ПЕРМСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

И. Е. Полосков

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Курс лекций и практикум

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
"Perm University Press"

Пермь 2020

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

И. Е. Полосков

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Курс лекций и практикум

*Допущено методическим советом
Пермского государственного национального
исследовательского университета в качестве
учебного пособия для студентов, обучающихся
по направлениям подготовки бакалавров
«Прикладная математика и информатика»
и «Информационные системы и технологии»*

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
"Perm University Press"

Пермь 2020

УДК 517.9
ББК 22.161.6
П525

Полосков И. Е.

П525 Обыкновенные дифференциальные уравнения. Курс лекций и практикум [Электронный ресурс] : учебное пособие / И. Е. Полосков ; Пермский государственный национальный исследовательский университет. – Электронные данные. – Пермь, 2020. – 1,92 Мб ; 226 с. – Режим доступа: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/uchebnie-posobiya/poloskov-obyknovennye-differencialnye-uravneniya.pdf. – Заглавие с экрана.

ISBN 978-5-7944-3532-0

В курсе лекций изложены основы теории дифференциальных уравнений, представлены как классические аспекты этой теории, так и некоторые прикладные вопросы.

Содержание курса соответствует стандарту обучения студентов по направлениям подготовки бакалавров «Прикладная математика и информатика» и «Информационные системы и технологии».

Кроме теоретического материала пособие содержит примеры решения задач и может быть полезно для студентов и магистрантов других направлений и специальностей, которые изучают дисциплины, соответствующие тематике данного курса или примыкающие к ней, а также базирующиеся на нем.

УДК 517.9
ББК 22.161.6

Издается по решению ученого совета механико-математического факультета Пермского государственного национального исследовательского университета

Рецензенты: кафедра высшей математики НИУ ВШЭ – Пермь (зав. кафедрой, канд. физ.-мат. наук, профессор ***А. П. Иванов***);

доцент кафедры «Прикладная физика» Пермского национального исследовательского политехнического университета, канд. физ.-мат. наук ***А. Н. Шарифулин***

ISBN 978-5-7944-3532-0

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория дифференциальных уравнений (ДУ) является одним из основных разделов современной прикладной математики. Чтобы охарактеризовать ее место в современной науке, необходимо подчеркнуть некоторые важные черты теории ДУ, состоящей из двух обширных разделов: теории обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и теории дифференциальных уравнений с частными производными (ДУвЧП).

Прежде всего необходимо отметить непосредственную связь теории ДУ с приложениями [23], исходя из того, что математика дает метод проникновения в неизведанное, а именно возможность формирования и изучения математических моделей в естествознании, экономике, финансах, технике, технологии и др. При изучении какого-либо явления на начальном этапе анализа исследователь создает его математическую идеализацию в форме математической модели, в которой он использует основные законы, управляющие этим явлением, и пренебрегает второстепенными характеристиками явления. Нередко эти законы выражаются в виде ДУ. Такими оказываются модели различных явлений и в области экономики.

Исследуя построенные ДУ вместе с дополнительными условиями, которые, как правило, задаются в виде начальных и граничных условий, специалист в области прикладной математики получает сведения о явлении, что дает возможность узнать его прошлое и будущее. Изучение математической модели математическими методами позволяет не только получить качественные характеристики явлений различной природы, но и рассчитать с заданной степенью точности ход реального процесса, что обеспечивает проникновение в суть рассматриваемых явлений, а иногда открывает дорогу к предсказанию новых неизвестных эффектов. При этом критерием правильности выбора математической модели в любой области деятельности служит практика, сопоставление данных математического исследования с экспериментальными данными.

Курс "Обыкновенные дифференциальные уравнения" является основой математической подготовки студентов специальности "Прикладная математика и информатика" и "Информационные системы и технологии", соответствует специальным требованиям к их профессиональной знаниям и обеспечивает подготовку студентов бакалавриата по одной из фундаментальных математических дисциплин, обеспечивающей мощный аппарат исследования многих задач естествознания, техники, экономики, общества и др. Теоретический аппарат дисциплины имеет многочисленные приложения и является одним из фундаментов будущей практической и научной деятельности специалиста. ОДУ являются одним из основных математических инструментов, наиболее широко применяемых при решении практических задач.

Основная цель преподавания дисциплины "Обыкновенные дифференциальные уравнения" – формирование у будущих специалистов современных теоретических знаний в области ОДУ и практических навыков решения и исследования основных типов ОЛУ, ознакомление с прикладными задачами, при построении математических моделей которых используются различные ОДУ.

Задачи дисциплины:

– формирование понимания значимости математической составляющей в естественнонаучном образовании специалиста;

– ознакомление с основными понятиями теории ОДУ, методами качественного исследования и решения уравнений и систем уравнений;

– выработка навыков математического моделирования прикладных задач с помощью ДУ и содержательной интерпретации полученных количественных результатов их решения.

Дисциплина "Обыкновенные дифференциальные уравнения" относится к циклу ЕН.Ф.1 "Цикл общих математических и естественнонаучных дисциплин. Федеральный компонент".

Для изучения и усвоения студентами курса "Обыкновенные дифференциальные уравнения" необходимо твердое знание базового курса математики средней школы, курсов линейной алгебры, аналитической геометрии и математического анализа.

Цель издания – помочь студентам в формировании их математического мышления, в выработке навыков решения и исследования обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), описывающих различные процессы в естествознании, экономике, гуманитарных науках и технике, а также помочь в овладении основами теории ДУ, позволяющими осознанно применять полученные знания в процессе обучения и работы, но и по мере необходимости углублять и расширять их путем самообразования.

Разделы математики, связанные с изучением теории ОДУ, как правило, изучаются студентами различных направлений специальностей в различное время и в различном объеме и являются составными частями общего математического цикла. Значение такой теории очевидно: во-первых, это неотъемлемая часть современного университетского образования; во-вторых, в профессиональной деятельности ученого и специалиста (естественника, экономиста и гуманитария) не обойтись без моделей в форме ДУ. Таким образом, студент должен ознакомиться с основными постановками задач, приводящими к ДУ, их различными , а также приобрести базовые навыки по точному и приближенному решению ОДУ различных типов. Это непростая задача, которая характеризуется сложностью распознавания типа конкретного уравнения, может быть решена только в результате кропотливого труда.

Существует большое число образцов учебной литературы по теории ДУ; значительный перечень их приводится в конце пособия. Однако представляется целесообразным дать студентам систематическое и цельное изложение курса, которое,по своему объему было бы достаточным для усвоения основ теории ДУ и служило теоретической базой для практических занятий, с другой стороны, ориентировало бы студентов в выборе книг для самостоятельного углубления и расширения своих знаний. Вместе с тем свободный, самостоятельный выбор можно только приветствовать.

В настоящем пособии изложены основы теории и методов решения ОДУ, даны основные понятия теории разностных уравнений, представлено введение в теорию устойчивости и приведены примеры прикладных задач. Кроме того, представлены решения значительного числа типовых задач, связанных с ДУ, предложены примеры для аудиторных и самостоятельных работ.

Добавление в текст пособия короткой справки по применению пакетов Axiom, Mathematica, Maple, Maxima и Matlab для решения ОДУ продиктовано тем, что, по нашему мнению, знание по крайней мере одного компьютерного пакета символьных выкладок (пакета компьютерной алгебры, системы аналитических вычислений, САВ) необходимо для современного студента – будущего специалиста и исследователя. Что касается теории ДУ такое добавление связано и с тем, что ряд еще недавно чисто теоретических методов решения этих уравнений с появлением САВ приобрел практическое значение.

Содержание пособия полностью отвечает программе курса ОДУ для студентов направлений "Прикладная математика и информатика" и "Информационные системы и технологии" . Учебное пособие может быть полезным студентам и других направлений и специальностей обучения, а также преподавателям, читающим лекции и проводящим практические занятия по соответствующим разделам курса.

Структура издания достаточно подробно отображена в оглавлении. При ссылке на отдельные части пособия используются термины "раздел", "подраздел", "пункт", "подпункт". Ссылки на формулы даются как (X.Y), где X – номер раздела, Y – номер формулы по порядку в разделе. Символы ◀ и ▶ указывают на начало и конец решения примера или доказательства теоремы.

В связи с тем, что учебные программы разделов математики, связанных с изучением теории обыкновенных дифференциальных уравнений, для студентов разных направлений и специальностей существенно различаются, в пособии отдельные структурные единицы, имеющие повышенную сложность или выходящие за пределы действующих в настоящее время нормативных документов, но важные для понимания современных задач теории ОДУ, отмечены звездочкой (*).

1. ВВЕДЕНИЕ

Многие прикладные задачи естественных, экономических, технических, гуманитарных и других наук приводят к необходимости решения различных уравнений и/или их систем, в которых неизвестными являются функции одной или нескольких независимых переменных. Такие уравнения и системы называются *функциональными* [24].

Функциональные уравнения условно можно разделить на классы:

1) чисто функциональные уравнения;

2) дифференциальные уравнения (обыкновенные, в частных производных);

3) интегральные уравнения (с одной и несколькими независимыми переменными);

4) интегро-дифференциальные уравнения (обыкновенные, в частных производных).

Системы функциональных уравнений могут состоять из уравнений различных классов. Такие системы называются *смешанными* или *гибридными*.

Определение 1.1. *Дифференциальным уравнением* (ДУ) называется зависимость, связывающая неизвестные функции, их аргументы и производные от неизвестных функций по этим аргументам (или дифференциалы неизвестных функций).

Из этой зависимости необходимо найти одну или несколько неизвестных функций.

Определение 1.2. Операция нахождения неизвестных функций из ДУ называется их *решением* или *интегрированием*.

Определение 1.3. Дифференциальные уравнения называются *обыкновенными*, если неизвестные функции зависят от одного аргумента, и уравнениями *в частных производных*, если неизвестные функции зависят от нескольких аргументов (двух или более), т.е. эти уравнения связывают независимые переменные x_1, x_2, ..., x_n, неизвестные функции u_1, u_2, ..., u_m этих переменных и их частные производные по тем же переменным до k-го порядка включительно.

Определение 1.4. *Интегральными уравнениями* (ИУ) называют функциональные уравнения, в которых неизвестная функция находится под знаком определенного интеграла. ИУ называются *обыкновенными*, если неизвестные функции зависят от одного аргумента, и уравнениями *в* *частных производных*, если неизвестные функции зависят от нескольких аргументов (двух или более).

Определение 1.5. К *интегро-дифференциальным уравнениям* (ИДУ) относят такие функциональные уравнения, в которых неизвестная функция и ее производные присутствуют как под знаком интеграла, так и под знаком дифференциала или производной. ИДУ называются *обыкновенными*, если неизвестные функции зависят от одного аргумента, и уравнениями *в частных производных*, если неизвестные функции зависят от нескольких аргументов (двух или более).

Пример 1.1. Уравнение $y'' + \sin y = 0$ – обыкновенное дифференциальное (нелинейное, второго порядка);

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} = a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (a > 0)$$

– уравнение в частных производных (Бюргерса);

$$y(x) + \int_a^x K(x,\tau)\,y(\tau)\,d\tau = f(x)$$

– (обыкновенное) интегральное уравнение (Вольтерры второго рода);

$$y'(x) + k(x)\,y(x) + \int_a^x K(x,\tau)\,y(\tau)\,d\tau = f(x)$$

– (обыкновенное) интегро-дифференциальное уравнение. ►

Замечание. Курс посвящен только обыкновенным дифференциальные уравнениям. Поэтому далее, если это не приводит к недоразумениям, они называются просто "дифференциальными уравнениями".

1.1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

Начнем с чисто математической задачи.

1°. Задача о кривой. Найти кривую, любая касательная к которой пересекает ось абсцисс в точке с абсциссой, которой вдвое меньше абсциссы точки касания.

◄ Запишем уравнение кривой в виде $y = y(x)$. Касательная в точке $M(x, y)$ пересекает ось абсцисс в точке K. В прямоугольном треугольнике MPK (рис. 1.1) известен катет $PM = y$ и $\operatorname{tg}\alpha = y'$ (из геометрического

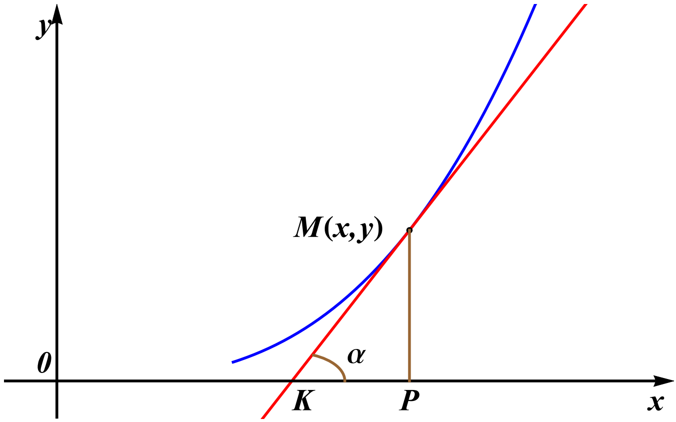

Рис. 1.1

смысла производной). Поэтому $KP = PM/\operatorname{tg}\alpha = y/y'$. По условию $KP = OK = OP/2$, т.е. $y/y' = x/2$, или $y'/y = 2/x$.

Решить это уравнение можно так:

$$\frac{dy}{y} = \frac{2\,dx}{x} \Longrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2\,dx}{x} + \ln|\mathcal{C}| \Longrightarrow \ln|y| = 2\,\ln|x| + \ln|\mathcal{C}|.$$

Выражая y из последнего равенства, получим решение уравнения в виде: $y = \mathcal{C}\,x^2$, где $\mathcal{C}$ – произвольная постоянная. Если $\mathcal{C} = 0$, то $y = 0$ – уравнение прямой, но она не является решением задачи. Поэтому искомые кривые $y = \mathcal{C}\,x^2$ $(\mathcal{C} \neq 0)$ – параболы. ►

2°. Задача о радиоактивном распаде. Имеется m_0 граммов радиоактивного вещества, период полураспада которого (время, за которое распадется ровно половина вещества) – T лет. Найти зависимость количества нераспавшегося вещества от времени t.

◄ Опытным путем установлен следующий закон радиоактивного распада: количество вещества, распавшегося за малый промежуток времени Δt, приближенно прямо пропорционально длительности этого промежутка и наличному количеству нераспавшегося вещества.

Таким образом, обозначая наличное количество вещества в момент времени t через m, количество вещества, распавшегося за промежуток времени Δt (от момента времени t до момента времени $t+\Delta t$), через Δm, имеем в соответствии с законом радиоактивного распада

$$\Delta m = -k\,m\,\Delta t, \tag{1.1}$$

где k – постоянный коэффициент пропорциональности. Вследствие того что с увеличением t масса m убывает ($\Delta m < 0$), k положительно.

Уравнение (1.1) описывает процесс радиоактивного распада лишь приближенно и тем точнее, чем меньше Δt. Поэтому для получения точного уравнения, описывающего процесс, делим левую и правую части этого уравнения на Δt и переходим к пределу при $\Delta t \to 0$. Вследствие того что

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{dm}{dt},$$

т.е. в случае существования предел равен скорости радиоактивного распада, приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{dm}{dt} = -k\,m. \tag{1.2}$$

Это достаточное простое уравнение, и из него нетрудно найти неизвестную функцию $m(t)$.

Для ее отыскания разделим обе части уравнения (1.2) на m и умножим на dt:

$$\frac{dm}{m} = -k\,dt. \tag{1.3}$$

В левой части получен дифференциал функции, зависящей только от m $(d\,[\ln m])$, в правой – дифференциал функции, зависящей только от t $(\,d\,[-k\,t]\,)$. Хотя m и является функцией от t, но в силу свойства инвариантности формы дифференциала из равенства дифференциалов функций заключаем, что сами функции должны отличаться друг от друга только на постоянное слагаемое. Иными словами, каждую из обеих частей уравнения (1.3) можно интегрировать по своему аргументу, добавляя в одну из частей равенства произвольную постоянную (которую в данном случае удобно записать в виде $\ln \mathcal{C}$, $\mathcal{C} > 0$):

$$\int \frac{dm}{m} = -\int k\,dt + \ln \mathcal{C},$$

или

$$\ln m = -k\,t + \ln \mathcal{C}.$$

Потенцируя, находим m:

$$m = \mathcal{C}\,e^{-kt}. \tag{1.4}$$

Постоянную $\mathcal{C}$ можно определить из условия, что в начальный момент времени было m_0 граммов вещества. Будем считать, что начальному моменту соответствует значение $t = 0$. Тогда полагая $t = 0$, $m = m_0$ в равенстве (1.4), найдем, что $\mathcal{C} = m_0$, а величину массы m запишем так:

$$m = m_0\, e^{-kt}. \tag{1.5}$$

Коэффициент k можно выразить через период полураспада T: из условий задачи следует, что при $t = T$ верно равенство $m(T) = m_0/2$, поэтому

$$\frac{m_0}{2} = m_0\, e^{-kt},$$

откуда находим (при $m_0 > 0$), что $k = \ln 2/T$.

Таким образом, окончательно процесс радиоактивного распада описывается следующим законом зависимости количества нераспавшегося радиоактивного вещества от времени:

$$m = m_0 \exp\Big(-\frac{t}{T}\ln 2\Big). \qquad \blacktriangleright$$

На этом простом примере показано, как обычно получают дифференциальные уравнения и как их решают. Во всех случаях при выводе дифференциального уравнения в науке и технике берется за основу некоторый общий физический или иной закон, имеющий дифференциальный характер (*дифференциальный закон*), т.е. соотношение, связывающее бесконечно малые изменения рассматриваемых величин.

Идея дифференциальных уравнений как раз и состоит в том, что при рассмотрении бесконечно малых изменений данных величин можно ограничиться их главными частями, пренебрегая бесконечно малыми высших порядков. После интегрирования уравнения получается *интегральный закон*, связывающий конечные значения этих величин,

3°. Текучесть рабочей силы. Одним из показателей текучести рабочей силы может служить отношение числа выбывших за год рабочих к их среднегодовому числу. Пусть коэффициент текучести равен μ. Это значит, что за бесконечно малый промежуток времени, в течение которого число рабочих y не успевает "заметно" измениться, убывает их число, пропорциональное этому числу y и величине интервала времени Δt с коэффициентом пропорциональности μ.

Поскольку речь идет об убывании, то, как и в предыдущем примере, имеем равенство

$$\Delta y = -\mu\, y\, \Delta t. \tag{1.6}$$

Проводя те же операции, что и выше, получим дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dt} = -\mu\, y,$$

из которого также можно найти функцию y:

$$y = y_0\, e^{-\mu t}. \qquad \blacktriangleright$$

Заметим, что модели процессов из различных областей знания нередко описываются одинаковыми дифференциальными уравнениями. При этом математика, как и во многих других случаях, абстрагируясь от сути конкретных задач, дает методы, позволяющие находить решения этих задач.

4°. Передача знаний. Пусть имеется совокупность из N студентов, которым нужно сообщить способ решения какой-либо задачи. Пусть часть их – x $(0 < x < N)$ – уже знает этот способ. Всякий раз, когда кто-нибудь из знающих встречается с кем-нибудь из остальных, он ему сообщает этот способ. Число таких встреч (и передач знаний) можно считать пропорциональным, с одной стороны, числу уже знающих данный способ x, с другой стороны – числу еще не знающих его $N - x$ и длительности промежутка времени Δt. Таким образом

$$\Delta x = k\, x\, (N - x)\, \Delta t.$$

Деля обе части этого равенства на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dx}{dt} = k\, x\, (N - x).$$

Если умножить обе части уравнения на dt, а затем их разделить на $x\,(N - x)$, то получим

$$\frac{dx}{x\,(N - x)} = k\, dt.$$

Проинтегрируем обе части последнего равенства. При этом справа получим $k\,t + \mathcal{C}$, а слева –

$$\int \frac{dx}{x\,(N - x)} = \frac{1}{N} \int \Big(\frac{1}{x} + \frac{1}{N - x}\Big)\, dx = \frac{1}{N}\, \ln \frac{x}{N - x}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{N}\,\ln\frac{x}{N-x} = k\,t + \mathcal{C},$$

или

$$\frac{x}{N-x} = \exp\big(k\,N\,t + \mathcal{C}\,N\big).$$

Разрешая это уравнение относительно x и обозначая $k\,N$ через a, а $e^{\mathcal{C}\,N}$ – через A, получим

$$x = N\,\frac{A\,e^{at}}{A\,e^{at}+1} = \frac{N}{1+p\,e^{-at}}, \tag{1.7}$$

где $p = 1/A$.

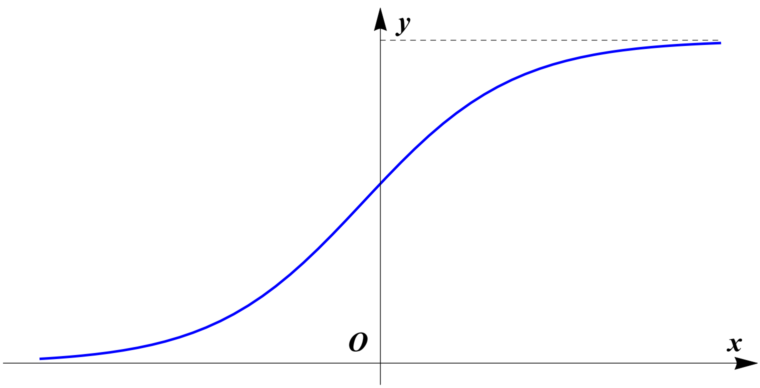

Рис. 1.2

Уравнение (1.7) в экономической литературе называют уравнением "логистической" кривой. Ее вид изображен на рис. 1.2. ▶

Решение задач геометрического, естественнонаучного и экономического характера, предполагающих составление дифференциальных уравнений, нередко вызывает затруднения. Это объясняется тем, что специфика конкретных естественно-научных или экономических задач требует знания разнообразных законов соответствующей предметной области, и тем, что нельзя дать универсального метода составления дифференциальных уравнений, пригодного во всех случаях. Однако можно предложить некоторые общие рекомендации практического характера.

При составлении дифференциальных уравнений первого порядка из условий задач из указанных областей часто приходят к одному из следующих трех видов уравнений: 1) ДУ в дифференциалах; 2) ДУ в производных; 3) простейшим ИУ с последующим преобразованием их в ДУ.

Рассмотрим, как составляются уравнения каждого из перечисленных видов.

1°. Уравнения в дифференциалах. Этот так называемый дифференциальный метод заключается в том, что из условий задачи составляется приближенным путем соотношение между дифференциалами. При этом делаются допущения, упрощающие задачу и вместе с тем не отражающиеся на результатах. Например, бесконечно малые приращения величин заменяются их дифференциалами, неравномерно протекающие в течение малого промежутка времени процессы рассматриваются как равномерные, изменяющиеся с постоянной скоростью. Эти допущения не отражаются на правильности результатов вследствие того, что замена приращений дифференциалами сводится к отбрасыванию бесконечно малых высших порядков. Так как отношение дифференциала функции к дифференциалу аргумента является пределом отношения их приращений, то, по мере того как приращения стремятся к нулю, наши допущения выполняются все с большей точностью. Поэтому получающиеся ДУ оказываются точными.

2°. Уравнения в производных. Во многих случаях можно составить ДУ, куда вместо дифференциалов входят производные, рассматриваемые как скорости изменения величин. При этом, в частности, используется геометрический смысл производной (угловой коэффициент касательной) и механический смысл производной (скорость протекания неравномерного процесса). Этот метод является видоизменением дифференциального метода, отсутствие в нем бесконечно малых только кажущееся: в рассматриваемом методе используется готовое понятие скорости изменения величины, которое само появилось из анализа бесконечно малых величин.

3°. Простейшие интегральные уравнения. ИУ, в частности, возникают, когда используется геометрический смысл определенного интеграла как площади криволинейной трапеции или применяются другие интегральные формулы (длина дуги, площадь поверхности вращения, объем тела и т.д.). В простейших случаях путем дифференцирования удается преобразовать ИУ в ДУ.

Для того чтобы построить ОДУ, которому удовлетворяют кривые семейства

$$F(x, y, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, ..., \mathcal{C}_n) = 0, \tag{1.8}$$

необходимо продифференцировать равенство (1.8) n раз, считая y функцией от x, а затем из полученных уравнений и уравнения (1.8) исключить произвольные постоянные.

Пример 1.2. Построить дифференциальные уравнения семейства кривых $y = \cos(x + \mathcal{C})$.

◀ Переписывать уравнение семейства в виде (1.8) не требуется. Продифференцируем исходное уравнение один раз по x: $y' = -\sin(x + \mathcal{C})$. Теперь возведем обе части обоих уравнений в квадрат и сложим, в результате чего получим искомое ОДУ: $y'^2 + y^2 = 1$. ▶

1.2. Основные определения

Наиболее *общим видом* обыкновенного дифференциального уравнения с одной неизвестной функцией будет следующий:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0, \tag{1.9}$$

или

$$F(x, y, dy, d^2y, ..., d^ny) = 0. \tag{1.10}$$

При этом будем считать, что функция F определена при $x \in (x_*, x^*)$.

Замечание. Часто, особенно в прикладных исследованиях, производные по независимой переменной t (интерпретируемой как время) обозначаются так: $y'_t = \dot{y}$, $y''_{tt} = \ddot{y}$ и т.д.

Определение 1.6. Порядок старшей входящей в уравнение производной (или дифференциала) неизвестной функции называется *порядком* этого уравнения.

Таким образом, уравнения (1.9) и (1.10) – n-го порядка; уравнения, рассмотренные в примерах предыдущего подраздела, – первого порядка. Конечно, при этом функция F не обязана зависеть от всех выписанных величин; так в уравнение второго порядка

$$y'' + y = 0$$

не входят первая производная и независимая переменная.

Определение 1.7. Дифференциальное уравнение (1.9) называется *линейным*, если это уравнение может быть записано в следующем виде:

$$a_0(x)\,y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y = f(x), \tag{1.11}$$

где его *левая часть* – многочлен первой степени относительно неизвестной функции y и ее производных y, y', y'', ..., $y^{(n)}$, а $f(x)$, *правая часть*, или *свободный член* уравнения, – постоянная, линейная или нелинейная функция только независимой переменной x. Функции $a_0(x)$, $a_1(x)$, ..., $a_n(x)$, обычно определенные и непрерывные на некотором общем интервале, называются *коэффициентами линейного уравнения*. Если правая часть линейного уравнения тождественно равна нулю, то уравнение называется *однородным*, в противном случае – *неоднородным*.

Определение 1.8. Всякая функция, которая определена на интервале (x_*, x^*) и при подстановке в уравнение на место неизвестной функции обращает это уравнение в тождество при любом $x \in (x_*, x^*)$, называется *решением* этого уравнения.

Пример 1.3. Функция $y = \sin x$ является решением уравнения второго порядка

$$y'' + y = 0, \tag{1.12}$$

что можно проверить непосредственной подстановкой. ▶

Заметим, что основная задача интегрального исчисления – отыскание функции y, производная которой равна данной непрерывной функции, – сводится к решению простейшего дифференциального уравнения $y' = f(x)$.

Рассмотренные в подразделе 1.2 примеры показывают, что даже простейшие ОДУ первого порядка имеют не одно, а бесконечное множество решений. Это является следствием того, что в выражения для искомых функций входят произвольные постоянные $\mathcal{C}$, которым можно придать любое числовое значение. Тем более это верно для уравнений более высоких порядков: *если дифференциальное уравнение имеет хотя бы одно решение, то решений у него будет бесконечное множество.*

Пример 1.4. Для уравнения $y'' + y = 0$ решениями будут и всевозможные функции вида $y = \mathcal{C}\,\sin x$, где $\mathcal{C}$ – произвольная постоянная. ▶

Обычно, когда задается дифференциальное уравнение, ставится задача отыскания <u>всех</u> его решений.

С общей же точки зрения, главная задача теории дифференциальных уравнений состоит в:

1) установлении того, имеют ли эти уравнения решения;

2) описании всех решений;

3) определении условий, при которых уравнения однозначно разрешимы.

Но, когда решается какая-либо конкретная задача, приводящая к дифференциальному уравнению, чаще всего на искомую функцию накладываются некоторые дополнительные условия, которым эта функция должна удовлетворять при заданном значении аргумента. Такие условия называют *начальными условиями*. Если условия заданы при нескольких значениях аргумента, то имеем *краевую задачу*.

Определение 1.9. Конкретное решение уравнения, удовлетворяющее заданным условиям (начальным или краевым), называют *частным решением* этого уравнения.

Определение 1.10. Совокупность всех частных решений уравнения, выраженных явно относительно неизвестной функции, называется *общим решением* этого уравнения.

Для уравнений n-го порядка общее решение должно содержать n независимых произвольных постоянных, т.е. иметь вид

$$y = \varphi(x, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, ..., \mathcal{C}_n) \tag{1.13}$$

(так как чаще всего оно находится в результате n последовательных интегрирований).

Независимость произвольных постоянных означает, что ни одну из них нельзя выразить через другие или через меньшее число новых и тем самым уменьшить их число.

Пример 1.5. Общим решением дифференциального уравнения (1.12) будет функция

$$y = \mathcal{C}_1 \cos x + \mathcal{C}_2 \sin x. \qquad \blacktriangleright$$

Определение 1.11. Решение уравнения в неявной форме

$$\Phi(x, y, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, ..., \mathcal{C}_n) = 0 \tag{1.14}$$

называется *общим интегралом*.

Пример 1.6. Общим интегралом дифференциального уравнения

$$y'' + y = 0$$

будет соотношение

$$y - \mathcal{C}_1 \cos x - \mathcal{C}_2 \sin x = 0. \qquad \blacktriangleright$$

Частное решение можно получить, если придать каждой произвольной постоянной $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, ..., $\mathcal{C}_n$ конкретнее числовое значение.

Определение 1.12. График каждого частного решения называется *интегральной кривой.*

Уравнение такой кривой – это уравнения (1.13) и (1.14) при конкретных $\mathcal{C}_i$, $i = 1, 2, ..., n$.

Пример 1.7. $y_* = \cos x$ – частное решение уравнения $y'' + y = 0$. Здесь $\mathcal{C}_1 = 1$, $\mathcal{C}_2 = 0$. ▶

Для уравнений n-го порядка начальные условия чаще всего задаются так: требуется найти такое решение уравнения (1.9) (или (1.10)), которое при заданном значении аргумента x принимает вместе со своими производными до $(n-1)$-го порядка включительно наперед заданные значения:

$$y = y_0, \quad y' = y_0', \quad ... \quad y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \quad \text{при } x = x_0. \tag{1.15}$$

Определение 1.13. Задача отыскания решений уравнения, удовлетворяющих начальным условиям вида (1.15), носит название *задачи Коши.*

Вследствие того что общее решение (1.10) содержит n произвольных постоянных, наложенных n соотношений (1.15) как раз достаточно (во всяком случае принципиально) для вычисления этих постоянных и тем самым для определения частного решения.

Определение 1.14. *Решить дифференциальное уравнение* – это значит:

а) найти его общее решение или общий интеграл (если начальные условия не заданы);

б) найти то частное решение уравнения, которое удовлетворяет начальным условиям (если таковые имеются).

Пример 1.8. Как можно получить частное решение, показано при решении задачи о радиоактивном распаде. ▶

1.3. Упражнения

Аудиторное занятие

1°. Проверить, являются ли решениями заданных дифференциальных уравнений следующие функции ($\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ – произвольные постоянные):

01. $y\,y' = x,\ y = \sqrt{x^2 + \mathcal{C}}$.

02. $y'' + 2\,p\,y' + (p^2 + q^2)\,y = 0,$
$y = e^{-px}\left(\mathcal{C}_1\,\cos q\,x + \mathcal{C}_2\,\sin q\,x\right)$.

03. $x\,y' = y\ \mathrm{tg}(\ln y),\ y = e^{\arcsin x}$.

04. $y' = \dfrac{y}{x\,(\ln x - \ln y)},\ x = y\,e^{\mathcal{C}y+1}$.

2°. Составить обыкновенное дифференциальное уравнение всех прямых на плоскости XOY.

3°. Составить дифференциальное уравнение всех окружностей на плоскости XOY.

Внеаудиторное занятие

1°. Проверить, являются ли решениями заданных дифференциальных уравнений следующие функции ($\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ – произвольные постоянные):

01. $y^2 - x^2 - 2\,x\,y\,y' = 0,$
$x^2 + y^2 - 2\,\mathcal{C}\,x = 0$.

02. $y'' - 2\,y' + y = 0,\ y = e^x\,(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2\,x)$.

03. $y'' = x^2 + y^2,\ y = 1/x$.

04. $(x + y)\,dx + x\,dy = 0,\ y = \dfrac{\mathcal{C}^2 - x^2}{2\,x}$.

2°. Составить дифференциальное уравнение семейства окружностей $x^2 + y^2 = 2\,\mathcal{C}\,x$. Изобразить окружности для значений $\mathcal{C} = \pm 1$, $\mathcal{C} = \pm 2$. Построить интегральные кривые, проходящие через точки $A(3,0)$, $B(-1/2, 1/2)$.

3°. Составить уравнение семейства окружностей, которые касаются оси OX и центр которых лежит на прямой $y = x$. Построить дифференциальное уравнение этого семейства.

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

2.1. Определения и структура

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет следующий вид:

$$F(x, y, y') = 0. \tag{2.1}$$

В простейших случаях это уравнение можно представить так:

$$y' = f(x, y). \tag{2.2}$$

В этих случаях говорят, что *дифференциальное уравнение разрешено относительно производной.*

Как правило, предполагается, что функция $F(x, y, z)$ задана в некоторой области $\mathscr{A}$ трехмерного пространства и непрерывна в ней вместе со своими частными производными F'_y и F'_z.

Определение 2.1. *Решением* дифференциального уравнения (2.1) называется любая действительная непрерывно дифференцируемая функцию $y = y(x)$, заданная на некотором интервале (a, b) и удовлетворяющая этому уравнению.

При этом каждое решение имеет, вообще говоря, свой интервал, где оно задано.

Определение 2.2. *Степенью* дифференциального уравнения, алгебраического относительно старшей производной, называется степень этой старшей производной после того, как уравнение освобождено от дробей и корней.

Определение 2.3. Два алгебраических уравнения

$$F_1(x, y, z) = 0, \qquad F_2(x, y, z) = 0 \tag{2.3}$$

называются *эквивалентными* на области $\mathscr{A}$ точек $(, y, z)$, если из того, что точка $(, y, z) \in \mathscr{A}$ удовлетворяет одному из этих уравнений, следует, что она удовлетворяет и другому.

Определение 2.4. Соответственно два дифференциальных уравнения

$$F_1(x, y, y') = 0, \qquad F_2(x, y, y') = 0 \tag{2.4}$$

называются *эквивалентными* в области $\mathscr{A}$, если эквивалентны в $\mathscr{A}$ алгебраические уравнения (2.4).

Таким образом, в этом случае решение $y(x)$, $x \in (a, b)$, $\big(x, y(x), y'(x)\big) \in \mathscr{A}$, одного из дифференциальных уравнений автоматически есть решение другого. Обычно эквивалентные на области $\mathscr{A}$ дифференциальные уравнения считаются одним и тем же уравнением.

При преобразовании дифференциального уравнения надо следить, чтобы получаемое дифференциальное уравнение было эквивалентным (в $\mathscr{A}$) прежнему. Или по крайней мере надо фиксировать, какие из решений могут исчезнуть или добавиться при преобразованиях.

Определение 2.5. Точка $P_0(x_0, y_0) \in \mathscr{A}$ называется *точкой единственности* ОДУ (2.2), если существует такая ε-окрестность $\boldsymbol{\mathcal{S}}(P_0, \varepsilon) \subset \mathscr{A}$ этой точки, что внутри $\boldsymbol{\mathcal{S}}(P_0, \varepsilon)$ через точку P_0 проходит одна и только одна интегральная кривая ОДУ (2.2).

Определение 2.6. Область $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$, сплошь состоящую из точек единственности ОДУ (2.2), называется *областью единственности* уравнения (2.2).

Отсюда следует, что два любых решения ОДУ (2.2) из области $\mathscr{B}$, совпадающие в некоторой точке, совпадают всюду в области $\mathscr{B}$.

Определение 2.7. Точка $P_0(x_0, y_0)$ называется *точкой неединственности* ОДУ (2.2), если в любой окрестности этой точки через нее проходит более одной интегральной кривой ОДУ (2.2).

Определение 2.8. Задача решения уравнения (2.2) вместе с начальным условием

$$y\big|_{x=x_0} = y_0 \quad \text{или} \quad y(x_0) = y_0, \tag{2.5}$$

где x_0 и y_0 – заданные величины, называется *задачей Коши*, а само решение – *решением задачи Коши*.

Определение 2.9. Говорят, что задача Коши (2.2), (2.5) имеет *единственное решение*, если существует такое $h > 0$, что в интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$ определена функция $y = \varphi(x)$, являющаяся решением задачи (2.2), (2.5), и не существует ни одного решения, которое было бы определено на интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$ и не совпадало бы с решением $y = \varphi(x)$ хотя бы в одной точке этого интервала, отличной от точки x_0.

Справедлива следующая теорема:

Теорема 2.1 (Пеано). Пусть в уравнении (2.2) функция $f(y,x)$ непрерывна по совокупности переменных в некоторой области $\mathscr{D} = \{(x,y) \mid |x-x_0| \leqslant a, |y-y_0| \leqslant b\} \subset \mathbb{R}^2$, содержащей точку (x_0, y_0), а M – максимум $|f(t,x)|$ в этой области. Если $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$, то на отрезке $[x_0 - h, x_0 + h]$ существует по крайней мере одно решение уравнения (2.2), удовлетворяющее начальному условию (2.5).

Определение 2.10. Говорят, что функция $f(x,y)$ удовлетворяет *условию Липшица* по y в области $\mathscr{D} = \{(x,y) \mid |x-x_0| \leqslant a, |y-y_0| \leqslant b\} \subset \mathbb{R}^2$, если существует такое положительное число L, что для всех (x, y_1), $(x, y_2) \in \mathscr{D}$ выполняется неравенство

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leqslant L\,|y_1 - y_2|. \tag{2.6}$$

Теорема 2.2 (Пикара). Пусть дано дифференциальное уравнение (2.2) с начальным условием (2.5). Пусть функция $f(y,x)$, непрерывная функция двух переменных в замкнутой области $\mathscr{D} = \{(x,y) \mid |x-x_0| \leqslant a, |y-y_0| \leqslant b\} \subset \mathbb{R}^2$, причем $|f(t,x)| \leqslant M$ в этой области, удовлетворяет условию Липшица (2.6). Тогда существует единственное решение $y = \varphi(x)$ уравнения (2.2), удовлетворяющее начальному условию (2.5), определенное и непрерывное для всех значений x из отрезка $[x_0 - h, x_0 + h]$, где $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$.

◀ Доказательство теоремы см. в подразделе 2.7. ▶

Замечание. Теорема Пикара носит локальный характер, т.е. утверждается существование и единственность решения только в некоторой окрестности точки x_0 и дает лишь достаточные условия существования и единственности, которые можно усилить, заменив условие Липшица тем, что производная $f'_y(x,y)$, определенная в области $\mathscr{D}$, непрерывна в ней.

Геометрический смысл теоремы заключается в том, что существует и притом единственная функция $y = \varphi(x)$, график которой проходит через точку (x_0, y_0).

Из этой теоремы следует, что уравнение (2.2) имеет бесконечное число различных решений, в частности, одно из них проходит через точку (x_0, y_0). Как отмечено выше, задача решения уравнения (2.2) вместе с начальным условием (2.5) называется задачей Коши. Поэтому сформулированная теорема указывает условия существования и единственности решения задачи Коши.

Определение 2.11. *Общим решением* дифференциального уравнения первого порядка называется явная функция $y = \varphi(x, \mathcal{C})$, которая зависит от одной произвольной постоянной $\mathcal{C}$ и удовлетворяет следующим условиям:

а) она обращает уравнение (2.2) при любом конкретном значении $\mathcal{C}$ в тождество;

б) каково бы ни было начальное условие: $y = y_0$ при $x = x_0$, можно найти такое значение $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0$, что $y_0 = \varphi(x_0, \mathcal{C}_0)$. При этом предполагается, что значения x_0 и y_0 принадлежат к той области изменения переменных x и y, в которой выполняются условия теоремы существования и единственности решения.

В процессе разыскания общего решения уравнения (2.2) нередко можно прийти к соотношению вида

$$\Phi(x, y, \mathcal{C}) = 0. \tag{2.7}$$

Разрешив такое соотношение относительно y, получим общее решение. Однако выразить y из равенства (2.7) не всегда удается; в таких случаях общее решение оставляется в неявном виде, а равенство (2.7) называется *общим интегралом* дифференциального уравнения первого порядка.

Определение 2.12. *Частным решением* уравнения первого порядка называется любая функция $y = \varphi(x, \mathcal{C}_0)$, которая получается из общего решения $y = \varphi(x, \mathcal{C})$, если в последнем произвольной постоянной $\mathcal{C}$ придать определенное значение $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0$. Соотношение $\Phi(x, y, \mathcal{C}_0) = 0$ называется в этом случае *частным интегралом* уравнения.

Пример 2.1. Для уравнения $y' = -y/x$ общим решением будет семейство функций $y = \mathcal{C}/x$. Найдем частное решение, проходящее через точку $P_0(2, 1)$. Подставив в общее решение значения $y = 1$ и $x = 2$, получим, что $\mathcal{C} = 2$. Следовательно, искомое частное решение будет $y = 2/x$. ▶

С геометрической точки зрения общий интеграл представляет собой семейство кривых на плоскости. Это семейство зависит от одной постоянной $\mathcal{C}$ (или от одного *параметра* $\mathcal{C}$) и состоит из интегральных кривых уравнения первого порядка (рис. 2.1). Частному интегралу соответствует одна кривая этого семейства, проходящая через некоторую заданную точку плоскости.

В рассмотренном примере общий интеграл геометрически изображается семейством гипербол $y = \mathcal{C}/x$, а частный, определенный выбранным начальным условием, – одной из этих гипербол.

В некоторых случаях уравнение (2.2) можно записать в *симметричном* относительно x и y виде

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0, \tag{2.8}$$

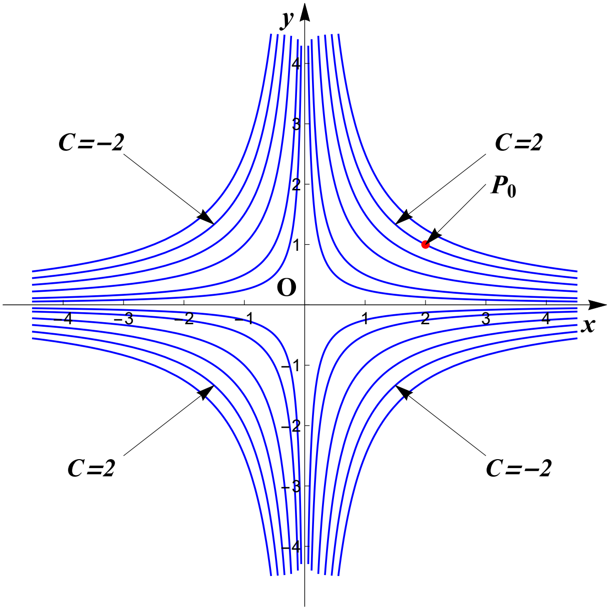

Рис. 2.1

где $M(x, y)$ и $N(x, y)$ – известные функции. Форма (2.8) удобна тем, что в ней переменные x и y равноправны, т.е. каждую из них можно рассматривать как функцию другой. Под решением уравнения (2.8) в общем случае понимается функция $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, заданная параметрически (t – параметр) и удовлетворяющая уравнению (2.8).

Определение 2.13. Решение $y = y(x)$ ОДУ (2.2), определенное на промежутке $[a, b]$, *продолжаемо вправо* (*влево*), если существует решение $y = y_1(x)$ этого уравнения, определенное на промежутке $[a, b]$, $b_1 > b$ ($[a_1, b]$, $a_1 < a$), сужение которого на $[a, b]$ совпадает с $y(x)$. Решение $y = y_1(x)$ ОДУ (2.2) называется в этом случае *продолжением решения* $y = y(x)$ *вправо* (*влево*).

Определение 2.14. Решение $y = y(x)$ ОДУ (2.2) называется *полным*, если оно не продолжаемо ни вправо, ни влево.

Областью определения полного решения всегда является открытый интервал, называемый *максимальным интервалом существования решения* ОДУ (2.2).

2.2. Геометрическая интерпретация

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y), \tag{2.9}$$

разрешенное относительно производной, и пусть функция $y = \varphi(x, \mathcal{C})$ есть общее решение этого уравнения. Это общее решение определяет семейство кривых на плоскости OXY.

Уравнение (2.9) для каждой точки P с координатами x и y определяет значение производной dy/dx, т.е. угловой коэффициент касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку. Таким образом, уравнение (2.9) дает совокупность направлений или, как говорят, определяет *поле направлений* на плоскости OXY.

Следовательно, с геометрической точки зрения задача интегрирования уравнения (2.9) заключается в *нахождении кривых, направление касательных к которым совпадает с направлением поля в соответствующих точках.*

Определение 2.15. Для уравнения (2.9) геометрическое место точек, в которых выполняется соотношение $dy/dx = \mathcal{C}$, называется *изоклиной* данного уравнения.

При различных $\mathcal{C}$ получаем различные изоклины. Уравнение изоклины, соответствующее значению $\mathcal{C}$, будет, очевидно, $f(x, y) = \mathcal{C}$. Построив семейство изоклин, можно приближенно построить семейство интегральных кривых. Говорят, что, зная изоклины, можно *качественно* определить поведение интегральных кривых на плоскости.

Пример 2.2. На рис. 2.2 изображено поле направлений, определяемое дифференциальным уравнением $y' = -y/x$ $(x \neq 0)$. Изоклинами данного уравнения являются функции вида $-y/x = \mathcal{C}$, или $y = -\mathcal{C}\,x$. ▶

Уравнение $f(x, y) = 0$ определяет линии, на которых могут располагаться точки максимума и минимума интегральных кривых. Геометрическое место точек перегиба таких кривых уравнения (2.9), если они существуют, определяется уравнением

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + f(x, y)\,\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0. \tag{2.10}$$

Точки пересечения двух и более изоклин являются *особыми точками* ОДУ (2.9), так как в них направления интегральных кривых становятся неопределенными.

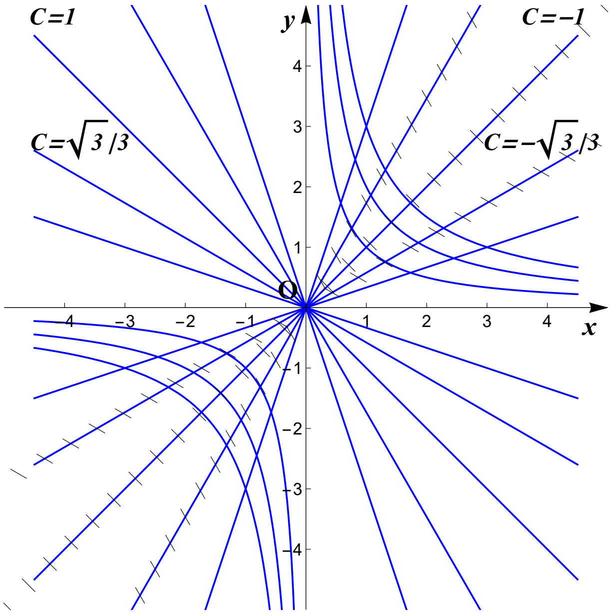

Рис. 2.2

Не существует общего метода интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка. Обычно рассматриваются лишь некоторые отдельные типы таких уравнений, для каждого из которых дается свой собственный особый метод решения.

2.3. Особые точки и особые решения

Теорема Пикара гарантирует существование единственной интегральной кривой уравнения $y' = f(x, y)$, проходящей через точку $P_0(x_0, y_0)$, если в окрестности этой точки выполнены условия теоремы: а) непрерывность $f(x, y)$; б) существование и ограниченность $f'_y(x, y)$. Нарушение хотя бы одного из этих условий может привести к тому, что либо не будет существовать ни одной интегральной кривой уравнения, проходящей через точку $P_0(x_0, y_0)$, либо таких кривых будет не одна (в частности, их может быть бесконечное множество).

Если нарушение условий теоремы Пикара имеет место в отдельных изолированных точках, то такие точки называются *особыми точками* дифференциальных уравнений. Поведение интегральных кривых вблизи особых точек может быть различным.

Если же условия теоремы Коши не удовлетворяются вдоль целого геометрического места точек, то это геометрическое место может само оказаться интегральной кривой данного уравнения; такую интегральную кривую называют *особой*, а соответствующее ей решение – *особым решением.* Точное определение особого решения следующее.

Определение 2.16. Решение дифференциального уравнения первого порядка называется *особым*, если через каждую точку изображающей его интегральной кривой проходит по крайней мере еще одна интегральная кривая того же уравнения, имеющая в этой точке ту же касательную.

Особое решение уравнения, как правило, в общем решении не содержится, иными словами, оно не может быть получено из общего решения ни при каком частном значении произвольной постоянной $\mathcal{C}$.

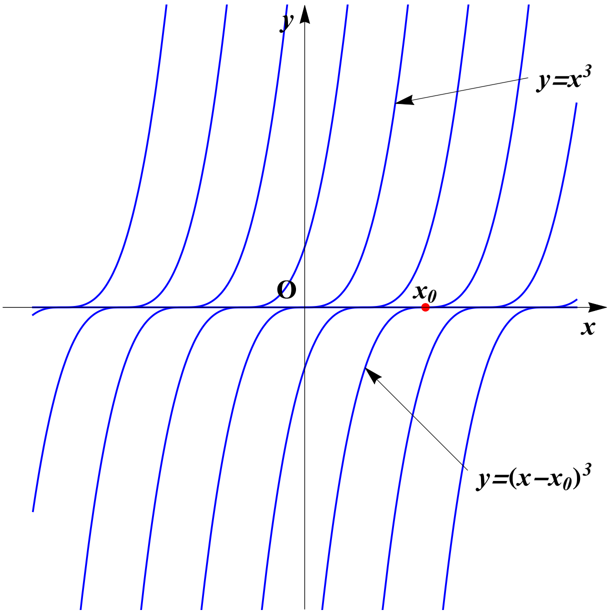

Рис. 2.3

Пример 2.3. Уравнение $y' = 3\,y^{2/3}$ имеет общим решением функцию $y = (x + \mathcal{C})^3$ (рис. 2.3). Это можно проверить непосредственной подстановкой в дифференциальное уравнение.

Условия теоремы Пикара нарушены на прямой $y = 0$ (оси OX), поскольку в точках этой прямой обращается в бесконечность производная от правой части уравнения по y:

$$\left(3\,y^{2/3}\right)'_y\Big|_{y=0} = \frac{2}{\sqrt[3]{y}}\Big|_{y=0} = \infty.$$

Легко видеть, что прямая $y = 0$ является интегральной кривой исходного уравнения и притом особой интегральной кривой. В самом деле, через любую точку $P_0(x_0, 0)$ этой прямой проходит входящая в общее решение кривая $y = (x - x_0)^3$, касательной к которой в этой точке служит сама ось OX. Заметим, что из общего решения $y = (x + \mathcal{C})^3$ прямую $y = 0$ ни при каком постоянном $\mathcal{C}$ не получить. ►

2.4. Интегрирование простейших типов дифференциальных уравнений первого порядка

2.4.1. Уравнения с разделяющимися переменными

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)\, f_2(y), \tag{2.11}$$

где правая часть есть произведение функции, зависящей только от x, на функцию, зависящую только от y. Предполагая, что $f_2(y) \neq 0$, преобразуем его следующим образом:

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)\, dx. \tag{2.12}$$

Считая y известной функцией x, равенство (2.12) можно рассматривать как равенство двух дифференциалов, а неопределенные интегралы от них будут отличаться постоянными слагаемыми. Интегрируя левую часть по y, а правую – по x, получим

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)\, dx + \mathcal{C}. \tag{2.13}$$

Мы пришли к соотношению, связывающему неизвестную функцию y, независимую переменную x и произвольную постоянную $\mathcal{C}$, а значит построили общий интеграл уравнения (2.11).

Рассмотрим некоторые формы уравнений типа (2.11).

1°. Дифференциальное уравнение типа (2.12)

$$M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0 \tag{2.14}$$

называется *уравнением с разделёнными переменными*. Его общий интеграл есть

$$\int M(x)\,dx + \int N(y)\,dy = \mathcal{C}.$$

2°. Уравнение вида

$$M_1(x)\,N_1(y)\,dx + M_2(x)\,N_2(y)\,dy = 0 \tag{2.15}$$

называется *уравнением с разделяющимися переменными*. Оно может быть приведено, если $N_1(y) \neq 0$ и $M_2(x) \neq 0$, к уравнению с разделенными переменными путем деления обеих его частей на выражение $N_1(y) \cdot M_2(x)$:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}\,dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}\,dy = 0,$$

т.е. к уравнению вида (2.14), откуда

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}\,dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}\,dy = \mathcal{C}.$$

т.е. общий интеграл уравнения (2.15) получен.

3°. Простейшим *уравнением с разделёнными переменными* является уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x),$$

или

$$dy = f(x)\,dx.$$

Его общий интеграл имеет вид

$$y - \int f(x)\,dx = \mathcal{C}$$

и дает решение основной задачи интегрального исчисления – определения первообразной.

4°. Уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(a\,x + b\,y + c), \qquad b \neq 0,$$

введением новой неизвестной функции $z(x) = a\,x + b\,y(x) + c$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Если в уравнении (2.11) функция $f_2(y)$ имеет действительный корень y_0, т.е. если $f_2(y_0) = 0$, то функция $y(x) = y_0$ является решением уравнения (в чем легко убедиться непосредственной подстановкой). При делении обеих частей этого уравнения на $f_2(y)$ (в процессе разделения переменных) решение $y(x) = y_0$ может быть потеряно.

Аналогично при интегрировании уравнения (2.15) могут быть потеряны интегральные кривые $x(y) = x_0$ и $y(x) = y_0$, где x_0 – действительный корень уравнения $M_2(x) = 0$, а y_0 – действительный корень уравнения $N_1(y) = 0$.

Поэтому, получив по изложенным выше процедурам разделения переменных общий интеграл уравнения, необходимо проверить, входит ли в его состав (при подходящих числовых значениях параметра $\mathcal{C}$) упомянутые частные решения. Если входят, то потери решений нет. Если не входят, то их следует включить в состав интеграла.

Пример 2.4. Решить уравнение $y' = y \cdot \operatorname{tg} x$, имеющее вид (2.11).

◀ Разделяя переменные (считаем, что $y \neq 0$):

$$\frac{dy}{y} = \operatorname{tg} x\, dx$$

и интегрируя:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \operatorname{tg} x\, dx + \ln|\mathcal{C}|$$

(такая форма произвольной постоянной выбрана для удобства потенцирования далее, причем $-\infty < \mathcal{C} < +\infty$, но пока $\mathcal{C} \neq 0$), получим

$$\ln|y| = \ln|\mathcal{C}| - \ln|\cos x|,$$

откуда следует соотношение для общего решения:

$$y = \frac{\mathcal{C}}{\cos x}.$$

Заметим теперь,что исходное уравнение имеет еще решение $y = 0$, которое не входит в общее решение ни при каком $\mathcal{C} \neq 0$. Если теперь ввести постоянную $\mathcal{C}_0$, которая может принимать любые значения от $-\infty$ до $+\infty$, то решение $y = 0$ войдет в состав общего решения $y = \mathcal{C}_0/\cos x$. ▶

Пример 2.5. Общий интеграл уравнения

$$x\,dx + y\,dy = 0$$

имеет вид

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \mathcal{C}$$

(при $\mathcal{C} \geqslant 0$ это уравнение семейства окружностей радиуса $\sqrt{\mathcal{C}}$ с центром в начале координат). ▶

Пример 2.6. Решить уравнение

$$(1+x)\,y\,dx + x\,(1-y)\,dy = 0.$$

◀ Разделяя переменные, находим

$$\frac{1+x}{x}\,dx + \frac{1-y}{y}\,dy = 0 \quad \Big|\ y \neq 0,\ x \neq 0,$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{x}+1\right)dx + \left(\frac{1}{y}-1\right)dy = 0 \Rightarrow \int\left(\frac{1}{x}+1\right)dx + \int\left(\frac{1}{y}-1\right)dy = \mathcal{C} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ln|x| + x + \ln|y| - y = \mathcal{C},$$

или

$$\ln|x\,y| + x - y = \mathcal{C},$$

т.е. получен общий интеграл.

Далее, прямые $x = 0$ ($dx = 0$ при $x = \text{const}$), $x = -1$, $y = 0$ и $y = 1$ – интегральные кривые исходного уравнения, причем ни при одном значении $\mathcal{C}$ из общего интеграла они не могут быть получены. Поэтому эти прямые нужно включить в полное семейство интегральных кривых данного уравнения как графики особых решений. ▶

Пример 2.7. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} x\,\sin^2 y\,dx + \cos^2 x\,\operatorname{ctg} y\,dy = 0.$$

◀ Разделяя переменные, находим

$$\operatorname{tg} x \sin^2 y\, dx + \cos^2 x \operatorname{ctg} y\, dy = 0, \quad \Big|\ \sin^2 y \neq 0,\ \cos^2 x \neq 0,$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} x \frac{dx}{\cos^2 x} + \operatorname{ctg} y \frac{dy}{\sin^2 y} = 0 \Rightarrow \int \operatorname{tg} x \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \operatorname{ctg} y \frac{dy}{\sin^2 y} = \mathcal{C} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \operatorname{tg} x\, d(\operatorname{tg} x) - \int \operatorname{ctg} y\, d(\operatorname{ctg} y) = \mathcal{C} \Rightarrow \frac{1}{2} \operatorname{tg} x - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} y = \mathcal{C},$$

т.е. получен общий интеграл.

Далее, прямые $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ ($\cos^2 x = 0$, $dx = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k = \mathrm{const}$), $y = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ ($\sin^2 y = 0$, $dy = 0$ при $y = \pi k = \mathrm{const}$) не являются интегральными кривыми исходного уравнения, так как при этих x и y уравнение не определено. ▶

Пример 2.8. Решить задачу Коши:

$$(1 + e^{2x})\, y^2\, y' = e^x, \qquad y(0) = \sqrt[3]{\pi}.$$

◀ Сразу же заметим, что при разделении переменных ни одного решения потеряно не будет. Итак, находим, что

$$y^2\, dy = \frac{e^x\, dx}{1 + e^{2x}},$$

откуда следует, что

$$\frac{y^3}{3} = \int \frac{e^x\, dx}{1 + e^{2x}} = \int \frac{d(e^x)}{1 + e^{2x}} = \operatorname{arctg}\left(e^x\right) + \mathcal{C},$$

или

$$y = \sqrt[3]{3\left[\operatorname{arctg}\left(e^x\right) + \mathcal{C}\right]} = \sqrt[3]{3 \operatorname{arctg}\left(e^x\right) + \mathcal{C}_0}$$

– общее решение.

