

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Уральское региональное отделение
Российской академии космонавтики
имени К. Э. Циолковского

ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ и УПРАВЛЕНИЯ

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ



Межвузовский сборник научных трудов

Издается с 1972 г.

Выпуск 53



Пермь 2021

УДК 531+681.5
ББК 22.21+32.915
П78

ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И УПРАВЛЕНИЯ. Нелинейные динамические системы : межвузовский сборник научных трудов / Пермский государственный национальный исследовательский университет. – Пермь, 2021. – Вып. 53. – 80 с.

ISBN 978-5-7944-3720-1 (вып. 53)
ISBN 978-5-7944-1360-1

В настоящем выпуске опубликованы статьи о научных исследованиях в области управления нелинейными динамическими объектами. Рассматриваются математические модели различных систем, методы их оптимального управления и др.

Издание предназначено для научных работников, инженеров-механиков, аспирантов, студентов старших курсов технических факультетов вузов.

PROBLEMS OF MECHANICS AND CONTROLLABLES. Nonlinear dynamic systems : A collection of scientific papers / Perm State University. – Perm, 2021. – 80 p.

The present issue problems of the optimal control theory, numerical solution of nonlinear problems and the methods of control of some dynamic systems.

The issue is meant for researchers, post-graduates, engineers and students, studying nonlinear dynamic systems.

УДК 531+681.5
ББК 22.21+32.915

Рецензент: кафедра теоретической механики Российского университета дружбы народов (*д-р физ.-мат. наук, проф. И.А. Мухаметзянов*)

Печатается по решению ученого совета механико-математического факультета Пермского государственного национального исследовательского университета

Редакционная коллегия

В.В. Маланин (*д.т.н., проф., Пермский государственный национальный исследовательский университет*) – главный редактор,

С.В. Лутманов (*к.ф.-м.н., доц., Пермский государственный национальный исследовательский университет*) – секретарь

Р.Г. Мухарлямов (*д.ф.-м.н., проф., Российский университет дружбы народов*) – зам. гл. редактора, **Макеев** (*д.ф.-м.н., проф., Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов*), **В.И. Яковлев** (*д.ф.-м.н., проф., Пермский государственный национальный исследовательский университет*)

Издание включено
в национальную информационно-аналитическую систему
«Российский индекс научного цитирования» (РИНЦ)

ISBN 978-5-7944-3720-1 (вып. 53)
ISBN 978-5-7944-1360-1

© Пермский государственный
национальный исследовательский
университет, 2021

Содержание

Выпуск 53 / 2021

Гуревич Г.С., Лутманов С.В., Ильев О.И. Плоская модель траектории движения материальной точки.....	4
Кусяков А.Ш. Вероятностный анализ подкрепленных цилиндрических оболочек из композитного материала.....	16
Макеев Н.Н. Движение сложной механической системы с центральной кинетической симметрией	26
Макеев Н.Н. Резонансы и интегрируемость уравнений движения тела переменного состава.....	40
Переварюха А.Ю. Модель деградации запасов при экспертном управлении водными биоресурсами с нерегулярными флуктуациями	51
Полосков И.Е. О стохастической моментной устойчивости упруго связанной двухбалочной системы.....	58
Об авторах опубликованных статей.....	78
Правила оформления статей для межвузовского сборника.....	79

УДК 531/534; 539.12

Г.С. Гуревич

Институт интеграции и профессиональной адаптации

Израиль, г. Нетания,

garoldgurevich37@gmail.com

С.В. Лутманов

Пермский государственный национальный

исследовательский университет

Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15

svlut@yandex.ru

О.И. Ильев

Институт интеграции и профессиональной адаптации

Израиль, г. Нетания

ПЛОСКАЯ МОДЕЛЬ ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Описаны математические модели проекций спиральных траекторий материальных частиц, движущихся в центральном силовом поле и приведены результаты вычислительных экспериментов, доказывающих адекватность гипотезы о спиральности этих траекторий.

Ключевые слова: материальная частица; траектория; вычислительный эксперимент; математическое моделирование.

В статьях [1] и [2] показано, что материальная точка массы m , покидая центральное силовое поле, движется по спиральной траектории.

Так как в статьях [1] и [2] доказано, что материальная точка, покинув центральное силовое поле, может двигаться только по спирали, можно утверждать, что и в пределах центрального силового поля материальная точка массы m так же движется по спиральной траектории.

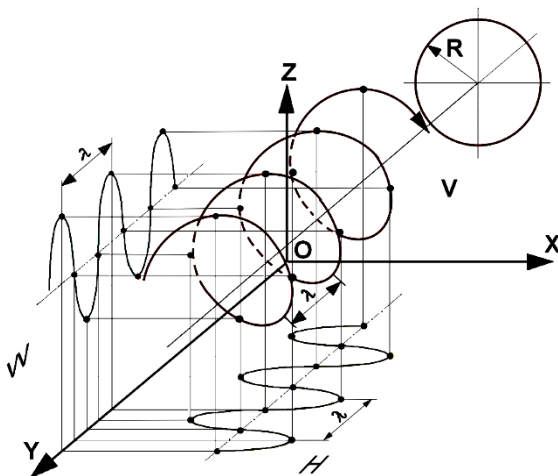


Рис. 1. Спиральная траектория движения материальной точки массы m

На рис. 1 показана спиральная траектория движения материальной точки массы m по спиральной траектории в системе координат XYZ .

Проекция спиральной траектории на фронтальную плоскость V представляет собой окружность радиуса R , а на плоскости W и H представляет собой синусоиды с шагом λ .

Спиральная траектория материальной точки в центральном силовом поле представляет собой замкнутую спиральную траекторию с замкнутой асимптотической осью.

Вне центрального силового поля спиральная траектория материальной точки представляет собой разомкнутую спиральную траекторию с разомкнутой асимптотической осью.

Соответственно проекции замкнутой и разомкнутой спиральной траектории материальной точки на плоскость, будут замкнутыми и разомкнутыми синусоидами [3].

В предлагаемой математической модели удар частицы о связь заменен на ее взаимодействие с пружиной большой жесткости (рис. 2).

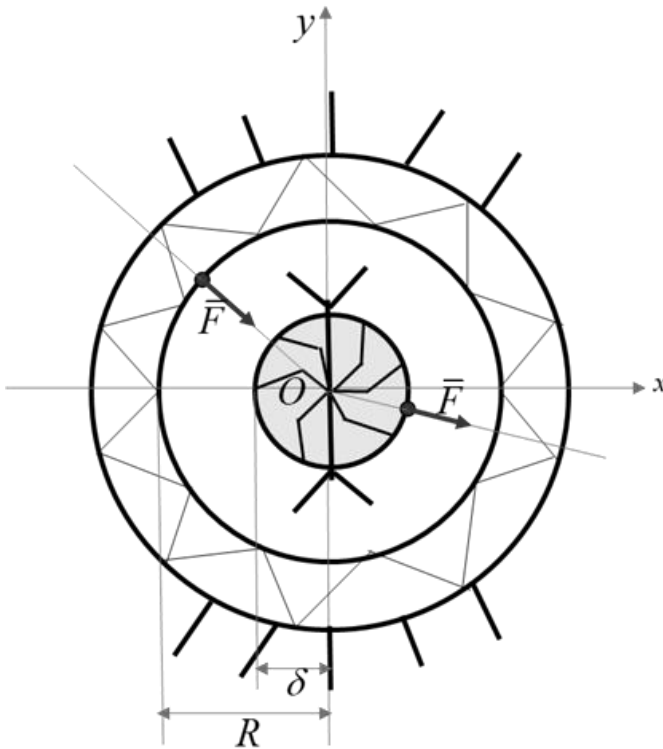


Рис. 2. Графическая модель удара о связь

Числовые данные

$$R = 1, \delta = 0.3, \quad t_0 = 0, T = 120.$$

Силовое поле

Числовые данные

$$c_1 = 1000, c_2 = 5000.$$

$$F_x(x, y) = \begin{cases} -c_1 \cdot (\sqrt{x^2 + y^2} - R) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \sqrt{x^2 + y^2} \geq R, \\ 0, & \delta < \sqrt{x^2 + y^2} < R, \\ c_2 \cdot (\delta - \sqrt{x^2 + y^2}) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \sqrt{x^2 + y^2} \leq \delta \end{cases}$$

$$F_y(x, y) = \begin{cases} -c_1 \cdot (\sqrt{x^2 + y^2} - R) \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \sqrt{x^2 + y^2} \geq R, \\ 0, & \delta < \sqrt{x^2 + y^2} < R, \\ c_2 \cdot (\delta - \sqrt{x^2 + y^2}) \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \sqrt{x^2 + y^2} \leq \delta \end{cases}$$

Здесь

c_1 – жесткость пружины, моделирующей ударное вталкивание частицы во внутрь сферы радиуса R ,

а c_2 – жесткость пружины, моделирующей ударное отбрасывание частицы от сферы радиуса δ .

Графическое изображение проекции силы $F_x(x, y)$ в окрестности сферы радиуса δ (рис. 2).

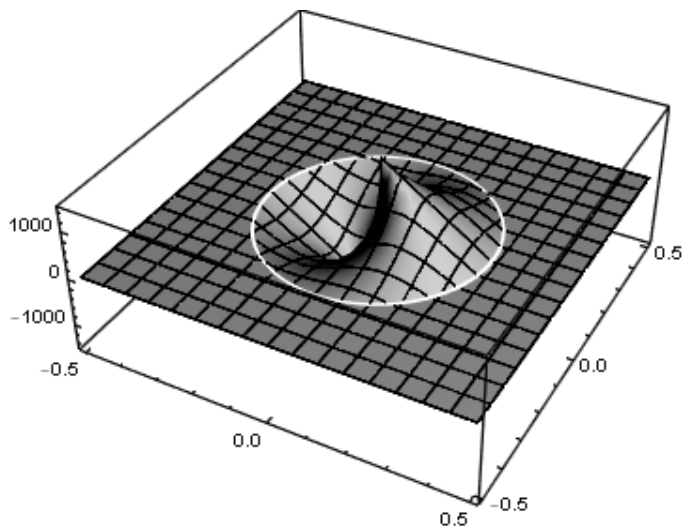


Рис. 3. Графическое изображение проекции силы $F_x(x, y)$ в окрестности сферы радиуса δ

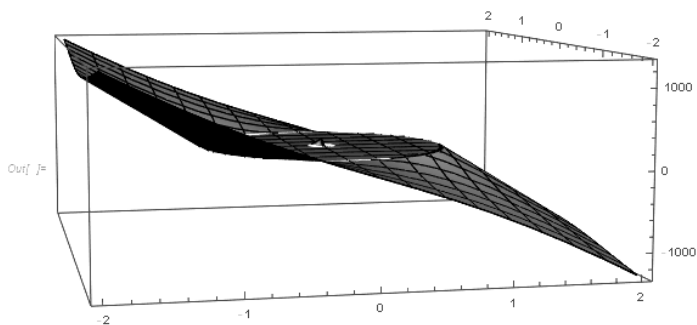


Рис. 4. Графическое изображение проекции силы $F_y(x, y)$ в окрестности сферы радиуса δ

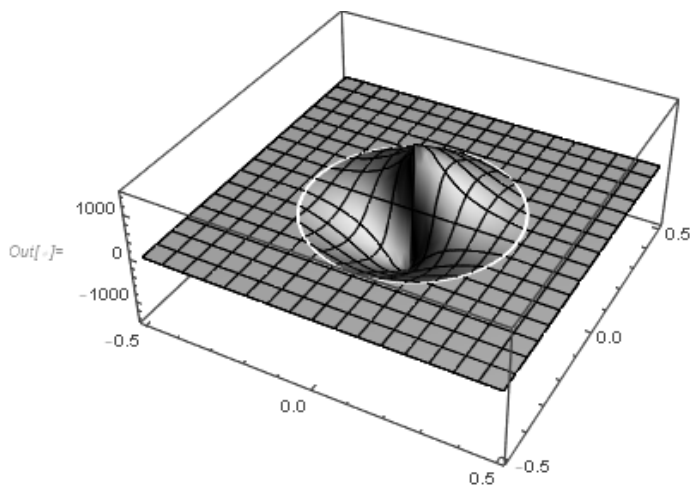


Рис. 5. Графическое изображение проекции силы $F_y(x, y)$. Общий вид

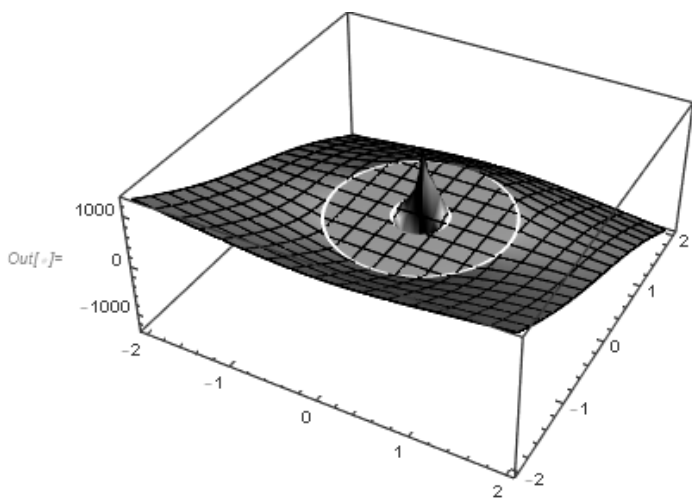


Рис. 6. Графическое изображение проекции силы $F_x(x, y)$ в целом

Дифференциальные уравнения движения частицы единичной массы

$$\ddot{x} = \begin{cases} -c_1 \cdot \left(\sqrt{x^2 + y^2} - R \right) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \sqrt{x^2 + y^2} \geq R, \\ 0, & \delta < \sqrt{x^2 + y^2} < R, \\ c_2 \cdot \left(\delta - \sqrt{x^2 + y^2} \right) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \sqrt{x^2 + y^2} \leq \delta \end{cases}$$

$$\ddot{y} = \begin{cases} -c_1 \cdot \left(\sqrt{x^2 + y^2} - R \right) \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \sqrt{x^2 + y^2} \geq R, \\ 0, & \delta < \sqrt{x^2 + y^2} < R, \\ c_2 \cdot \left(\delta - \sqrt{x^2 + y^2} \right) \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \sqrt{x^2 + y^2} \leq \delta \end{cases}$$

Начальные условия

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad \dot{x}(t_0) = v_{x0}, \quad \dot{y}(t_0) = v_{y0}.$$

Различные случаи начальной скорости

1. Вектор начальной скорости направлен вдоль линии, соединяющей начальное положение частицы и центр сфер.

Числовые данные

$$x_0 = 0.5, \quad y_0 = 0.5, \quad \dot{x}(t_0) = -0.02, \quad \dot{y}(t_0) = -0.02.$$

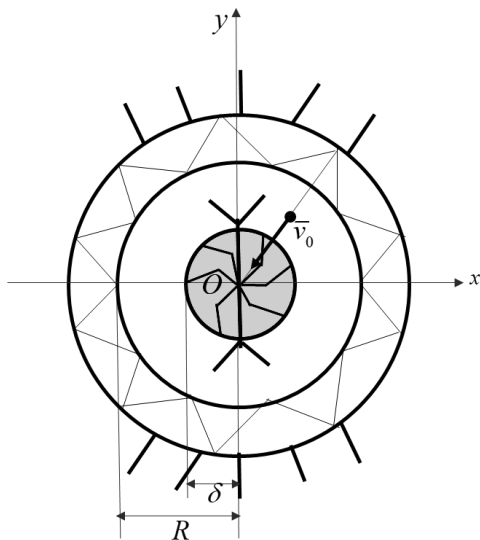


Рис. 7. Начальная скорость точки коллинеарна начальному радиус-вектору

Фактически это одномерный случай, рассмотренный ранее. Траектория полета частицы изображена на рис. 8 синим цветом. Частица совершает колебательное движение вдоль этой траектории.

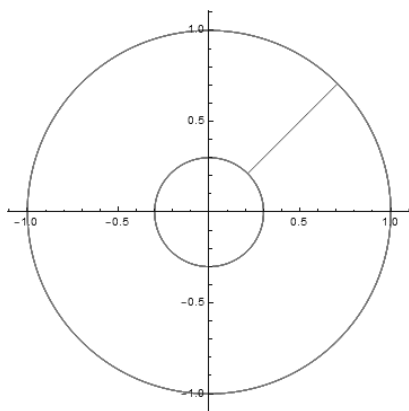


Рис. 8. Траектория полета точки в первом случае

2. Направление вектора начальной скорости мало отличается от направления линии, соединяющей начальное положение частицы и центр сфер.

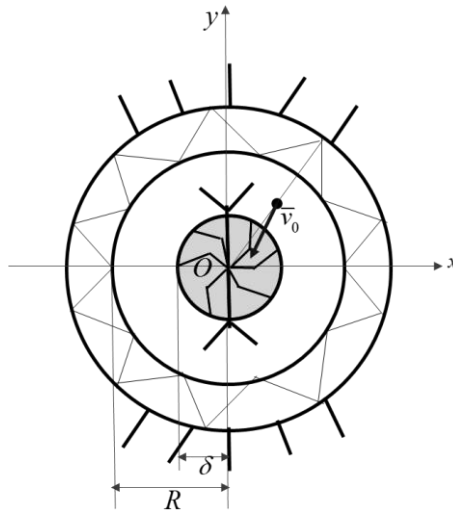


Рис. 9. Начальная скорость точки почти коллинеарна начальному радиус-вектору

Траектория полета частицы изображена (рис. 10) синим цветом.

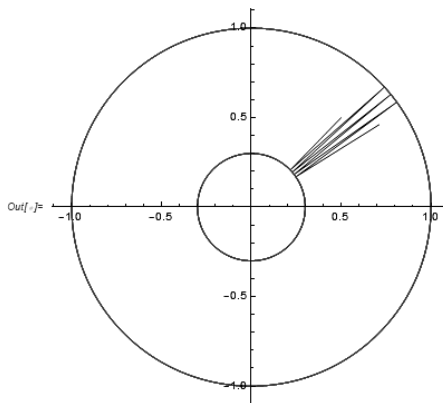


Рис. 10 . Траектория полета точки во втором случае

Направление вектора начальной скорости значительно отличается от направления линии, соединяющей начальное положение частицы и центр сфер.

