ПЕРМСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

С. В. Лутманов, Е. Н. Остапенко

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
"Perm University Press"

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

С. В. Лутманов, Е. Н. Остапенко

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ

*Допущено методическим советом
Пермского государственного национального
исследовательского университета в качестве
учебного пособия для студентов, обучающихся
по направлению подготовки бакалавров
«Механика и математическое моделирование»*

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
"Perm University Press"

Пермь 2022

УДК 517.977: 531.3(075.8)
ББК 22.16я73
Л863

Лутманов С. В.

Л863 Оптимальное управление динамическими объектами [Электронный ресурс] : учебное пособие / С. В. Лутманов, Е. Н. Остапенко ; Пермский государственный национальный исследовательский университет. – Электронные данные. – Пермь, 2022. – 1,62 Мб ; 163 с. – Режим доступа: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/uchebnie-posobiya/Lutmanov-Ostapenko-Optimalnoe-upravlenie-dinamicheskimi-obektami.pdf. – Заглавие с экрана.

ISBN 978-5-7944-3896-3

Учебное пособие содержит материалы курса «Оптимальное управление динамическими объектами», читаемого для студентов в ПГНИУ. Приведены теоретический материал, а также иллюстрирующие примеры, которые, по замыслу авторов, должны обсуждаться со студентами в аудитории в процессе практических и семинарских занятий, в том числе с привлечением ЭВМ. Каждый раздел издания включает набор индивидуальных заданий.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки бакалавров «Механика и математическое моделирование», а также будет полезно для студентов других физико-математических направлений и специальностей, изучающих теорию оптимального управления.

Отзывы и замечания можно направлять по адресу mpu@psu.ru.

УДК 517.977: 531.3(075.8)
ББК 22.16я73

Издается по решению ученого совета механико-математического факультета Пермского государственного национального исследовательского университета

Рецензенты: кафедра математики и физики Пермского государственного аграрно-технологического университета (зав. кафедрой – канд. техн. наук, доцент ***В.В. Аюпов***);

доцент кафедры вычислительной математики, механики и биомеханики Пермского национального исследовательского политехнического университета, канд. физ.-мат. наук, доцент ***М.А. Осипенко***

ISBN 978-5-7944-3896-3

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Данное учебное издание предназначено в первую очередь для студентов ПГНИУ, обучающихся по направлению 01.03.03 «Механика и математическое моделирование» и изучающих дисциплину «Оптимальное управление динамическими объектами», а также может быть полезно для студентов других направлений и специальностей, стремящихся усовершенствовать знания по теории оптимального управления.

Пособие состоит из семи разделов. В первом разделе приводятся примеры управляемых динамических объектов, допускающих моделирование обыкновенными векторными дифференциальными уравнениями, а также процедура нормализации этих уравнений. Проводится формализация понятий программного управления и движения динамического объекта, отвечающего выбранному программному управлению.

Во втором разделе рассматривается общая задача теории оптимального управления динамическим объектом и доказывается теорема существования ее решения.

В третьем разделе изучается простейшая задача теории оптимального управления, под которой в пособии понимается задача управления с фиксированным промежутком времени управления, закрепленным левым концом и свободным правым концом траектории. Формулируются и доказываются необходимые условия оптимальности в этой задаче в форме принципа максимума Л.С. Понтрягина. Устанавливаются условия, при выполнении которых функция Л.С. Понтрягина остается постоянной вдоль стационарной пары «программное управление – движение».

В четвертом разделе дается обобщение простейшей задачи теории оптимального управления на случай нефиксированного промежутка времени управления и подвижных концов траектории. Для каждого из таких обобщений формулируются и доказываются необходимые условия оптимальности. Устанавливается связь между задачами вариационного исчисления и теории оптимального управления. Демонстрируется вывод необходимых условий оптимальности в задачах вариационного исчисления на основе принципа максимума Л.С. Понтрягина.

Пятый раздел посвящен достаточным условиям оптимальности в задачах теории оптимального управления. Эти условия выводятся на базе построения функции В.Ф. Кротова. Формулируются требования, при выполнении которых принцип максимума Л.С. Понтрягина служит необходимым и достаточным условием оптимальности в задаче управления динамическим объектом.

В шестом разделе вводится понятие позиционного управления (управления по обратной связи) динамическим объектом. Показано, что для разрывных позиционных управлений моделирование движения динамического объекта как решения дифференциальных уравнений, в которых вектор управляющих параметров меняется в соответствии с выбранным позиционным управлением, не всегда является адекватным. В связи с этим в пособии рассмотрены лишь позиционные управления, непрерывные по совокупности своих аргументов и удовлетворяющие условию Липшица по фазовому вектору.

Седьмой раздел содержит введение в теорию дифференциальных игр. Класс допустимых стратегий игроков ограничивается допустимыми позиционными стратегиями, описанными в предыдущем разделе. Под решением дифференциальной игры в пособии понимается построение пары стратегий игроков, образующей седловую точку в игре. Построение седловой точки осуществляется на базе метода Беллмана–Айзекса.

В пособии приведено много иллюстрирующих примеров, которые, по замыслу авторов, должны обсуждаться со студентами в аудитории в процессе практических и семинарских занятий, в том числе и с привлечением ЭВМ. В каждом разделе имеется набор индивидуальных заданий, которые могут служить в качестве испытаний при прохождении студентами контрольных точек.

По тематике издания существует обширная библиография. Приведенный список литературы содержит лишь те источники, которые непосредственно использовались при написании данного учебного пособия. В дальнейшем они могут активно привлекаться студентами для самостоятельной работы при изучении курса.

Внутри каждого раздела пособия принята самостоятельная нумерация задач, лемм, рисунков, примеров и теорем. Раздел состоит из пунктов, в которых ведется независимая нумерация формул. Ссылки на материалы (за исключением формул), расположенные в пределах данного раздела, нумеруются одним числом, вне данного раздела – двумя числами, первое из которых является номером раздела. Ссылки на формулы нумеруются одним числом только в пределах данного пункта, вне данного пункта, но в пределах данного раздела – двумя числами и т.д.

Авторы будут благодарны читателям, направившим замечания и пожелания по адресу: mpu@psu.ru .

Раздел 1

МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРАВЛЯЕМОГО ДИНАМИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА

1.1. Дифференциальные уравнения движения управляемого динамического объекта

Объекты называются динамическими, если в течение времени в них происходят изменения. В дальнейшем будут рассматриваться только такие динамические объекты, изменения в которых допускают описание системами обыкновенных векторных дифференциальных уравнений. Такие объекты, в частности, изучаются в теоретической механике.

Рассмотрим систему, состоящую из N материальных точек $M_1,\ldots,M_N$ (**рис. 1**).

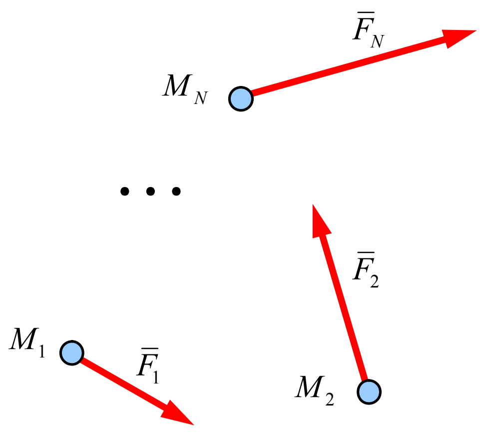

Рис. 1

Движение каждой из них описывается дифференциальным уравнением Ньютона

$$m_\nu \ddot{\bar{r}}_\nu = \bar{F}_\nu\left(t, \bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_N, \dot{\bar{r}}_1, \ldots, \dot{\bar{r}}_N\right), \quad \nu = 1, \ldots, N, \tag{1}$$

где m_ν – масса, $\bar{r}_\nu$ – радиус-вектор, $\nu - й$ точки, а $\bar{F}_\nu$ – равнодействующая всех сил (внутренних и внешних), приложенных к этой точке.

В проекциях на оси какой-либо системы координат уравнения (1) представляют собой систему $3N$ дифференциальных уравнений второго порядка, разрешенных относительно старших производных.

В случае, когда на систему наложены связи, от них освобождаются либо введением их реакций, либо путем перехода к обобщенным координатам. В частности, если на систему наложены голономные идеальные связи

$$\varphi_\alpha\left(t, \bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_N\right) = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, r,$$

то динамику системы описывают уравнениями Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i\left(t, q_1, \cdots, q_n\right), \quad i = 1, \cdots, n,$$

где q_i – обобщенная координата, $T = T\left(t, q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n\right)$ – кинетическая энергия системы, выраженная через обобщенные координаты и их производные, $Q_i\left(t, q_1, \cdots, q_n\right)$ – обобщенная сила, отвечающая i–й координате, $i = 1, \ldots, n$, $n = 3N - r$ – число степеней свободы системы. Заметим, что уравнения Лагранжа второго рода могут быть разрешены относительно старших производных $\ddot{q}_1, \ldots, \ddot{q}_n$.

Таким образом, в общем случае механические объекты описываются системами обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 = Y_1\left(t, y_1, \ldots, y_m, \dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_m\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ddot{y}_m = Y_m\left(t, y_1, \ldots, y_m, \dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_m\right). \end{cases} \tag{2}$$

Проведем замену переменных

$$x_i = y_i, \quad x_{m+i} = \dot{y}_i, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Тогда систему (2) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_{m+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_m = x_{2m}, \\ \dot{x}_{m+1} = Y_1\left(t, x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{2m}\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_{2m} = Y_m\left(t, x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{2m}\right). \end{cases} \tag{3}$$

Введем обозначения

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_m \\ x_{m+1} \\ \dots \\ x_{2m} \end{pmatrix}, \quad \hat{f}(t,x) = \begin{pmatrix} x_{m+1} \\ \dots \\ x_{2m} \\ Y_1(t, x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{2m}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Y_m(t, x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{2m}) \end{pmatrix}, \quad n = 2m .$$

Тогда уравнения (3) запишутся в (векторном) виде

$$\dot{x} = \hat{f}(t,x). \tag{4}$$

Определение 1. *Вектор $x \in R^n$ называется фазовым вектором динамического объекта.*

В теории оптимального управления часть активных сил, действующих на объект, заранее не задана, а назначается управляющим субъектом, который руководствуется при этом некоторыми собственными интересами. Такие силы обычно обозначают векторным параметром $u \in R^r$ и они явным образом прописываются в правых частях дифференциального уравнения движения (4). Тогда оно принимает вид

$$\dot{x} = f(t,x,u). \tag{5}$$

Определение 2. *Вектор $u \in R^r$ называется вектором управляющих параметров динамическим объектом.*

Пример 1. На горизонтальный плоскости находится двухзвенный механический манипулятор (**рис. 2**), каждое звено которого представляет собой абсолютно жесткий стержень длиной l_i, $i = 1,2$.

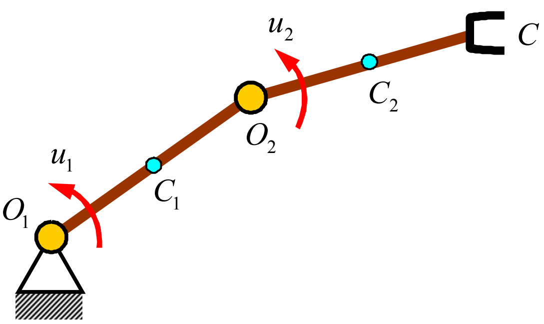

Рис. 2

Первое звено соединено с неподвижным основанием манипулятора вращательной парой O_1, а со вторым звеном – вращательной парой O_2. Масса схвата манипулятора – m, центр масс i-го звена находится в середине стержня – точке C_i, его масса – m_i, момент инерции i-го звена относительно своего центра масс – I_i, $i=1,2$. В соединительных парах могут развиваться управляющие вращательные моменты, соответственно, u_1 и u_2.

На горизонтальной плоскости, в которой расположен манипулятор, введем прямолинейную ось O_1x (**рис. 3**). Обозначим через φ_i угол, образованный i-м звеном манипулятора, $i=1,2$, с осью O_1x.

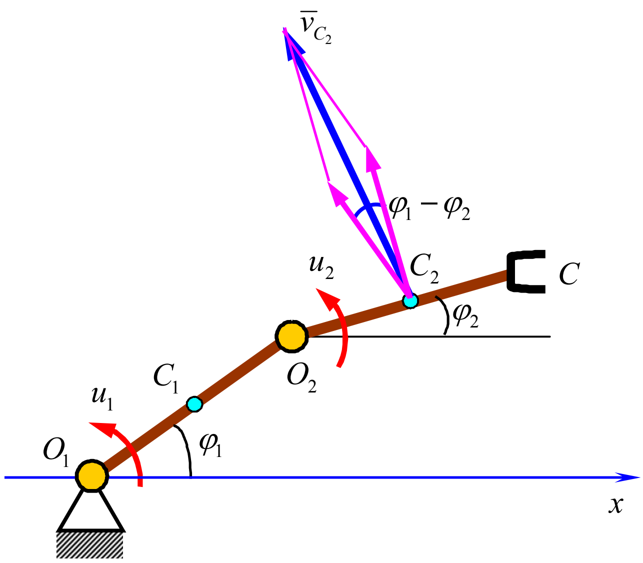

Рис. 3

Запишем дифференциальные уравнения движения манипулятора в форме уравнений Лагранжа второго рода, в которых в качестве обобщенных координат берутся углы φ_i, $i=1,2$. Кинетическая энергия манипулятора определяется по формуле

$$T=T_1+T_2+T_c, \tag{6}$$

где T_i – кинетическая энергия i-го, $i=1,2$, звена, а T_c – кинетическая энергия схвата манипулятора. Последовательно вычисляем

$$T_1=\frac{1}{2}\left(I_1\dot{\varphi}_1^2+m_1\overbrace{v_{C_1}^2}^{\left(\frac{l_1}{2}\dot{\varphi}_1\right)^2}\right)=\frac{1}{8}\left(4I_1\dot{\varphi}_1^2+m_1l_1^2\dot{\varphi}_1^2\right)=\frac{4I_1+m_1l_1^2}{8}\dot{\varphi}_1^2,$$

$$T_2 = \frac{1}{2}\left(I_2\dot{\varphi}_2^2 + m_2 \overbrace{v_{C_2}^2}^{v_{O_2}^2+2v_{O_2}v_{C_2O_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)+v_{C_2O_2}^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(I_2\dot{\varphi}_2^2 + m_2\left(\overbrace{v_{O_2}^2}^{l_1^2\dot{\varphi}_1^2} + 2\overbrace{v_{O_2}}^{l_1\dot{\varphi}_1}\overbrace{v_{C_2O_2}}^{\frac{l_2}{2}\dot{\varphi}_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1) + \overbrace{v_{C_2O_2}^2}^{\frac{l_2^2}{4}\dot{\varphi}_2^2} \right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[I_2\dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + m_2\frac{l_2^2}{4}\dot{\varphi}_2^2 + 2m_2 l_1\frac{l_2}{2}\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1-\varphi_2) \right] =$$

$$= \frac{1}{8}\left[4I_2\dot{\varphi}_2^2 + 4m_2 l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + m_2 l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + 4m_2 l_1 l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1-\varphi_2) \right],$$

$$T_c = \frac{1}{2}m \overbrace{v_c^2}^{v_{O_2}^2+2v_{O_2}v_{CO_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)+v_{CO_2}^2} = \frac{1}{2}m\left(\overbrace{v_{O_2}^2}^{l_1^2\dot{\varphi}_1^2} + 2\overbrace{v_{O_2}}^{l_1\dot{\varphi}_1}\overbrace{v_{CO_2}}^{l_2\dot{\varphi}_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1) + \overbrace{v_{CO_2}^2}^{l_2^2\dot{\varphi}_2^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}m\left[l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + 2l_1 l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1-\varphi_2) \right].$$

Подставляя найденные величины энергий составных частей манипулятора в (6), находим

$$T = \frac{1}{8}\dot{\varphi}_1^2\left[l_1^2(m_1+4m_2+4m) + 4I_1 \right] + \frac{1}{8}\dot{\varphi}_2^2\left[l_2^2(m_2+4m) + 4I_2 \right] + \frac{1}{2}(2m+m_2)l_1 l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1-\varphi_2).$$

Введем обозначения

$$a = \frac{1}{4}\left[l_1^2(m_1+4m_2+4m) + 4I_1 \right], \quad b = \frac{1}{4}\left[l_2^2(m_2+4m) + 4I_2 \right], \quad c = \frac{1}{2}(2m+m_2)l_1 l_2 .$$

Тогда выражение для кинетической энергии манипулятора принимает вид

$$T = \frac{1}{8}\dot{\varphi}_1^2\overbrace{\left[l_1^2(m_1+4m_2+4m) + 4I_1 \right]}^{4a} + \frac{1}{8}\dot{\varphi}_2^2\overbrace{\left[l_2^2(m_2+4m) + 4I_2 \right]}^{4b} + \overbrace{\frac{1}{2}(2m+m_2)l_1 l_2}^{c}\,\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1-\varphi_2) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[a\dot{\varphi}_1^2 + b\dot{\varphi}_2^2 + 2c\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1-\varphi_2) \right].$$

Справедливы равенства

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}_1} = a\dot{\varphi}_1 + c\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1-\varphi_2), \quad \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}_1}\right) = a\ddot{\varphi}_1 + c\ddot{\varphi}_2\cos(\varphi_1-\varphi_2) - c\dot{\varphi}_2(\dot{\varphi}_1-\dot{\varphi}_2)\sin(\varphi_1-\varphi_2), \\ \dfrac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}_2} = b\dot{\varphi}_2 + c\dot{\varphi}_1\cos(\varphi_1-\varphi_2), \quad \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}_2}\right) = b\ddot{\varphi}_2 + c\ddot{\varphi}_1\cos(\varphi_1-\varphi_2) - c\dot{\varphi}_1(\dot{\varphi}_1-\dot{\varphi}_2)\sin(\varphi_1-\varphi_2), \\ \dfrac{\partial T}{\partial\varphi_1} = -c\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sin(\varphi_1-\varphi_2), \quad \dfrac{\partial T}{\partial\varphi_2} = c\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sin(\varphi_1-\varphi_2). \end{cases} \tag{7}$$

Обобщенной силой Q_i, отвечающей обобщенной координате φ_i, является управляющий вращательный момент u_i, $i = 1, 2$.

Используя формулы (7), выпишем уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_i} = Q_i, \quad i = 1, 2 .$$

В результате получим

$$\begin{cases} a\ddot{\varphi}_1 + c\ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + c\dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = u_1, \\ c\ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + b\ddot{\varphi}_2 - c\dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = u_2. \end{cases} \tag{8}$$

Разрешим дифференциальные уравнения (8) относительно старших производных

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_1 = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2bu_1 - 2bc\dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - 2cu_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - c^2\dot{\varphi}_1^2 \sin\left[2(\varphi_1 - \varphi_2)\right]}{ab - c^2 \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2)}, \\ \ddot{\varphi}_2 = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2au_2 + 2ac\dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - 2cu_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + c^2\dot{\varphi}_2^2 \sin\left[2(\varphi_1 - \varphi_2)\right]}{ab - c^2 \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2)}. \end{cases}$$

Полученную систему двух дифференциальных уравнений второго порядка относительно переменных φ_1, φ_2 заменой переменных

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1, \\ x_2 = \varphi_2, \\ x_3 = \dot{\varphi}_1, \\ x_4 = \dot{\varphi}_2, \end{cases}$$

сведем к системе четырех дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3, \\ \dot{x}_2 = x_4, \\ \dot{x}_3 = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2bu_1 - 2bcx_4^2 \sin(x_1 - x_2) - 2cu_2 \cos(x_1 - x_2) - c^2x_3^2 \sin\left[2(x_1 - x_2)\right]}{ab - c^2 \cos^2(x_1 - x_2)}, \\ x_4 = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2au_2 + 2acx_3^2 \sin(x_1 - x_2) - 2cu_1 \cos(x_1 - x_2) + c^2x_4^2 \sin\left[2(x_1 - x_2)\right]}{ab - c^2 \cos^2(x_1 - x_2)}, \end{cases} \tag{9}$$

относительно переменных x_1, x_2, x_3, x_4. ►

1.2. Индивидуальное задание 1 «Моделирование управляемого движения»

Для заданного управляемого механизма:

– вывести дифференциальные уравнения движения в форме уравнений Лагранжа второго рода (в указанных на **рис.5–14** обобщенных координатах);

– разрешить уравнения Лагранжа относительно обобщенных ускорений;

– нормализовать полученные уравнения.

Пример выполнения индивидуального задания 1

Блоки 1, 2 и 3, имеющие одинаковые радиусы r и массы m, могут вращаться вокруг параллельных горизонтальных осей, совпадающих с их осями симметрии (**рис. 4**). При этом оси блоков 2 и 3 неподвижны, а блок 1 подвешен на пружине жесткости c. Нить 4 охватывает блок 1, а ее концы намотаны на блоки 2 и 3. К блоку 3 приложен управляющий момент $\bar{u}_1$, а к блоку 2 – управляющий момент $\bar{u}_2$. Нить по блокам не скользит и остается натянутой во все время движения. Блоки считать сплошными однородными дисками.

В качестве обобщенных координат принять поворот на угол φ блока 1 вокруг своей оси вращения и сдвиг центра блока 1 по вертикали – x. Обобщенные координаты x, φ изображены на рис. 4. Считать, что для $x = 0$ пружина не растянута.

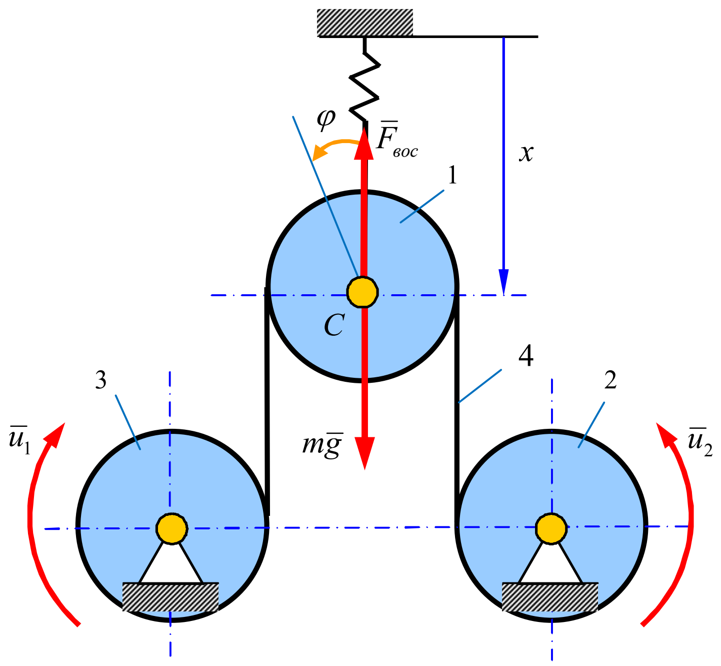

Рис. 4

Решение. Кинетическая энергия системы

$$T = T_1 + T_2 + T_3,$$

где

$$\begin{cases} T_1 = \dfrac{1}{2} m\dot{x}^2 + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{m}{2}r^2\right)\dot{\varphi}^2, \\ T_2 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{m}{2}r^2\right)\dot{\varphi}_2^2, \\ T_3 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{m}{2}r^2\right)\dot{\varphi}_3^2. \end{cases}$$

Последовательно вычисляем

$$\begin{cases} \overbrace{v_{M_2}}^{r\dot{\varphi}_2} = \dot{x} - r\dot{\varphi}, \\ \overbrace{v_{M_3}}^{r\dot{\varphi}_3} = \dot{x} + r\dot{\varphi}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\varphi}_2 = \dfrac{\dot{x} - r\dot{\varphi}}{r} = \dfrac{\dot{x}}{r} - \dot{\varphi}, \\ \dot{\varphi}_3 = \dfrac{\dot{x} + r\dot{\varphi}}{r} = \dfrac{\dot{x}}{r} + \dot{\varphi}. \end{cases}$$

Тогда

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{m}{4} r^2\dot{\varphi}^2 + \frac{m}{4} r^2 \left(\frac{\dot{x}}{r} - \dot{\varphi}\right)^2 + \frac{m}{4} r^2 \left(\frac{\dot{x}}{r} + \dot{\varphi}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{m}{4} r^2\dot{\varphi}^2 + 2\cdot\frac{m}{4}\dot{x}^2 + 2\cdot\frac{m}{4} r^2\dot{\varphi}^2 = m\dot{x}^2 + \frac{3m}{4} r^2\dot{\varphi}^2 \quad \Rightarrow$$

$$T = m\dot{x}^2 + \frac{3m}{4} r^2\dot{\varphi}^2.$$

Обобщенная сила, отвечающая координате φ:

$$Q_\varphi: \quad \varphi = \varphi + \delta\varphi, \quad x = const \quad \Rightarrow$$

$$A_g = 0, \quad A_{вос} = 0, \quad A_{u_1} = u_1 \frac{r\delta\varphi}{r} = u_1\delta\varphi, \quad A_{u_2} = -u_2 \frac{r\delta\varphi}{r} = -u_2\delta\varphi \quad \Rightarrow$$

$$Q_\varphi \delta\varphi = u_1\delta\varphi - u_2\delta\varphi \quad \Rightarrow \quad Q_\varphi = u_1 - u_2.$$

Обобщенная сила, отвечающая координате x:

$$Q_x: \quad x = x + \delta x, \quad \varphi = const \quad \Rightarrow$$

$$A_g = mg\delta x, \quad A_{вос} = -c\cdot\delta x, \quad A_{u_1} = u_1 \frac{\delta x}{r}, \quad A_{u_2} = u_2 \frac{\delta x}{r} \quad \Rightarrow$$

$$Q_x \delta x = mg\delta x - cx\cdot\delta x + u_1 \frac{\delta x}{r} + u_2 \frac{\delta x}{r} \quad \Rightarrow \quad Q_x = mg - cx + \frac{u_1}{r} + \frac{u_2}{r}.$$

Уравнения Лагранжа

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial x} = Q_x, \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2m\ddot{x} = mg - cx + \dfrac{u_1}{r} + \dfrac{u_2}{r}, \\ \dfrac{3m}{2} r^2\ddot{\varphi} = u_1 - u_2. \end{cases}$$

Уравнения Лагранжа, разрешенные относительно обобщенных ускорений

$$\begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{1}{2}g - \dfrac{cx}{2m} + \dfrac{u_1}{2mr} + \dfrac{u_2}{2mr}, \\ \ddot{\varphi} = \dfrac{2}{3mr^2}u_1 - \dfrac{2}{3mr^2}u_2. \end{cases}$$

Замена переменных

$$\begin{cases} x_1 = x, \\ x_2 = \varphi, \\ x_3 = \dot{x}, \\ x_4 = \dot{\varphi}. \end{cases}$$

Уравнения движения в нормальной форме

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3, \\ \dot{x}_2 = x_4, \\ \dot{x}_3 = \dfrac{1}{2}g - \dfrac{cx_1}{2m} + \dfrac{u_1}{2mr} + \dfrac{u_2}{2mr}, \\ \dot{x}_4 = \dfrac{2}{3mr^2}u_1 - \dfrac{2}{3mr^2}u_2. \end{cases} \blacktriangleright$$

Задания для самостоятельного решения

№ 1. Однородный круглый цилиндр 1 массы m_1 и радиуса R катается без скольжения по горизонтальной плоскости (**рис. 5**).

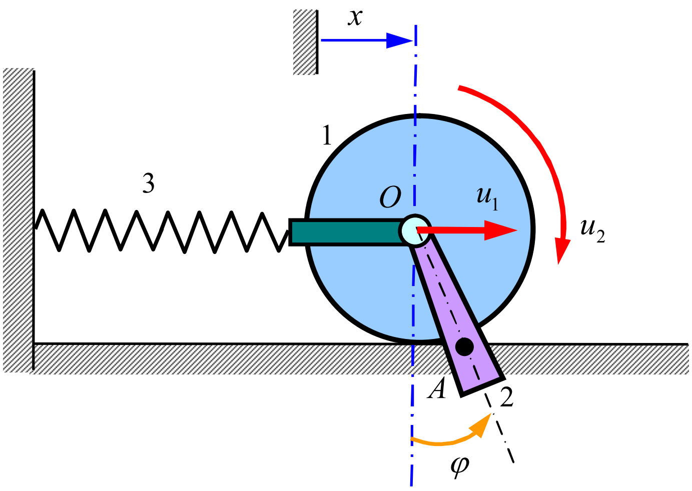

Рис. 5

Центр цилиндра O соединен горизонтальной пружиной 3 с неподвижной опорой. Жесткость пружины c. К центру цилиндра O приложена управляющая горизонтальная сила u_1. К оси цилиндра шарнирно прикреплен физический маятник 2 массы m_2. Момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку O перпендикулярно основанию цилиндра I_O. На маятник действует пара сил с управляющим моментом u_2. Центр масс маятника находится в точке A, $OA = h$. В качестве обобщенных координат принять угол φ и расстояние x. При $x = 0$ пружину считать нерастянутой.

№ 2. По наклонной грани призмы 1, образующей угол α с горизонтом, скатывается без скольжения однородный круглый цилиндр 2 массы m_2 (**рис.6**).

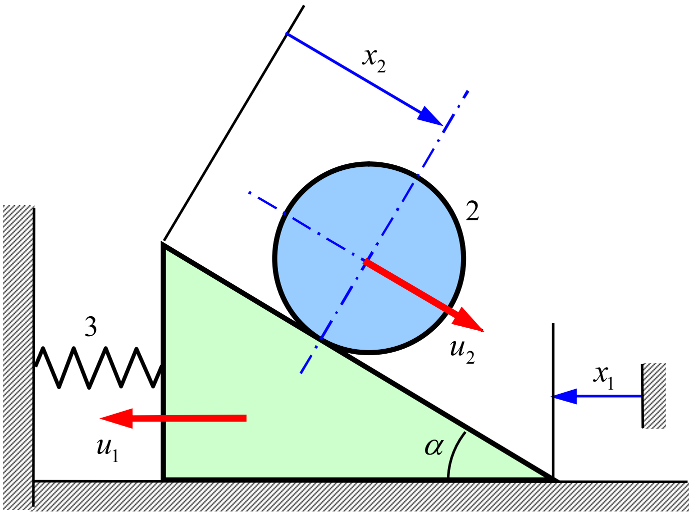

Рис. 6

При этом призма перемещается по гладкой горизонтальной плоскости, деформируя пружину 3, соединяющую ее с вертикальной стеной. Масса призмы m_1, жесткость пружины c, ось пружины горизонтальна. На призму действует горизонтальная управляющая сила u_1, а к оси цилиндра приложена управляющая сила u_2, действующая вдоль наклонной поверхности призмы. За обобщенные координаты принять x_1 – горизонтальное смещение призмы и x_2 – смещение оси цилиндра вдоль наклонной поверхности призмы. При $x_1 = 0$ пружина нерастянута.

№ 3. В брусе 1 массы m_1 сделана цилиндрическая выточка радиуса R, в которой катается однородный круглый цилиндр 2 массы m_2 и радиуса r. На цилиндр действует управляющий момент u_1. Оси выточки и цилиндра параллельны (см. **рис. 7**). Брус движется по горизонтальной плоскости под действием горизонтальной управляющей силы u_2 и силы упругости пружины 3 жесткости c. Ось пружины горизонтальна. В качестве обобщенных координат принять угол φ и расстояние x. При $x = 0$ пружину считать нерастянутой.

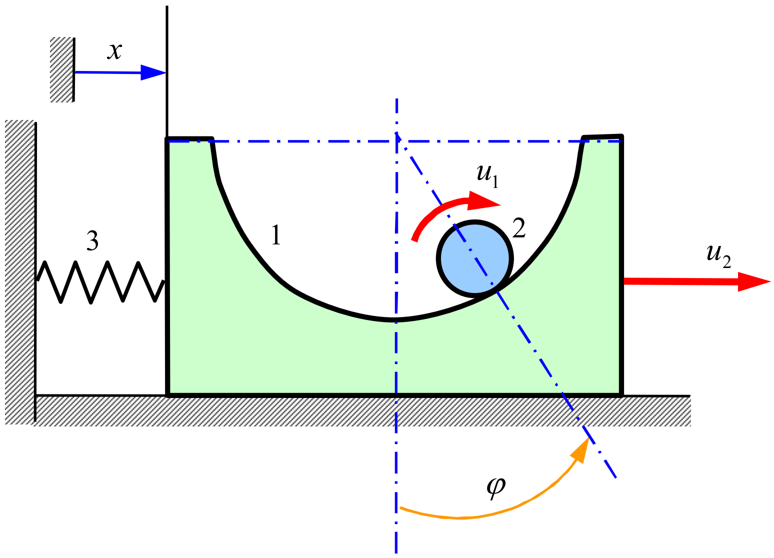

Рис. 7

№ 4. Однородный круглый цилиндр 1 массы m_1 катится без скольжения по наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом, под действием управляющего момента u_1 (**рис. 8**).

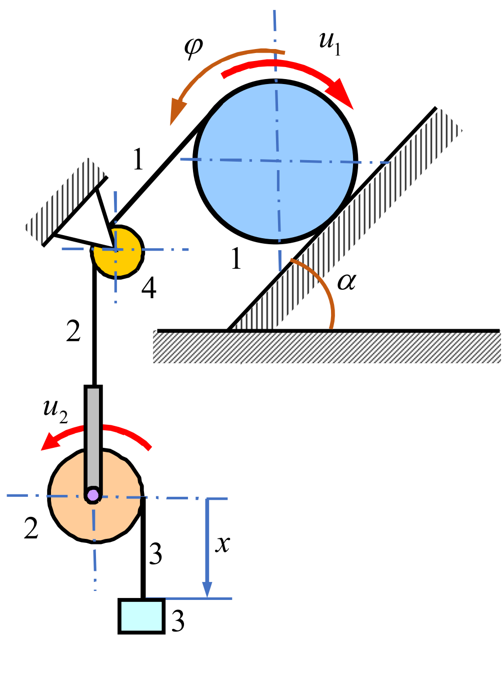

Рис. 8

На цилиндр намотана нить, свободный участок которой перекинут через блок 4, и на его конце подвешен подвижный блок 2 массы m_2. На блок 2 под действием управляющего момента u_2 наматывается другая нить, на конце которой находится груз 3 массы m_3. Обе нити не растяжимы и по блоку и цилиндру не скользят. Участки нитей 2 и 3 во время движения остаются вертикальными, а участок нити 1 – параллельным линии наибольшего ската наклонной плоскости. Обобщенные координаты x и φ показаны на **рис. 8**.

№ 5. Однородный круглый цилиндр 1 массы m_1 и радиуса r_1 вращается вокруг неподвижной горизонтальной оси, совпадающей с его продольной осью симметрии, под действием управляющего момента $\bar{u}_1$ (**рис. 9**).

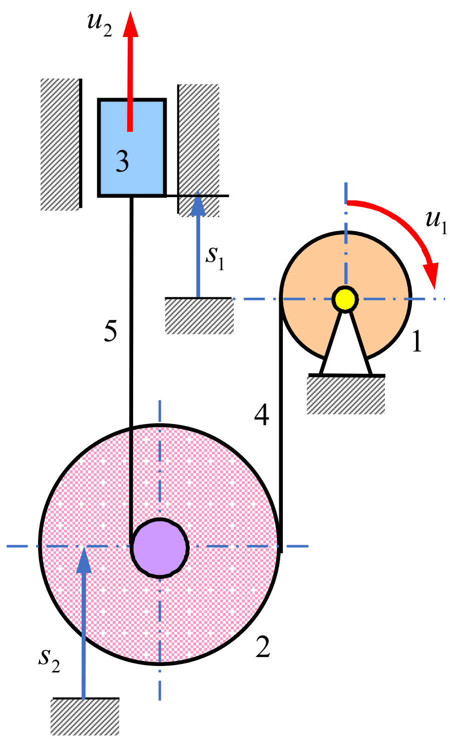

Рис. 9

На поверхность этого цилиндра, а также на внешнюю ступень подвижного блока 2 массы m_2 намотаны концы нерастяжимой нити 4. Один конец другой нерастяжимой нити 5 намотан на внутреннюю ступень блока 2, а ее второй конец прикреплен к ползуну 3 массы m_3. К ползуну 3, который движется в вертикальных направляющих, приложена управляющая сила $\bar{u}_2$. При этом нити по поверхности блока не скользят, а их свободные участки остаются вертикальными. Радиус инерции блока относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно вертикальной плоскости, равен ρ. Радиусы его наружной и внутренней ступеней равны R и r соответственно. При вычислениях считать $m_2 = 3m_1$, $m_3 = m_1$, $R = 2r$, $\rho = r$. В качестве обобщенных координат взять линейные координаты s_1 и s_2, изображенные на **рис. 9**.

№ 6. Грузы 1 массы m_1 и 2 массы m_2 связаны нерастяжимым тросом, перекинутым через блоки 5, 6 и охватывающим блок 4 (**рис. 10**).

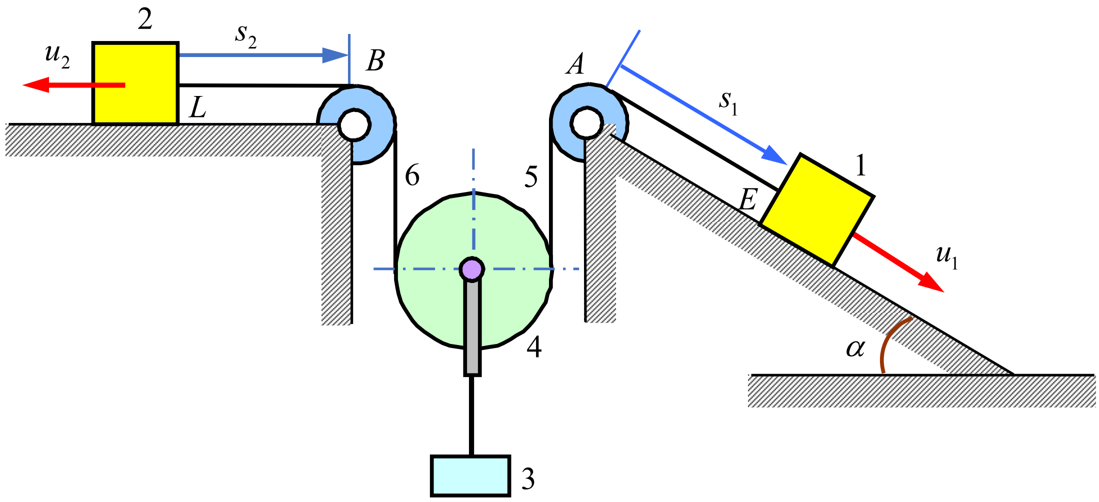

Рис. 10

На грузы 1 и 2 действуют управляющие силы $\bar{u}_1$ и $\bar{u}_2$, соответственно. Масса блока 4 равна m_4, к оси этого блока подвешен груз 3 массы m_3. Оси блоков 5 и 6 параллельны и лежат в одной горизонтальной плоскости. Трос по блокам не скользит. Участки AE и BL троса параллельны опорным плоскостям грузов 1 и 2. Опорная плоскость груза 1 является гладкой и наклонена к горизонту под углом α. Опорная плоскость груза 2 горизонтальна, коэффициент трения скольжения между грузом 2 и этой плоскостью f. Массой блоков 5 и 6 и троса пренебречь, а блок 4 рассматривать как однородный диск. При вычислениях положить $m_4 = 0,2m_1 = 0,4m_3$, $m_2 = 7,5m_4$, $\alpha = 30^0$, $f = 0,2$. В качестве обобщенных координат взять линейные координаты s_1 и s_2, изображенные на **рис. 10.**

№ 7. В планетарном механизме, расположенном в горизонтальной плоскости, шестерни 1 и 2 вращаются вокруг общей вертикальной оси симметрии (см. **рис. 11**).

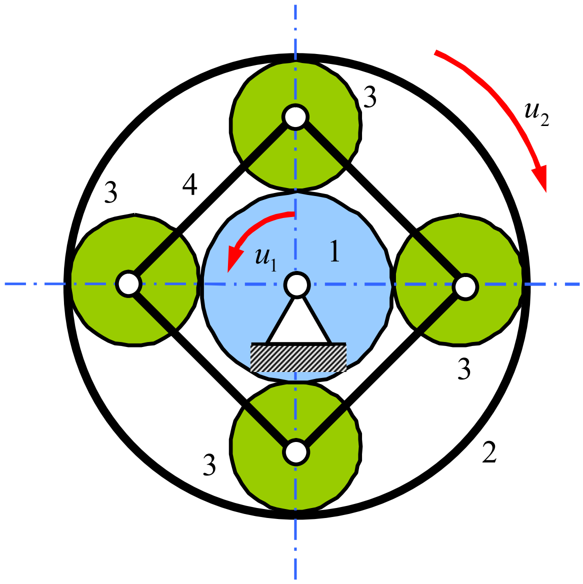

Рис. 11

К шестерне 1 приложен управляющий момент $\bar{u}_1$, к шестерне 2 – управляющий момент – $\bar{u}_2$. Четыре одинаковых шестерни 3 находятся в зацеплении с шестернями 1 и 2. Центры их соединены жесткой квадратной рамой 4 таким образом, что эти шестерни могут вращаться вокруг вертикальных осей, проходящих через вершины рамы. Массы шестерен 1, 2 и 3 равны m_1, m_2 и m_3, а радиусы шестерен 1 и 2 – r_1 и r_2, соответственно. Шестерни 1 и 3 рассматривать как сплошные однородные диски, шестерню 2 – как однородное кольцо. При вычислении принять $m_1 = m_2 = 4m_3$. Массой рамы пренебречь. В качестве обобщенных координат взять углы поворота φ_1 и φ_2 шестерни 1 и 2 соответственно.

№ 8. В планетарном механизме, расположенном в горизонтальной плоскости, шестерня 1 массы M и жесткая треугольная рама 2 могут вращаться независимо вокруг вертикальной оси O (см. **рис. 12**). К шестерне 1 приложен управляющий момент $\bar{u}_1$, к раме – управляющий момент $\bar{u}_2$. С вершинами рамы A и B шарнирно скреплены центры двух одинаковых шестерен 3 и 4, находящихся в зацеплении с шестерней 1. Масса каждой из этих шестерен m. Шестерни 3 и 4 рассматривать как сплошные однородные диски радиусов r, шестерню 1 – как однородное кольцо радиуса R. При вычислениях положить $M = 2m$, $R = 3r$. Массой рамы пренебречь. В качестве обобщенных координат взять углы поворота φ_1 и φ_2 шестерни 1 и рамы 2 соответственно.

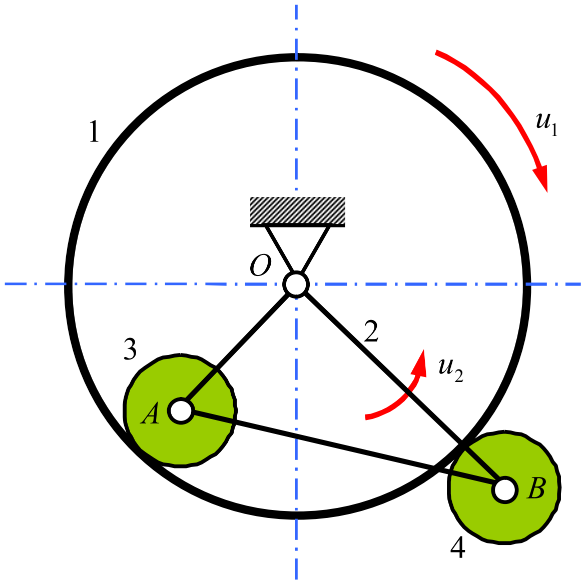

Рис. 12

№ 9. Однородный круглый цилиндр 1 массы m_1 и тонкостенный цилиндр 2 массы m_2 обмотаны двумя нерастяжимыми нитями (**рис. 13**).

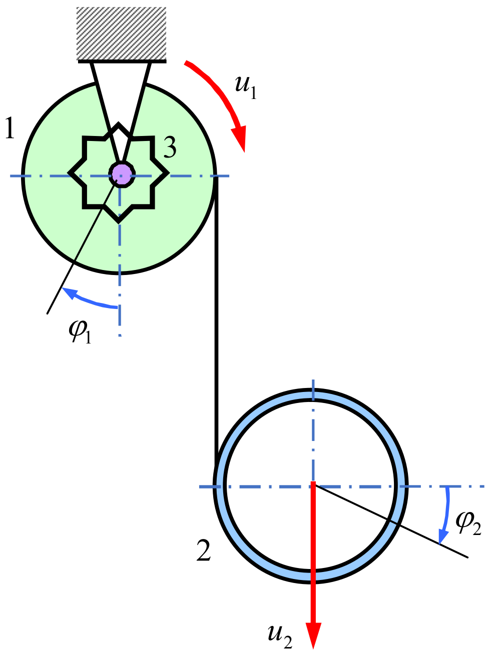

Рис. 13

Цилиндр 1 вращается вокруг неподвижной горизонтальной оси, совпадающей с его продольной осью симметрии. Цилиндр 2 падает так, что его ось остается параллельной оси цилиндра 1. Нити по цилиндрам не скользят. Радиусы цилиндров равны r_1 и r_2 соответственно. К цилиндру 1 прикреплен конец спиральной пружины 3 жесткости c. Другой конец пружины закреплен неподвижно. Вокруг оси цилиндра 1 действует управляющий момент u_1, а к центру цилиндра 2 приложена управляющая сила u_2, направление которой в любой момент времени вертикально. В начальный момент пружина была не деформирована. За обобщенные координаты взять углы φ_1 и φ_1 поворота цилиндра 1 и цилиндра 2 соответственно.

№ 10. Стержень 1 длины l шарнирно прикреплен в точках A и B к ползунам 3 и 4 одинаковой массы m. Ползун 3 скользит по вертикальным направляющим, а ползун 4 – по горизонтальным (**рис. 14**).

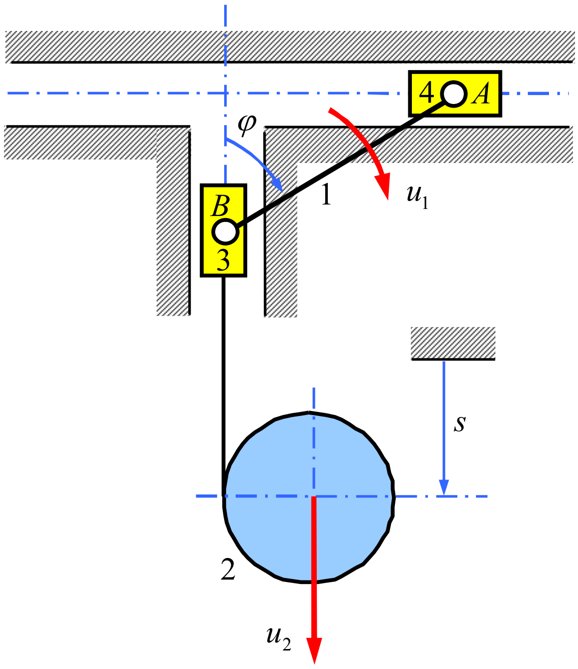

Рис. 14

К ползуну 3 прикреплены концы двух нерастяжимых нитей, которые намотаны на однородный круглый цилиндр 2. Концы нитей, находящиеся на цилиндре, закреплены на нем. Цилиндр имеет массу M и падает так, что его ось остается перпендикулярной плоскости, в которой движется стержень. К стержню 1 приложен управляющий момент u_1, вращающий стержень в плоскости чертежа относительно оси, проходящей через точку B, а к центру цилиндра 2 – управляющая сила u_2, направление которой в любой момент времени вертикально. За обобщенные координаты взять величины φ и s, изображенные на **рис. 14**.

1.3. Программные управления

В теории оптимального управления приняты два подхода к формированию управляющих воздействий на динамический объект в процессе его функционирования: позиционный и программный. Первый из них предполагает использование информации о текущем времени и реализовавшемся фазовом векторе объекта; второй – только о текущем времени. Адекватной сферой применения позиционного управления являются конфликтно – управляемые динамические системы, математическими моделями которых служат дифференциальные игры. Подробно этот аспект управления будет обсуждаться в последнем разделе пособия.

В математическом плане программное управление можно отождествить с функцией одного переменного (текущего времени), а позиционное – с функцией $n+1$ переменного, где n – размерность фазового вектора, поэтому, формально, множество программных управлений включено в множество позиционных. Вместе с тем задачи программного управления представляют самостоятельный интерес. Это объясняется тем, что в ряде случаев результат, достигаемый в классе позиционных управлений, может быть получен и в классе программных управлений. Техническая же реализация программного управления значительно проще позиционного управления. Кроме того, решение задачи программного управления нередко используется как вспомогательное средство решения задачи позиционного управления.

Пусть движение некоторого динамического объекта допускает описание обыкновенным векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f(t, x, u), \tag{1}$$

где $t \in R^1$ – текущее время, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \in R^n$ – фазовый вектор объекта, $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \cdots \\ u_r \end{pmatrix} \in R^r$ – вектор управляющих параметров, $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \cdots \\ f_r \end{pmatrix}$: $R^{n+r+1} \to R^n$ – вектор-функция, описывающая как внутреннее устройство объекта, так и воздействие различных внешних факторов. Относительно функции f обычно предполагается, что она непрерывна по совокупности переменных и удовлетворяет локальному условию Липшица (равномерно по t и u) по переменной x. Последнее означает, что для любой ограниченной области $G \subset R^n$ найдется константа $\lambda_G > 0$, для которой при всех $x, x' \in G$ справедливо неравенство

$$\|f(t,x,u) - f(t,x,u')\| \le \lambda_G \|x - x'\|, \quad u \in R^r,\ t \in R^1.$$

В теории оптимального управления часто применяются следующие обозначения. Пусть $z : R^1 \to R^n$ – некоторая функция. Символом $z(t)$, где $t \in R^1$, обозначают значение функции z в точке $t \in R^1$, а символом $z(\cdot)$ – саму функцию как элемент функционального пространства.

Для того, чтобы вектор фазовых координат был определен в виде функции времени $x(\cdot)$ на некотором отрезке $[t_0, T]$, необходимо в начальный момент времени t_0 задать начальное условие $x(t_0) = x_0$ и вектор управляющих параметров $u(\cdot)$ как функцию времени на том же отрезке времени $[t_0, T]$.

Определение 1. *Функцию $u : [t_0, T] \to R^r$ назовем программным управлением объектом на отрезке времени $[t_0, T]$.*

В большинстве прикладных задач программные управления объектом принадлежат классу $D^0[t_0, T]$ – кусочно-непрерывных функций, т.е. таких функций $u : [t_0, T] \to R^r$, которые непрерывны в каждой точке $t \in [t_0, T]$, за исключением, быть может, лишь конечного числа точек $\tau_1, \dots, \tau_m \in [t_0, T]$, в которых функция $u(\cdot)$ может терпеть разрывы первого рода. В этих точках существуют конечные пределы

$$\lim_{t \to \tau_i - 0} u(t) = u(\tau_i - 0), \quad \lim_{t \to \tau_i + 0} u(t) = u(\tau_i + 0),$$

для которых, вообще говоря,

$$u(\tau_i - 0) \ne u(\tau_i + 0), \quad i = 1, \dots, m.$$

В теории оптимального управления принимается, что в точках разрыва программное управление непрерывно справа, т.е.

$$\lim_{t \to \tau_i + 0} u(t) = u(\tau_i), \quad i = 1, \dots, m.$$

В теоретических исследованиях часто приходится рассматривать более широкие классы программных управлений, такие как $L_p^r[t_0, T]$, $1 \le p \le \infty$ – пространство измеримых вектор-функций $u(\cdot)$, для которых функция $\|u(\cdot)\|^p$ суммируема на $[t_0, T]$ в смысле Лебега.

Кусочно-непрерывная реализация вектора управляющих воздействий в общем случае не гарантирует непрерывность по переменной t правой части дифференциального уравнения (1), поэтому классические теоремы существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения здесь не выполняются. В связи с этим предлагается следующая процедура построения движения динамического объекта, отвечающего программному управлению $u(\cdot)\in D^0[t_0,T]$.

Пусть $\tau_1,\ldots,\tau_m\in[t_0,T]$ – точки разрыва программного управления $u(\cdot)$. Отождествим движение объекта на полуинтервале $[t_0,\tau_1)$ с решением задачи Коши

$$\dot{x}=f\left(t,x,u(t)\right),\quad x(t_0)=x_0,\quad t\in[t_0,\tau_1).$$

В силу непрерывности управления $u(\cdot)$ на полуинтервале $[t_0,\tau_1)$ и предположений, сделанных выше относительно функции f, сформулированная задача Коши имеет решение и притом единственное. Доопределим фазовый вектор в момент времени τ_1 по непрерывности, положив

$$x_1=x(\tau_1)=\lim_{t\to\tau_1-0}x(t).$$

Движение объекта на полуинтервале $[\tau_1,\tau_2)$ отождествим с решением задачи Коши

$$\dot{x}=f\left(t,x,u(t)\right),\quad x(\tau_1)=x_1,\quad t\in[\tau_1,\tau_2),$$

которое также существует и единственно. Фазовый вектор в момент времени τ_2 снова доопределим по непрерывности

$$x_2=x(\tau_2)=\lim_{t\to\tau_2-0}x(t).$$

Аналогичные построения производятся на каждом полуинтервале времени $[\tau_{i-1},\tau_i)$, $i=1,\ldots,m$.

В результате получим искомое движение динамического объекта, выходящее из начального положения $\{t_0,x_0\}$, отвечающее программному управлению $u(\cdot)$ и определенное на всем промежутке времени $[t_0,T]$ (**рис. 15**).

