

ПЕРМСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

С. В. Лутманов, Е. Н. Остапенко

**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА**

ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

С. В. Лутманов, Е. Н. Остапенко

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

*Допущено методическим советом
Пермского государственного национального
исследовательского университета в качестве
учебного пособия для студентов, обучающихся
по направлению подготовки бакалавров
«Механика и математическое моделирование»*



Пермь 2021

УДК 531/534 (075.8)
ББК 22.2
Л863

Лутманов С. В.

Л863 Теоретическая и прикладная механика. Динамика механических систем [Электронный ресурс] : учебное пособие / С. В. Лутманов, Е. Н. Остапенко ; Пермский государственный национальный исследовательский университет. – Электронные данные. – Пермь, 2021. – 1,55 Мб ; 153 с. – Режим доступа: <http://www.psu.ru/files/docs/science/books/uchebnie-posobiya/lutmanov-ostapenko-tpm-dinamika-mekhanicheskikh-sistem.pdf>. – Заглавие с экрана.

ISBN 978-5-7944-3753-9

В пособии изложена динамика механических систем, которая изучается в рамках курса «Теоретическая и прикладная механика», читаемого в ПГНИУ. Материал разделен на разделы: «Геометрия масс», «Основные теоремы и законы динамики», «Динамика абсолютно твердого тела» и «Динамика системы переменного состава».

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки бакалавров «Механика и математическое моделирование», а также будет полезно для студентов других физико-математических направлений и специальностей, изучающих курсы «Теоретической и прикладной механики», «Теоретической механики».

Отзывы и замечания можно направлять по адресу tpm@psu.ru.

УДК 531/534 (075.8)
ББК 22.2

*Издается по решению ученого совета механико-математического факультета
Пермского государственного национального исследовательского университета*

Рецензенты: кафедра математики и физики Пермского государственного аграрно-технологического университета (зав. кафедрой – канд. техн. наук, доцент **В. В. Аюпов**);

доцент кафедры вычислительной математики, механики и биомеханики Пермского национального исследовательского политехнического университета, канд. физ.-мат. наук, доцент **М.А. Осипенко**

ISBN 978-5-7944-3753-9

© Лутманов С. В., Остапенко Е. Н., 2021
© ПГНИУ, 2021

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	6
Раздел 1. ГЕОМЕТРИЯ МАСС	7
1. ЦЕНТР МАСС. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ.....	7
1.1. Центр масс механической системы.....	7
1.2. Момент инерции механической системы относительно оси. Радиус инерции	10
1.3. Вычисление моментов инерции некоторых плоских тел	13
1.4. Моменты инерции некоторых объемных тел	17
1.5. Моменты инерции относительно параллельных осей.....	19
2. ТЕНЗОР И ЭЛЛИПСОИД ИНЕРЦИИ.....	22
2.1. Тензор инерции	22
2.2. Эллипсоид инерции	24
2.3. Главные оси инерции.....	25
2.4. Уравнение эллипсоида инерции в осях координат, являющихся главными осями инерции	27
2.5. Свойства главных осей инерции	29
<i>Вопросы для самоконтроля</i>	<i>32</i>
Раздел 2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ И ЗАКОНЫ ДИНАМИКИ.....	33
1. ОСНОВНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ	33
1.1. Определение основных динамических величин системы	33
1.2. Вычисление основных динамических величин системы материальных точек, в сложном движении	35
1.3. Оси Кенига	37
2. ОСНОВНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА.....	39
2.1. Общие замечания	39
2.2. Основные динамические величины абсолютно твердого тела при его поступательном движении	39
2.3. Основные динамические величины абсолютно твердого тела, вращающегося относительно неподвижной точки.....	40
2.4. Основные динамические величины свободного абсолютно твердого тела.....	48
2.5. Основные динамические величины плоской фигуры при ее движении в своей плоскости	50
3. ТЕОРЕМЫ ОБ ИЗМЕНЕНИИ ОСНОВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ.....	54
3.1. Общие замечания	54
3.2. Теорема об изменении количества движения	55

3.3. Теорема об изменении кинетического момента	59
3.4. Теорема об изменении кинетической энергии.....	65
3.5. Пример на одновременное применение нескольких теорем динамики.....	68
3.6. Теоремы динамики в неинерциальных системах отсчета	70
<i>Вопросы для самоконтроля</i>	73
Раздел 3. ДИНАМИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА.....	75
1. ДИНАМИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА, ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ОТНОСИТЕЛЬНО НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ	75
1.1. Вывод закона движения тела.....	75
1.2. Вывод уравнений движения тела в проекциях на подвижную систему отсчета	77
1.3. Определение реакций в опорах	80
2. ФИЗИЧЕСКИЙ МАЯТНИК.....	83
2.1. Вывод уравнений движения маятника	83
2.2. Фазовая плоскость.....	85
2.3. Свойства фазовых кривых	86
2.4. Построение фазовых траекторий для маятника.....	87
3. ДИНАМИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА, ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ОТНОСИТЕЛЬНО НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ	90
3.1. Дифференциальные уравнения движения твердого тела вокруг неподвижной точки. Динамические уравнения Эйлера.....	90
3.2. Уравнения движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Первые интегралы	93
3.3. Случай Эйлера. Первые интегралы.....	97
3.4. Геометрическая интерпретация Пуансо.....	100
3.5. Стационарные вращения твердого тела в случае Эйлера.....	102
3.6. Регулярная прецессия	102
3.7. Движение динамически симметричного тела в случае Эйлера.....	103
3.8. Случай Лагранжа. Сведение динамических уравнений Эйлера к квадратурам	106
3.9. Качественное исследование движения гироскопа в случае Лагранжа	109
3.10. Основная формула гироскопии	113
3.11. Элементарная теория гироскопа.....	116
3.12. Свойства уравновешенного гироскопа.....	117
3.13. Применение элементарной теории гироскопов в случае Лагранжа.....	119
3.14. Случай С. Ковалевской	120
4. ДИНАМИКА СВОБОДНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА	122
4.1. Уравнения движения свободного твердого тела	122
4.2. Динамика плоскопараллельного движения	123
4.3. Исследование движения цилиндра вдоль наклонной плоскости	127
<i>Вопросы для самоконтроля</i>	130

Раздел 4. ДИНАМИКА СИСТЕМЫ ПЕРЕМЕННОГО СОСТАВА	132
1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ.....	132
1.1. Понятие о системе переменного состава	132
1.2. Теорема об изменении количества движения для механической системы переменного состава.....	133
1.3. Теорема об изменении кинетического момента для механической системы переменного состава.....	135
2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ.....	136
2.1. Дифференциальное уравнение движения	136
2.2. Движение ракеты вне поля сил.....	138
2.3. Вертикальное движение ракеты в однородном поле тяжести.....	140
2.4. Некоторые задачи управления вертикальным полетом ракеты в однородном поле тяжести	142
2.5. Вертикальное движение тяжелой нити	144
<i>Вопросы для самоконтроля</i>	<i>151</i>
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	152

ВВЕДЕНИЕ

Данное учебное издание предназначено в первую очередь для студентов ПГНИУ, обучающихся по направлению 01.03.03 Механика и математическое моделирование и изучающих дисциплину «Теоретическая и прикладная механика», а также может быть полезно для студентов других направлений и специальностей, изучающих или стремящихся усовершенствовать знания по курсам «Теоретическая и прикладная механика», «Теоретическая механика».

Учебное пособие является логическим продолжением учебных пособий:

1. Лутманов С.В., Остапенко Е.Н. Теоретическая и прикладная механика. Кинематика: учеб. пособие / Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Электрон. дан. – Пермь, 2019. – 1 Мб; 114 с. – Режим доступа: <http://www.psu.ru/files/docs/science/books/uchebnie-posobiya/lutmanov-ostapenko-teoreticheskaya-i-prikladnaya-mekhanika.pdf>.

2. Лутманов С.В., Остапенко Е.Н. Теоретическая и прикладная механика. Основы динамики. Статика: учеб. пособие / Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Электрон. дан. – Пермь, 2020. – 1,55 Мб; 96 с. – Режим доступа: <http://www.psu.ru/files/docs/science/books/uchebnie-posobiya/lutmanov-ostapenko-teor-i-prikladnaya-mexanika-osnovy-dinamiki-statika.pdf>.

3. Лутманов С.В., Остапенко Е.Н. Теоретическая и прикладная механика. Динамика точки: учеб. пособие / Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Электрон. дан. – Пермь, 2020. – 1,25 Мб; 128 с. – Режим доступа: <http://www.psu.ru/files/docs/science/books/uchebnie-posobiya/lutmanov-ostapenko-teoreticheskaya-i-prikladnaya-mekhanika-dinamika-tochki.pdf>.

Изложена динамика механических систем. Материал разделен на разделы «Геометрия масс», «Основные теоремы и законы динамики», «Динамика абсолютно твердого тела» и «Динамика системы переменного состава». Предлагаемые примеры позволят глубже уяснить смысл формул, применение теорем и основополагающих принципов механики. В каждом разделе приводятся вопросы для самоконтроля.

Авторы будут благодарны читателям, направившим замечания и пожелания по адресу: mpu@psu.ru.

РАЗДЕЛ 1. ГЕОМЕТРИЯ МАСС

Перед началом изучения данного раздела рекомендуем вспомнить материал раздела «Основы динамики» [7].

Напомним, система материальных точек называется также механической системой. Механическая система – совокупность материальных точек, положение или движение каждой из которых определяется положением или движением других точек этой совокупности.

При движении системы материальных точек большую роль играют величины, характеризующие распределение масс точек, т.е. геометрия масс. Для характеристики распределения масс служат центр масс системы, осевые, центробежные и другие моменты инерции.

1. ЦЕНТР МАСС. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ

1.1. Центр масс механической системы

Рассмотрим механическую систему, состоящую из N материальных точек, ν -я точка которой имеет радиус-вектор \vec{r}_ν и массу m_ν , $\nu = 1, \dots, N$ (рис. 1).

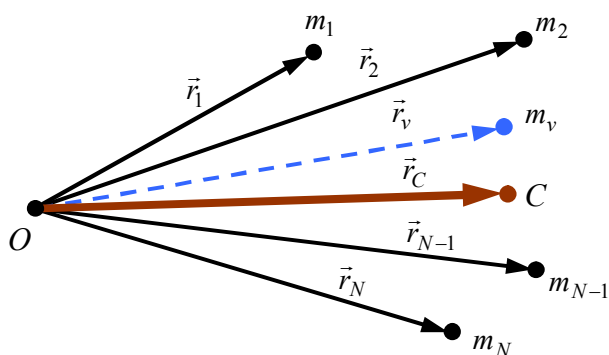


Рис. 1

Определение 1. Центром масс этой системы называется точка C , определяемая радиус-вектором

$$\bar{r}_C = \frac{\sum_{v=1}^N m_v \bar{r}_v}{M}, \quad M = \sum_{v=1}^N m_v.$$

Замечание. Для сплошных однородных тел можно записать

$$\bar{r}_C = \frac{\int \bar{r} dm}{M}.$$

Если тело имеет постоянную плотность ρ , то $dm = \rho dV$ и масса тела $M = \rho V$. Тогда

$$\bar{r}_C = \frac{\int \bar{r} dV}{V},$$

где dV – элементарный объем частицы, V – объем тела.

Для материальной поверхности $dm = \rho_1 dS$, $M = \rho_1 S$. Тогда

$$\bar{r}_C = \frac{\int \bar{r} dS}{S},$$

где ρ_1 – поверхностная плотность, dS – площадь поверхности элементарной частицы, S – площадь материальной поверхности.

Для материальной линии $dm = \rho_2 dl$, $M = \rho_2 l$. Тогда

$$\bar{r}_C = \frac{\int \bar{r} dl}{l},$$

где ρ_2 – линейная плотность, dl – длина элемента линии, l – длина материальной линии.

Пример 1. Определить уравнения движения и траекторию центра масс кривошипно-шатунного механизма (рис. 2). Кривошип OA равномерно вращается вокруг оси O с угловой скоростью ω . Кривошип OA и шатун AB – однородные стержни одинаковой длины l и массы, равной $2m$, кг. Масса ползуна равна m , кг.

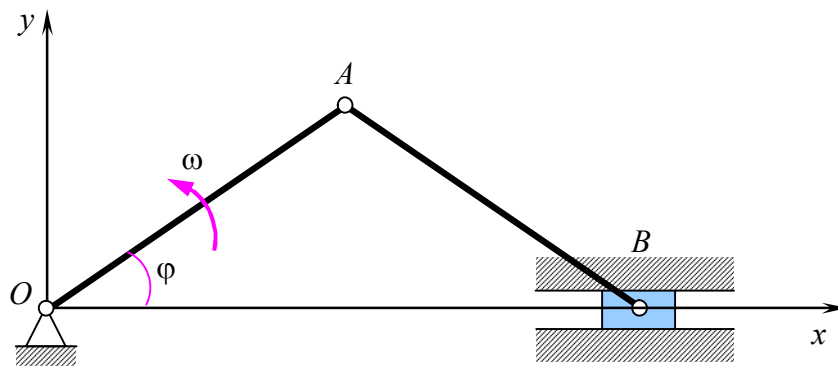


Рис. 2

Решение. Первый способ. Так как кривошип OA и шатун AB являются однородными стержнями, то их центры масс находятся в точках C_1 и C_2 соответственно (рис.3).

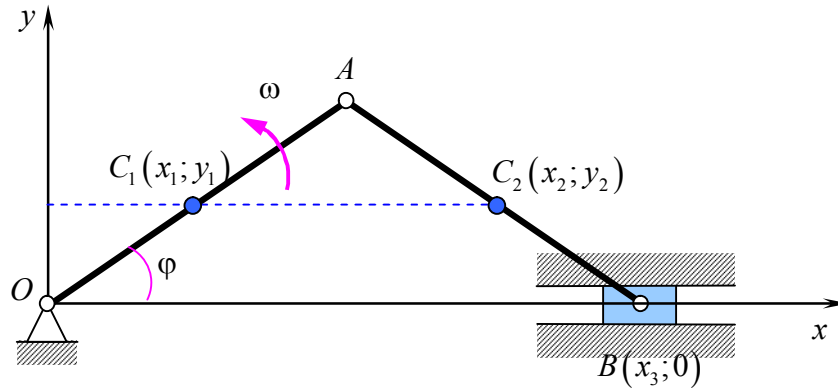


Рис. 3

Координаты центра масс механизма в системе Oxy определим по формулам

$$\begin{cases} x_C = \frac{m_{OA}x_1 + m_{AB}x_2 + m_Bx_3}{m_{OA} + m_{AB} + m_B}, \\ y_C = \frac{m_{OA}y_1 + m_{AB}y_2 + m_By_3}{m_{OA} + m_{AB} + m_B}. \end{cases}$$

Выразим координаты центров масс звеньев C_1 и C_2 , а также ползуна B :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{l}{2} \cos \varphi = \frac{l}{2} \cos(\omega t), & x_2 = \frac{3l}{2} \cos(\omega t), & x_3 = 2l \cos(\omega t), \\ y_1 = \frac{l}{2} \sin \varphi = \frac{l}{2} \sin(\omega t), & y_2 = y_1, & y_3 = 0. \end{cases}$$

С учетом заданных значений масс определяем

$$\begin{cases} x_C = \frac{2m \frac{l}{2} \cos(\omega t) + 2m \frac{3l}{2} \cos(\omega t) + m 2l \cos(\omega t)}{2m + 2m + m} = \frac{6}{5} l \cos(\omega t), \\ y_C = \frac{2m \frac{l}{2} \sin(\omega t) + 2m \frac{l}{2} \sin(\omega t)}{2m + 2m + m} = \frac{2}{5} l \sin(\omega t). \end{cases}$$

Тогда траекторией центра масс является эллипс

$$\frac{x_C^2}{\left(\frac{6}{5}l\right)^2} + \frac{y_C^2}{\left(\frac{2}{5}l\right)^2} = 1.$$

Второй способ. Можно упростить нахождение центра масс данной системы, если принять во внимание то, что кривошип OA и шатун AB – однородные стержни одинаковой длины l и массой, равной $2m$. Тогда их общий центр масс будет находиться в точке K (см. рис. 4).

В этом случае в точке K будет сосредоточена масса $4m$.

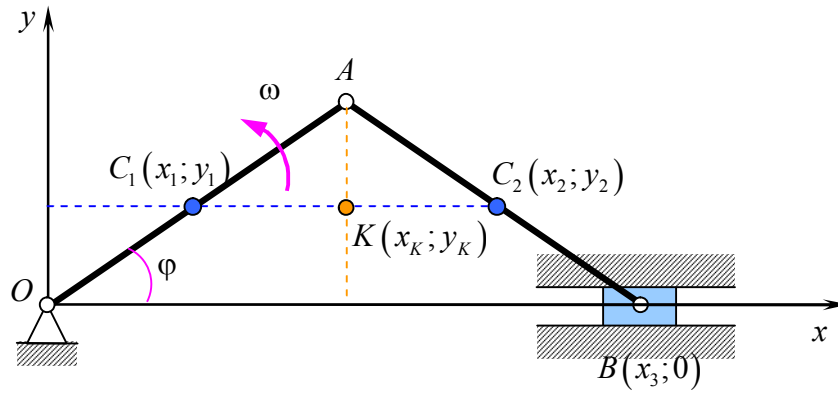


Рис. 4

Выразим координаты точки K , а также ползуна B :

$$\begin{cases} x_K = l \cos \varphi = l \cos(\omega t), & x_3 = 2l \cos(\omega t), \\ y_K = \frac{l}{2} \sin \varphi = \frac{l}{2} \sin(\omega t), & y_3 = 0. \end{cases}$$

Определяем положение общего центра масс системы

$$\begin{cases} x_c = \frac{4ml \cos(\omega t) + m 2l \cos(\omega t)}{4m + m} = \frac{6}{5}l \cos(\omega t), \\ y_c = \frac{4m \frac{l}{2} \sin(\omega t)}{4m + m} = \frac{2}{5}l \sin(\omega t). \end{cases}$$

Получаем, то же результат, что и в первом способе. Траекторией является эллипс

$$\frac{x_c^2}{\left(\frac{6}{5}l\right)^2} + \frac{y_c^2}{\left(\frac{2}{5}l\right)^2} = 1. \blacktriangleright$$

1.2. Момент инерции механической системы относительно оси. Радиус инерции

Обозначим через ρ_v расстояние от v -й точки системы до некоторой оси u (рис. 5).

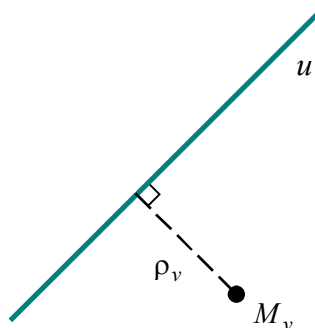


Рис. 5

Определение 2. Величина

$$I_u = \sum_{v=1}^N m_v \rho_v^2$$

называется моментом инерции системы материальных точек относительно оси u .

Из определения осевого момента инерции следует, что осевой момент инерции составной конструкции равен сумме осевых моментов инерции ее частей (свойство аддитивности осевого момента инерции).

Единица измерения момента инерции – килограмм на квадратный метр ($\text{кг} \cdot \text{м}^2$).

Определение 3. Величина ρ_u , определенная из соотношения

$$M \rho_u^2 = \overset{\sum_{v=1}^N m_v \rho_v^2}{\widehat{I}_u} \Rightarrow \rho_u = \sqrt{\frac{\sum_{v=1}^N m_v \rho_v^2}{M}}, \quad (1)$$

называется радиусом инерции системы материальных точек относительно оси u .

Значения ρ_u для различных тел приведены в справочниках. Для тел произвольной формы ρ_u можно вычислить по формуле $\rho_u = \sqrt{\frac{I_u}{M}}$, при этом M и I_u определяются экспериментально.

Определение 4. Полярным моментом инерции системы материальных точек относительно некоторой точки O называется величина

$$I_O = \sum_{v=1}^N m_v \bar{r}_v^2,$$

где радиус-вектор \bar{r}_v v -й точки системы берется относительно точки O .

Теорема 1. Полярный момент системы материальных точек относительно центра масс является наименьшим.

Доказательство. Пусть \bar{r}_v и \bar{r}_v^* – радиус-векторы v -й точки относительно центров O и C соответственно, где C – центр масс системы (**рис. 6**).

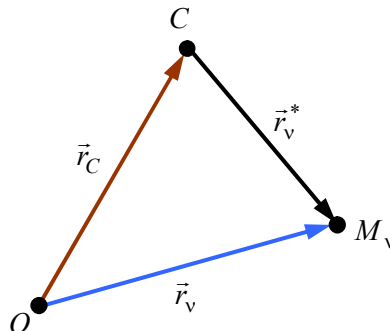


Рис. 6

Тогда

$$\bar{r}_v = \bar{r}_C + \bar{r}_v^* \Rightarrow \bar{r}_v^* = \bar{r}_v - \bar{r}_C \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 I_C &= \sum_{v=1}^N m_v \overbrace{(\bar{r}_v^*)^2}^{(\bar{r}_v - \bar{r}_C)^2} = \sum_{v=1}^N m_v (\bar{r}_v - \bar{r}_C)^2 = \overbrace{\sum_{v=1}^N m_v \bar{r}_v^2}^{I_O} - \sum_{v=1}^N 2m_v \bar{r}_v \bar{r}_C + \sum_{v=1}^N m_v \bar{r}_C^2 = \\
 &= I_O - 2\bar{r}_C M \overbrace{\sum_{v=1}^N \frac{m_v \bar{r}_v}{M}}^{\bar{r}_C} + \bar{r}_C^2 \overbrace{\sum_{v=1}^N m_v}^M = I_O - 2\bar{r}_C^2 M + \bar{r}_C^2 M \Rightarrow \\
 I_C &= I_O - \bar{r}_C^2 M \Rightarrow I_O = I_C + \overbrace{\bar{r}_C^2 M}^{\geq 0} \Rightarrow I_O \geq I_C.
 \end{aligned}$$

Таким образом, минимум полярного момента действительно достигается, когда он вычисляется относительно центра масс системы. Теорема доказана. ■

Замечание. Моменты инерции относительно декартовых осей Ox , Oy , Oz и полюса O (рис. 7)

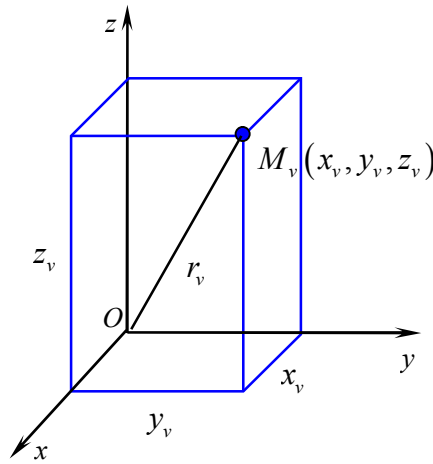


Рис. 7

определяются по формулам:

$$I_x = \sum_{v=1}^N m_v (y_v^2 + z_v^2), \quad I_y = \sum_{v=1}^N m_v (z_v^2 + x_v^2), \quad I_z = \sum_{v=1}^N m_v (x_v^2 + y_v^2), \quad (2)$$

$$I_O = \sum_{v=1}^N m_v (x_v^2 + y_v^2 + z_v^2). \quad (3)$$

Из (2) и (3) следует, что

$$2I_O = I_x + I_y + I_z. \quad (4)$$

Моменты инерции относительно координатных плоскостей Oxy , Oyz и Oxz соответственно равны:

$$I_{Oxy} = \sum_{v=1}^N m_v z_v^2, \quad I_{Oyz} = \sum_{v=1}^N m_v x_v^2, \quad I_{Oxz} = \sum_{v=1}^N m_v y_v^2. \quad (5)$$

Из (3) и (5) следует, что

$$I_O = I_{Oxy} + I_{Oyz} + I_{Oxz}. \quad (6)$$

1.3. Вычисление моментов инерции некоторых плоских тел

Пример 2. (Тонкое однородное кольцо). Вычислить момент инерции тонкого однородного кольца массой M радиуса R относительно оси, проходящей через центр кольца перпендикулярно плоскости кольца (рис. 8).

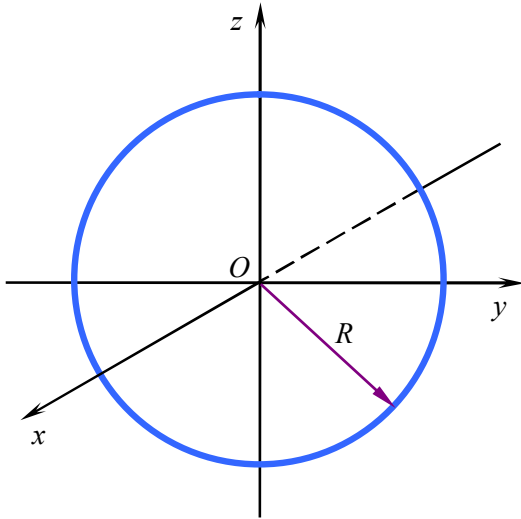


Рис. 8

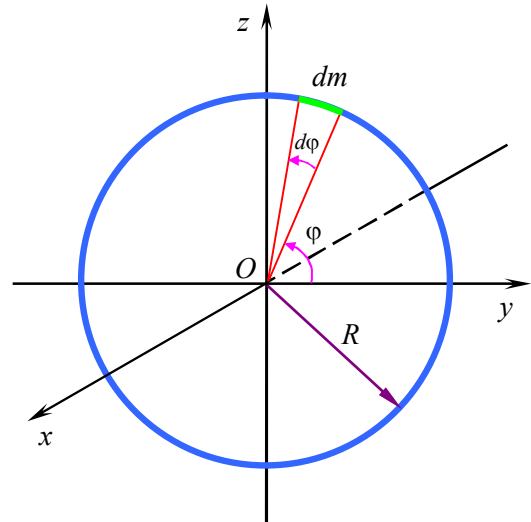


Рис. 9

Решение. Погонная плотность кольца $\gamma = \frac{M}{2\pi R}$. Момент инерции бесконечно малой дуги AB (рис. 9) вычисляется по формуле

$$dI_x(\varphi) = R^2 \overbrace{dm}^{\gamma R d\varphi} = R^2 \left(\frac{\frac{M}{2\pi R}}{\gamma} R d\varphi \right) = R^2 \frac{M}{2\pi R} R d\varphi = R^2 \frac{M}{2\pi} d\varphi.$$

Момент инерции всего кольца

$$I_x = \int_0^{2\pi} \overbrace{dI_x(\varphi)}^{R^2 \frac{M}{2\pi} d\varphi} = \int_0^{2\pi} \frac{M \cdot R^2}{2\pi} d\varphi = \frac{MR^2}{2\pi} \varphi \Big|_0^{2\pi} = MR^2.$$

Замечание. Моменты инерции относительно точки O и оси Ox равны между собой:

$$I_x = I_O.$$

Из (1.2.4) следует, что

$$2I_x = I_x + I_y + I_z \Rightarrow I_x = I_y + I_z.$$

В силу симметрии находим

$$I_y = I_z = \frac{MR^2}{2}. \blacktriangleright$$

Пример 3. (Тонкая круглая однородная пластина). Вычислить момент инерции круглой тонкой однородной пластины массой M радиуса R относительно оси, проходящей через центр пластины перпендикулярно плоскости пластины (рис. 10).

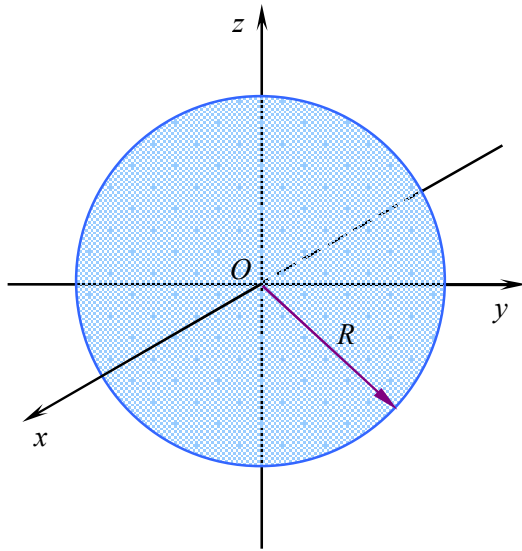


Рис. 10

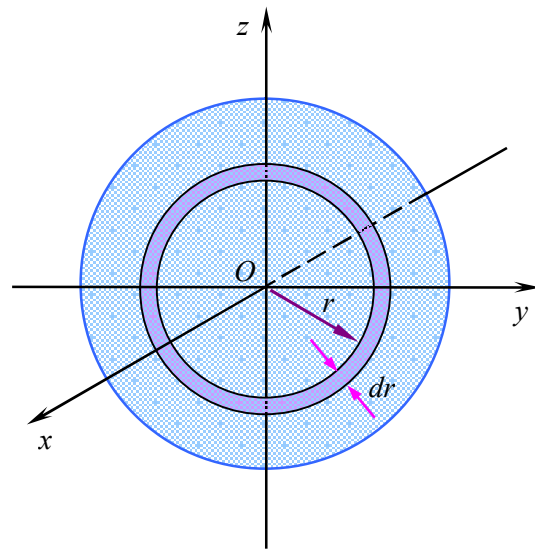


Рис. 11

Решение. Плотность пластины

$$\gamma = \frac{M}{\pi R^2}.$$

Момент инерции кольца бесконечно малой толщины (рис. 11) вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} dI_x &= (r + \frac{1}{2} dr)^2 \overset{\frac{M}{\pi R^2}}{\gamma} [\pi (r + dr)^2 - \pi r^2] = (r + \frac{1}{2} dr)^2 \frac{M}{\pi R^2} \pi [(r + dr)^2 - r^2] = \\ &= \left(r^2 + r dr + \frac{1}{4} dr^2 \right) \frac{M}{R^2} \left(r^2 + 2r dr + \overset{\approx 0}{dr^2} - r^2 \right) = \frac{M}{R^2} \left(2r^3 dr + 2r^2 \overset{\approx 0}{dr^2} \right) \approx \frac{M}{R^2} 2r^3 dr. \end{aligned}$$

Момент инерции всего кольца

$$I_x = \int_0^R \overbrace{\frac{M}{R^2} 2r^3 dr}^{dI_x} = \int_0^R \frac{M}{R^2} 2r^3 dr = \frac{M}{R^2} \cdot \frac{2r^4}{4} \Big|_0^R = \frac{MR^2}{2}.$$

Замечание. Аналогично замечанию в примере 2 находим

$$I_y = I_z = \frac{MR^2}{4}. \blacktriangleright$$

Пример 4. (Кольцо конечной толщины). В тонком однородном круглом диске радиуса R высверлено концентрическое отверстие радиуса r . Вычислить момент инерции получившегося диска массой M относительно оси z , проходящей через его центр O перпендикулярно плоскости диска (см. рис. 12).

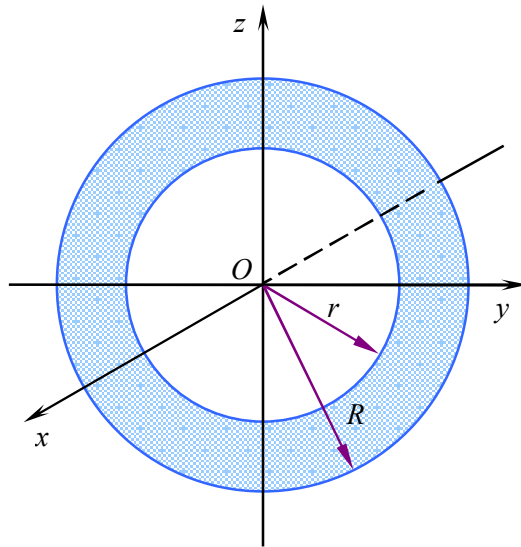


Рис. 12

Решение. Часто при решении этого примера некорректно применяется свойство аддитивности осевого момента инерции.

Неверное решение.

$$I_z = \frac{1}{2}MR^2 - \frac{1}{2}Mr^2 = \frac{1}{2}M(R^2 - r^2).$$

Тот факт, что приведенное решение неверно, следует хотя бы из невыполнения предельного перехода

$$I_z \xrightarrow{r \rightarrow R} MR^2.$$

Правильное решение. Определим плотность материала, из которого сделан диск:

$$\gamma = \frac{M}{\pi(R^2 - r^2)}.$$

Моменты инерции полного диска и диска, совпадающего по размерам с «дыркой от бублика», сделанных из того же материала, соответственно равны:

$$I_z^* = \frac{1}{2} \overbrace{M^*}^{\gamma\pi R^2} R^2 = \frac{1}{2}(\gamma\pi R^2) R^2,$$

$$I_{*z} = \frac{1}{2} \overbrace{M_*}^{\gamma\pi r^2} r^2 = \frac{1}{2}(\gamma\pi r^2) r^2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} I_z &= \overbrace{\frac{1}{2}(\gamma\pi R^2)R^2}^{I_z^*} - \overbrace{\frac{1}{2}(\gamma\pi r^2)r^2}^{I_{*z}} = \frac{1}{2}(\gamma\pi R^2)R^2 - \frac{1}{2}(\gamma\pi r^2)r^2 = \frac{1}{2} \overbrace{\frac{M}{\pi(R^2 - r^2)}}^{\gamma} \pi(R^4 - r^4) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{M}{\pi(R^2 - r^2)} \pi \overbrace{(R^2 - r^2)(R^2 + r^2)}^{(R^2 - r^2)(R^2 + r^2)} = \frac{1}{2}M(R^2 + r^2). \end{aligned}$$

Заметим, что предельный переход

$$I_z \xrightarrow{r \rightarrow R} MR^2$$

здесь выполняется.

Замечание. Аналогично замечанию в **примере 2** находим

$$I_y = I_z = \frac{M(R^2 + r^2)}{4}. \blacktriangleright$$

Пример 5. (Тонкий однородный стержень). Вычислить момент инерции тонкого однородного стержня длины l и массой M относительно оси Ox , проходящей через его середину перпендикулярно линии стержня (**рис. 13**).

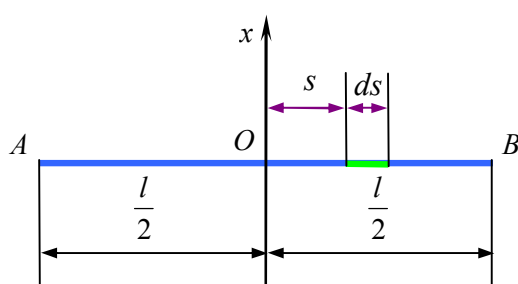


Рис. 13

Решение. Вычисляем

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{M}{l} \Rightarrow dI_x = s^2 \overbrace{dm}^{\gamma ds} = s^2 \overbrace{\gamma}^{\frac{M}{l}} ds = s^2 \frac{M}{l} ds \Rightarrow \\ I_x &= \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \overbrace{dI_x}^{\frac{l}{2} s^2 \frac{M}{l} ds} = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} s^2 \frac{M}{l} ds = 2 \frac{M}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} s^2 ds = \frac{2}{3} \frac{M l^3}{8l} = \frac{1}{12} M l^2. \end{aligned}$$

Замечание. Очевидно, что моменты инерции стержня относительно двух других осей (**рис. 14**)

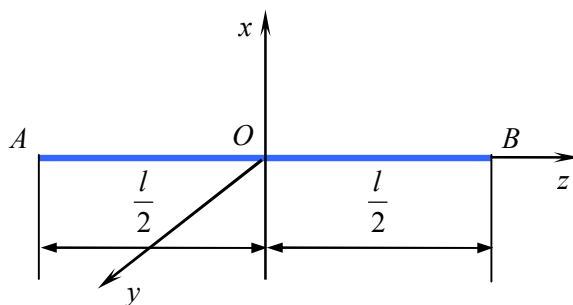


Рис. 14

будут равны следующим значениям:

$$I_y = \frac{M l^2}{12}, \quad I_z = 0. \blacktriangleright$$

Пример 6. (Тонкая прямоугольная пластина). Предлагается читателям самостоятельно вычислить моменты инерции тонкой прямоугольной пластины массой M со сторонами a и b относительно осей указанных на рис. 15.

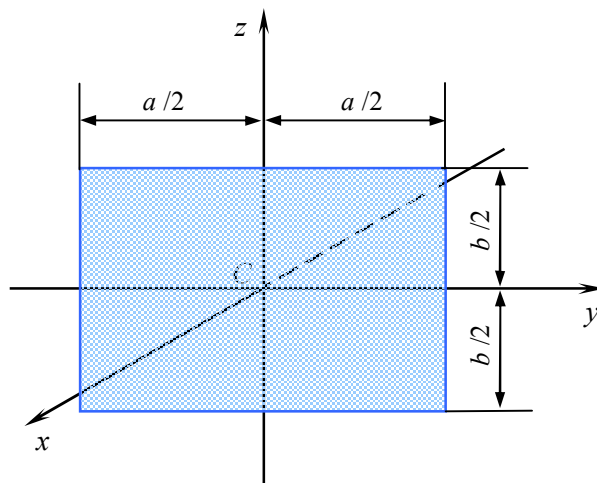


Рис. 15

Ответ. $I_x = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2)$, $I_y = \frac{1}{12} M b^2$, $I_z = \frac{1}{12} M a^2$. ►

1.4. Моменты инерции некоторых объемных тел

Приведем без вывода моменты инерции основных объемных тел относительно осей, проходящих через центр масс тел.

Прямой сплошной круговой цилиндр массой M , радиусом R и высотой H (рис. 16)

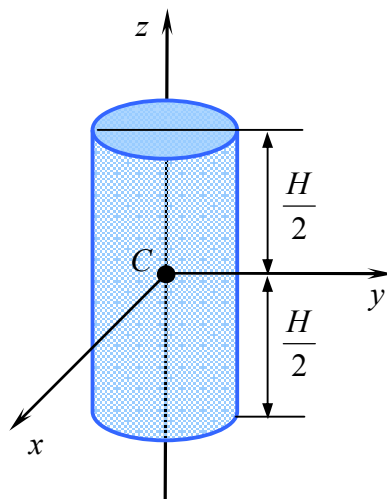


Рис. 16

имеет следующие моменты инерции:

$$\begin{cases} I_x = I_y = M \left(\frac{H^2}{12} + \frac{R^2}{4} \right), \\ I_z = \frac{M R^2}{2}. \end{cases}$$

Замечание. Если в моментах инерции прямого сплошного кругового цилиндра $R \rightarrow 0$, то получим моменты инерции тонкого однородного стержня.

Прямой полый круговой цилиндр массой M высотой H с внешним радиусом R и внутренним r (рис. 17)

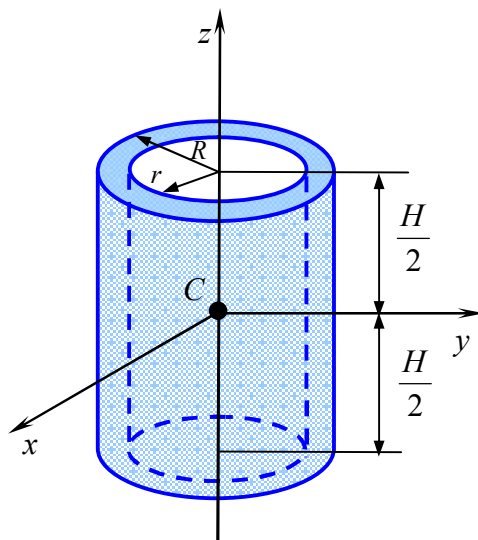


Рис. 17

имеет следующие моменты инерции:

$$\begin{cases} I_x = I_y = M \left(\frac{H^2}{12} + \frac{R^2 + r^2}{4} \right), \\ I_z = \frac{1}{2} M (R^2 + r^2). \end{cases}$$

Однородный шар массой M и радиусом R (рис. 18)

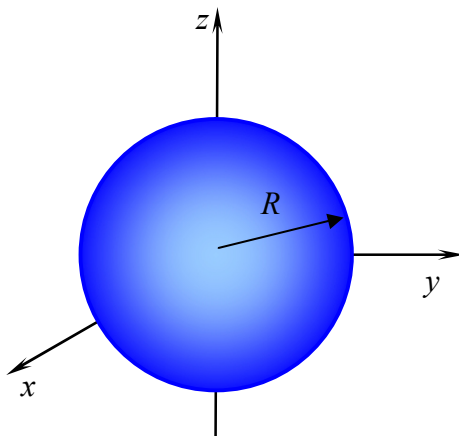


Рис. 18

имеет момент инерции относительно любой оси, проходящей через его центр масс, равный

$$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{3} I_C, \quad I_C = \frac{3}{5} MR^2,$$

где I_C – полярный момент инерции.

Для **полого шара** массой M с внешним радиусом R и внутренним r моменты инерции равны:

$$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5} M \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}.$$

Для **тонкой сферической оболочки** массой M и радиусом R моменты инерции равны:

$$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{3} MR^2.$$

1.5. Моменты инерции относительно параллельных осей

Основным результатом этого пункта служит следующее утверждение.

Теорема 2. (Гюйгенса – Штейнера). Пусть ось проходит через центр масс системы материальных точек и I_C – момент инерции системы относительно этой оси. Тогда для любой оси u , параллельной данной, имеет место равенство

$$I_u = I_C + Md^2,$$

где d – расстояние между осями.

Доказательство. Пусть координатная ось Oz проходит через центр масс системы C , а ось u лежит в плоскости zOy (рис. 19).

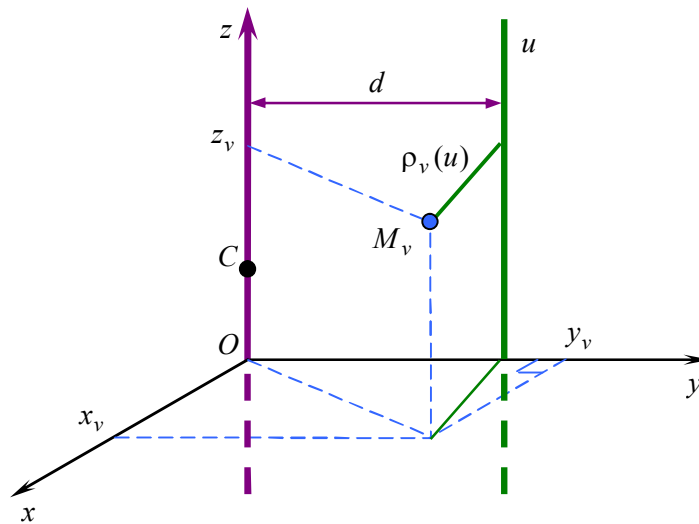


Рис. 19

Обозначим через $\rho_v(u)$ расстояние от точки M_v до оси u . Очевидно, что

$$\rho_v(u) = \sqrt{x_v^2 + (y_v - d)^2}.$$

Вычисляем

$$I_u = \sum_v m_v \overbrace{\rho_v^2(u)}^{x_v^2 + (y_v - d)^2} = \sum_v m_v [x_v^2 + (y_v - d)^2] = \sum_v m_v (x_v^2 + y_v^2) - 2d \sum_v m_v y_v + \left(\sum_v m_v \right) d^2 =$$

$$= \overbrace{\sum_v m_v (x_v^2 + y_v^2)}^{I_C} - 2d \frac{\sum_v m_v y_v}{M} \cdot M + \left(\sum_v m_v \right) d^2 = I_C - 2d \cdot M \overset{=0}{y_C} + Md^2 = I_C + Md^2.$$

Теорема доказана. ■

Из доказанной теоремы вытекает следующая формула. Пусть ось u_1 параллельна оси u_2 и d_1, d_2 – расстояния от первой и второй оси до центра масс системы соответственно. Тогда

$$\overbrace{I_{u_1}}^{I_C + Md_1^2} - \overbrace{I_{u_2}}^{I_C + Md_2^2} = M(d_1^2 - d_2^2) \Rightarrow I_{u_1} = I_{u_2} + M(d_1^2 - d_2^2).$$

Приведем пример, иллюстрирующий применение доказанной теоремы.

Пример 7. (Тонкий однородный стержень). Вычислить момент инерции тонкого однородного стержня длины l и массой M относительно оси, проходящей через его конец. Решить задачу двумя способами.

Решение. Первый способ (непосредственное интегрирование). На рис. 20 показано, что

$$dI_x = s^2 \overbrace{\frac{M}{l} ds}^{dm} = s^2 \frac{M}{l} ds \Rightarrow I_x = \int_0^l \frac{M}{l} s^2 ds = \frac{M l^3}{3l} = \frac{1}{3} M l^2.$$

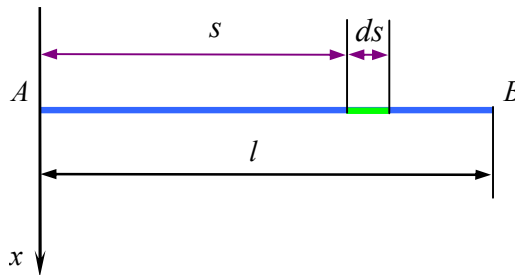


Рис. 20

Второй способ (теорема Гюйгенса – Штейнера). На рис. 21 показано, что

$$I_x = \overbrace{I_u}^{\frac{1}{12} M l^2} + \left(\frac{l}{2} \right)^2 M = \frac{1}{12} M l^2 + \frac{1}{4} M l^2 = \frac{1}{3} M l^2.$$

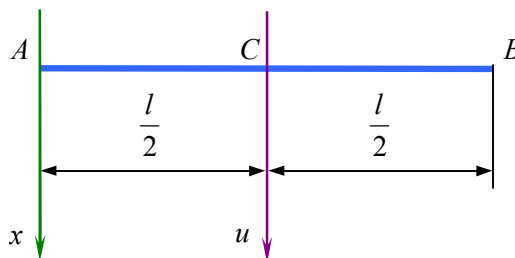


Рис. 21

Результат в обоих случаях получен один и тот же. ►

Пример. 8. Маятник состоит из тонкого однородного стержня OA длины $l = 3r$ и массой $M_1 = m$, к концу которого жестко прикреплен однородный тонкий диск массой $M_2 = 2m$ и радиуса r (рис. 22). Ось привеса O перпендикулярна плоскости маятника. Вычислить момент инерции маятника относительно его оси привеса O .

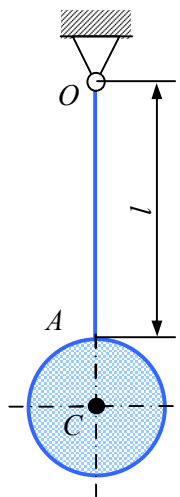


Рис. 22

Решение. Момент инерции маятника относительно его оси привеса O будет равен:

$$I_{Oz} = (I_{Oz})_1 + (I_{Oz})_2,$$

где $(I_{Oz})_1$ и $(I_{Oz})_2$ – моменты инерции соответственно стержня и диска относительно оси привеса O .

Момент инерции стержня (см. пример 7) равен:

$$(I_{Oz})_1 = \frac{1}{3} M_1 l^2 = \frac{1}{3} m (3r)^2 = 3mr^2.$$

Момент инерции диска относительно оси привеса O определим по теореме Гюйгенса – Штейнера

$$(I_{Oz})_2 = I_{Cz} + M_2 (l + r)^2.$$

Для однородного тонкого диска $I_{Cz} = \frac{M_2 r^2}{2}$. Тогда

$$(I_{Oz})_2 = \frac{M_2 r^2}{2} + M_2 (l + r)^2 = \frac{M_2}{2} (r^2 + 2(l + r)^2) = \frac{2m}{2} (r^2 + 2(4r)^2) = 33mr^2.$$

Следовательно, момент инерции маятника

$$I_{Oz} = 3mr^2 + 33mr^2 = 36mr^2. \blacktriangleright$$

2. ТЕНЗОР И ЭЛЛИПСОИД ИНЕРЦИИ

2.1. Тензор инерции

Вычислим момент инерции системы материальных точек относительно оси u , проходящей через начало координат и имеющей направляющие косинусы (рис. 1)

$$\alpha = \cos \varphi_x, \quad \beta = \cos \varphi_y, \quad \gamma = \cos \varphi_z$$

с осями Ox, Oy, Oz соответственно. Обозначим через ρ_v расстояние от точки M_v системы до рассматриваемой оси, а через $\vec{u}_0 = (\alpha, \beta, \gamma)$ – единичный вектор этой оси.

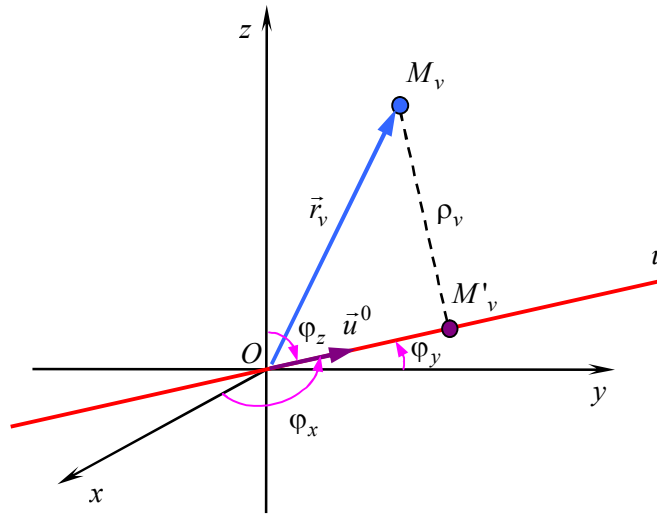


Рис. 1

Тогда

$$I_u = \sum_v m_v \rho_v^2, \quad (1)$$

где в силу теоремы Пифагора справедливо

$$\begin{aligned} \rho_v^2 &= (OM_v)^2 - \left(\overline{OM_v \cdot \vec{u}_0} \right)^2 = \overbrace{(OM_v)^2}^{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2} - \left(\overline{OM_v \cdot \vec{u}_0} \right)^2 = (x_v^2 + y_v^2 + z_v^2) - (\alpha x_v + \beta y_v + \gamma z_v)^2 = \\ &\stackrel{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1}{=} \overbrace{(1 - \alpha^2)}^{\beta^2 + \gamma^2} x_v^2 + \overbrace{(1 - \beta^2)}^{\alpha^2 + \gamma^2} y_v^2 + \overbrace{(1 - \gamma^2)}^{\alpha^2 + \beta^2} z_v^2 - 2\alpha\beta x_v y_v - 2\alpha\gamma x_v z_v - 2\beta\gamma y_v z_v \Rightarrow \\ \rho_v^2 &= (\beta^2 + \gamma^2) x_v^2 + (\alpha^2 + \gamma^2) y_v^2 + (\alpha^2 + \beta^2) z_v^2 - 2\alpha\beta x_v y_v - 2\alpha\gamma x_v z_v - 2\beta\gamma y_v z_v. \end{aligned}$$

Подставим полученное выражение в (1). Имеем

$$\begin{aligned}
 I_u &= \sum_v m_v \overbrace{\left((\beta^2 + \gamma^2)x_v^2 + (\alpha^2 + \gamma^2)y_v^2 + (\alpha^2 + \beta^2)z_v^2 - 2\alpha\beta x_v y_v - 2\alpha\gamma x_v z_v - 2\beta\gamma y_v z_v \right)}^{\rho_v^2} = \\
 &= \sum_v m_v \left[(\beta^2 + \gamma^2)x_v^2 + (\alpha^2 + \gamma^2)y_v^2 + (\alpha^2 + \beta^2)z_v^2 - 2\alpha\beta x_v y_v - 2\alpha\gamma x_v z_v - 2\beta\gamma y_v z_v \right] = \\
 &= \alpha^2 \overbrace{\sum_v m_v (y_v^2 + z_v^2)}^{I_{xx}} + \beta^2 \overbrace{\sum_v m_v (x_v^2 + z_v^2)}^{I_{yy}} + \gamma^2 \overbrace{\sum_v m_v (x_v^2 + y_v^2)}^{I_{zz}} - \\
 &\quad - 2\alpha\beta \overbrace{\sum_v m_v x_v y_v}^{I_{xy}} - 2\alpha\gamma \overbrace{\sum_v m_v x_v z_v}^{I_{xz}} - 2\beta\gamma \overbrace{\sum_v m_v y_v z_v}^{I_{yz}}.
 \end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{cases} I_{xx} = \sum_v m_v (y_v^2 + z_v^2), \\ I_{yy} = \sum_v m_v (x_v^2 + z_v^2), \\ I_{zz} = \sum_v m_v (x_v^2 + y_v^2), \end{cases} \quad \begin{cases} I_{xy} = I_{yx} = \sum_v m_v x_v y_v, \\ I_{xz} = I_{zx} = \sum_v m_v x_v z_v, \\ I_{yz} = I_{zy} = \sum_v m_v y_v z_v. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что величины I_{xx} , I_{yy} , I_{zz} представляют собой моменты инерции относительно соответствующих координатных осей.

