ПЕРМСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

А. Ш. Кусяков

СИСТЕМА АНАЛИТИЧЕСКИХ ВЫЧИСЛЕНИЙ MAXIMA

Практикум

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
"Perm University Press"

Пермь 2020

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А. Ш. Кусяков

СИСТЕМА АНАЛИТИЧЕСКИХ ВЫЧИСЛЕНИЙ MAXIMA

ПРАКТИКУМ

*Допущено методическим советом
Пермского государственного национального
исследовательского университета в качестве
учебного пособия для студентов, обучающихся
по направлениям подготовки бакалавров
гуманитарного профиля*

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
"Perm University Press"

Пермь 2020

УДК 519.67
ББК 22.1
К94

Кусяков А. Ш.

К94 Система аналитических вычислений Maxima. Практикум [Электронный ресурс] : учебное пособие / А. Ш. Кусяков ; Пермский государственный национальный исследовательский университет. – Электронные данные. – Пермь, 2020. – 2,77 Мб ; 106 с. – Режим доступа: http://www.psu.ru/files/docs/science /books/uchebnie-posobiya/sistema-analit-vychisleniy-maxima.pdf. – Заглавие с экрана.

ISBN 978-5-7944-3568-9

Практикум предназначен для студентов гуманитарных направлений бакалавриата и специальностей вузов. Содержит алгоритмы решения типовых задач в пакете Maxima по всем основным разделам дисциплины «Математика».

УДК 519.67
ББК 22.1

Издается по решению ученого совета
механико-математического факультета
Пермского государственного национально-исследовательского университета

Рецензенты: кафедра математики и физики Пермского государственного аграрно-технологического университета (зав. кафедрой – канд. тех. наук, доцент ***В. В. Аюпов***);

научный сотрудник ИМСС УРО РАН, канд. физ.-мат. наук ***А. В. Чупин***

ISBN 978-5-7944-3568-9

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Внедрение в учебный процесс вузов систем компьютерной алгебры (СКА), начавшееся в 90-х годах прошлого столетия, коснулось главным образом студентов инженерно-технических и физико-математических специальностей. Изучению СКА, как правило, посвящался отдельный курс, а практические занятия проводились в компьютерном классе. Наиболее известными коммерческими СКА являются Mathcad, Matlab, Mathematica и Maple.

Одним из немногих учебных пособий для студентов гуманитарных специальностей, в котором имеется описание возможностей СКА Maple при изучении курса высшей математики, является учебник [3]. В целом следует признать, что на сегодняшний день подавляющее большинство студентов гуманитарных специальностей не имеют навыков работы с современными СКА. Основные препятствия – высокая стоимость коммерческих СКА и отсутствие доступа к системе, так как занятия по высшей математике проводятся обычно в аудиториях, не оснащенных компьютерной техникой.

Maxima в отличие от Mathcad, Matlab, Mathematica и Maple – это свободно распространяемый программный продукт [2]. Этот пакет является полноценной СКА, в которой можно выполнять преобразования выражений, строить графики, решать задачи линейной алгебры, дифференцировать, интегрировать, решать дифференциальные уравнения и т.д. Появление мобильной версии Maxima – Maxima on Android – позволило решить проблему с доступом к системе, так как эта система легко может быть установлена на смартфонах и планшетах с операционной системой Android.

Практикум содержит алгоритмы решения типовых задач в пакете Maxima по всем основным разделам дисциплины «Математика» для студентов гуманитарных направлений подготовки вузов.

1. НАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О СИСТЕМЕ MAXIMA

1.1. Начальный экран Maxima on Android

Практикум ориентирован на использование мобильной версии Maxima – Maxima on Android. Начальный экран системы Maxima on Android приведен на Рис. *1*.

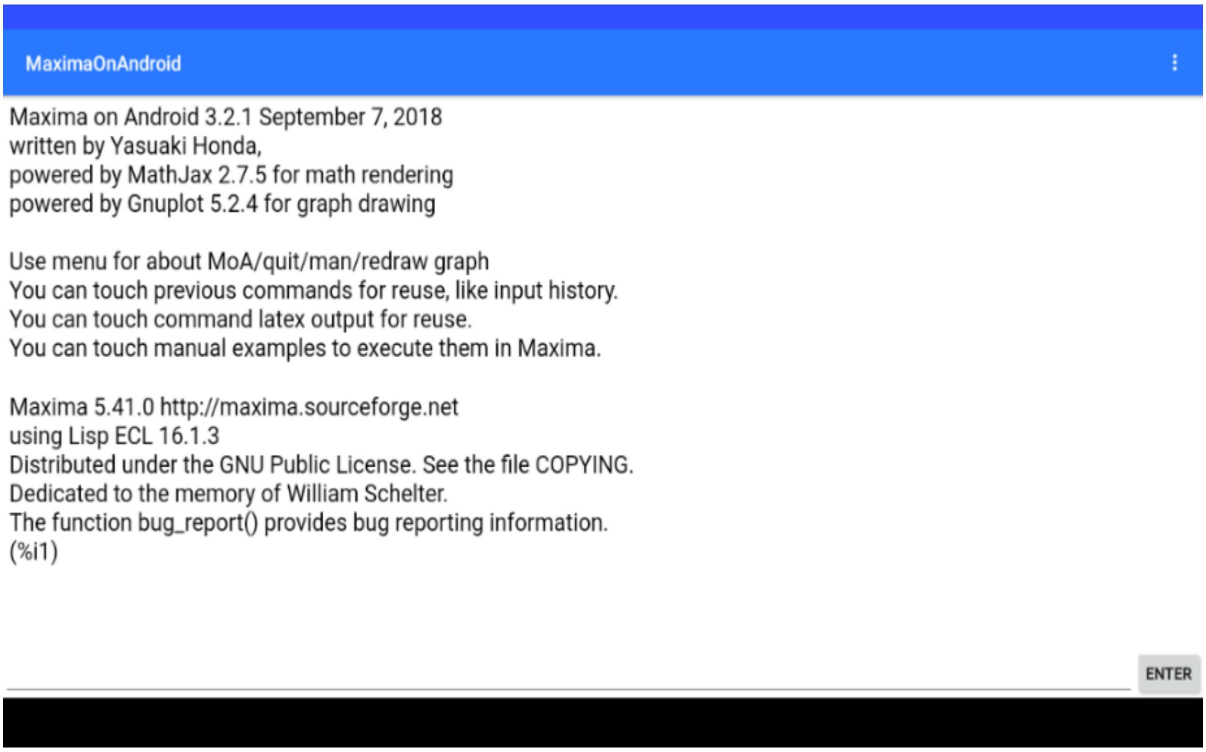

Рис. 1. Начальный экран системы Maxima on Android

Поле для ввода команд располагается в нижней части экрана. Ввод любой команды завершается символом «;» или «$». Первый символ используется, если результат выполнения команды надо вывести на экран, а второй – когда команда выполняется без вывода результатов. Выполнение команды происходит при нажатии на кнопку **ENTER**, находящейся в правом нижнем углу экрана. Первая введенная команда получает трехсимвольный номер (%i1), содержащий знак процента, букву «i» (сокращение от англ. input) и собственно номер команды. С каждой новой введенной командой этот номер (последнее число в обозначение номера) будет увеличиваться на 1.

1.2. Арифметические операции

Для обозначения арифметических операций в системе Maxima используются математические знаки: «+» – сложение, «–» – вычитание, «*» – умножение, «/» – деление. Для возведения в степень используется символ “^”. Для извлечения корня $\sqrt[n]{x}$ можно использовать операцию возведения в степень x^$(1/n)$.

Таблица 1. Арифметические операции

Обозначение	Название
x+y	Сложение
x–y	Вычитание
x*y	Умножение
x/y	Деление
x^n	Возведение в степень
x^(1/n)	Извлечение корня

Пример 1**.** Вычислить значение выражения $8 + 3(12 + 5)$ **.**

Команда:

8+3*(12+5);

Результат вычислений:

59.

Ответ: 59.

Следует обратить внимание на то, что при записи выражений в системе Maxima нельзя пропускать знаки умножения.

В дальнейшем для наглядности вводимые команды записываются полужирным шрифтом, а результаты вычислений – обычным.

Пример 2. Вычислить сумму дробей $\frac{1}{3} + \frac{1}{5}$ **.**

Команда:

1/3+1/5;

Результат вычислений:

$\frac{8}{15}$.

Ответ: $\frac{8}{15}$.

Если результат надо получить в десятичной форме, то после команды вычисления выражения следует дописать флаг **numer**:

1/3+1/5, numer;

В результате выполнения этой команды по умолчанию выводится 16 знаков числа

$0.5333333333333333.$

Для изменения количества значащих цифр используется команда **fpprintprec.** Например,

fpprintprec:5;

Теперь при выводе числа в десятичной записи система Maxima будет выдавать 5 знаков:

1/3+1/5, numer;

$0.53333.$

Следует обратить внимание на то, что в системе Maxima разделителем целой и дробной частей числа, записанного в десятичной форме, является точка (а не запятая).

Пример 3. Вычислить значение выражения $\frac{9{,}28}{1{,}24+6{,}04}$ **.**

Команда:

9.28/(1.24+6.04);

Результат вычислений:

1.274725274725275 .

Ответ: $1.274725274725275.$

Для ввода чисел, заданных в экспоненциальной форме, используется буква «е».

Пример 4. Вычислить значение выражения $3{,}5 \cdot 10^2 + 6{,}2 \cdot 10^3$.

Команда:

3.5e2+6.2e3;

Результат вычислений:

$6550.$

Ответ: $6550.$

Пример 5. Вычислить значение выражения $\frac{5^3}{\sqrt[3]{27}+8^{\frac{2}{3}}}$.

Команда:

5^3/(27^(1/3)+8^(2/3));

Результат вычислений:

$\frac{125}{7}.$

Ответ: $\frac{125}{7}$**.**

В системе Maxima константа π ($\pi = 3{,}14159\ldots$) обозначается символом «%pi», а число e ($e = 2{,}71828\ldots$) – символом «%e».

Пример 6. Вычислить значение выражения $\frac{\pi^2}{e+1}$.

Результат вычислений представить в форме десятичного числа.

Команда:

%pi^2/(%e+1), numer;

Результат:

$2.654345435988532.$

Ответ: $2.654345435988532.$

В последнем примере наличие флага **numer** позволяет представить результат вычислений в виде десятичного числа. При отсутствии этого флага результат вычислений будет представлен в виде выражения, содержащего специальные константы.

Команда:

%pi^2/(%e+1);

Результат:

$\frac{\pi^2}{\%e+1}.$

1.3. Функции

В системе Maxima имеется большой набор математических функций. Наиболее употребительные из них приведены ниже.

Таблица 2. Математические функции Maxima

Обозначение	Название
abs	Абсолютная величина
acos	Арккосинус
acot	Арккотангенс
asin	Арксинус
atan	Арктангенс
cos	Косинус
cot	Котангенс
exp	Экспонента
log	Натуральный логарифм
sin	Синус
sqrt	Квадратный корень
tan	Тангенс

Следует обратить внимание на то, что некоторые названия функций отличаются от названий, используемых в отечественной литературе.

Пример 1. Вычислить значение выражения

$$\frac{\left|\sqrt{8}-e^2\right|}{ln(2)+1}.$$

Результат вычислений представить в форме десятичного числа.

Команда:

abs(sqrt(8)-exp(2))/(log(2)+1), numer;

Результат вычислений:

2.693580940007946.

Ответ: 2.693580940007946.

Важно обратить внимание на то, что функция $ln(x)$ записывается как **log(x).** Отметим также, что вместо выражения **exp(2)** можно было написать **%e^2**.

Пользователь может задать собственные функции. Для этого сначала указывается имя функции, в скобках перечисляются названия аргументов, после знака «:=» следует описание функции. В качестве примера построим функцию вычисления логарифма по произвольному основанию, используя известную из школьного курса алгебры формулу

$$log_a x = \frac{ln\, x}{ln\, a}\ .$$

Очевидно, данная функция зависит от двух аргументов:

lgf(x,a):=log(x)/log(a).

Пример 2. Вычислить $log_7 13 \cdot log_{13} 49$.

Команды:

lgf(x,a):=log(x)/log(a);

lgf(13,7)*lgf(49,13), numer;

Результаты выполнения команд:

$$\mathrm{lgf}(\mathrm{x},\mathrm{a}) := \frac{\log(\mathrm{x})}{\log(\mathrm{a})}$$

2.

Ответ: 2.

Пример 3. Вычислить $\frac{5tg44°}{ctg46°}$.

Чтобы вычислить значение тригонометрической функции, надо сначала перевести аргумент из градусной меры в радианную меру:

$$\varphi = \frac{\pi\alpha}{180°}.$$

Здесь φ и α– радианная и градусная меры углов соответственно. Для решения этого примера, очевидно, надо задать функцию, переводящую градусную меру угла в радианную.

Команды:

fi(alfa):= %pi*alfa/180;

5*tan(fi(44))/ cot(fi(46)), numer;

Результаты выполнения команд:

$\mathrm{fi}(\mathrm{alfa}) := \frac{\pi\ \mathrm{alfa}}{180}$

5.0000000000000.

Ответ: 5.

1.4. Выражения

Рассмотрим наиболее употребительные функции, служащие для преобразования математических выражений.

Таблица 3. Основные функции преобразования выражений

Имя функции	Назначение
expand	Раскрытие скобок
factor	Разложение на множители
ratsimp	Упрощение рациональных выражений
radcan	Упрощение выражений, содержащих степенные, показательные и логарифмические функции
trigsimp	Упрощение тригонометрических выражений
trigexpand	Преобразование тригонометрических функций от сумм или кратных углов к функциям одинарного угла

Пример 1. Раскрыть скобки в выражении $(x-1)(x+2)(x+1)$.

Команда:

expand((x-1)*(x+2)*(x+1));

Результат:

$\mathrm{x}^3 + 2\mathrm{x}^2 - \mathrm{x} - 2$.

Ответ: $x^3 + 2x^2 - x - 2$.

Пример 2. Раскрыть скобки в выражении $(x+1)^3$.

Команда:

expand((x-1)^3);

Результат:

$\mathrm{x}^3 - 3\mathrm{x}^2 + 3\mathrm{x} - 1$.

Ответ: $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

Пример 3. Разложить на множители $x^3 + 2x^2 - x - 2$.

Команда:

factor(x^3+2*x^2-x-2);

Результат:

$(\mathrm{x}-1)(\mathrm{x}+1)(\mathrm{x}+2)$.

Ответ: $(x-1)(x+1)(x+2)$.

Пример 3. Разложить на множители x^6-1.

Команда:

factor(x^6-1);

Результат:

$(\mathrm{x}-1)(\mathrm{x}+1)(\mathrm{x}^2-\mathrm{x}+1)(\mathrm{x}^2+\mathrm{x}+1)$.

Ответ: $(x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$.

Пример 4. Упростить выражение $\frac{x^3-1}{x^2+x+1}$.

Команда:

ratsimp((x^3-1)/(x^2+x+1));

Результат:

$\mathrm{x}-1$.

Ответ: $x-1$.

Пример 5. Упростить выражение $\frac{x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}-1}$.

Команда:

radcan((x^(2/3)-x^(1/3))/(x^(1/3)-1));

Результат:

$x^{\frac{1}{3}}$.

Ответ: $x^{\frac{1}{3}}$.

Пример 6. Упростить выражение $\frac{e^{2x}-1}{e^x+1}$.

Команда:

radcan((exp(2*x)-1)/(exp(x)+1));

Результат:

$\%e^x - 1$.

Ответ: $e^x - 1$.

Пример 7. Упростить выражение

$$\frac{ln^3 x + 1}{ln^2 x - lnx + 1}.$$

Команда:

radcan((log(x)^3+1)/(log(x)^2-log(x)+1));

Результат:

$\log(x) + 1$.

Ответ: $\ln(x) + 1$.

Пример 8. Упростить выражение $\frac{sin^2 x - cos^2 x}{sinx - cosx}$.

Команда:

trigsimp((sin(x)^2-cos(x)^2)/(sin(x)-cos(x)));

Результат:

$\sin(x) + \cos(x)$.

Ответ: $\sin(x) + \cos(x)$.

Пример 9. Выразить функцию $sin3x$ через тригонометрические функции одинарного угла x.

Команда:

trigrexpand(sin(3*x));

Результат:

$3\cos(x)^2 \sin(x) - \sin(x)^3$.

Ответ: $sin3x = 3cos^2 x \cdot sin\, x - sin^3 x$.

1.5. Уравнения

Для решения уравнений в системе Maxima используется команда

solve(eq,x).

Здесь **eq** – уравнение, **x** – искомая величина.

Пример 1. Решить уравнение $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$.

Команда:

solve(x^3-7*x^2+14*x-8=0,x);

Результаты:

$[\mathrm{x} = 1, \mathrm{x} = 2, \mathrm{x} = 4\ ]$.

Ответ: $x = 1, x = 2, x = 4$.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt{x - 1} = 2$.

Команда:

solve(sqrt(x-1)=2,x);

Результат:

$[x = 5]$.

Ответ: $x = 5$.

Пример 3. Решить уравнение $e^{x^2 - 3x + 2} = 1$.