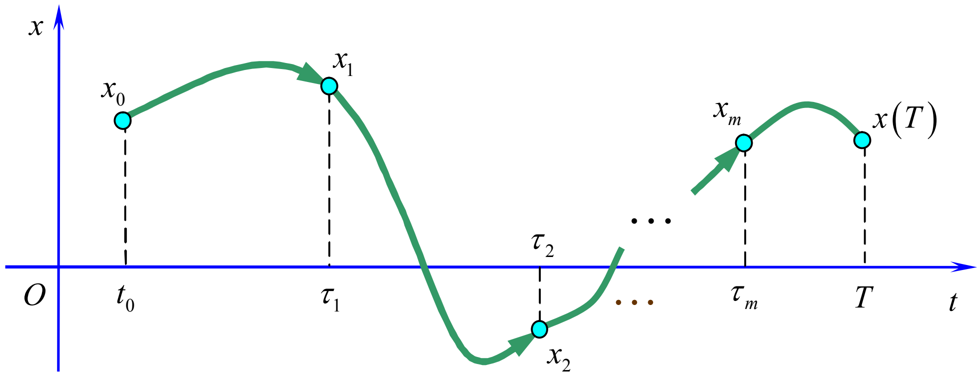

Рис. 15

Это движение обозначим символом $x(\cdot)=x(\cdot,t_0,x_0,u(\cdot))$. Заметим, что для любого момента времени $t\in[t_0,T]$ имеет место равенство

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(\tau,x(\tau,u(\tau)))d\tau, \tag{2}$$

в котором интеграл понимается в смысле Римана.

Равенство (2) может служить непосредственным определением движения $x(\cdot,t_0,x_0,u(\cdot))$. Причем, если программное управление $u(\cdot)$ берется из класса $L_p^r[t_0,T]$, $1\le p\le\infty$, то интеграл в (2) надо понимать в смысле Лебега. В [22] приводятся теоремы существования и единственности таких движений.

1.4. Индивидуальное задание 2 «Программные управления и движения»

Задано дифференциальное уравнение движения динамического объекта. Требуется найти закон движения динамического объекта, выходящего из заданного начального положения и порожденного заданным кусочно-непрерывным программным управлением на заданном промежутке времени. Привести совместный график программного управления и закона движения динамического объекта, порожденного этим управлением.

Пример выполнения индивидуального задания 2

Дифференциальное уравнение динамического объекта и его начальное положение

$$\dot{x}=u,\quad t\in[0,4],\quad x(0)=0,\quad x\in R^1,\ u\in R^1.$$

Программное управление имеет вид $u(t)=\begin{cases}1, & t\in[0,1),\\ t, & t\in[1,2),\\ -t, & t\in[2,3),\\ -1, & t\in[3,4].\end{cases}$ (см. **рис. 16**).

Построим движение, отвечающее данному программному управлению и выходящее из начального положения $\{0,0\}$. Полагаем $\tau_0=0,\tau_1=1,\tau_2=2,\tau_3=3$ и проводим необходимые построения на каждом полуинтервале $[\tau_i,\tau_{i+1}), i=0,1,2,3$. Последовательно определяем

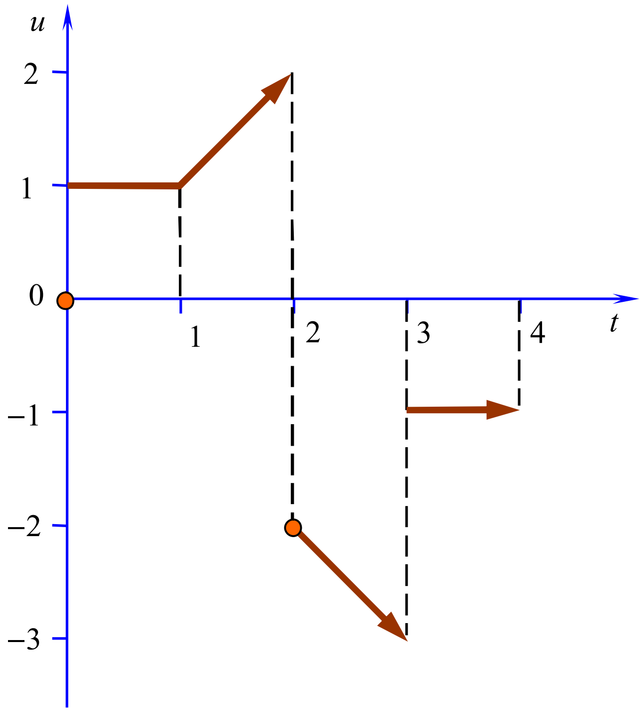

Рис. 16

$$i=0,\quad x_0=0,\quad x(t)=t,\quad t\in[0,1),\quad \lim_{t\to 1-0}x(t)=1,$$

$$i=1,\quad x_1=1,\quad x(t)=\frac{1}{2}\left(t^2+1\right),\quad t\in[1,2),\quad \lim_{t\to 2-0}x(t)=\frac{5}{2},$$

$$i=2,\quad x_2=\frac{5}{2},\quad x(t)=\frac{1}{2}\left(9-t^2\right),\quad t\in[2,3),\quad \lim_{t\to 3-0}x(t)=0,$$

$$i=3,\quad x_3=0,\quad x(t)=3-t,\quad t\in[3,4].$$

Итоговая конструкция изображена на **рис. 17**

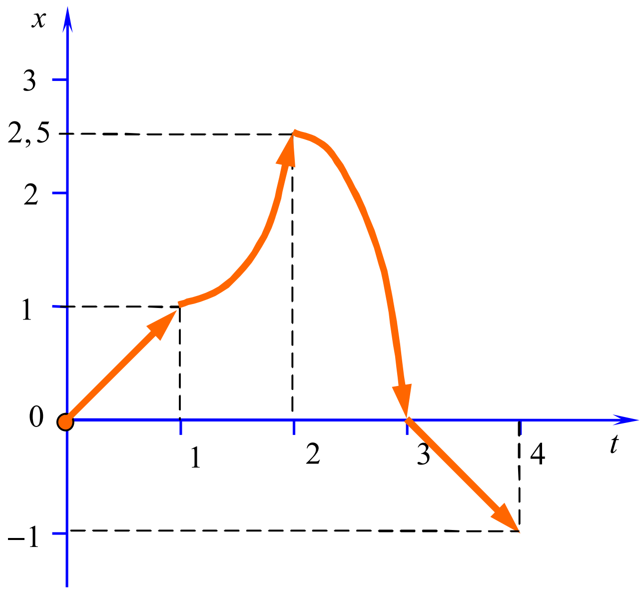

Рис. 17

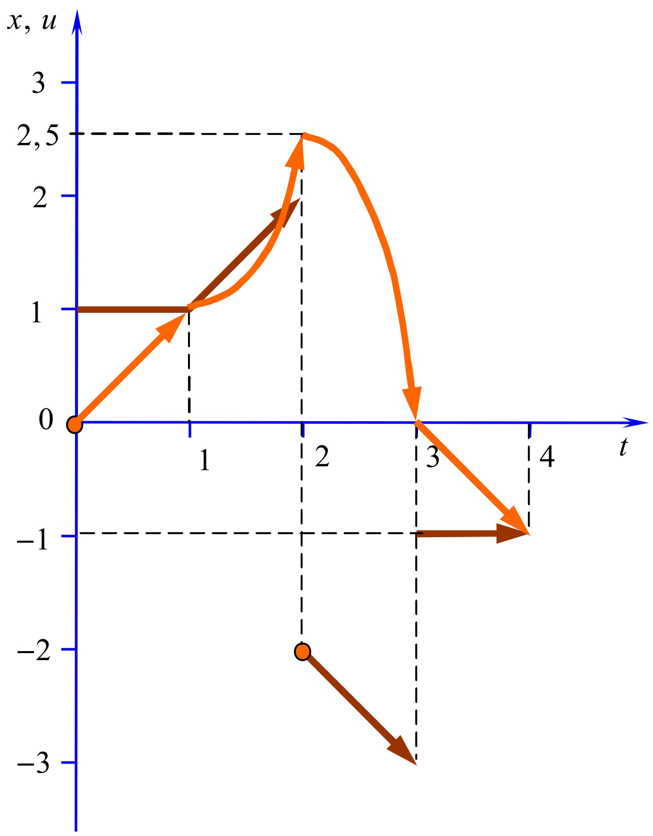

Рис. 18

Совместный график программного управления и закона движения динамического объекта, порожденного этим управлением, представлен на **рис. 18.** ►

Задания для самостоятельного решения

В **вариантах 1–4** уравнения движения объекта и начальные условия для него имеют вид $\dot{x} = x \cdot u,\ t \in [0,3],\ x(0) = 1$.

№ 1. $u(t) = \begin{cases} \sin t, & t \in [0,1], \\ \cos t, & t \in (1,2], \\ -t & t \in (2,3]. \end{cases}$

№ 2. $u(t) = \begin{cases} \cos^2 t, & t \in [0,1], \\ -\sin(2t), & t \in (1,2], \\ t^2, & t \in (2,3]. \end{cases}$

№ 3. $u(t) = \begin{cases} -\sin t, & t \in [0,1), \\ 1+\sin t, & t \in [1,2), \\ \dfrac{1}{t}, & t \in [2,3]. \end{cases}$

№ 4. $u(t) = \begin{cases} \cos 2t, & t \in [0,1), \\ t+\sin t, & t \in [1,2), \\ t, & t \in [2,3]. \end{cases}$

В **вариантах 5–8** уравнения движения объекта и начальные условия для него имеют вид $\dot{x} = x + u,\ t \in [0,3],\ x(0) = 1$.

№ 5. $u(t)=\begin{cases} e^{-t}, & t\in[0,1), \\ \sin t, & t\in[1,2), \\ -t^2, & t\in[2,3]. \end{cases}$

№ 6. $u(t)=\begin{cases} -t^2, & t\in[0,1), \\ 0, & t\in[1,2), \\ -t^3, & t\in[2,3]. \end{cases}$

№ 7. $u(t)=\begin{cases} -t^3, & t\in[0,1), \\ \sin t, & t\in[1,2), \\ -t, & t\in[2,3]. \end{cases}$

№ 8. $u(t)=\begin{cases} -\cos t+\sin t, & t\in[0,1), \\ 0, & t\in[1,2), \\ -t^2, & t\in[2,3]. \end{cases}$

В **вариантах 9–10** уравнения движения объекта и начальные условия для него имеют вид $\dot{x}=\dfrac{u}{x}$, $t\in[0,3]$, $x(0)=1$.

№ 9. $u(t)=\begin{cases} -t^2, & t\in[0,1), \\ 0, & t\in[1,2), \\ t^3, & t\in[2,3]. \end{cases}$

№ 10. $u(t)=\begin{cases} -\sin t & t\in[0,1), \\ t, & t\in[1,2), \\ \cos t, & t\in[2,3]. \end{cases}$

Раздел 2

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

2.1. Критерии качества управления динамическими объектами

Цель управления динамическим объектом состоит в оптимизации некоторого критерия качества, который обычно формализуется в виде функционала, определенного на множестве реализаций вектора управляющих параметров и отвечающих им движений объекта

$$I = \int_{t_0}^{T} f_0\big(\tau, x(\tau), u(\tau)\big)\, d\tau + \Phi\big(t_0, x_0, T, x(T)\big), \tag{1}$$

где $f_0 : R^{n+r+1} \to R^1$, $\Phi : R^{2(n+1)} \to R^1$ – заданные функции, непрерывные по совокупности своих аргументов. Первое слагаемое в (1) называется интегральным, а второе – терминальным.

Определение 1. *Функционал (1) называется функционалом Больца. В частности, если $f_0 \equiv 0$, то функционал (1) называют функционалом Майера, а если $\Phi \equiv 0$, то функционалом Лагранжа.*

Задача управления, в которой критерий качества имеет вид функционала Лагранжа при $f_0 \equiv 1$, называется задачей на быстродействие.

Приведем пример, иллюстрирующий вычисление функционала для выбранного программного управления.

Пример 1. Для динамического объекта

$$\dot{x} = x + u, \quad x(0) = 1, \quad x, u \in R^1, \quad t \in [0, 2] \tag{2}$$

вычислить величину критерия качества

$$I\left[u(\cdot)\right]=\int_0^2 \tau\cdot x(\tau)u(\tau)d\tau+x^2(2)$$

на программном управлении

$$u=\begin{cases}1, & t\in[0,1),\\ -1, & t\in[1,2].\end{cases}$$

Решение. На промежутке $[0,1)$ уравнение (2) принимает вид

$$\dot{x}=x+1,\quad x(0)=1,\quad t\in[0,1).$$

Его общим решением будет

$$x(t,c)=ce^t-1,$$

а частным решением, удовлетворяющим начальному условию, –

$$x(t)=2e^t-1,\quad t\in[0,1).$$

По непрерывности находим

$$x_1=x(1)=\lim_{x\to 1-0}x(t)=\lim_{x\to 1-0}\left(2e^t-1\right)=2e-1.$$

На промежутке $[1,2)$ уравнение (2) принимает вид

$$\dot{x}=x-1,\quad x(1)=x_1=2e-1,\quad t\in[0,1).$$

Его общим решением будет

$$x(t,c)=ce^t+1,$$

а частным решением, удовлетворяющим начальному условию, –

$$x(t)=\frac{2(e-1)}{e}e^t+1,\quad t\in[1,2).$$

По непрерывности находим

$$x(2)=\lim_{x\to 2-0}x(t)=\lim_{x\to 2-0}\left(\frac{2(e-1)}{e}e^t+1\right)=2(e-1)e+1.$$

На **рис. 1** приведен совместный график программного управления и отвечающего ему движения.

Вычислим значение функционала на этой паре

$$I\left[u(\cdot)\right]=\int_0^1 \tau\cdot\overbrace{x(\tau)}^{2e^\tau-1}\overbrace{u(\tau)}^{1}d\tau+\int_1^2 \tau\cdot\overbrace{x(\tau)}^{\frac{2(e-1)}{e}e^t+1}\overbrace{u(\tau)}^{-1}d\tau+\overbrace{x^2(2)}^{\left[\frac{2(e-1)}{e}e^t+1\right]_{t=2}^2}=$$

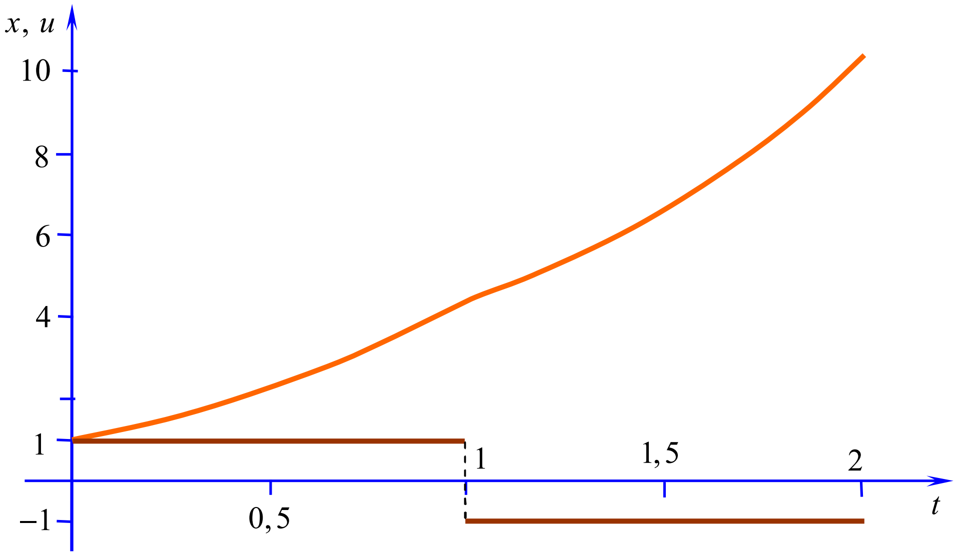

Рис. 1. Совместный график программного управления и отвечающего ему движения

$$=\overbrace{\int_0^1 \tau\cdot\left(2e^{\tau}-1\right)d\tau}^{\frac{3}{2}}-\overbrace{\int_1^2 \tau\cdot\left(\frac{2(e-1)}{e}e^{\tau}+1\right)d\tau}^{\frac{3}{2}-2e+2e^2}+\left[2(e-1)e+1\right]^2=$$

$$=\frac{3}{2}-\left(\frac{3}{2}-2e+2e^2\right)+\left[2(e-1)e+1\right]^2\approx 97{,}6061. \blacktriangleright$$

Задача оптимального управления с функционалом в форме Больца в предположении, что функция f_0 дополнительно удовлетворяет условиям Липшица по переменной x, допускает эквивалентную запись, в которой критерий качества формализован функционалом Майера. Действительно, рассмотрим новый фазовый вектор динамического объекта $\bar{x}=\begin{pmatrix} x \\ x^0 \end{pmatrix}\in R^{n+1}$, первые n компонент которого совпадают с соответствующими компонентами исходного фазового вектора. Закон изменения этих компонент определяется дифференциальным уравнением (1.1.1). Относительно компоненты x^0 потребуем, чтобы она обращалась в нуль в начальный момент времени t_0 и ее изменение подчинялось дифференциальному уравнению

$$\dot{x}^0 = f_0(t,x,u)$$

на промежутке времени $[t_0,T]$. Тогда

$$x^0(T)=\overbrace{x^0(t_0)}^{0}+\int_{t_0}^{T} f_0\left(\tau,x(\tau),u(\tau)\right)d\tau=\int_{t_0}^{T} f_0\left(\tau,x(\tau),u(\tau)\right)d\tau$$

и искомая эквивалентная запись исходной задачи оптимального управления имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\overline{x}} = \overline{f}(t, \overline{x}, u), \\ \overline{\Phi}\left(t_0, \overline{x}_0, T, \overline{x}(T)\right) \to \min, \end{cases}$$

где

$$\overline{f} : R^{n+2+r} \to R^{n+1}, \quad \overline{f} = \begin{pmatrix} f \\ f_0 \end{pmatrix},$$

$$\overline{\Phi}\left(t_0, \overline{x}_0, T, \overline{x}(T)\right) = \overbrace{\int_{t_0}^{T} f_0\left(\tau, x(\tau), u(\tau)\right) d\tau}^{x^0(T)} + \Phi\left(t_0, x_0, T, x(T)\right).$$

Пример 2. Дана задача теории оптимального управления в форме Больца.

Задача 1

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_1 + u_2, \\ \dot{x}_2 = -2x_3 + t \cdot u_1, \\ \dot{x}_3 = x_1 + u_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 1, \\ x_2(0) = -2, \\ x_3(0) = -1, \end{cases}$$

$$I\left[u(\cdot)\right] = \int_0^1 \left(u_1^2(\tau) + x_2^3(\tau)\right) d\tau + \sqrt{x_1^2(1) + x_2^2(1)} \to \min.$$

Требуется записать **задачу 1** в форме Майера.

Решение. Полагаем

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x^0 \end{pmatrix}, \quad \overline{f} = \begin{pmatrix} x_2 + u_1 + u_2 \\ -2x_3 + t \cdot u_1 \\ x_1 + u_1 \\ u_1^2 + x_2^3 \end{pmatrix}, \quad \overline{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\overline{I}\left[u(\cdot)\right] = x^0(1) + \sqrt{x_1^2(1) + x_2^2(1)}.$$

Задача 1, записанная в форме Майера имеет вид

Задача 1а

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = u_1^2 + x_2^3 \\ \dot{x}_1 = x_2 + u_1 + u_2, \\ \dot{x}_2 = -2x_3 + t \cdot u_1, \\ \dot{x}_3 = x_1 + u_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^0(0) = 0, \\ x_1(0) = 1, \\ x_2(0) = -2, \\ x_3(0) = -1, \end{cases}$$

$$x^0(1) + \sqrt{x_1^2(1) + x_2^2(1)} \to \min. \blacktriangleright$$

Пример 3. Для управляемого динамического объекта

$$\dot{x} = u, \quad t \in [0,1], \quad x \in R^1, \quad u \in [-1,1], \quad x(0) = 0,$$

$$I[u(\cdot)] = \int_0^1 \left(x^2(\tau) + u^2(\tau)\right) d\tau$$

сравнить качества двух управлений

$$u^{(1)}(t) = t, \quad u^{(2)}(t) = t^2, \quad t \in [0,1].$$

Решение. Находим движения, отвечающие каждому из заданных программных управлений

$$u^{(1)}(t) = t \quad \Rightarrow \quad x^{(1)} = \frac{1}{2}t^2,$$

$$u^{(2)}(t) = t^2 \quad \Rightarrow \quad x^{(2)}(t) = \frac{1}{3}t^3.$$

Вычисляем для полученных движений критерий качества

$$I\left[u^{(1)}(\cdot)\right] = \int_0^1 \left(x^{(1)2}(\tau) + u^{(1)2}(\tau)\right) d\tau = \int_0^1 \left(\left(\frac{1}{2}\tau^2\right)^2 + \tau^2\right) d\tau = \frac{1}{20} + \frac{1}{3} = \frac{23}{60},$$

$$I\left[u^{(2)}(\cdot)\right] = \int_0^1 \left(x^{(2)2}(\tau) + u^{(2)2}(\tau)\right) d\tau = \int_0^1 \left(\left(\frac{1}{3}\tau^3\right)^2 + \tau^4\right) d\tau = \frac{1}{63} + \frac{1}{5} = \frac{68}{315}.$$

Сравниваем значения функционала на рассматриваемых программных управлениях

$$I\left[u^{(1)}(\cdot)\right] - I\left[u^{(2)}(\cdot)\right] = \frac{23}{60} - \frac{68}{315} = \frac{211}{1260} > 0.$$

Управление $u^{(2)}(\cdot)$ оказалось «лучше». ►

2.2. Индивидуальное задание 3 «Вычисление функционалов»

Заданы управляемый динамический объект

$$\dot{x} = f(t,x,u), \quad x, u \in R^1, \quad t \in [t_0, T], \quad x(0) = x_0$$

и программные управления $u^{(1)}(\cdot)$, $u^{(2)}(\cdot)$ на промежутке времени $[t_0, T]$. Требуется выяснить, какое из этих управлений «лучше» в смысле критерия качества

$$I = \int_{t_0}^{T} f_0(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau + \Phi(t_0, x_0, T, x(T)) \to \min.$$

Пример выполнения индивидуального задания 3

Дано

$$\dot{x} = x + u, \quad x(0) = 1, \quad t \in [0,2],$$

$$u^{(1)}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,1), \\ -1, & t \in [1,2], \end{cases} \qquad u^{(2)}(t) = \begin{cases} t, & t \in [0,1), \\ -t, & t \in [1,2], \end{cases}$$

$$I[u(\cdot)] = \int_0^2 \tau \cdot x(\tau) u(\tau) d\tau + x^2(2) \to \min.$$

Заметим, что управляемый динамический объект и программное управление $u^{(1)}(\cdot)$ взяты из **примера 1.** Тогда сразу можно записать, что

$$x^{(1)}(t) = \begin{cases} 2e^t - 1, & t \in [0,1), \\ \dfrac{2(e-1)}{e} e^t + 1, & t \in [1,2], \end{cases}$$

$$I[u^{(1)}(\cdot)] = \frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2} - 2e + 2e^2\right) + [2(e-1)e+1]^2 \approx 97,6061.$$

По аналогии вычисляем

$$u^{(2)}(t) = \begin{cases} t, & t \in [0,1), \\ -t, & t \in [1,2], \end{cases} \Rightarrow \quad x^{(2)}(t) = \begin{cases} 2e^t - t - 1, & t \in [0,1), \\ 2(e-2)e^{t-1} + t + 1, & t \in [1,2], \end{cases}$$

$$I[u^{(2)}(\cdot)] = -\frac{55}{12} + e - \frac{121}{12} + 10e - 4e^2 + (3 + 2(-2+e)e)^2 \approx 36,0753.$$

Сравниваем значения функционала на рассматриваемых программных управлениях

$$I[u^{(1)}(\cdot)] - I[u^{(2)}(\cdot)] \approx 97,6061 - 36,0753 > 0.$$

Управление $u^{(2)}(\cdot)$ оказалось «лучше». ►

Задания для самостоятельного решения

Сравнить значения функционалов на управлениях $u^{(1)}(\cdot)$ и $u^{(2)}(\cdot)$.

Замечание. Во всех вариантах управляемый динамический объект и программное управление $u^{(1)}(\cdot)$ взяты из соответствующих вариантов индивидуального задания 2.

В **вариантах 1–4** уравнения движения объекта, начальные условия для него и функционал имеют вид

$$\dot{x} = x \cdot u, \quad t \in [0,3], \quad x(0) = 1,$$

$$I\left[u(\cdot)\right]=\int_0^3\left(x^2(\tau)+u(\tau)\right)d\tau+x(3).$$

№ 1. $u^{(1)}(t)=\begin{cases}\sin t, & t\in[0,1],\\ \cos t, & t\in(1,2],\\ -t, & t\in(2,3],\end{cases}$ $\qquad u^{(2)}(t)=\begin{cases}e^{-t}, & t\in[0,1),\\ \sin t, & t\in[1,2),\\ -t^2, & t\in[2,3].\end{cases}$

№ 2. $u^{(1)}(t)=\begin{cases}\cos^2 t, & t\in[0,1],\\ -\sin(2t), & t\in(1,2],\\ t^2, & t\in(2,3].\end{cases}$ $\qquad u^{(2)}(t)=\begin{cases}-t^2, & t\in[0,1),\\ 0, & t\in[1,2),\\ -t^3, & t\in[2,3].\end{cases}$

№ 3. $u^{(1)}(t)=\begin{cases}-\sin t, & t\in[0,1),\\ 1+\sin t, & t\in[1,2),\\ \dfrac{1}{t}, & t\in[2,3].\end{cases}$ $\qquad u^{(2)}(t)=\begin{cases}-t^3, & t\in[0,1),\\ \sin t, & t\in[1,2),\\ -t, & t\in[2,3].\end{cases}$

№ 4. $u^{(1)}(t)=\begin{cases}\cos(2t), & t\in[0,1),\\ t+\sin t, & t\in[1,2),\\ t, & t\in[2,3].\end{cases}$ $\qquad u^{(2)}(t)=\begin{cases}-\cos t+\sin t, & t\in[0,1),\\ 0, & t\in[1,2),\\ -t^2, & t\in[2,3].\end{cases}$

В **вариантах 5–8** уравнения движения объекта, начальные условия для него и функционал имеют вид

$$\dot{x}=x+u,\quad t\in[0,3],\quad x(0)=1,$$

$$I\left[u(\cdot)\right]=\int_0^3\left(x(\tau)+u^2(\tau)\right)d\tau+x^2(3).$$

№ 5. $u^{(1)}(t)=\begin{cases}e^{-t}, & t\in[0,1),\\ \sin t, & t\in[1,2),\\ -t^2, & t\in[2,3].\end{cases}$ $\qquad u^{(2)}(t)=\begin{cases}-t^2, & t\in[0,1),\\ 0, & t\in[1,2),\\ t^3, & t\in[2,3].\end{cases}$

№ 6. $u^{(1)}(t)=\begin{cases}-t^2, & t\in[0,1),\\ 0, & t\in[1,2),\\ -t^3, & t\in[2,3].\end{cases}$ $\qquad u^{(2)}(t)=\begin{cases}-\sin t & t\in[0,1),\\ t, & t\in[1,2),\\ \cos t, & t\in[2,3].\end{cases}$

№ 7. $u^{(1)}(t)=\begin{cases}-t^3, & t\in[0,1),\\ \sin t, & t\in[1,2),\\ -t, & t\in[2,3].\end{cases}$ $\qquad u^{(2)}(t)=\begin{cases}\cos t & t\in[0,1),\\ t, & t\in[1,2),\\ -\sin t, & t\in[2,3].\end{cases}$

№ 8. $u^{(1)}(t)=\begin{cases}-\cos t+\sin t, & t\in[0,1),\\ 0, & t\in[1,2),\\ -t^2, & t\in[2,3].\end{cases}$ $\qquad u^{(2)}(t)=\begin{cases}\sin t & t\in[0,1),\\ \cos t, & t\in[1,2),\\ \sin t, & t\in[2,3].\end{cases}$

В **вариантах 9–10** уравнения движения объекта, начальные условия для него и функционал имеют вид

$$\dot{x} = \frac{u}{x}, \quad t \in [0,3], \quad x(0) = 1,$$

$$I[u(\cdot)] = \int_0^3 \left(x^2(\tau) + u^2(\tau)\right)^{\frac{1}{2}} d\tau - x^2(3).$$

№ 9. $u^{(1)}(t) = \begin{cases} -t^2, & t \in [0,1), \\ 0, & t \in [1,2), \\ t^3, & t \in [2,3]. \end{cases}$ $\qquad u^{(2)}(t) = \begin{cases} \sin t, & t \in [0,1], \\ \cos t, & t \in (1,2], \\ -t & t \in (2,3]. \end{cases}$

№ 10. $u^{(1)}(t) = \begin{cases} -\sin t & t \in [0,1), \\ t, & t \in [1,2), \\ \cos t, & t \in [2,3]. \end{cases}$ $\qquad u^{(2)}(t) = \begin{cases} \cos^2 t, & t \in [0,1], \\ -\sin(2t), & t \in (1,2], \\ t^2, & t \in (2,3]. \end{cases}$

2.3. Формулировка задачи теории оптимального управления

Начальный t_0 и конечный T моменты времени, характеризующие продолжительность функционирования динамического объекта, могут зависеть от управления (например, в задачах на быстродействие) и не всегда задаются заранее. В таких случаях обычно полагают

$$t_0 \in \theta_0 \subset R^1, \quad T \in \theta_1 \subset R^1.$$

Начальную точку траектории x_0 называют левым концом траектории, конечную точку $x(T) = x(T, t_0, x_0, u(\cdot))$ – правым концом траектории. Концы траектории могут быть подвижными. Иногда требуется явно выделить ограничения на левый и правый концы траектории в форме включений

$$x_0 \in S_0(t_0) \subset R^n, \quad t_0 \in \theta_0, \qquad x(T) \in S_1(T) \subset R^n, \quad T \in \theta_1.$$

В задачах теории оптимального управления принята следующая терминология.

Если множество θ_0 (множество θ_1) состоит из одной точки, то говорят, что начальный (конечный) момент времени фиксирован.

Если

$$S_0(t_0) = \{x_0\}, \quad t_0 \in \theta_0 \quad \left(S_1(T) = \{x_T\}, \quad T \in \theta_1\right),$$

то говорят, что левый (правый) конец траектории закреплен.

Если

$$S_0(t_0) = R^n, \quad t_0 \in \theta_0 \quad \left(S_1(T) = R^n, \quad T \in \theta_1\right),$$

то левый (правый) конец траектории называют свободным.

Иногда на реализацию фазового вектора накладываются ограничения в виде

$$x(t) \in X(t) \subset R^n, \quad t \in [t_0, T],$$

где $X(t) \subset R^n$ – заданное множество. Указанные ограничения называются фазовыми ограничениями. В частности, если

$$X(t) = R^n, \quad t \in [t_0, T],$$

то говорят, что фазовые ограничения отсутствуют.

Поставим задачу теории оптимального управления. Пусть заданы множества

$$\theta_0 \subset R^1, \quad \theta_1 \subset R^1, \quad \sup \theta_0 \le \inf \theta_1,$$

$$S_0(t_0) \subset R^n, \quad t_0 \in \theta_0, \quad S_1(T), \quad T \in \theta_1,$$

$$P \subset R^r, \quad X(t) \subset R^n, \quad t \in [\inf \theta_0, \sup \theta_1],$$

векторное дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x \in R^n$$

и функционал

$$I[t_0, T, x_0, u(\cdot)] = \int_{t_0}^{T} f_0(\tau, x(\tau), u(\tau))\, d\tau + \Phi(t_0, x_0, T, x(T)).$$

Набору $(t_0, T, x_0, u(\cdot))$ поставим в соответствие движение

$$x(\cdot) = x(\cdot, t_0, x_0, u(\cdot)),$$

определенное на промежутке времени $[t_0, T]$. На **рис. 2** приведен его график

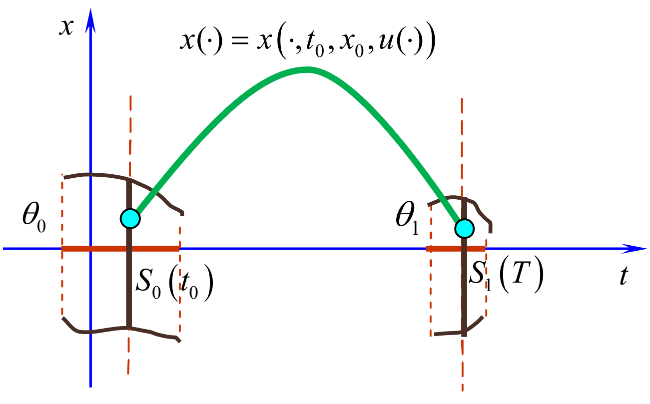

Рис. 2

Определение 2. *Набор* $(t_0, T, x_0, u(\cdot))$ *назовем допустимым, если*

$$t_0 \in \theta_0, \quad T \in \theta_1, \quad u(t) \in P, \quad t \in [t_0, T],$$

$$x(t) = x(t, t_0, x_0, u(\cdot)) \in X(t), \quad t \in [t_0, T], \quad x_0 \in S_0(t_0), \quad x(T) \in S_1(T).$$

Множество всех допустимых наборов обозначим символом G. Функционал $I : G \to R^1$ определен на множестве допустимых наборов. Сформулируем задачу теории оптимального управления.

Задача 2. *Определить допустимый набор* $(t_0^0, T^0, x_0^0, u^0(\cdot)) \in G$ *такой, что для любого другого допустимого набора* $(t_0, T, x_0, u(\cdot)) \in G$ *выполнялось бы неравенство*

$$I[t_0^0, T^0, x_0^0, u^0(\cdot)] \le I[t_0, T, x_0, u(\cdot)].$$

Допустимый набор $(t_0^0, T^0, x_0^0, u^0(\cdot))$ назовем решением **задачи 2**, $u^0(\cdot)$ – оптимальным управлением, $x^0(\cdot)$ – оптимальным движением.

В **задаче 2** требуется минимизировать функционал I. Случай максимизации функционала сводится к эквивалентной задаче минимизации функционала $-I$.

2.4. Существование решения задачи теории оптимального управления

Сформулированная в предыдущем пункте **задача 2** оптимального управления динамическим объектом не всегда имеет решение. Покажем это на примере.

Пример 4. Рассмотрим управляемый динамический объект (см**. рис. 3**)

$$\dot{x} = u, \quad x \in R^1, \quad u \in [-1, 1], \quad \theta_0 = \{0\}, \quad \theta_1 = (0, +\infty),$$

$$S_0 = \{0\}, \quad S_1(T) = \left\{ x \,\middle|\, x - \frac{1}{T} = 0,\ T \in \theta_1 \right\},$$

$$I[T, u(\cdot)] = x(T) \to \min .$$

Очевидно, что $I[T, u(\cdot)] = \dfrac{1}{T} > 0$.

Для каждого $\hat{T} > 0$ положим

$$u_{\hat{T}} = \begin{cases} 0, & t \in [t_0, \hat{T}], \\ 1 & t > \hat{T}. \end{cases}$$

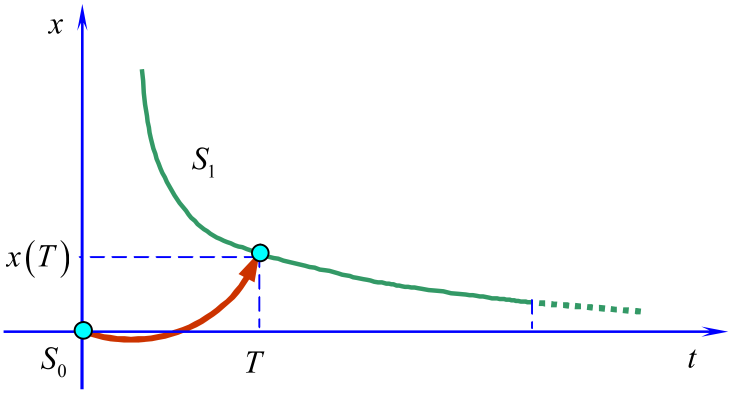

Рис. 3

Траектория движения, отвечающая управлению $u_{\hat{T}}(\cdot)$, изображена на **рис. 4**.

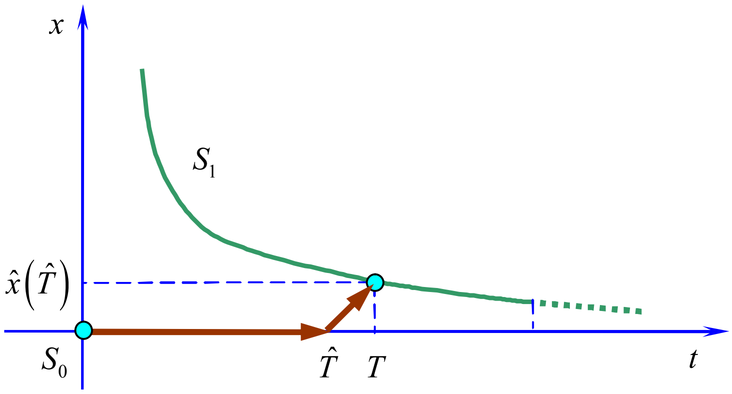

Рис. 4

Выбирая величину $\hat{T}$ достаточно большой, значение функционала $I\left[T, u_{\hat{T}}(\cdot)\right] = \frac{1}{T} \le \frac{1}{\hat{T}}$ можно сделать сколь угодно малым. Однако управления $u^0(\cdot)$, для которого $I\left[T^0, u^0(\cdot)\right] = 0$, не существует. Отсюда заключаем, что рассматриваемая задача оптимального управления решения не имеет. ►

Установим достаточные условия существования решения простейшей задачи теории оптимального управления. Для этого сделаем дополнительные предположения:

1. Класс допустимых программных управлений отождествим с множеством $L_p^r[t_0, T]$.

2. Минимизируемый функционал является функционалом Майера, т.е.

$$I[u(\cdot)] = \Phi(x(T)).$$

При этом предполагается, что он ограничен снизу на множестве допустимых управлений.

3. Множество $P \subset R^r$ компактно, т.е. замкнуто и ограничено.

4. Множество

$$F(t,x) = \left\{ f(t,x,u) \middle|\ u \in P \right\} \subset R^n$$

выпукло для всех $\{t,x\} \in [t_0,T] \times R^n$.

5. Существует константа $\beta > 0$, для которой справедливо неравенство

$$\| f(t,x,u) \| \le \beta \left(1 + \|x\|\right), \quad t \in [t_0,T], \quad x \in R^n, \quad u \in P.$$

Лемма 1 ***(неравенство Гронуолла).*** *Пусть* $\varphi : [t_0,T] \to R^1$ *непрерывная функция,* $a \in R^1$ *– положительное число,* $b \in R^1$ и

$$\varphi(t) \le a \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\, d\tau + b, \quad t \in [t_0,T]. \tag{1}$$

Тогда

$$\varphi(t) \le b e^{a(t-t_0)}, \quad t \in [t_0,T]. \tag{2}$$

Доказательство. Положим

$$R(t) = a \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\, d\tau, \quad t \in [t_0,T]. \tag{3}$$

Вычислим выражение $\dot{R}(t) - aR(t)$. Имеем

$$\overbrace{\dot{R}(t)}^{a\varphi(t)} - a \overbrace{R(t)}^{a\int_{t_0}^{t}\varphi(\tau)d\tau\ (3)} = a \overbrace{\varphi(t)}^{\le a\int_{t_0}^{t}\varphi(\tau)d\tau + b\quad (1)} - a^2 \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\, d\tau \le a^2 \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\, d\tau + ab - a^2 \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\, d\tau = ab.$$

Таким образом,

$$\dot{R}(t) - aR(t) \le ab, \quad t \in [t_0,T]. \tag{5}$$

Умножив обе части неравенства (5) на положительное число $e^{-a(t-t_0)}$, получим

$$\overbrace{e^{-a(t-t_0)}\dot{R}(t) - aR(t)e^{-a(t-t_0)}}^{\frac{d}{dt}\left[R(t)e^{-a(t-t_0)}\right]} \le abe^{-a(t-t_0)}, \quad t \in [t_0,T] \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left[R(t)e^{-a(t-t_0)}\right] \le abe^{-a(t-t_0)}, \quad t \in [t_0,T]. \tag{6}$$

Интегрируя неравенство (6) в пределах от t_0 до $t \in [t_0,T]$, получим

$$R(t)e^{-a(t-t_0)}\Big|_{t_0}^{t} \le ab \frac{e^{-a(t-t_0)}}{(-a)}\Bigg|_{t_0}^{t} \quad \Rightarrow \quad R(t)e^{-a(t-t_0)} - \overbrace{R(t_0)}^{a\int_{t_0}^{t_0}\varphi(\tau)d\tau} \le -b\left(e^{-a(t-t_0)} - 1\right) \quad \Rightarrow$$

$$R(t)e^{-a(t-t_0)} \le -b\left(e^{-a(t-t_0)}-1\right) \;\Rightarrow\; R(t) \le -be^{a(t-t_0)}\left(e^{-a(t-t_0)}-1\right) \;\Rightarrow$$

$$R(t) \le -b\left(1-e^{a(t-t_0)}\right) \;\Rightarrow\; \overbrace{R(t)}^{a\int_{t_0}^{t}\varphi(\tau)\,d\tau} \le b\left(e^{a(t-t_0)}-1\right),\quad t\in[t_0,T].$$

Отсюда выводим

$$a\int_{t_0}^{t}\varphi(\tau)\,d\tau \le be^{a(t-t_0)}-b \;\Rightarrow\; \overbrace{a\int_{t_0}^{t}\varphi(\tau)\,d\tau+b}^{\ge\varphi(t)\quad(1)} \le be^{a(t-t_0)},\quad t\in[t_0,T] \;\Rightarrow$$

$$\varphi(t) \le be^{a(t-t_0)},\quad t\in[t_0,T].$$

Лемма доказана. ■

Пусть

$$x(\cdot)=x(\cdot,t_0,x_0,u(\cdot)),$$

где $u(\cdot)$ – допустимое программное управление. Обозначим

$$m(t)=\|x(t)-x_0\|,\quad t\in[t_0,T].$$

Лемма 2. *Справедлива оценка*

$$m(t)\le be^{a(t-t_0)},\quad t\in[t_0,T],\quad a=\beta,\quad b=\beta\left(1+\|x_0\|\right)(T-t_0). \tag{7}$$

где β – константа, фигурирующая в предположении № 5.

Доказательство. Заметим, что

$$m(t)=\left\|\overbrace{x(t)}^{x_0+\int_{t_0}^{t}f(\tau,x(\tau),u(\tau))d\tau}-x_0\right\|=\left\|\left(x_0+\int_{t_0}^{t}f(\tau,x(\tau),u(\tau))\,d\tau\right)-x_0\right\|=$$

$$=\left\|\int_{t_0}^{t}f(\tau,x(\tau),u(\tau))\,d\tau\right\|\le\int_{t_0}^{t}\overbrace{\left\|f(\tau,x(\tau),u(\tau))\right\|}^{\le\beta(1+\|x\|)\,5)}d\tau\le\int_{t_0}^{t}\beta\left(1+\|x(\tau)\|\right)d\tau=$$

$$=\int_{t_0}^{t}\beta\left(1+\|x(\tau)\|-x_0+x_0\right)d\tau\le\int_{t_0}^{t}\beta\left(1+\overbrace{\|x(\tau)-x_0\|}^{m(\tau)}+\|x_0\|\right)d\tau=\int_{t_0}^{t}\beta\left(1+m(\tau)+\|x_0\|\right)d\tau=$$

$$=\int_{t_0}^{t}\beta\left(1+\|x_0\|\right)d\tau+\beta\int_{t_0}^{t}m(\tau)\,d\tau\le\int_{t_0}^{T}\beta\left(1+\|x_0\|\right)d\tau+\beta\int_{t_0}^{t}m(\tau)\,d\tau=$$

$$=\beta\left(1+\|x_0\|\right)(T-t_0)+\beta\int_{t_0}^{t}m(\tau)\,d\tau\quad\Rightarrow$$

$$m(t)=\overbrace{\beta\left(1+\|x_0\|\right)\left(T-t_0\right)}^{b}+\overbrace{\beta}^{a}\int\limits_{t_0}^{t}m(\tau)\,d\tau,\quad t\in[t_0,T]. \tag{8}$$

Используя обозначения в (7), неравенство (8) перепишем в виде

$$m(t)\le b+a\int\limits_{t_0}^{t}m(\tau)\,d\tau,\quad t\in[t_0,T].$$

Справедливость оценки (7) следует теперь из **леммы 1.** Лемма доказана. ■

Полагаем

$$X=\left\{x(\cdot)=x\left(\cdot,t_0,x_0,u(\cdot)\right)\,\middle|\,u(\cdot)\in\Pi[t_0,T]\right\}, \tag{9}$$

где символом $\Pi[t_0,T]$ обозначено множество всех допустимых программных управлений на промежутке времени $[t_0,T]$.

Лемма 3. *Существуют константы* $M_1>0$ и $M_2>0$ *такие, что для всех* $x(\cdot)\in X$, $s,t\in[t_0,T]$ *имеют место неравенства*

$$\|x(t)\|\le M_1, \tag{10}$$

$$\|x(t)-x(s)\|\le M_2\,|t-s|. \tag{11}$$

Доказательство. Для произвольного

$$x(\cdot)=x\left(\cdot,t_0,x_0,u(\cdot)\right),\quad u(\cdot)\in\Pi[t_0,T]$$

имеем

$$\|x(t)\|=\|x(t)-x_0+x_0\|\le\overbrace{\|x(t)-x_0\|}^{m(t)}+\|x_0\|=\overbrace{m(t)}^{\substack{\le be^{a(t-t_0)}\\ \text{лемма 2}}}+\|x_0\|\le\|x_0\|+be^{a(t-t_0)}\le$$
$$\le\|x_0\|+be^{a(T-t_0)}=M_1,\quad t\in[t_0,T].$$

Далее

$$\left\|\overbrace{x(t)}^{x_0+\int_{t_0}^{t}f(\tau,x(\tau),u(\tau))d\tau}-\overbrace{x(s)}^{x_0+\int_{t_0}^{s}f(\tau,x(\tau),u(\tau))d\tau}\right\|=$$

$$=\left\|\left(x_0+\int\limits_{t_0}^{t}f\left(\tau,x(\tau),u(\tau)\right)d\tau\right)-\left(x_0+\int\limits_{t_0}^{s}f\left(\tau,x(\tau),u(\tau)\right)d\tau\right)\right\|=$$

$$=\left\|\int\limits_{t_0}^{t}f\left(\tau,x(\tau),u(\tau)\right)d\tau+\int\limits_{s}^{t_0}f\left(\tau,x(\tau),u(\tau)\right)d\tau\right\|=\left\|\int\limits_{s}^{t}f\left(\tau,x(\tau),u(\tau)\right)d\tau\right\|\le$$

$$\le \int_s^t \overbrace{\| f(\tau, x(\tau), u(\tau)) \|}^{\overbrace{\le \max\limits_{u\in P} \max\limits_{x\in\{x \mid \|x\|\le M_1\}} \max\limits_{\tau\in[t_0,T]} \|f(\tau,x,u)\|}^{M_2}} d\tau \le M_2 |t-s|, \quad s,t\in[t_0,T] \Rightarrow$$

$$\|x(t)-x(s)\| \le M_2 |t-s|, \quad s,t\in[t_0,T].$$

Лемма доказана. ■

Из доказанной леммы следует, что множество X состоит из равномерно ограниченных и равно степенно непрерывных функций, определенных на отрезке $[t_0, T]$. По теореме Арцела любая последовательность функций из множества X будет содержать подпоследовательность, равномерно сходящуюся на отрезке $[t_0, T]$. к некоторой функции $x(\cdot)$, определенной на этом отрезке и удовлетворяющей неравенствам (10) и (11) с константами M_1, M_2.

Лемма 4. *Пусть $R:[t_0, t] \to K \subset R^n$ интегрируемая по Лебегу функция и множество K – выпуклый компакт. Тогда*

$$\frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t} R(\tau)\,d\tau \in K. \tag{12}$$

Доказательство. Известно, что для всякой интегрируемой по Лебегу функции R, определенной на интервале $[t_0, t]$, найдется последовательность ступенчатых функций $\{R_p\}$ определенных и равномерно сходящихся на этом интервале к функции R, причем справедливо равенство

$$\lim_{p\to\infty}\int_{t_0}^{t} R_p(\tau)\,d\tau = \int_{t_0}^{t} R(\tau)\,d\tau. \tag{13}$$

Покажем, что включение (12) имеет место для всякой ступенчатой функции $R:[t_0, t] \to K$. Напомним, что функция называется ступенчатой, если она принимает конечное число значений $R^{(1)},\ldots,R^{(k)} \in K$ (см. **рис. 5**).

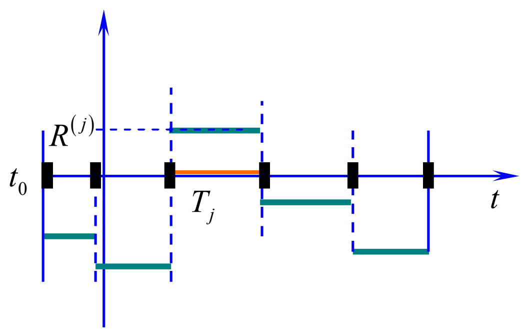

Рис. 5

Обозначим

$$T_j = \left\{ \tau \in [t_0, t] \;\middle|\; R(\tau) = R^{(j)} \right\}, \quad j = 1, \dots, k,$$

тогда

$$\frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^{t} R(\tau)\, d\tau = \frac{1}{t - t_0} \sum_{j=1}^{k} R^{(j)} \mu(T_j). \tag{14}$$

Здесь $\mu(T_j) \geq 0$ – мера множества T_j, $j = 1, \dots, k$. Заметим, что

$$\frac{1}{t - t_0} \overbrace{\sum_{j=1}^{k} \mu(T_j)}^{t - t_0} = 1. \tag{15}$$

Обозначим

$$\alpha_j = \frac{\mu(T_j)}{t - t_0} \geq 0, \quad j = 1, \dots, k.$$

Имеет место равенство

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j = \sum_{j=1}^{k} \overbrace{\alpha_j}^{\frac{\mu(T_j)}{t - t_0}} = \frac{\overbrace{\sum_{j=1}^{k} \mu(T_j)}^{t - t_0}}{t - t_0} = 1.$$

Тогда выражение

$$\frac{1}{t - t_0} \sum_{j=1}^{k} R^{(j)} \mu(T_j) = \sum_{j=1}^{k} \overbrace{\frac{\mu(T_j)}{t - t_0}}^{\alpha_j} R^{(j)} = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \overbrace{R^{(j)}}^{\in K}$$

представляет собой выпуклую комбинацию векторов, принадлежащих выпуклому множеству K. Известно, что выпуклое множество содержит любую выпуклую комбинацию своих элементов. Тогда

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j R^{(j)} = \frac{1}{t - t_0} \sum_{j=1}^{k} R^{(j)} \mu(T_j) = \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^{t} R(\tau)\, d\tau \in K.$$

Отсюда следует справедливость утверждения леммы для случая, когда функция R ступенчатая. Доказательство общего случая использует предельный переход в (13) и условие компактности множества K. Лемма доказана. ■

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения № 1–5. Тогда существует допустимое программное управление* $u^0(\cdot)$*, на котором функционал* I *достигает минимума.*

Доказательство. В силу ограниченности снизу функционала I на множестве допустимых программных управлений $\Pi\left[t_0,T\right]$ (предположение № 2) для функционала I существует минимизирующая последовательность

$$\left\{u^{(p)}(\cdot)\right\},\quad u^{(p)}(\cdot)\in\Pi\left[t_0,T\right],\quad p=1,2,\ldots,\qquad \lim_{p\to\infty} I\left[u^{(p)}(\cdot)\right]=\inf_{u(\cdot)\in\Pi\left[t_0,T\right]} I\left[u(\cdot)\right]=I_*>-\infty\,.$$

В силу **леммы 3** из последовательности функций

$$x^{(p)}(\cdot)=x\left(\cdot,t_0,x_0,u^{(p)}(\cdot)\right),\quad p=1,2,\ldots,$$

можно выбрать подпоследовательность $\left\{x^{(p_j)}(\cdot)\right\}$ равномерно сходящуюся к функции $x^0(\cdot)$, определенной на отрезке $\left[t_0,T\right]$ и удовлетворяющей неравенствам (10), (11). Не теряя общности, принимаем, что $p_j=p,\ j,p=1,2,\ldots$ Из равномерной сходимости последовательности $\left\{x^{(p)}(\cdot)\right\}\to x^0(\cdot)$ следует, что

$$I_*=\lim_{p\to\infty}\overbrace{I\left[u^{(p)}(\cdot)\right]}^{\Phi\left[x^{(p)}(T)\right]}=\lim_{p\to\infty}\Phi\left[x^{(p)}(T)\right]=\Phi\left[\overbrace{\lim_{p\to\infty}x^{(p)}(T)}^{x^0(T)}\right]=\Phi\left[x^0(T)\right]\quad\Rightarrow$$

$$\Phi\left[x^0(T)\right]=I_*=\inf_{u(\cdot)\in\Pi\left[t_0,T\right]} I\left[u(\cdot)\right].\tag{16}$$

Функция $x^0(\cdot)$ удовлетворяет неравенствам (10), (11) с константами M_1, M_2. Тогда она является абсолютно непрерывной и почти всюду на интервале $\left[t_0,T\right]$ имеет производную. Докажем существование допустимого программного управления $u^0(\cdot)$, для которого при всех $t\in\left[t_0,T\right]$, где функция $x^0(\cdot)$ имеет производную, выполняется равенство

$$\dot{x}^0(t)=f\left(t,x^0(t),u^0(t)\right).\tag{17}$$

Обозначим через

$$\overline{F^\alpha}(t,x)=\left\{z\in R^n\,\middle|\,\rho\left(z,F(t,x)\right)\le\alpha\right\},\quad \alpha>0,\quad x\in R^n,\quad t\in\left[t_0,T\right]$$

замкнутую $\alpha-$окрестность множества $F(t,x)=\left\{f(t,x,u)\,\middle|\,u\in P\right\}$ (**рис. 6**).