Определение 1. Величины I_{xy} , I_{yx} , I_{xz} , I_{zx} , I_{yz} , I_{zy} называются смешанными или центробежными моментами.

Центробежные моменты характеризуют несимметричность распределения масс: чем они больше, тем несимметричность существеннее.

С учетом введенных обозначений выражение (1) для момента инерции относительно оси u принимает вид

$$I_u = \alpha^2 I_{xx} + \beta^2 I_{yy} + \gamma^2 I_{zz} - 2\alpha\beta I_{xy} - 2\alpha\gamma I_{xz} - 2\beta\gamma I_{yz}.$$

Определение 2. Симметричная матрица

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

называется тензором инерции рассматриваемой механической системы.

Непосредственно проверяется, что

$$\begin{aligned}
 (I \bar{u}_0) \cdot \bar{u}_0 &= \left(\begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha I_{xx} - \beta I_{xy} - \gamma I_{xz} \\ -\alpha I_{yx} + \beta I_{yy} - \gamma I_{yz} \\ -\alpha I_{zx} - \beta I_{zy} + \gamma I_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \\
 &= \alpha^2 I_{xx} + \beta^2 I_{yy} + \gamma^2 I_{zz} - 2\alpha\beta I_{xy} - 2\alpha\gamma I_{xz} - 2\beta\gamma I_{yz} = I_u \Rightarrow \\
 &I_u = (I \bar{u}_0) \cdot \bar{u}_0.
 \end{aligned}$$

Заметим, что компоненты тензора инерции зависят от принятой системы координат.

2.2. Эллипсоид инерции

Тензору инерции может быть дана геометрическая интерпретация. Пусть $N(x, y, z)$ – точка на оси u , где $ON = \frac{1}{\sqrt{I_u}}$ (см. рис. 2)

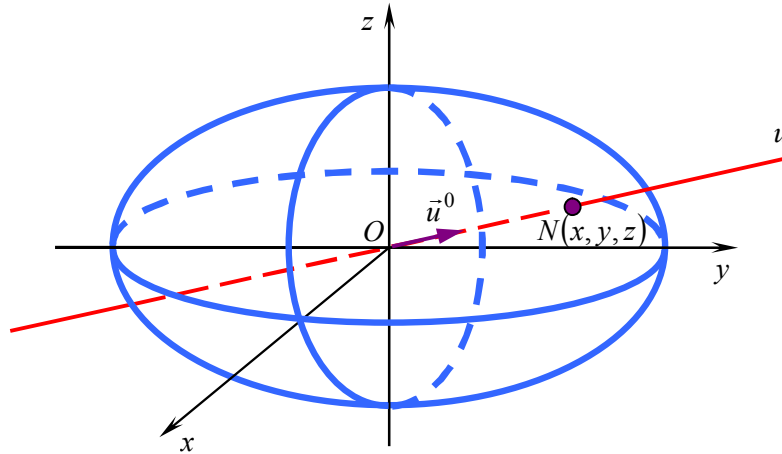


Рис. 2

Тогда

$$\alpha = \frac{x}{ON} = x\sqrt{I_u}, \quad \beta = \frac{y}{ON} = y\sqrt{I_u}, \quad \gamma = \frac{z}{ON} = z\sqrt{I_u}. \quad (1)$$

Подставим (1) в выражение для момента инерции:

$$\begin{aligned} I_u &= \alpha^2 I_{xx} + \beta^2 I_{yy} + \gamma^2 I_{zz} - 2\alpha\beta I_{xy} - 2\alpha\gamma I_{xz} - 2\beta\gamma I_{yz} \Rightarrow \\ I_u &= I_u (I_{xx}x^2 + I_{yy}y^2 + I_{zz}z^2 - 2I_{xy}xy - 2I_{xz}xz - 2I_{yz}yz) \Rightarrow \\ I_{xx}x^2 + I_{yy}y^2 + I_{zz}z^2 - 2I_{xy}xy - 2I_{xz}xz - 2I_{yz}yz &= 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Рассмотрим весь пучок осей u . Множество точек $N(x, y, z)$ будет описываться уравнением (2) и представлять собой поверхность второго порядка. Эта поверхность является эллипсоидом, так как квадратичная форма

$$F(x, y, z) = \frac{1}{2} \left[I_{xx}x^2 + I_{yy}y^2 + I_{zz}z^2 - 2I_{xy}xy - 2I_{xz}xz - 2I_{yz}yz \right]$$

положительно определена.

Определение 3. Эллипсоид (2) называется эллипсоидом инерции.

Компоненты тензора инерции и уравнение эллипсоида инерции зависят от точки тела, относительно которой они считаются, и выбранной системы координат.

2.3. Главные оси инерции

Определение 4. *Прямая, проходящая через начало координат, называется главной осью эллипсоида, если она совпадает с нормалью к поверхности эллипсоида в точке ее пересечения с поверхностью эллипсоида (рис. 3).*

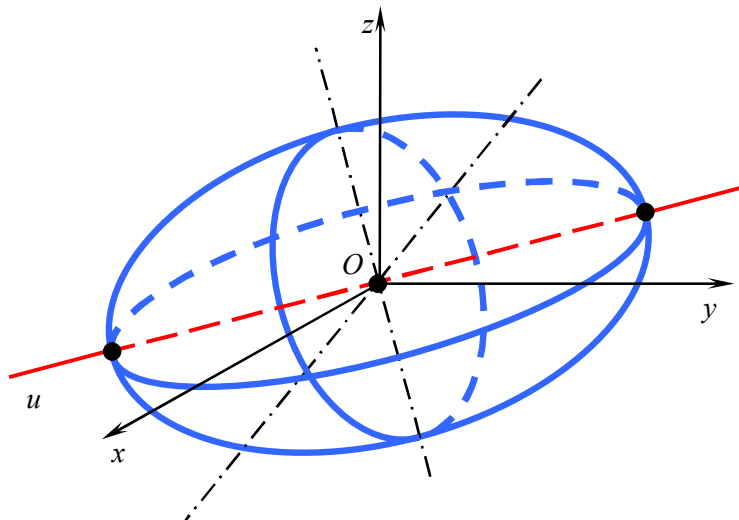


Рис. 3

Определение 5. *Главная ось эллипсоида инерции называется главной осью инерции.*
Выведем условия, которым должно удовлетворять направление

$$\bar{R} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

определяющее главную ось инерции (рис. 4).

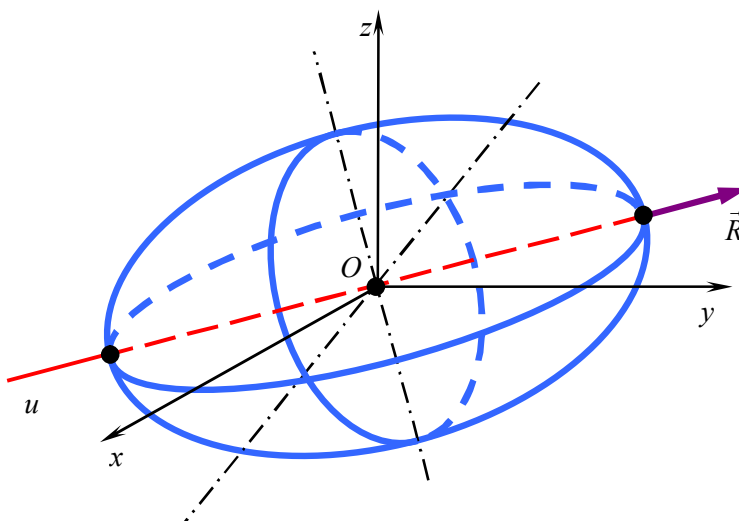


Рис. 4

В силу определения главной оси эллипсоида должно выполняться равенство

$$\text{grad } F(x, y, z) = \lambda \bar{R}.$$

В проекциях на координатные оси оно принимает вид

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \lambda x, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \lambda y, \\ \frac{\partial F}{\partial z} = \lambda z. \end{cases}$$

Напомним, что

$$F(x, y, z) = \frac{1}{2} [I_{xx}x^2 + I_{yy}y^2 + I_{zz}z^2 - 2I_{xy}xy - 2I_{xz}xz - 2I_{yz}yz].$$

Тогда

$$\begin{cases} I_{xx}x - I_{xy}y - I_{xz}z = \lambda x, \\ -I_{yx}x + I_{yy}y - I_{yz}z = \lambda y, \\ -I_{zx}x - I_{zy}y + I_{zz}z = \lambda z. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (I_{xx} - \lambda)x - I_{xy}y - I_{xz}z = 0, \\ -I_{yx}x + (I_{yy} - \lambda)y - I_{yz}z = 0, \\ -I_{zx}x - I_{zy}y + (I_{zz} - \lambda)z = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Система линейных алгебраических уравнений (1) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} I_{xx} - \lambda & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} - \lambda & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (2)$$

Известно, что это уравнение имеет ровно три действительных корня $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (необязательно попарно различных). Каждому из корней отвечает свое направление:

$$\lambda_i \Leftrightarrow \bar{R}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Теорема 1. Направления, отвечающие различным корням, взаимно перпендикулярны.

Доказательство. Пусть для некоторых номеров выполнено

$$i, j \in \{1, 2, 3\}, \quad i \neq j, \quad \lambda_i \neq \lambda_j.$$

Справедливы равенства

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x_i, y_i, z_i) = \lambda_i x_i, \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x_i, y_i, z_i) = \lambda_i y_i, \\ \frac{\partial F}{\partial z}(x_i, y_i, z_i) = \lambda_i z_i, \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x_j, y_j, z_j) = \lambda_j x_j, \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x_j, y_j, z_j) = \lambda_j y_j, \\ \frac{\partial F}{\partial z}(x_j, y_j, z_j) = \lambda_j z_j. \end{cases} \quad (4)$$

Каждое из равенств (3) умножим соответственно на x_j, y_j, z_j и сложим их почленно.

В результате получим

$$x_j \frac{\partial F}{\partial x}(x_i, y_i, z_i) + y_j \frac{\partial F}{\partial y}(x_i, y_i, z_i) + z_j \frac{\partial F}{\partial z}(x_i, y_i, z_i) = \lambda_i x_i x_j + \lambda_i y_i y_j + \lambda_i z_i z_j. \quad (5)$$

Аналогичную операцию производим с равенствами (4), умножая каждое из них на x_i, y_i, z_i соответственно. В результате получим

$$x_i \frac{\partial F}{\partial x}(x_j, y_j, z_j) + y_i \frac{\partial F}{\partial y}(x_j, y_j, z_j) + z_i \frac{\partial F}{\partial z}(x_j, y_j, z_j) = \lambda_j x_i x_j + \lambda_j y_i y_j + \lambda_j z_i z_j. \quad (6)$$

Непосредственно проверяется, что левые части равенств (5) и (6) равны между собой. Вычитая из равенства (5) равенство (6), получим

$$(\lambda_i - \lambda_j)(x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j) = 0.$$

В силу $\lambda_i \neq \lambda_j$ из последнего равенства следует

$$x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j = 0 \Rightarrow \bar{R}_i \cdot \bar{R}_j = 0,$$

что и означает $\bar{R}_i \perp \bar{R}_j$. Теорема доказана. ■

2.4. Уравнение эллипсоида инерции в осях координат, являющихся главными осями инерции

В качестве координатных осей возьмем главные оси инерции ξ, η, ζ (рис. 5). Квадратичная форма, определяющая эллипсоид инерции, примет вид

$$2F(\xi, \eta, \zeta) = I_{\xi\xi}\xi^2 + I_{\eta\eta}\eta^2 + I_{\zeta\zeta}\zeta^2 - 2I_{\xi\eta}\xi\eta - 2I_{\xi\zeta}\xi\zeta - 2I_{\eta\zeta}\eta\zeta. \quad (1)$$

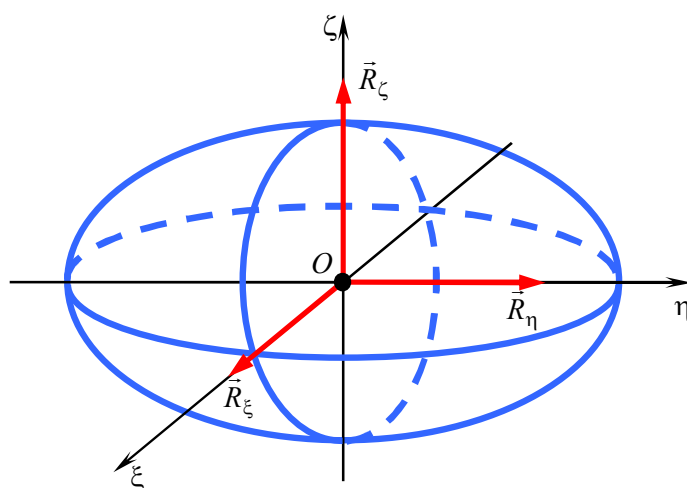


Рис. 5

Для направлений координатных осей имеем

$$\bar{R}_\xi = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{R}_\eta = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{R}_\zeta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \zeta \end{pmatrix}.$$

В силу того что эти направления являются главными осями инерции, имеют место равенства

$$\text{grad } F(\xi, \eta, \zeta) \Big|_{\bar{R}_\xi} = \lambda_\xi \bar{R}_\xi, \quad (2)$$

$$\text{grad } F(\xi, \eta, \zeta) \Big|_{\bar{R}_\eta} = \lambda_\eta \bar{R}_\eta, \quad (3)$$

$$\text{grad } F(\xi, \eta, \zeta) \Big|_{\bar{R}_\zeta} = \lambda_\zeta \bar{R}_\zeta. \quad (4)$$

Вычислим левую часть равенства (2) с учетом (1):

$$\text{grad } F(\xi, \eta, \zeta) \Big|_{\bar{R}_\xi = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial \xi} \\ \frac{\partial F}{\partial \eta} \\ \frac{\partial F}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \Big|_{\bar{R}_\xi = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = \begin{matrix} F(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2}(I_{\xi\xi}\xi^2 + I_{\eta\eta}\eta^2 + I_{\zeta\zeta}\zeta^2 - \\ -2I_{\xi\eta}\xi\eta - 2I_{\xi\zeta}\xi\zeta - 2I_{\eta\zeta}\eta\zeta) \end{matrix} = \begin{pmatrix} I_{\xi\xi}\xi - I_{\xi\eta}\eta - I_{\xi\zeta}\zeta \\ I_{\eta\eta}\eta - I_{\xi\eta}\xi - I_{\eta\zeta}\zeta \\ I_{\zeta\zeta}\zeta - I_{\xi\zeta}\xi - I_{\eta\zeta}\eta \end{pmatrix} \Big|_{\bar{R}_\xi = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} I_{\xi\xi}\xi \\ -I_{\xi\eta}\xi \\ -I_{\xi\zeta}\xi \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\underbrace{\begin{pmatrix} I_{\xi\xi}\xi \\ -I_{\xi\eta}\xi \\ -I_{\xi\zeta}\xi \end{pmatrix}}_{\text{grad } F(\xi, \eta, \zeta) \Big|_{\bar{R}_\xi}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_\xi \xi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\lambda_\xi \bar{R}_\xi} \Rightarrow \begin{cases} I_{\xi\xi}\xi = \lambda_\xi \xi, \\ -I_{\xi\eta} = 0, \\ -I_{\xi\zeta} = 0 \end{cases}. \quad (5)$$

Аналогично из (3) и (4) получаем еще шесть скалярных равенств:

$$\begin{cases} -I_{\eta\xi} = 0, \\ I_{\eta\eta} \cdot \eta = \lambda_\eta \cdot \eta, \\ -I_{\eta\zeta} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} -I_{\zeta\xi} = 0, \\ -I_{\zeta\eta} = 0, \\ I_{\zeta\zeta} \cdot \zeta = \lambda_\zeta \cdot \zeta. \end{cases} \quad (6)$$

Из (5) и (6) находим

$$I_{\xi\xi} = \lambda_\xi, \quad I_{\eta\eta} = \lambda_\eta, \quad I_{\zeta\zeta} = \lambda_\zeta, \\ I_{\xi\eta} = I_{\eta\xi} = I_{\xi\zeta} = I_{\zeta\xi} = I_{\eta\zeta} = I_{\zeta\eta} = 0.$$

Обозначим

$$I_{\xi\xi} = A, \quad I_{\eta\eta} = B, \quad I_{\zeta\zeta} = C.$$

Уравнение эллипсоида инерции в главных осях инерции принимает вид

$$\overbrace{I_{\xi\xi}^A} \xi^2 + \overbrace{I_{\eta\eta}^B} \eta^2 + \overbrace{I_{\zeta\zeta}^C} \zeta^2 - 2\overbrace{I_{\xi\eta}^0} \xi\eta - 2\overbrace{I_{\xi\zeta}^0} \xi\zeta - 2\overbrace{I_{\eta\zeta}^0} \eta\zeta = 1 \Rightarrow \\ A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1.$$

В случае когда величины $\overset{I_{\xi\xi}}{A}$, $\overset{I_{\eta\eta}}{B}$, $\overset{I_{\zeta\zeta}}{C}$ попарно различны, в силу равенств $I_{\xi\xi} = \lambda_\xi$, $I_{\eta\eta} = \lambda_\eta$, $I_{\zeta\zeta} = \lambda_\zeta$ корни характеристического уравнения попарно различны. Тогда из **теоремы 1** следует, что направления главных осей взаимно ортогональны.

В случае когда среди этих чисел есть пара равных, эллипсоид инерции будет эллипсоидом вращения и любые направления в плоскости, перпендикулярной оси вращения эллипсоида, будут главными (см. **рис. 6**)

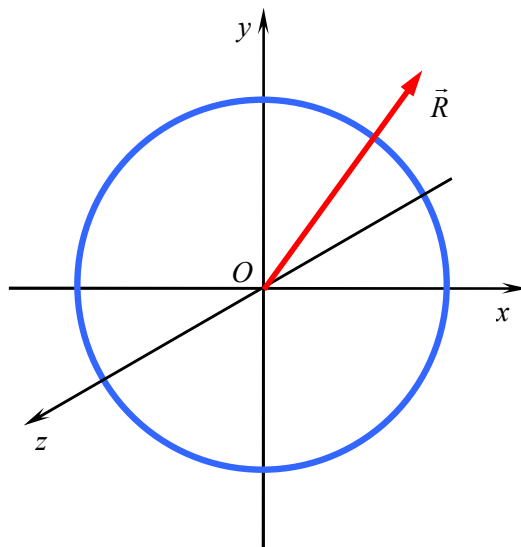


Рис. 6

Наконец, если $A = B = C$, то эллипсоид инерции – шар. Для него все направления являются главными.

Таким образом, главные оси инерции можно всегда выбрать так, чтобы они были взаимно ортогональными.

2.5. Свойства главных осей инерции

Свойство 1. *Координатная ось является главной осью инерции тогда и только тогда, когда смешанные моменты относительно этой оси равны нулю.*

Необходимость. Доказательство приведено в предыдущем параграфе.

Достаточность. Пусть, например,

$$I_{\xi\eta} = I_{\zeta\xi} = 0.$$

Докажем, что вектор $\bar{R}_\xi = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ определяет направление главной оси инерции. Требуется

доказать выполнение равенства

$$\text{grad } F(\xi, \eta, \zeta) \Big|_{\bar{R}_\xi} = \lambda_\xi \bar{R}_\xi.$$

Действительно, надо проверить равенство

$$\underbrace{\begin{pmatrix} I_{\xi\xi}\xi - I_{\xi\eta}\eta - I_{\xi\zeta}\zeta \\ I_{\eta\eta}\eta - I_{\xi\eta}\xi - I_{\eta\zeta}\zeta \\ I_{\zeta\zeta}\zeta - I_{\xi\zeta}\xi - I_{\eta\zeta}\eta \end{pmatrix}}_{\left. \begin{matrix} \eta=\xi=0 \\ I_{\xi\eta}=I_{\xi\zeta}=0 \end{matrix} \right|_{\bar{R}_\xi}} \Big|_{\bar{R}_\xi} = \underbrace{\lambda_\xi \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}}_{\left. \eta=\xi=0 \right|_{\bar{R}_\xi}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} I_{\xi\xi}\xi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_\xi \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

а оно очевидно выполняется, поскольку $\lambda_\xi = I_{\xi\xi}$.

Для направлений $\bar{R}_\eta, \bar{R}_\zeta$ доказательство аналогично. Достаточность, а вместе с ней и свойство в целом, доказаны. ■

Рассмотрим абсолютно твердое тело.

Определение 6. Будем говорить, что некоторая прямая (плоскость) является инерциальной осью (плоскостью) симметрии тела, если она является осью (плоскостью) симметрии тела и для любой пары частиц тела, расположенных симметрично относительно нее, имеет место совпадение масс этих частиц.

Заметим, что для однородных тел понятия инерциальной оси (плоскости) симметрии и геометрической симметрии совпадают.

Свойство 2. Пусть абсолютно твердое тело имеет инерционную ось симметрии. Тогда эта ось является главной осью инерции тела.

Доказательство. Пусть, например, инерционной осью симметрии является ось Ox . Это означает, что для любой точки M массы m с координатами (x, y, z) найдется точка M^* той же массы m и координатами $(x, -y, -z)$. Тогда

$$I_{xz} = \sum_i m_i x_i z_i = 0 = \sum_i m_i x_i y_i = I_{xy}.$$

В силу свойства 1 ось Ox будет главной осью инерции. Свойство доказано. ■

Свойство 3. Пусть абсолютно твердое тело имеет инерционную плоскость симметрии. Тогда одна из главных осей инерции будет перпендикулярна этой плоскости.

Доказательство. Пусть, например, плоскостью симметрии является плоскость xOy . Это означает, что для любой точки M массы m с координатами (x, y, z) найдется точка M^* той же массы m и координатами $(x, y, -z)$. Тогда

$$I_{xz} = \sum_i m_i x_i z_i = 0 = \sum_i m_i y_i z_i = I_{yz}.$$

В силу свойства 1 ось Oz будет искомой главной осью инерции, перпендикулярной плоскости симметрии xOy . Свойство доказано. ■

Определение 7. Главные оси инерции для эллипсоида инерции относительно центра масс называются главными центральными осями инерции.

Свойство 4. Главные оси инерции, для эллипсоидов инерции, отвечающих точкам на главных центральных осях инерции, параллельны главным центральным осям инерции.

Доказательство. Пусть C – центр масс системы и $Cxyz$ – главные центральные оси инерции. Тогда

$$\begin{cases} I_{xy} = \sum_i m_i x_i y_i = 0, \\ I_{xz} = \sum_i m_i x_i z_i = 0, \\ I_{yz} = \sum_i m_i y_i z_i = 0. \end{cases}$$

Пусть M – точка на оси Cx . Ее координаты $(a, 0, 0)$. Введем новые координатные оси $Mx^*y^*z^*$ (рис. 7).

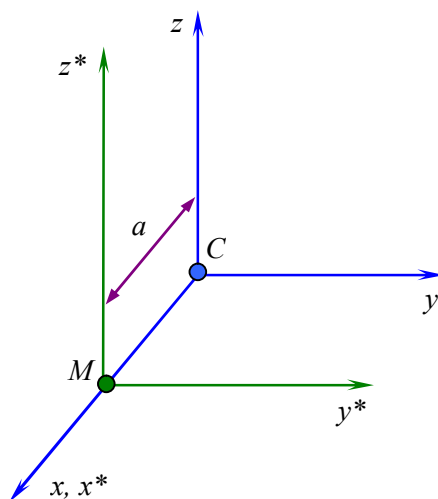


Рис. 7

Очевидно, что

$$x = x^* + a, \quad y = y^*, \quad z = z^*.$$

Тогда

$$\begin{aligned} 0 = I_{xy} &= \sum_i m_i \overbrace{x_i^* + a}^{x_i^* + a} y_i^* = \sum_i m_i (x_i^* + a) y_i^* = \sum_i m_i x_i^* y_i^* + a \sum_i m_i y_i^* = \\ &= I_{x^*y^*} + aM \frac{\sum_i m_i y_i^*}{M} = I_{x^*y^*} + aM y_C^* = I_{x^*y^*} + aM \underbrace{0}_{y_C^*} = I_{x^*y^*} \Rightarrow I_{x^*y^*} = 0. \end{aligned}$$

Аналогично устанавливается, что

$$I_{x^*z^*} = 0.$$

Наконец,

$$0 = I_{yz} = \sum_i m_i \overbrace{y_i^*}^{y_i^*} \overbrace{z_i^*}^{z_i^*} = \sum_i m_i y_i^* z_i^* = I_{y^*z^*} \Rightarrow I_{y^*z^*} = 0.$$

Таким образом,

$$I_{x^*y^*} = I_{x^*z^*} = I_{y^*z^*} = 0,$$

и по **свойству 1** оси $Mx^*y^*z^*$ – главные оси инерции. Свойство доказано. ■

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое центр масс механической системы? Как его определяют?
2. Как определить центр масс однородного абсолютно твердого тела?
3. Что такое момент инерции системы материальных точек относительно оси?
4. Какая величина называется радиусом инерции?
5. Как определяется момент инерции системы материальных точек относительно точки?
6. Чему равны моменты инерции простейших тел: стержень, кольцо, диск, прямоугольная пластина, цилиндр, шар?
7. Сформулируйте теорему Гюйгенса–Штейнера.
8. Что такое тензор инерции?
9. Как определяются центробежные моменты инерции?
10. Дайте геометрическую интерпретацию тензора инерции.
11. Какие оси инерции называются главными?
12. Перечислите свойства главных осей инерции.
13. Какова размерность моментов инерции в единицах СИ?
14. Как определить по эллипсоиду инерции, относительной какой оси из всех осей, проходящих через данную точку, момент инерции твердого тела имеет наибольшее значение?
15. Какие оси называются главными центральными осями инерции?

РАЗДЕЛ 2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ И ЗАКОНЫ ДИНАМИКИ

Реальные задачи динамики системы требуют изучения движения материальных точек и тел с учетом взаимного влияния их движений.

Твердое тело представляет собой неизменяемую систему материальных точек. Возможна модель механической системы, когда ряд тел в ней представляется материальными точками.

Рекомендуется вспомнить теоремы динамики для материальной точки [8].

1. ОСНОВНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

1.1. Определение основных динамических величин системы

Рассмотрим систему материальных точек M_1, \dots, M_N , движущуюся в инерциальной системе отсчета $Oxyz$ (рис. 1).

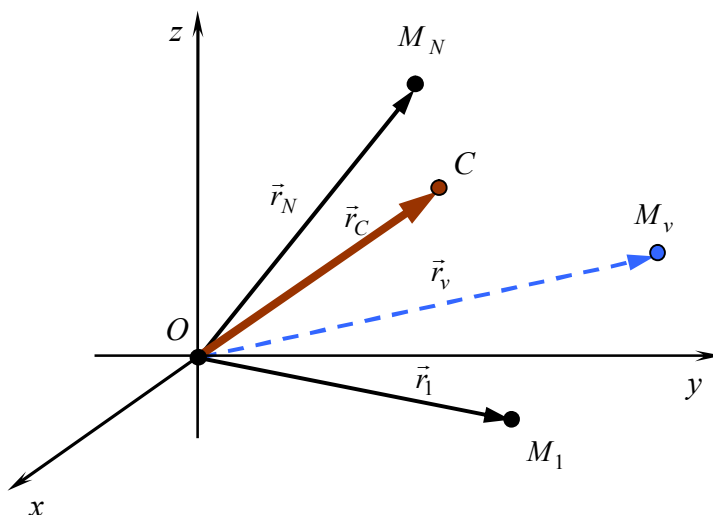


Рис. 1

Пусть m_ν – масса, \vec{r}_ν – радиус-вектор и \vec{v}_ν – скорость ν -й, $\nu = 1, 2, \dots, N$, точки.

Определение 1. *Количеством движения механической системы называется вектор*

$$\vec{Q} = \sum_{\nu=1}^N m_\nu \vec{v}_\nu. \quad (1)$$

Полагаем

$$M = \sum_{\nu=1}^N m_\nu$$

и придадим формуле (1) другой вид:

$$\begin{aligned} \vec{Q} = \sum_{\nu=1}^N m_\nu \vec{v}_\nu &= \frac{M}{M} \sum_{\nu=1}^N m_\nu \frac{d\vec{r}_\nu}{dt} = M \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{M} \cdot \sum_{\nu=1}^N m_\nu \vec{r}_\nu \right) = M \frac{d\vec{r}_C}{dt} = M\vec{v}_C \Rightarrow \\ \vec{Q} &= M\vec{v}_C. \end{aligned} \quad (2)$$

Определение 2. *Главным моментом количеств движения (кинетическим моментом) системы относительно центра O называется векторная величина*

$$\vec{G}_O = \sum_{\nu=1}^N \vec{r}_\nu \times (m_\nu \vec{v}_\nu).$$

Главный момент количеств движения системы зависит от центра, относительно которого он считается. Пусть $O' \neq O$ (рис. 2).

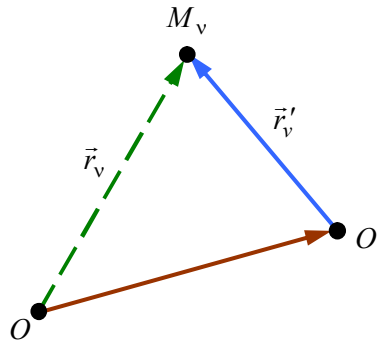


Рис. 2

Тогда

$$\begin{aligned} \vec{r}_\nu &= \overline{OO'} + \vec{r}'_\nu \Rightarrow \vec{r}'_\nu = \vec{r}_\nu - \overline{OO'} \Rightarrow \\ \vec{G}_{O'} &= \sum_{\nu=1}^N \overbrace{\vec{r}'_\nu}^{\vec{r}_\nu - \overline{OO'}} \times (m_\nu \vec{v}_\nu) = \sum_{\nu=1}^N (\vec{r}_\nu - \overline{OO'}) \times (m_\nu \vec{v}_\nu) = \overbrace{\sum_{\nu=1}^N \vec{r}_\nu \times (m_\nu \vec{v}_\nu)}^{\vec{G}_O} - \overline{OO'} \times \overbrace{\sum_{\nu=1}^N m_\nu \vec{v}_\nu}^{\vec{Q}} \Rightarrow \\ \vec{G}_{O'} &= \vec{G}_O - \overline{OO'} \times \vec{Q} = \vec{G}_O + \overline{O'O} \times \vec{Q}. \end{aligned} \quad (3)$$

Определение 3. *Главным моментом количеств движения системы относительно оси называется проекция на эту ось главного момента количеств движения системы относительно любого центра, выбранного на данной оси.*

Главный момент количеств движения относительно оси u обозначим символом G_u . Здесь, как и в случае вычисления момента силы, выбор центра на оси не влияет на величину момента относительно этой оси. В частности, если при вычислении кинетического момента относительно координатной оси в качестве точки на оси, относительно которой берется момент количеств движения, взять начало координат, получим равенство

$$\bar{G}_O = \begin{pmatrix} G_x \\ G_y \\ G_z \end{pmatrix}.$$

Определение 4. Кинетической энергией системы называется скалярная величина

$$T = \frac{1}{2} \cdot \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} v_{\nu}^2.$$

1.2. Вычисление основных динамических величин системы материальных точек, в сложном движении

Рассмотрим механическую систему, состоящую из N точек, каждая из которых имеет массу m_{ν} , $\nu = 1, \dots, N$. Движение этой системы в абсолютной системе $\Omega\xi\eta\zeta$ (рис. 3)

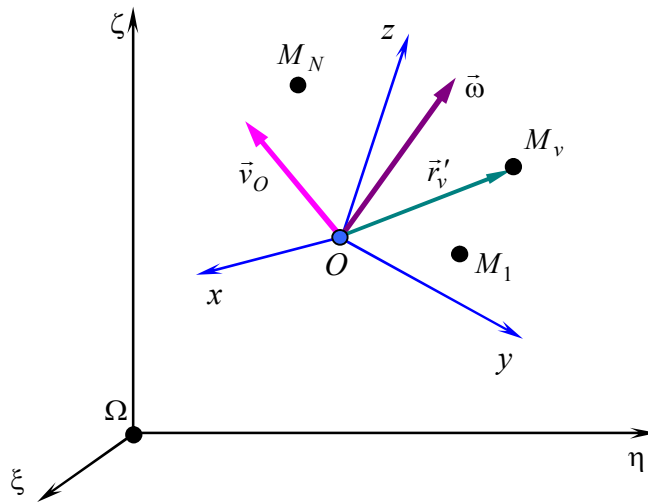


Рис. 3

представим как сложное: относительное (движение относительно некоторой подвижной системы $Oxyz$) и переносное (движение вместе с системой $Oxyz$). Подвижная система вращается относительно неподвижной с угловой скоростью $\bar{\omega}$, а ее начало O имеет скорость \bar{v}_O . В дальнейшем все величины, относящиеся к подвижной системе, будем пометать штрихом. Например, \bar{r}'_{ν} – относительный радиус-вектор ν -й, $\nu = 1, \dots, N$, точки.

Количество движения

$$\bar{Q} = \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \cdot \overbrace{\bar{v}'_{\nu}}^{\bar{v}'_{\nu} + \bar{v}'_{\nu}} = \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \cdot \left(\underbrace{\bar{v}'_{\nu}}_{\bar{v}'_{\nu} + \bar{\omega} \times \bar{r}'_{\nu}} + \underbrace{\bar{v}'_{\nu}}_{\bar{v}'_{\nu}} \right) = \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \cdot (\bar{v}_O + \bar{\omega} \times \bar{r}'_{\nu} + \bar{v}'_{\nu}) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \overbrace{\sum_{\nu=1}^N m_{\nu}}^M \cdot \bar{v}_O + \bar{\omega} \times \frac{M}{M} \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \cdot \bar{r}'_{\nu} + \overbrace{\sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \cdot \bar{v}'_{\nu}}^{\bar{Q}'} = M \cdot \bar{v}_O + \bar{\omega} \times M \frac{\overbrace{\sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \cdot \bar{r}'_{\nu}}^{\bar{r}'_C}}{M} + \bar{Q}' \Rightarrow \\
 &\bar{Q} = M\bar{v}_O + \bar{\omega} \times M\bar{r}'_C + \bar{Q}'. \quad (1)
 \end{aligned}$$

Момент количества движения. Вычислим момент количества движения системы относительно центра Ω (рис. 4)

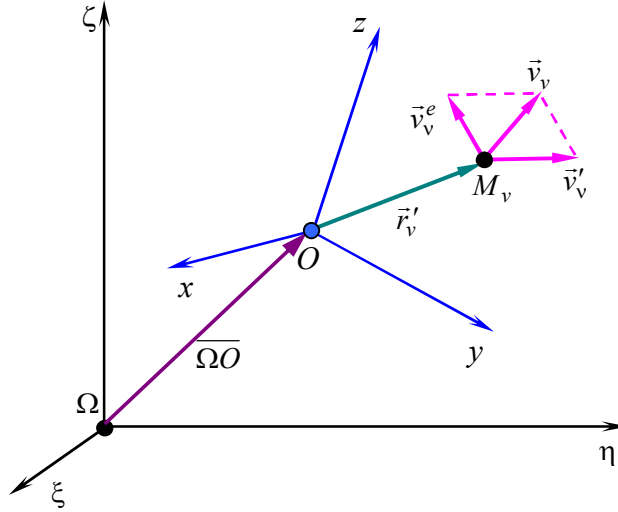


Рис. 4

$$\begin{aligned}
 \bar{G}_{\Omega} &\stackrel{(1.3)}{=} \bar{G}_O + \overline{\Omega O} \times \overbrace{\sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \bar{v}_{\nu}}^{\bar{Q}} = \bar{G}_O + \overline{\Omega O} \times \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \overbrace{\bar{v}_{\nu}^e + \bar{v}'_{\nu}}^{\bar{Q}^e + \bar{Q}'} = \bar{G}_O + \overline{\Omega O} \times \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} (\bar{v}_{\nu}^e + \bar{v}'_{\nu}) = \\
 &= \bar{G}_O + \overline{\Omega O} \times \overbrace{\sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \bar{v}_{\nu}^e}^{\bar{Q}^e} + \overline{\Omega O} \times \overbrace{\sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \bar{v}'_{\nu}}^{\bar{Q}'} \Rightarrow \\
 \bar{G}_{\Omega} &= \bar{G}_O + \overline{\Omega O} \times \bar{Q}^e + \overline{\Omega O} \times \bar{Q}'. \quad (2)
 \end{aligned}$$

Кинетическая энергия

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \overbrace{\bar{v}_{\nu}^2}^{(\bar{v}_{\nu}^e + \bar{v}'_{\nu})^2} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} (\bar{v}_{\nu}^e + \bar{v}'_{\nu})^2 = \frac{1}{2} \cdot \overbrace{\sum_{\nu=1}^N m_{\nu} (\bar{v}_{\nu}^e)^2}^{T^e} + \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \bar{v}'_{\nu} \cdot \bar{v}_{\nu}^e + \frac{1}{2} \cdot \overbrace{\sum_{\nu=1}^N m_{\nu} (\bar{v}'_{\nu})^2}^{T'} \Rightarrow \\
 T &= T^e + \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \bar{v}'_{\nu} \cdot \bar{v}_{\nu}^e + T'. \quad (3)
 \end{aligned}$$

1.3. Оси Кенига

Введем понятие кениговой системы отсчета.

Определение 5. Система отсчета $Oxyz$, движущаяся поступательно относительно абсолютной системы $\Omega\xi\eta\zeta$, называется кениговой для некоторой системы материальных точек, если ее начало O совпадает с центром масс этой системы (рис. 5)

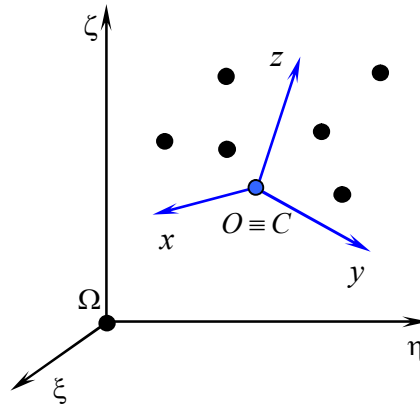


Рис. 5

Использование осей Кенига в качестве подвижных осей координат для вычисления динамических величин системы в абсолютном движении по формулам (2.1)–(2.3) позволяет придать последним более конструктивный вид.

Теорема 1. Пусть начало подвижной системы координат совпадает с центром масс механической системы. Тогда $\bar{Q}' = 0$ и кинетический момент механической системы в относительном движении не зависит от центра, относительно которого он считается.

Доказательство. Из равенства (2.1) $\bar{Q} = M \overline{\dot{v}_O} + \bar{\omega} \times M \overline{r'_C} + \bar{Q}'$ выводим, что $\bar{Q}' = 0$ (рис. 6).

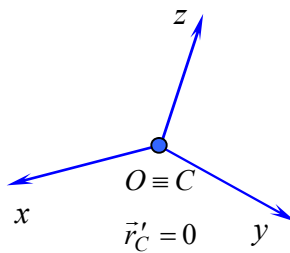


Рис. 6

Второе утверждение теоремы следует из формулы (1.3), примененной для относительного движения при условии $\bar{Q}' = 0$. Теорема доказана. ■

Теорема 2. Кинетические моменты системы, вычисленные относительно центра масс в абсолютном движении и в движении относительно осей Кенига, совпадают между собой, т.е.

$$\bar{G}_C = (\bar{G}_C)'$$

Доказательство (рис. 7)

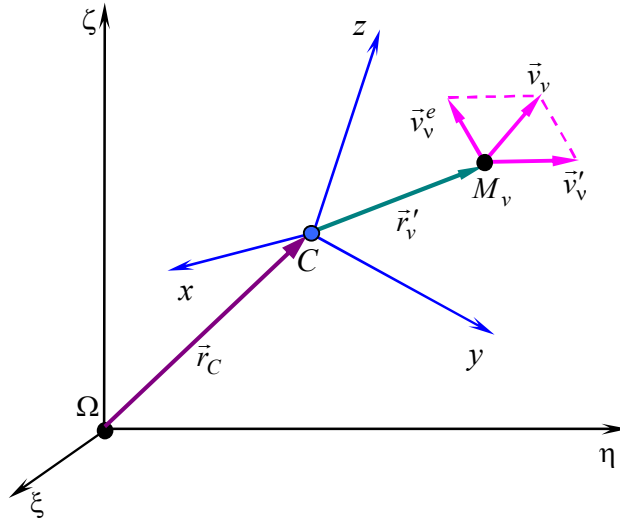


Рис. 7

$$\begin{aligned} \bar{G}_C &= \sum_{v=1}^N \bar{r}'_v \times m_v \overbrace{\bar{v}_v}^{\bar{v}_v^e + \bar{v}_v'} = \sum_{v=1}^N \bar{r}'_v \times m_v \left(\overbrace{\bar{v}_v^e}^{\bar{v}_C} + \bar{v}_v' \right) = \sum_{v=1}^N \bar{r}'_v \times m_v (\bar{v}_C + \bar{v}_v') = \\ &= \frac{M}{M} \left(\sum_{v=1}^N m_v \bar{r}'_v \right) \times \bar{v}_C + \overbrace{\sum_{v=1}^N \bar{r}'_v \times m_v \bar{v}_v'}^{(\bar{G}_C)'} = M \overbrace{\left(\frac{\sum_{v=1}^N m_v \bar{r}'_v}{M} \right)}^{\bar{r}_C'=0} \times \bar{v}_C + (\bar{G}_C)' = (\bar{G}_C)'. \end{aligned}$$

Теорема доказана. ■

Теорема 3 (первая теорема Кенига). Пусть подвижная система является кениговой. Тогда имеет место равенство

$$\bar{G}_\Omega = \bar{r}_C \times \bar{Q} + (\bar{G}_C)'. \quad (1)$$

Доказательство. В условиях теоремы

$$O = C, \quad \bar{v}_v^e = \bar{v}_C, \quad \forall v = 1, 2, \dots$$

Из формулы (2.2) выводим

$$\begin{aligned} \bar{G}_\Omega &= \overbrace{\bar{G}_O}^{\bar{G}_C} + \overbrace{\bar{\Omega} O}^{\bar{r}_C} \times \overbrace{\bar{Q}^e}^{\sum_{v=1}^N m_v \bar{v}_v^e} + \overbrace{\bar{\Omega} O}^{\bar{r}_C} \times \overbrace{\bar{Q}'}^{\text{теорема 1} \Rightarrow =0} = \bar{G}_C + \bar{r}_C \times \sum_{v=1}^N m_v \overbrace{\bar{v}_v^e}^{\bar{v}_C} = \\ &= \overbrace{\bar{G}_C}^{\text{теорема 2} \Rightarrow (\bar{G}_C)'} + \bar{r}_C \times \overbrace{\left(\sum_{v=1}^N m_v \right)}^M \bar{v}_C = (\bar{G}_C)' + \bar{r}_C \times \overbrace{M \bar{v}_C}^{\bar{Q}} = (\bar{G}_C)' + \bar{r}_C \times \bar{Q}. \end{aligned}$$

Теорема доказана. ■

Теорема 4 (вторая теорема Кенига). Пусть подвижная система является кениговой. Тогда имеет место равенство

$$T = \frac{1}{2} M \bar{v}_C^2 + T' \quad (2)$$

Доказательство. В условиях теоремы из формулы (2.3) выводим

$$\begin{aligned} T &= \overbrace{\frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v (\bar{v}_C)^2}^{T^e} + \sum_{v=1}^N m_v \bar{v}_v' \cdot \overbrace{\bar{v}_v^e}^{\bar{v}_C} + T' = \frac{1}{2} \left(\sum_{v=1}^N m_v \right) (\bar{v}_C)^2 + \left(\sum_{v=1}^N m_v \bar{v}_v' \right) \cdot \bar{v}_C + T' = \\ &= \frac{1}{2} M (\bar{v}_C)^2 + \overbrace{\sum_{v=1}^N m_v \bar{v}_v'}^{\substack{\text{теорема 1} \Rightarrow \\ =0}} \cdot \bar{v}_C + T' = \frac{1}{2} M (\bar{v}_C)^2 + T'. \end{aligned}$$

Теорема доказана. ■

2. ОСНОВНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

2.1. Общие замечания

Абсолютно твердое тело является наиболее часто встречающимся в прикладных задачах механики типом систем материальных точек. Отсюда вытекает необходимость уметь вычислять основные динамические величины абсолютно твердого тела для различных видов его движения. Последовательно будут рассмотрены поступательное движение, вращение относительно неподвижной точки (относительно неподвижной оси как частный случай) и свободное движение тела (плоскопараллельное движение как частный случай).

2.2. Основные динамические величины абсолютно твердого тела при его поступательном движении

Пусть тело A движется поступательно со скоростью \bar{v} в неподвижной системе отсчета $\Omega\xi\eta\zeta$ (см. рис. 1).

Количество движения. Обозначим через M – массу тела. Тогда

$$\bar{Q} = \sum_v m_v \overbrace{\bar{v}_v}^{\bar{v}} = \bar{v} \sum_v m_v = M\bar{v}. \quad (1)$$

Момент количества движения относительно центра Ω

$$\bar{G}_\Omega = \sum_v \bar{r}_v \times m_v \overbrace{\bar{v}_v}^{\bar{v}} = \overbrace{\left(\sum_v m_v \bar{r}_v \right)}^{M\bar{r}_C} \times \bar{v} = \bar{r}_C \times (M\bar{v}) \Rightarrow$$

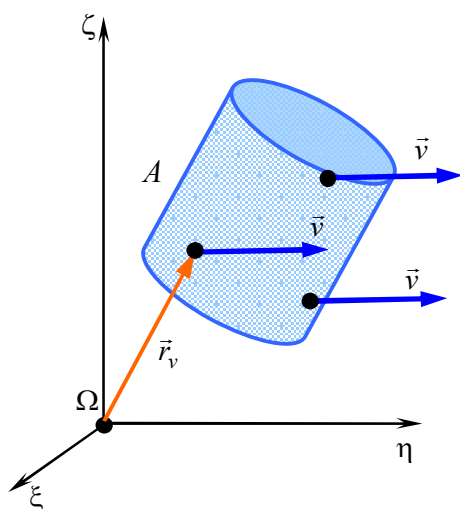


Рис. 1

$$\bar{G}_\Omega = \bar{r}_C \times (M\bar{v}). \quad (2)$$

Кинетическая энергия

$$T = \sum_v \frac{1}{2} m_v \overbrace{v_v^2}^{v^2} = \frac{1}{2} v^2 \sum_v \overbrace{m_v}^M = \frac{1}{2} Mv^2. \quad (3)$$

2.3. Основные динамические величины абсолютно твердого тела, вращающегося относительно неподвижной точки

Пусть тело вращается относительно неподвижной точки O и $\bar{\omega}$ – его мгновенная угловая скорость (рис.2).

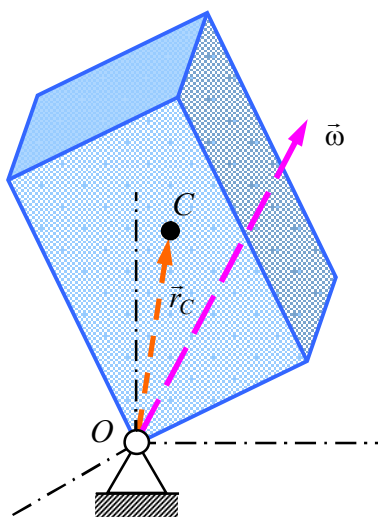


Рис. 2

Количество движения. Количество движения тела вычисляется по формуле

$$\bar{Q} = M \overrightarrow{\bar{v}_C} \Rightarrow \bar{Q} = M(\bar{\omega} \times \bar{r}_C). \quad (1)$$

Аналогичная формула имеет место и в случае неподвижной оси. Заметим, что если $\bar{r}_C \parallel \bar{\omega}$, то из (1) получим $\bar{Q} = 0$. В частности, пусть тело вращается относительно неподвижной оси и его центр масс находится на оси вращения (**рис. 3**)

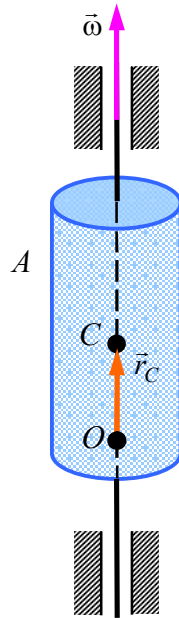


Рис. 3

Тогда условие $\bar{r}_C \parallel \bar{\omega}$ будет иметь место.