Выделим частное решение, проходящее через точку $(0, \sqrt[3]{\pi})$:

$$\sqrt[3]{\pi} = \sqrt[3]{3 \operatorname{arctg} 1 + \mathcal{C}_0} = \sqrt[3]{3\pi/4 + \mathcal{C}_0},$$

откуда следует, что $\mathcal{C}_0 = \pi/4$. Итак, получим частное решение

$$y_* = \sqrt[3]{3 \operatorname{arctg}\left(e^x\right) + \pi/4}. \qquad ▶$$

Пример 2.9. Решить уравнение

$$y' = \cos(x+y). \tag{2.16}$$

◀ Вводим новую неизвестную функцию $z = x + y$. Отсюда $y = z - x$ и $y' = z' - 1$. При этом рассматриваемое уравнение принимает вид

$$z' = \cos z + 1. \tag{2.17}$$

Разделяя переменные, с учетом того, что $\cos z + 1 \neq 0$, последнее уравнение приводим к следующей форме:

$$\frac{dz}{\cos z + 1} = dx, \quad \text{или} \quad \frac{dz}{2\,\cos^2\frac{z}{2}} = dx.$$

Интегрируя обе части уравнения, получим общий интеграл уравнения в виде

$$\operatorname{tg}\frac{z}{2} = x + \mathcal{C},$$

который можно записать так:

$$\frac{x+y}{2} = \operatorname{arctg}(x + \mathcal{C}).$$

Осталось проверить, не потеряны ли решения при разделении переменных. Для этого приравниваем $1 + \cos z$ нулю, откуда следует, что

$$z = \pi + 2\,\pi\,k, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...,$$

или $y = \pi + 2\,\pi\,k - x$. Ни при каких значениях $\mathcal{C}$ данные решения не входят в найденное семейство. Следовательно, эти особые решения необходимо присоединить к общему решению. ▶

2.4.2. Однородные уравнения

Определение 2.17. Функция $H(x,y)$ называется *однородной степени* m, если для любых x, y и $\lambda > 0$ выполняется равенство

$$H(\lambda\,x, \lambda\,y) = \lambda^m\,H(x,y).$$

Пример 2.10. Пусть $H(x,y) = A\,x^2 + 2\,B\,x\,y + C\,y^2$. Тогда

$$H(\lambda\,x, \lambda\,y) = A\,(\lambda\,x)^2 + 2\,B\,(\lambda\,x)\,(\lambda\,y) + C\,(\lambda\,y)^2 = \lambda^2\,H(x,y)$$

– однородная функция (многочлен) степени 2. ▶

Пример 2.11. Рассмотрим функцию

$$H(x,y) = \frac{x^4 - x\,y^3}{x+y}.$$

Для нее

$$H(\lambda\,x,\lambda\,y) = \frac{(\lambda\,x)^4 - (\lambda\,x)\,(\lambda\,y)^3}{(\lambda\,x) + (\lambda\,y)} = \lambda^3\,H(x,y),$$

т.е. это однородная функция степени 3. ▶

Определение 2.18. Если функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ – однородные одной и той степени m, то дифференциальное уравнение

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \tag{2.18}$$

называется *однородным.*

Его можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} = -\frac{M\big(x,|x|\,\frac{y}{|x|}\big)}{N\big(x,|x|\,\frac{y}{|x|}\big)} = -\frac{|x|^m M(\pm 1,\pm y/x)}{|x|^m\,N(\pm 1,\pm y/x)} = f(y/x),$$

т.е. вторая форма однородного уравнения есть

$$y' = f(y/x), \tag{2.19}$$

где f – некоторая функция от одного переменного.

Введем новую переменную z по формуле $z = y/x$. Отсюда

$$y = z\,x, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}\,x + z.$$

Тогда уравнение (2.19) принимает следующую форму:

$$\frac{dz}{dx}\,x + z = f(z),$$

или, если $f(z) - z \neq 0$, то

$$\frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x}$$

– дифференциальное уравнение с "разделёнными переменными", а следовательно,

$$\ln\left|\frac{x}{\mathcal{C}}\right| = \int \frac{dz}{f(z)-z} \qquad (\mathcal{C}\neq 0), \quad \text{или} \quad x = \mathcal{C}\,\exp\left[\int \frac{dz}{f(z)-z}\right],$$

где $\mathcal{C}$ – произвольная постоянная.

Вернемся к тому месту в рассуждениях, где мы делили на функцию $f(z)-z$, которую считали не равной нулю. Предположим теперь, что z_0 – один из корней уравнения $f(z)-z=0$. Тогда прямая $y=z_0\,x$ – интегральная кривая исходного уравнения. Необходимо проверить входит ли она в общее решение.

Пример 2.12. Решить уравнение

$$(x^2+y^2)\,dx + x\,y\,dy = 0. \tag{2.20}$$

◀ Это однородное уравнение, так как $M(x,y)=x^2+y^2$ и $N(x,y)=x\,y$ – однородные функции степени 2. Пусть $y=z\,x$. Тогда $dy=z\,dx+x\,dz$ и

$$(x^2+x^2\,z^2)\,dx + x^2\,z\,(z\,dx+x\,dz) = 0,$$

или $(x^2\neq 0)$

$$(1+z^2)\,dx + z^2\,dx + x\,z\,dz = 0.$$

Отсюда

$$\frac{dx}{x} = -\frac{z\,dz}{1+2\,z^2},$$

а следовательно,

$$\ln\left|\frac{x}{\mathcal{C}}\right| = -\frac{1}{4}\,\ln|1+2\,z^2|.$$

Избавляясь от логарифмов, получим

$$\frac{x^4}{\mathcal{C}^4} = \frac{1}{1+2\,z^2}, \quad \text{или} \quad \frac{x^4}{\mathcal{C}^4} = \frac{1}{1+2y^2/x^2} = \frac{x^2}{x^2+2\,y^2}.$$

Окончательно общее решение будет иметь следующий вид:

$$y = \pm\sqrt{\frac{\mathcal{C}^4}{2\,x^2} - \frac{x^2}{2}}.$$

Заметим, что прямая $x = 0$ является интегральной кривой уравнения (2.20), которая не может быть получена из семейства кривых, соответствующих общему решению, ни при каком значении $\mathcal{C}$. Поэтому необходимо добавить эту прямую к указанному семейству. ▶

Пример 2.13. Решить уравнение

$$x\,y' = \sqrt{x^2 - y^2} + y. \tag{2.21}$$

◀ Будем считать, что $x \neq 0$ ($x = 0$ не является решением уравнения (2.21)), разделим на x и преобразуем обе части уравнения:

$$y' = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x},$$

т.е. оно имеет форму $y' = f(y/x)$, а следовательно, это однородное уравнение. Пусть $y = z\,x$. Тогда $y' = z + x\,z'$ и

$$z + x\,z' = \sqrt{1 - z^2} + z, \quad \text{или} \quad \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \frac{dx}{x}.$$

Отсюда

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \int \frac{dx}{x} + \ln|\mathcal{C}|,$$

а следовательно,

$$\arcsin z = \ln|\mathcal{C}\,x|.$$

Избавляясь от арксинуса и возвращаясь к переменной y, получим общее решение в виде

$$y = x \cdot \sin\big(\ln|\mathcal{C}\,x|\big). \qquad ▶$$

Пример 2.14. Рассмотрим уравнение

$$x\,y' = y + x \cdot \cos^2\left(\frac{x}{y}\right).$$

Как и в предыдущем уравнении, $x = 0$ не является решением. Поэтому делим на $x \neq 0$ и преобразуем обе части уравнения:

$$y' = \frac{y}{x} + \cos^2\left(\frac{x}{y}\right).$$

Это уравнение имеет форму $y' = f(y/x)$, а следовательно, оно однородное. Вводим новую неизвестную функцию по формуле $y = z\,x$. Тогда $y' = z + x\,z'$ и

$$z + x\,z' = z + \cos^2 z, \quad \text{или} \quad \frac{dz}{\cos^2 z} = \frac{dx}{x}.$$

Отсюда

$$\int \frac{dz}{\cos^2 z} = \int \frac{dx}{x} + \ln|\mathcal{C}|,$$

а следовательно,

$$\operatorname{tg} z = \ln|\mathcal{C}\,x|.$$

Возвращаясь к переменной y, получим общее решение в виде

$$y = x \cdot \operatorname{arctg}\big(\ln|\mathcal{C}\,x|\big). \qquad \blacktriangleright$$

Пример 2.15. Решить уравнение

$$(4\,x - 3\,y)\,dx + (2\,y - 3\,x)\,dy = 0.$$

◀ Без труда можно увидеть, что это однородное уравнение. Заменим y через $z\,x$. Тогда $dy = z\,dx + x\,dz$ и

$$(4\,x - 3\,z\,x)\,dx + (2\,z\,x - 3\,x)\,(z\,dx + x\,dz) = 0,$$

или $(x \neq 0)$

$$(4 - 3\,z)\,dx + (2\,z - 3)\,(z\,dx + x\,dz) = 0.$$

Собирая коэффициенты при дифференциалах dx и dz, получим, что

$$(4 - 6\,z + 2\,z^2)\,dx + (2\,z - 3)\,x\,dz = 0. \tag{2.22}$$

Отсюда, разделяя переменные (считаем, что $x \neq 0$, $z^2 - 3\,z + 2 \neq 0$), приходим к уравнению

$$2\,\frac{dx}{x} + \frac{(2\,z-3)\,dz}{z^2 - 3\,z + 2} = 0, \quad \text{или} \quad 2\int \frac{dx}{x} + \int \frac{(2\,z-3)\,dz}{z^2 - 3\,z + 2} = \ln|\mathcal{C}|,$$

а вследствие того, что $(z^2 - 3\,z + 2)' = 2\,z - 3$, получим

$$2\,\ln|x| + \ln|z^2 - 3\,z + 2| = \ln|\mathcal{C}|.$$

Избавляясь от логарифмов и возвращаясь к переменной y, находим, что

$$x^2\left(\frac{y^2}{x^2}-3\,\frac{y}{x}+2\right)=y^2-3\,x\,y+2\,x^2=\mathcal{C}$$

– общий интеграл исходного уравнения.

Отработаем побочные моменты, связанные с разделением переменных. Заметим, что прямая $x=0$ не является интегральной кривой исходного уравнения. Теперь разберемся с $z=1$ и $z=2$ – корнями уравнения $z^2-3\,z+2=0$. Эти величины, определяющие прямые на плоскости, являются решениями уравнения (2.22), а соответствующие прямые $y=x$ и $y=2\,x$ – исходного уравнения, причем несложно установить, что при значении $\mathcal{C}=0$ оба эти решения можно получить из общего, т.е. это частные решения. ▶

Пример 2.16. Рассмотрим задачу Коши

$$2\,x^2\,y'=x^2+y^2,\qquad y(1)=0.$$

Сразу же укажем, что $x=0$ не является решением уравнения. Поэтому делим на $2\,x^2$:

$$y'=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,\left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

У этого уравнения форма $y'=f(y/x)$, а следовательно, оно однородное. Вводим новую неизвестную функцию по формуле $y=z\,x$. Тогда $y'=z+x\,z'$ и

$$z+x\,z'=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,z^2,\quad \text{или}\quad \frac{dz}{z^2-2\,z+1}=\frac{dx}{2\,x}.$$

Отсюда

$$\int\frac{dz}{(z-1)^2}=\int\frac{dx}{2\,x}+\frac{1}{2}\,\ln|\mathcal{C}|,$$

а следовательно,

$$-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{2}\,\ln|\mathcal{C}\,x|.$$

Возвращаясь к переменной y, получим общий интеграл в виде

$$-\frac{x}{y-x}=\frac{1}{2}\,\ln|\mathcal{C}\,x|.$$

Из общего интеграла, используя начальные условия, находим, что $\mathcal{C} = \pm e^2$. Поэтому

$$\frac{x}{x-y} = \frac{1}{2}\,\ln|e^2\,x|$$

– частный интеграл, дающий решение задачи Коши. Заметим также, что прямая $x = 0$ не является интегральной кривой исходного уравнения. ▶

Рассмотрим теперь формы уравнений, которые приводимы к классу однородных. Пусть ОДУ имеет вид

$$y' = f\left(\frac{a_1\,x + b_1\,y + c_1}{a_2\,x + b_2\,y + c_2}\right), \tag{2.23}$$

где f – непрерывная функция.

1°. Если $c_1 = c_2 = 0$, то уравнение (2.23) – однородное, так как

$$y' = f\Big(\frac{a_1\,x + b_1\,y}{a_2\,x + b_2\,y}\Big) = f\Big(\frac{a_1 + b_1\,y/x}{a_2 + b_2\,y/x}\Big) = \widetilde{f}(x/y).$$

2°. Если $c_1 \neq 0$ или $c_2 \neq 0$, то:

1) в случае, когда

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

замена переменных

$$x = \xi + x_0, \qquad y = \eta + y_0, \tag{2.24}$$

где $(x_0, y_0)^{\mathsf{T}}$ – решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1\,x_0 + b_1\,y_0 + c_1 = 0, \\ a_2\,x_0 + b_2\,y_0 + c_2 = 0, \end{array} \right. \tag{2.25}$$

переводит уравнение (2.23) в однородное. Покажем, что это действительно так.

При указанной замене переменных уравнение (2.23) переходит в следующее:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\,(\xi + x_0) + b_1\,(\eta + y_0) + c_1}{a_2\,(\xi + x_0) + b_2\,(\eta + y_0) + c_2}\right),$$

или, учитывая то, что $(x_0, y_0)^{\intercal}$ – решение уравнений (2.25), получим

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\,\xi + b_1\,\eta}{a_2\,\xi + b_2\,\eta}\right) = f\left(\frac{a_1 + b_1\,\eta/\xi}{a_2 + b_2\,\eta/\xi}\right) = \widetilde{f}(\eta/\xi),$$

т.е. уравнение требуемого типа;

2) в случае, когда

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0,$$

система уравнений (2.25) не имеет решений. Но из последнего равенства следует, что

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1}.$$

Обозначая общее значение отношений через λ, получаем, что $a_2 = \lambda\,a_1$, $b_2 = \lambda\,b_1$, а следовательно, $a_2\,x + b_2\,y = \lambda\,(a_1\,x + b_1\,y)$. Тогда

$$y' = f\left(\frac{a_1\,x + b_1\,y + c_1}{a_2\,x + b_2\,y + c_2}\right) = f\left(\frac{a_1\,x + b_1\,y + c_1}{\lambda\,(a_1\,x + b_1\,y) + c_2}\right) = \widetilde{f}(a_1\,x + b_1\,y).$$

Получено уравнение, которое подстановкой $z = a_1\,x + b_1\,y$ преобразуется к виду ОДУ с разделяющимися переменными.

Пример 2.17. Решить уравнение

$$(2\,x - y + 1)\,dx + (-x + 2\,y - 1)\,dy = 0. \tag{2.26}$$

◀ Несложно видеть, что это ОДУ не является однородным ("мешают" константы в круглых скобках), с другой стороны, оно приводимо к виду (2.23), причем в этом случае $c_1 = -c_2 = 1 \neq 0$, а определитель Δ равен 5 и отличен от нуля. Итак, для выполнения замены переменных (2.24) найдем $(x_0, y_0)^{\intercal}$ из системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 2\,x_0 - y_0 + 1 = 0, \\ -x_0 + 2\,y_0 - 1 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, например, методом исключения, получим, что $x_0 = -1/3$, $y_0 = 1/3$. После указанной замены уравнение (2.26) принимает вид

$$(2\,\xi - \eta)\,d\xi + (-\xi + 2\,\eta)\,d\eta = 0. \tag{2.27}$$

Осуществим еще одну замену, перейдя теперь к новой зависимой переменной z по формуле $z = \eta/\xi$, откуда $\eta = z\,\xi$, $d\eta = z\,d\xi + \xi\,dz$. Тогда уравнение (2.27) будет иметь следующий вид:

$$(2\,\xi - z\,\xi)\,d\xi + (-\xi + 2\,z\,\xi)\,(z\,d\xi + \xi\,dz) = 0,$$

или, после деления на ξ, не равное нулю,

$$(2 - z)\,d\xi + (-1 + 2\,z)\,(z\,d\xi + \xi\,dz) = 0,$$

откуда после раскрытия скобок и выделения коэффициентов при дифференциалах следует уравнение

$$(2 - 2\,z + 2\,z^2)\,d\xi + (-1 + 2\,z)\,\xi\,dz = 0.$$

Получили ОДУ с разделяющимися переменными, которое можно привести к виду

$$\frac{d\xi}{\xi} + \frac{1}{2}\,\frac{(2\,z - 1)\,dz}{z^2 - z + 1} = 0.$$

Интегрируя обе части последнего уравнения, получим

$$\int \frac{d\xi}{\xi} + \frac{1}{2}\int \frac{(2\,z - 1)\,dz}{z^2 - z + 1} = \ln|\mathcal{C}|,$$

или

$$\ln|\xi| + \frac{1}{2}\,\ln|z^2 - z + 1| = \ln|\mathcal{C}|.$$

Далее, избавляясь от логарифмов, будем иметь

$$\xi^2\,(z^2 - z + 1) = \mathcal{C}^2.$$

Возвращаясь к переменным x и y, можно записать общий интеграл исходного уравнения в виде

$$(y - 1/3)^2 - (y - 1/3)(x + 1/3) + (x + 1/3)^2 = \mathcal{C}^2.$$

При этом можно заметить, что при $\mathcal{C} = 0$ решение $x = -1/3$, $y = 1/3$ уравнения (2.26) входит в этот интеграл, а следовательно, "по дороге" мы ничего не потеряли. ▶

Некоторые уравнения можно привести к однородным заменой $y = z^\alpha$ [31]. Число α обычно заранее не известно. Чтобы его найти, надо в уравнении сделать замену $y = z^\alpha$. Если потребовать, чтобы уравнение после замены стало однородным, то можно попытаться определить число α, если это возможно. Уравнения, позволяющие подобрать α таким образом, называются *обобщенными однородными дифференциальными уравнениями*. Если определить число α не удается, то уравнение этим способом не приводится к однородному.

Пример 2.18. Выяснить, существует ли замена переменных, которая превращает уравнение $2\,x^4\,y\,y' + y^4 = 4\,x^6$ в однородное.

◀ После замены $y = z^\alpha$ уравнение примет вид $2\,\alpha\,x^4\,z^{2\alpha-1}\,z' + z^{4\alpha} = 4\,x^6$. Это уравнение будет однородным в том случае, когда суммарные степени всех его членов относительно x и z равны между собой, т.е. $4 + (2\,\alpha - 1) = 4\,\alpha = 6$. Эти равенства удовлетворяются одновременно, если $\alpha = 3/2$. Следовательно, исходное уравнение можно привести к однородному заменой $y = z^{3/2}$. ▶

Пример 2.19. Решить уравнение $\left(x^2\,y^2 - 1\right) y' + 2\,x\,y^3 = 0$.

◀ Рассматривая это уравнение, делаем вывод, что в этой форме оно не является однородным. Попытаемся найти такое α, что после замены $y = z^\alpha$ уравнение станет однородным. Подставим $y = z^\alpha$ и $y' = \alpha\,z^{\alpha-1}\,z'$ в исходное уравнение, которое примет следующую форму:

$$\left(x^2\,z^{2\alpha} - 1\right) \alpha\,z^{\alpha-1}\,z' + 2\,x\,z^{3\alpha} = 0.$$

Это уравнение будет однородным в том случае, когда суммарные степени всех его членов относительно x и z равны между собой, т.е. $2 + 3\,\alpha - 1 = \alpha - 1 = 1 + 3\alpha$. Эти равенства удовлетворяются одновременно, если $\alpha = -1$. Следовательно, исходное уравнение можно привести к однородному заменой $y = z^{-1}$ $(z = 1/y)$, что дает уравнение

$$-\left(x^2\,z^{-2} - 1\right) z^{-2}\,z' + 2\,x\,z^{-3} = 0, \quad \text{или} \quad -\left(x^2 - z^2\right) z' + 2\,x\,z = 0.$$

Несложно усмотреть, что действительно получено однородное уравнение.

Теперь сделаем стандартную замену переменных $u = z/x$, $z = x\,u$, $z' = u + x\,u'$, после чего уравнение принимает следующую форму:

$$-\left(x^2 - x^2\,u^2\right)(u + x\,u') + 2\,x^2\,u = 0, \quad \text{или} \quad \left(1 - u^2\right)(u + x\,u') = 2\,u$$

$(x = 0$ не является решением исходного уравнения). Раскроем скобки:

$$u + x\,u' - u^3 - x\,u^2\,u' = 2\,u, \quad \text{или} \quad x\,(1 - u^2)\,u' = u + u^3.$$

Разделяя переменные, получаем:

$$\frac{(u^2 - 1)\,du}{u^3 + u} = -\frac{dx}{x}.$$

Представим дробь (кроме du) в левой части последнего уравнения в виде суммы простейших дробей с неопределенными коэффициентами:

$$\frac{u^2-1}{u^3+u} = \frac{u^2-1}{u\,(u^2+1)} = \frac{A}{u} + \frac{2\,B\,u}{u^2+1} + \frac{C}{u^2+1} = \frac{A\,(u^2+1)+2\,B\,u^2+C\,u}{u\,(u^2+1)}.$$

Дроби и их знаменатели одинаковы, значит, равны и числители:

$$u^2-1 = A\,(u^2+1)+2\,B\,u^2+C\,u.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях u, получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{array}{r|l} u^0 & -1 = A, \\ u^1 & \;\;\;0 = C, \\ u^2 & \;\;\;1 = A + 2\,B, \end{array}$$

откуда находим, что $A=-1$, $B=1$, $C=0$. Тогда, подставляя разложение в уравнение и интегрируя, получим:

$$\int \Big(-\frac{1}{u} + \frac{2\,u}{u^2+1}\Big)\,du = -\int \frac{dx}{x} + \ln|\mathcal{C}|,$$

или

$$-\ln|u| + \ln(u^2+1) = -\ln|x| + \ln|\mathcal{C}|.$$

Избавляясь от логарифмов, находим, что

$$\frac{u^2+1}{u} = \frac{\mathcal{C}}{x}.$$

Возвращаясь к исходной переменной $u \to z \to y$, будем иметь

$$\frac{z^2/x^2+1}{z/x} = \frac{\mathcal{C}}{x} \Rightarrow \frac{1/(x^2\,y^2)+1}{1/x\,y} = \frac{\mathcal{C}}{x} \Rightarrow \frac{x^2\,y^2+1}{x\,y} = \frac{\mathcal{C}}{x},$$

или окончательно: $x^2\,y^2+1 = \mathcal{C}\,y$. ►

Пример 2.20. Решить уравнение $2\,x\,y' + y = y^2\,\sqrt{x - x^2\,y^2}$.

◄ Структура уравнения не дает основания считать, что это однородное уравнение. Предположим, что после замены $y = z^\alpha$ уравнение примет необходимый вид. Для проверки этого проделаем следующие выкладки:

1) подставим выражения для y и $y' = \alpha\,z^{\alpha-1}\,z'$ в исходное уравнение, которое превратится в

$$2\,x\,\alpha\,z^{\alpha-1}\,z' + z^\alpha = z^{2\alpha}\,\sqrt{x - x^2\,z^{2\alpha}}; \tag{2.28}$$

2) подсчитаем суммарные степени всех его членов относительно x и z. В наличии два терма в левой части уравнения (2.28) и один в правой, степени первых двух равны при любом α: $1 + (\alpha - 1) = \alpha$. С термом в правой части сложнее, так как он является произведением $z^{2\alpha}$ и квадратного корня, под знаком которого разность степенных функций x и $x^2\,z^{2\alpha}$. Для того, чтобы осуществился баланс суммарных степеней должны выполняться следующие равенства: $\alpha = 2\,\alpha + 1/2$ (сравнение степеней левой и правой частях уравнения (2.28)), $1 = 2 + 2\,\alpha$ (баланс степеней термов под корнем в правой части). Несложно увидеть, что при $\alpha = -1/2$ оба равенства превращаются в тождества;

3) после подстановки найденного значения α в уравнение (2.28) оно принимает вид

$$-x\,z^{-3/2}\,z' + z^{-1/2} = z^{-1}\,\sqrt{x - x^2\,z^{-1}}. \tag{2.29}$$

Разделим обе части полученного уравнения (2.29) на произведение $-x\,z^{-3/2}$ (со знаком минус), что приводит к уравнению для z в следующей форме:

$$z' - \frac{z}{x} = -\frac{z^{1/2}}{x}\,\sqrt{x - x^2\,z^{-1}},$$

или

$$z' - \frac{z}{x} = -\sqrt{\frac{z}{x} - 1}, \tag{2.30}$$

т.е. (2.30) имеет структуру однородного дифференциального уравнения;

4) решаем уравнение (2.30). Для этого делаем вторую замену неизвестной функции: $u = z/x$, $z = x\,u$. $z' = u + x\,u'$, что приводит последнее уравнение к следующему виду:

$$u + x\,u' - u = -\sqrt{u-1}, \quad \text{или} \quad x\,u' = -\sqrt{u-1}; \tag{2.31}$$

5) действительно получено уравнение с разделяющимися переменными. Решим его:

$$x\,u' = -\sqrt{u-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{\sqrt{u-1}} = -\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{du}{\sqrt{u-1}} = -\int \frac{dx}{x} - \ln|\mathcal{C}| \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad 2\,\sqrt{u-1} = -\ln|\mathcal{C}\,x|;$$

6) в полученном первом интеграле возвращаемся к исходным переменным:

$$2\,\sqrt{u-1} = -\ln|\mathcal{C}\,x| \quad \Rightarrow \quad \big[u = z/x\big] \quad \Rightarrow \quad 2\,\sqrt{\frac{z}{x} - 1} = -\ln|\mathcal{C}\,x| \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left[z = 1/y^2\right] \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{\frac{1}{x\,y^2} - 1} = -\ln|\mathcal{C}\,x|$$

– окончательный вид общего интеграла исходного уравнения;

7) в процессе решения уравнения несколько раз производилось деление обеих частей промежуточных уравнений в предположении, что делители (x, $z^{-3/2}$, $\sqrt{u-1}$ и снова x) не равны нулю. Проверим, не были ли в процессе таких действий потеряны какие-либо решения. Рассмотрение этих делителей требует проверки того, что функции $x = 0$, $z^{-3/2} = y^3 = 0$ $\to y = 0$ и $u = 1 \to z/x = 1 \to 1/(x\,y^2) = 1 \to x = 1/y^2$ являются решениями исходного уравнения. Анализ показывает следующее: $x = 0$ не является решением; $y = 0$ и $x = 1/y^2$ – решения уравнения, которые не входят в общий интеграл и которые необходимо добавить к этому интегралу. ►

Другой способ получения замены переменных следующий: 1) для отыскания α надо приписать переменной x уровень 1, y – порядок α, dy – уровень $\alpha - 1$, dx – порядок 0; если существует такое число α, что все члены уравнения оказываются одинакового измерения, то данное уравнение приводится к однородному подстановкой $y = z^{\alpha}$; 2) аналогично, если сказанное имеет место, когда приписывают x, y, dx, dy измерения соответственно β, 1, 0, $\beta - 1$, то данное уравнение приводится к однородному подстановкой $x = t^{\beta}$.

2.4.3. Линейные уравнения

Определение 2.19. *Линейное дифференциальное уравнение первого порядка* имеет вид

$$a(x)\,y' + b(x)\,y + c(x) = 0, \tag{2.32}$$

где $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ – заданные непрерывные функции на некотором конечном или бесконечном интервале (x_*, x^*). Если $a(x) \neq 0$ на (x_*, x^*), то уравнение (2.32) можно записать в *приведенном виде*:

$$y' + P(x)\,y = Q(x), \tag{2.33}$$

где $P(x) = b(x)/a(x)$, $Q(x) = -c(x)/a(x)$ – непрерывные функции.

Будем искать решение уравнения (2.33) в виде произведения двух функций от x:

$$y = u(x)\,v(x). \tag{2.34}$$

Одну из этих функций можно выбрать произвольно, вторая же определится из уравнения (2.33).

Дифференцируя обе части равенства (2.34), находим

$$y' = u\,\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}\,v.$$

Подставляя полученное выражение для y' в уравнение (2.33), будем иметь

$$u\,\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}\,v + P\,u\,v = Q,$$

или

$$v\,\frac{du}{dx} + u\left(\frac{dv}{dx} + P\,v\right) = Q. \tag{2.35}$$

Выберем функцию v так, чтобы удовлетворялось уравнение

$$\frac{dv}{dx} + P\,v = 0. \tag{2.36}$$

Разделяя переменные в уравнении (2.36), получим

$$\frac{dv}{v} = -P\,dx.$$

Интегрируя, находим, что

$$\ln|v| - \ln|\mathcal{C}_1| = -\int P\,dx,$$

или

$$v = \mathcal{C}_1\,e^{-R(x)}, \qquad R(x) = \int P\,dx.$$

Так как нам требуется какое-нибудь отличное от нуля решение уравнения (2.36), то выберем $\mathcal{C}_1$ равным 1. При этом $v(x) \neq 0$, а $R(x)$ – любая первообразная.

Подставляя найденную функцию $v(x)$ в уравнение (2.35), получим

$$v(x)\,\frac{du}{dx} = Q(x),$$

или

$$\frac{du}{dx} = \frac{Q(x)}{v(x)},$$

откуда находим, что

$$u = \int \frac{Q(x)}{v(x)}\,dx + \mathcal{C}.$$

Подставляя в свою очередь u и v в формулу (2.33), окончательно получаем, что

$$y = v(x)\Big[\int \frac{Q(x)}{v(x)}\,dx + \mathcal{C}\Big],$$

или

$$y = e^{-R(x)}\left[\mathcal{C} + \int e^{R(x)}\,Q(x)\,dx\right] = v(x)\,\phi(x) + \mathcal{C}\,v(x). \tag{2.37}$$

Очевидно, что это общее решение уравнения (2.33). Если нам дано начальное условие: $y = y_0$ при $x = x_0$, то для определения постоянной $\mathcal{C}$ можно воспользоваться равенством

$$y_0 = v(x_0)\,\phi(x_0) + \mathcal{C}\,v(x_0).$$

Решение задачи Коши для уравнения (2.33) может быть записано и так:

$$y = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} P(t)\,dt}\left[x_0 + \int\limits_{x_0}^{x} e^{R(t)}\,Q(t)\,dt\right].$$

Замечание. Нередко при решении линейных уравнений после первого интегрирования в результате появляются знаки модуля, что не позволяет напрямую осуществить второе интегрирование. Но если мы раскроем выражение под знаком модуля по обычным правилам (например, проанализируем случаи $x < x_0$ и $x \geqslant x_0$), то, как правило, получим один и тот же результат. Поэтому, не оговаривая эту ситуацию каждый раз, мы будем после определения $R(x)$ при вычислении $e^{R(x)}$ и $e^{-R(x)}$ знак модуля опускать (возможно, в нарушение математической "чистоты").

Пример 2.21. Для решения задачи Коши

$$y' - \frac{2}{x+1}\,y = (x+1)^3, \qquad y(-2) = 0, \quad x \neq -1,$$

последовательно находим

$$P(x) = -\frac{2}{x+1}, \qquad Q(x) = (x+1)^3,$$

$$R(x) = \int P(x)\,dx = -\int \frac{2\,dx}{x+1} = -2\,\ln|x+1| = \ln\frac{1}{(x+1)^2},$$

$$e^{R(x)} = \frac{1}{(x+1)^2}, \qquad e^{-R(x)} = (x+1)^2,$$

$$y = (x+1)^2\left[\mathcal{C} + \int (x+1)\,dx\right],$$

в результате чего получаем общее решение вида

$$y = (x+1)^2\left[\mathcal{C} + \frac{(x+1)^2}{2}\right].$$

Для получения частного решения найдем $\mathcal{C}$, используя начальное условие:

$$0 = (-2+1)^2\Big[\mathcal{C} + \frac{(-2+1)^2}{2}\Big].$$

Отсюда $\mathcal{C} = -1/2$, а решение задачи Коши будет иметь вид

$$y_* = \frac{1}{2}\,(x+1)^2\,\big[(x+1)^2 - 1\big]. \qquad \blacktriangleright$$

Пример 2.22. Решить задачу Коши

$$y' + \operatorname{tg} x\cdot y = \frac{1}{\cos x}, \qquad y(\pi) = 1, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi\,k, \quad k\in\mathbb{Z}.$$

◀ Здесь

$$P(x) = \operatorname{tg} x, \qquad Q(x) = \frac{1}{\cos x},$$

$$R(x) = \int P(x)\,dx = \int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x|,$$

$$e^{R(x)} = \frac{1}{\cos x}, \qquad e^{-R(x)} = \cos x,$$

а следовательно,

$$y = \cos x\left(\mathcal{C} + \int \frac{dx}{\cos^2 x}\right),$$

что дает

$$y = \cos x\,\big(\mathcal{C} + \operatorname{tg} x\big),$$

Из начального условия находим, что $\mathcal{C} = -1$. Отсюда решение задачи Коши будет иметь вид

$$y_* = \cos x \cdot \big(\operatorname{tg} x - 1\big). \qquad \blacktriangleright$$

Пример 2.23. Найти общее решение уравнения

$$(x^2 - x)\, y' + y = x^2\,(2\,x - 1).$$

$\blacktriangleright$ Считая, что $x^2 - x \neq 0$, последовательно определяем:

$$P(x) = \frac{1}{x\,(x-1)}, \qquad Q(x) = \frac{x^2\,(2\,x-1)}{x\,(x-1)} = \frac{x\,(2\,x-1)}{x-1},$$

$$R(x) = \int P(x)\,dx = \int \Big(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\Big)\,dx = \ln|x-1| - \ln|x| = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|,$$

$$e^{R(x)} = \frac{x-1}{x}, \qquad e^{-R(x)} = \frac{x}{x-1},$$

$$y = \frac{x}{x-1}\left[\mathcal{C} + \int \frac{x-1}{x}\,\frac{x\,(2\,x-1)}{x-1}\,dx\right] = \frac{x}{x-1}\,\big(\mathcal{C} + x^2 - x\,\big),$$

т.е. получено общее решение исходного уравнения.

Вернемся к неравенству $x^2 - x \neq 0$. Ни $x = 0$, ни $x = 1$ не является решением исходного уравнения, а поэтому потерянных решений нет. $\blacktriangleright$

Пример 2.24. Найти решение уравнения

$$y' - y = \cos x - \sin x,$$

ограниченное при $x \to +\infty$.

$\blacktriangleleft$ Схема решения будет такова: на первом этапе обычным образом находим общее решение линейного уравнения, на втором – из всего семейства частных решений выбираем то, для которого

$$\lim_{x \to +\infty} y_*(x) = A,$$

где A – некоторая постоянная $(-\infty < A < +\infty)$.

Для этого уравнения

$$P(x) = -1, \qquad Q(x) = \cos x - \sin x, \qquad R(x) = \int P(x)\,dx = -x,$$

$$e^{R(x)} = e^{-x}, \qquad e^{-R(x)} = e^{x},$$

$$y = e^x \left[\mathcal{C} + \int e^{-x} (\cos x - \sin x)\, dx \right].$$

Интеграл в квадратных скобках будем вычислять с помощью метода интегрирования по частям:

$$W = \int e^{-x} (\cos x - \sin x)\, dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = \cos x - \sin x & du = -(\sin x + \cos x)\, dx \\ dv = e^{-x}\, dx & v = -e^{-x} \end{bmatrix} =$$

$$= -e^{-x} \cdot (\cos x - \sin x) - \int e^{-x} (\sin x + \cos x)\, dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = \sin x + \cos x & du = (\cos x - \sin x)\, dx \\ dv = e^{-x}\, dx & v = -e^{-x} \end{bmatrix} =$$

$$= -e^{-x} \cdot (\cos x - \sin x) + e^{-x} \cdot (\sin x + \cos x) - \int e^{-x} (\cos x - \sin x)\, dx =$$

$$= 2\, e^{-x} \cdot \sin x - W.$$

Отсюда

$$\int e^{-x} (\cos x - \sin x)\, dx = e^{-x} \cdot \sin x,$$

а следовательно,

$$y = e^x \left(\mathcal{C} + e^{-x} \cdot \sin x \right) = \mathcal{C}\, e^x + \sin x \tag{2.38}$$

– общее решение исходного уравнения. ▶

Замечание. Структура подынтегральной функции интеграла, обозначенного W, такова, что при его вычислении можно обойтись без использовании интегрирования по частям. Дело в том, что несложно увидеть, что первообразные для подынтегральных функций

$$f(x) = e^{\alpha x} \left[A \cos(\beta\, x) + B \sin(\beta\, x) \right],$$

где α, β, A, B – постоянные, имеют следующую форму:

$$F = e^{\alpha x} \left[D \cos(\beta\, x) + E \sin(\beta\, x) \right],$$

где D, E – неопределенные постоянные Для их вычисления достаточно:

1) воспользоваться определением первообразной и приравнять $F'(x)$ и $f(x)$:

$$\Big\{e^{\alpha x}\,\big[D\,\cos(\beta\,x)+E\,\sin(\beta\,x)\big]\Big\}'=e^{\alpha x}\,\big[A\,\cos(\beta\,x)+B\,\sin(\beta\,x)\big],$$

или

$$e^{\alpha x}\,\big[(\alpha\,D+\beta\,E)\,\cos(\beta\,x)+(\alpha\,E-\beta\,D)\,\sin(\beta\,x)\big]=\\ =e^{\alpha x}\,\big[A\,\cos(\beta\,x)+B\,\sin(\beta\,x)\big];$$

2) приравнять коэффициенты при линейно независимых функциях $e^{\alpha x}\,\cos(\beta\,x)$ и $e^{\alpha x}\,\sin(\beta\,x)$ в обеих частях последнего равенства:

$$\alpha\,D+\beta\,E=A,\qquad \alpha\,E-\beta\,D=B;$$

3) решить полученную систему линейных алгебраических уравнений:

$$D=\frac{A\,\alpha-B\,\beta}{\alpha^2+\beta^2},\qquad E=\frac{A\,\beta+B\,\alpha}{\alpha^2+\beta^2};$$

4) получить D и E для решаемой задачи: $\alpha=-1$, $\beta=1$, $A=1$, $B=-1$, отсюда

$$W=\int e^{-x}\,(\cos x-\sin x)\,dx=\\ =e^{-x}\,\Big[\,\frac{1\cdot(-1)-(-1)\cdot 1}{(-1)^2+1^2}\,\cos x+\frac{1\cdot 1+(-1)\cdot(-1)}{(-1)^2+1^2}\,\sin x\,\Big]=\\ =e^{-x}\,\sin x.$$

Структура решения (2.38) такова, что при любом значении произвольной постоянной $\mathcal{C}$, не равном нулю, соответствующее частное решение будет неограниченным. Поэтому выбираем значение $\mathcal{C}=0$, а следовательно, ответ задачи: $y_*=\sin x$. ▶

До сих пор мы рассматривали уравнения, линейные по $y(x)$, но существуют ОДУ, нелинейные по y и линейные по $x(y)$:

$$x'+P(y)\,x=Q(y).$$

Конечно же, для решения таких уравнений используется та же схема, что и для уравнения (2.33).

Пример 2.25. Найти общее решение уравнения

$$(2\,x - y^2)\,y' = 2\,y.$$

◀ Нетрудно увидеть, что это уравнение нелинейно по $y(x)$. Попытаемся перейти от него к ОДУ для $x(y)$. Для этого вспомним, что

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{x'},$$

а следовательно, уравнение можно записать так:

$$2\,x - y^2 = 2\,y\,x',$$

или, считая, что $y \neq 0$, получаем уравнение для $x(y)$ вида

$$x' - \frac{1}{y}\,x = -\frac{y}{2}.$$

Итак, здесь

$$P(y) = -\frac{1}{y}, \quad Q(y) = -\frac{y}{2}, \quad R(y) = \int P(y)\,dy = -\int \frac{dy}{y} = -\ln|y|,$$
$$e^{R(y)} = \frac{1}{y}, \quad e^{-R(y)} = y, \quad x = y \cdot \left(\mathcal{C} - \frac{1}{2}\int dy\right) = y \cdot \left(\mathcal{C} - \frac{y}{2}\right)$$

– общее решение.

При получении этого результата мы могли потерять интегральную кривую (прямую) $y = 0$. Это действительно произошло, что следует из непосредственной подстановки значения $y = 0$ в исходное уравнение. Причем решение $y = 0$ не входит в общее ни при каком значении $\mathcal{C}$. Следовательно, последний шаг – включение этой прямой в семейство интегральных кривых исходного уравнения. ▶

Пример 2.26. Рассмотрим уравнение

$$y' = \frac{1}{x \cdot \cos y + \sin 2\,y}.$$

◀ Как и в предыдущем примере, данное уравнение нелинейно по $y(x)$. Переходим от него к ОДУ для $x(y)$:

$$x' = x \cdot \cos y + \sin 2\,y,$$

или

$$x' - x \cdot \cos y = \sin 2\, y.$$

Итак, здесь

$$P(y) = -\cos y, \qquad Q(y) = \sin 2y,$$

$$R(y) = \int P(y)\, dy = -\int \cos y\, dy = -\sin y,$$

$$e^{R(y)} = e^{-\sin y}, \qquad e^{-R(y)} = e^{\sin y},$$

$$x = e^{\sin y} \cdot \Big(\mathcal{C} + \int e^{-\sin y}\, \sin 2y\, dy \Big) =$$

$$= e^{\sin y} \cdot \Big(\mathcal{C} + \int e^{-\sin y}\, 2\, \sin y\, \cos y\, dy \Big) =$$

$$= e^{\sin y} \cdot \Big(\mathcal{C} + 2 \int e^{-\sin y}\, \sin y\, d(\sin y) \Big).$$

Для вычисления интеграла в квадратных скобках применим метод интегрирования по частям ($t = \sin y$):

$$\int e^{-t}\, t\, dt = \begin{bmatrix} u = t & du = dt \\ dv = e^{-t}\, dt & v = -e^{-t} \end{bmatrix} =$$

$$= -t \cdot e^{-t} + \int e^{-t}\, dt = -t \cdot e^{-t} - e^{-t} = -(t+1) \cdot e^{-t}.$$

Поэтому

$$x = e^{\sin y} \cdot \big[\mathcal{C} - 2\, (\sin y + 1) \cdot e^{-\sin y} \big] = \mathcal{C} \cdot e^{\sin y} - 2\, (\sin y + 1)$$

– общее решение. ►

Рассмотрим два частных случая уравнения (2.33):

а) если $Q(x) = 0$, то

$$y = \mathcal{C}\, e^{-R(x)} \equiv \mathcal{C}\, v(x);$$

б) если $P(x) = p \neq 0$, а $Q(x) = q$, то (2.33) – *линейное уравнение с постоянными коэффициентами*. Подставляя эти значения P и Q в равенство (2.37), получим

$$y = e^{-px} \Big(\mathcal{C} + q \int e^{px}\, dx \Big) = \mathcal{C}\, e^{-px} + \frac{q}{p}.$$

2.4.4. Уравнения Бернулли

Определение 2.20. *Уравнение Бернулли* имеет вид

$$y' + P(x)\, y = Q(x)\, y^{\alpha}, \tag{2.39}$$

где α – любое действительное число, отличное от нуля или единицы (в этих случаях уравнение (2.39) превращается в линейное), а $P(x)$, $Q(x)$ – непрерывные функции x (или постоянные) на некотором конечном или бесконечном интервале (x_*, x^*).

Совершим замену переменных $z = y^{1-\alpha}$, где z – новая неизвестная функция x, и обозначим $1-\alpha$ через β, а $1/\beta$ через γ. Тогда, используя связь между z и y, находим

$$y = z^{\gamma} \equiv z^{\frac{1}{1-\alpha}}, \qquad y' = \gamma\, z^{\gamma-1}\, z' = \gamma\, z^{\alpha\gamma}\, z'.$$

Подставляя соотношения для y и y' в уравнение (2.39), получим, что функция $z(x)$ является решением уравнения

$$\gamma\, z^{\alpha\gamma}\, z' + P(x)\, z^{\gamma} = Q(x)\, z^{\alpha\gamma}. \tag{2.40}$$

Деля обе части уравнения (2.40) на $\gamma\, z^{\alpha\gamma}$, получим, что уравнение Бернулли преобразуется в линейное относительно функции z:

$$z' + P_0(x)\, z = Q_0(x), \tag{2.41}$$

где

$$P_0(x) = \beta\, P(x), \qquad Q_0(x) = \beta\, Q(x).$$

Поскольку всякое линейное уравнение может быть проинтегрировано в квадратурах (т.е. его решение может быть выражено через интегралы от известных функций), тем же свойством обладает и уравнение Бернулли.

Пример 2.27. Найти решение уравнения

$$y' + 2\, e^{x}\, y = 2\, e^{x} \sqrt{y} \qquad (y \geqslant 0).$$

◀ Здесь $P(x) = Q(x) = 2\, e^{x}$, $\alpha = 1/2 = \beta$. Делаем замену переменных $y = z^2$. Тогда данное уравнение принимает вид

$$z' + e^{x}\, z = e^{x}.$$

С одной стороны, это линейное уравнение, с дугой – уравнение с разделяющимися переменными. Будем его решать как представителя второго класса:

$$\frac{dz}{dx} = -e^x\,(z-1), \quad \text{или (при } z \neq 1) \quad \frac{dz}{z-1} = -e^x\,dx.$$

Проинтегрируем обе части последнего уравнения:

$$\ln|z-1| = \mathcal{C} - e^x,$$

а следовательно,

$$z = 1 + \exp\left(\mathcal{C} - e^x\right)$$

и

$$y = \left[1 + \exp\left(\mathcal{C} - e^x\right)\right]^2$$

– общее решение уравнения.

Теперь учтем возможность потери решений при выкладках. Пусть $z = 1$, а следовательно, и $y = 1$. Эта прямая является интегральной кривой исходного уравнения (в чем несложно убедиться прямой подстановкой) и не входит в общее решение. То же самое относится и к прямой $y = 0$. Поэтому решения $y = 0$ и $y = 1$ необходимо добавить к общему решению. ►

Пример 2.28. Решить уравнение

$$x\,y' + y = x\,y^2\,\ln x, \qquad x > 0.$$

◄ Это уравнение можно записать так:

$$y' + \frac{y}{x} = y^2\,\ln x.$$

Анализируя его, видим, что $P(x) = 1/x$, $Q(x) = \ln x$, $\alpha = 2$, $\beta = -1$. Поэтому делаем замену переменных $y = z^{-1} = 1/z$ и получаем уравнение вида

$$z' - \frac{z}{x} = -\ln x.$$

Решаем это линейное уравнение:

$$P_0(x) = -1/x, \qquad Q_0(x) = -\ln x,$$

$$R = \int P_0(x)\,dx = -\ln|x|, \qquad e^R = 1/x, \qquad e^{-R} = x,$$
$$z = x \cdot \Big(\mathcal{C} - \int \frac{\ln x\,dx}{x} \Big) = x \cdot \big(\mathcal{C} - \frac{1}{2}\ln^2 x \big).$$

Отсюда

$$y = 1/z = \frac{1}{x \cdot \big(\mathcal{C} - \frac{1}{2}\ln^2 x \big)}$$

– общее решение уравнения. ▶

Пример 2.29. Проинтегрировать уравнение

$$x\,y' = y - 3\,x^2\,y^2 \tag{2.42}$$

и найти ту интегральную кривую, которая проходит через точку $P_0(1,1)$.

◀ В данном случае $P(x) = -1/x$, $Q(x) = -3x$, $\alpha = 2$, $\beta = -1$. Делаем замену переменных $y = z^{-1} = 1/z$. Тогда уравнение (2.41) принимает вид

$$z' + \frac{z}{x} = 3\,x.$$

Решаем это линейное уравнение:

$$R = \int P_0(x)\,dx = \ln|x|, \quad e^R = x, \quad e^{-R} = \frac{1}{x}, \quad z = \frac{1}{x}\Big(\mathcal{C} + \int 3\,x^2\,dx \Big).$$

В результате получаем, что

$$z = \frac{1}{x}\big(\mathcal{C} + x^3\big).$$

Отсюда

$$y = 1/z = \frac{x}{\mathcal{C} + x^3}.$$

Получили общее решение уравнения (2.42). Для нахождения частного решения (выделения интегральной кривой, проходящей через точку $P_0(1,1)$) определим значение постоянной $\mathcal{C}$: $1 = 1/(\mathcal{C}+1)$. Откуда следует, что $\mathcal{C} = 0$. Окончательно решение задачи Коши будет выглядеть так: $y = 1/x^2$. ▶

Пример 2.30. Решить уравнение $3\,y' + y = 1/y^2$.

◀ Здесь $P(x) = 1/3$, $Q(x) = 1/3$, $\alpha = -2$, $\beta = 3$. Заменим y через $z^{1/3}$. Тогда уравнение для z принимает вид $z' + z = 1$, а его общее решение –

$$z = \exp\Big(-\int 1\,dx\Big)\Big[\mathcal{C} + \int \exp\Big(\int 1\,dx\Big)\,dx\Big] = e^{-x}\left(\mathcal{C} + e^{x}\right) = \mathcal{C}\,e^{-x} + 1.$$

Возвращаясь к переменной y, находим решение исходного уравнения:

$$y = \sqrt[3]{\mathcal{C}\,e^{-x} + 1}. \qquad ▶$$

Пример 2.31. Решить уравнение $y' - y\,\operatorname{ctg} x = y^3/\sin x$.

◀ Здесь $P(x) = -\operatorname{ctg} x$, $Q(x) = 1/\sin x$, $\alpha = 3$, $\beta = -2$. Отсюда замена $z = y^{-2}$, или $y = z^{-1/2}$. Тогда $y' = -z^{-3/2}\,z'/2$, а уравнение для z принимает следующий вид:

$$-\frac{z^{-3/2}\,z'}{2} - z^{-1/2}\,\operatorname{ctg} x = \frac{z^{-3/2}}{\sin x}, \quad \text{или} \quad z' + 2\,z\,\operatorname{ctg} x = -\frac{2}{\sin x}.$$

Поэтому $P_0(x) = 2\,\operatorname{ctg} x$, $Q_0(x) = -2/\sin x$. Вычисляем интегралы:

$$R_0 = \int 2\,\operatorname{ctg} x\,dx = 2\,\ln|\sin x|, \quad e^{R_0} = \sin^2 x, \quad e^{-R_0} = \frac{1}{\sin^2 x},$$

$$\int e^{R_0}\,Q_0\,dx = -\int \sin^2 x\,\frac{2\,dx}{\sin x} = -2\int \sin x\,dx = 2\,\cos x.$$

Отсюда

$$z = \frac{2\cos x + \mathcal{C}}{\sin^2 x}, \quad \text{или} \quad y = \sqrt{\frac{\sin^2 x}{2\cos x + \mathcal{C}}}. \qquad ▶$$

Существуют ситуации, аналогичные рассмотренным для линейных уравнений, а именно есть ОДУ, не являющиеся уравнениями Бернулли для $y(x)$, но таковые для $x(y)$:

$$x' + P(y)\,x = Q(y)\,x^{\alpha}.$$

Соответственно, для решения таких уравнений используется рассмотренная выше схема (только с переменой "цвета").

Пример 2.32. Решить уравнение $(x^2 + y^2 + 1)\,dy + x\,y\,dx = 0$.

◀ Оно явно не является уравнением Бернулли для $y(x)$. Преобразуем его (считаем, что $x \neq 0$, $y \neq 0$, но запомним, что прямая $y = 0$ – интегральная):

$$x' + \frac{x}{y} = -\frac{y^2 + 1}{y}\,x^{-1}.$$

Здесь $P(x) = 1/y$, $Q(x) = -(y^2+1)/y$, $\alpha = -1$, $\beta = 2$. Заменим x через $\sqrt{z}$. Тогда уравнение для z принимает вид

$$z' + 2\,\frac{z}{y} = -2\,\frac{y^2+1}{y},$$

причем

$$P_0(x) = \frac{2}{y}, \qquad Q_0(x) = -\frac{2\,(y^2+1)}{y},$$

$$R(y) = \int P_0(y)\,dy = \int \frac{2\,dy}{y} = 2\,\ln|y| = \ln y^2, \quad e^{R(y)} = y^2, \quad e^{-R(y)} = \frac{1}{y^2}.$$

Тогда

$$z = \frac{1}{y^2}\left[\mathcal{C} - \int \frac{2\,y^2\,(y^2+1)\,dy}{y}\right] = \frac{1}{y^2}\left(\mathcal{C} - \frac{y^4}{2} - y^2\right).$$

Возвращаясь к переменной x, находим общее решение исходного уравнения:

$$x = \pm\,\frac{1}{y}\sqrt{\mathcal{C} - \frac{y^4}{2} - y^2}.$$

Заметим, что ни при каком $\mathcal{C}$ упомянутое выше решение $y = 0$ из последнего равенства не получить. ▶

2.4.5. Уравнения в полных дифференциалах

Определение 2.21. Уравнение вида

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \tag{2.43}$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – непрерывно дифференцируемые в некоторой области $\mathscr{D}$ функции, для которых выполняется соотношение

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}. \tag{2.44}$$

Известно, что условие (2.44) является необходимым для того, чтобы левая часть уравнения (2.43) представляла собой полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$, т.е. уравнение (2.43) в этом случае будет иметь следующий вид:

$$du(x, y) = 0, \tag{2.45}$$

где

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = Q. \tag{2.46}$$

Тогда общий интеграл уравнения (2.45) будет иметь вид

$$u(x, y) = \mathcal{C}, \tag{2.47}$$

где $\mathcal{C}$ – произвольная постоянная.

Найдем функцию $u(x, y)$. Для этого проинтегрируем первое из равенств (2.46) по x, считая y постоянным, т.е. совершим действия, обратные вычислению частной производной от u по x. Тогда получим функцию $u(x, y)$ с точностью до слагаемого, являющегося произвольной функцией от y:

$$u(x, y) = R(x, y) + \varphi(y), \tag{2.48}$$

где

$$R(x, y) = \int P(x, y)\, dx.$$

Действительно, находя частную производную от обеих частей равенства (2.48) и учитывая, что $\varphi'_x(y) \equiv 0$, получим первое из соотношений (2.46).

Для нахождения произвольной функции $\varphi(y)$ продифференцируем соотношение (2.48) для u по y:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial R(x, y)}{\partial y} + \varphi'(y).$$

С учетом того, что

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y),$$

а следовательно,

$$\frac{\partial R(x, y)}{\partial y} + \varphi'(y) = Q(x, y),$$

имеем

$$\varphi'(y) = Q(x,y) - \frac{\partial R(x,y)}{\partial y}. \tag{2.49}$$

Равенство (2.49), служащее для нахождения $\varphi'(y)$ (а затем, следовательно, и $\varphi(y)$), формально является невозможным: его левая часть есть функция только одной переменной y, а правая – обеих: x и y. Докажем, что правая часть равенства (2.49) фактически не зависит от аргумента x, т.е. является функцией только y (или, в частности, является постоянной). Для этого достаточно показать, что частная производная по y от правой части равенства (2.49) тождественно равна нулю. Действительно,

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big[\,Q(x,y) - \frac{\partial R(x,y)}{\partial y}\,\Big] = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\Big[\,\frac{\partial R(x,y)}{\partial y}\,\Big] =$$

$$= \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\Big[\,\frac{\partial R(x,y)}{\partial x}\,\Big] = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \equiv 0$$

вследствие соотношение (2.44).

Итак, правая часть равенства (2.49) есть функция только аргумента y (или постоянная). Интегрируя обе части соотношения для $\varphi'(y)$, находим

$$\varphi(y) = \int \Big[\,Q(x,y) - \frac{\partial R(x,y)}{\partial y}\,\Big]\,dy.$$

Подставляя выражение для $\varphi(y)$ в равенство (2.48), получим окончательное соотношение для функции $u(x,y)$:

$$u = R(x,y) + \int \Big[Q(x,y) - \frac{\partial R(x,y)}{\partial y}\Big]\,dy \tag{2.50}$$

(постоянную интегрирования считаем равной 0).

Функцию u можно найти и так:

$$u = S(x,y) + \int \Big[\,P(x,y) - \frac{\partial S(x,y)}{\partial x}\,\Big]\,dx, \tag{2.51}$$

где

$$S(x,y) = \int Q(x,y)\,dy.$$

Пример 2.33. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$(x^2 + y^2 + x)\,dx + (2\,x\,y + \ln y + 1)\,dy = 0, \qquad y > 0.$$

◀ Здесь $P = x^2+y^2+x$, $Q = 2\,x\,y+\ln y+1$, причем $P'_y = 2\,y \equiv Q'_x = 2\,y$, т.е. необходимое условие (2.44) существования полного дифференциала выполнено. Вычисляя

$$R = \int P\,dx = \frac{x^3}{3} + x\,y^2 + \frac{x^2}{2}, \qquad \frac{\partial R}{\partial y} = 2\,x\,y, \qquad Q - \frac{\partial R}{\partial y} = \ln y + 1$$

и интегрируя по частям

$$\int \Big(Q - \frac{\partial R}{\partial y}\Big)\,dy = \int (\ln y + 1)\,dy = \begin{bmatrix} w = \ln y + 1, & dw = \frac{dy}{y} \\ dv = dy, & v = y \end{bmatrix} =$$

$$= w\cdot v - \int v\,dw = y\,\big(\ln y + 1\big) - \int dy = y\,\big(\ln y + 1\big) - y = y\,\ln y,$$

находим функцию

$$u = \frac{x^3}{3} + x\,y^2 + \frac{x^2}{2} + y\,\ln y,$$

а следовательно, и общий интеграл

$$\frac{x^3}{3} + x\,y^2 + \frac{x^2}{2} + y\,\ln y = \mathcal{C}. \qquad \blacktriangleright$$

Пример 2.34. Найти общий интеграл уравнения $(x^3+x\,y^2)\,dx+(x^2\,y+ + y^3)\,dy = 0$.

◀ Здесь $P = x^3 + x\,y^2$, $Q = x^2\,y + y^3$. Проверяем условие (2.44): $P'_y = 2\,x\,y \equiv Q'_x = 2\,x\,y$. Следовательно, решаем уравнение в полных дифференциалах. Выполним следующие выкладки:

$$R = \int P\,dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2\,y^2}{2}, \qquad \frac{\partial R}{\partial y} = x^2\,y, \qquad Q - \frac{\partial R}{\partial y} = y^3,$$

$$\int \Big(Q - \frac{\partial R}{\partial y}\Big)\,dy = \frac{y^4}{4}.$$

Отсюда функция u будет иметь вид

$$u = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2\,y^2}{2} + \frac{y^4}{4}.$$

Тогда общий интеграл рассматриваемого дифференциального уравнения запишется так:

$$\frac{x^4}{4} + \frac{x^2\,y^2}{2} + \frac{y^4}{4} = \mathcal{C}_0,$$

или

$$\left(x^2+y^2\right)^2=\mathcal{C}, \qquad \mathcal{C}\geqslant 0. \qquad \blacktriangleright$$

Пример 2.35. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$\frac{y+\sin x\cdot\cos^2(x\,y)}{\cos^2(x\,y)}\,dx+\left[\frac{x}{\cos^2(x\,y)}+\sin y\right]dy=0,\ \ x\,y\neq\frac{\pi}{2}+\pi\,k,\ \ k\in\mathbb{Z}.$$

◀ Учитывая то, что

$$P=\frac{y+\sin x\cdot\cos^2(x\,y)}{\cos^2(x\,y)}=\frac{y}{\cos^2(x\,y)}+\sin x, \quad Q=\frac{x}{\cos^2(x\,y)}+\sin y,$$

находим

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\cos^2(x\,y)-y\cdot 2\cdot\cos(x\,y)\,\big[-\sin(x\,y)\big]\cdot x}{\cos^4(x\,y)}=\frac{\cos^2(x\,y)+x\,y\cdot\sin(2\,x\,y)}{\cos^4(x\,y)},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\cos^2(x\,y)-x\cdot 2\cdot\cos(x\,y)\,\big[-\sin(x\,y)\big]\cdot y}{\cos^4(x\,y)}=\frac{\cos^2(x\,y)+x\,y\cdot\sin(2\,x\,y)}{\cos^4(x\,y)},$$

т.е. $P'_y\equiv Q'_x$, и условие (2.44) выполнено.

Нетрудно проверить, что реализация инстинктивного желания избавиться от знаменателя $\cos^2(x\,y)$ приведет уравнение к форме, отличной от уравнения в полных дифференциала!

