

ПЕРМСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Р. В. Гарафутдинов

**МОДЕЛИРОВАНИЕ
И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ
НА ФИНАНСОВЫХ РЫНКАХ
С ПРИМЕНЕНИЕМ
ФРАКТАЛЬНОГО АНАЛИЗА**



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Р. В. Гарафутдинов

**МОДЕЛИРОВАНИЕ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ
НА ФИНАНСОВЫХ РЫНКАХ С ПРИМЕНЕНИЕМ
ФРАКТАЛЬНОГО АНАЛИЗА**

МОНОГРАФИЯ



Пермь 2022

УДК 338.27
ББК 65в631
Г20

Гарафутдинов Р. В.

Г20 Моделирование и прогнозирование на финансовых рынках с применением фрактального анализа [Электронный ресурс] : монография / Р. В. Гарафутдинов ; Пермский государственный национальный исследовательский университет. – Электронные данные. – Пермь, 2022. – 3,0 Мб ; 95 с. – Режим доступа: <http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/Garafutdinov-Modelirovanie-I-Prognozirovanie-Na-Finansovyh-Rynkah-S-Primeneniem-Fraktalnogo-Analiza.pdf>. – Заглавие с экрана.

ISBN 978-5-7944-3836-9

Монография посвящена задаче моделирования и прогнозирования финансовых рынков с помощью фрактального подхода. Делается попытка исследовать возможность применения методов фрактального анализа для краткосрочного прогнозирования котировок финансовых инструментов с точностью более высокой, чем обеспечивают классические подходы. Описывается методика использования фрактальной теории для предсказания динамики временных рядов, включающая предпрогнозный анализ рядов, основанный на оценке фрактальной размерности, и их моделирование и прогнозирование с применением моделей с длинной памятью (на примере ARFIMA). Приводятся результаты апробации разработанной методики на рыночных данных.

Издание предназначено для специалистов в области финансовых рынков, преподавателей, аспирантов и студентов экономических специальностей, а также всех лиц, интересующихся проблемами моделирования финансовых рынков и теорией фракталов.

УДК 338.27
ББК 65в631

Издается по решению кафедры информационных систем и математических методов в экономике Пермского государственного национального исследовательского университета

Рецензенты: кафедра информационных технологий в бизнесе НИУ ВШЭ – Пермь (доцент кафедры, канд. физ.-мат. наук, доцент **Л. Н. Лядова**); доцент кафедры «Высшая математика» Пермского национального исследовательского политехнического университета, канд. физ.-мат. наук, доцент **И. Ю. Колпаков**

ISBN 978-5-7944-3836-9

© ПГНИУ, 2022
© Гарафутдинов Р. В., 2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
ГЛАВА 1. АНАЛИЗ ОБЛАСТИ ИССЛЕДОВАНИЙ.....	9
1.1. Обзор современных подходов к прогнозированию финансовых рынков....	9
1.1.1. Фундаментальный анализ.....	9
1.1.2. Технический анализ.....	10
1.1.3. Статистический подход.....	11
1.1.4. Нейросетевой анализ.....	12
1.1.5. Фрактальный и мультифрактальный подходы.....	13
1.1.6. Сравнение подходов.....	14
1.2. Теоретические аспекты фрактального анализа финансовых рынков.....	16
1.2.1. Размерность и фракталы.....	16
1.2.2. Фрактальная природа финансовых рынков.....	20
1.3. Обзор актуальных научных работ в области фрактального анализа и прогнозирования финансовых рынков.....	24
1.4. Фрактальные методы анализа и прогнозирования финансовых временных рядов.....	27
1.4.1. Методы вычисления фрактальных характеристик финансовых рядов.....	28
1.4.1.1. Методы оценивания фрактальной размерности.....	28
1.4.1.2. Методы оценивания показателя Херста.....	32
1.4.1.3. Интерпретация значений и сравнение фрактальных характеристик финансовых рядов.....	36
1.4.2. Фрактальные методы прогнозирования временных рядов.....	39
1.5. Выводы.....	42
ГЛАВА 2. РАЗРАБОТКА МЕТОДИКИ ИССЛЕДОВАНИЯ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ПРИМЕНЕНИЯ ФРАКТАЛЬНОГО ПОДХОДА ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ФИНАНСОВЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ.....	45
2.1. Постановка задачи исследования.....	45
2.1.1. Объект прогнозирования.....	45
2.1.2. Горизонт прогнозирования.....	47
2.1.3. Критерии оценки качества прогнозов.....	47

2.2. Описание исследования	49
2.2.1. «Наивный» подход к прогнозированию	49
2.2.2. Предпрогнозный анализ фрактальных свойств рядов.....	55
2.2.3. Построение и тестирование прогнозных моделей.....	58
2.3. Обзор и выбор программных инструментов исследования.....	61
2.3.1. Формирование критериев выбора инструмента.....	61
2.3.2. Сравнительная характеристика и выбор инструмента.....	62
2.4. Выводы	64
ГЛАВА 3. ПРОВЕДЕНИЕ ЭМПИРИЧЕСКОГО ИССЛЕДОВАНИЯ	66
3.1. «Наивный» подход к прогнозированию временных рядов финансовых данных	66
3.2. Предпрогнозный анализ данных.....	68
3.3. Построение и тестирование прогнозных моделей.....	75
3.4. Выводы	80
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	82
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	85
ПРИЛОЖЕНИЕ	91

ВВЕДЕНИЕ

Функционирование современной рыночной экономики невозможно без привлечения и перераспределения капиталов. Одним из главных механизмов для решения этих задач является фондовый рынок, где капитал перераспределяется с помощью купли-продажи ценных бумаг. Более обширным институтом, включающим в себя в том числе рынок ценных бумаг, являются финансовые рынки. Объектом сделок на них выступают финансовые ресурсы, среди которых не только акции и облигации, но и деньги, так называемые биржевые товары, различные производные инструменты и другие активы, способные в том или ином виде приносить доход.

Отечественный финансовый рынок, характеризующийся интенсивным ростом количества находящихся в обращении финансовых инструментов и объемов торгов, стал важной и неотъемлемой частью экономической жизни нашей страны, что обусловило включение России в систему мирового финансового рынка, присвоение ей международных кредитных рейтингов.

Наличие достаточно высоких финансовых рисков (т. е. рисков потери денежных средств) у инвесторов, работающих на рынках, обуславливает необходимость анализа и прогнозирования изменения котировок финансовых инструментов. Желание игроков предсказать динамику рынка, «обыграть» его и, как следствие, заработать породило большое количество исследований, теорий и подходов к решению данной проблемы. Классическими являются фундаментальный анализ [65] и технический анализ [60], активно применяются и более новые методы, такие как статистическое моделирование [9].

Эффективность различных подходов к прогнозированию рынков является дискуссионным вопросом, в некоторых ситуациях те или иные из них позволяют получать достаточно точные предсказания, в некоторых не работают совсем. Так как на курсы финансовых инструментов одновременно влияет огромное количество факторов – макро-, микроэкономических, политических, психологических и т.д., может создаться впечатление, что они не подчиняются никаким закономерностям и являются практически непредсказуемыми величинами, а их динамика – не детерминированный (зависящий от некоторых «начальных условий»), а стохастический процесс. Это постулирует так называемая гипотеза эффективного рынка (Efficient Market Hypothesis, ЕМН [61]).

Становится очевидным, что развитие науки и прогресс в современном мире уже не могут ограничиться углублением в одну конкретную отрасль, они требуют открытия новых методов, возникающих на стыке нескольких областей. Выявление общих черт между явлениями в самых разнообразных сферах жизни дает возможность найти новые инструменты для исследования, которые зача-

стью оказываются более информативными для описания рассматриваемого объекта, чем привычные классические методы.

Не так давно (в исторических масштабах) появилась альтернативная ЕМН концепция: гипотеза фрактального рынка (Fractal Markets Hypothesis, ФМН [45]). Согласно ей, процесс ценообразования на рынках глобально детерминирован, зависим от «начальных условий», прошлые значения цен влияют на будущие, а финансовые инструменты обладают фрактальными свойствами. Если выявить эти свойства, становится возможным прогнозировать будущее поведение финансовых рынков с достаточно высокой точностью.

До недавнего времени фрактальному анализу финансовых рынков на постсоветском пространстве не уделялось должного внимания, о чем свидетельствует сравнительно небольшое число русскоязычных научных публикаций по этой тематике. Так, количество работ в разделе «Экономика. Экономические науки» научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU по запросу «фрактальный» составило 226, а по запросу «технический анализ» – 10685 (по состоянию на 17.05.2018). В последние десятилетия в связи с затяжным кризисным состоянием экономики интерес к данной области растет. Проблемой применения фрактального подхода для анализа и прогнозирования экономических показателей занимались такие исследователи, как Л. О. Кириченко [18, 25, 26, 27, 28, 29], Н. В. Старченко и М. М. Дубовиков [19], Е. К. Кривоносова [31, 32, 33], Ю. М. Балагула [6, 7], Г. С. Осипов [43], М. В. Прудский [47] и др. Тем не менее, данное направление остается достаточно слабо разработанным; фрактальные методы применяются ограниченно (см. раздел 1.3), несмотря на возможные перспективы. Таким образом, актуальность работы обусловлена необходимостью исследования применимости фрактального анализа к решению задач прогнозирования на финансовых рынках, оценки практической значимости различных методов.

Объектом исследования являются краткосрочные прогнозы конкретных значений и направления динамики котировок финансовых инструментов, торгуемых на Московской и мировых биржах.

Предметом исследования выступает применение фрактального анализа для прогнозирования на финансовых рынках.

Цель работы – исследовать возможность применения фрактального анализа для краткосрочного прогнозирования котировок финансовых инструментов с высокой точностью.

Для достижения цели были сформулированы следующие задачи:

1. Выполнить анализ области исследований:

– осуществить обзор современных подходов к прогнозированию финансовых рынков;

- рассмотреть теоретические аспекты фрактального анализа финансовых рынков;
- провести обзор актуальных научных работ в данной области;
- описать применяемые в рамках подхода методы анализа и прогнозирования финансовых временных рядов.

2. Разработать методику исследования возможностей применения фрактального подхода для прогнозирования с использованием инструментальных средств, выбранных в результате проведенного анализа.

3. Провести эмпирическое исследование:

- испробовать «наивный» подход к применению фрактальных методов для прогнозирования финансовых временных рядов;
- выполнить предпрогнозный анализ данных;
- осуществить прогнозирование динамики показателей;
- проанализировать полученные результаты.

Структура монографии включает три главы, содержание которых соотносится с поставленными целями и задачами.

Первая глава посвящена анализу области исследований, она содержит обзор современных подходов к прогнозированию на финансовых рынках, раскрытие теоретических аспектов фрактального анализа финансовых рынков, обзор актуальных научных работ в данной области и описание существующих методов анализа и прогнозирования финансовых временных рядов в рамках фрактального подхода.

Вторая глава посвящена разработке методики исследования возможностей применения фрактального подхода для предсказания будущих значений ценовых рядов с использованием инструментальных средств, выбранных в результате выполненного анализа.

Третья глава описывает проведенное эмпирическое исследование, а именно: использование упрощенного подхода к применению фрактальных методов для прогнозирования финансовых временных рядов, предпрогнозный анализ данных, прогнозирование динамики показателей, а также анализ и интерпретацию полученных результатов.

Теоретической базой исследования послужили гипотеза фрактального рынка, изложенная в трудах Б. Мандельброта и Э. Петерса, и методы фрактального анализа и прогнозирования финансовых временных рядов, рассмотренные в работах Н. В. Старченко и М. М. Дубовикова, А. В. Зиненко, Л. О. Кириченко, Ю. М. Балагулы, М. В. Прудского, Е. К. Кривоносковой и др.

Информационной базой исследования послужили данные о котировках акций и других финансовых инструментов, полученных с официальных сайтов

и из банков данных Московской Биржи, брокера «Финам», провайдера финансовой информации «Yahoo! Finance».

Автор посвящает монографию памяти своего первого научного руководителя доктора физико-математических наук, профессора, профессора кафедры ИСММЭ ПГНИУ Петра Михайловича Симонова (1 января 1957 – 18 июля 2020), которому принадлежит идея ее публикации.

Также автор выражает благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Владимиру Петровичу Максиму и другим членам коллектива кафедры ИСММЭ ПГНИУ за помощь и поддержку, в том числе морального характера, при написании и издании данной работы.

ГЛАВА 1. АНАЛИЗ ОБЛАСТИ ИССЛЕДОВАНИЙ

Целью данной главы является ознакомление с теоретическими основами фрактального анализа финансовых рынков, существующими в рамках него подходами и методами исследования и предсказания финансовых рядов. Для достижения цели логично ответить на следующие вопросы:

- каковы современные подходы к прогнозированию финансовых рынков, их достоинства и ограничения;
- в чем заключаются теоретические аспекты фрактального анализа финансовых рынков;
- каковы научные достижения в данной области;
- какие методы анализа и прогнозирования финансовых временных рядов применяются в рамках фрактального подхода.

Ответы на поставленные вопросы и определяют содержимое первой главы.

1.1. Обзор современных подходов к прогнозированию финансовых рынков

Попытки изучить и предугадать будущее поведение экономических систем предпринимаются давно. В настоящее время существуют и с различными степенями успеха применяются разнообразные методики анализа и прогнозирования финансовых рынков. Ниже рассмотрены и проанализированы по критерию соответствия цели данной работы наиболее популярные из них.

1.1.1. Фундаментальный анализ

Фундаментальный и технический анализ – два часто упоминаемых вместе классических подхода, каждый из которых имеет собственных сторонников (и, соответственно, противников другого).

Первый подход был предложен Б. Грэмом и Д. Доддом [21, 65]. Предметом исследования фундаментального анализа является отчетность компаний, а в основу их методов положены попытки определить реальную стоимость активов и предсказать будущие доходы. Целью анализа является определение «справедливой» стоимости акций компании: предполагается, что на рынке существуют акции, которые в настоящий момент недооценены либо переоценены, т. е. их «справедливая» стоимость не соответствует рыночной. Долго так продолжаться не может, рынок стремится к равновесию, и рыночная стоимость акций должна прийти в соответствие со «справедливой». Применение этой методологии имеет достаточно высокую трудоемкость; оно включает изучение финансово-хозяйственного положения компании за ряд лет, оценивание эффективности управления ею и попытки предсказать перспективы ее развития.

В настоящее время подход продолжает развиваться и находит новые направления. М. В. Ефимов с его помощью определяет способность компании генерировать будущие доходы для определения эффективности инвестиционных решений, в работе Я. В. Русяева предложен метод прогнозирования стоимости компаний, в основу которого положен расчет коридора справедливой стоимости [48].

К достоинствам фундаментального анализа можно отнести то, что он позволяет определять основные тенденции на рынке, а также выявить влияющие на них факторы, и, следовательно, повысить объективность и качество принимаемых инвестиционных решений [23]. Среди ограничений можно выделить следующее:

- применяемая информация не дает преимуществ инвестору, т. к. общедоступна;
- процесс анализа отчетности компаний является трудоемким и слабо подвержен автоматизации;
- применение подхода в условиях нестабильной экономической и политической ситуации осложнено в связи с ее высокой изменчивостью;
- на слабо развитых рынках существуют трудности с доступностью информации о компаниях [56].

1.1.2. Технический анализ

Основоположителем технического анализа считается Ч. Доу, идеи которого были систематизированы и развиты Р. Эдвардсом и Дж. Маги [58, 60]. Подход базируется на гипотезе эффективного рынка (сформулирована Ю. Фама) [1, 61], согласно которой вся существенная информация, в том числе и непубличная, немедленно и в полной мере отражается на рыночной курсовой стоимости ценных бумаг. Единственной достоверной информацией считаются данные о биржевых сделках. В них отражаются действия всех участников рынка, в том числе обладающих инсайдерской информацией. Рынком движут настроения и ожидания игроков на нем, и оценивается не сам актив, стоящий за инструментом, а действия участников. Постулируется, что игроки на рынке мало отличаются и мотивацией, и поведением, и при аналогичных условиях всегда действуют одинаково. Шаблоны их поведения являются типовыми, их можно распознать на графике котировок и среагировать соответственно [31]. Таким образом, основным инструментом в рамках подхода является визуальный анализ ценовых графиков.

Современные исследования расширяют возможности прогнозирования с помощью технического анализа: например, в работе С. Н. Володина исследуется эффективность подхода для сверхкраткосрочных операций [10].

Среди преимуществ технического анализа в сравнении с фундаментальным можно отметить следующие:

- технический анализ учитывает важный психологический фактор, необходимый для адекватной оценки ситуации;
- в цене содержится вся повлиявшая на нее информация, в том числе скрытая и недоступная обработке средствами фундаментального анализа [56];
- технический анализ хорошо поддается автоматизации, существует множество предназначенных для него инструментов, в том числе и доступных всем желающим на специализированных веб-ресурсах.

К недостаткам подхода относится его субъективность: каждый трейдер читает и интерпретирует фигуры (паттерны) на ценовых графиках по-своему. Кроме того, технический анализ не раскрывает причин колебаний, а предлагает лишь следовать за ними [23].

1.1.3. Статистический подход

Статистический подход к моделированию финансовых временных рядов основывается на построении по имеющимся данным приближенной модели, отражающей статистическую зависимость, для описания и прогноза поведения рассматриваемого процесса [31]. Для анализа используется временной ряд и шум – последовательность некоррелирующих и одинаково распределенных случайных величин с нулевым математическим ожиданием.

В рамках данного подхода наиболее широко применяются линейные статистические модели. К ним относятся авторегрессионные модели скользящего среднего – ARMA (Auto Regression Moving Average). Шум является неотъемлемой частью модели, без учета его поведение смоделированного процесса существенно отличается от поведения исследуемого ряда. Подобные методы хорошо разработаны и часто используются в прикладных задачах. Они реализованы практически во всех программных решениях, ориентированных на статистическую обработку данных.

Тем не менее, статистический подход развивается. Разработке метода прогнозирования временных (в том числе финансовых) рядов с помощью статистических моделей посвящена, например, диссертация И. А. Чучуевой [57], в которой показано, что предложенная автором модель демонстрирует результаты, сравнимые по точности прогноза с нейросетями, на временных рядах различной природы.

Важными достоинствами данного класса моделей являются их простота и прозрачность моделирования по причине подробно разработанных методик, а также, ввиду популярности, доступность многочисленных примеров применения.

К недостаткам же линейных статистических моделей можно отнести: большое число параметров, идентификация которых неоднозначна и ресурсоемка; низкую адаптивность; линейность и, как следствие, отсутствие способности моделирования нелинейных процессов, часто встречающихся на практике [57].

1.1.4. Нейросетевой анализ

Нейросетевой анализ можно назвать одним из наиболее перспективных. Искусственная нейронная сеть (далее ИНС) является математической моделью мозга человека, состоящей из множества относительно простых элементов (так называемых искусственных нейронов, являющихся упрощенной версией нервных клеток живого организма) и связей между ними. Особенность ИНС в том, что она не программируется на решение какой-то задачи по жестко заданному алгоритму, а обучается, как и человеческий мозг. Благодаря этому нейросети способны решать сложные нестандартные задачи, такие как распознавание образов или прогнозирование [35].

Базовой архитектурой ИНС, предназначенных для прогнозирования, является многослойный персептрон [3]. Нейросеть обучается на специальном участке временного ряда (так называемой обучающей выборке) и становится способна предсказывать будущие значения таких рядов путем поиска неких закономерностей, паттернов в имеющихся данных. Процесс обучения представляет собой многопараметрическую задачу нелинейной оптимизации и заключается в нахождении коэффициентов связей между нейронами.

На сегодняшний день нейросетевой анализ переживает период активного развития по причине своей доказанной на практике эффективности, возможности точного построения прогнозов, а также широких вычислительных возможностей современного аппаратного обеспечения, способного реализовывать соответствующие алгоритмы на больших массивах данных. Например, исследование, проведенное М. Маджумдер и А. Хуссейном, дало точность построения прогноза 89,7% на исключительно волатильном рынке Индии [67].

К достоинствам подхода можно отнести: способность ИНС улавливать скрытые нелинейные зависимости между прошлыми и будущими значениями показателей; отсутствие каких-либо требований о выполнении вероятностных предпосылок для ряда [52]; результатами прогнозирования являются конкретные значения, не требующие интерпретации.

В то же время существуют и недостатки:

- невозможность анализировать и прогнозировать качественно выраженные значения;
- сложность выбора алгоритма (архитектуры сети) и ресурсоемкость процесса обучения;

– необходимость в достаточно больших обучающих выборках, которые не всегда доступны, и т.д.

Вышеперечисленное ограничивает применение нейронных сетей для задач анализа временных рядов, обладающих высокой степенью неопределенности [5], т. е. практически всех финансовых рядов. Тем не менее, существует много подтверждений высокой эффективности подхода в задачах прогнозирования экономических величин [8].

1.1.5. Фрактальный и мультифрактальный подходы

Основоположником и популяризатором фрактальной теории является Б. Мандельброт [39]. Фрактальный и мультифрактальный подходы к анализу экономических процессов в настоящее время развиваются достаточно динамично. Исследования в рамках области затрагивают в основном фондовые и валютные рынки, хотя имеются работы, в которых фрактальный анализ применяется к финансовым показателям отдельного предприятия [31, 41].

Как уже отмечалось во введении, идея фрактального подхода к анализу финансовых рынков заключается в следующем предположении: часто финансовые ряды обладают признаками фракталов (самоподобием, дробной размерностью, степенными законами распределения), что можно использовать для предсказания их поведения в будущем.

Процессы, обладающие фрактальными свойствами, можно разделить на две группы: монофрактальные и мультифрактальные [26]. Если монофрактальный временной ряд – ряд с постоянными стабильными характеристиками фрактальности на любом диапазоне масштабов, то мультифрактал – это комплексный фрактал, который определяется не единственным, а несколькими последовательно сменяющимися друг друга алгоритмами построения. Мультифрактальные процессы допускают разложение на участки с различными локальными масштабными свойствами и характеризуются спектром показателей. В финансах мультифрактальность означает изменение фрактальных показателей после агрегирования временного ряда к другому интервалу, например, при переходе от часовых показателей к дневным [59].

Существуют модификации авторегрессионных моделей временных рядов, учитывающие их фрактальные свойства, в частности, модели класса ARFIMA (AutoRegressive Fractional Integrated Moving Average). Данные модели считаются наиболее точными для целей анализа финансовых временных рядов среди авторегрессионных [20, 47]. Например, в работе [7] на примере цен на нефть показано, что подобные модели, учитывающие наличие в ряду длинной памяти, позволяют уменьшить ошибку прогноза в сравнении с обычными авторегрессионными моделями.

К достоинствам фрактального подхода относится то, что он позволяет более адекватно описывать рыночные процессы, законы распределения риска и доходности в сравнении с классическим подходом (ЕМН). Другое его преимущество заключается в способности описывать сложные динамические процессы по большому счету единственным числом (в случае монофрактала) – величиной фрактальной размерности.

Это же является и недостатком: в природе не существует идеальных фракталов, т. е. объектов, полностью описываемых одним лишь показателем. Как правило, реальные динамические процессы обладают лишь частичным самоподобием, масштабной инвариантностью и другими фрактальными свойствами. Из этого вытекает и такое ограничение, как сложность идентификации фрактальных рядов.

1.1.6. Сравнение подходов

Для наглядности основные достоинства и недостатки рассмотренных подходов к прогнозированию финансовых рынков сведены в таблицу 1.1.

Таблица 1.1

Сравнительная характеристика подходов

Подход	Преимущества	Ограничения
Фундаментальный анализ	Позволяет определять тенденции на рынке и факторы, которыми они обусловлены.	Сложности в применении на слабо развитых рынках и в кризисные периоды; не позволяет учесть всю информацию, влияющую на цены; обладает высокой трудоемкостью и требует специальных экономических знаний.
Технический анализ	Учитывает всю возможную информацию, т.к. она отражается в ценах; хорошо поддается автоматизации, инструменты для которой широко доступны.	Не позволяет выявить факторы, влияющие на рынок; интерпретация результатов субъективна.
Статистическое моделирование	Относительная простота применения; прозрачность моделирования по причине доступности для анализа всех промежуточных вычислений.	Неприменимость к моделированию нелинейных процессов; сложность идентификации параметров для достижения адекватных прогнозов.

Подход	Преимущества	Ограничения
Нейросетевой анализ	Позволяет моделировать нелинейные процессы; не предъявляет требований к характеру распределения входных рядов; предсказывает конкретные значения, не требующие интерпретации.	Высокая сложность выбора архитектуры сети; ресурсоемкость процесса обучения; необходимость больших массивов данных для обучения.
Фрактальный (мультифрактальный) подход	Лучше описывает динамику рыночных процессов, чем подходы, основанные на гипотезе эффективного рынка; для описания используется один показатель – фрактальная размерность.	Единственный показатель не позволяет полностью описать реальные процессы; сложность идентификации фрактальных рядов.

Имеет смысл дать обоснование выбора подхода, использованного в работе. Для этого применен метод исключения.

Фундаментальный и технический анализ, во-первых, требуют достаточно глубоких специальных знаний (первый – в области экономики и финансов, второй – непосредственно методов и приемов трейдинга), а во-вторых, являются давно известными и хорошо разработанными.

Статистическое моделирование также не является инновационным подходом, такие модели широко используются, однако не всегда пригодны для описания экономических, рыночных процессов.

Прогнозирование средствами ИНС – относительно новая методология, уже доказавшая свою эффективность, но ее успешное применение опять же требует специальных знаний и опыта работы с нейросетями.

Таким образом, в данной работе рассмотрен фрактальный (монофрактальный) подход к анализу финансовых рынков как один из наиболее перспективных, позволяющий взглянуть на традиционные проблемы с новой стороны, и исследованы возможности его применения для прогнозирования их динамики. Еще более перспективным является мультифрактальный подход, т. к. он лучше описывает реальные процессы, но автором было решено его не касаться по причине повышенной сложности применения. Кроме того, монофрактальные методы анализа являются к нему первым шагом, который в любом случае необходимо совершить.

1.2. Теоретические аспекты фрактального анализа финансовых рынков

Прежде чем говорить о приложении фрактальной теории к анализу и прогнозированию финансовых рядов, необходимо раскрыть некоторые ее основополагающие аспекты.

1.2.1. Размерность и фракталы

Чтобы дать представление о фракталах, следует начать с понятия размерности.

Размерность некоторого геометрического объекта или множества – это его число измерений [36]. Например, пространство, в котором мы существуем, трехмерно, и любой физический объект в нем имеет размерность, равную трем. Это общее интуитивное представление. В математике существует раздел, изучающий размерности. Ниже рассмотрены некоторые их виды.

Топологическую размерность (размерность Лебега) можно определить как минимальное количество координат, необходимое для описания множества [19]. Так, точка (либо конечное множество точек) имеют топологическую размерность 0, гладкая кривая – 1, плоскость – 2, объемное тело – 3. С математической точки зрения можно сказать, что увеличение линейных размеров объекта в 2 раза приводит к увеличению его размеров в 2^{D_T} раза, где D_T – топологическая размерность.

Данный вид размерности может принимать только целые значения. Он хорошо подходит для описания идеализированных, гладких множеств, таких как прямая линия, куб, сфера и т.д. Однако, как заметил автор фрактальной геометрии Б. Мандельброт при исследовании реальных природных объектов, «облака – не сферы, горы – не конусы, береговые линии – не окружности, и кора не является гладкой, и молния не распространяется по прямой» [39]. В природе идеальные геометрические формы почти не встречаются, что ограничивает пригодность евклидовой геометрии как метода описания реального мира [24].

Известен так называемый «парадокс береговой линии», описанный Л. Ричардсоном и позднее Б. Мандельбротом [54]. Он состоит в том, что точную длину береговой линии определить невозможно, т. к. при уменьшении меры она становится более извилистой, и в результате ее длина возрастает. Получается, что длина природного объекта в общем случае зависит от длины измерительного отрезка и от масштаба рассмотрения (рис. 1.1). Другой необычной особенностью береговой линии является ее самоподобие – свойство, из-за которого линия выглядит одинаково на любом масштабе (с какой бы детальностью ее не разглядывали, всегда будут присутствовать изгибы, изломы).



Рис. 1.1. Зависимость длины береговой линии от выбранного измерительного отрезка

Издавна известны и самоподобные математические структуры, такие как кривая Пеано, множество Кантора, функция Вейерштрасса, снежинка Коха. Для их анализа Ф. Хаусдорфом было предложено новое определение размерности компактного множества в произвольном метрическом пространстве [19]. Он заметил, что если такое множество покрывать шарами радиусом δ , то минимальное число шаров $N(\delta)$ с уменьшением их радиуса возрастает по степенному закону:

$$N(\delta) \sim \left(\frac{1}{\delta}\right)^{D_H}. \quad (1.1)$$

Показатель D_H получил название **размерности Хаусдорфа-Безиковича**. Его формула имеет следующий вид:

$$D_H = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N(\delta)}{\ln \frac{1}{\delta}}. \quad (1.2)$$

Можно сказать, что хаусдорфова размерность D_H является обобщением понятия топологической размерности D_T . D_H идеальных объектов (гладких кривых, поверхностей) совпадает с их D_T . В случае же самоподобных структур D_H всегда превышает D_T и является нецелой (дробной) величиной.

Эта величина показывает, насколько плотно и равномерно элементы множества заполняют пространство. Береговая линия, в зависимости от ее изрезанности, может иметь разное значение размерности Хаусдорфа: при малой изрезанности D_H приближается к 1, при большой – к 2. Фрактальная кривая размерностью, близкой к 2, фактически заполняет пространство и становится полосой (рис. 1.2).