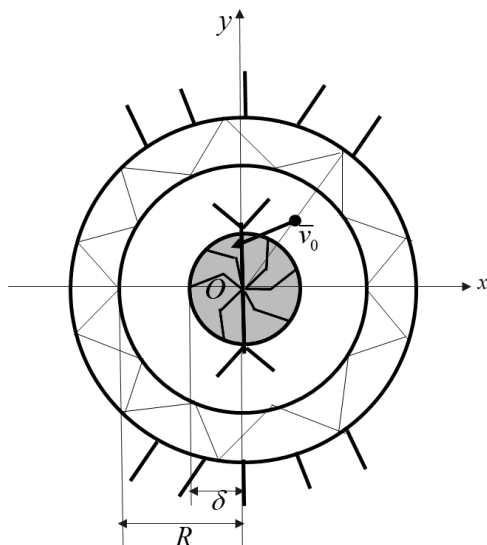


Рис. 11. Начальная скорость точки существенно не коллинеарна начальному радиус-вектору

Траектория полета частицы изображена на рис. 12 синим цветом.

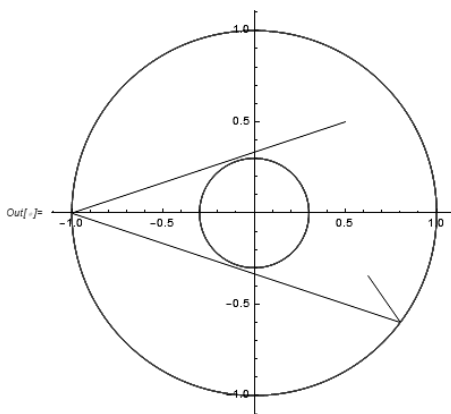


Рис. 12. Траектория полета точки в третьем случае

Ниже приведена картинка для $T = 500$.

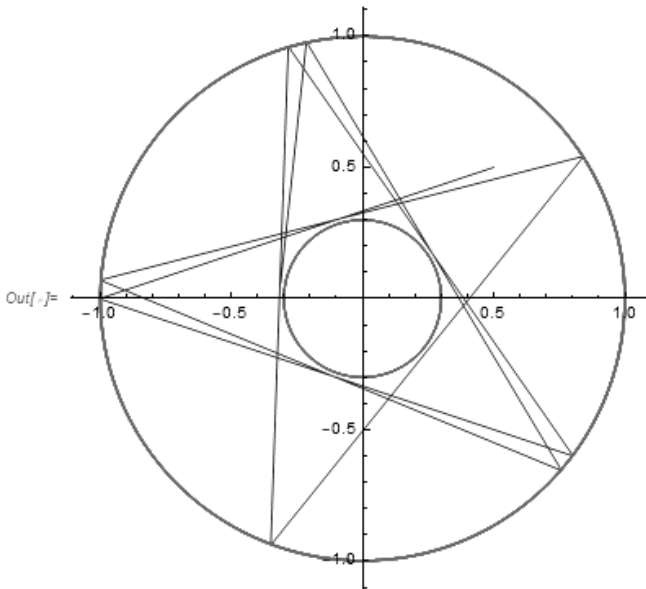


Рис. 13. Траектория полета точки в третьем случае при $T = 500$

Таким образом, в статье впервые предложена математическая модель движения частицы в центральном силовом поле и на основе модели вычислена траектория этой частицы, когда частица движется внутри окружности.

Научная новизна изложенных выше результатов также состоит в том, что предложенная модель может быть адаптирована к описанию движения некоторых элементарных частиц в ядерной физике.

Библиографический список

1. Гуревич Г.С., Пенский О.Г. Математическое моделирование процессов движения материальной точки, вылетающей из центрального силового поля. Определение параметров виртуальной микрочастицы на базе представленной математической модели // German International Journal of Modern Science. 2021. № 17. С. 43–53.
2. Гуревич Г.С., Лутманов С.В., Ильев О.И., Пенский О.Г. Математическое моделирование движения материальной точки массы m по спиральной траектории // German International Journal of Modern Science. 2021. № 20. С. 33–44.
3. Гуревич Г.С., Каневский С.Н. Траектории микрочастиц, траектории макротел. М.: ИПО "У Никитских ворот", 2013. 112 с. ISBN 978-5-91366-704-5.
4. Маркеев А.П. Теоретическая механика. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика. 2001. 414 с.

УДК 004.9

А.Ш. Кусяков

Пермский государственный национальный
исследовательский университет

Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15
kusyakov@psu.ru; 8902-63-54-772

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛИЗ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ИЗ КОМПОЗИТНОГО МАТЕРИАЛА

Исследовано влияние разброса физических характеристик материала конструкции на устойчивость подкрепленных оболочек из композитного материала. Рассматриваются оптимальные по массе цилиндрические оболочки, находящиеся под действием осевых сжимающих нагрузок. Вероятностный анализ осуществлялся в подсистеме Probabilistic Design программного комплекса ANSYS. Показано, что разброс упругих характеристик не оказывает существенного влияния на величину критической нагрузки.

Ключевые слова: оболочка; ребра; композит; вероятность.

Алгоритмы вероятностного анализа гладких пластин и оболочек из композитного материала приведены в работах [9, 10] соответственно. Влияние разброса физических характеристик на несущую способность подкрепленных пластин исследовано в работе [11].

Ниже приведены результаты вероятностного анализа подкрепленных цилиндрических оболочек из композитного материала.

Рассмотрим многослойную цилиндрическую оболочку толщиной h , радиусом R и длиной L , подкрепленную продольным набором ребер (рис. 1).

Конструкция находится под действием осевых сжимающих нагрузок q , равномерно распределенных по торцам ребер (стрингеров) и полотна оболочки.

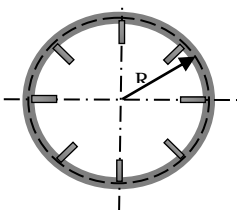


Рис. 1. Сечение подкрепленной оболочки

Основным структурным элементом многослойной оболочки является монослой, состоящий из параллельно уложенных волокон, связанных между собой полимерным связующим (рис. 2).

Ребро жесткости – однонаправленный композит, изготовленный из того же материала, что и полотно оболочки.

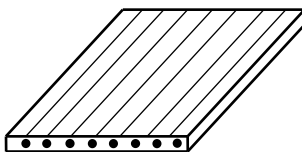


Рис. 2. Монослой

Введем обозначения:

t_s, H_s, B_s – шаг, высота и площадь поперечного сечения ребер соответственно (рис. 3);

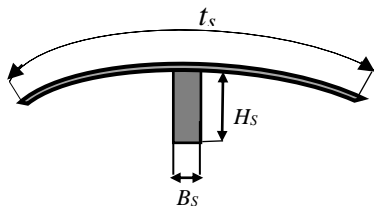


Рис. 3. Элемент подкрепленной оболочки

E_s – модуль Юнга материала продольных ребер;

$b_{11}, b_{22}, b_{12}, b_{33}$ – компоненты матрицы жесткости моно-
слоя полотна оболочки;

$C_{xx}, C_{yy}, C_{xy}, C_G$ – мембранные жесткости полотна обо-
лочек;

$D_{xx}, D_{yy}, D_{xy}, D_G$ – изгибные жесткости полотна оболоч-
ки.

Компоненты матрицы жесткости монослоя связаны с упругими характеристиками материала оболочки следующими зависимостями:

$$b_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, b_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, b_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, b_{33} = G_{12}.$$

Здесь E_1, E_2 – модули Юнга вдоль и поперек волокон монослоя соответственно; ν_{12}, ν_{21} – коэффициенты Пуассона; G_{12} – модуль сдвига.

Расчетные зависимости для мембранных и изгибных жесткостей зависят от структуры армирования полотна оболочки. Например, если полотно оболочки состоит только из продольных слоев, мембранные и изгибные жесткости вычисляются по формулам соответственно

$$C_{xx} = b_{11}h, C_{yy} = b_{22}h, C_{xy} = b_{12}h, C_G = b_{33}h;$$

$$D_{xx} = \frac{b_{11}h^3}{12}, D_{yy} = \frac{b_{22}h^3}{12}, D_{xy} = \frac{b_{12}h^3}{12}, D_G = \frac{b_{33}h^3}{12}.$$

При исследовании подкрепленных оболочек следует различать две формы потери устойчивости:

- общая форма потери устойчивости, с захватом подкрепляющих элементов конструкции;
- местная форма потери устойчивости панели между ребрами.

При исследовании общей формы потери устойчивости воспользуемся методом редукции подкрепленной оболочки к эквивалентной гладкой оболочке с приведенными жесткостями [6–8].

В случае стрингерной оболочки изгибная жесткость D_{xx} заменяется на приведенную изгибную жесткость $D_{xx}^{(p)}$:

$$D_{xx}^{(p)} = D_{xx} + \frac{E_s J_s}{t_s} + \frac{C_{xx} E_s h_s}{C_{xx} + E_s h_s} e_s^2,$$

где

$$F_s = B_s H_s, \quad h_s = \frac{F_s}{t_s}, \quad J_s = \frac{F_s H_s^2}{12}, \quad e_s = \frac{h + H_s}{2}.$$

Критическую нагрузку, соответствующую общей форме потери устойчивости, будем определять по классической формуле для ортотропной оболочки с «приведенными» жесткостями [6]

$$q_{cr} = \frac{2}{R} \sqrt{\frac{D_{xx}^{(p)}}{\delta_{yy}^{(p)}}},$$

здесь $\delta_{yy}^{(p)}$ – податливость подкрепленной оболочки в окружном направлении

$$\delta_{yy}^{(p)} = \frac{C_{xx} + E_s h_s}{C_{yy} (C_{xx} + E_s h_s) - C_{xy}^2}.$$

С точностью до эффектов Пуассона влиянием продольных ребер на податливость подкрепленной оболочки в окружном направлении можно пренебречь. В этом случае податливость конструкции в окружном направлении можно определить по приближенной формуле

$$\delta_{yy}^{(p)} \approx \frac{1}{C_{yy}}.$$

При исследовании местной формы потери устойчивости воспользуемся известной формулой критической нагрузки для ортотропной пластины шириной t_s

$$q_{crm} = k_s \frac{2\pi^2}{t_s^2} \left(\sqrt{D_{xx} D_{yy}} + D_{xy} + 2D_G \right).$$

Здесь k_s – редукиционный коэффициент

$$k_s = 1 + \frac{E_s h_s}{E_x h},$$

где E_x – модуль Юнга полотна оболочки в направлении обрабатывающих. Редукиционный коэффициент k_s позволяет учесть тот факт, что часть осевой нагрузки воспринимается продольными ребрами. Он может быть найден из условия совместности деформаций продольных ребер и полотна оболочки. В частном случае, когда полотно оболочки состоит только из продольных слоев ($E_x = E_1$), а ребра изготовлены из того же материала, что и полотно оболочки ($E_s = E_1$), выражение для коэффициента редукиции принимает вид

$$k_s = 1 + \frac{h_s}{h}.$$

Для оценки прочности монослоя и ребер воспользуемся критерием максимальных напряжений. Конструкция считается разрушенной, если условие прочности нарушается хотя бы для одного слоя или ребра (first fly criterion). Если полотно оболочки состоит только из продольных слоев, а ребра изготовлены из

того же материала, что и полотно оболочки, условие прочности можно представить в виде

$$\frac{q}{\sigma_{-lb}h} \leq 1,$$

где σ_{-lb} – предел прочности монослоя при сжатии вдоль волокон.

Главным преимуществом композитных конструкций по сравнению с конструкциями из традиционных материалов является, как известно, существенно более широкие возможности управления характеристиками проектируемой конструкции, с целью получения оптимального проекта. Поэтому этапу вероятностного анализа композитных конструкций всегда должен предшествовать этап оптимизации, который проводится, как правило, в детерминированной постановке. Вопросы оптимизации конструкций из композитных материалов исследовались многими российскими и зарубежными авторами [1, 2, 4, 12–20]. В настоящей работе для построения оптимального проекта используется алгоритм [12], позволяющий учесть множественность решений задачи оптимизации.

Для исследования влияния разброса физических характеристик материала стрингерной оболочки на устойчивость конструкции воспользуемся подсистемой Probabilistic Design программного комплекса ANSYS [3].

Алгоритм вероятностного анализа в ANSYS состоит из следующих этапов:

1. Создание файла анализа, содержащего описание параметрической модели.
2. Вход в подсистему Probabilistic Design и открытие файла анализа.
3. Задание входных и выходных параметров вероятностного анализа.
4. Выбор метода анализа. В подсистеме Probabilistic Design реализовано два основных метода вероятностного анализа: метод анализа поверхности отклика и метод Монте-Карло.
5. Выполнение вероятностного анализа.
6. Просмотр и анализ результатов.

В рассматриваемой задаче входными параметрами служат упругие характеристики материала оболочки, выходными параметрами – критическая нагрузка, соответствующая общей форме потери устойчивости.

В качестве примера рассмотрим проект ребристой цилиндрической оболочки из углепластика радиусом $R=0,5$ м и длиной $L=1$ м.

Оболочка находится под действием сжимающей нагрузки $q=5 \cdot 10^6$ Н/м.

Физические характеристики материала конструкции: $\sigma_{1b}=0,7$ ГПа, $E_1=140$ ГПа; $E_2=7$ ГПа; $\nu_{12}=0,24$; $G_{12}=2,25$ ГПа. Максимальная высота ребра $H_{sm}=0,02$ (м).

Решение задачи оптимизации по алгоритму [12] приводит к двум вариантам конструкции одинаковой массы:

$$h_1 = 0,0048 \text{ (м)}, \quad h_{s1} = 0,0024 \text{ (м)};$$

$$h_2 = 0,0051 \text{ (м)}, \quad h_{s2} = 0,0021 \text{ (м)}.$$

Здесь индекс «1» соответствует первому варианту конструкции, индекс «2» – второму варианту конструкции.

Полотно оптимального проекта подкрепленной оболочки состоит только из продольных слоев, что обеспечивает наилучшие характеристики прочности по отношению к действующей нагрузке.

Ребра обеспечивают выполнение условий устойчивости. Конструкция равно устойчива по общей и местной формам потери устойчивости.

Для определенности исследуем влияние разброса упругих характеристик E_1 , E_2 , G_{12} на величину критической нагрузки q_{cr} для первого варианта конструкции.

Исходные данные вероятностного анализа представлены в таблице.

Предполагается, что входные величины подчиняются нормальному закону распределения вероятностей.

Исходные данные вероятностного анализа

Характеристика	E_1	E_2	G_{12}
Математическое ожидание (Па)	$140 \cdot 10^9$	$7 \cdot 10^9$	$2,75 \cdot 10^9$
Среднее квадратичное отклонение (Па)	$7 \cdot 10^9$	$0,35 \cdot 10^9$	$0,14 \cdot 10^9$
Коэффициент вариации (%)	5	5	5

Результаты вероятностного анализа для параметра q_{cr} :

математическое ожидание (Н/м) – $5,1 \cdot 10^6$.

среднее квадратичное отклонение (Н/м) – $2,0 \cdot 10^5$.

коэффициент вариации (%) – 3,9.

Таким образом, в данном случае разброс упругих характеристик материала конструкции не оказывает существенного влияния на величину критической нагрузки.

Библиографический список

1. Бакулин В.Н., Гусев Е.Л., Марков В.Г. Методы оптимального проектирования и расчета композиционных конструкций: в 2 т. Т. 1. Оптимальное проектирование конструкций из композиционных и традиционных материалов. М.: Физматлит, 2008. 256 с.
2. Баничук Н.В., Кобелев В.В., Рикардс Р.Б. Оптимизация элементов конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 224 с.
3. Басов К.А. ANSYS: Справочник пользователя. М.: ДМК Пресс, 2005. 640 с.
4. Бокучаева П.Н., Евстафьев В.А., Бабук В.А. Численное исследование влияния количества кольцевых ребер на устойчивость композитных сетчатых цилиндрических оболочек летательных аппаратов // Конструкции из композиционных материалов. 2014. № 4. С. 3–5.

5. *Бокучаева П.Н., Евстафьев В.А., Бабук В.А.* Численное исследование влияния количества и расположения продольных ребер на массу композитных сетчатых цилиндрических оболочек летательных аппаратов // Конструкции из композиционных материалов. 2018. № 3. С. 19–22.
6. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
7. *Кабанов В.В.* Устойчивость неоднородных цилиндрических оболочек. М.: Машиностроение, 1982. 256 с.
8. *Кармишин А.В.* Потенциальная энергия деформации непологой ортотропной оболочки из неоднородного материала // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1976. № 4. С. 183–185.
9. *Кусяков А.Ш.* Вероятностный анализ тонкостенных пластин из композитного материала // Теоретические и прикладные вопросы науки и образования: сб. науч. тр. по мат-лам Междунар. науч.-практ. конф. 31 января 2015 г.: ч. 16. Тамбов, 2015. С. 71–73.
10. *Кусяков А.Ш.* Вероятностный анализ оптимальных композитных оболочек // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 4(39). С. 43–46.
11. *Кусяков А.Ш.* Вероятностный анализ подкрепленных пластин // Научный альманах. 2019. № 2-2(52). С. 71–74.
12. *Кусяков А.Ш.* Моделирование композитных пластин и оболочек: монография / Пермский государственный национальный исследовательский университет, 2020. 1,85Мб. 188с. URL: <http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/kusyakov-modelirovanie-kompozitnyh-plastin-i-obolochek.pdf>.
13. *Мормуль Н.Ф., Почтман Ю.М.* О многокритериальной оптимизации композитных цилиндрических оболочек при действии внешнего давления // Сопротивление материалов и теория сооружений. Киев: Будивельник, 1988. Вып. 52. С. 112–116.
14. *Нарусберг В.Л., Тетерс Г.А.* Устойчивость и оптимизация оболочек из композитов. Рига, 1988. 299 с.
15. *Почтман Ю.М., Шульга С.А., Нагорный Д.В.* Динамика и оптимизация цилиндрических оболочек из композитных материалов // Механика композитных материалов. 1995. Т. 31, № 1. С. 81–87.

16. *Смердов А.А.* Основы оптимального проектирования композитных конструкций. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 88 с.

17. *Смердов А.А., Буянов И.А. Чуднов И.В.* Анализ оптимальных сочетаний требований к разрабатываемым углепластикам для крупногабаритных ракетно-космических конструкций // Известия высших учебных заведений. Машиностроение, 2012. № 6. С. 70–77.