Кинетический момент. Вычислим кинетический момент твердого тела, имеющего неподвижную точку, относительно этой точки (**рис. 4**)

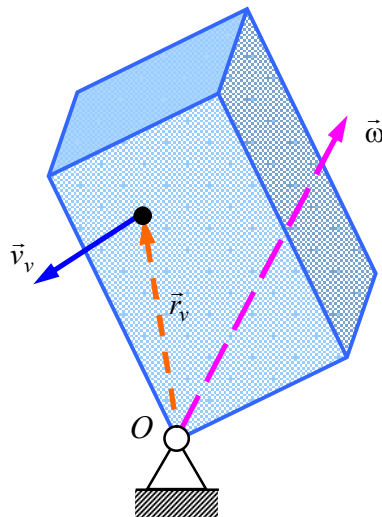


Рис. 4

$$\begin{aligned}
 \bar{G}_O &= \sum_{\nu=1}^N \left[\bar{r}_\nu \times m_\nu \overbrace{\dot{\bar{v}}_\nu}^{\bar{\omega} \times \bar{r}_\nu} \right] = \sum_{\nu=1}^N \left[\overbrace{m_\nu \bar{r}_\nu}^{\bar{a}} \times \left(\overbrace{\bar{\omega} \times \bar{r}_\nu}^{\bar{b} \cdot \bar{c}} \right) \right] = \sum_{\nu=1}^N \left[\overbrace{\bar{\omega}}^{\bar{b}} \left(\overbrace{m_\nu \bar{r}_\nu}^{\bar{a}} \cdot \overbrace{\bar{r}_\nu}^{\bar{c}} \right) - \overbrace{\bar{c}}^{\bar{a}} \left(\overbrace{m_\nu \bar{r}_\nu}^{\bar{a}} \cdot \overbrace{\bar{\omega}}^{\bar{b}} \right) \right] = \\
 &= \sum_{\nu=1}^N \left[\bar{\omega} (m_\nu \bar{r}_\nu \cdot \bar{r}_\nu) - \bar{r}_\nu (m_\nu \bar{r}_\nu \cdot \bar{\omega}) \right] = \sum_{\nu=1}^N m_\nu \overbrace{\bar{\omega} (\bar{r}_\nu \cdot \bar{r}_\nu)}^{r_\nu^2} - \sum_{\nu=1}^N m_\nu \bar{r}_\nu (\bar{r}_\nu \cdot \bar{\omega}) \Rightarrow \\
 \bar{G}_O &= \left(\sum_{\nu=1}^N m_\nu r_\nu^2 \right) \bar{\omega} - \sum_{\nu=1}^N m_\nu \bar{r}_\nu (\bar{r}_\nu \cdot \bar{\omega}). \tag{2}
 \end{aligned}$$

Дальнейшие выкладки будем проводить в проекциях на оси системы координат $Oxyz$, жестко связанной с телом (рис. 5).

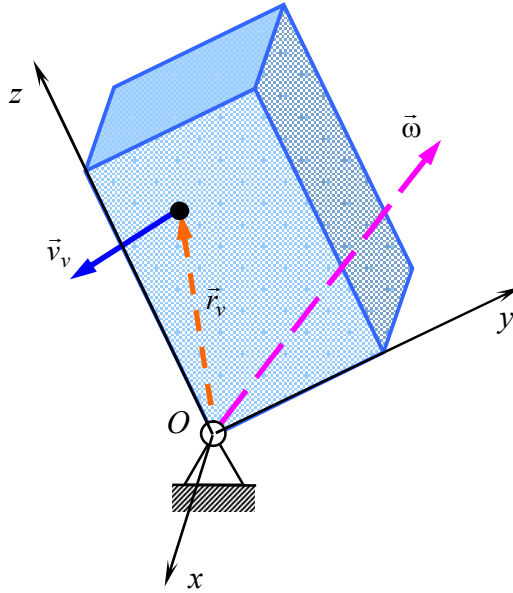


Рис. 5

Принимаем, что в этой системе координат

$$\bar{r}_\nu = \begin{pmatrix} x_\nu \\ y_\nu \\ z_\nu \end{pmatrix}, \quad \bar{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}.$$

Из формулы (2) выводим

$$\begin{aligned}
 \bar{G}_O &= \left(\sum_{\nu=1}^N m_\nu \overbrace{r_\nu^2}^{x_\nu^2 + y_\nu^2 + z_\nu^2} \right) \bar{\omega} - \sum_{\nu=1}^N m_\nu \bar{r}_\nu \overbrace{(\bar{r}_\nu \cdot \bar{\omega})}^{px_\nu + qy_\nu + rz_\nu} = \left(\sum_{\nu=1}^N m_\nu \overbrace{r_\nu^2}^{x_\nu^2 + y_\nu^2 + z_\nu^2} \right) \bar{\omega} - \sum_{\nu=1}^N m_\nu \bar{r}_\nu \overbrace{(\bar{r}_\nu \cdot \bar{\omega})}^{px_\nu + qy_\nu + rz_\nu} \Rightarrow \\
 \bar{G}_O &= \sum_{\nu=1}^N m_\nu (x_\nu^2 + y_\nu^2 + z_\nu^2) \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} - \sum_{\nu=1}^N m_\nu \begin{pmatrix} x_\nu \\ y_\nu \\ z_\nu \end{pmatrix} (px_\nu + qy_\nu + rz_\nu).
 \end{aligned}$$

Спроецируем последнее равенство на выбранные оси координат.

$$\text{На ось } Ox: \quad G_{Ox} = \sum_{\nu=1}^N m_\nu p (x_\nu^2 + y_\nu^2 + z_\nu^2) - \sum_{\nu=1}^N m_\nu (px_\nu^2 + qx_\nu y_\nu + rx_\nu z_\nu) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{v=1}^N m_v p (y_v^2 + z_v^2) - \sum_{v=1}^N q m_v x_v y_v - \sum_{v=1}^N r m_v x_v z_v = \\
 &= p \sum_{v=1}^N m_v \overbrace{(y_v^2 + z_v^2)}^{I_{xx}} - q \sum_{v=1}^N m_v \overbrace{x_v y_v}^{I_{xy}} - r \sum_{v=1}^N m_v \overbrace{x_v z_v}^{I_{xz}} \Rightarrow \\
 &Ox: G_{Ox} = pI_{xx} - qI_{xy} - rI_{xz}.
 \end{aligned}$$

По аналогии

$$Oy: G_{Oy} = -pI_{yx} + qI_{yy} - rI_{yz},$$

$$Oz: G_{Oz} = -pI_{zx} - qI_{zy} + rI_{zz}.$$

Используя операцию умножения матрицы на вектор, отсюда выводим

$$\bar{G}_O = \bar{G}_O = \overbrace{\begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}}^I \overbrace{\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}}^{\bar{\omega}} = I \cdot \bar{\omega}. \quad (3)$$

В частности, если $Oxyz$ – главные оси инерции, то

$$\begin{cases} G_{Ox} = p I_{xx}^A - q I_{xy}^0 - r I_{xz}^0, \\ G_{Oy} = -p I_{yx}^0 + q I_{yy}^B - r I_{yz}^0, \\ G_{Oz} = -p I_{zx}^0 - q I_{zy}^0 + r I_{zz}^C, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G_{Ox} = Ap, \\ G_{Oy} = Bq, \\ G_{Oz} = Cr. \end{cases}$$

Пусть тело вращается относительно неподвижной оси, например, оси Oz (рис. 6)

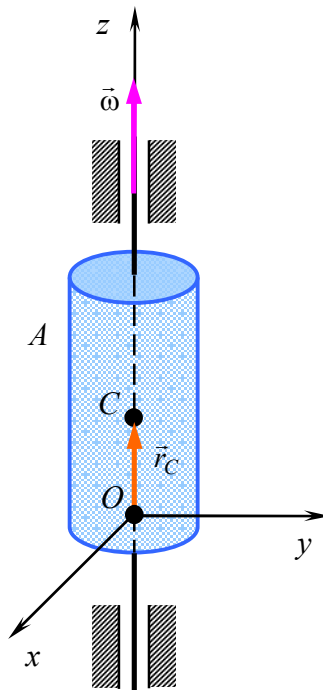


Рис. 6

Тогда

$$\begin{cases} p = 0, \\ q = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G_{Ox} = -rI_{xz}, \\ G_{Oy} = -rI_{yz}, \\ G_{Oz} = I_{zz}r. \end{cases} \quad (4)$$

В случае когда ось Oz еще и главная ось инерции, последние формулы упрощаются:

$$G_{Ox} = 0, \quad G_{Oy} = 0, \quad G_{Oz} = I_{zz} \overset{\dot{\phi}}{r} = C\dot{\phi}. \quad (5)$$

В общем случае вектор кинетического момента, как это следует из (4), не параллелен оси вращения, даже если это ось неподвижна:

$$\bar{G} = \begin{pmatrix} -rI_{xz} \\ -rI_{yz} \\ I_{zz}r \end{pmatrix}, \quad \bar{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}.$$

Совпадение этих направлений в силу (5) имеет место тогда и только тогда, когда ось вращения является главной осью инерции:

$$\bar{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{zz}r \end{pmatrix}, \quad \bar{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}.$$

Кинетическая энергия. Обозначим через d_v расстояние от точки M_v твердого тела до мгновенной оси вращения u (рис. 7)

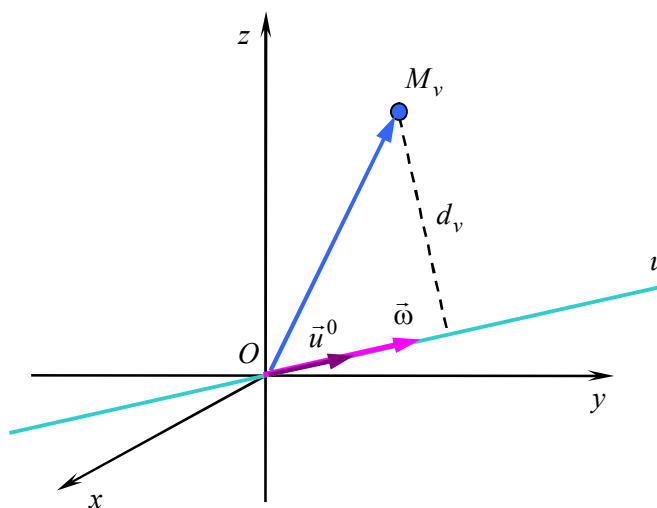


Рис. 7

Тогда

$$v_v = \omega d_v, \quad v = 1, 2, \dots$$

и

$$T = \frac{1}{2} \sum_v m_v \overbrace{v_v^2}^{(\omega d_v)^2} = \frac{1}{2} \sum_v m_v (\omega d_v)^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \overbrace{\sum_v m_v d_v^2}^{I_u} = \frac{1}{2} I_u \omega^2 \Rightarrow$$

$$T = \frac{1}{2} I_u \omega^2, \quad (6)$$

где I_u – момент инерции тела относительно оси u .

Обозначим через α, β, γ направляющие косинусы оси u . Тогда

$$\bar{u}^0 \uparrow \uparrow \bar{\omega} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{p}{\omega}, \\ \beta = \frac{q}{\omega}, \\ \gamma = \frac{r}{\omega}. \end{cases}$$

Из (6) выводим

$$T = \frac{1}{2} \overbrace{I_u}^{I_{xx}\alpha^2 + I_{yy}\beta^2 + I_{zz}\gamma^2 - 2I_{xy}\alpha\beta - 2I_{xz}\alpha\gamma - 2I_{yz}\beta\gamma} \omega^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \left(I_{xx} \underbrace{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2}_{\alpha^2} \omega^2 + I_{yy} \underbrace{\left(\frac{q}{\omega}\right)^2}_{\beta^2} \omega^2 + I_{zz} \underbrace{\left(\frac{r}{\omega}\right)^2}_{\gamma^2} \omega^2 - 2I_{xy} \underbrace{\frac{p}{\omega}}_{\alpha} \underbrace{\frac{q}{\omega}}_{\beta} \omega^2 - 2I_{xz} \underbrace{\frac{p}{\omega}}_{\alpha} \underbrace{\frac{r}{\omega}}_{\gamma} \omega^2 - 2I_{yz} \underbrace{\frac{q}{\omega}}_{\beta} \underbrace{\frac{r}{\omega}}_{\gamma} \omega^2 \right) \Rightarrow$$

$$T = \frac{1}{2} (I_{xx} p^2 + I_{yy} q^2 + I_{zz} r^2 - 2I_{xy} pq - 2I_{xz} pr - 2I_{yz} qr). \quad (7)$$

Установим связь между кинетической энергией и вектором кинетического момента. Дифференцируя (7) по переменным p, q, r , получим

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial p} = pI_{xx} - qI_{xy} - rI_{xz} = G_{Ox}, \\ \frac{\partial T}{\partial q} = -pI_{yx} + qI_{yy} - rI_{yz} = G_{Oy}, \\ \frac{\partial T}{\partial r} = -pI_{zx} - qI_{zy} + rI_{zz} = G_{Oz}, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\bar{G}_O = \text{grad}_{p,q,r} T. \quad (8)$$

С другой стороны имеем

$$\frac{1}{2} \left(\overbrace{\bar{G}_O}^{\text{grad}_{p,q,r} T} \cdot \underbrace{\bar{\omega}}_{\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}} \right) = \frac{1}{2} \left(\overbrace{\text{grad}_{p,q,r} T}^{\begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial p} \\ \frac{\partial T}{\partial q} \\ \frac{\partial T}{\partial r} \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \left(\begin{matrix} pI_{xx} - qI_{xy} - rI_{xz} & -pI_{yx} + qI_{yy} - rI_{yz} & -pI_{zx} - qI_{zy} + rI_{zz} \\ \frac{\partial T}{\partial p} & \frac{\partial T}{\partial q} & \frac{\partial T}{\partial r} \end{matrix} \begin{matrix} p \\ q \\ r \end{matrix} \right) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \left[(pI_{xx} - qI_{xy} - rI_{xz})p + (-pI_{yx} + qI_{yy} - rI_{yz})q + (-pI_{zx} - qI_{zy} + rI_{zz})r \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot (I_{xx}p^2 + I_{yy}q^2 + I_{zz}r^2 - 2I_{xy}pq - 2I_{xz}pr - 2I_{yx}qp) = T \Rightarrow \\
 &T = \frac{1}{2} (\bar{G}_O \cdot \bar{\omega}). \tag{9}
 \end{aligned}$$

Заметим, что формулу (8) получить из формулы (9) непосредственным дифференцированием по вектору $\bar{\omega}$ нельзя, так как вектор кинетического момента \bar{G}_O тоже зависит от вектора $\bar{\omega}$.

В случае когда $Oxyz$ – главные оси инерции, имеем

$$T = \frac{1}{2} \cdot \left(\overset{A}{I_{xx}} p^2 + \overset{B}{I_{yy}} q^2 + \overset{C}{I_{zz}} r^2 - 2\overset{0}{I_{xy}} pq - 2\overset{0}{I_{xz}} pr - 2\overset{0}{I_{yx}} qp \right) = \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2).$$

В частности, пусть тело вращается относительно неподвижной оси, например, оси Oz . Тогда $p = 0$, $q = 0$ и

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \left(I_{xx}^0 p^2 + I_{yy}^0 q^2 + I_{zz}^0 r^2 - 2I_{xy}^0 pq - 2I_{xz}^0 pr - 2I_{yz}^0 qr \right) \Rightarrow \\
 T &= \frac{1}{2} I_{zz}^0 \omega^2. \tag{10}
 \end{aligned}$$

Заметим, что равенство (10) выполняется, даже если ось вращения не является главной осью инерции.

Пример 1. Однородный тонкий диск массой m и радиуса R совершает сферическое движение относительно своего центра (**рис. 8**). Вектор его мгновенной угловой скорости $\bar{\omega}$ в данный момент известен.

Определить количество движения, момент количества движения относительно точки подвеса и кинетическую энергию диска в указанный момент времени.

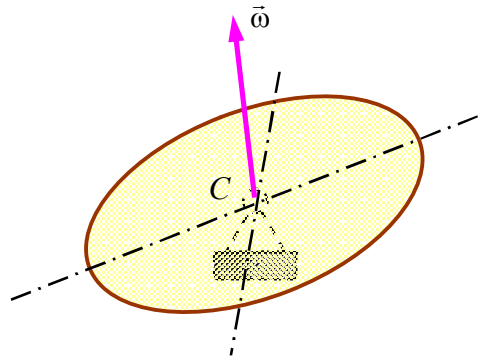


Рис. 8

Решение. Количество движения

$$\bar{Q} = M \overset{\bar{\omega} \times \bar{r}_C}{\vec{v}_C} = M \left(\bar{\omega} \times \overset{=0}{\vec{r}_C} \right) = 0.$$

Для вычисления кинетического момента и кинетической энергии диска выберем систему координат, связанную с телом так, как это показано на **рис. 9**.

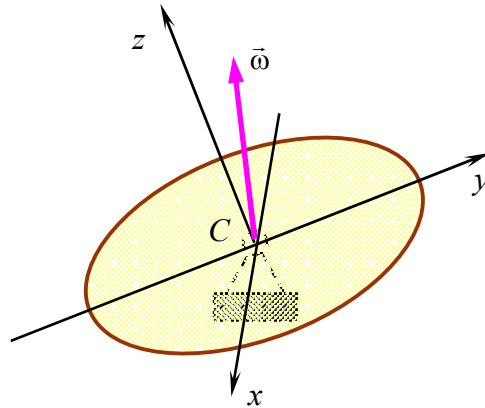


Рис. 9

По условию вектор мгновенной угловой скорости считается известным, поэтому будем считать известными его проекции p, q, r на выбранные оси координат. Заметим, что эти оси являются главными осями инерции. Тогда тензор инерции диска здесь имеет вид

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}, \quad A = B = \frac{1}{4}mR^2, \quad C = \frac{1}{2}mR^2.$$

Кинетический момент

$$\vec{G}_C = I \cdot \vec{\omega} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ap \\ Bq \\ Cr \end{pmatrix} = mR^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{4}p \\ \frac{1}{4}q \\ \frac{1}{2}r \end{pmatrix}.$$

Кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}mR^2 & \begin{pmatrix} \frac{1}{4}p \\ \frac{1}{4}q \\ \frac{1}{2}r \end{pmatrix} \\ \vec{G}_C & \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \end{pmatrix} \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2}mR^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{4}p \\ \frac{1}{4}q \\ \frac{1}{2}r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \frac{1}{2}mR^2 \left(\frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{2}r^2 \right). \blacktriangleright$$

2.4. Основные динамические величины свободного абсолютно твердого тела

Пусть тело A свободно движется в абсолютной системе координат $\Omega\xi\eta\zeta$ (рис. 10)

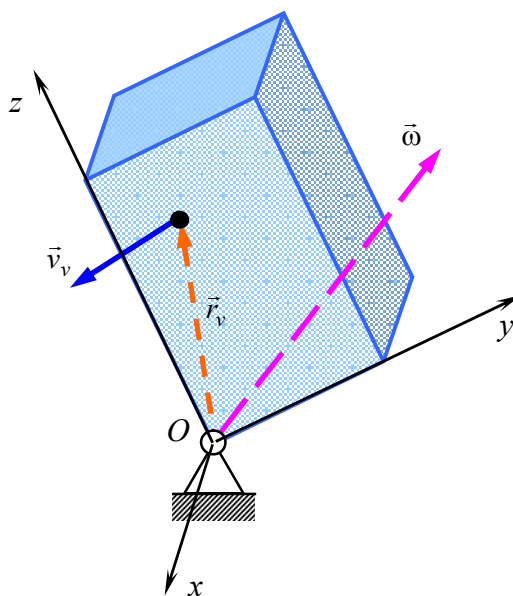


Рис. 10

Количество движения тела вычисляется по теореме о движении центра масс:

$$\bar{Q} = M\bar{v}_C.$$

Для вычисления кинетического момента и кинетической энергии тела свяжем с телом систему координат $CXYZ$, где C – центр масс тела, и движущуюся поступательно в абсолютном пространстве. Представим движение тела в виде суммы переносного движения (вместе с системой координат $CXYZ$) и относительного движения (вращения относительно неподвижной точки C). Подвижная система координат $CXYZ$ является кениговой. Тогда кинетический момент тела A относительно центра Ω может быть вычислен по формуле (1.3.1) (первая теорема Кенига)

$$\bar{G}_\Omega = \bar{r}_C \times \bar{Q} + (\bar{G}_C)',$$

а кинетическая энергия – по формуле (1.3.2) (вторая теорема Кенига).

$$T = \frac{1}{2}M\bar{v}_C^2 + T'.$$

Напомним, что относительным движением тела является его вращение относительно неподвижной точки C – своего центра масс. Кинетический момент и кинетическая энергия тела в этом движении вычисляются по формулам параграфа 2.3, когда $O = C$.

Кинетический момент – по формуле

$$\bar{G}'_C = I_C \cdot \bar{\omega},$$

а кинетическая энергия – по формуле

$$T' = \frac{1}{2} \left(\overbrace{\widehat{G}'_c}^{I_C \cdot \bar{\omega}} \cdot \bar{\omega} \right) = \frac{1}{2} \cdot (I_C \cdot \bar{\omega}) \cdot \bar{\omega}.$$

Здесь I_C – тензор инерции тела относительно центра масс тела, компоненты которого вычисляются в системе координат $Cxyz$, связанной с телом (см. **рис. 11**).

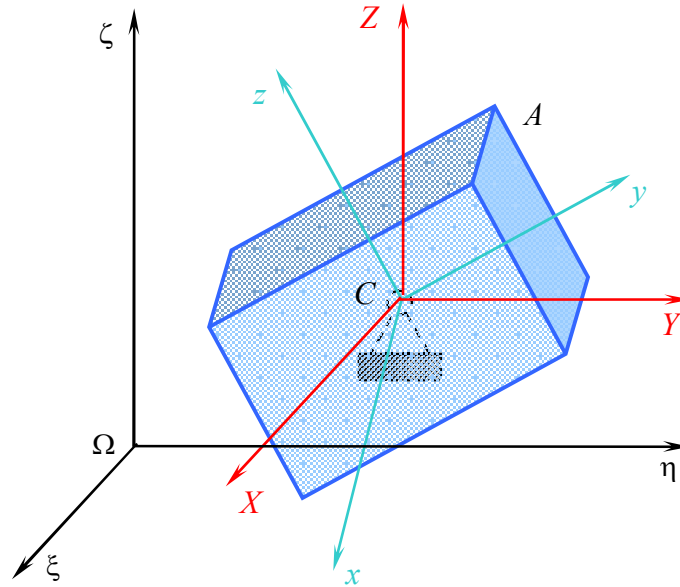


Рис. 11

В этой же системе координат вычисляются компоненты вектора угловой скорости $\bar{\omega}$. Обычно эту систему осей выбирают совпадающей с главными осями инерции тела. Тогда

$$\overline{G}'_c = \overbrace{\widehat{T}'_c}^{\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}} \cdot \overbrace{\bar{\omega}}^{\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} Ap \\ Bq \\ Cr \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\overline{G}_\Omega = \bar{r}_c \times \bar{Q} + \overbrace{(\overline{G}'_c)'}^{\begin{pmatrix} Ap \\ Bq \\ Cr \end{pmatrix}} = \bar{r}_c \times \bar{Q} + \begin{pmatrix} Ap \\ Bq \\ Cr \end{pmatrix},$$

$$T' = \frac{1}{2} \left(\overbrace{\widehat{G}'_c}^{\begin{pmatrix} Ap \\ Bq \\ Cr \end{pmatrix}} \cdot \overbrace{\bar{\omega}}^{\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}} \right) = \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) \Rightarrow$$

$$T = \frac{1}{2} M \bar{v}_c^2 + \overbrace{\widehat{T}'_c}^{\frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)} = \frac{1}{2} M \bar{v}_c^2 + \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2).$$

2.5. Основные динамические величины плоской фигуры при ее движении в своей плоскости

Движение плоской фигуры в своей плоскости будем рассматривать как частный случай свободного движения.

Количество движения тела вычисляется по теореме о движении центра масс:

$$\bar{Q} = M\bar{v}_C.$$

Пусть подвижная система отсчета CXY является кениговой (рис. 12).

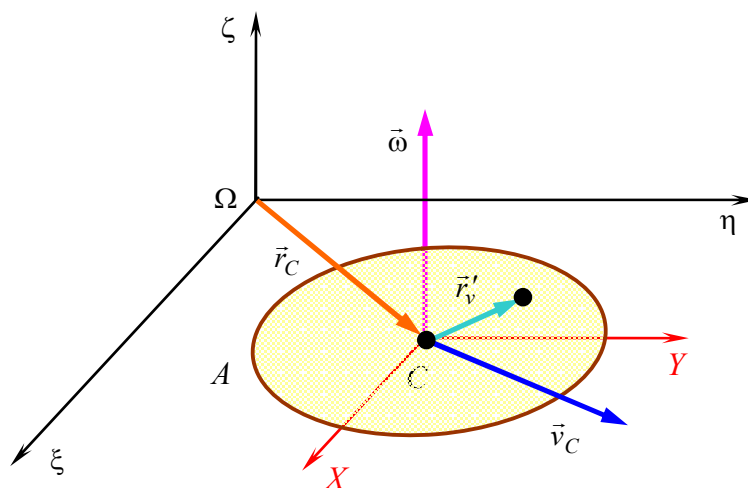


Рис. 12

Тогда кинетический момент плоской фигуры относительно центра Ω вычисляется по формуле (1.3.1) (первая теорема Кенига), т.е.

$$\bar{G}_\Omega = \bar{r}_C \times \overset{M\bar{v}_C}{\bar{Q}} + (\bar{G}_C)',$$

а ее кинетическая энергия – по формуле (1.3.2) (вторая теорема Кенига):

$$T = \frac{1}{2} M\bar{v}_C^2 + T'.$$

Поскольку движение плоское, вычисление величин $(\bar{G}_C)'$ и T' здесь упрощается. В частности, если абсолютное движение плоской фигуры является мгновенно поступательным, то в относительном движении ее кинетический момент относительно центра масс и кинетическая энергия обращаются в ноль

$$\bar{\omega} = 0 \Rightarrow (\bar{G}_C)' = I_C \cdot \bar{\omega} = 0, \quad T' = \frac{1}{2} (I_C \cdot \bar{\omega}) \cdot \bar{\omega} = 0.$$

Пусть теперь движение плоской фигуры не является мгновенно поступательным. Из формулы (3.2) в случае $O = C$ выводим

$$(\bar{G}_C)' = (\bar{G}_O)'|_{O=C} = \sum_{v=1}^N m_v \bar{\omega} \cdot r_v^{\prime 2} - \sum_{v=1}^N m_v \bar{r}_v' \cdot \overbrace{(\bar{r}_v' \cdot \bar{\omega})}^{\bar{r}_v' \perp \bar{\omega} \Rightarrow =0} = \sum_{v=1}^N m_v \bar{\omega} \cdot r_v^{\prime 2} = \overbrace{\left(\sum_{v=1}^N m_v \cdot r_v^{\prime 2} \right)}^{I_C} \bar{\omega} = I_C \bar{\omega} \Rightarrow$$

$$(\bar{G}_C)' = I_C \bar{\omega}. \quad (1)$$

Здесь I_C – момент инерции тела относительно оси, перпендикулярной плоскости фигуры, проходящей через ее центр масс. Таким образом, формула (1.3.1) принимает вид

$$\bar{G}_\Omega = \bar{r}_C \times \overbrace{\dot{\bar{Q}}}^{M\bar{v}_C} + \overbrace{(\bar{G}_C)'}^{I_C \bar{\omega}} = \bar{r}_C \times M\bar{v}_C + I_C \bar{\omega}. \quad (2)$$

Применим формулу (2), в частности, для вычисления кинетического момента относительно мгновенного центр скоростей плоской фигуры – точки P (рис. 13).

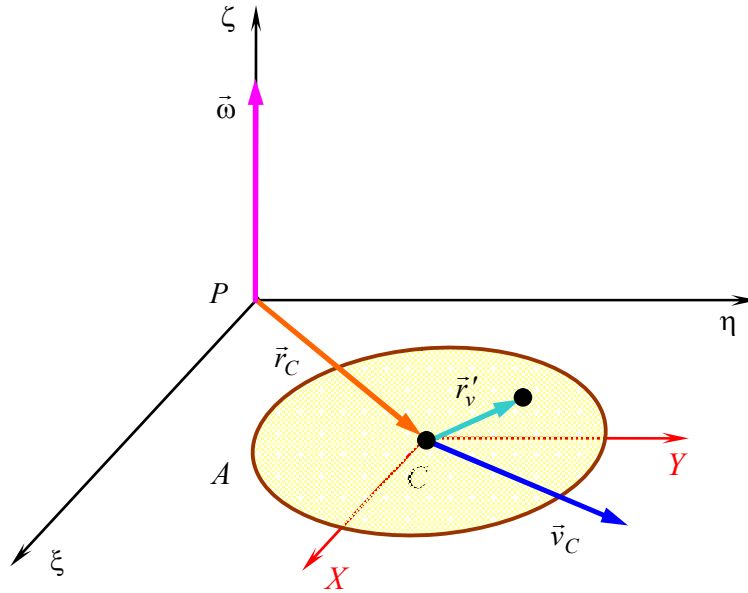


Рис. 13

Полагаем в (2) $\Omega = P$. Тогда

$$\begin{aligned} \bar{G}_P = \bar{G}_\Omega \Big|_{\Omega \rightarrow P} &= \bar{r}_C \times M \overbrace{\dot{\bar{v}}_C}^{\bar{\omega} \times \bar{r}_C} + I_C \bar{\omega} \Rightarrow \bar{r}_C \times M (\bar{\omega} \times \bar{r}_C) + I_C \bar{\omega} = M \left(\overbrace{\frac{\bar{a}}{\bar{r}_C} \times \frac{\bar{b}}{\bar{\omega}} \times \frac{\bar{c}}{\bar{r}_C}} \right) + I_C \bar{\omega} = \\ &= M \left[\overbrace{\frac{\bar{\omega}}{\bar{b}} \left(\frac{\bar{r}_C}{\bar{a}} \cdot \frac{\bar{r}_C}{\bar{c}} \right)} - \overbrace{\frac{\bar{r}_C}{\bar{c}} \left(\frac{\bar{r}_C}{\bar{a}} \cdot \frac{\bar{\omega}}{\bar{b}} \right)} \right] + I_C \bar{\omega} = M \left[\overbrace{\bar{\omega} (\bar{r}_C \cdot \bar{r}_C)}^{r_C^2} - \overbrace{\bar{r}_C (\bar{r}_C \cdot \bar{\omega})}^0 \right] + I_C \bar{\omega} = \\ &= Mr_C^2 \bar{\omega} + I_C \bar{\omega} = \overbrace{\bar{\omega} (Mr_C^2 + I_C)}^{I_P} = I_P \bar{\omega} \Rightarrow \\ \bar{G}_P &= I_P \bar{\omega}. \end{aligned} \quad (3)$$

Для вычисления T' применяем формулу $T = \frac{1}{2} I_u \omega^2$ для случая, когда ось u перпендикулярна плоскости фигуры и проходит через ее центр масс C . Тогда

$$T' = \frac{1}{2} I_C \omega^2.$$

В результате из формулы (1.3.2) выводим

$$T = \frac{1}{2} M \overline{v}_C^2 + \overline{T}^1 = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2. \quad (4)$$

Преобразуем формулу (4), используя величину I_P – момент инерции тела относительно оси, перпендикулярной плоскости фигуры, проходящей через ее мгновенный центр:

$$T = \frac{1}{2} M \overset{(3) \Rightarrow \omega^2 r_C^2}{\overline{v}_C^2} + \frac{1}{2} I_C \omega^2 = \frac{1}{2} M \omega^2 r_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \left(\overbrace{M r_C^2 + \frac{1}{2} I_C}^{I_P} \right) = \frac{1}{2} I_P \omega^2 \Rightarrow$$

$$T = \frac{1}{2} I_P \omega^2. \quad (5)$$

Пример 2. Однородный стержень AB длины $2l$ и массой m скользит в вертикальной плоскости, опираясь своими концами на гладкую стену и пол. Определить количество движения, кинетический момент относительно центра Ω и кинетическую энергию стержня в положении, изображенном на **рис. 14**, если его угловая скорость в данный момент равна $\overline{\omega} = \omega \overline{\xi}^0$.

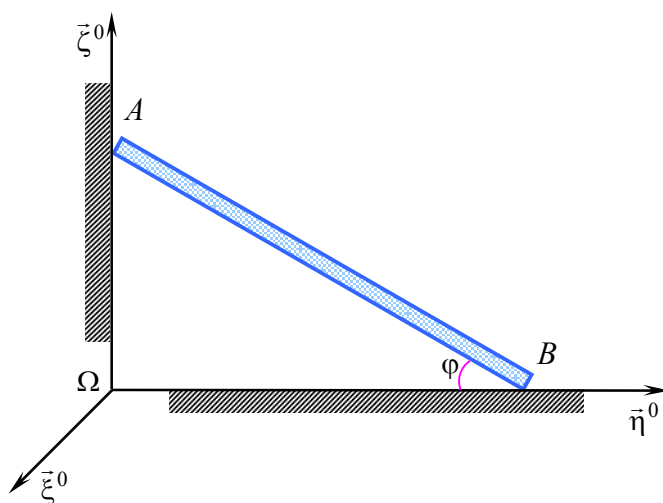


Рис. 14

Решение. Количество движения (см. рис. 15)

$$\begin{aligned} \overline{Q} &= m \overline{v}_C = m \overline{\omega} \times \overline{PC} = m \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -l \cos \varphi \\ -l \sin \varphi \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -l \cos \varphi \\ -l \sin \varphi \end{pmatrix} = m \begin{vmatrix} \overline{\xi}^0 & \overline{\eta}^0 & \overline{\zeta}^0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & -l \cos \varphi & -l \sin \varphi \end{vmatrix} = \\ &= 0 \cdot m \overline{\xi}^0 + l \omega \sin \varphi \cdot m \overline{\eta}^0 - l \omega \cos \varphi \cdot m \overline{\zeta}^0 \Rightarrow \\ \overline{Q} &= ml \omega \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \varphi \\ -\cos \varphi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

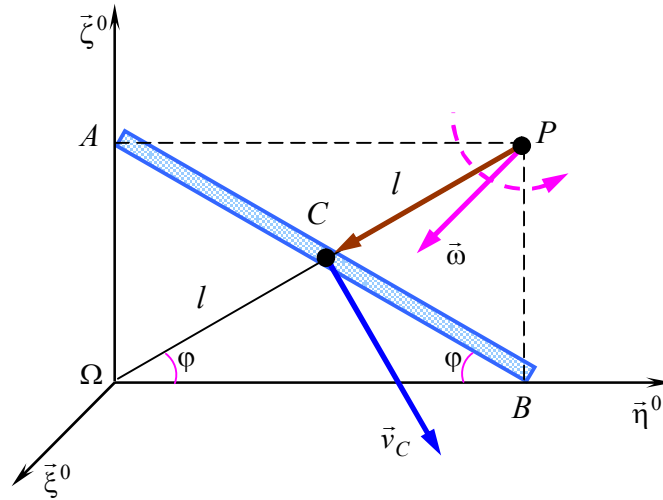


Рис. 15

Кинетический момент \bar{G}_Ω вычислим по формуле (2)

$$\bar{G}_\Omega = \overbrace{\vec{r}_C}^{\overline{\Omega C}} \times \overbrace{M\vec{v}_C}^{\overline{Q}} + I_C \bar{\omega},$$

т.е. через кинетический момент стержня относительно оси, проходящий через центр масс стержня:

$$\begin{aligned} \bar{G}_\Omega &= \overbrace{\vec{\Omega C}}^{\begin{pmatrix} 0 \\ l \cos \varphi \\ l \sin \varphi \end{pmatrix}} \times \overbrace{\vec{Q}}^{m\omega \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \varphi \\ -\cos \varphi \end{pmatrix}} + \overbrace{I_C}^{\frac{1}{3}ml^2} \overbrace{\bar{\omega}}^{\begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = ml\omega \begin{pmatrix} 0 \\ l \cos \varphi \\ l \sin \varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \varphi \\ -\cos \varphi \end{pmatrix} + \frac{1}{3}ml^2 \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= ml^2\omega \left[\begin{vmatrix} \bar{\xi}^0 & \bar{\eta}^0 & \bar{\zeta}^0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & -\cos \varphi \end{vmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = ml^2\omega \left[\bar{\xi}^0 \overbrace{(-\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)}^{-1} + \frac{1}{3}\bar{\xi}^0 \right] \Rightarrow \\ &\bar{G}_\Omega = -\frac{2}{3}ml^2\omega \bar{\xi}^0. \end{aligned} \quad (6)$$

Найдем кинетический момент \bar{G}_Ω через кинетический момент, вычисленный относительно точки P – мгновенного центра скоростей стержня. По формуле (1.1.3)

$$\bar{G}_{O=\Omega} = \bar{G}_{O=P} + \overbrace{O'O}^{\overline{\Omega P}} \times \bar{Q}$$

имеем

$$\bar{G}_\Omega = \overbrace{\bar{G}_P}^{(3) \Rightarrow I_P \bar{\omega}} + \overline{\Omega P} \times \bar{Q} = \overbrace{I_P}^{\frac{1}{3}ml^2 + ml^2} \cdot \overbrace{\bar{\omega}}^{\begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} + \overbrace{\overline{\Omega P}}^{\begin{pmatrix} 0 \\ 2l \cos \varphi \\ 2l \sin \varphi \end{pmatrix}} \times \overbrace{\bar{Q}}^{m\omega \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \varphi \\ -\cos \varphi \end{pmatrix}} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{4}{3} ml^2 \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2l \cos \varphi \\ 2l \sin \varphi \end{pmatrix} \times ml \omega \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \varphi \\ -\cos \varphi \end{pmatrix} = ml^2 \omega \left[\frac{4}{3} \bar{\xi}^0 + 2 \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} \bar{\xi}^0 & \bar{\eta}^0 & \bar{\zeta}^0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}}^{-\bar{\xi}^0} \right] = \\
 &= ml^2 \omega \left(\frac{4}{3} \cdot \bar{\xi}^0 - 2 \cdot \bar{\xi}^0 \right) = -\frac{2}{3} ml^2 \omega \bar{\xi}^0.
 \end{aligned}$$

Имеет место совпадение результатов с (6).

Кинетическая энергия. Вычислим кинетическую энергию T по формуле (4)

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2.$$

Имеем

$$T = \frac{1}{2} m \overbrace{v_C^2}^{\frac{1}{2} \omega^2} + \frac{1}{2} \overbrace{I_C}^{\frac{1}{3} ml^2} \omega^2 = \frac{1}{2} ml^2 \omega^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} ml^2 \omega^2 = \frac{1}{2} ml^2 \omega^2 \left(1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3} ml^2 \omega^2 \Rightarrow$$

$$T = \frac{2}{3} ml^2 \omega^2. \quad (7)$$

Вычислим кинетическую энергию T по формуле (5)

$$T = \frac{1}{2} \overbrace{I_P}^{\frac{4}{3} ml^2} \omega^2 = \frac{2}{3} ml^2 \omega^2.$$

Результаты совпадают с (7). ►

3. ТЕОРЕМЫ ОБ ИЗМЕНЕНИИ ОСНОВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

3.1. Общие замечания

Рассмотрим систему, состоящую из N материальных точек M_1, \dots, M_N , каждая из которых имеет массу m_ν , радиус-вектор \bar{r}_ν , скорость \bar{v}_ν и ускорение \bar{w}_ν , $\nu = 1, \dots, N$. Движение системы рассматривается в инерциальной системе отсчета. На каждую точку системы действуют как внешние, так и внутренние силы. Обозначим через $\bar{F}_\nu^{(e)}$ равнодействующую всех внешних сил, а через $\bar{F}_\nu^{(i)}$ – равнодействующую всех внутренних сил, \bar{w}_ν , $\nu = 1, \dots, N$. Тогда по второму закону Ньютона имеем

$$m_\nu \bar{w}_\nu = \bar{F}_\nu^{(e)} + \bar{F}_\nu^{(i)}, \quad \nu = 1, \dots, N. \quad (1)$$

Для получения закона движения точек системы дифференциальные уравнения (1) интегрируются при заданных начальных условиях. Эту задачу облегчает знание первых интегралов – функций координат, скоростей точек системы и времени, остающихся постоянными вдоль любых движений системы. Построение первых интегралов основано на изучении изменения основных динамических величин. Описание этих изменений производится с помощью теорем динамики. В частности, когда основные динамические величины остаются постоянными, говорят, что имеют место законы сохранения.

3.2. Теорема об изменении количества движения

Сложим почленно равенства (1.1):

$$\sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \bar{w}_{\nu} = \sum_{\nu=1}^N (\bar{F}_{\nu}^{(e)} + \bar{F}_{\nu}^{(i)}) \Rightarrow \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \bar{w}_{\nu} = \overbrace{\sum_{\nu=1}^N \bar{F}_{\nu}^{(e)}}^{\bar{F}^{(e)}} + \overbrace{\sum_{\nu=1}^N \bar{F}_{\nu}^{(i)}}^0 = \bar{F}^{(e)} \Rightarrow$$

$$\sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \bar{w}_{\nu} = \bar{F}^{(e)}, \quad (1)$$

где $\bar{F}^{(e)}$ – главный вектор внешних сил, приложенных к системе. Преобразуем левую часть равенства (1):

$$\sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \overbrace{\frac{d\bar{v}_{\nu}}{dt}}^{\bar{w}_{\nu}} = \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \frac{d\bar{v}_{\nu}}{dt} = \sum_{\nu=1}^N \frac{d}{dt} (m_{\nu} \bar{v}_{\nu}) = \frac{d}{dt} \overbrace{\sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \bar{v}_{\nu}}^{\bar{Q}} = \frac{d}{dt} \bar{Q} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt} \bar{Q} = \bar{F}^{(e)}. \quad (2)$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Производная по времени от количества движения системы равна главному вектору всех внешних сил системы.*

Проинтегрируем равенство (2) по времени в пределах от t_1 до t_2 . В результате получим

$$\Delta \bar{Q} = \bar{Q}(t_2) - \bar{Q}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}^{(e)} dt. \quad (3)$$

Определение 1. *Векторная величина $\int_{t_1}^{t_2} \bar{F}^{(e)} dt$ называется импульсом внешних сил*

системы за время $\Delta t = t_2 - t_1$.

Равенство (3) выражает теорему об изменении количества движения системы материальных точек в интегральной форме.

Теорема 2. *Приращение количества движения системы за конечное время равно импульсу внешних сил за это время.*

В силу равенства $\bar{Q} = M\bar{v}_C$ формулу (2) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt} \overbrace{\bar{Q}}^{M\bar{v}_C} = \bar{F}^{(e)} \Rightarrow \frac{d}{dt} (M\bar{v}_C) = \bar{F}^{(e)} \Rightarrow M \frac{d\bar{v}_C}{dt} = \bar{F}^{(e)}.$$

Последнее соотношение выражает теорему о движении центра масс.

Теорема 3. *Центр масс системы движется так же, как двигалась бы материальная точка, масса которой равна массе системы, под действием силы, равной главному вектору всех внешних сил системы.*

В случае когда $\bar{F}^{(e)} = 0$, из теоремы об изменении количества движения (движения центра масс) следует закон сохранения количества движения

$$\bar{Q} = \overline{const}$$

(равномерного и прямолинейного движения центра масс $\bar{v}_C = \overline{const}$). В случае, когда равна нулю лишь какая-либо проекция вектора $\bar{F}^{(e)}$, соответствующая проекция вектора $\bar{Q}(\bar{v}_C)$ постоянна.

Пример 1. Две точки одинаковой массы притягиваются друг к другу по некоторому закону. Точки могут двигаться только по абсолютно гладким горизонтальным осям координат и в начальный момент покоились (**рис. 1**).

Показать, что при любом законе притяжения они одновременно окажутся в начале координат.

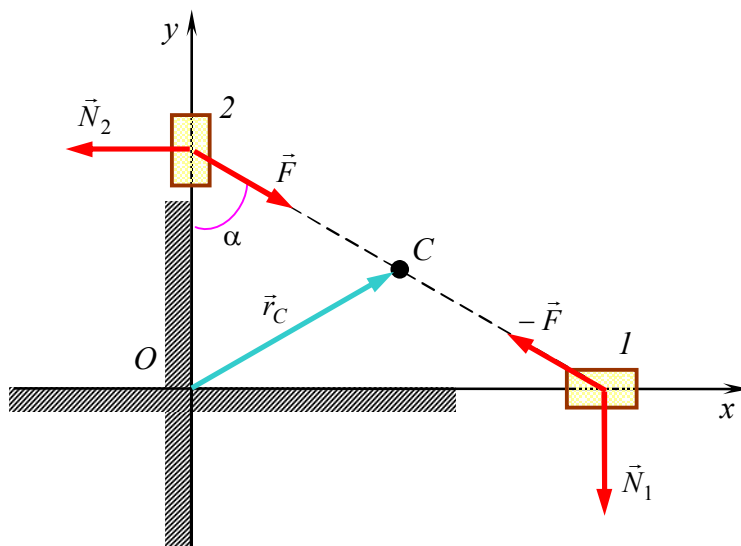


Рис. 1

Решение. Точки движутся вдоль осей координат, поэтому

$$N_1 = F \cos \alpha, \quad N_2 = F \sin \alpha \Rightarrow$$

$$\bar{F}^{(e)} = \bar{N}_1 + \bar{N}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -N_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -N_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -N_2 \\ -N_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F \sin \alpha \\ -F \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Обозначим через C – центр масс двух точек. Тогда

$$\overline{OC} = \begin{pmatrix} \frac{l}{2} \sin \alpha \\ \frac{l}{2} \cos \alpha \end{pmatrix}$$

В силу

$$\overline{F}^{(e)} \updownarrow \overline{OC}, \quad \overline{v}_C(0) = 0$$

центр масс может двигаться только вдоль линии OC . Когда точка C приходит в положение O , точки попадают в начало координат, причем одновременно. ►

Пример 2. Диск массой M равномерно вращается вокруг неподвижной оси, перпендикулярной плоскости диска, с угловой скоростью ω (рис. 2). Определить главный вектор внешних сил, приложенных к диску, если его центр масс удален от оси вращения на расстояние $OC = r/2$.

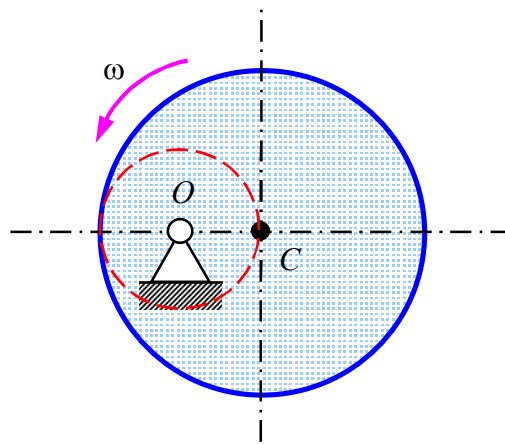


Рис. 2

Решение. Запишем теорему о движении центра масс

$$m\overline{w}_C = \overline{R}^e. \quad (4)$$

Центр масс диска C движется по окружности, центром которой является точка O . Проецируем (4) на естественные оси:

$$\begin{cases} m w_C^n = R_n^e, \\ m w_C^\tau = R_\tau^e. \end{cases}$$

Так как диск вращается равномерно, то

$$\varepsilon = 0 \Rightarrow w_C^\tau = 0 \Rightarrow R_\tau^e = 0.$$

Получаем, что главный вектор внешних сил в любой момент времени сонаправлен с вектором \overline{CO} , а его модуль равен

$$R^e = R_n^e = M \omega^2 \cdot OC = \frac{1}{2} M r \omega^2. \quad \blacktriangleright$$

Пример 3. На неподвижную однородную призму A , лежащую на горизонтальной плоскости, положили однородную призму B (см. рис. 3). Ширина основания призмы A равна a .

Ширина основания призмы B равна b . Пренебрегая трением, определить смещение призмы A после того, как призма B опустится по призме A . Масса призмы A равна M_1 , масса призмы B равна M_2 .

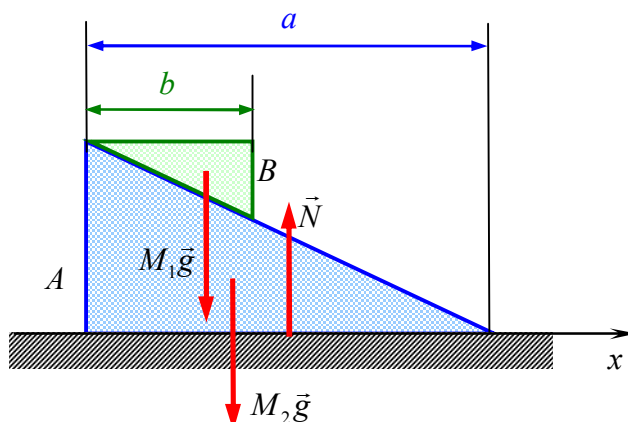


Рис. 3

Решение. Запишем теорему о движении центра масс

$$m\vec{w}_C = M_1\vec{g} + M_2\vec{g} + \vec{N}. \quad (5)$$

Так как необходимо определить смещение призмы A , то спроецируем (5) на ось Ox :

$$m\ddot{x}_C = 0.$$

В начальный момент система покоилась, следовательно $x_C = \text{const}$, т.е.

$$x_C(0) = x_C(T) \Rightarrow \Delta x_C = 0, \quad (6)$$

где $x_C(T)$ – положение центра масс системы после того, как призма B опустится по призме A .

В данном случае имеет место закон сохранения положения центра масс. Тогда из определения центра масс системы

$$\Delta x_C = \frac{M_1\Delta x_A + M_2\Delta x_B}{M_1 + M_2}$$

с учетом (6), находим:

$$M_1\Delta x_A + M_2\Delta x_B = 0 \Rightarrow$$

$$M_1\Delta x_A + M_2(\Delta x_A + a - b) = 0 \Rightarrow$$

$$(M_1 + M_2)\Delta x_A = -M_2(a - b) \Rightarrow$$

$$\Delta x_A = -\frac{M_2(a - b)}{M_1 + M_2},$$

т.е. призма A сместится влево на величину $\frac{M_2(a - b)}{M_1 + M_2}$. ►

3.3. Теорема об изменении кинетического момента

Пусть A – произвольная точка (необязательно материальная) и \bar{v}_A – ее скорость в инерциальной системе отсчета. Символом $\bar{\rho}_v$ обозначим радиус-вектор v -й, $v = 1, \dots, N$, точки системы относительно центра A (рис. 4).

