

УМИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Уральское региональное отделение
Российской академии космонавтики
имени К. Э. Циолковского

ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ и УПРАВЛЕНИЯ

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ



Межвузовский сборник научных трудов

Издается с 1972 г.

Выпуск 52



Пермь 2020

УДК 531+681.5
ББК 22.21+32.915
П78

ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И УПРАВЛЕНИЯ. Нелинейные динамические системы: межвузовский сборник научных трудов / Пермский государственный национальный исследовательский университет. – Пермь, 2020. – Вып. 52. – 100 с.

ISBN 978-5-7944-3572-6 (вып. 52)
ISBN 978-5-7944-1360-1

В настоящем выпуске опубликованы статьи о научных исследованиях в области управления нелинейными динамическими объектами. Рассматриваются математические модели различных систем, методы их оптимального управления и др.

Издание предназначено для научных работников, инженеров-механиков, аспирантов, студентов старших курсов технических факультетов вузов.

PROBLEMS OF MECHANICS AND CONTROLLABLES. Nonlinear dynamic systems: A collection of scientific papers / Perm State University. – Perm, 2020. – 100 p.

The present issue problems of the optimal control theory, numerical solution of nonlinear problems and the methods of control of some dynamic systems.

The issue is meant for researchers, post-graduates, engineers and students, studying nonlinear dynamic systems.

УДК 531+681.5
ББК 22.21+32.915

Рецензент: кафедра теоретической механики Российского университета дружбы народов (д-р физ.-мат. наук, проф. И.А. Мухаметзянов)

Печатается по решению ученого совета механико-математического факультета Пермского государственного национального исследовательского университета

Редакционная коллегия

В.В. Маланин (д.т.н., проф., Пермский государственный национальный исследовательский университет) – **главный редактор**, **Р.Г. Мухарлямов** (д.ф.-м.н., проф., Российский университет дружбы народов) – зам. гл. редактора, **Н.Н. Макеев** (д.ф.-м.н., проф., Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов), **В.И. Яковлев** (д.ф.-м.н., проф., Пермский государственный национальный исследовательский университет), **С.В. Лутманов** (к.ф.-м.н., доц., Пермский государственный национальный исследовательский университет) – **секретарь**

Издание включено
в национальную информационно-аналитическую систему
«Российский индекс научного цитирования» (РИНЦ)

ISBN 978-5-7944-3572-6 (вып. 52)
ISBN 978-5-7944-1360-1

© Пермский государственный
национальный исследовательский
университет, 2020

УДК 004.9

А. Ш. Кусяков

*Пермский государственный национальный
исследовательский университет*

Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15
kusyakov@psu.ru; 8 902-63-54-772

ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ МНОГОСТЕНОЧНЫХ КОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН

Представлены расчетные зависимости для композитной многостеночной пластины, находящейся под действием сжимающих в плоскости пластины нагрузок. Предполагается, что пластина находится в условиях цилиндрического изгиба. Приведены численные результаты, позволяющие оценить эффективность многостеночной пластины по сравнению с ребристой пластиной

Ключевые слова: композит; пластина; устойчивость.

Вопросам расчета и проектирования ребристых и трехслойных конструкций, подверженных действию сжимающих нагрузок, посвящена обширная литература [1–11, 14–15 и др.]. Многостеночные композитные конструкции – это сравнительно новый вид несущих конструкций ракетно-космической техники, которые могут быть использованы вместо ребристых и трехслойных конструкций.

Особенности расчета на многостеночных цилиндрических оболочках приведены в работах [12–13].

В настоящей работе представлены расчетные зависимости для многослойной пластины, находящейся в условиях цилиндрического изгиба под действием сжимающих в плоскости пластины нагрузок.

Многослойная пластина состоит из двух одинаковых внешних слоев (несущие слои), соединенных набором стенок из композитного материала.

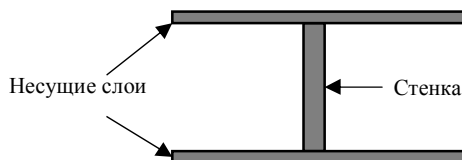


Рис. 1. Элемент многослойной пластины

Введем обозначения:

a, b – длина и ширина пластинки соответственно;

h_0 – толщина одного несущего слоя;

t_s – расстояние между центрами тяжести стенок

H_s, B_s – соответственно высота и ширина стенки;

E_1, E_2 – модули Юнга вдоль и поперек волокон материала несущих слоев соответственно;

ν_{12}, ν_{21} – коэффициенты Пуассона материала несущих слоев;

G_{12} – модуль сдвига материала несущих слоев;

$D_{xx}, D_{yy}, D_{xy}, D_G$ – изгибные жесткости несущего слоя;

E_s – модуль Юнга материала стенок.

Рассмотрим пластину, находящуюся под действием сжимающих в плоскости пластины нагрузок.

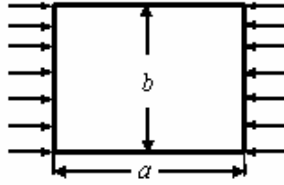


Рис. 2. Пластинка, находящаяся под действием сжимающих нагрузок

Критическую нагрузку, соответствующую общей форме потери устойчивости, будем определять в предположении, что пластина находится в условиях цилиндрического изгиба.

В этом случае критическая нагрузка вычисляется по формуле

$$q_{cr} = D_{xx}^{(p)} \left(\frac{\pi}{a} \right)^2, \quad (1)$$

где

$$D_{xx}^{(p)} = 8D_{xx} \left(1 + 3 \left(\frac{H_s}{h} \right)^2 + 3 \frac{H_s}{h} \right) + \frac{E_s h_s H_s^2}{12}, \quad (2)$$

$$h_s = \frac{B_s H_s}{t_s}, \quad h = 2h_0. \quad (3)$$

Критическую нагрузку, соответствующую местной форме потери устойчивости полки между стенками, будем вычислять по классической формуле для ортотропной пластинки:

$$q_{crm} = k_s \frac{2\pi^2}{t_s^2} \left(\sqrt{D_{xx} D_{yy}} + D_{xy} + 2D_G \right). \quad (4)$$

Здесь k_s – редуционный коэффициент:

$$k_s = 1 + \frac{E_s h_s}{E_x h}. \quad (5)$$

где E_x – модуль Юнга несущих слоев пластины по направлению действия нагрузки.

Если вертикальная стенка представляет собой тонкую пластинку, тогда следует учитывать возможность потери устойчивости стенки.

Критическую нагрузку для вертикальной стенки можно также найти по формуле (4), заменив в этой формуле изгибные жесткости несущих слоев на изгибные жесткости стенки, причем

$$t_s = H_s, k_s = 1 + \frac{E_x h}{E_s h_s}. \quad (6)$$

В качестве примера рассмотрим многостеночную пластинку длиной $a = 1$ м и шириной $b = 3$ м. Предполагается, что несущие слои пластины состоят только из продольных монослоев. Пластина подкреплена вертикальными стенками, изготовленными из того же материала, что и несущие слои пластины; толщина стенки – 0,005 м; высота стенки – 0,01 м; толщина одного несущего слоя – 0,0025 м. Упругие характеристики материала конструкции приведены в табл. 1.

Таблица 1. Упругие характеристики материала конструкции

Характеристика	E_1 , ГПа	E_2 , ГПа	ν_{12}	G_{12} , ГПа
Значение	140	7	0,24	27,5

Требуется оценить эффективность многостеночной пластинки по сравнению с ребристой пластинкой по устойчивости в зависимости от числа подкрепляющих элементов n_s . Толщина полотна ребристой оболочки – 0,005 м; геометрические характеристики ребер совпадают с геометрическими характеристиками стенок многостеночной пластины. Ребристая пластина изготовлена из того же материала, что и многостеночная конструкция.

Таким образом, масса ребристой пластины совпадает с массой многостеночной пластины. Количество подкрепляющих элементов: $n_s = 10, 20, 30$.

Если несущие слои многостеночной пластины состоят только из продольных монослоев, изгибные жесткости можно представить следующим образом:

$$D_{xx} = \frac{b_{11}h_0^3}{12}, D_{yy} = \frac{b_{22}h_0^3}{12}, D_{xy} = \frac{b_{12}h_0^3}{12}, D_G = \frac{b_{33}h_0^3}{12}. \quad (7)$$

Здесь

$$b_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, b_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, b_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, b_{33} = G_{12}. \quad (8)$$

В данном примере толщина стенок больше, чем толщина несущих слоев, а высота стенки меньше, чем расстояние между подкрепляющими элементами. Следовательно, из двух возможных форм местной потери устойчивости, определяющей будет потеря устойчивости полки между стенками.

Таким образом, при анализе устойчивости можно ограничиться рассмотрением только двух форм потери устойчивости: общей формы потери устойчивости с захватом подкрепляющих элементов и местной формы потери полки между стенками. Коэффициент редукции для полки, очевидно, равен

$$k_s = 1 + \frac{h_s}{h}. \quad (9)$$

Для расчета на устойчивость ребристой пластины воспользуемся формулами, приведенными в работе [6]. Результаты расчетов для многостеночной и ребристой пластин представлены в табл. 2.

Таблица 2. Критические нагрузки

n_s	Многостеночная пластина		Ребристая пластина	
	Критическая нагрузка, Н/М	Форма потери устойчивости	Критическая нагрузка, Н/М	Форма потери устойчивости
10	$1,1 \cdot 10^4$	Местная	$2,9 \cdot 10^4$	Общая
20	$4,7 \cdot 10^4$	Местная	$4,3 \cdot 10^4$	Общая
30	$1,1 \cdot 10^5$	Местная	$5,6 \cdot 10^4$	Общая

Анализ полученных результатов показывает, что в данном случае для многостенной конструкции определяющей является местная устойчивость полки между стенками, а для ребристой – общая.

При $n_s = 10$ ребристая пластина обеспечивает больший запас устойчивости, чем многостеночная пластина. При $n_s = 20$ коэффициенты запаса устойчивости конструкций соизмеримы, а при $n_s = 30$ многостеночная конструкция обеспечивает существенно больший запас устойчивости, чем ребристая пластина.

Таким образом, преимущество многостеночных конструкций по сравнению ребристыми конструкциями становится ощутимым только при достаточно большом числе подкрепляющих элементов.

Библиографический список

1. Баничук Н.В., Кобелев В.В., Рикардс Р.Б. Оптимизация элементов конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 224 с.

2. Бокучаева П.Н., Евстафьев В.А., Бабук В.А. Численное исследование влияния количества и расположения продольных ребер на массу композитных сетчатых цилиндрических оболочек летательных аппаратов // Конструкции из композиционных материалов. 2018. № 3. С. 19–22.

3. Васильев В.В., Лопатин А.В. Теория сетчатых и подкрепленных композитных оболочек // Механика конструкций из композиционных материалов. Новосибирск: Наука, 1984. С. 31–36.

4. Карпов В.В. Уравнения в смешанной форме для ребристых оболочек общего вида и методика их решения // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2019. № 2. С. 116–134.

5. Кусяков А.Ш. Проектирование трехслойных пластин, находящихся в условиях цилиндрического изгиба // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Перм. гос. ун-т. Пермь, 2019. Вып. 51. С. 6–12.

6. Кусяков А.Ш. Проектирование композитных стрингерных пластин // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 4(47). С. 44–48.

7. Лизин В.Т., Пяткин В.А. Проектирование тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1976. 408 с.

8. *Маневич А.И.* Устойчивость и оптимальное проектирование подкрепленных оболочек. Киев; Донецк: Вища школа. 1979. 152 с.

9. *Мормуль Н.Ф., Почтман Ю.М.* Многокритериальная оптимизация подкрепленных композитных панелей при комбинированном нагружении // *Механика композитных материалов.* 1993. Т. 29, № 6. С. 823–830.

10. *Немировский Ю.В.* Устойчивость и выпучивание конструктивно анизотропных и неоднородных пластин и оболочек // *Механика твердого деформируемого тела.* М.: ВИНТИ АН СССР. 1979. Т. 9. С. 5–156.

11. *Почтман Ю.М., Тугай О.В.* Подкрепленные многослойные цилиндрические оболочки минимального веса, сжатые в осевом направлении // *Прикладные проблемы прочности и пластичности.* Горький: ГГУ, 1980. Вып. 1. С. 153–156.

12. *Смердов А.А., Шон Ф.Т.* Расчетный анализ и оптимизация многостеночных композитных несущих оболочек // *Известия высших учебных заведений. Машиностроение,* 2014. № 11. С. 90–98.

13. *Смердов А.А., Шон Ф.Т.* Анализ эффективности оптимальных композитных оболочек многостеночной и трехслойной схем для отсеков ракет-носителей и разгонных блоков // *Конструкции из композиционных материалов.* 2016. № 3. С. 58–65.

14. *Сухинин С.Н.* Прикладные задачи устойчивости многослойных композитных оболочек. М.: Физматлит, 2010. 248 с.

15. *Томашевский В.Т., Ануфриев А.П., Шалыгин В.Н., Яковлев В.С., Калимулин Р.И.* Оптимизация конструкций подкрепленных цилиндрических оболочек из композитов // *Механика композитных материалов.* 1987. № 5. С. 853–869.

УДК 519.7

С.В. Лутманов, А.Д. Городилов

*Пермский государственный национальный
исследовательский университет*

Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15
svlut@yandex.ru; 8 (342) 2-396-309

**ЗАДАЧА НАВЕДЕНИЯ НА ЦЕЛЬ
РЕАКТИВНОГО СНАРЯДА
В ОДНОРОДНОМ ПОЛЕ ТЯЖЕСТИ
С УЧЕТОМ СОПРОТИВЛЕНИЯ ВОЗДУХА**

Рассматривается управляемый полет реактивного снаряда в верхних слоях атмосферы. Последнее обстоятельство позволяет принять предположение о линейной зависимости силы сопротивления среды от координат вектора скорости снаряда. В работе решается задача наведения на цель в двух вариантах. В первом случае происходит "мягкая" стыковка, состоящая в совпадении геометрических координат снаряда и цели с одновременным обнулением вектора скорости снаряда в момент стыковки. Во втором случае происходит просто поражение цели. В обоих случаях на программное управление, решающее задачу наведения, налагается требование оптимальности по критерию "минимум энергии". Численно подтверждено, что "мягкая" стыковка требует больших энергетических затрат, нежели просто поражение цели.

Ключевые слова: математическая модель; программное управление; оптимальное управление; матрица Коши; формула Коши.

1. Постановка задачи

Полет реактивного снаряда происходит в однородном поле тяжести (см. рис. 1) в верхних слоях атмосферы. В процессе движения снаряд испытывает сопротивление среды, являющееся линейной функцией координат его вектора скорости

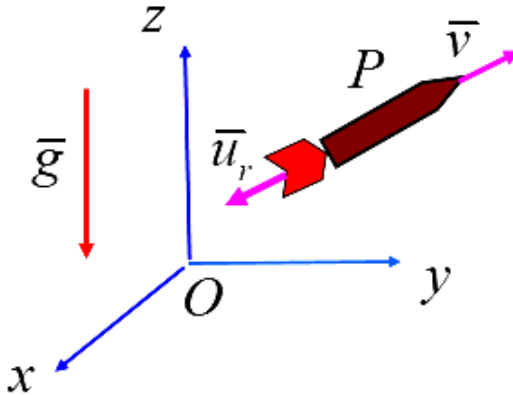


Рис. 1.

Запас топлива равен половине массы снаряда. Момент поражения цели совпадает с моментом полного сгорания топлива. Программное управление снарядом, реализующее попадание снаряда в цель, должно быть оптимальным по критерию "минимум энергии" [1].

В работе рассмотрены два случая попадания ракеты в цель.

Случай 1. Попадание ракеты в цель происходит по геометрическим координатам и скоростям.

Случай 2. Попадание ракеты в цель происходит только по геометрическим координатам.

Требуется провести сравнение значений критериев оптимальности в обоих случаях.

2. Дифференциальные уравнения движения

Динамика полета снаряда описывается векторным дифференциальным уравнением Мещерского [3]

$$M \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \bar{F}^{(c)} + \frac{dM}{dt} \bar{u}_r + M \bar{g}, \quad (2.1)$$

где $t \in [t_0, T]$ – текущее время; M – масса снаряда;

$$\bar{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \text{радиус-вектор снаряда;}$$

$$\bar{F}^{(c)} = \begin{pmatrix} F_x^{(c)} \\ F_y^{(c)} \\ F_z^{(c)} \end{pmatrix} - \text{вектор силы сопротивления, действующей на снаряд;}$$

$$\bar{u}_r = \begin{pmatrix} u_{rx} \\ u_{ry} \\ u_{rz} \end{pmatrix} - \text{вектор относительной скорости истечения газов;}$$

$$\bar{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} - \text{вектор ускорения силы тяжести.}$$

Предполагается, что силы сопротивления являются линейными функциями скорости снаряда

$$\bar{F}^{(c)} = -D\dot{\bar{r}} = - \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}, d_{ij} = \text{const} > 0, i, j = 1, \dots, 3$$

Изменение массы снаряда происходит по закону

$$M(t) = m_0 \cdot e^{-\alpha t}, t \in [t_0, T], \quad (2.2)$$

где m_0 – первоначальная масса снаряда; $\alpha = \text{const}$ – коэффициент, определяющий скорость сгорания топлива.

Конечный момент времени T и коэффициент α связаны между собой соотношением

$$\begin{aligned} \frac{m_0}{2} &= m_0 \cdot e^{-\alpha T} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\alpha T} \Rightarrow \\ -\ln 2 &= -\alpha T \Rightarrow \alpha = \frac{\ln 2}{T} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Проведем нормализацию дифференциальных уравнений движения. Преобразуем уравнение (2.1) с учетом (2.2):

$$\begin{aligned} M \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} &= \bar{F}^{(c)} + \frac{dM}{dt} \bar{u}_r + M \bar{g} \Rightarrow \\ m_0 \cdot e^{-\alpha t} \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} &= -D \dot{\bar{r}} - \alpha m_0 \cdot e^{-\alpha t} \bar{u}_r + m_0 \cdot e^{-\alpha t} \bar{g} \Rightarrow \\ \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} &= -\frac{1}{m_0 e^{-\alpha t}} D \dot{\bar{r}} - \alpha \cdot \bar{u}_r + \bar{g} \Rightarrow \\ \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} - \alpha \cdot \begin{pmatrix} u_{rx} \\ u_{ry} \\ u_{rz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \left\{ \begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{d_{11}}{m_0 e^{-\alpha t}} \dot{x} - \frac{d_{12}}{m_0 e^{-\alpha t}} \dot{y} - \frac{d_{13}}{m_0 e^{-\alpha t}} \dot{z} - \alpha u_{rx}, \\ \ddot{y} &= -\frac{d_{21}}{m_0 e^{-\alpha t}} \dot{x} - \frac{d_{22}}{m_0 e^{-\alpha t}} \dot{y} - \frac{d_{23}}{m_0 e^{-\alpha t}} \dot{z} - \alpha u_{ry}, \\ \ddot{z} &= -\frac{d_{31}}{m_0 e^{-\alpha t}} \dot{x} - \frac{d_{32}}{m_0 e^{-\alpha t}} \dot{y} - \frac{d_{33}}{m_0 e^{-\alpha t}} \dot{z} - \alpha u_{rz} - g, \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Заменой

$$\begin{aligned} x_1 &= x, x_2 = y, x_3 = z, \\ x_4 &= \dot{x}, x_5 = \dot{y}, x_6 = \dot{z}, \\ u_1 &= -\alpha u_{rx}, u_2 = -\alpha u_{ry}, u_3 = -\alpha u_{rz} \end{aligned}$$

нормализуем уравнения (2.4)

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_4, \\
 \dot{x}_2 &= x_5, \\
 \dot{x}_3 &= x_6, \\
 \dot{x}_4 &= -\frac{d_{11}}{m_0 e^{-\alpha t}} x_4 - \frac{d_{12}}{m_0 e^{-\alpha t}} x_5 - \frac{d_{13}}{m_0 e^{-\alpha t}} x_6 + u_1, \\
 \dot{x}_5 &= -\frac{d_{21}}{m_0 e^{-\alpha t}} x_4 - \frac{d_{22}}{m_0 e^{-\alpha t}} x_5 - \frac{d_{23}}{m_0 e^{-\alpha t}} x_6 + u_2, \\
 \dot{x}_6 &= -\frac{d_{31}}{m_0 e^{-\alpha t}} x_4 - \frac{d_{32}}{m_0 e^{-\alpha t}} x_5 - \frac{d_{33}}{m_0 e^{-\alpha t}} x_6 - g + u_3.
 \end{aligned} \Rightarrow (2.5)$$

Запишем уравнения (2.5) в векторно-матричной форме:

$$\dot{x} = A(t)x + Bu + W,$$

$$t \in [t_0, T], x, \dot{x} \in R^6, u \in R^3, W \div 6 \times 1, B \div 6 \times 3, A(t) \div 6 \times 6,$$

где

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}, \dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{d_{11}}{m_0 e^{-\alpha t}} & -\frac{d_{12}}{m_0 e^{-\alpha t}} & -\frac{d_{13}}{m_0 e^{-\alpha t}} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{d_{21}}{m_0 e^{-\alpha t}} & -\frac{d_{22}}{m_0 e^{-\alpha t}} & -\frac{d_{23}}{m_0 e^{-\alpha t}} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{d_{31}}{m_0 e^{-\alpha t}} & -\frac{d_{32}}{m_0 e^{-\alpha t}} & -\frac{d_{33}}{m_0 e^{-\alpha t}} \end{pmatrix}.$$

Оптимизируемый функционал имеет вид

$$I[u(\cdot)] = \left[\int_{t_0}^T \langle u(\tau), u(\tau) \rangle d\tau \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\int_{t_0}^T (u_1^2(\tau) + u_2^2(\tau) + u_3^2(\tau)) d\tau} \rightarrow \min.$$

3. Алгоритм построения фундаментальной матрицы Коши и матрицы перехода

Фундаментальную матрицу Коши

$$X(T, \tau) = \begin{pmatrix} x_{11}(T, \tau) & \dots & x_1(T, \tau) & \dots & x_{16}(T, \tau) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{i1}(T, \tau) & \dots & x_i(T, \tau) & \dots & x_{i6}(T, \tau) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{61}(T, \tau) & \dots & x_6(T, \tau) & \dots & x_{66}(T, \tau) \end{pmatrix}, \tau \in [t_0, T]$$

для однородного уравнения $\dot{x} = A(t)x$ строим построчно [2].

