

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

С. О. Макаров, К. А. Рыбкин

# МЕЖФАЗНАЯ ГИДРОДИНАМИКА

*Допущено методическим советом  
Пермского государственного национального  
исследовательского университета в качестве  
учебно-методического пособия для студентов,  
обучающихся по направлению подготовки магистров  
«Физика»*



Пермь 2021

УДК 532.51  
ББК 22.253.3  
М152

**Макаров С. О.**

**М152** Межфазная гидродинамика : учебно-методическое пособие / С. О. Макаров, К. А. Рыбкин ; Пермский государственный национальный исследовательский университет. – Пермь, 2021. – 92 с.

ISBN 978-5-7944-3659-4

Пособие содержит расширенное изложение вопросов курса общей физики: теории поверхностного натяжения; уравнения гидромеханики систем, состоящих из несмешивающихся жидкостей или из жидкой и газовой фаз; граничных условий на поверхностях раздела. Пособие может быть использовано при выполнении работ по капиллярным эффектам в практикуме по молекулярной физике, углублённом изучении теорий и решении задач по темам «Механика жидкостей», «Поверхностные явления», «Межфазная гидродинамика» и другим.

Кратко изложена теория и даны методические указания к проведению лабораторных работ по специальному практикуму «Межфазная гидродинамика», предназначенного для студентов старших курсов и обучающихся в магистратуре физических специальностей университета, специализирующихся в области физической гидродинамики.

**УДК 532.51**  
**ББК 22.253.3**

*Печатается по решению ученого совета физического факультета  
Пермского государственного национального исследовательского университета*

*Рецензенты:* кафедра физики и технологии Пермского государственного гуманитарно-педагогического университета (зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, профессор **В. Г. Козлов**); научный сотрудник Института механики сплошных сред УрО РАН, канд. физ.-мат. наук **А. В. Евграфова**

ISBN 978-5-7944-3659-4

© ПГНИУ, 2021  
© Макаров С. О. Рыбкин К. А., 2020

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>Требования к оформлению отчета по НИР</b>	<b>6</b>
<b>1 Лабораторные работы</b>	<b>14</b>
1.1 Определение поверхностного натяжения по форме профиля мениска с помощью микроскопа . . .	14
1.2 Неустойчивость аксиально симметричного капиллярного течения по отношению к деформирующим поверхность возмущениям . . . . .	17
1.3 Рэлеевская устойчивость невязких струй . . . . .	27
1.4 Основные закономерности образования тумана . . . . .	30
1.5 Рэлеевская устойчивость столба жидкости . . . . .	35
1.6 Растекание капель по горизонтальной поверхности . . .	44
1.7 Слипание плавающих частиц . . . . .	48
1.8 Дрейфовая неустойчивость частицы камфары, помещённой на поверхность воды . . . . .	53
1.9 Определение коэффициента диффузии по скорости испарения капли . . . . .	59
1.10 Неустойчивость струй, стекающих по наклонной плоскости . . . . .	62
<b>Приложение</b>	<b>68</b>
<b>Список литературы</b>	<b>91</b>

## Введение

Проблема написания текста, содержащего большое количество формул, таблиц и рисунков, по определенным и довольно часто изменяющимся правилам вызывает трудность у студентов физико-математических и технических вузов, пожалуй, с момента массового появления компьютеров. Озаботившись этой проблемой, Дональд Кнут в 1978 г. создал систему компьютерной верстки  $\text{\TeX}$  [1, 2]. В отличие от популярных текстовых процессоров (WordPad, Microsoft Word, LibreOffice и т. д.) в  $\text{\TeX}$  пользователю требуется лишь набрать текст и задать его структуру, а система автоматически отформатирует документ. Таким образом, работа с  $\text{\TeX}$ -подобными системами избавляет пользователя от необходимости выполнения нумерации разделов, формул, иллюстраций, а также позволяет выводить оформленный в соответствии с современными правилами ГОСТа список литературы при помощи нескольких строк текста.

Одним из наиболее современных расширений стандартного  $\text{\TeX}$  является  $\text{\XeLaTeX}$ , включающий наборы распространенных шаблонов и стилей. Основным преимуществом этого процессора перед наиболее распространенным  $\text{\LaTeX}$  являются корректная поддержка большинства существующих языков, в том числе русского, а также использование любых шрифтов, установленных в операционной системе. На сегодняшний день наиболее удобным редактором документов  $\text{\XeLaTeX}$  для ОС Windows является  $\text{\TeX}$ studio.

Несмотря на широкие возможности использования  $\text{\XeLaTeX}$  при верстке документов, особо следует отметить ряд специализированных программных продуктов для создания иллюстраций, графиков и управления библиографическим списком:

- ▷ Microsoft Office (Word, Excel, Power Point) — офисный пакет приложений, созданных корпорацией Microsoft, в частности, для операционных систем Microsoft Windows. В состав этого пакета входит программное обеспечение для работы с различными типами документов: текстами, электронными таблицами и др.;
- ▷ LibreOffice (Writer, Calc, Impress, Draw, Math) — кроссплатформенный, свободно распространяемый офисный пакет с открытым исходным кодом. Содержит в себе текстовый и табличный процессоры, программу для подготовки и просмотра презентаций, векторный графический редактор и редактор формул:  
<https://ru.libreoffice.org/download/>;



- ▷ Adobe Photoshop — многофункциональный графический редактор, разработанный и распространяемый фирмой Adobe Systems. В основном работает с растровыми изображениями, однако имеет некоторые инструменты для работы с векторной графикой;
- ▷ Adobe Illustrator — векторный графический редактор, разработанный и распространяемый фирмой Adobe Systems;
- ▷ Paint.NET — бесплатный растровый графический редактор для Windows NT:  
<http://paintnet.ru/download/>;
- ▷ GIMP — свободно распространяемый растровый графический редактор, программа для создания и обработки растровой графики и частичной поддержки работы с векторной графикой;
- ▷ Golden Software Grapher — программа для построения, отрисовки и анализа графиков;
- ▷ Golden Software Surfer — средство для моделирования и анализа поверхностей, визуализации ландшафта, генерирования сетки, разработки трехмерных карт;
- ▷ JabRef — среда с открытым исходным кодом, предназначенная для управления библиографией:  
<http://www.jabref.org/>.

## Требования к оформлению отчета по НИР

На сегодняшний день основным нормативным документом, определяющим правила оформления и структуру отчетов по научно-исследовательской работе (НИР), является ГОСТ 7.32–2001.

В соответствии с требованиями документа отчет должен иметь следующую структуру:

- 1) титульный лист;
- 2) содержание;
- 3) введение;
- 4) основная часть;
- 5) заключение;
- 6) список литературы;
- 7) приложение.

### Требования к отчету в целом

Отчет по НИР печатается на листах формата А4, при этом используется односторонняя печать. Основной текст набирается прямым шрифтом (с засечками) черного цвета размером не менее 12 пт, а для написания заголовков необходимо использовать полужирный шрифт. Конкретным примером такого шрифта является CMU Serif (по умолчанию указанный шрифт может отсутствовать в операционной системе, поэтому необходимые файлы находятся в папке [Пример отчета по НИР\CMUSerif\\_font](#)).

При наборе текста используется выравнивание по ширине, а абзацный отступ принимается равным 1.25 см. В ГОСТе также определены размеры полей. Так, с левой стороны необходимо оставить отступ от 25 до 30 мм (учитывается сшивка листов), размеры верхнего и нижнего полей одинаковы и равны величине левого отступа. Величина полей с правой стороны составляет от 10 до 15 мм.

Страницы отчета нумеруются по порядку начиная с титульного листа. Однако номер страницы следует указывать с раздела *введение* (после *титульного листа* и *содержания*). Согласно требованиям ГОСТа номер страницы располагается в нижней части листа по центру, при этом точка в конце номера не ставится. Для нумерации страниц используются арабские цифры.

## Титульный лист

Титульный лист является первой страницей отчета о НИР и служит источником информации, необходимой для обработки и поиска документа. На титульном листе необходимо указывать следующие сведения:

- 1) наименование организации, в которой выполняется НИР (указание вуза и кафедры);
  - 2) наименование отчета (отчет по научно-исследовательской работе, выпускная квалификационная работа и т.п.). Высота букв меньше, чем у основного текста;
  - 3) название работы (высота букв больше, чем у основного текста);
  - 4) должности, ученые степени и звания, фамилии и инициалы исполнителя и руководителя НИР (записываются в несколько строк через 1 межстрочный интервал);
  - 5) место и год выпуска отчета (записываются внизу титульного листа в одной строке без разделения запятой и точки в конце).
- **Гриф с информацией об утверждении текста отчета заведующим выпускающей кафедрой необходимо дополнительно указывать только при выполнении выпускной квалификационной работы.**

## Содержание

В содержании перечисляются полные наименования всех основных элементов отчета (введение, названия глав в основной части, заключение, список литературы) с указанием номеров страниц, с которых они начинаются в тексте. Все эти элементы набираются полужирным шрифтом. Причем в этих случаях строки не заполняются точками.

## Введение

Во введении к отчету должны быть показаны актуальность и новизна темы, а также связь выполняемой НИР с другими исследовательскими работами. Введение, таким образом, должно содержать:

- ▷ оценку современного состояния решаемой проблемы;

- ▷ обзор литературы с обсуждением актуальных результатов, описанных в российских и международных изданиях<sup>1</sup>;
- ▷ четкую формулировку цели и задач проводимого исследования.

## Основная часть

В основной части отчета приводятся математическая постановка задачи, описание экспериментальной установки и методики измерений. Отчет допускает разделение на главы, каждая из которых может содержать собственные введение и заключение. Основная часть должна содержать:

- ▷ методы решения задач и их сравнительную оценку, описание выбранной методики проведения НИР (в отдельных главах отчета могут описываться различные методики);
- ▷ процесс теоретических и/или экспериментальных исследований, включая определение характера и содержания теоретических исследований, описание методов расчета, обоснование необходимости проведения экспериментальных работ, принципы действия разработанных объектов и их характеристики;
- ▷ обобщение результатов исследований, включающих оценку полноты решения поставленной задачи и предложения по дальнейшим направлениям работ, оценку достоверности полученных результатов, обоснование необходимости проведения дополнительных исследований, отрицательные результаты, приводящие к необходимости прекращения дальнейшего исследования.

## Заключение

Раздел *заключение*, который подводит итог любой выполненной работы, содержит аргументированные выводы по теме исследования. Его следует начинать с обоснования актуальности, продолжая аргументированием цели, достижение которой стало результатом проекта. Завершить

---

<sup>1</sup>Поиск источников удобно выполнять через сервис Google Scholar (<https://scholar.google.ru/>), сортируя результаты поиска по дате издания и количеству цитирований. Кроме того, большинство научных журналов входят в специальные базы цитирования: Web of Science, Scopus и российскую электронную библиотеку eLIBRARY (РИНЦ).

этот раздел можно перечнем решенных задач, обозначенных во введении, которые удалось выполнить. Таким образом, заключение должно включать следующее:

- ▷ краткие выводы по результатам выполненной НИР или отдельных ее этапов;
- ▷ оценку полноты решений поставленных задач;
- ▷ оценку возможности практического применения результатов НИР;
- ▷ оценку научно-технического уровня выполненной НИР в сравнении с другими достижениями в данной области.

## Список литературы

Список литературы представляет собой перечень наименований источников, использованных при составлении отчета. Полные правила оформления списка литературы указаны в стандарте ГОСТ Р 7.0.5-2008 («Библиографическая ссылка. Общие требования и правила составления»).

В стандартных классах номер элемента в списке литературы печатается в квадратных скобках. Изменение этого формата требует переопределения команды `\@biblabel`, которая не входит в стандартный набор инструментов  $\text{\TeX}$ . Ниже приведен пример, показывающий, как прямо во входном файле можно задать печать номера элемента без квадратных скобок, но с точкой после него:

```
\makeatletter  
\renewcommand{\@biblabel}[1]{#1.}  
\makeatother
```

## Иностранная литература

### Монография

Lappa M. Thermal convection: patterns, evolution and stability. John Wiley & Sons, 2009. P. 690.

### Статья (1, 2 или 3 автора)

Kumagai I., Davaille A., Kurita K. On the fate of thermally buoyant mantle plumes at density interfaces // Earth and Planetary Science Letters. 2007.

Vol. 254, no. 1. P. 180–193.

**Статья (4 автора)**

Plume formation and lithosphere erosion: a comparison of laboratory and numerical experiments / P. Olson, G. Schubert, C. Anderson, P. Goldman // Journal of Geophysical Research: Solid Earth (1978-2012). 1988. Vol. 93, no. B12. P. 15065–15084.

**Статья (более 4 авторов)**

Anatomy of a laminar starting thermal plume at high Prandtl number / A. Davaille, A. Limare, F. Touitou et al. // Experiments in Fluids. 2011. Vol. 50, no. 2. P. 285–300.

**Русскоязычная литература**

**Монография**

Братухин Ю. К., Макаров С. О. Гидродинамическая устойчивость межфазных поверхностей. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2005. С. 239.

**Статья (1, 2 или 3 автора)**

Гаврилов К. А., Демин В. А., Попов Е. А. Режимы всплытия тепловых плюмов в вертикальном слое // Вычислительная механика сплошных сред. 2013. Т. 6, № 3. С. 261–268.

### Статья (4 автора)

Тепловая конвекция в ячейке Хеле–Шоу при действии центробежных сил / И. А. Бабушкин, В. А. Демин, А. Н. Кондрашов, Д. В. Пепеляев // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2012. Т. 1. С. 14–25.

### Статья (более 4 авторов)

Сверхпроводимость в  $Tb_2Mo_3Si_4$  / Ф. Г. Алиев, Н. Б. Брандт, В. В. Мошталков и др. // Письма в ЖЭТФ. 1986. Т. 43. №. 3. С. 143–145.

## Рекомендации в $\text{\LaTeX}$

При написании отчета по НИР, удовлетворяющего перечисленным требованиям, рекомендуется использовать текст-процессор  $\text{\LaTeX}$  и бесплатный редактор  $\text{\TeXstudio}$ .

## Пример отчета по НИР

### Титульный лист (образец)

Каждый отчет должен начинаться с титульного листа, на котором указывается информация о месте выполнения работы, виде отчета, названии исследования и его авторах. Ниже приведен образец титульного листа для отчета по научно-исследовательской работе. Следует отметить, что информация о допуске студента к защите заведующим выпускающей кафедрой указывается только в отчете по выпускной квалификационной работе и в промежуточных отчетах не требуется.

```
\documentclass[14pt,a4paper,oneside]{extarticle}
\usepackage{xunicode}
\usepackage{polyglossia}
\setdefaultlanguage{russian}
\setotherlanguage{english}
\setmainfont{CMU Serif}
\linespread{1.3}
\usepackage[left=2.5cm,right=1.5cm,vmargin=2.5cm]{geometry}
```

```
\begin{document}
\begin{center}
```

```

\thispagestyle{empty}
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
\small{ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ}
\end{center}
\vspace{5em}

\begin{center}
\textbf{Кафедра общей физики}
\end{center}
\begin{center}
\small{Выпускная квалификационная работа}
\end{center}
\begin{center}
\large \textbf{Экспериментальное исследование развития
конвективного факела в узком вертикальном слое}
\end{center}
\vspace{5em}

\begin{flushright}
{\textbf{Выполнил:}}\\
студент 4-го курса физического факультета\\
направления Физика\\
И. И. Иванов
\underline{\hspace{100pt}\hspace{10pt}}\\
\bigskip
\textbf{Научный руководитель:}\\
профессор кафедры общей физики ПГНИУ\\
д.ф.-м.н. П. П. Петров}
\underline{\hspace{100pt}\hspace{10pt}}
\vspace{\fill}
\end{flushright}

\begin{flushleft}
{\textbf{К защите допускаю:}}\\
зав. кафедрой общей физики

```



```
к.ф.-м.н., И. А. Бабушкин}  
\underline{\hspace{100pt}\hspace{10pt}}  
\vspace{\fill}  
\end{flushleft}
```

```
\begin{center}  
Пермь 2018  
\end{center}
```

```
\end{document}
```

# 1. Лабораторные работы

## 1.1. Определение поверхностного натяжения по форме профиля мениска с помощью микроскопа

### Теория

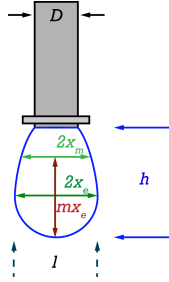
Метод висящей капли базируется на изучении осесимметричных менисков – фаз, ограниченных поверхностями вращения.

Привлекательность метода связана, во-первых, с тем, что именно данный тип менисков наиболее легко реализуется в лабораторных условиях, а, во-вторых, при наличии вращательной симметрии требуется анализ не всей поверхности, а лишь её меридиана, т.е. плоской кривой, образующей данную поверхность при вращении относительно некоторой оси. Последний факт даёт возможность проводить все измерения, используя изображение только профиля капли. Затем по специальным таблицам и эмпирическим формулам определяют поверхностное натяжение или, что фактически то же самое, капиллярную постоянную  $a = \sqrt{\frac{\sigma}{g(\rho^\alpha - \rho^\beta)}}$ , которая определяет форму поверхности капли плотности  $\rho^\alpha$ , помещённой во внешнюю жидкость плотности  $\rho^\beta$ , в поле силы тяжести  $g$  (для воды в воздухе при  $20^\circ\text{C}$   $a = 0.39$  см).

В нашей работе используется метод висящей капли, предложенный Эндreasом, Хаусером и Такером в 1938 г. (Русанов А.И., Прохоров В.А.// Межфазная тензиометрия. СПб: Химия, 1994. 398 с., далее Русанов). В своих опытах они измеряли у висящих капель максимальный, по принятой терминологии, “экваториальный” радиус капли  $2x_e$  и её диаметр  $2x_m$  на расстоянии  $mx$  (при  $m = 2$ ) от нижней точки капли (см. рис.1). По этим данным и по затабулированному решению уравнения равновесия капли (Русанов), представленному в виде таблиц зависимости  $\frac{x_e^2}{2a^2}$  от  $\frac{x_m}{x_e}$ , они эмпирическим путём определяли поверхностное натяжение.

Рассмотрим более подробно теоретическую постановку задачи по определению поверхностного натяжения методом висящей капли.

Пусть в жидкости с плотностью  $\rho^\beta$  (фаза 1) находится подвешенная на цилиндре диаметра  $D$  капля другой жидкости плотности  $\rho^\alpha$  (фаза 2), не смешивающейся при данных условиях с первой. Подлежащее определению поверхностное натяжение на границе раздела сред равно  $\sigma$ . Введём цилиндрическую систему координат  $(r, \varphi, z)$ , направив ось  $z$  вверх, вдоль оси аксиальной симметрии капли, против ускорения силы тяжести  $g$ . В однородном поле тяжести  $g$  формой капли должна быть аксиально симметричная фигура  $z = \eta(r)$  (в правой части рисунка изображено се-



**Рис. 1.** Схематическая модель висющей капли с введёнными обозначениями

чение капли плоскостью  $y = 0$ ), определяемого заданной массой капли  $M$  и всеми остальными параметрами задачи:  $D, g, \rho^\alpha, \rho^\beta, \sigma$ .

Если капля находится в равновесии, то функция  $\eta$  удовлетворяет системе уравнений, следующих из требования непрерывности нормальных напряжений при переходе через границу раздела фаз (формула Лапласа с учётом гидростатических давлений, отсчитываемых от самой нижней точки капли  $z = 0$ ) и геометрически очевидных условий:

$$\sigma \left[ \frac{\eta''}{(1 + \eta'^2)^{3/2}} + \frac{\eta'}{r(1 + \eta'^2)^{1/2}} \right] + (\rho^\beta - \rho^\alpha) g \eta + p_1 - p_2 = 0 \quad (1)$$

$$r = 0 : \eta = \eta' = 0; \quad (2)$$

$$r = D/2 : \eta = H. \quad (3)$$

Здесь штрихами обозначены производные по координате  $r$ . В квадратных скобках стоит известное выражение средней кривизны поверхности  $z = \eta(r)$ . Вертикальные размеры капли определяются её массой:

$$M = \rho^\alpha \int_0^H \pi r^2 dz. \quad (4)$$

Заметим, что масса капли как параметр задачи появляется только в стоящем особняком уравнении (4) и потому не входит в замкнутую систему уравнений (1) – (3). Поэтому можно считать заданными параметрами задачи  $D, g, \rho^\alpha, \rho^\beta$  и высоту капли, которые и определяют поверхностное натяжение  $\sigma$ . При необходимости можно по определённой системой уравнений (1) – (3) форме капли  $z = \eta(r)$  связать её высоту с массой по формуле (4).

В задаче не учитывались масса внешней жидкости, так как бесконечно большая величина не может быть параметром задачи, и  $\eta'(r = D/2)$ , поскольку направление касательной к поверхности в точке закрепления капли на остром крае цилиндра может быть любым.

Запишем задачу (1) – (3) в безразмерном виде, выбрав в качестве единиц длину: радиус цилиндра  $D/2$  и давление:  $2\sigma/D$ . Тогда в задачу войдут только три безразмерных параметра – высота капли  $h = 2H/D$ , квадрат отношения радиуса капли и капиллярной постоянной  $= \frac{D^2(\rho^\alpha - \rho^\beta)g}{4\sigma}$  и разность давлений в каплях  $q = (p_1 - p_2) \frac{D}{2\sigma}$ :

$$\left[ \frac{\eta''}{(1 + \eta'^2)^{3/2}} + \frac{\eta'}{r(1 + \eta'^2)^{1/2}} \right] + A\eta + q = 0; \quad (5)$$

$$r = 0 : \eta = \eta' = 0; \quad (6)$$

$$r = 1 : \eta = h. \quad (7)$$

Задача (5)-(7) может быть решена только численно. Для каждого из набора величин  $(A, h)$  можно построить форму капли  $z = \eta(r)$  и вычислить, например, отношения  $\frac{x_e^2}{2a^2}$  и  $\frac{x_m}{x_e}$ , которые одинаковы как для размерных, так и безразмерных величин и определяются при известных  $D, g, \rho^\alpha, \rho^\beta$  только поверхностным натяжением  $\sigma$ .

## Эксперимент

Необходимо записать процесс испарения капли, подвешенной на подвесе малого диаметра и имеющей в начале процесса форму сферического сегмента, в виде видео и затем в режиме покадрового просмотра с помощью программы образовать серию снимков испаряющейся капли воды в определённые моменты времени. Временные интервалы между снимками должны уменьшаться по мере уменьшения капли. Необходимо построить график зависимости объёма капли как функцию времени в логарифмическом масштабе и по этим данным обосновать возможность определения коэффициента диффузии предложенным методом.