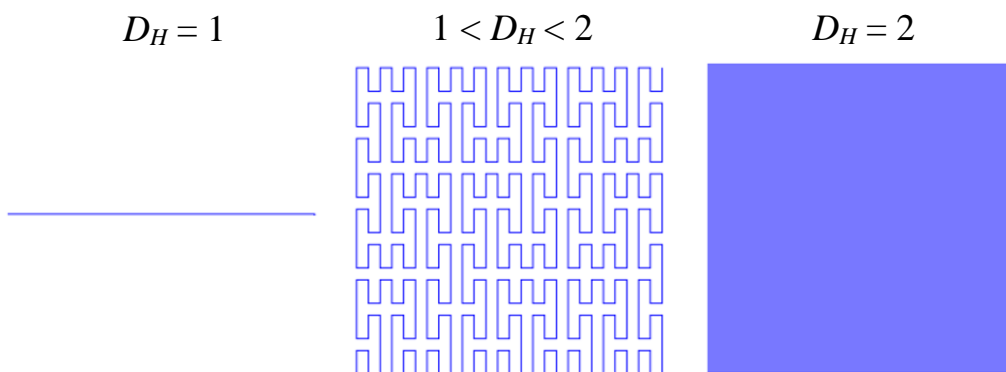


Рис. 1.2. «Идеальные» объекты и кривая Пеано, обладающая дробной размерностью

Множества, для которых справедливо неравенство $D_H > D_T$, Мандельброт назвал **фракталами**, а их размерность предложил называть **фрактальной** и обозначать D [39]. В дальнейшем тексте работы термин «размерность» и обозначение D означают именно этот тип размерности.

Ниже описан один из способов вычисления фрактальной размерности [42]. Пусть берется некоторая D -мерная геометрическая структура и ее стороны последовательно делятся на M равных частей. На каждой итерации каждая из полученных на предыдущем шаге часть также делится на M частей. Каждый уровень будет состоять из M^D частей предыдущего уровня. Данный процесс представлен на рис. 1.3.

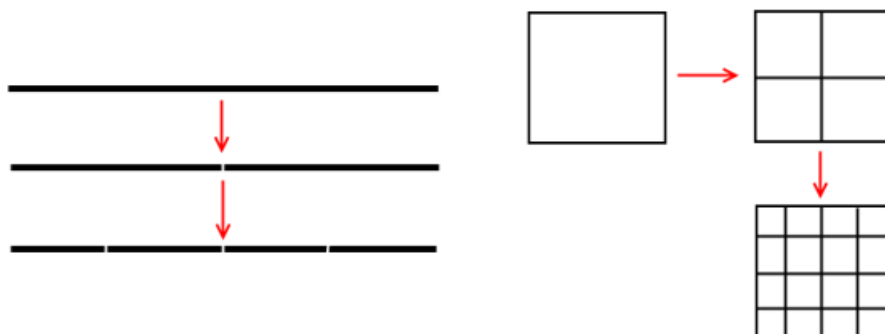


Рис. 1.3. Демонстрация определения фрактальной размерности

Пусть количество полученных частей обозначается N :

$$N = M^D. \quad (1.3)$$

Прологарифмировав обе части уравнения (1.3), получим

$$\ln N = \ln M^D. \quad (1.4)$$

Далее можно выразить величину D : решив уравнение

$$\ln N = D \ln M, \quad (1.5)$$

получим

$$D = \frac{\ln N}{\ln M}. \quad (1.6)$$

Это простейший способ определения размерности объекта. Становится понятным, что вычислить D аналитически возможно только у достаточно простых, гладких геометрических множеств без изъёмов. Для реальных объектов D находят посредством приближенных численных методов.

Стоит заметить, что в зависимости от способа вычисления помимо хаусдорфовой выделяют и другие виды фрактальных размерностей, например, размерность Минковского [42] (клеточную), размерность минимального покрытия [19].

Наличие дробной размерности является важнейшим признаком фракталов. Не существует точного определения данной сущности, сам Мандельброт охарактеризовал ее так: «Фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому». Можно сказать, что фракталы – это фигуры, обладающие следующими свойствами [39, 47]:

1) **самоподобие** или **масштабная инвариантность**. Отдельные составляющие объекта подобны всему объекту целиком, вследствие чего при различных масштабах объект выглядит одинаково. Ярким примером природного фрактала с таким свойством является лист папоротника;

2) **масштабирование по степенному закону**. Изменение характеристик объекта с изменением масштаба рассмотрения имеет степенную зависимость;

3) **фрактальная (дробная, нецелая) размерность**, которая превосходит топологическую. При увеличении соотношение между масштабом и каким-либо параметром фрактала постоянно и равно фрактальной размерности [31]. Эта величина – основной показатель, характеризующий фрактальные структуры. Визуально она воспринимается как «изломанность», «извилистость» [6].

На рис. 1.4 изображен один из широко известных модельных фракталов – снежинка Коха. Хорошо заметны свойства масштабной инвариантности и дробной размерности.

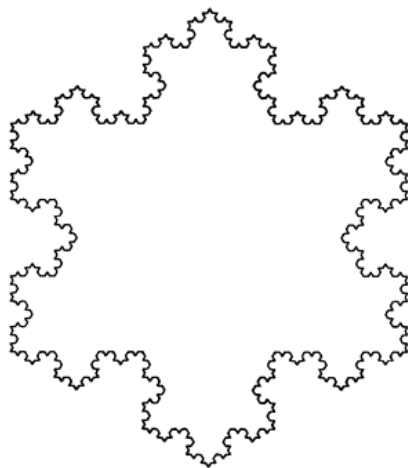


Рис. 1.4. Снежинка Коха

Сущность фрактального анализа как инструмента описания различных объектов заключается в том, что производится обработка масштабированием фрактальной структуры и описывается распределение какой-либо структурной характеристики (или меры) при этом масштабировании [33]. Вычисляется фрактальная размерность, и ее значения в определенных диапазонах позволяют судить о поведении объекта.

Фрактальными характеристиками могут обладать не только математические абстракции и природные сущности, но и временные ряды, являющиеся численным дискретным описанием непрерывных динамических процессов. Как правило, когда говорят об анализе и прогнозировании финансовых рынков, подразумевают исследование именно ценовых рядов финансовых инструментов. Если обратить внимание на графики котировок акций или валют, можно заметить их сильную изрезанность (фрактальную размерность), а также то, что при рассмотрении на различных временных масштабах они выглядят похоже, нельзя с уверенностью сказать, дневные это курсы, месячные или минутные (самоподобие).

Оказалось, что фрактальная геометрия как инструмент описания применима во множестве областей науки [18, 47], в том числе в физике, геодезии (можно вспомнить береговую линию), медицине, биологии, компьютерной графике, информационных технологиях (популярным приложением является исследование сетевого трафика [27]), а также может быть использована в анализе экономических систем, в частности, финансовых рынков.

1.2.2. Фрактальная природа финансовых рынков

Сложившиеся в 60-х–70-х гг. прошлого века методы анализа финансовых рынков (модель оптимального инвестиционного портфеля Г. Марковица, модель оценки долгосрочных активов CAPM У. Шарпа, модель ценообразования опционов Блека – Шоулза и др.) до сих пор широко применяются [22]. Эти модели основаны на так называемом вероятностном подходе, согласно которому характеристики финансовых активов рассматриваются как случайные величины, подчиняющиеся определенным законам распределения вероятностей, в частности, нормальному [37] (гипотеза эффективного рынка, EMH).

Однако такие события, как обвал фондового рынка США 1987 г., кризисы 1992, 1995, 1998, 2008 гг. не вписывались в постулаты вероятностного подхода, ведь согласно классическим финансовым моделям резкие скачки или обвалы не должны происходить никогда [31], а если происходят, объясняются случайными флуктуациями, отклонениями, которые нужно игнорировать. Было показано, что указанные модели действуют только в периоды стабильного состояния рынка [22].

Американским математиком Б. Мандельбротом было обнаружено, что кривая распределения вероятностей изменения рыночных котировок не соответствует гауссовской нормальной кривой, риск наступления большого отклонения доходности фактически значительно выше, чем при нормальном распределении [38], т. е. редкие события на рынках происходят чаще, чем принято ожидать (название данного явления – «толстые хвосты», fat tails) (рис. 1.5).

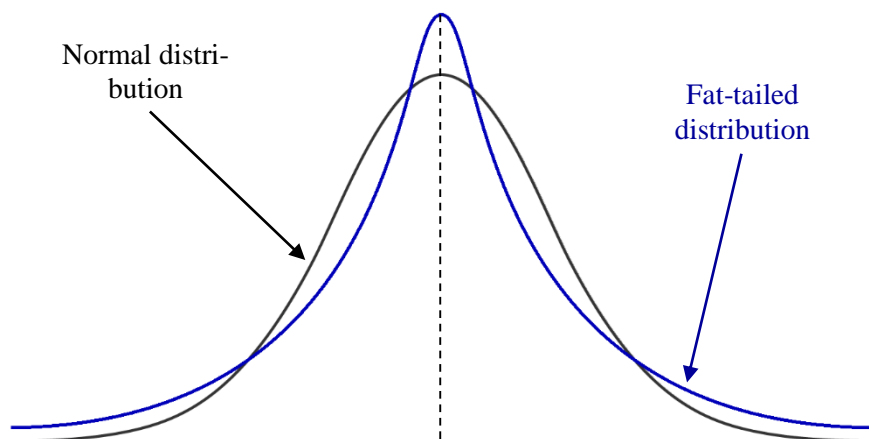


Рис. 1.5. Графики функции плотности вероятности нормального распределения и распределения с «толстыми хвостами»

Например, согласно анализу Фама промышленного индекса Доу-Джонса, колебания, превышающие пять стандартных отклонений, случались в пять тысяч раз чаще, чем предсказывала нормальная кривая. Кроме того, полученные Мандельбротом кривые распределения вероятностей имели более высокие пики [22].

Мандельброт предположил, что динамика фондовых рынков не является случайной, а подчиняется некоему степенному закону [22]. Также он обнаружил, что кривые доходностей за различные временные промежутки (1, 5, 10, 20, 30 и 90 дней) выглядят одинаково, т. е. масштабно-инвариантны [45]. В своей книге [38] Мандельброт сформулировал так называемую гипотезу фрактального рынка (FMH) как альтернативу гипотезе эффективного рынка (EMH) [61]. В качестве принципиально нового инструмента оценки рисков он предложил использовать фрактальную геометрию и показал, что с помощью фрактальной теории можно создавать очень правдоподобные ценовые диаграммы котировок акций или фондовых индексов, а с помощью фрактальной размерности оценивать риски вложения в те или иные активы. Э. Петерс провел расчеты, подтверждающие, что современный рынок имеет фрактальную природу [45].

Фрактальность рынков, согласно гипотезе FMH, связана с тем, что для устойчивости рынка на нем должны присутствовать инвесторы с разными инвестиционными горизонтами (от нескольких часов до нескольких лет). Это и

приводит к масштабной инвариантности ценовых рядов на соответствующем временном интервале [19]. Если рынок имеет один горизонт инвестирования, на нем возникает нехватка ликвидности и, как следствие, паника [45].

Реальные временные ряды экономических показателей (котировок акций, курсов валют, показателей финансовой отчетности предприятий) демонстрируют сложное непериодическое поведение, при котором тренды и флэты хаотическим образом сменяют случайное блуждание. Развитие и прогнозирование таких рядов эффективно описывать методами фрактальной параметризации, т. е. использования для описания ряда количественных параметров [32]. Основным показателем, характеризующим фрактальные временные ряды, как и фрактальные структуры в целом, является их фрактальная размерность [40]. Она связана с таким свойством рядов, как **персистентность** или наличие «**длинной (долгой, долговременной) памяти**» [6]. Следует раскрыть данное понятие подробнее.

Важной характеристикой динамики временных рядов является длительность реакции на внешние шоки. Математически это свойство может быть описано с помощью автокорреляционной функции. Чем быстрее она затухает, тем меньше продолжительность присутствия во временном ряде последствий внешнего шока. В этом смысле говорят об эффекте памяти во временных рядах [6]. Явление, название «длинной памятью», было обнаружено британским гидрологом Г. Херстом, изучавшим историческую статистику разливов Нила. Он заметил, что за разливами выше среднего в следующем периоде следовали разливы еще большие; при смене направления и наступлении засушливого периода за ним следовали более засушливые. Таким образом, персистентный временной ряд обладает способностью поддерживать тенденцию изменения. Согласно Мандельброту, данный эффект имеет место и на финансовых рынках. Причем сильная зависимость между предыдущими и последующими значениями со временем уменьшается весьма медленно (автокорреляционная функция такого процесса убывает гиперболически) [22] (рис. 1.6). Чтобы численно охарактеризовать свойство персистентности, Херстом был введен показатель H , позднее названный его именем [6].

Связь характеристик «наличие длинной памяти» и «размерность» временного ряда состоит в следующем [40]. Методами математического анализа доказано, что если фрактальная размерность принимает значение 1,5, торащения во временном ряду независимы между собой (ряд соответствует случайному блужданию). Случай, когда фрактальная размерность меньше 1,5, соответствует персистентному ряду, т. е. ряду, характеризующемуся эффектами длинной памяти. Обратная ситуация (размерность больше 1,5) отвечает антиперсистентному поведению временного ряда (подробнее об интерпретации фрактальных показателей см. раздел 1.4.1.3).

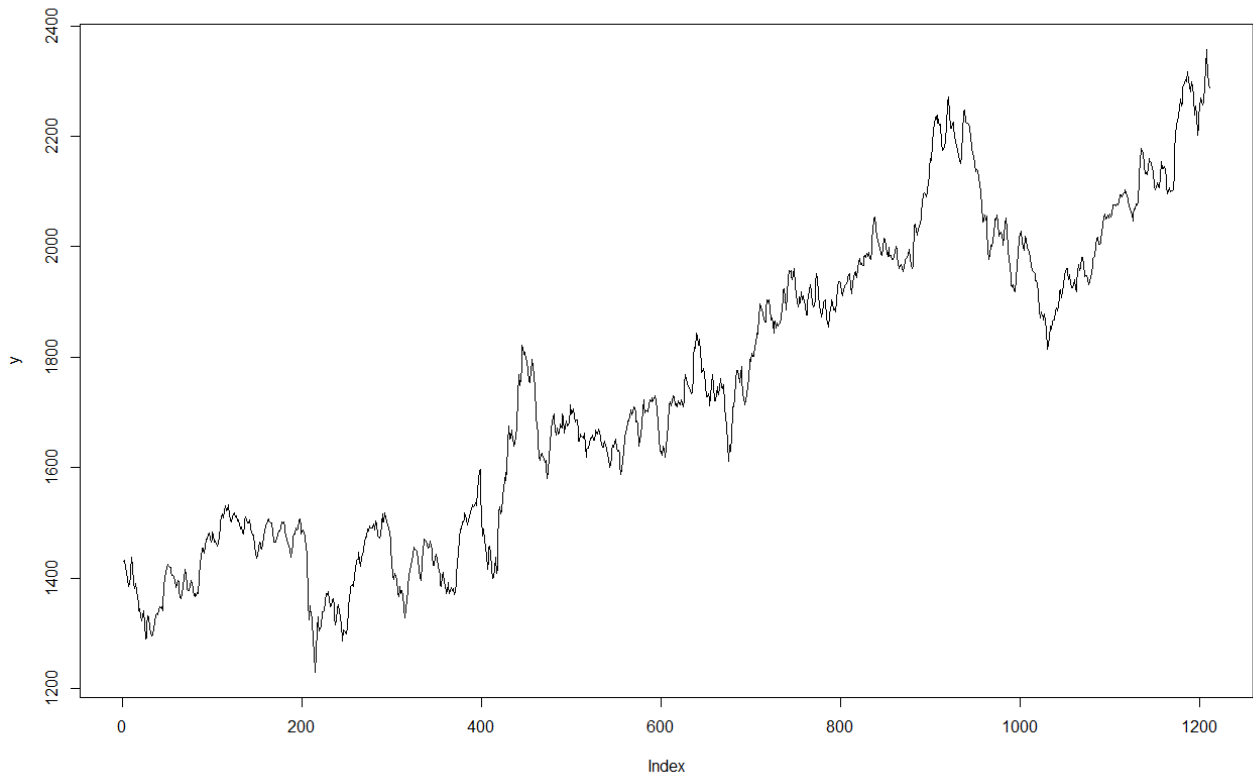


Рис. 1.6, а. Пример процесса с длинной памятью

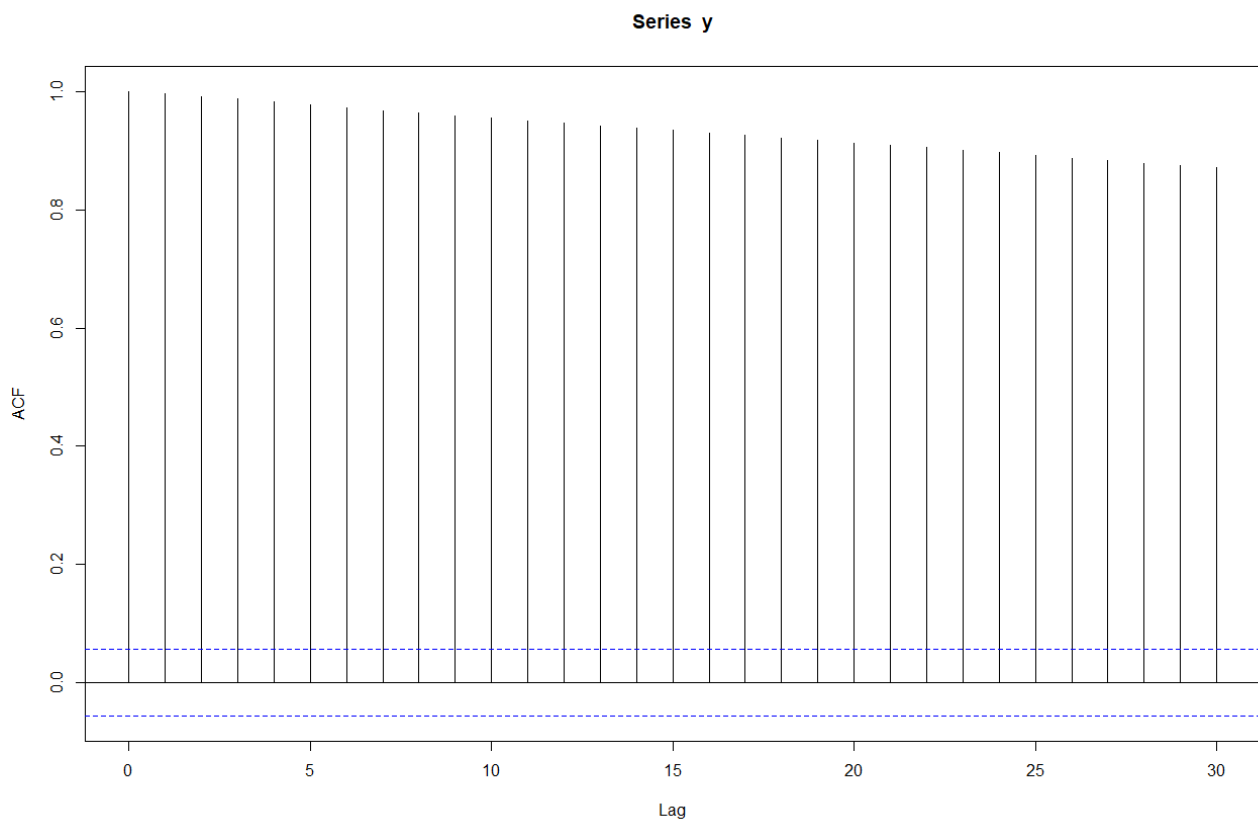


Рис. 1.6, б. Автокорреляционная функция процесса с длинной памятью

Таким образом, суть фрактального анализа временных рядов заключается в том, чтобы выяснить, насколько исследуемые ряды близки к фрактальным, и определить характер связи между линией тренда и фрактальной размерностью D . Выявление этой зависимости является важнейшей задачей применения фрактальной теории к анализу финансовых рядов, позволяющей определить основные законы динамики ряда и на их основе прогнозировать как общие тенденции развития финансового рынка, так и конкретные значения финансовых показателей [55].

Для большинства естественных временных рядов аналитическое нахождение фрактальной размерности невозможно, поэтому D определяют численно: либо непосредственно, либо через величины, связанные с ней простым соотношением (например, показатель Херста H) [32]. Для этого применяются различные методы, рассмотренные в параграфе 1.4.

Однако, прежде чем переходить к описанию методов, следует изучить современное положение дел в области применения фрактального подхода к анализу рыночных процессов.

1.3. Обзор актуальных научных работ в области фрактального анализа и прогнозирования финансовых рынков

Проблемой применения фрактального подхода к анализу финансовых рынков и их прогнозированию занимались многие авторы.

Так, Ю. М. Балагула применял методы фрактального анализа для характеристики длинной памяти и других свойств временных рядов биржевых оптовых цен на электроэнергию. Полученные результаты свидетельствовали о персистентном характере анализируемых временных рядов, наличии в них длинной памяти [6]. Согласованные результаты были получены и А. В. Зиненко, рассматривающей алгоритм R/S-анализа и применение его к временным рядам биржевых котировок [22].

А. К. Мансуровым изучалась зависимость валютных кризисов от фрактальной размерности валютных курсов. Было показано, что наиболее устойчивым состоянием макроэкономических систем является состояние, характеризующееся фрактальной размерностью 1,5. Существенное отклонение фрактальной размерности от указанного значения свидетельствует о переходе рынка в нестабильную фазу, сопровождающуюся кризисными явлениями [40].

В. М. Андриенко анализировал показатель Херста фондовых индексов разных стран в предкризисный период, результатами было подтверждено изменение фрактальной размерности ряда перед его резкими скачками [2].

В работе М. М. Дубовикова и Н. В. Старченко [19] предложены новые фрактальные показатели: размерность минимального покрытия и связанный с

ней индекс фрактальности. На примере временных рядов акций компаний, входящих в индекс Доу-Джонса, показано, что минимальный масштаб, необходимый для определения введенных показателей с приемлемой точностью, содержит на два порядка меньше данных, чем соответствующий масштаб для определения показателя Херста методом нормированного размаха. Это дает возможность рассматривать индекс фрактальности в качестве локального показателя стабильности временного ряда, в то время как показатель Херста ввиду необходимости большого количества значений ряда для достаточно точного вычисления методом R/S-анализа может быть определен лишь для широких временных интервалов, в течение которых фрактальные свойства ряда могут неоднократно меняться.

В статье Е. К. Кривоносковой и коллектива авторов [32] выполнено сравнение нескольких наиболее распространенных методов определения фрактальных характеристик (метод клеточного покрытия, метод минимального покрытия, R/S-анализ) на примере реальных временных рядов экономических показателей, приведено сопоставление полученных фрактальных характеристик. Также сделан согласованный с результатами предыдущих исследований вывод о взаимосвязи фрактальной характеристики временного ряда с кризисными состояниями системы. В своей диссертационной работе [31] Е. К. Кривоноскова рассматривает использование методов фрактального и мультифрактального анализа для оценки степени стабильности работы предприятия и прогнозирования критических событий для котировок акций и индексов на фондовом рынке в рамках оценки инвестиционных и кредитных рисков.

Л. О. Кириченко с коллективом авторов занималась исследованием мультифрактальных характеристик нестабильных финансовых временных рядов, в частности, обобщенного показателя Херста. Полученные значения показателя до и после начала кризиса позволили утверждать, что предкризисный период функционирования финансового рынка характеризуется узким диапазоном его колебаний, который существенно увеличивается после начала кризиса [28].

Среди работ, посвященных проблеме применения фрактального анализа для прогнозирования не просто критических точек, а конкретных значений ряда, можно выделить следующие труды.

И. В. Дегтяренко и группа авторов рассматривали вопросы построения прогностической модели ARFIMA на примере модельного фрактального процесса. Была описана методика определения параметров модели на основе использования метода детрендированного флуктуационного анализа (ДФА) и показано, что эффективность ее применения позволяет увеличить горизонт удовлетворительного прогноза поведения фрактального процесса на 6% по сравне-

нию с применением подхода оценки параметров, базирующегося на методе Виттла [17].

В работе Е. С. Остапенко и Т. А. Дунаевой прогнозировались цены акций компании Google с использованием моделей класса ARMA и ARFIMA. Модель ARFIMA продемонстрировала лучшие прогностические свойства, т. к. ее погрешность оказалась ниже. Был сделан вывод о том, что игнорирование наличия длинной памяти у временных рядов приводит к появлению большей погрешности, нежели учет длинной памяти при фактическом ее отсутствии [44]. Этот же результат (превосходство модели с длинной памятью перед моделью ARMA) был получен в статье Ю. М. Балагулы в соавторстве с Ю. Абакумовой на примере цен на нефть [7].

Также фрактальной авторегрессией пользовался М. В. Прудский при построении краткосрочного прогноза курса доллара к рублю. Им были сделаны выводы о том, что модель обладает способностью делать краткосрочные прогнозы и является более точной в сравнении с другими статистическими моделями из-за учета ею фрактальных свойств [47].

И. И. Белолипцевым и С. А. Фархиевой был предложен подход к прогнозированию финансовых временных рядов на основе нейросетевых моделей, принимающих на вход фрактальные характеристики временного ряда (а именно, индекс фрактальности). На примере курсов акций ОАО «Татнефть» показано, что использование индекса фрактальности улучшает прогностические свойства модели [8].

А. М. Кричевский исследовал возможности прогнозирования временных рядов с длинной памятью, используя как фрактальную авторегрессию, так и нейросети вида многослойный персептрон. Полученные им результаты свидетельствовали о меньшей ошибке прогноза у моделей ARFIMA [34].

Также прогнозированию при помощи методов фрактального и мультифрактального анализа посвящены работы иностранных авторов Т. Люкса, Т. Кайзоджи, Л. Кальве, А. Фишера, Ф. Шмидта и др. [31].

Как показывает выполненный обзор актуальной научной литературы в области применения фрактального анализа на финансовых рынках, в основном данный подход используется авторами для подтверждения гипотезы о фрактальности и персистентности финансовых временных рядов, а также для исследования возможности предсказывать критические точки (кризисы). Для определения фрактальных свойств рядов чаще всего используется исторически первый и наиболее простой такого рода метод – R/S-анализ в совокупности с показателем Херста, реже применяется метод ДФА. Перспективным методам мультифрактального анализа уделяется не так много внимания. Также было обнаружено достаточно мало работ, посвященных прогнозированию значений фи-

нансовых временных рядов. Среди рассмотренных наибольшей популярностью пользуются модели с длинной памятью (в частности, ARFIMA), которые, согласно выводам ряда авторов, могут предложить получение достаточно точных прогнозов. Тем не менее, применение ARFIMA на примере российского финансового рынка изучено недостаточно хорошо, слишком мало примеров успешных предсказаний, полученных данным методом, поэтому требуется дальнейшее исследование его эффективности.

В следующем параграфе подробно рассмотрены наиболее популярные из применяющихся исследователями методы фрактального анализа и прогнозирования.

1.4. Фрактальные методы анализа и прогнозирования финансовых временных рядов

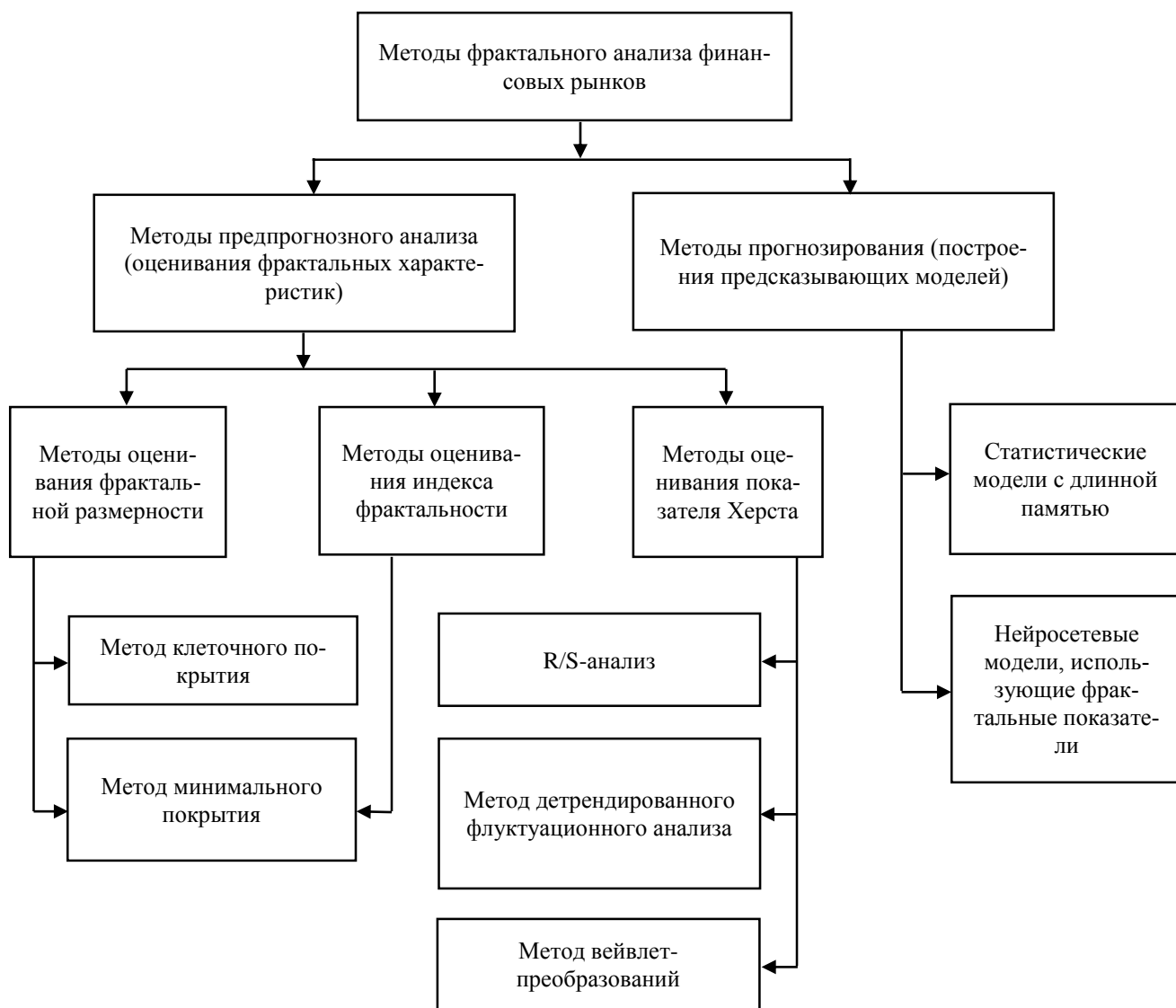


Рис. 1.7. Основные методы фрактального анализа финансовых рынков

Процесс предсказания динамики финансовых рядов можно разделить на два этапа: предпрогнозный анализ и собственно построение прогнозов. Предварительный анализ, как правило, заключается в исследовании ряда и выявлении у него фрактальных свойств, оценивании фрактальных показателей. Затем эти показатели тем или иным способом используются в построении предсказывающих моделей.

