

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

В. А. Демин, Б. С. Марышев

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

*Допущено методическим советом
Пермского государственного национального
исследовательского университета в качестве
учебно-методического пособия для студентов
всех направлений подготовки бакалавров и специальностей
физического факультета, изучающих дисциплину
«Методы математической физики»*



Пермь 2021

УДК 53:51(075.8)

ББК 22.311я73

Д306

Демин В. А.

Д306 Методы математической физики : учебно-методическое пособие / В. А. Демин, Б. С. Марышев ; Пермский государственный национальный исследовательский университет. – Пермь, 2021. – 110 с.

ISBN 978-5-7944-3769-0

В первой части издания излагаются основные вопросы математической физики, касающиеся классификации дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных и методов их решения. Во второй части представлена теория интегральных преобразований Фурье и Лапласа, основы теории дробных производных и их приложение к описанию явления аномальной диффузии.

Предназначено для студентов всех направлений подготовки бакалавров и специальностей физического факультета, изучающих курс «Методы математической физики». Может использоваться как основное пособие для магистрантов направления «Нанотехнологии и микро-системная техника» при изучении спецкурса по аномальной диффузии.

УДК 53:51(075.8)

ББК 22.311я73

*Печатается по решению ученого совета физического факультета
Пермского государственного национального исследовательского университета*

Рецензенты: кафедра «Общая физика» Пермского национального исследовательского политехнического университета (зав. кафедрой – д-р физ.-мат. наук **А. В. Перминов**;
научный сотрудник лаборатории Вычислительной гидродинамики Института механики сплошных сред УрО РАН, канд. физ.-мат. наук **Л. С. Клименко**

ISBN 978-5-7944-3769-0

© ПГНИУ, 2021

© Демин В. А., Марышев Б. С., 2021

Содержание

Введение	5
1. Классификация уравнений в частных производных второго порядка	6
2. Эталонные уравнения в физике	15
2.1. Волновое уравнение (гиперболический тип)	15
2.2. Уравнение Пуассона (эллиптический тип)	20
2.3. Уравнение теплопроводности (параболический тип)	20
3. Общее решение одномерного волнового уравнения	22
4. Постановка стандартных краевых задач	24
5. Метод Даламбера	26
6. Дисперсия волн	27
7. Метод разделения переменных в применении к задаче о свободных колебаниях струны	28
8. Уравнения параболического типа. Типы краевых задач	32
9. Метод разделения переменных для уравнения параболического типа	33
10. Решение уравнения параболического типа в безграничном пространстве	35
10.1. Дельта-функция	36
10.2. Фундаментальное решение уравнения теплопроводности. .	39
11. Оседание наночастиц в неоднородной по температуре несущей жидкости при наличии термодиффузии	41
11.1. Эволюция распределения температуры	44
11.2. Динамика оседания частиц	45
11.3. Анализ решения	46
12. Уравнения эллиптического типа. Задача Дирихле	49
13. Специальные функции. Цилиндрические волны	53
14. Интегральные преобразования	57
14.1. Преобразование Фурье	59
14.2. Преобразование Лапласа	61
14.3. Гамма- и бета-функции	62
15. Элементы теории вероятностей	65
15.1. Функция распределения вероятности	65
15.2. Характеристическая функция	68

15.3. Предельные распределения	75
16. Диффузионные процессы	86
16.1. Случайные скачки	86
16.2. Понятие дробной производной функции	91
16.3. Дробные производные Римана – Лиувилля, Капуто и Рисса	96
16.4. Субдиффузия	100
16.5. Супердиффузия	103
Заключение.	106
Список литературы	108

Введение

Методы математической физики представляют собой набор наиболее общих теоретических подходов, посредством которых излагаются самые разнообразныe законы природы. Описание физических явлений подразумевает использование таких разнородных математических дисциплин, как теория дифференциальных уравнений в частных производных, интегральное исчисление, линейная алгебра, дифференциальная геометрия, тензорный анализ, обыкновенные дифференциальные уравнения и много другое [1, 2].

В рамках простейших представлений наше пространство характеризуется наличием трех измерений. Помимо всего прочего, окружающий нас мир меняется с течением времени, а материальные величины чаще всего полагаются непрерывными в пространстве. В результате математические законы, описывающие различные физические явления, должны в первую очередь представляться уравнениями в частных производных. В общем случае в качестве переменных в них должны выступать три пространственные и одна временная координаты. Большое число явлений в физике описываются уравнениями в частных производных первого порядка, однако наиболее часто приходится сталкиваться с уравнениями второго порядка. Эти дифференциальные уравнения при максимальном упрощении математически строго подразделяются на классы, каждый из которых демонстрирует единые неуничтожимые свойства на первый взгляд разных по своей природе физических систем. Удивительная общность каждого из этих уравнений и определяет их фундаментальное значение для физики.

Различным подразделам методов математической физики посвящено достаточно много изданий, каждое из которых отражает свою сторону и прикладной аспект этой широкой области. В частности, ранее по данной тематике вышли оригинальные учебные пособия преподавателей Пермского государственного национального исследовательского университета. Так, в учебных пособиях [3, 4] упор делается на изучении уравнений с переменными коэффициентами в криволинейных координатах, которые, как правило, имеют решение в виде специальных функций. В результате в указанных пособиях большой объем занимает скрупулезный анализ функций Бесселя и полиномов Лежандра, а также их применение при решении частных задач. В источнике [5] изложен весь базовый курс методов математической физики, но в то же время существенное внимание уделяется применению современного программного обеспечения для решения различных актуальных на сегодняшний день краевых задач математической физики. В отличие от работ [3–5], предлагаемое учебное пособие ограничено

описанием фундаментальных математических свойств дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Особое внимание уделено обсуждению новых достижений в данной области математики, а именно производным дробного порядка. Приведены типичные решения уравнений с дробными производными и проанализированы важные физические следствия, такие как *суб-* и *супердиффузия*.

1. Классификация уравнений в частных производных второго порядка

Решение уравнений для функций произвольного числа переменных представляет собой чрезвычайно сложную задачу. Исходя из этого, рассмотрим сначала дифференциальные уравнения в частных производных для функций двух переменных. С точки зрения приложений это позволяет проанализировать, в частности, поведение одномерной, непрерывно распределенной системы во времени. В этом случае имеем одну временную переменную t и одну пространственную координату x . Если в качестве обеих переменных выступают пространственные координаты x и y , то искомая функция будет характеризовать двумерное стационарное распределение какой-либо величины на плоскости. Ниже два независимых аргумента будем обозначать абстрактными переменными x и y . Этот подход позволит сохранить определенную общность наших рассуждений. Далее в ходе изложения вопроса о классификации уравнений второго порядка будем следовать логике классического учебника по математической физике [6]. Сначала определимся с отдельными исходными понятиями и условимся в отношении некоторых базовых положений.

В общем случае уравнения в частных производных второго порядка с двумя переменными x, y представляют собой математическую связь в виде равенства между неизвестной функцией $u(x, y)$ и ее всеми частными производными до второго порядка включительно:

$$F(x, y, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0. \quad (1.1)$$

Здесь и далее в этой главе нижний буквенный индекс означает дифференцирование по соответствующей переменной. Однако в других подразделах пособия нижний индекс может нести иной смысл. Таким образом, чтобы однозначно воспринимать материал, необходимо следить за соответствующими пояснениями в тексте.

Уравнение называется *линейным относительно старших производных*, если оно имеет вид

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F_1(x, y, u_x, u_y) = 0. \quad (1.2)$$

Здесь F_1 – произвольная функция соответствующих аргументов. Заметим, что в общем случае коэффициенты a_{ij} в уравнении (1.2) могут зависеть от обеих переменных x, y .

Уравнение (1.1) называется *линейным*, если оно линейно как относительно старших производных, так и относительно самой функции u , а также ее первых производных u_x, u_y :

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f = 0, \quad (1.3)$$

где $a_{ij}(x, y)$, $b_i(x, y)$, $c(x, y)$, $f(x, y)$.

Если множители a_{ij} , b_i , c не зависят от переменных x, y , то уравнение называется *линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами*. В частном случае $f = 0$ уравнение называется однородным.

Допустим, имеются некие преобразования координат $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, допускающие обратное. Выясним, можно ли как-то выбрать ξ и η так, чтобы рассматриваемое уравнение в этих переменных имело наиболее простую форму? Ответ на этот вопрос дадим для линейного уравнения второго порядка относительно старших производных (1.2):

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F_1 = 0.$$

Перейдем к новым координатам. Для этого вычислим по правилам математического анализа [7] все производные в терминах новых переменных ξ и η . Сначала определим первые производные

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial \xi} \xi_x + \frac{\partial u}{\partial \eta} \eta_x, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial \xi} \xi_y + \frac{\partial u}{\partial \eta} \eta_y.$$

Затем выпишем выражения для вторых производных. Вторая производная по x

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \left(\frac{\partial}{\partial \xi} u_x \right) \xi_x + \frac{\partial u}{\partial \xi} \xi_{xx} + \left(\frac{\partial}{\partial \eta} u_x \right) \eta_x + \frac{\partial u}{\partial \eta} \eta_{xx} = \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi} (u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x) \xi_x + u_\xi \xi_{xx} + \frac{\partial}{\partial \eta} (u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x) \eta_x + u_\eta \eta_{xx} = \\ &= u_{\xi\xi} \xi_x^2 + u_{\eta\xi} \eta_x \xi_x + u_\xi \xi_{xx} + u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_\eta \eta_{xx}. \end{aligned}$$

В результате имеем

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2u_{\eta\xi} \eta_x \xi_x + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx} + u_{\eta\eta} \eta_x^2.$$

Точно так же вычисляется вторая производная по y :

$$\begin{aligned}
u_{yy} &= \left(\frac{\partial}{\partial \xi} u_y \right) \xi_y + u_\xi \xi_{yy} + \left(\frac{\partial}{\partial \eta} u_x \right) \eta_x + u_\eta \eta_{yy} = \\
&= \frac{\partial}{\partial \xi} (u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y) \xi_y + u_\xi \xi_{yy} + \frac{\partial}{\partial \eta} (u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y) \eta_y + u_\eta \eta_{yy} = \\
&= u_{\xi\xi} \xi_y^2 + u_{\eta\xi} \eta_y \xi_y + u_\xi \xi_{yy} + u_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + u_{\eta\eta} \eta_y^2 + u_\eta \eta_{yy}.
\end{aligned}$$

А именно:

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2u_{\eta\xi} \eta_y \xi_y + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy} + u_{\eta\eta} \eta_y^2.$$

Вторая смешанная производная определяется равенством

$$\begin{aligned}
u_{xy} &= \frac{\partial}{\partial x} (u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y) = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} u_x \right) \xi_y + u_\xi \xi_{xy} + \left(\frac{\partial}{\partial \eta} u_x \right) \eta_y + u_\eta \eta_{xy} = \\
&= (u_{\xi\xi} \xi_x + u_{\eta\xi} \eta_x) \xi_y + u_\xi \xi_{xy} + (u_{\xi\eta} \xi_x + u_{\eta\eta} \eta_x) \eta_y + u_\eta \eta_{xy} = \\
&= u_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + u_{\eta\xi} (\eta_x \xi_y + \eta_y \xi_x) + u_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy}.
\end{aligned}$$

Далее подставляем полученные выражения для вторых производных в уравнение (1.2) и группируем слагаемые:

$$\begin{aligned}
&u_{\xi\xi} (a_{11} \xi_x^2 + 2a_{12} \xi_x \xi_y + a_{22} \xi_y^2) + \\
&\quad + u_{\xi\eta} (2a_{11} \eta_x \xi_x + 2a_{12} (\eta_x \xi_y + \eta_y \xi_x) + 2a_{22} \eta_y \xi_y) + \\
&\quad + u_{\eta\eta} (a_{11} \eta_x^2 + 2a_{12} \eta_x \eta_y + a_{22} \eta_y^2) + \bar{F} = 0.
\end{aligned}$$

С учетом новых обозначений это уравнение приобретает вид

$$\bar{a}_{11} u_{\xi\xi} + 2\bar{a}_{12} u_{\xi\eta} + \bar{a}_{22} u_{\eta\eta} + \bar{F} = 0, \quad (1.4)$$

где новые коэффициенты выражаются формулами

$$\begin{aligned}
\bar{a}_{11} &= a_{11} \xi_x^2 + 2a_{12} \xi_x \xi_y + a_{22} \xi_y^2, \\
\bar{a}_{12} &= a_{11} \eta_x \xi_x + a_{12} (\eta_x \xi_y + \eta_y \xi_x) + a_{22} \eta_y \xi_y, \\
\bar{a}_{22} &= a_{11} \eta_x^2 + 2a_{12} \eta_x \eta_y + a_{22} \eta_y^2.
\end{aligned}$$

Заметим, что если $F_1(x, y, u, u_x, u_y)$ является линейной функцией, то $\bar{F}(\xi, \eta, u_\xi, u_\eta, u)$ тоже линейна по соответствующим переменным:

$$F = b_1 u_x + b_2 u_y + Cu + f, \quad \bar{F} = \beta_1 u_\xi + \beta_2 u_\eta + \gamma u + \delta.$$

Выберем новые переменные ξ и η так, чтобы уравнение (1.4) имело наиболее простой вид. Разумеется, этот выбор не должен приводить к логическим противоречиям. Для начала попытаемся подобрать переменные ξ и η так, чтобы удовлетворялось условие для одно-

го коэффициента $\bar{a}_{11} = 0$. Очевидно, что наложение этого условия касается только функции $\xi = \varphi(x, y)$. Выполнение требования $\bar{a}_{11} = 0$ приводит к нелинейному уравнению с частными производными первого порядка

$$a_{11}Z_x^2 + 2a_{12}Z_xZ_y + a_{22}Z_y^2 = 0, \quad (1.5)$$

где a_{11} , a_{12} , a_{22} – известные функции исходного уравнения (1.2). Допустим, $Z = \varphi(x, y)$ – какое-нибудь частное решение этого уравнения. Иными словами, если $\xi = \varphi(x, y)$, то коэффициент \bar{a}_{11} , очевидно, будет равен нулю. Таким образом, поставленный вопрос о возможности упрощения уравнения (1.2) неразрывно связан с решением уравнения (1.5). Далее докажем одно важное утверждение. А именно: если $Z = \varphi(x, y)$ является частным решением уравнения (1.5), то $\varphi(x, y) = C$ представляет собой общий интеграл обыкновенного дифференциального уравнения

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2 = 0. \quad (1.6)$$

Справедливо и *обратное утверждение*: если $\varphi(x, y) = C$ является общим интегралом уравнения (1.6), то функция $Z = \varphi(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1.5).

Действительно, если $Z = \varphi(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1.5), то для него справедливо

$$a_{11} \left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \right)^2 - 2a_{12} \left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \right) + a_{22} = 0. \quad (1.7)$$

Это равенство выполняется в каждой точке x, y , где задано решение. С другой стороны, если $\varphi(x, y) = C$, то переменные x и y не являются независимыми и одна из этих переменных может быть выражена через другую равенством $y = f(x, C)$. Полный дифференциал общего интеграла $\varphi(x, y) = C$, очевидно, равен нулю. В результате приходим к заключению, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y}.$$

Подставляя это соотношение в уравнение (1.7), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для зависимости $y(x)$:

$$a_{11} \left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \right)^2 - 2a_{12} \left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \right) + a_{22} = a_{11} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2a_{12} \frac{dy}{dx} + a_{22} = 0.$$

Полученное уравнение называют характеристическим, а его интегралы являются характеристиками:

$$a_{11} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2a_{12} \frac{dy}{dx} + a_{22} = 0. \quad (1.8)$$

Оно дает два корня, каждый из которых представляет собой некоторое уравнение для зависимости $y(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \quad (1.9)$$

Очевидно, что два корня в выражениях (1.9) дают, вообще говоря, разные функции $y(x)$, т.е. независимые общие интегралы, удовлетворяющие условию (1.6). Сначала, полагая $\xi = \varphi(x, y)$, обращаем в ноль \bar{a}_{11} . Далее замечаем, что формально уравнение для \bar{a}_{11} тождественно таковому для \bar{a}_{22} .

Если $\psi(x, y) = C_2$ является другим общим интегралом уравнения (1.6), то, полагая $\eta = \psi(x, y)$, получаем равным нулю еще один коэффициент \bar{a}_{22} . В результате проблема количества независимых интегралов и их значений в уравнении (1.8) сводится к анализу корней уравнений (1.9). И здесь, как мы видим, имеется несколько возможностей:

1. Если $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$, то правые части в уравнениях (1.9) действительны и различны. Вырождение отсутствует. Уравнение (1.2) с таким набором коэффициентов a_{11} , a_{12} , a_{22} называется уравнением *гиперболического типа*. К какому виду оно сводится, будет показано ниже.

2. При $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ правые части в уравнениях (1.9) комплексны, причем корни по отношению друг к другу являются комплексно-сопряженными. Это условие дает уравнение *эллиптического типа*.

3. В случае $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ общий интеграл один, и имеет место вырождение, приводящее к уравнению *параболического типа*.

Проанализируем все эти варианты по отдельности.

1. Уравнению гиперболического типа отвечает $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$; имеем общие интегралы:

$$\varphi(x, y) = C_1, \quad \psi(x, y) = C_2.$$

Полагая независимые переменные

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y),$$

приходим к следствию

$$\bar{a}_{11} = 0, \quad \bar{a}_{22} = 0,$$

что дает уравнение

$$u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta). \quad (1.10)$$

Для правой части Φ имеет место обозначение

$$\Phi = -\frac{\bar{F}}{2\bar{a}_{12}}.$$

Уравнение (1.10) представляет собой так называемую *каноническую форму* записи уравнения гиперболического типа. Можно показать, что данная запись эквивалентна другому виду. Введем новые переменные:

$$\xi = \alpha + \beta, \quad \eta = \alpha - \beta.$$

Это линейная связь между парой переменных ξ, η с одной стороны и α, β – с другой. Для полноты выпишем обратные преобразования:

$$\alpha = \frac{1}{2}(\xi + \eta), \quad \beta = \frac{1}{2}(\xi - \eta).$$

Перейдем к новым переменным α и β . Для этого, как обычно, преобразуем производные

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial \alpha} \alpha_\xi + \frac{\partial u}{\partial \beta} \beta_\xi = \frac{1}{2}(u_\alpha + u_\beta), \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial \alpha} \alpha_\eta + \frac{\partial u}{\partial \beta} \beta_\eta = \frac{1}{2}(u_\alpha - u_\beta).$$

В результате смешанная производная в терминах новых переменных выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}(u_{\alpha\alpha} - u_{\alpha\beta}) + \frac{1}{2}(u_{\alpha\beta} - u_{\beta\beta}) \right) = \frac{1}{4}(u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta}).$$

Отсюда имеем

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Phi_1, \quad (1.11)$$

где $\Phi_1 = 4\Phi$. Уравнение (1.11) часто встречается в самых разных разделах физики и известно как одномерное *волновое уравнение*.

2. Рассмотрим теперь уравнение параболического типа. Для него справедливо условие

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0.$$

Иными словами, имеет место вырождение в (1.9), а коэффициенты дополнительно связаны равенством

$$a_{12} = \sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}. \quad (1.12)$$

У уравнения (1.6) имеется всего один интеграл:

$$\xi = \varphi(x, y),$$

при наличии которого можно добиться выполнения условия

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = \left(\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y\right)^2 = 0.$$

В то же время $\eta = \psi(x, y)$ – любая функция, не зависящая от $\varphi(x, y)$, и для нее $\bar{a}_{22} \neq 0$.

Теперь вычислим коэффициент \bar{a}_{12} . Оказывается, что при наложении условия (1.12), несмотря на то, что η – произвольная функция, он тоже равен нулю:

$$\begin{aligned} \bar{a}_{12} &= a_{11}\xi_x\eta_x + 2a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y = \\ &= \left(\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y\right)\left(\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{22}}\eta_y\right) = 0. \end{aligned}$$

Окончательно приходим к уравнению вида

$$u_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta), \quad (1.13)$$

где правая часть переопределена следующим образом:

$$\Phi = -\frac{\bar{F}}{2\bar{a}_{22}}.$$

3. Осталось выяснить канонический вид последнего эталонного уравнения. Оно называется уравнением *эллиптического типа*. Как уже оговаривалось, в этом случае $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ и правые части в уравнениях (1.9) являются комплексно-сопряженными. Если $\varphi(x, y) = C_1$ – комплексный интеграл одного из уравнений (1.9), то функция $\varphi^*(x, y) = C_2$ является интегралом второго сопряженного уравнения. В результате две независимые переменные $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \varphi^*(x, y)$ приводят нас к такому же формально уравнению, как гиперболическое уравнение (1.10). Правда, имеется существенная разница: переменные ξ и η – комплексны, вследствие чего возникает вопрос об интерпретации полученного решения. Выделим в переменных ξ и η вещественную и мнимую части:

$$\xi = \alpha + i\beta, \quad \eta = \alpha - i\beta.$$

Как и предполагается, переменные ξ и η связаны друг с другом операцией комплексного сопряжения, т.е.

$$\varphi = \alpha + i\beta, \quad \varphi^* = \alpha - i\beta.$$

Обратные преобразования приводят к

$$\alpha = \frac{\varphi + \varphi^*}{2}, \quad \beta = \frac{\varphi - \varphi^*}{2i}.$$

Вычислим сначала первые производные в терминах новых переменных

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \xi} &= \frac{\partial u}{\partial \alpha} \alpha_\xi + \frac{\partial u}{\partial \beta} \beta_\xi = \frac{1}{2}(u_\alpha - iu_\beta), \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} &= \frac{\partial u}{\partial \alpha} \alpha_\eta + \frac{\partial u}{\partial \beta} \beta_\eta = \frac{1}{2}(u_\alpha + iu_\beta). \end{aligned}$$

Вторая смешанная производная имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (u_\alpha - iu_\beta) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\eta}{\partial \alpha} - i \frac{\partial u_\eta}{\partial \beta} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} (u_\alpha + iu_\beta) - i \frac{\partial}{\partial \beta} (u_\alpha + iu_\beta) \right) = \frac{1}{4} (u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta}). \end{aligned}$$

Иными словами, в терминах переменных α и β мы приходим к уравнению

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \Phi. \quad (1.14)$$

В дополнение необходимо указать на одно важное обстоятельство. Тип уравнения в определенной точке не меняется в ходе преобразования переменных. Докажем отмеченное свойство инвариантности

$$\bar{a}_{12}^2 - \bar{a}_{11}\bar{a}_{22} = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22}) (\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x)^2.$$

Якобиан преобразования переменных выступает в квадрате, поэтому знак дискриминанта корней (1.9) сохраняется в ходе преобразований. С другой стороны, при переходе от одной точки к другой уравнение может отвечать разным типам.

По аналогии производится классификация уравнений для функций большего числа переменных. Пусть имеется уравнение второго порядка для неизвестной функции u , которая зависит от n переменных:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\{ a_{ij}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\} + F \left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) = 0.$$

Оно может быть классифицировано в заданной точке $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$ по аналогии с соответствующей квадратичной формой:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_1^0, \dots, x_n^0) v_i v_j.$$

Из линейной алгебры известно, что невырожденным линейным преобразованием

$$s_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} v_j, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \det \|A_{ij}\| \neq 0$$

квадратичная форма всегда может быть приведена к каноническому виду

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i s_i^2.$$

При этом, согласно соответствующей теореме линейной алгебры, число положительных, отрицательных и равных нулю коэффициентов λ_i в каноническом виде квадратичной формы является инвариантом и не зависит от линейного преобразования. На основе этого и производится классификация уравнений. Она справедлива для определенной точки пространства $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$:

1. Если в этой точке квадратичная форма в каноническом виде имеет все коэффициенты одного знака, то уравнение в точке M_0 называется уравнением *эллиптического типа*.

2. Если в точке M_0 квадратичная форма в каноническом виде имеет коэффициенты различных знаков, но при этом все они отличны от нуля, то уравнение в этой точке называется уравнением *гиперболического типа*.

3. Если в точке M_0 квадратичная форма в каноническом виде имеет хотя бы один коэффициент, равный нулю, то уравнение в этой точке называется уравнением *параболического типа*.

Нетрудно увидеть, что в случае функций многих переменных в отношении уравнения второго порядка может быть проведена более подробная классификация (необходимость которой в случае двух независимых переменных не возникает):

I. Гиперболический тип может быть дополнительно классифицирован следующим образом:

1. *Нормальный гиперболический тип*, если один коэффициент одного знака, а остальные другого.

2. *Ультрагиперболический тип*, если коэффициентов как одного знака, так и другого более чем один.

II. Параболический тип может быть дополнительно классифицирован следующим образом:

1. *Эллиптически-параболический тип*, если только один коэффициент равен нулю, а остальные имеют один знак.

2. *Гиперболически-параболический тип*, если только один коэффициент равен нулю, а остальные имеют различные знаки. Аналогично гиперболическому типу он может быть разделен следующим образом:

2.1. *Нормальный гиперболически-параболический тип*.

2.2. *Ультрагиперболически-параболический тип*.

3. *Ультрапараболический тип*, если более чем один коэффициент равен нулю. Здесь также возможна дальнейшая классификация в зависимости от знаков не равных нулю коэффициентов.

2. Эталонные уравнения в физике

Проанализируем, какие физические процессы описываются теми или иными эталонными уравнениями, которые были определены в предыдущей главе.

2.1. Волновое уравнение (гиперболический тип)

Рассмотрим движение газа с точки зрения законов механики сплошных сред. Одной из главных особенностей всех газов является их сжимаемость. Следуя последовательности рассуждений работы [8], выясним, к чему приводит наличие у среды свойства сжимаемости. В первом приближении будем пренебрегать влиянием вязкости на движение газа. Сначала получим совокупность общих законов, справедливых при описании его движения. Эти важнейшие уравнения носят название *законов газодинамики*.

Очевидно, что выделенный элемент объема обладает некоторой массой и его движение подчиняется законам динамики Ньютона. Согласно второму закону Ньютона, для выделенного бесконечно малого объема имеем

$$dm \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f},$$

где \vec{f} – результирующая сила, действующая на элемент массой dm , у которого имеется некий объем dV .