## 1.2. Неустойчивость аксиально симметричного капиллярного течения по отношению к деформирующим поверхность возмущениям

### Теория

В многочисленных экспериментальных и теоретических работах последнего времени по термокапиллярной конвекции<sup>2,3,4,5,6</sup>, основное внимание исследователей сосредотачивается не столько на самом факте межфазной конвекции Марангони, сколько на вызываемой ею деформации поверхности раздела фаз. В предлагаемой лабораторной работе предполагается изучить законы термокапиллярной конвекции, вызванной сосредоточенным источником тепла. Эта задача была подробно исследована в нескольких работах, как теоретических<sup>7,8</sup> так и экспериментальных<sup>9</sup>. В частности в работе Братухина Ю.К.<sup>10</sup> обнаружено возникновение колебательных режимов термокапиллярной конвекции от сосредоточенного источника тепла, помещенного вблизи свободной поверхности раздела жидкости.

Экспериментальная модель в этой работе представляла собой прямоугольную конвективную полость с размерами основания  $100 \times 100 \text{ мм}^2$  и высотой 110 мм, внутри которой располагался нагревательный элемент цилиндрической формы диаметром 5 мм и высотой 2 мм. В конструкции установки было предусмотрено перемещение нагревательного элемен-

---

<sup>2</sup>Пшеничников А.Ф., Токмения Г.А. Деформация свободной поверхности жидкости термокапиллярным движением // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 3. С. 150–153;

<sup>3</sup>Низовцев В.В. Исследование стимулированной локальным облучением естественной конвекции в тонком слое испаряющейся жидкости // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1989. № 1. С. 138–145;

<sup>4</sup>Ezersky A.B., Garcimartin A., Burguete J., Marcini H.L., Perez-Garcia C. Hydrothermal waves in Marangoni convection in a cylindrical container // Physical Review E. 1993. V. 47. № 2. P;

<sup>5</sup>Kamotani Y., Chang A., Ostrach S. Effects of heating mode on steady axisymmetric thermocapillary flows in microgravity // J. of Heat Transfer. 1996. V.118. P. 191–197; 1126–1131;

<sup>6</sup>Dell'Aversana P., Banavar J.R., Koplik J. Suppression of coalescence by shear and temperature gradients // Phys. fluids. 1996. V. 8. № 1. P. 15–28;

<sup>7</sup>Братухин Ю.К., Маурин Л.Н. Термокапиллярная конвекция в жидкости, заполняющей полупространство // ПММ. 1967. Т. 31, вып. 3. С. 577–580;

<sup>8</sup>Братухин Ю.К., Макаров С.О. О вторичных термокапиллярных движениях солитонного типа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1992. № 4. С. 20–27.

<sup>9</sup>Пшеничников А.Ф., Яценко С.С. Конвективная диффузия от сосредоточенного источника поверхностно-активного вещества // Гидродинамика. Пермь.: Изд-во Перм. ун-та. 1976. Вып.5. С. 175–181;

<sup>10</sup>Братухин Ю.К., Макаров С.О., Мизёв А.И. Колебательные режимы термокапиллярной конвекции от сосредоточенного источника тепла // Изв. РАН. МЖГ. 2000. №.2 С. 92–103.

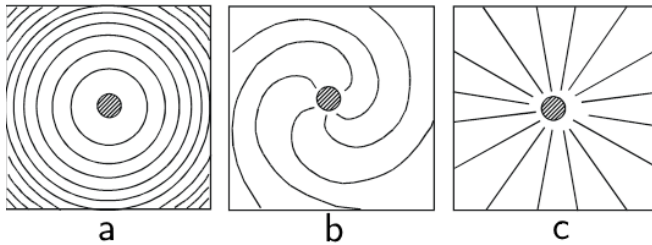
та в вертикальном направлении при помощи микрометрического винта, что позволило изменять глубину погружения элемента относительно поверхности жидкости. При помощи медь-константановой термопары, один из спаев которой располагался на корпусе нагревательного элемента, измерялась разность температур между источником тепла и удалённой областью жидкости, что позволило контролировать теплоотдачу. В процессе опытов, с помощью голографического интерферометра сфокусированного изображения, проводились также визуальные наблюдения распределения температуры в жидкости и формы её поверхности.

Эксперименты проводились для двух случаев: открытой и закрытой поверхности жидкости. Во втором случае свободная поверхность закрывалась тонкой фторопластовой плёнкой, исключающей капиллярные эффекты.

Опыты показали, что при приближении источника тепла к свободной поверхности жидкости теплоотдача от нагревателя существенно увеличивается. В противоположном случае закрытой поверхности теплоотдача уменьшается. Очевидно, в первом случае увеличение теплоотдачи вызвано возникновением термокапиллярных течений. Об этом же свидетельствуют и визуальные наблюдения. При приближении источника тепла к свободной поверхности жидкости образуется погранслоное капиллярное течение с заметно увеличивающейся скоростью конвективного движения вблизи поверхности жидкости.

При постепенном приближении источника тепла к поверхности жидкости начинает возрастать вклад термокапиллярного механизма конвекции в общую картину течения. Возникающее при этом осесимметричное течение приводит к вспучиванию жидкости над источником. При дальнейшем уменьшении глубины погружения источника тепла, когда интенсивность термокапиллярных течений становится сравнимой с интенсивностью термогравитационных течений, происходит смена знака кривизны поверхности жидкости, т.е. поверхность становится искривлённой в сторону жидкой фазы, принимая воронкообразную форму. При этом, вплоть до некоторого значения глубины погружения, такая форма поверхности также не зависит от времени. Однако при дальнейшем уменьшении глубины погружения нагревателя неустойчивость формы поверхности приобретает колебательный характер. При этом кривизна поверхности жидкости над нагревателем меняется периодически со временем возле некоторого равновесного значения, что приводит к образованию поверхностных волн, распространяющихся от источника тепла. Частота колебаний поверхности и конфигурация возникающих при этом волн зависят от расстояния до поверхности и мощности нагревателя. Первый

вид генерируемых колебаниями поверхности волн представляет собой концентрические окружности (рис. 2, а).



**Рис. 2.** Волновая картина на поверхности жидкости при колебательном режиме неустойчивости

По мере уменьшения расстояния от источника тепла до поверхности жидкости волновое число увеличивается, форма волны становится неустойчивой, в результате чего образуется новая конфигурация, представляющая собой спиральную раскручивающуюся в случайном направлении волну (рис. 2, б).

При дальнейшем уменьшении глубины погружения нагревателя число ветвей спиральной волны увеличивается, затем поверхность нагревателя осушается и вместо раскручивающихся спиральных волн на поверхности жидкости на фоне радиального течения возникают стоячие периодические по азимуту волны со случайным периодом (рис. 2, в).

## Теоретическая модель наблюдаемых эффектов

Наблюдаемый в эксперименте эффект смены стационарного течения на автоколебательное может быть объяснён на простой геометрической модели.

Рассмотрим задачу о термокапиллярной конвекции в плоском слое неоднородно нагретой жидкости. Будем считать, что на нижней свободной, но недеформируемой поверхности слоя  $z = -h$  задано стационарное распределение температуры  $T = T_0 \cos kx$ . Верхняя, теплоизолированная поверхность в ходе процесса деформируется, принимая форму  $z = \zeta(x, t)$ ,  $|\zeta| \ll 1$  ( $x, z$  – оси декартовой системы координат), определяемую в ходе решения. Сила тяжести отсутствует.

Поверхностное натяжение жидкостей считаем линейно меняющимся с температурой:  $\zeta(T_0 + \delta T) = \zeta_0(T_0) - \zeta_1 \delta T$ . Зависимостью поверхностного натяжения от давления пренебрегаем. Феноменологический пара-

метр  $\zeta_1$  в общем случае многокомпонентных гетерогенных веществ может быть как положительным, так и отрицательным. Для однокомпонентных жидкостей  $\zeta_1 > 0$ .

Все параметры жидкости (плотность  $\rho$ , вязкости  $\eta$  и  $\nu$ , теплопроводность  $\kappa$  и температуропроводность  $\chi$ ) постоянны и конечны. Теплопроводность и вязкость внешней среды исчезающе малы. Это предположение позволяет решать задачу только в слое и тем самым существенно уменьшить число независимых параметров. (С физической точки зрения такое допущение не принципиально и соответствует экспериментам по термокапиллярным течениям в жидкости, граничащей с газами.)

Уравнения гидродинамики и граничные условия, определяющие термокапиллярную конвекцию в этих условиях, запишем в безразмерной форме, выбрав в качестве единиц: длины – среднюю толщину слоя  $h$ , температуры –  $\sigma_0$ , скорости –  $\zeta_1 T_0 / \eta$ , времени –  $\zeta_1 T_0 / \eta$ , давления –  $\sigma_1 T_0 / h$ . В задачу войдут следующие безразмерные параметры: числа Прандтля  $Pr = \nu / \chi$ , Марангони  $\mu = h \sigma_1 T_0 / \chi \eta$  безразмерное поверхностное натяжение при начальной температуре  $\sigma = \sigma_0 h / \chi \eta$ . В выбранных единицах измерения уравнения Навье-Стокса, непрерывности, теплопроводности и граничные условия на границах раздела фаз имеют вид:

$$\frac{1}{Pr} \left[ \frac{\partial v}{\partial t} + \mu (v \nabla) v \right] = -\nabla p + \Delta v; \quad \nabla v = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial t} + v \nabla T = \Delta T \quad (8)$$

$$z = -1 : T = \cos kx; \quad v_z = \frac{\partial v_x}{\partial z} = 0 \quad (9)$$

$$z = \zeta(x, t) : \frac{\partial T}{\partial z} - \zeta' \frac{\partial T}{\partial x} = 0; \quad \left( \zeta' = \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right); \quad \mu (v_z - \zeta' v_x) = \frac{\partial \zeta}{\partial t}; \quad (10)$$

$$p + \zeta'' \left( \frac{\sigma}{\mu} - T \right) = 2 \frac{\partial v_z}{\partial z} + \zeta' \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial z} - \zeta' \frac{\partial T}{\partial x} \right) (1 + \zeta'^2)^{-1/2} - \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \right]; \quad (11)$$

$$\zeta' \left[ p + \zeta'' \left( \frac{\sigma}{\mu} - T \right) - \frac{\partial v_x}{\partial x} \right] + \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial T}{\partial z} - \zeta' \frac{\partial T}{\partial x} (1 + \zeta'^2)^{-1/2} = 0. \quad (12)$$



Уравнения (9) обеспечивают отсутствие нормальных составляющих скорости и касательных напряжений на нижней границе слоя и задают распределение температуры на нём. Первое из уравнений (10) является следствием принятого предположения о нулевой теплопроводности газа, второе связывает нормальную компоненту скорости частицы жидкости на границе её с газом со скоростью смещения свободной поверхности плёнки. Уравнения (11) и (12) выражают равенство нулю нормальных и касательных напряжений на свободной поверхности плёнки соответственно. Средняя кривизна поверхности  $\zeta''$  вычислена для малых чисел Марангони по известным формулам дифференциальной геометрии.

Будем искать стационарное решение задачи (8) – (12) в виде ряда по степеням предполагаемого малым числа Марангони:  $\psi = \psi_0 + \mu\psi_1 + \dots$ , где  $\psi$  – любая из функций: скорость  $v(v_x, v_z)$ , давление  $p$ , температура  $T$  или отклонение поверхности плёнки  $\zeta$  от плоскости  $z = 0$ . Стационарное решение задачи (8) – (12) в нулевом приближении имеет вид:

$$T_0 = \text{ch } kz \cos kx / \text{ch } k; \quad (13)$$

$$v_{x0} = u_0(z) \sin kx; \quad v_{z0} = w_0(z) \cos kx; \quad p_0 = q_0(z) \cos kx;$$

$$w_0(z) = -k[(z \text{ch } kz / \text{sh } k) + (z \text{sh } kz / \text{ch } k)]/2; \quad u_0(z) = -w'_0/k;$$

$$q_0(z) = -k[(\text{ch } kz / \text{sh } k) + (\text{sh } kz / \text{ch } k)]; \quad \zeta_0 = 0.$$

Для исследования устойчивости найденного термокапиллярного движения наложим на него нормальные возмущения:  $\psi = \psi_0 + \delta\psi \exp(-\lambda t)$ , где  $\delta\psi$  амплитуды возмущений скорости  $v$ , давления  $p$ , температуры  $T$  и поверхности  $\zeta$ ,  $\psi_0$  – решение (13). Действительная часть декремента  $\lambda$  определяет скорость роста (затухания) возмущений, а мнимая его часть задаёт частоту этого процесса. При постановке задачи на устойчивость термокапиллярного движения, заданного уравнениями (8), мы должны считать малые числа Марангони фиксированными и ставить вопрос о возможности появления неустойчивости при некотором конкретном значении числа Марангони, которое должно быть по крайней мере на порядок меньше единицы.

Кроме того, из физических соображений (подкреплённых проведённым расчётом) следует, что при исчезающе малых числах Прандтля течение (13) устойчиво по отношению к малым возмущениям.

Неустойчивость может возникнуть только в результате конкуренции между теплопроводностью жидкости и термокапиллярным течением. Вследствие эффекта Марангони жидкость натекает от нагретых участков слоя к более холодным областям. В результате толщина холодных участков слоя жидкости увеличивается. При малой температуропроводности приплывшие по поверхности и неостывшие нагретые частицы жидкости уменьшают перепад температуры вдоль слоя и, как следствие, термокапиллярное движение практически прекращается. С этого момента основным генератором движения станут капиллярные силы, которые будут стремиться уменьшить полную поверхность такой практически изотермической плёнки, стараясь вновь превратить ее в плоский слой. Это вновь приведёт к появлению перепада температур и возникновению термокапиллярной конвекции. Очевидно, что наиболее благоприятные возможности для установления такого периодического движения будут при малых температуропроводностях жидкости, в частности, при числах Прандтля  $Pr \rightarrow \infty$ . Решим задачу для этого случая и для малых, но фиксированных числах Марангони. Линеаризованная по возмущениям задача (8) – (12) на устойчивость имеет вид:

$$\nabla p = \Delta v; \nabla v = 0; -\lambda T + \mu(v_0 \nabla T + v \nabla T_0) = \Delta T \quad (14)$$

$$z = -1; T = 0; v_z = \frac{\partial v_x}{\partial z} = 0 \quad (15)$$

$$z = \varepsilon \mu \cos kx \exp(-\lambda t); \quad (16)$$

$$p - 2 \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\varepsilon \sigma k^2 \cos kx - 2\varepsilon \mu k^2 \frac{\cos 2kx}{\operatorname{ch} k} \quad (17)$$

$$\left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial T}{\partial z} = -2\varepsilon \mu \frac{k^2 \sin 2kx}{\operatorname{sh} k}; \quad \frac{\partial T}{\partial z} = -\varepsilon \mu \frac{k^2 \cos 2kx}{\operatorname{ch} k};$$

$$v_z = -\lambda \varepsilon \cos kx + \varepsilon \mu \frac{k^2 \cos 2kx}{2 \operatorname{sh} k}.$$

Исследуем поведение возмущений поверхности, пропорциональных  $\cos kx$ . При этом в граничных условиях для скоростей и температур появляются слагаемые, пропорциональные  $\cos kx$  и  $\cos 2kx$ , которые и определяют периодичность возмущений скорости и температуры вдоль слоя.

Амплитуды при этих модах в выражениях для скорости благодаря принятому допущению  $Pr \rightarrow \infty$  определяются точно:

$$v_x = u_1(z) \sin kx + u_2(z) \sin 2kx; \quad v_z = w_1(z) \cos kx + w_2(z) \cos 2kx$$

$$p_1 = q_1(z) \cos kx + q_2(z) \cos 2kx;$$

$$w_n(z) = a_n \operatorname{ch} nkz + b_n \operatorname{sh} nkz + c_n z \operatorname{ch} nkz + d_n z \operatorname{sh} nkz$$

$$u_n(z) = -\frac{w'_n}{nk}; \quad q_n(z) = 2(c_n \operatorname{ch} nkz + d_n \operatorname{sh} nkz) \cos 2kx; \quad n = 1, 2. \quad (18)$$

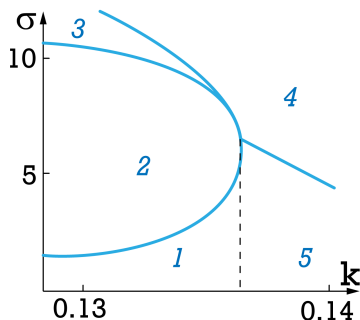
Возмущения температуры определим методом Галёркина, выбрав в качестве аппроксимирующих выражений следующие функции:

$$T = \tau_1(z) \cos kx + \tau_2(z) \cos 2kx, \quad (19)$$

$$\tau n(z) = E_n \operatorname{ch} nkz + F_n \operatorname{sh} nkz + H_n z,$$

Выразив все постоянные интегрирования в выражениях (18)–(19) через параметр возмущения поверхности  $\varepsilon$  с помощью граничных условий (15)–(16), умножим уравнение теплопроводности в системе уравнений (14) на функцию (19) и, проинтегрировав полученное выражение по объёму периода жидкого слоя, получим условие, которое определит величину декремента  $\lambda$  как функцию поверхностного натяжения  $\sigma$  и числа Марангони  $\mu$  (последнее, однако, должно быть малым по сравнению с единицей). Не приводя здесь получаемых на этом пути громоздких алгебраических преобразований, которые легко выполняются численно, приведём сразу результаты анализа, представив их в виде графика (рис. 3).

На рисунке 3 приведена наиболее интересная область изменения параметров  $k$  и  $\sigma$  для избранного числа Марангони  $\mu$ . Пунктирная линия соответствует значению этих параметров, при которых реальная часть декрементов  $\lambda$  отрицательна, а мнимая исчезает. Таким образом, эта линия разделяет области колебательной и монотонной неустойчивости (на рис. 3 – это области 5 и 1 соответственно). Штрих-пунктирная линия проведена по точкам, в которых мнимая часть декрементов  $\lambda$  равна нулю, а действительная часть положительна. В областях 1, 2 и 3, расположенных



**Рис. 3.** Карта устойчивости при  $\mu = 0.1$ : области колебательной 3 и монотонной 1 и 2 неустойчивости; в областях 3 и 4 возмущения затухают

левее этой линии, колебательный режим эволюции возмущений сменяется монотонным. 3 – область устойчивости: здесь все декременты положительны. При переходе из области 3 в 2 через верхнюю ветвь сплошной линии один из декрементов меняет знак и становится отрицательным. В области 1 все декременты отрицательны и действительны. Таким образом, области 1 и 2 соответствуют монотонной неустойчивости. На сплошной линии, разделяющей области 4 и 5, действительная часть декрементов равна нулю: это – граница колебательной устойчивости (область 4) и неустойчивости (область 5).

Таким образом, автоколебательный режим термокапиллярной конвекции при малых числах Марангони возникает при определённых значениях остальных параметров задачи только в достаточно длинноволновой области (длина волны при  $\sigma = 5$  и  $\mu = 0.1$  составляет около 50 толщин слоя). Монотонная гидродинамическая неустойчивость, наоборот, может развиваться в достаточно коротковолновой области. С физической точки зрения такие результаты понятны. Для развития, например, автоколебательного режима необходима паритетная конкуренция двух противоборствующих факторов, какими в рассматриваемой задаче являются капиллярные силы. С одной стороны, они стремятся уменьшить поверхность плёнки, с другой, создают касательные напряжения, деформирующие поверхность. При малых числах Прандтля, т. е. при больших температуропроводностях, градиент температуры вдоль слоя практически не зависит от толщины плёнки и задаётся только распределением температуры на нижней границе слоя. В этом случае возникновение колебаний маловероятно и в области малых чисел Марангони не выявляе-

но. Наоборот, при больших числах Прандтля, что соответствует малой температуропроводности жидкости, натекающая к холодным участкам нагретая жидкость не успевает охладиться в утолщённых в результате натекания слоях, что обуславливает снижение интенсивности термокапиллярного течения и, как следствие, обратный отток жидкости. Этот эффект приводит при определённых условиях к колебательной неустойчивости термокапиллярного движения в неоднородно нагретых плёнках

Рассмотренная геометрическая модель позволяет понять причины возникновения в описанном выше эксперименте различных режимов термокапиллярной конвекции. При достаточно глубоком погружении теплового источника в жидкость на поверхности устанавливаются аксиально симметричные, бегущие от источника волны (рис.2, а), что связано с попаданием фигуративной точки системы в область колебательной неустойчивости 5 (рис.3). Спиральные волны в эксперименте возникают при малой толщине слоя жидкости между тепловым источником и поверхностью. В этом случае профиль скорости радиального течения Марангони непосредственно над поверхностью нагревателя имеет точку перегиба. Как известно, такое течение уже при достаточно малых скоростях становится неустойчивым по отношению к вихреобразным возмущениям, развивающимся на границе встречных потоков. Эти сносимые течением вихри являются непрерывным генератором температурных возмущений (ср. с неустойчивостью течения Пуазейля по отношению к возмущениям, генерируемым на входе в трубу). Перемешивая над источником нагретую глубинную и более холодную приповерхностную жидкость, вихри создают азимутальную неоднородность температуры. При этом в системе, фигуративная точка которой находится в области 5 (рис.3), возникают уносимые радиальным потоком волны со случайным "магнитным" квантовым числом  $m$ , давая начало завиткам спиральных волн (рис.2, б). (Для доказательства такого развития возмущений были поставлены специальные эксперименты по нагреву жидкости сфокусированным на поверхность источником света. В этом случае из-за отсутствия встречных потоков течение устойчиво, вихри не возникают и, как следствие, спиральных волн в опытах не наблюдалось). Последний из наблюдаемых режимов (рис.3) термокапиллярной конвекции имеет гофрировку только в азимутальном направлении. Смена режимов происходит после того, как жидкость перестанет покрывать верхнюю поверхность нагревателя. В этом случае исчезают сносимые радиальным течением вихри и устанавливается случайная азимутальная неоднородность температуры вдоль образующей нагревателя. Фигуративная точка системы при этом переходит в область неустойчивости монотонных возмущений 1 (рис.3),

которые, развиваясь на фоне радиального течения, дают начало звездобразной гофрировке поверхности (рис.2, с).

## Эксперимент

Наблюдения всех описанных выше режимов движения следует провести на предложенной установке.

### 1.3. Рэлеевская устойчивость невязких струй

#### Теория

Одной из важных проблем капиллярной гидродинамики, привлекавших внимание таких крупнейших исследователей, как лорд Рэлей (*Стретт Дж.* (Лорд Рэлей) Теория звука. Т. 2. М.: ГИТТЛ. 1955. 475 с.) и Нильс Бор (Trans.Roy. Soc. V. 209 A, p. 281, 1909), является проблема распада струй на капли.