Классификация наиболее широко применяемых методов фрактального анализа представлена в виде схемы на рис. 1.7. В следующей части параграфа сущность этих методов раскрыта подробно.

1.4.1. Методы вычисления фрактальных характеристик финансовых рядов

Как показал обзор научных работ, основной характеристикой структуры, оцениваемой в процессе фрактального анализа, является ее размерность. Это же справедливо для временных рядов, о размерности которых говорят применительно к кривой их графика. Именно на основе размерности ряда, ее динамики на его различных участках можно судить о поведении фрактального процесса, тенденции его развития.

Размерность тесно связана с персистентностью процесса, наличием у него длинной памяти, из-за чего ее часто вычисляют через показатель Херста H по формуле:

$$D = 2 - H . \quad (1.7)$$

Стоит отметить, что H в отличие от фрактальной размерности D является показателем, разработанным специально для анализа временных рядов [6].

Также ряд русскоязычных авторов среди фрактальных характеристик выделяют так называемый индекс фрактальности, вычисляемый в процессе определения размерности методом минимального покрытия [19, 31].

1.4.1.1. Методы оценивания фрактальной размерности

Непосредственное определение фрактальной размерности чаще всего проводят с помощью одного из двух методов – метода клеточного покрытия временного ряда либо метода минимального покрытия [32]. Следует отметить, что существуют и менее распространенные подходы, например, через корреляционный интеграл с помощью алгоритма Грассбергера-Прокаччия, но в данной работе они рассмотрены не будут ввиду малоизвестности.

Метод клеточного покрытия. Клеточный метод является наиболее простым и распространенным способом определить размерность множества. Его идея состоит в том, что контуры изображения фигуры покрываются некоторым количеством квадратов стороной δ таким образом, чтобы число этих квадратов $N(\delta)$ оказалось минимально возможным [6]. Если уменьшать величину

ну δ , то $N(\delta)$ будет расти по степенному закону: $N(\delta) \sim (1/\delta)^D$, где D – размерность. Преобразуя это выражение, можно получить формулу клеточной размерности (ее также называют размерностью Минковского [42]):

$$D = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N(\delta)}{\ln(1/\delta)}. \quad (1.8)$$

На практике при вычислении D плоскость с изображением (например, графиком изменения экономической переменной) покрывают сеткой и считают число квадратов, на которых лежит хотя бы одна точка кривой. Затем постепенно уменьшают δ и считают соответствующие значения $N(\delta)$. После в двойном логарифмическом масштабе строится график функции $N(\delta)$, который аппроксимируется прямой с помощью метода наименьших квадратов (МНК). Тогда D определяется как тангенс угла наклона этой прямой или же коэффициент при независимой переменной уравнения линейной регрессии $\ln N(\delta) = D \ln \delta + b$, где b – свободный член. Клеточный метод проиллюстрирован на рис. 1.8.

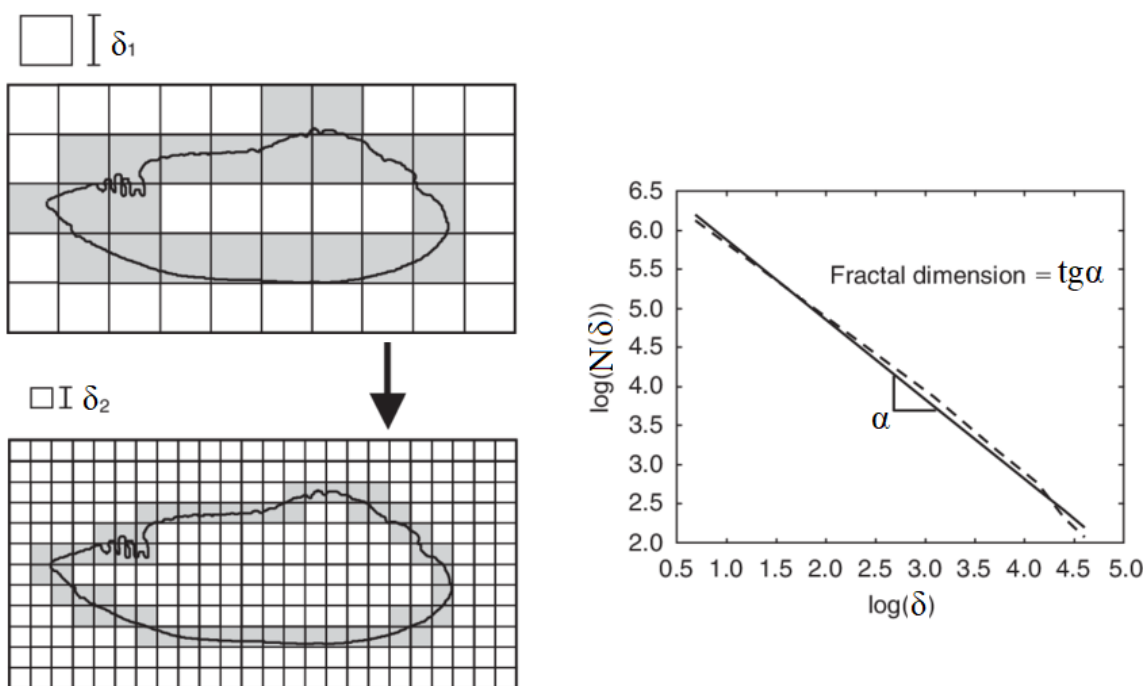


Рис. 1.8. Иллюстрация применения метода клеточного покрытия

Метод минимального покрытия и индекс фрактальности. Метод минимального покрытия, детально разработанный в трудах М. М. Дубовикова и Н. В. Старченко (например, [19]), позволяет характеризовать локальную динамику процесса. Для этого сужается репрезентативный масштаб до значений, при которых временной ряд не меняет своего поведения, и определяется локальная фрактальная размерность [32].

Алгоритм метода состоит из следующих шагов. Пусть процесс характеризуется некоторой функцией $y = f(t)$ на отрезке $[a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b]$, $i = 1, 2, \dots, m$. Отрезок $[a, b]$ разбивается на m сегментов равной длины $\delta = \frac{b-a}{m} = t_i - t_{i-1}$. Затем график функции покрывается прямоугольниками с основанием δ таким образом, чтобы это покрытие было минимальным по площади. Тогда высота прямоугольника на отрезке $[t_{i-1}, t_i]$ будет равна амплитуде $A_i(\delta)$, равной разности максимального и минимального значения $f(t)$ на данном отрезке. Накопленная амплитуда на всем отрезке вычисляется как $V_f(\delta) = \sum_{i=1}^m A_i(\delta)$, а площадь минимального покрытия как $S_\mu(\delta) = V_f(\delta)\delta$. Очевидно, что при сокращении длины отрезка δ точность вычисления площади покрытия будет увеличиваться. Имеет место степенная зависимость $S_\mu(\delta) \sim \delta^{2-D}$ при $\delta \rightarrow 0$, где D – фрактальная размерность. Из этой формулы следует, что

$$V_f(\delta) \sim \delta^{-\mu} \text{ при } \delta \rightarrow 0, \quad (1.9)$$

где

$$\mu = D_\mu - 1. \quad (1.10)$$

Показатель D_μ авторы называли размерностью минимального покрытия, а μ – индексом фрактальности. В работе [19] показано, что клеточное и минимальное покрытия совпадают (и, следовательно, совпадают вычисленные указанными способами размерности), однако для реальных фрактальных процессов они могут давать различные приближения величины $S(\delta)$ к асимптотическому режиму.

Показатель μ вычисляют аналогично клеточной размерности: как взятый с отрицательным знаком коэффициент при независимой переменной в уравнении линейной регрессии $\ln V_f(\delta) = -\mu \ln \delta + b$, где b – свободный член. Иллюстрация метода минимального покрытия для дискретного ряда данных приведена на рис. 1.9.

Стоит отметить, что при анализе данных котировок авторы метода использовали не одномерный ряд цен, а двумерный, на каждый момент времени (в частности, день) содержащий максимальную и минимальную цены инструмента [19]. В расчете данная специфика учитывается таким образом, что верхняя граница амплитуды $A_i(\delta)$ определяется по вектору максимальных цен, а нижняя соответственно по вектору минимальных. Причем такой подход позволяет в качестве наименьшей длины отрезка брать единицу, т. е. шаг, с которым дискретизирован временной ряд (например, один день), а размахом в этом случае будет разница максимального и минимального внутрисуточных курсов.

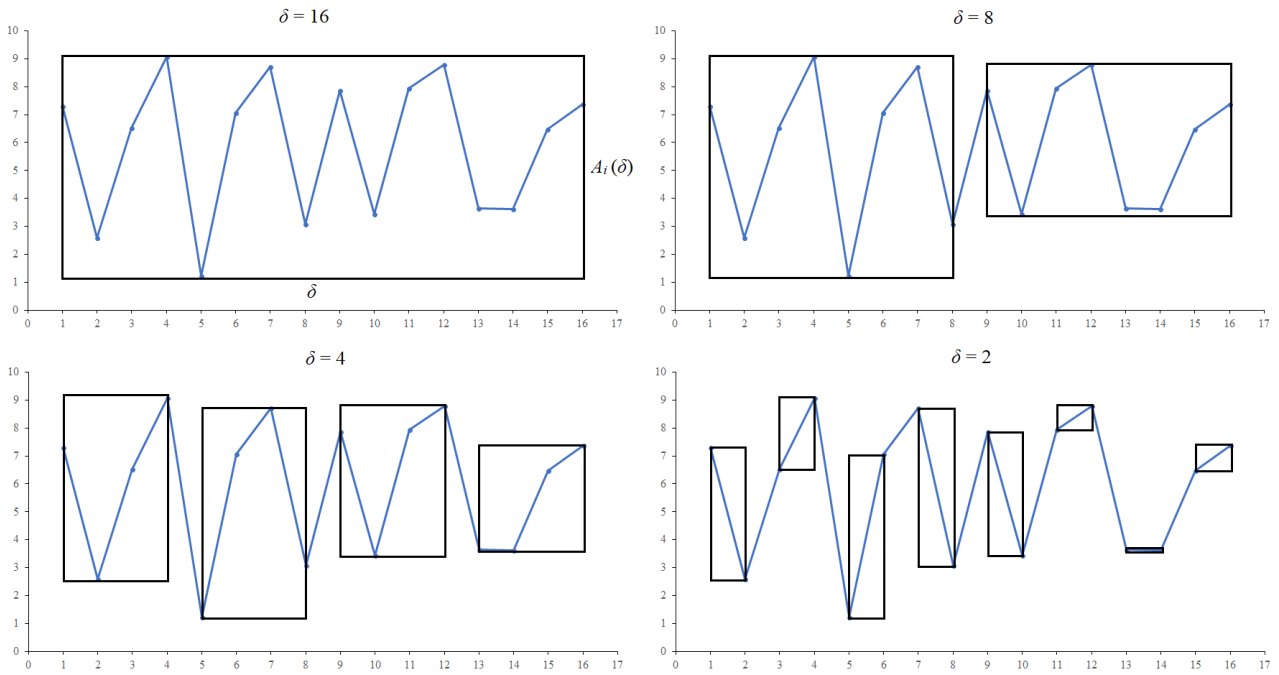


Рис. 1.9. Минимальное покрытие при различных значениях длины отрезка δ

Показано, что для приемлемо точного определения размерности минимального покрытия достаточно репрезентативных интервалов длиной 32 и иногда даже 16 дней. Заметно, что значения функции $V_f(\delta)$ в двойных логарифмических координатах хорошо ложатся на прямую линию даже на таком временном масштабе (т. е. функция имеет быстрый выход на асимптотический режим) (рис. 1.10).

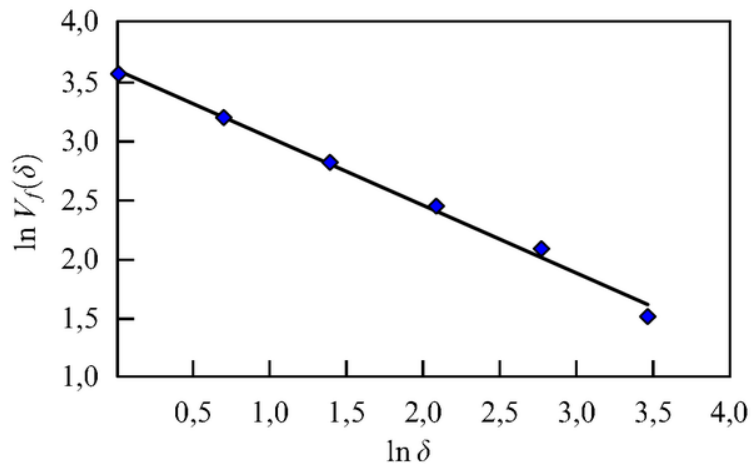


Рис. 1.10. Зависимость $\ln V_f(\delta)$ от $\ln \delta$ на интервале 32 дня (курсы акций Coca-Cola) [19]

Размерность – величина, которая может быть определена для любой природной или модельной структуры, если ее можно изобразить графически. Для анализа временных рядов часто используют другую характеристику – показатель Херста.

1.4.1.2. Методы оценивания показателя Херста

Ниже рассмотрены три наиболее часто используемых метода, позволяющих вычислять показатель Херста H и делать выводы о характере поведения фрактального процесса.

Метод нормированного размаха (R/S-анализ). R/S-анализ предложен Г. Херстом в 50-х гг. XX в. и до сих пор является одним из наиболее популярных подходов в исследованиях фрактальных рядов самой различной природы, что подтверждается обзором научных работ. Можно сказать, что для вычисления H он является «родным» методом, и некоторые авторы, говоря о показателе Херста, подразумевают его оценивание именно посредством метода нормированного размаха. Идея R/S-анализа состоит в том, что существует степенная зависимость вида

$$R/S \sim c \cdot \delta^H, \quad (1.11)$$

где R – размах вариации (под вариацией показателя понимается накопленное отклонение его от среднего значения), S – стандартное отклонение показателя, δ – количество значений показателя в группе, c – некоторая константа.

Вычисляемая статистика R/S является размахом, нормированным стандартным отклонением, что и дало название методу. В работе [22] подробно описан его алгоритм.

Пусть дан временной ряд $x(t)$ длиной $n + 1$. Прежде всего его приводят к так называемым «логарифмическим прибылям» [43] («доходностям») $y(t)$:

$$y(t) = \ln \frac{x_t}{x_{t-1}}. \quad (1.12)$$

Далее работают с преобразованными данными. Ряд $y(t)$ длиной n делится на m групп значений по δ элементов. Для каждой i -ой группы ($i = 1, 2, \dots, m$) рассчитываются:

- среднее значение \bar{y}_i ;
- накопленные отклонения от среднего $Y_t = \sum_{t=1}^{\delta} (y_t - \bar{y}_i)$, образуя m рядов $Y_i(t)$;
- размах $R_i = \max(Y_i(t)) - \min(Y_i(t))$;
- стандартное отклонение $S_i = \sqrt{\frac{1}{\delta} \sum_{t=1}^{\delta} (y_t - \bar{y}_i)^2}$;
- R/S-статистика (нормированный размах) по формуле R_i / S_i .

После полученные m величин R/S усредняются, и получается двойка элементов $\langle R/S(\delta), \delta \rangle$. Такие вычисления проводят для различных значений δ . По-

казатель Херста H определяется как коэффициент при независимой переменной в уравнении линейной регрессии $\ln R/S(\delta) = H \ln \delta + c$, где c – свободный член.

Стоит отметить, что величина δ не может принимать значения, меньшие 10, при этом очевидно, что она является собственным делителем количества элементов в ряду n , поэтому выборку нужно формировать таким образом, чтобы максимизировать число собственных делителей – это положительно скажется на точности вычисления H . Кроме того, для достижения приемлемой точности значение n должно быть достаточно высоко (несколько тысяч). В [19] показано, что на интервалах порядка нескольких десятков значений оценивание H не имеет смысла, т. к. функция $R/S(\delta)$ имеет медленный выход на асимптотический режим (рис. 1.11).

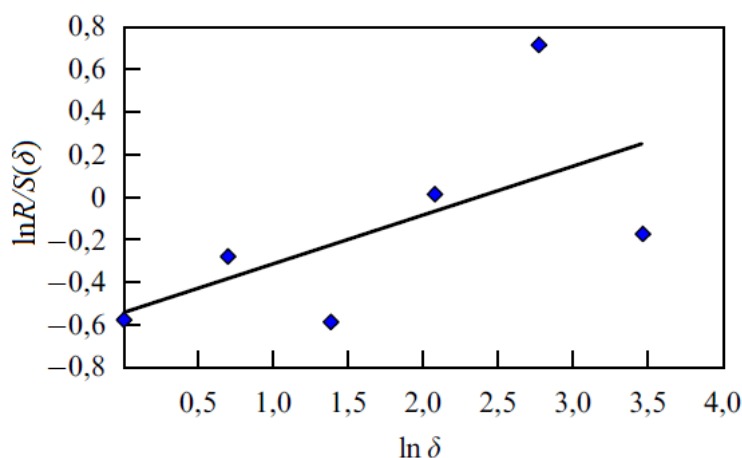


Рис. 1.11. Зависимость $\ln R/S(\delta)$ от $\ln \delta$ на интервале 32 дня (курсы акций Coca-Cola)

Для проверки состоятельности расчета показателя Херста Э. Петерс предлагает перемешать исходные данные случайным образом и вычислить H повторно [45]. Если ряд обладает длинной памятью и было получено высокое значение H , то при перемешивании оно должно существенно снизиться, в противном случае либо неудачно сформирована выборка данных, либо имеются ошибки методики.

Метод детрендрованного флуктуационного анализа. Метод детрендрованного флуктуационного анализа (далее ДФА) в настоящее время является основным методом определения самоподобия для нестационарных временных рядов [29] (по-видимому, автор научной работы имеет в виду не распространенность метода, а его способность оценивать H с высокой точностью и относительную простоту). Алгоритм его состоит из следующих шагов [68].

Пусть имеется временной ряд $x(t)$. Строится кумулятивный ряд $y(t)$, каждый член которого вычисляется по формуле $y_i = \sum_{i=1}^t (x_i - \bar{x})$, где \bar{x} – среднее

значение $x(t)$. Далее ряд $y(t)$ разбивается на N сегментов длиной δ . Для каждого сегмента вычисляется флуктуационная функция

$$F(\delta) = \sqrt{\frac{1}{\delta} \sum_{t=1}^{\delta} (y(t) - Y_m(t))^2}, \quad (1.13)$$

где $Y_m(t)$ – локальный m -полиномиальный тренд в пределах данного сегмента (т. е. значение функции тренда в точке t) (рис. 1.12).

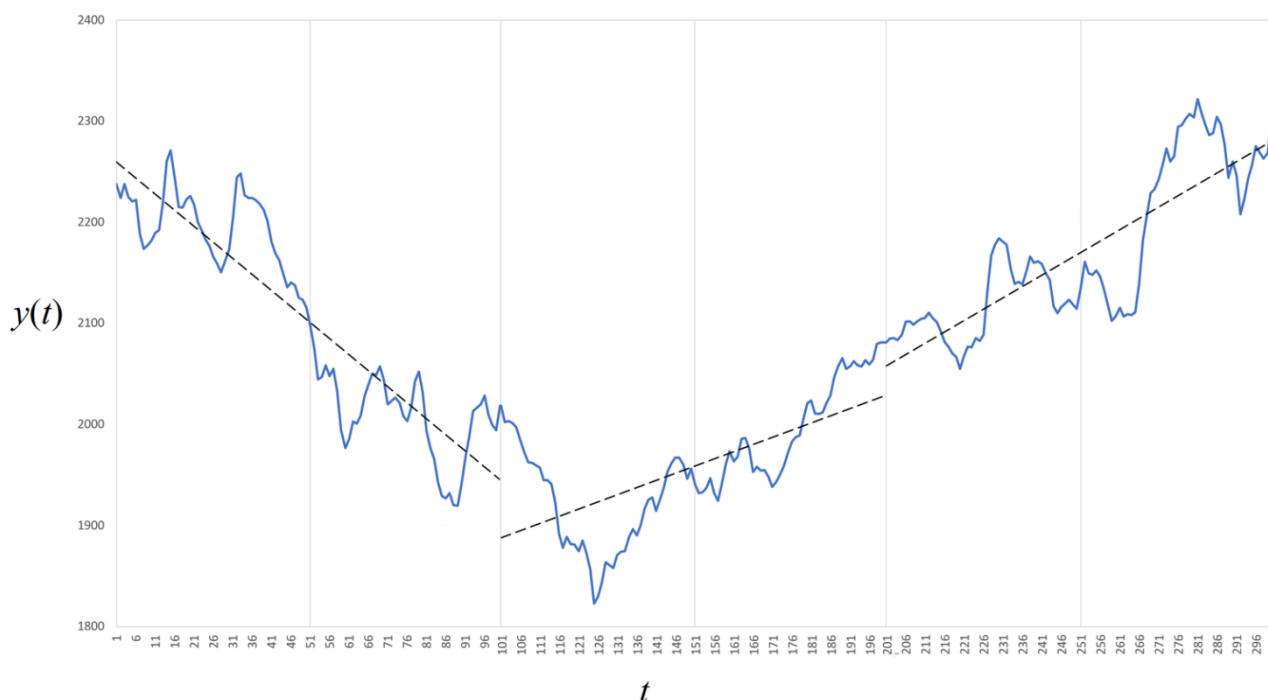


Рис. 1.12. Построение m -полиномиальных трендов на участках ряда $y(t)$ длиной $\delta = 100$ (моделью тренда является полином порядка $m = 1$)

Затем N полученных функций $F(\delta)$ усредняются. Такие вычисления повторяются для различных значений δ , результатом является набор двоек $\langle \overline{F(\delta)}, \delta \rangle$. Для самоподобных процессов имеет место степенная зависимость:

$$\overline{F(\delta)} \sim \delta^H. \quad (1.14)$$

Соответственно H определяется как коэффициент при независимой переменной в уравнении линейной регрессии $\ln \overline{F(\delta)} = H \ln \delta + b$, где b – свободный член.

Метод вейвлет-преобразований. Вейвлет-анализ является на сегодняшний день одной из самых перспективных технологий анализа данных [51]. Вейвлет – это математическая функция, позволяющая анализировать различные частотные компоненты данных. Вейвлет-преобразования широко применяются, например, для очистки сигнала от шума: можно предположить, что информация

о помехе содержится в высокочастотной области спектра сигнала, а полезная информация – в низкочастотной [46].

Метод оценивания показателя Херста через вейвлеты является наиболее сложным из рассмотренных. Он подробно описан в работах Л. О. Кириченко, например, [25]. Данный метод основан на свойствах детализирующих вейвлет-коэффициентов, полученных на разных уровнях декомпозиции исследуемого временного ряда. Пусть случайный процесс $x(t)$ является самоподобным, тогда детализирующие коэффициенты на каждом уровне разложения также обладают свойством самоподобия:

$$Law\{\det(j, k)\} = Law\{2^{j(H+1/2)} \det(0, k)\}, \quad (1.15)$$

где $\det(j, k)$ – k -ый детализирующий коэффициент уровня разложения j , $k = 1, 2, \dots, N_j$, N_j – количество вейвлет-коэффициентов на уровне разложения j . Это свойство вытекает из свойств вейвлет-базиса, полученного путем масштабирования материнских вейвлетов.

Если для самоподобного процесса $x(t)$ существуют моменты 2-го порядка, то для вейвлет-коэффициентов, полученных в результате декомпозиции данного процесса, выполняется равенство:

$$M |\det(j, k)|^2 = M |\det(0, k)|^2 2^{-j(2H+1)}. \quad (1.16)$$

Величина вейвлет-энергии $M|\det(j, k)|^2$ на масштабном уровне j вычисляется следующим образом:

$$E_j = \frac{1}{N_j} \sum_{k=1}^{N_j} \det^2(j, k). \quad (1.17)$$

Из (1.15)–(1.16) следует, что изменение ее значений подчиняется степенному закону:

$$E_j \sim 2^{(2H+1)j}. \quad (1.18)$$

Традиционно H можно вычислить через коэффициент при независимой переменной в уравнении линейной регрессии $\log_2 E_j = (2H + 1)j + b$, где b – свободный член.

Результаты выполненного обзора методов фрактального анализа временных рядов опубликованы в работе [12].

Сравнение методов оценивания показателя Херста. В работе [29] проведен сравнительный анализ рассмотренных методов оценивания H . Показано, что для стационарных временных рядов пригодны все три из них, однако на рядах небольшой длины наиболее точные результаты дают методы ДФА и

вейвлет-преобразований. Для нестационарных рядов (каковыми являются практически все финансовые ряды) R/S-анализ неприменим, однако данное ограничение обходится предварительным преобразованием исходного ряда (например, к логарифмическим доходностям). Два других метода обладают достаточной точностью. В то же время использование аппарата вейвлет-преобразований предъявляет повышенные требования к уровню подготовки пользователя, для него необходим опыт работы и специализированное программное обеспечение. Подытожив сказанное, можно составить сравнительную таблицу.

Таблица 1.2

Сравнение методов оценивания H

	Метод		
	R/S-анализ	ДФА	Вейвлет-преобразования
Достоинства	Простота, приемлемая точность при достаточно больших объемах выборки.	Простота, приемлемая точность на выборках разного объема.	Приемлемая точность на выборках разного объема.
Недостатки	Несостоятельность на малых выборках, необходимость предобработки данных для анализа нестационарных рядов.	–	Высокая сложность применения.

В данной работе при оценивании фрактальности процессов через показатель Херста автором было решено не использовать метод вейвлетов, а сосредоточиться на двух других. В частности, для «наивного» подхода к прогнозированию финансовых показателей применить R/S-анализ, а для более основательного – метод флуктуационного анализа с исключенным трендом.

1.4.1.3. Интерпретация значений и сравнение фрактальных характеристик финансовых рядов

В предыдущих разделах работы были рассмотрены несколько показателей, характеризующих фрактальность динамических процессов: это фрактальная размерность D , индекс фрактальности μ и показатель Херста H , которые позволяют судить о таких свойствах, как самоподобие, персистентность и наличие длинной памяти у временного ряда. Как можно убедиться, все эти величины и понятия тесно связаны между собой, и фундаментальной индикативной характеристикой процесса, отражающей фрактальные свойства, остается размерность его графика (не зря данному понятию было уделено несколько страниц в первой главе работы). В работе [32] проведен сравнительный анализ указанных показателей и показана их взаимосвязь.

Значение фрактальных показателей D , H и μ соотносится со сложным непериодическим поведением реальных временных рядов. В разделе 1.2.2 возможные состояния процесса уже упоминались, однако следует раскрыть их более подробно.

Хаотический процесс может пребывать в одном из трех состояний (в некоторых работах также говорят о цветах шума [6, 44, 52]).

Тренд – персистентный участок, на котором поддерживается тенденция изменений. Если в текущем периоде показатель увеличивался, с большой долей вероятности он продолжит расти и в следующем периоде (рис. 1.13).

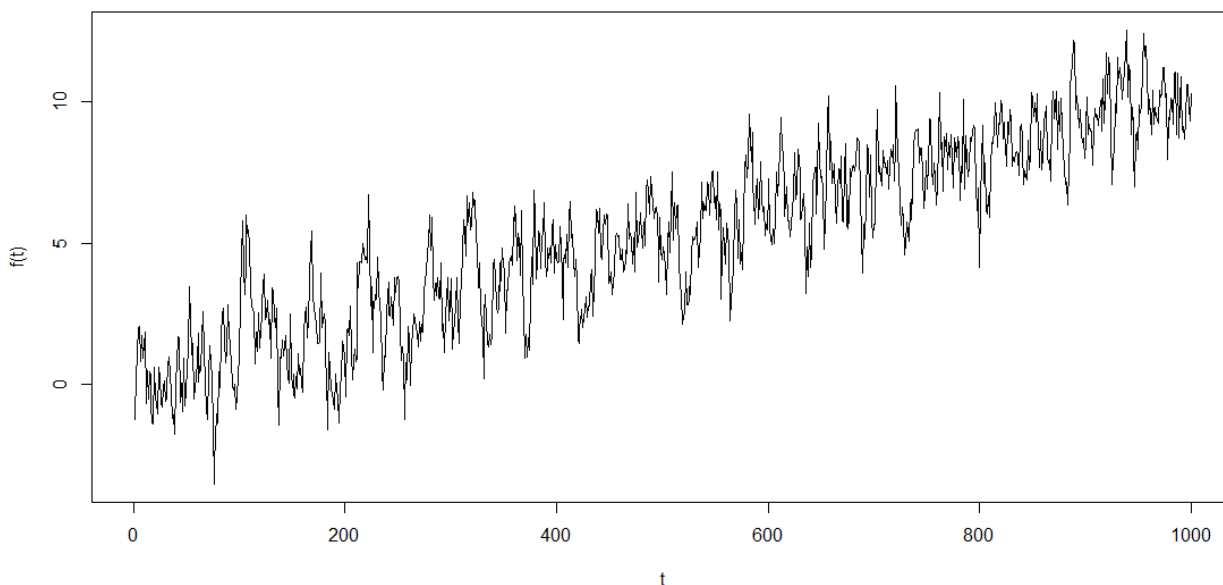


Рис. 1.13. Модельная реализация нестационарного процесса с трендом

Флэт – антиперсистентный участок, направление изменений на котором постоянно меняется (чаще, чем при случайном характере процесса). Такой характер динамики называют «возврат к среднему». Если в текущем периоде показатель увеличивался, с большой долей вероятности в следующем периоде направление сменится, в результате чего его значение не может далеко уйти от среднего (рис. 1.14).