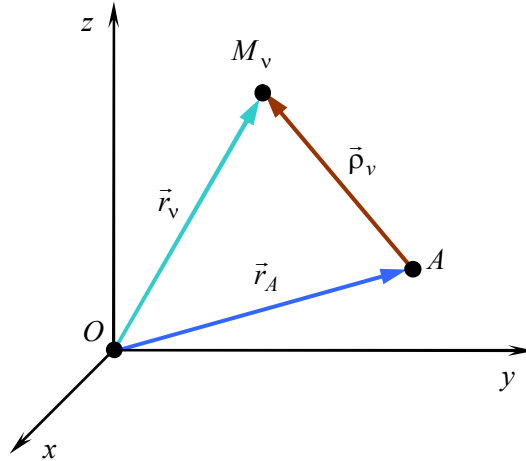


Рис. 4

Тогда кинетический момент системы относительно центра A вычисляется по формуле

$$\bar{G}_A = \sum_{v=1}^N \bar{\rho}_v \times m_v \bar{v}_v.$$

Продифференцируем последнее равенство по времени:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\bar{G}_A) &= \sum_{v=1}^N \frac{d\bar{\rho}_v}{dt} \times m_v \bar{v}_v + \sum_{v=1}^N \bar{\rho}_v \times m_v \overbrace{\frac{d\bar{v}_v}{dt}}^{\bar{w}_v} = \sum_{v=1}^N \frac{d\bar{\rho}_v}{dt} \times m_v \bar{v}_v + \sum_{v=1}^N \bar{\rho}_v \times \overbrace{m_v \bar{w}_v}^{\bar{F}_v^{(e)} + \bar{F}_v^{(i)}} = \\ &= \sum_{v=1}^N \frac{d\bar{\rho}_v}{dt} \times m_v \bar{v}_v + \overbrace{\sum_{v=1}^N \bar{\rho}_v \times \bar{F}_v^{(e)}}^{\bar{M}_A^{(e)}} + \overbrace{\sum_{v=1}^N \bar{\rho}_v \times \bar{F}_v^{(i)}}^{\bar{M}_A^{(i)}} \Rightarrow \\ &\quad \sum_{v=1}^N \frac{d\bar{\rho}_v}{dt} \times m_v \bar{v}_v + \bar{M}_A^{(e)} + \overbrace{\bar{M}_A^{(i)}}^0 \Rightarrow \\ \frac{d}{dt}(\bar{G}_A) &= \sum_{v=1}^N \frac{d\bar{\rho}_v}{dt} \times m_v \bar{v}_v + \bar{M}_A^{(e)}. \end{aligned} \quad (1)$$

Из рис. 4 видно, что

$$\bar{r}_v = \bar{r}_A + \bar{\rho}_v \Rightarrow \bar{\rho}_v = \bar{r}_v - \bar{r}_A \Rightarrow$$

$$\frac{d\bar{\rho}_v}{dt} = \frac{d\bar{r}_v}{dt} - \frac{d\bar{r}_A}{dt}, \quad v = 1, \dots, N. \quad (2)$$

Подставим (2) в правую часть (1):

$$\begin{aligned}
 \sum_{\nu=1}^N \overbrace{\frac{d\bar{\rho}_\nu}{dt}}^{\frac{d\bar{r}_\nu}{dt} - \frac{d\bar{r}_A}{dt}} \times m_\nu \bar{v}_\nu + \bar{M}_A^{(e)} &= \sum_{\nu=1}^N \left(\frac{d\bar{r}_\nu}{dt} - \frac{d\bar{r}_A}{dt} \right) \times m_\nu \bar{v}_\nu + \bar{M}_A^{(e)} = \\
 &= \sum_{\nu=1}^N (\bar{v}_\nu - \bar{v}_A) \times m_\nu \bar{v}_\nu + \bar{M}_A^{(e)} = - \sum_{\nu=1}^N \bar{v}_A \times m_\nu \bar{v}_\nu + \bar{M}_A^{(e)} = \\
 &= -\bar{v}_A \times \sum_{\nu=1}^N m_\nu \bar{v}_\nu + \bar{M}_A^{(e)} = -\bar{v}_A \times \bar{Q} + \bar{M}_A^{(e)} \quad \Rightarrow \\
 \frac{d}{dt}(\bar{G}_A) &= -\bar{v}_A \times \bar{Q} + \bar{M}_A^{(e)} = \bar{Q} \times \bar{v}_A + \bar{M}_A^{(e)}. \quad (3)
 \end{aligned}$$

В частности, если точка A неподвижна, т.е. $\bar{v}_A = 0$, то формула (3) принимает вид

$$\frac{d}{dt}(\bar{G}_A) = \bar{M}_A^{(e)}. \quad (4)$$

Доказана следующая теорема об изменении кинетического момента относительно неподвижного центра в дифференциальной форме (формула (4)).

Теорема 4. *Производная по времени от кинетического момента системы относительно неподвижного центра равна главному моменту внешних сил системы относительно этого центра.*

Теорема об изменении кинетического момента будет иметь форму (4) не только в случае неподвижного центра, но и когда для закона движения центра A выполнено условие

$$\bar{r}_A = \alpha \bar{r}_C + \bar{a}, \quad \alpha \in R^1, \quad \bar{a} = \overline{const}. \quad (5)$$

Действительно, в этом случае

$$\frac{d\bar{r}_A}{dt} = \frac{d}{dt}(\alpha \bar{r}_C + \bar{a}) \quad \Rightarrow \quad \bar{v}_A = \alpha \bar{v}_C.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(\bar{G}_A) &= -\overbrace{\bar{v}_A}^{\alpha \bar{v}_C} \times \overbrace{\bar{Q}}^{M \bar{v}_C} + \bar{M}_A^{(e)} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(\bar{G}_A) = -\overbrace{\alpha \bar{v}_C \times M \bar{v}_C}^{=0} + \bar{M}_A^{(e)} \quad \Rightarrow \\
 \frac{d}{dt}(\bar{G}_A) &= \bar{M}_A^{(e)}.
 \end{aligned}$$

Из (5) следует, что, если $\alpha = 0$, то A – неподвижный центр, а если $\alpha = 1$, $\bar{a} = 0$, то центр A совпадает с центром масс системы. Таким образом, теорема об изменении кинетического момента для центра масс и теорема об изменении кинетического момента относительно неподвижного центра имеют одинаковый вид (4).

Заметим, что если относительное движение рассматривается в осях Кенига, то в силу равенства

$$\bar{G}_C = \bar{G}_C'$$

теорема об изменении кинетического момента относительно центра масс (в осях Кенига) может быть записана в виде

$$\frac{d\bar{G}_C}{dt} = \bar{M}_C^{(e)}.$$

Проинтегрируем равенство (4) по времени в пределах от t_1 до t_2 . Имеем

$$\frac{d}{dt}(\bar{G}_A) = \bar{M}_A^{(e)} \Rightarrow \Delta\bar{G}_A = \bar{G}_A(t_2) - \bar{G}_A(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \bar{M}_A^{(e)} dt.$$

Последнее соотношение выражает теорему об изменении кинетического момента относительно неподвижного центра в интегральной форме.

Теорема 5. Приращение вектора кинетического момента системы относительно неподвижного центра за конечное время равно импульсу моментов внешних сил относительно того же центра за то же время.

В случае когда $\bar{M}_A^{(e)} = 0$, выполняется $\bar{G}_A = \overline{const}$ и имеет место закон сохранения кинетического момента. В частности, когда равна нулю лишь какая-либо проекция вектора $\bar{M}_A^{(e)}$, то постоянной будет соответствующая проекция вектора \bar{G}_A .

Пример 4. Круговой однородный конус массой M вращается вокруг неподвижной вертикальной оси (оси симметрии конуса). По образующей конуса движется материальная точка A массы m со скоростью u . Радиус основания конуса равен R (рис. 5).

Определить угловую скорость вращения конуса в момент, когда материальная точка будет находиться на основании конуса. В начальный момент точка находилась в вершине конуса, а его угловая скорость была равна ω_0 .

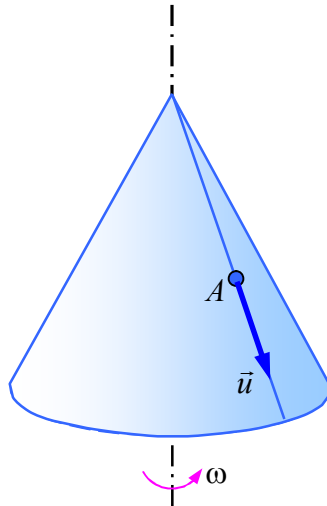


Рис. 5

Решение. Внешними силами, действующими на механическую систему «конус – материальная точка», являются силы тяжести $M\vec{g}$, $m\vec{g}$ и реакции опор, удерживающих ось в неподвижном состоянии (на рис. 6 они не изображены).

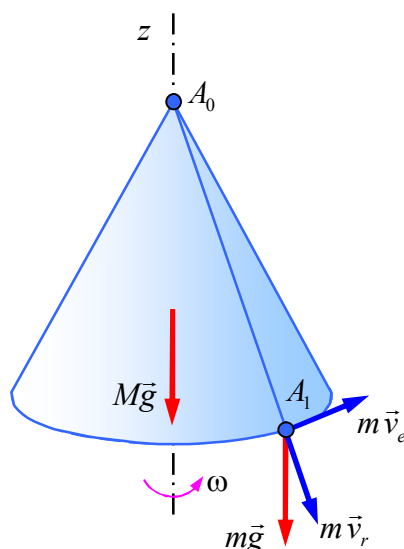


Рис. 6

Применим теорему об изменении кинетического момента относительно оси z

$$\frac{dG_z}{dt} = \sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k^e).$$

Так как внешние силы либо параллельны оси z , либо пересекают ее, то

$$\sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k^e) = 0 \Rightarrow G_z = const \Rightarrow G_z(0) = G_z(t_1), \quad (6)$$

где $G_z(0)$ и $G_z(t_1)$ – кинетические моменты системы, когда точка A находилась в положениях A_0 (на вершине конуса) и A_1 (на основании конуса) соответственно.

В начальный момент точка находилась в вершине конуса, поэтому кинетический момент системы равен кинетическому моменту конуса

$$G_z(0) = I_z \omega_0 = \frac{3MR^2}{10} \omega_0.$$

В момент времени t_1 , когда точка достигла основания конуса, кинетический момент системы складывается из кинетического момента конуса и момента количества движения точки относительно оси z

$$G_z(t_1) = G_{z, \text{конус}}(t_1) + G_{z, \text{точка}}(t_1)$$

Так как точка совершает сложное движение, то $m\vec{v}_a = m\vec{v}_r + m\vec{v}_e$. Момент относительно оси z будет создавать только $m\vec{v}_e$. Тогда

$$G_z(t_1) = I_z \omega_1 + m v_e R = \frac{3MR^2}{10} \omega_1 + m \omega_1 R^2 = \left(\frac{3M + 10m}{10} \right) R^2 \omega_1.$$

Подставляем найденные значения в (6)

$$\frac{3MR^2}{10} \omega_0 = \left(\frac{3M + 10m}{10} \right) R^2 \omega_1 \Rightarrow \omega_1 = \frac{3M}{3M + 10m} \omega_0. \blacktriangleright$$

Пример 5. На гладкой горизонтальной плоскости находится твердое тело в форме кольца массой M и радиуса R (рис. 7). По кольцу в направлении против хода часовой стрелки движется точка A массой m с постоянной по модулю относительной скоростью \bar{v} .

Определить угловую скорость кольца, если в начальный момент система «кольцо-точка» находилась в покое.

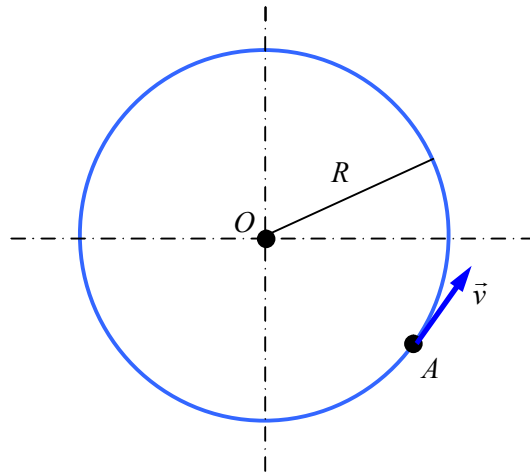


Рис. 7

Решение. Горизонтальная составляющая главного вектора внешних сил равна нулю. В силу этого точка C – центр масс системы «кольцо-точка» остается в своем начальном положении за все время движения (рис. 8).

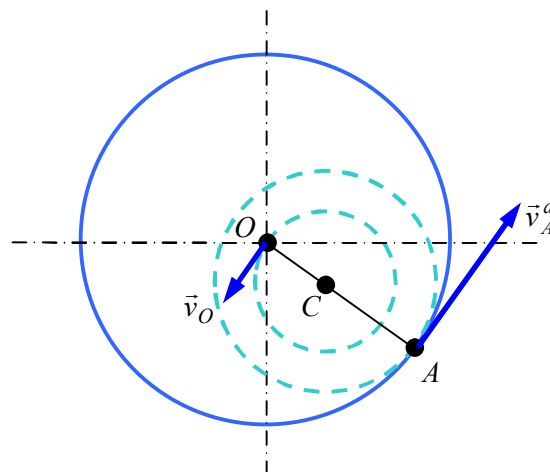


Рис. 8

Точки O , C , A лежат на одной прямой, т. к. C – центр масс системы «кольцо-точка». Определим OC и AC .

$$OC \cdot M = \overbrace{CA}^{R-OC} \cdot m \Rightarrow OC \cdot M = (R - OC) \cdot m \Rightarrow$$

$$OC \cdot (M + m) = mR \Rightarrow OC = \frac{m}{m + M} R = const,$$

$$AC = R - \overbrace{\frac{m}{m+M}R} = R - \frac{m}{m+M}R = \frac{M}{m+M}R = const.$$

Таким образом, центр кольца движется по окружности радиуса OC с центром C , а точка A (в абсолютном движении) – по окружности радиуса AC с тем же центром C , который является неподвижным в плоскости движения кольца. Тогда \vec{v}_O – скорость точки O и \vec{v}_A^a – абсолютная скорость точки A направлены так, как это показано на **рис. 8**.

Обозначим через $\vec{\omega}$ угловую скорость кольца. Абсолютное движение точки A представим как переносное (вместе с кольцом) и относительное (относительно кольца) (**рис. 9**).

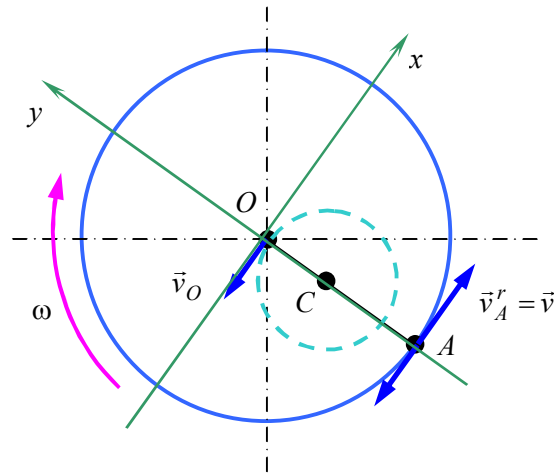


Рис. 9

Переносная скорость \vec{v}_A^e точки A вычисляется по формуле

$$\vec{v}_A^e = \vec{v}_O + \overbrace{\vec{\omega} \times \overline{AO}} = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \overline{AO},$$

а ее относительная скорость \vec{v}_A^r совпадает с вектором \vec{v} . Вычислим абсолютную скорость точки

$$\vec{v}_A^a = \overbrace{\vec{v}_O + \vec{\omega} \times \overline{AO}} + \overbrace{\vec{v}} = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \overline{AO} + \vec{v}.$$

Кольцо совершает плоскопараллельное движение. Вычислим кинетический момент кольца относительно неподвижного центра C в текущий момент времени по формуле (2.5.2), в которой роль Ω играет центр C , а роль C – центр масс системы «кольцо + точка» точка O . Имеем

$$\begin{aligned} \vec{G}_C^{\text{кольцо}} = \vec{G}_\Omega \Big|_{\Omega \rightarrow C} = (\vec{r}_C \times M\vec{v}_C + I_C \vec{\omega}) \Big|_{\Omega \rightarrow C} &\Rightarrow \overline{CO} \times \overbrace{\vec{Q}}^{M\vec{v}_O} + \overbrace{\vec{G}_O}^{I_O \vec{\omega}} = \overline{CO} \times M\vec{v}_O + I_O \vec{\omega} \Rightarrow \\ G_{Cz}^{\text{кольцо}} &= CO \cdot Mv_O - I_O \omega. \end{aligned}$$

Вычислим момент количества движения точки A относительно того же центра C . Имеем

$$\vec{G}_C^A = \overline{CA} \times \left(m \overbrace{\vec{v}_A^a}^{\vec{v}_O + \vec{\omega} \times \overline{AO} + \vec{v}} \right) = \overline{CA} \times m (\vec{v}_O + \vec{\omega} \times \overline{AO} + \vec{v}) \Rightarrow$$

$$G_{Cz}^A = CA \cdot m \overbrace{v_A^a}^{-v_O - \omega R + v} = CA \cdot m(-v_O - \omega R + v).$$

Имеет место сохранение момента количества движения системы «кольцо + точка» относительно вертикальной оси Cz . При этом в начальный момент он равен нулю. Тогда

$$\begin{aligned} 0 &= \overbrace{G_{Cz}^{\text{кольцо}} + G_{Cz}^A} = \overbrace{CO \cdot Mv_O - I_O \omega} + \overbrace{CA \cdot m(-v_O - \omega R + v)} = \overbrace{\frac{m}{m+M}R} \cdot Mv_O - I_O \omega + \overbrace{\frac{M}{m+M}R} \cdot m(-v_O - \omega R + v) = \\ &= \frac{m}{m+M} R \cdot Mv_O - I_O \omega + \frac{M}{m+M} R \cdot m(-v_O - \omega R + v) = \\ &= -I_O \omega - \omega \frac{M \cdot m}{m+M} R^2 + v \frac{M \cdot m}{m+M} R = -\omega \left(\overbrace{I_O}^{MR^2} + \frac{M \cdot m}{m+M} R^2 \right) + v \frac{M \cdot m}{m+M} R = \\ &= -\omega \left(MR^2 + \frac{M \cdot m}{m+M} R^2 \right) + v \frac{M \cdot m}{m+M} R = \frac{-\omega \left[MR^2 (m+M) + M \cdot mR^2 \right] + M \cdot mRv}{m+M} (=0) \Rightarrow \\ &-\omega [R(m+M) + mR] + mv = 0 \Rightarrow \\ &\omega = \frac{m}{R(2m+M)} v. \blacktriangleright \end{aligned}$$

3.4. Теорема об изменении кинетической энергии

Пусть система из положения $\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_N$ за время dt переместилась в положение $\bar{r}_1 + d\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_N + d\bar{r}_N$. Вычислим кинетическую энергию системы в исходном положении и ее приращение на этом перемещении:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v \bar{v}_v^2 \Rightarrow \\ dT &= \sum_{v=1}^N m_v \bar{v}_v d\bar{v}_v = \sum_{v=1}^N m_v \bar{v}_v \overbrace{\frac{d\bar{v}_v}{dt}}^{\bar{w}_v} dt = \sum_{v=1}^N m_v \bar{w}_v \overbrace{\bar{v}_v dt}^{d\bar{r}_v} = \sum_{v=1}^N \overbrace{m_v \bar{w}_v}^{\bar{F}_v^{(e)} + \bar{F}_v^{(i)}} d\bar{r}_v = \\ &= \sum_{v=1}^N (\bar{F}_v^{(e)} + \bar{F}_v^{(i)}) d\bar{r}_v = \sum_{v=1}^N \overbrace{\bar{F}_v^{(e)}}^{d'A^{(e)}} d\bar{r}_v + \sum_{v=1}^N \overbrace{\bar{F}_v^{(i)}}^{d'A^{(i)}} d\bar{r}_v = d'A^{(e)} + d'A^{(i)} \Rightarrow \\ &dT = d'A^{(e)} + d'A^{(i)}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $d'A^{(e)}$, $d'A^{(i)}$ – работа соответственно внешних и внутренних сил на перемещении системы. Доказана теорема об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме (формула (1)). ■

Теорема 6. Дифференциал кинетической энергии системы равен элементарной работе всех сил системы (включая внутренние).

Проинтегрируем (1)

$$dT = d'A^{(e)} + d'A^{(i)}$$

в пределах от t_1 до t_2 . В результате получим

$$\Delta T = T(t_2) - T(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} d'A^{(e)} + \int_{t_1}^{t_2} d'A^{(i)}. \quad (2)$$

Доказана теорема об изменении кинетической энергии в интегральной форме (формула (2)). ■

Теорема 7. Приращение кинетической энергии системы за конечное время равно работе всех сил на перемещении системы за то же время.

В отличие от теорем об изменении количества движения и кинетического момента, в формулировке теоремы об изменении кинетической энергии присутствуют как внешние, так и внутренние силы. Для абсолютно твердого тела работа внутренних сил равна нулю, поэтому равенства (1) и (2) здесь принимают вид

$$dT = d'A^{(e)}, \quad \Delta T = \int_{t_1}^{t_2} d'A^{(e)}$$

соответственно.

Пусть все силы, приложенные к системе (внешние и внутренние), потенциальны и их потенциал не зависит явно от времени. Тогда

$$dT = \overbrace{d'A^{(e)} + d'A^{(i)}}^{-d\Pi} \Rightarrow dT = -d\Pi \Rightarrow dT + d\Pi = 0 \Rightarrow$$

$$E = T + \Pi = const, \quad (3)$$

где символом E обозначена полная механическая энергия системы. Соотношения (3) выражают закон сохранения полной механической энергии. Для выполнения этого закона достаточно потребовать потенциальность лишь тех сил, работа которых на действительном перемещении системы отлична от нуля. Например, работа реакций идеальных стационарных связей равна нулю на любых допустимых перемещениях.

Пример 6. Тонкий однородный стержень длиной l и массой m вращается на шарнире O в вертикальной плоскости, испытывая тормозящий момент $m_c = const$ (см. рис. 10).

Определить, какую минимальную скорость надо придать нижнему концу стержня в вертикальном положении, чтобы стержень смог достичь горизонтального положения.

Решение. Угловая скорость ω стержня и скорость v его конца связаны соотношением

$$\omega = \frac{v}{l}.$$

Вычислим кинетическую энергию стержня в начальный момент времени:

$$T_0 = \frac{1}{2} I_O \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} ml^2 \right) \cdot \left(\frac{v}{l} \right)^2 = \frac{1}{6} mv^2.$$

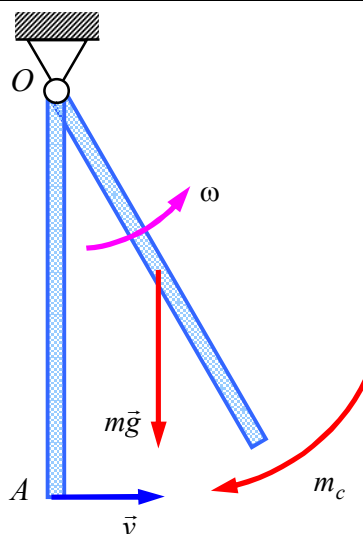


Рис. 10

В конечный момент времени в положении, когда стержень горизонтален, кинетическая энергия стержня равна нулю.

Вычислим работу внешних сил на перемещении стержня: силы тяжести – A_1 и момента сопротивления – A_2 . (рис. 11).

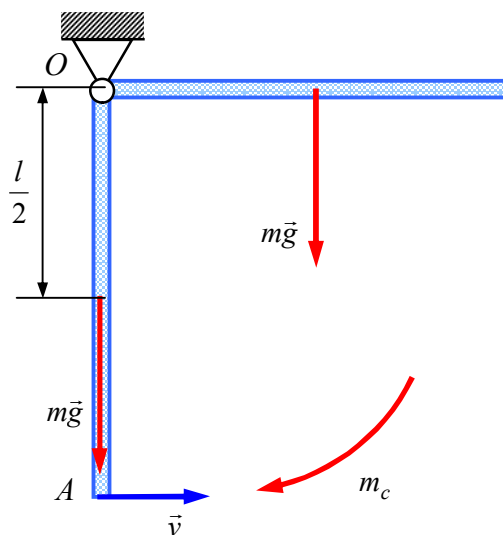


Рис. 11

Имеем

$$A_1 = -mg \frac{l}{2}, \quad A_2 = -m_c \frac{\pi}{2}.$$

По теореме об изменении кинетической энергии в интегральной форме запишем

$$0 - \frac{1}{6}mv^2 = -mg \frac{l}{2} - m_c \frac{\pi}{2} \Rightarrow v = \sqrt{3 \cdot \left(gl + \pi \frac{m_c}{m} \right)}. \blacktriangleright$$

3.5. Пример на одновременное применение нескольких теорем динамики

Пример 7. На вертикальную стойку 1 с нарезанной на ней резьбой насажена муфта 2, имеющая резьбу того же шага, что и стойка. К муфте жестко припаян стержень 3 (рис. 12). Масса стержня и муфты m , их момент инерции относительно вертикальной оси, проходящей через стойку, I . Шаг резьбы определяется формулой $h = k\varphi$, $k = const$, где h – вертикальное перемещение муфты при повороте ее на угол φ . Трение в резьбе отсутствует. В начальный момент муфта находилась на стойке в верхнем положении в состоянии покоя.

Определить скорость опускания муфты вдоль стойки и вертикальные проекции главных векторов взаимодействия стойки и муфты в функции величины h .

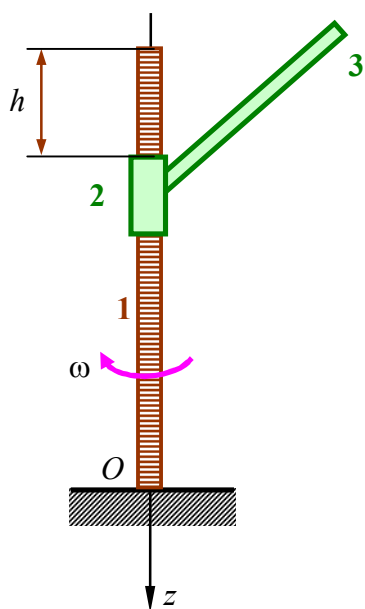


Рис. 12

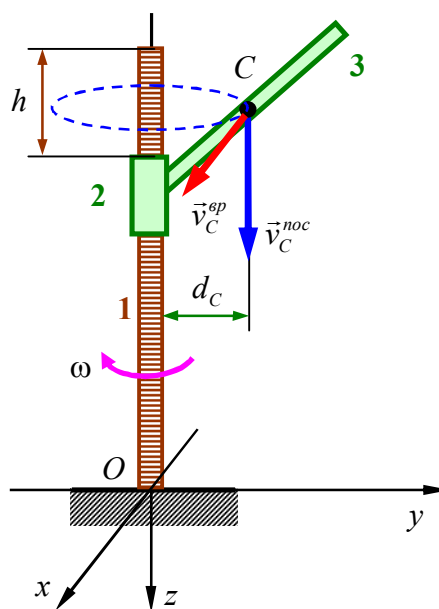


Рис. 13

Решение. Тело «муфта-стержень» совершает винтовое движение, состоящее из поступательного вдоль стойки и вращения относительно стойки. Скорость \bar{v}_v произвольной v -й точки тела складывается из скорости \bar{v}_v^{noc} в поступательном и скорости \bar{v}_v^{ep} во вращательном движениях (см. рис. 13).

Введем систему координат $Oxyz$. Тогда

$$\bar{v}_v^{noc} = \dot{h}\bar{z}^0, \quad \bar{v}_v^{ep} = d_v\omega\bar{x}^0 \Rightarrow$$

$$\bar{v}_v = \overbrace{\dot{h}\bar{z}^0}^{\bar{v}_v^{noc}} + \overbrace{d_v\omega\bar{x}^0}^{\bar{v}_v^{ep}} = \dot{h}\bar{z}^0 + d_v\omega\bar{x}^0. \quad (1)$$

Вычислим кинетическую энергию тела «муфта-стержень»

$$T = \frac{1}{2} \sum_v m_v \overbrace{\dot{h}\bar{z}^0 + d_v\omega\bar{x}^0}^{\bar{v}_v^2} = \frac{1}{2} \sum_v m_v (\dot{h}\bar{z}^0 + d_v\omega\bar{x}^0)^2 =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \sum_{\nu} m_{\nu} \left[(\dot{h})^2 \overbrace{(\bar{z}^0)^2}^1 + 2\dot{h}d_{\nu}\omega \overbrace{\bar{z}^0 \cdot \bar{x}^0}^{=0} + d_{\nu}^2\omega^2 \cdot \overbrace{(\bar{x}^0)^2}^1 \right] = \frac{1}{2} \sum_{\nu} m_{\nu} [\dot{h}^2 + d_{\nu}^2\omega^2] = \\
 &= \frac{1}{2} \overbrace{\left(\sum_{\nu} m_{\nu} \right)}^m \dot{h}^2 + \frac{1}{2} \overbrace{\left(\sum_{\nu} m_{\nu} d_{\nu}^2 \right)}^{I_z} \omega^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2 + \frac{1}{2} m \dot{h}^2.
 \end{aligned}$$

С учетом кинематической связи

$$h = k\varphi, \quad k = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \omega = \frac{\dot{h}}{k}$$

находим

$$T = \frac{1}{2} I \overbrace{\omega^2}^{\frac{\dot{h}^2}{k^2}} + \frac{1}{2} m \dot{h}^2 = \frac{1}{2} m \dot{h}^2 + \frac{1}{2} \frac{I}{k^2} \dot{h}^2 = \frac{1}{2} \left(m + \frac{I}{k^2} \right) \dot{h}^2.$$

Работа силы веса на перемещении h будет

$$A(h) = mgh.$$

По теореме об изменении кинетической энергии получим

$$\begin{aligned}
 \overbrace{\frac{1}{2} \left(m + \frac{I}{k^2} \right) \dot{h}^2}^{\tilde{T}} &= \overbrace{mgh}^{\tilde{A}(h)} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \left(m + \frac{I}{k^2} \right) \dot{h}^2 = mgh \quad \Rightarrow \\
 \dot{h}^2 &= \frac{2mghk^2}{mk^2 + I}.
 \end{aligned}$$

Искомая зависимость скорости от h имеет вид

$$v(h) = \dot{h} = \sqrt{\frac{2mgk^2}{mk^2 + I}} \cdot \sqrt{h}. \quad (2)$$

Определим вертикальные проекции главных векторов взаимодействия. Продифференцируем (2) по времени:

$$\begin{aligned}
 \ddot{h} &= \frac{d}{dt} \left(\sqrt{\frac{2mgk^2}{mk^2 + I}} \cdot \sqrt{h} \right) = \sqrt{\frac{2mgk^2}{mk^2 + I}} \cdot \frac{\overbrace{\dot{h}}^{(5) \Rightarrow \sqrt{\frac{2mgk^2}{mk^2 + I}} \cdot \sqrt{h}}}{2\sqrt{h}} = \\
 &= \sqrt{\frac{2mgk^2}{mk^2 + I}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{2mgk^2}{mk^2 + I}} \cdot \sqrt{h}}{2\sqrt{h}} = \frac{mgk^2}{mk^2 + I} \quad \Rightarrow \quad \ddot{h} = \frac{mgk^2}{mk^2 + I}.
 \end{aligned}$$

Вычислим угловое ускорение $\ddot{\varphi}$ вращательного движения тела «муфта-стержень»

$$\ddot{\varphi} = \frac{d}{dt} \overbrace{\dot{\varphi}}^{\frac{\dot{h}}{k}} = \frac{1}{k} \overbrace{\ddot{h}}^{\frac{mgk^2}{mk^2 + I}} = \frac{mgk^2}{k(mk^2 + I)} = \frac{mgk}{mk^2 + I}.$$

Из (1)

$$\bar{v}_{\nu} = \dot{h}\bar{z}^0 + d_{\nu}\omega\bar{x}^0$$

при $M_\nu = C$, где C – центр масс системы «стержень-муфта», находим

$$\bar{v}_C = \dot{h}\bar{z}^0 + d_C\omega \cdot \bar{x}^0 \Rightarrow v_{Cz} = \dot{h}.$$

По теореме о движении центра масс найдем вертикальную проекцию главного вектора реакций стойки

$$m \frac{d}{dt} \overbrace{v_{Cz}}^{\dot{h}} = -F_z + mg \Rightarrow$$

$$F_z = -m \overbrace{\dot{h}}^{\frac{mgk^2}{mk^2+I}} + mg = -m \cdot \frac{mgk^2}{mk^2+I} + mg = \frac{-m^2k^2g + m^2k^2g + Img}{mk^2+I} = \frac{Img}{mk^2+I} \Rightarrow$$

$$F_z = \frac{Img}{mk^2+I}.$$

Определяем проекцию кинетического момента тела относительно начала координат в проекции на ось z .

$$\bar{G}_O = \sum_\nu \bar{r}_\nu \times m_\nu \overbrace{\bar{v}_\nu}^{(4) \dot{h}\bar{z}^0 + d_\nu\omega\bar{x}^0} = \sum_\nu \bar{r}_\nu \times m_\nu (\dot{h}\bar{z}^0 + d_\nu\omega\bar{x}^0) \Rightarrow$$

$$G_{Oz} = \overbrace{\bar{G}_O}^{\sum_\nu \bar{r}_\nu \times m_\nu (\dot{h}\bar{z}^0 + d_\nu\omega\bar{x}^0)} \cdot \bar{z}^0 = \sum_\nu [\bar{r}_\nu \times m_\nu (\dot{h}\bar{z}^0 + d_\nu\omega\bar{x}^0)] \cdot \bar{z}^0 =$$

$$= \dot{h} \sum_\nu m_\nu \overbrace{(\bar{r}_\nu \times \bar{z}^0)}{=0} \cdot \bar{z}^0 + \omega \sum_\nu m_\nu d_\nu \overbrace{(\bar{r}_\nu \times \bar{x}^0)}^{(\bar{x}^0 \times \bar{z}^0) \cdot \bar{r}_\nu} \cdot \bar{z}^0 = \omega \sum_\nu m_\nu d_\nu \overbrace{(\bar{x}^0 \times \bar{z}^0)}^{\bar{y}^0} \cdot \bar{r}_\nu =$$

$$= \omega \sum_\nu m_\nu d_\nu \overbrace{(\bar{y}^0 \cdot \bar{r}_\nu)}^{d_\nu} = \omega \sum_\nu m_\nu d_\nu d_\nu = \omega \sum_\nu m_\nu d_\nu^2 = I\omega.$$

По теореме об изменении момента количества движения найдем M_{Oz} – вертикальную проекцию главного момента реакций стойки:

$$M_{Oz} = \frac{d}{dt} \overbrace{G_{Oz}}^{I\omega} = \frac{d}{dt} (I\omega) = I \overbrace{\dot{\omega}}^{\frac{mgk}{mk^2+I}} = I \cdot \frac{mgk}{mk^2+I}. \blacktriangleright$$

3.6. Теоремы динамики в неинерциальных системах отсчета

Пусть система материальных точек движется относительно системы отсчета $Oxyz$, которая в свою очередь движется относительно неподвижной системы координат $\Omega\xi\eta\zeta$ (см. рис. 14).

Абсолютное ускорение точки (ускорение относительно неподвижной системы координат) системы вычисляется по формуле

$$\bar{w}_\nu = \bar{w}_\nu^r + \bar{w}_\nu^e + \bar{w}_\nu^c, \quad \nu = 1, \dots, N, \quad (1)$$

где \bar{w}_ν^r – относительное, \bar{w}_ν^e – переносное и \bar{w}_ν^c – кориолисово ускорение ν -й точки.

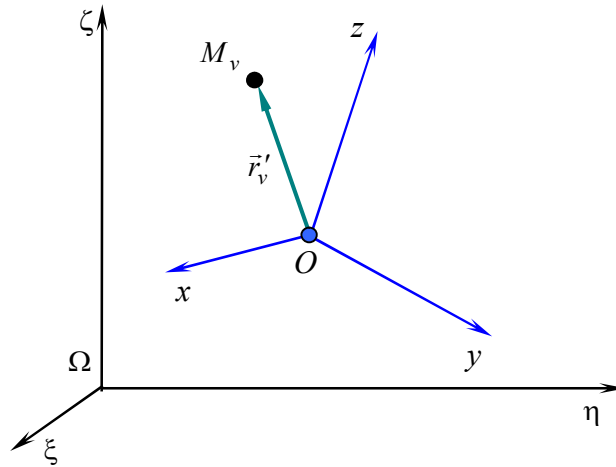


Рис. 14

Напомним, что

$$\bar{w}_v^e = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}_v' + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_v') + \bar{w}_O, \quad \bar{w}_v^c = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_v', \quad v=1, \dots, N.$$

Здесь $\bar{\varepsilon}$, $\bar{\omega}$ – угловые ускорение и скорость подвижной системы отсчета, \bar{v}_v' – относительная скорость v -й точки, а \bar{w}_O – ускорение начала подвижной системы.

Запишем второй закон Ньютона для произвольной точки системы

$$m_v \bar{w}_v = \bar{F}_v^{(e)} + \bar{F}_v^{(i)}, \quad v=1, \dots, N.$$

С учетом формулы (1) получим

$$m_v \overbrace{\bar{w}_v}^{\bar{w}_v^r + \bar{w}_v^e + \bar{w}_v^c} = \bar{F}_v^{(e)} + \bar{F}_v^{(i)} \Rightarrow m_v (\bar{w}_v^r + \bar{w}_v^e + \bar{w}_v^c) = \bar{F}_v^{(e)} + \bar{F}_v^{(i)} \Rightarrow$$

$$m_v \bar{w}_v^r = -m_v \bar{w}_v^e - m_v \bar{w}_v^c + \bar{F}_v^{(e)} + \bar{F}_v^{(i)}, \quad v=1, \dots, N. \quad (2)$$

Определение 2. Векторные величины

$$\bar{I}_v^e = -m_v \bar{w}_v^e, \quad \bar{I}_v^c = -m_v \bar{w}_v^c$$

называются соответственно переносной и кориолисовой силой инерции, приложенной к v -й, $v=1, \dots, N$, точке.

С учетом введенных обозначений равенство (2) перепишем в виде

$$m_v \bar{w}_v^r = \underbrace{-m_v \bar{w}_v^e}_{\bar{I}_v^e} - \underbrace{m_v \bar{w}_v^c}_{\bar{I}_v^c} + \bar{F}_v^{(e)} + \bar{F}_v^{(i)} = \underbrace{\bar{I}_v^e}_{\text{переносные силы инерции}} + \underbrace{\bar{I}_v^c}_{\text{внешние силы}} + \bar{F}_v^{(e)} + \bar{F}_v^{(i)}, \quad v=1, \dots, N.$$

Таким образом, с точки зрения наблюдателя, связанного с подвижной системой отсчета, движение точки системы происходит так, как будто система отсчета инерциальная, но на точку дополнительно действуют силы инерции: переносная и кориолисова. Эти силы формально можно отнести к внешним силам, действующим на систему. Тогда теоремы динамики принимают следующий вид (ограничимся случаем их дифференциальной формы).

Теорема об изменении количества движения

$$\frac{d\bar{Q}^r}{dt} = \bar{F}^{(e)} + \bar{I}^e + \bar{I}^c, \quad \bar{F}^{(e)} = \sum_{v=1}^N \bar{F}_v^{(e)}, \quad \bar{I}^e = \sum_{v=1}^N \bar{I}_v^e, \quad \bar{I}^c = \sum_{v=1}^N \bar{I}_v^c.$$

Теорема об изменении кинетического момента

$$\frac{d\bar{G}_A^r}{dt} = -\bar{v}_A^r \times \bar{Q}^r + \overbrace{\bar{M}_A^{(e)}}^{\text{момент внешних сил}} + \overbrace{\bar{M}_A^e}_{\text{момент переносных сил инерции}} + \bar{M}_A^c,$$

где \bar{M}_A^e, \bar{M}_A^c – главные моменты сил инерции переносных и кориолиса относительно центра A , \bar{v}_A^r – относительная скорость центра A .

Теорема об изменении кинетической энергии

$$dT^r = \overbrace{d'A^{(e)}}^{\text{работа внешних сил}} + d'A^{(i)} + \overbrace{d'A^e}_{\text{работа переносных сил инерции}} + d'A^c, \quad (3)$$

где $d'A^e, d'A^c$ – элементарные работы сил инерции переносных и кориолиса соответственно, на относительном перемещении системы. Покажем, что всегда

$$d'A^c = 0.$$

Действительно,

$$d'A^c = \sum_{\nu=1}^N \overbrace{\bar{I}_\nu^c}^{-2m_\nu \bar{\omega} \times \bar{v}_\nu^r} \cdot \tilde{d}\bar{r}_\nu^r = -\sum_{\nu=1}^N 2m_\nu \bar{\omega} \times \overbrace{\frac{d\tilde{d}\bar{r}_\nu^r}{dt}}^{\tilde{d}\bar{r}_\nu^r} = -2 \sum_{\nu=1}^N m_\nu \left(\bar{\omega} \times \frac{d\tilde{d}\bar{r}_\nu^r}{dt} \right) \cdot \tilde{d}\bar{r}_\nu^r = 0$$

Равенство (3) принимает вид

$$dT^r = \overbrace{d'A^{(e)}}^{\text{работа внешних сил}} + d'A^{(i)} + \overbrace{d'A^e}_{\text{работа переносных сил инерции}}.$$

Пример 8. При вращении сосуда вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω идеальная жидкость, находящаяся внутри его, отбрасывается к стенкам (**рис. 15**).

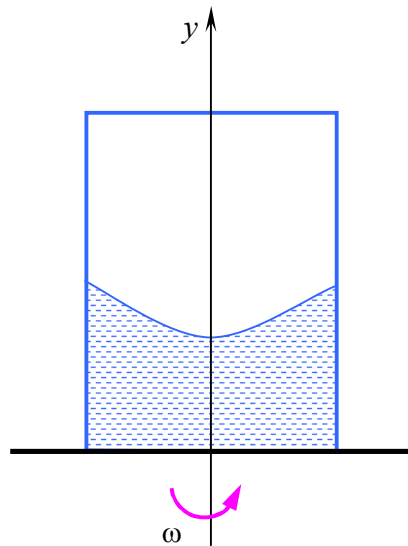


Рис. 15

Требуется определить форму поверхности жидкости.

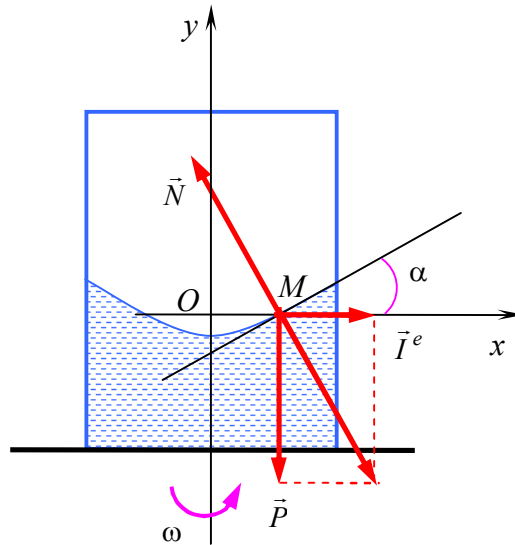


Рис. 16

Решение. Рассмотрим частицу жидкости M массой m на поверхности жидкости. Пусть Oxy – система координат, связанная с сосудом (рис. 16). Относительно этой системы частица жидкости неподвижна. Тогда

$$\vec{P} + \vec{I}^e + \vec{N} = 0.$$

Заметим, что

$$\vec{v}' = 0 \Rightarrow \vec{I}^c = 0.$$

Вектор реакции жидкости \vec{N} перпендикулярен поверхности жидкости, так как жидкость идеальна. Тогда

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\overbrace{I^e}^{m\omega^2 x}}{P} = \frac{m\omega^2 x}{mg} = \frac{\omega^2 x}{g} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2 x}{g}.$$

Интегрируя последнее равенство с учетом $y(0) = 0$, определяем

$$y(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega^2 x^2}{g}. \blacktriangleright$$

Вопросы для самоконтроля

1. Как определяется количество движения механической системы?
2. Что такое кинетический момент механической системы относительно центра и оси?
3. Как определяется кинетическая энергия механической системы?
4. Как вычисляется кинетический момент твердого тела при его вращении вокруг неподвижной оси?
5. Как вычисляются основные динамические величины механической системы в сложном движении?
6. Какая система отсчета называется кениговой?

7. Сформулируйте первую теорему Кенига.
8. Сформулируйте вторую теорему Кенига.
9. Как определяются основные динамические величины абсолютно твердого тела при его поступательном движении?
10. Как определяются основные динамические величины абсолютно твердого тела при его вращении относительно неподвижной точки?
11. Как определяются основные динамические величины абсолютно твердого тела при его свободном движении?
12. Как определяются основные динамические величины плоской фигуры при ее движении в своей плоскости?
13. Сформулируйте теорему об изменении количества движения.
14. Сформулируйте теорему о движении центра масс.
15. При каких условиях центр масс системы находится в состоянии покоя и при каких условиях он движется равномерно и прямолинейно?
16. Какая величина называется импульсом внешних сил механической системы?
17. Сформулируйте теорему об изменении кинетического момента механической системы относительно центра и оси.
18. При каких условиях кинетический момент относительно центра или оси остается постоянным?
19. Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии.
20. Какова особенность формулировок теорем динамики в неинерциальных системах отсчета?
21. Как определяется кориолисова сила инерции?
22. Как изменяется количество движения точки, движущейся равномерно по окружности?
23. Каково векторное выражение элементарной работы?
24. Каково выражение элементарной работы силы через проекции силы на оси координат?
25. Как вычисляется кинетическая энергия твердого тела в различных случаях его движения?

РАЗДЕЛ 3. ДИНАМИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

1. ДИНАМИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА, ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ОТНОСИТЕЛЬНО НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

1.1. Вывод закона движения тела

Твердое тело, вращающееся относительно неподвижной оси, имеет одну степень свободы (рис. 1).

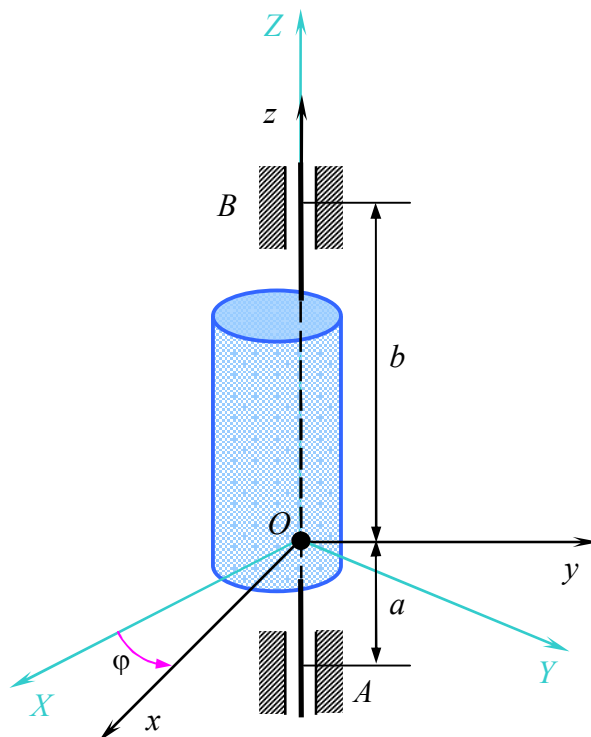


Рис. 1

Обобщенную координату для него введем следующим образом. Пусть A и B точки подвеса вращающегося тела. Ось вращения должна проходить через эти точки. Введем две системы координат. Начало координат обеих систем поместим в точку O , находящуюся на оси вращения тела на расстоянии a от точки подвеса A и на расстоянии b от точки подвеса B . Оси OZ и Oz направим вдоль оси вращения, а остальные оси направим так, как это показано на **рис. 1**. Оси OX и OY неподвижны в абсолютном пространстве, а оси Ox и Oy жестко связаны с вращающимся телом. Угол поворота φ подвижной системы относительно неподвижной принимается за обобщенную координату тела, вращающегося относительно неподвижной оси.

Пусть на тело действуют внешние силы $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_i, \dots, \vec{F}_n$, а в точках подвеса развиваются реакции \vec{A} и \vec{B} соответственно (**рис. 2**)

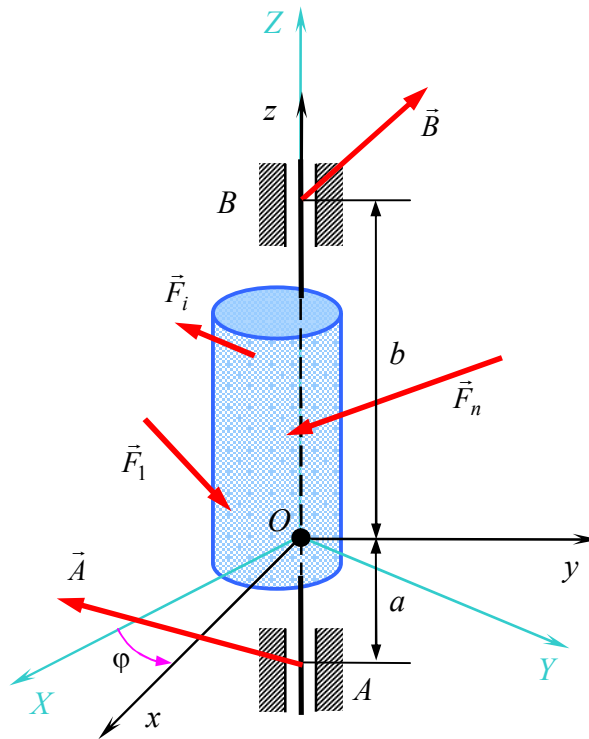


Рис. 2

Запишем теорему об изменении кинетического момента относительно оси. Имеем

$$\frac{dG_z}{dt} = \sum_{i=1}^n \text{mom}_z \vec{F}_i + \overbrace{\text{mom}_z \vec{A}}^0 + \overbrace{\text{mom}_z \vec{B}}^0. \quad (1)$$

Линии действия сил \vec{A} и \vec{B} пересекают ось Oz , поэтому

$$\text{mom}_z \vec{A} = 0, \quad \text{mom}_z \vec{B} = 0.$$

Учитывая, что $G_z = I_{zz} \dot{\varphi}$, из (1) выводим

$$\frac{d \overbrace{G_z}^{I_{zz} \dot{\varphi}}}{dt} = \sum_{i=1}^n \text{mom}_z \vec{F}_i \Rightarrow I_{zz} \ddot{\varphi} = \sum_{i=1}^n \text{mom}_z \vec{F}_i. \quad (2)$$

В общем случае

$$\bar{F}_i = \bar{F}_i(t, \varphi, \dot{\varphi}), \quad i = 1, \dots, n.$$

Интегрируя (2) с начальными условиями

$$\varphi(t_0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}(t_0) = \dot{\varphi}_0,$$

получим закон движения тела

$$\varphi = \varphi(t).$$

В частности,

$$\sum_{i=1}^n \text{mom}_z \bar{F}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = \dot{\varphi}_0(t - t_0) + \varphi_0.$$

1.2. Вывод уравнений движения тела в проекциях на подвижную систему отсчета

Выведем дифференциальные уравнения движения тела, содержащие реакции в точках подвеса. Запишем теорему о движении центра масс

$$M \frac{d\bar{v}_c}{dt} = \bar{A} + \bar{B} + \sum_{i=1}^n \bar{F}_i$$

и теорему об изменении кинетического момента тела относительно точки O

$$\frac{d}{dt} \bar{G}_O = \overline{OA} \times \bar{A} + \overline{OB} \times \bar{B} + \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times \bar{F}_i.$$

Здесь M – масса тела, \bar{v}_c – вектор скорости его центра масс, \bar{r}_i , $i = 1, \dots, n$, – радиус-векторы точек приложения активных сил.