Команда:

solve(exp(x^2-3*x+2)=1,x);

Результаты:

$[\mathrm{x} = 1, \mathrm{x} = 2]$.

Ответ: $x = 1, x = 2$.

Пример 4. Решить уравнение $ln^2 x - 2lnx + 1 = 0$.

Команда:

solve(log(x)^2-2*log(x)+1=0,x);

Результат:

[x = %e].

Ответ: $x = e$.

При помощи команды **solve** можно решать не только уравнения, но и системы уравнений. Команда **solve** в этом случае записывается следующим образом:

solve([eq1,eq2,..,eqn],[x1,x2,…,xn]).

Здесь **[eq1,eq2,..,eqn]** – список уравнений, **[x1,x2,…,xn]** – список искомых величин.

Пример 5. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x + y = 3. \end{cases}$

Решение.

Команды:

eq1: x^2+y^2=5$

eq2:x+y=3$

rez: solve([eq1,eq2],[x,y]);

Результаты:

(rez) $[[x = 2, y = 1], [x = 1, y = 2]]$.

Таким образом, система имеет два решения.

Ответ: (2;1), (1,2).

1.6. Неравенства

Для решения простейших рациональных неравенств относительно одного неизвестного можно воспользоваться командой

solve_rat_ineq(inq).

Здесь **inq** – неравенство.

Чтобы воспользоваться этой командой, следует предварительно загрузить соответствующий пакет расширения:

load(solve_rat_ineq).

Пример 1. Решить неравенство $x^2 - 4x + 3 \leq 0$.

Решение:

Команды:

load(solve_rat_ineq)$

rez:solve_rat_ineq (x^2-4*x+3<=0);

Результат:

(rez) $[\mathrm{x} = 1], [\mathrm{x} = 3], [1 < \mathrm{x}, \mathrm{x} < 3]$.

Таким образом, решением неравенства служит отрезок [1; 3].

Ответ: [1; 3].

Пример 2. Решить неравенство $\frac{x^2-3x+2}{x-6} < 0$.

Решение:

Команды:

load(solve_rat_ineq)$

rez:solve_rat_ineq ((x^2-3*x+2)/(x-6)<0);

Результат:

(rez) $[[x < 1], [x > 2, x < 6]]$.

Таким образом, решением неравенства служит объединение промежутков $(-\infty; 1) \cup (2; 6)$.

Ответ: $(-\infty; 1) \cup (2; 6)$.

Команда **solve_rat_ineq** позволяет решать только одно неравенство. Для решения системы неравенств следует использовать команду

fourier_elim([inq1,inq2,..,inqn],[x1,x2,…,xn]).

Здесь **[inq1,inq2,..,inqn]**– список неравенств, **[x1,x2,…,xn]** – список переменных.

Чтобы воспользоваться этой командой, следует предварительно загрузить соответствующий пакет расширения:

load(fourier_elim).

Пример 3. Решить систему неравенств $\begin{cases} 3x - 2 \geq 7; \\ 2x \leq 10. \end{cases}$

Решение:

Команды:

load(fourier_elim)$

inq1:3*x-2>=7;

inq2:2*x<=10;

rez: fourier_elim ([inq1,inq2],[x]);

Результат:

(rez) $[\mathrm{x} = 5]\mathrm{or}[\mathrm{x} = 3]\mathrm{or}[3 < \mathrm{x}, \mathrm{x} < 5]$.

Таким образом, решением системы неравенства служит отрезок $[3; 5]$.

Ответ: $[3; 5]$.

1.7. Вычисление сумм и произведений

Вычисление сумм производится по команде

sum(expr,i,i0,in).

Здесь **expr** – формула общего члена суммы; **i** – переменная суммирования; **i0, in** – начальное и конечное значения переменной суммирования соответственно.

Пример 1. Вычислить сумму $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ для $n = 10$.

Решение:

Команда:

S:sum(i^2,i,1,10);

Результат:

(S)   385.

Ответ: 385.

Пакет расширения **functs** содержит команды вычисления сумм арифметической и геометрической прогрессий. Загрузка пакета осуществляется по команде

load(functs).

Сумма первых n членов арифметической прогрессии с первым членом a и разностью d вычисляется по команде

arithsum(a,d,n).

Пример 2. Известны первый член $a = 1$ и разность $d = 2$ арифметической прогрессии. Найти сумму первых пяти слагаемых прогрессии.

Решение:

Команды:

load(functs)$

S: arithsum(1,2,5);

Результат:

(S)   25.

Ответ: 25.

Сумма первых n членов геометрической прогрессии с первым членом b и знаменателем q вычисляется по команде

geosum(b,q,n).

Пример 3. Дан первый член и знаменатель геометрической прогрессии $b = 2$ и $q = 3$. Вычислить сумму первых четырех членов прогрессии.

Решение:

Команды:

load(functs)$

S: geosum(2,3,4);

Результат:

(S)   80.

Ответ: 80.

Для вычисления произведений служит команда

product(expr,i,i0,in).

Здесь **expr** – формула общего члена произведения; **i** – переменная произведения; **i0, in** – соответственно начальное и конечное значения переменной произведения.

Пример 4. Вычислить произведение $1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n - 1)$ для $n = 5$.

Решение:

Команда:

P:product(2*i-1,i,1,5);

Результат:

(P)   945.

Ответ: 945.

1.8. Графики

Для построения графика функции $y = f(x)$ используется команда

plot2d(y,[x,a,b])$.

Здесь **y** – выражение, задающее функцию $y = f(x)$; **x** – аргумент; **a, b** – соответственно левая и правая границы отрезка, на котором строится график функции.

Пример 1. Построить график функции $y = x^2 - 1$ на отрезке $[-5, 5]$.

Команда:

plot2d(x^2-1,[x,-5,5])$

Результат выполнения команды представлен на рис. 2.

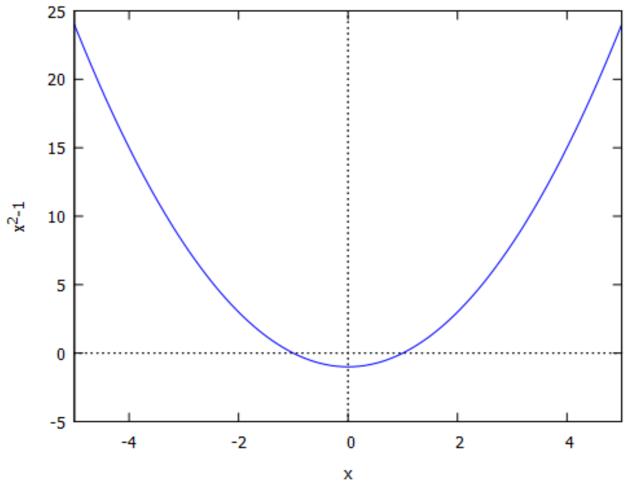

Рис. 2. График функции $y = x^2 - 1$

Для построения нескольких графиков на одном рисунке выражения, задающие функции, записывают в виде списка. Например, два графика на одном рисунке можно построить по команде

plot2d([y1,y2],[x,a,b])$.

Здесь **[y1, y2]** – список выражений, задающий соответственно функции $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$; **x** – аргумент; **a, b** – соответственно левая и правая границы отрезка, на котором строятся графики функций.

Пример 2. Построить графики функции $y = x^2 - 1$ и $y = 3x - 3$ на промежутке $[0, 3]$.

Команда:

plot2d([x^2-1,3*x-3],[x,0,3])$

Результат выполнения команды представлен на рис. 3.

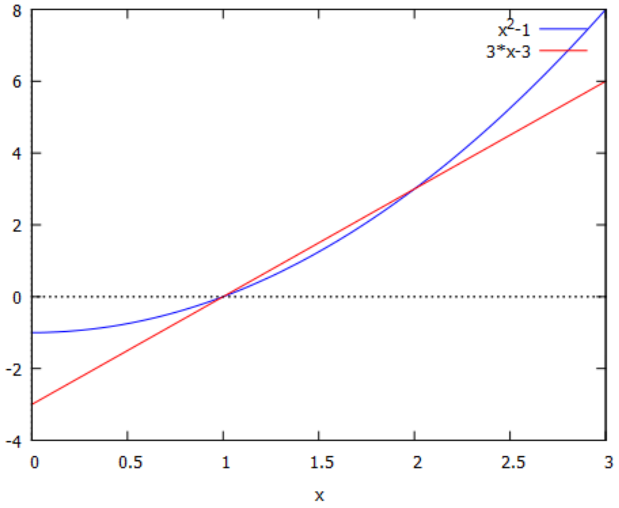

Рис. 3. Графики функций $y = x^2 - 1$ и $y = 3x - 3$.

Для построения графика функции, заданной уравнениями $x = x(t)$ и $y = y(t)$, т. е. параметрически (t – параметр), можно использовать команду

plot2d([parametric,x,y,[t,t1,t2]])$.

Здесь **x** и **y** – выражения, задающие соответственно зависимости $x(t)$ и $y(t)$; **t** – параметр; **t1, t2** – соответственно левая и правая границы изменения параметра **t**.

Пример 3. Построить график функции, заданной параметрически уравнениями $x = 2cost$ и $y = 3sint$ на промежутке $t \in [0, 2\pi]$

Команда:

plot2d([parametric,2*cos(t),3*sin(t),[t,0,2*%pi]])$.

Результат выполнения команды представлен на рис. 4.

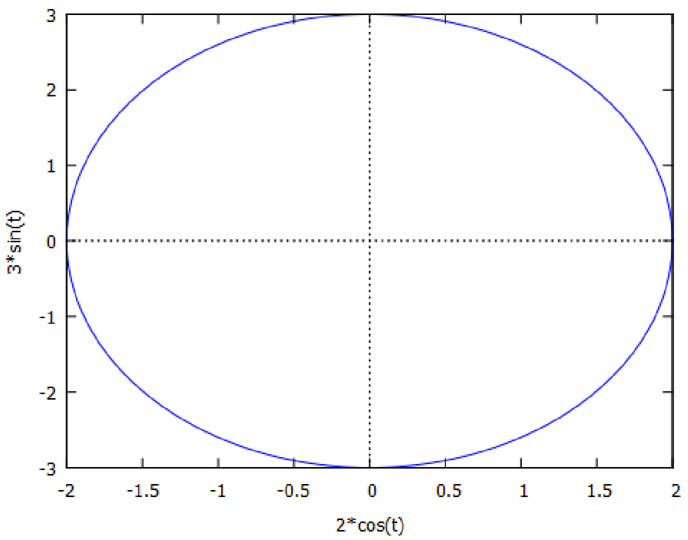

Рис. 4. График функции $(2cost, 3sint)$

Для построения графика функции по заданному набору точек с координатами (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_n, y_n) можно воспользоваться командой

plot2d([discrete,CXY])$.

Здесь **CXY** – список, каждый элемент которого является подсписком, состоящим из двух элементов. Первый элемент подсписка – координата x, второй – координата y.

Пример 4. Построить график функции по заданному набору точек: $(0, 0)$, $(1, 4)$, $(2, 7)$, $(3, 9)$, $(4, 11)$, $(5, 12)$.

Команда:

plot2d([discrete, [[0,0], [1,4], [2,7], [3,9], [4,11], [5,12]]])$.

Результат выполнения команды представлен на рис. 5.

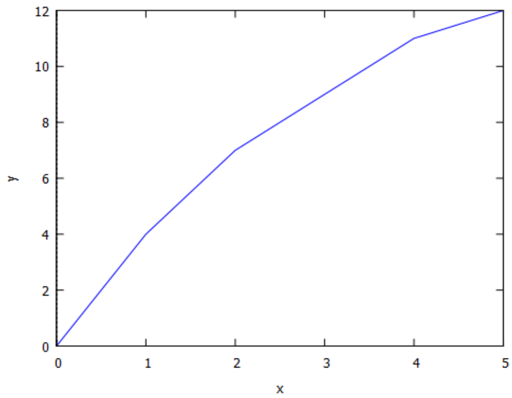

Рис. 5. График функции, заданной набором точек

Для построения графика функции двух переменных $z = z(x, y)$ используется команда

plot3d(z,[x,a,b],[y,c,d])$.

Здесь **z** – выражение, задающее функцию $z = z(x, y$; **[x,a,b]** – список, задающий первый аргумент и его границы изменения соответственно, **[y,c,d]** –, список, задающий второй аргумент и его границы изменения соответственно.

Пример 5. Построить график функции $z = x^2 + y^2$ в области:

$-5 \leq \mathrm{x} \leq 5$; $-5 \leq \mathrm{y} \leq 5$.

Команда:

plot3d(x^2+y^2,[x,-5,5],[y,-5,5])$.

Результат выполнения команды представлен на рис. 6.

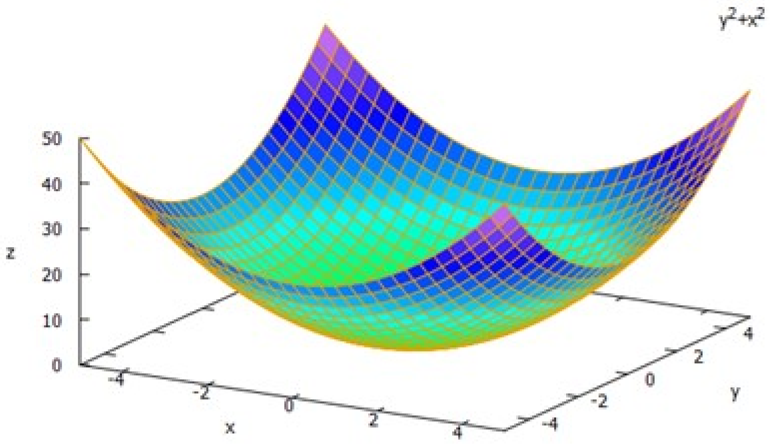

Рис. 6. График функции двух переменных

1.9. Задачи по теме «Начальные сведения о системе Maxima»

1. Вычислить значения целочисленных выражений:

а) $28 + 4(121 - 15)$; б) $3 \cdot 9 + 2(26 - 5)$; в) $6 \cdot 14 + 21 \cdot 5$.

2. Вычислить значения выражений:

а) $\frac{2}{17} + \frac{14}{15} - \frac{6}{7}$; б) $\frac{3}{19} + \frac{11}{13} - \frac{4}{5}$; в) $\frac{12}{37} + \frac{23}{43} - \frac{1}{9}$.

3. Вычислить значения выражений. Результаты вычислений представить в десятичном виде с тремя значащими цифрами.

а) $\frac{3{,}21 + 2{,}15}{1{,}12 + 2{,}01}$; б) $\frac{3{,}21}{7{,}22 - 2{,}01} + 6{,}7$; в) $\frac{1{,}21 \cdot 6{,}27}{9{,}12 - 3{,}61}$.

4. Вычислить значения выражений:

а) $\frac{1{,}1 \cdot 10^2 + 2{,}4 \cdot 10^{-2}}{6{,}1 \cdot 10^2 + 0{,}1 \cdot 10^{-2}}$; б) $\frac{0{,}5 \cdot 10^3 + 6{,}2 \cdot 10^3}{1{,}1 \cdot 10^{-1} + 2{,}1 \cdot 10^2}$; в) $\frac{3{,}5 \cdot 10^2 - 6{,}2 \cdot 10^{-3}}{6{,}1 \cdot 10^{-2} + 0{,}1 \cdot 10^3}$.

5. Вычислить значения выражений. Результаты представить в виде десятичного числа с тремя значащими цифрами.

а) $\frac{\pi^2 - 2}{e^3 - 4} + \pi$. б) $\frac{2\pi}{\pi^2 - 1} + e^{-1}$. в) $\frac{e^3 - \pi^2}{\pi + 2} - e \cdot \pi$.

6. Вычислить значения выражений. Результаты представить в виде десятичного числа.

а) $\frac{|ln(12) - e|}{e^3 + 1}$; б) $\frac{e^3}{|ln(2) - 1| + 1}$; в) $\frac{e^3 - ln^2(4)}{|e - 2\ln(2)|}$.

7. Вычислить значения выражений:

а) $log_{0,6}6 - log_{0,6}10$; б) $log_6 2 + log_6 18$; в) $log_8 2 + log_8 32$.

8. Вычислить значения выражений:

а) $log_2 6 \cdot log_6 8 \cdot log_3 9$; б) $log_2 8 \cdot log_3 4 \cdot log_4 9$; в) $log_4 2 \cdot log_7 2 \cdot log_2 7$.

9. Вычислить значения выражений:

а) $\frac{3tg40°}{ctg50°} + sin30°$; б) $\frac{tg25°}{ctg65°} + 2cos60°$; в) $\frac{3tg10°}{ctg80°} + \sqrt{2}sin45°$.

10.Вычислить значения выражений:

а) $\frac{4cos40°sin40°}{cos10°}$; б) $\frac{cos^2 20° - sin^2 20°0}{2sin50°}$; в) $\frac{1 - 2sin^2 35°}{5sin20°}$.

11.Раскрыть скобки в выражениях:

а) $(3x^3 + 2x + 1)^2$; б) $(x + 1)^2(3x + 1)$; в) $(x^2 + 2x + 1)^3$.