18. *Тетерс Г.А.* Многокритериальная оптимизация композитной цилиндрической оболочки при термических и динамических воздействиях // Механика композитных материалов. 2004. Т. 40, № 6. С. 753–760.

19. *Тетерс Г.А., Рикардс Р.Б., Нарусберг В.Л.* Оптимизация оболочек из слоистых композитов. Рига: Зинатне, 1978. 240 с.

20. *Тетерс Г.А., Креггерс А.Ф.* Многоцелевое оптимальное проектирование композитных конструкций. Обзор // Механика композитных материалов. 1996. Т. 32, № 3. С. 363–376.

УДК 531.381; 531.395

Н.Н. Макеев

*Институт проблем точной механики
и управления РАН*

Россия, 410028, Саратов, ул. Рабочая, 24
nmakeyev@mail.ru; (845) 272-35-33

ДВИЖЕНИЕ СЛОЖНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ЦЕНТРАЛЬНОЙ КИНЕТИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ

Рассматривается задача о нахождении условий существования линейного первого интеграла системы уравнений движения механического объекта переменного во времени состава массы и изменяемой конфигурации. Объект движется на управляющих связях под воздействием программно заданного во времени силового управляющего момента в однородном стационарном параллельном поле силы тяжести так, что его неизменяемая часть (тело-носитель) вращается вокруг неподвижного полюса в среде без воздействия сопротивления движению. Исследуются свойства движения объекта, обладающего центральной структурно-кинетической симметрией, предопределённые существованием линейного интеграла.

Ключевые слова: сложная механическая система; центральная кинетическая симметрия; линейный интеграл; управляющая связь.

1. Предварительные положения

Основные предпосылки и описание структурной модели объекта переменного состава массы, а также понятия *сложной механической системы* (СМС), приведено в работе [1].

Далее рассматривается вопрос о свойствах движения указанной системы, обладающей центральной кинетической симметрией, в однородном стационарном параллельном поле силы тяжести.

Предполагается, что СМС движется так, что её телоноситель вращается вокруг фиксированного неподвижного полюса O в указанном силовом поле под воздействием программно заданного результирующего силового момента $\mathbf{L}(t)$ ($t \in [0, +\infty) \equiv T$).

Введем правые координатные ортобазисы $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ с общим началом в полюсе O : неподвижный Γ_1 ; базис Γ_2 , неизменно связанный с носителем, и базис Γ_3 ($Ox_1x_2x_3$), оси которого Ox_j ($j=1,2,3$) для каждого момента времени $t \in T$ направлены по главным в полюсе O осям тензора инерции СМС с матрицей $\mathbf{J}(t) = \text{diag} [A_1(t), A_2(t), A_3(t)]$. В силу непрерывного по $t \in T$ изменения конфигурации и состава массы СМС базис Γ_3 в общем случае вращается относительно Γ_2 с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}^r(\omega_j^r)$, зависимость которой от величин заданных компонент $A_j(t)$ тензора инерции СМС $\mathbf{J}(t)$ известна [2].

Таким образом, непрерывные и непрерывно дифференцируемые зависимости вида $\boldsymbol{\omega}^r(t)$, $\mathbf{J}(t)$, отнесённые к базису Γ_3 , считаются *программно заданными* и, следовательно, известными в любой момент времени $t \in T$.

Рассмотрим движение СМС под действием *квазиреактивных сил* [3], обусловленных переносом рабочего тела из некоторой области S , принадлежащей объекту, с программно заданной абсолютной скоростью $\mathbf{u}(t)$. Результирующий момент этих сил относительно полюса O для $t \in T$ определяется следующим равенством

$$\mathbf{L}(t) = \int_S \frac{\partial \rho}{\partial t} (\mathbf{r} \times \mathbf{u}) dV. \quad (1)$$

Здесь $\rho(t, \mathbf{r})$ – локальная плотность массы в области S ; $\mathbf{u}(t, \mathbf{r})$ – абсолютная скорость переноса точечных масс рабочего тела из области D ; $\mathbf{r}(t)$ – радиус-вектор произвольной точки области.

Обозначим

$$\mathbf{G} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{G}^r, \quad \boldsymbol{\lambda}(t) = \boldsymbol{\omega}^r - \mathbf{J}^{-1}\mathbf{G}^r, \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}^r = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{G} + \boldsymbol{\lambda},$$

$$m_1(t) = A_2^{-1}(t) - A_3^{-1}(t) \quad (1, 2, 3),$$

где $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\Omega}$ – абсолютные угловые скорости носителя СМС (базиса Γ_2) и базиса Γ_3 ; $\mathbf{G}(G_j)$, $\mathbf{G}^r(t)$ – кинетические моменты относительно полюса O всего объекта и рабочего тела, соответственно (последний – относительно базиса Γ_2); $\boldsymbol{\lambda}(t)$ – эффективная угловая скорость носителя; $A_j(t)$ ($j = 1, 2, 3$) – главные осевые моменты инерции СМС, заданные для каждого $t \in T$ в осях базиса Γ_3 . Характерные вектор-параметры $\mathbf{L}(t)$, $\mathbf{G}^r(t)$ являются *управляющими* [4]; каждый из них задан для $t \in T$ соответствующей программой, определённой во времени. Любые ограничения, налагаемые на управляющие параметры, являются *управляющими связями*. Здесь и далее символ $(1, 2, 3)$ обозначает циклическую перестановку величин с индексами 1, 2, 3.

Пусть $M(t)$ – величина массы СМС; g – стандартное значение величины ускорения силы тяжести; $\mathbf{s}(s_1, s_2, s_3)$ – орт, неизменно связанный с неподвижным ортобазисом Γ_1 ; $\mathbf{g} = -g\mathbf{s}$; $\mathbf{r}_c(t)$, $r_j(t)$ – радиус-вектор центра тяжести СМС и его координаты в проекциях на оси базиса Γ_3 ($j = 1, 2, 3$).

Движение СМС при данных предпосылках характеризуется динамической системой эволюционного типа [4]

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{G}} + \mathbf{J}^{-1}\mathbf{G} \times \mathbf{G} + \boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{G} &= \mathbf{L} + g(\mathbf{s} \times \mathbf{k}), \\ \dot{\mathbf{s}} + \mathbf{J}^{-1}\mathbf{G} \times \mathbf{s} + \boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{s} &= 0,\end{aligned}\quad (3)$$

где силовой вектор-момент \mathbf{L} (L_1, L_2, L_3) определяется равенством (1); $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – характерный вектор, определяемый равенством (2); $\mathbf{k}(k_1, k_2, k_3) = \mathbf{M}\mathbf{r}_C$ – барицентрический вектор.

Уравнения (3) в проекциях на главные в полюсе O оси инерции СМС, определяемые базисом Γ_3 , принимают вид [1]

$$\begin{aligned}\dot{G}_1 + m_1 G_2 G_3 + \lambda_2 G_3 - \lambda_3 G_2 &= L_1 + g(k_3 s_2 - k_2 s_3), \\ \dot{s}_1 + (A_2^{-1} G_2 + \lambda_2) s_3 - (A_3^{-1} G_3 + \lambda_3) s_2 &= 0,\end{aligned}\quad (4)$$

(1, 2, 3).

Введём конфигурационные условия

$$\begin{aligned}A_j &= A(t) \quad (j=1, 2, 3; t \in T), \\ A(t) &\in C^1(T), \quad A(t) < A_*, \quad A_* = \text{const} > 0,\end{aligned}\quad (5)$$

где C^j обозначает j -класс действительной функции. Условия (5) определяют структурно-кинетическую симметрию СМС относительно неподвижного опорного центра O . В этом случае любое направление из данного центра является главным для тензора инерции, соответствующего этому полюсу, в силу чего [2, 5]

$$\boldsymbol{\omega}^r \equiv 0, \quad \boldsymbol{\lambda} = -A^{-1}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{G}^r), \quad (6)$$

где \mathbf{E} – единичная матрица, а величина $\boldsymbol{\omega}^r(t)$ определяется известными соотношениями [2], тогда как зависимость $\mathbf{G}^r(t)$ задаётся определённой управляющей программой, составленной при конструировании данного механического объекта [4].

Ставится задача: установить условия существования первого дополнительного линейного интеграла динамической системы (4) при условиях (5), а также свойства движения СМС, обусловленные наличием этого интеграла, существующие (в общем случае) в активном режиме управления (при $\mathbf{L} \neq 0$). □

2. Линейный первый интеграл

Из условий (5) следует $m_j \equiv 0$ ($j = 1, 2, 3$) и все динамические уравнения системы (4) становятся линейными по G_j . Принимается гипотетически, что для такой системы уравнений существует линейный по G_j первый интеграл.

Пусть

$$F \equiv (\mathbf{r}_C \cdot \mathbf{G}) = h, \quad (7)$$

где принимается, что $\mathbf{r}_C(t)$ – вектор-функция класса $C^1(T)$, h – постоянная интегрирования, $\|\mathbf{r}_C\|^2 \neq 0$, и обозначим

$$\mathbf{f} = \dot{\mathbf{r}}_C + \boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{r}_C, \quad \mathbf{l}(l_j) = \mathbf{r}_C \times \mathbf{f} \quad (j = 1, 2, 3).$$

Здесь $\mathbf{f}(f_j)$ – вектор Пуассона, а $\boldsymbol{\lambda}$ определяется формулой (6).

Утверждение 1. Для того, чтобы равенство (7) при условиях (5) являлось первым интегралом системы уравнений (4), необходимо и достаточно, чтобы для значений $t \in T$ выполнялись ограничения

$$(\mathbf{r}_C \cdot \mathbf{L}) + h r_1^{-1} f_1 = 0, \quad (8)$$

$$l_j = 0 \quad (j = 2, 3). \quad (9)$$

Доказательство. Необходимость. Дифференцируя по t соотношение (7), в силу уравнений системы (4) при условиях (5) получаем

$$U \equiv (\mathbf{r}_C \cdot \mathbf{L}) + (\mathbf{f} \cdot \mathbf{G}) = 0. \quad (10)$$

Полагая $r_1 \neq 0$, внесём выражение для G_1 , полученное из равенства (7), в соотношение (10). В результате получим тождество по переменным G_2, G_3 , удовлетворяющееся при условиях (8), (9).

Достаточность. В силу уравнений системы (4) при условиях (5) получаем

$$\dot{F} = U,$$

где U определяется равенством (10).

Применяя условия (8), (9), из последнего соотношения получаем зависимость

$$F - h = (F^0 - h) \exp \left[- \int_0^t Q(s, G_2) ds \right],$$

в которой

$$F^0 = h, \quad Q = -r_1^{-1} f_1,$$

откуда непосредственно следует интеграл (7).

Замечание. Аналогично предыдущему можно получить две группы независимых определяющих условий, однотипных структурно-динамическим условиям (8), (9). В силу полной симметричности структуры системы уравнений (4) и конфигурационных условий (5) эти группы соотношений эквивалентны между собой и могут быть получены одна из другой путём циклической перестановки индексов $j = 1, 2, 3$.

3. Анализ определяющих условий

Уравнение (10) в пространстве параметров G_j определяет плоскость, несущую инвариант $F = h$. На управляющей для вектора $\mathbf{L}(t)$ связи

$$(\mathbf{r}_C \cdot \mathbf{L}) = 0 \quad (t \in T) \quad (11)$$

эта плоскость проходит через опорный полюс O . Отсюда в силу соотношений (7)–(9) либо $h = 0$ и тогда выполняется условие

$$(\mathbf{L} \times \mathbf{G}) \times \mathbf{r}_C = 0,$$

в силу чего вектор \mathbf{r}_C ортогонален плоскости векторов \mathbf{L} , \mathbf{G} ; либо имеем $f_1 \equiv 0$, и тогда

$$\mathbf{f} \equiv \dot{\mathbf{r}}_C + \boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{r}_C = 0 \quad (t \in T). \quad (12)$$

При этом согласно равенству (10) вектор \mathbf{f} для значений $t \in T$ ортогонален кинетическому моменту \mathbf{G} .

Уравнение (12) является определяющим для зависимости $\mathbf{r}_C(t)$. Поскольку уравнение (12) имеет первый интеграл

$$\|\mathbf{r}_C\|^2 = (r_C^0)^2, \quad (13)$$

то траектории центра масс СМС расположены на сфере (13), а определение указанной зависимости может быть сведено к известному алгоритму [6]. Здесь и всюду далее верхний нулевой индекс относится к значениям величин при $t=0$.

Действительно, полагая

$$w = \frac{r_1 + ir_2}{r_C^0 - r_3}, \quad \mathcal{G} = \frac{1}{2}(\lambda_2 + i\lambda_1),$$

$$i = \sqrt{-1}, \quad q = r_C^0(1 + |w|^2)^{-1},$$

в результате получаем

$$r_1 = 2q \operatorname{Re} w, \quad r_2 = 2q \operatorname{Im} w, \quad r_3 = q(|w|^2 - 1),$$

где w – решение уравнения Дарбу-Риккати [7]

$$\dot{w} = \mathcal{G}w^2 - i\lambda_3 w + \overline{\mathcal{G}}. \quad (14)$$

Решение уравнения (14) может быть получено методом асимптотического интегрирования [6]. Здесь $\overline{\mathcal{G}}$ сопряжено с \mathcal{G} .

Из условия (12) согласно соотношениям (6) следует

$$\dot{\mathbf{r}}_C = A^{-1}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{G}^r) \times \mathbf{r}_C \quad (t \in T). \quad (15)$$

Уравнение (15) является определяющим для нахождения зависимости вида $\mathbf{r}_C(t)$ при априорно заданных соотношениях видов $A(t)$ и $\mathbf{G}^r(t)$.

Преобразуем очевидное тождество

$$(\mathbf{f} \cdot \mathbf{L}) = 0 \quad (t \in T) \quad (16)$$

в соответствии с условием (12). Полагая в дальнейшем

$$\mathbf{R} = \dot{\mathbf{L}} + \boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{L},$$

из равенства (16) с учётом соотношения (11) получаем

$$(\mathbf{r}_C \cdot \mathbf{R}) = 0 \quad (t \in T). \quad (17)$$

Сравнивая между собой равенства (11), (17), находим

$$(\mathbf{R} \times \mathbf{L}) \times \mathbf{r}_C = 0 \quad (t \in T),$$

в силу чего вектор \mathbf{r}_C ортогонален плоскости векторов \mathbf{R} , \mathbf{L} . Помимо этого, из соотношений (11), (15) следует

$$(\dot{\mathbf{r}}_C \times \mathbf{L}) \times \mathbf{r}_C = 0 \quad (t \in T).$$

Таким образом, имеет место следующее

Утверждение 2. Если выполняются условия (11), (12) и вектор \mathbf{r}_C не равен тождественно нулю, то векторы $\dot{\mathbf{r}}_C$, \mathbf{L} , \mathbf{R} для значений $t \in T$ компланарны

$$(\dot{\mathbf{r}}_C \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{R}) = 0.$$

4. Поле траекторий центра масс системы

Получим определяющие уравнения для параметров $r_j(t)$, обусловленные ограничениями (8), (9). Соотношение (8) является управляющей связью, налагающей ограничение на выбор одной из компонент L_j ; условия (9) связывают величины λ_j , r_j . В дальнейшем все величины, зависящие от параметра t , приводятся для значений $t \in T$ без специально сделанных оговорок.

Обозначив

$$p_j = r_1^{-1} r_j \quad (j = 2, 3), \quad (18)$$

приведём условия (9) к виду

$$\begin{aligned} \dot{p}_2 + \lambda_3(1 + p_2^2) - p_3(\lambda_1 + \lambda_2 p_2) &= 0, \\ \dot{p}_3 - \lambda_2(1 + p_3^2) + p_2(\lambda_1 + \lambda_3 p_3) &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

В частности, на управляющей связи

$$p_2(G_1^r + p_3 G_3^r) = 0$$

из второго соотношения (19) в силу равенств (18) следует условие

$$\dot{p}_3 = (1 + p_3^2) \lambda_2,$$

эквивалентное управляющей связи

$$G_2^r = A_2 \left(\omega_2^r - \frac{\dot{p}_3}{1 + p_3^2} \right).$$

При $h = 0$, когда реализуется управляющая связь (11), вид интеграла (7) определяется только отношениями (18), составляющими решение системы (19). В случае, при котором $h \neq 0$, из условия (8) следует

$$\dot{r}_1 r_1^{-1} + h^{-1} \Phi r_1 = \lambda_3 p_2 - \lambda_2 p_3, \quad (20)$$

где обозначено

$$\Phi(t) = L_1 + p_2 L_2 + p_3 L_3,$$

а величины p_2, p_3 определяются системой уравнений (19).

Полагая

$$\zeta(t) = \int_0^t (\lambda_3 p_2 - \lambda_2 p_3) ds,$$

из уравнения (20) находим

$$r_1^{-1} = \left[(r_1^0)^{-1} + h^{-1} \int_0^t \Phi(s) \exp \zeta(s) ds \right]. \quad (21)$$

Таким образом, если решение (p_2, p_3) системы уравнений (19) известно, то интеграл (7) можно представить в виде

$$r_1 (G_1 + p_2 G_2 + p_3 G_3) = h. \quad (22)$$

В частности, в пассивном режиме движения (при $\mathbf{L} \equiv 0$) интеграл (22) представляется в виде

$$(G_1 + p_2 G_2 + p_3 G_3) \exp \zeta(t) = h.$$

Система уравнений (19) имеет первый интеграл

$$\chi(t) \equiv 1 + p_2^2 + p_3^2 = \chi^0 \exp(-2\zeta). \quad (23)$$

С другой стороны, из соотношения (13) следует

$$\chi = \left(\frac{r_c^0}{r_1} \right)^2. \quad (24)$$

Сравнивая между собой равенства (23), (24), для случая, при котором имеет место условие (12), в результате получаем

$$r_1 = \pm \frac{r_c^0}{\sqrt{\chi^0}} \exp \zeta(t).$$

5. Виды траекторных множеств центра масс

Рассмотрим некоторые частные случаи интегрирования системы уравнений (19) в конечном виде.

1. На управляющей связи $\mathbf{G}^r \equiv 0$ из уравнения (19) имеем

$$r_j = p_j^0 r_1 \quad (j = 2, 3), \quad (25)$$

а величина r_1 определяется равенством (21).