На произвольный выделенный объем V сплошной среды действуют силы давления со стороны соседних элементов. Результирующая сила находится как интеграл от давления p по поверхности рассматриваемого объема:

$$\vec{F} = - \oint_S p d\vec{S}.$$

Домножим левую и правую части этого равенства на постоянный произвольный вектор \vec{a} и применим к правой части равенства теорему Гаусса – Остроградского [9], которая позволяет преобразовать интеграл от некоторого векторного поля по поверхности в интеграл от дивергенции этого векторного поля по объему, ограниченному этой поверхностью:

$$\vec{a}\vec{F} = -\oint_S p\vec{a}d\vec{S} = -\int_V \operatorname{div}(p\vec{a})dV = -\vec{a}\int_V \nabla p dV .$$

Поскольку \vec{a} – произвольный, отличный от нуля вектор, равенство справедливо, если

$$\vec{F} = -\int_V \nabla p dV .$$

Иными словами, на бесконечно малый объем dV будет действовать сила

$$\vec{f} = -\nabla p dV . \quad (2.1)$$

Попутно заметим, что $-\nabla p$ имеет смысл силы, приходящейся на единицу объема. Далее учтем, что масса и объем связаны посредством плотности следующим равенством: $dm = \rho dV$. Подставляя уравнение (2.1) во второй закон Ньютона и сокращая на элемент объема dV , приходим к уравнению

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p .$$

Видно, что ускорение выделенного элемента среды направлено противоположно градиенту давления. Это означает, что движение будет осуществляться из области с большим давлением в область с меньшим давлением. Однако с этим уравнением невозможно работать, так как распределение давления всегда определяется локально в привязке к системе отсчета, связанной с твердыми границами полости, относительно которых происходит движение газа. В то же время рассматриваемый элемент среды перемещается и каждый раз оказывается в новом месте. Описание движения определенной частицы сплошной среды с учетом того, что она каждый раз оказывается в новом положении, называется *лагранжевым*.

При описании движения текучих сред удобнее определять характеристики течения в каждой фиксированной точке. В этом случае имеет место некоторое распределение давления в каждой точке относительно полости и в принципе можно также просто измерять и другие величины, такие как скорость, температура и т.д. Этот способ описания движения текучей сплошной среды называется *эйлеровым*.

Преобразуем второй закон Ньютона в эйлеровы переменные. Для этого необходимо поработать с левой частью этого уравнения. Заметим, что произвольная i -я компонента скорости в каждой точке имеет свое значение и меняется с течением времени. Это означает, что она является функцией всех координат независимо от времени, а именно $v_i(x, y, z, t)$. В результате полная производная по времени от этой функции должна вычисляться по правилам дифференцирования функций многих переменных [7]:

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_i}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_i}{\partial z} \frac{dz}{dt}.$$

Но по определению

$$dx/dt = v_x, \quad dy/dt = v_y, \quad dz/dt = v_z.$$

В результате имеем

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_i}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_i}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_i}{\partial z} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)v_i.$$

Таким образом, второй закон Ньютона в терминах эйлерового описания преобразуется к виду

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} \right) = -\nabla p + \dots \quad (2.2)$$

Многоточие в уравнении означает, что в правую часть по аналогии добавляются и другие слагаемые, которые по смыслу должны представлять собой силы, приходящиеся на единицу объема. Без учета вязкого трения оно называется *уравнением Эйлера*.

Еще один закон, который в механике сплошных сред имеет абсолютное значение, – это закон сохранения массы. Единственное, что надо сделать, это придать ему форму дифференциального уравнения. Пусть ρ – плотность газа. Элемент объема dV имеет массу $dm = \rho dV$, а интеграл

$$m = \int_V \rho(x, y, z) dV$$

имеет смысл полной массы в рассматриваемом объеме V . Тогда

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho(x, y, z) dV$$

– убыль массы из этого объема за единицу времени. С другой стороны, вектор плотности потока вещества по определению – это количество вещества, проходящее через ортогональную площадку единичной площади за единицу времени [8]:

$$\vec{j} = \rho \vec{v}.$$

В результате полная масса, исходящего из объема V за единицу времени газа, вычисляется как интеграл по всей поверхности этого объема:

$$\oint_S \vec{j} d\vec{S} = \oint_S \rho \vec{v} d\vec{S}.$$

Если в рассматриваемом объеме V масса газа может изменяться только за счет его вытекания через поверхность, то это значит, что

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho(x, y, z) dV = \oint_S \rho \vec{v} d\vec{S}.$$

По теореме Гаусса – Остроградского [9] правую часть этого равенства можно преобразовать в интеграл по объему. Тогда слева и справа имеем одну и ту же меру интегрирования

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho(x, y, z) dV = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \int_V \operatorname{div}(\rho \vec{v}) dV.$$

Полученное равенство справедливо для любого объема, поэтому подынтегральные функции должны быть равны друг другу в каждой точке пространства. В результате приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0. \quad (2.3)$$

Проанализируем далее поведение произвольного по форме малого возмущения, внесенного в сплошную сжимаемую среду. Полные давление и плотность разделим на две части: их равновесные значения и малые отклонения от среднего:

$$p = p_0 + p', \quad \rho = \rho_0 + \rho'.$$

Индексом «ноль» обозначается средняя величина, штрихом – отклонение от среднего. Возмущения давления и плотности считаются малыми, поэтому $p' \ll p_0$, $\rho' \ll \rho_0$. Вычислим малое приращение давления путем его разложения на двум термодинамическим параметрам: энтропии S и плотности ρ :

$$p' = \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_\rho S' + \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S \rho' + \dots$$

При условии $S' = 0$ имеем адиабатический процесс. В результате приходим к компактной формуле $p' = c^2 \rho'$, где введено обозначение

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S}.$$

Физический смысл этой константы будет ясен ниже. Заметим, что связь отклонений давления и плотности от равновесных значений представляет собой некий аналог уравнения состояния, плюс она отнюдь не подразумевает, что температура в каждой точке постоянна. Воспользуемся этим соотношением, чтобы исключить давление из уравнения Эйлера (2.2). В то же время в приближении малых отклонений величин от равновесных значений в формулах (2.2), (2.3) можно пренебречь нелинейными членами, в результате чего уравнение Эйлера и закон сохранения массы упрощаются и приобретают вид

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -c^2 \nabla \rho', \quad \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v} = 0.$$

Применительно к малым возмущениям эти уравнения стали линейными. В качестве неизвестных здесь выступают скорость и отклонение плотности от равновесного значения. Задаваемыми параметрами в задаче являются средняя плотность ρ_0 и константа c , которая фактически представляет собой сжимаемость газа. Чтобы исключить одну из переменных, необходимо произвести над системой перекрестное дифференцирование. От первого уравнения возьмем дивергенцию, а второе уравнение продифференцируем по времени:

$$\rho_0 \operatorname{div} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -c^2 \operatorname{div} \nabla \rho', \quad \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} + \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{v} = 0.$$

Исключаем член со скоростью

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{v}$$

и приходим к уравнению для ρ' :

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c^2 \Delta \rho' = 0. \quad (2.4)$$

Здесь $\operatorname{div}(\operatorname{grad}) \equiv \Delta$ – оператор Лапласа [10]. Иными словами, мы пришли к хорошо известному в физике *волновому уравнению*. Таким образом, в газе малые возмущения плотности в общем случае нестационарны и подчиняются волновому уравнению (нормального гиперболического типа). В одномерном случае уравнение для неизвестной функции $\rho'(x, t)$ упрощается и принимает вид

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2} = 0. \quad (2.5)$$

2.2. Уравнение Пуассона (эллиптический тип)

Теперь проанализируем известные уравнения из другой области физики – электродинамики. Выпишем частный случай *уравнений Максвелла* применительно к статическому электрическому полю неподвижной системы зарядов [11]:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = 0. \quad (2.6)$$

Здесь \vec{E} – напряженность электрического поля, ρ – объемная плотность заряда (уравнения (2.6) записаны в системе СГС). Напряженность электростатического поля выражается через потенциал φ формулой

$$\vec{E} = -\nabla\varphi.$$

Исключая с помощью этой формулы напряженность электрического поля и учитывая, что второе уравнение удовлетворяется тождественно ($\operatorname{rot} \nabla\varphi \equiv 0$), приходим к уравнению для скалярного потенциала

$$-\operatorname{div} \nabla\varphi = 4\pi\rho.$$

С учетом определения в тензорном анализе оператора Лапласа приходим к известному *уравнению Пуассона* для электрического потенциала

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho. \quad (2.7)$$

Уравнение Пуассона – это уравнение эллиптического типа.

2.3. Уравнение теплопроводности (параболический тип)

Рассмотрим третий пример из термодинамики [12]. Пусть некоторое вещество массой m занимает объем V . Введем внутреннюю энергию, приходящуюся на единицу массы, которую обозначим ε . Тогда убыль энергии из объема V равна

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \rho\varepsilon dV. \quad (2.8)$$

С другой стороны, поток тепла представляет собой по определению количество теплоты, переносимое за единицу времени через поверхность единичной площади. Закон Фурье гласит, что поток тепла ориентирован противоположно градиенту температуры и пропорционален ему по величине

$$\vec{q} = -\kappa \nabla T.$$

Здесь T – поле температуры, κ – коэффициент теплопроводности материала. Отметим, что закон Фурье возникает в физике из эмпирических рассуждений, т.е. имеет феноменологический характер. Полное коли-

чество теплоты, переносимое через всю поверхность рассматриваемого тела, находится путем интегрирования потока тепла по его поверхности. С учетом теоремы Гаусса – Остроградского имеем

$$\oint_S \vec{q} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{q} dV. \quad (2.9)$$

Далее приравняем выражение (2.8) и правую часть уравнения (2.9), так как по смыслу это одна и та же величина, вычисленная разными способами. Равенство должно выполняться для любого объема, поэтому подынтегральные функции должны быть равны

$$-\frac{\partial}{\partial t} \rho \varepsilon = \operatorname{div}(-\kappa \nabla T).$$

Пусть в ходе тепловых процессов плотность меняется незначительно. Тогда

$$-\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\rho \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)_p \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Используем первый закон термодинамики

$$d\varepsilon = TdS - pdV,$$

из которого находим частную производную от внутренней энергии ε по температуре при постоянном давлении. Эта процедура дает известный материальный параметр

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)_p = C_p,$$

где C_p – теплоемкость при постоянном давлении. Сокращая на знак «минус» и полагая коэффициент теплопроводности постоянным, приходим к уравнению

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \Delta T.$$

С учетом новых обозначений имеем

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T, \quad (2.10)$$

где по определению

$$\chi = \frac{\kappa}{\rho C_p}.$$

Новая константа χ – коэффициент температуропроводности среды. Уравнение (2.10) называется уравнением теплопроводности и показывает, как перераспределяется температура среды со временем при наличии у нее теплопроводности. Разумеется, этот процесс будет так-

же зависеть от краевых условий и начального распределения температуры. При одномерном распространении тепла поле температуры будет зависеть только от одной пространственной координаты и времени. В этом случае имеем для $T(x, t)$ следующее уравнение:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (2.11)$$

Таким образом, в природе без труда можно столкнуться с процессами, которые описываются дифференциальными уравнениями второго порядка в частных производных того или иного типа. А именно: волновое уравнение (2.5) легко отождествляется с уравнением гиперболического типа (1.11). Одномерное уравнение теплопроводности (2.11) для неизвестной функции $T(x, t)$ совпадает с уравнением параболического типа (1.13). А уравнение Пуассона (2.7) является примером уравнения эллиптического типа (1.14).

3. Общее решение одномерного волнового уравнения

Начнем изучение свойств уравнений гиперболического, параболического и эллиптического типа с одномерного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \quad (3.1)$$

где c – некоторая материальная константа, физический смысл которой сейчас предстоит выяснить. Штрих в уравнении (3.1) для упрощения записи опущен, но по смыслу ρ – это по-прежнему отклонение плотности от среднего значения. Введем новые координаты

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x + ct.$$

Здесь следует обратить внимание на то, что x – это пространственная координата, в то время как переменная t – это время, поэтому при организации линейной комбинации этих величин необходимо ввести размерный множитель, чтобы на законных основаниях складывать или вычитать элементы многочлена. Как видно из уравнения (3.1), константа c имеет размерность м/с, поэтому ct и новые переменные ξ и η имеют ту же единицу измерения, что и пространственная координата. Найдем вид операторов дифференцирования в терминах новых переменных:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -c \frac{\partial}{\partial \xi} + c \frac{\partial}{\partial \eta} = c \left(\frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi} \right),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^2 = c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}.$$

Переход к новым переменным ξ и η подразумевает подстановку полученных операторов дифференцирования в уравнение (3.1). Удивительным образом вторые производные по ξ и η сокращаются, и остается всего один член со смешанной второй производной:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (3.2)$$

Нетрудно заметить, что уравнение (3.2) – это фактически каноническая форма записи волнового уравнения. Каноническая форма имеет большое значение, так как позволяет сделать определенные заключения о структуре общего решения волнового уравнения. Уравнение (3.2) интегрируемо в том смысле, что первая первообразная по ξ дает в правой части член в виде функции независимого аргумента η . Вторичное интегрирование производится уже по η и дает в правой части какую-то новую функцию η . Однако в качестве еще одного аддитивного члена добавляется функция теперь уже независимого аргумента ξ . В результате имеем решение в виде суммы двух произвольных функций f_1 и f_2 , которое всегда удовлетворяет уравнению (3.2):

$$\rho(x, t) = f_1(\xi) + f_2(\eta). \quad (3.3)$$

Это деление на две части, каждая из которых зависит от своего аргумента, демонстрирует важнейшее свойство решения волнового уравнения. Возвращаясь к старым естественным переменным x и t , получаем

$$\rho(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct). \quad (3.4)$$

Это общее решение волнового уравнения. Нетрудно увидеть, что характеристическое уравнение для выражения (3.1) имеет вид

$$dx^2 - c^2 dt^2 = 0.$$

Откуда

$$\frac{dx}{dt} = \pm c.$$

Можно добавить, что переменные ξ и η являются двумя искомыми характеристиками. Если переменные x и t связаны друг с другом ограничением, вытекающим из условия постоянства характеристик, то частное решение f_1 остается постоянным при $x = ct$, а при $x = -ct$ не

меняется частное решение f_2 . Иными словами, рельеф, описываемый частным решением f_1 , движется в направлении положительных x со скоростью c . Подобное поведение во времени называется волновым, а само пространственное распределение $\rho(x, t)$, перемещающееся со скоростью, которая определяется сжимаемостью среды, – *волной*. Заметим, что частное решение f_2 соответствует волне, движущейся с той же по величине скоростью в противоположном направлении.

Физический смысл решения (3.4) можно глубже понять, выполнив факторизацию исходного волнового уравнения (3.1), т.е. записав его в операторной форме:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x}\right)\rho = 0.$$

Таким образом, простейшее уравнение, описывающее волну, имеет на самом деле более простой вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \pm c \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \quad (3.5)$$

Решение для волнового сигнала должно быть таким, чтобы производная по t всегда была такой же, как производная по x с множителем $+c$ или $-c$. Уравнение (3.5) описывает одиночную волну. Его решение может быть любой функцией аргументов $\xi = x - ct$ или $\eta = x + ct$, в зависимости от того, в каком направлении распространяется волна.

Далее сформулируем дополнительные условия для однозначного определения рассматриваемого процесса, так как дифференциальные уравнения в частных производных могут иметь бесчисленное множество решений.

4. Постановка стандартных краевых задач

Любая физическая задача, сформулированная в терминах дифференциального уравнения в частных производных, требует присоединения некоторых дополнительных условий. Напомним, что в случае *обыкновенных* дифференциальных уравнений второго порядка решение может быть доопределено двумя начальными условиями (задача Коши). Если значение функций задается в двух разных точках, то имеем краевую задачу. Для уравнения в частных производных возможны различные формы дополнительных условий.

Рассмотрим проблему наложения дополнительных условий на решение волнового уравнения в контексте задачи о поперечных колебаниях струны длиной l с закрепленными концами [6]. Пусть u – попе-

речное отклонение точки струны от равновесного положения. Легко показать, что величина $u(x, t)$ подчиняется волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (4.1)$$

где x – продольная координата, a – скорость распространения волнового сигнала, которая зависит от упругих свойств струны.

При жестком закреплении концов струны имеем два краевых условия

$$u(0, t) = u(l, t) = 0. \quad (4.2)$$

В более общем случае на концах может быть задан определенный закон движения, тогда

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t),$$

где μ_1 и μ_2 – заданные функции времени. Разумеется, процесс колебаний струны зависит также от ее начальной формы и начального распределения скоростей:

$$u(x, t_0) = \varphi(x), \quad u_t(x, t_0) = \psi(x). \quad (4.3)$$

Здесь $\varphi(x)$ – начальное распределение отклонений точек струны от равновесного положения, $\psi(x)$ – соответственно распределение скоростей в начальный момент времени t_0 .

Особого рассмотрения требуют ситуации, когда влияние границ несущественно. Подобные ситуации встречаются, когда некоторое явление представляет интерес в течение малого промежутка времени, а начальное возмущение локализовано в некоторой области. В этом случае имеем предельную задачу с начальными условиями для неограниченной области:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad \text{при } -\infty < x < \infty \text{ и } t > 0, \quad (4.4)$$

$$u(x, t_0) = \varphi(x), \quad u_t(x, t_0) = \psi(x). \quad (4.5)$$

Здесь $f(x, t)$ – неоднородность в уравнении. Такую постановку называют задачей Коши. По-прежнему, в силу линейности общее решение будет состоять из суммы частных решений, но отсутствие краевых условий дает возможность разрешить задачу в квадратурах.

Отметим, что при решении краевой задачи всегда необходимо убедиться в том, чтобы дополнительные условия были достаточны для определения однозначного решения. Иными словами, нужно доказать, что дополнительные ограничения не переопределяют задачу, чтобы все условия были совместимы друг с другом.

5. Метод Даламбера

Вернемся к общему решению уравнения (4.4) для безграничного пространства с произвольными начальными условиями (4.5):

$$u(x, t) = f_1(x + at) + f_2(x - at).$$

Используя начальные условия, получаем

$$u(x, 0) = \varphi(x) : f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x); \quad (5.1)$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x) : af_1'(x) - af_2'(x) = \psi(x). \quad (5.2)$$

Уравнение (5.2) можно проинтегрировать:

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(z) dz + C,$$

где C – константа интегрирования. Складывая это равенство с уравнением (5.1), получим

$$f_1(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(z) dz + C'.$$

Вычитание из уравнения (5.1) дает

$$f_2(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(z) dz - C'.$$

В результате получаем искомое решение в квадратурах для произвольного момента времени t при заданных φ и ψ :

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x + at) + \varphi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz. \quad (5.3)$$

Это и есть знаменитая *формула Даламбера*. Из формулы (5.3) видно, что решение представляет собой суперпозицию функций аргументов $x + at$ и $x - at$ (интеграл, вычисленный на верхнем и нижнем пределах, тоже дает функции этих переменных). Первое слагаемое определяется начальным отклонением точек струны от равновесного положения, а второе – начальной скоростью. Начальное отклонение φ и скорость ψ вносят возмущения в равновесие, которые не могут оставаться в стационарном состоянии, а их поведение во времени подчиняется волновому уравнению. Каждое из двух разных по смыслу слагаемых в уравнении (5.3) может по отдельности порождать волну. При наличии обоих факторов форма волны усложняется, но все равно она будет распространяться со скоростью a в обоих направлениях. Можно

добавить, что формула Даламбера своим существованием доказывает также единственность решения.

6. Дисперсия волн

Как было показано ранее, одномерное уравнение колебаний струны

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

допускает решение в виде бегущих волн $u = f(x \pm at)$ произвольной формы и неизменным профилем. На самом деле общий вид уравнения гиперболического типа более сложен, даже если это уравнение является линейным:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} + b_1 u_t + b_2 u_x + cu = 0. \quad (6.1)$$

Однако подстановка $u = \bar{u} e^{\lambda x + \mu t} = \bar{u} e^h$ позволяет упростить это уравнение так, что оно будет иметь форму

$$\bar{u}_{tt} - a^2 \bar{u}_{xx} + c\bar{u} = 0. \quad (6.2)$$

Нетрудно увидеть, что это уравнение не допускает решение в виде произвольной бегущей волны при $c \neq 0$. Сначала убедимся в том, что экспоненциальной подстановкой уравнение (6.1) сводится к уравнению (6.2):

$$\begin{aligned} u_t &= \bar{u}_t e^h + \bar{u} \mu e^h, \\ u_{tt} &= \bar{u}_{tt} e^h + 2\bar{u}_t \mu e^h + \bar{u} \mu^2 e^h, \\ u_x &= \bar{u}_x e^h + \bar{u} \lambda e^h, \\ u_{xx} &= \bar{u}_{xx} e^h + 2\bar{u}_x \lambda e^h + \bar{u} \lambda^2 e^h. \end{aligned}$$

Подставим u_{tt} и u_{xx} в исходное уравнение:

$$\bar{u}_{tt} e^h - a^2 \bar{u}_{xx} e^h + (b_1 + 2\mu) \bar{u}_t e^h - (2\lambda a^2 - b_2) \bar{u}_x e^h + C\bar{u} e^h = 0.$$

Для параметров λ и μ имеется определенная свобода выбора. Воспользуемся этим и присвоим им следующие значения:

$$\mu = -b_1/2, \quad \lambda = b_2/2a^2.$$

При таких λ и μ члены с первыми производными зануляются. Таким образом, ненулевым членом в уравнении (6.1) является член cu . Функциональная зависимость $f(x \pm at)$ теперь не является решением уравнения (6.2). В самом деле, для знака «+» имеем

$$a^2 f'' - a^2 f'' + cf = 0 \rightarrow c = 0.$$

Тем не менее, любой сигнал можно разложить в интеграл Фурье, который представляется в виде суперпозиции гармонических волн:

$$u(x, t) = e^{i(\omega t - kx)},$$

где ω – циклическая частота; k – волновое число, $k = 2\pi/\lambda$; λ – длина волны; α – фаза, $\alpha = \omega t - kx$. Скорость, с которой фаза перемещается в пространстве (фазовая скорость),

$$v = \frac{\omega}{k}.$$

Если фазовая скорость гармонических волн зависит от частоты, то в этом случае гармонические составляющие сигнала движутся с различными скоростями и смещаются относительно друг друга, в результате чего профиль сигнала искажается с течением времени.

Убедимся в том, что если уравнение (6.2) не допускает решения в виде волны произвольной формы, то фазовая скорость гармонической волны должна зависеть от частоты:

$$\omega^2 - a^2 k^2 + c = 0.$$

Это уравнение, связывающее частоту и волновое число, называется *дисперсионным соотношением*. Если $c = 0$, то $\omega = \pm ka$ и $v = \pm a$. При $c \neq 0$

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + c}} a. \quad (6.3)$$

Как видно из формулы (6.3), скорость зависит от частоты. Это свойство волн называется *дисперсией*. Дисперсия приводит к тому, что волна произвольной (негармонической) формы претерпевает изменения по мере распространения.

7. Метод разделения переменных в применении к задаче о свободных колебаниях струны

Вернемся к решению волнового уравнения при наличии краевых условий. Техника решения задач в частных производных путем разделения переменных называется *методом Фурье*. Стоит заметить, что не всегда уравнения в частных производных допускают разделение переменных. Рассмотрим метод разделения переменных на примере уравнения свободных колебаний струны:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}. \quad (7.1)$$

Дополним задачу однородными граничными условиями

$$u(0, t) = u(l, t) = 0. \quad (7.2)$$

Начальные условия таковы

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x). \quad (7.3)$$

Уравнение (7.1) линейно и однородно, поэтому сумма частных решений представляет собой общее решение этого уравнения. Для начала необходимо найти решение, не равное тождественно нулю, удовлетворяющее однородным граничным условиям. Это можно сделать, представив решение в виде

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (7.4)$$

Этот шаг и называется разделением переменных, когда одна часть решения зависит только от x , а другая только от t . Подставляем решение (7.4) в уравнение (7.1):

$$X'' \cdot T = \frac{1}{a^2} X \cdot T'',$$

или

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{a^2} \frac{T''}{T}.$$

Равенство должно выполняться для всех x и t при $0 < x < l$ и $t \geq 0$. Поскольку переменные независимы друг от друга, это равенство может иметь место только тогда, когда левая и правая части равны одной и той же константе:

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{a^2} \frac{T''}{T} = -\lambda.$$

Для удобства вынесем из этой константы явно знак «минус». Параметр λ называется константой разделения переменных, и для нее есть три варианта: $\lambda = 0$, $\lambda > 0$, $\lambda < 0$.

1. Рассмотрим первый случай $\lambda = 0$. Тогда

$$X'' = 0.$$

Двукратное интегрирование приводит к линейной зависимости

$$X(x) = C_1 x + C_2.$$

Условие на левой границе при $x = 0$ дает $C_2 = 0$. На правой границе

$$C_1 l + C_2 = 0 \rightarrow C_1 = 0.$$

В результате имеем тривиальное решение.