Рассмотрим вслед за Рэлеем кинетическую энергию движения невязкой струи, вытекающей из круглого отверстия. Скорость жидкости определим, введя потенциал  $\psi$ , который удовлетворяет уравнению Лапласа в силу несжимаемости жидкости. Для аксиально симметричных периодических вдоль оси цилиндра (пропорциональных  $\cos kz$ ) движений имеем:

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{d\psi}{rdr} - k^2\psi = 0,$$

решением которого является  $\psi = bI_0(kz) \cos kz$ , где  $I_0(kz)$  – модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Постоянную интегрирования определим из условия, что радиальная скорость жидкости на поверхности струи радиуса  $a_0$  при возмущениях поверхности вида  $r = a + \varepsilon \cos kz$  равна

$$kbI_1(ka_0) = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}.$$

Заметим, что  $a$  следует вычислить из условий постоянства объема цилиндрической капли  $V = \int \int r^2 d\varphi dz / 2 = z(\pi a^2 + \pi \varepsilon^2 / 2)$ . Таким образом, если обозначить через  $a_0$  радиус невозмущённого цилиндра, то

$$a \simeq a_0 \left( 1 - \frac{\varepsilon^2}{4a_0^2} \right).$$

Для жидкости плотности  $\rho$  на основании первой теоремы Грина вычислим кинетическую энергию в расчёте на единицу длины цилиндра:

$$K = \frac{\rho}{2} \int \left[ \psi \frac{\partial \psi}{\partial r} \right]_{r=a_0} a_0 d\varphi = \pi \rho a_0^2 \frac{I_0(ka_0)}{2ka_0 I_1(ka_0)} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right)^2.$$

Потенциальная энергия системы любой конфигурации пропорциональна поверхности

$$S = \iint \sqrt{1 + \left( \frac{\partial r}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial r}{r \partial \varphi} \right)^2} dd\varphi dz = z(2\pi a + \pi k^2 \varepsilon^2 a_0 / 2).$$

Следовательно, потенциальная энергия единицы длины цилиндра с учётом постоянства объёма

$$E = \pi \sigma (k^2 a_0^2 - 1) \frac{\varepsilon^2}{2a_0}.$$

Для свободного движения получаем с помощью уравнения Лагранжа

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} + \frac{\sigma k I_1(k a_0)}{\rho a_0^2 I_0(k a_0)} (k^2 a_0^2 - 1) \varepsilon = 0,$$

которое определяет период колебаний в случае устойчивости колебаний струи

$$\omega^2 = \frac{\sigma k I_1(k a_0)}{\rho a_0^2 I_0(k a_0)} (k^2 a_0^2 - 1).$$

Это выражение имеет экстремум, отвечающий максимальному значению длины волны возмущения  $\lambda = 9.02 a_0$ . Волны с этой длиной обладают наибольшей неустойчивостью по сравнению со всеми другими возмущениями и потому именно они должны приводить к распаду струи на капли.

Таким образом, для невязких струй, вытекающих в невесомости из круглого отверстия, длина волны спонтанного разделения струи на капли оказывается больше в  $4, 5/\pi$  раз (Рэлей). Плато объяснял это различие действием вязкости в отличие от Рэлея, считавшего основной причиной увеличения устойчивости инерцию, однако для не очень вязких жидкостей (соответствующие обсуждения можно найти в книгах<sup>11</sup> или в книге Левича<sup>12</sup>. В тех же случаях, когда вязкость преобладает, длинные нити не обнаруживают стремления разбиться на капли, а утончаются в отдельных, далеко отстоящих местах.

## Эксперимент

Промоделируем задачу о распаде струи на капли с помощью следующего простого опыта. Создав ламинарно вытекающую из водопроводного крана струйку, подставим на её пути какую-нибудь преграду (например, подушечку указательного пальца). Измеряя расстояния от крана до преграды и длины волн установившихся стоячих волн, проверяем теорию Рэлея для разных по мощности струй. Убедиться в том, что за

<sup>11</sup> Стретт Дж. (Лорд Рэлей) Теория звука. Т. 2. М.: ГИТТЛ, 1955. 475 с.

<sup>12</sup> Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: ГИФМЛ, 1959. 699 с.



распад реальной (вязкой) струи ответственны волны, длина волны которых отличается от определённой Рэлеем для невязкой жидкости, (оценки можно найти в книге *Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: ГИФМЛ, 1959. 699 с.*) Для этого на пути ламинарной струйки заданной мощности следует подставить какую-либо преграду и для выбранной длины струйки измерить длины образовавшихся волн гофрированной струи.

В качестве проверки гипотезы Плато выполнил эту работу с вязким маслом. (Для экономии масла нужно выливать масло из горлышка бутылки над чашечкой Петри.) Следует убедиться в том, что образующиеся нити рвутся в случайных, далеко друг от друга отстоящих местах.

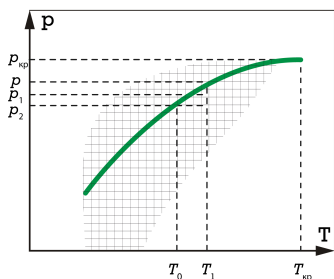
Модификацией этих опытов могут служить эксперименты по определению длины ламинарной струйки от краника до распада струи на капли. Необходимо регистрировать расход и угол наклона струи к горизонту.

## 1.4. Основные закономерности образования тумана

### Теория

Основные идеи объяснения фазовых переходов, изложенные Гиббсом, получили название «теории зародышей». По этой теории в однородной фазе флуктуационным образом образуются сгустки молекул новой фазы – так называемые зародыши.

Очевидно, что для того, чтобы стать центрами образования новой фазы, необходимо, чтобы рост сгустков сопровождался уменьшением соответствующего термодинамического потенциала. Рассмотрим процесс роста такого зародыша в системе, в которой отсутствуют центры конденсации, а стенки экспериментальной ячейки, в которую помещена система, удалены на бесконечность, абсолютно не смачиваемы жидкой фазой рассматриваемого вещества.



**Рис. 4.** Кривая фазового равновесия и область метастабильности (заштрихована)

Предположим, что при малом отклонении температуры поверхности раздела фаз от «точки росы»  $(p_0, T_0)$  в область метастабильности (на рис. 4 заштрихована) скорость восстановления равновесного значения температуры описывается кинетическим уравнением вида  $d/dt = -\gamma T$ , поскольку при возмущении и давления, и температуры в системе давление выравнивается быстро, за время порядка  $\Delta t_p \sim s/C$  ( $C$  – скорость звука,  $s$  – характерный размер задачи), в то время как релаксация температурных возмущений происходит за характерные времена  $\Delta t_T \sim s^2/\chi$ . Очевидно, что при разумных значениях  $s\Delta t_p \ll \Delta t_T$  и процесс восстановления равновесия определяется только релаксацией температурных возмущений, что позволяет считать скорость восстановления динамического равновесия пропорциональной возмущению температуры. При этом предполагается, что давление принимает значение  $p_0$ , отличающе-

еся от равновесного значения  $p$  при температуре  $T$  (см. рис.4). Кинетический коэффициент  $\gamma$ , являющийся в теории феноменологическим параметром, должен определяться из эксперимента.

Пусть в термостате достаточно большого объёма поддерживаются постоянное давление  $p_0$  и температура  $T_0$ , соответствующие точке фазового перехода пар  $\rightarrow$  жидкость (рис.4). В этих условиях спонтанно образующиеся зародыши новой жидкой фазы вещества должны испаряться, поскольку по закону В. Томсона равновесное с паром давление над изогнутой поверхностью образующихся капелек выше давления в резонаторе. Создадим в термостате давление  $p_1 = p_0 \exp(2\sigma V_2/RT_0 a)$  ( $\sigma$  – поверхностное натяжение,  $V_2$  – удельный объём жидкой фазы,  $R$  – универсальная газовая постоянная), соответствующее термодинамическому равновесию между паром и капелькой радиуса  $a$ . При этом фигуративная точка на фазовой диаграмме  $(p, T)$  сместится в область метастабильности (рис.4), в которой зародыши большего размера должны расти, а более мелкие – испаряться.

Рассмотрим, что произойдёт с зародышем радиуса  $a$ , если в результате флуктуации на его поверхность сконденсируется некоторая масса пара  $\Delta m$ . При этом температура приповерхностных областей капельки увеличится, что приведёт к смещению фигуративной точки, изображающей метастабильное состояние гетерогенной системы капля + пар на диаграмме  $(p, T)$ , по горизонтали вправо от кривой фазового перехода Клапейрона-Клаузиуса в область пара (рис.4).

Однако, кроме увеличения температуры, конденсация пара сопровождается ростом капельки, также оказывающим влияние на дальнейший ход фазового перехода. При осаждении  $\Delta m$  грамм пара на каплю её радиус увеличится на некоторую величину  $\varepsilon$ . При этом фигуративная точка системы капля + пар на диаграмме  $(p, T)$  сместится в сторону области пересыщенного пара, что должно стимулировать рост зародыша за счёт дальнейшей конденсации.

Эти противоположно направленные кинетические процессы при гидродинамическом описании фазового перехода можно представить в виде граничного условия:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\gamma_T(T - T_0) + \gamma_a \varepsilon; \quad (20)$$

здесь  $\gamma_T$  и  $\gamma_a$  – положительные эмпирические коэффициенты. Физический смысл уравнения (20) состоит в том, что при отклонении температуры поверхности и размеров зародыша от равновесных значений в системе могут активизироваться процессы, стремящиеся вернуть систе-

му к исходному равновесному состоянию, которое определяется заданными значениями давления  $p_1$  и температуры  $T_0$  в термостате. В самом деле, при увеличении температуры поверхности зародыша ( $T - T_0$ ) усиливаются процессы испарения и температура уменьшается. Естественно считать, что при малом ( $T - T_0$ ) скорость охлаждения пропорциональна отклонению температуры от равновесного значения. Аналогично обстоит дело и при инфинитезимальном увеличении радиуса капли ( $\varepsilon > 0$ ). Уменьшение кривизны поверхности зародыша в соответствии с формулой Томсона провоцирует усиление конденсации молекул пара на каплю, что и приводит к нагреву поверхности. (Отметим, что в изохорических условиях изменению скорости конденсации способствует также уменьшение давления над разбухшей каплей. В рассматриваемом изотермоизобарическом процессе этот эффект отсутствует.)

Таким образом, переход метастабильной фазы в устойчивую совершается путём флуктуационного возникновения в однородной среде небольших скоплений новой фазы – зародышей. Энергетически невыгодный эффект появления поверхности раздела приводит, однако, к тому, что при недостаточно больших размерах зародыши исчезают. Устойчивыми являются лишь зародыши определённого, критического размера  $a_{кр}$ , который является макроскопической величиной и на границе абсолютной неустойчивости стремится к бесконечности. (Заметим, что в книге *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика*<sup>13</sup>) ошибочно предполагается, что на границе абсолютной неустойчивости фазы размеры зародышей приближаются к молекулярным. На самом деле в этой области размеры зародышей, наоборот, становятся сравнимыми с размерами сосуда, а фазовый переход первого рода должен трактоваться уже как фазовый переход второго рода. На начальной стадии фазового перехода газ – жидкость рост зародышей не приводит к заметному изменению «степени метастабильности» основной фазы, а рост каждого зародыша можно считать происходящим независимо от остальных. На поздней стадии, однако, нужно учитывать коалесценцию, которая приводит к резкому возрастанию скорости роста зародышей).

При чисто термодинамическом подходе может быть поставлена задача лишь о вычислении вероятности флуктуационного возникновения зародышей различного размера или о пропорциональной ей функции распределения в среде зародышей различных размеров  $f_0(a)$  ( $f_0(a)da$  – число зародышей в интервале  $da$  – в единице объёма среды). Согласно

---

<sup>13</sup>Серия Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, том X). М.: Наука, 1979. 528 с.

термодинамической теории флуктуаций

$$f_0(a) \sim \exp \left\{ \frac{\delta A_{\min}}{kT} \right\},$$

где минимальная работа, которую необходимо затратить для образования зародыша, задаётся изменением потенциала  $\Omega_0 - \Omega$  и содержит объёмную и поверхностную части. До образования зародыша объём метастабильной части системы равен  $V + 4\pi a^3/3$ , а её потенциал  $\Omega_0 = -p(V + 4\pi a^3/3)$ , а после образования  $\Omega = -pV - (p + 2\sigma/a)4\pi a^3/3 + 4\pi a^2\sigma$ .

Таким образом, из термодинамического рассмотрения гомогенных фазовых переходов следует, что функция распределения на начальной стадии пропорциональна  $\exp(-const a^2\sigma)$ .

На более поздних стадиях фазового перехода, когда пересыщение становится малым из-за выпадения новой фазы в виде большого числа зародышей, характер процесса существенно меняется. Флуктуационное возникновение новых зародышей становится практически невозможным, и определяющую роль начинает играть рост крупных зародышей за счёт мелких – коалесценция. На этой стадии скорость роста зародышей можно оценить с помощью размерных соображений. Поскольку определяющую роль на этом этапе играют поверхностное натяжение и диффузия, то, составив из коэффициента поверхностного натяжения  $\sigma$ , времени  $t$  и коэффициента диффузии  $D$  комбинацию с размерностью длины, получим что средний радиус зародыша должен расти по закону  $a \sim (\sigma Dt)^{1/3}$ . (Строгая теория этого процесса изложена в книге Ландау Л.Д.<sup>14</sup>)

Таким образом, в условиях метастабильности могут существовать равновесные капельки новой фазы – туман. Однако сам факт появления области метастабильности связан с предположением об отсутствии в системе центров зарождения жидкой фазы. Поэтому в «грязных» гетерогенных системах проблема флуктуационного возникновения зародышей не возникает: случайные скопления молекул новой, жидкой фазы сразу растекаются по поверхности имеющихся в системе включений, что неминуемо приводит к интенсивному так называемому гетерогенному фазовому переходу.

В метеорологии при расчётах скорости роста зарождающихся зародышей капель дождя в облаках пользуются эмпирической формулой, основанной на соображениях размерности:

$$a \sim \left( 2Dt \frac{\rho_p}{\rho_w} \frac{S}{\eta} \right)^{1/2},$$

<sup>14</sup> Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, том X. М.: Наука, 1979. 528 с.

где  $S$  – «степень пересыщения» (обычно порядка 5%),  $\rho_p$  и  $\rho_w$  плотности насыщенного пара и воды,  $t$  – поправка на повышение температуры капли при конденсации на неё пара ( $\eta = 1.19$  при  $-20^\circ\text{C}$  и  $1.78$  при  $0^\circ\text{C}$ ),  $D = 0.195$  см/с при  $-20^\circ\text{C}$  и  $0.226$  см/с при  $0^\circ\text{C}$ . Так, капелька массой 10–14 г выросла в области метастабильности с пересыщением в  $S = 5\%$  от 0.75 мкм до 2 мкм за 130 с и с 5 мкм за 17 мин. Спектр размеров капель в облаках метеорологи рассчитывают по эмпирической формуле  $f_0(a) \sim a^2 \exp\{-\text{const} \times a\}$ .

## Эксперимент

В опыте процессы образования новой фазы в виде тумана промоделированы на установке, содержащей чашечку Петри с нагретой водой, закрытой стеклом. Фотографируя образующуюся на стекле хаотическую структуру для последовательных моментов времени, вычисляем средние размеры  $a$  образующихся капелек как функции времени  $t$  и по графику определяем закон  $a(t)$  на ранних и поздних стадиях процесса. Кроме того, следует найти спектр размеров капель для начальных и конечных этапов процесса.

## 1.5. Рэлеевская устойчивость столба жидкости

### Теория

Для сильно вытянутых в горизонтальном направлении капель возникает проблема так называемой рэлеевской, гофрировочной неустойчивости, когда такой жидкий цилиндр распадается на цепочку мелких, шаровых капель. Известно<sup>15</sup>, что в отсутствии гравитации единственно возможной равновесной формой столба жидкости, удерживаемой как целое силами поверхностного натяжения, является прямой цилиндр, нормальным сечением которого является круг радиуса  $a_0$ . Покажем, что такая форма абсолютно неустойчива по отношению к осесимметричным возмущениям, и потому жидкий цилиндр распадается на капли (*Стрепт Дж. (Лорд Рэлей) Теория звука. Т. 2. М.: ГИТТЛ, 1955. 475 с.*)

Предположим, что при некоторых значениях параметров системы возможны другие равновесные формы жидкого столба с криволинейной образующей  $r = a + \varepsilon \cos kz$ , где  $a$  следует вычислить из условий постоянства объема цилиндрической капли

$$V = \int \int r^2 d\varphi dz / 2 = z(\pi a^2 + \pi \varepsilon^2 / 2).$$

Таким образом, если обозначить через  $a_0$  радиус невозмущённого цилиндра, то

$$a \simeq a_0 \left( 1 - \frac{\varepsilon^2}{4a_0^2} \right).$$

Потенциальная энергия системы любой конфигурации пропорциональна поверхности

$$S = \iiint \sqrt{1 + \left( \frac{\partial r}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial r}{r \partial \varphi} \right)^2} r d\varphi dz = z(2\pi a + \pi k^2 \varepsilon^2 a_0 / 2).$$

Следовательно, потенциальная энергия единицы длины цилиндра с учётом постоянства объёма

$$E = \pi \sigma (k^2 a_0^2 - 1) \frac{\varepsilon^2}{2a_0}.$$

Из этой формулы следует, что равновесие становится неустойчивым, если длина волны  $2\pi/k$  будет больше окружности цилиндра (положение, впервые установленное Плато и рассчитанное Рэлеем).

<sup>15</sup>Методы решения задач гидромеханики для условий невесомости / под ред. А.Д.Мышкиса. Киев: Наук. думка, 1992. 592 с.

Отметим, что полученные результаты справедливы только для невязких неподвижных столбов жидкости. Для невязких струй, вытекающих в невесомости из круглого отверстия, длина волны спонтанного разделения струи на капли оказывается больше в  $4.5/\pi$  раз (Рэлей). Плато объяснял это различие действием вязкости в отличие от Рэлея, считавшего основной причиной увеличения устойчивости инерцию [теорию и обсуждения можно найти в книге *Стретт Дж*<sup>16</sup> или в книге *Левича В.Г.*<sup>17</sup>, однако для не очень вязких жидкостей. В тех же случаях, когда вязкость преобладает, длинные нити не обнаруживают стремления разбиться на капли, а утончаются в отдельных, далеко отстоящих местах.

Заметим, однако, что приведённый выше анализ Рэлея не отвечает на вопрос, на какие по размеру капли распадётся жидкий столб. Для этого необходимо решить задачу на устойчивость в следующей полной постановке.

Рассмотрим «гофрировочную», так называемую «рэлеевскую», неустойчивость достаточно длинного жидкого цилиндра (фаза 2), плавающего в другой жидкости (фаза 1). Жидкости предполагаются взаимно насыщенными. Экспериментальной моделью задачи может служить или сильно вытянутая капля или тонкая струйка жидкости (с радиусом  $a_0 \ll (\sigma_{12}/g/\rho)^{1/2}$ ), помещённая в стратифицированный по плотности раствор (техника Плато). Очевидно, что одной из возможных фигур равновесия такой системы является прямой круговой цилиндр. Для исследования устойчивости такого состояния наложим на систему возмущения скорости  $v_i$ , давления  $p_i$  и формы  $r = a_0(1 + \varepsilon)$ . Временное поведение этих возмущений определяется следующими безразмерными уравнениями гидродинамики:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_1}{\partial t} + (v_1 \nabla) v_1 &= -\nabla p_1 + \eta \Delta v_1; \operatorname{div}(v_1) = 0; \\ \rho \frac{\partial v_2}{\partial t} + (v_2 \nabla) v_2 &= -\nabla q + \Delta v_2; \operatorname{div}(v_2) = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

К этим уравнениям необходимо присоединить очевидные условия на бесконечности и на оси:

$$r \longrightarrow \infty : \text{давление постоянно, } r = 0 : p_2 \text{ и } v_2 \text{ ограничены,} \quad (22)$$

и требования равенства нормальных составляющих скоростей и радиальной скорости частиц границы раздела, а также непрерывности кас-

<sup>16</sup>Стретт Дж. (Лорд Рэлей) Теория звука. Т. 2. М.: ГИТТЛ. 1955. 475 с;

<sup>17</sup>Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: ГИФМЛ, 1959. 699 с.