2. При реализации управления $G_2^r = G_3^r \equiv 0$ из соотношений (19) следует

$$p_* = p_*^0 \exp(-i\sigma_1), \quad (26)$$

где обозначено

$$p_* = p_2 + ip_3, \quad \sigma_1 = \int_0^t \lambda_1(s) ds.$$

Из равенства (26) в соответствии с соотношением (23) следует $\chi(t) \equiv \chi^0$. На плоскости безразмерных квазиординат p_2, p_3 траекториями центра масс СМС являются окружности из множества

$$p_2^2 + p_3^2 = \chi^0 - 1 \quad (\chi^0 > 1).$$

3. На управляющих связях $G_1^r = G_2^r \equiv 0$ из уравнений (19) получаем систему

$$\begin{aligned} \dot{p}_2 + \lambda_3(1 + p_2^2) &= 0, \\ \dot{p}_3 + \lambda_3 p_2 p_3 &= 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Первое из уравнений (27) определяет величину [6]

$$p_2 = \operatorname{tg}(\alpha - \sigma_3), \quad (28)$$

где обозначено

$$\operatorname{tg} \alpha = p_2^0, \quad \sigma_3 = \int_0^t \lambda_3(s) ds.$$

В силу соотношения (28) из второго уравнения (27) имеем

$$p_3 = p_3^0 \exp[-\eta(t)], \quad \eta(t) = \int_0^t \lambda_3 \operatorname{tg}(\alpha - \sigma_3) ds.$$

4. Если реализуется управляющая связь $G_1^r = G_3^r \equiv 0$, то из системы уравнений (19) аналогично предыдущему получаем

$$p_2 = p_2^0 \exp \xi(t), \quad p_3 = \operatorname{tg}(\beta + \sigma_2),$$

где обозначено

$$\xi = \int_0^t \lambda_2 \operatorname{tg}(\beta + \sigma_2) ds, \quad \sigma_2 = \int_0^t \lambda_2(s) ds, \quad \operatorname{tg} \beta = p_3^0.$$

5. Введём управляющую связь

$$\mathbf{r}_c \times \mathbf{G}^r = 0, \quad (29)$$

определяющую коллинеарность указанных векторов и эквивалентную для $j = 2, 3$ системе ограничений

$$r_1^j G_1^r - r_1 G_j^r = 0.$$

В силу ограничения (29) имеем

$$G_j^r = p_j G_1^r \quad (j = 2, 3). \quad (30)$$

Из системы уравнений (19) согласно условиям (30) следует $p_j(t) \equiv p_j^0$ и из соотношения (21) при $h \neq 0$ находим

$$r_1^{-1} = (r_1^0)^{-1} + h^{-1} \int_0^t (L_1 + p_2^0 L_2 + p_3^0 L_3) ds, \quad (31)$$

а величины r_2, r_3 определяются равенствами (25).

На управляющей связи (29) в случае, при котором выполняются условия (11), (12), совместимые с ограничениями (29), имеем условие стабилизации центра масс СМС

$$\mathbf{r}_C(t) \equiv \mathbf{r}_C^0.$$

Таким образом, совокупность управляющих связей (11), (12), (29) стабилизирует центр масс СМС относительно базиса Γ_3 , тогда как совокупная связь (11), (12) лишь удерживает его на сфере (13). При этом векторы \mathbf{r}_C и \mathbf{G}^r коллинеарны и для любых значений $t \in T$ ортогональны вектору $\mathbf{L}(t)$.

6. На управляющей связи $G_3^r = 0$ система уравнений (19) приводится к совокупности интегродифференциального уравнения для величины p_3

$$\dot{p}_3 + \lambda_1 \Phi \left(p_2^0 + \int_0^t \lambda_1 p_3 \Phi^{-1} ds \right) = \lambda_2 (1 + p_3^2), \quad (32)$$

где обозначено

$$\Phi(t, p_3) = \exp \int_0^t \lambda_2 p_3 ds,$$

и равенства

$$p_2 = \Phi \left(p_2^0 + \int_0^t \lambda_1 p_3 \Phi^{-1} ds \right). \quad (33)$$

Здесь λ_1, λ_2 – свободные управляющие параметры. Если известно решение p_3 уравнения (32), то зависимость вида $p_2(t)$ определяется из соотношения (33).

Аналогичный алгоритм для системы уравнений (19) существует и в случае управляющей связи $G_2^r \equiv 0$.

Комментарий

Движение СМС вокруг неподвижного полюса в однородном параллельном поле силы тяжести, существующее при конфигурационных ограничениях (5), обладает характерными особенностями, не проявляющимися непосредственно в общем случае геометрии масс данной механической системы.

Для случая центральной кинетической симметрии, определяемой конфигурационными условиями (5) и следующими из них соотношениями (6), динамическая система (3) или (4) является линейной по кинетическим переменным G_1, G_2, G_3 с коэффициентами, непрерывно зависящими от времени. В силу этого данная динамическая система может обладать рядом структурных аналитических свойств, характерных для линейных неособых систем уравнений. Это относится, в частности, к свойствам ограниченности их решений, к асимптотическому описанию, а также к линейному асимптотическому при $t \rightarrow +\infty$ равновесию данной системы в фазовом пространстве [9].

Библиографический список

1. *Макеев Н.Н.* Интеграл Ковалевской для уравнений движения сложной механической системы // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 1 (44). С. 22–30.
2. *Макеев Н.Н.* О некоторых свойствах главных осей инерции тела переменной массы // Проблемы механики управляемого движения. Оптимизация процессов управления: межвуз. сб. науч. тр. / Пермский ун-т. Пермь. 1978. Вып. 10. С. 126–131.

3. *Макеев Н.Н.* Некоторые случаи интегрируемости обобщённых уравнений типа Вольтерра // Проблемы механики управляемого движения: межвуз. сб. науч. тр. / Пермский ун-т. Пермь. 1974. Вып. 4. С. 91–98.

4. *Макеев Н.Н.* Интегралы сложных систем на управляющих связях / Саратовский политех. ин-т. Саратов, 1989. 123 с. Деп. в ВИНТИ 14.03.89, № 1656–В 89.

5. *Макеев Н.Н.* Геометрия квазиперманентных движений сложной системы на управляющих связях // Дифференциальная геометрия. Обобщённые пространства и их приложения. Сб. науч. тр. / Саратовский ун-т. Саратов. 1988. Вып. 9. С. 40–50.

6. *Макеев Н. Н.* Коротковолновая асимптотика в динамике симметричной сложной системы // Вычислительные методы и программирование. Решение задач вычислительной математики и механики: сб. науч. тр. / Саратовский ун-т. Саратов. 1987. Вып. 7. С. 30–37.

7. *Аминив М.Ш.* Некоторые вопросы движения и устойчивости твёрдого тела переменной массы // Труды Казанск. авиац. ин-та. 1959. Вып. 48. 118 с.

8. *Макеев Н.Н.* О некоторых движениях гиростата переменной массы в случае типа Эйлера // Проблемы механики управляемого движения: межвуз. сб. науч. тр. / Пермский ун-т. Пермь. 1974. Вып. 6. С. 71–78.

9. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1964. 478 с.

УДК 531.381; 531.395

Н.Н. Макеев

*Институт проблем точной механики
и управления РАН*

Россия, 410028, г. Саратов, ул. Рабочая, 24
nmakeyev@mail.ru; (845) 272-35-33

РЕЗОНАНСЫ И ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА ПЕРЕМЕННОГО СОСТАВА

Рассматривается вопрос о взаимосвязи между явлением резонанса, возникающем при малых колебаниях тела переменного состава массы и изменяемой конфигурации масс, в окрестности положения равновесия его носителя, и возможными случаями существования дополнительных первых алгебраических интегралов его динамической системы. При движении тела его носитель вращается вокруг неподвижного полюса, находясь под воздействием заданного нестационарного силового момента и стационарного однородного поля силы тяжести. Существование случаев интегрируемости трактуется на основе резонансно-осцилляторной модели как структурное вырождение, аналогичное вырождению резонансного характера, возникающего при некоторых собственных линейных колебаниях.

Ключевые слова: тело переменного состава; динамическая система; резонанс; резонансное соотношение; интегрируемость динамической системы; первый интеграл.

1. Основные предпосылки

Тело переменного состава (ТПС), носитель которого (его неизменяемая часть) движется вокруг неподвижного полюса O , находится в однородном параллельном поле силы тяжести. Под носителем ТПС понимается твёрдое тело неизменной конфигурации и постоянного состава массы, несущее *рабочее тело*. Под рабочим телом понимается твёрдое тело, конфигурация и состав массы которого может изменяться непрерывно во времени согласно заданной программе вследствие переноса его твёрдых частиц с заданной скоростью $\mathbf{v}^r(t)$ относительно тела-носителя.

В основу дальнейшего рассмотрения положена структурно-динамическая модель ТПС, принятая М.Ш. Аминовым [1].

Введём правые координатные ортобазисы с общим началом в полюсе O : Γ_0 , неизменно связанный с неподвижным инерциальным пространством, и Γ , оси прямоугольных координат которого Ox_j ($j = 1, 2, 3$) в каждый момент времени направлены по главным в заданном опорном полюсе O осям тензора инерции ТПС $J(t) = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$.

В силу изменения конфигурации и состава массы ТПС базис Γ в общем случае вращается со скоростью $\boldsymbol{\omega}^r(\omega_1^r, \omega_2^r, \omega_3^r)$ относительно тела-носителя [1].

Предполагается, что ТПС движется в среде, порождающей результирующий диссипативный силовой момент относительно полюса O

$$\mathbf{L} = -\Lambda(t) \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (1)$$

где $\Lambda = \text{diag}[\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t)]$, $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ – абсолютная угловая скорость носителя.

Помимо отмеченного, на ТПС действуют: реактивные и вариационные силы с результирующими моментами $\mathbf{L}^r(t), \mathbf{L}^v(t)$; кориолисовы силы инерции с результирующим моментом [2]

$$\mathbf{L}^k = \mathbf{A}(t) \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (2)$$

Здесь \mathbf{A} – заданная матрица с элементами

$$a_{11}(t) = -2 \int_V \rho (x_2 v_2^r + x_3 v_3^r) dV \quad (1, 2, 3), \quad (3)$$

$$a_{ij}(t) = 2 \int_V \rho v_i^r x_j dV \quad (i, j = 1, 2, 3; i \neq j),$$

где ρ – локальная плотность массы ТПС в области V . В равенствах (3) и всюду далее символ (1, 2, 3) обозначает циклическую перестановку величин с индексами $j = 1, 2, 3$, применяемую для получения последующих равенств из предыдущих.

Движение ТПС при заданных предпосылках и моментно-силовых факторах (1), (2) определяется системой уравнений [2]

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}) + \mathbf{B}\boldsymbol{\omega} &= \mathbf{F} - \mathbf{P}\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{r}_C \times \mathbf{s}), \\ \dot{\mathbf{s}} + (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}^r) \times \mathbf{s} &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\mathbf{B}(t)$ – матрица с некоторыми заданными элементами $b_{ij}(t)$;

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{L}^r + \mathbf{L}^v), \quad P = M(t)g, \quad (5)$$

$M(t)$ – величина мгновенной массы ТПС; $\mathbf{r}_C(t) = \mathbf{r}_C(r_j)$ – радиус-вектор центра масс ТПС ($j = 1, 2, 3$); g – стандартное значение ускорения силы тяжести; $\mathbf{s}(s_j)$ – орт вертикали, направленный против вектора силы тяжести.

Согласно принятой структурно-кинетической модели ТПС [1] считаются программно заданными в виде гладких функций времени для $t \in [0, +\infty) \equiv T$ [2] следующие параметры: λ_i, A_i, a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), $M, \mathbf{L}^r, \mathbf{L}^v, \mathbf{v}^r, \boldsymbol{\omega}^r, \mathbf{r}_C$.

2. Задача о резонансах

Примем условия, выполняющиеся для $t \in T$:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^r(t) + \mathbf{L}^v(t) &\equiv 0, \quad \boldsymbol{\omega}^r(t) \equiv 0, \\ (r_1(t), r_3(t)) &\geq 0 \quad r_2(t) \equiv 0, \\ b_{ij}(t) &\equiv 0 \quad (i, j = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (6)$$

Последняя группа условий (6) в силу определяющих равенств [2] сводится к следующим

$$\lambda_i(t) = a_{ii}(t), \quad a_{ij}(t) = 0, \quad i \neq j \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

приводящим матрицу \mathbf{A} к диагональной форме.

Система уравнений (4), (5) в проекциях на оси координат базиса Γ при условиях (6) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 + a_1 \omega_2 \omega_3 &= n r_3 l^{-1} k_1 s_2, \\ \dot{\omega}_2 + a_2 \omega_3 \omega_1 &= n l^{-1} (r_1 s_3 - r_3 s_1), \\ \dot{\omega}_3 + a_3 \omega_1 \omega_2 &= -n r_1 l^{-1} k_3 s_2, \\ \dot{s}_1 &= \omega_3 s_2 - \omega_2 s_3 \quad (1, 2, 3), \end{aligned} \tag{7}$$

где обозначено

$$\begin{aligned} a_1(t) &= A_1^{-1} (A_3 - A_2) \quad (1, 2, 3), \\ n(t) &= A_2^{-1} P l, \quad l(t) = \sqrt{r_1^2 + r_3^2}, \\ k_1(t) &= A_1^{-1} A_2, \quad k_3(t) = A_3^{-1} A_2. \end{aligned}$$

Рассмотрим нижнее положение равновесия носителя ТПС

$$(\boldsymbol{\omega}; \mathbf{s}) = (\mathbf{0}; s_1^0, 0, s_3^0). \tag{8}$$

Здесь и всюду в дальнейшем верхний нулевой индекс относится к значениям величин при $t = 0$.

А. Пуанкаре [3] установил резонансный характер вырождения движения твёрдого тела в однородном поле силы тяжести в случае Лагранжа. Известно [4], что случаи существования дополнительного по Уиттекеру [5] алгебраического интеграла системы уравнений Эйлера-Пуассона также связаны с определёнными структурными вырождениями (в частности, структурная симметрия системы уравнений движения, нехаотический характер движения фазовой точки, вырожденность траекторий периодических решений динамической системы).

В связи с этим далее рассматривается вопрос о поиске взаимосвязи между явлением резонанса, возникающем при ма-

лых колебаниях носителя ТПС вблизи его положения равновесия (8), и возможными случаями существования дополнительных линейных интегралов системы уравнений (7), по форме аналогичных классическим [6].

3. Резонансное соотношение

Используем приём, применённый в исследовании нелинейных колебаний В.М. Старжинским [7].

В положении равновесия (8) в силу системы уравнений (7) имеем

$$s_3^0 r_1(t) - s_1^0 r_3(t) = 0, \quad (9)$$

что приводит к соотношениям связи

$$s_j^0 = l^{-1} r_j \quad (j = 1, 3), \quad (s_1^0)^2 + (s_3^0)^2 = 1.$$

Введём вектор возмущений $\mathbf{u}(u_1, u_2, u_3)$, определяющий отклонение носителя ТПС от положения (8). Тогда в возмущённом движении при колебаниях носителя в окрестности положения (8) имеем

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{s}^0 + \mathbf{u}(t) \quad (10)$$

при условии (9).

Для дальнейшего обозначим

$$\nu = \sqrt{n^0} = \sqrt{(A_2^0)^{-1} M^0 g l^0},$$

где ν – частота маятниковых колебаний носителя ТПС при $t = 0$ вокруг главной оси инерции тела Ox_2 , занимающей горизонтальное положение.

Переходя к безразмерным переменным

$$p_i = \nu^{-1} \omega_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad \tau = \nu t, \quad (11)$$

представим в переменных (11) систему уравнений (7) в вариациях (10)

$$\begin{aligned} p_1' + a_1 p_2 p_3 &= f k_1 (s_3^0 u_2 - s_2^0 u_3), \\ u_1' &= s_2^0 p_3 - s_3^0 p_2 + p_3 u_2 - p_2 u_3 \\ &\quad (1, 2, 3), \end{aligned} \quad (12)$$

где $f(t) = (n^0)^{-1} n(t)$, $s_2^0 = 0$, $k_2 \equiv 1$, а штрих обозначает производную функцию по времени t .

Выделяя из системы уравнений (12) линейную часть, составим её матрицу и найдём собственные значения этой матрицы как корни характеристического по μ уравнения

$$\mu^2 (\mu^2 - \lambda_1 s_3^0 - \lambda_2 s_1^0) (\mu^2 - \lambda_3 s_1^0 - \lambda_4 s_3^0) = 0, \quad (13)$$

где обозначено

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (s_3^0 k_1, s_1^0 k_3, s_1^0, s_3^0) f.$$

Отделяя возможные случаи интегрируемости динамической системы (12), аналогичные по форме представления классическим, примем ограничение

$$n(t) = \text{const} \equiv n^0 \neq 0 \quad (f(t) \equiv 1). \quad (14)$$

Тогда искомыми собственными значениями матрицы линейной части рассматриваемой динамической системы в силу уравнения (13) являются заданные числа $(0, 0, -1, 1, -\lambda, \lambda)$, где

$$\lambda(t) = l^{-1} \sqrt{k_1 r_3^2 + k_3 r_1^2}. \quad (15)$$

Здесь нулевому собственному значению соответствуют простые элементарные делители, как и в случае динамической системы Эйлера-Пуассона [7].

Равенство (15) выражает отношение частот линейной части динамической системы (12). Полагая $\sigma = q r^{-1}$, где q, r – взаимно простые натуральные числа или же $q = r = 1$, согласно соотношению (15) имеем

$$\sigma^2 = (k_1 r_3^2 + k_3 r_1^2) l^{-2}. \quad (16)$$

В безразмерных переменных s_1^0, s_3^0 равенство (16) принимает вид

$$(\sigma^2 - k_3)(s_1^0)^2 + (\sigma^2 - k_1)(s_3^0)^2 = 0. \quad (17)$$

Уравнение (17) определяет в первом октанте пространства параметров $(k_1, k_3, (s_1^0)^2)$ часть гиперболического параболоида с уравнением

$$(k_1 - k_3)(s_1^0)^2 + \sigma^2 - k_1 = 0$$

при реономных ограничениях

$$(1 + k_1)k_3 \geq k_1, \quad (1 + k_3)k_1 \geq k_3, \quad (k_3 - 1)k_1 \leq k_3. \quad (18)$$

Соотношения (18) отражают структурное свойство твёрдого тела, относящееся к величинам его главных осевых моментов инерции [8].

4. Резонансы и интегрируемость

Равенство (16) относится к резонансному состоянию движения в общем случае (в пределах принятых условий). Рассмотрим отдельные виды резонансов и их свойства.