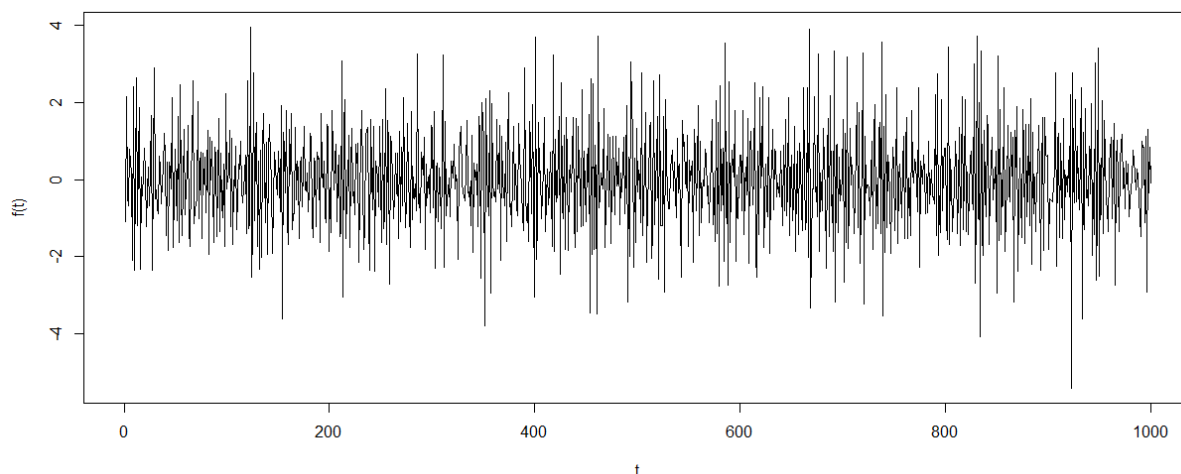


Рис. 1.14. Модельная реализация стационарного процесса с флэтом

Случайное блуждание (броуновское движение, винеровский процесс) – промежуточное состояние между трендом и флэтом. Динамика процесса случайна, будущие значения не зависят от прошлых (рис. 1.15).

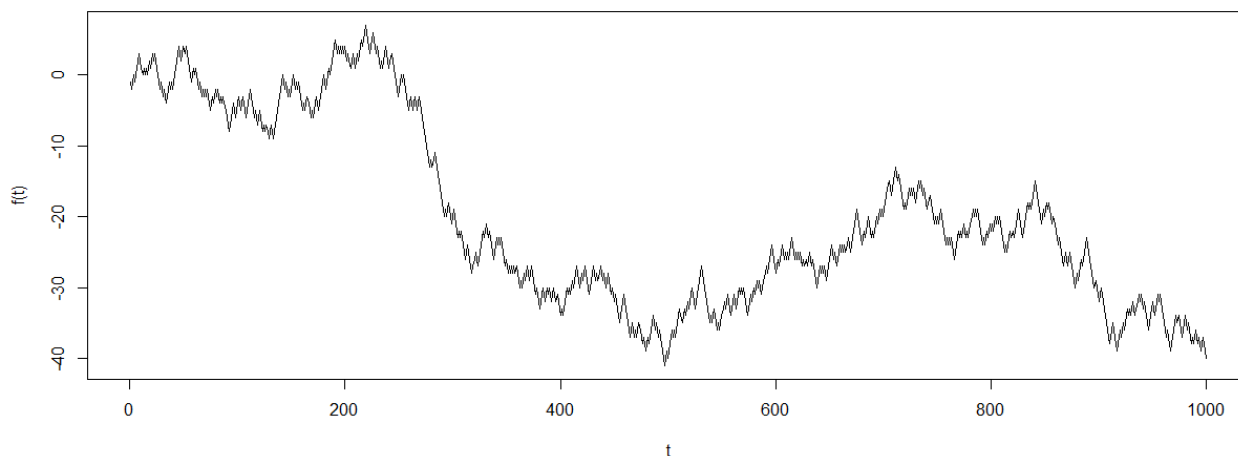


Рис. 1.15. Модельная реализация случайного блуждания

Рассмотренные фрактальные показатели позволяют идентифицировать состояние определенного участка временного ряда и прогнозировать его дальнейшее поведение. В таблице 1.3 приведено их сопоставление [32].

Таблица 1.3

Взаимосвязь показателей фрактальности временных рядов

Показатели фрактальности	Диапазон значений	Характер временного ряда экономического показателя		
		Антиперсистентный (флэт)	Случайный (стохастический)	Персистентный (тренд)
Показатель Херста H	[0; 1]	$0 < H < 0,5$	$H = 0,5$	$0,5 < H < 1$
Фрактальная размерность D	[1; 2]	$1,5 < D < 2$	$D = 1,5$	$1 < D < 1,5$
Индекс фрактальности μ	[0; 1]	$0,5 < \mu < 1$	$\mu = 0,5$	$0 < \mu < 0,5$

Из таблицы видно, что все три показателя согласуются друг с другом. Ниже приведена интерпретация их значений на примере фрактальной размерности D .

$D \in (1; 1,5)$. Финансовые временные ряды имеют долговременную корреляцию (длинную память), возникает персистентное состояние рынка. Причем близкое к единице значение фрактальной размерности указывает на скорое окончание действующего тренда. Для описания динамики таких рядов применимы модели с длинной памятью, например, ARFIMA.

$D = 1,5 \pm 0,05$. При значении фрактальной размерности в узком интервале поведение системы стохастическое и хорошо описывается классическими статистическими методами, такими как ARIMA-модели.

$D \in (1,5; 2)$. Чем ближе D к 2, тем более нелинейным становится временной ряд, возникает антиперсистентное состояние курса акций, временная кривая курса становится неустойчивой, сильно изрезанной и готова в любой момент перейти в новое состояние. При таком диапазоне фрактальной размерности остается лишь использовать анализ фундаментальных факторов состояния экономики или вовсе отказаться от прогнозирования.

Можно сказать, что при $D \rightarrow 1$ (персистентность) и $D \rightarrow 2$ (антиперсистентность) фрактальные свойства процесса усиливаются. В работах [32, 40] показано, что наиболее устойчивым состоянием экономических систем является состояние случайного блуждания, характеризующееся размерностью 1,5. Существенное отклонение D от указанного значения (усиление фрактальности) свидетельствует о переходе рынка в нестабильную фазу, сопровождающуюся кризисными явлениями.

Таким образом, значение фрактальной размерности может служить индикатором дальнейшего поведения финансового временного ряда и его принципиальной предсказуемости. Это положение автором предполагается использовать при исследовании возможности прогнозирования на финансовых рынках в рамках данной работы.

Что касается выбора используемых для анализа фрактальных характеристик, то было решено использовать все три рассмотренных показателя, при этом консолидирующей индикативной величиной принять размерность D , вычисляя ее как через индекс фрактальности μ , так и через показатель Херста H . Подробнее методика исследования описана в главе 2.

Итак, выше были рассмотрены методы, пригодные для осуществления предпрогнозного анализа финансовых рядов. В следующем разделе описаны некоторые популярные подходы к предсказанию поведения этих рядов, основанные на их фрактальных свойствах.

1.4.2. Фрактальные методы прогнозирования временных рядов

Как было отмечено в параграфе 1.3, научных работ, посвященных прогнозированию финансовых временных рядов на несколько шагов вперед, достаточно мало. В трудах о фрактальном анализе предметом исследования преимущественно становится выявление фрактальных свойств рядов и предсказание критических точек. Объяснением этому факту является открытая дискуссия вокруг принципиальной предсказуемости цен финансовых активов. Согласно теории эффективного рынка, котировки фондовых инструментов являются случайными величинами, их динамика подобна броуновскому случайному процессу, и поэтому получение сколько-нибудь точного прогноза невозможно. С другой стороны, в литературе приводятся многочисленные свидетельства того, что поведение биржевых котировок не случайно, а теория эффективного рынка

подвергается обоснованному сомнению [8]. В любом случае вопрос возможности прогнозирования нуждается в дополнительных исследованиях.

Наиболее часто используемый подход к прогнозированию уровней финансовых рядов на основе фрактального анализа – моделирование процессов с длинной памятью (ARFIMA), он и рассмотрен ниже. Также встречаются работы, в которых рассматривается применение нейросетевых моделей. Нужно заметить, что «фрактальным» такой метод можно назвать лишь условно: особенность в том, что на вход ИНС подаются помимо прочих данных величины фрактальных показателей временного ряда, обработка которых осуществляется в соответствии со стандартными алгоритмами обучения нейросети. Такой подход описан во многих работах, посвященных фрактальному анализу, например, в [8, 34]. Достоинства и недостатки ИНС описаны в параграфе 1.1, можно лишь добавить, что, согласно некоторым исследованиям, использование фрактальных показателей для обучения нейросети увеличивает точность ее прогнозов [8]. Так как нейросетевой подход ранее в данной работе было решено не использовать, подробно рассмотрен он не будет.

Авторегрессионные модели скользящего среднего с длинной памятью. Широко известна, давно и успешно применяется методология прогнозирования временных рядов $ARMA(p, q)$ (авторегрессионная модель скользящего среднего), предназначенная для моделирования стационарных процессов, где p – порядок авторегрессии (количество прошлых значений ряда, используемых моделью), q – порядок скользящего среднего (количество прошлых значений ошибки). На данном этапе не лишним будет раскрыть понятие **стационарности**, уже упоминаемое в предыдущей части работы.

Можно дать следующее интуитивное определение стационарности временного ряда. Она означает, что его поведение в будущем будет похоже на его поведение сейчас, т. е. это свойство ряда, благодаря которому он в разное время ведет себя похожим образом. Эта неизменность ряда во времени весьма полезна для построения прогнозов.

Если обращаться к формальным определениям, существует два типа стационарности:

- 1) сильная (строгая, стационарность в узком смысле). Ее наличие означает постоянство законов распределения на любом взятом промежутке ряда, т. е. совместное распределение m наблюдений не зависит от сдвига по времени;
- 2) слабая (стационарность в широком смысле). Ее условием является постоянство математического ожидания, дисперсии и ковариационной функции вне зависимости от точки отсчета.

В прикладных исследованиях обычно используется стационарность в широком смысле, т. к. ее наличие проще выявлять, используя некоторые статистические тесты (например, тест Дики – Фуллера).

Очевидно, что, например, процесс с ярко выраженным трендом стационарным не является: его математическое ожидание изменяется с течением времени. Однако существуют некоторые технические приемы, позволяющие приводить нестационарные ряды к стационарности.

Так, существует расширение модели $ARMA(p, q)$ под названием $ARIMA(p, d, q)$, предложенное Боксом и Дженкинсом [9] и предназначенное для моделирования нестационарных процессов. $ARIMA$ -методология предполагает приведение временного ряда к стационарности путем взятия целочисленных разностей порядка d (на практике эта величина обычно не превышает 2).

Еще одним вариантом приведения ряда к стационарному виду является взятие нецелых (дробных) разностей (d является нецелым числом). По преобразованному ряду обучается модель $ARMA(p, q)$. Полученная в результате этих операций модель носит название $ARFIMA(p, d, q)$ (подход предложен Хоскингом [52]). Взятие дробных разностей достигается путем разложения $(1 - L)^d$ в ряды Тейлора, где L – лаговый оператор. Идея метода заключается в том, что взятие целых разностей может быть излишним для ряда данных (стационарность может лежать где-то между $d = 0$ и $d = 1$) [50]. Модель $ARFIMA$ описывается следующим уравнением [7]:

$$\Phi(L)(1 - L)^d X_t = \mu + \Theta(L)\varepsilon_t, \quad (1.19)$$

где X_t – исследуемый процесс (временной ряд), L – оператор сдвига (лаговый оператор), $\Phi(L)$ – полином степени p от L , $\Theta(L)$ – полином степени q от L , d – порядок интегрирования процесса X_t , μ – свободный член.

Имеет смысл заметить, что нестационарный процесс, d -ые разности которого стационарны, называют процессом, интегрированным порядка d .

Величину d также называют оператором дробного дифференцирования (т. е. процесса взятия дробных разностей исходного ряда). Он аппроксимируется следующим рядом:

$$(1 - L)^d = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(i - d)}{\Gamma(-d)\Gamma(i + 1)} L^i, \quad (1.20)$$

где Γ – гамма-функция.

При $d \in (0; 1)$ автокорреляционная функция такого процесса убывает гиперболически, т. е. крайне медленно. Параметр d может служить мерой длинной памяти – чем больше его значение, тем память «длиннее» [7]. Кроме того, т. к. величина d аппроксимируется суммой бесконечного количества элементов ряда, этот факт является математической интерпретацией длинной памяти. Помимо этого, дробное дифференцирование дает возможность более точно описать реальный непрерывный процесс путем его преобразования в дискретный

посредством разбиения процесса на более мелкие компоненты, чем при целочисленном дифференцировании. Все это дает право предполагать, что модель ARFIMA обладает потенциальными возможностями для описания фондовых рынков, а полученные с ее помощью результаты являются более достоверными по сравнению с другими моделями, не учитывающими наличие длинной памяти (ARMA, ARIMA) [20, 44].

Существует прямая связь между показателем Херста и оператором дифференцирования d :

$$d = H - 0,5, \quad (1.21)$$

что позволяет использовать для оценки d рассмотренные ранее методы (R/S-анализ, ДФА, вейвлет-преобразования) [52]. Также существуют и другие способы оценивания данного параметра; в частности, широко распространенными являются методы GPH (названный так по именам создателей Geweke и Porter-Hudak) [7] и Виттла [17].

К достоинствам моделей класса ARFIMA, помимо доказанной рядом авторов сравнительной достоверности прогнозов, относится то, что необходимый предпрогнозный этап анализа позволяет сделать выводы о характере исследуемых процессов (нет большого смысла применять ARFIMA для предсказания случайных или антиперсистентных рядов). В то же время некоторые авторы к недостаткам таких моделей относят: недостаточную согласованность со свойствами и характеристиками реальных процессов; необходимость привлечения экспертов к подбору параметров в режиме отладки модели; зачастую громоздкий математический аппарат [18].

Таким образом, были рассмотрены все вопросы, поставленные в начале главы. В следующем параграфе обобщены выводы по ней.

1.5. Выводы

Итак, в первой главе было произведено ознакомление с основами фрактального анализа финансовых рынков, для чего были получены ответы на ряд вопросов. Следует кратко воспроизвести их.

1. Существуют различные подходы к анализу и прогнозированию финансовых рынков, среди них наибольшую популярность завоевали фундаментальный и технический анализ, статистическое моделирование, нейросетевой анализ, а также фрактальный (мультифрактальный) подход. Последние два являются наиболее новыми и перспективными, хотя основаны на совершенно различных теоретических постулатах и предполагают решение разных классов задач. Так, нейросеть является универсальным аппроксиматором, восстанавливающим скрытые нелинейные зависимости в данных, что позволяет предска-

вать будущие значения временных рядов, сама же модель остается «черным ящиком». Фрактальный анализ направлен не столько на прогнозирование конкретных значений, сколько на предсказание кризисных ситуаций путем описания характера поведения реальных динамических процессов на том или ином временном участке, хотя фрактальные методы экстраполяции существуют, при этом не слишком хорошо исследованы. В данной работе было решено рассматривать фрактальный подход ввиду его перспективности и не очень активного применения к анализу финансовых рынков отечественными авторами.

2. Суть фрактального анализа финансовых рынков состоит в том, что ряды котировок финансовых инструментов обладают свойствами фракталов, что позволяет описывать их методами фрактальной геометрии и предсказывать будущее поведение, что доказано во многих работах [38, 45]. К таким свойствам относится наличие длинной памяти (долговременной автокорреляционной зависимости), что свидетельствует о влиянии прошлых цен на будущее. Для численной характеристики фрактальных процессов используются различные показатели, основным из которых является величина фрактальной размерности. Различные диапазоны принимаемых ей значений соответствуют разным состояниям процесса (тренд, флэт, случайное блуждание), а также сигнализируют о наступлении «критических точек» (существенных отклонений значений ряда).

3. Результаты обзора актуальных научных работ в данной области можно свести в таблицу 1.4.

В целом можно сказать, что во всех исследованиях были получены положительные результаты, продемонстрировавшие эффективность фрактального подхода. На основе результатов обзора литературы был осуществлен выбор методов, применяемых в настоящей работе.

4. Наиболее широко применяемые методы выявления фрактальности – R/S-анализ, метод минимального покрытия, метод ДФА, методы прогнозирования будущих значений ценовых рядов – модели ARFIMA и нейронные сети, обучаемые на фрактальных характеристиках. Описание и алгоритмы данных методов (за исключением нейросетей, которые решено не использовать) рассмотрены подробно.

Таким образом, поставленная в первой главе работы задача была успешно решена. Следующим этапом является разработка методики исследования применения фрактального подхода для прогнозирования на финансовых рынках на основе рассмотренных методов, которой посвящена вторая глава.

Обзор работ по фрактальному анализу финансовых рынков

Решаемая задача	Авторы	Применяемые подходы (методы)
Выявления фрактального характера финансовых временных рядов	Ю.М. Балагула	R/S-анализ, спектральный метод (GPH)
	А.В. Зиненко	R/S-анализ
Исследование точности фрактальных показателей и методов фрактального анализа	М.М. Дубовиков, Н.В. Старченко	Метод минимального покрытия, R/S-анализ
	Е.К. Кривоносова и др.	
Предсказание кризисных ситуаций	А.К. Мансуров	Метод ДФА
	Е.К. Кривоносова	Фрактальные (R/S-анализ, методы клеточного и минимального покрытия) и мультифрактальные (МФ-ДФА, вейвлет-преобразования, анализ с использованием показателя Гельдера) методы
	Л.О. Кириченко и др.	МФ-ДФА, вейвлет-преобразования
	В.М. Андриенко	R/S-анализ
Предсказание конкретных значений котировок	И.В. Дегтяренко и др.	ДФА, ARFIMA- моделирование
	Е.С. Остапенко, Т.А. Дунаева	R/S-анализ, ARFIMA- моделирование
	М.В. Прудский	R/S-анализ, ARFIMA- моделирование
	И.И. Белолипцев, С.А. Фархиева	Метод минимального покрытия, нейросетевое моделирование
	А.М. Кричевский	R/S-анализ, ARFIMA и нейросетевое моделирование

ГЛАВА 2. РАЗРАБОТКА МЕТОДИКИ ИССЛЕДОВАНИЯ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ПРИМЕНЕНИЯ ФРАКТАЛЬНОГО ПОДХОДА ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ФИНАНСОВЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Цель второй главы – сформировать методику исследования, которая должна решить главный вопрос, поставленный в работе: позволяет ли применение фрактального анализа увеличить точность прогнозов финансовых рядов в сравнении с другими подходами.

Для достижения поставленной цели следует осветить следующие основные вопросы:

1. Постановка задачи. Необходимо определить: объект прогнозирования; горизонт прогнозирования; критерии оценки качества прогнозов.

2. Описание исследования. Следует раскрыть: основные этапы; подробную последовательность шагов для достижения результата с указанием конкретных приемов и методов.

3. Выбор программных инструментов исследования. Нужно: дать сравнительную характеристику существующим программным решениям; осуществить выбор наиболее подходящего из них для целей исследования.

Раскрытие поставленных вопросов составляет содержимое второй главы.

2.1. Постановка задачи исследования

В рамках данного параграфа даны ответы на вопросы: что предсказывать; как далеко предсказывать; как определить качество прогноза.

2.1.1. Объект прогнозирования

Первый очевидный шаг исследования заключается в выборе входных данных для анализа и их получении из надежных источников. В качестве изучаемых показателей было решено взять котировки восьми финансовых инструментов, выбранных произвольным образом, удовлетворяющих следующим критериям: имеют достаточно длинную историю значений (не менее чем с 2000-го года); имеются данные о дневных ценах открытия, закрытия, максимуме и минимуме.

Были выбраны финансовые инструменты, относящиеся к различным классам активов, в том или ином виде (непосредственно или в качестве базовых активов фьючерсов) торгуемых на российской и зарубежных фондовых биржах. Их список представлен в таблице 2.1.

Анализируемый период – с 01.01.2000 по 01.05.2018. Предполагается изучить ряды с разными шагами дискретизации: день, неделя, месяц. Информа-

ция о фрактальных показателях на различных масштабах рассмотрения позволит судить о наличии мультифрактальных свойств изучаемых процессов.

Таблица 2.1

Исследуемые финансовые инструменты

Класс актива	Наименование	Тикер	Единица измерения	Источник данных
Фондовые индексы	Индекс МосБиржи	IMOEX	–	МосБиржа
	Индекс S&P 500	^GSPC	–	Yahoo Finance
Долевые инструменты	Обыкновенные акции Лукойл	LKOH	рубли	Финам
	Обыкновенные акции Сбербанк	SBER	рубли	Финам
	Обыкновенные акции Microsoft	MSFT	доллары США	Yahoo Finance
	Обыкновенные акции Amazon	AMZN	доллары США	Yahoo Finance
Валютные пары	Курс доллара США к рублю	USDRUB	рубли	Финам
	Курс евро к рублю	EURRUB	рубли	Финам

Ценовые данные на каждый момент времени должны включать четыре измерения: цена открытия (OPEN), цена закрытия (CLOSE), максимальная (HIGH) и минимальная (LOW) цены. При обработке данных всеми рассмотренными ранее методами, за исключением метода минимального покрытия, предполагается оперировать средними ценами за период (AVG), вычисленными по формуле

$$AVG = \frac{OPEN + CLOSE + HIGH + LOW}{4}. \quad (2.1)$$

Согласно специфике метода минимального покрытия, для расчета индекса фрактальности используется не одно измерение, а два: цены HIGH и LOW.

Важно сделать примечание относительно предварительной обработки данных, а именно, восстановления пропущенных значений и устранения выбросов. Эти операции типичны для анализа данных, в том числе финансовых временных рядов, и являются хорошо изученными (см., например, [30]). Однако в данной работе автором было решено их не проводить по следующим причинам:

- рынки инертны, являются устойчивыми к выбросам, цены фиксируются автоматически, и если цена принимает аномально высокое (низкое) значение, это не выброс, а критическая точка, анализом которых в том числе и занимается фрактальный подход;
- торги осуществляются не каждый календарный день, поэтому пропуски в данных являются естественными: цены отсутствуют не потому, что не были зафиксированы, а потому что не существуют;

– в изученных работах по фрактальному анализу рынков подобная обработка не проводилась.

Впрочем, экономический процесс является непрерывным, важные для рынка события происходят постоянно, и если во время бездействия бирж случился какой-то инцидент, он отразится на ценах лишь в момент открытия новой торговой сессии, а мог бы и раньше. Так или иначе, вопрос о пропусках в финансовых временных рядах и их влиянии на результаты анализа остается дискуссионным.

Пусть величина n является горизонтом (числом шагов) прогнозирования, $n \in \mathbb{N}$. Решено предсказывать следующие величины:

- n будущих значений ряда;
- n направлений будущих приращений значений ряда (под направлением приращения понимается рост или снижение).

2.1.2. Горизонт прогнозирования

Планируется осуществлять краткосрочные прогнозы на 3 шага вперед (в зависимости от длины периода это может быть 3 дня, 3 недели или 3 месяца). Такое решение продиктовано природой финансового рынка: по мнению некоторых исследователей [4, 24], рынок, как и многие естественные процессы, является глобально детерминированным с локальными случайными флуктуациями, и на длинных горизонтах с приемлемой точностью можно прогнозировать только некоторые тенденции, но не конкретные значения цен. Таким образом, $n = 3$.

2.1.3. Критерии оценки качества прогнозов

Выбранные предсказываемые величины имеют разный характер: конкретные значения ряда – непрерывный, а направления приращений – дискретный. Следовательно, в первом случае можно говорить о задаче прогнозирования (а конкретно, с учетом выбора модели, задаче регрессии), во втором – о задаче классификации, в данном случае бинарной. Соответственно, метрики оценивания качества моделей будут отличаться.

1. Качество прогноза конкретных значений решено оценивать с помощью широко используемого показателя средней абсолютной ошибки в процентах *MAPE* [57]:

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{|y_t - \hat{y}_t|}{y_t} \cdot 100\%, \quad (2.2)$$

где n – длина горизонта прогнозирования, y_t – фактическое значение показателя в момент времени t , \hat{y}_t – предсказанное значение показателя в момент времени t .

Чем меньше величина *MAPE*, тем точнее прогноз. Очевидно, этот критерий можно использовать при сравнении нескольких прогнозов.

2. Качество предсказания направлений приращений (Δ) имеет смысл оценивать стандартными для классификации метриками: *accuracy*, *precision*, *recall*, *F-measure*.

Пусть имеется два класса: положительный (единица, $\Delta > 0$) и отрицательный (ноль, $\Delta < 0$). Гипотетически возможна ситуация, когда величина котировки в следующем периоде может не измениться, но это маловероятно, поэтому в целях упрощения расчетов метрик принят бинарный подход к задаче классификации.

Accuracy (точность) – доля всех объектов в выборке, отнесенных к правильному классу:

$$\text{Accuracy} = \frac{TP + TN}{TP + TN + FP + FN} \in [0;1], \quad (2.3)$$

где *TP* (true positive) – количество положительных объектов, правильно отнесенных к классу положительных объектов, *TN* (true negative) – количество отрицательных объектов, правильно отнесенных к классу отрицательных объектов, *FP* (false positive) – количество отрицательных объектов, ошибочно отнесенных к классу положительных объектов, *FN* (false negative) – количество положительных объектов, ошибочно отнесенных к классу отрицательных объектов.

Precision (специфичность) – доля объектов, отнесенных к правильному классу, среди всех объектов, которые были отнесены к этому классу:

$$\text{Precision} = \frac{TP}{TP + FP} \in [0;1] \quad (2.4)$$

Recall (полнота) – доля объектов, отнесенных к правильному классу, среди всех объектов этого класса (т. е. объектов выборки, которые действительно относятся к этому классу):

$$\text{Recall} = \frac{TP}{TP + FN} \in [0;1]. \quad (2.5)$$

В отличие от величины *accuracy*, метрики *precision* и *recall* могут быть вычислены для каждого класса, однако при бинарной классификации принято оценивать их для целевого (положительного). Чем выше каждый из этих трех показателей, тем выше качество классификации, в данном случае прогноза. В общем случае качество классификации можно сравнивать со случайным угадыванием, т. е. таким «черным ящиком», который равновероятно выдает либо «1», либо «0». Для данной простейшей модели и несмещенной тестовой выборки,

состоящей поровну из нулей и единиц, указанные метрики имели бы значение 0,5. Если они превышают 0,5 для каждого класса, можно говорить о качестве прогноза как минимум лучше, чем при случайном угадывании.

Существует агрегатный показатель, учитывающий величины *precision* и *recall* с равными весами, так называемый *F-measure* (F-мера):

$$F\text{-measure} = 2 \frac{\text{precision} \times \text{recall}}{\text{precision} + \text{recall}} \in [0;1]. \quad (2.6)$$

Чем выше значение *F-measure*, тем выше качество классификации.

2.2. Описание исследования

Исследование предполагается проводить в несколько этапов, которые охарактеризованы ниже.

1. «Наивный» этап. На данной стадии решено воспроизвести упрощенную методику прогнозирования финансовых рядов, описанную М. В. Прудским в статье [47]. Полученные положительные результаты позволили бы сделать вывод о том, что даже при таком подходе фрактальный анализ позволяет улучшать качество прогнозирования в сравнении с традиционными методами.

2. Предпрогнозный анализ фрактальных свойств рядов. Вторым этапом направлено на исследование характера изучаемых ценовых рядов, с тем чтобы можно было судить о динамике их фрактальных свойств, идентифицировать состояние процесса и делать выводы о возможности построения прогнозов.

3. Построение и тестирование прогнозных моделей. Третий этап заключается в непосредственной попытке краткосрочного прогнозирования динамики исследуемых рядов.

2.2.1. «Наивный» подход к прогнозированию

«Наивность» подхода заключается в том, что используется самый простой метод фрактального анализа (R/S-анализ) и предполагается, что рассматриваемые временные ряды не меняют своих фрактальных свойств со временем, что теоретически должно позволить моделям давать прогнозы приемлемого качества на протяжении всей их длины. Это предположение выглядит достаточно сомнительным в отношении реальных самоподобных процессов, тем не менее было решено опробовать и такой подход.

В качестве предсказывающего алгоритма используется статистическая модель с длинной памятью класса ARFIMA. Чтобы можно было сопоставить ее прогнозы с какими-то другими, чего не было сделано автором оригинальной методики [47], на тех же данных обучается классическая ARIMA-модель, не учитывающая фрактальных свойств ряда. Нужно добавить, что модели рассматриваются как «черные ящики», принимающие на вход обучающую выборку

ку, а также некоторые регулирующие параметры и генерирующие прогнозные значения на выходе, при этом не играет роли, какой именно математический алгоритм используется при обучении. Наличие такого готового инструментария является обязательным условием при выборе программного средства, который рассмотрен в параграфе 2.3.

Общая последовательность шагов на данном этапе представлена в виде блок-схемы (рис. 2.1). Следует пояснить некоторые из них.