Для всех $i = 1, \dots, 6$ строку

$$x_{i1}(T, \tau) \dots x_{ii}(T, \tau) \dots x_{i6}(T, \tau), \tau \in [t_0, T]$$

находим как решение системы дифференциальных уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{d\tau} x_{i1}(T, \tau) &= \\ &= -x_{i1}(T, \tau) a_{11} - \dots - x_{ii}(T, \tau) a_{i1} - \dots - x_{i6}(T, \tau) a_{61}, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{d}{d\tau} x_{ii}(T, \tau) &= \\ &= -x_{i1}(T, \tau) a_{1i} - \dots - x_{ii}(T, \tau) a_{ii} - \dots - x_{i6}(T, \tau) a_{6i}, \\ &\dots \dots \dots \\ &= -x_{i1}(T, \tau) a_{16} - \dots - x_{ii}(T, \tau) a_{i6} - \dots - x_{i6}(T, \tau) a_{66} \end{aligned} \right.$$

с граничными условиями

$$x_{i1}(T, T) = 0, \dots, x_{ii}(T, T) = 1, \dots, x_{i6}(T, T) = 0.$$

После построения матрицы

$$X(T, \tau), \tau \in [t_0, T]$$

производится численная проверка равенств

$$\frac{d}{d\tau} X[T, \tau] = -X[T, \tau]A(\tau), \quad X[T, T] = E, \tau \in [t_0, T].$$

Матрица перехода строится по следующей формуле

$$H[T, \tau] = X[T, \tau]B(\tau) =$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11}(T, \tau) & \cdots & x_{1i}(T, \tau) & \cdots & x_{16}(T, \tau) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{i1}(T, \tau) & \cdots & x_{ii}(T, \tau) & \cdots & x_{i6}(T, \tau) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{61}(T, \tau) & \cdots & x_{6i}(T, \tau) & \cdots & x_{66}(T, \tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_{14}(T, \tau) & x_{15}(T, \tau) & x_{16}(T, \tau) \\ x_{24}(T, \tau) & x_{25}(T, \tau) & x_{26}(T, \tau) \\ x_{34}(T, \tau) & x_{35}(T, \tau) & x_{36}(T, \tau) \\ x_{44}(T, \tau) & x_{45}(T, \tau) & x_{46}(T, \tau) \\ x_{54}(T, \tau) & x_{55}(T, \tau) & x_{56}(T, \tau) \\ x_{64}(T, \tau) & x_{65}(T, \tau) & x_{66}(T, \tau) \end{pmatrix}, \tau \in [t_0, T].$$

Обозначим строки переходной матрицы символами

$$h^{[1]}(\tau) = (x_{14}(T, \tau) \quad x_{15}(T, \tau) \quad x_{16}(T, \tau)), \dots,$$

$$h^{[6]}(\tau) = (x_{64}(T, \tau) \quad x_{65}(T, \tau) \quad x_{66}(T, \tau)),$$

$$\tau \in [t_0, T].$$

4. Алгоритм решения задачи управления для первого случая "Попадание ракеты в цель по геометрическим координатам и скоростям"

Следуя [1], [2] реализуем алгоритм решения задачи управления. По формуле Коши находим

$$\begin{pmatrix} x_{1T} \\ x_{2T} \\ x_{3T} \\ x_{4T} \\ x_{5T} \\ x_{6T} \end{pmatrix} = X[T, t_0] \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \\ x_{40} \\ x_{50} \\ x_{60} \end{pmatrix} + \int_{t_0}^T H[T, \tau] \begin{pmatrix} u_1(\tau) \\ u_2(\tau) \\ u_3(\tau) \end{pmatrix} d\tau + \int_{t_0}^T X[T, \tau] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} d\tau. \quad (4.1)$$

или

$$\int_{t_0}^T H[T, \tau] \begin{pmatrix} u_1(\tau) \\ u_2(\tau) \\ u_3(\tau) \end{pmatrix} d\tau = b,$$

$$b = \begin{pmatrix} x_{1T} \\ x_{2T} \\ x_{3T} \\ x_{4T} \\ x_{5T} \\ x_{6T} \end{pmatrix} - X[T, t_0] \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \\ x_{40} \\ x_{50} \\ x_{60} \end{pmatrix} - \int_{t_0}^T X[T, \tau] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} d\tau.$$

Строим матрицу системы линейных алгебраических уравнений

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{16} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{25} & \alpha_{26} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \alpha_{35} & \alpha_{36} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & \alpha_{45} & \alpha_{46} \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} & \alpha_{53} & \alpha_{54} & \alpha_{55} & \alpha_{56} \\ \alpha_{61} & \alpha_{62} & \alpha_{63} & \alpha_{64} & \alpha_{65} & \alpha_{66} \end{pmatrix},$$

где

$$\alpha_{ij} = \int_{t_0}^T \left\langle \left(h^{[i]}(\tau) \right)^T, \left(h^{[j]}(\tau) \right)^T \right\rangle = \int_{t_0}^T \left\langle \begin{pmatrix} x_{i4}(T, \tau) \\ x_{i5}(T, \tau) \\ x_{i6}(T, \tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{j4}(T, \tau) \\ x_{j5}(T, \tau) \\ x_{j6}(T, \tau) \end{pmatrix} \right\rangle d\tau =$$

$$= \int_{t_0}^T \left[x_{i4}(T, \tau)x_{j4}(T, \tau) + x_{i5}(T, \tau)x_{j5}(T, \tau) + x_{i6}(T, \tau)x_{j6}(T, \tau) \right] d\tau,$$

$i, j = 1, \dots, 6$.

Система линейных алгебраических уравнений имеет вид

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{16} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{25} & \alpha_{26} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \alpha_{35} & \alpha_{36} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & \alpha_{45} & \alpha_{46} \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} & \alpha_{53} & \alpha_{54} & \alpha_{55} & \alpha_{56} \\ \alpha_{61} & \alpha_{62} & \alpha_{63} & \alpha_{64} & \alpha_{65} & \alpha_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha_{11}\lambda_1 + \alpha_{12}\lambda_2 + \alpha_{13}\lambda_3 + \alpha_{14}\lambda_4 + \alpha_{15}\lambda_5 + \alpha_{16}\lambda_6 = b_1, \\ \alpha_{21}\lambda_1 + \alpha_{22}\lambda_2 + \alpha_{23}\lambda_3 + \alpha_{24}\lambda_4 + \alpha_{25}\lambda_5 + \alpha_{26}\lambda_6 = b_2, \\ \alpha_{31}\lambda_1 + \alpha_{32}\lambda_2 + \alpha_{33}\lambda_3 + \alpha_{34}\lambda_4 + \alpha_{35}\lambda_5 + \alpha_{36}\lambda_6 = b_3, \\ \alpha_{41}\lambda_1 + \alpha_{42}\lambda_2 + \alpha_{43}\lambda_3 + \alpha_{44}\lambda_4 + \alpha_{45}\lambda_5 + \alpha_{46}\lambda_6 = b_4 \\ \alpha_{51}\lambda_1 + \alpha_{52}\lambda_2 + \alpha_{53}\lambda_3 + \alpha_{54}\lambda_4 + \alpha_{55}\lambda_5 + \alpha_{56}\lambda_6 = b_5 \\ \alpha_{61}\lambda_1 + \alpha_{62}\lambda_2 + \alpha_{63}\lambda_3 + \alpha_{64}\lambda_4 + \alpha_{65}\lambda_5 + \alpha_{66}\lambda_6 = b_6 \end{cases}$$

Пусть $\lambda^0 = \begin{pmatrix} \lambda_1^0 \\ \lambda_2^0 \\ \lambda_3^0 \\ \lambda_4^0 \\ \lambda_5^0 \\ \lambda_6^0 \end{pmatrix}$ – ее решение. Оптимальное управление вы-

числяется по формуле

$$\begin{pmatrix} u_1^0(t) \\ u_2^0(t) \\ u_3^0(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^6 \lambda_i^0 (h^{[i]}(\tau))^T = \sum_{i=1}^6 \lambda_i^0 \begin{pmatrix} x_{i4}(T, \tau) \\ x_{i5}(T, \tau) \\ x_{i6}(T, \tau) \end{pmatrix}, \tau \in [t_0, T].$$

Интегрируя систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3, \\ \dot{x}_2 = x_4, \\ \dot{x}_3 = x_5, \\ \dot{x}_4 = -\frac{d_{11}}{m_0} e^{\alpha t} \dot{x}_4 - \frac{d_{12}}{m_0} e^{\alpha t} x_5 - \frac{d_{13}}{m_0} e^{\alpha t} x_6 + u_1^0(t), \\ \dot{x}_5 = -\frac{d_{21}}{m_0} e^{\alpha t} \dot{x}_4 - \frac{d_{22}}{m_0} e^{\alpha t} x_5 - \frac{d_{23}}{m_0} e^{\alpha t} x_6 + u_2^0(t), \\ \dot{x}_6 = -\frac{d_{31}}{m_0} e^{\alpha t} \dot{x}_4 - \frac{d_{32}}{m_0} e^{\alpha t} x_5 - \frac{d_{33}}{m_0} e^{\alpha t} x_6 + u_3^0(t) - g \end{cases}$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} x_1(t_0) &= x_{10}, x_2(t_0) = x_{20}, x_3(t_0) = x_{30}, \\ x_4(t_0) &= x_{40}, x_5(t_0) = x_{50}, x_6(t_0) = x_{60} \end{aligned}$$

получим оптимальный закон полета снаряда

$$x^0(t) = x(t, t_0, x_0, u^0(\cdot)) = \begin{pmatrix} x_1^0(t) \\ x_2^0(t) \\ x_3^0(t) \\ x_4^0(t) \\ x_5^0(t) \\ x_6^0(t) \end{pmatrix}.$$

Проверкой корректности проведенных выкладок служит условие

$$\begin{pmatrix} x_1^0(T) \\ x_2^0(T) \\ x_3^0(T) \\ x_4^0(T) \\ x_5^0(T) \\ x_6^0(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1T} \\ x_{2T} \\ x_{3T} \\ x_{4T} \\ x_{5T} \\ x_{6T} \end{pmatrix}.$$

5. Алгоритм решения задачи управления для второго случая "Попадание ракеты в цель только по геометрическим координатам"

Спроецируем формулу (4.1) на первые три координаты

$$\begin{pmatrix} x_{1T} \\ x_{2T} \\ x_{3T} \end{pmatrix} = \{X[T, t_0]\}_3 \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \\ x_{40} \\ x_{50} \\ x_{60} \end{pmatrix} +$$

$$+ \int_{t_0}^T \{H[T, \tau]\}_3 \begin{pmatrix} u_1(\tau) \\ u_2(\tau) \\ u_3(\tau) \end{pmatrix} d\tau + \int_{t_0}^T \{X[T, \tau]\}_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} d\tau$$

или

$$\int_{t_0}^T \{H[T, \tau]\}_3 \begin{pmatrix} u_1(\tau) \\ u_2(\tau) \\ u_3(\tau) \end{pmatrix} d\tau = \hat{b},$$

$$\hat{b} = \begin{pmatrix} x_{1T} \\ x_{2T} \\ x_{3T} \end{pmatrix} - \{X[T, t_0]\}_3 \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \\ x_{40} \\ x_{50} \\ x_{60} \end{pmatrix} - \int_{t_0}^T \{X[T, \tau]\}_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} d\tau,$$

где

$$\begin{aligned} \{X[T, \tau]\}_3 &= \begin{pmatrix} x_{11}(T, \tau) & \cdots & x_{16}(T, \tau) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{31}(T, \tau) & \cdots & x_{36}(T, \tau) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X[T, \tau], \\ \{X[T, t_0]\}_3 &= \begin{pmatrix} x_{11}(T, t_0) & \cdots & x_{16}(T, t_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{31}(T, t_0) & \cdots & x_{36}(T, t_0) \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X[T, t_0],$$

$$\{H[T, \tau]\}_3 = \begin{pmatrix} x_{14}(T, \tau) & x_{15}(T, \tau) & x_{16}(T, \tau) \\ x_{24}(T, \tau) & x_{25}(T, \tau) & x_{26}(T, \tau) \\ x_{34}(T, \tau) & x_{35}(T, \tau) & x_{36}(T, \tau) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} H[T, \tau], \tau \in [t_0, T].$$

Выпишем матрицу системы линейных алгебраических уравнений

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}.$$

Система линейных алгебраических уравнений имеет вид

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\lambda}_1 \\ \hat{\lambda}_2 \\ \hat{\lambda}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{11}\hat{\lambda}_1 + \alpha_{12}\hat{\lambda}_2 + \alpha_{13}\hat{\lambda}_3 = b_1, \\ \alpha_{21}\hat{\lambda}_1 + \alpha_{22}\hat{\lambda}_2 + \alpha_{23}\hat{\lambda}_3 = b_2, \\ \alpha_{31}\hat{\lambda}_1 + \alpha_{32}\hat{\lambda}_2 + \alpha_{33}\hat{\lambda}_3 = b_3. \end{cases}$$

Пусть $\hat{\lambda}^0 = \begin{pmatrix} \hat{\lambda}_1^0 \\ \hat{\lambda}_2^0 \\ \hat{\lambda}_3^0 \end{pmatrix}$ – ее решение. Оптимальное управление

вычисляется по формуле

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_1^0(t) \\ \hat{u}_2^0(t) \\ \hat{u}_3^0(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 \hat{\lambda}_i^0 h^{(i)}(\tau) = \sum_{i=1}^3 \hat{\lambda}_i^0 \begin{pmatrix} x_{i4}(T, \tau) \\ x_{i5}(T, \tau) \\ x_{i6}(T, \tau) \end{pmatrix}, t \in [t_0, T].$$

Интегрируя систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_4, \\ \dot{x}_2 = x_5, \\ \dot{x}_3 = x_6, \\ \dot{x}_4 = -\frac{d_{11}}{m_0} e^{\alpha t} x_4 - \frac{d_{12}}{m_0} e^{\alpha t} x_5 - \frac{d_{13}}{m_0} e^{\alpha t} x_6 + \hat{u}_1^0(t), \\ \dot{x}_5 = -\frac{d_{21}}{m_0} e^{\alpha t} x_4 - \frac{d_{22}}{m_0} e^{\alpha t} x_5 - \frac{d_{23}}{m_0} e^{\alpha t} x_6 + \hat{u}_2^0(t), \\ \dot{x}_6 = -\frac{d_{31}}{m_0} e^{\alpha t} x_4 - \frac{d_{32}}{m_0} e^{\alpha t} x_5 - \frac{d_{33}}{m_0} e^{\alpha t} x_6 + \hat{u}_3^0(t) - g, \end{cases}$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} x_1(t_0) &= x_{10}, x_2(t_0) = x_{20}, x_3(t_0) = x_{30}, \\ x_4(t_0) &= x_{40}, x_5(t_0) = x_{50}, x_6(t_0) = x_{60} \end{aligned}$$

получим оптимальный закон полета снаряда

$$\hat{x}^0(t) = x(t, t_0, x_0, \hat{u}^0(\cdot)) = \begin{pmatrix} \hat{x}_1^0(t) \\ \hat{x}_2^0(t) \\ \hat{x}_3^0(t) \\ \hat{x}_4^0(t) \\ \hat{x}_5^0(t) \\ \hat{x}_6^0(t) \end{pmatrix}.$$

Проверкой корректности проведенных выкладок служит условие

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_1^0(T) \\ \hat{x}_2^0(T) \\ \hat{x}_3^0(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1T} \\ x_{2T} \\ x_{3T} \end{pmatrix}.$$

6. Численный эксперимент

Для численного эксперимента принимаются следующие данные

$$m_0 = 100 \text{ кг}, t_0 = 0, T = 10 \text{ сек}, \alpha = \frac{\ln 2}{10} = 0.069314,$$

$$D = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.5 & 0.4 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \\ x_{40} \\ x_{50} \\ x_{60} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \text{ м} \\ 0 \text{ м} \\ 0 \text{ м} \\ 0 \text{ м} \\ 0 \text{ м} \\ 0 \text{ м} \end{pmatrix}, \quad x(T) = x_T = \begin{pmatrix} 1000 \text{ м} \\ 1000 \text{ м} \\ 100 \text{ м} \\ 0 \frac{\text{м}}{\text{сек}} \\ 0 \frac{\text{м}}{\text{сек}} \\ 0 \frac{\text{м}}{\text{сек}} \end{pmatrix}.$$

Ниже приводятся 3D-траектории снаряда для первого случая (рис. 2) и для второго случая (рис. 3).

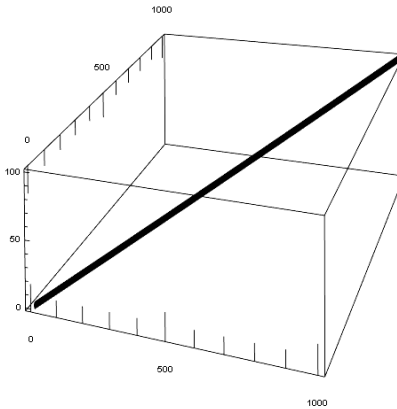


Рис. 2.

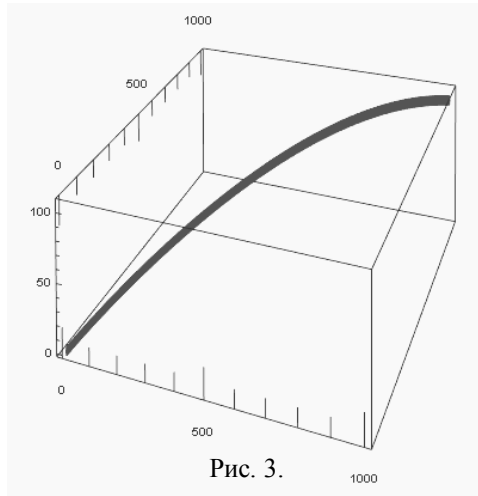


Рис. 3.

Из рисунков видно, что в обоих случаях снаряд попадает в цель.

При этом в первом случае скорость снаряда в конечный момент времени обнуляется (см. рис. 4–6).



Рис. 4.



Рис. 5.

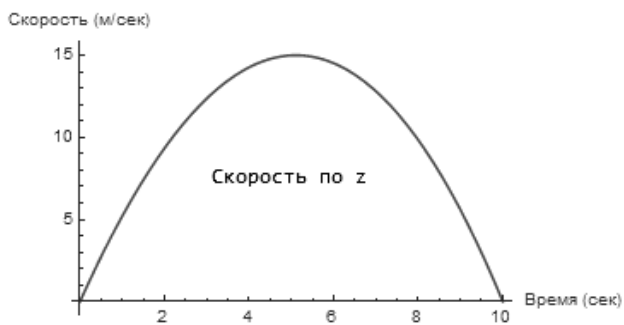


Рис. 6.

Во втором случае этого не происходит (см. рис. 7–9).

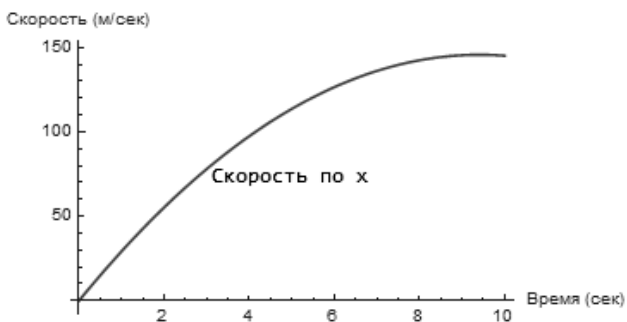


Рис. 7.

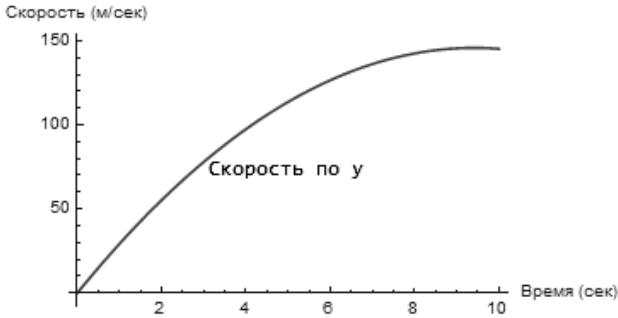


Рис. 8.

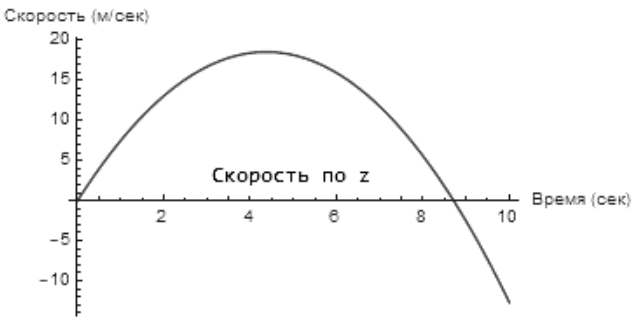


Рис. 9.

Приведем значения критерия на оптимальном управлении для первого и второго случаев

$$I[u^0(\cdot)] = \sqrt{\int_{t_0}^T \left((u_1^0(\tau))^2 + (u_2^0(\tau))^2 + (u_3^0(\tau))^2 \right) d\tau} = 158,392,$$

$$I[\hat{u}^0(\cdot)] = \sqrt{\int_{t_0}^T \left((\hat{u}_1^0(\tau))^2 + (\hat{u}_2^0(\tau))^2 + (\hat{u}_3^0(\tau))^2 \right) d\tau} = 87,419 .$$

Как и следовало ожидать, расход ресурсов на управление во втором случае оказался меньше.

Заключение

В работе решена задача оптимального наведения реактивного снаряда на цель по критерию "минимум энергии". Были рассмотрены два случая: когда наведение осуществлялось по всему фазовому вектору (геометрическим координатам и скоростям) и по части координат фазового вектора (геометрическим координатам). Было численно подтверждено, что в первом случае требуется больший ресурс управления, нежели во втором случае.

Библиографический список

1. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
2. *Лутманов С.В.* Вариационное исчисление и теория оптимального управления в примерах и упражнениях: учеб. пособие / Перм. ун-т. Пермь, 2010. 200 с.
3. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001. 414 с.

УДК 531.381;531.395

Н.Н. Макеев

*Институт проблем точной механики
и управления РАН*

Россия, 410028, г. Саратов, ул. Рабочая, 24
nmakeyev@mail.ru; (845) 272-35-33

ЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ МАЛЫХ ДВИЖЕНИЙ СЛОЖНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Приводятся условия существования линейного интеграла уравнений движения механической системы переменного состава, движущейся вокруг неподвижного полюса в однородном параллельном поле силы тяжести под воздействием нестационарного момента сил. Неизменяемая основа системы (абсолютно твердое тело) совершает малые движения в окрестности состояния его устойчивого равновесия. Получены условия существования системы независимых линейных интегралов, а также линейного интеграла, совместного для исходной нелинейной и линеаризованной динамических систем.

Ключевые слова: сложная механическая система; линейный интеграл; малые движения; совместный интеграл.

Введение

Под малыми движениями неизменяемой основы (*телоносителя*) механической системы переменного состава понимаются движения, совершаемые в достаточно малой окрестности положения его устойчивого равновесия при достаточно малых по модулю значениях величин его обобщенных координат, отсчитываемых от положения равновесия, и значениях величин их производных по времени [1].

Интерес к исследованиям малых движений тела переменного состава обусловлен, в том числе, тем, что эти движения в окрестности конфигурации устойчивого равновесия могут характеризоваться линейными частями разложения интегралов его исходных нелинейных уравнений движения. При этом предметом анализа является исследование предельных форм, к которым стремятся малые движения, когда начальное отклонение от состояния равновесия стремится к нулю [2].

Кроме того, исследование свойств малых движений структурно изменяемого твердого тела может быть положено в основу модельного подхода к вопросу о существовании интегралов его уравнений движения [3]. Такого рода моделирование обусловлено тем, что при устойчивом равновесии величины обобщенных координат и обобщенных скоростей при малых возмущениях численно остаются малыми [4].

Основные предпосылки и описание структурной модели объекта переменного состава массы, а также понятия сложной механической системы, приведено в работе [5].

1. Предварительные положения

Рассмотрим задачу о существовании и свойствах малых движений тела-носителя СМС (*сложной механической системы*) в однородном параллельном поле силы тяжести.

Предполагается, что СМС движется так, что ее носитель вращается вокруг неподвижного полюса O в однородном параллельном поле силы тяжести под воздействием заданного результирующего силового момента $\mathbf{L}(t)$ ($t \in [0, +\infty) \equiv T$).

Введем правые координатные ортобазисы $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ с общим началом в полюсе O : неподвижный Γ_1 ; базис Γ_2 , неизменно связанный с носителем, и базис Γ_3 ($Ox_1x_2x_3$), оси которого Ox_j ($j = 1, 2, 3$) для каждого момента времени $t \in T$ направлены по главным в полюсе O осям тензора инерции СМС с матрицей $\mathbf{J}(t) = \text{diag}[A_1(t), A_2(t), A_3(t)]$. В силу непрерывного по $t \in T$ изменения конфигурации и состава массы СМС базис Γ_3 в общем случае вращается относительно Γ_2 с угловой скоростью

$\omega^r (\omega_j^r)$, зависимость которой от величин заданных компонент $A_j(t)$ тензора инерции СМС $\mathbf{J}(t)$ известна [6].

Таким образом, непрерывные и непрерывно дифференцируемые зависимости вида $\omega^r(t)$, $\mathbf{J}(t)$, отнесенные к базису Γ_3 , считаются *программно заданными* и, следовательно, известными в любой момент времени $t \in T$.