2. Второй вариант отвечает $\lambda < 0$. Для него имеем уравнение

$$\frac{X''}{X} = -\lambda \rightarrow X'' + \lambda X = 0.$$

Оно характеризуется решением в виде суперпозиции двух вещественных экспонент:

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x},$$

где $\sqrt{-\lambda}$ по определению является вещественным числом. Условие на левой границе дает

$$C_1 + C_2 = 0 \rightarrow C_1 = -C_2.$$

На правой границе

$$C_1 e^\alpha + C_2 e^{-\alpha} = 0, \quad C_1(e^\alpha - e^{-\alpha}) = 0 \rightarrow C_1 = 0.$$

Опять имеем тривиальное решение. По факту остается только один вариант $\lambda > 0$. Тогда уравнение $X'' + \lambda X = 0$ имеет решение

$$X(x) = C_1 e^{i\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-i\sqrt{\lambda}x}.$$

Преобразуя по формуле Эйлера экспоненты, с учетом переобозначения амплитуд запишем решение в виде

$$X(x) = D_1 \cos \sqrt{\lambda}x + D_2 \sin \sqrt{\lambda}x.$$

Применим граничные условия:

$$\begin{cases} X(0) = 0 \rightarrow D_1 = 0, \\ X(l) = 0 \rightarrow D_2 \sin \sqrt{\lambda}l = 0, \quad D_2 \neq 0 \rightarrow \sin \sqrt{\lambda}l = 0. \end{cases}$$

Таким образом, получаем условия на константу разделения переменных

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\pi n}{l},$$

где n – является целым числом. Иными словами, имеем последовательность значений, которые будем характеризовать индексом n :

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2,$$

$$X_n(x) = D_n \sin \left(\frac{\pi n}{l} x \right). \quad (7.5)$$

Каждая отдельная функциональная зависимость (7.5) для любого целого n представляет собой частное решение, которое называется *модой*. На амплитуду D_n пока нет никаких ограничений, это произвольное число. В то же время для временной части имеем уравнение вида

$$\frac{1}{a^2} \frac{T''}{T} = -\lambda = -\left(\frac{\pi n}{l} \right)^2.$$

Запишем его в стандартной форме

$$T'' + a^2 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 T = 0.$$

Это уравнение имеет решение в виде суперпозиции гармонических функций

$$T(t) = A_n \cos\left(\frac{\pi n}{l} at\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} at\right).$$

В результате для каждого n имеем

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right).$$

Суммируя все частные решения, получаем общее решение

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t).$$

Сумма частных решений удовлетворяет исходному уравнению в силу его линейности. Краевые условия выполняются, осталось удовлетворить начальным. Их два:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x).$$

Производная по времени

$$u_t = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-A_n \frac{\pi n a}{l} \sin \frac{\pi n}{l} at + B_n \frac{\pi n a}{l} \cos \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

В результате из двух начальных условий вытекает, что

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\pi n a}{l} \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

Из теории рядов Фурье [13] известно, что произвольная кусочно-непрерывная и дифференцируемая функция, заданная на промежутке $0 < x < l$, может быть разложена в ряд Фурье:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

Коэффициенты b_n находятся из условия ортогональности базисных функций. Поскольку

$$\int_0^l \sin^2\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx = \frac{1}{2} \int_0^l \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{l} x\right)\right) dx = \frac{l}{2},$$

приходим к следующим формулам для амплитуд:

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx.$$

Отождествляя разложение функции в ряд Фурье с выражениями для $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, приходим к выводу, что коэффициенты рядов A_n и B_n

представляют собой амплитуды при соответствующих гармониках в разложениях $\varphi(x)$ и $\psi(x)$:

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx, \quad B_n = \frac{2}{\pi n \alpha} \int_0^l \psi(x) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx.$$

Таким образом, задача о поперечных колебаниях струны с закрепленными концами является решенной.

8. Уравнения параболического типа. Типы краевых задач

Как было показано ранее, простейшее одномерное уравнение параболического типа имеет вид

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}. \quad (8.1)$$

Корректная постановка краевой задачи определяется добавлением своих начальных и граничных условий. Далее проиллюстрируем типы краевых условий на примере типичных задач теплопроводности. По времени уравнение (8.1) – это уравнение первого порядка, поэтому наложение начального условия состоит лишь в задании функции $u(x, t_0)$. Граничные условия могут быть разными. Проведем классификацию краевых условий на примере уравнения теплопроводности в зависимости от тепловых условий на границах одномерной расчетной области.

1. На конце стержня при $x = 0$ задана температура $u(0, t) = \mu(t)$ (в общем случае функция времени).
2. На конце стержня при $x = 0$ задана производная $u_x(0, t) = \nu(t)$ (физически это означает, что задан теплоток на границе).
3. На конце стержня при $x = 0$ задана линейная комбинация самой функции и ее производной (так называемое условие типа Био):

$$u_x(0, t) = -\lambda(u(0, t) - \theta(t)).$$

Условие Био позволяет простейшим образом смоделировать граничное условие на поверхности раздела двух материалов с разной теплопроводностью κ_1 и κ_2 . Из закона сохранения энергии количество теплоты, проходящее через границу раздела единичной площади за единицу времени, должно быть одинаковым по разные стороны поверхности раздела. Материал области 2, обладающий конечной теплопроводностью κ_2 , примыкает к расчетной области 1 и представляет собой слой толщиной h . Тогда на границе раздела

$$\kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = \kappa_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} = \kappa_2 \frac{\theta - T_\Gamma}{h}.$$

Здесь T_Γ – температура на поверхности раздела, θ – температура на внешней границе области 2. Отсюда приходим к стандартной форме записи условия Био:

$$\frac{\partial T_\Gamma}{\partial x} = -\lambda(T_\Gamma - \theta),$$

где введено обозначение

$$\lambda = \frac{\kappa_2}{\kappa_1 h}.$$

Традиционно параметр λ называют в теплотехнике коэффициентом теплоотдачи.

9. Метод разделения переменных для уравнения параболического типа

Решим конкретную задачу, согласно которой физический процесс описывается одномерным уравнением параболического типа

$$u_t = a^2 u_{xx}. \quad (9.1)$$

Определимся с начальным условием:

$$u(x, 0) = \varphi(x).$$

На концах стержня могут быть заданы некоторые функции времени:

$$\begin{cases} u(0, t) = \mu_1(t), \\ u(l, t) = \mu_2(t), \end{cases}$$

однако далее мы рассмотрим простейший случай однородных граничных условий $\mu_1 = \mu_2 = 0$.

Применим метод разделения переменных. Согласно ему представим решение в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от x , а вторая от t :

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

Подставляя это решение в уравнение (9.1), приходим к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям для $X(x)$ и $T(t)$:

$$X \cdot T' = a^2 X'' \cdot T, \quad \frac{X''}{X} = \frac{T'}{a^2 T} = -\lambda.$$

Здесь λ – константа разделения переменных. Для $X(x)$ имеем уравнение второго порядка, для $T(t)$ – первого:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad T' + \lambda a^2 T = 0.$$

Из граничных условий вытекает $X(0) = 0$, $X(l) = 0$. Имеем задачу Штурма – Лиувилля [14], решение которой нам уже хорошо знакомо:

$$X \sim \sin \sqrt{\lambda} x.$$

Первое краевое условие оставляет в решении только синус, а второе приводит к условию на константу разделения переменных $l\sqrt{\lambda} = n\pi$:

$$\lambda = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}, \text{ где } n = 1, 2, 3 \dots$$

Решение уравнения для временной части ищем в виде

$$T \sim e^{rt},$$

где

$$r = -\lambda a^2 = -\frac{n^2 \pi^2}{l^2} a^2.$$

Иными словами, пространственная мода и соответствующая временная часть вычисляются следующим образом:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right), \quad T_n(t) = e^{-\frac{n^2 \pi^2}{l^2} a^2 t}.$$

Окончательно частное решение, соответствующее определенному n , имеет вид

$$u_n(x, t) = C_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{l^2} a^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right),$$

где C_n – амплитуда каждой индивидуальной моды. Общее решение является суммой всех частных решений:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{l^2} a^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right). \quad (9.2)$$

Остается удовлетворить начальному условию. Полагая в уравнении (9.2) $t = 0$ и вспоминая о том, что в начальный момент времени решение задается функцией $\varphi(x)$, приходим к равенству

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) = \varphi(x).$$

Умножая это равенство на отдельные гармоники и пользуясь условием их ортогональности, получаем после интегрирования значения амплитуд

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx. \quad (9.3)$$

Таким образом, совокупность выражений (9.2) и (9.3) образует полное решение поставленной задачи.

В заключение можно указать, что метод разделения переменных оказался эффективным для решения как гиперболических, так и параболических уравнений. С не меньшей степенью успешности он применяется при наложении более сложных граничных и начальных условий.

10. Решение уравнения параболического типа в безграничном пространстве

Проанализируем теперь решение уравнения теплопроводности в отсутствие краевых условий. Будем искать решение уравнения $u_t = a^2 u_{xx}$ в виде ограниченной функции $u(x, t)$ в области $-\infty < x < +\infty$, удовлетворяющее условию $u(x, 0) = f(x)$. Согласно методу разделения переменных,

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

Из исходного уравнения вытекает

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2,$$

где λ является вещественным числом. Получаем, как и ранее, два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\begin{aligned} X'' + \lambda^2 X &= 0, \\ T' + \lambda^2 a^2 T &= 0. \end{aligned}$$

Однако эта постановка принципиально отличается от предыдущей, так как сейчас отсутствует привычная нам задача Штурма – Лиувилля, которая позволяла наложить определенные ограничения на константу разделения переменных. Тем не менее, продолжаем искать решение во всей области $-\infty < x < +\infty$:

$$X(x) \sim e^{\pm i\lambda x}.$$

На λ нет никаких ограничений, кроме вещественности. Временная часть решения определена функциями вида

$$T(t) \sim e^{-\lambda^2 a^2 t}.$$

В результате частное решение, соответствующее определенному значению константы разделения переменных, имеет вид

$$u_\lambda(x, t) = A(\lambda) e^{-\lambda^2 a^2 t \pm i \lambda x}.$$

Здесь $A(\lambda)$ – амплитуда, подлежащая определению. Общее решение представляет собой интеграл

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda) e^{-\lambda^2 a^2 t \pm i \lambda x} d\lambda. \quad (10.1)$$

Очевидно, это решение должно удовлетворять начальному условию:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda) e^{i \lambda x} d\lambda. \quad (10.2)$$

Ранее в случае решения на ограниченном множестве амплитуды ряда находились явно из условия ортогональности тригонометрических функций. Теперь $A(\lambda)$ стоит внутри интеграла (10.2) и не может быть напрямую использована при вычислении общего решения (10.1).

Необходимо выяснить, можно ли представить решение (10.1) совместно с уравнением (10.2) в более наглядной и удобной для использования форме.

10.1. Дельта-функция

Для дальнейших рассуждений нам понадобится вспомнить понятие дельта-функции [10]. По своему смыслу она принадлежит к классу *обобщенных функций*, так как специфически определяется и обладает довольно неожиданными математическими свойствами. Начнем с определения дельта-функции при ее зависимости от одной переменной, а затем обобщим это определение на случай многих переменных:

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} \infty, & x = x_0, \\ 0, & x \neq x_0; \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) dx = 1, \quad (10.3)$$

где x_0 – произвольная точка на оси x . Как следствие, в дальнейшем будем иметь в виду следующее важное свойство дельта-функции:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0),$$

где f – произвольная, ограниченная на всей области определения функция. По аналогии в трехмерном пространстве имеем

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \begin{cases} \infty, & \vec{r} = \vec{r}_0, \\ 0, & \vec{r} \neq \vec{r}_0; \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) dV = 1,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) dV = f(\vec{r}_0).$$

Дельта-функция часто используется в физике для математического представления точечных воздействий, а также задания пространственных плотностей различных физических величин (массы, заряда, интенсивности источников тепла, сил и т.д.), сосредоточенных или приложенных в одной точке [11].

Вернемся к одномерной постановке задачи. Для более глубокого анализа решения (10.1) нам дополнительно понадобится так называемое интегральное представление дельта-функции:

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x_0)} dk. \quad (10.4)$$

Из вида правой части следует, что при $x = x_0$ интеграл действительно дает особенность, в то время как во всех остальных точках он должен быть равен нулю. Таким образом, фактически остается единственный вопрос, который заключается в правильности нормировки интеграла (10.4). Далее докажем справедливость этого равенства.

Доказательство основывается на сопоставлении дельта-функции с предельным образом последовательностей, эквивалентных в смысле слабой сходимости. Рассмотрим в пределе $N \rightarrow \infty$ следующий интеграл:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-N}^N e^{ik(x-x_0)} dk = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{iN(x-x_0)} - e^{-iN(x-x_0)}}{i(x-x_0)} =$$

$$= \frac{2i}{2\pi} \frac{\sin N(x-x_0)}{i(x-x_0)} = \frac{1}{\pi} \frac{N \sin N(x-x_0)}{N(x-x_0)}.$$

Примем к сведению значение первого замечательного предела [7]. Если $x = x_0$, то при $N \rightarrow \infty$ функция имеет особенность (ее значение тоже стремится к бесконечности). Осталось убедиться в справедливости нормировки

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N \sin N(x-x_0)}{N(x-x_0)} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz.$$

Введем обозначение для полученного интеграла:

$$A = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz. \quad (10.5)$$

Он не выражается через элементарные функции и называется интегральным синусом [10]. Попробуем вычислить другой интеграл, зависящий от параметра t :

$$I(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx. \quad (10.6)$$

Заметим, что в пределе $t = 0$ он дает нужный результат, а именно $I(0) = A$. Вычислим производную по параметру и выполним процедуру интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} I'(t) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-tx} \sin x dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{t} de^{-tx} = \\ &= \frac{\sin x}{\pi t} e^{-tx} \Big|_0^{\infty} - \frac{1}{\pi t} \int_0^{\infty} e^{-tx} \cos x dx = \frac{1}{\pi t^2} \int_0^{\infty} \cos x de^{-tx} = \\ &= \frac{\cos x}{\pi t^2} e^{-tx} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{\pi t^2} \int_0^{\infty} e^{-tx} \sin x dx = \\ &= -\frac{1}{\pi t^2} + \frac{1}{\pi t^2} \int_0^{\infty} e^{-tx} \sin x dx. \end{aligned}$$

Сравнивая левую и правую части, выразим промежуточный интеграл:

$$\frac{1}{\pi t^2} = \frac{1}{\pi} \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \int_0^{\infty} e^{-tx} \sin x dx, \quad \int_0^{\infty} e^{-tx} \sin x dx = \frac{1}{t^2 \left(1 + \frac{1}{t^2}\right)} = \frac{1}{1+t^2}.$$

Сам интеграл $I(t)$ вычисляется путем нахождения первообразной по параметру t :

$$I(t) = -\int \frac{dt}{\pi(1+t^2)} = -\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}(t) + C.$$

Здесь C – константа интегрирования, подлежащая определению. Заметим, что справедлива асимптотика

$$x \rightarrow \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{tg}(x) \rightarrow \infty.$$

С другой стороны, как следует из определения интеграла (10.6), при $t \rightarrow \infty$ $I(t) \rightarrow 0$. В результате в пределе $t \rightarrow \infty$ получаем

$$I(t \rightarrow \infty) = -\frac{1}{\pi} \frac{\pi}{2} + C = 0.$$

Отсюда находим неизвестную константу $C = 1/2$. Окончательно искомый интеграл

$$I(t) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}(t) + \frac{1}{2}.$$

Однако нас интересует значение интеграла (10.6) при $t = 0$, так как это дает искомое значение интегрального синуса (10.5). Полученное равенство позволяет это сделать:

$$I(0) = \frac{1}{2}.$$

В результате значение интегрального синуса таково:

$$A = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz = \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz = \pi.$$

Это означает, что действительно

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N \sin N(x - x_0)}{N(x - x_0)} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz = 1,$$

т.е. дельта-функция (10.3), представленная в форме интеграла (10.4), отнормирована правильно.

10.2. Фундаментальное решение уравнения теплопроводности

Вернемся к обсуждению выражения (10.2), которое определяет амплитуду $A(\lambda)$ через начальное условие

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} A_{\lambda'} e^{i\lambda'x} d\lambda'.$$

Умножим его на $e^{-i\lambda\xi}$ и проинтегрируем по ξ :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} A_{\lambda'} e^{i(\lambda'-\lambda)\xi} d\lambda' = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda' A_{\lambda'} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\lambda'-\lambda)\xi} d\xi = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda' A_{\lambda'} \delta(\lambda' - \lambda) = 2\pi A(\lambda).
\end{aligned}$$

Итак, процедура, которая называется обратным преобразованием Фурье, даст

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi. \quad (10.6)$$

Теперь можно подставить амплитуду в исходный интеграл (10.1):

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi \right) e^{-\lambda^2 a^2 t \pm i\lambda x}.$$

Меняем порядок интегрирования:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda f(\xi) e^{-\lambda^2 a^2 t} e^{i\lambda(x-\xi)} = \dots$$

Внутренний интеграл по λ легко вычисляется путем сведения показателя в степени экспоненты к полному квадрату:

$$\begin{aligned}
-\lambda^2 a^2 t + i\lambda(x-\xi) - \left(\frac{i(x-\xi)}{2a\sqrt{t}} \right)^2 + \left(\frac{i(x-\xi)}{2a\sqrt{t}} \right)^2 &= \\
= - \left(\lambda a\sqrt{t} - \frac{i(x-\xi)}{2a\sqrt{t}} \right)^2 + \left(\frac{i(x-\xi)}{2a\sqrt{t}} \right)^2.
\end{aligned}$$

В продолжение интегрирования имеем

$$\begin{aligned}
\dots &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda f(\xi) e^{-\left(\lambda a\sqrt{t} - \frac{i(x-\xi)}{2a\sqrt{t}} \right)^2} e^{-\left(\frac{i(x-\xi)}{2a\sqrt{t}} \right)^2} = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi f(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{-\left(\lambda a\sqrt{t} - \frac{i(x-\xi)}{2a\sqrt{t}} \right)^2} \cdot \frac{a\sqrt{t}}{a\sqrt{t}} = \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2\pi a\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi. \quad (10.7)
\end{aligned}$$

На последнем шаге необходимо было принять к сведению, что процедура внутреннего интегрирования сводится к нахождению интеграла Пуассона [10]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{-\left(\lambda a\sqrt{t} - \frac{i(x-\xi)}{2a\sqrt{t}}\right)^2} \cdot \frac{a\sqrt{t}}{a\sqrt{t}} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{z^2} dz = \sqrt{\pi}.$$

11. Оседание наночастиц в неоднородной по температуре несущей жидкости при наличии термодиффузии

Как было показано ранее, подавляющее большинство задач гидродинамики и тепломассообмена математически сводятся к краевым задачам, причем граничные условия определяют вид решений наравне с уравнениями. Однако степень обоснованности у граничных условий на разные неизвестные величины в физике неодинаковая. В задачах теплообмена краевые условия на температуру выставляются, как правило, физически строго: на границах расчетных областей температура должна быть непрерывной, в дополнение нормальная компонента теплопотока на поверхности раздела также не должна испытывать скачка. Данное условие на теплопоток вытекает из закона сохранения энергии и соответствующим образом переформулируется при наличии фазового перехода, источников тепла, экзо- или эндотермической реакции на поверхности. Граничные условия на поле скорости исторически также неоднократно подвергались анализу и иногда существенно модифицировались при решении различных гидродинамических задач. Проблема переработки условия прилипания на твердых границах в эффективные граничные условия разносторонне рассмотрена в научной литературе.

С решением задач о движении неоднородных по составу жидкостей и газов тоже складывается ситуация, требующая обсуждения. В настоящее время наиболее распространены три типа граничных условий на концентрацию компонентов среды, обоснование применимости которых все равно основывается на законах сохранения. Если смесь соприкасается с твердой нерастворимой поверхностью, то на границе раздела должна обращаться в ноль нормальная компонента вектора плотности потока вещества:

$$J_n|_{\Gamma} = 0.$$

Иное положение складывается при рассмотрении диффузии вещества от твердого массива, растворяющегося в жидкости. Процесс

диффузии в ходе растворения тела в жидкости характеризуется наличием локального равновесия вблизи твердой поверхности. В этом случае концентрация в примыкающей к поверхности тела жидкости равна концентрации насыщенного раствора C_0 , вследствие того, что диффузия растворяемого компонента в этом слое идет медленнее, чем процесс растворения. В результате на такой поверхности имеет место граничное условие $C|_{\Gamma} = C_0$.

Если на границе раздела происходит поглощение попадающего на нее диффундирующего вещества, то краевым будет условие равенства концентрации нулю: $C|_{\Gamma} = 0$. Подобная ситуация имеет место, когда на границе раздела происходит химическая реакция с поглощением растворенного компонента. Помимо этого, необходимо различать такие разные многокомпонентные среды, как молекулярные смеси и коллоидные растворы. Для описания перераспределения компонентов этих сред необходимо применять различные подходы и учитывать в выражениях для потока вещества разные факторы.

Проанализируем процесс оседания частиц в неоднородно нагретой феррожидкости [15]. Малые размеры взвешенных частиц позволяют называть феррожидкость наносuspензией. В роли несущей жидкости могут выступать разные среды, но наиболее распространенной является керосин. Седиментационные явления, связанные с наличием наночастиц, характеризуются гигантскими значениями времени. При сильном измельчении взвесь представляет собой фактически однодоменные магнетитовые частицы, которые обладают магнитными моментами. Чаще всего частицы покрываются поверхностно-активным веществом, которое предотвращает их слипание и препятствует дальнейшему выпадению кластеров в осадок. Однако существуют и другие методы стабилизации феррожидкостей. Большие значения магнитных моментов при относительно малых размерах частиц и возможность длительного нахождения во взвешенном состоянии в жидкостеносителе приводят к тому, что феррожидкость ведет себя во внешнем магнитном поле как суперпарамагнетик и характеризуется аномально большими значениями магнитной восприимчивости.

Определяющим для магнитной жидкости является взаимодействие феррочастиц с магнитным полем, которое может оказывать на ее движение колоссальное влияние. Однако в отсутствие магнитного поля на передний план могут выступать другие более тонкие эффекты, не связанные с внешними факторами. В работах, предшествовавших [15], при изучении свободной тепловой конвекции феррожидкости в подогреваемых снизу связанных каналах была выявлена роль коллоидных

частиц в формировании специфических переброшенных колебаний. Объяснение опытных данных оказалось возможным при использовании расширенных уравнений термоконцентрационной конвекции с учетом сложного состава жидкости-носителя и седиментации частиц. Однако открытым остался вопрос о влиянии термодиффузии на перераспределение частиц в неоднородно нагретой несущей жидкости. Необходимость учета этого эффекта часто подчеркивается при рассмотрении конвективных процессов в наносuspensionях.

Магнетитовые частицы обсуждаемой феррожидкости имеют характерный размер порядка 10 нм. Для коэффициента диффузии частиц с хорошей степенью точности справедлива формула Эйнштейна. При указанном радиусе частицы получается весьма малое значение этого параметра $D = 2 \cdot 10^{-7}$ см²/с. Эта оценка подтверждается прямыми экспериментами. Скорость оседания таких частиц в керосине можно оценить с помощью формулы Стокса

$$U \sim D \Delta \rho V_0 g / k \bar{T} = 10^{-7} \text{ см/с,}$$

где g – ускорение силы тяжести, D – коэффициент диффузии для феррочастиц в керосине, V_0 – объем коллоидной частицы, $\Delta \rho$ – разность значений плотности магнетита и керосина, k – постоянная Больцмана, \bar{T} – средняя абсолютная температура в полости.

Эволюция распределения концентрации частиц в отсутствие конвективного переноса подчиняется уравнению

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D(\Delta C + \alpha \Delta T) + U \nabla C \cdot \vec{j}. \quad (11.1)$$

Здесь T , C – это поля температуры и массовой концентрации частиц, \vec{j} – единичный вектор, направленный вертикально вверх, α – размерный параметр, описывающий явление термодиффузии в коллоиде, U – скорость оседания частиц. В уравнении учтены три механизма перераспределения частиц в жидкости-носителе: диффузия, термодиффузия и седиментация, т.е. предполагается, что поток вещества определяется формулой

$$\vec{J} = -\rho D(\nabla C + \alpha \nabla T) + \rho C \vec{U}.$$

Изотермическая задача об оседании частиц феррожидкости в вертикальном канале без учета термодиффузии экспериментально и теоретически была рассмотрена в работе [16]. Эксперименты проводились в соответствии с методикой, изложенной в [17]. Теперь канал нагревается. Граничные условия для уравнения (11.1) на верхнем и нижнем торцах для рассматриваемых значений времени отвечают равенству нулю нормальной компоненты вектора плотности потока ча-

стиц. В начальный момент феррожидкость тщательно перемешана, так что концентрация частиц постоянна вдоль полости

$$J_n(0, t) = J_n(l, t) = 0, \quad C(x, 0) = C_0,$$

где l – длина вертикального канала. При динамическом нагреве с торцов зависимость распределения температуры вдоль канала от времени в бесконвективном приближении описывается стандартным уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T, \quad (11.2)$$

где χ – температуропроводность смеси. Перекрестным эффектом влияния неоднородности концентрации на распределение температуры будем пренебрегать. Для одномерного случая, когда температура зависит только от вертикальной координаты, точное решение этого уравнения, удовлетворяющее граничным и начальным условиям, находится в виде ряда.

11.1. Эволюция распределения температуры

Приведем сначала решение уравнения (11.2) в случае подогрева снизу для стандартного реализующегося в опытах набора граничных и начальных условий:

$$T(0, t) = 1, \quad T(l, t) = 0, \quad T(x, 0) = 0.$$

Продольный профиль температуры в каждый момент времени описывается рядом

$$T(x, t) = 1 - \frac{x}{l} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \exp\left\{-\frac{\pi^2 n^2}{l^2} \chi t\right\} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right), \quad (11.3)$$

где $n = 1, 2, 3 \dots$. Подогреву сверху соответствует другой набор граничных и начальных условий:

$$T(0, t) = 0, \quad T(l, t) = 1, \quad T(x, 0) = 0.$$

Уравнение теплопроводности (11.2) дает следующее решение:

$$T(x, t) = \frac{x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\pi n} \exp\left\{-\frac{\pi^2 n^2}{l^2} \chi t\right\} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right). \quad (11.4)$$

Легко увидеть, что в канале длиной $l = 5$ см линейный профиль температуры в среде с температуропроводностью $\chi = 0,7 \cdot 10^{-3}$ см²/с (керосин) устанавливается за характерное время

$$\tau_\chi \sim l^2 / \pi^2 \chi \approx 1 \text{ ч.}$$

В зависимости от условий подогрева одно из распределений температуры (11.3) или (11.4) должно подставляться в уравнение (11.1), из которого находится распределение концентрации в зависимости от времени. На всех диффузных временах $\tau \gg \tau_\chi$ профиль температуры очень быстро становится практически линейным, и решение уравнения (11.1) с однородными граничными условиями на поток можно найти аналитически.