12. Разложить на множители:

а) $x^3 + 4x^2 - 3x - 18$; б) $3x^3 + 7x^2 + 5x + 1$; в) $2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$.

13. Упростить выражения:

а) $\frac{x^3 - 8}{x^2 + 2x + 4}$; б) $\frac{8x}{(x + 1)^2 - (x - 1)^2}$; в) $\frac{16(x + 1)^3 - (x - 1)^4 + x^4}{(x + 1)^2 - (x - 1)^2}$.

14.Упростить выражения:

а) $\frac{x^{\frac{3}{2}} - 1}{x + \sqrt{x} + 1}$; б) $\frac{e^{3x} - 8}{e^{2x} - 4} - \frac{4}{e^x + 2}$; в) $\frac{ln^2 x - 1}{lnx + 1} - lnx$.

15. Упростить тригонометрические выражения:

а) $cos^2 x(1 + tg^2 x)$; б) $cos^2 x sin^2 x + cos^4 x$; в) $\frac{1}{1 + ctg^2 x}$.

16. Решить уравнения:

а) $x^3 - 11x^3 + 34x = 24$; б) $x^3 - 10x^3 + 31x = 30$; в) $x^3 - 3x^3 - 4x = -12$.

17.Решить уравнения:

а) $\sqrt{x^2 - 8} = 1$; б) $e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$; в) $ln(x^2 - 3x + 3) = 0$.

18.Решить системы уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5; \\ xy = 2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + xy = 12; \\ x + y = 4. \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20; \\ x - y = 2. \end{cases}$

19. Решить неравенства:

а) $x^2 - 6x + 8 \leq 0;$ б) $x^2 - 7x + 10 \leq 0;$ в) $x^2 - 9x + 8 \leq 0.$

20. Решить неравенства:

а) $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 4} < 0.$ б) $\dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 5} < 0.$ в) $\dfrac{x^2 - 6x + 5}{x - 8} < 0.$

21. Решить системы неравенств:

а) $\begin{cases} x - 2 \geq 1; \\ 2x \leq 12. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - 1 \geq 2; \\ 3x \leq 9. \end{cases}$ в) $\begin{cases} 4x - 1 \geq 7; \\ 2x + 1 \leq 9. \end{cases}$

22. Вычислить суммы при данном n:

а) $1 + 3 + \cdots + (2n - 1);$ $n = 10.$ б) $2 + 5 + \cdots + (3n - 1);$ $n = 10.$ в) $1 + 5 + \cdots + (4n - 3);$ $n = 10.$

23. Известны первый член a и разность d арифметической прогрессии. Найти сумму первых n слагаемых прогрессии:

а) $a = 2, d = 3, n = 10;$ б) $a = 1, d = 2, n = 10;$ в) $a = 5, d = 1, n = 10.$

24. Известны первый член b и знаменатель q геометрической прогрессии. Найти сумму первых n слагаемых прогрессии:

а) $b = 2, q = 3, n = 5;$ б) $b = 1, q = 2, n = 5;$ в) $b = 5, q = 2, n = 5.$

25. Вычислить произведения при данном n:

а) $1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n - 1);$ $n = 5.$ б) $2 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (3n - 1);$ $n = 5.$ в) $1 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (4n - 3);$ $n = 5.$

26. Построить график функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$:

а) $f(x) = x^2 - 2x + 2;$ $[a, b] = [-3, 3].$ б) $f(x) = -x^2 + 3x;$ $[a, b] = [-3, 3].$ в) $f(x) = x^3 - 3x;$ $[a, b] = [-2, 2.].$

27. Построить два графика функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ на одном рисунке ($x \in [a, b]$):

а) $f(x) = x^2 - 2x,$ $g(x) = x - 2,$ $[a, b] = [-3, 3];$ б) $f(x) = x^2 - 3x,$ $g(x) = 2x - 6,$ $[a, b] = [-3, 3];$ в) $f(x) = x^3 - 3x^2,$ $g(x) = 3x - 3,$ $[a, b] = [-2, 2].$

28. На промежутке $[\alpha, \beta]$ построить график параметрически заданной функции:

а) $x(t) = 2cost,$
$y(t) = 2sint,$
$[\alpha, \beta] = [0, 2\pi];$

б) $x(t) = 3cost,$
$y(t) = 4sint,$
$[\alpha, \beta] = [0, 2\pi];$

в) $x(t) = cos^3 t,$
$y(t) = sin^3 t,$
$[\alpha, \beta] = [0, 2\pi].$

29. Построить график функции по заданному набору точек:

а) $(0, 0)$, $(1, 4)$, $(2, 6)$, $(3, 6)$, $(4, 4)$, $(5, 0)$.

б) $(0, 9)$, $(1, 4)$, $(2, 1)$, $(3, 0)$, $(4, 1)$, $(5, 4)$.

в) $(0, 5)$, $(1, 2)$, $(2, 0)$, $(3, 2)$, $(4, 5)$, $(5, 10)$.

30. Построить график функции двух переменных в заданной области:

а) $z = x^2 - 2x + y^2 + 1;$
$-5 \leq x \leq 5,$
$-5 \leq y \leq 5.$

б) $z = 2xy;$
$-5 \leq x \leq 5,$
$-5 \leq y \leq 5.$

в) $z = xy^2 + 2;$
$-5 \leq x \leq 5,$
$-5 \leq y \leq 5.$

2. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

2.1. Действия над матрицами

Матрицей размерности $m \times n$ называется прямоугольная таблица элементов, состоящая из m строк и n столбцов. Матрицы обычно обозначаются заглавными латинскими буквами, а их элементы – строчными латинскими буквами. В общем случае матрица записывается в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

где a_{ij} $(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n})$ – *элемент матрицы*, расположенный в i – й строке и j – м столбце. Элементами матрицы могут быть числа, переменные, функции и другие математические объекты.

Для создания матриц, состоящей из m строк и n столбцов, в системе Maxima используется команда

matrix(row1, row2,…, rowm).

Здесь **row1, row2,…, rowm –** строки матрицы, каждая из которых представляет собой список из n элементов. Например, команда построения квадратной матрицы размерности $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ имеет вид

A:matrix([2,3],[3,4]).

Для создания единичной матрицы размерности $n \times n$ используется команда

ident(n).

Например, по команде

ident(3)

будет построена матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Для создания нулевой матрицы размерности $m \times n$ используется команда

zeromatrix(m,n).

Например, по команде:

zeromatrix(2,3)

будет построена матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Над матрицами можно выполнять следующие действия:

- транспонирование,
- умножение на число,
- сложение и вычитание,
- умножение матриц.

Транспонированием матрицы называется замена ее строк столбцами с сохранением их порядка. Для транспонирования матрицы A используется команда

transpose(A).

Пример 1. Выполнить транспонирование матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Команды:

A:matrix([2,1],[3,4])$

AT: transpose(A);

Результат:

$(AT) \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Ответ: $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Умножение матрицы на число выполняется по команде «*». Для сложения и вычитания матриц служат соответственно команды «+» и «–».

Пример 2. Даны две матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Построить матрицу $C = 4A - 3B$.

Команды:

A:matrix([1,3],[2,1])$

B:matrix([1,3],[1,0])$

C: 4*A-3*B;

Результат:

$(C) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Пусть матрицы A и B имеют соответственно размеры $m \times p$ и $p \times n$. *Произведением* матриц AB в указанном порядке называют матрицу C размера $m \times n$, элемент c_{ij} которой равен сумме произведений элементов *i*–й строки матрицы A на соответствующие элементы j–го столбца матрицы B. Перемножать матрицы можно только при условии, что *число столбцов первой матрицы равно числу строк второй*. Очевидно, что квадратные матрицы одинаковых размерностей удовлетворяют этому условию.

В системе Maxima команда умножения матриц A и B в указанном порядке обозначается символом «.» (точка), т. е. имеет вид:

$$\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B}.$$

Пример 3. Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ и $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ в указанном порядке.

Команды:

A:matrix([1,3],[2,1])$
B:matrix([2,2],[1,1])$
C: A.B;

Результат:

$$(C) \qquad \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $AB = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$.

Следует обратить внимание на то, что операция умножения матриц обозначается символом «.» (точка). Если по ошибке вместо символа «.» будет поставлен знак «*», то произойдет поэлементное перемножение матриц.

2.2. Определители

Определителем квадратной матрицы n-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется число, которое обозначается символом Δ и вычисляется по определенным правилам. В развернутом виде определитель записывается следующим образом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Для обозначения определителя используется также символ $det\ A$.

Вычисление определителей производится по следующим правилам:

1) Если $n = 1$, то $\Delta = |a_{11}| = a_{11}$.
2) Если $n = 2$, то $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.
3) Если $n = 3$, то

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Для нахождения определителей четвертого и более высоких порядков используется *метод разложения определителя по строке или столбцу* (правило Лапласа). Чтобы сформулировать это правило, введем понятия минора и алгебраического дополнения матрицы.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} называется определитель $(n-1)$–го порядка, полученный из определителя n-го порядка вычеркиванием i–й строки и j–го столбца, на пересечении которых находится элемент a_{ij}.

Алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij} вычисляется по формуле

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Правило Лапласа. Определитель матрицы равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения:

$$\Delta = \sum_{s=1}^{n} a_{is} A_{is}$$

(разложение по элементам – й строки);

$$\Delta = \sum_{s=1}^{n} a_{sj} A_{sj}$$

(разложение по элементам – го столбца).

Для нахождения определителя матрицы A в системе Maxima используется команда

determinant (A).

Пример 1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

Команды:

A:matrix([1,2,1],[2,4,2], [1,2,3])$

D: determinant(A);

Результат:

(D) 0.

Ответ: 0.

Пример 2. Найдите все значения параметра α, при которых определитель $\begin{vmatrix} 2\alpha - 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ равен нулю.

Команды:

A:matrix([2*alfa-1,3],[3,1])$

eq: determinant(A)=0;

rez:solve(eq,alfa);

Результаты:

(eq) $2\text{alfa} - 10 = 0]$,

(rez) $[\text{alfa} = 5]$.

Ответ: $\alpha = 5$.

2.3. Ранг матрицы

Ранг матрицы – это наивысший порядок минора матрицы, отличного от нуля. Для нахождения ранга матрицы A используется команда

rank(A).

Пример 1. Вычислить ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Команда:

A:matrix([1,2,3],[0,1,1],[0,2,1);

Результат:

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Команда:

r: rank(A);

Результат:

(r) 3.

Пример 2. Вычислить ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Команда:

A:matrix([1,2,3],[2,4,6],[3,2,1]);

Результат:

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Команда:

r: rank(A);

Результат:

(r) 2

Пример 3. Вычислить ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

Команда:

A:matrix([1,2,3],[2,4,6],[3,6,9]);

Результат:

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

Команда:

r: rank(A);

Результат:

(r) 1

2.4. Обратная матрица

Квадратная матрица, обозначаемаяA^{-1}, называется *обратной* к матрице A того же порядка, если выполняется равенство

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E.$$

Для нахождения обратной матрицы A^{-1} в системе Maxima можно воспользоваться функцией

invert(A).

Пример 1. Построить матрицу, обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Команда:

A:matrix([4,5],[3,4]);

Результат:

$(A)\qquad \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Команда:

AO: invert(A);

Результат:

$(AO)\qquad \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$

Пример 2. Построить матрицу, обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$

Команды:

A:matrix([1,2,3],[0,5,3],[0,3,2)$

AO: invert(A);

Результат:

$(AO)\qquad \begin{pmatrix} 1 & 5 & -9 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -9 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$

Рассмотрим применение обратной матрицы к решению систем линейных алгебраических уравнений.

Система из n линейных алгебраических уравнений относительно n неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$ в общем случае имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Здесь величины a_{ij} $(i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots n)$ – коэффициенты системы, числа b_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ – свободные члены.

Введем следующие обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix};\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Здесь A – матрица коэффициентов системы, X – вектор–столбец неизвестных, B – вектор-столбец свободных членов. В матричной форме система выглядит так:

$$AX = B.$$

Если матрица A невырожденная, то для матрицы A существует обратная A^{-1}. Умножив обе части матричного уравнения слева на матрицу A^{-1}, получим

$$A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

По определению обратной матрицы имеем

$$A^{-1}A = E.$$

Следовательно,

$$EX = A^{-1}B,\ X = A^{-1}B.$$

Таким образом, чтобы решить матричное уравнение, надо сначала найти обратную матрицу A^{-1}, а затем умножить ее слева на вектор–столбец B. Метод, основанный на использовании обратной матрицы, называется *методом обратной матрицы*. Очевидно, этот метод применим только при условии, если определитель системы не равен нулю.

Пример 3. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$

Здесь $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}.$

Команды:

```
A:matrix([1,-1,1],[2,1,1],[1,1,2])$
B:matrix([3],[11],[8])$
X:invert(A).B;
```

Результат:

$(X) \qquad \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Ответ: $x_1 = 4, x_2 = 2,\ x_3 = 1.$

2.5. Системы линейных уравнений

В системе Maxima для решения систем линейных алгебраических уравнений в самом общем случае можно воспользоваться командой **solve**.

Пример 1. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$

Команды:

eq1: x1-x2+x3=3$

eq2: 2*x1+x2+x3=11$

eq3: x1+x2+2*x3=8$

rez:solve([eq1,eq2,eq3],[x1,x2,x3]);

Результат:

(rez) $\quad [\mathrm{x1} = 4, \mathrm{x2} = 2, \mathrm{x3} = 1]$.

В данном случае система имеет единственное решение.

Ответ: $x_1 = 4, x_2 = 2,\ x_3 = 1$.

Пример 2. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 12. \end{cases}$

Команды:

eq1: x1+x2+x3=3$

eq2: x1+2*x2+x3=6$

eq3: 2*x1+2*x2+2*x3=12$

rez:solve([eq1,eq2,eq3],[x1,x2,x3]);

Результат:

(rez) [ ]

Система не имеет решений. Действительно, разделив последнее уравнение системы на 2, получим

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$$

Из последней системы видно, что сумма неизвестных должна одновременно равняться 4 и 6, что невозможно.

Ответ: система не имеет решений.

Пример 3. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 12. \end{cases}$

Команды:

eq1: x1+x2+x3=4$

eq2: x1+2*x2+x3=6$

eq3: 2*x1+4*x2+2*x3=12$

rez:solve([eq1,eq2,eq3],[x1,x2,x3]);

Результат:

$(rez) \qquad [\mathrm{x1} = 2 - \%\mathrm{r1}, \mathrm{x2} = 2, \mathrm{x3} = \%\mathrm{r1}]$.

Символом «%r1» в системе Maxima обозначается произвольная постоянная. Таким образом, система имеет множество решений.

Ответ: $x_1 = 2 - C$, $x_2 = 2$, $x_3 = C$ (C – произвольная постоянная).

Отметим, что в системе Maxima имеется команда **linsolve**, специально предназначенная для решения систем линейных уравнений. Синтаксис команды совпадает с синтаксисом команды **solve:**

linsolve([eq1,eq2,..,eqn],[x1,x2,…,xn]).

Здесь **[eq1,eq2,..,eqn]** – список уравнений, **[x1,x2,…,xn]** – список искомых величин.

2.6. Задачи по теме «Линейная алгебра»

1. Выполнить транспонирование матриц

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Даны две матрицы A и B . Построить матрицу C.

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

$C = 3A + B.$ $\quad$ $C = A - 3B.$ $\quad$ $C = 3A - 2B.$

3. Найти произведение AB матриц A и B.

а) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 04 \end{pmatrix}$.

4. Вычислить определители.

а) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ $\quad$ б) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ $\quad$ в) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

5. Найдите все значения α, при которых определитель равен нулю.

а) $\begin{vmatrix} \alpha - 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$ $\quad$ б) $\begin{vmatrix} \alpha - 4 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ $\quad$ в) $\begin{vmatrix} 2\alpha - 6 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$

6. Дана матрицы A. Построить обратную матрицу A^{-1}.

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; $\quad$ б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad$ в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

7. Решить систему уравнений методом обратной матрицы.

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 9, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 9; \end{cases}$ $\quad$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1, \\ 4x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 6; \end{cases}$ $\quad$ в) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 13, \\ 3x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 20. \end{cases}$

8. Решить систему уравнений

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 6; \end{cases}$ $\quad$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2, \\ 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 6; \end{cases}$ $\quad$ в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$

3. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

3.1. Линейные операции над векторами

Вектором $\vec{a}$ называется направленный отрезок прямой $\overrightarrow{AB}$ с начальной точкой A и конечной точкой B. Если вектор $\overrightarrow{AB}$ задан в пространстве координатами начала – точки $A(x_B, y_A, z_A)$ и конца – точки $B(x_B, y_B, z_B)$, то каждая координата вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ равна разности соответствующих координат его конца и начала:

$$a_x = x_B - x_A;\ a_y = y_B - y_A;\ a_z = z_B - z_A.$$

Сформулируем *основные правила*, позволяющие по координатам векторов $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ находить координаты их суммы, разности и произведения вектора на число.