Рассмотрим движение СМС под действием *квазиреактивных сил*, обусловленных переносом рабочего тела из некоторой области S , принадлежащей объекту, с программно заданной абсолютной скоростью $\mathbf{u}(t)$. Главный момент этих сил относительно полюса O для $t \in [0, +\infty) \equiv T$ определяется равенством

$$\mathbf{L}(t) = \int_S \frac{\partial \rho}{\partial t} (\mathbf{r} \times \mathbf{u}) dV, \quad (1)$$

Здесь $\rho(t, \mathbf{r})$ – локальная плотность массы в области S ; $\mathbf{u}(t, \mathbf{r})$ – абсолютная скорость переноса точечных масс рабочего тела из области D ; $\mathbf{r}(t)$ – радиус-вектор точки области.

Обозначим

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{G}^r, & \boldsymbol{\lambda}(t) &= \boldsymbol{\omega}^r - \mathbf{J}^{-1}\mathbf{G}^r, \\ \boldsymbol{\Omega} &= \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}^r = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{G} + \boldsymbol{\lambda}, \\ m_1(t) &= A_2^{-1}(t) - A_3^{-1}(t) \quad (1, 2, 3), \end{aligned} \quad (2)$$

где $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\Omega}$ – абсолютные угловые скорости носителя СМС (базиса Γ_2) и базиса Γ_3 ; $\mathbf{G}(G_j)$, $\mathbf{G}^r(t)$ – кинетические моменты относительно полюса O всего объекта и рабочего тела, соответственно (последний – относительно базиса Γ_2); $\boldsymbol{\lambda}(t)$ – эффективная угловая скорость носителя; $A_j(t)$ ($j = 1, 2, 3$) – главные осевые моменты инерции СМС, заданные для каждого $t \in T$ в осях базиса Γ_3 . Характерные вектор-параметры $\mathbf{L}(t)$, $\mathbf{G}^r(t)$ являются *управляющими* [7]; каждый из них задан для $t \in T$ программой, определенной во времени. Любые ограничения, налагаемые на заданные управляющие параметры, являются *управляющими связями*.

Здесь и далее символ $(1, 2, 3)$ обозначает циклическую перестановку величин с индексами 1, 2, 3.

Пусть $M(t)$ – величина массы СМС; g – стандартное значение величины ускорения силы тяжести; $\mathbf{s}(s_1, s_2, s_3)$ – орт, неизменно связанный с неподвижным ортобазисом Γ_1 ; $\mathbf{g} = -g\mathbf{s}$; $\mathbf{r}_C(t), r_j(t)$ – радиус-вектор центра тяжести СМС и его координаты в проекциях на оси базиса Γ_3 ($j = 1, 2, 3$).

Движение СМС при данных предположках характеризуется динамической системой эволюционного типа [7]

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{G}} + \mathbf{J}^{-1}\mathbf{G} \times \mathbf{G} + \boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{G} &= \mathbf{L} + g(\mathbf{s} \times \mathbf{k}), \\ \dot{\mathbf{s}} + \mathbf{J}^{-1}\mathbf{G} \times \mathbf{s} + \boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{s} &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (3)$$

где силовой вектор-момент $\mathbf{L}(L_1, L_2, L_3)$ определяется равенством (1); $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – характерный вектор, определяемый равенством (2); $\mathbf{k}(k_1, k_2, k_3) = \mathbf{M}\mathbf{r}_C$ – барицентрический вектор.

Уравнения (3) в проекциях на главные в полюсе O оси инерции СМС, определяемые базисом Γ_3 , принимают вид [5]

$$\begin{aligned} \dot{G}_1 + m_1 G_2 G_3 + \lambda_2 G_3 - \lambda_3 G_2 &= L_1 + g(k_3 s_2 - k_2 s_3), \\ \dot{s}_1 + (A_2^{-1} G_2 + \lambda_2) s_3 - (A_3^{-1} G_3 + \lambda_3) s_2 &= 0, \quad (1, 2, 3). \end{aligned} \quad (4)$$

Предположим, что СМС, подчиненная динамической системе (4), находится в состоянии, определяемом условиями

$$\mathbf{G}(t) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{s}(t) = \mathbf{s}^0 \quad (t \in T), \quad (5)$$

где $\mathbf{s}^0 = \mathbf{s}(0)$. Здесь и всюду далее нулевой верхний индекс относится к значениям величин при $t = 0$.

В силу условий (5) из уравнений системы (3) следуют ограничения

$$\mathbf{L} + g(\mathbf{s}^0 \times \mathbf{k}) = \mathbf{0}, \quad (\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{s}^0) = \mathbf{0} \quad (t \in T), \quad (6)$$

реализуемые соответствующей управляющей программой, заданной для вектор-функций $\mathbf{L}(t), \mathbf{k}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)$ [7]. Для носителя СМС состояние (5) является *квазиравновесием*, существующим в фазовом пространстве $\{\mathbf{G}, \mathbf{s}\}$. Здесь и всюду далее $\{\dots\}$ является символом множества указанных вектор-функций.

Принимая состояние (5) за *опорное* (базовое) *состояние*, найдем условия существования линейного интеграла уравнений движения СМС, определенного в "малой" окрестности данного опорного состояния. Обозначим $l(t) = |\mathbf{r}_c(t)|$ и постулируем устойчивость состояния (5), сопоставляя малым движениям вектора \mathbf{G} в окрестности этого состояния малые движения неизменяемого абсолютно твердого физического маятника с нижним расположением его центра масс в окрестности состояния статического равновесия $\boldsymbol{\omega}(t) = 0$, $\mathbf{s}(t) = \mathbf{s}^0$ ($t \in T$), при котором, согласно равенствам (2), $\mathbf{G}(t) = \mathbf{G}^r(t)$.

Под малыми движениями вектора \mathbf{G} [3] понимаются его отклонения от состояния (5), происходящие в некоторой малой окрестности данного состояния в фазовом пространстве $\{\mathbf{G}, \mathbf{s}\}$. При этом предполагается, что все функции $G_j(t)$ – величины одного порядка малости, а $\mathbf{s}(t)$ для $t \in T$ мало отличается от \mathbf{s}^0 .

Преобразуя первую группу динамических уравнений системы (4) и производя линеаризацию каждого из них с учетом остальных уравнений этой системы в окрестности состояния (5), согласно соотношениям (6) в результате получаем

$$\ddot{\mathbf{G}} + \mathbf{A}(t)\mathbf{G} = 0, \quad (7)$$

где обозначено: $\mathbf{G} = [G_1 \ G_2 \ G_3]^T$; матрица $\mathbf{A} = [a_{ij}(t)]$ формата (3×3) содержит элементы

$$\begin{aligned} a_{11} &= \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + A_1^{-1}g(k_1s_1^0 - Ml), \\ a_{12} &= -(\dot{\lambda}_3 + \lambda_1\lambda_2) + A_2^{-1}gk_2s_1^0, \\ a_{13} &= \dot{\lambda}_2 - \lambda_1\lambda_3 + A_3^{-1}gk_3s_1^0 \quad (1, 2, 3). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь (1, 2, 3) – символ циклической перестановки величин с указанными индексами.

2. Существование линейного интеграла уравнений малых движений

Получим условия существования линейного интеграла динамической системы (7) с элементами (8).

Обозначим

$$F_j(t, \mathbf{G}) = (\mathbf{n}_j \cdot \mathbf{G}), \quad \mathbf{f}_j(t) = \dot{\mathbf{n}}_j + (\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{n}_j), \quad (9)$$

$$\mathbf{Q}_j(t) = \ddot{\mathbf{n}}_j + 2(\boldsymbol{\lambda} \times \dot{\mathbf{n}}_j) - \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{n}_j \quad (j = 1, 2, 3)$$

и введем равенство

$$F_1(t, \mathbf{G}) = h_1 \quad (h_1 = \text{const}). \quad (10)$$

Здесь $(F_j, \mathbf{n}_j), \boldsymbol{\lambda}$ ($t \in T, j = 1, 2, 3$) – заданные функции классов C^2, C^1 , соответственно.

Для дальнейшего положим

$$\|\mathbf{n}_j(t)\|^2 \neq 0 \quad (t \in T; j = 1, 2, 3). \quad (11)$$

Утверждение 1. Для того, чтобы равенство (10) являлось первым интегралом динамической системы (7), необходимо, чтобы выполнялись условия (11) и

$$\mathbf{Q}_1(t) = 0 \quad (t \in T), \quad (12)$$

где \mathbf{Q}_1 определяется соотношением (9).

Доказательство. Дифференцируя по t равенство (10), в силу динамического уравнения системы (3), линеаризованного в окрестности состояния (5), скалярных уравнений системы (7) и условий (6), (11) в результате получаем равенство относительно вектор-функции \mathbf{G} . Применяя к полученному равенству тождество

$$(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{A}\mathbf{G}) = (\mathbf{A}^T \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{G}) \quad (t \in T), \quad (13)$$

получаем соотношение

$$(\mathbf{Q}_1(t) \cdot \mathbf{G}(t)) = 0 \quad (t \in T). \quad (14)$$

Равенство (14) является тождеством по переменной \mathbf{G} , удовлетворяющемуся при условии (12).

Утверждение 2. Для того, чтобы равенство (10) являлось первым интегралом динамической системы (7), достаточно, чтобы выполнялись ограничения (11), (12) и условие

$$(\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{G})^0 = 0, \quad (15)$$

где функция \mathbf{f}_1 определяется равенством (9).

Доказательство. Равенство (14) выполняется согласно условию (12). Применяя тождество (13), в силу динамического уравнения системы (3), линеаризованного в малой окрестности состояния (5), уравнения (7) и условий (6), (11) получаем

$$\ddot{F}_1(t, \mathbf{G}) = 0,$$

откуда для $t \in T$ имеем

$$F_1(t, \mathbf{G}) = h_1 + h_0 t, \quad (16)$$

где h_0 – постоянная интегрирования.

Согласно линеаризованному динамическому уравнению (3) находим $\dot{F}_1(t, \mathbf{G}) = (\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{G}) \quad (t \in T)$. Отсюда, задавая начальные условия $(t = 0, n_1^0, \dot{n}_1^0, \mathbf{G}^0)$, в соответствии с ограничением (15) имеем $\dot{F}_1^0 = 0$. Следовательно, в силу соотношения (16) получаем $h_0 = 0$, откуда непосредственно следует, что равенство (10) является первым интегралом системы уравнений (7). \square

По аналогии с соотношением (10) введем равенство

$$F_2(t, \mathbf{G}) = h_2 \quad (t \in T), \quad (17)$$

где h_2 – постоянная интегрирования, а также функции $n_{ij}(t)$ ($i, j = 1, 2, 3$), принадлежащие для $t \in T$ классу C^2 .

Пусть величина

$$D_1(t) = n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21} \quad (t \in T)$$

– один из базисных миноров $D_r(t)$ ($r = 1, 2, 3$) матрицы

$$\mathbf{F}^*(t) = \left[\frac{\partial F_i}{\partial G_j} \right], \quad \mathbf{n}_i(t) = \mathbf{n}_i(n_{ij}), \quad (i = 1, 2; j = 1, 2, 3).$$

Пусть хотя бы один из миноров $D_r(t) \neq 0$ при $t \in T$, и для определенности, положим

$$D_1(t) \neq 0 \quad (t \in T). \quad (18)$$

Условие (18) геометрически выражает некомпланарность векторов $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{e}_3$, где \mathbf{e}_3 – орт оси базиса Γ_3 . Так как при условии (18) $\text{rang } \mathbf{F}^*(t) = 2$, то линейные формы F_1, F_2 независимы.

Предположим, что равенство (17) является первым интегралом динамической системы (7), для которой одновременно существует и первый интеграл (10).

Тогда в силу предыдущего имеет место следующее заключение.

Утверждение 3. Для того чтобы равенства (10), (17) являлись независимыми первыми интегралами динамической систе-

мы (7), необходимо и достаточно, чтобы для $t \in T$ выполнялись условия (11) и

$$\mathbf{Q}_j(t) = 0, \quad (\mathbf{f}_j \cdot \mathbf{G})^0 = 0 \quad (j = 1, 2), \quad (19)$$

а также по крайней мере одно из условий типа (18). \square

Доказательство этого утверждения – элементарно.

Утверждение 4. Пусть для значений $t \in T$

$$\mathbf{F}(t) = [n_{ij}(t)], \quad \mathbf{n}_i(t) = \mathbf{n}_i(n_{ij}) \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Тогда, если для $t \in T$ существует линейный интеграл динамической системы (7)

$$F_3(t, \mathbf{G}) \equiv (\mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{G}) = h_3 \quad (h_3 = \text{const}), \quad (20)$$

независимый по отношению к интегралам (10), (17), то выполняется условие

$$\det \mathbf{F}(t) = (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_3) \neq 0 \quad (t \in T). \quad \square \quad (21)$$

Аналогично предыдущему устанавливается следующее

Утверждение 5. Для того чтобы равенства (10), (17), (20) являлись независимыми первыми интегралами динамической системы (7), необходимо и достаточно, чтобы при $j = 1, 2, 3$ выполнялись ограничения (11), (19). \square

Следствия. 1. При выполнении условия (21) векторы $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ для $t \in T$ некопланарны. Справедливо и обратное.

2. Пусть при каждом фиксированном значении индекса j выполняется условие

$$\mathbf{f}_j^0 \neq 0 \quad (j = 1, 2, 3). \quad (22)$$

Тогда при условиях (11), (18), (19) и (22) (для $j = 1, 2$) имеем

$$(\mathbf{f}_1^0 \times \mathbf{f}_2^0) \times \mathbf{G}^0 = 0. \quad (23)$$

3. При ограничениях (21), (22) система векторов \mathbf{f}_j^0 ($j = 1, 2, 3$) компланарна

$$(\mathbf{f}_1^0 \cdot \mathbf{f}_2^0 \cdot \mathbf{f}_3^0) = 0. \quad (24)$$

Замечания. 1. Условие (22) выполняется в случае, при котором исключается начальное состояние СМС, когда конфигурационное пространство, неизменно связанное с вектором $\mathbf{n}_j(t)$

(при фиксированном значении индекса j), вращается вокруг неподвижного полюса со скоростью $(-\lambda)$ относительно базиса Γ_3 .

2. Соотношения (23), (24) непосредственно следуют из второй группы условий типа (19) при $j = 1, 2$ и при $j = 1, 2, 3$, соответственно.

3. Совместный линейный интеграл Динамических систем

Под совместным линейным интегралом понимается первый интеграл типа (10), являющийся интегралом линейной системы (7), который одновременно состоит первым интегралом исходной нелинейной системы (4). Если между данными интегралами удастся найти функциональную взаимосвязь, то исследование линейной системы типа (7) будет представлять интерес в связи с тем, что анализ малых движений в окрестности состояния устойчивого равновесия СМС логически связан с решением вопроса о существовании линейного интеграла исходной нелинейной системы.

Если существует линейный интеграл малых по всем G_j движений, определяемых уравнением (7), и его аналитическое продолжение в область существования линейного интеграла нелинейной системы (4), то этот интеграл при выполнении условий аналитической продолжаемости является *совместным* интегралом динамических систем (4) и (7).

Условия аналитической продолжаемости являются ограничениями, наложенными на параметры СМС, совместимыми с условиями существования малых движений ее носителя. В частности, эти ограничения могут являться *управляющими связями* [7], реализация которых обуславливает существование линейного интеграла. Такой подход к исследованию вопроса о существовании линейных интегралов уравнений движения основан на идеях Т. Кэйна [8] и В. Кинера [9].

Получим ограничения, при которых система (7) обладает совместным с системой (4) линейным интегралом

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{G}) = h, \quad (25)$$

где $\mathbf{n}(t)$ – вектор-функция класса $C^2(T)$, подчиненная условию типа (11); h – постоянная интегрирования.

Обозначим, аналогично второму равенству (9),

$$\mathbf{Q}(t) = \ddot{\mathbf{n}} + 2(\boldsymbol{\lambda} \times \dot{\mathbf{n}}) - \mathbf{A}^T(t)\mathbf{n}, \quad (26)$$

$$\mathbf{w}(w_j) = (\mathbf{n} \times \mathbf{f}). \quad (27)$$

Как известно [10], критериальное условие существования интеграла (25) системы (4) сводится к выполнению для $t \in T$ условий

$$(\mathbf{n} \times \mathbf{s}) = 0, \quad n_1(\mathbf{n} \cdot \mathbf{L}) + h f_1 = 0, \quad (28)$$

$$w_j + (-1)^j h m_j n_j = 0 \quad (j=2, 3),$$

$$m_1 n_1^2 - m_2 n_2^2 - m_3 n_3^2 = 0, \quad (29)$$

$$m_j n_2 n_3 = 0 \quad (j=2, 3).$$

Для функции $\mathbf{Q}(t)$ (26) положим

$$\mathbf{Q}(t) = 0 \quad (t \in T) \quad (30)$$

и предположим, что СМС обладает центральной кинетической симметрией, согласно которой

$$\mathbf{J}(t) = A(t)\mathbf{E} \quad (t \in T), \quad (31)$$

где \mathbf{E} – единичная матрица, $A(t)$ – функция класса $C^0(T)$.

Приведем условие существования совместного линейного интеграла динамических систем (4), (7).

Утверждение 6. Условия (28)–(30) и

$$(\mathbf{f} \cdot \mathbf{G})^0 = 0, \quad (32)$$

являются достаточными для существования линейного интеграла (25) динамических систем (4), (7) в случае центральной кинетической симметрии СМС, определяемом условием (31). \square

Доказательство этого положения проводится как и для утверждения 2 с учетом условий (26)–(32).

Библиографический список

1. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. В 2 ч. М.: Физматлит. Ч. 2, 1966. 332 с.
2. Уиттекер Е.Т. Аналитическая динамика. М.; Л.: ОНТИ, 1937. 500 с.

3. *Макеев Н.Н.* Асимптотика малых движений сложной механической системы // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы / Пермский ун-т. Пермь. Вып. 38. 2006. С. 64–86.

4. *Кузьмин П.А.* Малые колебания и устойчивость движения. М.: Наука, 1973. 207 с.

5. *Макеев Н.Н.* Интеграл Ковалевской для уравнений движения сложной механической системы // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 1 (44). С. 22–30.

6. *Макеев Н.Н.* О некоторых свойствах главных осей инерции тела переменной массы // Проблемы механики управляемого движения / Пермский ун-т. Пермь. 1978. С. 126–131.

7. *Макеев Н.Н.* Интегралы сложных систем на управляющих связях / Саратовский политех. ин-т. Саратов, 1989. 123 с. Деп. в ВИНТИ 14.03.89, № 1656–В89.

8. *Kane T.R., Djerassi S.* Integrals of linearized differential equations of motion of mechanical // Transactions ASME. Ser. E / Journal of Applied Mechanics. 1987. Vol. 54, № 3. P. 656–667.

9. *Джакалья Г.Е.О.* Методы теории возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 320 с.

10. *Макеев Н.Н.* Линейный интеграл сложной системы / Саратовский политех. ин-т. Саратов, 1988. 32 с. Деп. в ВИНТИ 17.05.88, № 3769–В88.

УДК 531.36

Н.Н. Макеев

*Институт проблем точной механики
и управления РАН*

Россия, 410028, г. Саратов, ул. Рабочая, 24
nmakeyev@mail.ru; (845) 272-35-33

СПЕКТРАЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА СИСТЕМ КАНОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕХАНИКИ

Получено условие мнимости спектра характеристической матрицы линейного приближения уравнений движения гамильтоновой системы. Приводится пример применения полученного условия в классической задаче о стационарном вращении трехстепенного гироскопа в однородной сплошной среде с сопротивлением.

Ключевые слова: гамильтонова система; спектр собственных значений характеристической матрицы; матрица Ганкеля.

Введение

При решении нелинейных задач динамики механических систем требуется применить условие, при котором спектр собственных значений (*спектральное множество* S) характеристической матрицы линейного приближения возмущенной динамической системы содержит только нулевые и (или) мнимые значения. Этим свойством обладает обширный класс задач классической механики.

Одним из примеров задач подобного рода является задача о колебаниях нелинейной автономной динамической системы, при которых спектр собственных значений матрицы линейной

части системы уравнений Эйлера-Пуассона, описывающей возмущенное движение твердого тела вокруг неподвижного полюса в однородном поле силы тяжести представляется в виде $S \in (0, 0, \pm i, \pm \lambda i)$. Здесь λ – действительное число – характеристический множитель, i – мнимая единица [1, с. 201].

Другой задачей данного рода является задача о движении гиригостата с постоянным гиригостатическим моментом вокруг неподвижного полюса в комбинированном силовом поле, составляющими которого являются однородное гравитационное, постоянное магнитное поле и поле сил Лоренца. В этой задаче спектр собственных значений при возмущенных колебаниях носителя гиригостата представлен множеством $S \in (0, 0, \pm i\Omega)$, где Ω – главная круговая частота колебаний [2].

В приведенных примерах всякому нулевому собственному значению соответствуют простые элементарные делители.

К этому же классу задач относится и общая задача о возмущениях линейных колебаний n -мерного осциллятора – динамической системы с гамильтонианом

$$H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad \det \left[\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_j} \right] \neq 0 \quad (\mathbf{q} = \mathbf{p} = 0)$$

в окрестности точки $(0, 0)$ изолированного положения равновесия системы. Здесь \mathbf{q}, \mathbf{p} – канонически сопряженные векторы обобщенных координат и импульсов размерности n . Если эта точка является положением равновесия эллиптического типа, то возмущенная система имеет собственные значения вида

$$\lambda_k = i\omega_k \quad (k = 1, \dots, n), \quad (1)$$

где все действительные числа $\omega_k \neq 0$ [3, с. 155].

К указанному классу задач относятся и модельные задачи, представленные в книге [4]: о движении механической системы в окрестности изолированного положения устойчивого равновесия под воздействием стационарных сил в консервативном силовом поле (с. 263); о линейных одномерных колебаниях систем двух (с. 269) и трех (с. 275) осцилляторов, связанных между со-

бой линейной упругой удерживающей связью. В этих задачах корни соответствующих характеристических уравнений принадлежат спектральному множеству S вида (1).

Существуют и другие случаи движения, а также примеры модельных задач, обладающих данным спектральным свойством. Указанные случаи объединены общим условием принадлежности собственных значений множества S мнимой оси комплексной плоскости Z

$$S \in (\text{Im } Z). \quad (2)$$

Это условие отражает определенное характерное свойство движения механического объекта.

Целью настоящей работы является установление признака выполнимости условия (2).

1. Предварительные положения

Пусть дана гамильтонова система с n степенями свободы и $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ – ее гамильтониан, являющийся голоморфной функцией, определенной в открытой области фазового пространства \mathbf{R}^{2n} . Здесь \mathbf{q}, \mathbf{p} – канонически сопряженные действительные векторы обобщенных координат q_j и обобщенных импульсов p_j размерности n . При этом q_j, p_j ($j = 1, \dots, n$) – локальные симплектические координаты – функции класса $C^2(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, определенные в заданной области фазового пространства.

Состояние механической системы в фазовом пространстве характеризуется каноническими уравнениями

$$\dot{q}_j = [q_j, H], \quad \dot{p}_j = [p_j, H] \quad (j = 1, \dots, n), \quad (3)$$

где $[\dots]$ – символ скобки Пуассона.

В разложении голоморфной по q_j, p_j функции Гамильтона [3, с. 155]

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum_{k=2}^{\infty} H_k(\mathbf{q}, \mathbf{p})$$

ограничимся квадратичной компонентой

$$H_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} (\mathbf{p}^T \mathbf{A}_1 \mathbf{p} + 2\mathbf{p}^T \mathbf{A}_3 \mathbf{q} + \mathbf{q}^T \mathbf{A}_2 \mathbf{q}), \quad (4)$$

где \mathbf{A}_r ($r=1,2,3$) – числовые матрицы формата $(n \times n)$, причем $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ – симметрические матрицы; T – символ транспонированной матрицы. В дальнейшем функцию H_2 , содержащуюся в уравнениях (3), обозначим H .