11.2. Динамика оседания частиц

Выпишем решение уравнения (11.1) с полными граничными условиями на поток при подогреве сверху. Распределение концентрации в зависимости от времени описывается выражением

$$C(x, t) = \frac{2hlC_0 e^{-Ux/D}}{1 - e^{-2hl}} + \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n Y_n(x) \exp \left\{ -\frac{U}{2D} x - \frac{U^2}{4D} t \right\} + (Ax + B) \exp \left\{ -\frac{U}{2D} x \right\}. \quad (11.5)$$

Функции $Y_n(x)$ являются собственными функциями стандартной краевой задачи математической физики [6]:

$$Y_n'' + \lambda_n^2 Y_n = 0, \quad \begin{cases} Y_n'(0) + hY_n(0) = 0, \\ Y_n'(l) + hY_n(l) = 0. \end{cases}$$

Решение этой краевой задачи описывается функциями вида

$$Y_n(x) = \cos(\lambda_n x) - \frac{h}{\lambda_n} \sin(\lambda_n x), \quad n = 1, 2, 3 \dots,$$

которые ортогональны и образуют полный базис. Для краткости введено обозначение $h = U/2D$. Константы λ_n в выражении для концентрации равны $\lambda_n = \pi n/l$, а весовые множители ν_n определяются формулами

$$\nu_n(t) = C_n \exp \left\{ -\frac{\pi^2 n^2}{l^2} Dt \right\} +$$

$$+\theta_n \left(\frac{U^2}{4D} + \frac{\pi^2 n^2}{l^2} D \right)^{-1} \exp \left\{ \frac{U^2}{4D} t \right\}.$$

В свою очередь, амплитуды C_n и θ_n вычисляются по формулам

$$C_n = \frac{4C_0 h l \left(e^{hl} (-1)^n - 1 \right) \pi^2 n^2}{\left(h^2 l^2 + \pi^2 n^2 \right)^2} - \frac{2l \left((A + Bh) \left[(-1)^n - 1 \right] + Ah l (-1)^n \right) \pi^2 n^2}{\left(h^2 l^2 + \pi^2 n^2 \right)^2},$$

$$\theta_n = -\frac{U^2 l \left((A + Bh) \left[(-1)^n - 1 \right] + Ah l (-1)^n \right)}{2D \left(h^2 l^2 + \pi^2 n^2 \right)}.$$

Коэффициенты A и B описывают влияние термодиффузии на процесс расслоения коллоида:

$$A = \frac{2D\alpha}{Ul^2} \left(1 - \exp \left\{ \frac{U}{2D} l \right\} \right), \quad B = -\frac{2D\alpha}{Ul} \left(1 + \frac{2D}{Ul} \left[1 - \exp \left\{ \frac{U}{2D} l \right\} \right] \right).$$

Аналогично выглядит распределение концентрации при подогреве снизу. В начальный момент времени частицы равномерно распределены в полости, т.е. концентрация постоянна и равна C_0 . Процесс расслоения начинается на торцах полости и становится заметным практически сразу. Тем не менее, это меньше аналогичного диффузионного времени:

$$\tau_D \sim l^2 / \pi^2 D \approx 150 \text{ сут.}$$

На больших значениях времени $t \gg \tau_\lambda$ температурный профиль становится практически линейным, тем не менее коллоидная система далека от равновесия даже на диффузных значениях времени. Объемный термодиффузионный механизм на больших значениях времени перестает работать. Фиксируемое перераспределение частиц происходит в пограничных слоях за счет взаимодействия с твердыми непроницаемыми границами.

11.3. Анализ решения

Проанализируем решение уравнения (11.5) для разных значений параметров. Сначала рассмотрим предельный случай однородной по температуре полости в отсутствие термодиффузии – $\alpha = 0$. Графики

продольных распределений наночастиц в разные моменты времени представлены на рис. 11.1. В начальный момент времени распределение частиц предполагалось однородным и отвечало массовой концентрации 6 %.

В соответствии с тем, что перераспределение примеси начинается с торцов канала, на дне начинается рост концентрации, у верхнего торца канала концентрация начинает убывать. Расчеты показывают, что при скорости седиментации 10^{-7} см/с даже через год в канале длиной 9 см равновесное экспоненциальное распределение не успевает установиться.

Рассмотрим теперь решение в случае неоднородного нагрева канала с тем же начальным условием. Все обсуждаемые ниже результаты расчетов проведены для разности значений температуры 1°C , при этом более интересным с точки зрения бесконвективного приближения представляется случай подогрева сверху. Результаты табулирования формулы (11.5) для положительной термодиффузии ($\alpha = 0.1$ л/К) приведены на рис. 11.2. Суммирование членов ряда проводилось численно с помощью компьютерного модуля, написанного на языке программирования FORTRAN-90.

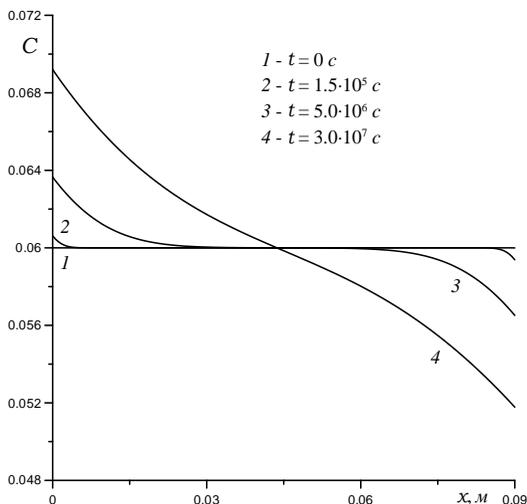


Рис. 11.1. Концентрация частиц в зависимости от вертикальной координаты; номера кривых отвечают следующим моментам времени: 1 – 0 с, 2 – $1.5 \cdot 10^5$ с, 3 – $5 \cdot 10^6$ с, 4 – $3 \cdot 10^7$ с

Видно, что даже при столь малой разности значений температуры процесс оседания за счет термодиффузии идет примерно на 30 % быстрее, чем в отсутствие нагрева. В случае отрицательной термодиффузии ($\alpha = -0.1$ 1/К) и подогреве сверху оседание частиц сменяется на противоположный процесс: накопление частиц у верхнего торца канала. При данном наборе параметров формирование неустойчивой стратификации идет со скоростью, превышающей темпы оседания (рис. 11.3).

Таким образом, при перепаде температуры всего 0.11 К/см действие термодиффузии в случае принятого в расчетах термодиффузионного параметра не может остаться незамеченным в эксперименте. При нагреве снизу положительная термодиффузия должна препятствовать седиментации, а отрицательная – стремится ускорить процесс оседания примеси на дно сосуда. В случае нагрева сверху термодиффузионный механизм перераспределения частиц работает противоположным образом. На измерении концентрационных характеристик по разнице в оседании частиц при подогреве сверху и снизу может быть основана экспериментальная методика определения термодиффузионного коэффициента для частиц в феррожидкости. Влияние термодиффузии на процесс перераспределения феррочастиц становится заметным даже при относительно малых значениях времени.

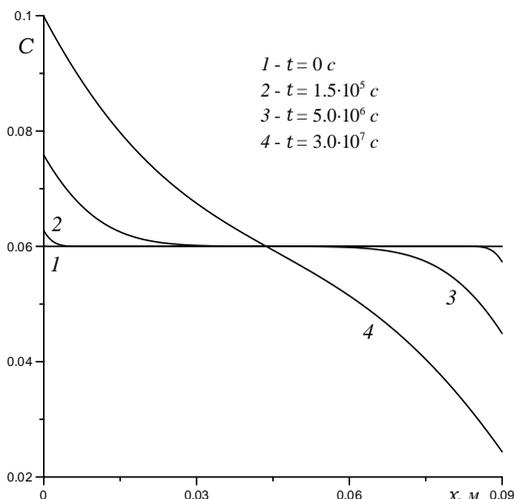


Рис. 11.2. Концентрация частиц в разные моменты времени ($\alpha = 0.1$ 1/К); номера кривых отвечают: 1 – 0 с, 2 – $1.5 \cdot 10^5$ с, 3 – $5 \cdot 10^6$ с, 4 – $3 \cdot 10^7$ с

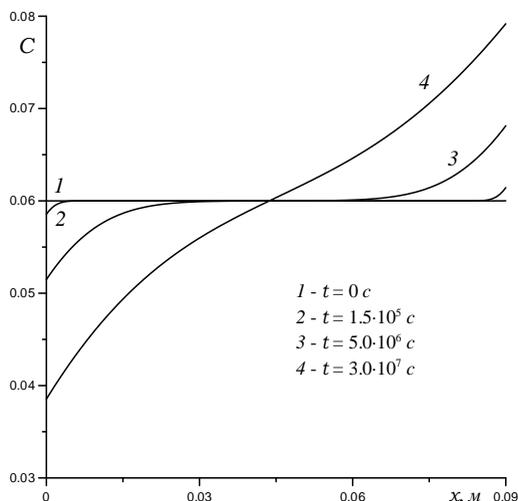


Рис. 11.3. Концентрация частиц в разные моменты времени ($\alpha = -0.1 \text{ 1/K}$); номера кривых отвечают: 1 – 0 с, 2 – $1.5 \cdot 10^5$ с, 3 – $5 \cdot 10^6$ с, 4 – $3 \cdot 10^7$ с

Результаты расчетов показывают возможность экспериментального измерения термодиффузионного коэффициента для феррожидкости на основе керосина с размерами частиц порядка 10 нм. Разработанная в [15] вычислительная методика при определенных ограничениях позволяет распространить ее на другие коллоидные растворы для частиц различных размеров с произвольным знаком плавуемости.

12. Уравнения эллиптического типа. Задача Дирихле

Наиболее распространенным уравнением эллиптического типа является уравнение Лапласа: $\Delta u = 0$. Функция u называется гармонической в расчетной области, если она непрерывна в этой области, включая свои производные первого и второго порядка, и удовлетворяет уравнению Лапласа. Неоднородный аналог уравнения Лапласа называется уравнением Пуассона. Для гармонических функций разработана общая теория и различные математические методы, что позволяет рассматривать этот раздел математики как завершенный.

Рассмотрим некоторый объем V , ограниченный поверхностью Σ . Эта поверхность делит пространство на две части. Будем обозначать их индексами 1 и 2. Обсудим наиболее распространенные типы граничных условий для уравнения Пуассона:

$$\Delta u = -F(x, y, z).$$

Они могут иметь вид

1) на границе задано значение неизвестной функции

$$\Sigma: u = f_1 - \text{задача Дирихле};$$

2) на границе задана производная по нормали к поверхности

$$\Sigma: \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = f_2 - \text{задача Неймана}.$$

Наиболее поучительными являются краевые задачи с эллиптическими уравнениями в криволинейных координатах. Выпишем оператор Лапласа в сферических и цилиндрических координатах [10]:

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2},$$

где r – радиальная координата, θ – меридиональный, α – азимутальный углы;

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

где r – радиальная координата, α – азимутальный угол, z – аксиальная координата.

Решим простейшую задачу для уравнения Лапласа методом разделения переменных. Рассмотрим так называемые внутреннюю и внешнюю задачи Дирихле, решение которых представляется в терминах тригонометрических функций.

Сформулируем классическую краевую задачу для круга. Найдем функцию u , удовлетворяющую уравнению $\Delta u = 0$ внутри круга и граничному условию $u = f$ на границе круга при $r = a$, f – заданная функция, она непрерывна и дифференцируема. Будем решать задачу в полярной системе координат:

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} = 0.$$

Метод разделения переменных предполагает поиск решения в виде

$$u(r, \alpha) = R(r)\Phi(\alpha).$$

Подстановка этого решения в уравнение дает

$$\frac{\Phi}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) = -\frac{R}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2}.$$

Разделяем переменные

$$\frac{\frac{d}{d\rho} \left(r \frac{dR}{dr} \right)}{\frac{R}{r}} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda,$$

где λ – как обычно, константа разделения переменных. В итоге получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\begin{cases} \Phi'' + \lambda\Phi = 0, \\ r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) - \lambda R = 0. \end{cases}$$

Первое уравнение имеет решение в виде суперпозиции гармонических функций:

$$\Phi(\alpha) = A \cos \sqrt{\lambda} \alpha + B \sin \sqrt{\lambda} \alpha.$$

Эта функция должна удовлетворять фундаментальному свойству: $\Phi(\alpha) = \Phi(\alpha + 2\pi)$, т.е. при изменении угла α на 2π функция должна принять исходное значение:

$$u(r, \alpha) = u(r, \alpha + 2\pi).$$

Это возможно только в случае когда $\sqrt{\lambda} = n$, где n – целое число. Тогда частное решение принимает форму

$$\Phi_n = A_n \cos n\alpha + B_n \sin n\alpha.$$

Для функции $R(r)$ имеем уравнение с переменными коэффициентами. Следуя рецепту при нахождении частных решений подобных дифференциальных уравнений, будем искать его решение в виде степенной функции $R(r) = r^\mu$, где μ – показатель, подлежащий определению в ходе решения задачи:

$$r \frac{d}{dr} (r \mu r^{\mu-1}) = r \frac{d}{dr} \mu r^\mu = \mu^2 r r^{\mu-1} = \mu^2 r^\mu.$$

Таким образом, решение $R(r) = r^\mu$ проходит через уравнение, если $\mu^2 = \lambda$, $\mu = \sqrt{\lambda} = \pm n$ при $n > 0$.

В результате имеем

$$R(r) = Cr^n + Dr^{-n}.$$

Для решения внутренней задачи $D=0$ (область 1), т.е. $R(r) = Cr^n$. В центре при $r=0$ частное решение D/r^n обращается в бесконечность, т.е. не является гармоничной функцией внутри круга. При решении внешней задачи, наоборот, необходимо отбросить част-

ное решение Cr^n , так как при $r \rightarrow 0$ решение внешней задачи должно быть ограничено. В результате имеем

$$r \leq a, u_n(r, \alpha) = r^n (A_n \cos n\alpha + B_n \sin n\alpha),$$

$$r \geq a, u_n(r, \alpha) = \frac{1}{r^n} (A_n \cos n\alpha + B_n \sin n\alpha).$$

Общее решение образуется суммированием по n :

$$r \leq a, u(r, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (A_n \cos n\alpha + B_n \sin n\alpha),$$

$$r \geq a, u(r, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^n} (A_n \cos n\alpha + B_n \sin n\alpha).$$

Коэффициенты A_n и B_n находятся из краевого условия. Если ряды сходятся, то они тоже будут представлять собой гармонические функции, как и все частные решения. При $\rho = a$ имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n (A_n \cos n\alpha + B_n \sin n\alpha) = f(\alpha). \quad (12.1)$$

Функция $f(\alpha)$ может быть представлена в виде ряда Фурье:

$$f(\alpha) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha), \quad (12.2)$$

где a_0, a_n, b_n находятся из условия ортогональности базисных функций:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) d\psi, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \cos \psi d\psi, \quad (12.3)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \sin \psi d\psi \quad (12.4)$$

при $n = 1, 2, 3 \dots$. Сравним почленно ряды (12.1) и (12.2). Для внутренней и внешней областей получаем

$$r \leq a, A_0 = \frac{a_0}{2}, A_n = \frac{a_n}{a^n}, B_n = \frac{b_n}{a^n};$$

$$r \geq a, A_0 = \frac{a_0}{2}, A_n = a^n a_n, B_n = a^n b_n.$$

В итоге получаем формальное решение внутренней и внешней задач для круга:

$$r \leq a, \quad u(r, \alpha) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{a^n} (a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha),$$

$$r \leq a, \quad u(r, \alpha) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{r^n} (a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha).$$

В этом решении коэффициенты рядов вычисляются по формулам (12.3), (12.4). Они отражают информацию о граничном условии на линии раздела областей 1 и 2.

13. Специальные функции. Цилиндрические волны

Отвлечемся сейчас от последовательного рассмотрения свойств уравнений в частных производных второго порядка и обсудим еще одну важную сторону задач математической физики, которые часто сводятся к уравнениям с переменными коэффициентами. В качестве примера проанализируем структуру звуковой волны, в которой распределение значений плотности и давления зависит только от расстояния до некоторой оси. Подобная симметрия называется аксиальной. В звуковой волне, характеризующейся аксиальной симметрией, потенциал скорости является функцией r и t :

$$\varphi(r, t), \quad \frac{\partial}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} = 0.$$

Напомним, что потенциал скорости вводится в гидродинамике для течений, имеющих градиентный характер, следующим образом [8]:

$$\vec{v} = \text{grad } \varphi \equiv \nabla \varphi.$$

Волновое уравнение (2.4) с учетом структуры оператора Лапласа в цилиндрических координатах приобретает вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right). \quad (13.1)$$

Через это уравнение проходит решение в виде монохроматической волны:

$$\varphi = e^{-i\omega t} f(r).$$

При подстановке этого решения в исходное уравнение получаем

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) = -k^2 f,$$

где $k = \omega/c$. Раскрывая производную, получаем для радиальной части

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} = -k^2 f.$$

Мы пришли к известному в математической физике уравнению для функций Бесселя нулевого порядка

$$f'' + \frac{1}{r} f' + k^2 f = 0. \quad (13.2)$$

Решение такого уравнения можно получить только в виде ряда. Никакой подстановкой его не удастся свести к уравнению с постоянными коэффициентами. В чуть более общем виде это уравнение можно записать следующим образом:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0. \quad (13.3)$$

При $n = 0$ это уравнение переходит в уравнение (13.2). К уравнениям (13.2) и (13.3) сводится большое число задач математической физики. Следуя источнику [14], будем искать решение обобщенного уравнения (13.3) в виде ряда

$$y = \sum_{p=0}^{\infty} a_p x^{p+k}. \quad (13.4)$$

Здесь k – степень первого члена в разложении, которая подлежит определению в ходе решения задачи. Найдем предварительно первую и вторую производные от этого ряда:

$$y' = \sum_{p=0}^{\infty} a_p (p+k) x^{p+k-1}, \quad y'' = \sum_{p=0}^{\infty} a_p (p+k)(p+k-1) x^{p+k-2}.$$

Далее подставим полученные ряды в исходное уравнение (13.3) и попытаемся подобрать коэффициенты ряда a_p и показатель степени p так, чтобы уравнение (13.3) удовлетворялось в каждой точке x :

$$x^2 \sum_{p=0}^{\infty} a_p (p+k)(p+k-1) x^{p+k-2} + x \sum_{p=0}^{\infty} a_p (p+k) x^{p+k-1} + (x^2 - n^2) \sum_{p=0}^{\infty} a_p x^{p+k} = 0.$$

Полином тождественно равен нулю, когда все коэффициенты при степенях равны нулю. Сравнивая множители при одинаковых степенях аргумента x в левой и правой частях равенства, получаем условия на коэффициенты ряда

$$a_0 (k^2 - n^2) = 0,$$

Здесь Γ – это так называемая гамма-функция Эйлера [10], которая определяется интегралом

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx \quad (p > 0), \quad \Gamma(p+1) = p\Gamma(p).$$

С учетом определения и отмеченного выше свойства искомое решение запишется в виде

$$y = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p! \Gamma(n+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n}. \quad (13.5)$$

Этот ряд называется в математике *функцией Бесселя первого рода порядка n* и обозначается $J_n(x)$. Согласно уравнению (13.5), значение в произвольной точке должно вычисляться путем суммирования бесконечного числа членов ряда, что напрямую сделать невозможно, поэтому она принадлежит к классу *специальных функций*.

При $k = -n$ выбираем

$$a_0 = \frac{1}{2^{-n} \Gamma(-n+1)}$$

и приходим к функции Бесселя первого рода порядка $-n$:

$$J_{-n}(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p! \Gamma(-n+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p-n}. \quad (13.6)$$

Можно доказать, что ряд (13.5) сходится при любых значениях x , а ряд (13.6) – при $x \neq 0$. Эти специальные функции также допускают двукратное почленное дифференцирование, т.е. $J_n(x)$ и $J_{-n}(x)$ являются решениями исходного уравнения Бесселя. Очевидно, что в случае нецелых n функции Бесселя $J_n(x)$ и $J_{-n}(x)$ линейно независимы, так как их разложения начинаются с разных степеней x .

Таким образом, общее решение уравнения Бесселя (13.3) при n , не равном целому числу, имеет вид

$$y = C_1 J_n(x) + C_2 J_{-n}(x),$$

где C_1 и C_2 – амплитуды, определяющиеся краевыми или начальными условиями. С некоторыми дополнительными нюансами, и тоже в виде суперпозиции специальных функций, находится общее решение этого уравнения в случае целых n . За дополнительной информацией по специальным функциям авторы рекомендуют обратиться к изданиям [3, 4, 6, 18]. Функции Бесселя и другие специальные функции изучены математиками весьма детально. Составлены таблицы их значений и

нарисованы графики для всевозможных значений параметров. На сегодняшний день все вычислительные программные пакеты, позволяющие производить как аналитические, так и численные расчеты, имеют встроенные возможности для работы практически со всеми известными специальными функциями. Иными словами, если какая-нибудь задача сводится к уравнениям, для которых продуктом являются специальные функции, то она считается решенной.

14. Интегральные преобразования

При рассмотрении множества задач математической физики распределения различных величин в подавляющем большинстве задаются соответствующими уравнениями, вытекающими из физических законов, и однозначно доопределяются начальными и граничными условиями, которые отражают специфику конкретной задачи. Хевисайд показал, что можно ввести достаточно общее интегральное преобразование любой функции, основанное на некотором экспоненциальном ядре, которое позволяет переформулировать задачу в терминах другой переменной. Пусть для функции $f(x)$ на интервале $a \leq x \leq b$ это интегральное преобразование имеет следующий вид:

$$\varphi(p) = \int_a^b f(x) e^{-px} dx, \quad (14.1)$$

т.е., согласно процедуре, φ является функцией аргумента p , который изначально выступал в роли параметра. Ниже будет показано, что функции $f(x)$ и $\varphi(p)$ в определенном смысле эквивалентны при описании распределений физических величин. Функция $f(x)$ называется *оригиналом*, а функция $\varphi(p)$ – *образом*. Зачастую уравнения математической физики гораздо проще формулируются в терминах образа. Выбор пределов интегрирования a и b , а также вид переменной p определяются задачей. Перечислим несколько общих свойств подобных преобразований:

1. Интегральное преобразование свертки функций.

Если функция $f(x)$ задана в виде интеграла от произведения двух функций g и h

$$f(x) = \int_a^b g(y)h(x-y)dy,$$

называемого интегральной сверткой исходных функций, то из определения (14.1) вытекает следующее свойство:

$$\begin{aligned}\varphi(p) &= \int_a^b f(x)e^{-px} dx = \int_a^b e^{-px} dx \left[\int_a^b g(y)h(x-y) dy \right] = \\ &= \int_a^b g(y)e^{-py} dy \int_a^b h(z)e^{-pz} dz = \gamma(p)\chi(p),\end{aligned}\quad (14.2)$$

где $z = x - y$, в то время как

$$\gamma(p) = \int_a^b g(y)e^{-py} dy, \quad \chi(p) = \int_a^b h(z)e^{-pz} dz$$

— образы функций g и h . Иными словами, образ интегральной свертки двух функций равен произведению их образов.

2. Интегральное преобразование производной.

Если функция $f(x)$ задана в виде производной от некоторой функции

$$f(x) = \frac{\partial h(x)}{\partial x},$$

то

$$\begin{aligned}\varphi(p) &= \int_a^b f(x)e^{-px} dx = \int_a^b \frac{\partial h(x)}{\partial x} e^{-px} dx = \left(h(x)e^{-px} \right) \Big|_a^b + \\ &+ p \int_a^b h(x)e^{-px} dx = h(b)e^{-pb} - h(a)e^{-pa} + p\chi(p),\end{aligned}\quad (14.3)$$

где

$$\chi(p) = \int_a^b h(z)e^{-pz} dz$$

представляет собой образ функции $h(z)$.

3. Растяжение аргумента.

Если переменная функции $f(x)$ задана в виде $x = cy$, где c — некоторая константа, то

$$\frac{1}{c} \varphi\left(\frac{p}{c}\right) = \int_a^b f(cy)e^{-py} dy = \frac{1}{c} \int_a^b f(x)e^{-\frac{p}{c}x} dx.\quad (14.4)$$

Существует несколько востребованных способов выбора переменных a , b и p . В данном пособии мы рассмотрим лишь наиболее актуальные

при описании физических процессов. Это преобразования Фурье и Лапласа [19].

14.1. Преобразование Фурье

Пусть переменная x может принимать любые действительные значения ($-\infty < x < \infty$), тогда выберем пределы интегрирования в формуле (14.1) следующим образом: $a = -\infty$, $b = \infty$. Для множества физических задач особый интерес представляют периодически изменяющиеся в пространстве функции, а также выражение неперiodических функций в виде суммы некоторого ряда, состоящего из периодических функций. Для этих целей наиболее удобно выбрать параметр p в ядре так, чтобы экспонента в формуле (14.1) стала периодической функцией, а именно $p = -ik$. Таким образом, интегральное преобразование будет выглядеть следующим образом:

$$\varphi(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ikx} dx. \quad (14.5)$$

Такое интегральное преобразование называют преобразованием Фурье в честь французского математика XVII–XVIII вв. Ж.Б. Фурье, впервые использовавшего подобного рода представление для решения задач теплопроводности и связанных с ними уравнений (см. гл. 10). Функцию $\varphi(k)$ обычно называют фурье-образом функции $f(x)$. Также мы будем использовать обозначение

$$\varphi(k) = \hat{f}(k) = \mathcal{F}[f](k).$$

Для фурье-образа ограниченной непрерывной равномерно дифференцируемой функции $f(x)$ справедливы следующие свойства:

1. Ограниченность. Если интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

ограничен, то фурье-образ $\hat{f}(k)$ тоже ограничен для любых k . Доказательство следует из свойства экспоненты $|\exp(ikx)| = 1$ (см. источник [19]).

