в моделях вязкоупругости, рассмотренный алгоритм непригоден. Для анализа уравнений с подобными ядрами необходимо обращение к специализированным схемам [30].

2.4. УРАВНЕНИЯ СО СМЕШАННЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

2.4.1. Анализ линейных стохастических систем с конечными распределенными и сосредоточенными запаздываниями

Рассмотрим систему линейных СОДУ Ито с конечными сосредоточенными и ограниченными распределенными запаздываниями следующего вида [213]:

$$d\boldsymbol{X}(t) = \Big[\boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{\mathcal{B}}(t)\,\boldsymbol{X}(t-\tau) + \boldsymbol{\mathcal{Q}}(t)\int_{t-\tau}^{t}\boldsymbol{X}(\theta)\,d\theta + \boldsymbol{c}(t)\Big]\,dt + \\ + \boldsymbol{\mathcal{H}}(t)\,d\boldsymbol{W}(t), \quad t > t_1 = t_0 + \tau, \tag{2.4.1}$$

где t – время ($t_0 < t \leqslant T < \infty$); $\tau > 0$; $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния; $\boldsymbol{W} \in \mathbb{R}^m$ – вектор независимых случайных стандартных винеровских процессов.

Будем считать, что на полуинтервале $(t_0, t_1]$ случайный вектор состояния $\boldsymbol{X}(t)$ удовлетворяет системе уравнений Ито без запаздывания:

$$d\boldsymbol{X}(t) = \big[\boldsymbol{\mathcal{A}}_0(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{c}_0(t)\big]\,dt + \boldsymbol{\mathcal{H}}_0(t)\,d\boldsymbol{W}(t), \quad \boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}^0, \tag{2.4.2}$$

причем в уравнениях (2.4.1) и (2.4.2) $\boldsymbol{\mathcal{A}}(t)$, $\boldsymbol{\mathcal{B}}(t)$, $\boldsymbol{\mathcal{Q}}(t)$, $\boldsymbol{\mathcal{H}}(t)$, $\boldsymbol{\mathcal{A}}_0(t)$, $\boldsymbol{\mathcal{H}}_0(t)$ и $\boldsymbol{c}(t)$, $\boldsymbol{c}_0(t)$ – известные непрерывные матричные и векторные функции. Кроме того, предположим, что известны все необходимые числовые характеристики случайного вектора $\boldsymbol{X}^0$. В частности, пусть в начальный момент времени t_0 для вектора $\boldsymbol{X}(t)$ заданы вектор математических ожиданий $\boldsymbol{m}_X^0$ и матрица ковариаций $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0$.

Задача состоит в построении систем ОДУ без запаздывания для компонент вектора функций математического ожидания $\boldsymbol{m}_X(t)$ и матрицы функций ковариации $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}(t)$ стохастического вектора состояния $\boldsymbol{X}(t)$ при любом $t > t_0$.

Заметим, что входящие в уравнения (2.4.1) и (2.4.2) шумы аддитивные, а следовательно, СОДУ Ито и Стратоновича имеют одну и ту же форму.

Как и в ряде предыдущих разделов настоящей работы, для того чтобы получить СОДУ для расширенных векторов состояния без запаздывания, применим сочетание метода расширения пространства состояний и метода шагов.

Но прежде, чем это сделать, для компактности изложения перепишем уравнения (2.4.1) и (2.4.2) в менее строгой, но более удобной следующей форме:

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{\mathcal{B}}(t)\,\boldsymbol{X}(t-\tau) + \boldsymbol{\mathcal{Q}}(t)\int\limits_{t-\tau}^{t} \boldsymbol{X}(\theta)\,d\theta + \boldsymbol{c}(t) + \\ + \boldsymbol{\mathcal{H}}(t)\,\boldsymbol{V}(t), \quad t > t_1 = t_0 + \tau, \tag{2.4.3}$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_0(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{c}_0(t) + \boldsymbol{\mathcal{H}}_0(t)\,\boldsymbol{V}(t), \quad \boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}^0, \tag{2.4.4}$$

где $\boldsymbol{V} \in \mathbb{R}^m$ – вектор независимых стандартных белых шумов.

Рассмотрим равномерную временную сетку $t_q = t_0 + q \cdot \tau$, $q = 0, 1, 2, \ldots, N, N+1$ $(t_{N+1} \geqslant T)$ и введем новую временну́ю переменную s, изменяющуюся на промежутке $[0, \tau]$, а также следующие обозначения:

$$s_q = s + t_q, \quad \Delta_q = (t_q, t_{q+1}], \quad \boldsymbol{X}_q(s) = \boldsymbol{X}(s_q), \quad \boldsymbol{X}_q(0) = \boldsymbol{X}_{q-1}(\tau),$$

$$\boldsymbol{V}_q(s) = \boldsymbol{V}(s_q), \quad \boldsymbol{V}_q(0) = \boldsymbol{V}_{q-1}(\tau), \quad \boldsymbol{U}_q(s) = \int\limits_0^s \boldsymbol{X}_q(\theta)\,d\theta,$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_q(s) \equiv \boldsymbol{\Lambda}_q = \boldsymbol{U}_{q-1}(\tau) \text{ п.н.}, \quad q > 0, \quad \boldsymbol{Y}(s) \equiv \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^0.$$

Рассмотрим последовательность полуинтервалов (сегментов) Δ_q.

0°. На сегменте Δ_0 систему СОДУ для векторного случайного процесса $\boldsymbol{Z}_0(s) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{Y}(s),\, \boldsymbol{X}_0(s), \boldsymbol{U}_0(s)\big)$ представим в виде:

$$\begin{aligned} &\dot{\boldsymbol{Y}}(s) = \boldsymbol{O}_n, \\ &\dot{\boldsymbol{X}}_0(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_0(s_0)\,\boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{c}_0(s_0) + \boldsymbol{\mathcal{H}}_0(s_0)\,\boldsymbol{V}_0(s), \\ &\dot{\boldsymbol{U}}_0(s) = \boldsymbol{X}_0(s), \\ &\boldsymbol{Y}(0) = \boldsymbol{X}^0, \qquad \boldsymbol{X}_0(0) = \boldsymbol{X}^0, \qquad \boldsymbol{U}_0(0) = \boldsymbol{O}_n. \end{aligned} \tag{2.4.5}$$

1°. Обратимся к определенному на полуинтервалах Δ_0 и Δ_1 вектору $\boldsymbol{Z}_1(s) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{Z}_0(s), \boldsymbol{\Lambda}_1(s), \boldsymbol{X}_1(s), \boldsymbol{U}_1(s)\big)$, будет удовлетворять системе СОДУ (2.4.5), к которой добавлены уравнения следующего вида:

$$\begin{aligned} &\dot{\boldsymbol{\Lambda}}_1(s) = \boldsymbol{O}_n, \\ &\dot{\boldsymbol{X}}_1(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}(s_1)\,\boldsymbol{X}_1(s) + \boldsymbol{\mathcal{B}}(s_1)\,\boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_1)\,\big[\boldsymbol{\Lambda}_1(s) - \\ &\quad - \boldsymbol{U}_0(s) + \boldsymbol{U}_1(s)\big] + \boldsymbol{c}(s_1) + \boldsymbol{\mathcal{H}}(s_1)\,\boldsymbol{V}_1(s), \end{aligned} \tag{2.4.6}$$

$$\dot{\boldsymbol{U}}_1(s) = \boldsymbol{X}_1(s),$$
$$\boldsymbol{\Lambda}_1(0) = \boldsymbol{U}_0(\tau), \qquad \boldsymbol{X}_1(0) = \boldsymbol{X}_0(\tau), \qquad \boldsymbol{U}_1(0) = \boldsymbol{O}_n.$$

Здесь учтено, что для $t \in (t_1, t_2]$

$$\int\limits_{t-\tau}^{t} \boldsymbol{X}(\theta)\,d\theta = \int\limits_{t-\tau}^{t_1} \boldsymbol{X}(\theta)\,d\theta + \int\limits_{t_1}^{t} \boldsymbol{X}(\theta)\,d\theta = \int\limits_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{X}(\theta)\,d\theta - \int\limits_{t_0}^{t-\tau} \boldsymbol{X}(\theta)\,d\theta +$$
$$+ \int\limits_{t_1}^{t} \boldsymbol{X}(\theta)\,d\theta = \boldsymbol{U}_0(\tau) - \int\limits_{0}^{s} \boldsymbol{X}_0(\theta)\,d\theta + \int\limits_{0}^{s} \boldsymbol{X}_1(\theta)\,d\theta =$$
$$= \boldsymbol{\Lambda}_1(s) - \boldsymbol{U}_0(s) + \boldsymbol{U}_1(s).$$

... ...

N°. Продолжая начатые выше действия, находим, что вектор $\boldsymbol{Z}_N(s) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{Z}_{N-1}(s), \boldsymbol{Y}_N(s), \boldsymbol{X}_N(s), \boldsymbol{U}_N(s)\big)$, представляющий поведение вектора состояния $\boldsymbol{X}(t)$ на сегментах Δ_0, Δ_1, ..., Δ_N, будет решением системы СОДУ, полученной добавлением к уравнениям для вектора $\boldsymbol{Z}_{N-1}(s)$ уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{\Lambda}}_N(s) = \boldsymbol{O}_n,\\
&\dot{\boldsymbol{X}}_N(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}(s_N)\,\boldsymbol{X}_N(s) + \boldsymbol{\mathcal{B}}(s_N)\,\boldsymbol{X}_{N-1}(s) + \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_N)\,\big[\boldsymbol{\Lambda}_N(s) -\\
&\quad - \boldsymbol{U}_{N-1}(s) + \boldsymbol{U}_N(s)\big] + \boldsymbol{c}(s_N) + \boldsymbol{\mathcal{H}}(s_N)\,\boldsymbol{V}_N(s), \qquad (2.4.7)\\
&\dot{\boldsymbol{U}}_N(s) = \boldsymbol{X}_N(s)\\
&\boldsymbol{\Lambda}_N(0) = \boldsymbol{U}_{N-1}(\tau), \qquad \boldsymbol{X}_N(0) = \boldsymbol{X}_{N-1}(\tau), \qquad \boldsymbol{U}_N(0) = \boldsymbol{O}_n.
\end{aligned}$$

Итак, получена искомая цепочка систем линейных СОДУ (2.4.5)–(2.4.7) для дальнейшего исследования которой можно применить стандартные для данного класса уравнений методы [236] для расширенных векторов состояния $\boldsymbol{Z}_0$, $\boldsymbol{Z}_1$, ..., $\boldsymbol{Z}_N$, увеличивающейся размерности и подобной структуры без запаздывания,.

В частности, построенную последовательность можно использовать для получения новой цепочки уравнений – ОДУ для первых моментов (векторов функций математического ожидания и матриц функций ковариации) векторов $\boldsymbol{Z}_0$, $\boldsymbol{Z}_1$, ..., $\boldsymbol{Z}_N$. Несложно увидеть, что для любого $\boldsymbol{Z}_k$, $k = 0, 1, ..., N$, структуры соответствующих систем ОДУ будут иметь вид:

$$\dot{\boldsymbol{m}}_{Z_k}(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_k^{+}(s)\,\boldsymbol{m}_{Z_k}(s) + \boldsymbol{c}_k^{+}(s),$$

$$\dot{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_{Z_kZ_k}(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_k^+(s)\,\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_kZ_k}(s) + \left[\boldsymbol{\mathcal{A}}_k^+(s)\,\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_kZ_k}(s)\right]^{\mathsf{T}} + \boldsymbol{\mathcal{H}}_k^+(s)\,\boldsymbol{\mathcal{H}}_k^{+\mathsf{T}}(s),$$

где

$$\boldsymbol{m}_{Z_k}(s) = \mathbb{E}[\boldsymbol{Z}_k(s)]\,,$$

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_kZ_k} = \mathbb{E}[\{\boldsymbol{Z}_k(s) - \boldsymbol{m}_{Z_k}(s)\}\{\boldsymbol{Z}_k(s) - \boldsymbol{m}_{Z_k}(s)\}^{\mathsf{T}}]\,.$$

При этом матрицы $\boldsymbol{\mathcal{A}}_k^+(s)$, $\boldsymbol{\mathcal{H}}_k^+(s)$ и вектор $\boldsymbol{c}_k^+(s)$ имеют блочную структуру, которая формируется следующим образом:

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_0^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{A}}_0(s_0) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{I}}_n & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{H}}_0(s_0) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \end{bmatrix}; \qquad \boldsymbol{c}_0^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O}_n \\ \boldsymbol{c}_0(s_0) \\ \boldsymbol{O}_n \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_1^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{A}}_0(s_0) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{I}}_n & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{B}}(s_1) & -\boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_1) & \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_1) & \boldsymbol{\mathcal{A}}(s_1) & \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_1) \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{I}}_n & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{H}}_0(s_0) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{H}}(s_1) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \end{bmatrix}; \boldsymbol{c}_1^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_0^+(s) \\ \boldsymbol{O}_n \\ \boldsymbol{c}(s_1) \\ \boldsymbol{O}_n \end{bmatrix};$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_k^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{A}}_{k-1}^+(s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{3nk\times 3n} \\ \boldsymbol{\mathcal{A}}_{k21}(s) & \boldsymbol{\mathcal{A}}_{k22}(s) \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\mathcal{A}}_{k22}(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_k) & \boldsymbol{\mathcal{A}}(s_k) & \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_k) \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{I}}_n & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_{k21}(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times 3n(k-1)} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times 3n(k-1)} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{B}}(s_k) & -\boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_k) \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times 3n(k-1)} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}_k^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{H}}_{k-1}^+(s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{3nk\times 3m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{3n\times 3km} & \boldsymbol{\mathcal{H}}_{k22}(s) \end{bmatrix}; \qquad \boldsymbol{\mathcal{H}}_{k22}(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{H}}(s_k) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{c}_k^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_{k-1}^+(s) \\ \boldsymbol{O}_n \\ \boldsymbol{c}(s_k) \\ \boldsymbol{O}_n \end{bmatrix};$$

... ...

Теперь определим вид начальных условий для построенных ОДУ:

$$\boldsymbol{m}_{Z_0}^+(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_X^0 \\ \boldsymbol{m}_X^0 \\ \boldsymbol{O}_n \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{m}_{Z_1}^+(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_{Z_0}^+(0) \\ \boldsymbol{m}_{U_0}(\tau) \\ \boldsymbol{m}_{X_0}(\tau) \\ \boldsymbol{O}_n \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_0Z_0}^+(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_1Z_1}^+(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_0Z_0}^+(0) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{1112}^+(0) \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{1121}^+(0) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{1122}^+(0) \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_{1112}^+(0) = \boldsymbol{\mathcal{K}}_{1121}^{+\mathsf{T}}(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YU_0}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_0}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YU_0}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_0}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_{1122}^+(0 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{K}}_{U_0U_0}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{U_0X_0}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0U_0}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0X_0}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \end{bmatrix};$$

... ...

$$\boldsymbol{m}_{Z_k}^+(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_{Z_{k-1}}^+(0) \\ \boldsymbol{m}_{U_{k-1}}(\tau) \\ \boldsymbol{m}_{X_{k-1}}(\tau) \\ \boldsymbol{O}_n \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_kZ_k}^+(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_{k-1}Z_{k-1}}^+(0) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{kk12}^+(0) \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{kk21}^+(0) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{kk22}^+(0) \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_{kk22}^+(0 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{K}}_{U_{k-1}U_{k-1}}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{U_{k-1}X_{k-1}}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{k-1}U_{k-1}}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{k-1}X_{k-1}}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \end{bmatrix};$$

$$\mathcal{K}^{+}_{kk12}(0) = \mathcal{K}^{+\mathsf{T}}_{kk21}(0) = \begin{bmatrix} \mathcal{K}_{YU_{k-1}}(\tau) & \mathcal{K}_{YX_{k-1}}(\tau) & \mathcal{O}_{n\times n} \\ \mathcal{K}_{YU_{k-1}}(\tau) & \mathcal{K}_{YX_{k-1}}(\tau) & \mathcal{O}_{n\times n} \\ \mathcal{O}_{n\times n} & \mathcal{O}_{n\times n} & \mathcal{O}_{n\times n} \\ \mathcal{K}_{U_0U_{k-1}}(\tau) & \mathcal{K}_{U_0X_{k-1}}(\tau) & \mathcal{O}_{n\times n} \\ \mathcal{K}_{X_0U_{k-1}}(\tau) & \mathcal{K}_{X_0X_{k-1}}(\tau) & \mathcal{O}_{n\times n} \\ \mathcal{O}_{n\times n} & \mathcal{O}_{n\times n} & \mathcal{O}_{n\times n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{K}_{U_{k-2}U_{k-1}}(\tau) & \mathcal{K}_{U_{k-2}X_{k-1}}(\tau) & \mathcal{O}_{n\times n} \\ \mathcal{K}_{X_{k-2}U_{k-1}}(\tau) & \mathcal{K}_{X_{k-2}X_{k-1}}(\tau) & \mathcal{O}_{n\times n} \\ \mathcal{O}_{n\times n} & \mathcal{O}_{n\times n} & \mathcal{O}_{n\times n} \end{bmatrix};$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

В связи с тем что вектор функций математического ожидания $\boldsymbol{m}_X(t)$ и матрица функций ковариации $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}(t)$ на промежутке $t_0 \leqslant t \leqslant t_{N+1}$ можно собрать из соответствующих блоков векторной функции $\boldsymbol{m}_{Z_N}(s)$ и матричной функции $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_NZ_N}(s)$ соответственно, достаточно вычислить последние, а затем выбрать из них необходимые элементы.

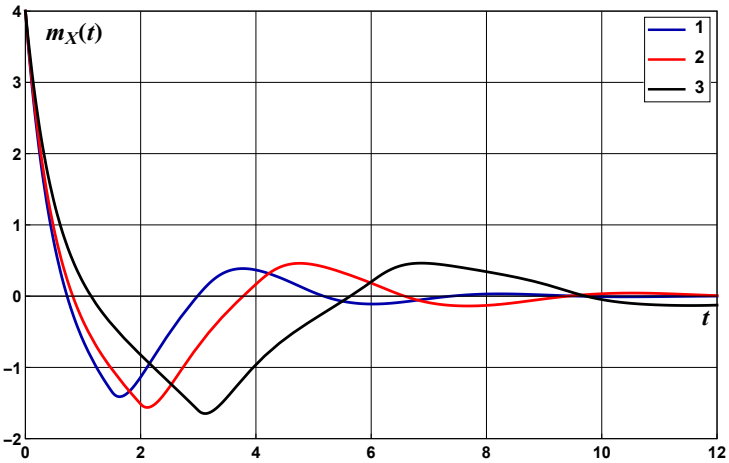


Рис. 2.4.1

Пример 2.4.1. Воспользуемся изложенной схемой для анализа переходного процесса, описываемого модельным уравнением вида:

$$\dot{X}(t) = \alpha\, X(t) + \beta\, X(t-\tau) + \gamma \int_{t-\tau}^{t} X(\theta)\, d\theta + \sigma_0\, V(t), \quad t > 0,$$

$$X(t) = x^0, \quad -\tau \leqslant t \leqslant 0,$$

где x^0 – неслучайная величина.

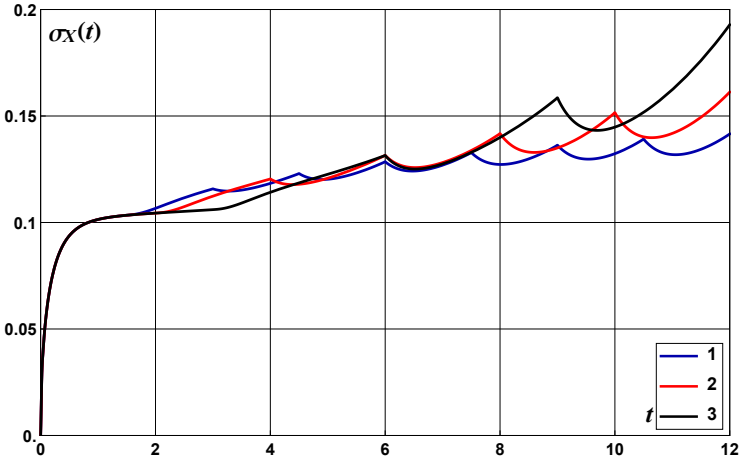


Рис. 2.4.2

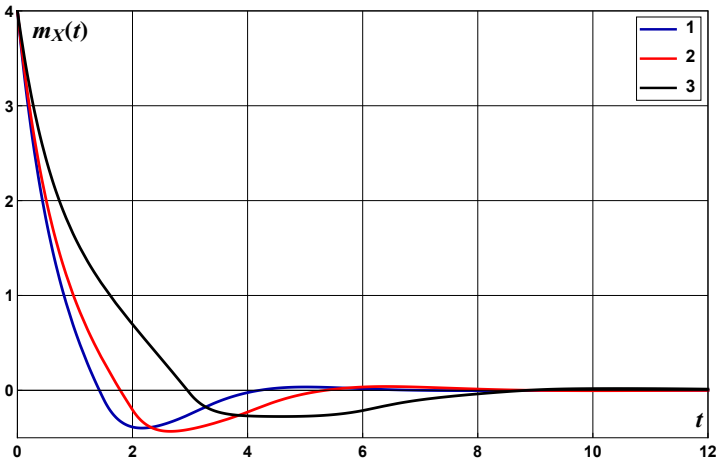


Рис. 2.4.3

На рис. 2.4.1–2.4.4 представлены результаты расчетов для следующих

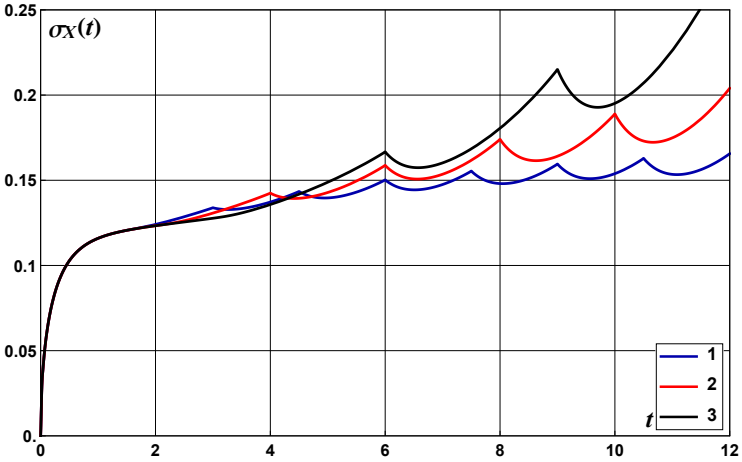


Рис. 2.4.4

значений параметров задачи:

$$x^0 = 4; \qquad m_X^0 = x^0; \qquad \mathcal{K}_{XX}^0 = 0; \qquad \sigma_0 = 0.2; \qquad \gamma = -0.3.$$

На рис. 2.4.1 и 2.4.2 представлены переходные процессы для математического ожидания и среднего квадратичного отклонения при $\alpha = 2.0$, $\beta = 1.0$ и трех значений запаздывания: 1) $\tau = 1.5$ (кривая 1); 2) $\tau = 2.0$ (кривая 2); 3) $\tau = 3.0$ (кривая 3). На рис. 2.4.3 и 2.4.4 изображено поведение тех же статистических характеристик при $\alpha = 1.5$, $\beta = 0.5$ и при тех же значениях запаздывания. ▶

2.4.2. Анализ линейных стохастических систем с неограниченными распределенными и конечными сосредоточенными запаздываниями

Рассмотрим систему линейных стохастических обыкновенных дифференциальных уравнений Ито с конечными сосредоточенными $\tau > 0$ и распределенными запаздываниями следующего вида [226, 234]:

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{\mathcal{B}}(t)\,\boldsymbol{X}(t-\tau) + \boldsymbol{\mathcal{Q}}(t)\int\limits_{t_0}^{t} \boldsymbol{X}(\theta)\,d\theta +$$

$$+\boldsymbol{c}(t) + \boldsymbol{\mathcal{H}}(t)\,\boldsymbol{V}(t), \qquad t > t_1 = t_0 + \tau, \tag{2.4.8}$$

где t – время ($t_0 < t \leqslant T < \infty$); $\tau > 0$; $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния; $\boldsymbol{V} \in \mathbb{R}^m$ – вектор независимых стандартных белых шумов.

Будем считать, что на интервале $(t_0, t_1]$ вектор состояния $\boldsymbol{X}(t)$ удовлетворяет системе СОДУ без сосредоточенного запаздывания

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_0(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{\mathcal{Q}}_0(t)\int\limits_{t_0}^{t} \boldsymbol{X}(\theta)\,d\theta + \boldsymbol{c}_0(t) + \boldsymbol{\mathcal{H}}_0(t)\,\boldsymbol{V}(t), \qquad (2.4.9)$$

$$\boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}^0,$$

причем в уравнениях (2.4.8) и (2.4.9) $\boldsymbol{\mathcal{A}}(t)$, $\boldsymbol{\mathcal{B}}(t)$, $\boldsymbol{\mathcal{Q}}(t)$, $\boldsymbol{\mathcal{H}}(t)$, $\boldsymbol{\mathcal{A}}_0(t)$, $\boldsymbol{\mathcal{Q}}_0(t)$, $\boldsymbol{\mathcal{H}}_0(t)$ и $\boldsymbol{c}(t)$, $\boldsymbol{c}_0(t)$ – известные непрерывные матричные и векторные функции аргумента t. Кроме того, предположим, что известны все необходимые числовые характеристики случайного вектора $\boldsymbol{X}^0$. В частности, пусть в начальный момент времени t_0 для вектора $\boldsymbol{X}$ заданы вектор математических ожиданий $\boldsymbol{m}_X^0 = \mathbb{E}\big[\boldsymbol{X}^0\big]$ и матрица ковариаций

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 = \mathbb{E}\big[\big(\boldsymbol{X}^0 - \boldsymbol{m}_X^0\big)\big(\boldsymbol{X}^0 - \boldsymbol{m}_X^0\big)^{\mathsf{T}}\big].$$

Построим систему обыкновенных дифференциальных уравнений без запаздывания для компонент вектора средних функций математического ожидания $\boldsymbol{m}_X(t) = \mathbb{E}[\boldsymbol{X}(t)]$ и матрицы функций ковариации $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}(t) = \mathbb{E}\big[\big\{\boldsymbol{X}(t) - \boldsymbol{m}_X(t)\big\}\big\{\boldsymbol{X}(t) - \boldsymbol{m}_X(t)\big\}^{\mathsf{T}}\big]$ вектора состояния $\boldsymbol{X}$ при любом $t > t_0$.

Рассмотрим равномерную временну́ю сетку $t_q = t_0 + q \cdot \tau$, $q = 0$, 1, 2, ..., N, $N+1$ ($t_{N+1} \geqslant T$) и введем новую временну́ю переменную s, изменяющуюся на промежутке $[0, \tau]$. Кроме того, будем использовать обозначения, введенные в предыдущем подразделе.

Покажем, как можно представить интегральный член в уравнениях (2.4.8), (2.4.9) для $t_k < t \leqslant t_{k+1}$, если воспользоваться введенными обозначениями:

$$\int\limits_{t_0}^{t} \boldsymbol{X}(\theta)\,d\theta = \sum_{q=0}^{k-1} \int\limits_{t_q}^{t_{q+1}} \boldsymbol{X}(\theta)\,d\theta + \int\limits_{t_k}^{t} \boldsymbol{X}(\theta)\,d\theta = \sum_{q=0}^{k-1} \int\limits_{t_q}^{t_q+\tau} \boldsymbol{X}(\theta)\,d\theta +$$

$$+ \int\limits_{t_k}^{t_k+s} \boldsymbol{X}(\theta)\,d\theta = \sum_{q=0}^{k-1} \int\limits_{0}^{\tau} \boldsymbol{X}(t_q+\theta)\,d\theta + \int\limits_{0}^{s} \boldsymbol{X}(t_k+\theta)\,d\theta =$$

$$= \sum_{q=0}^{k-1} \int\limits_{0}^{\tau} \boldsymbol{X}_q(\theta)\,d\theta + \int\limits_{0}^{s} \boldsymbol{X}_k(\theta)\,d\theta = \sum_{q=0}^{k-1} \boldsymbol{U}_q(\tau) + \boldsymbol{U}_k(s).$$

Рассмотрим последовательность полуинтервалов (сегментов) Δ_q, $q = 0, 1, ..., N$.

0°. На сегменте Δ_0 систему СОДУ для вектора $\boldsymbol{Z}_0(s) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{Y}(s), \boldsymbol{X}_0(s), \boldsymbol{U}_0(s)\big)$ представим в виде:

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{Y}}(s) = \boldsymbol{O}_n,\\
&\dot{\boldsymbol{X}}_0(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_0(s_0)\,\boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{\mathcal{Q}}_0(s_0)\,\boldsymbol{U}_0(s) + \boldsymbol{c}_0(s_0) + \boldsymbol{\mathcal{H}}_0(s_0)\,\boldsymbol{V}_0(s),\\
&\dot{\boldsymbol{U}}_0(s) = \boldsymbol{X}_0(s),\\
&\boldsymbol{Y}(0) = \boldsymbol{X}^0, \qquad \boldsymbol{X}_0(0) = \boldsymbol{X}^0, \qquad \boldsymbol{U}_0(0) = \boldsymbol{O}_n.
\end{aligned} \tag{2.4.10}$$

1°. В свою очередь, на полуинтервалах Δ_0, Δ_1 систему СОДУ вектo $\boldsymbol{Z}_1(s) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{Z}_0(s), \boldsymbol{\Lambda}_1(s), \boldsymbol{X}_1(s), \boldsymbol{U}_1(s)\big)$ будет удовлетворять системе СОДУ следующего вида:

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{\Lambda}}_1(s) = \boldsymbol{O}_n,\\
&\dot{\boldsymbol{X}}_1(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}(s_1)\,\boldsymbol{X}_1(s) + \boldsymbol{\mathcal{B}}(s_1)\,\boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_1)\,\big[\boldsymbol{\Lambda}_1(s) + \boldsymbol{U}_1(s)\big] +\\
&\quad + \boldsymbol{c}(s_1) + \boldsymbol{\mathcal{H}}(s_1)\,\boldsymbol{V}_1(s),\\
&\dot{\boldsymbol{U}}_1(s) = \boldsymbol{X}_1(s),\\
&\boldsymbol{\Lambda}_1(0) = \boldsymbol{U}_0(\tau), \qquad \boldsymbol{X}_1(0) = \boldsymbol{X}_0(\tau), \qquad \boldsymbol{U}_1(0) = \boldsymbol{O}_n.
\end{aligned} \tag{2.4.11}$$

к которым нужно добавить уравнения (2.4.10).

2°. Определенный на сегментах Δ_0, Δ_1 и Δ_2 вектор $\boldsymbol{Z}_2(s) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{Z}_1(s), \boldsymbol{\Lambda}_2(s), \boldsymbol{X}_2(s), \boldsymbol{U}_2(s)\big)$, будет удовлетворять системам уравнений (2.4.10), (2.4.11), к которой добавлены уравнения следующего вида:

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{\Lambda}}_2(s) = \boldsymbol{O}_n,\\
&\dot{\boldsymbol{X}}_2(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}(s_2)\,\boldsymbol{X}_2(s) + \boldsymbol{\mathcal{B}}(s_2)\,\boldsymbol{X}_1(s) + \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_2)\,\big[\boldsymbol{\Lambda}_1(s) + \boldsymbol{\Lambda}_2(s) +\\
&\quad + \boldsymbol{U}_2(s)\big] + \boldsymbol{c}(s_2) + \boldsymbol{\mathcal{H}}(s_2)\,\boldsymbol{V}_2(s),\\
&\dot{\boldsymbol{U}}_2(s) = \boldsymbol{X}_2(s),\\
&\boldsymbol{\Lambda}_2(0) = \boldsymbol{U}_1(\tau), \qquad \boldsymbol{X}_2(0) = \boldsymbol{X}_1(\tau), \qquad \boldsymbol{U}_2(0) = \boldsymbol{O}_n.\\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots
\end{aligned} \tag{2.4.12}$$

N°. Наконец, если обозначить через $\boldsymbol{Z}_N(s)$ вектор $\operatorname{col}\big(\boldsymbol{Z}_{N-1}(s), \boldsymbol{\Lambda}_N(s), \boldsymbol{X}_N(s), \boldsymbol{U}_N(s),\big)$, находим, что вектор $\boldsymbol{Z}_N(s)$, представляющий поведение

вектора состояния $\boldsymbol{X}(t)$ на сегментах Δ_0, Δ_1, Δ_2, ..., Δ_N, будет решением системы СОДУ, полученной добавлением к уравнениям для вектора $\boldsymbol{Z}_{N-1}(s)$ уравнений вида:

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{\Lambda}}_N(s) = \boldsymbol{O}_n,\\
&\dot{\boldsymbol{X}}_N(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}(s_N)\,\boldsymbol{X}_N(s) + \boldsymbol{\mathcal{B}}(s_N)\,\boldsymbol{X}_{N-1}(s) + \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_N)\Big[\sum_{q=1}^{N}\boldsymbol{\Lambda}_q(s) + \\
&\quad + \boldsymbol{U}_N(s)\Big] + \boldsymbol{c}(s_N) + \boldsymbol{\mathcal{H}}(s_N)\,\boldsymbol{V}_N(s), \qquad (2.4.13)\\
&\dot{\boldsymbol{U}}_N(s) = \boldsymbol{X}_N(s)\\
&\boldsymbol{\Lambda}_N(0) = \boldsymbol{U}_{N-1}(\tau), \qquad \boldsymbol{X}_N(0) = \boldsymbol{X}_{N-1}(\tau), \qquad \boldsymbol{U}_N(0) = \boldsymbol{O}_n.
\end{aligned}$$

Воспользуемся построенной последовательностью систем линейных СОДУ без запаздывания для получения новой цепочки уравнений – ОДУ для первых моментов (компонент векторов функций математического ожидания и матриц функций ковариации) векторов $\boldsymbol{Z}_0$, $\boldsymbol{Z}_1$, $\boldsymbol{Z}_2$, ..., $\boldsymbol{Z}_N$. Несложно увидеть, что для любого $\boldsymbol{Z}_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, N$, структуры соответствующих систем ОДУ будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{m}}_{Z_k}(s) &= \boldsymbol{\mathcal{A}}_k^{+}(s)\,\boldsymbol{m}_{Z_k}(s) + \boldsymbol{c}_k^{+}(s),\\
\dot{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_{Z_kZ_k}(s) &= \boldsymbol{\mathcal{A}}_k^{+}(s)\,\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_kZ_k}(s) + \Big[\boldsymbol{\mathcal{A}}_k^{+}(s)\,\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_kZ_k}(s)\Big]^{\mathsf{T}} + \boldsymbol{\mathcal{H}}_k^{+}(s)\,\boldsymbol{\mathcal{H}}_k^{+\mathsf{T}}(s),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{m}_{Z_k}(s) &= \mathbb{E}[\boldsymbol{Z}_k(s)]\,,\\
\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_kZ_k} &= \mathbb{E}\big[\big\{\boldsymbol{Z}_k(s) - \boldsymbol{m}_{Z_k}(s)\big\}\big\{\boldsymbol{Z}_k(s) - \boldsymbol{m}_{Z_k}(s)\big\}^{\mathsf{T}}\big]\,.
\end{aligned}$$

Блочные матрицы $\boldsymbol{\mathcal{A}}_k^{+}(s)$, $\boldsymbol{\mathcal{H}}_k^{+}(s)$ и вектор $\boldsymbol{c}_k^{+}(s)$ формируются следующим образом:

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_0^{+}(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{A}}_0(s_0) & \boldsymbol{\mathcal{Q}}_0(s_0) \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{I}}_n & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^{+}(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{H}}_0(s_0) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \end{bmatrix}; \qquad \boldsymbol{c}_0^{+}(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O}_n \\ \boldsymbol{c}_0(s_0) \\ \boldsymbol{O}_n \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_1^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{A}}_0(s_0) & \boldsymbol{\mathcal{Q}}_0(s_0) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{I}}_n & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{B}}(s_1) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_1) & \boldsymbol{\mathcal{A}}(s_1) & \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_1) \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{I}}_n & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{H}}_0(s_0) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{H}}(s_1) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \end{bmatrix}; \boldsymbol{c}_1^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_0^+(s) \\ \boldsymbol{O}_n \\ \boldsymbol{c}(s_1) \\ \boldsymbol{O}_n \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_2^+(s) =$$

$$= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{A}}_0(s_0) & \boldsymbol{\mathcal{Q}}_0(s_0) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{I}}_n & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{B}}(s_1) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_1) & \boldsymbol{\mathcal{A}}(s_1) & \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_1) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{I}}_n & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_2) & \boldsymbol{\mathcal{B}}(s_2) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_2) & \boldsymbol{\mathcal{A}}(s_2) & \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_2) \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{I}}_n & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}_2^+(s) =$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{H}}_0(s_0) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{H}}(s_1) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{H}}(s_2) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{c}_2^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1^+(s) \\ \boldsymbol{O}_n \\ \boldsymbol{c}(s_2) \\ \boldsymbol{O}_n \end{bmatrix};$$

... ...

$$\mathcal{A}_k^+(s) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{k-1}^+(s) & \mathcal{O}_{3nk\times 3n} \\ \mathcal{A}_{k21}(s) & \mathcal{A}_{k22}(s) \end{bmatrix}; \quad \mathcal{A}_{k22}(s) = \begin{bmatrix} \mathcal{O}_{n\times n} & \mathcal{O}_{n\times n} & \mathcal{O}_{n\times n} \\ \mathcal{Q}(s_k) & \mathcal{A}(s_k) & \mathcal{A}(s_k) \\ \mathcal{O}_{n\times n} & \mathcal{I}_n & \mathcal{O}_{n\times n} \end{bmatrix};$$

$$\mathcal{A}_{k21}(s) = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathcal{J}_k & \ldots & \mathcal{J}_k \end{array}\right| \begin{bmatrix} \mathcal{O}_{n\times n} & \mathcal{O}_{n\times n} & \mathcal{O}_{n\times n} \\ \mathcal{Q}(s_k) & \mathcal{B}(s_k) & \mathcal{O}_{n\times n} \\ \mathcal{O}_{n\times n} & \mathcal{O}_{n\times n} & \mathcal{O}_{n\times n} \end{bmatrix};$$

$$\mathcal{J}_k(s) = \begin{bmatrix} \mathcal{O}_{n\times n} & \mathcal{O}_{n\times n} & \mathcal{O}_{n\times n} \\ \mathcal{Q}(s_k) & \mathcal{O}_{n\times n} & \mathcal{O}_{n\times n} \\ \mathcal{O}_{n\times n} & \mathcal{O}_{n\times n} & \mathcal{O}_{n\times n} \end{bmatrix};$$

$$\mathcal{H}_k^+(s) = \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{k-1}^+(s) & \mathcal{O}_{3nk\times 3m} \\ \mathcal{O}_{3n\times 3km} & \mathcal{H}_{k22}(s) \end{bmatrix};$$

$$\mathcal{H}_{k22}(s) = \begin{bmatrix} \mathcal{O}_{n\times m} & \mathcal{O}_{n\times m} & \mathcal{O}_{n\times m} \\ \mathcal{O}_{n\times m} & \mathcal{H}(s_k) & \mathcal{O}_{n\times m} \\ \mathcal{O}_{n\times m} & \mathcal{O}_{n\times m} & \mathcal{O}_{n\times m} \end{bmatrix}, \quad c_k^+(s) = \begin{bmatrix} c_{k-1}^+(s) \\ O_n \\ c(s_k) \\ O_n \end{bmatrix};$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

Начальные условия для построенных ОДУ формируются в форме, представленной в подразделе 2.4.1.

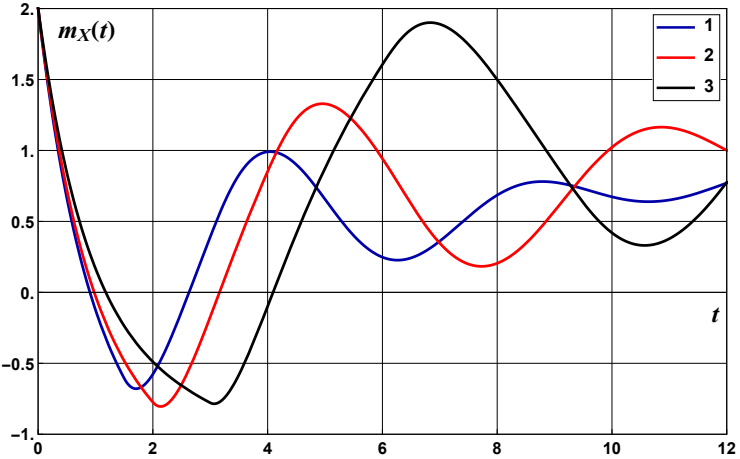


Рис. 2.4.5

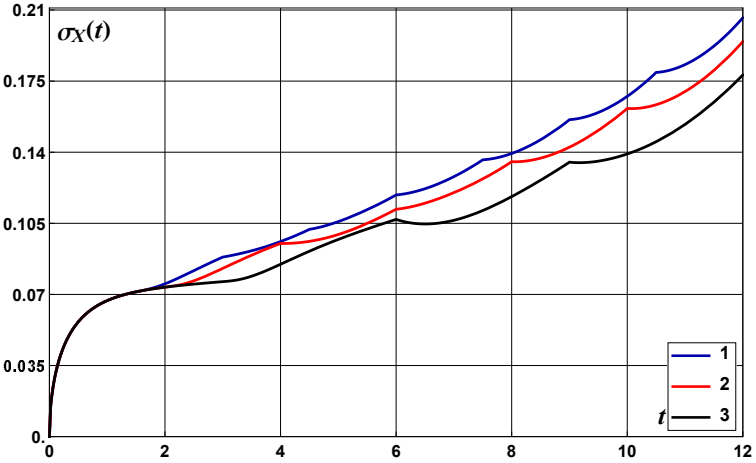


Рис. 2.4.6

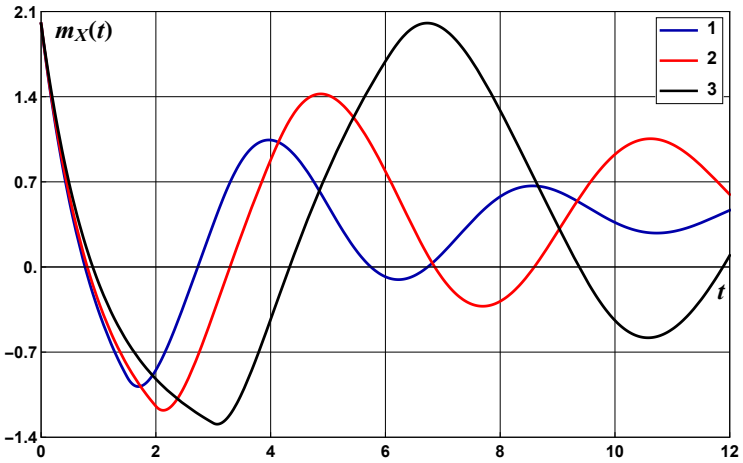


Рис. 2.4.7

Пример 2.4.2. Определим статистические характеристики системы, описываемой модельным уравнением вида:

$$\dot{X}(t) = \alpha\, X(t) + \beta\, X(t-\tau) + \gamma \int_0^t X(\theta)\, d\theta + \sigma_0\, V(t), \quad t > 0,$$

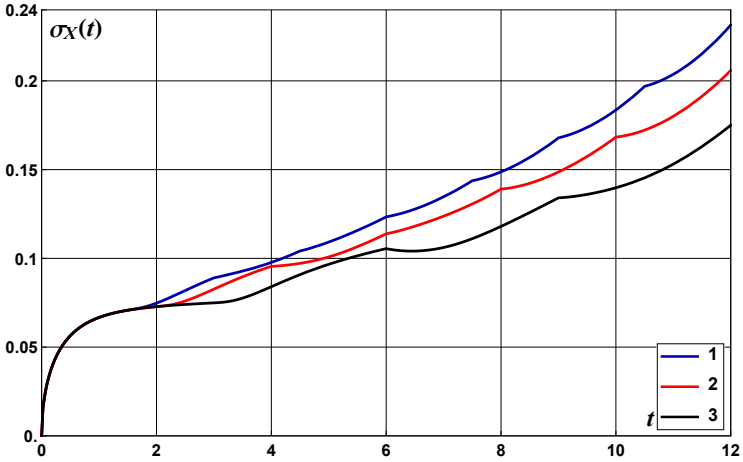


Рис. 2.4.8

$$X(t) = x^0, \quad -\tau \leqslant t \leqslant 0,$$

где x^0 – неслучайная величина.

На рис. 2.4.5–2.4.8 представлены результаты расчетов для следующих значений параметров задачи:

$$x^0 = 2; \qquad m_X^0 = x^0; \qquad \mathcal{K}_{XX}^0 = 0; \qquad \sigma_0 = 0.2; \qquad \alpha = 1.0.$$

На рис. 2.4.5 и 2.4.6 представлены переходные процессы для математического ожидания и среднего квадратичного отклонения при $\beta = 1.1$, $\gamma = -0.15$, и трех значений запаздывания: 1) $\tau = 1.5$ (кривая 1); 2) $\tau = 2.0$ (кривая 2); 3) $\tau = 3.0$ (кривая 3). На рис. 2.4.7 и 2.4.8 изображено поведение тех же статистических характеристик при $\beta = 1.2$, $\gamma = -0.12$ и при тех же значениях запаздывания. ►

2.4.3. Расчет моментных функций решения системы линейных параметрических СОДУ нейтрального типа

Ниже рассматривается систему линейных параметрических стохастических обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений Стратоновича нейтрального типа в следующей форме [239]:

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{\mathcal{S}}(t)\,\dot{\boldsymbol{X}}(t-\tau) + \boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{\mathcal{B}}(t)\,\boldsymbol{X}(t-\tau) + \boldsymbol{c}(t) + \qquad (2.4.14)$$

$$+\boldsymbol{\mathcal{Q}}(t)\int\limits_{t-\tau}^{t}\boldsymbol{X}(\theta)\,d\theta+\big[[\![\boldsymbol{\mathcal{H}}(t)]\!]::\boldsymbol{X}(t)+[\![\boldsymbol{\mathcal{J}}(t)]\!]::\boldsymbol{X}(t-\tau)+\boldsymbol{\mathcal{G}}(t)\big]\,\boldsymbol{V}(t),$$

$$t>t_1=t_0+\tau,$$

где t – время, $\tau>0$ – сосредоточенное запаздывание, $\boldsymbol{X}(t)=\{X_i(t)\}\in\mathbb{R}^n$ – векторный случайный процесс (ВСП), представляющий собой решение системы уравнений (2.4.14); $\boldsymbol{V}(t)=\{V_j(t)\}\in\mathbb{R}^m$ – векторный случайный процесс, компонентами которого являются независимые стационарные гауссовские процессы типа стандартных белых шумов.

Будем считать, что на интервале $(t_0,t_1]$ СП $\boldsymbol{X}(t)$ удовлетворяет системе линейных параметрических СОДУ без запаздывания

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t)=\boldsymbol{\mathcal{A}}_0(t)\,\boldsymbol{X}(t)+\boldsymbol{c}_0(t)+\big[[\![\boldsymbol{\mathcal{H}}_0(t)]\!]::\boldsymbol{X}(t)+\boldsymbol{\mathcal{G}}_0(t)\big]\,\boldsymbol{V}(t),\qquad(2.4.15)$$

с начальным условием

$$\boldsymbol{X}(t_0)=\boldsymbol{X}^0,\qquad(2.4.16)$$

причем в уравнениях (2.4.14) и (2.4.15) $\boldsymbol{\mathcal{S}}(t)=\{s_{ij}(t)\}$, $\boldsymbol{\mathcal{A}}(t)=\{a_{ij}(t)\}$, $\boldsymbol{\mathcal{B}}(t)=\{b_{ij}(t)\}$, $\boldsymbol{\mathcal{Q}}(t)=\{q_{ij}(t)\}$, $\boldsymbol{\mathcal{G}}(t)=\{g_{ij}(t)\}$, $\boldsymbol{\mathcal{A}}_0(t)=\{a_{0ij}(t)\}$, $\boldsymbol{\mathcal{G}}_0(t)=\{g_{0ij}(t)\}$; $[\![\boldsymbol{\mathcal{H}}(t)]\!]=\{h_{ijk}(t)\}$, $[\![\boldsymbol{\mathcal{J}}(t)]\!]=\{j_{ijk}(t)\}$, $[\![\boldsymbol{\mathcal{H}}_0(t)]\!]=\{h_{0ijk}(t)\}$ и $\boldsymbol{c}(t)=\{c_i(t)\}$, $\boldsymbol{c}_0(t)=\{c_{0i}(t)\}$ – известные непрерывные матричные, трехмерные матричные и векторные функции переменной t;

$$[\![\boldsymbol{\mathcal{H}}_0(t)]\!]::\boldsymbol{X}(t)\equiv\Big\{\sum_{k=1}^{n}h_{0ijk}(t)\,X_k(t)\Big\}$$

($i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$). Кроме того, предположим, что известны все необходимые числовые характеристики векторной случайной величины (ВСВ) $\boldsymbol{X}^0=\{X_i^0\}\in\mathbb{R}^n$. В частности, пусть в начальный момент времени t_0 для ВСП $\boldsymbol{X}(t)$ заданы вектор математических ожиданий $\boldsymbol{m}_X^0=\big\{m_{X_i}^0\big\}=\mathbb{E}\big[\boldsymbol{X}^0\big]$, матрица ковариаций $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0=\mathbb{E}\big[\big\{\boldsymbol{X}^0-\boldsymbol{m}^0\big\}\big\{\boldsymbol{X}^0-\boldsymbol{m}^0\big\}^{\intercal}\big]$ и все необходимые начальные моменты ВСВ $\boldsymbol{X}^0$ до порядка K.

Требуется построить системы ОДУ для вычисления вектора функций математического ожидания $\boldsymbol{m}_X(t)=\{m_{X_i}(t)\}=\mathbb{E}[\boldsymbol{X}(t)]$, матрицы функций ковариации $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}(t)=\big\{\mathcal{K}_{X_iX_j}(t)\big\}=\mathbb{E}\big[\big\{\boldsymbol{X}(t)-\boldsymbol{m}_X(t)\big\}\big\{\boldsymbol{X}(t)-\boldsymbol{m}_X(t)\big\}^{\intercal}\big]$ и начальных моментов ВСП $\boldsymbol{X}(t)$ до порядка K при любом $t>t_0$.

Воспользуемся обозначениями из предыдущих двух подразделов и рассмотрим последовательность полуинтервалов (сегментов) Δ_q.

0°. На сегменте Δ_0 систему уравнений для вектора $\boldsymbol{Z}_0(s) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{Y}(s), \boldsymbol{X}_0(s), \boldsymbol{U}_0(s)\big)$ представим в виде:

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{Y}}(s) = \boldsymbol{O}_n,\\
&\dot{\boldsymbol{X}}_0(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_0(s_0)\,\boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{c}_0(s_0) + \big[\!\big[\boldsymbol{\mathcal{H}}_0(t)\big]\!\big] :: \boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s_0)\big]\,\boldsymbol{V}_0(s),\\
&\dot{\boldsymbol{U}}_0(s) = \boldsymbol{X}_0(s),\\
&\boldsymbol{Y}(0) = \boldsymbol{X}^0, \qquad \boldsymbol{X}_0(0) = \boldsymbol{X}^0, \qquad \boldsymbol{U}_0(0) = \boldsymbol{O}_n.
\end{aligned} \tag{2.4.17}$$

1°. Определенный на полуинтервалах Δ_0 и Δ_1 случайный вектор $\boldsymbol{Z}_1(s) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{Z}_0(s), \boldsymbol{\Lambda}_1(s), \boldsymbol{X}_1(s), \boldsymbol{U}_1(s)\big)$, будет удовлетворять системе уравнений (2.4.17), к которой добавлены уравнения следующего вида:

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{\Lambda}}_1(s) = \boldsymbol{O}_n,\\
&\dot{\boldsymbol{X}}_1(t) = \boldsymbol{\mathcal{S}}(s_1)\,\dot{\boldsymbol{X}}_0(s) + \boldsymbol{\mathcal{A}}(s_1)\,\boldsymbol{X}_1(t) + \boldsymbol{\mathcal{B}}(s_1)\,\boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{c}(s_1) +\\
&\quad + \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_1)\,\big[\boldsymbol{\Lambda}_1(s) + \boldsymbol{U}_1(s) - \boldsymbol{U}_0(s)\big] +\\
&\quad + \big[\big[\!\big[\boldsymbol{\mathcal{H}}(s_1)\big]\!\big] :: \boldsymbol{X}_1(s) + \big[\!\big[\boldsymbol{\mathcal{J}}(s_1)\big]\!\big] :: \boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{\mathcal{G}}(s_1)\big]\,\boldsymbol{V}_1(s),\\
&\dot{\boldsymbol{U}}_1(s) = \boldsymbol{X}_1(s),\\
&\boldsymbol{\Lambda}_1(0) = \boldsymbol{U}_0(\tau), \qquad \boldsymbol{X}_1(0) = \boldsymbol{X}_0(\tau), \qquad \boldsymbol{U}_1(0) = \boldsymbol{O}_n.
\end{aligned} \tag{2.4.18}$$

... ...

N°. Если обозначить через $\boldsymbol{Z}_N(s)$ вектор $\operatorname{col}\big(\boldsymbol{Z}_{N-1}(s), \boldsymbol{\Lambda}_N(s), \boldsymbol{X}_N(s), \boldsymbol{U}_N(s)\big)$, то продолжая подобным образом и далее, находим, что вектор представляющий поведение ВСП $\boldsymbol{X}(t)$ на сегментах Δ_0, Δ_1, ..., Δ_N, будет решением системы СОДУ, полученной добавлением к уравнениям для вектора $\boldsymbol{Z}_{N-1}(s)$ уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{\Lambda}}_N(s) = \boldsymbol{O}_n,\\
&\dot{\boldsymbol{X}}_N(t) = \boldsymbol{\mathcal{S}}(s_N)\,\dot{\boldsymbol{X}}_{N-1}(s) + \boldsymbol{\mathcal{A}}(s_N)\,\boldsymbol{X}_N(t) + \boldsymbol{\mathcal{B}}(s_N)\,\boldsymbol{X}_{N-1}(s) + \boldsymbol{c}(s_N) +\\
&\quad + \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_N)\,\big[\boldsymbol{\Lambda}_N(s) + \boldsymbol{U}_N(s) - \boldsymbol{U}_{N-1}(s)\big] +\\
&\quad + \big[\big[\!\big[\boldsymbol{\mathcal{H}}(s_N)\big]\!\big] :: \boldsymbol{X}_N(s) + \big[\!\big[\boldsymbol{\mathcal{J}}(s_N)\big]\!\big] :: \boldsymbol{X}_{N-1}(s) + \boldsymbol{\mathcal{G}}(s_N)\big]\,\boldsymbol{V}_N(s),\\
&\dot{\boldsymbol{U}}_N(s) = \boldsymbol{X}_N(s),\\
&\boldsymbol{\Lambda}_N(0) = \boldsymbol{U}_{N-1}(\tau), \qquad \boldsymbol{X}_N(0) = \boldsymbol{X}_{N-1}(\tau), \qquad \boldsymbol{U}_N(0) = \boldsymbol{O}_n.
\end{aligned} \tag{2.4.19}$$

Теперь построенную выше на основе разработанной схемы цепочку параметрических линейных СОДУ без запаздывания можно использовать для получения новой последовательности уравнений – последовательности ОДУ для первых и старших моментов векторов $\boldsymbol{Z}_0$, $\boldsymbol{Z}_1$, ...,

$\boldsymbol{Z}_N$, причем

$$\boldsymbol{m}_{Z_k}(s) = \mathbb{E}[\boldsymbol{Z}_k(s)]\,,$$
$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_k Z_k}(s) = \mathbb{E}\big[\mathring{\boldsymbol{Z}}_k(s)\big\{\mathring{\boldsymbol{Z}}_k(s)\big\}^{\intercal}\big],$$
$$\mathring{\boldsymbol{Z}}_k(s) = \boldsymbol{Z}_k(s) - \boldsymbol{m}_{Z_k}(s), \qquad k = 0, 1, 2, ..., N.$$

В связи с тем, что при $t = s + t_k$ искомые вектор $\boldsymbol{m}_X(t) = \boldsymbol{m}_{X_k}(s) = \mathbb{E}[\boldsymbol{X}_k(s)]$ и матрица

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}(t) = \big\{\boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_k X_k}(s)\big\} = \mathbb{E}\big[\big\{\boldsymbol{X}_k(s) - \boldsymbol{m}_{X_k}(s)\big\}\big\{\boldsymbol{X}_k(s) - \boldsymbol{m}_{X_k}(s)\big\}^{\intercal}\big]$$

являются блоками вектора $\boldsymbol{m}_{Z_k}(s)$ и матрицы $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_k Z_k}(s)$ соответственно, необходимо вычислить последние, а затем выбрать из них необходимые элементы.

Несложно увидеть, что на каждом этапе k ($k = 0, 1, ..., N$) после исключения $\dot{\boldsymbol{X}}_{k-1}$ с использованием предыдущих уравнений структура расширенных систем СОДУ принимает следующую форму:

$$\dot{\boldsymbol{Z}}_k(s) = \boldsymbol{f}^{[k]}\big(\boldsymbol{Z}_k(s), s\big) + \boldsymbol{\mathcal{G}}^{[k]}\big(\boldsymbol{Z}_k(s), s\big)\,\boldsymbol{V}_k(s), \tag{2.4.20}$$

где

$$\boldsymbol{Z}_k(s) = \big\{\underline{Z}_{ki}(s),\ i = \overline{1, i_k^\star}\big\}, \qquad \boldsymbol{V}_k(s) = \big\{\underline{V}_{kj}(s),\ j = \overline{1, j_k^\star}\big\},$$
$$\boldsymbol{f}^{[k]} = \big\{f_{ki}\big(\boldsymbol{Z}_k(s), s\big),\ i = \overline{1, i_k^\star}\big\}, \qquad f_{ki} = f_{ki0}(s) + \sum_{\ell=1}^{i_k^\star} f_{ki\ell}(s)\,\underline{Z}_{k\ell}(s),$$
$$\boldsymbol{\mathcal{G}}^{[k]} = \big\{g_{kij},\ i = \overline{1, i_k^\star}, j = \overline{1, j_k^\star}\big\}, \qquad g_{kij} = g_{kij0}(s) + \sum_{\ell=1}^{i_k^\star} g_{kij\ell}(s)\,\underline{Z}_{k\ell}(s),$$
$$i_k^\star = 3\,n\,(k+1), \qquad j_k^\star = m\,(k+1).$$

Используя компоненты векторов $\boldsymbol{f}^{[k]}$ и матриц $\boldsymbol{\mathcal{G}}^{[k]}$, на по формулам Стратоновича можно вычислить коэффициенты сноса и диффузии

$$\underline{a}_i^{[k]} = f_{ki} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i^\star}\sum_{\ell=1}^{j^\star}\frac{\partial g_{ki\ell}}{\partial \underline{Z}_{kj}}\,g_{j\ell}^{[k]}, \qquad \underline{b}_{ij}^{[k]} = \sum_{\ell=1}^{j^\star} g_{ki\ell}\,g_{kj\ell}, \quad i, j = 1, 2, ..., i^\star,$$

уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК-уравнения) для плотности вероятности вектора $\boldsymbol{Z}_k(s)$. В свою очередь, на основе этого уравнения

может быть построена замкнутая система ОДУ для элементов векторных и матричных функций $\boldsymbol{m}_{Z_k}(s)$ и $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_k Z_k}(s)$ в следующем виде:

$$\dot{m}_{\underline{Z}_{ki}}(s) = \mathbb{E}\big[\underline{a}_i^{[k]}\big],$$
$$\dot{\mathcal{K}}_{\underline{Z}_{ki}\underline{Z}_{kj}}(s) = \mathbb{E}\big[\big(\underline{Z}_{ki} - m_{Z_{ki}}\big)\cdot \underline{a}_j^{[k]} + \big(Z_{jk} - m_{Z_{kj}}\big)\cdot \underline{a}_i^{[k]} + \underline{b}_{ij}^{[k]}\big].$$

К этим уравнениям необходимо добавить начальные условия, форма которых будет такова:

$$\boldsymbol{m}_{Z_0}(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_X^0 \\ \boldsymbol{m}_X^0 \\ \boldsymbol{O}_n \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_0 Z_0}(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{m}_{Z_k}(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_{Z_{k-1}}(0) \\ \boldsymbol{m}_{U_{k-1}}(\tau) \\ \boldsymbol{m}_{X_{k-1}}(\tau) \\ \boldsymbol{O}_n \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_k Z_k}(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_{k-1}Z_{k-1}}(0) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{k12} \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{k21} & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{k22} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_{k12} = \boldsymbol{\mathcal{K}}_{k21}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YU_{k-1}}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_{k-1}}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YU_{k-1}}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_{k-1}}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{U_0U_{k-1}}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{U_0X_{k-1}}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0U_{k-1}}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0X_{k-1}}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{U_{k-2}U_{k-1}}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{U_{k-2}X_{k-1}}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{k-2}U_{k-1}}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{k-2}X_{k-1}}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_{k22} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{K}}_{U_{k-1}U_{k-1}}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{U_{k-1}X_{k-1}}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{k-1}U_{k-1}}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{k-1}X_{k-1}}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \end{bmatrix}.$$

Уравнения для старших моментов СП $\boldsymbol{X}(t)$ можно также получить из соответствующего ФПК-уравнения. Для этого необходимо умножить обе части этого уравнения на

$$\big(u_k\big)^{\alpha} \equiv \big(u_{k1}\big)^{\alpha_1}\big(u_{k2}\big)^{\alpha_2}\dots\big(u_{ki_k^\star}\big)^{\alpha_{i_k^\star}}$$

(α – мультииндекс, $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{i^\star}\}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_{i^\star}$) и проинтегрировать по пространству $\mathbb{R}^{i^\star}$. В результате формально получится

следующая бесконечная система ОДУ относительно смешанных начальных моментов:

$$\dot{m}_{Z_k\alpha}(s) = \sum_{i,j=1}^{i_k^\star} \alpha_i\,\alpha_j\,\mathbb{E}\Big[\underline{b}_{ij}^{[k]}\,\big(Z_k\big)^{\alpha-e_{ij}}(s)\Big] + \\ + \sum_{i=1}^{i_k^\star} \alpha_i\,\mathbb{E}\Big[\underline{a}_{i}^{[k]}\,\big(Z_k\big)^{\alpha-e_{i}}(s)\Big] + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i_k^\star} \alpha_i\,(\alpha_i-1)\,\mathbb{E}\Big[\underline{b}_{ii}^{[k]}\,\big(Z_k\big)^{\alpha-2e_{i}}(s)\Big],$$

где $\alpha \geqslant 0$, $e_i = \{\delta_{ij}\}_{j=1}^{i^\star}$, $e_{ij} = e_i + e_j$, δ_{ij} – символ Кронекера. Заметим, что вследствие формы линейных параметрических СОДУ (2.4.17)–(2.4.19) для любого $|\alpha| > 0$ система ОДУ для $m_{Z_k\alpha}(s)$ будет замкнутой.

Пример 2.4.3. Исследуем характеристики переходного режима, возникающего в системе, которая при $t > 0$ описывается уравнением

$$\ddot{X}(t) + 2\,\alpha_1\,\dot{X}(t) + \omega_1^2\,X(t) + \nu\,\ddot{X}(t-\tau) + 2\,\alpha_2\,\dot{X}(t-\tau) + \omega_2^2\,X(t-\tau) + \\ + \beta\int\limits_{t-\tau}^{t} X(\theta)\,d\theta = \big[\gamma_1\,X(t) + \gamma_2\,X(t-\tau) + \mu\big]\,V(t), \quad (2.4.21)$$

а на полуинтервале $(-\tau, 0]$ поведение этой системы управляется уравнением

$$\ddot{X}(t) + 2\,\alpha_0\,\dot{X}(t) + \omega_0^2\,X(t) = \big[\gamma_0\,X(t) + \mu_0\big]\,V(t) \quad (2.4.22)$$

с начальным условием

$$\operatorname{col}\big(X(-\tau), \dot{X}(-\tau)\big) \sim \mathcal{N}\big(\operatorname{col}(m_1^0, m_2^0), \operatorname{diag}(\sigma_1^0, \sigma_2^0)\big), \quad (2.4.23)$$

где $\alpha_1 > 0$, $\omega_1 > 0$, ν, $\alpha_2 > 0$, $\omega_2 > 0$, β, γ_1, γ_2, μ, $\alpha_0 > 0$, $\omega_0 > 0$, γ_0, μ_0 – постоянные величины, $\mathcal{N}(\cdot,\cdot)$ – нормальное распределение.

Если обозначить $X(t)$ через $X_1(t)$, $\dot{X}(t)$ – через $X_2(t)$ $(n = 2)$, а $V(t)$ – через $V_1(t)$ $(m = 1)$, то, приводя уравнения (2.4.21), (2.4.22) к виду (2.4.14), (2.4.15), получим, что:

$$\boldsymbol{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\nu \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_1^2 & -2\,\alpha_1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\omega_2^2 & -2\,\alpha_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{Q}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\beta & 0 \end{bmatrix}, \quad [\![\boldsymbol{\mathcal{H}}(t)]\!] = \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} \ddagger \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [\![\boldsymbol{\mathcal{J}}(t)]\!] = \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} \ddagger \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{G}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mu \end{bmatrix},$$

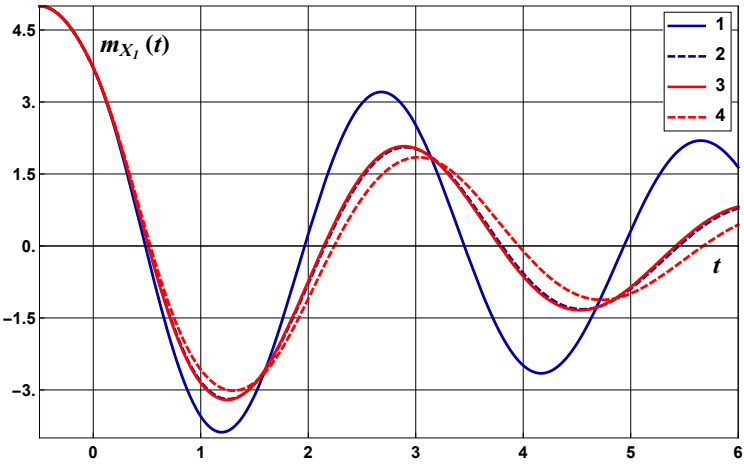


Рис. 2.4.9

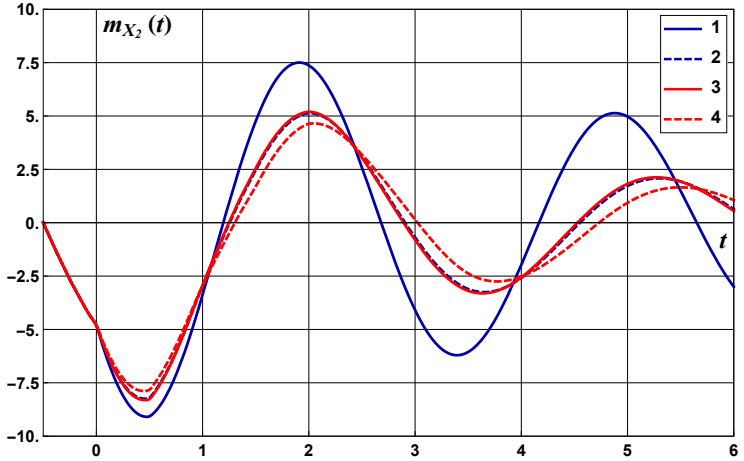


Рис. 2.4.10

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\,\alpha_0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [\![\boldsymbol{\mathcal{H}}_0(t)]\!] = \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma_0 \end{bmatrix} \ddagger \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{G}}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \mu_0 \end{bmatrix},$$

С использованием разработанной схемы был проведен ряд численно-аналитических расчетов, причем необходимые уравнения сначала генерировались в символьной форме, а затем численно интегрировались стан-

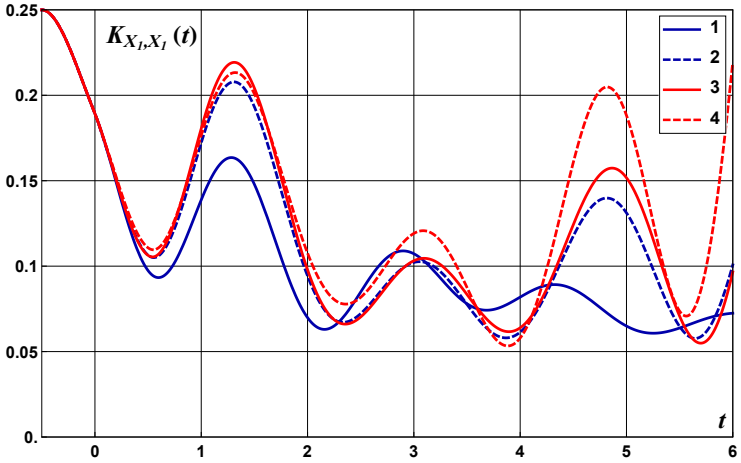


Рис. 2.4.11

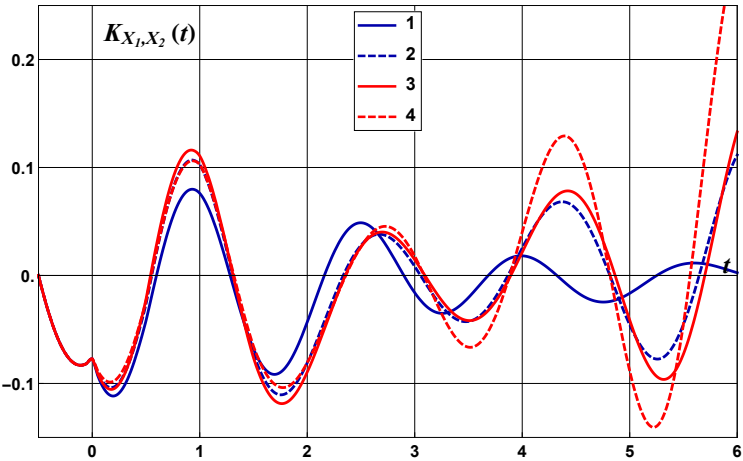


Рис. 2.4.12

дартными средствами пакета `Mathematica`. Неизменяемыми данными для этих расчетов были:

$$\alpha_1 = 0.1; \quad \alpha_2 = 0.125; \quad \omega_1 = 2.0; \quad \omega_2 = 1.0; \quad \gamma_1 = 0.1; \quad \gamma_2 = 0.05;$$
$$\mu = 0.125; \quad \tau = 0.5; \quad \alpha_0 = 0.125; \quad \omega_0 = 1.5; \quad \gamma_0 = 0.125; \quad \mu_0 = 0.2;$$

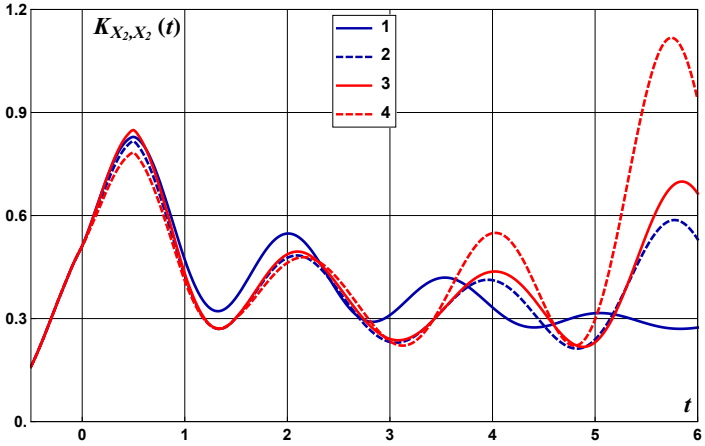


Рис. 2.4.13

$$\boldsymbol{m}_X^0 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 = \operatorname{diag}(0.25, 0.16).$$

При этом варьируемыми параметрами были ν и β, которые принимали следующие значения:

1) $\nu = 0.2;\ \beta = 0.125;$ 3) $\nu = 0.5;\ \beta = 0.6;$
2) $\nu = 0.5;\ \beta = 0.5;$ 4) $\nu = 0.6;\ \beta = 0.5.$

Результаты расчетов характеристик переходных процессов представлены на следующих рисунках: на рис. 2.4.9 и 2.4.10 – поведение математических ожиданий $m_{X_1}(t)$ и $m_{X_2}(t)$; на рис. 2.4.11, 2.4.12 и 2.4.13 – изменение компонент $\mathcal{K}_{X_1X_1}(t)$, $\mathcal{K}_{X_1X_2}(t)$ и $\mathcal{K}_{X_2X_2}(t)$ матрицы дисперсий. На всех этих рисунках кривые, соответствующие варьируемым параметрам группы 1, отмечены цифрой 1, группы 2 – цифрой 2, группы 3 – цифрой 3 и, наконец, группы 4 – цифрой 4. На представленных графиках несложно усмотреть существенную зависимость вычислявшихся моментов от ν и β.

2.4.4. Анализ линейных СОДУ с конечными распределенными и сосредоточенными запаздываниями и случайными входами в виде аддитивных и мультипликативных белых шумов

Рассмотрим систему линейных параметрических СОДУ Стратоновича с конечными сосредоточенными $\tau > 0$ и распределенными запаздываниями следующего вида [248]:

$$d\boldsymbol{X}(t) = \Big[\boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{\mathcal{R}}(t)\,\boldsymbol{X}(t-\tau) + \boldsymbol{\mathcal{Q}}(t)\int\limits_{t-\tau}^{t}\boldsymbol{\Phi}(\theta)\,\boldsymbol{X}(\theta)\,d\theta +$$
$$+\,\boldsymbol{c}(t)\Big]\,dt + \Big[[\![\boldsymbol{\mathcal{B}}(t)]\!]::\boldsymbol{X}(t) + [\![\boldsymbol{\mathcal{H}}(t)]\!]::\boldsymbol{X}(t-\tau) +$$
$$+\,[\![\boldsymbol{\mathcal{J}}(t)]\!]::\int\limits_{t-\tau}^{t}\boldsymbol{\Psi}(\theta)\,\boldsymbol{X}(\theta)\,d\theta + \boldsymbol{\mathcal{G}}(t)\Big]\circ d\boldsymbol{W}(t), \qquad (2.4.24)$$
$$t_1 = t_0 + \tau < t \leqslant T < +\infty,$$

где t – время; $::$ – символ умножения трехмерной матрицы на вектор:

$$[\![\boldsymbol{\mathcal{P}}(t)]\!]::\boldsymbol{\Lambda}(t) = \Big\{\sum_{\ell=1}^{r} p_{ij\ell}(t)\,\Lambda_\ell(t),\ i=\overline{1,r},\ j=\overline{1,q}\Big\},$$
$$[\![\boldsymbol{\mathcal{P}}(t)]\!] = \{p_{ij\ell}(t)\} \in \mathbb{M}_{r\times q\times r}, \qquad \boldsymbol{\Lambda}(t) \in \mathbb{R}^r;$$

$\mathbb{M}_{\ell_1\times\ell_2}$ и $\mathbb{M}_{\ell_1\times\ell_2\times\ell_3}$ – линейные пространства всех $(\ell_1\times\ell_2)$ и $(\ell_1\times\ell_2\times\ell_3)$ матриц соответственно; $\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^n$ – вектор состояния; $\boldsymbol{W}\in\mathbb{R}^m$ – вектор независимых случайных винеровских процессов.

Будем считать, что на интервале $(t_0,t_1]$ вектор состояния $\boldsymbol{X}(t)$ удовлетворяет системе СОДУ без запаздывания:

$$d\boldsymbol{X}(t) = \Big[\boldsymbol{\mathcal{A}}_0(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{c}_0(t)\Big]\,dt + \Big[\,[\![\boldsymbol{\mathcal{B}}_0(t)]\!]::\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(t)\Big]\circ d\boldsymbol{W}(t),$$
$$\boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}^0, \qquad (2.4.25)$$

причем в уравнениях (2.4.24) и (2.4.25) $\boldsymbol{\mathcal{A}}(t)$, $\boldsymbol{\mathcal{R}}(t)$, $\boldsymbol{\mathcal{Q}}(t)$, $\boldsymbol{\Phi}(\theta)$, $[\![\boldsymbol{\mathcal{B}}(t)]\!]$, $[\![\boldsymbol{\mathcal{H}}(t)]\!]$, $[\![\boldsymbol{\mathcal{J}}(t)]\!]$, $\boldsymbol{\Psi}(\theta)$, $\boldsymbol{\mathcal{G}}(t)$, $\boldsymbol{\mathcal{A}}_0(t)$, $[\![\boldsymbol{\mathcal{B}}_0(t)]\!]$, $\boldsymbol{\mathcal{G}}_0(t)$ и $\boldsymbol{c}(t)$, $\boldsymbol{c}_0(t)$ – известные непрерывные матричные и векторные функции. Кроме того, предположим, что известны все необходимые числовые характеристики случайного вектора $\boldsymbol{X}^0$. В частности, пусть в начальный момент времени t_0 для вектора $\boldsymbol{X}(t_0)$ заданы вектор математических ожиданий $\boldsymbol{m}_X^0 = \mathbb{E}\big[\boldsymbol{X}^0\big]$ и ковариационная матрица $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 = \mathbb{E}\big[(\boldsymbol{X}^0-\boldsymbol{m}^0)(\boldsymbol{X}^0-\boldsymbol{m}^0)^{\intercal}\big]$. Далее в рамках данного раздела предполагается, что компоненты всех векторных случайных процессов (состояния и шумов) являются стохастически непрерывными на отрезке $[t_0,T]$.

Задачей исследования является получение систем ОДУ без запаздывания для компонент векторной функции математических ожиданий

$\boldsymbol{m}_X(t) = \mathbb{E}[\boldsymbol{X}(t)]$ и матричной функции ковариаций

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}(t) = \mathbb{E}\big[\big\{\boldsymbol{X}(t) - \boldsymbol{m}_X(t)\big\}\big\{\boldsymbol{X}(t) - \boldsymbol{m}_X(t)\big\}^{\mathsf{T}}\big]$$

$\boldsymbol{X}(t)$ при любом $t > t_0$.

Построим общую систему ОДУ, которая описывает поведение первых моментных функций, включающих компоненты вектора функций математического ожидания $\underline{\boldsymbol{m}}_Z(s) = \{\underline{m}_i(s)\} = \mathbb{E}[\underline{\boldsymbol{Z}}(s)]$ и матрицы ковариаций

$$\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_{ZZ}(s) = \{\underline{\mathcal{K}}_{ij}(s)\} = \mathbb{E}\big[\big\{\underline{\boldsymbol{Z}}(s) - \underline{\boldsymbol{m}}_Z(s)\big\}\big\{\underline{\boldsymbol{Z}}(s) - \underline{\boldsymbol{m}}_Z(s)\big\}^{\mathsf{T}}\big]\,,$$

для вектора состояния векторного случайного процесса $\underline{\boldsymbol{Z}}(s) = \{\underline{Z}_i(s)\} \in \mathbb{R}^r$ линейной стохастической дифференциальной системы с аддитивными и мультипликативными шумами в форме Стратоновича:

$$d\underline{\boldsymbol{Z}}(s) = \big[\underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(s)\,\underline{\boldsymbol{Z}}(s) + \underline{\boldsymbol{c}}(s)\big]\,ds + \big[\,[\![\underline{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(s)]\!] :: \underline{\boldsymbol{Z}}(s) + \underline{\boldsymbol{\mathcal{G}}}(s)\,\big] \circ d\underline{\boldsymbol{W}}(s),$$

$$s_* < s \leqslant s^*, \tag{2.4.26}$$

$$\underline{\boldsymbol{Z}}(s_*) = \underline{\boldsymbol{Z}}_*, \tag{2.4.27}$$

где основная часть обозначений соответствует обозначениям, введенным в начале статьи, а точка указывает на производную по s. Начальное положение, задаваемое вектором $\underline{\boldsymbol{Z}}_* = \big(\underline{Z}_{*1}, \underline{Z}_{*2}, ..., \underline{Z}_{*r}\big)$, является случайным и распределено с плотностью вероятности $\hat{p}_*(\underline{\boldsymbol{z}})$, где $\underline{\boldsymbol{z}} = (\underline{z}_1, \underline{z}_2, ..., \underline{z}_r)$. Его среднее значение равно $\underline{\boldsymbol{m}}^*_Z = \mathbb{E}[\underline{\boldsymbol{Z}}_*]$, а его матрица ковариаций –

$$\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^*_{ZZ} = \mathbb{E}[(\underline{\boldsymbol{Z}}_* - \underline{\boldsymbol{m}}^*_Z)(\underline{\boldsymbol{Z}}_* - \underline{\boldsymbol{m}}^*_Z)^{\mathsf{T}}]\,.$$

Возмущение $\{\underline{\boldsymbol{W}}(s) = \{\underline{W}_i(s)\},\ s_* \leqslant s \leqslant s^* \in \mathbb{R}^q\}$ – винеровский стохастический процесс с независимыми компонентами. В уравнениях (2.4.26) $\underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(s) = \{\underline{a}_{ij}(s)\}$, $[\![\underline{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(s)]\!] = \{\underline{b}_{ijk}(s)\}$ и $\underline{\boldsymbol{\mathcal{G}}}(s) = \{\underline{g}_{ij}(s)\}$ являются детерминированными вещественными матрицами в $\mathbb{M}_{r\times r}$, $\mathbb{M}_{r\times q\times r}$ и $\mathbb{M}_{r\times q}$ соответственно, $\underline{\boldsymbol{c}}(s) = \{\underline{c}_i(s)\} \in \mathbb{R}^r$ – детерминированный вещественный вектор. Предполагается, что элементы всех этих матриц и векторов являются непрерывными функциями относительно аргумента s.

Коэффициенты сноса $\hat{a}_i$ и коэффициенты диффузии $\hat{b}_{ij}$ уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК-уравнения)

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial s} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{r} \frac{\partial^2\big(\hat{b}_{ij}\,\hat{p}\big)}{\partial \underline{z}_i\,\partial \underline{z}_j} - \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial\big(\hat{a}_i\,\hat{p}\big)}{\partial \underline{z}_i}, \tag{2.4.28}$$

$$\hat{p}\,(\underline{\boldsymbol{z}}, s_*) = \hat{p}_*(\underline{\boldsymbol{z}}), \tag{2.4.29}$$

где плотность вероятности $\hat{p}\,(\underline{\boldsymbol{z}}, s)$ вектора состояния $\underline{\boldsymbol{Z}}(s)$ можно рассчитать, если учесть следующие формулы:

$$\hat{a}_i = \sum_{\ell=1}^{r} \underline{a}_{i\ell}\, \underline{z}_\ell + \underline{c}_i + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{k=1}^{q} \underline{b}_{ik\nu} \Big(\sum_{\ell=1}^{r} \underline{b}_{\nu k\ell}\, \underline{z}_\ell + \underline{g}_{\nu k} \Big), \tag{2.4.30}$$

$$\hat{b}_{ij} = \sum_{k=1}^{q} \Big(\sum_{\ell=1}^{r} \underline{b}_{ik\ell}\, \underline{z}_\ell + \underline{g}_{ik} \Big) \Big(\sum_{\ell=1}^{r} \underline{b}_{jk\ell}\, \underline{z}_\ell + \underline{g}_{jk} \Big). \tag{2.4.31}$$

Используя уравнение (2.4.28) и соотношения (2.4.30), (2.4.31), можно получить ОДУ для математических ожиданий и ковариаций, которые принимают следующий вид:

$$\dot{\underline{\boldsymbol{m}}}_Z(s) = \underline{\boldsymbol{f}}\big(\underline{\boldsymbol{m}}_Z(s), s\big), \qquad \underline{\boldsymbol{m}}_Z(s_*) = \underline{\boldsymbol{m}}^*_Z, \tag{2.4.32}$$

$$\dot{\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}}_{ZZ}(s) = \underline{\boldsymbol{\mathcal{F}}}\big(\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_{ZZ}(s), \underline{\boldsymbol{m}}_Z(s), s\big), \qquad \underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_{ZZ}(s_*) = \underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^*_{ZZ}, \tag{2.4.33}$$

где $\underline{\boldsymbol{f}} = \{\underline{f}_{\,i}\} \in \mathbb{R}^r$ и $\underline{\boldsymbol{\mathcal{F}}} = \{\underline{\mathcal{F}}_{\,ij}\} \in \mathbb{M}_{r\times r}$ – детерминированные векторная и матричная функции, компоненты которых можно вычислить, если воспользоваться соотношениями вида:

$$\underline{f}_{\,i} = \sum_{\ell=1}^{r} \underline{a}_{i\ell}\, \underline{m}_\ell + \underline{c}_i + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{k=1}^{q} \underline{b}_{ik\nu} \Big(\sum_{\ell=1}^{r} \underline{b}_{\nu k\ell}\, \underline{m}_\ell + \underline{g}_{\nu k} \Big), \quad i = 1, 2, ..., r;$$

$$\begin{aligned}
\underline{\mathcal{F}}_{ij} &= \\
&= \sum_{\ell=1}^{r} \Big[\underline{\mathcal{K}}_{i\ell} \Big(\underline{a}_{j\ell} + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{k=1}^{q} \underline{b}_{jk\nu}\, \underline{b}_{\nu k\ell} \Big) + \underline{\mathcal{K}}_{j\ell} \Big(\underline{a}_{i\ell} + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{k=1}^{q} \underline{b}_{ik\nu}\, \underline{b}_{\nu k\ell} \Big) \Big] + \\
&+ \sum_{k=1}^{q} \Big[\sum_{\ell_1,\ell_2=1}^{r} \underline{b}_{ik\ell_1}\, \underline{b}_{jk\ell_2} \big(\underline{\mathcal{K}}_{\ell_1\ell_2} + \underline{m}_{\ell_1} \underline{m}_{\ell_2} \big) + \\
&+ \sum_{\ell=1}^{r} \big(\underline{g}_{ik}\, \underline{b}_{jk\ell} + \underline{g}_{jk}\, \underline{b}_{ik\ell} \big)\, \underline{m}_\ell + \underline{g}_{ik}\, \underline{g}_{jk} \Big], \quad i, j = 1, 2, ..., r.
\end{aligned}$$

Для получение СОДУ без запаздывания применим комбинацию классического метода шагов и метода расширения пространства состояний.

Для этого рассмотрим равномерную временную сетку $t_q = t_0 + q \cdot \tau$, $q = 0, 1, 2, ..., N$ $\big(\tau\,(N+1) \geqslant T\big)$ и введем новую временнỳю переменную s, изменяющуюся на промежутке $[0, \tau]$, а также следующие обозначения:

$$s_q = s + t_q, \quad \Delta_q = (t_q, t_{q+1}], \quad \boldsymbol{X}_q(s) = \boldsymbol{X}(s_q), \quad \boldsymbol{X}_q(0) = \boldsymbol{X}_{q-1}(\tau),$$

$$\boldsymbol{W}_q(s) = \boldsymbol{W}(s_q), \qquad \boldsymbol{W}_q(0) = \boldsymbol{W}_{q-1}(\tau), \qquad \boldsymbol{Y}(s) \equiv \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^0,$$

$$\boldsymbol{U}_q(s) = \int\limits_0^s \boldsymbol{\Phi}(t_q + \theta)\, \boldsymbol{X}_q(\theta)\, d\theta, \qquad \boldsymbol{V}_q(s) = \int\limits_0^s \boldsymbol{\Psi}(t_q + \theta)\, \boldsymbol{X}_q(\theta)\, d\theta,$$

$$\boldsymbol{U}_q^\star(s) \equiv \boldsymbol{U}_q^\star = \boldsymbol{U}_{q-1}(\tau), \qquad \boldsymbol{V}_q^\star(s) \equiv \boldsymbol{V}_q^\star = \boldsymbol{V}_{q-1}(\tau), \quad q \geqslant 1,$$

$$n_2 = 2\,n, \qquad n_3 = 3\,n, \qquad n_4 = 4\,n, \qquad n_5 = 5\,n.$$

Рассмотрим последовательность полуинтервалов (сегментов) Δ_q.

0°. На сегменте Δ_0 систему СОДУ без запаздывания для вектора $\boldsymbol{Z}_0(s) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{Y}(s), \boldsymbol{X}_0(s), \boldsymbol{U}_0(s), \boldsymbol{V}_0(s)\big)$ представим в виде:

$$\begin{aligned}
&d\boldsymbol{Y}(s) = \boldsymbol{O}_n\, ds, \qquad \boldsymbol{Y}(0) = \boldsymbol{X}^0,\\
&d\boldsymbol{X}_0(s) = \Big[\boldsymbol{\mathcal{A}}_0(s_0)\, \boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{c}_0(s_0)\Big]\, ds +\\
&\quad + \Big[\, [\![\boldsymbol{\mathcal{B}}_0(s_0)]\!] :: \boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s_0)\Big] \circ d\boldsymbol{W}_0(s), \quad \boldsymbol{X}_0(0) = \boldsymbol{X}^0, \qquad (2.4.34)\\
&d\boldsymbol{U}_0(s) = \boldsymbol{\Phi}(s_0)\, \boldsymbol{X}_0(s)\, ds, \qquad \boldsymbol{U}_0(0) = \boldsymbol{O}_n,\\
&d\boldsymbol{V}_0(s) = \boldsymbol{\Psi}(s_0)\, \boldsymbol{X}_0(s)\, ds, \qquad \boldsymbol{V}_0(0) = \boldsymbol{O}_n.
\end{aligned}$$

Если воспользоваться объединенной формой уравнений (2.4.34):

$$\begin{aligned}
d\boldsymbol{Z}_0(s) &= \big[\boldsymbol{\mathcal{A}}_0^+(s)\, \boldsymbol{Z}_0(s) + \boldsymbol{c}_0^+(s)\big]\, ds +\\
&+ \big[\, [\![\boldsymbol{\mathcal{B}}_0^+(s)]\!] :: \boldsymbol{Z}_0(s) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0^+(s)\,\big] \circ d\boldsymbol{W}_0^+(s), \qquad (2.4.35)\\
\boldsymbol{Z}_0(0) &= \operatorname{col}\big(\boldsymbol{X}^0, \boldsymbol{X}^0, \boldsymbol{O}_n, \boldsymbol{O}_{n_2}\big), \qquad (2.4.36)
\end{aligned}$$

где

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_0^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n_2} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{A}}_0(s_0) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n_2} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\Phi}(s_0) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n_2} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\Psi}(s_0) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n_2} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{c}_0^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O}_n \\ \boldsymbol{c}_0(s_0) \\ \boldsymbol{O}_{n_2} \end{bmatrix},$$

$$[\![\boldsymbol{\mathcal{B}}_0^+(s)]\!] = \begin{bmatrix} [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n_2\times m\times n} \end{bmatrix} \ddagger \begin{bmatrix} [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{B}}_0(s_0)]\!] \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n_2\times m\times n} \end{bmatrix} \ddagger \begin{bmatrix} [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n_2} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n_2} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n_2\times m\times n_2} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}_0^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s_0) \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n_2\times m} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{W}_0^+(s) = \boldsymbol{W}_0(s), \qquad r_0 = n_4,$$

$\boldsymbol{O}_\ell \in \mathbb{R}^\ell$, $\boldsymbol{\mathcal{O}}_{\ell_1\times\ell_2} \in \mathbb{M}_{\ell_1\times\ell_2}$ и $[\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{\ell_1\times\ell_2\times\ell_3} \in \mathbb{M}_{\ell_1\times\ell_2\times\ell_3}$ – нулевой вектор, обычная и трехмерная нулевые матрицы соответственно, и сравнить системы уравнений (2.4.35), (2.4.36) и (2.4.26), (2.4.27), то можно заключить, что эти системы будут одинаковы, если

$$r = r_0, \qquad q = m, \qquad s_* = 0, \qquad s^* = \tau, \qquad \underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_0^+(s),$$
$$\underline{\boldsymbol{c}}(s) = \boldsymbol{c}_0^+(s), \qquad [\![\underline{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(s)]\!] = [\![\boldsymbol{\mathcal{B}}_0^+(s)]\!], \qquad \underline{\boldsymbol{\mathcal{G}}}(s) = \boldsymbol{\mathcal{G}}_0^+(s).$$

Поэтому можно записать уравнение и начальное условие для плотности вероятности $p_{Z_0}(\boldsymbol{z}_0, s)$ расширенного векторного процесса состояния $\boldsymbol{Z}_0(s)$:

$$\frac{\partial p_{Z_0}}{\partial s} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{r} \frac{\partial^2\bigl(\tilde{b}_{0ij}\, p_{Z_0}\bigr)}{\partial z_{0i}\,\partial z_{0j}} - \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial\bigl(\tilde{a}_{0i}\, p_{Z_0}\bigr)}{\partial z_{0i}}, \tag{2.4.37}$$

$$p_{Z_0}(\boldsymbol{z}_0, 0) \equiv p_{Z_0}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{v}_0, 0) = p^{\,0}(\boldsymbol{x}_0)\,\delta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}_0)\,\delta(\boldsymbol{u}_0)\,\delta(\boldsymbol{v}_0),$$

где коэффициенты $\tilde{a}_{0i}$ и $\tilde{b}_{0ij}$ могут быть вычислены по формулам (2.4.30), (2.4.31) как $\hat{a}_i$ and $\hat{b}_{ij}$ соответственно, $\delta(\boldsymbol{d}) = \delta(d_1)\,\delta(d_2)\,...\,\delta(d_\nu)$, если $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^\nu$.

Более того, этот факт дает возможность построить явный вид уравнений (2.4.32) и (2.4.33). Конечной точкой этого этапа является определение начальных условий для $\boldsymbol{m}_{Z_0}(s)$ и $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_0Z_0}(s)$. Первые две группы таких условий таковы:

$$\boldsymbol{m}_{Z_0}(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_X^0 \\ \boldsymbol{m}_X^0 \\ \boldsymbol{O}_{n_2} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_0Z_0}(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n_2} \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0 & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n_2} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n_2\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n_2\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n_2\times n_2} \end{bmatrix}. \tag{2.4.38}$$

Далее надо вычислить $\boldsymbol{m}_{Z_0}(s)$ как $\underline{\boldsymbol{m}}_Z(s)$ и $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_0Z_0}(s)$ как $\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_{ZZ}(s)$.

1°. Определенный на полуинтервалах Δ_0 и Δ_1 случайный векторный процесс $\boldsymbol{Z}_1(s) = \operatorname{col}\bigl(\boldsymbol{Z}_0(s), \boldsymbol{X}_1(s), \boldsymbol{U}_1(s), \boldsymbol{V}_1(s), \boldsymbol{U}_1^\star(s), \boldsymbol{V}_1^\star(s)\bigr) \equiv \operatorname{col}\bigl(\boldsymbol{Y}(s), \boldsymbol{X}_0(s), \boldsymbol{U}_0(s), \boldsymbol{V}_0(s), \boldsymbol{X}_1(s),\ \boldsymbol{U}_1(s), \boldsymbol{V}_1(s), \boldsymbol{U}_1^\star(s), \boldsymbol{V}_1^\star(s)\bigr)$ будет удовлетворять системе СОДУ (2.4.34), к которой добавлены уравнения следующего вида:

$$d\boldsymbol{X}_1(s) = \Bigl[\boldsymbol{\mathcal{A}}(s_1)\,\boldsymbol{X}_1(s) + \boldsymbol{\mathcal{R}}(s_1)\,\boldsymbol{X}_0(s) +$$
$$+ \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_1)\bigl\{\boldsymbol{U}_1^\star(s) - \boldsymbol{U}_0(s) + \boldsymbol{U}_1(s)\bigr\} + \boldsymbol{c}(s_1)\Bigr]\,ds +$$

$$
\begin{aligned}
&+\Big[[\![\boldsymbol{\mathcal{B}}(s_1)]\!]::\boldsymbol{X}_1(s)+[\![\boldsymbol{\mathcal{H}}(s_1)]\!]::\boldsymbol{X}_0(s)+\\
&+[\![\boldsymbol{\mathcal{J}}(s_1)]\!]::\big\{\boldsymbol{V}_1^{\star}(s)-\boldsymbol{V}_0(s)+\boldsymbol{V}_1(s)\big\}+\boldsymbol{\mathcal{G}}(s_1)\Big]\circ d\boldsymbol{W}_1(s), \qquad (2.4.39)\\
&\boldsymbol{X}_1(0)=\boldsymbol{X}_0(\tau),\\
&d\boldsymbol{U}_1(s)=\boldsymbol{\Phi}(s_1)\,\boldsymbol{X}_1(s)\,ds, \qquad \boldsymbol{U}_1(0)=\boldsymbol{O}_n,\\
&d\boldsymbol{V}_1(s)=\boldsymbol{\Psi}(s_1)\,\boldsymbol{X}_1(s)\,ds, \qquad \boldsymbol{V}_1(0)=\boldsymbol{O}_n,\\
&d\boldsymbol{U}_1^{\star}(s)=\boldsymbol{O}_n\,ds, \qquad \boldsymbol{U}_1^{\star}(0)=\boldsymbol{U}_0(\tau),\\
&d\boldsymbol{V}_1^{\star}(s)=\boldsymbol{O}_n\,ds, \qquad \boldsymbol{V}_1^{\star}(0)=\boldsymbol{V}_0(\tau).
\end{aligned}
$$

Здесь учтено, что для $t\in(t_1,t_2]$ при $\boldsymbol{\Upsilon}=\boldsymbol{\Phi},\,\boldsymbol{\Psi}$

$$
\begin{aligned}
&\int_{t-\tau}^{t}\boldsymbol{\Upsilon}(\theta)\,\boldsymbol{X}(\theta)\,d\theta=\int_{t-\tau}^{t_1}\boldsymbol{\Upsilon}(\theta)\,\boldsymbol{X}(\theta)\,d\theta+\int_{t_1}^{t}\boldsymbol{\Upsilon}(\theta)\,\boldsymbol{X}(\theta)\,d\theta=\\
&=\int_{t_0}^{t_1}\boldsymbol{\Upsilon}(\theta)\,\boldsymbol{X}(\theta)\,d\theta-\int_{t_0}^{t-\tau}\boldsymbol{\Upsilon}(\theta)\,\boldsymbol{X}(\theta)\,d\theta+\int_{t_1}^{t}\boldsymbol{\Upsilon}(\theta)\,\boldsymbol{X}(\theta)\,d\theta=\\
&=\int_{0}^{\tau}\boldsymbol{\Upsilon}(t_0+\theta)\,\boldsymbol{X}_0(\theta)\,d\theta-\int_{0}^{s}\boldsymbol{\Upsilon}(t_0+\theta)\,\boldsymbol{X}_0(\theta)\,d\theta+\int_{0}^{s}\boldsymbol{\Upsilon}(t_1+\theta)\,\boldsymbol{X}_1(\theta)\,d\theta=\\
&=\begin{cases}\boldsymbol{U}_0(\tau)-\boldsymbol{U}_0(s)+\boldsymbol{U}_1(s), & \boldsymbol{\Upsilon}=\boldsymbol{\Phi},\\ \boldsymbol{V}_0(\tau)-\boldsymbol{V}_0(s)+\boldsymbol{V}_1(s), & \boldsymbol{\Upsilon}=\boldsymbol{\Psi}.\end{cases}
\end{aligned}
$$

Действуя так же, как на шаге $\mathbf{0^0}$, можно записать компактную форму уравнений (2.4.39):

$$
\begin{aligned}
d\boldsymbol{Z}_1(s) &= \big[\boldsymbol{\mathcal{A}}_1^{+}(s)\,\boldsymbol{Z}_1(s)+\boldsymbol{c}_1^{+}(s)\big]\,ds+\\
&+ \big[\,[\![\boldsymbol{\mathcal{B}}_1^{+}(s)]\!]::\boldsymbol{Z}_1(s)+\boldsymbol{\mathcal{G}}_1^{+}(s)\,\big]\circ d\boldsymbol{W}_1^{+}(s), \qquad (2.4.40)\\
\boldsymbol{Z}_1(0) &= \operatorname{col}\big(\boldsymbol{Z}_0(0),\boldsymbol{X}_0(\tau),\boldsymbol{O}_{2n},\boldsymbol{U}_0(\tau)\big),\boldsymbol{V}_0(\tau)\big), \qquad (2.4.41)
\end{aligned}
$$

где

$$
\boldsymbol{\mathcal{A}}_1^{+}(s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{A}}_0^{+}(s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n_4\times n_5}\\ \boldsymbol{\mathcal{A}}_{121}^{+} & \boldsymbol{\mathcal{A}}_{122}^{+}\end{bmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{\mathcal{A}}_{121}^{+}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{R}}(s_1) & -\boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_1) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n}\\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n_4\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n_4\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n_4\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n_4\times n}\end{bmatrix},
$$

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_{122}^{+} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{A}}(s_1) & \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_1) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_1) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\Phi}(s_1) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\Psi}(s_1) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n_2\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n_2\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n_2\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n_2\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n_2\times n} \end{bmatrix},$$

$$[\![\boldsymbol{\mathcal{B}}_1^{+}(s)]\!] = \begin{bmatrix} [\![\boldsymbol{\mathcal{B}}_{111}^{+}]\!] & [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n_4\times m\times r_1} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n_5\times m\times r_1} & [\![\boldsymbol{\mathcal{B}}_{122}^{+}]\!] \end{bmatrix},$$

$$[\![\boldsymbol{\mathcal{B}}_{111}^{+}]\!] = [\![\boldsymbol{\mathcal{B}}_0^{+}(s)]\!] \ddagger [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n_4\times m\times n_5},$$

$$[\![\boldsymbol{\mathcal{B}}_{122}^{+}]\!] = \begin{bmatrix} [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n_4\times m\times n} \end{bmatrix} \ddagger \begin{bmatrix} [\![\boldsymbol{\mathcal{H}}(s_1)]\!] \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n_4\times m\times n} \end{bmatrix} \ddagger \begin{bmatrix} [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n_4\times m\times n} \end{bmatrix} \ddagger$$

$$\ddagger \begin{bmatrix} -[\![\boldsymbol{\mathcal{J}}(s_1)]\!] \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n_4\times m\times n} \end{bmatrix} \ddagger \begin{bmatrix} [\![\boldsymbol{\mathcal{B}}(s_1)]\!] \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n_4\times m\times n} \end{bmatrix} \ddagger \begin{bmatrix} [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n_4\times m\times n} \end{bmatrix} \ddagger$$

$$\ddagger \begin{bmatrix} [\![\boldsymbol{\mathcal{J}}(s_1)]\!] \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n_4\times m\times n} \end{bmatrix} \ddagger \begin{bmatrix} [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n_4\times m\times n} \end{bmatrix} \ddagger \begin{bmatrix} [\![\boldsymbol{\mathcal{J}}(s_1)]\!] \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n_4\times m\times n} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{c}_1^{+}(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_0^{+}(s) \\ \boldsymbol{c}(s_1) \\ \boldsymbol{O}_{n_4} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{G}}_1^{+}(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{G}}_0^{+}(s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n_4\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{G}}(s_1) \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n_4\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n_4\times m} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{W}_1^{+}(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{W}_0^{+}(s) \\ \boldsymbol{W}_1(s) \end{bmatrix},$$

$$r_1 = n_4 + n_5 = 9, \qquad q_1 = 2\,m.$$

Как и выше, сравниваем структуры уравнений (2.4.40), (2.4.41) и (2.4.26), (2.4.27) и заключаем, что эти системы идентичны, если

$$r = r_1, \qquad q = q_1, \qquad s_* = 0, \qquad s^* = \tau, \qquad \underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_1^{+}(s),$$
$$\underline{\boldsymbol{c}}(s) = \boldsymbol{c}_1^{+}(s), \qquad [\![\underline{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(s)]\!] = [\![\boldsymbol{\mathcal{B}}_1^{+}(s)]\!], \qquad \underline{\boldsymbol{\mathcal{G}}}(s) = \boldsymbol{\mathcal{G}}_1^{+}(s).$$

Это позволяет построить ФПК-уравнение и начальное условие для плотности вероятности $p_{Z_1}(\boldsymbol{z}_1, s)$ расширенного вектора состояния $\boldsymbol{Z}_1(s)$ в следующем виде:

$$\frac{\partial p_{Z_1}}{\partial s} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{r} \frac{\partial^2\bigl(\tilde{b}_{1ij}\,p_{Z_1}\bigr)}{\partial z_{1i}\,\partial z_{1j}} - \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial\bigl(\tilde{a}_{1i}\,p_{Z_1}\bigr)}{\partial z_{1i}}, \tag{2.4.42}$$

$$p_{Z_1}(\boldsymbol{z}_1, 0) \equiv p_{Z_1}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{u}_1^{\star}, \boldsymbol{v}_1^{\star}, 0) =$$
$$= p_{Z_0}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{u}_1^{\star}, \boldsymbol{v}_1^{\star}, \tau)\,\delta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}_0)\,\delta(\boldsymbol{u}_0)\,\delta(\boldsymbol{v}_0)\,\delta(\boldsymbol{u}_1)\,\delta(\boldsymbol{v}_1).$$

Очевидно, что коэффициенты $\tilde{a}_{1i}$ и $\tilde{b}_{1ij}$ можно вычислить по формулам (2.4.30), (2.4.31) как $\hat{a}_i$ и $\hat{b}_{ij}$ соответственно.