Полагаем, что связи, наложенные на механическую систему, стационарны. Тогда в результате разложения функции полной механической энергии в степенной ряд в окрестности изолированного положения равновесия системы для гамильтониана (4) имеем

$$H(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A}_1^{-1} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{q}^T \mathbf{A}_2 \mathbf{q}), \quad (5)$$

где \mathbf{A}_1^{-1} – положительно определенная матрица, в силу чего матрица \mathbf{A}_1 также положительно определена [5].

В дальнейшем для гамильтониана применяется выражение (5) и рассматривается только случай, при котором матрица \mathbf{A}_2 положительно полуопределена (или, по другой терминологии, неотрицательно определена). В этом случае характеристическая матрица линейной части системы (3) имеет вид

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \\ -\mathbf{A}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Введем *блочные* (или *клеточные* по терминологии работы [5, с. 111]) матрицы вида

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_2(\mathbf{X}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X} \end{bmatrix}, & \mathbf{P}_4(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{I} = \mathbf{I}(\mathbf{E}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix}, & \mathbf{P}_4^*(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Y} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{L}(\mu, \mathbf{X}) &= \mu \mathbf{E} - \mathbf{X}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_4^*, \mathbf{I}$ – квазидиагональные матрицы [6, с. 146], причем матрица \mathbf{P}_4^* диагонально симметрична матрице \mathbf{P}_4 ; \mathbf{E} – единичная матрица; \mathbf{X}, \mathbf{Y} – произвольные матрицы заданного формата; μ – характеристический параметр.

2. Условие мнимости спектра характеристической матрицы

Получим условие выполнимости спектрального ограничения (2). Характеристическое уравнение

$$D(\mu) \equiv \det \mathbf{L}(\mu, \mathbf{G}) = 0, \quad (7)$$

где \mathbf{G} – матрица (6), всегда имеет парные корни $(-\mu, \mu)$. При этом число его простых мнимых корней равно числу простых действительных корней уравнения $D(i\omega) = 0$. Полином $D(\mu)$ (7) есть функция только четных степеней параметра μ [4], в силу чего полином

$$\begin{aligned} D(i\omega) &= \det[\mathbf{P}_4(\mathbf{A}_2, -\mathbf{A}_1) + \mathbf{P}_4^*(\mathbf{A}_3, -\mathbf{A}_3^T) - i\omega \mathbf{I}] = \\ &= (-1)^{n+1} \det[\mathbf{P}_2(\omega \mathbf{E}) + \mathbf{P}_4(\mathbf{A}_2, -\mathbf{A}_1) + i\mathbf{P}_4^*(\mathbf{A}_3, -\mathbf{A}_3^T)] \end{aligned}$$

является действительной функцией.

Положим $\det \mathbf{G} \neq 0$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(x_1, \dots, x_n)$ и введем форму Ганкеля [5, с. 354; 7]

$$\Gamma(\mathbf{x}) = \sum_{(kj)=0}^{2n-1} b_{k+j} x_k x_j, \quad (8)$$

где коэффициенты

$$b_m = \sum_{s=1}^{2n} \omega_s^m = \text{Tr } \mathbf{Q}^m = R^m \quad (m = 0, 1, \dots) \quad (9)$$

и примем

$$\mathbf{Q} = -i\mathbf{G}, \quad F(\omega) = \det(\mathbf{Q} - \omega \mathbf{E}),$$

где ω_s – корни полинома $F(\omega)$.

Поскольку

$$D(i\omega) = (-1)^n F(\omega),$$

то полином $F(\omega)$ также действительный. Количество всех простых корней полинома $F(\omega)$ равно рангу ганкелевой формы (8), а число всех его простых действительных корней – сигнатуре этой формы. При этом ее коэффициенты b_m (9) равны соответствующим суммам Ньютона для корней полинома $F(\omega)$.

Критерием действительности всех корней полинома $F(\omega)$ является условие равенства ранга и сигнатуры ганкелевой формы (8). Корни $\omega_1, \dots, \omega_{2n}$ полинома $F(\omega)$, содержащиеся в равенстве (9), учитываются столько раз, какова их кратность. В силу этого имеем

$$R^m = (-i)^m \text{Tr } \mathbf{G}^m. \quad (10)$$

Пусть матрица $\overline{\mathbf{G}}$ – верхняя жорданова форма канонической матрицы \mathbf{G} (6), на главной диагонали которой находятся все $2n$ собственных значений матрицы \mathbf{G} , и пусть \mathbf{N} – такая невырожденная матрица, что

$$\mathbf{G}^m = \mathbf{N}^{-1} \overline{\mathbf{G}}^m \mathbf{N}.$$

Тогда в силу свойств корней уравнения (7) и инвариантности следа матрицы относительно линейного невырожденного преобразования имеем

$$\text{Tr } \mathbf{G}^m = \begin{cases} 0 & \text{при } m = 2k + 1, \\ (-1)^k b_{2k} & \text{при } m = 2k, \end{cases} \quad (11)$$

где число k может принимать нулевое и натуральные значения.

Ганкелева форма (8) имеет всего $4n^2$ коэффициентов b_m , из которых $2n^2$ равны нулю ($n = 1, 2, \dots$). Для формы $\Gamma > 0$ ранг равен ее сигнатуре. При этом все собственные значения канонической матрицы \mathbf{G} различны, а матрице $\mathbf{L}(\mu, \mathbf{G})$ соответствуют линейные элементарные делители. В силу этого выполняется определяющее спектральное условие (2).

Таким образом, установлено следующее *результатирующее утверждение*: критерием полной принадлежности спектрального множества невырожденной матрицы \mathbf{G} мнимой оси комплексной плоскости Z является условие равенства ранга и сигнатуры формы Ганкеля Γ (8).

3. Стационарное вращение трехстепенного гироскопа

В качестве примера применения полученного результата приведем классическую модельную задачу динамики твердого тела – задачу о стационарном вращении кинетически осесимметричного твердого тела со скоростью Ω в однородном поле силы тяжести. Твердое тело вращается вокруг оси симметрии, проходящей через неподвижный полюс. Сопротивление внешней среды при движении тела принимается как осредненная постоянная величина.

Используя известные уравнения движения тела и принимая его стационарное вращение за невозмущенное движение, получим стандартным приемом систему уравнений возмущенного движения, характеристическое уравнение которой имеет вид [8, с. 49]

$$\det(\mathbf{G} - \mu \mathbf{E}) \equiv \mu^4 + a_1 \mu^2 + a_2 = 0. \quad (12)$$

Здесь обозначено

$$a_1 = J_1^{-2}(J_3^2 \Omega^2 - 2J_1 M), \quad a_2 = J_1^{-2} M^2, \quad (13)$$

где J_1, J_3 – экваториальный и аксиальный главные моменты инерции тела, M – модуль результирующего момента сил сопротивления среды.

Наложим на параметры задачи ограничения, заданные условиями моделирования

$$(J_3 \Omega)^2 - 2J_1 M \geq 11J_1^2, \quad M \geq 2J_1 \sqrt{6} \approx 4.899 J_1, \quad (14)$$

согласно которым $\Omega \geq 4.560 J_1 J_3^{-1}$.

При ограничениях (14) все элементы спектрального множества, определяемого уравнением (12), – простые мнимые, что соответствует спектру, устанавливаемому условием (2).

Обозначим

$$a = a_1 + 2, \quad \delta = a_1^2 - 4a_2,$$

$$c_1^2 = \frac{1}{2}(a \mp \sqrt{\delta}), \quad c_2^2 = \frac{1}{2}(a \pm \sqrt{\delta}),$$

где параметры a_1, a_2 определяются выражениями (13). При условиях (14) и принятом минимальном значении величины Ω параметры a_1, a_2, δ – положительные числа. Тогда блочная матрица формата (4×4) линейной системы имеет структуру

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{P}_4^* \\ -\mathbf{P}_4^* & -\mathbf{E} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

а ее определитель $\det \mathbf{G} = a_2 \neq 0$ в силу равенства (13). Здесь $\mathbf{P}_4^* = \mathbf{P}_4^*(c_1, c_2)$ – квазидиагональная матрица, введенная ранее.

В результате вычислений для соотношений (9)–(11) имеем

$$\begin{aligned} \text{Tr } \mathbf{G}^0 = b_0 = 4, \quad \text{Tr } \mathbf{G}^2 = -b_2 = -2a_1, \\ \text{Tr } \mathbf{G}^4 = b_4 = a_1^2 + \delta, \quad \text{Tr } \mathbf{G}^6 = -b_6 = -2a_1(a_2 + \delta), \end{aligned} \quad (15)$$

откуда следует, что главные диагональные матрицы формы Ганкеля Γ являются гурвицевыми. Это означает, что матрица Ганкеля Γ формы (8) с элементами b_{2k} ($k = 0, \dots, 3$), определяемыми равенствами (15), является невырожденной и эрмитовой. Все ее главные диагональные миноры положительны, в силу чего и сама форма $\Gamma > 0$.

Вследствие этого ранг данной формы равен ее сигнатуре, а матрица Γ для данного примера имеет вид

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} b_0 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & b_4 \\ b_2 & 0 & b_4 & 0 \\ 0 & b_4 & 0 & b_6 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Таким образом, согласно приведенным утверждениям о структуре спектра формы Γ заключаем, что для рассмотренного примера условие мнимости элементов спектрального множества (2) выполняется.

Комментарии

В некоторых задачах о движениях механических объектов и в исследованиях стационарных состояний динамических систем соответствующие характеристические уравнения возмущенных систем линейного приближения являются биквадратными уравнениями вида (12). Примерами таких уравнений являются уравнения, представленные в упомянутых выше модельных задачах о линейных одномерных колебаниях систем двух и трех связанных осцилляторов, находящихся на линейных удерживающих упругих связях [4, с. 268, 276], а также уравнения стационарного вращения волчка [9, с. 123].

Если при этом выполняется спектральное условие (2), то квадратное относительно μ^2 уравнение (12) имеет действительные отрицательные корни, что является определенным отличительным признаком, позволяющим, в частности, установить факт устойчивости (или неустойчивости) стационарного вращения трехстепенного гироскопа, рассмотренного в п. 3, путем применения элементарных соображений [9, с. 123], не связанных с каким-либо определенным стандартным методом.

Характерно, что матрица Ганкеля (16), представленная для значений (15), является *иннорно положительной* [10, с. 17], что соответствует спектральному множеству, определяемому условием (2).

Множества собственных значений систем канонических уравнений (3), определяемых условием (2), характерны для задач с осциллирующими режимами движения механических объектов [4, с. 263], а также для задач о стационарных движениях вращающихся кинетически симметричных твердых тел [8].

Динамической системе, заданной в приведенном примере, может быть дано следующее известное топологическое описание [11]. Ее спектр собственных значений при условиях, соот-

ветствующих ограничениям (14), относится к множеству (1) и имеет вид

$$\lambda = (\pm i\omega_1, \pm i\omega_2),$$

удовлетворяющий условию (2). Фазовый портрет данной системы в пространстве \mathbf{R}^4 представлен вращениями с угловыми координатами

$$\varphi_1 = \omega_1 t, \quad \varphi_2 = \omega_2 t,$$

задающими диффеоморфизм фазовой поверхности. Здесь величины ω_1, ω_2 соответствуют параметрам ω_k равенств (1).

Фазовые траектории динамической системы (3) в этом случае расположены на двумерном торе

$$T^2 = \{(\varphi_1, \varphi_2) \bmod 2\pi\}$$

и удовлетворяют уравнениям

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1, \quad \dot{\varphi}_2 = \omega_2.$$

При этом ненулевые частотные параметры ω_1, ω_2 рационально независимы, если для произвольных целых чисел k_1, k_2 из равенства

$$k_1\omega_1 + k_2\omega_2 = 0$$

следует условие $k_1 = k_2 = 0$.

Библиографический список

1. *Старжинский В.М.* Прикладные методы нелинейных колебаний. М.: Наука, 1977. 256 с.
2. *Макеев Н.Н.* Малые колебания гиростата в комбинированном силовом поле // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы / Пермский ун-т. Пермь. Вып. 42. 2010. С. 64–77.
3. *Джакалья Г.Е.О.* Методы теории возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 320 с.

4. *Ольховский И.И.* Курс теоретической механики. М.: Наука, 1970. 448 с.
5. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969. 368 с.
6. *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1978. 280 с.
7. *Иохвидов И.С.* О ганкелевых матрицах и формах // Математический сборник. 1969. Т. 80 (122), № 2 (10). С. 241–252.
8. *Афанасьев В.Н. и др.* Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 1989. 448 с.
9. *Меркин Д.Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1976. 320 с.
10. *Джури Э.* Инноры и устойчивость динамических систем. М.: Наука, 1979. 300 с.
11. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1971. 240 с.

УДК 629.11

Е.А. Максимов, Е.П. Устиновский

Ожноуральский государственный университет

ЮурГУ, г. Челябинск

maksimov50@mail.ru; 8-9514-30-68-31

**МАТЕТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
СИЛОВЫХ И КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ
ДЛЯ ВЕДОМОГО, ВЕДУЩЕГО
И ТОРМОЗЯЩЕГО КОЛЕС**

Представлены схемы сил и эпюры нормальных контактных напряжений, касательных сил трения, продольных скоростей на контакте шины с дорожным покрытием для неподвижного, ведомого, ведущего и тормозящего колеса.

Установлено, что для неподвижного колеса нормальные контактные напряжения распределяются неравномерно по длине контакта шины. Эпюра распределения нормальных контактных напряжений по длине контакта в центральной части беговой дорожки приближается к трапециевидальной форме.

Установлено, что для ведомого колеса длина зоны входа снижается, а длина зоны выхода увеличивается. Максимальная величина продольных скоростей наблюдается и входе и выходе из шины из контакта. Величина скольжения на выходе из контакта больше, чем на входе.

Показано, что для ведущего колеса действие крутящего момента приводит к перераспределению нормальных напряжений по длине контакта. Нормальные напряжения по сравнению с ведомым колесом несколько повышаются в зоне ближе к выходу. Для ведущего колеса длина зоны входа увеличивается, а длина зоны выхода снижается. Минимальная величина продольных скоростей наблюдается и входе и выходе из шины из контакта. Показано, что на ведущем колесе для автомобиля Урал 4320:

$P_Z = 23500$ Н, $P_X = 1100$ Н, $\tau_X = 10$, 1 МПа;

для Урала 375: $P_Z = 13500$ Н, $P_X = 6300$ Н, $\tau_X = 6,2$ МПа.

Ключевые слова: *силовые и кинематические параметры; ведомое, ведущее, тормозящее колеса.*

Введение

В настоящее время колеса являются основным видом движителя для автомобилей и других транспортных средств.

Особенности конструкции колес оказывают влияние на следующие параметры: тяговоскоростные, плавность хода топливноэкономические. В связи с этим важной проблемой является распределение сил, эпюры нормальных контактных напряжений, касательных сил трения, продольных скоростей на контакте шины с дорожным покрытием для неподвижного, ведомого, ведущего и тормозящего колеса [1–3].

При движении автомобиля колесо работает в сложных условиях [4, 5]. В процессе качения на колесо действуют различные по величине и направлению силы.

К силам внутреннего давления воздуха и веса автомобиля, действующим на колесо в неподвижном состоянии, при качении колеса добавляются динамические силы, а также силы, связанные с перераспределением веса и груза автомобиля между колесами [6–8]. Эти силы изменяют свою величину и направление для неподвижного, ведомого, ведущего и тормозного режима колеса [9–11].

При нагружении автомобильного колеса нормальной нагрузкой шина подвергается деформации, и в зоне контакта с дорожным покрытием ее радиус ΔR уменьшается.

Материалы и методы

На рис. 1 показана схема неподвижного автомобильного колеса.

В зоне контакта внешние силы, приложенные к шине со стороны дорожного покрытия, уравнивают нагрузку от внутреннего воздуха в шине.

В зонах № 1 часть беговой дорожки шины, имеющей длину l , уменьшается на величину $l(1 - \varepsilon)$ (ε – относительная деформация шины). В зоне № 1 элемент беговой дорожки шины, наряду со стремлением сжаться в окружном направлении, при выпрямлении беговой дорожки получает угловое смещение влево в зоне № 1 и вправо в зоне № 2.

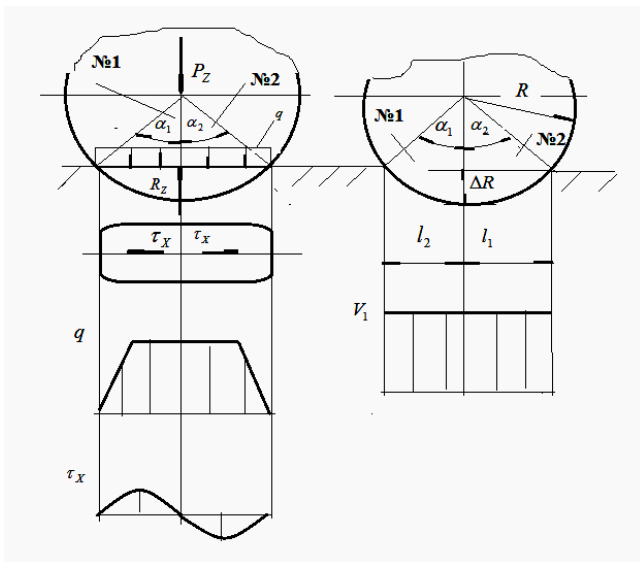


Рис. 1. Схема неподвижного автомобильного колеса: P_z – вертикальная сила, R – радиус шины колеса, ΔR – деформация радиуса шины колеса под действием вертикальной силы, R_z – нормальная реакция, $l = l_1 + l_2$ – длины контактной поверхности, α_1, α_2 – углы контакта, τ_x – касательные силы трения

При этом точка по вертикальной оси не имеет углового смещения и остается на прежнем месте. Смещенные элементов беговой дорожки препятствуют удельные силы трения τ_{xK} , действующие между шиной и опорной поверхностью.

$$\tau_{xK} = \mu ql, \quad (1)$$

где μ – коэффициент трения.

Закон распределения продольных удельных сил трения по длине контакта может быть записан в виде

$$\tau_x = \tau_{xK} \text{Sin} \alpha, \quad (2)$$

где α – текущее значение угла поворота колеса.

В поперечном направлении действуют поперечные касательные напряжения, природа которых аналогична природе продольных касательных напряжений.

Вертикальную силу P_z определим по формуле:

$$P_z = \iint q dF, \quad (3)$$

где q – нормальные контактные напряжения, F – площадь контакта.

Нормальные контактные напряжения q распределяются неравномерно по площади контакта шины. При малых ΔR нормальные контактные напряжения пропорциональны нормальной деформации шины $\Delta R/R$. При этом распределении нормальные контактные напряжения по длине контакта соответствуют эллиптическому или параболическому законам. Эпюра распределения нормальных контактных напряжений по длине контакта в центральной части беговой дорожки приближается к трапециевидальной форме (рис. 1). По ширине контакта нормальные контактные напряжения также распределяются неравномерно.

На рис. 2 показана схема ведомого колеса автомобиля.

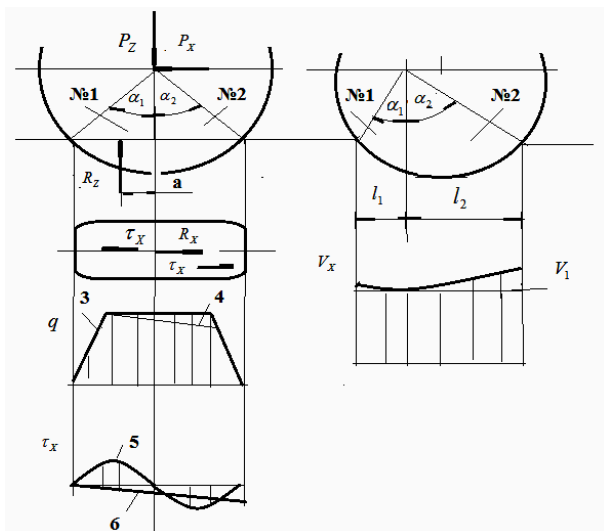


Рис. 2. Схема сил, действующих на ведомое колесо

Известно, что качение ведомого колеса происходит под действием толкающей силы P_X , приложенной к оси колеса в горизонтальной плоскости, равной силе сопротивления качению ведомого колеса.

Продольные касательные напряжения отталкивают шину от опорной поверхности, т. е. создают момент, способствующий качению колеса. При этом, в связи с наличием гистерезисных потерь в материале шины, давление беговой дорожки шины на опорную поверхность в зоне № 2 меньше, чем в зоне № 1.

В этом случае нормальная реакция на участке № 1 больше, чем на участке № 2. При этом общая реакция дорожного покрытия смещается в направлении зоны № 1. Плечо a реакции R_Z смещается в направлении движения колеса. В плоскости контакта ведомого колеса действует продольная реакция R_X , направленная против движения колеса. Продольная реакция R_X является результирующей продольных касательных напряжений τ_X , приложенных в контакте.

Уравнение равновесия сил запишем в виде

$$P_Z = R_Z, \quad P_X = R_X. \quad (4)$$

Эпюра нормальных контактных напряжений ведомого колеса отличается от аналогичной для неподвижного колеса.

Так как давление в зоне № 2 снижается, верхнее основание эпюры нормальных контактных напряжений может получить наклон в сторону выхода из контакта.

Эпюра распределения касательных напряжений шины ведомого колеса отличается от аналогичной эпюры для неподвижного колеса. При качении ведомого колеса возникают дополнительные составляющие продольных касательных сил, обусловленных действием в контакте продольной касательной силы R_X и дополнительным угловым смещением элементов беговой дорожки относительно обода колеса при проходе последним зоны контакта. Эпюра τ_X касательных напряжений 5 и треугольная эпюра касательных напряжений 6 представляют распределение по длине контактных напряжений, вызванных действием реак-

ций дорожного покрытия R_x , равной силе сопротивления качению ведомого колеса. Это обусловлено тем, что напряжения, вызванные внешней касательной силой, действующей в контакте, вычитаются в зоне № 1 и суммируются в зоне № 2.

Значит, разница между результирующими положительными и отрицательными касательными напряжениями должна быть равна внешней касательной силе, действующей в контакте, т. е. силе сопротивления качению ведомого колеса. Для входа и выхода из контакта должно иметь место скольжение.

При этом с большей величиной касательных напряжений на выходе из контакта скольжение в этой зоне должно быть больше, чем на входе в контакт.

Условие постоянства секундных объемов запишем в виде

$$V_1 S_1 = V_x S_x = V_0 S_0 = const, \quad (5)$$

где V_1, V_x, V_0 – окружные скорости на входе, в произвольном сечении, на выходе из контакта, S_1, S_x, S_0 – площадь поперечного сечения на входе, в произвольном сечении, на выходе из контакта.

Решая уравнение (5), получим

$$V_x = \frac{V_1 S_1}{S_x}. \quad (6)$$

Площадь поперечного сечения в произвольном сечении контакта определим по формуле

$$S_x = b R_x, \quad (7)$$

где b – ширина дорожки качения шины, R_x – радиус шины в произвольном сечении контакта.

Радиус в произвольном сечении контакта определим по формуле

$$R_x = R_1 - \Delta R_x, \quad (8)$$

где R_1 – радиус шины на входе в контакт.

Деформацию радиуса шины колеса под действием вертикальной силы запишем в виде:

$$\Delta R_x = R_1 \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right), \quad (9)$$

α – угол в произвольном сечении контакта.

Подставляя (9) в (8), получим

$$R_x = R_1 \cos \frac{\alpha}{2} . \quad (10)$$

Подставляя (10) в (7) и (6), будем иметь

$$V_x = V_1 \cos \frac{\alpha}{2} . \quad (11)$$

Величину скольжения шины относительно поверхности дорожного покрытия запишем в виде

$$\eta = \frac{V_x - V_1}{V_1} = \frac{V_x}{V_1} - 1 . \quad (12)$$

Из рис. 2 следует, что для ведомого колеса длина зоны №1 снижается, а длина зоны №2 увеличивается. Величина скольжения на выходе из контакта больше, чем на входе.

Схема сил, действующих на ведущее колесо, показана на рис. 3.