1. Каждая координата суммы двух векторов равна сумме соответствующих координат этих векторов:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z).$$

2. Каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат этих векторов:

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z).$$

3. Каждая координата произведения вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ на число λ равна произведению соответствующей координаты вектора на это число:

$$\overrightarrow{\lambda\, a} = (\lambda\, a_x, \lambda\, a_y, \lambda\, a_z).$$

В системе Maxima вектор с координатами (a_x, a_y, a_z) может быть представлен в виде списка $[ax, ay, az]$. Операции сложения, вычитания и умножения вектора на число выполняются соответственно по командам «+», «-» и «*».

Пример 1. Даны координаты точек $A(5,3,7)$ и $B(-1,6,12)$. Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$.

Команды:

A:[5,3,7]$

B:[-1,6,12]$

AB:B-A;

Результат:

(AB) $[-6,3,5]$.

Ответ: $(-6,3,5)$.

Пример 2. Даны координаты векторов $\vec{a} = (2,1,2)$ и $\vec{b} = (1,4,3)$. Найти координаты вектора $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$.

Команды:

a:[2,1,2]$

b:[1,4,3]$

c:a+2*b;

Результат:

(c) $[4,9,8]$.

Ответ: $(4,9,8)$.

Вектора называются *коллинеарными,* если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Условие *коллинеарности векторов* $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ имеет вид

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

Пример 3. Даны два вектора $\vec{a} = (\alpha, 2,4)$ и $\vec{b} = (3,6,\beta)$. Определить при каких значениях параметров α и β данные вектора коллинеарны.

Команды:

a:[alfa,2,4]$

b:[3,6,betta]$

eq1:a[1]/b[1]=a[2]/b[2];

eq2:a[2]/b[2]=a[3]/b[3];

rez:solve([eq1,eq2],[alfa,betta]);

Результаты:

(eq1) $\qquad \dfrac{\text{alfa}}{3} = \dfrac{1}{3}$

(eq2) $\qquad \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{\text{betta}}$

(rez) $\qquad [[\text{alfa} = 1, \text{betta} = 12]]$.

Ответ: $= 1$; $\beta = 12$.

3.2. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$и $\vec{b}$называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними. Скалярное произведение обозначается $\vec{a} \cdot \vec{b}$ или $(\vec{a}, \vec{b})$. Таким образом, по определению, имеем

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos\varphi.$$

Можно показать, что в координатной форме скалярное произведение векторов $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Длина вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ вычисляется по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

В системе Maxima для векторов $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, представленных в виде списков [ax,ay,az] и [bx,by,bz] соответственно, скалярное произведение вычисляется по команде «.» (точка). Если вместо команды «.» будет записана команда «*» (умножение), произойдет поэлементное умножение списков.

Пример 1. Даны два вектора $\vec{a} = (1,2,4)$ и $\vec{b} = (3,1,0)$. Вычислить скалярное произведение векторов.

Команды:

a:[1,2,4]$

b:[3,1,0]$

rez:a.b;

Результат:

(rez) 5.

Ответ: 5.

Используя определение скалярного произведения, можно найти косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

В координатной форме формула вычисления косинуса угла между векторами $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$имеет вид

$$cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Пример 2. Даны два вектора $\vec{a} = (1,2,3)$и $\vec{b} = (6,4,-2)$. Вычислить угол между векторами.

Команды:

a:[1,2,3]$

b:[6,4,-2]$

rez:acos(a.b/sqrt(a.a*b.b));

Результат:

(rez) acos$\left(\frac{2}{7}\right)$.

Ответ: arccos$\left(\frac{2}{7}\right)$.

Если вектора ортогональны, то угол $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и $cos\varphi = 0$. Получаем *условие ортогональности* векторов:

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

Пример 3. Даны два вектора $\vec{a} = (\alpha, 3,4)$ и $\vec{b} = (4, \alpha, -7)$. Определить при каком значении α эти вектора ортогональны.

Команды:

a:[alfa,3,4]$

b:[4,alfa,-7]$

eq:a.b=0;

rez:solve(eq,alfa);

Результаты:

(eq) $7\text{alfa} - 28 = 0$

(rez) $[\text{alfa} = 4]$.

Ответ: $\alpha = 4$.

3.3. Векторное произведение векторов

Векторным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который определяется следующим образом:

1) длина вектора $\vec{c}$ равна площади параллелограмма S, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то есть
$$|\vec{c}| = S = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot sin\varphi;$$
2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярен каждому из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
3) вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку векторов (т. е., если смотреть с конца вектора $\vec{c}$, то поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ виден против часовой стрелки).

Векторное произведение обозначается $\vec{a} \times \vec{b}$ или $[\vec{a}, \vec{b}]$.

В системе Maxima имеется пакет расширения **vector3d**, содержащий команду вычисления векторного произведения векторов $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, представленных в виде списков соответственно [ax,ay,az] и [bx,by,bz]:

cross(a,b).

Перед тем, как использовать данную команду следует выполнить загрузку пакета расширения

load(vector3d).

Пример 1. Даны два вектора $\vec{a} = (1,2,4)$ и $\vec{b} = (3,1,0)$. Вычислить векторное произведение векторов.

Команды:

```
load(vector3d)$
a:[1,2,4]$
b:[3,1,0]$
rez:cross(a,b);
```

Результат:

(rez) $[-4, 12, -5]$.

Ответ: $(-4, 12, -5)$.

Пример 2. Даны два вектора $\vec{a} = (1,2,4)$ и $\vec{b} = (3,1,0)$. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на данных векторах.

По определению площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, равна длине вектора $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

Команды:

```
load(vector3d)$
a:[1,2,4]$
b:[3,1,0]$
c:cross(a,b)$
rez:sqrt(c.c);
```

Результат:

(rez) $\sqrt{185}$.

Ответ: $\sqrt{185}$.

3.4. Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением векторов $\vec{a}, \overrightarrow{b}$ и $\vec{c}$ называется скалярное произведение вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ на вектор $\vec{c}$

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}.$$

Смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, если эти векторы образуют правую тройку.

Пример 1. Даны три вектора $\vec{a} = (1,2,3)$, $\vec{b} = (0,2,4)$ и $\vec{c} = (0,0,3)$. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на данных векторах.

Команды:

load(vector3d)$
a:[1,2,3]$

b:[0,2,4]$

c:[0,0,3]$

rez:cross(a,b).c;

Результат:

(rez) 6.

Ответ: 6.

Векторы, лежащие в одной плоскости или в параллельных плоскостях, называются *компланарными*. Условие *компланарности* трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ имеет вид

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0.$$

Пример 2. Даны три вектора $\vec{a} = (\alpha, 2{,}3)$ и $\vec{b} = (2{,}4{,}6)$ $\vec{c} = (1{,}2{,}1)$. Определить при каких значениях параметра α данные векторы компланарны.

Команды:

load(vector3d)$
a:[alfa,2,3]$ b:[2,4,6]$ c:[1,2,1]$

eq:cross(a,b).c=0;

rez:solve(eq,alfa);

Результаты:

(eq) $4alfa + 2(6 - 6alfa) - 4 = 0.$

(rez) [alfa = 1].

Ответ: $\alpha = 1$.

3.5. Задачи по теме «Векторная алгебра»

1. Даны координаты точек A и B. Найти координаты вектора $\overline{AB}$.

а) A(0,3,-7); B(1,1,-5); б) A(3,1,-3); B(2,-7,1); в) A(-1,3,7); B(2,-3,5);

2. Даны координаты векторов $\overrightarrow{a}$ и $\vec{b}$. Найти координаты вектора $\vec{c}$.

а) $\vec{a} = (3,2,1)$; $\vec{b} = (0,-3,2)$; $\vec{c} = \overrightarrow{2a} + 3\vec{b}$;

б) $\vec{a} = (-1,3,1)$; $\vec{b} = (1,1,-1)$; $\vec{c} = \overrightarrow{3a} + 4\vec{b}$;

в) $\vec{a} = (4,0,2)$; $\vec{b} = (0,-1,2)$; $\vec{c} = \overrightarrow{3a} - 5\vec{b}$.

3. Даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Определить при каких значениях параметров α и β данные вектора коллинеарны.

а) $\vec{a} = (\alpha, 2,1)$; $\vec{b} = (2,4,\beta)$;

б) $\vec{a} = (1,\alpha,\beta)$; $\vec{b} = (4,8,12)$;

в) $\vec{a} = (4,1,2)$; $\vec{b} = (8,\alpha,\beta + 1)$.

4. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

а) $\vec{a} = (-4,3,-7)$; $\vec{b} = (4,6,-2)$;

б) $\vec{a} = (-5,2,-2)$; $\vec{b} = (2,3,-2)$;

в) $\vec{a} = (-4,2,-3)$; $\vec{b} = (6,6,-4)$.

5. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$

а) $\vec{a} = (2,2,1)$; $\vec{b} = (2,3,-6)$;

б) $\vec{a} = (1,0,-4)$; $\vec{b} = (4,-8,1)$;

в) $\vec{a} = (3,0,4)$; $\vec{b} = (0,6,8)$.

6. Определить, при каких значениях α вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны.

а) $\vec{a} = (-4,\alpha,5)$; $\vec{b} = (4,3,\alpha)$;

б) $\vec{a} = (-6,\alpha,3)$; $\vec{b} = (4,\alpha,-4)$;

в) $\vec{a} = (\alpha,-2,1)$; $\vec{b} = (\alpha,2,3)$.

7. Найти векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

а) $\vec{a} = (-4,3,-7)$; $\vec{b} = (4,6,-2)$;

б) $\vec{a} = (-5,2,-2)$; $\vec{b} = (2,3,-2)$;

в) $\vec{a} = (-4,2,-3)$; $\vec{b} = (6,6,-4)$.

8. Найти площадь параллелограмма, построенного на заданных векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

а) $\vec{a} = (-4,3,-7)$; $\vec{b} = (4,6,-2)$;

б) $\vec{a} = (-5,2,-2)$; $\vec{b} = (2,3,-2)$;

в) $\vec{a} = (-4,2,-3)$; $\vec{b} = (6,6,-4)$.

9. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

а) $\vec{a} = (1,2,-1)$; $\vec{b} = (3,2,-7)$; $\vec{c} = (1,3,3)$;

б) $\vec{a} = (1,-4,0)$; $\vec{b} = (7,9,3)$; $\vec{c} = (3,4,2)$;

в) $\vec{a} = (-6,3,2)$; $\vec{b} = (7,1,2)$; $\vec{c} = (3,0,1)$.

10. Даны три вектора $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$. Определить при каких значениях параметра α данные векторы компланарны.

а) $\vec{a} = (\alpha,3,1)$; $\vec{b} = (6,7,4)$; $\vec{c} = (2,0,-1)$;

б) $\vec{a} = (\alpha,2,1)$; $\vec{b} = (1,-3,-7)$; $\vec{c} = (1,2,3)$;

в) $\vec{a} = (\alpha,7,2)$; $\vec{b} = (-2,0,-1)$; $\vec{c} = (2,2,1)$.

4. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

4.1. Пределы

Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ при $x \to a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, при котором для всех значений x, удовлетворяющих условию

$$0 < |x - a| < \delta,$$

справедливо неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Этот предел обозначается

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Смысл данного определения состоит в том, что для всех значений x, достаточно близких к числу a, значения функции по модулю как угодно мало отличаются от числа A .

Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ при $x \to \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $M = M(\varepsilon) > 0$, при котором для всех значений x, удовлетворяющих условию

$$|x| > M,$$

справедливо неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Этот предел обозначается

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A.$$

Смысл данного определения состоит в том, что при достаточно больших по модулю значениях аргумента x значения функции по модулю как угодно мало отличаются от числа A .

Предел функции $y = f(x)$ при $x \to a$ вычисляется по команде

limit(y,x,a).

Пример 1. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 3x + 2}$.

Команды:

y:(x^2-6*x+5)/(x^2-3*x+2)$

limit(y,x,1);

Результат:

4.

Ответ: 4.

Предел функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$ вычисляется по команде

limit(y,x,inf).

Пример 2. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3+6x^2+1}{x^3+3x+4}$

Команды:

y:(2*x^3+6*x^2+1)/(x^3+3*x+4)$

limit(y,x,inf);

Результат:

2.

Ответ: 2.

Число A называется *пределом справа* функции $y = f(x)$ при $x \to a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, при котором для всех значений x, удовлетворяющих условию

$$0 < x - a < \delta,$$

справедливо неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Этот предел обозначается

$$f(a+0) = \lim_{x\to a+0} f(x) = A.$$

Число A называется *пределом слева* функции $y = f(x)$ при $x \to a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, при котором для всех значений x, удовлетворяющих условию

$$0 < a - x < \delta,$$

справедливо неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Этот предел обозначается

$$f(a-0) = \lim_{x\to a-0} f(x) = A.$$

Для нахождения правосторонних и левосторонних пределов функции используются соответственно следующие команды:

limit(y,x,a,plus) и **limit(y,x,a,minus)**

Пример 3. Вычислить пределы справа и слева функции $y = arctg\frac{1}{x}$ при $x \to 0$.

Команды:

y:atan(1/x)$

r:limit(y,x,0,plus);

l: limit(y,x,0,minus);

Результаты:

(r) $\frac{\pi}{2}$

(l) $-\frac{\pi}{2}$

Ответ: $f(+0) = \frac{\pi}{2}$, $f(-0) = -\frac{\pi}{2}$.

Асимптотой графика функции $y = f(x)$ называется прямая, обладающая тем свойством, что расстояние от точки M, лежащей на графике, до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки графика от начала координат.

Различают три вида асимптот:

- вертикальные,
- горизонтальные,
- наклонные.

Прямая $x = a$ является *вертикальной асимптотой* кривой $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ равен бесконечности.

Прямая $y = b$ является *горизонтальной асимптотой* кривой, если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$. Если $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$), то горизонтальная асимптота называется правосторонней (левосторонней).

Прямая $y = k_1x + b_1$ является *правой наклонной асимптотой*, если существуют конечные пределы

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k_1, \qquad \lim_{x\to+\infty}(f(x)-k_1x)=b_1 .$$

Прямая $y=k_2x+b_2$ является *левой наклонной асимптотой*, если существуют конечные пределы

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=k_2, \qquad \lim_{x\to-\infty}(f(x)-k_2x)=b_2 .$$

Пример 4**.** Найти асимптоты функции $f(x)=\frac{2x}{x-1}$.

Точка $x=1$ – точка разрыва функции.

Найдем в этой точке правосторонний и левосторонний пределы.

Команды:

y:2*x/(x-1)$

r:limit(y,x,1,plus); l:limit(y,x,1,minus);

Результаты:

(r) ∞

(l) $-\infty$

Предел справа равен (+∞), а предел слева – (-∞). Следовательно, прямая $x=1$ – вертикальная асимптота.

Проверим, имеет ли график функции горизонтальные асимптоты.

Команды:

y:2*x/(x-1)$

p:limit(y,x,inf); m:limit(y,x,minf);

Результаты:

(p) 2

(m) 2

Оба предела равны двум. Следовательно, прямая $y=2$ – это горизонтальная асимптота.

Ответ: $x=1$ – вертикальная асимптота, $y=2$ – горизонтальная асимптота.

Пример 5**.** Найти асимптоты функции $f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}$.

Функция определена при всех значениях x, поэтому ее график не имеет вертикальных асимптот.

Проверим, имеет ли график функции горизонтальные асимптоты.

Команды:

y:x^3/(x^2+1)$

p:limit(y,x,inf);

m:limit(y,x,minf);

Результаты:

(p) ∞

(m) $-\infty$

График функции не имеет горизонтальных асимптот.

Проверим наличие наклонных асимптот.

Команды:

y:x^3/(x^2+1)$

kp:limit(y/x,x,inf);

bp:limit(y-kp*x,x,inf);

Результаты:

(kp) 1

(bp) 0

Команды:

y:x^3/(x^2+1)$

km:limit(y/x,x,minf);

bm:limit(y-kp*x,x,minf);

Результаты:

(km) 1

(bm) 0

Таким образом, при $x \to \pm\infty$

$k = 1, b = 0.$

Следовательно, уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y = x$.

Ответ: $y = x$ – наклонная асимптота.

4.2. Производные

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве X. Возьмем некоторую точку x, принадлежащую множеству X . Придадим значению x приращение $\Delta x \neq 0$, так чтобы новое значение $(x + \Delta x)$ принадлежало множеству X. Тогда функция $y = f(x)$ получит приращение

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Производной функции $y = f(x)$ называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Для нахождения производной функции $y = f(x)$ в пакете Maxima используется команда

diff(y,x).

Пример 1. Вычислить производную функции $y = 3x^2 + 2x + 4$.

Команды:

y:3*x^2+2*x+4$

yp:diff(y,x);

Результат:

(yp) $\quad 6x + 2$

Ответ: $y' = 6x + 2$.

Пример 2. Вычислить производную функции$y = 2lnx + arctgx$.

Команды:

y:2*log(x)+atan(x)$

yp:diff(y,x);

Результат:

(yp) $\quad \frac{1}{x^2+1} + \frac{2}{x}$

Ответ: $y' = \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2+1}$.

Пример 3. Вычислить производную функции$y = \sqrt{x^2 + 1}$.