Теперь можно построить явный вид уравнений (2.4.32) и (2.4.33). А заканчивается этот шаг фиксацией начальных условий для $\boldsymbol{m}_{Z_1}(s)$ и $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_1Z_1}(s)$ для $\boldsymbol{Z}_1(s)$ следующим образом:

$$\boldsymbol{m}_{Z_1}(0) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{m}_{Z_0}(0), \boldsymbol{m}_{X_0}(\tau), \boldsymbol{O}_{n_2}, \boldsymbol{m}_{U_0}(\tau), \boldsymbol{m}_{V_0}(\tau)\big),$$

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_1Z_1}(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_0Z_0}(0) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{112} \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{121} & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{122} \end{bmatrix}, \tag{2.4.43}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_{112} = \big(\boldsymbol{\mathcal{K}}_{121}\big)^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_0}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n_2} & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YU_0}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YV_0}(\tau) \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_0}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n_2} & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YU_0}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YV_0}(\tau) \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n_2\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n_2\times n_2} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n_2\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n_2\times n} \end{bmatrix}, \tag{2.4.44}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_{122} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0X_0}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n_2} & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0U_0}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0V_0}(\tau) \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n_2\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n_2\times n_2} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n_2\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n_2\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{U_0X_0}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n_2} & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{U_0U_0}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{U_0V_0}(\tau) \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{V_0X_0}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n_2} & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{V_0U_0}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{V_0V_0}(\tau) \end{bmatrix},$$

– и оценкой $\boldsymbol{m}_{Z_1}(s)$ как $\underline{\boldsymbol{m}}_Z(s)$ и $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_1Z_1}(s)$ как $\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_{ZZ}(s)$.

. . . . . .

N°. Обозначая через $\boldsymbol{Z}_N(s)$ расширенный случайный вектор состояния $\operatorname{col}\big(\boldsymbol{Z}_{N-1}(s), \boldsymbol{X}_N(s), \boldsymbol{U}_N(s), \boldsymbol{V}_N(s), \boldsymbol{U}^\star_N(s), \boldsymbol{V}^\star_N(s)\big)$, находим, что вектор $\boldsymbol{Z}_N(s)$, замещающий векторный случайный процесс $\boldsymbol{X}(t)$ и представляющий состояние исследуемой стохастической системы на полуинтервалах Δ_0, Δ_0, ..., Δ_N, будет решением системы СОДУ, полученной добавлением к уравнениям для вектора $\boldsymbol{Z}_{N-1}(s)$ уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned}
&d\boldsymbol{X}_N(s) = \Big[\boldsymbol{\mathcal{A}}(s_N)\,\boldsymbol{X}_N(s) + \boldsymbol{\mathcal{R}}(s_N)\,\boldsymbol{X}_{N-1}(s) + \\
&\quad + \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_N)\,\big\{\boldsymbol{U}^\star_N(s) - \boldsymbol{U}_{N-1}(s) + \boldsymbol{U}_N(s)\big\} + \boldsymbol{c}(s_N)\Big]\,ds + \\
&\quad + \Big[[\![\boldsymbol{\mathcal{B}}(s_N)]\!] :: \boldsymbol{X}_N(s) + [\![\boldsymbol{\mathcal{H}}(s_N)]\!] :: \boldsymbol{X}_{N-1}(s) + \\
&\quad + [\![\boldsymbol{\mathcal{J}}(s_N)]\!] :: \big\{\boldsymbol{V}^\star_N(s) - \boldsymbol{V}_{N-1}(s) + \boldsymbol{V}_N(s)\big\} + \boldsymbol{\mathcal{G}}(s_N)\Big] \circ d\boldsymbol{W}_N(s), \\
&\quad \boldsymbol{X}_N(0) = \boldsymbol{X}_{N-1}(\tau), \qquad\qquad (2.4.45) \\
&d\boldsymbol{U}_N(s) = \boldsymbol{\Phi}(s_N)\,\boldsymbol{X}_N(s)\,ds, \qquad \boldsymbol{U}_N(0) = \boldsymbol{O}_n, \\
&d\boldsymbol{V}_N(s) = \boldsymbol{\Psi}(s_N)\,\boldsymbol{X}_N(s)\,ds, \qquad \boldsymbol{V}_N(0) = \boldsymbol{O}_n, \\
&d\boldsymbol{U}^\star_N(s) = \boldsymbol{\mathcal{O}}_n\,ds, \qquad \boldsymbol{U}^\star_N(0) = \boldsymbol{U}_{N-1}(\tau),
\end{aligned}$$

$$d\boldsymbol{V}^{\star}_{N}(s) = \boldsymbol{\mathcal{O}}_n\,ds, \qquad \boldsymbol{V}^{\star}_{N}(0) = \boldsymbol{V}_{N-1}(\tau)$$

с учетом того, что для $t \in (t_N, t_{N+1}]$ при $\boldsymbol{\Upsilon} = \boldsymbol{\Phi}$, $\boldsymbol{\Psi}$

$$\int\limits_{t-\tau}^{t} \boldsymbol{\Upsilon}(\theta)\,\boldsymbol{X}(\theta)\,d\theta = \int\limits_{t-\tau}^{t_N} \boldsymbol{\Upsilon}(\theta)\,\boldsymbol{X}(\theta)\,d\theta + \int\limits_{t_N}^{t} \boldsymbol{\Upsilon}(\theta)\,\boldsymbol{X}(\theta)\,d\theta =$$

$$= \int\limits_{t_{N-1}}^{t_N} \boldsymbol{\Upsilon}(\theta)\,\boldsymbol{X}(\theta)\,d\theta - \int\limits_{t_{N-1}}^{t-\tau} \boldsymbol{\Upsilon}(\theta)\,\boldsymbol{X}(\theta)\,d\theta + \int\limits_{t_N}^{t} \boldsymbol{\Upsilon}(\theta)\,\boldsymbol{X}(\theta)\,d\theta =$$

$$= \int\limits_{0}^{\tau} \boldsymbol{\Upsilon}(t_{N-1}+\theta)\,\boldsymbol{X}_{N-1}(\theta)\,d\theta - \int\limits_{0}^{s} \boldsymbol{\Upsilon}(t_{N-1}+\theta)\,\boldsymbol{X}_{N-1}(\theta)\,d\theta +$$

$$+ \int\limits_{0}^{s} \boldsymbol{\Upsilon}(t_N+\theta)\,\boldsymbol{X}_{N}(\theta)\,d\theta = \begin{cases} \boldsymbol{U}^{\star}_{N-1}(\tau) - \boldsymbol{U}_{N-1}(s) + \boldsymbol{U}_N(s), & \boldsymbol{\Upsilon} = \boldsymbol{\Phi}, \\ \boldsymbol{V}^{\star}_{N-1}(\tau) - \boldsymbol{V}_{N-1}(s) + \boldsymbol{V}_N(s), & \boldsymbol{\Upsilon} = \boldsymbol{\Psi}. \end{cases}$$

Действуя так же, как и выше, можно записать компактную форму уравнений (2.4.45):

$$d\boldsymbol{Z}_N(s) = \big[\boldsymbol{\mathcal{A}}^{+}_{N}(s)\,\boldsymbol{Z}_N(s) + \boldsymbol{c}^{+}_{N}(s)\big]\,ds +$$

$$+ \big[\,[\![\boldsymbol{\mathcal{B}}^{+}_{N}(s)]\!] :: \boldsymbol{Z}_N(s) + \boldsymbol{\mathcal{G}}^{+}_{N}(s)\,\big] \circ d\boldsymbol{W}^{+}_{N}(s), \tag{2.4.46}$$

$$\boldsymbol{Z}_N(0) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{Z}_{N-1}(0), \boldsymbol{X}_{N-1}(\tau), \boldsymbol{O}_{2n}, \boldsymbol{U}_{N-1}(\tau)\big), \boldsymbol{V}_{N-1}(\tau)\big), \tag{2.4.47}$$

где

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}^{+}_{N}(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{A}}^{+}_{N-1}(s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{(r_N-n_5)\times n_5} \\ \boldsymbol{\mathcal{A}}^{+}_{N21} & \boldsymbol{\mathcal{A}}^{+}_{N22} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}^{+}_{N21} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times r_{N-2}} & \boldsymbol{\mathcal{R}}(s_N) & -\boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_N) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n_3} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n_4\times r_{N-2}} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n_4\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n_4\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n_4\times n_3} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}^{+}_{N22} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{A}}(s_N) & \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_N) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_N) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\Phi}(s_N) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\Psi}(s_N) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n_2\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n_2\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n_2\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n_2\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n_2\times n} \end{bmatrix},$$

$$[\![\boldsymbol{\mathcal{B}}^{+}_{N}(s)]\!] = \begin{bmatrix} [\![\boldsymbol{\mathcal{B}}^{+}_{N11}]\!] & [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{r_{N-1}\times m\times r_N} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times q_{N-1}\times r_N} & [\![\boldsymbol{\mathcal{B}}^{+}_{N22}]\!] \end{bmatrix},$$

$$[\![\boldsymbol{\mathcal{B}}^{+}_{N11}]\!] = [\![\boldsymbol{\mathcal{B}}^{+}_{N-1}(s)]\!] \ddagger [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{r_{N-1}\times r_{N-1}\times n_5},$$

$$[\![\boldsymbol{\mathcal{B}}^{+}_{N22}]\!] = \begin{bmatrix} [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times r_{N-2}} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n_4\times m\times r_{N-2}} \end{bmatrix} \ddagger \begin{bmatrix} [\![\boldsymbol{\mathcal{H}}(s_N)]\!] \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n_4\times m\times n} \end{bmatrix} \ddagger$$
$$\ddagger \begin{bmatrix} [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n_4\times m\times n} \end{bmatrix} \ddagger \begin{bmatrix} -[\![\boldsymbol{\mathcal{J}}(s_N)]\!] \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n_4\times m\times n} \end{bmatrix} \ddagger \begin{bmatrix} [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n_4\times m\times n} \end{bmatrix} \ddagger$$
$$\ddagger \begin{bmatrix} [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n_4\times m\times n} \end{bmatrix} \ddagger \begin{bmatrix} [\![\boldsymbol{\mathcal{B}}(s_N)]\!] \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n_4\times m\times n} \end{bmatrix} \ddagger \begin{bmatrix} [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n_4\times m\times n} \end{bmatrix} \ddagger$$
$$\ddagger \begin{bmatrix} [\![\boldsymbol{\mathcal{J}}(s_N)]\!] \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n_4\times m\times n} \end{bmatrix} \ddagger \begin{bmatrix} [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times n} \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n_4\times m\times n} \end{bmatrix} \ddagger \begin{bmatrix} [\![\boldsymbol{\mathcal{J}}(s_N)]\!] \\ [\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n_4\times m\times n} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{c}^{+}_{N}(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}^{+}_{N-1}(s) \\ \boldsymbol{c}(s_N) \\ \boldsymbol{O}_{n_4} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{G}}^{+}_{N}(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{G}}^{+}_{N-1}(s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{r_{N-1}\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times q_{N-1}} & \boldsymbol{\mathcal{G}}(s_N) \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n_4\times q_{N-1}} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n_4\times m} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{W}^{+}_{N}(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{W}^{+}_{N-1}(s) \\ \boldsymbol{W}_N(s) \end{bmatrix}, \quad r_N = n_4 + 5\,N\,n, \qquad q_N = m\,(N+1).$$

Сравнивая структуры уравнений (2.4.46), (2.4.47) и (2.4.26), (2.4.27), можно заключить, что эти системы идентичны, если

$$r = r_N, \qquad q = q_N, \qquad s_* = 0, \qquad s^* = \tau, \qquad \underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}^{+}_{N}(s),$$
$$\underline{\boldsymbol{c}}(s) = \boldsymbol{c}^{+}_{N}(s), \qquad [\![\underline{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(s)]\!] = [\![\boldsymbol{\mathcal{B}}^{+}_{N}(s)]\!], \qquad \underline{\boldsymbol{\mathcal{G}}}(s) = \boldsymbol{\mathcal{G}}^{+}_{N}(s).$$

Отсюда ФПК-уравнение и начальное условие для плотности вероятности $p_{Z_N}(\boldsymbol{z}_N, s)$ расширенного вектора состояния $\boldsymbol{Z}_N(s)$ примут следующую форму:

$$\frac{\partial p_{Z_N}}{\partial s} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{r} \frac{\partial^2\bigl(\tilde{b}_{Nij}\,p_{Z_N}\bigr)}{\partial z_{Ni}\,\partial z_{Nj}} - \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial\bigl(\tilde{a}_{Ni}\,p_{Z_N}\bigr)}{\partial z_{Ni}}, \tag{2.4.48}$$

$$p_{Z_N}(\boldsymbol{z}_N, 0) \equiv p_{Z_N}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{u}^{\star}_1, \boldsymbol{v}^{\star}_1, ..., \boldsymbol{x}_{N-1}, \boldsymbol{u}_{N-1}, \boldsymbol{v}_{N-1},$$
$$\boldsymbol{u}^{\star}_{N-1}, \boldsymbol{v}^{\star}_{N-1}, \boldsymbol{x}_N, \boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{v}_N, \boldsymbol{u}^{\star}_N, \boldsymbol{v}^{\star}_N, 0) =$$
$$= p_{Z_{N-1}}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{u}^{\star}_1, \boldsymbol{v}^{\star}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{u}^{\star}_2, \boldsymbol{v}^{\star}_2, \boldsymbol{u}^{\star}_1, \boldsymbol{v}^{\star}_1, ..., \boldsymbol{x}_N, \boldsymbol{u}^{\star}_N, \boldsymbol{v}^{\star}_N, \boldsymbol{u}^{\star}_{N-1}, \boldsymbol{v}^{\star}_{N-1}, \tau)\times$$
$$\times\delta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}_0)\prod_{\ell=0}^{N}\bigl[\delta(\boldsymbol{u}_\ell)\,\delta(\boldsymbol{v}_\ell)\bigr].$$

Опять несложно установить, что коэффициенты $\tilde{a}_{Ni}$ и $\tilde{b}_{Nij}$ можно найти по формулам (2.4.30), (2.4.31) как $\hat{a}_i$ и $\hat{b}_{ij}$ соответственно.

Теперь уже все есть для того, чтобы построить явный вид уравнений (2.4.32) и (2.4.33). А закончим этот шаг доопределением начальных условий для $\boldsymbol{m}_{Z_N}(s)$ и $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_N Z_N}(s)$ для $\boldsymbol{Z}_N(s)$ следующим образом:

$$\boldsymbol{m}_{Z_N}(0) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{m}_{Z_{N-1}}(0), \boldsymbol{m}_{X_{N-1}}(\tau), \boldsymbol{O}_{n_2}, \boldsymbol{m}_{U_{N-1}}(\tau), \boldsymbol{m}_{V_{N-1}}(\tau)\big),$$

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_N Z_N}(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_{N-1} Z_{N-1}}(0) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{N12} \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{N21} & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{N22} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{K}}_{N12} = \big(\boldsymbol{\mathcal{K}}_{N21}\big)^{\intercal} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{K}}_{N120} \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{N121} \\ \ldots \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{N12,N-1} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_{N120} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{K}}_{Y X_{N-1}}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n_2} & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{Y U_{N-1}}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{Y V_{N-1}}(\tau) \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{Y X_{N-1}}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n_2} & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{Y U_{N-1}}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{Y V_{N-1}}(\tau) \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n_2\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n_2\times n_2} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n_2\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n_2\times n} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_{N121} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0 X_{N-1}}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n_2} & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0 U_{N-1}}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0 V_{N-1}}(\tau) \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n_2\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n_2\times n_2} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n_2\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n_2\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{U_0 X_{N-1}}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n_2} & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{U_0 U_{N-1}}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{U_0 V_{N-1}}(\tau) \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{V_0 X_{N-1}}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n_2} & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{V_0 U_{N-1}}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{V_0 V_{N-1}}(\tau) \end{bmatrix}, \qquad (2.4.49)$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_{N12,N-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{N-2} X_{N-1}}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n_2} & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{N-2} U_{N-1}}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{N-2} V_{N-1}}(\tau) \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n_2\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n_2\times n_2} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n_2\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n_2\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{U_{N-2} X_{N-1}}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n_2} & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{U_{N-2} U_{N-1}}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{U_{N-2} V_{N-1}}(\tau) \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{V_{N-2} X_{N-1}}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n_2} & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{V_{N-2} U_{N-1}}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{V_{N-2} V_{N-1}}(\tau) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_{N22} = \begin{bmatrix} \mathcal{K}_{X_{N-1} X_{N-1}}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n_2} & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{N-1} U_{N-1}}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_{N-1} V_{N-1}}(\tau) \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n_2\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n_2\times n_2} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n_2\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n_2\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{U_{N-1} X_{N-1}}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n_2} & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{U_{N-1} U_{N-1}}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{U_{N-1} V_{N-1}}(\tau) \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{V_{N-1} X_{N-1}}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n_2} & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{V_{N-1} U_{N-1}}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{V_{N-1} V_{N-1}}(\tau) \end{bmatrix},$$

– и вычислением $\boldsymbol{m}_{Z_N}(s)$, $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{Z_N Z_N}(s)$ в форме $\underline{\boldsymbol{m}}_Z(s)$, $\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_{ZZ}(s)$ соответственно.

Пример 2.4.4. Рассмотрим следующую модельную стохастическую колебательную систему, записанную в нестрогой форме:

$$\ddot{X}(t) = 0, \qquad -\tau < t \leqslant 0, \qquad (2.4.50)$$

$$\ddot{X}(t) + 2\left[\alpha_1 \dot{X}(t) + \alpha_2 \dot{X}(t-\tau) + \alpha_3 \int\limits_{t-\tau}^{t} \phi_1(\theta)\, \dot{X}(\theta)\, d\theta\right] +$$

$$+\omega_0^2\Big[\beta_1 X(t)+\beta_2 X(t-\tau)+\beta_3\int\limits_{t-\tau}^{t}\phi_2(\theta)\,X(\theta)\,d\theta\Big]=$$

$$=\Big[\gamma_0+\gamma_1 X(t)+\gamma_2 X(t-\tau)+\gamma_3\int\limits_{t-\tau}^{t}\psi(\theta)\,X(\theta)\,d\theta\Big]\dot{W}(t),$$

$$0<t\leqslant T, \tag{2.4.51}$$

где $\omega_0>0$, α_i, β_i, γ_i $(i=1,\,2,\,3)$, γ_0 – постоянные, $N\in\mathbb{N}$, $N<+\infty$, $T=(N+1)\tau$. Обозначая $X(t)$ через $X_1(t)$ и $\dot{X}(t)$ через $X_2(t)$, можно записать уравнения (2.4.50), (2.4.51) в виде (2.4.24), (2.4.25). В этом случае

$$n=2,\quad m=1,\quad t_0=-\tau,\quad \boldsymbol{X}(t)=\begin{bmatrix}X_1(t)\\X_2(t)\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_0=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{c}_0=\boldsymbol{O}_2,\quad [\![\boldsymbol{\mathcal{B}}_0]\!]=[\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{2\times1\times2},\quad \boldsymbol{\mathcal{G}}_0=\boldsymbol{\mathcal{O}}_{2\times1},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}=\begin{bmatrix}0&1\\-\beta_1\,\omega_0^2&-2\,\alpha_1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\mathcal{R}}=\begin{bmatrix}0&1\\-\beta_2\,\omega_0^2&-2\,\alpha_2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\mathcal{Q}}=\begin{bmatrix}0&0\\-\beta_3\,\omega_0^2&-2\,\alpha_3\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Phi}=\begin{bmatrix}\phi_2(\theta)&0\\0&\phi_1(\theta)\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{c}=\boldsymbol{O}_2,\quad [\![\boldsymbol{\mathcal{B}}]\!]=\begin{bmatrix}0\\\gamma_1\end{bmatrix}\ddagger\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\quad [\![\boldsymbol{\mathcal{H}}]\!]=\begin{bmatrix}0\\\gamma_2\end{bmatrix}\ddagger\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},$$

$$[\![\boldsymbol{\mathcal{J}}(t)]\!]=\begin{bmatrix}0\\\gamma_3\end{bmatrix}\ddagger\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\Psi}(\theta)=\begin{bmatrix}\psi(\theta)&0\\0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\mathcal{G}}=\begin{bmatrix}0\\\gamma_0\end{bmatrix}.$$

В предположении, что $p^0(\boldsymbol{x})=\mathcal{N}\big(\boldsymbol{x};\boldsymbol{m}_X^0,\boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0\big)$, расчеты статистических характеристик вектора $\boldsymbol{X}(t)$ проводились для различных значений констант и начальных условий, включая следующие:

$$\alpha_1=\ \ 0{,}15;\qquad \beta_1=1{,}00;\qquad \gamma_1=\ \ 0{,}10;$$

$$\alpha_2=-0{,}05;\qquad \beta_2=0{,}10;\qquad \gamma_2=\ \ 0{,}15;$$

$$\alpha_3=\ \ 0{,}05;\qquad \beta_3=0{,}05;\qquad \gamma_3=-0{,}15;$$

$$\gamma_0=0{,}1;\qquad \omega_0=2{,}0;\qquad \tau\in\{1{,}0;\ 1{,}5;\ 2{,}0\};\qquad T=10{,}0;$$

$$\phi_1(\theta)=\frac{2\,\theta}{\tau^2},\quad \phi_2(\theta)=\frac{2\,(\tau-\theta)}{\tau^2},\quad \psi(\theta)=\frac{2\,(\tau-|2\,\theta-\tau|)}{\tau^2},\quad \theta\in[0,\tau];$$

$$\boldsymbol{m}_X^0=\begin{bmatrix}3{,}0\\0{,}0\end{bmatrix};\qquad \boldsymbol{\mathcal{K}}_{XX}^0=\begin{bmatrix}0{,}25&0{,}10\\0{,}10&0{,}16\end{bmatrix}.$$

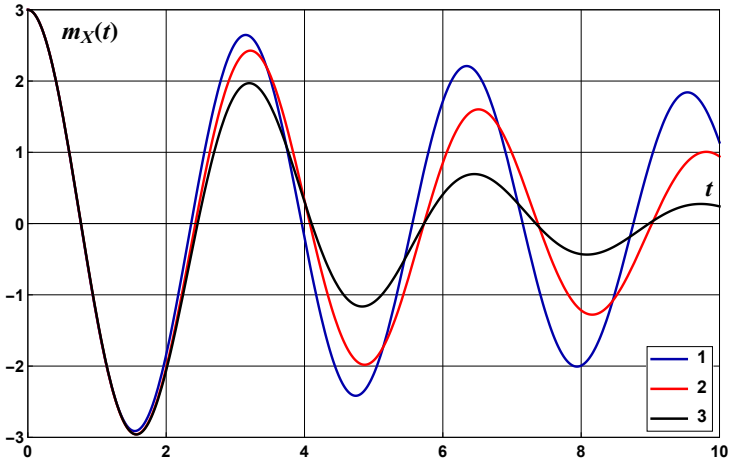


Рис. 2.4.14

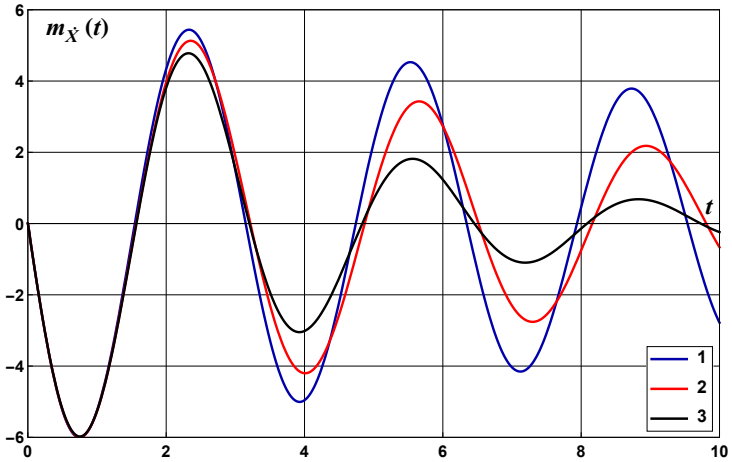


Рис. 2.4.15

Результаты этих расчетов для приведенных выше значений данных представлены на рис. 2.4.14–2.4.18. Типы линий (непрерывная, штриховая, пунктирная) соответствуют длинам запаздываний в указанном в перечне данных порядке. Рис. 2.4.14 и 2.4.15 показывают динамику изменения функций математического ожидания $m_{X_1}(t)$ и $m_{X_2}(t)$, рис. 2.4.16–

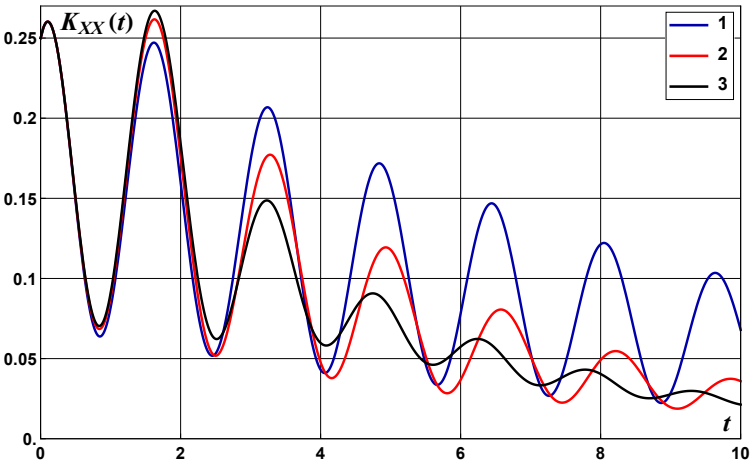


Рис. 2.4.16

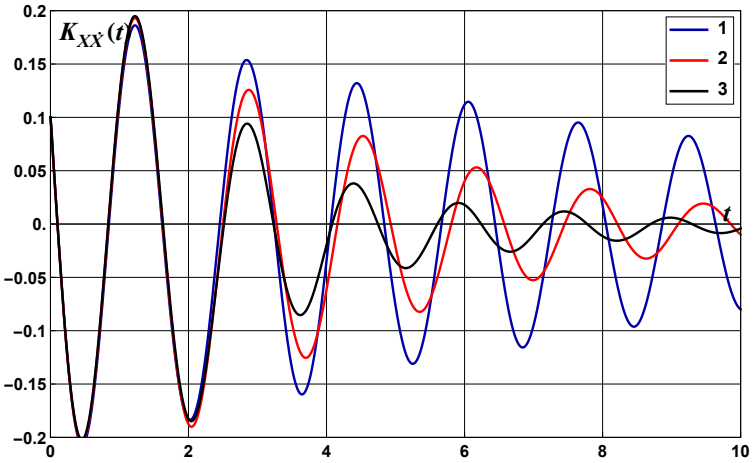


Рис. 2.4.17

2.4.15 демонстрируют поведение центральных моментов второго порядка, а именно, $\mathcal{K}_{X_1X_1}(t)$, $\mathcal{K}_{X_1X_2}(t)$ и $\mathcal{K}_{X_2X_2}(t)$. Символьное генерирование ОДУ для моментных функций и их численное интегрирование были выполнены в среде пакета компьютерной алгебры `Mathematica`. ▶

При необходимости получения моментных функций более высокого

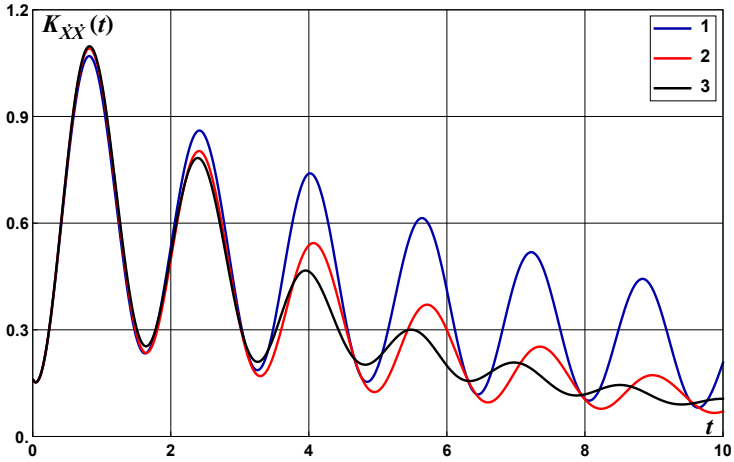


Рис. 2.4.18

порядка, чем второй, можно использовать комбинацию изложенной выше схемы и алгоритма из работы [246].

Описанная схема может конкурировать с методом статистического моделирования в области расчета функций первого и старших моментов для указанного выше класса систем. Кроме того, результаты применения схемы можно использовать для проверки качества новых алгоритмов численного интегрирования СОДУ с запаздыванием, поскольку в нашей схеме нет ошибки метода, а погрешность в вычислениях может быть уменьшена путем выбора наиболее эффективного интегратора для систем ОДУ без запаздывания.

2.5. ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ АНАЛИЗА СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

2.5.1. Вязкоупругие системы и их анализ

2.5.1.1. Основные понятия

В рамках механики деформируемого твердого тела (МДТТ) рассматриваются колебания *систем с распределенными параметрами*, т.е. таких систем, инерционные, упругие и вязкие свойства которых распределены непрерывным образом по всему объему тела.

Определение 2.5.1. *Основная* (*прямая*) *задача* МДТТ – определить, как будут меняться со временем деформации тела и внутренние упругие силы при заданных внешних воздействиях.

Определение 2.5.2. *Деформация* – изменение взаимного положения частиц тела, связанное с их перемещением относительно друг друга. Деформация представляет собой результат изменения межатомных расстояний и перегруппировки блоков атомов. Обычно деформация сопровождается изменением величин межатомных сил, мерой которого является упругое механическое напряжение.

Для решения основной задачи используются [55]: 1) гипотеза однородности и сплошности; 2) допущение о малости деформаций; 3) принцип напряжений Эйлера и Коши, благодаря которому действие одной части тела на другую можно заменить поверхностными усилиями, действующими в сечении; 4) аксиома отвердевания, позволяющая в любой фиксированный момент времени t материальное тело рассматривать как абсолютно твердое, для которого справедливы законы теоретической механики, в т.ч. законы Ньютона.

Определение 2.5.3. *Механическое напряжение* – это мера величины внутренних сил, возникающих в деформируемом теле, под влиянием различных факторов. Механическое напряжение в точке тела определяется как отношение внутренней силы к единице площади в данной точке рассматриваемого сечения.

Определение 2.5.4. *Тензор напряжений* $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{ij}(\boldsymbol{r}, t),\ i, j = \overline{1,3}\}$ – симметричный тензор второго ранга, состоящий из девяти величин, представляющих механические напряжения в произвольной точке нагруженного тела.

Здесь t – время, $\boldsymbol{r} = \{x_1, x_2, x_3\}^\intercal$ – радиус-вектор точки, x_i – декартовы координаты этой точки, $\top$ – символ транспонирования векторов и матриц.

У компоненты σ_{ij} первый индекс указывает нормаль к площадке, на которой действует это напряжение, второй обозначает ось, которой оно параллельно. Компоненты с одинаковыми индексами совпадают с напряжениями, нормальными рассматриваемой площадке. Если индексы разные, то σ_{ij} совпадают с касательными напряжениями. Растягивающие нормальные напряжения считаются положительными, сжимающие – отрицательными. Предполагается, что компоненты σ_{ij} так же, как и их первые частные производные, являются непрерывными функциями координат и времени.

Существуют координатные площадки в теле, на которых касательные напряжения обращаются в нуль, а нормальные напряжения становятся экстремальными. Соответствующие оси координат называют *главными осями* тензора напряжений. Компоненты напряжений в этих осях обозначают символами σ_1, σ_2, σ_3 и называют *главными значениями* тензора напряжений. Главные оси нумеруются так, чтобы в алгебраическом смысле выполнялись условия $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$. Матрица тензора напряжений в главных осях является диагональной.

Под действием внешних сил все тела в большей или меньшей мере изменяют свою форму (деформируются). Точки тела меняют свое положение в пространстве непрерывно. При этом в результате деформирования не возникает разрывов, пустот и трещин.

Определение 2.5.5. Вектор $\boldsymbol{u} = \{u_1, u_2, u_3\}^\intercal$, имеющий начало в точке недеформированного тела, а конец – в соответствующей точке деформированного, называется *вектором полного перемещения точки.*

Его координаты – разности между координатами близких точек после (dx_i') и до (dx_i) деформации. Как правило, в МДТТ рассматриваются кинематически неизменяемые системы, не допускающие перемещения тела в пространстве как жесткого целого. В этом случае введенные перемещения для большинства рассматриваемых систем являются малыми по сравнению с геометрическими размерами тела.

Определение 2.5.6. *Тензор деформации* $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензор, который характеризует сжатие (растяжение) и изменение формы в каждой точке тела при деформации.

Предполагается, что компоненты ε_{ij} так же, как и их первые частные производные, являются непрерывными функциями координат и времени.

Определение 2.5.7. Компоненты *тензора деформации Коши–Грина* $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{r}, t),\ i, j = \overline{1,3}\}$ в классической механике сплошной среды (частицы которой являются материальными точками и обладают лишь тремя трансляционными степенями свободы) определяются как

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \sum_{\ell=1}^{3} \frac{\partial u_\ell}{\partial x_i}\,\frac{\partial u_\ell}{\partial x_j}\Big). \tag{2.5.1}$$

Дифференцирование производится по координатам в отсчетной конфигурации (до деформирования). Расстояния до и после деформации связаны соотношениями:

$$d|\boldsymbol{r}'|^2 = d|\boldsymbol{r}|^2 + 2\sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ij}\, dx_i\, dx_j. \tag{2.5.2}$$

По определению тензор деформации симметричен: $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$. Диагональные элементы тензора $\boldsymbol{\varepsilon}$ описывают линейные деформации растяжения либо сжатия, недиагональные – деформацию сдвига. Метод определения деформаций заключается в том, что по перемещениям вычисляются линейные удлинения вдоль осей, а также сдвиговые деформации, равные половине суммарного изменения прямого угла между осями координат.

При малых $\boldsymbol{u}$ можно пренебречь квадратичными слагаемыми, и пользоваться тензором деформации в виде:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big). \tag{2.5.3}$$

Аналогично рассмотрению тензора напряжений можно изучать случай, когда в некоторых направлениях имеются только относительные деформации и отсутствуют сдвиги. Эти направления соответствуют также экстремальным значениям относительных деформаций, которые называются *главными относительными деформациями* и обозначаются через ε_1, ε_2, ε_3. Матрица тензора деформаций в главных осях принимает диагональный вид.

По известным трем дифференцируемым компонентам поля перемещений с помощью формул Коши (2.5.3) легко определяются шесть независимых компонент тензора деформаций. Обратная операция затруднена, так как не всегда шести непрерывным компонентам $\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{r}, t)$ соответствует какое-либо непрерывное поле перемещений. Если такое поле существует, то деформации называют *совместными*, в противном случае – *несовместными*.

Наряду с перемещениями, можно рассматривать и другие кинематические характеристики деформируемой среды, а именно *векторы скорости*

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\partial \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=\dot{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{r},t)$$

и *ускорения*

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\partial \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2}=\ddot{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{r},t)$$

Обычно считается, что в своем начальном состоянии тело свободно от напряжений, имеет постоянную температуру и находится в термодинамическом равновесии со средой.

Определение 2.5.8. Будем называть *упругим* такое тело, у которого напряжение в каждой точке есть однозначная функция деформации

$$\sigma_{ij}=\Sigma_{ij}(\boldsymbol{\varepsilon}). \tag{2.5.4}$$

Определение 2.5.9. *Закон Гука* – утверждение, согласно которому деформация, возникающая в упругом теле (пружине, стержне, консоли, балке и т.п.), пропорциональна приложенному к этому телу напряжению.

Необходимо иметь в виду, что закон Гука выполняется только при малых деформациях. При превышении предела пропорциональности связь между напряжениями и деформациями становится нелинейной. Для многих сред закон Гука неприменим даже при малых деформациях.

В общем случае, когда напряжения и деформации описываются тензорами второго ранга в трехмерном пространстве, связывающий их тензор упругих постоянных является тензором четвертого ранга $C_{ijk\ell}$ и содержит 81 коэффициент. Вследствие симметрии этого тензора, а также тензоров напряжений и деформаций, независимыми являются только 21 постоянная. Для этого случая закон Гука выглядит следующим образом:

$$\sigma_{ij}=\sum_{k,\ell=1}^{3} E_{ijk\ell}\cdot\varepsilon_{k\ell}.$$

Для упругих изотропных линейных тел *тензор модулей упругости* $\boldsymbol{E}=\{E_{ijk\ell},\ i,j,k,\ell=\overline{1,3}\}$ содержит только два независимых коэффициента – параметры Ламе.

Предполагается, что на поверхности тела заданы каких-либо граничные условия, причем на разных частях поверхности такие условия могут быть различными.

В общем случае различают три типа граничных задач. Первая из них заключается в определении напряжений и перемещений внутри упругого тела в состоянии равновесия, если известны перемещения точек на поверхности. Во второй граничной задаче известно распределение сил на поверхности тела. Третий тип граничных задач – смешанный. Кроме того, возможны и другие комбинации граничных условий. Во всех этих случаях массовые силы предполагаются известными.

Решение основной задачи МДТТ состоит в решении представленных выше уравнений при заданных граничных условиях.

В обычных условиях считается, что при неизменных во времени воздействиях напряженно-деформированное состояние рассматриваемого тела остается неизменным [13]. Однако многие материалы, например полимеры, бетоны, композиты и т.д., даже при комнатных температурах обладают способностью медленно деформироваться во времени при постоянных напряжениях. Это свойство материалов называют *ползучестью*. В свою очередь явление уменьшения напряжения в твердом теле при постоянной деформации называется *релаксацией*.

Необходимость учета ползучести в расчетных моделях возникла в середине XX в. благодаря запросам инженерной практики, прежде всего турбостроения. Впоследствии эти модели нашли свое применение в атомной энергетике, химическом машиностроении, авиастроении, реактивной технике, строительстве. Запросы машиностроения привели к резкому увеличению экспериментальных и теоретических исследований в области ползучести.

Определение 2.5.10. Механические свойства материалов, существенно зависящие от времени, называются *реономными*.

В реальных элементах конструкций ползучесть и релаксация как реономные свойства материала проявляются одновременно, взаимосвязанно. Их можно отразить аналитически, вводя время t в связь напряжений и деформаций твердого тела. Предложенный Л. Больцманом способ описания этой взаимосвязи основан на предположении о влиянии всего предшествующего времени действия напряжений на деформацию в данный момент. Подобные среды называются *линейными вязкоупругими наследственного типа*.

Определение 2.5.11. *Вязкоупругость* – это механическое свойство вещества быть как упругим, так и вязким.

Линейная изотропная вязкоупругая среда – это твердое тело со свойствами, которые в области малых деформаций весьма близки к свойствам полимерных материалов: натурального и синтетического каучуков, аморфных полимеров с малыми и большими молекулярными весами и других. В зависимости от температуры для этих материалов характерны стеклообразные состояния при низких температурах, когда они почти идеально упруги, и высокоэластические состояния при повышенных температурах, когда они значительно деформируются при малых напряжениях и имеют сильно выраженные временные свойства (релаксацию, ползучесть). Таким образом, все промежуточные состояния относятся к области практически распространенных температур.

Развитие теории вязкоупругости связано с широким использованием полимерных материалов. Вязкоупругие свойства проявляются, например, в том, что внезапно приложенное и поддерживаемое неизменным напряженное состояние вызывает мгновенную деформацию, сопряженную с упругим откликом, вслед за чем следует процесс вязкого течения, который может быть ограниченным и неограниченным во времени. При этом поведение вещества определяется не только текущим напряженным состоянием, но и всеми прошлыми состояниями, т.е. вещество обладает свойством, которое называют *эффектом памяти*, *динамической памятью* или *наследственностью*. При этом превалирование упругих или вязких свойств определяется продолжительностью внешнего воздействия.

Создание основ теории вязкоупругости связано с именами В.Э. Вебера (W.E. Weber), Р. и Ф.В. Кольраушей (R. & F. Kohlrausch), Л. Больцмана (L. Boltzmann), О. Мейера (O. Meyer), Дж.К.Максвелла (D.K. Maxwell), В. Томсона (лорда Кельвина, W. Thomson, Lord Kelvin), В. Фойхта (W. Voigt), П. Дюгема (P. Duhem), Л. Натансона (L. Natanson), С. Зарембы (S. Zaremba), работавших в основном во второй половине XIX в. Позднее существенный вклад в развитие указанной теории внесли A.E. Green, R.S. Rivlin, B.D. Coleman и W. Noll (50-е – 60-е гг. XX в.). Исторические замечания о развитии теории вязкоупругости за рубежом можно найти в [607, 777, 778, 1030]. Многие достижения современной вязкоупругости определяются работами отечественных ученых – А.А. Ильюшина, А.Ю. Ишлинского, М.А. Колтунова, В.В. Москвитина, Ю.Н. Работнова, Б.Б. Победри, А.Р. Ржаницына и многих других.

Большой вклад в теорию моделей вязкоупругой механики в первой половине XX в. внес Вито Вольтерра [45]. Уже в ранних работах В. Вольтерры было отмечено, что при анализе проблем наследственной теории упругости операции, связанные с решением дифференциальных уравнений, которые подобны обычным уравнениям теории упругости, и опера-

ции интегрирования по времени, связанные с вычислением операторов Вольтерры, могут выполняться в произвольном порядке. Отсюда вытекает следующее правило, которое называется *принципом Вольтерры*: для решения задачи наследственной теории упругости нужно построить решение задачи обычной теории упругости и в окончательном результате заменить упругие постоянные операторами, расшифровав полученные комбинации операторов по известным правилам.

В последние годы теория вязкоупругости привлекла существенное внимание в связи с исследованиями новых физических явлений, включая эффекты, связанные с зависимостью от времени (ползучести, релаксации, нелинейной вязкой и пластической текучести), в современных сферах применения, и необходимостью разработки математических методов для описание сложных технологических процессов [530].

Вязкоупругое поведение и свойства присущи многим материалам [92, 434, 498, 530, 531, 562, 566, 770, 943, 975, 1082], которые чрезвычайно важны для приложений: зольной пыли, биоматериалам (биополимеры, целлюлоза, соединительная ткань, лигнин), коллоидным растворам, композитам, природныи и синтетическим жидкостям, продуктам питания, стеклу, строительным и дорожным материалам (асфальт, битум, цемент, бетон), смарт-материалам, металлам и сплавам при повышенных температурах, бумаге, пластмассам (оргстекло, полистирол, нейлон, поливинилхлорид), натуральным и искусственным полимерам (хлопок, кожа, резина, шелк, дерево, шерсть), полимерным нанокомпозитам, полиэфирам, смолам, почвам, в т.ч. мерзлым грунтам (вечной мерзлоте) и скальным породам, суспензиям и т.д. Заметим, что в реологии металлов термин *вязкоупругость* часто заменяется словом *квазиупругость* (или *неупругость*).

Например, эластомеры, используемые во многих устройствах, например, в корпусах самолетов для снижения вибраций (с 1950-х гг.), автомобильных, авиационных и космических конструкциях, гражданских сооружениях как вязкоупругие демпферы для защиты от ветровых нагрузок, землетрясений и т.д., подвергаются сильным механическим и термическим нагрузкам. Поэтому их механические свойства существенно зависят от температуры, и прогнозирование их поведения требует непростых инструментов анализа. К примеру, силикатные стекла имеют очень сложные реологические свойства, причем комплексный механический отклик существенно зависит от структурной релаксации.

Основания современной теории вязкоупругости изложены во многих учебных пособиях и монографиях [54, 112, 420, 483, 530, 531, 554, 607, 778, 895, 1030]. Важной частью этой теории является аппарат исследования

неоднородных во времени систем [13, 77, 185, 258, 262, 532, 533, 607, 919].

Для описания вязкоупругих материалов были разработаны многие реологические модели. Эти модели в основном делятся на два (не обязательно непересекающиеся) множества [563]. В первое из них входят феноменологические модели, которые разрабатываются в рамках механики сплошных сред. Эти модели являются выражениями в замкнутой форме интегрального или дифференциального типа, где последние обычно известны как класс Ривлина–Сойера, или уравнения K-BKZ (Kaye, 1962–Bernstein&Kearsley&Zapas, 1963–1965) [949]. Второе множество состоит из молекулярных моделей, которые получены из кинетической теории полимеров [527].

Стареющие материалы широко применяются при возведении строительных и гидротехнических сооружений, изготовлении деталей машин и элементов конструкций [13]. Поскольку процесс возведения или изготовления растянут во времени, различные элементы тел зарождаются и подвергаются действию нагрузок неодновременно. Неоднородность распределения возраста элементов тел приводит к тому, что их изменяющиеся во времени упругие и реологические характеристики зависят и от пространственных координат.

Возрастная неоднородность возводимых сооружений и конструкций принципиальным образом отличается от обычной конструкционной неоднородности и тесно связана с технологией изготовления. Ее можно легко восстановить по параметрам технологического процесса (например, по скорости возведения), а также управлять ею при помощи тех же параметров.

Неоднородное старение является весьма существенной, но лишь одной стороной реальных процессов изготовления тел. В ряде практически важных случаев на первый план выступают закономерности наращивания объектов в ходе их эксплуатации, т.е. дискретного или непрерывного добавления к телам, находящимся под воздействием массовых и поверхностных сил, новых элементов. Формирование полей напряжений и перемещений в растущих телах определяется уже не только возрастной неоднородностью, но и скоростью наращивания, способом наращивания, натягом приращиваемых элементов и другими причинами, т.е. целым набором параметров, отражающим другие стороны явления.

В случае линейной вязкоупругости со старением, где старение означает изменения механических свойств данного материала с увеличением его возраста, определяющие соотношения напряжение–деформация для линейных вязкоупругих сред с бесконечно малыми напряжениями на основе теории суперпозиции Больцмана в соответствии с *теоремой Рисса*

о представлении [112, 483, 570, 778] может быть выражена интегралами Стилтьеса в следующей форме:

$$\sigma_{ij}(\boldsymbol{r},t)=\sum_{k,\ell=1}^{3}\int_{t_0}^{t}E_{ijk\ell}(\boldsymbol{r},t,\tau)\,d\varepsilon_{k\ell}(\boldsymbol{r},\tau), \tag{2.5.5}$$

$$\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{r},t)=\sum_{k,\ell=1}^{3}\int_{t_0}^{t}D_{ijk\ell}(\boldsymbol{r},t,\tau)\,d\sigma_{k\ell}(\boldsymbol{r},\tau), \tag{2.5.6}$$

$$\sigma_{ij}(\boldsymbol{r},t_0)=0,\qquad \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{r},t_0)=0,\quad i,j=1,2,3, \tag{2.5.7}$$

где t – текущее время, $t_0\leqslant t\leqslant T<+\infty$; $\boldsymbol{r}=(x_1,x_2,x_3)$ – ректор материальных (лагранжевых) координат; $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)=\{u_i(\boldsymbol{r},t)\}$ – вектор перемещений материальных точек как функция координат $\boldsymbol{r}$ и t; $\widehat{\mathsf{E}}=\{E_{ijk\ell}\}$ – тензор функций ползучести; $\widehat{\mathsf{D}}=\{D_{ijk\ell}\}$ – тензор функций релаксации. Эти ядра интегральных операторов зависят от переменных t и τ по отдельности, но не от разности $t-\tau$. Такие ядра интегральных операторов зависят от t и τ отдельно, а не от разности $t-\tau$ и позволяют представить зависимость текущего напряжения от всей истории изменения деформации и описать физическое старение, деградацию и кристаллизацию материалов, температурные изменения свойств полимеров, неизотермические условия, материальные перестройки (проветривание, вулканизацию резины, набухание, усадку, схватывание, например бетона, разупрочнение), воздействие окружающей среды, обстоятельства действия (например, облучение структурных элементов нейтронами, ионами и электронанами), химические реакции и т.д., а следовательно, принять во внимание то, что реологическое поведение вязкоупругих материалов существенно характеризуется материальными функциями, зависящими от времени.

Простейшие модели вязкоупругости

Такие модели [54, 55, 77, 112] представляют вязкоупругое тело в виде комбинации упругих и вязких элементов. Упругий элемент имеет вид пружины с линейной характеристикой, т.е. $\sigma=E\,\varepsilon$. Вязкий элемент представляет собой цилиндр с вязкой жидкостью, в котором перемещается поршень с отверстием или зазором вдоль стенки цилиндра, благодаря чему жидкость может перетекать из одной части цилиндра в другую. При постоянной силе поршень перемещается с постоянной скоростью $\sigma(t)=\lambda\,\dot{\varepsilon}(t)$ (λ – коэффициент пропорциональности).

На рис. 2.5.1 представлены простейшие модели вязкоупругой среды Максвелла (а) и Кельвина–Фойхта (б) соответственно.

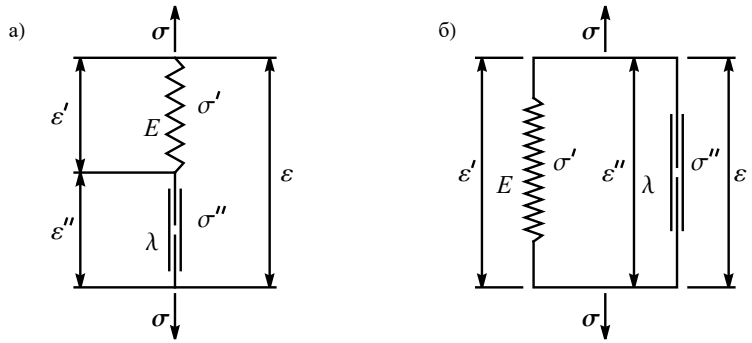


Рис. 2.5.1

В одномерной *модели Максвелла* упругий и вязкий элементы соединены последовательно. Напряжения в элементах одинаковые, а деформации суммируются. Связь между напряжением и деформацией можно получить, продифференцировав по времени уравнение закона Гука и добавив к полученной скорости деформирования вязкую составляющую:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E} + \frac{\sigma(t)}{\lambda}.$$

По одной из наиболее распространенных гипотез учета затуханий, предложенных Фойхтом (*модели Кельвина–Фойхта*), материал рассматривается как вязкоупругое тело, в котором возникающие напряжения σ зависят не только от величины деформации ε, но и от скорости изменения деформации во времени:

$$\sigma(t) = E\,\varepsilon(t) + \psi\,E\,\frac{d\varepsilon(t)}{dt}, \tag{2.5.8}$$

где E – модуль Юнга, ψ – коэффициент вязкого трения. В соответствии с гипотезой Фойхта эффект сил внутреннего сопротивления при колебаниях рассматриваемой балки заменяется действием внешней силы. В этой модели напряжения в элементах суммируются, а их деформации одинаковы. Такая картина получится, если элементы соединить параллельно.

Стандартная Линейная Модель Твердого Тела (СЛМТТ, Standard Linear Solid Model, другое название – модель Зинера) удачно сочетает в себе параллельные модели Максвелла и пружину Гука (рис. 2.5.2-а). Вязкий материал моделируется как пружина и демпфер, построенные

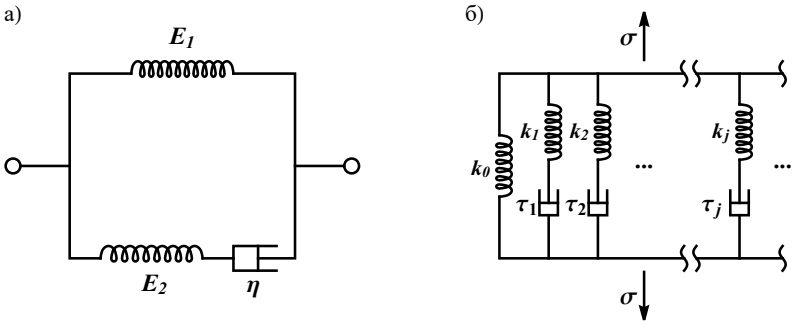


Рис. 2.5.2

последовательно друг с другом и параллельно еще с одной пружиной. Для этой модели определяющее соотношение выглядит так:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{E_2\left[\eta\,\dot{\sigma}(t)/E_2 + \sigma(t) - E_1\,\varepsilon(t)\right]}{\eta\,(E_1 + E_2)}.$$

Хотя СЛМТТ является более точной, чем модели Максвелла и Фойхта, она дает неточные результаты для деформации при определенных условиях нагрузки и довольно трудна для расчетов.

Обобщенная модель Кельвина–Фойхта представляет собой последовательное соединение определенного количества обычных моделей Фойхта и может быть представлена следующим образом:

$$\varepsilon(t) = \sum_{\ell=1}^{L} \left\{ \frac{1}{E_\ell + \lambda_\ell \frac{d}{dt}} \right\} \sigma(t).$$

Обобщенная модель Максвелла (также известная как модель Максвелла–Вихерта) является достаточно общей формой линейной модели для вязкоупругости (рис. 2.5.2-б). Она учитывает, что релаксация происходит не одномоментно, а распределенно во времени и имеет вид:

$$\sigma(t) = \left\{ \sum_{\ell=1}^{L} \frac{\frac{d}{dt}}{\frac{1}{\tau_\ell}\frac{d}{dt} + \frac{1}{k_\ell}} \right\} \varepsilon(t).$$

Стандартная модель (рис. 2.5.3-а) описывается уравнением

$$\eta\,\dot{\sigma}(t) + (E_1 + E_2)\,\sigma(t) = \eta\,E_1\,\dot{\varepsilon}(t) + E_1\,E_2\,\varepsilon(t).$$

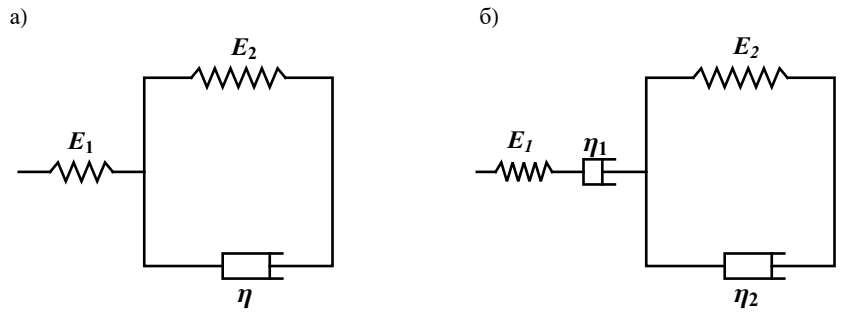


Рис. 2.5.3

Модель Максвелла–Кельвина (рис. 2.5.3-б) представляет собой последовательное соединение моделей Максвелла и Кельвина–Фойхта и описывается уравнением

$$\frac{\eta_1\,\eta_2}{E_1\,E_2}\,\ddot{\sigma}(t)+\Big(\frac{\eta_1}{E_1}+\frac{\eta_2}{E_2}+\frac{\eta_1}{E_2}\Big)\,\dot{\sigma}(t)+\sigma(t)=\frac{\eta_1\,\eta_2}{E_2}\,\ddot{\varepsilon}(t)+E_1\,E_2\eta_1\,\dot{\varepsilon}(t).$$

Несложно увидеть, что все эти модели – частные случаи обобщенной модели вида:

$$\sum_{\ell=0}^{M_1} p_\ell\,\frac{d^\ell\sigma(t)}{dt^\ell}=\sum_{\ell=0}^{M_2} q_\ell\,\frac{d^\ell\varepsilon(t)}{dt^\ell},\qquad p_\ell,q_\ell=\mathrm{const}\,.$$

Ряд Прони для модуля релаксации имеет вид

$$G(t)=G_\infty+\sum_{\ell=1}^{L} G_\ell e^{-t/t_i},$$

где G_∞ – стационарный коэффициент жесткости, формируемый параллельной пружиной, t_i G_i, – постоянные времени и жесткости элементов Максвелла, описывающие материал, и представляет соединение цепочки элементов Максвелла с добавленной параллельно пружиной.

Определяющие уравнения линейной вязкоупругости

Такие уравнения [54,55,77,78,112] используются для замыкания уравнений движения МДТТ.

Физические соотношения между девиаторами напряжений $\boldsymbol{s}$ и деформаций $\boldsymbol{\epsilon}$ в линейной вязкоупругости записываются в следующей форме:

$$2\,G\,\epsilon_{ij}(t) = s_{ij}(t) + \int\limits_0^t \Gamma(t-\tau)\,s_{ij}(\tau)\,d\tau. \tag{2.5.9}$$

Здесь обозначено: $\theta = \varepsilon_{kk}$ – относительное изменение объема, $\sigma = \sigma_{kk}/3$ – среднее (гидростатическое) напряжение, G – мгновенно-упругий модуль сдвига. Функция $\Gamma(t)$ характеризует реологические свойства материала и называется *ядром ползучести*.

Физические уравнения (2.5.9) выражают следующее: поле деформаций $\epsilon_{ij}(t)$ в данный момент времени определяется не только мгновенным напряжением $s_{ij}(t)$ (связанными с деформациями обобщенным законом Гука), но и предшествующими значениями напряжений с помощью некоторой наследственной функции. Объемное деформирование θ принимается упругим, так как объемная ползучесть мала по сравнению со сдвиговой. Заметим, что наследственная функция имеет своим аргументом разность $(t-\tau)$, т.е. уравнения (2.5.9) инвариантны относительно начала отсчета времени.

Ядро $\Gamma(t)$ является положительной монотонно убывающей функцией своих аргументов. На бесконечности она асимптотически стремится к нулю. При отрицательных значениях аргумента она тождественно равна нулю.

Предположим, что уравнения (2.5.9) могут быть разрешены относительно s_{ij} и σ:

$$s_{ij}(t) = 2\,G\left[\epsilon_{ij}(t) - \int\limits_0^t R(t-\tau)\,\epsilon_{ij}(\tau)\,d\tau\right], \tag{2.5.10}$$

$$\sigma(t) = K\left[\theta(t) - \int\limits_0^t R_1(t-\tau)\,\theta(\tau)\,d\tau\right],$$

где K – модуль мгновенного сжатия. Функцию $R(t)$ $(R_1(t))$ называют *ядром сдвиговой (объемной) релаксации* материала. Она является резольвентой ядра $\Gamma(t)$. Разумеется, функция $\Gamma(t)$ в свою очередь является резольвентой ядра $R(t)$. Верно следующее интегральное соотношение, связывающее ядра между собой:

$$R(t) - \Gamma(t) = \int\limits_0^t \Gamma(t-\tau)\,R(\tau)\,d\tau. \tag{2.5.11}$$

Следовательно, вполне достаточно определить одно из ядер экспериментально, другое можно получить аналитически. Возможна иная запись девиаторных соотношений:

$$\epsilon_{ij}(t) = \int_0^t J(t-\tau)\, ds_{ij}(\tau), \quad s_{ij}(t) = \int_0^t \Pi(t-\tau)\, d\epsilon_{ij}(\tau), \tag{2.5.12}$$

а также

$$\sigma(t) = \int_0^t \Pi_1(t-\tau)\, d\theta(\tau).$$

В этих уравнениях $J(t)$ – *функция ползучести* (*податливость*), $\Pi(t)$ – *функция релаксации*.

Один из эффективных методов решения краевых задач линейной теории вязкоупругости [54, 55] основан на записи соотношений типа (2.5.10) в операторной форме и использовании *принципа Вольтерры*.

Воспользовавшись принципом Вольтерра, можно получить решение, в которое будут входить алгебраические или трансцендентные функции операторов по времени, но это решение надо еще расшифровать. В общем случае такая расшифровка связана с определенными трудностями. В ряде случаев эти трудности преодолеваются. Для этого используется интегральное преобразование Лапласа–Карсона, метод аппроксимаций Ильюшина, операторы Работнова.

Если выписать полную систему уравнений, добавив к уравнениям линейной вязкоупругости, при упругой объемной деформации, уравнения равновесия, соотношения Коши и граничные условия, то применяя к ним преобразование Лапласа–Карсона с учетом свойств свертки, можно получить указанную систему в форме изображений, из вида которой следует, что задача линейной вязкоупругости в изображениях совпадает с соответствующей задачей для упругого тела. Следовательно, и решения этих задач совпадают, если, как сказано выше, некоторые постоянные заменить изображениями операторов. Модуль объемного сжатия в решении сохраняется. Если решение линейной задачи теории упругости известно, то будут известны изображения. Построив по найденным изображениям оригиналы, можно найти искомые решения.

Экспериментально-теоретический *метод Ильюшина [77]* предназначен для решения задач линейной вязкоупругости и основан на решении соответствующей задачи теории упругости с применением некоторых, дополнительно определяемых экспериментально функций.

Как и стандартный аппарат линейной упругости, теория линейной вязкоупругости не может адекватно описать весь спектр реальных материальных процессов. Например, многие полимерные материалы при повышенных напряжениях не следуют линейной модели вязкоупругой среды и проявляют физически *нелинейные* свойства. Применяемые для их описания различные аналитические модели подробно рассмотрены в ряде монографий и учебных пособий, включающих [54,55,112] и др. В частности, в определяющих соотношениях напряжение–деформация для произвольной анизотропной вязкоупругой среды в этом случае будут присутствовать функциональные ряды Тейлора [77]:

$$\varepsilon_{ij}(t) = \sum_{k_1,\ell_1=1}^{3} \int_0^t D^{[1]}_{ijk_1\ell_1}(t,\tau_1)\,\sigma_{k_1\ell_1}(\tau_1)\,d\tau_1 +$$

$$+ \sum_{k_1,\ell_1,k_2,\ell_2=1}^{3} \int_0^t \int_0^t D^{[2]}_{ijk_1\ell_1k_2\ell_2}(t,\tau_1,\tau_2)\,\sigma_{k_1\ell_1}(\tau_1)\,\sigma_{k_1\ell_1}(\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2 + ... +$$

$$+ \sum_{k_1,\ell_1,k_2,\ell_2,...,k_s,\ell_s=1}^{3} \int_0^t \int_0^t ... \int_0^t D^{[s]}_{ijk_1\ell_1k_2\ell_2...k_s\ell_s}(t,\tau_1,\tau_2,...,\tau_s) \times$$

$$\times\ \sigma_{k_1\ell_1}(\tau_1)\,\sigma_{k_1\ell_1}(\tau_2)\,...\,\sigma_{k_s\ell_s}(\tau_s)\,d\tau_1\,d\tau_2\,...\,d\tau_s + ...$$

Стохастические проблемы вязкоупругости

Особый интерес к стохастическому моделированию различных процессов изнашивания и деградации в механических компонентах связан с практической важностью стохастических моделей накопления усталости материалов, служащих в качестве инструментов для прогнозирования состояния различных инженерных сооружений.

Для адекватного моделирования поведения в определяющем уравнении должны быть точно определены функции, описывающие свойства материала. Поэтому на практике определяющие отношения сначала прикидываю на основе результатов экспериментов, а затем формулируют в виде математических уравнений. Новые эксперименты, материалы и приложения приводят к появлению новых более совершенных и сложных моделей [827]. Сложность идентификации моделей вязкоупругих материалов определяется необходимостью учета зависящих от времени, скорости и температуры функциональных зависимостей, неопределенностей, т.е. случайности, структурных констант и несовершенства материала [299,

333, 429, 464, 518, 535, 602, 770, 938, 956, 966, 1082, 1110]. Более того, испытания материалов на ползучесть и релаксацию требуют длительных и трудоемких экспериментов.

Необходимость современных технологий подтолкнула новые конструкции в области, где постоянно обнаруживаются случайные входные данные, стохастические возмущения и среды вместе со случайно меняющимися элементами системы. Признано, что детерминированное моделирование не может быть адекватным для определенных типов проблем, а поэтому требуется вероятностное моделирование системы. Поэтому общим знаменателем многих книг и работ является наличие в моделях различных типов неопределенностей, а именно, случайных величин, случайных процессов и случайных полей [269,275], используемых для моделирования множества различных физических, механических и химические процессов. К сожалению, наиболее распространенная ситуация заключается в том, что стохастические модели не могут быть полностью исследованы аналитическими методами. Поэтому обычно обращаются к приближенным решениям и моделированию, аналоговому или цифровому.

Важная часть изучения вязкоупругости состоит из качественных исследований, включающих анализ слабой разрешимости начально-краевой задачи для динамической модели термовязкоупругости [72], устойчивости стохастических вязкоупругих систем [485,537,569,919,1038], проблемы надежности изделий из вязкоупругих материалов [351, 921, 1009, 1086].

Среди других исследуемых вопросов случайной вязкоупругости можно выделить задачу о выходе за пределы допустимой области [1144], проблемы стохастических бифуркаций [355], построения фундаментальных решений систем уравнений устойчивых колебаний для вязкоупругих и термовязкоупругих материалов (модели Кельвина–Фойгта) [1012], развитие новых более точных теорий, в том числе для нестационарных сред [1011], разработка и и анализ испытаний изотермических крутильных колебаний на расплавах изотактического полипропилена, армированного углеродными нановолокнами [534], исследования поверхностных волн землетрясений в термовязкоупругих твердых средах второго порядка под воздействием силы тяжести, анализ сейсмического вязкоупругого затухания и т.д. Подробнее сложные вопросы, такие как моделирование термомеханического поведения вязкоупругих эластомеров при больших деформациях, термодинамическая формулировка магнито-термо-вязкоупругих определяющих уравнений и теории разрушения, а также соответствующая теория нелинейной электро-термо-вязкоупругости были представлены в работах [424, 478, 479] и т.д.

Отметим значительное число работ Г.Г. Хилтона (H.H. Hilton) [405,

656–658, 983] и др., посвященных различным стохастическим проблемам термовязкоупругости.

Системы обыкновенных СИДУ в стохастической механике часто возникают как результат применения таких методов, как метод конечных элементов (МКЭ), метод конечных разностей (МКР) [138], метод Галеркина [73, 114], метод прямых [298], разложение неизвестных функций по собственным функциям краевой задачи [293, 919] или каким-либо специальным функциям [236], к СИДУ в частных производных (СИДУвЧП) [1000], которые описывают непрерывные вязкоупругие среды. После преобразования ИДУвЧП или СИДУвЧП в обыкновенные ИДУ или СИДУ зависящая от времени структура ядер в обыкновенных детерминированных или стохастических интегро-дифференциальных уравнениях движения сохраняется.

Процедура перехода от СИДУвЧП к СИДУ

Представим один возможных путей построения системы СИДУ на основе исходной системы СИДУвЧП [1000].

Для этого рассмотрим линейную вязкоупругую среду, занимающую открытую ограниченную область $\mathfrak{O} \subset \mathbb{R}^3$ с границей $\partial\mathfrak{O} = \partial\mathfrak{O}_1 \cup \partial\mathfrak{O}_2$ в декартовой системе координат $(Ox_1x_2x_3)$. Пусть $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ – любая точка в области $\mathfrak{O}$, $d\boldsymbol{x} = dx_1\,dx_2\,dx_3$, $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, n_3)$ – орт внешней нормали $\partial\mathfrak{O}$, $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = (u_1(\boldsymbol{x}, t), u_2(\boldsymbol{x}, t), u_3(\boldsymbol{x}, t))$ – поле перемещения, определенное в $\mathfrak{O}$. На части $\partial\mathfrak{O}_1$ границы задано условие Дирихле $\boldsymbol{u} = 0$. Следовательно, перемещения области как твердого тела отсутствуют. Поле поверхностных сил $\boldsymbol{f}^{\,\mathrm{surf}}(\boldsymbol{x}, t) = (f_1^{\mathrm{surf}}(\boldsymbol{x}, t), f_2^{\mathrm{surf}}(\boldsymbol{x}, t), f_3^{\mathrm{surf}}(\boldsymbol{x}, t))$ действует на часть $\partial\mathfrak{O}_2$ границы и будет случайным. Далее, поле объемных сил $\boldsymbol{f}^{\,\mathrm{vol}}(\boldsymbol{x}, t) = (f_1^{\mathrm{vol}}(\boldsymbol{x}, t), f_2^{\mathrm{vol}}(\boldsymbol{x}, t), f_3^{\mathrm{vol}}(\boldsymbol{x}, t))$ определено в $\mathfrak{O}$ и также случайно.

Задача состоит в анализе линейного переходного режима рассматриваемой среды относительно статического положения равновесия. Предполагается, что предварительное напряжение отсутствует. Граничная задача во временно́й области может быть записана следующим образом: для любого $t \in (0, T]$, $0 < T < +\infty$

$$\begin{gathered} \rho\,\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} - \operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{f}^{\,\mathrm{vol}} \quad \text{в } \mathfrak{O}, \\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \quad \text{на } \mathfrak{O}_1, \\ \boldsymbol{\sigma}\,\boldsymbol{n} = \boldsymbol{f}^{\,\mathrm{surf}} \quad \text{на } \mathfrak{O}_2, \end{gathered} \tag{2.5.13}$$

где $\rho(\boldsymbol{x})$ – плотность массы, которая предполагается положительно определенной ограниченной функцией в $\mathfrak{O}$, $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x},t)$ – тензор напряжения второго ранга, для которого

$$\{\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x},t)\}_j=\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\sigma_{jk}(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_k},\qquad \{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x},t)\,\boldsymbol{n}\}_j=\sum_{k=1}^{3}\sigma_{jk}(\boldsymbol{x},t)n_k(\boldsymbol{x}).$$

Пусть $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)$ – тензор деформации. определенный соотношением

$$\varepsilon_{jk}(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_j(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_j}\Big). \tag{2.5.14}$$

Тензор напряжения $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x},t)$ связан с тензором деформации $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)$ определяющим уравнением, которое является нелокальным во времени для линейного вязкоупругого материала и которое рассматривается ниже. Наконец, для нестационарной залачи начальные условия будут выглядеть так:

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},0)=\mathbf{0},\quad \frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}(\boldsymbol{x},0)=\mathbf{0}\quad\forall\boldsymbol{x}\in\mathfrak{O}. \tag{2.5.15}$$

Для анализа вязкоупругих диссипативных материалов можно применить теорию, предполагающую строгую диссипативность среды. Такое предположение подразумевает, что операторы, связанные с формулировкой задачи и принадлежащие множеству всех положительных линейных операторов, фактически будут входить в подмножество всех положительно определенных операторов.

Чтобы упростить нотацию, далее в этом фрагменте символ $\boldsymbol{x}$ в соотношениях будет опускаться. Поэтому $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x},t)$ и $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)$ будут записываться как $\boldsymbol{\sigma}(t)$ и $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$. Предполагается, что

$$\boldsymbol{\sigma}(t)=\mathbf{0},\qquad \boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{0}\qquad\text{для}\qquad t\leqslant 0. \tag{2.5.16}$$

В линейной вязкоупругости определяющие уравнения записываются так:

$$\boldsymbol{\sigma}(t)=\int\limits_0^t C(t-s):\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(s)\,ds,\qquad t>0,$$

где $s\mapsto C(s)$ – функция релаксации (тензор четвертого ранга), определенная на $\mathbb{R}^+=[0+\infty)$, символ ":" задается соотношением

$$C(t-s):\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(s)\stackrel{\text{def}}{=}\Big\{\sum_{\ell,\jmath=1}^{3}C_{ik\ell\jmath}(t-s)\varepsilon_{\ell\jmath}(s)\Big\}.$$

Выполняя интегрирование по частям с учетом $\boldsymbol{\varepsilon}(0) = \mathbf{0}$, последнее уравнение можно записать так:

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = C(0) : \boldsymbol{\varepsilon}(t) + \int_0^t \dot{C}(t-s) : \boldsymbol{\varepsilon}(s)\, ds =$$

$$= C(0) : \boldsymbol{\varepsilon}(t) + \int_0^t \dot{C}(s) : \boldsymbol{\varepsilon}(t-s)\, ds, \tag{2.5.17}$$

где $s \mapsto \dot{C}(s)$ определено на $\mathbb{R}^{*+} = (0, +\infty)$ как первая производная C по s и так, что

$$\dot{C}(0) = \lim_{s \to +0} \dot{C}(s) = \dot{C}(0^+).$$

Тензор четвертого ранга $C(0)$ называется *начальной эластичностью*, а второй член в правой части равенства (2.5.17) – *наследственным ответом*. Введем функцию $s \mapsto H(s)$ (тензор четвертого ранга), определенную на $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ так:

$$H(s) = \begin{cases} 0, & \text{для } \ s < 0, \\ \dot{C}(0^+), & s = 0, \\ \dot{C}(s), & \text{для } \ s > 0. \end{cases} \tag{2.5.18}$$

Следовательно, H – причинная функция, т.к. носитель функции H есть $\mathbb{R}^+$.

Предположим, что функция H интегрируема на $\mathbb{R}$, т.е. на $\mathbb{R}^+$. Принимая во внимание соотношения (2.5.18), равенство (2.5.17) может быть переписано следующим образом:

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = C(0) : \boldsymbol{\varepsilon}(t) + \int_0^t H(s) : \boldsymbol{\varepsilon}(t-s)\, ds, \tag{2.5.19}$$

а используя соотношения (2.5.16) и (2.5.18), последнее равенство может быть представлено так:

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = C(0) : \boldsymbol{\varepsilon}(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} H(s) : \boldsymbol{\varepsilon}(t-s)\, ds. \tag{2.5.20}$$

Пусть H^∞ – тензор четвертого ранга, определяемый соотношением

$$H^\infty = \int\limits_0^{+\infty} H(s)\,ds. \tag{2.5.21}$$

Вследствие того, что

$$C(t) = C(0) + \int\limits_0^t \dot{C}(s)\,ds,$$

равновесный модуль вводится как тензор четвертого ранга

$$C^\infty = \lim_{t\to+\infty} C(t)$$

и так, что

$$C^\infty = C(0) + H^\infty. \tag{2.5.22}$$

То, что вязкоупругий материал диссипативен, означает, что для любого $t \geqslant 0$ имеем

$$\int\limits_0^t \boldsymbol{\sigma}(s) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(s)\,ds > 0.$$

Используя это неравенство, для достаточно гладких $\boldsymbol{\varepsilon}$ с $\boldsymbol{\varepsilon}(0) = 0$ было доказано [633], что начальная эластичность $C(0)$ и равновесный модуль C^∞ являются положительно определенными симметричными тензорами четвертого ранга. Кроме того, было показано, что $C(0) - C^\infty$ – положительно определенный симметричный тензор четвертого ранга, из чего следует, что $H^\infty = C^\infty - C(0)$ – отрицательно определенный симметричный тензор четвертого ранга. Используя обратное время, ранее было показано [511], что для любого $t \in \mathbb{R}^+$ тензор четвертого ранга $C(t)$ симметричен.

Теперь непосредственно обратимся к постановке граничной задачи для вычисления слабого решения, определенной для $t \in (0, T]$ уравнением (2.5.13), для которого определяющее уравнение дается равенством (2.5.19) с тензором деформации $\boldsymbol{\varepsilon}$ (2.5.14) и начальными условиями (2.5.15) при $t = 0$.

Введем допустимое функциональное пространство $\mathscr{C}_{\text{ad}}$ функций

$$\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = (v_1(\boldsymbol{x}), v_2(\boldsymbol{x}), v_3(\boldsymbol{x})),$$

определенных на $\mathfrak{O}$ со значениями в $\mathbb{R}^3$ и таких, что

$$\mathscr{C}_{\text{ad}} = \{\, \boldsymbol{v} \in (\mathbb{H}^1(\mathfrak{O}))^3, \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \text{ на } \mathfrak{O}_1 \,\}, \tag{2.5.23}$$

где $\mathbb{H}^1(\mathfrak{O})$ – пространство Соболева действительных функций, интегрируемых с квадратом в $\mathfrak{O}$ и таких, что все их частные производные по x_j $(j = 1, 2, 3)$ – также действительные функции, интегрируемые с квадратом в $\mathfrak{O}$.

Определим слабое решение следующим образом. Для любого фиксированного t из $(0, T]$ найти $\boldsymbol{u}(\cdot, t) = \{\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)\}$ из $\mathscr{C}_{\text{ad}}$ такое, что для всех $\boldsymbol{v}$ из $\mathscr{C}_{\text{ad}}$ имеем

$$m(\partial_t^2 \boldsymbol{u}(\cdot, t), \boldsymbol{v}) + k_0(\boldsymbol{u}(\cdot, t), \boldsymbol{v}) + \int_0^t h(\boldsymbol{u}(\cdot, t-s), \boldsymbol{v}; s)\, ds = f(\boldsymbol{v}; t), \tag{2.5.24}$$

в котором билинейная форма $(\boldsymbol{u}(\cdot, t), \boldsymbol{v}) \mapsto m(\boldsymbol{u}(\cdot, t), \boldsymbol{v})$ определяется соотношением

$$m(\boldsymbol{u}(\cdot, t), \boldsymbol{v}) = \int_{\mathfrak{O}} \rho(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}. \tag{2.5.25}$$

Возвращаясь к полной нотации $C(\boldsymbol{x}, t)$ вместо сокращенной $C(t)$, начальная упругая билинейная форма $(\boldsymbol{u}(\cdot, t), \boldsymbol{v}) \mapsto k_0(\boldsymbol{u}(\cdot, t), \boldsymbol{v})$, ассоциированная с начальной упругостью $C(\boldsymbol{x}, 0)$, определяется равенством:

$$k_0(\boldsymbol{u}(\cdot, t), \boldsymbol{v}) = \int_{\mathfrak{O}} \{C(\boldsymbol{x}, 0) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t))\} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}))\, d\boldsymbol{x}.$$

Далее, возвращаясь к полной нотации $H(\boldsymbol{x}, s)$ вместо сокращенной $H(s)$, наследственная билинейная форма

$$\big(\{\boldsymbol{u}(\cdot, s), s \in [0, t]\}, \boldsymbol{v}\big) \mapsto \int_0^t h(\boldsymbol{u}(\cdot, t-s), \boldsymbol{v}; s)\, ds,$$

ассоциированная с функцией релаксации $s \mapsto C(\boldsymbol{x}, s)$ через уравнение (2.5.18), такова, что

$$h(\boldsymbol{u}(\cdot, t-s), \boldsymbol{v}; s) = \int_{\mathfrak{O}} \{H(\boldsymbol{x}, s) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t-s))\} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}))\, d\boldsymbol{x}. \tag{2.5.26}$$

Линейная форма $\boldsymbol{v} \mapsto f(\boldsymbol{v}; t)$ определяется соотношением

$$(\boldsymbol{v}; t) = \int_{\mathfrak{O}} \boldsymbol{f}^{\text{vol}}(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} + \int_{\mathfrak{O}_2} \boldsymbol{f}^{\text{surf}}(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\, ds(\boldsymbol{x}), \tag{2.5.27}$$

где $ds(\boldsymbol{x})$ – мера на $\mathfrak{O}_2$.

В рамках гипотез, введенных ранее, и если для всех $\boldsymbol{v}$ функция $t \mapsto f(\boldsymbol{v};t)$ ограничена на множестве $[0,T]$, то уравнение (2.5.25) для t из $(0,T]$ с начальными условиями, определенными равенствами (2.5.15), имеет единственное решение $t \mapsto \boldsymbol{u}(\cdot,t) : [0,T] \to \mathscr{C}_{\mathsf{ad}}$, интегрируемое с квадратом.

Для данного детерминированного возмущения, представленного функцией $f(\boldsymbol{v};\cdot)$, краевая задача в слабой форме, задаваемая уравнениями (2.5.24) с начальными условиями (2.5.15), может быть дискретизирована методом конечных элементов. Пусть $\boldsymbol{u}(t) = \big(u_1(t),...,u_n(t)\big)$ – детерминированный вектор в $\mathbb{R}^n$, связанный с пространственной дискретизацией детерминированного поля $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$. Пусть $\boldsymbol{f}(t) = \big(f_1(t),...,f_n(t)\big)$ – соответствующая конечно элементная дискретизация линейной формы $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v},t)$. Тогда получим уравнения в виде:

$$A\,\ddot{\boldsymbol{u}}(t) + \mathbb{K}_0\,\dot{\boldsymbol{u}}(t) + \int_0^t \mathbb{N}(s)\,\boldsymbol{u}(t-s)\,ds = \boldsymbol{f}(t), \qquad t \in (0,T],$$
$$\boldsymbol{u}(0) = \dot{\boldsymbol{u}}(0) = \boldsymbol{0}.$$

Принимая во внимание полученные выше результаты, легко можно доказать, что матрицы A и $\mathbb{K}_0$, связанные с билинейными формами m и k_0, являются положительно определенными симметричными $(n \times n)$-матрицами. Функция $s \mapsto \mathbb{N}(s)$ из $\mathbb{R}$ в множество всех симметричных $(n \times n)$-матриц, таких что интеграл

$$\int_0^t \mathbb{N}(s)\,\boldsymbol{u}(t-s)\,ds$$

ассоциируется с наследственной билинейной формой, имеет носитель, которым является $\mathbb{R}^+$ (что подразумевает $\mathbb{N}(s) = \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n}$ для $s < 0$), и интегрируема на $\mathbb{R}$.

Обзор методов решения ИДУ вязкоупругости

Основные методы стохастической механики, в т.ч. инструменты для линейных и нелинейных вязкоупругих исследований, включают метод Монте-Карло (статистического моделирования) [68,127,349,365,623], стохастический метод конечных разностей [717], стохастический метод конечных элементов [599, 717], стохастический метод Галеркина [171, 623, 1104], стохастический метод граничных элементов [717], модальный анализ [393], метод стохастической коллокации [623, 1104], стохастический

метод моделирования с приведенным порядком [623] и их смешанные схемы [1109]. Кроме того, ряды Тейлора и Неймана, методы возмущений [623, 717] и методы молекулярной динамики [419] могут быть использованы в случае малой неопределенности и микромеханического анализа соответственно.

Количественные методы решения линейных вязкоупругих проблем можно разделить на две основные категории: 1) подходы, основанные на приближенных и итерационных решений во временной области; 2) методы, базирующиеся на решении соответствующей упругой задачи, сформулированной в частотной (преобразованной) области. Пошаговые во времени алгоритмы, широко используемые в методах конечных элементов и граничных элементов, относятся к первой категории. Во вторую входят методики, основанные на применении интегральных преобразований, таких как Лапласа или Фурье, и на преобразовании задачи из временно́й в ту, которая зависит только от параметра преобразования [926]. Следующий уровень классификации делит стохастические методы на прямые (для вычисления реализаций случайных процессов и полей) и косвенные (для расчета вероятностных характеристик для случайных процессов и полей, например, плотности вероятности, моментных функций и т.д.).

Хорошо известно (см., например, в [473] историю развития методов численного интегрирования СИДУвЧП), что решение интегро-дифференциальных уравнений является очень сложной проблемой даже в детерминированном случае. Эти трудности еще больше для линейных и нелинейных стохастических случаев. Несмотря на существование нескольких результатов, касающихся алгоритмов для стохастических интегро-дифференциальных уравнений (см., например, [682, 768, 1000, 1033]), очень полезно адаптировать существующие методы решения детерминированных ИДУ для стохастического случая, вследствие того, что основная часть методов качественного и количественного анализа явлений, описываемых ИДУ состоит из детерминированных схем. Таким образом, комбинация МКЭ [473, 777] или метода граничных элементов [964] для детерминированных ИДУвЧП и МКЭ для СДУвЧП [599] несомненно является очень перспективным способом для прямого анализа СИДУвЧП и стохастической вязкоупругости.

Были разработаны ряд схем для построения численных приближений решения детерминированных и стохастических интегро-дифференциальных уравнений. Что касается рассмотрения стохастических задач, приближенные алгоритмы обычно используются для прямого расчета поведения систем во времени. Эти схемы включают:

– полностью численные методы (классические и модифицированные

гибридные), такие как явные и неявные схемы Эйлера [473] и МКЭ [609] для ИДУвЧП, Tau-метод [728], одношаговые и многошаговые методы Рунге–Кутты [510, 840, 867, 1094] для ИДУ, одношаговые методы Рунге-Кутты 4-го порядка [175, 920], метод Рунге–Кутты для расчета ковариационными функций [307], методы экстраполяции [468], Галеркина [791], итераций на последнем шаге [25], использование вейвлетов [505], глобально определенных Sinc-базисных функций [703]), приближенное преобразование ИДУвЧП в ДУвЧП и СОИДУ в СОДУ на основе усреднения ядра [201, 220, 1000], разложения на основе гамма-распределения [721];

– приближенные аналитические методы, в т.ч. методы рядов Тейлора [608], последовательных приближений для вычисления функции Грина [668], асимптотический метод [162, 184] для ИДУ и метод стохастического усреднения для СИДУ [163, 355], методы многих масштабов [1106], коллокации [436], теории возмущений [625], неподвижной точки на основе биортогональных систем в банаховых пространствах [410].

Далее, существует ряд схем для упрощения интегральных ядер, такие как использование рядов Прони и алгоритма аппроксимации полиномами Лагерра для представления функций релаксации [885], метод приближения переходных функций экспонентами [25], приближенный вывод уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова для СОИДУ [120], расширения фазового пространства для случая ограниченности носителя ядра [213] и т.д.

Различные процедуры стохастической механики, вероятностно-статистической структурной механики, акустики и т.д., которые могут быть полезны для решения вязкоупругих проблем, рассматриваются в [32, 44, 129, 130, 166, 756, 790, 806, 835, 875, 995, 999, 1003].

2.5.1.2. Расчет случайных линейных продольных колебаний вязкоупругой балки

При анализе свободных продольных колебаний призматической балки с прямолинейной осью исходят из схемы, показанной на рис. 2.5.4. Обозначив через $u = u(x,t)$ перемещение вдоль оси OX произвольного поперечного сечения, получим следующее выражение для относительного удлинения [173]:

$$\varepsilon(t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}.$$

В соответствии с законом Фойхта

$$\sigma(t) = E\,\varepsilon(t) + k_0\,\frac{d\varepsilon(t)}{dt}$$

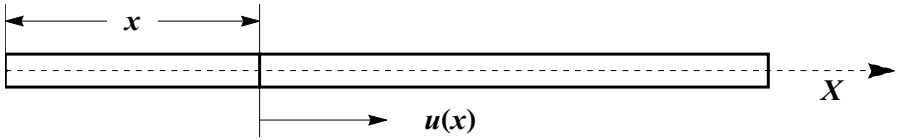


Рис. 2.5.4

(E – модуль Юнга) напряжение выразится так:

$$\sigma = E\,\frac{\partial u}{\partial x} + k_0\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}.$$

При этом продольная сила в поперечном сечении примет форму:

$$N = \sigma\,S = E\,S\,\frac{\partial u}{\partial x} + k_0\,S\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}, \tag{2.5.28}$$

где S - площадь поперечного сечения стержня. Тогда уравнение движения элемента балки будет иметь вид

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \rho\,F\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

где ρ – плотность материала стержня. Подставляя сюда соотношение для N (2.5.28) и полагая $S = \mathrm{const}$, получим основное дифференциальное уравнение модели:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b^2\,\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial t}, \qquad a = \sqrt{E/\rho}, \qquad b = \sqrt{k_0/\rho},$$

где a – скорость распространения звука в материале.

Если учесть наличие линейных внешнего (пропорционального скорости смещения) и внутреннего трения, вязкоупругость материала балки и внешние силы, то ИДУ в частных производных (ИДУвЧП) колебаний изотропной однородной балки будет иметь следующий вид [225]:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + 2\,\alpha\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2\Big[\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \int\limits_0^t R(t-\tau)\,\frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2}\,d\tau\Big] +$$

$$+ b^2\,\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial t} + q(x,t), \qquad 0 < x < L, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{2.5.29}$$

где $u(x,t)$ – смещение из положения равновесия, L – длина балки ($0 < L < +\infty$), $q(x,t)$ – внешняя сила, рассчитанная на единицу объема и

действующая вдоль оси балки, α, a, b – положительные постоянные. В качестве начальных и граничных будем использовать условия:

$$u(x,0)=\bar{u}_1(x), \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\bar{u}_2(x), \qquad x\in(0,L), \tag{2.5.30}$$

$$u(0,t)=u(L,t)=0, \tag{2.5.31}$$

где $\bar{u}_1(x)$, $\bar{u}_2(x)$ – известные функции x.

Отметим [255], что если вязкость значительна, то колебания невозможны, а возмущение затухает. Если вязкость не столь велика, то продольные колебания складываются из конечного числа затухающих гармонических колебаний и "хвоста" апериодических затухающих движений. Затухание отдельных гармоник неравномерное: чем выше гармоника, тем быстрее она затухает. По истечении некоторого времени стержень будет колебаться на основном тоне.

Считая, что функцию $q(x,t)$ можно представить в виде

$$q(x,t)=\sum_{k=1}^{+\infty} q_k(t)\,\sin\omega_k\,x, \quad \omega_k=\frac{\pi\,k}{L}, \tag{2.5.32}$$

решение задачи (2.5.29)–(2.5.31) можно искать в виде ряда

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t)\,\sin\omega_k\,x. \tag{2.5.33}$$

Подставляя ряды (2.5.32), (2.5.33) в уравнение (2.5.29) и приравнивая коэффициенты при синусах с одинаковыми аргументами, для определения функций $u_k(t)$ получим следующую счетную систему уравнений:

$$\ddot{u}_k(t)+2\,\alpha\,\dot{u}_k(t)=-a^2\,\omega_k^2\Big[u_k(t)-\int_0^t R(t-\tau)\,u_k(\tau)\,d\tau\Big]-$$

$$-\,b^2\,\omega_k^2\,\dot{u}_k(t)+\;q_k(t), \qquad k=1,2,..., \quad t>0, \tag{2.5.34}$$

начальными условиями для которой будут соотношения

$$u_k(0)=\frac{2}{L}\int_0^L \bar{u}_1(x)\,\sin\omega_k\,x\,dx\equiv\tilde{u}_{1k},\;\; \dot{u}_k(0)=\frac{2}{L}\int_0^L \bar{u}_2(x)\,\sin\omega_k\,x\,dx\equiv\tilde{u}_{2k}.$$

Если начальные поля $\bar{u}_1(x,t)$ и $\bar{U}_2(x,t)$, а также внешняя нагрузка $q(x,t)$ будут случайными (обозначим их как $\bar{U}_1(x,t)$, $\bar{U}_2(x,t)$ и $Q(x,t)$

соответственно) и представляют собой сумму синусоид с частотами ω_k со случайными амплитудами, то и колебания, описываемые уравнением (2.5.29), будут случайными, а уравнения (2.5.34) образуют систему СОИДУ вида:

$$\ddot{U}_k(t) + 2\,\alpha\,\dot{U}_k(t) = -a^2\,\omega_k^2\Big[U_k(t) - \int\limits_0^t R(t-\tau)\,U_k(\tau)\,d\tau\Big] -$$

$$- b^2\,\omega_k^2\,\dot{U}_k(t) + \ Q_k(t), \qquad k = 1, 2, ..., \quad t > 0, \tag{2.5.35}$$

$$U_k(0) = \frac{2}{L}\int\limits_0^L \bar{U}_1(x,t)\,\sin\omega_k\,x\,dx \equiv \tilde{U}_{1k},$$

$$\dot{U}_k(0) = \frac{2}{L}\int\limits_0^L \bar{U}_2(x,t)\,\sin\omega_k\,x\,dx \equiv \tilde{U}_{2k},$$

где $\tilde{U}_{1k}$, $\tilde{U}_{2k}$ – случайные величины. При этом математическое ожидание и ковариационная функция случайного поля $U(x,t)$ могут быть записаны так:

$$m_U(x,t) = \mathbb{E}[U(x,t)] = \sum_{k=1}^{+\infty} m_{Uk}(t)\,\sin\omega_k\,x,$$

$$\mathcal{C}_{UU}(x,t;y,t') = \mathbb{E}\Big[\mathring{U}(x,t)\,\mathring{U}(y,t')\Big] = \sum_{k,\ell=1}^{+\infty} \mathcal{C}_{k\ell}(t,t')\,\sin\omega_k\,x\,\sin\omega_\ell\,y,$$

где

$$\mathcal{C}_{k\ell}(t,t') = \mathbb{E}\Big[\mathring{U}_k(t)\,\mathring{U}_\ell(t')\Big],$$

$$\mathring{U}(x,t) = U(x,t) - m_U(x,t), \qquad \mathring{U}_k(t) = U_k(t) - m_{Uk}(t).$$

Дисперсия поля $U(x,t)$ в этом случае будет выглядеть так:

$$\mathcal{D}_{UU}(x,t) \equiv \mathcal{C}_{UU}(x,t;x,t) = \sum_{k,\ell=1}^{+\infty} \mathcal{K}_{k\ell}(t)\,\sin\omega_k\,x\,\sin\omega_\ell\,x. \tag{2.5.36}$$

Итак, для того чтобы найти характеристики $m_U(x,t)$, $\mathcal{C}_{UU}(x,t;y,t')$ и $\mathcal{D}_{UU}(x,t)$ стохастических линейных продольных колебаний вязкоупругой балки необходимо получить статистические оценки решения системы стохастических интегро-дифференциальных уравнений (2.5.35).

Рассмотрим следующую часто используемую форму ядра R, но со случайной компонентой:

$$R(\theta;\boldsymbol{r}_2) = R(\theta;\boldsymbol{R}_2)|_{\boldsymbol{R}_2=\boldsymbol{r}_2} = \sum_{j=1}^{J} r_{1j}\, e^{-r_{2j}\theta}, \tag{2.5.37}$$

где r_{1j} – положительное действительное число, r_{2j} – возможное значение положительной случайной величины R_{2j}, $j \in J \in \mathbb{N}$, причем r_{1j}, r_{2j} таковы, что верно неравенство

$$0 \leqslant \int\limits_0^{+\infty} R(t;\boldsymbol{r}_2)\, dt < 1. \tag{2.5.38}$$

Зависимость $U(t,x)$ от случайного вектора $\boldsymbol{R}_2$ далее отмечается как $U(x,t;\boldsymbol{R}_2)$, а случайных функций $U_k(t)$ как $U_k(t;\boldsymbol{R}_2)$ (считаем, что случайное начальное состояние, белые шумы $V_\ell(t)$ в любой момент времени и вектор $\boldsymbol{R}_2$ – независимые векторы). Поэтому в данном случае имеется возможность перехода от системы СОИДУ к системе СОДУ с помощью замен переменных:

$$Z_{kj}(t;\boldsymbol{R}_2) = \int\limits_0^t e^{-R_{2j}(t-\theta)}\, U_k(\theta;\boldsymbol{R}_2)\, d\theta. \tag{2.5.39}$$

Кроме того, будем считать, что случайные возмущения $Q_k(t)$ формируются из независимых белых шумов следующим образом:

$$Q_k(t) = \sum_{\ell=1}^{K} \bar{q}_{k\ell}\, V_\ell(t), \quad \bar{q}_{k\ell} = \text{const}, \quad K \in \mathbb{N}.$$

Отсюда расширенная система СОДУ и начальные условия будут иметь вид:

$$\ddot{U}_k(t;\boldsymbol{R}_2) + (2\,\alpha + b^2\,\omega_k^2)\,\dot{U}_k(t;\boldsymbol{R}_2) = -a^2\,\omega_k^2\Big[U_k(t;\boldsymbol{R}_2) - \\ - \sum_{j=1}^{J} r_{1j}\, Z_{kj}(t;\boldsymbol{R}_2)\Big] + \sum_{\ell=1}^{K} \bar{q}_{k\ell}\, V_\ell(t), \tag{2.5.40}$$

$$\dot{Z}_{kj}(t;\boldsymbol{R}_2) = U_k(t;\boldsymbol{R}_2) - R_{2j}\, Z_{kj}(t;\boldsymbol{R}_2), \tag{2.5.41}$$

$$k = 1,2,..., \quad j = 1,2,...,J, \quad t > 0,$$

$$U_k(0;\boldsymbol{R}_2)=\tilde{U}_{1k},\quad \dot{U}_k(0;\boldsymbol{R}_2)=\tilde{U}_{2k},\qquad Z_{kj}(0;\boldsymbol{R}_2)=0. \tag{2.5.42}$$

Для практических расчетов в уравнениях (2.5.40), (2.5.41) ограничимся конечным числом уравнений M (и соответственно случайных функций $U_k(t)$) и определим распределения компонент вектора $\boldsymbol{R}_2=\{R_{21},\ R_{22},\ ...,\ R_{2J}\}$, считая их независимыми, так:

$$R_{2j}=\bar{m}_{2j}\,(1+\Xi_{2j}\,\delta_{2j}),$$

где $\bar{m}_{2j}$, δ_{2j} – постоянные ($\bar{m}_{2j}>0$, $0\leqslant\delta_{2j}<1$), Ξ_{2j} – случайная величина, равномерно распределенная на интервале $(-1,1)$, причем истинность неравенства $r_{j1}<\bar{r}_{j2}/J$ при $\bar{r}_{j2}=\bar{m}_{2j}\,(1-\delta_{2j})$ будет достаточной для удовлетворения неравенства (2.5.38). Кроме того, предположим, что случайные величины $\tilde{U}_{1k}$, $\tilde{U}_{2k}$ $(1\leqslant k\leqslant M)$ имеют совместное нормальное распределение.

Вследствие большого значения M числа уравнений, требуемых для адекватного представления случайного поля $U(x,t)$, нелинейного вхождения случайных параметров и др., для исследования системы выбран метод Монте-Карло, сочетающий псевдослучайное разыгрывание случайных величин и начальных условий, численное интегрирование системы СОДУ с целью получения реализаций случайных функций на заданной временно́й сетке и статистическую обработку полученных реализаций для получения их оценок. После этого эти оценки используются для построения представлений функций $m_U(x,t)$ и $\mathcal{C}_{UU}(x,t;y,t')$.

Для реализации этой схемы введем временную сетку

$$t_0=0<t_1<...<t_{p-1}<t_p<...<t_P=T, \tag{2.5.43}$$
$$h_p=t_p-t_{p-1},\quad p=1,2,...,P,\quad \max_p h_p=h_*\ll 1$$

и обозначения

$$\widehat{X}_1^{[ks]}(t)=U_k(t;\boldsymbol{R}_2=\boldsymbol{r}_2^{[s]}),\quad \widehat{X}_2^{[ks]}(t)=\dot{U}_k(t;\boldsymbol{R}_2=\boldsymbol{r}_2^{[s]}),$$
$$\widehat{X}_{1p}^{[ks]}=\widehat{X}_1^{[ks]}(t_p),\qquad \widehat{X}_{2p}^{[ks]}=\widehat{X}_2^{[ks]}(t_p), \tag{2.5.44}$$
$$\widehat{Z}^{[kjs]}(t)=Z_{kj}(t;\boldsymbol{R}_2=\boldsymbol{r}_2^{[s]}),\qquad \widehat{Z}_p^{[kjs]}=\widehat{Z}^{[kjs]}(t_p),$$

где $\boldsymbol{r}_2^{[s]}$ – s-е моделирование вектора $\boldsymbol{R}_2$. Кроме того, дискретизацию дифференциала винеровского процесса $dW_\ell(t)=V_\ell(t)\,dt$ в точке t_p для s-го моделирования определим так [288]:

$$\Delta w_p^{[\ell s]}=\sqrt{2\,\pi\,h_p}\,\upsilon_p^{[\ell s]}, \tag{2.5.45}$$

где $\upsilon_p^{[\ell s]}$ – (p,ℓ,s)-е моделирование случайной величины Υ, имеющей стандартное нормальное распределение.