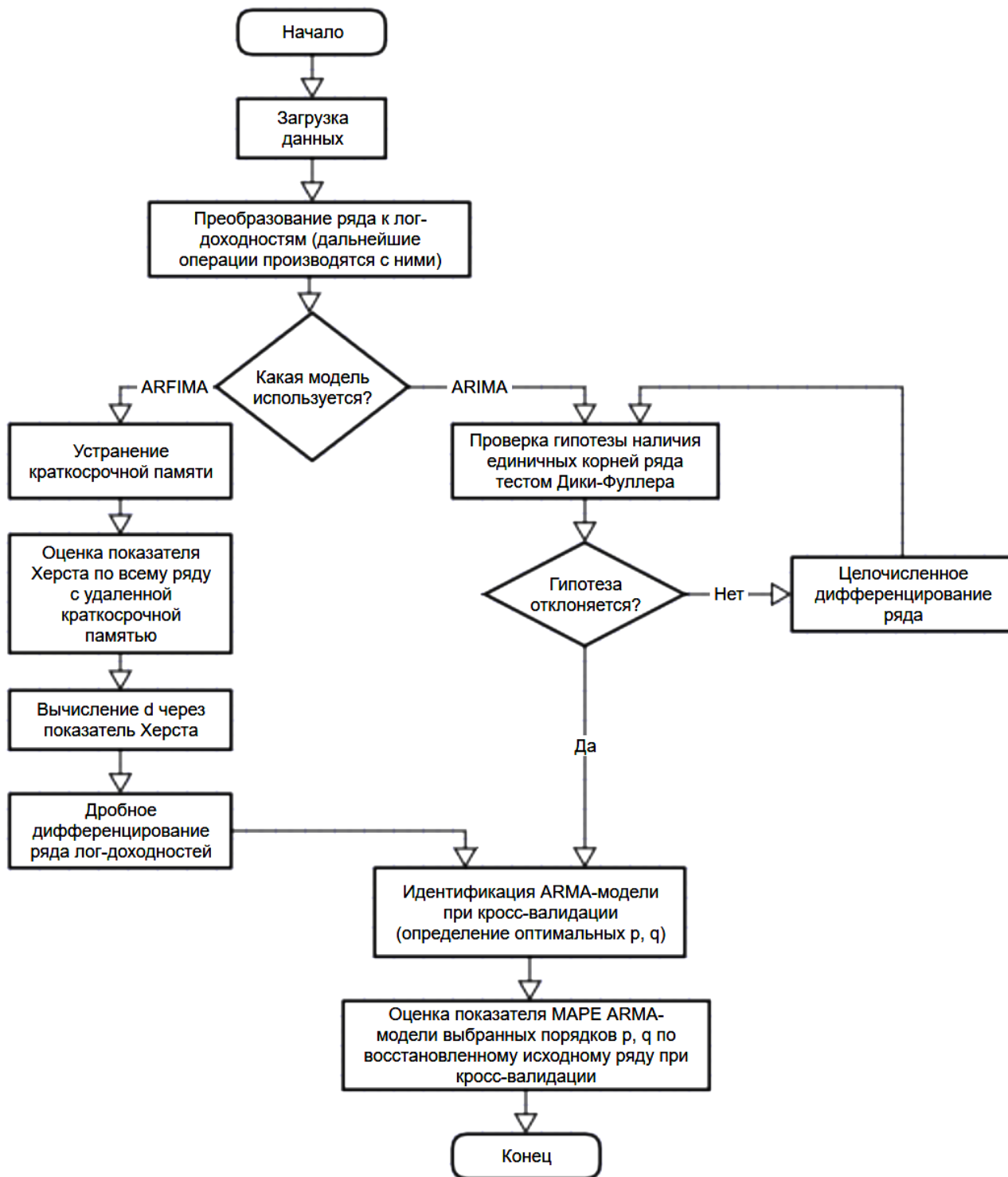


Рис. 2.1. Алгоритм «наивного» этапа

Операция «Загрузка данных» предполагает, что ряд уже содержит средние за период значения. В противном случае их необходимо вычислить по формуле (2.1).

Преобразование исходных значений ряда к логарифмическим доходностям осуществляется по формуле (1.12). Так как в [6] показано, что исходный ряд и его логарифмические доходности имеют различные значения фрактальных характеристик, разный характер персистентности и длинной памяти, очевидно, что при дальнейшем моделировании следует использовать именно ряд лог-доходностей.

Процедура устранения в ряду автокорреляции первых порядков, упоминаемая в [47], раскрыта в [27]. Она обусловлена тем, что краткосрочная линейная зависимость смещает значения показателя Херста и демонстрирует наличие длинной памяти, даже если ее нет. Для устранения краткосрочной памяти по всему ряду обучается AR(1)-модель и вычисляются ее остатки. Если исходный ряд имел долгосрочную зависимость, то она сохраняется, в то время как краткосрочная устраняется.

Оценка показателя Херста H выполняется по AR(1)-остаткам в соответствии с алгоритмом R/S-анализа, изложенным в разделе 1.4.1.2 (за исключением шага с вычислением лог-доходностей, который был выполнен ранее). Параметр d ARFIMA-модели вычисляется по формуле (1.21).

Процедура дробного дифференцирования ряда по формуле (1.20) заключается в том, что каждый t -ый член ряда $x(t)$ преобразуется в соответствующий член ряда $y(t)$ через функцию (уравнение модифицировано автором в сравнении с приведенным в [66]) [53]:

$$y_t = x_t + \sum_{k=1}^{t-1} (-1)^k \frac{\prod_{i=1}^k (d-i+1)}{k!} x_{t-k}. \quad (2.7)$$

Можно описать на некотором псевдокоде алгоритм процедуры, производящей эти вычисления для каждого члена ряда $x(t)$.

```

Для каждого t от 1 до Длина(x) Цикл
  y[t] = x[t]
  Для каждого k от 1 до t - 1 Цикл
    c = d
    Для каждого i от 1 до k - 1 Цикл
      c = c * (i - d)
    Конец цикла
    c = c / Факториал(k)
    y[t] = y[t] - c * x[t - k]
  Конец цикла
Конец цикла

```

Предполагается, что тест Дики–Фуллера производится посредством готовой функции, возвращающей информацию об отклонении гипотезы. Целочисленное дифференцирование ряда $x(t)$ заключается в вычислении первых разностей его членов по формуле:

$$\Delta x = x_t - x_{t-1}. \quad (2.8)$$

Процедура идентификации ARMA-модели состоит в том, что обучается большое количество моделей с разными порядками p , q , и из них выбирается наилучшая по байесовскому информационному критерию BIC (меньше – лучше):

$$BIC = N \ln\left(\frac{RSS}{N}\right) + \ln(N)k, \quad (2.9)$$

где N – размер обучающей выборки, k – количество параметров модели ($p + q +$ свободный член), RSS – сумма квадратов остатков модели.

Так как выдвинута гипотеза о неизменности фрактальных свойств ряда на всей его длине, можно предположить, что модели одинаковых порядков должны быть способны приемлемо описывать ряд на любом его участке. Ввиду этого решено производить вычисление показателя BIC при кросс-валидации (или так называемым методом скользящего окна). Суть данного подхода в том, что аппроксимируется множество моделей на различных обучающих выборках фиксированного размера, равномерно покрывающих весь анализируемый ряд (в соответствии с оригинальной методикой величина выборки взята 40 [47]), для каждой из моделей выполняется тест Льюнга-Бокса на отсутствие автокорреляции в остатках (не прошедшие его модели отбрасываются), затем рассчитываются необходимые показатели модели, и итоговая величина каждого из показателей берется как среднее арифметическое их значений для всех моделей. Шаг «скольжения» окна (обучающей выборки) принят величиной 10 (рис. 2.2).

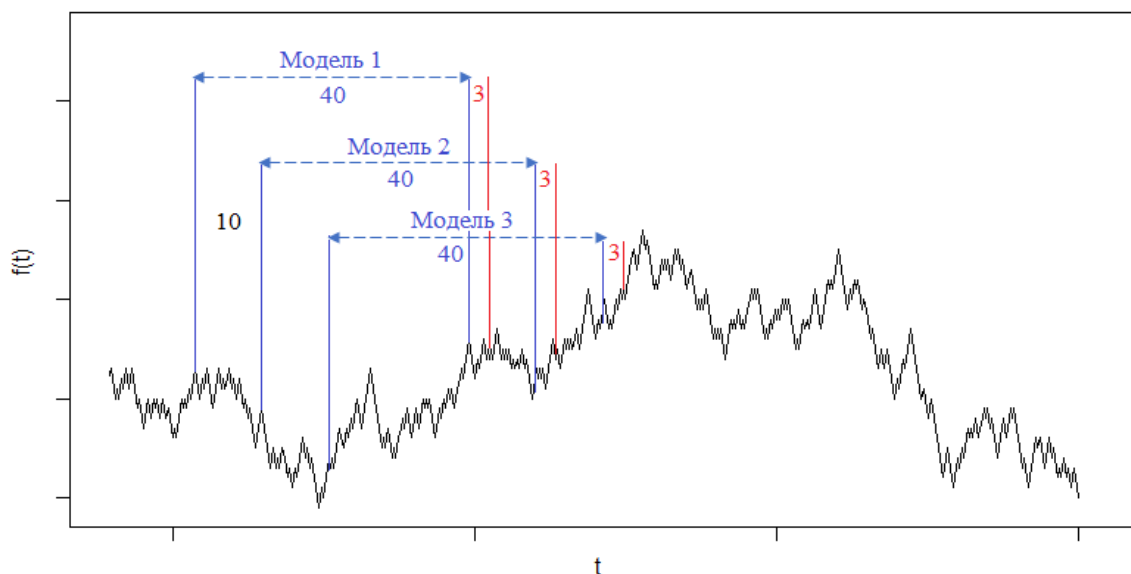


Рис. 2.2. Кросс-валидация результатов моделирования

Вычисленные ВИС усредняются для каждого сочетания $\langle p, q \rangle$, и в качестве результирующего сочетания принимается то, для которого ВИС наименьший. Данный участок общего алгоритма можно наглядно конкретизировать следующим псевдокодом.

```

array = Объявить массив()
Для каждого b от 1 до Длина(x) - 40 Цикл
    Для каждого p от pmin до pmax Цикл
        Для каждого q от qmin до qmax Цикл
            train = x[b, b + 40]
            model = Обучить ARMA(train)
            ВИС = Вычислить ВИС(model)
            Если Тест Льюнга Бокса(model) = ИСТИНА Тогда
                array.Добавить(model, ВИС)
            Конец если
        Конец цикла
    Конец цикла
Конец цикла
Усреднить ВИС по всем моделям с одинаковыми p и q в массиве(array)
model = Найти в массиве модель с наименьшим ВИС(array)
Извлечь порядки p и q(model)

```

Наконец, последним шагом является оценка показателя *MAPE* модели $ARMA(p, q)$. Она также производится методом кросс-валидации: модели обучаются на участках длиной 40 наблюдений, затем осуществляется прогноз на 3 значения вперед, и по этому прогнозу вычисляется величина *MAPE*, которая затем усредняется по всем моделям (рис. 2.2). Такой метод позволит оценить способность модели давать адекватные прогнозы не только на каком-то определенном сегменте, а на протяжении всего ряда данных, в том числе предсказывать его будущие значения.

Ниже приведен псевдокод данного алгоритма.

```

array = Объявить массив()
Для каждого b от 1 до Длина(x) - (40 + 3) Цикл
    train = x[b, b + 40]
    test = x[b + 41, b + 43]
    model = Обучить ARMA(train)
    Если Тест Льюнга Бокса(model) = ИСТИНА Тогда
        prediction = model(test)
        prediction = Проинтегрировать(prediction)
    prediction = Восстановить ряд по лог-доходностям(prediction)
    MAPE = Вычислить MAPE(test, prediction)
    array.Добавить(MAPE)
    Конец если
Конец цикла
MAPE = Среднее(array)

```

Важным является уточнение по поводу вычисления *MAPE*: так как модели обучались на продифференцированном ряде лог-приростов, они и предсказывают такие же трансформированные значения. Но цель моделирования – получать прогнозы будущих исходных уровней ряда, поэтому, по мнению автора, показатель *MAPE* необходимо оценивать именно по исходному уровню. Для этого следует сначала проинтегрировать имеющийся ряд разностей, а затем выполнить процедуру, обратную вычислению логарифмических доходностей.

Интерес может вызвать процедура восстановления ряда по его дробным разностям (т. е. интегрирование). Ее алгоритм отражен в псевдокоде ниже. Для лучшего понимания процесса на рис. 2.3 показаны входные данные, необходимые алгоритму.

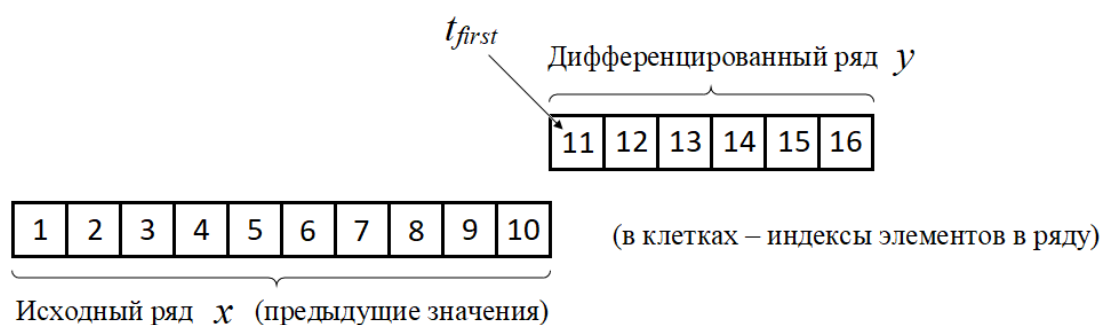


Рис 2.3. Входные данные алгоритма интегрирования

```

restored = Объявить массив()
Для t от tfirst до tfirst + Длина(y) - 1 Цикл
    ti = t - tfirst + 1
    restored[ti] = y[ti]
    limit = t - 1
    j = 1
    Пока j <= limit Цикл
        c = d
        ci = 1
        Пока ci <= j - 1 Цикл
            c = c * (ci - d)
            ci = ci + 1
        Конец цикла
        c = c / Факториал(j)
        restored[ti] = restored[ti] + c * x[t - j]
        j = j + 1
    Конец цикла
    x[Длина(x) + 1] = restored[ti]
Конец Цикла

```

Итогом первого этапа будет две величины: значения показателя средней абсолютной ошибки в процентах (для ARFIMA и ARIMA) для каждого из анализируемых рядов. Какая из величин меньше, та модель и дает в среднем более точные прогнозы на любом из участков ряда.

Учитывая, что анализироваться будет 8 финансовых инструментов и для каждого будет рассчитано 2 показателя, всего на выходе данного этапа будет $8 \cdot 2 = 16$ значений. Следует дать им обозначения: $MAPE(ARF)_i$, $MAPE(AR)_i$, где i – номер инструмента, $i = 1, 2, \dots, 8$.

2.2.2. Предпрогнозный анализ фрактальных свойств рядов

Второй этап исследования заключается в анализе динамики выбранных финансовых инструментов с использованием двух характеристик: индекса фрактальности μ и показателя Херста H , вычисленного методом ДФА. Предположительно обе этих величины должны давать достаточно точную оценку фрактальной размерности D , рассчитываемой через них по формулам (1.10), (1.7), однако нет уверенности, что значения D совпадут. Поэтому выводы о самоподобном характере рядов и возможности их прогнозирования будут сделаны на основе обоих показателей независимо.

Так как известно, что на длинных временных интервалах фрактальные свойства реальных экономических процессов многократно меняются (ряд обладает локальными характеристиками фрактальности [19]), решено оценивать D не как единичное значение, полученное по всему ряду или фиксированному его отрезку, а как функцию $D(t)$, вычисленную на множестве участков («окон»), равномерно покрывающих ряд с некоторым смещением относительно друг друга. На рис. 2.4 представлена иллюстрация выбранного подхода, описанного в работах [8, 19].

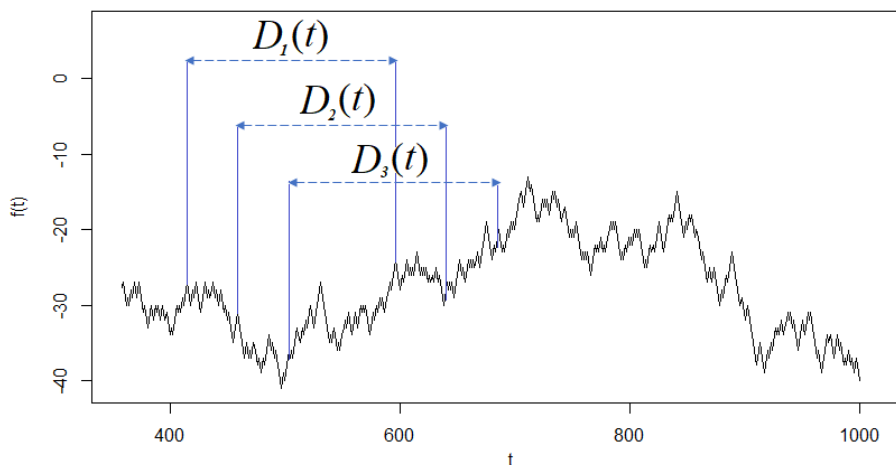


Рис. 2.4. Вычисление размерности в виде функции $D(t)$

Общий алгоритм данной стадии представлен в виде блок-схемы (рис. 2.5). Следует прокомментировать некоторые шаги приведенного алгоритма.

Как и на «наивном» этапе, операция «Загрузка данных» предполагает на выходе ряд не только с ценами OPEN, CLOSE, HIGH и LOW, но и уже рассчитанной по формуле (2.1) средней ценой за период.

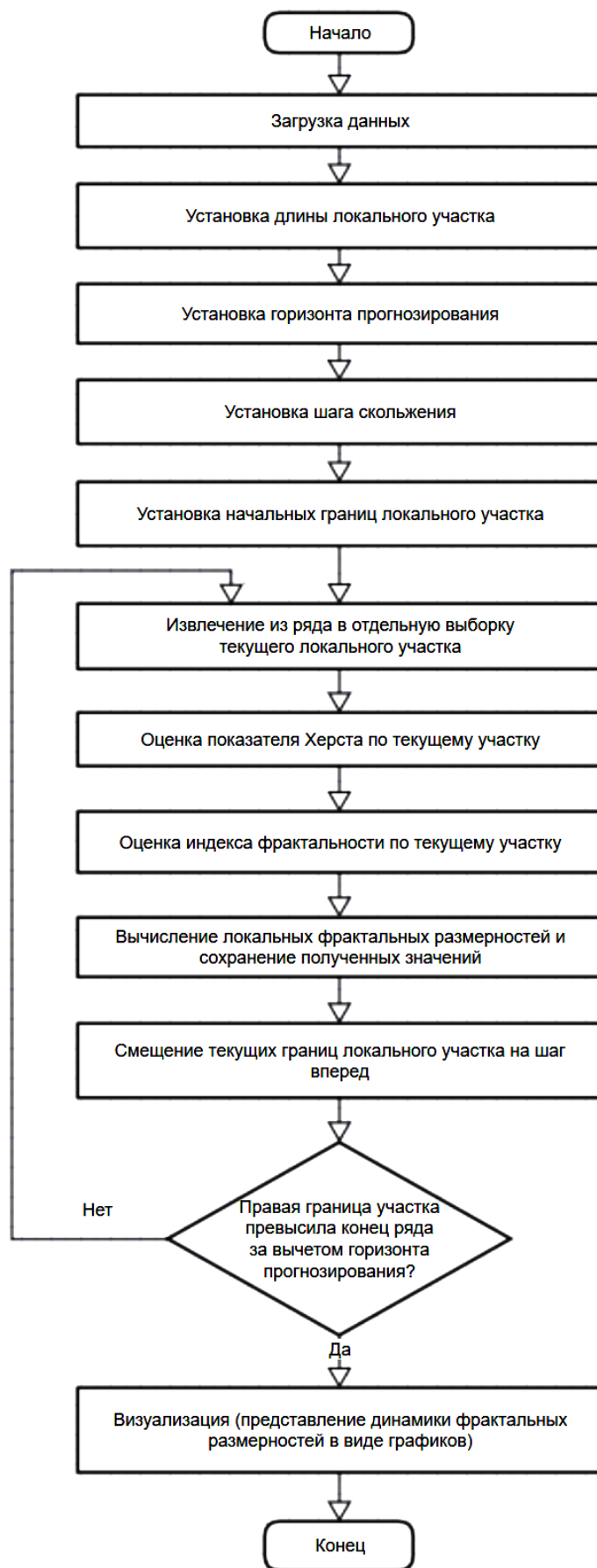


Рис. 2.5. Алгоритм предпрогнозного фрактального анализа

Длина «окна» (локального участка) является не фиксированной, предполагается взять несколько значений, соответствующих степеням двойки (что обусловлено спецификой методов минимального покрытия и ДФА), в диапазоне от 32 элементов (верхняя граница будет обусловлена вычислительными мощностями компьютера и установлена опытным путем).

Горизонт прогнозирования (число предсказываемых значений ряда) планируется принять в размере 3, как это было указано в разделе 2.1.2. Необходимо отметить, что, несмотря на отсутствие на данном этапе операций прогнозирования, эта величина требуется для обеспечения соответствия границ участков, на которых определяются локальные характеристики, и границ обучающих выборок, по которым будут аппроксимированы модели на следующем этапе, а обучающие выборки в любом случае необходимо выделять с учетом следующих за ними тестовых отрезков, чтобы не вырваться за границу ряда.

В качестве шага скольжения предлагается выбрать 1. Впрочем, величина данного параметра также может быть сильно ограничена снизу вычислительными ресурсами компьютера.

Оценка показателя Херста выполняется методом ДФА, алгоритм которого представлен в разделе 1.4.1.2. Так как метод широко известен и применяется, предполагается, что в программных пакетах он реализован.

В то же время, забегаая вперед, стоит отметить, что готовой реализации метода минимального покрытия в них обнаружено не было. Этот факт удивления не вызывает, потому что метод предложен отечественными авторами относительно недавно [19], однако возникает необходимость собственной его реализации. Ниже представлен ее алгоритм, основанный на описании в 1.4.1.1, в виде псевдокода. Входными параметрами процедуры являются два ряда данных: максимальные (high) и минимальные (low) цены (например, дневные или месячные); предполагается, что их длина являет собой значение степени двойки (32, 64, 128 и так далее).

```
array = Объявить массив()
rowmax = Логарифм по основанию 2(Длина(high))
Для row от 0 до rowmax Цикл
    m = 2^row
    L = Длина(high) / m
    V = 0
    x0 = 1
    Пока x0 <= Длина(high) Цикл
        Если (x0 = Длина(high)) И (L > 1) Прервать цикл
            x1 = x0 + L - 1
            A = Максимум(high[x0, x1]) - Минимум(low[x0, x1])
            V = V + A
            x0 = x1 + 1
    Конец цикла
```

```
array.Добавить (V, L)
Конец цикла
lnX = Логарифм натуральный(array.Извлечь (L))
lnY = Логарифм натуральный(array.Извлечь (V))
model = Линейная регрессия (Y = lnY, X = lnX)
μ = -1 * model.Извлечь коэффициент при X()
```

Величины фрактальных размерностей исчисляются через полученные значения H и μ по формулам (1.10), (1.7).

В результате для ряда котировок будет получено две последовательности величин D , вычисленных разными способами. По ним будут построены графики функций $D(t)$, по поведению которых можно судить о фрактальных свойствах ряда в динамике.

Всего анализу подвергнутся 8 финансовых инструментов, и для каждого из них будут рассчитаны $D_H(t)$, $D_\mu(t)$:

- на трех различных масштабах M : день ($M1$), неделя ($M2$), месяц ($M3$);
- при разной длине «окна» W : 32 ($W32$), 64 ($W64$), 128 ($W128$)..., w – количество возможных длин.

На выходе данного этапа для каждого инструмента будет $2 \cdot 3 \cdot w = 6w$ рядов значений разной длины. Следует дать им обозначения: $D_H(t)_{M,W,i}$, $D_\mu(t)_{M,W,i}$, где i – номер инструмента, $i = 1, 2, \dots, 8$.

2.2.3. Построение и тестирование прогнозных моделей

Наконец, третий этап заключается в непосредственной попытке краткосрочного прогноза будущего поведения исследуемых рядов. В качестве основных прогнозирующих «черных ящиков» используются модели класса ARFIMA. Для возможности сопоставления результатов предсказания моделей с длинной памятью с какими-либо еще решено на тех же данных обучать модель ARIMA, а также использовать примитивные методы прогнозирования будущих значений ряда по среднему и последнему известному значению.

Предполагается обучать модели по всем выделенным на предыдущем этапе локальным участкам ряда, предсказывать следующие за ними 3 значения, вычислять показатели качества прогнозов, но при этом не усреднять их, как это было предложено в рамках «наивного» подхода, а сохранять в виде последовательности значений. В результате можно будет каждую из метрик представить как функцию от момента времени t и величины обучающей выборки (представление о таком подходе дают рис. 2.2, 2.4). Сравнивая кривые локальных фрактальных размерностей и метрик качества аппроксимированных на соответствующих участках моделей, можно проверить выдвинутые в 1.4.1.3 предположения и в целом судить о возможностях прогнозирования процессов в различных состояниях (тренд, флэт, случайное блуждание).

Общий алгоритм этапа построения прогнозов приведен в виде блок-схемы на рис. 2.6. Так или иначе, в процессе исследования необходимо пройти по всем его «веткам», потому что нужно рассмотреть различные объекты предсказания и модели, но если представлять схему в виде линейной последовательности шагов, она будет излишне вытянутой по вертикали, с трудом восприниматься и нерационально расходовать место на странице (а у автора нет цели искусственно увеличить объем данной работы).

Традиционно следует прокомментировать некоторые шаги алгоритма, нуждающиеся в раскрытии. Так, на данном этапе исследования модели ARFIMA и ARIMA предполагается рассматривать как «черные ящики» в еще более высокой, нежели при «наивном» подходе, степени, т. е. при их обучении не оценивать предварительно какие-либо параметры моделей, а отдать все под контроль «автоматике» (алгоритмам аппроксимации). Это означает, что используемый программный инструмент должен быть способен подобрать оптимальные порядки p , q и параметр d модели для данной конкретной выборки. Подавать моделям на вход решено исходные уровни ряда без каких-либо предварительных преобразований (по уже упомянутой ранее причине: фрактальные свойства оригинального ряда и трансформированного могут отличаться [6]). Следовательно, рассчитывать метрики можно непосредственно по предсказанным значениям.

Прогнозным рядом «модели», предсказывающей по последнему значению, является последнее значение обучающей выборки, дважды продублированное. Модель, предсказывающая по среднему, выдает среднее арифметическое значение трех последних элементов обучающей выборки, также дважды продублированное.

Преобразование уровней ряда в классы «1», «0» осуществляется по следующей формуле:

$$C = \begin{cases} 1, & x_t - x_{t-1} > 0 \\ 0, & x_t - x_{t-1} \leq 0 \end{cases}, \quad (2.10)$$

где C – выбранный класс, x_t – предсказанное значение, x_{t-1} – значение, предшествующее предсказанному.

Для вычисления метрик классификации такие преобразования выполняются как для прогнозного ряда, так и фактического (тестовой выборки).

Будут исследованы котировки восьми активов, и для каждого из них будут рассчитаны *MAPE* (по четырем моделям) и *F-measure* (по двум моделям):

- на трех различных масштабах M : день ($M1$), неделя ($M2$), месяц ($M3$);
- при разной длине «окна» W : 32 ($W5$), 64 ($W6$), 128 ($W7$)..., w – количество возможных длин.

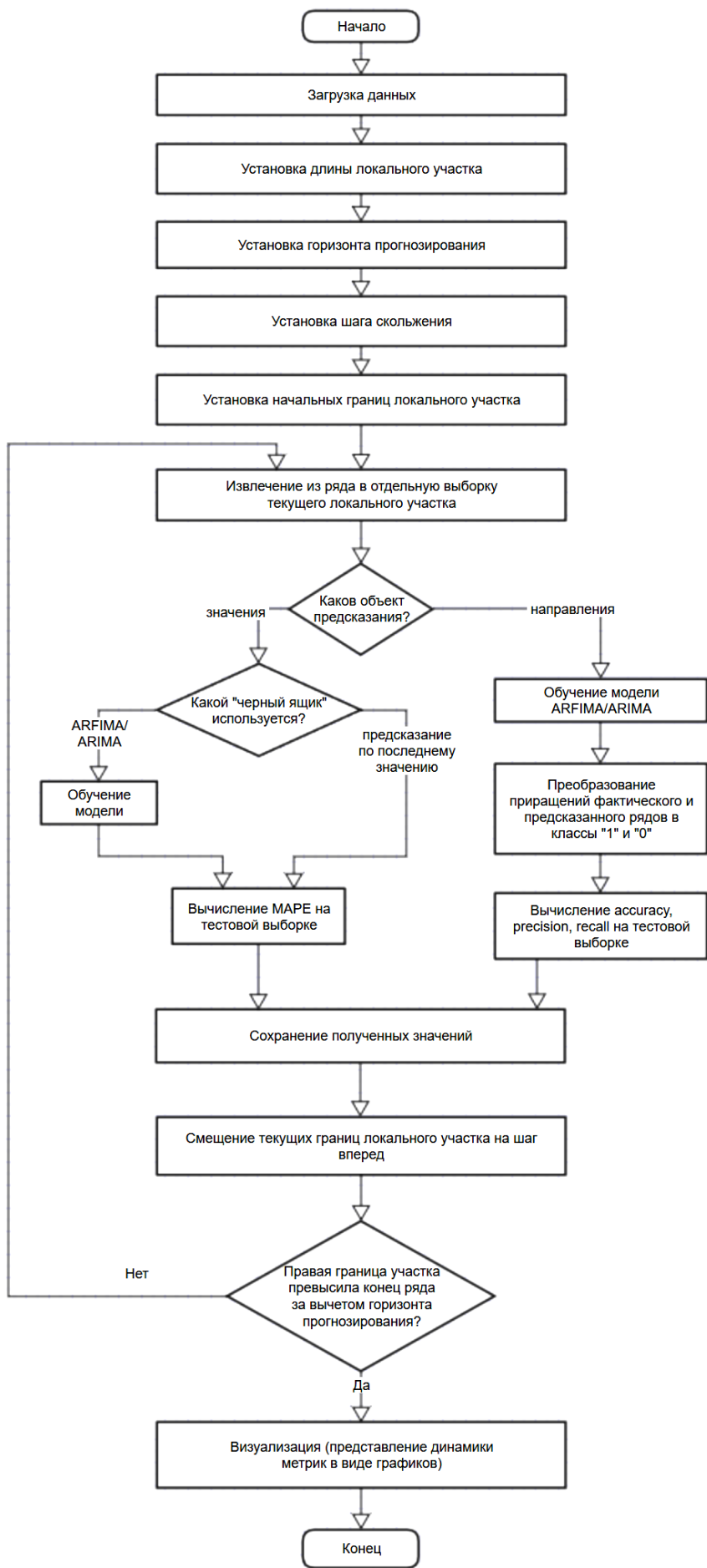


Рис. 2.6. Алгоритм предпрогнозного фрактального анализа

На выходе данного этапа для каждого инструмента будет $6 \cdot 3 \cdot w = 18w$ рядов значений разной длины. Следует дать им обозначения, i – номер инструмента, $i = 1, 2, \dots, 8$ (таблица 2.2):

Таблица 2.2

Результирующие показатели этапа прогнозирования

Метрика	Прогнозирующая модель			Среднее значение
	ARFIMA	ARIMA	Последнее значение	
<i>MAPE</i>	$MAPE(ARF)(t)_{M,w,i}$	$MAPE(AR)(t)_{M,w,i}$	$MAPE(last)(t)_{M,w,i}$	$MAPE(avg)(t)_{M,w,i}$
<i>F-measure</i>	$Fm(ARF)(t)_{M,w,i}$	$Fm(AR)(t)_{M,w,i}$	–	–

Также имеет смысл выполнить корреляционный анализ метрик качества прогнозирования и функций размерности. Он поможет ответить на вопрос, существует ли линейная взаимосвязь между величиной размерности и точностью предсказания различными методами. В качестве меры взаимосвязи используется парный коэффициент корреляции Пирсона.