2. Смена знака аргумента:

$$\begin{aligned}
 f(-x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(-x)e^{ikx} dx = - \int_{-\infty}^{\infty} f(-x)e^{-ik(-x)} d(-x) = \\
 &= - \int_{+\infty}^{-\infty} f(z)e^{-ik(z)} dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{-ik(z)} dz = \hat{f}^*(k). \quad (14.6)
 \end{aligned}$$

3. Дифференцирование оригинала. В силу свойства (14.3) получим

$$\begin{aligned}
 \hat{f}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial h(x)}{\partial x} e^{ikx} dx = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} h(x)e^{ikx} - \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)e^{ikx} - ik\hat{h}(k). \quad (14.7)
 \end{aligned}$$

Поскольку для существования фурье-образа интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx$$

должен быть ограничен, очевидно, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0,$$

тогда имеем

$$\hat{f}(k) = \left(\frac{\partial h(x)}{\partial x} \right) = -ik\hat{h}(k). \quad (14.8)$$

Попутно обобщим наши представления о дельта-функции в рамках концепции интегральных преобразований. Используя определение и свойства дельта-функции (10.3) и (10.4), которые были описаны в гл. 10, получим формулу для обратного преобразования Фурье, а именно:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{-ikx} dk = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x')e^{ikx'} dx' \right) e^{-ikx} dk = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik(x'-x)}}{2\pi} dk \right) dx' =
 \end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \delta(x' - x) dx' = f(x). \quad (14.9)$$

14.2. Преобразование Лапласа

Пусть переменная x может принимать только неотрицательные значения ($0 \leq x < \infty$), тогда выберем пределы интегрирования в формуле (14.1) следующим образом: $a = 0$, $b = \infty$. Выберем переменную p так, чтобы она имела как вещественную, так и мнимую часть. А именно: $p = s = \sigma + i\omega$ – комплексное число. В этом случае экспонента в формуле (14.1) продолжает оставаться периодической функцией. В результате интегральное преобразование будет выглядеть следующим образом:

$$\varphi(s) = \int_0^{\infty} f(x) e^{-sx} dx. \quad (14.10)$$

Такое интегральное преобразование называют *преобразованием Лапласа*. Функцию $\varphi(s)$ обычно называют лаплас-образом функции $f(x)$. В продолжение введенной системы маркировки будем обозначать лаплас-образ как

$$\varphi(s) = \tilde{f}(s) = \mathcal{L}[f](s).$$

Для лаплас-образа ограниченной непрерывной равномерно дифференцируемой функции $f(x)$ справедливы определенные свойства. Перечислим некоторые из них.

1. Ограниченность. Если интеграл

$$\int_0^{\infty} f(x) dx$$

ограничен, то лаплас-образ $\tilde{f}(s)$ тоже ограничен для любых s . Доказательство следует из свойств экспоненты $|\exp(-sx)| \leq 1$.

2. Дифференцирование оригинала.

В силу общего свойства (14.3) получим

$$\tilde{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial h(x)}{\partial x} e^{-sx} dx =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} h(x)e^{-sx} - \lim_{x \rightarrow 0} h(x)e^{-sx} + s\tilde{h}(s). \quad (14.11)$$

Поскольку для существования лаплас-образа интеграл

$$\int_0^{\infty} h(x) dx$$

должен быть ограничен, очевидно, что $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 0$, тогда имеем

$$\tilde{f}(k) = \mathcal{L} \left[\frac{\partial h(x)}{\partial x} \right] (s) = s\hat{h}(s) - h(0). \quad (14.12)$$

Для производной высших порядков будем иметь

$$\tilde{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^m h(x)}{\partial x^m} e^{-sx} dx = s^m \tilde{f}(s) - \sum_{i=0}^{m-1} s^i \frac{\partial^{m-1-i} f(0)}{\partial t^{m-1-i}}, \quad (14.13)$$

3. Обратное преобразование. Обратное преобразование Лапласа задается следующим интегралом:

$$f(x) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{\sigma-i\omega}^{\sigma+i\omega} \tilde{f}(s) e^{sx} ds, \quad (14.14)$$

где σ – некоторое действительное число.

4. Лаплас-преобразование дельта-функции:

$$\varphi(s) = \int_0^{\infty} \delta(x) e^{-sx} dx = \int_0^{\infty} \delta(x-0) e^{-sx} dx = e^0 = 1. \quad (14.15)$$

Преобразования Лапласа и Фурье являются интегральными преобразованиями, которые используются в качестве математических подходов для решения большого числа физических задач. Смысл в том, что с помощью интегрального преобразования сложная математическая задача превращается в более простую. После ее решения применяется обратное интегральное преобразование, которое предоставляет нам решение описание исходной модели.

Преобразование Фурье – частный случай преобразования Лапласа. Можно видеть, что они совпадают на множестве неотрицательных действительных чисел.

14.3. Гамма- и бета-функции

Остановимся чуть подробнее на обсуждении свойств некоторых специальных функций, так как они понадобятся для дальнейших рас-

суждений. Выпишем еще раз определение гамма-функции, которое выражается следующим интегралом:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} y^{x-1} e^{-y} dy. \quad (14.16)$$

Здесь y является переменной интегрирования, потому при наличии определенных пределов гамма-функция от нее не зависит. Эта функция впервые была введена Леонардом Эйлером и поэтому получила его имя. Ранее гамма-функция потребовалась нам в гл. 13 для того, чтобы более компактно записать члены ряда, который является решением уравнения Бесселя. Некоторые значения гамма-функции могут быть рассчитаны аналитически, а именно:

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} y^0 e^{-y} dy = \int_0^{\infty} e^{-y} dy = -e^{-y} \Big|_0^{\infty} = 1,$$

$$\Gamma(2) = \int_0^{\infty} ye^{-y} dy = \underbrace{-ye^{-y} \Big|_0^{\infty}}_0 + \int_0^{\infty} e^{-y} dy = -e^{-y} \Big|_0^{\infty} = 1,$$

$$\Gamma(3) = \int_0^{\infty} y^2 e^{-y} dy = \underbrace{-y^2 e^{-y} \Big|_0^{\infty}}_0 + 2 \underbrace{\int_0^{\infty} ye^{-y} dy}_1 = 2,$$

$$\Gamma(4) = \int_0^{\infty} y^3 e^{-y} dy = \underbrace{-y^3 e^{-y} \Big|_0^{\infty}}_0 + 3 \underbrace{\int_0^{\infty} y^2 e^{-y} dy}_2 = 6,$$

.....

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} y^{n-1} e^{-y} dy = \underbrace{-y^{n-1} e^{-y} \Big|_0^{\infty}}_0 +$$

$$+ (n-1) \underbrace{\int_0^{\infty} y^{n-2} e^{-y} dy}_0 = (n-1)!, \quad (14.17)$$

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{\infty} y^{0.5-1} e^{-y} dy = \int_0^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{y}} e^{-y} dy}_{z=\sqrt{y}} = \int_0^{\infty} \frac{1}{z} e^{-z^2} dz^2 = 2 \int_0^{\infty} \underbrace{e^{-z^2} dz}_{\sqrt{\pi}/2} = \sqrt{\pi}, \quad (14.18)$$

где n – некоторое натуральное число. Очевидно, что интегрирование по частям, использованное для нахождения $\Gamma(n)$, применимо для общего определения функции. Иными словами, гамма-функция обладает свойством, аналогичным факториалу, а именно:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} y^x e^{-y} dy = \underbrace{-y^x e^{-y}}_0^{\infty} + x \int_0^{\infty} \underbrace{y^{x-1} e^{-y} dy}_{\Gamma(x)} = x\Gamma(x). \quad (14.19)$$

Таким образом, гамма-функция Эйлера является некоторым обобщением факториала на нецелые положительные значения переменной x . Для отрицательных значений переменной x интеграл (14.16) расходится. Однако, воспользовавшись свойством (14.19), можно определить значения гамма-функции и для отрицательных значений переменной x . Так, для $x < 0$ имеем $\Gamma(x) = \Gamma(x+1) / x$. Правда, заметим, что для целых отрицательных значений переменной x гамма-функция будет обращаться в бесконечность, поскольку

$$\Gamma(-n) = -\frac{\Gamma(-n+1)}{n} = \frac{\Gamma(-n+2)}{n(n-1)} = \dots = (-1)^n \frac{\Gamma(1)}{n!} \rightarrow (-1)^n \infty. \quad (14.20)$$

Наряду с гамма-функцией Эйлера также используется бета-функция:

$$B(x, y) = \int_0^1 z^{x-1} (1-z)^{y-1} dz = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \quad (14.21)$$

15. Элементы теории вероятностей

15.1. Функция распределения вероятности

Пусть случайная величина X принимает значения x на интервале $x \in (a, b)$ с вероятностью $P(x)$, тогда *функцией распределения* этой величины называют $F_X(y) = P(x < y)$. Отметим, что это понятие нельзя путать с функцией распределения в статистической физике. В качестве примера случайной величины рассмотрим идеальную игральную кость. В этой системе случайная величина – выпавшее число очков на верхней грани, может принимать дискретные целые значения на интервале $x \in [1, 6]$. Если игральная кость идеальна, то вероятность того, что каждая грань окажется верхней, одинакова. Таким образом, вероятность выпадения любого из шести вариантов равна $1/6$. В этом случае функция распределения будет задана следующим образом:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & 1 \geq x \\ 1/6, & 2 \geq x > 1 \\ 1/3, & 3 \geq x > 2 \\ 1/2, & 4 \geq x > 3 \\ 2/3, & 5 \geq x > 4 \\ 5/6, & 6 \geq x > 5 \\ 1, & x > 6 \end{cases} \quad (15.1)$$

Очевидно, что для любых $c > b$ получаем $F_X(c) = 1$, в то же время $F_X(c) = 0$ при $c \leq a$, т.е. все изменение функции распределения происходит в интервале $F_X(y) \in [0, 1]$. По своему построению функция распределения вероятностей является неслучайной функцией, так как она вычисляется на основании *закона распределения случайной величины*. Такая функция довольно часто оказывается недостаточно информативной, поэтому вводится функция плотности вероятности.

Поскольку основная информация о распределении содержится именно в скорости изменения функции распределения, естественно определить плотность распределения как первую производную от функции распределения, а именно

$$f_X(y) = \frac{\partial F_X}{\partial y}. \quad (15.2)$$

Очевидно, что функция распределения вычисляется через функцию плотности следующим образом:

$$F_X(y) = \int_a^y f_X(z) dz, \quad (15.3)$$

при этом справедливо следующее:

$$\int_a^c f_X(z) dz = 1, \quad c \geq b; \quad \int_a^c f_X(z) dz = 0, \quad c < a. \quad (15.4)$$

Исходя из формул (15.3), (15.4) плотность распределения должна быть ограниченной неотрицательной функцией.

По виду функции плотности вероятности различают несколько типов распределений:

1. X -симметричное; $f_X(y) = f_X(-y)$ – функция плотности вероятности четная, при этом $b = -a$.

2. X -одностороннее левое распределение; $f_X(y) = 0, y > 0$ – вся вероятность сосредоточена на левой полуоси.

3. X -одностороннее правое распределение; $f_X(y) = 0, y < 0$ – вся вероятность сосредоточена на правой полуоси.

4. X -несимметричное: любые другие случаи.

Для описания основных свойств функции плотности вероятности вводятся моменты случайных величин. Каждый из моментов представляет собой определенную числовую характеристику случайных процессов. Абсолютным моментом случайной величины порядка n называют следующий интеграл:

$$M_n = \int_a^b y^n f_X(y) dy. \quad (15.5)$$

Кроме того, различают еще центральные моменты:

$$\mu_n = \int_a^b (y - M_1)^n f_X(y) dy. \quad (15.6)$$

Очевидно, что центральный момент первого порядка равен нулю, поэтому есть смысл говорить только о центральных моментах порядка $n > 1$. Моменты являются числовыми характеристиками распределения. Приведем список наиболее важных из них, связанных с моментами.

1. Среднее значение случайной величины:

$$M_1 = \int_a^b y f_X(y) dy.$$

2. Дисперсия случайной величины:

$$\begin{aligned} \mu_2 = \sigma^2 &= \int_a^b (y - M_1)^2 f_X(y) dy = \\ &= \int_a^b (y^2 - 2M_1y + M_1^2) f_X(y) dy = \underbrace{\int_a^b y^2 f_X(y) dy}_{M_2} - \\ &\quad - 2M_1 \underbrace{\int_a^b y f_X(y) dy}_{M_1} + M_1^2 \underbrace{\int_a^b f_X(y) dy}_1 = M_2 - M_1^2. \quad (15.7) \end{aligned}$$

Здесь σ – среднеквадратичное отклонение.

3. Коэффициент асимметрии:

$$\begin{aligned} \frac{\mu_3}{\sigma^3} &= \frac{1}{\sigma^3} \int_a^b (y - M_1)^3 f_X(y) dy = \\ &= \frac{1}{\sigma^3} \int_a^b (y^3 - 3M_1y^2 + 3M_1^2y - M_1^3) f_X(y) dy = \\ &= \frac{1}{\sigma^3} \underbrace{\int_a^b y^3 f_X(y) dy}_{M_3} - \frac{3M_1}{\sigma^3} \underbrace{\int_a^b y^2 f_X(y) dy}_{M_2} + \\ &\quad + \frac{3M_1^2}{\sigma^3} \underbrace{\int_a^b y f_X(y) dy}_{M_1} - \frac{M_1^3}{\sigma^3} \underbrace{\int_a^b f_X(y) dy}_1 = \\ &= \frac{M_3}{\sigma^3} - \frac{3M_1M_2}{\sigma^3} + \frac{2M_1^3}{\sigma^3} = \frac{M_3}{\sigma^3} - \frac{3M_1}{\sigma^3} (\sigma^2 - M_1^2) + \\ &\quad + \frac{2M_1^3}{\sigma^3} = \frac{M_3}{\sigma^3} - \frac{3M_1}{\sigma} + \frac{M_1^3}{\sigma^3}, \quad (15.8) \end{aligned}$$

Таким образом, для симметричных распределений $M_3 = M_1 = 0$, т.е. коэффициент асимметрии равен нулю. В случае если он больше нуля – большая часть вероятности находится на правой полуоси, если меньше нуля – на левой.

15.2. Характеристическая функция

Одним из способов задания распределения случайной величины является введение еще одной функциональной зависимости, которая называется *характеристической функцией*. Характеристическая функция удобна в тех случаях, когда плотность или функция распределения имеют очень сложный вид. Также характеристические функции являются удобным инструментом для изучения вопросов слабой сходимости решений. *Характеристической функцией Фурье* случайной величины называется фурье-образ функции плотности распределения, а именно

$$\Phi_X(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) e^{ikx} dx. \quad (15.9)$$

Характеристическая функция Фурье (15.9) обладает следующими свойствами:

1. Ограниченность. В силу ограниченности функции плотности и соответствующего свойства фурье-образа.

$$2. \Phi_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1.$$

3. Характеристическая функция суммы независимых случайных величин

$$Z = \sum_{i=1}^N X_i$$

вычисляется произведением характеристических функций, входящих в сумму:

$$\Phi_Z = \prod_{i=1}^N \Phi_{X_i}.$$

Поскольку вероятности независимых событий перемножаются, а аргументы суммы случайных величин суммируются, для характеристической функции имеем

$$\begin{aligned} \Phi_Z(k) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \dots f_{X_N}(x_N) e^{ik(x_1+x_2+\dots+x_N)} dx_1 dx_2 \dots dx_n = \end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(x_1) e^{ikx_1} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_2}(x_2) e^{ikx_2} dx_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_N}(x_N) e^{ikx_N} dx_N =$$

$$= \prod_{i=1}^N \Phi_{X_i}. \quad (15.10)$$

В частности, характеристическая функция суммы одинаково распределенных случайных величин $\Phi_Z = (\Phi_X)^N$.

4. Функция плотности вероятности задается обратным преобразованием Фурье от характеристической функции:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k) e^{-ikx} dk.$$

5. Разложение в ряд по моментам.

Разложим экспоненту, стоящую под интегралом в определении характеристической функции, в ряд Тейлора около точки $x = 0$:

$$e^{ikx} = 1 + ikx - \frac{k^2 x^2}{2} - \frac{ik^3 x^3}{6} + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ikx)^m}{m!}. \quad (15.11)$$

Подставляя ряд (15.11) в определение характеристической функции (15.9), с учетом определения момента случайной величины (15.5) получим

$$\Phi_X(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) e^{ikx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ikx)^m}{m!} dx =$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx}_{M_0=1} + ik \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx}_{M_1} - \frac{k^2}{2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx}_{M_2} +$$

$$\dots + \frac{(ik)^m}{m!} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x^m f_X(x) dx}_{M_m} + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ik)^m}{m!} M_m. \quad (15.12)$$

6. Вычисление моментов случайной величины.

Поскольку характеристическая функция непрерывна и ограничена, ее можно разложить в ряд Тейлора вблизи $k = 0$:

$$\Phi_X(k) = \Phi_X(0) + k \left. \frac{\partial \Phi_X}{\partial k} \right|_{k=0} + \frac{k^2}{2} \left. \frac{\partial^2 \Phi_X}{\partial k^2} \right|_{k=0} + \dots$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k^m}{m!} \frac{\partial^m \Phi_X(k)}{\partial k^m} \Big|_{k=0}. \quad (15.13)$$

Сравнивая формулы (15.13) и (15.12), получим выражения для момента порядка m :

$$M_m = (-i)^m \frac{\partial^m \Phi_X(k)}{\partial k^m} \Big|_{k=0}. \quad (15.14)$$

Иногда вместо характеристической функции Фурье случайной величины бывает удобно использовать ее логарифм, а именно

$$\phi_X(k) = \ln \Phi_X(k) = \ln \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) e^{ikx} dx. \quad (15.15)$$

Логарифм характеристической функции Фурье обладает следующими свойствами:

1. Ограниченность в области определения случайной величины, поскольку для нее справедливо $f_X(x) > 0$.

2. Вследствие нормировки

$$\phi_X(0) = \ln \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 0.$$

3. Логарифм характеристической функции суммы независимых случайных величин X_i дается суммой характеристических функций:

$$Z = \sum_{i=1}^N X_i, \quad \phi_Z = \sum_{i=1}^N \phi_{X_i}.$$

В частности, логарифм характеристической функции суммы одинаково распределенных случайных величин $\phi_Z = N\phi_X$.

4. Функция плотности вероятности дается следующей формулой:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k) e^{-ikx} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\phi(k)} e^{-ikx} dk = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\phi(k) - ikx) dk. \end{aligned} \quad (15.16)$$

5. Разложение в ряд по кумулянтам.

Возьмем логарифм от формулы (15.12):

$$\phi_X(k) = \ln \Phi_X(k) = \ln \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ik)^m}{m!} M_m = \ln \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(ik)^m}{m!} M_m \right). \quad (15.17)$$

Перепишем формулу (15.17) в виде ряда

$$\begin{aligned} \phi_X(k) &= \ln \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(ik)^m}{m!} M_m \right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(ik)^m}{m!} M_m \right)^n = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(ik)^m}{m!} C_m. \end{aligned} \quad (15.18)$$

Коэффициенты C_m называются *кумулянтами* порядка m случайной величины X .

6. Вычисление кумулянтов.

Очевидно, что кумулянты могут быть вычислены по следующему правилу:

$$C_m = (-i)^m \left. \frac{\partial^m \phi_X(k)}{\partial k^m} \right|_{k=0}. \quad (15.19)$$

В частности, первый кумулянт совпадает с первым моментом, а второй и третий совпадают с соответствующими центральными моментами:

$$\begin{aligned} C_1 &= -i \left. \frac{\partial \ln \Phi_X(k)}{\partial k} \right|_{k=0} = -i \left(\frac{1}{\Phi_X(k)} \frac{\partial \Phi_X(k)}{\partial k} \right) \Bigg|_{k=0} = -i \frac{M_1}{-i} = M_1, \\ C_2 &= - \left. \frac{\partial^2 \ln \Phi_X(k)}{\partial k^2} \right|_{k=0} = - \frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{1}{\Phi_X(k)} \frac{\partial \Phi_X(k)}{\partial k} \right) \Bigg|_{k=0} = \\ &= \frac{1}{\Phi_X^2(0)} \left(\frac{\partial \Phi_X(k)}{\partial k} \right)^2 \Bigg|_{k=0} - \frac{1}{\Phi_X(0)} \frac{\partial^2 \Phi_X(k)}{\partial k^2} \Bigg|_{k=0} = M_2 - M_1^2 = \mu_2, \\ C_3 &= i \left. \frac{\partial^3 \ln \Phi_X(k)}{\partial k^3} \right|_{k=0} = i \frac{\partial^2}{\partial k^2} \left(\frac{1}{\Phi_X(k)} \frac{\partial \Phi_X(k)}{\partial k} \right) \Bigg|_{k=0} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -i \frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{1}{\Phi_X^2(k)} \left(\frac{\partial \Phi_X(k)}{\partial k} \right)^2 - \frac{1}{\Phi_X(k)} \frac{\partial^2 \Phi_X(k)}{\partial k^2} \right) \Bigg|_{k=0} = \\
&= -i \frac{\partial}{\partial k} \left[\underbrace{\frac{-2}{\Phi_X^3(k)}}_1 \underbrace{\left(\frac{\partial \Phi_X(k)}{\partial k} \right)^3}_{M_1^3 / -i^3} + \underbrace{\frac{3}{\Phi_X^2(k)}}_1 \underbrace{\frac{\partial \Phi_X(k)}{\partial k}}_{M_1 / -i} \underbrace{\frac{\partial^2 \Phi_X(k)}{\partial k^2}}_{-M_2} - \right. \\
&\quad \left. - \underbrace{\frac{1}{\Phi_X(k)}}_1 \underbrace{\frac{\partial^3 \Phi_X(k)}{\partial k^3}}_{M_3 / -i^3} \right] \Bigg|_{k=0} = 2M_1^3 - 3M_1M_2 + M_3 = \mu_3.
\end{aligned}$$

Если распределение случайной величины является односторонним, применение характеристической функции Фурье неудобно, поскольку случайная величина определена только на полупрямой $x \in [0, \infty)$, а интеграл приходится брать вдоль всей прямой. В этом случае используется характеристическая функция Лапласа. *Характеристической функцией Лапласа* случайной величины называется лаплас-образ функции плотности распределения

$$\Psi_X(s) = \int_0^{\infty} f_X(x) e^{-sx} dx. \quad (15.20)$$

Характеристическая функция Лапласа обладает следующими свойствами:

1. Ограниченность. Это свойство вытекает из ограниченности функции плотности и соответствующего свойства лаплас-образа.

2. Вследствие нормировки $\Psi_X(0) = \int_0^{\infty} f_X(x) dx = 1$.

3. Характеристическая функция суммы независимых случайных величин дается произведением характеристических функций, входящих в сумму, а именно

$$Z = \sum_{i=1}^N X_i, \quad \Psi_Z = \prod_{i=1}^N \Psi_{X_i}.$$

В частности, характеристическая функция суммы одинаково распределенных случайных величин $\Psi_Z = (\Psi_X)^N$.

4. Функция плотности вероятности дается обратным преобразованием Лапласа от характеристической функции:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\theta-i\infty}^{\theta+i\infty} \Psi(s) e^{sx} ds.$$

5. Разложение в ряд по моментам.

Разложим экспоненту, стоящую в определении характеристической функции, в ряд Тейлора около точки $x = 0$:

$$e^{-sx} = 1 - sx + \frac{s^2 x^2}{2} - \frac{s^3 x^3}{6} + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-sx)^m}{m!}. \quad (15.21)$$

Подставляя ряд (15.21) в определение характеристической функции (15.20), с учетом определения момента случайной величины (15.5) получаем

$$\begin{aligned} \Psi_X(s) &= \int_0^{\infty} f_X(x) e^{-sx} dx = \int_0^{\infty} f_X(x) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-sx)^m}{m!} dx = \\ &= \underbrace{\int_0^{\infty} f_X(x) dx}_{M_0=1} - s \underbrace{\int_0^{\infty} x f_X(x) dx}_{M_1} + \frac{s^2}{2} \underbrace{\int_0^{\infty} x^2 f_X(x) dx}_{M_2} + \dots \\ &\quad + \frac{(-s)^m}{m!} \underbrace{\int_0^{\infty} x^m f_X(x) dx}_{M_m} + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m s^m}{m!} M_m. \quad (15.22) \end{aligned}$$

6. Вычисление моментов случайной величины.

Поскольку характеристическая функция непрерывна и ограничена, ее можно разложить в ряд Тейлора в окрестности $s = 0$:

$$\begin{aligned} \Psi_X(s) &= \Psi_X(0) + s \left. \frac{\partial \Psi_X(s)}{\partial s} \right|_{s=0} + \frac{s^2}{2} \left. \frac{\partial^2 \Psi_X(s)}{\partial s^2} \right|_{s=0} + \dots \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{s^m}{m!} \left. \frac{\partial^m \Psi_X(s)}{\partial s^m} \right|_{s=0}. \quad (15.23) \end{aligned}$$

Сравнивая формулы (15.22) и (15.23), получим выражение для момента порядка m :

$$M_m = (-1)^m \left. \frac{\partial^m \Psi_X(s)}{\partial s^m} \right|_{s=0}. \quad (15.24)$$

По аналогии с формулой (15.15), как это было сделано в случае фурье-представления, вычислим логарифм характеристической функции Лапласа случайной величины, с которым иногда более удобно работать при проведении аналитических расчетов:

$$\psi_X(s) = \ln \Psi_X(s) = \ln \int_0^{\infty} f_X(x) e^{-sx} dx. \quad (15.25)$$

Логарифм характеристической функции Лапласа также обладает важными математическими свойствами:

1. Ограниченность в области определения случайной величины $x \in [0, \infty)$, поскольку в этой области $f_X(x) > 0$.

2. В силу нормировки $f(x)$ имеем $\psi_X(0) = \ln \int_0^{\infty} f(x) dx = 0$.

3. Логарифм характеристической функции суммы независимых случайных величин задается суммой характеристических функций:

$$Z = \sum_{i=1}^N X_i, \quad \psi_Z = \sum_{i=1}^N \psi_{X_i}.$$

В частности, логарифм характеристической функции суммы одинаково распределенных случайных величин $\psi_Z = N\psi_X$.