Вычислим

$$R=\int P\,dx=\operatorname{tg}(x\,y)-\cos x, \qquad \frac{\partial R}{\partial y}=\frac{x}{\cos^2(x\,y)}, \qquad Q-\frac{\partial R}{\partial y}=\sin y.$$

Тогда

$$\int\Big(Q-\frac{\partial R}{\partial y}\Big)\,dy=-\cos y$$

и

$$u=\operatorname{tg}(x\,y)-\cos x-\cos y.$$

Отсюда находим общий интеграл

$$\operatorname{tg}(x\,y)-\cos x-\cos y=\mathcal{C}. \qquad \blacktriangleright$$

Пример 2.36. Определить общий интеграл уравнения

$$(x^2 + y - 4)\,dx + (x + y + e^y)\,dy = 0.$$

◀ Коэффициенты этого уравнения таковы: $P = x^2 + y - 4$, $Q = x + y + e^y$. Проверяем условие (2.44): $P'_y = 1 \equiv Q'_x = 1$, т.е. данное уравнение – уравнение в полных дифференциалах. Вычислим следующие функции:

$$R = \int P\,dx = \frac{x^3}{3} + x\,y - 4\,x, \qquad \frac{\partial R}{\partial y} = x, \qquad Q - \frac{\partial R}{\partial y} = y + e^y,$$

$$\int \Big(Q - \frac{\partial R}{\partial y} \Big)\,dy = \frac{y^2}{2} + e^y.$$

Тогда

$$u = \frac{x^3}{3} + x\,y - 4\,x + \frac{y^2}{2} + e^y.$$

Отсюда общий интеграл рассматриваемого дифференциального уравнения примет следующий вид:

$$\frac{x^3}{3} + x\,y - 4\,x + \frac{y^2}{2} + e^y = \mathcal{C}. \qquad ▶$$

Пример 2.37. Проинтегрируем дифференциальное уравнение

$$\big[\,\sin(x\,y) + x\,y\,\cos(x\,y)\,\big]\,dx + x^2\,\cos(x\,y)\,dy = 0,$$

где

$$P = \sin(x\,y) + x\,y\,\cos(x\,y), \qquad Q = x^2\,\cos(x\,y).$$

При этом

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \cos(x\,y)\cdot x + x\cdot\cos(x\,y) - x^2\,y\cdot\sin(x\,y) = 2\,x\cdot\cos(x\,y) - x^2\,y\cdot\sin(x\,y),$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2\,x\cdot\cos(x\,y) - x^2\,y\cdot\sin(x\,y),$$

т.е. $P'_y \equiv Q'_x$, и условие (2.44) выполнено.

Находим

$$S = \int Q\,dy = x\,\sin(x\,y), \quad \frac{\partial S}{\partial x} = \sin(x\,y) + x\,y\cdot\cos(x\,y), \quad P - \frac{\partial S}{\partial x} = 0.$$

Тогда

$$\int \Big(P - \frac{\partial S}{\partial x} \Big)\, dx = 0$$

и

$$u = x \sin(x\, y).$$

Отсюда получим общий интеграл

$$x \sin(x\, y) = \mathcal{C}. \qquad \blacktriangleright$$

2.4.6. Интегрирующий множитель*

Пусть левая часть уравнения (2.43) не является полным дифференциалом. Иногда удается подобрать такую функцию $\mu(x, y)$, после умножения на которую всех членов уравнения левая часть преобразованного уравнения становится полным дифференциалом: $du = \mu\, P\, dx + \mu\, Q\, dy$. Общее решение этого уравнения совпадает с общим решением исходного уравнения. Такая функция $\mu(x, y)$ называется *интегрирующим множителем.*

Воспользуемся условием типа (2.44) для построения уравнения для функции μ. Пусть

$$\frac{\partial}{\partial y}\,(\mu\, P) = \frac{\partial}{\partial x}\,(\mu\, Q).$$

Отсюда

$$Q\,\frac{\partial \mu}{\partial x} - P\,\frac{\partial \mu}{\partial y} = \Big(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\Big)\,\mu,$$

или

$$Q\,\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - P\,\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x},$$

т.е. задача поиска интегрирующего множителя достаточно сложна и сводится к нахождению решения дифференциального уравнения в частных производных, что возможно не всегда. Рассмотрим два частных случая выбора функции $\mu(x, y)$.

1°. Пусть отношение

$$\frac{P'_y - Q'_x}{Q}$$

является функцией только от x. Если обозначить это отношение через $g(x)$, то интегрирующий множитель

$$\mu(x) = \exp\Big[\int g(x)\,dx\Big].$$

2°. Если отношение

$$\frac{P'_y - Q'_x}{P}$$

есть функция $h(y)$ только от y. Тогда интегрирующий множитель

$$\mu(y) = \exp\Big[\int h(y)\,dy\Big].$$

Пример 2.38. Решить уравнение $(x + y^2)\,dx - 2\,x\,y\,dy = 0$.

◄ Здесь $P = x + y^2$, $Q = -2\,x\,y$, а следовательно, $P'_y = 2\,y \neq Q'_x = -2\,y$, т.е. условие (2.44) не выполняется. Поэтому исходное уравнение не является уравнением в полных дифференциалах.

Попытаемся найти интегрирующий множитель. Проверяем первый частный случай:

$$\frac{P'_y - Q'_x}{Q} = \frac{2\,y + 2\,y}{-2\,x\,y} = -\frac{2}{x}$$

– функция только от x. Отсюда следует, что интегрирующий множитель

$$\mu(x) = \exp\Big[\int\Big(-\frac{2}{x}\Big)\,dx\Big] = \exp\Big(\ln\frac{1}{x^2}\Big) = \frac{1}{x^2}.$$

Умножая на $\mu(x)$ обе части рассматриваемого уравнения, получим

$$\frac{x + y^2}{x^2}\,dx - \frac{2\,y}{x}\,dy = 0.$$

Для этого уравнения $\tilde{P} = (x + y^2)/x^2$, $\tilde{Q} = -2\,y/x$, причем $\tilde{P}'_y = 2\,y/x^2 \equiv \tilde{Q}'_x = 2\,y/x^2$, а следовательно, полученное уравнение действительно является уравнением в полных дифференциалах. Вычислим необходимые величины:

$$R = \int \tilde{P}\,dx = \ln|x| - \frac{y^2}{x}, \qquad \frac{\partial R}{\partial y} = -\frac{2\,y}{x}, \qquad \tilde{Q} - \frac{\partial R}{\partial y} = 0.$$

Отсюда находим функцию

$$u = \ln|x| - \frac{y^2}{x}$$

и общий интеграл

$$\ln|x| - \frac{y^2}{x} = \mathcal{C}.$$

Из последнего соотношения можно получить общее решение:

$$y = \pm\sqrt{x\left(\ln|x| - \mathcal{C}\right)}. \qquad \blacktriangleright$$

2.4.7. Нестандартные подстановки и пути*

При интегрировании дифференциальных уравнений большую роль играют подстановки: может быть использована замена как одной из переменных, так и обеих.

1°. Подстановка $z = \ln y$ преобразует уравнение $y\,(x + \ln y) + (x - \ln y)\,y' = 0$ в однородное ОДУ $(x + z) + (x - z)\,y' = 0$.

2°. Двойная замена переменных $x = 1/t$, $y = 1/z$ прреводит уравнение $(a_1\,y^3 + b_1\,x\,y^2 + c_1\,x\,y^3) + (a_2\,x^2\,y + b_2\,x^3 + c_2\,x^3\,y) = 0$ в ОДУ $(a_3\,t + b_3\,z + c_3)\,dt + (a_4\,t + b_4\,z + c_4)\,dz = 0$.

3°. В ряде случаев для решения ОДУ первого порядка, "похожих" на однородные, можно применить подстановку $z = x\,y$.

Пример 2.39. Проинтегрировать дифференциальное уравнение $2\,y' + y^2 - 1/x^2 = 0$ $(x \neq 0)$.

◀ Выполняем рекомендованную подстановку $y = z/x$, $y' = z'/x - z/x^2$. Отсюда получаем

$$2\left(\frac{z'}{x} - \frac{z}{x^2}\right) + \frac{z^2}{x^2} - \frac{1}{x^2} = 0, \quad \text{или} \quad 2\,x\,z' - 2\,z + z^2 - 1 = 0.$$

Преобразуя последнее уравнение, приходим к ОДУ с разделяющимися переменными

$$2\,x\,dz + (z^2 - 2\,z - 1)\,dx = 0.$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$2\int \frac{dz}{z^2 - 2\,z - 1} + \int \frac{dx}{x} + \ln|\mathcal{C}| = 0, \quad \text{или} \quad 2\int \frac{dz}{(z-1)^2 - 2} + \ln|\mathcal{C}\,x| = 0,$$

что приводит к равенству

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,\ln\left|\frac{z - 1 - \sqrt{2}}{z - 1 + \sqrt{2}}\right| + \ln|\mathcal{C}\,x| = 0.$$

Возвращаясь к исходным переменным, получим

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,\ln\left|\frac{x\,y - 1 - \sqrt{2}}{x\,y - 1 + \sqrt{2}}\right| + \ln|\mathcal{C}\,x| = 0. \qquad \blacktriangleright$$

4°. Если $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ – однородное уравнение, а $P(x,y)$ $dx + Q(x,y)\,dy$ – полный дифференциал, то общий интеграл данного уравнения имеет вид: $P(x,y)\,x + Q(x,y)\,y = \mathcal{C}$.

5°. Если в уравнении встречается конструкция типа $x^2 + y^2$, а тем более $\sqrt{x^2 + y^2}$, то можно попробовать перейти к полярным координатам.

Пример 2.40. Найти решение уравнения $y' = \big(a\,\sqrt{x^2 + y^2} - x\big)/y$.

◀ Применим замену: $x = r\,\cos\theta$, $y = r\,\sin\theta$. Отсюда

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{\sin\theta\,dr + r\,\cos\theta\,d\theta}{\cos\theta\,dr - r\,\sin\theta\,d\theta}.$$

Подставив правую часть последнего равенства в исходное уравнение, получим

$$\frac{\sin\theta\,dr + r\,\cos\theta\,d\theta}{\cos\theta\,dr - r\,\sin\theta\,d\theta} = \frac{a\,r - r\,\cos\theta}{r\,\sin\theta}.$$

Сокращая на r числитель и знаменатель дроби в правой части, приводя к общему знаменателю и избавляясь от последнего, приходим к уравнению

$$\big(\sin\theta\,dr + r\,\cos\theta\,d\theta\big)\,\sin\theta = \big(\cos\theta\,dr - r\,\sin\theta\,d\theta\big)\,\big(a - \cos\theta\big),$$

или, раскрывая скобки, получим

$$\sin^2\theta\,dr + r\,\sin\theta\,\cos\theta\,d\theta =$$
$$= a\,\cos\theta\,dr - a\,r\,\sin\theta\,d\theta - \cos^2\theta\,dr + r\,\sin\theta\,\cos\theta\,d\theta.$$

Приводя подобные и используя основное тригонометрическое тождество, находим

$$dr = a\,\cos\theta\,dr - a\,r\,\sin\theta\,d\theta,$$

или

$$\frac{dr}{r} = -\frac{a\,\sin\theta\,d\theta}{1 - a\,\cos\theta},$$

т.е. пришли к уравнению с разделёнными переменными. ▶

5°. Если в уравнении встречаются радикалы

$$\sqrt{a^2 - y^2}, \quad \sqrt{y^2 + a^2}, \quad \sqrt{y^2 - a^2},$$

то рекомендуется применить подстановки:

$$y = a\,\sin z, \quad y = a\,\operatorname{tg} z, \quad y = \frac{a}{\cos z}.$$

6°. Уравнения

$$\bigl[f_1(x) + f_2(x)\,y^m\bigr]\,dx + f_3(x)\,y^{m-1}\,dy = 0,$$
$$\bigl[f_1(y) + f_2(y)\,x^m\bigr]\,dy + f_3(y)\,x^{m-1}\,dx = 0,$$

где $m \neq 0$, приводятся к линейным: для первой формы подстановка $z = y^m$, для второй – $z = x^m$.

7°. Подстановка $z = y/x$ переводит линейное уравнение в линейное, а подстановка $y = x^m\,z^n$ – линейное уравнение в уравнение Бернулли.

2.5. Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной*

2.5.1. Уравнения первого порядка n-й степени относительно y'

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$(y')^n + a_1(x,y)\,(y')^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(x,y)\,y' + a_n(x,y) = 0. \qquad (2.52)$$

Это алгебраическое уравнение n-й степени относительно производной y'. Разрешим его относительно y'. Пусть

$$y' = f_1(x,y), \quad y' = f_2(x,y), \quad \ldots \quad y' = f_k(x,y) \quad (0 \leqslant k \leqslant n)$$

– действительные решения уравнения (2.52). Общий интеграл этого уравнения выразится совокупностью интегралов

$$\Phi_i\big(x, y, \mathcal{C}\big) = 0, \qquad i = 1, 2, ..., k,$$

где $\Phi_i\big(x, y, \mathcal{C}\big) = 0$ есть интеграл уравнения $y' = f_i(x, y)$.

Пример 2.41. Проинтегрировать уравнение $y'^2 - 4\,x\,y' + 2\,y + 2\,x^2 = 0$.

◀ Для этого разрешим уравнение относительно y:

$$y = -\frac{1}{2}\left(y'^2 - 4\,x\,y' + 2\,x^2\right).$$

Обозначим y' через p, где p – параметр. Тогда

$$y = -\frac{1}{2}\left(p^2 - 4\,x\,p + 2\,x^2\right). \tag{2.53}$$

Продифференцируем обе части равенства (2.53) и учтем, что $dy = p\,dx$. Отсюда

$$p\,dx = -\frac{1}{2}\left(2\,p\,dp - 4\,x\,dp - 4\,p\,dx + 4\,x\,dx\right) = \\ = -p\,dp + 2\,x\,dp + 2\,p\,dx - 2\,x\,dx,$$

или

$$-p\,dp + 2\,x\,dp + p\,dx - 2\,x\,dx = 0.$$

Легко можно увидеть, что последнее равенство приводится к виду

$$(2\,x - p)\,(dp - dx) = 0.$$

Приравнивая нулю каждый из сомножителей, получим

$$p = 2\,x,$$
$$p = x + \mathcal{C},$$

что при подстановке в равенство (2.53) дает

$$y = x^2,$$
$$y = -\frac{1}{2}\left[(x + \mathcal{C})^2 - 4\,x\,(x + \mathcal{C}) + 2\,x^2)\right] = \frac{1}{2}\left(x^2 - \mathcal{C}^2\right) + \mathcal{C}\,x. \qquad ▶$$

2.5.2. Уравнения вида $f(y, y') = 0$ и $f(x, y') = 0$

Если уравнения указанного вида легко разрешимы относительно y', то, выражая y' через y или x, получаем ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными.

Рассмотрим случаи, когда такие действия невозможны.

1°. Пусть уравнение $f(y, y') = 0$ разрешимо относительно y:

$$y = \varphi(y').$$

Вводя параметр $p = y'$, получим, что $y = \varphi(p)$. Дифференцируя это равенство и заменяя dy через $p\,dx$, получим

$$p\,dx = \varphi'(p)\,dp,$$

откуда

$$dx = \frac{\varphi'(p)}{p}\,dp \quad \text{и} \quad x = \int \frac{\varphi'(p)}{p}\,dp + \mathcal{C}.$$

В результате общее решение представляется в параметрической форме:

$$x = \int \frac{\varphi'(p)}{p}\,dp + \mathcal{C}, \qquad y = \varphi(p).$$

Пример 2.42. Проинтегрировать уравнение $y = y'^2\,e^{y'}$.

◄ После введения параметра получаем $y = p^2\,e^p \equiv \varphi(p)$. Отсюда

$$x = \int \frac{2\,p\,e^p + p^2\,e^p}{p}\,dp + \mathcal{C} = \int \left(2\,e^p + p\,e^p\right)dp + \mathcal{C},$$

а следовательно, после интегрирования по частям второго слагаемого в подынтегральной функции находим, что

$$x = 2\,e^p + (p-1)\,e^p + \mathcal{C}, \qquad y = p^2\,e^p. \qquad ►$$

2°. Пусть уравнение $f(y, y') = 0$ неразрешимо (или трудно разрешимо) и относительно y, и относительно y', но допускает возможность выражения y и y' через некоторый параметр t:

$$y = \varphi(t), \qquad y' = p = \psi(t).$$

Отсюда $dy = p\,dx = \psi(t)\,dx$. С другой стороны, $dy = \varphi'(t)\,dt$, а следовательно, $\psi(t)\,dx = \varphi'(t)\,dt$. Тогда

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\,dt + \mathcal{C}.$$

Итак, общее решение уравнения в рассматриваемом случае представлено в параметрической форме:

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\,dt + \mathcal{C}, \qquad y = \varphi(t).$$

Пример 2.43. Решить уравнение $y^{2/5} + (y')^{2/5} = a^{2/5}$ $(a > 0)$. В этом случае легко увидеть, что допустимы представления

$$y = \varphi(t) \equiv a\,\cos^5 t, \qquad y' = \psi(t) \equiv a\,\sin^5 t.$$

Поэтому

$$x = \int \frac{(a\,\cos^5 t)'}{a\,\sin^5 t}\,dt + \mathcal{C} = \int \frac{5\,\cos^4 t\,(-\sin t)}{\sin^5 t}\,dt + \mathcal{C} = -5\int \operatorname{ctg}^4 t\,dt + \mathcal{C}.$$

Замечая, что

$$\operatorname{ctg}^4 t = \operatorname{ctg}^2 t \cdot \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} = \operatorname{ctg}^2 t\left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1\right),$$

получим

$$x = -5\int \operatorname{ctg}^4 t\,dt + \mathcal{C} = -5\int \operatorname{ctg}^2 t\left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1\right)dt + \mathcal{C} =$$

$$= \frac{5}{3}\,\operatorname{ctg}^3 t + 5\int \operatorname{ctg}^2 t\,dt + \mathcal{C} = \frac{5}{3}\,\operatorname{ctg}^3 t + 5\int \Big(\frac{1}{\sin^2 t} - 1\Big)\,dt + \mathcal{C} =$$

$$= \frac{5}{3}\,\operatorname{ctg}^3 t - 5\,\operatorname{ctg} t - 5\,t + \mathcal{C}.$$

Итак,

$$x = 5\left(\frac{\operatorname{ctg}^3 t}{3} - \operatorname{ctg} t - t\right) + \mathcal{C}, \qquad y = a\,\cos^5 t. \qquad \blacktriangleright$$

3°. Пусть уравнение $f(x, y') = 0$ разрешимо относительно x:

$$x = \varphi(y').$$

Вводя параметр $p = y'$, получим, что $x = \varphi(p)$. Дифференцируя это равенство и заменяя dx через dy/p, получим

$$\frac{dy}{p} = \varphi'(p)\,dp,$$

откуда

$$dy = p\,\varphi'(p)\,dp \quad \text{и} \quad y = \int p\,\varphi'(p)\,dp + \mathcal{C}.$$

В результате общее решение форме представляется в параметрической форме, сходной со случаем **1°**:

$$x = \varphi(p), \qquad y = \int p\,\varphi'(p)\,dp + \mathcal{C}.$$

Пример 2.44. Решим уравнение $x = y' + \sin y'$. Здесь $\varphi(p) = p + \sin p$. Поэтому

$$y = \int p\,(1 + \cos p)\,dp + \mathcal{C} = \frac{p^2}{2} + \int p\,d(\sin p) + \mathcal{C} =$$
$$= \frac{p^2}{2} + p\,\sin p - \int \sin p\,dp + \mathcal{C} = \frac{p^2}{2} + p\,\sin p + \cos p + \mathcal{C}.$$

Итак, решение уравнения есть

$$x = p + \sin p, \qquad y = \frac{p^2}{2} + p\,\sin p + \cos p + \mathcal{C}. \qquad \blacktriangleright$$

2.5.3. Уравнения Лагранжа и Клеро

Определение 2.22. *Уравнение Лагранжа* имеет вид

$$y = x\,\varphi(y') + \psi(y'). \tag{2.54}$$

Как и в предыдущем пункт, введем параметр $p = y'$. Тогда, дифференцируя по x и заменяя dy через $p\,dx$, приводим рассматриваемое уравнение к линейному относительно x как функции p:

$$p\;dx = \varphi(p)\,dx + x\,\varphi'(p)\,dp + \psi'(p)\,dp,$$

или

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}\,x = -\frac{\psi'(p)}{\varphi(p) - p}.$$

Если найти решение этого уравнения в виде $x = \eta(p, \mathcal{C})$, то общее решение исходного уравнения запишется в параметрической форме так:

$$x = \eta(p, \mathcal{C}), \qquad y = \eta(p, \mathcal{C})\,\varphi(p) + \psi(p).$$

Определение 2.23. *Уравнение Клеро* имеет вид

$$y = x\,y' + \psi(y') \tag{2.55}$$

и представляет собой частный случай уравнения Лагранжа ($\varphi(y') = y'$).

Тогда, действуя по той же схеме, что и при решении уравнения Лагранжа, получим

$$p\,dx = p\,dx + x\,dp + \psi'(p)\,dp,$$

откуда следуют равенства

$$dp = 0, \qquad x = -\psi'(p).$$

Из первого из них получаем $p = \mathcal{C}$, а следовательно, общим решением уравнения Клеро будет функция $y = \mathcal{C}\,x + \psi(\mathcal{C})$.

Решение, которое получается исключением параметра p из соотношений $y = x\,p + \psi(p)$ и $x + \psi'(p) = 0$, будет особым.

Пример 2.45. Проинтегрируем уравнение $y = 2\,x\,y' + \ln y'$ $(y' > 0)$.

◀ Это уравнение Лагранжа. Здесь $\varphi(y') = 2\,y'$, $\psi(y') = \ln y'$. Тогда уравнение для определения x будет иметь вид

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}\,x = -\frac{1}{p^2}.$$

Обозначая $2/p$ через P, а $1/p^2$ – через Q, вычисляем

$$R = \int P\,dp = \ln p^2, \qquad e^R = p^2, \qquad e^{-R} = \frac{1}{p^2},$$

$$\int e^R\,Q\,dp = -p,$$

откуда

$$x = \frac{\mathcal{C} - p}{p^2}, \qquad y = 2\,\frac{\mathcal{C} - p}{p} + \ln p. \qquad \blacktriangleright$$

Пример 2.46. Найти решение уравнения $y = x\,y' - y'^2$.

◀ Данное уравнение является уравнением Клеро. Введем параметр $p = y'$. Тогда получим

$$\begin{aligned} &y = x\,p - p^2, \\ &dy = x\,dp + p\,dx - 2\,p\,dp, \\ &dy = p\,dx, \end{aligned}$$

следовательно,

$$x\,dp - 2\,p\,dp = 0, \qquad (x - 2\,p)\,dp = 0.$$

Если $x - 2\,p = 0$, то

$$\begin{aligned} &x = 2\,p, \\ &y = p^2, \end{aligned}$$

или $y = x^2/4$.

Из $dp = 0$ следует, что $p = \mathcal{C}$. Тогда $y = \mathcal{C}\,x - \mathcal{C}^2$, где $\mathcal{C}$ – произвольная постоянная. ▶

2.6. Уравнение Риккати*

Определение 2.24. Дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = a(x)\,y^2 + b(x)\,y + c(x), \tag{2.56}$$

где $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ – известные функции, называется *уравнением Риккати.*

В общем случае, как показал Лиувилль, уравнение (2.56) в квадратурах не разрешимо, но есть несколько форм уравнения Риккати, решения которых несложно найти.

1°. Если $a(x) \equiv 0$, то уравнение Риккати вырождается в линейное уравнение.

2°. Если $c(x) \equiv 0$, то уравнение Риккати вырождается в уравнение Бернулли.

3°. Если коэффициенты a, b, c постоянны, то уравнение (2.56) допускает разделение переменных, что приводит к общему интегралу следующего вида:

$$x + \mathcal{C} = \int \frac{dy}{a\,y^2 + b\,y + c}.$$

4°. Уравнение

$$y' = \lambda(x)\,(a\,y^2 + b\,y + c), \tag{2.57}$$

где a, b, c постоянны, причем $a^2 + c^2 \neq 0$ (обозначим эти условия через C), является уравнением с разделяющимися переменными.

5°. Уравнение

$$y' = a\,\frac{y^2}{x^2} + b\,\frac{y}{x} + c$$

при выполнении условий C является однородным уравнением.

6°. Уравнение

$$y' = a\,\frac{y^2}{x} + \frac{1}{2}\,\frac{y}{x} + c$$

при выполнении условий C приводится к уравнению (2.57) заменой $y = z\,\sqrt{x}$, где z – новая неизвестная функция.

7°. Уравнение

$$y' = A\,y^2 + \frac{B}{x}\,y + \frac{C}{x^2},$$

где A, B, C – постоянные числа, заменой $y = z/x$, где z – новая неизвестная функция, приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Рассмотрим свойства уравнения Риккати и его решений.

Свойство 2.1. Если функции $a(x)$, $b(x)$ и $c(x)$ определены и непрерывны на интервале (x_*, x^*) $(-\infty \leq x_* < x^* \leq +\infty)$, причем $a(x) \not\equiv 0$ и $c(x) \not\equiv 0$, то на этом интервале уравнение Риккати (2.56) имеет единственное решение $y = \varphi(x)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$, где $x \in (x_*, x^*)$, $-\infty < y < +\infty$.

Поэтому уравнение Риккати не имеет особых решений, а всякое его решение – частное.

Свойство 2.2. Если известно какое-либо частное решение y_* уравнения (2.56), то его общее решение может быть найдено с помощью квадратур.

◀ Пусть $y(x) = y_*(x) + z(x)$, где $z(x)$ – новая неизвестная функция. Подставляя это выражение для y в уравнение (2.56), получим:

$$y_*' + z' = a(x)\,(y_*^2 + 2\,y_*\,z + z^2) + b(x)\,(y_* + z) + c(x),$$

откуда с учетом того, что y_* – решение (2.56), приходим к уравнению для новой неизвестной функции:

$$z' = a(x)\,(2\,y_*\,z + z^2) + b(x)\,z,$$

или

$$z' = a(x)\,z^2 + \big[2\,a(x)\,y_* + b(x)\big]\,z. \tag{2.58}$$

Это уравнение является частным случаем уравнения Бернулли. ▶

Пример 2.47. Решить уравнение Риккати $y' = -y^2 + 2\,y\,\sin x - \sin^2 x + \cos x$, если известно его частное решение $y_* = \sin x$.

◀ Коэффициентами этого уравнения будут

$$a = -1, \qquad b = 2\,\sin x, \qquad c = -\sin^2 x + \cos x.$$

Тогда уравнение для новой неизвестной функции z примет следующий вид:

$$z' = -z^2 + (-2\,\sin x + 2\,\sin x)\,z, \quad \text{или} \quad \frac{dz}{dx} = -z^2.$$

Разделяя переменные, получим

$$-\int \frac{dz}{z^2} = x + \mathcal{C},$$

откуда следует соотношение

$$\frac{1}{z} = x + \mathcal{C}.$$

Выражая z из последнего равенства, окончательно будем иметь

$$y = \sin x + \frac{1}{x + \mathcal{C}}. \qquad ▶$$

Замечание. В некоторых случаях более удобным может оказаться переход к новой неизвестной функции по формуле $y(x) = y_*(x) + 1/z(x)$, который уравнение Риккати превращает в линейное следующего вида:

$$z' - (2\,a\,y_* + b)\,z = a.$$

Свойство 2.3. Если известны два частных решения y_{*1} и y_{*2} уравнения (2.56), то его общий интеграл находится одной квадратурой.

◀ Вследствие того, что y_{*1} – частное решение (2.56), верно тождество:

$$y'_{*1} \equiv a(x)\, y_{*1}^2 + b(x)\, y_{*1} + c(x),$$

а поэтому уравнение (2.56) можно представить в виде:

$$\frac{1}{y - y_{*1}}\,\frac{d(y - y_{*1})}{dx} = a(x)\,(y + y_{*1}) + b(x),$$

или

$$\frac{d}{dx}\Big[\ln(y - y_{*1})\Big] = a(x)\,(y + y_{*1}) + b(x). \tag{2.59}$$

Действуя аналогичным образом для y_{*2}, находим, что

$$\frac{d}{dx}\Big[\ln(y - y_{*2})\Big] = a(x)\,(y + y_{*2}) + b(x). \tag{2.60}$$

Если теперь из (2.59) вычесть уравнение (2.60), то получим

$$\frac{d}{dx}\left[\ln\frac{y - y_{*1}}{y - y_{*2}}\right] = a(x)\,(y_{*1} - y_{*2}),$$

откуда следует, что

$$\frac{y - y_{*1}}{y - y_{*2}} = \mathcal{C}\,\exp\left[\int\big[\,a(x)\,(y_{*1} - y_{*2})\,\big]\,dx\right]. \qquad \blacktriangleright \tag{2.61}$$

Пример 2.48. Уравнение

$$y' = y^2 + (2 - \operatorname{ctg} x - 2\,\operatorname{cosec}^2 x - \operatorname{tg} x)\,y + \frac{\cos x\,(\cos x + \cos 3x - 2\,\sin x)}{2\,\sin^4 x}$$

имеет следующие частные решения:

$$y_{*1} = \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}^2 x, \qquad y_{*2} = -\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}^2 x.$$

Тогда по формуле (2.61) общий интеграл этого уравнения будет

$$\frac{y - \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}^2 x}{y + \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}^2 x} = \mathcal{C}\,e^{\int 2\,\operatorname{ctg} x\,dx} \equiv \mathcal{C}\,\sin^2 x,$$

или

$$y = -\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}^2 x + \frac{2 \operatorname{ctg} x}{1 - \mathcal{C} \sin^2 x}. \qquad \blacktriangleright$$

Свойство 2.4. Уравнение Риккати сохраняет свой вид при любой замене независимой переменной $x = \phi(t)$, где $\phi(t)$ – любая непрерывно дифференцируемая функция, определенная на интервале (t_*, t^*), причем $\phi'(t) \neq 0$ на (t_*, t^*).

Свойство 2.5. Если $a''(x)$ и $b'(x)$ существуют и непрерывны, то на некотором интервале изменения x уравнение Риккати линейной заменой неизвестной функции может быть приведено к каноническому виду:

$$\tilde{y}' = \pm\,\tilde{y}^2 + \tilde{c}(x).$$

2.7. Огибающая семейства гладких кривых*

Рассмотрим на плоскости $\mathbb{R}^2$ однопараметрическое семейство гладких кривых

$$\varPhi(x, y, \mathcal{C}) = 0, \tag{2.62}$$

где $\mathcal{C}$ – вещественный параметр.

Определение 2.25. Гладкая кривая $L \subset \mathbb{R}^2$ называется *огибающей семейства кривых*, если она в каждой своей точке имеет касательную, общую с одной из кривых этого семейства, но не совпадает ни с одной кривой из (2.62).

Пример 2.49. Для семейства кривых

$$y = \cos(x - \mathcal{C}), \tag{2.63}$$

где $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$, прямые $y = 1$ и $y = -1$ будут огибающими, так как они в каждой своей точке касаются одной из кривых данного семейства и не совпадают ни с одной из них. ►

Теорема 2.3. Если соотношение (2.62) является общим интегралом ОДУ

$$F(x, y, y') = 0, \tag{2.64}$$

а L – огибающая семейства кривых (2.62), то L – особая интегральная кривая уравнения (2.64).

◀ Согласно определению, в каждой точке огибающей L направление касательной совпадает с направлением касательной к одной из интегральных кривых (2.62) уравнения (2.64), или, что то же самое, с направлением поля, задаваемого ОДУ (2.64). Отсюда следует, что L – интегральная кривая уравнения (2.64). А так как через каждую точку кривой проходит не менее двух интегральных кривых (это по крайней мере сама кривая L и одна из интегральных кривых (2.62)), то L – особая интегральная кривая ОДУ (2.64). ▶

Пример 2.50. Для семейства кривых

$$\left(y'_x\right)^2 + y^2 = 1 \tag{2.65}$$

имеет общее решение (2.63). Так как прямые $y = \pm 1$ являются огибающими семейства интегральных кривых (2.63), то они согласно теореме представляют собой особые интегральные прямые уравнения (2.64). ▶

Теорема 2.4 (необходимые условия существования огибающей). Если функция $\Phi(x, y, \mathcal{C})$ непрерывна вместе со своими частными производными по x, y, $\mathcal{C}$ в некоторой области $\mathscr{A} \subset \mathbb{R}^3$ и семейство кривых (2.62) имеет огибающую L, в каждой точке которой производные $\Phi'_x(x, y, \mathcal{C})$ и $\Phi'_y(x, y, \mathcal{C})$ одновременно не обращаются в нуль, то координаты огибающей удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \Phi(x, y, \mathcal{C}) = 0, \\ \Phi'_{\mathcal{C}}(x, y, \mathcal{C}) = 0. \end{cases} \tag{2.66}$$

Определение 2.26. Кривая L, координаты которой удовлетворяют системе уравнений (2.66), называется *$\mathcal{C}$-дискриминантной кривой семейства* (2.62).

Из теоремы 2.4 следует, что огибающая семейства гладких кривых (2.62) является $\mathcal{C}$-дискриминантной кривой или одной из ее ветвей. Однако не всякая $\mathcal{C}$-дискриминантная кривая семейства (2.62) будет огибающей этого семейства, что видно из следующего примера.

Пример 2.51. Семейство полукубических парабол

$$\Phi(x, y, \mathcal{C}) \equiv (y + \mathcal{C})^2 - x^3 = 0$$

имеет $\mathcal{C}$-дискриминантную кривую $x = 0$, которая не является огибающей этого семейства кривых. ▶

Теорема 2.5 (достаточные условия существования огибающей). Если в каждой точке гладкой кривой

$$\ell = \{\,(x, y \,|\, x = \varphi(t),\ y = \psi(t)\,\}, \qquad t \in \langle \alpha, \beta \rangle,$$

выполняются тождества

$$\begin{cases} \Phi\big(\varphi(t), \psi(t), \mathcal{C}(t)\big) \equiv 0, \\ \Phi'_{\mathcal{C}}\big(\varphi(t), \psi(t), \mathcal{C}(t)\big) \equiv 0, \\ \big|\Phi'_x\big(\varphi(t), \psi(t), \mathcal{C}(t)\big)\big| + \big|\Phi'_y\big(\varphi(t), \psi(t), \mathcal{C}(t)\big)\big| \neq 0, \end{cases} \tag{2.67}$$

то эта кривая ℓ является огибающей семейства гладких кривых (2.62).

Пример 2.52. Прямая $y = -x$ является огибающей семейства гладких кривых

$$y + x - (x + \mathcal{C})^3 = 0,$$

где $\mathcal{C}$ – вещественный параметр. Действительно, система (2.67) в этом случае имеет вид

$$\begin{cases} y + x - (x + \mathcal{C})^3 = 0, \\ -3\,(x + \mathcal{C})^2 = 0, \\ \big|1 - 3\,(x + \mathcal{C})^2\big| + \big|1\big| \neq 0. \end{cases} \tag{2.68}$$

Из первых двух уравнений находим, что $\mathcal{C} = -x$, $y = -x$. Так как последнее неравенство при этих значениях выполняется, то прямая $y = -x$ – огибающая данного семейства кривых. ▶

Из теоремы 2.51 следует второй метод нахождения особых интегральных кривых для ОДУ первого порядка, не разрешенного относительно производной, а именно, нахождение огибающих семейства гладких интегральных кривых, задаваемого общим интегралом этого уравнения.

2.8. Доказательство теоремы Пикара*

Прежде чем привести доказательство теоремы (обозначения соответствуют начальной части подраздела 2.1) проанализируем существо *условия Липшица.*

Смысл этого условия легко понять, если представить его в следующем виде:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|f(x, y_1) - f(x, y_2)|}{|y_1 - y_2|} \leqslant L. \tag{2.69}$$

При некотором фиксированном значении x_* переменной x, функция f является функцией от переменной y: $\widetilde{f}(y) = f(x_*, y)$. Рассмотрим график этой функции. Возьмем две точки, принадлежащие области $\mathscr{D}$, на этом графике и проведем через них прямую. Тогда угол α между прямой и осью OY ограничен некоторым значением $\operatorname{arctg} L$, которое меньше $\pi/2$. При таком ограничении график функции $\widetilde{f}$ не имеет вертикальных касательных и скачков, а в тех точках, где существует частная производная $\widetilde{f}'_y$, она ограничена:

$$\left| \frac{\partial f(x_*, y)}{\partial y} \right| = \left| \lim_{y \to y_2} \frac{f(x,y) - f(x,y_2)}{y - y_2} \right| \leqslant L. \tag{2.70}$$

Теорема 2.6. Если в области $\mathscr{D}$ функция f имеет непрерывную частную производную f'_y, то в этой области выполняется условие Липшица (2.6).

◀ Для доказательства заметим, что поскольку частная производная f'_y непрерывна в замкнутой области, то она ограничена: $|f'_y| \leqslant L$. По теореме Лагранжа о конечных приращениях имеем

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) = f'_y\big(x, y_1 + \theta\,(y_1 - y_2)\big)\,(y_1 - y_2), \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \big|f(x, y_1) - f(x, y_2)\big| = \Big|f'_y\big(x, y_1 + \theta\,(y_1 - y_2)\big)\,(y_1 - y_2)\Big| \leqslant \\ \leqslant \Big|f'_y\big(x, y_1 + \theta\,(y_1 - y_2)\big)\Big|\,\big|y_1 - y_2\big| \leqslant L\,\big|y_1 - y_2\big|. \quad ▶ \end{aligned}$$

Теперь перейдем к доказательству теоремы Пеано. Оно будет состоять из четырех частей.

1°. Доказательство существования решения

Приведем исходное уравнение (2.2) с начальным условием (2.5) к интегральному уравнению. Левая и правая части (2.2) являются функциями от x. Заменим x на t:

$$\frac{dy(t)}{dt} = f\big(t, y(t)\big).$$

Проинтегрируем обе части этого уравнения по t от x до x_0:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dy(t)}{dt}\,dt = \int_{x_0}^{x} dy(t) = y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f\big(t, y(t)\big)\,dt.$$

Воспользуемся начальным условием $y(x_0) = y_0$. В результате получим интегральное уравнение:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\bigl(t, y(t)\bigr)\, dt. \tag{2.71}$$

Покажем, что интегральное уравнение (2.71) эквивалентно дифференциальному уравнению (2.2) с начальным условием (2.5). Для этого нужно показать, что из (2.2) и (2.5) следует (2.71) и из (2.71) следуют (2.2) и (2.5). То, что из (2.2) и (2.5) следует (2.71) было показано ранее. Осталось показать, что из (2.71) следуют (2.2) и (2.5). Для этого подставим $x = x_0$ в (2.71). Получим начальное условие (2.5). Продифференцировав обе части уравнения (2.71) по x, получим уравнение (2.2).

Далее будем искать решение уравнения (2.71) с помощью *последовательных приближений Пикара.* Для этого определим последовательность функций $\{y^{[k]}(x)\}$, $k = 0,\ 1,\ 2,\ ...,\ n,\ ...$, переменной x по формулам:

$$y^{[0]}(x) = y_0, \tag{2.72}$$

$$y^{[k]}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\bigl(t, y^{[k-1]}(t)\bigr)\, dt, \qquad k = 1, 2, ..., n. \tag{2.73}$$

Предполагается, что при $n \to \infty$ приближения $y^{[n]}(x)$ стремятся к решению уравнения (2.71):

$$Y(x) = \lim_{n\to\infty} y^{[n]}(x), \tag{2.74}$$

где $Y(x)$ – это самое решение. Если это будет доказано, то будет доказано и существование решения.

Доказательство существования решения будет проводиться в два этапа:

1) сначала доказывается то, что предел (2.74) существует;
2) затем то, что $Y(x)$ удовлетворяет уравнению (2.71):

$$Y(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f\bigl(t, Y(t)\bigr)\, dt.$$

2°. Доказательство существования предела $y^{[n]}(x)$ при $n \to \infty$

Представим последовательные приближения (2.72), (2.73) в виде n-х частичных сумм функционального ряда:

$$y^{[n]}(x) = y^{[0]}(x) + \bigl[y^{[1]}(x) - y^{[0]}(x)\bigr] + \bigl[y^{[2]}(x) - y^{[1]}(x)\bigr] + ... +$$

$$+ \left[y^{[n-1]}(x) - y^{[n-2]}(x)\right] + \left[y^{[n]}(x) - y^{[n-1]}(x)\right].$$

Таким образом, для доказательства существования предела $y^{[n]}(x)$ при $n \to \infty$ нужно показать, что ряд

$$y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[y^{[k]}(x) - y^{[k-1]}(x)\right] \tag{2.75}$$

сходится на отрезке $|x - x_0| \leqslant h = \min\bigl(a, b/M\bigr)$.

Замечание. Далее основные выкладки проводятся для случая $x \geqslant x_0$. Если же $x < x_0$, то при первом вхождении интеграла под знак модуля меняем пределы интегрирования местами. Результат будет тот же, что и в первом случае.

Сначала докажем, что при $|x - x_0| \leqslant h$ последовательные приближения $y^{[k]}(x)$ принадлежат интервалу $|y - y_0| \leqslant b$. Действительно, при $k = 1$ имеем

$$\left|y^{[1]}(x) - y_0\right| = \left|\int_{x_0}^{x} f\bigl(t, y_0\bigr)\,dt\right| \leqslant \int_{x_0}^{x} \left|f\bigl(t, y_0\bigr)\right| dt \leqslant$$
$$\leqslant \int_{x_0}^{x} M\,dt = M\,|x - x_0| \leqslant M\,h.$$

Поскольку h есть наименьшее из двух чисел a и b/M, то $h \leqslant b/M$ и $\left|y^{[1]}(x) - y_0\right| \leqslant b$.

Далее, поскольку $y^{[1]}(x)$ принадлежит интервалу $\left|y^{[1]}(x) - y_0\right| \leqslant b$, то $\left|f\bigl(x, y^{[1]}(x)\bigr)\right| \leqslant M$. Тогда аналогично предыдущему

$$\left|y^{[2]}(x) - y_0\right| = \left|\int_{x_0}^{x} f\bigl(t, y^{[1]}(y)\bigr)\,dt\right| \leqslant M\,h.$$

Отсюда $\left|y^{[2]}(x) - y_0\right| \leqslant b$.

Далее, по индукции, поскольку функция $y^{[k-1]}(x)$ принадлежит интервалу $\left|y^{[k-1]}(x) - y_0\right| \leqslant b$, то $\left|f\bigl(x, y^{[k-1]}(x)\bigr)\right| \leqslant M$ и

$$\left|y^{[k]}(x) - y_0\right| = \left|\int_{x_0}^{x} f\bigl(t, y^{[k-1]}(y)\bigr)\,dt\right| \leqslant M\,h,$$

что влечет $\left|y^{[k]}(x) - y_0\right| \leqslant b$.

Итак, мы доказали, что последовательные приближения $y^{[k]}(x)$ принадлежат интервалу $\left|y^{[k]}(x) - y_0\right| \leqslant b$. Теперь можно оценить члены ряда (2.75), применяя условие Липшица.

Для первого члена имеем

$$\big|y^{[1]}(x) - y_0\big| = \Big|\int_{x_0}^{x} f\big(t, y_0\big)\,dt\Big| \leqslant \int_{x_0}^{x} \big|f\big(t, y_0\big)\big|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{x_0}^{x} M\,dt = M\,|x - x_0|,$$

т.е.

$$\big|y^{[1]}(x) - y_0\big| \leqslant M\,|x - x_0|. \tag{2.76}$$

Для второго члена применяем условие Липшица и оценку (2.76):

$$\big|y^{[2]}(x) - y^{[1]}(x)\big| = \Big|\int_{x_0}^{x} \big[f\big(t, y^{[1]}(t)\big) - f\big(t, y_0\big)\big]\,dt\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{x_0}^{x} \big|f\big(t, y^{[1]}(t)\big) - f\big(t, y_0\big)\big|\,dt \leqslant L \int_{x_0}^{x} \big|y^{[1]}(t) - y_0\big|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant L\,M \int_{x_0}^{x} \big|t - x_0\big|\,dt = L\,M \int_{x_0}^{x} \big(t - x_0\big)\,dt = \frac{L\,M}{1\cdot 2}\,\big(x - x_0\big)^2 = \frac{L\,M}{2!}\,|x - x_0|^2,$$

т.е.

$$\big|y^{[2]}(x) - y^{[1]}(x)\big| \leqslant \frac{L\,M}{2!}\,|x - x_0|^2. \tag{2.77}$$

Для третьего члена также используем условие Липшица и оценку (2.77):

$$\big|y^{[3]}(x) - y^{[2]}(x)\big| = \Big|\int_{x_0}^{x} \big[f\big(t, y^{[2]}(t)\big) - f\big(t, y^{[1]}(t)\big)\big]\,dt\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{x_0}^{x} \big|f\big(t, y^{[2]}(t)\big) - f\big(t, y^{[1]}(t)\big)\big|\,dt \leqslant L \int_{x_0}^{x} \big|y^{[2]}(t) - y^{[1]}(t)\big|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant L^2\,M \int_{x_0}^{x} \big|t - x_0\big|^2\,dt = L^2\,M \int_{x_0}^{x} \big(t - x_0\big)^2\,dt =$$

$$= \frac{L^2\,M}{3!}\,\big(x - x_0\big)^3 = \frac{L^2\,M}{3!}\,|x - x_0|^3,$$

т.е.

$$\big|y^{[3]}(x) - y^{[2]}(x)\big| \leqslant \frac{L^2\,M}{3!}\,|x - x_0|^3. \tag{2.78}$$

Далее применяем метод математической индукции. Пусть

$$\left|y^{[k]}(x) - y^{[k-1]}(x)\right| \leqslant \frac{L^{k-1}\,M}{k!}\,|x-x_0|^k. \tag{2.79}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\left|y^{[k+1]}(x) - y^{[k]}(x)\right| &= \left|\int_{x_0}^{x}\left[f\bigl(t, y^{[k]}(t)\bigr) - f\bigl(t, y^{[k-1]}(t)\bigr)\right]dt\right| \leqslant \\ &\leqslant \int_{x_0}^{x}\left|f\bigl(t, y^{[k]}(t)\bigr) - f\bigl(t, y^{[k-1]}(t)\bigr)\right|dt \leqslant L\int_{x_0}^{x}\left|y^{[k]}(t) - y^{[k-1]}(t)\right|dt \leqslant \\ &\leqslant L^k\,M\int_{x_0}^{x}\left|t-x_0\right|^k dt = L^k\,M\int_{x_0}^{x}\bigl(t-x_0\bigr)^k dt = \\ &= \frac{L^k\,M}{(k+1)!}\bigl(x-x_0\bigr)^{k+1} = \frac{L^k\,M}{(k+1)!}\,|x-x_0|^{k+1},\end{aligned}$$

т.е.

$$\left|y^{[k+1]}(x) - y^{[k]}(x)\right| \leqslant \frac{L^k\,M}{(k+1)!}\,|x-x_0|^{k+1}. \tag{2.80}$$

Итак, поскольку (2.79) справедливо для $k = 1$ и из (2.79) следует (2.80), то (2.79) выполняется для любых k.

Запишем ряд (2.75) в виде

$$y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x), \tag{2.81}$$

где $u_k(x) = y^{[k]}(x) - y^{[k-1]}(x)$. Применим (2.79) и заменим $|x - x_0|$ наибольшим допустимым значением h:

$$\left|u_k(x)\right| = \left|y^{[k]}(x) - y^{[k-1]}(x)\right| \leqslant \frac{L^{k-1}\,M}{k!}\,|x-x_0|^k \leqslant \frac{L^{k-1}\,M}{k!}\,h^k.$$

Тогда каждый член ряда (2.81) ограничен по модулю членом ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{L^{k-1}\,M}{k!}\,h^k. \tag{2.82}$$

Исследуем ряд (2.82) на сходимость. Для этого применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{L^n\,M\,h^{n+1}\,n!}{(n+1)!\,L^{n-1}\,M\,h^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{L\,h}{n+1} = 0 < 1.$$

Итак, ряд (2.82) сходится. Поскольку все члены ряда (2.81) начиная со второго, по абсолютной величине меньше членов сходящегося ряда (2.82), то согласно критерия Вейерштрасса ряд (2.81) сходится равномерно для всех x, удовлетворяющих условию $|x - x_0| \leqslant h$. Поскольку интеграл есть непрерывная функция верхнего предела, то каждый член ряда (2.81) есть непрерывная функция от x. Поэтому предел

$$Y(x) = \lim_{n\to\infty} y^{[n]}(x) \tag{2.83}$$

существует и является непрерывной функцией от x.

3°. Доказательство того, что $Y(x)$ является решением уравнения (2.71)

Рассмотрим уравнение (2.73):

$$y^{[k]}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y^{[k-1]}(t)\big)\, dt, \qquad k = 1, 2, ..., n.$$

Докажем, что при $k \to +\infty$, это уравнение стремится к уравнению

$$Y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, Y(t)\big)\, dt. \tag{2.84}$$

В силу (2.83) левая часть уравнения (2.73) стремится к $Y(x)$. Теперь покажем, что

$$\lim_{k\to\infty} \int_{x_0}^{x} f\big(t, y^{[k-1]}(t)\big)\, dt = \int_{x_0}^{x} f\big(t, Y(t)\big)\, dt.$$

Для этого перепишем правую часть уравнения (2.73):

$$\int_{x_0}^{x} f\big(t, y^{[k-1]}(t)\big)\, dt = \int_{x_0}^{x} f\big(t, Y(t)\big)\, dt - \int_{x_0}^{x} \left[f\big(t, Y(t)\big) - f\big(t, y^{[k-1]}(t)\big)\right] dt.$$

Далее заметим, что, поскольку все $y^{[k]}(t)$ принадлежат закрытому отрезку $\big|y^{[k]}(x) - y_0\big| \leqslant b$, то и $Y(x)$ принадлежит этому отрезку: $\big|Y(x) - y_0\big| \leqslant b$. Поэтому допустимо применить условие Липшица.

Оценим абсолютную величину второго интеграла:

$$\Big| \int_{x_0}^{x} \left[f\big(t, Y(t)\big) - f\big(t, y^{[k-1]}(t)\big)\right] dt\Big| \leqslant$$
$$\leqslant \int_{x_0}^{x} \big|f\big(t, Y(t)\big) - f\big(t, y^{[k-1]}(t)\big)\big|\, dt \leqslant L \int_{x_0}^{x} \big|Y(t) - y^{[k-1]}(t)\big|\, dt.$$

Поскольку при $k \to \infty$ последовательность сходится к $Y(x)$ равномерно, то для любого положительного числа ε можно указать такое натуральное число N, что для всех $k-1 > N$ будет верно неравенство $\left|Y(t) - y^{[k-1]}(t)\right| < \varepsilon$. Тогда

$$L \int_{x_0}^{x} \left|Y(t) - y^{[k-1]}(t)\right| dt \leqslant L\,\varepsilon \int_{x_0}^{x} dt \leqslant L\,\varepsilon\, h.$$

Поскольку ε произвольно, то

$$\lim_{k\to\infty} \int_{x_0}^{x} \left[f\bigl(t, Y(t)\bigr) - f\bigl(t, y^{[k-1]}(t)\bigr)\right] dt = 0.$$

Поэтому

$$\lim_{k\to\infty} \int_{x_0}^{x} f\bigl(t, y^{[k-1]}(t)\bigr)\, dt = \int_{x_0}^{x} f\bigl(t, Y(t)\bigr)\, dt.$$

То есть при $k \to \infty$ уравнение (2.73) принимает вид (2.84).

4°. Доказательство единственности решения

Предположим, что уравнение (2.71)

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\bigl(t, y(t)\bigr)\, dt,$$

имеет два решения $Y_1(x)$ и $Y_2(x)$, различающиеся в некоторой точке x_*, принадлежащей интервалу $|x_* - x_0| \leqslant h$. Рассмотрим функцию $Z(x) = Y_1(x) - Y_2(x)$. Будем считать, что $Z(x_*) > 0$. В противном случае поменяем местами $Y_1(x)$ и $Y_2(x)$.

Поскольку $Y_1(x)$ и $Y_2(x)$ непрерывны, то и $Z(x)$ – непрерывная функция. Поэтому она отлична от нуля в некотором интервале, содержащем точку x_*: $Z(x) > 0$ при $x_{01} < x < x_{02}$.

Вследствие того что $Y_1(x_0) = Y_2(x_0) = y_0$, $Z(x_0) = 0$, т.е. точка x_0 не принадлежит интервалу $x_{01} < x < x_{02}$.

Если $x_{01} > x_0$, то преобразуем уравнение (2.71) следующим образом:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x_{01}} f\bigl(t, y(t)\bigr)\, dt + \int_{x_{01}}^{x} f\bigl(t, y(t)\bigr)\, dt = y_{01} + \int_{x_{01}}^{x} f\bigl(t, y(t)\bigr)\, dt,$$

где

$$y_{01} = y_0 + \int_{x_0}^{x_{01}} f\bigl(t, y(t)\bigr)\, dt.$$

Если переобозначим постоянные: $x_{01} \mapsto x_0$; $y_{01} \mapsto y_0$, то получим задачу (2.71), для которой $Z(x_0) = 0$, $Z(x) > 0$ при $x_0 < x < x_2$, где x_2 – некоторое число, не превосходящее $x_0 + h$.

Если $x_{02} < x_0$, то поступаем аналогично:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x_{02}} f\big(t, y(t)\big)\, dt + \int_{x_{02}}^{x} f\big(t, y(t)\big)\, dt = y_{02} + \int_{x_{02}}^{x} f\big(t, y(t)\big)\, dt.$$

Переобозначим постоянные: $x_{02} \to x_0$; $y_{02} \to y_0$. Получим задачу (2.71), для которой $Z(x_0) = 0$, $Z(x) > 0$ при $x_1 < x < x_0$, где x_1 – некоторое число, не меньшее $x_0 - h$.

Итак, имеем $Z(x_0) = 0$; $Z(x) > 0$ при $x_0 < x < x_2$ (или при $x_1 < x < x_0$).

Далее, выберем произвольное положительное число $\varepsilon < x_2 - x_0$ (или $\varepsilon < x_0 - x_1$) и рассмотрим отрезок $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \varepsilon$ (или $x_0 - \varepsilon \leqslant x \leqslant x_0$). Поскольку функция $Z(x)$ непрерывна, она достигает наибольшего значения (Z_{max}) в одной из точек (x_{max}) этого отрезка: $x_0 < x_{max} \leqslant x_0 + \varepsilon$ (или $x_0 - \varepsilon \leqslant x_{max} < x_0$).

Оценим Z_{max}, применяя уравнение (2.71) и условие Липшица:

$$\begin{aligned} Z_{max} = Z(x_{max}) = Y_1(x_{max}) - Y_2(x_{max}) = \\ = \int_{x_0}^{x_{max}} \big[f\big(t, Y_1(t)\big) - f\big(t, Y_2(t)\big)\big]\, dt \leqslant \\ \leqslant \int_{x_0}^{x_{max}} \big|f\big(t, Y_1(t)\big) - f\big(t, Y_2(t)\big|\, dt \leqslant L \int_{x_0}^{x_{max}} \big|Y_1(t) - Y_2(t)\big|\, dt = \\ = L \int_{x_0}^{x_{max}} Z(t)\, dt \leqslant L \int_{x_0}^{x_{max}} Z_{max}\, dt = L\, Z_{max}\, \varepsilon, \end{aligned}$$

т.е. $Z_{max} \leqslant L\, Z_{max}\, \varepsilon$. Поскольку $Z_{max} \neq 0$, то разделим обе части последнего неравенства на Z_{max}: $1 \leqslant L\, \varepsilon$. Возникает противоречие, поскольку при $\varepsilon < 1/L$ это неравенство не выполняется. Следовательно, $Z(x)$ не может иметь отличных от нуля значений. Поэтому $Y_1(x) = Y_2(x)$, что и требовалось доказать. ▶

2.9. Упражнения

Аудиторные занятия

1°. С помощью изоклин начертить (приближенно) решения данных уравнений:

01. $y' = y - x^2$. 02. $y\,(y' + x) = 1$. 03. $y' = \dfrac{y}{x + y}$. 04. $x\,y' + y = 0$.

2°. Решить уравнения с разделяющимися переменными:

01. $x\,y\,dx + (x+1)\,dy = 0.$
02. $\sqrt{y^2+1}\,dx = x\,y\,dy.$
03. $(x^2-1)\,y' + 2\,x\,y^2 = 0,\ y(0) = 1.$
04. $y' = 3\,\sqrt[3]{y^2},\ y(2) = 0.$
05. $y'\ \operatorname{ctg} x + y = 2,\ y(0) = -1.$
06. $x\,y' + y = y^2,\ y(1) = 0{,}5.$
07. $2\,x^2\,y\,y' + y^2 = 2.$
08. $y' - x\,y^2 = 2\,x\,y.$
09. $e^{-y}\left(1 + \dfrac{dy}{dx}\right) = 1.$
10. $y' = 10^{x+y}.$
11. $(x+2\,y)\,y' = 1,\ y(0) = -1.$
12. $y' - y = 2\,x - 3.$
13. $(x\,y^2 + x)\,dx + (y - x^2\,y)\,dy = 0.$
14. $y' = \sqrt{4\,x + 2\,y - 1}.$
15. $x\,y\,y' = 1 - x^2.$
16. $y\,y' = \dfrac{1-2\,x}{y}.$

3°. Решить однородные уравнения:

01. $(x+2\,y)\,dx - x\,dy = 0.$
02. $(y^2 - 2\,x\,y)\,dx + x^2\,dy = 0.$
03. $y^2 + x^2\,y' = x\,y\,y'.$
04. $x\,y' - y = x\ \operatorname{tg}\dfrac{y}{x}.$
05. $x\,y' - y = (x+y)\ \ln\dfrac{x+y}{y}.$
06. $(y + \sqrt{x\,y}\,)\,dx = x\,dy.$
07. $(2\,x - 4\,y + 6)\,dx +$ $+ (x + y - 3)\,dy = 0.$
08. $y + 2 = (2\,dx + y - 4)\,y'.$
09. $x - y - 1 + (y - x + 2)\,y' = 0.$
10. $(y'+1)\ \ln\dfrac{y+x}{x+3} = \dfrac{y+x}{x+3}.$
11. $x^3\,(y' - x) = y^2.$
12. $2\,xdy + (x^2\,y^4 + 1)\,y\,dx = 0.$
13. $2\,y' + x = 4\,\sqrt{y}.$
14. $2\,x\,y' + y = y^2\,\sqrt{x - x^2\,y^2}.$
15. $2\,y + (x^2\,y + 1)\,x\,y' = 0.$

4°. Решить линейные уравнения:

01. $x\,y' - 2\,y = 2\,x^4.$
02. $y' + y\ \operatorname{tg} x = \sec x.$
03. $x^2\,y' + x\,y + 1 = 0.$
04. $2\,x\,(x^2 + y)\,dx = dy.$
05. $x\,y' + (x+1)\,y = 3\,x^2\,e^{-x}.$
06. $\big(2\,e^y - x\big)\,y' = 1.$
07. $(2\,x + y)\,dy = y\,dx + 4\ \ln y\,dy.$
08. $(1 - 2\,x\,y)\,y' = y\,(y-1).$
09. $y' + y\ \cos x = \sin x \cdot \cos x,\ y(0) = 0.$
10. $(y^2 - 6\,x)\,y' + 2\,y = 0.$
11. $x\,y' - 3\,y = x^2.$
12. $y' + 2\,x\,y = 2\,x\,e^{-x^2}.$
13. $(x - 2\,x\,y - y^2)\,y' + y^2 = 0.$
14. $y' + x^2\,y = x^2,\ y(2) = 1.$

5°. Решить уравнения Бернулли:

01. $y' - 2\,x\,y = 2\,x^3\,y^2.$
02. $y' + \dfrac{x}{1-x^2}\,y = x\,\sqrt{y}.$

03. $y' - \dfrac{1}{x}\, y = \dfrac{1}{2\,y}$.

04. $(x\,y + x^2\,y^3) = y' = 1$.

05. $y' + 2\,x\,y = 2\,x^3\,y^3$.

06. $x\,y' + y = y^2\,\ln x,\ y(1) = 1$.

07. $3\,y^2\,y' + y^3 + x = 0$.

08. $y' - 9\,x^2\,y = (x^5 + x^2)\,y^{2/3},\ y(0) = 0$.