Таким образом, в данном параграфе был описан порядок проведения исследования, детально охарактеризованы его шаги. В последней части второй главы рассмотрен другой важный вопрос – выбор программного средства.

2.3. Обзор и выбор программных инструментов исследования

Разработав методику эмпирического исследования, следует рассмотреть существующие программные инструменты для его практической реализации и выбрать один (либо несколько) из них. Эффективным подходом к проблеме принятия решений в условиях неопределенности является применение так называемого метода анализа иерархий (далее МАИ) [49]. Благодаря высокой степени формализованности и детально разработанному математическому аппарату данный метод позволяет трансформировать субъективные экспертные решения в объективные, поэтому хорошо подходит для решения задачи выбора программного инструмента.

2.3.1. Формирование критериев выбора инструмента

Первое, что необходимо сделать для выбора наилучшей из нескольких альтернатив – выработать критерии сравнения. Для этого были сформулированы требования, которым должен отвечать подходящий программный пакет. К ним были отнесены следующие:

- поддержка всех выбранных методов фрактального анализа (вычисление фрактальной размерности разными методами, вычисление показателя Херста разными методами, поддержка ARFIMA-моделирования);
- доступность (бесплатность или наличие полнофункциональной демо-версии);

- возможность экспорта данных в стандартном формате (например, csv);
- относительная невысокая сложность освоения.

Также был составлен ряд критериев, соответствие которым не является обязательным, но желательно. Среди них:

- встроенные средства визуализации результатов анализа;
- возможность расширения функционала путем написания собственных программных модулей;
- наличие русскоязычного пользовательского интерфейса.

Таким образом, было отобрано 7 наиболее важных, по мнению автора, критериев сравнения программных продуктов.

2.3.2. Сравнительная характеристика и выбор инструмента

На сегодняшний день разработано большое количество программных средств анализа данных, в которых предлагаются как различные способы и методы фрактального анализа, так и инструменты для реализации собственных алгоритмов. Ниже приведены некоторые из них (обзор не претендует на полное и разностороннее исследование рынка программных пакетов статистического анализа и моделирования).

MATLAB + FracLab. MATLAB – пользующийся широкой популярностью пакет прикладных программ для решения задач технических вычислений и одноименный язык программирования, используемый в этом пакете. Продукт не является бесплатным, но существует ограниченная по времени использования пробная версия.

FracLab – набор расширений для MATLAB, содержащий широкий спектр средств фрактального и мультифрактального анализа. Распространяется бесплатно.

R (язык, интерпретатор и среда разработки). R – язык программирования для статистической обработки и визуализации данных, а также свободная программная среда вычислений с открытым исходным кодом в рамках проекта GNU. Обладает богатой библиотекой готовых функций, реализующих различные математические алгоритмы, в том числе для вычисления фрактальных показателей и прогнозирования временных рядов.

Fractan. Программа Fractan разработана В. В. Сычевым в качестве средства практической реализации методов, изложенных в его магистерской диссертации «Вычисление стохастических характеристик физиологических данных». Она предназначена для моделирования и математической обработки данных, в том числе для определения фрактальной размерности D и показателя Херста H . Приложение написано для ОС Windows 95/98/NT, однако работает и в современных редакциях ОС Windows вплоть до Windows 10 и 11. Распространяется бесплатно.

Судя по количеству публикаций, найденных по запросу «fractan» в системе eLIBRARY.RU (108 на 15.05.2018), программа пользуется некоторой популярностью при исследованиях в области фрактального анализа.

OxMetrics. OxMetrics – математический пакет из нескольких модулей, обеспечивающих интегрированное решение для эконометрического анализа временных рядов, прогнозирования, финансового эконометрического моделирования и статистического анализа данных поперечного сечения. Бесплатной версии, доступной для скачивания, обнаружить не удалось.

Timing Solution. Timing Solution – программа для расчета и анализа рыночных циклов. Как утверждается на сайте компании-разработчика¹, является лидирующим в мире программным обеспечением по альтернативным методам прогнозирования финансовых рынков. Среди особенностей программы: нейросетевое прогнозирование, вейвлет-анализ циклов финансовых данных, исследование циклических процессов в котировках, квантовая механика в биржевых прогнозах, прогнозирование финансовых данных при помощи математической теории хаоса, и т.д. Имеет полнофункциональную демоверсию.

В таблицу сведены сравнительные характеристики рассмотренных продуктов.

Таблица 2.3

Сравнение программных продуктов по установленным критериям

Критерий \ Продукт	MATLAB + FracLab	R	Fractan	OxMetrics	Timing Solution
Вычисление размерности разными методами	да*	да*	нет	да*	нет
Вычисление H разными методами	да	да*	нет	да	да
Моделирование ARFIMA	да	да*	нет	да	нет
Наличие бесплатной версии	да	да	да	нет	да
Возможность экспорта данных	да	да	да	да	да
Легкость освоения	нет	нет	да	да	да
Средства визуализации	да	да	да	да	да
Написание собственных модулей	да	да	нет	да	нет
Русский интерфейс	нет	нет	да	нет	нет

* требуется написание пользовательской процедуры

¹ Timing Solution – программа для трейдеров [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.timingsolution.ru> (дата обращения: 04.06.2022).

Как можно заметить, ни одно решение не явилось удовлетворяющим всем ранее выдвинутым запросам, в том числе и тем из них, соответствие которым было заявлено как обязательное. Так что требования к инструментам были смягчены, и было решено сделать строго обязательным только одно из них: наличие бесплатной версии. Этому требованию не удовлетворило единственное решение – OхMetrics, которое было исключено из рассмотрения.

К оставшимся четырем вариантам было решено применить МАИ с целью проранжировать их по степени соответствия предъявленным требованиям. Алгоритм метода изложен в труде его автора [49]. Описание процесса применения метода вынесено в приложение, в основном тексте работы представлены только результаты.

По итогам использования МАИ инструментальные средства расположились в следующем порядке (по убыванию предпочтительности):

1. R;
2. MATLAB;
3. Timing Solutions;
4. Fractan.

Было решено для экспериментов с эмпирическими данными использовать в первую очередь готовые библиотеки и собственные пользовательские процедуры языка R, а прочие решения применять в том случае, если с использованием основного возникнут сложности.

Таким образом, были рассмотрены все вопросы, заявленные в начале второй главы. В следующем параграфе обобщены выводы по ней.

2.4. Выводы

Во второй главе была разработана методика исследования, призванная ответить на вопрос о применимости и эффективности фрактального анализа в решении проблемы прогнозирования на финансовых рынках. Для этого были раскрыты несколько вопросов.

1. Была сформулирована постановка задачи: выбраны анализируемые объекты (8 различных биржевых финансовых инструментов), определен горизонт прогнозирования (3 шага), выбраны критерии оценки качества прогнозов (показатель *MAPE* для предсказания точных значений котировок и *F-measure* для направлений их приращений).

2. Были определены и детально охарактеризованы этапы исследования. К ним относятся:

– «наивный» этап, повторяющий методику из работы [47] с некоторыми корректировками (так, в оригинальной статье автором не была проведена процедура верификации построенной модели);

- этап предпрогнозного анализа данных с целью изучения их локальных фрактальных характеристик в динамике и подготовки предварительных выводов о возможности моделирования и предсказания;
- этап построения и верификации прогнозных моделей по сформированным ранее критериям.

Некоторые процедуры, предусмотренные настоящей методикой (например, дробное дифференцирование ряда и оценивание индекса фрактальности), потребовали разработки алгоритмов их реализации, которые были описаны средствами псевдокода. В целом автор стремился описать методику как можно более детально, чтобы при ее техническом воплощении при помощи программных инструментов понадобилось минимум алгоритмизации.

3. Наконец, был осуществлен сравнительный обзор и выбор программного инструмента исследования средствами метода анализа иерархий. Наиболее подходящей альтернативой среди прочих был признан язык программирования и анализа данных R. Именно на нем с использованием готовых библиотек и специально написанных пользовательских процедур и функций производятся все расчеты в третьей главе.

В результате поставленная во второй главе задача была успешно решена. Сформированная методика может служить не только средством достижения цели, поставленной в данной работе, но и стать в какой-то степени ориентиром для исследователей, занимающихся проблемами применения фрактального анализа к задаче прогнозирования временных рядов, т. к. содержит идеи, не встреченные автором в других научных работах; в частности, оригинальным подходом является выявление зависимости точности прогнозирования от состояния процесса, определяемого по величине локальной фрактальной размерности, методом корреляционного анализа.

Последняя глава работы посвящена апробации разработанной методики на реальных исторических финансовых данных и анализу полученных в процессе нее результатов.

ГЛАВА 3.

ПРОВЕДЕНИЕ ЭМПИРИЧЕСКОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

Целью третьей, заключительной, главы монографии является разрешение основного вопроса, поставленного в данной работе: позволяет ли применение фрактального анализа увеличить точность краткосрочных прогнозов финансовых временных рядов в сравнении с другими подходами? Средством достижения цели служит проведение исследования в соответствии с разработанной в предыдущей главе методикой, т. е. апробация этой методики. Она включает 3 этапа.

1. «Наивный» этап, заключающийся в воспроизведении методики, описанной в одной из работ [47], с целью проверить, действительно ли такой подход является эффективным, потому что у автора на этот счет имеются обоснованные сомнения.

2. Предпрогнозный анализ фрактальных свойств рядов. Задачей данной стадии является оценка локальных фрактальных характеристик рассматриваемых процессов, формирование предварительного мнения о возможности их прогнозирования.

3. Построение и тестирование прогнозных моделей. Цель финального этапа эмпирического исследования – собственно ответ на вопрос о положительном влиянии фрактального подхода на точность прогнозов динамики финансовых инструментов.

Поскольку в качестве программного инструмента был выбран язык программирования R, понадобилось написать ряд процедур для реализации предусмотренных методикой алгоритмов.

Описание каждого из этапов, некоторых возникших нюансов, с которыми пришлось столкнуться в процессе апробации методики, комментарии и характеристика полученных результатов составляют содержимое третьей главы.

3.1. «Наивный» подход к прогнозированию временных рядов финансовых данных

Как уже упоминалось, задачей данного этапа было повторение результатов, полученных в [47], в соответствии с приведенной там методикой, в которую пришлось внести небольшие корректировки (в частности, добавить стадию верификации полученной модели, опущенную в оригинальном исследовании).

В процессе реализации описанного в 2.2.1 алгоритма пришлось столкнуться с некоторыми нюансами. Так, в ряду дневных лог-доходностей акций Сбербанка был обнаружен выброс – аномально высокое значение. Как оказа-

лось, с 20.07.2007 произошло дробление акций в 1000 раз², из-за которого цена одной обыкновенной акции пропорционально снизилась. Для обеспечения сопоставимости цен до и после указанной даты пришлось доработать функцию загрузки данных, добавив следующее условное действие: если инструмент – акции Сбербанка, значения ряда по 17.07.2007 включительно разделить на 1000.

Кроме того, вычислить показатель Херста по алгоритму R/S-анализа, описанному в 1.4.1.2, удалось не для всех инструментов (пользовательская функция возвращала пустое значение). Предположительно причиной явилась неудачная длина ряда лог-доходностей, содержащая недостаточное количество собственных делителей. Пришлось для некоторых инструментов отсечь 1–3 значения доходностей слева, что привело к существенному росту числа собственных делителей и успешному вычислению H . Здесь стоит отметить, что алгоритм R/S-анализа был запрограммирован самостоятельно, несмотря на обилие в библиотеках R соответствующих готовых функций, т. к. автором статьи [47] он также был реализован вручную, и неизвестно, какая из имеющихся типовых реализаций повторяет его с достаточной точностью.

Результатом данного этапа явились величины, приведенные в таблице 3.1.

Таблица 3.1

Показатели точности моделей, рассчитанные при кросс-валидации

Показатель	Инструмент							
	IMOEX	^GSPC	LKOH	SBER	MSFT	AMZN	USDRUB	EURRUB
H	0,522	0,521	0,496	0,575	0,517	0,522	0,583	0,550
$MAPE(AR)$	1,726	0,950	2,075	2,457	1,559	2,765	0,518	0,607
$MAPE(ARF)$	1,724	0,954	2,074	2,457	1,563	2,777	0,527	0,613
Разница в величине ошибки (AR–ARF)	0,002	–0,004	0,001	0,000	–0,006	–0,012	–0,009	–0,006

Можно констатировать, что в соответствии с интерпретацией показателя Херста, приведенной в разделе 1.4.1.3, динамика логарифмических доходностей всех рассмотренных инструментов оказалась близка к случайному блужданию. Наиболее персистентным оказался ряд курсов доллара; величина его $H = 0,583$ не совпадает с полученной в оригинальном исследовании ($H = 0,6294$), но это можно объяснить большим количеством исторических данных для анализа (результаты исследования М. В. Прудского были опубликованы десять лет назад).

² ЦБ РФ зарегистрировал допэмиссию акций Сбербанка России для сплита – ИА "Финмаркет" [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.finmarket.ru/news/626429> (дата обращения: 04.06.2022).

Также можно сказать, что выводы автора публикации подтвердились: модель ARFIMA действительно «обладает способностью делать краткосрочные прогнозы курса доллара», а также ценовых рядов других финансовых инструментов. Однако точность модели при этом невелика: в частности, средняя величина ошибки значительно превышает среднее суточное изменение котировок (или, можно сказать, волатильность), которое для курса доллара составило 0,329%. Что особенно важно в свете цели данного этапа (проверить, окажется ли такой подход к фрактальному анализу эффективным), точность не превышает точности классической модели с краткосрочной памятью ARIMA, они оказались сопоставимы. Предположительными причинами низкой эффективности прогнозов являются:

- недостатки методики – рассмотрение рядов как процессов со статическими, неизменными на всей их длине фрактальными свойствами;
- низкий уровень персистентности рядов, что приводит к величине оператора d модели ARFIMA, близкой к 0, вследствие чего дробные разности почти не отличаются от исходных логарифмических доходностей, и на данных как в случае ARFIMA, так и ARIMA обучается практически одна и та же ARMA-модель, из чего следуют очень похожие прогнозы.

Результаты данного этапа исследования опубликованы в работе [14].

Таким образом, как и ожидалось, «наивное» приложение фрактального анализа к задаче прогнозирования не позволяет получать краткосрочные предсказания приемлемой точности. Более обоснованный подход представлен в следующем параграфе.

3.2. Предпрогнозный анализ данных

Текущая стадия заключается в анализе локальных фрактальных характеристик исследуемых процессов. Вопрос, на который необходимо ответить по итогам ее завершения, – существует ли возможность предсказывать будущие значения рядов с точки зрения теории, тех гипотез, которые описаны в разделе 1.4.1.3?

Так как приведенный в 2.2.2 алгоритм является достаточно общим, имеет смысл представить более детальное описание процедуры вычисления размерностей при разном характере исходных данных в виде блок-схемы (рис. 3.1).

В качестве горизонта прогнозирования выбрана величина 3, т. е. три будущих значения. Рассмотрено поведение рядов на разных масштабах: дневном, недельном и месячном. В связи с возникшими сложностями при получении исторических данных котировок некоторых финансовых инструментов из внешних источников, указанных в таблице 2.1, были загружены только дневные значения, а недельные и месячные получены из них пересчетом посредством специализированных функций R.

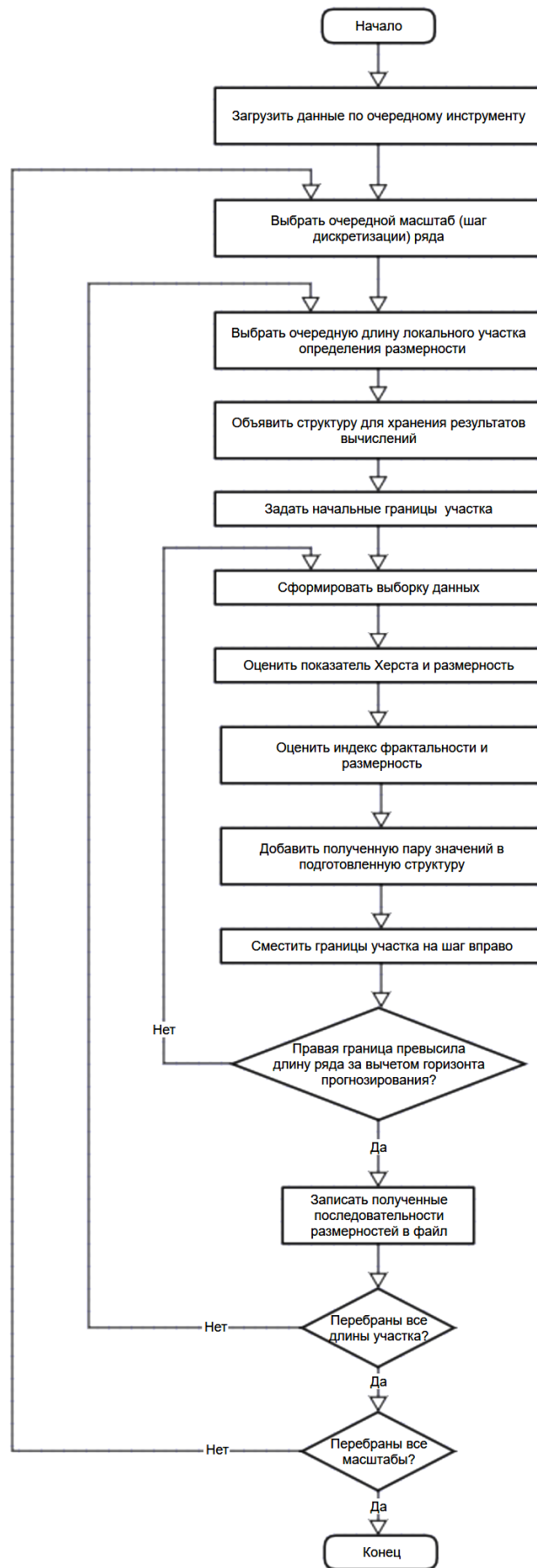


Рис. 3.1. Детальный алгоритм процедуры вычисления размерностей при различном характере входных данных

Длины локального участка для вычисления по нему размерностей выбраны следующие: 32, 64, 128, 256, 512. При этом на месячном масштабе рассматривались только участки до 128 элементов включительно, потому что количество месяцев не превысило 230.

В разделе 1.4.1.2, где описан метод ДФА оценивания показателя Херста, был опущен один важный момент, связанный с выбором степени полинома, аппроксимирующего локальные тренды. В работе [29] приведен критерий, по которому можно выбрать эту величину: рекомендуется увеличивать степень тренда до тех пор, пока вычисленное значение H не перестанет изменяться. Чтобы не увеличивать сложность программного кода, решено в рамках применения метода ДФА использовать этот критерий в несколько упрощенной форме, а именно, пытаться вычислять H при степенях полинома от 1 до 5, полагая, что на достаточно небольших выборках тренды более высокой степени маловероятны. Сразу использовать наибольшую степень 5 не оказалось возможным по той причине, что при излишне высоких величинах используемая готовая функция, как выяснилось, приводит к возникновению исключительной ситуации и остановке исполнения программы.

Был обнаружен еще один нюанс. Как оказалось, Московской Биржей до конца 2002 года публиковались для своего индекса (ИМОЕХ) только цены закрытия, поэтому внутрисуточный размах данного инструмента за этот период получился нулевым. В связи с этим в алгоритм расчета размерности минимального покрытия пришлось внести изменения, могущие привести к небольшому снижению точности, в особенности на малых размерах «окна» – при оценке индекса фрактальности методом линейной регрессии не учитывать двойку значений $\langle V_f(\delta), \delta \rangle$, если $V_f(\delta) = 0$. В результате число наблюдений в обучающей выборке регрессии в некоторых случаях сократилось на единицу, и его минимально возможное значение составило не 6, а 5.

На выходе представленного выше алгоритма получилось 104 файла формата CSV, содержащих по 2 ряда данных: размерность D_H , вычисленная через показатель Херста методом ДФА, и размерность D_μ , рассчитанная через индекс фрактальности методом минимального покрытия. Каждый из этих файлов имеет следующую структуру (рис. 3.2).

Заполнение некоторых участков ряда пустыми значениями (NA) необходимо для соотносимости между собой рядов размерностей и исходных рядов котировок, взаимного соответствия их нумерации. Это позволит поместить на одну координатную сетку графики тех и других с целью визуального анализа.

После расчета размерностей для всех 8 инструментов с различными комбинациями параметров был произведен визуальный анализ всех полученных 312 графиков (на каждый случай по 3 графика: котировки, D_H , D_μ). Приводить каж-

дую тройку графиков в тексте работы, а также в приложениях нецелесообразно ввиду их чрезмерно большого количества, поэтому ниже для ознакомления с полученными результатами представлены лишь несколько из них (рис. 3.3–3.7).

Величина размерности, оцененной на выделенном участке

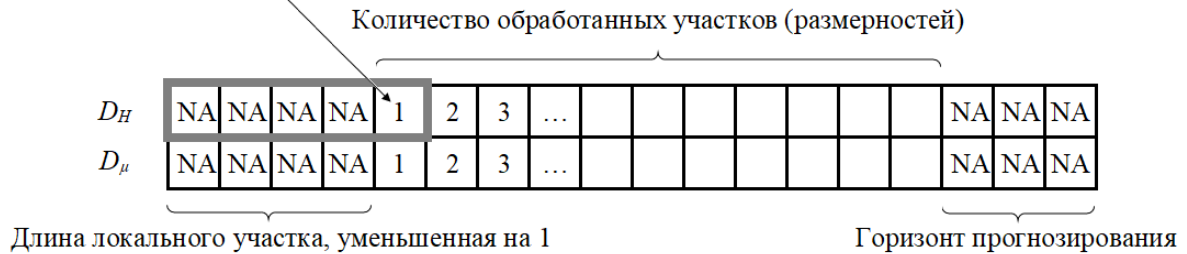


Рис. 3.2. Структура хранения вычисленных размерностей

На рис. 3.3 можно заметить несколько неожиданное поведение размерности D_H , вычисленной через показатель Херста: ее величина часто принимает значение менее 1, в то время как объект размерностью единица – это гладкая кривая.

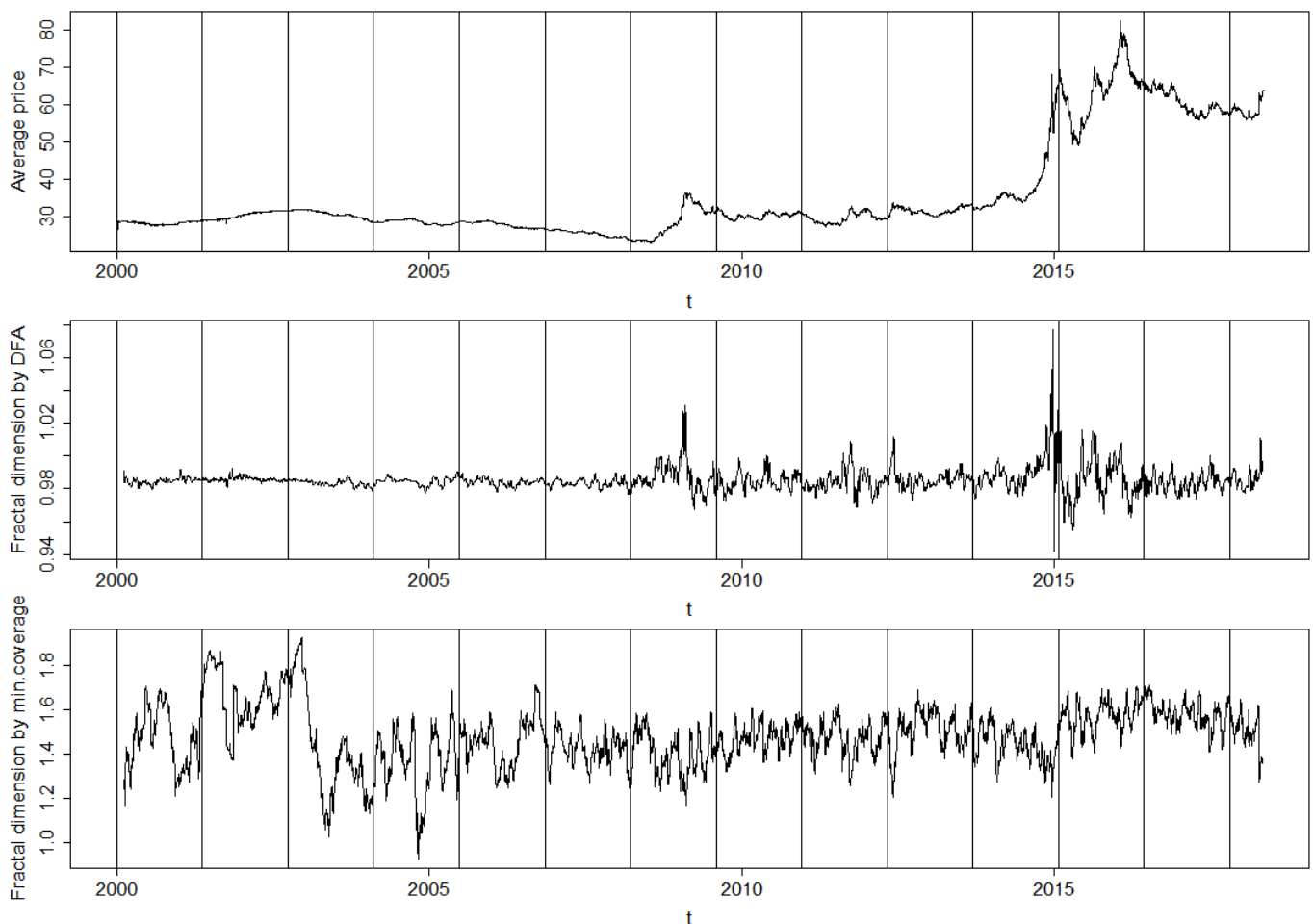


Рис. 3.3. Соответствие графика котировок графикам размерностей (на примере дневных значений курса доллара, длина «окна» 32)

Можно предположить, что на интервале в 32 наблюдения метод ДФА не позволяет оценить размерность с достаточной точностью (как было выяснено опытным путем, готовая функция, использованная в качестве программной реализации метода, при такой длине участка использует всего 2 двойки $\langle \overline{F(\delta)}, \delta \rangle$ для построения регрессии, чего, очевидно, недостаточно). Поэтому на участке размером 32 следует ориентироваться на размерность минимального покрытия D_μ , которая демонстрирует более ожидаемое поведение: ее величина колеблется вокруг значения 1,5, что означает случайное блуждание и, как было выяснено в теоретической главе, процесс с близкой к такой величине размерностью является наиболее стабильным.

Заметно, что резкие скачки и провалы размерности до величин, близких к 1, соответствуют «критическим точкам» на графике котировок, причем чем круче пики и падения цен, тем более резкими являются падения и пики размерности. На рис. 3.3 видно несколько таких участков. Ниже для наглядности представлены увеличенные фрагменты данного графика в дневном масштабе (рис. 3.4).

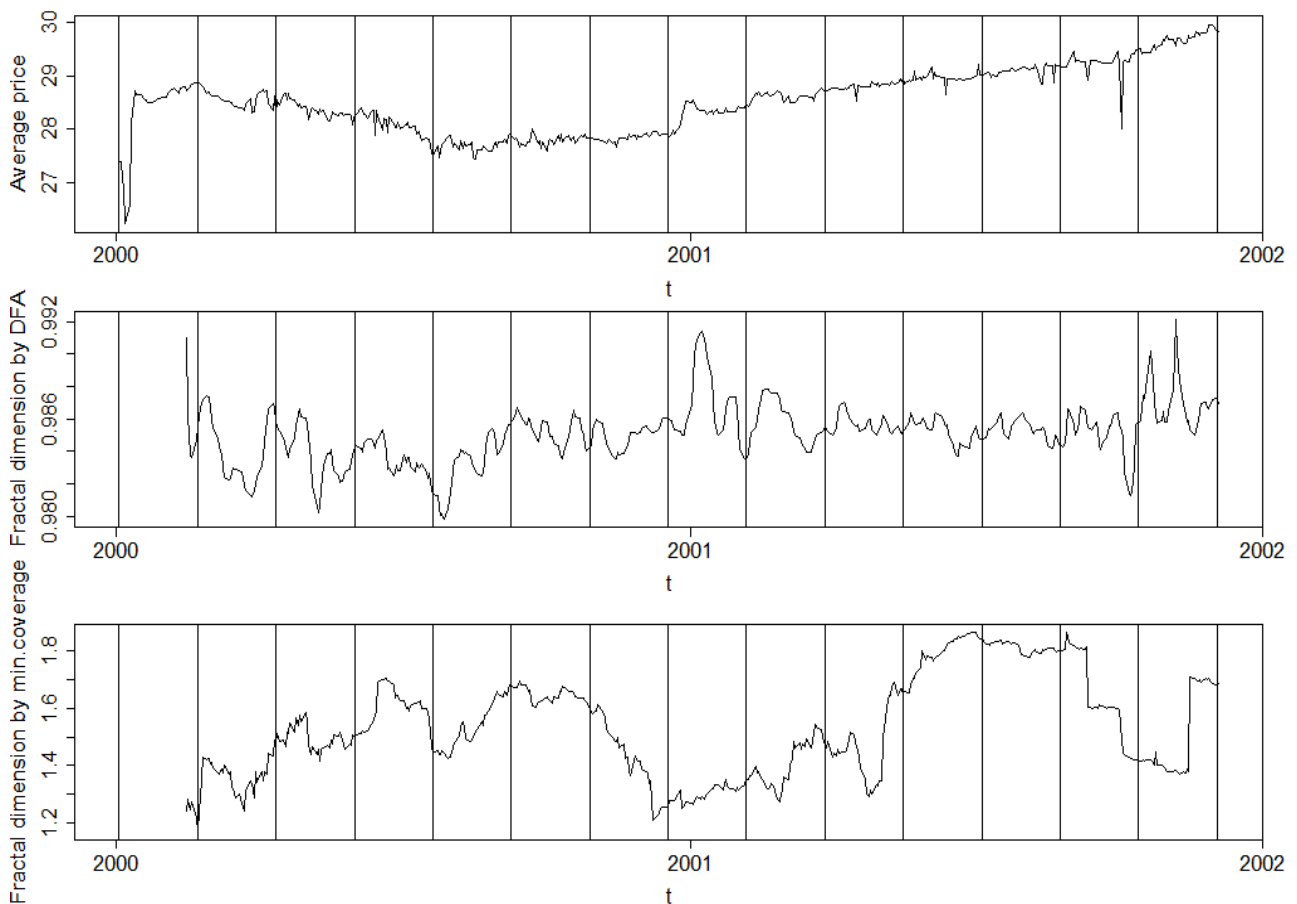


Рис. 3.4. Графики котировок и размерностей курса доллара, дневные значения, фрагмент

При увеличении масштаба рассмотрения становится заметно, что график дневной волатильности, на 18-летнем промежутке выглядящий как гладкая кривая с близкой к единице размерностью, в действительности таковой не является, он весьма зазубрен. Стоит увеличить масштаб еще сильнее, чтобы увидеть, какой фигуре на графике котировок соответствует скачок значения D_μ от 1,4 до 1,7 (рис. 3.5).