Тогда можно построить полунеявную модификацию схемы Эйлера–Маруямы численного решения СДУ для рассматриваемых уравнений следующего вида:

$$\widehat{x}_{1,p+1}^{[ks]} = \widehat{x}_{1p}^{[ks]} + \frac{h_p}{2}\left(\widehat{x}_{2p}^{[ks]} + \widehat{x}_{2,p+1}^{[ks]}\right), \tag{2.5.46}$$

$$\widehat{x}_{2,p+1}^{[ks]} = \widehat{x}_{2p}^{[ks]} - \alpha_{kp}\left(\widehat{x}_{2p}^{[ks]} + \widehat{x}_{2,p+1}^{[ks]}\right) + \sum_{\ell=1}^{K} \bar{q}_{k\ell}\,\Delta w_p^{[\ell s]} +$$

$$+ \beta_{kp}\Big[\sum_{j=1}^{J} r_{1j}\left(\widehat{z}_p^{[kjs]} + \widehat{z}_{p+1}^{[kjs]}\right) - \left(\widehat{x}_{1p}^{[ks]} + \widehat{x}_{1,p+1}^{[ks]}\right)\Big], \tag{2.5.47}$$

$$\widehat{z}_{p+1}^{[kjs]} = \widehat{z}_p^{[kjs]} + \frac{h_p}{2}\left(\widehat{x}_{1p}^{[ks]} + \widehat{x}_{1,p+1}^{[ks]}\right) - \frac{h_p}{2}\,r_{2j}\left(\widehat{z}_p^{[kjs]} + \widehat{z}_{p+1}^{[kjs]}\right), \tag{2.5.48}$$

где

$$\alpha_{kp} = \frac{h_p}{2}\,(2\,\alpha + b^2\,\omega_k^2), \quad \beta_{kp} = \frac{h_p}{2}\,a^2\,\omega_k^2, \quad p = 0,1,2,...,P-1,$$
$$s = 1,2,...,S \gg 1, \quad k = 1,2,...,M, \quad j = 1,2,...,J.$$

После получения реализаций $\widehat{x}_{1p}^{[ks]}$ случайных функций $U_k(t;\boldsymbol{R}_2)$ можно оценить и первые моменты случайного поля $U(x,t)$ на выбранной временно́й сетке:

$$\widehat{m}_U(x,t_p) = \sum_{k=1}^{M} \widehat{m}_{1p}^{[k]}\,\sin\omega_k x,$$

$$\widehat{\mathcal{C}}_{UU}(x,t_p;y,t_{p'}) = \sum_{k,\ell=1}^{M} \widehat{\mathcal{C}}_{k\ell pp'}\,\sin\omega_k x\,\sin\omega_\ell y,$$

$$\widehat{\mathcal{K}}_{UU}(x,t_p) = \sum_{k,\ell=1}^{M} \widehat{\mathcal{K}}_{k\ell p}\,\sin\omega_k x\,\sin\omega_\ell x,$$

где

$$\widehat{m}_{1p}^{[k]} = \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S} \widehat{x}_{1p}^{[ks]}, \qquad \widehat{\mathcal{C}}_{k\ell pp'} = \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S} \widehat{x}_{1p}^{[ks]}\,\widehat{x}_{1p'}^{[\ell s]} - \widehat{m}_{1p}^{[k]}\,\widehat{m}_{1p'}^{[\ell]},$$

$$\widehat{\mathcal{K}}_{k\ell p} = \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S} \widehat{x}_{1p}^{[ks]}\,\widehat{x}_{1p}^{[\ell s]} - \widehat{m}_{1p}^{[k]}\,\widehat{m}_{1p}^{[\ell]}].$$

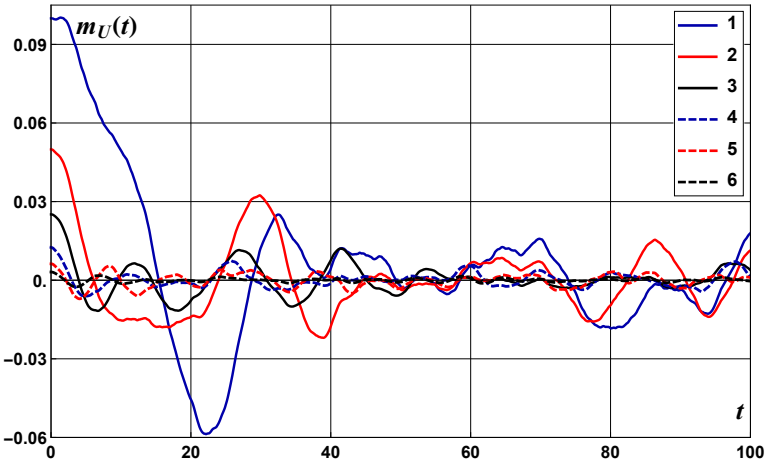


Рис. 2.5.5

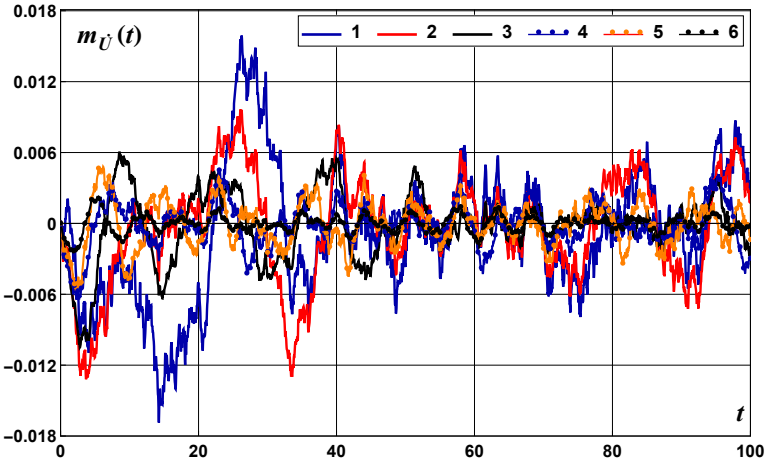


Рис. 2.5.6

Пример 2.5.1. Рассмотренный алгоритм был реализован на языке

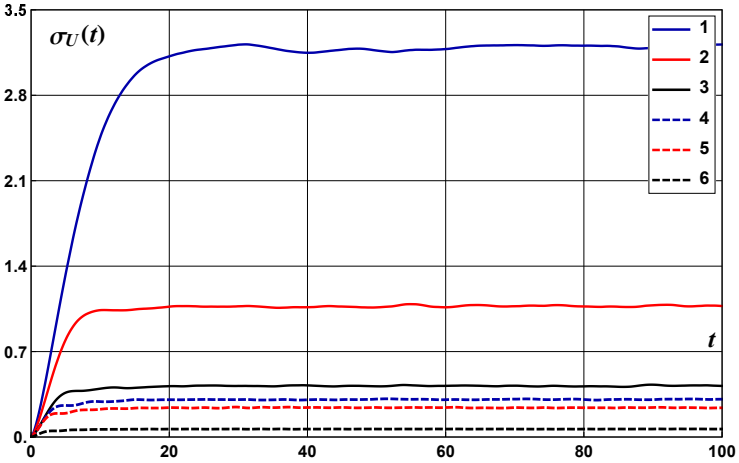


Рис. 2.5.7

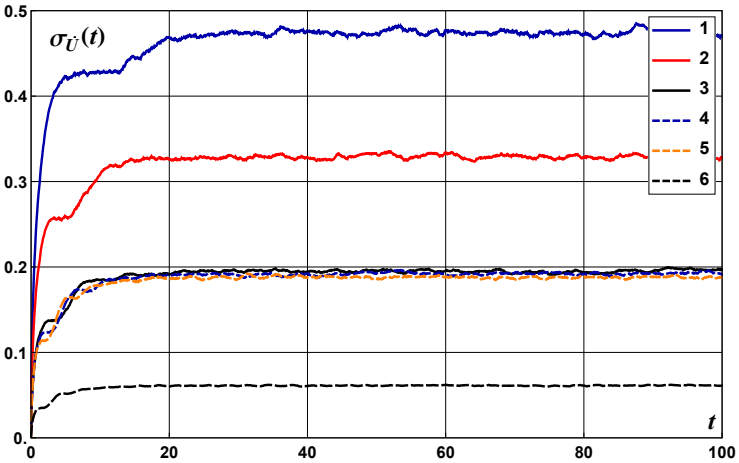


Рис. 2.5.8

Intel Fortran [20] в среде `Microsoft Visual Studio`. Результаты расчетов – таблицы значений $\widehat{m}_{1p}^{[k]}$ и $\widehat{\mathcal{D}}_{k\ell p}$ ($\widehat{\mathcal{C}}_{k\ell pp'}$ не вычислялись) выводились во внешний текстовый файл, данные из которого использовались для построения графиков средствами пакета `Mathematica`.

Хорошо известно, что реализации метода Монте-Карло требуют на-

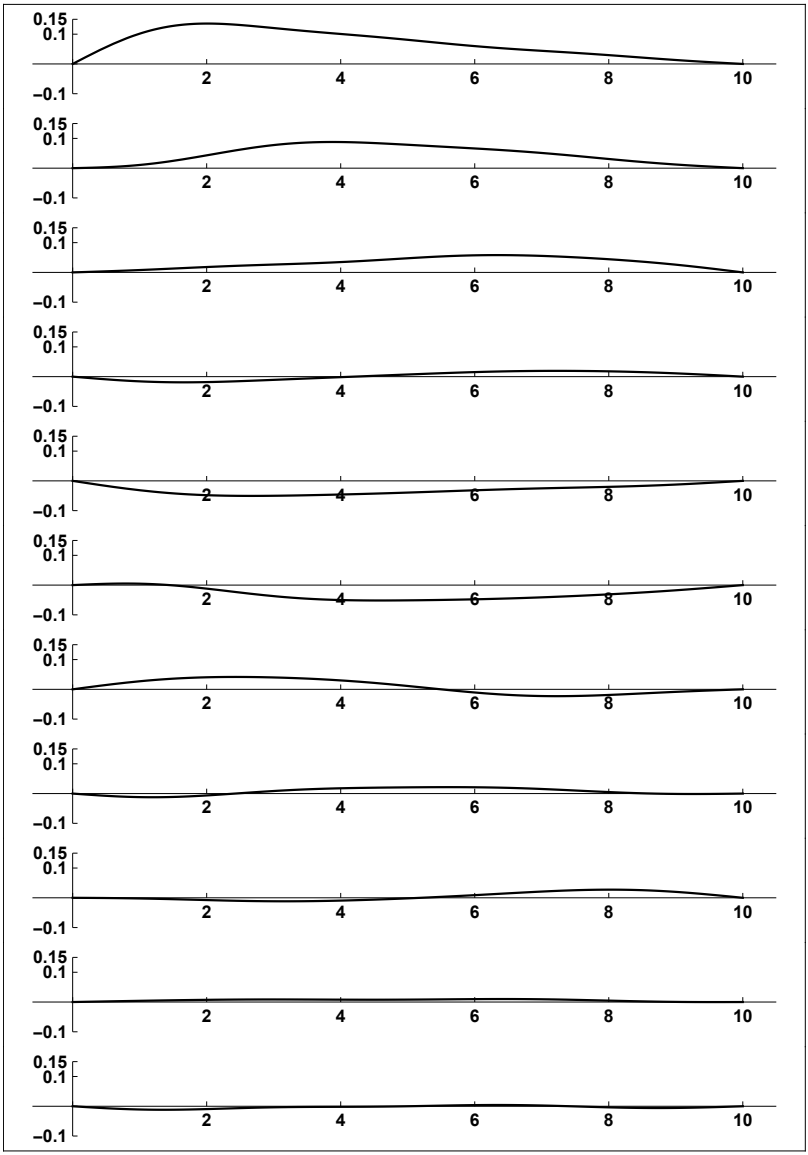


Рис. 2.5.9

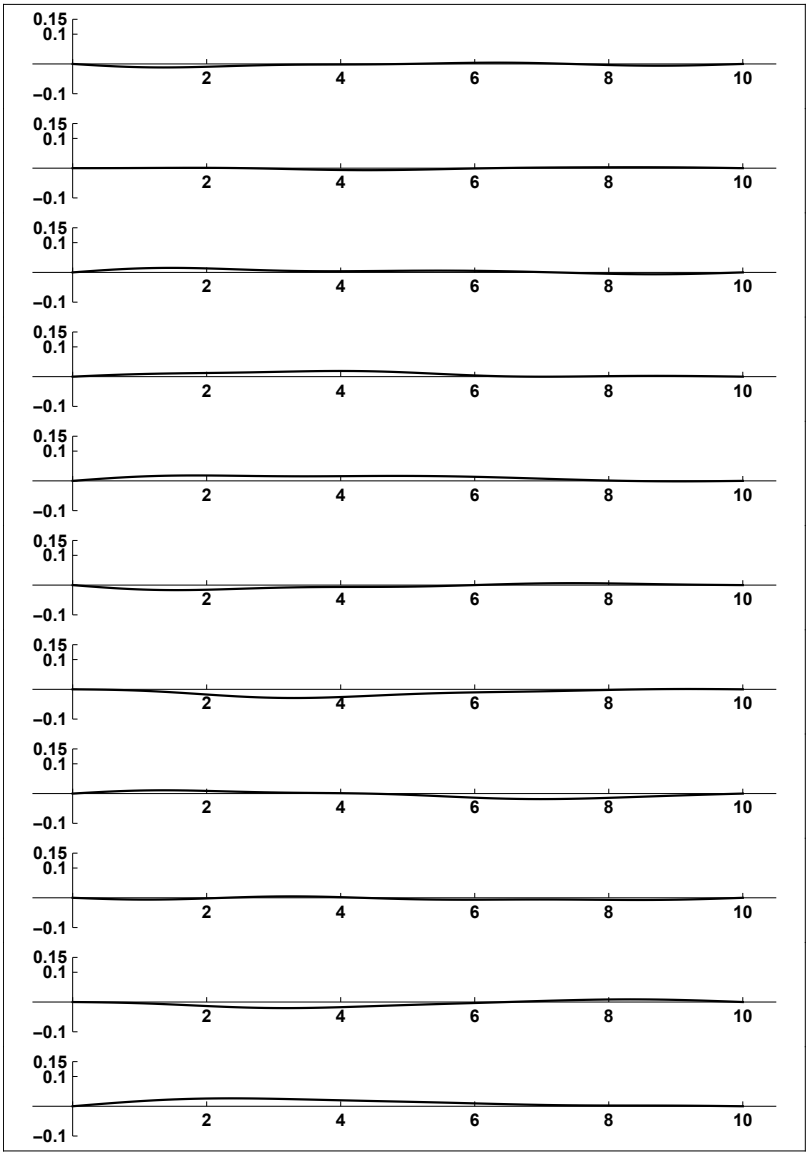


Рис. 2.5.10

личия значительного количества случайных или псевдослучайных чисел (ПСЧ) с различными распределениями. Наш процесс получения выборок для случайного вектора $\boldsymbol{R}_2$ был основан на встроенном системном датчике `Random_Number(...)` для генерирования ПСЧ, равномерно распределенных на (0,1), и функции, которая была реализована для получения нормальных гауссовых ПСЧ по методу Марсальи–Брея [127]. При этом реализации нормально распределенного начального случайного вектора с заданными вектором математических ожиданий и ковариационной матрицей формировались на основе аффинного преобразования стандартного нормально распределенного случайного вектора с независимыми компонентами и LU-разложения указанной ковариационной матрицы.

Данные для расчетов носили модельный характер, как это нередко принято в работах, где развиваются новые методики соответствующих задач (см., например, [430], значения некоторых из использовавшихся в расчетах параметров задачи близки к тем, что приведены в [430]), а авторам которых по разным причинам недоступны реальные данные, или использование их нежелательно.

Расчетные параметры при решении рассматриваемой в данном подразделе задачи были следующими:

$$S = 20000; \quad P = 100000; \quad h_p = h = 0.001; \quad M = 6; \quad K = 3;$$
$$J = 3,; \quad \alpha = 0.1,; \quad a = 0.5; \quad b = 0.1; \quad L = 10.0; \quad T = 100;$$
$$\{\bar{q}_{ij}, i = \overline{1,M}, j = \overline{1,K}\} = \begin{bmatrix} 0.1000 & 0.0500 & 0.0500 \\ 0.0500 & 0.1000 & 0.0500 \\ 0.0500 & 0.0500 & 0.1000 \\ 0.0100 & 0.0500 & 0.0100 \\ 0.0100 & 0.0100 & 0.0100 \end{bmatrix};$$
$$\boldsymbol{\mathcal{K}}(0) = 10^{-5} \begin{bmatrix} 1000 & 400 & 320 & & & & & & & & & \\ 400 & 1000 & & & & & & & & & & \\ 320 & & 640 & 256 & 192 & & & & & & & \\ & & 256 & 640 & & & & & & & & \\ & & 192 & & 360 & 144 & 96 & & & & & \\ & & & & 144 & 60 & & & & & & \\ & & & & 96 & & 160 & 64 & 32 & & & \\ & & & & & & 64 & 160 & & & & \\ & & & & & & 32 & & 40 & 16 & 16 & \\ & & & & & & & & 16 & & 20 & \\ & & & & & & & & & & 16 & 20 \end{bmatrix};$$
$$\boldsymbol{m}_{X1}(0) = (0.100, 0.050, 0.025, 0.0125, 0.00625, 0.003125);$$

$$\boldsymbol{m}_{X2}(0) = (0.000, 0.000, 0.000, 0.000, 0.000, 0.000);$$

$$\{r_{1j}, \bar{m}_{2j}, \delta_{2j}, j = \overline{1, J}\} = \begin{bmatrix} 0.0010 & 0.0100 & 0.3000 \\ 0.0050 & 0.0500 & 0.3000 \\ 0.0100 & 0.1000 & 0.3000 \end{bmatrix}.$$

Кроме того, $\mathcal{K}_{ij}(0) = \mathcal{D}_{ji}(0)$, $\mathcal{D}_{ij}(0) = 0.0$ для остальных i и j.

На рис. 2.5.5, 2.5.6 представлены оценки математических ожиданий случайных функций $U_k(t)$ и $\dot{U}_k(t)$, $k = 1..6$, на рис. 2.5.7, 2.5.8 – их средних квадратичных отклонений, а на рис. 2.5.9, 2.5.10 – профилей $m_U(x,t)$ в моменты времени от 0 до 50 и от 50 до 100 с шагом 5. ►

2.5.1.3. Расчет случайных линейных поперечных колебаний вязкоупругой балки

При выводе уравнения поперечных колебаний балки предполагается [18], что в недеформированном состоянии упругая ось балки прямолинейна и совпадает с линией центров тяжести поперечных ее сечений. Эта прямолинейная ось принимается за координатную ось. От нее идет отсчет отклонений элементов балки при поперечных колебаниях. При этом считается, по крайней мере в первом приближении, что отклонения отдельных точек оси балки происходят перпендикулярно прямолинейному, недеформированному ее направлению, пренебрегая смещениями этих точек, параллельными оси OX. Далее, мы предполагаем, что отклонения точек оси стержня при поперечных колебаниях происходят в одной плоскости (плоскость колебаний) и являются малыми отклонениями в том смысле, что возникающие при этом восстанавливающие силы остаются в пределах пропорциональности. При таких предположениях отклонения точек оси стержня при поперечных колебаниях однозначно определяются одной функцией двух переменных – координаты x и времени t: $u = u(x,t)$. Эта функция удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению в частных производных четвертого порядка, которое может быть построено на основе из следующих соображений.

Пусть на балку действует распределенная поперечная нагрузка, интенсивность которой мы обозначим через $q(x,t)$, а также продольная сила (растягивающая или сжимающая), направленная по оси балки с интенсивностью $p(x,t)$. Эти нагрузки могут зависеть не только от положения элементов балки, но и от времени. Тогда кинетическая энергия колеблющейся балки складывается из кинетической энергии поперечных смещений элементов стержня и кинетической энергии вращений элементов стержня вокруг осей, перпендикулярных плоскости колебаний. Потенциальная энергия будет равна сумме трех слагаемых: а) потенциальной

энергии упругой деформации (работа восстанавливающих упругих сил); б) потенциальной энергии прогиба от поперечной нагрузки $\bar{q}(x,t)$; в) потенциальной энергии растяжения от продольной силы $\bar{p}(x,t)$.

Тогда уравнение поперечных колебаний балки может быть получено, если составить для функционала Остроградского–Гамильтона уравнение Эйлера [18]:

$$m(x)\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(E\,I\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big)-\frac{\partial}{\partial x}\Big(\bar{p}\,\frac{\partial u}{\partial x}\Big)-\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\Big(I_0\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\Big)=\bar{q}(x,t),$$

где $m(x)$ [кГ·с^2/см^2] – масса единицы длины балки, $E\,I$ – жесткость на изгиб (E [кГ/см^2] – модуль упругости, I [см^4] – момент инерции поперечного сечения балки относительно нейтральной оси сечения, перпендикулярной плоскости колебаний), I_0 [кГ·см] – момент инерции единицы длины стержня относительно центральной оси, перпендикулярной плоскости колебаний. ДУвЧП (2.5.1.3) – линейное уравнение четвертого порядка, составленное при самых общих предположениях относительно действующих на стержень сил, жесткости и распределения массы.

Если дополнительно учесть наличие внешнего трения, внутреннего трения по закону Фойхта [173]

$$d^2\,\frac{\partial^5 u}{\partial^4 x\,\partial t},\qquad d=\sqrt{\frac{k_0\,I}{\rho\,S}},$$

вязкоупругость материала балки, зависимость силы P только от времени, постоянство m, $E\,I$ и I_0, а также наличие сплошного упругого основания (модель Винклера), то уравнение для поперечных колебаний вязкоупругой балки длины L, сжатой продольной силой $p(t)$ и находящейся под действием внешней распределенной нагрузки $q(x,t)$ имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}+2\,\alpha\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+\beta^2\,u(x,t)+p(t)\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+c^2\,\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4}-$$

$$-I_0\,\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^2\partial t^2}=\gamma\int\limits_0^t R(t,\tau)\,\frac{\partial^4 u(x,\tau)}{\partial x^4}\,d\tau-d^2\,\frac{\partial^5 u(x,t)}{\partial^4 x\,\partial t}+q(x,t),$$

$$0<x<L,\quad t>0,$$

где $R(t,\tau)\geqslant 0$ – ядро, определяющее наследственные свойства материала, α, β, γ, c, d – положительные постоянные,

$$c=\sqrt{\frac{E\,I}{\rho\,S}}.$$

В качестве начальных и граничных будем использовать такие условия:

$$u(x,0)=\bar{u}_1(x), \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\bar{u}_2(x), \quad 0<x<L,$$
$$u(0,t)=\left.\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=0}=0, \qquad u(L,t)=\left.\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=L}=0$$

(концы балки шарнирно закреплены), где $\bar{u}_1(x)$, $\bar{u}_2(x)$ – известные функции x.

Для анализа стохастических поперечных колебаний вязкоупругой балки уравнение и начально-краевые условия при наличии случайных внешней распределенной нагрузки и осевой силы должны быть записаны так [227]:

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2}+2\,\alpha\,\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}+\beta^2\,U(x,t)+P(t)\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+c^2\,\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4}-$$
$$-I_0\,\frac{\partial^4 U(x,t)}{\partial x^2\partial t^2}=\gamma\int\limits_0^t R(t,\tau)\,\frac{\partial^4 U(x,\tau)}{\partial x^4}\,d\tau-d^2\,\frac{\partial^5 U(x,t)}{\partial^4 x\,\partial t}+Q(x,t), \quad (2.5.49)$$
$$0<x<L, \quad t>0,$$
$$U(x,0)=\bar{U}_1(x), \qquad \frac{\partial U(x,0)}{\partial t}=\bar{U}_2(x), \quad 0<x<L, \quad (2.5.50)$$
$$U(0,t)=\left.\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=0}=0, \quad U(L,t)=\left.\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=L}=0. \quad (2.5.51)$$

где $\bar{U}_1(x)$, $\bar{U}_2(x)$ – стационарные случайные поля с известными характеристиками.

Будем считать, что поле $Q(x,t)$ можно представить в виде

$$Q(x,t)=\sum_{k=1}^{+\infty}Q_k(t)\,\sin\omega_k\,x, \qquad \omega_k=\frac{\pi\,k}{L} \quad (2.5.52)$$

(это соответствует случайному возбуждению амплитуд гармоник этого поля). При этом решение задачи (2.5.49)–(2.5.51) будем искать в виде ряда

$$U(x,t)=\sum_{k=1}^{+\infty}U_k(t)\,\sin\omega_k\,x. \quad (2.5.53)$$

Подставляя ряды (2.5.52), (2.5.53) в уравнение (2.5.49) и приравнивая коэффициенты при синусах с одинаковыми аргументами, для определения случайных функций $U_k(t)$ получим следующую счетную систему СОИДУ:

$$(1+\omega_k^2\,I_0)\,\ddot{U}_k(t)+(2\,\alpha+d^2\,\omega_k^4)\,\dot{U}_k(t)+\left[\beta^2+c^2\,\omega_k^4-\omega_k^2\,P(t)\right]U_k(t)=$$
$$=\gamma\,\omega_k^4\int\limits_0^t R(t,\tau)\,U_k(\tau)\,d\tau+\;Q_k(t),\quad k=1,2,...,\quad t>0, \tag{2.5.54}$$

начальными условиями для которой будут соотношения

$$U_k(0)=\frac{2}{L}\int\limits_0^L \bar{U}_1(x)\,\sin\omega_k\,x\,dx\equiv\tilde{U}_{1k}, \tag{2.5.55}$$

$$\dot{U}_k(0)=\frac{2}{L}\int\limits_0^L \bar{U}_2(x)\,\sin\omega_k\,x\,dx\equiv\tilde{U}_{2k}, \tag{2.5.56}$$

где $\tilde{U}_{1k}$, $\tilde{U}_{2k}$ – случайные величины, а краевые условия удовлетворяются автоматически. При этом соотношения для математического ожидания, ковариационной функции и дисперсии случайного поля $U(x,t)$ будут иметь тот же вид, что ив предыдущем подразделе.

Заметим, что уравнения системы (2.5.54) имеют одинаковую структуру и могут анализироваться независимо.

Если разделить обе части уравнения (2.5.54) на коэффициент при $\ddot{U}_k(t)$ и ввести обозначения:

$$U_{k1}(t)=U_k(t),\qquad U_{k2}(t)=\dot{U}_k(t),$$
$$r_{k1}=(2\,\alpha+d^2\,\omega_k^4)\,r_{k4},\qquad r_{k2}=\left[\beta^2+c^2\,\omega_k^4\right]r_{k4},$$
$$r_{k3}=(2\,\alpha+d^2\,\omega_k^4)\,r_{k4},\qquad r_{k4}=\frac{1}{1+\omega_k^2\,I_0},\qquad r_{k5}=\omega_k^2\,r_{k4},$$

то система (2.5.54) примет следующий вид:

$$\dot{U}_{k1}(t)=U_{k2}(t),$$
$$\dot{U}_{k2}(t)=-r_{k1}\,U_{k2}(t)-r_{k2}\,U_{k1}(t)+ \tag{2.5.57}$$
$$+\,r_{k3}\int\limits_0^t R(t,\tau)\,U_{k1}(\tau)\,d\tau+r_{k4}\,Q_k(t)+r_{k5}\,U_{k1}(t)\,P(t),$$

$$k = 1, 2, ..., \quad t > 0.$$

Получена счетная система обыкновенных СОИДУ, которые нужно трактовать как уравнения Стратоновича. Несложно видеть, что эта система распадается на отдельные блоки, соответствующие каждому k.

Рассмотрим иную модель поперечных колебаний балки длины L, сжатой случайной продольной силой $P(t)$. В этой модели отсутствует поперечная распределенная нагрузка, но учитывается сопротивление изгибу. Пусть: а) внешняя распределенная нагрузка отсутствует; б) материал балки вязкоупругий; в) масса единицы длины балки $m = \rho S$ [кг/м], площадь поперечного сечения S [м^2], жесткость на изгиб $E\,I$ (E [н/м^2] – модуль упругости, I [м^4] – момент инерции поперечного сечения балки относительно нейтральной оси сечения, перпендикулярной плоскости колебаний) и момент инерции I_0 [н/м^2] единицы длины балки относительно центральной оси, перпендикулярной плоскости колебаний, постоянны. Тогда уравнение колебаний балки при наличии сплошного упругого основания (модель Винклера), внешнего трения, а также внутреннего трения по закону Фойхта [173] может быть приведено к следующему виду [244]:

$$\begin{aligned} & m\,\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} + \beta\,U(x,t) + P(t)\,\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} + \\ & \quad + 2\,m\left[\alpha_0\,\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} - \alpha_1\,\frac{\partial^3 U(x,t)}{\partial x^2\,\partial t} + \alpha_2\,\frac{\partial^5 U(x,t)}{\partial x^4\,\partial t}\right] + \\ & \quad + E\,I\,\frac{\partial^4 U(x,t)}{\partial x^4} - I\,\rho\,\frac{\partial^4 U(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} = \gamma \int\limits_0^t R(t,s)\,\frac{\partial^4 U(x,s)}{\partial x^4}\,ds, \\ & 0 < x < L, \quad 0 < t \leqslant T < +\infty. \end{aligned} \tag{2.5.58}$$

В уравнении (2.5.58) t – время; x – продольная координата; $U(x,t)$ – отклонение центральной оси балки от прямолинейного невозмущенного состояния; $P(t)$ [н] – случайная осевая нагрузка; $R(t,s) \geqslant 0$ – ядро, определяющее вязкоупругие свойства материала; $2\,\alpha_0 > 0$, $2\,\alpha_1 > 0$ – коэффициенты сопротивления среды и изгибу; $2\,m\,\alpha_2 = \epsilon\,E\,I$, $\epsilon > 0$ – коэффициент внутреннего трения; $\beta > 0$ – модуль упругого основания; γ – положительная постоянная. Предположим, что осевая нагрузка выражается соотношением $P(t) = p_0(t) + p(t)\,V(t)$, где $p_0(t)$ и $p(t)$ – известные непрерывные функции времени t, $V(t)$ – случайный процесс типа гауссовского белого шума с единичной интенсивностью, а начальные и граничные условия

определяются следующими соотношениями:

$$U(x,0)=\bar{U}_1(x), \qquad \frac{\partial U(x,0)}{\partial t}=\bar{U}_2(x), \qquad 0<x<L, \tag{2.5.59}$$

$$U(0,t)=\left.\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=0}=0, \qquad U(L,t)=\left.\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=L}=0, \tag{2.5.60}$$

т.е. концы балки шарнирно закреплены. В равенстве (2.5.59) $\bar{U}_1(x)$, $\bar{U}_2(x)$ – случайные функции x с известными статистическими характеристиками.

Задача состоит в вычислении первых моментных функций (функций математического ожидания и дисперсии) случайного отклонения $U(x,t)$.

Представим функцию $U(x,t)$ для $t>0$, $0\leqslant x\leqslant L$ в следующем виде:

$$U(x,t)=\sum_{k=1}^{+\infty} U_k(t)\,\sin\frac{\pi\,k\,x}{L}\,. \tag{2.5.61}$$

Несложно видеть, что ряд в правой части последнего равенства удовлетворяет краевым условиям (2.5.60). Для того чтобы выполнялись равенства (2.5.59), требуется, чтобы

$$U_k(0)=U_{1k}^0, \qquad \dot{U}_k(0)=U_{2k}^0, \qquad k=1,2,...,$$

где случайные величины U_{1k}^0 и U_{2k}^0 являются коэффициентами разложений

$$\bar{U}_1(x)=\sum_{k=1}^{+\infty} U_{1k}^0\,\sin\frac{\pi\,k\,x}{L}, \qquad \bar{U}_2(x)=\sum_{k=1}^{+\infty} U_{2k}^0\,\sin\frac{\pi\,k\,x}{L},$$

точкой обозначена производная по времени, а равенство между случайными величинами здесь и далее понимается в смысле почти наверное.

Для вывода системы счетного числа уравнений для нахождения коэффициентов $U_k(t)$ ряда в правой части равенства (2.5.61) подставим этот ряд вместо функции $U(x,t)$ в уравнение (2.5.58) и соберем коэффициенты при синусах с одинаковыми аргументами. В результате получим линейные параметрические стохастические интегро-дифференциальные уравнения следующего вида:

$$m\,\ddot{U}_k(t)+\beta\,U_k(t)+P(t)\,(-1)\,\frac{\pi^2\,k^2}{L^2}\,U_k(t)+$$
$$+\,2\,m\left[\alpha_0\,\dot{U}_k(t)-\alpha_1\,(-1)\,\frac{\pi^2\,k^2}{L^2}\,\dot{U}_k(t)+\alpha_2\,\frac{\pi^4\,k^4}{L^4}\,\dot{U}_k(t)\right]+$$

$$+ E\,I\,\frac{\pi^4\,k^4}{L^4}\,U_k(t) - I\,\rho\,(-1)\frac{\pi^2\,k^2}{L^2}\,\ddot{U}_k(t) =$$

$$= \gamma\,\frac{\pi^4\,k^4}{L^4}\int\limits_0^t R(t,s)\,U_k(s)\,ds, \qquad 0 < t \leqslant T < +\infty, \quad k = 1, 2, ...,$$

или

$$\ddot{U}_k(t) + 2\,\bar{\alpha}_k\,\dot{U}_k(t) + \bar{\beta}_k\,U_k(t) =$$

$$= \bar{\gamma}_k\int\limits_0^t R(t,s)\,U_k(s)\,ds + \mu_k\,U_k(t)\,V(t), \tag{2.5.62}$$

где

$$\bar{\alpha}_k = \alpha_0 + \alpha_1\,\frac{\pi^2\,k^2}{L^2} + \alpha_2\,\frac{\pi^4\,k^4}{L^4}, \quad \bar{\beta}_k = \Big[\beta - p_0(t)\,\frac{\pi^2\,k^2}{L^2} + E\,I\,\frac{\pi^4\,k^4}{L^4}\Big]/m_k,$$

$$\mu_k = p(t)\,\frac{\pi^2\,k^2}{L^2}/m_k, \quad \bar{\gamma}_k = \gamma\,\frac{\pi^4\,k^4}{L^4}/m_k, \quad m_k = m + I\,\rho\,\frac{\pi^2\,k^2}{L^2}.$$

Заметим, что структура уравнений (2.5.62) такова, что случайные процессы $U_k(t)$ с различными k являются независимыми, и их характеристики можно получать для каждого k отдельно.

Теперь для того, чтобы перейти от СОИДУ (2.5.62) к системе СОДУ, применим приближенную схему интегрального расширения пространства состояний [194, 201, 227, 904, 907, 1000].

Для этого разобьем отрезок $[0, T]$ точками $t_i = i\,h$, $i = 0, 1, 2, ..., M$, $h = T/M$ так, чтобы с достаточной точностью на отрезке $[t_{i-1}, t_i]$, $i \geqslant 1$ ядро $R(t,s)$ можно было заменить на функцию (среднее значение) $\widetilde{R}_i(t)$, которую вычислим следующим образом:

$$\widetilde{R}_i(t) = \frac{1}{h}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} R(t,s)\,ds \approx \frac{1}{h}\,\frac{\Delta s}{3}\sum_{\ell=0}^{2K} c_\ell\,R(t, s_{i\ell}) = \frac{1}{6\,K}\sum_{\ell=0}^{2K} c_\ell\,R(t, s_{i\ell})$$

(с точностью порядка $O(\Delta s)^4$), где

$$s_{i\ell} = t_{i-1} + \ell\cdot\Delta s, \qquad \ell = 0, 1, ..., 2\,K, h = 2\,K\cdot\Delta s, \qquad K \geqslant 1,$$

$$c_\ell = \begin{cases} 1, & \text{если } \ell = 0 \text{ или } 2\,K; \\ 4, & \text{если } \ell \text{ нечетно}; \\ 2, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Таким образом, ядро $R(t,s)$ представляется кусочно-постоянной по второму аргументу функцией. В результате этого уравнение (2.5.62) на интервале $t_{i-1} < t \leqslant t_i$, $i = 1, 2, ..., M$, приводится к следующей системе СОИДУ:

$$\begin{aligned}
&\dot U_{1k}(t) = U_{2k}(t),\\
&\dot U_{2k} = -2\,\bar\alpha_k\,U_{2k}(t) - \bar\beta_k^2\,U_{1k}(t) + \bar\gamma_k \sum_{j=1}^{i-1} \widetilde R_j(t) \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} U_{1k}(s)\,ds + \qquad (2.5.63)\\
&\quad + \bar\gamma_k\,\widetilde R_i(t) \int\limits_{t_{i-1}}^{t} U_{1k}(s)\,ds + \mu_k\,U_{1k}(t)\,V(t),
\end{aligned}$$

где $U_{1k}(t) = U_k(t)$, $U_{2k}(t) = \dot U_k(t)$.

Введем случайные процессы

$$Z_{ki}(t) = \int\limits_{t_{i-1}}^{t} U_k(s)\,ds, \quad t_{i-1} < t \leqslant t_i.$$

С учетом последних равенств система СОИДУ (2.5.63) принимает форму

$$\begin{aligned}
&\dot U_{1k}(t) = U_{2k}(t),\\
&\dot U_{2k} = -2\,\bar\alpha_k\,U_{2k}(t) - \bar\beta_k^2\,U_{1k}(t) + \bar\gamma_k \sum_{j=1}^{i-1} \widetilde R_j(t)\,Z_{kj}(t_j) +\\
&\quad + \bar\gamma_k\,\widetilde R_i(t)\,Z_{ki}(t) + \mu_k\,U_{1k}(t)\,V(t),\\
&\dot Z_{ki}(t) = U_{1k}(t),
\end{aligned}$$

причем $Z_{ki}(t_{i-1}) = 0$.

Если обозначить $U_{1k}(t)$, $U_{2k}(t)$ и $V(t)$ через $U_{1k\ell}(t)$, $U_{2k\ell}(t)$ и $V_\ell(t)$ для $t_{\ell-1} < t \leqslant t_\ell$ соответственно, то окончательно получим

$$\begin{aligned}
&\dot U_{1ki}(t) = U_{2ki}(t),\\
&\dot U_{2ki} = -2\,\bar\alpha_k\,U_{2ki}(t) - \bar\beta_k^2\,U_{1ki}(t) + \bar\gamma_k \sum_{j=1}^{i-1} \widetilde R_j(t)\,Z_{kj}(t_j) + \qquad (2.5.64)\\
&\quad + \bar\gamma_k\,\widetilde R_i(t)\,Z_{ki}(t) + \mu_k\,U_{1ki}(t)\,V_i(t),\\
&\dot Z_{ki}(t) = U_{ki1}(t),
\end{aligned}$$

причем начальные условия для системы (2.5.64) определяются следующим образом:

$$U_{kij}(t_{i-1}) = U_{k,i-1,j}(t_{i-1}), \quad j = 1,2, \qquad Z_{ki}(t_{i-1}) = 0.$$

Теперь построим ОДУ для вычисления первых моментов случайных процессов $U_{1ki}(t)$, $U_{2ki}(t)$ и $Z_{ki}(t)$. Начнем с ОДУ для функций математического ожидания

$$m_{1i}(t) \equiv m_{U_{1ki}}(t) = \mathbb{E}[U_{1ki}(t)]\,, \qquad m_{2i}(t) \equiv m_{U_{2ki}}(t) = \mathbb{E}[U_{2ki}(t)]\,,$$
$$m_{3i}(t) \equiv m_{Z_{ki}}(t) = \mathbb{E}[Z_{ki}(t)]\,.$$

Если воспользоваться общими соотношениями, приведенными в [236], получим:

$$\begin{aligned}
&i = 1:\\
&\dot m_{11}(t) = m_{21}(t),\\
&\dot m_{21} = -2\,\bar\alpha_k\, m_{21}(t) - \bar\beta_k^2\, m_{11}(t) + \bar\gamma_k\, \widetilde R_1(t)\, m_{31}(t),\\
&\dot m_{31}(t) = m_{11}(t);\\
&i > 1:\\
&\dot m_{1i}(t) = m_{2i}(t),\\
&\dot m_{2i} = -2\,\bar\alpha_k\, m_{2i}(t) - \bar\beta_k^2\, m_{1i}(t) + \bar\gamma_k \sum_{j=1}^{i-1} \widetilde R_j(t)\, m_{3j}(t_j) + \bar\gamma_k\, \widetilde R_i(t)\, m_{3i}(t),\\
&\dot m_{3i}(t) = m_{1i}(t),
\end{aligned} \tag{2.5.65}$$

причем начальные условия для системы (2.5.65) определяются следующим образом:

$$m_{11}(0) = \mathbb{E}\big[U_{1k}^0\big]\,, \qquad m_{21}(0) = \mathbb{E}\big[U_{2k}^0\big]\,, \qquad m_{31}(0) = 0,$$
$$m_{1i}(t_{i-1}) = m_{1,i-1}(t_{i-1}), \qquad m_{2i}(t_{i-1}) = m_{2,i-1}(t_{i-1}), \qquad m_{3i}(t_{i-1}) = 0,$$
$$i > 1.$$

ОДУ для функций ковариации имеют более сложную структуру, что объясняется необходимостью учета предыстории:

– основные уравнения

$$\begin{aligned}
&i = 1:\\
&\dot{\mathcal{K}}_{1111}(t) = 2\,\mathcal{K}_{1121}(t),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\dot{\mathcal{K}}_{1121}(t) = -2\,\bar{\alpha}_k\,\mathcal{K}_{1121}(t) - \bar{\beta}_k^2\,\mathcal{K}_{1111}(t) + \bar{\gamma}_k\,\widetilde{R}_1(t)\,\mathcal{K}_{1131}(t) + \mathcal{K}_{2121}(t),\\
&\dot{\mathcal{K}}_{1131}(t) = \mathcal{K}_{1111}(t) + \mathcal{K}_{2131}(t),\\
&\dot{\mathcal{K}}_{2121}(t) = 2\,\big[-2\,\bar{\alpha}_k\,\mathcal{K}_{2121}(t) - \bar{\beta}_k^2\,\mathcal{K}_{1121}(t) + \bar{\gamma}_k\,\widetilde{R}_1(t)\,\mathcal{K}_{2131}(t)\big] +\\
&\quad + \mu_k^2\,\big[\mathcal{K}_{1111}(t) + m_{11}^2(t)\big],\\
&\dot{\mathcal{K}}_{2131}(t) = -2\,\bar{\alpha}_k\,\mathcal{K}_{2131}(t) - \bar{\beta}_k^2\,\mathcal{K}_{1131}(t) + \bar{\gamma}_k\,\widetilde{R}_1(t)\,\mathcal{K}_{3131}(t) + \mathcal{K}_{1121}(t),\\
&\dot{\mathcal{K}}_{3131}(t) = 2\,\mathcal{K}_{1131}(t),\\
&\quad i > 1:\\
&\dot{\mathcal{K}}_{1i1i}(t) = 2\,\mathcal{K}_{1i2i}(t),\\
&\dot{\mathcal{K}}_{1i2i}(t) = -2\,\bar{\alpha}_k\,\mathcal{K}_{1i2i}(t) - \bar{\beta}_k^2\,\mathcal{K}_{1i1i}(t) + \bar{\gamma}_k \sum_{j=1}^{i-1} \widetilde{R}_j(t)\,\mathcal{K}_{1i3j}(t,t_j) +\\
&\quad + \bar{\gamma}_k\,\widetilde{R}_i(t)\,\mathcal{K}_{1i3i}(t) + \mathcal{K}_{2i2i}(t),\\
&\dot{\mathcal{K}}_{1i3i}(t) = \mathcal{K}_{1i1i}(t) + \mathcal{K}_{2i3i}(t),\\
&\dot{\mathcal{K}}_{2i2i}(t) = 2\,\big[-2\,\bar{\alpha}_k\,\mathcal{K}_{2i2i}(t) - \bar{\beta}_k^2\,\mathcal{K}_{1i2i}(t) + \bar{\gamma}_k \sum_{j=1}^{i-1} \widetilde{R}_j(t)\,\mathcal{K}_{2i3j}(t,t_j) +\\
&\quad + \bar{\gamma}_k\,\widetilde{R}_i(t)\,\mathcal{K}_{2i3i}(t)\big] + \mu_k^2\,\big[\mathcal{K}_{1i1i}(t) + m_{1i}^2(t)\big],\\
&\dot{\mathcal{K}}_{2i3i}(t) = -2\,\bar{\alpha}_k\,\mathcal{K}_{2i3i}(t) - \bar{\beta}_k^2\,\mathcal{K}_{1i3i}(t) + \bar{\gamma}_k \sum_{j=1}^{i-1} \widetilde{R}_j(t)\,\mathcal{K}_{3i3j}(t,t_j) +\\
&\quad + \bar{\gamma}_k\,\widetilde{R}_i(t)\,\mathcal{K}_{3i3i}(t) + \mathcal{K}_{1i2i}(t),\\
&\dot{\mathcal{K}}_{3i3i}(t) = 2\,\mathcal{K}_{1i3i}(t);
\end{aligned}
\tag{2.5.66}
$$

– вспомогательные уравнения для $i > 1$

$$
\begin{aligned}
&\dot{\mathcal{K}}_{1i3j}(t,t_j) = \mathcal{K}_{2i3j}(t,t_j),\\
&\dot{\mathcal{K}}_{2i3j}(t,t_j) = -2\,\bar{\alpha}_k\,\mathcal{K}_{2i3j}(t,t_j) - \bar{\beta}_k^2\,\mathcal{K}_{1i3j}(t,t_j) +\\
&\quad + \bar{\gamma}_k \sum_{\ell=1}^{i-1} \widetilde{R}_\ell(t)\,\mathcal{K}_{3\ell3j}(t_\ell,t_j) + \bar{\gamma}_k\,\widetilde{R}_i(t)\,\mathcal{K}_{3i3j}(t,t_j),\\
&\dot{\mathcal{K}}_{3i3j}(t,t_j) = \mathcal{K}_{1i3j}(t,t_j),\\
&j = 1,2,...,i-1,
\end{aligned}
\tag{2.5.67}
$$

где

$$
\mathcal{K}_{piqj}(t) \equiv \mathcal{K}_{\mathring{U}_{pki}\mathring{U}_{qkj}}(t) = \mathbb{E}\big[\mathring{U}_{pki}(t)\,\mathring{U}_{qkj}(t)\big],
$$

$$\mathcal{K}_{pi3j}(t,t_j) \equiv \mathcal{K}_{U_{pki}U_{3kj}}(t,t_j) = \mathbb{E}\big[\mathring{U}_{pki}(t)\,\mathring{U}_{3kj}(t_j)\big],$$
$$i \geqslant j, \qquad p,q = 1,2,3,$$

с учетом обозначения $\mathring{Y}(t) = Y(t) - m_Y(t)$. Начальные условия для систем ОДУ (2.5.66), (2.5.67) можно представить так:

$$\mathcal{K}_{piqi}(t_{i-1}) = \mathcal{K}_{p,i-1,q,i-1}(t_{i-1}),$$
$$\mathcal{K}_{pi3j}(t_{i-1},t_j) = \mathcal{K}_{p,i-1,3j}(t_{i-1},t_j), \quad j < i.$$

Учитывая выбранную форму решения (2.5.61), несложно получить искомые статистические характеристики случайной функции $U(x,t)$:

– функции математического ожидания

$$m_U(x,t) \equiv \mathbb{E}[U(x,t)] = \sum_{k=1}^{+\infty} m_{U_k}(t)\,\sin\frac{\pi\,k\,x}{L}\,; \tag{2.5.68}$$

– функции ковариации

$$\mathcal{K}(x,t) \equiv \mathbb{E}\Big[\big\{U(x,t) - m_U(x,t)\big\}^2\Big] = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathcal{K}_{U_kU_k}(t)\,\sin^2\frac{\pi\,k\,x}{L}\,. \tag{2.5.69}$$

При этом на этапе практического применения формул (2.5.68), (2.5.69) необходимо ограничиться конечными отрезками соответствующих рядов ($1 \leqslant k \leqslant N$).

Пример 2.5.2. Пусть балка имеет длину $L = 1$ м и квадратное поперечное сечение со стороной 0.01 м. В этом случае предпоследний член в левой части уравнения (2.5.58) может быть опущен. Кроме того, будем считать, что сплошное упругое основание отсутствует, а сопротивление изгибу пренебрежимо мало. При этих дополнительных предположениях для проведения расчетов использовались следующие значения параметров задачи:

$$\rho = 8\cdot 10^3\,\frac{кг}{м^3}; \quad S = 10^{-4}\,м^2; \quad L = 10.0; \quad \alpha_0 = 0.05\,c^{-1};$$
$$\alpha_1 = 0.0\,\frac{м^2}{c}; \quad \alpha_2 = 0.00125\,\frac{м^4}{c}; \quad p_0(t) = 10\,\frac{кг\cdot м}{c^2}; \quad p(t) = 0.5\,\frac{кг}{c^2};$$
$$E = 2\cdot 10^{11}\,\frac{кг}{м\cdot \text{с}}; \quad I = \frac{1}{12}\,10^{-8}\,м^4; \quad \beta = 0.0; \quad \gamma = 0.5;$$
$$N = 50; \quad K = 4; \quad T = 1.0; \quad M = 10; \quad h = 0.001.$$

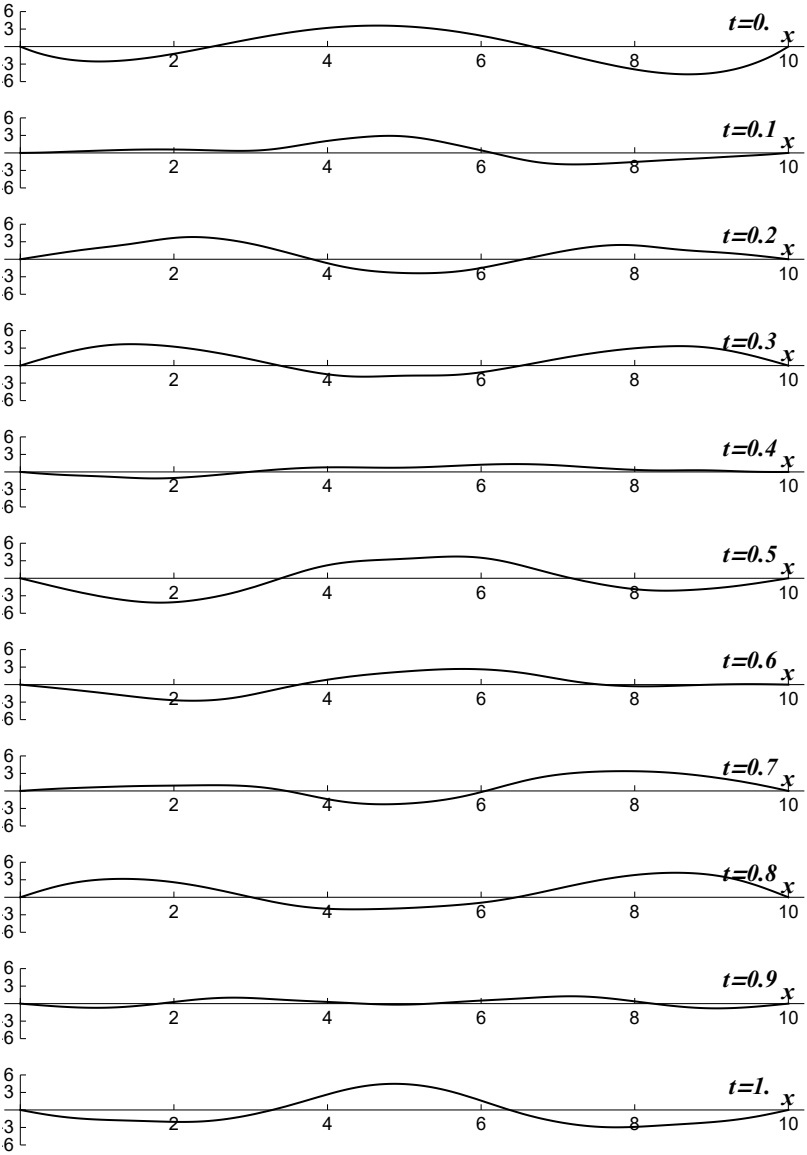


Рис. 2.5.11

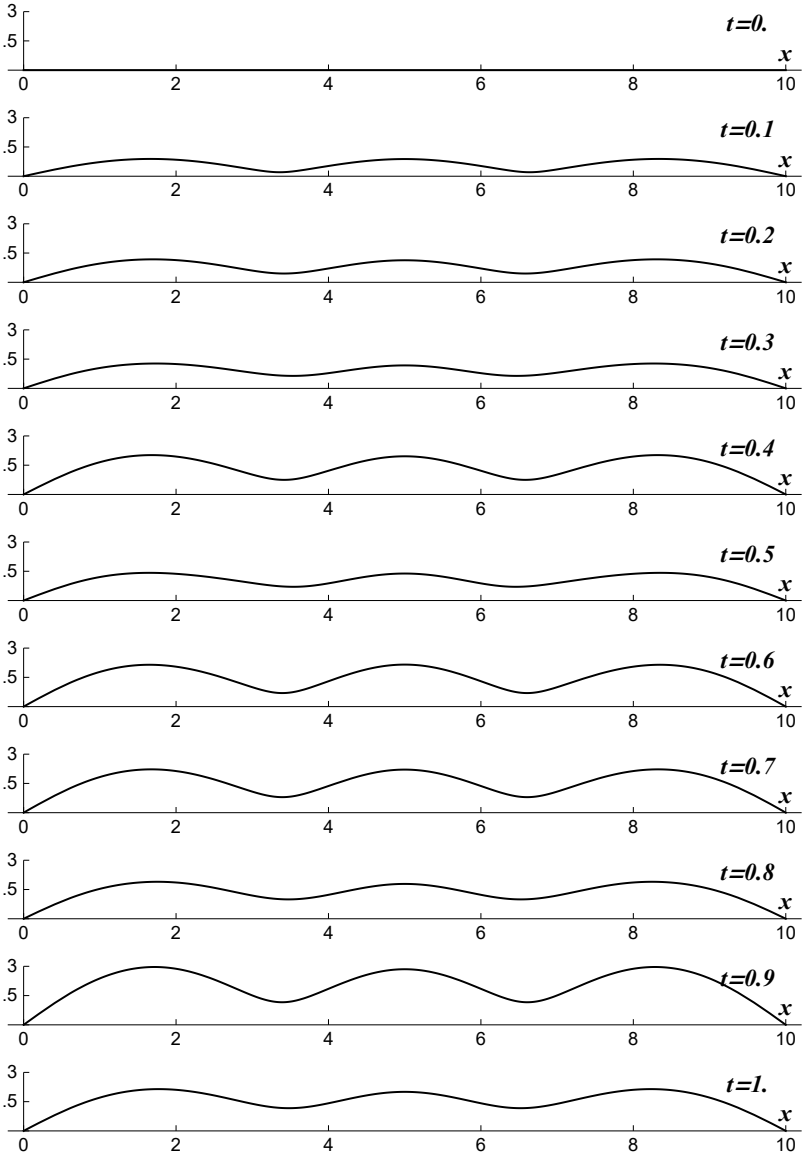


Рис. 2.5.12

Вязкоупругий член разобьем на две части и представим в форме, сходной с использовавшейся в работе [906], с соответствующими изменениями в расчетных формулах:

$$\int\limits_0^t R(t,s)\,\frac{\partial^4 U(x,s)}{\partial x^4}\,ds = b_0(t,t)\,\frac{\partial^4 U(x,t)}{\partial x^4} + \int\limits_0^t b(t,s)\,\frac{\partial^4 U(x,s)}{\partial x^4}\,ds,$$

$$b(t,s) = \frac{\partial b_0(t,s)}{\partial s}, \quad b_0(t,s) = h(\theta)\,\Bigl[1 - \sum_{\ell=1}^{2} \mu_\ell(\theta)\,\Bigl(1 - e^{-s/T_\ell(\theta)}\Bigr)\Bigr],$$

$$h(\theta) = \frac{h_1}{h_2\,\theta - 1}, \quad \theta = \theta_1 + \theta_2\,\frac{t}{T_0}, \quad \mu_1(\theta) = \mu_{10},$$

$$T_1(\theta) = T_{10}, \quad \mu_2(\theta) = \mu_{21} - \mu_{22}\,\theta, \quad T_2(\theta) = \frac{T_{21}}{T_{22}\,\theta + (T_{23}/\theta)^{T_{24}}},$$

где

$$h_1 = 10.0; \quad h_2 = 0.04; \quad T_0 = 10.0; \quad \theta_1 = 40.0; \quad \theta_2 = 110.0;$$
$$\mu_{10} = 0.08; \quad T_{10} = 320.0; \quad \mu_{21} = 0.63; \quad \mu_{22} = 0.0013;$$
$$T_{21} = 60.0; \quad T_{22} = 3.0; \quad T_{23} = 73.0; \quad T_{24} = 11.0.$$

Далее, будем считать, что в начальный момент времени балка находилась в неподвижности, а ее неслучайный профиль описывался функцией

$$\phi(x) = \frac{x\,(L-x)\,(L/4-x)\,(x-2\,L/3)}{3\,L^4}.$$

Отсюда

$$\mathbb{E}[U_k(0)] = \frac{2}{L}\int\limits_0^L \phi(x)\,\sin\frac{\pi\,k\,x}{L}\,dx, \qquad \mathbb{E}\bigl[U_k^2(0)\bigr] = \bigl\{\mathbb{E}[U_k(0)]\,\bigr\}^2,$$

$$\mathbb{E}\Bigl[\dot U_k(0)\Bigr] = 0, \quad \mathbb{E}\Bigl[\dot U_k^2(0)\Bigr] = 0, \qquad k = 1, 2, ..., N.$$

Расчеты проводились в среде пакета `Mathematica`. Результаты этих расчетов отображены на рис. 2.5.11 и 2.5.12 (в обоих случаях увеличено в 10^3 раз), где представлено изменение математического ожидания и среднего квадратичного отклонения случайного смещения $U(x,t)$ балки

от состояния равновесия функции с течением времени. Сравнение с поведением этих характеристик без учета вязкоупругости показывает на значимое различие этих переходных процессов. ►

Анализ представленного алгоритма и результаты расчета первых моментов стохастических линейных поперечных колебаний вязкоупругой балки для случая неразностного ядра показывает, что в случае необходимости он без труда может быть модифицирован для расчета моментных функций порядка выше второго. Кроме того, необходимо отметить, что изложенная схема решения стохастической задачи является полностью детерминистической, а следовательно, является более эффективной, чем любая из вариаций метода статистического моделирования [236].

2.5.1.4. Анализ линейных термовязкоупругих систем со случайными параметрами и нестационарными флуктуациями на входе

Рассмотрим следующую систему стохастических обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений [906]:

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{\mathcal{A}}(t;\boldsymbol{Q})\,\boldsymbol{X}(t) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\mathcal{B}}(t,\theta;\boldsymbol{Q})\,\boldsymbol{X}(\theta)\,d\theta + \boldsymbol{\mathcal{G}}(t;\boldsymbol{Q})\,\big[\boldsymbol{U}(t) + \boldsymbol{u}_0(t)\big], \qquad t_0 < t \leqslant T + \infty, \qquad \boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}^0, \quad (2.5.70)$$

где t – время; $\boldsymbol{X}(t) = \big(X_1(t), ..., X_n(t)\big)$ – вектор состояния в $\mathbb{R}^n$. Начальное условие $\boldsymbol{X}^0$ – случайный вектор, а вход $\boldsymbol{U}(t)$ – векторный случайный процесс, который не зависит от $\boldsymbol{X}^0$.

Вектор $\boldsymbol{X}^0$ является гауссовой случайной величиной второго порядка со значениями в $\mathbb{R}^n$. Его среднее значение равно $m_X x^0 = \mathbb{E}\big[\boldsymbol{X}^0\big]$, а ковариационная матрица – $\boldsymbol{\mathcal{K}}^0_{XX} = \mathbb{E}\big[(\boldsymbol{X}^0 - \boldsymbol{m}^0_X)(\boldsymbol{X}^0 - \boldsymbol{m}^0_X)^{\intercal}\big]$, которая предполагается обратимой. Вход $\{\boldsymbol{U}(t) = \big(U_1(t), \ldots, U_m(t)\big),\ t \geqslant t_0\}$ является случайным процессом со значениями в $\mathbb{R}^m$, который управляется линейным СОДУ Ито вида:

$$d\boldsymbol{U}(t) = \boldsymbol{\mathcal{H}}\,\boldsymbol{U}(t)\,dt + \boldsymbol{\mathcal{J}}\,d\boldsymbol{W}(t), \quad t > t_0, \qquad \boldsymbol{U}(t_0) = \boldsymbol{U}^0, \qquad (2.5.71)$$

где $\boldsymbol{U}^0$ – векторная случайная величина. В уравнениях (2.5.71) $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ и $\boldsymbol{\mathcal{J}}$ являются детерминированными вещественными матрицами в $\mathbb{R}^{m\times m}$ и $\mathbb{R}^{m\times r}$ соответственно, $\{\boldsymbol{W}(t) = (W_1(t), ..., W_r(t)\big),\ t \geqslant t_0\}$ векторный винеровский случайный процесс с независимыми компонентами. Его обобщенная производная по t, обозначаемая через $\{\boldsymbol{V}(t) = \big(V_1(t), ..., V_r(t)\big),\ t \geqslant t_0\}$, –

векторный гауссовский белый шум с независимыми компонентами, такими, что

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{V}(t)] = 0, \qquad \mathbb{E}[\boldsymbol{V}(t)\,\boldsymbol{V}^{\intercal}(t')] = 2\,\pi\,\mathbb{I}\,\delta(t-t'). \tag{2.5.72}$$

Начальный вектор $\boldsymbol{U}^0$ является гауссовой центрированной случайной величиной второго порядка со значениями в $\mathbb{R}^m$. Его распределение является гауссовской инвариантной мерой, ассоциированной с уравнениями (2.5.71), такой, что среднее значение равно $\boldsymbol{m}_U^0 = \mathbb{E}\big[\boldsymbol{U}^0\big] = \boldsymbol{0}$, а ковариационная матрица равна $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{UU}^0 = \mathbb{E}\big[U^0\,U^{0\intercal}\big]$. В уравнениях (2.5.71) матрицы $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ и $\boldsymbol{\mathcal{J}}$ предполагаются такими, что $\boldsymbol{U}(t)$ является векторным случайным процессом второго порядка. Следовательно, $\{\boldsymbol{U}(t), t \geqslant t_0\}$ – это гауссовский стационарный центрированный и непрерывный в среднеквадратичном случайный процесс второго порядка, такой, что вектор функций математического ожидания и матрица ковариационных функций определяются из соотношений

$$\boldsymbol{m}_U(t) = \mathbb{E}[\boldsymbol{U}(t)] = \boldsymbol{m}_U^0 = \boldsymbol{0},$$
$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{UU}(t_1 - t_2) = \boldsymbol{\mathcal{C}}_{UU}(t_1, t_2) = \mathbb{E}[\boldsymbol{U}(t_1)\,\boldsymbol{U}^{\intercal}(t_2)]\,, \quad \boldsymbol{\mathcal{C}}_{UU}(0) = \boldsymbol{\mathcal{K}}_{UU}^0.$$

В уравнениях (2.5.70) $\boldsymbol{Q} = (Q_1, ..., Q_s)$ – случайный вектор со значениями в $\mathbb{D}_Q \subset \mathbb{R}^s$ и распределением $\mathsf{P}_Q(d\boldsymbol{q})$. Матрицы $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\cdot;\cdot) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{\mathcal{B}}(\cdot,\cdot;\cdot) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и $\boldsymbol{\mathcal{G}}(\cdot,\cdot;\cdot) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ зависят от $\boldsymbol{Q}$ и, следовательно, являются случайными матрицами. Для возможных значений $\boldsymbol{q} = (q_1, ..., q_s)$ вектора $\boldsymbol{Q}$ и для всех t и θ, таких, что $t_0 < \theta \leqslant t \leqslant T$, $\boldsymbol{\mathcal{A}}(t;\boldsymbol{q})$, $\boldsymbol{\mathcal{B}}(t,\theta;\boldsymbol{q})$ и $\boldsymbol{\mathcal{G}}(t;\boldsymbol{q})$ являются детерминированными матрицами.

Известная детерминированная функция $\boldsymbol{u}_0(t) = \big(u_{01}(t), ..., u_{0m}(t)\big)$ со значениями в $\mathbb{R}^m$ предполагается непрерывной. Для всех $\boldsymbol{q} \in \mathbb{D}_Q$, матричные функции $t \mapsto \boldsymbol{\mathcal{A}}(t;\boldsymbol{q})$ и $t \mapsto \boldsymbol{\mathcal{B}}(t,\theta;\boldsymbol{q})$ предполагаются непрерывными и кусочно дифференцируемыми необходимое число раз, а матричная функция $t \mapsto \boldsymbol{\mathcal{G}}(t;\boldsymbol{q})$ предполагается непрерывной.

Для всех $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{q} \in \mathbb{D}_Q$ векторный случайный процесс $\boldsymbol{X}(t)$ обозначается как $\boldsymbol{X}^Q(t)$, причем эта запись означает, что случайный процесс $\boldsymbol{X}(t)$ рассматривается для данного $\boldsymbol{Q}$. Поскольку уравнения (2.5.70) являются линейными, вектор $\boldsymbol{X}^0$ и случайный процесс $\boldsymbol{U}(t)$ являются гауссовыми вследствие предположений, легко можно показать, что случайный процесс $\big\{\boldsymbol{X}^Q(t),\ t \in [t_0, T]\big\}$ – это гауссовский непрерывный в среднеквадратичном случайный процесс второго порядка.

Для всех конечных непустых и упорядоченных подмножеств $\mathbb{t} = \big\{t_1, t_2, ..., t_p\big\}$ из $[t_0, T]$ p-мерное условное распределение вероятностей

$\mathsf{P}_{\mathbb{X}^Q}(d\mathbb{x};\mathbb{t}\,|\,\boldsymbol{Q})$ случайного вектора $\mathbb{X}^Q = \big(\boldsymbol{X}^Q(t_1),...,\boldsymbol{X}^Q(t_p)\big)$, является гауссовской мерой, которая полностью определяется своим вектором математических ожиданий $m^Q_{\mathbb{X}}(\mathbb{t}) = \big(\boldsymbol{m}^Q_X(t_1),...,\boldsymbol{m}^Q_X(t_p)\big)$, где $\boldsymbol{m}^Q_X(t_i) = \mathbb{E}\big[\boldsymbol{X}^Q(t_i)\big]$, и ковариационной матрицей $\boldsymbol{\mathcal{C}}^Q_{\mathbb{X}}(\mathbb{t}) = \big\{\mathcal{C}^Q_{\mathbb{X}}(t_i,t_j)\big\}$ такой, что для всех i and j из $\big\{1,...,p\big\}$

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}^Q_{\mathbb{X}}(t_i,t_j) = \mathbb{E}\big[\big\{\boldsymbol{X}^Q(t_i) - \boldsymbol{m}^Q_X(t_i)\big\}\big\{\boldsymbol{X}^Q(t_j) - \boldsymbol{m}^Q_X(t_j)\big\}^{\mathsf{T}}\big].$$

Следовательно, негауссовское распределение вероятностей $\mathsf{P}_{\mathbb{X}}(d\mathbb{x};\mathbb{t})$ случайного вектора $\mathbb{X} = \big(\boldsymbol{X}(t_1),...,\boldsymbol{X}(t_p)\big)$ можно найти по формуле

$$\mathsf{P}_{\mathbb{X}}(d\mathbb{x};\mathbb{t}) = \int_{\mathbb{D}_Q} \mathsf{P}_{\mathbb{X}^Q}(d\mathbb{x};\mathbb{t}\,|\,\boldsymbol{q})\,\mathsf{P}_Q(d\boldsymbol{q}). \tag{2.5.73}$$

Определим теперь векторы функций математического ожидания и матрицы ковариационных функций случайных процессов $\boldsymbol{X}(t)$ и $\boldsymbol{X}^Q(t)$ для данного $\boldsymbol{Q}$, а также матрицы взаимных ковариационных функций $\boldsymbol{X}(t)$ и $\boldsymbol{X}^Q(t)$ со случайным процессом $\boldsymbol{U}(t)$:

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{m}_X(t) = \mathbb{E}[\boldsymbol{X}(t)]\,, \qquad \boldsymbol{m}^Q_X(t) = \mathbb{E}\big[\boldsymbol{X}^Q(t)\big],\\
\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(t_1,t_2) = \mathbb{E}[\boldsymbol{X}(t_1)\,\boldsymbol{X}^{\mathsf{T}}(t_2)] - \boldsymbol{m}_X(t_1)\,\boldsymbol{m}^{\mathsf{T}}_X(t_2),\\
\boldsymbol{\mathcal{C}}^Q_{XX}(t_1,t_2) = \mathbb{E}\big[\boldsymbol{X}^Q(t_1)\,\boldsymbol{X}^{Q\,\mathsf{T}}(t_2)\big] - \boldsymbol{m}^Q_X(t_1)\,\boldsymbol{m}^{Q\,\mathsf{T}}_X(t_2),\\
\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XU}(t_1,t_2) = \mathbb{E}[\boldsymbol{X}(t_1)\,\boldsymbol{U}^{\mathsf{T}}(t_2)]\,, \quad \boldsymbol{\mathcal{C}}^Q_{XU}(t_1,t_2) = \mathbb{E}\big[\boldsymbol{X}^Q(t_1)\,\boldsymbol{U}^{\mathsf{T}}(t_2)\big].
\end{gathered} \tag{2.5.74}$$

В соотношениях типа (2.5.74) для фиксированного $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{q} \in \mathbb{D}_Q$ условные моментные функции $\boldsymbol{m}^Q_X(t)$, $\boldsymbol{\mathcal{C}}^Q_{XX}(t_1,t_2)$ и $\boldsymbol{\mathcal{C}}^Q_{XU}(t_1,t_2)$ обозначаются как $\boldsymbol{m}_X(t;\boldsymbol{q})$, $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(t_1,t_2;\boldsymbol{q})$ и $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XU}(t_1,t_2;\boldsymbol{q})$. Тогда вектор функций математического ожидания, а также и матрицы ковариационных функций случайного процесса $\boldsymbol{X}(t)$ и взаимных ковариационных функций случайных процессов $\boldsymbol{X}(t)$ и $\boldsymbol{U}(t)$ определятся так:

$$\boldsymbol{m}_X(t) = \int_{\mathbb{D}_Q} \boldsymbol{m}_X(t;\boldsymbol{q})\,\mathsf{P}_Q(d\boldsymbol{q}), \tag{2.5.75}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(t_1,t_2) = \int_{\mathbb{D}_Q} \boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(t_1,t_2;\boldsymbol{q})\,\mathsf{P}_Q(d\boldsymbol{q}), \tag{2.5.76}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XU}(t_1,t_2) = \int_{\mathbb{D}_Q} \boldsymbol{\mathcal{C}}_{XV}(t_1,t_2;\boldsymbol{q})\,\mathsf{P}_Q(d\boldsymbol{q}). \tag{2.5.77}$$

Принимая во внимание предыдущие обозначения, можно утверждать, что задача определения статистических характеристик вектора состояния приведена к проблеме вычисления векторной функции $\boldsymbol{m}_X(t)$ и матричной функции $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(t_1,t_2)$ для всех t, t_1 и t_2 на полуинтервале $(t_0,T]$. Излагаемая далее схема решения задачи состоит из двух этапов: (i) расчет условных моментных функций первого и второго порядка случайного процесса $\boldsymbol{X}^Q$ при заданном $\boldsymbol{Q}$, а затем (ii) расчет безусловных моментных функций первого и второго порядка случайного процесса $\boldsymbol{X}(t)$.

Уравнения для условных моментных функций первого и второго порядка

Применив оператор условного математического ожидания (при заданном $\boldsymbol{Q}$) ко всем слагаемым в уравнениях (2.5.70), получим:

$$\dot{\boldsymbol{m}}_X^Q(t) = \boldsymbol{\mathcal{A}}(t;\boldsymbol{Q})\,\boldsymbol{m}_X^Q(t) + \int_{t'}^{t} \boldsymbol{\mathcal{B}}(t,\theta;\boldsymbol{Q})\,\boldsymbol{m}_X^Q(\theta)\,d\theta + \boldsymbol{\mathcal{G}}(t;\boldsymbol{Q})\,\boldsymbol{u}_0(t), \quad (2.5.78)$$

$$t_0 \leqslant t' < t \leqslant T, \quad \boldsymbol{m}_X^Q(t') = \boldsymbol{m}_X^{Q\prime}, \quad \boldsymbol{m}_X^Q(t') = \boldsymbol{m}_X^0 \quad \text{для } t' = t_0. \quad (2.5.79)$$

Чтобы построить уравнение для $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}^Q(t_1,t_2)$, необходимо расширить вектор состояния $\boldsymbol{X}(t) \in \mathbb{R}^n$ до нового вектора состояния со значениями в $\mathbb{R}^{n+m}$, который определим так: $\boldsymbol{Y}(t) = \big(\boldsymbol{X}(t), \boldsymbol{U}(t)\big)$. Тогда вектор функций условного математического ожидания случайного процесса $\boldsymbol{Y}(t)$ со значениями в $\mathbb{R}^{n+m}$ (при заданном $\boldsymbol{Q}$) будет иметь вид:

$$\boldsymbol{m}_Y^Q(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_X^Q(t) \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}, \quad (2.5.80)$$

а матрица условных ковариационных функций –

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{YY}^Q(t_1,t_2) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}^Q(t_1,t_2) & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{XU}^Q(t_1,t_2) \\ \boldsymbol{\mathcal{C}}_{XU}^Q(t_2,t_1)^{\intercal} & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{UU}(t_1,t_2) \end{bmatrix}.$$

Стохастический процесс $\big\{\boldsymbol{Y}(t),\ t \in [t_0,T]\big\}$, определяется следующей системой СОИДУ:

$$d\boldsymbol{Y}(t) = \Big\{\overline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(t;\boldsymbol{Q})\,\boldsymbol{Y}(t) + \int_{t'}^{t} \overline{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(t,\theta;\boldsymbol{Q})\,Y(\theta)\,d\theta + \overline{\boldsymbol{\mathcal{G}}}(t;\boldsymbol{Q})\,\boldsymbol{u}_0(t)\Big\}\,dt + \\ + \overline{\boldsymbol{\mathcal{J}}}\,d\boldsymbol{W}(t), \quad (2.5.81)$$

$$t_0 \leqslant t' < t \leqslant T, \qquad \boldsymbol{Y}(t') = \boldsymbol{Y}', \quad \boldsymbol{Y}' = (\boldsymbol{X}^0, \boldsymbol{U}^0) \quad \text{для} \quad t' = t_0.$$

В уравнениях (2.5.81) блочные матрицы $\overline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(t;\boldsymbol{Q})$, $\overline{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(t;\boldsymbol{Q})$, $\overline{\boldsymbol{\mathcal{G}}}(t;\boldsymbol{Q})$ и $\overline{\boldsymbol{\mathcal{J}}}(t;\boldsymbol{Q})$ формируются так:

$$\overline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(t;\boldsymbol{Q}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{A}}(t;\boldsymbol{Q}) & \boldsymbol{\mathcal{G}}(t;\boldsymbol{Q}) \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{m\times n} & \boldsymbol{\mathcal{H}} \end{bmatrix}, \qquad \overline{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(t;\boldsymbol{Q}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{B}}(t;\boldsymbol{Q}) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{m\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{m\times m} \end{bmatrix},$$
$$\overline{\boldsymbol{\mathcal{G}}}(t;\boldsymbol{Q}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{G}}(t;\boldsymbol{Q}) \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{m\times m} \end{bmatrix}, \qquad \overline{\boldsymbol{\mathcal{J}}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times r} \\ \boldsymbol{\mathcal{J}} \end{bmatrix}.$$

Введем центрированный случайный процесс $\big\{\boldsymbol{Z}(t),\ t\in[t_0,T]\big\}$, такой, что $\boldsymbol{Z}(t)=\boldsymbol{Y}(t)-\boldsymbol{m}_Y^Q(t)$. Тогда процесс $\boldsymbol{Z}(t)$ будет решением следующей системы СОИДУ:

$$d\boldsymbol{Z}(t) = \Big\{\overline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(t;\boldsymbol{Q})\,\boldsymbol{Z}(t) + \int_{t'}^{t} \overline{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(t,\theta;\boldsymbol{Q})\,\boldsymbol{Z}(\theta)\,d\theta\Big\}\,dt + \overline{\boldsymbol{\mathcal{J}}}\,d\boldsymbol{W}(t), \qquad (2.5.82)$$
$$t_0\leqslant t'<t\leqslant T, \qquad \boldsymbol{Z}(t')=\boldsymbol{Y}'-\boldsymbol{m}_Y^{Q'}.$$

Как и выше, условный случайный процесс $\boldsymbol{Z}(t)$ как решение уравнений (2.5.82) для заданного $\boldsymbol{Q}$ будем обозначать через $\boldsymbol{Z}^Q(t)$. Вследствие того, что $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{YY}^Q(t_1,t_2)=\boldsymbol{\mathcal{C}}_{YY}^{Q\,\intercal}(t_2,t_1)=\boldsymbol{\mathcal{C}}_{ZZ}^Q(t_1,t_2)=\mathbb{E}\big[\boldsymbol{Z}^Q(t_1)\,\boldsymbol{Z}^{Q\,\intercal}(t_2)\big]$, из уравнений (2.5.82) можно получить следующие уравнения для $t_0\leqslant t'<t\leqslant T$ при заданном $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{YY}^Q(t',t')$:

$$\text{(i)}\quad \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\mathcal{C}}_{YY}^Q(t,t') = \overline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(t;\boldsymbol{Q})\,\boldsymbol{\mathcal{C}}_{YY}^Q(t,t') + \int_{t'}^{t}\overline{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(t,\theta;\boldsymbol{Q})\,\boldsymbol{\mathcal{C}}_{YY}^Q(\theta,t')\,d\theta; \quad (2.5.83)$$

$$\text{(ii)}\quad \frac{d}{dt}\boldsymbol{\mathcal{K}}_{YY}^Q(t) = \overline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(t;\boldsymbol{Q})\,\boldsymbol{\mathcal{K}}_{YY}^Q(t) + \big\{\overline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(t;\boldsymbol{Q})\,\boldsymbol{\mathcal{K}}_{YY}^Q(t)\big\}^{\intercal} +$$
$$+\int_{t'}^{t}\Big[\overline{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(t,\theta;\boldsymbol{Q})\,\boldsymbol{\mathcal{C}}_{YY}^Q(\theta,t) + \big\{\overline{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(t,\theta;\boldsymbol{Q})\,\boldsymbol{\mathcal{C}}_{YY}^Q(\theta,t)\big\}^{\intercal}\Big]\,d\theta + 2\,\pi\,\overline{\boldsymbol{\mathcal{J}}}\,\overline{\boldsymbol{\mathcal{J}}}^{\intercal}. \quad (2.5.84)$$

Уравнения (2.5.83), (2.5.84) должны решаться при следующих начальных условиях:

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{YY}^Q(t',t')=\big(\boldsymbol{\mathcal{K}}_{YY}^Q\big)';\ \ \big(\boldsymbol{\mathcal{K}}_{YY}^Q\big)'=\boldsymbol{\mathcal{K}}_{YY}^Q(t_0)=\boldsymbol{\mathcal{K}}_{YY}^0=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m}\\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{m\times n} & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{UU}^0\end{bmatrix}\ ,\ t'=t_0.$$

Предположим, что необходимо решить следующую систему детерминированных ОИДУ:

$$\dot{\underline{\boldsymbol{z}}}(t) = \underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(t)\,\underline{\boldsymbol{z}}(t) + \int_{t'}^{t} \underline{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(t,\theta)\,\underline{\boldsymbol{z}}(\theta)\,d\theta + \underline{\boldsymbol{f}}(t), \quad t_0 \leqslant t' < t, \tag{2.5.85}$$

с начальным условием

$$\underline{\boldsymbol{z}}(t') = \underline{\boldsymbol{z}}', \quad \underline{\boldsymbol{z}}' = \underline{\boldsymbol{z}}^0 \quad \text{for} \quad t' = t_0. \tag{2.5.86}$$

Решение $\underline{\boldsymbol{z}}(t) \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$ уравнений (2.5.85) and (2.5.86) записывается так [625, 668]:

$$\underline{\boldsymbol{z}}(t) = \mathbb{R}(t,t')\,\underline{\boldsymbol{z}}' + \int_{t'}^{t} \mathbb{R}(t,\theta)\,\underline{\boldsymbol{f}}(\theta)\,d\theta, \qquad t > t', \tag{2.5.87}$$

где $\mathbb{R}(s,s_0)$ – матричная функция Грина, ассоциированная с уравнениями (2.5.85) и удовлетворяющая следующим уравнениям:

$$\frac{\partial}{\partial s}\,\mathbb{R}(s,s_0) = \underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(s)\,\mathbb{R}(s,s_0) + \int_{s_0}^{s} \underline{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(s,\theta)\,\mathbb{R}(\theta,s_0)\,d\theta, \quad s > s_0, \tag{2.5.88}$$

$$\mathbb{R}(s_0,s_0) = \mathbb{I}.$$

Следует отметить, что современный подход к построению приближенных аналитических решений для задач из различных научных областей, в том числе стохастических, заключается в использовании символьных численно-аналитических алгоритмов [898], но большинство схем не подходят для решения проблемы, которая решается. Например, метод последовательных приближений [668] является одной из часто применимых схем. Но, к сожалению, использование этого метода затрудняется тем фактом, что в процессе его применения большое количество интегралов необходимо вычислять в замкнутой аналитической форме, что невозможно даже при использовании пакетов компьютерной алгебры.

Тем не менее, можно представить $\mathbb{R}(s,s_0)$ без каких-либо интегрирований в следующем виде [199] (см. также подраздел 2.3.3 данной монографии):

$$\mathbb{R}(s,s_0) = \mathbb{I} + \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{\mathbb{R}_\ell(s_0,s_0)}{\ell!}\,(s-s_0)^\ell, \quad \mathbb{R}_\ell(s,s_0) = \frac{\partial^\ell \mathbb{R}(s,s_0)}{\partial s^\ell}. \tag{2.5.89}$$

При таком подходе коэффициенты ряда Тейлора в соотношении (2.5.89) могут быть получены последовательным дифференцированием уравнений (2.5.88) по s. Ограничиваясь L-й производной, из формулы (2.5.89)

получаем:

$$\widehat{\mathbb{R}}_{[L]}(s,s_0) = \mathbb{I} + \sum_{\ell=1}^{L} \frac{\mathbb{R}_\ell(s_0,s_0)}{\ell!}\,(s-s_0)^\ell \tag{2.5.90}$$

с точностью $O[(s-s_0)^L]$ (см. [608]).

Матричные функции Грина для моментных функций первого и второго порядка

Сравнивая уравнения (2.5.78) и (2.5.85), а также начальные условия (2.5.79) и (2.5.86) и используя уравнение (2.5.87), можно сделать вывод, что вектор функций условного математического ожидания $\boldsymbol{m}_X^Q(t)$ явно задается выражением

$$\boldsymbol{m}_X^Q(t) = \mathbb{R}^{[m]}(t,t')\,\boldsymbol{m}_X^{Q\prime} + \int_{t'}^{t} \mathbb{R}^{[m]}(t,\theta)\,\boldsymbol{\mathcal{G}}(\theta;\boldsymbol{Q})\,\boldsymbol{u}_0(\theta)\,d\theta, \tag{2.5.91}$$

где матричная функция Грина $\mathbb{R}(s,s_0)$, связанная с $\boldsymbol{m}_X^Q(t)$ и обозначаемая как $\mathbb{R}^{[m]}(s,s_0)$, вычисляется по формулам (2.5.88) и (2.5.89) при

$$\underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(t) = \boldsymbol{\mathcal{A}}(t;\boldsymbol{Q}), \qquad \underline{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(t,\theta) = \boldsymbol{\mathcal{B}}(t,\theta;\boldsymbol{Q}). \tag{2.5.92}$$

Обратимся к уравнению (2.5.83), которому удовлетворяет матрица условных ковариационных функций $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{YY}^Q(t,t')$ при $t > t'$. Можно утверждать, что матричная функция Грина $\mathbb{R}(s,s_0)$, удовлетворяющая уравнению (2.5.88), ассоциированная с $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{YY}^Q(t,t')$ и обозначаемая как $\mathbb{R}^{[C]}(t,t')$, может быть вычислена с использованием уравнения (2.5.88) и соотношения (2.5.89) при

$$\underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(t) = \overline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(t;\boldsymbol{Q}), \qquad \underline{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(t,\theta) = \overline{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(t,\theta;\boldsymbol{Q}). \tag{2.5.93}$$

Из уравнения (2.5.83) может быть получено, что

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{YY}^Q(t,t') = \mathbb{R}^{[C]}(t,t')\,\boldsymbol{\mathcal{C}}_{YY}^Q(t',t'), \qquad t_0 \leqslant t' < t \leqslant T.$$

Теперь займемся вычислением матрицы функций условной ковариации $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{YY}^Q(t)$, удовлетворяющей уравнению (2.5.84) для $t_0 \leqslant t' < t \leqslant T$. Заметим, что векторный стохастический процесс $\boldsymbol{Z}^Q(t)$ (решение уравнений (2.5.82)) с помощью $\mathbb{R}^{[C]}(\cdot,\cdot)$ (для данного $\boldsymbol{Q}$) может быть представлен в следующем виде:

$$\boldsymbol{Z}^Q(t) = \mathbb{R}^{[C]}(t,s)\,\boldsymbol{Z}^Q(t') + \int_{t'}^{t} \mathbb{R}^{[C]}(t,\theta)\,\overline{\boldsymbol{\mathcal{J}}}\,dW(\theta), \qquad t' < t.$$

Это выражение позволяет вычислить матричную функцию $\boldsymbol{\mathcal{K}}^{Q}_{YY}(t) = \mathbb{E}\big[\boldsymbol{Z}^{Q}(t)\,\boldsymbol{Z}^{Q\,\intercal}(t)\big]$ для $t_0 \leqslant t' < t \leqslant T$ по формуле:

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}^{Q}_{YY}(t) = \mathbb{R}^{[C]}(t,t')\,\boldsymbol{\mathcal{K}}^{Q}_{YY}(t')\,\mathbb{R}^{[C]\intercal}(t,t') + \\ + 2\,\pi \int_{t'}^{t} \mathbb{R}^{[C]}(t,\theta)\,\overline{\boldsymbol{\mathcal{J}}}\,\big\{\,\mathbb{R}^{[C]}(t,\theta)\,\overline{\boldsymbol{\mathcal{J}}}\big\}^{\intercal}\,d\theta. \quad (2.5.94)$$

Аппроксимация условных моментных функций первого и второго порядка

Введем временную сетку:

$$t_0 = \theta_0 < \theta_1 < ... < \theta_{k-1} < \theta_k < ... < \theta_N = T,$$
$$h_k = \theta_k - \theta_{k-1} \quad \text{for} \quad k = 1,2,...,N \quad \text{with} \quad \max_k h_k = h_* \ll 1,$$

получим соотношения для условных моментных функций $\boldsymbol{m}^{Q}_{X,k} = m^{Q}_{X}(\theta_k)$ and $\mathcal{C}^{Q}_{YY,k\nu} = \mathcal{C}^{Q}_{YY}(\theta_k,\theta_\nu)$ в узлах этой сетки для k и ν из множества индексов $\big\{1,2,...,N\big\}$.

Численная аппроксимация векторной функции условных математических ожиданий $\boldsymbol{m}^{Q}_{X}(t)$ на основе соотношения

$$\boldsymbol{m}^{Q}_{X}(t) = \mathbb{R}^{[m]}(t,t')\,\boldsymbol{m}^{Q\,\prime}_{X} + \int_{t'}^{t} \mathbb{R}^{[m]}(t,\theta)\,\boldsymbol{\mathcal{G}}(\theta;\boldsymbol{Q})\,\boldsymbol{u}_0(\theta)\,d\theta$$

для $t' = \theta_{k-1}$, $t = \theta_k$ может быть представлена так:

$$\widehat{\boldsymbol{m}}^{Q}_{X,k} = \widehat{\mathbb{R}}^{[m]}_{[L]}(\theta_k,\theta_{k-1})\,\widehat{\boldsymbol{m}}^{Q}_{X,k-1} + \int_{\theta_{k-1}}^{\theta_k} \widehat{\mathbb{R}}^{[m]}_{[L]}(\theta_k,\theta)\,\boldsymbol{\mathcal{G}}(\theta;\boldsymbol{Q})\,\boldsymbol{u}_0(\theta)\,d\theta, \quad (2.5.95)$$
$$k = 1,2,...,N \qquad \widehat{\boldsymbol{m}}^{Q}_{X,0} = \boldsymbol{m}^{0}_{X},$$

где $\widehat{\mathbb{R}}^{[m]}_{[L]}(\theta_k,\theta) = \widehat{\mathbb{R}}_{[L]}(\theta_k,\theta)$ с учетом равенства (2.5.92). Интеграл в формуле (2.5.95) может быть вычислен, например, с помощью правила Симпсона.

Подобным образом матрица условных ковариационных функций, которую для $t_0 \leqslant t' < t \leqslant T$ можно представить формулой

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}^{Q}_{YY}(t,t') = \mathbb{R}^{[C]}(t,t')\,\boldsymbol{\mathcal{C}}^{Q}_{YY}(t',t'),$$

может быть рассчитана при $k = 0, 1, ..., N-1$ и $\nu = k+1, ..., N$, так:

$$\widehat{\boldsymbol{\mathcal{C}}}^{\,Q}_{YY,\nu k} = \widehat{\mathbb{R}}^{[C]}(\theta_\nu, \theta_{\nu-1})\, \widehat{\boldsymbol{\mathcal{C}}}^{\,Q}_{YY,\nu-1,k},$$

где $\widehat{\mathbb{R}}^{[C]}_{[L]}(\theta_\nu, \theta_{\nu-1}) = \widehat{\mathbb{R}}_{[L]}(\theta_\nu, \theta_{\nu-1})$ с учетом (2.5.93).

И наконец, для $t_0 \leqslant t' < t \leqslant T$ матрица условных функций ковариации $\boldsymbol{\mathcal{K}}^{Q}_{YY}(t)$, определяемая формулой (2.5.94), для $k = 1, ..., N$ может быть приближенно вычислена с помощью выражения

$$\widehat{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^{\,Q}_{YY,kk} = \widehat{\mathbb{R}}^{[C]}_{[L]}(\theta_k, \theta_{k-1})\, \widehat{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^{\,Q}_{YY,k-1,k-1}\, \widehat{\mathbb{R}}^{[C]\intercal}_{[L]}(\theta_k, \theta_{k-1}) + \\ + 2\,\pi \int\limits_{\theta_{k-1}}^{\theta_k} \mathbb{R}^{[C]}_{L}(\theta_k, \theta)\, \overline{\boldsymbol{\mathcal{J}}}\, \{\mathbb{R}^{[C]}_{L}(\theta_k, \theta)\, \overline{\boldsymbol{\mathcal{J}}}\}^{\intercal}\, d\theta, \qquad \widehat{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^{\,Q}_{YY,00} = \boldsymbol{\mathcal{K}}^{0}_{YY}.$$

Расчет безусловных характеристик методом статистического моделирования

Выше была изложена процедура построения аппроксимаций функций условных моментов первого и второго порядка $\boldsymbol{m}^{Q}_{X}(t) = \boldsymbol{m}_X(t; \boldsymbol{q})$ и $\boldsymbol{\mathcal{C}}^{Q}_{XX}(t_1, t_2) = \boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(t_1, t_2; \boldsymbol{q})$ стохастического вектора состояния $\boldsymbol{X}(t)$ для заданного $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{q}$. Чтобы получить безусловные моментные функции первого и второго порядка $\boldsymbol{m}_X(t)$ и $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(t_1, t_2)$ согласно формулам (2.5.75), (2.5.76) и (2.5.77) общего решения задачи. Теперь необходимо завершить построение процедуры решения, используя эти формулы. Ясно, что эта процедура может быть только числовой, потому что символьное (точное) интегрирование для произвольного распределения вероятностей $\mathsf{P}_Q(d\boldsymbol{q})$ случайного вектора $\boldsymbol{Q}$ не может быть выполнено. Поэтому метод Монте-Карло используется для вычисления интегралов в уравнениях (2.5.75), (2.5.76) и (2.5.77).

Пусть M – число независимых моделирований $q_1, ..., q_M$ случайного вектора $\boldsymbol{Q}$, распределение вероятностей $\mathsf{P}_Q(d\boldsymbol{q})$ которого задано. Тогда приближения Монте-Карло для распределения можно вычислить по формуле:

$$\widehat{\mathsf{P}}_{\mathbb{X}}(d\mathbb{x}; \mathbb{t}) = \frac{1}{M} \sum_{\ell=1}^{M} \mathsf{P}_{\mathbb{X}^Q}(d\mathbb{x}; \mathbb{t} \,|\, q_\ell),$$

а для искомых статистических характеристик при k, $\nu \in \{1, 2, ..., N\}$ – из

соотношений:

$$\widehat{\boldsymbol{m}}_X(\theta_k) = \frac{1}{M}\sum_{\ell=1}^{M} m_X(\theta_k;q_\ell), \quad \widehat{\boldsymbol{\mathcal{C}}}_{XX}(\theta_k,\theta_\nu) = \frac{1}{M}\sum_{\ell=1}^{M} \boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(\theta_k,\theta_\nu;q_\ell), \tag{2.5.96}$$

с точностью $O(M^{-1/2})$. Кроме того, используя оценки математических ожиданий и дисперсий для $X_i(\theta_k)$ при $i \in \{1,2,...,n\}$ и $k \in \{1,2,...,N\}$, можно найти приближения для их плотностей в виде:

$$\widehat{p}_{X_i}(x_i,\tau_k) = \frac{1}{M}\sum_{\ell=1}^{M} \mathcal{N}\big(x_i;\widehat{m}_{X_i}(\theta_k;q_\ell),\widehat{\mathcal{K}}_{X_iX_i}(\theta_k,\theta_k;q_\ell)\big), \tag{2.5.97}$$

где

$$\mathcal{N}(x;a,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\,\exp\Big[-\frac{(x-a)^2}{2\,\sigma^2}\Big].$$

Анализ поведения динамической системы в вязкоупругой среде

Рассмотрим механическую систему, изображенную на рис. 2.5.13, где **1** – абсолютная система координат, **2** – относительная система координат, связанная с подвижным основанием, **3** – подвижное основание, **4** – термовязкоупругая компонента, **5** – первое тело, **6** – упругая диссипативная механическая компонента, **7** – второе тело. Система состоит из двух твердых тел массами $M_1 > 0$ и $M_2 > 0$ соответственно. Каждое тело имеет только одну степень свободы, соответствующую его перемещению в одном заданном направлении. Первое тело связано со вторым телом и подвижным основанием. Связь между телами состоит из линейной упругой диссипативной механической составляющей, которая моделируется линейной пружиной с постоянной жесткостью $K > 0$ и линейным демпфером вязкого типа с постоянным коэффициентом демпфирования $D > 0$. Связь между первым телом и подвижным основанием состоит из термовязкоупругой механической составляющей, которая характеризуется функциями времени $\gamma_0(t,\tau)$ и $\gamma(t,\tau)$. Структура этих функций будет представлена ниже вместе с определяющими уравнениями.

Вводится абсолютная система отсчета, для которой единичный вектор основания, соответствующий рассматриваемому смещению, обозначается через $\boldsymbol{J}$. Подвижное основание движется в направлении $\boldsymbol{J}$. Также выбирается относительная система отсчета, связанная с подвижным основанием. Его единичный направляющий вектор обозначается через $\boldsymbol{j}$.

Линейная динамика этой механической системы анализируется относительно опорной конфигурации, которая соответствует статическому положению равновесия, причем предварительные напряжения механических компонентов отсутствуют. В абсолютной системе отсчета в момент времени t смещение подвижного основания обозначается через $X_0(t)\,\boldsymbol{J}$. В относительной системе отсчета, связанной с подвижным основанием, в момент времени t смещение первого (второго) тела обозначается через $X_1(t)\,\boldsymbol{j}$ $(X_2(t)\,\boldsymbol{j})$.

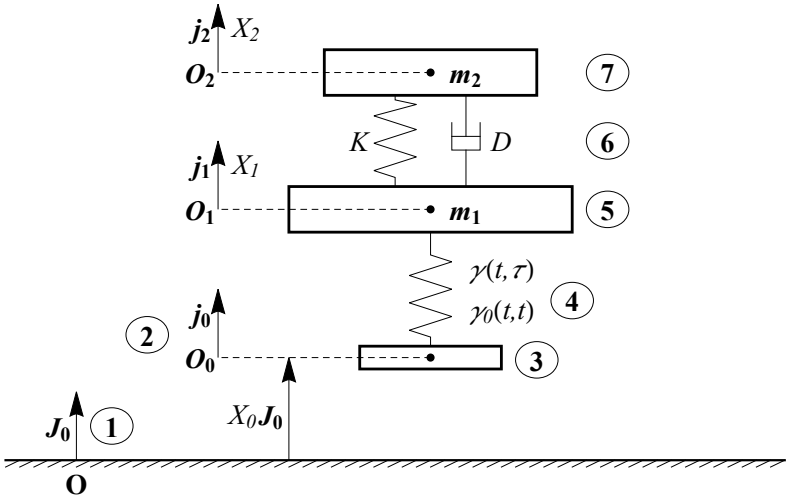


Рис. 2.5.13

Для построения определяющего уравнения термовязкоупругой механической составляющей предположим, что нижний конец этого компонента предполагается фиксированным, а верхний является свободным и подвергается в момент времени t воздействию силы $F(t)\,\boldsymbol{j}_0$, вызывающей смещение $X_1(t)\,\boldsymbol{j}_1$. Используя неизотермическую теорию линейной вязкоупругости [488, 530, 633, 778], определяющее уравнение можно записать в виде

$$F(t) = \gamma_0(t,t;\boldsymbol{Q})\,X_1(t) + \int_{t_0}^{t} \gamma(t,\theta;\boldsymbol{Q})\,X_1(\theta)\,d\theta, \quad t \in (0,T],$$

где $\gamma(t,\tau;\boldsymbol{Q})$ – положительно определенная функция, которая задана при $0 < \tau \leqslant t \leqslant T$ и предполагается бесконечно дифференцируемой по t и τ;

$$\gamma(t,\theta;\boldsymbol{Q}) = \frac{\partial\gamma_0(t,\theta;\boldsymbol{Q})}{\partial\theta}$$

– отрицательно определенная функция, которая задана при $0 < \theta \leqslant t \leqslant T$ и поэтому интегрируема по θ на $(0,t]$ для любого t из $(0,T]$; $\boldsymbol{Q}$ – случайный векторный параметр, представляющий неопределенности в структуре функций γ_0 and γ.

Пусть $\dot{U}_j(t) = dU_j(t)/dt$ – скорость, а $\ddot{U}_j(t) = d^2U_j(t)/dt^2$ – ускорение тела j ($j = 1, 2$). Вследствие того, что движение изучается относительно системы отсчета, соответствующей статическому положению равновесия, при отсутствии предварительных напряжений механических компонент считается, что в начальный момент времени смещения и скорости равны нулю. При этом уравнения движения относительно указанной системы отсчета будут иметь вид ($t \in (0,T]$):

$$M_1\left[\ddot{U}_1(t) + \ddot{U}_s(t)\right] = -K\left[U_1(t) - U_2(t)\right] - D\left[\dot{U}_1(t) - \dot{U}_2(t)\right] -$$
$$- \gamma_0(t,t;\boldsymbol{Q})\,U_1(t) - \int_0^t \gamma(t,\tau;\boldsymbol{Q})\,U_1(\tau)\,d\tau, \tag{2.5.98}$$
$$M_2\left[\ddot{U}_2(t) + \ddot{U}_s(t)\right] = -K\left[U_2(t) - U_1(t)\right] - D\left[\dot{U}_2(t) - \dot{U}_1(t)\right], \tag{2.5.99}$$

а начальные условия –

$$U_1(0) = \dot{U}_1(0) = U_2(0) = \dot{U}_2(0) = 0. \tag{2.5.100}$$

Пусть ω_1, ω_2, ξ и μ – положительные действительные параметры, такие что

$$\omega_1 = \sqrt{K/M_1}, \quad \omega_2 = \sqrt{K/M_2}, \quad \xi = D/(2\,M_2\,\omega_2), \quad \mu = M_2/M_1,$$

а $\widehat{\gamma}_0(t,\theta;\boldsymbol{Q})$, $\widehat{\gamma}(t,\theta;\boldsymbol{Q})$ – функции, получаемые так:

$$\widehat{\gamma}_0(t,\theta;\boldsymbol{Q}) = \gamma_0(t,\theta;\boldsymbol{Q})/M_1, \quad \widehat{\gamma}(t,\theta;\boldsymbol{Q}) = \gamma(t,\tau;\boldsymbol{Q})/M_1. \tag{2.5.101}$$

Используя эти обозначения, уравнения (2.5.98) и (2.5.99) могут быть переписаны следующим образом:

$$\ddot{U}_1(t) = -2\,\xi\,\mu^{1/2}\,\omega_1\left[\dot{U}_1(t) - \dot{U}_2(t)\right] - \omega_1^2\left[U_1(t) - U_2(t)\right] -$$
$$- \widehat{\gamma}_0(t,t;\boldsymbol{Q})\,U_1(t) - \int_0^t \widehat{\gamma}(t,\theta;\boldsymbol{Q})\,U_1(\theta)\,d\theta - \ddot{U}_s(t), \tag{2.5.102}$$
$$\ddot{U}_2(t) = -2\,\xi\,\omega_2\left[\dot{U}_2(t) - \dot{U}_1(t)\right] - \omega_2^2\left[U_2(t) - U_1(t)\right] - \ddot{U}_s(t). \tag{2.5.103}$$

Ускорение $\ddot{U}_s(t)$ подвижного основания моделируется нестационарным центрированным гауссовым случайным процессом второго порядка $\{\ddot{U}_s(t), t \in (0,T]\}$ так:

$$\ddot{U}_s(t) = g(t)\, U(t), \tag{2.5.104}$$

где $g(t) = \left[1 + (t/t_g)^{a_g}\right]^{-1}$ – действительная функция, определенная на $[0,T]$ $(0 < t_g < T,\ a_g > 0)$.

