

**ПЕРМСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ**

ПЕРМСКИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ НАУЧНЫЕ ЧТЕНИЯ

**Сборник статей по материалам
VIII Всероссийской конференции,
посвященной памяти профессоров
Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкого
и Д. В. Любимова**



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД
Уральского отделения Российской академии наук» – филиал Федерального государственного
бюджетного учреждения науки Пермского федерального исследовательского центра
Уральского отделения Российской академии наук

ПЕРМСКИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ НАУЧНЫЕ ЧТЕНИЯ

**Сборник статей по материалам
VIII Всероссийской конференции,
посвященной памяти профессоров
Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкого и Д. В. Любимова**

(г. Пермь, ПГНИУ, 5–7 октября 2022 г.)



Пермь 2022

УДК 532
ББК 22.25
П275

Пермские гидродинамические научные чтения [Электронный ресурс]: сборник статей по материалам VIII Всероссийской конференции, посвященной памяти профессоров Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкого и Д. В. Любимова / отв. ред. Т. П. Любимова; Пермский государственный национальный исследовательский университет. – Электронные данные. – Пермь, 2022. – 58 Мб; 537 с. – Режим доступа: <http://www.psu.ru/files/docs/science/books/sborniki/permskie-gidrodinamicheskie-nauchnyechteniya-2022.pdf>. – Заглавие с экрана.

ISBN 978-5-7944-3912-0

Представлены статьи по материалам VIII Всероссийской конференции, проходившей на базе Пермского государственного национального исследовательского университета 5 – 7 октября 2022 г. Конференция посвящена памяти руководителей Пермской гидродинамической научной школы – ведущей научной школы Российской Федерации – профессоров Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкого и Д. В. Любимова.

Тематика сборника охватывает широкий спектр актуальных исследований в области физической гидродинамики, перспективных материалов и технологий, физики мягких конденсированных сред.

Издание предназначено для научных работников, аспирантов и студентов естественнонаучных специальностей вузов.

УДК 532
ББК 22.25

*Издается по решению ученого совета физического факультета
Пермского государственного национального исследовательского университета*

Рецензенты

- Рыжков И. И.** – д. ф.-м. н., ведущий научный сотрудник Института вычислительного моделирования СО РАН;
- Федюшкин А. И.** – к. ф.-м. н., старший научный сотрудник лаборатории механики сложных жидкостей Института проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН

ISBN 978-5-7944-3912-0

© ПГНИУ, 2022

Организаторы

Пермский государственный национальный исследовательский университет
Институт механики сплошных сред УрО РАН

Научный комитет

Председатель конференции

д.ф.-м.н., профессор, заслуженный деятель науки РФ Т. П. Любимова, Пермь

Члены научного комитета

д.ф.-м.н.	Д. А. Брацун, Пермь
д.ф.-м.н.	Е. А. Демехин, Краснодар
д.ф.-м.н.	В. А. Демин, Пермь
д.ф.-м.н.	М. Ю. Жуков, Ростов на Дону
д.ф.-м.н.	О. А. Кабов, Новосибирск
д.ф.-м.н.	В. В. Козлов, Новосибирск
д.ф.-м.н.	В. Г. Козлов, Пермь
д.ф.-м.н.	М. Д. Кривилев, Ижевск
д.г.н.	А. П. Лепихин, Пермь
д.ф.-м.н.	В. Э. Малышкин, Новосибирск
д.ф.-м.н.	А. И. Мизев, Пермь
проф.	А. А. Непомнящий, Хайфа, Израиль
д.ф.-м.н.	Н. В. Никитин, Москва
д.ф.-м.н.	Е. Н. Пелиновский, Нижний Новгород
д.ф.-м.н.	А. В. Перминов, Пермь
чл.-корр. РАН	В. В. Пухначев, Новосибирск
д.ф.-м.н.	Н. Н. Смирнов, Москва
д.ф.-м.н.	Б. Л. Смородин, Пермь
д.ф.-м.н.	П. Г. Фрик, Пермь
д.ф.-м.н.	В. Ш. Шагапов, Уфа

Локальный организационный комитет

Т. П. Любимова	Я. Н. Паршакова
Л. С. Клименко	М. И. Петухов
Н. А. Зубова	

СОДЕРЖАНИЕ

Пленарные лекции

<i>Макридин З. В., Хе А. К., Сибгатуллин И. Н., Субботин С. В., Шмакова Н. Д., Козлов В. Г., Ерманык Е. В.</i> Структура волновых аттракторов в линейном и нелинейном режимах.....	11
<i>Кокорина А. В., Слюняев А. В.</i> Численное моделирование нелинейной эволюции морских волн: статистические свойства и «волны-убийцы».....	15
<i>Пелиновский Е. Н., Талипова Т. Г.</i> Безотражательное распространение волн как механизм появления волн большой амплитуды.....	20
<i>Филиппов А. Н.</i> Диссимметрия кинетических коэффициентов в ячейечной модели заряженного пористого слоя (мембраны).....	26

Материалы секционных докладов

<i>Агеева М. В., Демин В. А.</i> Численное моделирование процесса высокотемпературного насыщения пористых материалов парофазным методом.....	35
<i>Алабужев А. А.</i> Влияние свойств поверхности на трансляционные колебания цилиндрической капли в жидкости конечного объема.....	39
<i>Алабян А. М., Панченко Е. Д.</i> Феномен отрицательной турбулентной вязкости в приливных устьях рек.....	43
<i>Алексеев М. С., Демехин Е. А.</i> Гидродинамика и электростатика наноканалов постоянного и переменного сечения.....	50
<i>Алексеев М. С., Пономарёв Р. Р., Шелистов В. С., Демёхин Е. А.</i> Модель искусственной электрической мембраны для допредельных и предельных токов.....	56
<i>Бекежанова В. Б., Шефер И. А.</i> О влиянии толщины жидкого слоя на устойчивость плоскопараллельного течения в двухфазной системе с испарением.....	61
<i>Белобородов Ф. С., Шарифулин А. Н., Любимова Т. П.</i> Границы существования аномального конвективного течения воздуха в квадратной полости с движущейся стенкой.....	66
<i>Богомолов А. В., Лепихин А. П., Лучников А. А., Ляхин Ю. С.</i> Современные средства гидрометрических измерений для решения актуальных задач обеспечения устойчивого водопользования.....	73
<i>Борзенко Е. И., Фролов О. Ю., Хегай Е. И., Шрагер Г. Р.</i> Формирование потока вязкой жидкости во входном узле вертикального канала при его заполнении.....	78
<i>Брацун Д. А.</i> Спонтанное перераспределение плотности в многокомпонентных реагирующих растворах: механизмы и структуры.....	86
<i>Бурмашева Н. В., Просвиряков Е. Ю.</i> Новые классы точных решений для описания различных классов сдвиговых течений.....	89

Бухаров Д. Н., Кучерик А. О., Аракелян С. М. Моделирование конвективного течения жидкой фазы коллоидного раствора при формировании систем нанокластеров благородных металлов.....	95
Бушуева А. В., Мелехина У. А., Полежаев Д. А. Экспериментальное исследование устойчивости колеблющейся границы между смешивающимися жидкостями в вертикальной ячейке Хеле-Шоу.....	100
Верезуб Н. А., Простомолотов А. И. Неустойчивость течения расплава кремния во вращающемся магнитном поле.....	103
Вертгейм И. И., Шарифулин В. А., Шарифулин А. Н. Диссипативные структуры конвекции Марангони в тонком слое жидкости с решеткой локализованных и непрерывно распределенных источников и стоков тепла.....	113
Власова О. А. Взаимодействие легкого сферического тела в жидкости с осциллирующей границей.....	119
Водолазская И. В. Моделирование влияния физических свойств жидкости и подложки на направление течений в капле, испаряющейся из микрочайки.....	124
Володин И. В., Алабужев А. А. Применение метода решеточных уравнений Больцмана с использованием MRT-оператора для моделирования полости с подвижной верхней стенкой.....	131
Габышев Д. Н., Сзакалл М., Щербаков Д. В., Федорец А. А., Дьячков С. М. Колебания траекторий жидких гидрометеоров на терминальной скорости.....	138
Гаричева Ю. В., Заякина И. А., Любимова Т. П., Иванцов А. О. Численное моделирование падения жидкой капли на поверхность другой жидкости.....	143
Гончарова О. Н. Режимы конвекции в двухслойной системе с испарением при разных типах тепловой нагрузки на подложке.....	147
Горулева Л. С., Просвиряков Е. Ю. Новые классы точных решений уравнений Навье–Стокса с учетом диссипации энергии.....	152
Груздь С. А., Мосин А. И., Кривилев М. Д. Дендритный рост на межфазной границе при селективном лазерном плавлении стали 316L.....	155
Демин В. А., Демина Т. В., Марышев Б. С. О механизме транспорта примесей в газообразной разреженной среде.....	162
Демин В. А., Петухов М. И., Пономарев Р. С. Ионный пограничный слой вблизи поверхности кристалла ниобата лития в процессе протонирования.....	169
Денисова М. О., Костарев К. Г. Колебательные режимы концентрационной конвекции в капле, поглощающей ПАВ из его однородного раствора.....	173
Диденкулова Е. Г., Диденкулова И. И. Волны-убийцы в Мировом океане в период с 2005 по 2021 год: статистика и данные реанализа.....	177
Дьякова В. В., Полежаев Д. А. Результаты изучения устойчивости границы между легкой сыпучей средой и жидкостью во вращающемся горизонтальном цилиндре.....	182
Евграфова А. В., Сухановский А. Н. Влияние ветра на теплообмен в условиях городской среды.....	185

<i>Зайкова А. А., Картавых Н. Н.</i> Электроконвективная неустойчивость слабопроводящей жидкости при антисимметричном внешнем сигнале.....	189
<i>Звягинцева Е. А., Кудымова Е. М., Романец В. Я., Козлов В. Г.</i> Экспериментальное изучение течений вокруг сферы, движущейся во вращающейся полости с жидкостью.....	195
<i>Зиновьев А. Т., Вагнер А. А., Дьяченко А. В., Коломейцев А. А., Марусин К. В.</i> Наблюдение и моделирование русловых процессов на участке реки обь у г. Барнаула (в районе городского водозабора).....	200
<i>Казанцев П. Н., Краузин П. В.</i> Развитие стандартного подхода определения порога термомагнитной конвекции в шаровой полости.....	203
<i>Карпунин И. Э., Козлов В. Г.</i> Граница раздела жидкостей при осцилляциях в радиальном щелевом канале.....	208
<i>Князев Д. В.</i> О функциональных связях гидродинамических полей стационарного осесимметричного течения вязкой жидкости.....	213
<i>Козлов В. Г.</i> Осцилляционная динамика многофазных систем в щелевых зазорах	224
<i>Козлов В. Г., Петухова М. А., Козлов Н. В.</i> Поведение двухжидкостной системы во вращающейся ячейке Хеле-Шоу в зависимости от частоты либраций.....	228
<i>Козлов Н. В., Мизёв А. И.</i> Экспериментальное изучение ультразвукового разделения водно-масляной эмульсии.....	233
<i>Колчанов Н. В., Колчанова Е. А.</i> Исследование перераспределения примеси NaCl в потоке воды сквозь пористую среду в вертикальной круглой трубе.....	239
<i>Колчанов Н. В., Сидоров А. С.</i> Экспериментальное определение эффективной тепловыделяющей части волокнистой пористой среды.....	243
<i>Колчанова Е. А., Колчанов Н. В.</i> Влияние прослоек воздуха на возникновение конвекции в многослойной пористой системе с внутренним тепловыделением.....	247
<i>Колчанова Е. А., Колчанов Н. В.</i> Конвективная устойчивость течения Пуазейля в двухслойной пористой среде с закупоркой.....	251
<i>Коновалов В. В., Любимова Т. П.</i> Влияние акустических вибраций на взаимодействие газового пузыря и твердой частицы в жидкости.....	254
<i>Косков М. А., Пшеничников А. Ф.</i> Конвекция магнитной жидкости в контуре. Влияние параметров задачи.....	262
<i>Кочурин Е. А.</i> Моделирование капиллярной турбулентности в одномерной плоско-симметричной геометрии.....	268
<i>Кузнецова Ю. Л.</i> Изменение спектра растворимых аэрозольных частиц.....	273
<i>Кучинский М. О., Козлов М. В.</i> Применение тепловых карт для картирования кавитационной активности в сонохимическом реакторе.....	277
<i>Ласковец Е. В.</i> Построение точного решения, описывающего течения в системе «жидкость-жидкость-газ» в горизонтальном канале.....	281
<i>Лепихин А. П., Лучников А. И., Фрик П. Г., Ляхин Ю. С.</i> Опыт практической реализации Лагранжевого подхода к измерению скоростей течений в поверхностных водных объектах с использованием БПЛА.....	286

Лысакова Е. И., Минаков А. В. Исследование влияния добавок наночастиц на течения буровых растворов и транспорт шлама в кольцевых каналах.....	294
Любимова Т. П., Лепихин А. П., Богомолов А. В., Ляхин Ю. С., Паршакова Я. Н. Особенности формирования вертикальной неоднородности водных масс в крупных водохранилищах и ее влияние на устойчивость водопользования.....	300
Любимова Т. П., Лепихин А. П., Паршакова Я. Н., Богомолов А. В., Ляхин Ю. С., Исахов А. Исследование влияния величины скорости течения реки на характер вертикальной неоднородности водных масс в зоне повышенной минерализации воды в придонной области.....	307
Любимова Т. П., Муратов И. Д., Шубенков И. С. Тепловая конвекция в наклонном слое пористой среды, насыщенной жидкостью, при вертикальном градиенте температуры.....	313
Мамыкин А. Д., Лосев Г. Л. Электромагнитное управление процессом кристаллизации цилиндрических слитков.....	321
Марышев Б. С., Клименко Л. С. Горизонтальная фильтрация смеси через замкнутую область пористой среды пульсационным потоком с учетом закупорки...	327
Мингалев С. В., Худяков Д. С., Галицын О. В., Усанин М. В. Численное исследование работы авиамодельного турбореактивного двигателя КЖ-66.....	339
Мошева Е. А. Экспериментальное исследование процесса смешения потоков в микроканале Y-типа в условиях развития конвекции диффузионного слоя.....	344
Мошева Е. А., Мизев А. И. Устойчивость двухслойной смешивающейся системы реагирующих жидкостей в наклонной ячейке Хеле-Шоу.....	349
Некрасов О. О., Смородин Б. Л. Колебательная неустойчивость и стоячие электроконвективные волны в слабопроводящей жидкости.....	355
Никулина С. А., Перминов А. В., Любимова Т. П. Влияние вибраций на конвективные режимы псевдопластической жидкости в замкнутой полости в невесомости.....	359
Озерных В. С., Колесниченко И. В. Вихревое течение электропроводящей жидкости в цилиндрической ячейке со сферической частицей.....	364
Пермякова Э. В., Самойлова А. Е. Конвективные структуры длинноволновой неустойчивости Марангони в нагретой жидкой пленке.....	368
Полудницин А. Н., Шарифулин А. Н. Динамика гистерезисных переходов конвективного течения в наклоняемом квадрате.....	374
Понькин Е. И. Характеристическая задача Коши стандартного вида для описания истечения политропного газа в вакуум с косою стенкой.....	382
Попова Е. Н., Васильев А. Ю., Сухановский А. Н., Фрик П. Г. Динамика протяженного теплоизолятора, погруженного в слой жидкости с наложенным вертикальным перепадом температур.....	387
Прокопьев С. А., Любимова Т. П. Дерево квадрантов и метод пристрелки при линейном анализе устойчивости равновесия конвективных процессов.....	393

Рыбкин К. А., Кучинский М. О., Любимова Т. П., Фатталов О. О. Особенности ультразвукового воздействия при флотации кварца.....	396
Рысин К. Ю. Инерционные волны во вращающемся вокруг горизонтальной оси плоском слое.....	400
Сагитов Р. В., Колчанова Е. А. Бифуркации и устойчивость стационарных коротковолновых режимов конвекции на фоне вертикального течения в воздушно-пористом тепловыделяющем слое.....	404
Садиллов Е. С. Совместное влияние электрического поля и нормальных вибраций на устойчивость границы раздела между тяжелой и легкой жидкостями.....	410
Сидоров А. С. Периодические конвективные процессы в магнитной жидкости в вертикальных каналах кругового сечения.....	415
Слюняев А. В., Степанянц Ю. А. Нелинейные свойства модулированных волн на поверхности воды под ледяной пластиной.....	419
Сомов С. А., Иванов А. С. Экспериментальное исследование конвекции во влажном воздухе в присутствии фазовых переходов водяного пара.....	423
Субботин С. В., Карпунин И. Э., Курышева Д. В., Козлов В. Г. Влияние поля силы тяжести на устойчивость осциллирующей границы раздела несмешивающихся жидкостей в коническом тонком слое.....	429
Сухановский А. Н., Васильев А. Ю., Попова Е. Н. Режимы течений в лабораторной модели общей циркуляции атмосферы.....	434
Тиунов А. А. Гидродинамические аспекты последствий проведения крупномасштабных русловых работ.....	439
Торохова С. В., Костарев К. Г. Контракция неводных растворов кислот и спиртов.....	446
Уточкин В. Ю., Некрасов С. П., Брацун Д. А. Хемоконвекция в двухслойной системе несмешивающихся реагирующих жидкостей.....	450
Фатталов О. О., Любимова Т. П., Рыбкин К. А. Динамика частиц и агломератов кварца в жидкости под действием ультразвука.....	453
Фаттахова И. А., Щербань М. Г., Кучинский М. О., Козлов М. В., Любимова Т. П. Влияние концентраций ПАВ в водных растворах на процесс генерации микропузырьков.....	457
Филимонов С. А., Гаврилов А. А., Дектерев А. А., Литвинцев К. Ю. Моделирование вынужденного движения пластины в замкнутом объеме в развитом конвективном слое.....	462
Франц Е. А., Демехин Е. А. Электрофорез сильно заряженной диэлектрической наночастицы.....	469
Хабин М. Р., Марышев Б. С. Возникновение концентрационной конвекции в длинной прямоугольной области пористой среды.....	473
Ханукаева Д. Ю. Определение гидродинамической проницаемости мембраны при фильтрации микрополярной жидкости.....	478

Хомутов Н. А., Семёнова А. Е., Хан Е. А., Ди Мартино А., Пискунов М. В. Экспериментальное исследование управляемого разрушения микроструктуры разбавленного полимерного раствора на микрокапли в воздухе.....	488
Хохрякова К. А., Колесниченко Е. В., Краков М. С. Стационарные волны на поверхности жидкости, возникающие при обтекании точечного препятствия.....	496
Хохрякова К. А., Мизева И. А., Шмыров А. В. Применение метода капиллярных волн для определения поверхностного натяжения магнитных и немагнитных жидкостей.....	502
Черепанов И. Н., Смородин Б. Л. Конвекция бидисперсной коллоидной суспензии.....	507
Шварц К. Г., Шварц Ю. А. Исследование устойчивости адвективного течения во вращающемся слое проводящей жидкости, помещенной в постоянное однородное магнитное поле.....	511
Шелистов В. С., Попов В. А., Алексеев М. С., Демёхин Е. А. Математическая модель суперконцентрации заряда на пересечении нано- и микроканалов.....	520
Ширяева М. А., Субботин С. В. Экспериментальное исследование нелинейных режимов аттракторов инерционных волн во вращающемся цилиндре с неосесимметричными торцами.....	524
Шмакова Н. Д., Флёр Я.-Б., Вуазен Б., Соммерия Ж. Влияние эффектов вязкости на геометрическую фокусировку внутренних волн.....	529
Юнусов И. О., Поликарпов А. Ф. Исследование влияния толщины слоя жидкости на процесс испарения методом молекулярной динамики.....	534

Пленарные лекции

Структура волновых аттракторов в линейном и нелинейном режимах

З. В. Макридин^а, А. К. Хе^а, И. Н. Сибгатуллин^б, С. В. Субботин^с,
Н. Д. Шмакова^а, В. Г. Козлов^с, Е. В. Ерманыук^а

^а Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
630090, Новосибирск, пр. Лаврентьева, 15
email: ermanyuk@hydro.nsc.ru

^б Институт океанологии им. П. П. Ширшова РАН,
117997, Москва, Нахимовский пр., 36с

^с Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет,
614990, Пермь, ул. Сибирская, 24

В работе рассмотрены две задачи динамики волновых аттракторов. Построено решение линейной задачи для волнового аттрактора в идеальной стратифицированной жидкости в приближении Буссинеска в двумерной замкнутой трапецевидной области. Возмущение в систему вносится движением вертикальной торцевой стенки. Наибольший интерес в данной задаче представляет связь между спектром возмущения и спектром волновых движений. Предложен общий алгоритм построения решения, рассмотрены два конкретных типа возмущения, моделирующие используемые в эксперименте волнопродукторы. Выполнено численное моделирование с помощью метода спектральных элементов для случаев малой вязкости жидкости. Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, какие особенности невязкого решения "наследуются" вязким решением при систематическом увеличении вязкости. Полученные результаты могут быть использованы в дальнейшем для построения нелинейной теории и оценки порогов амплитуды возмущения, при которых в системе возникает неустойчивость.

Выполнено экспериментальное исследование структуры волновых аттракторов в сферическом слое вращающейся жидкости при больших амплитудах круговых колебаний внутреннего ядра. Основное внимание уделено исследованию условий возникновения азимутальных структур. В случае, когда частота колебаний внутреннего ядра системы близка к верхней границе области существования инерционных волн наблюдаемые в системе азимутальные структуры могут быть интерпретированы как неустойчивость слоя Стюартсона. В диапазоне частот и амплитуд возмущения, для которых имеет место генерация интенсивных инерционных волн в системе наблюдается потеря устойчивости по механизму триадного резонанса. При этом наблюдаемые моды вторичных инерционных волн имеют азимутальную структуру качественно близкую к структуре крупномасштабных волн в конвективной оболочке Солнца.

Ключевые слова: геофизическая гидродинамика; внутренние и инерционные волны; гидродинамическая неустойчивость; волновые аттракторы

Structure of wave attractors in linear and non-linear regimes

Z. V. Makridin^a, A. K. Khe^a, I. N. Sibgatullin^b, S. V. Subbotin^c,
N. D. Shmakova^a, V. G. Kozlov^c, E. V. Ermanyuk^a

^a Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, 15 Lavrenyev Ave., 630090, Novosibirsk
email: ermanyuk@hydro.nsc.ru

^b Shirshov Institute of Oceanology RAS, 36 Nakhimovskiy Pr., 117997, Moscow

^c Perm State Humanitarian Pedagogical University, 24 Sibirskaya St., 614990, Perm

In this paper two problems of a wave attractor dynamic are considered. We present a solution of a linear problem for a wave attractor in an ideal stratified fluid within the Boussinesq approximation in a two-dimensional closed trapezoidal domain. Perturbations are introduced via a prescribed motion of the vertical wall. A relationship between the spectrum of perturbations and the spectrum of wave motions is a problem of particular interest. A general method for constructing a solution is proposed, and two specific types of perturbation are considered that simulate the wave generators used in previous experimental studies. Numerical simulation is performed using a spectral element method considering a fluid with low viscosity. Obtained results allow to draw some conclusions concerning the features of the viscous solution inherited from the inviscid case. Future research will be focused on development of weakly nonlinear theory.

An experimental study of wave attractors in a spherical layer of a rotating fluid is performed for large amplitudes of circular oscillations of an inner core. We mainly focused on the experimental conditions when the azimuthal structures appear. When the oscillation frequency of the inner core of the system is close to the upper limit of existence of inertial waves, the observed azimuthal structures can be interpreted as the Stewartson layer instability. In a range of frequencies and amplitudes of perturbations where the generation of intense inertial waves takes place, the instability occurs via triadic resonance. In this case, the observed modes of secondary inertial waves have an azimuthal structure qualitatively close to the structure of large-scale waves in the convective shell of the Sun.

Keywords: geophysical hydrodynamics; internal and inertial waves; hydrodynamic instability; wave attractors

1. Введение

Фундаментальные задачи гео- и астрофизической гидродинамики во многом строятся на исследовании вращающихся и стратифицированных жидкостей. Благодаря действию силы Кориолиса во вращающихся системах (силы тяжести в стратифицированной по плотности жидкости), существуют инерционные (внутренние) волны. Для этих волн характерно анизотропическое дисперсионное соотношение. После отражения волновых лучей от жесткой границы сохраняется угол относительно оси вращения (инерционные волны) или вектора поля силы тяжести (внутренние волны). При наличии сложной топографии дна благодаря многократным отражениям волны возможна концентрация энергии в волновой аттрактор. Можно отметить, что линейные и нелинейные режимы аттракторов хорошо изучены в двумерной постановке [1–4]. В

тоже время инерционные волны по своей природе трехмерны. В работах, посвященных вращающимся жидким сферическим слоям, обычно обсуждается меридиональная структура аттракторов [5], при этом пренебрегается их азимутальная структура и возможное влияние направления воздействия по отношению к глобальному вращению. Последние вопросы исследованы при численном исследовании случая аттракторов во вращающейся кольцевой полости с наклонным дном [6]. В настоящей работе описываются результаты исследования трехмерных волновых аттракторов в линейном и нелинейном режимах в геометрической постановке, близкой к [6], а также во вращающейся сфере с колеблющимся в экваториальной плоскости ядром.

2. Постановка задачи

Геометрия задач схематично представлена на рисунке. В первом случае (рисунок (а)) кювета представляет собой кольцевой слой, образованный двумя цилиндрическими поверхностями радиусами $R_1 = 19$ мм, $R_2 = 57$ мм и высотой $H = 57$ мм. Один из торцов полости представляет собой усеченный конус с образующей, наклоненной под углом 30° к основанию конуса. Другой торец образован плоским кольцевым диском, выполняющим функцию генератора инерционных волн. Рабочими жидкостями являются водные растворы глицерина кинематической вязкости $\nu = 2 - 7$ сСт. Скорость вращения во всех экспериментах составляет $\Omega = 62.8$ рад/с. Во втором случае (рисунок (б)) рассматривается вращающийся сферический слой размерами $R_1 = 18$ мм и $R_2 = 36$ мм, при этом источником волн является внутренняя сфера, совершающая круговые колебания в экваториальной плоскости с амплитудой b и частотой Ω_{osc} (в системе отсчета полости). Рассматриваются случаи как опережающих $\sigma = \Omega_{osc}/\Omega > 0$, так и отстающих $\sigma < 0$ колебаний.

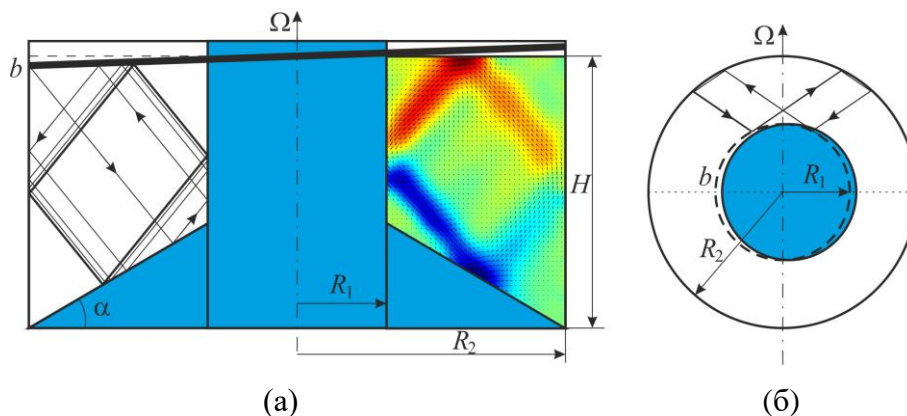


Рисунок. Постановка задачи: вращающийся кольцевой слой с коническим дном и нутрирующей крышкой (а) при частоте $\sigma = -1.27$ (слева стрелками показана лучевая фокусировка инерционной волны в аттрактор, справа – мгновенное поле скорости); вращающаяся сферическая полость с колеблющимся ядром (б)

3. Результаты

Осциллирующее движение диска (сферы) относительно полости приводит к возбуждению неосесимметричных инерционных волн, при этом в зависимости от направления колебаний ($\sigma > 0$, $\sigma < 0$) возникают различные волновые паттерны. Так, при отрицательных нутациях диска при частоте $\sigma = -1.27$ (рисунок (а)) волновые лучи сконцентрированы в волновом аттракторе (1, 1), имеющего в плоскости (r, z) форму

параллелограмма. Результаты наблюдений хорошо согласуются с лучевой моделью: волна, генерируемая краем диска, после серии отражений от границ фокусируется на замкнутую траекторию. Важно отметить, что при положительных нутациях диска пространственно-волновая картина отличается, фокусировка волн не наблюдается, а интенсивность пульсационного течения на порядок ниже. Это качественно согласуется с результатами прямого численного моделирования инерционных волн во вращающемся кольцевом слое с наклонным дном [6], а также результатами наблюдений волновых режимов во вращающемся сферической полости с колеблющимся ядром [7, 8]. Ранее экспериментально важность знака нутации для нормальных инерционных мод была обнаружена во вращающемся круговом цилиндре [9]. С увеличением кинетической энергии возмущений аттрактор испытывает неустойчивость по сценарию триадного резонанса.

Исследования полей азимутальной скорости показывают, что фокусировка волн в аттрактор сопровождается возникновением интенсивного среднего азимутального течения, которое испытывает неустойчивость при развитии триадного резонанса. Неустойчивость проявляется в потере азимутальной симметрии течения и формировании системы осреднённых вихревых структур. Последние вытянуты вдоль оси вращения и дрейфуют в направлении противоположном вращению всей системы.

Список литературы

1. *Maas L. R. M., Benielli D., Sommeria J., Lam F.-P. A.* Observation of an internal wave attractor in a confined, stably stratified fluid // *Nature*. 1997. Vol. 388. P. 557–561. DOI: 10.1038/41509
2. *Ogilvie G. I.* Wave attractors and the asymptotic dissipation rate of tidal disturbances // *Journal of Fluid Mechanics*. 2005. Vol. 543. P. 19–44. DOI: 10.1017/S0022112005006580
3. *Brouzet C., Sibgatullin I., Scolan H., Ermanyuk E., Dauxois T.* Internal wave attractors examined using laboratory experiments and 3D numerical simulations // *Journal of Fluid Mechanics*. 2016. Vol. 793. P. 109–131. DOI: 10.1017/jfm.2016.119
4. *Manders A. M. M., Maas L. R. M.* On the three-dimensional structure of the inertial wave field in a rectangular basin with one sloping boundary // *Fluid Dynamics Research*. 2004. Vol. 35. P. 1–21.
5. *Rieutord M., Georgeot B., Valdetaro L.* Inertial waves in a rotating spherical shell: attractors and asymptotic spectrum // *Journal of Fluid Mechanics*. 2001. Vol. 435. P. 103–144. DOI: 10.1017/S0022112001003718
6. *Sibgatullin I., Ermanyuk E., Xiulin X., Maas L., Dauxois T.* Direct numerical simulation of three-dimensional inertial wave attractors // 2017 Ivannikov ISPRAS Open Conference (ISPRAS). Moscow, Russia, 2017. P. 137–143. DOI: 10.1109/ISPRAS.2017.00029.
7. *Subbotin S., Shiryayeva M.* On the linear and non-linear fluid response to the circular forcing in a rotating spherical shell // *Physics of Fluids*. 2021. Vol. 33. N. 6. 066603. DOI: 10.1063/5.0050403
8. *Subbotin S. V., Shmakova N. D., Ermanyuk E. V., Kozlov V. G.* Stewartson layer instability and triadic resonances in rotating sphere with oscillating inner // *Physics of Fluids*. 2022. Vol. 34. N. 6. 064103. DOI: 10.1063/5.0090492
9. *McEwan A. D.* Inertial oscillations in a rotating fluid cylinder // *Journal of Fluid Mechanics*. 1970. Vol. 40. P. 603–640. DOI: 10.1017/S0022112070000344

Численное моделирование нелинейной эволюции морских волн: статистические свойства и «волны-убийцы»

А. В. Кокорина^a, А. В. Слюняев^{a,b,c}

^a Институт прикладной физики РАН, 603950, Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46
email: slunyaev@ipfran.ru

^b Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
603155, Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, 25/12

^c Тихоокеанский океанологический институт им. В. И. Ильичева ДВО РАН,
690041, Владивосток, ул. Балтийская, 43

Выполнено прямое численное моделирование консервативных уравнений для гравитационных волн на поверхности воды в предположении потенциальных движений для планарной геометрии (коллинеарные волны) и в полном случае (волны с заданным угловым спектром). Использование быстрого псевдоспектрального кода с ограниченной степенью нелинейности позволяет рассчитать относительно большие ансамбли нерегулярных волн, моделирующих ветровое волнение в море. Эффекты обрушения купируются введением слабой гипервязкости, практически не приводящей к потерям энергии в системе. Результаты моделирования использованы для определения моментальных спектральных и статистических характеристик волн (асимметрия, эксцесс, распределение вероятностей высот, параметр модуляционной неустойчивости) и их эволюции. Выделены условия реалистичных морских спектров (достаточно интенсивные волны и достаточно узкий угловой спектр), когда наблюдается сильное отклонение от предположений случайного гауссового процесса, при этом вероятность высоких волн значительно увеличивается.

Ключевые слова: гравитационные волны; морские волны; прямое численное моделирование; статистика; волны-убийцы

Numerical simulation of the nonlinear evolution of sea waves: statistical properties and rogue waves

A. V. Kokorina^a, A. V. Slunyaev^{a,b,c}

^a Institute of Applied Physics RAS, 46 Ulyanov St., 603950, Nizhny Novgorod
email: slunyaev@ipfran.ru

^b National Research University Higher School of Economics,
25/12 Bolshaya Pecherskaya St., 603155, Nizhny Novgorod

^c V. I. Il'ichev Pacific Oceanological Institute FEB RAS,
43 Baltiyskaya St., 690041, Vladivostok

Direct numerical simulations of conservative equations for gravity waves on the water surface for potential flows are performed in planar geometry (collinear

waves) and in the full case (waves with a given angular spectrum). The use of a fast pseudospectral code with a controlled degree of nonlinearity makes it possible to calculate relatively large ensembles of irregular waves simulating wind waves in the sea. The wave breaking effect is regularized by the introduction of a weak hyperviscosity, which practically does not lead to energy losses in the system. The simulation results are used to obtain the instantaneous spectral and statistical characteristics of waves (asymmetry, kurtosis, wave height probability distribution, Benjamin – Feir Index) and their evolution. The conditions for realistic oceanic spectra (sufficiently intense waves and relatively narrow angular spectrum) are identified, when there is a strong deviation from the assumptions of a random Gaussian process; then the probability of high waves increases significantly.

Keywords: gravity waves; sea waves; direct numerical simulation; statistics; rogue waves

В последнее десятилетие проблема адекватного вероятностного описания нелинейных морских волн, включая редкие экстремальные события, рассматривается на основе прямого численного моделирования полных (почти) уравнений гидродинамики быстрыми кодами (см., например, в [1]). Нами для расчета эволюции нерегулярных волновых полей с заданным в начальный момент спектром используется псевдоспектральный код с контролируемым порядком нелинейности High Order Spectral Method [2]. Рассматривались условия большой и умеренной глубины, коллинеарных и неколлинеарных волн [2–5]. Также сопоставлялись результаты расчета с учетом разной степени нелинейности кода [5]; большая часть расчетов выполнена для учета не выше 4-волновых взаимодействий, что позволяет описывать эффект нелинейной самомодуляции. Начальные условия для расчетов задавались удовлетворяющими модельному спектру JONSWAP с заданными параметрами пиковой частоты T_p , значительной высоты волн H_s , пиковатостью γ и шириной углового спектра Θ (для неколлинеарных волн, с использованием функции распределения по углам \cos^2). Параметры выбирались таким образом, чтобы нелинейность была по возможности сильной, но случаи обрушения волн (ведущие к неустойчивости численной схемы) были редкими. Устойчивость схемы при обрушениях обеспечивалась введением искусственной вязкости на очень мелких масштабах, изменяющей решение очень слабо [6]. За сотни периодов расчета волновых полей размером 50 на 50 волн потери механической энергии не превышала доли процента. Стандартная длительность расчета волн с периодом $T_p = 10$ с составляла 1200 с, что соответствует обычной ситуации океанографических данных для открытого океана. Дополнительные 200 с использовались для подготовительной стадии медленного включения нелинейности, позволяющей перейти от линейного решения в виде случайной реализации синусоидальных волн к начальному условию для нелинейных уравнений. Пример поверхности волн после 1400 с расчета приведен на рис. 1а.

Данные эволюции смещения поверхности использованы для детального анализа процессов, происходящих в спектре волн, и их вероятностных характеристик. Эти данные позволяют вычислять не только моментальные характеристики пространственных спектров, но и эволюцию частотного спектра, а также строить полный пространственно-временной спектр волн (две пространственные и одна временная частота), как показано на рис. 1б. На нем горизонтальные оси соответствуют нормированному волновому числу и направлению движения (угол $\theta = 0$ отвечает за доминирующее направление), а вертикальная ось – нормированной частоте.

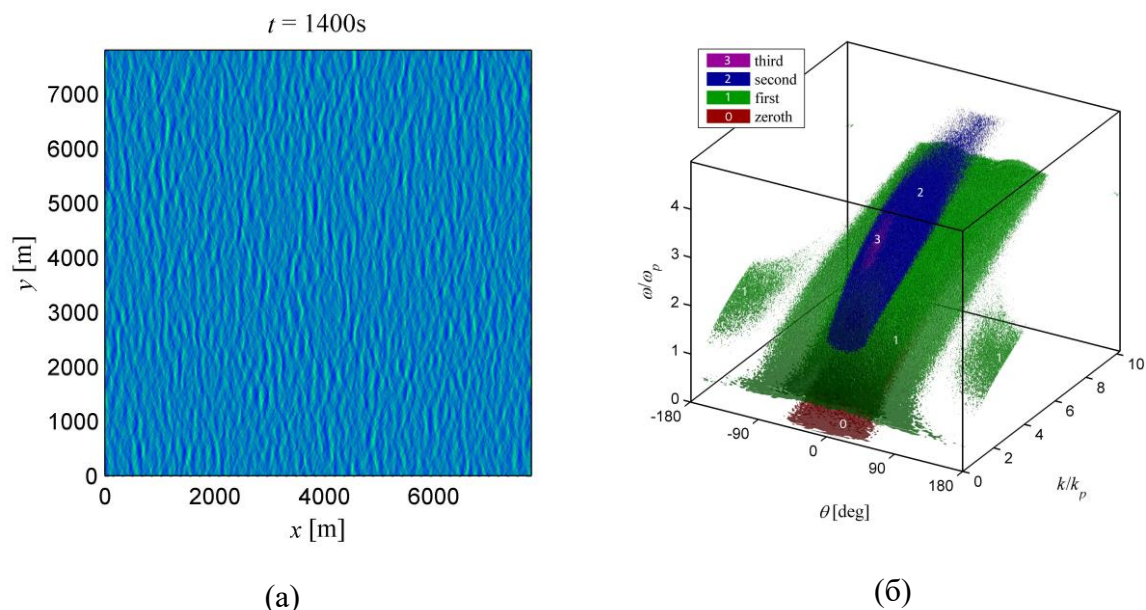


Рис. 1. Вид на поверхность сверху после 1400 с расчета (а) и пространственно-временной спектр (б). Параметры условий: $T_p = 10$ с, $H_s = 7$ м, $\gamma = 3$, $\Theta = 62^\circ$. На панели (б) отмечены области, соответствующие гармоникам 1 – 3, а также разностной гармонике (0)

Распределение энергии на таком графике лишь примерно соответствует линейному дисперсионному соотношению, что ведет к ряду интересных эффектов.

В частности, на рис. 1б разными цветами отмечены области, занимаемые разными нелинейными гармониками волн. Эти области в большинстве рассмотренных случаев волн на глубокой воде достаточно хорошо разнесены, так что фильтрация в трехмерном пространстве Фурье позволяет выделять по отдельности волновые поля, соответствующие разным гармоникам. Этот подход использован для непосредственного расчета спектров и статистических моментов смещения поверхности (асимметрии λ_3 , эксцесса λ_4), определяемых разными гармониками. В частности, рассмотрена эволюция полных моментов (посчитанных по исходным полям смещения поверхности) и моментов, связанных только с первой гармоникой (динамические моменты), определяющих отклонение динамики волн от нормального гауссового процесса [7].

На рис. 2а приведен пример «классической» ситуации, когда динамический эксцесс очень мал (здесь он даже немного меньше нуля из-за конечности выборки), а полный эксцесс обусловлен только нерезонансными нелинейными взаимодействиями. Именно такая ситуация предполагается кинетической теорией, используемой во всех существующих оперативных моделях прогноза волн (расчет уравнений для спектральной энергии). На рис. 2б показана «аномальная» ситуация, когда динамический эксцесс большой, что свидетельствует о существенно негауссовой динамике волн. В работе [8] из спектральных уравнений Захарова были получены оценки для эксцесса в предположении слабой негауссовости. Соответствующие им значения построены синими пунктирными линиями на рис. 2. Видно, что во второй ситуации в интервале времени в несколько десятков периодов после начала расчета данные численного моделирования значительно превышают оценку эксцесса. Именно такие режимы соответствуют условиям наблюдения аномально высоких волн «волн-убийц». Эти режимы соответствуют достаточно большой средней интенсивности волн

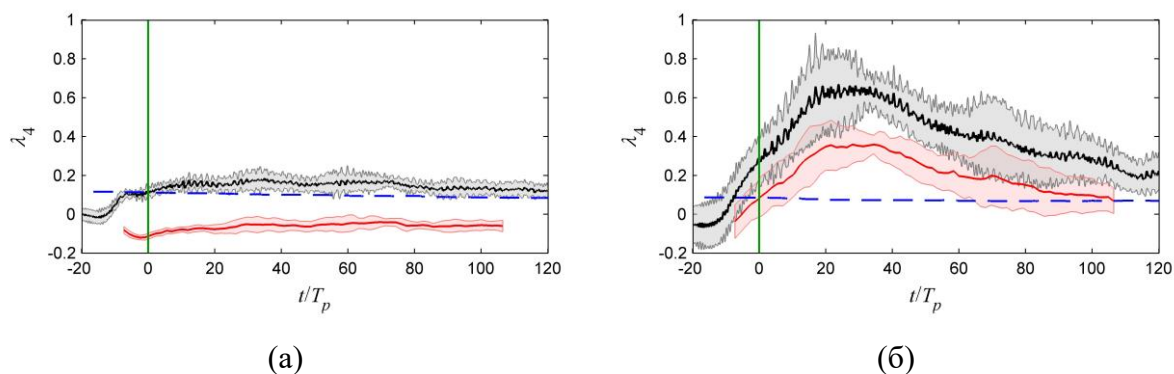


Рис. 2. Эволюция эксцесса по данным расчета волн схожей интенсивности с широким угловым спектром $\Theta = 62^\circ$ (а) и относительно узким угловым спектром $\Theta = 12^\circ$ (б). Верхние значения соответствуют полным эксцессам, нижние – определенным для первой гармоники. Горизонтальные пунктирные линии соответствуют значениям из теории [8]

(крутизне $k_p H_s$) и относительно узким угловым спектрам. Возникновение «волн-убийц» нами связывается с появлением в полях нерегулярных волн долгоживущих нелинейных групп, проявляющих свойства солитонов огибающей [7, 9–11].

Исследование вкладов различных волновых компонент в формирование распределений вероятности выполняется при поддержке Лаборатории нелинейной гидрофизики и природных катастроф, грант Министерства науки и высшего образования РФ, соглашение № 075-15-2022-1127 от 01.07.2022 г. Остальные исследования выполнены при поддержке гранта РНФ 22-17-00153.

Список литературы

1. Chalikov D. V. Numerical modeling of sea waves. Springer, 2016. 330 p. DOI: 10.1007/978-3-319-32916-1
2. West B. J., Brueckner K. A., Janda R. S., Milder D. M., Milton R. L. A new numerical method for surface hydrodynamics // Journal of Geophysical Research: Oceans. 1987. Vol. 92. P. 11803–11824. DOI: 10.1029/JC092iC11p11803
3. Sergeeva A., Slunyaev A. Rogue waves, rogue events and extreme wave kinematics in spatio-temporal fields of simulated sea states // Natural Hazards and Earth System Sciences. 2013. Vol. 13 (7). P. 1759–1771. DOI: 10.5194/nhess-13-1759-2013
4. Slunyaev A., Sergeeva A., Didenkulova I. Rogue events in spatiotemporal numerical simulations of unidirectional waves in basins of different depth // Natural Hazards. 2016. Vol. 84. P. 549–565. DOI: 10.1007/s11069-016-2430-x
5. Слюняев А. В., Кокорина А. В. Численное моделирование «волн-убийц» на морской поверхности в рамках потенциальных уравнений Эйлера // Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана. 2020. Т. 56. № 2. С. 210–223. DOI: 10.31857/S0002351520020121
6. Slunyaev A., Kokorina A. Account of occasional wave breaking in numerical simulations of irregular water waves in the focus of the rogue wave problem // Water Waves. 2020. Vol. 2. P. 243–262. DOI: 10.1007/s42286-019-00014-9
7. Slunyaev A. V. Effects of coherent dynamics of stochastic deep-water waves // Physical Review E. 2020. Vol. 101. 062214. DOI: 10.1103/PhysRevE.101.062214
8. Mori N., Janssen P. A. E. M. On kurtosis and occurrence probability of freak waves // Journal of Physical Oceanography. 2006. Vol. 36. P. 1471–1483. DOI: 10.1175/JPO2922.1

9. *Slunyaev A. V., Kokorina A. V.* Soliton groups as the reason for extreme statistics of unidirectional sea waves // *Journal of Ocean Engineering and Marine Energy*. 2017. Vol. 3. P. 395–408. DOI: 10.1007/s40722-017-0099-1
10. *Slunyaev A. V.* Persistence of hydrodynamic envelope solitons: detection and rogue wave occurrence // *Physics of Fluids*. 2021. Vol. 33 (3). 036606. DOI: 10.1063/5.0042232
11. *Слюняев А. В., Пелиновский Д. Е., Пелиновский Е. Н.* Морские волны-убийцы: наблюдения, физика и математика // *Успехи физических наук*. Направлена в печать.

Безотражательное распространение волн как механизм появления волн большой амплитуды

Е. Н. Пелиновский, Т. Г. Талипова

Институт прикладной физики РАН, 603950, Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46
email: pelinovsky@appl.sci-nnov.ru

Исследование механизмов появления волн-убийц в океане активно проводится в последние годы. При этом, как правило, среда предполагается однородной, и изучаются в основном механизмы пространственной временной фокусировки и различные механизмы неустойчивости. В настоящей работе показывается, что волны большой амплитуды могут появляться в неоднородных средах, хотя обычно считается, что неоднородность среды приводит к отражению и рассеянию волновой энергии, уменьшая амплитуду волн. В рамках одномерной теории мелкой воды (канальное приближение) показано существование счетного множества донных профилей, на которых волна распространяется без отражения, а, следовательно, может сильно усиливаться вблизи берега.

Ключевые слова: волны-убийцы; теория мелкой воды; бегущие волны

Anomalous amplification of waves in the basin of variable depth

E. N. Pelinovsky, T. G. Talipova

Institute of Applied Physics RAS, 46 Ulyanov St., 603950, Nizhny Novgorod
email: pelinovsky@appl.sci-nnov.ru

The study of the mechanisms of freak wave appearance in the ocean has been actively carried out in recent years. In this case, as a rule, the medium is assumed to be homogeneous, and the mechanisms of spatial-temporal focusing and various instability mechanisms are mainly studied. In this paper, we show that large-amplitude waves can appear in the inhomogeneous media, although the medium inhomogeneity is usually believed to lead to the wave energy reflection and scattering, thus reducing the wave amplitude. Within the framework of the one-dimensional theory of shallow water (channel approximation), the existence of a countable set of bottom profiles is shown, on which the wave propagates without reflection, and, therefore, can be greatly enhanced near the coast.

Keywords: freak waves; shallow water theory; traveling waves

1. Введение

Распространение волн в неоднородных средах обычно сопровождается потерей волновой энергии вследствие эффектов отражения, рассеяния и дифракции. Только в случае плавного изменения характеристик среды можно пренебречь этими эффектами

и использовать закон сохранения потока энергии для нахождения амплитуды волны, что и делается в рамках метода ВКБ или геометрической акустики [1, 2]. В других случаях из-за рассеяния и отражения волна не сможет переносить энергию на большие расстояния. Возникает вопрос, а есть ли такие характеристики неоднородной среды, при которых волна не отражается и может распространяться на большие расстояния без потери энергии? Первый пример такого нетривиального поведения волны в рамках одномерного линейного волнового уравнения был построен в [3], а затем был обобщен на случай слабо нелинейных волн в так называемом самосогласованном канале [4]. Наиболее заметное усиление волны происходило над донным профилем $h \sim x^{4/3}$, где h – глубина бассейна и x – координата, отсчитываемая от уреза. Существует еще ряд донных профилей, на которых волна не отражается, однако она диспергирует и, следовательно, ее амплитуда не будет такой уж большой.

В настоящей работе мы дадим обзор методов получения имеющихся классов безотражательных донных профилей, допускающих существование бегущих волн в бассейне переменной глубины. Такие решения особенно важны для проблемы «волн-убийц», возникающих в океане на короткое время [5–7].

2. Математическая модель

Изучим распространение волн в канале переменного сечения, изображенном на рис. 1. В рамках линейной теории мелкой воды распространение волны в таком канале описывается волновым уравнением [2, 6]

$$B(x) \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - g \frac{\partial}{\partial x} \left(B(x) h(x) \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = 0, \quad (1)$$

где $\eta(x, t)$ – смещение свободной поверхности жидкости в канале. Уравнение (1) является исходным для анализа бегущих волн над безотражательными донными профилями.

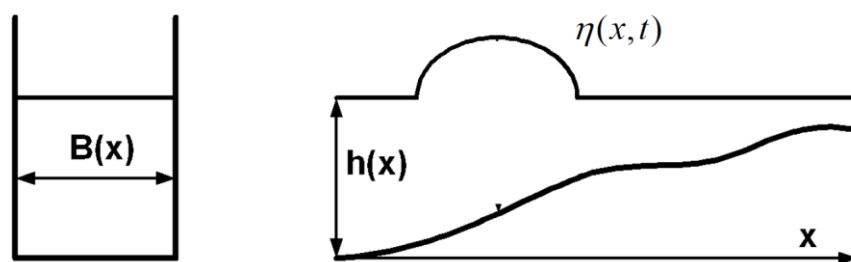


Рис. 1. Геометрия канала: слева – поперечное сечение, справа – продольный разрез

3. Сведение к уравнению Клейна-Гордона

Первый метод нахождения бегущих волн в неоднородных средах связан с трансформационной техникой сведения исходного уравнения к уравнению с постоянными коэффициентами [8–10]. Для этого сделаем следующую замену в уравнении (1)

$$\eta(x, t) = A(x) F[t, \tau(x)], \quad (2)$$

которое тогда преобразуется в уравнение Клейна-Гордона с переменными коэффициентами

$$AB \left[\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - gh \left(\frac{d\tau}{dx} \right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2} \right] - \left[\frac{d}{dx} \left(ghAB \frac{d\tau}{dx} \right) + ghB \frac{dA}{dx} \frac{d\tau}{dx} \right] \frac{\partial F}{\partial \tau} - \frac{d}{dx} \left[ghB \frac{dA}{dx} \right] F = 0. \quad (3)$$

Поскольку в уравнении (3) содержатся три неизвестные функции, то мы можем наложить три условия для их однозначного определения. По аналогии с [10] выберем эти условия в виде следующих трех уравнений

$$gh \left(\frac{d\tau}{dx} \right)^2 = 1, \quad (4)$$

$$\frac{d}{dx} \left(ghAB \frac{d\tau}{dx} \right) + ghB \frac{dA}{dx} \frac{d\tau}{dx} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{d}{dx} \left[ghB \frac{dA}{dx} \right] = PAB, \quad (6)$$

где P – произвольная константа. При выполнении этих условий уравнение (3) сводится к уравнению Клейна-Гордона с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2} - PF = 0. \quad (7)$$

Решение этого уравнения распадается на сумму волн, распространяющихся в противоположных направлениях, следовательно, каждая волна не испытывает отражения. Таким образом, условия (4) – (6) определяют набор безотражательных донных профилей. Первое из них (4) дает нам время движения волны в неоднородной среде

$$\tau = \int_{x_0}^x \frac{dy}{\sqrt{gh(y)}}. \quad (8)$$

Второе уравнение (5) определяет связь между амплитудой волны и скоростью ее распространения (глубиной бассейна)

$$A(x) = \text{const}(gh)^{-1/4} B^{-1/2}. \quad (9)$$

Уравнение (9) эквивалентно закону Грина, вытекающему из закона сохранения потока энергии в канале с медленно меняющимися параметрами. Подчеркнем, что здесь мы не накладываем условие на медленность изменения глубины бассейна. Наконец, третье уравнение (6) есть искомое уравнение для нахождения донных профилей

$$\frac{d}{dx} \left[ghB \frac{d}{dx} (h^{-1/4} B^{-1/2}) \right] = PB^{1/2} h^{-1/4}. \quad (10)$$

В это уравнение входят как глубина канала, так и его ширина, так что набор безотражательных профилей оказывается достаточно большим. В частном случае канала постоянной ширины уравнение (10) сводится к

$$\frac{d^2}{dx^2} h^{3/4} = -\frac{3P}{gh^{1/4}}, \quad (11)$$

и если $P = 0$, то безотражательный профиль есть $h \sim x^{4/3}$, упомянутый во Введении.

4. Сведение к уравнению Эйлера–Дарбу–Пуассона

Существование бегущих волн без отражения в рамках уравнений с постоянными коэффициентами является очевидным. Тем не менее, они могут существовать и в рамках уравнений с переменными коэффициентами, которые не сводятся к уравнениям с постоянными коэффициентами. Таким уравнением является уравнение Эйлера–Дарбу–Пуассона [11–14]

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2} - \frac{2m}{\tau} \frac{\partial F}{\partial \tau} = 0 \quad (12)$$

для целочисленных значений m . Его решение выражается конечной суммой

$$F(t, \tau) = \frac{1}{\tau^{2m-1}} \sum_{i=0}^{m-1} a_i \tau^i \frac{\partial^i V}{\partial t^i} \quad (13)$$

с коэффициентами, легко находимыми после подстановки (13) в (12). Здесь функция V есть решение волнового уравнения с постоянными коэффициентами и представляет собой сумму волн, распространяющихся в противоположных направлениях

$$V(t, \tau) = \theta(t - \tau) + \psi(t + \tau). \quad (14)$$

Таким образом, решение уравнения (12) также представляет собой сумму двух волн, распространяющихся независимо в противоположные стороны.

Свести исходное уравнение (1) к уравнению Эйлера–Дарбу–Пуассона можно опять же с помощью замены (2), в которой, однако, можно положить $A = I$. Тогда уравнение (1) сводится к (12) при выполнении двух условий

$$gh \left(\frac{d\tau}{dx} \right)^2 = 1, \quad (15)$$

$$\frac{d}{dx} \left(ghB \frac{d\tau}{dx} \right) = \frac{2Bm}{\tau}. \quad (16)$$

Первое условие (15) совпадает с (4) и определяет время движения волны, а второе (16) является искомым для нахождения безотражательных донных профилей. В частности, если канал имеет постоянную ширину, то все донные профили, находимые из (16), являются степенными [15]

$$h(x) = h_0 (1 + x/L)^{\frac{4m}{1+2m}}, \quad (17)$$

где введены размерные коэффициенты, имеющие ясный физический смысл. При увеличении параметра m показатель степени в (17) увеличивается с $4/3$ до 2 , и таких профилей счетное множество (рис. 2). Однако с увеличением m растет число слагаемых в (13) и волновое поле становится более сложным.

Уравнение Эйлера–Дарбу–Пуассона интегрируется и при отрицательных целых значениях параметра m , его общее решение представляется также в виде конечной суммы ($n = -m$)

$$F(t, \tau) = \sum_{i=0}^n a_i \tau^i \frac{\partial^i V}{\partial t^i}. \quad (18)$$

Это приводит к расширению класса безотражательных донных профилей.

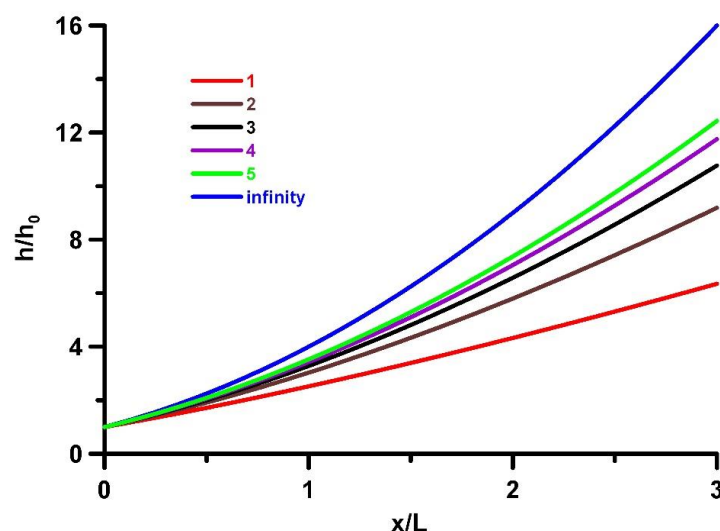


Рис. 2. Безотражательные профили глубины канала

Хотелось бы отметить, что уравнение Эйлера–Дарбу–Пуассона встречается также в задачах наката морских волн на берег в каналах параболического сечения [16, 17] после применения преобразования годографа в нелинейной теории мелкой воды. В этих случаях волна значительно усиливалась при подходе к берегу. Однако в цитируемых работах не было интерпретации полученного решения в терминах бегущих волн.