Видно, что начиная с 15 ноября ряд курсов доллара принимает достаточно выраженное антиперсистентное состояние (направление его динамики начинает часто меняться), и этот факт вполне отражает размерность минимального покрытия, перешедшая в диапазон, соответствующий флэту ($D_\mu \approx 1,7$). Интересно, что D_H почти никак не реагирует на изменение состояния процесса, что еще раз подтверждает неинформативность показателя при столько малой длине локального участка (32 наблюдения).

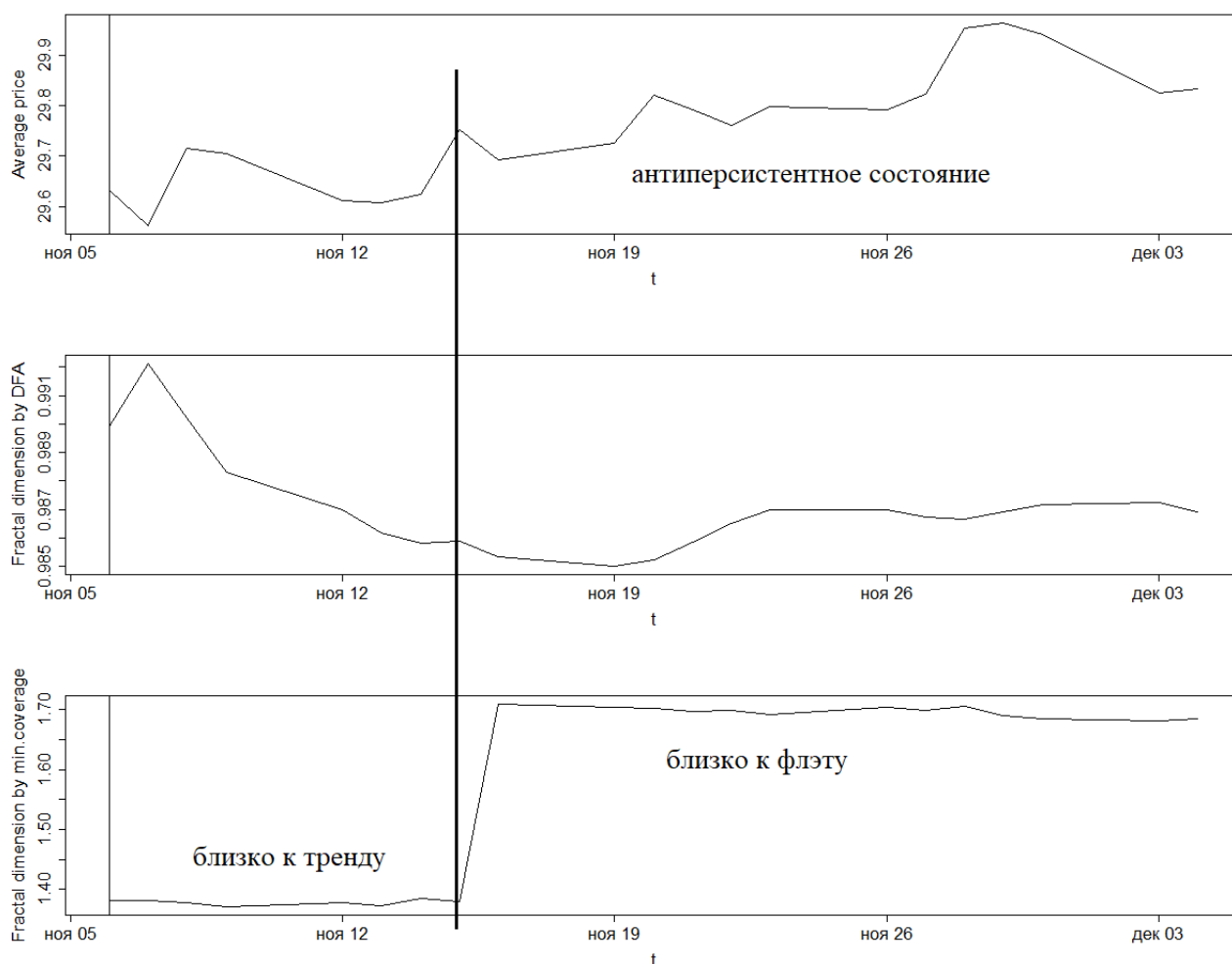


Рис. 3.5. Графики котировок и размерностей курса доллара, дневные значения, фрагмент в очень крупном масштабе

Для примера ниже приведены графики с недельным и месячным шагом дискретизации (длина «окна» 32).

Главный вывод, который можно сделать по итогам изучения графиков – финансовые ряды действительно обладают весьма переменчивыми фрактальными свойствами, об этом свидетельствуют изрезанные кривые размерностей. В большей степени это свойство проявляется на более мелких масштабах, что закономерно. Также величина размерности чутко реагирует на резкие скачки (провалы), и этим подтверждаются результаты, полученные в других исследованиях.

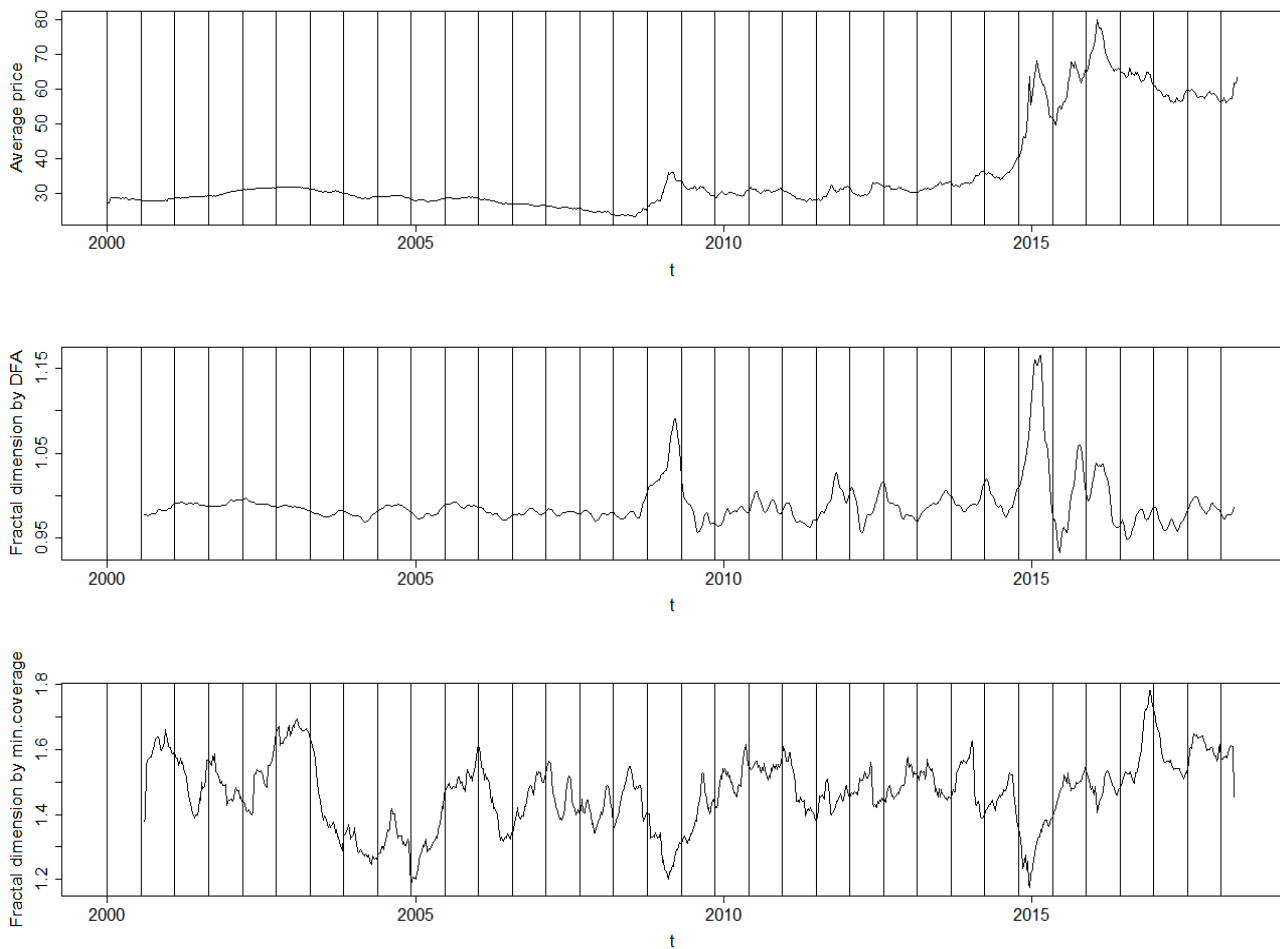


Рис. 3.6. Графики котировок и размерностей курса доллара, недельный масштаб

Кроме того, на примере валютной пары USD/RUB видно, что характер процесса изменения котировок тяготеет к случайному блужданию, величина D_μ колеблется около 1,5 с периодическими падениями до 1,3–1,4 и взлетами до вплоть до 1,7, т. е. ряд в целом близок к случайному, но на некоторых участках обладает свойствами персистентности и антиперсистентности. Из этого можно заключить, что курс доллара может поддаваться прогнозированию. Про другие инструменты можно в целом сказать то же самое (тяготение к случайному блужданию, периодическая смена состояний).

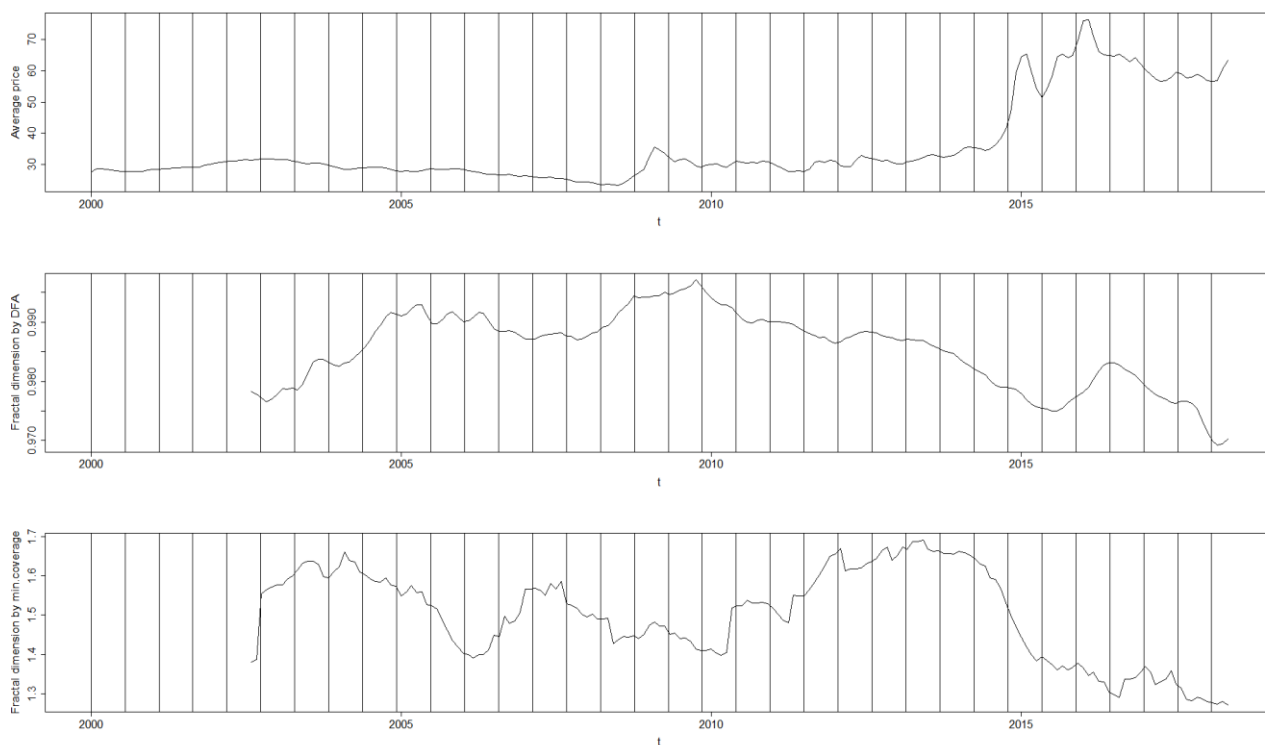


Рис. 3.7. Графики котировок и размерностей акций курса доллара, месячный масштаб

Что касается выявления мультифрактальных свойств рядов, то визуально, на основе приведенных графиков, судить об их наличии достаточно сложно. По всей видимости, для этого необходимо применять некоторые другие методики и тесты, например, описанные в [29].

Результаты данного этапа исследования опубликованы в работе [11].

Таким образом, вопросы, которые должен был раскрыть данный параграф, свои ответы получили. Финансовые ряды обладают длинной памятью и должны прогнозироваться. Собственно моделированию посвящен параграф 3.3.

3.3. Построение и тестирование прогнозных моделей

Цель последнего этапа исследования – подтверждение (или опровержение) гипотезы о том, что фрактальный подход к построению прогнозов позволяет увеличить их точность относительно нефрактальных подходов. Следует конкретизировать цель в виде вопросов, поиску ответов на которые посвящен данный параграф.

1. Позволяют ли модели с длинной памятью (на примере ARFIMA) повышать качество точечных прогнозов финансовых рядов в сравнении с другими моделями?

2. Влияет ли состояние процесса, определяемое по величине локальной фрактальной размерности, на точность прогнозирования?

Было решено на каждом из полученных на предыдущей стадии числовых рядов (величины размерностей инструментов на различных масштабах и при разной величине локальных участков) выполнить построение и верификацию следующих моделей:

- модель с длинной памятью (ARFIMA);
- модель с краткосрочной памятью (ARIMA);
- примитивные модели, в виде прогноза выдающие среднее значение за прошедший период, соответствующий горизонту прогнозирования (т. е. 3 последних шага), и последнее известное значение;
- модели, предсказывающие направления изменений котировок (можно отнести их к классификаторам; реализованы на базе ARFIMA и ARIMA).

Для обеспечения сопоставимости результатов моделирования с величинами локальных фрактальных размерностей предполагается обучать модели на тех же участках, для которых ранее были вычислены размерности, т. е. на «скользящих окнах» длинами 32, 64, 128.

В качестве метрик точности прогнозов используются: для моделей точечных прогнозов – показатель *MAPE*; для «классификаторов» – показатель *accuracy*. Здесь следует пояснить выбор наиболее простой метрики качества классификации, а не заявленной в описании методики *F*-меры. Он обусловлен тем, что из-за малой величины тестовой выборки (3 элемента) показатели *precision* и *recall*, как выяснилось, рассчитать не всегда возможно, т. к. не в каждой предсказанной серии значений фигурируют оба класса (1 и 0), иногда модель предлагает только единицы или только нули. В результате показатели *TP*, *FP*, *TN*, *FN* могут принимать нулевые значения, и метрики *precision*, *recall* и основанную на них *F-measure* оказывается невозможно вычислить, в то время как в формуле *accuracy* (2.3) ноль в знаменателе не возникнет никогда. Этот момент можно отнести к недостаткам разработанной методики, обнаруженным на этапе ее апробации.

Последовательность шагов на данном этапе практически соответствует приведенной на рис. 3.1, только вместо оценивания размерностей обучаются и верифицируются модели.

Задача правильного подбора регулирующих параметров для таких сложных моделей, как ARFIMA, является нетривиальной. В данном исследовании было решено использовать встроенные в R функции автоматической «подгонки» (обучения) моделей: *auto.arima()* и *arfima()* из пакета *forecast* с параметрами по умолчанию. Алгоритмы подбирают оптимальные порядки *p* и *q*, оценивают оператор дифференцирования *d*, принимают решение о необходимости предварительной трансформации данных и т.д. для каждого участка ряда. Для ARFIMA и ARIMA проверяется нормальность распределения остатков на обучающей вы-

борке посредством Q-теста Льюнга-Бокса; если для любой из моделей, обученных на участке, отклоняется гипотеза о случайности остатков, для данного участка ни одна из метрик качества прогнозов не сохраняется (чтобы избежать горизонтальных пропусков в показателях: например, ситуации, когда показатели ARIMA на выборке получены, а ARFIMA – нет).

В таблицах 3.2–3.4 приведены усредненные величины метрик качества прогнозов на различных масштабах при размере «окна», равном 64. Как выяснилось, длина обучающей выборки существенного влияния на соотношение точности предсказаний различных моделей не оказала.

Таблица 3.2

Усредненные показатели точности прогнозов дневных значений

Инструмент	Показатель точности прогноза					
	<i>MAPE(AR)</i>	<i>MAPE(ARF)</i>	<i>MAPE(avg)</i>	<i>MAPE(last)</i>	<i>acc(AR)</i>	<i>acc(ARF)</i>
AMZN	2,696	2,801	3,199	46,797	0,498	0,514
IMOEX	1,714	1,745	2,061	49,817	0,514	0,527
^GSPC	0,929	0,969	1,150	49,887	0,523	0,526
LKOH	2,046	2,080	2,386	49,899	0,505	0,527
SBER	2,310	2,371	2,718	45,111	0,514	0,513
MSFT	1,548	1,624	1,841	44,411	0,504	0,509
USDRUB	0,507	0,531	0,619	44,754	0,508	0,537
EURRUB	0,617	0,643	0,743	45,670	0,514	0,523

Таблица 3.3

Усредненные показатели точности прогнозов недельных значений

Инструмент	Показатель точности прогноза					
	<i>MAPE(AR)</i>	<i>MAPE(ARF)</i>	<i>MAPE(avg)</i>	<i>MAPE(last)</i>	<i>acc(AR)</i>	<i>acc(ARF)</i>
AMZN	5,383	5,449	6,600	47,475	0,513	0,533
IMOEX	3,736	3,762	4,640	50,099	0,515	0,523
^GSPC	1,894	2,001	2,433	49,985	0,480	0,533
LKOH	3,977	4,015	4,867	50,167	0,517	0,552
SBER	5,160	5,276	6,478	45,197	0,510	0,544
MSFT	2,977	3,013	3,665	44,459	0,525	0,541
USDRUB	1,383	1,342	1,694	44,791	0,518	0,559
EURRUB	1,439	1,458	1,774	45,779	0,535	0,530

Усредненные показатели точности прогнозов месячных значений

Инструмент	Показатель точности прогноза					
	<i>MAPE</i> (AR)	<i>MAPE</i> (ARF)	<i>MAPE</i> (avg)	<i>MAPE</i> (last)	<i>acc</i> (AR)	<i>acc</i> (ARF)
AMZN	9,537	9,901	12,487	50,862	0,499	0,532
IMOEX	7,799	7,091	9,799	51,185	0,526	0,544
^GSPC	4,069	4,160	5,572	50,380	0,487	0,542
LKOH	7,522	7,431	9,579	51,153	0,529	0,548
SBER	12,244	11,024	16,134	49,563	0,527	0,599
MSFT	5,560	5,812	7,800	45,476	0,568	0,600
USDRUB	4,252	4,025	4,916	45,375	0,558	0,553
EURRUB	3,762	3,598	4,435	46,555	0,564	0,599

Проанализировав представленные в таблицах данные, можно сделать следующие выводы.

Модель ARFIMA стабильно в среднем предсказывает несколько хуже, чем ARIMA. Поскольку такая разница наблюдается для всех инструментов на всех масштабах, становится очевидной некоторая закономерность. Так как многие авторы утверждают, что модели с длинной памятью лучше описывают финансовые ряды, нежели модели, не учитывающие данного свойства процессов [20, 47], а результаты эксперимента оказались строго противоположными, эта закономерность связана, по-видимому, с недостаточным качеством автоматической «подгонки» моделей этого класса под данные, требуется более тонкая настройка входных параметров.

При этом можно сказать, что обе авторегрессионные модели все же продемонстрировали лучшее качество точечных прогнозов, чем примитивные подходы предсказания по среднему значению и по последнему известному (в этом случае ошибка составила около 50%, что не выдерживает никакой критики, и это объясняется высокой изменчивостью, волатильностью финансовых инструментов). Интересно, что наивысшее качество точечных прогнозов продемонстрировали курсы валют, а также индекс S&P 500, это означает, что эти инструменты отличаются меньшей волатильностью. В целом же о прогнозах можно сказать, что они обладают низкой точностью практически для всех рассмотренных алгоритмов предсказания. Усредненную величину *MAPE* менее 1% показали только валютные пары с индексом S&P 500, да и то лишь на дневном масштабе. Заметно, что при увеличении масштаба величина ошибки растет.

Качество классификации направлений изменений котировок тоже оказалось невысоким, близким к случайному угадыванию – 0,5. Однако здесь про-

сма­три­ва­ет­ся ин­те­рес­ный мо­мент, по­то­му что по­чти во всех слу­чаях клас­си­фи­ка­тор на ос­но­ве ARFIMA-мо­де­ли по­ка­зал боль­шее чис­ло пра­виль­ных пред­ска­за­ний (его *accuracy* ста­биль­но вы­ше по­ка­за­те­ля ARIMA-клас­си­фи­ка­то­ра), и это на­тал­ки­ва­ет на мы­сль, что мо­де­ли с длин­ной па­мя­тью ху­же справ­ля­ют­ся с про­гно­за­ми точеч­ных зна­че­ний, но луч­ше оп­ре­де­ля­ют ха­рак­тер при­ра­ще­ния (по­ло­жи­тель­ный или от­ри­ца­тель­ный). Это на­блю­де­ние тре­бу­ет бо­лее де­таль­ных ис­сле­до­ва­ний.

И­так, на пер­вый во­прос, по­став­лен­ный в на­ча­ле па­ра­гра­фа, мож­но от­ве­тить сле­ду­ю­щим об­разом: пре­вос­ход­ства фра­кталь­ных мо­де­лей в ча­сти точеч­ных про­гно­зов пе­ред ARIMA об­на­ру­жить не уда­лось, од­на­ко на­прав­ле­ния ди­на­ми­ки они уга­ды­ва­ют ча­ще. Сле­ду­ет изу­чить вто­рой во­прос – о за­ви­си­мо­сти точ­но­сти про­гно­зов и ха­рак­те­ра уча­стка ря­да, на ко­то­ром обу­ча­лись мо­де­ли. Для этой це­ли бы­ли вы­браны два ин­стру­мен­та и для них рас­счи­та­ны ус­ред­нен­ные ве­ли­чи­ны мет­рик про­гно­зов мо­де­лей ARFIMA для каж­до­го диа­па­зо­на зна­че­ния раз­мер­но­сти ми­ни­маль­но­го по­кры­тия D_μ (та­бли­ца 3.5, рис. 3.8). Раз­мер уча­стка – 32 на­блю­де­ния.

Та­бли­ца 3.5

Ус­ред­нен­ные мет­рики при раз­ных со­сто­я­ни­ях про­цес­са

Со­сто­я­ние про­цес­са		USDRUB			MSFT		
		День	Не­де­ля	Ме­сяц	День	Не­де­ля	Ме­сяц
Тренд ($D_\mu < 1,45$)	<i>MAPE</i>	0,522	1,112	4,026	1,491	2,694	5,275
	<i>Acc</i>	0,501	0,533	0,562	0,512	0,538	0,389
Случайное блуждание ($D_\mu \in [1,45; 1,55]$)	<i>MAPE</i>	0,533	1,265	3,506	1,675	2,774	5,431
	<i>Acc</i>	0,525	0,504	0,526	0,516	0,521	0,557
Флэт ($D_\mu > 1,55$)	<i>MAPE</i>	0,541	1,486	8,489	1,708	3,148	6,874
	<i>Acc</i>	0,496	0,516	0,444	0,468	0,608	0,625

Из та­бли­цы ви­дно, что в дан­ном экс­пе­ри­мен­те свя­зи ме­жду ка­че­ством клас­си­фи­ка­ции на­прав­ле­ний и со­сто­я­ни­ем про­цес­са об­на­ру­жить не уда­лось. За­то о ее на­ли­чии мож­но го­во­рить в слу­чае оши­бки про­гно­за точеч­ных зна­че­ний. На гра­фике осо­бен­но хо­ро­шо за­мет­но сни­же­ние ка­че­ства про­гно­за во флэте на боль­шом мас­шта­бе (ме­сяц). На дру­гих мас­шта­бах тен­ден­ция бо­лее уме­рен­ная, но так­же при­сут­ствует. Мож­но ос­то­рож­но го­во­рить о на­ли­чии вли­я­ния ло­каль­ных фра­кталь­ных ха­рак­те­ри­стик на точ­ность про­гно­зов – это от­вет на вто­рой во­прос па­ра­гра­фа. Дан­ный факт под­твер­жда­ет­ся и зна­че­ни­ями кор­ре­ля­ций ме­жду ве­ли­чи­на­ми D_μ и *MAPE* мо­де­ли ARFIMA (та­бли­ца 3.6, уча­сток в 32 на­блю­де­ния). Ли­ней­ная по­ло­жи­тель­ная вза­имос­вя­зь ме­жду ни­ми очень сла­бо вы­ра­же­на, од­на­ко все-та­ки при­сут­ствует (ко­эф­фи­ци­ент кор­ре­ля­ции Пир­со­на – не 0).

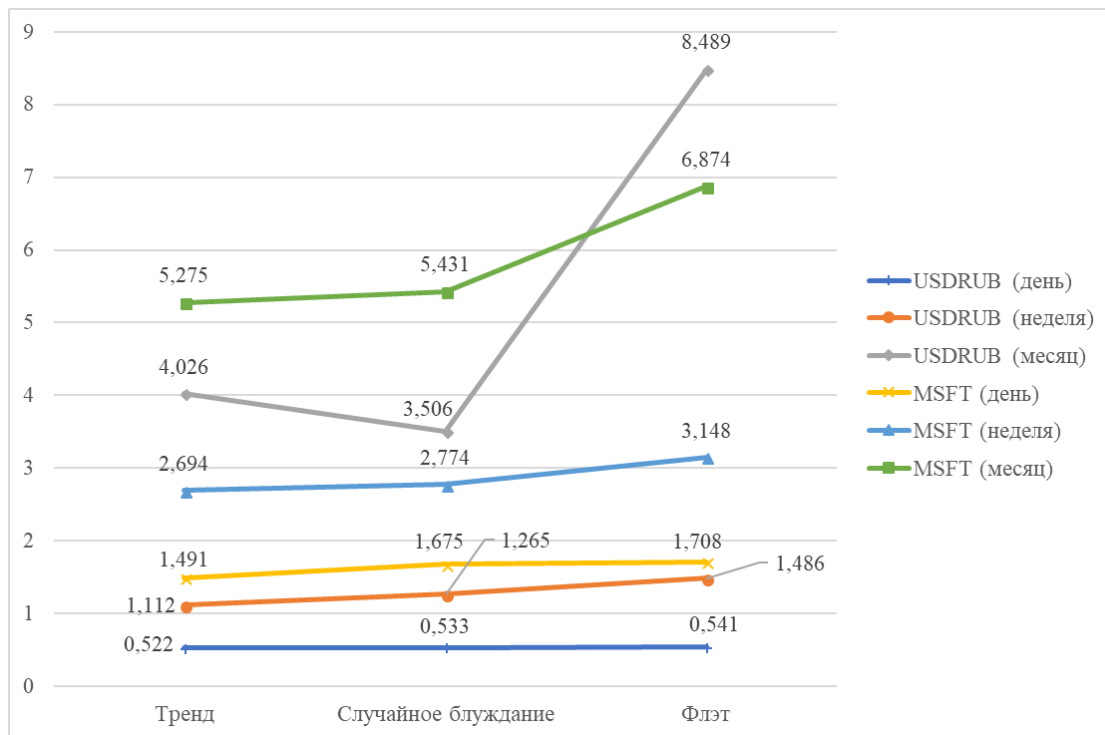


Рис. 3.8. Зависимость метрик от состояния процесса

Таблица 3.6

Коэффициенты корреляции размерности и показателя MAPE

Масштаб	USDRUB	MSFT
День	0,119	0,130
Неделя	0,128	0,075
Месяц	0,214	0,170

Таким образом, задачи последнего этапа исследования были выполнены, хотя результаты и оказались неоднозначными, небесспорными. Частично расширенные результаты данного этапа, дополненного проверкой ряда гипотез, опубликованы в статье [53]. В параграфе 3.4 представлены выводы по всей третьей главе.

3.4. Выводы

В заключительной главе работы была осуществлена апробация разработанной методики, которая должна была ответить на вопрос о применимости и эффективности фрактального анализа для прогнозирования на финансовых рынках. Исследование было проведено в три этапа, каждый из которых позволил решить ряд задач.

1. По результатам этапа, названного автором «наивным», выяснилось, что подход к финансовому ряду как структуре, описываемой статическим показате-

лем фрактальной размерности, оказался несостоятельным и не позволил получать краткосрочные предсказания котировок приемлемой точности, классическая ARIMA-модель дала не худшие прогнозы.

2. Стадия предпрогнозного анализа рядов котировок показала, что финансовые ряды в действительности обладают не только глобальными, но и локальными фрактальными характеристиками, которые на протяжении их длин неоднократно меняются. Было также обнаружено, что характер проанализированных процессов тяготеет к случайному, но периодически демонстрирует как наличие длинной памяти, так и антиперсистентные свойства, причем персистентных участков оказалось больше, исходя из чего можно говорить о возможности прогнозирования динамики рассмотренных финансовых рядов.