Команды:

y:sqrt(x^2+1)$

yp:diff(y,x);

Результат:

(yp) $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Ответ: $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Пример 4. Вычислить производную функции $y = x^3 ln^2 x$.

Команды:

y:x^3*log(x)^2$

yp:diff(y,x);

Результат:

(yp) $3x^2 \log(x)^2 + 2x^2 \log(x)$

Ответ: $y' = 3x^2 ln^2 x + 2x^2 lnx$.

Пример 5. Вычислить производную функции $y = x^{x+1}$.

Команды:

y:x^(x+1)$

yp:diff(y,x);

Результат:

(yp) $x^{x+1}\left(\log(x) + \frac{x+1}{x}\right)$

Ответ: $y' = x^{x+1}\left(lnx + \frac{x+1}{x}\right)$.

Пусть дана функция $y = f(x)$, имеющая производную y'. Производная от этой производной называется *производной второго порядка* (второй производной) и обозначается y'', т. е.

$$y'' = (y')'.$$

Производной n-го порядка (*n*-й производной) называется производная от производной (*n* – 1)-го порядка. Для обозначения производных *n-го порядка* (*n*>*3*) используется символ $y^{(n)}$, т. е.

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'.$$

Производные *n*-го порядка обозначают также символом $\frac{d^n y}{dx^n}$.

Для нахождения производных функции $y = f(x)$ высших порядков в пакете Maxima используется команда

diff(y,x,n).

Здесь n – порядок производной.

Пример 6. Найти третью производную функции $y = x^3 + x + 1$.

Команды:

y:x^3+x+1$

yp:diff(y,x,3);

Результат:

(yp) 6

Ответ: y'''=6.

Пример 7. Найти производную шестого порядка функции $y = 2^x$

y:2^x$

yp:diff(y,x,6);

Результат:

(yp) $\log(2)^6 \, 2^x$

Ответ: $y^{(6)} = ln^6 2 \cdot 2^x$.

Точка x_0 называется *точкой локального максимума* (*минимума*) функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех точек из этой окрестности выполняется неравенство

$$f(x) > f(x_0) \ (f(x) < f(x_0)).$$

Значения функции в точках локального максимума и локального минимума называются соответственно *максимумом и минимумом функции.* Максимум или минимум функции объединяют общим термином *экстремум функции*.

Теорема (необходимые условия экстремума). Производная дифференцируемой функции в точке экстремума равна нулю или не существует.

Точки, в которых производная равна нулю или не существует, называются *критическими.* Отметим, что сама функция в критической точке должна быть определена.

Теорема (первое достаточное условие). Пусть x_0 – критическая точка. Если при переходе через точку x_0 производная дифференцируемой функции меняет знак с плюса на минус, то в точке x_0 функция имеет максимум, а если с минуса на плюс – то минимум. Если при переходе через критическую точку производная не меняет знак, то в этой точке экстремума нет.

Теорема (второе достаточное условие). Если функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0 и $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0$, то в этой точке функция $y = f(x)$ имеет экстремум: если $f''(x_0) > 0$, то $f(x_0)$ – локальный минимум, если $f(x_0) < 0$, то $f(x_0)$ – локальный максимум.

Пример 8. Найти экстремумы функции $y = x^3 - 3x + 10$

Сначала найдем критические точки.

Команды:

f(x):=x^3-3*x+10$

define(p1(x),diff(f(x),x)$

define(p2(x),diff(p1(x),x)$

solve(p1(x)=0,x);

Результат:

$[\mathrm{x} = -1, \mathrm{x} = 1]$.

Таким образом, получены две критические точки: $x = -1$ и $x = 1$.

Найдем значения второй производной в критических точках.

Команды:

p2(-1);

p2(1);

Результаты:

-6

6.

Таким образом, в точке $x = -1$ вторая производная меньше нуля, а в точке $x = 1$ – больше нуля. Следовательно,

$x = -1$ – точка максимума,

$x = 1$ – точка минимума.

Вычислим значения функции в найденных точках экстремума.

Команды:

f(-1);

f(1);

Результаты:

12

8.

Таким образом,

$f_{max} = f(-1) = 12; f_{min} = f(1) = 8.$

Ответ: $f_{max} = f(-1) = 12; f_{min} = f(1) = 8.$

4.3. Частные производные

Рассмотрим функцию двух переменных $z = z(x, y)$. Придадим аргументу x приращение $\Delta x \neq 0$,тогда функция $z = z(x, y)$ получит частное приращение:

$$\Delta z_x = z(x + \Delta x, y) - z(x, y).$$

Частной производной функции $z(x, y)$ по переменной x называется предел:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z_x}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = z'_x.$$

Аналогично определяется частная производная функции $z(x, y)$ по переменной y:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta z_y}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = z'_y,$$

где

$$\Delta z_y = z(x, y + \Delta y) - z(x, y).$$

Для нахождения частных производных функции, зависящей от нескольких переменных, можно воспользоваться командой **diff.**

Пример 1. Найти частные производные функции $z(x, y) = 3x^2 + 2y$.

Команды:
z:3*x^2+2*y$

zx:diff(z,x);

zy:diff(z,y);

Результаты:

(zx) 6x

(zy) 2.

Ответ: $z'_x = 6x, z'_y = 2.$

Пример 2. Найти частные производные функции $z(x, y) = x^y$.

Команды:

z:x^y$

zx:diff(z,x);

zy:diff(z,y);

Результаты:

(zx) $x^{y-1}y$

(zy) $x^y\log(x)$

Ответ: $z'_x = y \cdot x^{y-1}, z'_y = x^y lnx.$

4.4. Первообразная и неопределенный интеграл

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на промежутке X, если в каждой точке этого промежутка выполняется равенство

$$F'(x) = f(x).$$

Совокупность функций $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная, называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx$.

Для нахождения неопределенного интеграла функции $y = f(x)$в системе Maxima служит команда

integrate(y,x).

Пример 1. Найти интеграл $\int(6x^2 + 1)dx$.

Команды:

y: 6*x^2+1;

i:integrate(y,x);

Результат:

(i) $2x^3 + x.$

В системе Maxima произвольная постоянная C не записывается.

Ответ: $2x^3 + x + C.$

Пример 2. Найти интеграл $\int \frac{(3x^3-2x^2+1)dx}{x}.$

Команды:

y: (3*x^3-2*x^2+1)/x$

i:integrate(y,x);

Результат:

(i) $\log(x) + x^3 - x^2.$

Ответ: $lnx + x^3 - x^2 + C.$

Пример 3. Найти интеграл $\int \frac{2xdx}{x^2+4}.$

Команды:

y: 2*x/(x^2+4)$

i:integrate(y,x);

Результат:

(i) $\log(x^2 + 4).$

Ответ: $ln(x^2 + 4) + C.$

Пример 4. Найти интеграл $\int 4sin^3xcosxdx.$

Команды:

y: 4*sin(x)^3*cos(x)$

i:integrate(y,x);

Результат:

(i) $\sin^4 x.$

Ответ: $sin^4x + C.$

Пример 5. Вычислить интеграл $\int x^3e^xdx$

Команды:

y: x^3*exp(x)$

i:integrate(y,x);

Результат:

(i) $(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)\%e^x$.

Ответ: $(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x + C$.

4.5. Определенный интеграл

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $F(x)$– любая первообразная для $f(x)$ на отрезке $[a;b]$. Тогда определенный интеграл от функции $f(x)$равен приращению первообразной $F(x)$ на этом отрезке, то есть

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Для нахождения определенного интеграла функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$служит команда

integrate(y,x,a,b)

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_0^1 (3x^2 + 1)dx$.

Команды:

y: 3*x^2+1$

i:integrate(y,x,0,1);

Результат:

(i) 2.

Ответ: 2.

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$

Команды:

y: 1/cos(x)^2$

i:integrate(y,x,0,%pi/4);

Результат:

(i) 1.

Ответ: 1.

Пример 3. Вычислить интеграл $\int_{1}^{5} 3\sqrt{2x-1}dx$.

Команды:

y: 3*sqrt(2*x-1)$

i:integrate(y,x,1,5);

Результат:

(i) 26.

Ответ: 26.

Пусть на отрезке $[a;b]$задана непрерывная и неотрицательная функция $y=f(x)$. Тогда по геометрическому смыслу определенного интеграла площадь S криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y=f(x)$, прямыми $x=a, x=b$ и осью абсцисс $y=0$ определяется так:

$$S=\int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Пример 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=3x^2$, прямыми $x=0, x=1$ и $y=0$.

Решение.

Команды:

y: 3*x^2$

i:integrate(y,x,0,1);

Результат:

(i) 1.

Ответ: 1.

4.6. Интегралы с бесконечными пределами интегрирования

Пусть функция $y=f(x)$непрерывна при$x \geq a$. Несобственный интеграл функции $y=f(x)$ с бесконечным верхним пределом вычисляется по формуле

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx=\lim_{B\to+\infty}\int_{a}^{B} f(x)dx.$$

Пусть функция $y=f(x)$непрерывна при$x \leq b$. Несобственный интеграл функции $y=f(x)$ с бесконечным нижним пределом вычисляется по формуле

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{A\to-\infty} \int_{A}^{b} f(x)dx.$$

Интегралы с бесконечными пределами интегрирования можно вычислять при помощи констант **inf** и **minf** .

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{e^x}$.

Команды:

y: 1/exp(x)$

i:integrate(y,x,0,inf);

Результат:

(i) 1.

Ответ: 1.

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2}$

Команды:

y: 1/x^2$

i:integrate(y,x,minf,-1);

Результат:

(i) 1.

Ответ: 1.

4.7. Двойные интегралы

Рассмотрим функцию двух переменных $z = z(x, y)$. Двойной интеграл функции $z = z(x, y)$ по прямоугольной области D можно привести к повторному интегралу по формуле

$$\iint_{(D)} z(x, y)\ dxdy \quad = \int_{a}^{b} dx \int_{c}^{d} z(x, y)dy.$$

Здесь a, b – границы изменения переменной $x; c, d$ – границы изменения переменной y; $D = \{(x, y)|\ a \le x \le b, c \le y \le d\}$.

В системе Maxima повторные интегралы можно вычислять путем последовательного «вложения» одной команды **integrate** в другую.

Пример 1. Вычислить интеграл $\iint\limits_{(D)}(2x+3y)\ dxdy$, если область D задана условиями: $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2$.

Команды:

z: 2*x+3*y$

i:integrate(integrate(z,y,0,2),x,0,1);

Результат:

(i) 8.

Ответ: 8.

Пример 2. Вычислить интеграл $\iint\limits_{(D)}(2x^{-2}y)\ dxdy$, если область D задана условиями: $1 \le x < +\infty, 0 \le y \le 2$.

Команды:

z: 2*x^(-2)*y $

i:integrate(integrate(z,y,0,2),x,1,inf);

Результат:

(i) 4.

Ответ: 4.

4.8. Задачи по теме «Математический анализ»

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-7x+10}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+3}{x^2-4x+3}$.

2. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+2}{4x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+3}{x^2+1}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2-x+4}{2x^3-x^2+1}$.

3. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg9x}{3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arcsin4x}{5x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{arcsin5x}$.

4. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{3x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4+x}{x}\right)^{x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{x}\right)^{x+2}$.

5. Вычислить односторонние пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 3+0} e^{\frac{1}{3-x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 2-0} 2^{\frac{1}{x-2}}$; в) $\lim\limits_{x\to 5+0} 3^{\frac{1}{x-5}}$.

6. Найти асимптоты графика функции:

а) $y=\dfrac{1+3x}{2+x}$; б) $y=\dfrac{1+x^2}{1+x^2}$; в) $y=\dfrac{3x^3}{2+x^4}$.

7. Найти производные:

а) $y=(x-1)(x+2)$; б) $y=(x^2-1)e^x$; в) $y=(lnx+x)sinx$.

8. Найти производные:

а) $y=\dfrac{x^2}{2x^2+1}$; б) $y=\dfrac{e^x}{x+1}$; в) $y=\dfrac{lnx}{sinx+1}$.

9. Найти производные степенно-показательных функций:

а) $y=x^{2x+1}$; б) $y=x^{sinx}$; в) $y=(2x+1)^{sinx}$.

10. Исследовать на экстремум функции:

а) $y=x^3-3x+4$; б) $y=x^3-3x^2+1$; в) $y=x^3-9x^2+15x$.

11. Найти все частные производные первого порядка функции:

а) $z=x^3y^2-2xy$ б) $z=e^{2x+5y}$; в) $z=\ln(4x+3y)$.

12. Найти интегралы:

а) $\int (3x^2 + 2x + 1)dx$; б) $\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x}\right) dx$; в) $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$.

13. Найти интегралы:

а) $\int 16(2x+1)^7 dx$; б) $\int 9e^{3x+1} dx$; в) $\int 8\cos(4x+3)\, dx$.

14. Найти интегралы:

а) $\int \frac{2x}{x^2+4} dx$; б) $\int \frac{3x^2}{x^3+1} dx$; в) $\int \frac{8x^3}{x^4+4} dx$.

15. Найти интегралы:

а) $\int 10sin^4 x \cdot cosxdx$; б) $\int 8cos^3 x \cdot sinxdx$; в) $\int \frac{sinx}{cos^2 x} dx$.

16. Найти интегралы:

а) $\int (x+1)e^x dx$; б) $\int (x+2)cosxdx$; в) $\int x^2 e^x dx$.

17. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int_{-1}^{2} (x^2 + 2x + 1)dx$; б) $\int_{1}^{2} \frac{3dx}{3x-2}$; в) $\int_{0}^{2} \frac{2dx}{4+x^2}$.

18. Вычислить площади фигур, ограниченных заданными линиями:

а) $y = x^2 + 2$, $x = 0, x = 2, y = 0$; б) $y = 4x - x^2$, $y = 0$; в) $y = 2 + x - x^2$, $y = 0$.

19. Найти интегралы с бесконечными пределами:

а) $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$; б) $\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{e^{2x}}$; в) $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+1}$.

20. Вычислить двойные интегралы по заданной области:

а) $\iint\limits_{(D)} (2x + 4y)\, dxdy$, D – прямоугольник $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$;

б) $\iint\limits_{(D)} 3xydxdy$, D – прямоугольник $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2$;

в) $\iint\limits_{(D)} 2x^2y^3 dxdy$, D – прямоугольник $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2$.

5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

5.1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка в общем случае имеет вид:

$$G(x, y, y') = 0.$$

Здесь G – некоторая заданная функция; x, y, y' – соответственно независимая переменная, искомая функция и производная искомой функции.

Если дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$y' = f(x, y),$$

то оно называется уравнением, *разрешенным относительно производной.* Здесь $f(x, y)$ – некоторая заданная функция.

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется решение

$$y = \varphi(x, C),$$

которое содержит произвольную постоянную C.

Частным решением дифференциального уравнения первого порядка называется решение, полученное из общего решения в результате задания конкретного числового значения константы C.

В системе Maxima on Android для решения дифференциальных уравнений первого порядка можно воспользоваться командой

ode2(eqn,y,x).

Здесь **eqn** – заданное дифференциальное уравнение, **y** – искомая функция, **x** – независимая переменная.

По умолчанию все переменные в системе Maxima являются независимыми. Поэтому перед заданием дифференциального уравнения, следует объявить, что переменная *y* зависит от *x*

depends(y,x).

Приведем примеры решения простейших дифференциальных уравнений первого порядка, представленных в виде

$$y' = f(x, y).$$

Здесь y' – производная искомой функции, $f(x, y)$ – заданная функция.

Пример 1. Решить дифференциальное уравнение $y' = 2x$.

Дифференциальное уравнение запишем под именем **eqn**, а общее решение дифференциального уравнения – под именем **com**.

depends(y,x)$

eqn:diff(y,x)=2*x$

com:ode2(eqn,y,x);

Результат:

(com) $y = x^2 + \%c.$

В системе Maxima произвольная постоянная, входящая в общее решение дифференциального уравнения, обозначается двумя символами: «%c».

Ответ: $y = x^2 + C.$

Существует еще один способ задания дифференциального уравнения: использование «замороженной» производной

eqn:'diff(y,x)=2*x$.

Апостроф перед командой **diff** означает, что дифференцирование на данном этапе запрещено. В этом случае команду **depends** можно не писать.

Для нахождения произвольной постоянной C, как правило, имеется начальное условие

$$y(x_0) = y_0.$$

Здесь x_0, y_0 – заданные числа. Задача нахождения частного решения дифференциального уравнения с заданным начальным условием называется задачей Коши.

Для задания начального условия используется команда

ic1(com, x=x0, y=y0).

Здесь **com** – общее решение; **x0, y0** – начальные значения переменных **x** и **y** соответственно.

Пример 2. Найти решение дифференциального уравнения

$$y' = 3x^2 + 2,$$

удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1.$

Результат решения задачи Коши запишем под именем **par**.

Команды:

```
depends(y,x)$
eqn: diff(y,x)=3*x^2+2$
com:ode2(eqn,y,x)$
par:ic1(com,x=0,y=1);
```

Результат:

(par) $y = x^3 + 2x + 1$.

Ответ: $y = x^3 + 2x + 1$.