Перепишем последние равенства, применяя понятие локальной (в подвижной системе) производной.

$$M \frac{\overbrace{d\bar{v}_c}^{\frac{d\bar{v}_c + \bar{\omega} \times \bar{v}_c}{dt}}}{dt} = \bar{A} + \bar{B} + \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \quad \Rightarrow$$

$$M \frac{d\bar{v}_c}{dt} + M \bar{\omega} \times \bar{v}_c = \bar{A} + \bar{B} + \sum_{i=1}^n \bar{F}_i, \quad (1)$$

$$\frac{\overbrace{d\bar{G}_O}^{\frac{d\bar{G}_O + \bar{\omega} \times \bar{G}_O}{dt}}}{dt} = \overline{OA} \times \bar{A} + \overline{OB} \times \bar{B} + \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times \bar{F}_i \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d\bar{G}_O}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{G}_O = \overline{OA} \times \bar{A} + \overline{OB} \times \bar{B} + \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times \bar{F}_i. \quad (2)$$

Здесь $\bar{\omega}$ – вектор угловой скорости тела. Используя проекции векторов на оси подвижной системы координат, находим для (1)

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{v}}_c &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}}_{\bar{\boldsymbol{\omega}}} \times \underbrace{\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix}}_{\overline{OC}} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega y_c \\ \omega x_c \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \frac{d\bar{\mathbf{v}}_c}{dt} &= \begin{pmatrix} -\dot{\omega} y_c \\ \dot{\omega} x_c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varepsilon y_c \\ \varepsilon x_c \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}}_{\bar{\boldsymbol{\omega}}} \times \underbrace{\begin{pmatrix} -\omega y_c \\ \omega x_c \\ 0 \end{pmatrix}}_{\bar{\mathbf{v}}_c} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -y_c \omega & x_c \omega & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -x_c \omega^2 \\ -y_c \omega^2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Аналогично для (2)

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{G}}_O &= \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_{xz} \omega \\ -I_{yz} \omega \\ I_{zz} \omega \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \frac{d\bar{\mathbf{G}}_O}{dt} &= \frac{d\omega}{dt} \cdot \begin{pmatrix} -I_{xz} \\ -I_{yz} \\ I_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varepsilon I_{xz} \\ -\varepsilon I_{yz} \\ \varepsilon I_{zz} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}}_{\bar{\boldsymbol{\omega}}} \times \underbrace{\begin{pmatrix} -I_{xz} \omega \\ -I_{yz} \omega \\ I_{zz} \omega \end{pmatrix}}_{\bar{\mathbf{G}}_O} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -I_{xz} \omega & -I_{yz} \omega & I_{zz} \omega \end{vmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} I_{yz} \\ -I_{xz} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}}_{\overline{OA}} \times \underbrace{\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}}_{\overline{A}} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & -a \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} aA_y \\ -aA_x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}}_{\overline{OB}} \times \underbrace{\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}}_{\overline{B}} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & b \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -bB_y \\ bB_x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}}_{\overline{F}_i} \times \underbrace{\begin{pmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{zi} \end{pmatrix}}_{\overline{F}_i} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ F_{xi} & F_{yi} & F_{zi} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} y_i F_{zi} - z_i F_{yi} \\ z_i F_{xi} - x_i F_{zi} \\ x_i F_{yi} - y_i F_{xi} \end{pmatrix}, \quad i=1, \dots, n. \quad (9)$$

Перепишем равенство (1)

$$M \frac{d\bar{\mathbf{v}}_c}{dt} + M \bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{v}}_c = \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{B}} + \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{F}}_i,$$

с учетом соотношений (3)–(4)

$$M \frac{d\vec{v}_c}{dt} + M \overline{\omega} \times \vec{v}_c = \overline{A} + \overline{B} + \sum_{i=1}^n \overline{F}_i \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -M\varepsilon y_c \\ M\varepsilon x_c \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -M\omega^2 x_c \\ -M\omega^2 y_c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n F_{ix} \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} \\ \sum_{i=1}^n F_{iz} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

а также равенство (2)

$$\frac{d\vec{G}_O}{dt} + \overline{\omega} \times \vec{G}_O = \overline{OA} \times \overline{A} + \overline{OB} \times \overline{B} + \sum_{i=1}^n \overline{r}_i \times \overline{F}_i$$

с учетом соотношений (5)–(9)

$$\frac{d\vec{G}_O}{dt} + \overline{\omega} \times \vec{G}_O = \overline{OA} \times \overline{A} + \overline{OB} \times \overline{B} + \sum_{i=1}^n \overline{r}_i \times \overline{F}_i \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -\varepsilon I_{xz} \\ -\varepsilon I_{yz} \\ \varepsilon I_{zz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega^2 I_{yz} \\ -\omega^2 I_{xz} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aA_y \\ -aA_x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -bB_y \\ bB_x \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} y_i F_{zi} - z_i F_{yi} \\ z_i F_{xi} - x_i F_{zi} \\ x_i F_{yi} - y_i F_{xi} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

В проекциях на подвижную систему координат уравнения движения тела (10), (11) в скалярной форме принимают вид

$$\left\{ \begin{array}{l} -M\varepsilon y_c - M\omega^2 x_c = A_x + B_x + \sum_{i=1}^n F_{ix}, \\ M\varepsilon x_c - M\omega^2 y_c = A_y + B_y + \sum_{i=1}^n F_{iy}, \\ 0 = A_z + B_z + \sum_{i=1}^n F_{iz}, \\ -\varepsilon I_{xz} + \omega^2 I_{yz} = aA_y - bB_y + \sum_{i=1}^n (y_i F_{zi} - z_i F_{yi}), \\ -\varepsilon I_{yz} - \omega^2 I_{xz} = -aA_x + bB_x + \sum_{i=1}^n (z_i F_{xi} - x_i F_{zi}), \\ \varepsilon I_{zz} = \sum_{i=1}^n (x_i F_{yi} - y_i F_{xi}). \end{array} \right. \quad (12)$$

Заметим, что последнее уравнение в (12) является уравнением (1.2):

$$I_{zz} \ddot{\varphi} = \sum_{i=1}^n \text{mom}_z \overline{F}_i.$$

1.3. Определение реакций в опорах

Пусть известен закон движения тела $\varphi = \varphi(t)$. Тогда из финальных уравнений (2.12) предыдущего параграфа можно определить реакции в опорах. Заметим, что структура этих уравнений позволяет найти только суммарную проекцию реакций на ось z . Их отдельные значения определяются на основании некоторых дополнительных предположений относительно характера закрепления тела в точках подвеса.

Различают два вида реакций: статические и динамические. Первые возникают в опорах под действием внешних сил, когда тело неподвижно. Вторые – в случае вращения тела. Выведем условия, при выполнении которых между этими реакциями имеет место равенство. Статические реакции находятся из уравнений (2.12) при

$$\omega = 0, \quad \varepsilon = 0,$$

т.е. из условий

$$\left\{ \begin{array}{l} \overbrace{-M\varepsilon y_c - M\omega^2 x_c}^{=0} = A_x + B_x + \sum_{i=1}^n F_{ix}, \\ \overbrace{M\varepsilon x_c - M\omega^2 y_c}^{=0} = A_y + B_y + \sum_{i=1}^n F_{iy}, \\ 0 = A_z + B_z + \sum_{i=1}^n F_{iz}, \\ \overbrace{-\varepsilon I_{xz} + \omega^2 I_{yz}}^{=0} = aA_y - bB_y + \sum_{i=1}^n (y_i F_{zi} - z_i F_{yi}), \\ \overbrace{-\varepsilon I_{yz} - \omega^2 I_{xz}}^{=0} = -aA_x + bB_x + \sum_{i=1}^n (z_i F_{xi} - x_i F_{zi}), \\ \overbrace{\varepsilon I_{zz}}^{=0} = \sum_{i=1}^n (x_i F_{yi} - y_i F_{xi}). \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 = A_x + B_x + \sum_{i=1}^n F_{ix}, \\ 0 = A_y + B_y + \sum_{i=1}^n F_{iy}, \\ 0 = A_z + B_z + \sum_{i=1}^n F_{iz}, \\ 0 = aA_y - bB_y + \sum_{i=1}^n (y_i F_{zi} - z_i F_{yi}), \\ 0 = -aA_x + bB_x + \sum_{i=1}^n (z_i F_{xi} - x_i F_{zi}), \\ 0 = \sum_{i=1}^n (x_i F_{yi} - y_i F_{xi}). \end{array} \right. \quad (1)$$

Заметим, что последнее уравнение в (1) не содержит реакций опор. Реакции A_z, B_z из уравнений (1) определить отдельно нельзя, при этом их сумма не зависит от величин ω и ε .

Для выполнения первых четырех равенств в (1) при ненулевых ω и ε необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\begin{cases} -My_c \varepsilon - Mx_c \omega^2 = 0, & \begin{cases} -\varepsilon I_{xz} + \omega^2 I_{yz} = 0, \\ -\varepsilon I_{yz} - \omega^2 I_{xz} = 0. \end{cases} \end{cases} \quad (2)$$

Уравнения (2) будем рассматривать как однородные системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных ω^2, ε . В силу того, что эти величины не нулевые, в нуль должны обратиться определители этих систем. Соответственно имеем

$$\begin{aligned} x_c^2 + y_c^2 = 0 & \Rightarrow x_c = y_c = 0, \\ I_{xz}^2 + I_{yz}^2 = 0 & \Rightarrow I_{xz} = I_{yz} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, для совпадения статических и динамических реакций необходимо, чтобы ось вращения была главной центральной осью инерции. Повторяя выкладки в обратном порядке, приходим и к достаточности этих условий.

Пример 1. Маховое колесо массой $M = 100$ кг, насаженное посередине вала с небольшим перекосом $\alpha = 1^\circ$ ($\frac{\pi}{180}$ рад) к поперечной оси, вращается с постоянной угловой скоростью $n = 3000$ об/мин (**рис. 1**). Определить добавочные динамические реакции подшипников вала при условии, что центр тяжести колеса расположен на оси вращения вала, радиус маховика $R = 1$ м, расстояние между подшипниками равно 1 м. Массу считать равномерно распределенной по ободу.

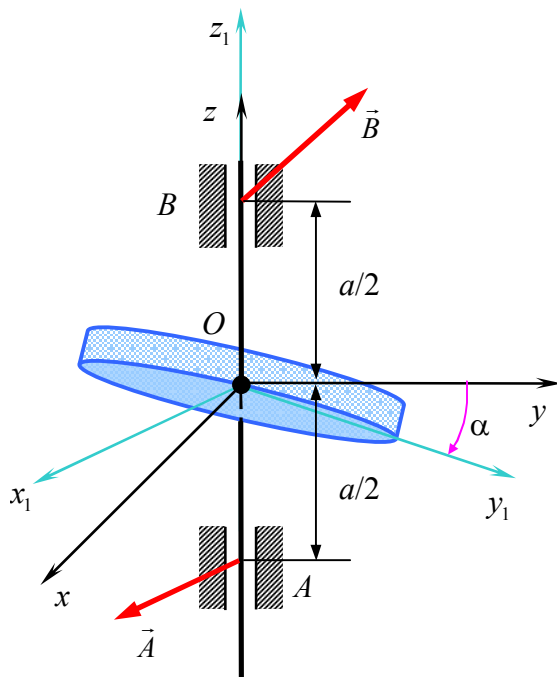


Рис. 1

Решение. При нахождении динамических реакций внешние силы не учитываются, тогда уравнения (2.12) примут вид:

$$\begin{cases} A_x + B_x = -M\varepsilon y_c - M\omega^2 x_c, \\ A_y + B_y = M\varepsilon x_c - M\omega^2 y_c, \\ aB_y - bA_y = -\varepsilon I_{xz} + \omega^2 I_{yz}, \\ -aB_x + bA_x = -\varepsilon I_{yz} - \omega^2 I_{xz}. \end{cases} \quad (3)$$

Колесо вращается с постоянной угловой скоростью, следовательно $\varepsilon = 0$.

По условию центр тяжести колеса расположен на оси вращения вала. С учетом выбора координатных осей (см. **рис. 1**) будем иметь $x_c = y_c = 0$.

Колесо насажено посередине вала, следовательно $a = b = 0.5$ м. Тогда уравнения (3) примут вид:

$$\begin{cases} A_x + B_x = 0, \\ A_y + B_y = 0, \\ \frac{1}{2}B_y - \frac{1}{2}A_y = \omega^2 I_{yz}, \\ -\frac{1}{2}B_x + \frac{1}{2}A_x = -\omega^2 I_{xz}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_x = -B_x = -\omega^2 I_{xz}, \\ B_y = -A_y = \omega^2 I_{yz}. \end{cases} \quad (3)$$

Очевидно, что $\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{3000\pi}{30} = 100\pi$, рад/с.

Так как ось Ox , совпадающая с Ox_1 , является главной осью инерции, то $I_{xz} = 0$.

Определим центробежный момент инерции по формуле

$$I_{yz} = \frac{1}{2}(I_{z_1} - I_{y_1})\sin(2\alpha),$$

где I_{y_1} и I_{z_1} – моменты инерции колеса относительно указанных главных осей.

Так как

$$I_{y_1} = \frac{MR^2}{2}, \quad I_{z_1} = MR^2,$$

вычисляем

$$I_{yz} = \frac{1}{2}(I_{z_1} - I_{y_1})\sin(2\alpha) \Rightarrow I_{yz} = \frac{1}{2}\left(MR^2 - \frac{1}{2}MR^2\right)\sin(2\alpha) = \frac{MR^2}{4}\sin(2\alpha).$$

Подставляя найденные значения в (3), находим:

$$\begin{cases} A_x = -B_x = -\omega^2 I_{xz}, \\ B_y = -A_y = \omega^2 I_{yz}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_x = B_x = 0, \\ B_y = -A_y = \frac{mR^2\omega^2}{4}\sin(2\alpha). \end{cases}$$

Угол α – мал, следовательно, $\sin(2\alpha) \sim 2\alpha$. Получаем:

$$B_y = -A_y \approx \frac{mR^2\omega^2 2\alpha}{4} = \frac{100 \cdot 1^2 \cdot 100^2 \pi^2 \pi}{2 \cdot 180} = 2,78 \pi^3 \approx 86.1 \text{ (кН)}.$$

Получили, что система реакций эквивалента одной паре, стремящейся повернуть колесо так, чтобы угол α стал равным нулю. ►

2. ФИЗИЧЕСКИЙ МАЯТНИК

2.1. Вывод уравнений движения маятника

Определение 1. *Физическим маятником называется абсолютно твердое тело, которое может вращаться относительно неподвижной горизонтальной оси под действием силы тяжести.*

Рассмотрим физический маятник, изображенный на **рис. 1**.

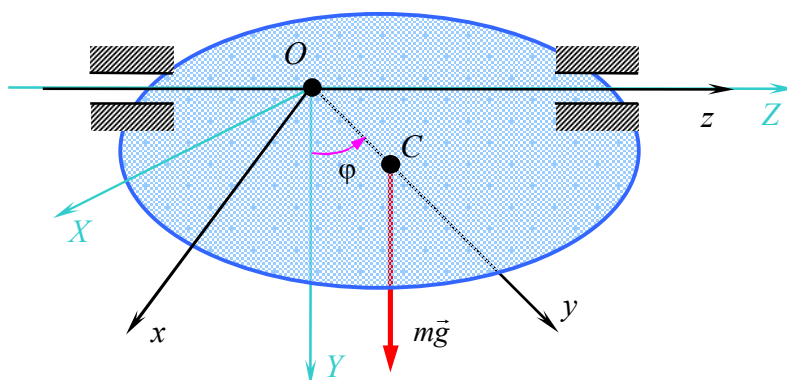


Рис. 1

Для описания его движения введем две системы отсчета: XYZ – абсолютную и xuz – связанную с вращающимся телом. Оси Z и z направим вдоль оси вращения. Ось y проведем через центр масс маятника перпендикулярно его оси вращения. Точку пересечения оси y с осью вращения обозначим через O и отождествим ее с началом обеих систем координат.

Определение 2. *Точка O – пересечение перпендикуляра, опущенного на ось вращения из точки C – центра масс маятника, называется точкой подвеса физического маятника.*

Ось Y направим вертикально вниз, а осями X и x дополним соответствующие системы до правых троек.

Принимаем, что $OC = a$, I_{zz}^O – момент инерции маятника относительно оси z (**рис. 2**).

Из последнего уравнения в (1.2.12)

$$I_{zz}^O \ddot{\varphi} = \overbrace{\sum_{i=1}^n (x_i F_{yi} - y_i F_{xi})}^{-mga \sin \varphi}$$

имеем

$$I_{zz}^O \ddot{\varphi} = -mga \sin \varphi \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} + \frac{mga}{I_{zz}^O} \sin \varphi = 0.$$

Отсюда следует, что математический маятник, у которого длина нити подвеса определяется из равенства

$$\frac{mga}{I_{zz}^O} = \frac{g}{l} \Rightarrow l = \frac{I_{zz}^O}{ma},$$

будет иметь тот же закон движения, что и рассматриваемый физический маятник.

Определение 3. Величина l называется приведенной длиной физического маятника.

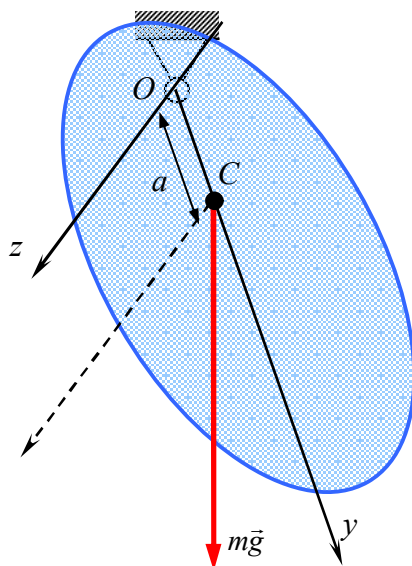


Рис. 2

Теорема 1. Справедливо равенство (см. рис. 3)

$$l = a + \delta,$$

где

$$\delta = \frac{\rho_C^2}{a}, \quad \rho_C = \sqrt{\frac{I_{zz}^C}{m}}.$$

Величина ρ_C представляет собой радиус инерции маятника относительно оси, проходящей через центр масс маятника, параллельно оси Oz .

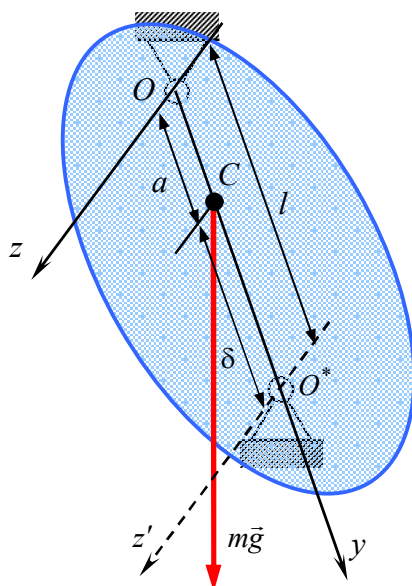


Рис. 3

Доказательство. По теореме Гюйгенса – Штейнера находим

$$I_{zz}^O = \overbrace{I_{zz}^C}^{m\rho_C^2} + ma^2 = m\rho_C^2 + ma^2.$$

По определению приведенной длины физического маятника имеем

$$\tilde{l} = \frac{\frac{I_{zz}^O}{ma}}{ma} = \frac{\overbrace{I_{zz}^O}^{m\rho_C^2+ma^2}}{ma} = \frac{m\rho_C^2 + ma^2}{ma} = \frac{\overbrace{\rho_C^2}^{=\delta}}{a} + a = \delta + a.$$

Теорема доказана. ■

Определение 4. Точка O^* , расположенная на перпендикуляре к оси вращения, проходящем через центр масс на расстоянии l по ту же сторону от оси вращения, что и центр масс маятника, называется центром качания физического маятника.

В силу $\delta > 0$ из теоремы 1 вытекает, что

$$l = a + \delta > a.$$

Следовательно, точка подвеса и центр качания расположены по разные стороны от центра масс твердого тела.

Теорема 2. (Гюйгенса). Точка подвеса физического маятника и центр качания суть взаимные точки. Если центр качания принять за точку подвеса, то прежняя точка подвеса будет центром качания. Период колебания маятника при этом не изменится.

Доказательство. Пусть центр качания O^* принят за новую точку подвеса. Расстояние от этой точки до центра масс равно $a^* = \delta$. Достаточно показать, что приведенная длина l^* полученного маятника равна приведенной длине исходного маятника. Действительно, по теореме 1 имеем

$$\begin{aligned} l^* &= a^* + \overbrace{\delta^*}^{\frac{\rho_C^2}{a^*}} = \left(a^* + \frac{\rho_C^2}{a^*} \right) \Big|_{a^*=\delta} = \left(\delta + \frac{\rho_C^2}{\delta} \right) \Big|_{\delta=\frac{\rho_C^2}{a}} = \frac{\rho_C^2}{a} + \frac{\rho_C^2}{\left(\frac{\rho_C^2}{a} \right)} = \\ &= \frac{\overbrace{\rho_C^2}^{\delta}}{a} + a = \delta + a = l. \end{aligned}$$

Теорема доказана. ■

2.2. Фазовая плоскость

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{x} = f(x),$$

относительно которого предполагается, что выполнены условия существования и единственности его решения. Будем трактовать это уравнение как уравнение движения динамического

объекта с одной степенью свободы, для которого x – обобщенная координата. Стандартной заменой переменных

$$x = x, \quad y = \dot{x}$$

сведем это уравнение второго порядка к системе двух уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = f(x). \end{cases} \quad (1)$$

Определение 5. *Плоскость Oxy будем называть фазовой плоскостью объекта, точку (x, y) – фазовой точкой, а пару (\dot{x}, \dot{y}) – фазовой скоростью.*

Решение системы уравнений (1) определяет движение по фазовой плоскости и фазовую траекторию. В частности, фазовая траектория может представлять собой точку на оси x . Например,

$$y = \dot{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = const.$$

Этой траектории соответствует положение равновесия рассматриваемой динамической системы.

2.3. Свойства фазовых кривых

Введем аналоги кинетической, потенциальной и полной энергий:

$$T = \frac{1}{2} \dot{x}^2, \quad \Pi = -\int f(x) dx, \quad E = T + \Pi.$$

Заметим, что имеет место аналог интеграла энергии. Действительно,

$$\frac{d}{dt} E = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \dot{x}^2 \right] + \frac{d}{dt} \left[-\int f(x) dx \right] = \dot{x} \ddot{x} - f(x) \dot{x} = \dot{x} \left[\ddot{x} - f(x) \right] \stackrel{=0}{=} 0.$$

Запишем интеграл энергии с константой h . Имеем

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 + \Pi(x) = h \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} y^2 + \Pi(x) = h.$$

Отсюда следует, что для конкретного значения константы h фазовая траектория может быть легко построена. Укажем основные свойства фазовых кривых.

1) Из равенства

$$\frac{1}{2} y^2 + \Pi(x) = h \quad \Rightarrow \quad y^2 = 2(h - \Pi(x)) \geq 0$$

следует, что при фиксированной константе $h = const$ фазовая кривая $y^2 = 2(h - \Pi(x))$ располагается в области $\{x \mid \Pi(x) \leq h\}$.

2) Положение равновесия

$$\overbrace{x_* = const \quad \Rightarrow \quad y_* = \dot{x} = 0}^{\Rightarrow (x_*, y_*) \in O_x}$$

возможно только для точек оси Ox . При этом в положении равновесия имеет место равенство

$$\left. \frac{d}{dx} \left(\begin{matrix} -\int f(x) dx \\ \Pi(x) \end{matrix} \right) \right|_{x=x_*} = -f(x_*) = -\dot{y}_* \stackrel{y_* = 0 = const}{=} 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left. \frac{d}{dx} \Pi(x) \right|_{x=x_*} = 0. \quad (1)$$

Таким образом, точки равновесия являются стационарными точками потенциальной энергии.

Определение 6. Точки x_* , удовлетворяющие равенству (1), называются особыми точками потенциальной энергии. В частности, если

$$\Pi(x_*) = \text{loc min } \Pi(x),$$

то точка $(x_*, 0)$ – особая точка типа центр, а если

$$\Pi(x_*) = \text{loc max } \Pi(x),$$

то точка $(x_*, 0)$ – особая точка типа седло.

3) Совокупность фазовых траекторий симметрична относительно оси Ox в силу того, что уравнение

$$\frac{1}{2}y^2 + \Pi(x) = h$$

четно относительно переменной y .

4) В точках пересечения фазовых траекторий с осью Ox отличных от критических, фазовые траектории ортогональны оси Ox . Действительно, в силу

$$\overbrace{\dot{x} = y = 0}^{\text{принадлежит } Ox}, \quad \dot{y} = f(x) = \overbrace{-\frac{d\Pi}{dx}(x)}^{\text{не критическая точка}} \neq 0$$

имеем

$$\text{tg } \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\overset{\neq 0}{\dot{y}}}{0} = \infty \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Последнее и означает ортогональность фазовой траектории и оси Ox .

2.4. Построение фазовых траекторий для маятника

Конкретизируем вид функций кинетической, потенциальной и полной энергий применительно к физическому маятнику. Дифференциальное уравнение движения маятника имеет вид

$$I_{zz} \ddot{\varphi} = -mga \sin \varphi.$$

Вычисляем

$$T = \frac{1}{2} I_{zz} \dot{\varphi}^2,$$

$$\Pi = \int mga \sin \varphi d\varphi = -mga \cos \varphi \quad \left(\overbrace{+c=0}^{\text{нулевой уровень на высоте точки подвеса}} \right) \Rightarrow$$

$$E = \frac{1}{2} I_{zz} \dot{\varphi}^2 - mga \cos \varphi = I_{zz} \left[\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \frac{mga \cos \varphi}{I_{zz}} \right].$$

Обозначим

$$\omega^2 = \frac{mga}{I_{zz}}$$

и выпишем интеграл энергии с константой h^* . Имеем

$$E = I_{zz} \left[\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \omega^2 \cos \varphi \right] = h^*. \quad (1)$$

Полагаем $h = \frac{h^*}{I_{zz}}$. Тогда интеграл (1) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \omega^2 \cos \varphi &= h \quad \Rightarrow \\ \dot{\varphi}^2 &= 2(h + \omega^2 \cos \varphi). \end{aligned} \quad (2)$$

На **рис. 4** изображены фазовые траектории, отвечающие различным значениям константы h , и график функции

$$\Pi^* = \frac{1}{I_{zz}} \Pi = -\frac{mga}{I_{zz}} \cos \varphi.$$

Картина фазовых кривых периодична по переменной φ с периодом 2π .

При $h < -\omega^2$, как следует из (2), движение невозможно.

При $h = -\omega^2$ в силу

$$\dot{\varphi}^2 = 2(h + \omega^2 \cos \varphi) \stackrel{\leq 0, =0 \Leftrightarrow \varphi=0}{\Rightarrow}$$

маятник находится в равновесии, отвечающему самому низкому положению центра масс маятника (см. **рис. 5**).

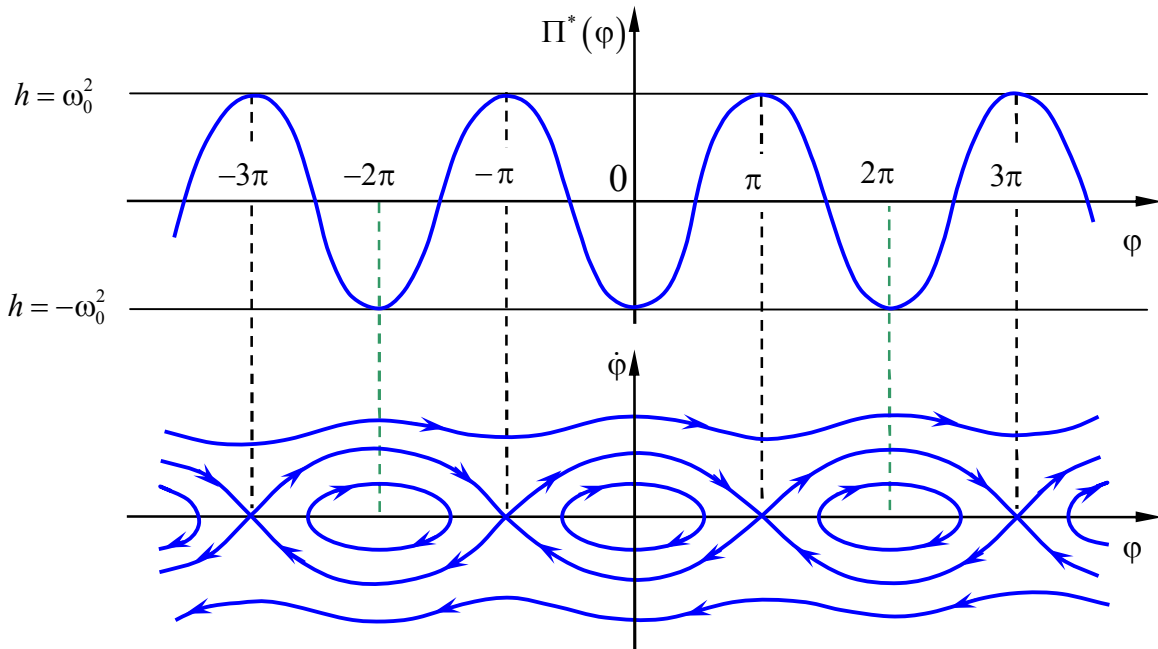


Рис. 4

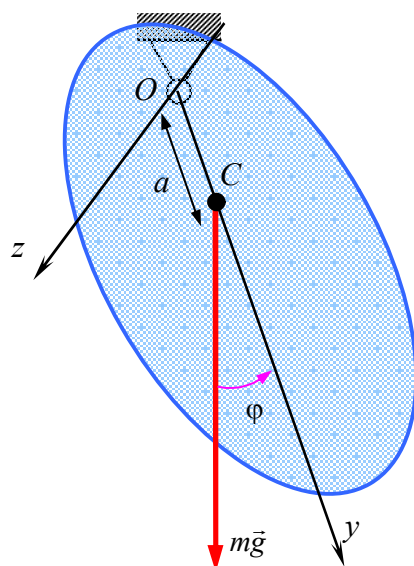


Рис. 5

На фазовой плоскости этому положению равновесия (рис. 6) соответствуют точки с координатами

$$(\varphi, \dot{\varphi}) = (2\pi k, 0), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Заметим, что в указанных точках функция Π^* достигает своего минимума, поэтому в них имеет место равновесие типа «центр». Они окружены замкнутыми фазовыми кривыми соответствующими значениям константы $h \in (-\omega^2, \omega^2)$ и выражающими колебания маятника.

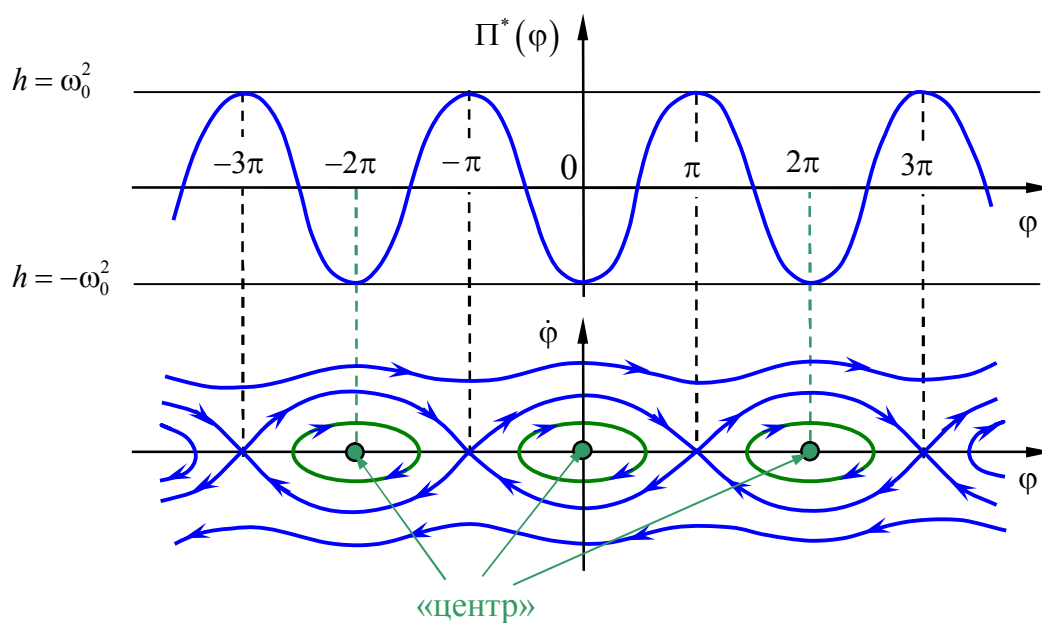


Рис. 6

При $h = \omega^2$ возможны два типа движений. Один тип соответствует случаю (см. рис. 7)

$$h + \omega^2 \cos \varphi = 0 \Rightarrow (\varphi, \dot{\varphi}) = (\pi + 2\pi k, 0), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Маятник в этих точках находится в равновесии, его центр масс занимает наивысшее положение. Потенциальная энергия принимает здесь максимальное значение и точки равновесия являются точками типа «седло».

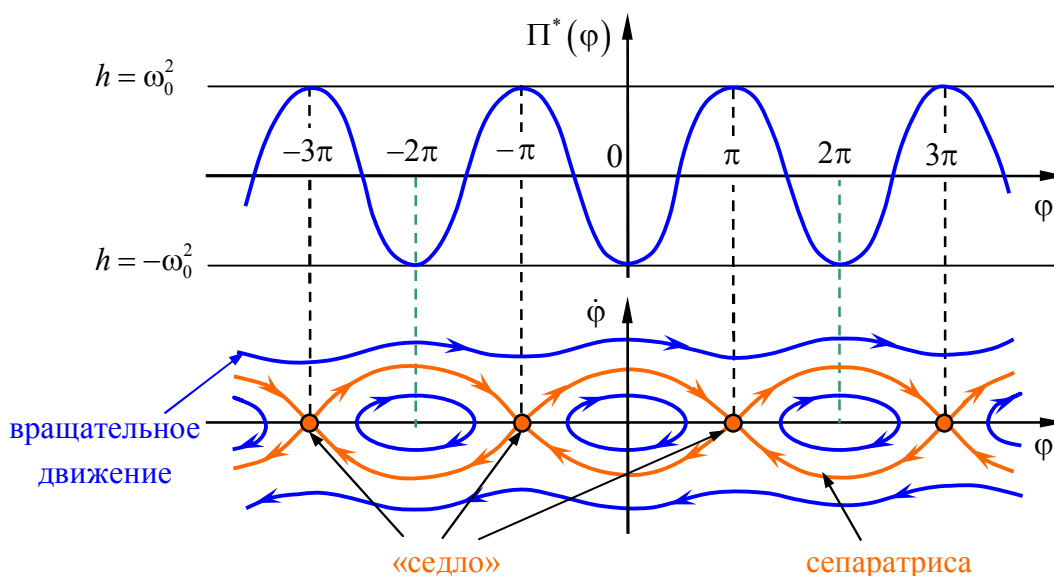


Рис. 7

Для другого типа движения центр масс маятника асимптотически при $t \rightarrow \infty$ стремится занять наивысшее положение. Асимптотическим движениям на фазовой плоскости соответствуют кривые, соединяющие точки типа седло. Эти кривые называются сепаратрисами.

При
$$h > \omega^2 \Rightarrow \dot{\varphi}^2 = 2 \left(h + \overset{>0}{\omega^2 \cos \varphi} \right)$$

движение маятника будет вращательным. Для него абсолютная величина угла φ монотонно возрастает. Этим движениям на фазовой плоскости отвечают незамкнутые кривые. Сепаратрисы разделяют области колебательных и вращательных движений.

3. ДИНАМИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА, ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ОТНОСИТЕЛЬНО НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

3.1. Дифференциальные уравнения движения твердого тела вокруг неподвижной точки. Динамические уравнения Эйлера

Пусть при движении абсолютно твердого тела одна из его точек все время остается неподвижной. Поместим в эту точку начало абсолютной системы отсчета $O\xi\eta\zeta$, а с телом свяжем подвижную систему координат $Oxuz$, оси которой представляют собой главные оси инерции тела (см. рис. 1).

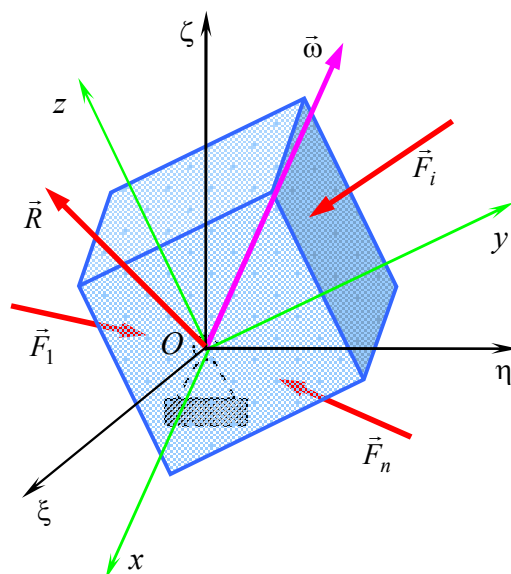


Рис. 1

Запишем теорему об изменении кинетического момента относительно неподвижной точки O

$$\frac{d\bar{G}_O}{dt} = \bar{M}_O. \quad (1)$$

Здесь \bar{M}_O – главный момент внешних сил относительно точки O . В равенстве (1) выразим полную производную вектора кинетического момента через локальную производную:

$$\frac{\overbrace{\frac{d\bar{G}_O + \bar{\omega} \times \bar{G}_O}{dt}}{\frac{d\bar{G}_O}{dt}} = \bar{M}_O \Rightarrow \frac{d\bar{G}_O}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{G}_O = \bar{M}_O^{(e)}. \quad (2)$$

В общем случае справедливо равенство

$$\bar{G}_O = I \cdot \bar{\omega} = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix},$$

где $I = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$ – тензор инерции, вычисленный относительно начала координат

подвижной системы $Oxyz$, а p, q, r – проекции вектора угловой скорости на оси той же системы координат. В силу того что оси подвижной системы координат являются главными осями инерции, тензор инерции здесь принимает вид

$$I = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}.$$

Вычислим вектор кинетического момента в проекциях на оси подвижной системы

$$\bar{G}_O = I \cdot \bar{\omega} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ap \\ Bq \\ Cr \end{pmatrix}.$$

Тогда из (2) выводим

$$\frac{d\bar{G}_O}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{G}_O = \bar{M}_O \Rightarrow \begin{cases} A\dot{p} + (C - B)qr = M_{Ox}, \\ B\dot{q} + (A - C)rp = M_{Oy}, \\ C\dot{r} + (B - A)pq = M_{Oz}. \end{cases} \quad (3)$$

Определение 1. Уравнения (3) называются динамическими уравнениями Эйлера для твердого тела, вращающегося относительно неподвижной точки.

В общем случае проекции момента M_{Ox}, M_{Oy}, M_{Oz} являются функциями углов Эйлера φ, ψ, θ , которые определяют вращение подвижной системы координат, связанной с телом, относительно абсолютной (рис. 2), и их производных $\dot{\varphi}, \dot{\psi}, \dot{\theta}$. Добавим к динамическим уравнениям Эйлера (3) кинематические соотношения Эйлера

$$\begin{cases} p = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ q = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ r = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}. \end{cases} \quad (4)$$

Уравнения (4), (5) образуют замкнутую систему. Ее интегрирование при заданных начальных условиях позволяет определить закон движения тела (в подвижной системе отсчета).

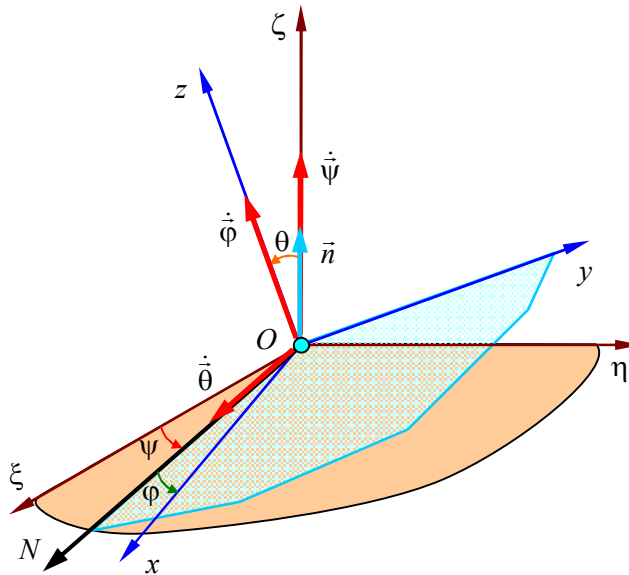


Рис. 2

3.2. Уравнения движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Первые интегралы

Рассмотрим движение твердого тела вокруг неподвижной точки в однородном поле тяжести. Силу веса будем считать единственным активным силовым фактором (**рис. 3**)

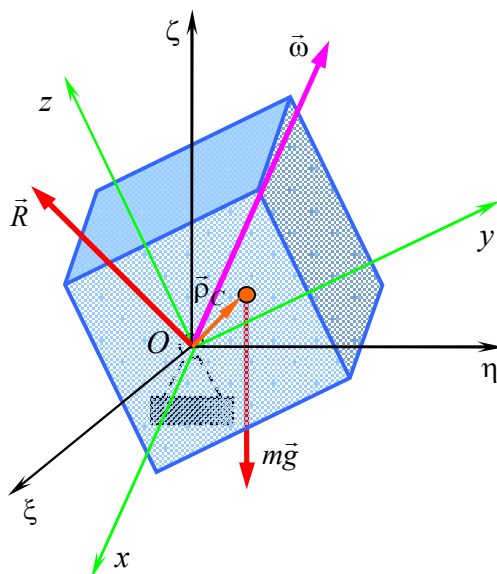


Рис. 3

Такую конструкцию будем называть тяжелым твердым телом, вращающимся относительно неподвижной точки.

Введем неподвижную систему координат $O\xi\eta\zeta$, ось $O\xi$ которой направлена вертикально вверх. С телом свяжем систему координат, оси которой совпадают с главными осями инерции тела. Примем, что в подвижной системе отсчета

$$\bar{\rho}_C = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

где C – центр масс тела, а A, B, C – моменты инерции тела относительно тех же координатных осей. Вектор силы тяжести обозначим символом \bar{P} .

Ориентация подвижных осей относительно неподвижных определяется углами Эйлера. Пусть единичный вектор \bar{n} вертикальной оси $O\xi$ имеет в системе $Oxyz$ координаты $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ (см. **рис. 4**). Вектор $\dot{\psi}$ направлен вдоль оси $O\xi$, поэтому проекции вектора \bar{n} совпадают с множителями при величине $\dot{\psi}$ в кинематических уравнениях Эйлера:

$$\begin{cases} p = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ q = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ r = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (1)$$

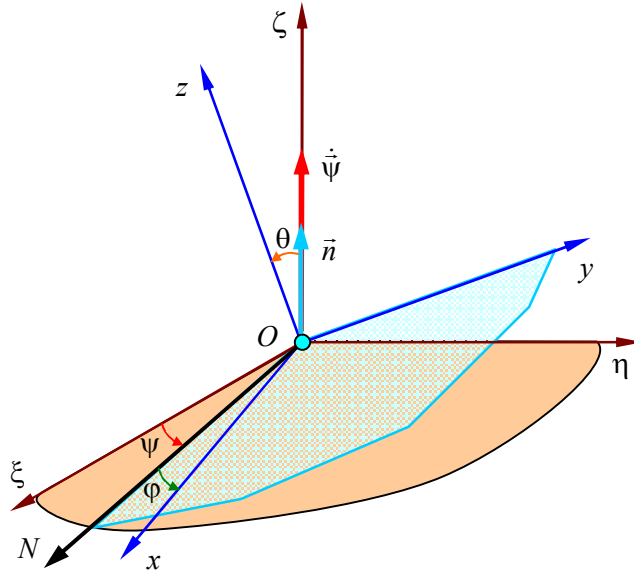


Рис. 4

Вектор \bar{n} постоянен в абсолютной системе отсчета, поэтому

$$0 = \frac{d\bar{n}}{dt} = \frac{\tilde{d}\bar{n}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{n} \Rightarrow$$

$$\frac{\tilde{d}\bar{n}}{dt} = -\underbrace{\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}}_{\bar{\omega}} \times \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}}_{\bar{n}} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ p & q & r \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} r\gamma_2 - q\gamma_3 \\ p\gamma_3 - r\gamma_1 \\ q\gamma_1 - p\gamma_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\frac{\tilde{d}\bar{n}}{dt} = \begin{pmatrix} r\gamma_2 - q\gamma_3 \\ p\gamma_3 - r\gamma_1 \\ q\gamma_1 - p\gamma_2 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $\bar{\omega}$ – угловая скорость тела. Векторное равенство (2) эквивалентно трем скалярным:

$$\begin{cases} \frac{d\gamma_1}{dt} = r\gamma_2 - q\gamma_3, \\ \frac{d\gamma_2}{dt} = p\gamma_3 - r\gamma_1, \\ \frac{d\gamma_3}{dt} = q\gamma_1 - p\gamma_2. \end{cases} \quad (3)$$

Определение 2. Переменные $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ называются переменными Пуассона, а уравнения (3) – уравнениями Пуассона.

Момент внешних сил относительно точки O развивает только сила веса. Тогда

$$\bar{M}_O = \bar{\rho}_c \times \bar{P} = -P \underbrace{\bar{\rho}_c}_{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}} \times \underbrace{\bar{n}}_{\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}} = P \cdot \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ a & b & c \end{vmatrix} =$$

$$= P(c\gamma_2 - b\gamma_3)\bar{i} + P(a\gamma_3 - c\gamma_1)\bar{j} + P(b\gamma_1 - a\gamma_2)\bar{k}.$$

Динамические уравнения Эйлера (1.3) принимают вид

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C - B)qr = \overbrace{M_{Ox}}^{c\gamma_2 - b\gamma_3}, \\ B\dot{q} + (A - C)rp = \overbrace{M_{Oy}}^{a\gamma_3 - c\gamma_1}, \\ C\dot{r} + (B - A)pq = \overbrace{M_{Oz}}^{b\gamma_1 - a\gamma_2}. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A\frac{dp}{dt} + (C - B)qr = P(c\gamma_2 - b\gamma_3), \\ B\frac{dq}{dt} + (A - C)rp = P(a\gamma_3 - c\gamma_1), \\ C\frac{dr}{dt} + (B - A)pq = P(b\gamma_1 - a\gamma_2). \end{cases} \quad (4)$$

Уравнения (3), (4) образуют замкнутую систему дифференциальных уравнений шестого порядка. Интегрируя ее с некоторыми начальными условиями, можно определить величины $p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ в функции времени. Для определения углов Эйлера в функции времени требуется привлечь кинематические уравнения Эйлера (3.1.4).

Укажем три первых интеграла системы дифференциальных уравнений (3), (4).

1) Из равенства

$$n = 1 = const$$

ВЫВОДИМ

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1. \quad (5)$$

2) Из теоремы об изменении кинетического момента относительно оси $O\zeta$ имеем

$$\frac{d}{dt} G_{O\zeta} = 0 \Rightarrow G_{O\zeta} = \overbrace{G_O}^{\begin{pmatrix} Ap \\ Bq \\ Cr \end{pmatrix}} \cdot \overbrace{\vec{n}}^{\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}} = const \Rightarrow$$

$$Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = const. \quad (6)$$

3) В силу сохранения полной механической энергии тела справедливо

$$T + \Pi = const,$$

где T – кинетическая, Π – потенциальная энергия тела. Полагая, что $\Pi = 0$, когда центр тяжести тела находится в плоскости $\xi O\eta$, находим $\Pi = Pl$, где l – расстояние от центра тяжести тела до плоскости $\xi O\eta$. На **рис. 5** видно, что

$$l = \overbrace{\vec{\rho}_C}^{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}} \cdot \overbrace{\vec{n}}^{\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}} = a\gamma_1 + b\gamma_2 + c\gamma_3.$$

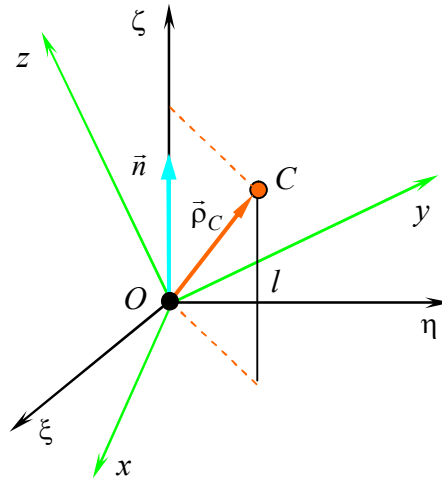


Рис. 5

Тогда

$$\frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + P(a\gamma_1 + b\gamma_2 + c\gamma_3) = const \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + P(a\gamma_1 + b\gamma_2 + c\gamma_3) = const. \quad (7)$$

Первые интегралы (5), (6), (7) можно получить и путем формальных преобразований системы дифференциальных уравнений (3),(4). Существование трех первых интегралов позволяет понизить порядок системы дифференциальных уравнений (3), (4) на три единицы. Возможно дальнейшее понижение порядка системы. Используя очевидные сокращения, перепишем систему (3), (4) в виде

$$\frac{dp}{dt} = P, \quad \frac{dq}{dt} = Q, \quad \frac{dr}{dt} = R, \quad \frac{d\gamma_1}{dt} = \Gamma_1, \quad \frac{d\gamma_2}{dt} = \Gamma_2, \quad \frac{d\gamma_3}{dt} = \Gamma_3 \Rightarrow$$

$$\frac{dp}{P} = \frac{dq}{Q} = \frac{dr}{R} = \frac{d\gamma_1}{\Gamma_1} = \frac{d\gamma_2}{\Gamma_2} = \frac{d\gamma_3}{\Gamma_3} = dt. \quad (8)$$

Правые части уравнений системы (3), (4) не зависят явно от времени. Тогда последнее уравнение в (8) можно отбросить, а в качестве независимой переменной взять любую из набора $p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. В случае, если полученную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dp}{P} = \frac{dq}{Q} = \frac{dr}{R} = \frac{d\gamma_1}{\Gamma_1} = \frac{d\gamma_2}{\Gamma_2} = \frac{d\gamma_3}{\Gamma_3}$$

можно проинтегрировать, зависимость переменных $p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ от времени устанавливается из (8) простой квадратурой.