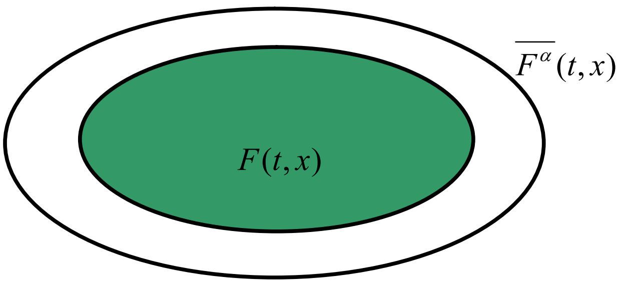

Рис. 6

По условию теоремы множество $F(t,x)$ – выпуклый компакт, поэтому и множество $\overline{F^{\alpha}}(t,x)$ – выпуклый компакт. Из равномерной непрерывности функции f на компакте $\left[t_0,T\;\right]\times\left\{x\in R^n \,\middle|\, \|x\|\le M_1\right\}\times P$ следует, что (**рис. 7**)

$$F(\tau,x')\subset\overline{F^{\alpha}}(t,x),$$

если $\tau\in[t_0,T]$ близко к t, а $x'\in R^n$ – к x. В силу $\left\{x^{(p)}(\cdot)\right\}\to x^0(\cdot)$ для $\tau\in[t_0,T]$, близких к t, и достаточно больших p выполняется

$$f\left(\tau,x^{(p)}(\tau),u^{(p)}(\tau)\right)\in\overline{F^{\alpha}}(t,x^0(t)), \tag{18}$$

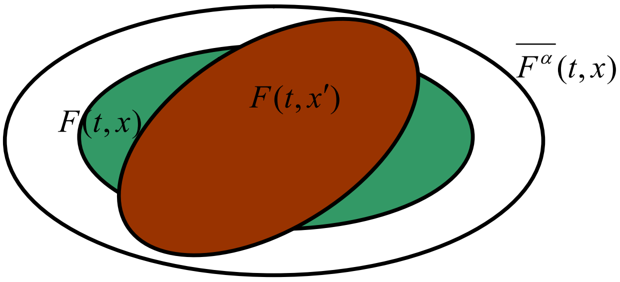

Рис. 7

Пусть $t\in[t_0,T]$ – момент времени, где функция $x^0(\cdot)$ имеет производную. В силу

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f\left(\tau,x(\tau),u(\tau)\right)d\tau$$

справедливо равенство

$$\frac{x^{(p)}(t+h)-x^{(p)}(t)}{h}=$$

$$=\frac{x_0+\int_{t_0}^{t+h} f\left(\tau,x^{(p)}(\tau),u^{(p)}(\tau)\right)d\tau-x_0-\int_{t_0}^{t} f\left(\tau,x^{(p)}(\tau),u^{(p)}(\tau)\right)d\tau}{h}=$$

$$=\frac{1}{h}\int_{t}^{t+h} f\left(\tau,x^{(p)}(\tau),u^{(p)}(\tau)\right)\,d\tau\,. \tag{19}$$

В силу **леммы 4** и включения (18) из (19) следует, что

$$\frac{x^{(p)}(t+h)-x^{(p)}(t)}{h}\in\overline{F^{\alpha}}(t,x^0(t)), \tag{20}$$

при условии, что номер p – велик, $|h|$ – мал. Перейдем в (20) к пределу при $p\to\infty$ В результате получим

$$\frac{x^0(t+h)-x^0(t)}{h} \in \overline{F^\alpha}(t, x^0(t)). \tag{21}$$

Из существования производной функции $x^0(\cdot)$ в точке t вытекает возможность предельного перехода в левой части (21) при $h \to 0$. Имеем

$$\dot{x}^0(t) \in \overline{F^\alpha}(t, x^0(t)). \tag{22}$$

Из произвольности $\alpha > 0$ и компактности множества $F(t, x^0(t))$ получим

$$\dot{x}^0(t) \in F(t, x^0(t)). \tag{23}$$

Условие (23) означает, что для каждого момента времени $t \in [t_0, T]$, в который существует производная функции $x^0(\cdot)$, найдется вектор $u^0(t) \in P$, для которого справедливо равенство

$$\dot{x}^0(t) = f\left(t, x^0(t), u^0(t)\right).$$

По лемме об измеримом выборе управление $u^0(\cdot)$ может быть выбрано интегрируемым по Лебегу на промежутке $\tau \in [t_0, T]$. Это управление и будет искомым. Теорема доказана. ■

Раздел 3

ПРОСТЕЙШАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

3.1. Функция Гамильтона-Понтрягина и сопряженная система дифференциальных уравнений

Приведем частный случай постановки задачи теории оптимального управления, которая будет исследоваться в настоящем разделе.

Определение 1. *Будем говорить, что задача управления является простейшей задачей теории оптимального управления, если для нее начальный и конечный моменты времени фиксированы, левый конец траектории закреплен, правый – свободен, фазовые ограничения отсутствуют, а ограничения на векторы управляющих параметров стационарны.*

Для простейшей задачи теории оптимального управления справедливы следующие соотношения:

$$S_0 = \{x_0\}, \quad S_1 = R^n, \quad \theta_0 = \{t_0\}, \theta_1 = \{T\}, \quad P(t) = P, \quad X(t) = R^n, \quad t \in [t_0, T].$$

Приведем ее краткую запись.

Задача 1. ***Простейшая задача теории оптимального управления***

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x \in R^n, \quad t \in [t_0, T], \quad u \in P, \quad x(t_0) = x_0,$$

$$\int_{t_0}^{T} f_0(\tau, x(\tau), u(\tau))\, d\tau + \Phi(x(T)) \to \min.$$

Определение 2. *Функцию* $H : [t_0, T] \times R^{2n+r+1} \to R^1$, *определенную равенством*

$$H(t, x, u, \overline{\psi}) = \langle \overline{\psi}, \overline{f}(t, x, u) \rangle = \psi_0 f_0(t, x, u) + \langle \psi, f(t, x, u) \rangle = \sum_{i=0}^{n} \psi_i f_i(t, x, u) \qquad (1)$$

будем называть функцией Гамильтона-Понтрягина для рассматриваемой задачи теории оптимального управления, а вектор

$$\bar{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \cdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \in R^{n+1} \ -$$

вектором сопряженных переменных.

Заметим, что вид функции Гамильтона-Понтрягина (1) не изменится, если задачу теории оптимального управления с функционалом в форме Больца преобразовать к эквивалентной задаче с функционалом в форме Майера.

Пусть $u(\cdot)$ – программное управление на отрезке времени $[t_0, T]$ и $x(\cdot) = x(\cdot, t_0, x_0, u(\cdot))$ – отвечающее ему решение системы дифференциальных уравнений. Относительно вектор-функции f дополнительно предположим, что она непрерывно дифференцируема по вектору x.

Определение 3. *Система линейных дифференциальных уравнений относительно вектора переменных* $\bar{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \cdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \in R^{n+1}$ *вида*

$$\dot{\psi}_0 = 0, \quad \dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x}\left(t, x(t), u(t), \bar{\psi}\right) \qquad (2)$$

назовем сопряженной системой дифференциальных уравнений, отвечающей паре $(u(\cdot), x(\cdot))$. *При этом систему* $\dot{x} = f(t, x, u)$ *будем называть основной.*

Покоординатная запись системы (2) приведена ниже

$$\dot{\psi}_0 = 0, \quad \dot{\psi}_j = -\sum_{i=0}^{n} \psi_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\left(t, x(t), u(t)\right), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Заметим, что при любых $\bar{a} \in R^{n+1}$, $t_1 \in [t_0, T]$ система линейных дифференциальных уравнений (2) будет иметь единственное решение, определенное на всем отрезке $[t_0, T]$ и удовлетворяющее условию $\bar{\psi}(t_1) = \bar{a}$.

Пример 1. Задан управляемый динамический объект

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \cdot u_1, \\ \dot{x}_2 = \sin x_1 + \ln x_3 + u_2, \\ \dot{x}_3 = x_2 \cdot \cos u_2, \end{cases}$$

$$I\left[u(\cdot)\right]=\int_0^1\left(x_1^2(\tau)+x_2^2(\tau)+u_1(\tau)\cdot u_2(\tau)\right)d\tau .$$

Выписать для него функцию Гамильтона-Понтрягина и сопряженную систему дифференциальных уравнений.

Решение. Функция Гамильтона-Понтрягина

$$H\left(t,x_1,x_2,x_3,u_1,u_2,\psi_0,\psi_1,\psi_2,\psi_3\right)=$$
$$=\psi_0\left(x_1^2+x_2^2+u_1\cdot u_2\right)+\psi_1\left(x_1+x_2\cdot u_1\right)+\psi_2\left(\sin x_1+\ln x_3+u_2\right)+\psi_3 x_2\cdot\cos u_2 .$$

Сопряженная система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\dot\psi_0=0,\\ \dot\psi_1=-2\psi_0x_1-\psi_1-\psi_2\cos x_1,\\ \dot\psi_2=-2\psi_0x_2-\psi_1u_1-\psi_3\cos u_2,\\ \dot\psi_3=-\dfrac{\psi_2}{x_3}.\end{cases} \quad \blacktriangleright$$

Пример 2. Для управляемого динамического объекта с линейной динамикой и критерием качества в форме функционала Майера (функционал не содержит интегрального слагаемого и поэтому он не оказывает влияния на формирования функции Понтрягина) записать сопряженную систему дифференциальных уравнений.

Решение. Основная система дифференциальных уравнений здесь имеет вид

$$\begin{cases}\dot x_1=a_{11}x_1+\cdots+a_{1j}x_j+\cdots+a_{1n}x_n+u_1,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dot x_i=a_{i1}x_1+\cdots+a_{ij}x_j+\cdots+a_{in}x_n+u_i,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dot x_n=a_{n1}x_1+\cdots+a_{nj}x_j+\cdots+a_{nn}x_n+u_n.\end{cases}$$

Или в векторно-матричной форме:

$$\begin{pmatrix}\dot x_1\\ \cdots\\ \dot x_i\\ \cdots\\ \dot x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1j}&\cdots&a_{1n}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ a_{i1}&\cdots&a_{ij}&\cdots&a_{in}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nj}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \cdots\\ x_i\\ \cdots\\ x_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}u_1\\ \cdots\\ u_i\\ \cdots\\ u_n\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad \dot x=Ax+u.$$

Выпишем функцию Понтрягина для этой системы

$$H\left(t,x,u,\psi\right)=\left\langle\psi,f(t,x,u)\right\rangle=\sum_{i=1}^{n}\psi_i\left(a_{i1}x_1+\cdots+a_{ij}x_j+\cdots+a_{in}x_n+u_i\right),$$

тогда сопряженная система имеет вид

$$\dot\psi_j = -\frac{\partial \overbrace{H\left(t,x,u,\psi\right)}^{\sum\limits_{i=1}^{n}\psi_i\left(a_{i1}x_1+\cdots+a_{ij}x_j+\cdots+a_{in}x_n+u_i\right)}}{\partial x_j} \quad\Rightarrow\quad \dot\psi_j = -\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\psi_i, \quad j=1,\ldots,n \quad\Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dot\psi_1 = -\left(a_{11}\psi_1+\cdots+a_{i1}\psi_i+\cdots+a_{n1}\psi_n\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot\psi_j = -\left(a_{1j}\psi_1+\cdots+a_{ij}\psi_i+\cdots+a_{nj}\psi_n\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot\psi_j = -\left(a_{1n}\psi_1+\cdots+a_{in}\psi_i+\cdots+a_{nn}\psi_n\right) \end{cases} \quad\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \dot\psi_1 \\ \cdots \\ \dot\psi_j \\ \cdots \\ \dot\psi_n \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{i1} & \cdots & a_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1j} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{nj} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{in} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \cdots \\ \psi_j \\ \cdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \dot\psi = -A^T\psi. \ \blacktriangleright$$

3.2. Формулировка принципа максимума и его применение при решении простейшей задачи теории оптимального управления

Рассмотрим простейшую задачу теории оптимального управления, поставленную в предыдущем пункте (**задача 1**):

$$\dot x = f(t,x,u), \quad t\in\left[t_0,T\right], \quad x\in R^n, \quad x(t_0)=x_0, \quad u\in P\in R^r,$$

$$I\left[u(\cdot)\right] = \int_{t_0}^{T} f_0\left(\tau, x(\tau), u(\tau)\right)d\tau + \Phi\left(x(T)\right) \to \min.$$

Относительно функции $\Phi: R^n \to R^1$ принимается, что она непрерывно дифференцируема по совокупности своих аргументов. Класс программных управлений отождествим с множеством кусочно-непрерывных функций. Заметим, что значение вектора управляющих параметров в какой-либо изолированной точке отрезка $\left[t_0,T\right]$ несущественно, поэтому, не теряя общности, будем считать, что программное управление непрерывно в конечный момент времени T. Пусть $u^0(\cdot), x^0(\cdot)$ – соответственно оптимальное управление и оптимальное движение в **задаче 2.3.** Обозначим через $\bar\psi^0(\cdot)$ то решение сопряженной системы дифференциальных уравнений, отвечающей этой паре, для которого выполняются граничные условия

$$\psi_0^0(T) = -1, \quad \psi^0(T) = -\frac{\partial \Phi\left(x^0(T)\right)}{\partial x}. \tag{1}$$

Заметим, что в силу (1) справедливо тождество

$$\psi_0^0(t) \equiv -1, t \in [t_0, T].$$

Теорема 1 ***(принцип максимума Л.С. Понтрягина).*** *В любой момент времени* $t \in [t_0, T]$ *имеет место равенство*

$$H\left(t, x^0(t), u^0(t), \overline{\psi}^0(t)\right) = \max_{u \in P} H\left(t, x^0(t), u, \overline{\psi}^0(t)\right).$$

Практическое применение **теоремы 1** для поиска решения задачи управления осуществляется следующим образом. Выражение для функции Понтрягина

$$H\left(t, x, u, \overline{\psi}\right) = \sum_{i=0}^{n} \psi_i f_i\left(t, x, u\right),$$

в котором полагается $\psi_0 = -1$, рассматривается как функция r переменных $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \cdots \\ u_r \end{pmatrix} \in P$, а остальные переменные при этом считаются параметрами. Для каждого фиксированного набора (t, x, ψ) решается задача математического программирования

$$H\left(t, x, u, \overline{\psi}\right)\Big|_{\psi_0 = -1} \to \max, \quad u \in P.$$

Решением этой задачи будет вектор-функция

$$U^0 : \overbrace{[t_0, T]}^{t} \times \overbrace{R^{2n}}^{(x,\psi)} \to P. \tag{2}$$

Таким образом,

$$H\left(t, x, U^0(t, x, \psi), \overline{\psi}\right)\Big|_{\psi_0 = -1} = \max_{u \in P} H\left(t, x, u, \overline{\psi}\right)\Big|_{\psi_0 = -1}.$$

Допустим, что функция (2) $U^0 = U^0(t, x, \psi)$ уже построена. В дальнейшем эту функцию будем называть шаблоном для оптимального управления. Тогда можно рассмотреть следующую систему из $2n$ дифференциальных уравнений относительно неизвестных вектор-функций $x(\cdot), \psi(\cdot)$:

$$\dot{x} = f\left(t, x, U^0(t, x, \psi)\right), \quad \dot{\psi} = -\frac{\partial}{\partial x} H\left(t, x, U^0(t, x, \psi), \overline{\psi}\right)\Bigg|_{\psi_0 = -1}. \tag{3}$$

Общее решение этой системы содержит $2n$ произвольных постоянных. Для их определения имеется n граничных условий на левом конце траектории: $x(t_0)=x_0$ и n – на правом:

$$\psi(T)=-\frac{\partial\Phi\left(x(T)\right)}{\partial x}. \tag{4}$$

Определение 4. *Будем говорить, что пара* $\left(u^*(\cdot),x^*(\cdot)\right)$ *удовлетворяет условиям принципа максимума, если*

$$u^*(t)=U^0\left(t,x^*(t),\psi^*(t)\right),\quad t\in[t_0,T],$$

а $x^*(\cdot),\psi^*(\cdot)$ *– решение системы дифференциальных уравнений (3) с граничными условиями (4) и* $x^*(t_0)=x_0$.

Для конкретной задачи теории оптимального управления можно ожидать, что найдутся лишь отдельные изолированные пары, удовлетворяющие условиям принципа максимума. Такие пары в дальнейшем будем называть стационарными. Заметим, что **теорема 1** формулируется лишь как необходимые условия оптимальности, и поэтому не гарантирует оптимальность стационарной пары.

3.3. Построение шаблона оптимального управления в типовых случаях ограничений на вектор управляющих параметров

Наиболее сложным этапом решения простейшей задачи теории оптимального управления, основанного на применении принципа максимума Л.С. Понтрягина, является этап построения шаблона оптимального управления. Рассмотрим несколько типовых случаев ограничений на вектор управляющих параметров, для которых шаблон оптимального управления можно построить аналитически.

Напомним, что шаблон оптимального управления $U^0=U^0(t,x,\psi)$ находится из условия

$$H\left(t,x,U^0(t,x,\psi),\overline{\psi}\right)=\max_{u\in P}H\left(t,x,u,\overline{\psi}\right)\Big|.$$

Случай неограниченного управления $P=R^r$. Шаблон $U^0=U^0(t,x,\psi)$ находим из условия

$$\frac{\partial H}{\partial u}=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial u_1}=0, \\ \cdots \\ \dfrac{\partial H}{\partial u_r}=0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad U^0=\begin{pmatrix} U_1^0 \\ \cdots \\ U_r^0 \end{pmatrix}.$$

Далее производится проверка чередования знаков $\Delta_1,\ldots,\Delta_r$ – главных миноров матрицы

$$\left.\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}\right|_{u=U^0}=\left.\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 H}{\partial u_1 \partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 H}{\partial u_1 \partial u_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 H}{\partial u_r \partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 H}{\partial u_r \partial u_r} \end{pmatrix}\right|_{u=U^0}.$$

Если они чередуются, то на функции $U^0=U^0(t,x,\psi)$ достигается максимум функции Л.С. Понтрягина и эта функция действительно представляет собой шаблон оптимального управления.

Ниже предполагаем, что рассматривается задача Майера (т.е. интегральное слагаемое в критерии отсутствует), а функция правой части дифференциального уравнения движения объекта линейна по управляющим параметрам относительно которой для простоты принимаем, что

$$f(t,x,u)=\hat{f}(t,x)+u \quad (r=n).$$

Функция Л.С. Понтрягина тогда имеет вид

$$H(t,x,u,\psi)=\left\langle \psi,\hat{f}(t,x)+u\right\rangle=\left\langle \psi,\hat{f}(t,x)\right\rangle+\langle \psi,u\rangle .$$

Построение шаблона оптимального управления сводится к максимизации линейной формы

$$\langle \psi,u\rangle=\sum_{i=1}^{n}\psi_i u_i \to \max, \quad u\in P .$$

Ограничения в форме «эллипсоида»

$$P=\left\{ u=\begin{pmatrix} u_1 \\ \cdots \\ u_n \end{pmatrix}\in R^n \;\middle|\; \left(\frac{u_1}{a_1}\right)^2+\cdots+\left(\frac{u_n}{a_n}\right)^2\le 1 \right\}.$$

Шаблон $U^0=U^0(t,x,\psi)$ строится по формуле

$$U^0(t,x,\psi)=\frac{1}{\sqrt{\sum_{s=1}^{n}\psi_s^2 a_s^2}}\begin{pmatrix} \psi_1 a_1^2 \\ \cdots \\ \psi_n a_n^2 \end{pmatrix}.$$

В частности, если $a_1 = \ldots = a_n = a$, т.е. множество $P = \left\{ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \cdots \\ u_n \end{pmatrix} \in R^n \middle| \, \|u\| \le a \right\}$ – шар радиуса a, то

$$U^0(t,x,\psi) = \frac{a}{\sqrt{\sum_{s=1}^{n} \psi_s^2}} \cdot \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \cdots \\ \psi_n \end{pmatrix}.$$

Ограничения в форме «прямоугольного параллелепипеда»

$$P = \left\{ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \cdots \\ u_n \end{pmatrix} \in R^n \middle| \, a_1 \le u_1 \le b_1, \ldots, a_n \le u_n \le b_n \right\}.$$

Шаблон $U^0 = U^0(t,x,\psi)$ строится по формуле

$$U^0(t,x,\psi) = \begin{pmatrix} \begin{cases} \max\{a_1,b_1\}, \ \psi_1 \ge 0 \\ \min\{a_1,b_1\}, \ \psi_1 < 0 \end{cases} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \begin{cases} \max\{a_n,b_n\}, \ \psi_n \ge 0 \\ \min\{a_n,b_n\}, \ \psi_n < 0 \end{cases} \end{pmatrix}.$$

В частности, если $a_1 = -b_1 = \ldots = a_n = -b_n = a$, т.е. множество $P = \left\{ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \cdots \\ u_n \end{pmatrix} \in R^n \middle| \, |u_1| \le a, \ldots, |u_n| \le a \right\}$ – куб с ребром $2a$, то

$$U^0(t,x,\psi) = a \begin{pmatrix} sign[\psi_1] \\ \cdots \\ sign[\psi_n] \end{pmatrix}.$$

3.4. Доказательство принципа максимума для простейшей задачи теории оптимального управления

С целью упрощения доказательства **теоремы 1** дополнительно предположим, что функции $\bar{f} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f \end{pmatrix}$ и Φ непрерывно дифференцируемы по переменной x и что существует такая константа $M > 0$, для которой при всех $x \in R^n$, $u \in P$, $t \in [t_0, T]$, $z \in R^n$, $h \in R^r$ справедливы неравенства

$$\left\|\bar f(t,x+z,u+h)-\bar f(t,x,u)\right\|\le M\left(\|z\|+\|h\|\right),$$

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x}\bar f(t,x+z,u+h)-\frac{\partial}{\partial x}\bar f(t,x,u)\right\|\le M\left(\|z\|+\|h\|\right), \tag{1}$$

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x+z)-\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x)\right\|\le M\|z\|.$$

Пусть $h:[t_0,T]\to R^r$ – кусочно-непрерывная функция, для которой (**рис.1**)

$$u^0(t)+h(t)\in P,\quad t\in[t_0,T].$$

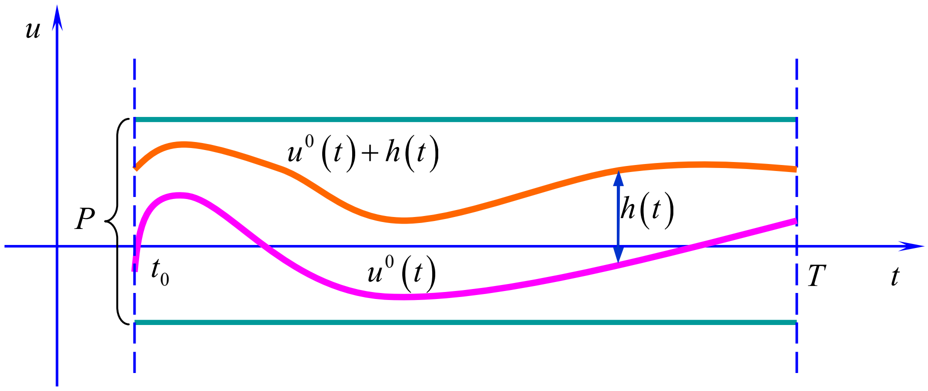

Рис. 1

Полагаем

$$z(\cdot)=x\left(\cdot,t_0,x_0,u^0(\cdot)+h(\cdot)\right)-x\left(\cdot,t_0,x_0,u^0(\cdot)\right).$$

Лемма 1. *Справедлива оценка*

$$\|z(t)\|\le c_1\int_{t_0}^{T}\|h(\tau)\|d\tau,\quad c_1=Me^{M(T-t_0)},\quad t\in[t_0,T],$$

где $M>0$ – константа, фигурирующая в неравенствах (1).

Доказательство.

$$\dot z(\cdot)=\overbrace{\frac{d}{dt}x\left(\cdot,t_0,x_0,u^0(\cdot)+h(\cdot)\right)}^{f\left(t,x^0(t)+z(t),u^0(t)+h(t)\right)}-\overbrace{\frac{d}{dt}x\left(\cdot,t_0,x_0,u^0(\cdot)\right)}^{f\left(t,x^0(t),u^0(t)\right)}\ \Rightarrow$$

$$\dot z(t)=f\left(t,x^0(t)+z(t),u^0(t)+h(t)\right)-f\left(t,x^0(t),u^0(t)\right),\quad t\in[t_0,T],\quad z(t_0)=0. \tag{2}$$

Проинтегрируем равенство (2) в пределах от t_0 до $t\in[t_0,T]$. Имеем

$$z(t)-\overbrace{z(t_0)}^{=0}=\int_{t_0}^{t}\left[f\left(\tau,x^0(\tau)+z(\tau),u^0(\tau)+h(\tau)\right)-f\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau)\right)\right]d\tau\Rightarrow$$

$$\|z(t)\|=\left\|\int_{t_0}^{t}\left[f\left(\tau,x^0(\tau)+z(\tau),u^0(\tau)+h(\tau)\right)-f\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau)\right)\right]d\tau\right\|\le$$

$$\le \int_{t_0}^{t} \overbrace{\left\| f\left(\tau, x^0(\tau)+z(\tau), u^0(\tau)+h(\tau)\right)-f\left(t, x^0(\tau), u^0(\tau)\right)\right\|}^{\left\|\bar f(t,x+z,u+h)-\bar f(t,x,u)\right\| \le M\left(\|z\|+\|h\|\right) \quad (1)} d\tau \le$$

$$\le \int_{t_0}^{t} M\left(\left\|z(\tau)\right\|+\left\|h(\tau)\right\|\right) d\tau = M\int_{t_0}^{t}\left\|z(\tau)\right\| d\tau + M\int_{t_0}^{t}\left\|h(\tau)\right\| d\tau \quad \Rightarrow$$

$$\|z(t)\| \le M\int_{t_0}^{t}\left\|z(\tau)\right\| d\tau + M\int_{t_0}^{T}\left\|h(\tau)\right\| d\tau. \tag{3}$$

К последнему неравенству (3) применим лемму Гроноулла

$$\overbrace{\|z(t)\|}^{\varphi(t)} \le \overbrace{M}^{a}\int_{t_0}^{t}\overbrace{\left\|z(\tau)\right\|}^{\varphi(t)} d\tau + \overbrace{M\int_{t_0}^{T}\left\|h(\tau)\right\| d\tau}^{b} \quad \Rightarrow$$

$$\overbrace{\varphi(t)}^{\|z(\tau)\|} \le \overbrace{b}^{M\int_{t_0}^{T}\|h(\tau)\|d\tau} \; e^{\overbrace{a}^{M}(t-t_0)}, \quad t\in\left[t_0, T\right] \quad \Rightarrow$$

$$\|z(t)\| \le M\int_{t_0}^{T}\left\|h(\tau)\right\| d\tau \cdot e^{M(t-t_0)} \le \|z(t)\| \le \overbrace{Me^{M(T-t_0)}}^{c_1} \cdot \int_{t_0}^{T}\left\|h(\tau)\right\| d\tau, \quad t\in\left[t_0, T\right] \quad \Rightarrow$$

$$\left\|z(t)\right\| \le c_1\int_{t_0}^{T}\left\|h(\tau)\right\| d\tau, \quad c_1 = Me^{M(T-t_0)}, \quad t\in\left[t_0, T\right].$$

Лемма доказана. ■

Обозначим

$$\Delta I = \overbrace{I\left[u^0(\cdot)+h(\cdot)\right]}^{\int_{t_0}^{T} f_0\left(\tau, x^0(\tau)+z(\tau), u^0(\tau)+h(\tau)\right)d\tau+\Phi\left(x^0(T)+z(T)\right)} - \overbrace{I\left[u^0(\cdot)\right]}^{\int_{t_0}^{T} f_0\left(\tau, x^0(\tau), u^0(\tau)\right)d\tau+\Phi\left(x^0(T)\right)} =$$

$$= \int_{t_0}^{T}\left[f_0\left(\tau, x^0(\tau)+z(\tau), u^0(\tau)+h(\tau)\right)-f_0\left(\tau, x^0(\tau), u^0(\tau)\right)\right] d\tau +$$

$$+\Phi\left(x^0(T)+z(T)\right)-\Phi\left(x^0(T)\right). \tag{4}$$

Лемма 2. *Имеет место равенство*

$$\Delta I = -\int_{t_0}^{T}\left[H\left(\tau, x^0(\tau)+z(\tau), u^0(\tau)+h(\tau), \bar\psi^0(\tau)\right)-H\left(\tau, x^0(\tau), u^0(\tau), \bar\psi^0(\tau)\right)\right] d\tau +$$

$$+\int_{t_0}^{T}\left\langle \frac{\partial}{\partial x} H\left(\tau, x^0(\tau), u^0(\tau), \bar\psi^0(\tau)\right),\; z(\tau)\right\rangle d\tau + R_1, \tag{5}$$

где
$$\left|R_1\right| \le Mc_1^2\left(\int_{t_0}^{T}\left\|h(\tau)\right\| d\tau\right)^2, \quad c_1 = Me^{M(T-t_0)}.$$

Доказательство. По формуле конечных приращений получим

$$\Phi\left(x^0(T)+z(T)\right)-\Phi\left(x^0(T)\right)=\left\langle \frac{\partial}{\partial x}\Phi\left(x^0(T)+\theta z(T)\right), z(T)\right\rangle=$$

$$=\overbrace{\left\langle \frac{\partial}{\partial x}\Phi\left(x^0(T)+\theta z(T)\right), z(T)\right\rangle-\left\langle \frac{\partial}{\partial x}\Phi\left(x^0(T)\right), z(T)\right\rangle}^{=R_1}+\left\langle \frac{\partial}{\partial x}\Phi\left(x^0(T)\right), z(T)\right\rangle, \quad \theta\in[0,1] \quad \Rightarrow$$

$$\Phi\left(x^0(T)+z(T)\right)-\Phi\left(x^0(T)\right)=\left\langle \frac{\partial}{\partial x}\Phi\left(x^0(T)\right), z(T)\right\rangle+R_1, \tag{6}$$

где обозначено

$$R_1=\left\langle \frac{\partial}{\partial x}\Phi\left(x^0(T)+\overset{\in[0,1]}{\theta}\cdot z(T)\right), z(T)\right\rangle-\left\langle \frac{\partial}{\partial x}\Phi\left(x^0(T)\right), z(T)\right\rangle \quad \Rightarrow$$

$$|R_1|=\left|\left\langle \frac{\partial}{\partial x}\Phi\left(x^0(T)+\theta\cdot z(T)\right), z(T)\right\rangle-\left\langle \frac{\partial}{\partial x}\Phi\left(x^0(T)\right), z(T)\right\rangle\right|=$$

$$=\overbrace{\left|\left\langle \frac{\partial}{\partial x}\Phi\left(x^0(T)+\theta\cdot z(T)\right)-\frac{\partial}{\partial x}\Phi\left(x^0(T)\right), z(T)\right\rangle\right|}^{\le\left\|\frac{\partial}{\partial x}\Phi\left(x^0(T)+\theta\cdot z(T)\right)-\frac{\partial}{\partial x}\Phi\left(x^0(T)\right)\right\|\cdot\|z(T)\|}\le$$

$$\le\overbrace{\left\|\frac{\partial}{\partial x}\Phi\left(x^0(T)+\overset{\in[0,1]}{\theta}z(T)\right)-\frac{\partial}{\partial x}\Phi\left(x^0(T)\right)\right\|}^{\le M\|z(T)\|\ (1)}\cdot\|z(T)\|\le$$

$$\le M\overbrace{\|z(T)\|^2}^{\text{Лемма 1}\Rightarrow\le\left(c_1\int_{t_0}^{T}\|h(\tau)\|d\tau\right)^2}\le Mc_1^2\left(\int_{t_0}^{T}\|h(\tau)\|d\tau\right)^2 \quad \Rightarrow$$

$$|R_1|\le Mc_1^2\left(\int_{t_0}^{T}\|h(\tau)\|d\tau\right)^2. \tag{8}$$

Преобразуем первое слагаемое в правой части (6)

$$\left\langle \overbrace{\frac{\partial}{\partial x}\Phi\left(x^0(T)\right)}^{-\psi^0(T)}, z(T)\right\rangle=-\left\langle\psi^0(T), z(T)\right\rangle+\overbrace{0}^{\left\langle\psi^0(t_0),\overbrace{z(t_0)}^{=0}\right\rangle}=$$

$$=-\left\langle\psi^0(T), z(T)\right\rangle+\left\langle\psi^0(t_0), z(t_0)\right\rangle=-\int_{t_0}^{T}\left[\frac{d}{d\tau}\left\langle\psi^0(\tau), z(\tau)\right\rangle\right]d\tau=$$

$$-\int_{t_0}^{T}\left[\left\langle \overbrace{\dot{\psi}^0(\tau)}^{-\frac{\partial H}{\partial x}(\tau,x(\tau),u(\tau),\psi(\tau))}, z(\tau)\right\rangle + \left\langle \psi^0(\tau), \overbrace{\dot{z}(\tau)}^{f(t,x^0(\tau)+z(\tau),u^0(\tau)+h(\tau))-f(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau))}\right\rangle\right]d\tau =$$

$$=\int_{t_0}^{T}\left\langle \frac{\partial}{\partial x}H\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau),\psi^0(\tau)\right),\ z(\tau)\right\rangle d\tau -$$

$$-\int_{t_0}^{T}\left[\left\langle \psi^0(\tau),\ f\left(t,x^0(\tau)+z(\tau),u^0(\tau)+h(\tau)\right)-f\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau)\right)\right\rangle\right]d\tau. \qquad (9)$$

Из (6) в силу (9) выводим

$$\Phi\left(x^0(T)+z(T)\right)-\Phi\left(x^0(T)\right)=\overbrace{\left\langle \frac{\partial}{\partial x}\Phi\left(x^0(T)\right), z(T)\right\rangle}^{(9)\Downarrow}+R_1=$$

$$=\int_{t_0}^{T}\left\langle \frac{\partial}{\partial x}H\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau),\bar{\psi}^0(\tau)\right),\ z(\tau)\right\rangle d\tau -$$

$$-\int_{t_0}^{T}\left[\left\langle \psi^0(\tau),\ f\left(t,x^0(\tau)+z(\tau),u^0(\tau)+h(\tau)\right)-f\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau)\right)\right\rangle\right]d\tau+R_1. \qquad (10)$$

Подставим (10) в (4), тогда

$$\Delta I=\int_{t_0}^{T}\left[f_0\left(\tau,x^0(\tau)+z(\tau),u^0(\tau)+h(\tau)\right)-f_0\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau)\right)\right]d\tau+$$

$$+\overbrace{\Phi\left(x^0(T)+z(T)\right)-\Phi\left(x^0(T)\right)}^{(10)\Downarrow}=$$

$$=\int_{t_0}^{T}\left[f_0\left(\tau,x^0(\tau)+z(\tau),u^0(\tau)+h(\tau)\right)-f_0\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau)\right)\right]d\tau+$$

$$+\int_{t_0}^{T}\left\langle \frac{\partial}{\partial x}H\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau),\bar{\psi}^0(\tau)\right),\ z(\tau)\right\rangle d\tau -$$

$$-\int_{t_0}^{T}\left[\left\langle \psi^0(\tau),\ f\left(t,x^0(\tau)+z(\tau),u^0(\tau)+h(\tau)\right)-f\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau)\right)\right\rangle\right]d\tau+R_1=$$

$$=\int_{t_0}^{T}\left\langle \frac{\partial}{\partial x}H\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau),\bar{\psi}^0(\tau)\right),\ z(\tau)\right\rangle d\tau +$$

$$+\int_{t_0}^{T}\left[\overbrace{f_0\left(\tau,x^0(\tau)+z(\tau),u^0(\tau)+h(\tau)\right)-\left\langle \psi^0(\tau),\ f\left(t,x^0(\tau)+z(\tau),u^0(\tau)+h(\tau)\right)\right\rangle}^{-H\left(\tau,x^0(\tau)+z(\tau),u^0(\tau)+h(\tau),\psi^0(\tau)\right)}\right]d\tau+$$

$$+\int_{t_0}^{T}\left[\overbrace{-f_0\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau)\right)+\left\langle\psi^0(\tau),\ f\left(t,x^0(\tau),u^0(\tau)\right)\right\rangle}^{H\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau),\psi^0(\tau)\right)}\right]d\tau+R_1=$$

$$=\int_{t_0}^{T}\left\langle\frac{\partial}{\partial x}H\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau),\overline{\psi}^0(\tau)\right),\ z(\tau)\right\rangle d\tau-$$

$$-\int_{t_0}^{T}H\left(\tau,x^0(\tau)+z(\tau),u^0(\tau)+h(\tau),\psi^0(\tau)\right)d\tau+\int_{t_0}^{T}H\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau),\psi^0(\tau)\right)d\tau+R_1.$$

Формула (5) выведена. Оценка $|R_1|\le Mc_1^2\left(\int_{t_0}^{T}\left\|h(\tau)\right\|d\tau\right)^2$ была получена выше в (8).

Лемма доказана. ■

Лемма 3. *Существует такая постоянная* $\kappa>0$, *что имеет место равенство*

$$\Delta I=-\int_{t_0}^{T}\left[H\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau)+h(\tau),\psi^0(\tau)\right)-H\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau),\psi^0(\tau)\right)\right]d\tau+R,\tag{11}$$

где

$$|R|\le\kappa\left(\int_{t_0}^{T}\left\|h(\tau)\right\|d\tau\right)^2.\tag{12}$$

Доказательство. Используя разложение

$$H\left(t,x^0(t)+z(t),u^0(t)+h(t),\psi^0(t)\right)=H\left(t,x^0(t),u^0(t)+h(t),\psi^0(t)\right)+$$

$$+\left\langle\frac{\partial}{\partial x}H\left(t,x^0(t)+\theta(t)z(t),u^0(t)+h(t),\psi^0(t)\right),\ z(t)\right\rangle,\quad\theta(t)\in[0,1],\quad t\in[t_0,T],\tag{13}$$

преобразуем выражение (5) **) (лемма 2)**

$$\Delta I=$$

$$=-\int_{t_0}^{T}\left[\overbrace{H\left(\tau,x^0(\tau)+z(\tau),u^0(\tau)+h(\tau),\psi^0(\tau)\right)}^{H\left(t,x^0(t),u^0(t)+h(t),\psi^0(t)\right)+\left\langle\frac{\partial}{\partial x}H\left(t,x^0(t)+\theta(t)z(t),u^0(t)+h(t),\psi^0(t)\right),\ z(t)\right\rangle\quad(13)}-H\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau),\psi^0(\tau)\right)\right]d\tau+$$

$$+\int_{t_0}^{T}\left\langle\frac{\partial}{\partial x}H\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau),\psi^0(\tau)\right),\ z(\tau)\right\rangle d\tau+R_1=$$

$$=-\int_{t_0}^{T}\left[H\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau)+h(\tau),\psi^0(\tau)\right)+\right.$$

$$+\left\langle\frac{\partial}{\partial x}H\left(\tau,x^0(\tau)+\theta(\tau)z(\tau),u^0(\tau)+h(\tau),\psi^0(\tau)\right),\ z(\tau)\right\rangle-$$

$$-H\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau),\psi^0(\tau)\right)d\tau\Big]+\int_{t_0}^{T}\left\langle\frac{\partial}{\partial x}H\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau),\bar{\psi}^0(\tau)\right),\ z(\tau)\right\rangle d\tau+R_1=$$

$$=-\int_{t_0}^{T}\left[H\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau)+h(\tau),\psi^0(\tau)\right)-H\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau),\psi^0(\tau)\right)\right]d\tau-$$

$$-\int_{t_0}^{T}\left\langle\frac{\partial}{\partial x}H\left(\tau,x^0(\tau)+\theta(\tau)z(\tau),u^0(\tau)+h(\tau),\psi^0(\tau)\right),\ z(\tau)\right\rangle d\tau+$$

$$+\int_{t_0}^{T}\left\langle\frac{\partial}{\partial x}H\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau),\psi^0(\tau)\right),\ z(\tau)\right\rangle d\tau+R_1.$$

Тогда

$$\Delta I=-\int_{t_0}^{T}\left[H\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau)+h(\tau),\psi^0(\tau)\right)-H\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau),\psi^0(\tau)\right)\right]d\tau+R,$$

где обозначено

$$R=R_1+R_2,$$

$$R_2=-\int_{t_0}^{T}\left\langle\frac{\partial}{\partial x}H\left(\tau,x^0(\tau)+\theta(\tau)z(\tau),u^0(\tau)+h(\tau),\psi^0(\tau)\right),\ z(\tau)\right\rangle d\tau+$$

$$+\int_{t_0}^{T}\left\langle\frac{\partial}{\partial x}H\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau),\psi^0(\tau)\right),\ z(\tau)\right\rangle d\tau.$$

Представление (11) получено. Покажем, что существует $\kappa>0$, для которого оценка (12) имеет место. Оценим R_2 по модулю

$$|R_2|=\left|\int_{t_0}^{T}\left\langle\frac{\partial}{\partial x}H\left(\tau,x^0(\tau)+\theta(\tau)z(\tau),u^0(\tau)+h(\tau),\psi^0(\tau)\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\partial}{\partial x}H\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau),\psi^0(\tau)\right),\ z(\tau)\right\rangle d\tau\right|\le$$

$$\le\int_{t_0}^{T}\left\|\frac{\partial}{\partial x}\overbrace{H\left(\tau,x^0(\tau)+\theta(\tau)z(\tau),u^0(\tau)+h(\tau),\psi^0(\tau)\right)}^{-f_0\left(\tau,x^0(\tau)+\theta(\tau)z(\tau),u^0(\tau)+h(\tau)\right)+\left\langle\psi^0(\tau),\ f\left(\tau,x^0(\tau)+\theta(\tau)z(\tau),u^0(\tau)+h(\tau)\right)\right\rangle}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial x}\overbrace{H\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau)\right)}^{-f_0\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau)\right)+\left\langle\psi^0(\tau),\ f\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau)\right)\right\rangle}\right\|\cdot\|z(\tau)\|d\tau==\int_{t_0}^{T}\left\|-\frac{\partial}{\partial x}f_0\left(\tau,x^0(\tau)+\theta(\tau)z(\tau),u^0(\tau)+h(\tau)\right)+\right.$$

$$+\overbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left\langle\psi^0(\tau),\ f\left(\tau,x^0(\tau)+\theta(\tau)z(\tau),u^0(\tau)+h(\tau)\right)\right\rangle}^{=\overbrace{\frac{\partial}{\partial x}f\left(\tau,x^0(\tau)+\theta(\tau)z(\tau),u^0(\tau)+h(\tau)\right)}^{n\times n}\overbrace{\psi^0(\tau)}^{n\times 1}}+\frac{\partial}{\partial x}f_0\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau)\right)-$$

$$-\overbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left\langle \psi^0(\tau),\ f\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau)\right)\right\rangle}^{=\overbrace{\frac{\partial}{\partial x}f\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau)\right)}^{n\times n}\overbrace{\psi^0(\tau)}^{n\times 1}}\Bigg\|\cdot\|z(\tau)\|\,d\tau=$$

$$=\int_{t_0}^{T}\Bigg\|-\frac{\partial}{\partial x}f_0\left(\tau,x^0(\tau)+\theta(\tau)z(\tau),u^0(\tau)+h(\tau)\right)+\frac{\partial}{\partial x}f_0\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau)\right)+$$

$$+\overbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x}f\left(\tau,x^0(\tau)+\theta(\tau)z(\tau),u^0(\tau)+h(\tau)\right)\right)}^{n\times n}\overbrace{\psi^0(\tau)}^{n\times 1}-$$

$$-\overbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x}f\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau)\right)\right)}^{n\times n}\overbrace{\psi^0(\tau)}^{n\times 1}\Bigg\|\cdot\|z(\tau)\|\,d\tau=$$

$$=\int_{t_0}^{T}\Bigg\|-\frac{\partial}{\partial x}f_0\left(\tau,x^0(\tau)+\theta(\tau)z(\tau),u^0(\tau)+h(\tau)\right)+\frac{\partial}{\partial x}f_0\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau)\right)+$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial x}f\left(\tau,x^0(\tau)+\theta(\tau)z(\tau),u^0(\tau)+h(\tau)\right)-\frac{\partial}{\partial x}f\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau)\right)\right)\cdot\psi^0(\tau)\Bigg\|\cdot\|z(\tau)\|\,d\tau\le$$

$$\le\int_{t_0}^{T}\overbrace{\left\|-\frac{\partial}{\partial x}f_0\left(\tau,x^0(\tau)+\theta(\tau)z(\tau),u^0(\tau)+h(\tau)\right)+\frac{\partial}{\partial x}f_0\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau)\right)\right\|}^{(1)\Rightarrow\le M\left(\|z(\tau)\|+\|h(\tau)\|\right)}\cdot\|z(\tau)\|\,d\tau+$$

$$+\Bigg\|\overbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x}f\left(\tau,x^0(\tau)+\theta(\tau)z(\tau),u^0(\tau)+h(\tau)\right)-\frac{\partial}{\partial x}f\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau)\right)\right)}^{(1)\Rightarrow\le M\left(\|z(\tau)\|+\|h(\tau)\|\right)}\Bigg\|\cdot\overbrace{\left\|\psi^0(\tau)\right\|}^{\le\max\limits_{t\in[t_0,T]}\|\psi^0(t)\|}\cdot\|z(\tau)\|\,d\tau\le$$

$$\le\int_{t_0}^{T}M\left(\|z(\tau)\|+\|h(\tau)\|\right)\cdot\|z(\tau)\|\,d\tau+\int_{t_0}^{T}M\left(\|z(\tau)\|+\|h(\tau)\|\right)\cdot\max_{t\in[t_0,T]}\left\|\psi^0(t)\right\|\cdot\|z(\tau)\|\,d\tau=$$

$$=\overbrace{M\left(1+\max_{t\in[t_0,T]}\left\|\psi^0(t)\right\|\right)}^{M_1}\cdot\int_{t_0}^{T}\left(\overbrace{\|z(\tau)\|}^{\text{лемма}1:\Rightarrow\le c_1\int_{t_0}^{T}\|h(s)\|ds}+\|h(\tau)\|\right)\cdot\overbrace{\|z(\tau)\|}^{\text{лемма}1:\Rightarrow\le c_1\int_{t_0}^{T}\|h(s)\|ds}\,d\tau\le$$

$$\le M_1\cdot\int_{t_0}^{T}\left(\left(c_1\int_{t_0}^{T}\|h(s)\|ds\right)+\|h(\tau)\|\right)d\tau\cdot\left(c_1\int_{t_0}^{T}\|h(s)\|ds\right)=$$

$$=c_1\cdot M_1\cdot\left[\left(c_1\int_{t_0}^{T}\|h(s)\|ds\right)\cdot\int_{t_0}^{T}d\tau+\int_{t_0}^{T}\|h(\tau)\|\,d\tau\right]\cdot\left(\int_{t_0}^{T}\|h(s)\|ds\right)=$$

$$= c_1 \cdot M_1 \cdot \left[\left(c_1 \int_{t_0}^{T} \|h(s)\| ds \right) (T - t_0) + \int_{t_0}^{T} \|h(\tau)\| d\tau \right] \cdot \left(\int_{t_0}^{T} \|h(s)\| ds \right) =$$

$$= c_1 \cdot M_1 \cdot \left(c_1 (T - t_0) + 1 \right) \cdot \left(\int_{t_0}^{T} \|h(s)\| ds \right)^2 \Rightarrow$$

$$|R_2| \le c_1 \cdot M_1 \cdot \left(c_1 (T - t_0) + 1 \right) \cdot \left(\int_{t_0}^{T} \|h(s)\| ds \right)^2 . \tag{14}$$

Тогда

$$|R| = |R_1 + R_2| \le \overbrace{|R_1|}^{\substack{\text{лемма } 2 \Rightarrow \\ \le Mc_1^2 \left(\int_{t_0}^{T} \|h(\tau)\| d\tau \right)^2}} + \overbrace{|R_2|}^{\substack{(14) \Rightarrow \\ \le c_1 \cdot M_1 \cdot \left(c_1 (T - t_0) + 1 \right) \cdot \left(\int_{t_0}^{T} \|h(s)\| ds \right)^2}} \le$$

$$\le Mc_1^2 \left(\int_{t_0}^{T} \|h(\tau)\| d\tau \right)^2 + c_1 \cdot M_1 \cdot \left(c_1 (T - t_0) + 1 \right) \cdot \left(\int_{t_0}^{T} \|h(s)\| ds \right)^2 =$$

$$= \left(\int_{t_0}^{T} \|h(\tau)\| d\tau \right)^2 \overbrace{\left(Mc_1^2 + c_1 \cdot M_1 \cdot \left(c_1 (T - t_0) + 1 \right) \right)}^{\kappa} \Rightarrow |R| \le \kappa \left(\int_{t_0}^{T} \|h(\tau)\| d\tau \right)^2 .$$

Лемма доказана. ■

Перейдем к доказательству **теоремы 1** (Принцип максимума Л.С. Понтрягина), сформулированной в предыдущем пункте.

Доказательство теоремы 1. Пусть $v \in P$, $t \in [t_0, T)$ и $\varepsilon > 0$ столь мало, что $t + \varepsilon \in [t_0, T]$. Функцию $h(\cdot)$ определим формулой

$$h(\tau) = \begin{cases} v - u^0(\tau), & \tau \in [t, t + \varepsilon), \\ 0, & \tau \in [t_0, t) \cup [t + \varepsilon, T]. \end{cases}$$

На **рис. 2** приведен график этой функции

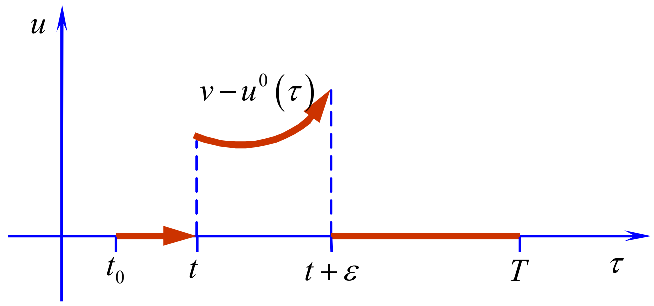

Рис. 2

Очевидно, что функция $u^0(\cdot)+h(\cdot)$ кусочно-непрерывна и для всех $\tau\in[t_0,T]$ выполнено включение

$$u^0(\tau)+\overbrace{h(\tau)}^{h(\tau)=\begin{cases}v-u^0(\tau), & \tau\in[t,t+\varepsilon),\\ 0, & \tau\in[t_0,t)\cup[t+\varepsilon,T]\end{cases}}=\begin{cases}\overset{const}{v}, & \tau\in[t,t+\varepsilon),\\ u^0(\tau), & \tau\in[t_0,t)\cup[t+\varepsilon,T]\end{cases}\in P.$$

Для программного управления $u^0(\cdot)+h(\cdot)$ и движения $x(\cdot,t_0,x_0,h(\cdot)+u^0(\cdot))$ имеет место равенство

$$H\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau)+\overbrace{h(\tau)}^{\begin{cases}v-u^0(\tau), & \tau\in[t,t+\varepsilon),\\ 0, & \tau\in[t_0,t)\cup[t+\varepsilon,T].\end{cases}},\psi^0(\tau)\right)=$$

$$=\begin{cases}H\left(\tau,x^0(\tau),v,\psi^0(\tau)\right), & \tau\in[t,t+\varepsilon),\\ H\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau),\psi^0(\tau)\right), & \tau\in[t_0,t)\cup[t+\varepsilon,T].\end{cases}$$

В соответствие с **леммой 3** выводим

$$\Delta I=-\int_{t_0}^{T}\left[\overbrace{H\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau)+h(\tau),\psi^0(\tau)\right)}^{=\begin{cases}H\left(\tau,x^0(\tau),v,\psi^0(\tau)\right), & \tau\in[t,t+\varepsilon)\\ H\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau),\psi^0(\tau)\right), & \tau\in[t_0,t)\cup[t+\varepsilon,T]\end{cases}}-H\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau),\psi^0(\tau)\right)\right]d\tau+R=$$

$$=-\int_{t}^{t+\varepsilon}\overbrace{\left[H\left(\tau,x^0(\tau),v,\psi^0(\tau)\right)-H\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau),\psi^0(\tau)\right)\right]}^{g(\tau)}d\tau+R\quad\Rightarrow$$

$$\Delta I=-\int_{t}^{t+\varepsilon}g(\tau)d\tau+R,$$

где

$$g(\tau)=H\left(\tau,x^0(\tau)+z(\tau),v,\bar{\psi}^0(\tau)\right)-H\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau),\bar{\psi}^0(\tau)\right),\quad \tau\in[t,t+\varepsilon).$$

Уточним оценку (12)

$$|R|\le\kappa\left(\int_{t_0}^{T}\overbrace{\|h(s)\|}^{\|h(\tau)\|=\begin{cases}\|v-u^0(\tau)\|, & \tau\in[t,t+\varepsilon),\\ 0, & \tau\in[t_0,t)\cup[t+\varepsilon,T].\end{cases}}ds\right)^2=\kappa\left(\int_{t}^{t+\varepsilon}1\cdot\|h(s)\|ds\right)^2\overset{Коши-Буняковский}{\le}$$

$$\overset{Коши-Буняковский}{\le}\kappa\left(\int_{t}^{t+\varepsilon}1^2ds\right)\left(\int_{t}^{t+\varepsilon}\|h(s)\|^2ds\right)=\kappa\varepsilon\int_{t}^{t+\varepsilon}\|h(s)\|^2ds\quad\Rightarrow$$

$$|R| \le \kappa\varepsilon \int_t^{t+\varepsilon} \|h(s)\|^2 \, ds.$$

При достаточно малых $\varepsilon > 0$ функция $u^0(\cdot)$ непрерывна на $\tau \in [t, t+\varepsilon)$, поэтому

$$\int_t^{t+\varepsilon} g(\tau)\,d\tau = \varepsilon g(t+\theta\varepsilon), \quad \theta \in [0,1]. \tag{15}$$

Из оптимальности пары $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$ следует

$$\Delta I = \overbrace{I\left[u^0(\cdot)+h(\cdot)\right] - I\left[u^0(\cdot)\right]}^{-\int_t^{t+\varepsilon} g(\tau)d\tau + R} \ge 0,$$

тогда

$$0 \le \Delta I = -\overbrace{\int_t^{t+\varepsilon} g(\tau)\,d\tau}^{\varepsilon g(t+\theta\varepsilon) \quad (15)} + \overbrace{R}^{\le \kappa\varepsilon \int_t^{t+\varepsilon} \|h(s)\|^2 ds \quad (5)} \le -\varepsilon g(t+\theta\varepsilon) + \kappa\varepsilon \int_t^{t+\varepsilon} \|h(s)\|^2 \, ds \quad \Rightarrow$$

$$-\varepsilon g(t+\theta\varepsilon) + \kappa\varepsilon \int_t^{t+\varepsilon} \|h(s)\|^2 \, ds \ge 0.$$

Поделим обе части последнего неравенства на положительное число $\varepsilon > 0$ и устремим ε к нулю. В результате получим, что

$$-g(t) \ge 0 \quad \Rightarrow \quad \overbrace{g(t)}^{H\left(t,x^0(t),v,\psi^0(t)\right) - H\left(t,x^0(t),u^0(t),\psi^0(t)\right)} \le 0 \quad \Rightarrow$$

$$H\left(t, x^0(t), v, \psi^0(t)\right) - H\left(t, x^0(t), u^0(t), \psi^0(t)\right) \le 0.$$

В силу произвольности $v \in P$ следует справедливость теоремы для всех $t \in [t_0, T)$. Чтобы доказать терему для $t = T$, возьмем функцию $h(\cdot)$ в виде

$$h(\tau) = \begin{cases} v - u^0(\tau), & \tau \in (T-\varepsilon, T], \\ 0, & \tau \in [t_0, T-\varepsilon], \end{cases}$$

и проведем аналогичные рассуждения. Теорема доказана. ■

3.5. Индивидуальное задание 4 «Простейшая задача теории оптимального управления»

Для динамического управляемого объекта

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + u_2, \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1]$$

требуется:

1) определить оптимальное управление;

2) построить оптимальную траекторию;

3) вычислить значение функционала на оптимальной паре;

4) сравнить оптимальное значение функционала с его значением на тривиальном управлении.