09. $y' - y = x\,y^2,\ y(0) = 0$.

10. $x\,y' - y = y^2,\ y(0) = 0$.

11. $x\,y' + y = x\,y^2,\ y(0) = 0$.

12. $y' = \dfrac{2\,x}{x^2\,\cos y + a\sin 2\,y}$.

6°. Решить уравнения в полных дифференциалах:

01. $x\,dx + y\,dy = 0$.

02. $\dfrac{1}{x}\,dx - \dfrac{y}{x^2}\,dy = 0$.

03. $\dfrac{2\,x}{y^3}\,dx + \dfrac{y^2 - 3\,x^2}{y^4}\,dy = 0$.

04. $\dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = 0$.

05. $(2\,x - y + 1)\,dx + (2\,y - x - 1)\,dy = 0$.

06. $\dfrac{1}{y}\,dx - \dfrac{x}{y^2}\,dy = 0$.

07. $x\,dx + y\,dy + \dfrac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2} = 0$.

08. $(x^3 - 3\,x\,y^2)\,dx + (y^3 - 3\,x^2\,y)\,dy = 0$.

09. $\dfrac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} + \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = 0$.

10. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} - 1\right)dx - \dfrac{y\,dy}{\sqrt{x^2 - y^2}} = 0$.

11. $\dfrac{2\,x\,(1 - e^y)}{(1 + x^2)^2}\,dx + \dfrac{e^y}{1 + x^2}\,dy = 0$.

12. $(1 + e^{x/y})\,dx + e^{x/y}\left(1 - \dfrac{x}{y}\right)dy = 0$.

13. $$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)dx + \\ + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right)dx = 0.$$

7°. Определить тип и решить ОДУ:

01. $x\,y' + x^2 + x\,y - y = 0$.

02. $2\,x\,y' + y^2 = 1$.

03. $(2\,x\,y^2 - y)\,dx + x\,dy = 0$.

04. $(x\,y' + y)^2 = x^2\,y'$.

05. $y - y' = y^2 + x\,y'$.

06. $(x + 2\,y^3)\,y' = y$.

07. $(y')^3 - y'\,e^{2x} = 0$.

08. $x^2\,y' = y\,(x + y)$.

09. $(1 - x^2)\,dy + x\,y\,dx = 0$.

10. $(y')^2 + 2\,(x - 1)\,y' - 2\,y = 0$.

11. $y + y'\,\ln^2 y = (x + 2\,\ln y)\,y'$.

12. $x^2\,y' - 2\,x\,y = 3\,y$.

13. $x + y\,y' = y^2\,(1 + y'^2)$. 14. $y = (x\,y' + 2\,y)^2$.

Внеаудиторные занятия

1°. С помощью изоклин начертить (приближенно) решения данных уравнений:

01. $y' = x + y$. 02. $x\,y' = 1 - y$. 03. $2\,x\,y' = \dfrac{y^2}{x}$.

2°. Решить уравнения с разделяющимися переменными:

01. $(x\,y^2 + x)\,dx + (y - x^2\,y)\,dy = 0$.
02. $x\,y\,y' = 1 - x^2$.
03. $y'\,\sin x = y\,\ln y,\ y(\pi/2) = e$.
04. $y'\,\mathrm{tg}\,x - y = a$.
05. $\sqrt{1-y^2}\,dx + y\,\sqrt{1-x^2}\,dy = 0$.
06. $x\,y' = \dfrac{1 - 2\,x}{y}$.
07. $x^2\,(y^3 + 5)\,dx + y^2\,(x^3 + 5)\,dx = 0$, $y(0) = 1$.
08. $y' = 5\,\sqrt{y},\ y(0) = 25$.
09. $\mathrm{tg}\,y\,dx - x\,\ln x\,dy = 0,\ x(\pi/2) = e$.
10. $y' + y^2 = 1$.
11. $x\,y\,dx + (1 + y^2)\,\sqrt{1+x^2}\,dy = 0$, $y(\sqrt{8}) = 1$.
12. $y'\,\sqrt{1 + x + y} = 1 + x + y$.
13. $x\,\sqrt{1+y^2}\,dx + y\,\sqrt{1+x^2}\,dy = 0$, $y(\sqrt{3}) = 0$.
14. $y' + \sin\dfrac{x+y}{2} = \sin\dfrac{x-y}{2}$.
15. $y - x\,y' = b\,(1 + x^2\,y'),\ y(1) = 1$.

3°. Решить однородные уравнения:

01. $(x - 4\,y)\,dx + (x + 4\,y)\,dy = 0$.
02. $2\,x^3\,y' = y\,(2\,x^2 - y^2)$.
03. $(x^2 + y^2)\,y' = 2\,x\,y$.
04. $x\,y' = y - x\,e^{y/x}$.
05. $x\,y' = y\,\cos\ln\dfrac{y}{x}$.
06. $x\,y' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$.
07. $(2\,x + y + 1)\,dx - (4\,x + 2\,y - 3)\,dy = 0$.
08. $(x + 4\,y)\,y' = 2\,x + 3\,y - 5$.
09. $y' = 2\left(\dfrac{y+2}{x+y-1}\right)^2$.
10. $y' = \dfrac{y+2}{x+1} + \mathrm{tg}\,\dfrac{y+2}{x+1}$.
11. $2\,x^2\,y' = y^3 + x\,y$.
12. $y\,dx + x\,(2\,x\,y + 1)\,dy = 0$.
13. $y' = y^2 - \dfrac{2}{x^2}$.
14. $\dfrac{2}{3}\,x\,y\,y' = \sqrt{x^6 - y^4} + y^2$.

4°. Решить линейные уравнения:

01. $(2\,x+1)\,y' = 4\,x + 2\,y$.
02. $\left(x\,y + e^x\right) dx - x\,dy$.
03. $y = x\,(y' - x\,\cos x)$.
04. $(x\,y' - 1)\,\ln x = 2\,y$.
05. $\left(\sin^2 y + x\,\operatorname{ctg} y\right) y' = 1$.
06. $(x + y^2)\,dy = y\,dx$.
07. $y' = \dfrac{y}{3\,x - y^2}$.
08. $x\,y' + y - e^x = 0$.
09. $(1 + y^2)\,dx = \left(\sqrt{1+y^2}\,\sin y - x\,y\right) dy$.

5°. Решить уравнения Бернулли:

01. $y' + 2\,y = y^2\,e^x$.
02. $(x+1)(y' + y^2) = -y$.
03. $y' = y^4\,\cos x + y\,\operatorname{tg} x$.
04. $x\,y^2\,y' = x^2 + y^3$.
05. $x\,y\,dy = (y^2 + x)\,dx$.
06. $x\,y' - 2\,x^2\,\sqrt{y} = 4\,y$.
07. $x\,y' + 2\,y + x^5\,y^3\,e^x = 0$.
08. $2\,y' - \dfrac{x}{y} = \dfrac{x\,y}{x^2 - 1}$.
09. $y'\,x^3\,\sin y = x\,y' - 2\,y$.
10. $(2\,x^2\,y\,\ln x)\,y' = y$.
11. $x\,y' + y = y^2\,\ln x$.
12. $x^2\,y^2\,y' + x\,y^3 = 1$.
13. $y' + 2\,x\,y = 2\,x^3\,y^3$.
14. $dy + (x\,y - x\,y^3)\,dx = 0$.

6°. Решить уравнения в полных дифференциалах:

01. $2\,x\,y\,dx + (x^2 - y^2)\,dy = 0$.
02. $(2 - 9\,x\,y^2)\,x\,dx + (4\,y^2 - 6\,x^3)\,y\,dy = 0$.
03. $e^{-y}\,dx - (2\,y + x\,e^{-y})\,dy = 0$.
04. $\dfrac{y}{x}\,dx + (y^3 + \ln x)\,dy = 0$.
05. $\dfrac{3\,x^2 + y^2}{y^2} - \dfrac{2\,x^3 + 5\,y}{y^3} = 0$.
06. $2\,x\left(1 + \sqrt{x^2 - y}\right) dx - \sqrt{x^2 - y}\,dy = 0$.
07. $(1 + y^2\,\sin 2\,x)\,dx - 2\,y\,\cos^2 x\,dy = 0$.
08. $3\,x^2\,(1 + \ln y)\,dx = \left(2\,y - \dfrac{x^2}{y}\right) dy$.
09. $\left(\dfrac{x}{\sin y} + 2\right) dx + \dfrac{(x^2+1)\,\cos y}{\cos 2\,y - 1}\,dy = 0$.
10. $x\,dx + y\,dy + \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = 0$.
11. $\dfrac{2\,x\,dx}{y^3} + \dfrac{y^2 - 3\,x^2}{y^4}\,dy = 0,\ y(1) = 1$.

7°. Определить тип и решить ОДУ:

01. $y' = \dfrac{1}{x - y^2}$.

02. $(y')^3 + (3\,x - 6)\,y' = 6\,y$.

03. $x - \dfrac{y}{y'} = \dfrac{2}{y}$.

04. $(x + y)^2\,y' = 1$.

05. $2\,x^3\,y\,y' + 3\,x^2\,y^2 + 7 = 0$.

06. $\dfrac{dx}{x} = \Big(\dfrac{1}{y} - 2\,x\Big)\,dy$.

07. $x\,y' = e^y + 2\,y'$.

08. $2\,(x - y^2)\,dy = y\,dx$.

09. $x^2\,y'^2 + y^2 = 2\,x\,(2 - y\,y')$.

10. $dy + (x\,y - x\,y^3)\,dx = 0$.

11. $2\,x^2\,y' = y^2\,(2\,x\,y' - y)$.

12. $\dfrac{y - x\,y'}{x + y\,y'} = 2$.

13. $x\,(x - 1)\,y' + 2\,x\,y = 1$.

14. $x\,y\,(x\,y' - y)^2 + 2\,y' = 0$.

15. $y^2 + x^2\,y' = x\,y\,y'$.

16. $y' + y/x = -x\,y^2$.

17. $3\,dy = (1 - 3\,y^2)\,y\,\sin x\,dx$.

18. $y' = (x - y)^2 + 1$.

19. $y' = \dfrac{1}{2}\,\big[\cos(x - y) - \cos(x + y\big]$.

20. $y - x\,y' = a\,(1 + x^2\,y')$.

21. $(x + y)^2\,y' = a^2,\ \ a > 0$.

8°. Решить ОДУ первого порядка, не разрешенные относительно производной:

01. $y'^3 - y'\,e^{2x} = 0$.

02. $y'^2 + 2\,(x - 1)\,y' - 2\,y = 0$.

03. $x + y\,y' = y^2\,(1 + y'^2)$.

04. $x + y\,y' = y^2\,(1 + y'^2)$.

05. $y = (x\,y' + 2\,y)^2$.

06. $y'^3 + (3\,x - 6)\,y' = 3\,y$.

07. $y' - |y'| = 0$.

08. $x = \dfrac{y}{\sqrt{1 + y'^2}}$.

09. $x = y'^3 + 1$.

10. $y = x\,y'^2 + y'^2$.

11. $y = \dfrac{x \cdot y'^2}{2\,y' + 4}$.

12. $y = x\,y' - \dfrac{1}{y'}$.

13. $x\,y' = e^y + 2\,y'$.

14. $2\,(x - y^2)\,dy = y\,dx$.

15. $x^2\,y'^2 + y^2 = 2\,x\,(2 - y\,y')$.

16. $dy + (x\,y - x\,y^3)\,dx = 0$.

17. $2\,x^2\,y' = y^2\,(2\,x\,y' - y)$.

18. $\dfrac{y - x\,y'}{x + y\,y'} = 2$.

19. $x\,(x - 1)\,y' + 2\,x\,y = 1$.

20. $x\,y\,(x\,y' - y)^2 + 2\,y' = 0$.

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

3.1. Дифференциальные уравнения n-го порядка

Определение 3.1. *Дифференциальное уравнение n-го порядка* имеет следующий общий вид:

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0. \tag{3.1}$$

Если это уравнение можно разрешить относительно старшей производной, то оно примет вид

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}), \tag{3.2}$$

правая часть которого рассматривается как функция $(n + 1)$-й независимой переменной и непрерывная в некоторой области $(n + 1)$-мерного пространства $\mathbb{R}^{n+1}$. При $n \geqslant 2$ уравнения (3.1) и (3.2) относятся к группе *уравнений высших порядков*.

Определение 3.2. *Решением уравнения* (3.2) на (конечном или бесконечном) промежутке (x_*, x^*) называется функция $y = \varphi(x)$, определенная, n раз дифференцируемая и удовлетворяющая уравнению (3.2) при любом x из промежутка (x_*, x^*).

Определение 3.3. *Задача Коши* для уравнения (3.2) состоит в нахождении решения этого уравнения, удовлетворяющего начальным условиям

$$y = y_0, \quad y' = y_0', \quad ..., \quad y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \quad \text{при } x = x_0, \tag{3.3}$$

где x_0, y_0, y_0', ..., $y_0^{(n-1)}$ – некоторые заданные числа.

Пример 3.1. Задача Коши для уравнения второго порядка

$$y'' = f(x, y, y') \tag{3.4}$$

формулируется следующим образом: требуется найти решение уравнения (3.4), удовлетворяющее условиям $y = y_0$, $y' = y_0'$ при $x = x_0$, где x_0, y_0, y_0' – заданные числа. Геометрическое содержание рассматриваемой задачи Коши состоит в том, что требуется выбрать из всего множества интегральных кривых, проходящих через данную точку плоскости $P_0(x_0, y_0)$, ту кривую, которая имеет заданный угловой коэффициент y_0'. ►

Возникает вопрос об условиях существования и единственности решения задачи Коши. Ответ на этот вопрос составляет содержание следующего утверждения.

Теорема 3.1. Пусть дано уравнение (3.2) и пусть $\mathscr{A}$ – область пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, где определены и непрерывны функции f, f'_y, $f'_{y'}$, ..., $f'_{y^{(n-1)}}$, аргументы которых рассматриваются как независимые переменные. Тогда, каковы бы ни были начальные данные из области $\mathscr{A}$, в некоторой окрестности точки x_0 существует и притом единственное решение $y = \varphi(x)$ уравнения (3.2), удовлетворяющее начальным условиям (3.3).

Следствие 3.1. Линейное уравнение второго порядка

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = h(x) \tag{3.5}$$

с непрерывными на интервале (x_*, x^*) коэффициентами $p(x)$ и $q(x)$ и правой частью $h(x)$ имеет единственное решение задачи Коши с начальными данными из области

$$\mathscr{A} = \{(x, y, y')|x_* < x < x^*, |y| < +\infty, |y'| < +\infty\}.$$

◀ Действительно в этой области определены и непрерывны функции $f = h(x) - p(x)\,y' - q(x)\,y$, $f'_y = -q(x)$, $f'_{y'} = -p(x)$. Поэтому в указанной области выполнены условия теоремы 3.1 для уравнения (3.5) и, следовательно, имеет место заключение этой теоремы. Аналогичное заключение верно для линейного уравнения любого порядка. ▶

Пусть в области $\mathscr{A}$ выполнены условия теоремы для уравнения (3.2). *Общим решением* уравнения (3.2) в области $\mathscr{A}$ называется функция

$$y = \varphi(x, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, ..., \mathcal{C}_n), \tag{3.6}$$

определенная в некоторой области $\mathscr{B}$ изменения своих аргументов, представляющая собой решение уравнения (3.2) при всех значениях произвольных постоянных $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$, ..., $\mathcal{C}_n$ из области $\mathscr{B}$ и дающая решение задачи Коши с любыми начальными данными из области $\mathscr{B}$ при соответствующих значениях величин $\mathcal{C}_{10}$, $\mathcal{C}_{20}$, ..., $\mathcal{C}_{n0}$.

Определение 3.4. *Частным решением уравнения* называется такое его решение, которое может быть получено из общего при фиксированных значениях величин $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, ..., $\mathcal{C}_n$.

Схема решения задачи Коши для уравнения (3.2) при условии (3.3) состоит в последовательном выполнении следующих действий:

1) поиск общего решения уравнения (3.2);

2) дифференцирование этого решения $n-1$ раз;

3) подстановка в формулу общего решения и его производных начальных данных согласно условию (3.3);

4) решение полученной системы нелинейных алгебраических уравнений относительно $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, ..., $\mathcal{C}_n$ (эта система имеет единственное решение $\mathcal{C}_{10}, \mathcal{C}_{20}$, ..., $\mathcal{C}_{n0}$ в случае существования и единственности решения задачи Коши);

5) получение из общего решения при $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_{10}$, $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_{20}$, ..., $\mathcal{C}_n = \mathcal{C}_{n0}$ решения задачи Коши.

3.2. Случаи понижения порядка

Рассмотрим четыре типа дифференциальных уравнений n-го порядка, допускающих *понижение порядка*, т.е. сведение их к ДУ более низкого порядка.

1°. Уравнение вида

$$y^{(n)} = f(x)$$

с непрерывной на интервале (x_*, x^*) правой частью может быть проинтегрировано последовательно. Общее решение этого уравнения – функция

$$y = \int\limits_{x_0}^{x} \Big[\int\limits_{x_0}^{x_1} ... \Big(\int\limits_{x_0}^{x_{n-1}} f(x_n)\,dx_n \Big) ...dx_2 \Big]\,dx_1 + \\ + \mathcal{C}_1 \frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \mathcal{C}_2 \frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!} + ... + \mathcal{C}_n.$$

Чтобы найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям (3.1), достаточно положить

$$\mathcal{C}_n = y_0, \qquad \mathcal{C}_{n-1} = y_0', \qquad ..., \qquad \mathcal{C}_1 = y_0^{(n-1)}.$$

Пример 3.2. Определить общий интеграл уравнения $y'' = \sin k\,x$ и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

◀ Интегрируя последовательно, находим

$$y' = \int \sin(k\,x)\,dx + \mathcal{C}_1 = -\frac{\cos(k\,x)}{k} + \mathcal{C}_1,$$

$$y = \int \Big[-\frac{\cos(kx)}{k} + \mathcal{C}_1 \Big]\, dx + \mathcal{C}_2 = -\frac{\sin(k\,x)}{k^2} + \mathcal{C}_1\, x + \mathcal{C}_2$$

– общее решение. Из начальных условий следует, что $\mathcal{C}_1 = 1+1/k$ и $\mathcal{C}_2 = 0$. Поэтому решением задачи Коши является функция

$$y_* = -\frac{\sin(k\,x)}{k^2} + \Big(1 + \frac{1}{k}\Big)\, x. \qquad \blacktriangleright$$

2°. Уравнение

$$F(x, y^{(k)}, ..., y^{(n)}) = 0, \qquad k \leqslant n - 1, \tag{3.7}$$

не содержащее неизвестную функцию y и ее младшие производные до $k-1$ порядка, допускает понижение порядка на k единиц.

Покажем, что это действительно так. Введем новую неизвестную функцию $z = y^{(k)}$. Тогда $y^{(k+1)} = z'$, ..., $y^{(n)} = z^{(n-k)}$, и уравнение относительно $z(x)$ будет действительно порядка $n-k$:

$$F(x, z, ..., z^{(n-k)}) = 0. \tag{3.8}$$

Если найдено общее решение уравнения (3.8) в виде $z(x) = \varphi(x, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, ..., \mathcal{C}_{n-k})$, то для функции $y(x)$ имеем уравнение

$$y^{(k)} = \varphi(x, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, ..., \mathcal{C}_n)$$

типа **1°**.

Пример 3.3. Решить уравнение

$$y''' = \sqrt{1 + (y'')^2}.$$

◄ Данное уравнение не содержит функцию y и ее производную y', т.е. $k = 2$. Поэтому полагаем $y'' = z$. После этого уравнение примет вид

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{1 + z^2}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим, что

$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = dx,$$

$$\Downarrow$$

$$\ln\big|z + \sqrt{1+z^2}\big| = x + \mathcal{C}_1, \tag{3.9}$$

или

$$z = \operatorname{sh}(x + \mathcal{C}_1)$$

(то, что переход от предпоследней формулы к последней верен, несложно убедиться прямой подстановкой соотношения для z в выражение (3.9)).

Далее, заменим z на y''. Тогда после двукратного интегрирования получим, что

$$y = \operatorname{sh}(x + \mathcal{C}_1) + \mathcal{C}_2\, x + \mathcal{C}_3. \qquad \blacktriangleright$$

Пример 3.4. Решить задачу Коши

$$2\, y'\, y'' = 1, \qquad y(1) = \frac{2}{3}, \quad y'(1) = 1.$$

◀ Уравнение не содержит функцию y. Отсюда $k = 1$, а следовательно, полагаем $y' = z$. Эта замена уравнение приводит к виду

$$2\, z\, z' = 1.$$

Если разделить переменные:

$$2\, z\, dz = dx,$$

проинтегрировать обе части последнего равенства:

$$z^2 = x + \mathcal{C}_1,$$

выразить z, а затем вернуться к неизвестной y, то получим, что

$$y' = \pm\sqrt{x + \mathcal{C}_1},$$

откуда находим искомое общее решение:

$$y = \pm\frac{2}{3} \cdot (x + \mathcal{C}_1)^{3/2} + \mathcal{C}_2.$$

Осталось выделить частное решение. Для этого запишем следующие равенства:

$$\frac{2}{3} = \pm\frac{2}{3} \cdot (1 + \mathcal{C}_1)^{3/2} + \mathcal{C}_2, \qquad 1 = \pm\sqrt{1 + \mathcal{C}_1},$$

из которых следует, что $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2 = 0$. Итак, частное решение уравнения имеет вид $y = \frac{2}{3}\, x^{3/2}$. ▶

3°. Уравнение

$$F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0, \tag{3.10}$$

не содержащее независимой переменной, допускает понижение порядка на одну единицу.

Для этого примем y за новую независимую переменную, а $y' = p$ – за искомую функцию. Выразим производные y по x через производные p по y. Из правила дифференцирования сложной функции следует, что

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = p'_x = p'_y\, y'_x = p'_y\, p,$$
$$y'''_{xxx} = (y''_{xx})'_x = (p'_y\, p)'_x = (p'_y\, p)'_y\, y'_x = (p'_y\, p)'_y\, p = p''_{yy}\, p^2 + (p'_y)^2\, p$$

и т.д.

Подобным образом производная k-го порядка от y по x будет выражена через производные от p по y порядка $k - 1$ и ниже. Подставляя найденные выражения производных в уравнение (3.10), получим уравнение порядка $n - 1$ относительно функции $p(y)$:

$$F_0(y, p, p', ..., p^{(n-1)}) = 0.$$

Если найдено его общее решение $p(y) = \varphi(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, ..., \mathcal{C}_n)$, то для определения общего решения уравнения (3.10) приходим к уравнению с разделяющимися переменными $y' = p(y)$.

Пример 3.5. Уравнение $y'' + (y')^2 = 2\, e^{-y}$ не содержит независимой переменной x. Полагая $y' = p$, $y'' = p\, p'$, получаем уравнение Бернулли

$$p\, \frac{dp}{dy} + p^2 = 2\, e^{-y}.$$

Подстановкой $p^2 = z$ оно сводится к линейному уравнению:

$$\frac{dz}{dy} + 2\, z = 4\, e^{-y},$$

общее решение которого есть

$$z = e^{-2y} \left(\mathcal{C}_1 + \int e^{2y}\, 4\, e^{-y}\, dy\right) = e^{-2y} \left(\mathcal{C}_1 + 4\, e^{y}\right),$$

или

$$z = \mathcal{C}_1\, e^{-2y} + 4\, e^{-y}.$$

Заменяя z на $p^2 = (y')^2$, получаем

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\mathcal{C}_1\, e^{-2y} + 4\, e^{-y}}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, будем иметь

$$x + \mathcal{C}_2 = \pm \int \frac{dy}{\sqrt{\mathcal{C}_1\, e^{-2y} + 4\, e^{-y}}} = \pm \int \frac{e^y\, dy}{\sqrt{\mathcal{C}_1 + 4\, e^y}} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{\mathcal{C}_1 + 4\, e^y}.$$

Отсюда находим, что

$$\tilde{\mathcal{C}}_1 + e^y = (x + \mathcal{C}_2)^2, \qquad \tilde{\mathcal{C}}_1 = \mathcal{C}_1/4$$

– общий интеграл данного уравнения. ▶

Пример 3.6. Решить уравнение $y''\, y^3 + 1 = 0$, $y(1) = -1$, $y'(1) = -1$.

◀ Данное уравнение не содержит независимой переменной x. Поэтому, полагая $y' = p$, $y'' = p\,p'$, получим уравнение Бернулли

$$p\,p'\,y^3 + 1 = 0.$$

Разделяя переменные, получим уравнение

$$p\,dp = -\frac{dy}{y^3},$$

откуда находим

$$\frac{p^2}{2} = \frac{1}{2\,y^2} + \mathcal{C}_1.$$

Для упрощения дальнейших выкладок найдем $\mathcal{C}_1$. Из начальных условий следует, что $\mathcal{C}_1 = 0$. Поэтому последнее уравнение можно привести к виду $y' = 1/y$ (здесь учтено, что для искомой интегральной кривой $y(1) < 0$ и $y'(1) < 0$), которое без труда может быть проинтегрировано: $y^2/2 = x + \mathcal{C}_2$, а константа $\mathcal{C}_2$ равна $-1/2$. Итак, $y^2/2 = x - 1/2$ – частный интеграл данного уравнения. ▶

4°. Пусть уравнение (3.1) однородно относительно аргументов y, y', ..., $y^{(n)}$, т.е.

$$F(x, t\,y, t\,y', ..., t\,y^{(n)}) = t^k\, F(x, y, y', ..., y^{(n)}),$$

где $t > 0$ – постоянная. Порядок такого уравнения может быть понижен на единицу подстановкой $y = \exp(\int z\,dx)$, где $z(x)$ – новая неизвестная функция.

Пример 3.7. Уравнение $x^2\,y\,y'' = (y - x\,y')^2$ однородно относительно y, y' и y''. Вводим новую переменную z: $y = \exp(\int z\,dx)$. Поэтому

$$y' = \exp\Big(\int z\,dx\Big)\,z = y\,z,$$

$$y'' = (y')' = y'\,z + y\,z' = y\,z^2 + y\,z' = y\,(z^2 + z').$$

Подставляя выражения для y, y' и y'' в уравнение, получаем

$$x^2\,\exp\Big(2\int z\,dx\Big)\,(z^2 + z') = \exp\Big(2\int z\,dx\Big)\,(1 - x\,z)^2.$$

Если разделить обе части последнего равенства на $\exp(2\int z\,dx)$, то уравнение для z примет форму

$$x^2\,(z^2 + z') = (1 - x\,z)^2,$$

или

$$x^2\,z' + 2\,x\,z = 1.$$

Итак, получено линейное уравнение. Его можно записать следующим образом:

$$(x^2\,z)' = 1.$$

Общий интеграл этого уравнения есть

$$x^2\,z = x + \mathcal{C}_1,$$

откуда следует соотношение

$$z = \frac{1}{x} + \frac{\mathcal{C}_1}{x^2},$$

а значит, общее решение исходного уравнения будет иметь вид

$$y = \exp\Big(\int z\,dx\Big) = \exp\big(\ln|x| - \frac{\mathcal{C}_1}{x} + \ln\big|\mathcal{C}_2\big|\big),$$

или окончательно

$$y = \mathcal{C}_2\,x\,e^{-\mathcal{C}_1/x}$$

(в допустимости снятия модулей у x и $\mathcal{C}_2$ в выражении для y можно убедиться непосредственной подстановкой правой части последнего равенства в исходное уравнение). ▶

5°. Пусть уравнение (3.1) не содержит явно ни x, ни y. В этом случае возможно понижение порядка по обоим переменным.

Пример 3.8. Уравнение $y'\,y''' - y''^2 = y'^3$ не содержит y. Положим $y' = p$. Тогда получим

$$p\,\frac{d^2p}{dx^2} - \left(\frac{dp}{dx}\right)^2 = p^3.$$

Последнее уравнение не содержит x, а поэтому введем подстановки:

$$\frac{dp}{dx} = q, \qquad \frac{d^2p}{dx^2} = q\,\frac{dq}{dx}.$$

Это приводит к уравнению Бернулли:

$$\frac{dq}{dp} - \frac{1}{p}\,q = p^2\,q^{-1}.$$

Делая замену переменных:

$$z = q^2, \qquad q = \sqrt{z}, \qquad \frac{dq}{dp} = \frac{1}{2\sqrt{z}}\,\frac{dz}{dp},$$

приходим к уравнению

$$\frac{1}{2\sqrt{z}}\,\frac{dz}{dp} - \frac{1}{p}\sqrt{z} = p^2\,\frac{1}{\sqrt{z}}, \qquad \text{или} \qquad \frac{dz}{dp} - \frac{2}{p}\,z = 2\,p^2.$$

Решим полученное линейное уравнение:

$$R = -2\int \frac{dp}{p} = -\ln p^2, \qquad e^R = \frac{1}{p^2}, \qquad e^{-R} = p^2,$$

$$\int e^R\,Q\,dx = \int \frac{2\,p^2}{p^2}\,dp = 2\,p,$$

откуда следует, что $z = p^2\,(\mathcal{C}_1 + 2\,p)$, или $q^2 = \mathcal{C}_1\,p^2 + 2\,p^3$, а значит,

$$\frac{dp}{dx} = \pm p\,\sqrt{\mathcal{C}_1 + 2\,p}.$$

Разделяя переменные, находим, что

$$\int \frac{dp}{p\sqrt{\mathcal{C}_1 + 2\,p}} = \pm \int dx = \mathcal{C}_2 \pm x.$$

Для нахождения первообразной в левой части последнего уравнения, делаем замену переменных $\mathcal{C}_1 + 2\,p = t^2$, что дает $p = (t^2 - \mathcal{C}_1)/2$, $dp = t\,dt$. Отсюда

$$\int \frac{dp}{p\sqrt{\mathcal{C}_1 + 2\,p}} = \int \frac{t\,dt}{(t^2 - \mathcal{C}_1)\,t} = \int \frac{dt}{t^2 - \mathcal{C}_1} = A =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{\mathcal{C}_1}} \ln\left|\dfrac{t - \sqrt{\mathcal{C}_1}}{t + \sqrt{\mathcal{C}_1}}\right| = \dfrac{1}{2\sqrt{\mathcal{C}_1}} \ln\left|\dfrac{\sqrt{\mathcal{C}_1 + 2\,p} - \sqrt{\mathcal{C}_1}}{\sqrt{\mathcal{C}_1 + 2\,p} + \sqrt{\mathcal{C}_1}}\right|, & \mathcal{C}_1 > 0, \\ -\dfrac{1}{t} = -\dfrac{1}{\sqrt{2\,p}}, & \mathcal{C}_1 = 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{-\mathcal{C}_1}} \operatorname{arctg} \dfrac{t}{\sqrt{-\mathcal{C}_1}} = \dfrac{1}{\sqrt{-\mathcal{C}_1}} \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{\mathcal{C}_1 + 2\,p}}{\sqrt{-\mathcal{C}_1}}, & \mathcal{C}_1 < 0. \end{cases}$$

y также выразим через p:

$$dy = p\,dx = \frac{dp}{\sqrt{\mathcal{C}_1 + 2\,p}}, \qquad \text{или} \qquad y = \mathcal{C}_3 + \sqrt{\mathcal{C}_1 + 2\,p}.$$

Итак,

$$\mathcal{C}_2 \pm x = A, \qquad y = \mathcal{C}_3 + \sqrt{\mathcal{C}_1 + 2\,p}$$

– общий интеграл исходного уравнения. ▶

3.3. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка

Определение 3.5. *Неоднородное линейное уравнение n-го порядка* имеет вид

$$y^{(n)} + a_1\,y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}\,y' + a_n\,y = f(x), \tag{3.11}$$

где *коэффициенты* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и *правая часть* $f(x)$ уравнения – функции независимой переменной x, определенные и непрерывные на промежутке (x_*, x^*).

Наряду с данным неоднородным уравнением (3.11) будем рассматривать соответствующее ему *однородное уравнение*

$$y^{(n)} + a_1\,y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}\,y' + a_n\,y = 0. \tag{3.12}$$

Из теоремы 3.1 следует, что задача Коши для уравнения (3.11) имеет единственное решение.

Введем понятие линейного дифференциального оператора. Обозначим левую часть уравнения (3.11) через $\mathbb{L}\big[y\big]$:

$$\mathbb{L}\big[y\big] = y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}\, y' + a_n\, y. \tag{3.13}$$

Таким образом, $\mathbb{L}\big[y\big]$ есть результат выполнения над функцией y операций, указанных в правой части равенства (3.13). Совокупность этих действий обозначим

$$\mathbb{L} = \frac{d^n}{dx^n} + a_1\, \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + ... + a_{n-1}\, \frac{d}{dx} + a_n \tag{3.14}$$

и назовем *линейным дифференциальным оператором* (ЛДО), соответствующим уравнению (3.11).

Оператор $\mathbb{L}$ обладает следующими основными свойствами:

1°. Постоянный множитель можно вынести за знак оператора:

$$\mathbb{L}\big[c\, y\big] = c\, \mathbb{L}\big[y\big].$$

2°. Оператор от суммы функций равен сумме операторов от слагаемых:

$$\mathbb{L}\big[y_1 + y_2\big] = \mathbb{L}\big[y_1\big] + \mathbb{L}\big[y_2\big].$$

Из свойств 1^0 и 2^0 следует, что

$$\mathbb{L}\Big[\sum_{k=1}^{n} c_k\, y_k\Big] = \sum_{k=1}^{n} c_k\, \mathbb{L}[y_k],$$

т.е. оператор от линейной комбинации функций равен линейной комбинации операторов от этих функций.

С помощью оператора $\mathbb{L}$ уравнение (3.11) запишется в виде

$$\mathbb{L}\big[y\big] = f(x),$$

а уравнение (3.12) – в форме

$$\mathbb{L}\big[y\big] = 0.$$

Пусть дано однородное уравнение (3.12). Из свойств ЛДО $\mathbb{L}$ следует, что если $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ – решения уравнения (3.12), то их линейная комбинация

$$\sum_{k=1}^{n} \mathcal{C}_k\, y_k,$$

где $\mathcal{C}_k$ – произвольные числа, также является решением уравнения (3.12).

Чтобы сформулировать основную теорему о структуре общего решения уравнения (3.12), введем понятие линейной независимости системы функций.

Рассмотрим систему функций

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_m(x), \tag{3.15}$$

определенных на одном и том же интервале (x_*, x^*).

Определение 3.6. Система функций (3.15) называется *линейно независимой*, если ни одну из этих функций нельзя представить в виде линейной комбинации остальных.

Например, это означает, что невозможно равенство

$$\varphi_1(x) = k_2\, \varphi_2(x) + ... + k_m\, \varphi_m(x), \tag{3.16}$$

где k_2, ..., k_m – некоторые постоянные.

Отсюда следует, что среди линейно независимых функций не может быть тождественно равных нулю. Например, если бы $\varphi_1(x) \equiv 0$, то можно было бы взять $k_2 = ... = k_m = 0$. Тогда равенство (3.16) выполнялось бы тождественно.

В частности, две функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ линейно независимы, если их отношение не есть постоянная:

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} \neq \mathrm{const}\,.$$

Определение 3.7. Система функций, не являющаяся линейно независимой, называется *линейно зависимой*.

Пример 3.9. Линейно зависимой будет система

$$\varphi_1(x) = x, \quad \varphi_2(x) = x^2, \quad \varphi_3(x) = x^3, \quad \varphi_4(x) = 2\,x - x^2.$$

Это следует из того, что $\varphi_4(x) = 2\varphi_1(x) - \varphi_2(x)$. ►

Для линейной зависимости совсем необязательно, чтобы некоторая функция системы была линейной комбинацией всех остальных.

Пусть функции (3.15) имеют производные до $(m-1)$-го порядка включительно.

Определение 3.8. *Определителем Вронского* (или *вронскианом*) системы функций (3.15) называется определитель вида

$$W_m(\boldsymbol{\varphi}, x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \ldots & \varphi_m(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \ldots & \varphi_m'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1^{(m-1)}(x) & \varphi_2^{(m-1)}(x) & \ldots & \varphi_m^{(m-1)}(x) \end{vmatrix}. \qquad (3.17)$$

Пример 3.10. Вронскиан $W_4(x)$ системы функций 1, x, x^2, x^3 равен

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2\,x & 3\,x^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6\,x \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 12. \qquad \blacktriangleright$$

Рассмотрим семейство $\boldsymbol{y}$ решений линейного однородного дифференциального уравнения (3.12) на интервале (x_*, x^*):

$$y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x). \qquad (3.18)$$

Теорема 3.2. Для любого семейства решений (3.18) уравнения (3.12) имеет место формула Лиувилля – Остроградского

$$W_n(\boldsymbol{y}, x) = W_n(\boldsymbol{y}, x_0)\, \exp\Big[-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(t)\, dt\Big], \qquad (3.19)$$

где x и x_0 – точки из интервала (x_*, x^*); $a_1(x)$ – коэффициент уравнения (3.12).

◀ Доказательство проведем для уравнения второго порядка

$$y'' + a_1(x)\, y' + a_2(x)\, y = 0. \qquad (3.20)$$

В этом случае $W_2(\boldsymbol{y}, x) = y_1\, y_2' - y_2\, y_1'$ и

$$W_2'(\boldsymbol{y}, x) = y_1'\, y_2' + y_1\, y_2'' - y_2'\, y_1' - y_2\, y_1'' = y_1\, y_2'' - y_2\, y_1''.$$

Вследствие того, что y_1 и y_2 – решения уравнения (3.20)), получим

$$W_2'(\boldsymbol{y},x) = y_1\big[-a_1(x)\,y_2' - a_2(x)\,y_2\big] - y_2\big[-a_1(x)\,y_1' - a_2(x)\,y_1\big] = \\ = -a_1(x)\,W_2(\boldsymbol{y},x).$$

Следовательно, функция $W_2(\boldsymbol{y},x)$ удовлетворяет уравнению с разделяющимися переменными $W_2'(\boldsymbol{y},x) = -a_1(x)\,W_2(\boldsymbol{y},x)$, решение которого есть

$$W_2(\boldsymbol{y},x) = \mathcal{C}\,\exp\Big[-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(t)\,dt\Big].$$

При $x = x_0$ находим, что $\mathcal{C} = W_2(\boldsymbol{y},x_0)$, что и завершает доказательство теоремы. ►

Следствие 3.2. Из формулы (3.19) непосредственно следует, что вронскиан или тождественно равен нулю на промежутке (x_*, x^*), или не равен нулю ни при одном x из промежутка (x_*, x^*).

Теорема 3.3. Тождественное равенство нулю вронскиана семейства решений (3.18) есть необходимое и достаточное условие линейной зависимости этих решений.

◄ Докажем теорему для случая $n = 2$.

Необходимость. Пусть y_1 и y_2 – линейно зависимые решения уравнения (3.20). Тогда $y_2 = k\,y_1$ и

$$W_2(\boldsymbol{y},x) = y_1\,y_2' - y_2\,y_1' = y_1\,k\,y_1' - k\,y_1\,y_1' \equiv 0.$$

Достаточность. Пусть y_1 и y_2 – ненулевые решения уравнения (3.20) и $W_2(\boldsymbol{y},x) = y_1\,y_2' - y_2\,y_1' \equiv 0$. Фиксируем точку x_0 промежутка (x_*, x^*), в которой $y_1(x_0) \neq 0$. Тогда $y_2(x_0) \neq 0$. Действительно, если $y_2(x_0) = 0$, то из условия $W_2(\boldsymbol{y},x_0) = 0$ следует, что $y_2'(x_0) = 0$, и в силу теоремы единственности $y_2(x) \equiv 0$, что противоречит условию.

Равенство $W_2(\boldsymbol{y},x_0) = 0$ можно записать в виде соотношения $y_2'/y_2 = y_1'/y_1$, интегрируя которое по x на промежутке (x_0, x), получим

$$\ln\big|y_2\big| = \ln\big|y_1\big| + \ln\big|\mathcal{C}\big|,$$

где постоянная $\mathcal{C} = y_2(x_0)/y_1(x_0)$ отлична от нуля. Поэтому решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно зависимы: $y_2 = \mathcal{C}\,y_1$. ►

Теорема 3.4. Для того чтобы решения (3.18) уравнения (3.12) были линейно независимы на промежутке (x_*, x^*), необходимо и достаточно, чтобы определитель $W_n(\boldsymbol{y}, x)$ не обратился в нуль ни при одном значении x из (x_*, x^*), т.е. чтобы выполнялось условие $W_n(\boldsymbol{y}, x) \neq 0$.

◀ Доказательство этой теоремы основывается на использовании теорем 3.2 и 3.3. ▶

Определение 3.9. *Фундаментальной системой решений* однородного уравнения (3.12) называется любое семейство линейно независимых на промежутке (x_*, x^*) решений этого уравнения $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$.

Пример 3.11. Функции $y_1 = \sin x$ и $y_2 = \cos x$ образуют фундаментальную систему решений уравнения $y'' + y = 0$. ▶

Согласно теореме 3.2 необходимое и достаточное условие фундаментальности системы решений уравнения (3.12) заключается в неравенстве нулю вронскиана этого семейства хотя бы в одной точке. Следовательно, любые n решений задачи Коши для уравнения (3.12), начальные данные которых таковы, что $W_n(\boldsymbol{y}, x_0) \neq 0$, образуют фундаментальную систему решений.

Теорема 3.5 (о структуре общего решения линейного однородного уравнения). Если функции (3.18) образуют фундаментальную систему решений однородного дифференциального уравнения (3.18), то линейная комбинация этих решений

$$y = \mathcal{C}_1\, y_1(x) + \mathcal{C}_2\, y_2(x) + \ldots + \mathcal{C}_n\, y_n(x) \tag{3.21}$$

с произвольными постоянными $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, ..., $\mathcal{C}_n$ есть общее решение этого уравнения в области $\mathscr{A} = \{(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \,|\, x \in (x_*, x^*), |y| < +\infty, |y'| < +\infty, |y^{(n-1)}| < +\infty\}$.

◀ В области $\mathscr{A}$ выполняются условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши. Из свойств линейных дифференциальных операторов следует, что функция (3.21) является решением уравнения (3.12) при любых фиксированных $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, ..., $\mathcal{C}_n$.

Пусть $y = \psi(x)$ – решение задачи Коши, соответствующее начальным данным из области $\mathscr{A}$:

$$\psi(x_0) = y_0, \qquad \psi'(x_0) = y_0', \qquad \ldots \qquad \psi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Покажем, что существуют такие постоянные $\mathcal{C}_{10}$, $\mathcal{C}_{20}$, ..., $\mathcal{C}_{n0}$, что

$$\psi(x) = \mathcal{C}_{10}\, y_1(x) + \mathcal{C}_{20}\, y_2(x) + \ldots + \mathcal{C}_{n0}\, y_n(x). \tag{3.22}$$

Для этого рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений относительно $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, ..., $\mathcal{C}_n$:

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathcal{C}_1\, y_1(x_0) & + & \mathcal{C}_2\, y_2(x_0) & + & ... & + & \mathcal{C}_n\, y_n(x_0) & = & y_0, \\ \mathcal{C}_1\, y_1'(x_0) & + & \mathcal{C}_2\, y_2'(x_0) & + & ... & + & \mathcal{C}_n\, y_n'(x_0) & = & y_0', \\ ... & & ... & & ... & & ... & & ... \\ \mathcal{C}_1\, y_1^{(n-1)}(x_0) & + & \mathcal{C}_2\, y_2^{(n-1)}(x_0) & + & ... & + & \mathcal{C}_n\, y_n^{(n-1)}(x_0) & = & y_0^{(n-1)}, \end{array} \qquad (3.23)$$

в левую часть которой входят значения функций (3.18) и их производных в точке x_0, а в правую – начальные данные задачи Коши. Определитель системы (3.23) $W_n(\boldsymbol{y}, x_0)$ отличен от нуля вследствие фундаментальности семейства (3.18). Следовательно, по теореме Крамера система (3.23) имеет единственное решение. Обозначим его $\mathcal{C}_{10}$, $\mathcal{C}_{20}$, ..., $\mathcal{C}_{n0}$. Линейная комбинация решений (3.18)

$$y(x) = \mathcal{C}_{10}\, y_1(x) + \mathcal{C}_{20}\, y_2(x) + ... + \mathcal{C}_{n0}\, y_n(x)$$

удовлетворяет начальным условиям, что показывают равенства (3.23). Функция $\psi(x)$ также удовлетворяет начальным условиям. Отсюда, используя теорему существования и единственности решения дифференциального уравнения, делаем вывод, что $y(x) \equiv \psi(x)$ на (x_*, x^*), т.е. имеет место тождество (3.22) на (x_*, x^*).

Мы показали, что функция (3.21) удовлетворяет условиям, налагаемым на общее решение. Следовательно, функция (3.21) является общим решением уравнения (3.12). ►

Пример 3.12. Общее решение уравнения $y'' + y = 0$ есть $y = \mathcal{C}_1\, \sin x + \mathcal{C}_2\, \cos x$. ►

Теорема 3.6. Пусть коэффициенты уравнения (3.12) непрерывны в интервале (x_*, x^*). Если известно одно ненулевое частное решение $y_1(x)$ этого уравнения, то порядок этого уравнения может быть понижен на единицу.

◄ Докажем теорему для случая $n = 2$:

$$\mathbb{L}[y] \equiv y'' + a_1\, y' + a_2\, y = 0. \qquad (3.24)$$

Введем новую неизвестную функцию $z(x)$ следующим образом:

$$y(x) = y_1(x) \int z(x)\, dx, \quad \text{или} \quad z = \left(\frac{y}{y_1}\right)'. \qquad (3.25)$$

Тогда

$$y'(x) = y_1'(x) \int z(x)\, dx + y_1\, z, \quad y''(x) = y_1''(x) \int z(x)\, dx + 2\, y_1'\, z + y_1\, z'.$$

Подставляя выражения для y, y' и y'' в уравнение (3.24), получим:

$$y_1''(x)\int z(x)\,dx + 2\,y_1'\,z + y_1\,z' +$$
$$+ a_1\left[y_1'(x)\int z(x)\,dx + y_1\,z\right] + a_2\,y_1(x)\int z(x)\,dx = 0,$$

или

$$\left[y_1''(x) + a_1\,y_1'(x) + a_2\,y_1(x)\right]\int z(x)\,dx + (2\,y_1' + a_1\,y_1)\,z + y_1\,z' = 0.$$

Вследствие того, что множитель в квадратных скобках в левой части последнего уравнения равен нулю:

$$y_1''(x) + a_1\,y_1'(x) + a_2\,y_1(x) = \mathbb{L}\left[y_1\right] = 0,$$

ОДУ относительно функции z принимает следующую форму:

$$y_1\,z' + (2\,y_1' + a_1\,y_1)\,z = 0, \tag{3.26}$$

т.е. получено однородное линейное ОДУ первого порядка, являющееся также уравнением с разделяющимися переменными. Коэффициенты этого уравнения непрерывны во всех точках интервала (x_*, x^*), за исключением, быть может, тех точек, где y_1 обращается в нуль. ▶

Следствие 3.3. Если известны k линейно независимых частных решений уравнения (3.12), то порядок этого уравнения можно понизить на k единиц, причем полученное уравнение $(n-k)$-го порядка остается линейным и однородным.

Следствие 3.4. Для интегрирования однородного линейного уравнения второго порядка достаточно знать одно (ненулевое) частное решение.

Пример 3.13. ОДУ $(2\,x - x^2)\,y'' + (x^2 - 2)\,y' + 2\,(1 - x)\,y = 0$ имеет частное решение $y_1 = e^x$. Найти решение, удовлетворяющее начальным условиям: $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$.

◀ Чтобы найти общее решение данного уравнения, нужно знать два линейно независимых частных решения. Одно частное решение $y_1 = e^x$ нам дано. Второе будем искать в виде (3.25). Для использования уравнения (3.26) приведем исходное уравнение к виду (3.24). Тогда коэффициент a_1 последнего в данном случае будут следующим:

$$a_1 = \frac{x^2 - 2}{2\,x - x^2}.$$

При этом уравнение (3.26) примет вид

$$e^x z' + \left(2\,e^x + \frac{x^2-2}{2\,x-x^2}\,e^x\right) z = 0, \quad \text{или} \quad z' + \frac{-x^2+4\,x-2}{2\,x-x^2}\,z = 0.$$

Разделяем переменные в уравнении:

$$\frac{dz}{z} = -\frac{x^2-4\,x+2}{x^2-2\,x}\,dx.$$

Интегрируем:

$$\ln|z| = -\int \frac{x^2-4\,x+2}{x^2-2\,x}\,dx = -\int \frac{x^2-2\,x-2\,x+2}{x^2-2\,x}\,dx =$$
$$= -\int \left(1 - \frac{2\,x-2}{x^2-2\,x}\right) dx = -x + \ln|x^2-2\,x| + \mathcal{C},$$

откуда

$$\ln\left|\frac{z}{x^2-2\,x}\right| = -x + \mathcal{C}, \quad \text{или} \quad \frac{z}{x^2-2\,x} = e^{-x+\mathcal{C}}.$$

Выбирая константу $\mathcal{C}$ равной нулю, получаем $z = e^{-x}\,(x^2-2\,x)$. Интегрируя дважды по частям, находим

$$\int z\,dx = \int e^{-x}\,(x^2-2\,x)\,dx = -e^{-x}\,(x^2-2\,x) + 2\int e^{-x}\,(2\,x-2)\,dx =$$
$$= -e^{-x}\,(x^2-2\,x) - 2\,e^{-x}\,(2\,x-2) + 2\int e^{-x}\,dx =$$
$$= -e^{-x}\left[(x^2-2\,x) + 2\,(2\,x-2) + 2\right] = -x^2\,e^{-x}.$$

Отсюда второе частное решение исходного уравнения принимает следующую форму:

$$y_2 = z\,y_1 = -x^2\,e^{-x}\,e^x = -x^2,$$

а общее решение –

$$y = \mathcal{C}_1\,e^x + \mathcal{C}_2\,x^2.$$

Для получения частного решения уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям, в общее решение и его производную $y' =$

$\mathcal{C}_1\, e^x + 2\,\mathcal{C}_2\, x$ вместо x и y подставляем соответствующие значения и получаем систему уравнений относительно произвольных постоянных:

$$0 = \mathcal{C}_1\, e + \mathcal{C}_2, \qquad 1 = \mathcal{C}_1\, e + 2\,\mathcal{C}_2.$$

Решение этой системы – $\mathcal{C}_1 = -e^{-1}$, $\mathcal{C}_2 = 1$. Тогда искомым частным решением будет $y = -e^{x-1} + x^2$. ▶

3.4. Линейные однородные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим *линейное однородное уравнение*

$$\mathbb{L}[y] \equiv y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}\, y' + a_n\, y = 0 \tag{3.27}$$

с постоянными коэффициентами a_1, a_2, ..., a_n.

Для удобства уравнение (3.27) при $n = 2$ запишем в форме

$$y'' + p\, y' + q\, y = 0. \tag{3.28}$$

и обсудим схему его решения.

Следуя Л. Эйлеру, будем отыскивать частные решения в виде (*метод Эйлера*)

$$y = e^{\lambda x}, \tag{3.29}$$

где λ – подлежащая определению постоянная. Подставляя в уравнение (3.28) $e^{\lambda x}$, получим

$$e^{\lambda x}\, (\lambda^2 + p\,\lambda + q) = 0.$$

Следовательно, λ есть корень квадратного уравнения

$$\lambda^2 + p\,\lambda + q = 0, \tag{3.30}$$

которое называется *характеристическим уравнением* для ОДУ (3.28). Последнее уравнение можно выписать непосредственно по уравнению (3.28). Корни уравнения (3.30) могут быть различными или одинаковыми, действительными или комплексными в зависимости от значения величины $p^2/4 - q$.

1°. Если квадратное уравнение (3.30) имеет два различных действительных корня λ_1 и λ_2, то по формуле (3.29) получим два линейно независимых решения, линейная комбинация которых

$$y = \mathcal{C}_1\, e^{\lambda_1 x} + \mathcal{C}_2\, e^{\lambda_2 x}$$

с произвольными постоянными $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ есть (согласно теореме 3.5) общее решение уравнения (3.28).

Пример 3.14. Дано уравнение $y'' - a^2\, y = 0$ ($a > 0$). Его характеристическое уравнение $\lambda^2 - a^2 = 0$ имеет различные действительные корни $\lambda_1 = a$ и $\lambda_2 = -a$. Поэтому общее решение уравнения есть

$$y = \mathcal{C}_1\, e^{a\,x} + \mathcal{C}_2\, e^{-a\,x}. \qquad \blacktriangleright$$

Пример 3.15. Рассмотрим уравнение $y'' + p\, y' = 0$ ($p \neq 0$). Его характеристическое уравнение $\lambda^2 + p\,\lambda = 0$ имеет различные действительные корни: $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = -p$. Поэтому общее решение – функция

$$y = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2\, e^{-p\,x}. \qquad \blacktriangleright$$

2°. Если квадратное уравнение (3.30) имеет комплексно сопряженные корни λ_1 и λ_2, то соответствующие решения (3.29) получаются опять линейно независимыми. Пусть $\lambda_1 = \alpha + \beta\,\boldsymbol{i}$ ($\boldsymbol{i}$ – мнимая единица), тогда $\lambda_2 = \alpha - \beta\,\boldsymbol{i}$. Решения (3.29) в этом случае можно представить с помощью формул Эйлера в виде

$$\tilde{y}_{1,2} = e^{\alpha\,x}\cos(\beta\,x) \pm \boldsymbol{i}\, e^{\alpha\,x}\sin(\beta\,x).$$

Введем функции y_1 и y_2 по формулам

$$y_1 = \frac{1}{2}\,\big(\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2\big) = e^{\alpha\,x}\cos(\beta\,x), \qquad y_2 = \frac{1}{2\,\boldsymbol{i}}\,\big(\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2\big) = e^{\alpha\,x}\sin(\beta\,x).$$

Можно показать, что функции y_1 и y_2 удовлетворяют уравнению (3.28), а кроме того, они линейно независимы. Тогда в рассматриваемом случае уравнение (3.28) имеет общее решение вида

$$y = e^{\alpha\,x}\,\big[\mathcal{C}_1\,\cos(\beta\,x) + \mathcal{C}_2\,\sin(\beta\,x)\big].$$

Пример 3.16. Дано уравнение гармонического осциллятора $y'' + \omega^2\, y = 0$ ($\omega > 0$). Его характеристическое уравнение $\lambda^2 + \omega^2 = = 0$ имеет чисто мнимые корни $\lambda_{1,2} = \pm\omega\,\boldsymbol{i}$. Общее решение этого уравнения

$$y = \mathcal{C}_1\,\cos(\omega\,x) + \mathcal{C}_2\,\sin(\omega\,x)$$

представляет собой периодическую функцию. $\blacktriangleright$

3°. Если характеристическое уравнение (3.30) имеет одинаковые действительные корни $\lambda_{1,2} = -p/2$, то частные решения (3.29), соответствующие этим корням, совпадают и не образуют фундаментальной системы решений.

В этом случае решением уравнения (3.28) является функция $y_3 = x\, e^{\lambda_1 x}$. Убедиться в этом можно прямой подстановкой y_3 в это уравнение:

$$e^{\lambda_1 x}\left[(2\,\lambda_1 + p) + x\,(\lambda_1^2 + p\,\lambda_1 + q)\right] \equiv 0.$$

Это следствие того, что λ_1 – корень характеристического уравнения, а поэтому выражения в круглых скобках обращаются в нуль. Поэтому функция y_3 – решение уравнения (3.28), которое линейно не зависит от $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ (отношение y_3/y_1 непостоянно). Функции y_1 и y_3 образуют фундаментальную систему решений, и уравнение (3.28) имеет в рассматриваемом случае общее решение вида

$$y = e^{\lambda_1 x}\,(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2\, x).$$

Пример 3.17. Уравнению $y'' - 2y' + y = 0$ соответствует характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\,\lambda + 1 = 0$, имеющее равные корни $\lambda_{1,2} = 1$. Тогда его общее решение есть

$$y = e^{x}(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2\, x). \qquad \blacktriangleright$$

Результаты, полученные при рассмотрении уравнения второго порядка (3.28), допускают обобщение на случай уравнения любого порядка с постоянными коэффициентами. Сформулируем его в виде следующего правила.

Правило нахождения общего решения линейного однородного уравнения (3.27) любого порядка с постоянными коэффициентами

1°. Составим соответствующее характеристическое уравнение

$$\lambda^n + a_1\,\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

и найдем его корни $\lambda_1,\ \lambda_2,\ ...,\ \lambda_n$.

2°. Построим частные решения, соответствующие найденным корням:

а) каждому простому вещественному корню λ соответствует решение $y = e^{\lambda\, x}$;

б) каждому s-кратному вещественному корню λ соответствует s решений: $y_1 = e^{\lambda x}$, $y_2 = x\, e^{\lambda x}$, ..., $y_s = x^{s-1}\, e^{\lambda x}$;

в) каждой паре комплексно сопряженных корней $\alpha \pm \beta\, \boldsymbol{i}$ соответствует два решения: $y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ и $y_2 = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$;

г) каждой r-кратной паре комплексных корней $\alpha \pm \beta\, \boldsymbol{i}$ соответствует $2\, r$ решений:

$$\begin{array}{llll} y_{11} = e^{\alpha x} \cos(\beta x), & y_{12} = x\, y_{11}, & \ldots & y_{1r} = x\, y_{1,r-1}, \\ y_{21} = e^{\alpha x} \sin(\beta x), & y_{22} = x\, y_{21}, & \ldots & y_{2r} = x\, y_{2,r-1}. \end{array}$$

3°. Линейная комбинация всех этих решений с произвольными постоянными коэффициентами есть общее решение уравнения (3.27).

Пример 3.18. Для уравнения $y^{IV} - 4\, y^{III} + 6\, y'' - 4\, y' + y = 0$ характеристическое уравнение $\lambda^4 - 4\, \lambda^3 + 6\, \lambda^2 - 4\, \lambda + 1 = 0$ имеет корень $\lambda_1 = 1$ кратности $s = 4$. Поэтому общее решение уравнения есть

$$y = e^x\, (\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2\, x + \mathcal{C}_3\, x^2 + \mathcal{C}_4\, x^3). \qquad \blacktriangleright$$

Пример 3.19. Рассмотрим уравнение $y^{III} - 3\, y'' + y' - 3\, y = 0$. Его характеристическое уравнение $\lambda^3 - 3\, \lambda^2 + \lambda - 3 = 0$ имеет действительный корень $\lambda_1 = 3$ кратности один и пару чисто мнимых комплексно сопряженных корней $\lambda_{2,3} = \pm \boldsymbol{i}$. Поэтому общее решение этого уравнения имеет вид:

$$y = \mathcal{C}_1\, e^{3x} + \mathcal{C}_2\, \cos x + \mathcal{C}_3\, \sin x. \qquad \blacktriangleright$$

Пример 3.20. Уравнению $y^{IV} - 16\, y = 0$ соответствует характеристическое уравнение $\lambda^4 - 16 = 0$. Это уравнение имеет пару действительных корней $\lambda_{1,2} = \pm 2$ кратности один и пару чисто мнимых комплексно сопряженных корней $\lambda_{3,4} = \pm 2\, \boldsymbol{i}$ той же кратности. Поэтому общее решение уравнения есть

$$y = \mathcal{C}_1\, e^{2x} + \mathcal{C}_2\, e^{-2x} + \mathcal{C}_3\, \cos 2\, x + \mathcal{C}_4\, \sin 2\, x. \qquad \blacktriangleright$$

3.5. Линейные неоднородные уравнения n-го порядка

Рассмотрим *линейное неоднородное уравнение n-го порядка*

$$\mathbb{L}[y] = f(x), \tag{3.31}$$

коэффициенты которого $a_1(x)$, $a_2(x)$, ..., $a_n(x)$ и свободный член $f(x)$ определены и непрерывны на интервале (x_*, x^*).