При $\sigma = 1$ (простой резонанс вида $q = r$) уравнение (16) принимает вид

$$r_1 \sqrt{A_1(A_2 - A_3)} - r_3 \sqrt{A_3(A_1 - A_2)} = 0, \quad (19)$$

где принимается $A_3 < A_2 < A_1$. Соотношение (19) совместно с условиями (6), (14) определяет аналог классического *случая Гесса* [9] интегрируемости динамической системы (4), при котором существует её линейный первый интеграл

$$A_1 r_1 \omega_1 + A_3 r_3 \omega_3 = 0, \quad (20)$$

где постоянная интегрирования равна нулю. Существование первого интеграла (20) соответствует наличию нулевого корня уравнения (13) [10]. Условие (19) выполняется для ТПС, как и для неизменяемого твёрдого тела, в *аналоге случая Лагранжа* и в случае полной кинетической симметрии. Характерно, что все эти случаи соответствуют одному и тому же виду резонанса.

При $\sigma = 2$ (резонанс вида $q = 2r$) из условия (16) при

$$A_1 = A_2, \quad r_1 \neq 0, \quad r_3 \equiv 0 \quad (21)$$

следует

$$A_1 = 4 A_3. \quad (22)$$

Условия (21), (22) в совокупности с соотношениями (6), (14) определяют *аналог случая Горячева-Чаплыгина* для ТПС [9].

В случае, при котором $\sigma = 1/2$ (резонанс вида $2q = r$), из соотношения (16) при условиях (21) следует

$$A_2 = \frac{1}{4} A_3. \quad (23)$$

Условие (23) совместно с соотношениями (6), (14), (21) характеризует случай интегрируемости, не реализуемый для твёрдого тела ввиду его структурно-кинетических свойств. Однако этот случай имеет место для тела с жидкими структурными звеньями и определёнными параметрами эквивалентного по Жуковскому твёрдого тела [11].

Введём выражение

$$m(t) = \frac{(1 - k_1)k_3}{(k_3 - 1)k_1},$$

Рассматриваемое при $k_1 < 1$, $k_3 > 1$ или при $k_1 > 1$, $k_3 < 1$. Если величина

$$\Phi(t) \equiv \frac{k_1 + mk_3}{1 + m} = \text{const} = (qr^{-1})^2, \quad (24)$$

то имеет место резонансное соотношение

$$(r_1 r_3^{-1})^2 = m. \quad (25)$$

Тогда равенство (25) эквивалентно условию

$$r_1 \sqrt{A_2 - A_3} - r_3 \sqrt{A_1 - A_2} = 0 \quad (A_3 < A_2 < A_1). \quad (26)$$

Соотношения (26) совместно с условиями (6), (14), (24) определяют *аналог случая Гриоли* для ТПС [9].

Введём величины

$$N(t) = \frac{1-k_1}{1-k_3} Q, \quad \sqrt[3]{Q(t)} = \left[\frac{k_1 - 2k_3}{(2-k_3)k_1} \right]$$

и примем условие $2k_3 < k_1 < 1$. Если величина N удовлетворяет условию (24), в котором m заменено на N , то имеет место резонансное соотношение вида (25), порождающее условие

$$r_1 \sqrt{A_1(A_3 - A_2)(2A_3 - A_2)^3} - r_3 \sqrt{A_3(A_1 - A_2)(A_3 - 2A_1)^3} = 0,$$

где принимается $2A_2 < 2A_1 < A_3$. Эти соотношения совместно с условиями (6), (14), (24) характеризуют *аналог случая Е.И. Харламовой* для ТПС [12].

Условия (24) для величин m , N вида $\Phi(t) = \text{const}$ выполняются, в частности, при $k_i(t) = \text{const} = k_i^0$, когда имеют место соотношения

$$A_i(t) = (k_i^0)^{-1} A_2(t) \quad (i = 1, 3).$$

Эта зависимость соответствует закону подобного изменения конфигурации ТПС [1, 9] с реономным коэффициентом подобия $(A_2^0)^{-1} A_2(t)$.

Следует отметить, что равенство (14) является модельным соотношением, родственным аналитическому условию структурно-динамического подобия ТПС [13], и выражает неизменность квадрата круговой частоты гипотетического линейного осциллятора, находящегося в фазовом пространстве.

Заключение

Показано, что существует взаимосвязь между явлением резонанса в линейной части исходной нелинейной динамической системы и структурно-динамическими условиями, определяющими частные случаи интегрируемости уравнений движения ТПС, аналогичные классическим. Это обстоятельство указывает на характер вырождения состояний системы уравнений движения ТПС, однотипный с системой уравнений Эйлера–Пуассона в данных случаях.

Вместе с тем, уравнение (16), имеющее решение при любых значениях $\sigma = qr^{-1}$ ($0 < \sigma < +\infty$), как и для неизменяемого твердого тела [7], не имеет решения, соответствующего аналогу классического случая Ковалевской. Очевидно, что линейный анализ явления вырождения исходной динамической системы этот случай не содержит.

Следует отметить, что элементы b_{ij} матрицы $\mathbf{B}(t)$, содержащейся в динамическом уравнении (4), определяются известными соотношениями [2], [14]. Величины n, λ, σ , определяемые равенствами (14)–(16), являются заведомо постоянными, если для $t \in T$ выполняются ограничения

$$A_1 n_1 = A_2 = A_3 n_2, \quad r_1 = c k^2, \quad r_3 = n_3 r_1.$$

В этих соотношениях $(n_1, n_2, n_3, c) \neq 0$ – заданные постоянные, а величина $k(t)$ определяется равенством $A_1(t) = k^2(t)M(t)$.

Библиографический список

1. Аминов М.Ш. Некоторые вопросы движения и устойчивости твёрдого тела переменной массы // Труды Казанского авиационного ин-та. 1959. Вып. 48. 118 с.
2. Макеев Н.Н. Асимптотика вращений сложной механической системы // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Пермский ун-т. Пермь. 2004. Вып. 36. С. 52–73.
3. Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. Избр. тр.: в 3-х т. М.: Наука, 1971. Т. 1. 772 с.
4. Арнольд В.И. и др. Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техн. / Соврем. пробл. мат.: Фундам. направл. Т. 3. М.: ВИНТИ, 1985. 304 с.
5. Уиттекер Е.Т. Аналитическая динамика. М.; Л.: ОНТИ, 1937. 500 с.
6. Суслов Г.К. Теоретическая механика. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. 655 с.
7. Старжинский В.М. Прикладные методы нелинейных колебаний. М.: Наука, 1977. 256 с.

8. *Магнус К.* Гироскоп. Теория и применение. М.: Мир, 1974. 528 с.
9. *Макеев Н.Н.* Интегралы сложных систем на управляющих связях / Саратовский политех. ин-т. Саратов, 1989. 123 с. Деп. в ВИНТИ 14.03.89, № 1656–В 89.
10. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. М.: Наука, 1965.
11. *Жуковский Н.Е.* О движении твёрдого тела, имеющего полости, наполненные однородною капельною жидкостью. Собр. соч. в 7 т. М.; Л.: Гостехиздат. Т. 2, 1949. С. 152–309.
12. *Харламова Е.И.* Один частный случай интегрируемости уравнений Эйлера-Пуассона // Докл. АН СССР, 1959. Т. 125, № 5. С. 996–997.
13. *Макеев Н.Н.* Геометрическая интерпретация движения сложной механической системы // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2010. Вып. 4(4). С. 44–49.
14. *Макеев Н.Н.* Асимптотика предельных состояний сложной механической системы // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2014. Вып. 3(26). С. 34–41.

УДК 629.075

А.Ю. Переварюха

*Санкт-Петербургский федеральный
исследовательский центр РАН*

Россия, 198000, г. Санкт-Петербург, 14-линия д. 39
madelf@pisem.net

**МОДЕЛЬ ДЕГРАДАЦИИ ЗАПАСОВ
ПРИ ЭКСПЕРТНОМ УПРАВЛЕНИИ
ВОДНЫМИ БИОРЕСУРСАМИ
С НЕРЕГУЛЯРНЫМИ ФЛУКТУАЦИЯМИ**

Рассматривается развитие методики моделирования нелинейных популяционных процессов при антропогенном воздействии в форме контролируемого по заданным правилам промысла. Разработана логика вычислительного сценария на основе непрерывно-событийной модели воспроизводства популяции с переопределяемыми предикативно коэффициентами. Анализ модели показывает, что управление стратегией эксплуатации на основе статистического анализа и экспертных решений ведет к коллапсу запасов в ситуации, когда популяция переходит в режим нерегулярных хаотических колебаний. Эксперты воспринимают динамику как признак восстановления воспроизводства непосредственно перед тем, когда популяция проходит критическую точку численности.

Ключевые слова: модели популяций; экстремальные колебания численности; коллапс запасов; границы аттрактора; интерпретация бифуркаций; предикаты и логические структуры.

Введение

Мы продолжаем серию работ [1], где рассматриваем современные вычислительные методы [2] в нелинейной динамике меняющихся популяционных процессов. В центре нашего внимания проблема стремительного коллапса адаптированных популяций с достаточно большим репродуктивным потенциалом. В современной англоязычной научной литературе для непредвиденных последствий чрезмерной эксплуатации используется заимствованный из астрофизики термин «коллапс», отличающийся от явлений перелова или системного истощения. Коллапс может угрожать ранее многочисленным промысловым популяциям крупных морских рыб, способным десятилетиями выдерживать значительное изъятие. Среди разнородной ретроспективной информации о причинах остановки промысла можно выделить характерные особенности развития событий, интерпретируемые в терминах динамических систем. Классические непрерывные модели не подходят для ситуаций, где уровень воздействия определяется по некоторым гибким правилам, которые составят экспертную логику управления. Для экспертов из разных стран и научных школ отличается применяемая логика принятия решений по изменению стратегии эксплуатации. Помимо литературных источников, мы используем полученный нами опыт во время работы в вычислительном центре в Каспийском НИИ рыбного хозяйства, который занимался определением допустимых уловов осетровых рыб до того, как в результате системного перелова все осетровые рыбы Каспия попали в Красную книгу. Аналогичные явления случались и ранее.

Актуальность

Режим перехода популяций в интервалы экстремальных значений численности представляет актуальную проблему и плохо описывается традиционными в математической биологии системами дифференциальных уравнений трофических связей. Предложен метод формирования непрерывно-дискретных вычислительных структур, учитывающий пороговые эффекты и факторы регуляции эффективности воспроизводства рыб только в узком диапазоне состояния запаса.

Триггерный функционал позволит внести локальное стохастическое возмущение траектории. Развитие экстремальных ситуаций имеет вариативный и особый эколого-специфический характер.

Рассмотрим сценарный подход к анализу экологической ситуации с организацией серий управляемых имитационных вычислительных экспериментов. Модель резкой деградации биоресурсов рассмотрена на примере коллапса трески Северной Атлантики. Этот сценарий сильно отличается от ранее изученной нами монотонной динамики истощения осетровых рыб Каспийского моря [3]. Коллапс запаса реализуем в форме граничного кризиса интервального притягивающего множества, где граница области притяжения аттрактора, существующего для диапазона низкой численности, незначительно удалена от критического диапазона.

Схема предикативного сценария

Будем разрабатывать модель пополнения с использованием организации непрерывно-событийной вычислительной схемы. Кривая воспроизводства не обязательно будет унимодальной с единственным экстремумом функции $f(R)$, что отметил Рикер у колебаний горбуши в реках Канады [4]. Дополнительно примем, что реальная зависимость способна масштабироваться вдоль оси ординат под действием внешних факторов. Фактически, мы получаем семейство бимодальных кривых с двумя положениями равновесия.

У рыб выражена стадийность развития раннего онтогенеза. Факторы смертности должны различаться по стадиям, при этом момент достижения перехода личика→молодь может регулироваться вспомогательным показателем развития $w(t)$.

Опишем убыль начальной численности поколения $N(0)$ от момента вылупления рыб из икринок дифференциальным уравнением на промежутке времени $t \in [0...t, \tau_1...T]$. Учтем два фактора смертности и изменение их действия по ходу прохождения стадий развития особей, а также реакцию хищников на обилие жертв на второй стадии:

$$\frac{dN}{dt} = \begin{cases} -(\alpha N(t) + U[S]\beta)N(t), & t < \tau \\ -(\alpha_1 N(\tau) / w(\tau) + \beta)N(t), & w(t) < w_d(\tau_1) \\ -\beta_1 N(\tau_1)N(t), & \tau_1 < t < T, \end{cases} \quad (1)$$

где α – коэффициент зависящей от плотности компенсационной смертности; β – коэффициент нейтральной убыли. От репродуктивного потенциала разумно перейти к естественному показателю средней плодовитости λ . Учет влияния кормовой базы производителей, лучше проводить при корректировке λ .

Начальные условия (1) с дважды переопределяемой правой частью таковы: $N(0) = \lambda S$; τ – длительность первой стадии с эндогенным питанием для рыб, которая обычно постоянна; τ_1 зависима от w_d – условного уровня развития, при достижении которого ослабляется действие факторов смертности, что объясняется разными условиями обитания молоди до и после начала самостоятельной морской миграции.

Вспомогательное уравнение – $w'(t) = m / (N^{2/3}(t) + \zeta)$. Форму правой части при $t < \tau$ дополним триггерным функцио-
налом:

$$U(S) = 1 + \exp(-cS^2), \quad (2)$$

где $c < 1$ определяет степень выраженности фактора, называемого в экологии эффектом агрегированной группы особей [5].

Функционал (2) быстро стремится к $\lim_{S \rightarrow S^*} U(S) = 1$ и не влияет на расчеты при оптимальном состоянии запаса. Область значений (2) ограничена – $E(U) = [2, 1)$.

Интервал ювенальной уязвимости $[0, T]$ разделен на тройку кадров модельного времени. При смене смежных кадров происходит переинициализация начальных условий.

Свойства гибридной модели с логикой управления

В инструментальной среде алгоритмически формируется непрерывно-событийная переопределяемая вычислительная структура из трех форм правой части уравнения убыли и условий завершения их активности.

Последовательность численных решений задач Коши для допустимых значений $S \in Z^+$ определит итоговую зависимость. Из модели (1) дополненной функционалом (2) мы получили зависимость, где диапазоны превышения $\psi(S) > S$ чередуется с состояниями, в которых имеющийся нерестовый запас восполняется не полностью.

В новой модели не три, а четыре нетривиальные стационарные точки $\psi(R_i^*) = R_i^*$. Устойчиво наибольшее из равновесий R_4^* , как и т $\psi(0) = 0$. Три первых пересечения с биссектрисой $R_1^* < R_2^* < R_3^*$, в точках оказываются неустойчивы, в вычислительных моделях для установления устойчивости точек используется вычисление $f(f(x))$. Так как в окрестности максимума модельная кривая немного превосходит третье равновесие $\psi(R_{\max} \pm \varepsilon) > R_3^*$, и если исходное состояние популяции R_0 соответствует диапазону $R_0 \in (R_1^*, R_3^*) \cap \{\psi^{-n}(R_2^*)\}$, то через ряд аperiodических флуктуаций достигается состояние высокой стабильной численности R_4^* . Гипотетический вариант устойчивости R_1^* или R_2^* не может объяснить самостоятельного восстановления популяций после некритического перелома. Аperiodическое движение чувствительно к выбору начального значения R_0 , это означает принципиальную невозможность делать прогнозы при подобном характере популяционной динамики [5].

Наблюдаемый в вычислительных экспериментах аperiodический режим вызван локально-несвязным характером области притяжения аттрактора R_4^* , так как область не включает множество не притягивающихся к аттрактору прообразов двух неустойчивых точек: $\{\psi^{-n}(R_2^*)\} \cup \{\psi^{-n}(R_3^*)\}$.

Точка R_1^* отражает неустойчивое критическое равновесие, если $R_0 < R_1^* - \varepsilon$ и далее реализуется необратимая деградация с $\psi^n(R_0) \rightarrow 0$.

Заключение

Разработанная модель подтверждает, что особые сценарии истощения биоресурсов, названные коллапсом, действительно сложны для прогнозирования по ретроспективным наборам данных о воспроизводстве промысловых популяций.

В случае осетровых рыб Каспия стремительная деградация произошла, когда ожидалось увеличение уловов из-за улучшения гидрологической обстановки. При этом важно отметить, что динамика истощения запасов двух близких видов осетровых, осетра и севрюги, качественно различна и не может описываться одним модельным сценарием [6]. Для белуги *Huso huso* по архивным данным не отмечается нелинейных пороговых эффектов. Подобная вариативность сценариев у экологически схожих видов [7] объясняется внутривидовой дифференциацией и различным вкладом в успех нереста репродуктивной изоляции по фактору температуры разных локальных нерестовых групп.

Анализ сценарных экспериментов показывает, если происходят качественные изменения в механизмах регуляции воспроизводства, то решения по изменению стратегии эксплуатации запаздывают, так же, как и прогнозы допустимых уловов делают на основе ретроспективных сведений о предшествующей динамике эксплуатируемой популяции, которая не обязательно сохранится при увеличении изъятия. Канныализм хищных видов далеко не единственный механизм проявления отрицательной обратной связи в ихтиоценозах, но более прямодействующий, чем конкуренция [8].

Один из важных сопутствующих механизмов коллапса в том, что при сокращении численности доминирующих хищников изменится сложившаяся возрастная структура у популяции их жертв.

Библиографический список

1. *Переварюха А.Ю.* Моделирование неустойчивого критического равновесия в популяционной динамике // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы. 2013. Вып. 45. С. 82–91.

2. Дубровская В.А., Переварюха А.Ю. О критериях обоснованности для анализа нелинейных эффектов в моделях эксплуатируемых популяций // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы. 2016. Вып. 48. С. 74–83.

3. Переварюха А.Ю. Метод интервального представления параметров для моделей нерегулярной популяционной динамики // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы. 2020. Вып. 52. С. 68–76.

4. Ricker W.E. Stock and recruitment // J. Fish. Res. Board Can. 1954. Vol. 11. P. 559–623.

5. Соловьева Т.Н. Динамическая модель деградации запасов осетровых рыб со сложной внутривидовой структурой // Информационно-управляющие системы. 2016. № 4. С. 60–67.

6. Борисова Т.Ю. Проблемные аспекты моделирования популяционных процессов и критерии их согласования // Математические машины и системы. 2017. № 1. С. 71–81.