Примеры выполнения индивидуального задания 4

Пример 3. Приведем решение задания при следующих числовых данных:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad P = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \middle| \, |u_1| \le 1, |u_2| \le 1 \right\}.$$

Функция Л.С. Понтрягина

$$H(t, x_1, x_2, u_1, u_2, \psi_1, \psi_2) = \psi_1(-4x_1 - 5x_2 + u_1) + \psi_2(3x_1 + 4x_2 + u_2).$$

Шаблон для оптимального управления

$$U_1^0(t, x, \psi) = sign[\psi_1], \quad U_2^0(t, x, \psi) = sign[\psi_2].$$

Сопряженная система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 4\psi_1 - 3\psi_2, \\ \dot{\psi}_2 = 5\psi_1 - 4\psi_2, \end{cases}$$

Граничные условия для сопряженных переменных

$$\psi_1(0) = -1, \quad \psi_2(0) = -1.$$

Решение сопряженной системы дифференциальных уравнений с приведенными граничными условиями

$$\psi_1^0(t) = -e^{-1+t}, \quad \psi_2^0(t) = -e^{-1+t}.$$

Оптимальное управление получим, подставив найденное решение в шаблон оптимального управления

$$u_1^0(t) = -1, \quad u_2^0(t) = -1.$$

Основная система дифференциальных уравнений с оптимальным управлением

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -4x_1 - 5x_2 - 1, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 4x_2 - 1. \end{cases}$$

Интегрируя ее с начальными условиями $\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ на промежутке $t \in [0,1]$, получим

$$\begin{cases} x_1^0(t) = -9 + 5e^{-t} + 4e^t, \\ x_2^0(t) = 7 - 3e^{-t} - 4e^t. \end{cases}$$

Оптимальное значение функционала

$$I\left[u^0(\cdot)\right] = -2 + \frac{2}{e} < 0 .$$

Ответ не противоречит условию

$$I\left[u^0(\cdot)\right] \le I\left[u_{тр}(\cdot)\right] = 0 ,$$

где $u_{тр}(\cdot) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. ►

Пример 4. Приведем решение задания при следующих числовых данных:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad P = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \middle| \; u_1^2 + u_2^2 \le 1 \right\}.$$

Функция Л. С. Понтрягина

$$H(t, x_1, x_2, u_1, u_2, \psi_1, \psi_2) = \psi_1(-5x_1 - 3x_2 + u_1) + \psi_2(6x_1 + 4x_2 + u_2) .$$

Шаблон для оптимального управления

$$U_1^0(t, x, \psi) = \frac{\psi_1}{\sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2}}, \quad U_2^0(t, x, \psi) = \frac{\psi_2}{\sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2}}.$$

Сопряженная система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 5\psi_1 - 6\psi_2, \\ \dot{\psi}_2 = 3\psi_1 - 4\psi_2. \end{cases}$$

Граничные условия для сопряженных переменных

$$\psi_1(0) = -1, \quad \psi_2(0) = -1.$$

Решение сопряженной систем дифференциальных уравнений с приведенными граничными условиями

$$\psi_1^0(t) = -e^{-1+t}, \quad \psi_2^0(t) = -e^{-1+t}.$$

Оптимальное управление получим, подставив найденное решение в шаблон оптимального управления

$$u_1^0(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad u_2^0(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Основная система дифференциальных уравнений с оптимальным управлением

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -5x_1 - 3x_2 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ \dot{x}_2 = 6x_1 + 4x_2 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Интегрируя ее с начальными условиями $\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ на промежутке $t \in [0,1]$,

получим

$$\begin{cases} x_1^0(t) = \dfrac{e^{-2t}\left(3 - 7e^{2t} + 4e^{3t}\right)}{2\sqrt{2}}, \\ x_2^0(t) = \dfrac{e^{-2t}\left(3 - 11e^{2t} + 8e^{3t}\right)}{2\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Оптимальное значение функционала

$$I\left[u^0(\cdot)\right] = -2,4300 < 0.$$

Ответ не противоречит условию

$$I\left[u^0(\cdot)\right] \le I\left[u_{mp}(\cdot)\right] = 0,$$

где $u_{mp}(\cdot) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. ►

Пример 5. Приведем решение задания при следующих числовых данных:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}, \quad P = R^2.$$

Функция Л.С. Понтрягина

$$H(t, x_1, x_2, u_1, u_2, \psi_1, \psi_2) = -u_1^2(\tau) - u_2^2(\tau) + \psi_1(-5x_1 - 4x_2 + u_1) + \psi_2(6x_1 + 6x_2 + u_2).$$

Шаблон для оптимального управления

$$U_1^0(t, x, \psi) = \frac{1}{2}\psi_1, \quad U_2^0(t, x, \psi) = \frac{1}{2}\psi_2.$$

Заметим, что знаки главных миноров матрицы

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

чередуются. Следовательно, шаблоны для оптимального управления действительно доставляет максимум функции Л.С. Понтрягина.

Сопряженная система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 5\psi_1 - 6\psi_2, \\ \dot{\psi}_2 = 4\psi_1 - 6\psi_2. \end{cases}$$

Граничные условия для сопряженных переменных

$$\psi_1(0) = -1, \quad \psi_2(0) = -1.$$

Решение сопряженной систем дифференциальных уравнений с приведенными граничными условиями

$$\begin{cases} \psi_1^0(t) = -\frac{1}{5} e^{-2-3t}\left(3e^5 + 2e^{5t}\right), \\ \psi_2^0(t) = -\frac{1}{5} e^{-2-3t}\left(4e^5 + e^{5t}\right). \end{cases}$$

Оптимальное управление получим, подставив найденное решение в шаблон оптимального управления

$$\begin{cases} u_1^0(t) = -\frac{1}{10} e^{-2-3t}\left(3e^5 + 2e^{5t}\right), \\ u_2^0(t) = -\frac{1}{10} e^{-2-3t}\left(4e^5 + e^{5t}\right). \end{cases}$$

Основная система дифференциальных уравнений с оптимальным управлением

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -5x_1 - 4x_2 + u_1^0(t), \\ \dot{x}_2 = 6x_1 + 6x_2 + u_2^0(t). \end{cases}$$

Интегрируя ее с начальными условиями $\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ на промежутке $t \in [0,1]$, получим

$$\begin{cases} x_1^0(t) = \frac{1}{60} e^{-2-3t}\left(43e^5 + 6e^t - 18e^{5t} + 12e^{6t} - 48e^{5+t} + 5e^{5+6t}\right), \\ x_2^0(t) = \frac{1}{60} e^{-2-3t}\left(-52e^5 - 9e^t + 57e^{5t} - 48e^{6t} + 72e^{5+t} - 20e^{5+6t}\right), \end{cases}$$

$$I\left[u^0(\cdot)\right] = -34,248 < 0.$$

Ответ не противоречит условию

$$I\left[u^0(\cdot)\right] \le I\left[u_{mp}(\cdot)\right] = 0,$$

где $u_{mp}(\cdot) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. ►

Задания для самостоятельного решения

Для **вариантов 1–5** (см. табл.1) принять

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in P = \left\{ u \middle| |u_1| \le 1, |u_2| \le 1 \right\},$$

$$I\left[u(\cdot)\right] = x_1(1) + x_2(1) \to \min.$$

Таблица 1

№ варианта	Числовые данные			
	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}
1	– 4	– 5	3	4
2	– 3	– 2	4	3
3	– 2	– 1	3	2
4	– 5	– 3	8	5
5	– 6	– 5	7	6

Для **вариантов 6-10** (см. табл.2) принять

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in P = \left\{ u \middle| u_1^2 + u_2^2 \le 1 \right\},$$

$$I\left[u(\cdot)\right] = x_1(1) + x_2(1) \to \min.$$

Таблица 2

№ варианта	Числовые данные			
	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}
6	– 4	– 2	5	3
7	– 5	– 3	6	4
8	– 3	– 2	2	2
9	– 6	– 4	7	5
10	– 7	– 4	10	6

Для **вариантов 11-15** (см. табл.3) принять

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in P = R^2,$$

$$I\left[u(\cdot)\right] = \int_0^1 \left[u_1^2(\tau) + u_2^2(\tau)\right] d\tau + x_1(1) + x_2(1) \to \min.$$

Таблица 3

№ варианта	Числовые данные			
	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}
11	– 5	– 4	6	6
12	– 4	– 2	7	5
13	– 3	2	– 3	4
14	– 1	– 2	– 2	2
15	5	– 2	7	-4

3.6. Поведение функции Л.С. Понтрягина вдоль стационарных пар

Для произвольной пары $\left(\tilde{u}(\cdot), \tilde{x}(\cdot)\right)$, где $\tilde{x}(\cdot) = x\left(\cdot, t_0, x_0, \tilde{u}(\cdot)\right)$, построим сопряженную систему дифференциальных уравнений. Пусть функция $\tilde{\bar{\psi}}(\cdot)$ – решение этой системы, удовлетворяющее граничным условиям

$$\tilde{\psi}_0(T) = -1, \quad \tilde{\psi}(T) = -\frac{\partial \Phi\left(\tilde{x}(T)\right)}{\partial x}.$$

Рассмотрим функцию $\tilde{H} : [t_0, T] \to R^1$, определенную формулой

$$\tilde{H}(t) = H\left(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t), \tilde{\bar{\psi}}(t)\right), \quad t \in [t_0, T].$$

В общем случае эта функция кусочно-непрерывна, что обусловливается кусочной непрерывностью программного управления. Тем не менее справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $\left(u^*(\cdot), x^*(\cdot)\right)$ *– стационарная пара и* $\bar{\psi}^*(\cdot)$ *– решение сопряженной системы дифференциальных уравнений, отвечающее этой паре и удовлетворяющее граничным условиям*

$$\psi_0^*(T) = -1, \quad \psi^*(T) = -\frac{\partial\Phi\left(x^*(T)\right)}{\partial x}.$$

Тогда функция $H^*: [t_0, T] \to R^1$*, определенная формулой*

$$H^*(t) = H\left(t, x^*(t), u^*(t), \overline{\psi}^*(t)\right), t \in [t_0, T],$$

будет непрерывна в каждой точке $t \in [t_0, T]$.

Доказательство. Пара $\left(u^*(\cdot), x^*(\cdot)\right)$ удовлетворяет условиям принципа максимума, поэтому в силу равенства

$$H\left(t, x^*(t), u^*(t), \overline{\psi}^*(t)\right) = \max_{u \in P} H\left(t, x^*(t), u, \overline{\psi}^*(t)\right)$$

для всех t, $t + \Delta \in [t_0, T]$ имеем

$$H^*(t) = H\left(t, x^*(t), u^*(t), \overline{\psi}^*(t)\right) \geq H\left(t, x^*(t), u^*(t+\Delta), \overline{\psi}^*(t)\right), \tag{1}$$

$$H^*(t+\Delta) = H\left(t+\Delta, x^*(t+\Delta), u^*(t+\Delta), \overline{\psi}^*(t+\Delta)\right) \geq H\left(t+\Delta, x^*(t+\Delta), u^*(t), \overline{\psi}^*(t+\Delta)\right). \tag{2}$$

Тогда

$$H^*(t+\Delta) - H^*(t) =$$

$$= \overbrace{H\left(t+\Delta, x^*(t+\Delta), u^*(t+\Delta), \overline{\psi}^*(t+\Delta)\right)}^{\geq H\left(t+\Delta, x^*(t+\Delta), u^*(t), \overline{\psi}^*(t+\Delta)\right) \ (2)} - H\left(t, x^*(t), u^*(t), \overline{\psi}^*(t)\right) \geq$$

$$\geq H\left(t+\Delta, x^*(t+\Delta), u^*(t), \overline{\psi}^*(t+\Delta)\right) - H\left(t, x^*(t), u^*(t), \overline{\psi}^*(t)\right).$$

Аналогично

$$H^*(t+\Delta) - H^*(t) =$$

$$= H\left(t+\Delta, x^*(t+\Delta), u^*(t+\Delta), \overline{\psi}^*(t+\Delta)\right) - \overbrace{H\left(t, x^*(t), u^*(t), \overline{\psi}^*(t)\right)}^{\geq H\left(t, x^*(t), u^*(t+\Delta), \overline{\psi}^*(t)\right) \ (1)} \leq$$

$$\leq H\left(t+\Delta, x^*(t+\Delta), u^*(t+\Delta), \overline{\psi}^*(t+\Delta)\right) - H\left(t, x^*(t), u^*(t+\Delta), \overline{\psi}^*(t)\right).$$

Таким образом, получаем оценку

$$\begin{gathered} H\left(t+\Delta, x^*(t+\Delta), u^*(t), \overline{\psi}^*(t+\Delta)\right) - H\left(t, x^*(t), u^*(t), \overline{\psi}^*(t)\right) \leq \\ \leq H^*(t+\Delta) - H^*(t) \leq \\ \leq H\left(t+\Delta, x^*(t+\Delta), u^*(t+\Delta), \overline{\psi}^*(t+\Delta)\right) - H\left(t, x^*(t), u^*(t+\Delta), \overline{\psi}^*(t)\right). \end{gathered} \tag{3}$$

При $\Delta \to 0$ левая и правая части двойного неравенства (3) стремятся к нулю. Отсюда следует искомая непрерывность функции H^*. Теорема доказана. ■

Теорема 3. *Функция* H^* *дифференцируема в каждой точке своего определения, и при этом справедливо равенство*

$$\frac{d}{dt}H^*(t)=\frac{\partial}{\partial t}H\left(t,x^*(t),u^*(t),\overline{\psi}^*(t)\right),\quad t\in\left[t_0,T\right].$$

Доказательство. Разделим каждое из неравенств в (3) на положительное число Δ. В результате получим

$$\frac{H\left(t+\Delta,x^*(t+\Delta),u^*(t),\overline{\psi}^*(t+\Delta)\right)-H\left(t,x^*(t),u^*(t),\overline{\psi}^*(t)\right)}{\Delta}\le$$

$$\le\frac{H^*\left(t+\Delta\right)-H^*\left(t\right)}{\Delta}\le$$

$$\le\frac{H\left(t+\Delta,x^*(t+\Delta),u^*(t+\Delta),\overline{\psi}^*(t+\Delta)\right)-H\left(t,x^*(t),u^*(t+\Delta),\overline{\psi}^*(t)\right)}{\Delta}.\tag{4}$$

Перейдем к пределу в неравенстве (4) при $\Delta\to 0$. В силу дифференцируемости функции Гамильтона-Понтрягина по совокупности переменных и дифференцируемости функций $x^*(\cdot),\overline{\psi}^*(\cdot)$ получим

$$\frac{\partial}{\partial t}H\left(t,x^*(t),u^*(t),\overline{\psi}^*(t)\right)+\left\langle\frac{\partial}{\partial x}H\left(t,x^*(t),u^*(t),\overline{\psi}^*(t)\right),\frac{d}{dt}x^*(t)\right\rangle+$$

$$+\left\langle\frac{\partial}{\partial \psi}H\left(t,x^*(t),u^*(t),\overline{\psi}^*(t)\right),\frac{d}{dt}\overline{\psi}^*(t)\right\rangle\le$$

$$\le\lim_{\Delta\to 0}\frac{H^*\left(t+\Delta\right)-H^*\left(t\right)}{\Delta}\le$$

$$\le\frac{\partial}{\partial t}H\left(t,x^*(t),\lim_{\Delta\to 0}u^*(t+\Delta),\overline{\psi}^*(t)\right)+\left\langle\frac{\partial}{\partial x}H\left(t,x^*(t),\lim_{\Delta\to 0}u^*(t+\Delta),\overline{\psi}^*(t)\right),\frac{d}{dt}x^*(t)\right\rangle+$$

$$+\left\langle\frac{\partial}{\partial \psi}H\left(t,x^*(t),\lim_{\Delta\to 0}u^*(t+\Delta),\overline{\psi}^*(t)\right),\frac{d}{dt}\overline{\psi}^*(t)\right\rangle.\tag{5}$$

В силу непрерывности справа программного управления $u^*(\cdot)$ по времени левые и правые части двойного неравенства (5) имеют совпадающие пределы. Тогда производная функции H^* существует и имеет место равенство

$$\frac{d}{dt}H^*(t)=\frac{\partial}{\partial t}H\left(t,x^*(t),u^*(t),\overline{\psi}^*(t)\right)+\left\langle\overbrace{\frac{\partial}{\partial x}H\left(t,x^*(t),u^*(t),\overline{\psi}^*(t)\right)}^{=-\frac{d}{dt}\psi^*(t)},\frac{d}{dt}x^*(t)\right\rangle+$$

$$+\left\langle \overbrace{\frac{\partial}{\partial\psi}H\left(t,x^*(t),u^*(t),\overline{\psi}^*(t)\right)}^{=\frac{d}{dt}x^*(t)}, \frac{d}{dt}\overline{\psi}^*(t)\right\rangle = \frac{\partial}{\partial t}H\left(t,x^*(t),u^*(t),\overline{\psi}^*(t)\right) -$$

$$-\left\langle \frac{d}{dt}\psi^*(t), \frac{d}{dt}x^*(t)\right\rangle + \left\langle \frac{d}{dt}x^*(t), \frac{d}{dt}\psi^*(t)\right\rangle = \frac{\partial}{\partial t}H\left(t,x^*(t),u^*(t),\overline{\psi}^*(t)\right).$$

Теорема доказана. ■

Следствие 1. *Пусть функция Гамильтона-Понтрягина не зависит явно от времени, т. е.* $\frac{\partial}{\partial t}H\left(t,x,u,\overline{\psi}\right)=0$. *Тогда она постоянна вдоль стационарных пар.*

Пример 6. Для управляемого динамического объекта

$$\dot{x}=-ax+u,\quad t\in[0,1],\quad x(0)=0,\quad u\in R^1,\quad a\neq 0,$$

$$I[u(\cdot)]=\int_0^1 \frac{1}{2}\left[x^2(\tau)+u^2\right]d\tau \to \min$$

построить стационарную пару $x^*(t), u^*(t)$ и исследовать вдоль нее поведение функции Л.С. Понтрягина.

Решение. Функция Л.С. Понтрягина

$$H\left(t,x,u,\overline{\psi}\right)=-\frac{1}{2}\left[x^2+u^2\right]+\psi\left(-ax+u\right).$$

Шаблон для оптимального управления

$$U^0\left(t,x,\overline{\psi}\right)=\psi.$$

Преобразованная функция Гамильтона-Понтрягина

$$H\left(t,x,U^0\left(t,x,\overline{\psi}\right),\overline{\psi}\right)=-\frac{1}{2}\left[x^2+\overbrace{u^2}^{\psi^2}\right]+\psi\left(-ax+\overbrace{u}^{\psi}\right)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\psi^2-ax\psi.$$

Стационарная пара

$$u^*(t)=\psi^*(t)=c_1e^{\lambda t}\left(\lambda+a\right)+c_2e^{-\lambda t}\left(a-\lambda\right),$$

$$x^*(t)=c_1e^{\lambda t}+c_2e^{-\lambda t},\quad \lambda=\sqrt{1+a^2}.$$

Функция Л.С. Понтрягина вдоль стационарной пары в силу следствия из теоремы 3 должна оставаться постоянной. Действительно,

$$H(t)=H\left(t,x^*(t),u^*(t),\psi^*(t)\right)=$$

$$= -\frac{1}{2}\overbrace{\left(x^*(t)\right)^2}^{\left(c_1e^{\lambda t}+c_2e^{-\lambda t}\right)^2} + \frac{1}{2}\overbrace{\left(\psi^*(t)\right)^2}^{\left[c_1e^{\lambda t}(\lambda+a)+c_2e^{-\lambda t}(a-\lambda)\right]^2} - a\,\overbrace{x^*(t)}^{c_1e^{\lambda t}+c_2e^{-\lambda t}}\cdot\overbrace{\psi^*(t)}^{c_1e^{\lambda t}(\lambda+a)+c_2e^{-\lambda t}(a-\lambda)} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[c_1e^{\lambda t}+c_2e^{-\lambda t}\right]^2 + \frac{1}{2}\left[c_1e^{\lambda t}(\lambda+a)+c_2e^{-\lambda t}(a-\lambda)\right]^2 -$$

$$-a\left[c_1e^{\lambda t}+c_2e^{-\lambda t}\right]\cdot\left[c_1e^{\lambda t}(\lambda+a)+c_2e^{-\lambda t}(a-\lambda)\right] =$$

$$= e^{2\lambda t}c_1^2\overbrace{\left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\lambda+a)^2-a(\lambda+a)\right]}^{\frac{1}{2}\cdot\left(-1+\lambda^2-a^2\right)} + e^{-2\lambda t}c_2^2\overbrace{\left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(a-\lambda)^2-a(a-\lambda)\right]}^{\frac{1}{2}\cdot\left(-1-a^2+\lambda^2\right)} +$$

$$+c_1c_2\overbrace{\left[-1+(\lambda+a)(a-\lambda)-a(a-\lambda)-a(\lambda+a)\right]}^{-\left(1+\lambda^2+a^2\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}e^{2\lambda t}c_1^2\left[-1+\overbrace{\lambda^2}^{1+a^2}-a^2\right] + \frac{1}{2}e^{-2\lambda t}c_2^2\left[-1-a^2+\overbrace{\lambda^2}^{1+a^2}\right] - c_1c_2\left(1+\overbrace{\lambda^2}^{1+a^2}+a^2\right) =$$

$$= -2c_1c_2\left(1+a^2\right) = const. \ \blacktriangleright$$

Пример 7. Для управляемого динамического объекта

$$\dot{x} = u, \quad t\in[0,4], \quad x(0)=0, \quad u\in P=\left\{u\in R^1 \,\middle|\, |u|\le 1\right\},$$

$$I[u(\cdot)] = \int_0^4 \left[x(\tau)+u^2\right]d\tau \to \min$$

построить стационарную пару $x^*(t), u^*(t)$ и исследовать вдоль нее поведение функции Л.С. Понтрягина.

Решение. Функция Л.С. Понтрягина

$$H(t,x,u,\overline{\psi}) = -\left[x+u^2\right]+\psi u\,.$$

Сопряженное уравнение в данном примере интегрируется автономно от основного

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 1 \quad\Rightarrow\quad \psi(t) = t+c\,.$$

Константа c определяется из граничных условий

$$\psi(4) = -\left.\overbrace{\frac{\partial\Phi}{\partial x}}^{\equiv 0}\right|_{x=x(4)} = 0 \quad\Rightarrow\quad c=-4\,.$$

Таким образом,

$$\psi^*(t) = t-4, \quad t\in[0,4].$$

Определим программное управление, удовлетворяющее условию принципа максимума. Пусть $\hat{u}^* = \hat{u}^*(t)$, $t \in [0,4]$ – функция, найденная из условия

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -2u + \psi = 0 .$$

Тогда

$$\hat{u}^*(t) = \frac{\psi^*(t)}{2} = \frac{t-4}{2}, \quad t \in [0,4].$$

Заметим, что

$$\left|\hat{u}^*(t)\right| = \frac{4-t}{2} > 1, \quad t \in [0,2),$$

поэтому на промежутки времени $[0,2)$ оптимальное управление не может обратить в ноль вектор $\frac{\partial H}{\partial u}$. Следовательно, на промежутке времени $[0,2)$ максимум функции Понтрягина по переменной $u \in [-1,1]$ должен достигаться на границе множества. Тогда

$$u^*(t) = \begin{cases} sign\left[\psi^*(t)\right], & t \in [0,2), \\ \hat{u}^*(t), & t \in [2,4], \end{cases} \quad \Rightarrow \quad u^*(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0,2), \\ \dfrac{t-4}{2}, & t \in [2,4]. \end{cases}$$

Подставим это управление в основное дифференциальное уравнение движения и проинтегрируем его с граничным условием $x(0) = 0$. В результате получим стационарную пару

$$\dot{x} = u^*(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \begin{cases} sign\left[\psi^*(t)\right], & t \in [0,2), \\ \hat{u}^*(t), & t \in [2,4], \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \begin{cases} -1, & t \in [0,2), \\ \dfrac{t-4}{2}, & t \in [2,4]. \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$x^*(t) = \begin{cases} -t, & t \in [0,2], \\ \dfrac{t^2}{4} - 2t + 1, & t \in [2,4]. \end{cases}$$

Функция Л.С. Понтрягина вдоль стационарной пары в силу следствия из **теоремы 3** должна оставаться постоянной. Действительно,

$$H^*(t) = H\left(t, x^*(t), u^*(t), \overline{\psi}^*(t)\right) = -\overbrace{x^*(t)}^{\begin{cases} -t, & t\in[0,2], \\ \frac{t^2}{4}-2t+1, & t\in[2,4]. \end{cases}} - \overbrace{u^{*2}(t)}^{\begin{cases} 1, & t\in[0,2), \\ \frac{(t-4)^2}{4}, & t\in[2,4]. \end{cases}} + \overbrace{\psi^*(t)}^{t-4} \cdot \overbrace{u^*(t)}^{\begin{cases} -1, & t\in[0,2), \\ \frac{t-4}{2}, & t\in[2,4]. \end{cases}} \quad \Rightarrow$$

$$H^*(t) = \begin{cases} t - 1 - (t-4), & t \in [0,2], \\ -\left(\dfrac{t^2}{4} - 2t + 1\right) - \left(\dfrac{t-4}{2}\right)^2 + \dfrac{(t-4)^2}{2}, & t \in [2,4], \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$H^*(t)=\begin{cases} 3, & t\in[0,2], \\ -\frac{t^2}{4}-\frac{t^2}{4}+\frac{t^2}{2}+2t+2t-4t-1-4+8, & t\in[2,4], \end{cases} \Rightarrow \quad H^*(t)=3. ▶$$

В случае, когда функция Л.С. Понтрягина зависит явно от времени, функция $H^*(\cdot)$ не обязана быть постоянной. Однако в силу теоремы 2 она должна быть непрерывной, а в силу теоремы 3 и непрерывно дифференцируемой в любой точке области определения. Проиллюстрируем сказанное на примере.

Пример 8. Для управляемого динамического объекта

$$\dot{x}=u, \quad x(0)=1, \quad I=\int_0^1(-4\tau-1)x\cdot d\tau+2\cdot x(1), \quad u\in[-1,1]$$

построить стационарную пару $x^*(t), u^*(t)$ и исследовать вдоль нее поведение функции Л.С. Понтрягина.

Решение. Функция Л.С. Понтрягина

$$H(t,x,u,\psi)=(4t+1)x+\psi u.$$

Шаблон для оптимального управления

$$U^0(t,x,\psi)=sign[\psi].$$

Решение сопряженного уравнения

$$\psi^*(t)=-2t^2-t+1.$$

Найдем корни уравнения $-2t^2-t+1=0$, лежащие на промежутке $[0,1]$:

$$t_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{-4} \quad \Rightarrow \quad t_1=-1\notin[0,1], \quad t_2=\frac{1}{2}.$$

Моментом переключения управления будет $t_2=\frac{1}{2}$. Стационарное управление имеет вид

$$u^*(t)=\begin{cases} 1, & t\in\left[0,\frac{1}{2}\right), \\ -1, & t\in\left[\frac{1}{2},1\right]. \end{cases}$$

Интегрируем уравнение

$$\dot{x}=\begin{cases} 1, & t\in\left[0,\frac{1}{2}\right), \\ -1 & t\in\left[\frac{1}{2},1\right], \end{cases} \quad x(0)=1.$$

В результате получим

$$x^*(t)=\begin{cases} t+1, & t\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right), \\ -t+2, & t\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]. \end{cases}$$

Вычислим функцию Л.С. Понтрягина вдоль стационарной пары $x^*(t),\ u^*(t)$:

$$H^*(t)=(4t+1)\overbrace{x^*(t)}^{\begin{cases} t+1, & t\in\left[0,\frac{1}{2}\right) \\ -t+2 & t\in\left[\frac{1}{2},1\right] \end{cases}}+\overbrace{\psi^*(t)}^{-2t^2-t+1}\overbrace{u^*(t)}^{\begin{cases} 1, & t\in\left[0,\frac{1}{2}\right) \\ -1 & t\in\left[\frac{1}{2},1\right] \end{cases}}=$$

$$=\begin{cases} (4t+1)\cdot(t+1)-2t^2-t+1, & t\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right), \\ (4t+1)(-t+2)+2t^2+t-1, & t\in\left[\dfrac{1}{2},1\right], \end{cases}=$$

$$=\begin{cases} 4t^2+4t+t+1-2t^2-t+1, & t\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right), \\ -4t^2+8t-t+2+2t^2+t-1, & t\in\left[\dfrac{1}{2},1\right], \end{cases}\Rightarrow$$

$$H^*(t)=\begin{cases} 2t^2+4t+2, & t\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right), \\ -2t^2+8t+1, & t\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]. \end{cases}.$$

Функция H^* не является постоянной.

Проверим непрерывность функции H^*. Достаточно это сделать только в точке $\frac{1}{2}$. Имеем

$$H^*\left(\frac{1}{2}-0\right)=2\overbrace{t^2}^{\frac{1}{4}}+4\overbrace{t}^{\frac{1}{2}}+2=\frac{1}{2}+4=\frac{9}{2},$$

$$H^0\left(\frac{1}{2}+0\right)=-2\overbrace{t^2}^{\frac{1}{4}}+8\overbrace{t}^{\frac{1}{2}}+1=-\frac{1}{2}+5=\frac{9}{2}.$$

Непрерывность имеет место.

Проверим непрерывную дифференцируемость функции H^*. Снова это достаточно сделать только в точке $\frac{1}{2}$. Имеем

$$\frac{d}{dt}H^0\left(\frac{1}{2}-0\right)=4\overset{\frac{1}{2}}{t}+4=6,$$

$$\frac{d}{dt}H^0\left(\frac{1}{2}+0\right)=-4\overset{\frac{1}{2}}{t}+8=6.$$

Непрерывная дифференцируемость имеет место.

Проверим равенство

$$\frac{d}{dt}H^0(t)=\frac{\partial}{\partial t}H\left(t,x^0(t),u^0(t),\overline{\psi}^0(t)\right),\quad t\in\left[t_0,T\right].$$

Действительно, с одной стороны,

$$\frac{d}{dt}H^0(t)=\begin{cases}\frac{d}{dt}\left(2t^2+4t+2\right), & t\in\left[0,\frac{1}{2}\right),\\ \frac{d}{dt}\left(-2t^2+8t+1\right), & t\in\left[\frac{1}{2},1\right],\end{cases}\Rightarrow\ \frac{d}{dt}H^0(t)=\begin{cases}4t+4, & t\in\left[0,\frac{1}{2}\right),\\ -4t+8, & t\in\left[\frac{1}{2},1\right],\end{cases},$$

а, с другой стороны,

$$\frac{\partial}{\partial t}H\left(t,x^0(t),u^0(t),\overline{\psi}^0(t)\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(4t+1\right)x^0\left(t\right)=4\cdot\overbrace{x^0\left(t\right)}^{=\begin{cases}t+1, & t\in\left[0,\frac{1}{2}\right)\\ -t+2 & t\in\left[\frac{1}{2},1\right]\end{cases}}=\begin{cases}4t+4, & t\in\left[0,\frac{1}{2}\right),\\ -4t+8, & t\in\left[\frac{1}{2},1\right].\end{cases}$$

Равенство имеет место. ►

3.7. Индивидуальное задание 5
«Постоянство функции Понтрягина на оптимальных парах»

Для управляемого динамического объекта из **задания 4** проанализировать поведение функции Л.С. Понтрягина вдоль стационарной пары.

Примеры выполнения индивидуального задания 5

Выполним указанный анализ в **примерах 3–5**, разобранных в **пункте 3.5.**

В **примере 3**

$$H^*\left(t\right)=H\left(t,x_1^*\left(t\right),x_2^*\left(t\right),u_1^*\left(t\right),u_2^*\left(t\right),\psi_1^*\left(t\right),\psi_2^*\left(t\right)\right)=$$

$$=\left[\psi_1^*(t)\left(-4x_1^*(t)-5x_2^*(t)+u_1^*(t)\right)+\psi_2^*(t)\left(3x_1^*(t)+4x_2^*(t)+u_2^*(t)\right)\right]\Bigg|_{\substack{x_1^*(t)=-9+5e^{-t}+4e^{t},\\ x_2^*(t)=7-3e^{-t}-4e^{t},\\ u_1^*(t)=-1,\\ u_2^*(t)=-1,\\ \psi_1^*(t)=-e^{-1+t},\\ \psi_2^*(t)=-e^{-1+t},}}=$$

$$=\frac{2}{e}=const\ . \blacktriangleright$$

В **примере 4**

$$H^*(t)=H\left(t,x_1^*(t),x_2^*(t),u_1^*(t),u_2^*(t),\psi_1^*(t),\psi_2^*(t)\right)=$$

$$=\left[\psi_1^*(t)\left(-5x_1^*(t)-3x_2^*(t)+u_1^*(t)\right)+\psi_2^*(t)\left(6x_1^*(t)+4x_2^*(t)+u_2^*(t)\right)\right]\Bigg|_{\substack{x_1^*(t)=\frac{e^{-2t}\left(3-7e^{2t}+4e^{3t}\right)}{2\sqrt{2}},\\ x_2^*(t)=\frac{e^{-2t}\left(3-11e^{2t}+8e^{3t}\right)}{2\sqrt{2}},\\ u_1^*(t)=-\frac{1}{\sqrt{2}},\\ u_2^*(t)=-\frac{1}{\sqrt{2}},\\ \psi_1^*(t)=-e^{-1+t},\\ \psi_2^*(t)=-e^{-1+t},}}=$$

$$=e\sqrt{2}=const\ . \blacktriangleright$$

В **примере 5**

$$H^*(t)=H\left(t,x_1^*(t),x_2^*(t),u_1^*(t),u_2^*(t),\psi_1^*(t),\psi_2^*(t)\right)=$$

$$=\left[-u_1^{*2}(\tau)-u_2^{*2}(\tau)+\psi_1^*(t)\left(-5x_1^*(t)-4x_2^*(t)+u_1^*(t)\right)+\right.$$

$$\left.+\psi_2^*(t)\left(6x_1^*(t)+6x_2^*(t)+u_2^*(t)\right)\right]\Bigg|_{\substack{x_1^*(t)=\frac{1}{60}e^{-2-3t}\left(43e^{5}+6e^{t}-18e^{5t}+12e^{6t}-48e^{5+t}+5e^{5+6t}\right),\\ x_2^*(t)=\frac{1}{60}e^{-2-3t}\left(-52e^{5}-9e^{t}+57e^{5t}-48e^{6t}+72e^{5+t}-20e^{5+6t}\right),\\ u_1^*(t)=-\frac{1}{10}e^{-2-3t}\left(3e^{5}+2e^{5t}\right),\\ u_2^*(t)=-\frac{1}{10}e^{-2-3t}\left(4e^{5}+e^{5t}\right),\\ \psi_1^*(t)=-\frac{1}{5}e^{-2-3t}\left(3e^{5}+2e^{5t}\right),\\ \psi_2^*(t)=-\frac{1}{5}e^{-2-3t}\left(4e^{5}+e^{5t}\right),}}=$$

$$=\frac{1+4e^{5}+5e^{10}}{20e^{4}}=const\ . \blacktriangleright$$

Во всех приведенных примерах в полном соответствии с **теоремой 3** функция Л.С. Понтрягина остается постоянной вдоль стационарной пары.

Раздел 4

ОБОБЩЕНИЯ ПРОСТЕЙШЕЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

4.1. Простейшая задача теории оптимального управления с нефиксированной продолжительностью процесса

В этом пункте предполагается, что в простейшей задаче теории оптимального управления множество θ_1 содержит более одного элемента и представляет собой открытый интервал $\theta_1 = \left(T_*, T^*\right)$, $t_0 < T_*$. В этом случае задачу управления назовем простейшей задачей теории оптимального управления с нефиксированной продолжительностью процесса. Дадим ее краткую запись.

Задача 1

$$\dot{x} = f(t,x,u), \quad t \in \left[t_0, T\right], \quad T \in \left(T_*, T^*\right), \quad x(t_0) = x_0, \quad u \in P,$$

$$I\left[u(\cdot), T\right] = \int_{t_0}^{T} f_0\left(\tau, x(\tau), u(\tau)\right) d\tau + \Phi\left(T, x(T)\right) \to \min.$$

Из записи **задачи 1** видно, что в ней допускается явная зависимость функции Φ от конечного момента времени. Предполагается, что эта зависимость непрерывно дифференцируемая. То обстоятельство, что конечный момент времени процесса не фиксирован, нашло свое отражение в обозначении функционала: он введен в список аргументов функционала.

Пусть $T^0 \in \theta_1$, $u^0(\cdot)$, $x^0(\cdot)$ – решение **задачи 1**. Сконструируем вспомогательную простейшею задачу теории оптимального управления, исходные данные которой совпадают с данными рассмотренной выше задачи с нефиксированной продолжительностью процесса, а конечный момент времени – с T^0. Очевидно, что пара $\left(u^0(\cdot), x^0(\cdot)\right)$ будет решением вспомогательной задачи. Тогда для этой пары выполняются условия принципа максимума Л.С. Понтрягина при $T = T^0$. В данном случае, однако, условий принципа максимума недостаточно для выделения изолированных пар $\left(u^*(\cdot), x^*(\cdot)\right)$, среди которых только и могло бы находиться решение исходной задачи с нефиксированной длительностью процесса. Это объясняется тем, что помимо $2n$ произвольных констант интегрирования в общем решении системы дифференциальных уравнений определению подлежит еще и момент времени $T^0 \in \theta_1$. Выведем дополнительные условия, которым должен удовлетворять оптимальный конечный момент времени T^0.

Теорема 1. *Пусть T^0 – оптимальный конечный момент времени в простейшей задаче теории оптимального управления с нефиксированной длительностью процесса. Тогда*

$$H\left(T^0, x^0\left(T^0\right), u^0\left(T^0\right), \bar{\psi}^0\left(T^0\right)\right)\Big|_{\psi_0=-1} = \frac{\partial}{\partial T}\Phi\left(T^0, x^0\left(T^0\right)\right). \tag{1}$$

Доказательство. Возьмем $\varepsilon > 0$ такое, что $\left[T^0 - \varepsilon, T^0 + \varepsilon\right] \subset \theta_1$. Полагаем (**рис. 1**)

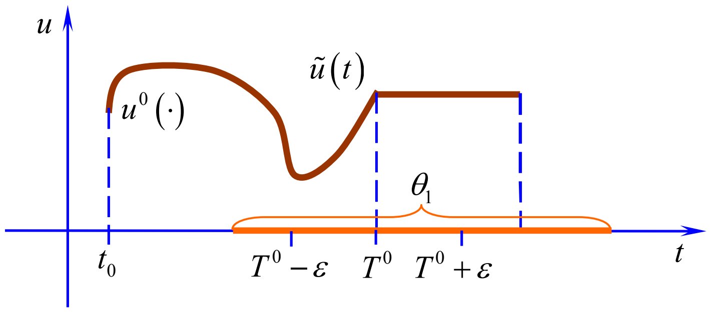

Рис. 1

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u^0(t), & t \in \left[t_0, T^0\right], \\ u^0\left(T^0\right), & t \in \left[T^0, T^0 + \varepsilon\right]. \end{cases}$$

Обозначим $\tilde{x}(\cdot) = x(\cdot, t_0, x_0, \tilde{u}(\cdot))$. Заметим, что функция $\tilde{x}(\cdot)$ определена на отрезке $\left[t_0, T^0 + \varepsilon\right]$ и имеет место равенство

$$\tilde{x}(t) = x^0(t), \quad t \in \left[t_0, T^0\right].$$

Конечный момент времени T^0 является оптимальным. Тогда справедливо неравенство

$$0 \le \overbrace{I\left[\tilde{u}(\cdot), T^0 + \varepsilon\right]}^{\int_{t_0}^{T^0+\varepsilon} f_0(\tau, \tilde{x}(\tau), \tilde{u}(\tau))d\tau + \Phi\left(T^0+\varepsilon, \tilde{x}\left(T^0+\varepsilon\right)\right)} - \overbrace{I\left[u^0(\cdot), T^0\right]}^{\int_{t_0}^{T^0} f_0\left(\tau, x^0(\tau), u^0(\tau)\right)d\tau + \Phi\left(T^0, x^0\left(T^0\right)\right)} =$$

$$= \overbrace{\int_{t_0}^{T^0+\varepsilon} f_0\left(\tau,\tilde{x}(\tau),\tilde{u}(\tau)\right)d\tau - \int_{t_0}^{T^0} f_0\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau)\right)d\tau}^{\tilde{u}(\tau)=u^0(\tau),\tilde{x}(\tau)=x^0(\tau),\,\tau\in\left[t_0,T^0\right]\Rightarrow\ =\int_{T^0}^{T^0+\varepsilon} f_0\left(\tau,\tilde{x}(\tau),\tilde{u}(\tau)\right)d\tau} + + \overbrace{\Phi\left(T^0+\varepsilon,\tilde{x}\left(T^0+\varepsilon\right)\right)-\Phi\left(T^0,x^0\left(T^0\right)\right)}^{=\left\langle\frac{\partial}{\partial x}\Phi\left(T^0,x^0\left(T^0\right)\right),\,\tilde{x}\left(T^0+\varepsilon\right)-x^0\left(T^0\right)\right\rangle+\frac{\partial}{\partial T}\Phi\left(T^0,x^0\left(T^0\right)\right)\varepsilon+o(\varepsilon)} =$$

$$\int_{T^0}^{T^0+\varepsilon} f_0\left(\tau,\tilde{x}(\tau),\tilde{u}(\tau)\right)d\tau +$$

$$+\left\langle \frac{\partial}{\partial x}\Phi\left(T^0,x^0\left(T^0\right)\right),\ \overbrace{\tilde{x}\left(T^0+\varepsilon\right)}^{x_0+\int_{t_0}^{T^0+\varepsilon} f\left(\tau,\tilde{x}(\tau),\tilde{u}(\tau)\right)d\tau} - \overbrace{x^0\left(T^0\right)}^{x_0+\int_{t_0}^{T^0} f\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau)\right)d\tau} \right\rangle + \frac{\partial}{\partial T}\Phi\left(T^0,x^0\left(T^0\right)\right)\varepsilon + o(\varepsilon) =$$

$$= \int_{T^0}^{T^0+\varepsilon} f_0\left(\tau,\tilde{x}(\tau),\tilde{u}(\tau)\right)d\tau +$$

$$+\left\langle \frac{\partial}{\partial x}\Phi\left(T^0,x^0\left(T^0\right)\right),\ \overbrace{\int_{t_0}^{T^0+\varepsilon} f\left(\tau,\tilde{x}(\tau),\tilde{u}(\tau)\right)d\tau - \int_{t_0}^{T^0} f\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau)\right)d\tau}^{\tilde{u}(\tau)=u^0(\tau),\tilde{x}(\tau)=x^0(\tau),\,\tau\in\left[t_0,T^0\right]\Rightarrow\ =\int_{T^0}^{T^0+\varepsilon} f\left(\tau,\tilde{x}(\tau),\tilde{u}(\tau)\right)d\tau} \right\rangle +$$

$$+\frac{\partial}{\partial T}\Phi\left(T^0,x^0\left(T^0\right)\right)\varepsilon + o(\varepsilon) \ \Rightarrow$$

$$\int_{T^0}^{T^0+\varepsilon} f_0\left(\tau,\tilde{x}(\tau),\tilde{u}(\tau)\right)d\tau + \left\langle \frac{\partial}{\partial x}\Phi\left(T^0,x^0\left(T^0\right)\right),\ \int_{T^0}^{T^0+\varepsilon} f\left(\tau,\tilde{x}(\tau),\tilde{u}(\tau)\right)d\tau \right\rangle +$$

$$+\frac{\partial}{\partial T}\Phi\left(T^0,x^0\left(T^0\right)\right)\varepsilon + o(\varepsilon) \geq 0. \qquad (2)$$

Разделим неравенство (2) на $\varepsilon > 0$ и устремим ε к нулю. В результате получим

$$0 \leq f_0\left(T^0,\overbrace{\tilde{x}\left(T^0\right)}^{x^0\left(T^0\right)},\overbrace{\tilde{u}\left(T^0\right)}^{u^0\left(T^0\right)}\right) + \left\langle \overbrace{\frac{\partial}{\partial x}\Phi\left(T^0,x^0\left(T^0\right)\right)}^{-\psi^0\left(T^0\right)}, f\left(T^0,\overbrace{\tilde{x}\left(T^0\right)}^{x^0\left(T^0\right)},\overbrace{\tilde{u}\left(T^0\right)}^{u^0\left(T^0\right)}\right)\right\rangle + \frac{\partial}{\partial T}\Phi\left(T^0,x^0\left(T^0\right)\right) \ \Rightarrow$$

$$\overbrace{f_0\left(T^0,x^0\left(T^0\right),u^0\left(T^0\right)\right) - \left\langle \psi^0\left(T^0\right),\ f\left(T^0,x^0\left(T^0\right),u^0\left(T^0\right)\right)\right\rangle}^{-H\left(T^0,x^0\left(T^0\right),u^0\left(T^0\right),\bar{\psi}^0\left(T^0\right)\right)} + \frac{\partial}{\partial T}\Phi\left(T^0,x^0\left(T^0\right)\right) \geq 0 \ \Rightarrow$$

$$-H\left(T^0,x^0\left(T^0\right),u^0\left(T^0\right),\bar{\psi}^0\left(T^0\right)\right) + \frac{\partial}{\partial T}\Phi\left(T^0,x^0\left(T^0\right)\right) \geq 0. \qquad (3)$$

С другой стороны, выполняется неравенство

$$0 \ge I\left[u^0(\cdot),T^0\right]-I\left[u^0(\cdot),T^0-\varepsilon\right]=$$

$$=\overbrace{\int_{t_0}^{T^0} f_0\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau)\right)d\tau-\int_{t_0}^{T^0-\varepsilon} f_0\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau)\right)d\tau}^{\int_{T^0-\varepsilon}^{T^0} f_0\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau)\right)d\tau+}+$$

$$+\overbrace{\Phi\left(T^0,x\left(T^0\right)\right)-\Phi\left(T^0-\varepsilon,x^0\left(T^0-\varepsilon\right)\right)}^{\left\langle\frac{\partial}{\partial x}\Phi\left(T^0,x^0\left(T^0\right)\right),x^0\left(T^0\right)-x^0\left(T^0-\varepsilon\right)\right\rangle+\frac{\partial}{\partial T}\Phi\left(T^0,x^0\left(T^0\right)\right)\varepsilon+o(\varepsilon)}=\int_{T^0-\varepsilon}^{T^0} f_0\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau)\right)d\tau+$$

$$+\left\langle\frac{\partial}{\partial x}\Phi\left(T^0,x^0\left(T^0\right)\right),\ \overset{x_0+\int_{t_0}^{T^0} f\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau)\right)d\tau}{x^0\left(T^0\right)}-\overset{x_0+\int_{t_0}^{T^0-\varepsilon} f\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau)\right)d\tau}{x^0\left(T^0-\varepsilon\right)}\right\rangle+$$

$$+\frac{\partial}{\partial T}\Phi\left(T^0,x^0\left(T^0\right)\right)\varepsilon+o(\varepsilon)=\int_{T^0-\varepsilon}^{T^0} f_0\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau)\right)d\tau+$$

$$+\left\langle\overbrace{\frac{\partial}{\partial x}\Phi\left(T^0,x^0\left(T^0\right)\right)}^{-\psi^0\left(T^0\right)},\ \overbrace{\int_{t_0}^{T^0} f\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau)\right)d\tau-\int_{t_0}^{T^0-\varepsilon} f\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau)\right)d\tau}^{=\int_{T^0-\varepsilon}^{T^0} f\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau)\right)}\right\rangle+$$

$$+\frac{\partial}{\partial T}\Phi\left(T^0,x^0\left(T^0\right)\right)\varepsilon+o(\varepsilon)=\int_{T^0-\varepsilon}^{T^0} f_0\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau)\right)d\tau-$$

$$-\left\langle\psi^0\left(T^0\right),\int_{T^0-\varepsilon}^{T^0} f\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau)\right)d\tau\right\rangle+\frac{\partial}{\partial T}\Phi\left(T^0,x^0\left(T^0\right)\right)\varepsilon+o(\varepsilon)\le 0. \qquad (4)$$

Разделим неравенство (4) на $\varepsilon>0$ и устремим ε к нулю. В результате получим

$$\overbrace{f_0\left(T^0,x^0\left(T^0\right),u^0\left(T^0\right)\right)-\left\langle\psi^0\left(T^0\right),f\left(T^0,x^0\left(T^0\right),u^0\left(T^0\right)\right)\right\rangle}^{-H\left(T^0,x^0\left(T^0\right),u^0\left(T^0\right),\bar\psi^0\left(T^0\right)\right)\Big|_{\psi_0=-1}}+\frac{\partial}{\partial T}\Phi\left(T^0,x^0\left(T^0\right)\right)\le 0 \quad \Rightarrow$$

$$-H\left(T^0,x^0\left(T^0\right),u^0\left(T^0\right),\bar\psi^0\left(T^0\right)\right)+\frac{\partial}{\partial T}\Phi\left(T^0,x^0\left(T^0\right)\right)\le 0. \qquad (5)$$

Из неравенств (3), (5) следует искомое условие (1). ■

Пример 1. Для управляемого динамического объекта

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad t \in [0, T], \quad T \in (1, \infty),$$

$$x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20} \neq 0, \quad u \in R^1,$$

$$I[u(\cdot), T] = \int_0^T \frac{1}{2} u^2(\tau)\, d\tau + \frac{T^2 x_2^2(T)}{2} \to \min$$

определить оптимальное время T^0 длительности процесса.