5. Заключение

Основная цель статьи заключалась в получении условий, когда волна может значительно усилиться в канале переменного сечения, не отражаясь от неоднородностей. В рамках одномерного линейного волнового уравнения показано существование счетного множества донных профилей, допускающих распространение бегущих волн без отражения. По мере распространения амплитуда и фаза волны меняются, меняется также форма волны, однако, она не отражается и не расплывается в пространстве. Тем самым такая волна может переносить энергию на очень большие расстояния. В общем случае морское дно достаточно нерегулярное, но в ряде направлений оно может быть аппроксимировано безотражательными профилями, и на этих направлениях могут фокусироваться большие волны. Такие области крайне важны с позиции теоретических механизмов формирования волн-убийц в неоднородных средах. Уже отмечалось в литературе, что в области переменной глубины, в частности, уступа, наблюдается увеличение статистических моментов волнового поля, а значит и вероятности появления волн-убийц [18]. Будет ли такое же усиление статистических моментов для волнового поля на безотражательном профиле еще предстоит исследовать.

Авторы благодарны проф. О. В. Кравцову за идеи использования решений уравнения Эйлера–Дарбу–Пуассона. Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 19-12-00253.

Список литературы

1. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.

2. *Dingemans M. W.* Water wave propagation over uneven bottom. World Scientific, 1997. 700 p. DOI: 10.1142/9789812796042
3. *Didenkulova I., Pelinovsky E., Soomere T.* Long surface wave dynamics along a convex bottom // *Journal of Geophysical Research: Oceans*. 2009. Vol. 114. C07006. DOI: 10.1029/2008JC005027
4. *Pelinovsky E., Didenkulova I., Shurgalina E., Aseeva N.* Nonlinear wave dynamics in self-consistent water channels // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2017. Vol. 50. 505501. DOI: 10.1088/1751-8121/aa923e
5. *Kharif Ch., Pelinovsky E., Slunyaev A.* Rogue Waves in the Ocean. Springer, 2009. 216 p. DOI: 10.1007/978-3-540-88419-4
6. *Didenkulova I., Pelinovsky E.* Rogue waves in nonlinear hyperbolic systems (shallow-water framework) // *Nonlinearity*. 2011. Vol. 24. P. R1–R18. DOI: 10.1088/0951-7715/24/3/R01
7. *Didenkulova I., Pelinovsky E.* On shallow water rogue wave formation in strongly inhomogeneous channels // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2016. Vol. 49 (19). 194001. DOI: 10.1088/1751-8113/49/19/194001
8. *Bluman G.* On mapping linear partial differential equations to constant coefficient equations // *SIAM Journal Applied Mathematics*. 1983. Vol. 43. P. 1259–1273. DOI: 10.1137/0143084
9. *Varley E., Seymour B.* A method for obtaining exact solutions to partial differential equations with variable coefficients // *Studies in Applied Mathematics*. 1988. Vol. 78. P. 183–225. DOI: <https://doi.org/10.1002/sapm1988783183>
10. *Grimshaw R., Pelinovsky D., Pelinovsky E.* Homogenization of the variable-speed wave equation // *Wave Motion*. 2010. Vol. 47 (8). P. 496–507. DOI: 10.1016/j.wavemoti.2010.03.001
11. *Трикоми Ф.* Лекции по уравнениям в частных производных. М.: Изд-во иностранной литературы, 1957. 443 с.
12. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Гостехиздат. М, 1951.
13. *Капцов О. В.* Эквивалентность линейных дифференциальных уравнений и преобразования Эйлера–Дарбу // *Вычислительные технологии*. 2007. Т. 12. № 4. С. 59–72.
14. *Kaptsov O., Mirzaokhmedov M.* General solutions of some linear equations with variable coefficients // *Ufa Mathematical Journal*. 2021. Vol. 13. N. 2. P. 33–40. DOI: 10.13108/2021-13-2-33
15. *Pelinovsky E., Kaptsov O.* Travelling waves in the shallow sea of variable depth // *Symmetry*. 2022. Vol. 14. N. 7. 1448. DOI: 10.3390/sym14071448
16. *Didenkulova I., Pelinovsky E.* Nonlinear wave evolution and runup in an inclined channel of a parabolic cross-section // *Physics of Fluids*. 2011. Vol. 23 (8). 086602. DOI: 10.1063/1.3623467
17. *Rybkin A., Pelinovsky E. N., Didenkulova I.* Nonlinear wave run-up in bays of arbitrary cross-section: generalization of the Carrier-Greenspan approach // *Journal of Fluid Mechanics*. 2014. Vol. 748. P. 416–432. DOI: 10.1017/jfm.2014.197
18. *Sergeeva A., Pelinovsky E., Talipova T.* Nonlinear random wave field in shallow water: variable Korteweg – de Vries framework // *Natural Hazards and Earth System Science*. 2011. Vol. 11. P. 323–330. DOI: 10.5194/nhess-11-323-2011

Диссимметрия кинетических коэффициентов в ячейечной модели заряженного пористого слоя (мембраны)

А. Н. Филиппов

Российский государственный университет нефти и газа (национальный исследовательский университет) им. И. М. Губкина,
119991, Москва, Ленинский пр., 65, корп. 1
email: filippov.a@gubkin.ru

Данное теоретическое исследование проведено в рамках термодинамики неравновесных процессов на основе подхода Онзагера, и результатом является расчет всех электрокинетических коэффициентов для ячейечной модели пористой заряженной мембраны. Экспериментальные зависимости электроосмотической проницаемости, электропроводности и диффузионной проницаемости ряда исходных и модифицированных перфторированных мембран МФ-4СК от концентрации электролита были одновременно количественно описаны с использованием точных аналитических формул, основанных на одном и том же наборе физико-химических и геометрических параметров. Показано, что для разработанной ячейечной модели ионообменной мембраны нарушается принцип взаимности Онзагера – сопряженные перекрестные кинетические коэффициенты не равны друг другу. Нарушение связано с тем, что принцип взаимности работает только для систем в рамках линейной термодинамики необратимых процессов, для которых обобщенные потоки равны нулю при термодинамических силах, отличных от нуля.

Ключевые слова: подход Онзагера; ячейечная модель заряженной мембраны; диссимметрия сопряженных кинетических коэффициентов

Dissymmetry of kinetic coefficients in the cell model of a charged porous layer (membrane)

A. N. Filippov

Gubkin Russian State University of Oil and Gas (National Research University),
65 Leninsky Pr., 119991, Moscow
email: filippov.a@gubkin.ru

Theoretical study is conducted within the framework of the irreversible thermodynamics on the base of Onsager's approach for the cell model of a charged porous membrane and the result is calculation of all the electrokinetic coefficients. Experimental dependences of electroosmotic permeability, conductivity, and diffusion permeability of some perfluorinated membranes on electrolyte concentration were simultaneously and quantitatively described using exact analytical formulae based on the same set of physicochemical and geometrical parameters. It is shown that for the developed cell model of the ion–

exchange membrane, the Onsager principle of reciprocity is violated – the coupled cross kinetic coefficients are not equal to each other. The violation is associated with the fact that the reciprocity principle works only for systems within the framework of the linear thermodynamics of irreversible processes for which generalized fluxes are zero at thermodynamic forces other than zero.

Keywords: cell model of a charged membrane; Onsager's approach; dissymmetry of coupled kinetic coefficients

1. Введение

Для исследования концентрированных дисперсных систем, в том числе мембран, широко и эффективно применяется ячеечный метод, предложенный Хаппелем и Бреннером в середине прошлого века. Ячеечная модель ионообменной мембраны предполагает, в частности, замену реальной системы хаотически расположенных зерен ионита периодической решеткой одинаковых пористых заряженных сфер, заключенных в концентрические сферические оболочки, заполненные электролитом и образующие пористый слой. В ячеечном методе воздействие соседних частиц учитывается с помощью задания специальных граничных условий на поверхности жидкой оболочки. При этом предполагается, что градиенты действующих на пористый слой внешних сил совпадают с локальными градиентами на ячейке. Преимущество описанного подхода состоит в том, что все входящие в уравнения переноса через пористый слой величины – термодинамические потоки и силы можно непосредственно измерить в экспериментах.

Ранее в работе [1] была построена ячеечная модель ионообменной мембраны, поставлена и решена в общем виде задача нахождения кинетических коэффициентов L_{ij} , а также впервые получена точная алгебраическая формула для гидродинамической проницаемости L_{11} заряженной мембраны. В работе [2] с помощью разработанной в [1] модели были определены электроосмотическая проницаемость L_{12} и удельная электропроводность L_{22} катионообменной мембраны, а в работе [3] – диффузионная проницаемость L_{33} и электродиффузионный коэффициент L_{23} . В работах [4, 5] ячеечная модель была успешно верифицирована на экспериментальных данных, полученных для литой перфторированной мембраны МФ-4СК и ее модификаций нанотрубками галлуазита, функционализированными наночастицами платины и железа в водных растворах HCl, а также экструзионной мембраны МФ-4СК на ряде 1:1 электролитов (HCl, NaCl, KCl, LiCl, CsCl). Для определения физико-химических и геометрических параметров модели был создан специальный алгоритм и программа в вычислительной среде Mathematica® с целью одновременной оптимизации по экспериментальным зависимостям удельной электропроводности и электроосмотической или диффузионной проницаемости [4, 5].

2. Формулировка проблемы

При расчете коэффициентов L_{ij} в качестве независимых термодинамических сил, задаваемых в процессе проведения эксперимента, выбираем градиенты давления, электрического и химического $\mu(C) = \mu_0 + RT \ln(C/C_0)$ потенциалов, соответственно: $\nabla p \approx (p_{20} - p_{10})/h$, $\nabla \varphi \approx (\varphi_{20} - \varphi_{10})/h$, $\nabla \mu(C) \approx RT(C_{20} - C_{10})/(C_0 h)$. Здесь C_0 – эквивалентная концентрация равновесного с мембраной электролита, μ_0 – стандартный химический потенциал, h – толщина мембраны, R – универсальная газовая постоянная, T – абсолютная температура, а индексы «1» и «2» указывают на левую и правую

стороны мембраны, находящейся в измерительной ячейке, заполненной раствором бинарного электролита (рис. 1).

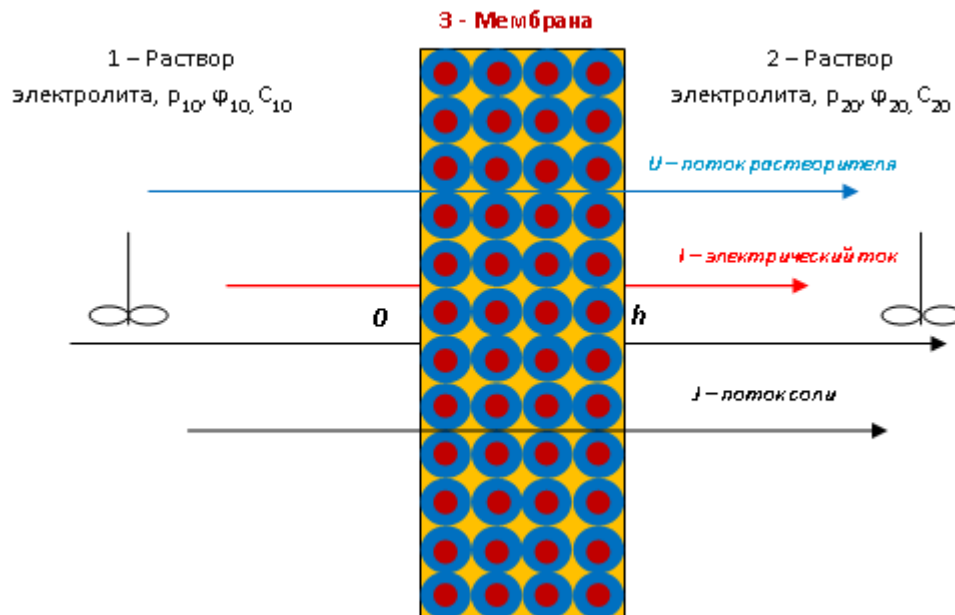


Рис. 1. Мембранная ячейка для исследования неравновесных процессов: 1 и 2 – отдающая и принимающая камеры, 3 – мембрана

В качестве зависимых термодинамических параметров, определяемых в эксперименте, возьмем плотности потоков: U – растворителя (например, воды), I – подвижных зарядов (плотность электрического тока), J – растворенного вещества (плотность диффузионного потока электролита). Тогда феноменологические транспортные уравнения в случае изотермических процессов могут быть записаны в виде следующей системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} U = -(L_{11}\nabla p + L_{12}\nabla\phi + L_{13}\nabla\mu), \\ I = -(L_{21}\nabla p + L_{22}\nabla\phi + L_{23}\nabla\mu), \\ J = -(L_{31}\nabla p + L_{32}\nabla\phi + L_{33}\nabla\mu). \end{cases} \quad (1)$$

В работе [6] были вычислены капиллярно-осмотический L_{13} и обратноосмотический L_{31} коэффициенты и показано их несовпадение, что нарушает принцип взаимности Онзагера. Нарушение связывается с тем, что принцип взаимности в рамках линейной термодинамики необратимых процессов работает только для систем, для которых обобщенные потоки равны нулю при термодинамических силах, отличных от нуля [7]. Здесь мы сравниваем пары коэффициентов L_{12} и L_{21} , а также L_{23} и L_{32} , чтобы подтвердить их асимметрию. При этом, как будет показано ниже, наименьшее отличие наблюдается для пары L_{12} и L_{21} , а наибольшее, по-видимому, для пары L_{13} и L_{31} . Результаты сравнений сопряженных перекрестных коэффициентов матрицы Онзагера обсуждаются в следующем разделе.

3. Анализ результатов

Будем моделировать заряженную мембрану периодической решеткой пористых заряженных сферических частиц одного и того же радиуса a , заключенных в жидкие сферические оболочки радиуса b , который выбирается таким образом, чтобы

отношение объема частицы к объему ячейки равнялось объемной доле частиц в дисперсной системе:

$$\gamma^3 = (a/b)^3 = 1 - m_0, \quad (2)$$

где m_0 – макроскопическая пористость, зависящая от способа упаковки пористых частиц в заряженном слое (мембране).

Математическая постановка задачи дана в работе [1] и здесь для краткости представляем лишь системы дифференциальных уравнений, описывающих поведение скорости жидкости \mathbf{v} , распределение давления p , концентраций ионов C_{\pm} , электрического потенциала ϕ . Используемые здесь обозначения переменных и параметров полностью совпадают с таковыми в статье [1]. Движение несжимаемой жидкости (электролита) во внешней области ($a < r < b$) описывается векторным дифференциальным уравнением Стокса при малых числах Рейнольдса («ползущее течение»), дополненным пространственной электрической силой. Движение жидкости во внутренней области ($0 \leq r < a$) подчиняется векторному дифференциальному уравнению Бринкмана, осложненному такой же пространственной электрической силой. Традиционно «жидкость Бринкмана» предполагается несжимаемой. Электрический потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона внутри и вне пористых частиц, а для векторов плотности потоков ионов \mathbf{J}_{\pm} используется представление Нернста–Планка. При этом в системе отсутствуют источники и стоки зарядов, а задача рассматривается в стационарной постановке:

$$\begin{aligned} \nabla p^o &= \mu^o \Delta \mathbf{v}^o - F_0 (Z_+ C_+^o - Z_- C_-^o) \nabla \phi^o, \\ \nabla \cdot \mathbf{v}^o &= 0, \\ \Delta \phi^o &= -\frac{F_0}{\varepsilon \varepsilon_0} (Z_+ C_+^o - Z_- C_-^o), \quad (a < r < b) \quad (3) \\ \mathbf{J}_{\pm}^o &= \mathbf{v}^o C_{\pm}^o - D_{\pm} \left(\nabla C_{\pm}^o \pm Z_{\pm} C_{\pm}^o \nabla \phi^o \frac{F_0}{RT} \right), \\ \nabla \cdot \mathbf{J}_{\pm}^o &= 0. \end{aligned}$$

Здесь D_{\pm} – коэффициенты диффузии ионов в разбавленном растворе, Z_{\pm} – зарядовые числа ионов (без знака), ε – относительная диэлектрическая проницаемость среды, ε_0 – диэлектрическая постоянная, F_0 – постоянная Фарадея, μ^o – вязкость чистой жидкости. В уравнениях (3) верхний индекс «о» указывает на внешнюю по отношению к частице область чистой жидкости (out). Внутри частицы (область «in», обозначена верхним индексом «i») система определяющих уравнений принимает аналогичный вид:

$$\begin{aligned} \nabla p^i &= \mu^i \Delta \mathbf{v}^i - F_0 (Z_+ C_+^i - Z_- C_-^i) \nabla \phi^i - k \mathbf{v}^i, \\ \nabla \cdot \mathbf{v}^i &= 0, \\ \Delta \phi^i &= -\frac{F_0}{\varepsilon \varepsilon_0} (Z_+ C_+^i - Z_- C_-^i - \rho_v), \quad (0 \leq r < a) \quad (4) \\ \mathbf{J}_{\pm}^i &= \mathbf{v}^i C_{\pm}^i - D_{\pm} \left(\nabla C_{\pm}^i \pm Z_{\pm} C_{\pm}^i \nabla \phi^i \frac{F_0}{RT} \right), \\ \nabla \cdot \mathbf{J}_{\pm}^i &= 0. \end{aligned}$$

Здесь $D_{m\pm}$ – коэффициенты диффузии ионов электролита внутри частицы, k – константа Бринкмана, обратно пропорциональная проницаемости частицы, ρ_v – объемная плотность фиксированного заряда пористого скелета (для определенности примем заряд частицы отрицательным, тогда $\rho_v > 0$). Использование уравнения Бринкмана для описания течения внутри пористой частицы предполагает, что реальная частица мысленно заменяется эффективной жидкостью – «жидкостью Бринкмана» с коэффициентом вязкости μ^1 , а влияние твердой фазы частицы учитывается входящей в баланс силой, пропорциональной скорости и действующей со стороны жесткого скелета на жидкость. На межфазной границе $r = a$ ставятся условия непрерывности скорости, полного тензора напряжений и радиальных потоков ионов. На границе жидкой оболочки $r = b$ ставится условие Кувабары (отсутствие завихренности). Дополнительные условия, предположения и упрощения этой сложной задачи обсуждаются в работе [1].

Итак, чтобы названные выше пары электрокинетических коэффициентов корректно измерить в эксперименте или вычислить в модели, необходимо строго соблюсти ряд условий. Например, капиллярно-осмотический L_{13} и обратноосмотический L_{31} коэффициенты ионообменной мембраны могут быть найдены по формулам, вытекающим из (1):

$$L_{13} = - \left. \frac{U}{\nabla \mu} \right|_{\nabla p=0, \nabla \varphi=0}, \quad (5)$$

$$L_{31} = - \left. \frac{J}{\nabla p} \right|_{\nabla \mu=0, \nabla \varphi=0}. \quad (6)$$

Соотношения (5) – (6) означают, что корректное измерение коэффициента L_{13} возможно только при отсутствии перепадов давления и электрического потенциала и заданном постоянном перепаде химического потенциала $\mu_{20} - \mu_{10} \approx h \nabla \mu = \text{const}$ на мембране, а коэффициента L_{31} – при отсутствии перепадов химического и электрического потенциалов и заданном постоянном перепаде давления $p_{20} - p_{10} \approx h \nabla p = \text{const}$. Аналогичные формулы записываются для оставшихся двух пар перекрестных коэффициентов. В общем случае формулы для перекрестных коэффициентов имеют весьма громоздкий вид и могут быть найдены в работах [1–6]. На рис. 2 показано сравнение поведения пары нормализованных коэффициентов L_{13} , L_{31} в зависимости от концентрации электролита $NaCl$ при одних и тех же значениях физико-химических параметров, характерных для перфторированной литой мембраны МФ-4СК в растворе $NaCl$, исследованной в нашей работе [8]: $D_{m+} = D_{m-} = 23.68$ мкм²/с – коэффициенты диффузии ионов натрия и хлора в пористом слое (мембране), $m_0 = 0.2$. Видно, что при $C_0 = 0.15$ моль/дм³ наблюдается экстремум на точной кривой 1. Это означает падение осмотической проницаемости системы при концентрациях электролита, превышающих указанную, что может быть связано со значительным (в полтора раза) превышением подвижности аниона хлора над подвижностью катиона натрия. В то же время, если бы существовала такая же по свойствам идеально-селективная мембрана, то падение L_{13} отсутствовало бы вовсе и наблюдался бы выход этого коэффициента на заметное положительное значение (кривая 2). Это может быть объяснено тем, что поток коионов через идеальную мембрану отсутствует. Кривые 1 и 3 построены для \bar{L}_{31} и \bar{L}_{13} по точным формулам, а

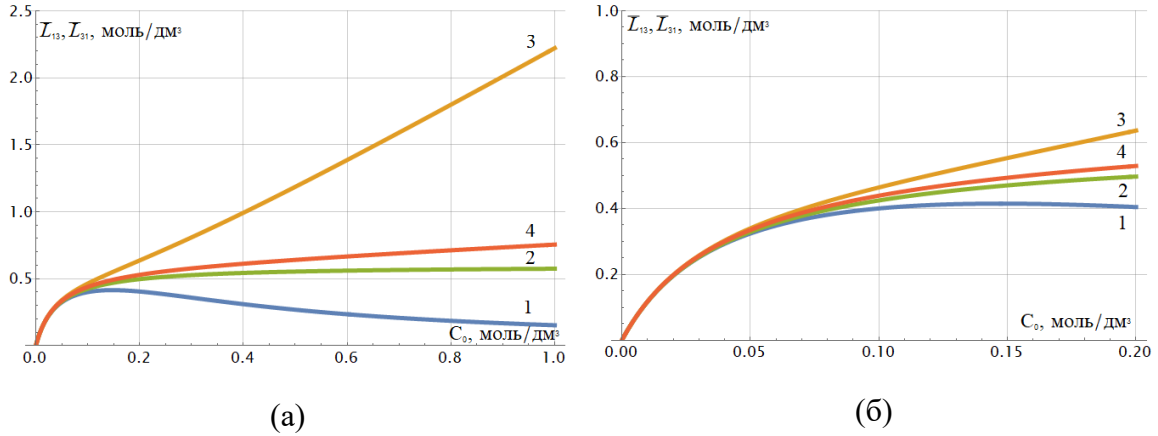


Рис. 2. Расчетные зависимости нормализованного капиллярно-осмотического коэффициента $\bar{L}_{13} = (\mu^0/k_D)L_{13}$ (моль/дм³) – кривые 1, 2 и обратноосмотического коэффициента $\bar{L}_{31} = (\mu^0/k_D)L_{31}$ (моль/дм³) – кривые 3, 4 для литой перфторированной мембраны МФ-4СК от концентрации C_0 (моль/дм³) водного раствора NaCl при $\gamma = 0.527$ – кривые 1, 3; $\gamma = +\infty$ – кривые 2, 4: идеально-селективная катионообменная мембрана; k_D – проницаемость зерна ионита. Остальные параметры приведены в тексте

кривые 2 и 4 – по формулам для идеально-селективной мембраны при равных вязкостях чистой жидкости μ^0 и жидкости в пористой среде Бринкмана μ^i и бесконечно малом размере зерна ионита, $a = 0$. Рисунки (а) и (б) отличаются областью изменения концентрации электролита. Из рис. 2б видно, что перекрестные коэффициенты мало различаются только при небольших концентрациях электролита (до 0.1 М). При больших концентрациях наблюдается существенное как количественное, так и качественное расхождение между L_{13} и L_{31} : обратноосмотический коэффициент (кривая 3) растет с ростом концентрации электролита, а капиллярно-осмотический коэффициент (кривая 1) – убывает. В то же время между этими коэффициентами, вычисленными для идеально-селективных мембран, наблюдается не такое существенное различие (кривые 2 и 4).

Однако не все пары сопряженных перекрестных коэффициентов отличаются так радикально при больших концентрациях электролита, как L_{13} и L_{31} . В случае L_{12} (электроосмотическая проницаемость) и L_{21} (кинетический коэффициент, ответственный за ток течения) различие довольно слабое. Действительно, в случае идеально-селективной катионообменной мембраны и 1:1 электролита имеем [2]:

$$L_{12} = 3 \frac{F_0 D_+}{RT} \frac{\frac{C_0}{\bar{\rho}}}{m_0 \left(\frac{D_{m+}}{D_+} \frac{\bar{\rho}_0}{\bar{\rho}} + 1 \right) + \left((3 - m_0) \frac{\bar{\rho}_0}{\bar{\rho}} - m_0 \right) \frac{C_0}{\bar{\rho}}}, \quad (7)$$

$$L_{21} = 3 \frac{F_0 D_+}{RT} \frac{\left(1 + \frac{m_0}{3 - m_0} \frac{D_{m+}}{D_+} \right) \frac{C_0}{\bar{\rho}}}{m_0 \left(\frac{D_{m+}}{D_+} \frac{\bar{\rho}_0}{\bar{\rho}} + 1 \right) + \left((3 - m_0) \frac{\bar{\rho}_0}{\bar{\rho}} - m_0 \right) \frac{C_0}{\bar{\rho}}}, \quad (8)$$

где $\bar{\rho} = \rho_v / F_0 = 1.08$ моль/дм³ – обменная емкость зерна ионита, $\bar{\rho}_0 = 2.18$ моль/дм³ – характерная обменная емкость задачи, Сравнивая формулы (7) и (8), заключаем, что $L_{12} \neq L_{21}$. Замечаем, однако, что отличие этих коэффициентов весьма несущественное и определяется множителем

$$1 + \frac{m_0}{3 - m_0} \frac{D_{m+}}{D_+},$$

который незначительно больше единицы, поскольку в реальных условиях $0 < m_0 / (3 - m_0) < 1/2$, а $D_{m+} / D_+ \ll 1$.

Что касается электродиффузионных коэффициентов L_{23} (определяет диффузионный ток) и L_{32} (определяет перенос соли под действием перепада электрического потенциала), то они имеют следующий вид для случая идеально-селективной мембраны:

$$L_{23} = \frac{F_0 D_+ C_0}{RT(3 - m_0)} \left[m_0 \left(1 - \frac{D_-}{D_+} \right) + \frac{\frac{9}{2}(1 - m_0) \left(\frac{D_{m+}}{D_+} + \frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_0} \right)}{m_0 \left(\frac{D_{m+}}{D_+} + \frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_0} \right) + \left(3 - m_0 \left(1 + \frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_0} \right) \right) \frac{C_0}{\bar{\rho}}} \right], \quad (9)$$

$$L_{32} = \frac{F_0 D_+ C_0}{RT(3 - m_0)} \times \left[\left(m_0 \frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_0} - \frac{3(1 - m_0)}{2} \right) \frac{(3 - m_0) \left(1 + \frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_0} \frac{D_+}{D_-} \right) \frac{C_0}{\bar{\rho}} - 3 \left(\left(\frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_0} + \frac{D_{m+}}{D_+} \right) - \frac{C_0}{\bar{\rho}_0} \right)}{m_0 \left(\frac{D_{m+}}{D_+} + \frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_0} \right) + \left(3 - m_0 \left(1 + \frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_0} \right) \right) \frac{C_0}{\bar{\rho}}} + \right. \\ \left. \frac{3(1 - m_0) \frac{D_-}{D_+} - \left(3 - m_0 \left(1 + \frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_0} \frac{D_+}{D_-} \right) \right) \frac{C_0}{\bar{\rho}}}{m_0 \left(\frac{D_{m+}}{D_+} + \frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_0} \right) + \left(3 - m_0 \left(1 + \frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_0} \right) \right) \frac{C_0}{\bar{\rho}}} + (3 - m_0) \left(\frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_0} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{D_-}{D_+} \right) \right) \right]. \quad (10)$$

Несмотря на внешнюю схожесть формул (7) и (8), они существенно различаются. Это позволяет говорить об диссимметрии и электродиффузионных коэффициентов в ячеечной модели пористого заряженного слоя.

4. Заключение

Таким образом, разработанная ячеечная модель в рамках линейной термодинамики необратимых процессов может быть применена к любым мембранам, несущим объемный заряд (в частности, обратноосмотическим, нано-, ультра- и микрофльтрационным). При этом возможность вычисления электроосмотического потока воды/чисел переноса воды с использованием полученных конечных алгебраических формул с параметрами, имеющими четкий физический смысл, важна не только в электромембранных процессах (т.е. в топливных элементах, датчиках, электролизерах и т.д.), но также при расчетах электроосмотических насосов в микрофлюидике, при определении содержания воды в пищевых продуктах при их длительном хранении и при анализе снижения переноса жидкости через бетон, поскольку избыточная влажность приводит к коррозии металлической арматуры и преждевременному разрушению бетона.

Мы показали, что в случае ячеечной модели мембраны принцип взаимности Онзагера нарушается – матрица кинетических коэффициентов не является симметричной. Сам Онзагер в своей известной работе 1931 года [9] не привел феноменологического доказательства справедливости своей гипотезы и ссылаясь на то, что экспериментальные данные могут быть мерилем состоятельности принципа взаимности. В то же время М. М. Мамедов такое доказательство опубликовал в 2003 году [7]. В этой связи следует аккуратно относиться к определению транспортных характеристик мембран, которые зависят от перекрестных кинетических коэффициентов в силу несимметричности последних. В данной работе показано, что сопряженные перекрестные коэффициенты могут отличаться не только в количественном, но и в качественном плане. Мамедов показал, что принцип Онзагера строго выполняется только для систем с нулевыми обобщенными потоками при ненулевых обобщенных силах, т. е. фактически в состоянии равновесия, что существенно снижает его значимость. С другой стороны, можно предполагать, что принцип взаимности будет выполняться при невысоких значениях этих потоков. Остается только определить – что такое «невысокое» значение потока. В случае потока растворителя это наблюдается, вероятно, при числах Рейнольдса много меньших единицы.

5. Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант № 20–19–00670.

Список литературы

1. *Filippov A. N.* A cell model of an ion-exchange membrane. Hydrodynamic permeability // *Colloid Journal*. 2018. Vol. 80 (6). P. 716–727. DOI: 10.1134/S1061933X18060030
2. *Filippov A. N.* A cell model of the ion-exchange membrane. Electrical conductivity and electroosmotic permeability // *Colloid Journal*. 2018. Vol. 80 (6). P. 728–738. DOI: 10.1134/S1061933X18060042
3. *Filippov A. N.* A cell model of an ion-exchange membrane. Electrodifusion coefficient and diffusion permeability // *Colloid Journal*. 2021. Vol. 83 (3). P. 387–398. DOI: 10.1134/S1061933X21030066
4. *Filippov A. N., Shkirskaya S. A.* Verification of the cell (heterogeneous) model of an ion-exchange membrane and its comparison with the homogeneous model // *Colloid Journal*. 2019. Vol. 81 (5). P. 797–606. DOI: 10.1134/S1061933X19050041
5. *Filippov A. N., Shkirskaya S. A.* Approbation of the cell model of a cation-exchange membrane on 1:1 electrolytes // *Membrane and Membrane Technologies*. 2019. Vol. 1 (5). P. 278–285. DOI: 10.1134/S2517751619050020
6. *Filippov A. N.* A cell model of an ion-exchange membrane. Capillary-osmosis and reverse-osmosis coefficients // *Colloid Journal*. 2022. Vol. 84 (3). P. 332–343. DOI: 10.1134/S1061933X2203005X
7. *Мамедов М. М.* Феноменологический вывод соотношений взаимности Онзагера // *Письма в Журнал Технической Физики*. 2003. Т. 29. Вып. 16. С. 39–44.
8. *Filippov A., Petrova D., Falina I., Kononenko N., Ivanov E., Lvov Y., Vinokurov V.* Transport asymmetry of novel bi-layer hybrid perfluorinated membranes on the base of MF-4SC modified by halloysite nanotubes with platinum // *Polymers*. 2018. Vol. 10. P. 366. DOI: 10.3390/polym10040366
9. *Onsager L.* Reciprocal relations in irreversible processes. I // *Physical Review*. 1931. Vol. 37. P. 405–426. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.37.405>

Материалы секционных докладов

Численное моделирование процесса высокотемпературного насыщения пористых материалов парофазным методом

М. В. Агеева, В. А. Демин

Пермский государственный национальный исследовательский университет,
614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15
email: demin@psu.ru

Проанализирован процесс высокотемпературной пропитки пористого материала газообразным кремнием. Моделирование этого процесса основывается на принципах МИМ-подхода (Mobile-ImmobileModel). Построенная физико-математическая модель опирается на классические уравнений неізотермической фильтрации паров кремния с учетом процессов конденсации-испарения. Сформулированная задача решена для нескольких вариантов граничных условий, которые отражают специфику реальной технологии силицирования. Расчеты выполнены методом конечных разностей. Получены объемные распределения иммобильного компонента в образце для каждого варианта граничных условий.

Ключевые слова: МИМ-модель; пористая среда; высокотемпературные процессы

Numerical simulation of the process of a porous material high-temperature impregnation by the vapor phase method

M. V. Ageeva, V. A. Demin

Perm State University, 15 Bukireva St., 614990, Perm
email: demin@psu.ru

The process of high-temperature saturation of a porous material with gaseous silicon is analyzed. The modeling of this process is based on the principles of the MIM approach (Mobile-Immobile Model). The new physical and mathematical model is based on the classical equations of non-isothermal filtration of silicon vapour. It takes into account the processes of condensation-evaporation. The formulated problem is solved for several variants of boundary conditions, which reflect the specifics of the real technology of siliconization. The calculations were performed by the finite difference method. The volumetric distributions of the immobile component in the sample are obtained for each variant of the boundary conditions.

Keywords: MIM-model; porous medium; high-temperature processes

1. Введение

Процесс пропитки пористого углеродного волокна газообразным кремнием является одним из наиболее перспективных методов создания композиционных материалов. Наряду с высокой жаропрочностью и антиокислительной способностью

подобные материалы обладают относительно невысоким коэффициентом линейного термического расширения и низкой плотностью [1]. Такое сочетание физико-химических свойств делает эти материалы крайне востребованными. Однако в литературе численное моделирование этих процессов описано слабо.

Процесс высокотемпературного силицирования предполагает, что газообразный кремний поступает в пористый материал вместе с несущей средой – остаточным или инертным газом, в роли которого чаще всего выступает аргон. Предполагается, что итоговое распределение кремния в образце наиболее сильно зависит от распределения температуры, т.е. математически от того, как она включается в уравнения физико-математической модели. При превышении температурой критического значения в образце возможно появление областей, не пропитанных кремнием. В работе ставится задача численного моделирования этого явления.

2. Постановка задачи

Рассмотрим плоский, вытянутый вдоль оси ординат, прямоугольный слой пористой среды (рис. 1). При высокой температуре в этот образец с обеих сторон диффузионным образом поступает газообразный кремний.

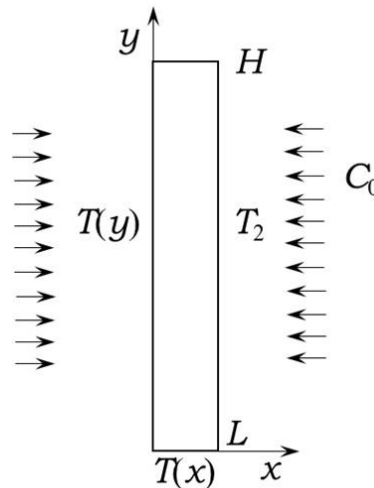


Рис. 1. Конфигурация задачи и система координат

Согласно ММ-подходу прирост иммобильного компонента в среде описывается кинетическим уравнением вида:

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} = \alpha [c_m(q_0 - c_i) - K_d(q_0 - c_i)c_i], \quad (1)$$

где c_i , c_m – концентрации иммобильного и мобильного компонентов, K_d – коэффициент распределения примеси, q_0 – концентрация насыщения, α – параметр межфазного обмена. Параметры α и K_d представляют собой феноменологические параметры, для которых должны выполняться все основные требования по фазовому переходу 1 рода: при $T = T_c$ (T_c – критическая температура) имеет место равновесие, при условии $T < T_c$ – происходит конденсация, при $T > T_c$ – только испарение [2]:

$$a \equiv \alpha = A\sqrt{T_c - T} \quad (T_c > T), \quad b \equiv \alpha K_d = B\sqrt{T - T_c} \quad (T > T_c).$$

В уравнении (1), с одной стороны, заложен баланс конкурирующих процессов конденсации и испарения. С другой стороны, имеется возможность вводить предельное

значение концентрации.

Уравнение (1) дополняется законом сохранения массы с учетом массопереноса за счет диффузии:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi c_m) = -\frac{\partial c_i}{\partial t} + D \operatorname{div}(\phi \nabla c_m), \quad (2)$$

где D – коэффициент диффузии, ϕ – пористость среды. Коэффициент диффузии в рассматриваемых условиях имеет крайне высокое значение $D = 0.7 \text{ м}^2/\text{с}$, поскольку все вычисления производятся для высоких температур (выше точки плавления кремния) и при давлении $p = 100 \text{ Па}$, отвечающее условиям среднего вакуума.

Перенос тепла описывается уравнением теплопроводности в однотемпературном приближении [3]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) T = \chi \Delta T + \frac{Q}{\rho c_p}, \quad (3)$$

где Q – выделяющаяся теплота, χ – температуропроводность, c_p – теплоемкость при постоянном давлении, ρ – плотность материала.

Замыкающим для системы является уравнение, связывающее пористость с концентрацией осевшего кремния в образце:

$$\phi = \phi_0 - c_i. \quad (4)$$

Полученная система (1) – (4) может быть дополнена уравнением Козени-Кармана, если требуется получить проницаемость среды. Для полноты постановки задачи к уравнениям добавляются граничные условия. Введем два варианта граничных условий. В первом случае задаются линейные распределения температуры на левой и нижней границах образца, а на правой и верхней температура T_2 полагается выше точки конденсации. Второе решение строится с линейными распределениями температуры на верхней и нижней границах, а на левой и правой – полагаются, соответственно, T_1 и T_2 , где T_1 ниже точки конденсации. Учитывая, что температура $T_2 > T_c$ предполагается возможность наличия «сухой» области – места в образце, где кремний не оседает.

3. Методика расчета

Система уравнений (1) – (4), дополненная граничными условиями, при обоснованно выбранных параметрах решалась численно методом конечных разностей. Производные по координатам заменялись центральными разностями, производные по времени – «разностями вперед». Программный код был реализован на языке программирования C++. Отметим, что имеющиеся в наличии вычислительные мощности позволяют произвести численные эксперименты только на относительно небольших временах до 10 секунд. Реальный же процесс силицирования длится несколько часов. Предполагается возможность экстраполировать полученные численно результаты на большие времена.

4. Результаты и обсуждение

Как видно из представленных на рис. 2 конечных распределений имобильного компонента в образце, в обоих случаях имеют место области, не заполненные кремнием, – так называемые «сухие пятна». Сравнивая между собой результаты расчетов для двух типов граничных условий, можно прийти к выводу, что при линейном распределении температуры на верхней и нижней границах пропитка по длине слоя осуществляется более однородно.

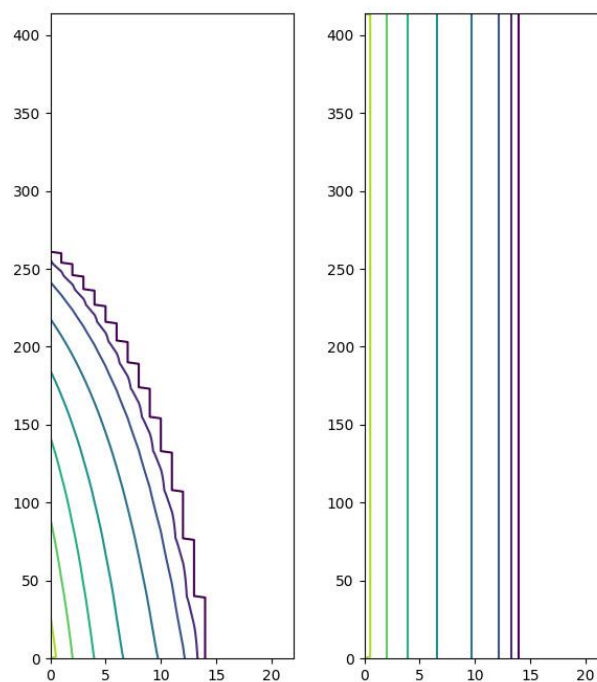


Рис. 2. Распределение иммобильного компонента в образце. Слева – для первой системы граничных условий, справа – для второй

5. Заключение

Построена и апробирована физико-математическая модель, описывающая процесс высокотемпературной пропитки пористого материала парами кремния. Расчеты на ее основе позволяют описать динамику заполнения пор в образце. Полученные в ходе численного эксперимента распределения иммобильного компонента в материале неплохо согласуются с имеющимися экспериментальными данными по времени насыщения.

Список литературы

1. Шикунов С. Л., Курлов В. Н. Получение композиционных материалов на основе карбида кремния силицированием углеродных матриц // Журнал технической физики. 2017. Т. 87. Вып. 12. С. 1871–1878. DOI: 10.21883/JTF. 2017.12. 45212.2291
2. Демин В. А., Марышев Б. С., Меньшиков А. И. Численное моделирование процесса высокотемпературного силицирования углерод-углеродного пористого материала // Вестник Пермского университета. Физика. 2021. № 3. С. 56–62. DOI: 10.17072/1994-3598-2021-3-56-62
3. Nield D. A., Bejan A. Convection in porous media. New York: Springer, 2006. 654 p.

Влияние свойств поверхности на трансляционные колебания цилиндрической капли в жидкости конечного объема

А. А. Алабужев

Институт механики сплошных сред УрО РАН,
614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1
Пермский государственный национальный исследовательский университет,
614990, Пермь, ул. Букирева, 15
email: alabuzhev@mail.ru

Собственные и вынужденные колебания капли жидкости, окруженной другой жидкостью в цилиндрическом сосуде, исследуются в данной работе. В состоянии равновесия капля имеет форму кругового цилиндра, который ограничен в осевом направлении двумя параллельными твердыми торцами сосуда, свойства поверхностей которых различаются. Предполагается, что стенки сосуда находятся на большом расстоянии от капли и не оказывают влияния на ее поведение. На сосуд действует вибрационная сила направленная перпендикулярно оси симметрии. Скорость движения контактной линии пропорциональна отклонению краевого угла от его равновесного значения. Несмотря на использование модели невязкой жидкости, использование данного условия приводит к затуханию колебаний, которое объясняется взаимодействием линии контакта с твердой поверхностью. Коэффициент пропорциональности, параметр Хокинга, для каждой пластины свой. В большинстве работ, например, при исследовании колебаний капиллярного моста, сжатой капли, рассеивании капиллярных волн, параметры Хокинга на разных стенках были постоянными и одинаковыми. Показано, что возбуждаются как четные, так и нечетные гармоники трансляционной моды.

Ключевые слова: цилиндрическая капля; контактная линия; трансляционные колебания; вынужденные колебания; собственные колебания

Influence of surface properties on translational oscillations of a cylindrical drop in a finite liquid volume

A. A. Alabuzhev

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS,
1 Akademika Koroleva St., 614013, Perm
Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm
email: alabuzhev@mail.ru

Natural and forced oscillations of a liquid drop surrounded by another liquid in a cylindrical vessel are studied in this paper. In the state of equilibrium, the drop has the shape of a circular cylinder, which is limited in the axial direction by two

parallel solid ends of the vessel, the surface properties of which differ. It is assumed that the walls of the vessel are at a large distance from the drop and do not affect its behavior. The vibratory force acting perpendicular to the axis of symmetry acts on the vessel. The speed of movement of the contact line is proportional to the deviation of the contact angle from its equilibrium value. Despite the use of an inviscid fluid model, the use of this condition leads to oscillation damping, which is explained by the interaction of the contact line with a solid surface. The coefficient of proportionality, the Hawking parameter, is different for each plate. In most works, for example, in the study of oscillations of a capillary bridge, a compressed drop, the scattering of capillary waves, the Hawking parameters on different walls were constant and the same. It is shown that both even and odd harmonics of the translational mode are excited.

Keywords: cylindrical drop; contact line; translational oscillations; free oscillations; forced oscillations

Данная работа является продолжением работ [1, 2], в которых исследовалась динамика зажатой капли в сосуде конечного объема. Скорость движения линии контакта была линейно пропорциональна отклонению краевого угла, согласно [3]:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \lambda \mathbf{k} \nabla \zeta, \quad (1)$$

где ζ – отклонение линии контакта от равновесного положения, \mathbf{k} – вектор нормали к твердой поверхности, по которой движется линия контакта, λ – постоянная Хокинга (параметр смачивания). Условие (1) описывает два важных предельных случая: неподвижную линию контакта – $\partial \zeta / \partial t = 0$ и постоянный краевой угол – $\mathbf{k} \nabla \zeta = 0$. В большинстве работ (см., например, [1–6]) параметр λ был постоянным и действительным, Следовательно, поверхность подложки была однородной и изменения линии контакта и краевого угла происходили в одной фазе.

В данной работе, в отличие от перечисленных выше работ, планируется рассмотреть разные коэффициенты Хокинга на торцах сосуда по аналогии с работами [7, 8]. В работе [2] в случае одинаковых параметров Хокинга было показано, что при трансляционных вибрациях возбуждаются только четные гармоники первой азимутальной моды, в работе [1] при осесимметричных вибрациях – только нечетные гармоники нулевой азимутальной моды. При различающихся поверхностях под действием осевых вибраций, возбуждаются как нечетные, так и четные гармоники осесимметричной моды [8].

Рассматривается капля жидкость плотностью ρ_2^* и кинематической вязкостью ν_2^* в цилиндрическом сосуде радиуса R_0^* и высотой h^* и окружена несжимаемой

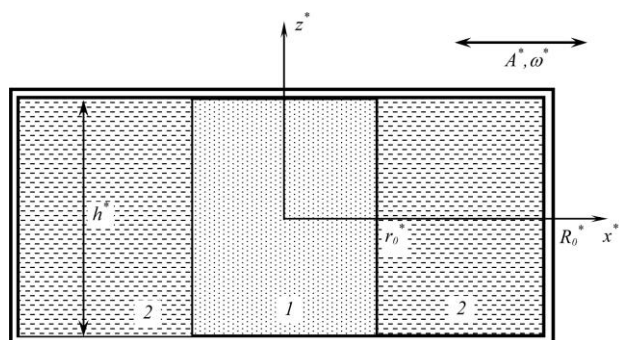


Рис. 1. Геометрия задачи. 1 – жидкость, 2 – капля

жидкостью плотностью ρ_1^* и кинематической вязкостью ν_1^* (рис. 1). В равновесии капля имеет форму круглого цилиндра радиуса r_0^* , который ограничен в осевом направлении параллельными твердыми поверхностями. На сосуд действует вибрационная сила с частотой ω^* и

амплитудой A^* , которая направлена перпендикулярно оси симметрии сосуда. В цилиндрической системе координат (ось z совпадает с осью симметрии сосуда), боковую поверхность капли можно описать функцией $r^* = r_0^* + \zeta^*(\alpha, z^*, t^*)$, где $\zeta^*(\alpha, z^*, t^*)$ - функция, описывающая отклонение поверхности от равновесного положения. Рассматриваются малые линейные колебания, т.е. амплитуда колебаний поверхности мала по сравнению с равновесным радиусом капли. Влиянием боковой стенки сосуда будем пренебрегать: $r_0^* \ll R_0^*$. Движение линии контакта описывается модифицированным условием Хокинга [3] (в главном порядке разложения по малой амплитуде вибраций):

$$z = \mp \frac{1}{2}, r = 1: \quad \zeta_t = \pm \lambda_{b,u} \zeta_z, \quad (2)$$

где $z = z^*/h^*$, $r = r^*/r_0^*$, $\zeta = \zeta^*/A^*$, $\lambda = \Lambda^* b \sqrt{(\rho_e^* + \rho_i^*) r_0^* / \sigma^*}$, $b = r_0^*/h^*$, $R_0 = R_0^*/r_0^*$, Λ_u^* и Λ_b^* – параметр Хокинга на верхней и нижней пластине, соответственно, σ^* – коэффициент поверхностного натяжения.

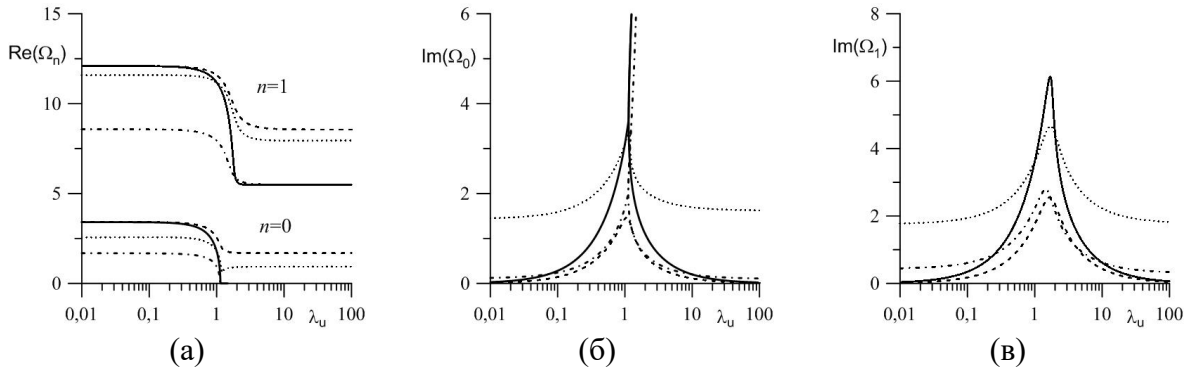


Рис. 2. Зависимость частоты $\text{Re}(\Omega)$ (а) и декремента затухания $\text{Im}(\Omega)$ (б, в) собственных колебаний от параметра Хокинга λ_u ($b = 1$, $\rho_i = 0.7$, $R_0 \rightarrow \infty$). $\lambda_b = \lambda_u$ – сплошная линия, $\lambda_b = 0$ – штриховая, $\lambda_b = 1$ – пунктирная, $\lambda_b = 10$ – штрих-пунктирная

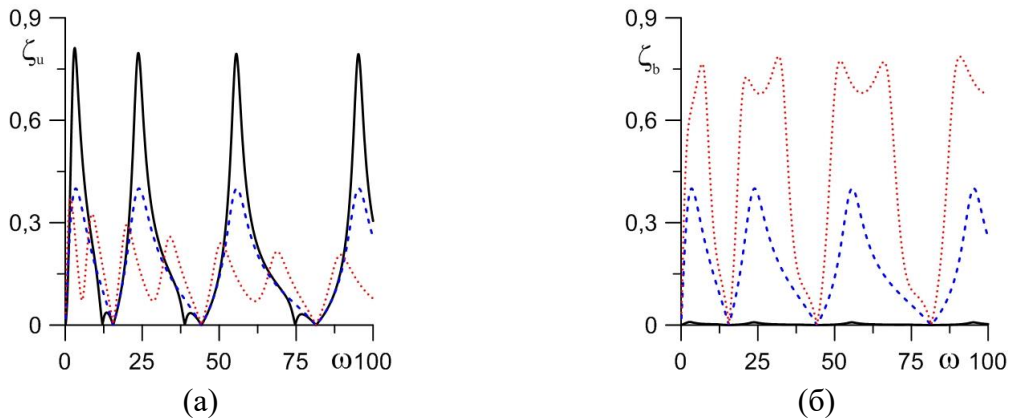


Рис. 3. Амплитуда колебаний контактной линии на верхней (а) и нижней (б) пластине ($b = 1$, $\rho_i = 0.7$, $R_0 \rightarrow \infty$, $\lambda_u = 1$). $\lambda_b = 0$ – сплошная линия, $\lambda_b = 1$ – штриховая, $\lambda_b = 10$ – пунктирная

На рисунке 2 показаны зависимости частоты собственных колебаний (рис. 2а) и коэффициента затухания свободных колебаний (рис. 2б) двух первых мод от параметров Хокинга. На рисунке 3 показана амплитуда колебаний линий контакта.

Список литературы

1. Алабужев А. А. Продольные колебания цилиндрической капли в ограниченном объеме жидкости // Вычислительная механика сплошных сред. 2016. Т.9. № 3. С. 316–330. DOI: 10.7242/1999-6691/2016.9.3.26
2. Алабужев А. А. Трансляционные колебания цилиндрической капли в ограниченном объеме жидкости // Вычислительная механика сплошных сред. 2016. Т. 9. № 4. С. 453–465. DOI: 10.7242/1999-6691/2016.9.4.38
3. Hocking L. M. The damping of capillary-gravity waves at a rigid boundary // Journal of Fluid Mechanics. 1987. Vol. 179. P. 253–266. DOI: 10.1017/S0022112087001514
4. Borkar A., Tsamopoulos J. Boundary-layer analysis of dynamics of axisymmetric capillary bridges // Physics of Fluids A: Fluid Dynamics. 1991. Vol. 3 (12). P. 2866–2874. DOI: 10.1063/1.857832
5. Miles J. W. The capillary boundary layer for standing waves // Journal of Fluid Mechanics. 1991. Vol. 222. P. 197–205. DOI: 10.1017/S0022112091001052
6. Алабужев А. А., Любимов Д. В. Влияние динамики контактной линии на собственные колебания цилиндрической капли // Прикладная механика и техническая физика. 2007. Т. 48. № 5. С. 78–86.
7. Алабужев А. А., Кашина М. А. Влияние различия свойств поверхностей на осесимметричные колебания сжатой капли в переменном электрическом поле // Известия высших учебных заведений. Радиофизика. 2018. Т. 61. № 8–9. С. 662–676.
8. Alabuzhev A. A. Forced axisymmetric oscillations of a drop, which is clamped between different surfaces // Microgravity Science and Technology. 2020. Vol. 32. P. 545–553. DOI: 10.1007/s12217-020-09783-2

Феномен отрицательной турбулентной вязкости в приливных устьях рек

А. М. Алабян^{a,b}, Е. Д. Панченко^{a,b}

^a Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119991, Москва, Ленинские горы, 1

^b Институт водных проблем РАН, 119333, Москва, ул. Губкина, 3
email: andrei_alabyan@mail.ru, panchenko.zhe@yandex.ru

В ходе работ в приливных устьях рек Беломорского бассейна были получены данные, касающиеся особенностей динамики реверсивных водных потоков. В частности, на приливных участках рек в течение приливного цикла были отмечены существенные вариации гидравлического сопротивления вплоть до отрицательных значений. Одним из возможных путей объяснения этого эффекта является проявление отрицательной турбулентной (вихревой) вязкости. На основе анализа натурного материала проверяется гипотеза о возможности передачи энергии вихревых образований поступательному движению водной массы, что проявляется в отрицательных значениях гидравлического сопротивления и коэффициента турбулентной вязкости.

Ключевые слова: реверсивные течения; Белое море; приливный цикл; диссипация энергии; вихревая вязкость; устьевой участок реки

Negative eddy viscosity phenomena in tidal estuaries

A. M. Alabyan^{a,b}, E. D. Panchenko^{a,b}

^a Moscow State University, 1 Leninskie Gory, 119991, Moscow

^b Water Problems Institute RAS, 3 Gubkina St., 119333, Moscow
email: andrei_alabyan@mail.ru, panchenko.zhe@yandex.ru

Data regarding the features of the reverse water flow dynamics were obtained in the course of work in the tidal estuaries of the White Sea. In particular, in the tidal rivers, significant variations in hydraulic resistance up to negative values during the tidal cycle were noted. One of the possible ways to explain this effect is the manifestation of negative turbulent (eddy) viscosity. Based on the analysis of field data, the hypothesis about the possibility of transferring the eddy energy to the translational movement of the water mass is proposed.

Keywords: reverse currents; White Sea; tidal cycle; energy dissipation; eddy viscosity; tidal river

1. Введение

В 2017 – 2021 гг. в приливных устьях рек Беломорского бассейна (Северная Двина, Онега, Мезень, а также малые реки Кянда, Тамица, Сёмжа, Лая) были выполнены детальные гидрометрические измерения. Их целью изначально был сбор

данных для гидродинамического моделирования, однако при обработке и анализе результатов этих измерений было обнаружено парадоксальное, на первый взгляд, явление – отрицательное гидравлическое сопротивление. Оно регистрировалось на устьевых участках, где из-за приливных колебаний уровня моря на приустьевом участке реки происходило реверсивное движение водных масс.

По мере накопления фактического материала и его анализа, а также по мере совершенствования методики полевых работ становилось понятно, что результат не является следствием погрешности измерений, ввиду чего возникла необходимость его интерпретации. Одной из гипотез, в рамках которой может быть рассмотрен феномен отрицательного сопротивления может быть предположение об отрицательной турбулентной вязкости в реверсивном водном потоке, возникающей в определенные фазы приливного цикла. Отрицательная турбулентная вязкость должна проявляться, когда энергия вихревых движений подпитывает поступательное движение водных масс. Такая ситуация в ряде случаев фиксировалась на протяжении 0.5 – 1.5 часов после момента наступления полной воды, когда скорость отливного течения увеличивается при практически горизонтальной водной поверхности по всему устьевому участку реки.

С точки зрения классической гидродинамики отрицательная турбулентная вязкость не имеет «противопоказаний». Еще в 1971 г. в предисловии к русскому изданию книги Виктора Старра «Физика явлений с отрицательной вязкостью» [1] академик А. С. Монин писал «Действительно, вводимые в молекулярной физике коэффициенты вязкости ..., характеризующие физические свойства жидкостей и газов, всегда положительны, и это имеет глубокое обоснование в термодинамике необратимых процессов. Поэтому было нетрудно привыкнуть к предположению, что коэффициенты турбулентной вязкости..., вводимые в полуэмпирические теории турбулентности по аналогии с молекулярной физикой, также всегда положительны, хотя такое предположение уже не имеет термодинамического обоснования, и, как оказалось, в ряде случаев просто неправильно» [2, стр. 5].

Возможность отрицательной турбулентной вязкости была предвидена еще в первой половине прошлого века [3, 4]. С тех пор сообщения о ее регистрации или о возможности с ее помощью объяснить тот или иной феномен (от макровихрей в атмосфере до пограничного слоя при обтекании потоком препятствий в лабораторных условиях) периодически появляются в публикациях научной и инженерной направленности [5–8]. Современные исследования отрицательной вязкости в аэро- и гидродинамике, выполненные Л. И. Высоцким [9], приводят его к выводу, что «существование отрицательной вихревой вязкости до сих пор стоит под вопросом, однако на протяжении почти столетия расчеты в проектной практике во всем мире ведутся с его учетом» [9, стр. 52]; и далее: «Появившиеся в последнее время результаты высокоточных измерений распределения осредненных скоростей в трубах и погранслое на плоской пластине напрямую свидетельствуют в пользу существования слоя с отрицательной вязкостью, что является прямым подтверждением этого факта» [9, стр. 53].