7. Переварюха А.Ю. Интерпретация поведения моделей динамики биоресурсов и моментальная хаотизация в новой модели // Нелинейный мир. 2012. Т. 10. № 4. С. 255–262.

8. Заболотский В.П. Экономическая значимость нелинейных моделей рациональной эксплуатации биоресурсов // Управление экономическими системами: электронный научный журнал. 2015. № 12. С. 21–38.

УДК 519.2

И.Е. Полосков

*Пермский государственный
национальный исследовательский университет*

Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15
polosk@psu.ru; (342) 2-396-560

О СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОМЕНТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГО СВЯЗАННОЙ ДВУХБАЛОЧНОЙ СИСТЕМЫ

В работе исследуется стохастическая моментная устойчивость системы, состоящая из двух балок, которые связаны линейным упругим слоем типа Винклера, в зависимости от коэффициентов модели и характеристик случайных шумов, представленных структурными белыми шумами, возмущающими отдельные гармоники. Для решения задачи применяется дискретизация модели и строятся бесконечные системы стохастических обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов дискретизации, а затем и бесконечные блочные системы детерминированных обыкновенных дифференциальных уравнений для первых и вторых моментных функций. Эти блочные системы и являются объектом анализа на стохастическую устойчивость на основе критерия Рауса – Гурвица.

Ключевые слова: механика сплошной среды, стохастическое дифференциальное уравнение в частных производных, устойчивость, дискретизация, устойчивость по моментам.

Введение

Как известно, случайные явления в системах с распределенными параметрами вызывают значительный интерес исследователей,

решающих как теоретические, так и прикладные задачи. Например, большое количество работ посвящено анализу случайных колебаний в упругих стержнях, балках, пластинах и оболочках [1–5], машиностроительных конструкциях [6–9] и др. Определение динамического поведения инженерных сооружений при случайном возбуждении является важной частью проектирования конструкций. При этом основная цель динамического анализа – получить характеристики перемещений, напряжений и внутренних сил конструкций под действием внешних и внутренних случайных возмущений и обеспечить основу для проектирования конструкций, решения задач надежности [2, 10, 11] и чувствительности [12].

Редкие исследования случайного движения сплошных структур началось еще в 1930-х гг. [13] на основе теории броуновского движения. В конце 1950-х – начале 1980-х гг. произошло возрождение интереса к этой теме [14–17], что было вызвано проблемами анализа упругих колебаний в реактивных и ракетных транспортных средствах. Было установлено распределенное стационарное возбуждение, некоррелированное как в пространстве, так и во времени и вызывающее конечные среднеквадратичные смещения, но бесконечные среднеквадратичные напряжения в балке Бернулли–Эйлера с поперечным вязким демпфированием; найдены сходящиеся среднеквадратичные напряжения для балки Бернулли–Эйлера со структурным демпфированием для случая, когда возбуждение ограничивалось одной точкой; показано, что распределенное некоррелированное возбуждение будет создавать конечные среднеквадратичные напряжения в балке Тимошенко с поперечным и вращательным вязким демпфированием и др.

Основные математические модели случайных явлений в сплошной среде базируются на стохастических дифференциальных уравнениях в частных производных (СДУвЧП) [19–21] или бесконечномерных СДУ, в которых внешние и параметрические неопределенности представляются случайными процессами и полями. В последнее время для СДУвЧП в сепарабельном гильбертовом пространстве были установлены различные результаты о существовании, единственности, инвариантных мерах и других количественных и качественных свойствах решений но теория СДУвЧП далека от завершения, например, несмотря на определенные попытки [22], не построена прикладная теория марковских случайных полей, аналогичная и обобщающая такую теорию для случайных процессов.

Надежное функционирование упругих систем связано с поня-

тием динамической устойчивости [23–26]. Вопросы устойчивости такого типа уже давно, начиная с первого строгого определения устойчивости, данного А.М. Ляпуновым в конце XIX в, вызывали и до сих пор значительный научный интерес. Несмотря на свою относительно давнюю традицию, проблемы динамической стабильности упругих систем еще предстоит полностью исследовать, а некоторые очень актуальные вопросы все еще ждут прояснения. Дело в том, что явления динамической неустойчивости, в отличие от их статических аналогов, имеют место при ненулевой критической частоте и включают все механические проблемы, в которых невозможно избежать учета времени. Это справедливо для структурных механических систем, подвергающихся динамической нагрузке в их равновесном состоянии.

Статические и динамические задачи устойчивости привлекают большое внимание и при качественном анализе стохастических систем. Например, рассматриваются условия устойчивости по Ляпунову по вероятности, обычная, асимптотическая и экспоненциальная устойчивость в среднем квадратичном, устойчивость почти наверное [27–30]. Например, асимптотика решений стохастических уравнений в частных производных в сепарабельных гильбертовых пространствах широко изучалась многими авторами из-за ее важности для приложений [31]. В частности, было замечено, что мультипликативный белый шум можно использовать для стабилизации неустойчивого стохастического уравнения в частных производных с помощью классического метода функционалов Ляпунова, найдены достаточные условия экспоненциальной устойчивости энергии системы, а также экспоненциального затухания смещения и скорости, оказано, что при тех же условиях нулевое решение является асимптотически устойчивым относительно конечномерных начальных условий.

Большое внимание уделяется и анализу стохастической устойчивости упругих систем [7,32–34]: исследуется стохастическая устойчивость при возбуждении ограниченным шумом; при малом затухании и слабой случайной флуктуации строятся асимптотические выражения для показателей Ляпунова с использованием метода стохастического усреднения; по знакам показателей Ляпунова находят условия асимптотической устойчивости с вероятностью 1 тривиального состояния равновесия. Но несмотря на определенные достижения, полученные за последние десятилетия, необходимо признать, что спектр актуальных задач не сужается.

Балочные конструкции широко используются во многих отраслях гражданского, машиностроения и авиакосмической техники, а поэтому задачи стохастической динамики одиночных балок на основе теорий Бернулли – Эйлера, Бресса–Тимошенко, Релея, Шереметева–Пелеха [16, 35] и различные их формы, в частности, вертикальные колонны под действием сжимающих нагрузок [11], многослойные балки с неопределенными параметрами [36], балки из композита [37], в т.ч. изотропные балки, покрытой слоями композитных покрытий с различной ориентацией [38], изучались многими исследователями. Кроме того, на основе балочных моделей исследуются колебания многоэтажных зданий [39], воздействия движущегося транспорта (автомобили, поезда) на вибрации мостов [40]; учитываются специальные возмущения – пуассоновские [41], осевые [42, 43] (обобщением последних являются модели для описания колебаний прямоугольных тонких пластин при осевом плоском возбуждении [44]). Отметим также модели, описывающие обтекание различными потоками конструкций и описывающие бурильные колонны, теплообменные трубы, микромасштабные резонаторы, ядерные топливные элементы, буксируемые гибкие цилиндры для транспортировки воды и т.п.

Важным технологическим расширением концепции одиночной балки является система, состоящая из двух балок, которые связаны упругим соединением [18]. Такая система является еще одной моделью сложной непрерывной системы, которая состоит из двух одномерных твердых тел, соединенных линейным упругим слоем типа Винклера. Различные задачи для таких систем занимают важное место во многих областях строительной механики. Во многих задачах анализа взаимодействия грунта и конструкции упругое основание нередко моделируют упругим слоем Винклера. Также известно, одна балка и упругий слой системы могут рассматриваться как непрерывный динамический поглотитель для подавления вибрации другой балки, подвергающейся действию динамической силы. Упруго связанные балки используются в качестве приближенной модели для анализа вибрации композитных материалов или в качестве моделей непрерывных систем для углеродных нанотрубок и т.д.

Учитывая возможное широкое применение в различных областях техники, динамика двухбалочных систем представляет большой интерес (см. обзор в работе [18]). С произвольными граничными условиями и возмущающими функциями задачу решить трудно,

поскольку основные дифференциальные уравнения в частных производных связаны. Однако при определенных условиях проблема становится разрешимой.

В работе [18] исследуется устойчивость и неустойчивость почти наверное, а также равномерная стохастическая устойчивость двухбалочной системы в зависимости от коэффициентов демпфирования, дисперсии случайных сил, жесткости на изгиб, модуля жесткости слоя Винклера и интенсивности детерминированных составляющих осевой нагрузки. Однако во многих практических ситуациях устойчивость почти наверное и среднеквадратичная устойчивость иногда оказываются слишком сильными.

В данной работе исследуется стохастическая моментная устойчивость (в смысле В.В. Болотина [1]) двухбалочной системы в зависимости от коэффициентов модели и характеристик случайных шумов, которые представлены структурными белыми шумами, возбуждающими отдельные гармоникки. Для решения задачи применяется дискретизация модели и строятся бесконечные системы стохастических обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ) для коэффициентов дискретизации, а затем и бесконечные блочные системы детерминированных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) для первых и вторых моментных функций. Эти блочные системы и являются объектом анализа на стохастическую устойчивость на основе критерия Рауса–Гурвица. Для проведения длинных аналитических выкладок использовался компьютерный пакет Mathematica [45].

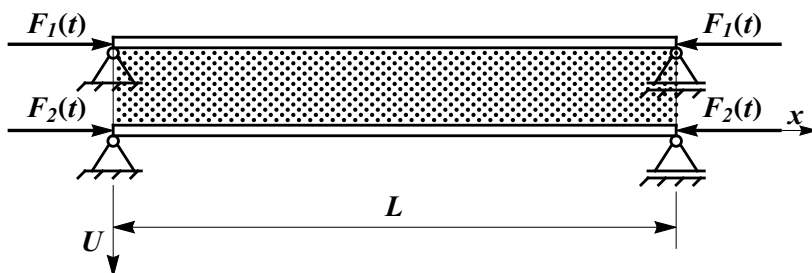


Рис. 1

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему (рис.1), состоящую из двух параллельных тонких призматических однородных балок, которые взаимо-

действуют через упругий слой, описываемый моделью Винклера. Обе балки имеют одинаковую длину, свободно оперты на концах и подвергаются осевому сжатию силами F_1 и F_2 .

На основе теории Бернулли–Эйлера и в предположении, что инерция вращения и деформация сдвига пренебрежимо малы, уравнения поперечных колебаний системы могут быть представлены следующим образом [18]:

$$m_1^* \frac{\partial^2 \underline{U}_1(x, t)}{\partial t^2} + 2 \underline{\alpha}_1 \frac{\partial \underline{U}_1(x, t)}{\partial t} + E_1 I_1 \frac{\partial^4 \underline{U}_1(x, t)}{\partial x^4} + F_1(t) \frac{\partial^2 \underline{U}_1(x, t)}{\partial x^2} + \underline{\gamma} [\underline{U}_1(x, t) - \underline{U}_2(x, t)] = 0, \quad (1)$$

$$m_2^* \frac{\partial^2 \underline{U}_2(x, t)}{\partial t^2} + 2 \underline{\alpha}_2 \frac{\partial \underline{U}_2(x, t)}{\partial t} + E_2 I_2 \frac{\partial^4 \underline{U}_2(x, t)}{\partial x^4} + F_2(t) \frac{\partial^2 \underline{U}_2(x, t)}{\partial x^2} + \underline{\gamma} [\underline{U}_2(x, t) - \underline{U}_1(x, t)] = 0, \quad (2)$$

где $m_i^* > 0$ – погонные массы; $2 \underline{\alpha}_i > 0$ – коэффициенты вязкого трения; $E_i I_i > 0$ – жесткости на прогиб; $F_i(t)$ – стационарные случайные процессы; $\underline{\gamma} > 0$ – модуль жесткости упругого слоя в модели Винклера; \underline{x} – осевая координата; t – время; L – длина балок; $i = 1, 2$. Граничные условия имеют вид:

$$\underline{U}_1(0, t) = \underline{U}_2(0, t) = \underline{U}_1(L, t) = \underline{U}_2(L, t) = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 \underline{U}_1(0, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \underline{U}_2(0, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \underline{U}_1(L, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \underline{U}_2(L, t)}{\partial x^2} = 0. \quad (4)$$

Перейдем к уравнениям в безразмерной форме, для чего воспользуемся следующими соотношениями:

$$x = \frac{\underline{x}}{L}, \quad \alpha_i = \frac{\underline{\alpha}_i}{m_i^*}, \quad e_i = \frac{E_i I_i}{m_i^* L^4},$$

$$v_i + V_i(t) = \frac{F_i}{m_i^* L^2}, \quad \gamma_i = \frac{\underline{\gamma}}{m_i^*}$$

где $\alpha_i > 0$, $e_i > 0$, $\gamma_i > 0$; $V_i(t)$ – независимые структурные белые шумы со следующими свойствами:

$$V_i(t) = \sum_{\nu=1}^{+\infty} \sigma_{\nu i} \delta_{k\nu} V_{\nu i}(t), \quad \mathbb{E}[V_{\nu i}(t)] = 0,$$

$$\mathbb{E}[V_{\nu i}(t_1) V_{\mu j}(t_2)] = \delta_{ij} \delta_{\nu\mu} \delta(t_2 - t_1), \quad i, j = 1, 2, \quad \nu, \mu = 1, 2, \dots;$$

$\sigma_{i\nu} > 0$, $\mathbb{E}[\cdot]$ – оператор математического ожидания; δ_{ij} – символ Кронекера; $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака. При этом уравнения (1), (2) и краевые условия примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_1(x, t)}{\partial t^2} + 2\alpha_1 \frac{\partial U_1(x, t)}{\partial t} + e_1 \frac{\partial^4 U_1(x, t)}{\partial x^4} + \\ + [v_1 + V_1(t)] \frac{\partial^2 U_1(x, t)}{\partial x^2} + \gamma_1 [U_1(x, t) - U_2(x, t)] = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_2(x, t)}{\partial t^2} + 2\alpha_2 \frac{\partial U_2(x, t)}{\partial t} + e_2 \frac{\partial^4 U_2(x, t)}{\partial x^4} + \\ + [v_2 + V_2(t)] \frac{\partial^2 U_2(x, t)}{\partial x^2} + \gamma_2 [U_2(x, t) - U_1(x, t)] = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$U_1(0, t) = U_2(0, t) = U_1(L, t) = U_2(L, t) = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 U_1(0, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U_2(0, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U_1(L, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U_2(L, t)}{\partial x^2} = 0. \quad (8)$$

Целью данной работы является исследование стохастической устойчивости нулевого решения системы (5), (6), подверженной случайным осевым нагрузкам, на основе теории моментной устойчивости В.В. Болотина [1].

2. Дискретизация модели

Если обозначить

$$U_3(x, t) = \frac{\partial U_1(x, t)}{\partial t}, \quad U_4(x, t) = \frac{\partial U_2(x, t)}{\partial t},$$

то система (5), (6) может быть записана в виде четырех линейных стохастических дифференциальных уравнений в частных производных (СДУвЧП) с мультипликативным шумом

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1(x, t)}{\partial t} &= U_3(x, t), \\ \frac{\partial U_2(x, t)}{\partial t} &= U_4(x, t), \\ \frac{\partial U_3(x, t)}{\partial t} &= -2\alpha_1 U_3(x, t) - e_1 \frac{\partial^4 U_1(x, t)}{\partial x^4} - \\ &- [v_1 + V_1(t)] \frac{\partial^2 U_1(x, t)}{\partial x^2} - \gamma_1 [U_1(x, t) - U_2(x, t)], \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_4(x, t)}{\partial t} = & -2\alpha_2 U_4(x, t) - e_2 \frac{\partial^4 U_2(x, t)}{\partial x^4} - \\ & - [v_2 + V_2(t)] \frac{\partial^2 U_2(x, t)}{\partial x^2} - \gamma_2 [U_2(x, t) - U_1(x, t)]. \end{aligned}$$

С целью получения заключения об стохастических устойчивости исследуемой системы будем искать представления неизвестных случайных функций (полей) $U_i(x, t)$, $i = 1, 2, 3, 4$, в виде рядов по функциям

$$\varphi_k(x) = \sin \omega_k x, \quad \omega_k = \frac{\pi k}{L}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (10)$$

которые удовлетворяют краевым условиям. Тогда представляя указанные функции в виде

$$U_i(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} U_{ki}(t) \varphi_k(x), \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (11)$$

где $U_{ki}(t)$ – новые неизвестные случайные функции, для разложения математических ожиданий получим соотношения

$$\begin{aligned} m_i(x, t) \equiv \mathbb{E}[U_i(x, t)] &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{+\infty} U_{ki}(t) \varphi_k(x)\right] = \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{E}[U_{ki}(t)] \varphi_k(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} m_{ki}(t) \varphi_k(x), \quad i = 1, 2, 3, 4, \end{aligned}$$

а для начальных и центральных моментов – соотношения

$$\begin{aligned} m_{ij}(x, y, t) &\equiv \mathbb{E}[U_i(x, t) U_j(y, t)] = \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{+\infty} U_{ki}(t) \varphi_k(x) \times \sum_{\ell=1}^{+\infty} U_{\ell j}(t) \varphi_\ell(y)\right] = \\ &= \sum_{k, \ell=1}^{+\infty} \mathbb{E}[U_{ki}(t) U_{\ell j}(t)] \varphi_k(x) \varphi_\ell(y) = \\ &= \sum_{k, \ell=1}^{+\infty} m_{k\ell ij}(t) \varphi_k(x) \varphi_\ell(y), \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \\ \mathcal{D}_{ij}(x, y, t) &\equiv \mathbb{E}[\{U_i(x, t) - m_i(x, t)\} \{U_j(y, t) - m_j(y, t)\}] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^{+\infty} [U_{ki}(t) - m_{ki}(t)] \varphi_k(x) \times \sum_{\ell=1}^{+\infty} [U_{\ell j}(t) - m_{\ell j}(t)] \varphi_{\ell}(y) \right] = \\
 &= \sum_{k,\ell=1}^{+\infty} \mathbb{E}[\{U_{ki}(t) - m_{ki}(t)\} \{U_{\ell j}(t) - m_{\ell j}(t)\}] \varphi_k(x) \varphi_{\ell}(y) = \\
 &= \sum_{k,\ell=1}^{+\infty} D_{k\ell ij}(t) \varphi_k(x) \varphi_{\ell}(y) \equiv \\
 &\equiv \sum_{k,\ell=1}^{+\infty} [m_{k\ell ij}(t) - m_i(x, t) m_j(y, t)] \varphi_k(x) \varphi_{\ell}(y), \\
 & \quad i, j = 1, 2, 3, 4,
 \end{aligned}$$

соответственно, где $\mathbb{E}[\dots]$ – оператор математического ожидания.