Решение. Функция Л.С. Понтрягина

$$H(t, x, u, \overline{\psi})\Big|_{\psi_0 = -1} = -\frac{1}{2}u^2 + \psi_1 x_2 + \psi_2 u .$$

Шаблон оптимального управления

$$\frac{\partial}{\partial u} \overbrace{H(t, x, u, \overline{\psi})}^{-\frac{1}{2}u^2 + \psi_1 x_2 + \psi_2 u} = 0 \quad \Rightarrow \quad U^0(t, x, \overline{\psi}) = \psi_2 .$$

Основная и сопряженная системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \psi_2,$$
$$\dot{\psi}_1 = 0, \quad \dot{\psi}_2 = -\psi_1.$$

Интегрируя их совместно, получаем

$$\begin{cases} x_1(t) = -\dfrac{1}{6}c_1 t^3 + \dfrac{1}{2}c_2 t^2 + c_3 t + c_4, \\ x_2(t) = -\dfrac{1}{2}c_1 t^2 + c_2 t + c_3, \\ \psi_1(t) = c_1, \\ \psi_2(t) = -c_1 t + c_2. \end{cases} \tag{6}$$

Из граничных условий

$$x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20},$$

$$\psi_1(T) = -\frac{\partial \overbrace{\Phi}^{\frac{T^2 x_2^2(T)}{2}}}{\partial x_1} = 0, \qquad \psi_2(T) = -\frac{\partial \overbrace{\Phi}^{\frac{T^2 x_2^2(T)}{2}}}{\partial x_2} = -T^2 x_2(T),$$

которые в силу (6) принимают вид

$$c_4 = x_{10}, \quad c_3 = x_{20}, \quad c_1 = 0,$$

$$-c_1 T + c_2 = -T^2\left(-\frac{1}{2}c_1 T^2 + c_2 T + c_3\right),$$

определяем константы интегрирования

$$c_1 = 0, \quad c_2 = -x_{20}\frac{T^2}{1 + T^3}, \quad c_3 = x_{20}, \quad c_4 = x_{10}.$$

Таким образом,

$$x_1^0(t) = -\frac{x_{20}}{2}\frac{T^2}{1+T^3}t^2 + x_{20}t + x_{10}, \qquad x_2^0(t) = -x_{20}\frac{T^2}{1+T^3}t + x_{20},$$

$$\psi_1^0(t) = 0, \quad u^0(t) = \psi_2^0(t) = -x_{20}\frac{T^2}{1+T^3}, \quad t \in [0,T].$$

Запишем условие (1) для данного примера

$$\left.\overbrace{H\left(T^0, x^0\left(T^0\right), u^0\left(T^0\right), \overline{\psi}^0\left(T^0\right)\right)}^{\frac{1}{2}\psi_0\cdot\left(u^0\left(T^0\right)\right)^2+\psi_1^0\left(T^0\right)x_2^0\left(T^0\right)+\psi_2^0\left(T^0\right)u^0\left(T^0\right)}\right|_{\psi_0=-1} = \frac{\partial}{\partial T}\overbrace{\Phi\left(T^0, x^0\left(T^0\right)\right)}^{\frac{T^2x_2^2(T)}{2}} \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}\overbrace{\left(u^0(T)\right)^2}^{\left(\psi_2^0(T)\right)^2} + \psi_1^0(T)x_2^0(T) + \psi_2^0(T)\overbrace{u^0(T)}^{\psi_2^0(T)} = \frac{\partial}{\partial T}\frac{1}{2}T^2\cdot\left(x_2^0(T)\right)^2 \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}\left(\psi_2^0(T)\right)^2 + \psi_1^0(T)x_2^0(T) + \left(\psi_2^0(T)\right)^2 = T\cdot\left(x_2^0(T)\right)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\overbrace{\left(\psi_2^0(T)\right)^2}^{\left(-x_{20}\frac{T^2}{1+T^3}\right)^2} + \overbrace{\psi_1^0(T)}^{0}\;\overbrace{x_2^0(T)}^{-x_{20}\frac{T^2}{1+T^3}T+x_{20}} = T\cdot\overbrace{\left(x_2^0(T)\right)^2}^{\left(-x_{20}\frac{T^2}{1+T^3}T+x_{20}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\left(-x_{20}\frac{T^2}{1+T^3}\right)^2 = T\cdot\left(-x_{20}\frac{T^2}{1+T^3}T + x_{20}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{T^2}{1+T^3}\right]^2 = T\left[-\frac{T^3}{1+T^3}+1\right]^2 \Rightarrow \frac{1}{2}\left[\frac{T^2}{1+T^3}\right]^2 = T\left[\frac{1}{1+T^3}\right]^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}T^4 = T \overset{T>0}{\Rightarrow} T^0 = \sqrt[3]{2}. \ \blacktriangleright$$

4.2. Простейшая задача теории оптимального управления с подвижным левым концом (время фиксировано)

Рассмотрим обобщение простейшей задачи теории оптимального управления, заключающееся в том, что множество S_0 – множество начальных значений фазового вектора, может содержать более одного элемента (начальный и конечный моменты времени фиксированы). Такую задачу будем называть простейшей задачей теории оптимального управления с подвижным левым концом.

Пусть $x_0^0 \in S_0, u^0(\cdot), x^0(\cdot)$ – ее решение. Очевидно, что пара $\left(u^0(\cdot), x^0(\cdot)\right)$ доставляет решение простейшей задачи теории оптимального управления, для которой начальное условие на левом конце совпадает с x_0^0, а все остальные данные совпадают с соответствующими данными задачи с подвижным левым концом. Тогда для этой пары будут выполняться условия принципа максимума Л.С. Понтрягина при $x_0 = x_0^0$. Как и в случае с нефиксированной продолжительностью процесса, условий принципа максимума здесь недостаточно для выделения изолированных пар $\left(u^*(\cdot), x^*(\cdot)\right)$, среди которых только и могло бы находиться решение исходной задачи с подвижной левой границей. В качестве дополнительных постоянных, подлежащих определению, здесь выступают компоненты вектора начальных условий x_0^0. Число этих постоянных равно n. Условия, позволяющие выделить оптимальный вектор начальных условий $x_0^0 \in S_0$, назовем условиями трансверсальности на левом конце.

Ограничимся случаем, когда множество начальных значений фазового вектора имеет вид

$$S_0 = \left\{x \in R^n \,\middle|\, \varphi_i(x) \le 0, \quad i = 1, \ldots, m\right\},$$

где $\varphi_i : R^n \to R^1, i = 1, \ldots, m$ – непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов. Приведем для него краткую запись задачи оптимального управления.

Задача 2

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad t \in [t_0, T], \quad u \in P,$$

$$\varphi_1(x_0) \le 0, \quad \ldots, \quad \varphi_m(x_0) \le 0,$$

$$I\left[u(\cdot), x_0\right] = \int_{t_0}^{T} f_0\left(\tau, x(\tau), u(\tau)\right) d\tau + \Phi\left(x(T)\right) \to \min.$$

Заметим, что в список аргументов минимизируемого функционала включен вектор начальных условий на левом конце траектории.

Для произвольного $x_0 \in S_0$ обозначим

$$x(\cdot) = x\left(\cdot, t_0, x_0, u^0(\cdot)\right), \qquad x^0(\cdot) = x\left(\cdot, t_0, x_0^0, u^0(\cdot)\right),$$

$$\Delta x(\cdot) = x(\cdot) - x^0(\cdot), \qquad \Delta x_0 = x_0 - x_0^0.$$

Лемма 1. *Имеет место оценка*

$$\|\Delta x(t)\| \le c \|\Delta x_0\|, \quad c = e^{M(T - t_0)}, \quad t \in [t_0, T],$$

где $M = const > 0$ – константа в неравенствах (3.4.1).

Доказательство

$$\Delta\dot{x}(t)=\overbrace{\dot{x}(t)}^{f(t,x(t),u^0(t))}-\overbrace{\dot{x}^0(t)}^{f(t,x^0(t),u^0(t))}=f\left(t,\overbrace{x(t)}^{x^0(t)+\Delta x(t)},u^0(t)\right)-f\left(t,x^0(t),u^0(t)\right)\Rightarrow$$

$$\Delta\dot{x}(t)=f\left(t,x^0(t)+\Delta x(t),u^0(t)\right)-f\left(t,x^0(t),u^0(t)\right),\quad t\in[t_0,T],\tag{1}$$

при этом

$$\Delta x(t_0)=\overbrace{x(t_0)}^{=x_0}-\overbrace{x^0(t_0)}^{=x_0^0}=x_0-x_0^0=\Delta x_0.$$

Интегрируя (1) в пределах от t_0 до $t\in[t_0,T]$, получим

$$\Delta x(t)=\Delta x_0+\int_{t_0}^{t}\left[f\left(\tau,x^0(\tau)+\Delta x(\tau),u^0(\tau)\right)-f\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau)\right)\right]d\tau\Rightarrow$$

$$\|\Delta x(t)\|\le\|\Delta x_0\|+\int_{t_0}^{t}\overbrace{\left\|f\left(\tau,x^0(\tau)+\Delta x(\tau),u^0(\tau)\right)-f\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau)\right)\right\|}^{(3.4.1)\Rightarrow\le M\|\Delta x(\tau)\|}d\tau\Rightarrow$$

$$\|\Delta x(t)\|\le\|\Delta x_0\|+M\int_{t_0}^{t}\|\Delta x(\tau)\|d\tau,\quad t\in[t_0,T].\tag{2}$$

Применим неравенство Гронуолла при

$$\varphi(\cdot)=\|\Delta x(\cdot)\|,\quad a=M,\quad b=\|\Delta x_0\|.$$

Из (2) получаем

$$\|\Delta x(t)\|\le e^{M(t-t_0)}\|\Delta x_0\|\le e^{M(T-t_0)}\|\Delta x_0\|.$$

Полагая в последнем неравенстве $e^{M(T-t_0)}=c$, приходим к справедливости утверждения леммы. Лемма доказана. ■

Обозначим

$$\Delta I\left[u^0(\cdot),x_0^0\right]=I\left[u^0(\cdot),x_0\right]-I\left[u^0(\cdot),x_0^0\right].$$

Лемма 2. *Имеет место оценка*

$$\Delta I\left[u^0(\cdot),x_0^0\right]=-\left\langle\psi^0(t_0),\Delta x_0\right\rangle+o\left(\|\Delta x_0\|\right),\qquad x_0-x_0^0=\Delta x_0,$$

где $\psi^0(\cdot)$ *– решение сопряженной системы уравнений, отвечающей паре* $\left(u^0(\cdot),x^0(\cdot)\right)$ *и граничным условиям*

$$\psi^0(T)=-\frac{\partial\Phi}{\partial x}\left(x^0(T)\right).$$

Доказательство. Вычисляем

$$\Delta I\left[u^0(\cdot),x_0^0\right]=$$

$$=\int_{t_0}^{T} f_0\left(\tau,\overbrace{x\left(\tau,t_0,x_0,u^0(\cdot)\right)}^{x^0(\tau)+\Delta x(\tau)},u^0(\tau)\right)d\tau+\Phi\left(\overbrace{x\left(T,t_0,x_0,u^0(\cdot)\right)}^{x^0(T)+\Delta x(T)}\right)-$$

$$-\int_{t_0}^{T} f_0\left(\tau,\overbrace{x\left(\tau,t_0,x_0^0,u^0(\cdot)\right)}^{x^0(\tau)},u^0(\tau)\right)d\tau-\Phi\left(\overbrace{x\left(T,t_0,x_0^0,u^0(\cdot)\right)}^{x^0(T)}\right)=$$

$$=\int_{t_0}^{T}\left[f_0\left(\tau,x^0(\tau)+\Delta x(\tau),u^0(\tau)\right)-f_0\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau)\right)\right]d\tau+\overbrace{\Phi\left(x^0(T)+\Delta x(T)\right)-\Phi\left(x^0(T)\right)}^{\left\langle\frac{\partial}{\partial x}\Phi\left(x^0(T)\right),\ \Delta x(T)\right\rangle+o\left(\left\|\Delta x(T)\right\|\right)}=$$

$$=\int_{t_0}^{T}\left[f_0\left(\tau,x^0(\tau)+\Delta x(\tau),u^0(\tau)\right)-f_0\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau)\right)\right]d\tau+$$

$$+\left\langle\overbrace{\frac{\partial}{\partial x}\Phi\left(x^0(T)\right)}^{-\psi^0(T)},\ \Delta x(T)\right\rangle+o\left(\left\|\Delta x(T)\right\|\right)=$$

$$=\int_{t_0}^{T}\left[f_0\left(\tau,x^0(\tau)+\Delta x(\tau),u^0(\tau)\right)-f_0\left(\tau,x(\tau),u^0(\tau)\right)\right]d\tau-$$

$$-\left\langle\psi^0(T),\ \Delta x(T)\right\rangle+o\left(\left\|\Delta x(T)\right\|\right). \qquad (3)$$

Из очевидного равенства

$$\left\langle\psi^0(T),\Delta x(T)\right\rangle-\left\langle\psi^0(t_0),\Delta x_0\right\rangle=\int_{t_0}^{T}\left[\frac{d}{d\tau}\left\langle\psi^0(\tau),\Delta x(\tau)\right\rangle\right]d\tau$$

выводим

$$\left\langle\psi^0(T),\Delta x(T)\right\rangle=\left\langle\psi^0(t_0),\Delta x_0\right\rangle+\int_{t_0}^{T}\left\langle\overbrace{\dot\psi^0(\tau)}^{-\frac{\partial}{\partial x}H\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau),\bar\psi^0(\tau)\right)},\Delta x(\tau)\right\rangle d\tau+$$

$$+\int_{t_0}^{T}\left\langle\psi^0(\tau),\overbrace{\Delta\dot x(\tau)}^{f\left(\tau,x^0(\tau)+\Delta x(\tau),u^0(\tau)\right)-f\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau)\right)}\right\rangle d\tau\Rightarrow$$

$$\left\langle\psi^0(T),\Delta x(T)\right\rangle=\left\langle\psi^0(t_0),\Delta x_0\right\rangle-\int_{t_0}^{T}\left\langle\frac{\partial}{\partial x}H\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau),\bar\psi^0(\tau)\right),\Delta x(\tau)\right\rangle d\tau+$$

$$+\int_{t_0}^{T}\left\langle\psi^0(\tau),\ f\left(\tau,x^0(\tau)+\Delta x(\cdot),u^0(\tau)\right)-f\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau)\right)\right\rangle d\tau\,. \qquad (4)$$

Преобразуем (3) в силу (4)

$$\Delta I\left[u^0(\cdot),x_0^0\right]=\int_{t_0}^{T}\left[f_0\left(\tau,x^0(\tau)+\Delta x(\tau),u^0(\tau)\right)-f_0\left(\tau,x(\tau),u^0(\tau)\right)\right]d\tau-$$

$$-\overbrace{\left\langle\psi^0(T),\ \Delta x(T)\right\rangle}^{(4)\Rightarrow}+o\left(\left\|\Delta x(T)\right\|\right)\ \Rightarrow$$

$$\Delta I\left[u^0(\cdot),x_0^0\right]=\int_{t_0}^{T}\left[f_0\left(\tau,x^0(\tau)+\Delta x(\tau),u^0(\tau)\right)-f_0\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau)\right)\right]d\tau-$$

$$-\left\langle\psi^0(t_0),\ \Delta x_0\right\rangle+\int_{t_0}^{T}\left\langle\frac{\partial}{\partial x}H\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau),\bar\psi^0(\tau)\right),\Delta x(\tau)\right\rangle d\tau-$$

$$-\int_{t_0}^{T}\left\langle\psi^0(\tau),\ f\left(\tau,x^0(\tau)+\Delta x(\tau),u^0(\tau)\right)-f\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau)\right)\right\rangle d\tau+o\left(\left\|\Delta x(T)\right\|\right)=$$

$$=-\left\langle\psi^0(t_0),\ \Delta x_0\right\rangle+\int_{t_0}^{T}\overbrace{\left[-f_0\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau)\right)+\left\langle\psi^0(\tau),\ f\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau)\right)\right\rangle\right]}^{H\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau),\bar\psi^0(\tau)\right)}d\tau-$$

$$-\int_{t_0}^{T}\overbrace{\left[-f_0\left(\tau,x^0(\tau)+\Delta x(\tau),u^0(\tau)\right)+\left\langle\psi^0(\tau),\ f\left(\tau,x^0(\tau)+\Delta x(\tau),u^0(\tau)\right)\right\rangle\right]}^{H\left(\tau,x^0(\tau)+\Delta x(\tau),u^0(\tau),\bar\psi^0(\tau)\right)}d\tau+$$

$$+\int_{t_0}^{T}\left\langle\frac{\partial}{\partial x}H\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau),\bar\psi^0(\tau)\right),\Delta x(\tau)\right\rangle d\tau+o\left(\left\|\Delta x(T)\right\|\right)\ \Rightarrow$$

$$\Delta I\left[u^0(\cdot),x_0^0\right]=-\left\langle\psi^0(t_0),\ \Delta x_0\right\rangle-$$

$$-\int_{t_0}^{T}\left[\overbrace{H\left(\tau,x^0(\tau)+\Delta x(\tau),u^0(\tau),\bar\psi^0(\tau)\right)-H\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau),\bar\psi^0(\tau)\right)}^{\left\langle\frac{\partial}{\partial x}H\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau),\bar\psi^0(\tau)\right),\Delta x(\tau)\right\rangle+o\left(\left\|\Delta x(T)\right\|\right)}\right]d\tau+$$

$$+\int_{t_0}^{T}\left\langle\frac{\partial}{\partial x}H\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau),\bar\psi^0(\tau)\right),\Delta x(\tau)\right\rangle d\tau+o\left(\left\|\Delta x(T)\right\|\right)=$$

$$=-\left\langle\psi^0(t_0),\ \Delta x_0\right\rangle+\int_{t_0}^{T}\left[-\left\langle\frac{\partial}{\partial x}H\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau),\bar\psi^0(\tau)\right),\Delta x(\tau)\right\rangle+\right.$$

$$\left.+\left\langle\frac{\partial}{\partial x}H\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau),\bar\psi^0(\tau)\right),\Delta x(\tau)\right\rangle\right]d\tau+o\left(\left\|\Delta x(T)\right\|\right)=$$

$$=-\left\langle\psi^0(t_0),\ \Delta x_0\right\rangle+o\left(\overbrace{\left\|\Delta x(T)\right\|}^{\text{лемма }1\Rightarrow\le c\left\|\Delta x_0\right\|}\right)\ \Rightarrow$$

$$\Delta I\left[u^0(\cdot),x_0^0\right]=-\left\langle\psi^0(t_0),\ \Delta x_0\right\rangle+o\left(\left\|\Delta x_0\right\|\right).$$

Лемма доказана. ■

Полагаем

$$I_0 = \left\{ i = 1,\dots,m \,\middle|\, \varphi_i\left(x_0^0\right) = 0 \right\},$$

$$L_0 = \begin{cases} \left\{ l \in R^n \,\middle|\, \left\langle \dfrac{\partial}{\partial x}\varphi_i\left(x_0^0\right), l \right\rangle < 0, \quad i \in I_0 \right\}, & I_0 \neq \varnothing, \\ R^n, & I_0 = \varnothing. \end{cases}$$

Лемма 3. *Имеет место неравенство*

$$\left\langle \psi^0\left(t_0\right), l \right\rangle \le 0, \quad \forall l \in L_0. \tag{5}$$

Доказательство. Обозначим

$$x_0\left(\varepsilon\right) = x_0^0 + \varepsilon l, \quad \varepsilon \ge 0, \quad l \in L_0.$$

Покажем, что

$$\varphi_i\left(x_0\left(\varepsilon\right)\right) \le 0, \quad i = 1,\dots,m, \tag{6}$$

если $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Действительно, неравенства (6) непосредственно вытекают из непрерывности функции φ_i, если $i \in \{1,\dots,m\} \setminus I_0$. В частности, при $I_0 = \varnothing$ неравенства (6) будут верны для всех $i \in \{1,\dots,m\}$. Пусть теперь $I_0 \neq \varnothing$ и $i \in I_0$, тогда

$$\varphi_i\left(x_0\left(\varepsilon\right)\right) = \varphi_i\left(x_0^0 + \varepsilon l\right) = \overbrace{\varphi_i\left(x_0^0\right)}^{i \in I_0 \Rightarrow\, =0} + \left\langle \frac{\partial}{\partial x}\varphi_i\left(x_0^0\right),\ l \right\rangle \varepsilon + o\left(\varepsilon\right) =$$

$$= \left\langle \frac{\partial}{\partial x}\varphi_i\left(x_0^0\right),\ l \right\rangle \varepsilon + o\left(\varepsilon\right) = \varepsilon\left[\left\langle \frac{\partial}{\partial x}\varphi_i\left(x_0^0\right),\ l \right\rangle + \frac{o\left(\varepsilon\right)}{\varepsilon}\right] \quad \Rightarrow$$

$$\varphi_i\left(x_0\left(\varepsilon\right)\right) = \varepsilon\left[\left\langle \frac{\partial}{\partial x}\varphi_i\left(x_0^0\right),\ l \right\rangle + \frac{o\left(\varepsilon\right)}{\varepsilon}\right].$$

Для малых $\varepsilon > 0$ знак величины $\varphi_i\left(x_0\left(\varepsilon\right)\right)$ определяется знаком выражения $\left\langle \dfrac{\partial}{\partial x}\varphi_i\left(x_0^0\right),\ l \right\rangle$, а он отрицателен, так как $i \in I_0 \quad \Rightarrow \quad I_0 \neq \varnothing$ и

$$l \in L_0 = \left\{ l \in R^n \,\middle|\, \left\langle \frac{\partial}{\partial x}\varphi_i\left(x_0^0\right), l \right\rangle < 0, \quad i \in I_0 \right\}.$$

Из доказанных неравенств (6) следует, что $x_0\left(\varepsilon\right) \in S_0$ для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. Тогда при $\Delta x_0 = \varepsilon l$ по **лемме 2** получим

$$\Delta I\left[u^0(\cdot), x_0^0\right] = -\left\langle \psi^0\left(t_0\right), \overset{\Delta x_0 = \varepsilon l}{\Delta x_0} \right\rangle + o\left(\overset{\Delta x_0 = \varepsilon l}{\left\|\Delta x_0\right\|}\right) = -\varepsilon\left\langle \psi^0\left(t_0\right), l \right\rangle + o\left(\varepsilon\right) \ge 0, \quad \forall l \in L_0.$$

Разделим обе части последнего неравенства на $\varepsilon > 0$. В результате получим

$$-\left\langle \psi^0(t_0), l \right\rangle + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \geq 0, \quad \forall l \in L_0.$$

Устремляя ε к нулю, выводим искомое неравенство (5). Лемма доказана. ■

Заметим, что неравенство $\left\langle \psi^0(t_0), l \right\rangle \leq 0$ будет справедливо и для всех

$$l \in \overline{L}_0 = \begin{cases} \left\{ l \in R^n \;\middle|\; \left\langle \frac{\partial}{\partial x}\varphi_i\left(x_0^0\right), l \right\rangle \leq 0, \quad i \in I_0 \right\}, & I_0 \neq \varnothing, \\ R^n, & I_0 = \varnothing. \end{cases}$$

В дальнейшем будет использоваться утверждение, известное в теории выпуклого анализа, как теорема Фаркаша.

Пусть задана матрица

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{s1} & \dots & b_{sn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ \cdots \\ B_s \end{pmatrix}$$

размера $s \times n$, причем множество

$$X = \left\{ x \in R^n \;\middle|\; Bx = \begin{pmatrix} B_1 \\ \cdots \\ B_s \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \left\langle B_1^T, x \right\rangle \\ \cdots \\ \left\langle B_s^T, x \right\rangle \end{pmatrix} \leq 0 \right\} \neq \varnothing$$

(**рис. 2**),

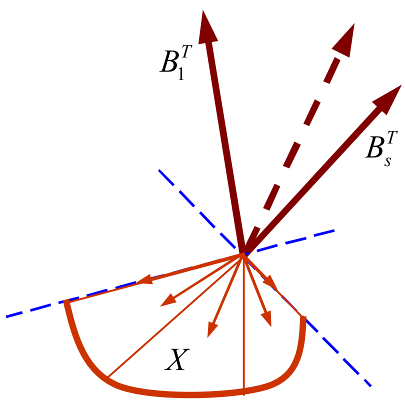

Рис. 2

где

$$B_i^T = \begin{pmatrix} b_{i1} \\ \cdots \\ b_{in} \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, s,$$

и задан вектор $v \in R^n$.

Теорема 2 (*Фаркаша*). *Неравенство* $\langle v, x\rangle \le 0$ *выполняется для всех* $x \in X$ *в том и только том случае, если существует вектор* $u \in R^s$, $u \ge 0$, *что*

$$v = B^T u = \begin{pmatrix} B_1^T & \ldots & B_s^T \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{s1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{1n} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \cdots \\ u_s \end{pmatrix}.$$

Таким образом, вектор $v \in R^n$ является линейной комбинацией векторов $B_1^T, \ldots, B_s^T \in R^n$ с положительными коэффициентами.

В предположении, что $L_0 \ne \varnothing$, выведем условия трансверсальности для простейшей задачи теории оптимального управления с подвижным левым концом. В частности, множество L_0 будет непустым, если набор векторов

$$\frac{\partial}{\partial x}\varphi_i\left(x_0^0\right), \quad i \in I_0$$

линейно независим.

Теорема 3. *Пусть* $x_0^0 \in S_0$ *– оптимальное начальное значение фазового вектора и выполнено предположение* $L_0 \ne \varnothing$. *Тогда существуют числа* $\mu_i \ge 0$, $i = 1, \ldots, m$ *такие, что*

$$\psi^0\left(t_0\right) = \sum_{i=1}^{m} \mu_i \frac{\partial}{\partial x}\varphi_i\left(x_0^0\right), \qquad \mu_i \varphi_i\left(x_0^0\right) = 0, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{7}$$

Доказательство. Если $I_0 = \left\{ i = 1, \ldots, m \,\middle|\, \varphi_i\left(x_0^0\right) = 0 \right\} = \varnothing$, то $L_0 = R^n$ и из (5) следует $\psi^0\left(t_0\right) = 0$. Для доказательства теоремы достаточно положить $\mu_1 = \ldots = \mu_m = 0$.

Пусть теперь $I_0 \ne \varnothing$. Сконструируем матрицу Z, строками которой будут служить вектора

$$\frac{\partial}{\partial x}\varphi_i\left(x_0^0\right) \in R^n, \quad i \in I_0.$$

Установим соответствие между обозначениями, принятыми в рассматриваемой задаче оптимального управления и в **теореме Фаркаша**:

$$\overset{\substack{\text{число активных}\\ \text{ограничений}}}{I_0} \quad \Leftrightarrow \quad \{1, \ldots, s\}, \qquad \overset{\substack{\text{матрица градиентов}\\ \text{активных ограничений}}}{Z} \quad \Leftrightarrow \quad B, \qquad \overset{\substack{\text{вектор сопряженных}\\ \text{переменных}}}{\psi^0\left(t_0\right)} \quad \Leftrightarrow \quad v, \qquad \overset{\substack{\text{вектора } l\\ \text{из условия (6)}\\ \langle \psi^0(t_0), l\rangle \le 0, \quad \forall l \in L_0. \quad (6)}}{\overline{L}_0} \quad \Leftrightarrow \quad X.$$

На основании этой теоремы заключаем, что существуют числа $\mu_i \ge 0, i \in I_0$, для которых

$$\psi^0\left(t_0\right) = \sum_{i \in I_0} \mu_i \frac{\partial}{\partial x}\varphi_i\left(x_0^0\right).$$

Полагая $\mu_i = 0$, если $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus I_0$, приходим к (7). Теорема доказана. ■

4.3. Индивидуальное задание 6 «Задачи с подвижными границами»

Для управляемого динамического объекта

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad t \in [0,1], \quad u \in R^1,$$
$$\varphi_1(x_{10}, x_{20}) = a_{11}x_{10} + a_{12}x_{20} \le b_1,$$
$$\varphi_2(x_{10}, x_{20}) = a_{21}x_{10} + a_{22}x_{20} \le b_2,$$
$$I[u(\cdot), x_0] = \int_0^1 \frac{1}{2}u^2(\tau)d\tau + \alpha x_1^2(1) + \beta x_2^2(1) \to \min$$

найти тройку, удовлетворяющую условиям принципа максимума и условиям трансверсальности на левом конце в задаче оптимального управления с подвижным левым концом (время фиксировано).

Пример выполнения индивидуального задания 6

Пример 2. Приведем решение задания при следующих числовых данных:

$$a_{11} = 1, \quad a_{12} = -1, \quad b_1 = -3,$$
$$a_{21} = -2, \quad a_{22} = 1, \quad b_2 = 7,$$
$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, решаем следующую задачу оптимального управления с подвижным левым концом (**рис. 3**)

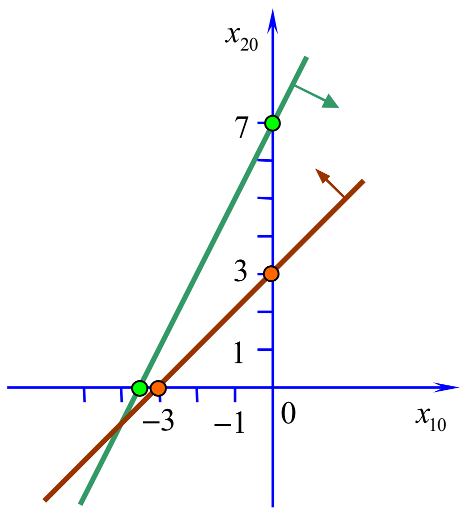

Рис. 3

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = u,\ t \in [0,1],\ u \in R^1,$$

$$\varphi_1(x_{10}, x_{20}) = x_{10} - x_{20} + 3 \le 0,$$

$$\varphi_2(x_{10}, x_{20}) = -2x_{10} + x_{20} - 7 \le 0,$$

$$I[u(\cdot), x_0] = \int_0^1 \frac{1}{2} u^2(\tau) d\tau + \frac{1}{2} x_1^2(1) + \frac{1}{2} x_2^2(1) \to \min.$$

Решение. Применяя формализм принципа максимума, находим:

$$\begin{gathered} x_1(t) = -\frac{1}{6} c_1 t^3 + \frac{1}{2} c_2 t^2 + c_3 t + c_4, \\ x_2(t) = -\frac{1}{2} c_1 t^2 + c_2 t + c_3, \\ u(t) = \psi_2(t) = -c_1 t + c_2, \quad \psi_1(t) = c_1, \quad t \in [0,1]. \end{gathered} \tag{1}$$

С учетом (1) выпишем граничные условия на левом конце

$$\overbrace{x_1^0(0)}^{\left(-\frac{1}{6}c_1t^3+\frac{1}{2}c_2t^2+c_3t+c_4\right)_{t=0}} = x_{10}^0 \quad \Rightarrow \quad c_4 = x_{10}^0,$$

$$\overbrace{x_2^0(0)}^{\left.\left(-\frac{1}{2}c_1t^2+c_2t+c_3\right)\right|_{t=0}} = x_{20}^0 \quad \Rightarrow \quad c_3 = x_{20}^0,$$

$$\overbrace{\varphi_1(x_{10}^0, x_{20}^0)}^{x_{10}-x_{20}+3} \le 0 \quad \Rightarrow \quad x_{10} - x_{20} + 3 \le 0,$$

$$\overbrace{\varphi_2(x_{10}^0, x_{20}^0)}^{-2x_{10}+x_{20}-7} \le 0 \quad \Rightarrow \quad -2x_{10} + x_{20} - 7 \le 0,$$

$$\overbrace{\psi_1^0(0)}^{c_1|_{t=0}} = \mu_1 \frac{\partial}{\partial x_{10}} \overbrace{\varphi_1(x_{10}^0, x_{20}^0)}^{x_{10}-x_{20}+3} + \mu_2 \frac{\partial}{\partial x_{10}} \varphi_2 \overbrace{(x_{10}^0, x_{20}^0)}^{-2x_{10}+x_{20}-7} \quad \Rightarrow \quad c_1 = \mu_1 \cdot 1 + \mu_2(-2),$$

$$\overbrace{\psi_2^0(0)}^{(-c_1t+c_2)|_{t=0}} = \mu_1 \frac{\partial}{\partial x_{20}} \overbrace{\varphi_1(x_{10}^0, x_{20}^0)}^{x_{10}-x_{20}+3} + \mu_2 \frac{\partial}{\partial x_{20}} \varphi_2 \overbrace{(x_{10}^0, x_{20}^0)}^{-2x_{10}+x_{20}-7} \quad \Rightarrow \quad c_2 = \mu_1 \cdot (-1) + \mu_2 \cdot 1,$$

$$\mu_1 \overbrace{\varphi_1(x_{10}^0, x_{20}^0)}^{x_{10}-x_{20}+3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_1(x_{10} - x_{20} + 3) = 0,$$

$$\mu_2 \overbrace{\varphi_2(x_{10}^0, x_{20}^0)}^{-2x_{10}+x_{20}-7} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_2(-2x_{10} + x_{20} - 7) = 0,$$

$$\mu_1 \ge 0, \quad \mu_2 \ge 0.$$

Выпишем граничные условия на правом конце

$$\overbrace{\psi_1^0(1)}^{c_1|_{t=1}} = -\frac{\partial}{\partial x_1}\overbrace{\Phi\left(x^0(1)\right)}^{\left(\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2\right)_{x=x^0(1)}} \Rightarrow \quad c_1 = \overbrace{-x_1^0(1)}^{-\left(-\frac{1}{6}c_1t^3+\frac{1}{2}c_2t^2+c_3t+c_4\right)_{t=1}} \Rightarrow$$

$$c_1 = \frac{1}{6}c_1 - \frac{1}{2}c_2 - c_3 - c_4 \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{6}c_1 + \frac{1}{2}c_2 + c_3 + c_4 = 0,$$

$$\overbrace{\psi_2^0(1)}^{(-c_1t+c_2)_{t=1}} = -\frac{\partial}{\partial x_2}\overbrace{\Phi\left(x^0(1)\right)}^{\left(\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2\right)_{x=x^0(1)}} \Rightarrow \quad -c_1 + c_2 = \overbrace{-x_2^0(1)}^{-\left(-\frac{1}{2}c_1t^2+c_2t+c_3\right)_{t=1}} \Rightarrow$$

$$-c_1 + c_2 = \frac{1}{2}c_1 - c_2 - c_3 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2}c_1 - 2c_2 - c_3 = 0.$$

Таким образом, оптимальное начальное положение фазового вектора следует определять из следующей системы уравнений и неравенств:

$$c_4 = x_{10}^0, \quad c_3 = x_{20}^0, \quad x_{10} - x_{20} + 3 \le 0, \quad -2x_{10} + x_{20} - 7 \le 0,$$

$$c_1 = \mu_1 - 2\mu_2, \quad c_2 = -\mu_1 + \mu_2, \quad \mu_1\left(x_{10} - x_{20} + 3\right) = 0,$$

$$\mu_2\left(-2x_{10} + x_{20} - 7\right) = 0, \quad \mu_1 \ge 0, \mu_2 \ge 0,$$

$$\frac{5}{6}c_1 + \frac{1}{2}c_2 + c_3 + c_4 = 0, \quad \frac{3}{2}c_1 - 2c_2 - c_3 = 0.$$

Этой системе равенств и неравенств удовлетворяет единственный набор параметров

$$c_1 = 0.4091, \quad c_2 = -0.4091, \quad c_3 = 1.4318, \quad c_4 = 1.5682,$$
$$\mu_1 = 0.4091, \quad \mu_2 = 0,$$

$$x_{10} = -1.5682, \quad x_{20} = -1.4318.$$

Тройка $\left(u^0(\cdot), x_0, x(\cdot)\right)$, удовлетворяющая условиям принципа максимума и условиям трансверсальности на левом конце:

$$u^0(t) = -0.4091 \cdot t\text{-}0.40911,$$

$$x_{10} = -1.5682, \quad x_{20} = -1.4318,$$

$$x_1^0(t) = \text{-}0.0682 \cdot t^3\text{-}0.2045 \cdot t^2 + 1.4318 \cdot t\text{-}1.5682,$$

$$x_2^0(t) = \text{-}0.2045 \cdot t^2\text{-}0.4091 \cdot t + 1.4318 \ .$$

Величина функционала на этой тройке

$$I\left[u^0(\cdot), x_0\right] = 0.6136. \ \blacktriangleright$$

Задания для самостоятельного решения

Числовые данные для **вариантов 1–15** приведены в табл.1.

Таблица 1

№ варианта	Числовые данные							
	a_{11}	a_{12}	b_1	a_{21}	a_{22}	b_2	α	β
1	– 5	2	– 1	3	4	– 2	1	2
2	4	3	3	1	3	2	1	2
3	3	3	5	– 5	4	– 5	3	2
4	– 4	4	2	5	3	– 1	4	1
5	4	4	5	– 4	1	– 1	2	3
6	– 4	2	5	5	4	2	4	1
7	– 1	4	3	3	4	– 5	2	1
8	1	3	– 5	3	2	– 4	3	3
9	5	2	4	– 3	4	0	3	2
10	3	1	– 5	2	1	– 5	4	1
11	– 5	3	5	5	1	– 4	3	4
12	– 4	2	1	– 1	2	3	4	3
13	4	3	– 3	– 3	4	– 5	3	3
14	– 4	4	– 3	5	4	3	4	3
15	– 3	4	– 5	– 4	1	2	1	1

4.4. Необходимые условия оптимальности в задаче теории оптимального управления в общей постановке

Рассмотрим задачу теории оптимального управления для случая, когда время процесса не фиксировано (начальный и конечный моменты времени переменные) и оба конца траектории подвижны. Таким образом, требуется решить следующую задачу.

Задача 3. *Минимизировать функционал*

$$I\left[t_0,T,x_0,u(\cdot)\right]=\int_{t_0}^{T} f_0\left(\tau,x(\tau),u(\tau)\right)d\tau+\Phi\left(x_0,x_T,t_0,T\right)$$

при условиях

$$\dot{x} = f(t,x,u), \quad x \in R^n, \quad u \in P \subset R^r, \quad t \in [t_0, T],$$

$$t_0 \in \theta_0 = (t_{0*}, t_0^*), \quad T \in \theta_1 = (T_*, T^*), \quad t_0^* \le T_*,$$

$$x_0 = x(t_0), \quad x_T = x(T),$$

$$x_0 \in S_0 = \{x_0 \mid \varphi_{i0}(t_0, x_0) \le 0, \quad i = 1,\dots,m_0, \quad \varphi_{i0}(t_0, x_0) = 0, \quad i = m_0+1,\dots,s_0\},$$

$$x_T \in S_1 = \{x_T \mid \varphi_{i1}(T, x_T) \le 0, \quad i = 1,\dots,m_1, \quad \varphi_{i1}(T, x_T) = 0, \quad i = m_1+1,\dots,s_1\}.$$

Здесь

$\Phi : R^{2n} \times \theta_0 \times \theta_1 \to R^1, \quad \varphi_{i0} : \theta_0 \times R^n \to R^1, \quad i = 1,\dots,s_0, \quad \varphi_{i1} : \theta_1 \times R^n \to R^1, \quad i = 1,\dots,s_1$ –

непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов. Необходимые условия оптимальности в этой задаче приводятся в следующей теореме [5].

Теорема 4. *Пусть* $(t_0^0, T^0, x_0^0, u^0(\cdot), x^0(\cdot))$ *– решение задачи 1. Тогда необходимо существуют числа*

$$\psi_0^0, \overbrace{\mu_1^0, \dots, \mu_{s_0}^0}^{\text{по числу огр. на левом конце}}, \overbrace{\nu_1^0, \dots, \nu_{s_1}^0}^{\text{по числу огр. на правом конце}}$$

и вектор-функция

$$\bar{\psi}^0(t) = \begin{pmatrix} \psi_0^0(t) \\ \psi_1^0(t) \\ \dots \\ \psi_n^0(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [t_0^0, T^0],$$

одновременно не равные нулю и удовлетворяющие условиям:

1) вектор-функция $\bar{\psi}^0(\cdot)$ *является решением сопряженной системы дифференциальных уравнений, соответствующей паре* $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$;

2) $\psi^0(t_0^0) = \sum_{i=1}^{s_0} \mu_i^0 \frac{\partial}{\partial x_0} \varphi_{i0}(t_0^0, x_0^0) + \psi_0^0 \frac{\partial}{\partial x_0} \Phi(x_0^0, x_T^0, t_0^0, T^0);$

$\varphi_{i0}(t_0^0, x_0^0) \le 0, \quad i = 1,\dots,m_0, \quad \varphi_{i0}(t_0^0, x_0^0) = 0, \quad i = m_0+1,\dots,s_0;$

3) $\psi^0(T^0) = -\sum_{i=1}^{s_1} \nu_i^0 \frac{\partial}{\partial x_T} \varphi_{i1}(T^0, x_T^0) + \psi_0^0 \frac{\partial}{\partial x_T} \Phi(x_0^0, x_T^0, t_0^0, T^0);$

$\varphi_{i1}(T^0, x_T^0) \le 0, \quad i = 1,\dots,m_1, \quad \varphi_{i1}(T^0, x_T^0) = 0, \quad i = m_1+1,\dots,s_1;$

4) $\psi_0^0 \le 0,$

$\varphi_{i0}(t_0^0, x_0^0)\mu_i^0 = 0, \mu_i^0 \ge 0, \quad i = 1,\dots,m_0, \quad \varphi_{i1}(T^0, x_T^0)\nu_i^0 = 0, \quad \nu_i^0 \ge 0, \quad i = 1,\dots,m_1;$

5) $H(t_0^0, x_0^0, u^0(t_0^0), \bar{\psi}^0(t_0^0)) = -\sum_{i=1}^{s_0} \mu_i^0 \frac{\partial}{\partial t_0} \varphi_{i0}(t_0^0, x_0^0) + \psi_0^0 \frac{\partial}{\partial t_0} \Phi(x_0^0, x_T^0, t_0^0, T^0);$

6) $H\left(T^0,x^0\left(T^0\right),u^0\left(T^0\right),\overline{\psi}^0\left(T^0\right)\right)=-\sum_{i=1}^{s_1}\nu_i^0\frac{\partial}{\partial T}\varphi_{i1}\left(T^0,x_T^0\right)+\psi_0^0\frac{\partial}{\partial T}\Phi\left(x_0^0,x_T^0,t_0^0,T^0\right);$

7) для всех $t\in\left[t_0,T^0\right]$ *справедливо равенство*

$$\max_{u\in P}H\left(t,x^0(t),u,\overline{\psi}^0(t)\right)=H\left(t,x^0(t),u^0(t),\overline{\psi}^0(t)\right).$$

Пример 3. Для управляемого динамического объекта (**рис. 4**)

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2,\\ \dot{x}_2=u,\end{cases}$$

$$\overbrace{t_0=0}^{\text{начальный момент фиксирован}},\qquad \overbrace{T>0}^{\text{конечный момент не фиксирован}},$$

$$\overbrace{x_{10}=2,\quad x_{20}=-2}^{\text{левый конец закреплен}},\qquad \overbrace{S_1=\left\{x_T\mid\varphi_{11}\left(T,x_T\right)\equiv x_{1T}=0\right\}}^{\text{правый конец подвижен}},$$

$$\overbrace{I\left[T,u(\cdot)\right]=\int_0^T d\tau=T\to\min}^{\text{оптимальное быстродействие}}$$

найти программное управление, траекторию движения, начальное положение фазового вектора объекта и длительность процесса, удовлетворяющие условиям **теоремы 4.**

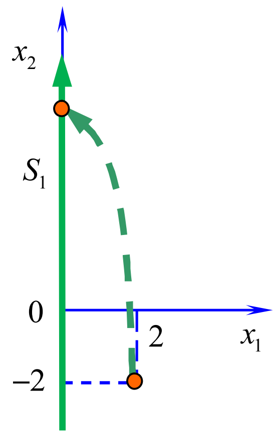

Рис. 4

Решение. Функция Л.С. Понтрягина

$$H\left(t,x,u,\overline{\psi}\right)=\psi_0+\psi_1x_2+\psi_2u.$$

Сопряженная система

$$\dot{\psi}_0=0,\quad\dot{\psi}_1=0,\quad\dot{\psi}_2=-\psi_1.$$

Сопряженная система интегрируется автономно от основной системы:

$$\psi_0^0(t)=\psi_0^0, \quad \psi_1^0(t)=c_1, \quad \psi_2^0(t)=-c_1 t+c_2, \quad t\in\left[0,T^0\right]. \tag{1}$$

Из условия ***6)* теоремы 4** выводим

$$\overbrace{H\left(T^0,x^0\left(T^0\right),u^0\left(T^0\right),\bar{\psi}^0\left(T^0\right)\right)}^{\psi_0^0+\psi_1^0(T^0)x_2^0\left(T^0\right)+\psi_2^0\left(T^0\right)u^0\left(T^0\right)}=-\nu_1^0\frac{\partial}{\partial T}\overbrace{\varphi_{11}\left(T^0,x_T^0\right)}^{=x_{1T}}+\psi_0^0\frac{\partial}{\partial T}\overbrace{\Phi\left(x_0^0,x_T^0,t_0^0,T^0\right)}^{=0} \Rightarrow$$

$$\psi_0^0+\psi_1^0(T^0)x_2^0\left(T^0\right)+\psi_2^0\left(T^0\right)u^0\left(T^0\right)=0. \tag{2}$$

Из условия ***7)* теоремы 4** следует

$$\max_{u\in[-1,1]}\overbrace{H\left(t,x^0(t),u,\bar{\psi}^0(t)\right)}^{\psi_0^0+\psi_1^0(t)x_2^0(t)+\psi_2^0(t)u}=\psi_0^0(t)+\psi_1^0(t)x_2^0(t)+\overbrace{\max_{u\in[-1,1]}\psi_2^0(t)u}^{\psi_2^0(t)\cdot sign\left(\psi_2^0(t)\right)}=$$

$$=\psi_0^0(t)+\psi_1^0(t)x_2^0(t)+\left|\psi_2^0(t)\right| \Rightarrow$$

$$u^0(t)=sign\left(\psi_2^0(t)\right), \quad t\in\left[0,T^0\right].$$

Выпишем условия ***3)* теоремы 4** для данного примера

$$\psi_1^0\left(T^0\right)=-\nu_1^0\frac{\partial\overbrace{\varphi_{11}\left(T^0,x_T^0\right)}^{\varphi_{11}\left(T^0,x_T^0\right)\equiv x_{1T}}}{\partial x_{1T}}+\psi_0^0\frac{\partial\overbrace{\Phi\left(x_0^0,x_T^0,t_0^0,T^0\right)}^{\Phi\left(x_0^0,x_T^0,t_0^0,T^0\right)\equiv 0}}{\partial x_{1T}},$$

$$\psi_2^0\left(T^0\right)=-\nu_1^0\frac{\partial\overbrace{\varphi_{11}\left(T^0,x_T^0\right)}^{\varphi_{11}\left(T^0,x_T^0\right)\equiv x_{1T}}}{\partial x_{2T}}+\psi_0^0\frac{\partial\overbrace{\Phi\left(x_0^0,x_T^0,t_0^0,T^0\right)}^{\Phi\left(x_0^0,x_T^0,t_0^0,T^0\right)\equiv 0}}{\partial x_{2T}}.$$

Тогда

$$\psi_1^0\left(T^0\right)=-\nu_1^0, \quad \psi_2^0\left(T^0\right)=0. \tag{4}$$

Из (1) и (4) получаем

$$\psi_2^0\left(T^0\right)=0 \Rightarrow -c_1T^0+c_2=0 \Rightarrow c_2=c_1T^0 \Rightarrow \psi_2(t)=c_1\left(T^0-t\right).$$

Заметим, что $c_1\neq 0$. От противного

$$c_1=0 \Rightarrow c_2=0, \quad \psi_2(t)=0,$$

$$(1) \Rightarrow \psi_1^0(t)=\overset{=0}{c_1} \Rightarrow \psi_1^0(t)=0,$$

$$(2) \Rightarrow \psi_0^0+\overbrace{\psi_1^0(T^0)}^{=0}x_2^0\left(T^0\right)+\overbrace{\psi_2^0\left(T^0\right)}^{=0}u^0\left(T^0\right)=0 \Rightarrow \psi_0^0=0.$$

$$(4) \Rightarrow \overbrace{\psi_1^0\left(T^0\right)}^{0}=-\nu_1^0 \Rightarrow \nu_1^0=0.$$

Таким образом,

$$c_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_0^0 = 0, \quad \psi_1^0(t) \equiv 0, \quad \psi_2^0(t) \equiv 0, \quad \nu_1^0 = 0.$$

Пришли в противоречие с условиями **теоремы 4.** Остается признать, что $c_1 \neq 0$.

Краевая задача принципа максимума имеет два решения.

Первое решение. *Пусть* $c_1 > 0$. Тогда

$$\psi_2(t) = c_1\left(T^0 - t\right) \quad \Rightarrow \quad u^0(t) = sign\left(\psi_2^0(t)\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad t \in \left[t_0^0, T^0\right].$$

Интегрируем основную систему с начальными условиями $x_{10} = 2,\ x_{20} = -2$. Имеем

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u^0(t, x, \psi), \\ x_{10} = 2,\ x_{20} = -2, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = 1, \\ x_{10} = 2,\ x_{20} = -2, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1^0(t) = \dfrac{(t-2)^2}{2}, \\ x_2^0(t) = t - 2, \end{cases} \quad t \in \left[0, T^0\right].$$

Время окончания процесса определяется из условия

$$x^0\left(T^0\right) \in S_1 = \left\{ x_T = \begin{pmatrix} x_{1T} \\ x_{2T} \end{pmatrix} \middle|\ x_{1T} = 0 \right\} \quad \Rightarrow \quad x_1^0\left(T^0\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\left(T^0 - 2\right)^2}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad T^0 = 2.$$

Второе решение. Пусть $c_1 < 0 \Rightarrow u^0(t) \equiv -1$. Тогда

$$\begin{cases} x_1^0(t) = 4 - \dfrac{(t+2)^2}{2}, \\ x_2^0(t) = -t - 2. \end{cases}$$

Время окончания процесса определяется из условия

$$x_1^0\left(T^0\right) = 4 - \frac{\left(T^0 + 2\right)^2}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad T^0 = \sqrt{8} - 2.$$

Заметим, что $\sqrt{8} - 2 < 2$. ►

В случае, когда в условиях принципа максимума удается установить неравенство $\psi_0^0 < 0$, то в силу однородности этих условий относительно вектора $\bar{\psi}^0$, не теряя общности, можно считать $\psi_0^0 = -1$. В частности, именно этот факт был доказан для простейшей задачи теории оптимального управления и ее обобщений. В **примере 3** также можно показать, что $\psi_0^0 < 0$. Однако возможны ситуации, когда $\psi_0^0 = 0$. Для таких случаев применение принципа максимума обычно сопряжено с дополнительными трудностями.

Пример 4. Для управляемого динамического объекта

$$\dot{x}_1 = u_1, \quad \dot{x}_2 = u_2, \quad t_0 = 0, \quad T = 1, \quad x \in R^2, \quad u \in R^2, \quad x_{10} = 0, \quad x_{20} = 0,$$

$$S_1 = \left\{ x_T \;\middle|\; x_{1T} \le 0,\ x_{2T}^2 - \overbrace{x_{1T}}^{\Rightarrow \ge 0} \le 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \textbf{(рис. 5)},$$

$$I\left[u(\cdot)\right] = \int_0^1 \left(u_1^2(\tau) + u_2^2(\tau)\right) d\tau + x_1(1) + x_2(1) \to \min$$

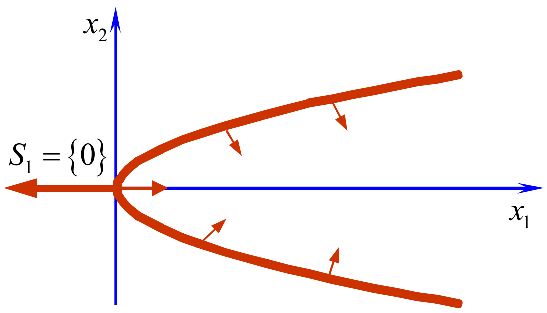

Рис. 5

найти программное управление и траекторию движения, удовлетворяющие условиям **теоремы 4.**

Решение. Из определения множества S_1 следует, что $x_1(1) = x_2(1) = 0$, поэтому решение данной задачи существует и представляет собой пару

$$\left(u^0(\cdot), x^0(\cdot)\right), \quad u^0(t) = 0, \quad x^0(t) = 0, \quad t \in [0,1].$$

Попытаемся получить это решение, применяя **теорему 4.**

Функция Л.С. Понтрягина

$$H\left(t, x, u, \overline{\psi}\right) = \psi_0 \left(u_1^2 + u_2^2\right) + \psi_1 u_1 + \psi_2 u_2,$$

сопряженная система

$$\dot{\psi}_0 = 0, \quad \dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \quad \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = 0$$

и ее решение

$$\psi_0^0(t) = c_0, \quad \psi_1^0(t) = c_1, \quad \psi_2^0(t) = c_2, \quad t \in [0,1].$$

Область $S_1 = \left\{ x_T \,\middle|\, x_{1T} \le 0, x_{2T}^2 - x_{1T} \le 0 \right\}$ здесь задается функциями

$$\varphi_{11}(T, x_T) = x_{1T}, \quad \varphi_{12}(T, x_T) = x_{2T}^2 - x_{1T},$$

причем ограничениями – только в форме неравенств. Из условий 3) **теоремы 4** получим

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nu_1^0 + \nu_2^0 + \psi_0^0 \\ -2\nu_2^0 x_2^0(1) + \psi_0^0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Покажем, что $\psi_0^0 = 0$. От противного, полагая $\psi_0^0 = -1$, приходим к равенству

$$H(t,x,u,\overline{\psi}) = \overbrace{\psi_0}^{=-1}(u_1^2 + u_2^2) + \psi_1 u_1 + \psi_2 u_2 = -(u_1^2 + u_2^2) + \psi_1 u_1 + \psi_2 u_2 .$$

Из него в силу условия ***7)* теоремы 4** определяем программное управление

$$\frac{\partial H(t,x,u,\overline{\psi})}{\partial u} = \begin{pmatrix} -2u_1 + \psi_1 \\ -2u_2 + \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} u_1^0(t) = \dfrac{\overbrace{\psi_1^0(t)}^{=c_1}}{2} = \dfrac{c_1}{2}, \\ u_2^0(t) = \dfrac{\psi_2^0(t)}{2} \overset{\psi_2^0(t)=c_2}{=} \dfrac{c_2}{2}, \end{cases} \qquad t \in [0,1].$$

Подставляя найденное управление в основную систему дифференциальных уравнений, получим

$$\dot{x}_1 = \overbrace{u_1}^{=\frac{c_1}{2}}, \quad \dot{x}_2 = \overbrace{u_2}^{=\frac{c_2}{2}} \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_1 = \frac{c_1}{2}, \quad \dot{x}_2 = \frac{c_2}{2}.$$

Интегрируем ее с учетом начальных условий $x_{10} = 0,\ x_{20} = 0$. Имеем

$$x_1^0(t) = \frac{c_1 t}{2}, \quad x_2^0(t) = \frac{c_2 t}{2}, \quad t \in [0,1].$$

Из равенств $x_1(1) = x_2(1) = 0$ вытекает, что $c_1 = c_2 = 0$. Приходим в противоречие с (3): $0 = -2\nu_2^0 \cdot 0 - 1$. Остается признать, что $\psi_0^0 = 0$. С учетом последнего равенства функция H принимает вид

$$H(t,x,u,\overline{\psi}) = \psi_1 u_1 + \psi_2 u_2$$

и поэтому может иметь конечный максимум лишь для

$$\psi_1^0(t) = 0, \quad \psi_2^0(t) = 0, \quad t \in [0,1].$$

Таким образом, в данном примере $H \equiv 0$. Установить конкретный вид программного управления из условия максимума функции Л.С. Понтрягина здесь не представляется возможным. С другой стороны, решение задачи оптимального управления существует и, как легко видеть, формально удовлетворяет условиям **теоремы 4.** ►

4.5. Управление математическим маятником

Движение плоского маятника, подвешенного к точке опоры при помощи жесткого невесомого стержня (**рис. 6**), описывается уравнением

$$I\theta''(\tau)+b\theta'(\tau)+mgl\sin\theta(\tau)=M(\tau). \qquad (1)$$

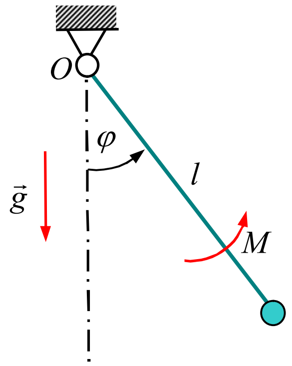

Рис. 6

Здесь l – длина невесомого стержня, m – масса, сосредоточенная в конце стержня, $I=ml^2$ – момент инерции маятника относительно оси вращения, g – ускорение силы тяжести, $b\geq 0$ – коэффициент демпфирования, τ – время, $M(\tau)$ – внешний управляющий момент, θ – угол отклонения стержня от положения устойчивого равновесия.