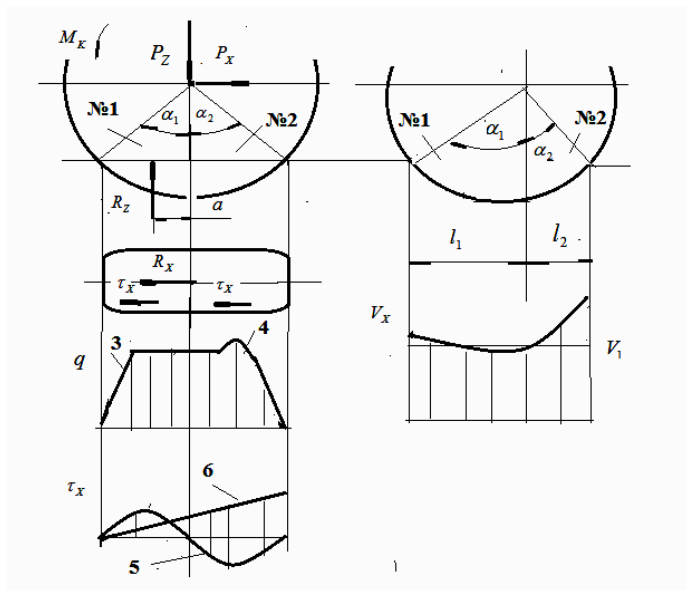


Рис. 3. Схема сил, действующих на ведущее колесо

Анализ показал, действие крутящего момента приводит к перераспределению нормальных напряжений по длине контакта.

Нормальные напряжения по сравнению с ведомым колесом несколько повышаются в зоне № 2 ближе к выходу.

Это можно объяснить тем, что в связи со сдвигом вперед контакта шины относительно оси колеса размеры зоны выпрямления шины № 2 сокращаются, и расстояние l_2 становится меньшим, чем аналогичное расстояние в случае качения ведомого колеса. Это приводит к повышению давления в зоне № 2. И к тому, что наклон верхнего основания эпюры нормальных напряжений ведущего колеса становится меньше, чем у ведомого колеса.

Под действием внешнего крутящего момента, приложенного к ведущему колесу, происходит изменение величины и характера распределения касательных напряжений по площади контакта. При передаче тягового усилия в контакте колеса с дорожным покрытием определяющими становятся продольные касательные силы, приложенные к шине и действующие в направлении движения колеса.

На ведущее колесо действуют: P_Z – вертикальная сила, R_Z – нормальная реакция, R_X – продольная реакция, P_X – реакция оси колеса, равная силе тяги колеса.

Уравнение равновесия моментов относительно оси колеса запишем в виде

$$M_K = P_X r_D + R_Z a, \quad (13)$$

где r_D – радиус, M_K – крутящий момент.

Под действием силы R_X контакт шины смещается вперед по направлению движения относительно оси колеса. В связи с этим зона контакта становится несимметричной относительно вертикальной оси, проходящей через ось колеса.

Это приводит к тому, что длина зоны сжатия шины № 1 становится больше длины зоны выпрямления шины № 2.

При качении ведущего колеса благодаря окружной эластичности шины и действию крутящего момента, элементы боковой дорожки шины перед входом в контакт испытывают сжатие в окружном направлении, а после выхода из контакта – растяжение.

В зонах № 1 часть беговой дорожки шины, имеющий длину l , уменьшается на величину $l(1 - \varepsilon)$ (ε – относительная деформация шины), а после выхода из контакта его длина увеличивается $l(1 + \varepsilon)$.

Распределение дополнительных касательных напряжений, вызванных продольной силой, можно представить изменяющимся по линейному закону (линия б). Из-за наличия окружной эластичности шины внешняя касательная сила, воспринимаемая в контакте колеса в дорожном покрытии, не может распределяться неравномерно по длине контакта. Каждый последующий элемент беговой дорожки входит в контакт свободным от воздействия внешней касательной силы. Нагружение в контакте отдельных элементов беговой дорожки шины внешней касательной силой происходит постепенно, по мере их движения к выходу из контакта.

Величину дополнительных контактных напряжений, воспринимаемым данным элементом беговой дорожки, при отсутствии скольжения в контакте определим по формуле

$$\tau_X = k \Delta x, \quad (14)$$

где k – жесткость на сдвиг элементов беговой дорожки, Δx – деформация сдвига.

По мере движения элемента к выходу из контакта и с увеличением его сдвиговой деформации будет возрастать продольная касательная сила в соответствии с линейным законом до тех пор, пока не наступит проскальзывание элемента относительно дорожного полотна. В этом случае продольная касательная сила станет равной силе трения между беговой дорожкой и дорожным покрытием, и приращение касательной силы прекратится. Это обычно происходит на выходе зоны № 2, где достигаются максимальные сдвиговые деформации. В этом месте наступает снижение контактных нормальных напряжений.

Там, где $\tau_X = \tau_{XP}$, наступает скольжение элементов беговой дорожки относительно дорожного полотна

$$\tau_{XP} = \mu P_Z, \quad (15)$$

где μ – коэффициент трения.

Возникновение скольжения возможно, как в начале контакта, так и на выходе из него.

Из рис. 3 следует, что для ведущего колеса длина зоны №1 увеличивается, а длина зоны № 2 снижается. Максимальная величина продольных скоростей наблюдается на входе и выходе шины из контакта. При этом в соответствии с формулой (3) скольжение на выходе из контакта больше, чем на входе.

Продольные касательные контактные силы в зоне выхода несравнимо больше, чем зоне входа. Поэтому зона скольжения на выходе из контакта существенно больше, чем на входе. Следовательно, в режиме качения ведущего колеса основное скольжение шины должно иметь место в задней части зоны № 2. С увеличением крутящего момента продольные касательные контактные напряжения в контакте шины будут возрастать пропорционально тяговой силе, обуславливающей дополнительные продольные касательные напряжения τ_x . Эпюры распределения продольных касательных контактных напряжений по длине контакта ведущего колеса представлены на рис. 4.

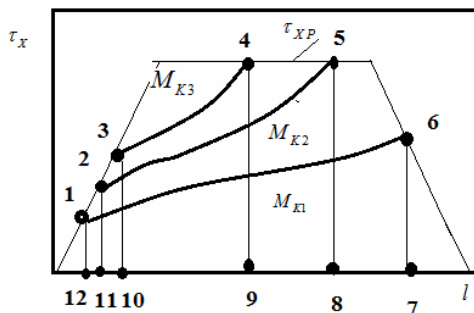


Рис. 4. Эпюры распределения продольных касательных контактных напряжений по длине контакта ведущего колеса

Анализ графиков на рис. 4, показал, что с увеличением крутящего момента интенсивно расширяются зоны предельных значений τ_x , величина которых ограничена эпюрой сил трения τ_{xP} .

Для крутящих моментов M_{K1} , M_{K2} , M_{K3} эти зоны предельных значений τ_x определяются соответственно точками 4, 5, 6 для зоны № 2 и точками 1, 2, 3 для зоны № 1. Соответственно увеличиваются зоны скольжения, определяемые точками 7, 8, 9 для зоны № 2 и точками 10, 11, 12 для зоны №1. Из рис. 4 следует, что с увеличением крутящего момента скольжение шины в контакте, возникающее в зоне № 2, стремится занять всю площадь контакта и при определенном значении крутящего момента скольжение может происходить по всей площади контакта. При этом скольжение беговой дорожки шины в контакте ведущего колеса происходит в направлении вращения колеса.

При торможении вращению колеса препятствует тормозящий момент M_T , приложенный к тормозному барабану колеса и направленный в противоположную сторону по отношению к направлению вращения колеса. Схема сил, действующих на тормозящее колесо, представлена на рис. 5.

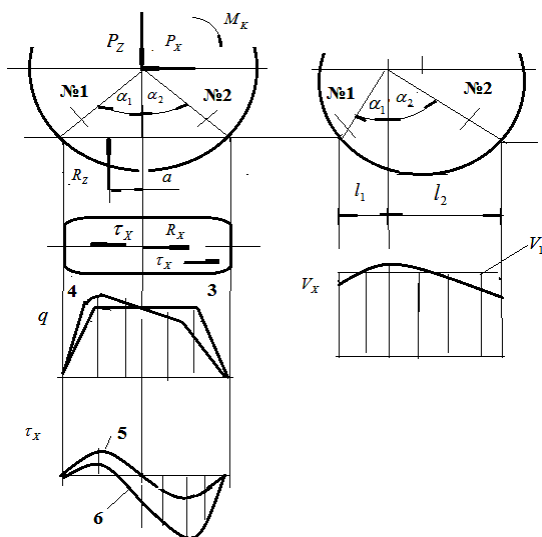


Рис. 5. Схема сил, действующих на тормозящее колесо

На тормозящее колесо действуют: P_Z – вертикальная сила, R_Z – нормальная реакция, R_X – продольная реакция, P_X – толкающая сила.

Уравнение равновесия моментов относительно оси колеса запишем в виде

$$M_T = R_X r_D + R_Z a, \quad (17)$$

где r_D – радиус, M_K – тормозной момент.

Анализ результатов

Анализ показал, что действие сил, приложенных к тормозящему колесу, противоположно по знаку силам и моментам, действующим на ведущее колесо.

В соответствии с этим окружные и сдвиговые деформации шины в режиме качения тормозящего колеса должны быть противоположными по своему знаку в сравнении с режимом качения ведущего колеса.

Под действием толкающей силы контакт шины с дорожным покрытием у тормозящего колеса смещается назад относительно оси колеса. Это приводит к увеличению зоны № 2 выпрямления шины в контакте и уменьшению зоны сжатия № 1. Благодаря противоположности знака крутящего момента элементы беговой дорожки шины тормозящего колеса перед входом в контакт испытывают в окружном направлении растяжение, а в зоне, прилегающей к выходу из контакта – сжатие. При этом элемент, имеющий длину l перед входом в контакт $l(1 + \varepsilon)$, а после выхода из контакта его длина уменьшается $l(1 - \varepsilon)$.

Действие тормозящего момента приводит к соответствующему, но более существенному перераспределению нормальных контактных напряжений по длине контакта, чем для ведущего колеса.

Эпюра нормальных контактных напряжений по сравнению с ведомым колесом заметно повышается в передней зоне №1 и снижается в зоне № 2. При этом более сильное влияние тормозящего момента на перераспределение нормальных контактных напряжений связано с тем, что из-за растянутости эле-

ментов беговой дорожки, входящих в контакт в зоне № 1, длина контакта тормозящего колеса больше, чем у ведущего. Эпюра продольных касательных напряжений по длине контакта представлена на рис. 5.

Распределение дополнительных контактных напряжений происходит на эпюре линейной формы. Однако направление действия этих напряжений противоположно по сравнению с ведущим колесом.

$$R_x = \iint \tau_x dl db. \quad (18)$$

Анализ показывает, что у тормозящего колеса по сравнению с ведущим существенно снижаются касательные напряжения в зоне входа № 1 в контакте и повышаются в зоне выхода № 2.

Это объясняется тем, что для ведущего колеса в задней части контакта № 2 для ведомого колеса дополнительные касательные напряжения противоположны по знаку, а для тормозящего колеса – одинаковы. Поэтому продольные касательные напряжения у тормозящего колеса в задней части контакта № 2 больше, чем у ведущего колеса

При одинаковых тяговой и тормозящей силах зона скольжения тормозящего колеса в задней части контакта № 2 больше, чем у ведущего колеса. У тормозящего колеса в передней части № 1 контактные касательные напряжения противоположны. С увеличением тормозящего момента продольные контактные касательные напряжения шины возрастают пропорционально тормозящей силе, обуславливающей дополнительные касательные напряжения.

Из рис. 5 следует, что для тормозящего колеса длина зоны № 1 снижается, а длина зоны № 2 увеличивается. Скольжение шины в контакте тормозящего колеса противоположно по знаку скольжению ведущего колеса – оно направлено в сторону движения колеса, т. е. противоположно вращению колеса. Величина скольжения на выходе из контакта больше, чем на входе

Из рис. 5 следует, что для ведущего колеса длина зоны входа увеличивается, а длина зоны выхода снижается. Минимальная величина продольных скоростей наблюдается на входе и выходе шины из контакта.

В соответствии с технической характеристикой для автомобиля Урал 4320 применяются шины 12.00R20 (320R508), статическая нагрузка на колесо 23500 Н, масса диска 23 кг, масса шины 11 кг.

Расчет вертикальных, горизонтальных сил, средних касательных сил трения и крутящего момента представлен в таблице.

Расчет вертикальной, горизонтальной сил, средних касательных сил трения крутящего момента

Автомобиль	P_Z	P_X	τ_X	M_K	Колесо
-	Н	Н	МПа	Нм	-
Урал 4320	23500	11000	10,1	102,6	на ведущем колесе
Урал 375	13500	6300	6,2	84,6	на ведущем колесе

Анализ данных, приведенных в таблице, показал, что на ведущем колесе для автомобиля Урал 4320 $P_Z = 23500$ Н, $P_X = 1100$ Н, $\tau_X = 10,1$ МПа, для Урала 375 $P_Z = 13500$ Н, $P_X = 6300$ Н, $\tau_X = 6,2$ МПа.

Выводы

1. Представлены схемы сил и эпюры нормальных контактных напряжений, касательных сил трения, продольных скоростей на контакте шины с дорожным покрытием для неподвижного, ведомого, ведущего и тормозящего колеса.

2. Для неподвижного колеса нормальные контактные напряжения q распределяются неравномерно по длине контакта шины. Эпюра распределения нормальных контактных напряжений по длине контакта в центральной части беговой дорожки приближается к трапециевидальной форме.

3. Эпюра нормальных контактных напряжений ведомого колеса отличается от аналогичной для неподвижного колеса.

Так как давление в зоне выхода из контакта снижается, то верхнее основание эпюры нормальных контактных напряжений может получить наклон в сторону выхода из контакта.

Для ведомого колеса длина зоны входа снижается, а длина зоны выхода увеличивается. Максимальная величина продольных скоростей наблюдается на входе и выходе шины из контакта. Величина скольжения на выходе из контакта больше, чем на входе.

4. Показано, что для ведущего колеса действие крутящего момента приводит к перераспределению нормальных напряжений по длине контакта. Нормальные напряжения по сравнению с ведомым колесом несколько повышаются в зоне ближе к выходу.

Для ведущего колеса длина зоны входа увеличивается, а длина зоны выхода снижается. Максимальная величина продольных скоростей наблюдается на входе и выходе шины из контакта. Скольжение на выходе из контакта больше, чем на входе.

5. Действие сил, приложенных к тормозящему колесу, противоположно по знаку силам и моментам, действующим на ведущее колесо. Под действием толкающей силы контакт шины с дорожным покрытием у тормозящего колеса смещается назад относительно оси колеса. Это приводит к увеличению зоны выхода выпрямления шины в контакте и уменьшению зоны сжатия входа.

Действие тормозящего момента приводит к соответствующему, но более существенному перераспределению нормальных контактных напряжений по длине контакта, чем для ведущего колеса. Эпюра нормальных контактных напряжений по сравнению с ведомым колесом заметно повышается в входной зоне и снижается в выходной зоне

Для ведущего колеса длина зоны входа увеличивается, а длина зоны выхода снижается. Минимальная величина продольных скоростей наблюдается на входе и выходе шины из контакта.

Библиографический список

1. *Вахламов В.К.* Автомобили, конструкции и элементы расчета. М.: Академия. 2006. 408 с.
2. *Стуканов В.А.* Устройство автомобилей / В.А. Стуканов, К.Н. Леонтьев. М.: Форум, 2017. 496 с.

3. *Савельев Г.В.* Колесо для шин с регулируемым давлением / Г.В. Савельев // *Автомобильный транспорт.* 1967. № 5. С. 41–42.
4. *Кнороз В.И.* Шины и колеса / В.И. Кнороз, Е.В. Кленников. М.: Машиностроение, 1975. 183 с.
5. *Зубарев Н.А.* Исследование долговечности дисков автомобильных колес / Н.А. Зубарев // *Автомобильная промышленность.* 1970. № 3. С. 23–25.
6. *Демьянушко И.В.* Расчет и экспериментальное исследование напряженно-деформированного состояния автомобильных колес на статическую нагрузку / И.В. Демьянушко, Е.М. Логинов, В.В. Миронова. М.: МАДИ, 2014. 48 с.
7. *Балабин И.В.* Автомобильные и тракторные колеса и шины / И.В. Балабин, В.А. Путин, И.С. Чабунин. МГТУ; МАМИ, 2012. 920 с.
8. *Зубчанинов В.Г.* Основы теории упругости и пластичности. М.: Высшая школа, 2000. 368 с.
9. *Богомолов В.А.* Расчетное распределение давления в пятне контакта шин с поверхностью дорожной одежды // *Вестник ХНАДУ.* 2016. Вып. 72. С. 143–145.
10. *Балакина Е.Б.* Расчет параметров в пятне контакта // *Автомобильная промышленность.* 2016. № 3. С. 6–7.
11. *Козлов Ю.Н., Сальников В.И., Барашков А.А.* Определение взаимного положения зон разного трения в пятне контакта шины с опорной поверхностью // *Автомобильная промышленность.* 2016. № 3. С. 6–7.

УДК 629.075

А.Ю. Переварюха

*Санкт-Петербургский институт информатики
и автоматизации РАН*

Россия, 198000, г. Санкт-Петербург, 14-линия д. 39
madelf@pisem.net

МЕТОД ИНТЕРВАЛЬНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ДЛЯ МОДЕЛЕЙ НЕРЕГУЛЯРНОЙ ПОПУЛЯЦИОННОЙ ДИНАМИКИ

Рассмотрим особый аспект в методике моделирования нелинейных популяционных процессов и экстремальных режимов в экодинамике с использованием гибридных динамических систем. Свойства поведения траектории многих моделей с переходом к хаосу часто достаточно трудно интерпретировать для практических задач и биологически их обосновать. Однородные бифуркации в двух моделях могут трактоваться совершенно различно, и так приводит к противоречивым решениям при управлении эксплуатацией биоресурсов. Можно предположить, что параметры моделей могут принимать значения не априори фиксированные, но быть интервально заданными величинами. Предлагаются критерии для подбора диапазонов биологически обоснованного поведения моделей и исключения неадекватных нелинейных эффектов.

Ключевые слова: модели экодинамики; экстремальные колебания численности; интерпретация бифуркаций; интервальное определение; параметрические диапазоны режимов; границы адекватности поведения моделей биосистем.

Введение

Мы продолжаем серию работ, где рассматриваем современные вычислительные методы для описания нелинейной динамики популяционных процессов в меняющихся условиях среды. Модельные сценарии включают экспертные стратегии управления биоресурсами [1]. Последствия оптимизации управления подразумевают пороговые эффекты – резкие смены состояния, как коллапс популяции или вспышка массового размножения. Соответственно логике моделируемого процесса, параметры в сценариях по своим свойствам и вкладу должны быть разграничены. Некоторые включенные параметры это фундаментальные характеристики вида, например изначальный вес икринки у рыб и коэффициенты анаболизма и катаболизма для моделирования размерного развития особей поколения.

Количественные показатели популяций это устоявшиеся характеристики в результате коэволюции видов в данном окружении. Другие параметры наших моделей абстрактны и изменяются – варьируются ситуативно, но с разной скоростью. Некоторые характеристики, в том числе показатели эффективности репродуктивного цикла, могут в некоторых пределах определяться состоянием самой популяции, что учитывается разработанным нами методом триггерных функционалов в гибридных моделях [2]. Вклад в динамические свойства траектории у разных параметров моделей, как известно, различен – бывают бифуркационные параметры, меняющие фазовый портрет или только масштабирующие.

Актуальность

Существует проблема интерпретируемого поведения моделей биосистем и дискретности приемлемых параметрических диапазонов. Оказывается, что для каждого реального популяционного параметра есть границы диапазона возможных изменений. У моделей с бифуркациями мы находим такие режимы поведения, где поведение траектории остается биологически объяснимо и согласовано с наблюдениями. Однако, в расчетах могут резко возникать и исчезать эффекты, где поведение модели вдруг выходит за рамки интерпретации.

Хрестоматийный пример для итерационной популяционной модели $x_{n+1} = ax_n \exp(-bx_n)$ случай перехода от хаоса к циклу периода $p=3$ с дальнейшим удвоением цикла $p = 3 \times 2^i$ и резким закрытием периодического окна при внутреннем кризисе несвязного аттрактора. Можно по-разному подходить к проблеме странных явлений, главное досконально понимать биологические аспекты и принципы моделируемого процесса.

Возникновение бифуркаций само по себе не является особенным достоинством моделей. Хаотический режим из-за появления аттрактора фрактальной (канторовской) структуры в большинстве случаев мы оцениваем как необоснованное свойство. Арсенал используемых в итерационных моделях нелинейных эффектов всегда ограничен, есть три типа бифуркаций и три варианта кризиса – резкого внутреннего перестроения структуры аттрактора. Они возникают у итераций по фундаментальным математическим причинам, не связанным с предметной областью. В разных биологических моделях неизбежно возникают одинаковые метаморфозы поведения траектории, но которые будут различно истолкованы. Пример из практики применения моделей рыболовства [3], когда увеличение доли изъятия в реальности совсем не уменьшает флуктуации популяций и не переводит режим существования биосистемы из хаотических изменений в стабильное положение.

Важность исследований таких явлений как кризисы аттрактора в "окне периодичности" в том, что качественно различные режимы поведения траектории, возникающие сразу при малом изменении параметра, могут критическим образом влиять на результаты практической интерпретации численных расчетов, полученных при имитации сценария управления.

Методы преодоления проблемы интерпретируемости

В случае анализа требующих обоснований нескольких моделей с противоположным по смыслу поведением необходимо формулировать логические цепочки из утверждений, и опровергать противоречивые следствия. Математическое описание процессов в практической области экодинамики должно базироваться на теоретическом биологическом обосновании, которое

назовем базисом – набором причинно-следственных связей непосредственно вытекающих из данных наблюдений. Для описания известных по историческим сведениям популяционных процессов при моделировании задача разрешима, проблемы усиливаются при модельном прогнозировании – динамики в новых измененных условиях.

Отметим следующие три практически важных аспекта.

1. Нелинейные эффекты в моделях будут связаны один с другим. Сценарию хаотизации Фейгенбаума из [4] сопутствуют другие эффекты и трудно интерпретируемые биологически (два кризиса несвязного аттрактора, субдукция, перемежаемость). Эти явления возникают при малом изменении параметра и более резко меняют поведение, чем бифуркация удвоения периода.

2. Критерии возникновения бифуркаций могут выполняться для совершенно разных моделей независимо от направления изменения параметров. Реализация сценария хаотизации в динамических системах вида $x_{n+1} = f(\mathbf{a}; x_n)$ через каскад бифуркаций удвоения периода цикла является следствием выполнения критериев теоремы Синжера [5], не имеющих отношения к биологической проблематике. Критерии включают соотношения второй и третьей производных функции f [6].

3. Границы областей притяжения аттракторов могут изменяться и влиять на динамический режим траектории модели. Сложные границы могут возникнуть в казалось бы простом случае, например, при образовании сосуществующих двух устойчивых циклов у итераций неунимодальной функции в периодическом окне, которое прерывает хаотический режим.

Есть несколько идей в целях преодоления невозможности биологической интерпретации сложных нелинейных эффектов, свойственных итерационным динамическим системам. Покажем возможные математические методы для обхода проблемы.

Цель построения модели экологического сценария в анализе происходящего с динамической системой при последовательном изменении управляющего параметра.

В ситуациях сложных эффектов анализ целесообразно проводить на последовательном наборе разграниченных параметрических диапазонов.

Предложение 1. Представление репродуктивного параметра популяции не обязательно будет ограничено точечной числовой величиной в дискретной динамической модели.