Случайный процесс $\{U(t),\ t \in [0,\ T]\}$ – стационарный центрированный гауссов случайный процесс второго порядка, непрерывный в среднем квадратическом. Его автоковариационная функция вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{UU}(\theta) = \mathbb{E}\big[U(t)\, U(t+\theta)\big] = \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega\theta} \mathcal{S}_{UU}(\omega)\, d\omega,$$

а спектральная плотность $\mathcal{S}_{UU}(\omega)$ определяется следующим выражением:

$$\mathcal{S}_{UU}(\omega) = a_U^2/(b_U^2 + \omega^2), \quad a_U > 0, \quad b_U > 0,$$

Пусть σ_U – среднее квадратичное отклонение процесса $U(t)$ при любом $t \in [0,T]$, такое что

$$\sigma_U^2 = \mathcal{C}_{UU}(0) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{S}_{UU}(\omega)\, d\omega.$$

Поэтому случайный процесс $\{U(t), t \in [0,T]\}$ может быть представлен как (стационарное) решение СОДУ Ито

$$dU(t) = -b_U\, U(t)\, dt + a_U\, dW(t), \qquad t \in (0,T], \tag{2.5.105}$$

со случайными начальным условием $U(0) = U^0$, где W – скалярный винеровский случайный процесс, и где распределение случайной величины U^0 – инвариантная мера P_U, которая является гауссовой вероятностной мерой с нулевым средним и средним квадратичным отклонением σ_U.

С учетом того, что $n = 4$, $m = 1$, $t_0 = 0$ и $u_0(t) = 0$, можно заметить, что уравнения (2.5.102), (2.5.103) и (2.5.100) уравнения мог быть записаны в виде (2.5.70)

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}(t;\boldsymbol{Q}) = \begin{bmatrix} -\xi_1 & \xi_1 & -\bar{\omega}_1^2 & \omega_1^2 \\ \xi_2 & -\xi_2 & \omega_2^2 & -\omega_2^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\mathcal{B}}(t,\theta;\boldsymbol{Q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \bar{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}(t;\boldsymbol{Q}) = -\begin{bmatrix} g(t) \\ g(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{X}(t) = \begin{bmatrix} \dot{U}_1(t) \\ \dot{U}_2(t) \\ U_1(t) \\ U_2(t) \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{X}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

where $\xi_1 = 2\,\xi\sqrt{\mu}\,\omega_1$, $\xi_2 = 2\,\xi\,\omega_2$, $\bar{\omega}_1^2 = \omega_1^2 + \widehat{\gamma}_0(t,t;\boldsymbol{Q})$, $\bar{\gamma} = -\widehat{\gamma}(t,\theta;\boldsymbol{Q})$. Кроме того, уравнение (2.5.105) можно записать в форме уравнений (2.5.71) с $m = 1$, $t_0 = 0$, $\boldsymbol{\mathcal{H}} = -b_U$, $\boldsymbol{\mathcal{J}} = a_U$.

Структура ядра $\widehat{\gamma}_0(t,\theta;\boldsymbol{Q})$ была выбрана в форме

$$\widehat{\gamma}_0(t,\tau;\boldsymbol{Q}) = K_0(\theta_t)\Big\{1 - \sum_{\ell=1}^{2} \mu_\ell(\theta_t)\,\big[1 - \exp\big\{-\frac{\tau}{T_\ell(\theta_t)}\big\}\big]\Big\} \qquad (2.5.106)$$

и основана на модели из статьи [529]. В правой части соотношения для $\widehat{\gamma}_0(t,\tau;\boldsymbol{Q})$ присутствуют: $\theta_t = a_\theta + b_\theta\,t/T$, $a_\theta > 0$, $b_\theta > 0$, $t \in [0,T]$ – температура механического компонента; $K_0(\theta_t) > 0$ – начальная упругая характеристика, зависящая от температуры:

$$K_0(\theta_t) = \frac{a_{K_0}}{b_{K_0}\,\theta_t - 1}, \quad a_{K_0} > 0, \quad b_{K_0} > 0,$$

причем $b_{K_0}\,\theta_t - 1 > 0$; $T_1(\theta_t)$ – большое время релаксации; $\mu_1(\theta_t)$ – безразмерный параметр (далее предполагается, что $T_1(\theta_t)$ и $\mu_1(\theta_t)$ не зависят от θ_t: $T_1(\theta_t) = a_{T_1}$, $\mu_1(\theta_t) = a_{\mu_1}$, $a_{T_1} > 0$, $a_{\mu_1} > 0$); $T_2(\theta_t)$ – малое время релаксации; $\mu_2(\theta_t)$ – безразмерный параметр. $T_2(\theta_t)$ и $\mu_2(\theta_t)$ зависят от θ_t, причем в соотношения для перечисленных величин входят компоненты вектора случайных параметров $\boldsymbol{Q}$:

$$T_2(\theta_t) = \frac{a_{T_2}}{b_{T_2}\,\theta_t + (c_{T_2}/\theta_t)^{d_{T_2}}}, \quad a_{T_2} > 0, \quad b_{T_2} > 0, \quad c_{T_2} > 0, \quad d_{T_2} > 0,$$

$$\mu_2(\theta_t) = a_{\mu_2} - b_{\mu_2}\,\theta_t, \quad a_{\mu_2} > 0, \quad b_{\mu_2} > 0,$$

причем константы a_{μ_2} и b_{μ_2} таковы, что $a_{\mu_2} - b_{\mu_2}\,\theta_t > 0$. Из описания модели и соотношений (2.5.101) и (2.5.106) можно получить, что

$$\widetilde{\gamma}(t,\theta;\boldsymbol{Q}) = -K_0(\theta_t)\sum_{\ell=1}^{2} \frac{\mu_\ell(\theta_t)}{T_\ell(\theta_t)}\,\exp\big\{-\frac{\tau}{T_\ell(\theta_t)}\big\}.$$

Большое время релаксации $T_1(\theta_t)$, ассоциированный безразмерный параметр $\mu_1(\theta_t)$ и параметр d_{T_2} из соотношения для малого времени релаксации $T_2(\theta_t)$ трактуются как неопределенные параметры. Эти три случайные величины предполагаются независимыми.

Для численных расчетов данные и вероятностные модели неопределенных параметров определяются следующим образом:

1°. Полное время: $T = 1200\,\mathrm{c}$.

2°. Механические параметры: $\omega_1 = 2\,\pi\,\mathrm{рад/с}$; $\omega_2 = 6\,\pi\,\mathrm{рад/с}$; $\mu = 1/9$; $\xi = 0.01$.

3°. Ускорение подвижного основания: $t_g = 300\,\mathrm{c}$; $a_g = 3$; $b_U = 19\,\mathrm{c}^{-1}$; $a_U = 19\,\mathrm{м/c}^{5/2}$.

4°. Эволюция температуры во времени: $a_\theta = 40°\mathrm{C}$, $b_\theta = 110°\mathrm{C}$.

5°. Параметры для термовязкоупругого механического компонента:

- Начальные упругие свойства: неопределенный параметр a_{K_0} моделируется случайной величиной $A_{K_0} = \underline{a}_{K_0}\,(1+\delta_{K_0}\,Q_1)$, где $Q_1 \sim U[-1,1]$, $\underline{a}_{K_0} = 500\,\mathrm{H}\times\mathrm{кг}^{-1}\times\mathrm{м}^{-1}$, $\delta_{K_0} \in [0, 0.9]$, $b_{K_0} = 0.04°\mathrm{C}^{-1}$.
- Большое время релаксации $T_1(\theta_t)$: неопределенный параметр a_{T_1} моделируется случайной величиной $A_{T_1} = \underline{a}_{T_1}\,(1 + \delta_{T_1}\,Q_2)$, где $Q_2 \sim U[-1,1]$, $\underline{a}_{T_1} = 320\,\mathrm{c}$, $\delta_{T_1} \in [0, 0.9]$.
- Безразмерный параметр $\mu_1(\theta_t)$: неопределенный параметр a_{μ_1} моделируется случайной величиной $A_{\mu_1} = \underline{a}_{\mu_1}\,(1+\delta_{\mu_1}\,Q_3)$, где $Q_3 \sim U[-1,1]$, $\underline{a}_{\mu_1} = 0.08$, $\delta_{\mu_1} \in [0, 0.9]$.
- Малое время релаксации $T_2(\theta_t)$: $a_{T_2} = 60\,\mathrm{c}$, $b_{T_2} = 3°\mathrm{C}^{-1}$, $c_{T_2} = 73°\mathrm{C}$. Неопределенный параметр d_{T_2} моделируется случайной величиной $D_{T_2} = \underline{d}_{T_2}\,(1 + \delta_{T_2}\,Q_4)$, где $Q_4 \sim U[-1,1]$, $\underline{d}_{T_2} = 11$, $\delta_{D_{T_2}} \in [0, 0.9]$.
- Безразмерный параметр $\mu_2(\theta_t)$: $a_{\mu_2} = 0.63$; $b_{\mu_2} = 0.0013°\mathrm{C}^{-1}$.

По отношению к мере Лебега $dq = dq_1\,dq_2\,dq_3\,dq_4$ on $\mathbb{R}^4$ распределение случайного вектора $\boldsymbol{Q} = (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$ будет определяться плотностью вероятности $p_Q(q) = p_1(q_1) \times p_2(q_2) \times p_3(q_3) \times p_4(q_4)$, где $p_\ell(q_\ell) = \frac{1}{2}\,\mathbb{1}_{[-1,1]}(q_\ell)$ для $\ell = 1,\,2,\,3,\,4$.

Рассмотрим технологию реализации метода функций Грина (МФГ) для анализа системы СОИДУ (2.5.102), (2.5.103) и (2.5.100). Результаты, полученные с помощью этого метода, сравнивались с решением, построенным методом Монте-Карло (ММК), расчетная схема которого описана ниже. Заметим, что из постановки и анализа задачи следует что вектор функций математических ожиданий случайного процесса $\boldsymbol{X}(t)$ равен нулю для всех $t \geqslant 0$. Поэтому эта векторная функция не вычислялась.

Для прямого статистического моделирования рассматриваемой системы использовалась следующая простая полунеявная модификация алгоритма Эйлера–Маруямы (или θ-метод для $\theta = 0.5$:

$$\widehat{y}_{\ell,k+1} = \widehat{y}_{\ell\,k} + \frac{h_0}{2}\Big[\overline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_{\ell\,k}\,\widehat{y}_{\ell\,k} + \overline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_{\ell,k+1}\,\widehat{y}_{\ell,k+1} + \\ + h_0\,\big(\overline{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_{\ell,k+1,k}\,\widehat{y}_{\ell\,k} + \overline{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_{\ell,k+1,k+1}\,\widehat{y}_{\ell,k+1}\big)\Big] + \overline{\boldsymbol{\mathcal{J}}}\,\widehat{\Delta w}_{\ell\,k}, \qquad (2.5.107)$$

$$k = 0, 1, 2, ..., N-1, \qquad \ell = 1, 2, ..., M,$$

где $h_0 = T/N$ – постоянный шаг; $\theta_k = k\,h_0$, $k \in \{0, 1, 2, ..., N\}$; $\widehat{y}_{\ell\,k} = y^{[\ell]}(\theta_k)$, $\overline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_{\ell\,k} = \overline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(\theta_k; q_\ell)$; $\overline{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_{\ell\,kj} = \overline{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\theta_k, \theta_j; q_\ell)]$; $\Delta y_{\ell\,k} = \widehat{y}^{[\ell]}(\theta_{k+1}) - \widehat{y}^{[\ell]}(\theta_k)$; ℓ – номер моделирования. Схема определенная равенствами (2.5.107) потребовала разрешения этих линейных равенств относительно состояний процесса по времени $\widehat{y}_{\ell,k+1}$. Требуемое обращение матрицы осуществлялось с помощью метода исключения Гаусса. Численные расчеты производись с помощью разработанной программы на языке Fortran 90 (компилятор Intel Fortran в среде Microsoft Visual Studio).

Реализация ММК требует большого количества случайных или псевдослучайных чисел с различными распределениями. Для генерации выборок ПСЧ для $\boldsymbol{Q}$ использовался датчик Intel Fortran для получения равномерно распределенных $U(0, 1)$ чисел. Эти выборки пересчитывались в необходимые равномерно распределенные $(-1,)$ числа с помощью аффинного преобразования.

Для моделирования псевдослучайных чисел, имеющих стандартное нормальное распределение $\mathcal{N}(\cdot; 0, 1)$ используется алгоритм Марсальи–Брея [127]. После преобразования в выборки с заданными стандартными отклонениями эти числа использовались как начальные значения $U(t_0)$ и приращения $W(t)$. Однако, как и во многих других практических случаях, при разумном объеме выборки эти генераторы создают выборки, обладающие статистическими оценками средних значений, дисперсий и ковариаций, которые отличаются от теоретических . Поэтому была проведена нормализация для всех псевдогауссовых выборок, используемых для начальных значений и для каждого этапа моделирования, отдельно. После такой нормализации преобразованные выборки умножались на σ_U или $\sqrt{2\,\pi\,h_0}$ в зависимости от назначения.

Иная процедура была использована для получения ПСЧ, имеющих приближенное равномерное распределение $U[-1, 1]$. Дело в том, что для расчетов требовались многомерные выборки с нулевыми векторами средних арифметических и строго диагональными выборочными ковариационными матрицами (все диагональные элементы должны быть равны $1/3$). Пусть $\widehat{\boldsymbol{m}}_Q$ и $\widehat{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_{QQ}$ – обычные оценки среднего вектора и ковариационной матрицы вектора $\boldsymbol{Q}$, которые вычисляются с помощью ПСЧ $\boldsymbol{q}^{[\ell]}$. Тогда классическое уравнение, используемое для нормализации, имеет следующий вид:

$$\widehat{\boldsymbol{q}}^{[\ell]} = \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{\mathcal{S}}^{-1}\left(\boldsymbol{q}^{[\ell]} - \widehat{\boldsymbol{m}}_Q\right), \qquad \ell = 1, 2, ..., M,$$

где $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ – нижняя треугольная матрица, вычисляемая методом Холецкого и такая, что $\widehat{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_{QQ} = \boldsymbol{\mathcal{S}}\,\boldsymbol{\mathcal{S}}^{\intercal}$.

Пошаговые оценки для векторной функции среднего и для матричнозначной ковариационной функции случайного процесса $\boldsymbol{Y}$ состояния вычисляются для k, r = 0, 1, ..., N и для i, j = 1, 2, 3, 4 следующим образом:

$$\widehat{\boldsymbol{m}}_{Y_i,k} = \frac{1}{M}\sum_{\ell=1}^{M}\widehat{\boldsymbol{y}}_{\ell ik}, \quad \widehat{\mathcal{C}}_{Y_iY_j,kr} = \frac{1}{M}\sum_{\ell=1}^{M}\left(\widehat{\boldsymbol{y}}_{\ell\,ik} - \widehat{\boldsymbol{m}}_{Y_i,k}\right)\left(\widehat{\boldsymbol{y}}_{\ell\,jr} - \widehat{\boldsymbol{m}}_{Y_j,r}\right),$$

где $\mathcal{C}_{Y_iY_j,kr} = \mathcal{C}_{Y_iY_j}(t_k,t_r)$ $(i,\,j = 1..4)$ – компоненты матрицы $\mathcal{C}_{YY}(t_k,t_r)$.

Реализация МФГ состоит из двух этапов. На первом с использованием пакета Mathematica производились аналитические вычисления (дифференцирования, подстановки, приведение подобных и т.д.) для получения точных символьных выражений $\mathbb{R}_\ell(s_0,s_0)$ для $\ell = \{1,2,3,4\}$, пригодных для дальнейших численных расчетов. Наиболее сложный подэтап символьных выкладок связан с дифференцированием функций $\widetilde{\gamma}_0(t,\theta;\boldsymbol{Q})$ и $\widetilde{\gamma}(t,\theta;\boldsymbol{Q})$ из-за их сложной структуры. Этот подэтап был необходим для достижения эффективности расчетной программы на языке Fortran 90. Заметим, что результат автоматического генерирования на компьютере оптимизированных фрагментов программы на языке Fortran 90 с помощью пакета Maple был менее удачен.

На втором этапе численные расчеты производились в той же среде Microsoft Visual Studio, но с помощью другой разработанной на языке Intel Fortran 90 программы. В этой программе, как и в первой, формировались постоянные части матриц перед моделированием и добавлялись переменные части к последним во время моделирования. Цель состояла в том, чтобы сократить компьютерное время для ММК и МФГ. Получение выборок для случайного вектора $\boldsymbol{Q}$, их преобразований и статистической обработки данных осуществлялось по схемам, аналогичным тем, которые были представлены выше.

Для исследуемой системы основная часть параметров расчетов были представлена выше. Здесь указываем только четыре набора значений для δ_{K_0}, δ_{T_1}, δ_{μ_1} and δ_{T_2} из промежутка $[0,0.9]$. Эти наборы данных S_{1i}, $i \in \{1,2,3,4,5\}$, следующие:

1. $\delta_{K_0} = \delta_{T_1} = \delta_{T_2} = \delta_{\mu_1} = 0.0$.
2. $\delta_{K_0} = \delta_{T_1} = \delta_{T_2} = \delta_{\mu_1} = 0.3$.
3. $\delta_{K_0} = \delta_{T_1} = \delta_{T_2} = \delta_{\mu_1} = 0.6$.
4. $\delta_{K_0} = 0.6$, $\delta_{T_1} = \delta_{T_2} = \delta_{\mu_1} = 0.9$.
5. $\delta_{K_0} = \delta_{T_1} = \delta_{T_2} = \delta_{\mu_1} = 0.9$.

Следует отметить, что набор данных S_{11} соответствует механической системе, для которой у параметров модели нет неопределенности. Ансамбли

данных S_{2i}, $i \in \{1,2,3,4\}$ для h_0, N и M были выбраны так:

1. $h_0 = h_0^{[1]}$, $N = N^{[1]}$, $M = 1000$.
2. $h_0 = h_0^{[1]}$, $N = N^{[1]}$, $M = 5000$.
3. $h_0 = h_0^{[2]}$, $N = N^{[2]}$, $M = 2000$.
4. $h_0 = h_0^{[2]}$, $N = N^{[2]}$, $M = 10000$,

где $h_0^{[1]} = 0.01$; $h_0^{[2]} = 0.005$; $N^{[1]} = 120000$; $N^{[2]} = 240000$.

Учитывая структуру расчетных соотношений для обоих методов, для реализации алгоритмов оказалось возможным использовать встроенные матричные операции. Для вычисления интегралов в рамках МФГ применялся метод Симпсона с переменным числом J интервалов разбиения промежутка интегрирования.

Первая часть результатов представлена на рис. 2.5.14–2.5.23, где гладкими и зашумленными кривыми показаны результаты расчетов с помощью МФГ и ММК на ансамблях данных S_{21} и S_{22} соответственно. На этих рисунках дополнительные цифры от 1 до 4 и от 5 до 8 обозначают кривые, отображающие поведение $\mathcal{C}_{X_1X_1}(t,t)$, $\mathcal{C}_{X_2X_1}(t,t)$, $\mathcal{C}_{X_2X_2}(t,t)$, $\mathcal{C}_{X_3X_1}(t,t)$, $\mathcal{C}_{X_3X_2}(t,t)$, $\mathcal{C}_{X_3X_3}(t,t)$, $\mathcal{C}_{X_4X_1}(t,t)$, $\mathcal{C}_{X_4X_2}(t,t)$, $\mathcal{C}_{X_4X_3}(t,t)$, $\mathcal{C}_{X_4X_4}(t,t)$, для номеров наборов данных $S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{15}$, построенные по результатам расчетов МФГ и ММК соответственно. На рис. 2.5.17, 2.5.18, 2.5.20, 2.5.21 показана только часть кривых, демонстрирующих результаты расчетов только для МФГ и представляющих динамику функций ковариации с небольшими значениями, т.к. соответствующие оценки методов ММК сильно зашумлены. Как было сказано ранее, основной целью численных экспериментов, выполняемых ММК, являлась численная проверка представленного подхода.

Рисунки показывают, что поведение характеристики поведения функций ковариации во времени, рассчитанные с помощью МФГ и МКК, находятся в хорошем согласии за исключением только результатов вычислений для набора данных S_{15}. Для этого набора данных различия имеются для части ковариаций. Поэтому временные истории для этого набора данных были пересчитаны теми же методами с уменьшенными временными шагами h_0 и увеличенными числами M моделирований с ансамблями данных S_{23} и S_{24}. Но такая численная стратегия не привела к существенному уменьшению разницы.

Таким образом, необходимость решения вопроса о качестве результатов вынудила произвести еще раз увеличить число моделирований и одновременно уменьшить шаг сетки для набора данных S_{15} с использованием следующих ансамблей дополнительных параметров S_{2i}, $i \in \{5,6\}$:

5. $h_0 = 0.0005$, $N = 2400000$, $M = 20000$.
6. $h_0 = 0.0001$, $N = 12000000$, $M = 100000$.

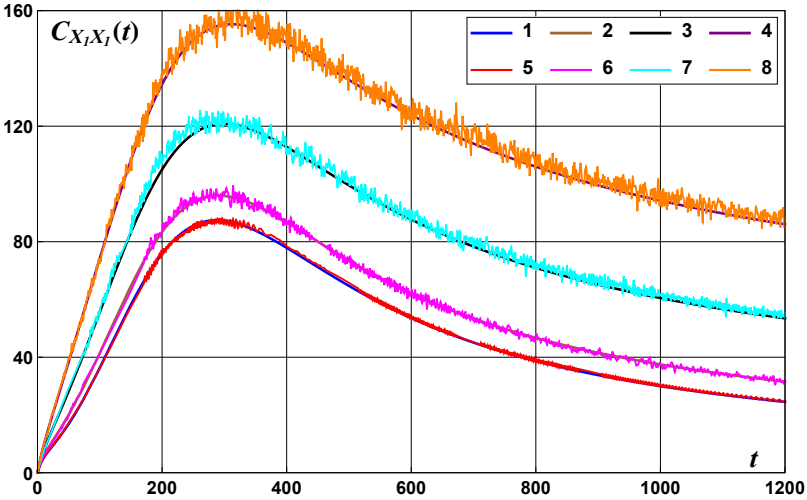


Рис. 2.5.14

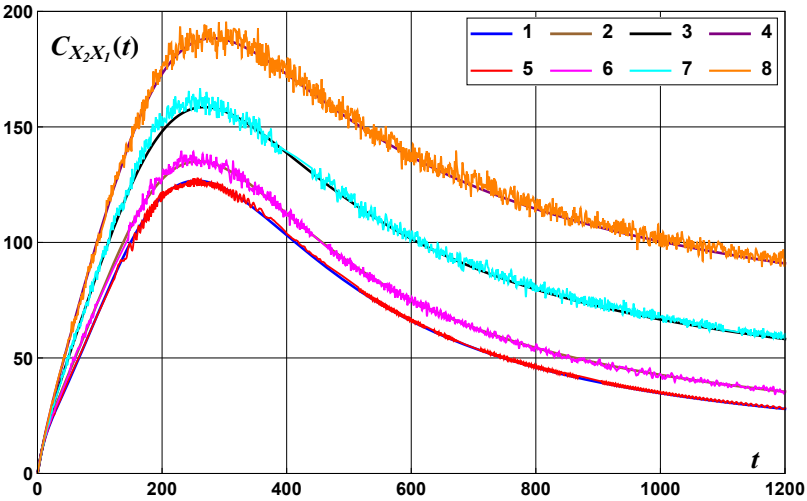


Рис. 2.5.15

Эти расчеты показали следующее:

1) результаты расчетов по МФГ для ансамблей данных S_{21} и S_{25} отличаются незначительно;

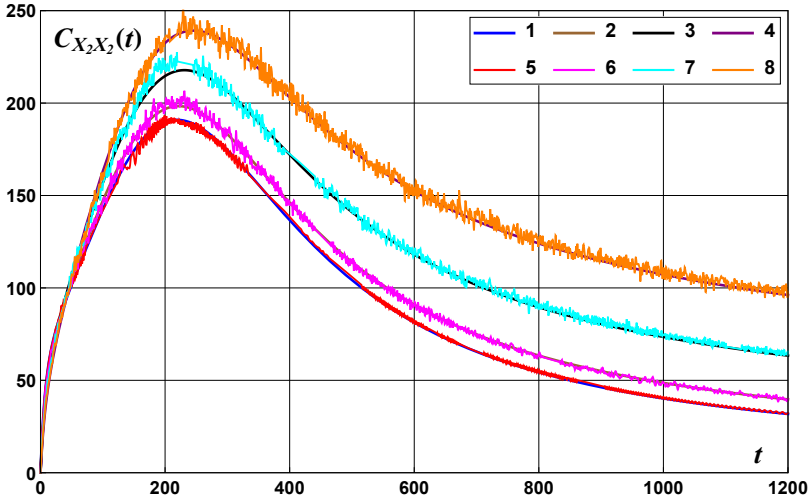


Рис. 2.5.16

2) если сравнивать результаты расчетов для ансамблей S_{22} и S_{26}, то изменения более заметны для результатов применения ММК, а именно, амплитуды шумовых добавок к базовым временным траекториям оценок ковариаций уменьшились примерно три раза;

3) результаты расчета функций $\mathcal{C}_{X_1X_1}(t,t)$, $\mathcal{C}_{X_2X_1}(t,t)$, $\mathcal{C}_{X_2X_2}(t,t)$, полученные для ансамбля S_{25}, находятся в хорошей взаимной согласованности, также с результатами вычислений для ансамблей данных S_{2i}, $i \in \{1,2,3,4\}$;

4) различия между поведением траекторий $\mathcal{C}_{X_3X_3}(t,t)$, $\mathcal{C}_{X_4X_3}(t,t)$, $\mathcal{C}_{X_4X_4}(t,t)$, полученных с помощью МФГ и ММК для набора данных S_{15}, существенно не уменьшились.

Результаты, отображенные на рис. 2.5.14–2.5.23 и полученные для других наборов данных значений для δ_{K_0}, δ_{T_1}, δ_{μ_1} и δ_{T_2}, показывают преобладающее влияние случайной величины A_{K_0} на поведение всех ковариаций. Рис. 2.5.24–2.5.27 демонстрируют характерные переходные режимы, возникающие в системе в начальный период.

Рис. 2.5.28–2.5.31 наглядно показывают влияние случайных параметров модели, которое выражается в негауссовой форме отклика, несмотря на линейность исследуемой динамической системы и гауссовский случайный процесс на входе. Кривые плотностей распределения, обозначенные "1", характеризуют состояния системы с ансамблем данных S_{14} при $t =$

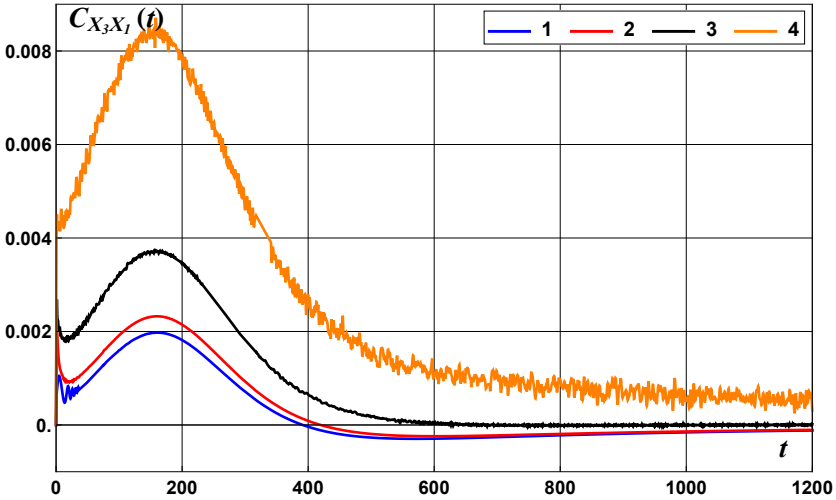


Рис. 2.5.17

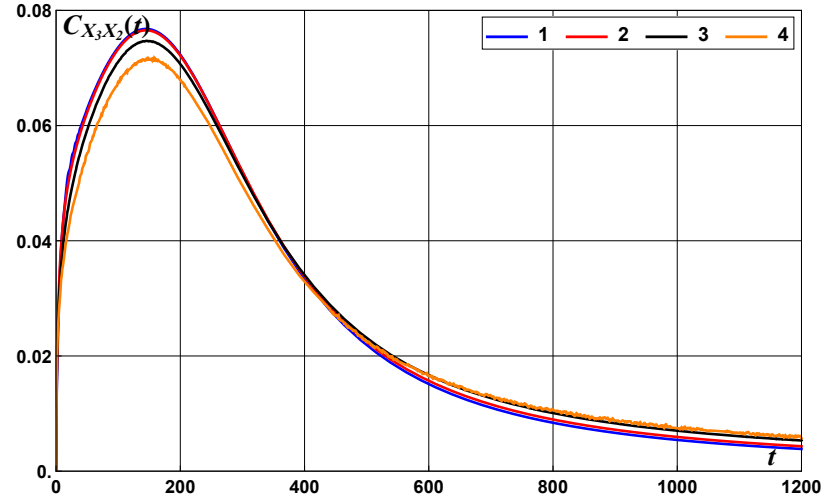


Рис. 2.5.18

1200 с. Эти кривые были построены с использованием формулы (2.5.97), где для плотностей математические ожидания равны нулю, а дисперсии совпадают с выборочными дисперсиями, полученные с помощью МФГ.

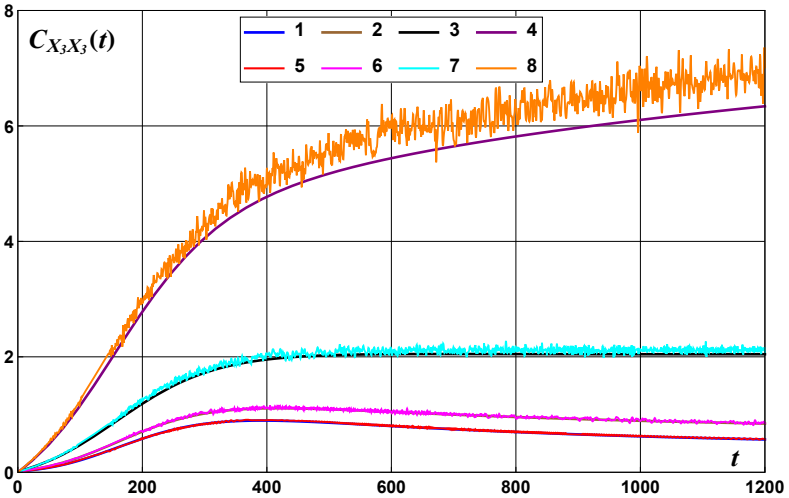


Рис. 2.5.19

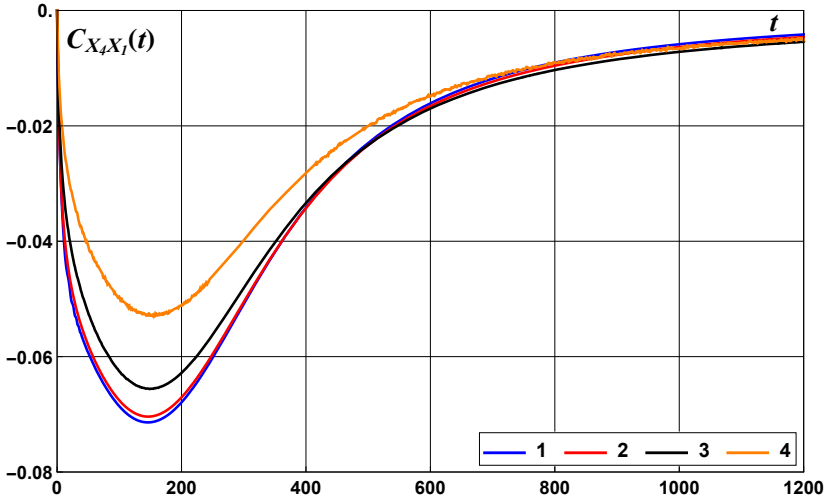


Рис. 2.5.20

Графики, обозначенные "2", соответствуют гауссовским плотностям распределения с нулевым математическими ожиданиями и дисперсиями, вычисленными по формуле (2.5.96).

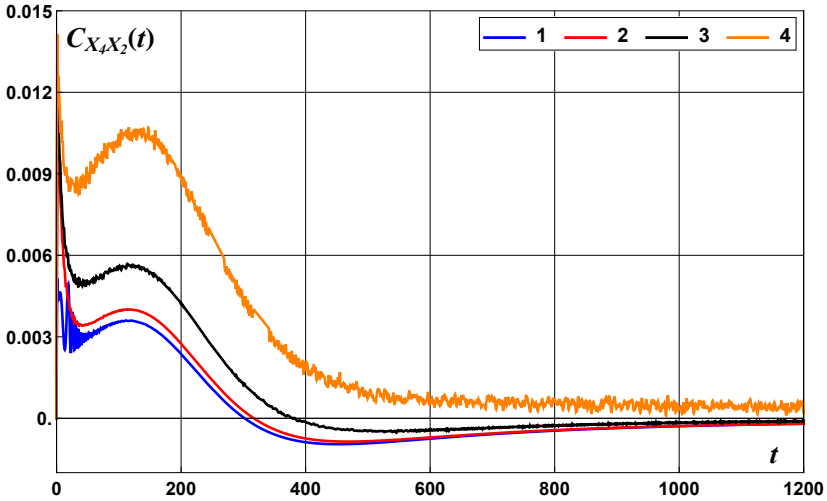


Рис. 2.5.21

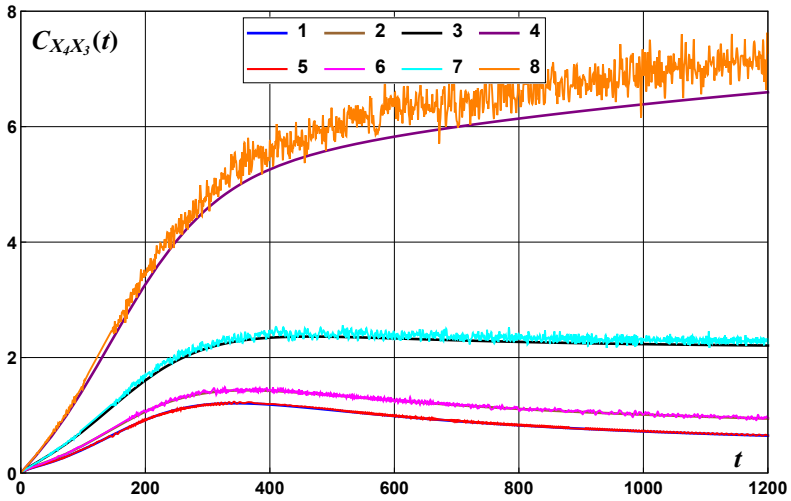


Рис. 2.5.22

Вычислительные проблемы для набора данных S_{15} при расчете поведения системы с помощью ММК можно объяснить следующим образом:

1°. Исследуемая система стохастическая и случайная.

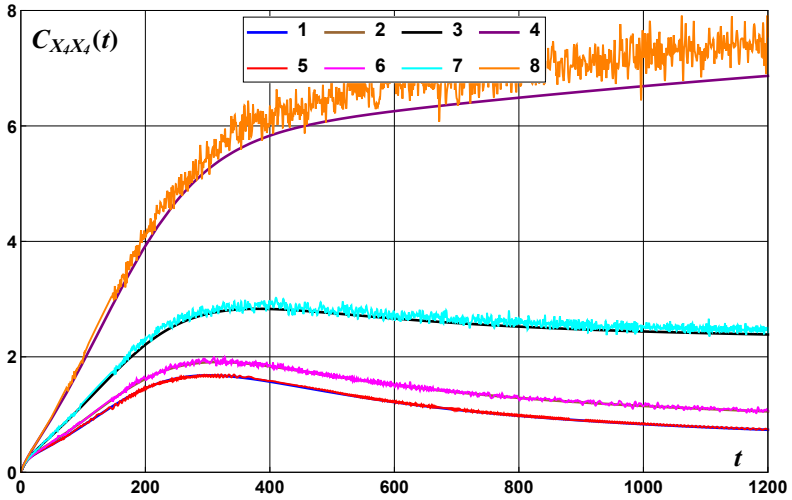


Рис. 2.5.23

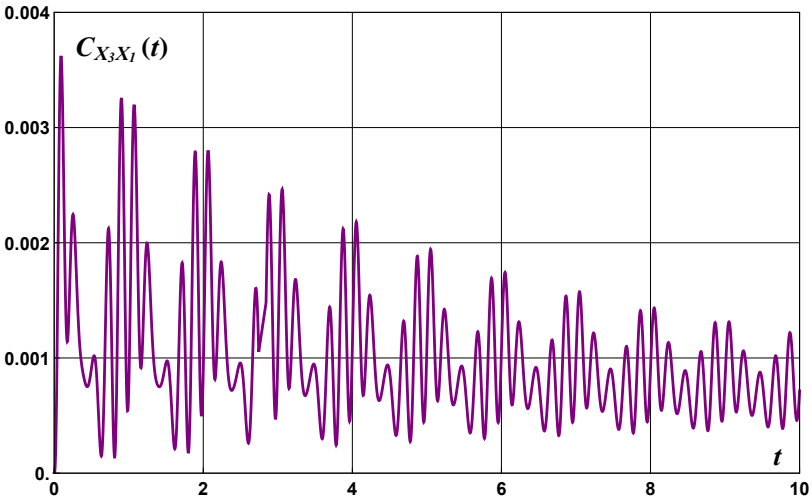


Рис. 2.5.24

2°. Мультипликативный случайный параметр A_{K_0} влияет на переменную частоту колебаний системы. В начале переходного режима частота меняется почти четырехкратно для экстремальных значений A_{K_0}. Это

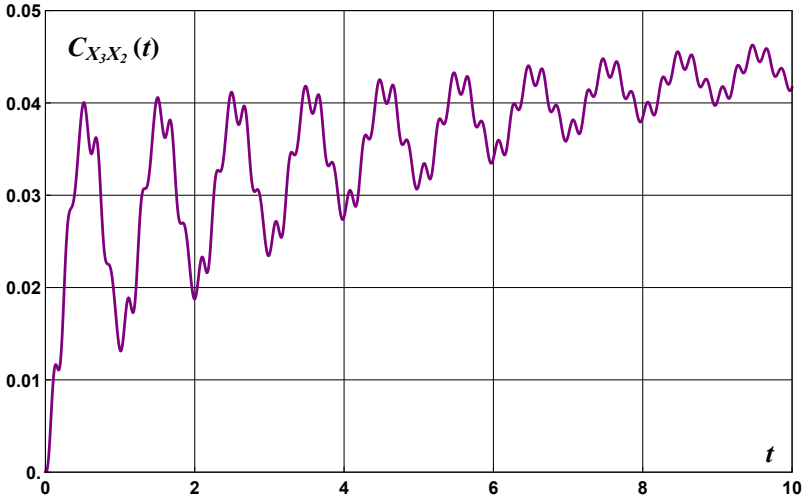


Рис. 2.5.25

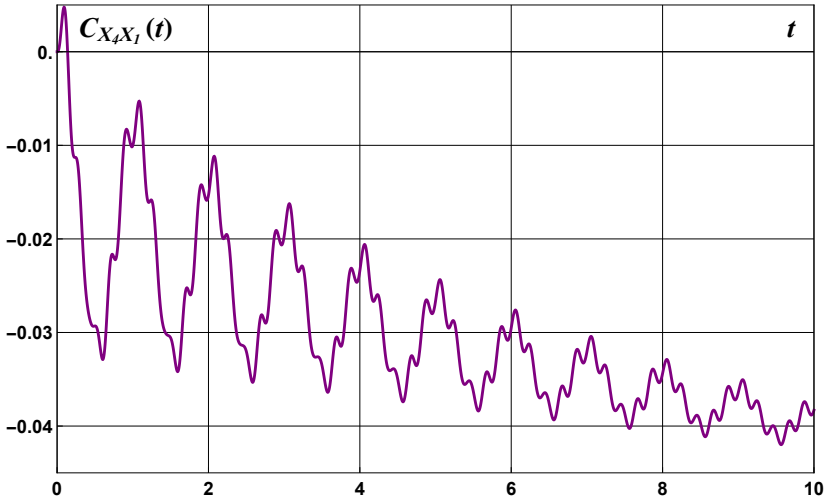


Рис. 2.5.26

приводит к необходимости статистической обработки существенно разного поведения $U_1(t)$, $\dot{U}_1(t)$, $U_2(t)$, $\dot{U}_2(t)$ во времени.

3°. Обычно схемы ММК разрабатываются без учета наличия случай-

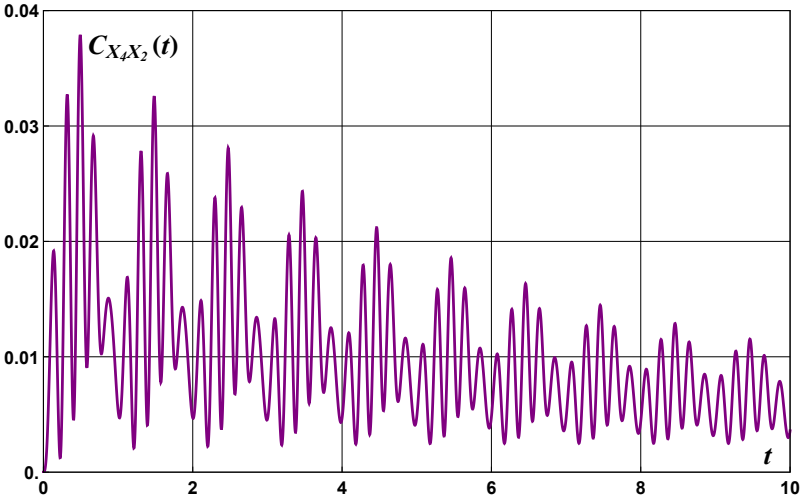


Рис. 2.5.27

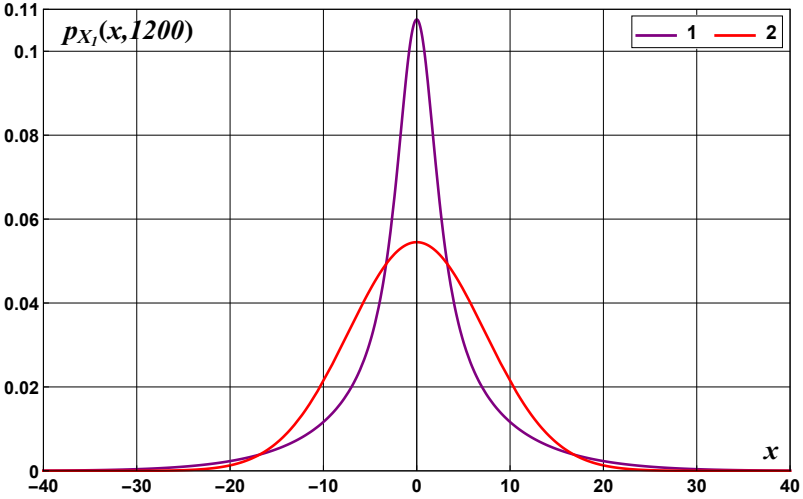


Рис. 2.5.28

ных параметров, которые могут оказать существенное влияние на характеристики исследуемых систем, многократный расчет которых дает неоднородные выборки.

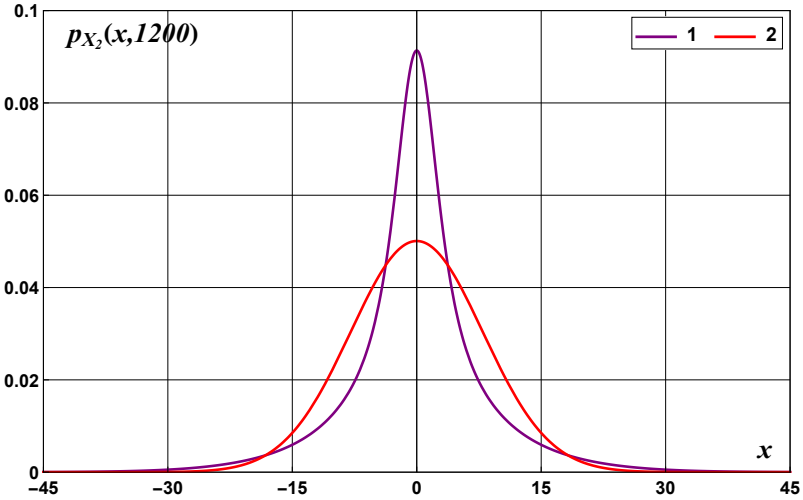


Рис. 2.5.29

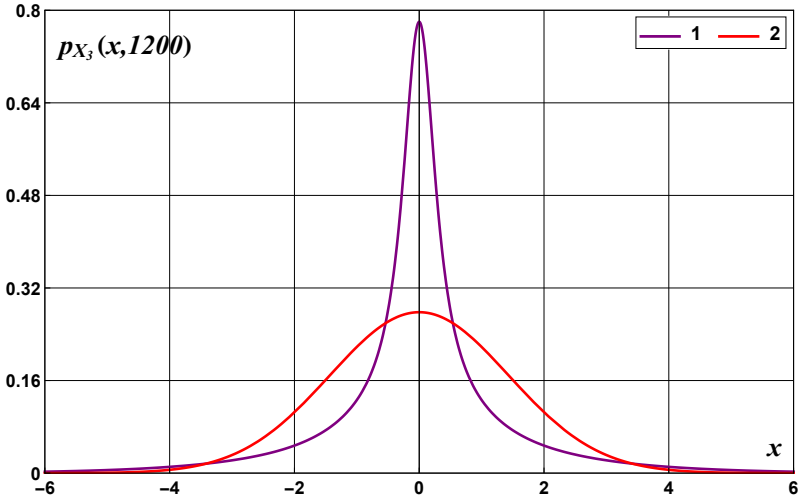


Рис. 2.5.30

4°. Реализация ММК работает и со стохастичностью, и случайностью процессов в системе, реализация же МФГ имеет дело только со случайностью. Ошибки статистической обработки случайности можно считать

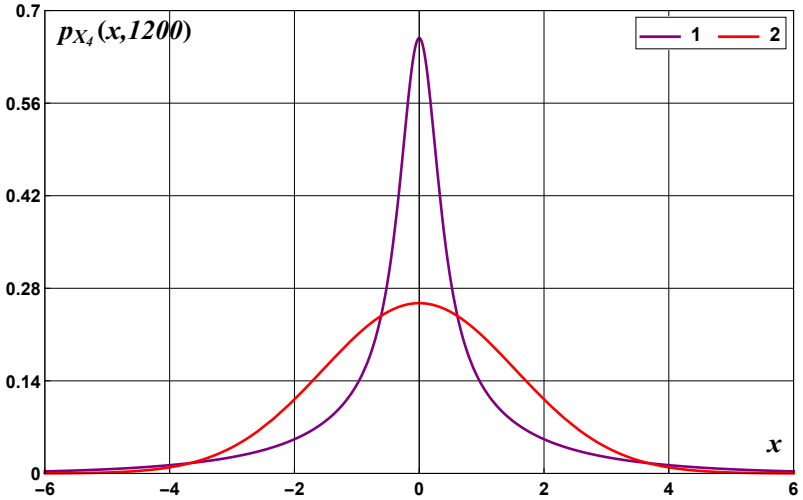


Рис. 2.5.31

одинаковыми для обеих схем.

5°. Ошибка слабой аппроксимации полуявной схемы для ММК порядка $O(h_0)$, а для МФГ – $O(h_0^L)$. Поэтому полная ошибка для МГФ существенно меньше, чем для ММК.

Следует отметить, что результаты расчетов существенно отличались при моделировании системы, когда преобразования ПСЧ не использовались. Например, в этих случаях наблюдались паразитные переходные режимы, которых не могло быть при точном соблюдении первоначальной постановки задачи.

Применение параллельных вычислений для ускорения расчетов

При решении рассматриваемой задачи методом Монте-Карло необходимо было производить многократное моделирование СОИДУ (число таких моделирований при решении практических задач стохастической механики исчисляется сотнями тысяч [998]) в рамках выбранной полунеявной схемы Эйлера–Маруямы. Для проработки инструментария применения многопроцессорных систем в данной и подобных задачахбыл разработан соответствующий комплекс программ. Рассмотрим основные блоки этого комплекса.

Вследствие того, что все моделирования в рамках применения метода Монте-Карло являются независимыми, то вычисления можно разделить так, что будет использоваться сколь угодно большое количество вычислительных узлов (процессов) [233].

Общепринятым стандартом для организации параллельных вычислений является Message Passing Interface (MPI). С его помощью можно создавать масштабируемые решения для систем с распределенной памятью.

Для использования возможностей MPI в изначально разработанный однопоточный алгоритм интегрирования уравнений движения были внесены изменения. Процесс с $rank = 0$ (*root*) был выбран управляющим. На этапе работы MPI этот процесс формировал два буфера с параметрами, которые необходимо было отправлять вычислительным узлам с $rank = 1, 2, ..., size-1$. Отправка и получение сообщений осуществлялись с помощью блокирующей передачи:

```
MPI_SEND (buffer, sizeofmessage, datatype, destination,
          tag, comm, ierr);
MPI_RECV (buffer, sizeofmessage, datatype, source, tag,
          comm, status, ierr)
```

где `buffer` – пересылаемое сообщение (массив) с одним или несколькими параметрами; `sizeofmessage` – размер массива; `datatype` – тип данных массива; `destination` – номер процесса, которому передается сообщение; `source` – номер процесса, от которого ожидается сообщение; `comm` – константа, равная внутреннему значению MPI MPI_COMM_ WORLD; `tag` – тег; в `ierr` MPI записывает внутреннюю константу ошибки, которая произошла во время передачи сообщения.

Каждому из процессов с $rank = 1, 2, ..., size - 1$ в качестве одного из параметров передавалось число моделирований, которые ему необходимо было провести. Это количество вычислялось по следующей формуле:

$$modNumber4Proc = NSamples/(size - 1),$$

где $modNumber4Proc$ – количество моделирований для каждого процесса, $NSamples$ – общее количество моделирований, $size$ – количество процессов, которые доступны MPI. Каждый из процессов с $rank = 1, 2, ..., size - 1$ осуществлял необходимое количество моделирований, после чего отправлял результаты корневому процессу с $rank = 0$. После выполнения вычислений корневой процесс поочередно суммировал результаты моделирований от каждого процесса.

Многопоточный алгоритм тестировался в среде ОС Microsoft Windows 8.1 x64, установленной на стационарный компьютер с процессором Intel Core 2 Quad Q6600 (тактовая частота 3.17 ГГц) и оперативной памятью объемом 4 ГБ. Для сборки Fortran MPI-программы использовался компилятор Intel Composer XE 2011 x64 и компоновщик Microsoft Visual C++ 2010 x64. В качестве реализации интерфейса MPI был выбран MPICH x86_64 версии 2 (сборка Jayesh Krishna). В настройках компилятора было изменено значение флага оптимизации *Maximize Speed plus Higher Level Optimizations* (/O3).

Для тестирования эффективности параллельной реализации алгоритма были выбраны следующие параметры (напомним, что общее модельное время процесса 1200 с):

Параметр	Значение
Общее количество моделирований	60000
Шаг	0.001
Количество шагов	1200000

Затраты времени на расчеты измерялись с помощью следующих команд MPI:

```
startTime = MPI_WTIME()
endTime = MPI_WTIME()
calcTime = endTime - startTime
```

и составили:

Количество вычисляющих узлов	Время вычислений (ч)
1	24.8
3	9.5

Из приведенных данных следует, что по сравнению с однопоточной реализацией при количестве вычисляющих процессов, равных трем, удалось получить ускорение вычислений примерно в 2,6 раза.

По результатам расчетов были сделаны следующие выводы:

– применение параллельных вычислений при решении задач стохастической вязкоупругой механики является эффективным способом ускорения расчетов;

– системы аналитических вычислений имеют необходимый функционал для организации параллельных вычислений как в автоматическом,

так и ручном режиме. Но при этом имеются ограничения по памяти, а скорость вычислений заметно уступает программам, написанным с использованием языков C/C++ и Fortran под конкретную архитектуру процессоров.

Поэтому перспективным способом для организации решения задач стохастической вязкоупругой механики с использованием параллельных вычислений является следующий подход:

– с помощью систем аналитических вычислений, например пакета `Mathematica`, производятся все необходимые аналитические вычисления, а далее с помощью встроенных команд генерируются необходимые соотношения для расчетов на языках C или Fortran;

– в сгенерированный код вносятся необходимые изменения для использования таких технологий, как OpenMP или MPI;

– измененный код компилируется под конкретную архитектуру, что, например при использовании MPI API, дает возможность получать гибкие масштабируемые C/Fortran "вычислители" (или "решатели", от англ. *solvers*) для использования на кластерах.

2.5.2. Моделирование движения автомобиля по дороге со случайным микропрофилем

Большое внимание конструкторов и технологов уделяется повышению комфортности езды водителей и пассажиров легковых и грузовых автомобилей по дорогам различных классов, что естественно привело к необходимости построения и изучения более сложных моделей движения транспортных средств (ТС), в том числе передвигающихся по неровной поверхности. Известно [325, 1085], что перемещение автомобилей различных классов по дорогам со сложным *микропрофилем* сопровождается непрерывными колебаниями его подрессоренных и неподрессоренных частей, которые оказывают вредное влияние на водителя, пассажиров и перевозимые грузы, ухудшают условия работы агрегатов и узлов, вынуждают уменьшать скорость движения и т.д.

Задачи анализа поведения ТС на неровной дороге важны с различных точек зрения. Среди них, например, можно отметить создание систем автоматического управления автомобилем [474, 526], выбор оптимальных параметров подвески [546] и др.

На характеристики транспортных динамических систем оказывают влияние: 1) воздействия, получаемые ТС из-за неровностей дороги; 2) изменения в скорости движения; 3) временные лаги, которые возникают вследствие наличия расстояния между осями колес; 4) наличие демпфирования и жесткости в колесах [638].

Случайные возмущения от дороги вследствие переменности скорости движения моделируются нестационарными случайными процессами с известными характеристиками. Но нередко в моделях переменность скорости не учитывается, например в методиках, предназначенных для вычисления спектральной плотности в стационарных режимах линейных систем. При этом, как правило, неровности дороги представляются случайными функциями с заданными характеристиками, получаемыми в результате прохождения (векторного) белого шума через линейный фильтр.

Наряду с учетом нерегулярности дорожного полотна уже давно признано необходимым принимать во внимание и запаздывание воздействия случайного микропрофиля на одну или несколько пар задних колес ТС относительно передних [170,273]. Еще недавно динамика как в линейной, так и нелинейной постановке изучались без учета протяженности ТС, а следовательно, и эффекта запаздывания [522]. Дело в том, что этот учет является нетривиальной задачей, т.к. запаздывание превращает стохастическую систему в немарковскую. Но в широком диапазоне скоростей пренебрежение запаздыванием приводит к завышению дисперсии ускорения подрессоренной массы, особенно на резонансной скорости движения. С другой стороны, в работе [638] показано, что введение в модель управляющего устройства временного запаздывания между передними и задними колесами улучшает динамические характеристики ТС.

Важным классом моделей, предназначенных для учета влияния последействия на динамику ТС различных классов, являются детерминированные и стохастические обыкновенные дифференциальные уравнения с запаздыванием.

Чтобы преодолеть трудности учета эффекта запаздывания, используют несколько подходов. Самый простой – это анализ стационарных режимов в линейных системах. Изучение нестационарных процессов в стохастических системах с запаздыванием до последнего времени производилось, в основном, методом Монте-Карло [58]. Другой подход [522], предназначенный как для линейных, так и для нелинейных систем, основан на разложении соответствующих членов уравнений движения в ряд Тейлора по малому запаздыванию, что позволяет описать динамику ТС в терминах векторного марковского случайного процесса, а затем использовать соответствующий математический аппарат [236,288]. Напомним, что данная процедура плохо обоснована с точки зрения общей теории уравнений с отклоняющим аргументом [320]. Отдельные исследователи применяют некоторые эмпирические соотношения, например, исключают запаздывание с помощью функции, связывающей возмущения передних и задних колес [638].

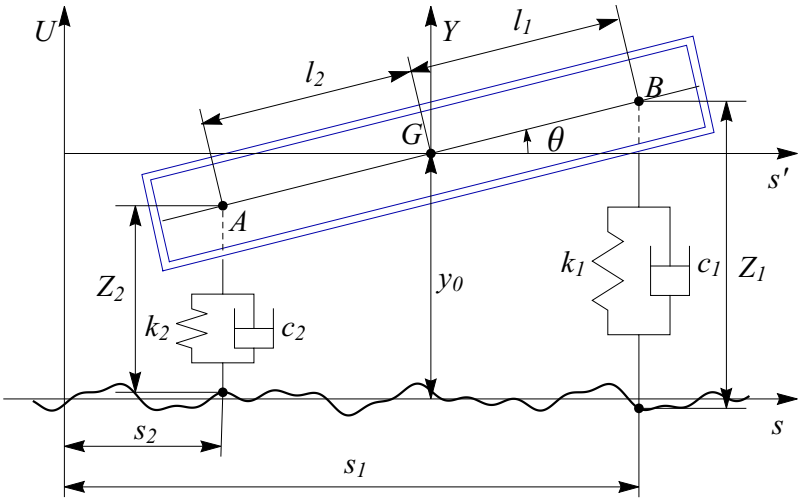


Рис. 2.5.32

2.5.2.1. Перемещение с постоянной скоростью

Рассмотрим движение транспортного средства (ТС) в вертикальной плоскости. Схема этого ТС изображена на рис.2.5.32, состоит из движущейся массы m, подвешенной на двух колесах и моделируется системой с двумя степенями свободы. Предполагается, что в процессе движения подвеска остается вертикальной.

Обозначим через $Y(t)$ смещение центра масс из положения статического равновесия (соответствующего y_0), а через $\Theta(t)$ – угол наклона корпуса ТС (t – время). Пусть $U = U(s)$ – функция, характеризующая профиль дороги ($s = r(t)$ – пройденный путь), G – центр масс, k_i и c_i – коэффициенты жесткости и демпфирования ($i = 1, 2$). Тогда уравнения движения будут иметь вид [522]:

$$m\ddot{Y}(t) + c_1\,\dot{Z}_1 + c_2\,\dot{Z}_2 + k_1\,Z_1 + k_2\,Z_2 = m\,g, \tag{2.5.108}$$

$$I\,\ddot{\Theta} + c_1\,\ell_1\,\dot{Z}_1 - c_2\,\ell_2\,\dot{Z}_2 + k_1\,\ell_1\,Z_1 - k_2\,\ell_2\,Z_2 = 0, \tag{2.5.109}$$

где I – момент инерции ТС относительно центра масс, g – ускорение свободного падения, а точками обозначены производные по времени.

Из уравнений (2.5.108) следует, что в состоянии покоя ($\ell = \ell_1 + \ell_2$)

$$z_{10} = \frac{\ell_2\,m\,g}{\ell\,k_1}, \qquad z_{20} = \frac{\ell_1\,m\,g}{\ell\,k_2},$$

а следовательно,

$$y_0 = \frac{\ell_2\, z_{10} + \ell_1\, z_{20}}{\ell} = \frac{1}{\ell}\Big(\frac{\ell_2^2\, m\, g}{\ell\, k_1} + \frac{\ell_1^2\, m\, g}{\ell\, k_2}\Big) = \frac{m\, g}{\ell^2}\Big(\frac{\ell_2^2}{k_1} + \frac{\ell_1^2}{k_2}\Big),$$

$$\theta_0 = \frac{z_{10} - z_{20}}{\ell} = \frac{m\, g}{\ell^2}\Big(\frac{\ell_2}{k_1} - \frac{\ell_1}{k_2}\Big).$$

Исходя из простых геометрических соображений и используя малость угла Θ, из уравнений (2.5.108) переменные Z_1 и Z_2 можно исключить с помощью соотношений

$$Y(t) = \frac{\ell_2\,\big[Z_1(t) + U_1(t)\big] + \ell_1\,\big[Z_2(t) + U_2(t)\big]}{\ell} - y_0,$$

$$\Theta(t) = \frac{Z_1(t) + U_1(t) - Z_2(t) - U_2(t)}{\ell} - \theta_0,$$

где

$$U_1(t) = U\big(s_1(t)\big), \qquad U_2(t) = U\big(s_2(t)\big), \qquad s_2(t) = s_1(t) - \ell,$$

откуда следует, что

$$Z_1(t) = y_0 + Y(t) + \ell_1\,\big[\theta_0 + \Theta(t)\big] - U_1(t),$$

$$Z_2(t) = y_0 + Y(t) - \ell_2\,\big[\theta_0 + \Theta(t)\big] - U_2(t).$$

Это позволяет записать уравнения (2.5.108) в виде:

$$m\,\ddot{Y} + c_1\,\big(\dot{Y}_1 + \ell_1\,\dot{\Theta} - \dot{U}_1\big) + c_2\,\big(\dot{Y}_1 - \ell_2\,\dot{\Theta} - \dot{U}_2\big) +$$

$$+k_1\,\big[y_0 + Y + \ell_1\big(\theta_0 + \Theta\big) - U_1\big] + k_2\,\big[y_0 + Y - \ell_2\,\big(\theta_0 + \Theta\big) - U_2\big] = m\,g,$$

$$I\,\ddot{\Theta} + c_1\,\ell_1\,\big(\dot{Y}_1 + \ell_1\,\dot{\Theta} - \dot{U}_1\big) - c_2\,\ell_2\,\big(\dot{Y}_1 - \ell_2\,\dot{\Theta} - \dot{U}_2\big) +$$

$$+k_1\,\ell_1\,\big[y_0 + Y + \ell_1\,\big(\theta_0 + \Theta\big) - U_1\big] - k_2\,\ell_2\,\big[y_0 + Y - \ell_2\,\big(\theta_0 + \Theta\big) - U_2\big] = 0,$$

или

$$\begin{aligned} &m\,\ddot{Y} + c_1\,\big(\dot{Y}_1 + \ell_1\,\dot{\Theta} - \dot{U}_1\big) + c_2\,\big(\dot{Y}_1 - \ell_2\,\dot{\Theta} - \dot{U}_2\big) + \\ &\quad +k_1\,\big(Y + \ell_1\,\Theta - U_1\big) + k_2\,\big(Y - \ell_2\,\Theta - U_2\big) = 0, \\ &I\,\ddot{\Theta} + c_1\,\ell_1\,\big(\dot{Y}_1 + \ell_1\,\dot{\Theta} - \dot{U}_1\big) - c_2\,\ell_2\,\big(\dot{Y}_1 - \ell_2\,\dot{\Theta} - \dot{U}_2\big) + \\ &\quad +k_1\,\ell_1\,\big(Y + \ell_1\Theta - U_1\big) - k_2\,\ell_2\big(Y - \ell_2\,\Theta - U_2\big) = 0. \end{aligned} \tag{2.5.110}$$

Если обозначить

$$Y = X_1, \qquad \dot{Y} = X_2, \qquad \Theta = X_3, \qquad \dot{\Theta} = X_4,$$

$$c_{11} = \frac{c_1}{m}, \qquad c_{12} = \frac{c_2}{m}, \qquad k_{11} = \frac{k_1}{m}, \qquad k_{12} = \frac{k_2}{m},$$

$$c_{21} = \frac{c_1\,\ell_1}{I}, \qquad c_{22} = -\frac{c_2\,\ell_2}{I}, \qquad k_{21} = \frac{k_1\,\ell_1}{I}, \qquad k_{22} = -\frac{k_2\,\ell_2}{I},$$

то уравнения (2.5.110) можно будет записать так:

$$\begin{aligned}
\dot{X}_1(t) &= X_2(t),\\
\dot{X}_2(t) &= -\big(c_{11}+c_{12}\big)\,X_2(t) - \big(c_{11}\,\ell_1 - c_{12}\,\ell_2\big)\,X_4(t) -\\
&\quad - \big(k_{11}+k_{12}\big)\,X_1(t) - \big(k_{11}\,\ell_1 - k_{12}\,\ell_2\big)\,X_3(t) +\\
&\quad + c_{11}\,\dot{U}_1(t) + c_{12}\,\dot{U}_2(t) + k_{11}\,U_1(t) + k_{12}\,U_2(t),\\
\dot{X}_3(t) &= X_4(t),\\
\dot{X}_4(t) &= -\big(c_{21}+c_{22}\big)\,X_2(t) - \big(c_{21}\,\ell_1 - c_{22}\,\ell_2\big)\,X_4(t) -\\
&\quad - \big(k_{21}+k_{22}\big)\,X_1(t) - \big(k_{21}\,\ell_1 - k_{22}\,\ell_2\big)\,X_3(t) +\\
&\quad + c_{21}\,\dot{U}_1(t) + c_{22}\,\dot{U}_2(t) + k_{21}\,U_1(t) + k_{22}\,U_2(t).
\end{aligned} \tag{2.5.111}$$

Теперь рассмотрим вопрос о *моделировании профиля дороги*. Наиболее часто применяется схема, в которой неровности пути формируются в результате прохождения белого шума через линейный фильтр второго порядка [522]. Форму фильтра выберем в виде [31]:

$$U''(s) + 2\,\alpha\,U'(s) + \omega^2\,U(s) = g_0\,V^*(s), \qquad g_0^2 = 4\,\alpha\,\omega^2\,\sigma_0^2,$$

где $V^*(s)$ – белый шум переменной s. При этом отклик $U(s)$ будет иметь ковариационную функцию

$$\mathcal{K}_U(s) = \sigma_0^2\,e^{-\alpha|s|}\,\Big(\cos\omega_0 s + \frac{\alpha}{\omega_0}\,\sin\omega_0|s|\Big), \qquad \omega^2 = \omega_0^2 + \alpha^2,$$

где $\sigma_0 = \mathrm{const}$ – стандарт микропрофиля дороги.

Перейдем в уравнении фильтра от переменной s к времени t, предполагая, что $s = r(t)$ – монотонно возрастающая функция времени ($\dot{s} = v(t) > 0$). Для этого построим ФПК-уравнение для плотности вероятности $p^*(u_1, u_2, s)$ ($U_1 = U$, $U_2 = U'$):

$$\frac{\partial p^*}{\partial s} = \frac{g_0^2}{2}\,\frac{\partial^2 p^*}{\partial u_2^2} - u_2\,\frac{\partial p^*}{\partial u_1} + \frac{\partial}{\partial u_2}\,\big[\big(2\alpha\,u_2 + \omega^2\,u_1\big)\,p^*\big].$$

Здесь использованы общие соотношения [236,288], связывающие коэффициенты СОДУ и соответствующих ФПК-уравнений.

Обозначая $p^*(u_1,u_2,s)$ через $p(u_1,u_2,t)$ после замены $s=r(t)$, $t=\psi(s)$, получим:

$$\frac{\partial p}{\partial t}\,\psi'(s)=\frac{g_0^2}{2}\,\frac{\partial^2 p}{\partial u_2^2}-u_2\,\frac{\partial p}{\partial u_1}+\frac{\partial}{\partial u_2}\big[\big(2\,\alpha\,u_2+\omega^2\,u_1\big)\,p\,\big],$$

или

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{1}{2}\,\Big[\frac{g_0}{\sqrt{\varphi(t)}}\Big]^2\,\frac{\partial^2 p}{\partial u_2^2}-\frac{u_2}{\varphi(t)}\,\frac{\partial p}{\partial u_1}+\frac{\partial}{\partial u_2}\Big[\frac{2\,\alpha\,u_2+\omega^2\,u_1}{\varphi(t)}\,p\,\Big],$$

где $\varphi(t)=\psi'(s)\big|_{s=r(t)}$. Отсюда, обращая упомянутые выше соотношения, легко строится система СОДУ, представляющая преобразованный фильтр:

$$\dot U_1(t)=\frac{U_2(t)}{\varphi(t)},\qquad \dot U_2(t)=-\frac{2\,\alpha\,U_2(t)+\omega^2\,U_1(t)}{\varphi(t)}+\frac{g_0}{\sqrt{\varphi(t)}}\,V(t).\quad(2.5.112)$$

В случае постоянной скорости $v(t)=\mathrm{const}\equiv v_0$ система уравнений (2.5.112) принимает следующий вид ($s=r(t)=v_0\,t$, $t=\psi(s)=s/v_0$, $\psi'(s)=1/v_0=\varphi(t)$):

$$\dot U_1(t)=v_0\,U_2(t),\qquad \dot U_2(t)=-v_0\,\big[2\,\alpha\,U_2(t)+\omega^2\,U_1(t)\big]+g_0\,\sqrt{v_0}\,V(t).$$

Обозначая $U_1(t)$ через $X_5(t)$, а $U_2(t)$ через $X_6(t)$ и ограничиваясь последним случаем постоянной скорости ТС, запишем уравнения движения в форме, сходной с (2.2.25):

$$\dot{\boldsymbol X}(t)=\boldsymbol{\mathcal Q}(t)\,\boldsymbol X(t)+\boldsymbol{\mathcal H}(t)\,\boldsymbol X(t-\tau)+\boldsymbol{\mathcal G}(t)\,\boldsymbol V(t),\qquad t>0\quad(t_1=0),$$

где $\tau=\ell/v_0$,

$$\boldsymbol{\mathcal Q}(t)=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0\\ q_{21}&q_{22}&q_{23}&q_{24}&k_{11}&c_{11}\\ 0&0&0&1&0&0\\ q_{41}&q_{42}&q_{43}&q_{44}&k_{21}&c_{21}\\ 0&0&0&0&0&v_0\\ 0&0&0&1&-v_0\,\omega^2&-2\,v_0\,\alpha\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal H}(t)=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&k_{12}&c_{12}\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&k_{22}&c_{22}\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{\mathcal G}(t)=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\g_0\,\sqrt{v_0}\end{bmatrix},$$

где

$$q_{21} = -(k_{11} + k_{12}), \quad q_{22} = -(c_{11} + c_{12}),$$
$$q_{23} = -(k_{11}\,\ell_1 - k_{12}\,\ell_2), \quad q_{24} = -(c_{11}\,\ell_1 - c_{12})\,\ell_2),$$
$$q_{41} = -(k_{21} + k_{22}), \quad q_{42} = -(c_{21} + c_{22}),$$
$$q_{43} = -(k_{21}\,\ell_1 - k_{22}\,\ell_2), \quad q_{44} = -(c_{21}\,\ell_1 - c_{22})\,\ell_2).$$

Предположим при этом, что на промежутке $[-\tau, 0]$ состояние ТС характеризуется соотношениями $X_1(t) = X_2(t) = X_3(t) = X_4(t) = 0$, а выходные переменные фильтра ($X_5(t)$ и $X_6(t)$) находятся в стационарном состоянии, имея совместное нормальное распределение со следующими параметрами:

$$\mathbb{E}[X_5(t)] = \mathbb{E}[X_6(t)] = 0,$$
$$\mathbb{E}\big[X_5^2(t)\big] = \sigma_0^2, \qquad \mathbb{E}[X_5(t)\,X_6(t)] = 0, \qquad \mathbb{E}\big[X_6^2(t)\big] = \sigma_0^2\,\omega^2.$$

Все это позволяет считать матрицы $\boldsymbol{\mathcal{Q}}_0$, $\boldsymbol{\mathcal{H}}_0$ и $\boldsymbol{\mathcal{G}}_0$ [191] нулевыми.

Многошаговый численно-аналитический алгоритм вычисления искомых характеристик был реализован с помощью пакета `Mathematica`, обладающей мощным командным языком высокого уровня со всем необходимым инструментарием (в нашем случае это средства для проведения длинных аналитических выкладок, работы с символьными строками, списками объектов различных типов и рациональной арифметикой, построения графиков таблично заданных функций, численного решения систем ОДУ, вывода результатов символьных преобразований на дисплей в обычной математической форме и итогов расчетов на внешний носитель, интерактивного и пакетного режимов работы и др.), и состоял из циклической последовательности следующих шагов:

– расширение вектора состояния;

– формирование списка новых первых моментов;

– символьное построение системы ОДУ для векторной функции математических ожиданий и матрицы функций ковариации;

– подготовка начальных условий;

– численное интегрирование построенной системы ОДУ;

– сохранение результатов вычислений в конце каждого шага длиной τ для дальнейших вычислений и для визуализации результатов.

Параметры дорожного микропрофиля выбирались из табл. 2.5.1 [41], а ТС – из табл. 2.5.2 [58,474,522,1016]. В процессе расчетов использовались

два значения скорости автомобиля v_0: первое – 15 м/сек, второе – 20 м/сек.

Таблица 2.5.1

N	Дорога	$\sigma_0^2 \cdot 10^{-4}(\text{м}^2)$	α	ω_0
1	Грунтовая	2.3	0.0148	0.03342
2	Асфальтовое шоссе	1.0	0.0500	0.60000
3	Булыжное шоссе	3.2	0.3000	1.00000

Таблица 2.5.2

N	m (кг)	c_1(н·с/м)	c_2(н·с/м)	k_1(н/м)	k_2(н/м)	I(кг·м^2)	ℓ_1(м)	ℓ_2(м)
1	17800	80000	80000	$4.00{\cdot}10^6$	$4.00{\cdot}10^6$	930.0	2.000	2.000
2	13200	16000	18000	$4.65{\cdot}10^5$	$5.24{\cdot}10^5$	3000.0	2.340	2.885
3	8444	9080	9080	$2.72{\cdot}10^5$	$8.53{\cdot}10^5$	12446.2	2.590	3.290

Таблица 2.5.3

Автомобиль (k)	Номер фазовой координаты (i)			
	1	2	3	4
I	2.5.33	2.5.36	2.5.39	2.5.42
II	2.5.34	2.5.37	2.5.40	2.5.43
III	2.5.35	2.5.38	2.5.41	2.5.44

Всего было использовано 18 вариантов входных данных. Общее время расчетов составило 3 часа 34 минуты на персональном компьютере AMD AthlonXP-1700+, разогнанном до 2700+, что дало скорость 8405 MIPS. Все эти вычисления проводились для $t \in [0, 15\,\tau]$. Отметим, что на последнем шаге интегрировались 5179 ОДУ для элементов матрицы ковариаций с ненулевыми правыми частями.

На рис. 2.5.33-2.5.44 показано поведение функций среднеквадратичных отклонений $\sigma_i^k(t)$ случайных функций $X_i(t)$ (i = 1, 2, 3, 4; k = I, II, III). Графики соответствующих математических ожиданий $m_i(t)$ не представлены, т.к. при выбранных начальных условиях они не изменялись и оставались нулевыми на расчетном промежутке времени. Соответствие номеров рисунков выбору характеристик автомобиля и номеру фазовой координаты приведено в табл. 2.5.3. На этих рисунках класс дороги отмечен цифрой от 1 до 3, скорости 15 м/с соответствуют непрерывные

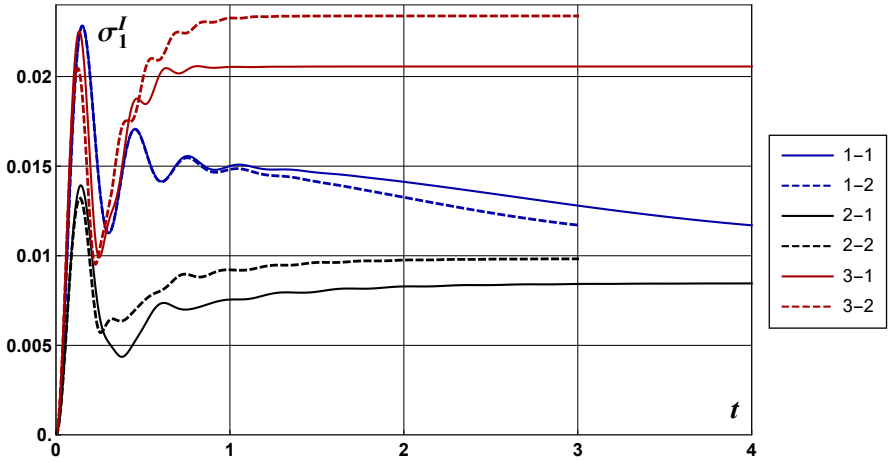


Рис. 2.5.33

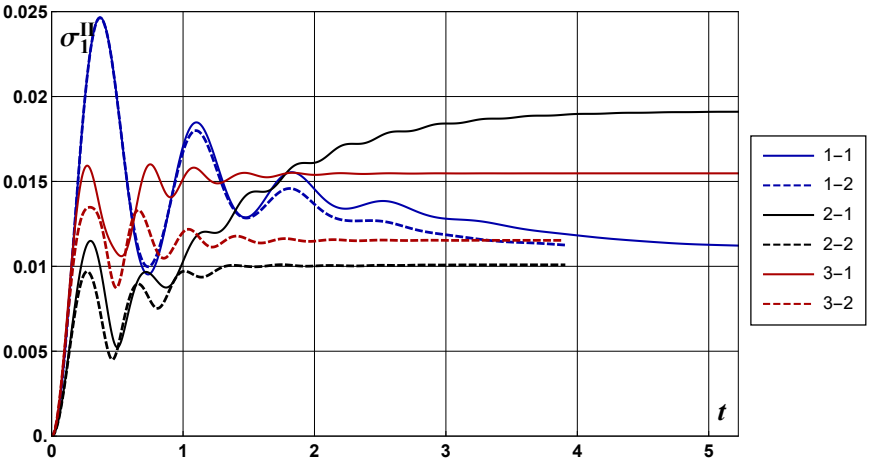


Рис. 2.5.34

кривые (1), скорости же 20 м/с – штриховые (2). ▶

Представленный иллюстративный материал еще раз наглядно подтверждает важность учета запаздывания при анализе движения ТС по дороге со случайным микропрофилем. Более того, представленная методика позволяет исследовать не только "регулярные но и "редкие" (ухабы

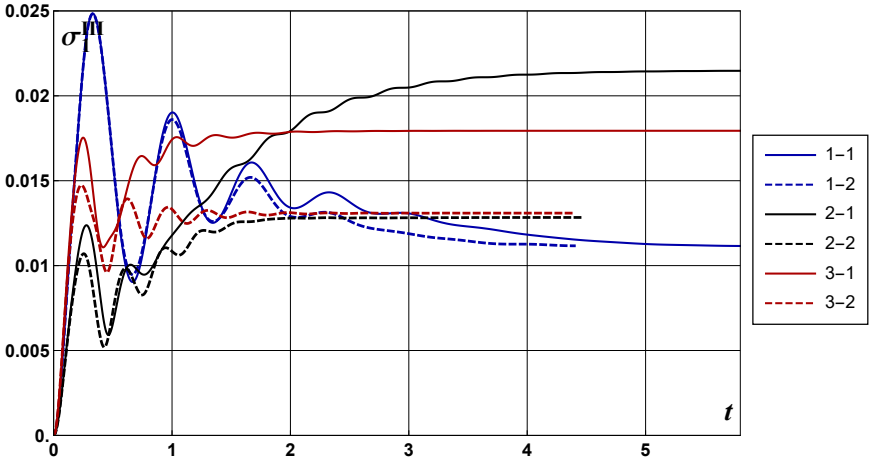


Рис. 2.5.35

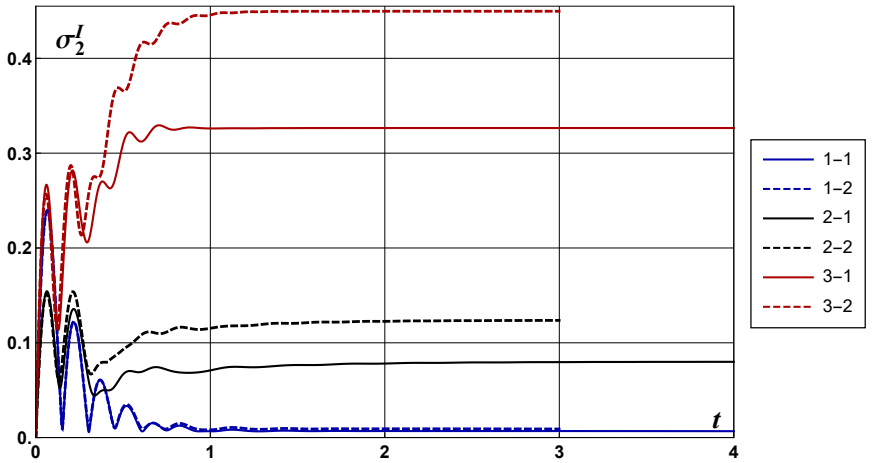


Рис. 2.5.36

и рытвины) неровности. Последние могут быть учтены добавлением к функции $U(s)$ слагаемого, представляющего собой случайный импульсный процесс пуассоновского типа [174, 288, 692].

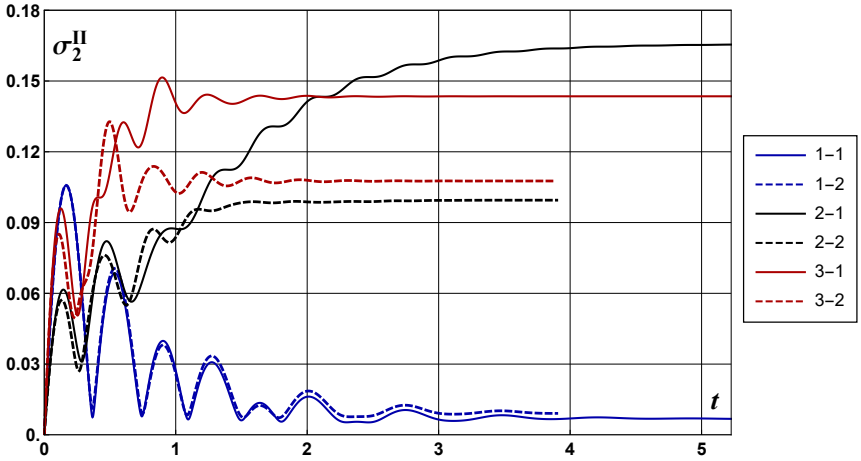


Рис. 2.5.37

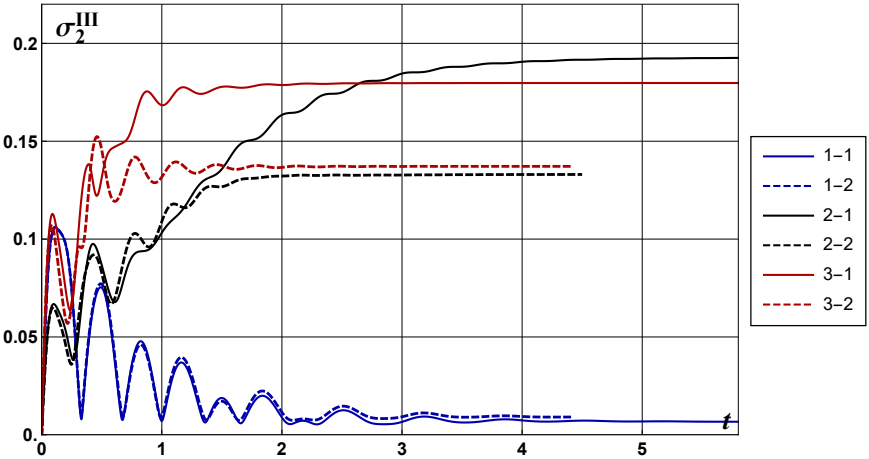


Рис. 2.5.38

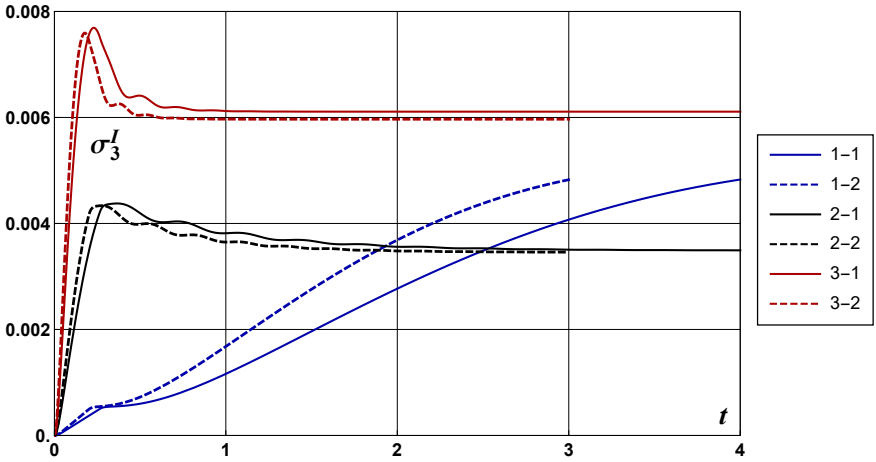


Рис. 2.5.39

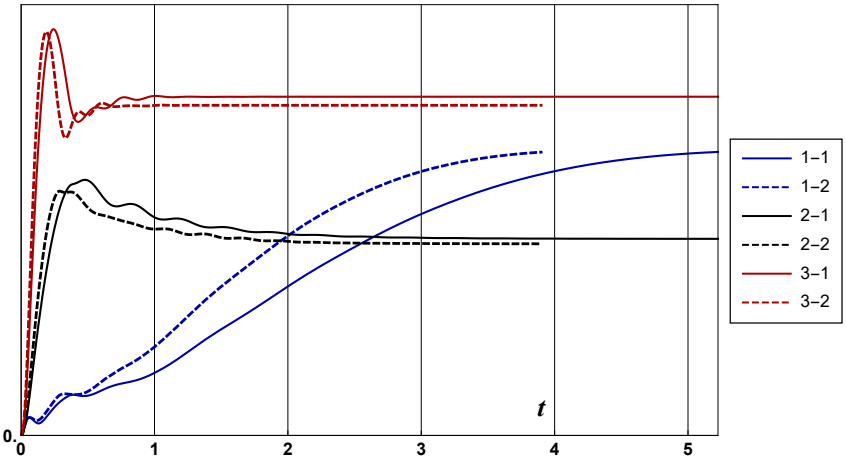


Рис. 2.5.40

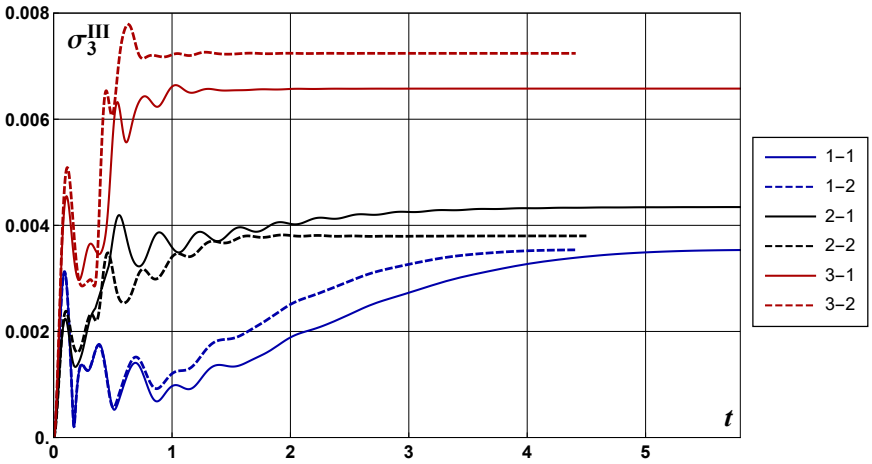


Рис. 2.5.41

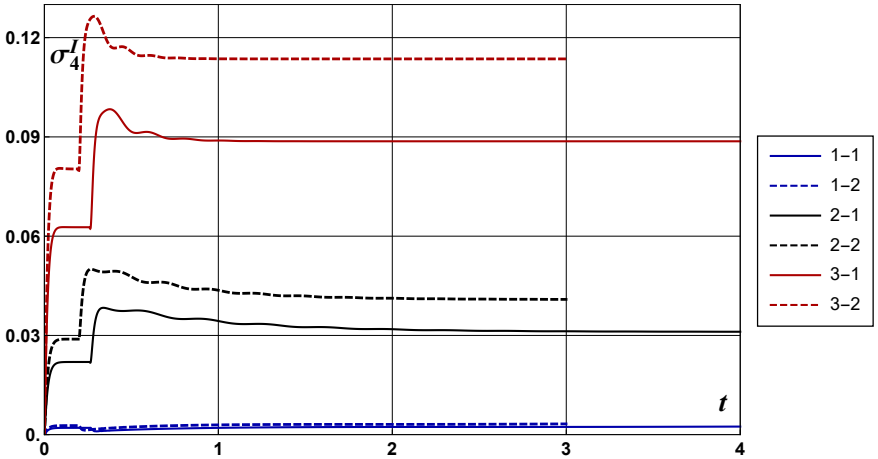


Рис. 2.5.42

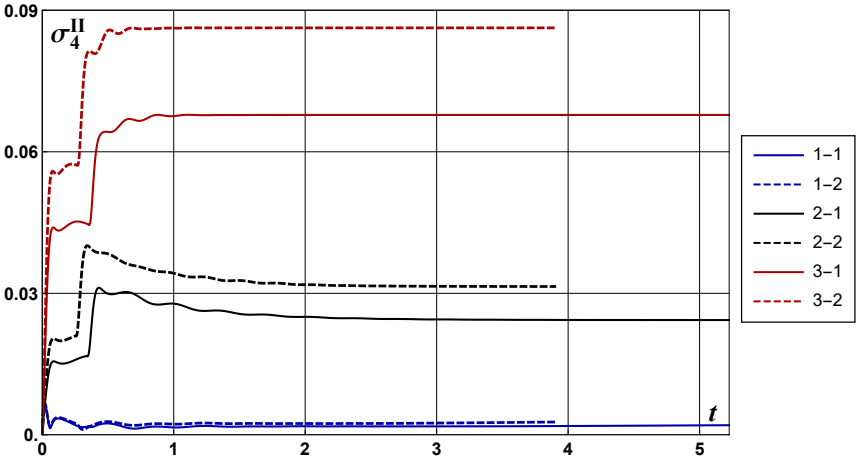


Рис. 2.5.43

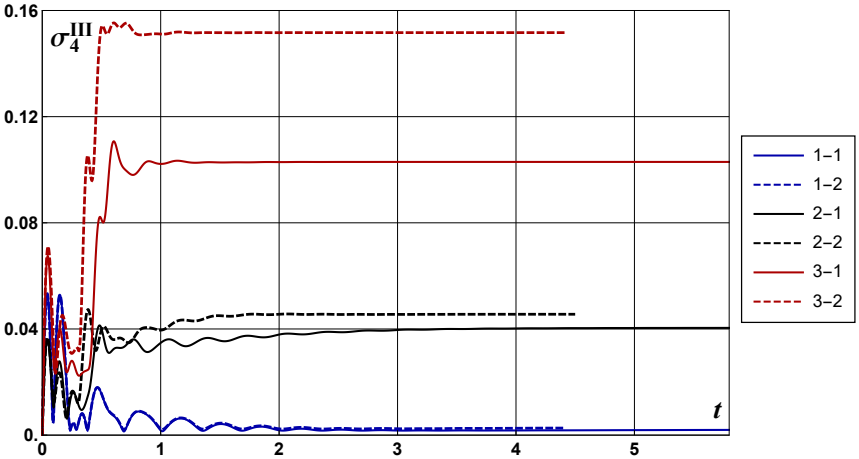


Рис. 2.5.44

2.5.2.2. Движение с переменной скоростью

В предыдущем пункте была рассмотрена схема исследования движения транспортного средства с неизменной скоростью, в качестве модели поведения которой использовалась система СОДУ с постоянным запаздыванием (2.5.111). В данном пункте [207,217] предложенная выше схема модифицируется для изучения движения с переменной скоростью на основе той же модели.

В случае постоянного положительного ускорения $a = \mathrm{const} \equiv a_0 > 0$ и анализа периода разгона ТС скорость движения $v(t)$ выразится формулой $v(t) = a_0\,t + v_0$ ($v_0 = \mathrm{const}$, $t \geqslant 0$), а система уравнений фильтра (2.5.112) принимает следующий вид:

$$\dot{U}_1(t) = \varkappa(t)\,U_2(t),$$
$$\dot{U}_2(t) = -\varkappa(t)\left[2\,\alpha\,U_2(t) + \omega^2\,U_1(t)\right] + g_0\,\sqrt{\varkappa(t)}\,V(t),$$

причем ($s_0 = \mathrm{const}$)

$$s = r(t) = \frac{a_0}{2}\,t^2 + v_0\,t + s_0,$$
$$t = \psi(s) = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2\,a_0\,(s - s_0)}}{a_0},$$
$$\psi'(s) = \frac{1}{\sqrt{v_0^2 + 2\,a_0\,(s - s_0)}} = \frac{1}{\varkappa(t)} = \varphi(t),$$
$$\varkappa(t) = \sqrt{a_0^2\,t^2 + 2\,a_0\,v_0\,t + v_0^2} = a_0\,t + v_0.$$

Обозначая $U_1(t)$ через $X_5(t)$, а $U_2(t)$ через $X_6(t)$ и ограничиваясь последним случаем переменной скорости ТС, запишем уравнения движения в матрично-векторной форме:

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{\mathcal{H}}(t)\,\boldsymbol{X}(t-\tau) + \boldsymbol{\mathcal{G}}(t)\,\boldsymbol{V}(t), \quad t > 0 \quad (t_1 = 0), \tag{2.5.113}$$

где $\tau = \ell / v(t)$,

$$\boldsymbol{\mathcal{Q}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} & k_{11} & c_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ q_{41} & q_{42} & q_{43} & q_{44} & k_{21} & c_{21} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varkappa(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\varkappa(t)\,\omega^2 & -2\,\varkappa(t)\,\alpha \end{bmatrix},$$

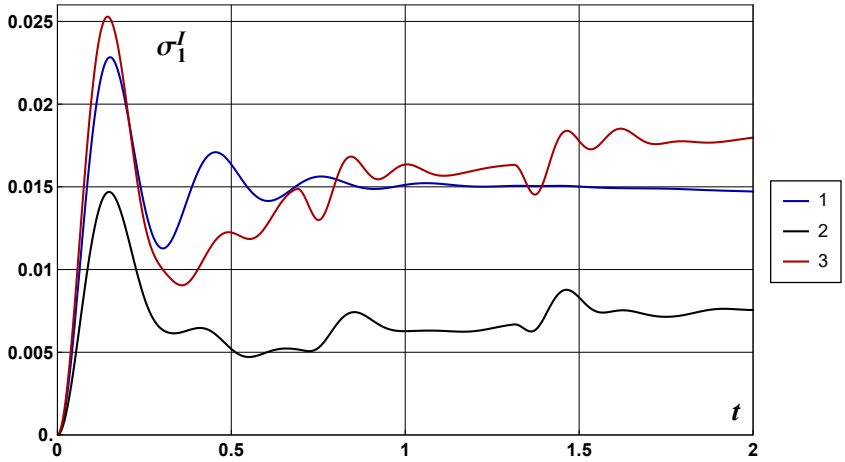


Рис. 2.5.45

$$\mathcal{H}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{12} & c_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{22} & c_{22} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{G}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ g_0\sqrt{\varkappa(t)} \end{bmatrix},$$

$$q_{21} = -(k_{11} + k_{12}), \qquad q_{22} = -(c_{11} + c_{12}),$$
$$q_{23} = -(k_{11}\,\ell_1 - k_{12}\,\ell_2), \qquad q_{24} = -(c_{11}\,\ell_1 - c_{12})\,\ell_2),$$
$$q_{41} = -(k_{21} + k_{22}), \qquad q_{42} = -(c_{21} + c_{22}),$$
$$q_{43} = -(k_{21}\,\ell_1 - k_{22}\,\ell_2), \qquad q_{44} = -(c_{21}\,\ell_1 - c_{22})\,\ell_2).$$

Для исследования этой системы был применен многошаговый алгоритм, разработанный для линейных систем в форме и представленный в пункте 2.2.2.6. Для его применения необходимо приближенно заменить переменное запаздывание $\tau(t)$ кусочно-постоянным $\bar{\tau}(t)$ со "ступеньками", длина которых кратна величине τ^* (выбор τ^*, как и ранее, определяется необходимой точностью аппроксимации $\tau(t)$).