Сделаем замену переменных

$$t=\tau\sqrt{\frac{mgl}{I}} \quad\Rightarrow\quad \tau=t\sqrt{\frac{I}{mgl}}.$$

Тогда

$$M\left(\overbrace{\tau}^{t\sqrt{\frac{I}{mgl}}}\right)=M\left(t\sqrt{\frac{I}{mgl}}\right), \qquad \theta\left(\overbrace{\tau}^{t\sqrt{\frac{I}{mgl}}}\right)=\theta\left(t\sqrt{\frac{I}{mgl}}\right)=\varphi(t),$$

$$\dot\varphi(t)=\frac{d}{dt}\theta(\tau)=\frac{d\theta(\tau)}{d\tau}\cdot\frac{\overbrace{d\tau}^{\sqrt{\frac{I}{mgl}}}}{dt}=\theta'(\tau)\sqrt{\frac{I}{mgl}} \quad\Rightarrow\quad \theta'(\tau)=\sqrt{\frac{mgl}{I}}\dot\varphi(t),$$

$$\ddot\varphi(t)=\frac{d\dot\varphi(t)}{dt}=\sqrt{\frac{I}{mgl}}\theta''(\tau)\frac{\overbrace{d(\tau)}^{\sqrt{\frac{I}{mgl}}}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\theta'(\tau)\sqrt{\frac{I}{mgl}}\right)=\frac{I}{mgl}\theta''(\tau) \quad\Rightarrow$$

$$\theta''(\tau) = \ddot{\varphi}(t)\frac{mgl}{I}.$$

Подставляем в (1)

$$I\overbrace{\theta''(\tau)}^{\ddot{\varphi}(t)\frac{mgl}{I}} + b\,\overbrace{\theta'(\tau)}^{\sqrt{\frac{mgl}{I}}\dot{\varphi}(t)} + mgl\sin\overbrace{\theta(\tau)}^{\varphi(t)} = \overbrace{M(\tau)}^{M\left(t\sqrt{\frac{I}{mgl}}\right)} \quad \Rightarrow$$

$$\ddot{\varphi}(t)mgl + b\sqrt{\frac{mgl}{I}}\dot{\varphi}(t) + mgl\sin\varphi(t) = M\left(t\sqrt{\frac{I}{mgl}}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\ddot{\varphi}(t) + \overbrace{\frac{b}{\sqrt{Imgl}}}^{\beta}\dot{\varphi}(t) + \sin\varphi(t) = \overbrace{\frac{1}{mgl}M\left(t\sqrt{\frac{I}{mgl}}\right)}^{u} \quad \Rightarrow$$

$$\ddot{\varphi} + \beta\dot{\varphi} + \sin\varphi = u,$$

где

$$\varphi = \varphi(t) = \theta\left(t\sqrt{\frac{I}{mgl}}\right), \qquad \beta = \frac{b}{\sqrt{\mathrm{Im}\,gl}}, \qquad u = u(t) = \frac{M\left(t\sqrt{\frac{I}{mgl}}\right)}{mgl}.$$

Нормализуем уравнение (2) заменой

$$\begin{cases} x_1 = \varphi, \\ x_2 = \dot{\varphi}. \end{cases}$$

В результате получим

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\beta x_2 - \sin x_1 + u. \end{cases} \tag{2}$$

Рассмотрим несколько постановок задач теории оптимального управления для динамического объекта (2) и в каждой из них на основании **теоремы 4** выпишем условия оптимальности в форме принципа максимума.

Задача 4. Ограничения на управление присутствуют: $u \in [-\gamma, \gamma]$.

Время движения фиксировано: $t \in [0, T]$.

Начальное положение задано: $x_1(0) = x_{10}$, $x_2(0) = x_{20}$.

Конечное положение свободно: $\begin{pmatrix} x_1(T) \\ x_2(T) \end{pmatrix} \in R^2$.

Функционал: $I[u(\cdot)] = (x_1(T))^2 + (x_2(T))^2 \to \min$.

Условия принципа максимума:

$$u^0 = \gamma sign[\psi_2],$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\beta x_2 - \sin x_1 + \gamma sign[\psi_2], \\ x_1(0) = x_{10}, \\ x_2(0) = x_{20}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{\psi}_1 = \psi_2 \cos x_1, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 + \beta\psi_2, \\ \psi_1(T) = -2x_1(T), \\ \psi_2(T) = -2x_2(T). \end{cases}$$

Задача 5. Ограничений на управление нет: $u \in R^1$.

Время движения фиксировано: $t \in [0, T]$.

Начальное положение задано: $x_1(0) = x_{10}$, $x_2(0) = x_{20}$.

Конечное положение задано: $x_1(T) = 0$, $x_2(T) = 0$.

Функционал: $I[u(\cdot)] = \int_0^T u^2(t)dt \to \min$.

Условия принципа максимума:

$$u^0 = \frac{1}{2}\psi_2,$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\beta x_2 - \sin x_1 + \frac{1}{2}\psi_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{\psi}_1 = \psi_2 \cos x_1, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 + \beta\psi_2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(0) = x_{10}, \\ x_2(0) = x_{20}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(T) = 0, \\ x_2(T) = 0. \end{cases}$$

Задача 6. Ограничения на управление присутствуют: $u \in [-\gamma, \gamma]$.

Время движения неограниченно: $t \in [0, +\infty)$.

Начальное положение задано: $x_1(0) = x_{10}$, $x_2(0) = x_{20}$.

Конечное положение задано: $x_1(T) = 0$, $x_2(T) = 0$.

Функционал: $I[u(\cdot)] = T = \int_0^T 1 \cdot dt \to \min$.

Условия принципа максимума:

$$u^0 = \gamma sign[\psi_2],$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\beta x_2 - \sin x_1 + \gamma sign[\psi_2], \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{\psi}_1 = \psi_2 \cos x_1, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 + \beta\psi_2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(0) = x_{10}, \\ x_2(0) = x_{20}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(T) = 0, \\ x_2(T) = 0. \end{cases}$$

$$\psi_0 \cdot 1 + \psi_2(T)u(T) = 0.$$

Задача 7. Ограничения на управление присутствуют: $u \in [-\gamma, \gamma]$.

Время движения неограничено: $t \in [0, +\infty)$.

Начальное положение задано: $x_1(0) = x_{10}$, $x_2(0) = x_{20}$.

Конечное положение удовлетворяет условию (**рис. 7**): $(x_1(T))^2 + (x_2(T))^2 = \varepsilon^2$.

Функционал: $I[u(\cdot)] = T = \int_0^T 1 \cdot dt \to \min$.

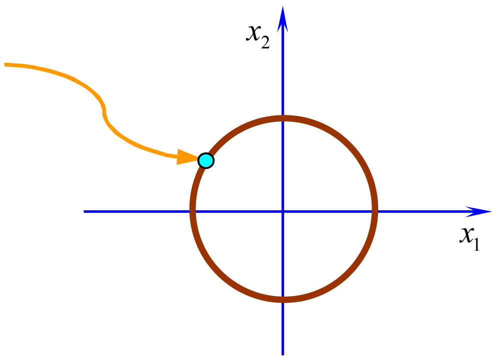

Рис. 7

Условия принципа максимума

$$u^0 = \gamma sign[\psi_2],$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\beta x_2 - \sin x_1 + \gamma sign[\psi_2], \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{\psi}_1 = \psi_2 \cos x_1, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 + \beta\psi_2, \end{cases}$$

$$x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20},$$

$$-1 + \psi_2(T)u(T) = 0.$$

$$\psi_1(T) = -2\nu_1^0 x_1(T), \quad \psi_2(T) = -2\nu_1^0 x_2(T), \qquad (x_1(T))^2 + (x_2(T))^2 = \varepsilon^2$$

$$-1 + \psi_1(T)x_2(T) + \psi_2(T)\left(-\beta x_2(T) - \sin x_1(T) + u^0(T)\right) = 0.$$

Задача 8. Ограничения на управление присутствуют: $u \in [-\gamma, \gamma]$.

Время движения неограничено: $t \in [0, +\infty)$.

Начальное положение задано: $x_1(0)=x_{10}$, $x_2(0)=x_{20}$.

Конечное положение удовлетворяет условию (**рис. 8**): $\left(x_1(T)\right)^2+\left(x_2(T)\right)^2=\varepsilon^2$.

Функционал: $I\left[u(\cdot)\right]=T=\int\limits_0^T 1\cdot dt \to \min$.

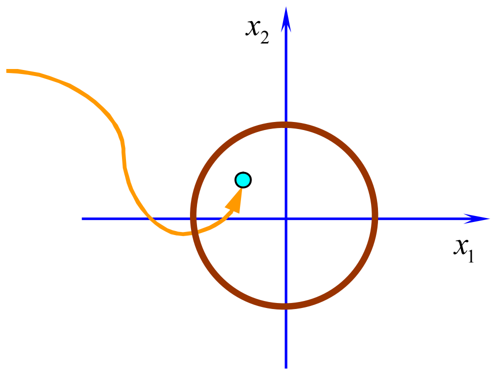

Рис. 8

Условия принципа максимума:

$$u^0=\gamma sign\left[\psi_2\right],$$

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2,\\ \dot{x}_2=-\beta x_2-\sin x_1+\gamma sign\left[\psi_2\right],\end{cases}\qquad \begin{cases}\dot{\psi}_1=\psi_2\cos x_1,\\ \dot{\psi}_2=-\psi_1+\beta\psi_2,\end{cases}$$

$$x_1(0)=x_{10},\quad x_2(0)=x_{20},$$

$$-1+\psi_2(T)u(T)=0.$$

$$\psi_1(T)=-2\nu_1^0 x_1(T),\quad \psi_2(T)=-2\nu_1^0 x_2(T),$$

$$\left(x_1(T)\right)^2+\left(x_2(T)\right)^2\le\varepsilon^2,\qquad \nu_1\left(\left(x_1(T)\right)^2+\left(x_2(T)\right)^2-\varepsilon^2\right)=0,\quad \nu_1\ge 0$$

$$-1+\psi_1(T)x_2(T)+\psi_2(T)\left(-\beta x_2(T)-\sin x_1(T)+u^0(T)\right)=0.$$

Для всех рассмотренных постановок задач объединённые системы основных и сопряженных уравнений являются замкнутыми, а число граничных условий достаточным для определения констант интегрирования. Этот факт подтверждает эффективность условий принципа максимума для определения оптимального управления.

4.6. О связи принципа максимума Л.С. Понтрягина с вариационным исчислением

Задачи вариационного исчисления можно рассматривать как частный случай задач теории оптимального управления, поэтому классические условия оптимальности в вариационном исчислении могут быть получены на базе формализма принципа максимума. Покажем это на примере задачи вариационного исчисления со свободным правым концом. Пусть требуется минимизировать функционал

$$I\left[x(\cdot)\right]=\int_{t_0}^{T} f\left(\tau,x(\tau),\dot{x}(\tau)\right)d\tau+\Phi\left(x(T)\right)$$

при условии, что

$$x(\cdot)\in C^1\left[t_0,T\right],\quad x(t_0)=x_0.$$

Здесь

$$f:\left[t_0,T\right]\times R^2\to R^1,\quad \Phi:R^1\to R^1,\quad f\in C^2\left(\left[t_0,T\right]\times R^2\right),\quad \Phi\in C^1\left(R^1\right).$$

Если функция $x^0(\cdot)$ доставляет сильный локальный минимум в этой задаче, то она в соответствии с необходимыми условиями оптимальности в вариационном исчислении должна удовлетворять:

1) дифференциальному уравнению Эйлера-Лагранжа

$$\frac{\partial}{\partial x}f\left(t,x^0(t),\dot{x}^0(t)\right)-\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}}f\left(t,x^0(t),\dot{x}^0(t)\right)=0,\quad t\in\left[t_0,T\right];$$

2) условию трансверсальности на правом конце

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}}f\left(T,x^0(T),\dot{x}^0(T)\right)=-\frac{\partial\Phi}{\partial x}\left(x^0(T)\right);$$

3) условию Лежандра

$$\frac{\partial^2}{\partial \dot{x}^2}f\left(t,x^0(t),\dot{x}^0(t)\right)\geq 0,\quad t\in\left[t_0,T\right];$$

4) условию Вейерштрасса

$$E\left(t,x^0(t),\dot{x}^0(t),v\right)=$$

$$=f\left(t,x^0(t),v\right)-f\left(t,x^0(t),\dot{x}^0(t)\right)-\left(v-\dot{x}^0(t)\right)\cdot\frac{\partial}{\partial \dot{x}}f\left(t,x^0(t),\dot{x}^0(t)\right)\geq 0,\quad t\in\left[t_0,T\right],\quad v\in R^1.$$

Запишем задачу вариационного исчисления в форме задачи теории оптимального управления

$$\dot{x}=u,\quad t\in\left[t_0,T\right],\quad x\left(t_0\right)=x_0,\quad u\in R^1, \tag{1}$$

$$I\left[u(\cdot)\right]=\int_{t_0}^{T} f\left(\tau, x(\tau), u(\tau)\right) d\tau+\Phi\left(x(T)\right) \tag{2}$$

и применим к ней формализм принципа максимума. Функция Л.С. Понтрягина здесь записывается в виде

$$H\left(t, x, u, \bar{\psi}\right)_{|\psi_0=-1}=-f\left(t, x, u\right)+\psi u. \tag{3}$$

Из условия

$$\frac{\partial}{\partial u} H\left(t, x, u, \bar{\psi}\right)_{|\psi_0=-1}=0 \tag{4}$$

вытекает, что

$$\psi^0-\frac{\partial}{\partial u} f\left(t, x^0, u^0\right)=0 \quad \Rightarrow \quad \psi^0=\frac{\partial}{\partial u} f\left(t, x^0, u^0\right). \tag{5}$$

Тогда

$$\dot{\psi}^0(t)=\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial u} f\left(t, x^0(t), u^0(t)\right), \quad t \in\left[t_0, T\right]. \tag{6}$$

С другой стороны,

$$\dot{\psi}^0(t)=\frac{\partial}{\partial x} f\left(t, x^0(t), u^0(t)\right), \quad \dot{\psi}^0(t)=-\frac{\partial}{\partial x} \overbrace{H\left(t, x^0(t), u^0(t), \bar{\psi}^0(t)\right)_{|\psi_0=-1}}^{-f(t,x,u)+\psi u}.$$

Из соотношений (5) и (6) заключаем, что

$$\frac{\partial}{\partial x} f\left(t, x^0(t), \overbrace{u^0(t)}^{\dot{x}^0}\right)=\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial u} f\left(t, x^0(t), \overbrace{u^0(t)}^{\dot{x}^0}\right), \quad t \in\left[t_0, T\right].$$

Отсюда и из (1) следует справедливость условия 1).

Из граничных условий принципа максимума вытекает, что

$$\overbrace{\psi^0(T)}^{(5):\frac{\partial}{\partial u} f\left(t, x, u^0\right)}=-\frac{\partial}{\partial x} \Phi\left(x^0(T)\right) \Rightarrow \frac{\partial}{\underset{\dot{x}}{\partial u}} f\left(t, x, \overbrace{u^0}^{(1):\dot{x}^0}\right)=-\frac{\partial}{\partial x} \Phi\left(x^0(T)\right).$$

и условие 2) имеет место.

Равенство

$$H\left(t, x^0(t), u^0(t), \bar{\psi}^0(t)\right)_{|\psi_0=-1}=\max_{u \in R^1} H\left(t, x^0(t), u, \bar{\psi}^0(t)\right)_{|\psi_0=-1}, \quad t \in\left[t_0, T\right] \tag{7}$$

влечет за собой неравенство

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} \overbrace{H\left(t, x^0(t), u^0(t), \bar{\psi}^0(t)\right)_{|\psi_0=-1}}^{(3):-f\left(t, x^0, u^0\right)+\psi^0 u^0} \leq 0, \quad t \in\left[t_0, T\right] \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} f\left(t, x^0(t), \overbrace{u^0(t)}^{\dot{x}^0}\right) \geq 0, \quad t \in [t_0, T]$$

и условие 3) имеет место.

Наконец,

$$0 \overset{(7)}{\leq} \overbrace{H\left(t, x^0(t), u^0(t), \bar{\psi}^0(t)\right)_{|\psi_0=-1}}^{(3):-f\left(t,x^0(t),u^0(t)\right)+\psi^0(t)u^0(t)} - \overbrace{H\left(t, x^0(t), v, \bar{\psi}^0(t)\right)_{|\psi_0=-1}}^{(3):-f\left(t,x^0(t),v\right)+\psi^0(t)v\,(4)} =$$

$$= -f\left(t, x^0(t), u^0(t)\right) + \psi^0(t) u^0(t) + f\left(t, x^0(t), v\right) - \psi^0(t) v =$$

$$= f\left(t, x^0(t), v\right) - f\left(t, x^0(t), u^0(t)\right) + \overbrace{\psi^0(t)}^{\frac{\partial}{\partial u} f\left(t, x^0, u^0\right)\ (5)} \left(u^0(t) - v\right) =$$

$$= f\left(t, x^0(t), v\right) - f\left(t, x^0(t), \overbrace{u^0(t)}^{\dot{x}^0(t)}\right) + \frac{\partial}{\partial u} f\left(t, x^0(t), \overbrace{u^0(t)}^{\dot{x}^0(t)}\right)\left(\overbrace{u^0(t)}^{\dot{x}^0(t)} - v\right) =$$

$$= f\left(t, x^0(t), v\right) - f\left(t, x^0(t), \dot{x}^0(t)\right) + \frac{\partial}{\partial \dot{x}} f\left(t, x^0(t), \dot{x}^0(t)\right)\left(\dot{x}^0(t) - v\right), \quad t \in [t_0, T], \quad v \in R^1,$$

что и означает выполнение условия 4).

Пример 5. Для задачи вариационного исчисления

$$I[x(\cdot)] = \int_0^1 \left(\dot{x}^2 - x\right) d\tau + x^2(1) \to \min, \quad x(\cdot) \in C^1[0,1], \quad x(0) = \frac{3}{4} \tag{8}$$

найти экстремаль, записать эту задачу в виде задачи теории оптимального управления и убедиться в том, что для нее движение, удовлетворяющее условиям принципа максимума Л. С. Понтрягина, совпадает с найденной экстремалью.

Решение. Дифференциальное уравнение Эйлера-Лагранжа и его общее решение

$$-\frac{d}{dt}(2\dot{x}) - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{4}t^2 + c_1 t + c_2.$$

Для определения констант интегрирования c_1, c_2 выпишем начальные условия на левом конце

$$\overbrace{x(0)}^{\left(-\frac{1}{4}t^2 + c_1 t + c_2\right)_{t=0}} = \overbrace{x_0}^{=\frac{3}{4}} \quad \Rightarrow \quad c_2 = \frac{3}{4}$$

и условия трансверсальности на правом конце

$$\overbrace{f_{\dot{x}}\left[t_2,x^0\left(t_2\right),\dot{x}^0\left(t_2\right)\right]}^{\frac{\partial}{\partial\dot{x}}\left(\dot{x}^2-x\right)\Big|_{x=x(1)}}=-\overbrace{\frac{\partial}{\partial x}\Phi\left(x\left(t_2\right)\right)}^{\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\right)\Big|_{x=x(1)}}\;\Rightarrow$$

$$2\overbrace{\dot{x}^0(1)}^{\left(-\frac{1}{2}t+c_1\right)_{t=1}}=-2\overbrace{x^0(1)}^{\left(-\frac{1}{4}t^2+c_1t+c_2\right)_{t=1}}\;\Rightarrow\;-\frac{1}{2}+c_1=\frac{1}{4}-c_1-c_2.$$

$$\begin{cases}c_2=\dfrac{3}{4},\\[2mm] -\dfrac{1}{2}+c_1=\dfrac{1}{4}-c_1-c_2,\end{cases}\;\Rightarrow\; c_1=0,\quad c_2=\frac{3}{4}.$$

$$x^0(t)=-\frac{1}{4}t^2+\overbrace{c_1}^{=0}t+\overbrace{c_2}^{\frac{3}{4}}=\frac{3-t^2}{4},\quad t\in[0,1].$$

Запишем задачу вариационного исчисления в форме задачи теории оптимального управления

$$\dot{x}=u,\quad t\in[0,1],\quad u\in R^1,\quad x(0)=\frac{3}{4},$$

$$\int_0^1\left(u^2-x\right)d\tau+x^2(1)\to\min.$$

Функция Л.С. Понтрягина

$$H=-f_0+\psi u\;\Rightarrow\; H(t,x,u,\psi)=-\left(u^2-x\right)+\psi u.$$

Шаблон оптимального управления определяем из условия

$$\frac{\partial H}{\partial u}=0\;\Rightarrow\; U^0(t,x,\psi)=\frac{1}{2}\psi.$$

Система дифференциальных уравнений, состоящая из основного уравнения, в котором принято $u=U(t,x,\psi)$, и сопряженного, имеет вид

$$\dot{x}=\overbrace{U(t,x,\psi)}^{\frac{1}{2}\psi},\quad \dot{\psi}=-\overbrace{\frac{\partial H}{\partial x}}^{1}.$$

Тогда

$$-\frac{d}{dt}(2\dot{x})-1=0\;\Rightarrow\; x(t)=-\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{2}c_1t+c_2.$$

$$\dot{x}=\frac{1}{2}\psi,\quad \dot{\psi}=-1\;\Rightarrow\;\frac{d}{dt}\dot{x}=-\frac{1}{2}\;\Rightarrow\;-\frac{d}{dt}(2\dot{x})-1=0.$$

Полученное дифференциальное уравнение совпадает с уравнением Эйлера-Лагранжа при решении оптимизационной задачи методами вариационного исчисления. Их общие решения совпадают между собой. Начальные условия на левом конце траектории в формализме принципа максимума те же, что и для вариационного исчисления

$$\overbrace{x(0)}^{\left(-\frac{1}{4}t^2+c_1t+c_2\right)_{t=0}} = \overbrace{x_0}^{=\frac{3}{4}} \quad\Rightarrow\quad c_2=\frac{3}{4}.$$

Для вывода условий трансверсальности на правом конце находим

$$\psi(t)=-t+c_1 .$$

Тогда

$$\psi^0(1)=-\overbrace{\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x(1))}^{\frac{\partial}{\partial x}(x^2)\Big|_{x=x(1)}} \quad\Rightarrow\quad \overbrace{\psi(1)}^{(-t+c_1)_{t=1}}=-2\overbrace{x(1)}^{\left(-\frac{1}{4}t^2+c_1t+c_2\right)_{t=1}} \quad\Rightarrow\quad -1+c_1=-2\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}c_1+c_2\right) \quad\Rightarrow$$

$$\begin{cases} c_2=\dfrac{3}{4}, \\ -\dfrac{1}{2}+c_1=\dfrac{1}{4}-c_1-c_2. \end{cases}$$

Условия для определения констант интегрирования совпали с соответствующими условиями из вариационного исчисления. Следовательно, экстремали, полученные методом вариационного исчисления и с помощью формализма принципа максимума, одни и те же. ►

4.7. Индивидуальное задание 7 «Принцип максимума в вариационном исчислении»

Найти экстремаль в задаче Больца вариационного исчисления, записать эту задачу в виде задачи теории оптимального управления и убедиться в том, что для нее движение, удовлетворяющее условиям принципа максимума Л. С. Понтрягина, совпадает с найденной экстремалью.

Пример выполнения индивидуального задания 7

Задача Больца:

$$I[x(\cdot)]=\int_0^{\pi}\left(\dot{x}^2+ax^2+bxt^2\right)dt+\alpha x(\pi)+\beta x^2(\pi), \quad x(0)=0,$$

$$a=3, \quad b=2, \quad \alpha=3, \quad \beta=2 .$$

Для принятых числовых данных задача Больца вариационного исчисления принимает вид

$$I\left[x(\cdot)\right]=\int_0^{\pi}\left(\dot{x}^2+3x^2+2xt^2\right)dt+3x(\pi)+2x^2(\pi),\quad x(0)=0.$$

Решение методами вариационного исчисления. Уравнение Эйлера-Лагранжа

$$\frac{\partial}{\partial x}\overbrace{f\left(t,x^0(t),\dot{x}^0(t)\right)}^{\dot{x}^2+3x^2+2xt^2}-\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\overbrace{f\left(t,x^0(t),\dot{x}^0(t)\right)}^{\dot{x}^2+3x^2+2xt^2}=0\quad\Rightarrow$$

$$6x+2t^2-\frac{d}{dt}(2\dot{x})=0\quad\Rightarrow\quad 6x+2t^2-2\ddot{x}=0\quad\Rightarrow\quad \ddot{x}-3x-t^2=0.$$

Условия трансверсальности

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\overbrace{f\left(T,x^0(T),\dot{x}^0(T)\right)}^{\dot{x}^2+3x^2+2xt^2}=-\frac{\partial\overbrace{\Phi}^{3x(\pi)+2x^2(\pi)}}{\partial x}\left(x^0(T)\right)\quad\Rightarrow\quad 2\dot{x}(\pi)=-\left(3+4x(\pi)\right).$$

Решение на базе формализма принципа максимума Л.С. Понтрягина. Приведем задачу вариационного исчисления к форме задачи теории оптимального управления

$$\dot{x}=u,$$

$$I\left[u(\cdot)\right]=\int_0^{\pi}\left(u^2+3x^2+2xt^2\right)dt+3x(\pi)+2x^2(\pi),\quad x(0)=0.$$

Функция Л.С. Понтрягина

$$H=-\left(u^2+3x^2+2xt^2\right)+\psi u\ .$$

Шаблон для оптимального управления

$$\frac{\partial H}{\partial u}=0\quad\Rightarrow\quad -2u+\psi=0\quad\Rightarrow\quad u^0=\frac{\psi}{2}\ .$$

Сопряженное уравнение

$$\dot{\psi}=-\frac{\partial\overbrace{H}^{-\left(u^2+3x^2+2xt^2\right)+\psi u}}{\partial x}\quad\Rightarrow\quad \dot{\psi}=6x+2t^2.$$

Условия трансверсальности

$$\psi(T)=-\frac{\partial\overbrace{\Phi\left(x(T)\right)}^{3x(\pi)+2x^2(\pi)}}{\partial x}\quad\Rightarrow\quad \psi(\pi)=-3-4x(\pi).$$

Выпишем условия оптимальности, полученные в каждом из приведенных подходов (см. **табл.2**).

Таблица 2

Условия из вариационного исчисления	Условия из принципа максимума
$\ddot{x}-3x-t^2=0,$ $x(0)=0,$ $2\dot{x}(\pi)=-(3+4x(\pi))$	$\dot{x}=\dfrac{\psi}{2},$ $\dot{\psi}=6x+2t^2,$ $x(0)=0,$ $\psi(\pi)=-3-4x(\pi)$

Покажем эквивалентность приведенных условий.

Дифференциальное уравнение

$$\begin{cases}\dot{x}=\dfrac{\psi}{2},\\ \dot{\psi}=6x-2t^2,\end{cases}\qquad \ddot{x}=\frac{\overbrace{\dot{\psi}}^{6x-2t^2}}{2}=\frac{6x+2t^2}{2}\quad\Rightarrow\quad \overbrace{\ddot{x}=3x+t^2}^{\text{Уравнение Эйлера–Лагранжа}}\quad .$$

Краевые условия

$$\dot{x}=\frac{\psi}{2}\quad\Rightarrow\quad 2\dot{x}=\psi\quad\Rightarrow\quad \overbrace{\psi(\pi)}^{-3-4x(\pi)}=2\dot{x}(\pi)\quad\Rightarrow\quad \overbrace{-3-4x(\pi)=2\dot{x}(\pi)}^{\text{условие трансверсальности}},$$

$$x(0)=0\quad\Rightarrow\quad x(0)=0\,.$$

Краевые задачи совпали. Приведем их решение.

$$x(t)=\Big(e^{-\sqrt{3}t}\Big[4\big(-2+\sqrt{3}\big)e^{2\sqrt{3}\pi}+4\big(2+\sqrt{3}\big)e^{2\sqrt{3}t}+\big(19+12\pi-12\pi^2\big)e^{\sqrt{3}(\pi+2t)}+$$
$$+\big(-19-12\pi+12\pi^2\big)e^{\sqrt{3}\pi}-2\big(2+\sqrt{3}\big)\big(2+3t^2\big)e^{\sqrt{3}t}-2\big(-2+\sqrt{3}\big)\big(2+3t^2\big)e^{\sqrt{3}(2\pi+t)}\Big]\Big)/$$
$$/\Big[18\Big(2+\sqrt{3}+\big(-2+\sqrt{3}\big)e^{2\sqrt{3}\pi}\Big)\Big].$$

►

Задания для самостоятельного решения

Задача Больца для **вариантов 1–5** (см. **табл.3**)

$$I[x(\cdot)]=\int_0^{\pi}\big(\dot{x}^2+ax^2+bx\sin t\big)dt+\alpha x(\pi)+\beta x^2(\pi),\quad x(0)=0\,.$$

Задача Больца для **вариантов 6–10** (см. **табл.4**)

$$I[x(\cdot)]=\int_0^{\pi}\big(\dot{x}^2+ax^2+bx\cos t\big)dt+\alpha x(\pi)+\beta x^2(\pi),\quad x(0)=0\,.$$

Таблица 3

№ варианта	Численные данные			
	a	b	α	β
1	2	– 5	– 5	1
2	1	3	– 4	1
3	1	5	– 2	4
4	2	– 2	1	3
5	4	5	– 3	2

Таблица 4

№ варианта	Численные данные			
	a	b	α	β
6	3	4	4	2
7	1	– 1	– 1	1
8	1	1	4	3
9	4	4	– 1	3
10	3	4	5	3

Задача Больца для **вариантов 11–15** (см. **табл.5**)

$$I\left[x(\cdot)\right]=\int_0^{\pi}\left(\dot{x}^2+ax^2+bxt^2\right)dt+\alpha x(\pi)+\beta x^2(\pi), \quad x(0)=0.$$

Таблица 5

№ варианта	Численные данные			
	a	b	α	β
11	3	– 3	5	4
12	4	4	5	1
13	2	4	1	4
14	2	– 5	2	3
15	1	– 4	3	3

Раздел 5

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ

5.1. Достаточные условия оптимальности для задач с фиксированным временем

В задаче теории оптимального управления положим

$$\theta_0 = \{t_0\}, \quad \theta_1 = \{T\}, \quad \Phi(t_0, T, x_0, x_T) = \Phi_0(x_0) + \Phi_1(x_T), \quad x_0 \in S_0, \quad x_T \in S_1$$

и тем самым сведем ее к следующей**.**

Задача 1. *Минимизировать функционал*

$$I\left[x_0, u(\cdot)\right] = \int_{t_0}^{T} f_0(\tau, x(\tau), u(\tau))\,d\tau + \Phi_0(x_0) + \Phi_1(x_T)$$

при условиях

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in [t_0, T], \quad x(t) \in R^n, \quad u(t) \in P \subset R^r,$$

$$x_0 \in S_0, \quad x_T \in S_1, \quad x_0 = x(t_0), \quad x_T = x(T). \tag{1}$$

Пару $(u(\cdot), x(\cdot))$ будем называть допустимой, если она удовлетворяет условиям (1). Множество всех допустимых пар обозначим символом D. Для всех $t \in [t_0, T]$ определим множество (см. **рис. 1**)

$$D_t = \left\{(u, x) \middle| u = u(t),\, x = x(t),\, (u(\cdot), x(\cdot)) \in D\right\} \subset R^{r+n}.$$

Пусть $K : [t_0, T] \times R^n \to R^1$ – непрерывно дифференцируемая по совокупности своих аргументов функция. Полагаем

$$R(t, x, u) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x} K(t, x),\, f(t, x, u) \right\rangle + \frac{\partial}{\partial t} K(t, x) + f_0(t, x, u),$$

$$r_0(x) = K(t_0, x) + \Phi_0(x), \quad r_1(x) = -K(T, x) + \Phi_1(x), \quad t \in [t_0, T], \quad x \in R^n. \tag{2}$$

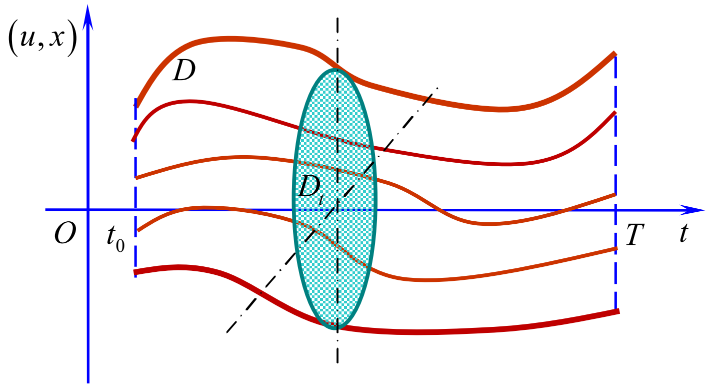

Рис. 1

Лемма 1. *Пусть* $x_0 \in S_0$ *и* $(u(\cdot),x(\cdot)) \in D,\ x(t_0)=x_0$. *Тогда*

$$I\left[x_0,u(\cdot)\right]=\int_{t_0}^{T} R\left(\tau,x(\tau),u(\tau)\right)d\tau+r_0\left(x(t_0)\right)+r_1\left(x(T)\right). \qquad (3)$$

Доказательство. Всюду, за исключением, быть может, конечного числа точек, на интервале времени $[t_0,T]$ имеет место равенство

$$\frac{d}{dt}K(t,x(t))=\left\langle \frac{\partial}{\partial x}K(t,x(t)),\ \overset{f(t,x(t),u(t))}{\overbrace{\dot{x}}} \right\rangle+\frac{\partial}{\partial t}K(t,x(t))=$$

$$=\overbrace{\left\langle \frac{\partial}{\partial x}K(t,x(t)),\ f(t,x(t),u(t)) \right\rangle+\frac{\partial}{\partial t}K(t,x(t))+f_0(t,x(t),u(t))}^{R(t,x(t),u(t))}-f_0(t,x(t),u(t)) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}K(t,x(t))=R(t,x(t),u(t))-f_0(t,x(t),u(t)), \qquad t\in[t_0,T]. \qquad (4)$$

Проинтегрируем равенство (4) на интервале $[t_0,T]$. В результате получим

$$\overbrace{K(T,x(T))}^{(2)\Rightarrow\Phi_1(x(T))-r_1(x(T))} - \overbrace{K(t_0,x(t_0))}^{(2)\Rightarrow r_0(x(t_0))-\Phi_0(x(t_0))} = \int_{t_0}^{T} R(\tau,x(\tau),u(\tau))d\tau-\int_{t_0}^{T} f_0(\tau,x(\tau),u(\tau))d\tau \quad \Rightarrow$$

$$\Phi_1(x(T))-r_1(x(T))-r_0(x(t_0))+\Phi_0(x(t_0))=$$

$$=\int_{t_0}^{T} R(\tau,x(\tau),u(\tau))d\tau-\int_{t_0}^{T} f_0(\tau,x(\tau),u(\tau))d\tau \quad \Rightarrow$$

$$\overbrace{\int_{t_0}^{T} f_0(\tau,x(\tau),u(\tau))d\tau+\Phi_0(x(t_0))+\Phi_1(x(T))}^{=I[x_0,u(\cdot)]}=$$

$$=\int_{t_0}^{T} R(\tau,x(\tau),u(\tau))d\tau+r_0(x(T))+r_1(x(t_0)) \quad \Rightarrow$$

$$I\left[x_0,u(\cdot)\right]=\int_{t_0}^{T}R\left(\tau,x(\tau),u(\tau)\right)d\tau+r_0\left(x(t_0)\right)+r_1\left(x(T)\right).$$

Лемма доказана. ■

Введем обозначения

$$R_{\min}(t)=\inf_{(u,x)\in D_t}R(t,x,u),\quad t\in\left[t_0,T\right],\qquad r_{0\min}=\inf_{x\in S_0}r_0(x),\quad r_{1\min}=\inf_{x\in S_1}r_1(x).$$

Пусть

$$\left(u(\cdot),x(\cdot)\right),\ \left(u^*(\cdot),x^*(\cdot)\right)\in D,\qquad x_0,\ x_0^*\in S_0,\quad x(t_0)=x_0,\ x^*(t_0)=x_0^*.$$

В силу **леммы 1** из формулы (3) выводим

$$I\left[u^*(\cdot),x_0^*\right]-I\left[u(\cdot),x_0\right]=\int_{t_0}^{T}R\left(\tau,x^*(\tau),u^*(\tau)\right)d\tau-\int_{t_0}^{T}\overbrace{R\left(\tau,x(\tau),u(\tau)\right)}^{\ge\inf\limits_{(u,x)\in D_t}R(\tau,x,u)}d\tau+$$

$$r_0\left(x^*(t_0)\right)-\overbrace{r_0\left(x(t_0)\right)}^{\ge\inf\limits_{x\in S_0}r_0(x)}+r_1\left(x^*(T)\right)-\overbrace{r_1\left(x(T)\right)}^{\ge\inf\limits_{x\in S_1}r_1(x)}\le$$

$$\le\int_{t_0}^{T}\left[R\left(\tau,x^*(\tau),u^*(\tau)\right)-\overbrace{\inf_{(u,x)\in D_t}R(\tau,x,u)}^{=R_{\min}(\tau)}\right]d\tau+r_0\left(x^*(T)\right)-\overbrace{\inf_{x\in S_0}r_0(x)}^{=r_{0\min}}+r_1\left(x^*(T)\right)-\overbrace{\inf_{x\in S_1}r_1(x)}^{=r_{1\min}}=$$

$$=\int_{t_0}^{T}\left[R\left(\tau,x^*(\tau),u^*(\tau)\right)-R_{\min}(\tau)\right]d\tau+r_0\left(x^*(t_0)\right)-r_{0\min}+r_1\left(x^*(T)\right)-r_{1\min}.\tag{5}$$

Определение 1. *Функцию* $K:\left[t_0,T\right]\times R^n\to R^1$ *будем называть функцией Кротова, соответствующей паре* $\left(u^*(\cdot),x^*(\cdot)\right)\in D$*, если она непрерывно дифференцируема по совокупности своих аргументов и для нее выполняются равенства*

$$R\left(t,x^*(t),u^*(t)\right)=R_{\min}(t),\quad t\in\left[t_0,T\right],$$

$$r_0\left(x^*(t_0)\right)=r_{0\min},\ r_1\left(x^*(T)\right)=r_{1\min}.\tag{7}$$

Теорема 1. *Для оптимальности пары* $\left(u^*(\cdot),x^*(\cdot)\right)\in D$ *достаточно существования для нее функции Кротова.*

Доказательство. При выполнении условий теоремы из формулы (5) вытекает

$$I\left[u^*(\cdot),x_0^*\right]-I\left[u(\cdot),x_0\right]\le\int_{t_0}^{T}\left[\overbrace{R\left(\tau,x^*(\tau),u^*(\tau)\right)}^{=R_{\min}(\tau)}-R_{\min}(\tau)\right]d\tau+$$

$$+\overbrace{r_0\left(x^*(T)\right)}^{=r_{0\min}}-r_{0\min}+\overbrace{r_1\left(x^*(T)\right)}^{=r_{1\min}}-r_{1\min}\le 0.$$

Неравенство

$$I\left[u^*(\cdot),x_0^*\right]-I\left[u(\cdot),x_0\right]\le 0,$$

справедливое для всякой пары $\left(u(\cdot),x(\cdot)\right)\in D$, что и означает оптимальность пары $\left(u^*(\cdot),x^*(\cdot)\right)$. Теорема доказана. ■

Пример 1. Минимизировать функционал

$$I\left[u(\cdot)\right]=\int_0^1\left(x^2(\tau)-u(\tau)\right)d\tau$$

при условиях

$$\dot{x}=u,\quad t\in[0,1],\quad u\in\left\{u\,\middle|\,|u|\le 1\right\},\quad x(0)=x(1)=0,\quad S_0=S_1=\{0\}.$$

Решение. Очевидно, что пара

$$\left(u^*(\cdot),x^*(\cdot)\right),\quad u^*(t)=0,\quad x^*(t)=0,\quad t\in[0,1]$$

допустимая. Покажем, что функция $K:[0,1]\times R^1\to R^1$, определенная формулой

$$K(t,x)=x,\quad t\in[0,1],\quad x\in R^1,$$

является для этой пары функцией Кротова. Действительно,

$$R(t,x,u)=\frac{\partial}{\partial x}\overbrace{K(t,x)}^{x}\cdot\overbrace{f(t,x,u)}^{u}+\frac{\partial}{\partial t}\overbrace{K(t,x)}^{x}+\overbrace{f_0(t,x,u)}^{x^2-u}=$$

$$=\overbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x}x\right)}^{=1}\cdot u+\overbrace{\frac{\partial}{\partial t}}^{=0}x+x^2-u=x^2.$$

Отсюда

$$R_{\min}(t)=\inf_{(u,x)\in D_t}\overbrace{R(t,x,u)}^{=x^2}=\inf_{(u,x)\in D_t}x^2=x^2\Big|_{(0,0)\in D_t}=0,\quad t\in[0,1].$$

Легко видеть, что для пары

$$\left(x^*(t),u^*(t)\right)\equiv(0,0),\quad t\in[0,1]$$

выполнено

$$\overbrace{R\left(t,x^*(t),u^*(t)\right)}^{=\left(x^*(t)\right)^2}=\left(x^*(t)\right)^2\Big|_{x^*(t)\equiv 0}=0=\overbrace{R_{\min}(t)}^{\equiv 0},\quad t\in[t_0,T].$$

Проверять равенства

$$r_{0\min}=r_0(x^*(0)),\qquad r_{1\min}=r_1(x^*(0))$$

нет необходимости, т.к. множества S_0, S_1 являются одноэлементными. Таким образом, функция

$$K(t,x)=x,\quad t\in[0,1],\quad x\in R^1$$

является функцией Кротова для пары

$$\left(x^*(t),u^*(t)\right)\equiv(0,0),\quad t\in[0,1]$$

и поэтому в силу **теоремы 1** эта пара является оптимальной. ►

В случае, когда в **задаче 1** требуется максимизировать критерий качества, в определении функции Кротова, должны выполняться равенства

1) $R\left(t,x^*(t),u^*(t)\right)=\max\limits_{(x,u\in D_t)}R(t,x,u)=R_{\max}(t),\quad t\in[t_0,T],$

2) $r_0\left(x^*(t_0)\right)=\max\limits_{x\in S_0}r(x)=r_{0\max},$

3) $r_1\left(x^*(T)\right)=\max\limits_{x\in S_1}r_1(x)=r_{1\max}.$

Пример 2. Максимизировать функционал

$$I[u(\cdot)]=\int_0^4\left(x^2u-2\left(8x-x^2\right)\right)dt\to\min$$

при условиях

$$\dot{x}=2x(1-u),\quad t\in[0,4],\quad u\in P=[0,1],\quad x(0)=1,\quad x(4)=5.$$

Решение. Полагаем

$$K(t,x)=-\frac{x^2}{4}.$$

Построим допустимую пару $\left(u^0(\cdot),x^0(\cdot)\right)$, для которой функция K будет являться функцией Кротова. В силу $x(0)=1,$ $x(4)=5$ достаточно выполнить лишь требование 1). Имеем

$$R(t,x,u)=\overbrace{\frac{\partial K}{\partial t}(t,x)}^{0}+\overbrace{\frac{\partial K}{\partial x}(t,x)}^{-\frac{1}{2}x}\overbrace{f(t,x,u)}^{2x(1-u)}+\overbrace{f_0(t,x,u)}^{-x^2u+2\left(8x-x^2\right)}=$$

$$=-\frac{1}{2}x\cdot 2x(1-u)+\left(-x^2u+2\left(8x-x^2\right)\right)=-3x^2+16x\quad\Rightarrow$$

$$R(t,x,u)\equiv-3x^2+16x.$$

Построим график функции $R(x)=-3x^2+16x$ и найдем ее максимум (см. **рис. 2**)

$$R_{\max}=\max_x\left(-3x^2+16x\right)=\frac{64}{3},\quad x^*=\frac{8}{3}.$$

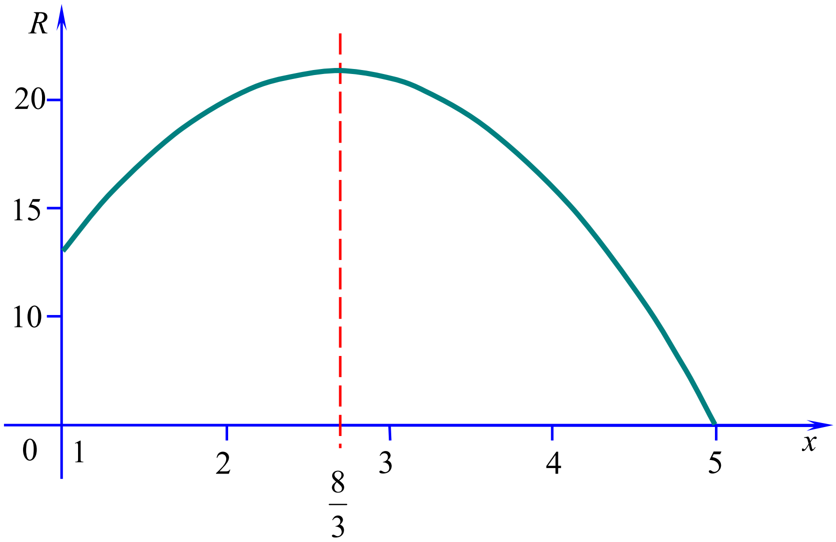

Рис. 2

Пара, на которой функция R достигает максимального значения в любой момент времени из промежутка своего возрастания, необходимо должна максимизировать полную производную функции R, взятую в силу дифференциального уравнения движения вдоль этой пары (**рис. 3**).

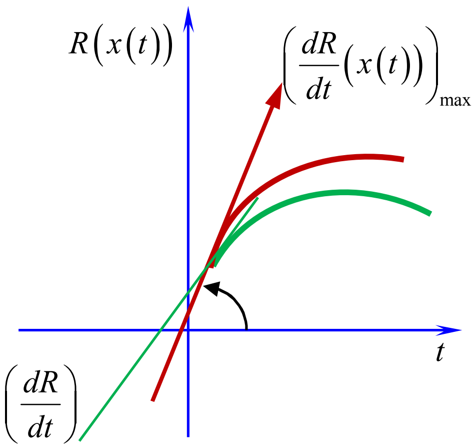

Рис. 3

Вычислим производную функции $R(x)$ в силу уравнения движения

$$\frac{dR}{dt}=\overbrace{\frac{\partial R}{\partial x}}^{-6x+16}\cdot\overbrace{\dot{x}}^{2x(1-u)}=(-6x+16)2x(1-u),\quad t\in[0,4].$$

В начальный момент $x(0)=1$. Тогда $(-6x+16)2x\big|_{x=1}>0$ и максимальное значение производной будет достигаться при $u=0$. Такое управление будет оставлять положительным решение дифференциального уравнения

$$\dot{x} = 2x(1-u), \quad x(0) = 1,$$

что обеспечивает положительность множителя $(-6x+16)2x$ в выражении для производной в начале процесса управления. Найдем решение дифференциального уравнения движения с управлением $u(t)=0$. Имеем

$$\dot{x} = 2x\left(1-\overset{=0}{\overbrace{u}}\right) \;\Rightarrow\; \dot{x} = 2x, \quad x(0)=1 \;\Rightarrow\; x(t) = e^{2t} > 0.$$

Множитель $(-6x(t)+16)$ будет оставаться положительным вплоть до момента времени t_1, когда впервые будет $x(t_1)=\frac{8}{3}$. Это точка, в которой функция $R(x)$ достигает абсолютного максимума. Удержать движение в точке $x_1=\frac{8}{3}$ можно, если полагать

$$u=1 \;\Rightarrow\; \dot{x} = 2x\left(1-\overset{=1}{\overbrace{u}}\right) \;\Rightarrow\; \dot{x}=0.$$

Однако оставаться в точке $x_1=\frac{8}{3}$ вплоть до момента $T=4$ движение не может, так как

$$x(4) = 5 > \frac{8}{3}.$$

Начиная с некоторого момента времени t_2 функция $x(t)$ будет возрастать, а функция $R(x(t))$ – убывать. Пара, на которой функция R достигает максимального значения в любой момент времени из промежутка своего убывания, необходимо должна минимизировать полную производную, взятую в силу дифференциального уравнения движения вдоль этой пары (**рис. 4**).