Пусть \mathbf{a} независимый от численности интервально заданный параметр репродуктивного потенциала – на наборе интервалов:

$$\mathbf{a} \in [\bar{a}_1, \underline{a}_1] \cup [\bar{a}_i, \underline{a}_i] \cup [\bar{a}_{i+1}, \underline{a}_{i+1}].$$

Предложение 2. Под воздействием факторов и условий среды обитания, интервальный параметр \mathbf{a} не растягиваясь может сдвигаться на последовательном наборе субинтервалов.

$$\text{rad } \mathbf{a} = 1 / 2(\bar{a} - \underline{a}) = \text{const.}$$

Предложение 3. Для случая, когда определяющая изменение численности популяции зависимость задана функцией, соответствующей условиям теоремы Синжера о шварциане:

$$1. S_{\psi} = \frac{\psi'''(x)}{\psi'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{\psi''(x)}{\psi'(x)} \right)^2 < 0.$$

$$2. f'(x_m) = 0, f'(x) \neq 0 \text{ при } x \neq x_m.$$

Отдельно нужно выделить диапазоны периодических окон.

Замечание 1. Тогда, с учетом Предложения 1, будем оперировать интервальным расширением $\mathbf{f}(\mathbf{a}, x)$.

Замечание 2. Условия Предложения 3 всегда выполняются для модели воспроизводства популяций рыб Рикера:

$$\psi'(x) = ae^{-bx}(1 - bx),$$

$$\psi''(x) = abe^{-bx}(bx - 2),$$

$$\psi'''(x) = ab^2e^{-bx}(3 - bx) \text{ и } \psi^{(n)}(x) = (-1)^n ab^{n-1}e^{-bx}(bx - n),$$

$$S_{\psi} = b^2 \frac{-b^2x^2 + 4bx - 6}{2(1 - bx)^2} \text{ и } S_{\psi} < 0 \text{ для } x \in \mathfrak{R}.$$

Но не всегда для модели Дж. Шепарда: $f(x) = \frac{ax}{1 + \left(\frac{x}{K}\right)^b}$, так как

$f(x^*) = x^* = K\sqrt[b]{a-1}$, и является двухпараметрическим отображением:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{(K^b + x^b)aK^b - ab(Kx)^b}{(K^b + x^b)^2}, \quad \frac{df(x^*)}{dx} = \frac{a - ba + b}{a}.$$

При $b < 1$ критических точек нет, при $b = 2$ репродуктивная функция запаса и пополнения имеет критическую точку $x = K$.

Гибридное непрерывно-дискретное время может сочетаться с интервальным представлением параметров моделей. При использовании интервального подхода необходимо оценить радиус интервала \mathbf{a} . Возможны различные подходы, основанные как на знании биологии вида, так и на фундаментальных математических представлениях, как полученный в результате вычислений результат Фейгенбаума, изучавшего свойства отображения $x_{n+1} = 4\lambda x_n(1-x_n)$ с целью определения значений λ , при которых происходит удвоение периода цикла, возникшего после выполнения условия $\left| \frac{df(\mathbf{a}, x)}{dx} \right|_{x=x^*} = 1, f(\mathbf{a}, x^*) = x^*$.

Если Λ_n значение параметра, при котором период удваивается в n -й раз, то величина δ_n быстро приближается к постоянной величине δ :

$$\delta_n = \frac{\Lambda_{n+1} - \Lambda_n}{\Lambda_{n+2} - \Lambda_{n+1}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 4,6692.$$

Так за конечное приращение бифуркационного параметра период цикла становится бесконечным (тогда говорят о хаотизации), причем интервал между последовательными усложнениями поведения траектории динамической системы быстро сокращается. Теоретические объяснение явления "универсальности в поведении нелинейных систем" сложны, и построению строгой математической теории были посвящены многие работы, однако некоторые утверждения до сих пор базируются на результатах вычислительных экспериментов. Сложным остается теоретический вопрос об исчерпывающем и избыточном определении понятия детерминированного хаоса.

Замечание 2. Поведение динамической системы модели Рикера $x_{n+1} = ax_n e^{-bx_n}$ отличается от квадратичного отображения Фейгенбаума. В модели Рикера невозможен граничный кризис хаотического аттрактора, так как $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ [7].

Замечание 3. Хаотический режим не имитирует случайность изменений, не является тождественным процессом по отношению к белому шуму. Вероятность нахождения траектории в одних частях аттрактора выше, чем в других, что связано с геометрической структурой неустойчивых точек [8]. С учетом известных нам данных о поведении популярных моделей промысловых популяций Рикера и Шепарда отметим:

Предложение 4. Пусть ширина интервального параметра \mathbf{a} для итераций при $\inf \mathbf{a} = \Lambda_1$ содержит внутри как минимум одно бифуркационное значение Λ_n : $\text{rad } \mathbf{a} = \frac{1}{2}[\Lambda_2 - \Lambda_1]$.

На основе предложений предложим следующий принцип.

Гипотеза 1. Возрастание репродуктивного потенциала увеличивает уже избыточный набор возможных изменений качественной динамики, которые возможны для популяции.

При использовании идеи интервальной неопределенности характеристик увеличение репродуктивного потенциала не приводит однозначно к выводу о хаотизации, но увеличивает количество доступных качественно различных типов динамики численности популяции, в том числе экстремальных [9].

Замечание 4. Возможно, что количество изменений, происходящих для интервала \mathbf{a} , может быть бесконечным.

Для исследователя часто важно знать некоторое усредненное по интервалу времени качественное состояние динамической системы. Для оценивания суперпозиции поведения интервального расширения отображения вполне применимы методы масштабируемой решетки с вычислением агрегированного параметра (убыли или воспроизводства).

Предложение 5. Пусть \mathbf{w} ограниченный интервал $[\underline{w}, \bar{w}]$, внутри которого может принимать различные значения предложенный нами интервально заданный основной репродуктивный параметр популяции в дискретной модели.

$$\mathbf{a} = \{a \mid a \in \mathbf{w}, \underline{a} \leq a \leq \bar{a}\}.$$

Ограничение обосновано тем, что для биологической модели невозможно не лимитированное возрастание амплитуды аperiodических колебаний. Выбор изменений интервального параметра должен соответствовать одному из доступных диапазонов заданного набора интервалов интерпретируемости.

Заклучение

Разработка структуры уравнений модели составит только половину необходимых исследований. Противоречивыми свойствами может обладать даже теоретически обоснованная динамическая система, если будет функционировать в непредусмотренных параметрических диапазонах. Ранее мы рассматривали популяционные модели с нелинейными эффектами для таких ситуаций как инвазионная вспышка и деградация биоресурсов. Мы использовали два из шести возможных эффектов, обходя и избегая излишние.

В сценариях с управлением разграничение поведения становится нетривиальной проблемой. Опыт применения сценарного подхода с логикой внешнего воздействия на биосистему привел к идеям интервальной методики для ограничения возможности возникновения метаморфозов фазового портрета гибридных и итерационных моделей с точки зрения биологической интерпретируемости, обоснованности поведения при изменениях параметров и соответствия данным наблюдений.

В следующей работе рассмотрим экстремальную колебательную динамику инвазионных и гидробиологических процессов, важную для экосистем и для прибрежных водоемов, как показано А.В. Никитиной в модели для Азовского моря [10].

Библиографический список

1. *Переварюха А.Ю.* Моделирование неустойчивого критического равновесия в популяционной динамике // Проблемы механики и управления. Пермь, 2013. № 45. С. 82–91.
2. *Дубровская В.А., Переварюха А.Ю.* О критериях обоснованности для анализа нелинейных эффектов в моделях эксплуа-

тируемых популяций // Проблемы механики и управления. 2016. № 48. С. 74–83.

3. *Животовский Л.А., Храмцов В.В.* Модель динамики численности горбуши *Oncorhynchus gorbusha* // Вопросы ихтиологии. 1996. Т. 36, № 3. С. 369–385.

4. *Feigenbaum M.J.* Universal behavior in nonlinear systems // *Physica D*. 1983. Vol. 7, № 1. P. 16–39.

5. *Singer D.* Stable orbits and bifurcations of the maps on the interval // *SIAM journal of applied math*. 1978. Vol. 35. P. 260–268.

6. *Guckenheimer J.* Sensitive dependence on initial conditions for one-dimensional maps // *Comm. Mathem. Physics*. 1979. Vol. 70. P. 133–160.

7. *Борисова Т.Ю., Соловьева И.В.* Проблемные аспекты моделирования популяционных процессов и критерии их согласования // *Математические машины и системы*. 2017. № 1. С. 71–81.

8. *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Окрокверцхов Г.А., Стрелкова Г.И.* Статистические свойства динамического хаоса // *Успехи физических наук*. 2005. Т. 175, № 2. С. 163–179.

9. *Михайлов В.В., Переварюха А.Ю.* Моделирование процесса стремительной эвтрофикации крупного озера и его влияния на благополучие автохтонной ихтиофауны // *Нелинейный мир*. 2018. Т. 16, № 4. С. 45–53.

10. *Никитина А.В., Сухинова Т.Г., Проценко С.В.* Эколого-гидрофизическое обоснование влияния коэффициента вертикального турбулентного обмена на содержание растворенного кислорода в придонном слое мелководного водоема // *Успехи современного естествознания*. 2018. № 1. С. 115–119.

УДК 519.2

И.Е. Полосков

*Пермский государственный
национальный исследовательский университет*

Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15
polosk@psu.ru; (342) 2-396-560

**СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМЫ ДВУХ
ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА**

Работа посвящена вычислению матрицы спектральных плотностей решения системы линейных стохастических дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа с постоянными коэффициентами и запаздыванием.

Ключевые слова: спектральная плотность, стохастическое дифференциальное уравнение в частных производных, запаздывание, стационарное случайное поле.

Введение

Основными вероятностными характеристиками векторов состояния стохастических систем с сосредоточенными параметрами как с запаздыванием, так и без него являются пространственно-временные плотности вероятности распределения этих векторов. К сожалению, на достигнутом уровне научных исследований для произвольных систем стохастических обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ) и стохастических обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием (СОДУсз) невозможно получить точные аналитические представления для векторов состояния произвольных систем СОДУ. В ряде случаев задача может быть

упрощена, и можно ограничиться вычислением стационарных плотностей вероятности, если таковые существуют. Анализ систем еще более упрощается, если рассматриваются линейные стохастические системы с постоянными коэффициентами и аддитивными возмущениями [1]. Это связано с тем, что для последних стационарными плотностями будут одно- и многомерные нормальные гауссовы распределения, параметризуемые векторами математических ожиданий и матрицами ковариаций (дисперсий) соответствующего порядка.

Чтобы преодолеть трудности учета эффекта запаздывания, используют несколько подходов. Самый простой – это анализ стационарных режимов в линейных системах.

Ряд простых проблем для СОДУ с одним постоянным запаздыванием был решен С. Гийюзиком (S. Guillouzic), Т.Д. Франком и У. Кюхлером [2–10]. Распространение схемы С. Гийюзика на новые классы систем с запаздыванием осуществлено в ряде наших работ [11–13].

Важным классом стохастических систем с запаздыванием являются линейные стохастические эволюционные дифференциальных уравнений в частных производных с запаздыванием (СДУвЧПсЗ). Из-за особой сложности анализа таких уравнений особый интерес представляют редкие модели, форма которых позволяет получить точные вероятностные характеристики соответствующих векторных случайных полей состояния.

В настоящей работе развиваются результаты наших работ [14, 15] для отдельных уравнений, которые переносятся на систему двух СДУвЧПсЗ гиперболического типа с постоянными коэффициентами.

1. Постановка задачи

Рассмотрим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 U_1(x, t)}{\partial t^2} + 2\alpha_1 \frac{\partial U_1(x, t)}{\partial t} + \beta_1 U_1(x, t) = \\ & = \gamma_1 \frac{\partial^2 U_1(x, t)}{\partial x^2} + \epsilon_{11} U_1(x, t - \tau_1) + \epsilon_{12} U_2(x, t - \tau_2) + \sigma_1 V_1(x, t), \\ & \frac{\partial^2 U_2(x, t)}{\partial t^2} + 2\alpha_2 \frac{\partial U_2(x, t)}{\partial t} + \beta_2 U_2(x, t) = \end{aligned}$$

$$= \gamma_2 \frac{\partial^2 U_2(x, t)}{\partial x^2} + \epsilon_{21} U_1(x, t - \tau_1) + \epsilon_{22} U_2(x, t - \tau_2) + \sigma_2 V_2(x, t),$$

или

$$\mathbb{L}_{1t}[U_1(x, t), U_2(x, t)] = \sigma_1 V_1(x, t), \quad (1)$$

$$\mathbb{L}_{2t}[U_1(x, t), U_2(x, t)] = \sigma_2 V_2(x, t), \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_{1t}[U_1(x, t)] &= \frac{\partial^2 U_1(x, t)}{\partial t^2} + 2\alpha_1 \frac{\partial U_1(x, t)}{\partial t} + \beta_1 U_1(x, t) - \\ &- \gamma_1 \frac{\partial^2 U_1(x, t)}{\partial x^2} - \epsilon_{11} U_1(x, t - \tau_1) - \epsilon_{12} U_2(x, t - \tau_2), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_{2t}[U_2(x, t)] &= \frac{\partial^2 U_2(x, t)}{\partial t^2} + 2\alpha_2 \frac{\partial U_2(x, t)}{\partial t} + \beta_2 U_2(x, t) - \\ &- \gamma_2 \frac{\partial^2 U_2(x, t)}{\partial x^2} - \epsilon_{21} U_1(x, t - \tau_1) - \epsilon_{22} U_2(x, t - \tau_2), \end{aligned} \quad (4)$$

t – время ($t \geq 0$), τ_1, τ_2 – постоянные положительные запаздывания, $\mathbf{U}(x, t) = \{U_1(x, t), U_2(x, t)\}$ ($x \in \mathbb{R}, t \geq 0$) – векторное случайное поле с неизвестными вероятностными характеристиками, $\mathbf{V}(x, t) = \{V_1(x, t), V_2(x, t)\}$ ($x \in \mathbb{R}, t \geq 0$) – векторное стационарное поле с независимыми компонентами, для которых известны поля математических ожиданий $m_{V_k}(x, t)$, пространственно-временные ковариационные функции $\mathcal{C}_{V_k V_k}(\bar{x}, \bar{t})$ ($\bar{x}, \bar{t} \in \mathbb{R}$) и спектральные плотности $\mathcal{S}_{V_k V_k}(\omega_x, \omega_t)$ ($\omega_x, \omega_t \in \mathbb{R}$), связанные формулами Винера–Хинчина [16]:

$$\mathcal{S}_{V_k V_k}(\omega_x, \omega_t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i(\omega_x \bar{x} + \omega_t \bar{t})} \mathcal{C}_{V_k V_k}(\bar{x}, \bar{t}) d\bar{x} d\bar{t}, \quad (5)$$

$$\mathcal{C}_{V_k V_k}(\bar{x}, \bar{t}) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(\omega_x \bar{x} + \omega_t \bar{t})} \mathcal{S}_{V_k V_k}(\omega_x, \omega_t) d\omega_x d\omega_t, \quad (6)$$

i – мнимая единица, $\alpha_k > 0, \beta_k > 0, \gamma_k > 0, \epsilon_{k\ell}, \sigma_k > 0$ ($k, \ell = 1, 2$) – постоянные, $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

Предположим, что $\mathbf{U}(x, t)$ – случайное поле второго порядка, дважды дифференцируемое по x и t в среднеквадратичном. Целью исследования является построение матрицы спектральных плотностей векторного поля $\mathbf{U}(x, t)$, определяющего состояние исследуемой системы и являющегося решением уравнений (1), (2).

2. Решение задачи

Запишем уравнения (1), (2) в переменных $x = x_1$, $t = t_1$ и $x = x_2$, $t = t_2$:

$$\mathbb{L}_{1t_1}[U_1(x, t_1), U_2(x, t_1)] = \sigma_1 V_1(x, t_1), \quad (7)$$

$$\mathbb{L}_{1t_2}[U_1(x, t_2), U_2(x, t_2)] = \sigma_1 V_1(x, t_2), \quad (8)$$

$$\mathbb{L}_{2t_1}[U_1(x, t_1), U_2(x, t_1)] = \sigma_2 V_2(x, t_1), \quad (9)$$

$$\mathbb{L}_{2t_2}[U_1(x, t_2), U_2(x, t_2)] = \sigma_2 V_2(x, t_2), \quad (10)$$

и усредним левые и правые части этих уравнений во всему пространству состояний. Тогда получим:

$$\mathbb{L}_{1t_1}[m_{U_1}(x, t_1), m_{U_2}(x, t_1)] = \sigma_1 m_{V_1}(x, t_1), \quad (11)$$

$$\mathbb{L}_{1t_2}[m_{U_1}(x, t_2), m_{U_2}(x, t_2)] = \sigma_1 m_{V_1}(x, t_2), \quad (12)$$

$$\mathbb{L}_{2t_1}[m_{U_1}(x, t_1), m_{U_2}(x, t_1)] = \sigma_2 m_{V_2}(x, t_1), \quad (13)$$

$$\mathbb{L}_{2t_2}[m_{U_1}(x, t_2), m_{U_2}(x, t_2)] = \sigma_2 m_{V_2}(x, t_2), \quad (14)$$

В уравнениях (11)–(14) для функций математического ожидания использованы обозначения:

$$m_{U_k}(\cdot, \cdot) = \langle U_k(\cdot, \cdot) \rangle,$$

где $\langle \dots \rangle$ – символ усреднения.

Пусть для $k, \ell = 1, 2$

$$\mathcal{C}_{U_k U_\ell}(x_1, t_1, x_2, t_2) = \langle \dot{U}_k(x_1, t_1) \dot{U}_\ell(x_2, t_2) \rangle,$$

$$\mathcal{C}_{U_k V_\ell}(x_1, t_1, x_2, t_2) = \langle \dot{U}_k(x_1, t_1) \dot{V}_\ell(x_2, t_2) \rangle,$$

$$\mathcal{C}_{V_k U_\ell}(x_1, t_1, x_2, t_2) = \langle \dot{V}_k(x_1, t_1) \dot{U}_\ell(x_2, t_2) \rangle,$$

$$\mathcal{C}_{V_k V_\ell}(x_1, t_1, x_2, t_2) = \langle \dot{V}_k(x_1, t_1) \dot{V}_\ell(x_2, t_2) \rangle,$$

$$\dot{U}_k(\cdot, \cdot) = U_k(\cdot, \cdot) - m_{U_k}(\cdot, \cdot), \quad \dot{V}_k(\cdot, \cdot) = V_k(\cdot, \cdot) - m_{V_k}(\cdot, \cdot).$$

Вычтем из уравнений (7)–(10) соответствующие уравнения (11)–(14), а затем умножим последовательно левые и правые части полученных уравнений на $\dot{U}_1(x_2, t_2)$, $\dot{V}_1(x_1, t_1)$, $\dot{U}_2(x_2, t_2)$, $\dot{V}_2(x_1, t_1)$ и усредним их. В результате будем иметь:

$$\mathbb{L}_{1t_1}[\mathcal{C}_{U_1 U_1}(x_1, t_1, x_2, t_2), \mathcal{C}_{U_2 U_1}(x_1, t_1, x_2, t_2)] = \sigma_1 \mathcal{C}_{V_1 U_1}(x_1, t_1, x_2, t_2),$$

$$\begin{aligned}\mathbb{L}_{1t_2}[\mathcal{C}_{V_1U_1}(x_1, t_1, x_2, t_2), \mathcal{C}_{V_1U_2}(x_1, t_1, x_2, t_2)] &= \sigma_1 \mathcal{C}_{V_1V_1}(x_1, t_1, x_2, t_2), \\ \mathbb{L}_{2t_1}[\mathcal{C}_{U_1U_2}(x_1, t_1, x_2, t_2), \mathcal{C}_{U_2U_2}(x_1, t_1, x_2, t_2)] &= \sigma_2 \mathcal{C}_{V_2U_2}(x_1, t_1, x_2, t_2), \\ \mathbb{L}_{2t_2}[\mathcal{C}_{V_2U_1}(x_1, t_1, x_2, t_2), \mathcal{C}_{V_2U_2}(x_1, t_1, x_2, t_2)] &= \sigma_2 \mathcal{C}_{V_2V_2}(x_1, t_1, x_2, t_2).\end{aligned}$$

К этим уравнениям добавим следующие, полученные аналогично:

$$\begin{aligned}\mathbb{L}_{1t_1}[\mathcal{C}_{U_1U_2}(x_1, t_1, x_2, t_2), \mathcal{C}_{U_2U_2}(x_1, t_1, x_2, t_2)] &= \sigma_1 \mathcal{C}_{V_1U_2}(x_1, t_1, x_2, t_2), \\ \mathbb{L}_{1t_2}[\mathcal{C}_{V_2U_1}(x_1, t_1, x_2, t_2), \mathcal{C}_{V_2U_2}(x_1, t_1, x_2, t_2)] &= \sigma_1 \mathcal{C}_{V_2V_1}(x_1, t_1, x_2, t_2), \\ \mathbb{L}_{2t_1}[\mathcal{C}_{U_1U_1}(x_1, t_1, x_2, t_2), \mathcal{C}_{U_2U_1}(x_1, t_1, x_2, t_2)] &= \sigma_2 \mathcal{C}_{V_2U_1}(x_1, t_1, x_2, t_2), \\ \mathbb{L}_{2t_2}[\mathcal{C}_{V_1U_1}(x_1, t_1, x_2, t_2), \mathcal{C}_{V_1U_2}(x_1, t_1, x_2, t_2)] &= \sigma_2 \mathcal{C}_{V_1V_2}(x_1, t_1, x_2, t_2),\end{aligned}$$

причем $\mathcal{C}_{V_2V_1}(x_1, t_1, x_2, t_2) \equiv 0 \equiv \mathcal{C}_{V_1V_2}(x_1, t_1, x_2, t_2)$.