2. Объекты и методы исследования

Объектами полевых исследований в 2017 – 2022 гг. были устьевые участки приливных рек Беломорского бассейна (Северная Двина, Онега, Мезень, а также малые реки Кянда, Тамица, Сёмжа, Лая), а также микроприливно-дельта р. Печоры, впадающей в Баренцево море. Приливно-дельта представляют собой идеальный природный полигон для гидрологических исследований с использованием

принципиально нового гидрометрического и геодезического оборудования. На приливных участках рек, где изменения уровней воды, направления и скорости течения происходят очень быстро, эти приборы дают возможность исследовать динамику процессов, изучение которых традиционными методами (с использованием гидрометрических вертушек, водомерных реек и геометрического нивелирования) ранее было в принципе невозможно.

Суть используемого метода полевых исследований состояла в синхронном измерении расходов воды акустическими доплеровскими профилографами в двух поперечных сечениях, находящимся на различном удалении от устьевого створа реки на протяжении полного приливного цикла. Одновременно выполнялась фиксация изменения уровня воды автономными регистраторами в единой системе высот. Увязка нулей высоты уровнемеров выполнялась с использованием дифференциальной системы спутникового позиционирования, а при возможности, и геометрическим нивелированием [10–12].

В результате проведения такого комплекса измерений могут быть оценены все члены уравнения неустановившегося движения (первое уравнение в системе Сен-Венана), кроме уклона трения, получаемого как разность остальных членов. Исходя из полученного значения уклона трения, вычислялось гидравлическое сопротивление, выраженное через коэффициент Дарси-Вейсбаха λ [10–12]. Наиболее интересные в отношении вариации гидравлического сопротивления (которое непосредственно связано с турбулентной вязкостью) результаты были получены в мезоприливном устье Кянды [10, 11], впадающей в Онежский залив Белого моря, и в макроприливном устье Сёмжи [12], впадающей в эстуарий Мезени (рис. 1).

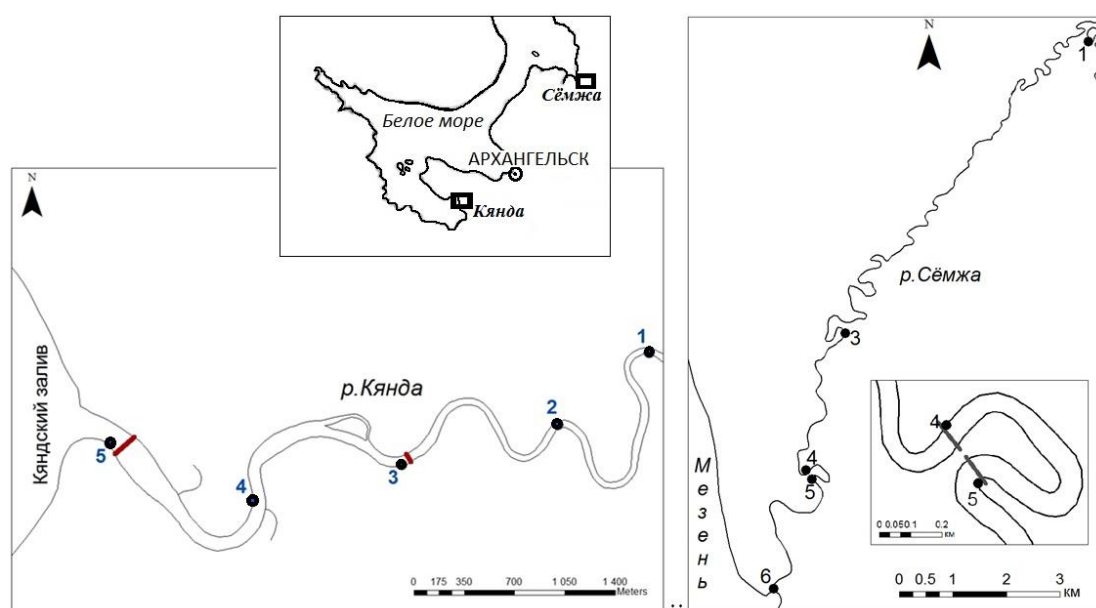
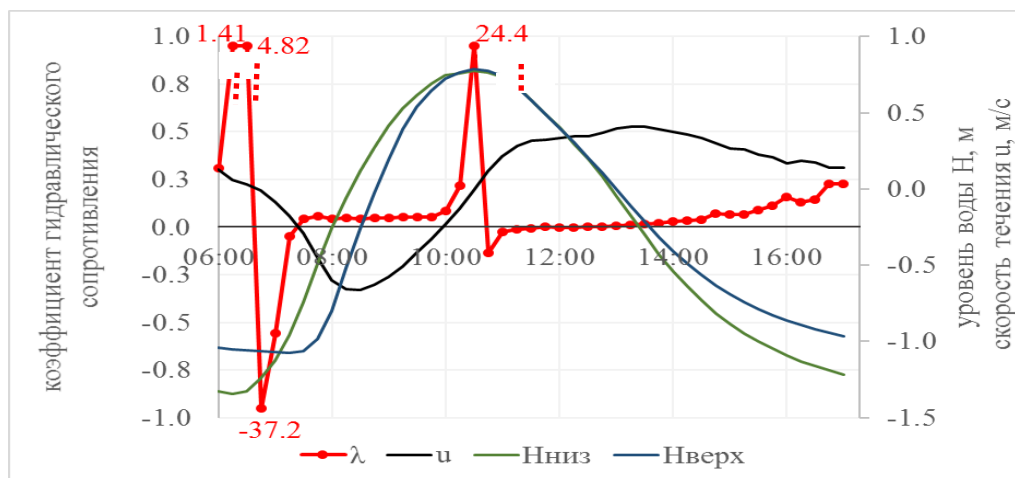


Рис. 1. Схема объектов исследования – рек Кянда и Сёмжа. Точками обозначено положение уровнемеров, поперечными линиями – створы измерения расходов воды

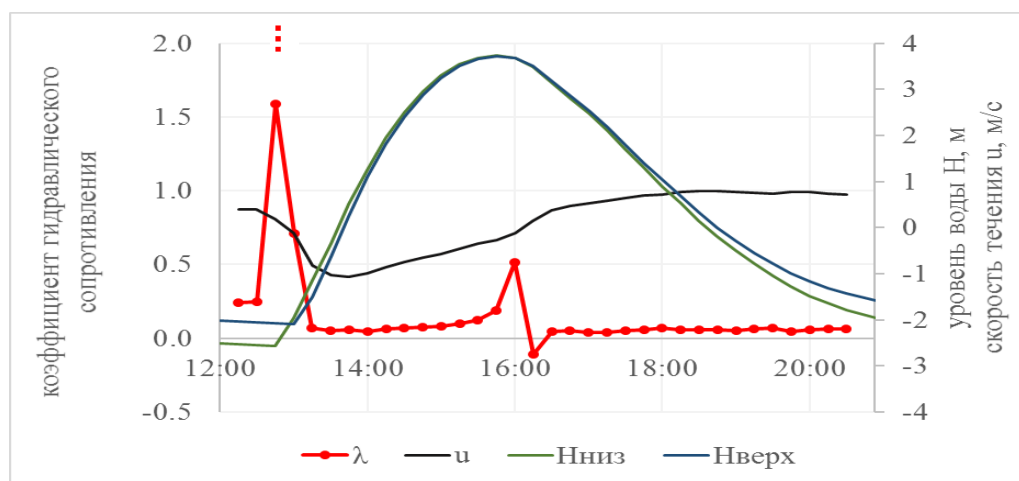
3. Обсуждение результатов

Гидравлическое сопротивление, исходя из измеренных значений скорости течения и рассчитанных значений уклона трения, существенно варьирует в течение

приливного цикла. На Кянде в коэффициент λ изменялся в диапазоне от -37.2 до 24.4 (рис. 2а), на Сёмже – от -0.11 до 1.59 (рис. 2б).



(а)



(б)

Рис. 2. Изменение коэффициента гидравлического сопротивления λ , средней скорости течения (u) и уровней воды в верхнем (Нверх.) и нижнем (Нниз.) створах в ходе приливного цикла: (а) на р. Кянде 04.08.2016 г.; (б) на р. Сёмже 14.08.2018 г.

В периоды квазиустановившегося течения воды в обоих направлениях в прилив и отлив значения коэффициента гидравлического трения λ находятся в пределах диапазона $0.04 - 0.07$, свойственного рекам со сходными морфологическими характеристиками русла. Наиболее «нетипичные» значения λ были зафиксированы в моменты смены направления течения. При развороте течений происходит сначала резкое увеличение значения коэффициента гидравлического сопротивления, а потом в течение $0.5-1.5$ часов его уменьшение вплоть до отрицательных значений.

Отрицательные значения были зафиксированы и для Кянды, и для Сёмжи, а первичная оценка возможных ошибок расчета, связанных с инструментальной погрешностью измерений, не отбраковала данные значения [12].

Принимая во внимание, что первопричиной гидравлического сопротивления (жидкого трения) является потеря транзитным водным потоком кинетической энергии с

превращением ее в тепло (диссипация энергии), сопротивление должно быть связано с вязкостью жидкости – ламинарной (молекулярной) или же турбулентной (вихревой) в зависимости от режима движения жидкости. При турбулентном течении процесс диссипации энергии происходит путем ее передачи от осредненного движения к наиболее крупным турбулентным вихрям, от них к более мелким, и так далее, пока размеры вихрей не станут соизмеримыми с размерами молекул, и механическая энергия не начнет переходить непосредственно в теплоту [1, 13, 14]. В том случае, когда диссипация энергии в потоке происходит по «традиционной схеме» от осредненного движения к пульсационному и от него к тепловой энергии, сила жидкого трения, закономерно уменьшает энергию осредненного движения и параметризуется через гидравлическое сопротивление. Направление действия этой силы всегда противоположно направлению осредненного течения. При «обратном» переходе энергии от пульсационного движения к осредненному значения коэффициента турбулентной вязкости становятся отрицательным, транзитное течение при этом должно ускоряться [1, 5].

Первое упоминание о возможности «обратного» перехода энергии можно найти у Ф. Форхгеймера [3], чья книга была переведена на русский язык в 1935 г.: «осредненное течение может превращаться не только в тепло, и в вихри; пожалуй, и наоборот, благодаря уменьшению вихрей может появиться ускорение осредненного движения; однако относительно этого опытных данных нет». В последствии феномен отрицательной турбулентной вязкости наиболее детально был рассмотрен в книге профессора метеорологии Массачусетского технологического института В. Старра «Физика явлений с отрицательной вязкостью» [1]. Будучи метеорологом, В. Старр детально исследует эффекты отрицательной турбулентной вязкости главным образом в атмосферных процессах, причем не только в атмосфере Земли, но и Солнца, Юпитера и Сатурна, а также применительно к спиральным галактикам и околосолнечной туманности. Анализируя и прогнозируя места возможного проявления отрицательного трения, В. Старр пишет: «... эффекты отрицательной вязкости не могут доминировать в стационарном режиме, так как вся кинетическая энергия нерегулярных движений была бы скоро исчерпана» [1, стр. 38]. Для возможности существования гидро- или газодинамической системы с эффектом отрицательной турбулентной вязкости он формулирует два условия:

«а) Нерегулярные движения, которые переносят импульс против градиентов среднего течения, должны иметь источник турбулентной кинетической энергии...

б) Среднее течение должно подвергаться некоторому виду торможения, чтобы не возражать беспредельно...».

Этим условиям практически идеально соответствуют приливные устья, однако о них в книге В. Старра упоминается лишь вскользь: «Перенос импульса происходит по направлению градиента средней скорости, что соответствует положительной турбулентной вязкости. Однако при некоторых условиях приливные течения ... могут изменить направление градиента среднего течения на обратное, тогда как перенос импульса происходит по-прежнему вниз, создавая таким образом эффект отрицательной вязкости» [1, стр. 167].

В 1984 г. сотрудники Института водных проблем АН СССР опубликовали результаты зимних гидрометрических измерений в приливном устье Онеги [7]. Ими было зафиксировано «появление дважды за приливной цикл ... отрицательного ... «коэффициента» турбулентного обмена (равного произведению коэффициента турбулентной вязкости на плотность воды – авт.)» [7, стр. 285]. Далее, анализируя этот факт, авторы делают весьма осторожный вывод: "Само по себе явление отрицательной

вязкости – довольно распространенное в турбулентных процессах с наложенными внешними волновыми возмущениями [ссылка на 1], однако определенно утверждать, что и в нашем случае это закономерно, мы не можем, так как проверить ее статистическую обеспеченность нет возможности из-за отсутствия статистического ансамбля. Поэтому пока следует иметь в виду лишь возможность появления отрицательных значений «коэффициента» турбулентного обмена в приливном течении подо льдом» [7, стр. 285].

Применительно к вопросу о взаимосвязи отрицательного гидравлического сопротивления и отрицательной турбулентной вязкости, необходимо рассмотреть вопрос о соотношении частей водного потока с отрицательной и положительной турбулентной вязкостью. Если энергия пульсаций переходит в тепло и возвращается осредненному течению в равных долях – то общее гидравлическое сопротивление транзитного потока равно нулю, если «возврат» превосходит диссипацию – то сопротивление становится отрицательным: вместо потери энергии осредненным движением происходит его подпитка энергией пульсаций, и скорость осредненного течения увеличивается.

Именно так может быть интерпретирован тот факт, что коэффициент гидравлического сопротивления принимает наибольшие значения непосредственно перед разворотом течения, что характеризует интенсивный переход энергии осредненного движения к пульсационному, после чего происходит постепенная «сработка» накопленной энергии и ее обратный переход к осредненному движению. При этом данные расчетов подкрепляются визуальными наблюдениями за характером течений: во время выполнения измерений было отчетливо видно, что при развороте основного течения водная масса не стоит на месте, а представляет собой систему разномасштабных вихрей, хаотично перемещающихся по акватории устьевой области. После начала отлива вихри упорядочивались, формируя ускоряющееся транзитное течение в сторону моря при практически горизонтальной водной поверхности [12].

4. Заключение

В заключении следует заметить, что отрицательная турбулентная вязкость проявляется лишь при определенном сочетании параметров речного стока и морского прилива. При этом следует понимать, что отрицательная вязкость – это (к сожалению) не столь полезный феномен как сверхпроводимость или сверхтекучесть, а всего лишь причуда параметризации жидкого трения, принятого еще со времен Ньютона и Буссинеска. В тоже время правильное задание параметров гидравлического сопротивления и турбулентной вязкости является важнейшим условием корректного моделирования приливных течений, важных при энергетическом, рекреационном и водно-транспортном использовании устьевых областей рек России. Кроме того, приливные устья представляют собой уникальную природную лабораторию для исследования взаимодействия вихревых и поступательных движений водных масс, происходящих не только в приливных реках, но и в Мировом океане.

5. Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-29-01184, <https://rscf.ru/project/22-29-01184/>.

Список литературы

1. *Старр В.* Физика явлений с отрицательной вязкостью. М.: Мир, 1971. 261 с.

2. Монин А. С. Предисловие / в кн.: Старр В. Физика явлений с отрицательной вязкостью. М.: Мир, 1971. С. 5–8.
3. Форхгеймер Ф. Гидравлика. М.-Л.: ОНТИ. 1935. 616 с.
4. Charney J. G. On the physical basis for numerical prediction of large scale motions in the atmosphere // Journal of Meteorology. 1949. Vol. 6 (6). P. 371–385.
5. Lorenz E. N. The interaction between a mean flow and random disturbances // Tellus. 1953. Vol. 5. N. 3. P. 238–250. DOI: 10.3402/tellusa.v5i3.8645
6. Hanjalic K., Launder B. E. Fully-developed flow in rectangular ducts of non-uniform surface texture. Part 1. An experimental investigation // Journal of Fluid Mechanics. 1972. Vol. 51. P. 301–335.
7. Дебольский В. К., Зырянов В. Н., Мордасов М. А. О турбулентном обмене в приливном устье при наличии ледяного покрова // Динамика и термика рек и водохранилищ. М.: Наука. 1984. С. 279–290.
8. Машикович С. А., Вейль И. Г. О влиянии точности данных о горизонтальной структуре тропического циклона на численный прогноз его перемещения // Метеорология и гидрология. 2004. № 9. С. 14–20.
9. Высоцкий Л. И. Существуют ли зоны с отрицательной вихревой вязкостью в продольно-однородных турбулентных потоках? // Инженерно-строительный журнал. 2013. № 2. С. 48–53.
10. Алабян А. М., Панченко Е. Д. Гидравлическое сопротивление в приливных устьях и феномен «отрицательного трения» в речной гидравлике // Инженерные изыскания. 2017. № 3. С. 24–32.
11. Алабян А. М., Панченко Е. Д., Алексеева А. А. Особенности динамики вод в приливных устьях малых рек бассейна Белого моря // Вестник Московского университета. Серия 5. География. 2018. № 4. С. 39–48.
12. Panchenko E., Alabyan A. Friction factor evaluation in tidal rivers and estuaries // MethodsX. 2022. Vol. 9. 101669. DOI: 10.1016/j.mex.2022.101669
13. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. Ч.1. М.: Наука, 1965. 640 с.
14. Фидман Б. А. Турбулентность водных потоков. Л.: Гидрометеиздат, 1991. 240 с.

Гидродинамика и электростатика наноканалов постоянного и переменного сечения

М. С. Алексеев^a, Е. А. Демехин^{b,c}

^a Кубанский государственный университет, 350040, Краснодар, ул. Ставропольская, 149

^b Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Научно-исследовательский институт механики, 119192, Москва, Мичуринский пр., 1

^c Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации,
125167, Москва, пр. Ленинградский, 49/2

email: edemekhi@gmail.com

В работе численно на основе усредненных по поперечному сечению уравнений Нернста–Планка–Пуассона–Стокса исследуется движение разбавленного электролита в наноканале постоянного и переменного сечения под действием внешней разности потенциалов. Расчеты проводились в приближении Стокса для ползущего течения и приближении Дебая. Получены решения в виде стационарных и нестационарных скачков разряжения и сжатия концентрации ионов вдоль наноканала постоянной ширины. Исследованы течения для наноканалов переменного сечения в широком диапазоне различных геометрий.

Ключевые слова: наноканалы; скачки концентрации; дзета потенциал; поверхностный заряд; нанофлюидика

Hydrodynamics and electrostatics of nanochannels of constant and variable crosssections

M. S. Alekseev^a, E. A. Demekhin^{b,c}

^a Kuban State University, 149 Stavropolskaya St., 350040, Krasnodar

^b Moscow State University, Research Institute of Mechanics,
1 Michurinsky Pr., 119192, Moscow

^c Financial University under the Government of the Russian Federation,
49 Leningradsky Pr., 125167, Moscow

email: edemekhi@gmail.com

The flow of the diluted electrolyte in nanochannels with constant and variable crosssections under an external voltage is investigated numerically. The Nernst–Planck–Poisson–Stokes equations averaged with respect to the nanochannel crosssection are taken to describe the hydrodynamics and electrostatics of the flow. The calculations were carried out in the Stokes approximation for a creeping flow and the Debye approximation. Solutions are obtained in the form of stationary and nonstationary jumps in rarefaction and compression of the ion concentration along a nanochannel of constant crosssection. Flows for nanochannels of variable cross section are studied in a wide range of different geometries.

Keywords: nanochannels; shock waves of concentration; zeta potential; surface charge; nanofluidics

1. Введение

Классическая теория явлений переноса в электрохимических системах основана на предположении об электронейтральности вне очень тонких заряженных двойных слоев [1, 2]. В итоге нелинейная задача для системы Нернста–Планка–Пуассона–Навье–Стокса сводится к линейной задаче решения уравнения диффузии для объемной концентрации соли. Под действием разности электрических потенциалов возникает объемный электрический ток, подчиняющийся закону Ома, где концентрация соли играет роль электрической проводимости. Решения линейного уравнения диффузии составляют теоретическую основу для стандартных экспериментальных методов, таких как хронопотенциометрия (реакция напряжения Санда на скачок тока), спектроскопия электрохимического импеданса (импеданс Варбурга для воздействия переменным током).

Классическая линейная теория в ряде случаев нарушается и возникает необходимость в решении полной системы [3]. С физической точки зрения, важнейшим аспектом нелинейной теории является явление концентрационной поляризации. Концентрационная поляризация проявляется вблизи электродов, ионообменных мембран, при электрофорезе заряженных гранул и связана она с появлением нормального к поверхности электрического тока. Менее известным, однако, в последнее время становящееся все более популярным направлением исследования нелинейных процессов является изучение тангенциального электрического тока в микро- и наноканалах. Ток перестает быть только объемным, так как возникает существенный вклад поверхностного тока в слое Дебая. Течение в микро- и наноканалах сопровождается новыми физическими явлениями, находящими широкое практическое применение. Например, для создания компактных устройств обессоливания морской воды, разделения макромолекул, на стыке микро- и наноканалов возникает интересное явление суперконцентрации [4, 5], которое может быть в медицине для ранней диагностики ряда заболеваний.

Кроме практического значения, данный вид электрогидродинамического микротечения имеет большое фундаментальное, особенно для механиков, так как в нем проявляются типичные проявления нелинейности. Одним из них являются так называемые концентрационные «ударные волны». Мы в данной работе будем употреблять более привычный термин «скачки концентрации». Их появление было впервые теоретически предсказано в работе группы Сантьяго [6, 7]. В слабонелинейном приближении результаты были подтверждены в работе Мани и Базанта [8] и Ярошука [9]. В работах Сантьяго использовался специальный численный метод с заданием профиля концентрации, в работах Базанта введены ограничения на слабую нелинейность и только малые числа Дебая, то есть модель в принципе не может учитывать «перехлесты» слоев Дебая. Модель Ярошука не учитывает механизм переноса ионов адвекцией, а только их перенос диффузией и электромиграцией.

В настоящей работе мы предлагаем решение на основе простой модели усредненных по поперечному сечению уравнений, основанной на подходе Дебая. Толщина дебаевского слоя намного меньше ширины микроканала, однако в наноканале может происходить «перехлест» дебаевских слоев. В работе вводится простая модель в приближении Стокса для ползущего течения и приближении Дебая для двойного ионного слоя.

2. Математическая постановка задачи

В работе решается система уравнений, состоящая из уравнения Нернста–Планка для транспорта ионов, уравнения Пуассона, отвечающее за электрический потенциал, и уравнения Навье–Стокса для ползущего течения. В качестве базисных величин были взяты: h_0 – половина ширины канала в качестве характерного размера, D/h_0 – характерная скорость, μ – динамическая вязкость жидкости в качестве характерной динамической величины, c_0 – концентрация электронейтрального электролита на левой границе, $\Phi_0 = RT/F$ – термический потенциал (R – универсальная газовая постоянная, T – абсолютная температура, F – постоянная Фарадея). В таком случае безразмерные уравнения будут иметь следующий вид:

$$\frac{\partial c^\pm}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla c^\pm = \nabla \cdot (c^\pm \nabla \Phi) + \nabla^2 c^\pm, \quad (1)$$

$$\nu^2 \nabla^2 \Phi = c^- - c^+, \quad (2)$$

$$-\nabla P + \nabla^2 \mathbf{U} = (c^+ - c^-) \frac{\kappa}{\nu^2} \nabla \Phi = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (2)$$

где c^\pm – концентрации катионов и анионов, \mathbf{U} – вектор скорости, Φ – потенциал электрического поля, P – давление, $\nu = \lambda_D/h_0$ (где длина Дебая $\lambda_D = \sqrt{\varepsilon RT/(2c_0 F^2)}$) – число Дебая и $\kappa = \varepsilon \Phi_0^2/(\mu D)$ – коэффициент сцепления между гидродинамической и электростатической частями задачи. Электролит предполагается бинарным с зарядным числом анион и катионов равным 1.

На поверхности канала ставятся следующие краевые условия: отсутствие потоков ионов обоих знаков; скачек электрического потенциала, вызванный наличием поверхностного заряда σ ; компоненты скорости удовлетворяют условиям непроницаемости и прилипания. На входе канала задаётся концентрация ионов, фиксированный электрический потенциал и давление, на выходе задаются «мягкое» краевое условие, нулевой электрический потенциал и нулевое давление:

$$y = \pm h: \mathbf{U} = 0, \frac{\partial c^\pm}{\partial y} \pm c^\pm \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

$$x = 0: c^\pm = 1, \Phi = \Delta V, P = \Delta P, \quad (5)$$

$$x = L: \frac{\partial c^\pm}{\partial x} = 0, \Phi = 0, P = 0. \quad (6)$$

Задача замыкается добавлением начальных условий: концентрации катионов и анионов предполагались равными равновесной концентрации, $t = 0: c^\pm = 1$.

3. Результаты численного моделирования

Основная цель численного моделирования в данной работе заключалась изучение поведения профилей концентрации и скоростей на пересечении микро- и наноканала, указанного на рис. 1. Такой выбор геометрии обусловлен тем, что в ней наблюдаются наиболее интересные эффекты концентрирования. На практике поры ионоселективной мембраны обладают подобной структурой, потому можно также сказать, что решение задачи в приведённой геометрии фактически является решением для отдельной поры ионоселективной поверхности. Помимо вышесказанного течение в канале может работать в режиме обратного электроосмоса, при котором прокачиваемая через наноканал с заряженными стенками за счёт давления жидкость создаёт разность

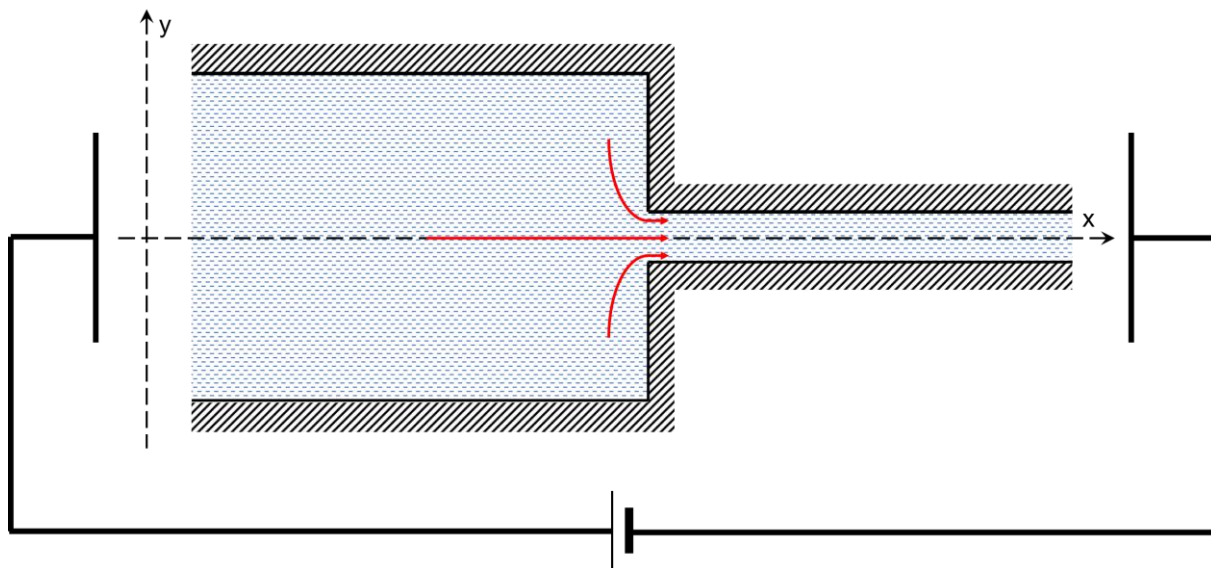


Рис. 1. Схематическое изображение геометрии задачи

потенциалов, или же в режиме выпрямления электрического тока, преобразуя переменный ток в постоянный, но данные режимы будут рассмотрены нами в будущих работах.

Метод конечных разностей второго порядка был использован для решения численной задачи с использованием смещённой сетки. Уравнения системы были сведены к СЛАУ с разреженными матрицами и решались методом неопределённых коэффициентов.

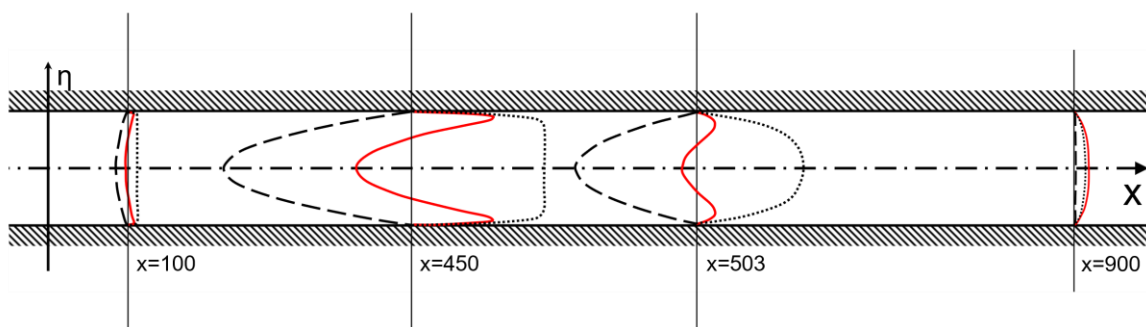


Рис. 2. Численные результаты для профилей скоростей в разных сечениях микроканала $x = 100$, $x = 450$ и наноканала $x = 503$, $x = 900$ длиной $L = 1000$. Штриховой кривой показана напорная компонента, пунктиром – электроосмотическая и сплошной красной кривой – общая скорость. Точка пересечения каналов расположена по центру, для удобства вертикальная компонента нормирована к локальной ширине канала $\eta = y/h(x)$, $-1 < \eta < +1$. Результаты представлены для $H = 100$, $\nu = 1.0$, $\sigma = -5$, $\Delta P = 0$, $\Delta V = 70$

На рис. 2 показано распределение полной продольной скорости U , её электроосмотического компонента U_e и её напорного компонента U_p в разных точках канала. Недалеко от входа при $x=100$ электроосмотический компонент скорости толкает жидкость вперед (то есть положительный, $U_e > 0$) и тем самым создает сопротивление, выражающееся в возникновении отрицательного напорного компонента $U_p < 0$. Результирующая скорость U положительна, но имеет противонаправленное движение по центру микроканала и сонаправленное пристенное движение. При подходе к точке пересечения микро- наноканалов, $x = 450$, как электроосмотическая, так и напорная

компонента увеличиваются по модулю, сохраняя свое направление. Сразу на входе в наноканал, $x = 503$, обе компоненты уменьшаются по модулю, каждая сохраняя старое направление. По мере движения жидкости вниз по течению, по направлению к выходу, напорная компонента стремится к нулю и в точке $x = 900$ U_p достигает близкого к 0 значения.

Описанное поведение профилей скоростей хорошо коррелирует с поведением распределения давления и электрического потенциала, указанных на рис. 3. Можно заметить скачок давления и потенциала в области перехода от микро- к наноканалу.

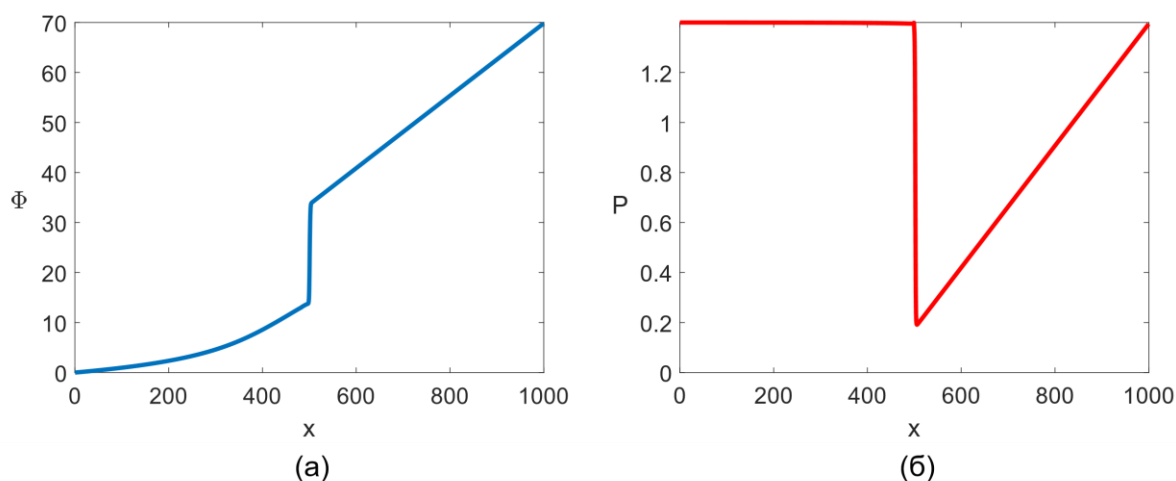


Рис. 3. Распределение потенциала $\Phi(x)$ (а) и давления $P(x)$ (б) вдоль микро- и наноканала. Расчеты велись для $\Delta P = 0$, однако, внутри каналов давление меняется, как и потенциал, то есть в каждой точке x каналов есть как электроосмотический, так и напорный вклады. Результаты представлены для $H = 100$, $v = 1.0$, $\sigma = -5$, $\Delta P = 0$, $\Delta V = 70$

Скачок потенциала вызван возникающей зоной обессоливания, которую видно на рис. 4. Так как ионы являются носителем заряда, то их концентрация в данном случае будет являться проводимостью для электрического тока, из-за чего, согласно закону Ома, будет возникать данный скачок. Поскольку мы задаём нулевую разность давлений на входе и выходе, то локальный градиент давления создаётся электростатическими силами и является реакцией на них, поэтому скачок давления около перехода возникает из-за скачка в электрическом потенциале. Распределение концентрации C очень схоже с таковым у электроосмотических мембран, что может быть вызвано схожестью в геометрии и свойствах, так как микро- и наноканал схематически является порой мембраны. Часть микроканала по сравнению с наноканалом может считаться внешней поверхностью мембраны, а наноканал по своим свойствам напоминает саму мембрану, поскольку возникающее пересечение дебаевских слоёв будет притягивать ионы противоположного стенке заряда, но отталкивать схожего, через наноканал будут преимущественно проходить лишь ионы одного заряда.

Таким образом, в ходе численного моделирования были получены новые эффекты концентрирования, которые, не смотря на различия в постановках задач, обладают качественной схожестью с ионоселективными мембранами, что в дальнейшем может дать возможность рассматривать данную постановку именно как одиночную пору ионоселективной мембраны, геометрию которой можно задавать произвольно, а значит основываясь на расчётах мы сможем предугадывать поведение такой мембраны.

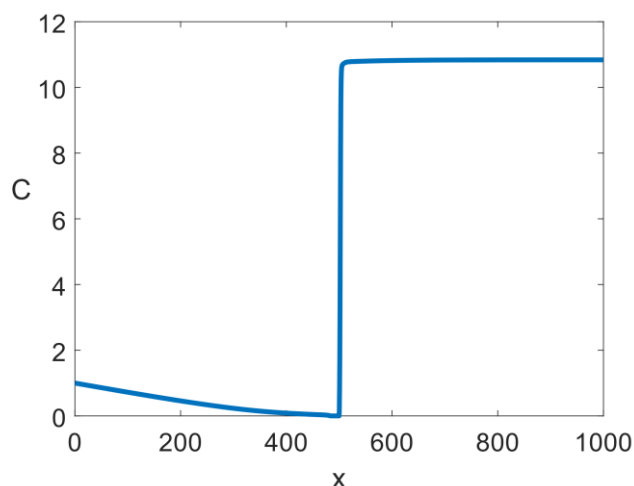


Рис. 4. Распределение концентрации соли $C(x)$ вдоль микро- и наноканала. Результаты представлены для $H = 100$, $v = 1.0$, $\sigma = -5$, $\Delta P = 0$, $\Delta V = 70$

4. Благодарности

Работа поддержана грантом Российского научного фонда № 22-29-00307.

Список литературы

1. Levich V. G. Physicochemical Hydrodynamics. New York: Prentice Hall, 1962. 700 p.
2. Probstein R. F. Physicochemical hydrodynamics. John Wiley and Sons, Inc, 1994. 353 p. DOI: 10.1002/CITE.330671124
3. Chang H.-C., Yossifon G., Demekhin E. A. Nanoscale electrokinetics and microvortices: How microhydrodynamics affects nanofluidic ion flux // Annual Review of Fluid Mechanics. 2012. Vol. 44. P. 401–426. DOI: 10.1146/annurev-fluid-120710-101046
4. Wang Y-C, Stevens A. L., Han J. Million-fold preconcentration of proteins and peptides by nanofluidic filter // Analytical Chemistry. 2005. Vol. 77 (14). P. 4293–4299. DOI: 10.1021/ac050321z
5. Wang S-C, Wei H-H, Chen H-P, Tsai M-H, Yu C-C, Chang H-C. Dynamic superconcentration at critical-point double-layer gates of conducting nanoporous granules due to asymmetric tangential fluxes // Biomicrofluidics. 2008 Vol. 2. 014102. DOI: 10.1063/1.2904640
6. Mani A., Zangle T. A., Santiago J. G. On the propagation of concentration polarization from microchannel-nanochannel interfaces Part I: analytical model and characteristic analysis // Langmuir. 2009. Vol. 25 (6). P. 3898–3908. DOI: 10.1021/la803317p
7. Zangle T. A., Mani A., Santiago J. G. On the propagation of concentration polarization from microchannel-nanochannel interfaces Part II: numerical and experimental study // Langmuir. 2009. Vol. 25 (6). P. 3909–3916. DOI: 10.1021/la803318e
8. Mani A., Bazant M. Z. Deionization shocks in microstructures // Physical Review E. 2011. Vol. 84. 061504. DOI: 10.1103/PhysRevE.84.061504
9. Yaroshchuk A. Over-limiting currents and deionization “shocks” in current-induced polarization: Local-equilibrium analysis // Advances in Colloid and Interface Science. 2012. Vol. 183–184. P. 68–81. DOI: 10.1016/j.cis.2012.08.004

Модель искусственной электрической мембраны для допредельных и предельных токов

М. С. Алексеев^a, Р. Р. Пономарёв^b, В. С. Шелистов^c, Е. А. Демёхин^{c,d}

^a Кубанский государственный университет, 350040, Краснодар, ул. Ставропольская, 149

^b Южный федеральный университет,
344006, Ростов-на-Дону, ул. Большая Садовая, 105/42

^c Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации,
125167, Москва, пр. Ленинградский, 49/2

email: VSShelistov@fa.ru

^d Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Научно-исследовательский институт механики, 119192, Москва, Мичуринский пр., 1
email: edemekhi@gmail.com

В работе предлагается математическая модель, описывающая гидродинамику и электростатику в неидеальной катионоселективной мембране в рамках гипотезы сплошной среды. Рабочим элементом мембраны предполагается пора – нанотрубка с отрицательно заряженными стенками, окружённая диэлектрической средой и заполненная раствором бинарного электролита. Концы трубки выходят в резервуары с раствором того же электролита, к внешним сторонам которых приложена разность электрических потенциалов и разность давлений. Под действием этих разностей катионы из одного резервуара втягиваются в нанотрубку; за счёт адвекции, электромиграции и диффузии они переносятся в другой резервуар, создавая электрический ток. Рассмотрены две геометрии трубки – с постоянным сечением (что приближённо соответствует естественным мембранам) и с переменным. Расчёты велись на основе системы уравнений Нернста-Планка-Пуассона-Навье-Стокса. Изменение геометрических характеристик поры меняло её вольт-амперную характеристику.

Ключевые слова: система Нернста-Планка-Пуассона-Навье-Стокса; электроосмос; заряженные ионы; поверхностный заряд; дзета-потенциал

A model of an artificial electric membrane for underlimiting and limiting currents

M. S. Alekseev^a, R. R. Ponomarev^b, V. S. Shelistov^c, E. A. Demekhin^{c,d}

^a Kuban State University, 149 Stavropolskaya St., 350040, Krasnodar

^b Southern Federal University, 105/42 Bolshaya Sadovaya St., 344006, Rostov-on-Don

^c Financial University under the Government of the Russian Federation,
49 Leningradsky Pr., 125167, Moscow

email: VSShelistov@fa.ru

^d Moscow State University, Research Institute of Mechanics,
1 Michurinsky Pr., 119192, Moscow

email: edemekhi@gmail.com

A mathematical model that describes hydrodynamics and electrostatics in a non-ideal cation-selective membrane is proposed. A pore – a single negatively charged nanotube surrounded by a dielectric medium and filled with a binary electrolyte solution – is assumed to be the membrane's working element. The tube is connected to reservoirs with a solution of the same electrolyte; a difference of electrical potentials and pressures is applied to them. Under the action of these differences, cations from one reservoir are drawn into the nanotube; due to advection, electromigration, and diffusion, they are transferred to the other reservoir through the nanotube, thus creating an electric current. Two tube geometries were considered: with a constant cross-section (which roughly corresponds to natural membranes) and with a variable one. The calculations were carried out on the basis of the Nernst-Planck-Poisson-Navier-Stokes equations. Changing the geometric characteristics of the pore resulted in changes in its current-voltage curve.

Keywords: Nernst-Planck-Poisson-Navier-Stokes system; electroosmosis; charged ions; surface charge; zeta potential

1. Введение

Недавние достижения в технологии позволили искусственно создавать длинные наноканалы с характерными сечениями 10 – 100 нм и длиной порядка нескольких сотен микрон. Такие наноканалы (нанотрубки) имеют широкое практическое приложение [1]. В настоящей работе рассматривается их использование для изменения вольт-амперной характеристики электрической мембраны. Электромембранная ячейка состоит из пористой мембраны, погруженной в раствор электролита. Стенки наноканалов этой пористой среды являются заряженными, характерные размеры их сечений составляют порядка десятков нанометров. В классическом подходе течение жидкости в мембранах описывается уравнениями Пуассона и Дарси [2–4]. Этот подход основан на предположении о постоянном характерном сечении наноканала на входе и выходе. Хотя в реальности сечение канала меняется, предположение о его постоянстве вдоль нанотрубки оказывается достаточно удачным. В силу отсутствия в стоковском режиме течения сил инерции, искривлённость трубки в пространстве не играет никакой роли, поэтому в математической модели такая трубка может быть заменена прямолинейной соответствующей длины.

Возможным является также изготовление искусственных каналов с меняющимся поперечным сечением. Применение таких искусственных каналов в электрических мембранах позволило бы управлять свойствами мембран, в частности, их вольт-амперной характеристикой, и, в конечном итоге, выбрать оптимальную для конкретного практического приложения искусственную мембрану. Практическому изготовлению искусственной мембраны должен предшествовать теоретический анализ, позволяющий дать ориентиры для создания оптимальной конструкции.

2. Математическая постановка задачи

Для моделирования работы электрической мембраны рассматривается одиночный наноканал, соединяющий резервуары с электролитом (рис. 1). Задача решается в двумерной постановке. Наноканал расположен в диэлектрической среде и также заполнен электролитом. Под действием внешней разности электрических потенциалов и разности давлений происходит движение жидкости и перенос ионов, как вдоль резервуаров, так и вдоль наноканала, тремя характерными физическими механизмами:

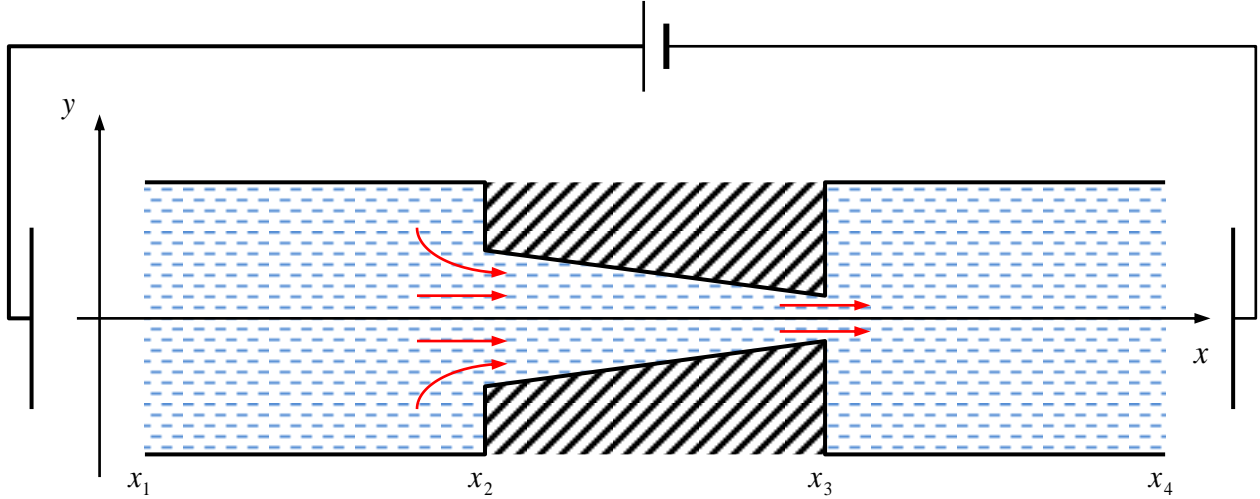


Рис. 1. Геометрия задачи

адвекцией, электромиграцией и диффузией. Электролит предполагается бинарным одновалентным, коэффициенты диффузии катионов и анионов предполагаются равными \tilde{D} .

Динамика рассматриваемой системы описывается системой уравнений Нернста-Планка для транспорта ионов, Пуассона для распределения электрического потенциала и Навье-Стокса для течения жидкости. Уравнения Навье-Стокса берутся в приближении ползущего течения. В качестве базисных величин выбраны: половина средней ширины наноканала \tilde{h} , \tilde{D}/\tilde{h} (базисная скорость), динамическая вязкость жидкости $\tilde{\mu}$, термический потенциал $\tilde{\Phi}_0 = \tilde{R}\tilde{T}/\tilde{F}$, концентрация электронейтрального электролита \tilde{c}_0 . Здесь \tilde{R} – универсальная газовая постоянная, \tilde{T} – абсолютная температура, \tilde{F} – постоянная Фарадея. Безразмерные уравнения будут иметь следующий вид:

$$\frac{\partial c^\pm}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla c^\pm = \nabla \cdot (c^\pm \nabla \Phi) + \nabla^2 c^\pm, \quad (1)$$

$$\nu^2 \nabla^2 \Phi = c^- - c^+, \quad (2)$$

$$-\nabla P + \nabla^2 \mathbf{U} = (c^+ - c^-) \frac{\kappa}{\nu^2} \nabla \Phi = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{U} = 0. \quad (3)$$

Здесь c^\pm – концентрации катионов и анионов, $\mathbf{U} = (U, V)$ – вектор скорости, Φ – электрический потенциал, P – давление, $\nu = \tilde{\lambda}_D / \tilde{h}$ – число Дебая (где $\tilde{\lambda}_D = \tilde{\epsilon} \tilde{\Phi}_0 / (2 \tilde{c}_0 \tilde{F})$ – длина Дебая, а $\tilde{\epsilon}$ – абсолютная диэлектрическая проницаемость электролита, которая полагается постоянной) и $\kappa = \tilde{\epsilon} \tilde{\Phi}_0^2 / \tilde{\mu} \tilde{D}$ – коэффициент сцепления между гидродинамической и электростатической частями задачи.

На входе в резервуар шириной H электролит предполагается электронейтральным, задаётся фиксированный электрический потенциал и параболический профиль скорости:

$$x = x_1: c^\pm = 1, \quad \Phi = \Delta V, \quad U = \frac{3Q}{2H^3} (H^2 - y^2), \quad V = 0. \quad (4)$$

На выходе из второго резервуара задаются «мягкие» краевые условия на концентрации и скорость, а потенциал полагается нулевым:

$$x = x_4: \frac{\partial c^{\pm}}{\partial x} = 0, \Phi = 0, \frac{\partial U}{\partial x} = 0, V = 0. \quad (5)$$

На входе в наноканал и выходе из него величины предполагаются непрерывными. Стенки канала и резервуаров предполагаются непроницаемыми для ионов и жидкости, на них задаются условие прилипания и скачок электрического потенциала, вызванный наличием поверхностного заряда σ (для простоты он берётся постоянным и одинаковым на всех стенках):

$$x = x_2, x = x_3, y = \pm h(x): \frac{\partial c^{\pm}}{\partial n} \pm c^{\pm} \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0, \nu \frac{\partial \Phi}{\partial n} = -\sigma, U = V = 0. \quad (6)$$

Задача замыкается добавлением начальных условий: концентрации катионов и анионов предполагались равными равновесной концентрации, $t = 0: c^{\pm} = 1$.

3. Результаты численного моделирования

Целью численного моделирования было получение вольт-амперной характеристики (ВАХ) системы и её сравнение с типичными ВАХ электромембранных систем [1]. Известно, что при небольшой разности потенциалов проводимость электромембранной системы постоянна и протекающий через систему ток прямо пропорционален приложенному напряжению (допредельный режим). При увеличении напряжения ток выходит на практически постоянную величину (предельный режим), но в какой-то момент вновь начинает расти за счёт микроконвекции (сверхпредельный режим). Предложенная модель должна описывать, по крайней мере, допредельный и предельный режимы.

Для численного решения задачи был использован метод конечных разностей второго порядка точности на смещённых сетках. Уравнения (2) и (3) в разностной форме сводятся к СЛАУ с разреженными матрицами и решаются прямыми методами. Уравнения (1) сводятся к системе ОДУ относительно t и решается полунявным методом Рунге-Кутты третьего порядка.

На рис. 2а приведена рассчитанная ВАХ для системы с наноканалом постоянной ширины. При достижении критической разности потенциалов коэффициент наклона кривой начинает уменьшаться, что соответствует выходу на предельный режим. Ток предельного режима, как и ожидалось, не являлся строго постоянным, а продолжал слабо увеличиваться с ростом разности потенциалов.

Рис. 2б иллюстрирует механизм выхода системы на предельный режим. На графике изображена усреднённая по y проводимость раствора в окрестности входа в наноканал для различных значений разности потенциалов. Проводимость имеет локальный минимум на входе в канал, где образуется зона обессоливания. По мере приближения разности потенциалов к критическому значению концентрация в этой зоне убывает практически до нуля (но не строго до нуля: в расчётах – около 0,05% от равновесной), уменьшая проводимость системы. Этим объясняется изгиб ВАХ и наличие небольшого нарастания тока в предельном режиме.

Таким образом, предложенная модель может быть использована для описания электромембранной системы и для оценки её параметров при изменении формы пор в мембране.

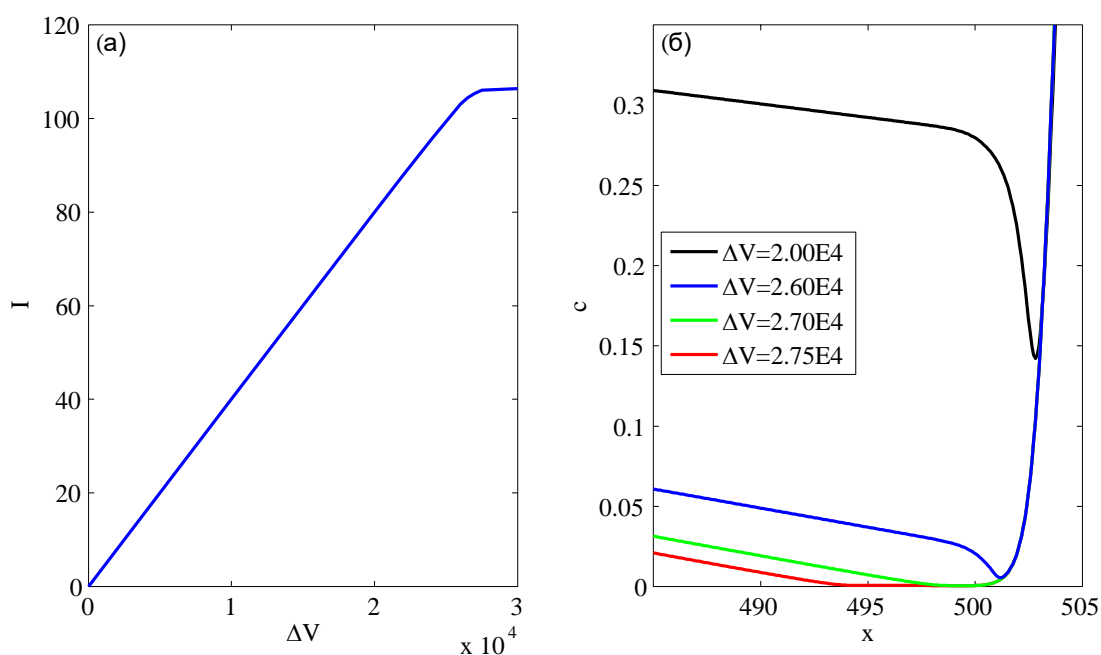


Рис. 2. (а) Вольт-амперная характеристика наноканала с постоянным сечением. (б) Распределение проводимости электролита по x возле входа в наноканал в зависимости от разности потенциалов

4. Благодарности

Работа поддержана грантом Российского научного фонда № 22-29-00307.

Список литературы

1. Chang H.-C., Yossifon G., Demekhin E. A. Nanoscale electrokinetics and microvortices: How microhydrodynamics affects nanofluidic ion flux // *Annual Review of Fluid Mechanics*. 2012. Vol. 44. P. 401–426. DOI: 10.1146/annurev-fluid-120710-101046
2. Abu-Rjal R., Chinaryan V., Bazant M. Z., Rubinstein I., Zaltzman B. Effect of concentration polarization on permselectivity // *Physical Review E*. 2014. Vol. 89. N. 1. 012302. DOI: 10.1103/PhysRevE.89.012302
3. Ganchenko G. S., Kalaydin E. N., Schiffbauer J., Demekhin E. A. Modes of electrokinetic instability for imperfect electric membranes // *Physical Review E*. 2016. Vol. 94. N. 6. 063106. DOI: 10.1103/PhysRevE.94.063106
4. Demekhin E. A., Ganchenko G. S., Kalaydin E. N. Transition to electrokinetic instability near imperfect charge-selective membranes // *Physics of Fluids*. 2018. Vol. 30. N. 8. 082006. DOI: 10.1063/1.5038960

О влиянии толщины жидкого слоя на устойчивость плоскопараллельного течения в двухфазной системе с испарением

В. Б. Бекежанова^а, И. А. Шефер^{а,б}

^а Институт вычислительного моделирования СО РАН,
660036, Красноярск, Академгородок, 50/44
email: vbek@icm.krasn.ru

^б Сибирский федеральный университет, 660041, Красноярск, пр. Свободный, 79
email: ilya.shefer@gmail.com

В рамках приближения Обербека – Буссинеска рассматривается задача испарительной конвекции в двухфазной системе жидкость – газ. Для описания установившихся адвективных течений в условиях диффузионного испарения используется частично-инвариантное точное решение определяющих уравнений. На основе точного решения исследуется влияние толщины жидкого слоя на кинематические и температурные характеристики возникающих режимов, параметры фазового перехода и паросодержания в несущем газе. Методом нормальных мод изучается линейная устойчивость точного решения. Получены пороговые характеристики устойчивости, рассмотрена эволюция топологии нейтральной кривой при изменении геометрии системы как для плоских, так и для пространственных возмущений. Показано, что увеличение толщины жидкого слоя дестабилизирует течение, при этом в системе всегда реализуется колебательный тип неустойчивости. Формы неустойчивости в слое испаряющейся жидкости, увлекаемой спутным газовым потоком, предсказываемые на основе точного решения, совпадают с наблюдаемыми в теплофизических экспериментах.

Ключевые слова: двухслойное течение; точное решение; устойчивость

Influence of the liquid layer thickness on the stability of a plane-parallel flow in a two-phase system with evaporation

V. B. Bekezhanova^а, I. A. Shefer^{а,б}

^а Institute of Computational Modeling SB RAS, 50/44 Akademgorodok, 660036, Krasnoyarsk
email: vbek@icm.krasn.ru

^б Siberian Federal University, 79 Svobodny Pr., 660041, Krasnoyarsk
email: ilya.shefer@gmail.com

Problem of evaporative convection in a two-phase liquid – gas system is studied in the framework of the Ober beck – Boussinesq approximation. A partially invariant exact solution of the governing equations is used for description of stationary advective flows occurring under diffusive-type evaporation. The

influence of the liquid layer height on the kinematic and temperature characteristics of arising regimes as well as on parameters of phase transitions and vapor content in the carrier gas is investigated on the basis of the exact solution. The stability of the solution with respect to plane and spatial normal wave perturbations is studied. Critical characteristics of the stability were obtained. Evolution of neutral curve topology was considered upon changes in the system geometry. The increase in the liquid layer thickness leads to a destabilization of the bilayer flow; here, the oscillatory instability is realized in the system. The instability forms in the layer of evaporating liquid driven by co-current gas flux predicted on the basis of the exact solution are confirmed by known experimental data.

Keywords: bilayer flow; exact solution; stability

1. Введение

Интерес к математическому моделированию конвекции в условиях фазовых переходов обусловлен широким использованием двухфазных жидкостных систем в экспериментальном и промышленном оборудовании. Течения испаряющихся жидкостей используются в технологиях химической и пищевой промышленности, в микро-электронике, теплофизике, материаловедении. Зачастую экспериментальной отработке методик предшествуют обширные теоретические исследования; в ряде случаев результаты физических экспериментов дают мотивацию и служат основой для разработки новых теорий и/или подходов к изучению наблюдаемых явлений. Методология математического моделирования тепломассопереноса в испаряющейся жидкости, увлекаемой спутным газовым потоком, основанная на использовании точных решений специального вида уравнений конвекции, была предложена в [1] в результате анализа данных теплофизических экспериментов. Применение точных решений существенно упрощает исследование основных закономерностей, присущих изучаемым системам, и позволяет получить качественные и количественные зависимости основных характеристик конвективных режимов от параметров системы. В настоящей работе с помощью одного точного решения уравнений термоконцентрационной конвекции, имеющего групповое происхождение, исследуется влияние толщины жидкого слоя на структуру конвективных течений в двухслойной системе жидкость – газ с границей раздела, допускающей диффузионное испарение, а также на характеристики устойчивости возникающих конвективных режимов.