Для финализации подготовки расчетов необходимо задать начальные условия для расчетов. Эти условия будут выглядеть так: предположим, что при $t < 0$ состояние ТС характеризуется соотношениями $X_1(t) = X_2(t) = X_3(t) = X_4(t) = 0$, выходные переменные фильтра $X_5(t)$

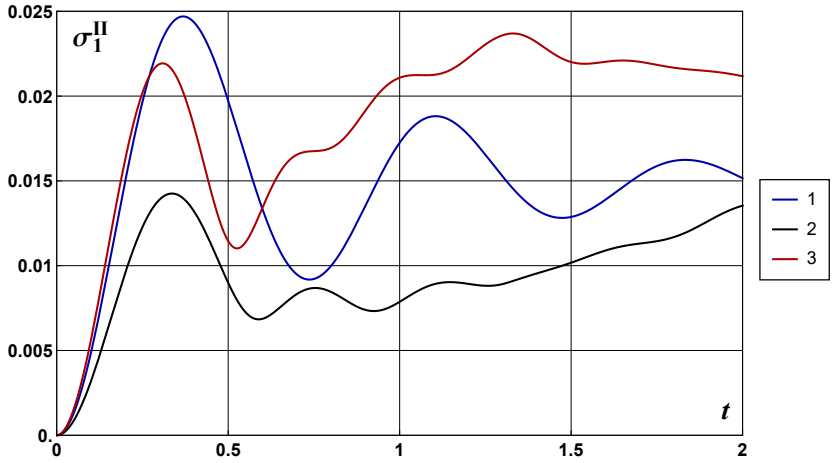


Рис. 2.5.46

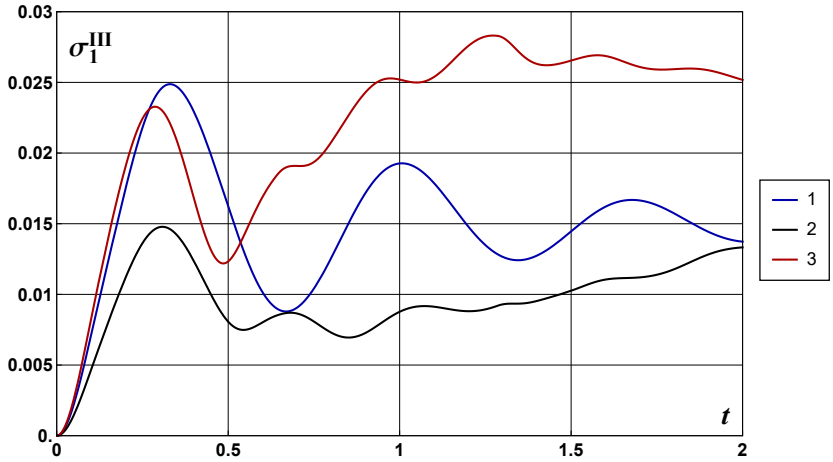


Рис. 2.5.47

и $X_6(t)$ находятся в стационарном состоянии, имея совместное нормальное распределение с параметрами

$$\mathbb{E}[X_5(t)] = \mathbb{E}[X_6(t)] = 0,$$

$$\mathbb{E}\big[X_5^2(t)\big] = \sigma_0^2, \qquad \mathbb{E}[X_5(t)\,X_6(t)] = 0, \qquad \mathbb{E}\big[X_6^2(t)\big] = \omega^2\,\sigma_0^2.$$

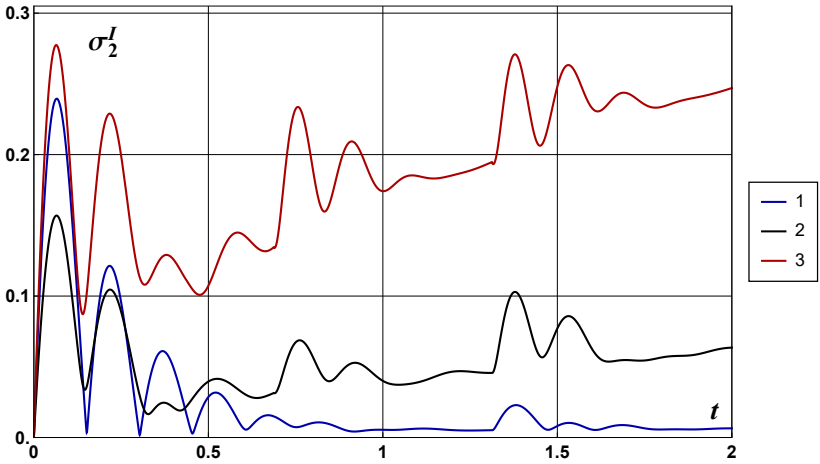


Рис. 2.5.48

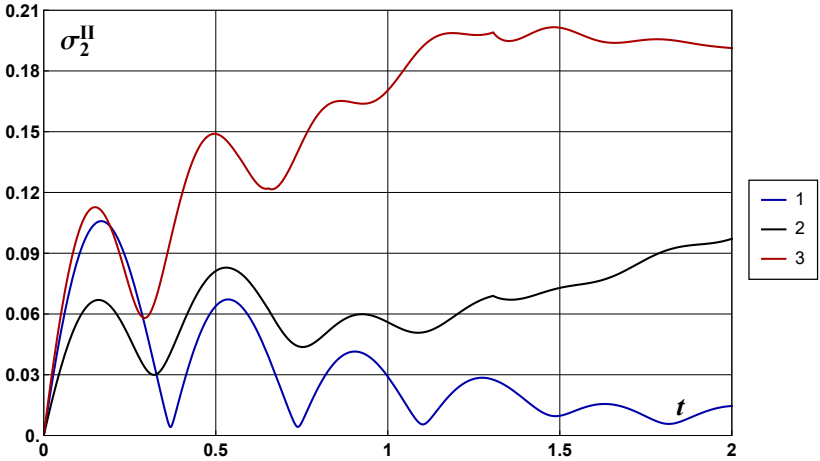


Рис. 2.5.49

Для расчетов были выбраны те же значения параметров автомобилей и дорог, что и в предыдущем пункте. Движение же рассматривалось равноускоренным, причем в начальный момент времени скорость составляла 8 м/с. Ускорение было выбрано так, чтобы к концу третьей секунды скорость была равной 16 м/с. Элементарное запаздывание вычислялось

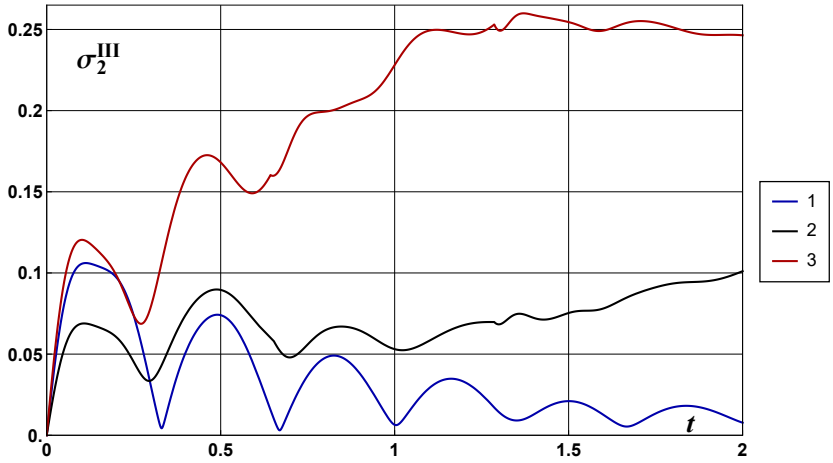


Рис. 2.5.50

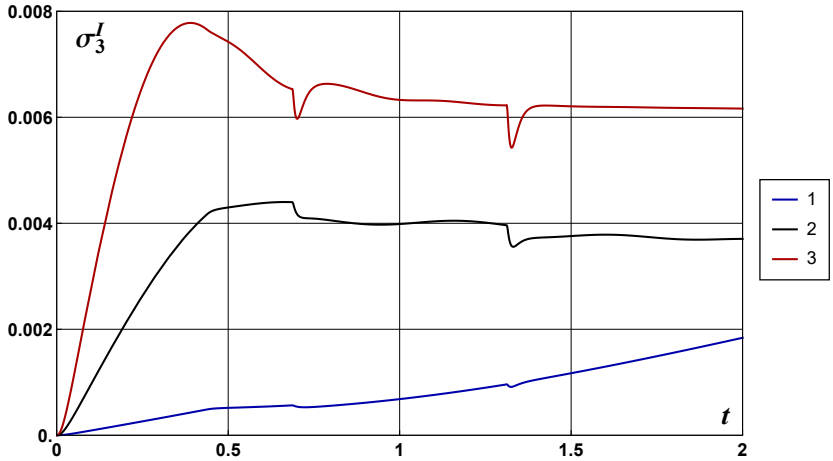


Рис. 2.5.51

делением расстояния между колесами автомобиля на конечную скорость и еще на константу, в качестве которой в расчетах использовалось значение 4. При этом начальное множество совпадало с отрезком $[-8\,\tau_*, 0]$, что потребовало задавать нулевыми матрицы $\boldsymbol{\mathcal{Q}}_0(t)$, $\boldsymbol{\mathcal{H}}_0(t)$ и $\boldsymbol{\mathcal{G}}_0(t)$ на 8 шагах, а на основном участке до достижения времени движения в 2 с для

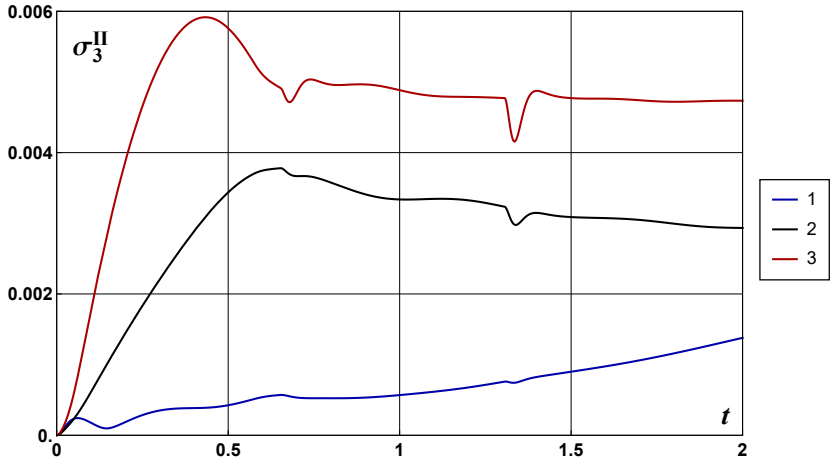


Рис. 2.5.52

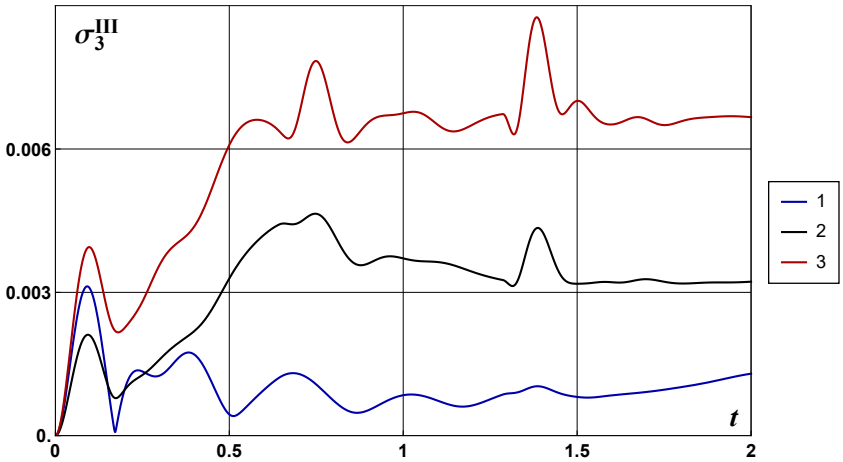


Рис. 2.5.53

первого автомобиля требовалось осуществить расчеты на 32 этапах, для второго – на 25, а для третьего – на 22. Соответствующие значения τ_* равнялись 0.0625 с, 0.0816406 с и 0.091875 с.

На рис. 2.5.45-2.5.56, как и в предыдущем пункте, показано поведение функций среднеквадратичных отклонений $\sigma_i^k(t)$ случайных функций

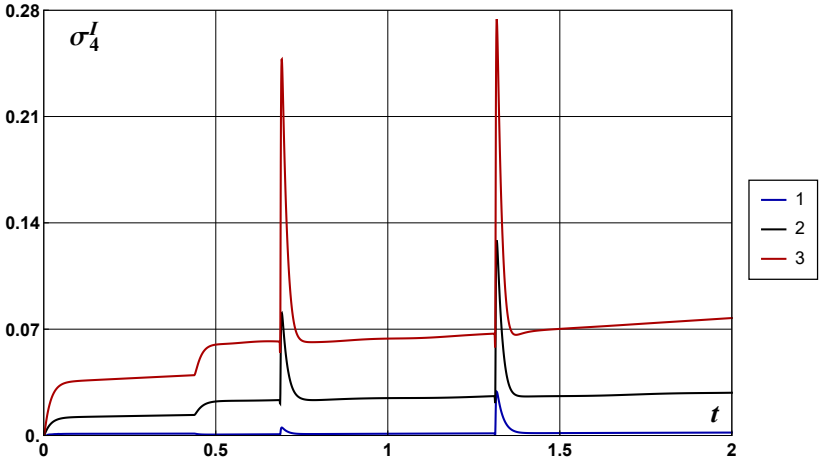


Рис. 2.5.54

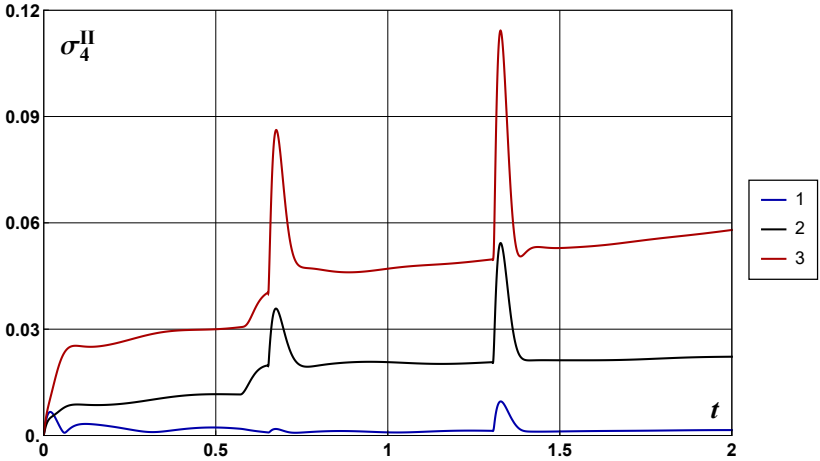


Рис. 2.5.55

$X_i(t)$ ($i = 1, 2, 3, 4$; $k =$ I, II, III). Графики соответствующих математических ожиданий $m_i(t)$ также не представлены, т.к. при выбранных начальных условиях они не изменялись. Соответствие номеров рисунков выбору характеристик автомобиля и номеру фазовой координаты приведено в табл. 2.5.3. На этих рисунках класс дороги отмечен цифрой от 1 до 3.

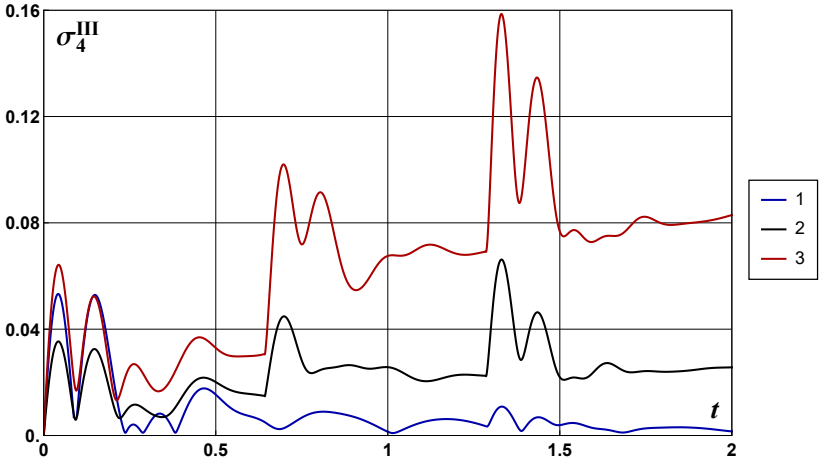


Рис. 2.5.56

Таблица 2.5.4

Автомобиль (k)	Номер фазовой координаты (i)			
	1	2	3	4
I	2.5.45	2.5.48	2.5.51	2.5.54
II	2.5.46	2.5.49	2.5.52	2.5.55
III	2.5.47	2.5.50	2.5.53	2.5.56

Несложно увидеть, что поведение полученных для переменной скорости средних квадратичных отклонений существенно отличается от поведения этих же характеристик в случае постоянной скорости. ▶

2.5.2.3. Расчеты с применением метода статистического моделирования

Как известно, универсальной приближенной схемой, позволяющей исследовать СОДУ с запаздыванием всех классов, является метод Монте-Карло (статистического моделирования) [116, 145, 716, 742]. Но различные алгоритмы, предназначенные для численного интегрирования даже простейших стохастических дифференциально-разностных уравнений, как правило, весьма сложны [380, 764] и предназначены только для решения достаточно узких классов задач.

В данном пункте для анализа нестационарных режимов в линейной стохастической системе, описывающей динамику движения автомобиля по дороге со случайным микропрофилем с учетом наличия расстояния между осями передних и задних колес применяется методика [211], в которой сочетается метод Монте-Карло на основе использования стандартных интеграторов для СОДУ и схема расширения пространства состояний для случая кратных запаздываний.

С помощью этой процедуры исходная задача Коши для стохастических дифференциально-разностных уравнений сводится к последовательности задач Коши для систем СОДУ без запаздывания для цепочки векторов состояния увеличивающейся размерности. При этом исследование поведения системы будет состоять в последовательном численном интегрировании уравнений на отрезке $[0, \tau]$, включая смену системы уравнений и доопределение недостающих для очередного шага начальных условий на основе терминальных для предыдущего.

Если проанализировать структуру алгоритма реализации, то становится ясным, что его основными узлами являются: 1) одношаговый численный интегратор для СОДУ; 2) генератор псевдослучайных чисел для получения реализаций начального случайного вектора; 3) генератор ПСЧ для расчета реализации векторного белого шума (а точнее приращений векторного винеровского процесса). В качестве упомянутого интегратора была выбрана простейшая схема Эйлера–Маруямы [742].

Таблица 2.5.5

Автомобиль (k)	Номер фазовой координаты (i)			
	1	2	3	4
I	2.5.57	2.5.60	2.5.63	2.5.66
II	2.5.58	2.5.61	2.5.64	2.5.67
III	2.5.59	2.5.62	2.5.65	2.5.68

В качестве модели транспортного средства используется система уравнений (2.5.111), (2.5.112) с параметрами, приведенными в п. 2.5.2.1.

Параметры дорожного микропрофиля выбирались из табл. 2.5.1, а ТС – из табл. 2.5.2. В процессе расчетов использовались те же два значения скорости автомобиля v_0, что и в п. 2.5.2.1: первое – 15 м/сек, второе – 20 м/сек.

Начальные математические ожидания для первых четырех координат вектора $\boldsymbol{X}(t)$ были выбраны нулевыми, а начальные дисперсии – 10^{-12}. Эти же характеристики для переменных состояния дороги были

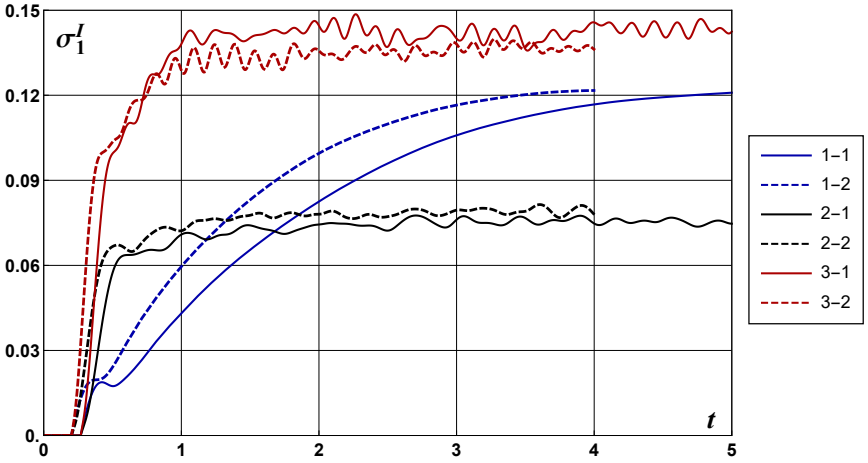


Рис. 2.5.57

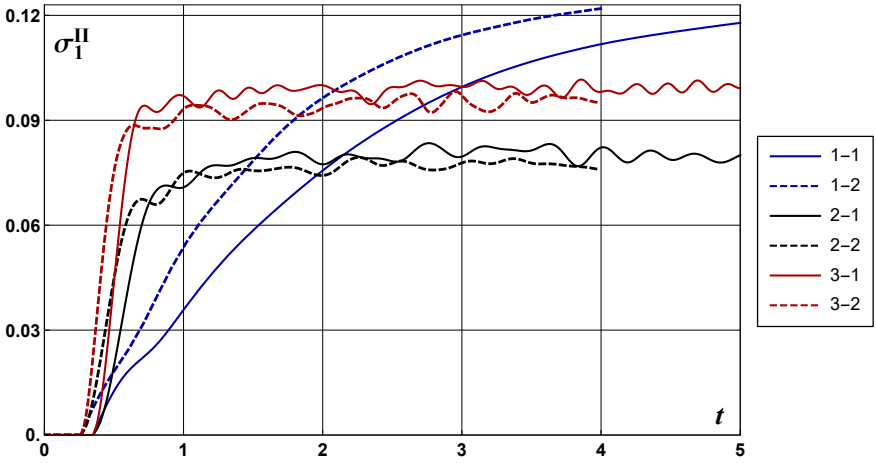


Рис. 2.5.58

равны стационарным для модели, как и выше. Все начальные ковариации считались нулевыми.

Всего было использовано 18 вариантов входных данных и по 500 моделирований для каждого варианта. Общее время расчетов составило 36 ч 36 м на ноутбуке Samsung R55 с процессором Genuine Intel T2500 2,0 ГГц.

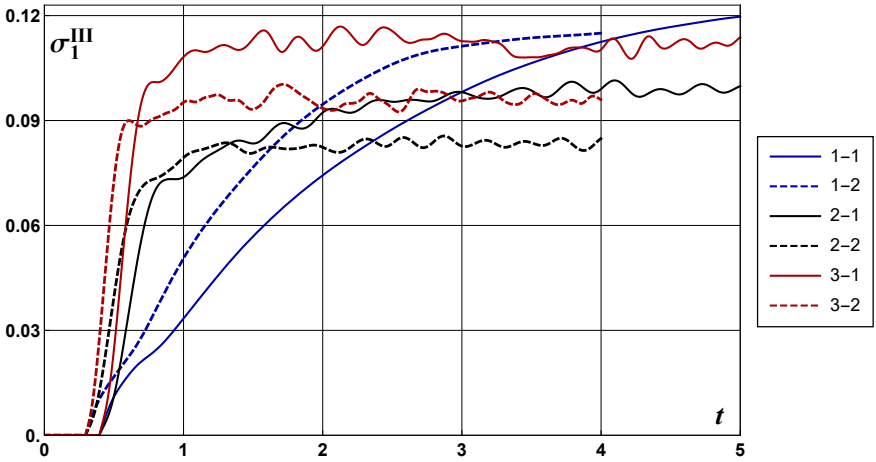


Рис. 2.5.59

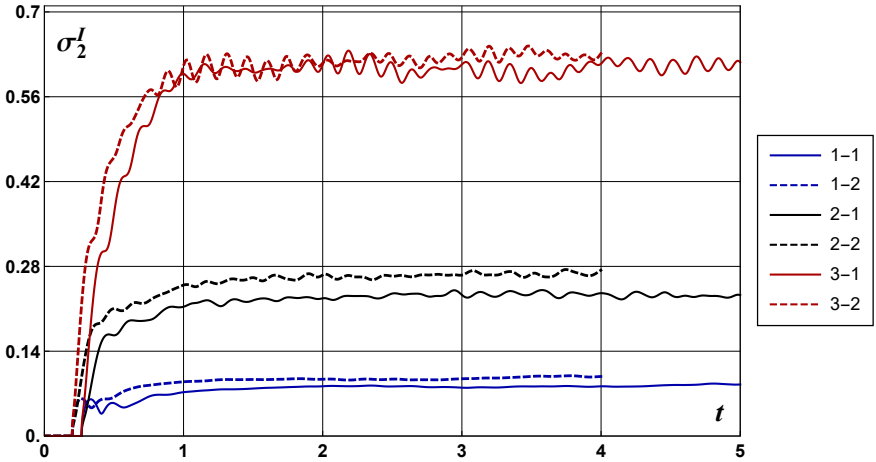


Рис. 2.5.60

Все эти вычисления проводились для $t \in [0, 20\,\tau]$.

На рис. 2.5.57-2.5.68 показано поведение функций среднеквадратичных отклонений $\sigma_i^k(t)$ случайных функций $X_i(t)$ ($i = 1, 2, 3, 4$; $k =$ I, II, III). Как и в п. 2.5.2.1 графики соответствующих математических ожиданий $m_i(t)$ не представлены, но в отличие от п. 2.5.2.1 при выбранных

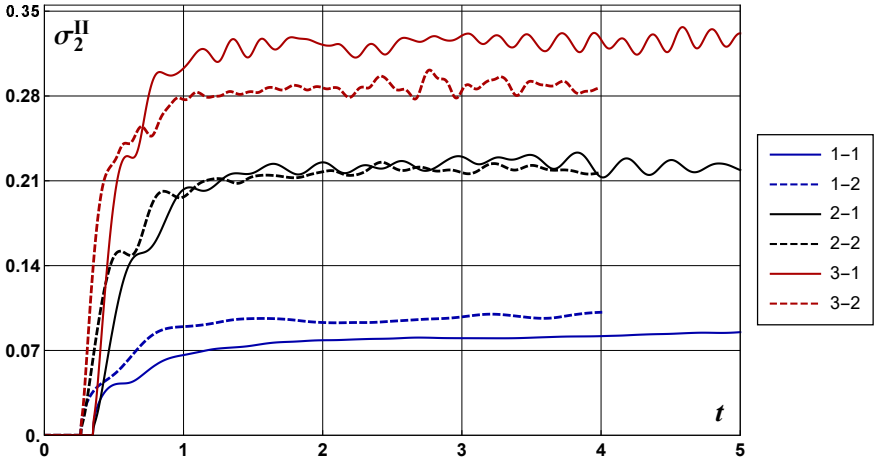


Рис. 2.5.61

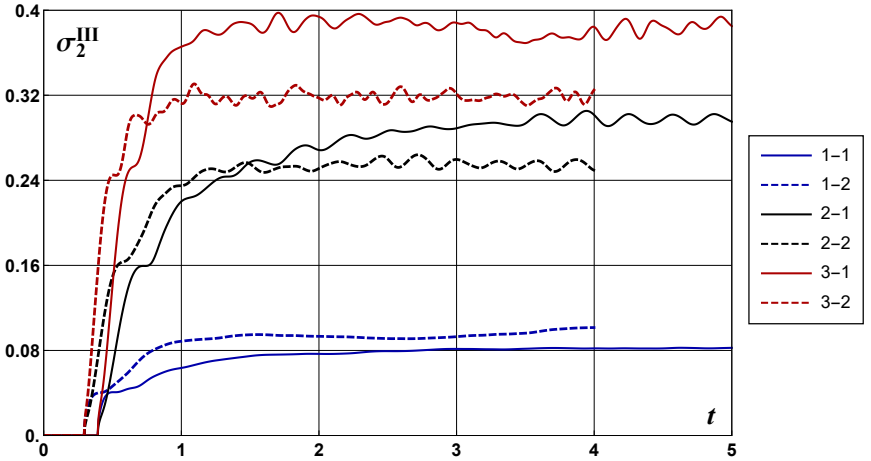


Рис. 2.5.62

начальных условиях они не были нулевыми на расчетном промежутке времени, но их отклонения от нулевых уравнений были следствием применения программного датчика для генерирования ПСЧ. Заметим что любой датчик в рамках метода Монте-Карло при конечном числе моделирований дает смещение выборочных характеристик по отношению

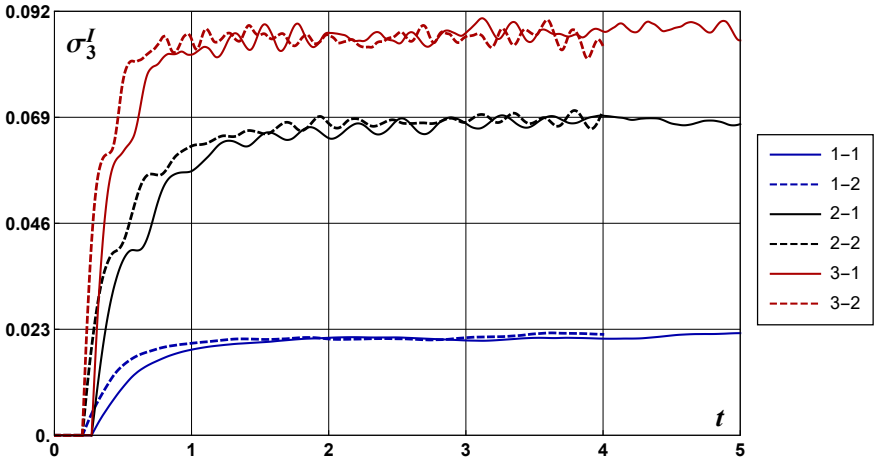


Рис. 2.5.63

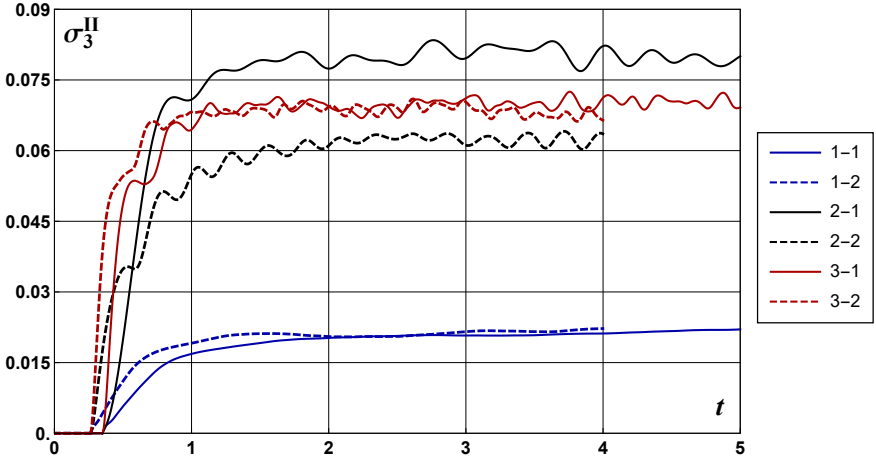


Рис. 2.5.64

к характеристикам теоретических распределений. Соответствие номеров рисунков выбору характеристик автомобиля и номеру фазовой координаты приведено в табл. 2.5.5. На этих рисунках класс дороги отмечен цифрой от 1 до 3, скорости 15 м/с соответствуют непрерывные кривые (1), скорости же 20 м/с – штриховые (2). ►

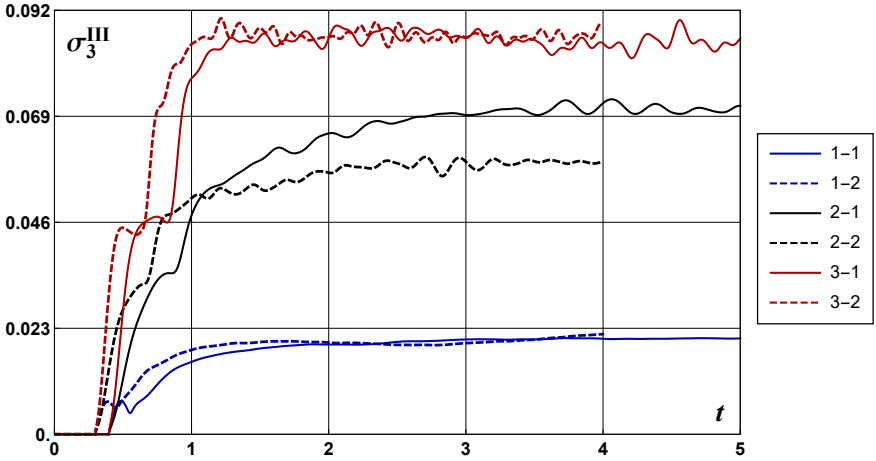


Рис. 2.5.65

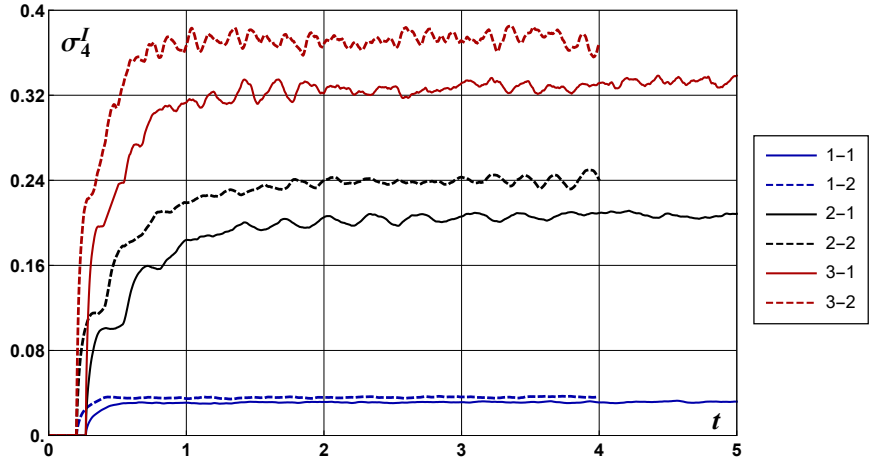


Рис. 2.5.66

В процессе анализа приведенного графического материала несложно увидеть реальное влияние и необходимость учета запаздывания при изучении движения ТС по дороге со случайным микропрофилем. Более того, представленная методика позволяет исследовать не только "регулярные", но и "редкие" (ухабы и рытвины) неровности. Последние мо-

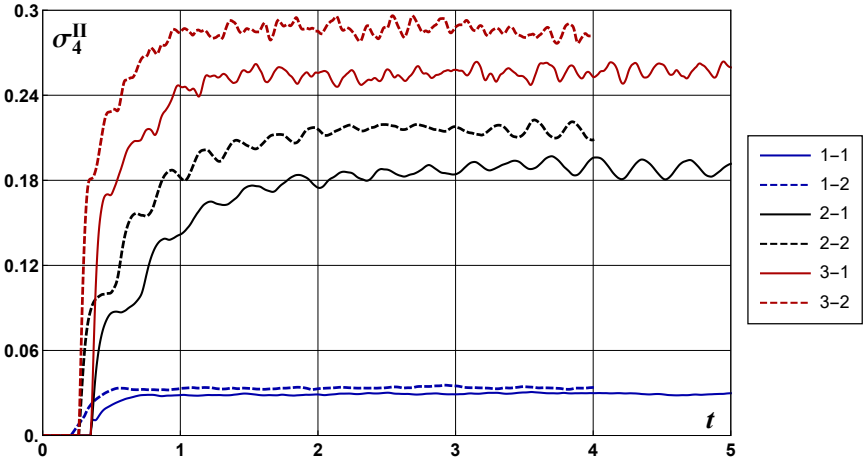


Рис. 2.5.67

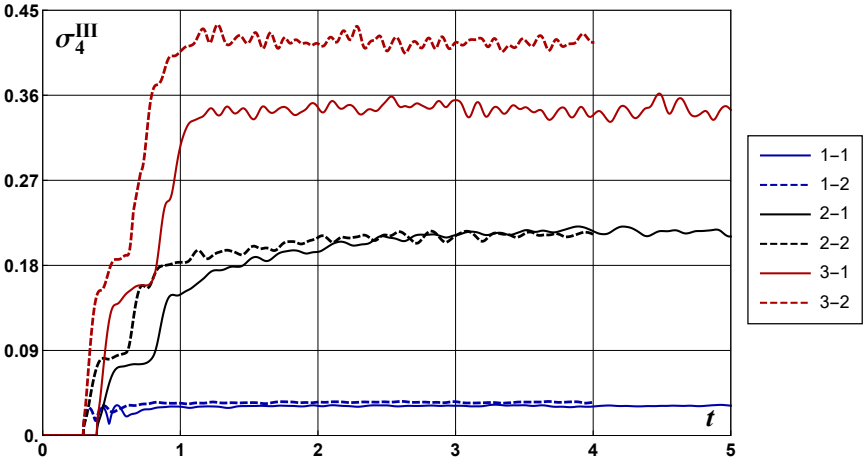


Рис. 2.5.68

гут быть учтены путем добавления в правые части уравнений движения слагаемых, представляющих собой случайные скачкообразные процессы пуассоновского типа. Техника анализа систем с дискретно-непрерывными шумами на входе представлена в подразделе 2.2.3.

2.5.3. Чувствительность линейных стохастических дифференциально-разностных систем к изменению детерминированных параметров

Известно, что аппарат классической теории чувствительности (ТЧ) [256, 263, 289, 996] является важным средством исследования различных систем и теоретической основой построения оптимальных систем. Фундамент методов ТЧ составляют классические методы теории малых возмущений, однако соответствующим образом дополненные и интерпретированные. Основными задачами, рассматриваемыми в ТЧ, являются анализ влияния малых изменений конструктивных параметров и внешних условий работы на динамику систем, а также синтез систем, малочувствительных к изменению этих факторов [303]. Основные идеи и понятия классической ТЧ, необходимые в настоящем подразделе, приведены в 1.5.2.

В последнее время появились новые направления в развитии теории чувствительности и, в том числе, современной ветви – *стохастической теории чувствительности*. Например, в работе [263] эта теория распространяется на существенно нелинейные системы со случайными параметрами и шумами. Такие модели описывают разброс характеристик реальных объектов, вызванный случайными отклонениями технологических режимов производства, процессами старения и износа во время эксплуатации; влияние конструкционных параметров на динамику соответствующих объектов и др.

Среди стохастических *задач* можно отметить следующие: исследование точности линейных стохастических систем; оценка влияния вектора неслучайных параметров на изменение фазовых координат, удовлетворяющих системе линейных (по фазовым координатам, но нелинейным по параметрам) уравнений, причем мерой влияния параметров является интеграл по времени от квадратичной формы первых и вторых моментов; анализ влияния вектора неслучайных начальных условий на динамику нелинейной неразрешенной относительно старших производных системы обыкновенных дифференциальных уравнений со случайными параметрами и др.

В данном подразделе, основанном на работах [206, 232], представляется распространение цикла наших исследований задач стохастической чувствительности (см. [190, 196]) на системы с запаздыванием, причем оценивается поведение нового класса систем – линейных СОДРУ с аддитивными шумами и с одиночными и кратными запаздываниями – по отношению к изменению значений детерминированных параметров, для

чего строятся уравнения для *функций чувствительности первого и второго порядка* для моментных характеристик векторов состояния.

Рассмотрим систему линейных стохастических обыкновенных дифференциальных уравнений Ито с одним постоянным запаздыванием $\tau > 0$ (СОДРУ) вида

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t;\boldsymbol{\pi}) = \boldsymbol{\mathcal{A}}(t;\boldsymbol{\pi})\,\boldsymbol{X}(t;\boldsymbol{\pi}) + \boldsymbol{\mathcal{B}}(t;\boldsymbol{\pi})\,\boldsymbol{X}(t-\tau;\boldsymbol{\pi}) + \\ + \boldsymbol{c}(t;\boldsymbol{\pi}) + \boldsymbol{\mathcal{G}}(t;\boldsymbol{\pi})\,\boldsymbol{V}(t), \qquad t_0+\tau < t \leqslant T, \quad (2.5.114)$$

где $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^n$ – случайный вектор состояния; $\boldsymbol{V} \in \mathbb{R}^m$ – вектор независимых белых шумов с единичными интенсивностями; $\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^p$ – вектор детерминированных параметров ($\boldsymbol{\pi}_0$ – номинальные значения этих параметров).

Будем считать, что на интервале $(t_0, t_0+\tau]$ вектор состояния $\boldsymbol{X}$ удовлетворяет системе СОДУ без запаздывания:

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t;\boldsymbol{\pi}) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_0(t;\boldsymbol{\pi})\,\boldsymbol{X}(t;\boldsymbol{\pi}) + \boldsymbol{c}_0(t;\boldsymbol{\pi}) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(t;\boldsymbol{\pi})\,\boldsymbol{V}(t), \quad (2.5.115)$$

$$\boldsymbol{X}(t_0;\boldsymbol{\pi}) = \boldsymbol{X}^0(\boldsymbol{\pi}), \quad (2.5.116)$$

причем в уравнениях (2.5.114) и (2.5.115) $\boldsymbol{\mathcal{A}}(t;\boldsymbol{\pi})$, $\boldsymbol{\mathcal{B}}(t;\boldsymbol{\pi})$, $\boldsymbol{\mathcal{G}}(t;\boldsymbol{\pi})$, $\boldsymbol{\mathcal{A}}_0(t;\boldsymbol{\pi})$, $\boldsymbol{\mathcal{G}}_0(t;\boldsymbol{\pi})$ и $\boldsymbol{c}(t;\boldsymbol{\pi})$, $\boldsymbol{c}_0(t;\boldsymbol{\pi})$ – известные непрерывные по t и непрерывно-дифференцируемые по $\boldsymbol{\pi}$ матричные и векторные функции. Кроме того, предположим, что известны все необходимые числовые характеристики случайного вектора $\boldsymbol{X}^0(\boldsymbol{\pi})$. В частности, пусть в начальный момент времени t_0 для вектора $\boldsymbol{X}^0$ заданы вектор математических ожиданий $\boldsymbol{m}^0(\boldsymbol{\pi}) = \mathbb{E}\big[\boldsymbol{X}^0(\boldsymbol{\pi})\big]$ и матрица ковариаций

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}^0(\boldsymbol{\pi}) = \mathbb{E}\big[\big\{\boldsymbol{X}^0(\boldsymbol{\pi}) - \boldsymbol{m}^0(\boldsymbol{\pi})\big\}\big\{\boldsymbol{X}^0(\boldsymbol{\pi}) - \boldsymbol{m}^0(\boldsymbol{\pi})\big\}^{\mathsf{T}}\big].$$

Задача исследования состоит в построении систем ОДУ для вычисления функций чувствительности вектора $\boldsymbol{m}(t;\boldsymbol{\pi}) = \mathbb{E}[\boldsymbol{X}(t;\boldsymbol{\pi})]$ и матрицы ковариаций $\boldsymbol{\mathcal{K}}(t;\boldsymbol{\pi}) = \mathbb{E}\big[\big\{\boldsymbol{X}(t;\boldsymbol{\pi}) - \boldsymbol{m}(t;\boldsymbol{\pi})\big\}\big\{\boldsymbol{X}(t;\boldsymbol{\pi}) - \boldsymbol{m}(t;\boldsymbol{\pi})\big\}^{\mathsf{T}}\big]$ – первых моментов фазового вектора $\boldsymbol{X}$ – к изменению вектора параметров $\boldsymbol{\pi}$ в окрестности точки $\boldsymbol{\pi}_0$ при любом $t \geqslant t_0$ (далее аргумент $\boldsymbol{\pi}$ у функций опускается).

Для решения поставленной задачи воспользуемся сочетанием стохастической теории чувствительности и схемы анализа СОДРУ на основе метода шагов и расширения пространства состояний (МШРПС).

Как и выше, для того чтобы реализовать указанную методику, введем новую временную переменную s, изменяющуюся на промежутке $[0,\tau]$, и

следующие обозначения ($t_q = t_0 + q \cdot \tau$, $q = 0, 1, 2, ..., N$, $t_N \geqslant T$):

$$\boldsymbol{X}_q(s) = \boldsymbol{X}(s + t_q), \qquad \boldsymbol{V}_q(s) = \boldsymbol{V}(s + t_q), \qquad \boldsymbol{Y}(s) = \boldsymbol{X}^0,$$
$$\boldsymbol{Z}_0 = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}_0\big), \quad \boldsymbol{Z}_1 = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{Z}_0, \boldsymbol{X}_1\big), \quad \boldsymbol{Z}_2 = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{Z}_1, \boldsymbol{X}_2\big), \quad ...,$$
$$\boldsymbol{V}_0^+ = \boldsymbol{V}_0, \quad \boldsymbol{V}_1^+ = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{V}_0^+, \boldsymbol{V}_1\big), \quad \boldsymbol{V}_2^+ = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{V}_1^+, \boldsymbol{V}_2\big), \quad ...,$$
$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_0(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_0(t), \quad \boldsymbol{c}_0(s) = \boldsymbol{c}_0(t), \quad \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s) = \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(t), \quad t \in [t_0, t_1],$$
$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_q(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}(s + t_q), \quad \boldsymbol{\mathcal{B}}_q(s) = \boldsymbol{\mathcal{B}}(s + t_q), \quad \boldsymbol{c}_q(s) = \boldsymbol{c}(s + t_q),$$
$$\boldsymbol{\mathcal{G}}_q(s) = \boldsymbol{\mathcal{G}}(s + t_q),$$

$\boldsymbol{\mathcal{O}}_{p\times r}$ – нулевая $p\times r$-матрица, $\boldsymbol{O}_p$ – нулевой p-вектор. Учитывая равенства

$$\boldsymbol{X}_q(0) = \boldsymbol{X}_{q-1}(\tau) \text{ п.н.}, \qquad \boldsymbol{V}_q(0) = \boldsymbol{V}_{q-1}(\tau) \text{ п.н.},$$

построим цепочку уравнений для первых моментов векторов $\boldsymbol{Z}_0$, $\boldsymbol{Z}_1$, $\boldsymbol{Z}_2$, ..., $\boldsymbol{Z}_N$, принадлежащих семейству вложенных пространств состояния $\mathbb{R}^{2n} \subset \mathbb{R}^{3n} \subset \mathbb{R}^{4n} \subset ... \subset \mathbb{R}^{n(N+2)}$. Цель построения такой цепочки – вычислить значения смешанных первых моментов для различных компонентов векторов $\boldsymbol{Z}_q$ в процессе решения ОДУ без запаздывания.

Используя введенные выше обозначения и последовательно рассматривая полуинтервалы $(t_0, t_1]$, $(t_1, t_2]$, ..., $(t_{N-1}, t_N]$, можно записать следующие линейные системы СОДУ без запаздывания:

0°. $t \in (t_0, t_1]$:

$$\dot{\boldsymbol{Z}}_0(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_0^+(s)\, \boldsymbol{Z}_0(s) + \boldsymbol{c}_0^+(s) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0^+(s)\, \boldsymbol{V}_0^+(s),$$
$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_0^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{A}}_0(s) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c}_0^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O}_n \\ \boldsymbol{c}_0(s) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{G}}_0^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s) \end{bmatrix}.$$

1°. $t \in (t_1, t_2]$:

$$\dot{\boldsymbol{Z}}_1(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_1^+(s)\, \boldsymbol{Z}_1(s) + \boldsymbol{c}_1^+(s) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_1^+(s)\, \boldsymbol{V}_1^+(s),$$
$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_1^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{A}}_0(s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{B}}_1(s) & \boldsymbol{\mathcal{A}}_1(s) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c}_1^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O}_n \\ \boldsymbol{c}_0(s) \\ \boldsymbol{c}_1(s) \end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{\mathcal{G}}_1^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{G}}_1(s) \end{bmatrix}.$$

... ...

$\mathbf{N}^{\circ}$. $t \in (t_{N-1}, t_N]$:

$$\dot{\boldsymbol{Z}}_N(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_N^+(s)\,\boldsymbol{Z}_N(s) + \boldsymbol{c}_N^+(s) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_N^+(s)\,\boldsymbol{V}_N^+(s),$$

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_N^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{A}}_{N-1}^+(s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n(N+1)\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{B}}_N^+(s) & \boldsymbol{\mathcal{A}}_N(s) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c}_N^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_{N-1}^+(s) \\ \boldsymbol{c}_N(s) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}_N^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{G}}_{N-1}^+(s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n(N+1)\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times mN} & \boldsymbol{\mathcal{G}}_N(s) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{B}}_N^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times nN} & \boldsymbol{\mathcal{B}}_N(s) \end{bmatrix}.$$

Теперь построенную выше линейных цепочку СОДУ без запаздывания на основе применяемой схемы можно использовать для получения новой последовательности уравнений – цепочки ОДУ для первых моментов векторов $\boldsymbol{Z}_0(s)$, $\boldsymbol{Z}_1(s)$, ..., $\boldsymbol{Z}_N(s)$, причем

$$\boldsymbol{m}_k(s) = \mathbb{E}[\boldsymbol{Z}_k(s)] = \operatorname{col}\left(\boldsymbol{m}_Y(s), \boldsymbol{m}_{X_0}(s), \boldsymbol{m}_{X_1}(s), ..., \boldsymbol{m}_{X_k}(s)\right);$$

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_k(s) = \mathbb{E}\left[\left\{\boldsymbol{Z}_k(s) - \boldsymbol{m}_k(s)\right\}\left\{\boldsymbol{Z}_k(s) - \boldsymbol{m}_k(s)\right\}^{\intercal}\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YY} & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_0} & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_1} & ... & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{YX_k} \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0Y} & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0X_0} & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0X_1} & ... & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_0X_k} \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_1Y} & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_1X_0} & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_1X_1} & ... & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_1X_k} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_kY} & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_kX_0} & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_kX_1} & ... & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{X_kX_k} \end{bmatrix},$$

где $k = 0, 1, 2, ..., N$.

Из предыдущих рассуждений следует, что числовые характеристики векторного случайного процесса $\boldsymbol{Z}_0(s)$ удовлетворяют следующим системам ОДУ:

$$\dot{\boldsymbol{m}}_0(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_0^+(s)\,\boldsymbol{m}_0(s) + \boldsymbol{c}_0^+(s),$$

$$\dot{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_0(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_0^+(s)\,\boldsymbol{\mathcal{K}}_0(s) + \left[\boldsymbol{\mathcal{A}}_0^+(s)\,\boldsymbol{\mathcal{K}}_0(s)\right]^{\intercal} + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0^+(s)\,\boldsymbol{\mathcal{G}}_0^{+\intercal}(s),$$

$$\boldsymbol{m}_0(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}^0 \\ \boldsymbol{m}^0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{K}}_0^+(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{K}}^0 & \boldsymbol{\mathcal{K}}^0 \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}^0 & \boldsymbol{\mathcal{K}}^0 \end{bmatrix}.$$

В свою очередь вектор функций средних и матрица функций ковариации вектора $\boldsymbol{Z}_1(s)$ являются решениями систем ОДУ

$$\dot{\boldsymbol{m}}_1(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_1^+(s)\,\boldsymbol{m}_1(s) + \boldsymbol{c}_1^+(s),$$

$$\dot{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_1(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_1^+(s)\,\boldsymbol{\mathcal{K}}_1(s) + \left[\boldsymbol{\mathcal{A}}_1^+(s)\,\boldsymbol{\mathcal{K}}_1(s)\right]^{\intercal} + \boldsymbol{\mathcal{G}}_1^+(s)\,\boldsymbol{\mathcal{G}}_1^{+\intercal}(s),$$

$$\boldsymbol{m}_1(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}^0 \\ \boldsymbol{m}^0 \\ \boldsymbol{m}_{X_0}(\tau) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{K}_1(0) = \begin{bmatrix} \mathcal{K}^0 & \mathcal{K}^0 & \mathcal{K}_{YX_0}(\tau) \\ \mathcal{K}^0 & \mathcal{K}^0 & \mathcal{K}_{YX_0}(\tau) \\ \mathcal{K}_{X_0Y}(\tau) & \mathcal{K}_{X_0Y}(\tau) & \mathcal{K}_{X_0X_0}(\tau) \end{bmatrix}.$$

Продолжая подобным образом, на шаге N получим уравнения

$$\dot{\boldsymbol{m}}_N(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_N^+(s)\,\boldsymbol{m}_N(s) + \boldsymbol{c}_N^+(s),$$

$$\dot{\mathcal{K}}_N(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_N^+(s)\,\mathcal{K}_N(s) + \left[\boldsymbol{\mathcal{A}}_N^+(s)\,\mathcal{K}_N(s)\right]^{\mathsf{T}} + \boldsymbol{\mathcal{G}}_N^+(s)\,\boldsymbol{\mathcal{G}}_N^{+\mathsf{T}}(s),$$

$$\boldsymbol{m}_N(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}^0 \\ \boldsymbol{m}^0 \\ \boldsymbol{m}_{X_0}(\tau) \\ \ldots \\ \boldsymbol{m}_{X_{N-1}}(\tau) \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{D}_N(0) = \begin{bmatrix} \mathcal{K}^0 & \mathcal{K}^0 & \mathcal{K}_{YX_0}(\tau) & \ldots & \mathcal{K}_{YX_{N-1}}(\tau) \\ \mathcal{K}^0 & \mathcal{K}^0 & \mathcal{K}_{YX_0}(\tau) & \ldots & \mathcal{K}_{YX_{N-1}}(\tau) \\ \mathcal{K}_{X_0Y}(\tau) & \mathcal{K}_{X_0Y}(\tau) & \mathcal{K}_{X_0X_0}(\tau) & \ldots & \mathcal{K}_{X_0X_{N-1}}(\tau) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathcal{K}_{X_{N-1}Y}(\tau) & \mathcal{K}_{X_{N-1}Y}(\tau) & \mathcal{K}_{X_{N-1}X_0}(\tau) & \ldots & \mathcal{K}_{X_{N-1}X_{N-1}}(\tau) \end{bmatrix}.$$

На основании уравнений для первых моментов можно построить уравнения для первых функций чувствительности. Для этого достаточно левые и правые части построенных уравнений продифференцировать по π_r, $r = 1, 2, \ldots, p$ в точке $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}_0$. Если обозначить

$$\boldsymbol{m}_k^{[0]}(s) = \boldsymbol{m}_k(s)\big|_{\boldsymbol{\pi}=\boldsymbol{\pi}_0}, \qquad \boldsymbol{m}_k^{[r]}(s) = \left.\frac{\partial \boldsymbol{m}_k(s)}{\partial \pi_r}\right|_{\boldsymbol{\pi}=\boldsymbol{\pi}_0},$$

$$\mathcal{K}_k^{[0]}(s) = \mathcal{K}_k(s)\big|_{\boldsymbol{\pi}=\boldsymbol{\pi}_0}, \qquad \mathcal{K}_k^{[r]}(s) = \left.\frac{\partial \mathcal{K}_k(s)}{\partial \pi_r}\right|_{\boldsymbol{\pi}=\boldsymbol{\pi}_0},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_k^{[0]}(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_k(s)\big|_{\boldsymbol{\pi}=\boldsymbol{\pi}_0}, \qquad \boldsymbol{\mathcal{A}}_k^{[r]}(s) = \left.\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{A}}_k(s)}{\partial \pi_r}\right|_{\boldsymbol{\pi}=\boldsymbol{\pi}_0},$$

$$\boldsymbol{c}_k^{[0]}(s) = \boldsymbol{c}_k(s)\big|_{\boldsymbol{\pi}=\boldsymbol{\pi}_0}, \qquad \boldsymbol{c}_k^{[r]}(s) = \left.\frac{\partial \boldsymbol{c}_k(s)}{\partial \pi_r}\right|_{\boldsymbol{\pi}=\boldsymbol{\pi}_0},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}_k^{[0]}(s) = \boldsymbol{\mathcal{G}}_k(s)\big|_{\boldsymbol{\pi}=\boldsymbol{\pi}_0}, \qquad \boldsymbol{\mathcal{G}}_k^{[r]}(s) = \left.\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{G}}_k(s)}{\partial \pi_r}\right|_{\boldsymbol{\pi}=\boldsymbol{\pi}_0},$$

то искомые уравнения на некотором шаге k будут выглядеть так:

$$\dot{\boldsymbol{m}}_k^{[0]}(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_k^{[0]}(s)\,\boldsymbol{m}_k^{[0]}(s) + \boldsymbol{c}_k^{[0]}(s),$$

$$\dot{\mathcal{K}}_k^{[0]}(s) = \mathcal{A}_k^{[0]}(s)\,\mathcal{K}_k^{[0]}(s) + \bigl[\mathcal{A}_k^{[0]}(s)\,\mathcal{K}_k^{[0]}(s)\bigr]^{\mathsf{T}} + \mathcal{G}_k^{[0]}(s)\,\mathcal{G}_k^{[0]\mathsf{T}}(s),$$

$$\dot{m}_k^{[r]}(s) = \mathcal{A}_k^{[r]}(s)\,m_k^{[0]}(s) + \mathcal{A}_k^{[0]}(s)\,m_k^{[r]}(s) + c_k^{[r]}(s),$$

$$\dot{\mathcal{K}}_k^{[r]+}(s) = \mathcal{A}_k^{[r]}(s)\,\mathcal{K}_k^{[0]}(s) + \mathcal{A}_k^{[0]}(s)\,\mathcal{K}_k^{[r]}(s) +$$

$$+\bigl[\mathcal{A}_k^{[r]}(s)\,\mathcal{K}_k^{[0]}(s) + \mathcal{A}_k^{[0]}(s)\,\mathcal{K}_k^{[r]}(s)\bigr]^{\mathsf{T}} + \mathcal{G}_k^{[r]}(s)\,\mathcal{G}_k^{[0]\mathsf{T}}(s) + \mathcal{G}_k^{[0]}(s)\,\mathcal{G}_k^{[r]\mathsf{T}}(s).$$

При этом начальные условия примут следующую форму ($\ell = 0, 1, ..., p$):

$$m_k^{[\ell]}(0) = \operatorname{col}\bigl(m_{k-1}^{[\ell]}(0), m_{X_{k-1}}^{[\ell]}(\tau)\bigr), \qquad \mathcal{K}_k^{[\ell]}(0) = \begin{bmatrix} \mathcal{K}_{k11}^{[\ell]} & \mathcal{K}_{k12}^{[\ell]} \\ \mathcal{K}_{k21}^{[\ell]} & \mathcal{K}_{k22}^{[\ell]} \end{bmatrix},$$

где

$$\mathcal{K}_{k11}^{[\ell]} = \mathcal{K}_{k-1}^{[\ell]+}(0), \qquad \mathcal{K}_{k22}^{[\ell]} = \mathcal{K}_{X_{k-1}X_{k-1}}^{[\ell]}(\tau),$$

$$\mathcal{K}_{k12}^{[\ell]} = \operatorname{col}\Bigl(\mathcal{K}_{YX_{k-1}}^{[\ell]}(\tau)\ \ \mathcal{K}_{YX_{k-1}}^{[\ell]}(\tau)\ \ \mathcal{K}_{X_0X_{k-1}}^{[\ell]}(\tau)\ ...\ \mathcal{K}_{X_{k-2}X_{k-1}}^{[\ell]}(\tau)\Bigr),$$

$$\mathcal{K}_{k21}^{[\ell]} = \Bigl[\mathcal{K}_{X_{k-1}Y}^{[\ell]}(\tau)\ \ \mathcal{K}_{X_{k-1}Y}^{[\ell]}(\tau)\ \ \mathcal{K}_{X_{k-1}X_0}^{[\ell]}(\tau)\ \ ...\ \ \mathcal{D}_{X_{k-1}X_{k-2}}^{[\ell]}(\tau)\Bigr].$$

Полученные уравнения представляют собой замкнутую систему детерминированных ОДУ относительно математических ожиданий и матрицы ковариаций стохастических функций чувствительности. Численное интегрирование этих уравнений не требует использования метода Монте-Карло [567], а следовательно, и множественных имитаций для расчета искомых характеристик. Кроме того, для указанного интегрирования не нужны специальные алгоритмы, ориентированные на дифференциальные уравнения с запаздыванием.

Пример 2.5.3. Воспользуемся представленным выше алгоритмом для анализа стохастического аналога исследовавшейся в примере 1.5.2 (подраздел 1.5.2) *обобщенного уравнения Матье*:

$$\ddot{X}(t) + 2\,\alpha\,\dot{X}(t) + \bigl(\omega^2 + \varepsilon\,\cos t\bigr)\,X(t) = \gamma\,X(t-\tau) + g_0\,V(t), \quad t > 0,$$

$$\ddot{X}(t) = 0, \quad -\tau \leqslant t \leqslant 0,$$

или

$$\dot{X}_1(t) = X_2(t),$$

$$\dot{X}_2(t) = -2\,\alpha\,X_2(t) - \bigl(\omega^2 + \varepsilon\,\cos t\bigr)\,X_1(t) + \gamma\,X_1(t-\tau) + g_0\,V(t), \quad t > 0,$$

$$\dot{X}_1(t) = 0, \quad \dot{X}_2(t) = 0, \quad -\tau \leqslant t \leqslant 0,$$

где $\alpha > 0$, ε, γ, $\omega > 0$, g_0 – постоянные параметры; $\boldsymbol{X}(t) = \{X(t), \dot{X}(t)\}^\intercal$.

При проведении расчетов оценивалось влияние изменения вектора параметров $\boldsymbol{\pi} = \{\alpha, \varepsilon, \gamma, \omega^2, g_0\}^\intercal$ в окрестности точки $\boldsymbol{\pi}_0 = \{0.1; 0.25; -0.25; \omega_0^2; 0.1\}^\intercal$, где $\omega_0^2 \in \{1, 2, 3, 4\}$, в случае, когда $\tau = 2\,\pi$ и

$$\boldsymbol{X}(-\tau) \sim \mathcal{N}\big(\{0.01; 0.00\}^\intercal, \boldsymbol{\mathcal{O}}_{2\times 2}\big).$$

Часть результатов расчетов, относящаяся к функциям чувствительности функций дисперсии и ковариации отображена на рис. 2.5.69–2.5.72, на которых в легендах указаны типы линий, соответствующие отображаемым характеристикам. Номера вариантов для ω_0^2 отмечены римскими цифрами I..IV.

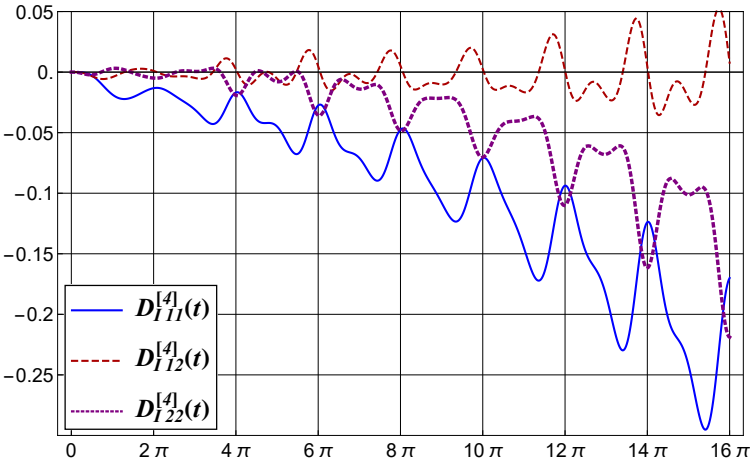


Рис. 2.5.69

Расчеты показали, что:

– с ростом ω_0^2 максимальные значения функций дисперсии и ковариации уменьшались , и соответствующие функции быстрее переходили в квазистационарный режим;

– во всех случаях наиболее влияющими параметрами на указанные характеристики оказались α и g_0;

– с ростом ω_0^2 влияние всех параметров уменьшалось. ▶

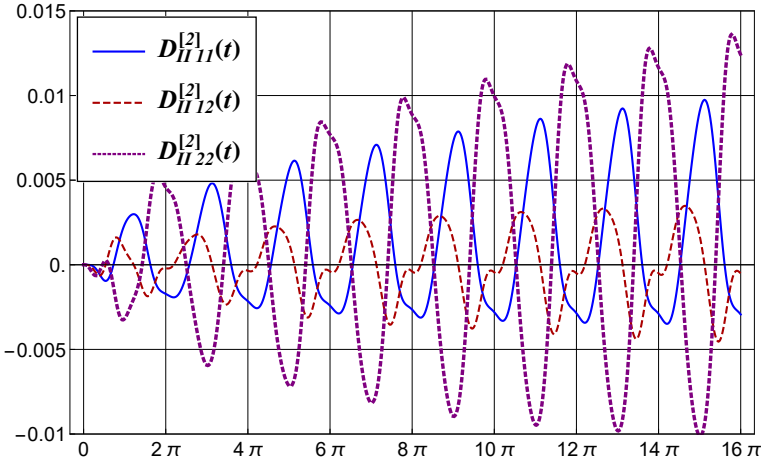


Рис. 2.5.70

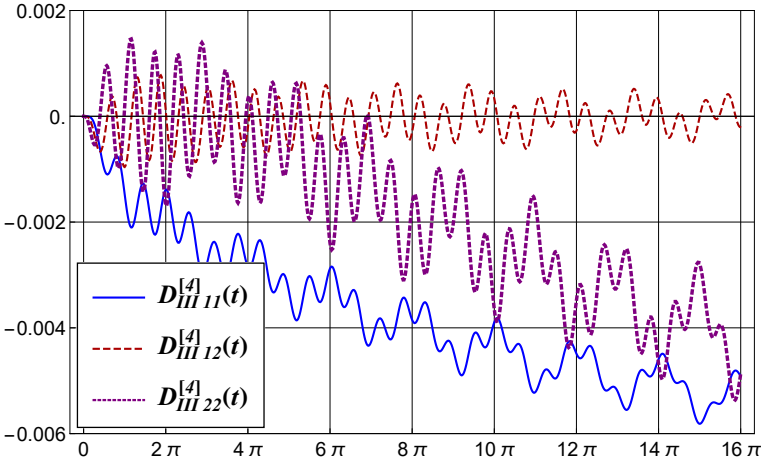


Рис. 2.5.71

Рассмотрим систему линейных СОДУ с кратными постоянными запаздываниями следующего вида:

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t;\boldsymbol{\pi}) = \sum_{\ell=0}^{k} \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{k,k-\ell}(t;\boldsymbol{\pi})\, \boldsymbol{X}(t-\ell\,\tau;\boldsymbol{\pi}) +$$

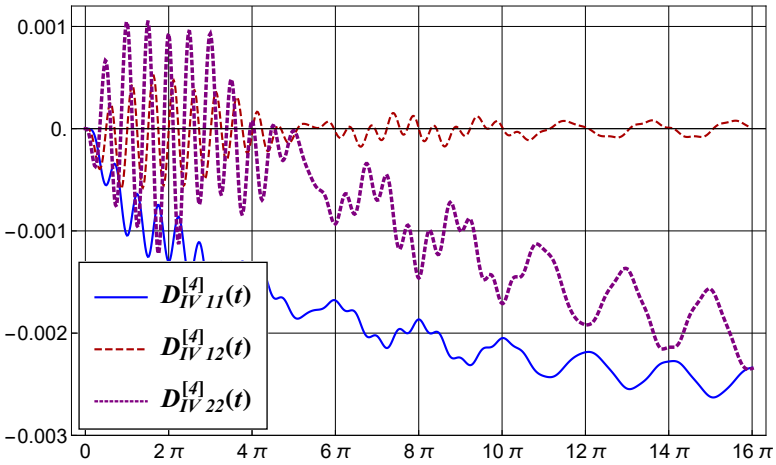


Рис. 2.5.72

$$+ \boldsymbol{c}_k(t;\boldsymbol{\pi}) + \boldsymbol{\mathcal{H}}_k(t;\boldsymbol{\pi})\,\boldsymbol{V}(t), \quad t_0 + k\,\tau < t \leqslant T < +\infty, \tag{2.5.117}$$

где t – время; $\tau > 0$ – порождающее запаздывание; $k \geqslant 1$ – целое; $\boldsymbol{X}(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния; $\boldsymbol{V}(\cdot) \in \mathbb{R}^m$ – вектор независимых гауссовых белых шумов с единичными интенсивностями; $\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^p$ – вектор детерминированных параметров, причем $\boldsymbol{\pi}_0$ – вектор их номинальных значений.

Будем считать, что на интервалах $\bigl(t_0+\nu\,\tau, t_0+(\nu+1)\,\tau\bigr]$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots, k-1$, вектор состояния $\boldsymbol{X}(t;\boldsymbol{\pi})$ удовлетворяет системам СОДУ/СОДРУ в следующей форме:

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t;\boldsymbol{\pi}) = \sum_{\ell=0}^{\nu} \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{\nu,\nu-\ell}(t;\boldsymbol{\pi})\,\boldsymbol{X}(t-\ell\,\tau;\boldsymbol{\pi}) + \boldsymbol{c}_\nu(t;\boldsymbol{\pi}) + \boldsymbol{\mathcal{H}}_\nu(t;\boldsymbol{\pi})\,\boldsymbol{V}(t), \tag{2.5.118}$$

причем в уравнениях (2.5.117) и (2.5.118) $\boldsymbol{\mathcal{Q}}_{\nu,\nu-\ell}$, $\boldsymbol{\mathcal{H}}_\nu(t;\boldsymbol{\pi})$ и $\boldsymbol{c}_\nu(t;\boldsymbol{\pi})$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots, k$) – известные непрерывные по t и дважды непрерывно-дифференцируемые по компонентам вектора $\boldsymbol{\pi}$ матричные и векторные функции. Кроме того, предположим, что известны все необходимые числовые характеристики случайного вектора $\boldsymbol{X}^0(\boldsymbol{\pi}) \equiv \boldsymbol{X}(t_0;\boldsymbol{\pi})$. В частности, пусть для вектора $\boldsymbol{X}^0(\boldsymbol{\pi})$ заданы вектор математических ожиданий $\boldsymbol{m}^0(\boldsymbol{\pi}) = \mathbb{E}\bigl[\boldsymbol{X}^0(\boldsymbol{\pi})\bigr]$ и ковариационная матрица $\boldsymbol{\mathcal{K}}^0(\boldsymbol{\pi}) = \mathbb{E}\bigl[\,\mathring{\boldsymbol{X}}^0(\boldsymbol{\pi})\,\{\mathring{\boldsymbol{X}}^0(\boldsymbol{\pi})\}^\top\,\bigr]$, где $\mathring{\boldsymbol{X}}^0(\boldsymbol{\pi}) = \boldsymbol{X}^0(\boldsymbol{\pi}) - \boldsymbol{m}^0(\boldsymbol{\pi})$.

Учитывая то, что система СОДРУ (2.5.117), (2.5.118) линейная, а возмущение гауссово, несложно сделать вывод о нормальности векторного случайного процесса процесса $\boldsymbol{X}(t)$ – решения указанной системы. Это позволяет в рамках настоящего подраздела ограничиться оценкой вектора функций математического ожидания $\boldsymbol{m}_X(t;\boldsymbol{\pi}) = \mathbb{E}[\boldsymbol{X}(t;\boldsymbol{\pi})]$ и матрицы функций ковариаций $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(t;\boldsymbol{\pi}) = \mathbb{E}\Big[\mathring{\boldsymbol{X}}(t;\boldsymbol{\pi})\,\mathring{\boldsymbol{X}}^{\top}(t;\boldsymbol{\pi})\Big]$ процесса $\boldsymbol{X}(t;\boldsymbol{\pi})$ ($\mathring{\boldsymbol{X}}(t;\boldsymbol{\pi}) = \boldsymbol{X}(t;\boldsymbol{\pi}) - \boldsymbol{m}_X(t;\boldsymbol{\pi})$), а также функций чувствительности этих характеристик к изменению вектора параметров.

Для того чтобы исследовать случайное изменение вектора $\boldsymbol{X}(t;\boldsymbol{\pi})$ и его числовых характеристик при значениях времени $t > t_0$ посредством преобразования немарковского векторного процесса в марковский, необходимо расширить пространство состояния системы. Для реализации этой процедуры введем следующиее обозначения:

$$s \in [0,\tau], \quad t_q = t_0 + q\cdot\tau, \quad t_{N_T} \geqslant T, \quad s_q = s + t_q,$$

$$\Delta_q = (t_q, t_{q+1}], \quad q = 0,1,2,...,N_T, \quad \boldsymbol{Y}(s) \equiv \boldsymbol{X}^0,$$

$$\boldsymbol{X}_q(s) = \boldsymbol{X}(s_q), \quad \boldsymbol{V}_q(s) = \boldsymbol{V}(s_q), \quad \boldsymbol{X}_q(0) = \boldsymbol{X}_{q-1}(\tau), \quad \boldsymbol{V}_q(0) = \boldsymbol{V}_{q-1}(\tau),$$

$$\boldsymbol{Z}_0(s) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{Y}(s), \boldsymbol{X}_0(s)\big), \quad \boldsymbol{Z}_1(s) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{Z}_0(s), \boldsymbol{X}_1(s)\big),$$

$$\boldsymbol{Z}_2(s) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{Z}_1(s), \boldsymbol{X}_2(s)\big), \quad ...$$

где $\operatorname{col}(\cdot)$ – вектор, состоящий из компонентов векторов-аргументов. Здесь и далее равенства случайных векторов выполняются с вероятностью единица, а аргумент $\boldsymbol{\pi}$ для краткости опускается.

Рассмотрим по шагам последовательность полуотрезков Δ_q, $q = 0$, 1, 2, ..., N_T.

0°. Начнем с Δ_0. Определенный на полуотрезке Δ_0 векторный случайный процесс $\boldsymbol{Z}_0(s)$ удовлетворяет системе СОДУ (точкой обозначена производная по переменной s):

$$\dot{\boldsymbol{Y}}(s) = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{Y}(0) = \boldsymbol{X}^0,$$
$$\dot{\boldsymbol{X}}_0(s) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{00}(s_0)\,\boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{c}_0(s_0) + \boldsymbol{\mathcal{H}}_0(s_0)\,\boldsymbol{V}_0(s), \quad \boldsymbol{X}_0(0) = \boldsymbol{X}^0.$$

1°. Проанализируем поведение системы на полуотрезках Δ_0 и Δ_1. Заданный на этих полуотрезках векторный процесс $\boldsymbol{Z}_1(s)$ является решением системы СОДУ вида:

$$\dot{\boldsymbol{Y}}(s) = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{Y}(0) = \boldsymbol{X}^0,$$
$$\dot{\boldsymbol{X}}_0(s) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{00}(s_0)\,\boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{c}_0(s_0) + \boldsymbol{\mathcal{H}}_0(s_0)\,\boldsymbol{V}_0(s), \qquad \boldsymbol{X}_0(0) = \boldsymbol{X}^0,$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}_1(s) = \sum_{\ell=0}^{1} \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{1\ell}(s_1)\,\boldsymbol{X}_\ell(s) + \boldsymbol{c}_1(s_1) + \boldsymbol{\mathcal{H}}_1(s_1)\,\boldsymbol{V}_1(s),\ \boldsymbol{X}_1(0) = \boldsymbol{X}_0(\tau).$$

2°. Обратимся теперь к полуотрезкам Δ_0, Δ_1 и Δ_2. СОДУ для вычисления вектора $\mathrm{col}\,\big(\boldsymbol{Y}(s), \boldsymbol{X}_0(s), \boldsymbol{X}_1(s), \boldsymbol{X}_2(s)\big)$ можно представить так:

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{Y}}(s) = \boldsymbol{0}, && \boldsymbol{Y}(0) = \boldsymbol{X}^0,\\
&\dot{\boldsymbol{X}}_0(s) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{00}(s_0)\,\boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{c}_0(s_0) + \boldsymbol{\mathcal{H}}_0(s_0)\,\boldsymbol{V}_0(s), && \boldsymbol{X}_0(0) = \boldsymbol{X}^0,\\
&\dot{\boldsymbol{X}}_1(s) = \sum_{\ell=0}^{1} \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{1\ell}(s_1)\,\boldsymbol{X}_\ell(s) + \boldsymbol{c}_1(s_1) + \boldsymbol{\mathcal{H}}_1(s_1)\,\boldsymbol{V}_1(s), && \boldsymbol{X}_1(0) = \boldsymbol{X}_0(\tau),\\
&\dot{\boldsymbol{X}}_2(s) = \sum_{\ell=0}^{2} \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{2\ell}(s_2)\,\boldsymbol{X}_\ell(s) + \boldsymbol{c}_2(s_2) + \boldsymbol{\mathcal{H}}_2(s_2)\,\boldsymbol{V}_2(s), && \boldsymbol{X}_2(0) = \boldsymbol{X}_1(\tau).
\end{aligned}$$

... ...

k°. Для полуинтервалов Δ_0, Δ_1, Δ_2, ..., Δ_k расширенная система СОДУ примет вид:

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{Y}}(s) = \boldsymbol{0}, && \boldsymbol{Y}(0) = \boldsymbol{X}^0,\\
&\dot{\boldsymbol{X}}_0(s) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{00}(s_0)\,\boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{c}_0(s_0) + \boldsymbol{\mathcal{H}}_0(s_0)\,\boldsymbol{V}_0(s), && \boldsymbol{X}_0(0) = \boldsymbol{X}^0,\\
&\dot{\boldsymbol{X}}_1(s) = \sum_{\ell=0}^{1} \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{1\ell}(s_1)\,\boldsymbol{X}_\ell(s) + \boldsymbol{c}_1(s_1) + \boldsymbol{\mathcal{H}}_1(s_1)\,\boldsymbol{V}_1(s), && \boldsymbol{X}_1(0) = \boldsymbol{X}_0(\tau),\\
&\dot{\boldsymbol{X}}_2(s) = \sum_{\ell=0}^{2} \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{2\ell}(s_2)\,\boldsymbol{X}_\ell(s) + \boldsymbol{c}_2(s_2) + \boldsymbol{\mathcal{H}}_2(s_2)\,\boldsymbol{V}_2(s), && \boldsymbol{X}_2(0) = \boldsymbol{X}_1(\tau),
\end{aligned}$$

... ...

$$\dot{\boldsymbol{X}}_k(s) = \sum_{\ell=0}^{k} \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{k\ell}(s_k)\,\boldsymbol{X}_\ell(s) + \boldsymbol{c}_k(s_k) + \boldsymbol{\mathcal{H}}_k(s_k)\,\boldsymbol{V}_k(s),\ \boldsymbol{X}_k(0) = \boldsymbol{X}_{k-1}(\tau).$$

(k+1)°. Если для предыдущих полуотрезков расширенные системы СОДУ формировались однородно, то с данного шага техника построения систем СОДУ существенно меняется:

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{Y}}(s) = \boldsymbol{0}, && \boldsymbol{Y}(0) = \boldsymbol{X}^0,\\
&\dot{\boldsymbol{X}}_0(s) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{00}(s_0)\,\boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{c}_0(s_0) + \boldsymbol{\mathcal{H}}_0(s_0)\,\boldsymbol{V}_0(s), && \boldsymbol{X}_0(0) = \boldsymbol{X}^0,
\end{aligned}$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}_1(s) = \sum_{\ell=0}^{1} \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{1\ell}(s_1)\,\boldsymbol{X}_\ell(s) + \boldsymbol{c}_1(s_1) + \boldsymbol{\mathcal{H}}_1(s_1)\,\boldsymbol{V}_1(s), \qquad \boldsymbol{X}_1(0) = \boldsymbol{X}_0(\tau),$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}_2(s) = \sum_{\ell=0}^{2} \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{2\ell}(s_2)\,\boldsymbol{X}_\ell(s) + \boldsymbol{c}_2(s_2) + \boldsymbol{\mathcal{H}}_2(s_2)\,\boldsymbol{V}_2(s), \qquad \boldsymbol{X}_2(0) = \boldsymbol{X}_1(\tau),$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}_k(s) = \sum_{\ell=0}^{k} \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{k\ell}(s_k)\,\boldsymbol{X}_\ell(s) + \boldsymbol{c}_k(s_k) + \boldsymbol{\mathcal{H}}_k(s_k)\,\boldsymbol{V}_k(s), \qquad \boldsymbol{X}_k(0) = \boldsymbol{X}_{k-1}(\tau),$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}_{k+1}(s) = \sum_{\ell=0}^{k} \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{k\ell}(s_{k+1})\,\boldsymbol{X}_{\ell+1}(s) + \boldsymbol{c}_k(s_{k+1}) + \\ + \boldsymbol{\mathcal{H}}_k(s_{k+1})\,\boldsymbol{V}_{k+1}(s), \qquad \boldsymbol{X}_{k+1}(0) = \boldsymbol{X}_k(\tau).$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

N°. И наконец рассмотрим временные полуотрезки Δ_0, Δ_1, ..., Δ_N ($N = N_T$). Построим систему СОДУ для вектора $\boldsymbol{Z}_N$ в виде:

$$\dot{\boldsymbol{Y}}(s) = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{Y}(0) = \boldsymbol{X}^0,$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}_0(s) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{00}(s_0)\,\boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{c}_0(s_0) + \boldsymbol{\mathcal{H}}_0(s_0)\,\boldsymbol{V}_0(s), \qquad \boldsymbol{X}_0(0) = \boldsymbol{X}^0,$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}_1(s) = \sum_{\ell=0}^{1} \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{1\ell}(s_1)\,\boldsymbol{X}_\ell(s) + \boldsymbol{c}_1(s_1) + \boldsymbol{\mathcal{H}}_1(s_1)\,\boldsymbol{V}_1(s), \qquad \boldsymbol{X}_1(0) = \boldsymbol{X}_0(\tau),$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}_2(s) = \sum_{\ell=0}^{2} \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{2\ell}(s_2)\,\boldsymbol{X}_\ell(s) + \boldsymbol{c}_2(s_2) + \boldsymbol{\mathcal{H}}_2(s_2)\,\boldsymbol{V}_2(s), \qquad \boldsymbol{X}_2(0) = \boldsymbol{X}_1(\tau),$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}_k(s) = \sum_{\ell=0}^{k} \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{k\ell}(s_k)\,\boldsymbol{X}_\ell(s) + \boldsymbol{c}_k(s_k) + \boldsymbol{\mathcal{H}}_k(s_k)\,\boldsymbol{V}_k(s), \qquad \boldsymbol{X}_k(0) = \boldsymbol{X}_{k-1}(\tau),$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}_{k+1}(s) = \sum_{\ell=0}^{k} \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{k\ell}(s_{k+1})\,\boldsymbol{X}_{\ell+1}(s) + \boldsymbol{c}_k(s_{k+1}) + \\ + \boldsymbol{\mathcal{H}}_k(s_{k+1})\,\boldsymbol{V}_{k+1}(s), \qquad \boldsymbol{X}_{k+1}(0) = \boldsymbol{X}_k(\tau),$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}_N(s) = \sum_{\ell=0}^{k} \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{k\ell}(s_N)\,\boldsymbol{X}_{\ell+N-k}(s) + \boldsymbol{c}_k(s_N) +$$

$$+\,\boldsymbol{\mathcal{H}}_k(s_N)\,\boldsymbol{V}_N(s), \qquad\qquad \boldsymbol{X}_N(0)=\boldsymbol{X}_{N-1}(\tau).$$

Построим теперь ОДУ для моментных функций, а также для требуемых функций чувствительности на основе цепочки уравнений для векторных случайных процессов $\boldsymbol{Z}_q(t)$, $q=0,\,1,\,2,\,...,\,N_T$.

Для векторных функций математического ожидания

$$\boldsymbol{m}_Z^{[q]}(s)=\operatorname{col}\left(m_Y(s),m_{X_0}(s),m_{X_1}(s),...,m_{X_q}(s)\right)$$

на участке Δ_q такая система управляющих уравнений будет выглядеть так:

$$\dot{\boldsymbol{m}}_Z^{[q]}(s)=\boldsymbol{\mathcal{Q}}^{[q]}(s)\,\boldsymbol{m}_Z^{[q]}(s)+\boldsymbol{c}^{[q]}(s), \tag{2.5.119}$$

а для матрицы функций ковариации –

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{ZZ}^{[q]}(s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{C}}_{YY}(s) & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{YX_0}(s) & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{YX_1}(s) & ... & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{YX_q}(s)\\ \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_0Y}(s) & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_0X_0}(s) & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_0X_1}(s) & ... & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_0X_q}(s)\\ \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_1Y}(s) & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_1X_0}(s) & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_1X_1}(s) & ... & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_1X_q}(s)\\ ... & ... & ... & ... & ...\\ \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_qY}(s) & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_qX_0}(s) & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_qX_1}(s) & ... & \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_qX_q}(s)\end{bmatrix}$$

на том же участке –

$$\dot{\boldsymbol{\mathcal{C}}}_{ZZ}^{[q]}(s)=\boldsymbol{\mathcal{Q}}^{[q]}(s)\,\boldsymbol{\mathcal{C}}_{ZZ}^{[q]}(s)+\left[\boldsymbol{\mathcal{Q}}^{[q]}(s)\,\boldsymbol{\mathcal{C}}_{ZZ}^{[q]}(s)\right]^{\mathsf{T}}+\boldsymbol{\mathcal{H}}^{[q]}(s)\left\{\boldsymbol{\mathcal{H}}^{[q]}(s)\right\}^{\mathsf{T}}, \tag{2.5.120}$$

где

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_iX_j}=\mathbb{E}\left[\mathring{\boldsymbol{X}}_i(s)\left\{\mathring{\boldsymbol{X}}_j(s)\right\}^{\top}\right],\qquad \mathring{\boldsymbol{X}}_\ell(s)=\boldsymbol{X}_\ell(s)-\boldsymbol{m}_{X\ell}(s),$$

$$\boldsymbol{\mathcal{Q}}^{[q]}(s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & ... & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n}\\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{00}(s_0) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & ... & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n}\\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{10}(s_1) & \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{11}(s_1) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & ... & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n}\\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{20}(s_2) & \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{21}(s_2) & \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{22}(s_2) & ... & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n}\\ ... & ... & ... & ... & ... & ...\\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{q0}(s_q) & \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{q1}(s_q) & \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{q2}(s_q) & ... & \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{qq}(s_q)\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}^{[q]}(s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & ... & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m}\\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{H}}_0(s_0) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & ... & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m}\\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{H}}_1(s_1) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & ... & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m}\\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{H}}_2(s_2) & ... & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m}\\ ... & ... & ... & ... & ... & ...\\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & ... & \boldsymbol{\mathcal{H}}_q(s_q)\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{c}^{[q]}(s) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{c}_0(s_0), \boldsymbol{c}_1(s_1), \boldsymbol{c}_2(s_2), ..., \boldsymbol{c}_q(s_q)\big)$$

для $q \leqslant k$ и

$$\boldsymbol{\mathcal{Q}}^{[q]}(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{Q}}^{[k]}(s) & \boldsymbol{\mathcal{Q}}^{[q]}_{12}(s) \\ \boldsymbol{\mathcal{Q}}^{[q]}_{21}(s) & \boldsymbol{\mathcal{Q}}^{[q]}_{22}(s) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{Q}}^{[q]}_{12}(s) = \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n(k+1)\times n(q-k)},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{Q}}^{[q]}_{21}(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{k0}(s_{k+1}) & \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{k1}(s_{k+1}) & ... & \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{k,k-1}(s_{k+1}) \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{k0}(s_{k+2}) & ... & \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{k,k-2}(s_{k+2}) \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{Q}}^{[q]}_{22}(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{kk}(s_{k+1}) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & ... & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{k,k-1}(s_{k+2}) & \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{kk}(s_{k+2}) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & ... & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{kk}(s_{q-1}) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} \\ ... & ... & ... & ... & \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{k,k-1}(s_q) & \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{kk}(s_q) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}^{[q]}(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{H}}^{[k]}(s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n(k+1)\times m(q-k)} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n(q-k)\times m(k+1)} & \boldsymbol{\mathcal{H}}^{[q]}_{22}(s) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}^{[q]}_{22}(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{H}}_k(s_{k+1}) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & ... & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{H}}_k(s_{k+2}) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & ... & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{H}}_k(s_{k+3}) & ... & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & ... & \boldsymbol{\mathcal{H}}_k(s_q) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{c}^{[q]}(s) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{c}^{[k]}(s), \boldsymbol{c}_k(s_{k+1}), ..., \boldsymbol{c}_k(s_q)\big).$$

для $q > k$.

Начальные условия для уравнений (2.5.119) и (2.5.120) будут выглядеть так:

$$\boldsymbol{m}^{[0]}_Z(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}^0 \\ \boldsymbol{m}^0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{m}^{[q]}_Z(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}^{[q-1]}(0) \\ \boldsymbol{m}_{q-1}(\tau) \end{bmatrix}, \tag{2.5.121}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}^{[0]}_{ZZ}(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{K}}^0 & \boldsymbol{\mathcal{K}}^0 \\ \boldsymbol{\mathcal{K}}^0 & \boldsymbol{\mathcal{K}}^0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\mathcal{C}}^{[q]}_{ZZ}(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{C}}^{[q-1]}_{ZZ}(0) & \boldsymbol{\mathcal{C}}^{[q]}_{12} \\ \boldsymbol{\mathcal{C}}^{[q]}_{21} & \boldsymbol{\mathcal{C}}^{[q]}_{22} \end{bmatrix}, \tag{2.5.122}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}^{[q]}_{21} = \big[\boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_{q-1}Y}(\tau)\ \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_{q-1}X_0}(\tau)\ ...\ \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_{q-1}X_{q-2}}(\tau)\big],$$

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}^{[q]}_{12} = \big\{\boldsymbol{\mathcal{C}}^{[q]}_{21}\big\}^\top, \qquad \boldsymbol{\mathcal{C}}^{[q]}_{22} = \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_{q-1}X_{q-1}}(\tau).$$

На основании уравнений для первых моментов можно построить ОДУ для функций чувствительности. Для этого достаточно левые и правые части построенных уравнений продифференцировать один раз по π_λ и дважды по π_λ, π_μ, λ, $\mu = 1, 2, ..., p$ в точке $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}_0$. Если для используемых объектов $\boldsymbol{m}_Z^{[q]}(s)$, $\boldsymbol{m}^0$, $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{ZZ}^{[q]}(s)$, $\boldsymbol{\mathcal{K}}^0$, $\boldsymbol{\mathcal{Q}}^{[q]}(s)$, $\boldsymbol{\mathcal{H}}^{[q]}(s)$, $\boldsymbol{c}^{[q]}(s)$ ввести единообразные обозначения значений этих объектов и их производных при $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}_0$, например,

$$\widehat{\boldsymbol{m}}_X^{[q]}(s) = \boldsymbol{m}_X^{[q]}(s)\Big|_{\boldsymbol{\pi}=\boldsymbol{\pi}_0}, \quad \widehat{\boldsymbol{m}}_{X\lambda}^{[q]}(s) = \frac{\partial \boldsymbol{m}_X^{[q]}(s)}{\partial p_\lambda}\Big|_{\boldsymbol{\pi}=\boldsymbol{\pi}_0},$$

$$\widehat{\boldsymbol{m}}_{X\lambda\mu}^{[q]}(s) = \frac{\partial^2 \boldsymbol{m}_X^{[q]}(s)}{\partial p_\lambda \partial p_\mu}\Big|_{\boldsymbol{\pi}=\boldsymbol{\pi}_0},$$

то искомые уравнения на шаге q будут выглядеть так:

$$\dot{\widehat{\boldsymbol{m}}}_X^{[q]}(s) = \widehat{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}^{[q]}(s)\,\widehat{\boldsymbol{m}}_X^{[q]}(s) + \widehat{\boldsymbol{c}}^{[q]}(s), \tag{2.5.123}$$

$$\dot{\widehat{\boldsymbol{m}}}_{Z\lambda}^{[q]}(s) = \widehat{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}_\lambda^{[q]}(s)\,\widehat{\boldsymbol{m}}_Z^{[q]}(s) + \widehat{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}^{[q]}(s)\,\widehat{\boldsymbol{m}}_{Z\lambda}^{[q]}(s) + \widehat{\boldsymbol{c}}_\lambda^{[q]}(s), \tag{2.5.124}$$

$$\dot{\widehat{\boldsymbol{m}}}_{Z\lambda\mu}^{[q]}(s) = \widehat{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}_{\lambda\mu}^{[q]}(s)\,\widehat{\boldsymbol{m}}_Z^{[q]}(s) + \widehat{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}_\lambda^{[q]}(s)\,\widehat{\boldsymbol{m}}_{Z\mu}^{[q]}(s) + \widehat{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}_\mu^{[q]}(s)\,\widehat{\boldsymbol{m}}_{Z\lambda}^{[q]}(s) + \widehat{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}^{[q]}(s)\,\widehat{\boldsymbol{m}}_{Z\lambda\mu}^{[q]}(s) + \widehat{\boldsymbol{c}}_{\lambda\mu}^{[q]}(s), \tag{2.5.125}$$

$$\dot{\widehat{\boldsymbol{\mathcal{C}}}}_{ZZ}^{[q]}(s) = \widehat{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}^{[q]}(s)\,\widehat{\boldsymbol{\mathcal{C}}}_{ZZ}^{[q]}(s) + \big[\widehat{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}^{[q]}(s)\,\widehat{\boldsymbol{\mathcal{C}}}_{ZZ}^{[q]}(s)\big]^{\mathsf{T}} + \widehat{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^{[q]}(s)\big\{\widehat{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^{[q]}(s)\big\}^{\mathsf{T}}, \tag{2.5.126}$$

$$\dot{\widehat{\boldsymbol{\mathcal{C}}}}_{ZZ\lambda}^{[q]}(s) = \widehat{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}_\lambda^{[q]}(s)\,\widehat{\boldsymbol{\mathcal{C}}}_{ZZ}^{[q]}(s) + \widehat{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}^{[q]}(s)\,\widehat{\boldsymbol{\mathcal{C}}}_{ZZ\lambda}^{[q]}(s) + \big[\widehat{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}_\lambda^{[q]}(s)\,\widehat{\boldsymbol{\mathcal{C}}}_{ZZ}^{[q]}(s)\big]^{\mathsf{T}} + \big[\widehat{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}^{[q]}(s)\,\widehat{\boldsymbol{\mathcal{C}}}_{ZZ\lambda}^{[q]}(s)\big]^{\mathsf{T}} + \widehat{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_\lambda^{[q]}(s)\big\{\widehat{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^{[q]}(s)\big\}^{\mathsf{T}} + \widehat{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^{[q]}(s)\big\{\widehat{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_\lambda^{[q]}(s)\big\}^{\mathsf{T}}, \tag{2.5.127}$$

$$\begin{aligned}\dot{\widehat{\boldsymbol{\mathcal{C}}}}_{ZZ\lambda\mu}^{[q]}(s) &= \widehat{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}_{\lambda\mu}^{[q]}(s)\,\widehat{\boldsymbol{\mathcal{C}}}_{ZZ}^{[q]}(s) + \widehat{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}_\lambda^{[q]}(s)\,\widehat{\boldsymbol{\mathcal{C}}}_{ZZ\mu}^{[q]}(s) + \widehat{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}_\mu^{[q]}(s)\,\widehat{\boldsymbol{\mathcal{C}}}_{ZZ\lambda}^{[q]}(s) + \\ &+ \widehat{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}^{[q]}(s)\,\widehat{\boldsymbol{\mathcal{C}}}_{ZZ\lambda\mu}^{[q]}(s) + \big[\widehat{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}_{\lambda\mu}^{[q]}(s)\,\widehat{\boldsymbol{\mathcal{C}}}_{ZZ}^{[q]}(s) + \widehat{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}_\lambda^{[q]}(s)\,\widehat{\boldsymbol{\mathcal{C}}}_{ZZ\mu}^{[q]}(s)\big]^{\mathsf{T}} + \\ &+ \big[\widehat{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}_\mu^{[q]}(s)\,\widehat{\boldsymbol{\mathcal{C}}}_{ZZ\lambda}^{[q]}(s) + \widehat{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}^{[q]}(s)\,\widehat{\boldsymbol{\mathcal{C}}}_{ZZ\lambda\mu}^{[q]}(s)\big]^{\mathsf{T}} + \widehat{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_{\lambda\mu}^{[q]}(s)\big\{\widehat{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^{[q]}(s)\big\}^{\mathsf{T}} + \\ &+ \widehat{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_\lambda^{[q]}(s)\big\{\widehat{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_\mu^{[q]}(s)\big\}^{\mathsf{T}} + \widehat{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_\mu^{[q]}(s)\big\{\widehat{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_\lambda^{[q]}(s)\big\}^{\mathsf{T}} + \widehat{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^{[q]}(s)\big\{\widehat{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_{\lambda\mu}^{[q]}(s)\big\}^{\mathsf{T}}.\end{aligned} \tag{2.5.128}$$

Начальные условия для этих уравнений естественным образом могут быть получены из соотношений (2.5.121), (2.5.122).

Построенные уравнения (2.5.123) – (2.5.128), как и в первой части данного подраздела, представляют собой замкнутую систему детерми-

нированных ОДУ относительно функций математического ожидания и матрицы функций ковариаций векторного случайного процесса, определяющего состояние системы, и функций чувствительности.

2.5.4. Моделирование динамики загрязнения бассейна реки

Проблема охраны окружающей среды является одной из важнейших задач науки. Интенсивное развитие промышленности и связанное с этим увеличение промышленных выбросов, загрязняющих окружающую среду, уже стали ощутимыми для экологического равновесия многих регионов страны и мира. Промышленные выбросы приводят к угнетению жизни растительного животного мира (птиц, рыб, насекомых, полезных бактерий и др.) [139]. Проблемы окружающей среды, причинами которых является рост объема загрязнений, сбрасываемых в естественные водные бассейны, разливы нефти требуют быстрой реакции с целью предотвращения дальнейшего ухудшения качества воды и загрязнения подземных вод и водоносных слоев.

В частности, актуальна проблема сохранения качества воды, особенно острая в отношении водоемов с замедленным водообменом [74]. Запасы воды ухудшаются в результате процессов загрязнения, смыва химических удобрений и ядохимикатов с водосборной площади, загрязнения поверхностных вод высокотоксичными тяжелыми металлами, миграции радионуклеидов в малых концентрациях со скоростью воды, закисления озер, загрязнения поверхностных и подземных вод выщелачивающей жидкостью из-за наличия большого числа свалок, высокой физико-химической и биохимической активности и токсичности твердых отходов и т.п. Полностью исключить эти сбросы в естественные и искусственные водоемы при современном развитии техники не представляется возможным, поскольку создание новых изделий и материалов и постоянное совершенствование и изменение технологии опережает совершенствование и развитие методов очистки. Поэтому необходимость использования водоемов и водостоков в качестве естественной буферной системы для разбавления, самоочищения и нейтрализации вредных отходов сохранится длительное время.

При эксплуатации водоемов [74] для приема сточных вод используется самоочищающая способность водоемов, включающая физическое (перенос, перемешивание и разбавление), химическое (нейтрализация) и биологическое влияние на переработку сбрасываемых сточных и возвратных вод. Неблагоприятное воздействие сбросов сточных вод усугубляется тем, что водоем в целом представляет единую гидродинамическую и экологическую систему, отдельные части и районы которой тесно связаны между

собой. Эти связи, достаточно сложные для любого крупного водоема, еще более сложны для каскадов водоемов.

В настоящее время при рассмотрении таких сложных процессов, как течение рек, принято выделять детерминированную и вероятностную составляющие [74]. Детерминированная составляющая полностью определяется гидродинамическими законами и гидрологией водоемов; вероятностная составляющая является результатом наложения случайных факторов и может быть оценена лишь путем статистической обработки массового материала наблюдений. При этом стохастические модели уже давно является рабочим инструментом в задачах гидрологии [49, 56, 74, 86, 159, 160].

При стационарном протекании транзитного потока струя сточной жидкости, поступая в него, распространяется по течению, постоянно перемешиваясь и разбавляясь в результате *турбулентной диффузии* [74]. Характерной особенностью турбулентных движений является наличие пульсации гидродинамических величин потока, которые по своей природе являются беспорядочными [139]. Важной задачей является оценка вероятностных характеристик [60, 133, 134, 236] потока, которая может быть получена при использовании различных моделей переноса загрязнений и, в том числе, с учетом запаздывания.

В последние годы значительный интерес проявляется к проблеме оценки и регулирования уровня загрязнения рек [64, 154], которая является одной из актуальных задач математической экологии. К основным *показателям качества воды* относят:

– органолептические показатели: запах, вкус и привкус, мутность и прозрачность, пенистость;

– общие и суммарные показатели: температура, водородный показатель (pH), щелочность и кислотность, растворенный кислород (РК, dissolved oxygen, *DO*), биохимическое потребление кислорода (БПК, biochemical oxygen demand, *BOD*), окисляемость, или химическое потребление кислорода (ХПК);

– минеральный состав: карбонаты, сульфаты, хлориды, сухой остаток, кальций, магний, общая жесткость, натрий, калий и т.д.;

– биогенные элементы: аммоний, нитраты, нитриты, фосфаты и общий фосфор;

– металлы: сумма тяжелых металлов, железо, алюминий;

– некоторые важнейшие показатели: фтор (фториды), хлор активный, нефтепродукты, поверхностно-активные вещества, фенолы.

Степень загрязнения воды органическими соединениями определяют как количество кислорода, необходимое для их окисления микроорганиз-

мами в аэробных условиях. Концентрация кислорода определяет величину окислительно-восстановительного потенциала и в значительной мере направление и скорость процессов химического и биохимического окисления органических и неорганических соединений. Поэтому среди многих показателей качества водного потока можно выделить два тесно связанных: 1) меру скорости поглощения кислорода водой для аэробного биохимического окисления под действием бактерий и разложения нестойких органических соединений при разложении органических материалов (BOD); 2) количество растворенного в единице объема воды кислорода (DO) [278, 984]. Правомерность выбора этих показателей заключается в том, что если величина DO падает ниже определенных уровней или BOD поднимается выше фиксированных границ, то рыба в водоеме гибнет.

В индустриальных странах реки обычно используются для сброса сточных вод, но экологический баланс реки часто нарушается неизвестными возмущениями. Для защиты окружающей среды загрязненные воды могут обрабатываются на станциях очистки сточных вод, прежде чем они будут направлены в реки. Очистка обычно производится до некоторого уровня, который зависит от величины BOD. Сточные воды, в которых достигнут требуемый уровень BOD, считаются безопасными для водоема. Однако экологический баланс в реке часто нарушается по неизвестным причинам, которые можно считать случайными. Поэтому для того, чтобы возвратить показатели качества воды в реке к требуемому значению, необходимо изменить BOD в сточных водах с помощью повышения или понижения степени обработки воды.

Рассмотрим конечную по длине часть водного пространства реки, в которую из установок для очистки сточных вод осуществляется управляемый сброс очищенных вод. Представим это пространство *каскадом проточных водоемов*, расположенных вдоль течения реки. Это приводит к тому, что значения BOD и DO водоема, лежащего выше по течению реки, влияют (с некоторым запаздыванием) на величины BOD и DO водоемов, расположенных ниже по течению. Качество воды в i-м водоеме будем определять уровнями BOD (r_ℓ, мг/л) и DO (q_ℓ, мг/л) в некоторой средней точке этого водоема, который рассматривается как реактор с идеально перемешиваемым содержимым, в результате чего параметры потока и текущие переменные имеют одни и те же значения по всему водоему, а значения r_ℓ и q_ℓ на выходе водоема эквивалентны аналогичным показателям внутри водоема.

Тогда из рассмотрения баланса масс следуют уравнения [278, 400], определяющие соотношение между BOD и DO в выбранной точке ℓ-го водоема:

$$\dot{r}_\ell(t) = -k_{1\ell}\, r_\ell(t) + \frac{Q_{\ell-1}}{V_\ell}\,\tilde{r}_\ell(t) - \frac{Q_\ell + Q_E}{V_\ell}\, r_\ell(t) + \frac{\eta_\ell\, Q_E}{V_\ell} + \frac{\bar{m}_\ell\, Q_E}{V_\ell}, \tag{2.5.129}$$

$$\dot{q}_\ell(t) = k_{2\ell}\left[q_\ell^s - q_\ell(t)\right] + \frac{Q_{\ell-1}}{V_\ell}\,\tilde{q}_\ell(t) - \frac{Q_\ell + Q_E}{V_\ell}\, q_\ell(t) - k_{1\ell}\, r_\ell(t) - \frac{\eta_\ell}{V_\ell}, \tag{2.5.130}$$

где V_ℓ – объем воды в водоеме, Мл; Q_E – скорость потока, поступающего в водоем, Мл/сутки; k_{1i} – скорость уменьшения BOD за сутки в водоеме; k_{2i} – скорость изменения DO за сутки в водоеме путем реаэрации; Q_ℓ – скорость прохождения воды через водоем, Мл/сутки; q_ℓ^s – уровень насыщения DO для ℓ-го водоема в мг/л; η_ℓ/V_ℓ – изменение DO в связи с образованием осадков, мг/л·(сутки)$^{-1}$; $\bar{m}_\ell$ – концентрация BOD в поступающем в водоем потоке, мг/л; $\tilde{r}_\ell$ и $\tilde{q}_\ell$ – концентрации BOD и DO, определяемые характеристиками воды в лежащих выше по течению водоемах.

М.Б. Бек [400] определил, что для одного из участков р. Кем около г. Кембриджа в Англии допустимы следующие значения коэффициентов в уравнениях (2.5.129), (2.5.130):

$$k_{1\ell} = 0.32; \qquad k_{2\ell} = 0.29; \qquad \frac{\eta_\ell}{V_\ell} = 1.00; \qquad \frac{\eta_\ell\, Q_E}{V_\ell} = 4.19;$$

$$q_\ell^s = 10.00; \qquad \frac{Q_E}{V_\ell} = 0.10; \qquad \frac{Q_\ell}{V_\ell} = 0.90.$$

Таким образом для ℓ-го водоема уравнения (2.5.129), (2.5.130) принимают вид

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} r_\ell(t) \\ q_\ell(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.32 & 0.00 \\ -0.32 & -1.29 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_\ell(t) \\ q_\ell(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.10 \\ 0.00 \end{bmatrix}\bar{m}_\ell(t) + \begin{bmatrix} 0.90\,\tilde{r}_\ell(t) + 4.19 \\ 0.90\,\tilde{q}_\ell(t) + 1.90 \end{bmatrix}. \tag{2.5.131}$$

Данная модель описывает лишь один водоем р. Кем и предусматривает только одну точку слива очищенных вод. Если таких мест на реке много, а необходимых дополнительных данных нет, то можно считать, что в каскаде многих водоемов каждый из них обладает свойствами модели М.Б. Бека. Именно такую схему моделирования динамики изменения BOD и DO предложил Х. Тамура [1017]. Он учел влияние распределение источников загрязнений по реке введением в выражения для $\tilde{r}_\ell$ и $\tilde{q}_\ell$ членов с задержками. Согласно модели Х. Тамуры части a_j ($j = 1, 2, ..., s$)

уровней BOD и DO, характеризующих в момент $t-\tau_j$ времени $(\ell-1)$-й водоем, появляются в ℓ-м водоеме в момент времени t, т.е. транспортные задержки распределены во времени между τ_1 и τ_s. Таким образом, для $\tilde{r}_i(t)$, $\tilde{q}_i(t)$ можно записать

$$\tilde{r}_\ell(t)=\sum_{j=1}^{s} a_j\, r_{\ell-1}(t-\tau_j), \tag{2.5.132}$$

$$\tilde{q}_\ell(t)=\sum_{j=1}^{s} a_j\, q_{\ell-1}(t-\tau_j), \tag{2.5.133}$$

причем

$$\sum_{j=1}^{s} a_j=1, \qquad \tau_j\geqslant 0, \quad \tau_1<\tau_2<\ldots<\tau_s.$$

Анализируя эмпирические данные, Х. Тамура нашел следующие значения переменных для каждой из распределенных задержек: $s=3$; $\tau_1=0$; $\tau_2=0.5$ сут; $\tau_3=1.0$ сут; $r_0=0$; $q_0=10$; $a_1=0.15$; $a_2=0.70$; $a_3=0.15$, которые можно использовать в рассматриваемой модели.