тельных составляющих скоростей на деформируемой течением поверхности цилиндра

$$r = R(\varphi, z) = 1 + \varepsilon(\varphi, z) : v_{\tau 1} = v_{\tau 2} \text{ и } v_{n1} = v_{n2} = \frac{\partial R}{\partial t}.$$

В дальнейшем равенство нормальных  $v_{n1} = v_{n2}$  и касательных  $v_{\tau 1} = v_{\tau 2}$  составляющих скорости будем записывать в эквивалентной форме:

$$v_{z1} = v_{z2} \quad v_{\varphi 1} = v_{\varphi 2}, \quad (23)$$

$$v_{r1} = v_{r2} = \frac{\partial R}{\partial t}. \quad (24)$$

Непрерывность нормальных и касательных составляющих напряжений на свободной поверхности  $r = R(\varphi, z)$  представим в форме:

$$\begin{aligned} (p_1 - p_2 + 2H\sigma) &= \left( \sigma_{rr}^{(1)} - \sigma_{rr}^{(2)} \right) - \\ &- \left( \sigma_{r\varphi}^{(1)} - \sigma_{r\varphi}^{(2)} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} - \left( \sigma_{rz}^{(1)} - \sigma_{rz}^{(2)} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial z}; \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} -(p_1 - p_2 + 2H\sigma) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} &= \left( \sigma_{\varphi r}^{(1)} - \sigma_{\varphi r}^{(2)} \right) - \\ &- \left( \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} - \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} - \left( \sigma_{\varphi z}^{(1)} - \sigma_{\varphi z}^{(2)} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial z}; \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} -(p_1 - p_2 + 2H\sigma) \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} &= \left( \sigma_{zr}^{(1)} - \sigma_{zr}^{(2)} \right) - \\ &- \left( \sigma_{z\varphi}^{(1)} - \sigma_{z\varphi}^{(2)} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} - \left( \sigma_{zz}^{(1)} - \sigma_{zz}^{(2)} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial z}. \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь  $\sigma_{ik}$  – компоненты симметричного тензора напряжений

$$\sigma_{ik} = \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \quad (i, k = x, y, z).$$

Уравнения (23) – (27) записаны в предположении малости  $\varepsilon$ . Для этого случая орты нормали  $\vec{n}$  к поверхности столба  $r = R(\varphi, z) = 1 + \varepsilon(\varphi, z)$  можно записать через радиальный  $e_r$ , азимутальный  $e_\varphi$  и полярный  $e_z$  орты в следующем виде:

$$\begin{aligned} \vec{n} &= e_r - \sin(\arctg \frac{\partial R}{r \partial \varphi}) e_\varphi - \sin(\arctg \frac{\partial R}{\partial z}) e_z = \\ &= e_r - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} \cdot e_\varphi - \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \cdot e_z + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (28)$$

Пользуясь этими формулами, получим следующие выражения для нормальных к поверхности  $r = R(\varphi, z) = 1 + \varepsilon(\varphi, z)$  составляющих скорости:

$$v_n = \vec{n}\vec{v} = v_r - v_\varphi \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} - v_z \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + O(\varepsilon^2). \quad (29)$$

Орты  $\tau$  касательных к поверхности  $r = R(\varphi, z) = 1 + \varepsilon(\varphi, z)$  вдоль азимутального и осевого направлений могут быть по формулам дифференциальной геометрии представлены соответственно следующими рядами:

$$\tau = e_\varphi \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} \cdot e_r + O(\varepsilon^2); \quad \tau = e_z \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \cdot e_r + O(\varepsilon^2). \quad (30)$$

Среднюю кривизну деформированного столба  $2H$  вычислим по известным формулам дифференциальной геометрии:

$$2H = 1 - (\Delta^{(s)} + 1)\varepsilon + O(\varepsilon^2). \quad (31)$$

Второй дифференциальный параметр Бельтрами  $\Delta^{(s)}$  аналогичен оператору Лапласа, определённого на поверхности  $r = R(\varphi, z) = 1 + \varepsilon(\varphi, z)$ , и при малых  $\varepsilon$  приближённо равен:

$$\Delta^{(s)} = \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + O(\varepsilon^2). \quad (32)$$

Скачки напряжений при переходе через границу раздела фаз  $r = R(\varphi, z)$  в формулах (25)–(27) с помощью приведённых выше формул могут быть преобразованы к следующему виду (с точностью до  $\varepsilon^2$ ):

$$\left( \sigma_{rr}^{(1)} - \sigma_{rr}^{(2)} \right) = 2\eta \frac{\partial v_r^{(1)}}{\partial r} - 2\frac{\partial v_r^{(2)}}{\partial r}; \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \left( \sigma_{r\varphi}^{(1)} - \sigma_{r\varphi}^{(2)} \right) &= \eta \left( \frac{\partial v_r^{(1)}}{r \partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi^{(1)}}{\partial r} - \frac{v_\varphi^{(1)}}{r} \right) - \\ &- \left( \frac{\partial v_r^{(2)}}{r \partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi^{(2)}}{\partial r} - \frac{v_\varphi^{(2)}}{r} \right); \end{aligned} \quad (34)$$

$$\left( \sigma_{rz}^{(1)} - \sigma_{rz}^{(2)} \right) = \eta \left( \frac{\partial v_z^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial v_r^{(1)}}{\partial z} \right) - \left( \frac{\partial v_z^{(2)}}{\partial r} + \frac{\partial v_r^{(2)}}{\partial z} \right); \quad (35)$$

$$\left(\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} - \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)}\right) = 2\eta \left(\frac{\partial v_{\varphi}^{(1)}}{r\partial\varphi} + \frac{v_r^{(1)}}{r}\right) - 2 \left(\frac{\partial v_{\varphi}^{(2)}}{r\partial\varphi} + \frac{v_r^{(2)}}{r}\right); \quad (36)$$

$$\left(\sigma_{\varphi z}^{(1)} - \sigma_{\varphi z}^{(2)}\right) = \eta \left(\frac{\partial v_z^{(1)}}{r\partial\varphi} + \frac{\partial v_{\varphi}^{(1)}}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial v_z^{(2)}}{r\partial\varphi} + \frac{\partial v_{\varphi}^{(2)}}{\partial z}\right); \quad (37)$$

$$\left(\sigma_{zz}^{(1)} - \sigma_{zz}^{(2)}\right) = 2\eta \frac{\partial v_z^{(1)}}{\partial z} - 2 \frac{\partial v_z^{(2)}}{\partial z}. \quad (38)$$

Рассмотрим «нормальные» возмущения, пропорциональные  $\exp(-\lambda t)$ , где декремент  $\lambda$  определяет их временную судьбу. В соответствии с этой схемой предположим, что в результате случайных флуктуаций круглый столб жидкости  $r = 1$ , помещённый в безграничную невязкую невесомую среду, приобрёл форму гофрированного цилиндра

$$r = 1 + s^* \cos kz \exp(-\lambda t), \quad (39)$$

где амплитуда возмущения поверхности —  $|s^*|$  (Функции, относящиеся к возмущениям, отмечаем «снежинкой»). Рассматривая возмущение формы как начальное условие в задаче Коши, определим возникающие при этом нормальные возмущения скорости  $v^* \exp(-\lambda t)$  и давлений  $p_i^* \exp(-\lambda t)$  в столбе, из следующих линеаризованных по возмущениям уравнений:

$$\nabla p_1^* = 0; \quad -\lambda v^* = -\nabla p_2^* + \Delta v^*; \quad \text{div}(v^*) = 0. \quad (40)$$

На деформированной возмущением свободной поверхности столба (39) должны выполняться следующие линеаризованные по возмущениям условия:

$$v_r^* = -\lambda s^* \cos kz; \quad (41)$$

$$(P_1 + p_1^*) - (P_2 + p_2^*) + 2H\sigma = -2 \frac{\partial v_r^*}{\partial r} \quad (42)$$

$$\frac{\partial v_z^*}{\partial r} + \frac{\partial v_r^*}{\partial z} = 0; \quad (43)$$

$$\left(\frac{\partial v_r}{r\partial\varphi} + \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial r} - \frac{v_{\varphi}}{r}\right) = 0. \quad (44)$$

Уравнение (41) – следствие геометрической необходимости: радиальная скорость частиц жидкости на поверхности раздела должна быть равна радиальному смещению этой поверхности. В уравнении для непрерывности нормальных напряжений (42) кривизну  $2H$  с помощью формулы ((32)) запишем для слабо деформированного кругового цилиндра  $r = 1 + \zeta(z)$  в форме:

$$2H = 1 + s^*(k^2 - 1) \cos kz + O(\zeta^2). \quad (45)$$

Уравнения (43) и (44) учитывают непрерывность касательных напряжений. В соответствии с формой возмущённой поверхности столба жидкости ищем решение в виде:

$$v_* = v_r^* e_r + v_z^* e_z + v_\varphi^* e_\varphi; \quad p_2^* = q(r) \cos kz \quad (46)$$

$$v_r^* = f(r) \cos kz; \quad v_z^* = g(r) \sin kz; \quad v_\varphi^* = 0, \quad (47)$$

где радиальные функции являются решением уравнений, вытекающих из уравнений непрерывности и Навье-Стокса:

$$f' + \frac{f}{r} + kg = 0; \quad (48)$$

$$-\lambda f = -q' + f'' + \frac{f'}{r} - k^2 f - \frac{f}{r^2}; \quad (49)$$

$$-\lambda g = kq + g'' + \frac{g'}{r} - k^2 g. \quad (50)$$

Решение уравнений (50) представим в форме:

$$g = bI_0(kr) - a\kappa k^{-1} J_0(\kappa r); \quad f = -bI_1(kr) + a\kappa k^{-1} J_1(\kappa r); \quad (51)$$

$$q = b\lambda k^{-1} I_0(kr) - a\kappa k^{-1} J_0(\kappa r); \quad \kappa^2 = \lambda^2 - k^2,$$

где  $(I_0(kr)$  и  $J_0(kr)$  функции Бесселя нулевого порядка мнимого и действительного аргументов.) Подставив функции (51) в (41) – (43), получим систему однородных алгебраических уравнений для определения постоянных интегрирования  $a$ ,  $b$ , и  $s_*$ , условие совместности которых определит критическое значение декремента  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} k[4(J-1) - \lambda(\lambda I + 2)] &= \sigma(k^2 - 1) + \chi P_0; \\ \lambda &= (\lambda/k^2) - 2; \\ J &= \kappa \frac{J_0}{(\kappa)} J_1(\kappa); \\ I &= k \frac{I_0(k)}{I_1(k)}. \end{aligned} \tag{52}$$

Однако для определения критического значения волнового числа  $k_*$  определять зависимость  $\lambda = \lambda(k)$  по формуле (52) нет необходимости. Удобнее сразу в уравнениях (40) – (43) положить  $\lambda = 0$ . В этом случае радиальные функции в (50), являющиеся теперь решениями системы уравнений:

$$\begin{aligned} f' + \frac{f}{r} + kg &= 0; \\ 0 &= -q' + f'' + \frac{f'}{r} - k^2 f - \frac{f}{r^2}; \\ 0 &= kq + g'' + \frac{g'}{r} - k^2 g, \end{aligned} \tag{53}$$

можно представить в виде:

$$\begin{aligned} g &= -aI_0(kr) - brI_1(kr); \\ f &= aI_1(kr) + brI_2(kr); \\ q &= 2bI_0(kr). \end{aligned} \tag{54}$$

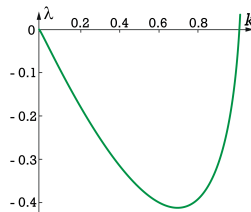
Постоянные интегрирования  $a$ ,  $b$ , и  $s_*$  являются корнями системы однородных граничных условий

$$\begin{aligned} aI_1(k) + bI_2(k) &= 0; \quad aI_1(k) + bI_2(k) + aI_1(k) + bI_0(k) = 0. \\ 2bI_0(k) + \sigma(k^2 - 1)s &= \\ -2 \left\{ ak \left[ I_0(k) - \frac{I_1(k)}{k} \right] + bk \left[ I_1(k) - \frac{I_2(k)}{k} \right] \right\}, \end{aligned} \tag{55}$$

условие совместности которой  $[I_0(k) - I_2(k)]\sigma(k^2 - 1) = 0$  определяет критическое волновое число  $k_*$ , ниже которого столб жидкости становится абсолютно неустойчивым относительно осесимметричных возмущений:

$$k_*^2 = 1. \quad (56)$$

Следует, однако, заметить, что в экспериментах цилиндр может оказаться неустойчивым по отношению к длинам волн, значительно большим, чем те, которые соответствуют формуле (56). Дело в том, что непрерывно возникающие в системе возмущения с разными длинами волн релаксируют или нарастают с различными скоростями. Очевидно, что разрушат столб те возмущения, которым соответствуют при заданных параметрах системы максимальные по величине отрицательные декременты. Характерная кривая зависимости критических декрементов, определённых формулой (52) для выбранных значений параметров системы, представлена на рис.5, из которого видно, что наиболее «опасными» являются возмущения с волновыми числами от 0.7 до 0.9, а не критическое значение  $k_*$ , которому соответствует нулевая скорость роста ( $\lambda = 0$ ). Сравним с результатами Рэлея об устойчивости струй.



**Рис. 5.** Зависимость декремента  $\lambda$  от волнового числа  $k$  в области неустойчивости для избранных значений параметров задачи.

Кривые  $\lambda(k)$  для других параметров задачи имеют сходный вид и также проходят через точку ( $k = 1$ ,  $\lambda = 0$ )

## Эксперимент

Промоделируем задачу Плато-Рэлея об гофрировочной неустойчивости жидкого столба на следующей простой установке. Изогнутую буквой «П» проволочку опустим «крышей» в лужицу вязкой жидкости и сфотографируем образовавшиеся в результате неустойчивости капельки. Измеряем расстояние между ними  $L$  и (по весу проволочки до и после погружения) их массу. По этим данным строим график зависимости  $L$  от

радиуса жидкого столба, который необходимо вычислить по определённой массе капелек. При анализе результатов необходимо проанализировать влияние проволоочки на периодичность капелек.

Опыты необходимо проделать со слабо вязкими и очень вязкими жидкостями, чтобы убедиться в том, что разделение на многочисленные капли указывает на то, что текучесть жидкости достаточна, чтобы ввести в действие инерцию.

Экспериментально легко смоделировать и плоский вариант задачи Рэлея. Для этого образуем на горизонтальном стекле лужицу вязкой жидкости и закроем её плотно другим стеклом. Раздвинем стёкла и сфотографируем полученную периодическую картину: прилипшая к поверхности жидкость разделяется на более или менее регулярно расположенные гряды. Интересно сопоставить результаты трёхмерной и плоской задач.

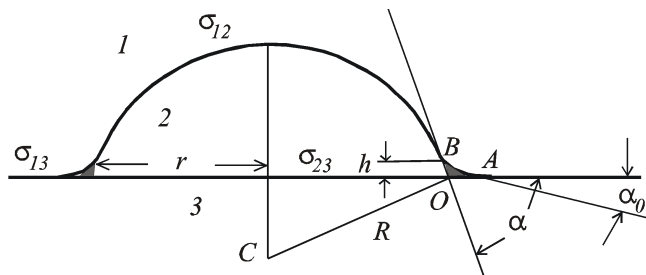
## 1.6. Растекание капель по горизонтальной поверхности

### Теория

Рассмотрим задачу о растекании капелек вязкой жидкости по твёрдой гладкой горизонтальной поверхности. Задачу будем решать, предполагая, что:

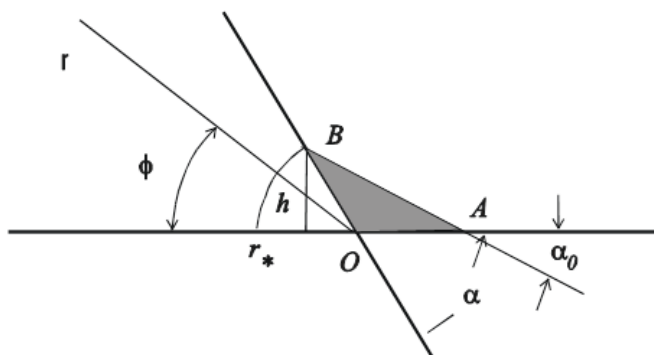
- 1) эффективные размеры капли на много меньше капиллярной длины (это допущение позволяет не учитывать влияние силы тяжести на каплю);
- 2) над каплей находится равновесный с жидкостью капли (фаза 2) и твёрдым телом (фаза 3) газ (фаза 1) при нулевом давлении (см.рис.6);
- 3) поверхностные натяжения на границах фаз  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{13}$  и  $\sigma_{32}$  формируют при установлении равновесного состояния краевой угол  $\alpha_0$  на линии раздела трёх фаз:  $\cos \alpha_0 \sigma_{12} + \sigma_{32} = \sigma_{13}$  (формула Юнга);
- 4) измеряемый в эксперименте краевой угол  $\alpha$  определяется наклоном касательной к меридиану капли на некоторой малой высоте  $h$  над поверхностью твёрдого тела ( $\alpha$  в неравновесном состоянии больше  $\alpha_0$  и стремится к последнему при  $t \rightarrow \infty$ );
- 5) между теоретическим краем капли  $A$  и видимым краем  $O$ , вблизи которого измеряется краевой угол  $\alpha$ , в неравновесном состоянии существует пренебрежимо малая по объёму безмассовая область пониженного давления (на рис.6 эта область затуманена), ограниченная сверху свободной поверхностью  $AB$ , имеющей отрицательную кривизну, твёрдой поверхностью  $AO$  и виртуальной поверхностью  $BO$ , опоясывающей каплю вблизи её подошвы;
- 6) движение жидкости в безмассовой области происходит подобно движению гусениц трактора: частицы жидкости вблизи точки  $B$  устремляются по свободной поверхности  $AB$  в область пониженного давления, доходят до края  $A$  и прилипают к твёрдой поверхности, увеличивая тем самым радиус капли  $r_0$ ;
- 7) растекание капли медленное, поэтому заметное движение в объёме капли считаем в каждый момент времени стационарным и происходящим только вблизи «пояска»  $AB$  по конфузормому типу;
- 8) допущение о практически полном отсутствии скорости в основном объёме капли позволяет считать основную поверхность капли частью сферического сегмента радиуса  $R$ .





**Рис. 6.** Меридиональное сечение лежащей капли с необходимыми обозначениями

Скорость растекания капли в неактивном газе. Движение жидкости вблизи точки  $O$  (см. рис.7) будем считать плоским и стационарным. Уравнения движения и граничные условия, определяющее поля скоростей  $v$  и давлений  $p$  в этой области, запишем в безразмерных величинах, выбрав в качестве единиц длины, скорости, давления и времени соответственно характерный размер капли  $a$  (например, ее радиус до соприкосновения с твёрдой поверхностью, определённый по объёму капли  $V = 4\pi a^3/3$ ),  $v/a$ ,  $\eta v/a^2$ ,  $a^2/v$ . Выберем цилиндрическую систему координат  $(\rho, \varphi, z)$  с началом в точке  $O$ .



**Рис. 7.** Меридиональное сечение лежащей капли вблизи подошвы (геометрическая модель)

Полярную ось  $z$  направим вдоль касательной к линии контакта видимого края капли с твёрдой поверхностью,  $\rho$  – расстояние от  $O$  до текущей точки в объёме капли, угол  $\varphi$  меняется в интервале  $[0, \alpha]$  от горизонталь-

ной плоскости ( $\varphi = 0$ ) до касательной к свободной поверхности на высоте  $h(\varphi = \alpha)$ . Движение считаем чисто радиальным:  $v_\varphi = v_z = 0$ ,  $v_\rho = v(\rho, \varphi)$ . В этих предположениях линеаризованные уравнения непрерывности и Навье-Стокса в проекциях на оси таковы:

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial \rho} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{v}{\rho^2}; \quad \frac{\partial p}{\partial \varphi} = \frac{2}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi}. \quad (57)$$

Решением этой системы уравнений (57), удовлетворяющей условиям прилипания  $v(\rho, \varphi) = 0$  и исчезновения касательных напряжений на свободной границе  $\frac{\partial v}{\partial \varphi} \big|_{\varphi=\alpha} = 0$ , являются следующие выражения:

$$\begin{aligned} \rho v &= C(1 - \cos 2\varphi - \tan 2\alpha \sin 2\varphi); \\ \rho^2 p &= -2C(\cos 2\varphi \tan 2\alpha \sin 2\varphi). \end{aligned} \quad (58)$$

Заметим, что при задании формы свободной поверхности нельзя требовать непрерывности нормальных напряжений. Для определения оставшейся постоянной  $C$  к системе уравнений присоединим интегральное условие, выражающее требование сохранения количества жидкости  $Q$ , протекающей через любое сечение  $\rho = \text{const}$  вблизи сингулярной точки  $O$ , в которой сходятся свободная и твёрдая поверхности с различными граничными условиями на них

$$Q = \int_0^\alpha v \rho d\varphi = \frac{C}{2}(2\alpha - \tan 2\alpha). \quad Q = \frac{dr}{dt} h, \quad (59)$$

где  $Q$  есть количество жидкости в расчёте на единицу длины по периметру, протекающее через сечение  $OB$  в единицу времени и определяющее скорость растекания капли. Свяжем  $Q$  с возникающим в «пояске» разряжением, вызванном несоответствием между измеряемым краевым углом  $\alpha$  и  $\alpha_0$ . Для этого составим выражение для силы  $f$ , действующей на единицу длины «пояска». В пренебрежении вязкими силами, возникающими между практически неподвижной каплей и подложкой, единственными внешними силами являются капиллярные напряжения, которые в размерном виде можно представить в следующей форме:  $f = \sigma_{13} - \sigma_{32} - \cos \alpha \sigma_{12} = \sigma_{12}(\cos \alpha_0 - \cos \alpha)$ , с другой стороны,  $f$  равна проекции на горизонтальную плоскость потока импульса через сечение  $OB$ , находящимся на расстоянии  $\rho = h/\sin \alpha$ ,

$$f = \cos \alpha \int_0^\alpha \left( p - 2 \frac{\partial v}{\partial \rho} \right) \rho d\varphi = \frac{2C}{h} \sin \alpha \cos \alpha (\alpha - \tan 2\alpha).$$

После необходимых преобразований получим для скорости растекания следующую формулу:

$$\frac{dr}{dt} = \text{const} (\cos \alpha_0 - \cos \alpha) \frac{2\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha}{\sin \alpha \cos \alpha (\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha)}, \quad (60)$$

где  $\text{const}$  – феноменологический параметр (фактор формы), пропорциональный безразмерному поверхностному натяжению  $a\sigma_{12}/(\eta\nu)$  (промежуточный параметр  $h$  из конечной формулы выпадает), а связь между краевым углом  $\alpha$  и радиусом капли  $r$  определяется из условия постоянства объема капли  $V$ , представляющей по сделанному допущению 8, шаровой сегмент:

$$V = \frac{\pi}{3} \left( \frac{r}{\sin \alpha} \right)^3 (1 - \cos \alpha)^2 (2 + \cos \alpha). \quad (61)$$

Из (61) следует, что при малых углах  $r^3$  пропорционально  $1/\alpha$ , поэтому по формуле (60) имеем

$$\frac{dr}{dt} \approx \text{const}_1 \alpha^3 \approx 1/r^9 \rightarrow r \approx t^{1/10}. \quad (62)$$

## Эксперимент

Из-за сложности создания идеально чистых гладких поверхностей рекомендуется вначале изучить законы растекания капель масла по поверхности жидкости или по смоченной поверхности стекла. При работе с минеральными маслами нужно проводить опыты на поверхности воды, покрытой керосиновой плёнкой. Работу для построения графика зависимости  $r$  от  $t$  следует провести для различных по начальной массе капелек.

## 1.7. Слипание плавающих частиц

### Теория

*Постановка и решение плоской задачи.* Рассмотрим задачу о слипании плавающих частиц (всплывшие чайники в стакане чая, соринки на поверхности лужи и т.д.), которые обычно имеют тенденцию концентрироваться в островки. Этот эффект объясняется стремлением системы уменьшить площадь поверхности раздела фаз, сильно изогнутую между частицами, и тем самым занять состояние с наименьшей энергией в соответствии с общим принципом Гиббса. Заметим, что сближаются любые одинаковые по своим физическим свойствам частицы, поэтому знак краевого угла в задаче не играет роли, а его величина является лишь количественным феноменологическим параметром. Задачу будем решать в плоском варианте.

Пусть на поверхности жидкости с плотностью  $\rho$ , заполняющей нижнее полупространство (фаза 1), плавают два параллельных друг другу цилиндрических тела (две соломинки или две смоченные маслом иголки) плотности  $\rho_0$  (фаза 2).