Используя теорию последнего множителя Якоби, можно понизить порядок системы еще на единицу. Таким образом, для полного интегрирования системы дифференциальных уравнений (3),(4) достаточно построить еще один первый интеграл. В настоящее время известны только три случая его существования: Эйлера, Лагранжа и Ковалевской.

3.3. Случай Эйлера. Первые интегралы

Рассмотрим частный случай вращения твердого тела относительно неподвижной точки.

Определение 2. Будем говорить, что имеет место случай Эйлера вращения твердого тела относительно неподвижной точки, если $\bar{M}_O^{(e)} \equiv 0$ во все время движения тела.

В частности, для тяжелого тела случай Эйлера будет иметь место, если вращающееся тело произвольно, но его центр тяжести совпадает с точкой подвеса (рис. 6).

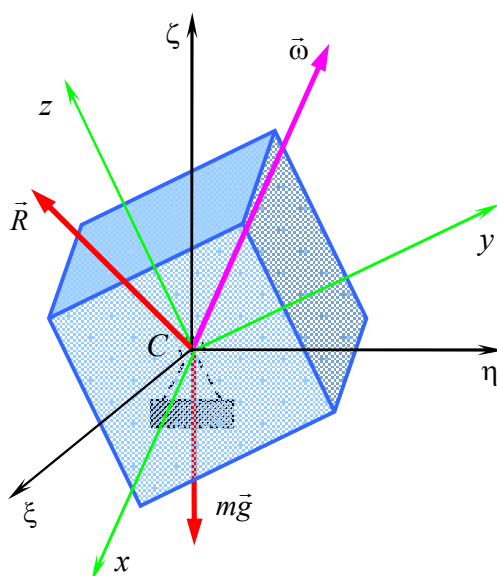


Рис. 6

Динамические уравнения Эйлера в случае Эйлера принимают вид

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C - B)qr = 0, \\ B\dot{q} + (A - C)rp = 0, \\ C\dot{r} + (B - A)pq = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Уравнения (1) допускают построение двух первых интегралов. Из условия $\bar{M}_O^{(e)} = 0$ следует, что $\bar{G}_O = \overline{const}$. Тогда

$$G_O^2 = A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = const. \quad (2)$$

Выражение (2) представляет собой первый интеграл. Равенство (2) можно получить и формальными преобразованиями уравнений (1):

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - B)qr = 0 & \cdot Ap, \\ B\dot{q} + (A - C)rp = 0 & \cdot Bq, \\ C\dot{r} + (B - A)pq = 0 & \cdot Cr \end{aligned} \quad \Rightarrow$$

$$A^2 p\dot{p} + B^2 q\dot{q} + C^2 r\dot{r} + pqr \overbrace{[A(C - B) + B(A - C) + C(B - A)]}^{=0} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} A^2 \overbrace{\frac{1}{2} \frac{d}{dt} p^2} + B^2 \overbrace{\frac{1}{2} \frac{d}{dt} q^2} + C^2 \overbrace{\frac{1}{2} \frac{d}{dt} r^2} &= 0 \Rightarrow \\ \frac{d}{dt} (A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2) &= 0 \Rightarrow \\ \frac{d}{dt} (A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2) &= 0 \Rightarrow \\ A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 &= const. \end{aligned}$$

Для вывода другого первого интеграла запишем теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме для абсолютно твердого тела

$$dT = \overline{M}_O^{(e)} \overline{\omega} dt + \overline{F}^{(e)} \overline{v}_O dt,$$

где $\overline{F}^{(e)}$ – главный вектор системы внешних сил, приложенных к телу. Из условия $\overline{M}_O^{(e)} = 0$, $\overline{v}_O = 0$ следует $dT = 0$. Тогда

$$T = \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = \overbrace{const}^{=h} \quad (3)$$

Интеграл (3) можно получить и формально. Действительно,

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - B)qr &= 0 \mid \cdot p, \\ B\dot{q} + (A - C)rp &= 0 \mid \cdot q, \\ C\dot{r} + (B - A)pq &= 0 \mid \cdot r \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} A\dot{p} + B\dot{q} + C\dot{r} + pqr [C - B + A - C + B - A] &= 0 \Rightarrow \\ A\dot{p} + B\dot{q} + C\dot{r} &= 0 \Rightarrow \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = const. \end{aligned}$$

Проинтегрируем динамические уравнения Эйлера. Для определенности будем считать, что

$$A > B > C.$$

Исключим переменные r, p из выражений (2) и (3)

$$\begin{cases} A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = G_o^2, \\ \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = h. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A^2 p^2 + C^2 r^2 = G_o^2 - B^2 q^2, \\ Ap^2 + Cr^2 = h - Bq^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$p^2 = \frac{G_o^2 - Ch - B^2 q^2 + BCq^2}{A(A - C)} = \frac{G_o^2 - Ch - B(B - C)q^2}{A(A - C)} = \frac{\overbrace{B(B - C)}^{>0}}{A(A - C)} \cdot \left[\frac{\overbrace{G_o^2 - Ch}^{p^2 \geq 0 \Rightarrow \geq 0}}{B(B - C)} - q^2 \right] \Rightarrow$$

$$\frac{G_o^2 - Ch}{B(B - C)} > 0 \Rightarrow \frac{G_o^2 - Ch}{B(B - C)} = \lambda_1^2 \Rightarrow$$

$$p^2 = \frac{B(B-C)}{A(A-C)} \left[\frac{\overbrace{G_o^2 - Ch}^{\lambda_1^2}}{B(B-C)} - q^2 \right] \Rightarrow$$

$$p^2 = \frac{B(B-C)}{A(A-C)} (\lambda_1^2 - q^2) \Rightarrow$$

$$p = \pm \sqrt{\frac{B(B-C)}{A(A-C)} (\lambda_1^2 - q^2)},$$

$$r^2 = \frac{-G_o^2 + Ah - ABq^2 + B^2q^2}{C(A-C)} = \frac{-G_o^2 + Ah - (A-B)Bq^2}{C(A-C)} = \frac{\overbrace{B(A-B)}^{>0}}{C(A-C)} \left[\frac{\overbrace{-G_o^2 + Ah}^{\geq 0}}{B(A-B)} - q^2 \right] \Rightarrow$$

$$\frac{-G_o^2 + Ah}{B(A-B)} > 0 \Rightarrow$$

$$\frac{-G_o^2 + Ah}{B(A-B)} = \lambda_2^2 \Rightarrow$$

$$r^2 = \frac{B(A-B)}{C(A-C)} \left[\frac{\overbrace{-G_o^2 + Ah}^{\lambda_2^2}}{B(A-B)} - q^2 \right] \Rightarrow$$

$$r^2 = \frac{B(A-B)}{C(A-C)} (\lambda_2^2 - q^2) \Rightarrow$$

$$r = \pm \sqrt{\frac{B(A-B)}{C(A-C)} (\lambda_2^2 - q^2)}.$$

Подставим найденные значения r, p во второе уравнение в (1):

$$B\dot{q} + (A-C) \frac{\overrightarrow{\dot{r}}}{r} \left(\pm \sqrt{\frac{B(A-B)}{C(A-C)} (\lambda_2^2 - q^2)} \right) \left(\pm \sqrt{\frac{B(B-C)}{A(A-C)} (\lambda_1^2 - q^2)} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$B\dot{q} \pm (A-C) \left(\sqrt{\frac{B(A-B)}{C(A-C)} (\lambda_2^2 - q^2)} \right) \left(\sqrt{\frac{B(B-C)}{A(A-C)} (\lambda_1^2 - q^2)} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dq}{dt} \pm \sqrt{\frac{(B-C)(A-B)}{AC}} (\lambda_1^2 - q^2) \cdot (\lambda_2^2 - q^2) = 0.$$

В полученном дифференциальном уравнении переменные разделяются:

$$\pm \frac{dq}{\sqrt{(\lambda_1^2 - q^2) \cdot (\lambda_2^2 - q^2)}} = \sqrt{\frac{A \cdot C}{(B-C)(A-B)}} dt.$$

Дальнейшее интегрирование производится в классе эллиптических функций.

3.4. Геометрическая интерпретация Пуансо

Пусть P – точка пересечения мгновенной оси вращения с поверхностью эллипсоида инерции тела

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1.$$

Обозначим через π плоскость, касательную к эллипсоиду инерции в точке P (рис. 7). Эта плоскость называется плоскостью Пуансо. Отметим следующие свойства рассматриваемого движения твердого тела.

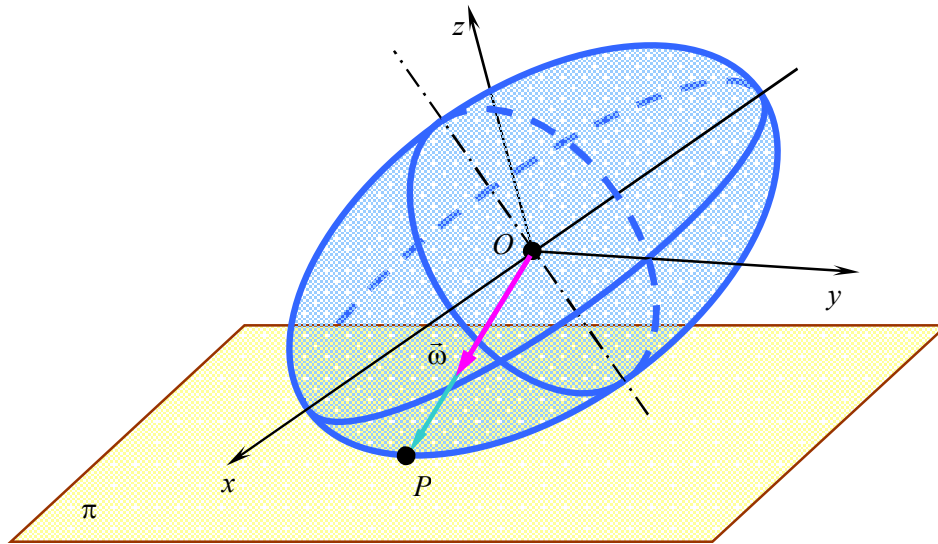


Рис. 7

1. Величина угловой скорости $\bar{\omega}$ пропорциональна длине радиус-вектора точки P относительно точки O .

Доказательство. В любой момент времени справедливо

$$\overline{OP} = \lambda \bar{\omega} = \lambda \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}.$$

Достаточно доказать, что $\lambda = const$. Выпишем координаты точки P :

$$\overline{OP} = \lambda \bar{\omega} \Rightarrow \begin{cases} x_p = \lambda p, \\ y_p = \lambda q, \\ z_p = \lambda r. \end{cases}$$

Подставим их в уравнение эллипсоида инерции

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1.$$

Имеем

$$\begin{aligned} A \overbrace{x_p^2}^{\lambda^2 p^2} + B \overbrace{y_p^2}^{\lambda^2 q^2} + C \overbrace{z_p^2}^{\lambda^2 r^2} = 1 &\Rightarrow \lambda^2 (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = 1 \Rightarrow \\ \lambda = \frac{1}{\sqrt{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2}} &= \frac{1}{\sqrt{2T}} \stackrel{T=const}{=} const. \blacksquare \end{aligned}$$

2. Плоскость π перпендикулярна вектору кинетического момента \bar{G}_O .

Доказательство. Вычислим вектор-градиент функции

$$F(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2$$

в точке P . Имеем

$$\text{grad } F \Big|_{(x_P, y_P, z_P)} = \begin{pmatrix} 2Ax_P \\ 2By_P \\ 2Cz_P \end{pmatrix} \stackrel{\substack{x_P = \lambda p, \\ y_P = \lambda q, \\ z_P = \lambda r}}{=} 2\lambda \begin{pmatrix} Ap \\ Bq \\ Cr \end{pmatrix} \stackrel{\bar{G}_O}{=} 2\lambda \bar{G}_O \Rightarrow \text{grad } F \Big|_{(x_P, y_P, z_P)} \parallel \bar{G}_O.$$

Тогда

$$\text{grad } F \Big|_{(x_P, y_P, z_P)} \perp \pi \Rightarrow \bar{G}_O \perp \pi. \blacksquare$$

3. Проекция радиус-вектора \bar{OP} на направление кинетического момента \bar{G}_O – отрезок OQ (рис. 8), есть величина постоянная.

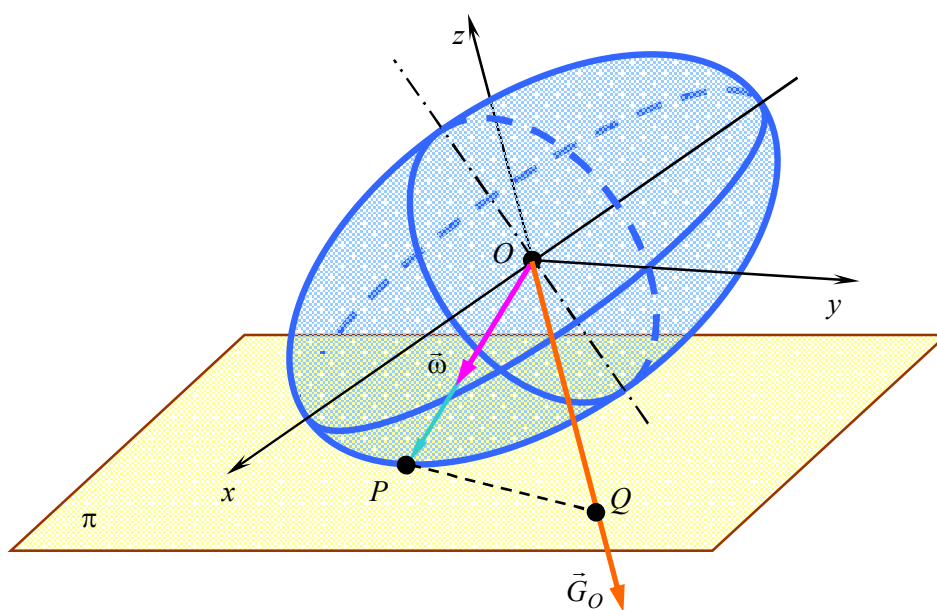


Рис. 8

Доказательство. В самом деле

$$OQ = \frac{\bar{G}_O}{G_O} \cdot \bar{OP} \stackrel{= \lambda \bar{\omega}}{=} \frac{1}{\lambda} \frac{\sqrt{2T}}{\sqrt{2T}} \frac{\overbrace{G_O \cdot \bar{\omega}}^{2T}}{G_O} = \frac{2T}{G_O \sqrt{2T}} = \frac{\sqrt{2T}}{G_O} \stackrel{\substack{T = \text{const.} \\ G_O = \text{const.}}}{=} \text{const.} \blacksquare$$

В силу постоянства вектора кинетического момента \bar{G}_O из свойств 2 и 3 следует, что плоскость Пуансо неподвижна. Таким образом, приходим к следующей полученной Пуансо геометрической интерпретации движения твердого тела в случае Эйлера.

Эллипсоид инерции катится без скольжения (точка P лежит на мгновенной оси вращения) по неподвижной в пространстве плоскости Пуансо; эта плоскость перпендикулярна вектору кинетического момента, угловая скорость тела пропорциональна длине радиус-вектора точки касания, а по направлению с ним совпадает.

3.5. Стационарные вращения твердого тела в случае Эйлера

Важным случаем движения твердого тела с неподвижной точкой является стационарное вращение.

Определение 3. *Вращение твердого тела относительно неподвижной точки называется стационарным, если вектор его угловой скорости $\vec{\omega}$ остается неизменным относительно тела во все время движения.*

Выясним условия, при выполнении которых тело будет совершать стационарное вращение. Из динамических уравнений Эйлера в случае Эйлера при

$$p = \text{const}, \quad q = \text{const}, \quad r = \text{const}$$

выводим

$$\begin{cases} A \overset{0}{\dot{p}} + (C - B)qr = 0, \\ B \overset{0}{\dot{q}} + (A - C)rp = 0, \\ C \overset{0}{\dot{r}} + (B - A)pq = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (C - B)qr = 0, \\ (A - C)rp = 0, \\ (B - A)pq = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Рассмотрим последовательно три случая.

1) Пусть A, B, C попарно различны. Тогда в силу (1), по крайней мере, две величины из p, q, r равны нулю. Вращение возможно лишь вокруг координатной оси, которая является главной осью инерции.

2) Среди чисел A, B, C ровно два одинаковых. Пусть, например, $A = B \neq C$. Тогда либо $p = q = 0$ и вращение происходит вокруг оси Oz , либо $r = 0$ и ось вращения лежит в плоскости Oxy . В принятых предположениях эллипсоид инерции тела является фигурой вращения вокруг оси z . Следовательно, в обоих случаях ось вращения является главной осью инерции.

3) Пусть $A = B = C$. Тогда эллипсоид инерции – шар и любое направление будет главной осью инерции.

Таким образом, стационарные вращения твердого тела в случае Эйлера возможны лишь вокруг главных осей инерции тела.

3.6. Регулярная прецессия

Другим частным случаем движения твердого тела относительно неподвижной точки является регулярная прецессия.

Определение 4. *Движение твердого тела вокруг неподвижной точки, состоящее из его вращения вокруг оси, неизменно связанной с телом, и вращения последней вокруг*

неподвижной (в абсолютном пространстве) оси, пересекающей ее под постоянным углом, называется прецессией (рис. 9).

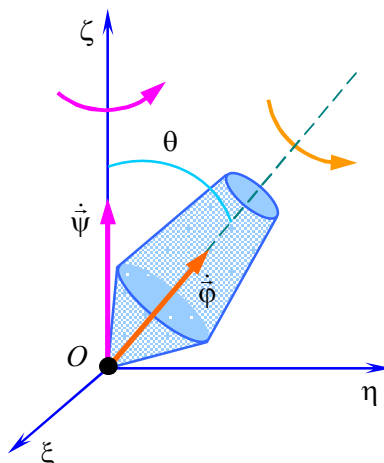


Рис. 9

Определение 5. Угловая скорость $\dot{\varphi}$ вращения тела относительно подвижной оси называется угловой скоростью собственного вращения. Угловая скорость $\dot{\psi}$ вращения подвижной оси относительно неподвижной оси называется угловой скоростью прецессии. Угол θ между подвижной и неподвижной осями называется углом нутации.

Определение 6. Прецессия называется регулярной, если угловые скорости прецессии и собственного вращения постоянны по модулю.

3.7. Движение динамически симметричного тела в случае Эйлера

Наложим дополнительные условия на массово-геометрические характеристики вращающегося тела, при выполнении которых это тело в случае Эйлера будет совершать регулярную прецессию.

Определение 7. Тело будем называть динамически симметричным, если два его главных момента равны между собой, например, $A = B$. В этом случае ось Oz называется осью динамической симметрии.

Определение 8. Твердое тело, движущееся вокруг фиксированной в нем точки, для которой эллипсоид инерции тела является эллипсоидом вращения, называется гироскопом.

Исследуем движение динамически симметричного тела (гироскопа) в случае Эйлера. Неподвижную систему $O\xi, \eta, \zeta$ выберем так, чтобы ось Oz была направлена вдоль

неподвижного в абсолютном пространстве вектора кинетического момента $\bar{G}_O = \begin{pmatrix} Ap \\ Bq \\ Cr \end{pmatrix}$

(см. рис. 10).

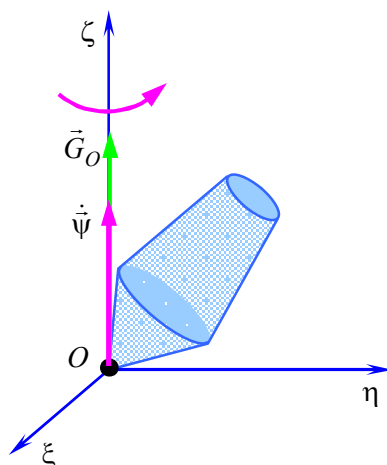


Рис. 10

При выводе кинематических уравнений Эйлера вдоль оси Oz был направлен вектор $\dot{\psi}$. По аналогии с кинематическими уравнениями Эйлера находим

$$\begin{cases} p = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ q = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ r = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} Ap = G_0 \sin \theta \sin \varphi, \\ Bq = G_0 \sin \theta \cos \varphi, \\ Cr = G_0 \cos \theta. \end{cases} \quad (1)$$

В силу условия $A = B$ из последнего равенства в динамических уравнениях Эйлера

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C - B)qr = 0, \\ B\dot{q} + (A - C)rp = 0, \\ C\dot{r} + \overbrace{(B - A)}^0 pq = 0 \end{cases}$$

ВЫВОДИМ

$$\dot{r} = 0 \Rightarrow r = r_0 = const.$$

Тогда из третьего равенства в (1) получаем

$$\begin{aligned} Cr_0 &= G_0 \cos \theta \Rightarrow Cr_0 = G_0 \cos \theta \Rightarrow \\ \cos \theta &= \frac{Cr_0}{G_0} \Rightarrow \theta = \theta_0 = const \end{aligned}$$

Таким образом, угол нутации постоянен и движение твердого тела представляет собой прецессию. Перепишем кинематические уравнения Эйлера при условии, что

$$r = r_0 = const, \quad \theta = \theta_0 = const.$$

Имеем

$$\begin{cases} p = \dot{\psi} \overset{=\theta_0}{\sin \theta} \overset{=0}{\sin \varphi} + \overset{=0}{\dot{\theta}} \cos \varphi, \\ q = \dot{\psi} \overset{=\theta_0}{\sin \theta} \overset{=0}{\cos \varphi} - \overset{=0}{\dot{\theta}} \sin \varphi, \\ r = \overset{r_0}{\dot{\psi} \cos \theta} + \dot{\varphi} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = \dot{\psi} \sin \theta_0 \sin \varphi, \\ q = \dot{\psi} \sin \theta_0 \cos \varphi, \\ r_0 = \dot{\psi} \cos \theta_0 + \dot{\varphi}. \end{cases} \quad (2)$$

Подставим выражение для величины p из (2) в первое равенство в (1).

$$A \overset{\dot{\psi} \sin \theta_0 \sin \varphi}{\dot{p}} = G_0 \sin \theta \sin \varphi \Rightarrow A \dot{\psi} \sin \theta_0 \sin \varphi = G_0 \sin \theta_0 \sin \varphi \Rightarrow A \dot{\psi} = G_0 \Rightarrow \dot{\psi} = \frac{G_0}{A} = const.$$

Получили, что угловая скорость прецессии постоянна. Покажем, что и угловая скорость собственного вращения $\dot{\varphi}$ постоянна. Действительно, из последнего равенства в (2) находим

$$r_0 = \dot{\psi} \cos \theta_0 + \dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = - \overset{=G_0}{\dot{\psi} \frac{A}{A}} \cos \theta_0 + r_0 = - \frac{G_0}{A} \cos \theta_0 + r_0 = const.$$

Таким образом, динамически симметричное тело совершает регулярную прецессию (рис. 11).

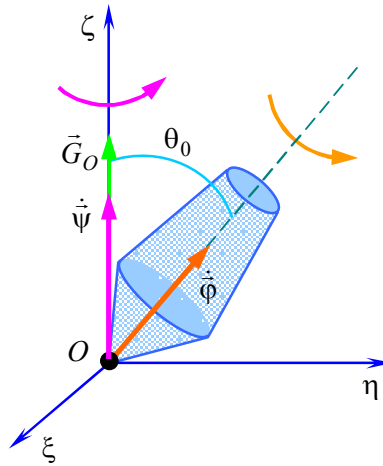


Рис. 11

В этой прецессии ось динамической симметрии тела описывает круговой конус с осью \bar{G}_0 и углом при вершине $2\theta_0$, движение оси симметрии вокруг \bar{G}_0 происходит с постоянной угловой скоростью $\dot{\psi}$, одновременно тело вращается с постоянной угловой скоростью $\dot{\varphi}$ вокруг оси симметрии.

3.8. Случай Лагранжа.

Сведение динамических уравнений Эйлера к квадратурам

В случае Лагранжа эллипсоид инерции тела для неподвижной точки является эллипсоидом вращения (вращающееся тело является гироскопом), а центр тяжести находится на оси вращения. Например, (рис. 12)

$$A = B, \quad a = b = 0.$$

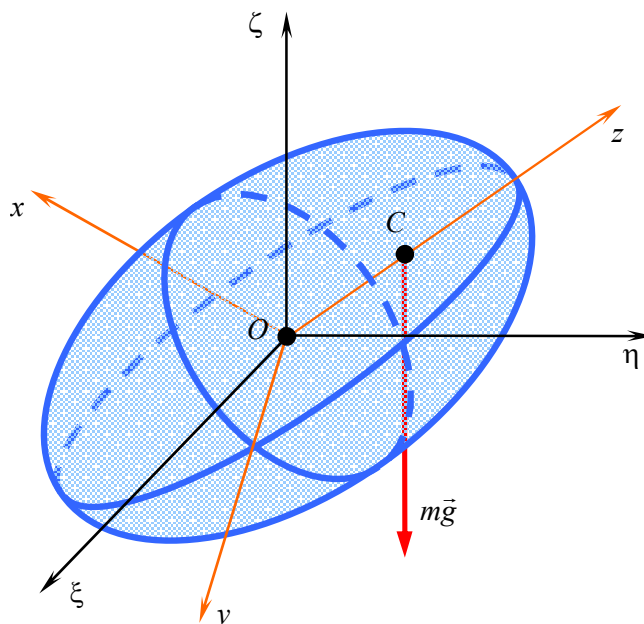


Рис. 12

В принятых предположениях динамические уравнения Эйлера (1.3) принимают вид

$$\begin{cases} A \frac{dp}{dt} + (C - B)qr = P(c\gamma_2 - b\gamma_3), \\ B \frac{dq}{dt} + (A - C)rp = P(a\gamma_3 - c\gamma_1), \\ C \frac{dr}{dt} + (B - A)pq = P(b\gamma_1 - a\gamma_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \frac{dp}{dt} + (C - A)qr = Pc\gamma_2, \\ A \frac{dq}{dt} + (A - C)rp = -Pc\gamma_1, \\ C \frac{dr}{dt} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Выпишем кинематические уравнения Эйлера:

$$\begin{cases} p = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ q = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ r = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}, \end{cases} \quad (2)$$

уравнения, связывающие углы Эйлера и переменные Пуассона:

$$\begin{cases} \gamma_1 = \sin \theta \sin \varphi, \\ \gamma_2 = \sin \theta \cos \varphi, \\ \gamma_3 = \cos \theta, \end{cases} \quad (3)$$

интеграл энергии (2.7):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(A p^2 + B q^2 + C r^2 \right) + P \left(a \gamma_1 + b \gamma_2 + c \gamma_3 \right) &= \frac{h^*}{2} \Rightarrow \\ A(p^2 + q^2) + C r^2 &= -2Pc \gamma_3 + h^*, \end{aligned} \quad (4)$$

сохранение кинетического момента относительно оси $O\zeta$ (2.6):

$$\begin{aligned} A p \gamma_1 + B q \gamma_2 + C r \gamma_3 &= \overbrace{const}^G \Rightarrow \\ A(p \gamma_1 + q \gamma_2) + C r \gamma_3 &= G, \end{aligned} \quad (5)$$

и замыкающий интеграл, вытекающий из последнего равенства в (1):

$$C \frac{dr}{dt} = 0 \Rightarrow r = r_0 = const. \quad (6)$$

В интегралах (4), (5), (6) переменные $p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ выразим через углы Эйлера φ, ψ, θ и их производные $\dot{\varphi}, \dot{\psi}, \dot{\theta}$. С этой целью из (2) выводим

$$\begin{aligned} \left(\begin{matrix} \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi \\ \dot{p} \end{matrix} \right)^2 + \left(\begin{matrix} \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi \\ \dot{q} \end{matrix} \right)^2 &= (\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi)^2 + (\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi)^2 = \\ &= \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + 2\dot{\psi}\dot{\theta} \cdot \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi + \dot{\theta}^2 \cos^2 \varphi + \\ &+ \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi - 2\dot{\psi}\dot{\theta} \cdot \sin \theta \cos \varphi \sin \varphi + \dot{\theta}^2 \sin^2 \varphi = \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 \Rightarrow \\ p^2 + q^2 &= \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Тогда интеграл (4) принимает вид

$$\begin{aligned} A \overbrace{(p^2 + q^2)}^{(7) \Rightarrow \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2} + C \overbrace{r^2}^{(6) \Rightarrow r_0^2} &= -2Pc \overbrace{\gamma_3}^{(3) \Rightarrow \cos \theta} + h^* \Rightarrow \\ A(\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) &= -2Pc \cos \theta + \overbrace{h^* - C r_0^2}^h \Rightarrow \\ A(\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + 2Pc \cos \theta &= h. \end{aligned} \quad (8)$$

Преобразуем_интеграл (5)

$$A \left(\begin{array}{cc} \overset{(2) \Rightarrow \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi}{\vec{p}} \overset{(3) \Rightarrow \sin \theta \sin \varphi}{\vec{\gamma}_1} + \overset{(2) \Rightarrow \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi}{\vec{q}} \overset{(3) \Rightarrow \sin \theta \cos \varphi}{\vec{\gamma}_2} \end{array} \right) + \overset{(6) \Rightarrow r_0}{\vec{r}} \overset{(3) \Rightarrow \cos \theta}{\vec{\gamma}_3} = G \Rightarrow$$

$$A \left[\left(\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi \right) \cdot \sin \theta \sin \varphi + \left(\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi \right) \cdot \sin \theta \cos \varphi \right] + Cr_0 \cos \theta = G \Rightarrow$$

$$A \left[\dot{\psi} \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi \sin \theta \sin \varphi + \dot{\psi} \sin^2 \theta \cos^2 \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi \sin \theta \cos \varphi \right] + Cr_0 \cos \theta = G \Rightarrow$$

$$A \dot{\psi} \sin^2 \theta + Cr_0 \cos \theta = G. \quad (9)$$

Преобразуем_интеграл (6)

$$r = r_0 \Rightarrow \overset{r = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \quad (2)}{\vec{r}} = r_0 \Rightarrow \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} = r_0. \quad (10)$$

Константы h, G, r_0 в (8), (9), (10) определяются из начальных условий.

Неизвестное φ в уравнения (8) и (9) не входит. Тогда уравнения

$$A \left(\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 \right) + 2Pc \cos \theta = h,$$

$$A \dot{\psi} \sin^2 \theta + Cr \cos \theta = G \Rightarrow \dot{\psi} = \frac{G - Cr \cos \theta}{A \sin^2 \theta}$$

можно интегрировать автономно. Выразим из них неизвестное θ . Имеем

$$A \left(\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 \right) + 2Pc \cos \theta = h \Rightarrow$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{h - 2Pc \cos \theta}{A} - \overset{\left(\frac{G - Cr \cos \theta}{A \sin^2 \theta} \right)^2}{\dot{\psi}^2} \sin^2 \theta \Rightarrow$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{h - 2Pc \cos \theta}{A} - \left(\frac{G - Cr \cos \theta}{A \sin \theta} \right)^2. \quad (11)$$

Переменные в дифференциальном уравнении (11) разделяются. Оно интегрируется в эллиптических функциях. В результате определяется зависимость

$$\theta = \theta(t). \quad (12)$$

Далее из соотношений

$$\begin{cases} \dot{\psi} = \frac{G - Cr \cos \theta(t)}{A \sin^2 \theta(t)}, \\ \dot{\varphi} = r_0 - \dot{\psi} \cos \theta(t) \end{cases}$$

простой квадратурой определяются зависимости

$$\psi = \psi(t), \quad \varphi = \varphi(t).$$

Действительно

$$\dot{\psi} = \frac{G - Cr \cos \theta}{A \sin^2 \theta} \Big|_{\theta = \theta(t)} \Rightarrow d\psi = \frac{G - Cr \cos \theta(t)}{A \sin^2 \theta(t)} dt \Rightarrow \psi = \psi(t),$$

$$\dot{\varphi} = r_0 - \dot{\psi} \cos \theta \Big|_{\substack{\theta = \theta(t) \\ \psi = \psi(t)}} \Rightarrow d\varphi = \left(r_0 - \dot{\psi}(t) \cos \theta(t) \right) dt \Rightarrow \varphi = \varphi(t).$$

3.9. Качественное исследование движения гироскопа в случае Лагранжа

Проведем качественное исследование решения, полученного в предыдущем пункте. Из формулы (8.11) получаем

$$\dot{\theta}^2 = \frac{h - 2Pc \cos \theta}{A} - \left(\frac{G - Cr \cos \theta}{A \sin \theta} \right)^2 \Rightarrow$$

$$A^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta = A(h - 2Pc \cos \theta) \overbrace{\sin^2 \theta}^{1 - \cos^2 \theta} - (G - Cr \cos \theta)^2. \quad (1)$$

Введем новое переменное

$$s = \cos \theta \Rightarrow \frac{ds}{dt} = -\sin \theta \dot{\theta}.$$

Тогда

$$A^2 \overbrace{\dot{\theta}^2 \sin^2 \theta}^{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2} = A \left(h - 2Pc \overbrace{\cos \theta}^s \right) \left(1 - \overbrace{\cos^2 \theta}^{s^2} \right) - \left(G - Cr \overbrace{\cos \theta}^s \right)^2 \Rightarrow$$

$$A^2 \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \overbrace{A(h - 2Pcs)(1 - s^2) - (G - Crs)^2}^{f(s)}. \quad (2)$$

Обозначим через

$$f(s) = A(h - 2Pcs)(1 - s^2) - (G - Crs)^2$$

и исследуем корни уравнения

$$f(s) = 0.$$

Легко видеть, что это уравнение будет иметь три действительных корня. В самом деле

$$f(-\infty) < 0, \quad f(\pm 1) = -(G \mp Cr)^2 < 0, \quad f(+\infty) > 0.$$

В силу

$$s = \cos \vartheta$$

для действительного движения должно выполняться $|s| \leq 1$.

Тогда из (2)

$$\overbrace{A^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta}^{>0} = \overbrace{A(h - 2Pc \cos \theta) \sin^2 \theta - (G - Cr \cos \theta)^2}^{f(s)}$$

следует, что где-то на промежутке от -1 до +1 выполняется неравенство $f(s) > 0$. Таким образом, на интервале $[-1, +1]$ функция f имеет два корня s_1 и s_2 . В силу $f(+\infty) > 0$ должен еще существовать корень $s_3 > 1$. Примерный график функции $f = f(s)$ изображен на **рис. 13**.

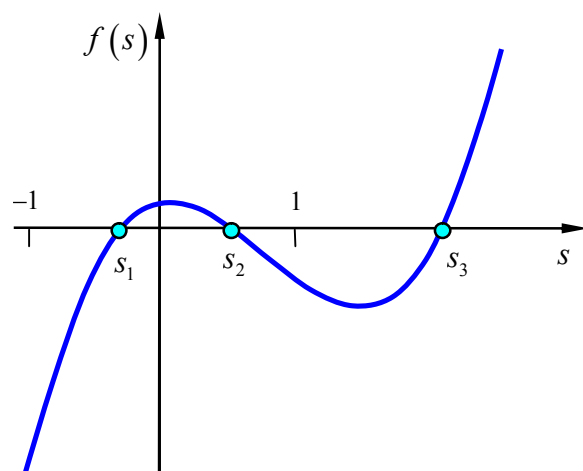


Рис. 13

Для описания изучаемого движения твердого тела применим сферическое изображение. Отложим вдоль оси симметрии гироскопа оси Oz единичный вектор \overline{OA} . Конец его A называется апексом. Он все время будет двигаться по сфере, и изображать на ней движение оси Oz (рис. 14), т.е. прецессию и нутацию тела: углы ψ и θ соответственно.

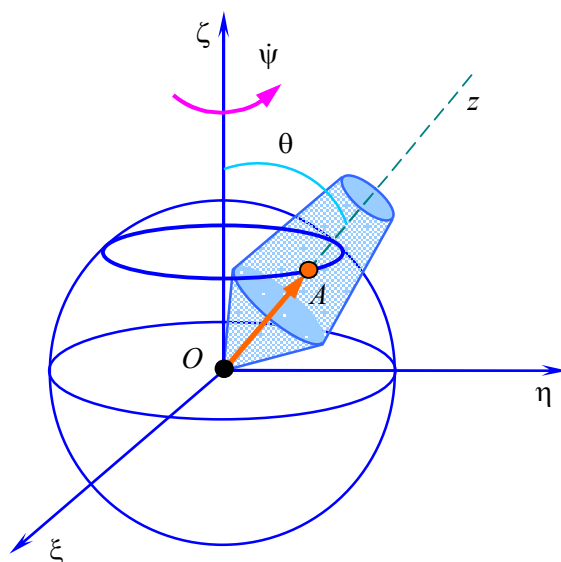


Рис. 14

Исследуем сначала поведение угла нутации θ . Имеют место неравенства (см. рис. 15)

$$\overbrace{s_1}^{\cos \theta_1} \leq \overbrace{s}^{\cos \theta} \leq \overbrace{s_2}^{\cos \theta_2} \Rightarrow \cos \theta_1 \leq \cos \theta \leq \cos \theta_2.$$

Функция

$$s = \cos \theta, \quad \theta \in [0, \pi], \quad -$$

убывающая. Тогда

$$\theta_2 \leq \theta \leq \theta_1. \quad (3)$$

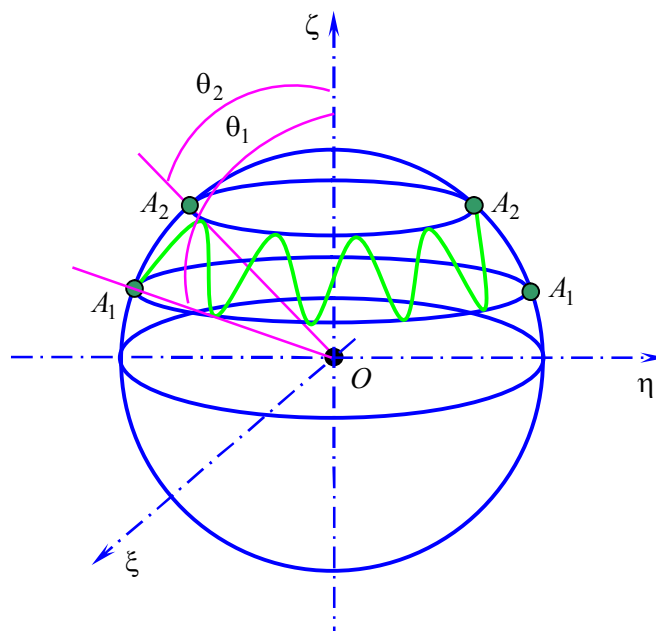


Рис. 15

Неравенство (3) означает, что сферическая кривая, которую описывает апекс, заключена между двумя параллелями A_1A_1 и A_2A_2 , плоскости которых перпендикулярны оси $O\zeta$ и отстоят от точки O на расстоянии

$$\zeta_1 = \cos \theta_1, \quad \zeta_2 = \cos \theta_2$$

соответственно. В силу условий

$$\frac{ds}{dt} = -\sin \theta \frac{d\theta}{dt}, \quad \theta \neq 0, \theta \in [\theta_2, \theta_1]$$

величина $\frac{d\theta}{dt}$ обращается в ноль одновременно с величиной $\frac{ds}{dt}$, т.е. когда $\overbrace{f(s)}^{A^2 \left(\frac{ds}{dt}\right)^2} = 0$. Это означает достижение апексом одной из параллелей A_1A_1 или A_2A_2 . Таким образом, изменять направления нутационного движения (сверху вниз или снизу вверх) ось гироскопа может только на параллелях A_1A_1 или A_2A_2 . Заметим, что если корни s_1 и s_2 близки друг к другу, то траектория апекса извивается в узкой полосе между параллелями A_1A_1 и A_2A_2 , мало отличаясь от окружности. Этот случай называется псевдoreгулярной прецессией. В частности, если $s_1 = s_2$, то прецессия будет просто регулярной.

Вид траектории апекса между параллелями определяется угловой скоростью прецессии $\dot{\psi}$ в соответствии с формулой

$$\dot{\psi} = \frac{G - Cr \cos \theta}{A \sin^2 \theta}.$$

Рассмотрим три случая.

1) $G > Cr \cos \theta_2$ или $G < Cr \cos \theta_1$. Знак угловой скорости $\dot{\psi} \neq 0$ постоянен. Вид траектории апекса в данном случае представлен на **рис. 15**.

2) $G = Cr \cos \theta_2$. На параллели A_2A_2 обе угловые скорости обращаются в ноль, и на ней траектория имеет точки возврата (рис. 16).

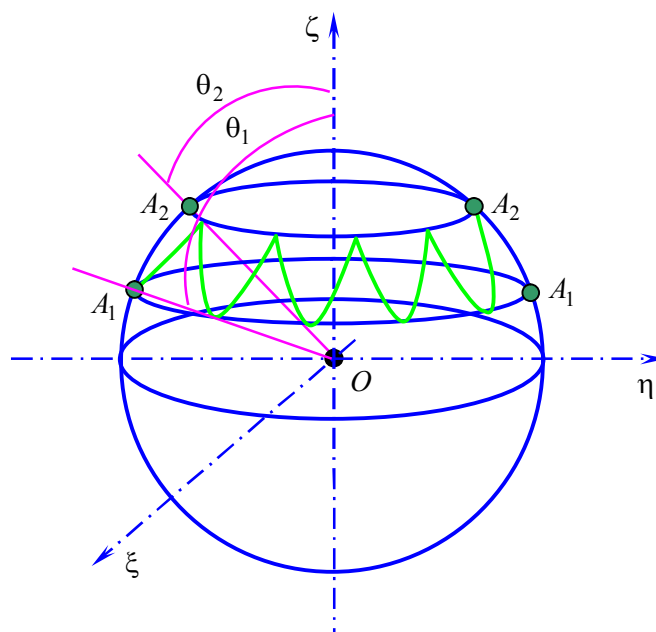


Рис. 16

Случай $G = Cr \cos \theta_1$ физически невозможен, поскольку на параллели A_1A_1 было бы одновременно $\dot{\psi} = 0, \dot{\theta} = 0$. В этом положении и кинетическая и потенциальная энергия гироскопа имеют минимум. При дальнейшем движении обе эти энергии должны возрастать, что противоречит закону сохранения полной механической энергии. Траектория не может иметь точки возврата на нижней параллели.

3) $Cr \cos \theta_1 < G < Cr \cos \theta_2$. Траектория апекса будет петлеобразной кривой, показанной на рис. 17.

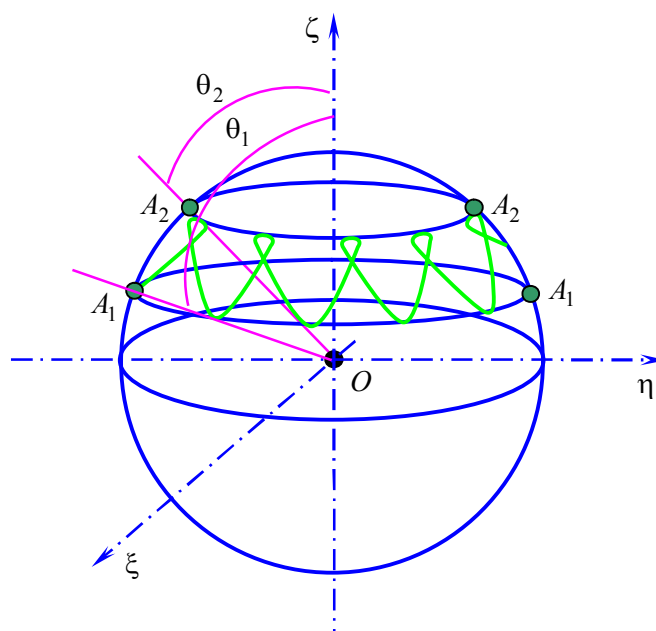


Рис. 17

Изменение знака угловой скорости $\dot{\psi}$ произойдет для угла θ_* , определяемого из условия

$$G = Cr \cos \theta_*.$$

По соображениям предыдущего случая петли вблизи нижней параллели невозможны.

3.10. Основная формула гироскопии

Выше было установлено, что если главный момент внешних сил, приложенных к гироскопу (случай Эйлера), равен нулю, то гироскоп будет совершать регулярную прецессию вокруг неизменного кинетического момента \vec{G} . Найдем условия, при выполнении которых гироскоп будет совершать регулярную прецессию при отличном от нуля главном моменте внешних сил. Динамические уравнения Эйлера здесь имеют вид

$$\begin{cases} A \frac{dp}{dt} + (C - B)qr = M_x^{(e)}, \\ B \frac{dq}{dt} + (A - C)rp = M_y^{(e)}, \\ C \frac{dr}{dt} + (B - A)pq = M_z^{(e)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \frac{dp}{dt} + (C - A)qr = M_x^{(e)}, \\ A \frac{dq}{dt} + (A - C)rp = M_y^{(e)}, \\ C \frac{dr}{dt} = M_z^{(e)}. \end{cases} \quad (1)$$

Потребуем, чтобы гироскоп совершал регулярную прецессию вокруг оси $O\zeta$ (рис. 18).

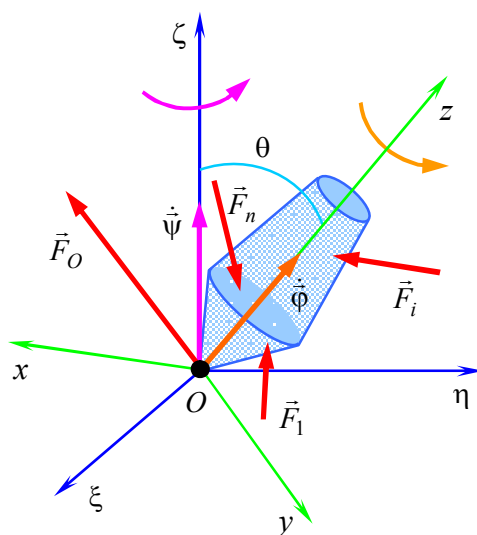


Рис. 18

Тогда

$$\begin{cases} \theta = \theta_0 = const, \\ \dot{\varphi} = \omega_1 = const, \\ \dot{\psi} = \omega_2 = const \end{cases} \quad (2)$$

и кинематические уравнения Эйлера принимают вид

$$\begin{cases} p = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ q = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ r = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = \omega_2 \sin \theta_0 \sin \varphi, \\ q = \omega_2 \sin \theta_0 \cos \varphi, \\ r = \omega_2 \cos \theta_0 + \omega_1. \end{cases} \quad (3)$$

Из последнего равенства в (3) в силу (2) следует, что

$$r = \overbrace{\omega_2}^{const} \overbrace{\cos \theta_0}^{const} + \overbrace{\omega_1}^{const} \Rightarrow r = r_0 = const. \quad (4)$$

Из последнего равенства в (1) в силу (4) выводим

$$C \frac{\overbrace{dr}^0}{dt} = M_z^{(e)} \Rightarrow M_z^{(e)} = 0.$$

Подставим (3) в первое уравнение (1). Имеем

$$\begin{aligned} M_x^{(e)} &= A \frac{d \left(\begin{matrix} \omega_2 \sin \theta_0 \sin \varphi \\ p \end{matrix} \right)}{dt} + (C - A) \begin{matrix} \omega_2 \sin \theta_0 \cos \varphi \\ q \end{matrix} \begin{matrix} \omega_2 \cos \theta_0 + \omega_1 \\ r \end{matrix} = \\ &= A \omega_2 \sin \theta_0 \cos \varphi \cdot \overbrace{\dot{\varphi}}^{\omega_1} + (C - A) \omega_2 \sin \theta_0 \cos \varphi (\omega_2 \cos \theta_0 + \omega_1) = \\ &= \omega_2 \sin \theta_0 \cos \varphi \left[A \omega_1 + (C - A) (\omega_2 \cos \theta_0 + \omega_1) \right] = \\ &= \omega_2 \sin \theta_0 \cos \varphi \left[(C - A) \omega_2 \cos \theta_0 + C \omega_1 \right] \Rightarrow \\ M_x^{(e)} &= \omega_2 \omega_1 \sin \theta_0 \cos \varphi \left[(C - A) \frac{\omega_2}{\omega_1} \cos \theta_0 + C \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Аналогично из второго равенства в (1) в силу (3) находим

$$\begin{aligned} M_y^{(e)} &= A \frac{d \left(\begin{matrix} \omega_2 \sin \theta_0 \cos \varphi \\ q \end{matrix} \right)}{dt} - (C - A) \begin{matrix} \omega_2 \cos \theta_0 + \omega_1 \\ r \end{matrix} \begin{matrix} \omega_2 \sin \theta_0 \sin \varphi \\ p \end{matrix} = \\ &= A \left(-\omega_2 \sin \theta_0 \sin \varphi \overbrace{\dot{\varphi}}^{\omega_1} \right) - (C - A) (\omega_2 \cos \theta_0 + \omega_1) \omega_2 \sin \theta_0 \sin \varphi = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\omega_2 \sin \theta_0 \sin \varphi \left[A\omega_1 + (C - A)(\omega_2 \cos \theta_0 + \omega_1) \right] = \\
 &= -\omega_2 \sin \theta_0 \sin \varphi \left[(C - A)\omega_2 \cos \theta_0 + C\omega_1 \right] \Rightarrow \\
 M_y^{(e)} &= -\omega_2 \omega_1 \sin \theta_0 \sin \varphi \left[(C - A) \frac{\omega_2}{\omega_1} \cos \theta_0 + C \right]. \tag{6}
 \end{aligned}$$

Покажем, что

$$\bar{M}_O^{(e)} = \left[C + (C - A) \frac{\omega_2}{\omega_1} \cos \theta_0 \right] \cdot \bar{\omega}_2 \times \bar{\omega}_1.$$

Действительно, в подвижной системе координат (см. **рис. 17**)

$$\bar{\omega}_1 = \omega_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\omega}_2 = \omega_2 \begin{pmatrix} \sin \theta_0 \sin \varphi \\ \sin \theta_0 \cos \varphi \\ \cos \theta_0 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем

$$\begin{aligned}
 &\left[C + (C - A) \frac{\omega_2}{\omega_1} \cos \theta_0 \right] \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} \sin \theta_0 \sin \varphi \\ \sin \theta_0 \cos \varphi \\ \cos \theta_0 \end{pmatrix} \times \omega_1}^{\omega_2 \parallel \bar{\omega}_2} = \\
 &= \omega_2 \omega_1 \left[C + (C - A) \frac{\omega_2}{\omega_1} \cos \theta_0 \right] \cdot \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \sin \theta_0 \sin \varphi & \sin \theta_0 \cos \varphi & \cos \theta_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\
 &= \overbrace{\left\{ \omega_2 \omega_1 \sin \theta_0 \cos \varphi \left[C + (C - A) \frac{\omega_2}{\omega_1} \cos \theta_0 \right] \right\}}^{(5) \Rightarrow M_x^{(e)}} \bar{i} + \\
 &+ \overbrace{\left\{ -\omega_2 \omega_1 \sin \theta_0 \sin \varphi \left[C + (C - A) \frac{\omega_2}{\omega_1} \cos \theta_0 \right] \right\}}^{(6) \Rightarrow M_y^{(e)}} \bar{j} + \overbrace{0}^{M_z^{(e)}} \cdot \bar{k} = \\
 &= M_x^{(e)} \bar{i} + M_y^{(e)} \bar{j} + M_z^{(e)} \bar{k} \Rightarrow \\
 \bar{M}_O^{(e)} &= \left[C + (C - A) \frac{\omega_2}{\omega_1} \cos \theta_0 \right] \cdot \bar{\omega}_2 \times \bar{\omega}_1. \tag{7}
 \end{aligned}$$

Определение 9. Формула (6) называется основной формулой гироскопии.