Предположим, что переходные процессы в системе завершились, а исследуемая система пришла в стационарное состояние, в котором векторное случайное поле $\mathbf{U}(x, t)$ можно рассматривать как стационарное пространственно-временное в широком смысле со стационарно связанными компонентами между собой и с шумом. Тогда с учетом того, что $x = x_2 - x_1$, $s = t_2 - t_1$, последние две группы уравнений примут следующий вид:

$$\begin{aligned}\mathbb{H}_1[\mathcal{C}_{U_1U_1}(x, s), \mathcal{C}_{U_2U_1}(x, s)] &= \sigma_1 \mathcal{C}_{V_1U_1}(x, s), \\ \mathbb{H}_2[\mathcal{C}_{V_1U_1}(x, s), \mathcal{C}_{V_1U_2}(x, s)] &= \sigma_1 \mathcal{C}_{V_1V_1}(x, s), \\ \mathbb{H}_3[\mathcal{C}_{U_1U_2}(x, s), \mathcal{C}_{U_2U_2}(x, s)] &= \sigma_2 \mathcal{C}_{V_2U_2}(x, s), \\ \mathbb{H}_4[\mathcal{C}_{V_2U_1}(x, s), \mathcal{C}_{V_2U_2}(x, s)] &= \sigma_2 \mathcal{C}_{V_2V_2}(x, s), \\ \mathbb{H}_5[\mathcal{C}_{U_1U_2}(x, s), \mathcal{C}_{U_2U_2}(x, s)] &= \sigma_1 \mathcal{C}_{V_1U_2}(x, s), \\ \mathbb{H}_6[\mathcal{C}_{V_2U_1}(x, s), \mathcal{C}_{V_2U_2}(x, s)] &= 0, \\ \mathbb{H}_7[\mathcal{C}_{U_1U_1}(x, s), \mathcal{C}_{U_2U_1}(x, s)] &= \sigma_2 \mathcal{C}_{V_2U_1}(x, s), \\ \mathbb{H}_8[\mathcal{C}_{V_1U_1}(x, s), \mathcal{C}_{V_1U_2}(x, s)] &= 0,\end{aligned}\tag{15}$$

где

$$\begin{aligned}\mathbb{H}_1[\cdot, \cdot] &= \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{U_1U_1}(x, s)}{\partial s^2} - 2\alpha_1 \frac{\partial \mathcal{C}_{U_1U_1}(x, s)}{\partial s} + \beta_1 \mathcal{C}_{U_1U_1}(x, s) - \\ &- \gamma_1 \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{U_1U_1}(x, s)}{\partial x^2} - \epsilon_{11} \mathcal{C}_{U_1U_1}(x, s + \tau_1) - \epsilon_{12} \mathcal{C}_{U_2U_1}(x, s + \tau_2), \\ \mathbb{H}_2[\cdot, \cdot] &= \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{V_1U_1}(x, s)}{\partial s^2} + 2\alpha_1 \frac{\partial \mathcal{C}_{V_1U_1}(x, s)}{\partial s} + \beta_1 \mathcal{C}_{V_1U_1}(x, s) -\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\gamma_1 \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{V_1 U_1}(x, s)}{\partial x^2} - \epsilon_{11} \mathcal{C}_{V_1 U_1}(x, s - \tau_1) - \epsilon_{12} \mathcal{C}_{V_1 U_2}(x, s - \tau_2), \\
 \mathbb{H}_3[\cdot, \cdot] &= \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{U_2 U_2}(x, s)}{\partial s^2} - 2\alpha_2 \frac{\partial \mathcal{C}_{U_2 U_2}(x, s)}{\partial s} + \beta_2 \mathcal{C}_{U_2 U_2}(x, s) - \\
 & -\gamma_2 \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{U_2 U_2}(x, s)}{\partial x^2} - \epsilon_{21} \mathcal{C}_{U_1 U_2}(x, s + \tau_1) - \epsilon_{22} \mathcal{C}_{U_2 U_2}(x, s + \tau_2), \\
 \mathbb{H}_4[\cdot, \cdot] &= \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{V_2 U_2}(x, s)}{\partial s^2} + 2\alpha_2 \frac{\partial \mathcal{C}_{V_2 U_2}(x, s)}{\partial s} + \beta_2 \mathcal{C}_{V_2 U_2}(x, s) - \\
 & -\gamma_2 \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{V_2 U_2}(x, s)}{\partial x^2} - \epsilon_{21} \mathcal{C}_{V_2 U_1}(x, s - \tau_1) - \epsilon_{22} \mathcal{C}_{V_2 U_2}(x, s - \tau_2), \\
 \mathbb{H}_5[\cdot, \cdot] &= \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{U_1 U_2}(x, s)}{\partial s^2} - 2\alpha_1 \frac{\partial \mathcal{C}_{U_1 U_2}(x, s)}{\partial s} + \beta_1 \mathcal{C}_{U_1 U_2}(x, s) - \\
 & -\gamma_1 \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{U_1 U_2}(x, s)}{\partial x^2} - \epsilon_{11} \mathcal{C}_{U_1 U_2}(x, s + \tau_1) - \epsilon_{12} \mathcal{C}_{U_2 U_2}(x, s + \tau_2), \\
 \mathbb{H}_6[\cdot, \cdot] &= \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{V_2 U_1}(x, s)}{\partial s^2} + 2\alpha_1 \frac{\partial \mathcal{C}_{V_2 U_1}(x, s)}{\partial s} + \beta_1 \mathcal{C}_{V_2 U_1}(x, s) - \\
 & -\gamma_1 \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{V_2 U_1}(x, s)}{\partial x^2} - \epsilon_{11} \mathcal{C}_{V_2 U_1}(x, s - \tau_1) - \epsilon_{12} \mathcal{C}_{V_2 U_2}(x, s - \tau_2), \\
 \mathbb{H}_7[\cdot, \cdot] &= \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{U_2 U_1}(x, s)}{\partial s^2} - 2\alpha_2 \frac{\partial \mathcal{C}_{U_2 U_1}(x, s)}{\partial s} + \beta_2 \mathcal{C}_{U_2 U_1}(x, s) - \\
 & -\gamma_2 \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{U_2 U_1}(x, s)}{\partial x^2} - \epsilon_{21} \mathcal{C}_{U_1 U_1}(x, s + \tau_1) - \epsilon_{22} \mathcal{C}_{U_2 U_1}(x, s + \tau_2), \\
 \mathbb{H}_8[\cdot, \cdot] &= \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{V_1 U_2}(x, s)}{\partial s^2} + 2\alpha_2 \frac{\partial \mathcal{C}_{V_1 U_2}(x, s)}{\partial s} + \beta_2 \mathcal{C}_{V_1 U_2}(x, s) - \\
 & -\gamma_2 \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{V_1 U_2}(x, s)}{\partial x^2} - \epsilon_{21} \mathcal{C}_{V_1 U_1}(x, s - \tau_1) - \epsilon_{22} \mathcal{C}_{V_1 U_2}(x, s - \tau_2).
 \end{aligned}$$

Пусть $Y(x, s)$ и $Z(x, s)$ – некоторые дважды дифференцируемые по x и s в среднеквадратичном, стационарные и стационарно связанные между собой в широком смысле пространственно-временные случайные поля второго порядка с известными ковариационными функциями и спектральными плотностями. Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}_{YZ}(\omega_x, \omega_s) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i(\omega_x x + \omega_s s)} \mathcal{C}_{YZ}(x, s) dx ds, \\
 e^{\pm i\omega_s \tau} \mathcal{S}_{YZ}(\omega_x, \omega_s) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i(\omega_x x + \omega_s s)} \mathcal{C}_{YZ}(x, s \pm \tau) dx ds,
 \end{aligned}$$

$$(\mathbf{i}\omega_x)^2 \mathcal{S}_{YZ}(\omega_x, \omega_s) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\mathbf{i}(\omega_x x + \omega_s s)} \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{YZ}(x, s)}{\partial x^2} dx ds,$$

$$(\mathbf{i}\omega_s)^r \mathcal{S}_{YZ}(\omega_x, \omega_s) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\mathbf{i}(\omega_x x + \omega_s s)} \frac{\partial^r \mathcal{C}_{YZ}(x, s)}{\partial s^r} dx ds,$$

где $r = 1, 2$.

Воспользовавшись последними соотношениями, перейдем в уравнениях (15) от ковариационных функций к спектральным плотностям:

$$\begin{aligned} & -\omega_s^2 \mathcal{S}_{U_1 U_1}(\omega_x, \omega_s) - 2\mathbf{i}\alpha_1 \omega_s \mathcal{S}_{U_1 U_1}(\omega_x, \omega_s) + \beta_1 \mathcal{S}_{U_1 U_1}(\omega_x, \omega_s) + \\ & + \gamma_1 \omega_x^2 \mathcal{S}_{U_1 U_1}(\omega_x, \omega_s) - \epsilon_{11} e^{\mathbf{i}\omega_s \tau_1} \mathcal{S}_{U_1 U_1}(\omega_x, \omega_s) - \\ & - \epsilon_{12} e^{\mathbf{i}\omega_s \tau_2} \mathcal{S}_{U_2 U_1}(\omega_x, \omega_s) = \sigma_1 \mathcal{S}_{V_1 U_1}(\omega_x, \omega_s), \\ & -\omega_s^2 \mathcal{S}_{V_1 U_1}(\omega_x, \omega_s) + 2\mathbf{i}\alpha_1 \omega_s \mathcal{S}_{V_1 U_1}(\omega_x, \omega_s) + \beta_1 \mathcal{S}_{V_1 U_1}(\omega_x, \omega_s) + \\ & + \gamma_1 \omega_x^2 \mathcal{S}_{V_1 U_1}(\omega_x, \omega_s) - \epsilon_{11} e^{-\mathbf{i}\omega_s \tau_1} \mathcal{S}_{V_1 U_1}(\omega_x, \omega_s) - \\ & - \epsilon_{12} e^{-\mathbf{i}\omega_s \tau_2} \mathcal{S}_{V_1 U_2}(\omega_x, \omega_s) = \sigma_1 \mathcal{S}_{V_1 V_1}(\omega_x, \omega_s), \\ & -\omega_s^2 \mathcal{S}_{U_2 U_2}(\omega_x, \omega_s) - 2\mathbf{i}\alpha_2 \omega_s \mathcal{S}_{U_2 U_2}(\omega_x, \omega_s) + \beta_2 \mathcal{S}_{U_2 U_2}(\omega_x, \omega_s) + \\ & + \gamma_2 \omega_x^2 \mathcal{S}_{U_2 U_2}(\omega_x, \omega_s) - \epsilon_{21} e^{\mathbf{i}\omega_s \tau_1} \mathcal{S}_{U_1 U_2}(\omega_x, \omega_s) - \\ & - \epsilon_{22} e^{\mathbf{i}\omega_s \tau_2} \mathcal{S}_{U_2 U_2}(\omega_x, \omega_s) = \sigma_2 \mathcal{S}_{V_2 U_2}(\omega_x, \omega_s), \\ & -\omega_s^2 \mathcal{S}_{V_2 U_2}(\omega_x, \omega_s) + 2\mathbf{i}\alpha_2 \omega_s \mathcal{S}_{V_2 U_2}(\omega_x, \omega_s) + \beta_2 \mathcal{S}_{V_2 U_2}(\omega_x, \omega_s) + \\ & + \gamma_2 \omega_x^2 \mathcal{S}_{V_2 U_2}(\omega_x, \omega_s) - \epsilon_{21} e^{-\mathbf{i}\omega_s \tau_1} \mathcal{S}_{V_2 U_1}(\omega_x, \omega_s) - \\ & - \epsilon_{22} e^{-\mathbf{i}\omega_s \tau_2} \mathcal{S}_{V_2 U_2}(\omega_x, \omega_s) = \sigma_2 \mathcal{S}_{V_2 V_2}(\omega_x, \omega_s), \\ & -\omega_s^2 \mathcal{S}_{U_1 U_2}(\omega_x, \omega_s) - 2\mathbf{i}\alpha_1 \omega_s \mathcal{S}_{U_1 U_2}(\omega_x, \omega_s) + \beta_1 \mathcal{S}_{U_1 U_2}(\omega_x, \omega_s) + \\ & + \gamma_1 \omega_x^2 \mathcal{S}_{U_1 U_2}(\omega_x, \omega_s) - \epsilon_{11} e^{\mathbf{i}\omega_s \tau_1} \mathcal{S}_{U_1 U_2}(\omega_x, \omega_s) - \\ & - \epsilon_{12} e^{\mathbf{i}\omega_s \tau_2} \mathcal{S}_{U_2 U_2}(\omega_x, \omega_s) = \sigma_1 \mathcal{S}_{V_1 U_2}(\omega_x, \omega_s), \\ & -\omega_s^2 \mathcal{S}_{V_2 U_1}(\omega_x, \omega_s) + 2\mathbf{i}\alpha_1 \omega_s \mathcal{S}_{V_2 U_1}(\omega_x, \omega_s) + \beta_1 \mathcal{S}_{V_2 U_1}(\omega_x, \omega_s) + \\ & + \gamma_1 \omega_x^2 \mathcal{S}_{V_2 U_1}(\omega_x, \omega_s) - \epsilon_{11} e^{-\mathbf{i}\omega_s \tau_1} \mathcal{S}_{V_2 U_1}(\omega_x, \omega_s) - \\ & - \epsilon_{12} e^{-\mathbf{i}\omega_s \tau_2} \mathcal{S}_{V_2 U_2}(\omega_x, \omega_s) = 0, \\ & -\omega_s^2 \mathcal{S}_{U_2 U_1}(\omega_x, \omega_s) - 2\mathbf{i}\alpha_2 \omega_s \mathcal{S}_{U_2 U_1}(\omega_x, \omega_s) + \beta_2 \mathcal{S}_{U_2 U_1}(\omega_x, \omega_s) + \\ & + \gamma_2 \omega_x^2 \mathcal{S}_{U_2 U_1}(\omega_x, \omega_s) - \epsilon_{21} e^{\mathbf{i}\omega_s \tau_1} \mathcal{S}_{U_1 U_1}(\omega_x, \omega_s) - \\ & - \epsilon_{22} e^{\mathbf{i}\omega_s \tau_2} \mathcal{S}_{U_2 U_1}(\omega_x, \omega_s) = \sigma_2 \mathcal{S}_{V_2 U_1}(\omega_x, \omega_s), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\omega_s^2 \mathcal{S}_{V_1 U_2}(\omega_x, \omega_s) + 2i\alpha_2 \omega_s \mathcal{S}_{V_1 U_2}(\omega_x, \omega_s) + \beta_2 \mathcal{S}_{V_1 U_2}(\omega_x, \omega_s) + \\
 & + \gamma_2 \omega_x^2 \mathcal{S}_{V_1 U_2}(\omega_x, \omega_s) - \epsilon_{21} e^{-i\omega_s \tau_1} \mathcal{S}_{V_1 U_1}(\omega_x, \omega_s) - \\
 & - \epsilon_{22} e^{-i\omega_s \tau_2} \mathcal{S}_{V_1 U_2}(\omega_x, \omega_s) = 0.
 \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
 q_{11} \mathcal{S}_{U_1 U_1}(\omega_x, \omega_s) + q_{12} \mathcal{S}_{U_2 U_1}(\omega_x, \omega_s) &= \sigma_1 \mathcal{S}_{V_1 U_1}(\omega_x, \omega_s), \\
 q_{21} \mathcal{S}_{V_1 U_1}(\omega_x, \omega_s) + q_{22} \mathcal{S}_{V_1 U_2}(\omega_x, \omega_s) &= \sigma_1 \mathcal{S}_{V_1 V_1}(\omega_x, \omega_s), \\
 q_{31} \mathcal{S}_{U_1 U_2}(\omega_x, \omega_s) + q_{32} \mathcal{S}_{U_2 U_2}(\omega_x, \omega_s) &= \sigma_2 \mathcal{S}_{V_2 U_2}(\omega_x, \omega_s), \\
 q_{41} \mathcal{S}_{V_2 U_1}(\omega_x, \omega_s) + q_{42} \mathcal{S}_{V_2 U_2}(\omega_x, \omega_s) &= \sigma_2 \mathcal{S}_{V_2 V_2}(\omega_x, \omega_s), \quad (16) \\
 q_{11} \mathcal{S}_{U_1 U_2}(\omega_x, \omega_s) + q_{12} \mathcal{S}_{U_2 U_2}(\omega_x, \omega_s) &= \sigma_1 \mathcal{S}_{V_1 U_2}(\omega_x, \omega_s), \\
 q_{21} \mathcal{S}_{V_2 U_1}(\omega_x, \omega_s) + q_{22} \mathcal{S}_{V_2 U_2}(\omega_x, \omega_s) &= 0, \\
 q_{31} \mathcal{S}_{U_1 U_1}(\omega_x, \omega_s) + q_{32} \mathcal{S}_{U_2 U_1}(\omega_x, \omega_s) &= \sigma_2 \mathcal{S}_{V_2 U_1}(\omega_x, \omega_s), \\
 q_{41} \mathcal{S}_{V_1 U_1}(\omega_x, \omega_s) + q_{42} \mathcal{S}_{V_1 U_2}(\omega_x, \omega_s) &= 0,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 q_{11} &= \gamma_1 \omega_x^2 - \omega_s^2 - 2i\alpha_1 \omega_s + \beta_1 - \epsilon_{11} e^{i\omega_s \tau_1}, & q_{12} &= -\epsilon_{12} e^{i\omega_s \tau_2}, \\
 q_{21} &= \gamma_1 \omega_x^2 - \omega_s^2 + 2i\alpha_1 \omega_s + \beta_1 - \epsilon_{11} e^{-i\omega_s \tau_1}, & q_{22} &= -\epsilon_{12} e^{-i\omega_s \tau_2}, \\
 q_{31} &= -\epsilon_{21} e^{i\omega_s \tau_1}, & q_{32} &= \gamma_2 \omega_x^2 - \omega_s^2 - 2i\alpha_2 \omega_s + \beta_2 - \epsilon_{22} e^{i\omega_s \tau_2}, \\
 q_{41} &= -\epsilon_{21} e^{-i\omega_s \tau_1}, & q_{42} &= \gamma_2 \omega_x^2 - \omega_s^2 + 2i\alpha_2 \omega_s + \beta_2 - \epsilon_{22} e^{-i\omega_s \tau_2}.
 \end{aligned}$$

Если теперь разрешить второе, четвертое, шестое и восьмое уравнения системы (15) относительно $\mathcal{S}_{V_1 U_1}(\omega_x, \omega_s)$, $\mathcal{S}_{V_2 U_2}(\omega_x, \omega_s)$, $\mathcal{S}_{V_1 U_2}(\omega_x, \omega_s)$ и $\mathcal{S}_{V_2 U_1}(\omega_x, \omega_s)$, а затем с учетом полученных выражений из оставшихся уравнений можно получить:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}_{U_1 U_1}(\omega_x, \omega_s) &= \frac{q_{32} q_{42} \sigma_1^2 \mathcal{S}_{V_1 V_1}(\omega_x, \omega_s) + q_{12} q_{22} \sigma_2^2 \mathcal{S}_{V_2 V_2}(\omega_x, \omega_s)}{d}, \\
 \mathcal{S}_{U_2 U_2}(\omega_x, \omega_s) &= \frac{q_{31} q_{41} \sigma_1^2 \mathcal{S}_{V_1 V_1}(\omega_x, \omega_s) + q_{11} q_{21} \sigma_2^2 \mathcal{S}_{V_2 V_2}(\omega_x, \omega_s)}{d}, \\
 \mathcal{S}_{U_1 U_2}(\omega_x, \omega_s) &= -\frac{q_{32} q_{41} \sigma_1^2 \mathcal{S}_{V_1 V_1}(\omega_x, \omega_s) + q_{12} q_{21} \sigma_2^2 \mathcal{S}_{V_2 V_2}(\omega_x, \omega_s)}{d}, \\
 \mathcal{S}_{U_2 U_1}(\omega_x, \omega_s) &= -\frac{q_{31} q_{42} \sigma_1^2 \mathcal{S}_{V_1 V_1}(\omega_x, \omega_s) + q_{11} q_{22} \sigma_2^2 \mathcal{S}_{V_2 V_2}(\omega_x, \omega_s)}{d},
 \end{aligned}$$

где

$$d = (q_{12} q_{31} - q_{11} q_{32})(q_{22} q_{41} - q_{21} q_{42}).$$

При этом спектральные плотности $\mathcal{S}_{U_1 U_2}(\omega_x, \omega_s)$ и $\mathcal{S}_{U_2 U_1}(\omega_x, \omega_s)$ являются комплексно сопряженными функциями.

3. Пример

Формы полученных спектральных плотностей $\mathcal{S}_{U_1 U_1}(\omega_x, \omega_s)$ и $\mathcal{S}_{U_2 U_2}(\omega_x, \omega_s)$, а также действительной и мнимой частей плотности $\mathcal{S}_{U_1 U_2}(\omega_x, \omega_s)$ представлены на рис. 1–4 соответственно. При проведении расчетов в пакете МАТНЕМАТИСА [17] использовались следующие значения параметров:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 1/2; & \tau_2 &= 3/4; & \alpha_1 &= 1/2, & \alpha_2 &= 1/3, \\ \beta_1 &= 4, & \beta_2 &= 25/4, & \gamma_1 &= 1, & \gamma_2 &= 2, \\ \epsilon_{11} &= 1, & \epsilon_{12} &= -1, & \epsilon_{21} &= -1, & \epsilon_{22} &= 1, \\ \sigma_1 &= 10, & \sigma_2 &= 15, & \mathcal{S}_{V_1 V_1}(\omega_x, \omega_s) &= 1, & \mathcal{S}_{V_2 V_2}(\omega_x, \omega_s) &= 1. \end{aligned}$$

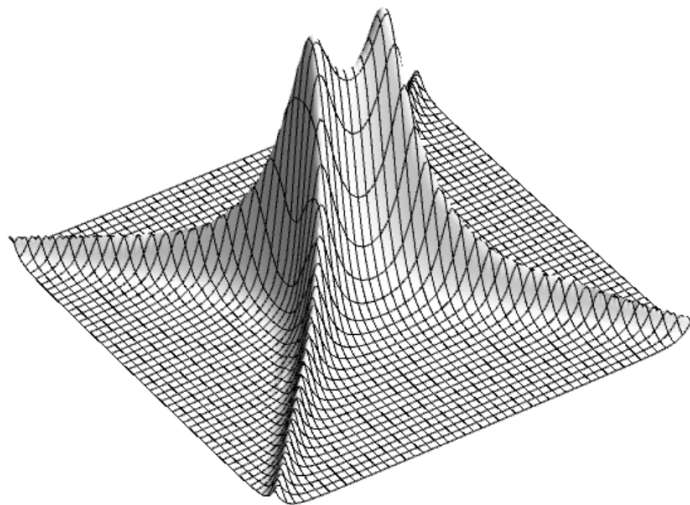


Рис. 1

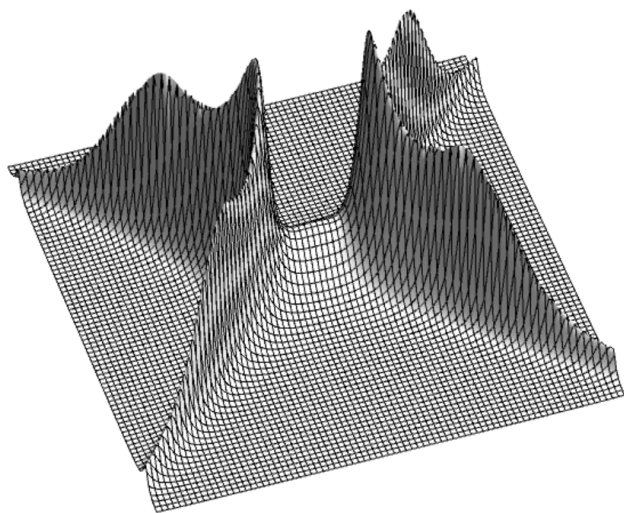


Рис. 2

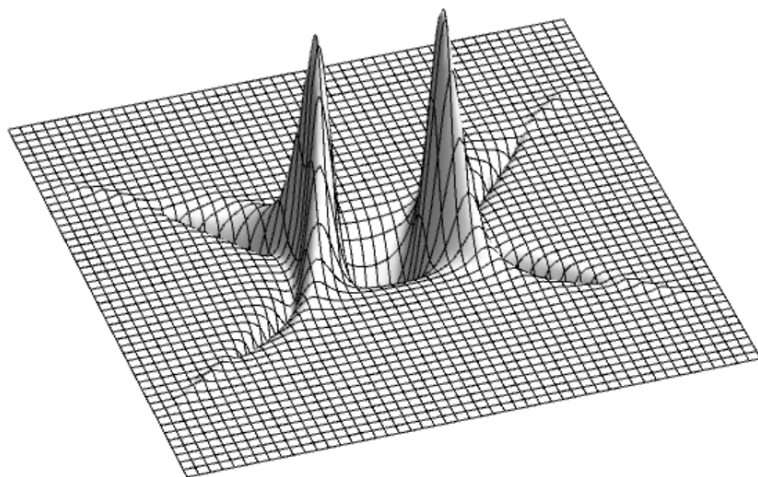


Рис. 3

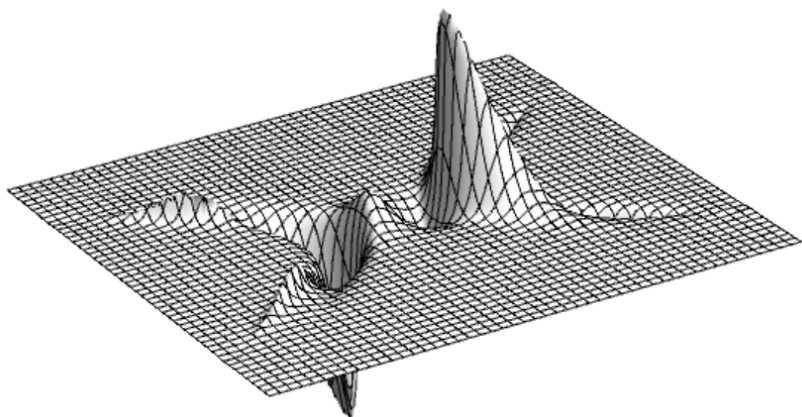


Рис. 4

Заключение

В работе представлена распространение модификации схемы С. Гийюзика на системы линейных стохастических гиперболических уравнений. Несмотря на то, что рассматривается только частный случай, рассмотренная процедура может быть перенести на более сложные системы линейных эволюционных СДУвЧПСЗ.