Верхнее полупространство заполнено невесомым газом. Поверхностное натяжение на границе раздела сред равно  $\sigma$ . Введем декартову систему координат  $(x, y, z)$ , направив ось  $z$  вверх, вдоль оси зеркальной симметрии системы, против ускорения силы тяжести  $g$ . В однородном поле тяжести  $g$  линией соприкосновения фаз между цилиндрами должна быть полоса ширины  $2a$ . Эту полосу будем считать расположенной в плоскости  $z = 0$ ;  $z$ -вые координаты поверхностей раздела между и вне цилиндров обозначим соответственно  $\zeta$  и  $\xi$ . Глубина погружения  $h$  цилиндров радиусов  $r$  в жидкость определяется балансом всех сил: и капиллярных и гравитационных в расчёте на единицу длины цилиндра:

$$2\sigma \sin \alpha + 2\rho g h r \sin \alpha + \rho g r^2 (\alpha - \cos \alpha \sin \alpha) - \rho_0 g \pi r^2 = 0.$$

(Подробный вывод этой формулы см. на с. 434 книги *Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. II. Термодинамика и молекулярная физика. М.: Наука, 1975. 552 с.*)

Если капля находится в равновесии, то функции  $\zeta$  и  $\xi$  удовлетворяют системе уравнений, следующих из требования непрерывности нормальных напряжений при переходе через границу раздела фаз<sup>18</sup>, где приведен

---

<sup>18</sup>Братухин Ю.К., Макаров С.О. Межфазная конвекция. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 1994. 327 с.

подробный вывод, основанный на принципе минимальности энергии системы в равновесном состоянии) и геометрически очевидными условиями:

$$\frac{\xi''}{(1 + \xi'^2)^{3/2}} - \xi + q_1 = 0; \quad (63)$$

$$\frac{\varsigma''}{(1 + \varsigma'^2)^{3/2}} - \varsigma + q_2 = 0; \quad (64)$$

$$x=0 : \zeta' = 0; \quad (65)$$

$$x \rightarrow \infty : \xi' = \xi'' = 0. \quad (66)$$

$$x = a : \xi = \zeta = 0; \xi' = \operatorname{tg} \alpha; \zeta' = -\operatorname{tg} \alpha. \quad (67)$$

Здесь штрихами обозначены производные по координате. Уравнения записаны в безразмерном виде; в качестве единиц длины, давления и массы выбраны соответственно  $(\sigma/\rho/g)^{1/2}$ ,  $(\sigma\rho g)^{1/2}$  и  $2\pi\rho_0(\sigma/\rho/g)^{3/2}$ .

Проинтегрируем один раз эти уравнения. Умножив каждое из уравнений на производную соответствующей функции и интегрируя полученные выражения, представим результат в форме:

$$-\frac{1}{(1+\xi'^2)^{1/2}} - \frac{\xi^2}{2} + q_1\xi = \operatorname{const}_1; \quad (68)$$

$$\left( \frac{f''f'}{(1+f'^2)^{3/2}} = -\left\{ \frac{1}{(1+f'^2)} \right\}' \right)$$

$$\operatorname{const}_1 = f(\alpha) \quad (69)$$

$$-\frac{1}{(1+\varsigma'^2)^{1/2}} - \frac{\varsigma^2}{2+q_2}\varsigma = \operatorname{const}_3. \quad (70)$$

Второе интегрирование выполним сначала для уравнения (68). Для этого перейдём от декартовой переменной  $x$  к углу  $\varphi$  наклона касательной к поверхности  $\xi = \xi(x) : \xi' = \tan \varphi$ . В этих переменных уравнение (68) можно преобразовать к виду:

$$-\cos \varphi - \frac{\xi^2}{2} + q_1\xi = \operatorname{const}_1. \quad (71)$$

Знак у  $\sqrt{1 + \zeta'^2} = 1/\cos \varphi$  выбран положительный, поскольку угол  $\varphi$  лежит в первой четверти. Постоянную интегрирования  $const_1$  определим из условий на границе раздела трёх фаз:  $const_1 = -\cos \alpha$ . В результате получаем квадратное алгебраическое уравнение, связывающее  $\xi$  и  $\cos \varphi$ :

$$\xi^2 - 2q_1\xi + 2(\cos \varphi - \cos \alpha) = 0. \quad (72)$$

Граничное условие на бесконечности  $\varphi(x \rightarrow \infty) \rightarrow 0$  позволяет связать давление в первой фазе  $q_1$ , определяемое высотой поднятия жидкости  $\xi_\infty$  над уровнем  $z = 0$ , с краевым углом  $\alpha$ :

$$\xi_\infty = q_1 = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \quad (\text{в размерной форме } \xi_\infty = 2\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \sin \frac{\alpha}{2}) \quad (73)$$

(эта формула определяет глубину погружения  $\xi_\infty = h$  линейного тела с краевым углом  $\alpha$ ). Используя известные тригонометрические формулы и уравнение (73), преобразуем (68) к виду:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{(1+\xi'^2)^{1/2}} - \frac{\xi^2}{2} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \xi &= -\cos \alpha = -(1 - 2\sin^2 \frac{\alpha}{2}) \\ -\frac{1}{(1+\xi'^2)^{1/2}} &= \frac{1}{2}(\xi - 2 \sin \frac{\alpha}{2})^2 - 1. \end{aligned} \quad (74)$$

Введём новую функцию  $z = \xi - q_1$ , с помощью которой уравнение (74) представим в более удобной для интегрирования форме:

$$-\frac{1}{(1+z'^2)^{1/2}} = \frac{1}{2}z^2 - 1. \quad (75)$$

Разрешая (75) относительно  $z'$

$$z' = z \frac{\sqrt{2 - z^2}}{z^2 - 2}$$

и интегрируя полученное уравнение

$$\int \frac{\sqrt{2 - z^2}}{z^2} dz^2 = -2x,$$

выразим абсциссу  $x$  через искомую функцию  $\xi$ :

$$x = -\sqrt{2 - y} - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2 - y} - \sqrt{2}}{\sqrt{2 - y} + \sqrt{2}} + const; \quad y \equiv (\xi - q_1)^2. \quad (76)$$

Постоянная интегрирования  $const$  в уравнении (76) определяется граничными условиями при  $x = a$  и равна

$$const = a + \sqrt{2 - q_1^2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2 - q_1^2} - \sqrt{2}}{\sqrt{2 - q_1^2} + \sqrt{2}}. \quad (77)$$

Таким образом, форма поверхности  $\xi = \xi(x)$  и давление  $q_1$  в первой фазе оказываются однозначно связанными с краевым углом  $\alpha$ .

Переходим к определению  $\zeta = \zeta(x)$  (см. уравнение (70)). Перейдя, как и выше, от переменной  $x$  к углу  $\varphi$  и определив постоянную интегрирования из условий на границе раздела трёх фаз  $const_3 = -\cos \alpha$ , получим квадратное уравнение для определения  $\zeta(\varphi)$ :

$$\rho \zeta^2 - 2q_2 \zeta + 2\sigma(\cos \varphi - \cos \alpha) = 0. \quad (78)$$

При выборе знака у  $\sqrt{1 + \zeta'^2} = 1/\cos \phi$  нужно выбирать знак «+», поскольку для выпуклой поверхности  $\zeta = \zeta(x)$  угол  $\varphi$  лежит в четвёртой четверти, а для вогнутой – в первой. Но и в том, и в другом случае  $\cos \varphi$  больше нуля. Уравнение (78) допускает существование двух равновесных поверхностей  $\zeta = \zeta(x)$ :

$$\zeta_1 = \frac{q_2 - \sqrt{q_2^2 - 2\rho\sigma(\cos \varphi - \cos \alpha)}}{\rho}, \quad \zeta_2 = \frac{q_2 + \sqrt{q_2^2 - 2\rho\sigma(\cos \varphi - \cos \alpha)}}{\rho}. \quad (79)$$

Первый корень соответствует выпуклой поверхности  $\zeta$ , которая формирует в капле положительное давление  $q_2$ . Второй корень следует выбирать в том случае, если поверхность  $\zeta$  вогнутая и  $q_2$  отрицательно. Имея в виду этот факт, в дальнейшем будем записывать радикалы с обоими знаками.

Рассматривая угол  $\varphi$  как параметр, выразим через него и расстояние  $x$  от центра капли. Для этого продифференцируем (80)

$$\frac{d\zeta}{d\varphi} = \mp \sigma \frac{\sin \varphi}{\sqrt{q_2^2 - 2\rho\sigma(\cos \varphi - \cos \alpha)}} = \frac{d\zeta}{dx} \frac{dx}{d\varphi} = \tan \varphi \frac{dx}{d\varphi}. \quad (80)$$

Интегрируя уравнение (80) от нуля до текущего угла  $\varphi$ , получим искомую зависимость  $r(\varphi)$ :

$$r(\varphi) = \mp \sigma \int_0^\varphi \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{q_2^2 - 2\rho\sigma(\cos \varphi - \cos \alpha)}}. \quad (81)$$

Знак «-» выбирается для выпуклой функции  $\zeta = \zeta(x)$ , знак «+» – для вогнутой. Уравнения (79) и (81) параметрически задают форму верхней

поверхности жидкости. Параметром служит угол наклона касательной к этой поверхности. В частности, ширина полуполосы  $a$  равна

$$a = \mp \sigma \int_0^{\alpha} \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{q_2^2 - 2\rho\sigma (\cos \varphi - \cos \alpha)}}, \quad (82)$$

где краевой угол  $\gamma$  необходимо определить из уравнения (79), взяв перед арккосинусом знак «-» для выпуклой поверхности и знак «+» для вогнутой.

Таким образом, в зазоре между плавающими цилиндрами площадь поверхности раздела оказывается сильно искривлённой и, следовательно, имеющей дополнительный запас энергии  $E \approx \sigma \Delta S$ . При соприкосновении цилиндров эта искривлённая площадка исчезает. Вместо неё в системе образуется (вдалеке от цилиндров) плоский участок, имеющий меньшую энергию. Уменьшение энергии должно приводить к появлению силы притяжения между цилиндрами  $F = -\Delta E / \Delta a$ , которую можно вычислить, определив по приведённым выше формулам площадь зазора  $L$  (в расчёте на единицу длины) как функцию  $a$ :  $L = 2 \int_0^a \sqrt{1 + \zeta'^2} dx$ .

Очевидно, что эта сила асимптотически стремится к нулю при некотором расстоянии  $a_*$ , и, если поместить цилиндры на расстояниях  $a < a_*$ , цилиндры начнут сближаться.

## Эксперимент

В опытах следует измерять скорости пробных тел (цилиндрических и круглых) как функцию расстояния, варьируя краевые углы, величину поверхностного натяжения, размеры и агрегатные состояния образцов. В связи с неустойчивостью поступательного движения цилиндрических тел друг к другу удобно измерять не скорость сближения, а угловую скорость поворота цилиндров навстречу друг другу как функцию времени и угла поворота. Работу удобно выполнять при помощи видеокамеры в режиме «Покадровой съёмки».



## 1.8. Дрейфовая неустойчивость частицы камфары, помещённой на поверхность воды

### Теория

Рассмотрим отдельно дрейфовые и осцилляционные флуктуации частиц камфары, помещённых на свободную поверхность воды.

*Частица камфары как броуновская (правильнее – броуновская) частица*

Помещённые на поверхность воды даже шаровые частицы камфары должны хаотически метаться по поверхности, потому что при случайном отклонении от равномерного по азимуту растворения в воде поверхностно активной камфары в жидкости возникнет благодаря эффекту Марангони ланжевеновская дельта-коррелированная сила – полный аналог несбалансированных ударов молекул на обычную броуновскую частицу: и там, и здесь прыжки возникают случайно и вследствие разбалансировки скоростей молекул. (На рис. 8 а, приведён пример таких монотонных дрейфовых движений камфары). В этом параграфе будем игнорировать возможные колебания броуновских частиц при их дрейфе.

Покажем, что для среднего квадрата смещения броуновской частицы  $\langle \Delta x^2 \rangle = 2kT B t$ , где  $B$  – подвижность, получается обычное уравнение Эйнштейна.

Рассмотрим "газ" частиц камфары на поверхности воды с плотностью  $n(x)$ ,  $x$  – некоторая выбранная координата. Выберем частицы, которые, приобретя случайную по величине и направлению скорость  $u_x$ , за время  $\tau$  достигнут нормальной к оси  $x$  площадки  $\Delta S$ , расположенной в начале координат  $x = 0$ . Их плотность обозначим  $n_i(x)$ . Очевидно, что площадку пересекут

$$dN_i = \Delta S \int_{-\Delta x_i}^0 n_i(x) dx = \\ \Delta S \int_{-\Delta x_i}^0 [n_i(0) + \frac{\partial n_i}{\partial x} x] dx = \Delta S [n_i(0) \Delta x_i - \frac{\partial n_i}{2 \partial x} \Delta x_i^2]$$

штук.

Полный избыток частиц, пересекающих площадку в положительном направлении оси  $x$ , над числом частиц, движущихся в обратном направлении, получим, просуммировав полученное выражение по всем группам

$$dN = \Delta S \sum_i [n_i(0) \Delta x_i - \frac{\partial n_i}{2 \partial x} \Delta x_i^2].$$

Первая сумма из-за равной вероятности смещений частиц в обоих направлениях равна нулю. Для вычисления второй суммы введём среднее квадратичное отклонение

$$n \langle \Delta x^2 \rangle = \sum_i n_i (\Delta x_i)^2,$$

дифференцируя которое по  $x$  и пользуясь независимостью  $\Delta x$  от  $x$ , получим:

$$\sum_i \frac{\partial n_i}{\partial x} (\Delta x_i)^2 = \langle \Delta x^2 \rangle \frac{\partial n}{\partial x}.$$

В результате для потока частиц получим следующее выражение:

$$j_x = \frac{dN}{\tau \Delta S} = - \frac{\langle \Delta x^2 \rangle}{2\tau} \frac{\partial n}{\partial x} = -D \frac{\partial n}{\partial x}.$$

Так как в статистической теории размеры частиц не существенны,  $D$  – это обычный коэффициент диффузии, который можно определить по формуле Эйнштейна.

*Частица камфары как броуновская частица в автоколебательной системе.*

В рассматриваемой системе возможно возникновение колебательной неустойчивости, при которой частицы камфары будут совершать более или менее регулярные колебательные движения около некоторого среднего движения.

Как уже сказано выше, монотонная дрейфовая неустойчивость возникает в этой задаче по причине, аналогичной той, которая приводит к дрейфу газового зародыша в изотермической матрице. Отметим, однако, что в чисто диффузионном варианте это единственно возможный сценарий развития дрейфовой неустойчивости. Можно показать, что колебательные процессы, в отсутствие тепловых, «конкурирующих» механизмов, оказываются затухающими.

Подобные задачи возникают, например, при анализе поведения изолированного газового зародыша в перегретой изотермической жидкости. В однокомпонентной двухфазной системе пузырёк новой фазы растёт за счёт испарения в него окружающей жидкости. Поскольку этот процесс сопровождается поглощением тепла, то в стационарных условиях в жидкости вблизи поверхности пузырька устанавливается положительный радиальный градиент температуры. Если в результате случайной флуктуации пузырёк сместится из центра такого сферически симметричного распределения температуры, то его носовая часть (назовём

её северным полюсом, кормовую часть – южным полюсом) окажется в перегретой области. В результате из-за зависимости коэффициента поверхностного натяжения от температуры появляется сила Марангони, ускоряющая пузырьёк в первоначальном направлении. Обратная ситуация устойчива: при виртуальном смещении Пузырька пара в переохлаждённой жидкости сила Марангони направлена к исходному положению.

Колебательная дрейфовая неустойчивость может возникнуть, однако, в двухкомпонентной двухфазной системе. Возможность её появления можно пояснить следующими рассуждениями. Для определённости рассмотрим каплю чистого анилина в чистой воде. Эти жидкости при комнатной температуре имеют ограниченную растворимость друг в друге. Для простоты качественного рассмотрения будем следить только за процессом растворения капли анилина в воде, игнорируя процесс растворения воды в капле. Пусть для определённости процесс растворения сопровождается поглощением тепла. Тогда вблизи капли образуется сферически симметричный радиальный градиент температуры, который больше нуля (вдали теплее) и градиент концентрации, который меньше нуля (вдали – чистая вода).

Если в результате флуктуации капля сместится из центра такого сферически симметричного распределения температуры и концентрации, например, то её северный полюс окажется в перегретой области.

Зависимость коэффициента поверхностного натяжения от температуры обуславливает появление силы Марангони, ускоряющей каплю в первоначальном направлении. Но при этом капелька анилина попадает в область практически чистой воды и поверхностное натяжение её носовой части будет определяться не только нагревом, но и изменившейся концентрацией. Поскольку на границе анилина и чистой воды поверхностное натяжение больше, чем на границе их взаимно насыщенных растворов, то концентрационная сила Марангони будет стремиться вернуть каплю обратно, «вниз», к месту её первоначальной дислокации. Подобная ситуация в принципе может возникнуть и при броуновских скачках частицы камфары в воде, поскольку растворение камфары в воде сопровождается выделением тепла. При этом частица камфары будет двигаться по замкнутому кривым (см. рис. 8, б).

Рассмотрим гетерогенную систему при числах Марангони, при которых возможно возникновение колебательной неустойчивости. Это значит, что броуновское движение частицы будет происходить в автоколебательной диссипативной системе, имеющей определённую резонансную частоту  $\omega$ . Тогда в проекцию уравнения Ланжевена на ось  $x$  для та-

кой броуновской частицы массы  $M$  нужно, кроме обычной в общем случае нелинейной силы сопротивления  $-M\beta(v)v$  и силы Ланжевена (ланжевенского источника)  $f(t)$ , добавить ещё квазиупругую силу  $m\omega^2 x$ :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \beta(v)v + \omega^2 x = f(t), \quad \frac{\partial x}{\partial t} = v. \quad (83)$$

«Коэффициент трения»  $\beta(v)$  при малых скоростях броуновской частицы может быть определён по формуле Рибчинского, но в общем случае автоколебательных систем должен быть представлен рядом:

$$\beta(v) = \beta_0 + \beta_2 v^2 + \beta_4 v^4 + \dots$$

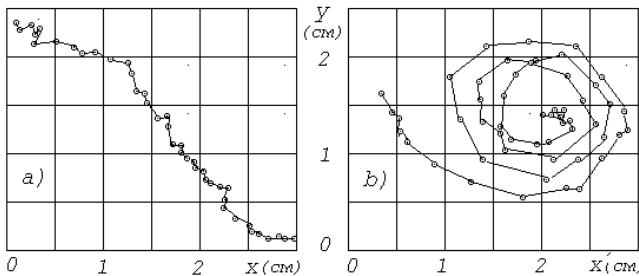
Отметим, что  $\beta_0$  может принимать и отрицательные значения, когда приток энергии больше потерь на диссипацию.

Для выявления основных статистических характеристик рассмотрим движение с малыми скоростями, положив  $\beta(v) = \beta_0$ .

Силу Ланжевена предполагаем  $\delta$ -коррелированную

$$\begin{aligned} \langle f(t)f(t-\tau) \rangle &= \alpha\delta(\tau); \quad \langle f(t) \rangle = 0; \\ \langle A(t) \rangle &\equiv \int A(x_1, \dots) n(x_1, \dots) dx_1 \dots dx_N, \end{aligned} \quad (84)$$

где  $\alpha$  – заданная условиями задачи и, вообще говоря, не связанная с температурой и затуханием формулой Эйнштейна интенсивность ланжевенского источника,  $A$  – любая функция динамических переменных  $x_i$ ,  $n$  – функция распределения; интегрирование происходит по всему фазовому пространству системы. В дальнейшем будем предполагать, что время корреляции ланжевенского источника много меньше  $1/\beta_0$ , а частота  $\omega \gg \beta_0$  (слабозатухающие колебания). Заметим, что спектральная



**Рис. 8.** Траектория движения частицы: а – при монотонной неустойчивости, б – при колебательной неустойчивости

плотность  $(f^2)_\omega$  таким образом определённого ланжевеновского источника не зависит от частоты (белый шум):

$$\langle f(t)f(t-\tau) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (f^2)_\omega e^{-i\omega\tau} d\omega; \quad (f^2)_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha \delta(\tau) d\tau = \alpha.$$

Выполним Фурье-преобразование уравнения (83):

$$\begin{aligned} -i\omega V + \beta_0 V + \varpi^2 X &= F, \quad -i\omega X = V; \\ X &= -\frac{V}{i\omega}; \quad V = \frac{F}{\beta_0 - i\omega + i\varpi^2/\omega}. \end{aligned} \quad (85)$$

Здесь  $F$ ,  $V$  и  $X$  определены формулами Фурье:

$$\begin{aligned} 2\pi x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{-i\omega t} d\omega; \\ 2\pi v(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} V(\omega) e^{-i\omega t} d\omega; \\ 2\pi f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \end{aligned} \quad (86)$$

Рассмотрим корреляции координат  $\langle x(t)x(t-\tau) \rangle$  и скоростей  $\langle v(t)v(t-\tau) \rangle$ , представив их интегралами Фурье (в равновесной системе  $\langle x(t)x(t-\tau) \rangle$  не зависит от  $t$ )

$$\begin{aligned} c \langle x(t)x(t-\tau) \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (x^2)_\omega e^{-i\omega\tau} d\omega; \\ \langle v(t)v(t-\tau) \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (v^2)_\omega e^{-i\omega\tau} d\omega. \end{aligned} \quad (87)$$

Спектральные плотности координат  $(x^2)_\omega$  и скоростей  $(v^2)_\omega$  броуновских частиц определим с помощью уравнения (85) и известной теоремы <sup>19,20</sup>, связывающей среднее значение «компонент Фурье»  $\langle YY^* \rangle$  корреляции  $\langle yy^* \rangle$  любой случайной  $y$  и комплексно сопряжённой ей  $y^*$  величин. В частности

$$\begin{aligned} \langle XX^* \rangle &= 2\pi (x^2)_\omega; \\ \langle VV^* \rangle &= 2\pi (v^2)_\omega; \\ \langle FF^* \rangle &= 2\pi (f^2)_\omega = 2\pi\alpha. \end{aligned} \quad (88)$$

<sup>19</sup> Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. V. Статистическая физика. Ч. 1. М.: Наука, 1976. С. 438;

<sup>20</sup> Климонтович Ю.Л. Статистическая физика. М.: Наука, 1982. С. 218.

При записи последнего уравнения использовано определение (84) ланжевеновского источника, спектральная плотность которого не зависит от частоты.