Она определяет внешний момент, обеспечивающий регулярную прецессию гироскопа. Заметим, что момент внешних сил, удовлетворяющий формуле (7), постоянен по модулю. Действительно,

$$\left(M_O^{(e)} \right)^2 = \overbrace{\left(M_x^{(e)} \right)^2}^{(5) \Rightarrow} + \overbrace{\left(M_y^{(e)} \right)^2}^{(6) \Rightarrow} + \overbrace{\left(M_z^{(e)} \right)^2}^{=0} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \omega_2^2 \omega_1^2 \sin^2 \theta_0 \cos^2 \varphi \left[(C-A) \frac{\omega_2}{\omega_1} \cos \theta_0 + C \right]^2 + \omega_2^2 \omega_1^2 \sin^2 \theta_0 \sin^2 \varphi \left[(C-A) \frac{\omega_2}{\omega_1} \cos \theta_0 + C \right]^2 = \\
 &= \omega_1^2 \omega_2^2 \sin^2 \theta_0 \left[C + (C-A) \frac{\omega_2}{\omega_1} \cos \theta_0 \right]^2 \cdot \overbrace{(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}{=1} = \\
 &= \omega_1^2 \omega_2^2 \sin^2 \theta_0 \left[C + (C-A) \frac{\omega_2}{\omega_1} \cos \theta_0 \right]^2 = \text{const}.
 \end{aligned}$$

В отличие от случая Эйлера, здесь вектор \bar{G}_O не остается постоянным, он меняется в соответствии с теоремой об изменении кинетического момента:

$$\frac{d\bar{G}_O}{dt} = \bar{M}_O^{(e)}.$$

Последняя формула представляет собой теорему Резаля.

Теорема 1. *Скорость конца вектора кинетического момента относительно неподвижной точки тела равна моменту внешних сил относительно той же точки.*

3.11. Элементарная теория гироскопа

Обычно у гироскопа, совершающего регулярную прецессию, угловая скорость собственного вращения значительно превосходит угловую скорость прецессии:

$$\omega_1 \gg \omega_2.$$

Пренебрегая в (9.7)

$$\bar{M}_O^{(e)} = \left[C + (C-A) \overbrace{\left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)}{\approx 0} \cos \theta_0 \right] \cdot \bar{\omega}_2 \times \bar{\omega}_1$$

отношением $\frac{\omega_2}{\omega_1}$, получим следующее выражение для момента сил, обеспечивающее регулярную прецессию гироскопа:

$$\bar{M}_O^e = C \bar{\omega}_2 \times \bar{\omega}_1. \quad (1)$$

Определение 10. *Формула (1) называется приближенной формулой гироскопии.*

Заметим, что если $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ (см. рис. 19), то эта формула является точной.

Определение 11. *Будем говорить, что выполнено основное предположение элементарной теории гироскопов, если в любой момент времени мгновенная угловая скорость и кинетический момент гироскопа направлены по оси динамической симметрии, причем*

$$\bar{G}_O = C \bar{\omega}_1.$$

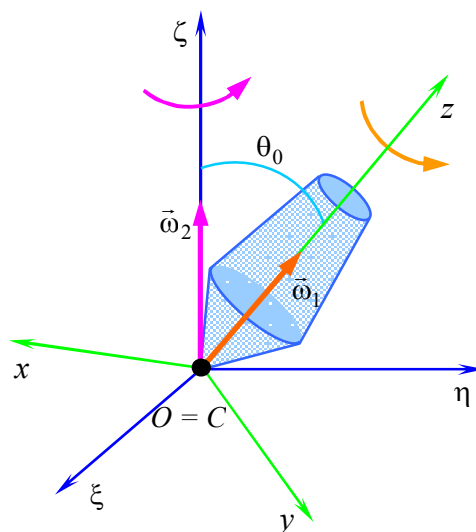


Рис. 19

Покажем, что в рамках основного предположения элементарной теории гироскопов момент внешних сил, обеспечивающий регулярную прецессию гироскопа, может быть вычислен в соответствии с приближенной формулой гироскопии (1). Действительно,

$$\bar{M}_O^e = \frac{d \overbrace{\bar{G}_O}^{C\bar{\omega}_1}}{dt} = \frac{d}{dt} C\bar{\omega}_1 = C \frac{d \overbrace{\bar{\omega}_1}^{\text{const}}}{dt} + C\bar{\omega}_2 \times \bar{\omega}_1 = C\bar{\omega}_2 \times \bar{\omega}_1.$$

3.12. Свойства уравновешенного гироскопа

Введем понятие уравновешенного гироскопа.

Определение 12. *Гироскоп называется уравновешенным, если его центр тяжести совпадает с точкой подвеса тела.*

Для уравновешенного гироскопа имеет место случай Эйлера и

$$\bar{G}_O = \text{const}.$$

Пусть уравновешенный гироскоп вращается вокруг своей оси симметрии Oz с угловой скоростью $\bar{\omega}_1$. Принимаем, что выполнено предположение элементарной теории гироскопов

$$\bar{G}_O = C\bar{\omega}_1.$$

Приведем некоторые свойства уравновешенного гироскопа.

1) Для уравновешенного гироскопа выполняется

$$\bar{G}_O = \text{const},$$

поэтому ось вращения гироскопа сохраняет свое начальное положение в неподвижной системе координат.

2) Пусть к оси гироскопа приложена сила \bar{F} , момент которой относительно точки O равен \bar{M}_O (см. рис. 20).

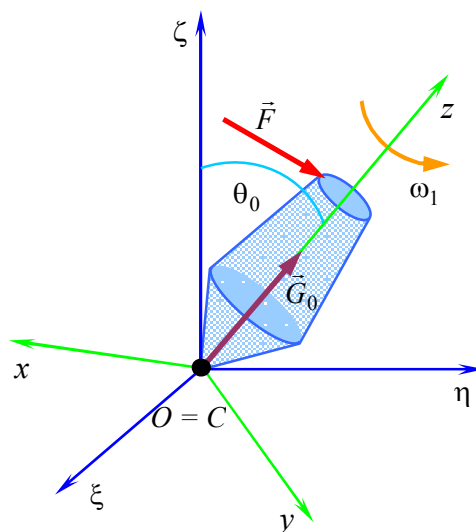


Рис. 20

Тогда вектор \vec{G}_0 , а следовательно, и ось гироскопа, будут отклоняться не в сторону действия силы, а в соответствии с формулой Резаля

$$\frac{d\vec{G}_0}{dt} = \vec{M}_0^{(e)}$$

туда, куда направлен вектор \vec{M}_0 , т.е. перпендикулярно направлению силы \vec{F} .

3) Движение оси гироскопа под действием силы \vec{F} является безынерционным. Последнее означает, что движение оси прекращается сразу после прекращения действия силы.

4) Пусть на гироскоп действует сила \vec{F} на протяжении малого промежутка времени τ . Под действием этой силы вектор кинетического момента \vec{G}_0 , оставаясь постоянным по длине, повернется на угол β (рис. 21)

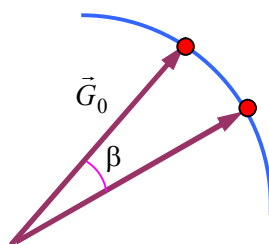


Рис. 21

В силу

$$M_0 = Fh,$$

где h – плечо силы относительно точки подвеса, с точностью до малых высшего порядка, чем τ , конец вектора \vec{G}_0 переместится на величину

$$\overbrace{M_0}^{Fh} \tau = Fh\tau.$$

Учитывая равенство $G_0 = C\omega_1$, получим, что угол β – смещения оси гироскопа определяется из условия

$$G_O \beta = M_O \tau \Rightarrow C \omega_1 \beta = F h \tau \Rightarrow \beta = \frac{F h \tau}{C \omega_1}.$$

В случае когда величина $C \omega_1$ значительна, угол β мал. Таким образом, кратковременное действие сил практически не меняет положения оси гироскопа.

5) Пусть гироскоп вращается относительно оси динамической симметрии и совершает прецессию за счет того, что тело, на котором он установлен, вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}_2$. Необходимый для прецессии момент $\vec{M}_O^{(e)}$ создается силами давления со стороны тела на гироскоп (рис. 22).

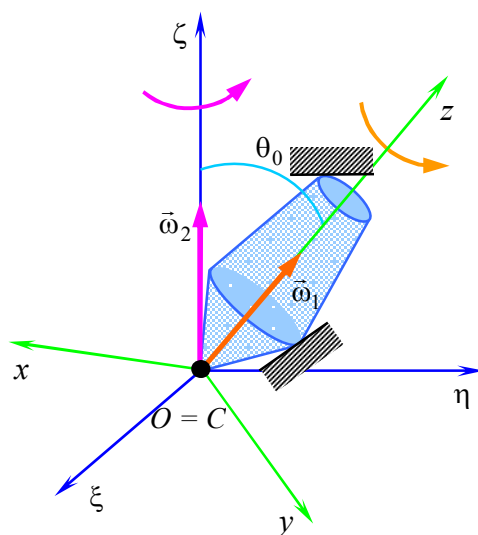


Рис. 22

По третьему закону Ньютона на опоры гироскопа будет действовать гироскопический момент

$$\vec{M}_O^{sup} = -\vec{M}_O^e.$$

В случае если исследование движения гироскопа проводится в рамках элементарной теории, то гироскопический момент вычисляется по формуле

$$\vec{M}_O^{sup} = -\vec{M}_O^e = -C \vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_1 = C \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2.$$

3.13. Применение элементарной теории гироскопов в случае Лагранжа

Пусть динамически симметричное тело весом P имеет неподвижную точку O . Центр масс находится на оси динамической симметрии. В начальный момент ось динамической симметрии Oz составляла угол θ с вертикалью. Тело закручено вокруг оси динамической симметрии с угловой скоростью $\vec{\omega}_1$ (см. рис. 23).

Момент силы тяжести при любом направлении оси Oz горизонтален. Вертикальная ось $O\xi$ является осью прецессии, а ось гироскопа Oz движется по поверхности конуса с углом 2θ при вершине. Угловую скорость прецессии ω_2 найдем в соответствии с приближенной формулой гироскопии

$$\bar{M}_O^{(e)} = C\bar{\omega}_2 \times \bar{\omega}_1 \Rightarrow$$

$$P \cdot OC \sin \theta = C\omega_2 \omega_1 \sin \theta \Rightarrow \omega_2 = \frac{P \cdot OC}{C\omega_1}.$$

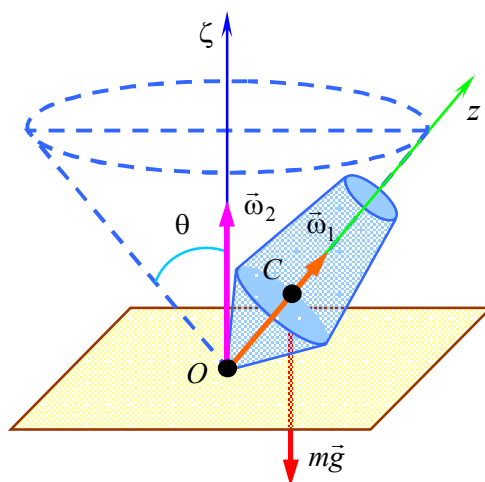


Рис. 23

В результате расчетов оказалось, что угловая скорость прецессии не зависит от угла θ . Данный результат получен в предположениях элементарной теории гироскопов, поэтому он приближителен. На самом деле угол θ будет меняться, т.е. будет происходить нутация.

3.14. Случай С. Ковалевской

В случае Ковалевской эллипсоид инерции для точки O является эллипсоидом вращения, например, вокруг оси Oz , моменты инерции удовлетворяют соотношению

$$A = B = 2C,$$

а центр тяжести тела лежит в экваториальной плоскости, т.е. $c = 0$ (рис. 24).

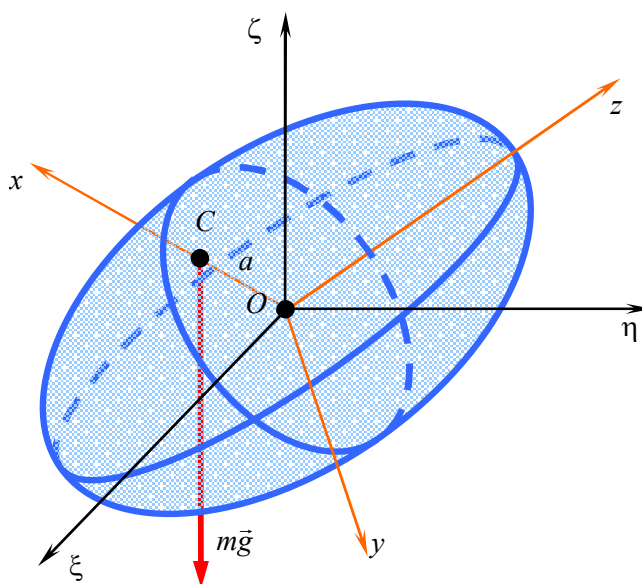


Рис. 24

В этой плоскости любая ось будет главной осью инерции, поэтому можно считать $b = 0$. Другими словами, центр масс тела лежит на оси Ox . В принятых предположениях

$$c = 0, b = 0, A = B = 2C,$$

динамические уравнения Эйлера принимают вид

$$\begin{cases} A \frac{dp}{dt} + (C - B)qr = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c\gamma_2 & -b\gamma_3 \end{pmatrix}, \\ B \frac{dq}{dt} + (A - C)rp = P \begin{pmatrix} 2C & 0 \\ a\gamma_3 & -c\gamma_1 \end{pmatrix}, \\ C \frac{dr}{dt} + (B - A)pq = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b\gamma_1 & -a\gamma_2 \end{pmatrix}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2C \frac{dp}{dt} - Cqr = 0, \\ 2C \frac{dq}{dt} + Crp = Pa\gamma_3, \\ C \frac{dr}{dt} = -Pa\gamma_2. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2 \frac{dp}{dt} - qr = 0, \\ 2 \frac{dq}{dt} + rp = \frac{\overbrace{Pa}^n}{C} \gamma_3, \\ \frac{dr}{dt} = -\frac{\overbrace{Pa}^n}{C} \gamma_2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \frac{dp}{dt} - qr = 0, \\ 2 \frac{dq}{dt} + rp = n\gamma_3, \\ \frac{dr}{dt} = -n\gamma_2, \end{cases} \quad n = \frac{Pa}{C}. \quad (1)$$

К системе (1) присоединим еще уравнения Пуассона

$$\begin{cases} \frac{d\gamma_1}{dt} = r\gamma_2 - q\gamma_3, \\ \frac{d\gamma_2}{dt} = p\gamma_3 - r\gamma_1, \\ \frac{d\gamma_3}{dt} = q\gamma_1 - p\gamma_2. \end{cases} \quad (2)$$

Выпишем интеграл С. Ковалевской

$$\left[(p^2 - q^2 - n\gamma_1)^2 + (2pq - n\gamma_2)^2 \right] = const. \quad (3)$$

Для проверки этого факта авторы рекомендуют читателю вычислить полную производную по времени от левой части интеграла (3) в силу системы (1), (2), т. е.

$$\begin{aligned} & \left. \left(\frac{d}{dt} \left[(p^2 - q^2 - n\gamma_1)^2 + (2pq - n\gamma_2)^2 \right] \right) \right|_{(1),(2)} = \\ & = 2(p^2 - q^2 - n\gamma_1) \left[2p \frac{dp}{dt} - 2q \frac{dq}{dt} - n \frac{d\gamma_1}{dt} \right] \Big|_{(1),(2)} + 2(2pq - n\gamma_2) \left(2 \frac{dp}{dt} q + 2p \frac{dq}{dt} - n \frac{d\gamma_2}{dt} \right) \Big|_{(1),(2)}, \end{aligned}$$

например, воспользовавшись какой-нибудь системой аналитических вычислений, и убедиться в том, что в результате получается тождественный ноль.

4. ДИНАМИКА СВОБОДНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

4.1. Уравнения движения свободного твердого тела

Пусть требуется описать движение свободного твердого тела относительно неподвижной системы $\Omega\xi\eta\zeta$ (рис. 1).

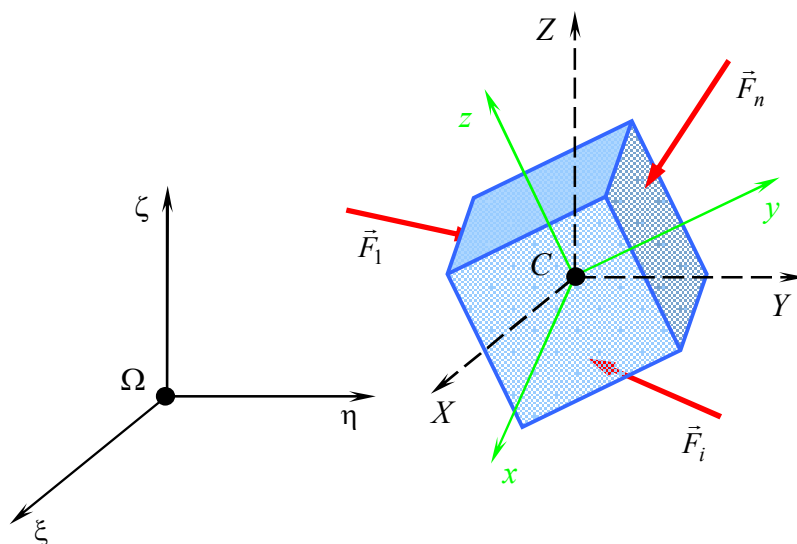


Рис. 1

Согласно теореме Шаля движение тела можно рассматривать как совокупность поступательного движения вместе с полюсом и вращательного относительно полюса. Это вращение можно представить как вращение системы координат $Cxyz$, жестко связанной с телом, относительно системы координат $CXYZ$, которая движется поступательно в неподвижной системе $\Omega\xi\eta\zeta$.

В качестве полюса удобно брать центр масс тела. Действительно, с одной стороны, по теореме о движении центра масс, полюс будет двигаться так же, как точка с массой, равной массе тела, под действием силы, равной главному вектору $\bar{F}^{(e)}$ системы внешних сил $\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n$, приложенных к телу. С другой стороны, теорема об изменении кинетического момента относительно центра масс формулируется в той же форме, как и относительно неподвижной точки.

Пусть M – масса тела, \bar{v}_C – скорость центра масс тела, \bar{G}_C – кинетический момент тела в его движении относительно центра масс, $\bar{M}_C^{(e)}$ – главный момент внешних сил относительно центра масс. Тогда

$$\begin{cases} M \frac{d\bar{v}_C}{dt} = \bar{F}^{(e)}, \\ \frac{d\bar{G}_C}{dt} = \bar{M}_C^{(e)}. \end{cases} \quad (1)$$

Первое векторное равенство в (1) спроецируем на оси неподвижной системы координат $\Omega\xi\eta\zeta$:

$$\begin{cases} M \frac{d^2 \xi_C}{dt^2} = F_{\xi}^{(e)}, \\ M \frac{d^2 \eta_C}{dt^2} = F_{\eta}^{(e)}, \\ M \frac{d^2 \zeta_C}{dt^2} = F_{\zeta}^{(e)}. \end{cases} \quad (2)$$

Второе векторное равенство в (1) спроецируем на подвижную систему координат. Ее оси выберем так, чтобы они совпадали с главными осями инерции тела:

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C - B)qr = M_{C_x}^{(e)}, \\ B\dot{q} + (A - C)rp = M_{C_y}^{(e)}, \\ C\dot{r} + (B - A)pq = M_{C_z}^{(e)}. \end{cases} \quad (3)$$

Добавим кинематические уравнения Эйлера

$$\begin{cases} p = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ q = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ r = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}. \end{cases} \quad (4)$$

Система дифференциальных уравнений (2)–(4) образовала замкнутую систему дифференциальных уравнений движения свободного твердого тела.

4.2. Динамика плоскопараллельного движения

По определению плоскопараллельного движения тела все его точки движутся в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной (основной) плоскости. Всякое движение твердого тела можно представить как поступательное движение вместе с центром масс (полюсом) и вращение вокруг него. При плоскопараллельном движении центр масс движется параллельно основной плоскости, а вращение происходит вокруг оси, перпендикулярной этой плоскости. Через центр масс C проведем плоскость, параллельную основной, и свяжем с ней неподвижную систему отсчета $\Omega\xi\eta$. Введем две подвижные системы координат с началом в центре масс тела (рис. 2).

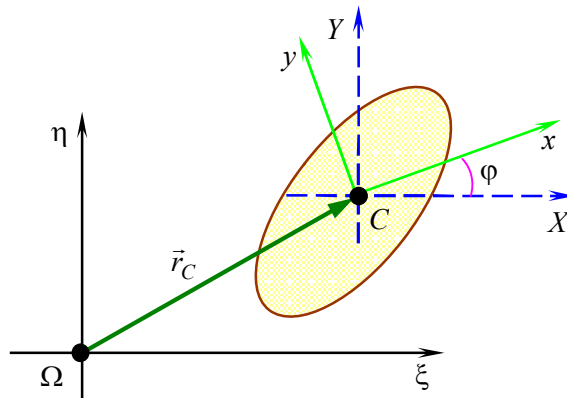


Рис. 2

Первая система – это CXY . Для нее

$$CX \uparrow\uparrow \Omega\xi, \quad CY \uparrow\uparrow \Omega\eta$$

в течение всего времени движения. Вторая система Cxy жестко связана с телом. Положение тела описывается радиус-вектором \bar{r}_C его центра масс относительно начала неподвижной системы Ω и углом поворота φ системы координат Cxy относительно системы CXY . Поставим задачу об определении этих величин в функции времени.

Теорема об изменении количества движения (центра масс) тела

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = M\ddot{\bar{r}}_C = \bar{F}^{(e)} \quad (1)$$

дает два скалярных уравнения:

$$\begin{cases} M\ddot{\xi}_C = \sum_i F_{\xi_i}^{(e)}, \\ M\ddot{\eta}_C = \sum_i F_{\eta_i}^{(e)}. \end{cases} \quad (2)$$

Еще одно скалярное уравнение можно получить из теоремы об изменении кинетического момента относительно оси, проходящей через центр масс тела перпендикулярно основной плоскости:

$$I_C\dot{\varphi} = \sum_i \text{mom}_C \bar{F}_i^{(e)} \quad (3)$$

Система дифференциальных уравнений (2), (3) при заданных начальных условиях может быть проинтегрирована. В результате будет получен искомый закон движения тела

$$\xi_C = \xi_C(t), \quad \eta_C = \eta_C(t), \quad \varphi = \varphi(t).$$

Уравнения движения (2), (3) допускают модификацию. Например, проецирование векторного уравнения (1)

$$M\ddot{\bar{r}}_C = \bar{F}^{(e)}$$

можно производить на оси естественного трехгранника (на касательную и главную нормаль к траектории центра масс). Одно из уравнений (2), (3) можно также заменить теоремой об изменении кинетической энергии

$$d\left\{\frac{1}{2}M\left[\dot{\xi}_C^2 + \dot{\eta}_C^2\right] + \frac{1}{2}I_C\dot{\varphi}^2\right\} = \sum_i (F_{i\xi}d\xi_i + F_{i\eta}d\eta_i). \quad (4)$$

Здесь I_C – момент инерции тела относительно оси, перпендикулярной основной плоскости, проходящей через центр масс тела. Теорему об изменении момента количества движения можно рассматривать и относительно центра Ω (см. **рис. 2**).

Тогда с учетом

$$\begin{aligned} \bar{G}_\Omega &= \overbrace{\bar{G}'_C}^{\bar{G}'_C} + \overline{\Omega C} \times \overbrace{\bar{Q}}^{M\dot{\bar{v}}_C} = \overbrace{\bar{G}'_C}^{\bar{G}'_C} + \overline{\Omega C} \times M \overbrace{\bar{v}_C}^{\begin{pmatrix} \dot{\xi}_C \\ \dot{\eta}_C \end{pmatrix}} \Rightarrow \\ G_{\Omega\xi} &= I_C\dot{\varphi} + M(\xi_C\dot{\eta}_C - \dot{\xi}_C\eta_C) \end{aligned}$$

получим

$$\frac{d}{dt} \overbrace{\left[G_{\Omega\zeta} \right]}^{I_C \dot{\varphi} + M(\xi_C \dot{\eta}_C - \dot{\xi}_C \eta_C)} = \sum_i \text{mom}_{\Omega} \bar{F}_i \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt} \left[I_C \dot{\varphi} + M(\xi_C \dot{\eta}_C - \dot{\xi}_C \eta_C) \right] = \sum_i \text{mom}_{\Omega} \bar{F}_i. \quad (5)$$

Теорему об изменении момента количества движения можно рассмотреть также и относительно оси, перпендикулярной основной плоскости, проходящей через мгновенный центр скоростей P :

$$\bar{G}_P = I_P \bar{\omega} \Rightarrow G_{P\zeta} = I_{P\zeta} \omega \Rightarrow$$

$$\left(\frac{d}{dt} \overbrace{I_{P\zeta}}^{\neq \text{const}} \omega \right) = \sum_i \text{mom}_P \bar{F}_i. \quad (6)$$

Пример 1. Тонкий однородный стержень приставлен одним концом к гладкой вертикальной стене, а другим концом опирается на гладкий горизонтальный пол (**рис. 3**).

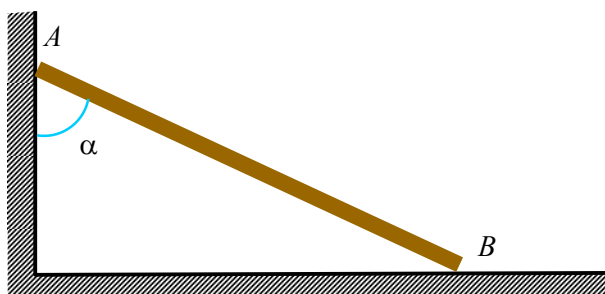


Рис. 3

Стержень пришел в движение из состояния покоя, когда он составлял угол α с вертикалью. Определить начальные давления на стену и пол.

Решение. Силы, действующие на стержень, изображены на **рис. 4**.

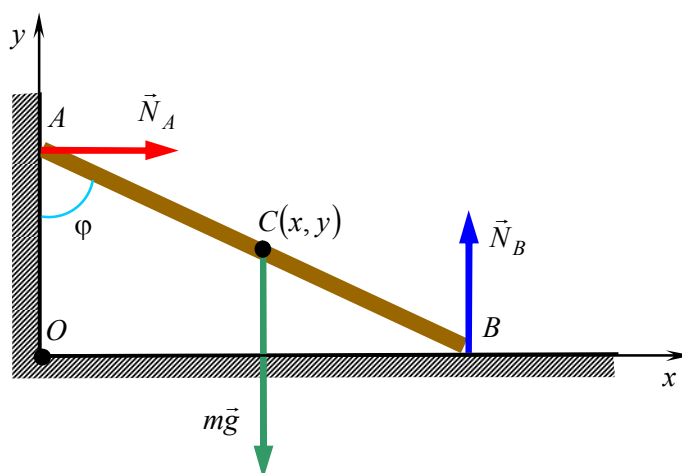


Рис. 4

Тогда дифференциальные уравнения движения стержня:

$$m\ddot{x} = N_A, \quad (7)$$

$$m\ddot{y} = N_B - mg, \quad (8)$$

$$\frac{1}{12}ma^2\ddot{\varphi} = -\frac{1}{2}N_A a \cos \varphi + \frac{1}{2}N_B a \sin \varphi. \quad (9)$$

Здесь x, y – координаты центра масс стержня, a – длина стержня.

Кинематические связи:

$$x = \frac{1}{2}a \sin \varphi, \quad y = \frac{1}{2}a \cos \varphi. \quad (10)$$

Дифференцируем (10) два раза:

$$x = \frac{1}{2}a \sin \varphi \Rightarrow \dot{x} = \frac{1}{2}a \cos \varphi \dot{\varphi} \Rightarrow \ddot{x} = \frac{a}{2}(\cos \varphi \ddot{\varphi} - \sin \varphi \dot{\varphi}^2), \quad (11)$$

$$y = \frac{1}{2}a \cos \varphi \Rightarrow \dot{y} = -\frac{1}{2}a \sin \varphi \dot{\varphi} \Rightarrow \ddot{y} = -\frac{a}{2}(\sin \varphi \ddot{\varphi} + \cos \varphi \dot{\varphi}^2). \quad (12)$$

Из (7) находим

$$m\ddot{x} = N_A \Rightarrow N_A = m \overset{(11) \Rightarrow \frac{a}{2}(\cos \varphi \ddot{\varphi} - \sin \varphi \dot{\varphi}^2)}{\ddot{x}} = \frac{am}{2}(\cos \varphi \ddot{\varphi} - \sin \varphi \dot{\varphi}^2), \quad (13)$$

Из (8) находим

$$m\ddot{y} = N_B - mg \Rightarrow N_B = mg + m \overset{(12) \Rightarrow -\frac{a}{2}(\sin \varphi \ddot{\varphi} + \cos \varphi \dot{\varphi}^2)}{\ddot{y}} = mg - \frac{ma}{2}(\sin \varphi \ddot{\varphi} + \cos \varphi \dot{\varphi}^2). \quad (14)$$

Подставим (13), (14) в (9)

$$\begin{aligned} \frac{1}{12}ma^2\ddot{\varphi} &= -\frac{1}{2} \overset{(13) \Rightarrow \frac{am}{2}(\cos \varphi \ddot{\varphi} - \sin \varphi \dot{\varphi}^2)}{\widehat{N_A}} a \cos \varphi + \frac{1}{2} \overset{(14) \Rightarrow mg - \frac{ma}{2}(\sin \varphi \ddot{\varphi} + \cos \varphi \dot{\varphi}^2)}{\widehat{N_B}} a \sin \varphi \Rightarrow \\ \frac{1}{12}ma^2\ddot{\varphi} &= -\frac{1}{2} \frac{am}{2}(\cos \varphi \ddot{\varphi} - \sin \varphi \dot{\varphi}^2) a \cos \varphi + \frac{1}{2} \left[mg - \frac{ma}{2}(\sin \varphi \ddot{\varphi} + \cos \varphi \dot{\varphi}^2) \right] a \sin \varphi \Rightarrow \\ \frac{1}{12}ma^2\ddot{\varphi} &= \frac{1}{2} \frac{a^2m}{2}(-\cos^2 \varphi \ddot{\varphi} + \sin \varphi \cos \varphi \dot{\varphi}^2 - \sin^2 \varphi \ddot{\varphi} - \cos \varphi \sin \varphi \dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}mga \sin \varphi \Rightarrow \\ \frac{1}{12}ma^2\ddot{\varphi} &= \frac{1}{2} \frac{a^2m}{2}(-\cos^2 \varphi \ddot{\varphi} - \sin^2 \varphi \ddot{\varphi}) + \frac{1}{2}mga \sin \varphi \Rightarrow \\ \frac{1}{12}ma^2\ddot{\varphi} &= -\frac{1}{2} \frac{a^2m}{2} \ddot{\varphi} + \frac{1}{2}mga \sin \varphi \Rightarrow \\ \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2} \right) a \ddot{\varphi} &= g \sin \varphi \Rightarrow \frac{2}{3} a \ddot{\varphi} = g \sin \varphi \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{3g}{2a} \sin \varphi. \quad (15)$$

Определяем искомые реакции. Подставим (15) в (12) при $t = 0$

$$N_A|_{t=0} = \frac{am}{2} \left(\cos \overset{=\alpha}{\varphi} \overset{=\frac{3g}{2a} \sin \alpha}{\ddot{\varphi}} - \sin \varphi \overset{=0}{\dot{\varphi}^2} \right) \Rightarrow N_A|_{t=0} = \frac{3}{4} mg \sin \alpha \cos \alpha.$$

Подставим (15) в (13) при $t = 0$

$$N_B|_{t=0} = mg - \frac{ma}{2} \left(\sin \overset{=\alpha}{\varphi} \overset{=\frac{3g}{2a} \sin \alpha}{\ddot{\varphi}} + \cos \varphi \overset{=0}{\dot{\varphi}^2} \right) \Rightarrow N_B|_{t=0} = mg \left(1 - \frac{3}{4} \sin^2 \alpha \right).$$

Формулу (15) можно получить другим путем. Запишем теорему об изменении момента количества движения относительно точки P – мгновенного центра скоростей стержня (**рис. 5**).

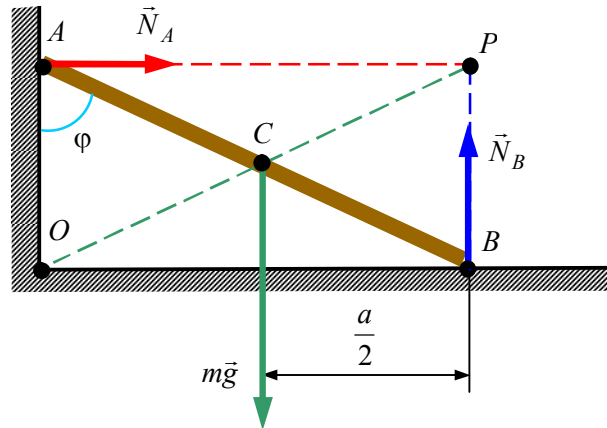


Рис. 5

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\overset{=const}{(I_C + CP^2 m)} \dot{\varphi} \right] &= \frac{a}{2} mg \sin \varphi \Rightarrow \\ \left(\frac{1}{12} ma^2 + \frac{1}{4} ma^2 \right) \ddot{\varphi} &= \frac{a}{2} mg \sin \varphi \Rightarrow \frac{2}{3} a \ddot{\varphi} = g \sin \varphi \Rightarrow \\ \ddot{\varphi} &= \frac{3g}{2a} \sin \varphi. \blacktriangleright \end{aligned}$$

4.3. Исследование движения цилиндра вдоль наклонной плоскости

Пусть тяжелый круглый цилиндр радиуса R движется, касаясь наклонной шероховатой плоскости, образующей с горизонтальной плоскостью угол α так, что ось цилиндра остается все время горизонтальной. Движение происходит параллельно вертикальной плоскости, перпендикулярной оси цилиндра (см. **рис. 6**).

Направим оси абсолютной системы координат следующим образом: ось $O\xi$ – вдоль наклонной плоскости и ось $O\eta$ – перпендикулярно к ней.

Определить $\ddot{\xi}_C$, $\ddot{\varphi}$, F_{mp} , N .. Рассмотрим два случая.

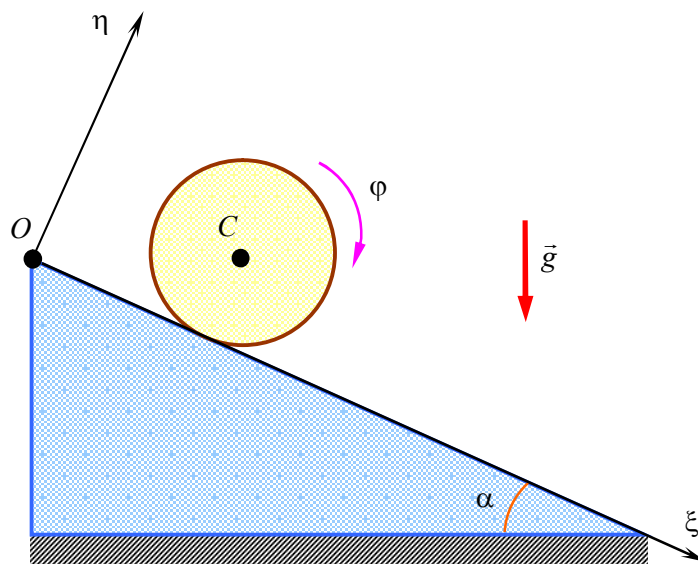


Рис. 6

Первый случай. Движение цилиндра происходит без проскальзывания. Трением качения пренебрегаем. Сила трения скольжения направлена в сторону вращения цилиндра (рис. 7)

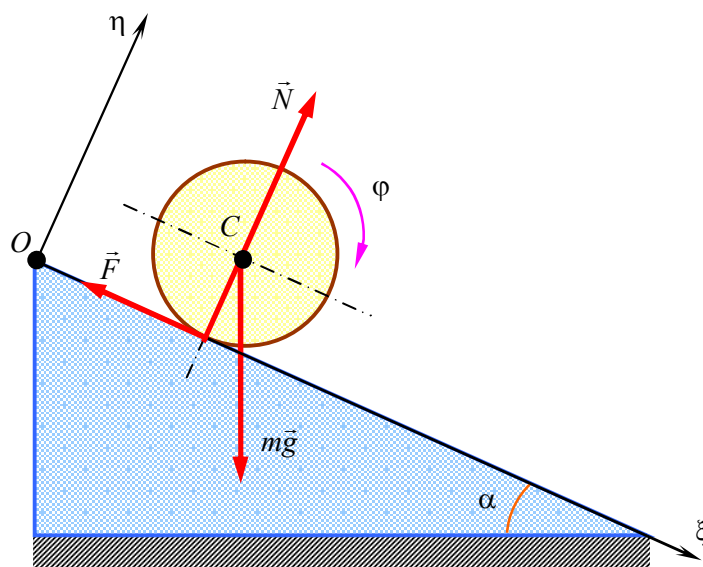


Рис. 7

Запишем уравнения движения плоской фигуры

$$\begin{cases} M\ddot{\xi}_C = Mg \sin \alpha - F_{mp}, \\ M\ddot{\eta}_C = -Mg \cos \alpha + N, \\ I_C\ddot{\varphi} = F_{mp}R. \end{cases} \quad (1)$$

Заметим, что в последнем уравнении в (1) в правой части берется знак «+», т. к. момент силы трения направлен в сторону вращения цилиндра. Имеют место кинематические связи

$$\begin{cases} \eta_C = const, \\ \dot{\xi}_C = R\dot{\varphi} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\eta}_C = 0, \\ \ddot{\xi}_C = R\ddot{\varphi}. \end{cases} \quad (2)$$

Решая (1) и (2) совместно, находим $\ddot{\xi}_C$, $\ddot{\varphi}$, F_{mp} , N .

$$\begin{cases} M\ddot{\eta}_C = -Mg \cos \alpha + N, \\ I_C \ddot{\varphi} = F_{mp} R, \\ \ddot{\eta}_C = 0, \\ \ddot{\xi}_C = R\ddot{\varphi} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MR\ddot{\varphi} = Mg \sin \alpha - F_{mp}, \\ 0 = -Mg \cos \alpha + N, \\ \overbrace{I_C}^{M\rho_C^2} \ddot{\varphi} = F_{mp} R. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{Rg \sin \alpha}{\rho_C^2 + R^2}, \quad F_{mp} = \frac{M \rho_C^2 g \sin \alpha}{\rho_C^2 + R^2},$$

$$N = Mg \cos \alpha, \quad \ddot{\xi}_C = \frac{R^2 g \sin \alpha}{\rho_C^2 + R^2}.$$

Здесь ρ_C – радиус инерции цилиндра относительно оси, проходящей через его центр масс. Условие осуществимости такого движения (без проскальзывания) является неравенство

$$\begin{aligned} \frac{\overbrace{M \rho_C^2 g \sin \alpha}}{\rho_C^2 + R^2} \leq f \overbrace{Mg \cos \alpha} \Rightarrow \\ \frac{M \rho_C^2 g \sin \alpha}{\rho_C^2 + R^2} \leq f Mg \cos \alpha \Rightarrow \\ \frac{\rho_C^2 \sin \alpha}{\rho_C^2 + R^2} \leq f \cos \alpha \Rightarrow \\ \operatorname{tg} \alpha \leq f \frac{R^2 + \rho_C^2}{\rho_C^2} = f \left(\frac{R^2}{\rho_C^2} + 1 \right). \end{aligned} \quad (3)$$

В частности, если цилиндр однородный, то $\rho_C^2 = \frac{R^2}{2}$ и неравенство (3) принимает вид

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha \leq f \left(\frac{R^2}{\rho_C^2} + 1 \right) \Big|_{\rho_C^2 = \frac{R^2}{2}} = f \overbrace{\left(\frac{2R^2}{R^2} + 1 \right)}{=3} = 3f \Rightarrow \\ \operatorname{tg} \alpha \leq 3f. \end{aligned}$$

Второй случай. Пусть условие (3) не выполняется, тогда имеет место проскальзывание. Трением качения снова пренебрегаем. Сила трения будет направлена в противоположную сторону вращения цилиндра (см. **рис. 8**) и принимает максимальное значение

$$F_{mp} = f \cdot N.$$

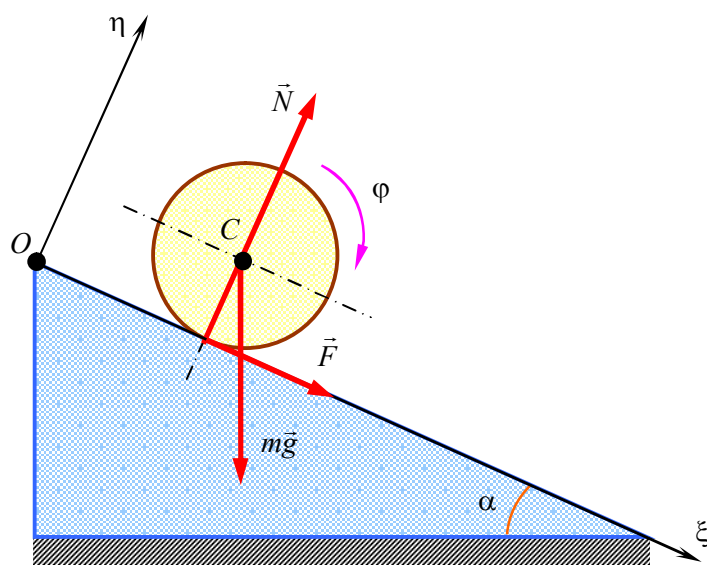


Рис. 8

Уравнения движения плоской фигуры

$$\begin{cases} M \ddot{\xi}_C = Mg \sin \alpha + \overbrace{F_{mp}}^{f \cdot N}, \\ M \overbrace{\ddot{\eta}_C}^0 = -Mg \cos \alpha + N, \\ I_C \ddot{\varphi} = -\overbrace{F_{mp}}^{f \cdot N} R. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M \ddot{\xi}_C = Mg \sin \alpha + fN, \\ 0 = -Mg \cos \alpha + N, \\ M \rho_C^2 \ddot{\varphi} = -fNR. \end{cases} \quad (4)$$

Условие $\dot{\xi}_C = R\dot{\varphi}$ здесь не выполняется. Вместо него использовалось равенство $F_{mp} = fN$. Из уравнений (4) находим

$$\begin{cases} M \ddot{\xi}_C = Mg \sin \alpha + fN, \\ 0 = -Mg \cos \alpha + N, \\ M \rho_C^2 \ddot{\varphi} = -fNR, \\ F_{mp} = fN \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\xi}_C = g(\sin \alpha + f \cos \alpha), \\ \ddot{\varphi} = -\frac{fgR}{\rho_C^2} \cos \alpha, \\ N = Mg \cos \alpha, \\ F_{mp} = fMg \cos \alpha. \end{cases}$$

Вопросы для самоконтроля

1. Запишите дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела.
2. Запишите дифференциальные уравнения вращательного движения твердого тела.
3. Запишите дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения твердого тела.
4. Что такое физический маятник?

5. Чем физический маятник отличается от математического?
6. Какие уравнения описывают движение физического маятника?
7. Что такое приведенная длина физического маятника?
8. Что называют центром и осью качания физического маятника?
9. По какой формуле вычисляется период малых колебаний физического маятника?
10. Что такое фазовая плоскость?
11. Какие теоремы динамики описывают плоское движение твердого тела?
12. Чем обусловлены динамические реакции при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси?
13. При каких условиях динамические реакции при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси будут отсутствовать?
14. Какие уравнения описывают движение твердого тела вокруг неподвижной точки?
15. Какие уравнения называются динамическими уравнениями Эйлера?
16. Какое твердое тело называют гироскопом?
17. Чему равен и как направлен кинетический момент быстро вращающегося гироскопа относительно его неподвижной точки?
18. Какими физическими свойствами обладает быстро вращающийся гироскоп с тремя степенями свободы?
19. В чем суть элементарной теории гироскопов?
20. Что такое регулярная прецессия?
21. Какой гироскоп называют уравновешенным?
22. Какова физическая сущность гироскопического эффекта?

РАЗДЕЛ 4. ДИНАМИКА СИСТЕМЫ ПЕРЕМЕННОГО СОСТАВА

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1.1. Понятие о системе переменного состава

В природе возможны ситуации, когда механическая система в процессе функционирования изменяет свой состав. Например, капля дождя во время падения может либо уменьшаться в массе (в силу испарения), либо увеличиваться (за счет конденсации). Другими примерами систем переменного состава служат летательные аппараты с реактивными двигателями, лента транспортера, на которую либо ставятся грузы, либо снимаются и др. Динамика системы переменного состава требует уточнений при выводе основных уравнений и теорем.

Пусть изменение массы системы на отрезке времени $[t_0, T]$ описывается уравнением

$$M(t) = M_0 - M_1(t) + M_2(t),$$

где M_0 – масса тела в момент t_0 , а монотонно неубывающие функции

$$M_i : [t_0, T] \rightarrow R^{1+}, \quad i = 1, 2,$$

характеризуют уходящую M_1 - и приходящую M_2 -массы. В дальнейшем принимается, что присоединяющиеся и отделяющиеся массы за бесконечно малый промежуток времени бесконечно малы. Это предположение позволяет считать функции M_1 и M_2 непрерывно дифференцируемыми. Часто линейные размеры системы переменного состава малы и ими можно пренебречь, отождествляя эту систему с точкой.

Определение 1. *Материальной точкой переменной массы будем называть систему переменного состава столь малого размера, что ее положение и движение можно характеризовать геометрической точкой.*

1.2. Теорема об изменении количества движения для механической системы переменного состава

Пусть некоторая совокупность материальных точек движется относительно инерциальной системы отсчета. Рассмотрим замкнутую поверхность S , которая перемещается относительно той же системы отсчета и деформируется (рис. 1)

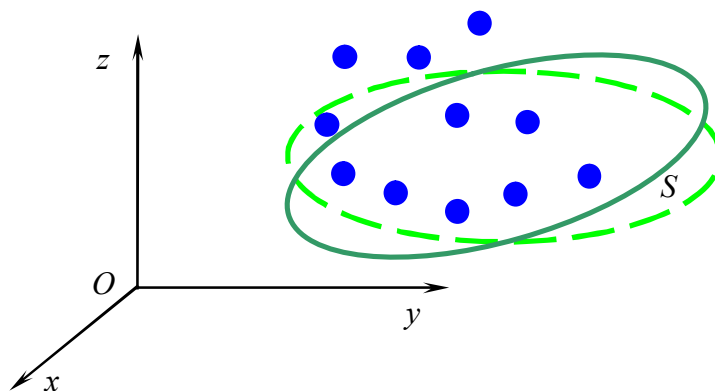


Рис. 1

Материальные точки при своем движении могут входить в пространство, ограниченное поверхностью S , и выходить из него. Обозначим через $Z(\tau)$ систему точек переменного состава, образованную точками, находящимися внутри поверхности $S(\tau)$ в произвольный момент времени τ . Пусть $\bar{Q}(\tau)$ – количество движения этой системы. Зафиксируем момент времени t . Символом Z^* обозначим систему постоянного состава, состоящую из тех и только тех точек, которые находились внутри поверхности

$$S(\tau)_{\tau=t} = S(t)$$

в момент времени t . На рис. 2 это точки красного цвета.

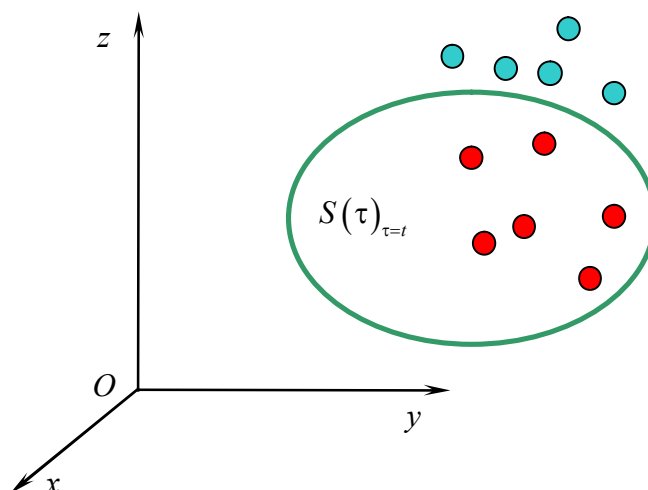


Рис. 2

Количество движения этой системы точек в произвольный момент времени τ обозначим символом $\bar{Q}^*(\tau)$. Очевидно, что

$$Z(\tau)_{\tau=t} = Z(t) = Z^* \Rightarrow \bar{Q}(\tau)_{\tau=t} = \bar{Q}^*(t).$$

Полагаем $t_1 = t + \Delta t$. Система $Z(\tau)_{\tau=t_1} = Z(t_1)$ состоит из тех точек (красного цвета), которые еще остались внутри поверхности $S(t_1)$, и тех точек (голубого цвета), которые вновь вошли вовнутрь поверхности $S(\tau)_{\tau=t_1} = S(t_1)$ к моменту времени t_1 (рис. 3).