Если разложение (11) подставить в уравнения (9), собрать и приравнять коэффициенты при функциях $\varphi_k(x)$ с одинаковыми индексами в левых и правых частях уравнений, то получим счетную систему линейных стохастических обыкновенных дифференциальных уравнений (ЛСОДУ) относительно случайных функций $U_{ki}(t)$ следующего вида:

$$\begin{aligned}
 \dot{U}_{k1}(t) &= U_{k3}(t), \\
 \dot{U}_{k2}(t) &= U_{k4}(t), \\
 \dot{U}_{k3}(t) &= -2\alpha_1 U_{k3}(t) - e_1 \omega_k^4 U_{k1}(t) + \\
 &\quad + [v_1 + \sigma_{k1} V_{k1}(t)] \omega_k^2 U_{k1}(t) - \gamma_1 [U_{k1}(t) - U_{k2}(t)], \\
 \dot{U}_{k4}(t) &= -2\alpha_2 U_{k4}(t) - e_2 \omega_k^4 U_{k2}(t) + \\
 &\quad + [v_2 + \sigma_{k2} V_{k2}(t)] \omega_k^2 U_{k2}(t) - \gamma_2 [U_{k2}(t) - U_{k1}(t)].
 \end{aligned} \tag{12}$$

3. Решение задачи

3.1. Вывод уравнений для моментов

Если бы система ЛСОДУ имела конечную размерность, можно было бы записать стандартную форму уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова для плотности вероятности вектора состояния с соответствующими коэффициента сноса и диффузии [46, 47]. В рассматриваемом случае вектора состояния счетной размерности указанное уравнение и его коэффициенты будут выглядеть так:

$$\frac{\partial p(\underline{\mathbf{u}}, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^{+\infty} \frac{\partial [b_{nm}(\underline{\mathbf{u}}, t) p(\underline{\mathbf{u}}, t)]}{\partial u_n \partial u_m} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\partial [a_n(\underline{\mathbf{u}}, t) p(\underline{\mathbf{u}}, t)]}{\partial u_n} \equiv \widehat{\mathcal{L}}[p(\underline{\mathbf{u}}, t)], \quad (13)$$

где

$$\underline{\mathbf{u}} = \{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\} = \text{col}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k, \dots\} \equiv \{u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14}, u_{21}, u_{22}, u_{23}, u_{24}, \dots, u_{k1}, u_{k2}, u_{k3}, u_{k4}, \dots\}^T,$$

– вектор состояния,

$$a_n(\underline{\mathbf{u}}, t) = f_k(\underline{\mathbf{u}}, t) + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{+\infty} \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{\partial g_{nr}(\underline{\mathbf{u}}, t)}{\partial u_s} g_{sr}(\underline{\mathbf{u}}, t),$$

$$b_{nm}(\underline{\mathbf{u}}, t) = \sum_{r=1}^{+\infty} g_{nr}(\underline{\mathbf{u}}, t) g_{mr}(\underline{\mathbf{u}}, t)$$

– коэффициенты сноса и диффузии, $p(\cdot, \cdot)$ – плотность вероятности вектора состояния; \mathbf{T} – символ транспонирования матриц и векторов.

Анализируя форму уравнений (12), можно установить, что для $n = 4k - 3, 4k - 2, 4k - 1, 4k$ ($k = 1, 2, \dots$) верны следующие соотношения:

$$\begin{aligned} f_{4k-3} &\equiv f_{k1} = u_{k3}, \\ f_{4k-2} &\equiv f_{k2} = u_{k4}, \\ f_{4k-1} &\equiv f_{k3} = -2\alpha_1 u_{k3} - e_1 \omega_k^4 u_{k1} + v_1 \omega_k^2 u_{k1} - \gamma_1 (u_{k1} - u_{k2}), \\ f_{4k} &\equiv f_{k4} = -2\alpha_2 u_{k4} - e_2 \omega_k^4 u_{k2} + v_2 \omega_k^2 u_{k2} - \gamma_2 (u_{k2} - u_{k1}), \\ g_{4k-1, 4k-1} &\equiv g_{k33} = \sigma_{k1} \omega_k^2 u_{k1}, \\ g_{4k, 4k} &\equiv g_{k44} = \sigma_{k2} \omega_k^2 u_{k2}, \\ g_{sr} &= 0, \quad \text{остальные.} \end{aligned}$$

Отсюда для $k = 1, 2, \dots$ можно записать, что

$$\begin{aligned} a_{4k-3} &= u_{k3}, \\ a_{4k-2} &= u_{k4}, \\ a_{4k-1} &= -2\alpha_1 u_{k3} - e_1 \omega_k^4 u_{k1} + v_1 \omega_k^2 u_{k1} - \gamma_1 (u_{k1} - u_{k2}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{4k} &= -2\alpha_2 u_{k4} - e_2 \omega_k^4 u_{k2} + v_2 \omega_k^2 u_{k2} - \gamma_2 (u_{k2} - u_{k1}), \\
 b_{4k-3,4k-3} &= \sigma_{k1}^2 \omega_k^4 u_{k1}^2, \\
 b_{4k,4k} &= \sigma_{k2}^2 \omega_k^4 u_{k2}^2, \\
 b_{nm} &= 0, \quad \text{остальные,}
 \end{aligned}$$

т.е. вектор сноса распадается на независимые группы по четыре элемента, а матрица коэффициентов диффузии имеет блочно-диагональную структуру с независимыми 4×4 -блоками. В этих условиях для коэффициентов $m_{ki}(t)$, $m_{k\ell ij}(t)$ и $D_{k\ell ij}(t)$ на основе общих уравнений вида

$$\dot{m}_{ki}(t) = \int_{\mathbb{R}^\infty} a_{ki}(\underline{u}, t) \widehat{\mathbb{L}}[p(\underline{u}, t)] d\underline{u}, \quad k = 1, 2, \dots, i = \overline{1, 4}; \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
 \dot{m}_{k\ell ij}(t) &= \int_{\mathbb{R}^\infty} [u_{ki} a_{\ell j}(\underline{u}, t) + u_{\ell j} a_{ki}(\underline{u}, t) + \\
 &+ b_{k\ell ij}(\underline{u}, t)] \widehat{\mathbb{L}}[p(\underline{u}, t)] d\underline{u}, \quad k, \ell = 1, 2, \dots, i, j = \overline{1, 4}. \quad (15)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{D}_{k\ell ij}(t) &= \int_{\mathbb{R}^\infty} [(u_{ki} - m_{ki}) a_{\ell j}(\underline{u}, t) + (u_{\ell j} - m_{\ell j}) a_{ki}(\underline{u}, t) + \\
 &+ b_{k\ell ij}(\underline{u}, t)] \widehat{\mathbb{L}}[p(\underline{u}, t)] d\underline{u}, \quad k, \ell = 1, 2, \dots, i, j = \overline{1, 4}. \quad (16)
 \end{aligned}$$

можно построить бесконечные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ЛОДУ) в следующей форме:

$$\begin{aligned}
 \dot{m}_{k1} &= m_{k3}, \\
 \dot{m}_{k2} &= m_{k4}, \\
 \dot{m}_{k3} &= -2\alpha_1 m_{k3} + (v_1 \omega_k^2 - e_1 \omega_k^4 - \gamma_1) m_{k1} + \gamma_1 m_{k2}, \\
 \dot{m}_{k4} &= -2\alpha_2 m_{k4} + (v_2 \omega_k^2 - e_2 \omega_k^4 - \gamma_2) m_{k2} + \gamma_2 m_{k1}; \\
 \dot{m}_{kk11} &= m_{kk13} + m_{kk31}, \\
 \dot{m}_{kk12} &= m_{kk14} + m_{kk32}, \\
 \dot{m}_{kk13} &= -2\alpha_1 m_{kk13} + (v_1 \omega_k^2 - e_1 \omega_k^4 - \gamma_1) m_{kk11} + \\
 &+ \gamma_1 m_{kk12} + m_{kk33}, \\
 \dot{m}_{kk14} &= -2\alpha_2 m_{kk14} + (v_2 \omega_k^2 - e_2 \omega_k^4 - \gamma_2) m_{kk12} + \\
 &+ \gamma_2 m_{kk11} + m_{kk34}, \\
 \dot{m}_{kk21} &= m_{kk23} + m_{kk41}, \\
 \dot{m}_{kk22} &= m_{kk24} + m_{kk42},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{m}_{kk23} &= -2\alpha_1 m_{kk23} + (v_1 \omega_k^2 - e_1 \omega_k^4 - \gamma_1) m_{kk21} + \\
 &\quad + \gamma_1 m_{kk22} + m_{kk43}, \\
 \dot{m}_{kk24} &= -2\alpha_2 m_{kk24} + (v_2 \omega_k^2 - e_2 \omega_k^4 - \gamma_2) m_{kk22} + \\
 &\quad + \gamma_2 m_{kk21} + m_{kk44}, \\
 \dot{m}_{kk31} &= -2\alpha_1 m_{kk31} + (v_1 \omega_k^2 - e_1 \omega_k^4 - \gamma_1) m_{kk11} + \\
 &\quad + \gamma_1 m_{kk21} + m_{kk33}, \\
 \dot{m}_{kk32} &= -2\alpha_1 m_{kk32} + (v_1 \omega_k^2 - e_1 \omega_k^4 - \gamma_1) m_{kk12} + \\
 &\quad + \gamma_1 m_{kk22} + m_{kk34}, \\
 \dot{m}_{kk33} &= -4\alpha_1 m_{kk33} + (v_1 \omega_k^2 - e_1 \omega_k^4 - \gamma_1) m_{kk13} + \\
 &\quad + (v_1 \omega_k^2 - e_1 \omega_k^4 - \gamma_1) m_{kk31} + \gamma_1 (m_{kk23} + m_{kk32}) + \\
 &\quad + \sigma_{k1}^2 \omega_k^4 m_{kk11}, \\
 \dot{m}_{kk34} &= -2(\alpha_1 + \alpha_2) m_{kk34} + (v_1 \omega_k^2 - e_1 \omega_k^4 - \gamma_1) m_{kk14} + \\
 &\quad + (v_2 \omega_k^2 - e_2 \omega_k^4 - \gamma_2) m_{kk32} + \gamma_1 m_{kk24} + \gamma_2 m_{kk31}, \\
 \dot{m}_{kk41} &= -2\alpha_2 m_{kk41} + (v_2 \omega_k^2 - e_2 \omega_k^4 - \gamma_2) m_{kk21} + \\
 &\quad + \gamma_2 m_{kk11} + m_{kk43}, \\
 \dot{m}_{kk42} &= -2\alpha_2 m_{kk42} + (v_2 \omega_k^2 - e_2 \omega_k^4 - \gamma_2) m_{kk22} + \\
 &\quad + \gamma_2 m_{kk12} + m_{kk44}, \\
 \dot{m}_{kk43} &= -2(\alpha_1 + \alpha_2) m_{kk43} + (v_2 \omega_k^2 - e_2 \omega_k^4 - \gamma_2) m_{kk23} + \\
 &\quad + (v_1 \omega_k^2 - e_1 \omega_k^4 - \gamma_1) m_{kk41} + \gamma_1 m_{kk42} + \gamma_2 m_{kk13}, \\
 \dot{m}_{kk44} &= -4\alpha_2 m_{kk44} + (v_2 \omega_k^2 - e_2 \omega_k^4 - \gamma_2) m_{kk24} + \\
 &\quad + (v_2 \omega_k^2 - e_2 \omega_k^4 - \gamma_2) m_{kk42} + \gamma_2 (m_{kk14} + m_{kk41}) + \\
 &\quad + \sigma_{k2}^2 \omega_k^4 m_{kk22}; \\
 \dot{D}_{kk11} &= D_{kk13} + D_{kk31}, \\
 \dot{D}_{kk12} &= D_{kk14} + D_{kk32}, \\
 \dot{D}_{kk13} &= -2\alpha_1 D_{kk13} + (v_1 \omega_k^2 - e_1 \omega_k^4 - \gamma_1) D_{kk11} + \\
 &\quad + \gamma_1 D_{kk12} + D_{kk33}, \\
 \dot{D}_{kk14} &= -2\alpha_2 D_{kk14} + (v_2 \omega_k^2 - e_2 \omega_k^4 - \gamma_2) D_{kk12} + \\
 &\quad + \gamma_2 D_{kk11} + D_{kk34}, \\
 \dot{D}_{kk21} &= D_{kk23} + D_{kk41}, \\
 \dot{D}_{kk22} &= D_{kk24} + D_{kk42},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{D}_{kk23} &= -2\alpha_1 D_{kk23} + (v_1 \omega_k^2 - e_1 \omega_k^4 - \gamma_1) D_{kk21} + \\
 &\quad + \gamma_1 D_{kk22} + D_{kk43}, \\
 \dot{D}_{kk24} &= -2\alpha_2 D_{kk24} + (v_2 \omega_k^2 - e_2 \omega_k^4 - \gamma_2) D_{kk22} + \\
 &\quad + \gamma_2 D_{kk21} + D_{kk44}, \\
 \dot{D}_{kk31} &= -2\alpha_1 D_{kk31} + (v_1 \omega_k^2 - e_1 \omega_k^4 - \gamma_1) D_{kk11} + \\
 &\quad + \gamma_1 D_{kk21} + D_{kk33}, \\
 \dot{D}_{kk32} &= -2\alpha_1 D_{kk32} + (v_1 \omega_k^2 - e_1 \omega_k^4 - \gamma_1) D_{kk12} + \\
 &\quad + \gamma_1 D_{kk22} + D_{kk34}, \\
 \dot{D}_{kk33} &= -4\alpha_1 D_{kk33} + (v_1 \omega_k^2 - e_1 \omega_k^4 - \gamma_1) D_{kk13} + \\
 &\quad + (v_1 \omega_k^2 - e_1 \omega_k^4 - \gamma_1) D_{kk31} + \gamma_1 (D_{kk23} + D_{kk32}) + \\
 &\quad + \sigma_{k1}^2 \omega_k^4 D_{kk11}, \\
 \dot{D}_{kk34} &= -2(\alpha_1 + \alpha_2) D_{kk34} + (v_1 \omega_k^2 - e_1 \omega_k^4 - \gamma_1) D_{kk14} + \\
 &\quad + (v_2 \omega_k^2 - e_2 \omega_k^4 - \gamma_2) D_{kk32} + \gamma_1 D_{kk24} + \gamma_2 D_{kk31}, \\
 \dot{D}_{kk41} &= -2\alpha_2 D_{kk41} + (v_2 \omega_k^2 - e_2 \omega_k^4 - \gamma_2) D_{kk21} + \\
 &\quad + \gamma_2 D_{kk11} + D_{kk43}, \\
 \dot{D}_{kk42} &= -2\alpha_2 D_{kk42} + (v_2 \omega_k^2 - e_2 \omega_k^4 - \gamma_2) D_{kk22} + \\
 &\quad + \gamma_2 D_{kk12} + D_{kk44}, \\
 \dot{D}_{kk43} &= -2(\alpha_1 + \alpha_2) D_{kk43} + (v_2 \omega_k^2 - e_2 \omega_k^4 - \gamma_2) D_{kk23} + \\
 &\quad + (v_1 \omega_k^2 - e_1 \omega_k^4 - \gamma_1) D_{kk41} + \gamma_1 D_{kk42} + \gamma_2 D_{kk13}, \\
 \dot{D}_{kk44} &= -4\alpha_2 D_{kk44} + (v_2 \omega_k^2 - e_2 \omega_k^4 - \gamma_2) D_{kk24} + \\
 &\quad + (v_2 \omega_k^2 - e_2 \omega_k^4 - \gamma_2) D_{kk42} + \gamma_2 (D_{kk14} + D_{kk41}) + \\
 &\quad + \sigma_{k2}^2 \omega_k^4 D_{kk22}.
 \end{aligned}$$

3.2. Стохастическая устойчивость математических ожиданий

Оценим устойчивость системы ОДУ для функций $m_{ki}(t)$ из разложения математических ожиданий. Для этого выпишем матрицу коэффициентов

$$A_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ v_1 \omega_k^2 - e_1 \omega_k^4 - \gamma_1 & \gamma_1 & -2\alpha_1 & 0 \\ \gamma_2 & v_2 \omega_k^2 - e_2 \omega_k^4 - \gamma_2 & 0 & -2\alpha_2 \end{bmatrix}.$$

Для оценки устойчивости применим критерий Рауса–Гурвица: для

того, чтобы все корни характеристического уравнения

$$\underline{a}_0 \lambda^q + \underline{a}_1 \lambda^{q-1} + \underline{a}_2 \lambda^{q-2} + \dots + \underline{a}_q = 0$$

имели отрицательные действительные части, необходимо и достаточно, чтобы при $\underline{a}_0 > 0$ все q главных диагональных миноров определителя Гурвица

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \underline{a}_1 & \underline{a}_3 & \underline{a}_5 & \dots & 0 & 0 \\ \underline{a}_0 & \underline{a}_2 & \underline{a}_4 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \underline{a}_1 & \underline{a}_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \underline{a}_0 & \underline{a}_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \underline{a}_{q-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \underline{a}_{q-2} & \underline{a}_q \end{bmatrix}$$

были положительны.