После соответствующих преобразований получим следующие выражения для спектральных плотностей флуктуаций скорости и смещений броуновской частицы, помещённой в систему, в которой возможно возникновение автоколебаний:

$$\begin{aligned}(v^2)_\omega &= \frac{\alpha}{\beta_0^2 + (\omega - \varpi^2/\omega)^2}; \\ (x^2)_\omega &= \frac{(v^2)_\omega}{\omega^2}.\end{aligned}\tag{89}$$

Мы видим, что спектральные плотности скоростей и смещений имеют максимум при  $\omega = \varpi$ , т.е. автоколебательная система откликается лишь на те частоты, которые лежат вблизи её резонансной кривой.

В отсутствие «квазиупругой силы» формулы (89) имеют традиционный вид:  $(v^2)_\omega = \frac{\alpha}{\beta_0^2 + \omega^2}$  (система благодаря вязкости откликается на малые частоты, но не успевает «срабатывать» на высоких), а средний квадрат флуктуаций скорости оказывается равным:

$$\langle v^2 \rangle_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha d\omega}{\beta_0^2 + \omega^2} = \pi \frac{\alpha}{2\beta_0}.$$

Заметим, что имеет смысл исследовать возможность возникновения в системе и фликер-шума (область крайне малых частот).

## Эксперимент

В чашечке Петри (или любой кювете с прозрачным дном), поставленной на миллиметровую бумагу, зафиксировать видеокамерой несколько траекторий частицы камфары. Видеозапись можно обработать программой Free Video to JPG Converter в покадровом режиме для построения зависимости смещения частицы как функции времени. Сравните полученные зависимости с теоретической кривой, описываемой формулой Эйнштейна. Рекомендуется произвести Фурье анализ колебательного движения частицы по любой из пространственных координат.

## 1.9. Определение коэффициента диффузии по скорости испарения капли

### Теория

Одним из первых опыт по определению коэффициента диффузии выполнил Лошмидт в 1870 г. Его прибор состоял из двух пятиметровых трубок диаметром 2,6 см, поставленных одна на другую и соединённых краном. Перед началом опыта трубки наполнялись исследуемыми газами: верхний – более лёгким, нижний – более тяжёлым газом. Затем кран открывался и начиналась диффузия. Через определённое достаточно продолжительное время кран закрывался и производился анализ полученной смеси. Так, в опытах с водородом и углекислым газом за 30 мин в верхнюю трубку проникло 33% водорода.

Процесс диффузии в жидкостях и твёрдых телах ещё более медленный и потому ставить опыты по определению коэффициента диффузии в учебных лабораториях можно только в газообразных веществах. При этом, однако, нужно учитывать, что в практически невязких газах (коэффициент кинематической вязкости воздуха  $\nu = 0.15 \frac{\text{см}^2}{\text{с}}$ ) уже при малых неоднородностях плотности возникает естественная конвекция, на фоне которой практически невозможно выделить диффузионные потоки. Для подавления естественной конвекции следует изучать явление в экспериментальных ячейках с малыми числами Грасгофа  $Gr = \frac{gL^3}{\nu^2} \frac{\Delta\rho}{\rho}$ , где  $\frac{\Delta\rho}{\rho}$  – характерное для модели эффективного размера  $L$  отношение возмущения плотности  $\Delta\rho$  вещества в результате протекающих в системе процессов к плотности  $\rho$  в равновесных условиях. Рассмотрим, например, миллиметровую в диаметре каплю воды (молекулярный вес 18) в воздухе (молекулярный вес 29). Для такой системы  $\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{2}{3}$  и  $Gr$  будет порядка единицы. Следовательно, для ещё меньших капель числа Грасгофа будут меньше единицы и потому процесс испарения капли во внешнюю среду будет лимитироваться только диффузией, что и позволит с достаточной точностью определить коэффициент диффузии в опытах с подвешенной каплей.

В работе для определения коэффициента диффузии используется капля жидкости, подвешенная на торце цилиндрического стержня диаметра  $D$ . Её форма будет определяться капиллярной постоянной  $a = \sqrt{\frac{\sigma}{g\rho}}$ ,  $\sigma$  – поверхностное натяжение капли,  $\rho$  – её плотность,  $g$  – ускорение силы тяжести). Если капиллярная постоянная много меньше размеров капли (например, её высоты  $h$  или диаметра стержня  $D$ ):  $a \ll h$ , форма капли преимущественно определяется силами тяжести. Наоборот, при  $a \gg h$

капля будет стремиться принять сферическую форму. Поскольку для воды, коэффициент диффузии которой в воздухе необходимо определить в данной работе,  $D = 0.39 \text{ см}$  (при  $20^\circ\text{C}$ ), можно считать, что водяные капли миллиметровых размеров представляют собой сферические сегменты, объём которых вычисляется по известной формуле  $V = \frac{\pi}{6} h (\frac{3}{4} D^2 + h^2)$ .

Для получения расчётной формулы сделаем следующие допущения.

- 1) Концентрация паров воды у поверхности капли радиуса  $a$  постоянна и зависит только от температуры. (Концентрацию будем определять как плотность  $\rho$  паров воды в единице объёма воздуха).

Для обоснования этого допущения вычислим по формуле Вильяма Томсона  $P = P_0 + 2\sigma v_l / (v_g - v_l) / a$  давление насыщенного водяного пара над капелькой воды с радиусом  $a \cong 10^{-5} \text{ см}$  (капелька тумана) при комнатной температуре. При такой температуре  $\sigma \cong 72 \text{ дин/см}$ . Удельный объём воды  $v_l \cong 1.0 \text{ см}^3/\text{г}$ , давление насыщенного водяного пара над плоской поверхностью  $P_0 \cong 17.5 \text{ мм рт. ст.} \cong 23400 \text{ дин/см}^2$ . Для определения удельного объёма пара  $v_g$  используем формулу уравнения состояния идеального газа:  $v_g = RT / \mu P_0 = 577000 \text{ см}^3/\text{г}$ . Подставляя эти данные в формулу Томсона, получим для капельки с радиусом  $a \cong 10^{-5} \text{ см}$  превышение равновесного давления всего на 1%:  $P - P_0 = 250 \text{ дин/см}^2 \cong 0.19 \text{ мм.рт.ст.}$  В лабораторной работе используются капельки воды не более миллиметра в диаметре, поэтому давление насыщенных паров над ними меняется в ходе опытов тоже не более чем на один процент.

- 2) Капля находится в открытом помещении с относительной влажностью  $f$ .
- 3) Вода – слабо-летучая жидкость. Поэтому в каждый момент времени около поверхности капли радиуса  $a$  устанавливается равновесное распределение концентрации  $\rho$  паров воды, определяемое решением следующей задачи:

$$\begin{aligned}\Delta\rho &= 0; \\ r = a : \rho &= \rho_0; \\ r \longrightarrow \infty : \rho &= f\rho_0.\end{aligned}$$

Здесь  $\rho_0$  – плотность насыщенного водяного пара над плоской поверхностью. (При комнатной температуре  $\rho_0 = 1.7 \cdot 10^{-5} \text{ г/см}^3$ ),



$f\rho_0$  – плотность пара на бесконечном расстоянии от капли в помещении с относительной влажностью  $f$ . Решение этой задачи представим в форме:  $\rho = \rho_0(1 - f)a/r + \rho_0f$ .

- 4) В соответствии с этим решением из капли радиуса  $a$  каждую секунду через её поверхность  $4\pi a^2$  диффундирует

$$\Delta M / \Delta t = D4\pi a^2 (d\rho/dr)|_{r=a} = D4\pi a\rho_0(1 - f)$$

грамм воды.

Таким образом, для определения коэффициента диффузии необходимо вычислять эффективный «радиус» капли и скорость уменьшения её массы:

$$D = \frac{(\Delta M / \Delta t)}{4\pi a\rho_0(1 - f)},$$

где скорость уменьшения массы капли со временем можно вычислить из данных опыта по измеренным объёмам капли  $V_2$  и  $V_1$  в последовательные моменты времени, разделённые интервалом  $\Delta t$ :

$$\frac{\Delta M}{\Delta t} = \frac{(V_2 - V_1)\rho_{\text{воды}}}{\Delta t}.$$

## Эксперимент

Опыты следует проводить с микроскопом по методике и на установке, описанной в лабораторной работе «Определение поверхностного натяжения по форме профиля мениска». Необходимо записать процесс испарения капли, подвешенной на подвесе малого диаметра и имеющей в начале процесса форму сферического сегмента, в виде видеоклипа, и затем в режиме покадрового просмотра с помощью программы Free Video to JPG Converter образовать серию снимков испаряющейся капли воды в определённые моменты времени. Временные интервалы между снимками должны уменьшаться по мере уменьшения капли. Необходимо построить график зависимости объёма капли как функцию времени в логарифмическом масштабе и по этим данным обосновать возможность определения коэффициента диффузии предложенным методом.

## 1.10. Неустойчивость струй, стекающих по наклонной плоскости

### Теория

Одной из важных проблем капиллярной гидродинамики, привлекавших внимание таких крупнейших исследователей, как лорд Рэлей<sup>21</sup> и Нильс Бор<sup>22</sup>, является проблема распада струй на капли.

Близкой по духу к этим задачам является древнейшая проблема образования меандр реками. Впервые это явление описал Ксенофонт в 375 г. до Р.Х. (Термины «меандр», «меандрирование» произошли от названия очень извилистой реки в Кари, Малая Азия, Meander по-латыни, *Μαανδρος* по-гречески). При меандрировании реки внешний берег излучины разрушается основным быстрым поверхностным потоком, а на внутреннем берегу возникают отложения наносов из придонного более медленного слоя. В результате меандрирование реки со временем увеличивается. Нечто подобное происходит вблизи отводного канала, устроенного под прямым углом к руслу: придонное течение забивает водозабор наносами и ирригационная система перестаёт работать.

Заметим, что в те времена люди не понимали этих особенностей течения с вторичной завихренностью и упорно строили отводные каналы под прямым углом к основному руслу. (Это, как сейчас считается, привело к гибели цивилизации на Тигре и Евфрате, полностью зависящей от эффективности ирригационных сооружений).

В 1927 г. А. Эйнштейн в работе «Причины образования извилин в руслах рек и так называемый закон Бэра»<sup>23</sup> вернулся к этой проблеме, качественно рассмотрев задачу во всей полноте.

В данной лабораторной работе предлагается исследовать устойчивость струек воды, стекающих по наклонной плоскости, наклонённой к горизонту под углом  $\alpha$ .

При математическом моделировании задачи сделаем следующие предположения.

- 1) Струйка представляет собой прямой цилиндр, нормальным сечением которого является полукруг радиуса  $a_0$  с недеформируемой свободной поверхностью. Физически это соответствует значительным поверхностным натяжениям жидкости, а свойства твёрдого

---

<sup>21</sup>Стретт Дж. Теория звука. Т. 2. М.: ГИТТЛ, 1955. 475 с;

<sup>22</sup>Trans.Roy. Soc. 1909. V. 209 A. p. 281.

<sup>23</sup>Собрание научных трудов, Т. 4, 1989, С. 74-77.

тела и жидкости таковы, что краевые углы оказываются приблизительно равными  $90^\circ$ .

- 2) Струйка течет в ламинарном установившемся режиме по гладкой плоской поверхности в невязком невесомом газе, заполняющем всё пространство над плоскостью.
- 3) Жидкость нелетучая, несжимаемая, её вязкость  $\eta$ , плотность  $\rho$  и поверхностное натяжение  $\sigma$  постоянны.

В этих предположениях уравнения Навье-Стокса, непрерывности и система граничных условий имеют вид

$$\nabla p = v \Delta \vec{v} + \vec{g}; \operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad (90)$$

$$r = a_0 : v_r = 0; \frac{\partial v_z}{\partial r} = 0, \quad (91)$$

$$\varphi = 0 : \vec{v} = 0; \varphi = \pi : \vec{v} = 0. \quad (92)$$

Граничные условия (91) и (92) записаны в цилиндрической системе координат с полярной осью  $z$ , проходящей по наклонной плоскости  $xz$  по центру струйки в направлении течения. Азимутальный угол  $\varphi$  отсчитывается от оси  $x$  против часовой стрелки. Плоскость  $xy$  совпадает с нормальным сечением струйки, ось  $y$  направлена к вершине нормального сечения в плоскости зеркальной симметрии системы. Уравнения (91) вытекают из требований отсутствия нормальной компоненты скорости и касательных напряжений на свободной границе жидкости, а уравнения (92) суть обычные условия прилипания жидкости к твёрдой подложке. При постановке задачи а priori было сделано предположение о недеформируемости свободной границы раздела сред в ходе процесса. Физически это эквивалентно предположению об аномально большом поверхностном натяжении, способном удерживать неизменной границу раздела при любых механических процессах. Таким образом, делая предположение о неизменности границ, мы не должны в системе граничных условий учитывать уравнение непрерывности нормальных напряжений, поскольку именно оно определило бы в конечном счёте форму границы раздела.

Трансляционная симметрия задачи и условия прилипания (92) однозначно определяют структуру решения, которая должна иметь вид

$$p = p(r, \varphi); \vec{v} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(r) \sin n\varphi \vec{e}_z. \quad (93)$$

Для получения аналитического решения необходимо разложить неоднородный член в уравнении Навье-Стокса в ряд по собственным функциям скорости

$$\vec{g} = \sum_{n=1}^{\infty} \vec{g}_n \sin n\varphi. \quad (94)$$

Для определения амплитуд разложения умножим уравнение (94) на  $\sin m\varphi$  и проинтегрируем по интервалу  $[0, \pi]$

$$\int_0^{\pi} \vec{g} \sin m\varphi d\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \vec{g}_n \sin n\varphi \sin m\varphi d\varphi.$$

Интегрируя это выражение с учётом ортогональности синусов, получим

$$\vec{g}_n = \frac{4}{\pi n} \vec{g}, n = 1, 3, 5, \dots \quad (95)$$

Подставив выражения (93) – (95) в  $z$ -проекцию уравнения Навье-Стокса и собрав члены при одинаковых синусах, получим обыкновенное дифференциальное уравнение для определения амплитуд скорости

$$v \left( f_n'' + \frac{f_n'}{r} - \frac{n^2 f_n}{r^2} \right) + g_n \sin \alpha = 0, \quad (96)$$

общее решение которого составим из общего решения однородного и частного решения неоднородного уравнения (96)

$$f_n(r) = b_n r^n + \frac{g_n \sin \alpha}{v(n^2 - 4)}. \quad (97)$$

Константу интегрирования  $a_n$  найдём из условия отсутствия касательных напряжений (второе уравнение в (91)). После соответствующих преобразований получим следующее выражение для скорости:

$$\vec{v} = \vec{e}_z \frac{\sin \alpha}{v} \left\{ \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{g_n \left( -\frac{2r^n}{na^{n-2}} + r^2 \right)}{n^2 - 4} \sin n\varphi \right\}, \quad (98)$$

где  $g_n$  определено формулой (95).

Исследуем устойчивость этого прямого потока по отношению к изгибам в плоскости  $zx$ . Допустим, что в результате какого-либо возмущения струйка приняла изогнутую форму:

$$r = R(\varphi, z) = a(1 + \varepsilon \cos kz \cos \varphi). \quad (99)$$

Заметим, что средний радиус  $a$  изогнутой струйки меньше исходного вследствие постоянства объёма. Это увеличение, однако, пропорционально  $\varepsilon^2$  и в дальнейшем учитываться не будет.

Малая амплитуда нормальных возмущений  $\varepsilon$  в общем случае зависит от времени  $t$  по экспоненциальному закону  $\varepsilon \approx \exp(-\lambda t)$  и конечной целью исследований устойчивости движения является определение знака реальной части декрементов: при  $Re\lambda > 0$  возмущения затухают; при  $Re\lambda < 0$  – нарастают. Мы рассмотрим случай  $\lambda = 0$ , соответствующий критическим значениям параметров, при которых монотонные возмущения, раз возникнув, не затухают, но и не растут.

Для определения возмущений скорости и давления в извивающейся струйке сделаем несколько новых предположений.

- 1) Прежде всего заметим, что стекающие струйками жидкости маловязкие. Поэтому для получения аналитических оценок минимальных критических значений параметров задачи будем считать жидкость невязкой, поскольку только в предельном случае идеальной жидкости процесс искривления не связан с выполнением какой-либо работы, а сама струйка не привязана к подложке условиями прилипания.
- 2) Формулу для скорости течения (98) в прямой струйке, учитывающую условия прилипания на твёрдой поверхности, заменим средней скоростью по сечению:

$$v_0 = \frac{2}{\pi a^2} \int \int v_z r d\varphi dr = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{g_n \sin \alpha a^2}{\pi v n(n^2-4)} \left\{ 1 - \frac{8}{n(n+2)} \right\}. \quad (100)$$

Линеаризованные по возмущениям уравнения Эйлера и условия отсутствия нормальных скоростей на границах струйки и непрерывности нормальных напряжений на свободной поверхности можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \vec{v}_0 \nabla \vec{v} &= -\frac{\nabla p}{\rho}; \quad \nabla \vec{v} = 0. \\ r = R(\varphi, z) &= a(1 + \varepsilon \cos kz \cos \varphi) : \vec{n}(\vec{v}_0 + \vec{v}) = 0; \\ p + \sigma 2H &= p_0 \\ \varphi = 0 : \vec{e}_z \vec{v} &= 0; \varphi = \pi : \vec{e}_z \vec{v} = 0. \end{aligned} \quad (101)$$

Здесь  $H$  – средняя кривизна поверхности, которая по известным формулам аналитической геометрии может быть для малых  $\varepsilon$  представлена в виде следующего выражения:

$$2H = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \cong \frac{1}{r} - \frac{\partial^2 r}{r^2 \partial \varphi^2} - \frac{\partial^2 r}{r^2 \partial z^2} = \frac{1}{a} + k^2 a \varepsilon \cos kz \cos \varphi. \quad (102)$$

Представим скорость возмущения в виде градиента потенциала  $\vec{v} = \nabla \phi$ , который для несжимаемой жидкости является гармонической функцией. Выберем  $\phi$  с учётом формы возмущения поверхности и отсутствия нормальной скорости на наклонной плоскости:  $\phi = c I_1(kr) \sin kz \cos \varphi$ .

(Здесь  $I_1(kr)$  – модифицированная функция Бесселя первого рода первого порядка). Постоянную интегрирования  $c$  определим из условия отсутствия нормальной составляющей скорости на свободной поверхности  $\vec{n}(\vec{v}_0 + \vec{v}) = 0$ . Спроектировав орт оси  $z$  на нормаль к свободной поверхности струйки и учтя, что при малых возмущениях нормаль и радиальное направление совпадают с точностью до  $\varepsilon^2$ , получим следующее уравнение для определения постоянной интегрирования  $c$ :

$$-v_0 \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \Rightarrow v_0 a \varepsilon = c \left[ I_0(ka) - \frac{I_1(ka)}{ka} \right]. \quad (103)$$

Интегрируя уравнение Эйлера, получим формулу для определения давления:

$$p = -c v_0 \rho k I_1(kr) \cos \varphi \cos kz. \quad (104)$$

Уравнение непрерывности нормальных напряжений на деформированной поверхности струйки определит критические значения параметров задачи:

$$\frac{I_0(ka)}{I_1(ka)} ka - 1 = \frac{\rho v_0^2}{\sigma} \equiv P. \quad (105)$$

Правая часть уравнения (105) – плавная функция аргумента  $ka$ , монотонно увеличивающаяся от единицы при  $ka = 1$  до бесконечности при  $ka \rightarrow \infty$ . Таким образом, можно констатировать, что, начиная с  $P = 1$ , струйка становится неустойчивой по отношению к длинноволновым возмущениям.

## Эксперимент

Опыты следует проводить с ламинарными водяными струйками заданной мощности, стекающими по несмачиваемой поверхности. В качестве такой поверхности можно выбрать стеклянную пластину, покрытую

тонким слоем керосина. Запишите процесс образования неустойчивой струи с помощью видеокамеры и измерьте длину волны, соответствующую неустойчивой форме струи. Проведите исследование с различными значениями расхода жидкости в струе.

## Приложение



Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

**Кафедра общей физики**

Выпускная квалификационная работа

**Визуализация течений, возникающих в жидкости  
под действием ультразвукового излучения**

**Выполнил:**

студент 2-го курса магистратуры  
физического факультета  
направления 03.04.02 «Физика»

М. О. Кучинский \_\_\_\_\_

**Научный руководитель:**

к. ф.-м. н. доцент КОФ ПГНИУ

К. А. Рыбкин \_\_\_\_\_

**К защите допускаю:**

зав. кафедрой общей физики

к.ф.-м.н., И. А. Бабушкин \_\_\_\_\_

Пермь 2020

# Содержание

Введение	71
1 Эксперименты по визуализации акустических течений от источника ультразвука 20 кГц	78
1.1 Описание экспериментальной установки, методики измерений и численного расчёта	78
1.2 Результаты	81
2 Эксперименты по визуализации акустических течений от источника ультразвука 1.7 МГц	85
2.1 Описание экспериментальной установки и методики измерений	85
2.2 Результаты экспериментов	86
3 Выводы	88
Список литературы	91

# Введение

В окружающем нас мире существует множество различного рода звуков. Звук – это явление представляющее собой процесс распространения (звуковых волн) малых возмущений в различных средах. Звук – это, система, чередующихся сжатий и разрежений, перемещающихся в пространстве. Звуковая волна в основном характеризуется частотой и амплитудой. Человек способен воспринимать звуки, частота которых варьируется в диапазон от 16 Гц до 20 кГц.

Существует несколько основных типов излучателей для создания ультразвуковых колебаний:

- пьезоэлектрический (пьезокерамический);
- электромагнитный;
- электродинамический (катушечный);
- электростатический (конденсаторный, электретный).

Пьезоэлектрические излучатели – это тип излучателей, в которых звук создаётся пьезоэлементом. Для создания звука используется обратный пьезоэлектрический эффект, явление возникновения механических деформаций под действием высокого напряжения.

Электромагнитный излучатель создаёт акустическую волну за счёт колебаний ферромагнитной пластины под действием переменного магнитного поля. Так как постоянный магнит создаёт постоянное магнитное поле, то при подаче переменного тока на магнитопровод катушки возникает переменное магнитное поле и она начинает совершать колебания вместе с металлической диафрагмой и тем самым производит акустическую волну.

Электродинамические излучатель основывается на физическом явлении возникновения силы Лоренца в помещённом в постоянное магнитное поле проводнике в случае протекания через него электрического тока. Классической схемой данного излучателя является установка постоянного магнита с катушкой, сцепленной с диффузором. При подаче электрического сигнала определённой частоты катушка создаёт магнитное поле. Данное магнитное поле взаимодействует с полем постоянного магнита и в результате катушка начинает колебаться и диффузором создаёт звук определённой частоты.