2. Постановка задачи и вид точного решения

Рассматривается совместное течение жидкости и газопарового потока в плоском бесконечном канале. Внешними границами системы являются неподвижные непроницаемые твёрдые стенки, внутренняя граница – межфазная поверхность Γ , через которую происходит испарение жидкости в газовый поток (или конденсация паров из газовой фазы в жидкий слой). Для описания течения в j -ом слое (здесь и всюду ниже $j = 1$ соответствует жидкому слою, $j = 2$ – газовому) используются уравнения Обербека – Буссинеска. При моделировании тепломассообмена в газовой фазе уравнения движения и переноса тепла дополняются уравнением диффузии, которое описывает перенос пара, как химически инертной примеси, в фоновом газе. Считается, что присутствие летучего компонента в парогазовой смеси может приводить к проявлению прямого и обратного термодиффузионных эффектов, вклад которых учитывается в

определяющих уравнениях и граничных условиях на межфазной поверхности и стенке, контактирующей с газом.

Система уравнений допускает стационарное частично инвариантное точное решение следующего вида [2, 3]:

$$u_j = u_j(y), v_j = 0, p_j = p_j(x, y), T_j = (a_1^j + a_2^j y)x + \vartheta_j(y), C = (b_1 + b_2 y)x + \phi(y), \quad (1)$$

где u_j – скорость j -ой среды, p_j – давление, T_j – температура, C – концентрация пара в газе.

На обеих стенках канала заданы условия прилипания, линейное по продольной координате распределение температуры с градиентом A , на верхней стенке дополнительно задается условие нулевого потока пара. На внутренней границе раздела считаются выполненными условия непрерывности вектора скорости и температуры, кинематическое и динамическое условия и соотношение, определяющее концентрацию насыщенного пара. Условие теплового баланса на Γ формулируется с учетом вклада термодиффузионных эффектов и содержит слагаемое, отвечающее диффузионному потоку тепла. В качестве замыкающего соотношения используется условие, задающее расход парогазовой смеси в верхнем слое.

Подстановка (1) в уравнения и граничные условия позволяет получить явные представления всех искомых функций. В силу вида решения величина A , определяющая интенсивность внешней тепловой нагрузки, приложенной на стенках канала, дополнительно характеризует температурный градиент вдоль межфазной поверхности.

3. Зависимость конвективных режимов от толщины жидкого слоя

С помощью решения вида (1) исследовано влияние толщины жидкого слоя l на характеристики конвективного течения в двухслойной системе HFE-7100 – азот. При изменении l от 2 до 6 мм и фиксированных прочих параметрах (высоте газового слоя 5 мм, ускорении свободного падения 9.81 м/с^2 , расходе газа $9.6 \cdot 10^{-6} \text{ кг/(м} \cdot \text{с)}$) решение описывает переход от чисто термокапиллярного течения к режиму смешанного типа и далее к пуазейлевскому. Чисто термокапиллярный режим характеризуется формированием возвратного течения во всем жидком объеме. Течения смешанного типа отличает расслоение профиля скорости вблизи межфазной границы и возникновение зон противотока в обеих средах. При пуазейлевском режиме в слоях реализуется однонаправленное течение с профилем скорости, близким к параболическому.

С изменением поля скорости происходит перестройка поля температуры. Для чисто термокапиллярных течений характерно формирование горячей приповерхностной зоны за счёт переноса тепла от горячего полюса к холодному при термокапиллярном растекании жидкости вдоль границы раздела. При смешанном режиме перепад температуры в вертикальном направлении практически отсутствует. При переходе к пуазейлевскому режиму формируется холодный термоклин вдоль границы раздела, при этом в жидкости возникает неустойчивая температурная стратификация в вертикальном направлении. Таким образом, точное решение вида (1) предсказывает существенную перестройку структуры конвективных режимов при изменении толщины жидкого слоя за счёт изменения баланса сил.

4. Устойчивость двухслойного течения

В рамках линейной теории исследована устойчивость всех описанных классов течений относительно малых нестационарных возмущений типа нормальных волн, пропорциональных $\exp[i(\alpha_x x + \alpha_z z - \lambda t)]$; здесь α_x, α_z – волновые числа вдоль осей x и z соответственно, λ – комплексный декремент. Определены пороговые характеристики устойчивости и характер их изменений в зависимости от величины l в случае плоских ($\alpha_z = 0$) и пространственных ($\alpha_z \neq 0$) возмущений. Нейтральные кривые (рис. 1) определяют интенсивность внешней тепловой нагрузки, приложенной на внешних границах канала и характеризуемой величиной температурного градиента A , которая приводит к потере устойчивости рассматриваемого течения. На рис. 1а область неустойчивости лежит справа от кривых $A(\alpha_x)$, построенных для случая плоских возмущений. Пример нейтральной поверхности для пространственных возмущений представлен на рис. 1б; области неустойчивости расположены внутри кривых.

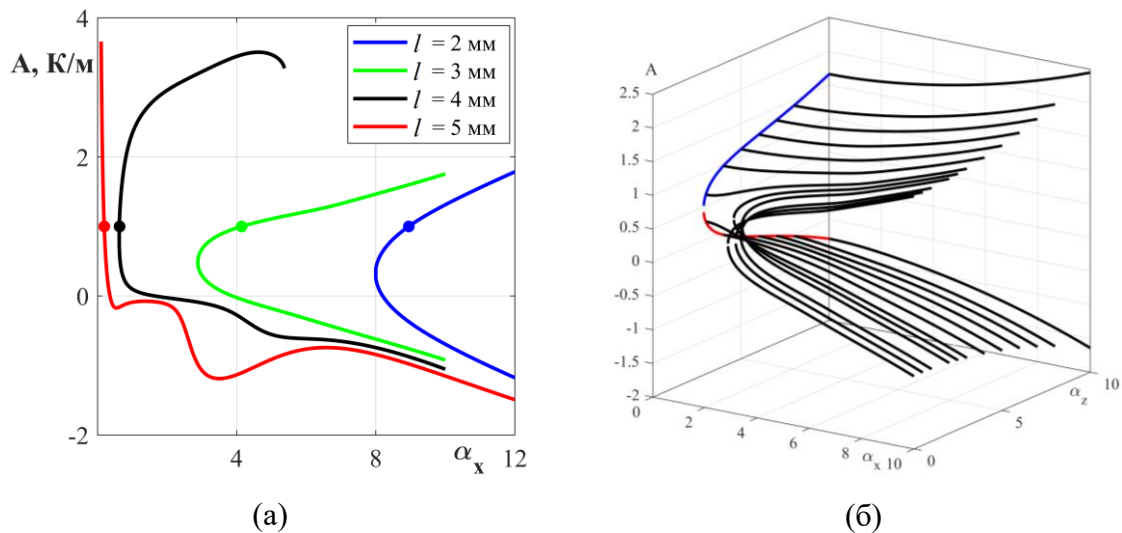


Рис. 1. Нейтральные кривые $A(\alpha_x, \alpha_z)$ для возмущений течения, описываемого решением (1) в двухфазной системе HFE-7100 – азот: (а) плоские возмущения; (б) пространственные возмущения, $l = 3$ мм

Установлено, что увеличение толщины жидкого слоя l дестабилизирует систему, при этом происходит смена механизмов неустойчивости. В случае тонкого жидкого слоя в системе развиваются приповерхностные вихревые структуры, имеющие термокапиллярную природу и дрейфующие в направлении основного течения (рис. 2а, б). С ростом l при потере устойчивости реализуются режимы ячеистой конвекции (рис. 2в).

В случае пространственных возмущений неустойчивость проявляется в формировании сосуществующих продольных и поперечных валов и тепловых структур различной формы. Подобные формы неустойчивости в испаряющейся жидкости, увлекаемой ламинарным газовым потоком, наблюдались в физических экспериментах [4], что подтверждает работоспособность используемой математической модели и рассматриваемого точного решения.

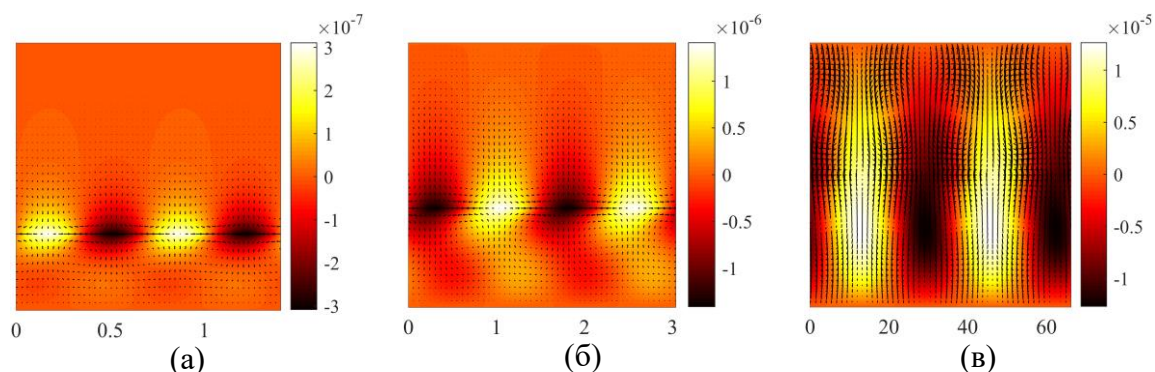


Рис. 2. Примеры наиболее опасных плоских возмущений: (а) $l = 2$ мм, $\alpha_x = 8.95$, (б) $l = 3$ мм, $\alpha_x = 4.14$, (в) $l = 5$ мм, $\alpha_x = 0.19$

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 22-11-00243, <https://rscf.ru/project/22-11-00243/>.

Список литературы

1. *Goncharova O. N., Hennenberg M., Rezanova E. V., Kabov O. A.* Modeling of the convective fluid flows with evaporation in the two-layer systems // *Interfacial Phenomena and Heat Transfer*. 2013. Vol. 1. N 4. P. 317–338. DOI: 10.1615/InterfacPhenomHeatTransfer.v1.i4.20
2. *Пухначев В. В.* Теоретико-групповая природа решения Бириха и его обобщения // «Симметрия и дифференциальные уравнения». Труды международной конференции, 21–25 августа 2000 г. // Красноярск: ИВМ СО РАН, 2000. С. 180–183.
3. *Bekezhanova V. B., Goncharova O. N.* Stability of exact solutions describing two-layer flows with evaporation at the interface // *Fluid Dynamics Research*. 2016. Vol. 48. 061408. DOI: 10.1088/0169-5983/48/6/061408
4. *Kabov O. A., Zaitsev D. V., Cheverda V. V., Bar-Cohen A.* Evaporation and flow dynamics of thin, shear-driven liquid films in microgap channels // *Experimental Thermal and Fluid Science*. 2011. Vol. 35. N. 5. P. 825–831. DOI: 10.1016/j.expthermflusci.2010.08.001

Границы существования аномального конвективного течения воздуха в квадратной полости с движущейся стенкой

Ф. С. Белобородов^а, А. Н. Шарифулин^а, Т. П. Любимова^б

^а Пермский национальный исследовательский политехнический университет, 614990, Пермь, Комсомольский пр., 29
email: sharifulin@bk.ru

^б Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1
email: lubimova@icmm.ru

Численно методом конечных разностей исследовано влияние плавного циклического изменения скорости верхней стенки квадратной полости, т.е. числа Рейнольдса, на конвективную устойчивость воздуха в квадратной полости. Все стенки полости полагаются твердыми. Боковые стенки идеально теплоизолированные, а верхняя и нижняя стенки изотермические, причем нижняя стенка более нагрета. Расчеты, проведенные в интервале чисел Грасгофа до тридцати надкритичностей, показали, что для каждого надкритического значения числа Грасгофа существует положительное критическое значение числа Рейнольдса такое, что при изменении числа Рейнольдса таким, что его модуль не превышает это значение, течение перестраивается плавно, меняя структуру от нормального одновихревого к аномальному двухвихревому и обратно. Если же изменение числа Рейнольдса выходит за указанный интервал, происходит жесткий гистерезисный переход от аномального течения к нормальному.

Ключевые слова: тепловая конвекция; движущая стенка; гистерезис

The boundaries of the existence of an anomalous convective air flow in a square cavity with a moving wall

P. S. Beloborodov^a, A. N. Sharifulin^a, T. P. Lubimova^b

^a Perm National Research Polytechnic University, 29 Komsomolsky Pr., 614990, Perm
email: sharifulin@bk.ru

^b Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, 1 Akademika Koroleva St., 614013, Perm
email: lubimova@icmm.ru

The influence of a smooth cyclic change in the velocity of the upper wall of a square cavity, i.e. Reynolds numbers, on the convective stability of air in a square cavity has been investigated numerically by finite difference method. All walls of the cavity are assumed to be solid. The side walls are ideally thermally insulated, while the top and bottom walls are isothermal, with the bottom wall being hotter.

Calculations carried out in the interval of Grashof numbers up to thirty supercriticality showed that for each supercritical value of the Grashof number there is a positive critical value of the Reynolds number such that when the Reynolds number changes such that its modulus does not exceed this value, the flow is reconstructed smoothly, changing the structure from normal single-vortex to anomalous two-vortex and vice versa. If the change in the Reynolds number goes beyond the specified interval, there is a hard hysteresis transition from the anomalous to the normal flow.

Keywords: thermal convection; moving wall; hysteresis

1. Введение

Тепловая конвекция воздуха в замкнутых прямоугольных полостях представляет интерес в связи с тем, что подобные емкости являются элементами большого количества технических устройств. В ранних работах (см. обзор в [1]) было показано, что конвективные течения при равномерном подогреве снизу возникают кризисным образом в результате потери устойчивости состояния покоя жидкости при превышении числом Релея Ra критического значения Ra_c . При этом в квадратной полости наблюдается вырождение надкритических движений заключающееся в том, что возможно два устойчивых одновихревых стационарных надкритических режима, отличающихся лишь направлением циркуляции. Это вырождение можно снять, введя несимметричное внешнее воздействие, такое как, например, наклон полости или движение одной из стенок. Наклон полости воздействует на конвекцию в полости интегрально, на весь объем жидкости в полости, а движение стенки воздействует локально, лишь вблизи движущейся грани. Эти два способа снять вырождение кардинально отличаются еще и тем, что наклон полости в отсутствии подогрева не может вызвать движение в жидкости, а движение стенки приводит к возникновению в полости одновихревого течения даже в изотермических условиях [2, 3].

В работах [4–7] показано, что наклон полости приводит к тому, что одно из возникающих надкритических течений становится аномальным и оно возможно лишь в узком интервале углов наклона, меньших по модулю предельного угла. Зависимость предельного угла наклона от надкритичности $r = Ra / Ra_c$ имеет максимум, т.е. с увеличением числа Грасгофа предельный угол увеличивается, достигает максимума примерно при трех надкритичностях и далее он с ростом r плавно уменьшается практически до нуля в области примерно двадцатикратной надкритичности.

Исследование воздействия движения верхней стенки полости на надкритические конвективные режимы начато в работе [8], где было показано, что движение стенки также приводит к тому, что одно из надкритических течений становится аномальным, существующим лишь при достаточно малых по модулю значениях числа Рейнольдса. Расчет для значения числа Прандтля $Pr = 1$ и двух значений числа Рейнольдса $Re = -2$ и $Re = -20$ показал, что при первом значении числа Рейнольдса в полости в исследованной области чисел Релея до трех надкритичностей, возможно два устойчивых состояния, одновихревое и аномальное двухвихревое, а при втором значении – реализуется только нормальное одновихревое течение, совпадающее по виду и направлению циркуляции с течением, реализующимся в отсутствии подогрева, т.е. когда число Релея $Ra = 0$. Критическое значение числа Рейнольдса, при превышении которого аномальное двухвихревое течение становится невозможным и зависимость его от надкритичности не определялась.

Цель настоящей работы, – на основе численного решения полных уравнений тепловой конвекции воздуха в приближении Буссинеска для различных скоростей

движения верхней стенки и надкритичностей, построить бифуркационную кривую, отражающую зависимость величины критического числа Рейнольдса от интенсивности нагрева полости, т.е. надкритичности r .

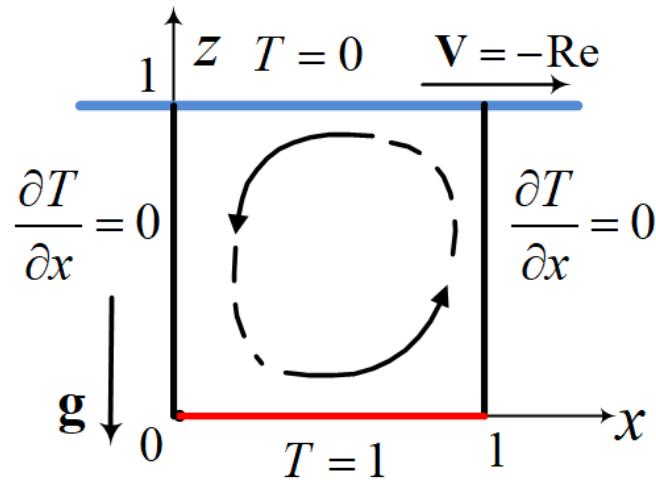


Рис. 1. Геометрия задачи о свободной тепловой конвекции в горизонтальном цилиндре квадратного сечения в безразмерной форме. Движению верхней стенки вдоль направления оси x соответствуют отрицательные значения числа Рейнольдса Re

2. Постановка задачи

Рассмотрим жидкость заполняющую полость имеющую форму бесконечного горизонтального цилиндра квадратного сечения, представленного на рис. 1. Введём декартовую систему координат (x, y, z) , ось y которой совпадает с ребром цилиндра и направлена от нас. Единичный вектор \vec{n} , расположен в плоскости xz , указывает направление вверх и связан с ускорением свободного падения соотношением $\vec{g} = -g\vec{n}$. Верхняя стенка квадратного цилиндра движется с постоянной скоростью U_0 , а остальные неподвижны, стенки полости предполагаются твёрдыми. Верхняя и нижняя плоскости $z = 0, d$ изотермические и поддерживаются при постоянном перепаде температуры θ , причём плоскость $z = 0$ более нагрета, боковые стенки $x = 0, d$ предполагаются теплоизолированными. Коэффициент линейного расширения жидкости β , кинематическая вязкость ν и температуропроводность χ постоянны.

Предполагается, что жидкость несжимаемая и справедливо приближение Буссинеска. Скорость, давление p и температура T определяются уравнениями непрерывности, Навье–Стокса и баланса тепла. Выберем в качестве единиц измерения расстояния, температуры, функции тока и времени – d , θ , коэффициент кинематической вязкости ν и d^2/ν . Будем искать плоские решения задачи. В этом случае векторные поля завихренности и функции тока будут иметь отличными от нуля только y компоненты:

$$\vec{\varphi} = (0, \varphi, 0), \quad \vec{\psi} = (0, \psi, 0). \quad (1)$$

Тогда уравнения тепловой конвекции в безразмерной форме запишутся в виде [7]:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \text{Gr} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (2)$$

$$\varphi = (\text{rot} v)_z = -\Delta \psi, \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{Pr} \Delta T. \quad (4)$$

Безразмерные критерии подобия, число Грасгофа – Gr, число Прандтля – Pr, число Релея – Ra, число Рейнольдса – Re имеют вид:

$$Gr = \frac{gbQd^3}{\nu^2}, \quad Pr = \frac{\nu}{\chi}, \quad Ra = Gr \cdot Pr, \quad Re = \frac{dU_o}{\nu}, \quad (5)$$

Скорость течения связана с полем функции тока $\psi(x, z)$ соотношением:

$$\vec{v} = \left(-\frac{\partial \psi}{\partial z}, 0, \frac{\partial \psi}{\partial x} \right). \quad (6)$$

Граничные условия для температуры на нижней и верхней изотермических стенках запишутся в виде:

$$\text{при } z = 0, 1 \quad T = 1, 0. \quad (7)$$

Для температуры на боковых стенках задано условие теплоизоляции:

$$\text{при } x = 0, 1 \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0. \quad (8)$$

Стенки полости полагались непроницаемыми и твёрдыми. Из условия непротекания через них и прилипания получаем граничные условия для функций тока:

$$\text{при } z = 0 \quad \psi = \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad (9)$$

$$\text{при } z = 1 \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = Re, \quad (10)$$

$$\text{при } x = 0, 1 \quad \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \quad (11)$$

Решение задачи (2)–(11) получалось конечно-разностным методом. Число Прандтля полагалось равным $Pr = 0.7$. Расчёты проводились на равномерной квадратной сетке шагом $h = 1/N$. Все вычисления проведены для $N = 64$.

3. Результаты расчётов

Основным расчётам предшествовала тестирование используемой модели и разностного метода. Во-первых, был рассмотрен случай $Gr = 0$. Полученные в расчетах значения для $Re = 10$ хорошо согласуются с результатами [9]. Так, например, полученное нами максимальное значение функции отличалось менее чем на 0.1% от значения, полученного в упомянутой работе на значительно более мелкой сетке 1024×1024 . Профиль скорости хорошее согласуется с [10].

Во-вторых, рассчитали критическое число Грасгофа при покоящейся верхней стенке ($Re = 0$) и затем сравнивали с общепринятым значением, полученным в линейной теории устойчивости. Следуя [10], составили экстраполяцию линейной зависимости кинетической энергии E_{kin} от чисел Грасгофа в сторону меньших значений. На основе данного метода было найдено $Gr_c = 3643$. Известно, что для случая

теплоизолированных боковых стенок критическое число Релея составляет $Ra_c = 2585$ [11], а соответствующее ему критическое число Грасгофа при $Pr = 0.7$ равно $Gr_c = 3693$. Таким образом, можно считать, что результаты линейной и численной теории расходятся менее, чем на 1.5%, что свидетельствует об удовлетворительной точности использования последнего.

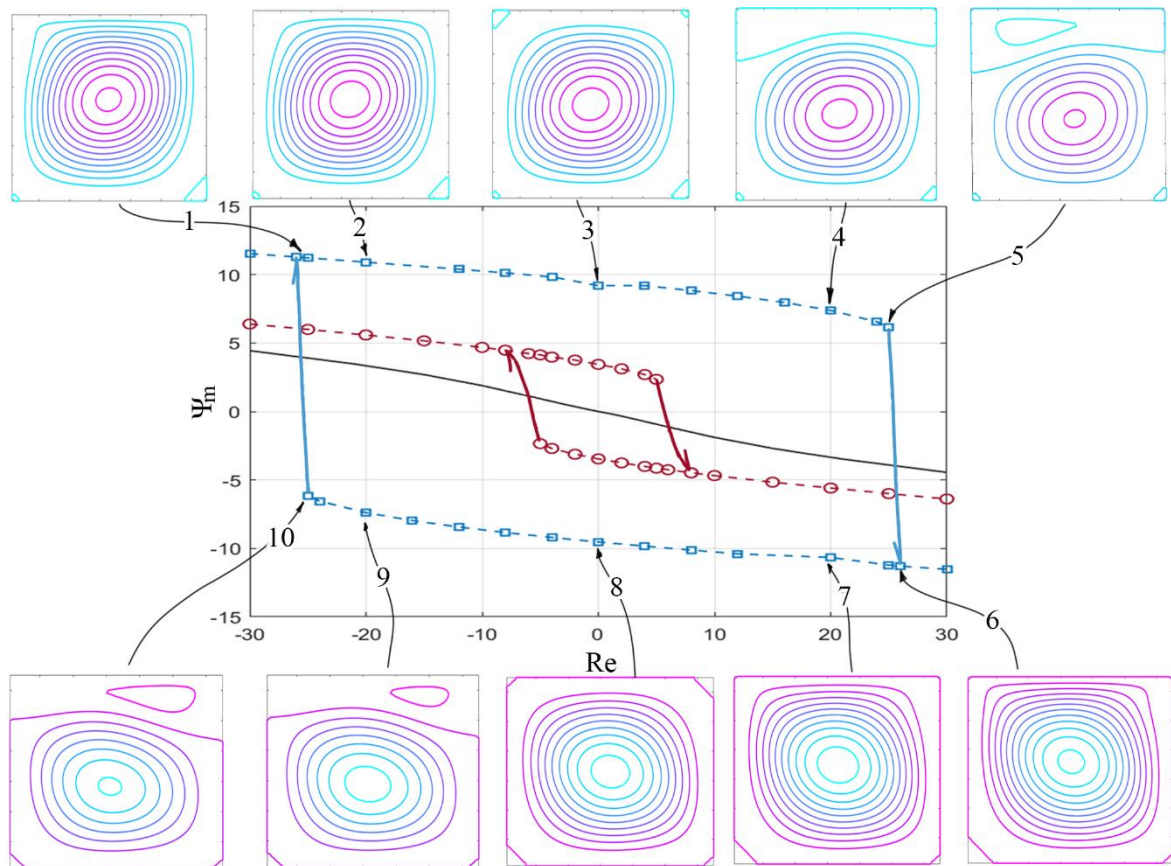


Рис. 2. Зависимость максимального по модулю значения функции тока ψ_m от числа Рейнольдса Re для трех значений надкритичности $r = Gr / Gr_c$. Сплошная линия соответствует $r = 0.71$; пунктирная с квадратами (кружочками) – $r = 1.37$ ($r = 3.71$). На врезках 1, 2, 3, 6, 7, 8 (4, 5, 9, 10) представлены линии тока нормального (аномального) течения

На рис. 2 для различных чисел Грасгофа показаны зависимости максимального по модулю значения функции тока ψ_m от числа Рейнольдса в диапазоне $Re = [-30, 30]$. Видно, что при докритическом значении $Gr = 2585$ ($r = 0.71$) система плавно меняет направление валового течения при смене знака числа Рейнольдса. При надкритических значениях $Gr = 5000$ и 13500 ($r = 1.37$ и $r = 3.71$) функция тока ψ_m при смене направления движения верхней стенки, т.е. изменении знака числа Рейнольдса не меняет знака, но как только число Рейнольдса достигает до критического значения $Re_c(r)$ функция тока ψ_m скачкообразным образом меняют знак и система переходят из аномального состояния в нормальное. Зависимость критического числа Рейнольдса от надкритичности (бифуркационная кривая), ограничивающая область существования аномального течения показана на рис. 3.

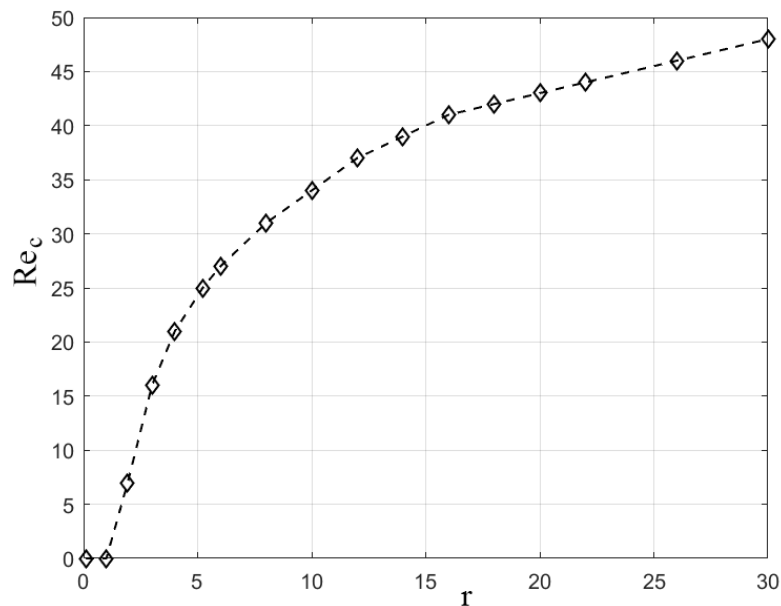


Рис. 3. Бифуркационная кривая

4. Заключение

Исследование влияния плавного циклического изменения скорости верхней стенки, т.е. числа Рейнольдса Re , показало, что для каждого надкритического значения числа Грасгофа существует предельное значение числа Рейнольдса такое, что при изменении числа Рейнольдса внутри интервала течение перестраивается, плавно меняя структуру от нормального одновихревого к аномальному двухвихревому и обратно. Если же изменение числа Рейнольдса выходит за указанный интервал, происходит жёсткий гистерезисный переход от аномального течения к нормальному.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Пермского национального исследовательского политехнического университета в рамках федеральной программы академического лидерства «Приоритет 2030».

Список литературы

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. 1972. 392 с.
2. Kawaguti M. Numerical solution of the Navier-Stokes equations for the flow in a two-dimensional cavity // Journal of the Physical Society of Japan. 1961. Vol. 16 (11). P. 2307–2315. DOI: 10.1143/JPSJ.16.2307
3. Simuni L. M. Mixing of two-dimensional laminar jets // Fluid Dynamics. 1967. Vol. 1. P. 107. DOI: 10.1007/BF01016284
4. Cliffe K. A., Winters K. H. A numerical study of the cusp catastrophe for Benard convection in tilted cavities // Journal of Computational Physics. 1984. Vol. 54 (3). P. 531–534. DOI: 10.1016/0021-9991(84)90132-3
5. Nikitin A. I., Sharifulin A. N. Concerning the bifurcations of steady-state thermal convection regimes in a closed cavity due to the Whitney folding-type singularity // Heat transfer. Soviet research. 1989. Vol. 21 (2). P. 213–221.
6. Sharifulin A. N., Poludnitsin A. N., Kravchuk A. S. Laboratory-scale simulation of nonlocal generation of a tropical cyclone // Journal of Experimental and Theoretical Physics. 2008. Vol. 107 (6). P. 1090–1093. DOI: 10.1134/S1063776108120170

7. Шарифулин А. Н., Полудницин А. Н. Численное определение границ существования аномального конвективного течения в наклоняемом прямоугольном цилиндре // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки. 2016. №. 2 (242). С. 116–125. DOI: 10.5862/JPM.242.13 УДК 532.5.013.4.536.25+519.6
8. Тарунин Е. Л. Ветвление решений уравнений конвекции в замкнутой полости с подвижной границей при подогреве снизу // Современные проблемы тепловой гравитационной конвекции. Минск. 1974. С. 51–58.
9. Marchi C. H., Suero R., Araki L. K. The lid-driven square cavity flow: numerical solution with a 1024 x 1024 grid // Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering. 2009. Vol. 31 (3). P. 186–198. DOI: 10.1590/S1678-58782009000300004
10. Ghia U., Ghia K. N., Shin C. T. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method // Journal of computational physics. 1982. Vol. 48 (3). P. 387–411. DOI: 10.1016/0021-9991(82)90058-4
11. Mizushima J. Onset of the thermal convection in a finite two-dimensional box // Journal of the Physical Society of Japan. 1995. Vol. 64 (7). P. 2420–2432. DOI: 10.1143/jpsj.64.2420

Современные средства гидрометрических измерений для решения актуальных задач обеспечения устойчивого водопользования

А. В. Богомолов, А. П. Лепихин, А. А. Лучников, Ю. С. Ляхин

Горный институт УрО РАН, 614007, Пермь, ул. Сибирская, 78а

В настоящее время в связи с очень быстрым развитием систем измерения, вычислительных комплексов, происходит радикальное преобразование традиционных систем измерений и в гидрологии. В связи с этим в работе обсуждается опыт применения некоторых современных измерительных комплексов при решении актуальных задач водного хозяйства, обеспечения надежного, устойчивого водопользования. В работе рассматривается решение двух конкретных задач: оценка характера и масштабов течений, формируемых в верхних бьефах крупных гидроузлов при внутрисуточной неравномерности их работы; исследование структуры донных отложений с использованием донных профилографов.

Ключевые слова: водные объекты; современные средства измерений

Modern means of hydrometric measurements for solving urgent problems of ensuring sustainable water use

A. V. Bogomolov, A. P. Lepikhin, A. A. Luchnikov, Yu. S. Lyakhin

Mining Institute UB RAS, 78a Siberian St., 614007, Perm

Currently, due to the very rapid development of measurement systems, computing complexes, a radical transformation of traditional measurement systems is also taking place in hydrology. In this regard, the paper discusses the experience of using some modern measuring systems in solving urgent problems of water management, ensuring reliable, sustainable water use. The paper considers the solution of two specific tasks: assessment of the nature and scale of currents formed in the upper reaches of large hydroelectric units with intra-day unevenness of their work; study of the structure of bottom sediments using bottom profilographs.

Keywords: water bodies; modern measuring instruments

1. Постановка задачи

В настоящее время в связи с очень быстрым развитием технологий нам хотелось показать и обсудить опыт применения некоторых современных измерительных комплексов при решении актуальных задач водного хозяйства. Такой подход позволяет выделить преимущества и недостатки рассматриваемых средств измерений. В работе рассматривается решение двух отдельных конкретных задач, решенных с использованием современных технологий. Первая задача заключается в оценке характера и масштабов течений, формируемых в верхних бьефах крупных гидроузлов, с использованием измерительного комплекса Valeport Midas ECM [1], для оценки

внутрисуточной неравномерности их работы, на примере верхнего бьефа Камского водохранилища. Данный прибор позволяет получать весьма эффективные оценки состояния водного объекта только на конкретном горизонте одной измерительной вертикали. Состояние поверхностных вод, в том числе гидрохимический режим водных объектов, определяется не только его гидродинамикой, но и характером источников загрязнения. Наибольшую сложность в описания и оценки представляют не столько точечные декларируемые источники, сколько рассредоточенные, диффузные источники, которые очень часто тесно связаны с загрязненными техногенными донными отложениями. В настоящее время для оценки мощность, структур донных отложений, стали активно использоваться - донные профилографы. В связи с этим мы посчитали целесообразным рассмотреть их опыт применения на примере Аргазинского и Камского водохранилища.

2. Оценка характера и масштабов вторичных течений в верхних бьефах гидроузлов

Характерной особенностью ГЭС, является технологическая возможность оперативного, очень быстрого изменения выработки электроэнергии, что позволяет их использовать для снятия суточной энергетической неравномерности. Неравномерность выработки электроэнергии определяется неравномерностью сброса воды из верхнего бьефа ГЭС в нижний. Резкие изменения расходов сбросов воды через плотину гидроузлов ГЭС отражаются на гидродинамическом режиме водохранилищ.

Гидродинамика верхнего бьефа Камской ГЭС имеет особое значение для питьевого водоснабжения г. Перми, так как она способна изменять потребительские свойства забираемой на водозаборах воды. Впервые исследование структуры течений, формируемых в верхнем бьефе Камского гидроузла в рамках вычислительных экспериментов были представлены [2]. Влияние не стационарности режима сбросов воды на гидродинамический режим водохранилищ исследовался так же в [3, 4, 5]. Основным лимитирующим показателем качества воды, забираемой на основном водозаборе города Перми – ЧОС (Чусовских очистных сооружениях) в зимний период является жесткость воды. В виду того, что водозабор находится ниже слияния двух рек: Сылвы и Чусовой, качество воды, которых очень различно, в период зимней межени в районе оголовков водозабора формируется устойчивая вертикальная стратификация. Наиболее жесткие воды располагаются в придонной области, более мягкие ближе к поверхности. С целью обеспечения устойчивого селективного отбора менее минерализованной, с меньшей жесткостью воды было предложено и реализовано создание донных барьеров у водозаборных оголовков. Влияние селективного отбора на устойчивость стратифицированных структур в водохранилищах исследовалась в [5]. Гидродинамический режим в районе ЧОС является одним из основных факторов, определяющих устойчивость функционирования данного водозабора. С введением в 2020 г. в режим постоянной эксплуатации 3-ю очередь ЧОС, включающих донные барьеры, весьма остро стал вопрос об исследовании структуры течений, формируемых вследствие существенной внутри суточной изменчивости режимов сбросов воды на КамГЭС.

Традиционные способы измерений на основе гидрометрических вертушек мало эффективны, так как с одной стороны требуется проведение как минимум суточных измерений со значительной внутри суточной неравномерностью, а с другой измеряемые потоки характеризуются не только малыми скоростями течениями $\sim 0.05 - 0.001$ м/с и при этом могут изменять направление в течение достаточно малого промежутка времени на противоположное.

В нашей работе в качестве основного рабочего инструмента был выбран измеритель скорости течения MIDAS ECM производства компании Valeport [1]. Данный

прибор является универсальным измерителем параметров течения, разработанным для длительной работы и простого развертывания. Данный прибор может работать как в режиме реального времени с помощью очень длинного кабеля (до нескольких тысяч метров), так и в условиях полной автономности на заданной глубине. Диапазон измеряемых скоростей потока для данного прибора находится в пределах от 0.001 м/с до 5 м/с. Прибор является измерителем скоростей потока электромагнитного типа, базирующимся на принципе Фарадея. Так как проводник (вода) движется через электромагнитное поле (генерируемое датчиком), он генерирует напряжение, которое измеряется с помощью электродного датчика. Величина создаваемого напряжения пропорциональна значению скорости потока воды. Данный прибор позволяет также определять физические свойства водной массы: электрическую проводимость, температуру, давление, мутность.

Для достижения цели: определения изменений динамических (скорости и направления течений) и физических (электропроводность и температуры воды) характеристик потока в районе оголовка Чусовских очистных сооружений г. Перми были организованы натурные наблюдения с помощью инструмента измеритель скорости течения MIDAS ECM. Прибор был настроен на автономную работу и погружен глубину 7 м – на глубину забора воды оголовками водозабора на период производства измерений. Время автономной работы прибора составило 23 часа. В результате были получены зависимости изменения величин скоростей и направлений течений и удельной электропроводности по времени. Рассматриваемые величины претерпевают значительные изменения по времени наблюдений. Это обусловлено главным образом режимом сбросных расходов Камской ГЭС. Была построена зависимость основного лимитирующего показателя качества воды для Чусовских сооружений – жесткости воды от сбросных расходов Камской ГЭС. Прослеживается очень тесная связь, которая свидетельствует о том, что данный фактор является определяющим для изменения качества воды на водозаборе в период зимней межени. Использование данного прибора позволило впервые обнаружить когерентные структуры, формирующиеся на границе разделов водных масс в районе ЧОС и оказывающие существенное влияние на качество забираемой воды [4].

3. Анализ характера и структуры донных отложений

Донные отложения являются не только своеобразной памятью водных объектов, но и одним из важнейших факторов, определяющих его гидрохимический и гидробиологический режим, особенно для объектов, расположенных в зонах активного техногенеза. Поэтому достаточно полная и объективная оценка их состояния, является необходимым и обязательным компонентом в исследованиях этих объектов. В тоже время стандартные методики исследований сводится к точечному опробованию донных отложений различными по конструкции грунтовыми трубками и дночерпателями. Хотя данный метод широко используется в практической деятельности, однако он при этом имеет ряд существенных недостатков. Во-первых, при значительных размерах изучаемого водного объекта общее количество станций опробования может достигать нескольких сотен точек, что связано с большими временными и трудовыми затратами. Во-вторых, даже при значительном количестве точек исследования значительная часть акватории остается неохваченная исследованиями. При сложном донном рельефе, наличии погребенных русловых и пойменных форм, создаются предпосылки для недоучета общего объема донных отложений, точное значение которого приобретает особую важность при планировании и расчете стоимости работ, например, при экологической реабилитации водного объекта.

В настоящее время в практике проведения гидрологических исследований стали применяться современные геофизические методы исследований, основанные на

генерации сигналов определенной частоты и мощности, их последующей регистрации, обработки. Их интерпретация позволяют получать непрерывные данные о распределении донных отложений. Одним из таких методов является донное акустическое профилирование [6].

Акустическое (сейсмоакустическое) профилирование (в английском варианте *sub-bottom profiling*) как геофизический метод давно применяется в морской геофизике в вариантах буксируемого оборудования. Для внутренних водоемов и маломерных судов предпочтительней использовать набортные варианты размещения оборудования, отличающиеся простотой, компактностью установки и малым энергопотреблением.

Донные профилографы работают на более низких частотах, нежели промерные эхолоты. Это позволяет проникать акустической волне в более глубокие горизонты. Проникающая способность генерируемых волн зависит от частоты сигнала (скин-эффект) и его длительности. Приборы с более низкой частотой антенного блока, позволяют выполнять исследования на большую глубину, однако при этом снижается разрешающая способность прибора. Использование технологии CHIRP (линейной частотной модуляции сигнала) позволяет увеличивать производительность системы и обеспечить большее разрешение по разрезу дна.

В отличие от метода георадиолокации, также достаточно широко применяемого для обследования дна водных объектов, акустического профилирования изначально предназначалось для исследования строения дна водных объектов, главным образом для поиска месторождений газогидратов на шельфе морей. Например, используемый в наших исследованиях донный профилограф SyQwest Stratabox HD, работающий на частоте 10 кГц, позволяет выполнять исследования на глубину осадочной толщи до 40 м при глубине водоема до 150 м. При этом его разрешающая способность составляет 6 см.

Преимущества применения донного профилографа при исследовании донных отложений заключаются в возможности проведения непрерывных площадных исследований строения и мощности донных осадков водных объектов, высокая разрешающая способность получаемых профилограмм, возможность выполнения классификации донных отложений на основании базы данных акустических характеристик.

Использование донных профилографов не отменяет применение традиционных пробоотборников, поскольку, как и для любого геофизического метода, интерпретация данных акустического профилирования требует «привязки» к конкретным физическим слоям осадков. Однако профилографы позволяют сокращать количество точек исследования в разы, при этом закрывая «белые пятна» между станциями исследования. Теоретически, возможности аппаратуры позволяют получать непрерывные профили любой длины. Координатная привязка профилограмм осуществляется автоматически в процессе съемки с помощью GPS-ГЛОНАСС-приемника. Обработка данных осуществлялась в специализированных программных средах Stratabox HD, SonarWiz и НуРаск встроенными методами уменьшения соотношения шум/полезный сигнал с применением частотной фильтрации.

Верификация полученных результатов проводится путем сопоставления расчетных и наблюдаемых характеристик донных отложений. На данном этапе происходит выделение слоев, полученных на профилограмме и сравнение их с результатами натурных измерений в результате пробоотбора. Затем происходит увязка этих величин. В результате обработки материалов, полученных с использованием донного профилографа SyQwestStratabox могут быть построены как карто-схемы распределения мощности данных отложений, так и поперечные профили по заданным створам. Эти материалы в дальнейшем необходимы для оценки процессов осадконакопления донных отложений и принятия управленческих решений. Апробация данной технологии исследования донных отложений была нами проведена на Аргазинском и Камском

водохранилищах, являющихся важными источниками питьевого и технического водоснабжения Челябинской области и Пермского края соответственно, и показала его высокую эффективность.

4. Заключение

Современные системы измерений, используемые в практике полевых гидрологических исследований, очень существенно различаются как используемыми физическими принципами измерений, так и самими измеряемыми показателями. В тоже время, как правило, они характеризуются следующими специфическими особенностями:

- автономность работы;
- независимое пространственное позиционирование;
- накопление, хранение и первичная обработка получаемой информации.

В данной работе показан опыт применения этих систем измерений на трех конкретных примерах решения водохозяйственных задач. Рассмотренные средства получения информации, позволяют значительно более объективно и полно проводить оценку и описание рассматриваемых гидрологических явлений и процессов, что дает возможность не только их уточнения и детализации, но и выявлять их ранее неизвестные аспекты.

В связи с этим, учитывая весьма быстрое внедрение современных технологий в практическую деятельность, для того, чтобы обеспечить конкурентоспособность отечественной гидрологии, необходимо активно внедрять ознакомление с этими технологиями в учебные планы ВУЗов, занимающихся подготовкой соответствующих специалистов.

Список литературы

1. MIDAS ECM Product Details 2020 [Электронный ресурс]. URL: <https://www.valeport.co.uk/content/uploads/2020/04/MIDAS-ECM-Datasheet-April-2020.pdf> (дата обращения: 30.08.2022).
2. *Ljahin U. S., Bogomolov A. V., Lepikhin A. P.* Experience in application of modern technologies of measuring the structure of currents in the upstream waters of large hydroelectric complexes (on the example of the Kama HPP) // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. 2021. Vol. 834. 012005. DOI: 10.1088/1755-1315/834/1/012005
3. *Lyubimova T., Lepikhin A., Parshakova Y., Bogomolov A., Lyakhin Y.* The influence of intra-day non-uniformity of operation of large hydroelectric powerplants on the performance stability of water intakes located in their upper pools // Water. 2021. Vol. 13 (24). 3577. DOI: 10.3390/w13243577
4. *Lyubimova T. P., Lepikhin A. P., Parshakova Y. N., Bogomolov A. V.* Coherent structures at the interface between water masses of confluent rivers // Water. 2022. Vol. 14 (8). 1308. DOI: 10.3390/w14081308
5. *Lyubimova T., Lepikhin A., Parshakova Y., Lepikhin A., Bogomolov A., Lyakhin Y., Tiunov A.* Peculiarities of hydrodynamics of small surface water bodies in zones of active technogenesis (on the example of the Verkhne-Zyryansk reservoir, Russia) // Water. 2021. Vol. 13 (12). 1638. DOI: 10.3390/w13121638
6. *Белобородов А. В., Богомолов А. В., Лепихин А. П., Ляхин Ю. С.* Опыт применения гидроакустического профилографа для оценки мощности донных отложений крупного водохранилища (на примере Аргазинского водохранилища) // Водное хозяйство России: проблемы, технологии, управление. 2020. № 3. С. 6–18. DOI: 10.35567/1999-4508-2020-3-1

Формирование потока вязкой жидкости во входном узле вертикального канала при его заполнении

Е. И. Борзенко, О. Ю. Фролов, Е. И. Хегай, Г. Р. Шрагер

Национальный исследовательский Томский государственный университет,
634050, Томск, пр. Ленина, 36
email: efim_h@ftf.tsu.ru

Проведено исследование формирования потока вязкой жидкости во входном узле вертикально расположенной ёмкости при её заполнении в направлении противоположном направлению действия силы тяжести. Течение описывается уравнениями Навье–Стокса и неразрывности. Жидкость подается через входной канал снизу с заданным расходом. На стенках выполняются условия прилипания. На свободной поверхности выполняются условия отсутствия касательных напряжений и равенство нормального напряжения внешнему давлению. Задача решается численно с использованием метода контрольного объема и корректирующей процедуры SIMPLE. Местоположение свободной поверхности определяется с помощью метода VOF / PLIC. Выявлены режимы формирования потока во входном узле в зависимости от определяющих параметров.

Ключевые слова: вязкая жидкость; свободная поверхность; вертикальная ёмкость; входной узел; численное моделирование; алгоритм SIMPLE; метод VOF; режимы формирования потока

Viscous fluid flow formation in the expansion plane of a vertical channel during filling

E. I. Borzenko, O. Y. Frolov, E. I. Hegaj, G. R. Shrager

National Research Tomsk State University, 36 Lenin Ave., 634050, Tomsk
email: efim_h@ftf.tsu.ru

The formation of a viscous fluid flow in the expansion plane of a vertically located tank during its filling against gravity is studied. The flow is described by the Navier-Stokes and continuity equations. The fluid is supplied through the input channel from the bottom upwards at a given flow rate. No-slip conditions are specified on the walls. On the free surface, the shear stress is set to zero, and the normal stress is equal to the external pressure. The problem is numerically solved using the finite volume method and the SIMPLE algorithm. The free surface location is determined by the VOF / PLIC method. The regimes of the flow formation in the expansion plane are revealed depending on the governing parameters.

Keywords: viscous fluid; free surface; vertically located tank; expansion plane; numerical simulation; SIMPLE algorithm; VOF method; regimes of the flow formation

Введение

Одним из основных способов переработки полимерных композиций является литьё под давлением. Поэтому решение задач о закономерностях течений реологически сложных жидкостей со свободной поверхностью, реализуемых в процессе формования изделий, представляет практический интерес и является важным в процессе проектирования конструкций элементов технологической оснастки и оптимизации рабочих процессов, реализующихся в них. Для их исследования используется метод математического моделирования, которые позволяют получить сведения об особенностях кинематических и динамических характеристик потока.

Сильное влияние на механические свойства и качество конечных изделий оказывает стадия заполнения соответствующих пресс-форм [1, 2]. В связи с этим анализ процесса заполнения необходим с целью прогнозирования качества конечного изделия.

В настоящее время разработано множество численных методов моделирования течений вязкой жидкости со свободной поверхностью [3, 4]. Одним из широко распространённых методов вычислительной гидродинамики является метод VOF (Volume of Fluid), предложенный в [5]. В [6] предложена модификация метода, называемая VOF / PLIC (Piecewise Linear Interface Calculation), которая позволяет представить свободную поверхность в виде наклонных отрезков. В [7–11] демонстрируется успешное применение метода VOF / PLIC.

В работе [12] разработан оригинальный численный алгоритм расчета течений вязкой жидкости со свободой поверхностью на основе метода контрольного объёма, процедуры SIMPLE и методе VOF / PLIC. Разработанный метод успешно применялся для моделирования плоских и пространственных течений вязких жидкостей со свободной поверхностью, реализуемых в технологии переработки полимерных материалов.

Методы вычислительной гидродинамики применяются для исследования течения при заполнении емкостей. В работе [13] рассматривается медленное течение вязкой жидкости, реализующееся в технологии метода свободного литья на этапах течения жидкости в массопроводе и заливки пресс-форм различной конфигурации. Показано, что монолитность изделий может нарушаться за счет образования газовых включений и внутренних границ раздела в жидкости. Описаны условия, при которых возможно появление таких дефектов: при течении жидкости в массопроводе, при наличии в нем конструктивного элемента типа «диафрагма» и при заполнении пресс-форм в струйном режиме. В [14] моделируется процесс литья под давлением при заполнении пресс-формы вязкой жидкостью. Показано, что такой процесс может проходить с образованием воздушных полостей или линий спая. Это, в свою очередь, приводит к внутренним дефектам готового изделия. При этом существуют отдельные диапазоны значений числа Стокса, обеспечивающие бездефектный режим заполнения.

Авторы [15, 16] исследовали влияние метода литья топливной композиции на производительность и надежность энергетических установок. Согласно проведенным исследованиям, высказано предположение, что распределение порций топливной композиции внутри пресс-формы влияет на локальную скорость горения. В [17, 18] исследуются пространственные течения вязкоупругой жидкости Виноградова-Покровского в каналах различной конфигурации. В работах [19, 20] проведено исследование расходных характеристик течения битумного вяжущего, описываемого моделью Балкли-Гершеля, в цилиндрической трубе. Моделирования вязкого течения

вдоль расширяющихся/сужающихся каналов с проницаемыми границами исследовалось в [21, 22].

Целью настоящей работы является изучение процесса формирования потока вязкой жидкости во входном узле вертикально расположенной ёмкости при её заполнении.

1. Постановка задачи

Рассматривается течение вязкой жидкости, реализуемое при формировании потока во входном узле вертикального канала. Область решения показана на рис. 1. Жидкость поступает в ёмкость через входное сечение Γ_1 с заданным расходом. Считается, что в начальный момент заполнен только входной канал.

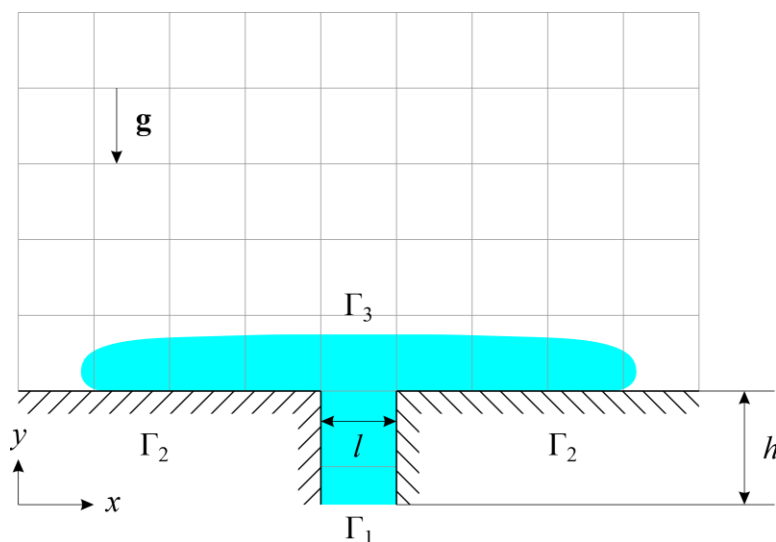


Рис. 1. Область решения

Система уравнений, описывающая течение, состоит из уравнений Навье-Стокса (1, 2) и неразрывности (3), которые записываются в безразмерном виде

$$\text{Re} \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right), \quad (1)$$

$$\text{Re} \left(\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right) - W, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

Здесь: u_x и u_y – проекции вектора скорости на оси декартовой системы координат x и y , соответственно; μ – вязкость жидкости; p – давление; Re – число Рейнольдса; W – параметр, характеризующий соотношение гравитационных и вязких сил в потоке.

Математическая постановка задачи дополняется граничными условиями. На входной границе Γ_1 задается профиль скорости, соответствующий установившемуся течению вязкой жидкости в плоском бесконечном канале. На твердых стенках Γ_2 – условие прилипания. На свободной поверхности Γ_3 выполняются условия

отсутствия касательных напряжений и равенство нормального напряжения внешнему давлению.

При обезразмеривании выбраны следующие масштабы длины, скорости, времени и давления: l – ширина входного канала; u – среднерасходная скорость жидкости во входном сечении; комплексы l/u и $\mu(u/l)$, соответственно. Таким образом число Рейнольдса и параметр W выражаются следующими формулами:

$$\text{Re} = \frac{\rho ul}{\mu}, \quad W = \frac{\rho gl^2}{\mu u}. \quad (4)$$

В начальный момент свободная граница является плоскостью $y = h$. Решение задачи сводится к нахождению полей скоростей и давления, а также к определению положения свободной поверхности в определенные моменты времени.

2. Метод решения

Поставленная задача решается численно. Интегрирование системы уравнений движения осуществляется с помощью метода контрольных объёмов, при этом дискретизация уравнений движения производится по экспоненциальной схеме с использованием разнесенной разностной сетки. Уравнение неразрывности удовлетворяется с использованием процедуры SIMPLE [23].

Положение свободной границы в каждый момент времени определяется по методу VOF/PLIC [6]. Идея метода заключается в том, что вводится функция F , значение которой равно единице во всех точках, занятых жидкостью, и равно нулю в остальных точках. При осреднении по контрольному объёму разностной сетки среднее значение F равно объёмной доле контрольного объёма, занятой жидкостью. В частности, $F = 1$ соответствует контрольному объёму, полностью заполненному жидкостью, а $F = 0$ указывает на то, что контрольный объём не содержит жидкости. Контрольные объёмы, в которых F принимает значение от нуля до единицы, содержат свободную поверхность. Уравнение для функции F имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u_x \frac{\partial F}{\partial x} + u_y \frac{\partial F}{\partial y} = 0. \quad (5)$$

Значения этой функции с течением времени находятся из уравнения (5), которое дискретизируется на разностной сетке, и значения потоков через грани рассчитываются, исходя из геометрических соображений и рассчитанных значений скорости на гранях контрольного объёма.

Нормаль к свободной поверхности направлена перпендикулярно вектору градиента функции F . Когда известно значение F и направление нормали к свободной поверхности в граничном контрольном объёме, можно провести линию, аппроксимирующую свободную поверхность. Поэтому, помимо определения граничного контрольного объёма, функция F используется для определения местоположения жидкости внутри него.

Классический метод VOF предполагает, что жидкость внутри контрольного объёма прижата к одной из его граней и свободная поверхность расположена параллельно ей. В настоящей работе использовался метод VOF/PLIC, который является модификацией, учитывающей произвольный наклон свободной поверхности.

3. Методические расчеты

Для верификации разработанной численной методики и программы расчета проведена проверка аппроксимационной сходимости на последовательности сеток, а так же выполнена проверка закона сохранения массы в процессе заполнения. На рис. 2 показана картина течения, соответствующая значениям определяющих параметров $Re = 1$, $W = 2$ в момент времени $t = 10$.

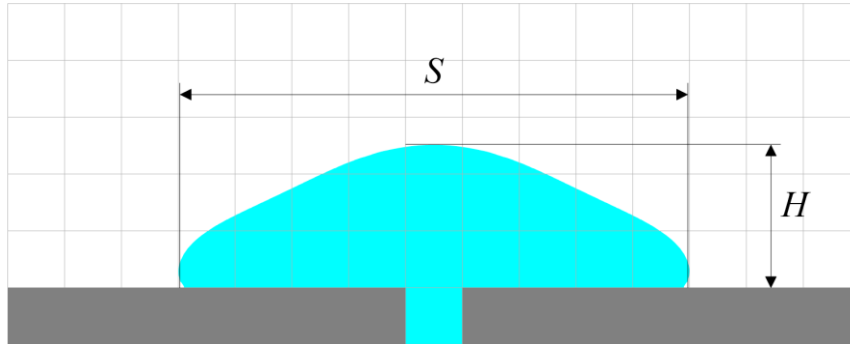


Рис. 2. Положение свободной поверхности в момент времени $t = 10$ при $Re = 1$, $W = 2$

В качестве контролируемых характеристик вычислялась ширина растекания жидкости по дну ёмкости S и высота свободной поверхности на плоскости симметрии H , указанные на рис. 2.

Ошибка в законе сохранения массы жидкости рассчитывалась по формуле

$$E = \left| \frac{\Omega_0(t) - \Omega(t)}{\Omega(t)} \right| \cdot 100\%. \quad (6)$$

Здесь $\Omega_0(t)$ – масса жидкости, которая поступила в ёмкость через входное отверстие в соответствии с заданным расходом за время t ; $\Omega(t)$ – вычисленная масса жидкости в ёмкости в момент времени t за вычетом начальной массы жидкости.

Значения S , H и E вычислялись при значениях параметров, для которых реализуется картина течения, показанная на рис. 2. Результаты проверки приведены в таблице.