Дифференциальное уравнение первого порядка называется *уравнением с разделяющимися переменными,* если оно может быть представлено в виде

$$y' = f(x)g(y),$$

т. е. в правой части равенства каждая из функций зависит только от одного аргумента.

Пример 3. Найти решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными $y' = \frac{y}{x}$.

Команды:

```
depends(y,x)$
eqn: diff(y,x)=y/x$
com:ode2(eqn,y,x)$
```

Результат:

(com) $y = \%cx$.

Ответ: $y = Cx$.

Уравнение с разделяющимися переменными также может быть представлено в форме

$$M(x)N(x)dx + P(x)Q(y)dy = 0.$$

Здесь $M(x), N(x), P(x), Q(y)$ – некоторые заданные функции.

Пример 4. Найти решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными $3x^2dx + 2ydy = 0$.

Команды:

```
depends(y,x)$
eqn: 3*x^2*diff(x)+2*y*diff(y)=0$
com:ode2(eqn,y,x);
```

Результат:

(com) $-\frac{y^2}{3} = \frac{x^3}{3} + \%c.$

Ответ: $\frac{x^3}{3} - \frac{y^2}{3} = C.$

Очевидно, что без потери общности решение последнего уравнения может быть записано в виде

$$x^3 - y^2 = C.$$

Дифференциальное уравнение первого порядка называется *линейным*, если оно имеет вид

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – непрерывные функции переменной x.

Если правая часть $Q(x)$ равна нулю, то такое уравнение называется *линейным однородным дифференциальным уравнением*; если правая часть $Q(x)$ не равна нулю, то такое уравнение называется *линейным неоднородным дифференциальным уравнением.*

Пример 5. Найти решение линейного дифференциального уравнения первого порядка $y' - \frac{4}{x}y = 2x$.

Команды:

depends(y,x)$

eqn: diff(y,x)-4/x*y=2*x$

com:ode2(eqn,y,x);

Результат:

(com) $y = \left(\%c - \frac{1}{x^2}\right)x^4.$

Ответ: $y = Cx^4 - x^2$.

5.2. Дифференциальные уравнения второго порядка

Рассмотрим линейное *однородное* дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' + py' + qy = 0,$$

где p, q – некоторые числа.

Общим решением этого уравнения является функция

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

где y_1, y_2 – два линейно независимых частных решения данного уравнения; C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Для нахождения частных решений y_1, y_2 используется следующий прием. Предположим, что

$$y = e^{\lambda x},$$

где λ – некоторое число. Подставим это выражение в исходное дифференциальное уравнение. В результате получим

$$e^{\lambda x}(\lambda^2 + p\lambda + q) = 0.$$

Множитель $e^{\lambda x}$не равен нулю ни при каком значении λ, следовательно,

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

Полученное алгебраическое уравнение называется *характеристическим уравнением* данного дифференциального уравнения. Справедлива следующая *теорема*:

1. Если характеристическое уравнение имеет различные действительные корни λ_1 и λ_2, то общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

2. Если характеристическое уравнение имеет только один корень λ, то общее решение имеет вид

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda x}.$$

3. Если характеристическое уравнение не имеет действительных корней, то общее решение имеет вид

$$y = e^{\alpha x}(C_1 sin\beta x + C_2 cos\beta x),$$

где

$$\alpha = -\frac{p}{2}, \;\; \beta = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2}.$$

Для решения дифференциальных уравнений второго порядка используется та же команда, что и для решения дифференциальных уравнений первого порядка

ode2(eqn,y,x).

Здесь **eqn** – заданное дифференциальное уравнение, **y** – искомая функция, **x** – независимая переменная.

Пример 1. Найти решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Команды:

depends(y,x)$

eqn: diff(y,x,2)-3*diff(y,x)+2*y=0$ com:ode2(eqn,y,x);

Результат:

(com) $\quad y = \%k1\%e^{2x} + \%k2\%e^{x}$.

Здесь $\%k1, \%k2, \%e$ – соответственно обозначения произвольных постоянных и числа e в системе Maxima.

Ответ: $y = C_1e^{2x} + C_2e^{x}$.

Пример 2. Найти решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка $y'' - 2y' + y = 0$.

Команды:

depends(y,x)$

eqn: diff(y,x,2)-2*diff(y,x)+y=0$ com:ode2(eqn,y,x);

Результат:

(com) $\quad y = (\%k2\, x + \%k1)\%e^{x}$.

Ответ: $y = (C_1 + C_2x)e^{x}$.

Пример 3. Найти решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка $y'' + 9y = 0$.

Команды:

depends(y,x)$

eqn: diff(y,x,2)+9*y=0$ com:ode2(eqn,y,x);

Результат:

(com) $\quad y = \%k1\sin(3x) + \%k2\cos(3x)$.

Ответ: $y = C_1 sin3x + C_2 cos3x$.

Линейное *неоднородное* дифференциальное уравнение второго порядка в общем случае имеет вид

$$y'' + py' + qy = r(x),$$

где p и q – заданные числа, $r(x)$ – заданная функция.

Справедлива следующая *теорема*: Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения y равно сумме общего решения $y^{(0)}$ соответствующего однородного уравнения и частного решения $y^{(*)}$ неоднородного уравнения: $y = y^{(0)} + y^{(*)}$.

Для нахождения $y^{(*)}$ «вручную» используется метод подбора частных решений по виду правой части $r(x)$.

Пример 4. Найти решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка $y'' - 3y' + 2y = 1 + 6x$.

Команды:

depends(y,x)$

eqn: diff(y,x,2)-3*diff(y,x)+2*y=1+6*x$ com:ode2(eqn,y,x)

Результат:

(com) y = %k1%e^{2x} + %k2%e^{x} + $3x + 5$.

Ответ: $y = C_1e^{2x} - C_2e^{x} + 3x + 5$.

Пример 5. Найти решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка $y'' - 3y' + 2y = 8e^{3x}$.

Команды:

depends(y,x)$

eqn: diff(y,x,2)-3*diff(y,x)+2*y=8*exp(3*x)$ com:ode2(eqn,y,x);

Результат:

(com) y = 4%e^{x} + %k1%e^{2x} + %k2%e^{x}.

Ответ: $y = C_1e^{2x} + C_2e^{x} + 4e^{x}$.

Пример 6. Найти решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка $y'' - 3y' + 2y = 10sinx$.

Команды:

depends(y,x)$

eqn: diff(y,x,2)-3*diff(y,x)+2*y=10*sin(x)$ com:ode2(eqn,y,x);

Результат:

(com) $\quad y = \sin(x) + 3\cos(x) + \%k1\%e^{2x} + \%k2\%e^{x}$.

Ответ: $y = C_1e^{2x} + C_2e^{x} + sinx + 3cosx$.

5.3. Задачи по теме «Дифференциальные уравнения»

1. Решить дифференциальные уравнения:

а) $y' = 3x^2 + 2x + 1$; б) $y' = e^x + 20x^3$; в) $y' = sinx + 6x$.

2. Решить задачу Коши:

а) $y' = 2x + 1$, $y(0) = 3$; б) $y' = e^x + 3$, $y(0) = 1$; в) $y' = 2cos^2x - 1$, $y(0) = 3$.

3. Решить уравнения с разделяющимися переменными:

а) $y' = 4xy$; б) $y' = ycosx$; в) $y' = -ysinx$;

г) $y' = \frac{y}{x+1}$; д) $y' = \frac{y-1}{x}$; е) $y' = \frac{2x}{3y^2}$.

4. Решить уравнения с разделяющимися переменными:

а) $xdx + ydy = 0$; б) $xydx + (x+1)dy = 0$; в) $2y^2dy - x^2dx = 0$.

5. Решить линейные дифференциальные уравнения первого порядка:

а) $y' - 4y = e^{4x}$; б) $y' - 2y = xe^{2x}$; в) $y' + 2y = xe^{-x}$.

6. Решить линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка:

а) $y'' - 4y' + 3y = 0$; б) $y'' - 3y' - 4y = 0$; в) $y'' + 8y' + 12y = 0$.

7. Решить линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка:

а) $y'' + 4y' = 4$; б) $y'' - y = -x$; в) $y'' - 4y' + 3y = 9x$.

8. Решить линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка:

а) $y'' - 4y' + 3y = 9e^{4x}$; б) $y'' - y = 6e^x$; в) $y'' + 2y' + y = 8e^{2x}$;

г) $y'' - 2y' + y = 6e^x$; д) $y'' - 4y = 5cosx$; е) $y'' + 16y = 30sinx$.

6. РЯДЫ

6.1. Числовые ряды

Пусть $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ – бесконечная числовая последовательность. Выражение

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

называется бесконечным *числовым рядом*, а числа $u_1, u_2, \dots, u_n$– членами ряда. Для сокращения записи ряд часто записывают в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Сумму первых n членов ряда обозначают S_n и называют n-й *частичной суммой ряда*:

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

Ряд называется *сходящимся*, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Число S называется *суммой ряда*. Если конечного предела последовательности частичных сумм не существует, то ряд называется *расходящимся.* Например, из элементарного курса математики известно, что геометрический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} uq^{n-1}$$

сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geq 1$.

Необходимый признак сходимости. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то предел его общего члена u_n при $n \to \infty$ равен нулю.

Пример 1. Проверить выполнение необходимого признака сходимости для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+6}{n^3-1}.$$

Команда:

limit((n+6)/(n^3-1),n,inf);

Результат:

0.

Ответ: необходимый признак сходимости выполняется.

Следует подчеркнуть, что из условия $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ еще не следует, что ряд сходится. Например, для гармонического ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

это условие выполняется. Тем не менее, как известно, этот ряд является расходящимся.

Гармонический ряд представляет собой частный случай *обобщенного гармонического ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p},$$

где p – некоторое число. Можно доказать, что обобщенный гармонический ряд сходится при $p > 1$ и расходится при $p \le 1$.

Сформулируем основные признаки сходимости рядов с *положительными членами*.

Предельный признак сравнения. Пусть даны два ряда:

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots,$$

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots.$$

Если существует конечный предел отношения их общих членов:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k \neq 0,$$

то эти ряды одновременно сходятся или одновременно расходятся.

Пример 2. При помощи предельного признака сравнения исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n+1}{3n^3+2}.$$

Сравним данный ряд с «эталонным» сходящимся рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Команды:

u:(6*n+1)/(3*n^3+2); v:1/n^2; limit(u/v,n,inf);

Результат:

2.

Ответ: ряд сходится.

Признак Даламбера. Пусть дан ряд

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots.$$

Если существует конечный предел отношения

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \neq 0,$$

то при $l < 1$ ряд сходится, а при $l > 1$ ряд расходится. Если $l = 1$, то вопрос о сходимости ряда остается нерешенным.

Пример 3. При помощи признака Даламбера исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{3^n}.$$

Команды:

u(n):=n*(n+1)/3^n; limit(u(n+1)/u(n),n,inf);

Результат:

$\frac{1}{3}$.

Ответ: ряд сходится.

Интегральный признак сходимости. Пусть дан ряд

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots.$$

Если $u_n = f(n)$, где $f(x)$ – непрерывная, положительная и монотонно убывающая при $x \geq 1$функция, то исходный ряд и несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

Пример 4. При помощи интегрального признака сходимости исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Вопрос о сходимости данного ряда равнозначен вопросу о сходимости несобственного интеграла

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}.$$

Команда:

integrate(1/x^2,x,1,inf);

Результат:

1.

Ответ: ряд сходится.

Рассмотрим ряды, члены которых имеют чередующиеся знаки (знакочередующиеся ряды).

Признак Лейбница. Если члены знакочередующегося ряда убывают по абсолютной величине и предел абсолютной величины его общего члена при $n \to \infty$ равен нулю, т.е.

$$\lim_{n \to \infty} |u_n| = 0,$$

то ряд сходится.

Пример 5. При помощи признака Лейбница исследовать на сходимость знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1^n)}{2n+1}.$$

Очевидно, что члены знакочередующегося ряда убывают по абсолютной величине.

Команда:

limit(1/(2*n+1),n,inf);

Результат:

0.

Ответ: знакочередующийся ряд сходится.

Ряд называется *абсолютно сходящимся*, если сходится как сам ряд, так и ряд, составленный из абсолютных величин его членов. Ряд называется *условно сходящимся*, если сам ряд сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится.

Пример 6. Исследовать на абсолютную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1^n)}{2n+1}.$$

В предыдущем примере было показано, что данный ряд сходится. Для исследования сходимости ряда, составленного из абсолютных величин, воспользуемся предельным признаком сравнения. В качестве «эталонного» ряда выберем гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

который, как известно, является расходящимся.

Команды:

u:1/(2*n+1); v:1/n; limit(u/v,n,inf);

Результат:

$$\frac{1}{2}.$$

Ответ: ряд является условно сходящимся.

6.2. Ряд Тейлора

Пусть функция $f(x)$ является бесконечно дифференцируемой в окрестности точки $x = a$. Степенной ряд

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x-a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

называется рядом Тейлора функции $f(x)$.

Частным случаем ряда Тейлора является ряд Маклорена ($a = 0$):

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

Разложение функции $y = f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $(x - a)$ осуществляется по команде

taylor(y,x,a,n)

Здесь n – порядок разложения.

Пример 1. Разложить функцию $f(x) = \frac{1}{1-x}$ в ряд Маклорена до члена с x^5.

Команды:

y:1/(1-x)$ r:taylor(y,x,0,5);

Результат:

(r) $\quad 1 + \mathrm{x} + \mathrm{x}^2 + \mathrm{x}^3 + \mathrm{x}^4 + \mathrm{x}^5 + \cdots$

Ответ: $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$.

Пример 2. Разложить функцию $f(x) = \sqrt{1+x}$ в ряд Маклорена до члена с x^3.

Команды:

y:sqrt(1+x)$ r:taylor(y,x,0,3);

Результат:

(r) $\quad 1 + \frac{\mathrm{x}^2}{2} - \frac{\mathrm{x}^3}{8} + \frac{\mathrm{x}^4}{16} + \cdots$

Ответ: $1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{16} + \cdots$.

Пример 3. Разложить функцию $f(x) = lnx$ в ряд Тейлора по степеням $(x - 1)$ до члена с $(x - 1)^5$.

Команды:

y:log(x)$ r:taylor(y,x,1,5);

Результат:

$$(r) \qquad \mathrm{x}-1-\frac{(\mathrm{x}-1)^2}{2}+\frac{(\mathrm{x}-1)^3}{3}-\frac{(\mathrm{x}-1)^4}{4}+\frac{(\mathrm{x}-1)^5}{5}\dots$$

Ответ: $x-1-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\frac{(x-1)^5}{5}\dots$.

6.3. Задачи по теме «Ряды»

1. Проверить выполнение необходимого признака сходимости для ряда.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)$.

2. При помощи предельного признака сравнения исследовать на сходимость ряд.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{4^n+6}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{8n+7}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3n^2+1}$.

3. При помощи признака Даламбера исследовать на сходимость ряд

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{7^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{3^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^n}{4n+3}$.

4. При помощи интегрального признака исследовать на сходимость ряд.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\frac{3}{2}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2+1}$.

5. При помощи признака Лейбница исследовать на сходимость ряд

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1^n)}{4^n}$. б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1^n)}{4n+1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1^n)}{n^2+1}$.

6. Исследовать на абсолютную сходимость ряд

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1^n)}{n^3+8}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1^n)}{2n+3}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1^n)}{2^n+3}$.

7. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Маклорена до члена с x^3.

а) $f(x)=e^x$; б) $f(x)=sinx$; в) $f(x)=cosx$.

8. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$ до члена с $(x-1)^3$.

а) $f(x)=x^{-1}$; б) $f(x)=\sqrt{x}$; в) $f(x)=x^{-2}$.

7. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

7.1. Случайные события

Событие – это результат некоторого испытания. Например, подбрасывание монеты – это испытание, а выпадение герба – событие.

Если событие обязательно произойдет в результате испытания, то оно называется *достоверным*. Например, если в урне находятся только черные шары, то извлечение из нее черного шара – достоверное событие.

Невозможное событие – это событие, которое заведомо не может произойти в результате испытания. Например, если в урне находятся только черные шары, то извлечение из нее белого шара – невозможное событие.

Случайное событие – это событие, которое в результате испытания может произойти, а может не произойти. Например, если в урне находятся три белых и пять черных шаров, то извлечение белого шара – случайное событие.

События называются *равновозможными*, если нет оснований считать, что в результате испытаний одно из них происходит чаще других. Например, выпадение орла или числа при подбрасывании монеты – равновозможные события.

События называются *несовместными*, если наступление одного из них исключает наступление других событий в одном и том же испытании. В противном случае события называются совместными.

Несколько событий образуют *полную группу событий*, если они являются попарно несовместными и какое-то из них обязательно произойдет.

При классическом определении *вероятностью случайного события* называют отношение числа m исходов, благоприятствующих этому событию, к общему числу n всех равновозможных несовместных исходов, образующих полную группу:

$$p = \frac{m}{n}.$$

В задачах теории вероятностей часто используются формулы комбинаторики. Основными понятиями комбинаторики являются перестановки, сочетания и размещения.