Итак, если ограничиться наличием в каскаде только трех водоемов с распределенными задержками и учесть влияние случайных возмущений соответствующими членами, можно записать следующую систему обыкновенных стохастических дифференциально-разностных уравнений с кратными запаздываниями, описывающих состояние исследуемой системы:

$$\dot{R}_1(t)=-1.32\,R_1(t)+0.10\,\bar{m}_1(t)+0.90\,r_0(t)+4.19+g_1\,V_1(t),$$

$$\dot{Q}_1(t)=-0.32\,R_1(t)-1.29\,Q_1(t)+0.90\,q_0(t)+1.90+g_2\,V_2(t),$$

$$\dot{R}_2(t)=-1.32\,R_2(t)+0.10\,\bar{m}_2(t)+0.90\sum_{j=1}^{s} a_j\,R_1(t-\tau_j)+4.19+g_3\,V_3(t),$$

$$\dot{Q}_2(t)=-0.32\,R_2(t)-1.29\,Q_2(t)+0.90\sum_{j=1}^{s} a_j\,Q_1(t-\tau_j)+1.90+g_4\,V_4(t),$$

$$\dot{R}_3(t)=-1.32\,R_3(t)+0.10\,\bar{m}_3(t)+0.90\sum_{j=1}^{s} a_j\,R_2(t-\tau_j)+4.19+g_5\,V_5(t),$$

$$\dot{Q}_3(t)=-0.32\,R_3(t)-1.29\,Q_3(t)+0.90\sum_{j=1}^{s} a_j\,Q_2(t-\tau_j)+1.90+g_6\,V_6(t)$$

($g_i = \text{const}$), причем вектор состояния системы имеет вид:

$$\boldsymbol{X}(t) = \operatorname{col}\big(R_1(t), Q_1(t), R_2(t), Q_2(t), R_3(t), Q_3(t)\big) = \big[X_\ell(t)\big]^{\intercal}, \quad \ell = \overline{1,6}.$$

В векторно-матричной форме эта система будет выглядеть так:

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{00}(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{c}_0(t) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(t)\,\boldsymbol{V}(t), \quad t \in (-2\,\tau, -\tau],$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{10}(t)\,\boldsymbol{X}(t-\tau) + \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{11}(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{c}_1(t) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_1(t)\,\boldsymbol{V}(t), \quad t \in (-\tau, 0],$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{20}(t)\,\boldsymbol{X}(t-2\,\tau) + \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{21}(t)\,\boldsymbol{X}(t-\tau) + \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{22}(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \\ + \boldsymbol{c}_2(t) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_2(t)\,\boldsymbol{V}(t), \quad t > 0,$$

где

$$\boldsymbol{\mathcal{Q}}_{00}(t) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{10}(t) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{11}(t) = \boldsymbol{\mathcal{O}}_{6\times 6};$$

$$\boldsymbol{c}_0(t) = \boldsymbol{c}_1(t) = \boldsymbol{O}_6, \qquad \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(t) = \boldsymbol{\mathcal{G}}_1(t) = \boldsymbol{\mathcal{O}}_{6\times 6};$$

$$\boldsymbol{\mathcal{Q}}_{20}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{21}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_2 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\mathcal{Q}}_{22}(t) = \begin{bmatrix} h_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_{21} & h_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & 0 & h_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & h_{21} & h_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_1 & 0 & h_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_1 & h_{21} & h_{22} \end{bmatrix};$$

$$h_{11} = -1.32; \quad h_{21} = -0.32; \quad h_{22} = -1.29; \quad h_1 = 0.135, \quad h_2 = 0.63.$$

Для вычисления первых моментов случайных функций $X_i(t)$ был разработан многошаговый численно-аналитический алгоритм, который основан на схеме, представленной в п. 2.2.2.2 и работах [197, 903], реализован с помощью пакета `Mathematica` и состоит из следующих основных блоков:

– расширение вектора состояния;

– формирование списка новых первых моментов;

– символьное построение систем ОДУ для вектора математических ожиданий и матрицы ковариаций;

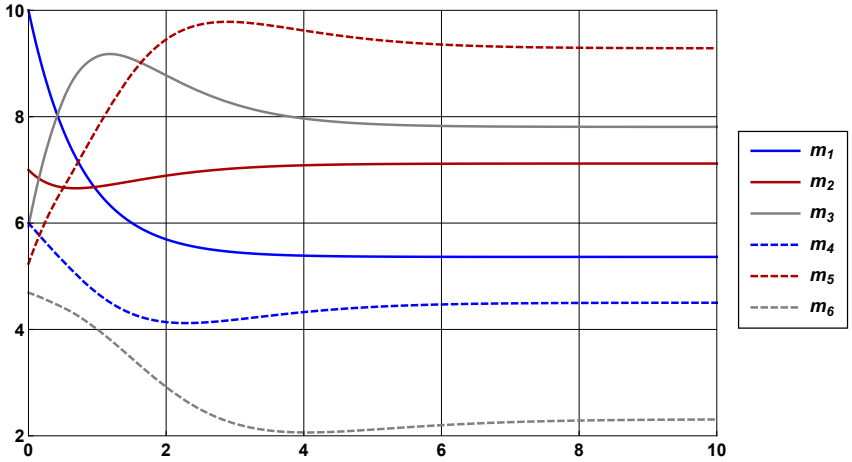


Рис. 2.5.73

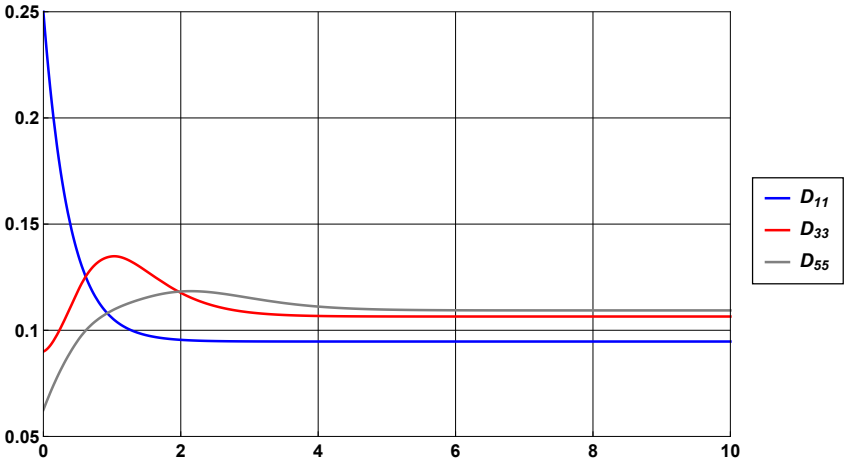


Рис. 2.5.74

– подготовка начальных условий;

– численное интегрирование построенных систем ОДУ;

– сохранение результатов вычислений в конце каждого шага длиной τ для дальнейших вычислений и для визуализации результатов.

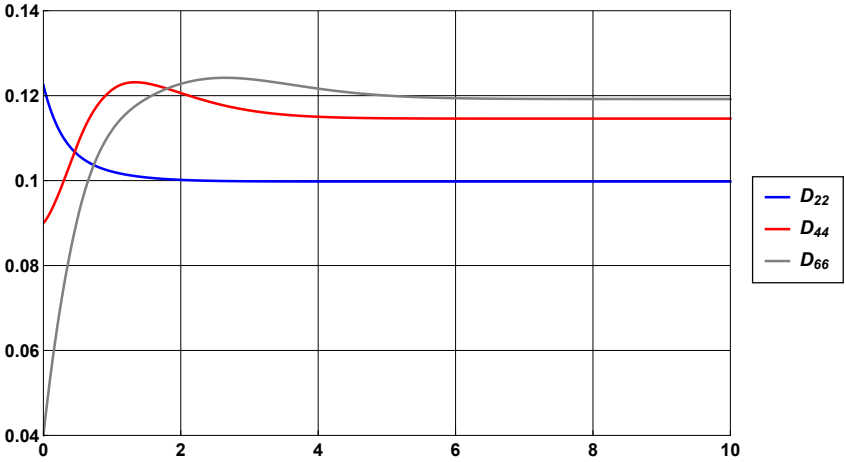


Рис. 2.5.75

Расчеты производились со следующими значениями параметров:

$$\boldsymbol{m}^0 = \operatorname{col}\big(10.0, 7.00, 5.94, 6.0, 5.237, 4.69\big);$$

$$\mathcal{D}^0 = \operatorname{diag}\big(0.2500; 0.1225; 0.0900; 0.0900; 0.0625; 0.0400\big);$$

$$g_1 = g_2 = g_3 = g_4 = g_5 = g_6 = 0.5;$$

$$\bar{\boldsymbol{m}}(t) = \operatorname{col}\big(28.9; 12.9; 10.4\big); \qquad \tau = 0.5; \qquad \nu = 2; \qquad N = 20;$$

причем на последнем этапе численно интегрировались системы 138 и 9730 линейных ОДУ с разреженными матрицами для вектора функций математического ожидания и половины матрицы функций ковариации соответственно. Общее время вычислений составило примерно 5 минут на персональном компьютере, имеющем ЦП с частотой 2 ГГц.

Результаты этих расчетов приведены на рис. 2.5.73 (математические ожидания $m_i(t)$ функций $X_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, 6$), 2.5.74 (дисперсии $\mathcal{D}_{11}(t)$, $\mathcal{D}_{33}(t)$ и $\mathcal{D}_{55}(t)$) и 2.5.75 ($\mathcal{D}_{22}(t)$, $\mathcal{D}_{44}(t)$ и $\mathcal{D}_{66}(t)$).

Заметим, что при данный алгоритм может быть реализован в полностью численной форме. Такая схема была ранее использована на менее мощном компьютере (меньший объем ОЗУ и меньшая скорость ЦП) в среде устаревшего к настоящему времени программного обеспечения с целью сокращения времени вычислений и была основана на генерировании соответствующих `Fortran`-программ и дальнейшем численном интегрировании систем ОДУ в среде Compaq Fortran (шаг 5 алгоритма).

Время расчетов при этом уменьшилось примерно на 40% по сравнению с 2 часами численно-аналитической процедуры, что в принципе является важным при многократном использовании программ, подобных созданным. Наряду с этим отметим и тот факт, что все действия по подготовке и проведению численных расчетов (генерирование `Fortran`-программ, компилирование, редактирование, запуск `exe`-модуля, считывание из текстового файла результатов расчетов) проводилось в автоматическом режиме без вмешательства человека.

ПРИЛОЖЕНИЯ

П.1. Список сокращений и обозначений

ДСВ	дискретная случайная величина
МО	математическое ожидание
НСВ	непрерывная случайная величина
ПВ	плотность вероятности
СВ	случайная величина
СКО	среднее квадратичное отклонение
ТВ	теория вероятностей
ТСП	теория случайных процессов
ТЧ	теория чувствительности
ФР	функция распределения
ХФ	характеристическая функция
ЦПТ	центральная предельная теорема
ДРУ	дифференциально-разностное уравнение
ДРУвЧП	– – – в частных производных
ДУ	дифференциальное уравнение
ДУвЧП	– в частных производных
ДУвЧПНТ	– – нейтрального типа
ДУвЧПсЗ	– – с запаздыванием
ДУвЧПсОА	– – с отклоняющимися аргументами
ДУНТ	– нейтрального типа
ДУНТсЗ	– нейтрального типа с запаздыванием
ДУсЗ	– с запаздыванием
ДУсОА	– с отклоняющимся аргументом
ИДУ	интегро-дифференциальное уравнение
ИДУНТ	– нейтрального типа
ИДУвЧП	– в частных производных
ИУ	интегральное уравнение
КА	компьютерная алгебра
КЛР, KLD	разложение Карунена–Лоэва
МКО	метод конечных объемов
МКР, КРМ	– конечных разностей
МКЭ	– конечных элементов
ММК	– Монте–Карло
МСЛ	– статистической линеаризации
МШРПС	– шагов и расширения пространства состояний
ОДУ	обыкновенное дифференциальное уравнение

ОДУНТ	– нейтрального типа
ОДУсЗ	– с запаздыванием
ОДУсЗА	– с запаздывающими аргументами
ОДУсОпА	– с опережающим аргументом
ОДУсО	– с опережением
ОДУсОА	– с отклоняющимися аргументами
ОИДУ	обыкновенное интегро-дифференциальное уравнение
ОНЗ	основная начальная задача
ОС	операционная система
ОФДУ	обыкновенное функционально-дифференциальное уравнение
ОФДУНТ	– – – — нейтрального типа
ОФДУсП	– с последействием
ПДБ	принцип детального баланса
ПКА	пакет компьютерной алгебры
ПО	программное обеспечение
ПСЧ	псевдослучайное число
ПХР	полиномиальное хаотическое разложение
САВ	система аналитических вычислений
СЛАУ	система линейных алгебраических уравнений
СДРУ	стохастическое дифференциально-разностное уравнение
СДУ	– дифференциальное уравнение
СДУвЧП	– – – в частных производных
СДУвЧПсЗ	– – – – – – нейтрального типа
СДУвЧПсЗ	– – – – – – с запаздыванием
СДУНТ	– – – нейтрального типа
СДУсЗ	– – – с запаздыванием
СДУсоС	– – – со скачками
СИДУ	– интегро-дифференциальное уравнение
СИДУвЧП	– – – – в частных производных
СОДУ	– обыкновенное дифференциальное уравнение
СОДУНТ	– – – – нейтрального типа
СОДУсЗ	– – – – с запаздыванием
СОИДУ	– – интегро-дифференциальное уравнение
СИДУвЧП	– – – в частных производных
СОФДУ	– обыкновенное функционально-дифференциальное уравнение
СФДУ	– функционально-дифференциальное уравнение
СФДУвЧП	– – – – в частных производных
СФПВ	стационарный функционал плотности вероятности
ТП	технологический процесс
ТС	транспортное средство
ТСП	теория случайных (стохастических) процессов
ТЧ	теория чувствительности

ФДУ	функционально-дифференциальное уравнение
ФДУвЧП	– в частных производных
ФДУвЧПЗТ	– – запаздывающего типа
ФДУвЧПНТ	– – нейтрального типа
ФДУЗТ	– запаздывающего типа
ФДУНТ	– нейтрального типа
ФЧ	функция чувствительности
п.н.	почти наверное
GUI	графический интерфейс пользователя

$\mathbb{N}$	множество натуральных чисел
$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$	множество целых неотрицательных чисел
$\mathbb{R}$	множество действительных чисел: $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
$\mathbb{R}^+$	множество положительных действительных чисел
$\mathbb{R}^k$	$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$
$\mathbb{W}^n(\mathbb{D})$	пространство Соболева интегрируемых с квадратом в области $\mathbb{D}$ функций, имеющих обобщенную n-ую производную
$\mathbb{Z}$	множество целых чисел

$\dot{u}(t)$	производная функции $u(t)$ по времени t
$\boldsymbol{i}$	мнимая единица
$\delta(x)$	дельта-функция Дирака
δ_{ij}	символ Кронекера
$\mathbb{I}$	единичная матрица соответствующего порядка
T	символ транспонирования матриц
$\mathrm{diag}(e_1, ..., e_k)$	диагональная матрица с элементами главной диагонали e_1, ..., e_k
col	вектор-столбец, составленный из аргументов функции col
$(2\,k)!!$	$2 \cdot 4 \cdot \ ... \ \cdot 2\,k$
$(2\,k-1)!!$	$1 \cdot 3 \cdot \ ... \ \cdot (2\,k-1)$

$\mathcal{P}(A)$	вероятность случайного события A
$\mathbb{E}[...]$	оператор вычисления математического ожидания
$\mathbb{D}[...]$	оператор вычисления дисперсии
$\mathscr{A}$	σ-алгебра
$\mathscr{B}$	борелевская σ-алгебра
$\mathscr{P}$	вероятностная мера

$f_X(x)$	плотность вероятности СВ X
$F_X(x)$	функция распределения СВ X
$\alpha_k[X]$	начальный момент порядка k СВ X
$\mu_k[X]$	центральный момент порядка k СВ X

m_X	математическое ожидание СВ X
$\mathcal{C}(t_1, t_2)$	ковариационная функция
$\mathcal{D}_X$	дисперсия СВ X
$\mathcal{R}(t_1, t_2)$	корреляционная функция
σ_X	среднее квадратичное отклонение (СКО) СВ X
Me	медиана
Mo	мода
$f_{XY}(x, y)$	совместная плотность вероятности СВ X и Y
$F_{XY}(x, y)$	совместная функция распределения СВ X и Y
$\alpha_{ks}[X, Y]$	смешанный начальный момент порядка k, s СВ X и Y
$\mu_{ks}[X, Y]$	смешанный центральный момент порядка k, s СВ X и Y
$\mu_{11}[X, Y]$	смешанный центральный момент второго порядка
$\mathcal{K}_{XY}$	ковариация СВ X и Y (то же, что $\mu_{11}[X, Y]$)
ρ_{XY}	коэффициент корреляции X и Y
$\Phi(x)$	функция Лапласа
$\varphi_X(z)$	производящая функция ДСВ X
$\phi_X(t)$	характеристическая функция СВ X
$\mathbb{P}\big[\,\cdot\,\big]$	функционал плотности вероятности
$B(p)$	распределение Бернулли с параметром p
$Bi(n, p)$	биномиальное распределение с параметрами n и p
$E(\lambda)$	показательное распределение с параметром λ
$U(a, b)$	равномерное распределение на интервале (a, b)
$\mathcal{N}(a, \sigma^2)$	нормальное распределение с параметрами a и σ^2
$P(\lambda)$	распределение Пуассона с параметром λ
$\xrightarrow{\mathcal{P}}$	сходимость по вероятности
$\xrightarrow{\mathcal{F}}$	сходимость по распределению
$\xrightarrow{\text{п.н.}}$	сходимость "почти наверное"
$\xrightarrow{\text{с.к.}}$	сходимость в среднем квадратичном
◀	начало решения
▶	конец решения
t	время
$\boldsymbol{X}(t)$	$= \{X_i(t)\}^\intercal \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния
$\boldsymbol{V}(t)$	$= \{V_j(t)\}^\intercal \in \mathbb{R}^m$ – вектор независимых случайных функций типа белого шума с единичными интенсивностями, $\mathbb{E}[\boldsymbol{V}(t)] = 0$, $\mathbb{E}\big[\boldsymbol{V}(t)\,\boldsymbol{V}^\intercal(t')\big] = \boldsymbol{\mathcal{I}}_m\,\delta(t - t')$
$\intercal$	символ транспонирования

$\ddagger$	символ сцепления трехмерных матриц относительно - последней размерности
$\boldsymbol{\mathcal{I}}_m$	единичная матрица порядка m
$\boldsymbol{W}(t)$	вектор независимых винеровских процессов
$\boldsymbol{O}_n$	нулевой вектор размерности n
$\boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m}$	нулевая матрица размерности $n \times m$
$[\![\boldsymbol{\mathcal{O}}]\!]_{n\times m\times k}$	нулевая матрица размерности $n \times m \times k$

$\boldsymbol{\mathcal{H}} = \{h_{ij}\}$, $i = 1, 2, ..., n$, $j = 1, 2, ..., m$ – $n \times m$-матрица $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ с элементами h_{ij}:

$$\boldsymbol{\mathcal{H}} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & ... & h_{1m} \\ h_{21} & h_{22} & ... & h_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ h_{n1} & h_{n2} & ... & h_{nm} \end{bmatrix}$$

$|\boldsymbol{\mathcal{H}}| = \det(\boldsymbol{\mathcal{H}})$ – определитель квадратной $(n \times n)$ матрицы $\boldsymbol{\mathcal{H}}$;

:: – символ умножения трехмерной матрицы на вектор:

$$[\![\boldsymbol{\mathcal{P}}(t)]\!] :: \boldsymbol{U}(t) = \Big\{ \sum_{\ell=1}^{r} p_{ij\ell}(t)\, U_\ell(t),\ i = \overline{1,r},\ j = \overline{1,q} \Big\},$$

$$[\![\boldsymbol{\mathcal{P}}(t)]\!] = \{p_{ij\ell}(t)\} \in \mathbb{M}_{r\times q\times r}, \qquad \boldsymbol{U}(t) \in \mathbb{R}^r.$$

Если символы α, β, e_i и e_{ij} представляют мультииндексы, то они и их свойствами определяются так:

$$\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r\}, \qquad \beta = \{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r\},$$

$$k_1\,\alpha + k_2\,\beta = \{k_1\,\alpha_1 + k_2\,\beta_1, k_1\,\alpha_2 + k_2\,\beta_2, ...k_1\,\alpha_n + k_2\,\beta_n\},$$

$$e_i = \{\delta_{ij}\}, \qquad j = 1, 2, ..., r, \qquad e_{ij} = e_i + e_j,$$

$$X^\alpha = X_1^{\alpha_1}\, X_2^{\alpha_2} ... X_r^{\alpha_r}, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1}\, x_2^{\alpha_2} ... x_r^{\alpha_r}, \quad M_\alpha = M_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_r}.$$

1°. *Гамма-функция* определяется формулой

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\, e^{-t}\, dt, \quad \alpha > 0.$$

Ее свойства:

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\,\Gamma(\alpha), \quad \Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

2°. *Бета-функция*:

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}\,(1-t)^{q-1}\, dt = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad p, q > 0.$$

3°. *Дельта-функция Дирака* $\delta(x)$:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx = 1.$$

Свойства: 1) для непрерывной в точке x_0 функции $f(x)$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(x-x_0)\,dx = f(x_0);$$

2) для n раз дифференцируемой в точке x_0 функции $f(x)$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta^{(n)}(x-x_0)\,dx = (-1)^{n-1} f^{(n)}(x_0).$$

П.2. ОДУ для моментных функций вектора состояния для общей линейной параметрической стохастической системы

Построим общую систему ОДУ, описывающую поведение вектора функций математического ожидания $\underline{\boldsymbol{m}}_Z(s) = \{\underline{m}_i(s)\} = \mathbb{E}[\underline{\boldsymbol{Z}}(s)]$ и матрицы ковариаций

$$\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_{ZZ}(s) = \{\underline{\mathcal{K}}_{ij}(s)\} = \mathbb{E}\big[\{\underline{\boldsymbol{Z}}(s) - \underline{\boldsymbol{m}}_Z(s)\}\{\underline{\boldsymbol{Z}}(s) - \underline{\boldsymbol{m}}_Z(s)\}^{\intercal}\big]$$

для вектора состояния $\underline{\boldsymbol{Z}}(s) = \{\underline{Z}_i(s)\} \in \mathbb{R}^r$ линейной стохастической дифференциальной системы с аддитивными и мультипликативными шумами в форме Стратоновича:

$$d\underline{\boldsymbol{Z}}(s) = \big[\underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(s)\,\underline{\boldsymbol{Z}}(s) + \underline{\boldsymbol{c}}(s)\big]\,ds + \big[\,[\![\underline{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(s)]\!] :: \underline{\boldsymbol{Z}}(s) + \underline{\boldsymbol{\mathcal{G}}}(s)\,\big] \circ d\underline{\boldsymbol{W}}(s), \qquad \text{(П.2.1)}$$

$$s_* < s \leqslant s^*,$$

$$\underline{\boldsymbol{Z}}(s_*) = \underline{\boldsymbol{Z}}_*, \qquad \text{(П.2.2)}$$

где основная часть обозначений аналогична обозначениям, введенным в первых разделах статья, а точка указывает на производную по s. Начальное положение – вектор $\underline{\boldsymbol{Z}}_* = \big(\underline{Z}_{*1}, \underline{Z}_{*2}, ..., \underline{Z}_{*r}\big)$ является случайным вектором, распределенным с плотностью вероятности $\hat{p}_*(\underline{\boldsymbol{z}})$, $\underline{\boldsymbol{z}} = (\underline{z}_1, \underline{z}_2, ..., \underline{z}_r)$. Его среднее значение равно $\underline{\boldsymbol{m}}^*_Z = \mathbb{E}[\underline{\boldsymbol{Z}}_*]$, а его матрица ковариаций –

$$\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^*_{ZZ} = \mathbb{E}[(\underline{\boldsymbol{Z}}_* - \underline{\boldsymbol{m}}^*_Z)(\underline{\boldsymbol{Z}}_* - \underline{\boldsymbol{m}}^*_Z)^{\intercal}]\,.$$

Вход $\{\underline{\boldsymbol{W}}(s) = \{\underline{W}_i(s)\},\ s_* \leqslant s \leqslant s^* \in \mathbb{R}^q\}$ – винеровский стохастический процесс с независимыми компонентами. В уравнениях (П.2.1) $\underline{\boldsymbol{A}}(s) = \{\underline{a}_{ij}(s)\}$, $[\![\underline{\boldsymbol{B}}(s)]\!] = \{\underline{b}_{ijk}(s)\}$ и $\underline{\boldsymbol{G}}(s) = \{\underline{g}_{ij}(s)\}$ являются детерминированными вещественными матрицами в $\mathbb{M}_{r\times r}$, $\mathbb{M}_{r\times q\times r}$ и $\mathbb{M}_{r\times q}$ соответственно, $\underline{\boldsymbol{c}}(s) = \{\underline{c}_i(s)\} \in \mathbb{R}^r$ – детерминированный вещественный вектор. Предполагается, что элементы всех этих матриц и векторов являются непрерывными функциями относительно аргумента s.

Коэффициенты сноса $\hat{a}_i$ и коэффициенты диффузии $\hat{b}_{ij}$ ФПК-уравнения

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial s} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{r}\frac{\partial^2\big(\hat{b}_{ij}\,\hat{p}\big)}{\partial \underline{z}_i\,\partial \underline{z}_j} - \sum_{i=1}^{r}\frac{\partial\big(\hat{a}_i\,\hat{p}\big)}{\partial \underline{z}_i}, \tag{П.2.3}$$

$$\hat{p}\,(\underline{\boldsymbol{z}}, s_*) = \hat{p}_*(\underline{\boldsymbol{z}}), \tag{П.2.4}$$

где $\hat{p}\,(\underline{\boldsymbol{z}}, s)$ – плотность вероятности вектора состояния $\underline{\boldsymbol{Z}}(s)$ можно рассчитать, если учесть следующие формулы [134, стр. 46–50]:

$$\hat{a}_i = \sum_{\ell=1}^{r}\underline{a}_{i\ell}\,\underline{z}_\ell + \underline{c}_i + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{k=1}^{q}\underline{b}_{ik\nu}\Big(\sum_{\ell=1}^{r}\underline{b}_{\nu k\ell}\,\underline{z}_\ell + \underline{g}_{\nu k}\Big), \tag{П.2.5}$$

$$\hat{b}_{ij} = \sum_{k=1}^{q}\Big(\sum_{\ell=1}^{r}\underline{b}_{ik\ell}\,\underline{z}_\ell + \underline{g}_{ik}\Big)\Big(\sum_{\ell=1}^{r}\underline{b}_{jk\ell}\,\underline{z}_\ell + \underline{g}_{jk}\Big). \tag{П.2.6}$$

Используя уравнение (П.2.3) и соотношения (П.2.5), (П.2.6), мы можем получить ОДУ для разных моментных функций $M_\alpha(t) = \mathbb{E}[Z^\alpha]$:

$$\begin{aligned}
\dot{M}_\alpha = {}& \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\,(\alpha_i - 1)\times \\
&\times\sum_{k=1}^{q}\big(\underline{g}_{ik}^{\,2}\,M_{\alpha-2e_i} + 2\,\underline{g}_{ik}\sum_{\ell=1}^{r}\underline{b}_{ik\ell}\,M_{\alpha-2e_i+e_\ell} + \sum_{\ell,\nu=1}^{r}\underline{b}_{ik\ell}\,\underline{b}_{ik\nu}\,M_{\alpha-2e_i+e_\ell+e_\nu}\big) \\
&+\sum_{i=1}^{r-1}\sum_{j=i+1}^{r}\alpha_i\,\alpha_j\sum_{k=1}^{q}\big[\underline{g}_{ik}\,\underline{g}_{jk}\,M_{\alpha-e_{ij}} + \sum_{\ell=1}^{r}\big(\underline{g}_{ik}\,\underline{b}_{jk\ell} + \underline{g}_{jk}\,\underline{b}_{ik\ell}\big)\,M_{\alpha-e_{ij}+e_\ell} \\
&\quad+\sum_{\ell,\nu=1}^{r}\underline{b}_{ik\ell}\,\underline{b}_{jk\nu}\,M_{\alpha-e_{ij}+e_\ell+e_\nu}\big] + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\Big[\sum_{\ell=1}^{r}\underline{a}_{i\ell}\,M_{\alpha-e_i+e_\ell} + \underline{c}_i\,M_{\alpha-e_i} \\
&\qquad+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{q}\underline{b}_{ikj}\,\big(\underline{g}_{jk}\,M_{\alpha-e_i} + \sum_{\ell=1}^{r}\underline{b}_{jk\ell}\,M_{\alpha-e_i+e_\ell}\big)\Big], \quad \alpha \geqslant 0,
\end{aligned} \tag{П.2.7}$$

где $M_0 = 1$, α – мультииндекс.

В частности, уравнения для математических ожиданий и дисперсий принимают следующий вид:

$$\dot{\underline{\boldsymbol{m}}}_Z(s) = \underline{\boldsymbol{f}}\big(\underline{\boldsymbol{m}}_Z(s), s\big), \qquad \boldsymbol{m}_Z(s_*) = \underline{\boldsymbol{m}}_Z^*, \tag{П.2.8}$$

$$\dot{\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}}_{ZZ}(s) = \underline{\boldsymbol{\mathcal{F}}}\big(\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_{ZZ}(s), \underline{\boldsymbol{m}}_{Z}(s), s\big), \qquad \underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_{ZZ}(s_*) = \underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}^{*}_{ZZ}, \tag{П.2.9}$$

где $\underline{\boldsymbol{f}} = \{\underline{f}_{\,i}\} \in \mathbb{R}^r$ и $\underline{\boldsymbol{\mathcal{F}}} = \{\underline{\mathcal{F}}_{\,ij}\} \in \mathbb{M}_{r\times r}$ – детерминированные векторная и матричная функции, компоненты которых можно вычислить, если воспользоваться соотношениями вида:

$$\underline{f}_{\,i} = \sum_{\ell=1}^{r} \underline{a}_{i\ell}\,\underline{m}_{\ell} + \underline{c}_{i} + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{k=1}^{q} \underline{b}_{ik\nu}\Big(\sum_{\ell=1}^{r} \underline{b}_{\nu k\ell}\,\underline{m}_{\ell} + \underline{g}_{\,\nu k}\Big),$$

$$i = 1, 2, ..., r; \tag{П.2.10}$$

$$\begin{aligned}
\underline{\mathcal{F}}_{ij} = \sum_{\ell=1}^{r}\Big[\underline{\mathcal{K}}_{i\ell}\Big(\underline{a}_{j\ell} + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{k=1}^{q}\underline{b}_{jk\nu}\,\underline{b}_{\nu k\ell}\Big) + \\
+\underline{\mathcal{K}}_{j\ell}\Big(\underline{a}_{i\ell} + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{k=1}^{q}\underline{b}_{ik\nu}\,\underline{b}_{\nu k\ell}\Big)\Big] + \\
+\sum_{k=1}^{q}\Big[\sum_{\ell_1,\ell_2=1}^{r}\underline{b}_{ik\ell_1}\,\underline{b}_{jk\ell_2}\,(\underline{\mathcal{K}}_{\ell_1\ell_2} + \underline{m}_{\ell_1}\underline{m}_{\ell_2}) + \\
+\sum_{\ell=1}^{r}\big(\underline{g}_{\,ik}\,\underline{b}_{jk\ell} + \underline{g}_{\,jk}\,\underline{b}_{ik\ell}\big)\,\underline{m}_{\ell} + \underline{g}_{\,ik}\,\underline{g}_{\,jk}\Big],
\end{aligned}$$

$$i, j = 1, 2, ..., r. \tag{П.2.11}$$

П.3. Сводка форм стохастических уравнений с запаздыванием

В пунктах П.3.1–П.3.4 приведены основные формы СОДУ с запаздыванием и СОИДУ. Эти формы в конкретных исследованиях служат "кирпичиками" более сложных моделей, включающих различные комбинации определяющих составляющих компонент представленных ниже уравнений и отягощенные дополнительными предположениями, например о разнообразных типах переменности и случайности запаздываний.

Детерминированные аналоги уравнений из разделов П.3.1–П.3.4 не содержат членов с векторными случайными множителями $\boldsymbol{W}(t)$ и $\boldsymbol{P}(t)$, и отсутствует случайность в начальных условиях и запаздываниях.

Еще одним направлением усложнения моделей является рассмотрение эволюционных СДУвЧП с запаздыванием и СИДУвЧП по форме сходных с уравнениями из разделов П.3.1–П.3.4, но в которых векторные случайные процессы заменены векторными случайными полями, и присутствуют частные производные случайного векторного поля состояния

по времени и пространству. Такие уравнения, как и обыкновенные, могут образовывать различные комбинации базовых уравнений, включать разнообразные формы переменных и случайных запаздываний.

Более того, современным направлением исследований являются гибридные модели, включающие комбинации СОДУ с запаздыванием и СОИДУ с эволюционными СДУвЧП с запаздыванием и СИДУвЧП.

Заметим, что если случайность в уравнениях моделей присутствует только в виде случайных начальных условий и/или случайных параметров (случайных величин), то говорят, что такие модели описываются *случайными (интегро-)дифференциальными уравнениями.*

П.3.1. Стохастические обыкновенные дифференциальные уравнения (СОДУ)

1°. Линейные:

$$d\boldsymbol{X}(t) = \big[\boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{c}(t)\big]\,dt + \boldsymbol{\mathcal{Q}}(t)\,d\boldsymbol{W}(t), \quad \boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}^0. \qquad (\text{П.3.1})$$

2°. Линейные параметрические (в смысле Стратоновича):

$$d\boldsymbol{X}(t) = \big[\boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{c}(t)\,\big]\,dt + \big[[\![\boldsymbol{\mathcal{G}}(t)]\!] :: \boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{\mathcal{Q}}(t)\big] \circ d\boldsymbol{W}(t), \quad \boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}^0. \qquad (\text{П.3.2})$$

3°. Нелинейные (в смысле Стратоновича):

$$d\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{X}(t), t\big)\,dt + \boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{X}(t), t\big) \circ d\boldsymbol{W}(t), \quad \boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}^0. \qquad (\text{П.3.3})$$

В этих уравнениях t – время, $t \in \mathbb{T} = [t_0, T]$, $t_0 < T < +\infty$; $\boldsymbol{X}(t) = \operatorname{col}\big(X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t)\big)$, $\boldsymbol{W}(t) = \operatorname{col}\big(W_1(t), W_2(t), \ldots, W_m(t)\big)$ – случайные векторные процессы, определяющие состояние системы (вектор состояния) и случайные возмущения ($\boldsymbol{W}(t)$ – вектор независимых стандартных винеровских процессов) соответственно; $\boldsymbol{c}(t) = \operatorname{col}\big(c_1(t), c_2(t), \ldots, c_n(t)\big)$, $\boldsymbol{f}(\cdot, t) = \operatorname{col}\big(f_1(\cdot, t), f_2(\cdot, t), \ldots, f_n(\cdot, t)\big)$, $\boldsymbol{\mathcal{A}}(t) = \{a_{ij}(t)\}$, $\boldsymbol{\mathcal{Q}}(t) = \{q_{ij}(t)\}$, $[\![\boldsymbol{\mathcal{G}}(t)]\!] = \{g_{ijk}(t)\}$, $\boldsymbol{\mathcal{G}}(\cdot, t) = \{g_{ij}(\cdot, t)\}$ – неслучайные векторные и матричные функции, компоненты которых дифференцируемы необходимое число раз по каждому из своих аргументов; $\boldsymbol{X}^0$ – случайный вектор с известными характеристиками, причем векторы $\boldsymbol{X}^0$ и $\boldsymbol{W}(t)$ статистически независимы; $\mathbb{R}^s$ – стандартное евклидово пространство размерности s; $\operatorname{col}\big(d_1, d_2, \ldots, d_s\big)$ – вектор-столбец с соответствующими компонентами; $[\![\boldsymbol{\mathcal{G}}(t)]\!] :: \boldsymbol{X}(t) = \{\sum_{k=1}^{n} g_{ijk}(t)\,X_k(t)\}$; точкой или точками сверху символа обозначаются производные по переменной t соответствующего порядка.

Плотность вероятности $p(\boldsymbol{x},t)$ вектора состояния $\boldsymbol{X}(t)$ удовлетворяет уравнению Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК-уравнению, второму уравнению Колмогорова) следующего вида:

$$\frac{\partial p(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2\big[b_{ij}(\boldsymbol{x},t)\,p(\boldsymbol{x},t)\big]}{\partial x_i\,\partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\big[a_i(\boldsymbol{x},t)\,p(\boldsymbol{x},t)\big]}{\partial x_i}, \qquad \text{(П.3.4)}$$

$$p(\boldsymbol{x},t_0) = p^{\,0}(\boldsymbol{x}),$$

где $p^{\,0}(\boldsymbol{x})$ –плотность распределения начального вектора $\boldsymbol{X}^0$,

$$b_{ij}(\boldsymbol{x},t) = \sum_{k=1}^{m} g^*_{ik}(\boldsymbol{x},t)\,g^*_{jk}(\boldsymbol{x},t), \qquad \text{(П.3.5)}$$

$$a_i(\boldsymbol{x},t) = f^*_i(\boldsymbol{x},t) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g^*_{ik}(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_j}\,g^*_{jk}(\boldsymbol{x},t), \qquad \text{(П.3.6)}$$

Модель	$\boldsymbol{f}^*(\boldsymbol{x},t) = \{f^*_i(\boldsymbol{x},t)\}$	$\boldsymbol{\mathcal{G}}^*(\boldsymbol{x},t) = \{g^*_{ij}(\boldsymbol{x},t)\}$
1°.	$\boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\,\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{c}(t)$	$\boldsymbol{\mathcal{Q}}(t)$
2°.	$\boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\,\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{c}(t)$	$[\![\boldsymbol{\mathcal{G}}(t)]\!] :: \boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{\mathcal{Q}}(t)$
3°.	$\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}(t),t\big)$	$\boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{x}(t),t\big)$

Обобщения

1°. Если среди возмущений системы присутствуют и скачкообразные в форме вектора независимых пуассоновских процессов $\boldsymbol{P}(t) = \operatorname{col}\big(P_1(t), P_2(t), ..., P_r(t)\big)$, то уравнения (П.3.1)–(П.3.3) принимают следующие формы:

$$d\boldsymbol{X}(t) = \big[\boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{c}(t)\big]\,dt + \boldsymbol{\mathcal{Q}}(t)\,d\boldsymbol{W}(t) + \boldsymbol{\mathcal{O}}(t)\,d\boldsymbol{P}(t); \qquad \text{(П.3.7)}$$

$$d\boldsymbol{X}(t) = \big[\boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{c}(t)\big]\,dt + \big[[\![\boldsymbol{\mathcal{G}}(t)]\!] :: \boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{\mathcal{Q}}(t)\big] \circ d\boldsymbol{W}(t) + \big[[\![\boldsymbol{\mathcal{H}}(t)]\!] :: \boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{\mathcal{O}}(t)\big]\,d\boldsymbol{P}(t); \qquad \text{(П.3.8)}$$

$$d\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{X}(t),t\big)\,dt + \boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{X}(t),t\big) \circ d\boldsymbol{W}(t) + \boldsymbol{\mathcal{H}}\big(\boldsymbol{X}(t),t\big)\,d\boldsymbol{P}(t); \qquad \text{(П.3.9)}$$

$$\boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}^0,$$

где $\boldsymbol{\mathcal{O}}(t) = \{o_{ij}(t)\}$, $[\![\boldsymbol{\mathcal{H}}(t)]\!] = \{h_{ijk}(t)\}$, $\boldsymbol{\mathcal{H}}(\cdot,t) = \{h_{ij}(\cdot,t)\}$ – неслучайные векторные и матричные функции, компоненты которых дифференцируемы необходимое число раз по каждому из своих аргументов.

2°. Форму обобщенного ФПК-уравнения для случая присутствия в СОДУ пуассоновских процессов можно найти в работе [645].

П.3.2. Стохастические обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными запаздываниями (СОДУсПЗ)

1°. Линейные с одним запаздыванием:

$$d\boldsymbol{X}(t) = \big[\boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{\mathcal{B}}(t)\,\boldsymbol{X}(t-\tau) + \boldsymbol{c}(t)\big]\,dt + \boldsymbol{\mathcal{Q}}(t)\,d\boldsymbol{W}(t), \quad t > t_0 + \tau; \tag{П.3.10}$$

$$d\boldsymbol{X}(t) = \big[\boldsymbol{\mathcal{A}}_0(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{c}_0(t)\big]\,dt + \boldsymbol{\mathcal{Q}}_0(t)\,d\boldsymbol{W}(t), \quad t_0 < t \leqslant t_0 + \tau, \quad \boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}^0. \tag{П.3.11}$$

2°. Линейные параметрические (в смысле Стратоновича):

$$d\boldsymbol{X}(t) = \big[\boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{\mathcal{B}}(t)\,\boldsymbol{X}(t-\tau) + \boldsymbol{c}(t)\,\big]\,dt + \big[[\![\boldsymbol{\mathcal{G}}(t)]\!] :: \boldsymbol{X}(t) + [\![\boldsymbol{\mathcal{J}}(t)]\!] :: \boldsymbol{X}(t-\tau) + \boldsymbol{\mathcal{Q}}(t)\big] \circ d\boldsymbol{W}(t), \quad t > t_0 + \tau; \tag{П.3.12}$$

$$d\boldsymbol{X}(t) = \big[\boldsymbol{\mathcal{A}}_0(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{c}_0(t)\,\big]\,dt + \big[[\![\boldsymbol{\mathcal{J}}_0(t)]\!]\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{\mathcal{Q}}_0(t)\big] \circ d\boldsymbol{W}(t), t_0 < t \leqslant t_0 + \tau, \quad \boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}^0. \tag{П.3.13}$$

3°. Нелинейные (в смысле Стратоновича):

$$d\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{X}(t), \boldsymbol{X}(t-\tau), t\big)\,dt + \boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{X}(t), \boldsymbol{X}(t-\tau), t\big) \circ d\boldsymbol{W}(t), \quad t > t_0 + \tau; \tag{П.3.14}$$

$$d\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{f}_0\big(\boldsymbol{X}(t), t\big)\,dt + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0\big(\boldsymbol{X}(t), t\big) \circ d\boldsymbol{W}(t), \quad t_0 < t \leqslant t_0 + \tau, \quad \boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}^0. \tag{П.3.15}$$

В этих уравнениях дополнительно к обозначениям пункта П.6.1: τ – постоянное запаздывание; $\boldsymbol{c}_0(t) = \operatorname{col}\big(c_{01}(t), c_{20}(t), ..., c_{0n}(t)\big)$, $\boldsymbol{f}_0\big(\cdot, t\big) = \operatorname{col}\big(f_{01}(\cdot, t), f_{02}(\cdot, t), ..., f_{0n}(\cdot, t)\big)$, $\boldsymbol{\mathcal{B}}(t) = \{\, b_{ij}(t)\,\}$, $\boldsymbol{\mathcal{A}}_0(t) = \{\, a_{0ij}(t)\,\}$, $\boldsymbol{\mathcal{Q}}_0(t) = \{\, q_{0ij}(t)\,\}$, $[\![\boldsymbol{\mathcal{G}}_0(t)]\!] = \{q_{0ijk}(t)\,\}$, $[\![\boldsymbol{\mathcal{J}}(t)]\!] = \{\, j_{ijk}(t)\,\}$, $\boldsymbol{\mathcal{G}}_0(\cdot, t) = \{\, g_{0ij}(\cdot, t)\,\}$ – неслучайные векторные и матричные функции, компоненты которых дифференцируемы необходимое число раз по каждому из своих аргументов.

Обобщения

1°. Задание форм СОДУ без запаздывания на начальных множествах $(t_0, t_0 + \tau]$ не препятствует использованию других способов определения векторного случайного процесса $X(t)$ на этих множествах, например для $\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{O}_n$ при $t \in (t_0, t_0 + \tau]$ уравнения (П.3.10), (П.3.13), (П.3.15) можно определить так:

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{O}_n, \quad t_0 < t \leqslant t_0 + \tau, \quad \boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{O}_n \text{ a.s.}, \tag{П.3.16}$$

где a.s. – почти наверное.

2°. Если среди возмущений системы присутствуют и скачкообразные в форме вектора независимых пуассоновских процессов $\boldsymbol{P}(t) = \operatorname{col}\big(P_1(t), P_2(t), \ldots, P_r(t)\big)$, то уравнения (П.3.10)–(П.3.15) принимают следующие формы:

$$d\boldsymbol{X}(t) = \big[\boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{\mathcal{B}}(t)\,\boldsymbol{X}(t-\tau) + \boldsymbol{c}(t)\big]\,dt + \\ + \boldsymbol{\mathcal{Q}}(t)\,d\boldsymbol{W}(t) + \boldsymbol{\mathcal{O}}(t)\,d\boldsymbol{P}(t), \quad t > t_0 + \tau; \tag{П.3.17}$$

$$d\boldsymbol{X}(t) = \big[\boldsymbol{\mathcal{A}}_0(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{c}_0(t)\big]\,dt + \boldsymbol{\mathcal{Q}}_0(t)\,d\boldsymbol{W}(t) + \boldsymbol{\mathcal{O}}_0(t)\,d\boldsymbol{P}(t), \\ t_0 < t \leqslant t_0 + \tau, \quad \boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}^0; \tag{П.3.18}$$

$$d\boldsymbol{X}(t) = \big[\boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{\mathcal{B}}(t)\,\boldsymbol{X}(t-\tau) + \boldsymbol{c}(t)\big]\,dt + \\ + \big[[\![\boldsymbol{\mathcal{G}}(t)]\!] :: \boldsymbol{X}(t) + [\![\boldsymbol{\mathcal{J}}(t)]\!] :: \boldsymbol{X}(t-\tau) + \boldsymbol{\mathcal{Q}}(t)\big] \circ d\boldsymbol{W}(t) + \\ + \big[[\![\boldsymbol{\mathcal{H}}(t)]\!] :: \boldsymbol{X}(t) + [\![\boldsymbol{\mathcal{K}}(t)]\!] :: \boldsymbol{X}(t-\tau) + \boldsymbol{\mathcal{O}}(t)\big]\,d\boldsymbol{P}(t), \\ t > t_0 + \tau; \tag{П.3.19}$$

$$d\boldsymbol{X}(t) = \big[\boldsymbol{\mathcal{A}}_0(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{c}_0(t)\big]\,dt + \big[[\![\boldsymbol{\mathcal{G}}_0(t)]\!] :: \boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{\mathcal{Q}}_0(t)\big] \circ d\boldsymbol{W}(t) + \\ + \big[[\![\boldsymbol{\mathcal{H}}_0(t)]\!] :: \boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{\mathcal{O}}_0(t)\big]\,d\boldsymbol{P}(t), \quad t_0 < t \leqslant t_0 + \tau, \\ \boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}^0; \tag{П.3.20}$$

$$d\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{X}(t), \boldsymbol{X}(t-\tau), t\big)\,dt + \boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{X}(t), \boldsymbol{X}(t-\tau), t\big) \circ d\boldsymbol{W}(t) + \\ + \boldsymbol{\mathcal{H}}\big(\boldsymbol{X}(t), \boldsymbol{X}(t-\tau), t\big)\,d\boldsymbol{P}(t), \quad t > t_0 + \tau; \tag{П.3.21}$$

$$d\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{f}_0\big(\boldsymbol{X}(t), t\big)\,dt + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0\big(\boldsymbol{X}(t), t\big) \circ d\boldsymbol{W}(t) + \\ + \boldsymbol{\mathcal{H}}_0\big(\boldsymbol{X}(t), t\big)\,d\boldsymbol{P}(t), \quad t_0 < t \leqslant t_0 + \tau, \quad \boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}^0, \tag{П.3.22}$$

где $\boldsymbol{\mathcal{O}}(t) = \{\, o_{ij}(t)\,\}$, $\boldsymbol{\mathcal{O}}_0(t) = \{\, o_{0ij}(t)\,\}$, $[\![\boldsymbol{\mathcal{H}}(t)]\!] = \{h_{ijk}(t)\,\}$, $[\![\boldsymbol{\mathcal{H}}_0(t)]\!] = \{\, h_{0ijk}(t)\,\}$, $[\![\boldsymbol{\mathcal{K}}(t)]\!] = \{\, k_{ijk}(t)\,\}$, $\boldsymbol{\mathcal{H}}(\cdot, t) = \{\, h_{ij}(\cdot, t)\,\}$, $\boldsymbol{\mathcal{H}}_0(\cdot, t) = \{h_{0ij}(\cdot, t)\,\}$ – неслучайные векторные и матричные функции, компоненты которых дифференцируемы необходимое число раз по каждому из своих аргументов.

3°. Если в системе присутствуют множественные кратные запаздывания (ν – кратность), то в уравнениях (П.3.10), (П.3.12), (П.3.14) слагаемые $\boldsymbol{\mathcal{B}}(t)\,\boldsymbol{X}(t-\tau)$, $[\![\boldsymbol{\mathcal{J}}(t)]\!] :: \boldsymbol{X}(t-\tau)$, $\boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{X}(t), \boldsymbol{X}(t-\tau), t\big)$ необходимо заменить на

$$\sum_{\ell=1}^{\nu} \boldsymbol{\mathcal{B}}_\ell(t)\,\boldsymbol{X}(t - \ell\,\tau), \qquad \sum_{\ell=1}^{\nu} [\![\boldsymbol{\mathcal{J}}(t)]\!] :: \boldsymbol{X}(t - \ell\,\tau), \tag{П.3.23}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{X}(t), \boldsymbol{X}(t-\tau), \boldsymbol{X}(t-2\,\tau), ..., \boldsymbol{X}(t-\nu\,\tau), t\big) \tag{П.3.24}$$

соответственно.

4°. Если в системе присутствуют множественные некратные запаздывания (ν – их количество; хотя бы одно отношение каких-либо двух запаздываний не является рациональным числом), то в уравнениях (П.3.10), (П.3.12), (П.3.14) слагаемые $\boldsymbol{\mathcal{B}}(t)\,\boldsymbol{X}(t-\tau)$, $[\![\boldsymbol{\mathcal{J}}(t)]\!] :: \boldsymbol{X}(t-\tau)$, $\boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{X}(t), \boldsymbol{X}(t-\tau), t\big)$ необходимо заменить на

$$\sum_{\ell=1}^{\nu} \boldsymbol{\mathcal{B}}_\ell(t)\,\boldsymbol{X}(t-\tau_\ell), \qquad \sum_{\ell=1}^{\nu} [\![\boldsymbol{\mathcal{J}}(t)]\!] :: \boldsymbol{X}(t-\tau_\ell), \tag{П.3.25}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{X}(t), \boldsymbol{X}(t-\tau_1), \boldsymbol{X}(t-\tau_2), ..., \boldsymbol{X}(t-\tau_\nu), t\big) \tag{П.3.26}$$

соответственно.

5°. Аналога замкнутого ФПК-уравнения в дифференциальной форме для плотности $p(\boldsymbol{x}, t)$ вектора состояния системы СОДУ с запаздыванием не существует.

П.3.3. Стохастические обыкновенные дифференциальные уравнения нейтрального типа с постоянными запаздываниями (СНОДУсПЗ)

1°. Линейные с одним запаздыванием:

$$d\big[\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{\mathcal{R}}(t)\,\boldsymbol{X}(t-\tau)\big] = \big[\boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{\mathcal{B}}(t)\,\boldsymbol{X}(t-\tau) + \boldsymbol{c}(t)\big]\,dt + \\ + \boldsymbol{\mathcal{Q}}(t)\,d\boldsymbol{W}(t), \quad t > t_0 + \tau; \tag{П.3.27}$$

$$d\boldsymbol{X}(t) = \big[\boldsymbol{\mathcal{A}}_0(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{c}_0(t)\big]\,dt + \boldsymbol{\mathcal{Q}}_0(t)\,d\boldsymbol{W}(t), \\ t_0 < t \leqslant t_0 + \tau, \quad \boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}^0. \tag{П.3.28}$$

2°. Линейные параметрические (в смысле Стратоновича):

$$d\big[\boldsymbol{X}(t) + \mathcal{R}(t)\,\boldsymbol{X}(t-\tau)\big] = \big[\boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{\mathcal{B}}(t)\,\boldsymbol{X}(t-\tau) + \boldsymbol{c}(t)\big]\,dt + \\ + \big[[\![\boldsymbol{\mathcal{G}}(t)]\!] :: \boldsymbol{X}(t) + [\![\boldsymbol{\mathcal{J}}(t)]\!] :: \boldsymbol{X}(t-\tau) + \boldsymbol{\mathcal{Q}}(t)\big] \circ d\boldsymbol{W}(t), \tag{П.3.29}$$

$$t > t_0 + \tau; \tag{П.3.30}$$

$$d\boldsymbol{X}(t) = \big[\boldsymbol{\mathcal{A}}_0(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{c}_0(t)\big]\,dt + \big[[\![\boldsymbol{\mathcal{G}}_0(t)]\!]\boldsymbol{G}(t) :: \boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{\mathcal{Q}}_0(t)\big] \circ d\boldsymbol{W}(t), \\ t_0 < t \leqslant t_0 + \tau, \quad \boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}^0. \tag{П.3.31}$$

3°. Нелинейные (в смысле Стратоновича)

$$d\big[\boldsymbol{X}(t) + \mathcal{R}(t)\,\boldsymbol{X}(t-\tau)\big] = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{X}(t), \boldsymbol{X}(t-\tau), t\big)\,dt +$$

$$+ \boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{X}(t), \boldsymbol{X}(t-\tau), t\big) \circ d\boldsymbol{W}(t), t > t_0 + \tau; \tag{П.3.32}$$

$$d\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{f}_0\big(\boldsymbol{X}(t), t\big)\, dt + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0\big(\boldsymbol{X}(t), t\big) \circ d\boldsymbol{W}(t), \quad t_0 < t \leqslant t_0 + \tau,$$

$$\boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}^0. \tag{П.3.33}$$

В этих уравнениях дополнительно к обозначениям пунктов П.6.1 и П.6.2: $\boldsymbol{\mathcal{R}}(t) = \{r_{ij}(t)\}$ – неслучайная матричная функция, компоненты которой дифференцируемы необходимое число раз по каждому из своих аргументов.

Обобщения

1°. По заданию форм СОДУ без запаздывания на начальных множествах $(t_0, t_0 + \tau]$ см. первое обобщение в пункте П.6.2.

2°. По ситуации с присутствием в системе скачкообразных флуктуаций в форме вектора независимых пуассоновских процессов см. второе обобщение в пункте П.6.2.

3°. По ситуации с присутствием в системе множественных кратных запаздываний см. третье обобщение в пункте П.6.2. Кроме того, дополнительно слагаемое $\boldsymbol{\mathcal{R}}(t)\, \boldsymbol{X}(t-\tau)$ необходимо заменить на

$$\sum_{\ell=1}^{\nu} \boldsymbol{\mathcal{R}}_\ell(t)\, \boldsymbol{X}(t - \ell\, \tau). \tag{П.3.34}$$

4°. По ситуации с присутствием в системе множественных некратных запаздываний см. четвертое обобщение в пункте П.6.2. Кроме того, дополнительно слагаемое $\boldsymbol{\mathcal{R}}(t)\, \boldsymbol{X}(t-\tau)$ необходимо заменить на

$$\sum_{\ell=1}^{\nu} \boldsymbol{\mathcal{R}}_\ell(t)\, \boldsymbol{X}(t - \tau_\ell). \tag{П.3.35}$$

5°. Аналога замкнутого ФПК-уравнения в дифференциальной форме для плотности $p(\boldsymbol{x}, t)$ вектора состояния системы СОДУ нейтрального типа не существует.

П.3.4. Стохастические обыкновенные интегро-дифференциальные уравнения (СОИДУ)

1°. Линейные:

$$d\boldsymbol{X}(t) = \Big[\boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\, \boldsymbol{X}(t) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\mathcal{K}}(t, s)\, \boldsymbol{X}(s)\, ds + \boldsymbol{c}(t)\Big]\, dt + \boldsymbol{\mathcal{Q}}(t)\, d\boldsymbol{W}(t),$$

$$\boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}^0.$$

2°. Линейные параметрические (в смысле Стратоновича):

$$d\boldsymbol{X}(t) = \Big[\boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\mathcal{K}}(t,s)\,\boldsymbol{X}(s)\,ds + \ \boldsymbol{c}(t)\Big]\,dt + \\ + \big[[\![\boldsymbol{\mathcal{G}}(t)]\!] :: \boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{\mathcal{Q}}(t)\big] \circ d\boldsymbol{W}(t), \quad \boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}^0.$$

3°. Нелинейные (в смысле Стратоновича) с линейным ядром:

$$d\boldsymbol{X}(t) = \Big[\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{X}(t),t\big) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\mathcal{K}}(t,s)\,\boldsymbol{X}(s)\,ds\Big]\,dt + \\ + \boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{X}(t),t\big) \circ d\boldsymbol{W}(t), \quad \boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}^0.$$

4°. Нелинейные (в смысле Стратоновича) с нелинейным ядром

$$d\boldsymbol{X}(t) = \Big[\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{X}(t),t\big) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{h}\big(\boldsymbol{X}(t),t;\boldsymbol{X}(s),s\big)\,ds\Big]\,dt + \\ + \boldsymbol{\mathcal{G}}\big(\boldsymbol{X}(t),t\big) \circ d\boldsymbol{W}(t), \quad \boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}^0.$$

В этих уравнениях $\boldsymbol{\mathcal{K}}(t,s) = \{\, k_{ij}(t,s\,\}$,

$$\boldsymbol{h}\big(\cdot,t;\cdot,\tau\big) = \operatorname{col}\big(h_1\big(\cdot,t;\cdot,\tau\big), h_2\big(\cdot,t;\cdot,\tau\big), ..., h_n\big(\cdot,t;\cdot,\tau\big)\big)$$

– неслучайные матричные и векторные функции, компоненты которых дифференцируемы необходимое число раз по каждому из своих аргументов.

Комментарии

1°. По ситуации с присутствием в системе скачкообразных флуктуаций в форме вектора независимых пуассоновских процессов см. первое обобщение в пункте П.6.1.

2°. В ситуации с присутствием в системе ограниченных распределенных запаздываний (в СОИДУ выше запаздывания неограниченные распределенные) необходимо нижние пределы в интегралах заменить, например, на $t-\tau$ и задать поведение векторного случайного процесса при $t \in [t_0-\tau, t_0]$.

3°. По ситуации с присутствием в системе множественных распределенных запаздываний интеграл вида

$$\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\mathcal{K}}(t,s)\,\boldsymbol{X}(s)\,ds \quad \text{или} \quad \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{h}\big(\boldsymbol{X}(t),t;\boldsymbol{X}(s),s\big)\,ds$$

необходимо заменить на

$$\sum_{\ell=1}^{\nu}\int_{t-\tau_\ell}^{t}\boldsymbol{\mathcal{K}}_\ell(t,s)\,\boldsymbol{X}(s)\,ds \quad \text{или} \quad \sum_{\ell=1}^{\nu}\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{h}_\ell\big(\boldsymbol{X}(t),t;\boldsymbol{X}(s),s\big)\,ds.$$

4°. Аналога замкнутого ФПК-уравнения в дифференциальной форме для плотности $p(\boldsymbol{x},t)$ вектора состояния системы СОИДУ не существует.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Агачев Ю.Р.* Прямые методы решения интегральных уравнений второго рода: учебн. пособ. – Казань: Казанский гос. ун-тет, 2006. – 68 с.

2. *Агачев Ю.Р., Леонов А.И.* Решение одного класса интегродифференциальных уравнений методом механических квадратур // Изв. вузов. Матем. – 2005. – № 7. – С. 3–7.

3. *Азбелев Н.В., Максимов В.П.* Уравнения с запаздывающим аргументом // ДУ. – 1982. – Т. 18, № 12. – С. 2027–2050.

4. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1991. – 280 с.

5. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. – М.: Институт компьютерных исследований, 2002. – 384 с.

6. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Симонов П.М.* Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения // Вестн. Удмуртск. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2009. – Вып. 1. – С. 3–23.

7. *Алгазин С.Л., Кондратьев В.В.* Программирование на Visual Fortran. – М.: Диалог-МИФИ, 2008. – 472 с.

8. *Александрова И.Л.* Из истории теории интегральных уравнений. – Автореферат дисс. ... к.ф.-м.н. – М.: МГУ, 1992. – 13 с.

9. *Андреева Е.А., Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е.* Управление системами с последействием. – М.: Наука, 1992. – 336 с.

10. *Андриевский Б.Р., Матвеев А.С., Фрадков А.Л.* Управление и оценивание при информационных ограничениях: к единой теории управления, вычислений и связи // АиТ. – 2013. № 4. – С. 34–99.

11. *Андронов А.А., Майер А.Г.* Простейшие линейные системы с запаздыванием // АиТ. – 1946. – Т. 7, вып. 2–3. – P. 95–106.

12. *Анулова С.В., Веретенников А.Ю., Крылов Н.В. и др.* Стохастическое исчисление // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. – М.: ВИНИТИ, 1989. – Т. 45. – С. 5–260.

13. *Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В.* Контактные задачи теории ползучести. – Ереван: Институт механики НАН, 1999. – 320 с.

14. *Арушанян И.О.* Численное решение интегральных уравнений методом квадратур: Практикум на ЭВМ. – М.: ММФ МГУ, 2012. – 71 с.

15. *Астапов Ю.М., Медведев В.С.* Статистическая теория систем автоматического регулирования и управления. – М.: Наука, 1982. – 304 с.

16. *Ахмеров Р.Р., Каменский М.И., Потапов А.С.и др.* Теория уравнений нейтрального типа // Итоги науки и техники. Сер. Математический анализ. – 1982. – Т. 19. – С. 55–126.

17. *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления. – М.: Высшая школа, 2003. – 615 с.

18. *Бабаков И.М.* Теория колебаний: учеб. пособие. – 4-е изд., испр. – М.: Дрофа, 2004. – 591 с.

19. *Балтычева С.С., Кучумова Е.Т., Полосков И.Е.* О стохастических моделях динамики цен финансовых инструментов // Вестник Пермского ун-та. Информационные системы и технологии. – 2009. – Вып. 9 (35). – С. 10–17.

20. *Бартеньев О.В.* Современный Фортран. – 3-е изд., доп. и перераб. – М.: ДИАЛОГ–МИФИ, 2000. – 448 с.

21. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, 1974. – Т. 2. – 296 с.

22. *Бекларян Л.А.* Дифференциальные уравнения с отклоняющим аргументом как бесконечномерная динамическая система / ВЦ АН СССР. – М., 1989. – 18 с.

23. *Белан Е.П.* Асимптотический метод в теории квазилинейных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра второго порядка // УМЖ. – 1982. – № 6. – С. 738–741.

24. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. – М.: Мир, 1967. – 548 с.

25. *Белоцерковский С.М., Кочетков Ю.А., Красовский А.А. и др.* Введение в аэроавтоупругость. – М.: Наука, 1980. – 383 с.

26. *Бельтюков Б.А.* Аналог метода Рунге–Кутта для решения нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра // ДУ. – 1965. – Т. 1, № 4. – С. 545–556.

27. *Березовский А.А.* Интегро-дифференциальные уравнения нелинейной теории пологих тонких оболочек // УМЖ. – 1960. – Т. 12, № 4. – С. 373–380.

28. *Бесекерский В.А., Попов Е.П.* Теория систем автоматического регулирования. – 3-е изд., испр. – М.: Наука, 1975. – 768 с.

29. *Богатов Е.М., Мухин Р.Р.* Из истории нелинейных интегральных уравнений // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 2016. – Т. 24, № 2. – С. 77–114.

30. *Бойков И.В.* Приближенные методы решений сингулярных интегральных уравнений. – Пенза: Изд-во ПГУ. 2004. – 316 с.

31. *Болотин В.В.* Случайные колебания упругих систем. – М.: Наука, 1979. – 336 с.

32. *Болотин В.В.* Методы теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. – М.: Стройиздат, 1982. — 351 с.

33. *Бухалев В.А.* Распознавание, оценивание и управление в системах со случайной скачкообразной структурой. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 1996. – 288 с.

34. *Вайнберг М. М.* Интегро-дифференциальные уравнения // Итоги науки. Сер. Матем. анализ. Теория вероятн. Регулирование. 1962. – М.: ВИНИТИ, 1964. – С. 5–37.

35. *Валов С.А.* Стабилизация 2D-системы итеративного обучающего управления при передаче данных по каналу сети со случайным запаздыванием и потерей пакетов данных // Управление большими системами. – М.: ИПУ РАН, 2013. – Вып. 41. – С. 113–145.

36. *Василишин С.А., Фодчук В.И.* О построении асимптотических решений для квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных с запаздыванием по времени // УМЖ. – 1967. – Т. 19, № 4. – С. 108–113.

37. *Васильева А.В., Тихонов Н.А.* Интегральные уравнения: учебник. – 3-е изд., стер. – СПб.: Изд-во "Лань", 2009. – 160 с.

38. *Вентцель А.Д.* Курс теории случайных процессов. – М.: Наука. Физматлит, 1996. – 400 с.

39. *Верлань А.Ф., Сизиков В.С.* Интегральные уравнения. Методы, алгоритмы, программы: справ. пособие. – К.: Наукова думка, 1986. – 544 с.

40. *Верлань А.Ф., Худаяров Б.А., Файзибоев Э.Ф. и др.* Компьютерное моделирование флаттера вязкоупругих пластин в сверхзвуковом потоке газа // Вестник НТУ ХПИ. Сер. Информатика и моделирование. – 2012. – № 62. – с.i5–23.

41. *Виноградова Э.В., Шепелев Г.В.* К вопросу о дифференцируемости воздействий при вероятностном анализе колебаний механических систем // Динамика и прочность конструкций: тематич. сб-к научн. тр. – Челябинск: ЧПИ, 1975. – № 159.

– С. 33–40.

42. *Владимиров В.С., Лебедев В.И.* Ядерная энергетика и математика // Современные проблемы вычислительной математики и математического моделирования / Ин-т вычисл. математики. – М.: Наука, 2005. – Т. 2. – С. 5–37.

43. *Волков И.К., Зуев С.М., Цветкова Г.М.* Случайные процессы. – 3-е изд. – М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2006. – 448 с.

44. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. – 2-е изд. – М.: Наука, 1967. – 984 с.

45. *Вольтерра В.* Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений: пер. с англ. – М.: Наука, 1982. – 304 с.

46. *Гальперин В.М., Игнатьев С.М., Морозов В.И.* Микроэкономика. – В 2-х т. / Под общей ред. В.М. Гальперина. – СПб.: Экономическая школа, 2002. – Т. 1. – 349 с.

47. *Гардинер К.В.* Стохастические методы в естественных науках. – М.: Мир, 1986. – 528 с.

48. *Геворкян Э.А.* Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом: учебн. пособ. – М.: МГУЭСиИ, 2004. – 79 с.

49. *Гиляров Н.П.* Моделирование речных потоков. – Л.: Гидрометеоиздат, 1973. – 200 с.

50. *Гихман И.И.,Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения. – К.: Наукова думка, 1968. – 354 с.

51. *Гноенский Л.С., Каменский Г.А., Эльсгольц Л.Э.* Математические основы теории управляемых систем. – М.: Наука, 1969. – 519 с.

52. *Гоноровский И.С.* Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Радио и связь, 1986. – 512 с.

53. *Горелик Г.И.* К теории запаздывающей обратной связи // Журн. техн. физики. – 1939. – Т. 9, вып. 5. – С. 450–454.

54. *Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Тарлаковский Д.В.* Теория упругости и пластичности: учеб. для вузов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 416 с.

55. *Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В.* Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 576 с.

56. *Гринвальд Д.И.* Турбулентность русловых потоков. – Л.: Гидрометеоиздат, 1974. – 167 с.

57. *Гурли С.А., Соу Дж.В.-Х., Вус Дж.Х.* Нелокальные уравнения реакции-диффузии с запаздыванием: биологические модели и нелинейная динамика // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2003. – Т. 1. – С. 84–120.

58. *Гусев А.С., Светлицкий В.А.* Расчет конструкций при случайных воздействиях. – М.: Машиностроение, 1984. – 240 с.

59. *Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З.* Численные методы анализа. – М.: Физматгиз, 1967. – 400 с.

60. *Диментберг М.Ф.* Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. – М.: Наука, 1980. – 368 с.

61. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. – М.: Наука, 1974. – 544 с.

62. *Долгий Ю.Ф., Тарасян В.С.* Условия конечномерности оператора монодромии для периодических систем с последействием // Известия вузов. Математика. – 2003. – № 4 (491). – С. 27–39.

63. *Долгий Ю.Ф., Сурков П.Г.* Математические модели динамических систем с запаздыванием: учеб. пособие. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2012. – 122 с.

64. *Другов Ю.С., Родин А.А.* Мониторинг органических загрязнений природной среды. 500 методик: практическое руководство. – 2-е изд., доп. и перераб. – М.: БИ-

НОМ. Лаборатория знаний, 2009. – 893 с.

65. *Дуб Дж.Л.* Вероятностные процессы. – М.: ИЛ, 1956. – 609 с.

66. *Дибров Б.Ф., Лившиц М.А., Волькенштейн М.В.* Математическая модель иммунной реакции // Биофизика. – 1978. – Т. 23, вып. 1. – С. 143–147.

67. *Евланов Л.Г., Константинов В.М.* Системы со случайными параметрами. – М.: Наука, 1976. – 568 с.

68. *Ермаков С.М.* Метод Монте-Карло и смежные вопросы. – 2-е. изд. – М.: Наука, 1975. – 472 с.

69. *Жарков И.Г.* Вибрации при обработке лезвийным инструментом. – Л.: Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1986. – 184 с.

70. *Зайцев В.В., Карлов-мл. А.В., Телегин С.С.* ДВ-модель системы "хищник-жертва" // Вестник СамГУ. Естественнонаучн. сер. – 2009. – № 6 (72). – С. 139–148.

71. *Замалиев Р.Р.* О прямых методах решения интегральных уравнений третьего рода с особенностями в ядре. – Автореферат ... к.ф.-м.н. – Казань: Казанский (Приволжский) федеральный ун-тет, 2012. – 18 с.

72. *Звягин В.Г., Орлов В.П.* Разрешимость в слабом смысле системы термовязкоупругости для модели Джеффриса // Известия вузов. Математика. – 2013. – Т. 57, № 9, С. 64–69.

73. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 543 с.

74. *Знаменский В.А.* Гидрологические процессы и их роль в формировании качества воды. – Л.: Гидрометеоиздат, 1981. – 248 с.

75. *Иванов В.М., Кореневский М.Л., Кульчицкий О.Ю.* Комбинированный метод решения интегральных уравнений // Дифференциальные уравнения и процессы управления. – 1998. – № 1. – 40 с.

76. *Игумнов В.П.* О построении решений систем интегро-дифференциальных уравнений в виде рядов Ли // УМЖ. – 1989. – Т. 41, № 8. – С. 1135–1137.

77. *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. – М.: Наука, 1970. – 281 с.

78. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. – М.: Изд-во МГУ, 1971. – 248 с.

79. *Кабаков Р.И.* R в действии: Анализ и визуализация данных в программе R. – М.: ДМК Пресс, 2014. – 588 с.

80. *Кадобянский Р.Н., Козак П.П.* Представление решений систем линейных интегро-дифференциальных уравнений в виде интегралов по винеровой мере // УМЖ. – 1981. – Т. 33, № 3. – С. 324–331.

81. *Кадырбеков Т., Файзибаев Е.Ф.* Метод двухмасштабного разложения решения интегро-дифференциального уравнения с малым параметром // УМЖ. – 1991. – Т. 43, № 1. – С. 129–133.

82. *Казаков В.А.* Введение в теорию марковских процессов и некоторые радиотехнические задачи. – М.: Сов. радио, 1973. – 232 с.

83. *Казаков И.Е., Артемьев В.М.* Оптимизация динамических систем случайной структуры. – М.: Наука, 1980. – 384 с

84. *Калиткин Н.Н.* Численные методы: учеб. пособие. – 2-е изд. – СПб.: БХВ-Петербург, 2011. – 592 с.

85. *Каменский Г.Л.* К общей теории уравнений с отклоняющимся аргументом // Доклады АН СССР. – 1958. – Т. 120, № 4. – С. 697–700.

86. *Картвелишвили Н.А.* Стохастическая гидрология. – Л.: Гидрометеоиздат, 1975. – 163 с.

87. *Кац И.Я.* Об устойчивости по первому приближению систем со случайным запаздыванием // ПММ. – 1967. – Т. 31, вып. 3. – С. 447–452.

88. *Квапиш И., Туро Я.* О приближенных итерациях для дифференциально-

функционального уравнения в частных производных гиперболического типа в банаховом пространстве // ДУ. – 1975. – Т. 11, № 9. – С. 1626–1640.

89. *Ким А.В., Пименов В.Г.* i-гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений. – М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2004. – 256 с.

90. *Клюев А.С., Карпов В.С.* Синтез быстродействующих регуляторов для объектов с запаздыванием. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 176 с.

91. *Кляцкин В.И.* Динамика стохастических систем: курс лекций. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 240 с.

92. *Кобелев А.В., Смолюк Л.Т., Кобелева Р.М. и др.* Нелинейные вязкоупругие свойства биологических тканей. – Екатеринбург: УрО РАН, 2012. – 214 с.

93. *Кожевников А.С., Рыбаков К.А.* О применении спектрального метода анализа систем со случайным периодом квантования в модели Мертона // Модернизация и инновации в авиации и космонавтике / под ред. проф. Ю.Ю. Комарова. – М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2010. – С. 299–305.

94. *Колесников П.М.* Методы теории переноса в нелинейных средах. – Мн.: Наука и техника, 1981. – 336 с.

95. *Колмановский В.Б., Майзенберг Т.Л.* Оптимальное управление стохастическими системами с последействием // АиТ. – 1973. –№ 1. – С. 47–61.

96. *Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. – М.: Наука, 1981. – 448 с.

97. *Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е.* Устойчивость стохастических систем с последействием // АиТ. – 1993. – № 7. – С. 66–85.

98. *Колмогоров А.Н.* Uber die analitische Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung // Mathematische Annalen. – 1931. – B. 104. – S. 415–458 (перевод: Об аналитических методах в теории вероятностей // УМН. – 1938. – Т. 5. – С. 5–41).

99. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – 7-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 572 с.

100. *Коломиец В.Г., Кореневский Д.Г.* О возбуждении колебаний в нелинейных системах со случайным запаздыванием // УМЖ. – 1966. – Т. 18, № 3. – С. 51–57.

101. *Колтунов М.А.* Ползучесть и релаксация. – М.: Высшая школа, 1976. – 277 с.

102. *Кононенко Э.Д.* Метод коллокации для линейных систем с отклоняющимся аргументом // Тр. Моск. авиац. ин-та. – М.: МАИ, 1975. – Вып. 339. – С. 56–64.

103. *Копченова Н.В., Марон И.А.* Вычислительная математика в примерах и задачах. – М.: Наука, 1972. – 368 с.

104. *Кореневский Д.Г.* Устойчивость решений детерминированных и стохастических дифференциально-разностных уравнений (алгебраические критерии). – К.: Наукова думка, 1992. – 208 с.

105. *Кореневский Д.Г., Коломиец В.Г.* Некоторые вопросы теории нелинейных колебаний квазилинейных систем со случайным запаздыванием // Математическая физика. – К., 1967. – Вып. 3. – С. 91–113.

106. *Котельников И.А., Чеботаев П.З.* LaTeX по-русски. – 3-е изд. – Новосибирск: Сибирский хронограф, 2004. – 496 с.

107. *Краснов М.Л.* Интегральные уравнения. Введение в теорию. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1975. – 303 с.

108. *Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И.* Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Высш. школа, 1978. – 287 с.

109. *Красносельскай М.А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. – М.–Л.: ГИТТЛ, 1956. – 392 с.

110. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. – М.: ГИФМЛ, 1959. – 211 с.

111. *Красовский Н.Н., Лидский Э.А.* Аналитическое конструирование регуляторов в системах со случайными свойствами // АиТ. – 1961. – Т. 22, № 9. – С. 1145–1150.

112. *Кристенсен Р.* Введение в теорию вязкоупругости. – М.: Мир, 1974. – 339 с.

113. *Кротова Э.Н.* Об одном методе решения системы нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна // УМЖ. – 1981. – Т. 33, № 5. – С. 681–687.

114. *Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И.* Вычислительные методы. – М.: Наука, 1977. – Т. 2. – 400 с.

115. *Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И.* Начала теории вычислительных методов. Интерполирование и интегрирование. – Мн.: Наука и техника, 1983. – 287 с.

116. *Кузнецов Д.Ф.* Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. – 4-е изд. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. – iii, 786 с.

117. *Кузнецов П.И., Стратонович Р.Л., Тихонов В.И.* Корреляционные функции в теории броуновского движения. Обобщение уравнения Фоккера–Планка // Журнал экспер. и теор. физики. – 1954. — Т. 26, № 2. – С. 189–207.

118. *Кхием Н.Т.* О функции плотности вероятностей процессов, определяемых интегро-дифференциальными уравнениями // УМЖ. – 1983. – № 2. – С.227-234.

119. *Кхием Н.Т.* Нелинейные колебания вязкоупругих пластин под действием стационарных случайных сжимающих сил // ПМ. – 1986. – Т. 22, № 12. – С. 115–118.

120. *Кхием Н.Т.* Случайные колебания в самовозбуждающихся системах с запаздыванием // МТТ. – 1988. – № 2. – С. 62–65.

121. *Лаврентьев М.М. (мл.), Спиглер Р., Ахметов Д.Р.* Регуляризация нелинейного интегропараболического уравнения Фоккера–Планка с пространственно-периодическими решениями. Существование сильных решений // Сибирский математический журнал. – 2001. – Т. 42, № 4. – С. 825–848.

122. *Лагутин М.Б.* Наглядная математическая статистика: учебное пособие. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. – 472 с.

123. *Лернер А.Я.* Принципы построения быстродействующих следящих систем и регуляторов. – М.-Л.: Госэнергоиздат, 1961. – 152 с.

124. *Лидский Э.А.* Об устойчивости движений системы со случайными запаздываниями // ДУ. – 1965. – Т. 1, № 1. – С. 96–101.

125. *Лихтарников Л.М.* Применение метода Рунге–Кутта для решения интегро-дифференциальных уравнений типа Фредгольма // Журнал выч. матем. и матем. физики. – 1967. – Т. 7, № 4. – С. 899–905.

126. *Ложников А.Б., Пименов В.Г.* Сходимость метода переменных направлений численного решения уравнения теплопроводности с запаздыванием // Труды ИММ УрО РАН. – 2010. – Т. 16, № 1. – С. 102–118.

127. *Лоу, А.Кельтон* Имитационное моделирование: Классика CS. – 3-е изд. – СПб.: Питер; К.: Изд. группа BHV, 2004. – 847 с.

128. *Лучка А.Ю.* Вариационно-итеративный метод для интегральных уравнений // УМЖ. – 1990. – Т. 42, № 12. – С. 1626–1635.

129. *Макаров Б.П.* Нелинейные задачи статистической динамики машин и приборов. – М.: Машиностроение, 1983. – 264 с.

130. *Макеев В.П., Гриненко Н.И., Павлюк Ю.С.* Статистические задачи динамики упругих конструкций. – М.: Наука, 1984. – 232 с.

131. *Маланин В.В., Полосков И.Е.* Об одной задаче теории надежности динамических систем // ПМУД. – Пермь, 1983. – С. 88–93.

132. *Маланин В.В., Полосков И.Е.* Об одной задаче теории надежности систем с внезапными отказами // Роботы и робототехнические системы. – Иркутск: ИПИ, 1983. – С. 144–150.

133. *Маланин В.В., Полосков И.Е.* Случайные процессы в нелинейных динамических системах. Аналитические и численные методы исследования. – Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001. – 160 с.

134. *Маланин В.В., Полосков И.Е.* Методы и практика анализа случайных процессов в динамических системах: учеб. пособ. – Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2005. – 296 с.

135. *Маланин В.В., Полосков И.Е.* Численно-аналитические схемы анализа детерминированных систем с последействием // Вестник РУДН. Сер. Математика. Информатика. Физика. – 2010. – № 2, вып. 2. – С. 31–36.

136. *Маматов М.Ш.* Задача преследования, описываемая дифференциальными уравнениями дробного порядка // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. – 2016. – № 4-1. – С. 28–32.

137. *Мартынюк А.А., Слынько В.И.* Об устойчивости линейных гибридных механических систем с распределенным звеном // УМЖ. – 2008. – Т. 60, № 2. – С. 204–216.

138. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1980. – 536 с.

139. *Марчук Г.И.* Математические моделирование в проблеме окружающей среды. – М.: Наука, 1982. – 320 с.

140. *Мартынюк Д.И., Кравец В.И.* Исследование колебательных режимов слабонелинейных систем с n степенями свободы и с запаздыванием // УМЖ. – 1984. – Т. 36, № 1. – С. 115–118.

141. *Маталыцкий М.А.* Элементы теории случайных процессов: учеб. пособ. – Гродно: ГрГУ, 2004. – 326 с.

142. *Матысина Н.В., Матысина Э.А.* Построение приближенного решения интегро-дифференциального уравнения // УМЖ. – 1986. – Т. 38, № 5. – С. 648–654.

143. *Медведев Г.А.* Математические основы финансовой экономики: учеб. пособ. – Минск: НМЦ "Электронная книга БГУ", 2003. – Ч. 1. – 287 с.

144. *Медведев Ю.И.* Курс лекций по теории автоматического управления: учеб. пособ. – Томск: Том. ун-т, 2006. – Ч. 2. – 87 с.

145. *Мильштейн Г.Н.* Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. - Свердловск: Изд-во УралГУ, 1988. – 223 с.

146. *Миндлин И.М.* Интегродифференциальные уравнения в динамике тяжелой слоистой жидкости. - М.: Наука, ФИЗМАТЛИТ, 1996. – 298 с.

147. *Митропольский Ю.А.* Метод усреднения в нелинейной механике. – К.: Наукова думка, 1970. – 440 с.

148. *Митропольский Ю.А., Ань Н.Д.* Случайное колебание в некоторых вязкоупругих нелинейных системах // УМЖ. – 1985. – Т. 37, № 4. – С. 468–472.

149. *Митропольский Ю.А., Ань Н.Д.* Случайные колебания в квазилинейных системах стохастических дифференциальных уравнений с запаздыванием // УМЖ. – 1986. – Т. 38, № 2. – С. 181–187.

150. *Митропольский Ю.А., Мартынюк Д.И., Данканич В.А.* Метод Галеркина в теории квазипериодических решений нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием // УМЖ. – 1980. – Т. 32, № 4. – С. 553–557.

151. *Михацкий Н.А., Рубаник В.П.* Случайные колебания в струнном генераторе // Математические методы и физико-механические поля. – 1978. – Т. 8. – С. 120–124.

152. *Михлин С.Г.* Сингулярные интегральные уравнения // УМН. – 1948. – Т 3,

вып. 3 (25). – С. 29–112.

153. *Михлин С.Г., Смолицкий Х.Л.* Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. – М.: Наука, 1965. – 384 с.

154. *Муравьев А.Г.* Руководство по определению показателей качества воды полевыми методами. – 3-е изд., доп. и перераб. – СПб.: "Крисмас+", 2009. – 220 с.

155. *Мухитдинов Т.М., Коломиец В.Г.* О непрерывной зависимости решений стохастических интегро-дифференциальных уравнений от параметра // Асимптотические методы в нелинейной механике / Ин-т матем. АН УССР. – К., 1974. – С. 184–192.

156. *Мышкис А.Д.* Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // УМН. – 1949. – Т. 4, вып. 5 (33). – С. 99–141.

157. *Мышкис А.Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. – М., Л.: ГИТТЛ, 1951. – 256 с.

158. *Мышкис А.Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. – М.: Наука, 1972. – 352 с.

159. *Найденов В.И., Крутова Н.М.* Исследование многолетних колебаний уровня Каспийского моря на основе теории стохастических дифференциальных уравнений // Водные ресурсы. – 2002. – Т. 29, № 3. – С. 299–310.

160. *Найденов В.И., Швейкина В.И.* Нелинейные модели колебаний речного стока // Водные ресурсы. – 2002. – Т. 29, № 1. – С. 62–67.

161. *Нгуен Б.Д., Чистяков В.Ф.* О решении краевых задач для вырожденных систем линейных интегро-дифференциальных уравнений методом наименьших квадратов // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование. – 2015. – Т. 8, вып. 2. – С. 81–94.

162. *Нгуен В.Д.* Асимптотический метод исследования многочастотных колебаний в квазилинейных системах интегро-дифференциальных уравнений второго порядка // УМЖ. – 1977. – Т. 29, № 3. – С. 404–410.

163. *Нгуен Т.К.* Нелинейные колебания вязкоупругих пластин под действием стационарных случайных сжимающих сил // ПМ. – 1986. – Т. 22, № 12. – С. 115–118.

164. *Нгуен Т.К.* Случайные колебания в самовозбуждающихся системах с запаздыванием // МТТ. – 1988. – № 2. – С. 62–65.

165. *Непомнящая Е.М., Садовский Б.Н.* О методе последовательных приближений для функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа // Труды матем. фак-та. – Воронежский ун-т, 1972. – Вып. 6. – С. 59–68.

166. *Николаенко Н.А., Ульянов С.В.* Статистическая динамика машиностроительных конструкций. – М.: Машиностроение, 1977. – 368 с.

167. *Новаковская Л.И.* Построение асимптотических решений для дифференциальных уравнений первого порядка со случайным запаздыванием // УМЖ. – 1989. – Т. 41, № 11. – С. 1569–1563.

168. *Норкин С.Б.* Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом. – М.: Наука, 1965. – 354 с.

169. *Ортега Дж., Пул У.* Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1986. – 288 с.

170. *Павлюк Ю.С., Сакулин В.Д.* Аналитическая оценка случайных колебаний линейных систем в случае запаздывания колебаний // Динамика и прочность конструкций: тематич. сб-к научн. трудов. – Челябинск: ЧПИ, 1975. – № 159. – С. 62–67.

171. *Пальмов В.А.* Колебания упруго-пластических тел. – М.: Наука, 1976. – 328 с.

172. *Панчев С.* Случайные функции и турбулентность. – Л.: Гидрометереоиздат, 1967. – 427 с.

173. *Пановко Я.Г.* Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. – М.: Наука, 1960. – 193 с.

174. *Параев Ю.И.* Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации. – М.: Сов.радио, 1976.– 184 с.

175. *Паутов А.С.* Численное интегрирование стохастических функционально-дифференциальных уравнений методом Эйлера // Изв. Урал. гос. ун-та. Математика и механика. – 2005. – № 38. — С. 104–121.

176. *Петухов В.Р.* Групповой анализ дифференциальных уравнений с отклоняющим аргументом. – М.: ИТЭФ, 1983. – 15 с. (Препринт: ИТЭФ-15).

177. *Петухов В.Р.* Расширение групп преобразований уравнений с отклоняющим аргументом. – М.: ИТЭФ, 1985. – 7 с. (Препринт: ИТЭФ-99).

178. *Пименов В.Г.* Избранные главы дифференциальных уравнений: учеб. пособ. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2003. – 88 с.

179. *Пименов В.Г.* Функционально-дифференциальные уравнения в биологии и медицине: учеб. пособ. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2008. – 88 с.

180. *Пименов В.Г.* Численные методы решения уравнения теплопроводности с запаздыванием // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2008. – № 2. – С. 113–116.

181. *Пименов В.Г.* Разностные схемы в моделировании эволюционных управляемых систем с последействием // Тр. ИММ УрО РАН. – 2010. – Т. 16, № 5. – С. 151–158.

182. *Пименов В.Г., Ложников А.Б.* Разностные схемы численного решения уравнения теплопроводности с последействием // Тр. ИММ УрО РАН. – 2011. – Т. 17, № 1. – С. 178–189.

183. *Пинни Э.* Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения. – М.: ИЛ, 1961. – 248 с.

184. *Плотников В.А., Рудык О.Г.* Об одной схеме усреднения в интегро-дифференциальных уравнениях // УМЖ. – 1989. – Т. 41, № 7. – С. 995–997.

185. *Победря Б.Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Изд-во МГУ, 1995. – 366 с.

186. *Поддубный В.В., Романович О.В.* Динамическая модель рынка вальрасовского типа со случайными запаздываниями в поставках товара // Сб. науч. тр. по материалам между. научно-практич. конф. "Современные направления теоретических и прикладных исследований'2007". – Одесса: Черноморье, 2007. – Т. 21. Физика и математика. География. Геология. – С. 20–26.

187. *Полосков И.Е.* О связи моментов и кумулянтов многомерных распределений / Пермск. ун-т. – Пермь, 1986. – 5 с. (Деп. в ВИНИТИ, № 8871–В86).

188. *Полосков И.Е.* Пакет программ автоматизации обработки векторно-матричных выражений // Проблемы механики и управления. – Пермь, 1996. – С. 153–165.

189. *Полосков И.Е.* О расширении фазового пространства при анализе дифференциально-разностных систем со случайным входом // Пермская конф. "История физико-математических наук" (г.Пермь, 21–22 окт. 1999 г.): Пригласительный билет. Программа. Тез. докладов / Перм. ун-т. – Пермь, 1999. – С. 48–49.

190. *Полосков И.Е.* Об одном подходе к оценке чувствительности нелинейных систем к изменению параметров // ПМУД. – Пермь, 2002. – С. 58–69.

191. *Полосков И.Е.* Расширение фазового пространства в задачах анализа дифференциально-разностных систем со случайным входом // АиТ. – 2002. – № 9. – С. 58–73.

192. *Полосков И.Е.* Пакет ProbRel для символьных вероятностных расчетов // ВПУ-ИСТ. – 2003. – Вып. 6. – С. 19–22.

193. *Полосков И.Е.* Уравнения для первых моментов фазового вектора линейной

интегро-дифференциальной системы // ВПУ-МИМ. – 2003. – Вып. 5. – С. 70–73.

194. *Полосков И.Е.* Об анализе некоторых классов стохастических интегро-дифференциальных уравнений // ПМУД. – Пермь, 2003. – С. 99–106.

195. *Полосков И.Е.* Расчет первых моментов случайной концентрации вещества речного загрязнения // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2004. – Т. VII, № 2 (18). – С. 103–110.

196. *Полосков И.Е.* О чувствительности линейных стохастических систем к изменению детерминированных и случайных параметров // ПМУД. – Пермь, 2005. – Вып. 37. – С. 128–137.

197. *Полосков И.Е.* Компьютерное моделирование динамики загрязнения бассейна реки с учетом запаздывания и случайных факторов // Вычислительные технологии. – 2005. – Т. 10, № 1. – С. 103–115.

198. *Полосков И.Е.* Движение транспортного средства по дороге со случайным профилем с учетом запаздывания // Математическое моделирование. – 2005. – Т. 17, № 3. – С. 3–14.

199. *Полосков И.Е.* Об одном методе приближенного анализа линейных стохастических интегро-дифференциальных систем // ДУ. – 2005. – Т. 41, № 9. – С. 1276–1279.

200. *Полосков И.Е.* Использование стандартных средств пакета Mathematica для решения нестандартных задач // ВПУ-ИСТ. – 2005. – Вып. 5. – С. 87–90.

201. *Полосков И.Е.* О расчете первых моментов линейных интегро-дифференциальных систем с параметрическими возмущениями // ПМУД. – Пермь, 2006. – Вып. 38. — С. 133–142.

202. *Полосков И.Е.* Об анализе нелинейных стохастических систем с кратными запаздываниями // ВПУ-МИМ. – 2006. – Вып. 4 (4). – С. 67–72.

203. *Полосков И.Е.* Схема метода расширения фазового пространства для анализа линейных параметрических стохастических систем с кратными запаздываниями // ВПУ-МИМ. – 2007. – Вып. 7 (12). – С. 26–30.

204. *Полосков И.Е.* О компьютерной реализации схем расширения фазового пространства для решения дифференциальных уравнений с отклоняющимися аргументами // ВПУ-ИСТ. – 2007. – Вып. 10 (15). – С. 64–69.

205. *Полосков И.Е.* Об анализе модификаций модели Блэка–Шоулза динамики цен финансовых производных // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2007. – Т. 10, № 2 (30). – С. 110–118.

206. *Полосков И.Е.* Чувствительность линейных стохастических дифференциально-разностных систем к изменению детерминированных параметров // ПМУД. – Пермь, 2007. – Вып. 39. – С. 197–204.

207. *Полосков И.Е.* Исследование движения автомобиля с переменной скоростью и с учетом запаздывания // ПМУД. – Пермь, 2008. – Вып. 40. – С. 126–141.

208. *Полосков И.Е.* Анализ линейных стохастических динамических систем с переменным запаздыванием // ПМУД. – Пермь, 2009. – Вып. 41. – С. 134–147.

209. *Полосков И.Е.* Анализ линейных стохастических систем с запаздывающим аргументом нейтрального типа // ВПУ-МИМ. – 2010. – Вып. 2 (2). – С. 61–66.

210. *Полосков И.Е.* Об одной схеме использования метода Монте-Карло для анализа стохастических систем с постоянными запаздываниями // ВПУ-ИСТ. – 2010. – Вып. 2 (39). – С. 52–57.

211. *Полосков И.Е.* Применение метода Монте-Карло для анализа движения транспортного средства по дороге со случайным микропрофилем и с учетом запаздывания // ПМУД. – Пермь, 2010. – Вып. 42. – С. 88–99.

212. *Полосков И.Е.* О модификации итерационной схемы вычисления матрицы-функции Грина в задачах анализа линейных стохастических интегро-дифферен-

циальных систем // ВПУ-ИСТ. – 2010. – Вып. 2 (39). – С. 46–51.

213. *Полосков И.Е.* Применение схемы МШРФП для анализа линейных стохастических систем с конечными сосредоточенными и распределенными запаздываниями // ВПУ-МИМ. – 2011. – Вып. 4 (8). – С. 53–58.

214. *Полосков И.Е.* К анализу линейных стохастических систем с кусочно-постоянными запаздываниями // ВПУ-МИМ. – 2011. – Вып. 2 (5). – С. 76–83.

215. *Полосков И.Е.* Численно-аналитические схемы анализа динамических систем с последействием // ВПУ-МИМ. – 2011. – Вып. 2 (6). – С. 51–58.

216. *Полосков И.Е.* Применение схемы расширения фазового пространства для анализа систем с распределенными параметрами и запаздыванием // ВПУ-ИСТ. – 2011. – Вып. 12 (38). – С. 64–69.

217. *Полосков И.Е.* Анализ движения транспортного средства с переменной скоростью по дороге со случайным профилем с учетом запаздывания // Вестник Нижегородского ун-та им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – № 4. – Ч. 2. – С. 280–282.

218. *Полосков И.Е.* Расчет чувствительности некоторых нелинейных дифференциальных систем с запаздыванием к изменению детерминированных параметров // ВПУ-ИСТ. – 2011. – Вып. 12 (38). – С. 70–75.

219. *Полосков И.Е.* Линейные параметрические стохастические системы нейтрального типа с кратными запаздываниями // ВПУ-МИМ. – 2012. – Вып. 1 (9). – С. 61–66.

220. *Полосков И.Е.* Схема расширения вектора состояния для решения интегро-дифференциальных уравнений в частных производных // ВПУ-МИМ. – 2013. – Вып. 2 (21). – С. 59–65.

221. *Полосков И.Е.* Адаптация схемы МШРПС для анализа одного линейного стохастического дифференциального уравнения в частных производных с постоянным временны́м запаздыванием // ВПУ-МИМ. – 2013. – Вып. 4 (23). – С. 60–67.

222. *Полосков И.Е.* О расширении области применения схемы Гийюзика поиска стационарных распределений для линейных стохастических систем с запаздыванием // ПМУД. – Пермь, 2013. – Вып. 45. – С. 92–102.

223. *Полосков И.Е.* Анализ линейных стохастических систем с постоянными запаздываниями и дискретно-непрерывными возмущениями // ВПУ-МИМ. – 2013. – Вып. 3 (22). – С. 74–80.

224. *Полосков И.Е.* Сочетание схемы МШРПС с процедурой линеаризации при анализе систем нелинейных стохастических дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием // ВПУ-МИМ. – 2014. – Вып. 2 (25). – С. 47–57.

225. *Полосков И.Е., Полосков И.И.* Анализ случайных линейных продольных колебаний вязкоупругой балки // ВПУ-МИМ. – 2014. – Вып. 3 (26). – С. 57–68.

226. *Полосков И.Е.* Применение схемы МШРПС для анализа линейных стохастических систем с распределенными и конечными сосредоточенными запаздываниями // ВПУ-МИМ. – 2014. – Вып. 4 (27). – С. 68–77.

227. *Полосков И.Е.* О численно-аналитическом моделировании линейных поперечных колебаний вязкоупругой балки // ПМУД. – Пермь, 2014. – Вып. 46. – С. 124–138.

228. *Полосков И.Е.* О применении схемы Гийюзика для расчета матрицы спектральных плотностей вектора состояния линейной стохастической системы с многими запаздываниями // ВПУ-МИМ. – 2015. – Вып. 1 (28). – С. 39–44.

229. *Полосков И.Е.* Об одной численно-аналитической схеме расчета первых моментных функций вектора состояния линейной стохастической интегро-дифференциальной системы // ВПУ-МИМ. – 2015. – Вып. 2 (29). – С. 52–62.

230. *Полосков И.Е.* Некоторые классы дифференциальных систем со случайны-

ми запаздываниями и методы их исследования // ВПУ-МИМ. – 2015. – Вып. 3 (30). – С. 19–36.

231. *Полосков И.Е.* Стохастические дифференциальные системы со случайными запаздываниями в форме дискретных цепей Маркова // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2015. – Т. 25, вып. 4. – С. 501–516.

232. *Полосков И.Е.* Схема расчета функций чувствительности до второго порядка для линейных стохастических дифференциальных систем с постоянными запаздываниями // ВПУ-МИМ. – 2015. – Вып. 4 (31). – С. 36–45.

233. *Полосков И.Е., Полосков И.И., Soize C.* Параллельные вычисления в задаче анализа движения механической системы в случайной термовязкоупругой среде // ВПУ-МИМ. – 2015. – Вып. 4 (31). – С. 46–57.

234. *Полосков И.Е.* Анализ линейных стохастических интегро-дифференциальных систем с сосредоточенными запаздываниями // ВПУ-МИМ. – 2016. – Вып. 2 (33). – С. 98–105.

235. *Полосков И.Е.* Спектральная плотность стационарного случайного поля как решения стохастического дифференциального уравнения в частных производных с постоянным запаздыванием // Статистические методы оценивания и проверки гипотез: межвуз. сб. науч. тр. / Перм. гос. нац. иссл. ун-т. – Пермь, 2016. – Вып. 27. – С. 90–100.

236. *Полосков И.Е.* Стохастический анализ динамических систем [Электронный ресурс]: монография. – Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2016. – 772 с.

237. *Полосков И.Е.* Численно-аналитическая схема применения матричной функции Грина для анализа линейных систем стохастических интегро-дифференциальных уравнений // Математические структуры и моделирование. – 2017. – № 1 (41). – С. 102–117.

238. *Полосков И.Е.* Численно-аналитические методы анализа стохастических систем с различными формами запаздывания // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. – 2017. – Т. 132. – С. 96–101.

239. *Полосков И.Е.* К расчету моментных функций решения системы линейных параметрических стохастических интегро-дифференциальных уравнений нейтрального типа // ВПУ-МИМ. – 2017. – Вып. 2 (37). – С. 35–48.

240. *Полосков И.Е.* Применение схемы МШРПС для приближенного решения дифференциально-разностных уравнений в частных производных // ВПУ-МИМ. – 2017. – Вып. 4 (39). – С. 57–68.

241. *Полосков И.Е.* Приближенное решение эволюционных уравнений нейтрального типа с помощью модифицированной схемы МШРПС // ПМУД. – Пермь, 2017. – Вып. 49. – С. 75–91.

242. *Полосков И.Е.* Построение спектральной плотности решения линейного стохастического дифференциального уравнения в частных производных с постоянными запаздываниями // ВПУ-МИМ. – 2018. – Вып. 1 (40). — С. 36–45.

243. *Полосков И.Е.* Улучшенная схема МШРПС для анализа систем линейных стохастических обыкновенных дифференциальных уравнений нейтрального типа с кратными постоянными запаздываниями // ВПУ-МИМ. – 2018. – Вып. 2 (41). – С. 47–53.

244. *Полосков И.Е.* Применение схемы интегрального расширения пространства состояний для стохастического анализа линейных поперечных колебаний вязкоупругой балки // ВПУ-МИМ. – 2018. – Вып. 3 (42). – С. 80–88.

245. *Полосков И.Е.* Интегральное расширение пространства состояний в задачах анализа вязко-упругих систем // ВПУ-ИСТ. – 2018. – Вып. 1. – С. 52–58.