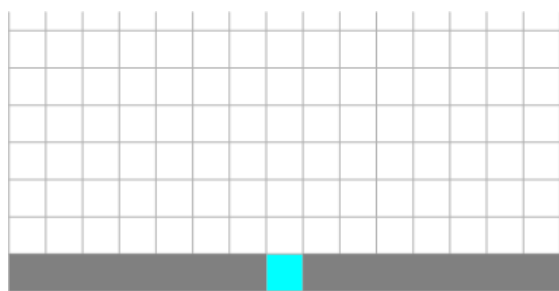
Таблица. Вычисленные значения S , H и E на сетках с шагом Δh

Δh	1 / 10	1 / 20	1 / 40
S	5.94516	6.01003	6.02701
H	3.24296	3.23393	3.23560
E	0.388	0.084	0.041

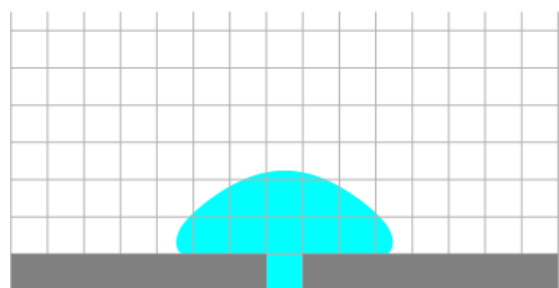
4. Результаты

В результате параметрических исследований выявлены режимы формирования потока в области истечения вязкой жидкости из узкой части канала в широкую.

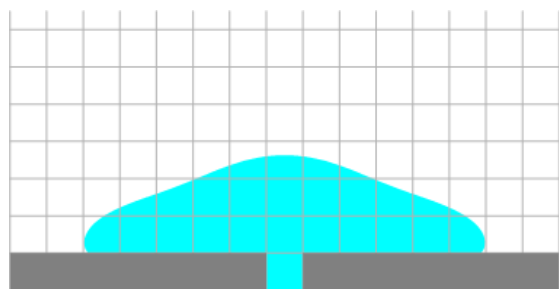
При значениях параметров $W > 1$ и $Re < 1$ жидкость растекается по дну широкой части канала непрерывным образом. Эволюция формы свободной поверхности такого режима продемонстрирована на рис. 3.



(a)

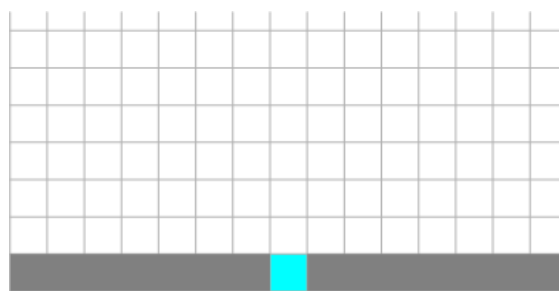


(б)

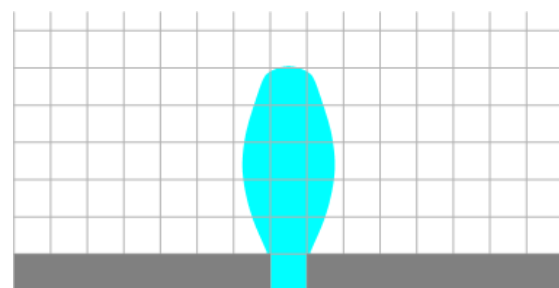


(в)

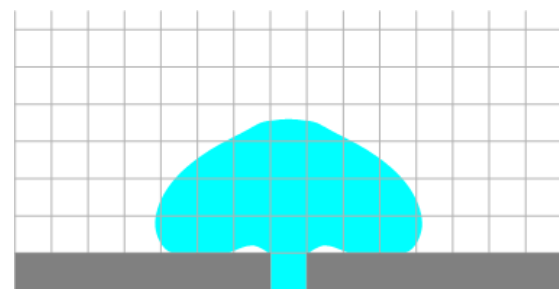
Рис. 3. Эволюция свободной поверхности при $Re = 0.1$, $W = 2$: (a) $t = 0$; (б) $t = 10$; (в) $t = 20$



(a)



(б)



(в)

Рис. 4. Эволюция свободной поверхности при $Re = 0.1$, $W = 0.25$: (a) $t = 0$; (б) $t = 10$; (в) $t = 20$

При значениях параметров $W < 1$ и $Re < 1$ жидкость струёй вытекает из узкой части канала и затем под воздействием силы тяжести обрушивается на дно. Далее жидкость растекается по дну. Эволюция формы свободной поверхности такого режима продемонстрирована на рис. 4.

Выявлены режимы, при которых происходит потеря устойчивости струи жидкости, вытекающей из узкой части канала (рис. 5).

Заключение

Исследован процесс формирования потока вязкой жидкости во входном узле вертикально расположенной ёмкости при её заполнении. Алгоритм решения основных уравнений, описывающих течение, основан на совместном использовании метода VOF / PLIC и корректирующей процедуры SIMPLE. Параметрические исследования проводились в зависимости от числа Рейнольдса и параметра W , характеризующего соотношение гравитационных и вязких сил в потоке.

В результате продемонстрированы режимы формирования потока в зависимости от значений определяющих параметров.

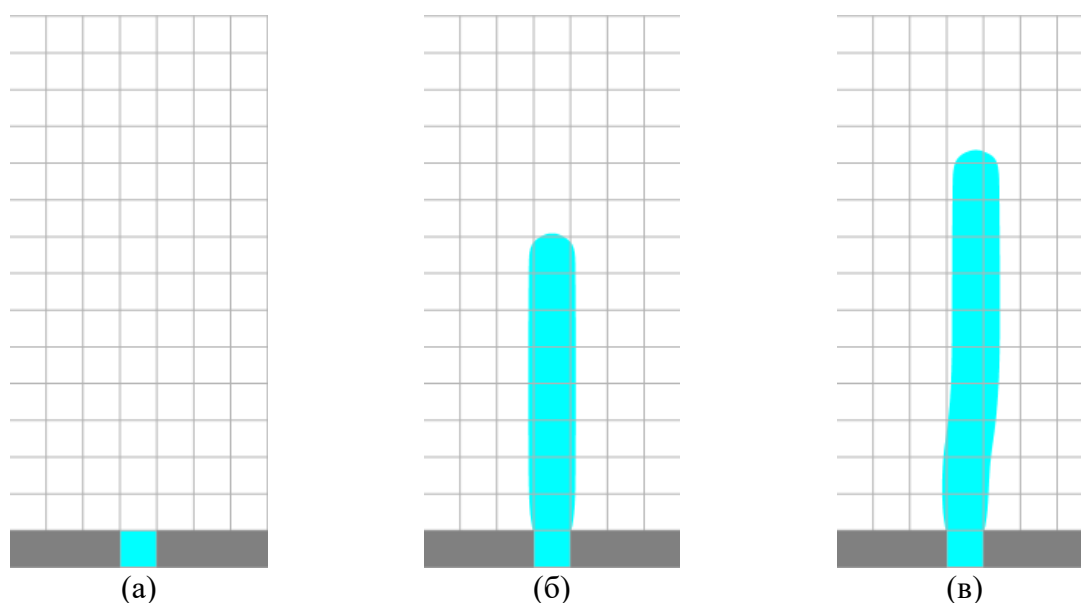


Рис. 5. Эволюция свободной поверхности при $Re = 1$, $W = 0.01$: (а) $t = 0$; (б) $t = 10$; (в) $t = 15$

Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-19-00021-П).

Список литературы

1. Li Q., Qu F. A level set based immersed boundary method for simulation of nonisothermal viscoelastic melt filling process // Chinese Journal of Chemical Engineering. 2021. Vol. 32. P. 119–133. DOI: 10.1016/j.cjche.2020.09.057
2. Zhao P., Gao Y., Zhou H., Turng L. S. Noniterative optimization methods // Computer Modeling for Injection Molding. Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, Inc, 2013. P. 255–282. DOI: 10.1002/97811184444887
3. McSherry R. J., Chua K. V., Stoesser T. Large eddy simulation of free-surface flows // Journal of Hydrodynamics. 2017. Vol. 29 (1). P. 1–12. DOI: 10.1016/S1001-6058(16)60712-6
4. Scardovelli R., Zaleski S. Direct numerical simulation of free-surface and interfacial flow // Annual Review of Fluid Mechanics. 1999. Vol. 31 (1). P. 567–603.
5. Nichols B. D., Hirt C. W., Hotchkiss R. S. SOLA-VOF: a solution algorithm for transient fluid flow with multiple free boundaries. Los Alamos Sci. Lab. Rep. LA-8355, 1980. 78 p.
6. Jang W., Jilesen J., Lien F. S., Ji H. A study on the extension of a VOF/PLIC based method to a curvilinear co-ordinate system // International Journal of Computational Fluid Dynamics. 2008. Vol. 22 (4). P. 241–257. DOI: 10.1080/10618560701880953
7. Issakhov A., Zhandaulet Y., Nogaeva A. Numerical simulation of dam break flow for various forms of the obstacle by VOF method // International Journal of Multiphase Flow. 2018. Vol. 109. P. 191–206. DOI: 10.1016/j.ijmultiphaseflow.2018.08.003
8. Hargreaves D. M., Morvan H. P., Wright N. G. Validation of the volume of fluid method for free surface calculation: the broad-crested weir // Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics. 2007. Vol. 1 (2). P. 136–146. DOI: 10.1080/19942060.2007.11015188
9. Hänsch S., Lucas D., Höhne T., Krepper E., Montoya G. Comparative simulations of free surface flows using VOF-methods and a new approach for multi-scale interfacial

- structures // Proceedings of the ASME, 2013. Fluids Engineering Division Summer Meeting. 2013. Vol. 1C. 16104. DOI: 10.1115/FEDSM2013-16104.
10. Saincher S., Banerjee J. A Redistribution-based volume-preserving PLIC-VOF technique // Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals. 2015. Vol. 67 (4). P. 338–362. DOI: 10.1080/10407790.2014.950078
 11. Yin X., Zarikos I., Karadimitriou N. K., Raoof A., Hassanizadeh S. M. Direct simulations of two-phase flow experiments of different geometry complexities using Volume-of-Fluid (VOF) method // Chemical Engineering Science. 2019. Vol. 195. P. 820–827. DOI: 10.1016/j.ces.2018.10.029
 12. Хегай Е. И. Математическое моделирование течений вязкой жидкости со свободной поверхностью в элементах технологической оснастки // Дис. на соиск. учён. степ. к.ф.-м.н. Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск. 2022. 111 с.
 13. Пономарева М. А. Моделирование медленных течений вязкой жидкости со свободной поверхностью // Дис. на соиск. учён. степ. к.ф.-м.н. Томский государственный университет, Томск. 2011. 159 с.
 14. Ponomareva M. A., Yakutenok V. A. Simulation of mold filling by a highly viscous fluid using the 2D indirect boundary element method // Boundary Elements and Other Mesh Reduction Methods XXXVIII. 2015. Vol. 61. P. 285–296.
 15. Shimada T., Kato K., Sekino N. et al. Advanced computer science on internal ballistics of solid rocket motors // Transactions of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences, Aerospace Technology Japan. 2010. Vol. 8. P. 29–37. DOI: 10.2322/tastj.8.Pa_29.
 16. Hasegawa H., Fukunaga M., Kitagawa K., Shimada T. Burning rate anomaly of composite propellant grains // Combustion, Explosion, and Shock Waves. 2013. Vol. 49. P. 583–592. DOI: 10.1134/S0010508213050109
 17. Кошелев К. Б., Пышнограй Г. В., Толстых М. Ю. Моделирование трехмерного течения полимерного расплава в сходящемся канале с прямоугольным сечением // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2015. Т. 3. С. 3–11.
 18. Rudakov G. O., Laas A. A., Makarova M. A., Malygina A. S., Pyshnograï G. V. Modeling of nonlinear effects in the theory of the flow of polymer liquids when superposition periodic oscillations on a stationary shear flow // AIP Conference Proceedings. 2021. Vol. 2371. 040008. DOI: 10.1063/5.0060935
 19. Matvienko O. V., Aseeva A. E., Firsanova N. S. Stabilized flow rate of high-paraffin asphalt cement in cylindrical pipe // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta. Journal of Construction and Architecture. 2021. Vol. 23 (5). P. 71–85. DOI: 10.31675/1607-1859-2021-23-5-71-85
 20. Matvienko O. V., Litvinova A. E. Steady flow of high-paraffin bituminous binder in cylindrical tube in terms of Herschel – Bulkley fluid // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta. Journal of Construction and Architecture. 2021. Vol. 23 (4). P. 79–99. DOI: 10.31675/1607-1859-2021-23-4-79-99
 21. Rashidi M. M., Sheremet M. A., Sadri M. et al. Semi-analytical solution of two-dimensional viscous flow through expanding /contracting gaps with permeable walls // Mathematical and Computational Applications. 2021. Vol. 26 (2). P. 41. DOI: 10.3390/mca26020041
 22. Astanina M. S., Buonomo B., Manca O., Sheremet M. A. Effect of third size on natural convection of variable viscosity fluid in a closed parallelepiped // International Communications in Heat and Mass Transfer. 2021. Vol. 128. 105618. DOI: 10.1016/j.icheatmasstransfer.2021.105618
 23. Patankar S. V. Numerical heat transfer and fluid flow. Hemisphere publishing corporation, 1980. 197 p.

Спонтанное перераспределение плотности в многокомпонентных реагирующих растворах: механизмы и структуры

Д. А. Брацун

Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
614990, Пермь, Комсомольский пр., 29
email: DABracun@pstu.ru

Вертикально-ориентированная двухслойная система двух смешивающихся или несмешивающихся растворов, начинающая свою эволюцию из раздельного однородного состояния каждого из слоёв и находящаяся под воздействием внешнего инерционного поля, может испытывать разнообразные виды гравитационно-зависимой конвективной неустойчивости. Как правило, развитые возмущения этих неустойчивостей представляют собой нерегулярную, но симметричную по отношению к направлению верх-низ систему пальчиковых структур, одна часть которых всплывает, а другая – тонет. В работе демонстрируется, что процессы нелинейной диффузии и реакции порознь или вместе могут приводить к существенной модификации сценариев структурообразования в системе за счет механизмов спонтанного перераспределения плотности. Одним из таких механизмов является эффект концентрационно-зависимой диффузии растворенных компонент, влияние которого в литературе ранее систематически игнорировалось. Другим важным механизмом является химическая реакция с нелинейной кинетикой. На примере ряда конкретных систем, как реагирующих, так и химически инертных, показано что разно-скоростные процессы диффузии могут приводить к спонтанному возникновению в поле плотности долгоживущих и структурно устойчивых потенциальных барьеров. Это приводит к кардинальной перестройке бифуркационной картины и типов возникающих хемоконвективных структур. Приводится обзор работ автора, обсуждаются управляющие уравнения, приводятся аналитические и численные результаты, полученные автором и его коллегами по данной тематике. Проводится сравнение с известными экспериментальными данными.

Ключевые слова: двухслойная система; хемоконвективная неустойчивость; нелинейная диффузия

Spontaneous density redistribution in multicomponent reacting solutions: mechanisms and structures

D. A. Bratsun

Perm National Research Polytechnic University, 29 Komsomolsky Pr., 614990, Perm
email: DABracun@pstu.ru

A vertically oriented two-layer system of two miscible or immiscible solutions, which starts from a separate homogeneous state of each of the layers and is under the influence of an external inertial field, can experience various types of gravitation-dependent convective instability. Commonly, the developed disturbances of these instabilities represent an irregular, but symmetrical with respect to the top-down direction, system of fingers, one part of which floats, while the other part sinks. We show that the processes of nonlinear diffusion and reactions, acting separately or together, can result in a significant modification of the scenarios of pattern formation due to the mechanisms of spontaneous density redistribution. One of the mechanisms is the concentration-dependent diffusion of dissolved components, the influence of which has previously been systematically ignored in the literature. Another important mechanism is a chemical reaction with nonlinear kinetics. Based on a number of specific systems, both reactive and chemically inert, we show that diffusion processes of different rates can lead to the spontaneous appearance of long-lived and statically stable potential barriers in a density field. It results in a fundamental change in the sequence of bifurcations and the types of emerging chemoconvective structures. A review of the recent works of the author is given, the governing equations are discussed, and analytical and numerical results obtained by the author and his colleagues in this field are presented. We also compare the obtained results of the theory with the known data of experimental observations and measurements.

Keywords: two-layer system; chemoconvective instability; nonlinear diffusion

В последние годы внимание исследователей приковано к изучению взаимного влияния конвективных течений и химических реакций. Этот интерес стимулируется важными технологическими приложениями, а также фундаментальными аспектами исследований. Выяснилось, что реакции могут приводить к существенным изменениям плотности, вязкости, диффузии растворов. Стандартной системой для исследования неустойчивостей стала двухслойная система смешивающихся или несмешивающихся растворов [1], которая начинает свою эволюцию из состояния однородно перемешанных и пространственно разделенных слоев. Такая конфигурация удобна для экспериментальных наблюдений диффузионных процессов, но требует адаптации классической теории гидродинамической устойчивости из-за необратимого изменения основного состояния системы со временем.

В случае химически инертных растворов было показано [1], что в системе может случиться один из трёх типов гравитационно-зависимой неустойчивости: двойной диффузии (DD), диффузионного слоя (DLC) и конвекции Рэлея-Тейлора (RT). В каждом из этих случаев возмущения симметрично распространяются вверх и вниз в виде неупорядоченной системы фингеров (пальчиковых структур). Реализация конкретного сценария зависит от начальных концентраций растворов. В случае RT неустойчивость может быть предсказана уже по виду профиля плотности в основном состоянии. Для DD и DLC ситуация сложнее, так как потенциальная энергия диффузионных процессов является здесь скрытой и трансформируется в движение жидкости после определенного переходного периода (парадокс устойчивости). Так как процесс диффузии рассматривается авторами работы [1] как сугубо релаксационный, то список возможных сценариев неустойчивости исчерпывается. В недавней работе [2] мы показали, что, по крайней мере, в растворах солей щелочных металлов и сильных кислот коэффициенты диффузии зависят от концентрации этих растворов (эффект концентрационно-зависимой диффузии). Это может привести к перестройке профиля плотности уже в ходе процесса диффузии, спонтанному возникновению потенциального барьера плотности и разрушению симметрии верх-низ у конвективной

структуры. Более того, перебирая растворы разной концентрации (но фиксированного отношения между слоями), можно наблюдать даже спонтанные переходы между указанными неустойчивостями в одной и той же системе [2].

Для изучения реакционного случая обычно используют реакцию нейтрализации, которая обладает сравнительно простой, хотя и нелинейной, кинетикой. В работе [3] была сделана попытка общей классификации всех возможных видов неустойчивости в двухслойной системе смешивающихся реагирующих растворов. По мнению авторов [3] реакция не порождает новых типов неустойчивости и структур, но лишь приводит к асимметрии паттерна (DD, DLC или RT). Этот вывод достаточно слабый, так как в работе [2] мы показали, что асимметрия может происходить и без всякой реакции.

В работах [4–6] нами было показано, что классификация [3] не является полной, так как, вообще говоря, коэффициенты диффузии реагентов зависят от концентрации растворов. Вкупе с нелинейной реакцией, которая производит воду (размывая концентрации веществ на фронте реакции), это приводит к спонтанному возникновению в поле плотности потенциальных ям, которые структурно устойчивы и могут существовать в системе долгое время. Это кардинально меняет сценарии структурообразования в системе. Например, наблюдается локализация хемоконвекции в кармане плотности (CDD конвекция) [4]. Структура представляет собой идеальную периодическую систему хемоконвективных ячеек, зажатых неподвижной жидкостью и формирующихся перпендикулярно направлению силы тяжести. В работе [5] было показано, что при задании начальных концентраций реагентов ближе к изополю, в системе стремительно развивается волна плотности, которая быстро распространяется вниз. Волна возникает в результате схлопывания потенциальной ямы из-за перестройки профиля плотности в стиле теории катастроф.

Таким образом, обнаружено, что нелинейные процессы реакции и диффузии (вместе или порознь) способны приводить к спонтанным перестройкам поля плотности, что порождает новые типы структурообразования, которые кардинально отличаются от стандартной нерегулярной фингер-конвекции DD, DLC или RT.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (грант № 19-11-00133).

Список литературы

1. Trevelyan P. M. J., Almarcha C., De Wit A. Buoyancy-driven instabilities of miscible two-layer stratifications in porous media and Hele-Shaw cells // *Journal of Fluid Mechanics*. 2011. Vol. 670. P. 38–65. DOI: 10.1017/S0022112010005008
2. Bratsun D. A., Oschepkov V. O., Mosheva E. A., Siraev R. R. The effect of concentration-dependent diffusion on double-diffusive instability // *Physics of Fluids*. 2022. Vol. 34. 034112. DOI: 10.1063/5.0079850
3. Trevelyan P. M. J., Almarcha C., De Wit A. Buoyancy-driven instabilities around miscible $A+B \rightarrow C$ reaction fronts: a general classification // *Physical Review E*. 2015. Vol. 91. No. 2. 023001. DOI: 10.1103/PhysRevE.91.023001
4. Bratsun D., Kostarev K., Mizev A., Mosheva E. Concentration-dependent diffusion instability in reactive miscible fluids // *Physical Review E*. 2015. Vol. 92. 011003. DOI: 10.1103/PhysRevE.92.011003
5. Bratsun D., Mizev A., Mosheva E., Kostarev K. Shock-wave-like structures induced by an exothermic neutralization reaction in miscible fluids // *Physical Review E*. 2017. Vol. 96. 053106. DOI: 10.1103/PhysRevE.96.053106
6. Bratsun D., Mizev A., Mosheva E. Extended classification of the buoyancy-driven flows induced by a neutralization reaction in miscible fluids. Part 2. Theoretical study // *Journal of Fluid Mechanics*. 2021. Vol. 916. A23. DOI: 10.1017/jfm.2021.202

Новые классы точных решений для описания различных классов сдвиговых течений

Н. В. Бурмашева^{a,b}, Е. Ю. Просвиряков^{a,b}

^a Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, 620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19

^b Институт машиноведения им. Э. С. Горкунова УрО РАН, 620049, Екатеринбург, ул. Комсомольская, 34

email: nat_burm@mail.ru

email: evgen_pros@mail.ru

Рассматриваются полиномиальные классы точных решений для описания сдвиговых течений вязких жидкостей. Сдвиговые течения жидкости могут реализовываться при ее вращении. Они могут быть использованы для описания пленочных течений под действием различных силовых факторов. Генерация течений жидкости может быть обусловлена заданием скоростей и напряжений на границах слоев жидкости, учетом конвекции, диффузии и перекрестных диссипативных эффектов. Полагая равной нулю одну координату вектора скорости, система уравнений Навье–Стокса, дополненная уравнением непрерывности и другими законами сохранения, становится переопределенной. В этом случае необходимо получить нетривиальное точное решение нелинейной системы уравнений для математического моделирования физических процессов в движущейся жидкости. Приведено несколько классов точных решений для уравнений Навье–Стокса и Обербека–Буссинеска для описания сдвиговых течений в поле силы Кориолиса и движений без предварительного вращения. Исследована функциональная связь полученных новых классов точных решений с некоторыми классическими течениями гидродинамики для однослойных и многослойных жидкостей.

Ключевые слова: точное решение; переопределенная система; условие разрешимости; многослойная жидкость

New classes of exact solutions for describing different classes of shear flows

N. V. Burmasheva^{a,b}, E. Yu. Prosviryakov^{a,b}

^a Ural Federal University, 19 Mira St., 620002, Ekaterinburg

^b Institute of Engineering Science UB RAS, 34 Komsomolskaya St., 620049, Ekaterinburg

email: nat_burm@mail.ru

email: evgen_pros@mail.ru

Polynomial classes of exact solutions are considered for describing shear flows of viscous fluids. Shear flows of a fluid can be realized during its rotation. They can be used to describe film flows under the action of various force factors. The generation of fluid flows can be due to the setting of velocities and stresses at the boundaries of fluid layers, taking into account convection, diffusion, and cross

dissipative effects. Setting equal to zero one coordinate of the velocity vector, the system of Navier–Stokes equations, supplemented by the continuity equation and other conservation laws, becomes overdetermined. In this case, it is necessary to obtain a non-trivial exact solution of a nonlinear system of equations for mathematical modeling of physical processes in a moving fluid. Several classes of exact solutions for the Navier–Stokes and Oberbeck–Boussinesq equations are given to describe shear flows in the field of the Coriolis force and motions without preliminary rotation. The functional connection of the obtained new classes of exact solutions with some classical flows of hydrodynamics for single-layer and multilayer fluids is investigated.

Keywords: exact solution; overdetermined system; solvability condition; multilayer fluid

1. Введение

Первые точные решения уравнений Навье–Стокса описывали преимущественно однонаправленные течения вязкой жидкости, причем имели достаточно простую структуру – компоненты вектора скорости зависели только от одной из трех декартовых координат, например, [1–8]. Причем данный вид точного решения встречался как при моделировании изотермических течений, так и при исследовании систем уравнений тепловой конвекции и термодиффузии. Тут следует сделать оговорку о том, что известное течение Экмана, несмотря на очевидно неоднородное распределение компонент поля скорости относительно пространственных координат также можно рассматривать как однородное. Дело в том, что линейные слагаемые (относительно одной из пространственных координат) в решении Экмана появляются вследствие учета эффекта вращения слоя жидкости (в приближении одного параметра Кориолиса), а значит, речь, фактически, идет только о выборе подходящей системы отсчета. Несколько позднее появляется класс решений, линейно зависящих от двух пространственных координат с нелинейной зависимостью от третьей координаты [9–11]. В данной работе будут обсуждаться особенности моделирования течений вязких жидкостей на основе классов полиномиальных точных решений различного порядка.

2. Постановка задачи и обсуждение методов решения

Наиболее простая модель используется при описании изотермических течений вязких жидкостей:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}, \nabla) \mathbf{V} = -\nabla P + \nu \Delta \mathbf{V}, \quad (1)$$

$$(\nabla, \mathbf{V}) = 0. \quad (2)$$

В уравнении Навье–Стокса (1) и уравнении несжимаемости (2) приняты стандартные обозначения: $\mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z)$ – вектор скорости; P – нормированное на плотность жидкости отклонение от гидростатического давления; ν – кинематическая (молекулярная) вязкость жидкости; $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ – оператор Гамильтона; $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ – оператор Лапласа; круглые скобки в уравнении (1) определяют скалярное произведение.

Если рассмотреть однонаправленные изотермические течения жидкости с полем скоростей вида

$$\mathbf{V} = (V_x(x, y, z, t), 0, 0),$$

то подстановка данного представления в систему (1), (2) приводит к уравнению размерности (2+1) типа уравнения теплопроводности [12]:

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right). \quad (3)$$

Данному уравнению удовлетворяет классическое решение Куэтта–Пуазейля:

$$V_x = U(z, t). \quad (4)$$

При этом, вообще говоря, функция V_x не является гармонической, поскольку в силу последнего уравнения она не удовлетворяет уравнению Пуассона:

$$\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} = \frac{1}{\nu} \frac{\partial P}{\partial x}.$$

При этом помимо решения (4) у уравнения (3) имеются и, например, такие решения:

$$V_x = y u_1(z, t), \quad V_x = \frac{y^2}{2} u_2(z, t). \quad (5)$$

Интересно, что при подстановке в уравнение (3) суммы решений (4), (5) в получившейся в результате применения принципа неопределенных коэффициентов системе некоторые из уравнений типа теплопроводности размерности (1+1), используемых для определения компонент поля скорости, перестают быть изолированными. Причиной этого является нелинейность последнего решения в (5) по переменной y и вкладом слагаемого $\partial^2 V_x / \partial y^2$ в правой части уравнения (3). Таким образом, сумма решений (4), (5) не является суперпозицией решений, входящих в эту сумму. Эта же тенденция сохраняется и при дальнейшем повышении степени для координаты y в слагаемых, определяющих вид скорости V_x :

$$V_x = U(z, t) + \sum_{k=1}^n \frac{y^k}{k!} u_k(z, t). \quad (6)$$

Подстановка решения (6) в уравнение (3) приводит к системе рекуррентных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + u_2 \right), \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} &= \nu \left(u_3 + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= \nu \left(u_4 + \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \dots, \\
& \frac{\partial u_{n-2}}{\partial t} = v \left(u_n + \frac{\partial^2 u_{n-2}}{\partial z^2} \right), \\
& \frac{\partial u_{n-1}}{\partial t} = v \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial z^2}, \\
& \frac{\partial u_n}{\partial t} = v \frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Каждое из уравнений системы (7) является нестационарным уравнением типа уравнения теплопроводности. Все уравнения системы (7), кроме двух последних, являются неоднородными, причем вид неоднородности определяется в результате решения предыдущих уравнений.

Кроме того, представление скорости течения в виде (6) влечет появление в жидкости касательных напряжений с неоднородным распределением относительно пространственных координат:

$$\tau_{xz} = \eta \frac{\partial V_x}{\partial z} = \eta \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial u_k}{\partial z} \frac{y^k}{k!} \right), \quad \tau_{xy} = \eta \frac{\partial V_x}{\partial y} = \eta \sum_{k=1}^n u_k \frac{y^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Здесь η – коэффициент динамической вязкости жидкости. Потoki вида (6) обладают ненулевой вертикальной завихренностью и нулевой спиральностью.

Заметим, что класс решений вида (6) может быть распространен и на зависимости высоких порядков и по оставшейся пространственной координате. Для этого достаточно применить поворот координат на некоторый угол:

$$x \rightarrow x \cos \varphi - y \sin \varphi, \quad y \rightarrow x \sin \varphi + y \cos \varphi. \tag{8}$$

В этом случае для пересчета скоростей имеем следующие выражения:

$$V_x \rightarrow V_x \cos \varphi - V_y \sin \varphi, \quad V_y \rightarrow V_x \sin \varphi + V_y \cos \varphi.$$

В результате получим семейство точных решений для сдвиговых течений с нелинейной зависимостью от двух продольных координат.

Поворот системы координат позволяет также строить новые полиномиальные классы на основе выражений (6), обобщающие классическое течение Нуссельта [13], используемое, например, для описания дрейфа пленок при создании миниатюрных охлаждающих устройств в микроэлектронике.

Классы решений типа (6) могут быть использованы и при аналитическом интегрировании систем уравнений тепловой конвекции. Причем выражениями (6) можно описывать не только однонаправленные конвективные и термодиффузионные течения, но и сдвиговые течения. Единственно, что возникает сопутствующая проблема необходимости построения условий совместности решений редуцированной (в рамках выбранного класса) переопределенной системы уравнений. Методы получения таких условий совместности для различных течений обсуждаются, например, в [14–17].

Класс полиномиальных точных решений вида (6), полученный после поворота (8) системы координат (т. е. класс решений с нелинейной зависимостью по координатам x , y) можно применять и для описания течений вязких стратифицированных жидкостей – как изотермических [18], так и конвективных [19]. Отметим, что помимо (в случае необходимости) построения соответствующих условий совместности решений, для

стратифицированных жидкостей необходимо осуществить правильный выбор подходящих условий «склейки» решений на «внутренних» границах стратифицированной жидкости [20].

3. Заключение

В работе обсуждаются вопросы построения классов полиномиальных точных решений с зависимостью от всех пространственных координат для их дальнейшего использования при описании течений вязких жидкостей различной природы – изотермических, конвективных, термодиффузионных. Показано, каким образом данные классы могут быть построены, исходя их простейшего примера однонаправленного изотермического течения вязкой однородной жидкости. Попутно обсуждаются вопросы, возникающие при усложнении объекта моделирования, – например, разрешимость переопределенной системы уравнений для описания сдвиговых течений, выбор подходящих граничных условий на «внутренних» границах стратифицированных жидкостей.

Список литературы

1. *Couette M.* Etudes sur le frottement des liquids // *Annales de Chimie et de Physique*. 1890. Vol. 21. P. 433–510.
2. *Poiseuille J.* Recherches experimentelles sur le mouvement des liquides dans les tubes de tres petits diametres // *Comptes Rendus*. 1840. Vol. 11. P. 961–967.
3. *Poiseuille J.* Recherches experimentelles sur le mouvement des liquides dans les tubes de tres petits diametres // *Comptes Rendus*. 1840. Vol. 11. P. 1041–1048.
4. *Poiseuille J.* Recherches experimentelles sur le mouvement des liquides dans les tubes de tres petits diametres // *Comptes Rendus*. 1841. Vol. 12. P. 112–115.
5. *Ekman V. W.* On the Influence of the Earth's rotation on ocean-currents // *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*. 1905. Vol. 2. N. 11. P. 1–52.
6. *Hiemenz K.* Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszylinder // *Dingler's Politech. Journal*. 1911. Vol. 326. P. 321–324.
7. *Бирх Р. В.* О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // *Прикладная механика и техническая физика*. 1966. № 3. С. 69–72.
8. *Остроумов Г. А.* Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. Москва: Госизд-во технико-теорет. лит-ры, 1952. 256 с.
9. *Lin C. C.* Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1957. Vol. 1. P. 391–395. DOI: 10.1007/BF00298016
10. *Сидоров А. Ф.* О двух классах решений уравнений механики жидкости и газа и их связи с теорией бегущих волн // *Прикладная механика и техническая физика*. 1989. №. 2. С. 34–40.
11. *Аристов С. Н.* Вихревые течения в тонких слоях жидкости // Дис. на соиск. учен. степ. д.ф.-м.н. Владивосток: ИАПУ. 1990. 303 с.
12. *Burmasheva N, Prosviryakov E.* Exact solutions to Navier–Stokes equations describing a gradient nonuniform unidirectional vertical vortex fluid flow // *Dynamics*. 2022. Vol. 2. N. 2. P. 175–186. DOI: 10.3390/dynamics2020009
13. *Бурмашева Н. В., Просвиряков Е. Ю.* Неоднородное течение Нуссельта–Куэтта–Пуазейля // *Теоретические Основы Химической Технологии*. 2022. Т. 56. № 5. С. 532–538. DOI: 10.31857/S0040357122050025

14. Бурмашева Н. В., Просвиряков Е. Ю. Точное решение уравнений Навье–Стокса, описывающее пространственно неоднородные течения вращающейся жидкости // Труды Института Математики и Механики УрО РАН. 2020. Т. 26. № 2. С. 79–87. DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-79-87
15. Бурмашева Н. В., Просвиряков Е. Ю. Точные решения для установившихся конвективных слоистых течений с пространственным ускорением // Известия высших учебных заведений. Математика. 2021. № 7. С. 12–22. DOI: 10.26907/0021-3446-2021-7-12-22
16. Baranovskii E. S., Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Y. Exact solutions to the Navier–Stokes equations with couple stresses // Symmetry. 2021. Vol. 13. 1355. DOI: 10.3390/sym13081355
17. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Y. Exact solutions to the Oberbeck–Boussinesq equations for shear flows of a viscous binary fluid with allowance made for the Soret effect // Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика». 2021. Т. 37. С. 17–30. DOI: 10.26516/1997-7670.2021.37.17
18. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations describing stratified fluid flows // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2021. Т. 25. № 3. С. 491–507. DOI: 10.14498/vsgtu1860
19. Бурмашева Н. В., Просвиряков Е. Ю. Точные решения уравнений Навье–Стокса для описания конвективных течений многослойных жидкостей // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2022. Vol. 18 (3). Направлена в печать.
20. Burmasheva N. V., Larina E. A., Prosviryakov E. Yu. Features of selecting boundary conditions when describing flows of stratified fluids // Procedia Structural Integrity. 2022. Vol. 40. P. 75–81. DOI: 10.1016/j.prostr.2022.04.009

Моделирование конвективного течения жидкой фазы коллоидного раствора при формировании систем нанокластеров благородных металлов

Д. Н. Бухаров, А. О. Кучерик, С. М. Аракелян

Владимирский государственный университет им. А. Г. и Н. Г. Столетовых,
600000, Владимир, ул. Горького, 87
email: buharovdn@gmail.com

Предложена модель конвективного течения жидкой фазы коллоидного раствора глицерина и наночастиц благородных металлов (Ag, Au, Ag/Au), возникающего за счет лазерного воздействия на систему, которое позволяет формировать системы нанокластеров на стеклянной подложке в растворе. Модель описывает конвективное течение от точечного теплового источника. Она формировалась из безразмерных уравнений Навье–Стокса и теплопроводности для плоской геометрии в переменных функции тока и вихря, которые решались на равномерной сетке с использованием пятиточечного шаблона. Граничные условия на твердых стенках формировались исходя из условия прилипания и были изотермическими, на свободных границах – по условию Тома. Предложенная модель позволяет оценить характер течения жидкой фазы коллоидной системы, оказывающего значительное влияние на результирующие системы нанокластеров, осажденные на подложку.

Ключевые слова: конвективное течение; коллоидный раствор; нанокластеры

Simulation of the convective flow of the liquid phase of a colloidal solution during the formation of systems of noble metal nanoclusters

D. N. Bukharov, A. O. Kucherik, S. M. Arakelian

Vladimir State University n.a. Alexander and Nikolay Stoletovs,
87 Gorky St., 600000, Vladimir
email: buharovdn@gmail.com

A model is proposed for the convective flow of the liquid phase of a colloidal solution of glycerol and noble metal nanoparticles (Ag, Au, Ag/Au), which occurs due to laser action on the system, which makes it possible to form nanocluster systems on a glass substrate in solution. The model describes a convective flow from a point heat source. It was formed from the dimensionless Navier-Stokes and heat conduction equations for flat geometry in variables of the stream and vortex

functions, which were solved on a uniform grid using a five-point template. The boundary conditions on the solid walls were formed based on the no-slip condition and were isothermal, on the free boundaries - according to the Thoma condition. The proposed model makes it possible to evaluate the nature of the flow of the liquid phase of a colloidal system, which has a significant effect on the resulting systems of nanoclusters deposited on a substrate.

Keywords: convective flow; colloidal solution; nanoclusters

1. Введение

Сегодня новые уникальные материалы на основе систем нанокластеров благородных металлов используются в качестве новой элементной базы в современной наноэлектронике и фотонике [1]. Их применение обусловлено появлением новых уникальных свойств, по сравнению с массивными образцами, при переходе на наномасштабы. Их свойства могут быть заданы заранее, за счет получения требуемого рельефа поверхности, которых может быть сформирован при использовании управляемого лазерного воздействия на подложки, помещенные в коллоидные растворы [2]. Одним из процессов, оказывающих значительное влияние на результирующую топологию осажденных наносистем, является конвективное течение жидкой фазы коллоидного раствора под действием лазерного излучения. Предварительную оценку такого процесса удобно производить использованием аппарата математического моделирования.

2. Экспериментальные результаты

Системы нанокластеров формировались вследствие осаждения наночастиц благородных металлов (Ag, Au, смеси Ag/Au) из коллоидного раствора глицерина при нескольких сканированиях YAG:Nd³⁺-лазера ($\lambda = 1.06$ мкм) с диаметром пучка 50 мкм и мощность излучения 2.5 Вт со скоростями от 0.4 мм/с до 5 мм/с на стеклянную подложку (рис. 1).

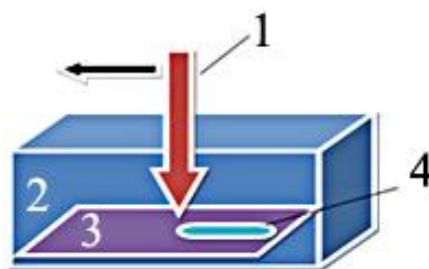


Рис. 1. Схема эксперимента: 1 – лазерное излучение, 2 – кювета с коллоидным раствором, 3 – подложка, 4 – трек осаждения наноструктурированной поверхности

Исследования рельефа синтезированных структур, проведенные с использованием РЭМ Quanta 200 3D и зондовой нанолаборатории Интегра-Аура продемонстрировали наличие нанокластеров Ag, Au и их сплавов с размерами от 10 нм до 300 нм и высотами до 40 нм (рис. 2), а также показали, что процесс формирования системы нанокластеров на подложке происходил вследствие конкуренции процессов диффузии частиц из области нагрева и конвекционного течения в область нагрева [3].

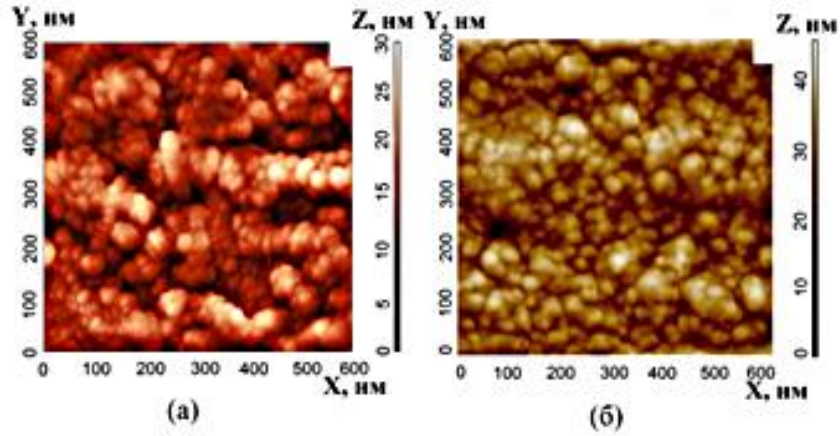


Рис. 2. АСМ-изображение биметаллических (Ag/Au) систем нанокластеров при скорости сканирования 1.2 мм/с: после 15 (а) и 20 (б) проходов

3. Модель конвективного течения жидкой фазы коллоидного раствора

Для описания конвективного течения в нашем случае применима стандартная модель Релея-Бенара для плоской геометрии в приближении Буссинеска [4]:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \theta \hat{z} + \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \theta = u_z + \frac{1}{\sqrt{PrRa}} \nabla^2 \theta, \quad (2)$$

$$\nabla u = 0, \quad (3)$$

$$\theta = \frac{\theta(x, z, t)}{\Delta T} = \frac{T(x, z, t) - T_H - \frac{\Delta T}{H} z}{\Delta T}, \quad \Delta T = T_H - T_B, \quad (4)$$

где $\mathbf{u} = (u_x; u_z)$, p – относительные скорость и возмущение давления, \hat{z} – единичный вектор в направлении оси z , Ra – число Рэлея, Pr – число Прандтля, θ – безразмерная температура, отклонение профиля температуры от среднего, T_H , T_B – температуры нижней и верхней границы соответственно, H – ширина расчетной области.

Так как высота раствора над подложкой составляет 2 мм, то источник тепла можно считать точечным (рис. 3).

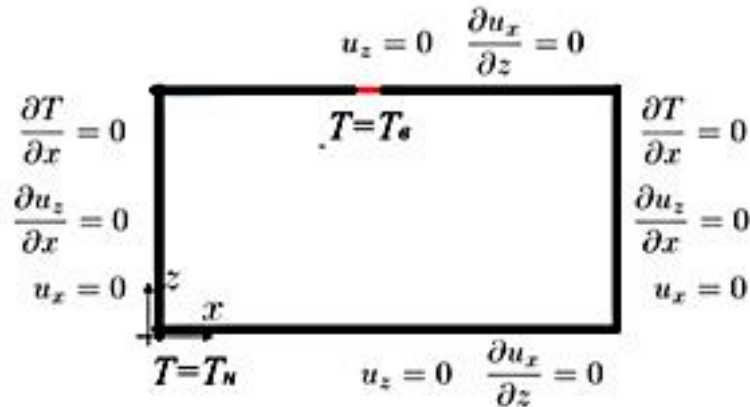


Рис. 3. Геометрия расчетной области с граничными условиями. T_B – температура нагревателя, расположенного в центре

Систему (1) – (4) рассматривалась в переменных для функции тока и вихря [4]:

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} = \bar{v} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial \omega \partial \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \omega \partial \psi}{\partial y \partial x} - G \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \bar{\chi} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial T \partial \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial T \partial \psi}{\partial y \partial x}, \quad (6)$$

$$\omega = - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right), \quad (7)$$

$$\omega(0) = 0, \psi(0) = 0, T(0) = T_0, \quad (8)$$

где T – температура, $\bar{v}, \bar{\chi}$ – относительные коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности, $G = g\beta$, где g – ускорение свободного падения, β – температурный коэффициент расширения. На границах использовалось условие Тома [5] для $\omega_\Gamma = 2\psi_\Gamma/h^2$, $\psi_\Gamma = 0$, $T_\Gamma = T_0$. Уравнения (5) – (7) дискретизировались на 5-точечном шаблоне на регулярной сетке [6]:

$$\psi_{i,j} = \frac{\psi_{i-1,j} + \psi_{i+1,j} + \psi_{i,j-1} + \psi_{i,j+1}}{4} - \omega_{ij} \frac{h^2}{4}, \quad (9)$$

$$\omega_{i,j} = \omega_{i,j} - (\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}) \left(\omega_{i+1,j} - \omega_{i-1,j} \right) \frac{\tau}{4h} - (\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}) \left(\omega_{i,j+1} - \omega_{i,j-1} \right) \frac{\tau}{4h} + v \left(\omega_{i-1,j} - 4\omega_{i,j} + \omega_{i+1,j} + \omega_{i,j+1} \right) \frac{\tau}{h^2} + G(T_{i+1,j} - T_{i-1,j}), \quad (10)$$

$$T_{i,j} = T_{i,j} + k(T_{i-1,j} - T_{i+1,j} + T_{i,j-1}) \frac{\tau}{h^2} - (\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}) (T_{i+1,j} - T_{i-1,j}) \frac{\tau}{4h} + (\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}) (T_{i,j+1} - T_{i,j-1}) \frac{\tau}{4h}, \quad (11)$$

где h и τ – шаги сетки по пространству и времени,

$$\bar{v} = \frac{\tau}{h^2} \sqrt{\frac{Pr}{Ra}}, \quad \bar{\chi} = \frac{\tau}{h^2} \sqrt{\frac{1}{Pr * Ra}}, \quad (12)$$

где

$$Pr = \frac{\nu}{\chi}, \quad Ra = \frac{gH^3\beta\Delta T}{\nu\chi}, \quad (13)$$

ν – коэффициент кинематической вязкости, β – температурный коэффициент объёмного расширения теплоносителя, χ – коэффициент температуропроводности.

4. Результаты моделирования

Предложенная модель использовалась для описания конвективного течения и поля температуры в коллоидной системе. Так во время лазерного воздействия наблюдались вспышки без кипения. Исходя из этого, температуру нагревателя в первом приближении можно положить равной 150°C , а температуру жидкой фазы – в 25°C . Для средних значений температуры можно оценить $Pr = 267.526$ и $Ra = 2.427 * 10^3$ при $\tau = 0.005$, $h = 1/2 - \bar{v} = 0.06$, $\bar{\chi} = 2.482 * 10^{-5}$ отн.ед. На рис. 4 приведен расчет поля температуры и функции тока для определенных выше параметров.

Аналогичные картины наблюдаются при моделировании областей около подложки при $H = 10$ мкм, когда размеры источника составляют величины порядка размера расчетной области. В таком случае можно рассматривать протяженный источник (рис. 5). Так для указанных выше параметров с учетом числа Нуссельта, равного 2.865, в пристеночной области реализуется картина достаточно слабой конвекции.

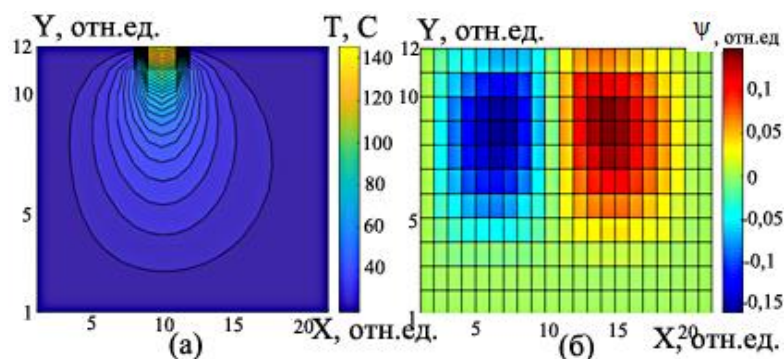


Рис. 4. Поле температур от точечного источника (а); линии тока от точечного источника (б)

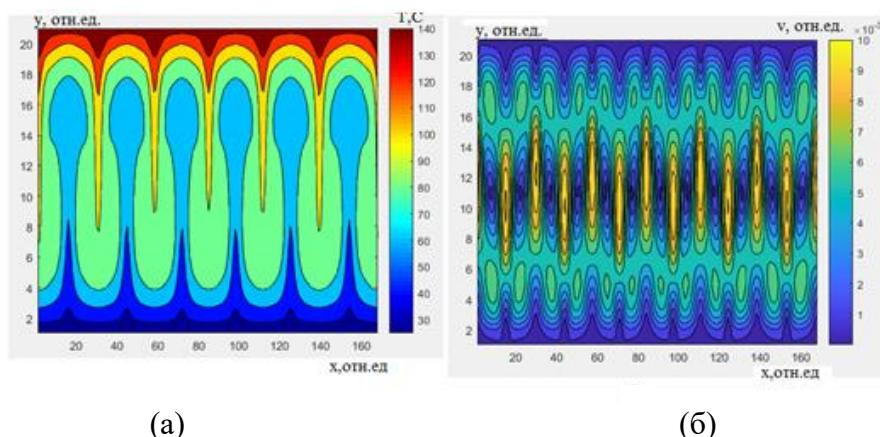


Рис 5. Поле температур от протяженного источника (а), поле скоростей (б)

5. Заключение

Таким образом, предложенные модели позволяют в первом приближении описать характер конвективных течений и тепловых факторов, влияющих на структуру системы нанокластеров, осажденных из коллоидной системы. Полученные картины не противоречат теоретическим положениям.

Список литературы

1. Аракелян С. М., Бухаров Д. Н., Кучерик А. О., Худайбергенов Т. А. Динамические и квантовые эффекты в кластерных низкоразмерных многослойных твердотельных наноструктурах для элементной базы микро- и наноэлектроники // Известия Российской академии наук. Серия физическая. 2022. Т. 86. № 4. С. 834–840. DOI: 10.31857/S0367676522060047
2. Антипов А. А., Аракелян С. М., Кутровская С. В., Кучерик А. О., Макаров А. А., Ногтев Д. С., Прокошев В. Г. Импульсное лазерное осаждение кластерных наноструктур из коллоидных однокомпонентных систем // Известия Российской академии наук. Серия физическая. 2012. Т. 76. № 6. С. 690–697.
3. Аракелян С. М., Кучерик А. О., Прокошев В. Г. Введение в фемтосекундную нанофотонику, Фундаментальные принципы и методы лазерной диагностики и управления наноструктурированными материалами. М.: Лого, 2015. 744 с.
4. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Вычислительная теплопередача. М.: URSS, 2020. 784 с.
5. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с.
6. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с

Экспериментальное исследование устойчивости колеблющейся границы между смешивающимися жидкостями в вертикальной ячейке Хеле-Шоу

А. В. Бушуева, У. А. Мелехина, Д. А. Полежаев

Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет,
Лаборатория вибрационной гидромеханики, 614990, Пермь, ул. Сибирская, 24
email: polezhaev@pspu.ru

Экспериментально изучается динамика границы смешивающихся жидкостей в вертикальной ячейке Хеле-Шоу при наличии колебаний жидкостей. Рассматривается случай, когда маловязкая легкая жидкость (вода) находится над тяжелой вязкой жидкостью (водоглицериновый раствор). В отсутствие колебаний граница между жидкостями медленно расширяется вследствие взаимной молекулярной диффузии жидкостей. Измерения показывают, что при включении колебаний интенсивность массообмена между жидкостями увеличивается, а динамика межфазной границы зависит от интенсивности колебаний. При малых колебаниях жидкость в области перемешивания совершает поступательные колебания, а сама область монотонно расширяется. Когда интенсивность колебаний велика, в начальной фазе эксперимента на межфазной границе возникают пальчиковые структуры, которые размываются после нескольких колебаний. Данные о толщине пальчиков хорошо согласуются с предсказаниями теории о неустойчивости Релея – Тейлора межфазной границы между смешивающимися жидкостями в вертикальной ячейке Хеле-Шоу. После разрушения пальчиковых структур центральная часть межфазной границы разрушается, и маловязкая жидкость проникает в объем вязкой жидкости в виде «языка».

Ключевые слова: смешивающиеся жидкости; неустойчивость Саффмана – Тейлора; колебания; диффузия

Experimental study of the stability of an oscillating interface between miscible fluids in a vertical Hele-Shaw cell

A. V. Bushueva, U. A. Melekhina, D. A. Polezhaev

Perm State Humanitarian Pedagogical University,
Laboratory of Vibrational Hydromechanics, 24 Sibirskaya St., 614990, Perm
email: polezhaev@pspu.ru

The dynamics of the interface between miscible fluids in a vertical Hele-Shaw cell in the presence of oscillations is experimentally studied. We consider the case when a low-viscosity low-density fluid (pure water) is placed above a high-density viscous fluid (water-glycerol solution). In the absence of oscillations, the interface between fluids slowly expands due to mutual molecular diffusion. The intensity of mass transfer between fluids increases under oscillations, and the interface

dynamics depends on the oscillation intensity. For small oscillations, the fluid in the mixing region performs translational oscillations, and the region expands with time. At large amplitudes of oscillations, viscous fingers appear in the initial phase of the experiment. Viscous fingers exist only for several cycles and then disappear. The data on the thickness of the fingers are in good agreement with the predictions of the Rayleigh – Taylor theory for the instability of the interface between miscible fluids in a vertical Hele-Shaw cell. According to the observations, the central part of the interface becomes unstable after the disappearance of the fingers, and the low-viscosity fluid penetrates the bulk of the viscous one in the form of a "tongue".

Keywords: miscible fluids; viscous fingering; oscillations; diffusion

В работе изучается динамика границы между смешивающимися жидкостями в вертикальной ячейке Хеле-Шоу. В экспериментах жидкости совершают колебания вблизи неподвижной контактной линии (ее неподвижность обеспечивается высокой вязкостью водоглицеринового раствора). В течение одного колебания половину времени маловязкая жидкость (окрашенная вода) движется в сторону более вязкой (водоглицериновый раствор), другую половину времени – маловязкая жидкость движется в противоположном направлении. Наблюдения показывают, что в первой половине колебания маловязкая жидкость проникает внутрь области, занятой вязкой жидкостью, создавая условия для развития пальчиковой неустойчивости (неустойчивости Саффмана – Тейлора). Настоящее исследование является развитием экспериментальных исследований устойчивости границы несмешивающихся жидкостей в радиальной [1] и прямоугольной [2] ячейках Хеле-Шоу.

Эксперименты проводятся в вертикальном прямоугольном канале высотой $h = 25$ см, шириной $b = 14.7$ см и толщиной $d = 0.25$ см (подробное описание устройства кюветы приведено в [3]). В качестве рабочих жидкостей используется вода с вязкостью $\nu_1 = 1$ сСт и водоглицериновые растворы вязкостью $\nu_2 = 0.4 - 7.4$ Ст. Жидкости заполняют вертикальную ячейку примерно в равных объемах – тяжелый глицерин заливается в нижнюю часть кюветы, легкая вода – в верхнюю. Поступательные колебания жидкостей с частотой $f = 1 - 3$ Гц и амплитудой $b = 0 - 2$ см создаются механическим или электродинамическим вибростендом. Эксперименты по изучению массообмена на границе жидкостей длятся несколько часов. Во время эксперимента проводится видеозапись области перемешивания жидкостей в течение 1 – 2 мин через равные промежутки времени (30 – 60 мин). Видеозаписи используются для измерения амплитуды колебаний, размеров пальчиковых структур, а также для определения градиента концентрации водоглицеринового раствора по изменению его цвета в зоне перемешивания.

Наблюдения за границей жидкостей показывают, что в экспериментах реализуются два основных режима массопереноса. При малой интенсивности колебаний жидкости совершают почти твердотельные колебания, при этом ширина зоны перемешивания монотонно увеличивается с течением времени. При относительно больших амплитудах колебаний в начальной фазе эксперимента маловязкая вода проникает внутрь вязкой жидкости в виде пальчиков (рисунок (а)). Пальчики существуют только в течение нескольких колебаний и быстро размываются. Как правило, после исчезновения пальчиков центральная часть межфазной границы разрушается, и маловязкая жидкость проникает вглубь вязкой в виде «языка» (рисунок (б–г)). Длина «языка» увеличивается намного быстрее, чем ширина зоны перемешивания жидкостей вблизи боковых стенок. Исследование методом PIV показало, что в вязкой жидкости существуют два симметричных осредненных вихревых течения, направление которых в центре кюветы совпадает с направлением движения «языка».

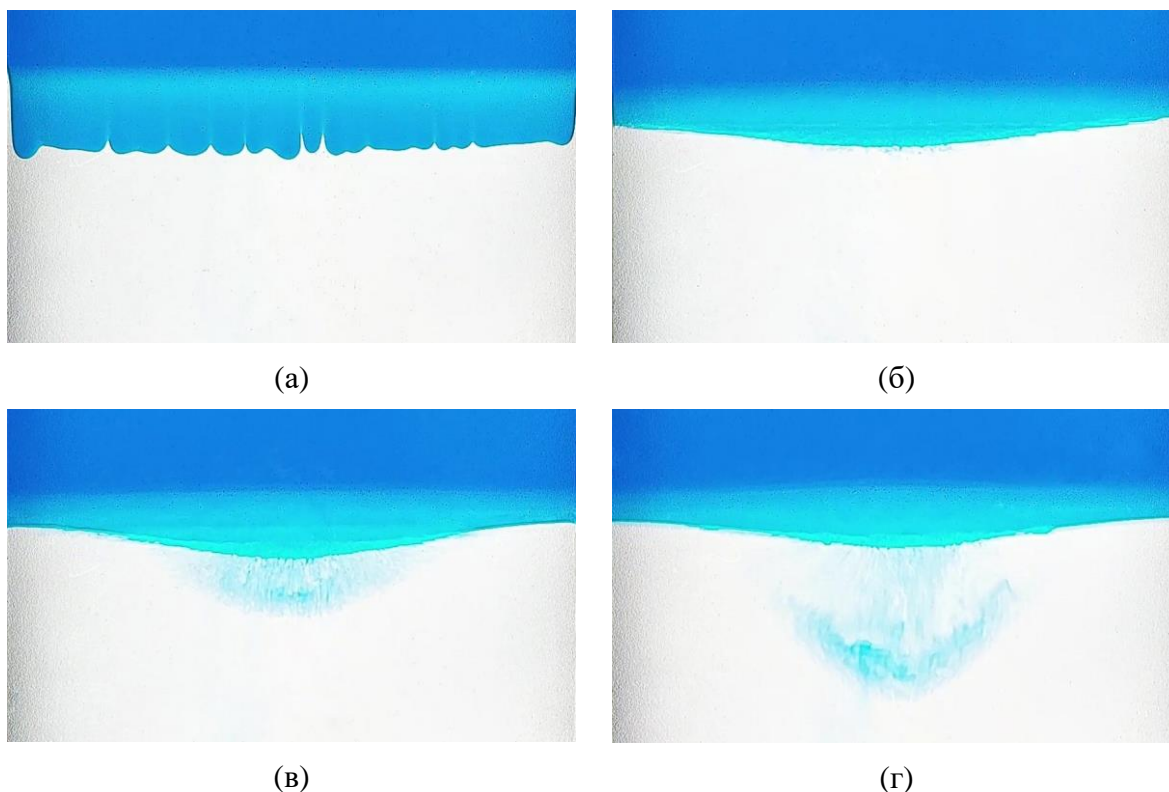


Рисунок. Фотографии границы между водой и глицерином в различные моменты времени: $t = 0, 30, 120$ и 300 с (а – г); частота и амплитуда колебаний равны $f = 1.71$ Гц и $b = 1.1$ см

Измерения показывают, что данные о толщине наблюдаемых пальчиковых структур хорошо согласуются с экспериментальными результатами и теоретическими предсказаниями для случая, когда в вертикальной ячейке Хеле-Шоу возникает неустойчивость между верхней тяжелой и нижней легкой жидкостями [4].