4. Функция плотности вероятности задается следующей формулой:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\theta-i\infty}^{\theta+i\infty} \Psi(s) e^{sx} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\theta-i\infty}^{\theta+i\infty} e^{\psi(s)} e^{sx} ds = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\theta-i\infty}^{\theta+i\infty} \exp(\psi(s) + sx) ds. \end{aligned} \quad (15.26)$$

5. Разложение в ряд по кумулянтам.

Возьмем логарифм от формулы (15.22):

$$\begin{aligned} \psi_X(s) = \ln \Psi_X(s) &= \ln \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-s)^m}{m!} M_m = \\ &= \ln \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-s)^m}{m!} M_m \right), \end{aligned} \quad (15.27)$$

перепишем формулу (15.27) в виде ряда по степеням s :

$$\begin{aligned} \psi_X(s) &= \ln \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-s)^m}{m!} M_m \right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-s)^m}{m!} M_m \right)^n = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-s)^m}{m!} C_m, \end{aligned} \quad (15.28)$$

где коэффициенты C_m – кумулянты порядка m случайной величины X .
6. Вычисление кумулянтов.

По аналогии с формулой (15.19) кумулянты могут быть найдены по следующей схеме:

$$C_m = (-1)^m \left. \frac{\partial^m \psi_X(s)}{\partial s^m} \right|_{s=0}. \quad (15.29)$$

15.3. Предельные распределения

Обсудим сейчас важное положение в теории вероятностей, которое называется *центральной предельной теоремой*. Рассмотрим сумму достаточно большого количества одинаково распределенных случайных величин:

$$Z = \sum_{i=1}^N X_i.$$

Подразумевается, что N в сумме достаточно велико, тогда в силу свойства 3 логарифма характеристической функции Фурье имеем $\phi_Z(k) = N\phi_X(k)$. Воспользуемся далее разложением (15.18):

$$\phi_Z(k) = N\phi_X(k) \approx NC_1 ik - N \frac{C_2 k^2}{2} - ik^3 \frac{NC_3}{6} + \dots, \quad (15.30)$$

найдем функцию плотности вероятности по формуле (15.16):

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\phi(k) - ikx) dk = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ikN \left(C_1 - \frac{C_3}{6} k^2 \dots \right) - ikx \right] \exp \left[-k^2 N \left(\frac{C_2}{2} + \dots \right) \right] dk. \end{aligned} \quad (15.31)$$

Первый множитель под знаком интеграла (15.31) представляет собой экспоненту мнимого аргумента, т.е. его абсолютное значение равно

единице. Второй множитель определяет величину интеграла. Поскольку второй множитель содержит в экспоненте четную функцию, умноженную на достаточно большое число N , он довольно быстро затухает с увеличением k . Ввиду этого очевидно, что основной вклад в интеграл вносят малые значения k . Иными словами, во втором множителе интеграла (15.31) основной вклад вносит первое слагаемое, остальные дают лишь малые поправки. Тогда имеем

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ik(NC_1 - x) - k^2 \frac{NC_2}{2} \right] dk. \quad (15.32)$$

С похожим интегралом нам уже приходилось сталкиваться при решении задачи теплопроводности (см. гл. 10). Сделаем замену переменных $w^2 = k^2 NC_2/2$, тогда интеграл (15.32) переписется в виде

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{2NC_2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[i \frac{\sqrt{2w}}{\sqrt{NC_2}} (x - NC_1) + w^2 \right] dw. \quad (15.33)$$

Пусть $z = (x - NC_1)/\sqrt{2NC_2}$. В этом случае уравнение (15.33) можно переписать в форме

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{2NC_2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-i2zw - w^2 \right] dw = \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{2NC_2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-2izw - w^2 - (iz)^2 \right] \exp(iz)^2 dw = \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{\exp(-z^2)}{\sqrt{2NC_2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-(w + iz)^2 \right] dw}_{\sqrt{\pi}} = \frac{\exp(-z^2)}{\sqrt{2\pi NC_2}}, \end{aligned} \quad (15.34)$$

или окончательно:

$$f(x) \equiv f_g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp \left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right]. \quad (15.35)$$

Индекс в определении подразумевает гауссово распределение. Здесь μ – среднее значение величины Z , $\mu = NM_1 = NC_1$, а σ – среднеквадратичное отклонение для Z . Следует напомнить, что $\sigma^2 = N\mu_2 = NC_2$, т.е. определяется вторым кумулянтном.

Полученное выражение (15.35) называют *нормальным распределением*. Оно впервые было выведено К.Ф. Гауссом, поэтому в лите-

ратуре чаще оно упоминается как *гауссово распределение*. Тот факт, что сумма достаточно большого числа любых одинаково распределенных случайных величин, обладающих в совокупности конечными первым (среднее значение μ) и вторым (с ним связано среднеквадратичное отклонение σ) моментами, распределена согласно выражению (15.35), называется *центральной предельной теоремой*. Поскольку распределение Гаусса симметрично относительно своего среднего значения (рис. 15.1), эту точку называют центром распределения. Само распределение прежде всего показывает, как распределена вероятность отклонения случайной величины от среднего значения. Именно в этом смысл слова «центральная» в названии теоремы, слово «предельная» связано с тем, что данный результат актуален только для достаточно большого числа слагаемых в сумме, а иначе наше предположение об обрезании ряда (15.30) на основании того, что N велико, будет не вполне состоятельно.

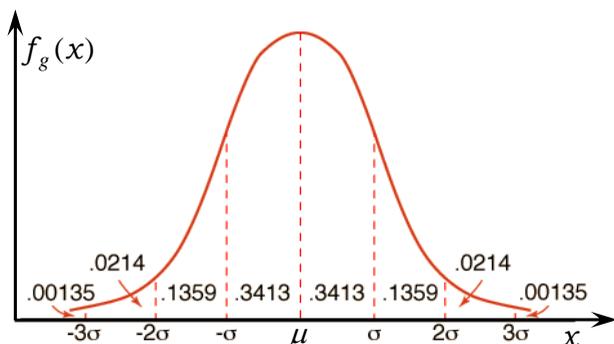


Рис. 15.1. Графическое представление распределения Гаусса. Цифрами указано значение соответствующей площади под графиком, что эквивалентно вероятности выпадения значения в соответствующем интервале для переменной x

Рассмотрим теперь предельную теорему для односторонней случайной величины. Как и ранее, будем анализировать сумму достаточно большого количества одинаково распределенных случайных величин. Для определенности будем интересоваться правыми односторонними случайными величинами:

$$Z = \sum_{i=1}^N X_i .$$

В сумме N по-прежнему достаточно велико. Тогда в силу свойства 3 для логарифма характеристической функции Лапласа имеем

$\psi_Z(s) = N\psi_X(s)$. Далее воспользуемся разложением (15.28) в ряд по кумулянтам:

$$\psi_X(s) \approx -NsC_1 + Ns^2 \frac{C_2}{2} + \dots, \quad (15.36)$$

найдем функцию плотности по формуле (15.26), выбрав $\theta = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \exp(\phi(s) + sx) ds = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \exp\left(-NsC_1 + Ns^2 \frac{C_2}{2} + \dots + sx\right) ds. \end{aligned} \quad (15.37)$$

Руководствуясь той же логикой, что и в случае центральной предельной теоремы, оставим только первое слагаемое в ряде (15.36). На самом деле, в этом случае все слагаемые, кроме первого, содержат множитель Ns^2 , он действителен и изменяется в интервале $(-\infty, 0]$. Наличие такого множителя приводит к быстрому затуханию экспоненты при росте s . Это дает нам право считать, что основной вклад в интеграл (15.37) вносят малые значения s . Учтем, что для малых s $\exp(-NsC_1) = 1/(1 + NsC_1)$, и получим

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\exp(sx)}{1 + NsC_1} ds. \quad (15.38)$$

Интеграл (15.38) может быть найден с помощью теоремы о вычетах [20]. Согласно этой теореме интеграл по любому замкнутому контуру на комплексной плоскости равен сумме вычетов подынтегральной функции в полюсах, находящихся внутри контура, умноженной на $2\pi i$. На рис. 15.2 показан контур, вдоль которого вычисляется интеграл, сплошная вертикальная линия совпадает с областью изменения подынтегральной переменной. Пунктирной линией обозначено замыкание. Поскольку замыкание выбрано вдоль окружности бесконечного радиуса с отрицательной действительной частью, интеграл по замыканию равен нулю. Точкой указан единственный полюс подынтегральной функции, а именно точка, в которой она обращается в бесконечность $s = -1/(NC_1)$. Тогда, согласно теореме о вычетах,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\exp(sx)}{1 + NsC_1} ds =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\exp(sx)}{1 + NsC_1} ds = \frac{1}{2\pi i} 2\pi i \operatorname{res}_{s=-\frac{1}{NC_1}} \frac{\exp(sx)}{1 + NsC_1} = \\
&= \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{NC_1}} \left(s + \frac{1}{NC_1} \right) \left(\frac{\exp(sx)}{1 + NsC_1} \right) = \frac{1}{NC_1} \exp\left(\frac{s}{NC_1} \right), \quad (15.39)
\end{aligned}$$

или

$$f_e(x) = \frac{1}{\mu} \exp\left(\frac{s}{\mu} \right), \quad (15.40)$$

где μ – среднее значение величины Z , $\mu = NM_1 = NC_1$. Полученное распределение называется *экспоненциальным* (данное название подчеркивает нижний индекс в определении). Как видно, распределение (15.40) содержит только один параметр – связанный со средним значением. Это означает, что распределение суммы достаточно большого числа односторонних случайных величин, имеющих конечное среднее, в совокупности описывается экспоненциальным распределением. Как видим, условия предельной теоремы в случае односторонних распределений не содержат требований ко второму моменту распределений.

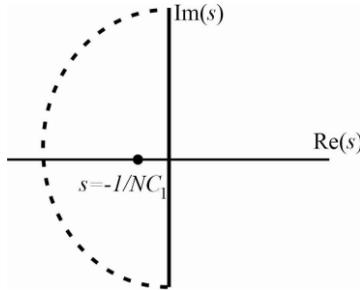


Рис. 15.2. Контур на комплексной плоскости для переменной s , вдоль которого считается интеграл (15.39)

Как следует из рассуждений, представленных в ходе предшествующего изложения, предельным теоремам отвечают некоторые дополнительные условия. Так, сумма большого количества одинаково распределенных случайных величин в общем случае стремится к гауссовому распределению, только если существуют и конечны первый и второй моменты этих величин. Для односторонне распределенной величины предельное распределение становится экспоненциальным, и необходимо существование только первого момента. В случае, когда

соответствующие моменты не существуют или расходятся, сумма рядов в формах (15.18) и (15.28) тоже расходится. В связи с этим возникает два вопроса. Первый – существуют ли какие-то распределения, для которых эти условия не выполняются. И второй вопрос: можно ли найти предельные распределения в случае положительного ответа на первый вопрос. Положительные ответы на оба вопроса были получены в 1930-х гг. независимо французским математиком Полем Леви и советским математиком Александром Хинчиным [21]. Положительный ответ на первый вопрос оказался связан с существованием у распределения так называемого тяжелого хвоста. Заключение, при каких условиях распределение обладает тяжелым хвостом, можно сделать из общих соображений. Плотность вероятности случайной величины X имеет пределы

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \sim x^{-\beta}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \sim x^{-\gamma},$$

откуда вытекают ограничения $\beta \leq 3, \gamma \leq 3$. В случае односторонней величины только один из пределов актуален (для определенности пусть первый) и при этом наличие тяжелого хвоста имеет место при $\beta \leq 2$. Эти условия очевидны, поскольку второй момент распределения в общем случае вычисляется по формуле

$$M_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx \rightarrow \infty.$$

Из этого условия следует

$$\begin{cases} \beta \leq 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \frac{1}{x^\beta} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{2-\beta}, & 2-\beta \geq -1, \\ \gamma \leq 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \frac{1}{x^\gamma} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{2-\gamma}, & 2-\gamma \geq -1. \end{cases}$$

В случае односторонней случайной величины имеем расходимость для первого момента:

$$M_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \rightarrow \infty,$$

$$\beta \leq 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} x \frac{1}{x^\beta} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{1-\beta}, \quad 1-\beta \geq -1.$$

В случае если распределение имеет тяжелый хвост, оно носит имя распределения Леви – Хинчина и в самой общей форме может быть записано только через характеристическую функцию Фурье $X \sim L(\alpha, \beta)$:

$$\Phi_X(k) = \begin{cases} \exp\left\{ik\mu - \frac{\sigma^\alpha}{2}|k|^\alpha \left[1 - i\frac{|k|}{k}\chi \tan\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right]\right\}, & \alpha \neq 1, \\ \exp\left\{ik\mu - \frac{\sigma}{2}|k|\right\}, & \alpha = 1. \end{cases} \quad (15.41)$$

Здесь α – параметр, описывающий тяжелый хвост, $\alpha = \min(\beta - 1, \gamma - 1) \in (0, 2]$; χ – параметр, характеризующий симметрию функциональной зависимости, $\chi \in [-1, 1]$: $\chi = -1$ соответствует одностороннему левому, $\chi = 1$ – одностороннему правому, $\chi = 0$ – симметричному распределению. Параметры μ и σ представляют собой некоторый аналог среднего значения и стандартного отклонения, т.е. характерное положение распределения на координатной оси и его ширину. В работах Леви и Хинчина также показано, что если мы имеем дело с правым односторонним распределением, то его характеристическая функция Лапласа может быть записана в форме

$$X \sim L(\alpha, 1) \Rightarrow \Psi_X(k) = \exp\left\{\mu^\alpha s^\alpha\right\}. \quad (15.42)$$

В общем случае нахождение функции плотности таких распределений невозможно, однако в частных случаях такая возможность имеется. В качестве иллюстрации рассмотрим некоторые примеры.

Рассмотрим пример распределения с тяжелым хвостом. Решим следующую задачу: орудие стоит на расстоянии L от очень длинной стены (стену считаем бесконечной). Орудие может поворачиваться на угол ε относительно перпендикуляра к стене. Этот угол может изменяться в пределах $[-\pi/2, \pi/2]$ (см. рис. 11.3). Задача заключается в том, чтобы найти распределение попаданий в стену в зависимости от координаты x вдоль стены при равномерном случайном распределении угла поворота орудия.

Выберем в качестве начала отсчета для координаты x ближайшую к орудию точку стены. Предположим, что снаряд летит по прямой, в этом случае координата попадания будет даваться формулой $x = L \operatorname{tg} \varepsilon$. Угол ε равномерно распределен в интервале $\varepsilon \in [-\pi/2, \pi/2]$. Это означает, что вероятность выпадения любого значения из интервала одинакова, так что плотность вероятности $p = 1/\pi$, поскольку вероятность выпадения хоть какого-то значения должна быть равна единице. Тогда функция распределения для угла, очевидно, дается формулой $F(\delta) = p(\varepsilon < \delta) = 1/2 + \delta/\pi$. Заменим угол ε на переменную δ в формуле для координаты попадания и выразим δ через x : $\delta = \operatorname{arctg}(x/L)$, подставляя в выражение для функции распределения, получаем

$F(x) = 1/2 + (1/\pi) \arctg(x/L)$. Дифференцируя последнее выражение, получим плотность вероятности распределения для одного выстрела:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{L}{L^2 + x^2}. \quad (15.43)$$

Задача состоит в том, чтобы найти плотность вероятности распределения множества выстрелов, т.е. предельное распределение для плотности (15.43). Во-первых, очевидно, что распределение (15.43) симметричное и обладает тяжелым хвостом, поскольку

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{L^2}{\pi x^2} \sim x^{-2} \Rightarrow \alpha = 1. \quad (15.44)$$

Это означает, что второй момент распределения должен обращаться в бесконечность или не существует. Действительно,

$$M_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \frac{L}{\pi} \left(x - L \arctg \frac{x}{L} \right) \Big|_{-\infty}^{\infty}, \quad M_2 \nexists. \quad (15.45)$$

Найдем характеристическую функцию Фурье исходного распределения:

$$\Phi(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx = \frac{L}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{L^2 + x^2} e^{ikx} dx. \quad (15.46)$$

Сделаем замену переменных $ix = z$, тогда

$$\Phi(k) = \frac{L}{\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{L^2 - z^2} e^{kz} dz = \frac{L}{\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{(L-z)(z+L)} e^{kz} dz. \quad (15.47)$$

Интеграл (15.47) может быть взят с помощью теоремы о вычетах. Очевидно, что интеграл берется вдоль мнимой оси, поэтому она должна быть частью контура, вдоль которого будем брать интеграл на комплексной плоскости. Для того чтобы интеграл вдоль замыкания оказался равным нулю, замыкание приходится выбирать различным способом в зависимости от знака k . Если $k > 0$, очевидно, что замыкание необходимо выбрать способом, указанным (пунктирной линией) на рис. 15.3, *a*. Тогда внутри контура (точка на рис. 15.3, *a*) будет находиться единственный полюс $z = -L$, а интеграл

$$\Phi(k) = \frac{L}{\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{(L-z)(L+z)} e^{kz} dz =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{L}{\pi i} 2\pi i \operatorname{res}_{z=-L} \frac{e^{kz}}{(L-z)(L+z)} = 2L \lim_{z \rightarrow -L} \frac{(L+z)e^{kz}}{(L-z)(L+z)} = \\
&= 2L \frac{e^{-kL}}{2L} = e^{-kL}, \quad k > 0. \quad (15.48)
\end{aligned}$$

В случае если $k < 0$, замыкание необходимо выбрать иным способом, указанным (пунктирной линией) на рис. 15.3, б. Тогда внутри контура (точка на рис. 15.3, б) будет находиться единственный полюс $z = L$, а интеграл

$$\begin{aligned}
\Phi(k) &= \frac{L}{\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{(L-z)(L+z)} e^{kz} dz = \\
&= \frac{L}{\pi i} 2\pi i \operatorname{res}_{z=L} \frac{e^{kz}}{(L-z)(L+z)} = 2L \lim_{z \rightarrow L} \frac{(L-z)e^{kz}}{(L-z)(L+z)} = \\
&= 2L \frac{e^{kL}}{2L} = e^{kL}, \quad k < 0. \quad (15.49)
\end{aligned}$$

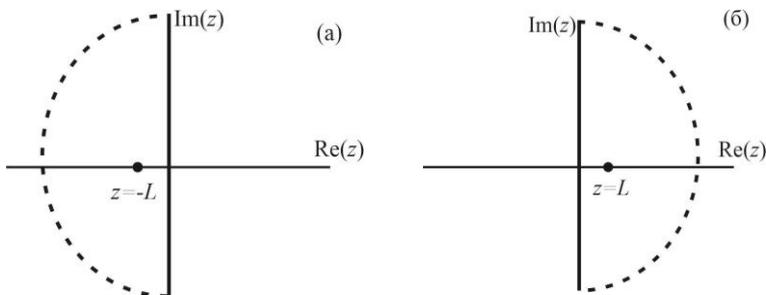


Рис. 15.3. Для переменной s контур на комплексной плоскости, вдоль которого считаем интеграл (15.47): a и b отвечают положительным и отрицательным k соответственно

Объединяя формулы (15.48) и (15.49), можно записать

$$\Phi_X(k) = \exp(-L|k|). \quad (15.50)$$

Заметим, что эта характеристическая функция совпадает с характеристической функцией распределений Леви – Хинчина (15.41) при $\alpha = 1$. Здесь среднее значение равно нулю, а ширина распределения определяется параметром L . Иными словами, предельное распределение должно выглядеть подобным же образом. Действительно, ха-

ракетистическая функция совокупности N выстрелов, согласно свойству 3 формулы (15.10), выражается формулой

$$\Phi_{NX}(k) = \exp(-LN|k|), \quad (15.51)$$

т.е. отличается от выражения (15.50) только увеличением параметра L в N раз. В результате плотность распределения N выстрелов можно записать в виде

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{NL}{N^2L^2 + x^2}. \quad (15.52)$$

Распределение (15.52) является частным случаем распределения Леви – Смирнова и иногда в литературе называется распределением Коши, а иногда распределением Лоренца. Оно является предельным распределением для любых симметричных распределений с параметром $\alpha = 1$.

Рассмотрим теперь правое одностороннее распределение вида

$$\begin{cases} f(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\omega t^3}} e^{-\frac{1}{4\omega t}}, & t > 0, \\ f(t) = 0, & t < 0. \end{cases} \quad (15.53)$$

Это распределение называют *распределением Леви – Смирнова*. Очевидно, оно обладает тяжелым хвостом, поскольку предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi\omega t^3}} e^{-\frac{1}{4\omega t}} \sim t^{3/2}, \quad \alpha = 1/2. \quad (15.54)$$

Найдем характеристическую функцию Лапласа для распределения (15.53):

$$\Psi_X(s) = \int_0^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi\omega t^3}} e^{-\frac{1}{4\omega t}} e^{-st} dt. \quad (15.55)$$

Сделаем замену переменной $z = -1/\sqrt{\omega t}$, тогда

$$\begin{aligned} \Psi_X(s) &= \int_0^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi\omega t^3}} e^{-\frac{1}{4\omega t}} e^{-st} dt = \\ &= \frac{e^{-\sqrt{s/\omega}}}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_0^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{z}{2} - \frac{\sqrt{s}}{z\sqrt{\omega}}\right)^2\right] dz}_{I} = \frac{I e^{-\sqrt{s/\omega}}}{\sqrt{\pi}}. \end{aligned} \quad (15.56)$$

Вычислим интеграл I в формуле (15.56). Для этого введем новую переменную:

$$y = z/2 - \sqrt{s} / (z\sqrt{\omega}).$$

Пойдем от обратного и запишем известный нам интеграл Эйлера с учетом введенной выше переменной:

$$\begin{aligned} \sqrt{\pi} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_0^{\infty} \exp \left[-\left(\frac{z}{2} - \frac{\sqrt{s}}{z\sqrt{\omega}} \right)^2 \right] \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{s}}{z^2\sqrt{\omega}} \right) dz = \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^{\infty} \exp \left[-\left(\frac{z}{2} - \frac{\sqrt{s}}{z\sqrt{\omega}} \right)^2 \right] dz}_I + \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\omega}} \int_0^{\infty} \exp \left[-\left(\frac{z}{2} - \frac{\sqrt{s}}{z\sqrt{\omega}} \right)^2 \right] \frac{dz}{z^2} = \\ &= \frac{1}{2} I + \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\omega}} \int_0^{\infty} \exp \left[-\left(\frac{z}{2} - \frac{\sqrt{s}}{z\sqrt{\omega}} \right)^2 \right] \frac{dz}{z^2}. \end{aligned} \quad (15.57)$$

В ходе преобразований было учтено, что при изменении переменной z в интервале $[0, \infty)$ переменная y изменяется в интервале $(-\infty, \infty)$. Для приведения второго интеграла в сумме (15.57) к виду I сделаем замену переменной $q = -2\sqrt{s} / (z\sqrt{\omega})$, тогда

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\omega}} \int_0^{\infty} \exp \left[-\left(\frac{z}{2} - \frac{\sqrt{s}}{z\sqrt{\omega}} \right)^2 \right] \frac{dz}{z^2} &= \\ &= \frac{\sqrt{s\omega}}{2\sqrt{s\omega}} \int_0^{\infty} \exp \left[-\left(-\frac{2\sqrt{s}}{2q\sqrt{\omega}} + \frac{\sqrt{\omega s}q}{2\sqrt{\omega s}} \right)^2 \right] dq = \frac{1}{2} I. \end{aligned} \quad (15.58)$$

Подставляя этот результат в сумму (15.57), получаем $I = \sqrt{\pi}$, т.е. характеристическая функция распределения Леви – Смирнова дается выражением

$$\Psi_X(s) = e^{-\sqrt{s/\omega}}. \quad (15.59)$$

В этом случае характеристическая функция суммы N случайных величин в силу свойства 3 формулы (15.10) будет иметь вид

$$\Psi_{NX}(s) = e^{-N\sqrt{s/\omega}}, \quad (15.60)$$

т.е. отличается от уравнения (15.59) только уменьшением параметра ω в N^2 раз. Тогда функцию плотности вероятности можно записать в форме

$$\begin{cases} f(t) = \frac{N}{2\sqrt{\pi\omega t^3}} e^{-\frac{N^2}{4\omega t}}, & t > 0, \\ f(t) = 0, & t < 0. \end{cases} \quad (15.61)$$

Иными словами, предельным для распределения Леви – Смирнова является само распределение Леви – Смирнова. В то же время оно есть частный случай распределения Леви – Хинчина при $\chi = 1$, $\alpha = 0.5$. Конечно, известные нам распределение Гаусса и экспоненциальное также являются частными случаями распределения Леви – Хинчина для параметров $\chi = 0$, $\alpha = 2$ и $\chi = 1$, $\alpha = 1$ соответственно. Сравнение гауссова распределения с распределением Коши (симметричные распределения) и экспоненциального с распределением Леви – Смирнова (односторонние) приведено на рис. 15.4.