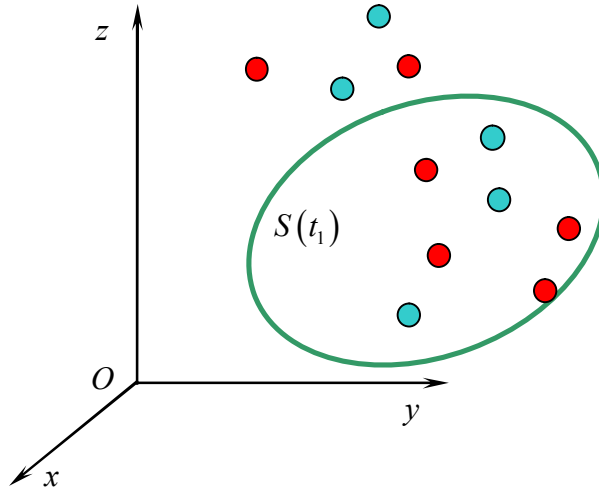


Рис. 3

Система Z^* по-прежнему состоит из точек красного цвета, которые располагаются как внутри, так и вне поверхности $S(t_1)$. Вычислим количества движения систем Z^* и $Z(t_1)$ в момент времени t_1 . Имеем

$$\begin{aligned} Z^* : \quad \bar{Q}^*(t_1) &= \bar{Q}^*(t) + \Delta\bar{Q}^*, \\ Z(t_1) : \quad \bar{Q}(t_1) &= \overbrace{\bar{Q}^*(t)}^{\bar{Q}^*(t)} + \overbrace{\Delta\bar{Q}^* - \Delta\bar{Q}_1 + \Delta\bar{Q}_2}^{\Delta\bar{Q}} = \bar{Q}^*(t) + \Delta\bar{Q}^* - \Delta\bar{Q}_1 + \Delta\bar{Q}_2. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\Delta\bar{Q}_1$ – количество движения материальных точек системы Z^* в момент времени t_1 , которые к этому моменту времени вышли из объема $S(t_1)$ (это точки красного цвета вне поверхности $S(t_1)$); $\Delta\bar{Q}_2$ – количество движения материальных точек, не состоящих в системе Z^* , которые к моменту времени t_1 вошли в объем $S(t_1)$ (это точки голубого цвета внутри поверхности $S(t_1)$).

Вычислим приращение количества движения системы переменного состава, заключенной внутри поверхности $S(\tau)$, на промежутке времени $[t, t_1]$. Имеем

$$\Delta\bar{Q} = \overbrace{\bar{Q}^*(t) + \Delta\bar{Q}^* - \Delta\bar{Q}_1 + \Delta\bar{Q}_2}^{(1) \Rightarrow \bar{Q}^*(t_1)} - \bar{Q}^*(t) = \bar{Q}^*(t_1) - \bar{Q}^*(t) = \bar{Q}^*(t) + \Delta\bar{Q}^* - \Delta\bar{Q}_1 + \Delta\bar{Q}_2 - \bar{Q}^*(t) = \Delta\bar{Q}^* - \Delta\bar{Q}_1 + \Delta\bar{Q}_2. \quad (2)$$

Пусть $\bar{F}^{(e)}$ – главный вектор внешних сил, приложенных к системе Z в момент времени t , следовательно, и к системе Z^* в этот же момент времени. В силу того что система Z^* является системой постоянного состава, к ней можно применить теорему об изменении количества движения

$$\frac{d\bar{Q}^*}{dt} = \bar{F}^{(e)}. \quad (3)$$

Разделим обе части равенства (2) на Δt и устремим Δt к нулю. В пределе получим

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\bar{Q}}{\Delta t} = \frac{\Delta\bar{Q}^*}{\Delta t} - \frac{\Delta\bar{Q}_1}{\Delta t} + \frac{\Delta\bar{Q}_2}{\Delta t} &\Rightarrow \frac{d\bar{Q}}{dt} = \overbrace{\frac{d\bar{Q}^*}{dt}}^{\bar{F}^{(e)}} - \overbrace{\frac{d\bar{Q}_1}{dt}}^{\bar{F}_1} + \overbrace{\frac{d\bar{Q}_2}{dt}}^{\bar{F}_2} \Rightarrow \\ \frac{d\bar{Q}}{dt} &= \bar{F}^{(e)} + \bar{F}_1 + \bar{F}_2, \end{aligned} \quad (4)$$

где обозначено

$$\bar{F}_1 = -\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\bar{Q}_1}{\Delta t}, \quad \bar{F}_2 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\bar{Q}_2}{\Delta t}. \quad (5)$$

Векторные величины \bar{F}_1 и \bar{F}_2 имеют размерность силы и называются реактивными силами. Равенство (4) выражает теорему об изменении количества движения для системы переменного состава.

1.3. Теорема об изменении кинетического момента для механической системы переменного состава

Пусть A – неподвижная точка в инерциальной системе отсчета. По аналогии с (2.2)

$$\Delta\bar{Q} = \Delta\bar{Q}^* - \Delta\bar{Q}_1 + \Delta\bar{Q}_2$$

запишем

$$\Delta\bar{G}_A = \Delta\bar{G}_A^* - \Delta\bar{G}_{1A} + \Delta\bar{G}_{2A}. \quad (1)$$

Здесь $\Delta\bar{G}_A = \bar{G}_A(t_1) - \bar{G}_A(t)$ – приращение кинетического момента системы точек Z (переменного состава) относительно центра A за время Δt ; $\Delta\bar{G}_A^* = \bar{G}_A^*(t_1) - \bar{G}_A^*(t)$ – приращение кинетического момента системы точек Z^* (постоянного состава) относительно центра A за время Δt ; $\Delta\bar{G}_{1A}$ – момент количества движения материальных точек системы Z^* относительно центра A в момент времени t_1 , которые к этому моменту времени вышли из объема $S(t_1)$; $\Delta\bar{G}_{2A}$ – момент количества движения материальных точек относительно центра A , не состоящих в системе Z^* в момент времени t_1 , которые к этому моменту времени вошли в объем $S(t_1)$.

Для системы Z^* постоянного состава запишем теорему об изменении момента количества движения относительно центра

$$\frac{d\bar{G}_A^*}{dt} = \bar{M}_A^e, \quad (2)$$

где \bar{M}_A^e – главный момент внешних сил относительно центра A , приложенных к системе Z^* в момент времени t , а значит? и к системе Z . Разделим обе части равенства (1) на Δt

$$\Delta\bar{G}_A = \Delta\bar{G}_A^* - \Delta\bar{G}_{1A} + \Delta\bar{G}_{2A} \Rightarrow \frac{\Delta\bar{G}_A}{\Delta t} = \frac{\Delta\bar{G}_A^*}{\Delta t} - \frac{\Delta\bar{G}_{1A}}{\Delta t} + \frac{\Delta\bar{G}_{2A}}{\Delta t}$$

и устремим Δt к нулю. В пределе получим

$$\frac{d\bar{G}_A}{dt} = \frac{\overbrace{d\bar{G}_A^*}^{\bar{M}_A^e}}{dt} - \frac{\overbrace{d\bar{G}_{1A}}^{\bar{M}_{1A}}}{dt} + \frac{\overbrace{d\bar{G}_{2A}}^{\bar{M}_{2A}}}{dt} \Rightarrow \frac{d\bar{G}_A}{dt} = \bar{M}_A^{(e)} + \bar{M}_{1A} + \bar{M}_{2A}, \quad (3)$$

где обозначено

$$\bar{M}_{1A} = -\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\bar{G}_{1A}}{\Delta t}, \quad \bar{M}_{2A} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\bar{G}_{2A}}{\Delta t}.$$

Векторные величины \bar{M}_{1A} , \bar{M}_{2A} имеют размерность момента силы и называются моментами реактивных сил. Равенство (3) выражает теорему об изменении момента количества движения для системы переменного состава.

2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

2.1. Дифференциальное уравнение движения

Пусть материальная точка P переменной массы движется относительно инерциальной системы $Oxuz$ и \bar{u}_1, \bar{u}_2 – абсолютные скорости соответственно отделяющихся и присоединяющихся к ней в момент времени t частиц. Обозначим через ΔM_1 и ΔM_2 массы этих частиц. Тогда с точностью до величин высшего порядка малости по отношению к промежутку времени Δt справедливы равенства

$$\Delta\bar{Q}_i = \Delta M_i \bar{u}_i, \quad i = 1, 2.$$

Из (1.2.5) находим

$$\bar{F}_1 = -\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overbrace{\Delta\bar{Q}_1}^{\Delta M_1 \bar{u}_1}}{\Delta t} = -\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta M_1 \bar{u}_1}{\Delta t} = -\bar{u}_1 \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta M_1}{\Delta t} = -\frac{dM_1}{dt} \bar{u}_1, \quad (1)$$

$$\bar{F}_2 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overbrace{\Delta \bar{Q}_2}^{\Delta M_2 \bar{u}_2}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta M_2 \bar{u}_2}{\Delta t} = \bar{u}_2 \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta M_2}{\Delta t} = \frac{dM_2}{dt} \bar{u}_2. \quad (2)$$

Пусть \bar{v} – абсолютная скорость точки P . Тогда

$$\bar{Q}(t) = \overbrace{M(t)}^{M_0 - M_1(t) + M_2(t)} \bar{v}(t) = [M_0 - M_1(t) + M_2(t)] \bar{v}(t). \quad (3)$$

Преобразуем равенство (1.2.4):

$$\begin{aligned} \frac{M(t) \frac{d}{dt} \bar{v}(t) + \bar{v}(t) \frac{d}{dt} M(t)}{dt} &= \bar{F}^{(e)} + \bar{F}_1 + \bar{F}_2 \Rightarrow \\ M(t) \frac{d}{dt} \bar{v}(t) + \bar{v}(t) \frac{d}{dt} M(t) &= \bar{F}^{(e)} + \bar{F}_1 + \bar{F}_2 \Rightarrow \\ M \frac{d\bar{v}}{dt} + \overbrace{\frac{dM}{dt}}^{-\frac{dM_1}{dt} \bar{v} + \frac{dM_2}{dt} \bar{v}} \bar{v} &= \bar{F}^{(e)} + \frac{dM_1}{dt} \bar{u}_1 + \frac{dM_2}{dt} \bar{u}_2 \Rightarrow \\ M \frac{d\bar{v}}{dt} - \frac{dM_1}{dt} \bar{v} + \frac{dM_2}{dt} \bar{v} &= \bar{F}^{(e)} - \frac{dM_1}{dt} \bar{u}_1 + \frac{dM_2}{dt} \bar{u}_2 \Rightarrow \\ M \frac{d\bar{v}}{dt} &= \bar{F}^{(e)} - \frac{dM_1}{dt} \overbrace{(\bar{u}_1 - \bar{v})}^{\bar{u}_{1r}} + \frac{dM_2}{dt} \overbrace{(\bar{u}_2 - \bar{v})}^{\bar{u}_{2r}} \Rightarrow \\ M \frac{d\bar{v}}{dt} &= \bar{F}^{(e)} - \frac{dM_1}{dt} \bar{u}_{1r} + \frac{dM_2}{dt} \bar{u}_{2r}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь скорости

$$\bar{u}_{1r} = \bar{u}_1 - \bar{v}, \quad \bar{u}_{2r} = \bar{u}_2 - \bar{v}$$

представляют собой относительные (относительно точки P) скорости отсоединяющихся и присоединяющихся частиц соответственно.

Определение 1. Уравнение (4) называется обобщенным уравнением И.В. Мещерского.

Данное уравнение было получено И.В. Мещерским в 1898 г. как результат обобщения результатов, полученных в магистерской диссертации 1897 г.

В частном случае, когда имеет место только отделение частиц (случай ракеты), справедливы равенства

$$\begin{cases} M_2(t) \equiv 0, \\ M(t) = M_0 - M_1(t) \end{cases} \Rightarrow \frac{dM}{dt} = -\frac{dM_1}{dt}$$

и уравнение И.В. Мещерского (4) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{v}}{dt} M &= \bar{F}^{(e)} - \overbrace{\frac{dM_1}{dt}}^{\frac{dM}{dt}} \bar{u}_{1r} + \frac{dM_2}{dt} \bar{u}_{2r} \Rightarrow \\ \frac{d\bar{v}}{dt} M &= \bar{F}^{(e)} + \frac{dM}{dt} \bar{u}_r. \end{aligned} \quad (5)$$

Из уравнения (5) видно, что эффект отделения частиц эквивалентен действию на точку добавочной силы

$$\bar{F}_1 = \frac{dM}{dt} \bar{u}_r,$$

называемой **реактивной силой**.

2.2. Движение ракеты вне поля сил

Пусть точка P переменной массы движется в безвоздушном пространстве вне поля сил. Это модель движения ракеты в космическом пространстве, в которой игнорируются размеры ракеты. Очевидно, что $\bar{F}^{(e)} = 0$, и уравнение И.В. Мещерского (1.5) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{v}}{dt} M &= \overbrace{\bar{F}^{(e)}}^0 + \frac{dM}{dt} \bar{u}_r \Rightarrow \\ \frac{d\bar{v}}{dt} M &= \frac{dM}{dt} \bar{u}_r. \end{aligned} \quad (1)$$

Принимаем, что вектор относительной скорости $\bar{u}_r = const$ направлен в противоположную вектору скорости ракеты сторону. Тогда ракета должна двигаться по прямой линии, совпадающей с направлением вектора скорости (**рис. 1**).

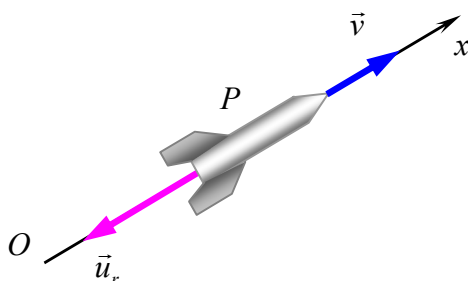


Рис. 1

Примем эту прямую за ось Ox . Спроецируем уравнение (1) на ось Ox

$$\frac{dv}{dt} M = \frac{dM}{dt} u_r \Rightarrow \frac{dv}{dt} M = -\frac{dM}{dt} u_r$$

и проинтегрируем его

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} M &= -\frac{dM}{dt} u_r \Rightarrow \\ \int_{v_0}^v dv &= -u_r \int_{M_0}^M \frac{dM}{M} \Rightarrow \\ v(t) - v_0 &= -u_r [\ln M(t) - \ln M(t_0)] \Rightarrow \\ v(t) &= v_0 + u_r \ln \frac{M_0}{M(t)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Пусть M_T, M_κ – соответственно начальная масса топлива и конечная масса ракеты (после того как все топливо сгорело). Тогда

$$M_0 = M_T + M_\kappa.$$

Скорость v_k в конечный момент работы двигателей из (2) будет равна

$$\begin{aligned} \overbrace{v(T)}^{v_k} &= v_0 + u_r \ln \frac{\overbrace{M_0}^{M_T + M_\kappa}}{\underbrace{M(T)}_{M_\kappa}} = v_0 + u_r \ln \frac{M_T + M_\kappa}{M_\kappa} \Rightarrow \\ v_k &= v_0 + u_r \ln \left(1 + \frac{M_T}{M_\kappa} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Определение 2. Формула (3) называется формулой Циолковского, а число $Z = \frac{M_T}{M_\kappa}$ – числом Циолковского.

Эта формула была впервые опубликована в работе К.Э. Циолковского в 1903 г.

Конечная скорость ракеты не зависит от закона сжигания топлива, в то время как путь, пройденный ракетой на активном участке полета, от него зависит. Действительно, полагая, что $x(0) = 0$, из (2) находим

$$\begin{aligned} v(t) = v_0 + u_r \ln \frac{M_0}{M(t)} &\Rightarrow \frac{dx}{dt} = v_0 + u_r \ln \frac{M_0}{M(t)} \Rightarrow \\ x(t) &= v_0 t + u_r \int_0^t \ln \frac{M_0}{M(t)} dt. \end{aligned}$$

Пример 1. Эффективная скорость истечения газов из ракеты равна 2400 м/с. Какой процент должен составлять вес топлива от стартового веса ракеты, чтобы работа, движущаяся вне поля тяготения и вне атмосферы, приобрела скорость 9000 м/с.

Решение. Из формулы (2) с учетом $v_0 = 0$ находим:

$$v(t) = u_r \ln \frac{M_0}{M(t)} \Rightarrow \frac{M_0}{M(t)} = e^{\frac{v(t)}{u_r}}.$$

В момент полного выгорания топлива $M_T = 0$, $v = v_\kappa = 9000$ м/с, тогда

$$\begin{aligned} \frac{M_\kappa}{M_0} = e^{-\frac{v_\kappa}{u_r}} &\Rightarrow \frac{M_\kappa + M_T - M_T}{M_0} = e^{-\frac{v_\kappa}{u_r}} \Rightarrow \\ 1 - \frac{M_T}{M_0} = e^{-\frac{v_\kappa}{u_r}} &\Rightarrow \frac{M_T}{M_0} = 1 - e^{-\frac{v_\kappa}{u_r}}, \end{aligned}$$

где M_T, M_κ – соответственно начальная масса топлива и конечная масса ракеты (после того как все топливо сгорело).

Подставляя численные значения, находим:

$$\frac{M_T}{M_0} = 1 - e^{-\frac{v_\kappa}{u_r}} = 1 - e^{-\frac{9000}{2400}} = 1 - e^{-\frac{15}{4}} \approx 0,98 = 98\% \blacktriangleright$$

2.3. Вертикальное движение ракеты в однородном поле тяжести

Ракета движется вертикально вверх в однородном поле тяжести в условиях отсутствия сопротивления среды (рис. 2)

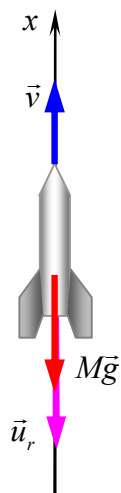


Рис. 2

Дифференциальное уравнение движения ракеты имеет вид

$$\frac{d\vec{v}}{dt} M = M\vec{g} + \frac{dM}{dt} \vec{u}_r, \quad \vec{u}_r = \overline{\text{const.}} \quad (1)$$

Направим ось x вертикально вверх и спроецируем векторное уравнение (1) движения ракеты на эту ось:

$$M \frac{dv}{dt} = -Mg - u_r \frac{dM}{dt}. \quad (2)$$

Полагая

$$M(t_0) = M_0, \quad v(t_0) = 0,$$

проинтегрируем (2):

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -g - u_r \frac{1}{M} \frac{dM}{dt} \Rightarrow \\ dv &= -g dt - u_r \frac{dM}{M} \Rightarrow \\ \int_{v_0}^v dv &= -g \int_0^t dt - u_r \int_{M_0}^M \frac{dM}{M} \Rightarrow \\ v - \underbrace{v_0}_0 &= -gt - u_r \overbrace{(\ln M - \ln M_0)}^{-\ln \frac{M_0}{M}} \Rightarrow \\ v(t) &= u_r \ln \frac{M_0}{M} - gt. \end{aligned}$$

Зададим закон изменения массы (сжигания топлива) в виде

$$M(t) = M_0 e^{-\alpha t}, \quad \alpha = \text{const.}$$

Продолжим интегрирование уравнения движения ракеты, предполагая, что $x(0) = 0$.

Имеем

$$v(t) = u_r \ln \frac{M_0}{\underbrace{M}_{M_0 e^{-\alpha t}}} - gt = u_r \ln \frac{M_0}{M_0 e^{-\alpha t}} - gt = u_r \alpha t - gt \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{dt} = t(u_r \alpha - g) \Rightarrow x(t) = (u_r \alpha - g) \frac{t^2}{2}.$$

Величина реактивной силы здесь будет

$$F = \left| \frac{dM}{dt} \right| u_r = \left| \frac{d(M_0 e^{-\alpha t})}{dt} \right| u_r = \alpha \overbrace{M_0 e^{-\alpha t}}^{M(t)} u_r = M(t) \alpha u_r,$$

а условие отрыва ракеты от Земли –

$$\alpha u_r > g.$$

Определим полную высоту H подъема ракеты. Пусть t_1 – время полного сгорания топлива (активного полета ракеты), а M_1 – масса ракеты без топлива. Тогда

$$M_1 = M_0 e^{-\alpha t_1} \Rightarrow e^{\alpha t_1} = \frac{M_0}{M_1} \Rightarrow$$

$$t_1 = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{M_0}{M_1} \right) = \frac{n}{\alpha},$$

где

$$n = \ln \left(\frac{M_0}{M_1} \right).$$

Определим длину x_1 активного участка полета ракеты

$$x(t) = (u_r \alpha - g) \frac{t^2}{2} \Rightarrow$$

$$x_1 = x(t_1) = (u_r \alpha - g) \frac{\overset{t_1 = \frac{n}{\alpha}}{t_1^2}}{2} = (u_r \alpha - g) \frac{n^2}{2\alpha^2}, \quad (3)$$

и скорость ракеты в конце этого участка

$$v(t) = (u_r \alpha - g)t \Rightarrow$$

$$v_1 = v(t_1) = (u_r \alpha - g)t_1 = (u_r \alpha - g) \frac{n}{\alpha}.$$

После остановки двигателя ракета в пассивном режиме пройдет еще расстояние (см. рис. 3)

$$h = \frac{v_1^2}{2g} = (u_r \alpha - g)^2 \frac{n^2}{2g\alpha^2}.$$

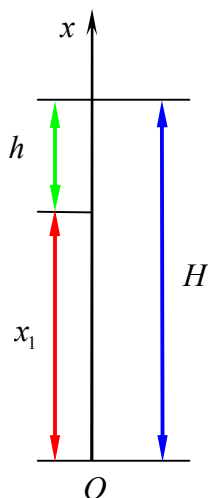


Рис. 3

Полная высота полета будет

$$\begin{aligned}
 H &= \overset{(u_r \alpha - g) \frac{n^2}{2\alpha^2}}{\tilde{x}_1} + \overset{(u_r \alpha - g)^2 \frac{n^2}{2g\alpha^2}}{\tilde{h}} = (u_r \alpha - g) \frac{n^2}{2\alpha^2} + (u_r \alpha - g)^2 \frac{n^2}{2g\alpha^2} = \\
 &= \frac{n^2}{2\alpha^2} (u_r \alpha - g) \left[1 + (u_r \alpha - g) \frac{1}{g} \right] = \frac{n^2}{2\alpha^2} (u_r \alpha - g) \left[1 + \frac{u_r \alpha}{g} - 1 \right] = \frac{n^2 u_r}{2g\alpha} (u_r \alpha - g) \Rightarrow \\
 H &= n^2 \left(\frac{u_r^2}{2g} - \frac{u_r}{2\alpha} \right).
 \end{aligned}$$

Заметим, что максимальная высота полета H^* достигается при $\alpha = \infty$, т.е. при мгновенном сгорании топлива, и она равна

$$H^* = n^2 \frac{u_r^2}{2g}. \quad (4)$$

2.4. Некоторые задачи управления вертикальным полетом ракеты в однородном поле тяжести

В этом параграфе, как и в предыдущем, предполагается, что сжигание топлива производится по закону

$$M(t) = M_0 e^{-\alpha t}, \quad \alpha = \text{const}.$$

Задача 1. О максимальной длине активного участка полета. Требуется определить, при каком значении α длина активного участка x_1 полета ракеты будет максимальной.

Ранее было установлено (формула (3.3)), что

$$x_1 = (u_r \alpha - g) \frac{n^2}{2\alpha^2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial \alpha} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[(u_r \alpha - g) \frac{n^2}{2\alpha^2} \right] = 0 \Rightarrow \\ -\frac{u_r n^2}{2\alpha^2} + \frac{gn^2}{\alpha^3} = 0 &\Rightarrow 2g - u_r \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{2g}{u_r}. \end{aligned}$$

Проверим знак второй производной

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 x_1}{\partial \alpha^2} \right|_{\alpha = \frac{2g}{u_r}} &= \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\frac{u_r n^2 + gn^2}{2\alpha^2 + \alpha^3}}{\frac{\partial x_1}{\partial \alpha}} \right) \bigg|_{\alpha = \frac{2g}{u_r}} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(-\frac{u_r n^2}{2\alpha^2} + \frac{gn^2}{\alpha^3} \right) \bigg|_{\alpha = \frac{2g}{u_r}} = \left(\frac{u_r n^2}{\alpha^3} - \frac{3gn^2}{\alpha^4} \right) \bigg|_{\alpha = \frac{2g}{u_r}} = \\ &= \frac{u_r^4 n^2}{8g^3} - \frac{3u_r^4 n^2}{16g^3} = -\frac{(u_r)^4 n^2}{16g^3} < 0. \end{aligned}$$

Он отрицателен. Следовательно, для закона сгорания топлива

$$M(t) = M_0 e^{-\alpha t} \bigg|_{\alpha = \frac{2g}{u_r}} = M_0 e^{-\frac{2g}{u_r} t}$$

длина активного участка полета x_1 будет максимальной. Вычислим максимальную длину активного участка полета. Имеем

$$x_1 = (u_r \alpha - g) \frac{n^2}{2\alpha^2} \bigg|_{\alpha = \frac{2g}{u_r}} = \left(u_r \frac{2g}{u_r} - g \right) \frac{n^2}{2 \left(\frac{2g}{u_r} \right)^2} = \frac{n^2 u_r^2}{8g}$$

и полную высоту полета H для найденного закона сжигания топлива

$$H = n^2 \left(\frac{u_r^2}{2g} - \frac{u_r}{2\alpha} \right) \bigg|_{\alpha = \frac{2g}{u_r}} = n^2 \left(\frac{u_r^2}{2g} - \frac{u_r}{2 \cdot \frac{2g}{u_r}} \right) = \frac{n^2 u_r^2}{4g}.$$

Эта высота оказалась в два раза меньше максимально возможной (3.4):

$$H^* = \frac{n^2 u_r^2}{2g}.$$

Величина реактивной силы

$$F = M \cdot \alpha \cdot u_r \bigg|_{\alpha = \frac{2g}{u_r}} = M \cdot \frac{2g}{u_r} \cdot u_r = 2Mg$$

в два раза превосходит силу тяжести.

Задача 2. О минимальном расходе топлива. Для заданного значения x_1 — длины активного участка полета определить величину α , которая минимизирует запас топлива

$n = \ln \left(\frac{M_0}{M_1} \right)$ ракеты. Напомним, что M_1 — масса ракеты без топлива.

Из равенства (3.3) находим

$$x_1 = (u_r \alpha - g) \frac{n^2}{2\alpha^2} \Rightarrow n^2 = \frac{2\alpha^2 x_1}{u_r \alpha - g}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial(n^2)}{\partial\alpha} &= \frac{\partial}{\partial\alpha} \left(\frac{2\alpha^2 x_1}{u_r \alpha - g} \right) = \frac{4\alpha x_1 (u_r \alpha - g) - 2\alpha^2 x_1 u_r}{(u_r \alpha - g)^2} = \frac{2\alpha^2 x_1 u_r - 4\alpha x_1 g}{(u_r \alpha - g)^2} \Rightarrow \\ \frac{2\alpha^2 x_1 u_r - 4\alpha x_1 g}{(u_r \alpha - g)^2} &= 0 \Rightarrow \alpha u_r - 2g \Rightarrow \alpha = \frac{2g}{u_r}. \end{aligned}$$

Проверим знак второй производной

$$\left. \frac{\partial^2(n^2)}{\partial\alpha^2} \right|_{\alpha=\frac{2g}{u_r}} = \frac{\partial}{\partial\alpha} \left(\frac{2\alpha^2 x_1 u_r - 4\alpha x_1 g}{(u_r \alpha - g)^2} \right) \Bigg|_{\alpha=\frac{2g}{u_r}} = \frac{4x_1}{g} > 0.$$

Он положителен. Следовательно, для полученного закона сжигания топлива его расход будет минимален. Заметим, что решение задачи о минимальном расходе топлива совпало с решением предыдущей задачи о максимальной длине активного участка полета.

Задача 3. О равномерном движении ракеты. Определить величину α , при которой полет ракеты будет происходить с постоянной скоростью. В уравнении (3.2) полагаем $v = const$. Тогда

$$\begin{aligned} M \frac{\overset{v=const}{dv}}{dt} &= -Mg - u_r \frac{dM}{dt} \Rightarrow \frac{dM}{M} = -\frac{g}{u_r} dt \Rightarrow M(t) = e^{-\frac{gt}{u_r}} C, \\ M(0) = M_0 &\Rightarrow C = M_0 \Rightarrow M(t) = e^{-\frac{gt}{u_r}} M_0 \Rightarrow \alpha = \frac{g}{u_r}. \end{aligned}$$

Заметим, что если относительная скорость истечения газов направлена в сторону движения тела, то

$$-u_r \frac{dM}{dt} + Mg = 0 \Rightarrow \frac{dM}{M} = \frac{g}{u_r} dt \Rightarrow M(t) = e^{\frac{gt}{u_r}} M_0.$$

В этом случае равномерное движение возможно, когда масса растет.

2.5. Вертикальное движение тяжелой нити

На столе высоты h находится тонкая, однородная, плотности ρ и длиной l ($l > h$) нерастяжимая нить. В начальный момент времени со стола свешивается бесконечно малый кусок нити длиной dx . Весь процесс движения нити разобьем на три этапа.

Первый длится от начального момента до тех пор, пока свешивающийся конец нити не коснется пола (см. **рис. 4**).

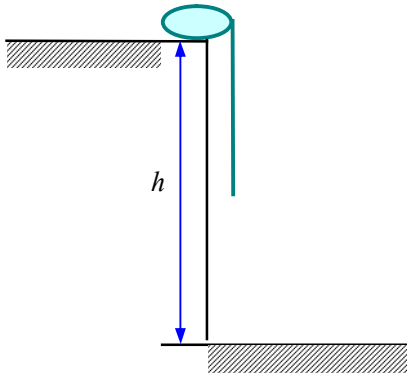


Рис. 4

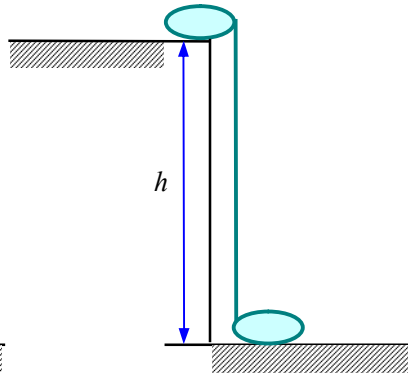


Рис. 5

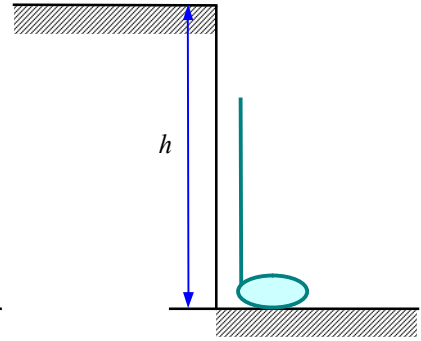


Рис. 6

Второй этап начинается в момент окончания первого, а заканчивается, когда второй конец нити, находящийся на столе, оказывается на краю стола, т.е. когда вся нить сматывается с поверхности стола (рис. 5).

Наконец, третий этап начинается в момент окончания второго, а заканчивается в момент падения второго конца нити на пол (рис. 6).

На каждом из перечисленных этапов свешивающаяся часть нити представляет собой систему материальных точек переменного состава, к которой присоединяются точки нити, сходящие с поверхности стола, и отсоединяются точки нити, падающие на пол. Заметим, что свешивающаяся часть нити движется поступательно, что позволяет считать ее материальной точкой переменной массы.

Первый этап движения нити. Направим координатную ось вертикально вниз (рис. 7).

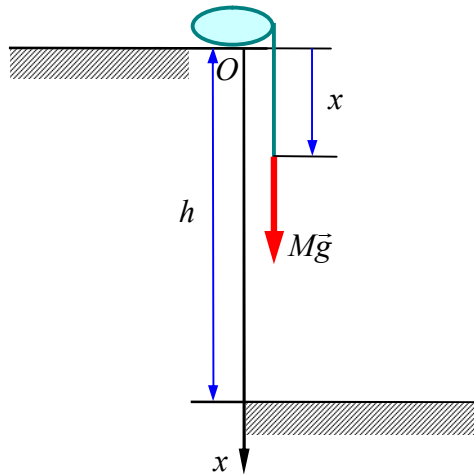


Рис. 7

Длину свешивающейся части нити обозначим через x ($x < h$). Примем, что

$$t_0 = 0, \quad x(t_0) = 0, \quad \dot{x}(t_0) = 0.$$

Масса свешивающейся части нити равна $M = \rho x$. Относительная скорость присоединяющихся частиц здесь определяется равенством

$$\bar{u}_{2r} = \bar{0} - \bar{v} = -\bar{v},$$

где \bar{v} – скорость свешивающейся части нити. Отсоединяющихся частиц нет. Тогда

$$\begin{aligned} M(t) &= M_0 - \overbrace{M_1(t)}^{=0} + M_2(t) \Rightarrow \\ M(t) &= M_0 + M_2(t). \end{aligned}$$

Запишем дифференциальное уравнение движения нити:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{v}}{dt} M &= \overbrace{F^{(e)}}^{M\bar{g}} - \overbrace{\frac{dM_1}{dt}}^{=0} \bar{u}_{1r} + \overbrace{\frac{dM_2}{dt}}^{\frac{dM}{dt}} \bar{u}_{2r} \Rightarrow \\ \frac{d\bar{v}}{dt} \overbrace{M}^{\rho x} &= \overbrace{M}^{\rho x} \bar{g} + \overbrace{\frac{dM}{dt}}^{\rho x} \overbrace{\bar{u}_{2r}}^{-\bar{v}} \Rightarrow \\ (\rho x) \frac{d\bar{v}}{dt} &= (\rho x) \bar{g} - \bar{v} \frac{d(\rho x)}{dt} \Rightarrow \\ x \frac{d\bar{v}}{dt} &= x\bar{g} - \bar{v} \overbrace{\frac{dx}{dt}}^{=v}. \end{aligned}$$

Спроецируем последнее уравнение на ось Ox :

$$x \frac{dv}{dt} = gx - v^2, \quad x(0) = 0. \quad (1)$$

Решение $x(t) \equiv 0$ во внимание не принимаем. В уравнении (1) перейдем к независимой переменной x

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \overbrace{\frac{dx}{dt}}^v = v \frac{dv}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d(v)^2}{dx}$$

и введем новую неизвестную переменную $y = v^2$. Имеем

$$\begin{aligned} x \overbrace{\frac{d(v)^2}{dt}}^{\frac{1}{2} \frac{d(v)^2}{dx}} &= gx - v^2 \Rightarrow \frac{x}{2} \overbrace{\frac{d(v^2)}{dx}}^y + \overbrace{v^2}^{\frac{y}{2}} = gx \Rightarrow \\ \frac{x}{2} \frac{dy}{dx} + y &= gx \Rightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = 2g. \end{aligned}$$

Общее решение однородного уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{y}}{dx} + \frac{2\hat{y}}{x} &= 0 \Rightarrow \frac{d\hat{y}}{dx} = -\frac{2\hat{y}}{x} \Rightarrow \\ \frac{d\hat{y}}{\hat{y}} &= -2 \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln \hat{y} = -2 \ln x + \ln C \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\hat{y}(x, C) = \frac{C}{x^2}.$$

Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $y^0 = Ax$. Тогда

$$\frac{\overbrace{dy}^A}{dx} + \frac{2\overbrace{y}^{Ax}}{x} = 2g \Rightarrow A + 2A = 2g \Rightarrow A = \frac{2}{3}g \Rightarrow$$

$$y^0 = \frac{2}{3}gx.$$

Общее решение исходного (неоднородного) уравнения

$$\overbrace{y^2}^{v^2}(x, C) = \overbrace{\hat{y}(x, C)}^{\frac{C}{x^2}} + \overbrace{y^0(x)}^{\frac{2}{3}gx} = \frac{C}{x^2} + \frac{2}{3}gx \Rightarrow$$

$$v^2(x) = \frac{C}{x^2} + \frac{2}{3}gx.$$

Из начальных условий $v(0) = 0$ следует, что

$$C = 0 \Rightarrow v^2(x) = \frac{2}{3}gx.$$

Находим закон изменения переменной $x = x(t)$:

$$v = \sqrt{\frac{2}{3}gx} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{3}gx} \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{2}{3}g} dt \Rightarrow$$

$$2\left(\sqrt{x} - \overbrace{\sqrt{x_0}}^{=0}\right) = t\sqrt{\frac{2}{3}g} \Rightarrow 2\sqrt{x} = t\sqrt{\frac{2}{3}g} \Rightarrow$$

$$x(t) = \frac{1}{6}gt^2.$$

Первый этап заканчивается в момент времени t_1 , когда $x(t_1) = h$. Отсюда

$$h = \frac{1}{6}gt_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{6h}{g}}.$$

Нить в конце первого этапа приобретает скорость

$$v_1 = \sqrt{\frac{2}{3}gx} \Big|_{x=h} = \sqrt{\frac{2}{3}gh}.$$

Второй этап движения нити. С момента времени t_1 начинается второй этап движения нити (см. рис. 8).

В движении находится отрезок нити постоянной длины h . Абсолютная скорость присоединяющихся частиц \bar{u}_2 равна нулю, а отделяющихся \bar{u}_1 – скорости нити. Таким образом,

$$\bar{u}_1 = \bar{v}, \quad \bar{u}_2 = 0 \Rightarrow \bar{u}_{1r} = 0, \quad \bar{u}_{2r} = -\bar{v}.$$

Уравнение движения нити принимает вид

$$\frac{d\bar{v}}{dt}M = \overbrace{\bar{F}^{(e)}}^{Mg} - \frac{dM_1}{dt}\overbrace{\bar{u}_{1r}}^0 + \frac{dM_2}{dt}\overbrace{\bar{u}_{2r}}^{-\bar{v}} \Rightarrow$$

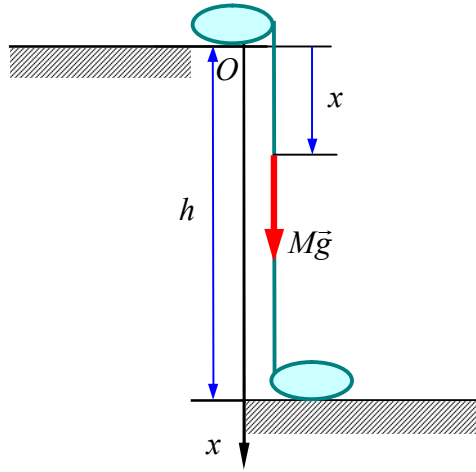


Рис. 8

$$M \frac{d\bar{v}}{dt} = M\bar{g} - \frac{dM_2}{dt} \bar{v}. \quad (2)$$

Начало второго этапа примем за начало отсчета времени, т.е. за 0. Обозначим через x длину той части нити, которая сошла с края столешницы к моменту времени t . Тогда

$$M_1 = M_2 = \rho x, \quad M = \rho h = \text{const.}$$

Из (2) выводим

$$\begin{aligned} \frac{\rho h}{M} \frac{d\bar{v}}{dt} &= \frac{\rho h}{M} \bar{g} - \frac{d \overbrace{M_2}^{\rho x}}{dt} \bar{v} \Rightarrow \\ \rho h \frac{d\bar{v}}{dt} &= \rho h \bar{g} - \frac{d \rho x}{dt} \bar{v}. \end{aligned} \quad (3)$$

Проецируем (3) на ось Ox :

$$\begin{aligned} \rho h \frac{dv}{dt} &= \rho hg - \rho \frac{dx}{dt} v \Rightarrow h \frac{dv}{dt} = hg - v^2 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{1}{h} \left(\overbrace{gh}^{a^2} - v^2 \right) \Rightarrow \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{1}{h} (a^2 - v^2). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь обозначено $a^2 = gh$. Делим переменные в (4) и интегрируем с начальными условиями $v(0) = v_1 = \sqrt{\frac{2}{3}gh}$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{dv}{a^2 - v^2} &= \frac{1}{h} dt \Rightarrow \int_{v_1}^v \frac{dv}{a^2 - v^2} = \int_0^t \frac{1}{h} dt \Rightarrow \\ \frac{1}{2a} \ln \frac{a+v}{a-v} - \frac{1}{2a} \ln \frac{a+v_1}{a-v_1} &= \frac{1}{h} t \Rightarrow \\ \ln \frac{a+v}{a-v} - \ln \frac{1}{n} &= \frac{2a}{h} t \Rightarrow \frac{a+v}{a-v} = \frac{1}{n} e^{\frac{2a}{h} t} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$v = a \frac{e^{\frac{2a}{h}t} - n}{e^{\frac{2a}{h}t} + n} = a \frac{e^{\frac{a}{h}t} - ne^{-\frac{a}{h}t}}{e^{\frac{a}{h}t} + ne^{-\frac{a}{h}t}}, \quad (5)$$

где

$$n = \frac{\sqrt{gh} - \sqrt{\frac{2}{3}gh}}{\sqrt{gh} + \sqrt{\frac{2}{3}gh}} = \frac{1 - \sqrt{\frac{2}{3}}}{1 + \sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \approx 0.1.$$

Определим длительность второго этапа. В силу (5) выводим

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a \frac{e^{\frac{a}{h}t} - ne^{-\frac{a}{h}t}}{e^{\frac{a}{h}t} + ne^{-\frac{a}{h}t}} \Rightarrow \\ x(t) &= a \int_0^t \frac{e^{\frac{a}{h}t} - ne^{-\frac{a}{h}t}}{e^{\frac{a}{h}t} + ne^{-\frac{a}{h}t}} dt = h \int_0^t \frac{d\left(e^{\frac{a}{h}t} + ne^{-\frac{a}{h}t}\right)}{e^{\frac{a}{h}t} + ne^{-\frac{a}{h}t}} = \\ &= h \ln \left[e^{\frac{a}{h}t} + ne^{-\frac{a}{h}t} \right] - h \ln(1+n) = h \ln \left[\frac{e^{\frac{a}{h}t} + ne^{-\frac{a}{h}t}}{1+n} \right]. \end{aligned}$$

Момент t_2 окончания второго этапа находится из условия

$$x(t_2) = l - 2h.$$

Построим зависимость скорости v от x – длины той части нити, которая уже сошла с края столешницы с момента начала второго этапа:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{1}{h}(a^2 - v^2) \Rightarrow \frac{d(v^2)}{dx} = \frac{2}{h}(a^2 - v^2) \Rightarrow \\ -\frac{d(-v^2)}{(a^2 - v^2)} &= \frac{2}{h} dx \stackrel{x(0)=0}{\Rightarrow} -\int_{v_1}^v \frac{d(a^2 - v^2)}{(a^2 - v^2)} = \int_0^x \frac{2}{h} dx \Rightarrow \\ -\left[\ln(a^2 - v^2) - \ln(a^2 - v_1^2) \right] &= \frac{2}{h} x \Rightarrow \\ a^2 - v^2 &= (a^2 - v_1^2) e^{-\frac{2x}{h}} \Rightarrow \\ v^2 &= \overbrace{a^2}^{gh} - \left(\overbrace{a^2}^{gh} - \overbrace{v_1^2}^{\frac{2}{3}gh} \right) e^{-\frac{2x}{h}} = gh - \left(gh - \frac{2}{3}gh \right) e^{-\frac{2x}{h}} = a^2 \left(1 - \frac{1}{3} e^{-\frac{2x}{h}} \right). \end{aligned}$$

Заметим, что если $x \rightarrow \infty$, то

$$v \rightarrow v_{np} = a = \sqrt{gh}.$$

Третий этап движения нити. С момента времени $t_1 + t_2$ начинается третий этап движения нити. На этом этапе происходит только отделение материальных точек от падающей нити (см. рис. 9).

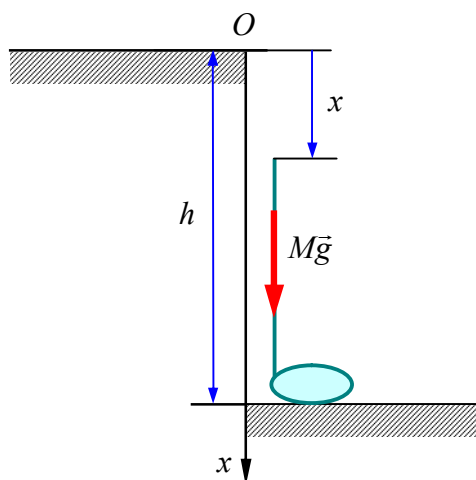


Рис. 9

Отсчет времени третьего этапа начнем с нуля. Величина x показана на **рис. 9**. Абсолютная скорость точек в процессе отделения равна \bar{v} , поэтому $\bar{u}_{1r} = 0$. Присоединяющихся частиц нет. Уравнение Мещерского принимает вид

$$\frac{d\bar{v}}{dt} M = \overbrace{\bar{F}^{(e)}}^{M\bar{g}} - \frac{dM_1}{dt} \overbrace{\bar{u}_{1r}}^0 + \frac{dM_2}{dt} \overbrace{\bar{u}_{2r}}^0 \Rightarrow$$

$$M \frac{d\bar{v}}{dt} = M\bar{g} \Rightarrow \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{g}.$$

Спроецируем последнее равенство на ось Ox :

$$\frac{dv}{dt} = g \Rightarrow \overbrace{\frac{dx}{dt}}^{v(t)} = v_2 + gt \quad \overset{x(0)=0}{\Rightarrow} \quad x(t) = v_2 t + \frac{1}{2} g t^2.$$

Здесь v_2 – скорость нити в конце второго этапа. Таким образом, нить падает как свободная точка постоянной массы.

В предположении, что на втором этапе скорость падения нити достигла предельного значения

$$v_{np} = a = \sqrt{gh},$$

найдем ее скорость v_3 в конце третьего этапа

$$\overbrace{\frac{1}{2} \frac{dv^2}{dx}}^{\frac{1}{2} \frac{dv^2}{dx}} = g \Rightarrow \frac{1}{2} dv^2 = g dx \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} v^2 \Big|_a^{v_3} = g x \Big|_0^h \Rightarrow v_3^2 - a^2 = 2gh \Rightarrow$$

$$v_3 = \sqrt{a^2 + 2gh} = \sqrt{3gh}.$$

Замечание. И.В. Мещерский в своей магистерской диссертации «Динамика точки переменной массы» (1897 г.) отмечал: «Изменение массы, совершающееся непрерывно, рассматривается впервые, насколько мне известно, Кейли в статье “Об одном классе динами-

ческих задач”... Автор имеет в виду следующую задачу: определить движение тяжелой цепи, одна часть которой лежит на столе у самого края, а другая часть свешивается вниз и представляет движущуюся систему»¹. Как видно из формулировки задачи, это задача, которую мы только что рассмотрели, но решена она была в 1857 г. английским математиком А. Кейли другим методом. Приведенная выше задача известна сейчас как «Задача Кейли», или «Задача о движении опускающейся тяжелой цепи». Обычно в учебных пособиях приводят только первый этап движения.

Профессор А.А. Космодемьянский писал: «Диссертация Мещерского “Динамика точки переменной массы” и его работа “Уравнения движения точки переменной массы в общем случае” составляют надежный теоретический фундамент современной ракетодинамики. Все расчеты траекторий, скоростей, ускорений, вычисления сил по наблюдаемым свойствам реальных движений производятся на основе уравнений Мещерского»².

Вопросы для самоконтроля

1. Какая механическая система называется системой переменного состава?
2. Сформулируйте теорему об изменении количества движения для механической системы переменного состава.
3. Сформулируйте теорему об изменении кинетического момента для механической системы переменного состава.
4. Какие дифференциальные уравнения описывают движение системы переменного состава?
5. Запишите уравнения Мещерского.
6. Какая формула называется формулой Циолковского?
7. Какими уравнениями описывается движение ракеты вне поля сил?
8. Запишите динамические уравнения вертикального движения ракеты в однородном поле силы тяжести.
9. Решите задачу о максимальной длине активного участка вертикального полета ракеты в однородном поле силы тяжести.
10. Решите задачу о минимальном расходе топлива вертикального полета ракеты в однородном поле силы тяжести.
11. Решите задачу о равномерном движении вертикального полета ракеты в однородном поле силы тяжести.

¹ Мещерский И.В. Работы по механике тел переменной массы / предисл. и вступ. ст. проф. А.А. Космодемьянского. М.; Л.: Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1949. С.40.

² Там же. С.16.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика: учеб. пособие для университетов. М.: Наука, 1990. 416 с.
2. *Бухгольц Н.Н.* Основной курс теоретической механики. Ч. 1: Кинематика, статика, динамика материальной точки / перераб. и доп. С.М. Таргом. М.: Наука, 1972. 468 с.
3. *Бухгольц Н.Н.* Основной курс теоретической механики. Ч. 2: Динамика системы материальных точек / перераб. и доп. С.М. Таргом. М.: Наука, 1972. 332 с.
4. *Яблонский А.А., Никифорова В.М.* Курс теоретической механики: Статика. Кинематика. Динамика: учеб. для втузов. СПб.: Лань, 2001. 768 с.
5. *Мещерский И.В.* Задачи по теоретической механике: учеб. пособие для вузов / под ред. В.А. Пальмова, Д.Р. Меркина. СПб.: Лань, 2002. 448 с.
6. *Лутманов С.В., Остапенко Е.Н.* Теоретическая и прикладная механика. Кинематика: учеб. пособие / Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Электрон. дан. – Пермь, 2019. – 1 Мб; 114 с. – Режим доступа: <http://www.psu.ru/files/docs/science/books/uchebnie-posobiya/lutmanov-ostapenko-teoreticheskaya-i-prikladnaya-mekhanika.pdf>.
7. *Лутманов С.В., Остапенко Е.Н.* Теоретическая и прикладная механика. Основы динамики. Статика: учеб. пособие / Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Электрон. дан. – Пермь, 2020. – 1,55 Мб; 96 с. – Режим доступа: <http://www.psu.ru/files/docs/science/books/uchebnie-posobiya/lutmanov-ostapenko-teor-i-prikladnaya-mexanika-osnovy-dinamiki-statika.pdf>.
8. *Лутманов С.В., Остапенко Е.Н.* Теоретическая и прикладная механика. Динамика точки: учеб. пособие / Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Электрон. дан. – Пермь, 2020. – 1,25 Мб; 128 с. – Режим доступа: <http://www.psu.ru/files/docs/science/books/uchebnie-posobiya/lutmanov-ostapenko-teoreticheskaya-i-prikladnaya-mekhanika-dinamika-tochki.pdf>.
9. *Лутманов С. В.* Вариационное исчисление и теория оптимального управления в примерах и упражнениях: учеб. пособие / Перм. ун-т. Пермь, 2010. 200 с.

Учебное издание

Лутманов Сергей Викторович
Остапенко Елена Николаевна

Теоретическая и прикладная механика.
Динамика механических систем

Учебное пособие

Редактор *Л. А. Богданова*
Корректор *Л. И. Семицветова*
Компьютерная верстка и дизайн *Е. Н. Остапенко, С. В. Лутманов*

Объем данных 1,55 Мб
Подписано к использованию 28.12.2021

Размещено в открытом доступе
на сайте www.psu.ru
в разделе НАУКА / Электронные публикации
и в электронной мультимедийной библиотеке ELiS

Издательский центр
Пермского государственного
национального исследовательского университета
614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15