В докритической области, когда пальчики и «язык» не образуются, толщина зоны перемешивания жидкостей увеличивается быстрее, чем в отсутствие колебаний. Это означает, что молекулярная диффузия является не единственным механизмом, обеспечивающим массоперенос на границе смешивающихся жидкостей.

Работа выполнена при финансовой поддержке Правительства Пермского края и РФФИ (грант 20-41-596011).

Список литературы

1. Kozlov V., Karpunin I., Kozlov N. Finger instability of oscillating liquid – liquid interface in radial Hele – Shaw cell // *Physics of Fluids*. 2020. Vol. 32(10). 102102. DOI: 10.1063/5.0018541
2. Kozlov V., Vlasova O. Oscillatory dynamics of immiscible liquids with high viscosity contrast in a rectangular Hele – Shaw channel // *Physics of Fluids*. 2022. Vol. 34(3). 032121. DOI: 10.1063/5.0084363
3. Бушueva А. В., Полежаев Д. А. Результаты наблюдений за колебаниями границы смешивающихся жидкостей // *Конвективные течения*. 2021. Вып. 10. С. 129–138. DOI:10.24412/2658-5421-2021-10-129-138
4. Fernandez J., Kurowski P., Limat L., Petitjeans P. Wavelength selection of fingering instability inside Hele – Shaw cells // *Physics of Fluids*. 2001. Vol. 13(11). P. 3120–3125. DOI: 10.1063/1.1410120

Неустойчивость течения расплава кремния во вращающемся магнитном поле

Н. А. Вerezub, А. И. Простомолотов

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН,
119526, Москва, пр. Вернадского, 101, корп. 1
email: aprosto@inbox.ru

Обсуждаются применения вращающегося магнитного поля (ВМП) в технологии выращивания кристаллов полупроводников из расплава методом Чохральского (МЧ), в том числе рассматриваются и применяются для верификации результатов данной работы известные данные физического моделирования течений электропроводящего раствора КОН в цилиндрическом тигле в ВМП. Рассматривается математическая модель гидродинамических процессов применительно к выращиванию монокристаллов кремния диаметром 100 мм на установке РЕДМЕТ-30, оснащенной ВМП-магнитом. Приводятся результаты теста расчетного профиля азимутальной скорости с данными измерений в растворе КОН. В виде диаграммы устойчивости обобщаются результаты параметрических исследований устойчивости течений расплава в зависимости от частоты и величины индукции ВМП. Построенная диаграмма устойчивости течений включает известные асимптотические решения для малых и больших значений числа Гартмана, которые подтверждают расчетные результаты данной работы. Рекомендуются оптимальные параметры ВМП для промышленного процесса выращивания МЧ-монокристаллов кремния.

Ключевые слова: рост кристалла; магнитная гидродинамика; моделирование

Instability of silicon melt flow in rotating magnetic field

N. A. Verezub, A. I. Prostomolotov

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS,
101-1 Pr. Vernadskogo, 119526, Moscow
email: aprosto@inbox.ru

The applications of rotating magnetic field (RMF) in semiconductor crystals growth technology from a melt by Czochralski method (Cz) are discussed, including the known data of physical modeling of an electrically conductive KOH solution flows in a cylindrical crucible under RMF are considered and verified. Mathematical model of hydrodynamic processes is considered in relation to silicon single crystal growth in 100 mm diameter on REDMET-30 furnace equipped by RMF-magnet. The test results of calculated azimuth velocity profile with the measured data in KOH solution are presented. The results of parametric studies of melt flows stability in depending on the frequency and magnitude of RMF induction are summarized in the stability diagram. The constructed flow stability diagram includes known asymptotic solutions for small and large values of Hartmann number, which

confirm the calculated results of this work. The optimal parameters of RMF are recommended for industrial Cz-silicon single crystal growth.

Keywords: crystal growth; magnetic hydrodynamics; modeling

1. Введение

Конструктивная реализация трехфазного магнитогидродинамического (МГД)-вращателя состоит в горизонтальном размещении относительно тигля трех катушек со сдвигом в горизонтальном направлении под углом 120° , подводимая мощность и частота тока в обмотке катушек могут варьироваться. В простейшем случае катушки соединяются трехфазным автотрансформатором, работающим на уровне сетевой частоты 50 Гц. Согласно обзору [1], в технологических экспериментах с МГД-вращателем обнаружены три характерных структуры полосчатой примесной неоднородности в выращенных кристаллах: 1 – малые значения питающего магниты тока не приводят к искажению хаотической структуры полос; 2 – средние значения тока приводят к их упорядочению; 3 – большие значения тока приводят к появлению на поверхности слитка периодически расположенных микрополос с большим расстоянием между ними, чем при малых и средних значениях тока (50 вместо 70 мк). При более высоких скоростях вращения кристалла и действии МГД-вращателя в последнем режиме возможно получение плоского фронта кристаллизации (ФК) при отсутствии промежуточных полос и межполосных участков. В [2] проведены измерения скорости вращения расплава в ВМП.

В [3] представлены физическое и математическое моделирование течения электропроводящей жидкости во вращающемся магнитном поле (ВМП). В эксперименте цилиндр из оргстекла радиусом 75 мм, высотой 100 мм с торцами из нержавеющей стали помещался в расточку статора трехфазного асинхронного двигателя. Питание обмоток статора осуществлялось через трансформатор от сети с частотой 50 Гц. Измерения напряженности магнитного поля показали, что оно слабо меняется по высоте статора (четыреполюсник). В качестве модельной жидкости выбран 25%-й водный раствор КОН. Скорость вращения жидкости измерялась термоанемометром. К медным держателям датчика, пропущенным через стальную трубку с внешним диаметром 1.25 мм, припаивалась платиновая нить длиной 6 мм и диаметром 6 мк. Датчик включался в мостовую схему, которая питалась током 500 мА, дисбаланс измерялся потенциометром. Конструкция позволяла вращать датчик вокруг своей оси и перемещать по высоте тигля. Основными экспериментальными результатами являлись зависимости скорости вращения жидкости от числа Гартмана ($Ha < 10$) и радиальное распределение скорости вращения при различных числах Гартмана ($Ha < 22$).

В цикле работ [4–7] изучались гидродинамические явления, возникающие в ВМП, в том числе при выращивании МЧ-монокристаллов. Исследовалось течение при противовращении кристалла и тигля и показано уменьшение интенсивности меридионального течения. Проведены измерения скорости вращения на свободной поверхности расплава при помощи крыльчатки, состоящей из тонкого пластмассового диска с лопатками из нержавеющей стали. Ось крыльчатки зафиксирована на оси тигля при помощи стержня из нержавеющей стали. В качестве модельной жидкости использовалась ртуть, в качестве тиглей – стеклянные сосуды различных диаметров, варьировалась высота ртути в тигле. В качестве МГД-вращателя использовался статор двухполюсной асинхронной машины с питанием от сети трехфазного тока промышленной частоты через регулируемый трехфазный автотрансформатор. Во избежание влияния нагрева ртути опыты проводились кратковременно и начинались с больших значений силы тока с последующим его уменьшением. Основной результат

эксперимента состоит в полученной зависимости магнитной индукции от высоты расплава в тигле.

В [8] представлены результаты теста численных и экспериментальных результатов для ВМП. Физическое моделирование выполнено на низкотемпературном модельном расплаве эвтектики галлия (GaInSn) с целью изучения устойчивости течения и температурных колебаний в широком диапазоне изменения числа Гартмана и Рейнольдса. Определены профили азимутальной компоненты скорости на поверхности расплава в зависимости от интенсивности МП, его ориентации и скоростей вращения кристалла и тигля.

В [9, 10] приводится математическая модель ВМП, рассматривается тестовый вариант течения в замкнутой полости при различных типах индуктора при симметричном и несимметричном его положениях. Проведены параметрические исследования течения неизотермического расплава для одинарного и двойного индукторов. Для двойного индуктора анализируются радиальные зависимости азимутальной скорости (дается сравнение с экспериментом). Экспериментально показано, что при выращивании в ВМП форму ФК удастся перевести от вогнутой в кристалл к плоской при индукции $B = 9$ мТл (при высоких скоростях вытягивания $V_p = 60$ мм/ч) и сделать выпуклой при 7 мТл (при средних $V_p = 24$ мм/ч).

В [11] проведены численные расчеты по *Simple*-алгоритму и физическое моделирование с использованием расплавов Ga и эвтектики InGaSn, помещаемых в цилиндрический сосуд, при воздействии ВМП. Анализируются изотермические течения, их структуры и распределения азимутальной скорости в расплаве. Получено, что максимальная скорость течения $V_{\max} \sim B^2$ ($0.0007 < V_{\max} < 5$ мм/с) при индукции $B < 1$ мТл и $V_{\max} \sim B^{4/3}$ ($5 < V_{\max} < 100$ мм/с) при $1 < B < 10$ мТл. Рассмотрено влияние твердой верхней границы, радиальные и осевые зависимости V_{\max} . Показано, что величина V_{\max} определяется только индукцией, а положение максимальной величины в радиальном распределении V_{\max} при разных частотах ВМП (0.1, 1, 10 Гц) смещается к краю при увеличении частоты. Получено, что с увеличением глубины расплава угловая скорость расплава Ω_{\max} увеличивается от 0.5 до 2.8 с⁻¹.

В [12] излагается подход, в котором используется конечно-элементный пакет *Femag* для расчета магнитной гидродинамики.

2. Формулировка задачи

Схема гидромеханической МЧ-модели приведена на рис. 1. Предполагается, что определяющую роль играют гидродинамические процессы в расплаве.

Форма тигля является цилиндрической с плоским или выпуклым дном. Тепловые условия (распределения температуры или тепловых потоков) на стенках тигля и поверхности расплава считается заданным. ФК со стороны расплава задается плоским на уровне поверхности расплава (см. границу 4) и на нем поддерживается температура кристаллизации T_m . В этой модели подкристалльный столбик расплава предполагается твердым и относится к расчетной области кристалла. На рис. 1 он показан в виде области между границами 3 и 4. В кристалле решается уравнение теплопроводности при заданных распределениях температуры на верхнем торце и боковой поверхности, а также при задаваемом из решения гидродинамической задачи распределении тепловых потоков на границе 4. Граница 3 является рассчитываемой изотермой кристаллизации T_m , которая принимается за ФК.

Движение расплава кремния описывается уравнениями Навье-Стокса для вязкой несжимаемой жидкости, которые решаются совместно с уравнением переноса тепла.

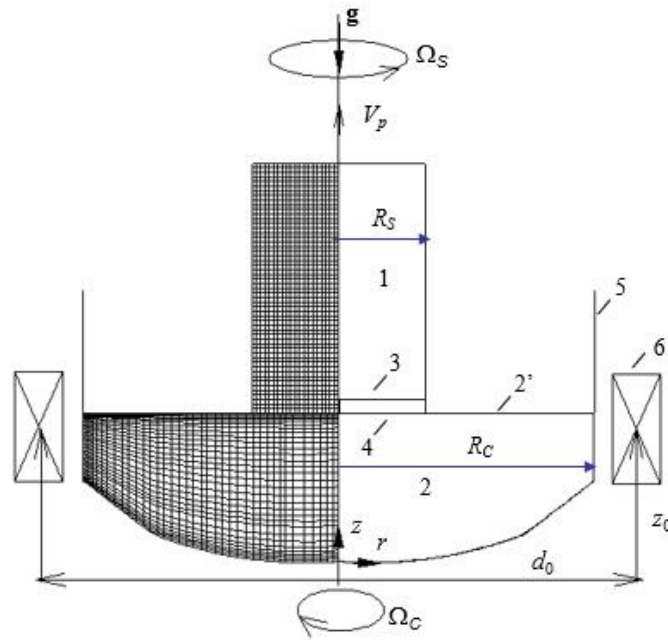


Рис. 1. Схема МЧ-математической модели: 1 – кристалл, 2 – расплав и 2' – его свободная поверхность, 3, 4 – область перемещения ФК, 5 – тигель, 6 – ВМП магнит (d_0 , z_0 – параметры его расположения). Здесь: R_s – радиус кристалла и R_c – тигля

Система трехмерных уравнений Навье-Стокса, неразрывности и теплопереноса в (r, z, ϕ) -координатах в покомпонентном виде приведена в [13].

Тепловая конвекция учитывается компонентой объемной силы в уравнении для осевой скорости (w), которая зависит от локальной температуры T и числа Грасгофа $Gr = g\beta_T R_s^3 \Delta T / \nu^2$. Теплофизические свойства расплава кремния учитываются в числе Прандтля $Pr = \nu / \chi$. В расчетах использовалась безразмерная температура $\theta = T / \Delta T$, где ΔT – характерная разность температур между максимальной температурой на тигле и температурой кристаллизации кремния $T_m = 1683$ К.

Скорости вращения кристалла Ω_s и тигля Ω_c учитываются в граничных условиях для азимутальной скорости посредством числа Рейнольдса $Re = \Omega_s R_s / \nu$ и числа Россби $Ros = \Omega_c / \Omega_s$. Здесь: ν – кинематическая вязкость, $\beta_T = -\rho_0^{-1} \partial \rho / \partial T$ – коэффициент теплового расширения, ρ – плотность, χ – коэффициент температуропроводности.

Периодическое изменение магнитной индукции ВМП предполагается по следующей формуле: $B^{(\phi)} = B_0(z) \cos(\omega_0 t + \phi_0)$, что характеризуется следующими безразмерными параметрами: $Ha_R = R_s B_0 \sigma^{1/2} (\nu \rho)^{-1/2}$ – числом Гартмана и $Re_R = \omega_0 R_s^2 / \nu$ – магнитным числом Рейнольдса, где: σ – электропроводность кремния, B_0 – амплитуда изменения магнитного поля и ω_0 – его угловая частота. При этом в уравнения Навье-Стокса для радиальной и осевой компонент скорости (u , w) и момента азимутальной скорости (M) соответственно добавляются соответствующие компоненты объемной силы в виде следующих слагаемых:

$$F_B^u = \frac{-0.5 Ha^2 u}{Re} B_0(z)^2, \quad F_B^w = \frac{Ha^2 w}{Re} B_0(z)^2, \quad F_B^M = \frac{0.5 Ha^2}{Re} \left(\frac{Re_R r}{Re} - \frac{M}{r} \right) B_0(z)^2.$$

При численном решении этих уравнений применялось приближение «искусственной сжимаемости» и 3-х шаговый вариант метода расщепления (см. [13]).

3. Результаты теста

В [3] выполнено физическое моделирование течений в модельной электропроводной жидкости (25%-й водный раствор КОН), находившейся в полностью закрытом стеклянном цилиндрическом сосуде высотой H в ВМП.

Данные этой работы использованы в качестве теста. В нем параметры модели были следующими: $R_s = R_c = 7.5$ см, $H = 10$ см, $\rho = 1$ г/см³, $\nu = 0.01$ см²/с, $\sigma = 0.15$ ом⁻¹см⁻¹.

Однородное магнитное поле имело следующие характеристики: частота – $\omega_0 = 314$ рад/с, амплитуда магнитной индукции – $B_0 = 0.05, 0.04, 0.03$ Тл, что соответствовало следующим безразмерным параметрам: $Na_R = 0.4593, 0.3674, 0.2756$ и $Re_R = 1.77 \times 10^6$. В таблице показано сравнение максимального значения азимутальной скорости жидкости в сечении $z = H/2$, а также показано отношение угловых скоростей вращения жидкости ω и поля ω_0 .

Таблица. Тест течения, вызванного действием ВМП

№	Na_R	w , см/с [3]	w , см/с	$(\omega/\omega_0) \times 10^3$
1	0.4593	2.9	2.47	1.41
2	0.3674	2.1	1.78	1.02
3	0.2756	1.375	1.17	0.54

Анализ данных показывает, что увеличение индукции магнитного поля ведет к росту максимального значения азимутальной скорости и увеличению относительной угловой скорости вращения жидкости. На рис. 2 показан профиль азимутальной скорости в радиальном направлении для среднего сечения цилиндра ($z = H/2 = 5$ см) и приведены данные двух измерений.

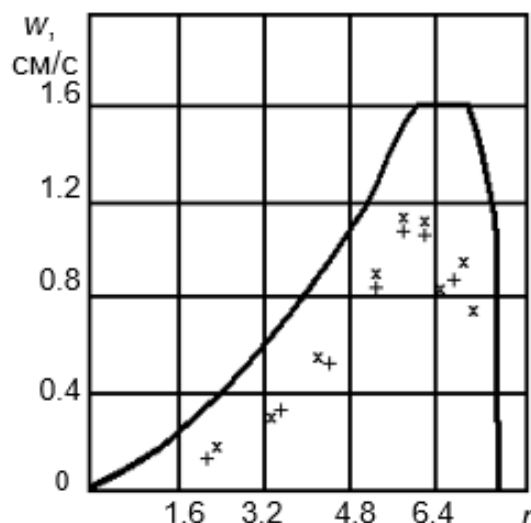


Рис. 2. Радиальное распределение азимутальной компоненты скорости w в изотермическом растворе КОН при ВМП действии ($Re_R = 1.77 \times 10^6$, $Na_R = 0.3674$). Сплошная линия – данные тестовых расчетов; \times , $+$ – результаты двух серий измерений [3]

Согласно расчетам, физическое время установление профиля азимутальной скорости в жидкости от состояния покоя соответствует экспериментальному и составляет ~ 4 мин при $\omega/\omega_0 = 0.54 \times 10^{-3}$. В целом, можно отметить хорошее соответствие расчетного и экспериментальных профилей азимутальной скорости, а некоторое превышение расчетных значений над экспериментальными можно объяснить отсутствием в математической модели электропроводности торцов цилиндрического сосуда, обуславливающей ослабление магнитного поля.

4. Результаты расчетов для промышленной установки

Рассмотрим результаты математического моделирования применительно к устройству для электромагнитного вращения при выращивании кристаллов кремния на установке РЕДМЕТ-30 [14]: радиусы кристалла – $R_s = 5$ см и тигля – $R_c = 13.5$ см, высота расплава – $H = 15.5$ см.

В результате расчетов обнаружено, что осевая пространственная ВМП неоднородность приводит к изменению структуры течения. Отмечается смещение максимума в распределении азимутальной компоненты скорости к боковой стенке тигля с увеличением чисел Ha_R и Re_R . В зависимости от их значений в расплаве реализуются стационарные и колебательные режимы течения.

При ВМП воздействии расплав вращается в направлении вращения магнитного поля, исключение составляет его слой вблизи боковой стенки тигля, где возникает вертикальный каскад вихрей (см. на рис. 3а: сплошные линии – изолинии азимутального момента скорости). Это явление напоминает вихреобразование в течении Куэтта в слое между соосными вращающимися цилиндрами. Возможная неустойчивость структуры течения в ВМП обусловлена торможением вынужденного движения в пограничном пристеночном слое, причем область неустойчивости меридионального движения сосредоточена вблизи боковой стенки тигля. При увеличении Ha_R и Re_R отмечается рост максимального значения момента азимутальной скорости и смещение положения ее максимума к боковой стенке.

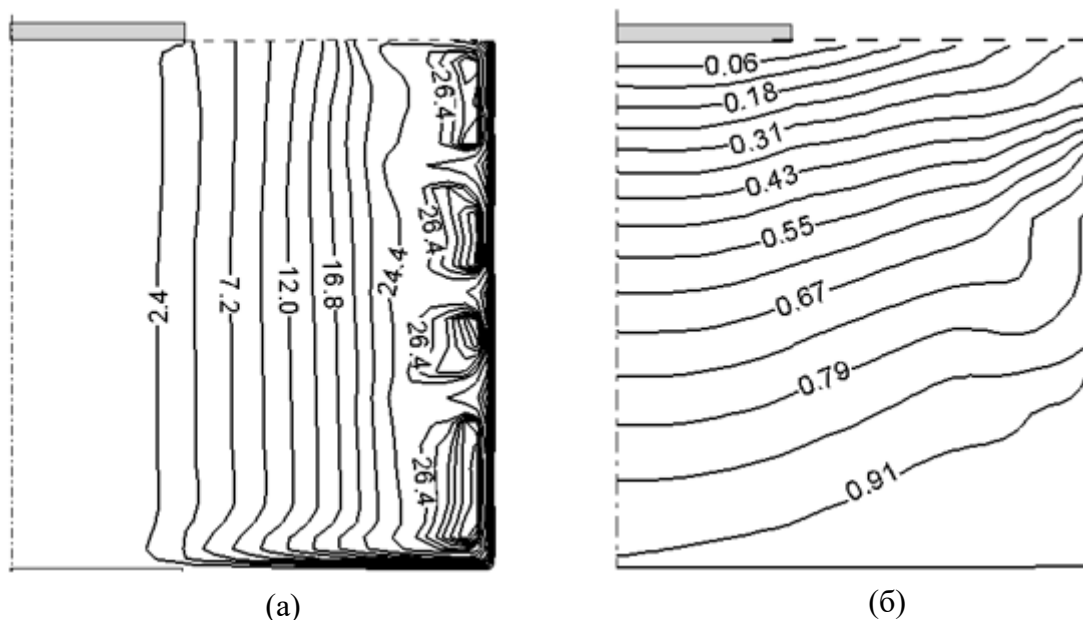


Рис. 3. Структуры течения и изотермы в расплаве при выращивании кристаллов кремния в ВМП при $Re_R = 1.12 \times 10^3$, $Ha_R = 3.33$: (а) изолинии момента азимутальной скорости в изотермическом расплаве; (б) изотермы $\theta = T/\Delta T$ при тепловой конвекции

Частотная обработка колебательных режимов показывает, что характерные частоты колебаний радиальной и осевой компонент скорости растут при усилении магнитного воздействия, т.е. с увеличением Ha_R и Re_R .

Без ВМП нагрев тигля создает одновихревое течение от стенки тигля к кристаллу. Такое течение изменяет структуру изотерм по сравнению с режимом теплопроводности. Однако воздействие ВМП вызывает подавление меридионального движения, в результате чего структура изотерм становится аналогичной режиму теплопроводности (рис. 3б).

На рис. 4 приведены структуры течения и изотермы $\theta = T/\Delta T$ при выращивании кристаллов кремния в ВМП в условиях вращения кристалла и тигля ($Gr = 8 \times 10^7$, $Re_S = 8000$). Можно отметить, что в этом случае ВМП оказывает определяющее влияние на распределение азимутального момента вращения и температурное поле в расплаве.

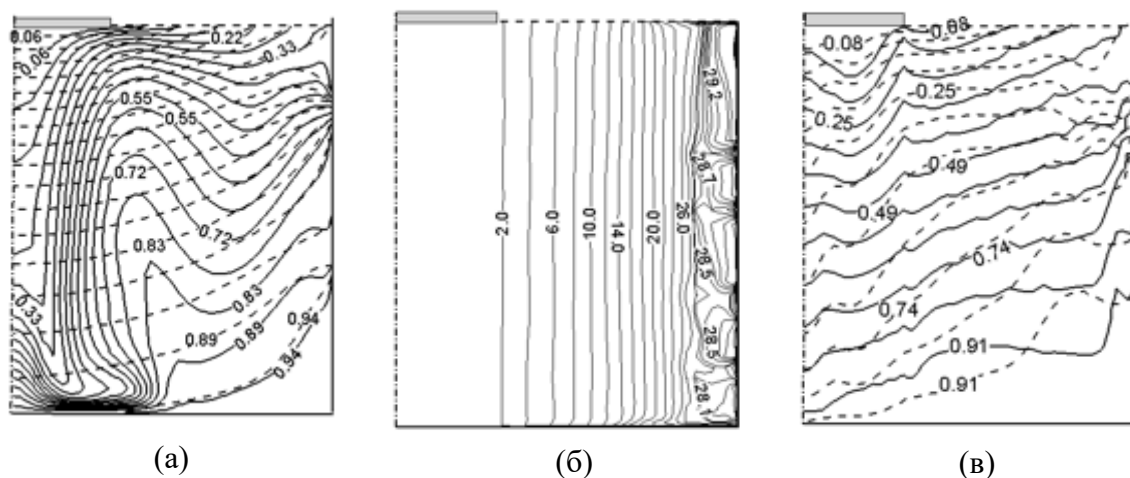


Рис. 4. Структуры течения и изотермы в расплаве при выращивании кристаллов кремния в ВМП при вращении кристалла и тигля ($Gr = 8 \times 10^7$, $Re_S = 8000$): (а) изотермы, $Ros = -0.6$, $Re_R = 10^6$, $Ha_R = 2$ (пунктир – режим теплопроводности); (б) изолинии момента азимутальной скорости ($Ros = 0$, $Re_R = 10^6$, $Ha_R = 2$); (в) изотермы, $Ros = 0$, $Re_R = 10^6$, $Ha_R = 200$ (пунктир – режим б)

На основе проведенных параметрических расчетов сделаны оценки амплитудно-частотных характеристик гидродинамически неустойчивых режимов ВМП течений.

В частности, на рис. 5а приведены спектральные плотности пульсаций осевой компоненты скорости w в подкристальном слое ($z = 0.9H$, $r = R_S/3$), выделяются характерные частоты: 1 и 3 Гц. Такое осциллирующее воздействие на ВМП течение около ФК является важным модулирующим фактором на вхождение примесей из расплава в кристалл, определяющее явление полосчатой примесной неоднородности растущих кристаллов кремния. Так, если постоянные магнитные поля применяются для подавления конвективного течения расплава, то ВМП воздействие позволяет создать дополнительное вращение расплава и может использоваться для управления процессом роста монокристаллов.

Впервые диаграмма устойчивости ВМП течений была предложена в [5] на основе обобщения ряда теоретических работ. В данной работе такая диаграмма была построена применительно к условиям выращивания кристаллов кремния с использованием ВМП вращателя [14] и была дополнена известными данными других авторов для слабых и сильных ВМП воздействий.

Расчеты при малых числах Гартмана, соответствующих слабому ВМП ($Ha_R = 0.3 \div 30$), показали, что силовое ВМП воздействие на расплав сравнимо с силами вязкого трения, приводящими расплав в движение за счет вращения кристалла и тигля. В этом случае значительно проявляется магнитный аналог течения Куэтта между вращающимися цилиндрами на границе устойчиво вращающегося ядра, а для соответствия часто используется магнитный аналог известного критерия Тейлора в виде $Ha_R^2 Re_R$.

Однако для больших чисел Гартмана известна энергетическая оценка устойчивости ВМП течений [5]. В ней отмечается близость скорости вращения на границе устойчивого ядра течения к фазовой ВМП скорости, поэтому кинетическая энергия течения практически не изменяется при увеличении ВМП индукции, хотя диссипация энергии возрастает. Оценки, сделанные в [5] приводят к следующему соотношению:

$$Ha_R^2 / [2 \times \ln(Ha_R / 2^{-3/2})] > Re_R,$$

в соответствии с которым при $Re_R \cong 10^6$ магнитная индукция ~ 1 Тл стабилизирует течение.

В данной работе параметрические расчеты выполнены в широком диапазоне изменения чисел Ha_R и Re_R :

$$0.033 < Ha_R < 3300, 1.12 < Re_R < 1.12 \times 10^7$$

при радиусах – кристалла $R_S = 4$ и 5 см, тигля – $R_C = 13.5$ см, высоте расплава $H_C = 15.5$ см. Расплав считался изотермическим.

Обобщенная диаграмма устойчивости течения расплава при ВМП воздействии построена в переменных ($\lg(Ha_R)$, $\lg(Re_R)$) и показана на рис. 5б. На ней сплошная линия ограничивает область устойчивости течения. Справа от нее находится область, соответствующая неустойчивым (колебательным) режимам. Показанные пунктирные линии соответствуют асимптотикам, полученным при больших числах Ha_R и Re_R в работе [6].

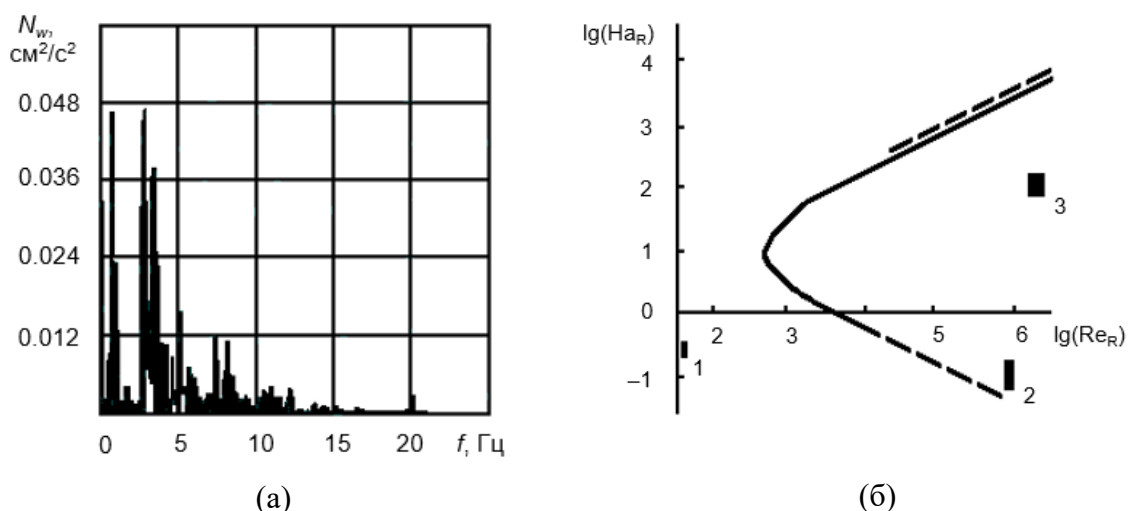


Рис. 5. Спектральная плотность пульсаций осевой компоненты скорости в подкристалльном слое при ВМП действии: $Gr = 9 \times 10^7$, $Re = 6 \times 10^3$, $Re_R = 2.2 \times 10^6$, $Ha_R = 33.3$ (а); диаграмма устойчивости ВМП течения расплава кремния (б) с данными других авторов: пунктир [6], 1 – [15], 2 – [16], 3 – [14]

На этой диаграмме учтены данные других работ с использованием ВМП воздействия для космических экспериментов: 1 – [15], 2 – [16], 3 – [14].

По результатам данной работы для ВМП воздействия при МЧ-выращивании кристаллов кремния диаметром 100 мм ветви диаграммы описываются следующим образом. При $\lg(\text{Re}_R) > 3.05$ (или $\text{Re}_R > 1.12 \times 10^3$) нижнюю и верхнюю ветви сплошной линии можно описать следующими формулами:

$$\lg(\text{Ha}_R) = -0.67 \times \lg(\text{Re}_R) + 2.45 \text{ (нижняя ветвь),}$$

$$\lg(\text{Ha}_R) = 0.56 \times \lg(\text{Re}_R) - 0.044 \text{ (верхняя ветвь).}$$

Эти результаты подтверждаются данными других авторов. В частности, для наземной технологии течение является устойчивым при сильном ВМП с индукцией $B_0 > 0.78$ Тл для «сетевой» частоты – 50 Гц [14]. Однако для космических условий [15] приемлемым является слабое ВМП с индукцией $B_0 = 17.5$ мТл при низких частотах, которые не превышают 0.025 Гц.

5. Благодарности

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690136-2).

Список литературы

1. *Шашков Ю. М.* Методы выращивания монокристаллов и пленок материалов твердотельной электроники // Итоги науки и техники. Электроника. 1988. Т. 18. С. 184–216.
2. *Архипова Л. В., Кескюла В. Ф., Кильк А. О.* Экспериментальное определение скорости вращения расплава во вращающемся магнитном поле // Труды Таллинского политехнического института. 1983. № 655. С. 18–25.
3. *Горбачев Л. П., Никитин Н. В., Устинов А. Л.* О МГД-вращении электропроводной жидкости в цилиндрическом сосуде конечных размеров // Магнитная гидродинамика. 1974. № 4. С. 32–42.
4. *Зибольд А. Ф., Капуста А. Б., Кескюла В. Ф., Петров Г. Н., Ремизов О. А.* Гидродинамические явления, возникающие при выращивании монокристаллов по методу Чохральского во вращающемся магнитном поле // Магнитная гидродинамика. 1986. № 2. С. 100–104.
5. *Капуста А. Б.* Одна простая энергетическая оценка устойчивости течений, возбуждаемых вращающимся магнитным полем // Магнитная гидродинамика. 1984. № 1. С. 63–65.
6. *Капуста А. Б., Зибольд А. Ф.* Стационарная неустойчивость осесимметричного течения, возбуждаемого высокочастотным вращающимся магнитным полем // Магнитная гидродинамика. 1983. № 1. С. 77–81.
7. *Капуста А. Б., Шамота В. П.* Вращательное течение проводящей жидкости в переменном электромагнитном поле // Магнитная гидродинамика. 1991. № 4. С. 116–119.
8. *Бояревич А. В., Горбунов Л. А., Люмкис Е. Д.* Физическое и численное моделирование влияния вертикального магнитного поля на вынужденную конвекцию в процессах выращивания монокристаллов методом Чохральского // Магнитная гидродинамика. 1983. № 2. С. 81–87.
9. *Abricka M., Krumins J., Gelfgat Yu.* Numerical simulation of MHD rotator action on hydrodynamics and heat transfer in single crystal growth processes // Journal of Crystal Growth. 1997. Vol. 180 (3–4). P. 388–400. DOI: 10.1016/S0022-0248(97)00265-0

10. Gelfgat Yu. M., Abriska M., Krumins J. Influence of alternating magnetic field on the hydrodynamics and heat/mass transfer in the processes of bulk single crystal growth // Proceedings of 4th International Conference ICSC. Obninsk: IPhPE, 2001. P. 68–79.
11. Barz R. U., Gerbeth G., Wunderwald U., Buhrig E., Gelfgat Y. M. Modelling of the isothermal melt flow due to rotating magnetic fields in crystal growth // Journal of Crystal Growth. 1997. Vol. 180 (3–4). P. 410–421. DOI: 10.1016/S0022-0248(97)00237-6
12. Virbus J., Wetzel Th., Muiznieks A. *et al.* Numerical investigation of silicon melt flow in large diameter CZ-crystal growth under the influence of steady and dynamic magnetic fields // Journal of Crystal Growth. 2001. Vol. 230 (1–2). P. 92–99. DOI: 10.1016/S0022-0248(01)01321-5
13. Гончаров А. Л., Девдариани М. Т., Простомолотов А. И., Фрязинов И. В. Аппроксимация и численный метод решения трехмерных уравнений Навье-Стокса на ортогональных сетках // Математическое моделирование. 1991. Т. 3. № 5. С. 89–109.
14. Патент РФ № 2022067. Способ получения кристаллического полупроводникового материала и устройство для его осуществления / Качалов Р. М., Пелевин О. В., Рубинраут А. М., Бочкарев Э. П. Заявитель и патентообладатель Качалов Р. М., Пелевин О. В., Рубинраут А. М., Бочкарев Э. П.; заявл. 29.01.1991; опубл. 30.10.1994. Бюл. № 20.
15. Kakimoto K. Effects of rotating magnetic fields on temperature and oxygen distributions in silicon melt // Journal of Crystal Growth. 2002. Vol. 237–239. P. 1785–1790. DOI: 10.1016/S0022-0248(01)02341-7
16. Картавых А. В., Копелиович Э. С., Мильвидский М. Г. и др. Формирование примесной неоднородности при выращивании монокристаллов германия в условиях микрогравитации // Кристаллография. 1997. Т. 42. № 4. С. 755–761.

Диссипативные структуры конвекции Марангони в тонком слое жидкости с решеткой локализованных и непрерывно распределенных источников и стоков тепла

И. И. Вертгейм^а, В. А. Шарифулин^б, А. Н. Шарифулин^б

^а Институт механики сплошных сред УрО РАН,

614013, Пермь, ул. Академика Королёва, 1

email: wertg@icmm.ru

^б Пермский национальный исследовательский политехнический университет,

614990, Пермь, Комсомольский пр., 29

email: vadsharif@bk.ru

email: sharifulin@bk.ru

Исследованы трехмерные решения нелинейных уравнений длинноволнового приближения для задачи о конвекции Марангони в тонком горизонтальном слое вязкой несжимаемой жидкости со свободной поверхностью. Распределение температуры в жидкости соответствует однородному вертикальному градиенту, искажённому наложением слабо неоднородного локализованного в горизонтальной плоскости потока тепла от решетки локализованных или непрерывно распределенных источников и стоков тепла. Нижняя граница слоя твердая и теплоизолированная, а верхняя – свободная и деформируемая. Постановка задачи мотивирована поиском путей управлением структурами конвекции Марангони путем изменения вида неоднородности теплового потока, а в более общем случае – также неоднородным добавлением поверхностно-активных веществ. Задача в длинноволновом приближении описывается системой нелинейных уравнений переноса для амплитуд распределения температуры, деформации поверхности. Численное решение задачи выполнено на основе псевдоспектрального метода. Рассмотрена динамика нестационарных диссипативных структур.

Ключевые слова: конвекция Марангони; длинноволновое приближение; диссипативные структуры

Dissipative structures of convection Marangoni in a thin layer of liquid with lattice of localized and continuously distributed heat sources and sinks

I. I. Wertgeim^а, V. A. Sharifulin^б, A. N. Sharifulin^б

^а Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS,

1 Akademika Koroleva St., 614013, Perm

email: wertg@icmm.ru

^b Perm National Research Polytechnic University, 29 Komsomolsky Pr., 614990, Perm
email: vadsharif@bk.ru
email: sharifulin@bk.ru

Three-dimensional solutions of nonlinear long-wavelength approximations for the problem of Marangoni convection in a thin horizontal layer of a viscous incompressible fluid with a free surface. The temperature distribution in the liquid corresponds to a uniform vertical gradient distorted by the imposition of a weakly inhomogeneous heat flux localized in the horizontal plane, caused by a lattice of either localized or continuously distributed heat sources and sinks. The lower boundary of the layer is solid and thermally insulated, while the upper one is free and deformable. The statement of the problem is motivated by the search for ways to control convection structures. The problem in long-wave approximation is described by a system of nonlinear transport equations for the amplitudes of temperature distribution and surface deformation. The numerical solution of the problem is based on the pseudospectral method. The dynamics of non-stationary dissipative structures is considered.

Keywords: Marangoni convection; Long-wave approximation; dissipative structures

Рассматривается формирование и эволюция трехмерных конвективных структур в тонком слое вязкой несжимаемой жидкости со свободной деформируемой поверхностью. Полагаем, что коэффициент поверхностного натяжения линейно зависит от температуры (эффект Марангони). Нижняя поверхность твердая и теплоизолированная. Слой жидкости полагается достаточно тонким, чтобы пренебречь эффектом плавучести. Такая постановка актуальна в связи с распространенностью неравномерно нагреваемых тонких пленок в технологических процессах в металлургии и наземных экспериментах по созданию новых материалов в условиях орбитальных космических станций. Ранее в такой постановке были исследованы структуры конвекции Марангони для случая равномерного подогрева снизу [1]. В [2] условия подогрева, рассмотренные в [1] были усложнены привнесением локального источника тепла, а в [3] было получено дипольное решение для амплитуды температуры (и деформации поверхности), для случая теплопотока с одним максимумом (монопольного). Исследование влияния управляемых распределений локальных источников и стоков тепла необходимо для выработки способов предсказания возникающих сложных, мозаичных структур конвекции Марангони. Для выработки теоретических подходов к проблеме важно рассмотреть и различные непрерывные распределения источников и стоков тепла. После достижения этой цели можно ставить задачу управления возникающей диссипативной структурой, проявляющейся в возникновении на поверхности жидкости распределений подъемов и впадин, распределения температуры и разбиения тонкого слоя на сложную систему ячеек.

В настоящей работе рассмотрен горизонтальный слой с шириной и длиной в 30π раз превышающей его толщину. На боковых границах задано условие периодичности. Задавались разнообразные начальные распределения источников и стоков тепла. Рассмотрено 6 дискретных и 12 непрерывных распределений источников и стоков тепла. Расчеты проводились путем решения системы нелинейных уравнений длинноволнового приближения [1] псевдоспектральным методом со 128 базисными функциями по каждой из двух координатам, физические параметры полагались равными $c = 1$, $\delta = 10$, $a = 0.1$, $b = 0.5$ (см. интерпретацию в [1–3]).

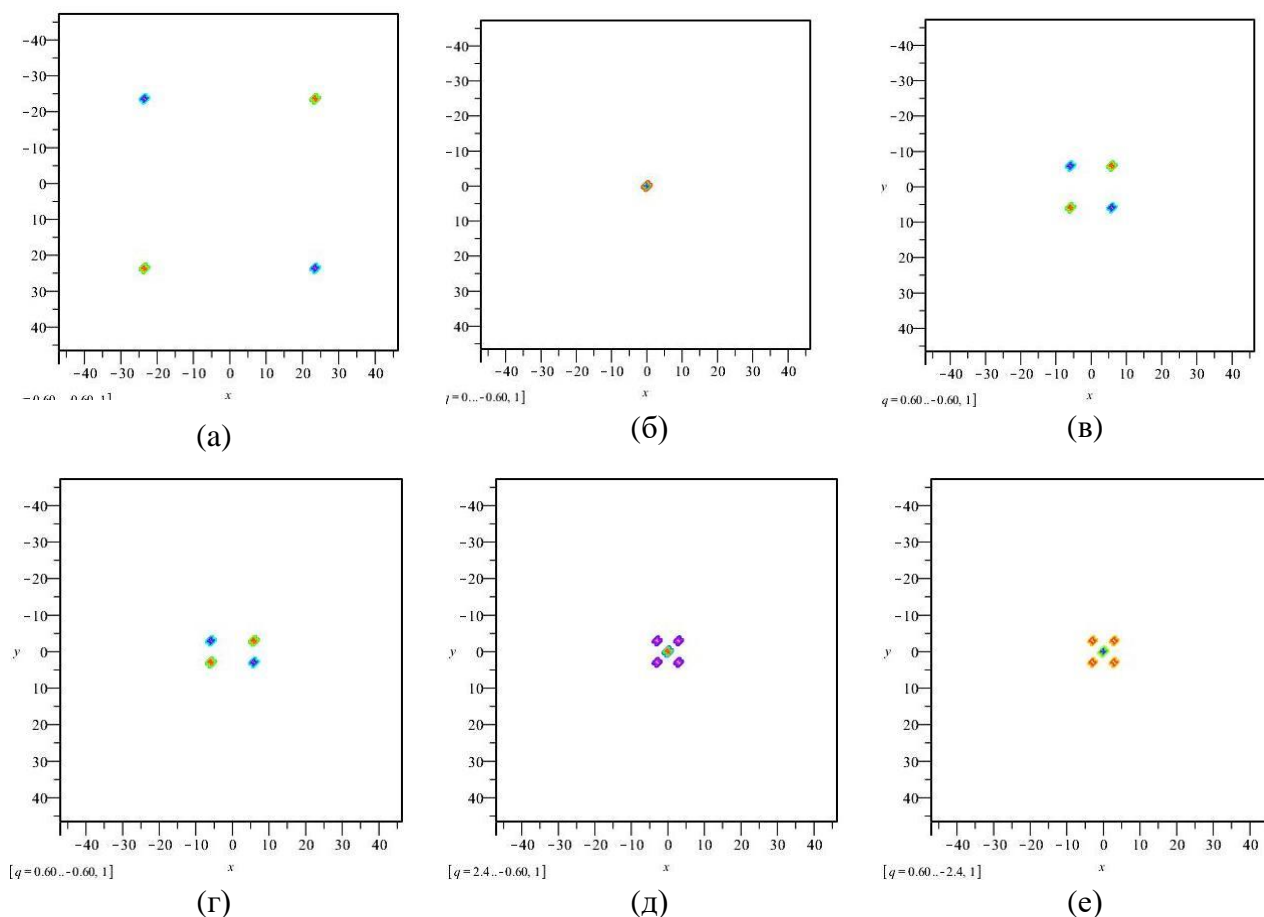


Рис. 1. Рассмотренные дискретные распределения источников и стоков тепла: (а) равномерное распределение двух источников и двух стоков; (б) уединенный сток; (в) симметричное расположение двух источников и двух стоков вблизи центра расчетной области; (г) несимметричное расположение двух источников и двух стоков вблизи центра расчетной области; (д) мощный источник и 4 стока в центре расчетной области; (е) мощный сток и 4 источника в центре расчетной области

Все дискретные распределения, показанные на рис. 1 вызывают сначала мелкомасштабное распределение возвышений и впадин на поверхности пленки, аналогичное показанному на рис. 2а для распределения показанного на рис. 1а, в дальнейшем (см. рис. 2б и 2в) оно приобретает стационарную крупномасштабную структуру, показанную на рис. 2г.

Часть непрерывных распределений показана на рис. 3. Рассматривались распределения когда суммарная мощность источников тепла компенсировалась суммарной мощностью стоков. Простейшее распределение показано на рис. 3а. Рассмотренные распределения можно обозначить как $X_k Y_n$, где $k(n)$ обозначает количество пар (источников-стоков) по $X(Y)$ координате. Рассмотрено 11 распределений: $X1Y1$, $X1Y2$, $X1Y3$, $X1Y5$, $X2Y2$, $X2Y3$, $X2Y5$, $X3Y4$, $X3Y5$, $X4Y5$ и $X15Y15$. Восемь из них представлены на рис. 3.

Динамика порождаемых непрерывными распределениями диссипативных структур во многом схожа с рассмотренной выше от дискретных решетчатых распределений. В большинстве из рассмотренных случаев сначала наблюдается мелкомасштабная структура, которая после длительного переходного периода переходит в простое распределение, когда на свободной поверхности образуется уединенная вершина и впадина.

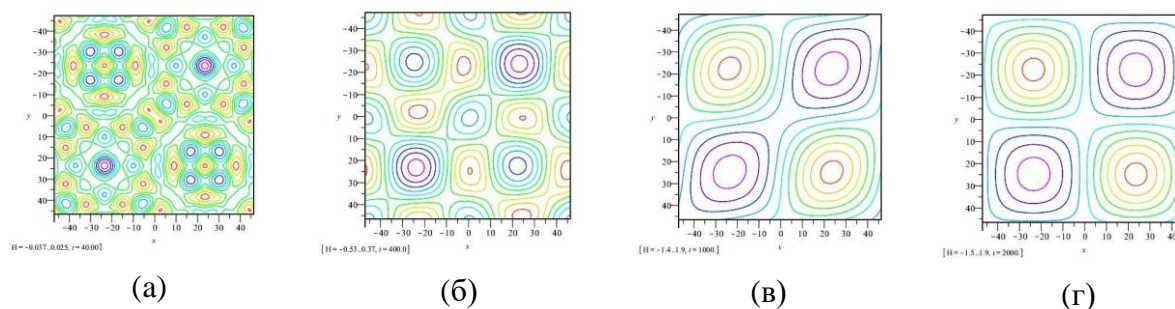


Рис. 2. Эволюция структуры профиля свободной поверхности во времени для начального распределения рис. 1а: (а) профиль поверхности распределения рис. 1а к $t = 40$; (б) профиль поверхности распределения рис. 1а к $t = 400$; (в) профиль поверхности распределения рис. 1а к $t = 1000$; (г) профиль поверхности распределения рис. 1а к $t = 2000$

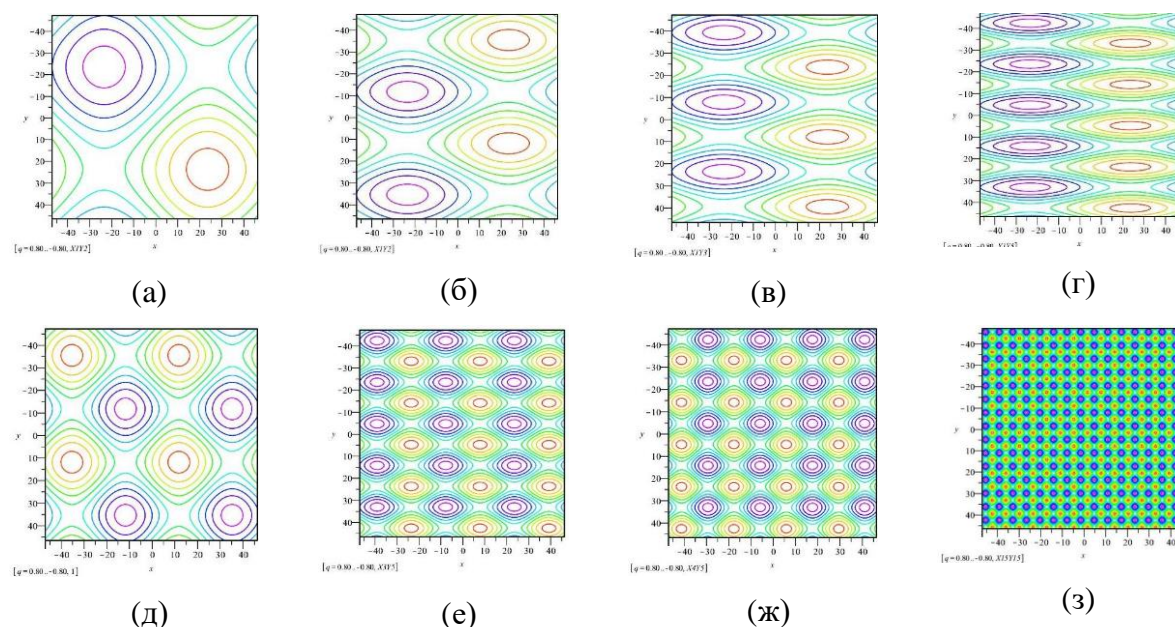


Рис. 3. Непрерывные распределения источников и стоков: (а) $X1Y1$; (б) $X1Y2$; (в) $X1Y3$; (г) $X1Y5$; (д) $X2Y2$; (е) $X3Y5$; (ж) $X4Y5$; (з) $X15Y15$

На рис. 4а–в показана эволюция состояния $X4Y5$ (рис. 3ж) аналогичный процесс происходит для всех состояний кроме $X1Y2$ и $X2Y2$. Когда в конце диссипативного процесса формируется система продольных вдоль оси Y валов, а на свободной поверхности наблюдается почти параллельная друг к другу практически прямолинейная ложбина и выпуклость, профили, которых слабо зависят от Y координаты. Эволюция состояния $X1Y2$ представлена на рис. 4г–е.

Образование рассмотренных в работе диссипативных структур часто сопровождается появлением осреднённой циркуляции течения, вызванной либо условием замкнутости потока, либо внешним воздействием; это делает такое течение сходным с модельными случаями, в частности, обобщённым течением Колмогорова с вихревыми структурами, вызванными двоякопериодической внешней силой [4] или течением с постоянной силой, обтекающим периодическую решётку препятствий [5], при наличии осреднённой прокачки. В этих течениях обнаружены структурные перестройки на фоне глобального течения, приводящие к необычным спектральным и

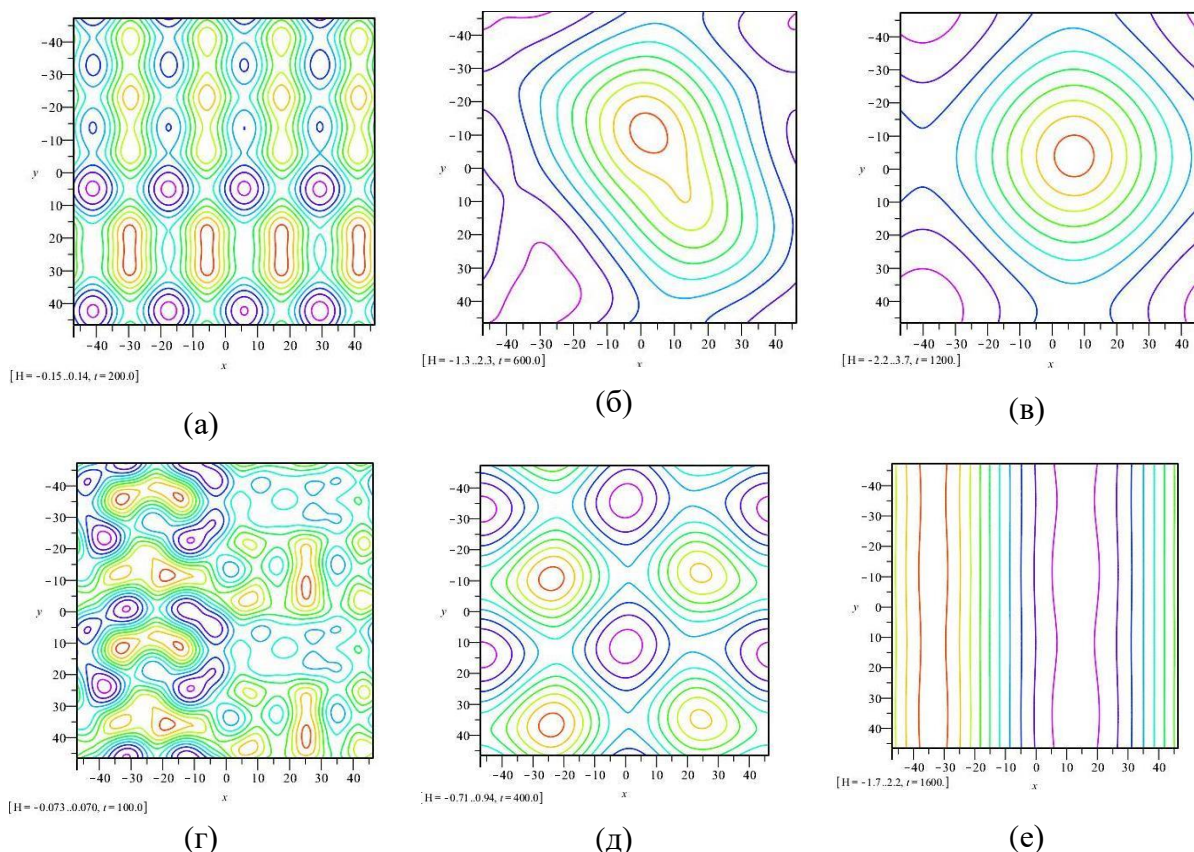


Рис. 4. Эволюция структуры профиля свободной поверхности во времени для начальных распределений $X1Y2$ и $X2Y2$: (а) профиль поверхности распределения $X4Y5$ к $t = 200$; (б) профиль поверхности распределения $X4Y5$ к $t = 600$; (в) профиль поверхности распределения $X4Y5$ к $t = 2000$; (г) профиль поверхности распределения $X1Y2$ к $t = 100$; (д) профиль поверхности распределения $X1Y2$ к $t = 400$; (е) профиль поверхности распределения $X1Y2$ к $t = 1600$

транспортным свойствам лагранжевой динамики частиц: фрактальному спектру мощности и алгебраически убывающей автокорреляции скоростей частиц.

В дальнейших исследованиях подобных течений обнаружена их неустойчивость, проявляющаяся лишь для отличных от квадратных ячеек периодичности, в стороны которых укладывается несколько периодов силы. Эта неустойчивость приводит, как правило, к вторичным колебательным режимам [6, 7], что оказывает существенное влияние на динамику и статистические свойства лагранжевых частиц и может привести к непрерывному спектру мощности их скоростей («лагранжев хаос»).

В работе найдены области параметров, где реализуются локальные и глобальные структуры конвекции Марангони, последние близки к упомянутым модельным течениям, отличаясь непостоянством средней прокачки и нестрогой периодичностью. Из-за реальной трёхмерности таких течений и, следовательно, отсутствия несжимаемости для двумерных срезов поля скорости, возможно появление на поверхности слоя источников и стоков частиц-трассеров. Это приводит к новым особенностям их транспортных и статистических характеристик, которыми можно управлять, изменяя параметры неоднородного нагрева. Для таких течений возможно использовать обширные экспериментальные и численные данные, чтобы изучить их

свойства устойчивости и исследовать перенос частиц-индикаторов в этих течениях, сопоставляя транспортные свойства с обнаруженными для модельных течений.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках совместного российско-германского проекта 20-51-12010 НННО_а.