Пусть семейство функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ представляет собой фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения

$$\mathbb{L}\big[y\big] = 0. \tag{3.32}$$

Тогда линейная комбинация этих решений с произвольными коэффициентами

$$y_o(x) = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{C}_k \, y_k(x) \tag{3.33}$$

согласно теореме 3.5 представляет собой общее решение однородного уравнения (3.32).

Теорема 3.7 (о структуре общего решения линейного неоднородного уравнения). Пусть дано неоднородное уравнение (3.31). Общее решение этого уравнения есть сумма общего решения $y_o(x)$ соответствующего однородного уравнения (3.32) и какого-либо частного решения $y_*(x)$ неоднородного уравнения:

$$y(x) = y_o(x) + y_*(x). \tag{3.34}$$

◀ Функция (3.34) есть решение уравнения (3.31) при любых значениях произвольных постоянных $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, ..., $\mathcal{C}_n$. Это следует из того, что

$$\mathbb{L}\big[y_o(x) + y_*(x)\big] = \mathbb{L}\big[y_o(x)\big] + \mathbb{L}\big[y_*(x)\big] = f(x),$$

так как

$$\mathbb{L}\big[y_o(x)\big] = 0, \qquad \mathbb{L}\big[y_*(x)\big] = f(x).$$

Любое решение $\phi(x)$ задачи Коши для уравнения (3.31) можно получить из множества решений (3.34) при соответствующих значениях постоянных $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, ..., $\mathcal{C}_n$. Действительно, так как $\phi(x)$ – решение, то

$$\mathbb{L}[\phi(x)] \equiv f(x).$$

Из соотношения

$$\mathbb{L}\big[\phi(x) - y_*(x)\big] = \mathbb{L}\big[\phi(x)\big] - \mathbb{L}\big[y_*(x)\big] \equiv 0$$

на промежутке (x_*, x^*) следует, что функция $\phi(x) - y_*(x)$ удовлетворяет однородному уравнению (3.32).

Согласно теореме 3.5 любое решение задачи Коши для уравнения (3.32), в частности $\phi(x) - y_*(x)$, можно получить из общего решения (3.33) этого уравнения при соответствующих значениях постоянных $\mathcal{C}_k$:

$$\phi(x) - y_*(x) = \mathcal{C}_{10}\, y_1(x) + \mathcal{C}_{20}\, y_2(x) + \ldots + \mathcal{C}_{n0}\, y_n(x).$$

Следовательно,

$$\phi(x) = y_*(x) + \mathcal{C}_{10}\, y_1(x) + \mathcal{C}_{20}\, y_2(x) + \ldots + \mathcal{C}_{n0}\, y_n(x). \qquad \blacktriangleright$$

Теорема 3.8. Если $y_{*1}(x)$ и $y_{*2}(x)$ являются частными соответственно уравнений $\mathbb{L}\big[y\big] = f_1(x)$ и $\mathbb{L}\big[y\big] = f_2(x)$, то $y_{*1}(x) + y_{*2}(x)$ есть частное решение уравнения $\mathbb{L}\big[y\big] = f_1(x) + f_2(x)$.

◀ Согласно условию $\mathbb{L}\big[y_{*1}\big] = f_1(x)$ и $\mathbb{L}\big[y_{*2}\big] = f_2(x)$. Следовательно, $\mathbb{L}\big[y_{*1} + y_{*2}\big] = \mathbb{L}\big[y_{*1}\big] + \mathbb{L}\big[y_{*2}\big] = f_1(x) + f_2(x)$. ▶

3.6. Линейные неоднородные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами

В предыдущем подразделе было установлено, что для составления общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка с переменными коэффициентами (3.31) согласно теореме 3.7 нужно знать общее решение $y_o(x)$ однородного уравнения и частное решение $y_*(x)$ неоднородного. Нахождение такого решения в общем случае представляет собой достаточно сложную, практически неразрешимую задачу. Но если у нас уравнение с постоянными коэффициентами, то согласно алгоритму из подраздела 3.4 задача получения $y_o(x)$ существенно облегчается. Кроме того, по крайней мере теоретически, при любой правой части уравнения можно получить и частное решение $y_*(x)$ (см. подраздел 3.7), но соответствующая процедура требует проведения значительных выкладок. Но в некоторых случаях получение $y_*(x)$ значительно упрощается. Покажем это.

Пусть линейное неоднородное уравнение

$$\mathbb{L}\big[y\big] \equiv y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}\, y' + a_n\, y = f(x) \tag{3.35}$$

имеет постоянные действительные коэффициенты, а правая часть $f(x)$ – специальный вид, а именно:

$$f(x) = e^{\alpha\, x}\,\big[P(x)\, \cos(\beta\, x) + Q(x)\, \sin(\beta\, x)\big], \tag{3.36}$$

где α, β – постоянные, $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены переменной x порядка n и m соответственно. Тогда для нахождения частного решения применим *метод неопределенных коэффициентов.*

К сожалению, в существующей учебной литературе, как правило, этот метод излагается таким способом, что студенту подчас очень трудно "увидеть за деревьями лес". Ниже представлена схема поиска частного решения уравнения (3.35) в форме, которая не раз была апробирована на лекциях и практических занятиях со студентами ряда факультетов Пермского госуниверситета.

Анализируя различные частные случаи, представленные в существующих учебниках, без труда можно увидеть, что наиболее общая форма частного решения, соответствующего правой части $f(x)$ (3.36), должна иметь следующий вид:

$$y_*(x) = x^r\, e^{\alpha\, x}\left[U(x)\,\cos(\beta\, x) + V(x)\,\sin(\beta\, x)\right], \tag{3.37}$$

а основные элементы этой формулы интерпретируются так: постоянные α, β – те же, что и в (3.36); константа r равна кратности корня $\alpha \pm \beta\,\boldsymbol{i}$ характеристического уравнения ($r \geqslant 0$; $r = 0$, если корень $\alpha \pm \beta\boldsymbol{i}$ у характеристического уравнения отсутствует); $U(x)$ и $V(x)$ – многочлены переменной x порядка $k = \max(n, m)$ с неопределенными коэффициентами:

$$U(x) = U_0 + U_1\,x + ... + U_k\,x^k, \qquad V(x) = V_0 + V_1\,x + ... + V_k\,x^k.$$

При этом для нахождения коэффициентов полиномов $U(x)$ и $V(x)$ необходимо $y_*(x)$ (3.37) подставить в уравнение (3.35) и приравнять коэффициенты при линейно независимых функциях типа

$$x^s\,e^{\alpha\,x}\,cos(\beta\,x), \qquad x^s\,e^{\alpha\,x}\,\sin(\beta\,x), \qquad s \geqslant 0,$$

в левой и правой частях уравнения, а затем решить полученную систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно коэффициентов полиномов $U(x)$ и $V(x)$. Заметим, что если структура $y_*(x)$ выбрана правильно, то указанная СЛАУ имеет единственное решение.

Итак, для того чтобы построить частное решение $y_*(x)$, необходимо проанализировать правую часть $f(x)$ и заполнить следующую таблицу, которая и будет служить для определения элементов $y_*(x)$:

$\alpha =$	$P(x) =$	$n =$	$k =$
$\beta =$	$Q(x) =$	$m =$	
1) $\alpha + \beta\boldsymbol{i}$ не является корнем характеристического уравнения $\Rightarrow$ $r = 0$ 2) $\alpha + \beta\boldsymbol{i}$ – корень кратности r_0 характеристического уравнения $\Rightarrow$ $r = r_0$			

Замечание. При необходимости правую часть можно разбить на сумму слагаемых вида (3.36) и затем провести соответствующие рассуждения для каждого слагаемого отдельно. Согласно теореме 3.8 частное решение для всей правой части будет равняться сумме таких "частичных".

Пример 3.21. Решить уравнение $y^{IV} - y = x^3 + 1$.

◀ 1°. Находим решение соответствующего однородного уравнения y^{IV} $-y = 0$. Для него характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^4 - 1 = 0$, а корни последнего – $\lambda_{1,2} = \pm 1$, $\lambda_{3,4} = \pm\boldsymbol{i}$ (два действительных и два комплексно сопряженных корня, каждый из которых кратности 1). Отсюда

$$y_o = \mathcal{C}_1\, e^x + \mathcal{C}_2\, e^{-x} + \mathcal{C}_3\, \cos x + \mathcal{C}_4\, \sin x.$$

2°. Разбираем правую часть $f(x) = x^3 + 1$:

$\alpha = 0$	$P(x) = x^3 + 1$	$n = 3$	$k = 3$
$\beta = 0$	$Q(x) = 0$	$m = 0$	
$\alpha + \beta\,\boldsymbol{i} = 0$ не является корнем характеристического уравнения $\Rightarrow$ $r = 0$			

($\alpha = \beta = 0$, так как экспонента и тригонометрические функции в $f(x)$ отсутствуют). Отсюда $y_* = U(x) \equiv A + B\,x + C\,x^2 + D\,x^3$ и $V(x) \equiv 0$, а A, B, C, D – неопределенные коэффициенты. Перед подстановкой y_* в уравнение найдем необходимые производные:

$$\begin{aligned} y &= A + B\,x + C\,x^2 + D\,x^3, \\ y' &= B + 2\,C\,x + 3\,D\,x^2, \\ y'' &= 2\,C + 6\,D\,x, \\ y''' &= 6\,D, \\ y^{IV} &= 0, \end{aligned}$$

что дает

$$0 - A - B\,x - C\,x^2 - D\,x^3 = x^3 + 1.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях последнего равенства, получим СЛАУ для A, B, C, D вида

$$-A = 1, \quad -B = 0, \quad -C = 0, \quad -D = 1,$$

откуда находим, что $A = D = -1$, $B = C = 0$, а следовательно, $y_* = -x^3 - 1$.

3°. Складывая y_o и y_*, получаем общее решение рассматриваемого уравнения:

$$y = \mathcal{C}_1\, e^x + \mathcal{C}_2\, e^{-x} + \mathcal{C}_3\, \cos x + \mathcal{C}_4\, \sin x - x^3 - 1. \qquad \blacktriangleright$$

Пример 3.22. Решить уравнение $y'' - y = 2\, \sin x - 4\, \cos x$.

◀ 1°. Находим решение соответствующего однородного уравнения $y'' - y = 0$. Для этого выписываем характеристическое уравнение $\lambda^2 - 1 = 0$ и решаем его: $\lambda_{1,2} = \pm 1$ (два действительных корня, каждый из которых кратности 1). Отсюда

$$y_o = \mathcal{C}_1\, e^x + \mathcal{C}_2\, e^{-x}.$$

2°. Разбираем правую часть $f(x) = 2\, \sin x - 4\, \cos x$:

$\alpha = 0$	$P(x) = -4$	$n = 0$	$k = 0$
$\beta = 1$	$Q(x) = 2$	$m = 0$	
$\alpha + \beta\, \boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}$ не является корнем характеристического уравнения $\Rightarrow$ $r = 0$			

($\alpha = 0$, так как экспонента в выражении для $f(x)$ отсутствует). Отсюда $y_* = A\, \cos x + B\, \sin x$, где $U(x) \equiv A$, $V(x) \equiv B$, а A и B – неопределенные коэффициенты.

Перед подстановкой функции y_* в уравнение найдем необходимые производные[1]:

$$\begin{array}{rcccccc}
y & = & A & \cos x & + & B & \sin x, \\
y' & = & B & \cos x & + & (-A) & \sin x, \\
y'' & = & (-A) & \cos x & + & (-B) & \sin x,
\end{array}$$

[1] Здесь и далее используется столбцовая запись коэффициентов и линейно независимых агрегатов для облегчения нахождения производных и сокращения выкладок: ведь известно, что при дифференцировании тригонометрические функции sin, cos переходят друг в друга с изменением коэффициентов, полиномы – в полиномы более низкой степени, экспоненты – в экспоненты также с изменением коэффициентов, произведения из перечисленных элементов – в подобные конструкции.

а теперь осуществим саму подстановку:

$$\begin{array}{c|l} y'' & (-A)\ \cos x\ +\ (-B)\ \sin x, \\ (-y) & (-A)\ \cos x\ +\ (-B)\ \sin x, \\ \hline f(x) & (-4)\ \cos x\ +\ \qquad 2\ \sin x. \end{array}$$

Приравнивая коэффициенты по столбцам, сразу же получаем СЛАУ для A и B:

$$\begin{aligned} -2\,A &= -4, \\ -2\,B &= -2, \end{aligned}$$

откуда находим, что $A = 2$, $B = 1$, а следовательно, $y_* = 2\,\cos x + \sin x$.

3°. Складывая y_o и y_*, получаем общее решение исходного уравнения:

$$y = \mathcal{C}_1\,e^x + \mathcal{C}_2\,e^{-x} + 2\,\cos x + \sin x. \qquad ▶$$

Пример 3.23. Найти решение уравнения $y'' - y = 2\,e^x$.

◀ 1°. Сначала ищем решение соответствующего однородного уравнения $y'' - y = 0$. Последнее совпадает с однородным уравнением из предыдущей задачи, а следовательно, совпадают и корни: $\lambda_{1,2} = \pm 1$ (два действительных корня, каждый из которых кратности 1). Отсюда

$$y_o = \mathcal{C}_1\,e^x + \mathcal{C}_2\,e^{-x}.$$

2°. Разбираем правую часть уравнения $f(x) = 2\,e^x$:

$\alpha = 1$	$P(x) = 2$	$n = 0$	$k = 0$
$\beta = 0$	$Q(x) = 0$	$m = 0$	
$\alpha + \beta\boldsymbol{i} = 1$ – корень характеристического уравнения кратности 1 $\Rightarrow$ $r = 1$			

($\beta = 0$, так как тригонометрические функции отсутствуют). Отсюда $y_* = x\,A\,e^x$, где $U(x) \equiv A$, $V(x) \equiv 0$, а A – неопределенный коэффициент. Найдем необходимые производные:

$$\begin{aligned} y\ &= A\ e^x\ \cdot\ \quad x, \\ y'\ &= A\ e^x\ \cdot\ (x+1), \\ y''\ &= A\ e^x\ \cdot\ (x+2) \end{aligned}$$

(вторая строка получена из первой следующим образом: производная произведения e^x на полином равна произведению e^x на сумму полинома и его производной), а теперь осуществим саму подстановку:

$$\begin{array}{c|l} y'' & e^x\ (\ \ A\,x + 2\,A), \\ (-y) & e^x\ (-A\,x + \ \ 0), \\ \hline f(x) & e^x\ (\ \ 0\,x + \ \ 2). \end{array}$$

Учитывая, что члены $\pm A\,x\,e^x$ в правой части исчезают, и приравнивая постоянные множители при экспонентах, получаем уравнение для A:

$$2\,A = 2,$$

что дает $A = 1$, а следовательно, $y_* = x\,e^x$.

3°. Складывая y_o и y_*, получаем общее решение исходного уравнения:

$$y = (\mathcal{C}_1 + x)\,e^x + \mathcal{C}_2\,e^{-x}. \qquad \blacktriangleright$$

3.7. Линейные неоднородные уравнения с переменными коэффициентами. Метод Лагранжа

Рассмотрим линейное однородное ОДУ с переменными коэффициентами вида

$$y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y = 0. \tag{3.38}$$

Если известно его частное решение $y_1(x)$, то, не нарушая линейности, порядок этого уравнения может быть понижен на единицу. Это произойдет, если последовательно провести две замены переменных следующим образом:

$$y = y_1\,z, \qquad z' = u,$$

где z и u – новые неизвестные функции.

Если известны k частных линейно независимых решений уравнения (3.38), то его порядок может быть понижен на k единиц.

В подразделе 3.5 была сформулирована и доказана теорема 3.7 о структуре общего решения линейного неоднородного уравнения

$$\mathbb{L}[y] \equiv y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y = f(x), \tag{3.39}$$

которая постулирует то, что это решение есть сумма общего решения соответствующего однородного уравнения и какого-либо частного решения неоднородного. В случае постоянства коэффициентов уравнения и заданной формы (3.39) правой части найти общее решение не представляет труда.

Ситуация существенно меняется, если нарушается хотя бы одно из указанных условий: коэффициенты уравнения являются переменными и/или правая его часть имеет произвольную зависимость от x. В этом случае общее решение уравнения (3.39) (за исключением редких случаев) может быть найдено только тогда, когда для рассматриваемого уравнения известна фундаментальная система решений (для уравнений с постоянными коэффициентами построить такую систему не составляет большого труда; для случая же переменных коэффициентов какая-либо более или менее общая процедура поиска фундаментальных решений до сих пор отсутствует), а в качестве процедуры построения можно воспользоваться *методом Лагранжа* (*методом вариации произвольных постоянных*). Рассмотрим этот метод.

Выше было установлено, что общее решение уравнений уравнения (3.38) имеет вид

$$y_o = \mathcal{C}_1\, y_1(x) + \mathcal{C}_2\, y_2(x) + \ldots + \mathcal{C}_n\, y_n(x), \tag{3.40}$$

где $\mathcal{C}_i$ – произвольные постоянные, а $y_i(x)$ – фундаментальные решения (3.38). Будем искать общее решение уравнения (3.39) в форме, схожей с (3.40):

$$y = \widetilde{\mathcal{C}}_1(x)\, y_1(x) + \widetilde{\mathcal{C}}_2(x)\, y_2(x) + \ldots + \widetilde{\mathcal{C}}_n(x)\, y_n(x), \tag{3.41}$$

где $\widetilde{\mathcal{C}}_i$ – некоторые пока неизвестные непрерывно дифференцируемые функции x ("произвольные постоянные" теперь уже могут изменяться, т.е. варьироваться, откуда и происходит второе название метода).

Искомые функции $\widetilde{\mathcal{C}}_i$ подчинены пока только одному условию, которое получается в результате подстановки правой части выражения (3.41) вместо y в уравнение (3.39). Поэтому для того, чтобы полностью определить эти функции, необходимо указать еще $n-1$ условие, которое может быть любым, выбранным нами.

Чтобы система уравнений для определения $\widetilde{\mathcal{C}}_i$ была наиболее простой, при вычислении последовательных производных y из равенства (3.41) на всех этапах будем считать равной нулю сумму членов, содержащих $\widetilde{\mathcal{C}}_i$:

$$\begin{aligned}
y &= \widetilde{\mathcal{C}}_1(x)\, y_1(x) + \widetilde{\mathcal{C}}_2(x)\, y_2(x) + \ldots + \widetilde{\mathcal{C}}_n(x)\, y_n(x),\\
y' &= \widetilde{\mathcal{C}}_1(x)\, y_1'(x) + \widetilde{\mathcal{C}}_2(x)\, y_2'(x) + \ldots + \widetilde{\mathcal{C}}_n(x)\, y_n'(x) +\\
&\quad + \underbrace{\widetilde{\mathcal{C}}_1'(x)\, y_1(x) + \widetilde{\mathcal{C}}_2'(x)\, y_2(x) + \ldots + \widetilde{\mathcal{C}}_n'(x)\, y_n(x)}_{0},\\
y'' &= \widetilde{\mathcal{C}}_1(x)\, y_1''(x) + \widetilde{\mathcal{C}}_2(x)\, y_2''(x) + \ldots + \widetilde{\mathcal{C}}_n(x)\, y_n''(x) +\\
&\quad + \underbrace{\widetilde{\mathcal{C}}_1'(x)\, y_1'(x) + \widetilde{\mathcal{C}}_2'(x)\, y_2'(x) + \ldots + \widetilde{\mathcal{C}}_n'(x)\, y_n'(x)}_{0},
\end{aligned} \tag{3.42}$$

$$
\begin{aligned}
&\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\\
&y^{(n-1)} = \widetilde{\mathcal{C}}_1(x)\, y_1^{(n-1)}(x) + \widetilde{\mathcal{C}}_2(x)\, y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + \widetilde{\mathcal{C}}_n(x)\, y_n^{(n-1)}(x) + \\
&\qquad + \underbrace{\widetilde{\mathcal{C}}_1'(x)\, y_1^{(n-2)}(x) + \widetilde{\mathcal{C}}_2'(x)\, y_2^{(n-2)}(x) + \ldots + \widetilde{\mathcal{C}}_n'(x)\, y_n^{(n-2)}(x)}_{0},\\
&y^{(n)} = \widetilde{\mathcal{C}}_1(x)\, y_1^{(n)}(x) + \widetilde{\mathcal{C}}_2(x)\, y_2^{(n)}(x) + \ldots + \widetilde{\mathcal{C}}_n(x)\, y_n^{(n)}(x) + \\
&\qquad + \widetilde{\mathcal{C}}_1'(x)\, y_1^{(n-1)}(x) + \widetilde{\mathcal{C}}_2'(x)\, y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + \widetilde{\mathcal{C}}_n'(x)\, y_n^{(n-1)}(x),
\end{aligned}
$$

что можно интерпретировать, как "постоянство" $\widetilde{\mathcal{C}}_i$. Подставим эти выражения для y, y', ..., $y^{(n-1)}$, $y^{(n)}$ в уравнение (3.39) и сгруппируем члены получившегося равенства следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{\mathcal{C}}_1(x)\, \mathbb{L}\big[y_1(x)\big] + \widetilde{\mathcal{C}}_2(x)\, \mathbb{L}\big[y_2(x)\big] + \ldots + \widetilde{\mathcal{C}}_n(x)\, \mathbb{L}\big[y_n(x)\big] + \\
&\qquad + \widetilde{\mathcal{C}}_1'(x)\, y_1^{(n-1)}(x) + \widetilde{\mathcal{C}}_2'(x)\, y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + \widetilde{\mathcal{C}}_n'(x)\, y_n^{(n-1)}(x) = f(x),
\end{aligned}
$$

а это, вследствие того, что $y_i(x)$ – решения однородного уравнения (3.38), дает равенство

$$
\widetilde{\mathcal{C}}_1'(x)\, y_1^{(n-1)}(x) + \widetilde{\mathcal{C}}_2'(x)\, y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + \widetilde{\mathcal{C}}_n'(x)\, y_n^{(n-1)}(x) = f(x).
$$

Итак, для нахождения $\widetilde{\mathcal{C}}_i$ получена следующая система ОДУ:

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{\mathcal{C}}_1'(x)\, y_1(x) + \widetilde{\mathcal{C}}_2'(x)\, y_2(x) + \ldots + \widetilde{\mathcal{C}}_n'(x)\, y_n(x) = 0,\\
&\widetilde{\mathcal{C}}_1'(x)\, y_1'(x) + \widetilde{\mathcal{C}}_2'(x)\, y_2'(x) + \ldots + \widetilde{\mathcal{C}}_n'(x)\, y_n'(x) = 0,\\
&\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\\
&\widetilde{\mathcal{C}}_1'(x)\, y_1^{(n-2)}(x) + \widetilde{\mathcal{C}}_2'(x)\, y_2^{(n-2)}(x) + \ldots + \widetilde{\mathcal{C}}_n'(x)\, y_n^{(n-2)}(x) = 0,\\
&\widetilde{\mathcal{C}}_1'(x)\, y_1^{(n-1)}(x) + \widetilde{\mathcal{C}}_2'(x)\, y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + \widetilde{\mathcal{C}}_n'(x)\, y_n^{(n-1)}(x) = f(x),
\end{aligned}
\tag{3.43}
$$

которая на самом деле является неоднородной системой линейных алгебраических уравнений относительно $\widetilde{\mathcal{C}}_i'(x)$. Так как определитель этой системы (вронскиан $W_n(\boldsymbol{y}, x)$) отличен от нуля на интервале (x_*, x^*), то $\widetilde{\mathcal{C}}_i'(x)$ находятся единственным образом по формулам Крамера

$$
\widetilde{\mathcal{C}}_i'(x) = \frac{W_{ni}(\boldsymbol{y}, x)\, f(x)}{W_n(\boldsymbol{y}, x)},
\tag{3.44}
$$

где $W_{ni}(\boldsymbol{y}, x)$ – алгебраические дополнения элементов n-й строки вронскиана. При этом левые части формул (3.44) непрерывны на интервале (x_*, x^*), а поэтому и интегрируемы.

Окончательно из равенств (3.44) находим

$$\widetilde{\mathcal{C}}_i(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{W_{ni}(\boldsymbol{y}, t)\, f(t)}{W_n(\boldsymbol{y}, t)}\, dt + \mathcal{C}_i, \qquad i = 1, 2, ..., n,$$

где $\mathcal{C}_i$ – произвольные постоянные, а x_0 – любая точка из интервала (x_*, x^*).

Пример 3.24. Решить уравнение $(1 + x^2)\, y'' + x\, y' - y + 1 = 0$, если известно его частное решение $y_1 = x$.

◀ Для этого с помощью равенства $y = y_1\, z = x\, z$ перейдем к новой переменной z:

$$y' = z + x\, z', \qquad y'' = 2\, z' + x\, z''.$$

Отсюда ОДУ относительно z будет иметь вид

$$(1 + x^2)\,(2\, z' + x\, z'') + x\,(z + x\, z') - x\, z + 1 = 0,$$

или

$$(x^3 + x)\, z'' + (3\, x^2 + 2)\, z' = -1.$$

Обозначая z' через u, получим для u линейное уравнение первого порядка:

$$u' + \frac{3\, x^2 + 2}{x^3 + x}\, u = -\frac{1}{x^3 + x}, \tag{3.45}$$

причем

$$P(x) = \frac{3\, x^2 + 2}{x^3 + x}, \qquad Q(x) = -\frac{1}{x^3 + x}.$$

Решим это уравнение. Для этого находим:

$$R(x) = \int P(x)\, dx = \int \frac{3\, x^2 + 2}{x^3 + x}\, dx = \int \frac{3\, x^2 + 1}{x^3 + x}\, dx + \int \frac{1}{x\,(x^2 + 1)}\, dx =$$

$$= \int \frac{d(x^3 + x)}{x^3 + x} + \int \underbrace{\frac{1}{x\,(x^2 + 1)}}_{\mathsf{A}}\, dx = \ln |x^3 + x| + \int \mathsf{A}\, dx.$$

Вычислим остающийся интеграл от дробно-рациональной функции. Для этого представляем A в виде линейной комбинации простейших дробей с неопределенными коэффициентами, приводим получившееся выражение к общему знаменателю:

$$\mathsf{A} = \frac{1}{x\,(x^2+1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{2\,A_2\,x}{x^2+1} + \frac{A_3}{x^2+1} = \frac{A_1\,(x^2+1) + 2\,A_2\,x^2 + A_3\,x}{x^3+x},$$

а затем приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях левой и правой частей:

$$1 = A_1, \qquad 0 = A_3, \qquad 0 = A_1 + 2\,A_2,$$

откуда получаем, что

$$A_1 = 1, \qquad A_2 = -1/2, \qquad A_3 = 0,$$

а следовательно,

$$R(x) = \ln|x^3+x| + \int \mathsf{A}\,dx = \ln|x^3+x| + \int \Big(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} + \frac{0}{x^2+1}\Big)\,dx =$$

$$= \ln|x^3+x| + \ln|x| - \frac{1}{2}\,\ln|x^2+1| = \ln|x^2\,(x^2+1)| - \ln|\sqrt{x^2+1}| =$$

$$= \ln|x^2\,\sqrt{x^2+1}|,$$

$$e^{R(x)} = x^2\,\sqrt{x^2+1}, \qquad e^{-R(x)} = \frac{1}{x^2\,\sqrt{x^2+1}},$$

$$\int e^{R(x)}\,Q(x)\,dx = -\int \frac{x^2\,\sqrt{x^2+1}}{x\,(x^2+1)}\,dx = -\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = -\sqrt{x^2+1}.$$

Найденные функции позволяют построить решение уравнения (3.45):

$$u = e^{-R(x)}\,\Big[\mathcal{C}_1 + \int e^{R(x)}\,Q(x)\,dx\Big] = \frac{1}{x^2\,\sqrt{x^2+1}}\,\big[\mathcal{C}_1 - \sqrt{x^2+1}\big] =$$

$$= \frac{\mathcal{C}_1 - \sqrt{x^2+1}}{x^2\,\sqrt{x^2+1}} = \frac{\mathcal{C}_1}{x^2\,\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{x^2},$$

что дает

$$z = \int u\,dx + \mathcal{C}_2 = \frac{1}{x} + \mathcal{C}_1\,\underbrace{\int \frac{dx}{x^2\,\sqrt{x^2+1}}}_{\mathsf{B}} + \mathcal{C}_2.$$

Для вычисления интеграла B сделаем замену переменной $x = 1/t$, откуда $dx = -dt/t^2$, $\sqrt{x^2+1} = \sqrt{t^2+1}/t$, $t = 1/x$, а следовательно,

$$\mathsf{B} = -\int \frac{t^2\, t\, dt}{t^2\sqrt{t^2+1}} = -\sqrt{t^2+1} = -\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}.$$

В результате всех этих выкладок решение исходного уравнения будет иметь вид

$$y = x\,z = x\left(\frac{1}{x} - \mathcal{C}_1\,\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + \mathcal{C}_2\right) = 1 - \mathcal{C}_1\sqrt{x^2+1} + \mathcal{C}_2\,x. \qquad \blacktriangleright$$

Пример 3.25. Решить уравнение $y''' + y' = \sin x/\cos^2 x$.

◀ Это линейное неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка с постоянными коэффициентами. Построим его фундаментальную систему решений. Для этого запишем соответствующее характеристическое уравнение $\lambda^3 + \lambda = 0$. Оно имеет один действительный корень $\lambda_1 = 0$ и пару комплексно сопряженных корней $\lambda_{2,3} = \pm\boldsymbol{i}$. Поэтому фундаментальная система решений состоит из функций $y_1 = 1$, $y_2 = \cos x$ и $y_3 = \sin x$, для которых вычисляем определитель Вронского:

$$W_3(\boldsymbol{y}, x) = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sin x & \cos x \\ -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = 1,$$

а общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_o = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2\,\cos x + \mathcal{C}_3\,\sin x.$$

Отсюда по методу Лагранжа общее решение неоднородного уравнения будем искать в следующей форме:

$$y = \widetilde{\mathcal{C}}_1(x)\,y_1 + \widetilde{\mathcal{C}}_2(x)\,y_2 + \widetilde{\mathcal{C}}_3(x)\,y_3 \equiv \widetilde{\mathcal{C}}_1(x) + \widetilde{\mathcal{C}}_2(x)\,\cos x + \widetilde{\mathcal{C}}_3(x)\,\sin x.$$

При этом соответствующая система типа (3.43) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{C}}_1'(x) + \widetilde{\mathcal{C}}_2'(x)\,\cos x + \widetilde{\mathcal{C}}_3'(x)\,\sin x &= 0, \\ -\widetilde{\mathcal{C}}_2'(x)\,\sin x + \widetilde{\mathcal{C}}_3'(x)\,\cos x &= 0, \\ -\widetilde{\mathcal{C}}_2'(x)\,\cos x - \widetilde{\mathcal{C}}_3'(x)\,\sin x &= \frac{\sin x}{\cos^2 x}, \end{aligned}$$

а ее решение –

$$\widetilde{C}_1'(x) = \begin{vmatrix} 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ \frac{\sin x}{\cos^2 x} & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \frac{\sin x}{\cos^2 x},$$

$$\widetilde{C}_2'(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \sin x \\ 0 & 0 & \cos x \\ 0 & \frac{\sin x}{\cos^2 x} & -\sin x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cos x \\ \frac{\sin x}{\cos^2 x} & -\sin x \end{vmatrix} = -\operatorname{tg} x,$$

$$\widetilde{C}_3'(x) = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & 0 \\ 0 & -\sin x & 0 \\ 0 & -\cos x & \frac{\sin x}{\cos^2 x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sin x & 0 \\ -\cos x & \frac{\sin x}{\cos^2 x} \end{vmatrix} = -\operatorname{tg}^2 x,$$

откуда находим, что

$$\widetilde{C}_1'(x) = \int \widetilde{C}_1'(x)\,dx + C_1 = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx + C_1 = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x} + C_1 = \\ = \frac{1}{\cos x} + C_1,$$

$$\widetilde{C}_2'(x) = \int \widetilde{C}_2'(x)\,dx + C_2 = -\int \operatorname{tg} x\,dx + C_2 = \ln|\cos x| + C_2,$$

$$\widetilde{C}_3'(x) = \int \widetilde{C}_3'(x)\,dx + C_3 = -\int \operatorname{tg}^2 x\,dx + C_3 = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx + C_3 = \\ = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx + C_3 = \int \Big(1 - \frac{1}{\cos^2 x}\Big)\,dx + C_3 = x - \operatorname{tg} x + C_3.$$

Поэтому общее решение исходного уравнения – функция

$$y = \big(\frac{1}{\cos x} + C_1\big) + \big(\ln|\cos x| + C_2\big)\,\cos x + \big(x - \operatorname{tg} x + C_3\big)\,\sin x. \qquad \blacktriangleright$$

3.8. Уравнения Эйлера*

Определение 3.10. Линейное уравнение вида

$$(a\,x+b)^n\,y^{(n)} + a_1\,(a\,x+b)^{n-1}\,y^{(n-1)} + \ldots + \\ + a_{n-1}\,(a\,x+b)\,y' + a_n\,y = f(x), \quad (3.46)$$

где все a, b, a_1, a_2, ..., a_n – постоянные величины, называется *уравнением Эйлера*.

Если для области $a\,x + b > 0$ по формуле $a\,x + b = e^t$ ввести новую независимую переменную t, то уравнения вида (3.46) преобразуются в линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + b_1\, y^{(n-1)} + \ldots + b_{n-1}\, y' + b_n\, y = f_0(t), \tag{3.47}$$

где $y = y(t)$.

Другой, более простой способ, получения общего решения уравнения (3.46) состоит в поиске частных решений этого уравнения в виде $y = (a\,x+b)^k$ с неизвестным k, для которого алгебраическое уравнение n-й степени совпадает с характеристическим уравнением для (3.47).

Уравнение

$$x^n\, y^{(n)} + a_1\, x^{n-1}\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}\, x\, y' + a_n\, y = f(x) \tag{3.48}$$

является частным случаем уравнения Эйлера (3.46).

Пример 3.26. Найти общее решение уравнения $(x+2)^2\, y'' + 3\,(x+2)\, y' - 3\, y = 0$.

◄ Для этого в данное уравнение вместо y подставим выражение $(x+2)^k$. После сокращения на $(x+2)^k \neq 0$ получим алгебраическое уравнение второго порядка:

$$k\,(k-1) + 3\,k - 3 = 0,$$

или

$$k^2 + 2\,k - 3 = 0,$$

решения которого таковы: $k_1 = 1$, $k_2 = -3$. Тогда общее решение данного уравнения будет следующим:

$$y = \mathcal{C}_1\,(x+2) + \mathcal{C}_2\,(x+2)^{-3}. \qquad ►$$

Пример 3.27. Найти общее решение уравнения $(x+1)^3\, y''' - 3\,(x+1)^2\, y'' + 6\,(x+1)\, y' - 6\, y = (x+1)^3$.

◄ Уравнение неоднородное. Выделяем однородную часть:

$$(x+1)^3\, y''' - 3\,(x+1)^2\, y'' + 6\,(x+1)\, y' - 6\, y = 0.$$

Ищем решение в виде $y = (x+1)^k$. Для этого y подставим в однородное уравнение:

$$(x+1)^3\,k\,(k-1)\,(k-2)\,(x+1)^{k-3} - 3\,(x+1)^2\,k\,(k-1)\,(x+1)^{k-2} + \\ + 6\,(x+1)\,k\,(x+1)^{k-1} - 6\,(x+1)^k = 0.$$

Если разделить последнее уравнение на $(x+1)^k$, то получим

$$k\,(k-1)\,(k-2) - 3\,k\,(k-1) + 6\,k - 6 = 0,$$

или

$$(k-1)\,\bigl[k\,(k-2) - 3\,k + 6\bigr] = (k-1)\,(k-2)\,(k-3) = 0,$$

откуда $k_1 = 1$, $k_2 = 3$, $k_4 = 3$. Поэтому общее решение однородного уравнения будет иметь следующий вид:

$$y_0 = \mathcal{C}_1\,(x+1) + \mathcal{C}_2\,(x+1)^2 + \mathcal{C}_3\,(x+1)^3.$$

Теперь найдем частное решение неоднородного уравнения. Искать его будем в видее $y_* = A\,(x+1)^3\ln(x+1)$, где A – неопределенная постоянная. Подставляя в исходное уравнение, получим

$$2A(1+x)^3 = (x+1)^3,$$

откуда следует, что $A = 1/2$, а общее решение уравнение будет иметь вид

$$y = \mathcal{C}_1\,(x+1) + \mathcal{C}_2\,(x+1)^2 + \mathcal{C}_3\,(x+1)^3 + \frac{1}{2}\,(x+1)^3\ln(x+1). \qquad \blacktriangleright$$

3.9. Построение линейного ОДУ по его решениям*

Рассмотрим проблему построения линейного однородного ОДУ

$$y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y = 0, \qquad x \in [a,b], \tag{3.49}$$

для которого решениями являются заданные функции. Для разрешения проблемы нужно ответить на два вопроса: 1) существует ли такое уравнение в принципе? 2) единственно ли оно? Ответ на второй вопрос дает следующая теорема.

Теорема 3.9. Если коэффициенты $a_k(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, $k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$, то уравнение (3.49) однозначно определяется фундаментальной системой решений.

Теперь ответ на первый вопрос.

Теорема 3.10. Если n раз непрерывно дифференцируемые на отрезке $[a, b]$ функции $y_\ell(x)$, $\ell = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ таковы, что составленный из них определитель Вронского $W_n(\boldsymbol{y}, x)$ не равен нулю ни в одной точке отрезка $[a, b]$, то существует линейное однородное ОДУ n-го порядка такое, что функции $y_\ell(x)$, $\ell = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ являются его фундаментальной системой решений.

◀ Рассмотрим следующее линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка для неизвестной функции $y(x)$, $x \in [a, b]$:

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_{n-1}(x) & y_n(x) & y(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_{n-1}'(x) & y_n'(x) & y'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & \ldots & y_{n-1}''(x) & y_n''(x) & y''(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots. & y_{n-1}^{(n-1)}(x) & y_n^{(n-1)}(x) & y^{(n-1)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \ldots & y_{n-1}^{(n)}(x) & y_n^{(n)}(x) & y^{(n)}(x) \end{vmatrix} = 0. \quad (3.50)$$

Для того чтобы убедиться в том, что ОДУ (3.50) действительно представляет собой однородное линейное обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка, достаточно разложить определитель по последнему столбцу. Коэффициент при старшей производной $y^{(n)}(x)$ – это определитель Вронского, составленный из заданных функций $y_\ell(x)$, $\ell = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$. По условию теоремы он отличен от нуля на отрезке $[a, b]$.

Если поделить полученное уравнение на этот определитель, то получим ОДУ вида (3.49), коэффициенты которого непрерывны на отрезке $[a, b]$. Все функции $y_\ell(x)$, $\ell = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ являются решениями полученного уравнения, так как при подстановке функции $y_k(x)$ вместо $y(x)$ в уравнение (3.50) определитель в левой части будет включать два одинаковых столбца. ▶

Пример 3.28. Построить линейное однородное ОДУ наименьшего порядка, у которого решениями являются функции $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^2$, $y_3(x) = e^{-x}$.

◀ Вычислим определитель Вронского системы функций $y_1(x)$, $y_2(x)$ и $y_3(t)$:

$$W_3(\boldsymbol{y}, x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & e^{-x} \\ 1 & 2\,x & -e^{-x} \\ 0 & 2 & e^{-x} \end{vmatrix} = e^{-x} \begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ 1 & 2\,x & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= e^{-x}\left(2\,x^2 + 2 - x^2 + 2\,x\right) = e^{-x}\left(x^2 + 2\,x + 2\right).$$

Несложно установить, что этот определитель в нуль не обращается ни при каком x. Согласно последней теореме, искомое уравнение третьего порядка имеет вид

$$\frac{e^x}{x^2+2\,x+2}\begin{vmatrix} x & x^2 & e^{-x} & y \\ 1 & 2\,x & -e^{-x} & y' \\ 0 & 2 & e^{-x} & y'' \\ 0 & 0 & -e^{-x} & y''' \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$y''' + \frac{1}{x^2+2\,x+2}\left(x^2\,y'' - 2\,x\,y' + 2\,y\right) = 0. \qquad \blacktriangleright$$

3.10. Краевые задачи*

В предыдущих подразделах для уравнения n-го порядка рассматривалась задача с начальными условиями, в которой все n условий задаются при одном и том же значении $x = x_0$. В *краевой задаче* задаются условия при двух (или более) значениях x. Такие условия называются *краевыми*. Далее будут рассматриваться только *линейные краевые задачи*, в которых дифференциальное уравнение и краевые условия линейны. Левые части краевых условий – линейные комбинации значений искомой функции и ее производных в заданных точках x_i а правые части – заданные постоянные числа.

Пример 3.29. Примерами линейных условий являются: а) $y(a) = y_a$; б) $y'(b) = y'_b$; в) $c_1\,y(a) + c_2\,y'(b) = c_0$ (c_1 и c_2 заданы, $|c_1| + |c_2| \neq 0$); г) $y(a) - y(b) = c_3$; д) $y'(a) - y'(b) = c_4$.

Если постоянная в правой части краевого условия равна нулю, то условие называется *однородным*, если не равна нулю – то *неоднородным*.

Для уравнения n-го порядка задаются n условий. В разных точках x_i условия могут быть одного типа или разных типов.

Определение 3.11. Краевая задача называется *однородной*, если дифференциальное уравнение и краевые условия линейны и однородны.

В отличие от задачи с начальными условиями краевая задача может иметь одно или много решений, а может и не иметь решений. Например, задача $y'' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y(\pi/2) = c_0$ имеет единственное решение $y = c_0\,\sin x$, а задача $y'' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = b$ в случае $b \neq 0$ не имеет решений (так как все решения уравнения, для которых $y(0) = 0$, имеют вид $y = c\sin x$ и при $x = \pi$ они равны нулю), а в случае $b = 0$ имеет бесконечно много решений $y = c\sin x$, c – любое.

Теорема 3.11 (об альтернативе). Рассмотрим уравнение:

$$a_0(x)\,y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y = f(x), \tag{3.51}$$

где $n \geqslant 2$, $a_k(x)$ и $f(x)$ непрерывны, причем $a_0(x) \neq 0$, с n линейными краевыми условиями. Возможны только два случая: 1) задача имеет единственное решение при любых правых частях в уравнении и краевых условиях; 2) однородная задача (левые части те же, а правые заменяются нулями) имеет бесконечно много решений, а неоднородная задача при некоторых правых частях имеет бесконечно много решений, а при всех других – не имеет решений.

Рассмотрим краевую задачу на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$:

$$\begin{aligned} &a_0(x)\,y'' + a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = f(x),\\ &c_1\,y'(a) + c_2\,y(a) = 0,\\ &c_3\,y'(b) + c_4\,y(b) = 0, \end{aligned} \tag{3.52}$$

где $|c_1| + |c_2| \neq 0$, $|c_3| + |c_4| \neq 0$.

Определение 3.12. *Функцией Грина* этой задачи называется такая функция $G(x,s)$, $x \in [a,b]$, $s \in (a,b)$, что:

1°. Для каждого $s = \mathrm{const}$ функция $y(x) = G(x,s)$ при $x \neq s$ удовлетворяет уравнению $\mathbb{L}\big[y\big] = 0$.

2°. При $x = a$ и $x = b$ функция $y(x) = G(x,s)$ удовлетворяет краевым условиям из (3.52).

3°. При $x = s$ она непрерывна по x, а ее производная по x имеет скачок, равный $1/a_0(x)$, т.е.

$$G(s+0,s) = G(s-0,s), \qquad G'_x(s+0,s) = G'_x(s-0,s) + \frac{1}{a_0(x)}. \tag{3.53}$$

Следующая теорема устанавливает условия существования функции Грина и дает способ ее построения.

Теорема 3.12. Если на отрезке $[a,b]$ функции a_0, a_1, a_2 непрерывны, $a_0 \neq 0$, и если при $f(x) \equiv 0$ краевая задача (3.52) имеет только нулевое решение, то функция Грина существует и имеет вид

$$G(x,s) = \begin{cases} k_1(s)\,y_1(x), & a \leqslant x \leqslant s,\\ k_2(s)\,y_2(x), & s \leqslant x \leqslant b, \end{cases} \tag{3.54}$$

где y_1 и y_2 – ненулевые решения уравнения $\mathbb{L}\big[y\big] = 0$, удовлетворяющие соответственно первому и второму краевым условиям из (3.52), множители k_1 и k_2 определяются из соотношений

$$k_1\, y_1(s) = k_2\, y_2(s), \qquad k_2\, y_2'(s) = k_1\, y_1'(s) + \frac{1}{a_0(x)}, \tag{3.55}$$

которые согласованы с условиями (3.53).

Теорема 3.13. Если выполнены условия теоремы 3.12 и $f(x)$ непрерывна при $a \leqslant x \leqslant b$, то решение краевой задачи (3.52) выражается формулой

$$y(x) = \int_a^b G(x,s)\, f(s)\, ds. \tag{3.56}$$

Рассмотрим краевую задачу для уравнения с параметром λ:

$$\mathbb{L}\big[y\big] - \lambda\, y = 0, \quad c_1\, y'(a) + c_2\, y(a) = 0, \quad c_3\, y'(b) + c_4\, y(b) = 0, \tag{3.57}$$

где $\mathbb{L}\big[y\big]$, c_1, c_2, c_3, c_4 те же, что в (3.52). Значения λ, при которых задача (3.57) имеет ненулевое решение, называются *собственными значениями* этой задачи, а сами ненулевые решения – *собственными функциями*. При тех λ, которые являются собственными значениями, имеет место второй случай альтернативы, а при остальных – первый.

Важное направление теории краевых задач – *спектральная теория*, изучающая свойства собственных значений и собственных функций. Выделен класс так называемых *самосопряженных* краевых задач. В таких задачах собственные функции ортогональны в пространстве $\mathscr{L}_2$, которое состоит из функций, интегрируемых с квадратом на данном отрезке. Доказано, что любую гладкую функцию на этом отрезке, удовлетворяющую краевым условиям рассматриваемой задачи, можно разложить в сходящийся ряд по собственным функциям этой задачи, аналогичный ряду Фурье. Подобные разложения используются, в частности, при решении методом разделения переменных различных задач для ДУвЧП.

3.11. Упражнения

Аудиторные занятия

1°. Решить ОДУ, понизив их порядок:

01. $y''' = 2\,\dfrac{\cos x}{\sin^3 x}$. 02. $y'' = \arcsin x$.

03. $x^2 y'' = (y')^2$.

04. $2xy'y'' = (y')^2 - 1$.

05. $y^3 y'' = 1$.

06. $(y')^2 + 2yy'' = 0$.

07. $y'' = 2yy'$.

08. $yy'' = (y')^2$.

09. $y''(e^x + 1) + y' = 0$.

10. $y''' = (y'')^2$.

11. $yy'' = (y')^2 - (y')^3 = 0$.

12. $y''' = 2(y'' - 1)\operatorname{ctg} x$.

13. $xyy'' - x(y')^2 = yy'$.

14. $yy'' = (y')^2 + 15y^2\sqrt{x}$.

15. $(x^2 + 1)\left[(y')^2 - yy''\right] = xyy'$.

16. $xyy'' + x(y')^2 = 2yy'$.

17. $x^2 yy'' + = (y - xy')^2$.

18. $y'' + \dfrac{y'}{x} + \dfrac{y}{x^2} = \dfrac{(y')^2}{y}$.

2°. Решить однородные ОДУ второго порядка и выше:

01. $y'' + y' - 2y = 0$.

02. $y'' + 4y' + 3y = 0$.

03. $y'' - 2y' = 0$.

04. $2y'' - 5y' + 2y = 0$.

05. $y'' - 4y' + 5y = 0$.

06. $y'' + 2y' + 10y = 0$.

07. $y'' + 4y = 0$.

08. $y''' - 8y = 0$.

09. $y^{IV} - y = 0$.

10. $y^{IV} + 4y = 0$.

11. $y^{VI} + 64y = 0$.

12. $y'' - 2y' + y = 0$.

13. $4y'' + 4y' + y = 0$.

14. $y^{V} - 6y^{IV} + 9y''' = 0$.

15. $y^{V} - 19y''' + 9y' = 0$.

16. $y^{IV} + 2y'' + y = 0$.

17. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

18. $y''' - y'' - y' + y = 0$.

19. $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0$.

20. $y^{V} + 8y''' + 16y = 0$.

3°. Решить неоднородные ОДУ второго порядка:

01. $y'' + y = 4xe^x$.

02. $y'' - y = 2e^x - x^2$.

03. $y'' + y' - 2y = 3xe^x$.

04. $y'' - 3y' + 2y = \sin x$.

05. $y'' + y = 4\sin x$.

06. $y'' - 5y' + 4y = 4x^2 e^{2x}$.

07. $y'' - 3y' + 2y = x\cos x$.

08. $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}$.

09. $y'' + 2y' - 3y = x^2 e^x$.

10. $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin 2x$.

11. $y'' - 9y = e^{3x}\cos x$.

12. $y'' - 2y' + y = 6xe^x$.

13. $y'' + y = x\sin x$.

14. $y'' + 4y' + 4y = xe^{2x}$.

15. $y'' - 5y' = 3x^2 + \sin 5x$.

4°. Решить неоднородные ОДУ:

01. $y^{IV} + y'' = 7x - 3\cos x$.

02. $y''' - 4\,y'' + 3\,y' = x^2 + x\;e^{2x}$.

03. $y^{IV} + 5\,y'' + 4\,y = \sin x \cdot \cos 2\,x$.

04. $y^{IV} + 8\,y'' + 16\,y = \cos x$.

05. $y''' - 3\,y' + 2\,y = 9\,e^{2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -3$, $y''(0) = 3$.

06. $y^{IV} + y'' = 2\,\cos x$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = y'''(0) = 0$.

07. $y''' - 4\,y'' + 5\,y' - 2\,y = 2\,x + 3$.

08. $y^{IV} + 2\,a^2\,y'' + a^4\,y = \cos a\,x$.

09. $y'' + 4\,y = \cos x \cdot \cos 3\,x$.

10. $y'' - 4\,y' + 5\,y = e^{2x}\,\sin^2 x$.

Внеаудиторные занятия

1°. Решить ОДУ, понизив их порядок:

01. $y'' = \ln x$.

02. $y'' = x + \sin x$.

03. $x\,y'' = y'\,\ln \dfrac{y'}{x}$.

04. $y'' + \dfrac{2\,y'}{1-y} = 0$.

05. $2\,y\,y'' = y^2 + (y')^2$.

06. $(y'')^2 + y' = x\,y''$.

07. $y'' + (y')^2 = 2\,e^{-y}$.

08. $(y'')^2 = (y')^2 + 1$.

09. $x\,y''' = y'' - x\,y''$.

10. $y'' = e^y$.

11. $y^4 - y^3\,y'' = 1$.

12. $y''\,(2\,y' + x) = 1$.

13. $y\,(x\,y'' + y') = x\,(y')^2\,(1 - x)$.

14. $x^2\,y\,y'' + (y')^2 = 0$.

15. $x^2\left[(y')^2 - 2\,y\,y''\right] = y^2$.

16. $x\,y\,y'' = y'\,(y + y')$.

17. $y''' = y''^3$.

18. $x\,y'' - y' = e^x\,x^2$.

19. $y''\;\mathrm{tg}\,y = 2\,(y')^2$.

20. $(1 + x^2)\,y'' + 2\,x\,y' = x^3$.

2°. Решить однородные ОДУ второго порядка и выше:

01. $y'' - 9\,y = 0$.

02. $y'' - 4\,y' = 0$.

03. $y'' - 2\,y' - y = 0$.

04. $3\,y'' - 2\,y' - 8\,y = 0$.

05. $y'' + 16\,y = 0$.

06. $y'' + 6\,y' + 13\,y = 0$.

07. $4\,y'' - 8\,y' + 5\,y = 0$.

08. $4\,y'' - 20\,y' + 25\,y = 0$.

09. $y'' - 4\,y' + 3\,y = 0$, $y(0) = 6$, $y'(0) = 10$.

10. $y'' + 4\,y' + 29\,y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 15$.

11. $y''' + 9\,y' = 0$.

12. $y^{IV} - 13\,y'' + 36\,y = 0$.

13. $y^{IV} = 8\,y'' - 16\,y$.

14. $y^{IV} = 256\,y$.

15. $y''' - 13\,y' - 12\,y = 0.$

16. $y^{IV} + 2\,y''' + y'' = 0.$

17. $y^{(n)} = y^{(n-2)}.$

18. $y^{IV} + 81\,y = 0.$

19. $64\,y^{VIII} + 48\,y^{VI} + {}$
$+ 12\,y^{IV} + y'' = 0.$

20. $y^{(n)} + \mathsf{C}_n^1\,y^{(n-1)} + \mathsf{C}_n^2\,y^{(n-1)} + {}$
$+ \ldots + \mathsf{C}_n^1\,y' + y = 0.$

3°. Решить неоднородные ОДУ второго порядка:

01. $y'' - 2\,y' + 2\,y = e^x + x\,\cos x.$
02. $y'' + 6\,y' + 10\,y = 3\,x\,e^{-3x} - 2\,e^{3x}\,\cos x.$
03. $y'' - 8\,y' + 20\,y = 5\,x\,e^{4x}\,\sin 2\,x.$
04. $y'' + 7\,y' + 10\,y = x\,e^{-2x}\,\cos 5\,x.$
05. $y'' - 2\,y' + 5\,y = 2\,x\,e^x + e^x\,\sin 2\,x.$
06. $y'' - 2\,y' + y = 2\,x\,e^x + e^x\,\sin 2\,x.$
07. $y'' - 8\,y' + 17\,y = e^{4x}\,(x^2 - 3\,x\,\sin x).$

4°. Решить неоднородные ОДУ:

01. $y''' - 3\,y' + 2\,y = e^{-x}\,(4\,x^2 + 4\,x - 10).$
02. $y^{IV} + y''' = x^2 - 1.$
03. $y^{IV} - y = x\,e^x + \cos x.$
04. $y^{IV} - 2\,y'' + y = 8\,(e^x + e^{-x}) + 4\,(\sin x + \cos x).$
05. $y''' + 2\,y'' + y' + 2\,e^{-2x} = 0,\; y(0) = 2,\; y'(0) = 1,\; y''(0) = 1.$
06. $y''' - y' = 3\,(2 - x^2),\; y(0) = y'(0) = y''(0) = 1.$
07. $y'' + 3\,y' + 2\,y = e^{-x}\,\cos^2 x.$
08. $y'' - 2\,y' + 2\,y = (x + e^x)\,\sin x.$
09. $y'' - 3\,y' + 2\,y = 2^x.$
10. $y'' - y = 4\,\mathrm{sh}\,x.$
11. $y'' + 4\,y' + 3\,y = \mathrm{ch}\,x.$
12. $y'' + 4\,y = \mathrm{sh}\,x \cdot \sin 2\,x.$
13. $y'' + 2\,y' + 2\,y = \mathrm{ch}\,x \cdot \sin x.$

4. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

4.1. Понятие о системах дифференциальных уравнений

С системами дифференциальных уравнений встречаются при изучении явлений, для описания которых одной функции недостаточно.

Определение 4.1. *Системой дифференциальных уравнений* называется конечная совокупность уравнений, в каждое из которых входят независимая переменная, искомые функции и их производные.

Общий вид системы ОДУ можно записать так:

$$\begin{array}{l} F_1\big(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(k_1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(k_2)}, ..., y_n, y_n', ..., y_n^{(k_n)}\big) = 0, \\ F_2\big(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(k_1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(k_2)}, ..., y_n, y_n', ..., y_n^{(k_n)}\big) = 0, \\ \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ F_r\big(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(k_1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(k_2)}, ..., y_n, y_n', ..., y_n^{(k_n)}\big) = 0. \end{array} \tag{4.1}$$

Если в системе (4.1) $r = n$ и ее можно разрешить относительно старших производных, то она примет следующий вид:

$$\begin{array}{l} y_1^{(k_1)} = f_1\big(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(k_1-1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(k_2-1)}, ..., y_n, y_n', ..., y_n^{(k_n-1)}\big), \\ y_2^{(k_2)} = f_2\big(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(k_1-1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(k_2-1)}, ..., y_n, y_n', ..., y_n^{(k_n-1)}\big), \\ \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ y_n^{(k_n)} = f_n\big(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(k_1-1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(k_2-1)}, ..., y_n, y_n', ..., y_n^{(k_n-1)}\big). \end{array} \tag{4.2}$$

Обычно предполагается, что число уравнений равно числу неизвестных функций.

Определение 4.2. Форма (4.2) называется *канонической формой системы* (4.1), а сумма $k_1 + k_2 + ... + k_n$ – ее порядком.

Определение 4.3. *Нормальной системой дифференциальных уравнений* (или *системой дифференциальных уравнений в форме Коши*) называется система ОДУ вида

$$\begin{array}{l} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n), \end{array} \tag{4.3}$$

где y_1, y_2, ..., y_n – искомые функции независимой переменной x, а правые части f_1, f_2, ..., f_n – известные функции переменных x, y_1, y_2, ..., y_n, определенные и непрерывные в некоторой области $\mathscr{D}$.

Пример 4.1.

$$y'' + 2\,\varepsilon_1\, y' + \omega_1^2\, y + \mu_1\, y^3 = k_1\, z,$$
$$z'' + 2\,\varepsilon_2\, z' + \omega_2^2\, z + \mu_2\, z^3 = k_2\, y$$

– система двух уравнений второго порядка. ▶

Определение 4.4. *Решением системы n дифференциальных уравнений* на интервале (x_*, x^*) называется система n функций, определенных, непрерывно дифференцируемых и обращающих уравнения системы в тождества относительно независимой переменной на интервале (x_*, x^*).

В *векторно-матричной форме* система (4.3) будет выглядеть так:

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}\big(x, \boldsymbol{y}\big), \tag{4.4}$$

где $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)^\mathsf{T}$ – вектор неизвестных функций, $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, ..., f_n)^\mathsf{T}$ – вектор правых частей уравнений, T – символ транспонирования матрицы или вектора.

Определение 4.5. Если вектор-функция $\boldsymbol{f}$ в (4.4) не содержит явно независимую переменную x, то система (4.4) называется *автономной нормальной системой*:

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{y}\big), \tag{4.5}$$

Определение 4.6. *Линейной системой дифференциальных уравнений* называется система ОДУ вида

$$\begin{aligned}
y_1' &= a_{11}(x)\, y_1 + a_{12}(x)\, y_2 + ... + a_{1n}(x)\, y_n + h_1(x), \\
y_2' &= a_{21}(x)\, y_1 + a_{22}(x)\, y_2 + ... + a_{2n}(x)\, y_n + h_2(x), \\
&\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
y_n' &= a_{n1}(x)\, y_1 + a_{n2}(x)\, y_2 + ... + a_{nn}(x)\, y_n + h_n(x),
\end{aligned} \tag{4.6}$$

где a_{ij} и h_i – коэффициенты и свободные члены уравнений системы (4.6), которые, как правило, являются непрерывными функциями независимой переменной x на конечном или бесконечном интервале (x_*, x^*). Если на указанном интервале функции $h_i(x)$ тождественно равны нулю, то система (4.6) называется *однородной*, в противном случае – *неоднородной*. Если коэффициенты системы (4.6) на интервале (x_*, x^*) постоянны ($a_{ij} = \text{const}$), то система (4.6) – *линейная с постоянными коэффициентами*.