Перестановками множества из n элементов называются комбинации из n различных элементов, различающиеся порядком их следования. Число перестановок из n элементов обозначается символом P_n и вычисляется по формуле

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$$

В системе Maxima команда вычисления количества всех возможных перестановок из n элементов записывается также, как в математике, т. е. в виде $n!$. Допускается также следующая форма записи данной команды:

factorial (n).

Пример 1. Буквы Р, Т, О написаны на отдельных карточках. Ребенок берет карточки в произвольном порядке и прикладывает их друг к другу. Какова вероятность того, что получится слово «ТОР»?

Число всех равновозможных исходов $n = P_3 = 3!$. Число благоприятных исходов m=1. Таким образом, вероятность события равна

$$P = \frac{m}{n} = \frac{1}{P_3} = \frac{1}{3!}.$$

Команда:

P: $\mathbf{1/3}$**!;**

Результат:

$(P) \qquad \frac{1}{6}.$

Ответ: $\frac{1}{6}$.

Сочетаниями множества из n элементов по k элементов в каждом называются комбинации, которые составлены из данных n элементов по k элементов в каждом и отличаются хотя бы одним элементом. Число сочетаний обозначается символом C_n^k и вычисляется по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

В системе Maxima для нахождения числа сочетаний множества из n элементов по k элементов каждом используется команда

binomial(n,k).

Пример 2. Из 10 студентов половина имеет спортивные разряды. Какова вероятность того, что выбранные наудачу три студента являются разрядниками?

Число всех равновозможных исходов: $n = C_{10}^3$. Число благоприятных исходов: $m = C_5^3$. Таким образом, вероятность события определяется так:

$$P = \frac{m}{n} = \frac{C_5^3}{C_{10}^3}.$$

Команда:

P:binomial(5,3)/binomial(10,3);

Результат:

$(P) \quad \frac{1}{12}$.

Ответ: $\frac{1}{12}$.

Размещениями множества из n различных элементов по k элементов в каждом называются комбинации, которые составлены из данных n элементов по k элементов в каждом и отличаются либо самими элементами, либо порядком элементов. Число размещений обозначается символом A_n^k и вычисляется по формуле

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Величины P_n, C_n^k и A_n^k связаны очевидным равенством:

$$A_n^k = P_k \cdot C_n^k = k! \cdot C_n^k.$$

Последняя формула может быть использована для нахождения числа размещений в системе Maxima:

k!*binomial(n,k).

Пример 3. На пяти карточках написаны цифры 1, 2, 3, 4, 5. Карточки перемешиваются. Наудачу, одну за другой, выбирают две карточки и укладывают их в порядке появления, затем читается двузначное число. Какова вероятность того, что получится число 32?

Число всех равновозможных исходов: $n = A_5^2$. Число благоприятных исходов: m=1. Таким образом, вероятность события определяется так:

$$P = \frac{m}{n} = \frac{1}{A_5^2}.$$

Команда:

$P: 1/(2! * \text{binomial}(5,2));$

Результат:

$(P) \quad \frac{1}{20}.$

Ответ: $\frac{1}{20}$.

Вероятность того, что что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна *p*, событие наступит ровно *k* раз, вычисляется по *формуле Бернулли*

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k},$$

где $q = 1 - p$.

Пример 4. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,75. Какова вероятность того, что при 10 выстрелах мишень будет поражена ровно 8 раз?

Решение:

Команды:

$\boldsymbol{p}$: 0.75$ q:1-p$ n:10$ k:8$

P:binomial(n,k)*p^k*q^(n-k);

Результат:

$(P) \quad 0.2815675735473633.$

Округлив полученный результат до двух значащих цифр, получим

$P_{10}(8) = 0{,}28.$

Ответ: 0,28.

Если число испытаний n велико, то для нахождения вероятности $P_n(k)$ можно воспользоваться *локальной теоремой Лапласа*:

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Здесь

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Пример 5. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,75. Какова вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена ровно 80 раз?

Команды:

$\boldsymbol{p}$: $\mathbf{0.75}$$ q:1-p$ n:100$ k:80$

fi(x):=1/sqrt(2*%pi)*exp(-x^2/2)$

P:1/sqrt(n*p*q)*fi((k-n*p)/sqrt(n*p*q)), numer;

Результат:

(P) 0.04730202956378367.

Округлив полученный результат до двух значащих цифр, получим

$P_{100}(80) = 0{,}047.$

Ответ: 0,047.

Оценим погрешность, полученную при использовании локальной теоремы Лапласа, применив формулу Бернулли для данной задачи.

Команды:

$\boldsymbol{p}$: $\mathbf{0.75}$$ q:1-p$ n:100$ k:80$

P:binomial(n,k)*p^k*q^(n-k);

Результат:

(P) 0.04930064033767721.

Округлив полученный результат до двух значащих цифр, получим

$P_{100}(80) = 0{,}049.$

Таким образом, погрешность, полученная в случае использования локальной теоремы Лапласа, составляет чуть более четырех процентов.

Если при больших значениях n величина p мала, то для вычисления вероятности $P_n(k)$ можно воспользоваться *приближением Пуассона*:

$$P_n(k) = \frac{(np)^k}{k!} e^{-np}.$$

Пример 6. На курсе учится 147 студентов. Какова вероятность того, что 1 января является днем рождения одновременно для трех студентов данного курса (предполагается, что в году 365 дней)?

По условию $n = 147$, а вероятность родиться 1 января для любого из студентов курса составляет $p = \frac{1}{365}$. Таким образом, число n велико, а значение p мало, поэтому воспользуемся приближением Пуассона.

Команды:

p: 1/365$ q:1-p$ n:147$ k:3$

P: (n*p)^k/k!*exp(-n*p), numer;

Результат:

(P) 0.007278041369182608.

Округлив полученный результат до двух значащих цифр, получим

$P_{147}(3) = 0{,}0073.$

Ответ: 0,0073.

Оценим погрешность, полученную при использовании приближения Пуассона, применив формулу Бернулли для данной задачи.

Команды:

p: 1/365$ q:1-p$ n:147$ k:3$

P:binomial(n,k)*p^k*q^(n-k), numer;

Результат:

(P) 0.007185137983467028.

Округлив полученный результат до двух значащих цифр, получим

$P_{147}(3) = 0{,}0072.$

Таким образом, погрешность, полученная в случае применения приближения Пуассона, составляет менее двух процентов.

Если число испытаний n велико, то для определения вероятности того, что событие произойдет от k_1 до k_2 раз, можно воспользоваться *интегральной теоремой Лапласа*:

$$P_n(k_1, k_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

где

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}};\ \ x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Пример 7. Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна $p = 0{,}8$. Какова вероятность того, что событие появится не менее 75 раз и не более 90 раз?

Команды:

n: 100$ k1: 75$ k2: 90$

p:0.8$ q:1-p$

x1: (k1-n*p)/sqrt(n*p*q);

x2: (k2-n*p)/sqrt(n*p*q);

P:1/sqrt(2*%pi)*integrate(exp(-x^2/2),x,x1,x2);

Результаты:

(x1) -1.25

(x2) $2.5.$

(P) $0.8881405610073689.$

Округлив полученный результат до двух значащих цифр, получим

$P_{100}(75{,}90) = 0{,}89.$

Ответ: 0,89.

Оценим погрешность, полученную при использовании интегральной теоремы Лапласа, применив формулу Бернулли для данной задачи. Вероятность того, что что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p, событие произойдет от k_1 до k_2 раз, такова:

$$P_n(k_1) + P_n(k_1 + 1) + \cdots + P_n(k_2),$$

где

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}.$$

Команды:

n: 100$ k1: 75$ k2: 90$

p:0.8$ q:1-p$

C:makelist(binomial(n,k),k,k1,k2)$

```
pq:makelist(p^k*q^(n-k),k,k1,k2)$
P:C.pq;
```

Результат:

(P) 0.9101910543702194.

Округлив полученный результат до двух значащих цифр, получим

$P_{100}(75,90) = 0,91.$

Таким образом, погрешность, полученная при использовании интегральной теоремы Лапласа, составляет чуть более двух процентов.

7.2. Случайные величины

Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед не известное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

В состав мобильной версии Maxima – Maxima on Android – входит пакет **distrib**, содержащий набор команд для нахождения вероятностных характеристик как дискретных, так и непрерывных случайных величин. Чтобы использовать данный пакет, его надо загрузить по команде

load ("distrib").

В табл. 4 приведены команды нахождения вероятностей для наиболее распространенных *законов распределения дискретных случайных величин*.

Таблица 4. Команды нахождения значений $P(X = k)$

Команда	*Описание*
pdf_binomial(k,n,p)	Биномиальный закон: k – число «успехов» n – число испытаний p – вероятность «успеха»
pdf_poisson(k,m)	Закон Пуассона: k – число «успехов» m=n·p n – число испытаний p – вероятность «успеха»
pdf_geometric(k,p)	Геометрический закон: k – число «неудач» до первого успеха p – вероятность «успеха»
pdf_hypergeometric(k,n1,n2,n)	Гипергеометрический закон: k – количество выбранных элементов с признаком A n1 – количество элементов с признаком A n2 – количество элементов без признака A n – количество выбранных элементов

Чтобы получить в общем виде формулы, соответствующие перечисленным законам распределения, можно воспользоваться командами:

load ("distrib")$

pdf_binomial(k,n,p);

pdf_poisson(k,m);

pdf_geometric(k,p);

pdf_hypergeometric(k,n1,n2,n);

Пример 1. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Найти вероятность того, что в одном опыте откажут ровно два элемента.

Случайная величина – число отказавших элементов – подчиняется биномиальному закону распределения. По условиям задачи имеем

$$n = 3; k = 2;\ p = 0{,}1.$$

Команды:

load ("distrib")$

fpprintprec:3$

n:3$ k=2 $ p:0.1$

P:pdf_binomial(k,n,p);

Результат:

(P) 0,027.

Ответ: 0,027.

Пример 2. Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равна 0,0002. Найти вероятность того, что на базу прибудут 3 негодных изделия.

Случайная величина – количество негодных изделий – подчиняется закону распределения Пуассона. По условию имеем

$$n = 5000, k = 3, \quad p = 0{,}0002.$$

Команды:

load ("distrib")$

fpprintprec:3$

n:5000 $ p:0.0002$ k:3$

P: pdf_poisson(k,n*p);

Результат:

(P) 0.0613.

Ответ: 0,0613.

Пример 3. Из орудия производится стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания в цель p = 0,6. Найти вероятность того, что попадание произойдет при третьем выстреле.

Случайная величина – количество испытаний до первого попадания в цель – подчиняется геометрическому закону распределения. По условию имеем

$$k = 3, p = 0{,}6.$$

load ("distrib")$

fpprintprec:3$

p:0.6$ k:3$

P: pdf_geometric(k-1,p);

Результат:

(P) 0,096

Ответ: 0,096

Пример 4. Среди 50 изделий 20 окрашенных. Найти вероятность того, что среди наудачу извлеченных 5 изделий окажется ровно 3 окрашенных.

Случайная величина – количество извлеченных окрашенных изделий – подчиняется гипергеометрическому закону. По условию имеем

$$k = 3, n_1 = 20, n_2 = 50 - n_1 = 30, n = 5.$$

Команды:

load ("distrib")$

fpprintprec:3$

k:3$ n1:20$ n2:30$ n:5$

P: pdf_hypergeometric(k,n1,n2,n),numer;

Результат:

(P) 0.234

Ответ: 0,234.

В табл. 5 приведены команды нахождения значений функции плотности распределения вероятностей для наиболее распространенных *непрерывных случайных величин*.

Таблица 5. Команды нахождения значений функции плотности распределения вероятностей непрерывных случайных величин

Команда	*Описание*
pdf_continuous_uniform(x,a,b)	Равномерное распределение: x – значение случайной величины a – левая граничная точка b – правая граничная точка
pdf_normal(x,m,s)	Нормальное распределение x – значение случайной величины m – математическое ожидание s – среднее квадратичное отклонение
pdf_exp(x,m)	Показательное распределение x – значение случайной величины m – параметр показательного распределения

Чтобы получить в общем виде формулы, соответствующие перечисленным функциям плотности распределения вероятностей, можно воспользоваться командами

load ("distrib")$

pdf_continuous_uniform(x,a,b);

pdf_normal(x,m,s);

pdf_exp(x,m);

Команды вычисления *математического ожидания, дисперсии и среднего квадратичного отклонения* непрерывных случайных величин имеют соответственно вид:

– для равномерного закона распределения (a, b – границы отрезка):

mean_continuous_uniform(a,b);

var_continuous_uniform(a,b);

std_continuous_uniform(a,b);

– для нормального закона распределения (m, s – математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение):

mean_ normal(m,s);

var_ normal(m,s);

std_ normal(m,s);

– для показательного закона распределения (m – параметр показательного распределения):

mean_ exp(m);

var_ exp(m);

std_ exp(m).

Пример 5. Случайная величина равномерно распределена на отрезке [3;9]. Вычислить математическое ожидание MX.

Команды:

load ("distrib")$

a:3$ b:9$

MX: mean_continuous_uniform(a,b);

Результат:

(MX) 6.

Ответ: $MX = 6$.

Пример 6. Случайная величина распределена по нормальному закону с математическим ожиданием MX=30 и дисперсией DX=2. Построить выражение для плотности распределения вероятности.

Решение.

Команды:

load ("distrib")$

MX:30$ DX:2$

f: pdf_normal(x,MX,sqrt(DX));

Результат:

$$(f) \quad \frac{\%e^{-\frac{(x-30)^2}{4}}}{2\sqrt{\pi}}.$$

Ответ: $f(x) = \dfrac{e^{-\frac{(x-30)^2}{4}}}{2\sqrt{\pi}}$.

Пример 7. Случайная величина распределена по показательному закону с параметром $m = 0{,}25$. Вычислить математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение.

Команды:

```
load ("distrib")$
m:0.25$
MX:mean_exp(m);
SX:std_exp(m);
```

Результаты:

(MX) 4.0

(SX) 4.0

Ответ: $MX = 4; SX = 4$.

7.3. Задачи по теме «Теория вероятностей»

1. Буквы А, К, И, Н, М написаны на отдельных карточках. Ребенок берет карточки в произвольном порядке и прикладывает их друг к другу. Какова вероятность того, что получится слово «КАМИН»?
2. Из 30 школьников 20 человек имеют спортивные разряды. Какова вероятность того, что выбранные наудачу 10 школьников – разрядники?
3. На трех карточках написаны цифры 1, 2, 3. Карточки перемешиваются. Наудачу, одну за другой, достают две карточки и укладывают их в порядке появления, затем читается двузначное число. Какова вероятность, что получится число 21?
4. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 8 выстрелах мишень будет поражена ровно 5 раз.
5. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 80 выстрелах мишень будет поражена ровно 50 раз.
6. На курсе учится 220 студентов. Какова вероятность того, что 1 сентября является днем рождения одновременно для двух студентов данного курса (предполагается, что в году 365 дней)?

7. Вероятность появления события в каждом из 200 независимых испытаний постоянна и равна $p = 0{,}9$. Найти вероятность того, что событие появится не менее 150 раз и не более 190 раз.
8. Устройство состоит из четырех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Найти вероятность того, что в одном опыте откажут ровно три элемента.
9. Завод отправил на базу 500 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равно 0,0002. Найти вероятность того, что на базу прибудут два негодных изделия.
10. Из орудия производится стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания в цель $p = 0{,}5$. Найти вероятность того, что попадание произойдет при третьем выстреле.
11. Среди 50 изделий 20 окрашенных. Найти вероятность того, что среди наудачу извлеченных 10 изделий окажется ровно четыре окрашенных.
12. Случайная величина равномерно распределена на отрезке [1;5]. Вычислить математическое ожидание MX.
13. Случайная величина распределена по нормальному закону с математическим ожиданием MX=50 и дисперсией DX=1. Построить выражение для плотности распределения вероятности.
14. Случайная величина распределена по показательному закону с параметром $m = 0{,}5$. Вычислить математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение.

8. СТАТИСТИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ

8.1. Статистическое распределение выборки

Система Maxima содержит пакет **descriptive**, предназначенный для решения задач описательной статистики. Загрузка пакета осуществляется по команде

load ("descriptive").

Статистическим распределением выборки называется перечень вариант и соответствующих им частот. Для построения статистического ряда выборки, представленной списком list, используется команда

discrete_freq(list).

Пример 1. Пусть имеется выборка:

4, 7, 6, 1, 5, 10, 3, 6, 6, 6, 9, 9, 5, 2, 2, 7, 7, 4, 6, 7, 8, 4, 10, 10, 4.

Требуется построить статистическое распределение выборки.

Команды:

load(descriptive)$

list:[4, 7, 6, 1, 5, 10, 3, 6, 6, 6, 9, 9, 5, 2,   2, 7, 7, 4, 6, 7, 8, 4, 10, 10, 4] $

DF:discrete_freq(list);

Результат:

(DF) $\quad [[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10],[1,2,1,4,2,5,4,1,2,3]]$.

Ответ: $[[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10],[1,2,1,4,2,5,4,1,2,3]]$.