В нашем случае $q = 4$, а коэффициенты характеристического уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} \underline{a}_0 &= 1 > 0; \\ \underline{a}_1 &= 2(\alpha_1 + \alpha_2) > 0; \\ \underline{a}_2 &= 4\alpha_1\alpha_2 + \gamma_1 + \gamma_2 - (v_1 + v_2)\omega_k^2 + (e_1 + e_2)\omega_k^4; \\ \underline{a}_3 &= 2(\alpha_2\gamma_1 + \alpha_1\gamma_2) - 2(\alpha_1v_2 + \alpha_2v_1)\omega_k^2 + 2(\alpha_1e_2 + \alpha_2e_1)\omega_k^4; \\ \underline{a}_4 &= \omega_k^2 \left[-(\gamma_1v_2 + \gamma_2v_1) + (\gamma_1e_2 + \gamma_2e_1 + v_1v_2)\omega_k^2 - \right. \\ &\quad \left. - (e_1v_2 + e_2v_1)\omega_k^4 + e_1e_2\omega_k^6 \right]. \end{aligned}$$

На основании критерия Гурвица можно получить, что для уравнения четвертого порядка, кроме положительности всех коэффициентов, еще требуется выполнение условий

$$\underline{a}_1 \underline{a}_2 - \underline{a}_0 \underline{a}_3 > 0, \quad \underline{a}_3 (\underline{a}_1 \underline{a}_2 - \underline{a}_0 \underline{a}_3) - \underline{a}_4 \underline{a}_1^2 > 0. \quad (17)$$

Если потребовать, чтобы биквадратное уравнение $\underline{a}_2 = 0$ имело комплексные корни, то для положительности \underline{a}_2 достаточно, чтобы

$$4(e_1 + e_2)(4\alpha_1\alpha_2 + \gamma_1 + \gamma_2) > (v_1 + v_2)^2.$$

Аналогично условие положительности \underline{a}_3 будет иметь следующий вид:

$$4(\alpha_2\gamma_1 + \alpha_1\gamma_2)(\alpha_1e_2 + \alpha_2e_1) > (\alpha_1v_2 + \alpha_2v_1)^2.$$

Более грубые, чем предыдущее, условия для положительности a_4 могут быть представлены так:

$$\frac{\pi^2 (\gamma_1 e_2 + \gamma_2 e_1 + v_1 v_2)}{L^2} > \gamma_1 v_2 + \gamma_2 v_1,$$

$$\frac{\pi^2 e_1 e_2}{L^2} > e_1 v_2 + e_2 v_1.$$

Теперь обратимся к дополнительным условиям (17). Первое из них будет выполнено, если

$$4(\alpha_1 \gamma_1 + \alpha_2 \gamma_2 + 4\alpha_2 \alpha_1^2 + 4\alpha_2^2 \alpha_1) > \frac{(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)^2}{\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2}.$$

Рассмотрим второе неравенство (17). Если $e_1 = e_2 = e_0$, то истинность этого неравенства следует из истинности неравенства

$$Q_1 [4e_0 (\alpha_1 + \alpha_2)^2 + (v_1 - v_2)^2] > \alpha_1 \alpha_2 Q_2,$$

где

$$Q_1 = (\alpha_1 \gamma_2 + \alpha_2 \gamma_1) [\alpha_1 \gamma_1 + \alpha_2 \gamma_2 + 4\alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 + \alpha_2)];$$

$$Q_2 = [v_1 (2\alpha_2^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 + \gamma_1 - \gamma_2) + v_2 (2\alpha_1^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 + \gamma_2 - \gamma_1)]^2.$$

Если же $e_1 \neq e_2$, то должны быть истинными следующие неравенства:

$$Q_1 [2(2\alpha_2^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 + \gamma_1 - \gamma_2)e_1 + 2(2\alpha_1^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 + \gamma_2 - \gamma_1)e_2 + (v_1 - v_2)^2] > \alpha_1 \alpha_2 Q_2;$$

$$\pi^2 (e_1 - e_2)^2 > 2L^2 (e_1 - e_2)(v_1 - v_2)$$

Итак, все условия устойчивости математических ожиданий случайных функций $U_{ki}(t)$ для $k \geq 1$ и $i = 1, 2, 3, 4$, получены, а значит решена первая часть поставленной задачи относительно устойчивости $m_i(x, t) = \mathbb{E}[U_i(x, t)]$.

3.3. Стохастическая устойчивость вторых центральных моментов

Перейдем к анализу на устойчивость функций $\mathcal{D}_{ij}(x, y, t)$ через посредство $D_{klij}(t)$. Несложно установить, что применение критерия Рауса–Гурвица для решения второй части поставленной проблемы даже с использованием аналитических выкладок на компьютере представляет собой непростую задачу в связи увеличением размерности матрицы системы ЛОДУ (D -системы) для $D_{klij}(t)$

(в связи с ее громоздкостью ниже она не приводится) по сравнению с размерностью матрицы системы для $m_{ki}(t)$. Так даже получение выражений для коэффициентов характеристического уравнения для D -системы потребовало отказа от прямого вычисления (средствами пакета *Mathematica*) соответствующего определителя и применения метода Фаддеева [48].

Большой размер имеют и полученные выражения для коэффициентов характеристического уравнения, а именно, в памяти компьютера они занимают более 15 Мб. Поэтому ниже приводятся только первые коэффициенты

$$\begin{aligned} \underline{a}_0 &= 1 > 0; \\ \underline{a}_1 &= 16(\alpha_1 + \alpha_2) > 0; \\ \underline{a}_2 &= 4(27\alpha_1^2 + 62\alpha_1\alpha_2 + 27\alpha_2^2) + 8(\gamma_1 + \gamma_2) - 8(v_1 + v_2)\omega_k^2 + \\ &\quad + 8(e_1 + e_2)\omega_k^4; \\ \underline{a}_3 &= 8R_0 - 8R_1\omega_k^2 + 2R_2\omega_k^4, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} R_0 &= 50\alpha_1^3 + 202\alpha_1^2\alpha_2 + 202\alpha_1\alpha_2^2 + 50\alpha_2^3 + \alpha_1(13\gamma_1 + 15\gamma_2) + \\ &\quad + \alpha_2(15\gamma_1 + 13\alpha_2\gamma_2) \\ R_1 &= 13\alpha_1v_1 + 15\alpha_1v_2 + 15\alpha_2v_1 + 13\alpha_2v_2, \\ R_3 &= 52\alpha_1e_1 + 60\alpha_1e_2 + 60\alpha_2e_1 + 52\alpha_2e_2 - \sigma_1^2 - \sigma_2^2, \end{aligned}$$

условия положительности которых несложно указать:

$$2[27\alpha_1^2 + 62\alpha_1\alpha_2 + 27\alpha_2^2 + 2(\gamma_1 + \gamma_2)](e_1 + e_2) > (v_1 + v_2)^2$$

для \underline{a}_2 и $R_0R_2 > R_1^2$ для \underline{a}_3 .

К сожалению, уже начиная с коэффициента \underline{a}_4 , начинается резкий экспоненциальный рост длины выражений \underline{a}_j , что не позволяет получить наглядные соотношения положительности этих коэффициентов. С другой стороны, имея в памяти компьютера весьма громоздкие, но явные символьные представления коэффициентов \underline{a}_j и определителей Гурвица мы можем при конкретных числовых значениях параметров проверить знаки соответствующих выражений и даже строить в многомерном пространстве области устойчивости (см., например, [1, 32], где эта идея использовалась даже для анализа систем более низкого порядка), чтобы сделать необходимые выводы. Кроме того, для контроля устойчивости центральных

моментов можно использовать известное из теории вероятностей соотношение $|D_{ij}| \leq \sqrt{D_{ii} D_{jj}}$.

Заключение

В работе представлены результаты анализа стохастического анализа моментной устойчивости упругой системы, состоящей из двух балок, с использованием критерия Раса–Гурвица, причем часть задачи, относящаяся к устойчивости математических ожиданий полностью решена в аналитическом виде, а вторая для моментов второго порядка – в смешанной форме, включающей получение символьных представлений коэффициентов характеристического уравнения 16-го порядка, выписывание условий отрицательности для некоторых из этих коэффициентов и численный расчет определителей Гурвица для конкретных значений параметров системы.

Библиографический список

1. *Болотин В.В.* Случайные колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 336 с.
2. *Светлицкий В.А.* Статистическая механика и теория надежности. 2-е изд., стереотип. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 504 с.
3. *Brouwers J.J.H.* Stochastic processes in mechanical engineering. Eindhoven Univ. of Technol., 2006. 154 p.
4. *Elishakoff I.* Probabilistic methods in the theory of structures. Strength of materials, random vibrations, and random buckling. Singapore: World Scientific, 2017. xviii, 504 p.
5. *Lin Y.K.* Probabilistic theory of structural dynamics. New York: McGraw–Hill, 1967. 368 p.
6. *Гусев А.С., Светлицкий В.А.* Расчет конструкций при случайных воздействиях. М.: Машиностроение, 1984. 240 с.
7. *Макаров Б.П.* Нелинейные задачи статистической динамики машин и приборов. М.: Машиностроение, 1983. 264 с.
8. *Макеев В.П., Гриненко Н.И., Павлюк Ю.С.* Статистические задачи динамики упругих конструкций. М.: Наука, 1984. 232 с.
9. *Николаенко Н.А., Ульянов С.В.* Статистическая динамика машиностроительных конструкций. М.: Машиностроение, 1977. 368 с.

10. Болотин В.В. Методы теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. М.: Стройиздат, 1982. 351 с.

11. Katz A., Schuss Z. Reliability of elastic structures driven by random loads // SIAM Journal of Applied Mathematics. 1985. Vol. 45, № 3. P. 383–402.

12. Хог Э., Чой К., Комков В. Анализ чувствительности при проектировании конструкций. М.: Мир, 1988. 428 с.

13. Van Lear G.A., Uhlenbeek G.E. Brownian motion of strings and elastic rods // Physical Review. 1931. Vol. 38. P. 1583–1598.

14. Caughey T.K. Response of nonlinear string to random loading // Journal of Applied Mechanics. 1959. Vol. 26, № 3. P. 341–344.

15. Bogdanoff J.L., Goldberg J.E. On the Bernoulli–Euler beam theory with random excitation // Journal of the Aerospace Sciences. 1960. Vol. 27, № 5. P. 371–376.

16. Crandall S.H., Yildiz A. Random vibration of beams // Journal of Applied Mechanics. 1962. Vol. 29, № 2. P. 267–275.

17. Boyce W.E. Goodwin B.E. Random transverse vibrations of elastic beams // Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics. 1964. Vol. 12, № 3. P. 613–629.

18. Pavlović R., Kozić P., Pavlović I. Dynamic stability and instability of a double-beam system subjected to random forces // Intern. Journal of Mechanical Sciences. 2012. Vol. 62, № 1. P. 111–119.

19. Chow P.-L. Stochastic partial differential equations. Boca Raton (FL): Chapman & Hall/CRC, 2015. XII, 314 p.

20. Duan J., Wang W. Effective dynamics of stochastic partial differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2014. XII, 270 p.

21. Zambotti L. A brief and personal history of stochastic partial differential equations // Discrete and Continuous Dynamical Systems. 2021. Vol. 41, № 1. P. 471–487.

22. Da Prato G. Kolmogorov equations for stochastic PDEs. Basel: Springer, 2004. viii, 182 p.

23. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1978. 312 с.

24. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: ГИТТЛ, 1956. 600 с.

25. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний: учеб. пособие для вузов. 3-е изд., перераб. М.: Наука, 1991. 256 с.

26. Mascolo I. Recent developments in the dynamic stability of elastic structures // Frontiers in Applied Mathematics and Statistics. 2019. Vol. 5, Article 51. 16 p.

27. *Кушнер Г.Дж.* Стохастическая устойчивость и управление. М.: Мир, 1969. 200 с.
28. *Хасьминский Р.З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969. 368 с.
29. *Maο X.* Exponential stability of stochastic differential equations. New York: Marcel Dekker, 1994. xii, 307 p.
30. Stability of stochastic dynamical systems: Proc. of the Intern. Symp. (Univ. of Warwick, July 10-14, 1972) / R.F. Curtain (ed.). Berlin: Springer, 1972. ix, 324 p.
31. *Curtain R.F.* Stability of stochastic partial differential equation // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1981. Vol. 79, № 2. P. 352–369.
32. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. / Ред. совет: В.Н. Челомей (пред.). М.: Машиностроение, 1978. Т. 1. 352 с.
33. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. 2-е изд. М.: Наука, 1967. 984 с.
34. *Potapov V.D.* Stability of stochastic elastic and viscoelastic systems. New York: John Wiley & Sons, 1999. 275 p.
35. *Elishakoff I., Livshits D.* Some closed-form solutions in random vibration of Bresse-Timoshenko beams // Probabilistic Engineering Mechanics. 1989. Vol. 4, № 1. P. 49–54.
36. *Mazur-Śniady K., Misiurek K., Szyłko-Bigus O., Śniady P.* Fuzzy stochastic vibrations of double-beam complex system as model sandwich beam with uncertain parameters // ISRN Applied Mathematics. 2013. Vol. 2013, Article ID 340145. 12 p.
37. *Abdelnaser A.S.* Random vibrations of composite beams and plates. PhD diss. Virginia Polytechnic Institute and State Univ., 1992. xiii, 168 p. URL: https://vtechworks.lib.vt.edu/handle/10919/37691/LD5655.V856_1993.A234.pdf
38. *Zibdeh H.S., Abu-Hilal M.* Stochastic vibration of laminated composite coated beam traversed by a random moving load // Engineering Structures. 2003. Vol. 25, № 3. P. 397–404.
39. *Aliakbaria N., Moeenfard H.* Random vibration analysis of multi-floor buildings using a distributed parameter model // Soil Dynamics and Earthquake Engineering. 2018. Vol. 115. P. 18–26.
40. Bridge vibration and controls: new research / H. Xia, G. De Roeck, J.M. Goicolea (eds.). New York: Nova Science Publishers, 2012. i, 405 p.

41. *Iwankiewicz R.* Dynamical mechanical systems under random impulses. Singapore: World Scientific, 1995. ix, 161 p.

42. *Karimi A.H., Shadmani M.* Nonlinear vibration analysis of a beam subjected to a random axial force // Archive of Applied Mechanics. 2019. Vol. 89. P. 385–402.

43. *Gen G., Jia X.* Stochastic bifurcation of one flexible beam subject to axial Gauss white noise excitation // 2009 4th IEEE Conf. on Industrial Electronics and Appl. (Xi'an, China). 2009. P. 1647–1651. DOI: 10.1109/ICIEA.2009.5138474.

44. *Gen G., Hongli W., Jia X.* Stochastic bifurcation of rectangular thin plate vibration system subjected to axial inplane Gaussian white noise excitation // Transactions of Tianjin University. 2011. Vol. 17, № 1. P. 13–19.

45. *Mangano S.* Mathematica cookbook. Cambridge: O'Reilly, 2010. xxiv, 800 p.

46. *Диментберг М.Ф.* Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. М.: Наука, 1980. 368 с.

47. *Полосков И.Е.* Стохастический анализ динамических систем [Электронный ресурс]: монография. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2016. 772 с.

48. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. 5-е изд. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 560 с.

Об авторах опубликованных статей

<i>Гуревич Гарольд Станиславович</i>	доктор физико-математических наук, Институт интеграции и профессиональной адаптации, г. Нетания, Израиль
<i>Ильев Олег Иванович</i>	кандидат физико-математических наук, Институт интеграции и профессиональной адаптации, г. Нетания, Израиль
<i>Кусяков Альфред Шамильевич</i>	кандидат физико-математических наук, доцент Пермского государ- ственного национального исследо- вательского университета
<i>Лутманов Сергей Викторович</i>	кандидат физико-математических наук, доцент Пермского государ- ственного национального исследо- вательского университета
<i>Макеев Николай Николаевич</i>	доктор физико-математических наук, профессор института про- блем точной механики и управле- ния РАН, г. Саратов
<i>Переварюха Андрей Юрьевич</i>	Санкт-Петербургский институт ин- форматики и автоматизации РАН
<i>Полосков Игорь Егорович</i>	доктор физико-математических наук, доцент Пермского государ- ственного национального исследо- вательского университета

Правила оформления научных статей для публикации
в межвузовском сборнике научных трудов (издается с 1972 г.)

ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И УПРАВЛЕНИЯ: Нелинейные динамические системы



Текст статьи должен быть подготовлен в текстовом редакторе WinWord. Объем – от 6 до 10–12 с.

Параметры страницы: формат листа **A5** (148 × 210 мм), ориентация листов – книжная, все поля устанавливаются равными 20 мм.

Заголовок статьи набирается по центру (стиль Прописной, Полуужирный, шрифт Times New Roman Cyr, 11 пт.).

Аннотация к тексту статьи приводится на русском и английском языках.

Ключевые слова (на русском и английском языках).

Тематический рубрикатор: УДК, либо другие библиотечно-библиографические классификационные и предметные индексы.

Сведения об авторах:

фамилия(и), имя, отчество автора(ов) полностью, в центре (стиль Обычный, шрифт Times New Roman Cyr, 11 пт., ниже – **город, в котором находится вуз, адрес, место работы каждого автора** (стиль Обычный, шрифт Times New Roman Cyr, курсив, 11 пт.): **контактная информация** (e-mail, телефон) для каждого автора.

Параметры абзаца: для основного текста размер шрифта (кегель) 11 пт. (при использовании шрифта Times New Roman Cyr), межстрочный интервал в основном тексте – одинарный, выравнивание текста – по ширине страницы, абзацный отступ – 1 см.

Включенные в текст **формулы** должны быть набраны в редакторе **Microsoft Word Equation, версия 3.0** и ниже с выравниванием по центру и пробелами сверху и снизу по 6 пт. (номер формулы выравнивается по правому краю поля). Размеры всех элементов формул должны быть соизмеримы с текстовыми размерами (обычные символы – 11 пт., крупный индекс – 8 пт., мелкий индекс – 7 пт., крупный символ – 17 пт., мелкий символ – 12 пт.).

Библиографический список – после основного текста.

Издание включено в национальную информационно-аналитическую систему **«Российский индекс научного цитирования» (РИНЦ)**.

Просьба быть внимательными и аккуратными при оформлении списка литературы, в котором необходимо полностью указывать названия журналов и список авторов.

Адрес редакции: Россия, 614990, г. Пермь, ГСП, ул. Букирева, 15.

Пермский государственный национальный исследовательский университет (ПГНИУ), механико-математический факультет.

E-mail: mpu@psu.ru, svlut@yandex.ru.

Научное издание

ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И УПРАВЛЕНИЯ
Нелинейные динамические системы

Межвузовский сборник научных трудов

Выпуск 53

Издается в авторской редакции

Компьютерная верстка *Г. И. Кушниковой*

Подписан в печать 24.11.2021. Формат 60 × 84 /16.
Усл. печ. л. 4,65. Тираж 500 экз. Заказ 163

Распространяется бесплатно

Адрес редакции: 614990, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15.
Пермский государственный национальный исследовательский университет
(ПГНИУ), механико-математический факультет
E-mail: mpu@psu.ru; iakovlev@psu.ru; svlut@yandex.ru

Издательский центр Пермского государственного
национального исследовательского университета
614990, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15

Типография Пермского государственного
национального исследовательского университета
614990, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15

Межвузовский сборник научных трудов
"ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И УПРАВЛЕНИЯ. Нелинейные динамические системы"
включен в Российский индекс научного цитирования