Векторно-матричная форма системы (4.6) такова:

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{\mathcal{A}}(x)\,\boldsymbol{y} + \boldsymbol{h}(x), \tag{4.7}$$

где $\boldsymbol{\mathcal{A}} = \big\{a_{ij}(x)\big\}$ – *матрица коэффициентов*, $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2, ..., h_n)^{\mathsf{T}}$ – *вектор свободных членов.*

Пример 4.2.

$$\begin{aligned} y_1' &= 2\,y_1 + y_2 + x + 1,\\ y_2' &= 3\,y_1 - 2\,y_2 + 5\,x \end{aligned}$$

– нормальная система двух уравнений, или

$$\frac{d}{dx}\begin{bmatrix} y_1\\ y_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1\\ 3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1\\ y_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x+1\\ 5\,x\end{bmatrix}. \qquad \blacktriangleright$$

Пример 4.3. Рассмотрим линейное неоднородное ОДУ n-го порядка

$$y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + a_2(x)\,y^{(n-2)} + ... + a_n(x)\,y = f(x).$$

Это уравнение эквивалентно следующей системе линейных ОДУ:

$$\begin{aligned} &y_1' = y_2,\\ &y_2' = y_3,\\ &\ldots \quad \ldots \quad \ldots\\ &y_n' = -a_1(x)\,y_n + a_2(x)\,y_{n-1} - ... - a_n(x)\,y_1 + f(x), \end{aligned}$$

где $y_1 = y$, $y_2 = y'$, ..., $y_n = y^{(n-1)}$. Обратно, любую систему линейных ОДУ можно свести к одному линейному неоднородному ОДУ n-го порядка относительно любой из неизвестных функций. ▶

Если $n = 1$, то система (4.3) содержит только одно уравнение: $y' = f(x, y)$, и ее решение $y(x)$ определяет интегральную кривую на плоскости. Если $n = 2$, то имеем систему двух уравнений: $y' = f_1(x, y, z)$, $z' = f_2(x, y, z)$, а ее решение $y = y(x)$, $z = z(x)$ определяет: 1) две кривых на плоскости; 2) одну кривую на плоскости в параметрической форме; 3) одну кривую (траекторию) в трехмерном пространстве.

Определение 4.7. *Задача Коши* для системы (4.3) состоит в нахождении решения этой системы, удовлетворяющего начальным условиям

$$y_1 = y_{10}, \quad y_2 = y_{20}, \quad ..., \quad y_n = y_{n0} \quad \text{при} \quad x = x_0, \tag{4.8}$$

где x_0, y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0} – заданные числа.

Геометрически это означает поиск интегральной кривой, проходящей через точку $P(x_0, y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0})$ области $\mathscr{D}$.

Сформулируем теорему, содержащую достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши для системы (4.3).

Теорема 4.1. Если правые части системы (4.3) непрерывны и имеют непрерывные производные по переменным x, y_1, y_2, ..., y_n в некоторой области $\mathscr{B}$, то для любой точки $P(x_0, y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0})$ этой области существует и притом единственное решение:

$$y_1 = \varphi_1(x), \quad y_2 = \varphi_2(x), \quad ..., \quad y_n = \varphi_n(x), \tag{4.9}$$

удовлетворяющее условиям (4.8), определенное и непрерывно дифференцируемое в некоторой окрестности точки x_0.

Пусть $\mathscr{B}$ – область, в которой выполнены условия теоремы существования и единственности для системы (4.3).

Определение 4.8. *Общим решением* системы уравнений (4.3) в области $\mathscr{B}$ называется семейство функций

$$y_i = \varphi_i(x, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, ..., \mathcal{C}_n), \qquad i = 1, 2, ..., n, \tag{4.10}$$

которое: 1) представляет собой решение системы (4.3) на промежутке (x_*, x^*) при всех значениях произвольных постоянных $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, ..., $\mathcal{C}_n$ (из некоторой области $\mathscr{G}$ изменения этих величин); 2) дает решение задачи Коши с любыми начальными данными из области $\mathbb{B}$ при соответствующих значениях постоянных $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, ..., $\mathcal{C}_n$.

Согласно этому определению система равенств (4.10) разрешима относительно $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, ..., $\mathcal{C}_n$, и это решение представляет собой семейство функций $\mathcal{C}_k = \psi_k(x, y_1, y_2, ..., y_n)$, $k = \overline{1, n}$, определенных в области $\mathscr{B}$; область значений этих функций и есть упомянутая выше область $\mathscr{G}$.

Определение 4.9. *Частным решением* системы (4.3) называется решение этой системы, которое можно получить из общего решения при каких-либо значениях произвольных постоянных $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, ..., $\mathcal{C}_n$.

Определение 4.10. Система уравнений (отличная от тождественного нуля)

$$H_i\big(x, \boldsymbol{y}\big) = 0, \qquad i = 1, 2, ..., n, \tag{4.11}$$

или

$$\boldsymbol{H}\big(x, \boldsymbol{y}\big) = 0$$

называется *интегралом системы* (4.4), если она сохраняет свое значение на решениях системы (4.4)

Определение 4.11. Система уравнений

$$\boldsymbol{H}\big(x, \boldsymbol{y}, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, ..., \mathcal{C}_n\big) = 0, \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{4.12}$$

называется *общим интегралом системы в некоторой области $\mathscr{D}$ пространства* $(t, \boldsymbol{y})$, если, выбрав соответствующим образом постоянные $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, ..., $\mathcal{C}_n$, можно получить любую интегральную кривую системы (4.4), проходящую в $\mathscr{D}$.

Определение 4.12. Интеграл частного вида (4.12)

$$H_1\big(x, \boldsymbol{y}, \mathcal{C}_1\big) = 0$$

называется *первым интегралом системы.*

Если известны n независимых интегралов

$$H_i\big(x, \boldsymbol{y}, \mathcal{C}_i\big) = 0, \qquad i = 1, 2, ..., n,$$

то их совокупность эквивалентна общему интегралу (4.12), т.е. определяет общее решение. Если же известны $k < n$ первых интегралов, то порядок системы можно понизить до $n - k$.

Для решения системы ОДУ (4.3) возможно применение *метода исключения.* Суть его заключается в следующем. С помощью последовательных дифференцирований уравнений системы и исключений y_2, ..., y_n стремятся построить уравнение n-го порядка для y_1, после решения которого из соответствующих соотношений находят остальные неизвестные функции. К сожалению, в общем случае этот метод всегда дает искомый результат только для линейных систем.

Пример 4.4. Решим систему

$$y' = y + z + x, \qquad\qquad y(0) = 1,$$

$$z' = -4\,y - 3\,z + 2\,x, \qquad\qquad z(0) = 0,$$

методом исключения.

◀ Для этого из первого уравнения системы находим z: $z = y' - y - x$ и производную z: $z' = y'' - y' - 1$. Теперь найденные выражения подставляем во второе уравнение исходной системы:

$$y'' - y' - 1 = -4\,y - 3\,(y' - y - x) + 2\,x,$$

или

$$y'' + 2\,y' + y = 5\,x + 1.$$

Получили линейное неоднородное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами, решать которое будем по изложенной в прдыдущем разделе схеме.

1°. Находим решение соответствующего однородного уравнения $y'' + 2\,y' + y = 0$. Для этого выписываем характеристическое уравнение $\lambda^2 + 2\,\lambda + 1 = 0$ и решаем его: $\lambda_1 = -1$ (один действительный корень кратности 2). Отсюда

$$y_o = e^{-x}\,(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2\,x).$$

2°. Разбираем правую часть $f(x) = 5\,x + 1$:

$\alpha = 0$	$P(x) = 5\,x + 1$	$n = 1$	$k = 1$
$\beta = 0$	$Q(x) = 0$	$m = 0$	
$\alpha \pm \beta\,\boldsymbol{i} = 0$ не является корнем характеристического уравнения $\Rightarrow$ $r = 0$			

($\alpha = 0$, так как экспонента отсутствует, $\beta = 0$, т.к. нет ни синусов, ни косинусов). Отсюда $y_* = A\,x + B$ ($U(x) \equiv A\,x + B$, $V(x) \equiv 0$), где A и B – неопределенные коэффициенты. Перед подстановкой y_* в уравнение найдем необходимые производные:

$$\begin{aligned} y &= A\,x + B,\\ y' &= \phantom{A\,x + {}} A,\\ y'' &= \phantom{A\,x + {}} 0 \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{array}{cr|rcr} + & y'' & 0\,x & + & 0\\ + & 2\,y' & 0\,x & + & 2\,A\\ & y & A\,x & + & B\\ \hline = & f(x) & 5\,x & + & 1 \end{array}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x по столбцам, получаем СЛАУ для вычисления A и B:

$$A = 5,$$
$$2\,A + B = 1,$$

откуда находим, что $A = 5$, $B = -9$, а следовательно, $y_* = 5\,x - 9$.

3°. Складывая y_o и y_*, получаем общее решение:

$$y = e^{-x}\,(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2\,x) + 5\,x - 9.$$

4°. Теперь, используя найденное выражение для y, вычисляем

$$z = e^{-x}\,(\mathcal{C}_2 - 2\,\mathcal{C}_1 - 2\,\mathcal{C}_2\,x) - 6\,x + 14.$$

5°. Определим искомое частное решение. Для этого в последних двух равенствах выполним следующие замены: x на 0, y на 1, z на 0. В результате получим следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$:

$$1 = \mathcal{C}_1 - 9,$$
$$0 = \mathcal{C}_2 - 2\,\mathcal{C}_1 + 14,$$

решение которой есть $\mathcal{C}_1 = 10$, $\mathcal{C}_2 = 6$. Итак, окончательно получим

$$\widetilde{y} = e^{-x}\,(10 + 6\,x) + 5\,x - 9,$$
$$\widetilde{z} = e^{-x}\,(-14 - 12\,x) - 6\,x + 14. \qquad \blacktriangleright$$

Рассмотрим *метод интегрируемых комбинаций.* Суть метода заключается в такой комбинации уравнений системы, которая дает возможность получить легко интегрируемые уравнения. Линейные системы, содержащие дифференциальные уравнения высших порядков, также можно посредством дифференцирования и комбинации уравнений свести к одному уравнению. Методом интегрируемых комбинаций решаются системы следующего вида:

$$1)\ \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = ... = \frac{dx_n}{X_n};$$

$$2)\ \frac{dx_1}{dt} = X_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = X_2, \quad ... \quad \frac{dx_n}{dt} = X_n.$$

Умножая отдельные уравнения на подходящие множители и складывая, иногда удается получить уравнение, содержащее только две переменные x_i и x_j. Интегрируя это уравнение, находим один из $n-1$ интегралов системы $f(x_i, x_j) = \mathcal{C}$.

Пример 4.5. Решить систему

$$y' = y^2 + y\,z,$$
$$z' = y\,z + z^2$$

методом интегрируемых комбинаций.

◀ Сложим первое и второе уравнения:

$$y' + z' = y^2 + 2\,y\,z + z^2, \quad \text{или} \quad (y+z)' = (x+y)^2.$$

Отсюда

$$\frac{d(y+z)}{y+z} = dx \;\Rightarrow\; -\frac{1}{y+z} = x + \mathcal{C}_1.$$

Теперь поделим первое на второе:

$$\frac{dy}{dz} = \frac{y\,(y+z)}{z\,(y+z)}, \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dz} = \frac{y}{z} \;\Rightarrow\; y = \mathcal{C}_2\,z.$$

Подставим $y = \mathcal{C}_2\,z$ в первое решение:

$$-\frac{1}{\mathcal{C}_2\,z + z} = x + \mathcal{C}_1 \;\Rightarrow\; z = -\frac{1}{(\mathcal{C}_2+1)\,(x+\mathcal{C}_1)}.$$

Тогда

$$y = \mathcal{C}_2\,z = -\frac{\mathcal{C}_2}{(\mathcal{C}_2+1)\,(x+\mathcal{C}_1)}. \qquad ▶$$

В случае линейной однородной системы с постоянными коэффициентами интегрируемая комбинация есть уравнение с разделенными переменными, в случае неоднородной линейной системы – линейное уравнение первого порядка. Каждая интегрируемая комбинация дает один первый интеграл; если число их равно числу уравнений системы, то интегрирование закончено; в противном случае, мы получаем систему с меньшим числом неизвестных функций.

В случае линейных уравнений (однородных или неоднородных) стараются, комбинируя данные уравнения, образовать такое выражение из функций y_1, y_2, ..., чтобы дифференциал этого выражения отличался от дифференциала, получаемого в левой части комбинации, на постоянный множитель. В образовании комбинации члены, содержащие независимую переменную, роли не играют, т.е. от последних не зависит выбор комбинации.

4.2. Однородные и неоднородные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

Пусть дана нормальная система линейных однородных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

$$y_k'(x) = a_{k1}(x)\, y_1(x) + a_{k2}(x)\, y_2(x) + ... + a_{kn}(x)\, y_n(x), \qquad k = 1, 2, ..., n, \tag{4.13}$$

или

$$\boldsymbol{y}'(x) = \boldsymbol{\mathcal{A}}(x)\, \boldsymbol{y}(x), \tag{4.14}$$

где $\boldsymbol{y}(x) = \big(y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)\big)^{\mathsf{T}}$ – вектор неизвестных функций, $\boldsymbol{\mathcal{A}}(x) = \{a_{ij}(x)\}$ – матрица коэффициентов.

Свойство 4.1. Если $\boldsymbol{y}(x)$ и $\boldsymbol{z}(x)$ – решения однородной системы дифференциальных уравнений (4.14): $\boldsymbol{y}'(x) \equiv \boldsymbol{\mathcal{A}}(x)\, \boldsymbol{y}(x)$, $\boldsymbol{z}'(x) \equiv \boldsymbol{\mathcal{A}}(x)\, \boldsymbol{z}(x)$, то их сумма также является решением этой системы.

Свойство 4.2. Если $\boldsymbol{y}(x)$ – решение однородной системы дифференциальных уравнений (4.14): $\boldsymbol{y}'(x) \equiv \boldsymbol{\mathcal{A}}(x)\, \boldsymbol{y}(x)$, то вектор $\mathcal{C}\, \boldsymbol{y}(x)$, где $\mathcal{C} = \mathrm{const}$, – также решение системы (4.14).

Свойство 4.3. Если $\boldsymbol{y}_1(x)$, $\boldsymbol{y}_2(x)$, ..., $\boldsymbol{y}_m(x)$ – решения однородной системы дифференциальных уравнений (4.14), а $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, ..., $\mathcal{C}_m$ – произвольные постоянные, то вектор

$$\boldsymbol{y}(x) = \sum_{k=1}^{m} \mathcal{C}_k\, \boldsymbol{y}_k(x)$$

– решение системы (4.14).

Определение 4.13. Система из n вектор-функций $\boldsymbol{y}_1(x)$, $\boldsymbol{y}_2(x)$, ..., $\boldsymbol{y}_n(x)$ называется *линейно независимой* на интервале (x_*, x^*), если из равенства

$$\sum_{k=1}^{n} \mathcal{C}_k\, \boldsymbol{y}_k(x) \equiv 0, \quad x \in (x_*, x^*) \subset \mathbb{R}, \tag{4.15}$$

следует, что $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2 = ... = \mathcal{C}_m = 0$. Иначе система называется *линейно зависимой.*

Определение 4.14. Определитель

$$W(x) = W\big[\boldsymbol{y}_1(x), \boldsymbol{y}_2(x), ..., \boldsymbol{y}_n(x)\big] =$$

$$= \det\big[y_{ij}(x)\big] \equiv \begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & ... & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & ... & y_{2n}(x) \\ ... & .... & ... & ... \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & ... & y_{nn}(x) \end{vmatrix} \qquad (4.16)$$

системы n вектор-функций называется *определителем Вронского* (или *вронскианом*) этой системы.

Лемма 4.1. Если вектор-функции $\boldsymbol{y}_1(x)$, $\boldsymbol{y}_2(x)$, ..., $\boldsymbol{y}_n(x)$ линейно зависимы, то их вронскиан (4.16) тождественно равен нулю, т.е. $W(x) \equiv 0$.

Лемма 4.2. Если вронскиан (4.16) системы вектор-функций $\boldsymbol{y}_1(x)$, $\boldsymbol{y}_2(x)$, ..., $\boldsymbol{y}_n(x)$ отличен от нуля хотя бы в одной точке $x_0 \in (x_*, x^*)$, то эти вектор-функции линейно независимы на (x_*, x^*).

Лемма 4.3. Пусть вектор-функции $\boldsymbol{y}_1(x)$, $\boldsymbol{y}_2(x)$, ..., $\boldsymbol{y}_n(x)$ являются решениями однородной системы (4.14). Если их вронскиан (4.16) обращается в нуль хотя бы в одной точке $x_0 \in (x_*, x^*)$, то эти вектор-функции линейно зависимы.

Определение 4.15. Система из n линейно независимых на интервале (x_*, x^*) решений $\boldsymbol{y}_1(x)$, $\boldsymbol{y}_2(x)$, ..., $\boldsymbol{y}_n(x)$ системы дифференциальных уравнений (4.14) называется *фундаментальной системой решений системы* (4.14).

Определение 4.16. Матрицу $\boldsymbol{\mathcal{Y}}(x)$, столбцами которой являются решения, которые образуют фундаментальную систему, называют *фундаментальной матрицей.* Если $\boldsymbol{\mathcal{Y}}(x_0) = \boldsymbol{\mathcal{I}}$ (единичной матрице), то $\boldsymbol{\mathcal{Y}}_{x_0}(x) = \boldsymbol{\mathcal{Y}}(x)\,\boldsymbol{\mathcal{Y}}^{-1}(x_0)$ называют *матрицантом* (в точке x_0).

Теорема 4.2. Если $\boldsymbol{\mathcal{Y}}(x)$ – фундаментальная матрица системы, то она удовлетворяет матричному уравнению

$$\mathbb{Y}'(x) = \boldsymbol{\mathcal{A}}(x)\,\boldsymbol{\mathcal{Y}}(x). \qquad (4.17)$$

Справедлива и обратная теорема.

Теорема 4.3. Если матрица $\boldsymbol{\mathcal{Z}}(x) = \{z_{ij}\}$ удовлетворяет матричному уравнению (4.17) и ее вронскиан $W(x)$ отличен от нуля при любом

$x \in (x_*, x^*)$, то $\boldsymbol{\mathcal{Z}}(x)$ – фундаментальная матрица системы дифференциальных уравнений (4.14).

Теорема 4.4 (формула Лиувилля – Остроградского). Если $\boldsymbol{y}_1(x)$, $\boldsymbol{y}_2(x)$, ..., $\boldsymbol{y}_n(x)$ – решения системы дифференциальных уравнений (4.14), а $W(x)$ – их вронскиан, то справедлива *формула Лиувилля – Остроградского*:

$$W(x) = W(x_0)\,\exp\Big[\int_{x_0}^{x}\sum_{k=1}^{n} a_{kk}(t)\,dt\Big]. \tag{4.18}$$

Теорема 4.5 (о структуре общего решения системы линейных однородных ОДУ). Если $\boldsymbol{y}_1(x)$, $\boldsymbol{y}_2(x)$, ..., $\boldsymbol{y}_n(x)$ – фундаментальная система решений системы дифференциальных уравнений (4.14) на интервале (x_*, x^*), то вектор-функция

$$\boldsymbol{y}(x) = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{C}_k\,\boldsymbol{y}_k(x), \quad \mathcal{C}_k = \mathrm{const}, \tag{4.19}$$

является общим решением этой системы.

Если обозначить $\boldsymbol{C} = (\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, ..., \mathcal{C}_n)^{\mathsf{T}}$, то общее решение (4.19) системы (4.14) можно представить в виде

$$\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{\mathcal{Y}}(x)\,\boldsymbol{C}. \tag{4.20}$$

Определение 4.17. Общее решение однородной системы (4.14) в виде

$$\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{\mathcal{Y}}_E(x)\,\boldsymbol{C} = \boldsymbol{\mathcal{Y}}(x)\,\boldsymbol{\mathcal{Y}}^{-1}(x_0)\,\boldsymbol{C} \tag{4.21}$$

называется *общим решением в форме Коши.*

Замечание. Общее решение в форме Коши удобно для применения, так как если систему уравнений (4.14) дополнить начальными условиями $\boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0$, то из (4.21) можно сразу найти произвольные постоянные, поскольку

$$\boldsymbol{y}(x)\big|_{x=x_0} = \boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{\mathcal{Y}}_E(x_0)\,\boldsymbol{C} = \boldsymbol{\mathcal{I}}\,\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C},$$

откуда $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{y}_0$. Если общее решение в форме Коши записать как

$$\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{\mathcal{Y}}(x)\,\boldsymbol{\mathcal{Y}}^{-1}(x_0)\,\boldsymbol{y}_0, \tag{4.22}$$

то из (4.22) при необходимости можно сразу найти или решение задачи Коши, или общее решение при произвольных значениях $\boldsymbol{y}_0$.

Рассмотрим линейную неоднородную систему ОДУ

$$\boldsymbol{y}'(x) = \boldsymbol{\mathcal{A}}(x)\,\boldsymbol{y}(x) + \boldsymbol{f}(x), \quad \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n, \quad x \in (x_*, x^*), \tag{4.23}$$

где $\boldsymbol{\mathcal{A}}(x)$ – квадратная $n \times n$-матрица, элементы которой $a_{ij}(x)$ непрерывны на (x_*, x^*). Справедливы следующие теоремы.

Теорема 4.6 (принцип суперпозиции). Пусть $\boldsymbol{z}_1(x)$ – решение системы дифференциальных уравнений $\boldsymbol{y}'(x) = \boldsymbol{\mathcal{A}}(x)\,\boldsymbol{y}(x) + \boldsymbol{f}_1(x)$, а $\boldsymbol{z}_2(x)$ – решение системы уравнений $\boldsymbol{y}'(x) = \boldsymbol{\mathcal{A}}(x)\,\boldsymbol{y}(x) + \boldsymbol{f}_2(x)$, тогда вектор-функция $\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{z}_1(x) + \boldsymbol{z}_2(x)$ является решением системы $\boldsymbol{y}'(x) = \boldsymbol{\mathcal{A}}(x)\,\boldsymbol{y}(x) + \boldsymbol{f}_1(x) + \boldsymbol{f}_2(x)$.

Следствие 4.1. Принцип суперпозиции справедлив для любого числа решений $\boldsymbol{y}_k(x)$.

Следствие 4.2. Если $\boldsymbol{y}_*(x)$ – какое-либо решение системы (4.23), а $\boldsymbol{y}_o(x)$ – решение соответствующей однородной системы (4.14), то их сумма: $\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{y}_o(x) + \boldsymbol{y}_*(x)$ – будет решением системы (4.23).

Теорема 4.7. Пусть дана система неоднородных линейных ОДУ (4.23), где элементы a_{ij} матрицы $\boldsymbol{\mathcal{A}}(x)$ системы и компоненты f_i вектора $\boldsymbol{f}(x)$ – непрерывные функции на интервале (x_*, x^*). Тогда если $\boldsymbol{y}_o(x)$ – общее решение системы (4.14), а $\boldsymbol{y}_*(x)$ – какое-либо частное решение уравнения (4.23), то вектор-функция

$$\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{y}_o(x) + \boldsymbol{y}_*(x) \tag{4.24}$$

является общим решением системы ОДУ (4.23).

4.3. Системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Пусть дана нормальная линейная однородная система с постоянными коэффициентами

$$y_k' = a_{k1}\,y_1 + a_{k2}\,y_2 + \ldots + a_{kn}\,y_n, \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{4.25}$$

или

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{\mathcal{A}}\,\boldsymbol{y}, \tag{4.26}$$

где $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^{\mathsf{T}}$ – вектор неизвестных функций, $\boldsymbol{\mathcal{A}} = \{a_{ij}\}$ – матрица постоянных коэффициентов.

Для построения ее решения воспользуемся *методом Эйлера*, т.е. будем искать решение этой системы в виде

$$y_k = v_k\, e^{\lambda x} \tag{4.27}$$

с неопределенными постоянными параметрами v_1, v_2, ..., v_n и λ. Для вычисления этих величин и выяснения вопроса о существовании у системы (4.25) решения указанного вида подставим в (4.25) вместо y_k правые части равенств (4.27). После сокращения общих множителей на $e^{\lambda x}$ получим однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно v_k, в которую λ входит как параметр:

$$\begin{array}{ccccccccc} (a_{11}-\lambda)\,v_1 & + & a_{12}\,v_2 & + & \ldots & + & a_{1n}\,v_n & = & 0, \\ a_{21}\,v_1 & + & (a_{22}-\lambda)\,v_2 & + & \ldots & + & a_{2n}\,v_n & = & 0, \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots \\ a_{n1}\,v_1 & + & a_{n2}\,v_2 & + & \ldots & + & (a_{nn}-\lambda)\,v_n & = & 0, \end{array} \tag{4.28}$$

или

$$(\boldsymbol{\mathcal{A}} - \lambda \boldsymbol{\mathcal{I}})\,\boldsymbol{v} = 0, \tag{4.29}$$

где $\boldsymbol{\mathcal{I}}$ – единичная матрица n-го порядка, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^{\mathsf{T}}$. Таким образом, задача интегрирования системы (4.25) сводится к решению линейной алгебраической системы (4.28), т.е. к задаче на собственные значения и собственные векторы матрицы (оператора) $\boldsymbol{\mathcal{A}}$.

Определение 4.18. Отличный от нулевого вектор $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ ($\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$) называется *собственным вектором матрицы* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, если справедливо равенство (4.28). Число λ называется *собственным значением матрицы* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$.

Замечание. Собственное значение λ может быть как вещественным: $\lambda \in \mathbb{R}$, так и комплексным: $\lambda \in \mathbb{C}$.

Для того чтобы система (4.28) имела решение относительно v_1, v_2, ..., v_n, отличное от нулевого, необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был равен нулю, т.е. чтобы имело место равенство

$$\Delta(\lambda) = \left|\boldsymbol{\mathcal{A}} - \lambda \boldsymbol{\mathcal{I}}\right| \equiv \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{4.30}$$

Определение 4.19. Уравнение (4.30) называется *характеристическим уравнением* системы (4.26).

Левая часть уравнения (4.30) есть полином степени n, а следовательно, согласно основной теореме алгебры это уравнение имеет ровно n корней. Заметим, что уравнение (4.30), как и в случае однородных линейных уравнений n-го порядка с постоянными коэффициентами, можно составить прямо по матрице коэффициентов системы (4.25).

Определение 4.20. Пусть собственное значение λ_k встречается среди корней характеристического уравнения p_k раз. Число p_k называется (*алгебраической*) *кратностью собственного значения* λ_k.

Ниже рассматриваются все возможные структуры решений системы (4.25) в зависимости от кратностей собственных значений матрицы коэффициентов этой системы.

1°. Собственные значения – различные действительные числа

Можно доказать (см., например, [18, с. 304–305]), что в этом случае ранг матрицы коэффициентов системы (4.28) равен $n-1$, так что ее решение определяется с точностью до постоянного множителя.

Пусть λ_1, λ_2, ..., λ_n – различные корни уравнения (4.30). Система (4.28) при $\lambda = \lambda_k$ ($k = 1, 2, ..., n$) имеет бесконечное число решений, из которых всегда можно выбрать одно (обозначим его $\boldsymbol{v}_k = (v_{k1}, v_{k2}, ..., v_{kn})^{\mathsf{T}}$) так, чтобы хотя бы одна компонента v_{ki} ($i = 1, 2, ..., n$) была отлична от нуля. Таким образом, каждому числу λ_k соответствует решение системы (4.25) вида

$$y_{k1} = v_{k1}\, e^{\lambda_k x}, \quad y_{k2} = v_{k2}\, e^{\lambda_k x}, \quad \ldots \quad y_{kn} = v_{kn}\, e^{\lambda_k x},$$

или

$$\boldsymbol{y}_k \equiv \begin{bmatrix} y_{k1} \\ y_{k2} \\ \ldots \\ y_{kn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{k1}\, e^{\lambda_k x} \\ v_{k2}\, e^{\lambda_k x} \\ \ldots \\ v_{kn}\, e^{\lambda_k x} \end{bmatrix}.$$

Из теоремы 4.7 следует, что линейная комбинация этих решений

$$y_s = \mathcal{C}_1\, v_{1s}\, e^{\lambda_1 x} + \mathcal{C}_2\, v_{2s}\, e^{\lambda_2 x} + \ldots + \mathcal{C}_n\, v_{ns} e^{\lambda_n x}, \qquad s = 1, 2, ..., n, \tag{4.31}$$

или

$$\boldsymbol{y} = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{C}_k\, \boldsymbol{y}_k = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{C}_k\, \boldsymbol{v}_k\, e^{\lambda_k x}, \tag{4.32}$$

с произвольными постоянными $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, ..., $\mathcal{C}_n$ представляет собой общее решение системы (4.25).

Пример 4.6. Найти решение системы ОДУ

$$\begin{aligned} y' &= 2\,y + z, \\ z' &= y + 2\,z. \end{aligned}$$

◀ Для этой системы матрица $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ имеет вид

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

а уравнения (4.28) –

$$\begin{array}{rcrcl} (2-\lambda)\,v_1 & + & v_2 & = & 0, \\ v_1 & + & (2-\lambda)\,v_2 & = & 0. \end{array} \tag{4.33}$$

Характеристическое уравнение системы

$$\Delta(\lambda) = \left|\boldsymbol{\mathcal{A}} - \lambda\,\boldsymbol{\mathcal{I}}\right| \equiv \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\,\lambda + 3 = 0$$

имеет два действительных различных корня: $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 3$. Найдем компоненты соответствующих векторов $\boldsymbol{v}_k$, $k = 1, 2$.

1°. Подставим $\lambda_1 = 1$ вместо λ в уравнения (4.33):

$$\begin{aligned} v_{11} + v_{12} &= 0, \\ v_{11} + v_{12} &= 0. \end{aligned}$$

Так как полученные уравнения совпадают, то любое из них можно отбросить, а из оставшегося находим, что $v_{11} = -v_{12}$. Выбирая v_{12} равным -1, получим ненулевой вектор $\boldsymbol{v}_1 = (1, -1)^{\mathsf{T}}$.

2^0. Теперь вместо λ в уравнения (4.33) подставим $\lambda_2 = 3$:

$$\begin{aligned} -v_{21} + v_{22} &= 0, \\ v_{21} - v_{22} &= 0. \end{aligned}$$

Второе из этих уравнений совпадет с первым, если обе части его умножить на -1. Поэтому отбрасываем первое уравнение, а из второго находим, что $v_{21} = v_{22}$. Выбирая v_{22} равным 1, получим ненулевой вектор $\boldsymbol{v}_2 = (1, 1)^{\mathsf{T}}$.

Тогда общее решение исходной системы ОДУ будет

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \mathcal{C}_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{x} + \mathcal{C}_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3x} = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_1 e^{x} + \mathcal{C}_2 e^{3x} \\ -\mathcal{C}_1 e^{x} + \mathcal{C}_2 e^{3x} \end{bmatrix}. \qquad \blacktriangleright$$

Пример 4.7. Решить систему ОДУ (относительно $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$)

$$\begin{aligned} x' &= 3x - y + z, \\ y' &= -x + 5y - z, \\ z' &= x - y + 3z. \end{aligned}$$

◀ Для этой системы матрица $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ имеет вид

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix},$$

а уравнения (4.28) –

$$\begin{aligned} (3-\lambda)\,v_1 - v_2 + v_3 &= 0, \\ -v_1 + (5-\lambda)\,v_2 - v_3 &= 0, \\ v_1 - v_2 + (3-\lambda)\,v_3 &= 0. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Характеристическое уравнение системы

$$\Delta(\lambda) = |\boldsymbol{\mathcal{A}} - \lambda \boldsymbol{\mathcal{I}}| \equiv \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)^2\,(5-\lambda) + 1 + 1 - (5-\lambda) - 2\,(3-\lambda) =$$

$$= (3-\lambda)^2\,(5-\lambda) - 9 + 3\,\lambda = (3-\lambda)^2\,(5-\lambda) - 3\,(3-\lambda) =$$

$$= (3-\lambda)\,\big[(3-\lambda)(5-\lambda) - 3\big] = (3-\lambda)\,(\lambda^2 - 8\,\lambda + 15 - 3) =$$

$$= (3-\lambda)\,(\lambda-2)(\lambda-6)$$

имеет три действительных различных корня: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ и $\lambda_3 = 6$. Найдем компоненты соответствующих векторов $\boldsymbol{v}_k$, $k = 1, 2, 3$.

1^0. Подставим $\lambda_1 = 2$ вместо λ, а v_{1i} вместо v_i $(i = 1, 2, 3)$ в уравнения (4.34):

$$\begin{aligned} v_{11} - v_{12} + v_{13} &= 0, \\ -v_{11} + 3\,v_{12} - v_{13} &= 0, \\ v_{11} - v_{12} + v_{13} &= 0. \end{aligned}$$

Так как первое и третье из полученных уравнений совпадают, то любое из них можно отбросить, а из двух оставшихся находим, что $v_{11} = -v_{13}$, $v_{12} = 0$. Выбирая v_{13} равным -1, получим ненулевой вектор $\boldsymbol{v}_1 = (1, 0, -1)^{\mathsf{T}}$.

2^0. Теперь в уравнения (4.34) вместо λ подставим $\lambda_2 = 3$, а вместо v_i $(i = 1,\, 2,\, 3)$ – v_{2i}:

$$\begin{aligned} - \quad v_{22} + v_{23} &= 0, \\ -v_{21} + 2\,v_{22} - v_{23} &= 0, \\ v_{21} - \quad v_{22} \qquad &= 0. \end{aligned}$$

Второе из этих уравнений – следствие первого и третьего, а из последних получаем, что $v_{21} = v_{22} = v_{23}$. Выбирая v_{23} равным 1, получим ненулевой вектор $\boldsymbol{v}_2 = (1, 1, 1)^{\mathsf{T}}$.

3^0. И, наконец, вместо λ и v_i $(i = 1,\, 2,\, 3)$ в уравнения (4.34) подставим соответственно $\lambda_3 = 6$ и v_{3i}:

$$\begin{aligned} -3\,v_{31} - v_{32} + \quad v_{33} &= 0, \\ -v_{31} - v_{32} - \quad v_{33} &= 0, \\ v_{31} - v_{32} - 3\,v_{33} &= 0. \end{aligned}$$

Второе из этих уравнений – следствие первого и третьего, а из последних получаем, что $v_{31} = v_{33} = -v_{32}/2$. Выбирая v_{32} равным -2, получим ненулевой вектор $\boldsymbol{v}_3 = (1, -2, 1)^{\mathsf{T}}$.

Тогда общее решение исходной системы ОДУ будет

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathcal{C}_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t} + \mathcal{C}_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + \mathcal{C}_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{6t} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathcal{C}_1\, e^{2t} + \mathcal{C}_2\, e^{3t} + \mathcal{C}_3\, e^{6t} \\ \mathcal{C}_2\, e^{3t} - 2\,\mathcal{C}_3\, e^{6t} \\ -\mathcal{C}_1\, e^{2t} + \mathcal{C}_2\, e^{3t} + \mathcal{C}_3\, e^{6t} \end{bmatrix} \qquad \blacktriangleright$$

2°. Собственные значения – различные действительные и комплексные числа

Сразу же отметим, что последние входят сопряженными парами.

Укажем вид вещественных частных решений, соответствующих паре корней $\alpha \pm \boldsymbol{i}\,\beta$ (будем считать его первым). Корню $\alpha + \boldsymbol{i}\,\beta$ отвечает комплексное решение вида

$$y_{1\ell} = \left(v_{1\ell}^{[1]} + v_{1\ell}^{[2]}\,\boldsymbol{i}\right) e^{(\alpha + \boldsymbol{i}\,\beta)x}, \qquad \ell = 1, 2, ..., n. \tag{4.35}$$

Отделяя вещественные и мнимые части, получим два вещественных линейно независимых частных решения:

$$\begin{aligned} y_{1\ell} &= e^{\alpha x}\left(v_{1\ell}^{[1]}\,\cos\beta x - v_{1\ell}^{[2]}\,\sin\beta x\right),\\ y_{2\ell} &= e^{\alpha x}\left(v_{1\ell}^{[1]}\,\sin\beta x + v_{1\ell}^{[2]}\,\cos\beta x\right), \end{aligned} \qquad \ell = 1, 2, ..., n. \tag{4.36}$$

Вещественные решения, соответствующие корню $\alpha - \boldsymbol{i}\,\beta$, будут линейно зависимы с решениями (4.36). Таким образом, паре сопряженных комплексных корней $\alpha \pm \boldsymbol{i}\,\beta$ соответствуют два вещественных линейно независимых частных решения вида (4.36).

Построив вещественные линейно независимые частные решения, соответствующие всем вещественным корням и каждой паре сопряженных комплексных корней, получим фундаментальную систему решений. Линейная комбинация этих решений с произвольными постоянными коэффициентами даст общее решение системы (4.26).

Пример 4.8. Найти общее решение системы

$$\begin{aligned} y' &= 5\,y + 10\,z,\\ z' &= -2\,y - 3\,z. \end{aligned}$$

◀ Для этой системы матрица $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ имеет вид

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 5 & 10\\ -2 & -3 \end{bmatrix},$$

а уравнения (4.28) –

$$\begin{aligned} (5-\lambda)\,v_1 \;+\; & \quad 10\,v_2 &= 0,\\ -2\,v_1 \;+\; & (-3-\lambda)\,v_2 &= 0. \end{aligned} \tag{4.37}$$

Характеристическое уравнение системы

$$\Delta(\lambda) = \left|\boldsymbol{\mathcal{A}} - \lambda\,\boldsymbol{\mathcal{I}}\right| \equiv \begin{vmatrix} 5-\lambda & 10\\ -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= (5-\lambda)(-3-\lambda) + 20 = \lambda^2 - 2\,\lambda + 5 = 0$$

имеет два комплексно сопряженных корня $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2\,\boldsymbol{i}$. Найдем компоненты соответствующих векторов $\boldsymbol{v}_k$, $k = 1,\ 2$.

1°. Подставим $\lambda_1 = 1 + 2\,\boldsymbol{i}$ вместо λ в уравнения (4.37):

$$\begin{aligned} (4-2\,\boldsymbol{i})\,v_{11} \;+\; & \quad 10\,v_{12} &= 0,\\ -2\,v_{11} \;+\; & (-4-2\,\boldsymbol{i})\,v_{12} &= 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} (2-\boldsymbol{i})\, v_{11} &+ \quad 5\, v_{12} &= 0, \\ v_{11} &+ (2+\boldsymbol{i})\, v_{12} &= 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения, как и следовало ожидать, линейно зависимы: первое уравнение можно получить из второго умножением на $(2-\boldsymbol{i})$. Воспользовавшись вторым уравнением, найдем $v_{11} = -(2+\boldsymbol{i})\, v_{12}$. Выбирая v_{12} равным -1, получим ненулевой вектор $\boldsymbol{v}_1 = (2+\boldsymbol{i}, -1)^{\mathsf{T}}$.

2^0. Теперь вместо λ в уравнения (4.33) подставим $\lambda_2 = 1 - 2\,\boldsymbol{i}$:

$$\begin{aligned} (4+2\,\boldsymbol{i})\, v_{21} &+ \quad 10\, v_{22} &= 0, \\ -2\, v_{21} &+ (-4+2\,\boldsymbol{i})\, v_{22} &= 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} (2+\boldsymbol{i})\, v_{21} &+ \quad 5\, v_{22} &= 0, \\ v_{21} &+ (2-\boldsymbol{i})\, v_{22} &= 0. \end{aligned}$$

Далее, первое уравнение можно получить из второго умножением на $(2+\boldsymbol{i})$. Снова воспользовавшись вторым уравнением, найдем $v_{21} = -(2-\boldsymbol{i})\, v_{22}$. Выбирая v_{22} равным -1, получим ненулевой вектор $\boldsymbol{v}_2 = (2-\boldsymbol{i}, -1)^{\mathsf{T}}$.

Частное решение заданной системы ОДУ образуют комплекснозначные функции

$$\widetilde{y} = (2+\boldsymbol{i})\, e^{(1+2\boldsymbol{i})x}, \qquad \widetilde{z} = -e^{(1+2\boldsymbol{i})x},$$

действительные и мнимые части которых дадут фундаментальную систему решений:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = e^x \begin{bmatrix} 2\cos 2x - \sin 2x \\ -\cos 2x \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = e^x \begin{bmatrix} \cos 2x + 2\sin 2x \\ -\sin 2x \end{bmatrix}.$$

Тогда общее решение исходной системы ОДУ будет

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = e^x \left\{ \mathcal{C}_1 \begin{bmatrix} 2\cos 2x - \sin 2x \\ -\cos 2x \end{bmatrix} + \mathcal{C}_2 \begin{bmatrix} \cos 2x + 2\sin 2x \\ -\sin 2x \end{bmatrix} \right\} =$$

$$= e^x \begin{bmatrix} (2\,\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2)\cos 2x + (-\mathcal{C}_1 + 2\,\mathcal{C}_2)\sin 2x \\ -\mathcal{C}_1 \cos 2x - \mathcal{C}_2 \sin 2x \end{bmatrix}. \quad \blacktriangleright$$

3°. Среди собственных значений присутствуют кратные действительные и/или комплексные числа

Обратимся к случаю, когда среди корней характеристического уравнения имеются кратные. При этом для однократных корней процедура остается неизменной.

Пусть некоторый корень λ_0 характеристического уравнения имеет кратность $s > 1$: $\lambda_{i_1} = \lambda_{i_2} = ... = \lambda_{i_s} = \lambda_0$. Тогда частные решения исходной системы уравнений будем искать в виде

$$y_i = (q_{i0} + q_{i1}\, x + ... + q_{i,s-1}\, x^{s-1})\, e^{\lambda_0 x}, \qquad i = 1, 2, ..., n, \tag{4.38}$$

где q_{ij} – неопределенные коэффициенты. Чтобы их найти, необходимо выполнить следующие действия: 1) подставить соотношения для y_i в исходные уравнения; 4) сократить обе части получившихся равенств на $e^{\lambda_0 x}$; 5) привести подобные; 6) приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях этих равенств. Результат этих выкладок – однородная система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно q_{ij}, имеющая бесконечное множество решений. После решения этой системы свободные переменные необходимо обозначить как произвольные постоянные $\mathcal{C}_r$, $r = 1, 2, ..., s$.

Может оказаться, что все эти полиномы вырождаются в постоянные числа, так что решение (4.38) примет вид

$$y_i = \gamma_i\, e^{\lambda_0 x}, \qquad i = 1, 2, ..., n, \tag{4.39}$$

где s из коэффициентов γ_1, γ_2, ..., γ_n являются произвольными, а остальные выражаются через них. Полагая в решении (4.39) один из произвольных коэффициентов полиномов равным единице, а остальные – равными нулю, построим s линейно независимых частных решений.

Если λ_0 – действительное характеристическое число, то построенные частные решения будут действительными.

Если же характеристическое уравнение (4.30) имеет комплексный корень $\alpha + \beta\, \boldsymbol{i}$ кратности s, то оно имеет сопряженный корень $\alpha - \beta\, \boldsymbol{i}$ той же кратности.

Построив s линейно независимых комплексных частных решений, соответствующих характеристическому числу $\alpha + \beta\, \boldsymbol{i}$, и отделив в них действительные и мнимые части, получим $2\,s$ действительных линейно независимых частных решений. Таким образом, паре сопряженных комплексных характеристических чисел $\alpha \pm \beta\, \boldsymbol{i}$ кратности s соответствует $2\,s$ линейно независимых действительных частных решений.

В общем случае каждому простому действительному характеристическому числу соответствует одно частное решение, каждой паре простых сопряженных комплексных характеристических чисел – два действительных линейно независимых частных решения, действительному характеристическому числу кратности s – s действительных линейно независимых частных решений, а каждой паре сопряженных комплексных характеристических чисел кратности s – $2\,s$ действительных линейно независимых частных решений. Всего получается n действительных линейно независимых частных решений, которые образуют фундаментальную систему решений, позволяющую построить общее решение изложенным выше способом.

Таким образом, *линейная однородная система с постоянными коэффициентами всегда интегрируется в элементарных функциях.*

Пример 4.9. Решить систему ОДУ (относительно $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$)

$$\begin{aligned} x' &= -x + y + z, \\ y' &= x - y + z, \\ z' &= x + y - z. \end{aligned} \tag{4.40}$$

◀ Для этой системы матрица $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ имеет вид

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

а уравнения (4.28) –

$$\begin{aligned} (-1-\lambda)\,v_1 + v_2 + v_3 &= 0, \\ v_1 + (-1-\lambda)\,v_2 + v_3 &= 0, \\ v_1 + v_2 + (-1-\lambda)\,v_3 &= 0. \end{aligned} \tag{4.41}$$

Характеристическое уравнение системы

$$\Delta(\lambda) = |\boldsymbol{\mathcal{A}} - \lambda\boldsymbol{\mathcal{I}}| \equiv \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-1-\lambda)^3 + 1 + 1 - (-1-\lambda) - 2\,(-1-\lambda) =$$

$$= -(1+\lambda)^3 + 2 + 3\,(1+\lambda) = 4 - 3\,\lambda^2 - \lambda^3 = 0,$$

или

$$\lambda^3 + 3\,\lambda^2 - 4 = 0,$$

имеет следующие действительные корни: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = -2$. Найдем компоненты соответствующих векторов $\boldsymbol{v}_k$, $k = 1, 2$.

1^0. Подставим $\lambda_1 = 1$ вместо λ, а v_{1i} вместо v_i $(i = 1, 2, 3)$ в уравнения (4.41):

$$\begin{aligned} -2\,v_{11} + \quad v_{12} + \quad v_{13} &= 0,\\ v_{11} - 2\,v_{12} + \quad v_{13} &= 0,\\ v_{11} + \quad v_{12} - 2\,v_{13} &= 0. \end{aligned}$$

Так как сумма всех трех полученных уравнений – тождество $0 = 0$, то любое из них (например, первое) можно отбросить, а из двух оставшихся находим, что $v_{11} = v_{12} = v_{13}$. Выбирая v_{13} равным 1, получим ненулевой вектор $\boldsymbol{v}_1 = (1, 1, 1)^{\mathsf{T}}$.

2^0. Найдем линейно независимые частные решения, соответствующие двукратному корню $\lambda_{2,3} = -2$. Обозначим

$$\begin{aligned} x_2(t) &= (A_1\,t + A_2)\,e^{-2t},\\ y_2(t) &= (B_1\,t + B_2)\,e^{-2t},\\ z_2(t) &= (C_1\,t + C_2)\,e^{-2t}. \end{aligned} \tag{4.42}$$

Подставляя (4.42) в (4.40) и деля на e^{-2t} обе части каждого уравнения, получим, что:

$$\begin{aligned} (A_1 - 2\,A_1\,t - 2\,A_2) &= -(A_1\,t + A_2) + (B_1\,t + B_2) + (C_1\,t + C_2),\\ (B_1 - 2\,B_1\,t - 2\,B_2) &= \quad (A_1\,t + A_2) - (B_1\,t + B_2) + (C_1\,t + C_2),\\ (C_1 - 2\,C_1\,t - 2\,C_2) &= \quad (A_1\,t + A_2) + (B_1\,t + B_2) - (C_1\,t + C_2). \end{aligned}$$

Если теперь приравнять коэффициенты при одинаковых степенях (t^1 и t^0) в левых и правых частях этих равенств, то получим следующую однородную СЛАУ:

$$\begin{aligned} A_1 - 2\,A_2 &= -A_2 + B_2 + C_2, & -2\,A_1 &= -A_1 + B_1 + C_1,\\ B_1 - 2\,B_2 &= \quad A_2 - B_2 + C_2, & -2\,B_1 &= \quad A_1 - B_1 + C_1,\\ C_1 - 2\,C_2 &= \quad A_2 + B_2 - C_2, & -2\,C_1 &= \quad A_1 + B_1 - C_1, \end{aligned}$$

Из трех уравнений левого столбца следует, что $A_1 = B_1 = C_1$, что после подстановки в уравнения правого столбца дает $A_1 = B_1 = C_1 = 0$. После этого из трех уравнений левого столбца усматриваем, что $C_2 = -(A_2 + B_2)$, где A_2 и B_2 – свободные переменные. Отсюда, переобозначая, будем иметь $A_2 = \mathcal{C}_2$, $B_2 = \mathcal{C}_3$, $C_2 = -(\mathcal{C}_2 + \mathcal{C}_3)$.

Корню $\lambda_{2,3} = -2$ соответствуют два линейно независимых частных решения:

$$\begin{aligned} x_{21}(t) &= e^{-2t}, & x_{22}(t) &= 0, \\ y_{21}(t) &= 0, & y_{22}(t) &= e^{-2t}, \\ z_{21}(t) &= -e^{-2t}, & z_{22}(t) &= -e^{-2t}. \end{aligned}$$

Тогда общее решение исходной системы ОДУ будет иметь вид

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathcal{C}_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} \mathcal{C}_2 \\ \mathcal{C}_3 \\ -(\mathcal{C}_2 + \mathcal{C}_3) \end{bmatrix} e^{-2t} = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_1 e^t + \mathcal{C}_2 e^{-2t} \\ \mathcal{C}_1 e^t + \mathcal{C}_3 e^{-2t} \\ \mathcal{C}_1 e^t - (\mathcal{C}_2 + \mathcal{C}_3)\, e^{-2t} \end{bmatrix}. \quad \blacktriangleright$$

4.4. Упражнения

Аудиторные занятия

1°. Решить системы ОДУ методом исключения:

01. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$ 02. $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = y - 4x. \end{cases}$

03. $\begin{cases} \dot{x} + x - 8y = 0, \\ \dot{y} - x - y = 0. \end{cases}$ 04. $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 3y - 2x. \end{cases}$

05. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y + e^t, \\ \dot{y} = x + 4y + e^{2t}. \end{cases}$ 06. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - y, \\ \dot{y} = -4x - 5y. \end{cases}$

07. $\begin{cases} \dot{x} = y + z + 10\cos t, \\ \dot{y} = x + z + 2e^t, \\ \dot{z} = x + y - 10\sin t. \end{cases}$ 08. $\begin{cases} \dot{x} = -y - z, \\ \dot{y} = -x - z, \\ \dot{z} = -x - y. \end{cases}$

2°. Решить однородные системы ОДУ методом Эйлера:

01. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y, \\ \dot{y} = 4x - y. \end{cases}$ 02. $\begin{cases} \dot{x} = 2y - 3y, \\ \dot{y} = y - 2x. \end{cases}$

03. $\begin{cases} \dot{x} - 5x - 3y = 0, \\ \dot{y} + 3x + y = 0. \end{cases}$ 04. $\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y, \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$

05. $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = -2x + 3y. \end{cases}$ 06. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = 4x + 6y. \end{cases}$

07. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 5y, \\ \dot{y} = 3x - 6y. \end{cases}$ 08. $\begin{cases} \dot{x} = x - 4y, \\ \dot{y} = x - 3y. \end{cases}$

09. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + z, \\ \dot{y} = x + y - z, \\ \dot{z} = 2x - y. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y - z, \\ \dot{y} = -x + y + z, \\ \dot{z} = x - z. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dot{x} = x - y - z, \\ \dot{y} = x + y, \\ \dot{z} = 3x + z. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + , y, \\ \dot{y} = x + 3y - z, \\ \dot{z} = -x + 2y + 3z. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y - z, \\ \dot{y} = x + 2y - z, \\ \dot{z} = x - y + 2z. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z, \\ \dot{y} = 3x - 2y - 3z, \\ \dot{z} = -x + y + 2z. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z, \\ \dot{y} = 2x - y - 2z, \\ \dot{z} = -x + y + 2z. \end{cases}$

3°. Решить неоднородные системы ОДУ методом Эйлера:

01. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y + 2e^t, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$

02. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y + 1, \\ \dot{y} = -2x + 3y. \end{cases}$

03. $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y + 2e^{3t}, \\ \dot{y} = x + y + 5e^{-t}. \end{cases}$

04. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + e^t, \\ \dot{y} = -2x + 2t. \end{cases}$

4°. Решить неоднородные системы ОДУ методом вариации постоянных:

01. $\begin{cases} \dot{x} = y + \operatorname{tg}^2 t - 1, \\ \dot{y} = -x + \operatorname{tg} x. \end{cases}$

02. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y, \\ \dot{y} = -3x + 4y + \frac{e^{3t}}{e^{2t}+1}. \end{cases}$

Внеаудиторные занятия

1°. Решить однородные системы ОДУ методом исключения:

01. $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y, \\ \dot{y} = 3x + y. \end{cases}$

02. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 4y - x. \end{cases}$

03. $\begin{cases} \dot{x} + x + 5y = 0, \\ \dot{y} - x - y = 0. \end{cases}$

04. $\begin{cases} \dot{x} - 5x - 3y = 0, \\ \dot{y} + 3x + x = 0. \end{cases}$

2°. Решить однородные системы ОДУ методом Эйлера:

01. $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = -4x + 4y. \end{cases}$

02. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = -6x - 3y. \end{cases}$

03. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y, \\ \dot{y} = 3x + 2y. \end{cases}$

04. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = 6x - 5y. \end{cases}$

05. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z, \\ \dot{y} = x + 2y - z, \\ \dot{z} = x - y + 3z. \end{cases}$

06. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y + z, \\ \dot{y} = x + y + z, \\ \dot{z} = 4x - y + 4z. \end{cases}$

07. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + 2z, \\ \dot{y} = x + 2z, \\ \dot{z} = -2x + y - z. \end{cases}$

08. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y - z, \\ \dot{y} = 3x - 4y - 3z, \\ \dot{z} = 2x - 4y. \end{cases}$

09. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y, \\ \dot{y} = 3x + y - z, \\ \dot{z} = x + z. \end{cases}$

3°. Решить неоднородные системы ОДУ методом Эйлера:

01. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = x - 5\sin t. \end{cases}$

02. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 16\,t\,e^t, \\ \dot{y} = 2x - 2y. \end{cases}$

4°. Решить неоднородные системы ОДУ методом вариации постоянных:

01. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = 2x - y + 15\,e^t\sqrt{t}. \end{cases}$

02. $\begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y + \frac{2}{e^t - 1}, \\ \dot{y} = 6x + 3y - \frac{3}{e^t - 1}. \end{cases}$

5. РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

5.1. Общие понятия

Определение 5.1. *Разностным уравнением* называется зависимость, связывающая значения аргументов и неизвестной функции, заданные на целочисленной сетке.

Такие уравнения возникают, например, при попытках приближенно решить ОДУ $y' = f(x, y)$, аналитическое решение которого недоступно.

Известно, что по определению производной

$$y'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h}.$$

Следовательно,

$$y'(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{h},$$

причем ошибка приближения будет мала при малых h. Поэтому дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ можно приближенно заменить уравнением

$$y(x+h) = y(x) + h\, f\big(x, y(x)\big).$$

Заметим, что здесь вместо производной использовано отношение разности значений функции и разности значений аргумента. Отсюда и произошло название "разностные уравнения".

В последнем уравнении x и h пока трактуются как произвольные действительные числа. Если точнее, то диапазон изменения x связан с областью определения функции f, но всегда это некоторый промежуток числовой оси.

При практическом применении полученного уравнения фиксируют некоторое значение h и рассматривают лишь дискретные значения аргумента $x_k = x_0 + k\, h$, где x_0 – заданное начальное значение x, а $k = 0$, 1, 2, ... Тем самым на числовой оси выделяется последовательность точек, называемая *сеткой*. Точки $x_k = x_0 + k\, h$ называются *узлами*, а число h – *шагом* этой сетки.

Рассмотрим уравнение относительно определенной на множестве узлов сетки функции y:

$$y(k+1) = y(k) + h\,f\big(x_k, y(k)\big) = F\big(k, y(k)\big), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Это пример *разностного уравнения первого порядка*. Приближенный метод решения дифференциальных уравнений при помощи такого разностного уравнения называется *методом Эйлера*.

Если задано начальное значение $y(x_0) = y(0)$, то из разностного уравнения последовательно можно определить значения

$$y(1),\ y(2),\ y(3),\ y(4),\ \ldots,$$

приближенно равные значениям

$$y(x_0+h),\ y(x_0+2\,h),\ y(x_0+3\,h),\ y(x_0+4\,h),\ \ldots$$

решения задачи Коши для дифференциального уравнения в узлах сетки.

Геометрическая интерпретация: интегральная кривая заменяется непрерывной ломаной с узлами в точках $\big(x_0 + k\,h, y(k)\big)$. Направление каждого звена указывает значение векторного поля дифференциального уравнения в левой крайней точке звена. При этом только начальное звено касается искомой интегральной кривой, остальные звенья касаются уже других, хотя и близких, интегральных кривых. Поэтому неизбежна погрешность приближения интегральной кривой с помощью *ломаной Эйлера* (рис. 5.1). В случае, если интегральные кривые дифференциального уравнения отличаются от прямых, эта погрешность может быстро увеличиваться с каждым новым шагом.

Стоит заметить, однако, что метод Эйлера – простейший приближенный метод решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Фактически здесь функция $f(x,y)$ заменяется на кусочно-постоянную функцию, но можно приближать и кусочно-линейными функциями. Неудивительно, что сегодня известны многие более сложные методы приближенного решения ОДУ, обладающие более высокой точностью, чем метод Эйлера.

Многие процессы изменяют свое состояние не непрерывно, а дискретно. Например, официальный курс доллара устанавливается один раз в день, стоимость многих ценных бумаг, величина банковских вкладов рассчитывается с точностью до одного дня. Зарплата и проценты по вкладам выплачиваются один раз в месяц, статистические данные о состоянии предприятия, отрасли, государства подготавливаются ежемесячно,

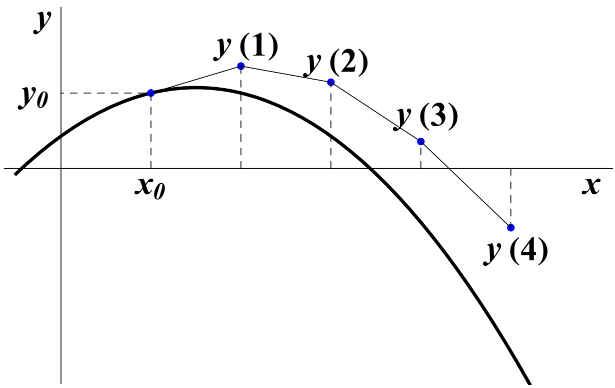

Рис. 5.1

ежеквартально, ежегодно (процесс получения статистических данных не может быть непрерывным).

Определение 5.2. *Фазовое пространство* $\mathbb{P}$ – это некоторое множество, элементами которого являются возможные состояния исследуемого процесса.

Определение 5.3. *Расширенное фазовое пространство* $\mathbb{N} \times \mathbb{P}$ состоит из пар (t, x), $t \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{P}$, которыми изображаются возможные состояния процесса.

Определение 5.4. Будем говорить, что отображение $F : \mathbb{N} \times \mathbb{P}^n \longmapsto \mathbb{P}$,

$$\big(t, x_1, x_2, ..., x_n\big) \longmapsto F\big(t, x_1, x_2, ..., x_n\big)$$

активно зависит от x_1, если существуют такие значения этого аргумента x_1', x_2'' $(x_1' \neq x_2'')$ и набор значений остальных переменных t, x_2, ..., x_n, при которых $F\big(t, x_1', x_2, ..., x_n\big) \neq F\big(t, x_1'', x_2, ..., x_n\big)$.

Замечание. Если бы отображение F было дифференцируемым, то можно было бы сказать, что $F'_{x_1} \neq 0$, но в общем случае так поступить нельзя, поскольку множество $\mathbb{P}$ может даже не быть частью $\mathbb{R}^n$, а поэтому нельзя говорить о производных.

Определение 5.5. *Разностным уравнением* n*-го порядка* называется уравнение вида

$$x(t+n) = F\big(t, x(t), x(t+1), ..., x(t+n-1)\big),$$

где отображение $F : \mathbb{N} \times \mathbb{P}^n \longmapsto \mathbb{P}$ активно зависит от x_1.

Если бы функция F не зависела от x_1 (зависела фиктивно), то было бы трудно определить порядок разностного уравнения. Например, уравнение $x(t+4) = x(t+2)$ по многим причинам не следует считать уравнением четвертого порядка. После замены времени $\tau = t + 2$ такое уравнение переходит в уравнение $x(\tau + 2) = x(\tau)$ с правой частью, активно зависящей от x_1. Следовательно, это уравнение второго порядка в указанном смысле.

Определение 5.6. *Решением разностного уравнения* называется всякая функция $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{P}$, для которой $\varphi(t+n) = F\big(t, \varphi(t), \varphi(t+1), ..., \varphi(t+n-1)\big)$ при всех $t \in \mathbb{N}$.