Статистическое распределение выборки можно задать также в виде последовательности интервалов и соответствующих им частот. Создание интервального статистического ряда выборки осуществляется по команде (m – число интервалов)

continuous_freq (list, m).

Для построения гистограмм в пакете **descriptive** имеется команда **histogram.** В простейших случаях синтаксис вызова этой команды имеет вид

histogram(list).

Данная команда имеет множество опций, из которых наиболее употребительными являются nclasses (по умолчанию 10) – число классов гистограммы;

frequency (по умолчанию absolute) – масштаб оси ординат, возможные значения: absolute (абсолютный), density (относительный), percent (процентный).

Пример 2. Пусть имеется выборка

4, 7, 6, 1, 5, 10, 3, 6, 6, 6, 9, 9, 5, 2, 2, 7, 7, 4, 6, 7, 8, 4, 10, 10, 4.

Требуется построить гистограмму относительных частот для $m = 4$.

Команды:

load(descriptive)$

list:[4, 7, 6, 1, 5, 10, 3, 6, 6, 6, 9, 9, 5, 2, 2, 7, 7, 4, 6, 7, 8, 4, 10, 10, 4] $

histogram(list,nclasses=4, frequency=density);

Результат выполнения команды представлен на рис. 7.

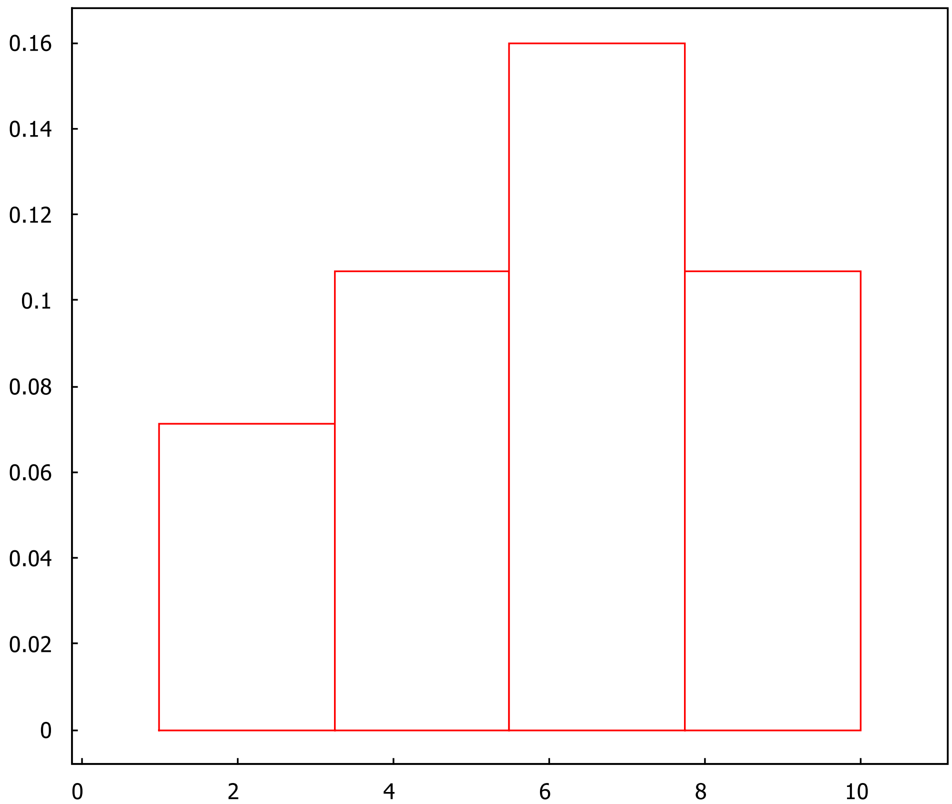

Рис. 7. Гистограмма относительных частот

Отметим, что при задании опции nclasses происходит автоматическое формирование интервального статистического ряда.

8.2. Статистические оценки параметров распределения

Пусть наблюдаются варианты $x_1, x_2, \dots, x_k$ с частотами $n_1, n_2, \dots, n_k$ соответственно.

Точечной называют оценку, которая определяется одним числом. Основными точечными оценками служат

выборочная средняя $\overline{x}$:

$$\overline{x} = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + \dots + x_k \cdot n_k}{n};$$

выборочная дисперсия $\overline{s}^2$:

$$\overline{s}^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 \cdot n_1 + (x_2 - \overline{x})^2 \cdot n_2 + \dots + (x_k - \overline{x})^2 \cdot n_k}{n};$$

выборочное среднее квадратичное отклонение $\overline{s}$:

$$\overline{s} = \sqrt{\frac{(x_1 - \overline{x})^2 \cdot n_1 + (x_2 - \overline{x})^2 \cdot n_2 + \dots + (x_k - \overline{x})^2 \cdot n_k}{n}}.$$

Здесь $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ – объем выборки.

Пример 1. Выборочная совокупность задана таблицей распределения:

x_k	1	2	3	4
n_k	20	15	10	5

Найти выборочную среднюю $\overline{x}$, выборочную дисперсию $\overline{s}^2$ и выборочное среднее квадратичное отклонение $\overline{s}$.

Воспользуемся командами вычисления длины списка **length** и формирования списка **makelist**.

Команды:

xk:[1,2,3,4]$

nk:[20,15,10,5]$

n: sum(nk[k],k,1,length(nk))$

avr:xk.nk/n;

dsp:makelist((xk[k]-xm)^2,k,1,length(nk)).nk/n;

stn:sqrt(dsp);

Результаты:

(avr) 2

(dsp) 1

(stn) 1

Ответ: $\overline{x} = 2; \overline{s}^2 = 1; \overline{s} = 1.$

В случае необходимости для нахождения основных точечных характеристик можно воспользоваться соответствующими командами пакета расширения **descriptive** (табл. 3).

Таблица 6. Команды вычисления основных точечных оценок

Команда	Описание
mean(list)	Выборочная средняя
var(list)	Выборочная дисперсия
std(list)	Выборочное среднее квадратичное отклонение

Приведем решение предыдущего примера с использованием команд пакета **descriptive**.

Команды:

load(descriptive) $

l1:makelist(1,i,1,20)$l2:makelist(2,i,1,15)$

l3:makelist(3,i,1,10)$l4:makelist(4,i,1,5)$

list:append(l1,l2,l3,l4)$

avr:mean(list),numer;

dsp:var(list),numer;

stn: std(list),numer;

В результате получим:

(avr) 2

(dsp) 1

(stn) 1.0

Таким образом, результаты вычислений полностью совпадают с соответствующими результатами, полученными без применения команд пакета **descriptive**.

Несмещенной называют статистическую оценку, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру при любом объеме выборки. В противном случае оценка называется смещенной. Выполнение требование несмещенности оценок гарантирует отсутствие систематических ошибок при оценивании.

Выборочная средняя является несмещенной оценкой генеральной средней, а выборочная дисперсия – смещенной оценкой генеральной дисперсии. Поэтому для выборочной дисперсии вводят поправочный коэффициент и находят *исправленную выборочную дисперсию*:

$$s^2 = \frac{n}{n-1}\overline{s}^2 = \frac{(x_1-\overline{x})^2 \cdot n_1 + (x_2-\overline{x})^2 \cdot n_2 + \cdots + (x_k-\overline{x})^2 \cdot n_k}{n-1}.$$

Соответствующая формула для вычисления *исправленного среднего квадратичного отклонения* имеет вид:

$$s = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\overline{s} = \sqrt{\frac{(x_1-\overline{x})^2 \cdot n_1 + (x_2-\overline{x})^2 \cdot n_2 + \cdots + (x_k-\overline{x})^2 \cdot n_k}{n-1}}.$$

Команды вычисления исправленной выборочной дисперсии и исправленного среднего квадратичного отклонения имеют соответственно вид

var1(list), std1(list).

Пример 2. В итоге пяти измерений длины стержня одним прибором (без систематических ошибок) получены следующие результаты (в мм):

92; 94; 103; 105; 106.

Найти

а) выборочную среднюю длину стержня;

б) выборочную и исправленную выборочную дисперсии ошибок прибора.

Для решения примера воспользуемся командами пакета расширения **descriptive**.

Команды:

```
load(descriptive) $
fpprintprec:3$
list:[ 92, 94, 103, 105, 106] $
avr:mean(list);
dsp:var(list);
dsp1: var1(list);
```

Результаты:

(avr)   100

(dsp)   34

(dsp1)   42.5

Ответ: $\overline{x} = 100$; $\overline{s}^2 = 34$; $s^2 = 42{,}5$.

При выборке малого объема точечная оценка может значительно отличаться от оцениваемого параметра, т.е. приводить к грубым ошибкам. Поэтому при небольшом объеме выборки следует пользоваться интервальными оценками.

Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами – концами интервала. Такой интервал называют *доверительным интервалом*. Вероятность γ, с которой доверительный интервал накрывает неизвестное значение параметра, называется *доверительной вероятностью* или *надежностью оценки*. В качестве γ берут число, близкое к единице, например, 0,9; 0,95 или 0,99.

Если генеральная совокупность подчиняется нормальному закону распределения с *известным* средним квадратичным отклонением σ, то интервальной оценкой математического ожидания a служит доверительный интервал

$$\overline{x} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Здесь n – объем выборки, z – двусторонний квантиль стандартного нормального распределения. Величина z вычисляется по команде

quantile_normal(1-α/2,0,1),

где $\alpha = 1 - \gamma$.

Пример 3. Известно, что генеральная совокупность подчиняется нормальному закону распределения. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью $\gamma = 0{,}95$ математического ожидания a, если среднее квадратическое отклонение $\sigma = 5$, выборочная средняя $\overline{x} = 14$ и объем выборки $n = 25$.

Команды:

```
load(distrib)$
gamma:0.95$
alfa:1-gamma$
avr:14$stn:5$n:25$
z:quantile_normal(1-alfa/2,0,1)$
d:z* stn/sqrt(n)$
fpprintprec:4$
intrv:[avr-d, avr+d],numer;
```

Результат:

(intrv) [12.04,15.96].

Ответ: (12,04; 15,96).

Если генеральная совокупность подчиняется нормальному закону распределения с *неизвестным* средним квадратичным отклонением σ, то интервальной оценкой математического ожидания a служит доверительный интервал

$$\overline{x} - t\frac{s}{\sqrt{n}} < a < \overline{x} + t\frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Здесь s – исправленное среднее квадратичное отклонение, n – объем выборки, t – двусторонний квантиль распределения Стьюдента. Величина t вычисляется по команде

quantile_student_t(1-α/2,n-1),

где $\alpha = 1 - \gamma$.

Пример 4. Из генеральной совокупности, подчиняющейся нормальному закону распределения, извлечена выборка

-2,-2, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5.

Построить доверительный интервал для среднего значения с надежностью оценки $\gamma = 0{,}95$.

Команды:

```
load(distrib)$
list:[ −2,−2, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5 ] $
n:length(list)$
gamma:0.95$
alfa:1-gamma$
fpprintprec:2$
avr:mean(list),numer;
stn1: std1(list)$
t: quantile_student_t(1-alfa/2,n-1)$
d:t*stn1/sqrt(n)$
intrv:[avr-d, avr+d],numer;
```

Результаты:

(avr) 2

(intrv) [0.28,3.7]

Ответ: (0,28; 3,7).

Для нахождения интервальных оценок в системе Maxima можно воспользоваться пакетом **stats**. Загрузка пакета осуществляется по команде

load(stats).

Для нахождения *доверительного интервала среднего значения* используется команда **test_mean**. В простейших случаях команда **test_mean** имеет следующий синтаксис

test_mean(list).

В случае необходимости можно воспользоваться опциями этой команды. Наиболее употребительными опциями являются надежность оценки и среднее квадратичное отклонение.

Опция задания надежности оценки имеет вид

‘conflevel=значение.

По умолчанию ‘**conflevel = 0,95**.

Среднее квадратичное отклонение, если оно известно, задается следующим образом:

‘dev=значение.

По умолчанию ‘**dev=unknown**.

Результаты выполнения команды **test_mean** сохраняются в виде **объекта inference_result. Среднее значение сохраняется под именем ‘mean_estimate**, а доверительный интервал – под именем ‘**conf_interval**.

Для извлечения требуемых результатов можно воспользоваться командой

take_inference (name,obj),

где **name** – имя величины, хранящей требуемый результат; **obj** – имя объекта типа **inference_result**.

Приведем решение предыдущего примера с использованием команд пакета **stats**.

Команды:

load(stats)$

list:[−2,−2, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5] $

obj:test_mean(list)$

fpprintprec:2$

avr:take_inference ('mean_estimate, obj);

intrv:take_inference ('conf_interval, obj);

Результаты:

(avr) 2

(intrv) [0.28,3.7].

Таким образом, результаты вычислений полностью совпадают с соответствующими результатами, полученными без применения команд пакета **stats**.

8.3. Задачи по теме «Статистические расчеты»

1. Пусть имеется выборка

5, 8, 7, 2, 6, 11, 4, 7, 7, 7, 10, 10, 6, 3, 3, 8, 8, 5, 7, 8, 9, 5, 11, 11, 5.

Требуется построить статистическое распределение выборки.

2. Для выборки из предыдущего примера построить гистограмму относительных частот для $m = 4$.

3. Пусть имеется выборка.

1, 1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 5.

Требуется вычислить

а) выборочную среднюю,

б) выборочную дисперсию,

в) выборочное среднее квадратичное отклонение.

4. Для выборки из предыдущего примера вычислить исправленную выборочную дисперсию $\hat{s}^2$ и исправленное среднее квадратичное отклонение $\hat{s}$.

5. Пусть имеется выборка

-1,-1, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6.

Построить доверительный интервал для среднего значения с надежностью оценки $\gamma = 0{,}95$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Mathematica. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.wolfram.com/mathematica/.
2. Maxima. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://maxima.sourceforge.net/
3. Ахтямов А.М. Математика для социологов и экономистов: Учеб. пособие. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 464 с.
4. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / М.: Высшая школа, 1979. 400 с.
5. Головко Т.М., Захарова А.О., Акишин Б.А. Статистический анализ данных в среде WXMAXIMA// Молодой исследователь Дона. 2017. № 1 (4). С. 11–19.
6. Зарипов Ш.Х., Абзалилов Д.Ф., Костерина Е.А. Задачи математической экологии и пакет Maxima: Учеб. пособие / Казань: КФУ, 2015. 120 с.
7. Ильина В.А., Силаев П.К. Система аналитических вычислений Maxima для физиков-теоретиков. М.:МГУ им. М. В. Ломоносова, 2007. 113 с. [Электроный ресурс]. Режим доступа: http://tex.bog.msu.ru/numtask/max07.ps.
8. Кусяков А.Ш. Математический анализ. Учеб. пособие / Перм. гос. ун-т. Пермь, 2009. 180 с.
9. Кусяков А.Ш. Математика для иностранных слушателей подготовительных курсов [Электронный ресурс]: учеб. пособие / А. Ш. Кусяков; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Электрон. дан. – Пермь, 2019. – 4,26 Мб; 242 с. – Режим доступа: http://www.psu.ru/files/docs/science/books /uchebnie-posobiya/matematika-dlya-in-slushatelej-pk.pdf. – Загл. с экрана.
10. Кусяков А.Ш. Maxima on Android в курсе высшей математики для студентов гуманитарных специальностей // Научный альманах. Тамбов, 2019. № 10-2(60). С. 138 – 142.

11. Кусяков А.Ш. Числовые ряды в системе MAXIMA ON ANDROID// Научный альманах. Тамбов, 2019. № 11-2(61). С. 117 – 120.

12. Кусяков А.Ш. Дифференциальные уравнения в системе MAXIMA ON ANDROID// Научный альманах. Тамбов, 2020. № 13(65). С. 117-120.

13. Кусяков А.Ш. Вычисление вероятностей в системе MAXIMA ON ANDROID// Научный альманах. Тамбов, 2020. № 4-1(66). С. 88 –93.

14. Малакаев М.С., Секаева Л.Р., Тюленева О.Н. Основы работы с системой компьютерной алгебры Maxima: Учеб.- метод. пособие / Казань: Казан. ун-т, 2012. 57с.

15. Полосков И.Е. Системы аналитических вычислений. Общие сведения, структура и приложения [Электронный ресурс]: Учеб. пособие / Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2013. 352с.

16. Стахин Н. А. Основы работы с системой аналитических (символьных) вычислений Maxima: Учеб. пособие / М.: Федеральное агентство по образованию, 2008. 86 с.

17. Чичкарев Е.А. Компьютерная математика с Maxima: Руководство для школьников и студентов / М.: ALT Linux, 2012. 384 с.

Учебное издание

Кусяков Альфред Шамильевич

Система аналитических вычислений Maxima. Практикум

Учебное пособие

Редактор *Е. А. Огиенко*
Корректор *Е. А. Андреева*
Техническая подготовка материалов *А. Ш. Кусяков*

Объем данных 2,77 Мб
Подписано к использованию 24.11.2020

Размещено в открытом доступе
на сайте www.psu.ru
в разделе НАУКА / Электронные публикации
и в электронной мультимедийной библиотеке ELiS

Издательский центр
Пермского государственного
национального исследовательского университета
614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15