Библиографический список

1. *Полосков И.Е.* Стохастический анализ динамических систем [Электронный ресурс]: монография. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2016. 772 с.
2. *Küchler U., Mensch B.* Langevin's stochastic differential equation extended by a time-delayed term // *Stochastics Rep.* 1992. Vol. 40. P. 23–42.
3. *Guillouzic S., L'Heureux I., Longtin A.* Small delay approximation of stochastic differential delay equations // *Physical Review.* 1999. Vol. E59, № 4. P. 3970–3982.
4. *Guillouzic S., L'Heureux I., Longtin A.* Rate processes in a

stochastically driven delayed overdamped // *Physical Review*. 2000. Vol. E61, № 5. P. 4906–4914.

5. *Guillouzie S.* Fokker–Planck approach to stochastic delay differential equations. Thesis for the degree of PhD. Ottawa: University of Ottawa, 2000. 100 p.

6. *Frank T.D., Beek P.J.* Stationary solutions of linear stochastic delay differential equations: Applications to biological systems // *Physical Review E*. 2001. Vol. 64, № 2 (021917). 12 p.

7. *Frank T.D.* Multivariate Markov processes for stochastic systems with delays: Application to the stochastic Gompertz model with delay // *Physical Review E*. 2002. Vol. 66, № 1 (011914). 8 p.

8. *Frank T.D., Beek P.J., Friedrich R.* Fokker–Planck perspective on stochastic delay systems: Exact solutions and data analysis of biological systems // *Physical Review E*. 2003. Vol. 68, № 2 (021912). 10 p.

9. *Frank T.D.* Stationary distributions of stochastic processes described by a linear neutral delay differential equation // *J. of Physics A: Mathematical and General*. 2005. Vol. 38, № 28. P. L485–L490.

10. *Frank T.D.* Delay Fokker–Planck equations, Novikov’s theorem, and Boltzmann distributions as small delay approximations // *Physical Review E*. 2005. Vol. 72, № 1 (011112). 8 p.

11. *Полосков И.Е.* О расширении области применения схемы Гийюзика поиска стационарных распределений для линейных стохастических систем с запаздыванием // *Проблемы механики управляемого движения. Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Перм. ун-т. Пермь, 2013. Вып. 45. С. 92–102.*

12. *Полосков И.Е.* О применении схемы Гийюзика для расчета матрицы спектральных плотностей вектора состояния линейной стохастической системы с многими запаздываниями // *Вестник Пермского ун-та. Математика. Информатика. Механика*. 2015. Вып. 1 (28). С. 39–44.

13. *Полосков И.Е.* Стационарные характеристики решений систем линейных дифференциальных уравнений нейтрального типа с кратными запаздываниями и случайными возмущениями // *Статистические методы оценивания и проверки гипотез: межвуз. сб. науч. тр. / Перм. гос. нац. иссл. ун-т. Пермь, 2019. Вып. 29. С. 84–102.*

14. *Полосков И.Е.* Спектральная плотность стационарного случайного поля как решения стохастического дифференциального

уравнения в частных производных с постоянным запаздыванием // Статистические методы оценивания и проверки гипотез: меж-вуз. сб. науч. тр. / Перм. гос. нац. иссл. ун-т. Пермь, 2016. Вып. 27. С. 90–100.

15. *Полосков И.Е.* Построение спектральной плотности решения линейного стохастического дифференциального уравнения в частных производных с постоянными запаздываниями // Вестник Пермского ун-та. Математика. Информатика. Механика. 2018. Вып. 1 (40). — С. 36–45.

16. *VanMarcke E.* Random fields: Analysis and synthesis. Cambridge: MIT Press, 1983. 382 p. (Web Edition by Rare Book Services, Princeton (NJ): Princeton University Press, 1998).

17. *Mangano S.* Mathematica cookbook. Cambridge: O'Reilly, 2010. xxiv, 800 p.

УДК 521:629.78

Н.А. Репях, Е.Н. Остапенко

*Пермский государственный национальный
исследовательский университет*

Россия, 614990, Пермь, ул. Букирева, 15
8 (342) 2-396-309

КИНЕМАТИКА ПЛОСКОГО ЗАМКНУТОГО ШАРНИРНОГО ЧЕТЫРЕХЗВЕННИКА В ОРБИТАЛЬНОЙ СИСТЕМА КООРДИНАТ

Приведены необходимые геометрические построения для составления математической модели пространственного движения плоского материального четырехзвенника в орбитальной системе координат, заданного длинами стержней. Предполагается, что в узловых точках расположены цилиндрические шарниры, оси которых параллельны между собой.

Ключевые слова: орбитальная система координат; кинематика; четырехзвенник; неголономная система.

Введение

В работах [2, 4–9] рассматривается динамика свободного орбитального движения больших космических систем незамкнутой цепочечной структуры, в [10] приводятся положения необходимые для вывода уравнений движения плоского замкнутого многозвенника. В данной работе рассматривается система с неголономными связями.

Описание механической системы

Рассматривается математическая модель пространственного движения замкнутого четырехзвенника $M_1M_2M_3M_4$, заданного длинами стержней $M_1M_2 = l_2$, $M_1M_3 = l_3$, $M_2M_4 = a_2$ и $M_3M_4 = a_3$.

В точках M_i ($i = 1, 2, 3, 4$) расположены цилиндрические шарниры, оси которых параллельны между собой. Система совершает свободное движение в орбитальной системе координат [1, 3], начало которой совмещено с точкой M_1 четырехзвенника.

Движение орбитальной системы координат задается полярными координатами r_1 и v точки M_1 , где r_1 – расстояние точки M_1 до гравитационного центра O , v – истинная аномалия точки M_1 (рис. 1). Орбитальная плоскость $M_1\xi\eta$ совпадает с неподвижной плоскостью OXY абсолютной системы координат $OXYZ$. Вектор угловой скорости вращения подвижной орбитальной системы координат направлен по оси $M_1\xi$

$$\bar{\omega}_e = \{0, 0, \dot{v}\}.$$

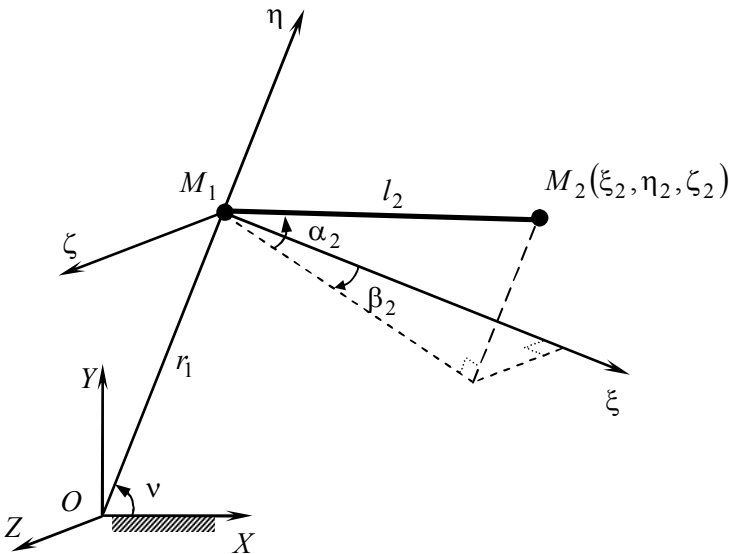


Рис. 1.

Пространственное положение плоской фигуры $M_1M_2M_3M_4$ в орбитальной системе координат $M_1\xi\eta\zeta$ вполне определяется углами α_i и β_i ($i=1, 2$) для стержней M_1M_2 и M_1M_3 соответственно, где α_i – угол между соответствующим стержнем и плоскостью местного горизонта $M_1\xi\zeta$, β_i – соответствующий двугранный угол между вертикальной плоскостью $M_1\eta M_2$ (либо $M_1\eta M_3$) и орбитальной плоскостью $M_1\xi\eta$. На рис. 1 показаны углы α_2 и β_2 для вычисления орбитальных координат (ξ_2, η_2, ζ_2) точки M_2 .

Кинематика четырехзвенника

Координаты трех точек M_1, M_2, M_3 в орбитальной системе координат имеют вид: $M_1(0,0,0)$, $M_2(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$, $M_3(\xi_3, \eta_3, \zeta_3)$, где

$$M_2 : \begin{cases} \xi_2 = l_2 \cos \alpha_2 \cos \beta_2, \\ \eta_2 = l_2 \sin \alpha_2, \\ \zeta_2 = l_2 \cos \alpha_2 \sin \beta_2, \end{cases} \quad (1)$$

$$M_3 : \begin{cases} \xi_3 = l_3 \cos \alpha_3 \cos \beta_3, \\ \eta_3 = l_3 \sin \alpha_3, \\ \zeta_3 = l_3 \cos \alpha_3 \sin \beta_3. \end{cases} \quad (2)$$

Для определения координат точки $M_4(\xi_4, \eta_4, \zeta_4)$ свяжем с четырехзвенником $M_1M_2M_3M_4$ декартову систему координат $M_1xу$, ось x которой проходит через точки M_1 и M_3 (рис. 2).

Рассмотрим произвольное положение четырехзвенника $M_1M_2M_3M_4$ в этой системе координат. Очевидно, что $M_1(0, 0)$, $M_3(x_3, 0)$, при этом $x_3 = l_3$. Будем определять положение стержня M_1M_2 в этой системе координат с помощью угла γ , т.е. угла между осью M_1x и стержнем M_1M_2 (рис. 2).

Тогда координаты точки $M_2(x_2, y_2)$ будут равны

$$\begin{cases} x_2 = l_2 \cos \gamma, \\ y_2 = l_2 \sin \gamma. \end{cases} \quad (3)$$

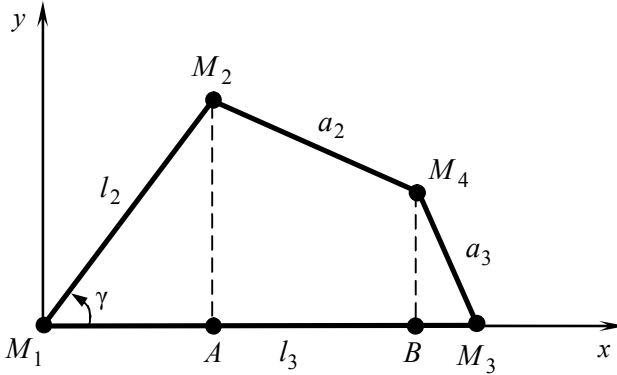


Рис. 2.

Координаты точки $M_4(x_4, y_4)$ определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} (x_4 - x_2)^2 + (y_4 - y_2)^2 = a_2^2, \\ (x_4 - x_3)^2 + y_4^2 = a_3^2. \end{cases} \quad (4)$$

Решая (4) находим зависимость координат точки M_4 от координат точки $M_2(x_2, y_2)$:

$$\begin{cases} x_4 = \frac{1}{2k^2} [s(-bc + sp) + p y_2^2 \mp y_2 d], \\ y_4 = \frac{1}{2k^2} [y_2(-bc + k^2) \pm s d], \end{cases} \quad (5)$$

где обозначено $d = \sqrt{-(k^2 - b^2)(k^2 - c^2)}$, $k^2 = s^2 + y_2^2$,
 $b = a_2 - a_3$, $c = a_2 + a_3$, $s = x_2 - x_3$, $p = x_2 + x_3$.

Относительную координату x_2 точки M_2 выразим из скалярного произведения векторов $\vec{\rho}_2 = \overline{M_1M_2}$ и $\vec{\rho}_3 = \overline{M_1M_3}$:

$$\begin{cases} \vec{\rho}_2 \cdot \vec{\rho}_3 = l_2 l_3 \cos \gamma, \\ \vec{\rho}_2 \cdot \vec{\rho}_3 = \xi_2 \xi_3 + \eta_2 \eta_3 + \zeta_2 \zeta_3. \end{cases}$$

Откуда с учетом (1) и (2) находим

$$\begin{aligned} x_2 = l_2 \cos \gamma &= \frac{\vec{\rho}_2 \cdot \vec{\rho}_3}{l_3} = \frac{1}{l_3} (\xi_2 \xi_3 + \eta_2 \eta_3 + \zeta_2 \zeta_3) = \\ &= l_2 (\cos \alpha_2 \cos \alpha_3 \cos(\beta_2 - \beta_3) + \sin \alpha_2 \sin \alpha_3). \end{aligned} \quad (6)$$

Относительную координату y_2 точки M_2 определяем из векторного произведения векторов $\vec{\rho}_2$ и $\vec{\rho}_3$:

$$\begin{cases} |\vec{\rho}_2 \times \vec{\rho}_3| = l_2 l_3 \sin \gamma, \\ |\vec{\rho}_2 \times \vec{\rho}_3| = \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix} \right|. \end{cases}$$

Откуда с учетом (1) и (2) находим

$$\begin{aligned} y_2 = l_2 \sin \gamma &= \frac{|\vec{\rho}_2 \times \vec{\rho}_3|}{l_3} = \frac{1}{l_3} \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix} \right| = \\ &= l_2 \left[\sin^2 \alpha_2 \cos^2 \alpha_3 + \sin^2 \alpha_3 \cos^2 \alpha_2 + \right. \\ &+ \cos^2 \alpha_2 \cos^2 \alpha_3 \sin^2(\beta_2 - \beta_3) - \\ &\left. - 2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 \sin \alpha_3 \cos \alpha_3 \cos(\beta_2 - \beta_3) \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Для определения координат точки M_4 в осях $M_1\xi\eta\zeta$ сделаем дополнительные построения (рис. 3). Очевидно, что точки A и B обладают координатами

$$A: \begin{cases} \xi_A = x_2 \cos \alpha_3 \cos \beta_3, \\ \eta_A = x_2 \sin \alpha_3, \\ \zeta_A = x_2 \cos \alpha_3 \sin \beta_3, \end{cases} \quad (8)$$

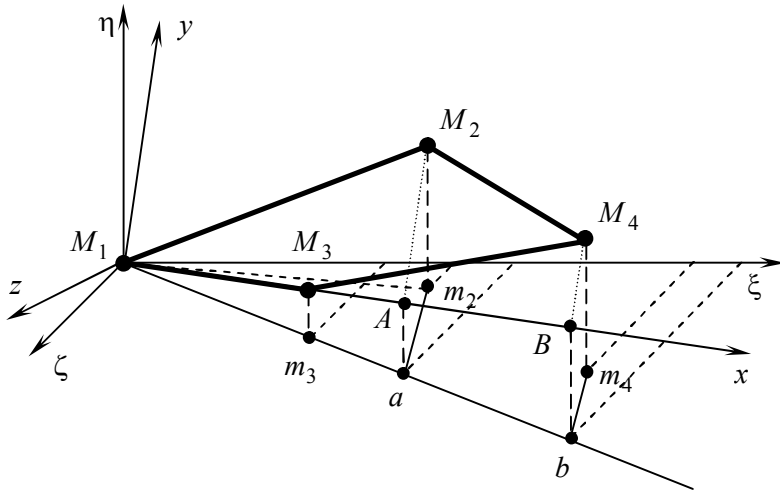


Рис. 3.

где x_2 определяется соотношением (6),

$$B: \begin{cases} \xi_B = x_4 \cos \alpha_3 \cos \beta_3, \\ \eta_B = x_4 \sin \alpha_3, \\ \zeta_B = x_4 \cos \alpha_3 \sin \beta_3, \end{cases} \quad (9)$$

где x_4 определяется соотношением (5).

Тогда точки их проекций на плоскость $M_1\xi\zeta$ будут обладать следующими координатами $a(\xi_A; 0; \zeta_A)$ и $b(\xi_B; 0; \zeta_B)$.

Не трудно заметить, что $\overline{AM_2} = \lambda \overline{BM_4}$. Следовательно

$$y_2 = \lambda y_4. \quad (10)$$

Поскольку $\overline{am_2} = \lambda \overline{bm_4}$, а точки m_2 и m_4 , как точки проекций M_2 и M_4 обладают координатами $m_2(\xi_2; 0; \zeta_2)$ и $m_4(\xi_4; 0; \zeta_4)$, получаем:

$$\begin{cases} \xi_2 - \xi_A = \lambda(\xi_4 - \xi_B), \\ \zeta_2 - \zeta_A = \lambda(\zeta_4 - \zeta_B). \end{cases} \quad (11)$$

Откуда с учетом (10) находим

$$\begin{cases} \xi_4 = \frac{y_4}{y_2} (\xi_2 - \xi_A) + \xi_B, \\ \zeta_4 = \frac{y_4}{y_2} (\zeta_2 - \zeta_A) + \zeta_B, \end{cases} \quad (12)$$

где y_4 определяется соотношением (5) и (7).

Координату η_4 точки M_4 найдем из условия, что точки M_2 , M_3 и M_4 лежат в одной плоскости:

$$\eta_4 = \frac{\xi_4(\eta_3\zeta_2 - \eta_2\zeta_3) + \zeta_4(\xi_3\eta_2 - \xi_2\eta_3)}{\xi_3\zeta_2 - \xi_2\zeta_3}. \quad (13)$$

Итак, координаты точек в системе координат $M_1\xi\eta\zeta$ равны: $M_1(0;0;0)$, M_2 и M_3 определяются соотношениями (2) и (3), M_4 – (12), (13).

Заключение

Принимая за обобщенные координаты четырехзвенника величины $r_1, v, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3$ можно получить выражения для абсолютных скоростей материальных точек M_1, M_2, M_3, M_4 и для обобщенных сил $Q_{r_1}, Q_v, Q_{\alpha_2}, Q_{\beta_2}, Q_{\alpha_3}, Q_{\beta_3}$, чтобы составить математическую модель движения данного четырехзвенника.

Библиографический список

1. *Белецкий В.В.* Очерки о движении космических тел. М.: Наука, 1972. 360 с.
2. *Вертипрахов И.А., Остапенко Е.Н., Репях Н.А.* Динамика стержневой большой орбитальной космической системы цепочечной структуры // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2012. Вып. 4(12). С. 42–47.
3. *Ермилов Ю.А., Иванова Е.Е., Пантюшин С.В.* Управление сближением космических аппаратов. М.: Наука, 1977. 448 с.

4. Курская К.Н., Краснянская О.А., Репях Н.А. Исследование орбитального движения одного вида осциллятора // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы. 2007. Пермь, Вып. 39. С. 46–57.

5. Курская К.Н., Маланин В.В., Остапенко Е.Н., Репях Н.А. Динамика больших орбитальных космических систем (БОКС) // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы. Пермь, 2012. Вып. 44. С. 42–48.

6. Курская К.Н., Репях Н.А. О движении трехточечной стержневой системы // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы. Пермь, 2006. Вып. 38. С.8–13.

7. Маланин В.В., Остапенко Е.Н., Репях Н.А. Влияние масс концевых точек на динамику пятимассовой большой орбитальной космической системы цепочечной структуры // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2014. Вып. 4(27). С. 43–48.

8. Маланин В.В., Остапенко Е.Н., Репях Н.А. Свободное движение пятиточечной стержневой большой орбитальной космической системы цепочечной структуры в транспортирующей системе координат // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2013. Вып. 3(22). С. 59–62.

9. Репях Н.А., Журавлева М.А. О вертикальных движениях трехточечного КА // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы. Пермь, 2004. Вып. 36. С.46–51.

10. Репях Н.А., Остапенко Е.Н. К выводу уравнений движения плоского замкнутого многозвенника // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы. Пермь, 2017. Вып. 49. С. 92–96.

<i>Городилов Александр Дмитриевич</i>	студент механико-математического факультета Пермского государственного национального исследовательского университета
<i>Кусяков Альфред Шамильевич</i>	кандидат физико-математических наук, доцент Пермского государственного национального исследовательского университета
<i>Лутманов Сергей Викторович</i>	кандидат физико-математических наук, доцент Пермского государственного национального исследовательского университета
<i>Макеев Николай Николаевич</i>	доктор физико-математических наук, профессор института проблем точной механики и управления РАН, г. Саратов
<i>Максимов Евгений Александрович</i>	кандидат технических наук, доцент Южно-Уральского государственного университета, г. Челябинск
<i>Остапенко Елена Николаевна</i>	кандидат технических наук, доцент Пермского государственного национального исследовательского университета
<i>Переварюха Андрей Юрьевич</i>	Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН
<i>Полосков Игорь Егорович</i>	доктор физико-математических наук, доцент Пермского государственного национального исследовательского университета
<i>Репях Николай Александрович</i>	кандидат физико-математических наук, доцент Пермского государственного национального исследовательского университета
<i>Устиновский Евгений Петрович</i>	кандидат технических наук, профессор Южно-Уральского государственного университета, г. Челябинск

Правила оформления научных статей для публикации
в межвузовском сборнике научных трудов (издается с 1972 г.)

ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И УПРАВЛЕНИЯ: Нелинейные динамические системы



Текст статьи должен быть подготовлен в текстовом редакторе WinWord. Объем – от 6 до 10–12 с.

Параметры страницы: формат листа А5 (148 × 210 мм), ориентация листов – книжная, все поля устанавливаются равными 20 мм.

Заголовок статьи набирается по центру (стиль Прописной, Полуужирный, шрифт Times New Roman Cyr, 11 пт.).

Аннотация к тексту статьи приводится на русском и английском языках.

Ключевые слова (на русском и английском языках).

Тематический рубрикатор: УДК, либо другие библиотечно-библиографические классификационные и предметные индексы.

Сведения об авторах:

фамилия(и), имя, отчество автора(ов) полностью, в центре (стиль Обычный, шрифт Times New Roman Cyr, 11 пт., ниже – **город, в котором находится вуз, адрес, место работы каждого автора** (стиль Обычный, шрифт Times New Roman Cyr, курсив, 11 пт.): **контактная информация** (e-mail, телефон) для каждого автора.

Параметры абзаца: для основного текста размер шрифта (кегель) 11 пт. (при использовании шрифта Times New Roman Cyr), межстрочный интервал в основном тексте – одинарный, выравнивание текста – по ширине страницы, абзацный отступ – 1 см.

Включенные в текст **формулы** должны быть набраны в редакторе **Microsoft Word Equation, версия 3.0** и ниже с выравниванием по центру и пробелами сверху и снизу по 6 пт. (номер формулы выравнивается по правому краю поля). Размеры всех элементов формул должны быть соизмеримы с текстовыми размерами (обычные символы – 11 пт., крупный индекс – 8 пт., мелкий индекс – 7 пт., крупный символ – 17 пт., мелкий символ – 12 пт.).

Библиографический список – после основного текста.

Издание включено в национальную информационно-аналитическую систему «**Российский индекс научного цитирования**» (РИНЦ).

Просьба быть внимательными и аккуратными при оформлении списка литературы, в котором необходимо полностью указывать названия журналов и список авторов.

Адрес редакции: Россия, 614990, г. Пермь, ГСП, ул. Букирева, 15.

Пермский государственный национальный исследовательский университет (ПГНИУ), кафедра механики и математического моделирования.

Телефоны: (342) 2-396-309, (342) 2-396-298. E-mail: mpu@psu.ru или svlut@yandex.ru.

Научное издание

ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И УПРАВЛЕНИЯ
Нелинейные динамические системы

Межвузовский сборник научных трудов

Выпуск 52

Издается в авторской редакции

Компьютерная верстка *Г. И. Кушниной*

Подписан в печать 01.12.2020. Формат 60 × 84 /16.
Усл. печ. л. 5,81. Тираж 500 экз. Заказ 135.

Распространяется бесплатно

Адрес редакции: 614990, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15.
Пермский государственный национальный исследовательский университет
(ПГНИУ), кафедра механики и математического моделирования

E-mail: mpu@psu.ru или iakovlev@psu.ru.
Телефоны: 8(342) 2-396-309, 8(342) 2-396-298

Издательский центр Пермского государственного
национального исследовательского университета
614990, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15

Типография Пермского государственного
национального исследовательского университета
614990, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15

Межвузовский сборник научных трудов
"ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И УПРАВЛЕНИЯ.
Нелинейные динамические системы"
включен в Российский индекс научного цитирования