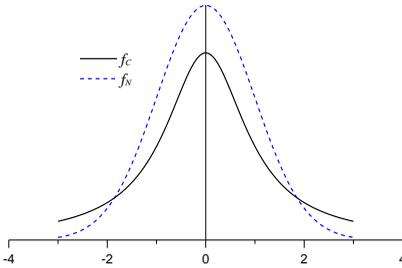


Рис. 15.4а. Типичная форма распределений Коши (сплошная линия) и Гаусса (пунктир) для параметров $\mu = 0$, $\sigma = 1$, $L = 1$

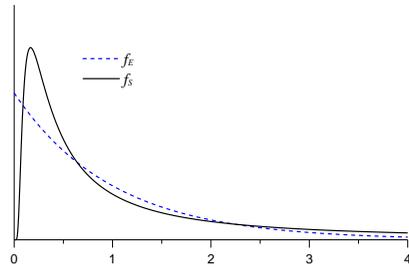


Рис. 15.4б. Типичная форма экспоненциального распределения (пунктир) и Леви – Смирнова (сплошная линия) при $\mu = 1$, $\omega = 1$

16. Диффузионные процессы

16.1. Случайные скачки

Будем следить за поведением частицы, которая совершает случайные скачки вдоль прямой. Частица совершает «скачок», т.е. смещается на расстояние x под действием случайных сил (x может быть как положительной, так и отрицательной величиной, смотря в какую сторону частица совершает прыжок). При этом на такой скачок затрачивается время t , которое тоже случайно. Пусть $\zeta(x, t)$ – плотность вероятности распределения такого скачка. Тогда назовем

$$p(x) = \int_0^{\infty} \xi(x, t) dt$$

плотностью распределения значений длины скачков, а

$$w(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(x, t) dx$$

плотностью распределения значений времени ожидания, т.е. времени, проходящего между двумя скачками. Очевидно, что оба направления скачков вдоль прямой равноправны, потому распределение $p(x)$ симметрично, а время, затрачиваемое на прыжок, не может быть отрицательным, т.е. $w(t)$ – одностороннее правое распределение. Для этих распределений, конечно, справедливо базовое свойство:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \xi(x, t) dt dx = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = \int_0^{\infty} w(t) dt = 1. \quad (16.1)$$

Рассмотрим плотность вероятности прибытия частицы в заданную точку пространства с координатой X в момент времени T . Пусть плотность вероятности распределения таких событий – $\eta(X, T)$. Для того, чтобы такое событие произошло, очевидно, что частица должна прибыть в точку x в момент времени t , а потом сделать скачок длиной $X - x$, затратив при этом время $T - t$ (рис. 16.1). Либо уже изначально находиться в этой точке без всякого прыжка в момент времени T . Пусть плотность вероятности обнаружить частицу в точке x в момент времени t равна $P(x, t)$, тогда начальное распределение частиц описывается функцией $\rho(x) = P(x, 0)$.



Рис. 16.1. Прибытие частицы в точку с координатой X в момент времени T

Поскольку x и t могут принимать любое значение (с учетом установленной области определения), плотность вероятности $\eta(X, T)$ определяется следующим интегралом:

$$\eta(X, T) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^T \eta(x, t) \xi(X - x, T - t) dt + \rho(X) \delta(T), \quad (16.2)$$

где последнее слагаемое учитывает возможность того, что частица была изначально в точке и до момента T не совершала скачков. Сделаем преобразование Лапласа по времени и преобразование Фурье по координате и воспользовавшись формулой интегрального преобразования для свертки (14.2) и формулой преобразования Лапласа для дельта-функции (14.15), получим

$$\tilde{\eta}(k, s) = \tilde{\eta}(k, s) \tilde{\xi}(k, s) + \hat{\rho}(k). \quad (16.3)$$

Отсюда получаем связь Лаплас – Фурье, образов $\tilde{\eta}(k, s)$ и $\tilde{\xi}(k, s)$ в форме

$$\tilde{\eta}(k, s) = \frac{\hat{\rho}(k)}{1 - \tilde{\xi}(k, s)}. \quad (16.4)$$

Теперь найдем $P(X, T)$. Для того чтобы можно было обнаружить частицу в точке с координатой X в момент времени T , частица должна прибыть в эту точку в любой момент времени $t < T$ и не совершить скачок за время, прошедшее с момента ее прибытия, т.е. за время $T - t$. Вероятность, что частица совершит такой скачок, дается интегралом

$$W = \int_0^{T-t} dt' w(t').$$

Очевидно, что вероятность противоположного события $F = 1 - W$. Тогда, интегрируя по всем возможным моментам времени прибытия t , находим

$$\begin{aligned} P(X, T) &= \int_0^T \left\{ dt \eta(X, t) \left[1 - \int_0^{T-t} dt' w(t') \right] \right\} = \\ &= \int_0^T \eta(X, t) F(T-t) dt. \end{aligned} \quad (16.5)$$

Сделаем преобразование Лапласа по времени и преобразование Фурье по координате, воспользовавшись формулой интегрального преобразования для свертки (14.2):

$$\tilde{\hat{P}}(k, s) = \tilde{\eta}(k, s) \tilde{F}(s). \quad (16.6)$$

Найдем лаплас-образ $\tilde{F}(s)$, воспользовавшись интегрированием по частям:

$$\begin{aligned}
\tilde{F}(s) &= \int_0^{\infty} \left[1 - \int_0^t dt' w(t') \right] e^{-st} dt = \\
&= -\frac{e^{-st}}{s} \left[1 - \int_0^t dt' w(t') \right] \Big|_0^{\infty} - \frac{1}{s} \int_0^{\infty} \underbrace{w(t) e^{-st}}_{\tilde{w}(s)} dt = \\
&= \frac{1}{s} - \frac{\tilde{w}(s)}{s} = \frac{1 - \tilde{w}(s)}{s}. \quad (16.7)
\end{aligned}$$

Подставим выражения (16.4) и (16.7) в формулу (16.6):

$$\tilde{P}(k, s) = \frac{\hat{\rho}(k)}{1 - \tilde{\xi}(k, s)} \frac{1 - \tilde{w}(s)}{s} \quad (16.8)$$

Полученная формула (16.8) называется формулой Монтролла – Вайса [22]. Она описывает в самом общем виде одномерный диффузионный процесс. Это выражение представляет собой связь между плотностью вероятности обнаружить частицу и распределениями значений длины скачков и времени ожидания, без каких-либо предположений о последних. Для упрощения формулы (16.9) сделаем предположение о взаимной независимости значений времени ожидания и длины прыжков, в этом случае

$$\xi(x, t) = p(x)w(t), \quad \tilde{\xi}(k, s) = \hat{p}(k)\tilde{w}(s).$$

В результате имеем

$$\tilde{P}(k, s) = \frac{\hat{\rho}(k)}{1 - \hat{p}(k)\tilde{w}(s)} \frac{1 - \tilde{w}(s)}{s}. \quad (16.9)$$

Теперь предположим, что частица делает достаточно много скачков. Тогда в общем случае, согласно формулам (15.41) для симметричного распределения и формулам (15.42) для одностороннего, получим

$$\hat{p}(k) = \exp\left\{ ik\mu - \sigma^\alpha / 2|k|^\alpha \right\}, \quad \tilde{w}(s) = \exp\left(-\tau^\beta s^\beta\right), \quad (16.10)$$

где μ – параметр, описывающий характерное смещение частицы в ходе серии большого количества скачков, σ^2 – характерное отклонение длины скачка от характерного смещения, τ – характерное время ожидания. В силу симметрии рассматриваемой задачи, если частица совершила достаточно много скачков, в среднем она вообще не должна смещаться, поскольку вероятность скачков в положительном направлении и

отрицательном одинакова, т.е. $\mu = 0$. Если скачков достаточно много, то основной вклад в итоговое распределение вносят, как обсуждалось при выводе формул (15.35) и (15.40), малые значения переменных k и s , т.е. можем переписать формулы (16.10) в виде ряда Тейлора, сохранив только первые члены разложений:

$$\hat{p}(k) = 1 - \sigma^\alpha |k|^\alpha / 2, \quad \tilde{w}(s) = 1 - \tau^\beta s^\beta. \quad (16.11)$$

Подставляя (16.11) в формулу (16.9), получим

$$\begin{aligned} \tilde{P}(k, s) &= \frac{\hat{p}(k)}{1 - (1 - \sigma^\alpha |k|^\alpha / 2)(1 - \tau^\beta s^\beta)} \frac{1 - 1 + \tau^\beta s^\beta}{s} = \\ &= \frac{\hat{p}(k) \tau^\beta s^{\beta-1}}{1 - \left(1 - \sigma^\alpha |k|^\alpha / 2 - \tau^\beta s^\beta + \cancel{\tau^\beta s^\beta \sigma^\alpha |k|^\alpha / 2}\right)} = \\ &= \frac{\hat{p}(k) \tau s^{\beta-1}}{\sigma^\alpha |k|^\alpha / 2 + \tau^\beta s^\beta}. \end{aligned} \quad (16.12)$$

Если при этом первый и второй моменты распределения значений длины скачков существуют и конечны, а для распределения значений времени ожидания существует и конечен по крайней мере первый момент, тогда распределение значений длины скачков совпадает с распределением Гаусса, а распределение значений времени ожидания – с экспоненциальным распределением. В этом случае, воспользовавшись формулами (15.38) и (15.32), получим

$$\tilde{P}(k, s) = \frac{\hat{p}(k)}{(\sigma^2 / 2\tau)k^2 + s}. \quad (16.13)$$

Здесь σ – среднеквадратичное отклонение длины прыжков от среднего значения $\mu = 0$, а τ – среднее время ожидания. Введем новый параметр $D = \sigma^2 / 2\tau$. Перепишем формулу (16.13) в виде

$$\tilde{P}(k, s) s - \hat{p}(k) = -Dk^2 \tilde{P}(k, s). \quad (16.14)$$

Учтем, что $\hat{p}(k) = \hat{P}(k, t = 0)$, и сделаем обратное лаплас-фурье-преобразование, воспользовавшись формулами дифференцирования оригиналов (14.8) и (14.12):

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t). \quad (16.15)$$

Полученное уравнение (16.15) является одномерным параболическим уравнением и описывает процесс нормальной диффузии, при

этом параметр D называется коэффициентом диффузии. Возможность выразить D через среднеквадратичное отклонение длины прыжков σ и среднее время ожидания τ позволяет раскрыть глубокий физический смысл коэффициента диффузии.

В случае, если у распределения значений длины прыжков не существует второго момента, уравнение диффузии не может быть записано в форме (16.15). Воспользовавшись формулой (14.12), можно сделать обратное лаплас-преобразование для решения уравнения (16.12). В результате получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{P}(k, t) = -\frac{\sigma^\alpha}{2\tau} |k|^\alpha P(k, t). \quad (16.16)$$

Поскольку второй момент распределения значений длины прыжков расходится, очевидно, что уравнение (16.16) описывает диффузионный процесс с очень длинными скачками. Такой процесс называется супердиффузией.

В случае, если у распределения значений времени ожидания не существует первого момента, уравнение диффузии тоже не может быть записано в форме (16.15). Воспользовавшись формулой (14.8), можно сделать обратное фурье-преобразование для решения уравнения (16.12), в результате приходим к уравнению

$$\tilde{P}(x, s) s^\beta - s^{\beta-1} \rho(x) = \frac{\sigma^2}{2\tau^\beta} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{P}(x, s). \quad (16.17)$$

Поскольку первый момент распределения значений времени ожидания расходится, очевидно, что уравнение (16.17) описывает диффузионный процесс с очень медленными скачками. Такой процесс называется субдиффузией. Слагаемое в правой части уравнения (16.16) и выражение в левой части уравнения (16.17) не могут быть заменены некоторой классической производной, поскольку параметры α и β – нецелые числа. Для того чтобы записать эти уравнения в пространстве (x, t) , нам потребуется ввести новую операцию – *дробную производную функции*.

16.2. Понятие дробной производной функции

Введем сначала понятие дробной производной целого отрицательного порядка. Поскольку обратная операция к дифференцированию – интегрирование, естественно ввести отрицательную производную как интеграл:

$${}_a D_t^{-1} f(t) = \int_a^t f(t') dt'. \quad (16.18)$$

Здесь формальный оператор производной ${}_a D_t^p f(t)$ действует на функцию, где p – порядок производной, a – нижний предел, t – верхний предел, или переменная дифференцирования. Как видно, основное отличие в наличии нижнего предела, который здесь уже важен. Найдем производную минус второго порядка как двойной интеграл:

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{-2} f(t) &= \int_a^t dt' \int_a^{t'} f(t'') dt'' = \\ &= t' \int_a^{t'} f(t'') dt'' \Big|_a^t - \int_a^t t' f(t') dt' = t \int_a^t f(t'') dt'' - \\ &\quad - \int_a^t t' f(t') dt' = \int_a^t (t-t') f(t') dt'. \quad (16.19) \end{aligned}$$

Вычислим производную минус третьего порядка как тройной интеграл:

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{-3} f(t) &= \int_a^t dt' \int_a^{t'} dt'' \int_a^{t''} f(t''') dt''' = \\ &= \int_a^t dt' \int_a^{t'} (t' - t'') f(t'') dt'' = \int_a^t t' dt' \int_a^{t'} f(t'') dt'' - \int_a^t dt' \int_a^{t'} t'' f(t'') dt'' = \\ &= \frac{t'^2}{2} \int_a^{t'} f(t'') dt'' \Big|_a^t - \int_a^t \frac{t'^2}{2} f(t') dt' - t' \int_a^{t'} t'' f(t'') dt'' \Big|_0^t + \int_a^t t'^2 f(t') dt' = \\ &= \int_a^t \frac{t^2 - t'^2}{2} f(t') dt' - \int_a^t t t' f(t') dt' + \int_a^t t'^2 f(t') dt' = \\ &= \int_a^t \frac{t^2 - 2t t' - t'^2 + 2t'^2}{2} f(t') dt' = \frac{1}{2} \int_a^t (t-t')^2 f(t') dt'. \quad (16.20) \end{aligned}$$

Весьма поучительно продолжить эту процедуру и найти производную минус четвертого порядка. Соответственно, это будет четвертой интеграл:

$$\begin{aligned}
 {}_a D_t^{-3} f(t) &= \int_a^t dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \int_a^{t_2} dt_3 \int_a^{t_3} f(t_4) dt_4 = \\
 &= \frac{1}{2} \int_a^t dt_1 \int_a^{t_1} (t_1 - t_2)^2 f(t_2) dt_2 = \frac{1}{2} \int_a^t dt_1 \int_a^{t_1} (t_1^2 - 2t_1 t_2 + t_2^2) f(t_2) dt_2 = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{t_1^3}{3} \int_a^{t_1} f(t_2) dt_2 \Big|_a^t - \frac{1}{2} \int_a^t \frac{t_1^3}{3} f(t_1) dt_1 - \frac{t_1^2}{2} \int_a^{t_1} t_2 f(t_2) dt_2 \Big|_a^t + \\
 &+ \frac{1}{2} \int_a^t t_1^3 f(t_1) dt_1 + \frac{1}{2} t_1 \int_a^{t_1} t_2^2 f(t_2) dt_2 \Big|_a^t - \frac{1}{2} \int_a^t t_1^3 f(t_1) dt_1 = \\
 &= \frac{t^3}{6} \int_a^t f(t_1) dt_1 - \int_a^t \frac{t_1^3}{6} f(t_1) dt_1 - \frac{t^2}{2} \int_a^t t_1 f(t_1) dt_1 + \\
 &+ \frac{t}{2} \int_a^t t_1^2 f(t_1) dt_1 = \frac{1}{6} \int_a^t (t-t_1)^3 f(t_1) dt_1. \quad (16.21)
 \end{aligned}$$

Из совокупности формул (16.19), (16.20) и (16.21) видно, что, действуя по индукции, можно записать производную любого целого отрицательного порядка $p = -n$ как интеграл:

$$\begin{aligned}
 {}_a D_t^{-n} f(t) &= \int_a^t dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \int_a^{t_2} dt_3 \cdots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n = \\
 &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-t_1)^{n-1} f(t_1) dt_1. \quad (16.22)
 \end{aligned}$$

Производная (16.22) обладает одним примечательным свойством – она не коммутирует с производной положительного порядка, что очевидно для первой производной:

$$\frac{\partial}{\partial t} {}_a D_t^{-1} f(t) = f(t), \quad {}_a D_t^{-1} \frac{\partial}{\partial t} f(t) = f(t) - f(a),$$

отсюда приходим к коммутатору

$$\frac{\partial}{\partial t} {}_a D_t^{-1} f(t) - {}_a D_t^{-1} \frac{\partial}{\partial t} f(t) = f(a). \quad (16.23)$$

Таким образом, важен порядок применяемых операций. Для производных высших порядков, очевидно, будет справедлива следующая формула для коммутатора:

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} {}_a D_t^{-n} f(t) - D_t^{-n} \frac{\partial^n}{\partial t^n} f(t) = \sum_{i=1}^n \frac{(t-a)^i}{i!} \frac{\partial}{\partial t^{n-i}} f(a). \quad (16.24)$$

Такое свойство, очевидно связано с наличием нижнего предела у производной отрицательного порядка.

Обобщим понятие производной отрицательного порядка на нецелые значения порядка $p = -\nu$. Для этого нужно заменить в выражении (16.22) n на ν . Основная идея заключается в замене факториала на некоторую обобщенную функцию, которая в случае целых ν дает значения, равные факториалу. Опираясь на свойства гамма-функции (14.18) и (14.19), можно увидеть, что раз $\Gamma(n) = (n-1)!$, то на этом основании полагаем, что $(n-1)! \rightarrow \Gamma(\nu)$ для любых (не обязательно целых) значений ν . Тогда производная отрицательного порядка в обобщенном виде запишется следующим образом:

$${}_a D_t^{-\nu} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_a^t (t-t_1)^{\nu-1} f(t_1) dt_1, \quad \nu > 0. \quad (16.25)$$

Для дробной производной в форме (16.25) справедливо несколько свойств:

1. Две разные дробные производные отрицательного порядка коммутируют друг с другом, и результат их совместного действия представляет собой производную суммарного порядка:

$${}_a D_t^{-\nu} {}_a D_t^{-\mu} f(t) = {}_a D_t^{-\mu} {}_a D_t^{-\nu} f(t) = {}_a D_t^{-\mu-\nu} f(t). \quad (16.26)$$

2. Вычислим дробную производную отрицательного порядка от степенной функции:

$${}_a D_t^{-\nu} (t-a)^\alpha = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_a^t (t-\tau)^{\nu-1} (\tau-a)^\alpha d\tau. \quad (16.27)$$

Сделаем замену переменной $\tau = a + x(t-a)$, тогда

$${}_a D_t^{-\nu} (t-a)^\alpha = \frac{(t-a)^{\nu+\alpha}}{\Gamma(\nu)} \int_0^1 (1-x)^{\nu-1} x^\alpha dx = B(\alpha+1, \nu). \quad (16.28)$$

Согласно свойству бета-функции Эйлера (14.21) имеем

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{-\nu} (t-a)^\alpha &= \frac{(t-a)^{\nu+\alpha}}{\Gamma(\nu)} \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\alpha+1+\nu)} = \\ &= (t-a)^{\nu+\alpha} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1+\nu)}. \end{aligned} \quad (16.29)$$

3. Дробная производная отрицательного порядка от константы, согласно предыдущему свойству для $\alpha = 0$,

$${}_a D_t^{-\nu} C = C(t-a)^\nu \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\nu+1)} = \frac{C(t-a)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}. \quad (16.30)$$

4. Лаплас-образ дробной производной отрицательного порядка, согласно свойству об интегральном преобразовании свертки двух функций (14.2), может быть записан как

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[{}_a D_t^{-\nu} f(t) \right] &= \mathcal{L} \left[\frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_a^t (t-t_1)^{\nu-1} f(t_1) dt_1 \right] = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \mathcal{L} \left[t^{\nu-1} \right] (s) \tilde{f}(s). \end{aligned} \quad (16.31)$$

Найдем лаплас-образ для степенной функции:

$$\mathcal{L} \left(t^\alpha \right) (s) = \int_0^\infty t^\alpha e^{-st} dt = \frac{1}{s^{\alpha+1}} \underbrace{\int_0^\infty (st)^\alpha e^{-st} d(st)}_{\Gamma(\alpha+1)} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}. \quad (16.32)$$

При выводе формулы (16.32) была использована замена переменных $t \rightarrow st$ и определение гамма-функции Эйлера (14.16). Подставим выражение (16.32) в формулу (16.31) и получим

$$\mathcal{L} \left[{}_a D_t^{-\nu} f(t) \right] = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \frac{\Gamma(\nu)}{s^\nu} \tilde{f}(s) = \frac{\tilde{f}(s)}{s^\nu}. \quad (16.33)$$

5. Фурье-образ дробной производной отрицательного порядка, согласно свойству об интегральном преобразовании свертки двух функций (14.2), может быть записан как

$$\mathcal{F} \left[{}_a D_t^{-\nu} f(t) \right] = \mathcal{F} \left[\frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_a^t (t-t_1)^{\nu-1} f(t_1) dt_1 \right] =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \mathcal{F}[t^{\nu-1}](k) \hat{f}(k). \quad (16.34)$$

Найдем фурье-образ для степенной функции:

$$\mathcal{F}(t^\alpha)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} t^\alpha e^{ikt} dt = \frac{1}{(ik)^{\alpha+1}} \Gamma(\alpha+1). \quad (16.35)$$

При выводе формулы (16.35) была использована замена переменных $t \rightarrow ik t$ и определение гамма-функции Эйлера (14.16). Подставляя выражение (16.35) в формулу (16.34), получим

$$\mathcal{F}[_a D_t^{-\nu} f(t)] = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \frac{\Gamma(\nu)}{(ik)^\nu} \hat{f}(k) = \frac{\hat{f}(k)}{(ik)^\nu}. \quad (16.36)$$

16.3. Дробные производные Римана – Лиувилля, Капуто и Рисса

Теперь сделаем следующий шаг и обобщим понятие дробной производной на положительные дробные порядки. Пусть $p > 0$, тогда выберем такое целое число m , что $m - 1 \leq p < m$. В этом случае разумно определить дробную производную порядка p как совместное действие производной целого порядка m и дробного отрицательного порядка $p - m$. В силу свойства (16.24) о некоммутативности производных отрицательного и положительного порядка, получается, что имеет значение, в каком порядке производятся два этих действия. Рассмотрим случай, когда сначала действует производная отрицательного дробного порядка:

$$\begin{aligned} {}_a^r D_t^p f(t) &= \frac{\partial^m}{\partial t^m} {}_a D_t^{p-m} f(t) = \\ &= \frac{\partial^m}{\partial t^m} \frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (16.37)$$

Выражение (16.37) называется *дробной производной Римана – Лиувилля* [23, 24] и имеет формальное обозначение ${}_a^r D_t^p f(t)$, где знак r указывает на тип производной, p – ее порядок, a – нижний предел, t – переменная, по которой берется производная. Производная Римана – Лиувилля обладает рядом свойств:

1. Найдем производную Римана – Лиувилля от степенной функции, воспользовавшись формулами (16.29) и (14.19):

$$\begin{aligned}
{}_a^r D_t^p (t-a)^\alpha &= \frac{\partial^m}{\partial t^m} {}_a D_t^{p-m} (t-a)^\alpha = \\
&= \frac{\partial^m}{\partial t^m} (t-a)^{\alpha-p+m} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+m+1)} = \\
&= (t-a)^{\alpha-p} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)}. \quad (16.38)
\end{aligned}$$

2. Производная Римана – Лиувилля от константы, согласно предыдущему свойству для $\alpha = 0$,

$${}_a^r D_t^p C = C \frac{(t-a)^{-p}}{\Gamma(1-p)}. \quad (16.39)$$

При $p \rightarrow n$, где $n \geq 1$ – целое число, $\Gamma(1-p) \rightarrow \infty$, а значение производной стремится к нулю, как и должно быть в случае целого порядка.

3. Найдем лаплас-образ дробной производной Римана – Лиувилля. Воспользуемся известным выражением (14.13) для лаплас-образа производной целого положительного порядка:

$$\mathcal{L} \left[\frac{\partial^m}{\partial t^m} f(t) \right] = s^m \tilde{f}(s) - \sum_{i=0}^{m-1} s^i \frac{\partial^{m-1-i} f(0)}{\partial t^{m-1-i}}. \quad (16.40)$$

Используя совместно выражения (16.33) и (16.40), получим

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \left({}_a^r D_t^p f(t) \right) &= \mathcal{L} \left(\frac{\partial^m}{\partial t^m} {}_a D_t^{p-m} f(t) \right) = \\
&= s^m \mathcal{L} \left({}_a D_t^{p-m} f(t) \right) - \sum_{i=0}^{m-1} s^i \frac{\partial^{m-1-i}}{\partial t^{m-1-i}} {}_a D_t^{p-m} f(t) \Big|_{t=0} = \\
&= s^m \frac{\tilde{f}(s)}{s^{m-p}} - \sum_{i=0}^{m-1} s^i \frac{\partial^{m-1-i}}{\partial t^{m-1-i}} {}_a D_t^{p-m} f(t) \Big|_{t=0} = \\
&= s^p \tilde{f}(s) - \sum_{i=0}^{m-1} s^i {}_a^r D_t^{p-k-1} f(t) \Big|_{t=a}. \quad (16.41)
\end{aligned}$$

Иными словами, в отличие от формулы для преобразования классической производной (16.40), здесь необходимо вычислять значения всех производных Римана – Лиувилля в нуле, а не классических производных.

4. Найдем фурье-образ от дробной производной Римана – Лиувилля. Воспользуемся известным выражением (14.8) для фурье-

образа производной, применяя выражение для производной порядка m :

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial^m}{\partial x^m} f(x)\right] = (ik)^m \hat{f}(k). \quad (16.42)$$

Используя совместно выражения (16.36) и (16.42), получим

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left({}_a^r D_t^p f(t)\right) &= \mathcal{F}\left(\frac{\partial^m}{\partial t^m} {}_a D_t^{p-m} f(t)\right) = \\ &= (ik)^m \mathcal{F}\left({}_a D_t^{p-m} f(t)\right) = (ik)^m \frac{\hat{f}(k)}{(ik)^{m-p}} = (ik)^p \hat{f}(k). \end{aligned} \quad (16.43)$$

Воспользуемся альтернативным способом определений дробной производной. Вначале найдем производную целого положительного порядка m , а затем подействуем оператором дробной производной отрицательного $(p - m)$ -порядка:

$$\begin{aligned} {}_a^c D_t^p f(t) &= \frac{\partial^p f(t)}{\partial t^p} = {}_a D_t^{p-m} \frac{\partial^m}{\partial t^m} f(t) = \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_a^t (t-s)^{m-p-1} \frac{\partial^m}{\partial t^m} f(s) ds. \end{aligned} \quad (16.44)$$

Производная (16.44) называется *дробной производной Капуто* [25] и имеет формальное обозначение ${}_a^c D_t^p f(t)$, где индекс c указывает на тип производной (Капуто), p – порядок производной, a – нижний предел, t – переменная, по которой берется производная. Ее альтернативное обозначение $\partial^p f(t)/\partial t^p$. Производная Капуто обладает рядом свойств. Перечислим некоторые из них.