Электростатический излучатель звука – это излучатель, в основе которого лежит колебание тонкой мембраны. Так на тонкую мембрану подаётся высокое напряжение поляризации, на статоры подаётся сигнал большой амплитуды. В результате между мембраной и статорами возникает переменное электростатическое поле,двигающее мембрану.

Устройства, использующие источники УЗ, нашли широкое применение в различных технических приложениях, одним из них является применение УЗ в процессе флотации. В работе [1] было изучено влияние ультразвуковой обработки на флотацию каменноугольных шламов с целью получения продуктов более высокого качества. Для этого был проведён эксперимент с использованием флотационной машины типа Wemco с рабочим колесом 1500 об/мин. Специально для эксперимента были изготовлены камеры из нержавеющей стали вместимостью 1.2 л, оснащённые ультразвуковыми преобразователями с частотой 40 кГц. В флотационной камере на 4 стенках находилось по 1 ультразвуковому излучателю. Оказалось, что использование ультразвука позволяет снизить необходимое количество реагента, а помимо этого увеличить в среднем на 40% извлечение плавающего угля. Повышение эффективности в процессах флотации является одним из актуальных направлений в технологической сфере Пермского края, поскольку повышение эффективности производства положительно скажется на эффективности использования природных ресурсов.

Помимо этого в промышленности широко применяется ультразвуковая обработка. Она, к примеру, используется для очистки металлических поверхностей от загрязнений. В работе [2] проводили эксперименты, связанные с эффективностью ультразвуковой очистки. В качестве исследуемого образца была выбрана сталь 12Н17, а также сталь У8. Оказалось что эффективность очистки зависит от интенсивности и времени действия ультразвуковой вибрации.

Мощный ультразвук, разрушая целостность жидкости, создавая при этом кавитацию или акустическое течение, и уже широко применяется в очистке поверхности, сварке пластмасс, сонохимии [3,4] (рис. 2).

Кроме того, ультразвуковая очистка может применяется для очистки мембран. В статье [5], проводят исследования, связанные с возможностью очистки мембран по средствам ультразвука. Было показано, что данный метод в некоторых случаях оказывается более эффективным нежели другие: химические, или метод обратной промывки. Химический метод не всегда может быть применён по причине того, что после прочистки он сам же может загрязнить мембрану.

Однако обратной промывки подразумевает возможность доступ к мембране, что иногда является невозможным. Поэтому в исследовании очистка проводилась с использованием дистиллированной воды и ультразвукового излучателя частотой 45 кГц. Было показано, что такой метод является возможным и не представляет технических трудностей в реализации, однако эффективность очистки полимерных мембран также определяется особенностями самой мембраны и используемым для очистки реактором.

Численное моделирование пространственного распределения акустического давление внутри сонохимических реакторов вызывает интерес у многих учёных во

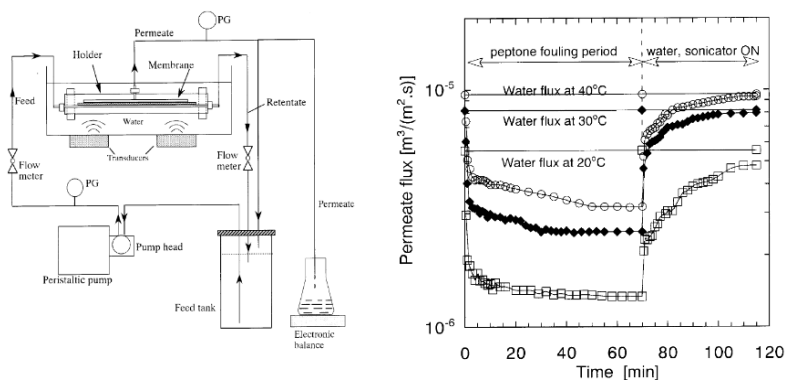


Рис. 1: Экспериментальная установка и график демонстрирующий, эффективность очистки мембраны

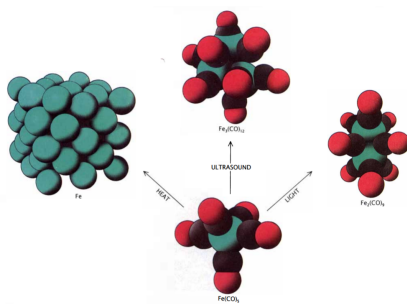


Рис. 2: Особенности сонохимических реакций

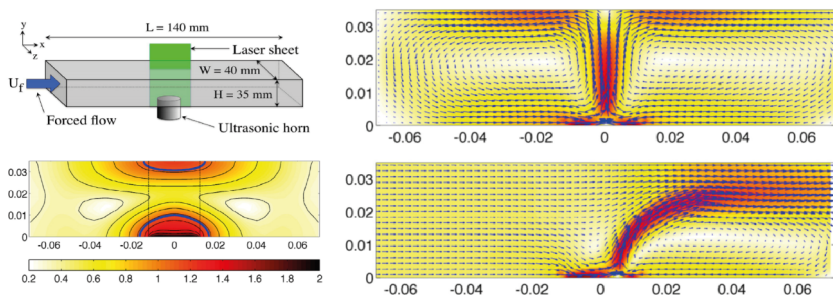


Рис. 3: Результаты численного моделирования по определению акустического течения при наличии потока жидкости

всём мире. Основной интерес исследователей заключается в прогнозировании кавитационных событий внутри реактора. Как видно из статьи [6], являющейся обзором некоторых работ по моделированию УЗ полей, до двухтысячного года существовал ряд проблем в осуществлении расчётов, связанный с моделированием подобного рода систем. Так, расчёт моделей УЗ излучателей с помощью линейных моделей позволяет получить качественные результаты при малой мощности УЗ излучателя. При высокой мощности УЗ излучателей, исследователи должны учитывать различные нелинейные явления (активное движение среды под воздействием УЗ, вибрация стенок и других элементов реактора, акустические явления, мультифизическая связь параметров), которые делают анализ более сложным.

Помимо этого, численное моделирование в системах, где исследуемая жидкость содержит различные включения, такие как газовые и парогазовые пузырьки (рис. 4), твёрдые частицы (рис. 5), а также ионы солей, присутствующие в растворах, исследованы слабо [7, 8] и поэтому вызывают особый интерес, но требуют экспериментальной верификации ввиду отсутствия общепринятых методик расчёта.

Помимо этого в 2017 г. была опубликована расчётная статья [9], рассматривающая возможность предсказания акустического течения при действии на него потока жидкости (рис. 3). В современных реалиях, бурное развитие электронных компонентов приводит к поиску новых технологий охлаждения [10, 11]. Так, на смену технологии воздушного охлаждения (рис. 6, а) пришла технология жидкостного охлаждения. Однако в этом случае необходимо использовать различные насосы. Помимо этого ещё одним способом является использование иммерсионного охлаждения (рис. 6, б). На сегодняшний день многие корпорации мирового уровня начинают тестировать подобную технологию. Так, корпорация Microsoft погрузила свои серверы в океан, предварительно поместив их в огромную цилиндрическую полость и погрузив их в иммерсионную жидкость [12, 13]. Таким образом, за счёт того, что температура океана в среднем на глубине всегда одинакова, то можно использовать океан как огромный теплообменник. Эта методика уже стала самой экономически выгодной. Однако процессы охлаждения микроэлектроники механическими средствами тоже претерпевают новую веху развития. Многие крупные корпорации, такие как Intel и AMD, уже сейчас ищут новые способы улучшения теплоотведения без использования механических насосов. Применение ультразвука может стать одним из таких способов. Акустическое течение имеет ряд особенностей, одна из которых описана в работе [14], так, геометрия сонохимического реактора может привести к увеличению интенсивности звука из-за многократных отражений, а не к быстрому снижению интенсивности, которое обычно наблюдается при увеличении расстояния от излучателя (рис. 7, а). Помимо этого, важный вклад в распределение акустического давления вносят кавитационные пузырьки [15], а именно области их образования и движения (рис. 7, б). Как видно из обзора лите-

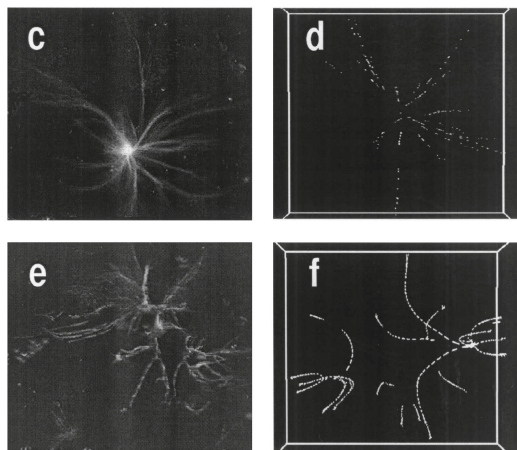


Рис. 4: Динамика движения пузырьков: с, е – экспериментальные результаты; d, f – численное моделирование. Иллюстрация из статьи [7]

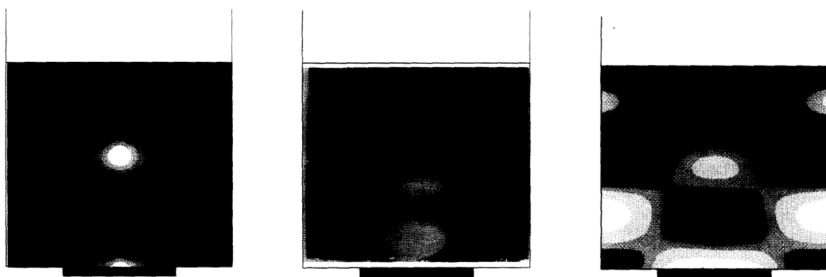


Рис. 5: Иллюстрация областей пониженного давления с использованием частиц алюминиевой фольги. Иллюстрация из статьи [8]

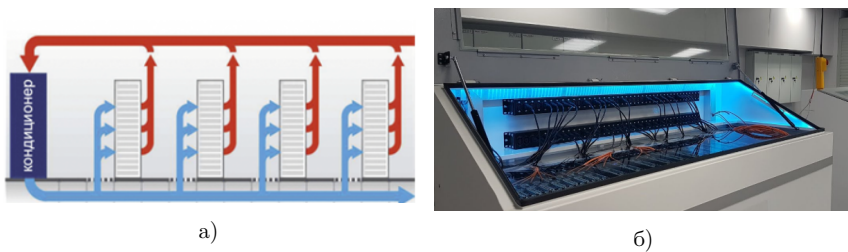


Рис. 6: Технологии охлаждения: а – классическая; б – на основе иммерсионной жидкости

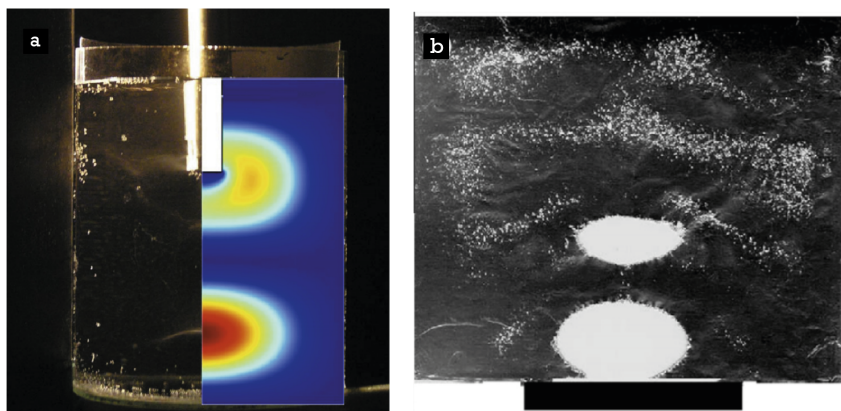


Рис. 7: Особенности, возникающие в сонохимических реакторах: *а* – увеличение интенсивности, *б* – движение кавитационных пузырьков

ратуры, использование УЗ в различных технических задачах со временем только нарастает. Для всех подобных процессов важно понимать, как распределено акустическое давление в области воздействия УЗ, так как от этого зависят особенности возникающих течений и места возникновения кавитационных пузырьков.

Существует много способов визуализации процессов, происходящих в прозрачных жидкостях и суспензиях:

- шлирен-метод;
- доплеровский метод;
- метод флуоресцентной визуализации;
- метод PIV.

Шлирен-метод является развитием метода Фуко. Он позволяет обнаруживать оптические неоднородности в прозрачных и преломляющихся средах. Отличительной чертой Шлирен-метода является его высокая точность, что позволяет применять его для визуализации течений в воздушной среде. Также он часто используется при исследовании процессов, происходящих в механики жидкости.

Доплеровский метод заключается в использовании доплеровского измерителя, основанного на эффекте Доплера. Для измерения скорости потока в различных жидких и газообразных средах доплеровские измерители фиксируют частоту отражения излучения от микрочастиц. Частота принятого сигнала, отражённая от частицы, отличается от частоты исходного сигнала, и разница между частотами зависит от соотношения скоростей объектов.



Метод флюоресцентной визуализации основан на использовании флюоресцирующего красителя. Флюоресцирующий краситель добавляется в исследуемый динамический процесс и затем по средствам фото и видео оборудования происходит фиксация его движения.

Метод PIV (Particle Image Velocimetry) – это метод цифровой трассерной визуализации полей. Основан на цифровой обработке изображений, введенных в поток частиц. Для исследования потока необходимо осветить лазером интересующую область потока, для которого будут построены карты векторов скорости. После чего в исследуемую среду вводятся светоотражающие частицы, фиксирующие движение частиц за единицу времени. Далее полученные изображения обрабатываются на персональном компьютере.

У каждого из этих методов имеются сильные и слабые стороны, но из-за отсутствия градиента плотности использование Шлирен-метода не является возможным в условиях данной работы. Доплеровский метод также не является оптимальным вариантом для данного эксперимента ввиду своих конструктивных особенностей. Поэтому в данном исследовании было решено использовать метод трассерной и флюоресцентной визуализации.

**Цель выпускной квалификационной работы** состоит в визуализации, а также качественном и количественном исследовании особенностей возникающих течений в различных сонохимических реакторах.

# 1. Эксперименты по визуализации акустических течений от источника ультразвука 20 кГц

## 1.1. Описание экспериментальной установки, методики измерений и численного расчёта

Эксперименты проводились в кювете, изготовленной из оргстекла толщиной 3 мм. Экспериментальная установка представляла собой прямоугольную полость с характерными размерами  $110 \times 116 \times 160 \text{ мм}^3$  (рис. 8). Электродинамический источник ультразвука (рис. 8, №4) находился заподлицо с дном кюветы. В качестве рабочих жидкостей использовались: дистиллированная вода и водные растворы NaCl. Содержание соли в растворах варьировалось и составляло: 5%, 15%.

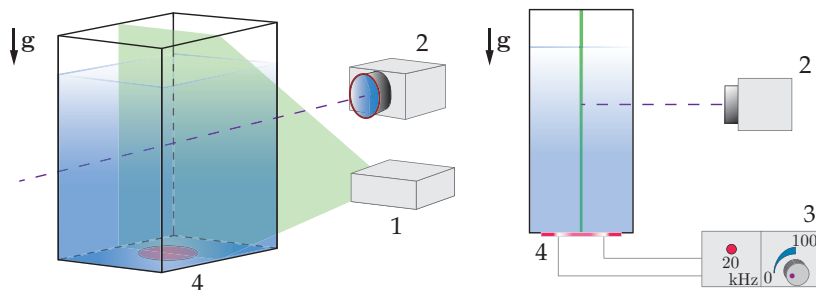


Рис. 8: Схема экспериментальной установки

Для использования метода PIV в жидкость вводились светоотражающие полиамидные частицы с нейтральной плавучестью, средний размер которых составлял 65 мкм. Движение частиц фиксировалось на скоростную видеокамеру (рис. 8, №2). В качестве источника света использовался твердотельный постоянный лазер с длиной волны  $\lambda = 532 \text{ нм}$  (рис. 8, №1). Для формирования лазерного ножа с разной толщиной применялся объектив. Раскрытие лазерного пучка происходило за счёт цилиндрической линзы. Полученные данные обрабатывались при помощи программного комплекса DaVis - LaVision. Кроме того, для визуализации акустического течения использовался флуоресцентный краситель Родамин Б. В этом случае динамика распространения флуоресцирующего вещества регистрировалась на скоростную видеокамеру. Помимо этого, в работе было исследовано распределение акустического давления, возникающего в результате действия источника ультразвука с частотой 20 кГц на жидкость, заполняющую кювету.

Численный расчет, используемый в настоящей работе для большей наглядности в представлении экспериментальных результатов, проводился доцентом кафедры теоретической физики к.ф.- м.н. Л.С. Клименко в ходе выполнения гранта РФФИ №17 – 41 – 590974 в осесимметричной постановке в пакете Comsol. Расчётная область имела форму цилиндра с круглым основанием радиуса 55 мм и высотой 140 мм. На стенках кюветы ставились условия отражения. На дне кюветы располагался цилиндрический пьезоэлемент радиуса 50 мм и высотой 10 мм, который выполнял роль источника ультразвука. Чтобы воссоздать работу источника УЗ, рассчитывалось уравнение деформации пьезоэлемента под действием протекающего тока. Для моделирования верхней свободной границы кюветы была построена дополнительная область, заполненная воздухом, на внешней границе области ставилось условие излучения, имитирующее бесконечное пространство (рис. 9). Для описания акустического давления в жидкости и воздухе рассчитывалось уравнение распространения акустической волны. Подробнее о методике подобных расчётов можно узнать в статье [16].

При проведении натурного эксперимента для определения относительного акустического давления была использована кювета, описанная ранее (рис. 8, 10). В качестве исследуемой жидкости также выступил: дистиллированная вода и растворы воды с содержанием соли (NaCl) 2, 15, 30%. Экспериментальные результаты были наложены на поля давлений, полученные с применением численной модели. Для измерения степени интенсивности акустического поля использовался пьезо-керамическая пластина диаметром 2 см (рис. 10, №3) входящая в состав сенсора вибрации KS0272, сигнал которого интерпретировался с использованием микроконтроллера *ArduinoUNO* (рис. 10, №2) и ПК. Опрос микроконтроллера проводился с частотой 1/100 с. В течении трёх минут наблюдалось установление акустического течения в кювете, поэтому этот интервал времени не учитывался при вычислениях средних значениях измеряемой величины. Пример сигнала, получаемый от датчика, показан на рис. 11.

Итоговый результат отмечался на диаграмме с координатами положения датчика и относительной интенсивностью сигнала (рис. 15). Для получения экспериментальных результатов были выбраны девять точек измерений, расположенных по серединам сторон, в центре и угле горизонтальных сечений экспериментальной кюветы, находящихся на высотах в 12, 70 и 120 мм от дна кюветы (рис. 11).

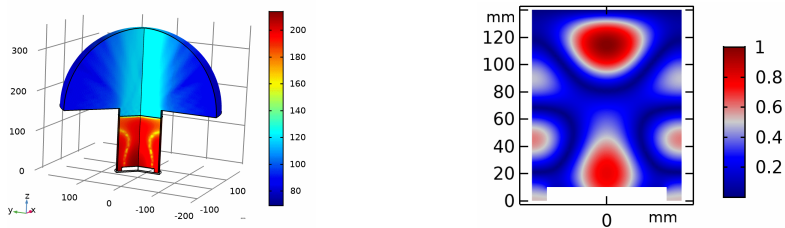


Рис. 9: Визуализация численной модели и вариант расчёта относительного акустического давления, получаемого для воды в среде Comsol

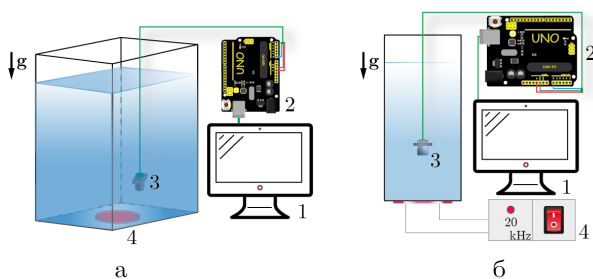


Рис. 10: Схема экспериментальной установки, предназначенной для исследования акустического давления в жидких средах

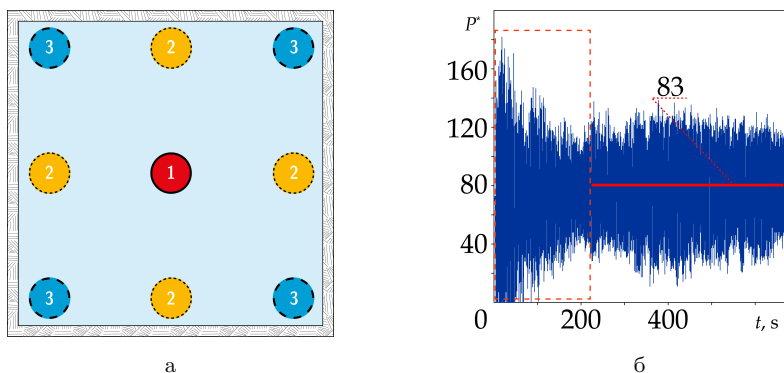


Рис. 11: Эксперимент с датчиком давления: *а* – схема размещения пьезокерамического сенсора в горизонтальном сечении кюветы; *б* – сигнал, получаемый от сенсора в точке 1 для  $\text{H}_2\text{O}$ . Первые 200 с исключались из рассмотрения, последующие показания осреднялись по времени

## 1.2. Результаты

Воздействие горизонтального излучателя УЗ на жидкость сосредоточено в цилиндрическом объёме, в котором выделяют несколько зон в зависимости от расстояния от излучателя. В предварительных экспериментах был использован метод флуоресцентной визуализации (рис. 12, *a*), а в дальнейшем – метод PIV (рис. 13). Применение данных методов позволило продемонстрировать возможность визуализации акустического течения, а также изучить некоторые его особенности.