Список литературы

1. Golovin A. A., Nepomnyashchy A. A., Pismen L. M. Nonpotential effects in nonlinear dynamics of Marangoni convection // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2002. Vol. 12 (11). P. 2487–2500. DOI: 10.1142/S021812740200600X
2. Karlov S. P., Kazenin D. A., Myznikova B. I., Wertgeim I. I. Experimental and numerical study of the Marangoni convection due to localized laser heating // Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics. 2005. Vol. 30 (3). P. 283–304. DOI: 10.1515/JNETDY.2005.021
3. Wertgeim I. I. Numerical Study of nonlinear structures of locally excited Marangoni convection in the long-wave approximation // Microgravity Science and Technology. 2018. Vol. 30. P. 129–142. DOI: 10.1007/s12217-017-9589-y
4. Zaks M., Pikovsky A., Kurths J. Steady viscous flow with fractal power spectrum // Physical Review Letters. 1996. Vol. 77. N. 21. P. 4338–4341. DOI: 10.1103/PhysRevLett.77.4338
5. Pöschke P., Sokolov I., Zaks M., Nepomnyashchy A. Transport on intermediate time scales in flows with cat's eye patterns // Physical Review E. 2017. Vol. 96. N. 6. 062128. DOI: 10.1103/PhysRevE.96.062128
6. Wertgeim I. I., Zaks M. A., Sagitov R. V., Sharifulin A. N. Stability and nonlinear secondary modes of double-periodic flows with pumping // Journal of Physics: Conference Series. 2020. Vol. 1675. N. 1. 012002. DOI: 10.1088/1742-6596/1675/1/012002
7. Вертгейм И. И., Закс М. А., Сагитов Р. В., Шарифулин А. Н. Неустойчивости, бифуркации и нелинейная динамика в двумерных обобщениях течения Колмогорова // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2022. № 4. С. 11–25. DOI: 10.31857/S0568528122040119

Взаимодействие легкого сферического тела в жидкости с осциллирующей границей

О. А. Власова

Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет,
Лаборатория вибрационной гидромеханики, 614990, Пермь, ул. Сибирская, 24
email: vlasova_oa@pspu.ru

В работе представлены результаты исследования динамики легкого сферического тела в жидкости вблизи осциллирующей стенки кюветы. Внимание уделяется области умеренных и низких безразмерных частот, когда размеры включения согласуются с толщиной пограничного слоя Стокса. Поведение тела изучается в вертикальной цилиндрической полости с жидкостью. Полость совершает вращательные колебания вокруг собственной вертикальной оси, причем ось может быть отклонена от вертикали на некоторый угол. Методом скоростной видео съемки подробно изучаются основные характеристики движения тела, вызванные вязким взаимодействием со стенкой полости. Методом квазистационарного подвеса тела в поле силы тяжести измеряется осредненная подъемная сила вибрационной природы, действующая на тело, плотность которого отличается от плотности жидкости. Разработанная методика позволяет выяснить зависимость подъемной силы от вибрационных параметров и расстояния от осциллирующей границы, на котором располагается твердое включение. Показано, что в области умеренных безразмерных частот осредненная подъемная сила, действующая на включение вблизи границы, совершающей тангенциальные колебания, убывает с расстоянием по экспоненциальному закону.

Ключевые слова: сфера; подъемная сила; вязкая жидкость; осциллирующая твердая граница

Interaction of a light spherical body in a liquid with an oscillating boundary

O. A. Vlasova

Perm State Humanitarian Pedagogical University,
Laboratory of Vibrational Hydromechanics, 24 Sibirskaya St., 614990, Perm
email: vlasova_oa@pspu.ru

The paper presents the results of studying the dynamics of a light spherical body in a liquid near the oscillating wall. Attention is paid to the region of moderate and low dimensionless frequencies, when the dimensions of the body are consistent with the thickness of the Stokes boundary layer. The behavior of the body is studied in a vertical cylindrical cavity with liquid. The cavity performs rotational oscillations around its own vertical axis. The axis can be deviated from the vertical by a certain angle. The main characteristics of body motion caused by

viscous interaction with the cavity wall are studied in detail by the method of high-speed video shooting. The method of quasi-stationary suspension of a body in the field of gravity is used to measure the average lift force of a vibrational nature acting on a body whose density differs from that of a liquid. It is shown that in the range of moderate dimensionless frequencies, the average lift force acting on the inclusion near the boundary, which performs tangential oscillations, decreases with distance according to an exponential law.

Keywords: sphere; lift force; viscous liquid; oscillating solid boundary

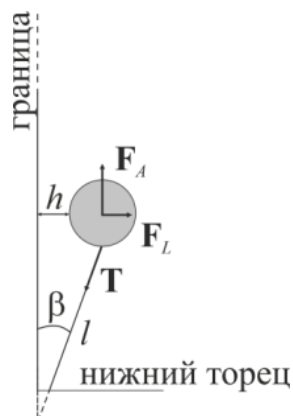
1. Экспериментальная установка и методика

Поведение легкого сферического тела экспериментально исследуется в заполненной жидкостью цилиндрической полости. Полость образована прозрачной плексигласовой трубой закрытой прозрачными торцами. Высота полости $H = 25.0$ см, радиус полости $R = 6.5$ см. Кювета совершает вращательные колебания вокруг собственной вертикальной оси, отметим, что в экспериментах ось кюветы могла располагаться вертикально, либо отклоняться от вертикали на угол $\alpha = 4.5$ и 9 градусов. В экспериментах используются сферические тела диаметром $d = 3.3, 5.9$ и 15.9 мм. Плотность тела составляет $\rho_s = 1.22, 1.25$ и 1.07 г/см³ соответственно. Рабочая полость заполняется чистым глицерином (плотность $\rho_L = 1.26$ г/см³ и вязкость $\nu = 6$ Ст) или раствором йодированной соли в глицерине (плотность $\rho_L = 1.43$ г/см³ и вязкость $\nu = 7$ Ст).

Методика эксперимента следующая: при фиксированной частоте колебаний полости f пошагово увеличивается амплитуда ее азимутальных колебаний φ_c . На каждом шаге производится видеосъемка. В дальнейшем записи обрабатываются и определяются основные характеристики движения тела (амплитуда азимутальных φ_b и вращательных ψ_b колебаний, зазор между телом и стенкой полости). Наблюдение за динамикой тела осуществляется через верхний торец кюветы. Видеокамера устанавливается таким образом, что бы на цилиндрической стенке полости было видно отражение тела (рис. 1а). Для исключения влияния осредненных тороидальных вихрей, генерируемых вблизи торцов осциллирующей полости [1], легкое тело удерживается в средней по высоте части полости при помощи нерастяжимой нити, закрепленной на нижнем торце кюветы (рис. 1б).



(а)



(б)

Рис. 1. Фотография тела вблизи стенки полости (а); силы, действующие на сферическое тело в вертикальной полости в подвешенном состоянии (б)

Измерение осредненной вибрационной подъемной силы, действующей на сферу, выполняется методом квазистационарного подвеса легкого тела в статическом поле силы тяжести. Когда тело прижато к стенке, действующие на него силы (сила Архимеда, сила натяжения нити, сила реакции опоры) уравниваются друг друга. С появлением зазора между телом и стенкой полости исследуемая вибрационная подъемная сила, сила Архимеда и сила натяжения нити полностью уравниваются друг друга, и тело занимает квазистационарное положение на некотором расстоянии от границы в «подвешенном» состоянии (рис. 1б). Известные вес тела и сила натяжения нити позволяют рассчитать вибрационную силу отталкивания, действующую на тело (подъемную силу), с высокой точностью. Изменение угла наклона α позволяет изменять прижимную силу, действующую на легкое включение, что, в свою очередь, расширяет область измерений осредненной подъемной силы.

2. Экспериментальные результаты

При вращательных вибрациях полости осциллирующее движение стенки за счет вязкого взаимодействия вызывает поступательно-вращательные колебания тела в жидкости. С увеличением интенсивности вибраций амплитуда азимутальных (рис. 2а) и вращательных (рис. 2б) колебаний тела растет пропорционально φ_c . Отметим, что линейный рост φ_b происходит до некоторого момента: при достижении порогового значения φ_c для заданной частоты f азимутальная амплитуда колебаний тела скачком уменьшается. С дальнейшим увеличением φ_c амплитуда азимутальных колебаний тела продолжает расти, но уже по другому линейному закону. Такое поведение характерно для всех рассматриваемых в работе тел и оно обусловлено появлением зазора между телом и стенкой полости (рис. 3) [2, 3].

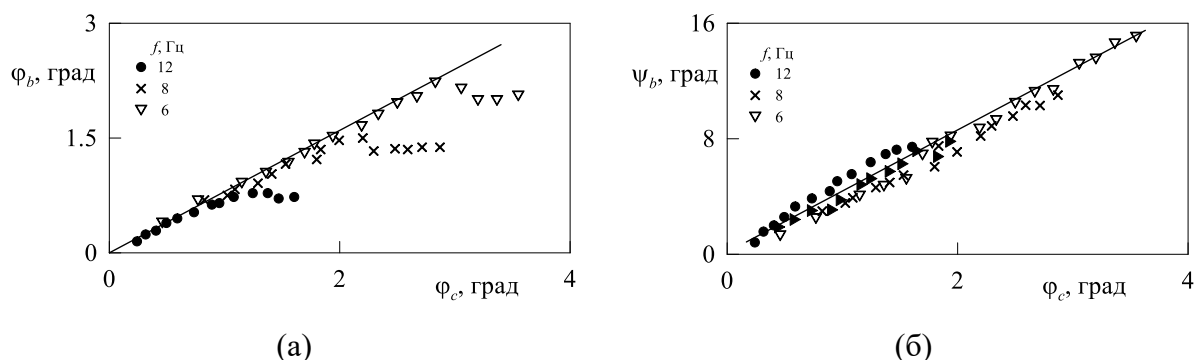


Рис. 2. Зависимость амплитуды азимутальных (а) и вращательных (б) колебаний тела от амплитуды колебаний полости при различных частотах f

Измеряемое расстояние между телом 1 и его отражением 2 на стенке полости соответствует удвоенному расстоянию h между телом и стенкой полости. С увеличением амплитуды колебаний кюветы зазор h растет. Отметим, что с увеличением частоты f пороговое значение φ_c , при котором тело отрывается от стенки, уменьшается, т.е. с повышением частоты необходима меньшая амплитуда вибраций для достижения отрыва тела от стенки полости.

На рисунке 4 представлена зависимость безразмерной подъемной силы от расстояния до стенки. Зазор h между телом и стенкой полости безразмерен через толщину вязкого пограничного слоя $\delta = (2\nu/\Omega)^{0.5}$. Видно, что с увеличением зазора h величина подъемной силы уменьшается. Причем резкое снижение значения F

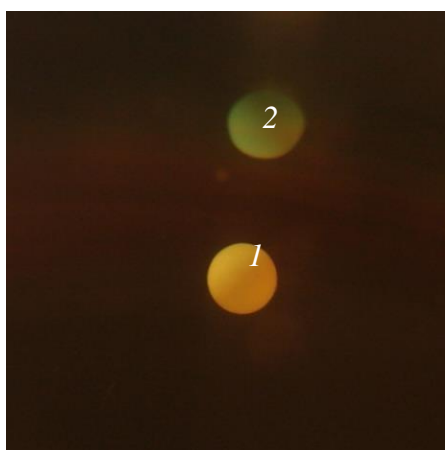


Рис. 3. Фотография тела в подвешенном состоянии: 1 – сфера, 2 – отражение

наблюдается только пока тело находится в непосредственной близости от стенки полости, с дальнейшим увеличением зазора h сила уменьшается по экспоненциальному закону.

На графике обобщены результаты, полученные в экспериментах с телами различного диаметра и при различных углах наклона полости α . Изменение размера тела и частоты вращательных колебаний полости позволяет варьировать в экспериментах безразмерную частоту $\omega = \Omega d^2/\nu$. Видно, что в области умеренных безразмерных частот ($\omega = 10 - 25$) экспериментальные данные хорошо согласуются между собой. С уменьшением ω кривые опускаются, но зависимость величины F от безразмерного зазора между телом и колеблющейся твердой границей остается прежней.

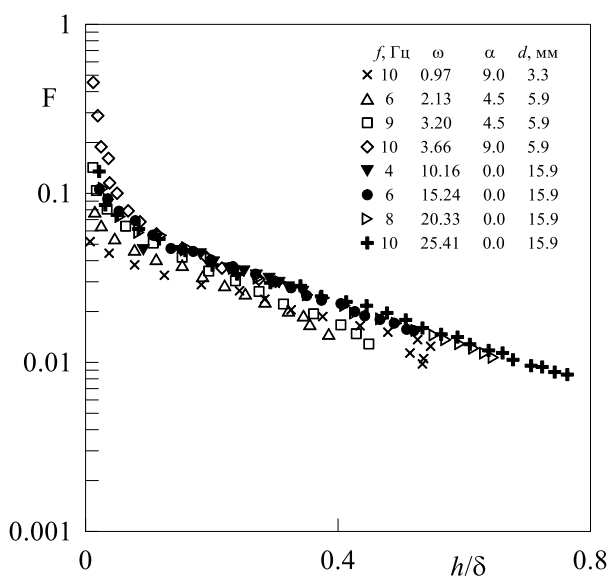


Рис. 4. Зависимость безразмерной подъемной силы от безразмерного расстояния между телом и стенкой полости

Работа поддержана Советом по грантам Президента Российской Федерации (грант № МК-4536.2021.1.1) и правительством Пермского края (Научная школа № С-26/1191).

Список литературы

1. *Lim T. G., Hyun J. M.* Flow driven by a torsionally-oscillating shrouded endwall disk // *Journal of Fluids Engineering*. 1997. Vol. 119. P. 115–121. DOI: 10.1115/1.2819096
2. *Ivanova A. A., Kozlov V. G.* Lift force acting on body in liquid in the vicinity of boundary executing tangential oscillations // *Microgravity Science and Technology*. 2014. Vol. 26. P. 179–187. DOI: 10.1007/s12217-014-9394-9
3. *Vlasova O., Karpunin I., Solomennikov M.* Lift force acting on a heavy cylinder and a steady flow in an unevenly rotating container // *Microgravity Science and Technology*. 2020. Vol. 32 (5). P. 889–896. DOI: 10.1007/s12217-020-09817-9

Моделирование влияния физических свойств жидкости и подложки на направление течений в капле, испаряющейся из микроячейки

И. В. Водолазская

Астраханский государственный университет им. В. Н. Татищева,
414056, Астрахань, ул. Татищева, 20а
email: irina.vodolazskaya@asu.edu.ru

В данной работе предлагается физическая модель, позволяющая исследовать влияние тепловых эффектов, возникающих за счет охлаждения при испарении жидкости, на гидродинамические течения в каплях, размещенных в цилиндрических ячейках микрометрового размера. Исследуется влияние физических свойств подложки и жидкости на направление течений. Математическая модель базируется на законах сохранения вещества и энергии, уравнении теплопроводности и уравнении динамики жидкости в приближении смазки. Численный расчет модели, выполненный с помощью пакета FlexPDE, позволил определить границы безразмерных параметров модели, на которых происходит смена направлений течений.

Ключевые слова: испарение; теплопроводность; гидродинамическое течение

Simulation of the influence of the physical properties of the liquid and the substrate on the direction of flows in a drop evaporating from a microcell

I. V. Vodolazskaya

Astrakhan State University n.a. V. N. Tatishchev, 20a Tatischev St., 414056, Astrakhan
email: irina.vodolazskaya@asu.edu.ru

In this paper, we propose a physical model that allows us to study the influence of thermal effects arising from cooling during liquid evaporation on hydrodynamic flows in drops placed in micrometer-sized cylindrical cells. The influence of the physical properties of the substrate and liquid on the direction of flows is investigated. The mathematical model is based on the laws of conservation of matter and energy, the heat conduction equation and the equation of fluid dynamics in the lubrication approximation. The numerical calculation of the model, performed using the FlexPDE package, made it possible to determine the boundaries of the dimensionless parameters of the model, on which the flow direction changes.

Keywords: evaporation; thermal conductivity; hydrodynamic flow

1. Введение

Капли и пленки, содержащие частицы вещества микро- и наноразмеров (наножидкости, полимерные суспензии, коллоидные растворы, биологические жидкости (размер частиц примерно от 1~нм до 1~мкм)), являются предметом активных исследований последних десятилетий благодаря их многочисленным применениям в биомедицине, нанотехнологиях, печати, нанесении покрытий. Deegan и его коллеги [1] впервые выявили фундаментальный механизм эффекта «кофейного кольца» в сидячих каплях: скорость испарения на периферии капель больше, чем в центре, следовательно, при наличии пиннинга создается компенсационное течение к краю, выносящее частицы вещества к границе, что приводит к их осаждению на подложке в форме кольца. Во многих случаях этот эффект является нежелательным для технологий, требуется однородное осаждение на подложку.

Основными механизмами, отвечающими за окончательное распределение частиц на подложке после полного высыхания раствора, являются: динамика внутреннего потока, кинетика испарения, динамика линии контакта, эволюция профиля капли, межчастичные и межфазные взаимодействия. Кроме того, система является открытой, всегда находится в неравновесном состоянии и чрезвычайно чувствительна к изменениям условий окружающей среды. Механизмами распределения частиц можно управлять с помощью различных факторов, в том числе, меняя тип растворителя или материал подложки [2, 3].

Изменение направления течений в капле при смене органической жидкости (метанол, этанол, изопропанол), расположенной на плоской PDMS (полидиметилсилоксановой) подложке, авторы [4] объясняют с помощью температурного эффекта Марангони. Численное решение уравнения теплопроводности показало, что капля является самой теплой на линии контакта, только если теплопроводность подложки по меньшей мере в 2 раза больше, чем теплопроводность жидкости.

Задача об испарении капель, находящихся в ячейках, привлекает к себе значительное внимание в связи с появлением новых приложений, например, дисплеи на основе OLED. Для жидкости, испаряющейся из ячейки, действуют те же основные механизмы, что и для капель (пленок) на плоских горизонтальных подложках; возможны те же режимы испарения, однако, как правило, через некоторое время после начала испарения, когда поверхность жидкости коснется подложки в центре ячейки, образуется вторая трехфазная граница [5]. Авторы представили экспериментальные данные по испарению этиленгликоля в силиконовой цилиндрической ячейке микрометрового размера. При испарении в открытое пространство при комнатной температуре наблюдалось течение, направленное к краю ячейки.

В данной работе предлагается модель (Раздел 2) и результаты численного расчета (Раздел 3) течений в капле, расположенной в микроячейке цилиндрической формы с учетом явления температурного Марангони. Исследуется влияние безразмерных параметров, величина которых зависит от физических свойств жидкости и подложки, на направление течений.

2. Математическая модель

2.1. Основные предположения модели

Было проведено модельное исследование влияния температурных эффектов на динамику течений в капле этиленгликоля, размещенной в ячейке микрометрового размера. Основываясь на данных эксперимента [5], была определена следующая

модель. Цилиндрическая ячейка, изготовленная в виде выемки в горизонтально расположенной твердой непроницаемой подложке (см. рис. 1), имеет следующие размеры: $r_w = 100$ мкм, $h_w = 6.13$ мкм. Задача имеет осевую симметрию и решалась в цилиндрической системе координат (r, z) , зависимости от полярного угла нет. Свободная поверхность жидкости описывается функцией $h(r, t) = (7.38 - 0.042 \cdot t) \left(1 - (r / r_w)^2\right)$ в мкм/с, t – время в секундах.

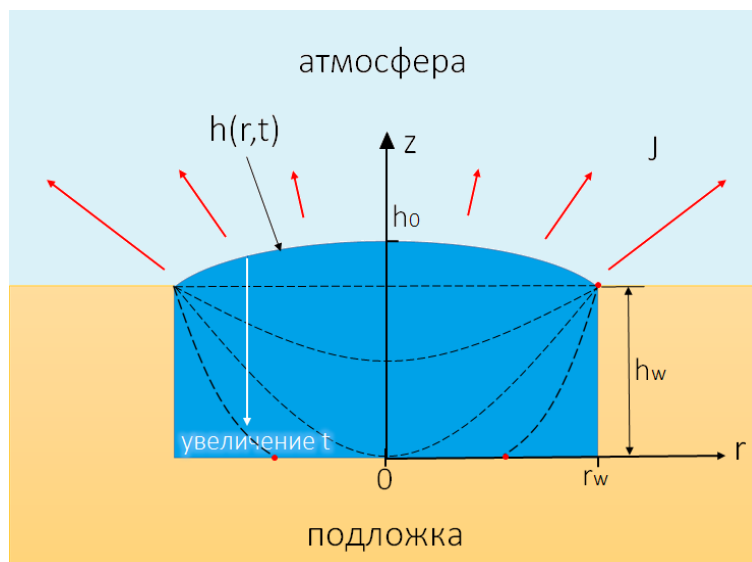


Рис. 1. Испаряющаяся в силиконовой ячейке капля этиленгликоля и цилиндрическая система координат. J – плотность потока испарения в атмосферу. Пунктирными линиями изображена свободная поверхность жидкости в разные моменты времени

Испарение жидкости является свободным, трехфазная граница закреплена на краю ячейки в течение всего времени испарения. В условиях выбранной модели слой жидкости считается тонким до того момента, когда свободная поверхность достигает дна ячейки, численные расчеты проводились до этого момента времени. Процесс испарения считается медленным (капля сохла $t_f = 200$ с по данным эксперимента), воздушных потоков нет. Температуры подложки и жидкости в момент размещения в ячейке равны температуре воздуха ($T_0 = 20$ °С), конвективный перенос тепла в жидкости и потоки тепла из атмосферы не учитываются. Течение в капле ламинарное, жидкость несжимаемая (плотность жидкости $\rho = \text{const}$), вязкость жидкости $\mu = \text{const}$.

2.2. Основные уравнения

Для нахождения плотности потока испарения жидкости J решалось сначала уравнение Лапласа для концентрации молекул растворителя C_p в атмосфере: $\Delta C_p = 0$, со следующими граничными условиями: на свободной поверхности жидкости концентрация молекул испаряющейся жидкости равняется концентрации насыщенного пара, а вдали от жидкости она равняется нулю (органическая жидкость); подложка считается непроницаемой для молекул пара испаряющейся жидкости. Затем определялся поток пара на свободной поверхности жидкости: $J = -D_p \cdot \text{grad } C_p$ (D_p – коэффициент диффузии молекул пара в атмосфере).

При испарении жидкости происходит ее охлаждение. Температурное поле в жидкости и в подложке рассчитывалось с помощью уравнения теплопроводности: $\partial T / \partial t = \lambda_i \cdot \Delta T$, где λ_i – теплопроводности жидкости и подложки, $i = l, s$. Граничные условия: температура подложки вдали от ячейки, заполненной жидкостью, равняется температуре окружающей среды; на оси симметрии и на верхней границе подложки поток тепла отсутствует. Тепловой баланс дает условие на границе жидкость–подложка: $\partial T_l / \partial n = k_r \partial T_s / \partial n$, где $k_r = \kappa_s / \kappa_l$ – отношение коэффициентов теплопроводности подложки и жидкости (n – нормаль к границе), и на свободной поверхности жидкости: $-\kappa_l \partial T_l / \partial n = LJ$, L – скрытая теплота парообразования.

Для расчета течений в жидкости использовалось уравнение Навье-Стокса в приближении смазки, с учетом напряжения на свободной поверхности жидкости, связанное с зависимостью поверхностного натяжения жидкости σ от температуры, аналогично [6]. Все численные расчеты проводились с помощью пакета FlexPDE.

3. Результаты

На рис. 2 представлена температура (относительная, T_0 – температура окружающей среды) вдоль свободной поверхности этиленгликоля в разные моменты времени. Расчеты показали, что разность температур на краю и в центре свободной поверхности этиленгликоля, имеет порядок $10^{-3} - 10^{-4}$ °C, что является очень малой величиной по сравнению с сидячими каплями миллиметрового размера. Соответственно, течение Марангони, вызванное неоднородностью поверхностного натяжения, должно быть слабым и эксперимент это подтверждает [5]. По мере испарения жидкости температура в центре поверхности уменьшается.

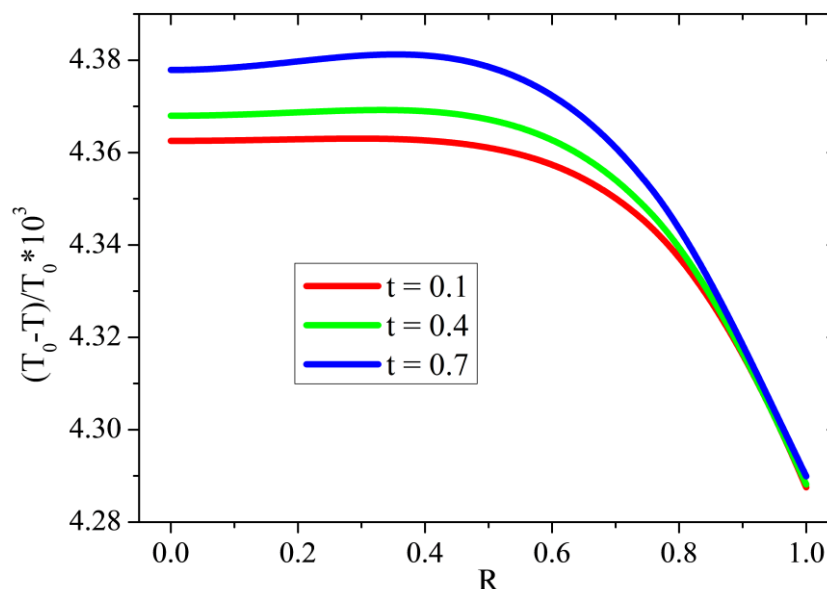


Рис. 2. Относительное отклонение температуры на свободной поверхности жидкости (этиленгликоль), находящейся в силиконовой ячейке, от температуры атмосферы T_0 для разных моментов времени (результаты моделирования). Моменты времени нормированы на время испарения капли t_f , радиальная координата нормирована на радиус ячейки r_w .

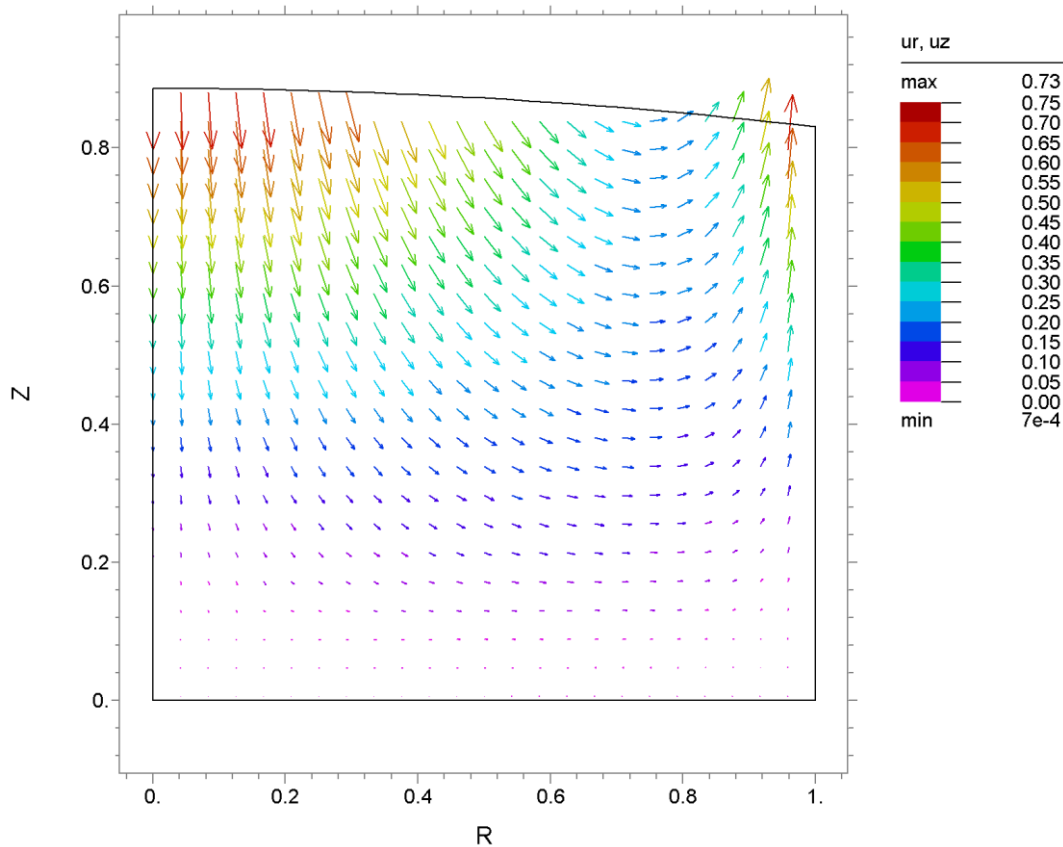


Рис. 3. Векторное поле скоростей течений в этиленгликоле для момента времени $t = 0.1 \cdot t_f$ (моделирование). Радиальная координата нормирована на радиус ячейки r_w , вертикальная координата нормирована на начальную высоту капли в ее центре $h(0,0)$

Расчеты поля скоростей представлены на рис. 3 для момента времени $t = 0.1 \cdot t_f$. Компоненты скорости нормированы: горизонтальная компонента нормирована на величину r_w/t_f , вертикальная – на $h(0,0)/t_f$. Поток жидкости направлен от центра капли к ее краю, то есть преобладает течение, вызванное неоднородностью испарения. Температурное течение Марангони направлено по градиенту поверхностного натяжения, то есть вдоль свободной поверхности от края к центру капли. По направлению и по порядку величины рассчитанные скорости согласуются с данными эксперимента.

Чтобы проанализировать течения в других жидкостях, размещенных в микроячейки из разных материалов, были численно сделаны аналогичные расчеты (геометрические размеры системы не изменялись). Значения безразмерных расчетных параметров $Ma = -(\Delta T \cdot \beta \cdot t_f) / (\mu \cdot r_w)$, $E = (J_0 \cdot t_f) / (\rho \cdot h(0,0))$, определяемые физическими свойствами материалов, варьировались в диапазоне от 0.1 до 10 для Ma и от 0.2 до 4 для E . Здесь ΔT – разность температур на краю свободной поверхности капли и в ее центре, $\beta = \partial \sigma / \partial T$, J_0 – плотность потока испарения на вершине капли. Для этиленгликоля в ячейке из силикона эти параметры равны: $Ma = 1.1 \cdot 10^4 \cdot \Delta T$, $E = 0.4$.

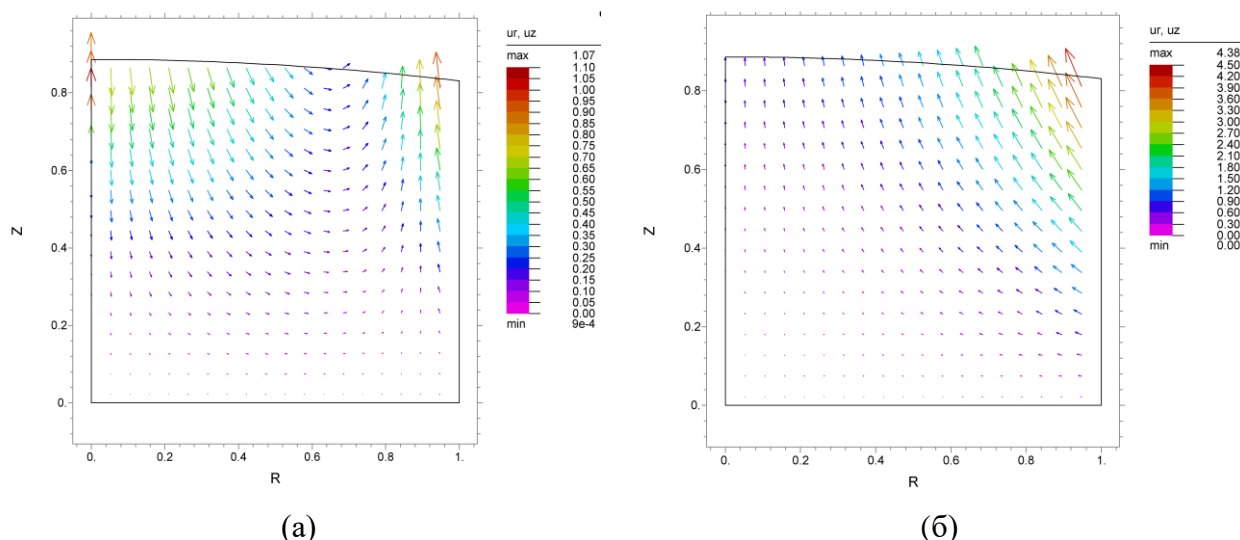


Рис. 4. Векторные поля скоростей (моделирование) на начальном этапе испарения для различных значений безразмерных параметров расчета: (а) $Ma = 0.5$, $E = 0.4$; (б) $Ma = 0.1$, $E = 2$

На рис. 4 представлены результаты расчета векторных полей скоростей на начальном этапе испарения для материалов со значениями безразмерных расчетных параметров: слева $Ma = 0.5$, $E = 0.4$, справа $Ma = 0.1$, $E = 2$. На рисунке слева видно, что течения направлены от оси ячейки к ее краям, течение Марангони слабое. Справа видно течение к центру ячейки, течение Марангони оказывается сильнее течения, вызванного неоднородным испарением.

4. Заключение

Испарение капель растворов, находящихся в микроячейках, является интересной и достаточно перспективной темой в связи с появлением новых приложений. Обычно при высыхании капли раствора из ячейки возникают объемные течения, направленные к краю ячейки, следовательно, частицы растворенного вещества выносятся на периферию, образуя кольцо осадка вдоль стенки ячейки (так называемый, эффект «кофейного кольца»), что может быть нежелательно. Меняя материал подложки, а также саму жидкость, можно управлять процессом массопереноса вещества в растворах и избавляться от нежелательного эффекта. В данной работе была предложена физическая модель для описания влияния тепловых эффектов, связанных с охлаждением при испарении жидкости, на направление течений в жидкостях, размещенных в цилиндрических ячейках микрометрового размера. Полученные результаты расчета модели для жидкости этиленгликоль в силиконовой ячейке согласуются с экспериментальными данными, представленными в работе [5]. Проведен анализ течений для различных безразмерных расчетных параметров, величина которых определяется физическими свойствами жидкостей и материалов подложки. Определены значения безразмерных параметров модели, при которых наблюдается сильное течение Марангони, подавляющее течение к краю ячейки.

5. Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-79-10216.

Список литературы

1. Deegan R. D, Bakajin O., Dupont T. F. Huber G., Nagel S. R., Thomas A., Witten T. A. Capillary flow as the cause of ring stains from dried liquid drops // *Nature*. 1997. Vol. 389. N 6653. P. 827–829. DOI: 10.1038/39827
2. Jiang C., Zhong Z., Liu B., He Z., Zou J., Wang L., Wang J., Peng J., Yong Cao Y. Coffee-ring-free quantum dot thin film using inkjet printing from a mixed solvent system on modified ZnO transport layer for light-emitting devices // *ACS Applied Materials & Interfaces*. 2016. Vol. 8. N 39. P. 26162–26168. DOI: 10.1021/acsami.6b08679
3. Park Yu., Park Ye., Lee J., Lee C. Simulation for forming uniform inkjet-printed quantum dot layer // *Journal of Applied Physics*. 2019. Vol. 125. N 6. 065304. DOI: 10.1063/1.5079863
4. Ristenpart W. D., Kim P. G., Domingues C., Wan J., Stone H. A. Influence of substrate conductivity on circulation reversal in evaporating drops // *Physical Review Letters*. 2007. Vol. 99. 234502. DOI: 10.1103/PhysRevLett.99.234502
5. Rieger B., van den Doel L. R., van Vliet L. J. Ring formation in nanoliter cups: Quantitative measurements of flow in micromachined wells // *Physical Review E*. 2003. Vol. 68. 036312. DOI: 10.1103/PhysRevE.68.036312
6. Hu H., Larson R. G. Analysis of the effects of Marangoni stresses on the microflow in an evaporating sessile droplet // *Langmuir*. 2005. Vol. 21. N 9. P. 3972–3980. DOI: 10.1021/la0475270

Применение метода решеточных уравнений Больцмана с использованием MRT-оператора для моделирования полости с подвижной верхней стенкой

И. В. Володин^{a,b}, А. А. Алабужев^{a,b}

^a Пермский государственный национальный исследовательский университет, 614990, Пермь, ул. Букирева, 15
email: ivanwolodin@gmail.com

^b Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1
email: alabuzhev@mail.ru

В данной работе численно исследуется течение жидкости в ограниченной полости с подвижной верхней стенкой методом решеточных уравнений Больцмана. В отличие от большинства работ, используется схема с многими временами релаксации, что позволяет рассматривать разные скорости диссипации энергии. Представленная схема отличается большей численной устойчивостью и скоростью вычислений по сравнению с классическими схемами метода. Получены изолинии поля скорости течения.

Ключевые слова: LBM; MRT; D2Q9

Lid driven cavity simulation by the Lattice Boltzmann Method with MRT-operator

I. V. Volodin^{a,b}, A. A. Alabuzhev^{a, b}

^a Perm State University, 15 Bukireva St., 614990, Perm
email: ivanwolodin@gmail.com

^b Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, 1 Akademika Koroleva St., 614013, Perm
email: alabuzhev@mail.ru

In this paper lid driven cavity is investigated numerically by the Lattice Boltzmann Method. Unlike most works, a scheme with many relaxation times is used, which allows to consider different rates of energy dissipation. The presented scheme is characterized by greater numerical stability and computational speed compared to the classical schemes of the method. The isolines of the velocity field are obtained

Keywords: LBM; MRT; D2Q9

1. Введение

Моделирование гидродинамических течений при помощи метода решеточных уравнений Больцмана (LBM – Lattice Boltzmann Method) получило в последние десятилетия большую популярность. LBM может быть использован при рассмотрении эволюции неизотермических задач [1], многофазных и мультикомпонентных задач [2, 3],

электродинамических задач [4]. Помимо относительно простых систем динамики жидкости и газа, метод может быть использован для моделирования очень сложных систем, включающих в себя изменение фаз в электромагнитных и температурных полях [5]. Кроме этого, метод активно используется в исследованиях важных для биофизики [6, 7]. Существует, также, несколько крупных open-source проектов, посвященных LBM – Palabos (PARallel LATtice BOLtzmann) и OpenLB.

Математическим обоснованием использования LBM в гидродинамических задачах с несжимаемой средой является восстановление уравнений Навье–Стокса из кинетического уравнения Больцмана на основании законов сохранения через разложение Чепмена–Энскога [8, 9].

Ограничениями метода решеточных уравнений Больцмана в его классической имплементации является требование малости числа Маха и слабая численная устойчивость при больших числах Рейнольдса (Re). При этом существуют адаптации численного алгоритма как для сжимаемых сред [10, 11], так и для течений с большим числом Рейнольдса [12, 13]. Данная работа посвящена моделированию полости с подвижной крышкой с модифицированным оператором столкновений.

2. Основополагающие концепции метода решеточных уравнений Больцмана

2.1. Иерархия временных и пространственных масштабов

В контексте динамики сплошной среды можно говорить о нескольких характерных масштабах [14]: микроскопическом, мезоскопическом и макроскопическом (см. рис. 1).

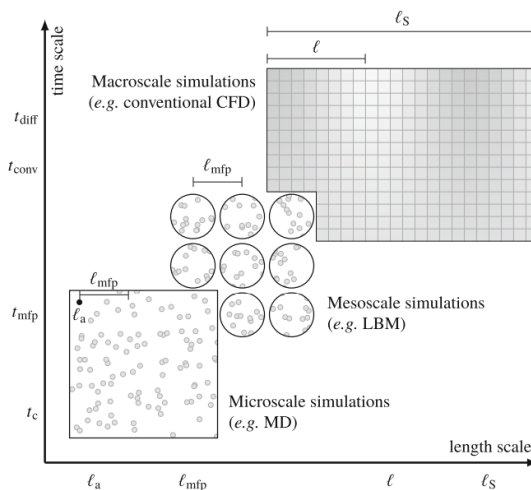


Рис. 1. Иерархия характерных времен и масштабов в механике сплошных сред

Минимально возможный масштаб – это размер одной частицы (l_a), следующим характерным размером является средняя длина свободного пробега (l_{mfp}). На двух оставшихся масштабах определяются макроскопические характеристики: l_s – характерный пространственный размер задачи, l – шкала, на котором становится существенным градиент макроскопической величины.

Одновременно с пространственным можно ввести характерный временной масштаб. $t_c \sim l_a/v_T$ – время столкновения частиц между собой (v_T – средняя скорость частицы), $t_{mfp} \sim l_{mfp}/v_T$ – время столкновений элементарных ячеек, $t_{conv} \sim l/v_M$ – конвективное время (v – макроскопическая скорость), $t_{diff} \sim l^2/\nu$ – вязкое время (ν – вязкость среды).

Микроскопический масштаб для LBM несущественен, моделирование производится на мезоскопическом масштабе. Таким образом, элементарная ячейка является эквивалентом элементарного объема, для которой в классической гидродинамике выводятся уравнения движения.

2.2. Кинетическое уравнение Больцмана и его связь с макроскопическими величинами среды

Кинетическое уравнение Больцмана, являющееся основным для LBM, имеет следующий вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\mathbf{F}}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \xi} = \Omega(f), \quad (1)$$

где $f(\mathbf{x}, \xi, t)$ – функция распределения вероятности, эволюция которой отслеживается и через которую выражаются макроскопические параметры течения, ξ – микроскопическая скорость элементарной ячейки, \mathbf{x} – координата ячейки, \mathbf{F} – сила, действующая на ячейку, ρ – плотность элементарной ячейки, $\Omega(f)$ – оператор столкновений.

Макроскопические гидродинамические параметры являются моментами функции распределения вероятности f в $2n + 1$ пространстве параметров, где n – размерность физического пространства. Макроскопическая плотность отвечает нулевому моменту, макроскопическое значение импульса соответствует первому моменту [см., например, 9]:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \int f(\mathbf{x}, \xi, t) d\xi, \quad (2)$$

$$\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \int \xi f(\mathbf{x}, \xi, t) d\xi. \quad (3)$$

В дискретном виде кинетическое уравнение Больцмана может быть записано в виде:

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i(\mathbf{x}, t) + \Omega_i(\mathbf{x}, t) \Delta t, \quad (4)$$

где \mathbf{c}_i – дискретная микроскопическая скорость, Δt – шаг по времени, наличие индекса i выражает факт ограничения формально бесконечного континуума микроскопических скоростей до некоторого конечного набора. Размерность N вектора микроскопической скорости зависит от выбранной модели [2, 14]. Размерность физического пространства и вектора N связаны между собой. Формулы (2) – (3) в дискретном виде переходят, соответственно, в:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^N f_i, \quad (5)$$

$$\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^N \mathbf{c}_i f_i. \quad (6)$$

Вид оператора столкновений определяет динамику системы, и в простейшем виде для его аппроксимации может быть использовано приближение BKG (Bhatnagar–Gross–Krook) или, как его иногда называют, SRT (Single Relaxation Time) [14, 15]:

$$\Omega_i = -\frac{f_i - f_i^{eq}}{\tau}, \quad (7)$$

где τ – время релаксации системы, в вышеизложенной иерархии времен $\tau = t_{mpf}$, f_i^{eq} – равновесная функция распределения. Физический смысл равновесной функции распределения очевиден: это распределение в пространстве параметров, к которому стремится система и функция f после бесконечно долгого времени эволюционирования.

Оператор ВКГ может быть использован для широкого класса задач, в том числе и для моделирования некоторых турбулентных течений [16]. Однако для большинства задач, особенно с большим числом Рейнольдса, он приводит к возникновению численной неустойчивости и его заменяют на более совершенную модель – MRT (Multi Relaxation Time).

3. Схема метода решеточных уравнений Больцмана с MRT-оператором

В модели BGK все моменты функции распределения релаксируют с одинаковым временем τ . Основная идея введения оператора MRT состоит в том, чтобы разные моменты релаксировали с разным временем. Таким образом можно добиться большей точности и численной устойчивости алгоритма.

Введем вектор частоты столкновений элементарных ячеек между собой $\omega_i = (\tau_i)^{-1}$. Очевидно, в случае SRT все компоненты этого вектора равны между собой. Преобразовав уравнения (4) и (7), с учетом введения нового вектора частоты столкновений, получим:

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i(\mathbf{x}, t) - \omega_i (f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{eq}(\mathbf{x}, t)) \Delta t. \quad (8)$$

Конвенциональный способ моделирования задач при помощи LBM в том, чтобы разбить дискретизированное эволюционное уравнение (8) на две части – на шаг для расчета столкновений (collision step, правая часть уравнения) и на шаг «разнесения» получившихся значений по всем f_i , ограниченных вектором микроскопической скорости (streaming step или propagation step).

Двухшаговая гибкость алгоритма позволяет относительно простым способом модифицировать оператор столкновений на модель со многими временами релаксации. Основная идея заключается в расчете шага столкновений не в пространстве f_i , как в случае SRT, а в пространстве моментов m_i . Для перехода в пространство моментов необходимо ввести матрицу преобразования M таким образом, чтобы:

$$m_i = M f_i, \quad m_i^{eq} = M f_i^{eq}$$

и обратную матрицу M^{-1} для перехода из пространства моментов в пространство f_i :

$$f_i = M^{-1} m_i, \quad f_i^{eq} = M^{-1} m_i^{eq}.$$

В таком случае эволюционное уравнение (8) может быть переписано в следующем виде:

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) = M^{-1} S [m_i(\mathbf{x}, t) - m_i^{eq}(\mathbf{x}, t)] \Delta t, \quad (9)$$

где введена диагональная «релаксационная» матрица $S = \omega_i I$ и I – единичная матрица.

Вид матрицы M зависит от выбранной схемы и количества разрешенных значений скорости. В данной работе была выбрана девятискоростная двумерная модель D2Q9, и алгоритм Грамма-Шмидта для матрицы M . Вид матрицы M и набор разрешенных значений скорости \mathbf{c}_i можно найти в [17].

Уравнения (9), (3) – (4) составляют ядро численного алгоритма. Для замыкания необходимо задать матрицу S и поставить граничные условия на функцию распределения. Способы задания граничных условий подробно обсуждаются в [18].

Матрица S имеет вид [14]:

$$S = \text{diag}(0, \omega_2, \omega_3, 0, \omega_5, 0, \omega_7, \omega_8, \omega_9),$$

где компоненты $\omega_3, \omega_5 = \omega_7$ свободны для подстройки, а компоненты $\omega_2, \omega_8 = \omega_9$ связаны со сдвиговой вязкостью (η) и объемной вязкостью (η_B) через соотношения:

$$\eta = \rho c_s^2 \left(\frac{1}{\omega_8} - \frac{1}{2} \right), \quad \eta_B = \rho c_s^2 \left(\frac{1}{\omega_2} - \frac{1}{2} \right) - \frac{\eta}{3},$$

где c_s – безразмерная скорость звука.

4. Двумерное течение в ограниченной полости с движущейся верхней стенкой

В качестве первой отладочной задачи для нового для нас алгоритма было выбрано течение в ограниченной полости с заданной скоростью на верхней стенке. Геометрия представлена на рис. 2.

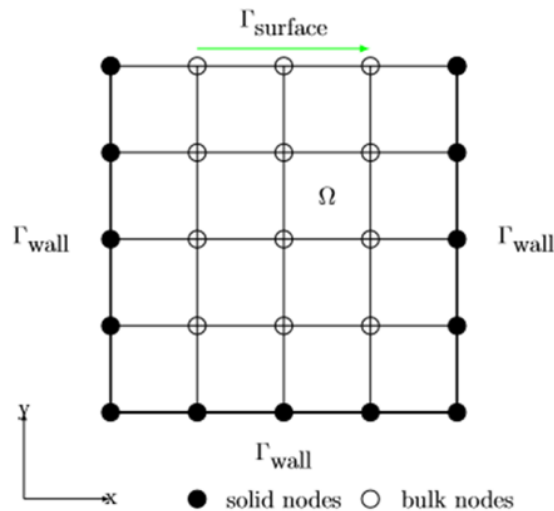


Рис. 2. Геометрия рассматриваемой задачи. Черным цветом обозначены твердые границы

Моделировалось течение на сетке 100×100 узлов при $Re \sim 10$. Изолинии компонентов поля скорости приведены на рис. 3а, 3б.

5. Заключение

Кратко представлены основные идеи метода решеточных уравнений Больцмана, рассмотрена связь функции распределения с макроскопическими параметрами среды. Рассмотрено расширение алгоритма с введением схемы со многими временами релаксации. Поставлена и смоделировано течение в ограниченной полости с подвижной верхней стенкой, получены изолинии поля скорости. Результаты на качественном уровне совпадают с полученными ранее при помощи других численных схем [19].

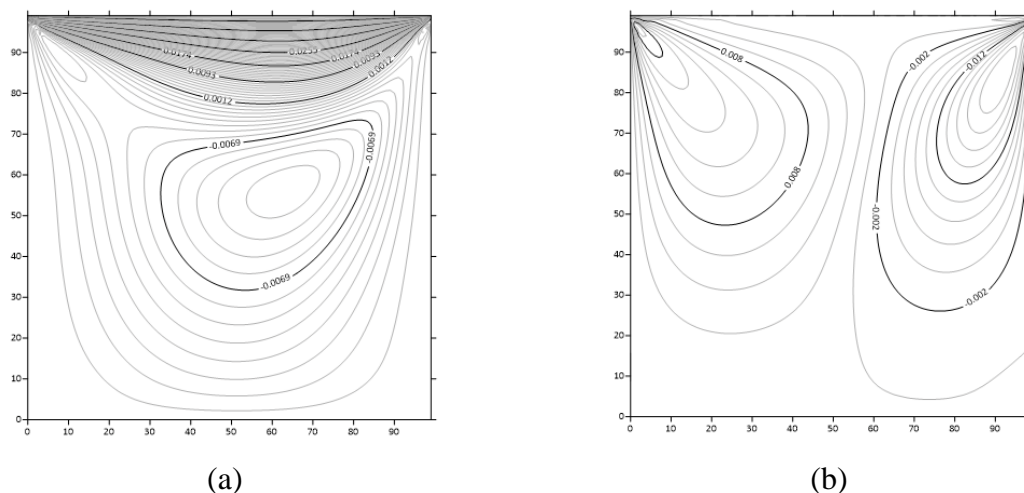


Рис. 3. Изолинии x -компоненты поля скорости (а) и y -компоненты поля скорости (б)

Работа И. В. поддержана бюджетной темой № 121112200078-7.

Список литературы

1. Seeger S., Hoffmann K. H., Spaeth P. Lattice-Boltzmann methods for thermohydrodynamics // *Advances in Parallel Computing*. 1998. Vol. 12. P. 615–618. DOI: 10.1016/S0927-5452(98)80078-6
2. Succi S. The lattice Boltzmann equation for fluid dynamics and beyond. Clarendon Press, 2001. 304 p.
3. Володин И. В., Алабужев А. А. Моделирование квазистационарного рельефа методом решеточных уравнений Больцмана // *Вестник Пермского университета. Серия: Физика*. 2021. Вып. 1. С. 59–68. DOI: 10.17072/1994-3598-2021-1-59-68
4. Zhang J., Kwok D. A 2D lattice Boltzmann study on electrohydrodynamic drop deformation with the leaky dielectric theory // *Journal of Computational Physics*. 2005. Vol. 206 (1). P. 150–161 DOI: 10.1016/j.jcp.2004.11.032
5. Lu C., Gao X., Wu J., Luo K., Yi H. Heat transfer enhancement analysis of electrohydrodynamic solid-liquid phase change via lattice Boltzmann method // *Applied Thermal Engineering*. 2021. Vol. 194. 117112. DOI: 10.1016/j.applthermaleng.2021.117112
6. Wang H., Krüger T., Varnik F. Geometry and flow properties affect the phase shift between pressure and shear stress waves in blood vessels // *Fluids*. 2021. Vol. 6(11). 378. DOI: 10.3390/fluids6110378
7. Zhou Q., Fidalgo J., Calvi L., Bernabeu M. O., Hoskins P. R., Oliveira M. S. N., Krüger T. Spatiotemporal dynamics of dilute red blood cell suspensions in low-inertia microchannel flow // *Biophysical Journal*. 2020. Vol. 18 (10). P. 2561–2573. DOI: 10.1016/j.bpj.2020.03.019
8. He X., Luo L. Lattice Boltzmann model for the incompressible Navier–Stokes equation // *Journal of Statistical Physics*. 1997. Vol. 88. P. 927–944. DOI: 10.1023/B:JOSS.0000015179.12689.e4
9. Latt J., Chopard B., Malaspinas O., Deville M., Michler A. Straight velocity boundaries in the lattice Boltzmann method // *Physical Review E*. 2008. Vol. 77. 056703. DOI: 10.1103/PhysRevE.77.056703

10. *Deng Y., Lien F., Yee E.* The lattice Boltzmann method for compressible flows at high Mach number // 23rd Annual Conference of the Computational Fluid Dynamics Society of Canada. Waterloo, Ontario, Canada, 2015. P. 7–10.
11. *Latt J., Coreixas C., Beny J., Parmigiani A.* Efficient supersonic flow simulations using lattice Boltzmann methods based on numerical equilibria // Philosophical Transactions of The Royal Society A Mathematical Physical and Engineering Sciences. 2020. Vol. 378 (2175). 20190559. DOI: 10.1098/rsta.2019.0559
12. *D'Humières D.* Generalized lattice Boltzmann equations, rarefied gas dynamics: theory and simulations // Progress in Astronautics and Aeronautics. 1992. Vol. 159. P. 450–458.
13. *Alhilo A., Wessam H., Hassan F.* On the SRT – MRT lattice Boltzmann method: validity limits of the single relaxation time for simulating single-phase flows // International Journal of Materials, Mechanics and Manufacturing. 2020. Vol. 8. P. 74–83. DOI: 10.18178/ijmmm.2020.8.3.487
14. *Krüger T., Kusumaatmaja H., Kuzmin A., Shardt O., Silva G., Viggien E.* The lattice Boltzmann method. Springer, 2017. 718 p.
15. *Bhatnagar P. L., Gross E. P., Krook M.* A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems // Physical Review. 1954. Vol. 94. P. 511–525. DOI: 10.1103/PhysRev.94.511
16. *Володин И. В., Алабужев А. А.* Моделирование процесса обтекания тела с использованием метода решеточных уравнений Больцмана // Физика для Пермского края: материалы региональной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. Пермь, 2018. Вып. 11. С. 128–133.
17. *Lallemand P., Luo L.* Theory of the lattice Boltzmann method: dispersion, dissipation, isotropy, Galilean invariance, and stability // Physical Review E. 2000. Vol. 61 (6). 6546. DOI: 10.1103/PhysRevE.61.6546
18. *Zou Q.* On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model // Physics of Fluids. 1997. Vol. 9. 1591. DOI: 10.1063/1.869307
19. *Omari R.* CFD simulations of lid driven cavity flow at moderate Reynolds number // European Scientific Journal. 2013. Vol. 9. N. 15. P. 22–35. DOI: 10.19044/esj.2013.v9n15p

Колебания траекторий жидких гидрометеоров на терминальной скорости

Д. Н. Габышев^a, М. Сзакалл^b, Д. В. Щербаков^a, А. А. Федорец^a,
С. М. Дьячков^{c,d}

^a Тюменский государственный университет, 625003, Тюмень, ул. Володарского, 6
e-mail: gabyshev-dmitrij@rambler.ru, d.n.gabyshev@utmn.ru

^b Майнцский университет имени Иоганна Гутенберга, 55128, Германия, Бехер-вег, 21
e-mail: szakall@uni-mainz.de

^c Тюменский нефтяной научный центр, 625002, Тюмень, ул. Осипенко, 79/1

^d Тюменский кардиологический научный центр, Томский НИМЦ РАН,
634009, Томск, пер. Кооперативный, 5

Мотивируясь метеорологическими приложениями, мы рассматриваем левитацию капель воды в аэродинамической трубе. Исследование сосредоточено на наблюдении траекторий таких капель при малых числах Бонда < 1 и сравнительно малых числах Рейнольдса $\sim 10^2$. Численный анализ траекторий с помощью преобразований Фурье и Гильберта дал положительный ответ на вопрос о присутствии колебательной компоненты в движении капель. Колебания с частотой в несколько десятков герц наблюдаются как вдоль направления обтекающего потока воздуха, так и поперек него. Данные колебания могут влиять на величину терминальной скорости капли дождя в атмосфере.

Ключевые слова: вынужденные колебания; капли осадков

Trajectory oscillations of liquid hydrometeors at terminal velocity

D. N. Gabyshev^a, M. Szakáll^b, D. V. Shcherbakov^a, A. A. Fedorets^a,
S. M. Dyachkov^{c,d}

^a University of Tyumen, 6 Volodarskogo St., 625003, Tyumen
e-mail: gabyshev-dmitrij@rambler.ru, d.n.gabyshev@utmn.ru

^b Johannes Gutenberg University Mainz, 21 Becherweg, 55128, Germany, Mainz
e-mail: szakall@uni-mainz.de

^c Tyumen Petroleum Research Center, 79/1 Osipenko St., 625002, Tyumen

^d Tyumen Cardiology Research Center, Tomsk National Research Medical Center RAS,
5 Kooperativny St., 634009, Tomsk

Motivated by meteorological applications to atmospheric physics, we consider the levitation of water droplets in a wind tunnel. The research focuses on experimental observations of the trajectories of such droplets at low Bond number < 1 and relatively low Reynolds number $\sim 10^2$. Usage of the Fourier and Hilbert transforms positively solves the question about the presence of oscillations in the motion of the droplets. The oscillations with a frequency of several tens of

hertz are both along the air flow direction and across it. These oscillations can affect the value of the terminal velocity of a raindrop in the atmosphere.

Keywords: forced vibrations; precipitation drops

1. Введение

Тип атмосферных осадков, называемый моросью, представлен мельчайшими каплями диаметром от 100 до 500 мкм с терминальной скоростью в несколько метров в секунду. В ветренную погоду их движение кажется хаотичным. Однако если даже исключены атмосферные турбулентные вихри, чей размер, как правило, варьируется от десятка сантиметров до сотен метров, то даже в такую тихую погоду окажется, что спуск капель к земле происходит не просто вдоль прямых траекторий. Каждая капля испытывает своеобразное дрожание. Для крупных капель эффект теряется за сильными динамическими деформациями формы от действия набегающего потока воздуха, хотя, в принципе, его и можно попытаться проследить по движению центра тяжести. Однако для мелких капель он заметен гораздо чище, и его уже невозможно приписать неустойчивости жидкой межфазной границы раздела.