1. Производная Капуто от константы:

$${}_a^c D_t^p C = {}_a D_t^{p-m} \frac{\partial^m}{\partial t^m} C = {}_a D_t^{p-m} 0 = 0 \neq {}_a^r D_t^p C. \quad (16.45)$$

2. В общем случае производную Капуто можно выразить через производную Римана – Лиувилля как

$${}_a^c D_t^p f(t) = {}_a^r D_t^p f(t) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} \frac{\partial^k f(a)}{\partial t^k}. \quad (16.46)$$

3. Найдем преобразование Лапласа от дробной производной Капуто. Используя совместно выражения (16.33) и (16.40), получим

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left({}^c D_t^p f(t)\right) &= \mathcal{L}\left({}_a D_t^{p-m} \frac{\partial^m}{\partial t^m} f(t)\right) = \\
&= \frac{1}{s^{m-p}} \mathcal{L}\left(\frac{\partial^m}{\partial t^m} f(t)\right) = s^{p-m} \left(s^m \tilde{f}(s) - \sum_{i=0}^{m-1} s^i \frac{\partial^{m-1-i} f(a)}{\partial t^{m-1-i}} \right) = \\
&= s^p \tilde{f}(s) - \sum_{i=0}^{m-1} s^{i+p-m} \frac{\partial^{m-1-i} f(t)}{\partial t^{m-1-i}} \Big|_{t=a}. \quad (16.47)
\end{aligned}$$

В случае $1 > p > 0$ имеем $m = 0$, что дает лаплас-образ в форме

$$\mathcal{L}\left({}^c D_t^p f(t)\right) = s^p \tilde{f}(s) - s^{p-1} f(a). \quad (16.48)$$

Все рассмотренные выше определения дробных производных содержат интегрирование вдоль координатной оси слева направо, это подходит для моделирования оператора, стоящего слева в уравнении субдиффузионного процесса (16.17), поскольку он связан с односторонним распределением значений времени ожидания. Однако для оператора, стоящего справа в уравнении супердиффузионного процесса (16.16), такое определение не годится, этот оператор симметричен в фурье-пространстве, что автоматически делает его симметричным и в обычном пространстве. Подобное свойство связано с симметрией распределения скачков вдоль прямой. Ввиду этого наряду с правой производной Римана – Лиувилля, которая задается формулой (16.37), введем понятие *левой производной Римана – Лиувилля*:

$$\begin{aligned}
{}_x^r D_b^p f(x) &= \frac{\partial^m}{\partial x^m} {}_x D_b^{p-m} f(x) = \\
&= \frac{\partial^m}{\partial x^m} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m-p)} \int_x^b (r-b)^{m-p-1} f(r) dr. \quad (16.49)
\end{aligned}$$

Здесь интегрирование выполняется в обратном направлении оси x . Фурье-образ левой производной Римана – Лиувилля может быть вычислен по аналогии с формулой (16.43) как

$$\mathcal{F}\left({}_x^r D_b^p f(x)\right) = \mathcal{F}\left(\frac{\partial^m}{\partial t^m} {}_x D_b^{p-m} f(x)\right) = (-ik)^p \hat{f}(k). \quad (16.50)$$

Найдем сумму фурье-образов (16.43) и (16.50), устремив верхний и нижний пределы соответственно к плюс и минус бесконечности:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left({}_x^r D_\infty^p f(x)\right) + \mathcal{F}\left({}_{-\infty}^r D_x^p f(x)\right) &= \\
= \mathcal{F}\left({}_{-\infty}^r D_x^p f(x) + {}_x^r D_\infty^p f(x)\right) &= (ik)^p \hat{f}(k) + (-ik)^p \hat{f}(k) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= |k|^p \hat{f}(k) \left[\exp\left(i \frac{\pi}{2} p \operatorname{sgn} k\right) + \exp\left(-i \frac{\pi}{2} p \operatorname{sgn} k\right) \right] = \\
&= 2|k|^p \hat{f}(k) \cos \frac{p\pi}{2}, \quad (16.51)
\end{aligned}$$

где функция $\operatorname{sgn} k$ задает знак переменной в пространстве Фурье, а именно: $\operatorname{sgn} k = 1$, $k > 0$, и $\operatorname{sgn} k = -1$, $k < 0$. Основываясь на соотношении (16.51), определим симметричную производную как

$$D_{|x|}^p f(x) = \nabla_{|x|}^p = \frac{-1}{2 \cos(p\pi/2)} \left[{}_{-\infty}^r D_x^p f(x) + {}_x^r D_{\infty}^p f(x) \right]. \quad (16.52)$$

Производная (16.52) называется *производной Рисса* [26]. Ее формальное обозначение $D_{|x|}^p$, где p – порядок производной, а индекс $|x|$ отвечает симметрии по направлению и против оси x . Очевидно, что такое определение производной выбрано специально, чтобы ее фурье-образ совпадал с правой частью уравнения супердиффузионного процесса (16.16):

$$\mathcal{F} \left[D_{|x|}^p f(x) \right] = -|k|^p \hat{f}(k). \quad (16.53)$$

16.4. Субдиффузия

Рассмотрим более детально уравнение, описывающее субдиффузионный процесс в форме (16.17), учитывая выражение для лаплас-образа производной Капуто (16.48). В результате можем записать правую часть уравнения (16.17) в виде производной Капуто, а именно:

$$\frac{\partial^\beta P(x, t)}{\partial t^\beta} = D \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2}. \quad (16.54)$$

В то же время наиболее просто решение уравнения (16.54) выглядит в фурье-лаплас-пространстве (см. уравнение (16.12) для случая $\alpha = 2$):

$$\tilde{\hat{P}}(k, s) = \frac{\hat{P}(k, t=0) s^{\beta-1}}{K_\beta k^2 + s^\beta}, \quad (16.55)$$

где $\hat{P}(k, t=0)$ – начальное распределение частиц, $0 < \beta < 1$ – порядок дробной производной Капуто, характеризующий распределение значений времени ожидания; K – параметр, характеризующий интенсивность диффузии и обладающий размерностью $[m^2/c^\beta]$, $K = \sigma^2/2\tau^\beta$. Основным критерий «нормального» диффузионного процесса, который описывается уравнением (16.15), – это корневой закон роста расстояния, на которое распространяются диффундирующие частицы со вре-

менем [27]. Данное расстояние может быть оценено как среднеквадратичное отклонение от начального (нулевого) положения частицы. Пусть в начальный момент времени все частицы сосредоточены в точке $x = 0$, т.е. начальное распределение описывается дельта-функцией $P(x, t = 0) = \delta(x)$ или $\hat{P}(k, t = 0) = 1$. Среднеквадратичное отклонение дается формулой

$$\sigma = \sqrt{M_2 - M_1^2},$$

где M_1 – первый момент распределения значений длины прыжков (в силу симметрии равен нулю), $M_1 = 0$, а M_2 – второй момент распределения значений длины прыжков. Тогда закон изменения расстояния распространения диффундирующего вещества от времени может быть записан в форме

$$\sigma^2 = \langle l^2 \rangle = M_2(t) = - \left. \frac{\partial^2 \hat{P}(k, t)}{\partial k^2} \right|_{k=0}, \quad (16.56)$$

где $\hat{P}(k, t)$ – фурье-образ функции распределения частиц. При выводе формулы (16.56) учтена связь между характеристической фурье-функцией случайной величины и моментами соответствующего распределения (15.14). Очевидно, что лаплас-образ для второго момента с учетом решения формулы (16.55) и начального условия $\hat{P}(k, t = 0) = 1$ может быть записан в виде

$$\langle l^2 \rangle = \tilde{M}_2(s) = - \left. \frac{\partial^2 \tilde{\hat{P}}(k, s)}{\partial k^2} \right|_{k=0} = \frac{K_\beta}{s^{\beta+1}}. \quad (16.57)$$

Применяя обратное преобразование Лапласа к формуле (16.57), найдем в силу формулы (16.32)

$$\langle l^2 \rangle = M_2(t) = - \left. \frac{\partial^2 P(k, t)}{\partial k^2} \right|_{k=0} = \frac{K_\beta t^\beta}{\Gamma(\beta+1)}, \quad (16.58)$$

или

$$l = t^{\beta/2} \sqrt{\frac{K_\beta}{\Gamma(\beta+1)}} \sim t^{\beta/2} < \sqrt{t}, \quad (16.59)$$

т.е. процесс переноса вещества диффузионным процессом идет медленнее, чем в случае «нормальной» диффузии. Отсюда и пристекает название «субдиффузия».

Теперь найдем само распределение частиц в случае $P(x, t = 0) = \delta(x)$, что будет соответствовать фундаментальному решению урав-

нения субдиффузии. Вначале найдем обратное фурье-преобразование от решения уравнения (16.55):

$$\begin{aligned}
 \tilde{P}(x, s) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx} dk}{s + K_{\beta} k^2 s^{1-\beta}} = \\
 &= \frac{1}{2\pi s^{1-\beta}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx} dk}{s^{\beta} + K_{\beta} k^2} = \frac{1}{2\pi K_{\beta} s^{1-\beta}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx} dk}{s^{\beta} K_{\beta}^{-1} + k^2} = \\
 &= \frac{1}{2\pi K_{\beta} s^{1-\beta}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx} dk}{\left(k + is^{\beta/2} K_{\beta}^{-1/2}\right)\left(k - is^{\beta/2} K_{\beta}^{-1/2}\right)} = \\
 &= \frac{2\pi i}{2\pi K_{\beta} s^{1-\beta}} \operatorname{Res}_{k=is^{\beta/2} K_{\beta}^{-1/2}} \frac{e^{-ik|x|}}{\left(k + is^{\beta/2} K_{\beta}^{-1/2}\right)\left(k - is^{\beta/2} K_{\beta}^{-1/2}\right)} = \\
 &= \frac{K_{\beta}^{-1/2}}{2s^{1-\beta/2}} \exp\left(-K_{\beta}^{-1/2} s^{\beta/2} |x|\right). \quad (16.60)
 \end{aligned}$$

Воспользуемся разложением полученной экспоненты в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned}
 \tilde{P}(x, s) &= \frac{K_{\beta}^{-1/2}}{2s^{1-\beta/2}} \exp\left(-K_{\beta}^{-1/2} s^{\beta/2} |x|\right) = \\
 &= \frac{K_{\beta}^{-1/2}}{2s^{1-\beta/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-K_{\beta}^{-1/2} s^{\beta/2} |x|\right)^n}{n!} = \\
 &= \frac{K_{\beta}^{-1/2}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-K_{\beta}^{-1/2} |x|\right)^n s^{n\beta/2+\beta/2-1}}{n!}. \quad (16.61)
 \end{aligned}$$

Используя формулу (16.32) для лаплас-образа степенной функции, получим решение в виде ряда

$$\begin{aligned}
 P(x, t) &= \frac{K_{\beta}^{-1/2}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-K_{\beta}^{-1/2} |x|\right)^n t^{-n\beta/2-\beta/2}}{n! \Gamma(1-n\beta/2-\beta/2)} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{4K_{\beta} t^{\beta}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma\left(1-\frac{n+1}{2}\beta\right)} \left(-\frac{|x|}{\sqrt{K_{\beta} t^{\beta}}}\right)^n. \quad (16.62)
 \end{aligned}$$

Это решение полностью совпадает с известным фундаментальным решением для случая нормальной диффузии при $\beta = 1$. Так, при всех нечетных значениях n

$$\Gamma\left(1 - \frac{n+1}{2}\right) = \Gamma\left(1 - \frac{2m+1+1}{2}\right) = \Gamma(-m) \rightarrow \infty. \quad (16.63)$$

Иными словами, нужно в сумме оставить только четные значения n или сделать замену $n = 2m$:

$$P(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4K_\beta t^\beta}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)! \Gamma\left(\frac{1}{2} - m\right)} \left(\frac{x^2}{K_\beta t^\beta}\right)^m. \quad (16.64)$$

Учитывая, что $\Gamma(1/2 - m) = (-4)^m m! / (2m)!$, получим

$$\begin{aligned} P(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{4K_1 t}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2m)!}{(2m)! (-4)^m m!} \left(-\frac{x^2}{K_1 t}\right)^m = \\ &= \frac{1}{\sqrt{4K_1 t}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(-\frac{x^2}{4K_1 t}\right)^m = \frac{1}{\sqrt{4K_1 t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4K_1 t}\right), \end{aligned} \quad (16.65)$$

где $K_1 = D$, т.е. представляет собой коэффициент диффузии. Полученная формула формально будет совпадать с решением (10.7), если в нем положить начальное распределение температуры в виде дельта-функции. В этом случае коэффициент диффузии является аналогом температуропроводности среды.

16.5. Супердиффузия

Проанализируем теперь уравнение в форме (16.16), описывающее супердиффузионный процесс. Учитывая выражение для фурье-образа производной Рисса (16.53), запишем правую часть уравнения (16.16) в операторной форме, через обозначение этой производной:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = R_\alpha D_{|x|}^\alpha P(x, t) = R_\alpha \nabla_{|x|}^\alpha P(x, t). \quad (16.66)$$

Однако это лишь формальная запись уравнения, которая соответствует известному нам решению. Это решение представляет собой алгебраическое выражение в фурье-лаплас-пространстве, конкретная форма которого определяется уравнением (16.12) для случая $\beta = 1$:

$$\tilde{P}(k, s) = \frac{\hat{P}(k, t=0)}{R_\alpha |k|^\alpha + s}, \quad (16.67)$$

где $\hat{P}(k, t = 0)$ – начальное распределение частиц; $1 < \alpha < 2$ – порядок дробной производной Рисса, характеризующий распределение значений длины скачков; R_α – параметр, который отвечает за интенсивность диффузии, обладающий размерностью $[m^{\alpha}/c]$, $R_\alpha = \sigma^{\alpha}/2\tau$. Вычислим, как среднее время ожидания зависит от расстояния. Это первый момент, который записывается в форме

$$\tau = M_1(x) = - \left. \frac{\partial \hat{P}(x, s)}{\partial s} \right|_{s=0}, \quad (16.68)$$

где $\hat{P}(x, s)$ – лаплас-образ функции распределения частиц. При выводе формулы (16.68) учтена связь между характеристической функцией Лапласа случайной величины и моментами соответствующего распределения (15.24). Очевидно, что фурье-образ для первого момента с учетом решения уравнения (16.67) и начального условия $\hat{P}(k, t = 0) = 1$ имеет вид

$$\hat{\tau} = \hat{M}_1(x) = - \left. \frac{\partial \hat{P}(k, s)}{\partial s} \right|_{s=0} = \frac{1}{R_\alpha^2 |k|^{2\alpha}}. \quad (16.69)$$

Применяя обратное преобразование Фурье к формуле (16.69), найдем

$$\begin{aligned} \tau(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{R^2 |k|^{2\alpha}} e^{-ikx} dk = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{R^2 |k|^{2\alpha}} \cos kx dk - \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{R^2 |k|^{2\alpha}} \sin kx dk = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{R^2 k^{2\alpha}} \cos kx dk = \frac{1}{\pi} \frac{x^{2\alpha-1}}{R^2} \int_0^{\infty} \frac{\cos q}{q^{2\alpha}} dq \sim x^{2\alpha-1}, \end{aligned} \quad (16.70)$$

или

$$d\tau \sim (2\alpha - 1)x^{2\alpha-2} dx \Rightarrow V \sim x^{2-2\alpha} > x^{-2}. \quad (16.71)$$

т.е. средняя скорость переноса диффундирующего вещества V выше, чем в случае «нормальной» диффузии, собственно, отсюда и название «супердиффузия».

Теперь найдем само распределение частиц для начального распределения в виде дельта-функции $P(x, t = 0) = \delta(x)$, которое будет представлять собой фундаментальное решение уравнения супердиф-

фузии. Сначала решим задачу Коши, заданную соотношением (16.16), с начальным условием $\hat{P}(x, t=0) = 1$, а именно:

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{P}(k, t) = -R_\alpha |k|^\alpha P(k, t). \quad (16.72)$$

Его решение, очевидно, определяется формулой

$$\hat{P}(k, t) = \exp\{-R_\alpha |k|^\alpha t\}. \quad (16.73)$$

Найдем обратное преобразование Фурье от уравнения (16.73), что даст нам решение в виде интеграла:

$$\begin{aligned} P(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-R_\alpha |k|^\alpha t\} e^{-ikx} dk = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-R_\alpha |k|^\alpha t\} \cos kx dk + \\ &\quad + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-R_\alpha |k|^\alpha t\} \sin kx dk = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp\{-R_\alpha k^\alpha t\} \cos kx dk. \quad (16.74) \end{aligned}$$

Сделаем замену переменной $q = k(R_\alpha t)^{1/\alpha}$, тогда $k = q/(R_\alpha t)^{1/\alpha}$, и введем $\xi = x/(R_\alpha t)^{1/\alpha}$. В этом случае интеграл (16.74) принимает вид

$$\begin{aligned} P(x, t) &= \frac{1}{\pi (R_\alpha t)^{1/\alpha}} \int_0^{\infty} \exp\{-q^\alpha\} \cos \frac{qx}{(R_\alpha t)^{1/\alpha}} dq = \\ &= \frac{1}{\pi (R_\alpha t)^{1/\alpha}} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \exp\{-q^\alpha + iq|\xi|\} dq. \quad (16.75) \end{aligned}$$

Представим экспоненту под интегралом $\exp(-q^\alpha)$ в виде ряда Тейлора, сделав замену $r = -iq$:

$$P(x, t) = \frac{1}{\pi (R_\alpha t)^{1/\alpha}} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \exp\{-r|\xi|\} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n r^{n\alpha} i^{n\alpha+1}}{n!} \right) dr =$$

$$= \frac{1}{\pi(R_\alpha t)^{1/\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n \operatorname{Re}(i^{n\alpha+1})}{n!} \int_0^{\infty} r^{n\alpha} \exp\{-r|\xi|\} dr \right). \quad (16.76)$$

Найдем интеграл, стоящий в скобках, используя определение гамма-функции (14.16):

$$\int_0^{\infty} r^{n\alpha} \exp\{-r|\xi|\} dr = \frac{1}{|\xi|^{n\alpha+1}} \underbrace{\int_0^{\infty} u^{n\alpha} \exp\{-u\} du}_{\Gamma(n\alpha+1)} = \frac{\Gamma(n\alpha+1)}{|\xi|^{n\alpha+1}}. \quad (16.77)$$

Учтем, что $\operatorname{Re}(i^{n\alpha+1}) = \cos(\pi\{n\alpha+1\}/2)$, тогда

$$\begin{aligned} P(x, t) &= \frac{1}{\pi(R_\alpha t)^{1/\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}(n\alpha+1)\right) \frac{(-1)^n \Gamma(n\alpha+1)}{n! |\xi|^{n\alpha+1}} \right) = \\ &= \frac{1}{\pi(R_\alpha t)^{1/\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}(n\alpha+1)\right) \frac{(-1)^n \Gamma(n\alpha+1) (R_\alpha t)^{n+1/\alpha}}{n! |x|^{n\alpha+1}} \right) = \\ &= \frac{1}{\pi|x|} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sin\left(\frac{\pi n\alpha}{2}\right) \frac{(-1)^n \Gamma(n\alpha+1)}{n!} \left(\frac{R_\alpha t}{|x|^\alpha}\right)^n \right). \quad (16.78) \end{aligned}$$

Как и полагается, это решение совпадает с известным фундаментальным решением для случая нормальной диффузии при $\alpha = 2$. Для этого необходимо взять интеграл (16.75), воспользовавшись приемом, примененным для вычисления выражения (15.34), с заменой $2z = |\xi|$:

$$\begin{aligned} P(x, t) &= \frac{1}{\pi\sqrt{R_2 t}} \int_0^{\infty} \exp\{-q^2 + iq|\xi|\} dq = \\ &= \frac{1}{4\sqrt{\pi R_2 t}} \exp\left\{-\frac{\xi^2}{4}\right\} = \frac{1}{4\sqrt{\pi R_2 t}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4R_2 t}\right\}, \quad (16.79) \end{aligned}$$

где R_2 – коэффициент диффузии, $R_2 = D$. Иными словами, в пределе полученная формула совпадает с ответом, который уже неоднократно нами обсуждался.

Заключение

Как видно по содержанию учебного пособия, его вторая часть посвящена интегральным преобразованиям и их приложению в физи-

ке. В частности, применение интегральных преобразований Фурье и Лапласа в теории диффузионных процессов привело нас к необходимости расширения понятия производной на дробный порядок. Иными словами, для описания новых свойств диффузионных процессов понадобились новые теоретические подходы. Однако, как это всегда бывает в математике, любые новые теоретические построения в предельных случаях всегда должны согласовываться с уже установившимися, общепринятыми знаниями. Так оказалось и в случае с дробными производными. А именно: нами было строго показано, что уравнения субдиффузии и супердиффузии при определенных упрощениях сводятся к классическому уравнению параболического типа.

На самом деле на этих же принципах построена теория нелинейных волновых процессов, которая в своей основе все равно сводится к анализу хорошо известного гиперболического уравнения. Несмотря на то, что учет различного рода нелинейностей приводит нас к достаточно сложным уравнениям в частных производных (уравнения Бюргерса, Буссинеска, Кортвега де Вриза и т.д.), техника их вывода, основывающаяся на методе многих масштабов, подразумевает, в определенном смысле, малость этих нелинейностей. Иначе теряется свойство сходимости разложений. В результате в главном порядке точности мы все равно приходим к классическому волновому уравнению, которое принадлежит к гиперболическому типу. Такая обособленная область математической физики, как теория нелинейных волновых процессов, совсем не обсуждалась в нашем пособии по нескольким причинам. Во-первых, данной тематике посвящено большое количество литературы, а во-вторых, для ее последовательного изложения требуется специфический математический аппарат, что выходит за рамки предлагаемого учебного пособия.

Таким образом, следует еще раз подчеркнуть, что исходная классификация дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, произведенная нами в самом начале при изложении материала, не просто сохраняет свою актуальность, а наоборот, приобретает еще более глубокий смысл и многогранность при изучении открывающихся физических явлений, обладающих новым качеством.

Список литературы:

- 
1. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. – М.: Изд-во иностр. лит-ры. 1958. – Т. 1. – 930 с.
 2. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. – М.: Изд-во иностр. лит-ры. 1960. – Т. 1. – 942 с.
 3. Алабужев А.А., Белозерова Т.С., Хеннер В.К. Методы математической физики. Ч. I. Специальные функции. Цилиндрические функции: учеб.-метод. пособие / Перм. ун-т. – Пермь, 2007. – 127 с.
 4. Алабужев А.А., Белозерова Т.С., Хеннер В.К. Методы математической физики. Ч. II. Специальные функции. Полиномы Лежандра: учеб.-метод. пособие / Перм. ун-т. – Пермь, 2009. – 76 с.
 5. Henner V., Belozerova T., Forinash K. Mathematical methods in physics. Partial differential equations, Fourier series, and special functions. – A K Peters / CRC Press, 2009. – 860 p.
 6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999. – 799 с.
 7. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. – М.: Высш. шк., 1988. – Т. I. – 712 с.
 8. Демин В.А. Ударные волны и акустические явления: учеб. пособие / Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Пермь. 2016. – 112 с.
 9. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. – М.: Высш. шк., 1988. – Т. II. – 576 с.
 10. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1984. – 831 с.
 11. Демин В.А. Электродинамика и специальная теория относительности: учеб. пособие / Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Пермь, 2021. – 104 с.
 12. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. II. Термодинамика и молекулярная физика. – М.: Наука, 1990. – 592 с.
 13. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. – М.: Высш. шк., 1989. – Т. III. – 352 с.
 14. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М., 1969. – 424 с.

15. Демин В.А. Оседание наночастиц в однородной несущей жидкости при наличии термодиффузии // Вестник Пермского университета. Сер. Физика. – 2013. – Вып. 1(23). – С. 20–24.
16. Глухов А.Ф., Путин Г.Ф. Установление равновесного барометрического распределения частиц в магнитной жидкости // Гидродинамика: Сб. / Перм. ун-т. Пермь, – 1999. – Вып. 12. – С. 92–103.
17. Peterson E.A., Kruger D.A. Field induced agglomeration in magnetic colloids // Journal of colloid and interface science. – 1977. – Vol. 62, No. 1. – P. 24–33.
18. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
19. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. – М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1961. – 524 с.
20. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 749 с.
21. Khintchine A.Ya., Lévy P. Sur les lois stables // CR Acad. Sci. Paris. – 1937. – Vol. 202. – P. 374–376.
22. Montroll E.W., Weiss G.H. Random walks on lattices. II // Journal of Mathematical Physics. – 1965. – Vol. 6, no. 2. – P. 167–181.
23. Риман Б. Опыт обобщения действий интегрирования и дифференцирования. – М.;Л.: ГИТТЛ, 1948. – 544 с.
24. Liouville J. Sur le calcul des differentielles indices quelconques (in french) // Ecole Polytechnique. – 1832. – Vol. 13. – P. 71–162.
25. Caputo M., Fabrizio M. Applications of new time and spatial fractional derivatives with exponential kernels // Progr. Fract. Differ. Appl. – 2016. – Vol. 2, no. 2. – P. 1–11.
26. Riesz M. L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy // Acta mathematica. – 1949. – Vol. 81. – P. 1–222.
27. Einstein A. Investigations on the theory of the Brownian movement. – New York: Dover Publications, 1956. – 134 p.

Учебное издание

Демин Виталий Анатольевич
Марышев Борис Сергеевич

Методы математической физики

Учебно-методическое пособие

Редактор *Е. Б. Денисова*
Корректор *М. А. Антонова*
Компьютерная верстка: *В. А. Демин*

Подписано в печать 29.12.2021. Формат 60×84/16
Усл. печ. л. 6,39. Тираж 100 экз. Заказ 10

Издательский центр
Пермского государственного
национального исследовательского университета.
614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15

Типография ПГНИУ.
614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15