Определение 5.7. $x_0 \in \mathbb{P}$ – положение равновесия для разностного уравнения, если $\varphi(t) \equiv x_0$ – одно из его решений.

Теорема 5.1 (о существовании, единственности и зависимости от начальных данных решения разностного уравнения). Для любых наборов начальных значений $(u_1, u_2, ..., u_n) \in \mathbb{P}^n$ существует единственное решение φ уравнения n-го порядка, удовлетворяющее начальным условиям $\varphi(1) = u_1$, $\varphi(2) = u_2$, ..., $\varphi(n) = u_n$. Если $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ и отображение F принадлежит классу $\mathbb{C}^k$, $k \geqslant 0$, то решение $\varphi = \varphi(t, u_1, ..., u_n)$ при всех $t \in \mathbb{N}$ является отображением класса $\mathbb{C}^k$ по переменным $(u_1, ..., u_n)$.

5.2. Примеры разностных уравнений

1°. Арифметическая прогрессия

Пусть $x(t)$ – элемент арифметической прогрессии с номером t, d – разность прогрессии. Тогда $x(t + 1) = x(t) + d$ – разностное уравнение первого порядка, не имеющее при $d \neq 0$ положений равновесия.

2°. Геометрическая прогрессия

Соотношение, определяющее геометрическую прогрессию со знаменателем q:

$$x(t + 1) = q\, x(t),$$

является разностным уравнением первого порядка. Число x_0 – положение равновесия для этого уравнения, т.е. $x_0 = q\, x_0$, тогда и только тогда, когда $x_0 = 0$ или $q = 1$ (при $q = 1$ любая точка x_0 – положение равновесия).

3°. Последовательность частичных сумм числового ряда

Обозначим через $x(t)$ сумму

$$x(t) = \sum_{n=1}^{t} a_n$$

первых t членов ряда

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

Тогда $x(t+1) = x(t) + a_{n+1}$.

Например, сумма квадратов первых t натуральных чисел $1^2+2^2+3^2+ + ...+t^2$ является решением разностного уравнения $x(t+1) = x(t)+(t+1)^2$ с начальным условием $x(1) = 1^2 = 1$.

4°. Рост процентного вклада

Пусть (t) – величина вклада после t месяцев. Тогда

$$x(t+1) = \left(1 + \frac{R}{100}\right) x(t),$$

где R – месячная процентная ставка.

5°. Рост процентного вклада с регулярными взносами

$$x(t+1) = \left(1 + \frac{R}{100}\right) x(t) + P,$$

где P – величина ежемесячного взноса.

6°. Величина долга по займу с регулярными выплатами

$$x(t+1) = \left(1 + \frac{R}{100}\right) x(t) - P,$$

где P – размер выплат.

7°. Числа Фибоначчи

В старинной задаче Фибоначчи[1] требуется определить число пар кроликов, образовавшихся от одной пары в течении года, если известно, что каждая зрелая пара кроликов ежемесячно приносит новую пару, причем новорожденные становятся зрелыми через один месяц.

[1] *Фибоначчи*, или *Леонардо Пизанский* – итальянский математик, опубликовавший эту задачу в своей книге, написанной в 1202 г.

Задача сводится к разностному уравнению второго порядка

$$x(t+2) = x(t+1) + x(t), \qquad x(1) = 1, \quad x(2) = 1.$$

В левой части уравнения – количество кроликов в некоторый месяц, а в правой части – количество кроликов в предыдущие два месяца. За месяц количество кроликов не удваивается, поскольку потомство приносят только зрелые кролики.

8°. Паутинообразная модель рынка

Рассмотрим модель процесса рыночного регулирования цены на рынке одного товара.

Пусть $P(t)$, $D(t)$, $S(t)$ означают соответственно цену товара, величину спроса на товар, величину предложения товара в период t.

Предположим, что выполнены следующие условия:

1) функция спроса линейно зависит от текущей цены товара: $D(t) = \alpha + A\,P(t)$, где α, $A < 0$ – постоянные параметры;

2) функция предложения линейно зависит от цены товара за предыдущий период: $S(t) = \beta + B\,P(t-1)$, где β, $B > 0$ – постоянные параметры (предложение сегодня складывается на основе вчерашних цен);

3) цена каждого периода устанавливается так, чтобы уравнять спрос и предложение: $D(t) = S(t)$;

4) известна начальная цена $P(0)$.

Отсюда

$$\alpha + A\,P(t) = \beta + B\,P(t-1), \quad \text{или} \quad P(t) = \frac{B}{A}\,P(t-1) + \frac{\beta - \alpha}{A}.$$

Получилось линейное неоднородное разностное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим графическую интерпретацию процесса рыночного регулирования цены. Для этого изобразим сначала в декартовой системе координат (P, Q) графики линейных функций $D = \alpha + A\,P$ и $S = \beta + B\,P$. Точка пересечения прямых соответствует положению равновесия на рынке – равновесной цене $P_{\text{равн}}$.

Затем рассмотрим на координатной оси P точку с начальной ценой $P(0)$. Ориентируясь на эту цену поставщики предложат товар в количестве, соответствующем точке пересечения вертикальной прямой $P = P(0)$ с графиком функции S. По условию величина спроса установится на том же уровне за счет выбора подходящей цены $P(1)$. Соответствующая точка оси P есть проекция точки пересечения графика функции D с горизонтальной прямой, проведенной через построенную перед этим точку графика функции S.

Далее процесс развивается по тем же правилам для новой цены товара. Получающееся в результате чередование вертикальных и горизонтальных отрезков действительно напоминает паутину.

Критерий устойчивости решений линейных разностных уравнений приводится далее, но в данном случае можно проверить непосредственно, что если $|B/A| < 1$, то паутина сходится к точке равновесия (рис. 5.2), т.е.

$$\lim_{t\to+\infty} P(t) = P_{\text{равн}}.$$

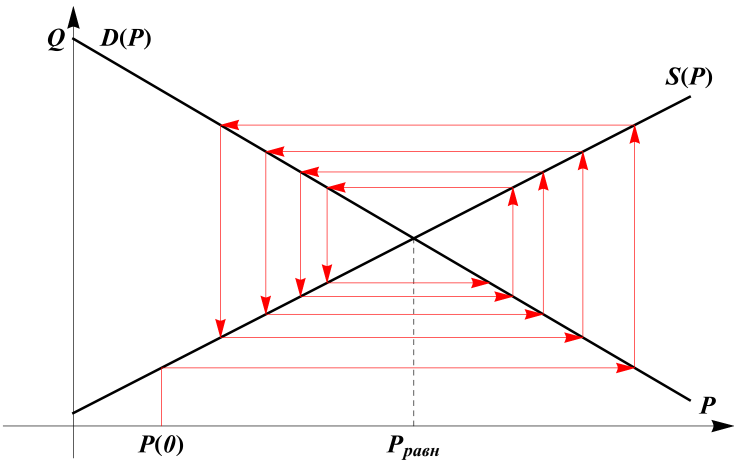

Рис. 5.2

Если же $|B/A| > 1$, то паутина расходится (рис. 5.3). Колебания цены увеличиваются с каждым новым периодом.

В случае $|B/A| = 1$ цена меняется циклически (повторяется через каждые два периода).

9°. Модель делового цикла (Самуэльсона – Хикса)

Эта модель описания волнообразного характера развития экономики (чередования подъемов и спадов конъюнктуры) предложена известными экономистами Самуэльсоном и Хиксом. Их предположения:

1) величина потребления в любой период времени является линейной функцией национального дохода за предыдущий период: $C(t) = aY(t-1) + b$, где $0 < a < 1$, $b > 0$ (число a иногда называется коэффициентом склонности к потреблению);

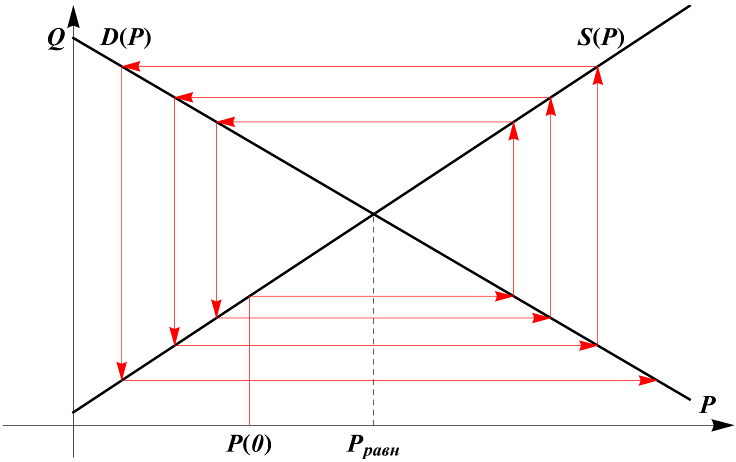

Рис. 5.3

2) текущий объем инвестиций пропорционален с некоторым коэффициентом приращению национального дохода за предыдущий период: $I(t) = \nu\big(Y(t-1) - Y(t-2)\big)$, ν – коэффициент акселерации (возможные отрицательные значения инвестиций следует истолковывать как отказ в текущем периоде от амортизации капитала на такую сумму);

3) выполняется закон сохранения: $Y(t) = C(t) + I(t)$.

В результате получается, что

$$Y(t) = a\,Y(t-1) + b + \nu\big(Y(t-1) - Y(t-2)\big) =$$
$$= (a+\nu)\,Y(t-1) - \nu\,Y(t-2) + b,$$

или, после изменения нумерации моментов времени находим, что изменение национального дохода $Y(t)$ описывается линейным неоднородным разностным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами следующего вида:

$$Y(t+2) = (a+\nu)\,Y(t+1) - \nu\,Y(t) + b.$$

5.3. Методы решения линейных разностных уравнений

Определение 5.8. *Линейными разностными уравнениями с переменными коэффициентами* называются уравнения вида

$$x(t+n) + a_1(t)\,x(t+n-1) + \ldots + a_n(t)\,x(t) = f(t),$$

где $a_n(t) \neq 0$, $t \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$.

Определение 5.9. Если коэффициенты a_1, a_2, ..., a_n не зависят от t, то уравнение называется *линейным разностным уравнением с постоянными коэффициентами.*

Теорема 5.2 (о структуре множества решений линейного однородного разностного уравнения). Если $f(t) = 0$, то:

1) множество решений является линейным пространством размерности n;

2) решения $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ..., $\varphi_k(t)$, линейно независимы тогда и только тогда, когда линейно независимы соответствующие начальные наборы данных $(u_1, u_2, ...u_n)_i = \big(\varphi_i(1), \varphi_i(2), ..., \varphi_i(n)\big) \in \mathbb{R}^n$;

3) решения линейно зависят от начального набора данных.

Теорема 5.3 (о структуре множества решений линейного неоднородного разностного уравнения). Пусть $x_{\text{частн}}(t)$ – некоторое решение неоднородного уравнения

$$x(t+n) + a_1(t)\, x(t+n-1) + ... + a_n(t)\, x(t) = f(t),$$

а $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ..., $\varphi_k(t)$ – фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения, т.е. базис в пространстве решений из предыдущей теоремы. Тогда любое решение $\varphi(t)$ единственным способом может быть представлено в виде

$$\varphi(t) = \mathcal{C}_1\, \varphi_1(t) + \mathcal{C}_2\, \varphi_2(t) + ... + \mathcal{C}_n\, \varphi_n(t) + x_{\text{частн}}(t),$$

где $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, ..., $\mathcal{C}_n$ – некоторые вещественные числа, определяемые из начальных условий. И, наоборот, всякая функция такого вида является решением данного уравнения.

Теорема 5.4 (о построении фундаментальной системы решений однородного разностного уравнения с постоянными коэффициентами по корням характеристического уравнения). Пусть

$$\lambda^n + a_1\, \lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\, \lambda + a_n = 0$$

– характеристическое уравнение линейного однородного разностного уравнения с постоянными коэффициентами

$$x(t+n) + a_1(t)\, x(t+n-1) + ... + a_n(t)\, x(t) = 0.$$

Тогда, если каждому вещественному корню λ кратности k поставить в соответствие функции

$$\lambda^t,\ t\,\lambda^t,\ ...,\ t^{k-1}\,\lambda^t,$$

а каждой паре комплексно сопряженных корней $\lambda = r\,(\cos\omega \pm \boldsymbol{i}\,\sin\omega)$ кратности k поставить в соответствие функции

$$r^t\,\cos\omega t,\ t\,r^t\,\cos\omega t,\ ...,\ t^{k-1}\,r^t\,\cos\omega t,$$
$$r^t\,\sin\omega t,\ t\,r^t\,\sin\omega t,\ ...,\ t^{k-1}\,r^t\,\sin\omega t,$$

то объединение всех таких функций будет одной из фундаментальных систем решений данного уравнения.

Пример 5.1. Решить уравнение $x(t+2) - 3\,x(t+1) + 2\,x(t) = 0$.

◀ Это линейное однородное разностное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 - 3\,\lambda + 2 = 0$$

– различные вещественные числа: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Поэтому каждому из этих корней согласно теорема 5.4 следует поставить в соответствие решение вида λ^t. В результате получается фундаментальная система решений:

$$\varphi_1(t) = 1^t = 1, \qquad \varphi_2(t) = 2^t,$$

и общее решение $\varphi(t) = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2\,2^t$. ▶

Пример 5.2. Решить уравнение $x(t+2) + 2\,x(t+1) + 2\,x(t) = 0$.

◀ В этом случае характеристическое уравнение $\lambda^2 + 2\,\lambda + 2 = 0$ имеет комплексные корни $\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{-1} = -1 \pm \boldsymbol{i}$. По теореме 5.4 необходимо найти тригонометрическую форму записи одного из этих корней, а затем поставить в соответствие паре сопряженных корней два решения:

$$\varphi_1(t) = r^t\,\cos\omega t, \qquad \varphi_2(t) = r^t\,\sin\omega t,$$

где r и ω – модуль и аргумент выбранного корня. Здесь $r = \sqrt{2}$, $\omega = 3\,\pi/4$. Следовательно, фундаментальную систему решений уравнения составят функции:

$$\varphi_1(t) = (\sqrt{2})^t\,\cos\frac{3\,\pi}{4}t, \qquad \varphi_2(t) = (\sqrt{2})^t\,\sin\frac{3\,\pi}{4}t,$$

а общим решением будет функция

$$x(t) = \mathcal{C}_1\,(\sqrt{2})^t\,\cos\frac{3\,\pi}{4}t + \mathcal{C}_2\,(\sqrt{2})^t\,\sin\frac{3\,\pi}{4}t. \qquad \blacktriangleright$$

Пример 5.3. Решить уравнение $x(t+2) + 2\,x(t+1) + x(t) = 0$.

◀ На этот раз характеристическое уравнение $\lambda^2 + 2\,\lambda + 1 = 0$ имеет вещественные кратные корни, а именно $\lambda = -1$ – корень кратности 2. Поэтому фундаментальную систему решений можно составить из функций

$$\varphi_1(t) = (-1)^t, \qquad \varphi_2(t) = t\,(-1)^t.$$

Таким образом, общее решение уравнения

$$x(t) = \mathcal{C}_1\,(-1)^t + \mathcal{C}_2\,t\,(-1)^t$$

– сумма "колеблющихся" решений. ▶

Теорема 5.5 (о построении частного решения неоднородного разностного уравнения с постоянными коэффициентами по виду правой части). Если правая часть линейного неоднородного разностного уравнения с постоянными коэффициентами:

$$x(t+n) + a_1(t)\,x(t+n-1) + ... + a_n(t)\,x(t) = f(t),$$

имеет вид

$$f(t) = \rho^t\,\big[P_{m_1}(t)\,\cos\omega t + Q_{m_2}(t)\,\sin\omega t\big],$$

где $P_{m_1}(t)$, $Q_{m_2}(t)$ – многочлены степени m_1 и m_2 соответственно, причем $m = \max(m_1, m_2)$, то при $\omega \neq 0$ существует частное решение вида

$$x_{\text{частн}}(t) = t^k\rho^t\,\big[U_m(t)\,\cos\omega t + V_m(t)\,\sin\omega t\big],$$

$U_m(t)$, $V_m(t)$ – многочлены степени m с неопределенными коэффициентами; k – кратность корня характеристического уравнения $\lambda = \rho\,(\cos\omega + \boldsymbol{i}\,\sin\omega)$ (если такого корня нет, то $k = 0$). При $\omega = 0$, т.е. при $f(t) = P_m(t)\,\rho^t$, существует решение вида

$$x_{\text{частн}}(t) = t^k\rho^t\,U_m(t),$$

где $P_m(t)$ – многочлен степени m; $U_m(t)$ – многочлен степени m с неопределенными коэффициентами; k – кратность корня $\lambda = \rho$ (если такого корня нет, то $k = 0$).

Теорема 5.6 (принцип суперпозиции). Если $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ – решения уравнения:

$$x(t+n) + a_1(t)\,x(t+n-1) + ... + a_n(t)\,x(t) = f(t),$$

при $f = f_1$ и $f = f_2$ соответственно, то функция $\varphi(t) = \lambda_1\,\varphi_1(t) + \lambda_2\,\varphi_2(t)$ при всех $\lambda_1,\,\lambda_2 \in \mathbb{R}$ является решением неоднородного уравнения с $f(t) = \lambda_1\,f_1(t) + \lambda_2\,f_2(t)$.

6. УСТОЙЧИВОСТЬ

Предметом изучения теории устойчивости является оценка влияния возмущающих факторов на поведение систем различной природы. Под возмущающими факторами понимаются причины, обстоятельства, силы, неучитываемые при первоначальном описании поведения системы вследствие их малости по сравнению с основными факторами.

Влияние возмущающих факторов на различные процессы (движения, изменения), которые происходят в системах механических, физических, технических, экономических, финансовых и др., неодинаково На одни движения такое влияние незначительно. При этом возмущенное движение мало отличается от невозмущенного. Но нередка и иная ситуация: на поведение некоторых процессов возмущения оказывают значительное влияние, а возмущенное движение существенно отличается от невозмущенного, как бы ни были малы возмущающие силы. Движения первого рода называются *устойчивыми*, а второго – *неустойчивыми*.

Определение 6.1. *Устойчивость* – способность системы сохранять текущее состояние при влиянии внешних воздействий. Если текущее состояние при этом не сохраняется, то такое состояние называется *неустойчивым*.

Теория устойчивости устанавливает признаки, которые позволяют судить о том, будет ли движение устойчивым или неустойчивым. Поскольку в действительности возмущающие факторы всегда неизбежно присутствуют, задача анализа устойчивости движения имеет важное теоретическое и практическое значение.

Когда изучают природу возмущений, рассматривают два их источника.

1°. *Идеализация при построении уравнений модели.* При математическом описании реальных процессов всегда приходится упрощать и идеализировать их, выделяя наиболее существенные факторы и опуская второстепенные. Поэтому необходимо оценить правильность выбора упрощающих установок, так как неучтенные факторы могут оказывать значительное влияние на изучаемые процессы не только количественно, но и качественно. Нередко вопрос о пригодности (адекватности) модели может быть решен сравнением с экспериментальными данными, но во многих случаях можно указать условия, при которых ряд упрощений будет неприемлем.

2°. *Влияние погрешности измерений.* Если поведение исследуемого явления или процесса описывается системой ОДУ с начальными условиями, которые обычно являются результатами наблюдений, измерений или опытов, а следовательно, получены с некоторой погрешностью, то возникает вопрос: каково влияние малых изменений в начальных условиях на поведение процесса?

Если сколь угодно малые изменения начального положения системы способны существенно изменить ее поведение, то соответствующая модель не имеет никакого прикладного значения, за исключением некоторых случаев.

В разных областях науки, техники, экономики и других трактовка понятия "устойчивость" разная:

– устойчивость в макроэкономике обозначает долгосрочное равновесие эксплуатации ресурсов и развития человеческого общества;

– воздушная устойчивость в метеорологии относится к вертикальным перемещениям воздушных потоков;

– устойчивостью в механике называется свойство конструкции сохранять при действии внешних сил заданную форму равновесия;

– устойчивость в технике определяется как свойство технических систем сохранять значения конструктивных и режимных параметров в заданных пределах;

– устойчивость энергосистем – это способность сохранять синхронизм между электростанциями (способность возвращаться к установившемуся режиму после возмущений;

– устойчивость в математике характеризуется ответом на малое возмущение системы, находящейся в механическом равновесии. Различают устойчивость и асимптотическую устойчивость по Ляпунову, экспоненциальную устойчивость, асимптотическую устойчивость в целом и др.;

– гидродинамическая устойчивость – свойство потоков жидкости сохранять скорость и направление движения;

– в социологии социальная устойчивость – способность социальной системы сохранять себя в меняющихся условиях среды;

– на морских и речных судах устойчивость (профессиональный термин – "остойчивость") связана с восстанавливающим моментом и противодействием опрокидыванию;

– в теории автоматического управления устойчивость характеризуется реакцией динамической системы на внешние воздействия. Так, устойчивой системой является та, которая после устранения указанного воздействия прекращает движение и самостоятельно приходит к некоторому установившемуся стабильному состоянию;

– в теории вероятностей статистическую устойчивость определяют как сходимость частот вариант в последовательности испытаний;

– в численном анализе устойчивость показывает, каким образом алгоритм связан с ошибками в вычислениях (см. численная устойчивость);

– в авиации устойчивость характеризует способность самолета без вмешательства пилота сохранять заданный режим полета (см. устойчивость и управляемость);

– в теории музыки устойчивость – свойство, придающее звуку или системе звуков их постоянство;

– в экологии устойчивость – способность окружающей среды выдерживать воздействие человека, способность биологических систем к сохранению и развитию биоразнообразия;

– в транспортных системах под устойчивостью понимают любой способ или организационную форму передвижения, позволяющие снизить уровень воздействия на окружающую среду.

6.1. Устойчивость по Ляпунову. Основные понятия и определения

Рассмотрим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, ..., x_n, t), \qquad i = 1, 2, ..., n, \tag{6.1}$$

или

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}, t\big), \tag{6.2}$$

где функции f_i определены в полуцилиндре $\mathscr{B} = [t_*, +\infty) \times \mathscr{D}_y$, где $\mathscr{D}_x$ – открытая область пространства $\mathbb{R}^n$. Предположим, что правые части этой системы удовлетворяют условиям существования и единственности решения задачи Коши, т.е. для каждой системы значений $(t_0, \boldsymbol{x}^0) \in \mathscr{B}$ существует единственное решение $\boldsymbol{x}(t)$ системы (6.2), определенное на некотором интервале $(t_0 - A, t_0 + B) \in (t_*, +\infty)$ $(A > 0,\ B > 0$ – некоторые постоянные) и удовлетворяющее начальному условию $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$. Пусть это решение бесконечно продолжаемо вправо, т.е существует для всех $t > t_0$.

Введем следующие определения [8].

Определение 6.2. Решение $\boldsymbol{\varphi}(t)$, $t \in [t_*, +\infty)$, системы (6.2), удовлетворяющее начальным условиям $\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$, называется *устойчивым по*

Ляпунову[1] при $t \to \infty$, если для любых $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in [t_*, +\infty)$ существует $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что: 1) все решения $\boldsymbol{x}(t)$ системы (6.2)) (включая решение $\boldsymbol{\varphi}(t)$) удовлетворяют условию

$$|\boldsymbol{x}(t_0) - \boldsymbol{\varphi}(t_0)| < \delta, \tag{6.3}$$

2) определены в прожутке $t_0 < t < \infty$; 3) для этих решений справедливо неравенство

$$|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{\varphi}(t)| < \varepsilon \tag{6.4}$$

для всех $t \geqslant t_0$.

Это означает, что решения, близкие в начальный момент времени, остаются таковыми и в дальнейшем.

Определение 6.3. Если число $\delta > 0$ можно выбрать не зависящим от начального момента $t_0 \in \mathscr{T}$, т.е. $\delta = \delta(\varepsilon)$, то устойчивость называется *равномерной в области* $\mathscr{T}$.

Определение 6.4. Решение $\boldsymbol{\varphi}(t)$, $t \in [t_*, +\infty)$, системы (6.2) называется *неустойчивым по Ляпунову*, если для некоторых $\varepsilon > 0$, $t_0 \in [t_*, +\infty)$ и любого $\delta > 0$ существует решение $\boldsymbol{x}_\delta(t)$ (хотя бы одно) и момент $t_1 = t_1(\delta) > t_0$ такие, что

$$|\boldsymbol{x}_\delta(t_0) - \boldsymbol{\varphi}(t_0)| < \delta \quad \text{и} \quad |\boldsymbol{x}_\delta(t_1) - \boldsymbol{\varphi}(t_1)| \geqslant \varepsilon. \tag{6.5}$$

Неустойчивые решения только в редких случаях интересны для практики.

Определение 6.5. Решение $\boldsymbol{\varphi}(t)$, $t \in [t_*, +\infty)$, системы (6.2), называется *асимптотически устойчивым по Ляпунову* при $t \to \infty$, если: 1) это решение устойчиво по Ляпунову; 2) для любого $t_0 \in [t_*, +\infty)$ существует $\delta_0(t_0) > 0$ такое, что все решения $\boldsymbol{x}(t)$, $t_0 \leqslant t < +\infty$, удовлетворяющие условию $|\boldsymbol{x}(t_0) - \boldsymbol{\varphi}(t_0)| < \delta_0$, обладают свойством

$$\lim_{t \to \infty} |\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{\varphi}(t)| = 0. \tag{6.6}$$

[1] *Александр Михайлович Ляпунов* (1857–1918) – русский математик и механик, академик Петербургской академии наук, основоположник современной теории устойчивости. Кроме основных понятий теории устойчивости, в науку вошли термины "показатели Ляпунова", "экспонента Ляпунова", "размерность Ляпунова". Велик вклад А.М. Ляпунова в теорию дифференциальных уравнений, гидродинамику, теорию вероятностей.

Это означает, что решения, близкие в начальный момент времени t_0 к асимптотически устойчивому решению, не только остаются близкими к нему при $t \geqslant t_0$, но и неограниченно приближаются к нему с течением времени.

Пример 6.1. Исследовать на основании определения устойчивость решения задачи Коши: $\dot{x} = -k\,x$, $x(t_0) = x_0$, где k может принимать любые значения.

◀ При $k \neq 0$ это уравнение имеет общее решение $x(t) = \mathcal{C}\,e^{-kt}$, а частное, соответствующее заданному начальному условию, – $x(t) = x_0\,e^{-k(t-t_0)}$. Если $k = 0$, то частным решением будет $x(t) = x_0 = \mathrm{const}$. Устойчивость этих решений при различных k и будем исследовать.

Если изменить начальное условие на $x(t_0) = \tilde{x}_0$, то при $k = 0$ имеем частное решение $\tilde{x}(t) = \tilde{x}_0 = \mathrm{const}$, а при $k \neq 0$ – решение $\tilde{x}(t) = \tilde{x}_0\,e^{-k(t-t_0)}$. Найдем модуль разности решений $x(t)$ и $\tilde{x}(t)$:

$$\left|\,x(t) - \tilde{x}(t)\,\right| = \begin{cases} \left|\,x_0\,e^{-k_1(t-t_0)} - \tilde{x}_0\,e^{-k_1(t-t_0)}\,\right|, & k = k_1 > 0; \\ \left|\,x_0 - \tilde{x}_0\,\right|, & k = k_2 = 0; \\ \left|\,x_0\,e^{k_3(t-t_0)} - \tilde{x}_0\,e^{k_3(t-t_0)}\,\right|, & k = k_3 < 0. \end{cases}$$

Несложно установить, что:

1) при $k > 0$ и $t \to +\infty$ разность $\left|\,x(t) - \tilde{x}(t)\,\right| \to 0$, т.е. решение $x(t)$ асимптотически устойчиво по Ляпунову;

2) при $k = 0$, $\left|\,x_0 - \tilde{x}_0\,\right| < \delta$ и $t \geqslant t_0$ разность $\left|\,x(t) - \tilde{x}(t)\,\right| < \varepsilon \equiv \delta$, т.е. решение $x(t)$ устойчиво по Ляпунову, но не асимптотически устойчиво;

3) при $k < 0$ и $t \to +\infty$ разность $\left|\,x(t) - \tilde{x}(t)\,\right| \to +\infty$, т.е. решение $x(t)$ неустойчиво по Ляпунову. ▶

Пример 6.2. Исходя из определения устойчивости по Ляпунову, исследовать на устойчивость решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} = 1 + t - x, \tag{6.7}$$

удовлетворяющее начальному условию $x(0) = 0$.

◀ Уравнение (6.7) есть линейное неоднородное уравнение. Его общее решение $x(t) = \mathcal{C}\,e^{-t} + t$. Начальному условию $x(0) = 0$ удовлетворяет решение

$$\varphi(t) = t \tag{6.8}$$

уравнения (6.7). Начальному условию $x(0) = x_0$ удовлетворяет решение

$$x(t) = x_0\,e^{-t} + t. \tag{6.9}$$

Рассмотрим разность решений (6.9) и (6.8) уравнения (6.7) и запишем ее так:

$$x(t) - \varphi(t) = x_0\, e^{-t} + t - t = (x_0 - 0)\, e^{-t}.$$

Отсюда видно, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ (например, $\delta = \varepsilon$) такое, что для всякого решения $x(t)$ уравнения (6.7), начальные значения которого удовлетворяют условию $|x_0 - 0| < \delta$, выполняется неравенство

$$|x(t) - \varphi(t)| = |(x_0 - 0|\, e^{-t} \leqslant \varepsilon$$

для всех $t \geqslant 0$. Следовательно, решение $\varphi(t) = t$ является устойчивым. Более того, поскольку

$$\lim_{t\to+\infty} |x(t) - \varphi(t)| = \lim_{t\to+\infty} |(x_0 - 0|\, e^{-t} = 0,$$

решение $\varphi(t) = t$ является асимптотически устойчивым. Заметим, что это решение $\varphi(t)$ является неограниченным при $t \to +\infty$. ▶

Приведенный пример показывает, что из *устойчивости решения дифференциального уравнения не следует ограниченность решения.*

Исследование на устойчивость решения $\boldsymbol{\varphi}(t)$ системы (6.2) можно свести к исследованию на устойчивость нулевого (тривиального) решения $\boldsymbol{x}(t) \equiv 0$ некоторой системы, аналогичной системе (6.2):

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t) \equiv \boldsymbol{F}(x_1, x_2, ..., x_n, t), \tag{6.10}$$

где $\boldsymbol{F} = \big\{F_1, F_2, ..., F_n\big\}$, причем $F_i(0, 0, ..., 0, t) \equiv 0$, $i = 1,\ 2,\ ...,\ n$.

Определение 6.6. Говорят, что точка $\boldsymbol{x}^\star = \{0, 0, ..., 0\} = \mathbf{0}$ есть *точка покоя* (*равновесия*) системы (6.10).

Применительно к точке покоя определения устойчивости и неустойчивости могут быть сформулированы так.

Определение 6.7. Точка покоя $\boldsymbol{x}^\star = \mathbf{0}$ *устойчива по Ляпунову*, если для любых $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in (t, \infty)$ существует $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что из неравенства

$$|\boldsymbol{x}(t_0)| < \delta, \tag{6.11}$$

следует неравенство

$$|\boldsymbol{x}(t)| < \varepsilon \tag{6.12}$$

для всех $t \geqslant t_0$.

Для случая $n = 2$ геометрически это означает следующее. Каким бы малым ни был радиус ε цилиндра с осью Ot, в плоскости $t = t_0$ найдется δ-окрестность точки $(0, 0, t_0)$ такая, что все интегральные кривые

$$x_1 = x_1(t), \qquad x_2 = x_2(t),$$

выходящие из этой окрестности, для всех $t \geqslant t_0$ будут оставаться внутри этого цилиндра.

Определение 6.8. Если точка покоя $\boldsymbol{x}^\star = \mathbf{0}$ устойчива и

$$\lim_{t \to +\infty} |\boldsymbol{x}(t)| = 0 \quad \text{при} \quad |\boldsymbol{x}(t_0)| < \delta_0,$$

то точка покоя *асимптотически устойчива по Ляпунову.*

Определение 6.9. *Точка покоя* $x_i = 0$, $i = 1, 2, ..., n$, *неустойчива по Ляпунову*, если для некоторых $\varepsilon > 0$ и любого $\delta > 0$ существует решение $\boldsymbol{x}_\delta(t)$ и момент $t_1 > t_0$ такие, что

$$|\boldsymbol{x}_\delta(t_0)| < \delta \quad \text{и} \quad |\boldsymbol{x}_\delta(t_1)| \geqslant \varepsilon. \tag{6.13}$$

Абсолютная устойчивость – свойство нелинейного объекта сохранять асимптотическую устойчивость в целом для любых значений параметров нелинейной характеристики объекта из заданного класса нелинейных характеристик.

Термин "*техническая устойчивость*" появился в связи с постановкой задачи об устойчивости на конечном интервале времени $t_0 < t < T$.

Существует большой класс систем автоматического управления и регулирования, для которых вопрос об их поведении при $t > T$ не имеет смысла. К таким системам относятся главным образом нестационарные системы или системы с переменными параметрами (переменными коэффициентами уравнений).

Пусть система (6.1) при начальном условии $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$ имеет единственное решение.

Определение 6.10. Будем говорить, что система (6.2) *устойчива по Лагранжу*, если: 1) каждое решение $\boldsymbol{x}(t; t_0, \boldsymbol{x}_0)$ неограниченно продолжаемо вправо, т.е. имеет смысл при $t_0 \leqslant t < +\infty$; 2) $\|\boldsymbol{x}(t; t_0, \boldsymbol{x}_0)\|$ ограничена на $[t_0, +\infty)$.

Определение 6.11. Решение $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}(t)$ $(t_0 \leqslant t < +\infty)$ системы

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}\big) \tag{6.14}$$

называется *орбитально устойчивым* при $t \to +\infty$, если траектории при $t \geqslant t_0$ всех решений $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$, достаточно близких в начальный момент t_0 к решению $\boldsymbol{z}(t)$, в дальнейшем целиком содержатся в ε-окрестности траектории данного решения $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}(t)$ при $t \geqslant t_0$, где ε произвольно мало.

6.2. Простейшие типы точек покоя

Рассмотрим некоторые понятия основанной Ляпуновым и Пуанкаре[2] качественной теории дифференциальных уравнений, изучающей свойства решений ОДУ без нахождения самих решений. Один из разделов этой теории посвящен исследованию особых точек ОДУ, т.е. анализу поведения семейств интегральных кривых в окрестностях особых точек, что важно для изучения динамики различных систем и их устойчивости.

В частности, задача, поставленная Пуанкаре, состояла в том, чтобы, не интегрируя систему двух ОДУ, исследовать поведение ее частных решений на всей плоскости XOY только по характеристикам правых частей уравнений. Далее излагаются некоторые результаты научных работ А. Пуанкаре, посвященных указанной тематике.

Пусть имеется система двух линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} x'(t) &= a_{11}\, x(t) + a_{12}\, y(t), \\ y'(t) &= a_{21}\, x(t) + a_{22}\, y(t), \end{aligned} \tag{6.15}$$

причем определитель матрицы системы $\boldsymbol{\mathcal{A}}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

[2] *Анри Пуанкаре* (H. Poincaré, 1854–1912) – французский математик, механик, физик, астроном и философ, глава Парижской академии наук, член Французской академии и еще более 30 академий мира. Историки науки причисляют А. Пуанкаре к величайшим математикам всех времен. Его и Д. Гильберта считают последними математиками–универсалами, ученым, способными охватить все математические результаты своего времени. Перу А. Пуанкаре принадлежит более 500 статей и книг. "Не будет преувеличением сказать, что не было такой области современной ему математики, "чистой" или "прикладной", которую бы он не обогатил замечательными методами и результатами" [38]. Среди его самых крупных достижений: создание топологии и теории автоморфных функций; разработка новых, чрезвычайно эффективных методов небесной механики; формирование математических основ теории относительности, а также обобщение принципа относительности на все физические явления; построение наглядной модели геометрии Лобачевского [38].

Система обладает *тривиальным решением*: $x(t) = 0$, $y(t) = 0$.

Определение 6.12. Точка с координатами $(x, y) = (0, 0)$, в которой правые части уравнений системы (6.15) обращаются в ноль, называется *точкой покоя* системы (6.15).

Фазовые траектории (интегральные кривые на плоскости XOY системы (6.15) или ОДУ второго порядка $\ddot{x} = f(t, x, \dot{x})$ в координатах x и $\dot{x}$), образующие *фазовый портрет системы*, можно рассматривать как интегральные кривые ОДУ, получаемого делением второго уравнения системы (6.15) на первое:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{21}\, x + a_{22}\, y}{a_{11}\, x + a_{12}\, y}, \tag{6.16}$$

в которое временнáя переменная t входит неявно.

При переходе к пределу правой части этого уравнения в точке покоя $(0, 0)$ возникает неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Поэтому точка покоя является *особой точкой* уравнения. И, хотя, вообще говоря, через каждую точку плоскости XOY проходит единственная интегральная кривая, относительно точки $(0, 0)$ этого утверждать нельзя. В ней нарушено условие теоремы и единственности, а поэтому априори через точку $(0, 0)$ могут проходить нуль, одна и более интегральных кривых уравнения (6.16).

Для исследования точки покоя системы (6.15) надо составить характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + b\,\lambda + c = 0, \tag{6.17}$$

где $b = -(a_{11} + a_{22})$, $c = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21} = |\boldsymbol{\mathcal{A}}| \neq 0$, и найти его корни λ_1 и λ_2. Поскольку $c \neq 0$, то $\lambda = 0$ не является корнем характеристического уравнения.

Возможны следующие <u>случаи</u> поведения интегральных кривых системы в окрестности точки покоя.

1°. Корни λ_1, λ_2 характеристического уравнения (6.17) – вещественные и различные. Пусть им соответствуют собственные векторы

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix}.$$

Тогда общее решение (6.15) системы будет иметь вид

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(y) \end{bmatrix} = \mathcal{C}_1\, \boldsymbol{v}_1\, e^{\lambda_1 t} + \mathcal{C}_2\, \boldsymbol{v}_2\, e^{\lambda_2 t} = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_1\, v_{11}\, e^{\lambda_1 t} + \mathcal{C}_2\, v_{21}\, e^{\lambda_2 t} \\ \mathcal{C}_1\, v_{12}\, e^{\lambda_1 t} + \mathcal{C}_2\, v_{22}\, e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}, \tag{6.18}$$

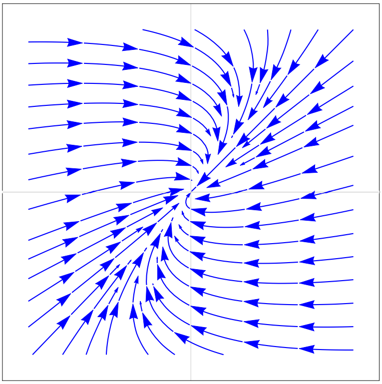

Рис. 6.1

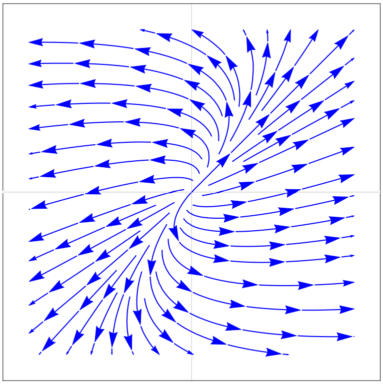

Рис. 6.2

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

1.1°. Если $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, то точка покоя асимптотически устойчива, так как при $t \to +\infty$ обе экспоненты стремятся к нулю. Если из соотношений (6.18) исключить переменную t, то полученная функция даст траекторию движения на плоскости XOY. При $t \to +\infty$ точка, находившаяся в начальный момент времени $t = t_0$ на произвольно большом расстоянии от начала координат, приблизится на сколь угодно малое расстояние. Такая точка называется *устойчивым узлом* (рис. 6.1).

Все траектории, кроме одной, в точке покоя имеют общую касательную, которая коллинеарна собственному вектору, соответствующему меньшему по модулю характеристическому числу. Одна из интегральных кривых параллельна второму собственному вектору.

1.2°. Если $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, то точка покоя неустойчива (*неустойчивый узел*, рис. 6.2), так как текущая точка интегральной кривой, не совпадающая в момент времени t_0 с точкой покоя, удаляется в бесконечность при $t \to +\infty$. Этот случай получается из предыдущего случая, но с инверсией движения.

1.3°. Если $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ или наоборот, то точка покоя также неустойчива, так как одна из экспонент стремится к бесконечности при $t \to +\infty$.

Если $\lambda_1 > 0$, то точка из окрестности точки покоя по прямой $y = v_{12}\, x/v_{11}$ ($v_{12} \neq 0$) уходит в бесконечность. Имеется единственная интегральная кривая, по которой текущая точка движется в направлении начала координат. Это прямая $y = v_{22}\, x/v_{21}$ ($v_{22} \neq 0$). Такая точка покоя называется *седлом* (рис. 6.3). Фазовые траектории являются гиперболами, а две прямые, с которыми совпадают траектории, называются *сепаратриссами седла* и разделяют гиперболы разных типов. Если $\mathcal{C}_1 \neq 0$ и $\mathcal{C}_2 \neq 0$, то при $t \to \pm\infty$ точка всегда покидает окрестность точки покоя.

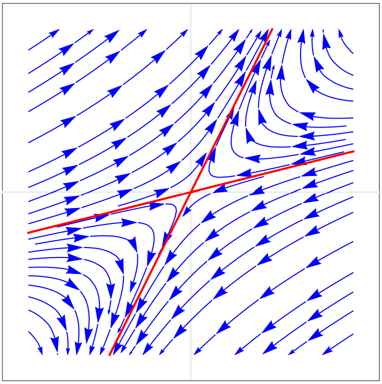

Рис. 6.3

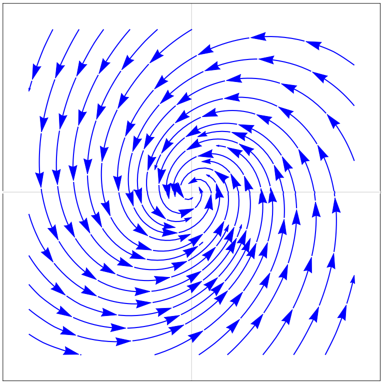

Рис. 6.4

2°. Корни характеристического уравнения (6.17) – комплексные: $\lambda_1 = p + \boldsymbol{i}\, q$, $\lambda_2 = p - \boldsymbol{i}\, q$ $(q \neq 0)$. Пусть им соответствуют комплексные собственные векторы

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix}.$$

Общее решение можно записать в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{pt}\left(\mathcal{B}_1\, \cos q\, t + \mathcal{B}_2\, \sin q\, t\right) \\ e^{pt}\left(\mathcal{D}_1\, \cos q\, t + \mathcal{D}_2\, \sin q\, t\right) \end{bmatrix}, \tag{6.19}$$

где $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ – произвольные константы, а $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ выражаются через них.

2.1°. Пусть $p < 0$, $q \neq 0$. Тогда в решении (6.19) экспонента $e^{pt} \to 0$ при $t \to +\infty$, а второй сомножитель периодический и ограниченный. Интегральные кривые представляют собой спирали, навивающиеся на точку покоя при $t \to +\infty$. Такая точка покоя называется *устойчивым фокусом* (рис. 6.4), а тривиальное решение является асимптотически устойчивым.

2.2°. Пусть $p > 0$, $q \neq 0$. Если заменить t через $-t$, то получим предыдущий случай. Такая особая точка называется *неустойчивым фокусом* (рис. 6.5).

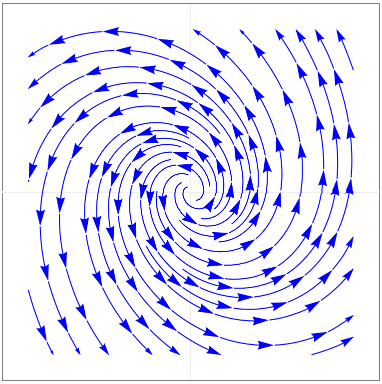

Рис. 6.5

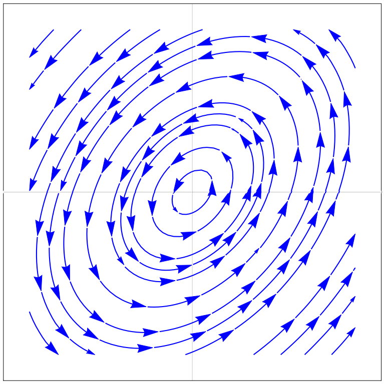

Рис. 6.6

При построении интегральной кривой в окрестности особой точки типа фокус необходимо определить направление закручивания: по часовой стрелке или против нее. Для этого достаточно построить в произвольной точке (x, y) вектор скорости $(\dot{x}, \dot{y})$, применяя уравнения системы (6.15).

2.3°. Если $\lambda_{1,2} = \pm \boldsymbol{i}\, q$, $p = 0$, то интегральные кривые будут замкнутыми и представляют собой эллипсы с центром в начале координат. Такая точка покоя называется *центром* и является устойчивой, но не асимптотически (рис. 6.6). Текущая точка интегральной кривой движется по периодической траектории вокруг точки $(0, 0)$, не приближаясь бесконечно близко и не удаляясь бесконечно далеко от нее.

Необходимо отметить, что малые изменения коэффициентов системы (6.15) могут превратить центр в устойчивый или неустойчивый фокус.

3°. Корни $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$ – кратные. Тогда общее решение имеет следующим вид:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\mathcal{C}_1\, v_{11} + \mathcal{C}_2\, v_{21}\right) e^{\lambda_0 t} \\ \left(\mathcal{C}_1\, v_{12} + \mathcal{C}_2\, v_{22}\right) e^{\lambda_0 t} \end{bmatrix}. \tag{6.20}$$

3.1°. Пусть $\lambda_0 < 0$. Вследствие наличия экспоненты с увеличением времени $x(t)$ и $x(t)$ стремятся к нулю, т.е. точка покоя асимптотически устойчива и называется *устойчивым вырожденным узлом* (рис. 6.7). Она занимает промежуточное положение между узлом и фокусом, так как при сколь угодно малом изменении коэффициентов системы (6.15) совпадающие действительные корни могут стать различными действительными или комплексно сопряженными корнями

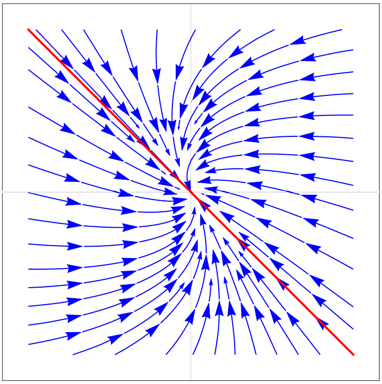

Рис. 6.7

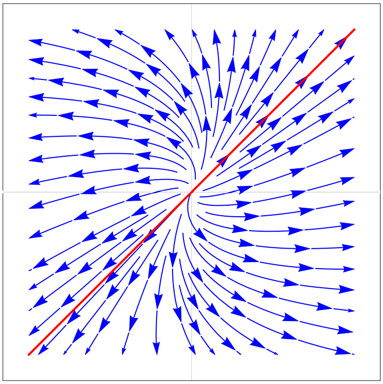

Рис. 6.8

3.2°. Если $\lambda_0 > 0$, то точка покоя будет неустойчивой и будет называться *неустойчивым вырожденным узлом* (рис. 6.8).

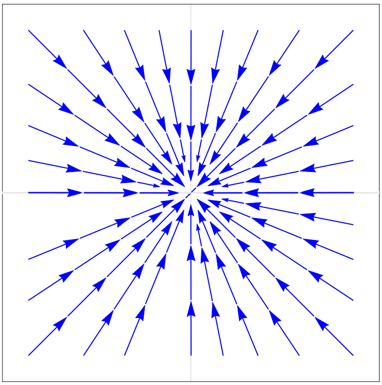

Рис. 6.9

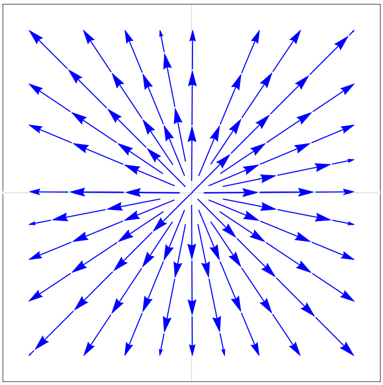

Рис. 6.10

3.3°. Случай совпадающих корней имеет место не только для системы (6.15), но и для системы специального вида

$$x'(t) = a\,x(t),$$
$$y'(t) = a\,y(t).$$

Здесь характеристические числа $\lambda_{1,2} = \lambda_0 = a$. Поделив второе уравнение на первое, получим $y'_x = y/x$, откуда следует, что $y = k\,x$ (k – любое действительное число), а фазовыми траекториями являются прямые, проходящие через начало координат. Соответствующая особая точка называется *дикритическим узлом*, который может быть асимптотически устойчивым ($\lambda_0 < 0$, рис. 6.9) и неустойчивым ($\lambda_0 > 0$, рис. 6.10).

Замечание. Для систем автономных однородных линейных ОДУ об устойчивости тривиальных решений справедливы выводы, аналогичные рассмотренным выше, т.е. заключение об устойчивости или неустойчивости таких решений будет зависеть от знаков корней характеристических уравнений.

6.3. Бифуркации

Теоремы о непрерывной зависимости решений системы ОДУ от параметра приводят к мысли, что при небольших изменениях параметров никаких серьезных изменений происходить не может. При этом упускается из виду, что такая зависимость на конечном промежутке изменения независимой переменной отнюдь не мешает кардинальной перестройке свойств системы.

Пример 6.3. Рассмотрим уравнение $y' = \varepsilon\, y$. При значении параметра $\varepsilon = 0$ интегральными кривыми являются прямые, параллельные оси абсцисс. Совершенно другая ситуация, если $\varepsilon \neq 0$. Так, при $\varepsilon < 0$ нулевое решение асимптотически устойчиво, а при $\varepsilon > 0$ это решение неустойчиво и траектории уходят в бесконечность. Тем не менее решение $y(x, \varepsilon)$ при достаточно малом $\varepsilon \gtrless 0$ сколь угодно близко к $y(x, 0)$. ►

Определение 6.13. *Бифуркацией* называют качественную перестройку системы $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}, \varepsilon)$ при переходе параметра ε через критическое значение ε_0.

Развитием теории бифуркаций считается теория катастроф.

Определение 6.14. *Катастрофа* с точки зрения теории систем – скачкообразное изменение, возникающие в виде внезапного отклика системы на плавное изменение внешних условий.

Пример 6.4. В случае $y' = \varepsilon\, y - y^3$ критическим (бифуркационным) значением является $\varepsilon = 0$. При $\varepsilon \leqslant 0$ система имеет единственное равновесное решение, которое асимптотически устойчиво. Но при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ это равновесие становится неустойчивым, а в его окрестности появляется два других асимптотически устойчивых равновесных решения $y(x) = \pm\sqrt{\varepsilon}$.

Большинство изучаемых бифуркаций имеет подобный локальный характер, связанный с изменением свойств равновесия и рождением или гибелью в его окрестности других равновесных точек.

Пример 6.5. Принципиально другой пример дает система $y' = \varepsilon\, y^2 - y$ с асимптотически устойчивым равновесным нулевым состоянием при любом ε, т.е. с этим состоянием локально никакие бифуркации не происходят. Но значение $\varepsilon = 0$ критично для системы в целом. В его окрестности рождается новое неустойчивое положение равновесия: $y = \varepsilon^{-1}$ (приходящее из бесконечности). Более того, решения, начинающиеся в точках $y(0) > \varepsilon^{-1} > 0$, оказываются непродолжаемыми вправо; в случае $y(0) < \varepsilon^{-1} < 0$ – непродолжаемыми влево. ▶

В системах большей размерности возможности качественных изменений, разумеется, шире. В основном это появление или исчезновение колебаний, аттракторов[3].

На практике часто встречается *бифуркация Андронова – Хопфа*, в которой фокус теряет устойчивость и при этом рождается асимптотически устойчивый цикл.

Пример 6.6. Рассмотрим *уравнение Ван дер Поля*

$$y''(t) + \varepsilon\left[y^2(t) - 1\right] y'(t) + \omega^2\, y(t) = 0.$$

Для нулевого состояния равновесия этой системы характерна устойчивость при $\varepsilon \leqslant 0$ и неустойчивость при $\varepsilon > 0$, при этом положительному значению параметра соответствует наличие устойчивого *предельного цикла* – замкнутой (периодической) траектории на фазовой плоскости, в окрестности которой нет других периодических траекторий. ▶

Рассмотрим уравнение $z' = -z^3 - \lambda_2\, z - \lambda_1$. Координаты точек, в которых его правая часть обращается в нуль, удовлетворяют уравнению $z^3 + \lambda_2\, z + \lambda_1 = 0$. При различных параметрах λ_1, λ_2 это кубическое уравнение имеет или один действительный корень, или три, а само уравнение называется уравнением *катастрофы типа "сборка"*. Если построить график "корень уравнения как функция параметров", то получается поверхность, изображенная на рис. 6.11.

[3] *Аттрактор* (англ. attract – привлекать, притягивать) – компактное подмножество фазового пространства динамической системы, все траектории из некоторой окрестности которого стремятся к нему при времени, стремящемся к бесконечности.

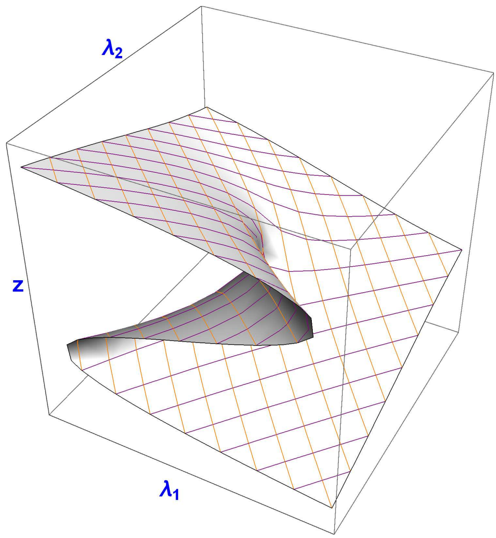

Рис. 6.11

6.4. Метод функций Ляпунова

Процедура выяснения устойчивости и неустойчивости решения системы ОДУ, в рамках которой необходимо знать общее решение системы, называется *первым методом Ляпунова.*

Для системы с постоянными коэффициентами достаточно знать не общее решение системы, а лишь знаки действительных частей характеристических чисел.

Второй метод Ляпунова (метод функций Ляпунова) основан на использовании подходящим образом подобранных *функций Ляпунова.* При применении второго метода не требуется знать ни общего решения системы, ни какой-либо его характеристики.

Определение 6.15. Функция $V(\boldsymbol{x}) = V(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *положительно определенной* в r-окрестности начала координат, т.е. в области $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant r$, если функция V положительна во всех точках окрестности, за исключением начала координат, где она обращается в нуль:

$$V(x_1, x_2, ..., x_n) > 0, \quad \text{если} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0, \qquad V(0, 0, ..., 0) = 0.$$

Пример 6.7. В пространстве $\mathbb{R}^3$ функция $V_1(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ положительно определена. Функция $V_2(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2$ в том же пространстве является знакопостоянной, но не положительно определенной, так как она обращается в нуль не только в точке $(0, 0, 0)$, но и во всех точках оси OX_3.

Рассмотрим *автономную систему* ОДУ, т.е. систему, правые части которой не зависят явно от t:

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, ..., x_n), \qquad i = 1, 2, ..., n, \tag{6.21}$$

причем $f_i(0, 0, ..., 0) = 0$, т.е. начало координат – точка покоя для этой системы. Пусть $V(\boldsymbol{x})$ – дифференцируемая функция своих аргументов. Полную производную по времени

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}\, \dot{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}\, f_i(x_1, x_2, ..., x_n)$$

называют *производной в силу системы* (6.21).

Приведем формулировки некоторых теорем Ляпунова.

Теорема 6.1 (Ляпунова об устойчивости). Если существует дифференцируемая функция $V(\boldsymbol{x})$, удовлетворяющая в окрестности начала координат следующим условиям: а) функция $V(\boldsymbol{x})$ положительно определена; б) производная в силу системы неположительна, – то точка покоя $(0, 0, ..., 0)$ системы (6.21) устойчива.

Такая функция $V(\boldsymbol{x})$ называется *функцией Ляпунова.*

Теорема 6.2 (Ляпунова об асимптотической устойчивости). Если существует дифференцируемая функция $V(\boldsymbol{x})$, удовлетворяющая в окрестности начала координат следующим условиям: а) функция $V(\boldsymbol{x})$ положительно определена; б) производная в силу системы неположительна, причем $\dot{V} = 0$ только при $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$, – то точка покоя $(0, 0, ..., 0)$ системы (6.21) неустойчива.

Теорема 6.3 (Ляпунова о неустойчивости). Если существует дифференцируемая функция $V(\boldsymbol{x})$, удовлетворяющая в окрестности начала координат следующим условиям: а) $V(0, 0, ..., 0) = 0$ и сколь угодно близко от начала координат имеются точки, в которых $V(\boldsymbol{x}) > 0$; б) производная в силу системы неотрицательна, причем $\dot{V} = 0$ только при $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$, – то точка покоя $(0, 0, ..., 0)$ системы (6.21) устойчива.

Замечание. Общей методологии построения функций Ляпунова не существует. В наиболее простых случаях такие функции рекомендуется искать в следующих формах: $V = a\,x^2 + b\,y^2$, $V = a\,x^4 + b\,y^4$, $V = a\,x^4 + b\,x^2\,y^2 + c\,y^4$ и т.п., где неопределенные постоянные a, b, c подбираются соответствующим задаче способом.

Пример 6.8. Исследовать устойчивость тривиального решения системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2\,x + 4\,x^5\,y^2, \\ \dot{y} &= -4\,y + 2\,x^2\,y^3. \end{aligned}$$

◀ Выберем функцию Ляпунова в виде $V = x^2 + y^2$. Для этой функции производная в силу системы примет следующую форму:

$$\begin{aligned} \dot{V} = V'_x\,f_1(x,y) + V'_y\,f_2(x,y) = 2\,x\big(-2\,x + 4\,x^5\,y^2\big) + \\ + 2\,y\,\big(-4\,y + 2\,x^2\,y^3\big) = -4\,x^2 - 8\,y^2 - 4\,x^6\,y^2 - 4\,x^2\,y^4. \end{aligned}$$

В некоторой окрестности точки покоя знак $\dot{V}(x,y)$ определяется знаком квадратичной формы $-4\,x^2 - 8\,y^2$, который отрицателен, причем отрицательные добавочные члены старших степеней лишь усиливают неравенство $\dot{V}(x,y) < 0$. Поэтому в окрестности точки покоя, за исключение самой точки $(0,0)$, $\dot{V}(x,y) < 0$, производная в силу системы строго меньше 0. При этом функция Ляпунова $V(x,y)$ в рассматриваемой окрестности положительно определена. Поэтому условия теоремы 6.2 выполнены, а значит, тривиальное решение асимптотически устойчиво. ▶

6.5. Устойчивость по первому приближению

Рассмотрим автономную нелинейную систему ОДУ следующего вида:

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, ..., x_n), \qquad i = 1, 2, ..., n, \tag{6.22}$$

причем $f_i(0,0,...,0) = 0$. Требуется исследовать устойчивость тривиального решения.

Пусть $f_i(\boldsymbol{x})$, $i = 1,\,2,\,...,\,n$, – бесконечно дифференцируемые функции своих аргументов в окрестности начала координат, которые могут быть разложены в соответствующие ряды Маклорена:

$$\dot{x} = \boldsymbol{\mathcal{A}}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}), \tag{6.23}$$

где элементы a_{ij} матрицы $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ вычисляются по формулам

$$a_{ij} = \left.\frac{\partial f_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_j}\right|_{\boldsymbol{x}=\mathbf{0}}, \qquad i, j = 1, 2, ..., n, \tag{6.24}$$

а в компоненты вектора $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})$ включены слагаемые суммарной по всем x_j степени выше первой.