246. *Полосков И.Е.* Расчет старших моментов вектора состояний линейной стохастической дифференциальной системы с запаздыванием, возбуждаемой аддитивными и мультипликативными белыми шумами // ПМУД. – Пермь, 2018.– Вып. 50. – С. 73–94.

247. *Полосков И.Е.* Анализ случайных колебаний в модельном линейном стохастическом гиперболическом уравнении с кратными постоянными запаздываниями // ВПУ-МИМ. – 2019. – Вып. 1 (44). – С. 48–57.

248. *Полосков И.Е.* Сочетание метода шагов и расширения пространства состояний для анализа линейных стохастических систем с различными формами запаздывания и случайными входа-ми в виде аддитивных и мультипликативных белых шумов // Дифференциальные уравнения и процессы управления. – 2019. – № 2. – С. 101–125.

249. *Полосков И.Е.* Схема вычисления ковариационных функций векторов состояния нестационарных линейных стохастических дифференциальных систем с запаздыванием // ВПУ-МИМ. – 2019. – Вып. 2 (45). – С. 36–45.

250. *Полосков И.Е.* Численное моделирование динамических систем со случайными запаздываниями // ВПУ-МИМ. – 2019. – Вып. 3 (46). – С. 72–80.

251. *Полосков И.Е.* Интегро-дифференциальные уравнения Фредгольма (по пространству) в частных производных с запаздыванием // ПМУД. – Пермь, 2019. – Вып. 51. – С. 69–86.

252. *Полосков И.Е.* Стационарные характеристики решений систем линейных дифференциальных уравнений нейтрального типа с кратными запаздываниями и случайными возмущениями // Статистические методы оценивания и проверки гипотез: межвуз. сб. науч. тр. / Перм. гос. нац. иссл. ун-т. – Пермь, 2019. – Вып. 29. – С. 84–102.

253. *Полянин А.Д., Манжиров А.В.* Справочник по интегральным уравнениям. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 608 с.

254. *Потапов В.Д.* Устойчивость движения стохастической вязкоупругой системы // ПММ. – 1993. – Т. 57, вып. 3. – С. 137–145.

255. Прочность, устойчивость, колебания / Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. – Спр–ник в 3-х т. – М.: Машиностроение, 1968. – Т. 1. – 831 с.

256. *Пугачев В.С., Казаков И.Е., Евланов Л.Г.* Основы статистической теории автоматических систем. – М.: Машиностроение, 1974. – 400 с.

257. *Пугачев В.С., Синицын И.Н.* Стохастические дифференциальные системы: Анализ и фильтрация. – М.: Наука, 1990. – 630 с.

258. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с.

259. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. – М.: Наука, 1977. – 384 .

260. *Разевиг В.Д.* Корреляционный анализ систем с запаздыванием // АиТ. – 1973. – № 9. – С. 42–48.

261. *Разумихин Б.С.* Устойчивость эредитарных систем. – М.: Наука, 1988. – 108 с.

262. *Ржаницын А.Р.* Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов. – М.: Стройиздат, 1954. – 288 с.

263. *Розенвассер Е.Н., Юсупов Р.М.* Чувствительность систем автоматического управления. – Л.: Энергия, 1969. – 208 с.

264. *Розовский М.И.* Механика упруго-наследственных сред. Упругость и пластичность. – М.: ВИНИТИ, 1967. – С. 165–250.

265. *Росин М.Ф., Булыгин В.С.* Статистическая динамика и теория эффектив-

ности систем управления. – М.: Машиностроение, 1981. – 312 с.

266. *Рубаник В.П.* Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. – М.: Наука, 1969. – 288 с.

267. *Рубаник В.П.* Колебания сложных квазилинейных систем с запаздыванием. – Мн.: Изд-во "Университетское", 1985. – 143 с.

268. *Рытов С.М.* Введение в статистическую радиофизику. – М.: Наука, 1976. – Ч. 1. Случайные процессы. – 484 с.

269. *Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И.* Введение в статистическую радиофизику. – М.: Наука, 1978. – Ч. 2. Случайные поля. – 464 с.

270. *Сабитов К.Б.* Функциональные, дифференциальные и интегральные уравнения: учеб. пособ. – М.: Высш. школа, 2005. – 671 с.

271. *Саврук М.П., Осив П.Н., Прокопчук И.В.* Численный анализ в плоских задачах теории трещин. – К.: Наукова думка, 1989. – 248 с.

272. *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. – К.: Наукова думка, 1985. – 224 с.

273. *Светлицкий В.А.* Случайные колебания механических систем. – М.: Машиностроение, 1991. – 320 с.

274. *Светцов В.И., Холодков И.В.* Физическая электроника и электронные приборы: учеб. пособ. / Ивановский гос. химико-технол. ун-тет. – Иваново, 2008. – 494 с.

275. *Свешников А.А.* Прикладные методы теории случайных функций. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1968. – 464 с.

276. Свидетельство о регистрации электронного ресурса № 21501 "Пакет программ ProbRels v.2". – Дата регистрации: 03.12.2015. – Автор: Полосков И.Е. – Объединенный фонд электронных ресурсов "Наука и образование".

277. *Симонов П.М.* Исследование устойчивости решений некоторых динамических моделей микро- и макроэкономики // ВПУ-МИМ. – 2003. – Вып. 5. – С. 88–93.

278. Системы: декомпозиция, оптимизация и управление / Сост. М. Сингх, А. Титли. – М.: Машиностроение, 1986. – 496 с.

279. *Сканави Г.И.* Физика диэлектриков (область сильных полей). – М.: ГИФМЛ, 1958. – 907 с.

280. *Смирнов Н.С.* Введение в теорию нелинейных интегральных уравнений. – Л.; М.: ОНТИ, 1936. – 124 с.

281. *Соколов И.Д.* Метод осреднения функциональных поправок. – К.: Наукова думка, 1967. – 336 с.

282. *Соколов Н.П.* Введение в теорию многомерных матриц. – К.: Наукова думка, 1972. – 176 с.

283. *Солодов А.В., Солодова Е.А.* Системы с переменным запаздыванием. – М.: Наука, 1980. – 384 с.

284. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского. – М.: Наука, 1987. – 712 с.

285. *Стоянов Й.М., Байнов Д.Д.* О методе усреднения для стохастических интегро-дифференциальных уравнений // Archivum Mathematicum. – 1972. – Vol. 8, № 4. – P. 213–218.

286. *Стратонович Р.Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. – М.: Сов. радио, 1961. – 558 с.

287. *Сысоев Ю.А., Планковский С.И., Лоян А.В. и др.* Возбуждения дугового разряда в сильноточном генераторе плазмы // Авиационно-космическая техника и технология. – 2006. – № 10. – С. 61–66. – URL: http: //nbuv.gov.ua/j-pdf/aktit_2006_10_16.pdf (дата обращения 08.07.2015).

288. *Тихонов В.И., Миронов М.А.* Марковские процессы. – М.: Сов. радио, 1977.

– 486 с.

289. *Томович Р., Вукобратович М.* Общая теория чувствительности. – М.: Сов. радио, 1972. – 240 с.

290. *Тутык В.А.* Исследование явления запаздывания зажигания высоковольтного тлеющего разряда для повышения рабочего давления газоразрядных электронных пушек // Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. – 2008. – № 11. – С. 86–91.

291. *Феллер В.* К теории стохастических процессов (Теоремы существования и единственности) // УМН. – 1938. – № 5. – С. 57–96.

292. *Филатов А.Н.* Методы усреднения в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях. – Ташкент: ФАН, 1971. – 282 с.

293. *Филатов А.Н., Шарова Л.В.* Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1976. – 152 с.

294. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – Т. 1. – 616 с.; Т. 2. – 810 с.; Т. 3. – 662 с.

295. *Фодчук В.И.* Метод усреднения для дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа // УМЖ. – 1968. – Т. 20, № 2. – С. 203–209.

296. *Фодчук В.И.* Применение асимптотических методов к дифференциальным уравнениям в частных производных нейтрального типа // Дифференциально-разностные уравнения. – К., 1971. – С. 184–193.

297. *Фодчук В.И.* Асимптотические методы нелинейной механики в теории дифференциально-разностных уравнений. – Автореф. дисс. ... д-ра физ.-мат. наук / Ин-т матем. – К., 1972. – 19 с.

298. *Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л.* Численные методы. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 400 с.

299. *Френкель С.Я.* Введение в статистическую теорию полимеризации. – М.-Л.: Наука, 1965. – 270 с.

300. *Хайрер Э., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. – М.: Мир, 1999. – 685 с.

301. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984. – 421 с.

302. *Хинчин А.Я.* Теория корреляции стационарных стохастических процессов // УМН. – 1938. – Вып. 5. – С. 42–51 (пер. статьи: Korrelationstheorie der stationären stochastischen Prozesse // Mathematische Annalen. – 1934. – Vol. 109. – S. 604–615).

303. *Хог Э., Чой К., Комков В.* Анализ чувствительности при проектировании конструкций. – М.: Мир, 1988. – 428 с.

304. *Хусаинов Д.Я., Шатырко А.В.* Метод функций Ляпунова в исследовании устойчивости дифференциально-функциональных систем. – К.: Изд-во Киевского ун-та, 1997. – 236 с.

305. *Царьков Е.Ф.* Системы стохастических дифференциальных уравнений с запаздыванием // Изв. АН Латв. ССР. Сер. физ. и техн. наук. – 1966. – № 2. – С. 57–64.

306. *Царьков Е.Ф.* Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. – Рига: Зинатне, 1989. – 421 с.

307. *Чайковский М.В., Янович Л.А.* О численном нахождении корреляционных функций решения систем линейных интегро-дифференциальных уравнений со случайно возмущенной правой частью // ДУ. – 1987. – № 2. – С. 328–338.

308. *Черевко И.М., Якимов И.В.* Численный метод решения краевых задач для интегродифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // УМЖ. – 1989. – Т. 41, № 6. – С. 854–860.

309. *Черепенников В.Б., Ермолаева П.Г.* Полиномиальные квазирешения функ-

ционально-дифференциальных уравнений второго порядка // УМЖ. – 2008. – Т. 60, № 1. – С. 140-152.

310. *Черноусько Ф.Л., Колмановский В.Б.* Оптимальное управление при случайных возмущениях. – М.: Наука, 1978. – 352 с.

311. *Шампайн Л.Ф., Гладвел И., Томпсон С.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием MATLAB: учеб. пособ. – СПб.: Изд-во "Лань", 2009. – 304 с.

312. *Ширяев А.Н.* Вероятность. – М.: Наука, 1980. – 576 с.

313. *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики. – М.: ФАЗИС, 1998. – Т. 1. Факты. Модели. – 512 с.; Т. 2. Теория. – 525 с.

314. *Шишкин Г.А.* Линейные интегродифференциальные уравнения Фредгольма: учеб. пособ. – Улан-Удэ: Изд-во Бурятского госун-та, 2007. – 195 с.

315. *Шишкин Г.А.* Линейные краевые задачи интегродифференциальных уравнений Вольтерра: монография. – Улан-Удэ: Изд-во Бурятского госун-та, 2015. – 78 с.

316. *Шкиль Н.И., Вороной А.Н, Лейфура В. Н.* Асимптотические методы в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях. – К.: Вища школа, 1985. – 248 с.

317. *Шмелев А.Б.* Основы марковской теории нелинейной обработки случайных полей. – М.: Изд-во МФТИ, 1998. – 208 с.

318. *Штокало И.З.* Операционное исчисление (обобщения и приложения). – К.: Наукова думка, 1972. – 303 с.

319. *Эльсгольц Л.Э.* Качественные методы в математическом анализе. – М.: ГИТТЛ, 1955. – 300 с.

320. *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М.: Наука, 1971. – 296 с.

321. *Энгель Л.* Ионизованные газы. – М.: ГИФМЛ, 1959. – 333 с.

322. *Эшматов Х.* Об усреднении в некоторых системах интегро-дифференциальных уравнений // ДУ. – 1974. – Т. 10, № 6. – С. 1124–1129.

323. *Юмагулов М.Г., Музафаров С.М.* Метод элементарных звеньев в задаче приближенного исследования систем со сложными запаздываниями // АиТ. – 2003. – № 12. – С. 10–16.

324. *Яглом А.М.* Корреляционная теория стационарных случайных функций: с примерами из метеорологии. – Л.: Гидрометеоиздат, 1981. – 280 с.

325. *Яценко Н.Н., Прутчиков О.К.* Плавность хода грузового автомобиля. – М.: Машиностроение, 1968. – 220 с.

326. *Abdollahpoor A.* Moving least square method for treating nonlinear fourth order integro-differential equations // Communications on Advanced Comput. Science with Appl. – 2014. – Vol. 2014. – Article ID CASCA-00023. – 9 p.

327. *Abell M.L., Braselton J.P.* Maple by example. – Amsterdam: Elsevier, 2005. – xiii, 550 p.

328. *Abell M.L, Braselton J.P.* Mathematica by example. – Amsterdam: Elsevier Inc., 2009. – xi, 564 p.

329. *Adam A.M.A., Bashier E.B.M., Hashim M.H.A. et al.* Fitted Fourier-pseudo-spectral methods for solving a delayed reaction-diffusion partial differential equation in biology // AIP Conf. Proc. – 2017. – Vol. 1863, № 1. – Article ID 560033. – 5 p.

330. *Adams B.L., Kalidindi S.R., Fullwood D.T* Microstructure sensitive design for performance optimization. – Amsterdam: Elsevier, 2013. – xiv, 410 p.

331. *Adimy M., Ezzinbi Kh.* A class of linear partial neutral functional–differential equations with nondense domain // J. of Diff. Equations. – 1998. – Vol. 147, № 2. – P. 285–332.

332. *Adimy M., Crauste F., Halanay A. et al.* Stability of limit cycles in a pluripotent stem cell dynamics model // Chaos, Solitons and Fractals. – 2006. – Vol. 27, № 4. – P. 1091–1107.

333. *Agakhi K.A., Basalov Y.G., Kuznetsov V.N.* Non-linear constitutive relations for unstable materials // J. of Appl. Math. and Mech. – 2011. – Vol. 75, № 5. – P. 612–617.

334. *Agarval R.P., Bohner M., Li W.-T.* Nonoscillation and oscillation: Theory for functional differential equations. – New York: Marcel Dekker, 2004. – 371 p.

335. *Agarwal S., Bahuguna D.* Exact and approximate solutions of delay differential equations with nonlocal history conditions // J. of Appl. Math. and Stochastic Anal. – 2005. – Vol. 2005, № 2. – P. 181–194.

336. *Agarwal R., Bohner M., Domoshnitsky A., Goltser Ya.* Floquet theory and stability of nonlinear integro-differential equations // Acta Mathematica Hungarica. – 2005. – Vol. 109, № 4. – P. 305–330.

337. *Aghazadeh N., Khajehnasiri A.A.* Solving nonlinear two-dimensional Volterra integro-differential equations by block-pulse functions // Mathematical Sciences. – 2013. – Vol. 7. – Article № 3. – 6 p.

338. *Aguerrea M., Valenzuela G.* On the minimal speed of traveling waves for a nonlocal delayed reaction-diffusion equation // Nonlinear Oscillations. – 2008. – Vol. 13, № 1. – P. 1–9.

339. *Ahmad B.* A quasilinearization method for a class of integro-differential equations with mixed nonlinearities // Nonlinear Analysis: Real World Appl. – 2006. – Vol. 7, № 5. – P. 997–1004.

340. *Ahmad B.* Method of quasilinearization for a class of nonlinear integro-differential equations in Banach spaces // Nonlinear Studies. – 2007. – Vol. 14, № 4. – P. 345–353.

341. *Ahmed H.M.* Numerical analysis for some stochastic delay differential equations // Advances in Appl. Mathematical Analysis. – 2008. – Vol. 3, № 1. – P. 67–73.

342. *Ahmed H.M.* Euler–Maruyama numerical solution of some stochastic functional differential equations // J. of the Korean Society for Industrial and Appl. Math. – 2007. – Vol. 11, № 1. – P. 13–30.

343. *Ahmed H.M.* Numerical analysis for some autonomous stochastic delay differential equations // Intern. J. of Appl. Math. and Computation. – 2012. – Vol. 4, № 4. – P. 396–402.

344. *Akhavan S.* Numerical solution of singular Fredholm integro–differential equations of the second kind via Petrov–Galerkin method by using Legendre multiwavelet // J. of Math. and Computer Science. – 2014. – Vol. 9, № 4. – P. 321–331.

345. *Akyüz A., Sezer M.* A Chebyshev collocation method for the solution linear integro differential equations // J. of Comput. Math. – 1999. – Vol. 72, № 4. – P. 491–507.

346. *Akyız-Daşcioğlu A., Yaslan Ç.* Chebyshev polynomial solution of nonlinear Fredholm–Volterra integro-differential equations // J. of Arts and Sciences (Çankaya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi). – 2006. – Vol. 5. – P. 89–101.

347. *Al-Khaled K., Allan F.* Decomposition method for solving nonlinear integro-differential equations // J. of Appl. Math. and Computing. – 2005. – Vol. 19, № 1–2. – P. 451–425.

348. *Ali I.* Convergence analysis of spectral methods for integro-differential equations with vanishing proportional delays // J. of Comput. Math. – 2011. – Vol. 29, № 1. – P. 49–60.

349. *Allen E.* Modeling with Itô stochastic differential equations. – Dordrecht: Springer, 2007. – xii, 230 p.

350. *Alwan M.S., Liu X.* Theory of hybrid systems: Deterministic and stochastic. – Singapore, Beijing: Springer, 2018. – xvi, 241 p.

351. *Amaniampong G., Ariaratnam S.* Reliability of linear viscoelastic systems excited by a Gaussian process // J. of Engineering Mech. – 1998. – Vol. 124, № 3. – P. 245–251.

352. *Amat S., Legaz M.J., Pedregal P.* Linearizing stiff delay differential equations // Appl. Math. & Information Sciences: An Intern. J. – 2013. – Vol. 7, №1. – P. 229–232.

353. *Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P.* Partial integral operators and integro-differential equations: Pure and Applied Math. – New York: Marcel Dekker, 2000. – x, 560 p.

354. *Araújo A., Branco J.R., Ferreira J.A.* On the stability of a class of splitting methods for integro-differential equations // ANM. – 2009. – Vol. 59, № 3–4. – P. 436–453.

355. *Ariaratnam S.T.* Stochastic bifurcation in hereditary systems // 8th ASCE Specialty Conf. on Probabilistic Mech. and Structural Reliability (Notre Dame, Indiana, 2000) / CD-ROM Proc. – Paper PMC2000-163. – 6 p. – URL: http://www.usc.edu/dept/civil_eng/johnsone/pmc2000/sessions/papers/p163.pdf

356. *Arikoglu A., Ozkol I.* Solutions of integral and integro-differential equation systems by using differential transform method // Comput. Math. Appl. – 2008. – Vol. 56, № 9. – P. 2411–2417.

357. *Armand A., Gouyande Z.* Numerical solution of the system of Volterra integral equations of the first kind // Intern. J. of Industrial Math. – 2014. – Vol. 6, № 1. – Article ID IJIM-00310. – P. 27–35.

358. *Arnold L.* Stochastic differential equations (theory and applications). – New York: John Wiley, 1974. – xvii, 228 p.

359. *Arriojas M., Hu Y., Mohammed S.-E. et al.* A delayed Black and Scholes formula // Stochastic Anal. and Appl. – 2007. – Vol. 25, № 2. – P. 471–492.

360. *Aruchunan E., Sulaiman J.* Numerical solution of second-order linear Fredholm integro-differential equation using generalized minimal residual method // American J. of Appl. Sciences. – 2010. – Vol. 7, № 6. – P. 780–783.

361. *Aruchunan E., Sulaiman J.* Half-sweep conjugate gradient method for solving first order linear Fredholm integro-differential equations // Australian J. of Basic and Appl. Sciences. – 2011. – Vol. 5, № 3. – P. 38-43.

362. *Asachenkov A., Marchuk G., Mohler R. et al.* Disease dynamics. – Boston: Birkhauser, 1994. – xv, 318 p.

363. *Asadi M.A., Salehi F., Mohyud-Din S.T. et al.* Modified homotopy perturbation method for stiff delay differential equations (DDEs) // Intern. J. of the Physical Sciences. – 2012. – Vol. 7, № 7. – P. 1025–1034.

364. *Asgari M., Hashemizadeh E., Khodabin M. et al.* Numerical solution of nonlinear stochastic integral equation by stochastic operational matrix based on Bernstein polynomials // Bulletin Mathématique de la Sociétédes Sciences Mathématiques de Roumanie. – 2014. – T. 57 (105), № 1. – P. 3–12.

365. *Asmussen S., Glynn P.W.* Stochastic simulation: Algorithms and analysis. – New York: Springer, 2007. – xiv, 476 p.

366. *Avazzadeh Z., Heydari M., Loghmani G.B.* Numerical solution of Fredholm integral equations of the second kind by using integral mean value theorem // AMM. – 2011. – Vol. 35. – P. 2374–2383.

367. *Avazzadeh Z., Heydari M., Chena W. et al.* Smooth solution of partial integro-differential equations using radial basis functions // J. of Appl. Anal. and Comput. – 2014. – Vol. 4, № 2. – P. 115–127.

368. *Azbelev N.V., Simonov P.M.* Stability of differential equations with aftereffect. – New York, London: Taylor & Francis, 2003. – xvii, 222 p.

369. *Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F.* Introduction to the theory

of functional differential equations: Methods and applications. – New York: Hindawi Publishing Corp., 2007. – ix, 314 p.

370. *Aziz I., Amin R.* Numerical solution of a class of delay differential and delay partial differential equations via Haar wavelet // AMM. – 2016. – Vol. 40, № 23–24. – P. 10286–10299.

371. *Babolian E., Shamloo A.S.* Numerical solution of Volterra integral and integro-differential equations of convolution type by using operational matrices of piecewise constant orthogonal functions // J. of Comput. and Appl. Math. – 2008. – Vol. 214. – P. 495–508.

372. *Baczewski A.D., Bond S.D.* Numerical integration of the extended variable generalized Langevin equation with a positive Prony representable memory kernel // J. of Chemical Physics. – 2013. – Vol. 139, № 4. – P. 044107.

373. *Bahuguna D., Ujlayan A., Pandey D.N.* A comparative study of numerical methods for solving an integro-differential equation // Comput. Math. Appl. – 2009. – Vol. 57, № 9. – P. 1485–1493.

374. *Bainov D.D., Hristova S.G.* Differential equations with Maxima. – Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC / Taylor & Francis, 2011. – x, 291 p.

375. *Bainov D.D., Mishev D.* Oscillation theory for neutral differential equations with delay. – Bristol: Adam Hilger, 1991. – viii, 280 p.

376. *Baker C.T.H.* Retarded differential equations // J. of Comput. and Appl. Math. – 2000. – Vol. 125, № 1–2. – P. 309–335.

377. *Baker C.T.H., Agyingi E.O., Parmuzin E.I. and al.* Sense from sensitivity and variation of parameters // ANM. – 2006. – Vol. 46. – P.397–412.

378. *Baker C.T.H., Bocharov G.A., Paul C.A.H. and al.* Models with delays for cell population dynamics: identification, selection and analysis. Part I // MCCM Numerical Analysis Report. – Manchester University, 2003. – № 425. –99 p.

379. *Baker C.T.H., Bocharov G.A., Rihan F.A.* A report on the use of delay differential equations in numerical modeling in the biosciences // Ibid. – Manchester University, 1999. – № 343. – 19 p.

380. *Baker C.T.H., Buckwar E.* Introduction to the numerical analysis of stochastic delay differential equations // Ibid. – Manchester University, 2000. – № 345 (revised). – 25 p.

381. *Baker C.T.H., Buckwar E.* Numerical analysis of explicit one-step methods for stochastic delay differential equations // LMS J. of Comput. and Math. – 2000. – Vol. 3. – P. 315–335.

382. *Baker C.T.H., Buckwar E.* Continuous Θ-methods for the stochastic pantograph equation // Electronic Trans. on Numerical Anal. – 2000. – Vol. 11. – P. 131–151.

383. *Baker C.T.H., Buchwar E.* Exponential stability in p-th mean of solutions, and of convergent Euler-type solutions, of stochastic delay differential equations // J. of Comput. and Appl. Math. – 2005. – Vol. 184, № 2. – P. 404–427.

384. *Baker C.T.H., Paul C.A.H., Willé D.R.* A bibliography on the numerical solution of delay differential equations // MCCM Numerical Analysis Reports. – Manchester University, 1995. – № 269. – 52 p.

385. *Baker C.T.H., Paul C.A.H., Willé D.R.* Issues in the numerical solution of evolutionary delay differential equations // Advances in Comput Math. – 1995. – Vol. 3, № 1. – P. 171–196.

386. *Balasubramaniam P., Ntouyas S.K.* Global existence for semilinear stochastic delay evolution equations with nonlocal conditions // Soochow J. of Math. – 2001. – Vol. 27, № 3. – P. 331–342.

387. *Balci M.A., Sezer M.* A Numerical approach based on exponential polynomials

for solving of Fredholm integro-differential-difference equations // New Trends in Math. Sciences. – 2015. – Vol. 3, № 2. – P. 44–54.

388. *Bani-Yaghoub M., Yao G., Reed A.W.* Modeling and numerical simulations of single species dispersal in symmetrical domains // Intern. J. of Appl. Math. – 2014. – Vol. 27, № 6. – P. 525–547.

389. *Banks H.T., Kappel F.* Spline approximations for functional differential equations // J. of Diff. Equations. – 1979. – Vol. 34, № 3. – P. 496–522.

390. *Banks H.T., Dediu S., Nguyen H.K.* Time delay systems with distribution dependent dynamics // Annual Reviews in Control. – 2007. – Vol. 31, № 1. – P. 17–26.

391. *Bao J., Mao X., Yuan C.* Rate of convergence for numerical solutions to SFDEs with jumps // arXiv:0906.3455 [math.PR] (submitted on 18.06.2009). – 17 p.

392. *Barbeiro S., Ferreira A.* Coupled vehicle–skin models for drug release // Computer Methods in Appl. Mech. and Engineering. – 2009. – Vol. 198, № 27. – P. 2078–2086.

393. *Barnoski R.L.* Response of elastic structures to deterministic and random excitation. – Los Angeles: Measurement Analysis Corporation, 1965. – 164 p.

394. *Barton D.A.W., Krauskopf B., Wilson R.E.* Collocation schemes for periodic solutions of neutral delay differential equations // J. of Difference Equations and Appl. – 2006. – Vol. 12, № 11-2. – P. 1087–1101.

395. *Bashier E.B.M., Kailash C. Patidar K.C.* A fitted numerical method for a system of partial delay differential equations // Comput. Math. Appl. – 2011. – Vol. 61, № 6. – P. 1475–1492.

396. *Basirat B., Shahdadi M.A.* Numerical solution of nonlinear integro-differential equations with initial conditions by Bernstein operational matrix of derivative // Intern. J. of Modern Nonlinear Theory and Appl. – 2013. – Vol. 2, № 2. – P. 141–149.

397. *Batkai A., Piazzera S.* Semigroups and linear partial differential equations with delay // J. of Math. Anal. and Appl. – 2001. – Vol. 264, № 1. – P. 1–20.

398. *Batkai A., Piazzera S.* Semigroups for delay equations. – URL: https://www.researchgate.net/profile/Andras_Batkai/publication/248390432_Semigroups_for_Delay_Equations/links/0deec53c8614242d17000000/Semigroups-for-Delay-Equations.pdf?origin=publication_detail (дата обращения 23.10.2019)

399. *Batkai A., Piazzera S.* Semigroups for delay equations. – New York: A K Peters/CRC Press, 2005. – xii, 259 p.

400. *Beck M.B.* The application of control and systems theory to problems of river pollution control. – Ph.D. Thesis. – Cambridge, UK: Cambridge University, 1974.

401. *Bedivan D.M., Fix G.J.* Analysis of finite element approximation and quadrature of Volterra integral equations // Numerical Methods for Partial Diff. Equations. – 1997. – Vol. 13, № 6. – P. 663–672.

402. *Behiry S.H., Saied I. Mohamed S.I.* Solving high-order nonlinear Volterra–Fredholm integro-differential equations by differential transform method // Natural Science. – 2012. – Vol. 4, № 8. – P. 581–587.

403. *Behzadi Sh.S., Abbasbandy S., Allahviranloo T. et al.* Application of homotopy analysis method for solving a class of nonlinear Volterra–Fredholm integro-differential equations // J. of Appl. Anal. and Comput. – 2012. – Vol. 2, № 2. – P. 127–136.

404. *Belbas S.A.* On series solutions of Volterra equations // AMC. – 2006. – Vol. 181, № 2. – P. 1287–1304.

405. *Beldica C.E., Hilton H.H.* Analytical and computational simulations of experimental determinations of deterministic and random linear viscoelastic constitutive relations // Proc. of 12th Intern. Conf. on Composite Materials (ICCM-12). – Paris, 1999 (CD-ROM volume).

406. *Bellen A., Maset S.* Numerical solution of constant coefficient linear delay

differential equations as abstract Cauchy problems // Numerische Mathematik. – 2000. – Vol. 84. – P. 351–374.

407. *Bellen A., Zennaro M.* Numerical methods for delay differential equations. – Oxford: Oxford University Press, 2003. – xiv, 395 p.

408. *Bellen A., Maset S., Zennaro M. et al.* Recent trends in the numerical solution of retarded functional differential equations // Acta Numerica. – 2009. – Vol. 18. – P. 1–110.

409. *Bellman R., Cooke K.* Differential-difference equations. – New York: Academic Press, 1963. – 483 p.

410. *Berenguer M.I., Garralda-Guillem A.I., Galán M.R.* Biorthogonal systems approximating the solution of the nonlinear Volterra integro-differential equation // Fixed Point Theory and Appl. – 2010. – Article ID 470149. – 9 p.

411. *Beretta E., Bischi G.I., Solimano F.* Stability in chemostat equations with delayed nutrient recycling // J. of Math. Biology. – 1990. – Vol. 28, № 1. – P. 99–111.

412. *Berger M.A., Mizel V.J.* Volterra equations with Itô integrals – I // J. of Integral Equations. – 1980. – Vol. 2, № 3. – P. 187–245.

413. *Berti M., Carminati C.* Chaotic dynamics for perturbations of infinite dimensional Hamiltonian systems // Nonlinear Analysis. – 2002. – Vol. 48, № 4. – P. 481–504.

414. *Bharucha-Reid A.T.* Random integral equations. – New York: Academic Press, 1972.– xiii, 267 p.

415. *Biazar J., Asadi M.A.* Indirect RBF for high-order integro-differential equations // British J. of Math. & Computer Science. – 2015. – Vol. 11, № 1. – P. 1–16.

416. *Biazar J., Ebrahimi H.* A strong method for solving systems of integro-differential equations // Appl. Math. – 2011. – Vol. 2, № 9. – P. 1105–1113.

417. *Biazar J., Ebrahimi H.* Chebyshev wavelets approach for nonlinear systems of Volterra integral equations // Comput. Math. Appl. – 2012. – Vol. 63, № 3. – P. 608–616.

418. *Bildik N., Konuralp A., Yalçinbaş S.* Comparison of Legendre polynomial approximation and variational iteration method for the solutions of general linear Fredholm integro-differential equations // Comput. Math. Appl. – 2010. – Vol. 59. – P. 1909–1917.

419. *Binder K.* Monte Carlo and molecular dynamics simulations in polymer science. – Oxford: Oxford University Press, 1995. – xiv, 587 p.

420. *Biot M.A.* Mechanics of incremental deformations: Theory of elasticity and viscoelasticity of initially stressed solids and fluids, including thermodynamic foundations and applications to finite strain. – New York: John Wiley, 1965. – 601 p.

421. *Black F., Scholes M.* The pricing of options and corporate liabilities // J. of Political Economy. – 1973. – Vol. 81. – P. 637–654.

422. *Bocharov G.A., Rihan F.A.* Numerical modelling in biosciences using delay differential equations // J. of Comput. and Appl. Math. – 2000. – Vol. 125, № 1–2. – P. 183–199.

423. *Bonilla L.L., Liñá A.* Relaxation oscillations, pulses, and travelling waves in the diffusive Volterra delay-differential equation // SIAM J. of Appl. Math. – 1984. – Vol. 44, № 2. – P. 369–391.

424. *Boukamel A., Méo S., Débordes O. et al.* A thermo-viscoelastic model for elastomeric behaviour and its numerical application // Archive of Appl. Mech. – 2001. – Vol. 71, № 12. – P. 785–801.

425. *Boukas E.K.* Control of stochastic systems with time-varying multiple time-delays: An LMI approach // Les Cahiers du GERAD. G-2002-26. – 2002. – 16 p.

426. *Boulet J., Balasubramaniam R., Daffertshofer A. et al.* Stochastic two-delay differential model of delayed visual feedback effects on postural dynamics // Philosophical Trans. of The Royal Society. Ser. A. Math. Physical and Engineering Sciences. – 2010. –

Vol 368, № 1911. – P. 423–438.

427. *Boulier F., Lemaire F., Rosenkranz M. et al.* On symbolic approaches to integro-differential equations // Algebraic and Symbolic Comput. Methods in Dyn. Systems / A. Quadrat, E. Zerz (eds.). – Cham: Springer, 2020. – P. 161–182.

428. *Boutle I., Taylor R.H.S., Roemer R.A.* El Nino and the delayed action oscillator // American J. of Physics. – 2007. – Vol. 75,№ 1. – P. 15–24.

429. *Bower D.I.* An Introduction to polymer physics. – Cambridge: University Press, 2002. – xx, 444 p.

430. *Branco J.R., Ferreira J.A.* A nonlinear viscoelasticity problem with memory in time // WSEAS Trans. on Math. – 2006. – Vol. 5, № 11. – P. 1182–1190.

431. *Breda D., Vermiglio S.M.R.* Pseudospectral differencing methods for characteristic roots of delay differential equations // SIAM J. on Scientific Computing. – 2005. – Vol. 27, № 2. – P. 482–495.

432. *Breda D., Maset S., Vermiglio R.* Stability of linear delay differential equations: A numerical approach with MATLAB. – New York: Springer, 2015. – xi, 158 p.

433. *Briat C.* Linear parameter-varying and time-delay systems: Analysis, observation, filtering & control. – Berlin, Heidelberg: Springer, 2015. – xviii, 394 p.

434. *Brinson H.F., Brinson L.C.* Polymer engineering science and viscoelasticity: An introduction. – New York: Springer, 2008. – xvi, 446 p.

435. *Brunner H.* Implicit Runge–Kutta methods of optimal order for Volterra integro-differential equations // Math. of Comput. – 1984. – Vol. 42, № 165. – P. 95–109.

436. *Brunner H.* High-order methods for the numerical solution of Volterra integro-differential equations // J. of Comput. and Appl. Math. – 1986. – Vol. 15. – P. 301–309.

437. *Brunner H.* Iterated collocation methods for Volterra integral equations with delay arguments // Math. of Comput. – 1994. – Vol. 62, № 206. – P. 581–599.

438. *Brunner H.* Collocation methods for Volterra integral and related functional differential equations. – Cambridge: University Press, 2004. – 597 p.

439. *Brunner H., Hairer E., Nørsett S.P.* Runge–Kutta theory for Volterra integral equations of the second kind // Math. of Comput. – 1982. – Vol. 39, № 159. – 147–163.

440. *Brunner H., Kauthen J.-P., Ostermann A.* Runge–Kutta time discretizations of parabolic Volterra integro-differential equations // J. of Integral Equations and Appl. – 1995. – Vol. 7, № 1. – P. 1–16.

441. *Buckwar E.* Introduction to the numerical analysis of stochastic delay differential equations // J. of Comput. and Appl. Math. – 2000. – Vol. 125, № 1–2. – P. 297–307.

442. *Buckwar E.* Euler–Maruyama and Milstein approximations for stochastic functional differential equations with distributed memory term // SFB 373 Discussion Papers: Humboldt University of Berlin, Interdisciplinary Research Project 373. – 2003. – № 16. – 24 p.

443. *Buckwar E.* The θ-Maruyama scheme for stochastic functional differential equations with distributed memory term // Monte Carlo Methods and Appl. – 2004. – Vol. 10, № 3. – P. 235–244.

444. *Buckwar E.* One-step approximations for stochastic functional differential equations // ANM. – 2006. – Vol. 56, № 5. – P. 667–681.

445. *Buckwar E., Kuske R., Mohammed S.-E., Shardlow T.* The weak Euler scheme for stochastic differential delay equations // Annals of Probability. – 2006. – Vol. 25, № 1. – P. 393–423.

446. *Buckwar E., Kuske R., Mohammed S.-E. et al.* Weak convergence of the Euler scheme for stochastic differential delay equations // London Math. Society J. of Comput. and Math. – 2008. – Vol. 11. – P. 60–99.

447. *Buckwar E., Riedler M.G.* Runge–Kutta methods for jump-diffusion differential

equations // J. of Comput. and Appl. Math. – 2011. – Vol. 236, № 6. – P. 1155–1182.

448. *Buckwar E., Winkler R.* Multi-step Maruyama methods for stochastic delay differential equations // Stochastic Anal. and Appl. – 2007. – Vol. 25, № 5. – P. 933–959.

449. *Burden R.L., Faires J.D., Burden A.M.* Numerical analysis. – 10th ed. – Boston: Cengage Learning, 2016. – xvi, 900 p.

450. *Burton T.A.* Volterra integral and differential equations. – Orlando, FL: Academic Press Inc., 1983. – 368 p.

451. *Busenberg S., Cooke K.L.* The effect of integral conditions in certain equations modelling epidemics and population growth // J. of Math. Biology. – 1980. – Vol. 10, № 1. – P. 13–32.

452. *Cacuchi D.G.* Sensitivity and uncertainty analysis. – Boca Raton, FL: Chapman & Hall / CRC, 2003. – Vol. 1. – 285 p.

453. *Cai G.Q., Lin Y.K.* Response distribution of non-linear systems excited by non-Gaussian impulsive noise // Intern. J. of Non-Linear Mech. – 1992. – Vol. 27, № 6. – P. 955–967.

454. *Calsina Á., Diekmann O., Farkas J.Z.* Structured populations with distributed recruitment: from PDE to delay formulation // Math. Methods in the Appl. Sciences. – 2016. – Vol. 39, № 18. – P. 5175–5191.

455. *Calvo M., Grande T.* On the asymptotic stability of θ-methods for delay differential equations // Numerische Mathematik. – 1988. – Vol. 54. – P. 257–269.

456. *Canuto C., Hussaini M.Y., Quarteroni A. et al.* Spectral methods in fluid dynamics. – New York: Springer, 1988. – xv, 567 p.

457. *Cao W., Zhang Z.* On exponential mean-square stability of two-step Maruyama methods for stochastic delay differential equations // J. of Comput. and Appl. Math. – 2013. – Vol. 245. – P. 182–193.

458. *Cao W., Zhang Z., Karniadakis G.E.* Numerical methods for stochastic delay differential equations via the Wong–Zakai approximation // SIAM J. on Scientific Computing. – 2015. – Vol. 37, № 1. – P. A295–A318.

459. *Cao Y., Cerezo G., Herdman T.L., Turi J.* Singularity expansion for a class of neutral equations // J. of Integral Equations and Appl. – 2007. – Vol. 19, № 1. – P. 13–32.

460. *Cao Y., Zhang R.* A stochastic collocation method for stochastic Volterra equations of the second kind // Ibid. – 2015. – Vol. 27, № 1. – P. 1–25.

461. *Caraballo T., Kloeden P.E., Real J.* Discretization of asymptotically stable stationary solutions of delay differential equations with a random stationary delay // J. of Dyn. and Diff. Equations. – 2006. – Vol. 18, № 4. – P. 863–880.

462. *Caraballo T., Real J., Taniguchi T.* The exponential stability of neutral stochastic delay partial differential equations // Discrete and Continuous Dyn. Systems. Ser. A. – 2007. – Vol. 18, № 2–3. – P. 295–313.

463. *Cardone A., Conte D., D'Ambrosio R. et al.* Collocation methods for Volterra integral and integro-differential equations: A review // Axioms. – 2018. – Vol. 7, № 3. – Article ID 45. – 19 p.

464. *Castello D.A., Rochinha F.A., Roitman N. et al.* Modelling and identification of viscoelastic materials by means of a time domain technique // 6th World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization. – Rio de Janeiro, 2005. – 10 p., URL: www.engopt.org/wcsmo6/papers/1081.pdf

465. *García M.A., Castro M.A., Martín J.A. et al.* Exact and nonstandard numerical schemes for linear delay differential models // AMC. – 2018. – Vol. 338. – P. 337–345.

466. *Castro R. , Kofman E., Cellier F.E.* Quantization-based integration methods for delay-differential equations // Simulation Modelling Practice and Theory. – 2011. – Vol. 19, № 1. – P. 314–336.

467. *Chacón J.E., Duong T.* Multivariate kernel smoothing and its applications. – Boca Raton, FL: CRC Press, 2018. – xxi, 226 p.

468. *Chang S.H.* On certain extrapolation methods for the numerical solution of integro-differential equations // Math. of Comput. – 1982. – Vol. 39, № 159. – P. 165–171.

469. *Chang H.-J., Dye C.-Y.* An inventory model with stock-dependent demand under conditions of permissible delay in payments // J. of Statistics and Management Systems. – 1999. – Vol. 2, № 2/3. – P. 117–126.

470. *Chang M.-H.* Weak infinitesimal generator for a stochastic partial differential equation with time delay // J. of Appl. Math. and Stochastic Anal. – 1995. – Vol. 8, № 2. – P. 115–138.

471. *Chaumont S., Imkeller P., Müller M. et al.* A simple model for trading climate risk // Vierteljahrshefte zur Wirtschaftsforschung. – Berlin: Duncker & Humboldt, 2005. – Vol. 74. № 2. – P. 175–195.

472. *Chekroun M.D., Kröner A., Liu H.* Galerkin approximations of nonlinear optimal control problems in Hilbert spaces // Electronic J. of Diff. Equations (Texas State University). – 2017. – Vol. 2017 (189). – P. 1-40.

473. *Chen C., Shih T.* Finite element methods for integrodifferential equations. – Singapore: World Scientific, 1998. – xvii, 272 p.

474. *Chen C., Tomizuka M.* Lateral control of commercial heavy vehicles // Vehicle System Dyn. – 2000. – Vol. 33, № 6. – P. 391–420.

475. *Chen H., Zhang C.* Block boundary value methods for solving Volterra integral and integro-differential equations // J. of Comput. and Appl. Math. – 2012. – Vol. 236, № 11. – P. 2822–2837.

476. *Chen H.* Integral inequality and exponential stability for neutral stochastic partial differential equations with delays // J. of Inequalities and Appl. – 2009. – Vol. 2009. – Article ID 297478. – 15 p.

477. *Chen T., Li X., He J.* Complex dynamics of credit risk contagion with time-delay and correlated noises // Abstract and Appl. Anal. – 2014. – Vol. 2014. – Article ID 456764. – 10 p.

478. *Chen X.* On magneto-thermo-viscoelastic deformation and fracture // Intern. J. of Non-Linear Mech. – 2009. – Vol. 44, № 2. – P. 244–248.

479. *Chen X.* Nonlinear electro-thermo-viscoelasticity // Acta Mechanica. – 2010. – Vol. 211, № 1–2. – P. 49–59.

480. *Chen Y., Ding M., Kelso J.A.S.* Long memory processes ($1/f^{\alpha}$ type) in human coordination // Physical Review Letters. – 1997. – Vol. 79, № 22. – P. 4501–4504.

481. *Chocholatý P.* Integro-differential equations with time-varying delay // Programs and Algorithms of Numerical Math.: Proc. of Seminar / J. Chleboun, K. Segeth, J. Šístek et al. (eds.). – Prague: Institute of Math. AS CR, 2013. – P. 51–56.

482. *Chow P.-L.* Stochastic partial differential equations. – Boca Raton, FL: Chapman & Hall / CRC, 2015. – xii, 314 p.

483. *Christensen R.M.* Theory of viscoelasticity: An introduction. – New York, London: Academic Press, 1982. – 378 p.

484. *Chung S.K., Park M.G.* Spectral analysis for hyperbolic integro-differential equations with a weakly singular kernel // J. of the Korean Society for Industrial and Appl. Math. – 1998. – Vol. 2, № 2. – P. 31–40.

485. *Ciobanu G.Gr.* On stability of equilibrium in linear thermoviscoelasticity // Archives of Mech. (Warszawa). – 2006. – Vol. 58, № 1. – P. 3–16.

486. *Choi K.K., Kim N.H.* Structural sensitivity analysis and optimization. – New York: Springer, 2005. – Vol. 1. Linear Systems. – xviii, 448 p.; Vol. 2. Nonlinear Systems and Applications. – xx, 326 p.

487. *Cochran J.A.* The analysis of linear integral equations. – New York: McGraw-Hill Education, 1972. – 370 p.

488. *Coleman B.D.* On the thermodynamics, strain impulses and viscoelasticity // Archive for Rational Mech. and Anal. – 1964. – Vol. 17, № 3. – P. 230–254.

489. Complex time-delay systems: Theory and applications / F.M. Atay (ed.). – Berlin, Heidelberg: Springer. – 2010. – xii, 328 p.

490. *Cong Y., Cai J., Xiang J.* GP-stability of Rosenbrock methods for system of delay differential equation // Appl. Math. and Mech. (English Ed.). – 2004. – Vol. 25, № 12. – P. 1405–1411.

491. *Cong N.D., Doan T.S., Siegmund S.* On Lyapunov exponents of difference equations with random delay // Discrete and Continuous Dyn. Systems. Ser. B (DCDS-B). – 2015. – Vol. 20, № 3. – P. 861–874.

492. *Cont R., Tankov P.* Financial modelling with jump processes. – 2nd ed. – Boca Raton, FL: Chapman&Hall, 2009. – 606 p.

493. *Cooke K.L., Kuang Y., Li B.* Analysis of an antiviral immune response model with time delays // Canadian Appl. Math. Quarterly. – 1998. – Vol. 6. – P. 321–354.

494. *Cordero L.F., Escalante R.* Segmented Tau approximation for a parametric nonlinear neutral differential equation // AMC. – 2007. – Vol. 190, № 1. – P. 866–881.

495. *Corduneanu C.* Integral equations and applications. – Cambridge: University Press, 1991. – viii, 366 p.

496. *Corduneanu C., Li Yi., Mahdavi M.* Functional differential equations: Advances and applications. – Hoboken, NJ: John Wiley, 2016. – xvi, 342 p.

497. *Crauel H., Son D.T., Siegmund S.* Difference equations with random delay // J. of Difference Equations and Appl. – 2009. – Vol. 15, № 7. – P. 627–647.

498. *Creus G.J.* Viscoelasticity – Basic theory and applications to concrete structures. – Berlin, Heidelberg: Springer, 1986. – vii, 169 p.

499. *Crisci M.R., Russo E., Vecchio A.* Time point relaxation methods for Volterra integro-differential equations // Comput. Math. Appl. – 1998. – Vol. 36, № 9. – P. 59–70.

500. *Cryer C.W.* Numerical methods for functional differential equations // Delay and functional differential equations and their applications / K. Schmitt (ed.). – New York, London: Academic Press, 1972. – P. 17–101.

501. *Cryer C.W., Tavernini L.* The numerical solution of Volterra functional differential equations by Euler's method // SIAM J. on Numerical Anal. – 1972. – Vol. 9, № 1. – P. 105–129.

502. *Cushing J.M.* Integrodifferential equations and delay models in population dynamics. – Berlin, Heidelberg: Springer, 1977. – vi, 198 p.

503. *Cyganowski S., Kloeden P., Ombach J.* From elementary probability to stochastic differential equations with MAPLE. – Berlin, Heidelberg: Springer, 2002. – 310 p.

504. *Dadkhah M., Kajani M.T., Mahdavi S.* Numerical solution of nonlinear Fredholm–Volterra integro-differential equations using Legendre wavelets // Proc. of the 6th IMT-GT Conf. on Math., Statistics and its Appl. (ICMSA2010). – Kuala Lumpur: Universiti Tunku Abdul Rahman, 2010. – P. 738–744.

505. *Danfu H., Xufeng Sh.* Numerical solution of integro-differential equations by using CAS wavelet operational matrix of integration // AMC. – 2007. – Vol. 194, № 2. – P. 460—466.

506. *Da Prato G., Zabczyk J.* Stochastic equations in infinite dimensions. – Cambridge: University Press, 2014. – xviii, 493 p.

507. *Darania P., Ebadian A.* A method for the numerical solution of the integro-differential equations // AMC. – 2007. – Vol. 188, № 1. – P. 657–668.

508. *Datko R.* Linear autonomous neutral differential equations in a Banach space //

J. of Diff. Equations. – 1977. – Vol. 25, № 2. – P. 258–274.

509. *Davaeifar S., Rashidinia J., Amirfakhrian M.* Bernstein polynomial approach for solution of higher-order mixed linear Fredholm integro-differential-difference equations with variable coefficients // TWMS J. of Pure and Appl. Math. – 2016. – Vol. 7, № 1. – P. 46–62.

510. *Day J.T.* Note on the numerical solution of integro-differential equations // The Computer J. – 1967. – Vol. 9, № 4. – P. 394–395.

511. *Day W.A.* Time-reversal and the symmetry of the relaxation function of a linear viscoelastic material // Archive for Rational Mech. and Anal. – 1971. – Vol. 40, № 3. – P. 155–159.

512. *De Boer R.J., Perelson A.S.* Size and connectivity as emergent properties of a developing network // J. of Theoretical Biology. – 1991. – Vol. 149, № 3. – P. 381–424.

513. *de Hoog F., Weiss R.* Implicit Runge–Kutta methods for second kind Volterra integral equation // Numerische Mathematik. – 1974. – Vol. 23.– P. 199–213.

514. Delay differential equations and Applications: Proc. of the NATO Advanced Study Institute (Marrakech, Sept. 9–21, 2002) / O. Arino, M.L. Hbid, E. Ait Dads (eds.). – Dordrecht: Springer, 2006. – xxvi, 570 p.

515. *Dehghan M., Shakeri F.* Solution of an integro-differential equation arising in oscillating magnetic fields using He's homotopy perturbation method // Progress in Electromagnetics Research (PIER). – 2008. – Vol. 78. – P. 361–376.

516. *Dehghan M., Shakourifar M., Hamidi A.* The solution of linear and nonlinear systems of Volterra functional equations using Adomian–Pade technique // Chaos, Solitons and Fractals. – 2009. – Vol. 39, № 5. – P. 2509–2521.

517. *Delong Ł.* Backward stochastic differential equations with jumps and their actuarial and financial applications. BSDEs with jumps. – London: Springer, 2013. – x, 288 p.

518. *Demidov A.V., Makarov A.G., Stalevich A.M.* Predicting the nonlinear hereditary viscoelasticity of polymers // J. of Appl. Mech. and Technical Physics. – 2007. – Vol. 48, № 6. – P. 897–904.

519. *Deshmukh V.* Solutions of delayed partial differential equations with space-time varying coefficients // J. of Comput. and Nonlinear Dyn. – 2012. – Vol. 7, № 2. – Article ID 021002. – P. 021002-1–021002-7.

520. *Devkate R.K., Dhaigude R.M.* Modified Milne Simpson method for solving differential equations // Intern. J. of Innovative Research in Science, Engineering and Technology. – 2017. – Vol. 6, № 8. – P. 17067–17076.

521. *Diekmann O., van Gils S.A., Lunel S.M.V.* Delay equations: functional-, complex-, and nonlinear analysis. – New York: Springer, 1995. – xi, 534 p.

522. *Di Paola M., Pirotta A.* Vehicle dynamic response considering front-to-rear excitation delay // 8th ASCE Specialty Conf. on Probabilistic Mech. and Structural Reliability. – 2000. – PMC2000–255. – 6 p. – URL: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.622.7092&rep=rep1&type=pdf (дата обращения 14.12.2019).

523. *Di Paola M., Santoro R.* Path integral solution for non-linear system enforced by Poisson white noise // Probabilistic Engineering Mech. – 2008. – Vol. 23, № 2–3. – P. 164–169.

524. *Ding X., Wu K., Liu M.* Convergence and stability of the semi-implicit Euler method for linear stochastic delay integro-differential equations // Intern. J. of Computer Math. – 2006 – Vol. 83, № 10. – P. 753–763.

525. *Ding X.-H., Ma Q., Zhang L.* Convergence and stability of the split-step θ-method for stochastic differential equations // Comput. Math. Appl. – 2010. – Vol. 60, № 5. – P. 1310–1321.

526. *Diskmanns E.D., Myslewetz B.D.* Recursive 3-d road and relative ego-state recognition // IEEE Trans. on Pattern Anal. and Machine Intelligence – Special issue on interpretation of 3-D scenes (part II archive). – 1992. – Vol. 14, № 2. – P. 199–213.

527. *Doi M., Edwards S.F.* Dynamics of rod-like macromolecules in concentrated solution: Part 1 // J. of the Chemical Society, Faraday Trans. 2: Molecular and Chemical Physics. – 1978. – Vol. 74. – P. 560–570.

528. *Driver R.D.* Ordinary and delay differential equations. – New York, Heidelberg, Berlin: Springer, 1977. – ix, 501 p.

529. *Drozdov A.D.* A constitutive model in thermoviscoelasticity // Mech. Research Communications. – 1996. – Vol. 23, № 5. – P. 543–548.

530. *Drozdov A.D.* Viscoelastic structures: Mechanics of growth and aging. – San Diego: Academic Press, 1998. – xii, 463 p.

531. *Drozdov A.D.* Mechanics of viscoelastic solids. – Chichester: John Wiley, 1998. – 596 p.

532. *Drozdov A.D.* Modelling physical aging in glassy polymers: 1) an overview of phenomenological models // Bulletin of the Samara State University. – 1998. – № 4. – P. 120–145.

533. *Drozdov A.D.* Linear thermo-viscoelasticity of polypropylene // Mech. Research Communications. – 2010. – Vol. 37, № 8. – P. 690–695.

534. *Drozdov A.D., Al-Mulla A., Drozdov D.A. et al.* Linear viscoelasticity and thermal degradation of hybrid nanocomposites: isotactic polypropylene reinforced with carbon nanofibres // J. of Engineering Research. – 2013. – Vol. 1, № 1. – P. 45–80.

535. *Drozdov A.D., Jensen E.A., Christiansen J.D.* Nonlinear viscoelastic response of thermoplastic-elastomer melts // Advances in Appl. Math. and Mech. – 2010. – Vol. 2, № 1. – P. 1–31.

536. *Drozdov A.D, Kolmanovskii V.B.* Stability in viscoelasticity. – Amsterdam: North-Holland, 1994. – ix, 600 p.

537. *Drozdov A.D., Kolmanovskii V.B., Nistri P. et al.* Stability of nonhomogeneous aging viscoelastic bodies under dynamic loading // Nonlinear Anal.: Theory, Methods & Appl. – 1995. – Vol 24, № 9. – P. 1361–1375.

538. *Du A., Duan J.* A stochastic approach for parameterizing unresolved scales in a system with memory // J. of Algorithms & Comput. Technology. – 2009. – Vol. 3, № 3. – P. 393–405.

539. *Dung N.T.* Stochastic dynamics of a delayed bistable system with multiplicative noise // J. of Math.l Physics. – 2014. – Vol 55, № 5. – P. 052701 (1–15).

540. *Eke A.N., Jackreece P.C.* Taylor series expansion of nonlinear integrodifferential equations // American J. of Scientific and Industrial Research. – 2011. – Vol. 2, № 3. – P. 376–380.

541. *El–Baghdady G.I., El–Azab M.S.* A new Chebyshev spectral-collocation method for solving a class of one-dimensional linear parabolic partial integro-differential equations // British J. of Math. & Computer Science. – 2015. – Vol. 6, № 3. – P. 172–186.

542. *El-Gamel M., Mohsen A.* Sinc and the numerical solution of Volterra–Fredholm integro-differential Equations // Acta Universitatis Apulensis. – 2015. – № 43/2015. – P. 169-186.

543. *El-Hawary H.M., El-Shami K.A.* Numerical solution of Volterra delay-integro-differential equations via spline/spectral methods // Intern. J. of Diff. Equations and Appl. – 2013. – Vol. 12, № 3. – P. 149–157.

544. *El-Kady M.M., Hussien H.S., Ibrahim M.A.* Ultraspherical spectral integration method for solving linear integro-differential equations // Intern. J. of Math. and Computer Sciences. – 2009. – Vol. 5, № 1. – P. 25–32.

545. *El-Moselhy T., Daniel L.* Stochastic integral equation solver for efficient variation-aware interconnect extraction // DAC'08: Proc. of the 45th Annual Design Automation Conf. – Anaheim, CA, 2008. – P. 415–420.

546. *ElBeheiry E.M., Karnopp D.C.* Optimal control of vehicle random vibration with constrained suspension deflection // J. of Sound and Vibration. – 1996. – Vol. 189, № 5. – P. 547–564.

547. *Elbeyli O., Sun J.Q., Ünal G.* A semi-discretization method for delayed stochastic systems // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2005. – Vol. 10, № 1. – P. 85–94.

548. *Elvin A.J., Laing C.R.* Evaluation of numerical integration schemes for a partial integro-differential equation // Research Letters in the Information and Math. Sciences. – 2005. – Vol. 7. – P. 171–186.

549. *Erneux T.* Applied delay differential equations. – New York: Springer, 2009. – xii, 204 p.

550. *Ernst Ph.A., Soleymani F.* A Legendre-based computational method for solving a class of Ito stochastic delay differential equations // Numerical Algorithms. – 2019. – Vol. 80, № 4. – P. 1267–1282.

551. *Eslami M.* Theory of sensitivity in dynamic systems: An introduction. – Berlin, Heidelberg: Springer, 1994. – xviii, 600 p.

552. *Evans G.C.* Sull equazione integro-differenziale di tipo parabolico // Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei. – 1912. – Ser. 5. – Vol. 21, № 2. – P. 25–31.

553. *Ezzinbi Kh., Megdiche H., Rebey A.* Existence of solutions in the α-norm for partial differential equations of neutral type with finite delay // Electronic J. of Diff. Equations. – 2010. – Vol. 2010, № 157. – P. 1–11.

554. *Fabrizio M., Morro A.* Mathematical problems in linear viscoelasticity. – Philadelphia, PA: SIAM, 1992. – ix, 203 p.

555. *Fadhal F.S., Mohammed R.Q.* Approximate solution of the Volterra random integral equations // Intern. J. of Innovative Research in Science, Engineering and Technology. – 2014. – Vol.3̇, № 12. – P. 17828–17836.

556. *Fahim A., Araghi M.A.F., Rashidinia J., Jalalvand M.* Numerical solution of Volterra partial integro-differential equations based on sinc-collocation method // Advances in Difference Equations. – 2017. – Vol. 2017. – Article № 362. – 21 p.

557. *Fakhar-Izadi A., Dehghan M.* The spectral methods for parabolic Volterra integro-differential equations // J. of Comput. and Appl. Math. – 2009. – Vol. 235, № 14. – P. 4032–4046.

558. *Faria T.* Normal forms and Hopf bifurcation for partial differential equations with delays // Trans. of the American Math. Society. – 2000. – Vol. 352, № 5. – P. 2217–2238.

559. *Farnoosh R., Ebrahimi M.* Monte Carlo method for solving Fredholm integral equations of the second kind // AMC. – 2008. – Vol. 195, № 1. – P. 309–315.

560. *Fathy M., El-Gamel M., El-Azab M.S.* Legendre–Galerkin method for the linear Fredholm integro-differential equations // AMC. – 2014. – Vol. 243. – P. 789–800.

561. *Feldstein A., Iserles A., Levin D.* Embedding of delay equations into an infinite-dimensional ODE system // J. of Diff. Equations. – 1995. – Vol. 117, № 1. – P. 127–150.

562. *Ferry J.D.* Viscoelastic properties of polymers. – Chichester: John Wiley, 1980. – xxiv, 641 p.

563. *Feigl K., Öttinger H.Ch.* A new class of stochastic simulation models for polymer stress calculation // J. of Chemical Physics. – 1998. – Vol. 109, № 2. – P. 815–826.

564. *Filiz A.* Numerical solution of parabolic Volterra integro-differential equations via backward-Euler scheme // American J. of Comput. and Appl. Math. – 2013. – Vol. 3,

№ 6. – P. 277–282.

565. *Filiz A.* Numerical solution of linear Volterra integro-differential equation using Runge–Kutta–Fehlberg method // Appl. and Comput. Math. – 2014. – Vol. 3, № 1. – P. 9–14.

566. *Findley W.N., Lai J.S., Onaran K.* Creep and relaxation of nonlinear viscoelastic materials with an introduction to linear viscoelasticity. – Amsterdam: North-Holland, 1976. – 380 p.

567. *Fishman G.S.* Monte Carlo: Concepts, algorithms and applications. – New York: Springer, 1999. – xxv, 698 p.

568. *Fliess M., Mounier H., Rouchon P., Rudolph J.* Controllability and motion planning for linear delay systems with an application to a flexible rod // Proc. of the 34th IEEE Conf. on Decision and Control. – New Orleans, LA: IEEE, 1995. – Vol. 2. – P. 2046–2051.

569. *Floris C.* Stochastic stability of a viscoelastic column axially loaded by a white noise force // Mech. Research Communications. – 2011. – Vol. 38, № 1. – P. 57–61.

570. *Flügge W.* Viscoelasticity. – Berlin, Heidelberg: Springer, 1975. – vii, 194 p.

571. *Ford N., Baker Ch., Roberts J.* Nonlinear Volterra integro-differential equations stability and numerical stability of θ-methods // J. of Integral Equations and Appl. – 1998. – Vol. 10, № 4. – P. 397–416.

572. *Forde J.E.* Delay differential equation models in mathematical biology. – PhD thesis. – University of Michigan, 2005. – 94 p.

573. *Fowler A.C.* Asymptotic methods for delay equations // J. of Engineering Math. – 2005. – Vol. 53. – P. 271–290.

574. *Francfort G.A., Suquet P.M.* Homogenization and mechanical dissipation in thermo-viscoelasticity // Archive for Rational Mech. and Anal. – 1986. – Vol. 96, № 3. – P. 265–292.

575. *Frank P.M.* Introduction to system sensitivity theory. – New York: Academic Press, 1978. – 386 c.

576. *Frank T.D.* Multivariate Markov processes for stochastic systems with delays: Application to the stochastic Gompertz model with delay // Physical Review E. – 2002. – Vol. 66, № 1 (011914). – 8 p.

577. *Frank T.D.* A Markov approach to nonlinear multivariate delay systems with noise // Physica Scripta. – 2003. – Vol. 68, № 5. – P. 333–336.

578. *Frank T.D.* Stationary distributions of stochastic processes described by a linear neutral delay differential equation // J. of Physics A: Mathematical and General. – 2005. – Vol. 38, № 28. – P. L485–L490.

579. *Frank T.D.* Delay Fokker–Planck equations, Novikov's theorem, and Boltzmann distributions as small delay approximations // Physical Review E. – 2005. – Vol. 72, № 1 (011112). – 8 p.

580. *Frank T.D.* Kramers–Moyal expansion for stochastic differential equations with single and multiple delays: Applications to financial physics and neurophysics // Physics Letters A. – 2007. – Vol. 360, № 4–5. – P. 552–562.

581. *Frank T.D., Beek P.J.* Stationary solutions of linear stochastic delay differential equations: Applications to biological systems // Physical Review E. – 2001. – Vol. 64, № 2 (021917). –12 p.

582. *Frank T.D., Beek P.J., Friedrich R.* Fokker–Planck perspective on stochastic delay systems: Exact solutions and data analysis of biological systems // Physical Review E. – 2003. – Vol. 68, № 2 (021912). – 10 p.

583. *Fridman E.* Introduction to time-delay systems: Analysis and control. – Basel: Birkhäuser, 2014. – xviii, 362 p.

584. *Frochte J.* A third order method for convection-diffusion equations with a delay term // Numerical Math. and Advanced Appl.s: Proc. of the 7th European Conf. on Numerical Math. and Advanced Appl. (ENUMATH 2007, Graz, Sept. 2007) / K. Kunisch, G. Of, O. Steinbach (eds.). – Berlin, Heidelberg: Springer, 2008. – P. 281–288.

585. *Frochte J.* An adaptive higher order method in time for partial integro-differential equations // AIP Conf. Proc. – 2008. – Vol. 1048, № 1. – P. 213–216.

586. *Fu X., Ezzinbi K.* Existence of solutions for neutral functional differential evolution equations with nonlocal conditions // Nonlinear Anal. – 2003. – Vol. 54, № 2. P. 215–227.

587. *Fu X.* Existence and stability of solutions for nonautonomous stochastic functional evolution equations // J. of Inequalities and Appl. – 2009. – Vol. 2009:785628. – 27 p.

588. *Funk G.A., Barbour A.D., Hengartner H., Kalinke U.* Mathematical model of a virus-neutralizing immunoglobulin response // J. of Theoretical Biology. – 1998. – Vol. 195, № 1. – P. 41–52.

589. *Gachpazan M., Kerayechian A., Zeidabadi H.* Finite element method for solving linear Volterra integro-differential equations of the second kind // J. of Information and Computing Science. – 2014. – Vol. 9, № 4. – P. 289–297.

590. *Galtier M. Touboul J.* On an explicit representation of the solution of linear stochastic partial differential equations with delays // Comptes Rendus Mathematique. – 2012. – Vol. 350, № 3–4. – P. 167–172.

591. *Gao Sh.-L.* Generalized stochastic resonance in a linear fractional system with a random delay // J. of Statistical Mech.: Theory and Experiment. – 2012. – Vol. 2012, № 12. – P. 12011.

592. *Gao Sh.-L., Wei K., Zhong S.-Ch. et al.* Stochastic resonance induced by the memory of a random delay // Physica Scripta. – 2012. – Vol. 86, № 2. – P. 025002.

593. *García M.A., Castro M.A., Martín J.A. et al.* Exact and nonstandard numerical schemes for linear delay differential models // AMC. – 2018. – Vol. 338, № 1. – P. 337–345.

594. *Garrido T.G.* Existence and uniqueness of solutions for non-linear stochastic partial differential equations // Collectanea Mathematica. – 1991. – Vol. 42, № 1. – P. 51–74.

595. *Garrido-Atienza M.J., Ogrowsky A., Schmalfuss B.* Random differential equations with random delay // Stochastics and Dyn. – 2011. – Vol. 11, № 2/3. – P. 369 –388.

596. *Gawarecki L., Mandrekar V.* Stochastic differential equations in infinite dimensions with applications to stochastic partial differential equations. – Berlin: Springer, 2011. – xvi, 291 p.

597. *Ge Y., Chen Q., Jiang M. et al.* Modeling of random delays in networked control systems // J. of Control Science and Engineering. – 2013. – Vol. 2013. – Article ID 383415. – 9 p.

598. *Gear C.W.* Numerical initial-value problems in ordinary differential equations. – Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1971. – xvi, 253 p.

599. *Ghanem R.G., Spanos P.D.* Stochastic finite elements: A spectral approach. – New York: Springer, 1991. – 214 p.

600. *Ghoreishi F., Hadizadeh M.* Numerical computation of the Tau approximation for the Volterra–Hammerstein integral equations // Numerical Algorithm. – 2009. – Vol. 52, № 4. – P. 541–559.

601. *Giacomelli G., Politi A.* Multiple scale analysis of delayed dynamical systems // Physica D: Nonlinear Phenomena. – 1998. – Vol. 117, № 1–4. – P. 26–42.

602. *Giacomi G.* Random polymer models. – London: Imperial College Press, 2007. – 259 p.

603. *Gil' M.I.* Stability of neutral functional differential equations. – Paris: Atlantis Press, 2014. – xiii, 304 p.

604. *Giorgi C., Marzocchi A., Pata V.* Asymptotic behavior of a semilinear problem in heat conduction with memory // Nonlinear Diff. Equations and Appl. (NoDEA). – 1998. – Vol. 5, № 3. – P. 333–354.

605. *Giuggioli L., McKetterick T.J., Kenkre V.M., Chase M.* Fokker–Planck description for a linear delayed Langevin equation with additive Gaussian noise // J. of Physics A: Mathematical and Theoretical. – 2016. – Vol. 49, № 32 (384002). – 29 p.

606. *Giuggioli L., Neu Z.* Fokker–Planck representations of nonMarkov Langevin equations: application to delayed systems // Philosophical Trans. of the Royal Society A: Math., Physical and Engineering Sciences. – 2019. – Vol. 377, № 2153. – Article ID 20180131. – 23 p.

607. *Golden J.M., Graham G.A.C.* Boundary value problems in linear viscoelasticity. – Berlin, Heidelberg: Springer, 1988. – xiv, 266 p.

608. *Goldfine A.* Taylor series methods for the solution of volterra integral and integro-differential equations // Math. of Comput. – 1977. – Vol. 31, № 139. – P. 691–707.

609. *Golla D.F., Hughes P.C.* Dynamics of viscoelastic structures – a time domain, finite element formulation // J. of Appl. Mech. – 1985. – Vol. 52. – P. 897–906.

610. *Goltser Ya., Domoshnitsky A.* About reducing integro-differential equations with infinite limits of integration to systems of ordinary differential equations // Advances in Difference Equations. – 2013. – Vol. 2013. – Article № 187. – 17 p.

611. *Gopalsamy K., Györi I., Ladas G.* Oscillations of a class of delay equations with continuous and piecewise constant arguments // Funkcialaj Ekvacioj. – 1989. – Vol. 32. – P. 395–406.

612. *Gopalsamy K.* Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics. – Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 1992. – xii, 501 p.

613. *Goto S.* Renormalization reductions for systems with delay // Progress of Theoretical Physics. – 2007. – Vol. 118, № 2. – P. 211–227.

614. *Gourley S.A., So J.W.-H., Wu J.H.* Nonlocality of reaction–diffusion equations induced by delay: biological modeling and nonlinear dynamics // J. of Math. Sciences. – 2004. – Vol. 124, № 4. – P. 5119–5153.

615. *Govindan T.E.* AGovindan Successive approximations to solutions of stochastic functional differential equations // Dyn. of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Ser. A: Math. Anal. – 2001. – Vol. 8, № 2. – P. 193–202.

616. *Govindan T.E.* An existence result for the Cauchy problem for stochastic systems with heredity // Diff. and Integral Equations. – 2002. – Vol. 15, № 1. – P. 103–113.

617. *Govindan T.E.* A new iteration procedure for stochastic neutral partial functional differential equations // Intern. J. of Pure and Appl. Math. – 2009. – Vol. 56, № 2. – P. 285–298.

618. *Govindan T.E.* Mild solutions of neutral stochastic partial functional differential equations // Intern. J. of Stochastic Anal. – 2011. – Vol. 2011. – Article ID 186206. – 13 p.

619. *Gozzi F., Marinelli C., Savin S.* On controlled linear diffusions with delay in a model of optimal advertising under uncertainty with memory effects // arXiv : math / 0701580. – 2008. – 27 p.

620. *Grafton R.B.* Periodic solution of Liénard equations with delay: Some theoretical and numerical results // Delay and functional differential equations and their applications / K. Schmitt (ed.). – New York, London: Academic Press, 1972. – P. 321–329.

621. *Grigoriev Y.N., Ibragimov N.H., Kovalev V. F. et al.* Symmetries of integro-differential equations with applications in mechanics and plasma physics. – Dordrecht,

Heidelberg: Springer, 2010. – xiii, 305 p.

622. *Grigoriu M.* Equivalent linearization for Poisson white noise input // Probabilistic Engineering Mech. – 1995. – Vol. 10, № 1. – P. 45–51.

623. *Grigoriu M.* Stochastic systems: Uncertainty quantification and propagation. – London: Springer, 2012. – xii, 532 p.

624. *Gripenberg G., Londen S.-O., Staffans O.* Volterra integral and functional equations. – Cambridge: University Press, 1990. – 724 p.

625. *Grossman S.I., Miller R.K.* Perturbation theory for Volterra integrodifferential systems // J. of Diff. Equations. – 1970. – Vol. 8, № 3. – P. 457–474.

626. *Grossman S.* Non-Markovian macroscopic dynamics // Zeitschrift für Physik. B. Condensed Matter. – 1982. – Vol. 47, № 3. – P. 251–263.

627. *Guerraggio A., Paoloni G.* Vito Volterra: Translated by K. Williams. – Berlin, Heidelberg: Springer, 2013. – xi, 176 p.

628. *Guglielmi N.* Delay differential equations // Encyclopedia of Applied and Computational Mathematics / B. Engquist (ed.). – Berlin, Heidelberg: Springer, 2015. – P. 334–338.

629. *Guillouzic S., L'Heureux I., Longtin A.* Small delay approximation of stochastic differential delay equations // Physical Review. – 1999. – Vol. E59, № 4. – P. 3970–3982.

630. *Guillouzic S., L'Heureux I., Longtin A.* Rate processes in a stochastically driven delayed overdamped // Physical Review. – 2000. – Vol. E61, № 5. – P. 4906–4914.

631. *Guillouzic S.* Fokker–Planck approach to stochastic delay differential equations. – Thesis for the degree of PhD. – Ottawa: University of Ottawa, 2000. – 100 p.

632. *Guo Q., Tao X., Xie W.* A split-step θ-Milstein method for linear stochastic delay differential equations // J. of Information & Comput. Science – 2013. – Vol. 10, № 5. – P. 1261–1273.

633. *Gurtin M.E., Herrera I.* On dissipation inequalities and linear viscoelasticity // Quarterly of Appl. Math. – 1965. – Vol. 23, № 3. – P. 235–245.

634. *Gurtin M.E., Pipkin A.C.* A general theory of heat conduction with finite wave speeds // Archive for Rational Mech. and Anal. – 1968. – Vol. 31, № 2. – P. 113–126.

635. *Györi I.* On approximation of the solutions of delay differential equations by using piecewise constant arguments // Intern. J. of Math. and Mathematical Sciences. – 1991. – Vol. 14. – Article ID 458479. – P. 111–126.

636. *Györi I., Ladas G.* Oscillation theory of delay differential equations with applications. – New York: Oxford University Press, 1991. – 384 p.

637. *Györi I., Hartung F.* On numerical approximation using differential equations with piecewise-constant arguments // Periodica Mathematica Hungarica. – 2008. – Vol. 56, № 1. – P. 55–69.

638. *Hac A., Youn I.* Optimal design of active and semi-active suspensions including time delays and preview // J. of Vibrations and Acoustics. – 1993. – Vol. 115, № 4. – P. 498–508.

639. *Hadamard J.* Four lectures on mathematics. – New York: Columbia University Press, 1915. – P. 12–24. – URL: https://projecteuclid.org/euclid.chmm/1263316392

640. *Hale J.K., Meyer K.R.* A class of functional equations of neutral type // Memoirs of the American Math. Society, № 76. – Providence: AMC, 1967. – 65 p.

641. *Hale J.* Theory of functional differential equations. – New York: Springer, 1977. – x, 366 p.

642. *Hale J.K., Lunel S.M.V.* Introduction to functional differential equations. – New York: Springer, 1993. – x, 447 p.

643. *Hale J.K.* Partial neutral functional differential equations // Revue Roumaine De Mathematiques Pures et Appliquees. – 1994. – Vol. 39, № 4. P. 339–344.

644. *Hangelbroek R.J., Kaper H.G., Leaf G.K.* Collocation methods for integro-differential equations // SIAM J. on Numerical Anal. – 1977. – Vol. 14, № 3. – P. 377–390.

645. *Hanson F.B.* Applied stochastic processes and control for jump-diffusions: Modeling, analysis, and computation. – Philadelphia: SIAM, 2007. – xxix, 443 p.

646. *Hashim I.* Adomian decomposition method for solving BVPs for fourth-order integro-differential equations // J. of Comput. and Appl. Math. – 2006. – Vol. 193. – P. 658–664.

647. *Heck A.* Introduction to Maple. – 3rd ed. – New York: Springer, 2003. – xvi, 828 p.

648. *Heffernan J.M., Corless R.M.* Solving some delay differential equations with computer algebra // Math. Scientist. – 2006. – Vol. 31, № 1. – 22 p.

649. *Hernández E., Henriquez H.R.* Existence results for partial neutral functional differential equations with unbounded delay // J. of Math. Anal. and Appl. – 1998. – Vol. 221, № 5. – P. 452–475.

650. *Heydari M.H., Hooshmandasl M.R., Loghmani G.B. et al.* Wavelets Galerkin method for solving stochastic heat equation // Intern. J. of Computer Math. – 2016. – Vol. 93, № 9. – P. 1579–1596.

651. *Higham D.J., Sardar T.* Existence and stability of fixed points for a discretised nonlinear reaction-diffusion equation with delay // ANM. – 1995. – Vol. 18, № 1–3. – P. 155–173.

652. *Higham D.J., Kloeden P.E.* Numerical methods for nonlinear stochastic differential equations with jumps // Numerische Mathematik. – 2005. – Vol. 101, № 1. – P. 101–119.

653. *Higham D.J., Kloeden P.E.* Convergence and stability of implicit methods for jump-diffusion systems // Intern. J. of Numerical Anal. and Modeling. – 2006. – Vol. 3, № 2. – P. 125–140.

654. *Higham D.J., Kloeden P.E.* Strong convergence rates for backward Euler on a class of nonlinear jump-diffusion problems // J. of Comput. and Appl. Math. – 2007. – Vol. 205, № 2. – P. 949–956.

655. *Higham D.J., Kloeden P.E.* Numerical methods for nonlinear stochastic differential equations with jumps // Numerische Mathematik. – 2005. – Vol. 101, № 1. – P. 101–119.

656. *Hilton H.H., Hsu J., Kirby J.S.* Linear viscoelastic analysis with random material properties // Probabilistic Engineering Mech. – 1991. – Vol. 6, № 2. – P. 57–69.

657. *Hilton H.H., Lin Y.K.* Generalized linear and nonlinear viscoelastic earthquake motion simulations // Comput. Stochastic Mech. (CSM 98) / P.D.Spanos (ed). – Amsterdam: Balkema, 1999. – P. 325–332.

658. *Hilton H.H., Yi S.* Stochastic delamination simulations of nonlinear viscoelastic composites during cure // J. of Sandwich Structures and Materials. – 1999. – Vol. 1, № 2. – P. 111–127.

659. *Hopkins T.* Numerical solution of stochastic delay integrodifferential equations in population dynamics. – Masters Thesis. – Texas Tech University, 2004.

660. *Horvat V.* On polynomial spline collocation methods for neutral Volterra integro–differential equations with delay arguments // Proc. of the 1th Conf. on Appl. Math. and Comput. – Dubrovnik, 1999. – P. 113–128.

661. *Hosseini S.M., Shahmorad S.* Tau numerical solution of Fredholm integro-differential equations with arbitrary polynomial bases // AMM. – 2003. – Vol. 27. – P. 145–154.

662. *Hou J., Yang Ch.* Numerical method in solving Fredholm integro-differential equations by using hybrid function operational matrix of derivative // J. of Information & Comput. Science. – 2013. – Vol. 10, № 9. – P. 2757–2764.

663. *Hu L., Gan S.* Convergence and stability of the balanced methods for stochastic differential equations with jumps // Intern. J. of Computer Math. – 2011. – Vol. 88, № 10. – P. 2089–2108.

664. *Hu L., Gan S.* Mean-square convergence of drift-implicit one-step methods for neutral stochastic delay differential equations with jump diffusion // Discrete dynamics in Nature and Society. – 2011. – Vol. 2011. – Article ID 917892. – 22 p.

665. *Hu L., Gan S.* Stability of the Milstein method for stochastic differential equations with jumps // J. of Appl. Math. & Informatics. – 2011. – Vol. 29, № 5–6. – P. 1311–1325.

666. *Hu P., Huang C.* Stability of stochastic Θ-methods for stochastic delay integro-differential equations // Intern. J. of Computer Math. – 2011. – Vol. 88, № 7. – P. 1417–1429.

667. *Hu S.J.* Response cumulant equations for dynamic systems under delta-correlated processes // ASCE J. of Engineering Mech. – 1997. – Vol. 123, № 2. – P. 174–177.

668. *Hu Sh., Lakshmikantham V.* Monotone iterative technique for integro-differential equations // Асимптотические методы математической функции: сб-к научн. трудов / АН УССР. Ин-т математики. – К.: Наукова думка, 1988. – С. 263–270.

669. *Hu Y., Mohammed S.-E.A., Yan A.* Discrete-time approximations of stochastic delay equations: The Milstein scheme // The Annals of Probability. – 2004. – Vol. 32, № 1A. – P. 265–314.

670. *Huang C.* Stability of linear multistep methods for delay integro-differential equations // Comput. Math. Appl. – 2008. – Vol. 55, № 12. – P. 2830–2838.

671. *Huang C.* Mean square stability and dissipativity of two classes of theta methods for systems of stochastic delay differential equations // J. of Comput. and Appl. Math. – 2014. – Vol. 259. P. 77–86.

672. *Huang C., Vandewalle S.* An analysis of delay-dependent stability for ordinary and partial differential equations with fixed and distributed delays // SIAM J. on Scientific Computing. – 2004. – Vol. 25, № 5. – P. 1608–1632.

673. *Huang C., Vandewalle S.* Stability of Runge–Kutta–Pouzet methods for Volterra integro-differential equations with delays // Frontiers of Math. in China. – 2009. – Vol. 4, № 1. – P. 63–87.

674. *Huang C., Hu Y., Tian H.* Delay-dependent stability analysis of multistep methods for delay differential equations // Acta Mathematicae Applicatae Sinica (English Series). – 2009. – Vol. 25, № 4. – P. 607–616.

675. *Huang C., Vandewalle S.* Unconditionally stable difference methods for delay partial differential equations // Numerische Mathematik. – 2012. – Vol. 122. – P. 579–601.

676. *Huang D., Nguang S.K.* State feedback control of uncertain networked control systems with random time delays // IEEE Trans. on Automatical Control. – 2008. – Vol. 53, № 3. – P. 829–834.

677. *Huang D., Nguang S.K.* Robust control for uncertain networked control systems with random delays. – Berlin, Heidelberg: Springer, 2009. – x, 158 p.

678. *Hui J., Chen L.* Periodicity in an impulsive logistic equation with a distributed delay // IMA J. of Appl. Math. – 2005. – Vol. 70, № 4. – P. 479–487.

679. *Hutchinson G.* Circular causal systems in ecology // Annals of the New York Academy of Sciences. – 1948. – Vol. 50, № 4. – P. 221–246.

680. *Hutt A.* The study of neural oscillations by traversing scales in the brain: Habilitation á diriger des recherches. – Université Nice–Sophia Antipolis, 2011. – 102 p.

681. *Ibragimov N., Meleshko S., Rudenko O.V.* Group analysis of evolutionary integro-differential equations describing nonlinear waves: The general model // J. of Physics A: Mathematical and Theoretical. – 2011. – Vol. 44, № 31. – Article ID 315201. – 21 p.

682. *IlićD., Janković S.* L^p-approximation of solutions of stohastic integrodifferential equations // Univ. Beograd. Publikacije Elektrotehničkog fakulteta. Serija Matematika. – 2001. – Vol. 12. – P. 52–60.

683. *Insperger T., Stepan G.* Stability of the damped Mathieu equation with time delay // Trans. of ASME. – 2003. – Vol. 125, № 6. – P. 166–171.

684. *Insperger T., Stepan G.* Semi-discretization for time-delay systems: Stability and engineering applications. – New York: Springer, 2011. – x, 174 p.

685. *In't Hout K.J.* A new interpolation procedure for adapting Runge–Kutta methods to delay differential equations // BIT Numerical Math. – 1992. – Vol. 32, № 4. – P. 634–649.

686. *Iori M., Nespi G., Spiga G.* Analysis of a kinetic cellular model for tumor-immune system interaction // Math. and Computer Modelling. – 1999. – Vol. 29, № 8,. – P. 117–129.

687. *Isa N.B.M, Ishak F., Othman K.I.* Efficient technique for solving stiff delay differential equations in variable stepsize variable order // Proc. of the 21st National Symposium on Math.l Sciences (SKSM21): AIP Conf. Proc. – 2014. – Vol. 1605. – P. 52–57.

688. *Ismagilov R.S., Rautian N.A., Vlasov V.V.* Examples of very unstable linear partial functional differential equations // arXiv:1402.4107 [math.AP] (submitted on 17 Feb 2014). – URL: https://arxiv.org/pdf/1402.4107 (дата обращения 06.12.2019).

689. *Itô K., Nisio N.* On stationary solutions of a stochastic differential equation // J. of Math. of Kyoto University. – 1964. – Vol. 4, № 1. – P. 1–75.

690. *Ivanov A.F., Kazmerchuk Y.I., Swishchuk A.V.* Theory, stochastic stability and applications of stochastic delay differential equations: a survey of recent results // Diff. Equations and Dyn. Systems. –2003. – Vol. 11, № 1. – P. 55–115.

691. *Iwankiewicz R., Nielsen S.R.K., Thoft-Christensen P.* Dynamic response of non-linear systems to Poisson-distributed pulse trains: Markov approach // Structural Safety. – 1990. – Vol. 8, № 1–4. – P. 223–238.

692. *Iwankiewicz R.* Dynamical mechanical systems under random impulses. – Singapore: World Scientific, 1995. – ix, 161 p.

693. *Iwankiewicz R., Nielsen S.R.K.* Analytical vs. simulation solution techniques for pulse problems in non-linear stochastic dynamics. – Aalborg: Dept. of Building Technology and Structural Engineering, 1997. – 14 p.

694. *Iwankiewicz R., Nielsen S.R.K.* Vibration theory. – Aalborg: Aalborg University Press, 1999. – Vol. 4. Advanced methods in stochastic dynamics of non-linear Systems. – 273 p.

695. *Iwankiewicz R., Nielsen S.R.K.* Solution techniques for pulse problems in non-linear stochastic dynamics // Probabilistic Engineering Mech. – 2000. – Vol. 15, № 1. – P. 25–36.

696. *Iwankiewicz R.* Application of stochastic point processes in mechanics // Proc. in Appl. Math. and Mech. – 2009. – Vol. 9, № 1. – P. 559–562.

697. *Jackiewicz Z., Kwapisz M.* The numerical solution of functional differential equations, a survey // Mathematica Applicanda. – 1991. – Vol. 19, № 33. – P. 57–78.

698. *Jackiewicz Z., Rahman M., Welfert B.D.* Numerical solution of a Fredholm integro-differential equation modelling neural networks // ANM. – 2006. – Vol. 56, № 3–4. – P. 423–432.

699. *Jackiewicz Z., Zubik-Kowal B.* Spectral collocation and waveform relaxation methods for nonlinear delay partial differential equations // ANM. – 2006. – Vol. 56, № 3–4. – P. 433–443.

700. *Jackiewicz Z., Rahman M., Welfert B.D.* Numerical solution of a Fredholm in-

tegro-differential equation modelling $\dot{\theta}$-neural networks // AMC. – 2008. – Vol. 195, № 2. – P. 523–536.

701. *Jacob N., Wang Y., Yuan C.* Numerical solutions of stochastic differential delay equations with jumps // Stochastic Anal. and Appl. – 2009. – Vol. 27, № 4. – P. 825–853.

702. *Jahanipur R.* Stochastic functional evolution equations with monotone nonlinearity: Existence and stability of the mild solutions // J. of Diff. Equations. – 2010. – Vol. 248, № 5. – P. 12301255.

703. *Jalaei K., Zarebnia M., Chalaki M.M.* Development of the Sinc method for nonlinear integro-differential equations // Australian J. of Basic and Appl. Sciences. – 2010. – Vol. 4, № 11. – P. 5508–5515.

704. *Jangveladze T., Kiguradze Z., Neta B.* Numerical solutions of three classes of nonlinear parabolic integro-differential equations. – Amsterdam: Elsevier, 2016. – 254 p.

705. *Jankovič S., Ilič D.* An analytic approximate method for solving stochastic integrodifferential equations // J. of Math. Anal. and Appl. – 2006. – Vol. 320, № 1. – P. 230–245.

706. *Jankovič S., Ilič D.* One linear analytic approximation for stochastic integrodifferential equations // Acta Mathematica Scientia. – 2010. – Vol. 30B, № 4. – P. 1073–1085.

707. *Jankovič S., Jovanovič M.* Some analytic iterative methods for solving various classes of stochastic hereditary integrodifferential equations // Facta Universitatis. Series: Mech., Automatic Control and Robotics. – 2004. – Vol. 4, № 16. – P. 11–31.

708. *Jaradat H. M., Awawdeh F., Alsayyed O.* Series solution to the high-order integro-differential equations // Analele Universităţii Oradea. Fasc. Matematica. – 2009. – Vol. 16. – P. 247–257.

709. *Jasaitis V., Ivanauskas F., Bakanas R.* Front dynamics with delays in a spatially extended bistable system: computer simulation // Nonlinear Anal.: Modelling and Control. – 2008. – Vol. 13, № 4. – P. 433–438.

710. *Jiang F., Shen Y., Liu L.* Taylor approximation of the solutions of stochastic differential delay equations with Poisson jump // CNSNS. – 2011. – Vol. 16, № 2. – P. 798–804.

711. *Jokinen O.* On non-monotone solutions of an integrodifferential equation in linear viscoelasticity // SIAM J. on Numerical Anal. – 1996. – Vol. 33, № 4. – P. 1410–1424.

712. *Kainhofer R.* QMC methods for the solution of delay differential equations // J. of Comput. and Appl. Math. – 2003. – Vol. 155, № 2. – P. 239–252.

713. *Kalecki M.* On macrodynamic theory of business cycle // Econometrica. – 1935. – Vol. 3. – P. 327–344.

714. *Kalecki M.* Comments on the macrodynamic theory of business cycles // Econometrica. – 1936. – Vol. 4. – P. 356–360.

715. *Kalmár-Nagy T.* Stability analysis of delay-differential equations by the method of steps and inverse Laplace transform // Diff. Equations and Dyn. Systems. – 2009. – Vol. 17, № 1. – P. 185–200.

716. *Kalos M.H., Whitlock P.A.* Monte Carlo methods. – Weinheim: Wiley-VCH Verlag, 2004. – 195 p.

717. *Kamiński M.M.* The stochastic perturbation method for computational mechanics. – Chichester: John Wiley, 2013. – xviii, 330 p.

718. *Kanwal R.P.* Linear integral equations: Theory & technique. – New York: Springer, 2013. – xiii, 318 p.

719. *Karczewska A., Rozmej P.* On numerical solutions to stochastic Volterra equations // arXiv:math/0409026 [math.PR]. – 2004. – 17 p.

720. *Karmeshu, Schurz H.* Effects of distributed delays on the stability of structures under seismic excitation and multiplicative noise // Sadhana. – 1995. – Vol. 20, № 2–4. –

P. 451–474.

721. *Karmeshu, Gupta V., Kadambari K.V.* Neuronal model with distributed delay: analysis and simulation study for gamma distribution memory kernel // Biological Cybernetics. – 2011. – Vol. 104, № 6. – P. 369–383.

722. *Kashima K., Kawai R.* An optimization approach to weak approximation of stochastic differential equations with jumps // ANM. – 2011. – Vol. 61, № 5. – P. 641–650.

723. *Kaushik A., Sharma K.K., Sharma M.* A parameter uniform difference scheme for parabolic partial differential equation with a retarded argument // AMM. – 2010. – Vol. 34, № 12. – P. 4232–4242.

724. *Kauthen J.-P.* Method of lines for parabolic partial integro-differential equations // J. of Integral Equations and Appls. – 1992. – Vol. 4, № 1. – P. 69–81.

725. *Kazmerchuk Y.I., Wu J.H.* Stochastic state-dependent delay differential equations with applications in finance // Functional Diff. Equations. – 2004. – Vol. 11, № 1/2. – P. 77–86.

726. *Kazmerchuk Y., Swishchuk A., Wu J.* The pricing of options for securities markets with delayed response // Math. and Computers in Simulation. – 2007. – Vol. 75, № 3/4. – P. 69–79.

727. *Keck D.N., McKibben M.A.* Abstract semilinear Itô–Volterra integro-differential stochastic evolution equations // J. of Appl. Math. and Stochastic Anal. – 2006. – Vol. 2006. – Article ID 45253. – 22 p.

728. *Khani A., Moghadam M.M., Shahmorad S.* Approximate solution of the system of non-linear Volterra integro-differential equations // Comput. Methods in Appl. Math. – 2008. – Vol. 8, № 1. – P. 77––85.

729. *Kharitonov V.L.* Time-delay systems: Lyapunov functionals and matrices. – Basel: Birkhaüser, 2013. – xvi, 311 p.

730. *Khasawneh F.A., Mann B.P.* Stability of delay integro-differential equations using a spectral element method // Math. and Computer Modelling. – 2011. – Vol. 54, № 9–10. P. 2493–2503.

731. *Khasawneha F.A., Manna B.M., Butcher E.A.* A multi-interval Chebyshev collocation approach for the stability of periodic delay systems with discontinuities // CNSNS. – 2011. – Vol. 16, № 11. – P. 4408–4421.

732. *Khodabin M., Maleknejad Kh., Asgari M.* Numerical solution of a stochastic population growth model in a closed system // Advances in Difference Equations. – 2013. – Vol. 2013, № 130. – 9 p.

733. *Khodabin M., Maleknejad K., Shekarabi F.H.* Application of triangular functions to numerical solution of stochastic Volterra integral equations // IAENG Intern. J. of Appl. Math. – 2013. – Vol. 43, № 1. – P. 1–9.

734. *Khodabin M., Maleknejad K., Damercheli T.* Approximate solution of the stochastic Volterra integral equations via expansion method // Intern. J. of Industrial Math. – 2014. – Vol. 6, № 1. – Article ID IJIM-00410. – P. 41–48.

735. *Khuri S.A., Sayfy A.* A numerical approach for solving an extended Fisher–Kolomogrov–Petrovskii–Piskunov equation // J. of Comput. and Appl. Math. – 2010. – Vol. 233, № 8. – P. 2081–2089.

736. *Khusainov D.Ya., Shuklin G.V.* Linear autonomous time-delay system with permutation matrices solving // Studies of the University of Žilina. Math. Series. – 2003. – Vol. 17, № 1. – P. 101–108.

737. *Kim A.V.* Functional Differential Equations: Application of i-smooth calculus. – Dordrecht: Springer, 1999. – xv, 168 p.

738. *Kim A.V., Ivanov A.V.* Systems with delays: Analysis, control, and computations. – Hoboken: John Wiley, 2015. – 184 p.

739. *Kim B.M., Tsuruta K.* Retarded resolvent operators for linear retarded functional differential equations in a Banach space // Japanese J. of Math. – 1994. – Vol. 20, № 2. – P. 319–363.

740. *Kim Y.-H.* An estimate of the solutions for stochastic functional differential equations // J. of Appl. Math. & Informatics. – 2011. – Vol. 29, № 5–6. – P. 1549–1556.

741. *Kleiber M.* Parameter sensitivity in nonlinear m-chanics: theory and finite element computations. – Chichester: John Wiley, 1997. – 424 p.

742. *Kloeden P.E., Platen E.* Numerical solution of stochastic differential equations. – Berlin: Springer, 1992. – xxxvi, 636 p.

743. *Kloeden P.E., Platen E., Schurz H.* Numerical solution of SDE through computer experiments. – Berlin: Springer, 2003. – xiv, 292 p.

744. *Kolmanovskii V., Myshkis A.* Applied theory of functional differential equations. Math. and its Applications. – Dordrecht: Springer, 1992. – xvi, 234 p.

745. *Kolmanovskii V., Myshkis A.* Introduction to the theory and applications of functional differential equations. – Dordrecht: Springer, 1999. – xvi, 648 p.

746. *Kolmanovskii V.B., Nosov V.R.* Stability of functional differential equations. – London: Academic Press, 1986. – xiv, 217 p.

747. *Komori Y., Eremin A., Burrage K.* S-ROCK methods for stochastic delay differential equations with one fixed delay // J. of Comput. and Appl. Math. – 2019. – Vol. 353. – P. 345–354.

748. *Komzsik L.* Approximation techniques for engineers. – 2nd ed. – Boca Raton, FL: CRC Press, 2017. – 386 p.

749. *Kotsireas I.S.* A survey on solution methods for integral equations // 3rd European Support Framework, 2008. – URL: http://www.orcca.on.ca/TechReports/TechReports/2008/TR-08-03.pdf (дата обращения 23.10.2019)

750. *Koto T.* Stability of θ-methods for delay integro-differential equations // J. of Comput. and Appl. Math. – 2003. – Vol. 161, № 2. – P. 393–404.

751. *Köylüoglu H.U., Nielsen S.R.K., Iwankiewicz R.* Reliability of non-linear oscillators subjected to Poisson driven impulses // J. of Sound and Vibrations. – 1994. – Vol. 176, № 1. – P. 19–33.

752. *Köylüoglu H.U., Nielsen S.R.K., Cakmak A.S.* Fast cell-to-cell mapping (path integration) for nonlinear white noise and Poisson driven systems // Structural Safety. – 1995. – Vol. 17, № 3. – P. 151–165.

753. *Köylüoglu H.U., Nielsen S.R.K., Iwankiewicz R.* Response and reliability of Poisson driven systems by path integration // ASCE J. of Engineering Mech. – 1995. – Vol. 121, № 1. – P. 117–130.

754. *Kral L., Prochazka I., Hamal K.* Random fluctuations of optical signal path delay in the atmosphere // Proc. SPIE. Conf. Vol. 6364 "Optics in Atmospheric Propagation and Adaptive Systems" IX / A. Kohnle, K. Stein (eds.). – 2006. – URL: http://proceedings.spiedigitallibrary.org/volume.aspx?volumeid=1042 (дата обращения 08.07.2015).

755. *Krapivsky P.L., Luck J.M., Mallick K.* On stochastic differential equations with random delay // J. of Statistical Mech.: Theory and Experiment. – 2011. – Vol. 2011, № 10. – P10008.

756. *Krée P., Soize C.* Mathematics of random phenomena: Random vibrations of mechanical structures. – Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1986. – 438 p.

757. *Kuang Y.* Delay differential equations: With applications in population dynamics. – Boston: Academic Press, 1993. – xii, 398 p.

758. *Kuang, J., Cong, Y.* Stability of numerical methods for delay differential equations. – Beijing: Science Press, 2005. – 295 p.

759. *Küchler U., Mensch B.* Langevin's stochastic differential equation extended by a time-delayed term // Stochastics Rep. – 1992. – Vol. 40. – P. 23–42.

760. *Küchler U., Platen E.* Strong discrete time approximation of stochastic differential equations with time delay // Math. and Computers in Simulation. – 2000. – Vol. 54, № 1–3. – P. 189–205.

761. *Küchler U., Platen E.* Weak discrete time approximation of stochastic differential equations with time delay // Math. and Computers in Simulation. – 2002. – Vol. 59, № 6. – P. 497–507.

762. *Kurrer K.-E.* The history of the theory of structures: Searching for equilibrium. – Berlin: W. Ernst & Sohn, 2018. – 1236 p.

763. *Kurt N., Sezer M.* Polynomial solution of high-order linear Fredholm integro-differential equations with constant coefficients // J. of the Franklin Institute. – 2008. – Vol. 345, № 8. – P. 839–850.

764. *Kushner H.J.* Numerical methods for controlled stochastic delay systems. – Boston: Birkhauser, 2008. – xix, 281 p.

765. *Kyrychko Y.N., Blyuss K.B., Gonzalez-Buelga A. et al.* Real-time dynamic substructuring in a coupled oscillator–pendulum system // Proc. of Royal Society. A. – 2006. – Vol. 462. – P. 1271–1294.

766. *Kyrychko Y.N., Hogan S.J.* On the use of delay equations in engineering applications // J. of Vibration and Control. – 2010. – Vol. 16, № 7/8. – P. 943–960.

767. *Kythe P.K., Pratap P.* Computational methods for linear integral equations. – New York: Springer, 2002. – xviii, 508 p.

768. *Laas K., Mankin R., Reiter E.* Influence of memory time on the resonant behavior of an oscillatory system described by a generalized Langevin equation // Intern. J. of Math. Models and Methods in Appl. Sciences. – 2011. – Vol. 5, № 2. – P. 280–289.

769. *Lafuerza L.F., Toral R.* Stochastic description of delayed systems // Philosophical Trans. of the Royal Society. Series A. Math. Physical and Engineering Sciences. – 2013. – Vol. 371, № 1999. – P. 20120458.

770. *Lakes R.S.* Viscoelastic solids. – Boca Raton, FL: Taylor & Francis Group / CRC Press, 1998. – 490 p.

771. *Lakshmanan M., Senthilkumar D.V.* Dynamics of nonlinear time-delay systems. – Berlin, Heidelberg: Springer, 2010. – xvii, 313 p.

772. *Lakshmanan V., Wen L., Zhang B.* Theory of differential equations with unbounded delay. – Dordrecht: Springer, 1994. – xii, 386 p.

773. *Lakshmikantham V., Rao M.R.M.* Theory of integro-differential equations. – Reading, UK: Gordon and Breach, 1995. – 384 p.

774. *Lamm P.K.* A survey of regularization methods for first-kind Volterra equations // Surveys on Solution Methods for Inverse Problems / D. Colton ,H.W. Engl, A.K. Louis et al. (eds.). – Vienna: Springer, 2000. – P. 53–82.

775. *Lara-Sagahón A.V., Kharchenko V., José M.V.* Stability analysis of a delay-difference SIS epidemiological model // Appl. Math. Sciences. – 2007. – Vol. 1, № 26. –P. 1277–1298.

776. *L'Ecuyer P.* Good parameters and implementations for combined multiple recursive random number generators // Operations Research. – 1999. – Vol. 47, № 1. – P. 159–164.

777. *Lee S.Ch.* A computational method for thermoviscoelasticity with applications to rock mechanics // Technical report AS20-82LC10886. – Columbus: Ohio State Univ., 1984. – 182 p.

778. *Leitman M.J., Fisher G.M.C.* The linear theory of viscoelasticity // Encyclopedia of Physics. Vol. VI-a/3. Mechanics of Solids III (ed. C. Truesdell). – Berlin, Heidelberg,

New York: Springer, 1973. – P. 1–123.