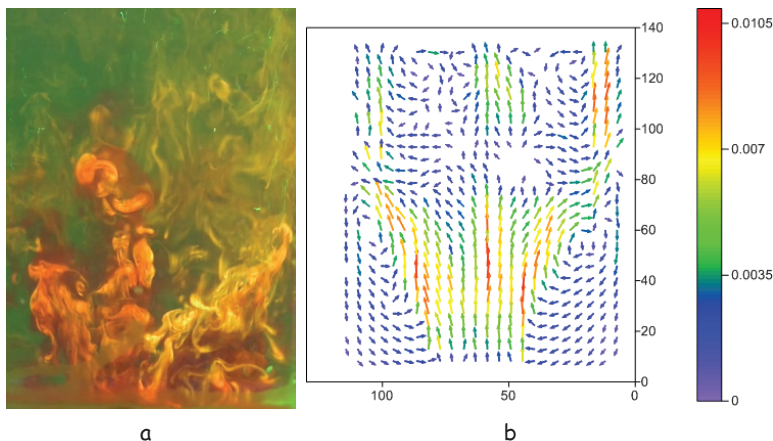


Рис. 12: Визуализация структуры акустического УЗ течения: *a* – методом флуоресцентной визуализации, *b* – осреднённое по времени течение, полученное с использованием метода PIV для дистиллированной воды

На рис. 12 наблюдается качественное совпадение визуализации родамином и осредненного по времени поля скорости частиц, полученного методом PIV. При распространении ультразвука в воде скорость частиц на 30% превышает скорость в 2%-ном растворе соли. Рассматривая осредненные по времени течения для воды и двух растворов соли, можно заметить снижение средней скорости движения частиц при увеличении содержания соли в воде. Такое поведение PIV частиц в жидкости, очевидно, связано с распределением акустического давления внутри кюветы. На рис. 14, *a* – представлены результаты, полученные для дистиллированной воды, *b* – дистиллированная вода с содержанием NaCl 2 %, *в* – дистиллированная вода с содержанием NaCl 15 %, *г* – дистиллированная вода с содержанием NaCl 30 %. Красным шрифтом показаны цифры, полученные в ходе экспериментов, результаты которых не согласуются с результатами численного моделирования, а белым шрифтом обозначены результаты, совпадающие с расчётными. Помимо этого, на рисунке используется маркер стрелки для демонстрации направления отклонения

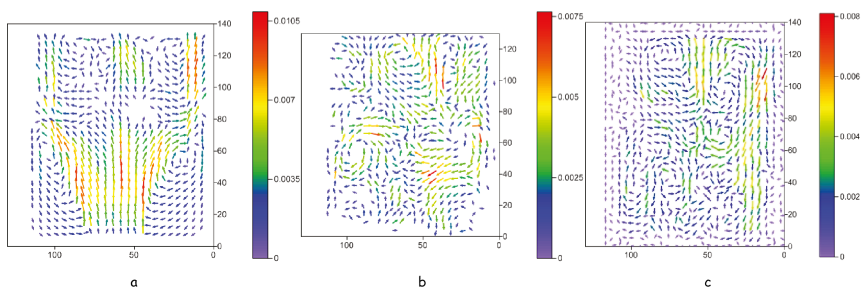


Рис. 13: Поля скорости частиц, осреднённые по времени для различных растворов, м/с

численных результатов от экспериментальных. Используемый в эксперименте датчик не являлся точечным, а представлял из себя пластину диаметром 2 см, поэтому на иллюстрациях обозначены соответствующие размеру датчика области.

Помимо этого, на рис. 14, 15 используется две цветовые шкалы. Одна из которых показывает среднее значением давления регистрируемого датчиком –  $P^*$ . Вторая шкала обозначает безразмерное (нормированное давление) –  $P/P_{max}$ , фиксируемое в исследуемой области с использованием численного расчёта. В качестве осей выбрана  $z$  и  $x$  компонента (рис. 14, 15), измеряемая в мм. В интервале значений координаты  $x$  от  $-50$  до  $50$  расположен УЗ излучатель.

По результатам, представленным на рис. 14, б, в видно несовпадение расчетных данных с экспериментальными. Однако центральные точки, полученные в ходе эксперимента в случае дистиллированной воды (рис. 15, а), совпадают с численными результатами. В то время как точки, находящиеся вблизи стенки, не совпадают с расчётом. Как видно из графика рис. 15, б, для 30%-ного раствора соли (рис. 14, з) наблюдается обратная ситуация, т.е. экспериментальные значения не совпадают над источником ультразвука, в то время как результаты у стенки согласуются с расчётными, что обусловлено использованием упрощенной расчетной модели, в которой не учитываются: колебания стенок, образование кавитационных пузырьков, конвективное движение, а также особенности геометрии экспериментальной ячейки. По экспериментальным данным заметно, что увеличение содержания соли в воде значительно влияет на интенсивность течения, как и было показано ранее. Такое поведение связано с маленьким градиентом акустического давления между разными областями кюветы, как и показано на рис. 14, а также с резким изменением акустического импеданса при увеличении содержания соли в воде (рис. 14). Как известно, акустический импеданс вещества  $Z$  определяется исходя из его плотности и скорости звука в данной среде:

$$Z = \rho c.$$

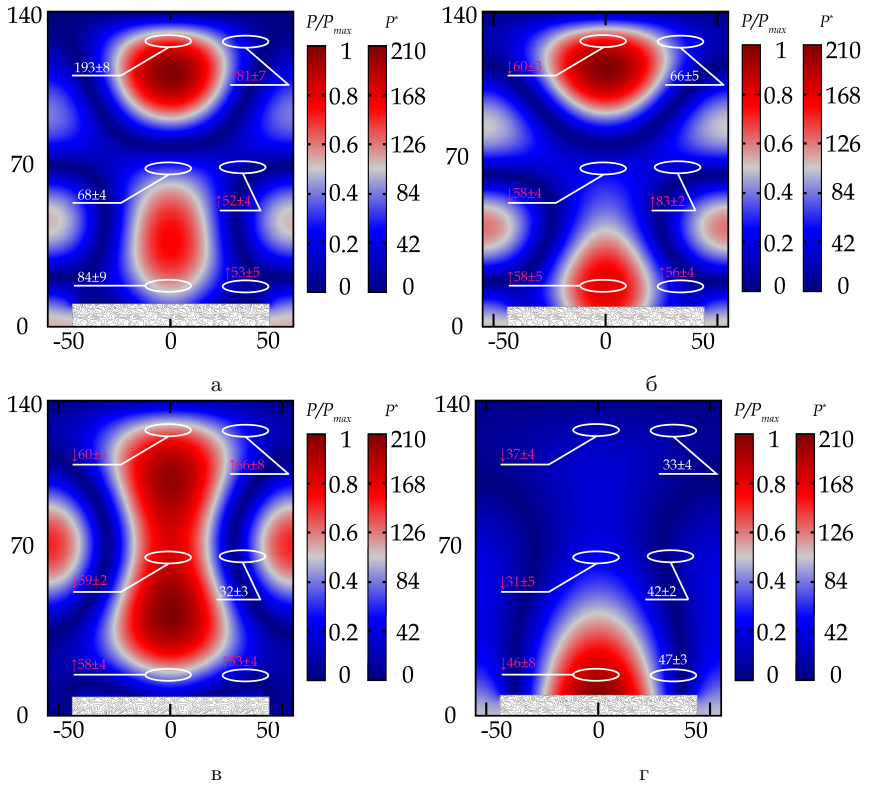


Рис. 14: Иллюстрации, полученные с использованием численной модели, с нанесенными экспериментальными данными для: а – воды, б – солевого 2%-ного раствора, в – солевого 15% раствора и г – солевого 30% раствора

Так, плотность воды составляет  $997 \text{ кг/м}^3$ , при добавлении 1% раствора соли она повышается до  $1008 \text{ кг/м}^3$ , увеличение концентрации до 14% поднимает значение плотности до  $1146.2 \text{ кг/м}^3$ . Скорость звука при увеличении солёности также растёт, эмпирически показано, что увеличение содержания соли на 1‰ приводит к увеличению скорости звука в растворе на 1 м/с. Как известно, УЗ излучение отражается от границ с различными значениями акустического импеданса, в настоящей работе таких границ множество, так как отражение происходит от поверхности пузырьков различного типа (рис. 20), возникающих в жидкости под действием УЗ. Чем больше различия в акустическом импедансе для таких сред, тем сильнее происходит отражение УЗ (рис. 16), подобный эффект описан в патенте [17].

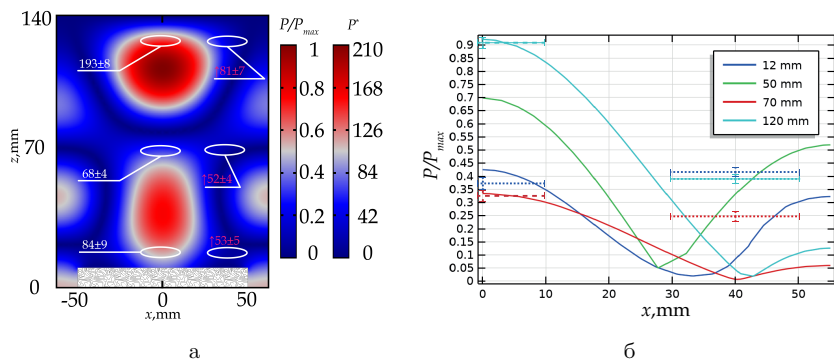


Рис. 15: Результаты исследований: *а* – распределение абсолютного значения относительного акустического давления, *б* – зависимость абсолютного давления от координаты над УЗ излучателем

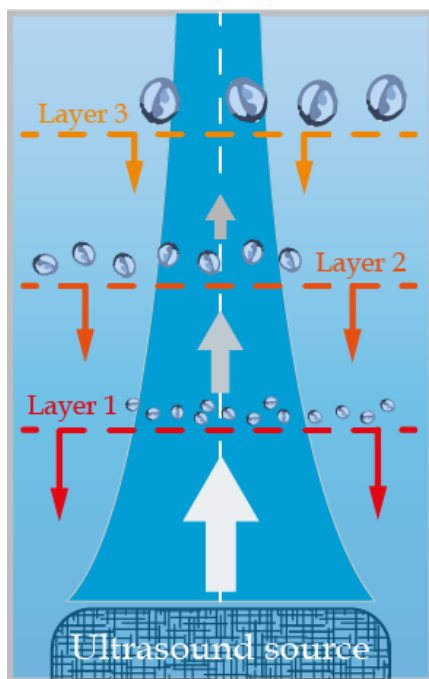


Рис. 16: Схематическая иллюстрация ослабления акустического давления при прохождении УЗ через зоны с различным акустическим импедансом, обусловленное возникающими в жидкости под действием ультразвука, пузырьками различного типа



## 2. Эксперименты по визуализации акустических течений от источника ультразвука 1.7 МГц

### 2.1. Описание экспериментальной установки и методики измерений

Для изучения особенностей течения, возникающих от 1.7 МГц источника ультразвука, была изготовлена экспериментальная установка из оргстекла толщиной 3 мм, представляющая собой прямоугольную полость с характерными размерами  $700 \times 250 \times 250 \text{ мм}^3$  (рис. 17). В качестве рабочей жидкости использовалась дистиллированная вода.

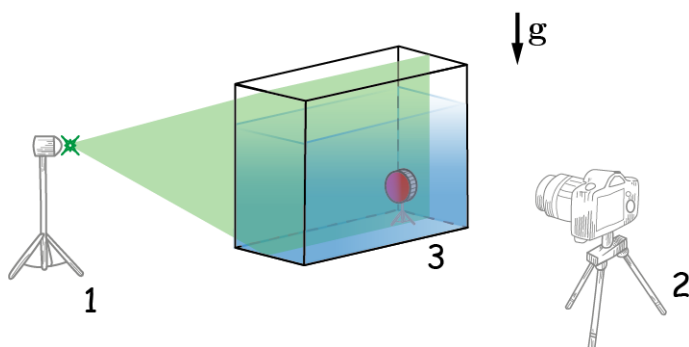


Рис. 17: Схема экспериментальной установки

Для визуализации образуемого течения был использован метод PIV. Для этого в жидкость вводились светоотражающие полиамидные частицы с нейтральной плавучестью, с средним размером около 65 мкм. В качестве источника света применялся лазерный нож. Длина волны лазера составляла  $\lambda = 532 \text{ нм}$  (рис. 8, №1). Движение таких трассеров в свете лазера фиксировалось с использованием скоростной камеры (рис. 8, №2). После чего полученные данные обрабатывались с использованием программного комплекса DaVis - LaVision. Также для визуализации звукового течения применялся флюоресцентный краситель Родамин Б.

## 2.2. Результаты экспериментов

Ультразвуковой излучатель, помещенный горизонтально в жидкость, создает градиент акустического давления, обуславливающий чего наблюдается движение жидкости (рис. 19). У излучателя формируется струя, которая, как видно из рис. 19, разрушается вблизи стенки на расстоянии порядка 60 см. Из поля скорости частиц, представленного на рис. 18, можно наблюдать, что максимальная скорость частиц достигается в центре образуемой струи. Также видно, что максимальная скорость составляет  $v_{max} = 0.025$  см/с.

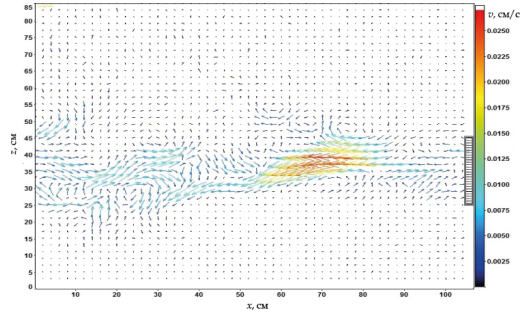


Рис. 18: Поле скорости частиц при воздействии 1.7 МГц УЗ излучателя

Под действием ультразвука не только образуется акустическое течение, но и наблюдается эффект кавитации. В результате распространения в жидкости ультразвуковой волны возникает переменное звуковое давление, действие которого приводит к тому, что жидкость попеременно испытывает сжатие и растяжение. Растягивающие усилия в области разрежения волны приводят к образованию в жидкости разрывов, как следствие появление мельчайших пузырьков, заполненных газом.

Такие пузырьки в результате действия переменного давления не двигаются вме-

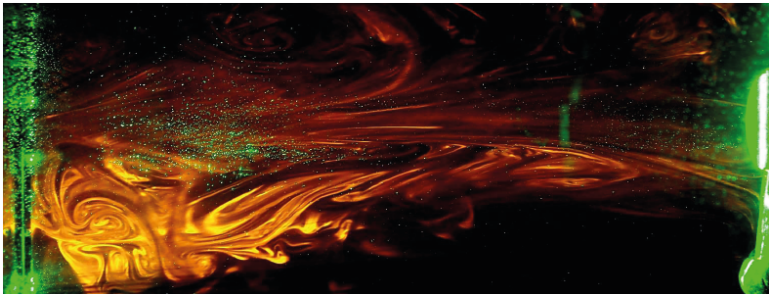


Рис. 19: Визуализация акустического течения с помощью красителя Родамин Б

сте с потоком жидкости. А колеблются в определенной области. Если рядом с пузырьком появляется еще один пузырек, то может наблюдаться эффект коалесценции, в результате которого происходит схлопывания двух пузырей и последующее их всплытие под действием силы Архимеда.

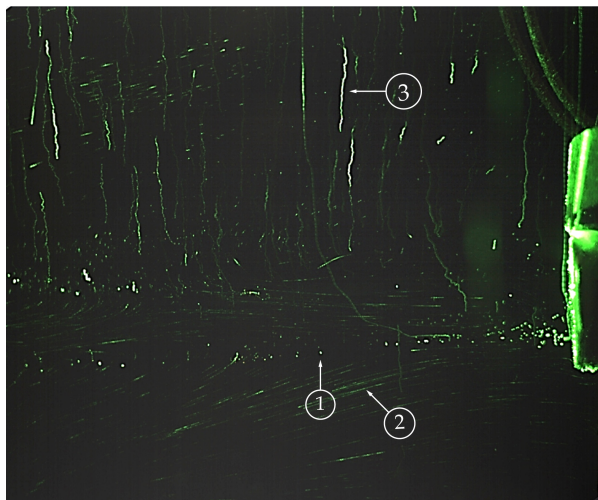


Рис. 20: Процессы всплытия и кавитации под действием ультразвукового излучателя

На рис. 20 в области, находящейся ниже источника ультразвука, наблюдается образование кавитационных пузырьков. В этом случае видны треки пузырьков различных типов (рис. 20): первый тип – это инерционные пузырьки, левитирующие в узлах акустической волны, второй тип – неинерционные пузырьки (стримеры), третий тип – крупные пузырьки, возникшие в результате коалесценции более мелких пузырьков и всплывающие под действием силы Архимеда.

### 3. Выводы

В ходе выполнения работы показана возможность визуализации акустических течений от 20 кГц источника УЗ с использованием метода PIV и метода флуоресцентной визуализации с применением родамина. Проведены измерения интенсивности акустического давления в сонохимическом реакторе с использованием сенсора вибрации *KS0272*, сигнал которого интерпретировался с использованием микроконтроллера *ArduinoUNO*. Результаты экспериментов были нанесены на поля относительного акустического давления, выполненными в среде *Comsol* с применением упрощённой численной модели сонохимического реактора.

В ходе работы было обнаружено, что при добавлении соли в различных концентрациях происходит существенное изменение в распределении акустического давления. Так, в чистой воде имелись лишь две области повышенного давления, одна из которых находилась непосредственно над источником УЗ, а вторая оказалась вблизи поверхности жидкости; данный эффект связан с наложением звуковых волн от источника УЗ, подобный эффект наблюдался в статье [14]. При увеличении содержания соли максимальное значение акустического давления в жидкости снижается, что связано с увеличением содержания соли и особенностями динамики парогазовых пузырьков в таких растворах, что и стало причиной значительного увеличения звукового импеданса в таких системах.

В экспериментах с источником ультразвука 1.7 МГц показана как принципиальная возможность использования не только PIV частиц и флуоресцирующего красителя для оценки поля скорости акустического течения, но и в качестве трассеров, возникающих под действием УЗ парогазовых пузырьков различных типов. Так, инерционные пузырьки могут применяться для обнаружения минимумов стоячих акустических волн, стримеры могут быть использованы в качестве трассеров, для обнаружения течений, возникающих в жидкости, а крупные всплывающие пузырьки являются показателем интенсивности коалесценции в жидкости.

За время обучения в ПГНИУ всего опубликовано 9 работ, из них, по результатам настоящего исследования, издано две публикации, индексируемые в системе цитирования РИНЦ.

## Список литературы

- [1] Ozkan Safak Gokhan. Effects of simultaneous ultrasonic treatment on flotation of hard coal slimes // Fuel. — 2012. — Vol. 93. — P. 576–580.
- [2] Tsybry IK, Vyalikov IL. Analysis of cavitation on the surface of steel under the ultrasonic cleaning // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering / IOP Publishing. — Vol. 177. — 2017. — P. 012135.
- [3] Soria Ana Cristina, Villamiel Mar. Effect of ultrasound on the technological properties and bioactivity of food: a review // Trends in food science & technology. — 2010. — Vol. 21, no. 7. — P. 323–331.
- [4] Suslick Kenneth S. The chemical effects of ultrasound // Scientific American. — 1989. — Vol. 260, no. 2. — P. 80–87.
- [5] Li Jianxin, Sanderson RD, Jacobs EP. Ultrasonic cleaning of nylon microfiltration membranes fouled by Kraft paper mill effluent // Journal of Membrane Science. — 2002. — Vol. 205, no. 1-2. — P. 247–257.
- [6] Dubus Bertrand, Campos-Pozuelo Cleofé. Numerical modeling of high-power ultrasonic systems: current status and future trends // Ultrasonics. — 2000. — Vol. 38, no. 1-8. — P. 337–344.
- [7] Acoustic cavitation structures and simulations by a particle model / R Mettin, S Luther, C-D Ohl, W Lauterborn // Ultrasonics Sonochemistry. — 1999. — Vol. 6, no. 1-2. — P. 25–29.
- [8] Acoustic cavitation field prediction at low and high frequency ultrasounds / J-L Laborde, C Bouyer, J-P Caltagirone, Alain Gérard // Ultrasonics. — 1998. — Vol. 36, no. 1-5. — P. 581–587.
- [9] Louisnard Olivier. A viable method to predict acoustic streaming in presence of cavitation // Ultrasonics sonochemistry. — 2017. — Vol. 35. — P. 518–524.
- [10] Cooling energy consumption investigation of data center it room with vertical placed server / Xiaoqing Zhang, Theresa Lindberg, Ning Xiong et al. // Energy Procedia. — 2017. — Vol. 105. — P. 2047–2052.
- [11] Schumacher Donald J, Beckman William C. Data center cooling system. — 2002. — Apr. 23. — US Patent 6,374,627.
- [12] Tuma Phillip E. The merits of open bath immersion cooling of datacom equipment // 2010 26th Annual IEEE Semiconductor Thermal Measurement and Management Symposium (SEMI-THERM) / IEEE. — 2010. — P. 123–131.

- [13] Effects of mineral oil immersion cooling on IT equipment reliability and reliability enhancements to data center operations / Jimil M Shah, Richard Eiland, Ashwin Siddarth, Dereje Agonafer // 2016 15th IEEE Intersociety Conference on Thermal and Thermomechanical Phenomena in Electronic Systems (ITherm) / IEEE. — 2016. — P. 316–325.
- [14] Optimisation of 20 kHz sonoreactor geometry on the basis of numerical simulation of local ultrasonic intensity and qualitative comparison with experimental results / Jiri Klima, A Frias-Ferrer, José González-García et al. // Ultrasonics sonochemistry. — 2007. — Vol. 14, no. 1. — P. 19–28.
- [15] Spatio-temporal dynamics of cavitation bubble clouds in a low frequency reactor: comparison between theoretical and experimental results / Guillaume Servant, J-L Laborde, Alain Hita et al. // Ultrasonics Sonochemistry. — 2001. — Vol. 8, no. 3. — P. 163–174.
- [16] Tangsopha Worapol, Thongsri Jatuporn, Busayaporn Wutthikrai. [Simulation of ultrasonic cleaning and ways to improve the efficiency](#). — 2017. — 03. — P. 1–4.
- [17] Shokrollahi Nima, Tobocman William, Roth Sanford, Izatt Joseph. Method and apparatus for ultrasound imaging using acoustic impedance reconstruction. — 2001. — Mar. 13. — US Patent 6,200,266.

## Список литературы

1. Knuth Donald E. TEX: a system for technical text // American Mathematical Society, Providence, RI. — 1979.
2. Knuth Donald Ervin, Bibby Duane. The texbook. — Addison-Wesley Reading, 1984. — Vol. 15.

*Учебное издание*

**Макаров** Сергей Олегович  
**Рыбкин** Константин Анатольевич

## **Межфазная гидродинамика**

Учебно-методическое пособие

Редактор: *Н. И. Стрекаловская*  
Корректор *А. В. Цветкова*  
Компьютерная верстка: *К. А. Рыбкин*

---

Подписано в печать 29.06.2021. Формат 60×84/16.  
Усл. печ. л. 5,35. Тираж 100 экз. Заказ 111

---

Издательский центр  
Пермского государственного  
национального исследовательского университета.  
614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15

Типография ПГНИУ.  
614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15