Само понятие устойчивости относится к изучению свойств системы в сколь угодно малой окрестности точки покоя, т.е. функции $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$ считаются малыми по модулю. Соответственно, добавки $r_i(\boldsymbol{x})$ будут бесконечно малыми функциями более высокого порядка малости при $\boldsymbol{x} \to \mathbf{0}$, чем соответствующие линейные комбинации $a_{i1}\, x_1 + a_{i2}\, x_2 + ... + a_{in}\, x_n$ в правых частях системы (6.23), а следовательно, они слабо влияют на устойчивость или неустойчивость тривиального решения. Поэтому можно считать правдоподобным утверждение о том, что если отбросить слагаемые $r_i(\boldsymbol{x})$ и заменить систему (6.22) системой первого приближения (линеаризованной системой)

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{x}, \tag{6.25}$$

то тривиальное решение исходной системы (6.22) будет устойчивым тогда, когда оно устойчиво для линеаризованной системы (6.25). Исследование устойчивости таким способом, естественно, является задачей более легкой, чем исходная. Замечание по поводу устойчивости линейных системы приведено в подразделе 6.2.

До научных работ А.М. Ляпунова такое утверждение, не имеющее строгого обоснования, не вызывало серьезных возражений. Заслугой академика А.М. Ляпунова является то, что он указал случаи, когда из устойчивости тривиального решения системы первого приближения следует вывод об устойчивости тривиального решения нелинейной системы, а когда требуется дополнительное исследование. А.М. Ляпунов выяснил, что в общем случае малые добавки существенно влияют на поведение решений систем типа (6.22) в окрестности точки $(0, 0, ..., 0)$.

Кратко результаты этих его исследований можно сформулировать так: при анализе устойчивости по первому приближению систему (6.22) можно заменить системой (6.25) в следующих случаях:

1°. Все корни характеристического уравнения для системы первого приближения имеют отрицательные действительные части. Тогда тривиальное решение нелинейной системы асимптотически устойчиво.

2°. Хотя бы один корень характеристического уравнения для системы (6.25) имеет положительную действительную часть. Тогда тривиальное решение системы (6.22) неустойчиво.

3°. Существуют корни характеристического уравнения с нулевой действительной частью, а остальные корни (если они есть) имеют отрицательные действительные части. Тогда исследование тривиального решения нелинейной системы по первому приближению невозможно, так как на устойчивость начинают влиять нелинейные добавки.

Последний случай называется *критическим.*

6.6. Упражнения

Аудиторные занятия

1°. Определить тип точек покоя систем ОДУ и исследовать их на устойчивость:

01. $\begin{cases} \dot{x} = -2\,x + \frac{5}{7}\,y, \\ \dot{y} = 7\,x - 3\,y. \end{cases}$ 02. $\begin{cases} \dot{x} = 3\,x + y, \\ \dot{y} = -2\,x + y. \end{cases}$ 03. $\begin{cases} \dot{x} + x + y = 0, \\ \dot{y} - x + 3\,y = 0. \end{cases}$

04. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 3\,y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$ 05. $\begin{cases} \dot{x} = -2\,x - y, \\ \dot{y} = 3\,x - y. \end{cases}$ 06. $\begin{cases} \dot{x} = 5\,x - 3\,y, \\ \dot{y} = 3\,x - y. \end{cases}$

2°. Исследовать на устойчивость по первому приближению точку покоя $x = 0$, $y = 0$ систем ОДУ:

01. $\begin{cases} \dot{x} = e^x - \cos 5\,y, \\ \dot{y} = \sin 2\,x - \ln(1 + y). \end{cases}$ 02. $\begin{cases} \dot{x} = \frac{5}{2}\,x\,e^x - 3\,y + \sin x^2, \\ \dot{y} = 2\,x + y\,e^{-y^2/2} - y^4\,\cos x. \end{cases}$

03. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(1 + 3\,x) - \cos y + e^{x^2}, \\ \dot{y} = \sin 2\,x + y. \end{cases}$ 04. $\begin{cases} \dot{x} = -\frac{3}{2}\,x + \frac{1}{2}\,\sin 2\,y - x^3\,y, \\ \dot{y} = -y - 2\,x + x^4 - y^7. \end{cases}$

05. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 3\,y + x^2\,\sin y, \\ \dot{y} = -x - 4\,y + 1 - \cos y^2. \end{cases}$ 06. $\begin{cases} \dot{x} = -2\,x + 8\,\sin^2 y, \\ \dot{y} = x - 3\,y + 4\,x^3. \end{cases}$

Внеаудиторные занятия

1°. Определить тип точек покоя систем ОДУ и исследовать их на устойчивость:

01. $\begin{cases} \dot{x} = 3\,x - 2\,y, \\ \dot{y} = x + 4\,y. \end{cases}$ 02. $\begin{cases} \dot{x} = 2\,x + y, \\ \dot{y} = -x + 3\,y. \end{cases}$ 03. $\begin{cases} \dot{x} + x - 3\,y = 0, \\ \dot{y} + x - y = 0. \end{cases}$

04. $\begin{cases} \dot{x} = -7\,x - 6\,y, \\ \dot{y} = 3\,x + 2\,y. \end{cases}$ 05. $\begin{cases} \dot{x} = 2\,x - 2\,y, \\ \dot{y} = 5\,x - 3\,y. \end{cases}$ 06. $\begin{cases} \dot{x} = 3\,x - y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$

2°. Исследовать на устойчивость по первому приближению точку покоя $x = 0$, $y = 0$ систем ОДУ:

01. $\begin{cases} \dot{x} = 3\,x - 22\,\sin y + x^2 - y^3 \\ \dot{y} = \sin x - 5\,y + e^{x^2} - 1. \end{cases}$

02. $\begin{cases} \dot{x} = -10\,x + 4\,e^y - 4\,\cos y^2, \\ \dot{y} = 2\,e^x - 2 - y + x^4. \end{cases}$

03. $\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{arctg}\frac{x-2\,y}{y+1} - 3\,e^x, \\ \dot{y} = \frac{1}{1+\sqrt{x^2+y+1}} + 4\,x^5. \end{cases}$

04. $\begin{cases} \dot{x} = x^3\,\sin y - 5\,y + e^{x^2}\,\frac{1}{x+1}, \\ \dot{y} = 4\,x\,\cos x - \operatorname{arctg} 3\,y. \end{cases}$

05. $\begin{cases} \dot{x} = 4\,\ln(x^2 + 5\,x + 20) - x^3\,y^2 - 25\,y, \\ \dot{y} = \sin 2\,x \cdot \cos y - 3\,\operatorname{arctg} y. \end{cases}$

06. $\begin{cases} \dot{x} = 2\,\ln(x + y + 4) - e^x\,x + y/2, \\ \dot{y} = \sin(y^3 - y) + \frac{1}{5}\,x - 2. \end{cases}$

7. ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

7.1. Экономические модели

В последние десятилетия математические методы всё настойчивее проникают в гуманитарные науки, в частности, в экономику. Недооценка применения математических методов в гуманитарных науках была характерной, по-видимому, для большей части XX в. [6].

Экономика и управление экономическими и финансовыми процессами – это прикладные науки и их задача заключается в использовании методов обоснования выбора тех или иных решений. В научном познании любого реального явления или процесса допустимо использовать в качестве инструментов следующие четыре методологии: теоретический анализ; наблюдение; научный эксперимент; моделирование. Если первые три подхода успешно применяются в естественных и технических науках, то экономике и управлению свойственно только последний (за исключением наблюдений, используемых в экономической статистике). Поэтому использование методов математического моделирования в экономике – объективный этап ее развития, связанный с существованием устойчивых количественных и качественных закономерностей, а также возможностью формализованного описания многих, хотя и далеко не всех, экономических процессов.

Считается, что математические методы в экономике, в частности, метод анализа макроэкономических процессов, начали использоваться еще в XVIII в. Так в работе "Экономические таблицы" французский экономист, лейб-медик короля Людовика XV, доктор медицины Франсуа Кене впервые сделал попытку формализовать процесс общественного воспроизводства, а именно количественно описать национальную экономику [6]. Усложнение в XX в. проблем экономики и управления вызвало дальнейшее развитие методов их анализа. В результате обобщения накопленного опыта и естественной эволюции науки за последние двести лет сложилась современная методология исследования социально-экономических проблем как на микро-, так и макроуровнях, опирающаяся на системный подход. Использование принципа системности, без которого невозможно эффективное управление, включает наряду с содержательным анализом изучаемых процессов применение метода математического моделирования.

Современный этап развития экономической науки в России характеризуется внедрением в практику экономико-математических методов и моделей на основе использования программных комплексов. На этом этапе возрастает роль экономико-математического моделирования как одного из средств совершенствования экономики, связанного с научным обоснованием путей последующего развития и прогнозами в рыночных условиях.

К объективным причинам, ограничивающим эффективность и возможность применения метода математического моделирования при анализе экономических процессов, следует отнести разнообразие объектов моделирования: для указанной области характерны элементы управляемости и стихийности, детерминированности и случайности, сочетание процессов производственной и социальной направленности. Поэтому до сих пор не существует окончательно сформировавшегося подхода к анализу и прогнозированию процессов рыночной экономики, вследствие чего расчеты нередко носят преимущественно модельно-оценочный характер.

Известны несколько классификаций экономико-математических моделей. С точки зрения авторов [6], такой классификации лежат такие признаки:

1) назначение (имитационные, балансовые, сетевые, оптимизационные модели);

2) степень учета случайных факторов (стохастические, детерминированные модели);

3) способ описания (аналитические, эконометрические, смешанные модели);

4) способ учета изменений процесса по времени (статические, многошаговые, динамические модели);

5) точность математического отображения рассматриваемых явлений (линейные, нелинейные модели).

Другой подход к классификации экономико-математических моделей связан с учетом фактора времени. При этом подходе все модели экономических процессов делят на два класса: статические и динамические. В статических экономико-математических моделях все переменные и зависимости отнесены к одному моменту времени. Модель формально является динамической, если хотя бы одна из ее переменных зависит от времени.

Существует два методики построения динамических моделей. Первая основана на постановке оптимизационных задач, когда наряду с моделями формулируются некоторые критерии оптимальности. В рамках такого направления на основании анализа решения этих задач высказываются те или иные рекомендации. Второй подход основан на исследовании различных вариантов развития. В обоих случаях для определения параметров модели используется информация о динамике процесса в базовом периоде.

В общем случае процесс применения динамических моделей включает следующие этапы: описание начального состояния системы, технологических способов производства и инвестиционных процессов, а также ограничений на переменные (например экологического характера); при постановке оптимизационных задач – критериев оптимальности. Математическое описание динамических моделей осуществляется, как правило, с использованием либо систем дифференциальных уравнений (в случае моделей с непрерывным временем), либо систем разностных уравнений (в случае моделей с дискретным временем)

При анализе динамических процессов экономики большой теоретический и практический интерес представляет исследование моделей в зависимости от различных внешних воздействий и связанная с этим задача устойчивости равновесных решений по отношению к тем или иным возмущениям. Результатом таких исследований являются разработка своевременных рекомендаций по предотвращению возникающих проблем в рассматриваемой системе, в частности, по определению момента попадания системы в критическую область.

В качестве примера применении ОДУ в задачах динамического экономико-математического моделирования рассмотрим модель управления социально-экономическим развитием региона [37]. Концепция такого управления основана на синтезированной модели процесса управления (обратная задача процесса управления). Модель вводит три основных показателя региона: $x(t)$ – население региона, $y(t)$ – количество рабочих мест в реальном секторе экономики региона, а $z(t)$ – показатель энергоснабжения региона. Математическая основа динамической модели – система дифференциальных уравнений, описывающая изменения трех введенных ключевых показателей. С помощью коэффициентов (всего их девять) формируются механизмы реализации региональных политик, направленных на достижение цели государственного управления.

Системы ОДУ может быть построена на основе естественнонаучной и социально-экономической интерпретации значения региональных показателей эффективности $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$, которые считаем непрерывными и дифференцируемыми функциями времени.

Рассмотрим этапы формирования модели в сжатой форме. Начнем с того, что производная $x'(t)$ – это скорость изменения численности населения, которая естественным образом связана как с численностью населения, так и с количеством рабочих мест в реальной экономике региона $y(t)$ – показателем экономического развития и с показателем энергообеспеченности региона $z(t)$. Скорость изменения $x(t)$ пропорциональна численности самого населения региона, т.е. чем больше население, тем выше темп роста его численности:

$$x'(t) = u_1(t)\,x(t), \tag{7.1}$$

где $u_1(t)$ – коэффициент демографической активности.

Определим влияние показателей $y(t)$ и $z(t)$ на темпы прироста населения. Количество рабочих мест в реальном секторе экономики региона определяется минимальным количеством работников в производственном секторе, необходимым для производства определенного ассортимента товаров и услуг.

При данном значении $x(t)$ количество рабочих мест в реальной экономике $y(t)$ снизит темпы прироста населения на $u_2(t)\,x(t)\,y(t)$, где $u_2(t)$ – коэффициент антимотивации людей к деторождению. Кроме того, для данного значения $x(t)$ энергоснабжение $z(t)$ увеличит темпы прироста населения региона на величину $u_3(t)\,x(t)\,z(t)$, где $u_3(t)$ – коэффициент энергоснабжения региона. Другими словами, чем больше энергии поступает в регион, тем выше темпы прироста населения в регионе. Таким образом, первое дифференциальное уравнение можно записать в виде

$$x'(t) = u_1(t)\,x(t) - u_2(t)\,x(t)\,y(t) + u_3(t)\,x(t)\,z(t). \tag{7.2}$$

Обращаясь теперь к изменению количества рабочих мест в реальном секторе региона $y(t)$, отметим, что производная $y'(t)$ – это скорость изменения показателя экономического развития. В то же время эта скорость обратно пропорциональна количеству рабочих мест в реальном секторе: чем больше рабочих мест в нем создано, тем сложнее увеличить количество рабочих мест:

$$y'(t) = -u_4(t)\,y(t), \tag{7.3}$$

где $u_4(t)$ – коэффициент заинтересованности людей в экономическом развитии. При заданном значении $y(t)$, если люди заинтересованы в экономическом развитии, прирост населения региона $x(t)$ увеличит темпы развития реального сектора на величину $u_5(t)\,x(t)\,y(t)$, где $u_5(t)$ – коэффициент заинтересованности людей в экономическом развитии. Проявление такого свойства является естественным, поскольку оно составляет основу самосохранения общества. Непроявление этого свойства приведет к самоуничтожению общества. При заданном значении $y(t)$ энергоснабжение региона $z(t)$ увеличит скорость экономического роста $y(t)$ на величину $u_6(t)\,y(t)\,z(t)$, где $u_6(t)$ – коэффициент энергоснабжения рабочих мест. Это значит, что чем больше энергии идет на развитие реального сектора экономики, тем выше экономический рост. Таким образом, дифференциальное уравнение для индикатора $y(t)$ принимает следующий вид:

$$y'(t) = -u_4(t)\,y(t) + u_5(t)\,x(t)\,y(t) + u_6(t)\,y(t)\,z(t). \tag{7.4}$$

Обращаясь к показателю энергоснабжения региона $z(t)$, отметим, что его производная $z'(t)$ – это скорость изменения энергоснабжения региона. Очевидно, что скорость изменения потребления энергии пропорциональна количеству потребляемой энергии, т.е., чем больше энергии потребляется в обществе, тем выше скорость роста энергоснабжения:

$$z'(t) = u_7(t)\,z(t), \tag{7.5}$$

где $u_7(t)$ – фактор развития энергоснабжения региона.

При данном значении $z(t)$ прирост населения региона $x(t)$ снизит скорость изменения энергопотребления на величину $u_8(t)\,x(t)\,z(t)$, где $u_8(t)$ – коэффициент соответствия населения энергоснабжению. По мере увеличения населения скорость изменения энергоснабжения уменьшается. Для заданного значения $z(t)$ увеличение числа рабочих мест в реальном секторе $y(t)$ уменьшит скорость изменения энергоснабжения на величину $u_9(t)\,y(t)\,z(t)$, где $u_9(t)$ – коэффициент соответствия экономического развития и энергоснабжения. Другими словами, чем выше темпы роста реального сектора региональной экономики, тем ниже энергопотребление на рабочее место. Следовательно, дифференциальное уравнение для индикатора $z(t)$ можно записать так:

$$z'(t) = u_7(t)\,z(t) - u_8(t)\,x(t)\,z(t) - u_9(t)\,y(t)\,z(t). \tag{7.6}$$

Таким образом, модель управления устойчивым социально-экономическим развитием региона имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} x'(t) &= u_1(t)\,x(t) - u_2(t)\,x(t)\,y(t) + u_3(t)\,x(t)\,z(t), \\ y'(t) &= -u_4(t)\,y(t) + u_5(t)\,x(t)\,y(t) + u_6(t)\,y(t)\,z(t), \\ z'(t) &= u_7(t)\,z(t) - u_8(t)\,x(t)\,z(t) - u_9(t)\,y(t)\,z(t), \end{aligned} \tag{7.7}$$

где коэффициенты u_i $(i = 1, 2, ..., 9)$ в системе уравнений (7) представляют собой следующие факторы: u_1 – коэффициент демографической активности; u_2 – коэффициент антимотивации людей к деторождению; u_3

– коэффициент энергопотребления; u_4 – коэффициент заинтересованности людей в экономическом развитии; u_5 – коэффициент экономического развития реального сектора; u_6 – коэффициент энергопотребления на рабочее место; u_7 – коэффициент энергообеспечения региона; u_8 – коэффициент соответствия населения энергоснабжению; u_9 – коэффициент соответствия экономического развития энергоснабжению.

7.2. Модели естественных наук

1°. Развитие популяций хищник – жертва. Рассмотрим математическую модель развития популяций двух видов. Одна из них – хищники, другая – их добыча. Пусть $x(t)$ – численность популяции жертв, $y(t)$ – численность популяции хищников. Предположим, что хищники в отсутствие жертв нежизнеспособны, жертвы же без хищников процветают. Эти предположения находят математическое выражение в следующей системе ОДУ (*модель Лотки – Вольтерры*):

$$\begin{aligned} x' &= \varepsilon_1\, x - \gamma_1\, x\, y, \\ y' &= -\varepsilon_2\, y + \gamma_2\, x\, y. \end{aligned} \tag{7.8}$$

Если считать коэффициенты системы положительными, то разные знаки перед вторыми слагаемыми свидетельствуют о том, что встреча хищника с жертвой идет на пользу популяции хищников, тогда как популяция жертв убывает. Заметим, что в модель (7.8) не учитывается внутривидовая конкуренция.

На рис. 7.1 изображены траектории изменения количеств хищников и жертв на фазовой плоскости, а на рис. 7.2 – динамика изменений этих количеств во времени.

Если в системе (7.8) учесть внутривидовую конкуренцию, то к правой части можно добавить слагаемые $\delta_1\, x^2$, $\delta_2\, y^2$ соответственно (пример см. на рис. 7.3):

$$\begin{aligned} x' &= \varepsilon_1\, x - \gamma_1\, x\, y - \delta_1\, x^2, \\ y' &= -\varepsilon_2\, y + \gamma_2\, x\, y - \delta_2\, y^2. \end{aligned} \tag{7.9}$$

Отметим явные недостатки системы Лотки – Вольтерры. Слагаемое $\gamma_2\, x\, y$ в правой части второго уравнения системы (7.8) означает количество жертв, съедаемых в популяции хищников численностью $y(t)$. При этом хищник ест тем больше, чем больше жертв вокруг, и предела его прожорливости нет. Более разумным представляется предположение о том,

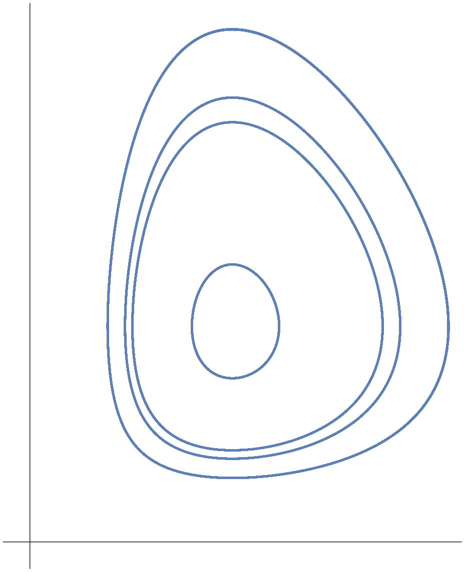

Рис. 7.1

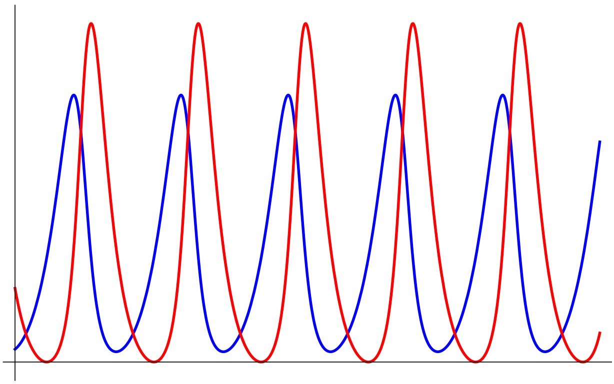

Рис. 7.2

что существует верхний предел коэффициента хищничества, т.е. что хищник перестает истреблять жертв, когда насыщается. Это предположение можно учесть заменой коэффициента прожорливости $\gamma_1 x$ на, например, коэффициент типа $w\,x/(D+x)$. Усовершенствованная таким образом си-

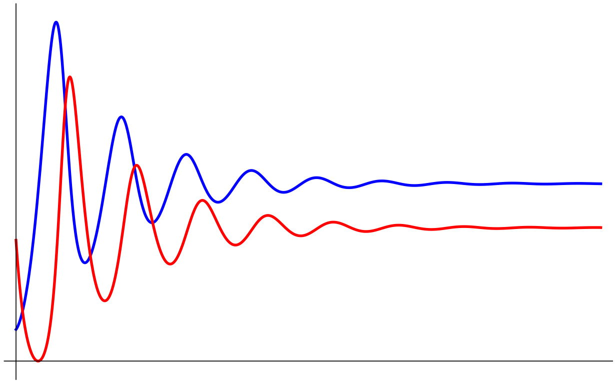

Рис. 7.3

стема (*модель Холлинга – Тэннера*) будет иметь вид

$$x' = \varepsilon_1\, x - \delta_1\, x^2 - \frac{w\, x\, y}{D + x},$$
$$y' = -\varepsilon_2\, y - \frac{\delta_2\, y^2}{x}. \qquad (7.10)$$

Пример переходного процесса в системе (7.10) показан на рис. 7.4, а фазовые кривые системы хищник – жертва для данной модели изображены на рис. 7.5.

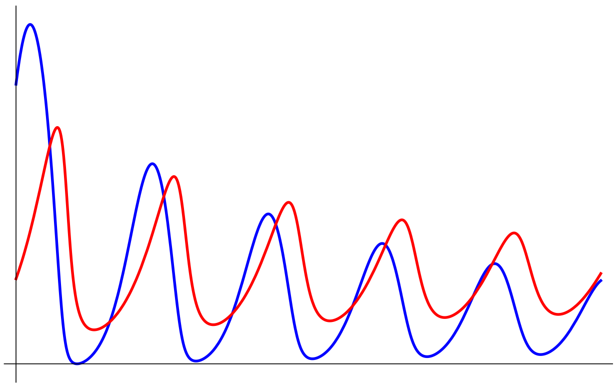

Рис. 7.4

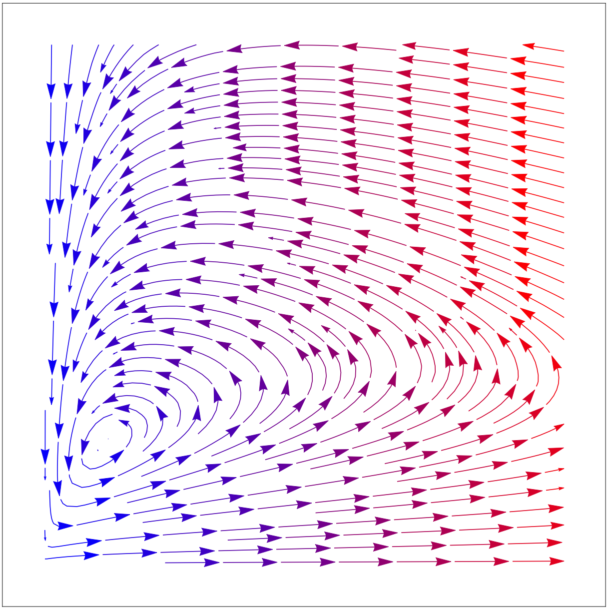

Рис. 7.5

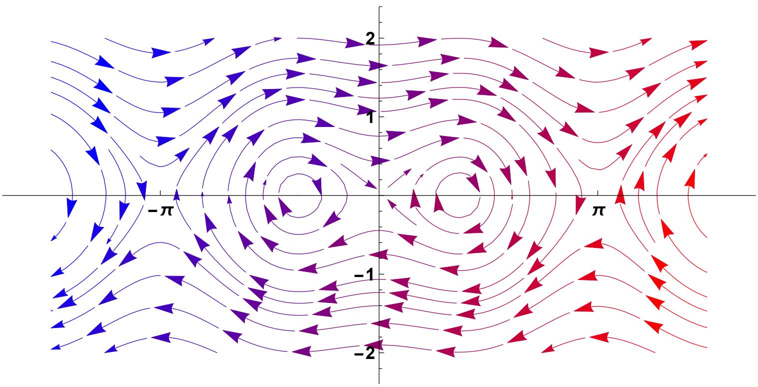

Рис. 7.6

2°. Маятник. Маятник длиной a имеет боб массой m, на который действует горизонтальная сила $m\,\omega^2\,a\,\sin\theta$, где θ – отклонение маятника

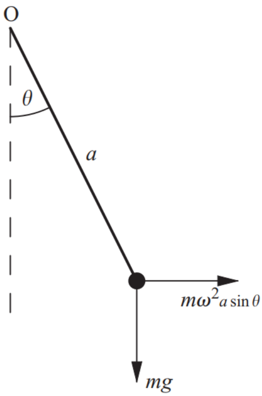

Рис. 7.7

от вертикали. Уравнение движения этого маятника имеет вид

$$\ddot{\theta} = \omega^2 \left(\cos\theta - \lambda\right) \sin\theta,$$

или

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \omega^2 \left(\cos x_1 - \lambda\right) \sin x_1. \end{aligned} \tag{7.11}$$

На рис. 7.6 приведены фазовые траектории колебаний этого маятника, а схема его изображена на рис. 7.7.

3°. Распространение малярии. В последнее время растет интерес к воздействию глобального потепления на эпидемиологию малярии и других трансмиссивных заболеваний. В связи с "парниковым эффектом", среднегодовая глобальная средняя температура на поверхности, как ожидается, к 2100 г. увеличится на величину от 1,0 до 3,5°C. Воздействие глобального потепления в настоящее время рассматривается Всемирной организацией здравоохранения как одна из самых серьезных проблем общественного здравоохранения в следующем столетии. Более высокие температуры окружающей среды, в диапазоне 20 .. 31°C, влияют на передачу малярии несколькими путями: (а) развитие анофелесов (малярийных комаров) сокращается; (б) способность к укусам самок комаров увеличивается, так как их гонадотропный цикл сокращается; (с) внешний инкубационный период плазмодия уменьшается по экспоненте. В результате небольшое повышение температуры может привести к значительному увеличению активности комаров.

Если группу людей разделить на семь подгрупп: восприимчивых (x_1), инкубационных (x_2), инфицированных (x_3), имеющих иммунитет (x_4), имеющих частичный иммунитет (x_5), не имеющих иммунитета, но с иммунологической памятью (x_6) и инкубационных после повторного заражения (x_7), то количество этих людей в группах описываются следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}
\dot{x}_1 = \mu + (\theta + \alpha)\, x_2 + p_3\, x_6 - (h\, y_3 + \mu)\, x_1, \\
\dot{x}_2 = h\, y_3\, x_1 - (\theta + \gamma_1 + \mu + \alpha)\, x_2, \\
\dot{x}_3 = \gamma_1\, x_2 - (\gamma + \mu)\, x_3, \\
\dot{x}_4 = \gamma\, x_3 + h\, y_3\, x_5 + \gamma_1\, x_7 - (p_1 + \mu)\, x_4, \\
\dot{x}_5 = p_1\, x_4 - (h\, y_3 + p_2 + \mu)\, x_5, \\
\dot{x}_6 = p_2\, x_5 + \theta\, x_7 - (h\, y_3 + p_3 + \mu)\, x_6, \\
\dot{x}_7 = h\, y_3\, x_6 - (\theta + \gamma_1 + \mu)\, x_7,
\end{gathered} \tag{7.12}$$

где μ и α – естественная и дифференциальная смертность человека–носителя заболевания, θ – естественная степень устойчивости к малярии, γ_1^{-1} и γ^{-1} – средние периоды времени, необходимые для инициирования выработки гаметоцитов и создания эффективного иммунного ответа, p_1, p_2, p_3 – скорости, с которых теряются защитный иммунитет, частичный иммунитет и иммунологическая память, h – частота инокуляций.

Популяция комаров делится на три части – y_1, y_2 и y_3: восприимчивых, инкубационных (инфицированных, но не инфекционных) и инфекционных. Эта популяция описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{gathered}
\dot{y}_1 = k\, \frac{s_1(T)}{s_1(T) + \mu_e(T)}\, (y_1 + y_2 + y_3) - (v\, x_3 + \mu_0 + \alpha_0)\, y_1, \\
\dot{y}_2 = v\, x_3\, y_1 - \big[s_2(T) + \mu_0 + \alpha_0\big]\, y_2, \\
\dot{y}_3 = s_2(T)\, y_2 - (\mu_0 + \alpha_0)\, y_3,
\end{gathered} \tag{7.13}$$

где μ_0 и α_0 – естественная и индуцированная смертность комаров, k и $\mu_e(T)$ – показатели яйцекладки и яйцеклетки, становящихся нежизнеспособными, $s_1^{-1}(T)$ и $s_2^{-1}(T)$ – продолжительность цикла от яйца до зрелого взрослого и продолжительность спорогонии у комара, v – скорость передачи. Даже если скорость яйцекладки может зависеть от температуры, которая обозначена символом T, она ограничена и зависит только от параметров s_1, s_2 и μ_e.

8. ПРИБЛИЖЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

8.1. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов

В многих случаев решение дифференциальных уравнений не всегда удается выразить в элементарных функциях. Однако интегралы некоторых (в первую очередь линейных) дифференциальных уравнений могут быть представлены в виде степенных рядов. Обычно решение таких уравнений ищут в виде одного из рядов:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \, (x - x_0)^k, \qquad y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!} \, (x - x_0)^k.$$

Первый случай связан с использованием метода неопределенных коэффициентов, в качестве которых выступают a_k. Эти коэффициенты находятся подстановкой решения y и соответствующих производных в уравнение и приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях разности $(x - x_0)$ в обеих частях полученного равенства.

Второй случай обычно связан с последовательным дифференцированием уравнения для нахождения старших производных.

В обоих случаях иногда удается получить выражения для всех членов рядов, но чаще приходится ограничиваться конечным числом слагаемых. Оба случая также применимы для получения и общих решений, и частных.

Пример 8.1. Построить общее решение уравнения

$$y'' - x\,y' + y = e^x.$$

◀ Решение будем искать решение в виде

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \, x^k.$$

Подставим этот ряд и представление $\sin x$ в виде ряда Маклорена в исходное уравнение:

$$\Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \, x^k\Big)'' - x\,\Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \, x^k\Big)' + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \, x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Почленно дифференцируя и сдвигая индекс суммирования, получим

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}\,x^k - x\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\,a_{k+1}\,x^k + \sum_{k=0}^{\infty}a_k\,x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}.$$

Приравняем коэффициенты при x^k:

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} - k\,a_k + a_k = \frac{1}{k!},$$

или

$$a_{k+2} = \frac{1}{(k+2)(k+1)}\Big[(k-1)\,a_k + \frac{1}{k!}\Big].$$

При этом коэффициенты a_0 и a_1 будут играть роль произвольных постоянных. ▶

Пример 8.2. Найти четыре первых члена разложения в ряд Тейлора решения $y = y(x)$ уравнения $y'' = e^{-xy}$, удовлетворяющего начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

◀ Функция e^{-xy} разлагается в степенной ряд по степеням x и y в окрестности начала координат. Известно, что такой ряд сходится в любой точке плоскости XOY.

Будем искать частное решение в виде

$$y = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{y^{(k)}(0)}{k!}\,x^k = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}\,x + \frac{y''(0)}{2!}\,x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}\,x^3 + \ldots$$

Из уравнения следует, что $y''(0) = 1$. Продифференцируем обе части исходного уравнения:

$$\begin{gathered}
y''' = \frac{d}{dx}\left(e^{-xy}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-xy}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{-xy}\right)y' = \\
= -y\,e^{-xy} - x\,e^{-xy}\,y' = -(y + x\,y')\,y'';\\
y^{IV} = -(y' + y' + x\,y'')\,y'' - (y + x\,y')\,y''' = -(2\,y' + x\,y'')\,y'' - (y + x\,y')\,y''';\\
y^{V} = -(3\,y'' + x\,y''')\,y'' - 2\,(2\,y' + x\,y'')\,y''' - (y + x\,y')\,y^{IV}.
\end{gathered}$$

Используя последние соотношения, находим, что

$$y'''(0) = -1, \qquad y^{IV}(0) = 1, \qquad y^{V}(0) = -4.$$

Тогда частное решение исходного уравнения с точностью до пяти членов будет иметь вид

$$y = 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{4\,x^5}{5!} + \ldots \qquad \blacktriangleright$$

8.2. Метод малого параметра

Рассмотрим задачу Коши:

$$\dot{x} = f(x, t; \varepsilon), \qquad x(t_0) = \phi(\varepsilon), \tag{8.1}$$

где ε – малый параметр, $f(x, t; \varepsilon)$ и $\phi(\varepsilon)$ – достаточно гладкие функции своих аргументов. Доказано утверждение о том, что решение этой задачи будет дифференцируемым по параметру ε.

В этой ситуации можно попытаться построить разложение решения $x(t; \varepsilon)$ в ряд в окрестности точки $\varepsilon = 0$. Коэффициенты этого разложения можно определить следующим способом.

Представим $x(t; \varepsilon)$ в виде суммы

$$x(t; \varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon\, x_1(t) + \ldots + \varepsilon^n\, x_n(t) + o(\varepsilon^n) \tag{8.2}$$

и подставим ряд (8.2) в уравнение и начальное условие (8.1):

$$\dot{x}_0(t) + \varepsilon\, \dot{x}_1(t) + \ldots = f\big(x_0(t) + \varepsilon\, x_1(t) + \ldots, t; \varepsilon\big), \tag{8.3}$$

$$x_0(t_0) + \varepsilon\, x_1(t_0) + \ldots = \phi_0 + \varepsilon\, \phi_1 + \ldots, \tag{8.4}$$

где ϕ_0, ϕ_1, ... – коэффициенты разложения функции $\phi(\varepsilon)$ в ряд Маклорена.

Разложим функцию в правой части (8.3) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε в левой и правой частях. Учитывая то, что

$$f\big(x_0(t) + \varepsilon\, x_1(t) + \ldots, t; \varepsilon\big) = f\big(x_0(t), t; 0\big) +$$
$$+ \varepsilon\Big[f'_x(\cdot)\,\big(x_1(t) + 2\,\varepsilon\, x_2(t) + \ldots\big) + f'_\varepsilon(\cdot)\Big]\Big|_{\varepsilon=0} +$$
$$+ \frac{\varepsilon^2}{2}\,\Big[f''_{xx}(\cdot)\,\big(x_1(t) + 2\,\varepsilon\, x_2(t) + \ldots\big)^2 + 2\, f''_{x\varepsilon}(\cdot)\,\big(x_1(t) + 2\,\varepsilon\, x_2(t) + \ldots\big) +$$
$$+ f'_x(\cdot)\,\big(2\, x_2(t) + 6\,\varepsilon\, x_3(t) + \ldots\big) + f''_{\varepsilon\varepsilon}(\cdot)\Big]\Big|_{\varepsilon=0} + \ldots,$$

где символами $(\cdot)$ обозначено выражение $\big(x_0(t)+\varepsilon\, x_1(t)+...,t;\varepsilon\big)$, получим ОДУ для нулевого приближения:

$$\dot{x}_0(t) = f\big(x_0(t),t;0\big), \qquad x_0(t_0) = \phi_0. \tag{8.5}$$

ОДУ для первого приближения будет выглядеть так:

$$\dot{x}_1(t) = f'_x\big(x_0(t),t;0\big)\, x_1(t) + f'_\varepsilon\big(x_0(t),t;0\big), \qquad x_1(t_0) = \phi_1, \tag{8.6}$$

для второго –

$$\begin{aligned}\dot{x}_2(t) = f'_x\big(x_0(t),t;0\big)\, x_2(t) + f''_{x\varepsilon}\big(x_0(t),t;0\big)\, x_1(t)+\\ +\frac{1}{2}\Big[f''_{xx}\big(x_0(t),t;0\big)\, x_1^2(t) + f''_{\varepsilon\varepsilon}\big(x_0(t),t;0\big)\Big], \qquad x_2(t_0) = \phi_2.\end{aligned} \tag{8.7}$$

Все выписанные уравнения, кроме уравнения для нулевого приближения, представляют собой линейные уравнения первого порядка, а их решения могут быть получены с использованием стандартных формул, если удастся получить $x_0(t)$. Далее, последовательно подставляя решения предыдущих приближений в очередные уравнения, находим новые приближения. Но необходимо понимать, что вообще говоря, асимптотическое разложение пригодно только на конечном промежутке $[t_0, T]$. Для бесконечных промежутков необходимо применять другие формулы.

Пример 8.3. Методом малого параметра найти первые приближения для решения задачи Коши:

$$\dot{x} - \varepsilon\, x - e^{x-t} = 0, \qquad x(0) = -\varepsilon.$$

◀ Решение ищем в виде:

$$x(t;\varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon\, x_1(t) + \varepsilon^2\, x_2(t) + ...$$

Подставим данное разложение в исходное уравнение и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε. В результате будем иметь

$$\begin{aligned} &\dot{x}_0 = e^{x_0-t}, && x_0(0) = 0,\\ &\dot{x}_1 = x_0 + e^{x_0-t}\, x_1, && x_1(0) = -1,\\ &\dot{x}_2 = x_1 + e^{x_0-t}\big(x_2 + x_1^2/2\big), && x_2(0) = 0,\\ &\quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \end{aligned}$$

Из первых уравнения и начального условия находим, что $x_0(t) = t$. Подставив это выражение во второе уравнение, получим

$$\dot{x}_1 = t + x_1, \qquad x_1(0) = -1,$$

откуда находим, что $x_1(t) = -t - 1$.

Теперь подставим найденные выражения для $x_0(t)$ и $x_1(t)$ вместо этих функций в уравнение второго приближения. В результате выкладок, получим, что

$$\dot{x}_2 = t^2/2 - 1/2 + x_2, \qquad x_2(0) = 0.$$

Решая эту начальную задачу, вычисляем $x_2(t)$ в виде $x_2(t) = \big(-t^2 - 2\,t - 1 + e^t\big)/2$. Следовательно, приближенное аналитическое решение задачи имеет следующую форму:

$$x(t) = t - \varepsilon\,(t+1) + \frac{\varepsilon^2}{2}\,\big(e^t - t^2 - 2\,t - 1\big). \qquad \blacktriangleright$$

8.3. Метод последовательных приближений

Доказательство теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши:

$$\dot{x} = f(x,t), \qquad x(t_0) = x^0, \tag{8.8}$$

обычно осуществляется на основе метода последовательных приближений Пикара (в частности, см. подраздел 2.8). Перейдем от задачи (8.8) к эквивалентному ей интегральному уравнению

$$x(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} f\big(x(\tau),\tau\big)\,d\tau. \tag{8.9}$$

На основе последнего уравнения строится последовательность функций:

$$\begin{aligned}
&x_0(t) = x^0,\\
&x_1(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} f\big(x_0(\tau),\tau\big)\,d\tau,\\
&x_2(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} f\big(x_1(\tau),\tau\big)\,d\tau,\\
&\ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\\
&x_k(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} f\big(x_{k-1}(\tau),\tau\big)\,d\tau,\\
&\ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots
\end{aligned} \tag{8.10}$$

В рамках теоремы о существовании и единственности доказана равномерная сходимость такой последовательности к решению. Если удается вычислить интегралы в аналитической форме, то при достаточно большом k можно получить хорошее приближение решения.

Пример 8.4. Найти последовательные приближения задачи Коши:

$$\dot{x} = 1 - t - 3\,x + 3\,x^2 - x^3, \qquad x(0) = 1.$$

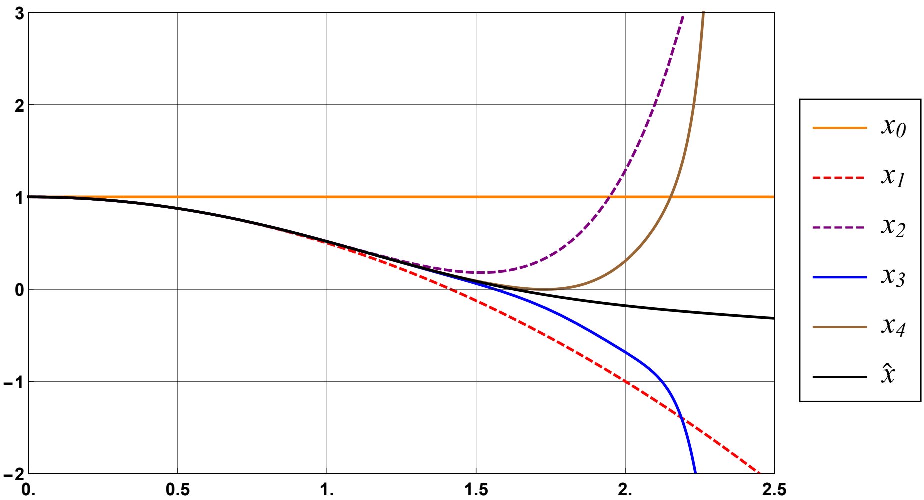

Рис. 8.1

◀ Для исходного уравнения в каждой точке плоскости XOY выполнены условия теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши. Определим последовательность приближений:

$$x_0 = 1,$$

$$x_1 = 1 - \frac{x^2}{2},$$

$$x_2 = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^7}{56},$$

$$x_3 = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^7}{56} - \frac{x^{12}}{896} + \frac{3\,x^{17}}{106624} - \frac{x^{22}}{3863552},$$

$$x_4 = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^7}{56} - \frac{x^{12}}{896} + \frac{33\,x^{17}}{426496} - \frac{47\,x^{22}}{11941888} + \frac{361\,x^{27}}{2101772288} -$$

$$
-\frac{11871\,x^{32}}{1883187970048}+\frac{790667\,x^{37}}{4145838316060672}-\frac{1069\,x^{42}}{224099368435712}+
$$
$$
+\frac{310503\,x^{47}}{324406245747536691 2}-\frac{76623\,x^{52}}{533889853373871554 56}+
$$
$$
+\frac{1081\,x^{57}}{7344005222880405094 4}-\frac{9\,x^{62}}{9867796491424445235 2}+
$$
$$
+\frac{x^{67}}{386398194301773912473 6}.
$$

С помощью численного интегрирования было получено приближенное решение $\hat{x}(t)$ рассматриваемой задачи с точностью до 10^{-7}. Функции $x_k(t)$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$, а также $\hat{x}(t)$ изображены на рис. 8.1.

ПРИЛОЖЕНИЯ

П.1. Список сокращений и обозначений

ДУ	дифференциальное уравнение
ДУвЧП	дифференциальное уравнение в частных производных
ИУ	интегральное уравнение
ИДУ	интегро-дифференциальное уравнение
ЛДО	линейный дифференциальный оператор
ОДУ	обыкновенное дифференциальное уравнение

$\mathbb{N}$	множество натуральных чисел
$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$	множество целых неотрицательных чисел
$\mathbb{R}$	множество действительных чисел ($\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$)
$\mathbb{R}^+$	множество положительных действительных чисел
$\mathbb{R}^k$	$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$
$\mathbb{Z}$	множество целых чисел

$\boldsymbol{i}$	мнимая единица
δ_{ij}	символ Кронекера
$\boldsymbol{\mathcal{I}}$	единичная матрица соответствующего порядка
T	символ транспонирования матриц
$\mathrm{diag}(e_1, ..., e_k)$	диагональная матрица с элементами главной диагонали e_1, ..., e_k
col	вектор-столбец, составленный из аргументов функции col
$(2\,k)!!$	$2 \cdot 4 \cdot\ ...\ \cdot 2\,k$
$(2\,k-1)!!$	$1 \cdot 3 \cdot\ ...\ \cdot (2\,k-1)$

◄	начало решения
►	конец решения

$\boldsymbol{\mathcal{H}} = \{h_{ij}\}$, $i = 1, 2, ..., n$, $j = 1, 2, ..., m$ – $n \times m$-матрица $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ с элементами h_{ij}:

$$\boldsymbol{\mathcal{H}} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & ... & h_{1m} \\ h_{21} & h_{22} & ... & h_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ h_{n1} & h_{n2} & ... & h_{nm} \end{bmatrix}$$

$|\boldsymbol{\mathcal{H}}| = \det(\boldsymbol{\mathcal{H}})$ – определитель квадратной $(n \times n)$ матрицы $\boldsymbol{\mathcal{H}}$

П.2. Решение ДУ в математических пакетах

1°. Axiom

Для решения ОДУ в среде Axiom прежде всего необходимо ввести оператор для неизвестной функции в форме

```
y := operator 'y
```

После этого можно записать само уравнение (здесь $y'' + y' + y = 0$):

```
deq := D(y x,x,2)+D(y x, x)+y x=0
```

а затем вызвать функцию для решения ОДУ:

```
solve(deq,y,x)
```

Результат – список, состоящий из особого решения и фундаментальной системы решений уравнения. При необходимости решения задачи Коши ($y(0) = y'(0) = 1$) форма команды будет такой:

```
solve(deq, y, x = 0, [1,1])
```

Заметим, что рассмотренная функция позволяет решать линейные ОДУ не только с постоянными, но и с переменными (рациональными и алгебраическими) коэффициентами, нелинейные уравнения первого порядка и др.

2°. Maple

Обратимся к методам исследования дифференциальных уравнений в пакете Maple. Основной функцией для символьного решения ОДУ является `dsolve`, которая имеет следующие варианты вызова:

```
dsolve(ODE)
dsolve(ODE,y(x),options)
dsolve({ODE,IC},y(x),options)
```

где `ODE` – ОДУ или система ОДУ, `y(x)` – неизвестная функция одной независимой переменной или вектор неизвестных, `IC` – начальные условия, `options` – дополнительные параметры. Кроме того, эта функция позволяет искать решения линейных ОДУ с полиномиальными коэффициентами в виде формальных степенных рядов с помощью интегральных преобразований, а также численно интегрировать отдельные ОДУ и системы ОДУ.

Приведем пример:

```
ode := diff(y(x),x,x) = 2*y(x)+ 1:
sol := dsolve(ode);
```

Для решения краевой задачи записываем

```
ics := y(0)=0,y(1)=0:
sol := dsolve(ode,ics);
```

3°. Mathematica

Пакет Mathematica включает весьма разнообразные встроенные средства как аналитического, так и приближенного решения дифференциальных уравнений (обыкновенных и в частных производных). Мощь пакета в данном направлении еще больше возрастает с применением программных средств языка.

Функция DSolve находит символьные решения (иногда в неявной форме) ОДУ (I случай) и систем (II) таких уравнений, ДУвЧП первого (III) и второго (IV) порядков и систем дифференциально-алгебраических (V) уравнений. Если обратиться к конкретным типам, то DSolve может решать линейные ОДУ любого порядка с постоянными коэффициентами; линейные ОДУ второго порядка с переменными коэффициентами; значительную часть нелинейных ОДУ, которые приведены в известном справочнике [12]; задачи Коши и краевые задачи для линейных и некоторых нелинейных ОДУ.

Системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами решаются с использованием матричных экспонент, линейные ОДУ второго порядка с переменными коэффициентами – с применением алгоритма Ковачевича, линейные ОДУ высших порядков – на основе методов Абрамова и Бронштейна и интегральных преобразований, нелинейные уравнения – с помощью поиска симметрий и др.

Стандартные вызовы для случаев I и II рассматриваемой функции имеют следующий вид:

```
DSolve[eq,y[x],x]
DSolve[{eq_1,...,eq_n},{y_1[x],...,y_n[x]},x]
```

где eq (eq_1, ..., eq_n) – уравнение(я), y[x] (y_1[x], ..., y_n[x]) – неизвестная(ые) функция(и), x – независимая переменная. Решения представляются в виде списков ({...}) правил подстановок (... → ...), причем возможны множественные решения. Эти правила затем используют там, где нужны явные соотношения для полученных решений. Произвольные постоянные в общих решениях обозначаются через C[i] (ранее, в последних версиях $\mathbb{c}_i$).

Для решения задачи Коши вызов функции DSolve принимает следующие формы:

```
DSolve[{eq, y[x0]=y0}, y[x], x]
DSolve[{eq_1, ..., eq_n, y_1[x0]=y10, ..., y_n[x0]=y_n0},
      {y_1[x], ..., y_n[x]}, x]
```

(для случая II возможно использование уравнения порядка выше первого; если таковые имеются, то следует добавить необходимые начальные условия и для производных). Заметим, что синтаксис для решения ДАУ сходен с синтаксисом в случае I.

В качестве примера продемонстрируем применение функции DSolve для решения системы уравнений

$$x_1'(t) = -2\,x_1(t) + x_2(t), \qquad x_2'(t) = 4\,x_1(t) - 8\,x_2(t) + \sin t$$

с начальными условиями $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$. Функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$ можно получить с помощью следующего фрагментаа:

```
eqs={x1'[t]==-2 x1[t]+x2[t], x2'[t]==4 x1[t] - 8 x2[t]+Sin[t]};
init={x1[0]==1,x2[0]==0};
DSolve[Join[eqs,init], {x1[t], x2[t]}, t];
```

Для решения одного уравнения в частных производных вызов DSolve записывается так:

```
DSolve[eq,u[x,y],{x,y}]
```

(возможно и решение систем ДУвЧП). Результатом является общее решение, в котором произвольные функции обозначаются как $\mathbb{c}_i$. Например, в случае

```
eq=x^2*D[u[x,y],x]+y^2*D[u[x,y],y]-(x+y)*u[x,y];
DSolve[eq==0,u[x,y],{x,y}]
```

получим

$$\{\{u[x,y] \to x\,y\,\mathbb{c}_1\Big[\frac{-x+y}{x\,y}\Big]\}\}$$

где $\mathbb{c}_1$ – произвольная функция.

Функция DSolve пакета Mathematica может получать аналитические решения следующие ДУвЧП: линейные ДУвЧП первого порядка (например, уравнение переноса); квазилинейное ДУвЧП первого порядка (уравнение Бюргерса); нелинейное ДУвЧП первого порядка (уравнение эйконала); эллиптическое линейное ДУвЧП второго порядка (уравнение Лапласа); гиперболическое линейное ДУвЧП второго порядка (волновое уравнение); параболическое линейное ДУвЧП второго порядка (уравнение теплопроводности). Как и ранее, результатом является общее решение, содержащее произвольные функции.

4°. Matlab

В пакете Matlab в настоящее время за аналитическое решение отдельных ОДУ и систем уравнений отвечает многофункциональная функция solve, входящая в Symbolic Math Toolbox (основа – система аналитических вычислений MuPAD, документы которой разработчики Matlab предполагают в скором времени полностью заменить с помощью перехода на использования Matlab live scripts) и работающая как с алгебраическими, трансцендентными, разностными, так и с другими уравнениями (и даже неравенствами). Вызов этой функции следующий:

```
solve(eqn)
```

где eqn представляет собой структуру решаемого уравнения, которая создается командой

```
eqn:=ode([{]<ур-ния>[,<нач.усл-я>][}],<имена неизв.функц.>)
```

Например, ввод строк

```
deqs:=ode(y''(x)=y(x), y(0)=1, y'(0)=0, y(x)):
solve(deqs)
```

позволяет решить задачу Коши вида:

$$y''(x) - y(x) = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0.$$

5°. Maxima

Для символьного решения ОДУ первого и второго порядка можно использовать функцию

```
ode(equation,depvar,indvar)
```

Здесь параметрами являются вид ОДУ, имена зависимой и независимой переменной. Дополнительно можно использовать следующие функции:

```
ic1(solution,xvalue,yvalue)
```
– для установки начальных условий для уравнения первого порядка;
```
ic2(solution,xvalue,yvalue,dervalue)
```
– для установки начальных условий для уравнения второго порядка;
```
bc2(solution,xvalue1,yvalue1,xvalue2,yvalue2)
```
– для установки краевых условий для уравнения второго порядка.

Чтобы получить решение уравнения первого порядка (Бернулли, обобщенного однородного, линейного и с разделяющимися переменными), применяется функция `ode2`.

Для аналитического решения линейных систем ОДУ можно использовать функцию

```
desolve([eq1,...,eqn],[var1,...,varn])
```

Например:

```
eqn_1: 'diff(f(x),x,2) = sin(x) + 'diff(g(x),x);
eqn_2: 'diff(f(x),x) + x^2 - f(x) = 2*'diff(g(x),x,2);
desolve([eqn_1, eqn_2], [f(x),g(x)]);
```

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Ахмеров Р.Р., Садовский Б.Н.* Основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – Новосибирск: ИВТ СО РАН, 2002. – 614 с.

2. *Берман Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализа: учеб. пос. – СПб.: Лань, 2016. – 492 с.

3. *Бермант А.Ф., Араманович И.Г.* Краткий курс математического анализа для втузов. – М.: Наука, Главфизматлит, 1966. – 737 с.

4. *Босс В.* Лекции по математике: дифференциальные уравнения. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 208 с.

5. *Боярский А.Я.* Математика для экономистов. – М.: Госстатиздат, 1961. – 464 с.

6. *Герасимов Б.И., Пучков Н.П., Протасов Д.Н.* Дифференциальные динамические модели: учеб. пос. – Тамбов: Изд-во Тамбов. гос. техн. ун-та, 2010. – 80 с.

7. *Глызин С.Д., Толбей А.О.* Практикум по курсу обыкновенных дифференциальных уравнений: учеб. пос. – Ярославль: ЯрГУ, 2011. – 68 с.

8. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.

9. *Егоров А.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. – 2-е изд., испр. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 384 с.

10. *Задорожный В.Н., Зальмеж А.Ю., Трифонов В.Н., Шаповалов А.В.* Высшая математика для технических университетов: учеб. пос. – 3-е изд. – Томск: Изд-во Томск. политех. ун-та, 2014. – Ч. 5. Дифференциальные уравнения. – 392 с.

11. Индивидуальные задания по высшей математике. – В 4 ч. Ч. 2. Комплексные числа. Неопределенные и определенные интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения / А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Юруть; под общ. ред. А.П. Рябушко – 6-е изд. – Мн.: Выш. шк., 2014. – 398 с.

12. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Лань, 2003. – 576 с.

13. *Каплан И.А.* Практические занятия по высшей математике. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве. Дифференциальное исчисление функций одной и многих переменных. Интегральное исчисление функций одной переменной. Интегрирование дифференциальных уравнений. – 3-е изд. – Харьков: Изд-во Харьков. гос. ун-та, 1967. – 947 с.

14. *Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И.* Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям: учеб. пос. для втузов. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1978. – 287 с.

15. *Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Задачи и примеры с подробными решениями: учеб. пос. – Изд. 4-е., испр. – М.: Едиториал УРСС, 2002. – 256 с.

16. *Креер Л.И.* Сборник упражнений по диференциальным уравнениям. – М.: ГУПИ Наркомпроса РСФСР, 1940. – 160 с.

17. *Лобанов С.Г.* Конспект лекций по курсу "Дифференциальные и разностные уравнения": учеб. пос. – М.: ГУ ВШЭ, 2001. – 131 с.

18. *Матвеев Н.М.* Дифференциальные уравнения. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1965. – 368 с.

19. *Матвеев Н.М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – 3-е изд., испр. и доп. – М.: Высш. шк., 1967. – 564 с.

20. *Матвеев Н. М.* Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифферен-

циальным уравнениям: для вузов. – 6-е изд., испр. и доп. – Мн.: Выш. шк., 1987. – 319 с.

21. *Матвеев Н.М.* Обыкновенные дифференциальные уравнения: учеб. пособ. для студентов пед. ин-тов по физ.-мат. спец. – СПб.: Специальная Литература, 1996. – 372 с.

22. *Мышкис А.Д.* Лекции по высшей математике. – М.: Наука, Главфизматлит, 2007. – 688 с.

23. *Олейник О.А.* Место теории дифференциальных уравнений в современной математике и ее приложениях // Дифференциальные уравнения и их приложения. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – С. 4–17.

24. *Сабитов К.Б.* Функциональные, дифференциальные и интегральные уравнения: учеб. пос. для вузов. – М.: Высш. шк., 2005. – 671 с.

25. *Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения: примеры и задачи: учеб. пос. – 2-е изд., перераб. – М.: Высш. шк., 1989. – 383 с.

26. *Сахарников Н.А.* Высшая математика. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1973. – 472 с.

27. Сборник задач по математике для ВТУЗов. - В 4 ч. Ч. 2: учеб. пос. для втузов / Под. общ. ред. А.В. Ефимова, А.С. Поспелова. – 4-е изд. перераб. и доп. – М.: Наука, 2001. – 432 с.

28. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: учеб. пос. – В 3 ч. Ч. 2 / А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Юруть; под общ. ред. А.П. Рябушко. – Мн.: Выш. шк., 1991. – 352 с.

29. *Соболь Б.В., Мишняков Н.Т., Поркшеян В.М.* Практикум по высшей математике. – 3-е изд. – Ростов н/Д: Феникс, 2006. – 640 с.

30. *Филиппов А.Ф.* Введение в теорию дифференциальных уравнений: учебник. – 2-е изд., испр. – М.: КомКнига, 2007. – 240 с.

31. *Филиппов А.Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. – 176 с.

32. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. – В 3-х т. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – Т. 1. – 616 с.; Т. 2. – 810 с.; Т. 3. – 662 с.

33. *Фролов С.В., Шостак Р.Я.* Курс высшей математики. – М.: Высш. шк., 1965. – 664 с.

34. *Цветков А.Т.* Задачник-практикум по математическому анализу. – Ч. 4. Ряды. Дифференциальные уравнения. – М.: Учпедгиз, 1962. – 196 с.

35. *Чебан Д.Н.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Руководство к решению задач: учеб. пос. – Кишинев: Молдавский госун-тет, 2001. – 347 с.

36. *Шестаков А.А., Малышева И.А., Полозков Д.П.* Курс высшей математики: Интегральное исчисление. Дифференциальные уравнения. Векторный анализ. – М.: Высш. шк., 1987. – 320 с.

37. *Boldyrev Y., Chernogorskiy S., Shvetsov K. et al.* A mathematical model of regional socio-economic development of the Russian Arctic Zone // Resources. – 2019. – Vol. 8, № 45. – 10 p.

38. https://ru.wikipedia.org/wiki/Пуанкаре,_Анри

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Полосков Игорь Егорович

Обыкновенные дифференциальные уравнения. Курс лекций и практикум

Учебное пособие

Редактор *Е. А. Огиенко*
Корректор *С. Б. Денисова*
Компьютерная вёрстка: *И. Е. Полосков*

Объем данных 1,92 Мб
Подписано к использованию 31.08.2020

Размещено в открытом доступе
на сайте www.psu.ru
в разделе НАУКА / Электронные публикации
и в электронной мультимедийной библиотеке ELiS

Издательский центр
Пермского государственного
национального исследовательского университета
614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15