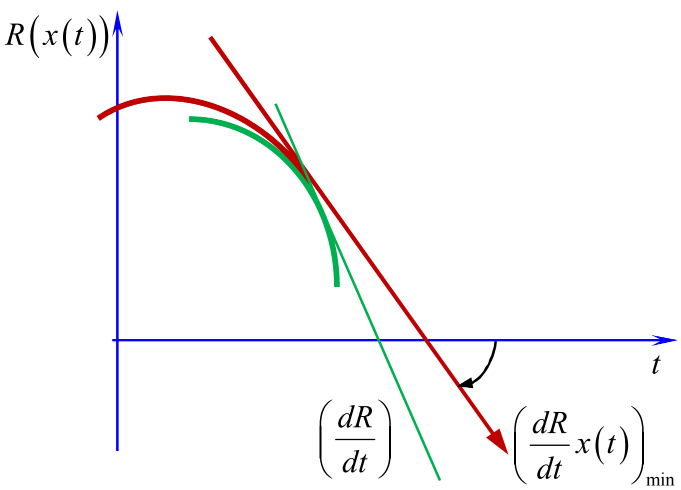

Рис. 4

После момента t_2 будет

$$x(t) > \frac{8}{3} \quad \Rightarrow \quad \overbrace{(-6x+16)}^{<0}\,2\overset{>0}{x} < 0.$$

Минимум производной

$$\frac{dR}{dt} = \overbrace{(-6x+16)2x}^{<0}(1-u), \quad t \in [0,4]$$

достигается при $u = 0$. Найдем движение, отвечающее этому управлению

$$\dot{x} = 2x\left(1 - \overbrace{u}^{=0}\right) \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = 2x, \quad x(t_2) = \frac{8}{3} \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{8}{3}e^{2(t-t_2)}.$$

Определим моменты времени t_1 и t_2

$$t_1: \quad x(t_1) = \frac{8}{3} \quad \Rightarrow \quad e^{2t_1} = \frac{8}{3} \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{8}{3}\right) = 0.490415,$$

$$t_2: \quad x(4) = 5 \quad \Rightarrow \quad \frac{8}{3}e^{2(4-t_2)} = 5 \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{1}{2}\left(8 - \ln\frac{15}{8}\right) = 3.6857\,.$$

Полагаем

$$x^0(t) = \begin{cases} e^{2t}, & t \in [0, t_1], \\ \dfrac{8}{3}, & t \in (t_1, t_2], \\ \dfrac{8}{3}e^{2(t-t_2)}, & t \in (t_2, 4]. \end{cases}$$

Полученное движение можно осуществить посредством управления

$$u^0(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, t_1], \\ 1, & t \in (t_1, t_2], \\ 0, & t \in (t_2, 4]. \end{cases}$$

Из построения движения $x^0(\cdot)$ следует, что функция

$$K(t,x) = -\frac{x^2}{4}$$

является функцией Кротова для допустимой пары $\left(u^0(\cdot), x^0(\cdot)\right)$. Тогда эта пара в силу **теоремы 1** будет оптимальной. В заключение вычислим оптимальное значение функционала

$$I_{\max} = I\left[u^0(\cdot)\right] = \int_0^4 \left(\left(x^0(t)\right)^2 u^0(t) + 2\left(\left(x^0(t)\right)^2 - 8x^0(t)\right)\right)dt = 78.4382\,. \ ►$$

5.2. Принцип максимума Л.С. Понтрягина как достаточные условия оптимальности

Рассмотрим частный случай задачи теории оптимального управления, считая, что в ней дифференциальные уравнения движения имеют вид

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u,$$

здесь $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ – матрицы размера $n \times n$ и $n \times r$ соответственно, элементы которых суть непрерывные функции времени. Принимается, что множества S_0 и S_1 являются одноэлементными, подынтегральная функция f_0 в минимизируемом функционале имеет вид

$$f_0(t,x,u) = g(t,x) + h(t,u), \quad t \in [t_0, T], \quad x \in R^n, \quad u \in R^r,$$

где функции

$$g : [t_0, T] \times R^n \to R^1, \qquad h : [t_0, T] \times R^r \to R^1,$$

дифференцируемые по совокупности переменных, а функция g – выпукла по x. Для выпуклой функции g минимум имеет место тогда и только тогда, когда

$$grad_x \left[g(t,x) \right] = 0.$$

Теорема 2. *В принятых выше предположениях для оптимальности пары* $\left(u^*(\cdot), x^*(\cdot)\right) \in D$ *достаточно, чтобы она удовлетворяла условиям принципа максимума Л.С. Понтрягина.*

Доказательство. Запишем выражение для функции Л.С. Понтрягина

$$H(t,x,u,\psi) = -\overbrace{f_0(t,x,u)}^{g(t,x)+h(t,u)} + \left\langle \psi, \overbrace{f(t,x,u)}^{A(t)x+B(t)u} \right\rangle \Rightarrow$$

$$H(t,x,u,\psi) = -g(t,x) - h(t,u) + \langle A(t)x, \psi \rangle + \langle B(t)u, \psi \rangle \Rightarrow$$

$$H(t,x,u,\psi) = -g(t,x) - h(t,u) + \langle x, A'(t)\psi \rangle + \langle B(t)u, \psi \rangle. \tag{1}$$

Сопряженная система дифференциальных уравнений здесь имеет вид

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x} \Rightarrow \dot{\psi} = -A'(t)\psi + \frac{\partial}{\partial x} g(t,x). \tag{2}$$

Из принципа максимума Л.С. Понтрягина для пары $\left(u^*(\cdot), x^*(\cdot)\right)$ следует справедливость неравенства

$$\overbrace{H\left(t, x^*(t), \psi^*(t), u^*(t)\right)}^{(1) \Rightarrow -g(t,x^*(t)) - h(t,u^*(t)) + \langle A(t)x^*(t), \psi^*(t) \rangle + \langle B(t)u^*(t), \psi^*(t) \rangle} \geq \overbrace{H\left(t, x^*(t), \psi^*(t), u\right)}^{(1) \Rightarrow -g(t,x^*(t)) - h(t,u) + \langle A(t)x^*(t), \psi^*(t) \rangle + \langle B(t)u, \psi^*(t) \rangle} \Rightarrow$$

$$-g\left(t,x^*(t)\right)-h\left(t,u^*(t)\right)+\left\langle A(t)x^*(t),\psi^*(t)\right\rangle+\left\langle B(t)u^*(t),\psi^*(t)\right\rangle\ge$$

$$-g\left(t,x^*(t)\right)-h\left(t,u\right)+\left\langle A(t)x^*(t),\psi^*(t)\right\rangle+\left\langle B(t)u,\psi^*(t)\right\rangle \quad\Rightarrow$$

$$\left\langle B(t)u^*(t),\psi^*(t)\right\rangle-h\left(t,u^*(t)\right)\ge\left\langle B(t)u,\psi^*(t)\right\rangle-h\left(t,u\right),\quad \forall u\in P,\quad t\in\left[t_0,T\right]. \qquad (3)$$

Покажем, что функция $K:\left[t_0,T\right]\times R^n\to R^1$, определенная формулой

$$K\left(t,x\right)=-\left\langle\psi^*\left(t\right),x\right\rangle,\quad t\in\left[t_0,T\right],\quad x\in R^n,$$

является функцией Кротова для пары $\left(u^*(\cdot),x^*(\cdot)\right)$. Действительно,

$$R(t,x,u)=\left\langle\frac{\partial}{\partial x}\overset{-\langle\psi^*(t),x\rangle}{K\left(t,x\right)},\ \overset{A(t)x+B(t)u}{f\left(t,x,u\right)}\right\rangle+\frac{\partial}{\partial t}\overset{-\langle\psi^*(t),x\rangle}{K\left(t,x\right)}+\overset{g(t,x)+h(t,u)}{f_0\left(t,x,u\right)}=$$

$$=-\left\langle\psi^*\left(t\right),\,A(t)x+B(t)u\right\rangle-\left\langle\dot\psi^*\left(t\right),\,x\right\rangle+g\left(t,x\right)+h\left(t,u\right)=$$

$$=-\left\langle\psi^*\left(t\right),B\left(t\right)u\right\rangle-\left\langle\psi^*\left(t\right),\,A(t)x\right\rangle-\left\langle\dot\psi^*\left(t\right),\,x\right\rangle+g\left(t,x\right)+h\left(t,u\right).$$

Обозначим

$$R_1\left(t,x\right)=-\left\langle\psi^*\left(t\right),\,A(t)x\right\rangle-\left\langle\dot\psi^*\left(t\right),\,x\right\rangle+g\left(t,x\right),$$

$$R_2\left(t,u\right)=-\left\langle\psi^*\left(t\right),\,B(t)u\right\rangle+h\left(t,u\right).$$

Тогда

$$R(t,x,u)=R_1\left(t,x\right)+R_2\left(t,u\right).$$

Функция $R_1:\left[t_0,T\right]\times R^n\to R^1$ выпукла и дифференцируема по переменной $x\in R^n$. Ее минимум достигается на тех и только тех $x\left(t\right)\in R^n$, которые удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}R_1(t,x)=0\quad\Rightarrow\quad-\frac{\partial}{\partial x}\left(\left\langle\psi^*\left(t\right),\,A(t)x\left(t\right)\right\rangle-\left\langle\dot\psi^*\left(t\right),\,x\left(t\right)\right\rangle+g\left(t,x\left(t\right)\right)\right)=0\quad\Rightarrow$$

$$-A(t)'\psi^*\left(t\right)-\dot\psi^*\left(t\right)+\frac{\partial}{\partial x}g\left(t,x(t)\right)=0\quad\Rightarrow\quad\dot\psi^*\left(t\right)=-A(t)'\psi^*\left(t\right)+\frac{\partial}{\partial x}g\left(t,x\left(t\right)\right), \qquad (4)$$

т.е. сопряженной системе дифференциальных уравнений (3).

Тогда минимум $R_1\left(t,x\right)$ достигается на $x\left(t\right)=x^*\left(t\right)$, $t\in\left[t_0,T\right]$. Таким образом,

$$\min_{x\in D_{tx}}\overbrace{R_1\left(t,x\right)}^{-\langle\psi^*(t),\,A(t)x\rangle-\langle\dot\psi^*(t),\,x\rangle+g(t,x)}=\min_{x\in D_{tx}}\left[-\left\langle\psi^*\left(t\right),\,A(t)x\right\rangle-\left\langle\dot\psi^*\left(t\right),\,x\right\rangle+g\left(t,x\right)\right]=$$

$$=-\left\langle\psi^*\left(t\right),\,A(t)x^*\left(t\right)\right\rangle-\left\langle\dot\psi^*\left(t\right),\,x^*\left(t\right)\right\rangle+g\left(t,x^*\left(t\right)\right)=R_1\left(t,x^*\left(t\right)\right),$$

где $D_{tx}=\left\{x\,\middle|\,\left(u,x\right)\in D_t\right\}$, $t\in\left[t_0,T\right]$. Из неравенства (3) выводим

$$\overbrace{-\left\langle \psi^*(t), B(t)u^*(t)\right\rangle + h\left(t,u^*(t)\right)}^{R_2\left(t,u^*(t)\right)} \le \overbrace{-\left\langle \psi^*(t), B(t)u\right\rangle + h\left(t,u\right)}^{R_2(t,u)}, \quad \forall u \in P \quad \Rightarrow$$

$$R_2\left(t,u^*(t)\right) = \min_{u\in D_{tu}} R_2\left(t,u\right), \quad D_{tu} = \left\{u \middle| (u,x)\in D_t\right\}, \quad t\in\left[t_0,T\right].$$

Таким образом,

$$R\left(t,x^*(t),u^*(t)\right) = \overbrace{R_1\left(t,x^*(t)\right)}^{\min\limits_{x\in D_{tx}} R_1(t,x)} + \overbrace{R_2\left(t,u^*(t)\right)}^{\min\limits_{u\in D_{tu}} R_2(t,u)} =$$

$$= \min_{x\in D_{tx}} R_1\left(t,x\right) + \min_{u\in D_{tu}} R_2\left(t,u\right) = R_{\min}\left(t\right), \quad t\in\left[t_0,T\right]$$

и функция K является функцией Кротова для пары $\left(u^*(\cdot),x^*(\cdot)\right)$. По **теореме 1** эта пара оптимальна. Теорема доказана. ■

Пример 3. Минимизировать функционал

$$I\left[u(\cdot)\right] = \int_0^1 \left(\overbrace{x_2^2\left(\tau\right)}^{g(t,x)-\text{выпукла}} + u^2\left(\tau\right)\right) d\tau$$

при условиях

$$\overbrace{\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u}^{\text{линейны}}, \quad t\in\left[0,\pi\right], \quad u\in R^1, \quad \overbrace{x_1(0) = x_2\left(0\right) = 1, \quad x_1(1) = x_2\left(1\right) = 0}^{S_0,S_1-\text{одноэлементны}}.$$

Решение. Построим пару $\left(u^*(\cdot),x^*(\cdot)\right)$, удовлетворяющую условиям принципа максимума.

Функция Л.С. Понтрягина

$$H\left(t,x,u,\psi\right) = -\left(x_2^2 + u^2\right) + \psi_1 x_2 + \psi_2 u .$$

Определим функцию U^0 из условия

$$\frac{\partial}{\partial u} \overbrace{H\left(t,x,u,\psi\right)}^{-\left(x_2^2+u^2\right)+\psi_1 x_2+\psi_2 u} = 0 \quad \Rightarrow \quad U^0\left(t,x,\psi\right) = \frac{1}{2}\psi_2 .$$

Выпишем основную и сопряженную системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \dfrac{1}{2}\psi_2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 0, \\ \dot{\psi}_2 = 2x_2 - \psi_1. \end{cases}$$

Ее общее решение

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^t + c_4 e^t, \\ x_2(t) = c_2 + c_3 e^t - c_4 e^{-t}, \\ \psi_2(t) = 2\left(c_3 e^t + c_4 e^{-t}\right), \\ \psi_1(t) = 2c_2. \end{cases}$$

Граничные условия

$$\begin{cases} x_1(0) = 1, \\ x_2(0) = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(c_1 + c_2 t + c_3 e^t + c_4 e^t\right)\Big|_{t=0} = 1, \\ \left(c_2 + c_3 e^t - c_4 e^{-t}\right)\Big|_{t=0} = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_3 + c_4 = 1, \\ c_2 + c_3 - c_4 = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(1) = 0, \\ x_2(1) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(c_1 + c_2 t + c_3 e^t + c_4 e^t\right)\Big|_{t=1} = 0, \\ \left(c_2 + c_3 e^t - c_4 e^{-t}\right)\Big|_{t=1} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 e + c_4 e^{-1} = 0, \\ c_2 + c_3 e - c_4 e^{-1} = 0, \end{cases}$$

Решаем систему

$$\left\{\left\{c1 \to -\frac{2\mathrm{e}}{(-3+\mathrm{e})(-1+\mathrm{e})},\quad c2 \to \frac{2\mathrm{e}}{-3+\mathrm{e}},\quad c3 \to -\frac{-3+2\mathrm{e}}{(-3+\mathrm{e})(-1+\mathrm{e})},\quad c4 \to \frac{\mathrm{e}^2}{(-3+\mathrm{e})(-1+\mathrm{e})}\right\}\right\}$$

или (5)

$$\left\{\begin{Bmatrix} c1 \to 11.230917041780856, & c2 \to -19.29788066982306, \\ c3 \to 5.033481814021101, & c4 \to -15.264398855801959 \end{Bmatrix}\right\}.$$

Для данного примера выполнены условия теоремы 2, поэтому найденная пара

$$\left(u^0(\cdot), x^0(\cdot)\right) = \left(c_3 e^t + c_4 e^{-t}, \begin{pmatrix} c_1 + c_2 t + c_3 e^t + c_4 e^t \\ c_2 + c_3 e^t - c_4 e^{-t} \end{pmatrix}\right),$$

в которой константы c_1, c_2, c_3, c_4 вычисляются по формуле (5), доставляет решение задачи оптимального управления. ►

Раздел 6

ПОЗИЦИОННОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ

6.1. Допустимые позиционные управления

Выше отмечалось, что при позиционном управлении динамическим объектом используется информация не только о текущем времени, но и о реализовавшейся фазовой переменной. Дадим определение позиционного управления.

Определение 1. *Функцию* $u:[t_0,T]\times R^n \to P$ *назовем позиционным управлением динамическим объектом.*

Позиционное управление будем обозначать символом $u[\cdot]$. Пусть выбрано некоторое позиционное управление $u[\cdot]$. Для того, чтобы движение объекта, выходящее из позиции $\{t_0,x_0\}$ и порожденное позиционным управлением $u[\cdot]$ можно было трактовать как решение дифференциального уравнения

$$\dot{x} = f\left(t,x,u\left[t,x\right]\right)$$

с начальными условиями $x\left(t_0\right) = x_0$, в котором управляющий параметр изменяется в соответствии с выбранным позиционным управлением $u[\cdot]$, требуется сделать дополнительные предположения о степени гладкости позиционных управлений. В противном случае решения дифференциального уравнения в классическом смысле может просто не существовать. Это видно из следующего примера.

Пример 1. Динамика объекта описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = u, \quad u \in \left[-1,1\right].$$

Определим позиционное управление формулой

$$u(t,x)=\begin{cases}-1, & x\ge 0,\\ 1, & x<0,\end{cases}\quad t\in[0,1]. \tag{1}$$

Покажем, что из начальной позиции $\{0,0\}$ не выходит ни одного движения, являющегося решением задачи Коши для дифференциального уравнения

$$\dot{x}=u(t,x)$$

с начальным условием $x(0)=0$. Прежде всего, заметим, что функция $x(t)\equiv 0$, $t\in[0,1]$ не удовлетворяет этому дифференциальному уравнению, ибо тогда должно выполняться $0\equiv -1,\ t\in[0,1]$. Решение задачи Коши не может начинаться ни с участка возрастания, ни с участка убывания (**рис. 1**).

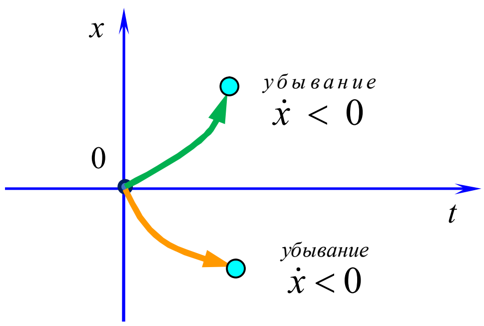

Рис. 1

Действительно, на этих участках должны выполняться неравенства, соответственно $\dot{x}>0,\ \dot{x}<0$. В силу (1) это невозможно. Таким образом, дифференциальное уравнение $\dot{x}=u(t,x)$ не имеет ни одного классического решения с начальными условиями $x(0)=0$.

Ограничим класс позиционных управлений функциями, кусочно-непрерывными по переменной $t\in[t_0,T]$ и удовлетворяющими условиям Липшица по переменной $x\in R^1$ с константой $L>0$. Такие позиционные управления назовем допустимыми. Существование движений в форме решения соответствующих задач Коши для дифференциального уравнения (1) в случае допустимых позиционных управлений является следствием известных теорем существования в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Заметим, что требование допустимости позиционного управления можно ограничить областью, в которой заведомо будут содержаться все реализующиеся движения управляемого объекта. Символом

$$x(\cdot)=x(\cdot,t_0,x_0,u[\cdot])$$

обозначим движение, выходящее из начальной позиции $\{t_0, x_0\}$ и порожденное допустимым позиционным управлением $u[\cdot]$. Реализация во времени управляющего параметра вдоль этого движения определяется по формуле

$$u(t) = u\left[t, x\left(t, t_0, x_0, u[\cdot]\right)\right], \quad t \in [t_0, T].$$

После подстановки пары $(u(\cdot), x(\cdot))$ в выражение для критерия получим

$$I\left[u[\cdot]\right] = \int_{t_0}^{T} f_0\left(\tau, \overbrace{x(\tau)}^{x(\tau, t_0, x_0, u[\cdot])}, \overbrace{u(\tau)}^{u[\tau, x(\tau, t_0, x_0, u[\cdot])]}\right) d\tau + \Phi\left(\overbrace{x(T)}^{x(T, t_0, x_0, u[\cdot])}\right) =$$

$$= \int_{t_0}^{T} f_0\left(\tau, x\left(\tau, t_0, x_0, u[\cdot]\right), u\left[\tau, x\left(\tau, t_0, x_0, u[\cdot]\right)\right]\right) d\tau + \Phi\left(x\left(T, t_0, x_0, u[\cdot]\right)\right).$$

Отсюда можно оценить качество выбранного позиционного управления. Таким образом, задача оптимального управления естественным образом обобщается на случай позиционных управлений. Обычно требуется, чтобы оптимальное позиционное управление было универсально относительно начального положения. ►

6.2. Метод Беллмана

Рассмотрим динамический управляемый объект

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x(t_0) = x_0, \quad t_0 \le t \le T, \quad u \in P.$$

Задача 1. *Среди всех допустимых позиционных управлений $\{u[\cdot]\}$ определить такое позиционное управление $u^0[\cdot]$, для которого справедливо равенство*

$$I\left[u^0[\cdot]\right] = \min_{u[\cdot] \in \{u[\cdot]\}} I\left[u[\cdot]\right],$$

где

$$I\left(u[\cdot]\right) = \int_{t_0}^{T} f_0\left(\tau, x\left(\tau, t_0, x_0, u[\cdot]\right), u\left[\tau, x\left(\tau, t_0, x_0, u[\cdot]\right)\right]\right) d\tau + \Phi\left(x\left(T, t_0, x_0, u[\cdot]\right)\right).$$

Приведем один способ определения оптимального позиционного управления, базирующийся на построении функции Беллмана.

Определение 2. *Непрерывно дифференцируемую по совокупности переменных функцию $B: R^{n+1} \to R^1$, удовлетворяющую условиям*

1) $B(T,x)=\Phi(x), \quad x\in R^n$;

2) существует допустимое позиционное управление $u^0[\cdot]$*, для которого при любом допустимом позиционном управлении* $u[\cdot]$ *и любой позиции* $\{t,x\}$ *выполнено неравенство*

$$\psi(t,x,u[t,x])\geq\psi(t,x,u^0[t,x])=0, \tag{1}$$

где

$$\psi(t,x,u)=\frac{\partial}{\partial t}B(t,x)+\frac{\partial}{\partial x}B(t,x)\cdot f(t,x,u)+f_0(t,x,u),$$

будем называть функцией Беллмана для задачи 1.

Теорема 1. *Пусть для задачи теории оптимального управления существует функция Беллмана. Тогда позиционное управление* $u^0[\cdot]$*, удовлетворяющее условию (1), будет оптимальным. При этом для всех начальных позиций* $\{t_0,x_0\}$ *имеет место равенство*

$$B(t_0,x_0)=I[u^0[\cdot]]. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $u[\cdot]$ – допустимое позиционное управление. Тогда

$$\int_{t_0}^{T}\overbrace{\Psi(\tau,x(\tau),u(\tau))}^{\psi(t,x,u)=\frac{\partial}{\partial t}B(t,x)+\frac{\partial}{\partial x}B(t,x)\cdot f(t,x,u)+f_0(t,x,u)}d\tau=$$

$$=\int_{t_0}^{T}\overbrace{\left[\frac{\partial}{\partial\tau}B(\tau,x_{[\,]}(\tau))+\left\langle\frac{\partial}{\partial x}B(\tau,x_{[\,]}(\tau)),\,f(\tau,x_{[\,]}(\tau),u_{[\,]}(\tau))\right\rangle\right]}^{\frac{d}{d\tau}B(\tau,x_{[\,]}(\tau))}d\tau+\int_{t_0}^{T}f_0(\tau,x(\tau),u(\tau))d\tau=$$

$$=\int_{t_0}^{T}\frac{d}{d\tau}B(\tau,x_{[\,]}(\tau))d\tau+\int_{t_0}^{T}f_0(\tau,x_{[\,]}(\tau),u_{[\,]}(\tau))d\tau=$$

$$=\overbrace{B(T,x(T))}^{\Phi(x_{[\,]}(T))}-\overbrace{B(t_0,x(t_0))}^{B(t_0,x_0)}+\int_{t_0}^{T}f_0(\tau,x(\tau),u(\tau))d\tau \quad\Rightarrow$$

$$\int_{t_0}^{T}\Psi(\tau,x(\tau),u(\tau))d\tau=\Phi(x(T))-B(t_0,x_0)+\int_{t_0}^{T}f_0(\tau,x(\tau),u(\tau))d\tau. \tag{3}$$

Из условия (1) в силу (3) следует

$$\overbrace{\int_{t_0}^{T}\Psi(\tau,x(\tau),u[\tau,x(\tau)])d\tau}^{(3):\,\Phi(x(T))-B(t_0,x_0)+\int_{t_0}^{T}f_0(\tau,x(\tau),u(\tau))d\tau}\geq\overbrace{\int_{t_0}^{T}\Psi(\tau,x(\tau),u^0[\tau,x(\tau)])d\tau}^{\Phi(x^0(T))-B(t_0,x_0)+\int_{t_0}^{T}f_0(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau))d\tau}\overset{(1)}{=}0 \quad\Rightarrow$$

$$\Phi\left(x(T)\right)-B\left(t_0,x_0\right)+\int_{t_0}^{T} f_0\left(\tau,x(\tau),u(\tau)\right)d\tau \geq$$

$$\Phi\left(x^0(T)\right)-B\left(t_0,x_0\right)+\int_{t_0}^{T} f_0\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau)\right)d\tau \overset{(1)}{=} 0 \quad \Rightarrow$$

$$\overbrace{\Phi\left(x(T)\right)+\int_{t_0}^{T} f_0\left(\tau,x(\tau),u(\tau)\right)d\tau}^{I[u[\cdot]]} \geq \overbrace{\Phi\left(x^0(T)\right)+\int_{t_0}^{T} f_0\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau)\right)d\tau}^{I[u^0[\cdot]]} \quad \Rightarrow$$

$$I\left[u[\cdot]\right] \geq I\left[u^0[\cdot]\right], \quad \forall u[\cdot] \quad \Rightarrow \quad u^0[\cdot] - \textit{оптимально.}$$

Из равенства

$$\Phi\left(x^0(T)\right)-\overbrace{B\left(t_0,x^0(t_0)\right)}^{B(t_0,x_0)}+\int_{t_0}^{T} f_0\left(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau)\right)d\tau = 0$$

получаем

$$B\left(t_0,x_0\right)=\overbrace{\Phi\left(x^0_{[\,]}(T)\right)+\int_{t_0}^{T} f_0\left(\tau,x^0_{[\,]}(\tau),u^0_{[\,]}(\tau)\right)d\tau}^{I[u^0[\cdot]]} \quad \Rightarrow \quad I\left[u^0[\cdot]\right]=B\left(t_0,x_0\right).$$

Теорема доказана. ■

Из определения функции Беллмана следует, что ее надо искать среди непрерывно дифференцируемых решений дифференциального уравнения в частных производных вида

$$\min_{u\in P}\left[\frac{\partial}{\partial t}B(t,x)+\frac{\partial}{\partial x}B(t,x)\cdot f(t,x,u)+f_0(t,x,u)\right]=0$$

с граничными условиями

$$B(T,x)=\Phi(x),$$

а оптимальное управление $u^0[\cdot]$ из условия

$$\frac{\partial}{\partial x}B(t,x)\cdot f\left(t,x,u^0[t,x]\right)+f_0\left(t,x,u^0[t,x]\right)=\min_{u\in P}\left[\frac{\partial}{\partial x}B(t,x)\cdot f(t,x,u)+f_0(t,x,u)\right].$$

Заметим, что **теорема 1** выражает достаточные условия оптимальности позиционного управления $u^0[\cdot]$, найденного из условия (1), и его независимость от начальной позиции.

Пример 2. В задаче теории оптимального управления

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad u \in R^1, \quad t_0 \in [0,1), \quad T=1,$$

$$I\left[u[\cdot]\right]=\int_{t_0}^{1}\frac{u^2(\tau)}{2}d\tau+\frac{1}{2}\left(x_2(1)\right)^2\to\min$$

1) построить функцию Беллмана;

2) найти допустимое оптимальное позиционное управление и отвечающее ему движение объекта, выходящее из произвольного начального положения $\{t_0,x_0\}$;

3) проверить выполнение тождества $B(t_0,x_0)=I\left[u^0\right]$.

Решение. Уравнение Беллмана

$$\min_{u\in P}\left[\frac{\partial}{\partial t}\overbrace{B(t,x)}^{B(t,x_1,x_2)}+\overbrace{\frac{\partial}{\partial x}B(t,x)\cdot f(t,x,u)}^{\frac{\partial}{\partial x_1}B(t,x_1,x_2)\cdot x_2+\frac{\partial}{\partial x_2}B(t,x_1,x_2)\cdot u}+\overbrace{f_0(t,x,u)}^{\frac{u^2}{2}}\right]=0\quad\Rightarrow$$

$$\min_{u\in P}\left[\frac{\partial}{\partial t}B(t,x_1,x_2)+\frac{\partial}{\partial x_1}B(t,x_1,x_2)\cdot x_2+\frac{\partial}{\partial x_2}B(t,x_1,x_2)\cdot u+\frac{u^2}{2}\right]=0. \qquad (4)$$

Граничные условия

$$\overbrace{B(T,x)}^{B(1,x_1,x_2)}=\overbrace{\Phi(x)}^{\frac{x_2^2}{2}}\quad\Rightarrow\quad B(1,x_1,x_2)=\frac{x_2^2}{2}. \qquad (5)$$

Находим минимум в (4)

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\partial}{\partial t}B(t,x_1,x_2)+\frac{\partial}{\partial x_1}B(t,x_1,x_2)\cdot x_2+\frac{\partial}{\partial x_2}B(t,x_1,x_2)\cdot u+\frac{u^2}{2}\right]=0\quad\Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}B(t,x_1,x_2)+u=0\quad\Rightarrow\quad u^0[t,x_1,x_2]=-\frac{\partial}{\partial x_2}B(t,x_1,x_2). \qquad (6)$$

Найденная величина $u^0[t,x_1,x_2]$ действительно доставляет минимум в (4), так как квадратный трехчлен $\frac{\partial}{\partial t}B(t,x_1,x_2)+\frac{\partial}{\partial x_1}B(t,x_1,x_2)\cdot x_2+\frac{\partial}{\partial x_2}B(t,x_1,x_2)\cdot u+\frac{u^2}{2}$ по переменной u описывает параболу «ветвями вверх». Подставим (6) в (4). Имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}B(t,x_1,x_2)+\frac{\partial}{\partial x_1}B(t,x_1,x_2)\cdot x_2+\frac{\partial}{\partial x_2}B(t,x_1,x_2)\cdot\overbrace{u}^{-\frac{\partial}{\partial x_2}B(t,x_1,x_2)}+\frac{1}{2}\overbrace{u^2}^{\left(\frac{\partial}{\partial x_2}B(t,x_1,x_2)\right)^2}=0\quad\Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t}B(t,x_1,x_2)+\frac{\partial}{\partial x_1}B(t,x_1,x_2)\cdot x_2-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}B(t,x_1,x_2)\right)^2=0. \qquad (7)$$

Функцию Беллмана ищем в виде

$$B(t,x_1,x_2)=c_{11}(t)x_1^2+2c_{12}(t)x_1x_2+c_{22}(t)x_2^2, \tag{8}$$

где $c_{ij}:[0,1]\to R^1$, $i,\ j=1,2$ – некоторые непрерывно дифференцируемые функции, подлежащие определению. Подставим выражение (8) в (7)

$$\overbrace{\frac{\partial}{\partial t}B(t,x_1,x_2)}^{\dot c_{11}(t)x_1^2+2\dot c_{12}(t)x_1x_2+\dot c_{22}(t)x_2^2}+\overbrace{\frac{\partial}{\partial x_1}B(t,x_1,x_2)}^{2c_{11}(t)x_1+2c_{12}(t)x_2}\cdot x_2-\frac{1}{2}\left(\overbrace{\frac{\partial}{\partial x_2}B(t,x_1,x_2)}^{2c_{12}(t)x_1+2c_{22}(t)x_2}\right)^2=0 \Rightarrow$$

$$\dot c_{11}(t)x_1^2+2\dot c_{12}(t)x_1x_2+\dot c_{22}(t)x_2^2+2c_{11}(t)x_1x_2+2c_{12}(t)x_2^2-\frac{1}{2}\left(2c_{12}(t)x_1+2c_{22}(t)x_2\right)^2=0. \tag{9}$$

Приведем подобные в левой части (9)

$$(\dot c_{11}-2c_{12})x_1^2+(2\dot c_{12}+2c_{11}-4c_{12}c_{22})x_1x_2+(\dot c_{22}+2c_{12}-2c_{22}^2)x_2^2=0. \tag{10}$$

Приравняем к нулю коэффициенты квадратичной формы в (10). В результате получим

$$\begin{cases}(\dot c_{11}-2c_{12})=0,\\ (2\dot c_{12}+2c_{11}-4c_{12}c_{22})=0,\\ (\dot c_{22}+2c_{12}-2c_{22}^2)=0.\end{cases} \tag{11}$$

Из условий (5) находим, что

$$c_{11}(1)=0,\quad c_{12}(1)=0,\quad c_{22}(1)=\frac{1}{2}. \tag{12}$$

Непосредственной подстановкой выявляем, что функции $c_{11}(t)=0,\ c_{12}(t)=0$, $t\in[0,1]$ удовлетворяют граничным условиям (12) и обращают первые два уравнения в (11) в тождества. Третье уравнение в (11) принимает вид

$$\dot c_{22}+2\overbrace{c_{12}}^{\equiv 0}-2c_{22}^2=0 \;\Rightarrow\; \dot c_{22}-2c_{22}^2=0 \;\Rightarrow\; \frac{dc_{22}}{c_{22}^2}=2dt.$$

Проинтегрируем его

$$-\frac{1}{c_{22}}=2t+c_0 \;\Rightarrow\; c_{22}=-\frac{1}{2t+c_0}.$$

Из граничных условий находим

$$\overbrace{c_{22}(1)}^{-\left.\frac{1}{2t+c_0}\right|_{t=1}}=\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; -\frac{1}{2+c_0}=\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; c_0=-4 \;\Rightarrow\; c_{22}(t)=\frac{1}{2(2-t)}.$$

Тогда

$$B(t,x_1,x_2)=\overbrace{c_{11}(t)}^{0}x_1^2+2\overbrace{c_{12}(t)}^{0}x_1x_2+\overbrace{c_{22}(t)}^{\frac{1}{2(2-t)}}x_2^2 \quad \Rightarrow$$

$$B(t,x_1,x_2)=\frac{1}{2(2-t)}x_2^2.$$

Определяем оптимальное управление по формуле (6)

$$u^0[t,x_1,x_2]=-\frac{\partial}{\partial x_2}\overbrace{B(t,x_1,x_2)}^{\frac{1}{2(2-t)}x_2^2}=-\frac{1}{(2-t)}x_2,\quad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\in R^2,\quad t\in[0,1].$$

Найденное оптимальное управление $u^0[\cdot]$ является допустимым. Подставим его в исходные дифференциальные уравнения движения

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2,\\ \dot{x}_2=\overbrace{u^0[t,x_1,x_2]}^{-\frac{1}{(2-t)}x_2},\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\dot{x}_1=x_2,\\ \dot{x}_2=-\dfrac{1}{(2-t)}x_2,\end{cases}$$

и проинтегрируем их на промежутке $[t_0,1]$ с начальными условиями

$$x_1(t_0)=x_{10},\quad x_2(t_0)=x_{20}.$$

Имеем

$$\frac{dx_2}{dt}=-\frac{1}{(2-t)}x_2\quad\Rightarrow\quad\frac{dx_2}{x_2}=-\frac{dt}{(2-t)}\quad\Rightarrow\quad\ln|x_2|=\ln|t-2|+\ln c\quad\Rightarrow\quad x_2(t)=(t-2)c,$$

$$\overbrace{x_2(t_0)}^{(t_0-2)c}=x_{20}\quad\Rightarrow\quad c=\frac{x_{20}}{t_0-2}\quad\Rightarrow\quad(t_0-2)c=x_{20}\quad\Rightarrow\quad x_2^0(t)=x_{20}\frac{t-2}{t_0-2},$$

$$\dot{x}_1=\overbrace{x_2}^{x_{20}\frac{t-2}{t_0-2}}\quad\Rightarrow\quad\frac{dx_1}{dt}=x_{20}\frac{t-2}{t_0-2}\quad\Rightarrow\quad x_1(t)=x_{20}\frac{(t-2)^2}{2(t_0-2)}+c\quad\Rightarrow$$

$$\overbrace{x_1(t_0)}^{x_{20}\frac{(t_0-2)^2}{2(t_0-2)}+c}=x_{10}\quad\Rightarrow\quad x_{20}\frac{t_0-2}{2}+c=x_{10}\quad\Rightarrow\quad c=x_{10}-x_{20}\frac{t_0-2}{2}\quad\Rightarrow$$

$$x_1^0(t)=x_{20}\frac{(t-2)^2}{2(t_0-2)}-x_{20}\frac{t_0-2}{2}+x_{10}.$$

Реализация оптимального управления во времени

$$u^0(t)=u^0\left[t,x_1^0(t),x_2^0(t)\right]=-\frac{1}{(2-t)}\overbrace{x_2^0(t)}^{x_{20}\frac{t-2}{t_0-2}}=-x_{20}\frac{(t-2)}{(t_0-2)(2-t)}=\frac{x_{20}}{t_0-2},\quad t\in[0,1].$$

Проверка равенства

$$I\left[u^0[\cdot]\right]=B(t_0,x_0).$$

Имеем

$$I\left[u^0[\cdot]\right]=\int_{t_0}^{1}\frac{1}{2}\overbrace{\left(u^0(\tau)\right)^2}^{\left(\frac{x_{20}}{t_0-2}\right)^2}d\tau+\frac{1}{2}\overbrace{\left(x_2^0(1)\right)^2}^{\left(x_{20}\frac{t-2}{t_0-2}\right)^2_{t=1}}=\frac{1}{2}\left(\frac{x_{20}}{t_0-2}\right)^2(1-t_0)+\frac{1}{2}\left(\frac{x_{20}}{t_0-2}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x_{20}}{t_0-2}\right)^2(1-t_0+1)=\frac{1}{2}\left(\frac{x_{20}}{t_0-2}\right)^2(2-t_0)=\frac{x_{20}^2}{2(2-t_0)},$$

$$B(t_0,x_{10},x_{20})=\frac{1}{2(2-t)}x_2^2\bigg|_{\substack{t=t_0\\x_2=x_{20}}}=\frac{1}{2(2-t_0)}x_{20}^2.$$

Равенство имеет место. ►

6.3. Индивидуальное задание 8 «Позиционное управление динамическими объектами»

Для управляемого динамического объекта

$$\dot{x}=ax+u,\quad u\in R^1,\quad t\le 1$$

$$I[u]=\int_{t_0}^{1}bu^2(\tau)d\tau+cx^2(1)\to\min$$

1) построить функцию Беллмана;

2) найти допустимое оптимальное позиционное управление и отвечающее ему движение объекта, выходящее из произвольного начального положения $\{t_0,x_0\}$;

3) проверить выполнение тождества $B(t_0,x_0)=I\left[u^0,t_0,x_0\right]$.

Пример выполнения индивидуального задания 8

Решим задачу при $a=-1,\ b=1,\ c=1$. Тогда

$$\dot{x}=-x+u,\quad u\in R^1,\quad T=1,$$

$$I\left(u[\cdot]\right)=\int_{t_0}^{1}2u^2(\tau)d\tau+x^2(1)\to\min.$$

Решение. Дифференциальное уравнение Беллмана

$$\min_u \left[\frac{\partial}{\partial t} B(t,x) + \frac{\partial}{\partial x} B(t,x) \cdot (-x+u) + 2u^2 \right] = 0, \tag{1}$$

граничное условие

$$B(1,x) = x^2. \tag{2}$$

Минимум в левой части (1) достигается на управлении

$$u^0[t,x] = -\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x} B(t,x). \tag{3}$$

После подстановки (3) в (1) получим

$$\frac{\partial}{\partial t} B(t,x) - x\frac{\partial}{\partial x} B(t,x) + \overbrace{u}^{-\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x}B(t,x)} \frac{\partial}{\partial x} B(t,x) + 2\left(\overbrace{u}^{-\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x}B(t,x)} \right)^2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t} B(t,x) - x\frac{\partial}{\partial x} B(t,x) - \frac{1}{8}\left(\frac{\partial}{\partial x} B(t,x) \right)^2 = 0. \tag{4}$$

Функцию Беллмана будем искать в виде

$$B(t,x) = \varepsilon(t)x^2. \tag{5}$$

Подставив (5) в (4), получим дифференциальное уравнение для определения функции ε

$$\dot{\varepsilon}x^2 - x\cdot(2\varepsilon x) - \frac{1}{8}(2\varepsilon x)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2\left(\dot{\varepsilon} - 2\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\dot{\varepsilon} - 2\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon^2. \tag{6}$$

Из граничных условий (2) находим

$$\overbrace{B(1,x)}^{\varepsilon(1)x^2} = x^2 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon(1)x^2 = x^2 \quad \Rightarrow$$

$$\varepsilon(1) = 1. \tag{7}$$

Интегрируем (6) с граничными условиями (7)

$$\varepsilon = u\cdot v \quad \Rightarrow \quad \dot{\varepsilon} = \dot{u}\cdot v + u\cdot\dot{v} \quad \Rightarrow \quad \overbrace{\dot{\varepsilon}}^{\dot{u}\cdot v + u\cdot\dot{v}} - \overbrace{2\varepsilon}^{2uv} = \overbrace{\frac{1}{2}\varepsilon^2}^{\frac{1}{2}u^2v^2} \quad \Rightarrow$$

$$\dot{u}\cdot v + u\cdot\dot{v} - 2uv = \frac{1}{2}u^2v^2 \quad \Rightarrow \quad v\overbrace{(\dot{u} - 2u)}^{\Rightarrow = 0} + u\dot{v} = \frac{1}{2}u^2v^2 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{u}-2u=0, \\ u\dot{v}=\frac{1}{2}u^2v^2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{du}{u}=2dt, \\ \dot{v}=\frac{1}{2}uv^2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(t)=e^{2t}, \\ \frac{dv}{dt}=\frac{1}{2}e^{2t}v^2, \end{cases} \Rightarrow \frac{dv}{v^2}=\frac{1}{2}e^{2t}dt \Rightarrow$$

$$\int\frac{dv}{v^2}=\frac{1}{2}\int e^{2t}dt \Rightarrow -\frac{1}{v}=\frac{1}{4}e^{2t}+p \Rightarrow v(t,p)=-\frac{1}{\frac{1}{4}e^{2t}+p}=-\frac{4}{e^{2t}+4p}.$$

Таким образом

$$\varepsilon(t)=u(t)\cdot v(t,p)=e^{2t}\left(-\frac{4}{e^{2t}+4p}\right)=-\frac{4e^{2t}}{e^{2t}+4p}.$$

Определим константу интегрирования p. Имеем

$$\overbrace{\varepsilon(1)}^{-\frac{4e^{2t}}{e^{2t}+4p}\Big|_{t=1}}=1 \Rightarrow -\frac{4e^2}{e^2+4p}=1 \Rightarrow -4e^2=e^2+4p \Rightarrow p=-\frac{5}{4}e^2 \Rightarrow$$

$$\varepsilon(t)=-\frac{4e^{2t}}{e^{2t}+4p}\Bigg|_{p=-\frac{5}{4}e^2}=\frac{4e^{2t}}{5e^2-e^{2t}}.$$

Окончательно находим

$$B(t,x)=\overbrace{\varepsilon(t)}^{\frac{4e^{2t}}{5e^2-e^{2t}}}x^2=\frac{4e^{2t}}{5e^2-e^{2t}}\cdot x^2.$$

Оптимальное управление

$$u^0[t,x]=-\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x}B(t,x)=-\frac{1}{4}\left(2\cdot\frac{4e^{2t}}{5e^2-e^{2t}}\cdot x\right)=-\frac{2e^{2t}}{5e^2-e^{2t}}\cdot x.$$

Заметим, что построенное оптимальное позиционное управление является допустимым. Подставим оптимальное управление в дифференциальное уравнение движения объекта

$$\dot{x}=-x+\overbrace{u}^{-\frac{2e^{2t}}{5e^2-e^{2t}}\cdot x} \Rightarrow \dot{x}=-x+\frac{2e^{2t}}{e^{2t}-5e^2}x \Rightarrow \dot{x}=\left(-1+\frac{2e^{2t}}{e^{2t}-5e^2}\right)x.$$

Проинтегрируем его с начальным условием $x(t_0)=x_0$. Последовательно вычисляем

$$\frac{dx}{x}=-dt+\frac{2e^{2t}}{e^{2t}-5e^2}dt \Rightarrow \int\frac{dx}{x}=-\int dt+\int\frac{2e^{2t}}{e^{2t}-5e^2}dt \Rightarrow$$

$$\int\frac{dx}{x}=-\int dt+\int\frac{d\left(5e^2-2e^{2t}\right)}{e^{2t}-5e^2}dt \Rightarrow$$

$$\ln x=-t+\ln\left(5e^2-e^{2t}\right)+\ln C \Rightarrow x(t)=\left(5e^2-e^{2t}\right)e^{-t}C \Rightarrow$$

$$x(t_0)=x_0 \quad\Rightarrow\quad \left(5e^2-e^{2t_0}\right)e^{-t_0}C=x_0 \quad\Rightarrow\quad C=\frac{x_0e^{t_0}}{5e^2-e^{2t_0}} \quad\Rightarrow$$

$$x^0(t)=\left(5e^2-e^{2t}\right)e^{-t}\,\frac{x_0e^{t_0}}{5e^2-e^{2t_0}}=\frac{5e^2-e^{2t}}{5e^2-e^{2t_0}}\cdot x_0e^{t_0-t}.$$

Оптимальная траектория

$$x^0(t)=\frac{5e^2-e^{2t}}{5e^2-e^{2t_0}}\cdot x_0e^{t_0-t}.$$

Реализация во времени оптимального управления

$$u^0(t)=u^0\left[t,x^0(t)\right]=-\frac{2e^{2t}}{5e^2-e^{2t}}\cdot\overbrace{x^0(t)}^{\frac{5e^2-e^{2t}}{5e^2-e^{2t_0}}\cdot x_0e^{t_0-t}}=-\frac{2e^{2t}}{5e^2-e^{2t}}\cdot\frac{5e^2-e^{2t}}{5e^2-e^{2t_0}}\cdot x_0e^{t_0-t}=-2\cdot\frac{e^{t+t_0}}{5e^2-e^{2t_0}}\cdot x_0\,.$$

Проверка выполнения тождества

$$I\left[u^0[\cdot]\right]=B(t_0,x_0).$$

Вычисляем функционал

$$I\left[u^0[\cdot]\right]=\int_{t_0}^{1}2\,\overbrace{\left(u^0_{[\,]}(\tau)\right)^2}^{\left(-2\cdot\frac{e^{t+t_0}}{5e^2-e^{2t_0}}\cdot x_0\right)^2}d\tau+\overbrace{\left(x^0_{[\,]}(1)\right)^2}^{\left(\frac{5e^2-e^2}{5e^2-e^{2t_0}}\cdot x_0e^{t_0-1}\right)^2}\;.$$

Вычисляем интегральное слагаемое

$$\int_{t_0}^{1}\overbrace{2\left(u^0(\tau)\right)^2}^{2\left(-2\cdot\frac{e^{t+t_0}}{5e^2-e^{2t_0}}\cdot x_0\right)}d\tau=\int_{t_0}^{1}\frac{8x_0^2e^{2t_0}}{\left(5e^2-e^{2t_0}\right)^2}e^{2t}d\tau=\left.\frac{4x_0^2e^{2t_0}}{\left(5e^2-e^{2t_0}\right)^2}e^{2t}\right|_{t_0}^{1}=\frac{4x_0^2e^{2t_0}}{\left(5e^2-e^{2t_0}\right)^2}\left(e^2-e^{2t_0}\right).$$

Вычисляем терминальное слагаемое

$$\frac{16e^4}{\left(5e^2-e^{2t_0}\right)^2}\cdot x_0^2e^{2(t_0-1)}.\quad\overbrace{\left(x^0(1)\right)^2}^{\left(\frac{5e^2-e^2}{5e^2-e^{2t_0}}\cdot x_0e^{t_0-1}\right)^2}=\left(\frac{5e^2-e^2}{5e^2-e^{2t_0}}\cdot x_0e^{t_0-1}\right)^2=\frac{16e^4}{\left(5e^2-e^{2t_0}\right)^2}\cdot x_0^2e^{2(t_0-1)}.$$

С другой стороны,

$$B(t_0,x_0)=\left.\left(\frac{4e^{2t}}{5e^2-e^{2t}}\cdot x^2\right)\right|_{\substack{t=t_0,\\ x=x_0}}=\frac{4e^{2t_0}}{5e^2-e^{2t_0}}\cdot x_0^2.$$

Проверяем тождество $B(t_0,x_0)=I\left[u^0,t_0,x_0\right]$. Действительно,

$$\overbrace{\int_{t_0}^{1}2\left(u^0_{[\,]}(\tau)\right)^2d\tau}^{\frac{4x_0^2e^{2t_0}}{\left(5e^2-e^{2t_0}\right)^2}\left(e^2-e^{2t_0}\right)}+\overbrace{\left(x^0_{[\,]}(1)\right)^2}^{\frac{16e^4}{\left(5e^2-e^{2t_0}\right)^2}\cdot x_0^2e^{2(t_0-1)}}=\overbrace{B(t_0,x_0)}^{\frac{4e^{2t_0}}{5e^2-e^{2t_0}}\cdot x_0^2}\quad\Rightarrow$$

$$\frac{4x_0^2 e^{2t_0}}{\left(5e^2-e^{2t_0}\right)^2}\left(e^2-e^{2t_0}\right)+\frac{16e^4}{\left(5e^2-e^{2t_0}\right)^2}\cdot x_0^2 e^{2(t_0-1)}=\frac{4e^{2t_0}}{5e^2-e^{2t_0}}\cdot x_0^2.$$

Последовательно вычисляем

$$\frac{e^2-e^{2t_0}}{\left(5e^2-e^{2t_0}\right)^2}+\frac{4e^2}{\left(5e^2-e^{2t_0}\right)^2}=\frac{1}{5e^2-e^{2t_0}} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{5e^2-e^{2t_0}}{\left(5e^2-e^{2t_0}\right)^2}=\frac{1}{5e^2-e^{2t_0}} \quad \Rightarrow \quad 1\equiv 1.$$

Тождество установлено. ►

Задания для самостоятельного решения

Числовые данные для **вариантов 1–15** приведены в таблице.

№ варианта	Числовые данные		
	a	*b*	*c*
1	– 4	2	2
2	4	5	10
3	– 8	4	10
4	3	1	3
5	– 1	7	5
6	– 4	5	2
7	10	1	2
8	3	4	10
9	– 4	5	3
10	6	4	2
11	10	3	8
12	10	7	4
13	– 7	2	2
14	10	7	1
15	5	6	9

Раздел 7

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ

7.1. Постановка дифференциальной игры

Выше уже отмечалось, что адекватной сферой применения позиционного управления являются дифференциальные игры. Дифференциальные игры описывают конфликтные ситуации, возникающие при управлении динамическими объектами. Например, преследование одного управляемого объекта другим или наведение объекта на заданное множество при противодействии этому другим участником процесса управления. Игровые задачи могут возникать и при управлении динамическими объектами в условиях неопределенности (отсутствии полной информации о состоянии объекта). В данном пособии будут рассматриваться конфликтные ситуации с двумя участниками, имеющими противоположные интересы в исходах процесса управления.

Пусть динамический объект управляется двумя заинтересованными сторонами (игроками). Его динамика описывается обыкновенным векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f\left(t, x, u, v\right), \tag{1}$$

где $t \in R^1$ – текущее время, $x \in R^n$ – фазовый вектор объекта, $u \in P \subset R^{r_1}$, $v \in Q \subset R^{r_2}$ – векторы управляющих параметров игроков. Вектор-функция $f : R^{1+n+r_1+r_2} \to R^n$ описывает внутреннее устройство объекта и воздействие различных внешних факторов на объект. Относительно функции f предполагается, что она непрерывна по совокупности переменных, удовлетворяет условию Липшица по переменной $x \in R^n$ и для нее существует такая постоянная $\beta > 0$, что при всех $t \in R^1$, $x \in R^n$, $u \in P$, $v \in Q$ справедливо неравенство

$$\left\| f(t, x, u, v) \right\| \le \beta\left(1 + \left\| x \right\|\right).$$

Принимаем, что начальный и конечный моменты времени процесса фиксированы, фазовые ограничения отсутствуют, ограничения на управляющие параметры стационарны, критерий качества имеют вид функционала Больца

$$I = \int_{t_0}^{T} f_0\left(\tau, x(\tau), u(\tau), v(\tau)\right) d\tau + \Phi\left(x(T)\right), \qquad (2)$$

где $f_0 : R^{1+n+r_1+r_2}, \Phi : R^n \to R^1$, а $x(\cdot), u(\cdot), v(\cdot)$ – реализации во времени фазового вектора объекта и векторов управляющих параметров, соответственно. Неформальная цель первого игрока состоит в минимизации критерия качества (2), а второго игрока – в его максимизации.

Определение 1. *Конфликт, возникающий между заинтересованными сторонами при управлении описанным выше динамическим объектом, будем называть антагонистической дифференциальной игрой двух лиц, а самих участников – игроками.*

Предполагается, что управляющие воздействия игроки формируют на основании информации о текущей позиции $\{t, x\} \in R^{n+1}$. При этом в любой момент времени каждый игрок может точно измерить фазовый вектор объекта, но он не имеет никакой информации о выборе управляющих воздействий в этот момент времени другим игроком. Таким образом, игроки применяют позиционные стратегии управления. К этим стратегиям будем предъявлять те же требования допустимости, что и ранее. Именно, будем предполагать, что позиционные стратегии игроков кусочно-непрерывны по переменной $t \in [t_0, T]$ и удовлетворяют условию Липшица по переменной $x \in R^n$ с константой $L > 0$, не зависящей от $t \in [t_0, T]$. Символом $x(\cdot) = x\left(\cdot, t_0, x_0, u[\cdot], v[\cdot]\right)$ обозначим движение, выходящее из начальной позиции $\{t_0, x_0\}$ и порожденное допустимыми позиционными управлениями $u[\cdot], v[\cdot]$.

Реализация во времени вектора управляющих параметров игроков вдоль этого движения определяется по формулам

$$u(t) = u\left[t, x\left(t, t_0, x_0, u[\cdot], v[\cdot]\right)\right], \quad t \in [t_0, T],$$

$$v(t) = v\left[t, x\left(t, t_0, x_0, u[\cdot], v[\cdot]\right)\right], \quad t \in [t_0, T].$$

После подстановки этих реализаций $x(\cdot), u(\cdot), v(\cdot)$ в функционал $\int_{t_0}^{T} f_0\left(\tau, x(\tau), u(\tau), v(\tau)\right) d\tau + \Phi\left(x(T)\right)$ можно вычислить значение критерия качества $I\left[u[\cdot], v[\cdot]\right]$. Сформулируем задачу, которая обычно решается при исследовании антагонистических дифференциальных игр двух лиц.

Задача 1. *Среди всех допустимых позиционных управлений* $\{u[\cdot]\}$ *первого игрока и* $\{v[\cdot]\}$ *второго игрока определить пару* $\left(u^0[\cdot], v^0[\cdot]\right)$, *для которой справедливо двойное неравенство*

$$I\left[u^0[\cdot], v[\cdot]\right] \le I\left[u^0[\cdot], \quad v^0[\cdot]\right] \le I\left[u[\cdot], v^0[\cdot]\right] \qquad (3)$$

при всех допустимых $u[\cdot] \in \{u[\cdot]\}$, $v[\cdot] \in \{v[\cdot]\}$.

Игровой смысл неравенства (3) состоит в том, что единоличное уклонение игрока от пары $u^0[\cdot], v^0[\cdot]$ приводит к ухудшению для этого игрока величины критерия.