779. *Lepik Ü., Tamme E.* Solution of nonlinear Fredholm integral equations via the Haar wavelet method // Proc. of the Estonian Academy of Sciences. Phys. Math. – 2007. – Vol. 56, № 1. – P. 17–27.

780. *Levendovszky J., Koncz I., Boros P.* Optimization of communication protocols by stochastic delay mechanisms // Intern. J. of Appl. Science, Engineering and Technology. – 2006. – Vol. 2, № 4. – P. 192–197.

781. *Levin J.J., Nohel J.A.* On a system of integro-differential equations occurring in reactor dynamics // J. of Math. and Mech. – 1960. –Vol. 9, № 3. – P. 347–368.

782. *Lewis J.* Autoinhibition with transcriptional delay: a simple mechanism for the zebrafish somitogenesis oscillator // Current Biology. – 2003. – Vol. 13, № 16. – P. 1398–1408.

783. *Li Y., Hu J.* Numerical analysis for stochastic partial differential delay equations with jumps // Abstract and Appl. Anal. – 2013. – Vol. 2013. – Article ID 128625. – 8 p.

784. *Lichtenstein L.* Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integrodifferentialgleichungen nebst Anwendungen. – Berlin: Springer, 1931. – x, 164 p.

785. *Li Q., Gan S.* Stability of analytical and numerical solutions for nonlinear stochastic delay differential equations with jumps // Abstract and Appl. Anal. – 2012. – Vol. 2012. – Article ID 831082. – 13 p.

786. *Li Q., Gan S.* Mean-square exponential stability of stochastic theta methods for nonlinear stochastic delay integro-differential equations // J. of Appl. Math. and Computing. – 2012. – Vol. 39, № 1–2. – P. 69–87.

787. *Luan X., Liu F., Shi P.* Neural network based stochastic optimal control for nonlinear Markov jump systems // Intern. J. of Innovative Computing, Information and Control. – 2010. – Vol. 6, № 8. – P. 3715–3723.

788. *Lin H., Siqing G.* Stability of the Milstein method for stochastic differential equations with jumps // J. of Appl. Math. & Informatics. – 2011. – Vol. 29, № 5–6. – P. 1311–1325.

789. *Lin T., Lin Y., Rao M. et al.* Petrov–Galerkin methods for linear Volterra integro-differential equations // SIAM J. on Numerical Anal. – 2001. – Vol. 38, № 3. – P. 937–963.

790. *Lin Y.K., Cai G.Q.* Probabilistic structural dynamics: Advanced theory and applications. – New York: McGraw–Hill, 1995. – 546 p.

791. *Lin T., Lin Y., Rao M.* Petrov–Galerkin methods for linear Volterra integro-differential equations // SIAM J. on Numerical Anal. – 2001. – Vol. 38, № 3.– P. 937–963.

792. *Linz P.* Analytical and numerical methods for Volterra equations. – Philadelphia: SIAM, 1985. – 240 p.

793. *Liu B., Zhou X., Du Q.* Differential transform method for some delay differential equations // Appl. Math. – 2015. – Vol. 6, № 3. – P. 585–593.

794. *Liu D.* Mean square stability of impulsive stochastic delay differential equations with Markovian switching and Poisson jumps // Intern. J. of Comput. and Math. Sciences. – 2011. – Vol. 5, № 1. – P. 58–61.

795. *Liu K., Truman A.* Lyapunov function approaches and asymptotic stability of stochastic evolution equations in Hilbert spaces – A survey of recent developments // Stochastic partial differential equations and applications / G. Da Prato, L. Tubaro (eds.). – New York: Marcel Dekker, 2002. – P. 337–372.

796. *Liu L., Kalmár-Nagy T.* High-dimensional harmonic balance analysis for second-order delay-differential equations // J. of Vibration and Control. – 2010. – Vol. 16, № 7–8. – P. 1189–1208.

797. *Liu M., Cao W., Fan Z.* Convergence and stability of the semi-implicit Euler method for a linear stochastic differential delay equation // J. of Comput. and Appl. Math. – 2004. – Vol. 170, № 2. – P. 255–268.

798. *Liu W.* Asymptotic behaviour of solutions of time-delayed Burgers' equation // Discrete and Continuous Dyn. Systems. Ser. B. – 2002. – Vol. 2, № 1. – P. 47–56.

799. *Longtin A.* Stochastic delay-differential equations // Complex Time-Delay Systems: Theory and Applications / F.M. Atay (ed.). – Berlin, Heidelberg: Springer, 2010. – P. 177–196.

800. *Longtin A., Milton J.G., Bos J.E., Mackey M.C.* Noise and critical behavior of the pupil light reflex at oscillation onset // Physical Review A. – 1990. – Vol. 41, № 12. – P. 6992–7005.

801. *Lorenz R.* Weak approximation of stochastic delay differential equations with bounded memory by discrete time series. – Diss. ... doctor rerum naturalium im Fach Mathematik. – Berlin: Humboldt–Universität, 2006. – 121 S.

802. *Luan X., Liu F., Shi P.* Neural network based stochastic optimal control for nonlinear Markov jump systems // International J. of Innovative Computing, Information and Control. – 2010. – Vol. 6, № 8. – P. 3715–3723.

803. *Lubich Ch.* Runge–Kutta theory for Volterra integrodifferential equations // Numerische Mathematik. – 1982. – Vol. 40. – P. 119–135.

804. *Lubich Ch., Sloan I., Thomée V.* Nonsmooth data error estimates for approximations of an evolution equation with a positive-type memory term // Math. of Comput. – 1996. – Vol. 65, № 213. – P. 1–17.

805. *Luo Q., Deng F., Bao J. Zhao B.* Sliding mode control of a class of Ito type distributed parameter systems with delay // Acta Math. Scientia. – 2007. – Vol. 27B, № 1. – P. 67–76.

806. *Lutes L.D.* Random vibrations: Analysis of structural and mechanical systems. – Amsterdam: Elsevier, 2004. – 650 p.

807. *Lyn Y.K.* Application of non-stationary shot noise in the study of system response to a class of non-stationary excitations // Trans. ASME. J. of Appl. Mech. – 1963. – Vol. 30, № 4. – P. 555–558.

808. *Magal P., Ruan Sh.* Sustained oscillations in an evolutionary epidemiological model of influenza A drift // Proc. of The Royal Society A. Math., Physical and Engineering Sciences. – 2010. – Vol. 466. – P. 965–992.

809. *Mahmoud M.S., Shi P.* Methodologies for control of jump time-delay systems. – New York: Kluwer, 2003. – vii, 464 p.

810. *Majer N., Schöll E.* Resonant control of stochastic spatiotemporal dynamics in a tunnel diode by multiple time-delayed feedback // Physical Review. – 2009. – Vol. E79, № 011109. – P. 1–8.

811. *Makroglou A., Kuan Y.* Some analytical and numerical results for a nonlinear Volterra integro-differential equation with periodic solution modeling hematopoiesis // HERMIS J. – 2006. – Vol. 9, № 2. – P. 21–37.

812. *Makroglou A., Li J., Kuang Y.* Mathematical models and software tools for the glucose-insulin regulatory system and diabetes: an overview // ANM. – 2006. – Vol. 56. – P. 559–573.

813. *Malanin V.V., Poloskov I.E.* Random effects analysis with computer algebra systems // The ISSAC'96 Poster Session Abstracts / W.W. Kuchlin (ed.). – Zurich: ETH, 1996. – P. 55–58.

814. *Malanin V.V., Poloskov I.E.* About some schemes of study for systems with different forms of time aftereffect // Proc. of the IUTAM Symp. on Nonlin. Stochastic Dyn. and Control (Hangzhou, China) / W.Q. Zhu, Y.K. Lin, G.C. Cai (eds.): IUTAM

Bookseries, Vol. 29. – Dordrecht: Springer, 2011. – P. 55–64.

815. *Malanin V.V., Poloskov I.E.* On some methods for study of stochastic hereditary systems // Procedia IUTAM. – 2013. – Vol. 6. – P. 60–68.

816. *Malek-Zavarei M., Jamshidi M.* Time-delay systems: Analysis, optimization and application. – Amsterdam: North-Holland, 1987. – xvi, 504 p.

817. *Maleknejad K., Shahrezaee M.* Using Runge–Kutta method for numerical solution of the system of Volterra integral equations // AMC. – 2004. – Vol. 149, № 2. – P. 399–410.

818. *Maleknejad K., Khodabin M., Rostami M.* Numerical solution of stochastic Volterra integral equations by a stochastic operational matrix based on block pulse functions // Math. and Computer Modelling. – 2012. – Vol. 55, № 3–4. – P. 791–800.

819. *Malta C.P., Teles M.L.S.* Nonlinear delay differential equation: comparison of integration methods // Intern. J. of Appl. Math. – 2000. – Vol. 3, № 4. – P. 379–395.

820. *Mandrekar V.S., Gawarecki L.* Stochastic analysis for Gaussian random processes and fields with applications. – Boca Raton, FL: Chapman & Hall / CRC, 2016. – xxi, [1], 179 p.

821. *Mangano S.* Mathematica cookbook. – Cambridge: O'Reilly, 2010. – xxiv, 800 p.

822. *Mao X.* Stability of stochastic integro-differential equations // Stochastic Anal. and Appl. – 2000. – Vol. 18, № 6. – P. 1005–1017.

823. *Mao X., Sabanis S.* Numerical solutions of stochastic differential delay equations under local Lipschitz condition // J. of Comput. and Appl. Math. – 2003. – Vol. 151. – P. 215–227.

824. *Mao X.* Stochastic differential equations and applications. – 2nd ed. – Cambridge, UK: Woodhead Publishing, 2011. – xviii, 422 p.

825. *Marchenko V.A., Khruslov E.Y.* Homogenization of partial differential equations. – Boston: Birkhäuser, 2006. – xiv, 402 p.

826. *Marowski W.* Zastosowanie metody linearyzacji do analizy nieliniowego oscylatora poddanego działaniu przypadkowych impulsów // J. of Theoretical and Appl. Mech. (Warsaw). – 1989. – Vol.,27, № 1. – P. 65–85.

827. *Marques S.P.C., Creus G.J.* Computational viscoelasticity. – Heidelberg, Dordrecht: Springer, 2012. – xi, 124 p.

828. *Marti A.C., Ponce M., Masoller C.* Steady-state stabilization due to random delays in maps with self-feedback loops and in globally delayed-coupled maps // Physical Review E. – 2005. – Vol. 72, № 6. – P. 066217-1–066217-10.

829. *Martín J.A., García O.* Variable multistep methods for delay differential equations // Math. and Computer Modelling. – 2002. – Vol. 35, № 3–4. – P. 241–257.

830. *Martínez-Garza C.* Newton-type schemes via the method of generalized quasilinearization for Volterra integral equations of the second kind // J. of Math. Research. – 2010. – Vol. 2, № 3. – P. 3–11.

831. *Masoller C., Marti A.C.* Random delays and the synchronization of chaotic maps // Physical Review Letters. – 2005. – Vol. 94, № 13. – P. 134102-1–134102-4.

832. *Mastorakis N.E., Martin O.* Series solution of an integro-differential equation // Recent Advances in Fluid Mechanics and Heat & Mass Transfer: Proc. of the 9th IASME / WSEAS Intern. Conf. (FMA'11 / HTE'11). – Florence, 2011. – P. 152–157.

833. *Matinfar M., Saeidy M., Vahidi J.* Application of homotopy analysis method for solving systems of Volterra integral equations // Advances in Appl. Math. and Mech. – 2012. – Vol. 4, № 1. – P. 36–45.

834. http://maxima.sourceforge.net/docs/manual/maxima.html (Дата обращения: 01.08.2019)

835. *Maymon G.* Structural dynamics and probabilistic analysis for engineers. —

Amsterdam: Elsevier, 2008. – 488 p.

836. *McLean W., Thomée V.* Numerical solution of an evolution equation with a positive-type memory term // The ANZIAM J. – 1993. – Vol. 35, № 1. – P. 23–70.

837. *Medlock J., Kot M.* Spreading disease: integro-differential equations old and new // Math. Biosciences. – 2003. – Vol. 184, № 2. – P. 201–222.

838. *Medved' M., Pospíšil M.* Sufficient conditions for the asymptotic stability of nonlinear multidelay differential equations with linear parts defined by pairwise permutable matrices // Nonlinear Anal.: Theory, Methods & Appl. – 2012. – Vol. 75, № 7. – P. 3348–3363.

839. *Medved' M., Pospíšil M.* Representation of solutions of systems of linear differential equations with multiple delays and linear parts given by nonpermutable matrices // J. of Math. Sciences. – 2018. – Vol. 228, № 3. – P. 276–289.

840. *Mehdiyeva G., Imanova M., Ibrahimov V.* Application of the hybrid methods to solving Volterra integro-differential equations // World Academy of Science, Engineering and Technology. – 2011. – Vol. 77. – P. 1083–1087.

841. *Meleshko S.V., Moyo S.* On the complete group classification of the reaction–diffusion equation with a delay // J. of Math. Anal. and Appl. – 2008. – Vol. 338, № 1. – P. 448–466.

842. *Merton R.* Theory of rational option pricing // Bell J. of Economics and Management Science. – 1973. – Vol.4. – P. 141–183.

843. *Meyer U., Shao J., Chakrabarty S.et al.* Distributed delays stabilize neural feedback systems // Biological Cybernetics. – 2008. – Vol. 99, № 1. – Article 79. – P. 79–87.

844. *Michiels W., Niculescu S.I.* Stability and stabilization of time-delay systems: An eigenvalue based approach. – Philadelphia: SIAM, 2007. – xxi, 378 p.

845. *Michiels W., Engelborghs K., Roose D. et al.* Sensitivity to infinitesimal delays in neutral equations // SIAM J. on Control and Optimization. – 2001. – Vol. 40, № 4.– P. 1134–1158.

846. *Mihaila B., Shaw R.E.* Parallel algorithm with spectral convergence for nonlinear integro-differential equations // J. of Physics A: Mathematical and General. – 2002. – Vol. 35, № 25. – P. 5315–5331.

847. *Mier-y-Teran-Romero L., Lindley B., Schwartz I.B.* Statistical multi-moment bifurcations in random-delay coupled swarms // Physical Review E. – 2012. – Vol. 86, № 5. – P. 056202.

848. *Miller R.K.* On Volterra's population equation // SIAM J. of Appl. Math. – 1966. – Vol. 14, № 3. – P. 446–452.

849. *Milošević M.* (2013) On the approximations of solutions to stochastic differential delay equations with Poisson random measure via Taylor series // Filomat. – Vol. 27, № 1. – P. 201–214.

850. *Milstein G.N., Platen E., Schurz H.* Balanced implicit methods for stiff stochastic systems // SIAM J. on Numerical Anal. – 1998. – Vol. 35, № 3. – P. 1010–1019.

851. *Milstein G.N., Tretyakov M.V.* Stochastic numerics for mathematical physics. – Berlin, Heidelberg: Springer, 2004. – xix, 594 p.

852. *Minorsky N.* Self-excited oscillations in dynamical systems possessing retarded actions // ASME J. of Appl. Mech. – 1942. – Vol. 9, № 2. – P. 65–71.

853. *Mirrahimi S., Perthame B., Bouin E., Millien P.* Population formulation of adaptative meso-evolution: Theory and numerics // The mathematics of Darwin's legacy / F.A.C.C. Chalub, J.F. Rodrigues (eds.). – Basel: Springer, 2011. – P. 159–174.

854. *Mirzaee F., Hoseini S.F.* Solving systems of linear Fredholm integro-differential equations with Fibonacci polynomials // Ain Shams Engineering J. – 2014. – Vol. 5. – P. 271–283.

855. *Moegel A., Schwarz W.* Modeling of random delay in LAN-based feedback control systems // 2005 Intern. Symp. on Nonlin. Theory and its Appl. (NOLTA2005). – IEICE, 2005. – P. 517–520. – URL: http://www.ieice.org/proceedings/NOLTA2005/HTMLS/paper/7063.pdf (дата обращения 08.07.2015).

856. *Mohammadi F.* Numerical solution of stochastic Volterra–Fredholm integral equations using Haar wavelets // UPB Scientific Bulletin. Ser. A: Appl. Math. and Physics. – 2016. – Vol. 78, № 2. – P. 111–126.

857. *Mohamed N.A., Majid Z.A.* Multistep block bethod for solving Volterra integro-differential equations // Malaysian J. of Math. Sciences. – 2016. – Vol. 10, № S. – P. 33–48.

858. *Mohammed S.E.A.* Retarded functional differential equations: A global point of view. – London: Pitman Publishing, 1978. – v, 147 p.

859. *Mohammed S.E.A.* Stochastic functional differential equations. – Boston, London: Pitman Publishing, 1984. – ix, 245 p.

860. *Mohsen A., El-Gamel M.* A Sinc-Collocation method for the linear Fredholm integro-difierential equations // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik (ZAMP). – 2007. – Vol. 58. – P. 380–390.

861. *Mordecki E., Szepessy A., Tempone R.* Adaptive weak approximation of diffusions with jumps // SIAM J. on Numerical Anal. – 2008. – Vol. 46, № 4. – P. 1732–1768.

862. *Mukhopadhyay B., Bhattacharyya R.* Role of gestation delay in a plankton–fish model under stochastic fluctuations // Math. Biosciences. – 2008. – Vol. 215, № 1. – P. 26–34.

863. *Mustapha K.* A Petrov–Galerkin method for integro-differential equations with a memory term // ANZIAM J. – 2008. – Vol. 50. – P. C610–C624.

864. *Mustafa M.M, Muhammad A.M.* Numerical solution of linear Volterra–Fredholm integro-differential equations using Lagrange polynomials // Math. Theory and Modeling. – 2014. – Vol. 4, № 9. – P. 158–166.

865. *Náprstek J., Král R.* Numerical solution of modified Fokker–Planck equation with Poissonian input // Engineering mech. – 2010. – Vol. 17, № 3–4. – P. 251–268.

866. *Netravali A.N.* Spline approximation to the solution of the Volterra integral equation of the second kind // Math. of Comput. – 1973. – Vol. 27, № 121. – P. 99–106.

867. *Nguyen H.K., Hergman T.L., Cliff E.M.* Approximations for a class of Volterra integro-differential equations // Math. and Computer Modelling. – 2005. – Vol. 42, №5–6. – P. 659–672.

868. *Nguyen M.Ch., Nguyen V.T.* Spline collocation methods for Fredholm–Volterra integro-differential equations of high order // Vietnam J. of Math. – 1997. – Vol. 25, № 1. – P. 15–24.

869. *Niu Yu., Zhang Ch., Duan J.* A delay-dependent stability criterion for nonlinear stochastic delay-integro-differential equations // Acta Mathematica Scientia. – 2011. – Vol. 31, № 5. – P. 1813–1822.

870. *Niu Yu., Zhang Ch., Duan J.* Strong predictor–corrector approximation for stochastic delay differential equations // J. of Comput. Math. – 2015. – Vol. 33, № 6. – P. 587–605.

871. *Norin N.V.* The extended stochastic integral in linear spaces with differentiable measures and related topics. – Singapore: World Scientific, 1996. – xi, 257 p.

872. Numerical solution of integral equations / L.M. Delves, J. Walsh (eds.). – London: Oxford University Press, 1974. – 350 p.

873. *Oberle H.J., Pesch H.J.* Numerical treatment of delay differential equations by Hermite interpolation // Numerische Mathematik. – 1981. – Vol. 37, № 2. – P. 235–255.

874. *Ogŭztöreli M.N.* Time-lag control systems. – New York: Academic Press, 1966. – xii, 323 p.

875. *Ohayon R., Soize C.* Structural acoustics and vibration: Mechanical models, variational formulations and discretization. – San Diego: Academic Press, 1998. – 424 p.

876. *Ohsaki M., Ikeda K.* Stability and optimization of structure: Generalized sensitivity analysis. – New York: Springer, 2007. – xvi, 269 p.

877. *Øksendal B., Sulem-Bialobroda A.* Applied stochastic control of jump diffusions. – 2nd ed. – Berlin, Heidelberg: Springer, 2007. – x, 214 p.

878. *Oliva S.M.* Reaction-diffusion equations with nonlinear boundary delay // J. of Dyn. and Diff. Equations. – 1999. – Vol. 11, № 2. – P. 279–296.

879. *Ordokhani Y.* An application of Walsh functions for Fredholm–Hammerstein integro-differential equations // Intern. J. of Contemporary Math. Sciences. – 2010. – Vol. 5, № 22. – P. 1055–1063.

880. *OOrdokhani Y., Davaei far S.* Application of the Bernstein polynomials for solving the nonlinear Fredholm integro-differential equations // J. of Appl. Math. & Bioinformatics. – 2011. – Vol. 1, № 2. – P. 13–31.

881. *Ordokhani Y., Dehestani H.* An application of Bessel function for solving nonlinear Fredholm–Volterra–Hammerstein integro-differential equations // J. of Science (Kharazmi University). – 2013. – Vol. 13, № 2. – P. 347–362.

882. *Otrocol D.* Numerical solutions of Lotka-Volterra system with delay by spline functions of even degry // Studia Univ. "Babes-Bolyai". Mathematica. – 2006. – Vol. 51, № 4. – P. 167–180.

883. *Ou Ch., Wu J.* Persistence of wavefronts in delayed nonlocal reaction–diffusion equations // J. of Diff. Equations. – 2007. – Vol. 235, № 1. – P. 219–261.

884. *Padgett W.J., Tsokos C.P.* Stochastic integro-differential equations of Volterra type // SIAM J. on Appl. Math. – 1972. – Vol. 23, № 4. – P. 499–512.

885. *Palmeri A., Muscolino G.* A numerical method for the time-domain dynamic analysis of buildings equipped with viscoelastic dampers // Structural Control and Health Monitoring. – 2011. – Vol. 18. – P. 519–539.

886. *Pan L., Zhong S.* Dynamic analysis of stochastic reaction–diffusion Cohen–Grossberg neural networks with delays // Advances in Diff. Equations. – 2009. – Vol. 2009. – Article ID 410823. – 18 p.

887. *Pani A.K., Thomée V., Wahlbin L.B.* Numerical methods for hyperbolic and parabolic integro-differential equations // J. of Integral Equations and Appl. – 1992. – Vol. 4, № 4. – P. 533–584.

888. *Pani A.K., Fairweather G.* H^1-Galerkin mixed finite element methods for parabolic partial integro-differential equations // IMA J. of Numerical Anal. – 2002. – Vol. 22, № 2. – P. 231–252.

889. *Parandin N., Chenari S., Heidari S.* A numerical method for solving linear Fredholm integro–differential equations of the first order // J. of Basic and Appl. Scientific Research. – 2013. – Vol. 3, № 1s. – P. 192–195.

890. *Paul C.A.H.* Developing a delay differential equation solver // ANM. – 1992. – Vol. 9, № 3–5. – P. 403–414.

891. *Pawula R.F.* Generalizations and extensions of the Fokker–Planck–Kolmogorov equations. – PhD thesis. – Pasadena: California Inst. of Technol., 1965. – VII, 130 p.

892. *Pawula R.F.* Generalizations and extensions of the Fokker–Planck–Kolmogorov equations // IEEE Trans. on Information Theory. – 1967. – Vol. 13, № 1. – P. 33–41.

893. *Pedas A., Tamme E.* Discrete Galerkin method for Fredholm integro-differential equations with weakly singular kernels // J. of Comput. and Appl. Math. – 2008. – Vol. 213, № 1. – P. 111–126.

894. *Pedjeu J.-C., Sathananthan S.* Fundamental properties of stochastic integro-differential equations-I: Existence and uniqueness results // Intern. J. of Pure and Appl.

Math. – 2003. – Vol. 7, № 3. – P. 337–355.

895. *Pipkin A.C.* Lectures on viscoelasticity theory. – New York: Springer, 1986. – viii, 188 p.

896. *Pirrotta A., Santoro R.* Probabilistic response of nonlinear systems under combined normal and Poisson white noise via path integral method // Probabilistic Engineering Mech. – 2011. – Vol. 26, № 1. – P. 26–32.

897. *Platen E., Bruti-Liberati N.* Numerical solution of stochastic differential equations with jumps in finance. – Berlin: Springer, 2010. – xxviii, 856 p.

898. *Poloskov I.E.* Compound program packages and a nonlinear random fluctuations analysis // Proc. of the 1998 Intern. Symp. on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC-98) / V. Weispfenning, B.M. Trager (eds.). – New York: ACM Press, 1998. – P. 70–75.

899. *Poloskov I.E.* Analysis of random regimes and computer algebra // 20th Intern. Congress of Theoretical and Appl. Mech. (ICTAM2000, Chicago) / Abstract Book. – Department of Theoretical and Appl. Mech.s (University of Illinois at Urbana-Champaign): Technical Report № 950, 2000. – P. 55.

900. *Poloskov I.E.* CAS Mathematica and analysis of random regimes // Symbolic Computation: New Horizons / Proc. of the IV Intern. Mathematica Symp. (IMS2001, Tokyo). –– Tokyo Denki University Press, 2001. – P. 401–408.

901. *Poloskov I.E.* Random regimes in nonlinear systems and computer algebra // IUTAM Symp. on Nonlinear Stochastic Dyn. / Program and abstracts. – University of Illinois at Urbana-Champaign, 2002. – 2 p.

902. *Poloskov I.E.* CAS Mathematica in random studies // Proc. of Int. Conf. on Computer Science (ICCS 2003): Lecture Notes in Computer Science, № 2657. – Berlin: Springer, 2003. – Pt. I. – P. 781–790.

903. *Poloskov I.E.* Symbolic and symbolic-numeric calculations in applied mathematics, mechanics and ecology // Challenging the Boundaries of Symbolic Computation / Proc. of the 5th Intern. Mathematica Symp. (Imperial College, London): P. Mitic, P. Ramsden, J. Carne (eds.). – London: Imperial College Press, 2003. – P. 317–324.

904. *Poloskov I.E.* Symbolic-numeric algorithms for analysis of stochastic systems with different forms of aftereffect // Proc. in Appl. Math. and Mech.s (PAMM). – 2007. – Vol. 7, № 1. – P. 2080011–2080012.

905. *Poloskov I., Malanin V.* A scheme for study of linear stochastic time-delay dynamical systems under continuous and impulsive fluctuations // Intern. J. of Dyn. and Control. – 2016. – Vol. 4, № 2. – P. 195–203.

906. *Poloskov I.E, Soize C.* Symbolic and numeric scheme for solution of linear integro-differential equations with random parameter uncertainties and Gaussian stochastic process input // AMM. – 2018. – Vol. 56, April. – P. 15–31.

907. *Poloskov I.E.* Numerical and analytical methods of study of stochastic systems with delay // J. of Math. Sciences. – 2018. – Vol. 230, № 5. – P. 746–750.

908. *Poloskov I.E.* New scheme for estimation of the first and senior moment functions for the response of linear delay differential system excited by additive and multiplicative noises // J. of Math. Sciences. – 2020. - Vol. 246, № 4. – P. 525–539.

909. *Polyanin A.D., Manzhirov A.V.* Handbook of integral equations. – 2nd ed. – Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC (Taylor & Francis Group), 2008. – xxxiii, 1108 p.

910. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Exact solutions of linear and non-linear differential-difference heat and diffusion equations with finite relaxation time // Intern. J. of Non-Linear Mech. – 2013. – Vol. 54. – P. 115–126.

911. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Exact separable solutions of delay reaction–diffusion equations and other nonlinear partial functional-differential equations // CNSNS. – 2013.

– Vol. 19, № 3. – P. 409–416.

912. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction–diffusion equations and more complex nonlinear equations // Ibid. – 2014. – Vol. 19, № 3. – P. 417–430.

913. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Non-linear instability and exact solutions to some delay reaction–diffusion systems // Intern. J. of Non-Linear Mech. – 2014. – Vol. 59. – P. 16–22.

914. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Non-linear instability and exact solutions to some delay reaction–diffusion systems // Ibid. – 2014. – Vol. 62. – P. 33–40.

915. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* The functional constraints method: Application to non-linear delay reaction–diffusion equations with varying transfer coefficients // Ibid. – 2014. – Vol. 67. – P. 267–277.

916. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* The generating equations method: Constructing exact solutions to delay reaction–diffusion systems and other non-linear coupled delay PDEs // Ibid. – 2015. – Vol. 71. – P. 104–115.

917. *Ponnammal K., Sayeelakshmi R.* Singly diagonally implicit Runge–Kutta fourth and fifth order methods for solving delay differential equations // Intern. J. of Engineering, Science and Math. – 2017. – Vol. 6, № 7. – P. 182–197.

918. *Pospíšil M., Škripková L.* Representation of solutions of neutral differential equations with delay and with linear parts defined by pairwise permutable matrices // Miskolc Math. Notes. – 2015. – Vol. 16, № 1. – P. 423–438.

919. *Potapov V.D.* Stability of stochastic elastic and viscoelastic systems. – Chichester: John Wiley, 1999. – xi, 275 p.

920. *Potapov V.D.* Nonlinear vibrations and stability of elastic and viscoelastic systems under random stationary loads // Mech. of Solids. – 2011. – Vol. 46, № 3. – P. 444–454.

921. *Potapov V.D., Marasanov A.I.* The reliability and durability of viscoelastic systems // Progress and Trends in Rheology V: Proc. of the 5th European Rheology Conf. / I. Emri (ed.). – Berlin, Heidelberg: Springer, 1998. – P. 301–302.

922. *Prochazka I., Kral L., Blazej J.* Picosecond laser pulse distortion by propagation through a turbulent atmosphere // Coherence and Ultrashort Pulse Laser Emission / F.J. Duarte (ed.). – Rijeka, Croatia: InTech, 2010. – P. 445–448.

923. *Proppe C.* Equivalent linearization of MDOF systems under external Poisson white noise excitation // Probabilistic Engineering Mech. – 2002. – Vol. 17, № 4. – P. 393–399.

924. *Prüss J.* Evolutionary Integral Equations and Applications. – Basel: Birkhäuser, 2012. – xxvi, 366 p.

925. *Pue-on P.* Group classification of linear second-order delay ordinary differential equation // Proc. of ICMSA. – 2006. – Vol. 2, № 1. – P. 33-38.

926. *Pyatigorets A.V., Marasteanu M.O., Khazanovich L.* Application of a matrix operator method to the thermoviscoelastic analysis of composite structures // J. of Mech. of Materials and Structures. – 2010. – Vol. 5, № 5. – P. 837–854.

927. *Quarteroni A., Saleri F., Gervasio P.* Scientific computing with MATLAB and Octave. – Heidelberg, Dordrecht: Springer, 2010. – xvi, 360 p.

928. *Quarteroni A.* Numerical models for differential problems. – Milan: Springer, 2014. – xix, 656 p.

929. *Rabbani M., Kiasoltani S.H.* Solving of nonlinear system of Fredholm–Volterra integro-differential equations by using discrete collocation method // The J. of Math. and Computer Science. – 2011. – Vol. 3, № 4. – P. 382–389.

930. *Rahman M.* Integral equations and their applications. – Southampton: WIT Press, 2007. – 384 p.

931. *Rahman M., Jackiewicz Z., Welfert B.D.* Stochastic approximations of perturbed Fredholm–Volterra integro-differential equation arising in mathematical neurosciences // AMC. – 2007. – Vol. 186, № 2. – P. 1173–1182.

932. *Rand R.H.* Lecture notes on nonlinear vibrations: Version 53. – Ithaca, NY: Dept. Theoretical & Appl. Mech. Cornell University, 2012. – 160 p. – URL: https://ecommons.cornell.edu/handle/1813/28989 (дата обращения 08.06.2020).

933. *Rao M.R.M., Tsokos C.P.* Integro-differential equations of Volterra type // Bulletin of the Australian Math. Society. – 1970. – Vol. 3, – P. 9–22.

934. *Rashidinia J., Zarebnia M.* The numerical solution of integro-differential equation by means of the Sinc method // AMC. – 2007. – Vol. 188, № 2. – P. 1124–1130.

935. *Rauh A., Senkel L.* (eds.) Variable-structure approaches: Analysis, simulation, robust control and estimation of uncertain dynamic processes. – Cham: Springer, 2016. – x, 361 p.

936. *Rawashdeh E., Jaradat H.M., Awawdeh F.* Homotopy analysis method for delay-integro-differential equations // Jordan J. of Math. and Statistics (JJMS). – 2009. – Vol. 2, № 1. – P. 15–23.

937. *Răsvan V.* Three lectures on neutral functional differential equations / Control Engineering and Appl. Informatics. – 2009. – Vol. 11, № 1. – P. 49–55; 2009. – Vol. 11, № 2. – P. 59–63; 2010. – Vol. 12, № 1. – P. 62–66.

938. *Rensfelt A., Söderström T.* Structure testing of wave propagation models used in identification of viscoelastic materials // Automatica (J. of IFAC). – 2010. – Vol. 46, № 4. – P. 728–734.

939. *Renardy M., Hrusa W.J., Nohel J.A.* Mathematical problems in viscoelasticity. – Harlow: Longman Scientific & Technical, 1987. – 292 p.

940. *Rey A.D., Mackey M.C.* Multistability and boundary layer development in a transport equation with delayed arguments // Canadian Appl. Math. Quarterly. – 1993. – Vol. 1, № 1. – P. 61–81.

941. *Reyes E., Rodríguez F., Martín J.A.* Analytic-numerical solutions of diffusion mathematical models with delays // Comput. Math. Appl. – 2008. – Vol. 56, № 3. – P. 743–753.

942. *Rezounenko A.V.* On a class of PDEs with nonlinear distributed in space and time state-dependent delay terms // Math. Methods in the Appl. Sciences. – 2008. – Vol. 31, № 13. – P. 1569–1585.

943. *Riande E., Diaz-Calleja R., Prolongo M. et al.* Polymer viscoelasticity: Stress and strain in practice. – New York: Marcel Dekker, 2000. – xvi, 879 p.

944. *Ricciardi L.M.* Diffusion processes and related topics in biology. – Berlin: Springer, 1977. – v, 200 p.

945. *Riedle M.* Solutions of affine stochastic functional differential equations in the state space // J. of Evolution Equations. – 2008. – Vol. 8, № 1. – P. 71–97.

946. *Riedler M.* Numerical methods for the approximation of strong solutions of stochastic differential equations of jump type. – Diploma Thesis. – Vienna Univ. of Technology, 2008. – 129 p.

947. *Rihan F.A.* Sensitivity analysis for dynamic systems with time-lags // J. of Comput. and Appl. Math. – 2003. – Vol. 151, № 2. – P. 445–462.

948. *Rihan F.A.* Adjoint sensitivity analysis of neutral delay differential models // J. of Numerical Anal., Industrial and Appl. Math. – 2010. – Vol. 5, № 1–2. – P. 95–101.

949. *Rivlin R.S., Sawyers K.N.* Nonlinear continuum mechanics of viscoelastic fluids // Annual Review of Fluid Mech. – 1971. – Vol. 3, № 1. – P. 117–146.

950. *Roberts J.B.* On the response of a simple oscillator to random impulses // J. of Sound and Vibrations. – 1966. – Vol. 4, № 1. – P. 51–61.

951. *Roberts J.B.* System response to random impulses // Ibid. – 1972. – Vol. 24, № 1. – P. 23–34.

952. *Roberts J.B.* Distribution of the response of linear systems to poisson distributed random pulses // Ibid. – 1973. – Vol. 28, № 1. – P. 93–103.

953. *Ronghua L., Zhaoguang C.* Convergence of numerical solution to stochastic delay differential equation with Poisson jump and Markovian switching // AMC. – 2007. – Vol. 184, № 2. – P. 451–463.

954. *Rosli M., Bahar A., Yeak S.H. et al.* 2–stage stochastic Runge–Kutta for stochastic delay differential equations // AIP Conf. Proc. – 2015. – Vol. 1660. – P. 050006-1–050006-9.

955. *Rotstein H.G., Brandon S., Novick-Cohen A. et al.* Phase field equations with memory: the hyperbolic case // SIAM J. on Appl. Math. – 2001. – Vol. 62, № 1. – P. 264–282.

956. *Rouleau L., Deü J.-F., Legay A. et al.* Application of Kramers–Kronig relations to time-temperature superposition for viscoelastic materials // Mech. of Materials. – 2013. – Vol. 65. – P. 66–75.

957. *Roussel M.R.* The use of delay differential equations in chemical kinetics // J. of Physical Chemistry. – 1996. – Vol. 100, № 2. – P. 8323–8330.

958. *Saadatmandia A., Dehghan M.* Numerical solution of the higher-order linear Fredholm integro-differential-difference equation with variable coefficients // Comput. Math. Appl. – 2010. – Vol. 59, № 8. – P. 2996–3004.

959. *Saeidy M. ,Matinfar M., Vahidi J.* Analytical Solution of BVPs for fourth-order integro-differential equations by using homotopy analysis method // Intern. J. of Nonlinear Science. – 2010. – Vol. 9, № 4. – P. 414–421.

960. *Saha N., Bandyopadhyay M.* Multiple scale analysis of a delayed predator–prey model within random environment // J. of Appl. Math. & Informatics. – 2008. – Vol. 26, № 5–6. – P. 1191–1205

961. *Saltelli A., Tarantola S., Campolongo F. and al.* Sensitivity analysis in practice: A guide to assessing scientific models. – Chichester: John Wiley, 2004. – 232 p.

962. *Sambandham M.,Thangaraj V., Bota K.B.* Numerical solution of random Love's integral equation // Comput. Math. Appl. – 1988. – Vol. 16, № 10–11. – P. 915–920.

963. *Santos M.L.* On the wave equations with memory in noncylindrical domains // Electronic J. of Diff. Equations. – 2007. – Vol. 2007, № 128. – P. 1–18.

964. *Schanz M.* Wave propagation in viscoelastic and poroelastic continua: A boundary element approach. – Berlin, Heidelberg: Springer, 2001. – x, 170 p.

965. *Sekar S.* Numerical strategies for the nonlinear integro-differential equations using single-term Haar wavelet series // Appl. Math. Sciences. – 2014. – Vol. 8, № 51. – P. 2547–2554.

966. *Sellier M.* Identification of memory kernels in thermo-viscoelasticity // arXiv: cond-mat/0504663 (Submitted on 26 Apr 2005). – 4 p.

967. *Sepehriana B., Razzaghi M.* Single-term Walsh series method for the Volterra integro-differential equations // Engineering Anal. with Boundary Elements. – 2004. – Vol. 28, № 11. – P. 1315–1319.

968. *Shaikhet L., Roberts J.* Stochastic Volterra integro-differential equations: stability and numerical methods // MCCM Numerical Analysis Report. – Manchester University, 2004. – № 450. – 38 p.

969. *Shaikhet L.E., Roberts J.* Reliability of difference analogues to preserve stability properties of stochastic Volterra integro-differential equations // Advances in Difference Equations. – 2006. – Vol. 2006. – Article ID 73897. – P. 1–22.

970. *Shakourifar M., Enright W.H.* Reliable approximate solution of systems of

Volterra integro-differential equations with time-dependent delays // SIAM J. on Scientific Computing. – 2011. – Vol. 33, № 3. – P. 1134–1158.

971. *Shampine L.F., Gladwell I., Thompson S.* Solving ODEs with Matlab. – Cambridge: University Press, 2003. – 272 p.

972. *Shampine L.F., Thompson S.* Delay–differential equations with constant lags // CODEE J. – 2012. – Vol. 9. – Article 10. – 5 p. – URL: http://scholarship.claremont.edu/codee/vol9/iss1/delay-differential-equations-with-constant-lags.pdf

973. *Shapiro B.E.* The computable differential equation: Lecture notes for Math 582B "Topics in Numerical Analysis". – Northridge: California State University, 2007. – 206 p.

974. *Sharp W.D., Allen J.D.* Development and analysis of quadrature and Galerkin methods for approximate solution to the integral formulation of Volterra's population equation with diffusion and noise // Intern. J. of Pure and Appl. Math. – 2003. – Vol. 4, № 4. – P. 453–481.

975. *Shaw M.T., MacKnight W.J.* Introduction to polymer viscoelasticity. – Hoboken: Wiley, 2005. – xix, 316 p.

976. *Shaw S., Whiteman J.R.* Applications and numerical analysis of partial differential Volterra equations: A brief survey / Computer Methods in Appl. Mech. and Engineering. – 1997. – Vol. 150, № 1–4. – P. 397–409.

977. *Shekarabi F.H., Khodabin M., Maleknejad K.* The Petrov–Galerkin method for numerical solution of stochastic Volterra integral equations // IAENG Intern. J. of Appl. Math. – 2014. – Vol. 44, № 4. – P. 170–176.

978. *Shepp L.* A model for stock price fluctuations based on information // IEEE Trans. on Information Theory. – 2002. – Vol. 48, № 6. – P. 1372–1378.

979. *Shiralashetti S.C., Lamani L.* Numerical solution of stochastic integral equations using CAS wavelets // Malaya J. of Matematik. – 2020. – Vol. S, № 1. – P. 183–186.

980. *Siddiqi S.S., Arshed S.* Numerical solution of convection-diffusion integro-differential equations with a weakly singular kernel // J. of Basic and Appl. Scientific Research. – 2013. – Vol. 3, № 11. – P. 106–120.

981. *Sidi A.* Application of extrapolation methods to numerical solution of Fredholm integral equations related to boundary value Problems // Computational Science – ICCS 2004: LNCS, № 3039 / M. Bubak, G.D. van Albada, P.M.A. Sloot et al. (eds.). – Berlin, Heidelberg: Springer, 2004. – P. 402–409.

982. *Siewe M.S., Tchawoua C., Rajasekar S.* Parametric resonance in the Rayleigh–Duffing oscillator with time-delayed feedback // CNSNS. – 2012. – Vol. 17, № 11. – P. 4485–4493.

983. *Simsiriwong J., Sullivan R.W., Hilton H.H.* Master creep compliance curve for random viscoelastic material properties // Challenges in Mechanics of Time-Dependent Materials and Processes in Conventional and Multifunctional Materials: Proc. of the 2013 Annual Conf. on Experimental and Appl. Mechanics / B. Antoun and al. (eds). – The Society for Experimental Mechanics, Inc., 2014. – Vol. 2. – P. 41–47.

984. *Singh M.G.* Hierarchical methods in river pollution control // Theoretical systems ecology: Advances and case studies. Ch. 17. / E. Halfon (ed.). – New York: Academic Press, 1979. – P. 419–451.

985. *Siraj-ul-Islam, Aziz I., Fayyaz M.* A new approach for numerical solution of integrodifferential equations via Haar wavelets // Intern. J. of Computer Math. – 2013. – Vol. 90, № 9. – P. 1971–1989.

986. *Sîrghi N., Neamţu M.* Deterministic and stochastic advertising diffusion model with delay // WSEAS Trans. on System and Control. – 2013. – Vol. 4, № 8. – P. 141–150.

987. *Situ K.* Theory of stochastic differential equations with jumps and applications: Mathematical and analytical techniques with applications to engineering. – New York:

Springer, 2005. – xx, 434 p.

988. *Sloan H., Thomée V.* Time discretization of an integro-differential equation of parabolic type // SIAM J. on Numerical Anal. – 1986. – Vol. 23, № 5. – P. 1052–1061.

989. *Smith H.* An introduction to delay differential equations with applications to the life sciences. – New York: Springer, 2011. – xi, 172 p.

990. *Smaoui N., Mekkaoui M.* The generalized Burgers equation with and without a time delay // J. of Appl. Math. and Stochastic Anal. – 2004. – Vol. 2004, № 1. – P. 73–96.

991. *Smyshlyaev A., Krstic M.* Closed-form boundary state feedbacks for a class of 1-D partial integro-differential equations // IEEE Trans. on Automatic Control. – 2004. – Vol. 49 , № 12. – P. 2185–2202.

992. *Śniady P.* Dynamic response of linear structures to a random stream of pulses // J. of Sound and Vibrations. – 1989. – Vol. 131, № 1. – P.91–102.

993. *Snyder D.L., Miller M.I.* Random point processes in time and space. – 2nd ed. – New York: Springer, 1991. – x, 481 p.

994. *Sobczyk K.* Stochastic wave propagation. – Warszawa: PWN–Polish Scientific Publishers, 1985. – viii, 248 p.

995. *Sobczyk K.* Stochastic differential equations: with applications to physics and engineering. – Dordrecht: Springer, 1991. – xvi, 400 p.

996. *Socha L.* A survey of quantitative and qualitative methods of sensitivity analysis for stochastic dynamic systems // Probabilistic Engineering Mech. – 1991. – Vol. 6, № 3–4. – P. 148–163.

997. *Socha L.* Linearization methods for stochastic dynamic systems. – Berlin: Springer, 2008. – xi, 383 p.

998. *Soize C.* Generalized probabilistic approach of uncertainties in computational dynamics using random matrices and polynomial chaos decompositions // Intern. J. for Numerical Methods in Engineering. – 2010. – Vol. 1, № 8. – P. 939–970.

999. *Soize C.* Stochastic models of uncertainties in computational mechanics. – Reston, VA: American Society of Civil Engineers, 2012. – 120 p.

1000. *Soize C., Poloskov I.* Time-domain formulation in computational dynamics for linear viscoelastic media with model uncertainties and stochastic excitation // Comput. Math. Appl. – 2012. – Vol. 64, № 11. – P. 3594–3612.

1001. *Soliman A.F., El-Azab M.S., El-Asyed A.M.A.* The numerical solution of integro-partial differential equations with sixth degree B-spline functions // American Academic & Scholarly Research J. – 2012. – Vol. 4, № 2. – P. 1–10.

1002. *Soong T.T.* Random differential equations in science and engineering. – New York: Academic Press, 1973. – xiv, 327 p.

1003. *Soong T.T., Grigoriu M.* Random vibrations of structural and mechanical systems. – Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1993. – xiii, 402 p.

1004. *Stanley L.G., Stewart D.L.* Design sensitivity analysis: computational issues of sensitivity equation methods. – Philadelphia: SIAM, 2002. – 162 p.

1005. *Stěpán G.* Retarded dynamical systems: Stability and characteristic functions. – Harlow: Longman Scientific & Technical; New York: Wiley, 1989. – 151 p.

1006. Stochastic hybrid Systems / Ch.G. Cassandras, J. Lygeros (eds). – Boca Raton, FL: Taylor & Francis Group/CRC Press, 2006. – 304 p.

1007. Stochastic hybrid systems: Theory and safety critical applications / H. Blom, J. Lygeros (eds.). – Berlin, Heidelberg: Springer, 2006. – xiv, 395 p.

1008. *Su L., Yan T., Zhao Y. et al.* Numerical solution of integro-differential equations with local polynomial regression // Open J. of Statistics. – 2012. – Vol. 2, № 3. – P. 352–355.

1009. *Sudret B., Der Kiureghian A.* Stochastic finite element methods and reliability:

A state-of-the-art report // Reprt No. UCB/SEMM-2000/08. – Berkeley: Dept. of Civil and Environmental Engineering, Univ. of California, 2000. – xv, 173 p.

1010. *Sun J.Q.* Stochastic dynamics and control. – Oxford, UK: Elsevier Science, 2006. – xvi, 410 p.

1011. *Suter M., Benipal G.S.* Aging Maxwell constitutive model for concrete // Defence Science J. – 2008. – Vol. 58, № 2. – P. 220–226.

1012. *Svanadze M.M.* Potential method in the linear theories of viscoelasticity and thermoviscoelasticity for Kelvin-Voigt materials // Technische Mechanik. – 2012. – Vol. 32, № 2. – P. 554–563.

1013. *Sweilam N.H., Khader M.M., Kota W.Y.* On the numerical solution of Hammerstein integral equations using Legendre approximation // Intern. J. of Appl. Mathe. Research. – 2012. – Vol. 1, № 1. – P. 65–76.

1014. *Sweilam N.H., Khader M.M., Kota W.Y.* Numerical and analytical study for fourth-order integro-differential equations using a pseudospectral method // Math. Problems in Engineering. – 2013. – Vol. 2013. – Article ID 43475. – 7 p.

1015. *Taiwo O.A., Alimi A.T., Akanmu M.A.* Numerical solutions for linear Fredholm integro-differential difference equations with variable coefficients by collocation methods // J. of Educational Policy and Entrepreneurial Research (JEPER). – 2014. – Vol. 1, № 2. – P. 175–185.

1016. *Tamboli J.A., Joshi S.G.* Optimum design of a passive suspension system of a vehicle subjected to actual random road excitations // J. of Sound and Vibration. – 1999. – Vol. 219, № 2. – P. 193–205.

1017. *Tamura H.* A discrete dynamical model with distributed transport delays and its hierarchical optimization to preserve stream quality // IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics. – 1974. - Vol. 41. – P. 424–431.

1018. *Tan J., Wang H.* Convergence and stability of the split-step backward Euler method for linear stochastic delay integro-differential equations // Math. and Computer Modelling. – 2010. – Vol. 51, № 5–6. – P. 504–515.

1019. *Tan J., Wang H.* Mean-square stability of the Euler–Maruyama method for stochastic differential delay equations with jumps // Intern. J. of Computer Math. – 2011. – Vol. 88, № 2. – P. 421–429.

1020. *Tanabe H.* On fundamental solution of differential equation with time delay in Banach space // Proc. of the Japan Academy. Ser. A. Math. Sciences. – 1988. – Vol. 64, № 5. – P. 131–134.

1021. *Tang T., Xu X., Cheng J.* On spectral methods for Volterra integral equations and the convergence analysis // J. of Comput. Math. – 2008. – Vol. 26, № 6. – P. 825–837.

1022. *Taniguchi T., Liu K., Truman A.* Existence, uniqueness, and asymptotic behavior of mmild solutions to stochastic functional differential equations in Hilbert spaces // J. of Diff. Equations. – 2002. – Vol. 181, № 1. – P. 72–91.

1023. *Tanthanuch J., Meleshko S.V.* On definition of an admitted Lie group for functional differential equations // CNSNS. – 2004. – Vol. 9. – P. 117–125.

1024. *Tari A., Rahimi M.Y., Shahmorad S., Talati F.* Development of the Tau method for the numerical solution of two-dimensional linear Volterra integro-differential equations // Comput. Methods in Appl. Math. – 2009. – Vol. 9, № 4. – P. 421–435.

1025. *Tari A.* On the existence uniqueness and solution of the nonlinear Volterra partial integro-differential equations // Intern. J. of Nonlinear Science. – 2013. – Vol. 16, № 2. – P. 152–163.

1026. *Tavernini L.* One-step methods for the numerical solution of Volterra functional differential equations // SIAM J. on Numerical Anal. – 1971. – Vol. 8, № 4. – P. 786–795.

1027. *Tavernini L.* Finite difference approximations for a class of semilinear Volterra

evolution problems // Ibid. – 1977. – Vol. 14, № 5. – P. 931–949.

1028. *Touboul J.* Propagation of chaos in neural fields // Annals of Appl. Probability. – 2014. – Vol. 24, № 3. – P. 1298–1328.

1029. *Thomée V., Wahlbin L.B.* Long-time numerical solution of a parabolic equation with memory // Math. of Comput. – 1994. – Vol. 62, № 206. – P. 477–496.

1030. *Tschoegl N.W.* The phenomenological theory of linear viscoelastic behavior: An introduction – Berlin, Heidelberg: Springer, 1989. – xxv, 769 p.

1031. *Tsokos C.P., Padgett W.J.* Random integral equations with applications to stochastic systems // Lecture Notes in Math., Vol. 233. – Berlin: Springer, 1971. – viii, 176 p.

1032. *Tsokos C.P., Padgett W.J.* Random integral equations with applications to life sciences and engineering // Math. in science and engineering, Vol. 108. – New York: Academic Press, 1974. – x, 278 p.

1033. *Tuckerman M., Berne B.J.* Vibrational relaxation in simple fluids: comparison of theory and simulation // J. of Chemical Physics. – 1993. – Vol. 98, № 9. – P. 7301–7316.

1034. *Tunç C.* On asymptotic stability of solutions of third-order nonlinear differential equations with retarded argument // Communications in Appl. Anal. – 2007. – Vol. 11. – P. 515–528.

1035. *Tunstall M., Benoit O.* Efficient use of random delays in embedded software // Information Security Theory and Practices. Smart Cards, Mobile and Ubiquitous Computing Systems / LNCS, Vol. 4462. – Berlin, Heidelberg: Springer, 2007. – P. 27–38.

1036. *Twardowska K., Marnik T., Pasławska-Południak M.* Approximation of the Zakai equation in a nonlinear filtering problem with delay // Intern. J. of Appl. Math. and Computer Science. – 2003. – Vol. 13, № 2. – P. 151–160.

1037. *Tylikowski A., Marowski W.* Vibration of a non-linear single-degree-of-freedom system due to Poissonian impulse excitation // Intern. J. of Non-Linear Mech. – 1986. – Vol. 21, № 3. – P. 229–238.

1038. *Tylikowski A.* Dynamic stability of viscoelastic continuous systems under time-dependent loadings // Mechanika Teoretyczna i Stosowana. – 1986. – Vol. 24, № 1–2. – P. 127–137.

1039. *Vandewalle S., Gander M.J.* Optimized overlapping Schwarz methods for parabolic PDEs with time–delay // Domain Decomposition Methods in Science and Engineering / T.J. Barth, M. Griebel, D.E. Keyes et al. (eds.). – Berlin, Heidelberg: Springer, 2005. – P. 291–298.

1040. *VanMarcke E.* Random fields: Analysis and synthesis. – Cambridge: MIT Press, 1983. – 382 p. (Web Edition by Rare Book Services, Princeton (NJ): Princeton University Press, 1998).

1041. *van der Houwen P.J., te Riele H.J.J.* Linear multistep methods for Volterra integral and integro-differential equations // Math. of Comput. – 1985. – Vol. 45, № 172. – P. 439–461.

1042. *van der Houwen P.J., Sommeijer B.P., Baker C.T.H.* On the stability of predictor–corrector methods for parabolic equations with delay // IMA J. of Numerical Anal. – 1986. – Vol. 6, № 1. – P. 1–23.

1043. *van der Houwen P.J., Sommeijer B.P.* Euler–Chebyshev methods for integro-differential equations // ANM. – 1997. – Vol. 24, № 2–3. – P. 203–218.

1044. *Van Lent J.* Multigrid methods for time–dependent partial differential equations. – PhD thesis. – Leuven: Katholieke Universiteit, 2006. – 204 p.

1045. *van Neerven J., Riedle M.* A semigroup approach to stochastic delay equations in spaces of continuous functions // Semigroup Forum. – 2007. – Vol. 74. – P. 227–239.

1046. *Vasta M., Luongo A.* Dynamic analysis of linear and nonlinear oscillations of

a beam under axial and transversal random Poisson pulses // Nonlinear Dyn. – 2004. – Vol. 36, № 2–4. – P. 421–435.

1047. *Vecchio A.* Boundedness of the global error of some linear and nonlinear methods for Volterra integral equations // J. of Integral Equations and Appl. – 2000. – Vol. 12, № 4. – P. 449–465.

1048. *Venkatesh S.G., Ayyaswamy S.K., Balachandar S.R. et al.* Wavelet solution for class of nonlinear integrodifferential equations // Indian J. of Science and Technology. – 2013. – Vol. 6, № 6. – P. 4670–4677.

1049. *Verdugo A.* Linear analysis of an integro-differential delay equation model // Intern. J. of Diff. Equations. – 2018. – Vol. 2018. – Article ID 5035402. – 6 p.

1050. *Villanueva R.J., Hervas A., Ferrer M.V.* Constructive solution of coupled second order delay differential equations with variable coefficients !/ Intern. J. of Math. and Math. Sciences. – 1995. – Vol. 18. – Article ID 152652. – P. 689–700.

1051. *Virk G.S.* Runge–Kutta method for delay-differential systems // IEE Proc. – 1985. – Vol. 132, Pt. D, № 3. – P. 119–123.

1052. *Volkov V.S., Pokrovsky V.N.* Generalized Fokker–Planck equation for non-Markovian processes // J. of Math. Physics. – 1983. – Vol. 24, № 2. – P. 267–270.

1053. *Volterra V.* Sulle equazioni integro-differenziali // Rendiconti Accademia dei Lincei. – 1909. – T. 18, № 1. – P. 167-174.

1054. *Volterra V.* Sulle equazioni integro-differenziali della teoria dell'elasticità // Ibid. – 1909. – T. 18, № 2. – P. 295–301.

1055. *Volterra V.* Equazioni integro-differenziali della elasticità nel caso della isotropia // Ibid. – 1909. – T. 18, № 2. – P. 577-586.

1056. *Volterra V.* Soluzione delle equazioni integro-differenziali dell'elasticità nel caso di una sfera isotropa // Ibid. – 1910. – T. 19, № 1. – P. 107–114.

1057. *Volterra V.* Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali // Ibid. – 1910. – T. 19, № 1. – P. 169–180.

1058. *Volterra V.* Deformazione di una sfera elastica, soggetta a date tensioni, nel caso ereditario // Ibid. – 1910. – T. 19, № 1. – P. 239–243.

1059. *Volterra V.* Osservazioni sulle equazioni integro-diferenziali ed integrali // Ibid. – 1910. – T. 19, № 1. – P. 361–363.

1060. *Volterra V.* Equazioni integro-differenziali con limiti costanti // Ibid. – 1911. – T. 20, № 1. – P. 95–99.

1061. *Volterra V.* Sopra una proprietà generale delle equazioni integrali ed integro-differenziali // Ibid. – 1911. – T. 20, № 1. – P. 79–88.

1062. *Volterra V.* Vibrazioni elastiche nel caso della eredità // Ibid. – 1912. – T. 21, № 2. – P. 3–12.

1063. *Volterra V.* Sur les equations integro-differentielles et leurs applications // Acta Mathematica. – 1912. – T. 35. – P. 295-356.

1064. *Volterra V.* L'application du calcul aux phénomènes d'hérédité // Revue du mois. – 1912. – T. 13. – P. 257–274.

1065. *Volterra V.* Leçons sur les équations integrales et les équations intégro-differentielles, professées à la Faculté des Sciences de Rome en 1910. – Paris: Collection Borel, Gauthier-Villars, 1912. – 180 p.

1066. *Volterra V.* Sui fenomeni ereditarii // Rendiconti Accademia dei Lincei. – 1913. – T. 22, № 1. – P. 529–539.

1067. *Volterra V.* Sopra equazioni integro-differenziali aventi i limiti costanti // Ibid.– 1913. – T. 22, № 2. – P. 43–49.

1068. *Volterra V.* Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically // Nature. – 1926. – Vol. 118. – P. 558–560.

1069. *Volterra V.* Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi // Memorie del R. Comitato talassografico italiano. Mem. CXXXI. – Venice, 1927.

1070. *Volterra V.* Theory of functionals and of integral and integro-differential equations / L. Fantappié (ed.). – London, Glasgow: Blackie & Son, Ltd., 1930. – xiv, 226 p.

1071. *Wang Ch., Yang K., Pu X., Li R.* Numerical method of a class of stochastic delay population models // Control Science and Engineering. – 2018. – Vol. 2, № 1. – P. 27–35.

1072. *Wang L.-s., Mei C., Xue H.* The semi-implicit Euler method for stochastic differential delay equations with jumps // AMC. – 2007. – Vol. 192, № 2. – P. 567–578.

1073. *Wang W.* An algorithm for solving the high-order nonlinear Volterra–Fredholm integro-differential equation with mechanization // AMC. – 2006. – Vol. 172, № 1. – P. 1–23.

1074. *Wang W., Han C., He F.* White noise estimation for discrete-time systems with random delay and packet dropout // J. of Systems Science and Complexity. – 2014. – Vol. 27, № 3. – P. 476–493.

1075. *Wang W., Chen Y.* Mean-square stability of semi-implicit Euler method for nonlinear neutral stochastic delay differential equations // ANM. – 2011. – Vol. 61, № 5. – P. 696–701.

1076. *Wang X., Gan S.* Compensated stochastic theta methods for stochastic differential equations with jumps // ANM. – 2010. – Vol. 60, № 9. – P. 877–887.

1077. *Wang Y., Wang Y.* Global dynamics of reaction–diffusion systems with delays // Appl. Math. Letters. – 2005. – Vol. 18, № 9. – P. 1027–1033.

1078. *Wang Z.H., Hu H.Y.* A modified averaging scheme with application to the secondary Hopf bifurcation of a delayed van der Pol oscillator // Acta Mechanica Sinica. – 2008. – Vol. 24, № 4. – P. 449–454.

1079. *Wang Zh.-Ch., Li W.-T., Ruan Sh.* Entire solutions in bistable reaction-diffusion equations with nonlocal delayed nonlinearity // Trans. of the American Math. Society. – 2009. – Vol. 361, № 4. – P. 2047–2084.

1080. *Wang Z., Li X., Lei J.* Second moment boundedness of linear stochastic delay differential equations // Discrete & Continuous Dyn. Systems – B. – 2014. – Vol. 19, № 9. – P. 2963—2991.

1081. *Wang Z., Liu Y., Fraser K., Liu X.* Stochastic stability of uncertain Hopfield neural networks with discrete and distributed delays // Physics Letters A. – 2006. – Vol. 354, № 4. – P. 288–297.

1082. *Ward I.M., Sweeney J.* Mechanical properties of solid polymers. – 3rd ed. – Chichester: John Wiley, 2013. – xiii, 461 p.

1083. *Wazwaz A.-M.* Linear and nonlinear integral equations: Methods and applications. – Berlin, Heidelberg: Springer, 2011. – xviii, 639 p.

1084. *Wearing H.J., Rohani P., Keeling M.J.* Appropriate models for the management of infectious diseases // PLOS Medicine. – 2005. – Vol. 2, № 7. – P. 621–627.

1085. *Wedig W.* Spectral analysis of non-smooth dynamical systems // Proc. of the 4th Intern. Conf. on Stochastic Structural Dyn. (SSD'98, Notre Dame, Indiana, 6-8 Aug. 1998) / B.F. Spencer, Jr., E.A. Johnson (eds.). – Rotterdam; Brookfield, VT: A.A. Balkema, 1999. – P. 249–256.

1086. *Weeks G.E., Cost T.L.* Complex stress response and reliability analysis of a composite elastic-viscoelastic missile configuration using finite elements // Mech. Research Communications. – 1980. – Vol. 7, № 2. – P. 59–63.

1087. *Wei M.* Convergence of numerical solutions for variable delay differential equations driven by Poisson random jump measure // AMC. – 2009. – Vol. 212, № 2. – P. 409–417.

1088. *Wiener J.* Boundary value problems for partial differential equations with

piecewise constant delay // Intern. J. of Math. and Math. Sciences. – 1991. – Vol. 14, № 2. – P. 363–380.

1089. *Wilkie J.* Numerical method for integrodifferential generalized Langevin and master equations // Physical Review E. – 2003. – Vol. 68, № 2. – Article Id 027701. – 4 p.

1090. *Wojciechowski K.J.* Analysis and numerical solution of nonlinear Volterra partial integrodifierential equations modeling swelling porous materials. – Ph.D. thesis (Appl. Math.). – Denver: University of Colorado, 2011. – 181 p.

1091. *Wojtkiewicz S.F., Johnson E.A., Bergman L.A. et al.* Response of stochastic dynamical systems driven by additive Gaussian and Poisson white noise: Solution of a forward generalized Kolmogorov equation by a spectral finite difference method // Computer Methods in Appl. Mech. and Engineering. – 1999. – Vol. 168, № 1–4. – P. 73–89.

1092. *Wolfe M.A., Phillips G.M.* Some methods for the solution of non-singular Volterra integro-differential equations // Computer J. – 1968. – Vol. 11, № 3. – P. 334–336.

1093. *Wolfram S.* The Mathematica book. – 5th ed. – Champaign, IL: Wolfram Media, 2003. – 1488 p.

1094. *Wolkenfelt P.H.M.* Modified multilag methods for Volterra functional equations // Math. of Comput. – 1983. – Vol. 40, № 161. – P. 301–316.

1095. *Wrzosek M.* Newton's method for parabolic stochastic functional partial differential equations // Functional Diff. Equations. – 2013. – Vol. 20, № 3–4. – P. 285–310.

1096. *Wrzosek M., Ziemlańska M.* The method of lines for hyperbolic stochastic functional partial differential equations // Czechoslovak Math. J. – 2018. – Vol. 68 , № 2. – P. 323–339.

1097. *Wu F., Yin G., Wang L.Y.* Moment exponential stability of random delay systems with two-time-scale Markovian switching // Nonlinear Anal.: Real World Appl. – 2012. – Vol. 13, № 6. – P. 2476–2490.

1098. *Wu F., Wang Q., Cheng X. et al.* Linear θ-method and compact θ-method for generalised reaction–diffusion equation with delay // Intern. J. of Diff. Equations. – 2018. – Vol. 2018. – Article ID 6402576. – 13 p.

1099. *Wu J.* Theory and applications of partial functional differential equations. – New York: Springer, 1996. – x, 432 p.

1100. *Wu J., Zou X.* Traveling wave fronts of reaction-diffusion systems with delay // J. of Dyn. and Diff. Equations. – 2001. – Vol. 131, № 3. – P. 651–687.

1101. *Wu Q., Hu L., Zhang Z.* Convergence and stability of balanced methods for stochastic delay integro-differential equations // AMC. – 2014. – Vol. 237. – P. 446–460.

1102. *Wu Sh., Gan S.* Analytical and numerical stability of neutral delay integro-differential equations and neutral delay partial differential equations // Comput. Math. Appl. – 2008. – Vol. 55, № 11. – P. 2426–2443.

1103. *Xie Sh.* Numerical algorithms for solving a type of nonlinear integro-differential equations // Intern. J. of Math., Computational, Physical, Electrical and Computer Engineering. – 2010. – Vol. 4, № 5. – P. 593–596.

1104. *Xiu D.* Numerical methods for stochastic computations: A spectral method approach. – Princeton, NJ: University Press, 2010. – 144 p.

1105. *Xu Y., Zhao J.J., Sui Z.N.* Stability analysis of θ-methods for neutral multidelay integrodifferential system // Discrete Dyn. in Nature and Society. – 2007. – Vol. 2007. – Article ID 42540. – 8 p.

1106. *Xu W., Rong H., Fang T.* Duffing oscillator with visco-elastic term under narrow-band random excitation // Acta Mechanica Sinica. – 2002. – Vol. 34, № 5. – P. 764–771 (на китайском языке).

1107. *Xue L.* The numerical solution of parabolic integro-differential equations. – MSc Thesis. – Dublin City University, 1993. – 81 p.

1108. *Yalçinbaş S., Sezer M., Sorkun H.H.* Legendre polynomial solutions of high-order linear Fredholm integro-differential equations // AMC. – 2009. – Vol. 210. – P. 334–349.

1109. *Yan Y.* Galerkin finite element methods for stochastic parabolic partial differential equations // SIAM J. of Numerical Anal. – 2005. – Vol. 43, № 4. – P. 1363–1384.

1110. *Yang D.* An identification method for the viscoelastic characterization of materials // Challenges in Mechanics of Time-Dependent Materials and Processes in Conventional and Multifunctional Materials: Proc. of the 2012 Annual Conf. on Experimental and Appl. Mech. / B. Antoun and al. (eds). – The Society for Experimental Mechanics, Inc., 2013. – Vol. 2. – P. 41–54.

1111. *Yang X., Zhu Q.* Existence, uniqueness, and stability of stochastic neutral functional differential equations of Sobolev–type // J. of Math. Physics. – 2015. – Vol. 56, № 12. – Article ID 122701. – P. 1–16.

1112. *Yellott (Jr.) J.I.* Spectral consequences of photoreceptor sampling in the rhesus retina // Science. – 1983. – Vol. 221, № 4608. – P. 382–385.

1113. *Yi S., Nelson P., Ulsoy A.* Delay differential equations via the matrix Lambert W function and bifurcation analysis: Application to machine tool chatter // Math. biosciences and engineering. – 2007. – Vol. 4, № 2. – P. 355–368.

1114. *Yildirim A.* Application of He's variational iteration method to nonlinear integro-differential equations // Zeitschrift für Naturforschung A. – 2010. – Vol. 65, № 5. – P. 418–422.

1115. *Yin Z., Gan S.* Chebyshev spectral collocation method for stochastic delay differential equations // Advances in Difference Equations. – 2015. – № 1. – Article ID 113. – P. 1–12.

1116. *Yüksel S., Başar T.* Stochastic networked control systems: Stabilization and optimization under information constraints. – New York: Springer, 2013. – xviii, 482 p.

1117. *Yousefi S., Banifatemi A.* Numerical solution of Fredholm integral equations by using CAS wavelets // AMC. – 2006. – Vol. 183, № 1. – P. 458–463.

1118. *Yousefi S.A., Behroozifar M., Dehghan M.* Numerical solution of the nonlinear age-structured population models by using the operational matrices of Bernstein polynomials // AMM. – 2012. – Vol. 36, № 3. – P. 945–963.

1119. *Yu X., Xu J.-X.* (eds.) Variable structure systems: Towards the 21st century. – Berlin: Springer, 2002. – x, 418 p.

1120. *Yu Yu.-X., Li Sh.-F.* Stability analysis of Runge–Kutta methods for nonlinear neutral delay integro-differential equations // Science in China Series A: Math. – 2007. – Vol. 50, № 4. – P. 464–474.

1121. *Yüzbaşi Ş.* Shifted Legendre method with residual error estimation for delay linear Fredholm integro-differential equations // J. of Taibah University for Science. – 2017. – Vol. 11, № 2. – P. 344–352.

1122. *Yüzbaşi Ş., Karaçayir M.* A Galerkin-like approach to solve high-order integrodifferential equations with weakly singular kernel // Kuwait J. of Science. – 2016. – Vol. 43, № 2. – P. 106–120.

1123. *Zarebnia M., Nikpour Z.* Solution of linear Volterra integro-differential equations via Sinc functions // Intern. J. of Appl. Math. and Comput. – 2010. – Vol. 2, № 1. – P. 1–10.

1124. *Zeng Y., Zhu W.Q.* Stochastic averaging of quasi-linear systems driven by Poisson white noise // Probabilistic Engineering Mech. – 2010. – Vol. 25, № 1. – P. 99–107.

1125. *Zennaro M.* Natural continuous extensions of Runge–Kutta methods // Math.

of Comput. – 1986. – Vol. 46, № 173. – P. 119–133.

1126. *Zennaro M.* The numerical solution of delay differential equations // Lecture Notes: Dobbiaco Summer School on Delay Diff. Equations and Appl. – 2006. – 211 p.

1127. *Zhang C., Chen H.* Block boundary value methods for delay differential equations // ANM. – 2010. – Vol. 60, № 9. – P. 915-923.

1128. *Zhang C., Vandewalle S.* Stability analysis of Volterra delay-integro-differential equations and their backward differentiation time discretization // J. of Comput. and Appl. Math. – 2004. – Vol. 164–165, № 2. – P. 797–814.

1129. *Zhang C., Vandewalle S.* General linear methods for Volterra integro-differential equations with memory // SIAM J. on Scientific Computing. – 2006. – Vol. 27, № 6. – P. 2010–2031.

1130. *Zhang C.* A Class of new Pouzet–Runge–Kutta type methods for nonlinear functional integrodifferential equations // Abstract and Appl. Anal. – 2012. – Vol. 2012. – Article ID 642318. – 21 p.

1131. *Zhang G.* Stabilities of (A, B, C) and NPDIRK methods for systems of neutral delay-differential equations with multiple delays // J. of Comput. Math. – 2003. – Vol. 21, № 3. – P. 375–382.

1132. *Zhang H., Gan S., Hu L.* The split-step backward Euler method for linear stochastic delay differential equations // J. of Comput. and Appl. Maths. – 2009. – Vol. 225, № 2. – P. 558–568.

1133. *Zhang H., Feng G., Han C.* Linear estimation for random delay systems // Systems & Control Letters. – 2011. – Vol. 60, № 7. – P. 450–459.

1134. *Zhang Q., Zhang Ch.* A compact difference scheme combined with extrapolation techniques for solving a class of neutral delay parabolic differential equations // Appl. Math. Letters. – 2013. – Vol. 26, № 2. – P. 306–312.

1135. *Zhang Q., Zhang Ch.* A new linearized compact multisplitting scheme for the nonlinear convection reaction-diffusion equations with delay // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2013. – Vol. 18, № 12. – P. 3278–3288.

1136. *Zhang Q., Li D., Zhang Ch. et al.* Multistep finite difference schemes for the variable coefficient delay parabolic equations // J. of Difference Equations and Appl. – 2016. – Vol. 22, № 6. – P. 745–765.

1137. *Zhang Q., Mei M., Zhang Ch.* Higher-order linearized multistep finite difference methods for non-Fickian delay reaction–diffusion equations // Intern. J. of Numerical Anal. and Modeling. – 2017. – Vol. 14, № 1. – P. 1–19.

1138. *Zhang S., Lin Y., Rao M.* Numerical solutions for second-kind Volterra integral equations by Galerkin methods // Appl. of Math. – 2000. – Vol. 45, № 1. – P. 19–39.

1139. *Zhang W.* Numerical analysis of delay differential and integro-differential equations: A thesis. – St. John's, NL, Canada: Memorial University of Newfoundland, 1998. – viii, 138 p.

1140. *Zhang Zh., Suo Ya., Zhang J., Peng J.* A bacteria-immunity system with delayed quorum sensing // J. of Appl. Math. and Computing. – 2009. – Vol. 30, № 1–2. – P. 201–217.

1141. *Zhao J., Corless R.M.* Compact finite difference method for integro-differential equations // AMC. – 2006. – Vol. 177, № 1. – P. 271–288.

1142. *Zhu H.T., Er G.K., Iu V.P., Kou K.P.* Probabilistic solution of nonlinear oscillators excited by combined Gaussian and Poisson white noises // J. of Sound and Vibrations. – 2011. – Vol. 330, № 12. – P. 2900–2909.

1143. *Zhu X., Peng H.* T-Stability of the Heun method and balanced method for solving stochastic differential delay equations // J. of Appl. Math. – 2014. – Vol. 2014. – Article ID 545830. – 10 p.

1144. *Zibdeh H.S., Heller R.A.* Environmental thermal stress as a first passage problem // Random Vibration-Status and Recent Developments / I. Elishakoff, R.H. Lyon (eds.). – Amsterdam: Elsevier, 1986. – P. 537-553.

1145. *Ziemlańska M.* Method of lines for parabolic stochastic functional partial differential equations // Opuscula Mathematica. – 2014. – Vol. 34, № 2. – P. 443–456.

1146. *Zou X.* Delay induced traveling wave fronts in reaction diffusion equations of KPP–Fisher type // J. of Comput. and Appl. Math. – 2002. – Vol. 146, № 2. – P. 309–321.

1147. *Zubik-Kowal B.* Stability in the numerical solution of linear parabolic equations with a delay term // BIT Numerical Math. – 2001. – Vol. 41, № 1. – P. 191–206.

1148. *Zubik-Kowal B.* Delay partial differential equations // Scholarpedia. – 2008. – 3(4):2851. – URL: http://www.scholarpedia.org/article/Delay_partial_differential_equations (дата обращения 23.11.2019).

1149. *Zubik-Kowal B., Vandewalle S.* Waveform relaxation for functional-differential equations // SIAM J. on Scientific Computing. – 1999. – Vol. 21, № 1. – P. 207–226.

1150. *Zwillinger D.* Handbook of differential equations. – 2nd ed. – San Diego: Academic Press, 1992. – 808 p.

Примечание. Выше использованы следующие сокращения:

К.	Киев	Л.	Ленинград	Мн.	Минск
М.	Москва	СПб.	Санкт-Петербург		

АиТ	Автоматика и телемеханика
ВПУ-ИСТ	Вестник Пермского ун-та. Сер. Информационные системы и технологии
ВПУ-МИМ	Вестник Пермского ун-та. Математика. Информатика. Механика
ДУ	Дифференциальные уравнения
МТТ	Известия АН СССР/РАН. Механика твердого тела
ПММ	Прикладная математика и механика
ПМУД	Проблемы механики управляемого движения. Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Перм. ун-т
УМЖ	Украинский математический журнал
УМН	Успехи математических наук
AMC	Applied Mathematics and Computation
AMM	Applied Mathematical Modelling
ANM	Applied Numerical Mathematics
CNSNS	Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation
Comput.Math.Appl.	Computers and Mathematics with Applications

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Белый шум 246
– гауссовский 275
– дискретный 275
– интенсивность 275
– Коши 275
– нестационарный 275
– – огибающая 275
– пространственно-временно́й 306
– – вектор 306
– пуассоновский 275
– стандартный 275
Броуновский процесс 248
Броуновское движение
– геометрическое 248

Вектор полного перемещения 682
Вектор потока вероятности 296
Векторный случайный процесс
– автоковариационная функция 235
– вектор
– – математических ожиданий 235
– – средних 235
– – функций математического ожидания 235
– взаимная ковариационная функция 235
– – нормированная 236
– кросс-ковариационная функция 235
– матрица
– – дисперсий 235
– – ковариационных функций 235
– – ковариаций 235
– – функций дисперсии 235
– – функций ковариации 235
– плотность вероятности
– – переходная 235
– – условная
– – – (k,m)-го порядка 235
– – – (k,m)-точечная 235
– – s-го порядка 235
– – s-точечная 235
– функция распределения
– – s-го порядка 235
– – s-точечная 235
– характеристическая функция
– – s-го порядка 235
– – s-точечная 235
Вероятностное пространство
– полное 226
Винеровский процесс 246
– коэффициент диффузии 247
– пространственно-временно́й 306
– стандартный 247
Временно́й ряд 239
– период дискретизации 239
Выборочная функция 225
Вязкоупругость 685

Гауссовский случайный процесс 241
Гибридная система 6
– ДУ в частных производных 6
– ОДУ 6
Генератор полугруппы 255
Граница
– отражающая 296
– поглощающая 297

Дельта-функция Дирака 228
Деформации
– несовместные 683
– совместные 683
Деформация 681
Динамическая память 686
Дифференциально-разностное уравнение в ЧП 86, 93
Дифференциальное уравнение
– в частных производных
– – нейтрального типа 81
– – – эволюционное 81
– – с запаздыванием 81
– – – эволюционное 81
– – с отклоняющимися аргументами 81
– обыкновенное
– – нейтрального типа 17, 17
– – – задача Коши 20
– – с запаздыванием 16
– – – линейное 36

– – – – система
– – – – – характеристическое уравнение 39, 40
– – – – – характеристические корни 41
– – – – стационарное однородное 36
– – – – – характеристический квазиполином 37
– – – основная начальная задача 19
– – – – начальная точка 19
– – – – начальное множество 19
– – – – решение 19
– – – – – неосциллирующее 19
– – – – – нетривиальное осциллирующее 19
– – – – – – неустойчивое 44
– – – – – – устойчивое 44
– – – – – – – асимптотически 44
– – – – – – – – в целом 45
– – – – – – – – равномерно 44
– – – – – – – по показательному закону 44
– – с запаздывающим аргументом 16, 17
– – с опережающим аргументом 16, 17
– – с опережением 16
– – с отклоняющимися аргументами 16

Загрязнение 804
– каскад проточных водоемов 806
– показатели качества воды 805
– – BOD 805
– – DO 805
Закон Гука 684
Запаздывание 3

Интеграл в среднем квадратичном
– несобственный 267
– Римана 266
– Римана–Стилтьеса 270
– с переменным верхним пределом 267
– свертки 126
– сингулярный 123
Интегральное уравнение 115
– линейное 116
– – Вольтерры второго рода 124
– – – однородное 124
– – – резольвента ядра 125
– – Вольтерры первого рода 124
– – Вольтерры третьего рода 124
– – Вольтерры–Фредгольма 126
– – вырожденное 117
– – неоднородное 116
– – однородное 116
– – – значение параметра
– – – – правильное 118
– – – – собственное 118
– – – – характеристическое 118
– – – собственная функция 118
– – – решение
– – – – нулевое 118
– – – – тривиальное 118
– – решение 117
– – сингулярное 123
– – система 116
– – со слабой особенностью 122
– – составные части
– – – коэффициент 116
– – – параметр 116
– – – правая часть 116
– – – свободный член 116
– – – ядро 116
– – – – вырожденное 117
– – – – – свойства 117
– – – – симметричноем 120
– – – – условия 121
– – – – – свойства 121
– – – – эрмитово 120
– – типа свертки 126
– – Фредгольма первого рода 117
– – – собственные значения
– – – – уравнения 118
– – – – ядра 118
– – – собственными функциями
– – – – уравнения 118
– – – – ядра 118
– – Фредгольма второго рода 117
– – – минор Фредгольма 119
– – – определитель Фредгольма 119
– – – регулярное значение параметра 119
– – – резольвента 119
– нелинейное 116
– – Вольтерры 131
– – Гаммерштейна 130
– – Ляпунова–Лихтенштейна 130
– – Урысона 130
– – Э. Шмидта 130
Интегральный оператор Фредгольма 118

Интегро-дифференциальное уравнение 138
– обыкновенное 18, 138
– – линейное 139
– – – Вольтерры I рода 139
– – – Вольтерры II рода 139
– – – Вольтерры–Фредгольма II рода 139
– – – составные части
– – – – дифференциальный оператор
– – – – – внешний 138
– – – – – внутренний 138
– – – – правая часть 138
– – – – ядро 138
– – – Фредгольма I рода 139
– – – Фредгольма II рода 139
– – нелинейное 140
Инфинитезимальный оператор 255

Квазимоментная функция 232
Квазиупругость 687
Ковариационная функция 234
– взаимная 235, 273
– нормированная 234
– решетчатая 241
Коррелятор 231
Корреляционная теория 232
Корреляционная функция 234
Коэффициент
– диффузии 247, 281, 295
– дрейфа 295
– инфинитиземальный 299
– кинетический 299
– сноса 281, 295
Кумулянтная функция 232

Марковский случайный процесс 243, 244
– диффузионный 280, 292
– недиффузионный 300
– непрерывный 245, 279
– однородный во времени 246
– с непрерывными временем и состояниями
– – стационарная плотность вероятности 246
– r-го порядка 246
Марковское свойство 244
Мартингал 251
– с дискретным временем 252
Матрица диффузии 296
Метод
– асимптотический 52
– конечных разностей
– – неявная схема 92
– последовательного интегрирования 22
– последовательных приближений 50, 132
– прямых 91, 199
– – полудискретные системы 91
– – процесс полудискретизации 91
– разложения по степеням запаздывания 50
– Рунге–Кутты 54
– – непрерывный 56
– шагов 22
– Эйлера 53
Методы решения
– ДУвЧПсЗ 88
– ДУ со смешанными запаздываниями 191
– ИДУ вязкоупругости 702
– ИДУвЧП 167
– ИУ 134
– ОДУсЗ 57
– ОИДУ и ИДУвЧП 145
– СДУвЧПсЗ 334
– СИУ, СОИДУ и СИДУвЧП 335
– СОДУсЗ 328
Механическое напряжение 681
Микропрофиль 760
– дорога 766
– – асфальтовое шоссе
– – булыжное шоссе
– – грунтовая
– моделирование 764
Модель вязкоупругой среды
– Кельвина–Фойхта 690
– Максвелла 690
– Максвелла–Кельвина 692
– обобщенная Кельвина–Фойхта 691
– обобщенная Максвелла 691
– стандартная 691
– стандартная линейная 690
Моментная функция
– начальная 231
– центральная 231

Наследственность 686

Наследственный ответ 699
Начальная эластичность 699
Немарковский процесс 300
Неупругость 687

Оператор Фоккера–Планка–Колмогорова 295

Плотность вероятности
– начальная 296
– нормировка 229
– одноточечная 227
– первого порядка 227
– переходная 230, 235
– условная
– – $(s-m,m)$-го порядка 229, 235
– – $(s-m,m)$-точечная 229, 235
– s-го порядка 229, 235
– s-точечная 229, 235
Податливость 694
Ползучесть 685
Пополнение σ-алгебры 226
Последовательность случайных величин 237
– сходимость
– – в среднем квадратичном 256
– – в среднем порядка r 257
– – по вероятности 256
– – по распределению 256
– – почти всюду 256
– – почти наверное 256
– – с вероятностью единица 256
– – сильная 256
– – слабая 256
– – стохастический критерий Коши 258
– фундаментальная
– – по вероятности 257
– – с вероятностью единица 257
– – в среднем квадратичном 257
Предел последовательности случайных процессов 259
– стохастический критерий Коши 261
Предел случайного процесса 259
– стохастический критерий Коши 261
Принцип Вольтерры 687, 694
Программное обеспечение для решения различных ОДУсОА 57
Производная случайного процесса
– в точке 264
– на множестве 264
Производящая функция кумулянтов 232
Процесс
– восстановления 238
– Леви 253
– Орнштейна–Уленбека 291
– совершенно случайный 239
– Феллера 255
Пуассоновский процесс
– компенсированный 250
– – обобщенный 251
– неоднородный 250
– обобщенный 251
– простейший 248
– – интенсивность 248
– – скачок 249
– составной 251

Равновесный модуль 700
Разложение Леви–Ито 254
Реакция Белоусова–Жаботинского 99
Релаксация 685
Реономность 685
Решение системы СДУ (СОДУ) Ито 293
– единственность 294
Ряд Прони 692

Свертка двух функций 126
– стандартная 126
Система
– с переменной структурой 6
– с распределенными параметрами 681
Случайная последовательность 237
Случайная функция 225
– квазидетерминированная 227
– реализация 225
– регулярная 264
– сечение 225
– статистический ансамбль реализаций 225
– центрированная 234
– элементарная 227
Случайное блуждание 237
Случайное интегральное уравнение 319
– Вольтерры 320
– решение 320
– ядро 320
Случайное ОДУ 281

– решение в среднем квадратичном 282
Случайное ОИУ 282
Случайное поле 302
– (авто)ковариационная функция 304
– – анизотропная 306
– – изотропная 306
– – стационарная 305
– – эллипсоидальная 306
– дисперсия 304
– корреляционная теория 306
– математическое ожидание 304
– моменты
– – s-точечные начальные 306
– – s-точечные центральные 306
– плотность вероятности 303
– – $s \times M$-точечная 303
– полное задание 303
– реализация 302
– типы
– – гауссовское 304
– – изотропное 305
– – однородное в узком смысле 305
– – стационарное
– – – в узком смысле 305
– – – в широком смысле 305
– функция распределения 303
– характеристический функционал 303
Случайные процессы
– некоррелированные 236
– равные 259
– статистически независимые 236
– стационарно связанные
– – в узком смысле 241
– – в широком смысле 241
Случайный процесс 225
– совершенно 239
– адаптированный 227
– второго порядка 236, 259
– возможное значение 226
– гильбертов 259
– дифференцируемый в среднем квадратичном
– – в точке 264
– – на множестве 264
– интегрируемый 266
– непрерывный в среднем квадратичном
– – в точке 263
– – на множестве 263
– нестационарный 241
– – периодически 241
– порядок 228
– разложение
– – каноническое 236
– – Карунена–Лоэва 236
– – спектральное 236
– – частотное 236
– с дискретным временем 237
– с дискретными состояниями 238
– с независимыми значениями в несовпадающие моменты времени 239
– с независимыми приращениями 239
– – неоднородный 240
– – однородный 240
– с некоррелированными приращениями 239
– с непрерывным временем 238
– с непрерывными состояниями 238
– сепарабельный 240
– состояние 226
– стандартный 234
– стационарный
– – в узком смысле 240
– – в широком смысле 240
– – интервал корреляции 241
– – узкополосной 274
– – широкополосной 274
– стохастически непрерывный в точке 262
– точечный 237
Согласованность плотностей распределения 229
Спектральная плотность 271
– взаимная 273
– нормированная 272
Спектральная функция 271
Среда
– линейная вязкоупругая
– – изотропная 686
– – наследственного типа 685
– нелинейная 695
Стохастический интеграл
– Ито 286
– Стратоновича 289
Стохастическое дифференциально-разностное уравнение 309
– приближенное решение 330
– – глобальная погрешность 330
– – локальная погрешность 330
– – методы

– – – полудискетизации 332
– – – предиктор–корректор 332
– – – Эйлера–Маруямы 331
– система 313
– – решение
– – – единственное 313
– – – сильное 313
– – устойчивость 314
Стохастическое дифференциальное уравнение 13
– в частных производных 13
– – система 318
– – – решение 319
– интегро-дифференциальное уравнение 307
– – в частных производных 322
– – – резольвента 326
– – слабое решение 327
– нейтрального типа 307
– обыкновенное 13
– – в симметризованной форме 290
– – Ито 290
– – Стратоновича 290
– обыкновенное интегро-дифференциальное уравнение322
– обыкновенное функционально-дифференциальное уравнение 13
– с запаздыванием 307
– функционально-дифференциальное уравнение 9, 12, 307
– – в частных производных 13

Тело
– упругое 684
Тензор
– деформации 682
– – Коши–Грина 683
– диффузии 296
– модулей упругости 684
– напряжений 681
Теорема
– Колмогорова о непрерывности реализаций СП 263
– Рисса о представлении 689
Траектория 225
Тройка Леви–Хинчина 254
Турбулентная диффузия 805

Уравнение
– Бюргерса 96
– вибрации струны 196
– диффузионное 295
– для переходной плотности
– – обратное 295
– – прямое 295
– Икеда 29
– Кирхгофа 196
– Колмогорова
– – второе 295
– – обратное 297
– – первое 297
– – прямое 295
– Колмогорова–Феллера 197
– Ланжевена 284
– Маккея–Гласса 29
– Матье 218
– – обобщенное 794
– неразрывности 296
– Николсона84
– пантографа 29
– Понтрягина
– – второе 298
– – первое 298
– поперечных колебаний балки 196
– прямое кинетическое Р.Ф. Павулы 299, 301
– реакции–диффузии 83, 96, 197
– Смолуховского 245
– Фоккера–Планка 295
– Фоккера–Планка–Колмогорова 295
– Хейса 45
– Чэпмена–Колмогорова 245
– Шлесингера 196
– Эйнштейна–Фоккера 295
Условие Липшица 283

Феллеровская полугруппа 255
Фильтр
– формирующий 298
Фильтрация 227
– непрерывная слева 227
– удовлетворяющая обычным условиям 227
Формула
– Леви–Хинчина 254
– замены переменных
– – Ито 290
– – Стратоновича 291
Формулы Винера–Хинчина 271
ФПК–уравнение 295

– стационарное 297
Фредгольмово ядро 118
Функционал плотности вероятности 231
Функционально-дифференциальное уравнение
– обыкновенное
– – с последействием 18
Функция
– дисперсии 233
– единичная 228
– математического ожидания 232
– ползучести 694
– распределения
– – одноточечная 227
– – первого порядка 227
– – условная 243
– – s-го порядка 228, 235
– – s-точечная совместная 228, 235
– релаксации 694
– среднего квадратического отклонения 233
– Хевисайда 228

Характеристическая функция
– s-го порядка 230, 235
– s-точечную 230, 235
Характеристический функционал 231

Чувствительность 214
– вариация параметров 214
– движение
– – дополнительное 215
– – основное (базовое, номинальное, невозмущенное) 215
– параметрическая 214
– стохастическая 789
– – задачи 789
– функция чувствительности 214
– – первого и второго порядка 790

Шум 239
– аддитивный 292
– дробовой 276
– мультипликативный 292
– окрашенный 276
– тепловой 276
– цветной 276

Эффект памяти 686

Ядро релаксации
– сдвиговой 693
– объемной 693

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ . . . 3

Часть 1. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ . . . 16

1.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ . . . 16
1.1.1. Первичные определения . . . 16
1.1.2. Постановки начальных задач и свойства решений ДУсЗ . . . 19
1.1.3. Классические точные методы решения . . . 22
1.1.3.1. Метод шагов . . . 22
1.1.3.2. Использование преобразования Лапласа . . . 26
1.1.4. Уравнения первого порядка . . . 28
1.1.4.1. Примеры ОДУсОА . . . 28
1.1.4.2. Свойства решений ОДУсОА . . . 32
1.1.4.3. Теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши . . . 34
1.1.4.4. Линейные ОДУсЗ . . . 36
1.1.4.5. Системы линейных ОДУсОА . . . 38
1.1.4.6. Область устойчивости . . . 43
1.1.5. Уравнения нейтрального типа . . . 46
1.2. УРАВНЕНИЯ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ . . . 50
1.2.1. Приближенные методы для ОДУсОА . . . 50
1.2.2. Системы ОДУ с одним постоянным запаздыванием . . . 58
1.2.3. Системы ОДУ с кратными постоянными запаздываниями . . . 62
1.2.4. Системы ОДУ нейтрального типа с кратными постоянными запаздываниями . . . 67
1.2.5. Системы ОДУ с переменными временны́ми запаздываниями . . . 75
1.2.6. Системы ОДУ с кусочно-постоянными временны́ми запаздываниями . . . 77
1.2.7. Дифференциальные уравнения в частных производных с последействием . . . 79
1.2.8. (Эволюционные) Дифференциально-разностные уравнения в частных производных . . . 85
1.2.9. Приближенные методы для ДУвЧПсОА . . . 88
1.2.10. Схема расширения пространства состояний для ДУвЧПсЗ . . . 92
1.2.11. Схема расширения пространства состояний для ДУвЧПНТ . . . 99
1.2.12. Схема расширения пространства состояний для ДУв ЧПсЗ и ДУвЧПНТ с кратными запаздываниями . . . 108
1.3. УРАВНЕНИЯ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ОТКЛОНЕНИЯМИ АРГУМЕНТОВ . . . 114
1.3.1. Интегральные уравнения . . . 114
1.3.2. Интегро-дифференциальные уравнения . . . 138

1.3.3. Основные методы интегрирования ОИДУ . . . 145
1.3.4. Метод последовательного дифференцирования матриц Грина для систем линейных ОИДУ . . . 152
1.3.5. Метод интегрального расширения пространства состояний для систем ОИДУ . . . 158
1.3.6. Метод последовательного дифференцирования для систем ОИДУ . . . 161
1.3.7. Приближенные методы для систем ИДУвЧП типа Вольтерры . . . 165
1.3.7.1. Метод прямых . . . 169
1.3.7.2. Расширение пространства состояний (частный нелинейный случай) . . . 173
1.3.7.3. Расширение пространства состояний (общий линейный случай) . . . 178
1.4. УРАВНЕНИЯ СО СМЕШАННЫМИ ФОРМАМИ ОТКЛОНЯЮЩИХСЯ АРГУМЕНТОВ . . . 187
1.4.1. Приближенные методы решения систем ОДУ с различными формами запаздывания . . . 187
1.4.2. Системы ОДУ с дискретными постоянными и непрерывными конечными распределенными временны́ми запаздываниями . . . 191
1.4.3. ИДУ Фредгольма (по пространству) в частных производных с временны́м постоянным запаздыванием . . . 195
1.5. ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ . . . 206
1.5.1. Интегральное расширение пространства состояний в задачах анализа детерминированных вязкоупругих систем . . . 206
1.5.2. Чувствительность нелинейных систем с запаздыванием к изменению параметров . . . 212
Часть 2. СТОХАСТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ . . . 224
2.1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АППАРАТ . . . 225
2.1.1. Основы прикладной теории случайных процессов . . . 225
2.1.1.1. Случайные функции и их характеристики . . . 225
2.1.1.2. Классификация случайных процессов . . . 237
2.1.1.3. Формы и типы случайных процессов . . . 239
2.1.1.4. Сходимость в среднем квадратичном . . . 256
2.1.1.5. Непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость случайных процессов . . . 262
2.1.1.6. Спектральный анализ стационарных случайных процессов . . . 270
2.1.1.7. Марковские процессы с непрерывным временем и непрерывным множеством состояний . . . 279
2.1.1.8. Стохастические интегралы и стохастические дифференциальные уравнения . . . 281
2.1.1.9. Прямое и обратное уравнения Колмогорова . . . 294
2.1.1.10. Недиффузионные и немарковские процессы . . . 299

2.1.1.11. Случайные поля 302
2.1.2. Стохастические функционально-дифференциальные уравнения . . 307
2.2. УРАВНЕНИЯ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ 328
2.2.1. Основные методы исследования 328
2.2.2. Комбинация метода шагов и расширения пространства состояний для анализа стохастических систем с непрерывными возмущениями 337
2.2.2.1. Системы СОДУ с одним постоянным запаздыванием 338
2.2.2.2. Системы СОДУ с кратными постоянными запаздываниями 355
2.2.2.3. Системы СОДУ нейтрального типа с одним постоянным запаздыванием 368
2.2.2.4. Расчет старших моментов решения линейных СОДУ с запаздыванием и аддитивно-мультипликативными флуктуациями 377
2.2.2.5. Системы СОДУ нейтрального типа с кратными постоянными запаздываниями 389
2.2.2.6. Системы линейных параметрических СОДУ с кратными запаздываниями 398
2.2.2.7. Системы СОДУ с переменными временны́ми запаздываниями 410
2.2.2.8. Линейные СОДУ с кусочно-постоянными временны́ми запаздываниями 417
2.2.2.9. Сочетание схемы МШРПС с процедурой линеаризации при анализе систем нелинейных СОДУ с постоянными запаздываниями 427
2.2.2.10. Сочетание схемы МШРПС с методом Монте-Карло 436
2.2.2.11. Линейные СДУвЧП с постоянным временны́м запаздыванием 443
2.2.2.12. Колебания в линейной стохастической гиперболической системе с кратными запаздываниями 449
2.2.3. Комбинация метода шагов и расширения пространства состояний для анализа стохастических систем с непрерывными и дискретными возмущениями 461
2.2.3.1. Анализ модификаций модели Блэка–Шоулза 466
2.2.3.2. Системы с постоянными запаздываниями и дискретно-непрерывными возмущениями 476
2.2.3.3. Системы с кратными постоянными запаздываниями и дискретно-непрерывными возмущениями 481
2.2.4. Схема расчета ковариационных функций векторов состояния нестационарных систем линейных СОДУ с запаздыванием 489
2.2.5. Алгоритмы вычисления ковариационных функций векторов состояния нестационарных систем линейных параметрических СОДУ с запаздыванием 497

2.2.6. Системы со случайными запаздываниями 506
2.2.6.1. Системы с запаздываниями в форме положительных случайных величин 516
2.2.6.2. Системы с запаздываниями в форме дискретных цепей Маркова 528
2.2.6.3. Численное моделирование динамических систем со случайными запаздываниями 541
2.2.7. Расчет характеристик стационарных режимов 548
2.2.7.1. Отдельные линейные СОДУ с запаздыванием 550
2.2.7.2. Линейные системы с многими запаздываниями 556
2.2.7.3. Линейные системы СОДУ нейтрального типа 563
2.2.7.4. Линейное СДУвЧП гиперболического типа с запаздыванием 576
2.2.7.5. Линейное СДУвЧП параболического типа с запаздыванием 583
2.3. УРАВНЕНИЯ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ 593
2.3.1. Уравнения для первых моментов компонент вектора состояния системы линейных СОИДУ 593
2.3.2. Проблема редукции СОИДУ к СОДУ 597
2.3.3. Применение функций Грина для приближённого анализа систем линейных СОИДУ 603
2.3.4. Модификация итерационной схемы вычисления матричной функции Грина 607
2.3.5. Расчет первых моментов линейных интегро-дифференциальных систем с параметрическими возмущениями 613
2.3.6. Численно-аналитическая схема применения матричной функции Грина для анализа линейных СОДУ 620
2.3.7. Анализ линейных интегро-дифференциальных систем с неограниченными запаздываниями 634
2.4. УРАВНЕНИЯ СО СМЕШАННЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ 643
2.4.1. Анализ линейных стохастических систем с конечными распределенными и сосредоточенными запаздываниями 643
2.4.2. Анализ линейных систем с неограниченными распределенными и конечными сосредоточенными запаздываниями 650
2.4.3. Расчет моментных функций решения системы линейных параметрических СОДУ нейтрального типа 657
2.4.4. Анализ линейных СОДУ с конечными распределенными и сосредоточенными запаздываниями и случайными входами в виде аддитивных и мультипликативных белых шумов 665
2.5. ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ АНАЛИЗА СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ 681
2.5.1. Вязкоупругие системы и их анализ 681
2.5.1.1. Основные понятия 681
2.5.1.2. Расчет случайных линейных продольных колебаний вяз-

коупругой балки ... 704
2.5.1.3. Расчет случайных линейных поперечных колебаний вязкоупругой балки ... 716
2.5.1.4. Анализ линейных термовязкоупругих систем со случайными параметрами и нестационарными флуктуациями на входе ... 730
2.5.2. Моделирование движения автомобиля по дороге со случайным микропрофилем ... 760
2.5.2.1. Перемещение с постоянной скоростью ... 762
2.5.2.2. Движение с переменной скоростью ... 774
2.5.2.3. Расчеты с применением метода статистического моделирования ... 781
2.5.3. Чувствительность линейных стохастических дифференциально-разностных систем к изменению детерминированных параметров ... 789
2.5.4. Моделирование динамики загрязнения бассейна реки ... 804
ПРИЛОЖЕНИЯ ... 813
П.1. Список сокращений и обозначений ... 813
П.2. ОДУ для моментальных функций вектора состояния для общей линейной параметрической стохастической системы ... 818
П.3. Сводка форм стохастических уравненийс запаздыванием ... 820
П.3.1. Стохастические обыкновенные дифференциальные уравнения ... 821
П.3.2. Стохастические обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными запаздываниями ... 823
П.3.3. Стохастические обыкновенные дифференциальные уравнения нейтрального типа с постоянными запаздываниями ... 825
П.3.4. Стохастические обыкновенные интегро-дифференциальные уравнения ... 826
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК ... 829
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ ... 888

Научное издание

Полосков Игорь Егорович

Методы анализа систем с запаздыванием

Монография

Издается в авторской редакции
Техническая подготовка и обработка материалов:
И.Е. Полосков

Объем данных 19 Мб
Подписано к использованию 27.08.2020.

Размещено в открытом доступе
на сайте www.psu.ru
в разделе НАУКА / Электронные публикации
и в электронной мультимедийной библиотеке ELiS

Издательский центр
Пермского государственного
национального исследовательского университета
614990, Пермь, ул. Букирева, 15