3. Наиболее противоречивые результаты принес последний этап исследования. Оказалось, что примененные модели с длинной памятью (ARFIMA) дают точечные прогнозы худшего качества, нежели модели без учета данной особенности рядов (ARIMA). В то же время первые модели лучше предсказали направление изменений котировок, также была обнаружена слабая зависимость точности прогнозов от величины фрактальной размерности на исследуемых участках, что не позволяет говорить о несостоятельности фрактального подхода к анализу и прогнозированию финансовых временных рядов.

В результате поставленный в третьей главе вопрос получил утвердительный ответ, однако данная тема требует дополнительных, более глубоких исследований. В заключении представлены общие выводы по итогам выполненной работы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Целью работы было исследование возможности применения фрактального анализа для краткосрочного прогнозирования котировок финансовых инструментов с высокой точностью.

Для достижения цели были решены все задачи, поставленные во введении.

1. Выполнен анализ области исследований.

По итогам аналитической стадии работы можно сказать, что подходов к проблеме прогнозирования динамики финансовых рынков существует достаточно много, одним из наиболее перспективных является фрактальный (мультифрактальный) подход. Идея его состоит в том, что ряды котировок финансовых инструментов обладают свойствами фракталов, что позволяет описывать их методами фрактальной геометрии и предсказывать будущее поведение.

Обзор научных работ в данной области показал, что авторы не так много внимания уделяют задаче точечного прогнозирования котировок финансовых рядов, в большинстве случаев ограничиваясь выявлением фрактальных свойств рядов и предсказанием критических точек. Учитывая результаты, полученные в третьей главе, такой сдержанный интерес к проблеме понять можно, т. к. задача нетривиальная и сложная.

Также были рассмотрены различные методы фрактального анализа, как простые, так и более точные.

2. Разработана методика исследования возможностей применения фрактального подхода для прогнозирования с использованием инструментальных средств (методов), выбранных в результате аналитической стадии.

Методикой предусмотрено проведение исследования в три этапа:

- осуществление наиболее простого подхода к задаче прогнозирования, описанного в одной из научных статей [47];
- предпрогнозный анализ локальных фрактальных свойств финансовых показателей;
- собственно построение и проверка предсказывающих моделей.

В качестве программной поддержки методики была выбрана собственная реализация ее алгоритмов на языке программирования и анализа данных R.

3. Проведено эмпирическое исследование в соответствии с разработанной методикой. По итогам исследования можно сделать следующие выводы.

«Наивный» подход к решению задачи прогнозирования не оказался эффективным, что объясняется ярко выраженной переменной фрактальной структурой временных рядов финансовых инструментов, это показало предпрогнозное исследование, причем в большей степени это свойство проявляется на более мелких масштабах. Величина фрактальной размерности чутко реагирует на

резкие скачки (провалы), и этим подтверждаются результаты, полученные в других работах. Кроме того, видно, что характер изученных процессов изменения котировок тяготеет к случайному блужданию, но на некоторых участках обладает свойствами персистентности, следовательно, финансовые ряды поддаются моделированию и прогнозированию.

Важнейшим с точки зрения ценности исследования явился этап построения и проверки прогнозных моделей, который принес неоднозначные результаты. Используемые модели с длинной памятью класса ARFIMA показали качество точечных прогнозов ниже, чем модели с краткосрочной памятью ARIMA. Однако ARFIMA-модели смогли дать более высокую точность при классификации направлений будущих изменений котировок, что является интересным фактом, требующим подробного анализа причин такого поведения. Кроме того, справедливость фрактальной гипотезы о существовании различных стадий хаотического процесса и различных возможностях их моделирования подтвердило то, что была обнаружена слабая положительная корреляция точности прогнозов и величины локальной фрактальной размерности. Помимо прочего, исследование показало состоятельность индекса фрактальности как локальной фрактальной характеристики финансовых временных рядов: этот показатель позволяет оценивать размерность ряда с приемлемой точностью на выборках меньшего размера, нежели показатель Херста, вычисленный методом R/S-анализа или ДФА.

Таким образом, цель работы была достигнута. Можно утверждать, что фрактальный подход к анализу и предсказанию динамики финансовых рынков является перспективным, а модели с длинной памятью как его инструмент при некоторых условиях (в частности, предсказании не конкретных точечных значений, а направлений динамики) позволяют увеличивать качество прогнозов в сравнении с традиционными статистическими моделями.

В то же время является очевидным факт, что необходимо дальнейшее изучение проблемы прогнозирования на финансовых рынках с использованием фрактального подхода, т. к. испробованные методы, хоть и выглядят потенциально эффективными, не позволили получать предсказания приемлемой точности. В качестве направления дальнейших исследований в данной области можно предложить рассмотрение и применение методов мультифрактального анализа как подхода, позволяющего более точно описывать реальные самоподобные процессы, в том числе и финансовые рынки. Также перспективным является применение нейросетевых моделей на основе данных, полученных на этапе предпрогнозного фрактального анализа, этот подход в настоящей работе подробно не рассматривался, однако обладает доказанной на практике эффектив-

ностью и потому заслуживает пристального внимания широкого круга исследователей.

Наконец, следует упомянуть практическую значимость результатов выполненной работы, ответить на вопрос: как это можно применить в жизни? Очевидно, что проведенное исследование в большей степени носит теоретический характер, его результаты не предназначены для непосредственной разработки аналитических или торговых систем на их основе. Однако полученные результаты, оказавшиеся в некоторой степени интересными, вполне можно использовать как промежуточные при дальнейших исследованиях применимости фрактального анализа для прогнозирования финансовых рынков. Конечным продуктом таких исследований, практическим воплощением их итогов может стать система поддержки принятия решений в краткосрочном трейдинге, которая анализирует динамику ценовых рядов финансовых инструментов, оценивает их фрактальные характеристики и на основе некоторой системы индикаторов дает рекомендации трейдеру: покупать или продавать актив (войти в рынок) с тем, чтобы через некоторый промежуток времени продать его дороже либо обратно купить дешевле (выйти из рынка). При разработке подобной стратегии важно учитывать не только качество прогнозов, но и транзакционные издержки на совершение сделок (например, комиссионное вознаграждение брокера), которые при малой доходности операций (даже если модель предсказывает очень точно) способны нейтрализовать большую часть прибыли или вовсе превратить выгоды от трейдинга. В качестве одного из вариантов решения данной проблемы можно порекомендовать «сыграть» на так называемом эффекте масштаба: проведении большого количества низкодоходных операций, которые в совокупности позволяют окупать затраты и получать ощутимую прибыль. Однако такой подход недоступен рядовому индивидуальному «спекулянту», поэтому подобные аналитические системы, дающие прогнозы по волатильности на коротких дистанциях, имеют смысл для достаточно крупных игроков на рынке, осуществляющих большие объемы сделок, например, с валютой.

Также одним из приложений фрактального подхода к прогнозированию финансовых временных рядов является формирование инвестиционных портфелей. В процессе исследований в данном направлении были получены результаты, демонстрирующие его перспективность (см. например, работы [13, 15, 62, 63, 64]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александровская Ю. П. Использование фрактальных методов для анализа финансовых рядов [Электронный ресурс] // Вестник Казанского технологического университета. – 2014. – №18. – Режим доступа: <https://cyberleninka.ru/article/n/ispolzovanie-fraktalnyh-metodov-dlya-analiza-finansovyh-ryadov> (дата обращения: 04.06.2022).
2. Андриенко В. М. Фрактальные характеристики временных рядов фондовых индексов в предкризисный период [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.rusnauka.com/16_EISN_2015/Economics/8_194475.doc.htm (дата обращения: 04.06.2022).
3. Арсланов А. Прогнозирование финансовых временных рядов [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://geektimes.com/post/144405> (дата обращения: 04.06.2022).
4. Астраханцева И. А., Дубова С. В. Основные принципы фрактальной теории управления стоимостью компании // Аудит и финансовый анализ. – 2010. – Вып. 2. – С. 320–325.
5. Афанасьева Т. В. Моделирование нечетких тенденций временных рядов. – Ульяновск, УлГТУ, 2013. – 215 с.
6. Балагула Ю. М. Фрактальные характеристики длинной памяти в ценах на электроэнергию. Препринт Ес-03/16. – СПб.: ЕУСПб, 2016. – 13 с.
7. Балагула Ю. М., Абакумова Ю. А. Длинная память на рынке нефти: спектральный подход. Препринт Ес-01/11. – СПб.: ЕУСПб, 2011. – 40 с.
8. Белолипцев И. И., Фархиева С. А. Предсказание финансовых временных рядов на основе индекса фрактальности [Электронный ресурс] // Мир Науки. – 2014. – Вып. 3. – Режим доступа: <https://mir-nauki.com/PDF/01EMN314.pdf> (дата обращения: 04.06.2022).
9. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. – М.: Мир, – 1974. – 406 с.
10. Володин С. Н. Эффективность методов технического анализа при сверхкраткосрочных операциях на фондовом рынке: дис. ... канд. экон. наук: 08.00.10 / Володин Сергей Николаевич. – М. 2013. – 162 с.
11. Гарафутдинов Р. В. Анализ фрактальных свойств финансовых рынков для целей прогнозирования // Математическое и компьютерное моделирование в экономике, страховании и управлении рисками. – 2018. – №3. – С. 56–61.
12. Гарафутдинов Р. В. Обзор методов оценивания фрактальных характеристик финансовых временных рядов // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем: материалы XIII Междунар. науч.-техн. конф. – Пенза, 2018. – С. 97–103.

13. Гарафутдинов Р. В. Применение моделей с длинной памятью для прогнозирования доходности при формировании инвестиционных портфелей // Прикладная математика и вопросы управления. – 2021. – №2. – С. 163–183. DOI: 10.15593/2499-9873/2021.2.10.

14. Гарафутдинов Р. В. Применение моделей с долгой памятью для прогнозирования динамики фондового индекса // Математика и междисциплинарные исследования – 2018: материалы Всерос. науч.-практ. конф. молодых ученых с междунар. участием. – Пермь, 2018. – С. 158–161.

15. Гарафутдинов Р. В., Гурова Е. П. Об одном подходе к формированию инвестиционного портфеля Марковица с применением фрактального анализа // Финансы и бизнес. – 2021. – №1. – С. 77–93. DOI: 10.31085/1814-4802-2021-17-1-77-93.

16. Герега А. Н. Размерности: генезис представлений и физические приложения // Наукові праці ОНАХТ. – 2015. – Вып. 47(1). – С. 33–44.

17. Дегтяренко И. В., Гарматенко А. М., Ярошенко О. А. Идентификация параметров ARFIMA модели фрактального процесса // Наукові праці ДонНТУ. – 2013. – №2 (25). – С. 111–119.

18. Дейнеко Ж. В., Замула А. А., Кириченко Л. О., Радивилова Т. А. Об одном методе моделирования самоподобного стохастического процесса // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія: Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. – 2010. – Вып. 13. – №890. – С. 53–63.

19. Дубовиков М. М., Старченко Н. В. Экономическая физика и фрактальный анализ финансовых временных рядов // Успехи физических наук. – 2011. – Т. 181. – №7. – С. 779–786. DOI: 10.3367/UFNr.0181.201107k.0779.

20. Дука О. С., Сидоренко В. Н. Анализ доходности и волатильности финансовых активов с использованием моделей ARIMA-(E) GARCH и ARFIMA-FIGARCH // Ломоносов 2006: материалы междунар. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых. – М.: МГУ им. Ломоносова, 2006. – С. 204–206.

21. Ефимов М. В. Фундаментальный анализ эмитентов в инвестиционной и регулятивной деятельности государства на рынке ценных бумаг: дис. ... канд. экон. наук: 08.00.10. / Ефимов Максим Вячеславович. – Москва, 2001. – 239 с.

22. Зиненко А. В. R/S анализ на фондовом рынке // Бизнес-информатика. – 2012. – №3 (21). – С. 24–30.

23. Иркутский В. Фундаментальный и технический анализ рынка – что лучше работает? [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://equity.today/fundamentalnyj-analiz-vs-texnicheskij-analiz.html> (дата обращения: 04.06.2022).

24. Казиахмедов Т. Б. Фрактальный анализ и решение задач для выявления особенностей временных рядов при диагностике систем // Вестник НВГУ. – 2015. – №3. – С. 20–26.

25. Кириченко Л. О. Вейвлет-оценивание показателя Херста по временным рядам со значительными циклическими компонентами с применением пакетного вейвлет-преобразования [Электронный ресурс] // АСУ и приборы автоматки. – 2012. – №158. – Режим доступа: <https://cyberleninka.ru/article/n/veyvlet-otsenivanie-pokazatelya-hersta-po-vremennym-ryadam-so-znachitelnymi-tsiklicheskimi-komponentami-s-primeneniem-paketnogo> (дата обращения: 04.06.2022).

26. Кириченко Л. О. Сравнительный мультифрактальный анализ временных рядов методами детрендированного флуктуационного анализа и максимумов модулей вейвлет-преобразования [Электронный ресурс] // АСУ и приборы автоматки. – 2011. – №157. – Режим доступа: <https://cyberleninka.ru/article/n/sravnitelnyu-multifraktalnyu-analiz-vremennyh-ryadov-metodami-detrendirovannogo-fluktuatsionnogo-analiza-i-maksimumov-moduley> (дата обращения: 04.06.2022).

27. Кириченко Л. О., Радивилова Т. А. Исследование долгосрочной зависимости сетевого трафика методом R/S-анализа [Электронный ресурс] // АСУ и приборы автоматки. – 2006. – №135. – Режим доступа: <https://cyberleninka.ru/article/n/issledovanie-dolgosrochnoy-zavisimosti-setevogo-trafika-metodom-r-s-analiza> (дата обращения: 04.06.2022).

28. Кириченко Л. О., Кузьмина О. А., Удовенко С. Г. Мультифрактальный анализ нестабильных финансовых рядов // Системи обробки інформації. – 2010. – Вып. 6 (87). – С. 194–198.

29. Кириченко Л. О., Чалая Л. Э. Комплексный подход к исследованию фрактальных временных рядов // International Journal «Information Technologies & Knowledge». – 2014. – Vol. 8. – No.1. – P. 22–28.

30. Концевая Н. В. Анализ методов заполнения пропусков во временных рядах показателей финансовых рынков [Электронный ресурс] // Вестник ВГТУ. – 2012. – №8. – Режим доступа: <https://cyberleninka.ru/article/n/analiz-metodov-zapolneniya-propuskov-vo-vremennyh-ryadah-pokazateley-finansovyh-rynkov> (дата обращения: 04.06.2022).

31. Кривоносова Е. К. Разработка методов прогнозирования и анализа кредитных и инвестиционных рисков с применением фрактальных и мультифрактальных характеристик: дис. ... канд. экон. наук: 08.00.13 / Кривоносова Екатерина Константиновна. – Пермь, 2015. – 167 с.

32. Кривоносова Е. К., Первадчук В. П., Кривоносова Е. А. Сравнение фрактальных характеристик временных рядов экономических показателей [Электронный ресурс] // Современные проблемы науки и образования. – 2014. –

№6. – Режим доступа: <https://www.science-education.ru/ru/article/view?id=15974> (дата обращения: 05.06.2022).

33. Кривоносова Е. К., Первадчук В. П. Использование фрактального подхода для анализа стабильности многоуровневых структур // Вестник ПНИПУ. Машиностроение, материаловедение. – 2013. – №1. – С. 63–69.

34. Кричевский А. М. Прогнозирование временных рядов с долговременной корреляционной зависимостью: дис. ... канд. техн. наук: 05.13.01 / Кричевский Андрей Михайлович. – Санкт-Петербург, 2008. – 179 с.

35. Кузнецов Н. А., Девятков В. В., Матейчук Р. А., Мищенко И. И. Нейронные сети, их применение и принципы работы // Modern Information Technology 2017: материалы материалы VII Междунар. науч. конф. студентов и молодых ученых. – Одесса, 2017. – С. 11–12.

36. Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? Элементарный очерк идей и методов. 3-е изд., испр. и доп. – М.: МЦНМО, 2001. – 568 с.

37. Малюгин В. И. Рынок ценных бумаг: количественные методы анализа – М.: Дело, 2001. – 318 с.

38. Мандельброт Б., Хадсон Р. Л. (Не)послушные рынки: фрактальная революция в финансах – М.: Издательский дом «Вильямс», 2006. – 408 с.

39. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы – М.: Институт компьютерных исследований, 2010. – 676 с.

40. Мансуров А. К. Прогнозирование валютных кризисов с помощью методов фрактального анализа // Проблемы прогнозирования. – 2008. – №1. – С. 145–158.

41. Моторина И. Ю., Курзенов В. А. Фрактальный анализ динамики коэффициентов финансового состояния предприятий [Электронный ресурс] // Управленческое консультирование. – 2016. – №11 (95). – Режим доступа: <https://cyberleninka.ru/article/n/fraktalnyy-analiz-dinamiki-koeffitsientov-finansovogo-sostoyaniya-predpriyatiy> (дата обращения: 04.06.2022).

42. Нестеров П. Вычисление фрактальной размерности Минковского для плоского изображения [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://habr.com/post/208368> (дата обращения: 04.06.2022).

43. Осипов Г. С. Оценка фрактальности финансовых временных рядов с помощью показателя Херста // Международный журнал гуманитарных и естественных наук. – 2017. – №4. – С. 46–52.

44. Остапенко Е. С., Дунаева Т. А. Прогнозирование временных рядов с долговременной памятью с помощью моделей класса ARFIMA // Економічний вісник НТУУ «КПІ»: збірник наукових праць. – 2010. – №7. – С. 270–273.

45. Петерс Э. Фрактальный анализ финансовых рынков: применение теории хаоса в инвестициях и экономике. – М.: Интернет-трейдинг, 2004. – 304 с.

46. Приложения вейвлет-анализа [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://basegroup.ru/community/articles/wavelet-applications> (дата обращения: 04.06.2022).

47. Прудский М. В. Фрактальный анализ финансовых рынков // Информационные системы и математические методы в экономике: сб. науч. тр. Вып.5. – Пермь, 2012. – С. 109–120.

48. Русяев Я. В. Повышение эффективности использования фундаментального анализа при принятии инвестиционных решений на фондовом рынке РФ: дис. ... канд. экон. наук: 08.00.10 / Русяев Яков Васильевич. – Саранск, 2013. – 178 с.

49. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. Экономическая теория денег, банковского дела и финансовых рынков. – М.: Радио и связь, 1993. – 278 с.

50. Светуных С. Г., Светуных И. С. Методы социально-экономического прогнозирования. Том 2. Модели и методы. Учебник и практикум для академического бакалавриата. – М.: Издательство Юрайт, 2014. – 447 с.

51. Сергейчева А. Н., Логинов С. С. Вейвлет-анализ сигналов систем с динамическим хаосом // Научное сообщество студентов XXI столетия. Технические науки: сб. ст. по мат. XX междунар. студ. науч.-практ. конф. – Новосибирск, 2014. – С. 103–106.

52. Сизов А. А. Модели, способы и программные средства поддержки принятия решений на основе прогнозирования временных рядов с переменной структурой: дис. ... канд. техн. наук: 05.13.17 / Сизов Александр Александрович. – Смоленск, 2014. – 141 с.

53. Симонов П. М., Гарафутдинов Р. В. Моделирование и прогнозирование динамики курсов финансовых инструментов с применением эконометрических моделей и фрактального анализа // Вестник Пермского университета. Сер. «Экономика» = Perm University Herald. Economy. – 2019. – Том 14. – №2. – С. 268–288. DOI: 10.17072/1994-9960-2019-2-268-288.

54. Федер Е. Фракталы: пер. с англ. 2-е изд. – М.: УРСС: Ленанд, 2014. – 256 с.

55. Цветков В. П., Цветков И. В., Гуляева О. С. Фрактальный анализ валютных временных рядов // Финансы и кредит. – 2007. – №9 (249). – С. 30–35.

56. Чижик В. П. Сравнительная характеристика методов фундаментального и технического анализа финансовых активов // Сибирский торгово-экономический журнал. – 2013. – №1 (17). – С. 49–55.

57. Чучуева И. А. Модель прогнозирования временных рядов по выборке максимального подобия: дис. ... канд. техн. наук: 05.13.18 / Чучуева Ирина Александровна. – Москва, 2012. – 154 с.

58. Швагер Дж. Технический анализ. Полный курс. 14-е изд. – М.: Альпина Паблицер, 2018. – 804 с.
59. Яновский Л. П., Лебемянская Е. А. Мультифрактальный подход к прогнозированию величины и динамики волатильности в условиях нестабильности на рынках финансовых активов // Современная экономика: проблемы и решения. – 2010. – №8 (8). – С. 164–171.
60. Edwards R. D., Magee J. Technical Analysis of Stock Trends. – Springfield, Stock Trend Service, 1948. – 431 p.
61. Fama E. F. Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work // The Journal of Finance. – 1970. – Vol. 25. – No.2. – Pp. 383–417.
62. Garafutdinov R. An Optimal Investment Portfolio Constructed with Fractal Analysis and Long Memory Models // In: Rocha A., Isaeva E. (eds) Science and Global Challenges of the 21st Century – Science and Technology. Perm Forum 2021. Lecture Notes in Networks and Systems, vol. 342. Springer, Cham. DOI: 10.1007/978-3-030-89477-1_99.
63. Garafutdinov R., Gurova E. The formation of investment portfolios based on forecasted income with the use of fractal models // Mathematical Modeling. – 2019. – Vol. 3. – No.3. – Pp. 86–88.
64. Garafutdinov R. V. Formation of Investment Portfolios of Two Assets Based on Forecast Returns Using the ARFIMA-GARCH Model // Вестник Волгоградского государственного университета. Экономика. – 2021. – Т. 23. – №2. – С. 130–136. DOI: 10.15688/ek.jvolsu.2021.2.11.
65. Graham B., Dodd D. L. Security analysis. – New York, Whittlesey House, McGraw-Hill Book Co., 1934. – 725 p.
66. Haubrich J. Consumption and Fractional Differencing: Old and New Anomalies // The Review of Economics and Statistics. – 1993. – Vol. 75. – No.4. – Pp. 767–772. DOI: 10.2307/2110038.
67. Majumder M., Hussain A. Forecasting of Indian Stock market Index using Artificial Neural network [Электронный ресурс]. – 2010. – Режим доступа: <http://www.123seminaronly.com/Seminar-Reports/031/47522332-Forecasting-using-Neural-Networks.pdf> (дата обращения: 04.06.2022).
68. Peng C.-K., Hausdorff J. M., Goldberger A. L. Fractal mechanisms in neural control: human heartbeat and gait dynamics in health and disease // In: Self-Organized Biological Dynamics and Nonlinear Control. – 2000. – Pp. 66–96. DOI: 10.1017/CBO9780511535338.006.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Ранжирование программных инструментов методом анализа иерархий

Входными данными для метода оказались 4 альтернативы и 8 критериев оценки. Сначала были рассчитаны локальные приоритеты критериев (таблица 1). Для экономики места в ячейках таблицы критерии были обозначены следующим образом:

- k_1 – вычисление размерности методом минимального покрытия;
- k_2 – вычисление H методом ДФА;
- k_3 – моделирование ARFIMA;
- k_4 – возможность экспорта данных;
- k_5 – легкость освоения;
- k_6 – средства визуализации;
- k_7 – написание собственных модулей;
- k_8 – русский интерфейс.

Таблица 1

Локальные приоритеты критериев

ИС = 0,06 ОС = 0,04

	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	Среднее геометрическое	Локальные приоритеты p	$p \times b$
k_1	1	1	1	3	5	3	7	9	2,701	0,235	0,97
k_2	1	1	1	3	5	3	7	9	2,701	0,235	0,97
k_3	1	1	1	3	5	3	7	9	2,701	0,235	0,97
k_4	0,33	0,33	0,33	1	3	1	5	7	1,185	0,103	1,21
k_5	0,2	0,2	0,2	0,33	1	3	3	5	0,767	0,067	1,33
k_6	0,33	0,33	0,33	1	0,33	1	5	7	0,900	0,078	1,13
k_7	0,14	0,14	0,14	0,2	0,33	0,2	1	3	0,322	0,028	0,99
k_8	0,11	0,11	0,11	0,14	0,2	0,14	0,33	1	0,192	0,017	0,84
Сумма b	4,12	4,12	4,12	11,7	19,9	14,3	35,3	50	11,471	1	8,4

ИС (индекс согласованности) и ОС (оценка согласованности) – внутренние показатели метода для оценки согласованности матриц. Все полученные матрицы оказались хорошо согласованными.

Затем были рассчитаны локальные приоритеты альтернатив по каждому из восьми критериев (таблицы 2–9).

Таблица 2

Локальные приоритеты альтернатив по критерию k_1

ИС = 0

ОС = 0

k_1	MATLAB	R	Fractan	Timing Solution	Среднее геометрическое	Локальные приоритеты p	$p \times b$
MATLAB	1	1	7	7	2,646	0,438	1
R	1	1	7	7	2,646	0,438	1
Fractan	0,143	0,143	1	1	0,378	0,063	1
Timing Solution	0,143	0,143	1	1	0,378	0,063	1
Сумма b	2,286	2,286	16	16	6,047	1	4

Таблица 3

Локальные приоритеты альтернатив по критерию k_2

ИС = 0

ОС = 0

k_2	MATLAB	R	Fractan	Timing Solution	Среднее геометрическое	Локальные приоритеты p	$p \times b$
MATLAB	1	1	9	1	1,732	0,321	1
R	1	1	9	1	1,732	0,321	1
Fractan	0,111	0,111	1	0,111	0,192	0,035	1
Timing Solution	1	1	9	1	1,732	0,321	1
Сумма b	3,111	3,111	28	3,111	5,388	1	4

Таблица 4

Локальные приоритеты альтернатив по критерию k_3

ИС = 0,04307

ОС = 0,05

k_3	MATLAB	R	Fractan	Timing Solution	Среднее геометрическое	Локальные приоритеты p	$p \times b$
MATLAB	1	0,333	7	7	2,010	0,301	1,292
R	3	1	9	9	3,948	0,592	0,921
Fractan	0,142	0,111	1	1	0,354	0,053	0,958
Timing Solution	0,142	0,111	1	1	0,354	0,053	0,958
Сумма b	4,285	1,555	18	18	6,668	1	4,129

Таблица 5

Локальные приоритеты альтернатив по критерию k_4

ИС = 0

ОС = 0

k_4	MATLAB	R	Fractan	Timing Solution	Среднее геометрическое	Локальные приоритеты p	$p \times b$
MATLAB	1	1	1	1	1	0,25	1
R	1	1	1	1	1	0,25	1
Fractan	1	1	1	1	1	0,25	1
Timing Solution	1	1	1	1	1	0,25	1
Сумма b	4	4	4	4	4	1	4

Таблица 6

Локальные приоритеты альтернатив по критерию k_5

ИС = 0,03397

ОС = 0,038

k_5	MATLAB	R	Fractan	Timing Solution	Среднее геометрическое	Локальные приоритеты p	$p \times b$
MATLAB	1	1	0,142	0,2	0,411	0,068	0,959
R	1	1	0,142	0,2	0,411	0,068	0,959
Fractan	7	7	1	3	3,482	0,580	0,939
Timing Solution	5	5	0,333	1	1,699	0,283	1,245
Сумма b	14	14	1,619	4,4	6,003	1	4,102

Таблица 7

Локальные приоритеты альтернатив по критерию k_6

ИС = 0

ОС = 0

k_6	MATLAB	R	Fractan	Timing Solution	Среднее геометрическое	Локальные приоритеты p	$p \times b$
MATLAB	1	1	3	1	1,316	0,3	1
R	1	1	3	1	1,316	0,3	1
Fractan	0,333	0,333	1	0,333	0,439	0,1	1
Timing Solution	1	1	3	1	1,316	0,3	1
Сумма b	3,333	3,333	10	3,333	4,387	1	4

Таблица 8

Локальные приоритеты альтернатив по критерию k_7

ИС = 0

ОС = 0

k_7	MATLAB	R	Fractan	Timing Solution	Среднее геометрическое	Локальные приоритеты p	$p \times b$
MATLAB	1	1	9	9	3	0,45	1
R	1	1	9	9	3	0,45	1
Fractan	0,111	0,111	1	1	0,333	0,05	1
Timing Solution	0,111	0,111	1	1	0,333	0,05	1
Сумма b	2,222	2,222	20	20	6,667	1	4

Таблица 9

Локальные приоритеты альтернатив по критерию k_8

ИС = 0

ОС = 0

k_8	MATLAB	R	Fractan	Timing Solution	Среднее геометрическое	Локальные приоритеты p	$p \times b$
MATLAB	1	1	0,111	1	0,577	0,083	1
R	1	1	0,111	1	0,577	0,083	1
Fractan	9	9	1	9	5,196	0,75	1
Timing Solution	1	1	0,111	1	0,577	0,083	1
Сумма b	12	12	1,333	12	6,928	1	4

Наконец, были рассчитаны глобальные приоритеты альтернатив (таблица 10).

Таблица 10

Глобальные приоритеты альтернатив

	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	Глобальные приоритеты
	0,235	0,235	0,235	0,103	0,067	0,078	0,028	0,017	
MATLAB	0,437	0,321	0,301	0,25	0,068	0,3	0,45	0,083	0,318
R	0,437	0,321	0,592	0,25	0,068	0,3	0,45	0,083	0,386
Fractan	0,062	0,035	0,053	0,25	0,580	0,1	0,05	0,75	0,122
Timing Solution	0,062	0,321	0,053	0,25	0,283	0,3	0,05	0,083	0,174
	Сумма								1,000

Согласно результатам применения метода, наибольший глобальный приоритет получила альтернатива «R».

Научное издание

Гарафутдинов Роберт Викторович

**Моделирование и прогнозирование на финансовых рынках
с применением фрактального анализа**

Монография

Издается в авторской редакции
Компьютерная верстка: *Э. М. Сафина*

Объем данных 3,0 Мб
Подписано к использованию 08.07.2022

Размещено в открытом доступе
на сайте www.psu.ru
в разделе НАУКА / Электронные публикации
и в электронной мультимедийной библиотеке ELiS

Издательский центр
Пермского государственного
национального исследовательского университета
614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15