Определение 2. *Пару* $u^0[\cdot], v^0[\cdot]$ *будем называть седловой точкой в игре, стратегии, образующие седловую точку, – оптимальными стратегиями игроков, а величину* $I\left[t_0, x_0, u^0[\cdot], v^0[\cdot]\right]$ – *ценой игры для начальной позиции* $\{t_0, x_0\}$.

7.2. Гладкие потенциалы в антагонистических дифференциальных играх (метод Беллмана–Айзекса)

Укажем один способ решения **задачи 1**, основанный на построении так называемых гладких потенциалов.

Определение 3. *Непрерывно дифференцируемую по совокупности переменных функцию* $\varepsilon^0 : R^{n+1} \to R^1$, *удовлетворяющую условиям:*

1) $\varepsilon^0(T, x) = \Phi(x)$, $x \in R^n$;

2) существуют допустимые позиционные управления $u^0[\cdot] \in \{u[\cdot]\}$, $v^0[\cdot] \in \{v[\cdot]\}$, *для которых при любых допустимых позиционных управлениях* $u[\cdot] \in \{u[\cdot]\}$ *первого игрока и* $v[\cdot] \in \{v[\cdot]\}$ *второго игрока для каждой позиции* $\{t, x\}$ *выполнено двойное неравенство*

$$\Psi\left(t, x, u^0[t,x], v[t,x]\right) \le \Psi\left(t, x, u^0[t,x], v^0[t,x]\right) = 0 \le \Psi\left(t, x, u[t,x], v^0[t,x]\right), \qquad (1)$$

где

$$\Psi(t,x,u,v) = \frac{\partial}{\partial t}\varepsilon^0(t,x) + \left\langle \frac{\partial}{\partial x}\varepsilon^0(t,x), f(t,x,u,v) \right\rangle + f_0(t,x,u,v), \ t \in [t_0, T], x \in R^n, u \in P, v \in Q,$$

будем называть гладким потенциалом (или функцией Беллмана–Айзекса) для ***задачи 1***.

Теорема 1. *Пусть для **задачи 1** существует гладкий потенциал. Тогда пара допустимых позиционных управлений* $\left(u^0[\cdot]v^0[\cdot]\right)$, *обеспечивает двойное неравенство*

$$I\left[u^0[\cdot],v[\cdot]\right]\le I\left[u^0[\cdot],v^0[\cdot]\right]\le I\left[u[\cdot],v^0[\cdot]\right],\quad \forall u[\cdot]\in\{u[\cdot]\},\quad \forall v[\cdot]\in\{v[\cdot]\}.$$

При этом имеет место равенство

$$\varepsilon^0(t_0,x_0)=I\left[t_0,x_0,u^0[\cdot],v^0[\cdot]\right].$$

Доказательство. Пусть $\left(u^0[\cdot],v^0[\cdot]\right)$ – пара допустимых позиционных управлений, удовлетворяющая условию (1). Последовательно вычисляем:

$$0\overset{(1)}{=}\int_{t_0}^{T}\overbrace{\Psi\left(\tau,x^0(\tau),u^0\left[\tau,x^0(\tau)\right],v^0\left[\tau,x^0(\tau)\right]\right)}^{\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon^0(t,x^0)+\left\langle\frac{\partial}{\partial x}\varepsilon^0(t,x^0),\,f(t,x^0,u^0,v^0)\right\rangle+f_0(t,x^0,u^0,v^0)}d\tau=$$

$$=\int_{t_0}^{T}\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\varepsilon^0\left(\tau,x^0(\tau)\right)+\left\langle\frac{\partial}{\partial x}\varepsilon^0\left(\tau,x^0(\tau)\right),\,f\left(\tau,x^0(\tau),u^0\left[\tau,x^0(\tau)\right],v^0\left[\tau,x^0(\tau)\right]\right)\right\rangle\right]d\tau+$$

$$+\int_{t_0}^{T}f_0\left(\tau,x^0(\tau),u^0\left[\tau,x^0(\tau)\right],v^0\left[\tau,x^0(\tau)\right]\right)d\tau=$$

$$=\int_{t_0}^{T}\frac{d}{d\tau}\varepsilon^0\left(\tau,x^0(\tau)\right)d\tau+\int_{t_0}^{T}f_0\left(\tau,x^0(\tau),u^0\left[\tau,x^0(\tau)\right],v^0\left[\tau,x^0(\tau)\right]\right)d\tau=$$

$$=\overset{=\Phi(x^0(T))}{\varepsilon^0\left(T,x^0(T)\right)}-\varepsilon^0\left(t_0,x^0(t_0)\right)+\int_{t_0}^{T}f_0\left(\tau,x^0(\tau),u^0\left[\tau,x^0(\tau)\right],v^0\left[\tau,x^0(\tau)\right]\right)d\tau\quad\Rightarrow$$

$$\varepsilon^0(t_0,x_0)=\int_{t_0}^{T}f_0\left(\tau,x^0(\tau),u^0\left[\tau,x^0(\tau)\right],v^0\left[\tau,x^0(\tau)\right]\right)d\tau+\Phi\left(x^0(T)\right)=I\left[u^0[\cdot],v^0[\cdot]\right].$$

Повторяя приведенные выкладки, с учетом неравенства

$$0\overset{(1)}{\ge}\int_{t_0}^{T}\overbrace{\Psi\left(\tau,x_*(\tau),u^0\left[\tau,x_*(\tau)\right],v\left[\tau,x_*(\tau)\right]\right)}^{\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon^0(t,x_*)+\left\langle\frac{\partial}{\partial x}\varepsilon^0(t,x_*),\,f(t,x_*,u^0,v)\right\rangle+f_0(t,x_*,u^0,v)}d\tau,$$

где $x_*(\cdot)=x\left(\cdot,t_0,x_0,u^0[\cdot],v[\cdot]\right)$, получим

$$\overset{I\left[u^0[\cdot],v^0[\cdot]\right]}{\varepsilon^0(t_0,x_0)}\ge\overbrace{\int_{t_0}^{T}f_0\left(\tau,x_*(\tau),u^0\left[\tau,x_*(\tau)\right],v\left[\tau,x_*(\tau)\right]\right)d\tau+\Phi\left(x_*(T)\right)}^{I\left[u^0[\cdot],v[\cdot]\right]}\quad\Rightarrow$$

$$I\left[u^0[\cdot],v^0[\cdot]\right]\ge I\left[u^0[\cdot],v[\cdot]\right].\qquad(2)$$

Аналогично, в силу

$$0 \overset{(1)}{\le} \int_{t_0}^{T} \overbrace{\Psi\left(\tau, x^*(\tau), u\left[\tau, x^*(\tau)\right], v^0\left[\tau, x^*(\tau)\right]\right)}^{\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon^0(t,x^*)+\left\langle \frac{\partial}{\partial x}\varepsilon^0(t,x^*),\, f(t,x^*,u,v^0)\right\rangle + f_0(t,x^*,u,v^0)} d\tau,$$

где $x^*(\cdot) = x\left(\cdot, t_0, x_0, u[\cdot], v^0[\cdot]\right)$, выводим

$$\overbrace{\varepsilon^0(t_0, x_0)}^{I[u^0[\cdot],v^0[\cdot]]} \le \overbrace{\int_{t_0}^{T} f_0\left(\tau, x^*(\tau), u\left[\tau, x^*(\tau)\right], v^0\left[\tau, x^*(\tau)\right]\right) d\tau + \Phi\left(x^*(T)\right)}^{I[u[\cdot],v^0[\cdot]]} \Rightarrow$$

$$I\left[u^0[\cdot], v^0[\cdot]\right] \le I\left[u[\cdot], v^0[\cdot]\right]. \tag{3}$$

Из (3) и (4) следует

$$I\left[u^0[\cdot], v[\cdot]\right] \le I\left[u^0[\cdot], v^0[\cdot]\right] \le I\left[u[\cdot], v^0[\cdot]\right].$$

Теорема доказана полностью. ■

Из определения гладкого потенциала следует, что его надо искать среди непрерывно дифференцируемых решений дифференциального уравнения в частных производных вида

$$\min_{u \in P} \max_{v \in Q} \Psi(t, x, u, v) = 0 = \max_{v \in Q} \min_{u \in P} \Psi(t, x, u, v),$$

где

$$\Psi(t, x, u, v) = \frac{\partial}{\partial t}\varepsilon^0(t, x) + \left\langle \frac{\partial}{\partial x}\varepsilon^0(t, x),\, f(t, x, u, v)\right\rangle + f_0(t, x, u, v).$$

Другими словами, из уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon^0(t, x) + \min_{u \in P} \max_{v \in Q}\left[\left\langle \frac{\partial}{\partial x}\varepsilon^0(t, x),\, f(t, x, u, v)\right\rangle + f_0(t, x, u, v)\right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\varepsilon^0(t, x) + \max_{v \in Q} \min_{u \in P}\left[\left\langle \frac{\partial}{\partial x}\varepsilon^0(t, x),\, f(t, x, u, v)\right\rangle + f_0(t, x, u, v)\right] = 0 \tag{4}$$

с граничными условиями

$$\varepsilon^0(T, x) = \Phi(x).$$

Уравнение (4) называют уравнением Беллмана–Айзекса. Оптимальные управления $u^0[\cdot], v^0[\cdot]$ определяются, соответственно, из равенств

$$\max_{v \in Q}\left\langle \frac{\partial}{\partial x}\varepsilon^0(t, x),\, f\left(t, x, u^0[t, x], v\right)\right\rangle + f_0\left(t, x, u^0[t, x], v\right) =$$

$$= \min_{u \in P} \max_{v \in Q}\left[\left\langle \frac{\partial}{\partial x}\varepsilon^0(t, x),\, f(t, x, u, v)\right\rangle + f_0(t, x, u, v)\right], \tag{5}$$

$$\min_{u\in P}\left\langle \frac{\partial}{\partial x}\varepsilon^0(t,x),\, f\left(t,x,u,v^0[t,x]\right)\right\rangle + f_0\left(t,x,u,v^0[t,x]\right) =$$

$$= \max_{v\in Q}\min_{u\in P}\left[\left\langle \frac{\partial}{\partial x}\varepsilon^0(t,x),\, f(t,x,u,v)\right\rangle + f_0(t,x,u,v)\right]. \qquad (6)$$

Доказанная теорема выражает достаточные условия оптимальности пары позиционных управлений $\left(u^0[\cdot],v^0[\cdot]\right)$, найденной из условий (5)–(6), а также ее независимость от начальной позиции (универсальность).

Рассмотрим случай терминального функционала (1.2), т.е. когда $f_0(t,x,u,v)\equiv 0$. Пусть $\left(u[\cdot],v[\cdot]\right)$ – произвольные допустимые позиционные стратегии и

$$x(t)=x\left(t,t_0,x_0,u[\cdot],v[\cdot]\right),\quad t\in[t_0,T],$$

$$u(t)=u\left[t,x\left(t,t_0,x_0,u[\cdot],v[\cdot]\right)\right],\quad t\in[t_0,T], \qquad (7)$$

$$v(t)=v\left[t,x\left(t,t_0,x_0,u[\cdot],v[\cdot]\right)\right],\quad t\in[t_0,T].$$

Справедливо равенство

$$\frac{d}{dt}\varepsilon^0(t,x)=\left[\overbrace{\frac{\partial\varepsilon^0(t,x)}{\partial t}+\left\langle\frac{\partial\varepsilon^0(t,x)}{\partial x},f(t,x,u,v)\right\rangle}^{\Psi(t,x,u,v)}\right]_{\substack{x(\cdot)=x(\cdot,t_0,x_0,u[\cdot],v[\cdot])\\ u[\cdot]=u(\cdot)\\ v[\cdot]=v(\cdot)}} =$$

$$=\Psi\left(t,x\ (t),u(t),v(t)\right)=0. \qquad (8)$$

Из (1) и (8) следует, что гладкий потенциал ε^0 вдоль движения $x^0(\cdot)=x^0\left(\cdot,t_0,x_0,u^0[\cdot],v^0[\cdot]\right)$ будет оставаться постоянным, вдоль движения $x(\cdot)=x\left(\cdot,t_0,x_0,u^0[\cdot],v[\cdot]\right)$ – убывать, а вдоль движения $x(\cdot)=x\left(\cdot,t_0,x_0,u[\cdot],v^0[\cdot]\right)$ – возрастать.

7.3. Примеры дифференциальных игр

Рассмотрим два примера дифференциальных игр.

Пример 1. Для конфликтно управляемого динамического объекта

$$\dot{x}_1=x_2,\quad \dot{x}_2=u+v,\quad u,v\in R^1,\quad t_0\in[0,1),\quad T=1,$$

$$I\left[u[\cdot],v[\cdot]\right]=\int_{t_0}^{1}\left(\frac{u^2(\tau)}{2}-v^2(\tau)\right)d\tau+\frac{1}{2}\left(x_2(1)\right)^2\to\min:$$

1) построить функцию Белмана–Айзекса $\varepsilon^0 = \varepsilon^0(t, x)$;

2) найти пару допустимых позиционных стратегий $u^0[\cdot], v^0[\cdot]$, образующих седловую точку в игре;

3) вычислить цену игры $I(u^0[\cdot], v^0[\cdot])$;

4) проверить выполнение равенства $\varepsilon^0(t_0, x_0) = I(u^0[\cdot], v^0[\cdot])$;

5) взяв в качестве уклоняющих стратегий тривиальные $u^{ук}[t, x] \equiv 0$, $v^{ук}[t, x] \equiv 0$, проверить выполнение двойного неравенства

$$I(u^0[\cdot], v^{ук}[\cdot]) \le I(u^0[\cdot], v^0[\cdot]) \le I(u^{ук}[\cdot], v^0[\cdot]).$$

Решение. 1. Полагаем

$$\Psi(t, x, u, v) = \frac{\partial}{\partial t}\varepsilon^0(t, x_1, x_2) + \frac{\partial}{\partial x_1}\varepsilon^0(t, x_1, x_2)\cdot x_2 + \frac{\partial}{\partial x_2}\varepsilon^0(t, x_1, x_2)\cdot(u+v) + \frac{u^2}{2} - v^2.$$

Очевидно, что

$$\min_u \max_v \Psi(t, x, u, v) = \max_v \min_u \Psi(t, x, u, v).$$

Уравнение Беллмана–Айзекса имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon^0(t, x_1, x_2) + \frac{\partial}{\partial x_1}\varepsilon^0(t, x_1, x_2)\cdot x_2 + \min_u\left[\frac{\partial}{\partial x_2}\varepsilon^0(t, x_1, x_2)u + \frac{u^2}{2}\right] +$$

$$+\max_v\left[\frac{\partial}{\partial x_2}\varepsilon^0(t, x_1, x_2)v - v^2\right] = 0. \tag{1}$$

Определим минимум по u в выражении $\frac{\partial}{\partial x_2}\varepsilon^0(t, x_1, x_2)u + \frac{u^2}{2}$. Вычисляем

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}\varepsilon^0(t, x_1, x_2)u + \frac{u^2}{2}\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x_2}\varepsilon^0(t, x_1, x_2) + u = 0 \quad \Rightarrow$$

$$U^0(\varepsilon^0) = -\frac{\partial}{\partial x_2}\varepsilon^0(t, x_1, x_2). \tag{2}$$

Определим максимум по v в выражении $\frac{\partial}{\partial x_2}\varepsilon^0(t, x_1, x_2)v - v^2$. Вычисляем

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}\varepsilon^0(t, x_1, x_2)v - v^2\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x_2}\varepsilon^0(t, x_1, x_2) - 2v = 0 \quad \Rightarrow$$

$$V^0(\varepsilon^0) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_2}\varepsilon^0(t, x_1, x_2). \tag{3}$$

Уравнение Беллмана–Айзекса получим, подставив выражения (2), (3) для $U^0(\varepsilon^0)$ и $V^0(\varepsilon^0)$ в (1)

$$\frac{\partial \varepsilon^0}{\partial t}+\frac{\partial \varepsilon^0}{\partial x_1}\cdot x_2+\frac{\partial \varepsilon^0}{\partial x_2}\overbrace{u}^{-\frac{\partial \varepsilon^0}{\partial x_2}}+\frac{\overbrace{u^2}^{\left(-\frac{\partial \varepsilon^0}{\partial x_2}\right)^2}}{2}+\frac{\partial \varepsilon^0}{\partial x_2}\overbrace{v}^{\frac{1}{2}\frac{\partial \varepsilon^0}{\partial x_2}}-\overbrace{v^2}^{\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \varepsilon^0}{\partial x_2}\right)^2}=0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \varepsilon^0}{\partial t}+\frac{\partial \varepsilon^0}{\partial x_1}\cdot x_2+\left(\frac{\partial \varepsilon^0}{\partial x_2}\right)^2\left(-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \varepsilon^0}{\partial t}+\frac{\partial \varepsilon^0}{\partial x_1}\cdot x_2-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial \varepsilon^0}{\partial x_2}\right)^2=0\,. \tag{4}$$

Граничные условия получаем из терминального слагаемого функционала

$$\varepsilon^0(T,x)=\Phi(x) \quad \Rightarrow \quad \varepsilon^0(1,x_1,x_2)=\frac{x_2^2}{2}.$$

Функцию Беллмана–Айзекса ищем в виде

$$\varepsilon^0(t,x_1,x_2)=c_{11}(t)x_1^2+2c_{12}(t)x_1x_2+c_{22}(t)x_2^2, \tag{5}$$

где $c_{ij}:[0,1]\to R^1$, $i,j=1,2$ – некоторые непрерывно дифференцируемые функции, подлежащие определению. Подставим выражение (6) в (4)

$$\overbrace{\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon^0(t,x_1,x_2)}^{\dot c_{11}(t)x_1^2+2\dot c_{12}(t)x_1x_2+\dot c_{22}(t)x_2^2}+\overbrace{\frac{\partial}{\partial x_1}\varepsilon^0(t,x_1,x_2)}^{2c_{11}(t)x_1+2c_{12}(t)x_2}\cdot x_2-\frac{1}{4}\left(\overbrace{\frac{\partial}{\partial x_2}\varepsilon^0(t,x_1,x_2)}^{2c_{12}(t)x_1+2c_{22}(t)x_2}\right)^2=0 \quad \Rightarrow$$

$$\dot c_{11}(t)x_1^2+2\dot c_{12}(t)x_1x_2+\dot c_{22}(t)x_2^2+2c_{11}(t)x_1x_2+2c_{12}(t)x_2^2-\frac{1}{4}\left(2c_{12}(t)x_1+2c_{22}(t)x_2\right)^2=0 \quad \Rightarrow$$

$$\left(\dot c_{11}-c_{12}^2\right)x_1^2+\left(2\dot c_{12}+2c_{11}-2c_{12}c_{22}\right)x_1x_2+\left(\dot c_{22}+2c_{12}-c_{22}^2\right)x_2^2=0. \tag{7}$$

Приравняем к нулю коэффициенты квадратичной формы в (7). В результате получим

$$\dot c_{11}-c_{12}^2=0, \quad 2\dot c_{12}+2c_{11}-2c_{12}c_{22}=0, \quad \dot c_{22}+2c_{12}-c_{22}^2=0\,. \tag{8}$$

Из граничных условий (3) находим

$$c_{11}(1)x_1^2+2c_{12}(1)x_1x_2+c_{22}(1)x_2^2=0\cdot x_1^2+0\cdot x_1x_2+\frac{1}{2}x_2^2 \quad \Rightarrow$$

$$c_{11}(1)=0, \quad c_{12}(1)=0, \quad c_{22}(1)=\frac{1}{2}. \tag{9}$$

Непосредственной подстановкой выявляем, что функции $c_{11}(t)=0$, $c_{12}(t)=0$, $t\in[0,1]$ удовлетворяют граничным условиям (9) и обращают первые два уравнения в (8) в тождества. Третье уравнение в (8) принимает вид

$$\dot{c}_{22} - c_{22}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dc_{22}}{c_{22}^2} = dt.$$

Интегрируя его с начальным условием $c_{22}(1) = \frac{1}{2}$ из (9), получим

$$c_{22}(t) = \frac{1}{3-t}.$$

Таким образом,

$$\varepsilon^0(t, x_1, x_2) = \overbrace{c_{11}(t)}^{0} x_1^2 + 2\overbrace{c_{12}(t)}^{0} x_1 x_2 + \overbrace{c_{22}(t)}^{\frac{1}{3-t}} x_2^2 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon^0(t, x_1, x_2) = \frac{1}{3-t} x_2^2. \tag{10}$$

2. Оптимальные позиционные стратегии находим, подставляя (10) в (2) и (3)

$$u^0[t, x_1, x_2] = -\frac{\partial}{\partial x_2} \overbrace{\varepsilon^0(t, x_1, x_2)}^{\frac{1}{3-t}x_2^2} = -\frac{2}{3-t} x_2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in R^2, \quad t \in [0,1],$$

$$v^0[t, x_1, x_2] = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} \overbrace{\varepsilon^0(t, x_1, x_2)}^{\frac{1}{3-t}x_2^2} = \frac{1}{3-t} x_2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in R^2, \quad t \in [0,1].$$

Найденные оптимальные управления $u^0[\cdot]$, $v^0[\cdot]$ являются допустимыми.

3. Подставим оптимальные управления $u^0[\cdot]$, $v^0[\cdot]$ в исходные дифференциальные уравнения движения

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \overbrace{u^0}^{-\frac{2}{3-t}x_2} + \overbrace{v^0}^{\frac{1}{3-t}x_2}, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{1}{3-t} x_2, \end{cases}$$

и проинтегрируем их на промежутке $[t_0, 1]$ с начальными условиями

$$x_1(t_0) = x_{10}, \quad x_2(t_0) = x_{20}.$$

В результате получим закон движения, отвечающий оптимальной паре $u^0[\cdot]$, $v^0[\cdot]$. Имеем

$$\begin{cases} x_1^0(t) = x_{20} \dfrac{(t-3)^2}{t_0 - 3} + x_{10} - \dfrac{1}{2} x_{20}(t_0 - 3), \\ x_2^0(t) = x_{20} \dfrac{t-3}{t_0 - 3}. \end{cases}$$

Реализация оптимальных управлений во времени имеет вид

$$u^0\left(t, x_1^0(t), x_2^0(t)\right) = -\frac{2}{3-t} \overbrace{x_2^0(t)}^{x_{20}\frac{t-3}{t_0-3}} = -x_{20} \frac{2(t-3)}{(t_0-3)(3-t)} = \frac{2x_{20}}{t_0 - 3}, \quad t \in [0,1],$$

$$v^0[t,x_1,x_2]=\frac{1}{3-t}\overbrace{x_2^0(t)}^{x_{20}\frac{t-3}{t_0-3}}=x_{20}\frac{(t-3)}{(t_0-3)(3-t)}=-\frac{x_{20}}{t_0-3},\quad t\in[0,1].$$

Вычисляем функционал на реализации оптимальной пары во времени (цену игры)

$$I\left[u^0[\cdot],v^0[\cdot]\right]=\int_{t_0}^{1}[\frac{1}{2}\overbrace{\left(u^0(\tau)\right)^2}^{\left(\frac{2x_{20}}{t_0-3}\right)^2}-\overbrace{\left(v^0(\tau)\right)^2}^{\left(-\frac{x_{20}}{t_0-3}\right)^2}]d\tau+\frac{1}{2}\overbrace{\left(x_2^0(1)\right)^2}^{\left(x_{20}\frac{t-3}{t_0-3}\Big|_{t=1}\right)^2}=\frac{x_{20}^2}{3-t_0}\quad\Rightarrow$$

$$I\left[u^0[\cdot],v^0[\cdot]\right]=\frac{x_{20}^2}{3-t_0}.$$

4. Вычисляем

$$\varepsilon^0(t_0,x_{10},x_{20})=\frac{1}{3-t}x_2^2\Big|_{\substack{t=t_0\\x_2=x_{20}}}=\frac{1}{3-t_0}x_{20}^2.$$

Равенство $I\left[u^0[\cdot],v^0[\cdot]\right]=\varepsilon^0(t_0,x_0)$ имеет место.

5. В качестве уклоняющихся стратегий возьмем тривиальные, т.е.

$$u^{ук}[\cdot]\equiv v^{ук}[\cdot]\equiv 0.$$

Пусть уклонист – второй игрок. Тогда

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2,\\ \dot{x}_2=\overbrace{u^0}^{-\frac{2}{3-t}x_2}+\overbrace{v^{ук}}^{\equiv 0},\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\dot{x}_1=x_2,\\ \dot{x}_2=\dfrac{2}{t-3}x_2,\end{cases}\quad\Rightarrow\quad x_2(t)=x_{20}\frac{(3-t)^2}{(3-t_0)^2}.$$

Закон изменения первой координаты фазового вектора определять не требуется, так как функционал и оптимальное управление первого игрока явно от него не зависят.

Реализация оптимального управления первого игрока во времени

$$u^0(t,x_1(t),x_2(t))=-\frac{2}{3-t}\overbrace{x_2(t)}^{x_{20}\frac{(3-t)^2}{(3-t_0)^2}}=-2\frac{x_{20}(3-t)}{(3-t_0)^2}.$$

Вычисляем величину функционала

$$I\left(u^0[\cdot],v^{ук}[\cdot]\right)=\int_{t_0}^{1}(\frac{1}{2}\overbrace{u^{02}(\tau)}^{\left(-2\frac{x_{20}(3-t)}{(3-t_0)^2}\right)^2}-\overbrace{v^{ук2}(\tau)}^{\equiv 0})d\tau+\frac{1}{2}\overbrace{\left(x_2(1)\right)^2}^{\left(x_{20}\frac{(3-t)^2}{(3-t_0)^2}\Big|_{t=1}\right)^2}=$$

$$=\frac{8x_{20}^2}{\left(-3+t_0\right)^4}-\frac{2\left(-1+t_0\right)\left[19+\left(-8+t_0\right)t_0\right]}{3\left(-3+t_0\right)^4}x_{20}^2.$$

Вычисляем разность

$$\Delta_{v^{ук}}I\left(t_0,x_{20}\right)=I\left(u^0[\cdot],v^{ук}[\cdot]\right)-I\left(u^0[\cdot],v^0[\cdot]\right)=$$

$$=x_{20}^2\left(\frac{8}{\left(-3+t_0\right)^4}-\frac{2\left(-1+t_0\right)\left[19+\left(-8+t_0\right)t_0\right]}{3\left(-3+t_0\right)^4}-\frac{1}{3-t_0}\right).$$

Величина x_{20} на знак полученного выражения не влияет. Полагаем $x_{20}=1$. Приведем график $\Delta_{v^{ук}}I\left(t_0,1\right)$ на промежутке $t_0\in[0,1]$ (**рис. 1**).

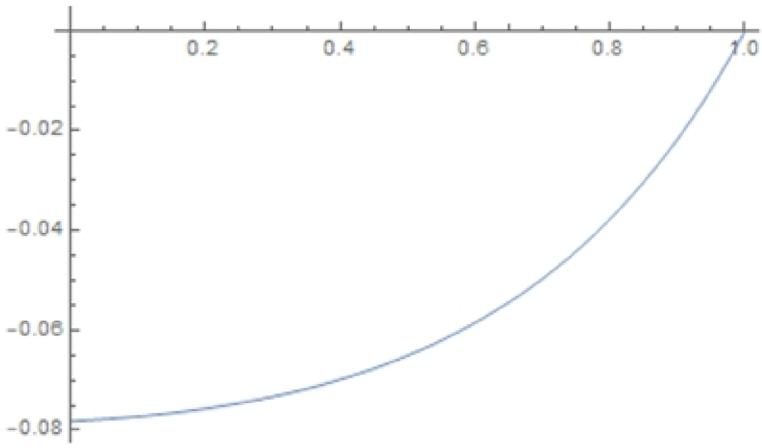

Рис. 1

Из графика видно, что

$$\Delta_{v^{ук}}I\left(t_0,1\right)\le 0,\quad t_0\in[0,1].$$

Неравенство $I\left(u^0[\cdot],v^{ук}[\cdot]\right)\le I\left(u^0[\cdot],v^0[\cdot]\right)$ выполнено.

Пусть уклонист – второй игрок. Тогда

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2,\\ \dot{x}_2=\underbrace{u^{ук}}_{\equiv 0}+\underbrace{v^0}_{\frac{1}{3-t}x_2},\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\dot{x}_1=x_2,\\ \dot{x}_2=-\dfrac{1}{t-3}x_2,\end{cases}\quad\Rightarrow\quad x_2(t)=x_{20}\frac{3-t_0}{(3-t)}.$$

Определение зависимости $x_1=x_1(t)$ здесь, как и выше, не требуется.

Реализация оптимального управления второго игрока во времени

$$v^0\left(t,x_1(t),x_2(t)\right)=\frac{1}{3-t}\underbrace{x_2(t)}_{x_{20}\frac{3-t_0}{(3-t)}}=x_{20}\frac{3-t_0}{(3-t)^2}.$$

Вычисляем величину функционала

$$I\left(u^{ук}[\cdot],v^0[\cdot]\right)=\int_{t_0}^{1}\Big[\frac{1}{2}\overbrace{u^{ук2}(\tau)}^{\equiv 0}-\overbrace{v^{02}(\tau)}^{\left(x_{20}\frac{3-t_0}{(3-t)^2}\right)^2}\Big]d\tau+\frac{1}{2}\overbrace{\left(x_2(1)\right)^2}^{\left(x_{20}\frac{3-t_0}{(3-t)}\Big|_{t=1}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{8}(3-t_0)^2\,x_{20}^2+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{8}+\frac{1}{(-3+t_0)^3}\right](3-t_0)^2\,x_{20}^2.$$

Вычисляем разность

$$\Delta_{u^{ук}}I(t_0,x_{20})=I\left(u^{ук}[\cdot],v^0[\cdot]\right)-I\left(u^0[\cdot],v^0[\cdot]\right)=$$

$$=x_{20}^2\left(-\frac{1}{3-t_0}+\frac{1}{8}(3-t_0)^2+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{8}+\frac{1}{(-3+t_0)^3}\right](3-t_0)^2\right).$$

Величина x_{20} на знак полученного выражения не влияет. Полагаем $x_{20}=1$. Приведем график $\Delta_{u^{ук}}I(t_0,1)$ на промежутке $t_0\in[0,1]$ (**рис. 2**).

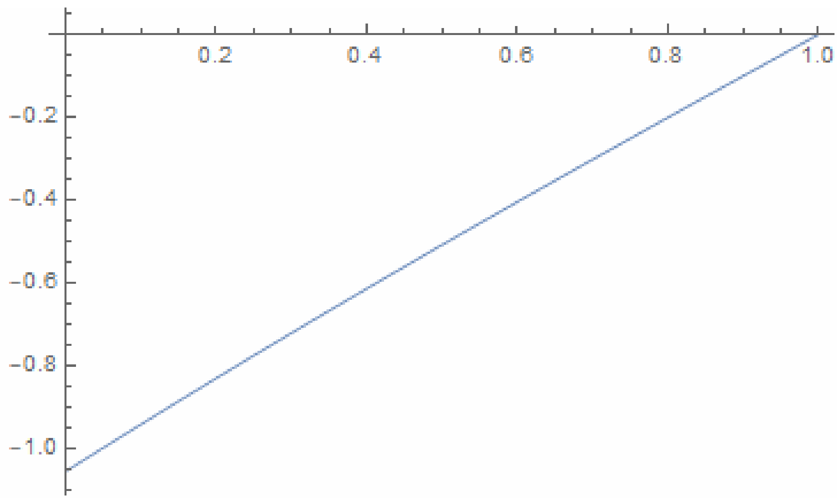

Рис. 2

Из графика видно, что

$$\Delta_{u^{ук}}I(t_0,1)\geq 0,\quad t_0\in[0,1].$$

Неравенство $I\left(u^{ук}[\cdot],v^0[\cdot]\right)-I\left(u^0[\cdot],v^0[\cdot]\right)\geq 0$ выполнено.

Двойное неравенство

$$I\left(u^0[\cdot],v^{ук}[\cdot]\right)\leq I\left(u^0[\cdot],v^0[\cdot]\right)\leq I\left(u^{ук}[\cdot],v^0[\cdot]\right)$$

установлено. ►

Пример 2. Материальная точка единичной массы, управляемая двумя игроками, движется по гладкой горизонтальной плоскости. Каждый игрок в любой момент времени может воздействовать на точку, прикладывая к ней силу, произвольную по направлению и ограниченную по величине (**рис. 3**).

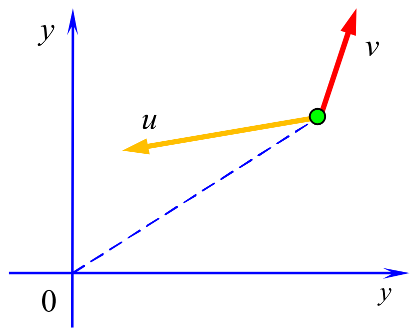

Рис. 3

Цель первого игрока состоит в минимизации в конечный момент времени геометрического расстояния от управляемой точки до начала координат, а второго игрока – максимизировать это расстояние. Предполагается, что в начальный момент времени точка отстоит от начала координат достаточно далеко, а ее начальная скорость невелика. Требуется выполнить следующие задания:

1) записать уравнения движения точки в нормализованном виде и функцию платы;

2) найти функцию Беллмана–Айзекса;

3) построить оптимальные стратегии игроков $u^0[\cdot], v^0[\cdot]$;

4) задаться числовыми данными и вычислить цену игры $I\left(u^0[\cdot], v^0[\cdot]\right)$;

5) проверить выполнение равенства $\varepsilon^0(t_0, x_0) = I\left(u^0[\cdot], v^0[\cdot]\right)$;

6) выбрать законы управления для уклонистов $\tilde{u}[\cdot], \tilde{v}[\cdot]$, убедиться в выполнении двойного неравенства $I\left(u^0[\cdot], \tilde{v}[\cdot]\right) \le I\left(u^0[\cdot], v^0[\cdot]\right) \le I\left(\tilde{u}[\cdot], v^0[\cdot]\right)$ и проиллюстрировать это неравенство графически;

7) построить графики изменения функции Беллмана-Айзекса вдоль движения для случаев, когда оба игрока управляют оптимально и когда один из игроков является уклонистом.

Решение. 1. Запишем дифференциальные уравнения движения точки

$$\begin{cases} \ddot{x} = u_1 + v_1, \\ \ddot{y} = u_2 + v_2, \end{cases}$$

где $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ – управляющие силы игроков, приложенные к точке. При этом

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in P = \left\{ u \in R^2 \middle| \|u\| \le \alpha \right\}, \qquad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in Q = \left\{ v \in R^2 \middle| \|v\| \le \beta \right\}.$$

Платой игры служит выражение

$$I\left[u[\cdot], v[\cdot]\right] = \sqrt{x^2(T) + y^2(T)},$$

где T – момент окончания игры. Заменой

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = \dot{x}, \quad x_4 = \dot{y}$$

нормализуем дифференциальные уравнения движения

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3, \\ \dot{x}_2 = x_4, \\ \dot{x}_3 = u_1 + v_1, \\ \dot{x}_4 = u_2 + v_2. \end{cases}$$

В новых переменных функция платы принимает вид

$$I\left[u[\cdot], v[\cdot]\right] = \sqrt{x_1^2(T) + x_2^2(T)}.$$

2. Запишем уравнение Беллмана-Айзекса для рассматриваемой игры

$$\frac{\partial \varepsilon^0}{\partial t} + \min_{u \in P} \max_{v \in Q} \left[\frac{\partial \varepsilon^0}{\partial x_1} x_3 + \frac{\partial \varepsilon^0}{\partial x_2} x_4 + \frac{\partial \varepsilon^0}{\partial x_3}(u_1 + v_1) + \frac{\partial \varepsilon^0}{\partial x_4}(u_2 + v_2) \right] = 0 \tag{11}$$

и граничные условия для функции Беллмана

$$\varepsilon^0(T, x_1, x_2, x_3, x_4) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \tag{12}$$

Очевидно, что последовательность операций $\min\limits_{u \in P}$ и $\max\limits_{v \in Q}$ допускает замену очередности. Преобразуем уравнение (11)

$$\frac{\partial \varepsilon^0}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon^0}{\partial x_1} x_3 + \frac{\partial \varepsilon^0}{\partial x_2} x_4 + \min_{u \in P} \left[\frac{\partial \varepsilon^0}{\partial x_3} u_1 + \frac{\partial \varepsilon^0}{\partial x_4} u_2 \right] + \max_{v \in Q} \left[\frac{\partial \varepsilon^0}{\partial x_3} v_1 + \frac{\partial \varepsilon^0}{\partial x_4} v_2 \right] = 0. \tag{13}$$

Предполагая, что $\left(\frac{\partial \varepsilon^0}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon^0}{\partial x_4} \right)^2 \ne 0$, выполним операции $\min\limits_{u \in P}$ и $\max\limits_{v \in Q}$ в левой части (3)

$$\frac{\partial \varepsilon^0}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon^0}{\partial x_1} x_3 + \frac{\partial \varepsilon^0}{\partial x_2} x_4 - \alpha \sqrt{\left(\frac{\partial \varepsilon^0}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon^0}{\partial x_4} \right)^2} + \beta \sqrt{\left(\frac{\partial \varepsilon^0}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon^0}{\partial x_4} \right)^2} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \varepsilon^0}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon^0}{\partial x_1} x_3 + \frac{\partial \varepsilon^0}{\partial x_2} x_4 + (\beta - \alpha) \sqrt{\left(\frac{\partial \varepsilon^0}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon^0}{\partial x_4} \right)^2} = 0. \tag{14}$$

При этом шаблон для оптимальных управлений имеет вид

$$u^0[t,x] = -\alpha R(t,x), \quad v^0[t,x] = \beta R(t,x), \tag{15}$$

где

$$R(t,x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial\varepsilon^0}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varepsilon^0}{\partial x_4}\right)^2}} \begin{pmatrix} \frac{\partial\varepsilon^0}{\partial x_3} \\ \frac{\partial\varepsilon^0}{\partial x_4} \end{pmatrix}.$$

В силу сделанного выше предположения о достаточной удаленности исходного положения управляемой точки от начала координат ее движение будет происходить в области, где

$$\left[x_1(t)+(T-t)x_3(t)\right]^2 + \left[x_2(t)+(T-t)x_4(t)\right]^2 \neq 0.$$

В этой области функцию ε^0 будем искать в виде

$$\varepsilon^0(t,x_1,x_2,x_3,x_4) = a\sqrt{\left[x_1+(T-t)x_3\right]^2 + \left[x_2+(T-t)x_4\right]^2} + b\frac{(T-t)^2}{2},$$

где $a,b \in R^1$ – постоянные, подлежащие определению. Из граничных условий (12) следует, что

$$\left[a\sqrt{\left[x_1+(T-t)x_3\right]^2 + \left[x_2+(T-t)x_4\right]^2} + b\frac{(T-t)^2}{2}\right]_{t=T} = \sqrt{x_1^2+x_2^2} \quad \Rightarrow \quad a=1.$$

Тогда

$$\varepsilon^0(t,x_1,x_2,x_3,x_4) = \sqrt{\left[x_1+(T-t)x_3\right]^2 + \left[x_2+(T-t)x_4\right]^2} + b\frac{(T-t)^2}{2}.$$

Для определения параметра b вычисляем частные производные

$$\frac{\partial\varepsilon^0}{\partial t} = -\frac{x_1x_3 + x_2x_4 + (T-t)\left(x_3^2+x_4^2\right)}{\sqrt{\left[x_1+(T-t)x_3)\right]^2 + \left[x_2+(T-t)x_4\right]^2}} + b(t-T),$$

$$\frac{\partial\varepsilon^0}{\partial x_1} = \frac{x_1 + x_3(T-t)}{\sqrt{\left[x_1+(T-t)x_3)\right]^2 + \left[x_2+(T-t)x_4\right]^2}},$$

$$\frac{\partial\varepsilon^0}{\partial x_2} = \frac{x_2 + x_4(T-t)}{\sqrt{\left[x_1+(T-t)x_3)\right]^2 + \left[x_2+(T-t)x_4\right]^2}},$$

$$\frac{\partial\varepsilon^0}{\partial x_3} = \frac{\left[x_1 + x_3(T-t)\right](T-t)}{\sqrt{\left[x_1+(T-t)x_3)\right]^2 + \left[x_2+(T-t)x_4\right]^2}},$$

$$\frac{\partial\varepsilon^0}{\partial x_4}=\frac{\left[x_2+x_4(T-t)\right](T-t)}{\sqrt{\left[x_1+(T-t)x_3)\right]^2+\left[x_2+(T-t)x_4\right]^2}}.$$

Подставим найденные частные производные функции ε^0 в уравнение (14). После несложных преобразований в результате получим

$$-b(T-t)+(\beta-\alpha)(T-t)=0 \quad\Rightarrow\quad b=\beta-\alpha.$$

Таким образом,

$$\varepsilon^0(t,x_1,x_2,x_3,x_4)=\sqrt{\left[x_1+(T-t)x_3)\right]^2+\left[x_2+(T-t)x_4\right]^2}+(\beta-\alpha)\frac{(T-t)^2}{2}. \tag{16}$$

3. Для определения оптимальных управлений вычисляем

$$R(t,x_1,x_2,x_3,x_4)=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial\varepsilon^0}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial\varepsilon^0}{\partial x_4}\right)^2}}\begin{pmatrix}\frac{\partial\varepsilon^0}{\partial x_3}\\ \frac{\partial\varepsilon^0}{\partial x_4}\end{pmatrix}\overset{(16)}{=}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\left[x_1+(T-t)x_3)\right]^2+\left[x_2+(T-t)x_4\right]^2}}\begin{pmatrix}x_1+(T-t)x_3\\ x_2+(T-t)x_4\end{pmatrix}.$$

Тогда из (15) выводим

$$u^0[t,x]=-\frac{\alpha}{\sqrt{\left[x_1+(T-t)x_3)\right]^2+\left[x_2+(T-t)x_4\right]^2}}\begin{pmatrix}x_1+(T-t)x_3\\ x_2+(T-t)x_4\end{pmatrix},$$

$$v^0[t,x]=\frac{\beta}{\sqrt{\left[x_1+(T-t)x_3)\right]^2+\left[x_2+(T-t)x_4\right]^2}}\begin{pmatrix}x_1+(T-t)x_3\\ x_2+(T-t)x_4\end{pmatrix}.$$

4. Принимаем, что

$$\alpha=1,\quad \beta=\frac{1}{2},\quad t_0=0,\begin{pmatrix}x_{10}\\ x_{20}\\ x_{30}\\ x_{40}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.25\\ 0.25\\ -0.1\\ 0.05\end{pmatrix}. \tag{17}$$

Вычисляем цену игры в принятой начальной позиции $\{t_0,x_0\}$. Для этого интегрируем систему

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_3,\\ \dot{x}_2=x_4,\\ \dot{x}_3=u_1^0[t,x]+v_1^0[t,x],\\ \dot{x}_4=u_2^0[t,x]+v_2^0[t,x]\end{cases}$$

с начальными условиями

$$x(t_0)=\begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \\ x_{40} \end{pmatrix}.$$

Пусть $x^0(\cdot)$ – ее решение. Тогда

$$I\left[u^0[\cdot],v^0[\cdot]\right]=\left\|\left\{x\left(T,t_0,x_0,u^0[\cdot],v^0[\cdot]\right)\right\}_2\right\|=\sqrt{\left(x_1^0(T)\right)^2+\left(x_2^0(T)\right)^2}=0.085410\ldots$$

5. По формуле (16) в силу (17) находим

$$\varepsilon^0(t_0,x_{10},x_{20},x_{30},x_{40})=0.085410\ldots.$$

Таким образом, имеет место равенство

$$\varepsilon^0(t_0,x_{10},x_{20},x_{30},x_{40})=I\left[u^0[\cdot],v^0[\cdot]\right].$$

6. Законы управления для уклонистов выбираем в виде

$$\tilde{u}[\cdot]=-\alpha\begin{pmatrix} \dfrac{x_1}{\sqrt{(x_1)^2+(x_2)^2}} \\ \dfrac{x_2}{\sqrt{(x_1)^2+(x_2)^2}} \end{pmatrix}, \quad \tilde{v}[\cdot]=\beta\begin{pmatrix} \dfrac{x_1}{\sqrt{(x_1)^2+(x_2)^2}} \\ \dfrac{x_2}{\sqrt{(x_1)^2+(x_2)^2}} \end{pmatrix}.$$

Вычисляем

$$\left\|\left\{x\left(T,t_0,x_0,u^0[\cdot],\tilde{v}[\cdot]\right)\right\}_2\right\|=0.081275\ldots, \quad \left\|\left\{x\left(T,t_0,x_0,u^0[\cdot],\tilde{v}[\cdot]\right)\right\}_2\right\|=0.172122\ldots.$$

Установлено, что имеет место двойное неравенство

$$\begin{aligned} I\left[u^0[\cdot],\tilde{v}[\cdot]\right]&=\left\|\left\{x\left(T,t_0,x_0,u^0[\cdot],\tilde{v}[\cdot]\right)\right\}_2\right\|=0.081275\ldots< \\ <0.0854102\ldots&=\left\|\left\{x\left(T,t_0,x_0,u^0[\cdot],v^0[\cdot]\right)\right\}_2\right\|=I\left[u^0[\cdot],v^0[\cdot]\right]< \\ <0.172122\ldots&=\left\|\left\{x\left(T,t_0,x_0,\tilde{u}[\cdot],v^0[\cdot]\right)\right\}_2\right\|=I\left[\tilde{u}[\cdot],v^0[\cdot]\right]. \end{aligned} \tag{18}$$

На **рис. 4** приведена графическая иллюстрация двойного неравенства (18).

7. Приведем совместный график (см. **рис. 5**) изменения функции

$$\varepsilon^0\left(t,x_1(t),x_2(t),x_3(t),x_4(t)\right)$$

для случаев оптимальных стратегий игроков и единоличного уклонения одного из игроков от оптимальной стратегии.

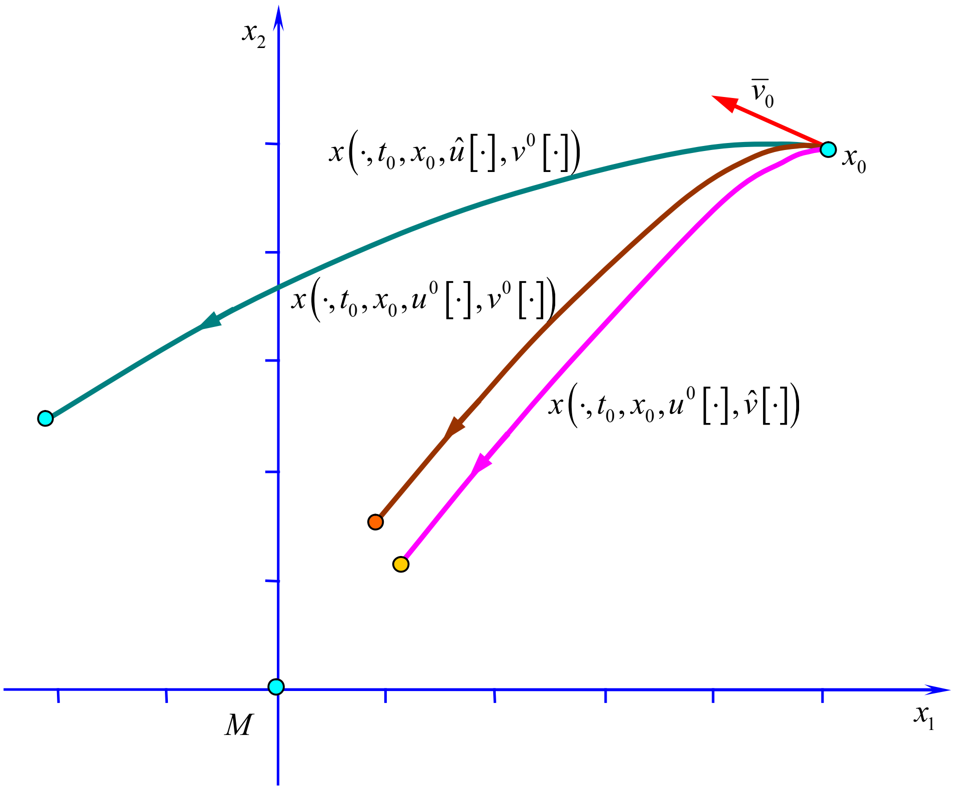
x_2
$\bar{v}_0$
x_0
$x(\cdot, t_0, x_0, \hat{u}[\cdot], v^0[\cdot])$
$x(\cdot, t_0, x_0, u^0[\cdot], v^0[\cdot])$
$x(\cdot, t_0, x_0, u^0[\cdot], \hat{v}[\cdot])$
M
x_1

Рис. 4

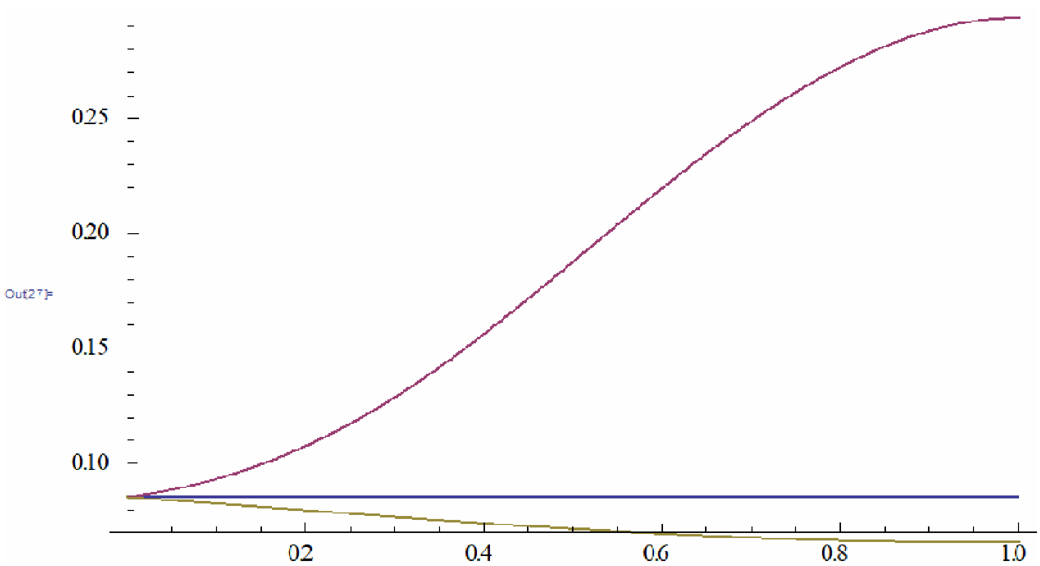
0.25
0.20
Out[27]=
0.15
0.10
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

Рис. 5

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1]. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.

[2]. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 432 с.

[3]. *Беллман Р.* Процессы регулирования с адаптацией. М.: Наука, 1964. 360 с.

[4]. *Болтянский В.Г.* Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969. 408 с.

[5]. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988. 549 с.

[6]. *Габасов Р.Ф., Кириллова Ф.М.* Принцип максимума в теории оптимального управления. Минск: Наука и техника, 1974. 272 с.

[7]. *Гельфанд И.М., Фомин С.В.* Вариационное исчисление. М.: ФИЗМАТГИЗ, 1961. 228 с.

[8]. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 741 с.

[9]. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 544 с.

[10]. *Коша А.* Вариационное исчисление. М.: Высшая школа, 1983. 279 с.

[11]. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.

[12]. *Красовский Н.Н.* Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.

[13]. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. – М.: Наука, 1985. – 520 с.

[14]. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.

[15]. *Кротов В.Ф.* Основы теории оптимального управления. М.: Высшая школа, 1990. 429 с.

[16]. *Лутманов С.В.* Курс лекций по методам оптимизации: учеб. пособие. М.; Ижевск: Изд-во РХД, 2001. 363 с.

[17]. *Лутманов С.В., Аюпов В.В., Гамилова Л.В.* Задачи оптимизации в конечномерных пространствах: учеб. пособие. Пермь, 2007. 160 с.

[18]. *Лутманов С.В.* Вариационное исчисление и теория оптимального управления в примерах и упражнениях: учеб. пособие. Пермь, 2010. 200 с.

[19]. *Лутманов С.В., Остапенко Е.Н.* Теоретическая и прикладная механика. Введение в аналитическую динамику: учеб. пособие. Пермь, 2022. 98 с. URL: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/uchebnie-posobiya/Lutmanov-Ostapenko-Teoreticheskaya-I-Prikladnaya-Mekhanika-Vvedenie-V-Analiticheskuyu-Dinamiku.pdf (дата обращения 10.08.2022).

[20]. *Лутманов С.В.* Элементы выпуклого анализа и методы оптимизации: учеб. пособие. Пермь, 2018, на электронном носителе. 180 с. URL: https://elis.psu.ru/ident/978-5-7944-3114-8 (дата обращения 10.06.2022).

[21]. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976. 392 с.

[22]. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1983. 332 с.

[23]. *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980. 320 с.

[24]. *Субботин А.И., Ченцов А.Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.

[25]. *Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В.* Курс методов оптимизации. М.: Наука, 1986. 328 с.

[26]. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 223 с.

Учебное издание

Лутманов Сергей Викторович
Остапенко Елена Николаевна

Оптимальное управление динамическими объектами

Учебное пособие

Редактор *Н. И. Стрекаловская*
Корректор *А. В. Цветкова*
Компьютерная верстка и дизайн *Е. Н. Остапенко, С. В. Лутманов*

Объем данных 1,62 Мб
Подписано к использованию 02.11.2022

Размещено в открытом доступе
на сайте www.psu.ru
в разделе НАУКА / Электронные публикации
и в электронной мультимедийной библиотеке ELiS

Издательский центр
Пермского государственного
национального исследовательского университета
614990, г. Пермь, ГСП, ул. Букирева, 15