То, что поступательное движение капель вдоль некоего вертикального тренда сопровождается отклонениями от него, позволяет мельчайшим из них дольше задерживаться в атмосфере, подобно тому как шероховатость затрудняет спуск бруска с наклонной плоскости. Кроме вышеупомянутой мороси, такие капли встречаются в природе повсеместно. Они образуются в больших количествах над океанами на естественных кристаллах морской соли и над индустриальными центрами на частицах антропогенных аэрозолей. Образуют явление, известное как сухой дождь, возникающее, когда в засушливой обстановке воздух «сдирает» молекулы воды с поверхности выпадающих капель до такой степени, что размер капель уменьшается до термодинамически неравновесного, и они уже сами быстро испаряются в силу энергетической выгоды. При бомбардировке почвы каплями ливня над нею формируется область в десятки сантиметров, состоящая из вторичных капелек, разбрызгиваемых первичными каплями и способных нести в себе бактерии, споры, элементы почвы на значительное расстояние при наличии бокового ветра. Крупные дождевые капли при падении сквозь атмосферный воздух вообще склонны к неустойчивости и, разрываясь, выбрасывают мелкие капли, которые достигают наблюдателя под навесом или укрытием, и тот способен почувствовать кожей их присутствие. Мельчайшие капли образуются также при конденсации влаги на гидрофобной поверхности листьев, откуда они легко срываются. Наконец мелкие капли тысячами образуются при кашле и чиханье. Такое исключительно широкое присутствие малых капель в атмосфере создает предпосылку для исследования их механической подвижности.

Из всех возможных аспектов механического движения капель в воздухе нас интересуют следующие вопросы: присутствуют ли регулярные закономерности в движении свободно падающих капель, являются ли они периодическим и, если да, каков типичный период таких колебаний. При подготовке публикаций [1, 2] выяснилось, что с газодинамической точки зрения данное исследование, по-видимому, впервые охватывает экспериментальный пробел, имеющийся в изучении траекторий одиночных жидких сфер в газообразной среде при малых числах Бонда $Bd < 1$ и сравнительно малых числах Рейнольдса $\sim 10^2$ при условиях, близких к естественной земной атмосфере.

2. Экспериментальная установка и подготовка данных

Эксперимент проводился в Майнцской вертикальной аэродинамической трубе (Mainz vertical wind tunnel), расположенной в Институте физики атмосферы Университета Майнца, Германия. В ней скорость ветра может варьироваться оператором в диапазоне от 10 см/с до 14 м/с с точностью на уровне 1 см/с. Устранение турбулентности осуществляется с помощью специально сконструированной секции ламинаризации, состоящей из набора сит. Остаточная турбулентность составляет менее 0.5% [3].

Несколько капель инжектируются в область наблюдения шприцом, от диаметра иглы которого зависит средний размер капель. Оператор визуально выбирает предпочтительную каплю (рис. 1) и в ручном режиме настраивает и фиксирует скорость потока таким образом (~ 3 м/с), чтобы капля достаточно время находилась в поле зрения скоростной видеокамеры (Motion ProX, Redlake Inc., San Diego, CA, USA). Частота записи составляет 1000 с^{-1} , пространственное разрешение 12 микрон на пиксель, поле зрения около 1 см X 1 см X 1 см. При таких параметрах капля левитировала перед объективом лишь несколько сотен миллисекунд, после чего из-за дрейфа выходила из поля зрения. Однако этого было достаточно для исследования.

Изображение капли с видеокамеры передавалось на компьютер в реальном времени. Кадры записывались в локальную память устройства, после чего было возможным проанализировать их с помощью компьютерного алгоритма на базе библиотеки OpenCV. Распознавалось положение капли (x, y) на каждом кадре и ее диаметр D в соответствующий момент времени t . Эти данные собирались в файле, служившем для частотного анализа. Подробности эксперимента и численной обработки экспериментальных данных описаны в статье [1].

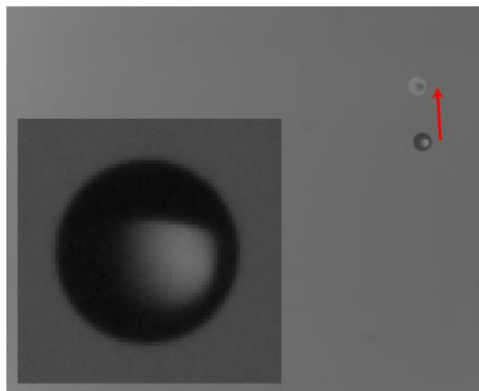


Рис. 1. Капля диаметром 609 ± 12 мкм (увеличенный фрагмент) и ее перемещение за 0.1 с (указано стрелкой; негатив наложен на позитив)

3. Частотный анализ

Рис. 2 дает типичное изображение спектра Фурье для горизонтальной x и вертикальной y координаты, а также для распознанного диаметра D левитирующей капли.

Удалось рассмотреть капли восьми диаметров от 422 мкм до 742 мкм, с числом Рейнольдса Re от 46 до 162 и терминальной скоростью от 1.67 до 3.06 м/с. Спектры, вычисленные для распознанного диаметра, не имели значимых пиков, что говорит о том, что отсутствует регулярное мерцание освещения, которое можно было бы ассоциировать с промышленной частотой электрического тока. Также глубина резкости

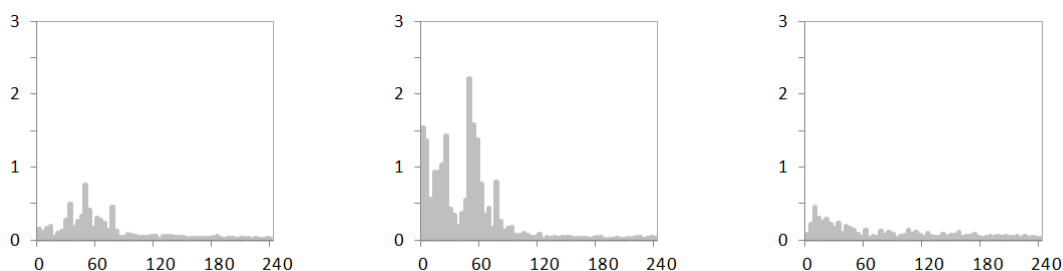


Рис. 2. Спектры (частота, Гц vs. амплитуда, пикс.) по капле диаметром 742 ± 12 мкм с терминальной скоростью 3.06 м/с, $Re = 162.5$: для координаты x (слева), y (по центру) и распознанного диаметра D (справа)

камеры хорошо подходит для наблюдения, так что периодические блуждания капли от/к наблюдателю не накладывают своего отпечатка. Спектры для горизонтальной и вертикальной координаты имели преимущественно один главный пик, который находился в области от 11.76 до 50.98 Гц (погрешность ± 1.96 Гц) без какой-либо, на первый взгляд, выраженной тенденции к зависимости от диаметра, числа Рейнольдса или терминальной скорости. Амплитуда колебаний вдоль по направлению потока (вертикаль) оказалась в разы выше, чем в поперечном направлении (горизонталь). В целом, это не удивительно: капля как плохо обтекаемое тело испытывает толчки вдоль потока, в то время как по бокам капли силы в значительной степени уравниваются, лишь слегка не компенсируя друг друга и образуя, таким образом, регулярную вихревую дорожку, как и полагается в ламинарном режиме при $Re \sim 10^2$ [4].

Зафиксирована линейная зависимость частоты горизонтальных колебаний капли с ростом числа Рейнольдса. Для этого проводился анализ устойчивости частот с помощью преобразования Гильберта. На некоторых участках наблюдений главная частота испытывала периодические изменения (рис. 5 в [1]), что говорит о действии частотной модуляции естественного происхождения. Аналогичный анализ для вертикальной компоненты колебаний капли (вдоль по направлению потока воздуха) пока что не выявил однозначную зависимость, хотя она, по всей видимости, должна существовать.

4. Выводы

С целью лучшего понимания динамики капель дождя в земной атмосфере были проведены наблюдения капель воды микронного размера в Майнцской вертикальной аэродинамической трубе. Было установлено, что капли испытывают колебания с частотами в десятки герц как вдоль потока, так и поперек него, причем в продольном направлении эффект более выражен. Источником колебаний выступает, по всей видимости, эффект, который в англоязычных работах принято называть vortex- and flow-induced vibrations, то есть колебания, возникающие из-за движения потока среды и вихрей, образуемых в нем, при контакте с обтекаемым телом.

Из-за технических сложностей данное исследование было ограничено лишь восемью успешными наблюдениями капель. Для улучшения полученных результатов исследователям необходимо построить облако точек в осях «Число Рейнольдса» vs. «Частота», чтобы статистически надежнее установить зависимость частоты колебаний от числа Рейнольдса или размера капли и терминальной скорости.

Работа поддержана средствами субсидии для государственной поддержки молодых российских ученых (МК-332.2022.1.2) и частично Министерством науки и высшего образования РФ (AAAA-A20-120051490005-9).

Список литературы

1. *Gabyshv D. N., Szakáll M., Shcherbakov D. V., Fedorets A. A., Dyachkov S. M.* Oscillatory signatures in the raindrop motion relative to the air medium with terminal velocity // *Atmosphere*. 2022. Vol. 13 (7). 1137. DOI: 10.3390/atmos13071137
2. *Габышев Д. Н.* Колебания жидких гидрометеоров при движении с терминальной скоростью // *Материалы Всерос. науч. конф. студ.-физиков и мол. ученых ВНКСФ-26.2, 25–27 марта 2022 г.* // Екатеринбург: Изд-во АСФ России, 2022. С. 106–107.
3. *Vohl O., Mitra S. K., Wurzler S. C., Pruppacher H. R.* A Wind Tunnel Study of the Effects of Turbulence on the Growth of Cloud Drops by Collision and Coalescence // *Journal of the Atmospheric Sciences*. 1999. Vol. 56 (24). P. 4088–4099. DOI: 10.1175/1520-0469(1999)056<4088:AWTSOT>2.0.CO;2
4. *Lienhard J. H.* Synopsis of lift, drag, and vortexes frequency data for rigid circular cylinders. Pullman, USA: Washington State University, Technical Extension Service, 1966. 32 p.

Численное моделирование падения жидкой капли на поверхность другой жидкости

Ю. В. Гаричева^a, И. А. Заякина^a, Т. П. Любимова^{a, b}, А. О. Иванцов^b

^a Пермский государственный национальный исследовательский университет, 614990, Пермь, ул. Букирева, 15

^b Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1
email: ygaricheva@mail.ru, fz56-zayakina@yandex.ru

Проведено численное моделирование падения дождевых капель на свободную поверхность жидкости. Исследование связано с разработкой методик предотвращения распространения загрязняющих веществ из открытых шламонакопителей – котлованов для хранения жидких отходов. Изучено влияние вязкости на динамику капли, образование вторичных капель и брызг. Для численного решения задачи применялся пакет прикладных программ Ansys Fluent. Получены данные о динамике падения капли для различных параметров жидкости. Расчёты показали, что отскок капли от принимающей жидкости наблюдается только при падении в жидкости достаточно малой вязкости, таких как вода. С повышением вязкости деформация поверхности принимающей жидкости при падении капли уменьшается.

Ключевые слова: капля; вода; брызги; шламонакопитель

Numerical simulation of the collision of a liquid drop on the surface of another liquid

Y. V. Garicheva^a, I. A. Zayakina^a, T. P. Lyubimova^{a, b}, A. O. Ivantsov^b

^a Perm State University, 15 Bukireva St., 614990, Perm

^b Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, 1 Akademika Koroleva St., 614013, Perm
email: ygaricheva@mail.ru, fz56-zayakina@yandex.ru

The numerical simulation of a raindrop impact on a liquid surface is carried out. The study is related to the development of methods for preventing of pollutants spread from open sludge reservoirs - pits for storage of liquid waste. The effect of viscosity on the dynamics of the drop, secondary drops and splashes is studied. Ansys Fluent package are used to solve the problem numerically. Data are obtained on the dynamics of droplet fall for various parameters of the liquid. Calculations are shown that the rebound of the drop from the receiving liquid is observed only for liquids of sufficiently low viscosity close to water. With the increase of the viscosity, deformations of the liquid surface substantially decrease.

Keywords: drop; water; splashes; sludge accumulator

1. Постановка задачи и методы

Рассмотрим падение дождевой капли на поверхность жидкости в поле тяжести. Будем считать, что капля падает вертикально вниз, в этом случае моделирование можно проводить в осесимметричной постановке. В начальный момент времени капля диаметром 4 мм (дождевые капли имеют диаметр от 0.5 до 6 – 7 мм, капли большего размера разбиваются при падении на части [1]) находится в воздухе на расстоянии 3 мм от ровной поверхности бассейна с жидкостью глубиной 50 мм. Скорость капли в начальный момент времени 5 м/с (скорость падения дождевых капель не превышает 10 м/с [2]), капля имеет сферическую форму. Вязкость жидкости капли принималась равной вязкости воды $0.001003 \text{ кг/(м}\cdot\text{с)}$, плотность 998.2 кг/м^3 , плотность воздуха 1.225 кг/м^3 , вязкость – $1.789 \cdot 10^{-5} \text{ кг/(м}\cdot\text{с)}$, вязкость принимающей жидкости варьировалась в интервале от вязкости воды ν_w до $200\nu_w$. На неподвижных твёрдых границах бассейна ставилось условие прилипания.

Для расчётов использовался метод объема жидкости, Volume of Fluid (VOF). Распределение фаз определяется значением функции объема жидкости α_q . В случае, если некоторый контрольный объем полностью заполнен одной фазой, то $\alpha_q = 0$, если другой фазой, $\alpha_q = 1$, если он содержит границу раздела, то $0 < \alpha_q < 1$.

Метод объема жидкости позволяет рассматривать многокомпонентную среду как одну жидкость с переменной плотностью и вязкостью. В этом случае уравнение баланса импульса имеет вид [3]:

$$\frac{d}{dt}(\rho \vec{v}) + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot [\mu \nabla \cdot \vec{v}] + \rho \vec{g} + \vec{F}, \quad (1)$$

где ρ – усреднённая объёмная плотность, \vec{v} – скорость двухфазной среды, \vec{F} – объёмная сила, описывающая влияние поверхностного натяжения, μ – кинематическая вязкость.

Уравнение неразрывности запишется в стандартном для несжимаемой сплошной среды с переменной плотностью виде:

$$\frac{d\rho}{dt} + \vec{v} \text{div} \rho = 0. \quad (2)$$

Для численного решения задачи применялся пакет прикладных программ Ansys Fluent. В этом пакете дискретизация уравнений осуществляется с помощью метода конечных объёмов. На рисунке 1 показано распределение фаз в начальный момент времени: верхняя прямоугольная область, занятая воздухом (синяя область), нижняя прямоугольная область, занятая принимающей жидкостью (красная область), и область занятая каплей (красный круг). Использовалась равномерная прямоугольная сетка размером 100x50.

2. Численные результаты

На рисунке 2 показано падение капли на поверхность принимающей жидкости для жидкостей разной вязкости ($1 - \nu_w$; $2 - 50\nu_w$; $3 - 100\nu_w$; $4 - 150\nu_w$; $5 - 200\nu_w$). Как видно максимальная высота всплеска наблюдается для принимающей жидкости с минимальной вязкостью ν_w (вязкость воды), при этом к 74-ой миллисекунде горизонтальная форма поверхности принимающей жидкости в этом случае восстанавливается.

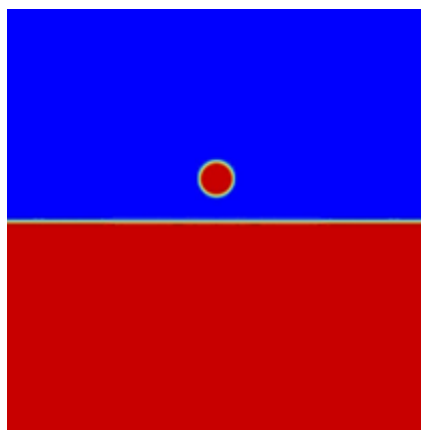


Рис. 1. *Расчётная область и распределение фаз в начальный момент времени*

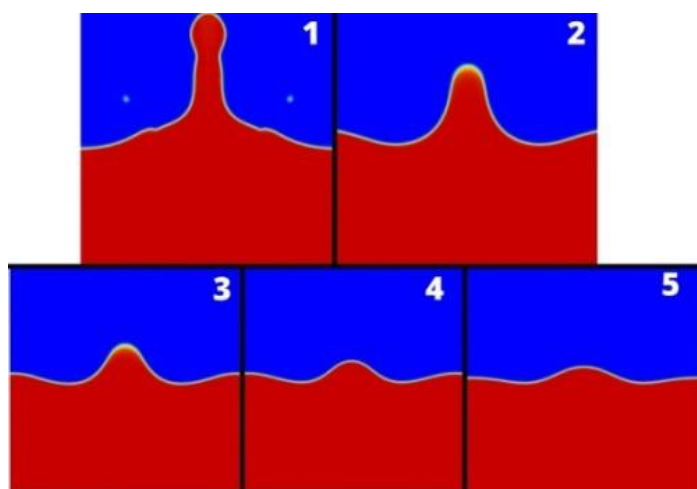


Рис. 2. *Максимальные всплески принимающей жидкости при различных вязкостях: 1 – ν_w ($t = 23$ мс); 2 – $50 \nu_w$ ($t = 13$ мс); 3 – $100 \nu_w$ ($t = 11$ мс); 4 – $150 \nu_w$ ($t = 8$ мс); 5 – $200 \nu_w$ ($t = 7$ мс)*

С увеличением вязкости высота всплеска жидкости и время, за которое система возвращается в равновесие, уменьшаются. Для воды максимальная высота всплеска составляет 50 мм, для жидкости с вязкостью $200 \nu_w$ максимальная высота всплеска уменьшается до 5 мм, при этом уже к 9-ой миллисекунде система возвращается в равновесие. На рисунке 3 изображено падение капли на поверхность жидкости вязкостью $50 \nu_w$. Как видно отскока капля не происходит, система возвращается в равновесие через 20 миллисекунд. Для жидкостей большей вязкости также соблюдается общая тенденция к уменьшению времени восстановления и отсутствию брызг.

3. Заключение

Численно исследовано падение дождевых капель на поверхности жидкостей разной вязкости. Найдено, что при достаточно больших вязкостях образование брызг (отскок капли от поверхности принимающей жидкости) не происходит. При рассматриваемых параметрах отрыва капли не происходит при вязкости, в 50 раз превосходящей вязкость воды.

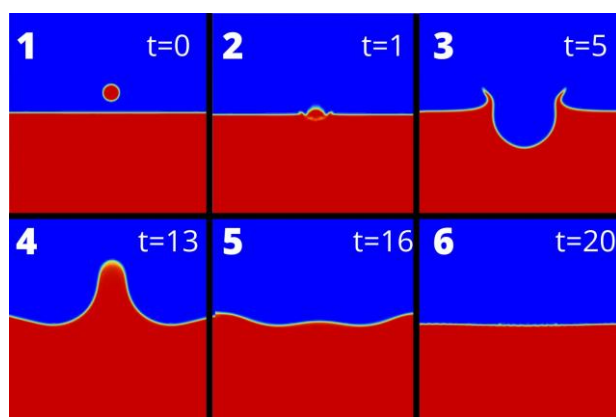


Рис. 3. Падение капли на поверхность жидкости вязкостью $50\nu_w$. На слайдах показано время в миллисекундах

Список литературы

1. Коллектив авторов. Большая Российская Энциклопедия. Т. 9. Большая Российская Энциклопедия, 2007. 767 с.
2. Белоцерковский М. Ю., Белый Б. В., Беркович К. М. Эрозионные процессы. Мысль, 1984. 256 с.
3. Любимов Д. В., Любимова Т. П., Иванцов А. О., Черепанова А. А. Использование метода сквозного счета для моделирования динамики систем с поверхностями раздела // Вычислительная механика сплошных сред. 2008. Т. 1. № 2. С. 53–62. DOI: 10.7242/1999-6691/2008.1.2.15

Режимы конвекции в двухслойной системе с испарением при разных типах тепловой нагрузки на подложке

О. Н. Гончарова

Алтайский государственный университет, 656049, Барнаул, пр. Ленина, 61

email: gon@math.asu.ru

Институт вычислительного моделирования СО РАН,

660036, Красноярск, Академгородок, 50/44

Для моделирования двухслойных течений с учетом испарения (конденсации) диффузионного типа на границе раздела построено трехмерное обобщение решения Остроумова – Бириха уравнений конвекции. Бесконечный прямоугольный канал, заполненный системой вязких несжимаемых жидкостей, находится под действием продольного градиента температуры и поперечно направленного поля силы тяжести. Продольные и поперечные перепады температуры в системе, вызванные как внешним тепловым режимом, так и процессами испарения, приводят к формированию сложно-симметричных вихревых структур, топология которых существенно зависит от интенсивности тепловой нагрузки, типа жидкого теплоносителя, толщины жидкого слоя. Изучаются характеристики течений, возникающих в условиях линейно распределенной тепловой нагрузки на подложке и теплоизоляции верхней и боковых стенок. С целью определения механизмов управления двухслойными течениями и прогнозирования возможных форм неустойчивости анализируется влияние граничного теплового режима на параметры испарительной конвекции. Представлены отличительные характеристики испарительной конвекции в рабочих системах типа этанол-азот и HFE7100-азот.

Ключевые слова: термокапиллярная конвекция; испарение; точное решение

Regimes of convection in a two-layer system with evaporation for different types of thermal load on a substrate

O. N. Goncharova

Altai State University, 61 Pr. Lenina, 656049, Barnaul

email: gon@math.asu.ru

Institute of Computational Modeling SB RAS, 50/44 Akademgorodok, 660036, Krasnoyarsk

A three-dimensional generalization of the Ostroumov–Birich solution of the convection equations is constructed to model the two-layer flows with respect to evaporation (condensation) of the diffusion type at the interface. An infinite rectangular channel filled with a system of viscous incompressible fluids is under the action of the longitudinal temperature gradient and transversely directed

gravity field. Longitudinal and transverse temperature drops in the system, caused by the external thermal regime and evaporation processes, lead to formation of the complexly symmetrical vortex structures having characteristics which significantly depend on the intensity of thermal load on the substrate, the type of liquid coolant, and the thickness of liquid layer. The characteristics of flows, arising under conditions of linearly distributed thermal load on the substrate and thermal insulation of the upper and lateral walls, are studied. In order to determine the control mechanisms for the two-layer flows and to predict possible forms of instability, the influence of the boundary thermal regime on the evaporative convection parameters is analyzed. Distinguishing characteristics of evaporative convection in the working systems such as ethanol-nitrogen and HFE7100-nitrogen are presented.

Keywords: thermocapillary convection; evaporation; exact solution

1. Введение

В настоящей работе для описания стационарных двухслойных течений в системе «испаряющаяся жидкость – парогазовая смесь» используются уравнения Навье–Стокса вязкой несжимаемой жидкости в приближении Обербека–Буссинеска. Уравнения конвекции дополняются уравнением диффузии, моделирующим перенос пара в газе, и учитывают вклад эффектов диффузионной теплопроводности и термодиффузии, возникающих в парогазовом слое и на межфазной границе [1]. Одним из интересных вопросов моделирования конвективных течений жидкостей является применение группового анализа для изучения свойств симметрии математической модели и построение точных (инвариантных либо частично-инвариантных) решений. Один из первых примеров точного решения задачи о двухслойных течениях с учетом испарения в системе «жидкость – жидкость» построен в [2].

Предполагается, что двухфазная система, в которой жидкость и парогазовая смесь представляют собой вязкий несжимаемые среды, заполняет бесконечный канал с прямоугольным поперечным сечением, находящийся под действием продольного градиента температуры и поперечно направленного поля силы тяжести. На границе раздела выполняются кинематическое и динамическое условия, и соотношения, определяющие баланс массы и тепловых потоков и концентрацию насыщенного пара. Дополнительно на межфазной поверхности требуется выполнение условий непрерывности скорости и температуры. Верхняя и боковые твердые непроницаемые стенки канала предполагаются теплоизолированными; на подложке задана линейно распределенная тепловая нагрузка $T_l = -Az + \theta$, где A – продольный температурный градиент, θ – пара-метр, определяющий интенсивность нагрева нижней стенки. Для функции концентрации пара на части границы канала, контактирующей с газовым слоем, ставится условие отсутствия потока пара.

Исходная система уравнений допускает частично-инвариантное решение ранга 2 и дефекта 3, имеющее следующую структуру (см. также [3, 4]): функции температуры T в обеих средах и концентрации пара в газе C линейно зависят от продольной координаты, компоненты вектора скорости являются функциями, зависящими от двух поперечных координат, равно как и аддитивные компоненты функций давления, температуры и концентрации пара. Трехмерное решение, точно удовлетворяющее всем уравнениям и граничным условиям в общей постановке, не удастся построить аналитически, но его структура диктует сведение исходной задачи к цепочке двумерных постановок. Построение точного решения включает разработку алгоритма, позволяющего получить численное решение исходной трехмерной задачи.

2. Анализ трехмерных течений

В настоящей работе исследованы характеристики конвективных режимов, возникающих в системах типа «этанол – азот» и «HFE7100 – азот» вблизи состояния локального термодинамического равновесия (с температурой $T_0 = 10^\circ\text{C}$ и паросодержанием $C_0 = 0.05$ для первой системы и $T_0 = 5^\circ\text{C}$, $C_0 = 0.45$ – для второй), в зависимости от интенсивности внешней тепловой нагрузки, определяемой значениями величин A и θ . Изучены топология течений и структура температурных и концентрационных полей при нормальной гравитации ($g = g_0 = 9.81 \text{ м/с}^2$), толщинах жидкого и газового слоев $l = 2.5 \text{ мм}$ и $h = 5 \text{ мм}$, соответственно, и значениях термодиффузионных параметров $\alpha = 0.005 \text{ K}^{-1}$ (коэффициент Соре) и $\delta = 0.0005$ (коэффициент Дюфура). На рисунках 1 и 2 представлены поле скоростей и траектории движения жидких частиц и распределение температуры в канале (в безразмерном виде) при различном нагреве нижней границы. Отметим, что для системы «этанол – азот» значение $\theta = 5^\circ\text{C}$ обеспечивает условие, когда температура подложки ниже равновесной.

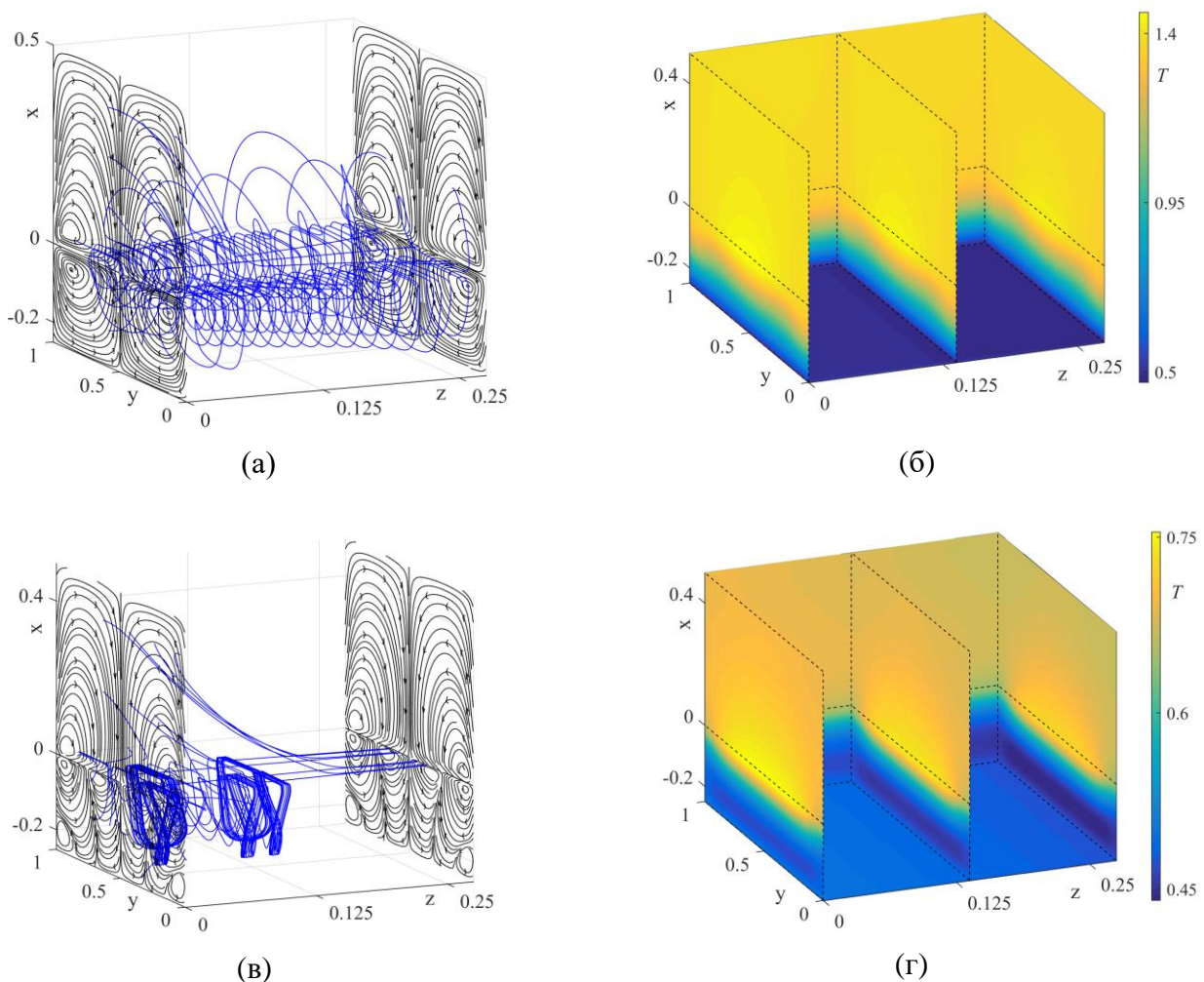


Рис. 1. Поле скоростей и траектории (а, б), распределение температуры (в, г) в системах «этанол – азот» (а, б) и «HFE7100 – азот» (в, г) при $A = 100^\circ\text{C/м}$, $\theta = 5^\circ\text{C}$

Изучены количественные изменения кинематических характеристик внутри слоя жидкости и на границе раздела, проведено их сравнение с результатами задачи, полученными при условии теплоизоляции всех внешних границ канала (см. [4]). Структура режимов характеризуется поступательным движением и наличием поступательно-вращательных течений, которые реализуются в виде валиковой конвекции со сложной топологией. Обнаружено, что система «этанол – азот» более чувствительна к изменениям тепловой нагрузки. Изменения интенсивности внешнего теплового воздействия θ приводят к большим изменениям всех характеристик этой системы по сравнению с характеристиками системы «HFE7100 – азот», которые незначительно различаются при изменении указанного параметра. В системе «HFE7100 – азот» могут сосуществовать валы с различными поперечными размерами, могут формироваться угловые вихри (рис. 1в, 2в) и сжатые вихревые структуры. Заметим, что вращательная составляющая течения усиливается, тогда как воздействие продольной компоненты уменьшается по сравнению со случаем теплоизоляции всех внешних стенок (см. [4]).

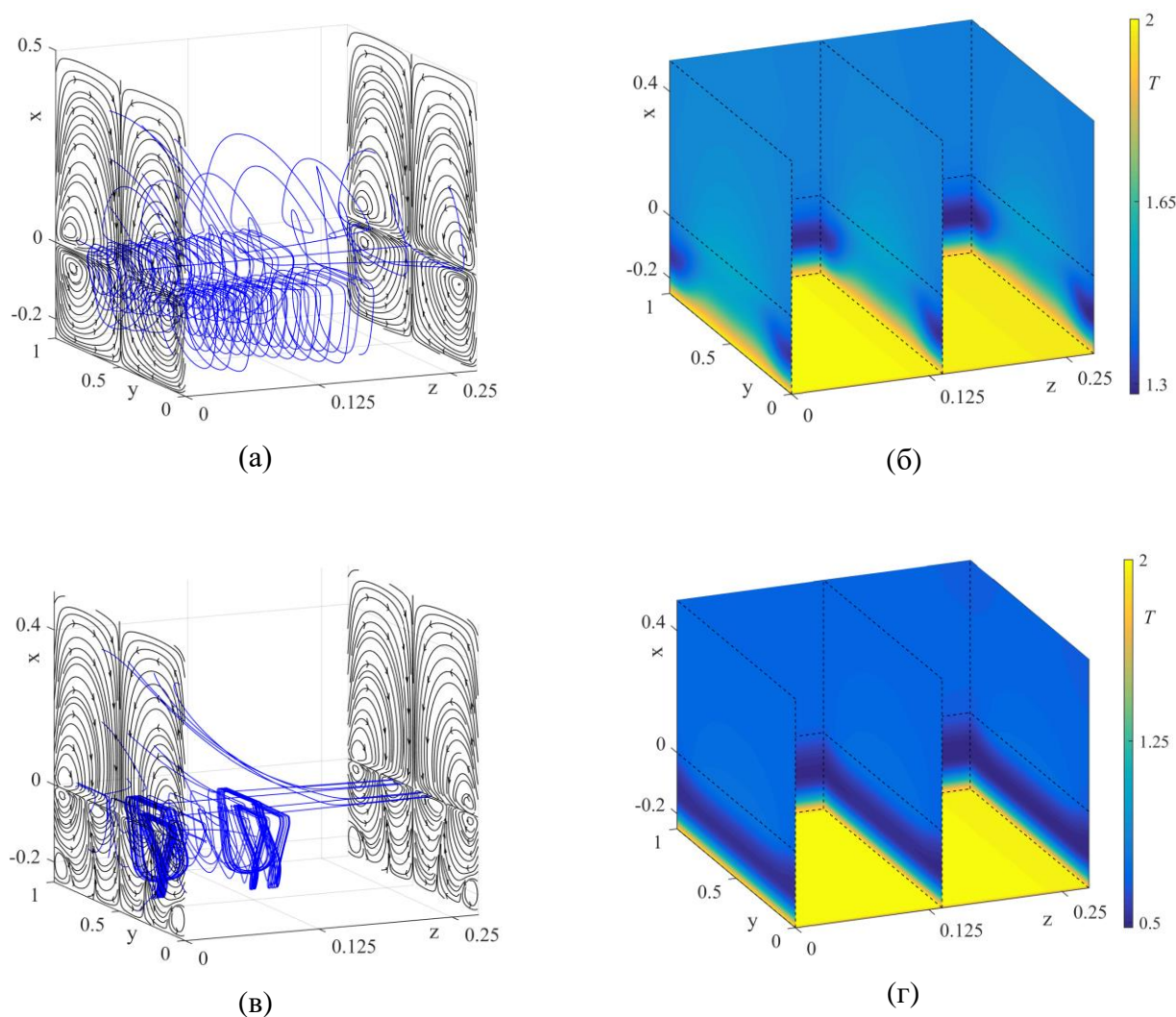


Рис. 2. Поле скоростей и траектории (а, б), распределение температуры (в, г) в системах «этанол – азот» (а, б) и «HFE7100 – азот» (в, г) при $A = 100^\circ\text{C}/\text{м}$, $\theta = 20^\circ\text{C}$

При $A = 100^\circ\text{C}/\text{м}$, $\theta = 5^\circ\text{C}$ в обеих системах формируется хорошо выраженный приповерхностный горячий слой. Однако толщина этого температурного слоя в этаноле больше, чем в жидкости HFE7100 (рис. 1б, 1г). В системе «HFE7100 – азот» помимо довольно тонкого пограничного теплового слоя вдоль границы раздела наблюдается термический вал с более высокой температурой. Кроме того, внутри слоя HFE7100 образуется холодный термоклин из-за существования придонной слабоконвектирующей зоны. Увеличение градиента A приводит к значительной интенсификации конвекции Марангони, что сопровождается изменением топологии течения. При достаточно больших значениях A может произойти развал упорядоченных продольных термокапиллярных валов с образованием дополнительных вихревых структур либо изменением пространственной формы продольных структур. При малых значениях параметра θ отклонения температуры жидкостей от равновесного значения остаются малыми. Интенсивный нагрев снизу приводит к формированию потенциально неустойчивой тепловой стратификации во всей двухслойной системе жидкость – газ. При увеличении значений параметра θ максимальные изменения температуры происходят в вертикальном направлении (по всей высоте канала, см. рис. 2в, 2г); в канале с теплоизолированными границами максимальные перепады в основном формировались в продольном направлении.

Заметим, что используемое трехмерное решение уравнений термоконцентрационной конвекции предсказывает симметричную относительно центрального осевого сечения $y = 0$ картину течения, несмотря на то, что при построении решения не делалось никаких предположений относительно осевой симметрии.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант 22-11-00243, <https://rscf.ru/project/22-11-00243/>.

Список литературы

1. Бекежанова В. Б., Гончарова О. Н. Задачи испарительной конвекции (обзор) // Прикладная математика и механика. 2018. Т. 82. №2. С. 219–260.
2. Шлиомис М. И., Якушин В. И. Конвекция в двухслойной бинарной системе с испарением // Сб. трудов: Ученые записки Пермского Госуниверситета. Серия: Гидродинамика. 1972. № 4. С. 129–140.
3. Bekezhanova V. B., Goncharova O. N. Thermocapillary convection with diffusive-type evaporation in a three-dimensional channel under the conditions of combined thermal load // Interfacial Phenomena and Heat Transfer. 2022. Vol. 10 (2). P. 11–30. DOI: 10.1615/InterfacPhenomHeatTransfer.2022044674
4. Bekezhanova V. B., Goncharova O. N. Numerical study of the evaporative convection regimes in a three-dimensional channel for different types of liquid-phase coolant // International Journal of Thermal Sciences. 2020. Vol. 156. 106491. DOI: 10.1016/j.ijthermalsci.2020.106491

Новые классы точных решений уравнений Навье–Стокса с учетом диссипации энергии

Л. С. Горулера^{a,b}, Е. Ю. Просвиряков^{a,b}

^a Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, 620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19
email: sherlarisa@yandex.ru

^b Институт машиноведения им. Э. С. Горкунова УрО РАН, 620049, Екатеринбург, ул. Комсомольская, 34
email: evgen_pros@mail.ru

Представлены новые точные решения трехмерных уравнений Обербека–Буссинеска, которые учитывают диссипацию энергии в уравнении переноса тепла в движущейся жидкости. Течения вязкой несжимаемой жидкости могут быть как установившимися, так и неуставившимися. Для построения точных решений за основу взят класс точных решений Линя–Сидорова–Аристова. Характерная особенность представления поля скоростей заключается в том, что оно описывается линейными формами относительно двух координат (горизонтальных или продольных). Коэффициенты линейных форм зависят от третьей координаты (вертикальной или поперечной) и от времени. Давление и температура жидкости являются квадратичными формами с аналогичной структурой для скорости. Данное семейство точных решений описывает течения вязкой несжимаемой жидкости с пространственным ускорением. Иными словами, учитываются нелинейные эффекты сил инерции, которые выражаются через конвективную производную вектора скорости и температуры в уравнениях Обербека–Буссинеска и уравнении теплопроводности соответственно. Принимая во внимание рассеяние энергии в жидкости, конкурируют два квадратично нелинейных эффекта. Это обстоятельство существенно затрудняет исследование течений, поэтому в статье приводятся формулы, описывающие ползущее течение (приближение Стокса) и движение Озеена. Таким образом, показана возможность построения точных решений уравнений движения с диссипацией механической энергии в тепловую энергию для полных уравнений Обербека–Буссинеска, а также для их линеаризованных аналогов в приближении Стокса и Озеена.

Ключевые слова: точное решение; уравнение несжимаемости; уравнение Навье–Стокса, уравнение переноса тепла; диссипативная функция Рэлея

New classes of exact solutions to Navier–Stokes equations with allowance for energy dissipation

L. S. Goruleva^{a,b}, E. Yu. Prosviryakov^{a,b}

^a Ural Federal University, 19 Mira St., 620002, Ekaterinburg
email: sherlarisa@yandex.ru

^b Institute of Engineering Science UB RAS, 34 Komsomolskaya St., 620049, Ekaterinburg
email: evgen_pros@mail.ru

New exact solutions to the three-dimensional Oberbeck-Boussinesq equations, where the heat transfer equation takes into account energy dissipation in a moving fluid, are discussed. The flows of viscous incompressible fluids can be in both steady- and

unsteady-state. The construction of the exact solutions is based on the Lin-Sidorov-Aristov class of exact solutions. The characteristic feature of the velocity field representation is that it is described by linear forms with respect to two coordinates (horizontal or longitudinal). The coefficients of the linear forms depend on the third coordinate (vertical, or transverse) and time. The fluid pressure and temperature are quadratic forms with a similar structure for the velocity. This family of exact solutions describes the flows of viscous incompressible fluids with a spatial acceleration. In other words, nonlinear effects of inertia forces are taken into account, which are expressed through the convective derivative of the velocity and temperature vectors in the Oberbeck-Boussinesq equations and the heat conduction equation, respectively. Since there is energy dissipation in fluids, two quadratically nonlinear effects compete. This significantly complicates the study of flows; therefore, the paper presents formulas describing a creeping flow (the Stokes approximation) and Oseen motion. Thus, the study shows the possibility of constructing exact solutions to the motion equations with mechanical energy dissipation into thermal energy for the full Oberbeck-Boussinesq equations and for their linearized analogs in the Stokes and Oseen approximations.

Keywords: exact solution; incompressibility equation; Navier–Stokes equation; heat transfer equation; Rayleigh dissipative function

При нахождении точных решений уравнений Навье–Стокса предполагается рассмотрение только тривиального решения уравнения переноса, игнорируя при этом перенос тепла за счет диссипативных процессов [1–4]. Однако для решения задач теории управления течениями целесообразно учитывать диссипативную функцию Релея [5, 6]. В связи с этим возникает необходимость попытаться использовать уже известные классы точных решений Навье–Стокса, в которых не учитывается функция Релея, а предполагается постоянство температуры.

Рассмотрено неустановившееся течение вязкой несжимаемой жидкости с учетом внутреннего (локального) тепловыделения, описываемое системой уравнений [7]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} &= -\nabla P + \nu \Delta \mathbf{V}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) T &= \chi \Delta T + Q, \\ \nabla \cdot \mathbf{V} &= 0.\end{aligned}\tag{1}$$

В этой системе уравнений введены следующие обозначения: $\mathbf{V}(t, x, y, z) = (V_1, V_2, V_3)$ – вектор скорости; ν – кинематическая вязкость; P – давление, деленное на постоянную плотность ρ ; χ – коэффициент температуропроводности; Δ – оператор Лапласа, ∇ – оператор Гамильтона. При этом в уравнении теплопроводности функция Q определяет диссипацию энергии жидкости (трансформацию механической энергии в тепловую) согласно формуле:

$$Q = \frac{\nu}{2c_p} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right)^2,\tag{2}$$

где c_p – удельная теплоемкость жидкости при постоянном давлении.

При построении точных решений за основу взят класс точных решений Линя–Сидорова–Аристова [7], который описывает течения с пространственным ускорением. Таким образом, поле скоростей представлено следующим образом [7]:

$$\begin{aligned}
V_1 &= U(x_3, t) + U_1(x_3, t)x_1 + U_2(x_3, t)x_2, \\
V_2 &= W(x_3, t) + W_1(x_3, t)x_1 + W_2(x_3, t)x_2, \\
V_3 &= w(x_3, t).
\end{aligned}
\tag{3}$$

Выражения для поля скоростей являются линейными формами относительно горизонтальных координат x_1 и x_2 с коэффициентами U , U_1 , U_2 , W , W_1 , W_2 и w , которая зависит от вертикальной координаты x_3 и времени t . Поля давления и температуры описываются квадратичными формами.

Таким образом, система, полученная после подстановки выражений (3) в систему уравнений Навье–Стокса (1), состояла из тринадцати неоднородных уравнений в частных производных параболического типа с конвективным слагаемым и из шести уравнений градиентного типа для. Полученная система распадается на две слабосвязанные подсистемы. После нахождения функций, описывающих поле скоростей и давления, были проинтегрированы оставшиеся уравнения для нахождения температуры распределения тепла.

В классе точных решений Линя-Сидорова-Аристова учитываются нелинейные эффекты сил инерции, выраженные через конвективную производную температуры и вектора скорости в уравнении теплопроводности и уравнениях Навье–Стокса, соответственно. Вследствие затруднения исследования такого рода течений в статье приводятся формулы, которые описывают ползущее течение и движения Озеена. Таким образом, получены точные решения уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости с диссипацией механической энергии в тепловую энергию для полных уравнений Навье–Стокса и для упрощенных аналогов, полученных за счет линеаризации конвективной производной, содержащейся в уравнениях Навье–Стокса и в уравнении теплопроводности.

Список литературы

1. *Ershkov S. V., Prosviryakov E. Yu., Burmasheva N. V., Christianto V.* Towards understanding the algorithms for solving the Navier-Stokes equations // *Fluid Dynamics Research*. 2021. Vol. 53. N. 4. 044501. DOI: 10.1088/1873-7005/ac10f0
2. *Аристов С. Н., Князев Д. В., Полянин А. Д.* Точные решения уравнений Навье–Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных // *Теоретические основы химической технологии*. 2009. Т. 43. № 5. С. 547–566.
3. *Drazin P. G., Riley N.* The Navier–Stokes Equations: A classification of flows and exact solutions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006. 196 p. DOI: 10.1017/CBO9780511526459
4. *Пухначев В. В.* Симметрии в уравнениях Навье–Стокса // *Успехи механики*. 2006. Т. 4. № 1. С. 6–76.
5. *Бетелин В. Б., Галкин В. А.* Задачи управления параметрами несжимаемой жидкости при изменении во времени геометрии течения // *Доклады Академии наук*. 2015. Т. 463. № 2. С. 149–151. DOI: 10.7868/S0869565215200037
6. *Алтоиз Б. А., Савин Н. В., Шатагина Е. А.* Влияние тепловыделения в микропрослойке жидкости при измерении ее вязкости // *Журнал технической физики*. 2014. Т. 84. № 5. С. 21–27.
7. *Горулева Л. С., Просвирыков Е. Ю.* Новый класс точных решений уравнений Навье–Стокса с учетом внутреннего тепловыделения // *Химическая физика и мезоскопия*. 2022. Т. 24. № 1. С. 82–92. DOI: 10.15350/17270529.2022.1.7

Дендритный рост на межфазной границе при селективном лазерном плавлении стали 316L

С. А. Груздь^{a,b}, А. И. Мосин^a, М. Д. Кривилев^{a,c}

^a Удмуртский государственный университет, 426034, Ижевск, ул. Университетская, 1
e-mail: lilyna@mail.ru

Аддитивное производство изделий из металлических порошков является быстро развивающимся направлением машиностроения. Рассматривается задача определения характерного размера дендритов, формирующихся при высокоскоростной кристаллизации на границе бассейна расплава при селективном лазерном плавлении порошка нержавеющей стали 316L. В основе математической модели лежит аналитическое решение Иванцова, описывающее рост кристаллов параболической формы. Модель расширена Александровым и Галенко компонентами, учитывающими наличие конвективных потоков в расплаве. С использованием этой модели авторами определен диаметр вершины дендрита в зависимости от скорости кристаллизации, которая в свою очередь является функцией скорости перемещения лазера и формы хвостовой части бассейна расплава. Полученные значения сопоставлены с результатами экспериментального анализа микроструктуры образцов, изготовленных селективным лазерным плавлением.

Ключевые слова: дендритный рост; межфазная поверхность; селективное лазерное плавление; нержавеющая сталь

Dendritic growth at the solidification interface during selective laser melting of 316L steel

S. A. Gruzdy^{a,b}, A. I. Mosin^a, M. D. Krivilyov^{a,c}

^a Udmurt State University, 1 Universitetskaya St., 426034, Izhevsk
e-mail: lilyna@mail.ru

Additive manufacturing of products from metal powder is a rapidly developing area of mechanical engineering. The problem in determination of the characteristic size of dendrites formed during high-speed solidification at the boundary of the melt pool during selective laser melting of 316L stainless steel powder is considered. The mathematical model is based on the Ivantsov analytical solution describing the growth of parabolic-shaped crystals. The model is extended by Alexandrov and Galenko with components that take into account the presence of convective flows in the melt. Using this model, the authors determined the diameter of the dendritic tip depending on the solidification velocity, which in turn is a function of the laser speed and the shape of the tail part of the melt pool. The obtained values are compared to the results of experimental analysis of the sample microstructure made by selective laser melting.

Keywords: dendritic growth; phase interface; selective laser melting; stainless steel

1. Введение

Технологии селективного лазерного плавления (СЛП) активно стали внедряться в машиностроение в последние годы. Увеличение сферы применения данного направления сопровождается повышением требований к свойствам СЛП-изделий. Подбор оптимальных режимов лазерного сплавления позволяет получать заданные характеристики уже в процессе изготовления, избегая при этом дополнительных технологических операций [1]. Одной из наиболее важных эксплуатационных характеристик является прочность материала, которая напрямую зависит от структуры металла и от размера зерна. В работе использована математическая модель Иванцова [2], расширенная Александровым, Тороповой и Галенко в работах [3–6], позволяющая определить радиус вершины дендритов в зависимости от величины переохлаждения, скорости кристаллизации и скорости конвекции. Полученные результаты сравниваются с данными лабораторного исследования образцов нержавеющей стали марки 316L, изготовленных по технологии селективного лазерного плавления.

2. Математическая модель роста дендритов

Ключевыми параметрами при решении задачи по определению размеров зерна при высокоскоростной кристаллизации являются: скорость роста вершины дендрита, совпадающая со скоростью кристаллизации $V_{кр}$, диаметр вершины дендрита d , а также величина переохлаждения ΔT системы вблизи метастабильной границы раздела фаз. Для задач кристаллизации бассейна расплава при СЛП параметр скорости кристаллизации зависит от скорости перемещения луча лазера и от формы хвостовой части бассейна, в связи с этим данный параметр принимается как известный из решения задачи по определению макропараметров бассейна расплава [7, 8].

Определим основные уравнения модели дендритного роста [4–6]. Для нахождения двух других параметров роста дендрита в систему уравнений включено уравнение баланса переохлаждения:

$$\Delta T = \Delta T_T + \Delta T_C + \Delta T_R + \Delta T_k. \quad (1)$$

Термическое переохлаждение ΔT_T имеет следующую зависимость:

$$\Delta T_T = \frac{Q}{c_p} I v(P_g, P_f), \quad (2)$$

где Q – скрытая теплота плавления, c_p – изобарная теплоемкость, P_g и P_f – ростовое и потоковое числа Пекле, определенные ниже в уравнении (8).

Концентрационное переохлаждение ΔT_C определяется из зависимости:

$$\Delta T_C = m \frac{C_\infty(1 - k_0) \cdot I v(P_{cg}, P_{cf})}{1 - (1 - k_0) \cdot I v(P_{cg}, P_{cf})}, \quad (3)$$

где m – наклон линии ликвидус, C_∞ – концентрация примеси в растворе, k_0 – коэффициент распределения.

Переохлаждение, возникающее на вершине дендрита из-за искривление межфазной границы (эффект Гиббса-Томсона), определяется величиной ΔT_R и находится как

$$\Delta T_R = \frac{2l_0 Q}{c_p \left(\frac{d}{2}\right)}. \quad (4)$$

Кинетическое переохлаждение ΔT_k определяется из уравнения:

$$\Delta T_k = \frac{V_{кр}}{\mu_k}, \quad (5)$$

где μ_k – кинетический коэффициент на межфазной поверхности.

Модифицированные функции Иванцова $Iv(P_g, P_f)$ в уравнении (2) и $Iv(P_{cg}, P_{cf})$ в уравнении (3) определяются уравнениями

$$Iv(P_g, P_f) = P_g \exp(P_g + P_f) \cdot I_T(\infty), \quad (6)$$

$$Iv(P_{cg}, P_{cf}) = P_{cg} \exp(P_{cg} + P_{cf}) \cdot I_C(\infty). \quad (7)$$

Ростовое P_g и потоковое P_f числа Пекле определяются из параметров системы как

$$P_g = \frac{\left(\frac{d}{2}\right) \cdot V_{кр}}{2D_T}, \quad P_f = \frac{\left(\frac{d}{2}\right) \cdot U}{2D_T}, \quad (8)$$

а концентрационные числа Пекле соответствуют выражениям

$$P_{cg} = \frac{\left(\frac{d}{2}\right) \cdot V_{кр}}{2D_C}, \quad P_{cf} = \frac{\left(\frac{d}{2}\right) \cdot U}{2D_C}, \quad (9)$$

где D_T – коэффициент температуропроводности, D_C – коэффициент диффузии компонентов в жидкости, U – скорость набегающего потока.

Интегралы I_T и I_C в уравнениях (6) и (7) описывают диффузионный и конвективный механизмы теплопереноса. Для двумерного пространства с параболическим ростом вершины дендрита указанные интегралы определяются следующими выражениями [6]:

$$I_T(\eta) = \int_1^\eta \exp \left[P_f \int_1^{\eta'} \frac{g(\eta'')}{\sqrt{\eta''}} d\eta'' - (P_f + P_g)\eta' \right] \frac{d\eta'}{\sqrt{\eta'}}, \quad (10)$$

$$I_C(\eta) = \int_1^\eta \exp \left[P_{cf} \int_1^{\eta'} \frac{g(\eta'')}{\sqrt{\eta''}} d\eta'' - (P_{cf} + P_{cg})\eta' \right] \frac{d\eta'}{\sqrt{\eta'}}, \quad (11)$$

$$g(\eta) = \sqrt{\eta} \frac{\operatorname{erfc} \sqrt{\eta \cdot Re/2}}{\operatorname{erfc} \sqrt{Re/2}} + \frac{\sqrt{2/(\pi \cdot Re)}}{\operatorname{erfc} \sqrt{Re/2}} \cdot \left[\exp \left(-\frac{Re}{2} \right) - \exp \left(-\frac{\eta \cdot Re}{2} \right) \right], \quad (12)$$

где Re – число Рейнольдса, η – одна из координат параболической системы координат, которая вводится для решения данного интеграла, когда межфазная граница соответствует уровню $\eta = 1$ [6].

Для определения параметров зерна к уравнению баланса переохлаждений (1) в систему уравнений включают условие отбора для устойчивой моды стационарного роста вершины дендрита в вязкой жидкости, которое имеет вид [6]:

$$\sigma^* \equiv \frac{2l_0 D_T}{\left(\frac{d}{2}\right)^2 V_{кр}} = \sigma_0^*(\beta) \left[\frac{1}{2} - m \cdot C_i (1 - k_0) \frac{D_T c_p}{Q D_C} \right], \quad (13)$$

где σ^* – масштабный фактор между скоростью роста дендрита и его диаметром, C_i – концентрация примеси в расплаве на вершине дендрита, задаваемый уравнением

$$C_i = \frac{C_\infty}{1 - (1 - k_0) \cdot Iv(P_{cg}, P_{cf})}, \quad (14)$$

и параметр анизотропии $\sigma_0^*(\beta)$, определяемый из выражения для двумерной задачи:

$$\sigma_0^*(\beta) = \frac{2\sigma_0\beta^{7/4}}{1 + b \left(\beta^{-3/4} \alpha_0(Re) \right)^{11/14}}, \quad (15)$$

$$\alpha_0(Re) = \frac{l_0 U \cdot a(Re) [1 + D_c / (2D_T)]}{4 \left(\frac{d}{2} \right) V_{кр} \left[\frac{D_c}{2D_T} + m \cdot C_i (1 - k_0) \frac{c_p}{Q} \right]}, \quad (16)$$

$$a(Re) = \sqrt{\frac{Re}{2\pi}} \cdot \frac{\exp\left(-\frac{Re}{2}\right)}{\operatorname{erfc} \sqrt{\frac{Re}{2}}}. \quad (17)$$

Уравнения (1) и (13) являются основными уравнениями системы для определения величины переохлаждения и диаметра вершины дендрита при заданной скорости кристаллизации.

3. Результаты расчетов и их сопоставление с лабораторным экспериментом

В эксперименте проводились испытания образцов нержавеющей стали марки 316L. Теплофизические свойства и расчетные параметры модели, учтенные при проведении расчетов, представлены в таблицах 1 и 2.

Таблица 1. Свойства материала, используемые в модели.
Частично использованы значения параметров из работ [3, 9]

Величина	Символ (Единица измерения)	Значение
Температура плавления	T_0 [K]	1743
Концентрация примеси	c_∞ [ат. %]	17
Коэффициент распределения примеси (равновесный)	k_0	0.791
Наклон линии ликвидуса	m $\left[\frac{K}{\text{ат. \%}} \right]$	–3.49
Коэффициент диффузии в жидкости	D_c [м ² /с]	3×10^{-9}
Коэффициент теплопроводности	λ [Вт/(К · м)]	13
Теплоемкость	c_p [Дж/(кг · К)]	791
Плотность жидкой фазы	ρ [кг/м ³]	6900
Кинематическая вязкость жидкой фазы	ν [м ² /с]	7.9×10^{-7}
Скрытая теплота плавления	Q [Дж/кг]	1.8×10^5
Молярная масса	μ [кг/моль]	0.055
Поверхностное натяжение	σ [Н/м]	0.15
Кинетический коэффициент роста межфазной поверхности	μ_k [м/(с · К)]	0.209

Анизотропия межфазной границы	ε_c	0.018
Постоянная анизотропии поверхностной энергии (численная постоянная)	σ_0	10
Параметр устойчивости	b	0.01

Таблица 2. Свойства материала, зависимые от других параметров.
Частично использованы значения параметров из работы [3, 9]

Величины	Символ(размерность)	Формула	значение
Коэффициент температуропроводности	D_t [м ² /с]	$\frac{\lambda}{c_p \rho}$	2.5×10^{-6}
Адиабатическая температура	T_Q [K]	$\frac{Q}{c_p}$	228
Капиллярная постоянная	d_0 [нм]	$\frac{\sigma T_0}{Q \rho T_Q}$	2
Фактор анизотропии	β	$15 \cdot \varepsilon_c$	0.27

Образец для испытаний был изготовлен по технологии селективного лазерного плавления из порошка нержавеющей стали 316L, аналог марки стали 03X17H14M2. Скорость кристаллизации при испытании определялась по следующей зависимости:

$$V_{кр} = V_{л} \cdot \sin \varphi, \quad (18)$$

где $V_{л}$ – скорость передвижения лазера, φ – угол хвостовой части бассейна расплава, находящийся между касательной к межфазной границе и направлением движения лазера. Величины этих параметров в выбранных режимах сплавления порошка представлена в таблице 3. Средняя скорость конвективных потоков в расплаве U составила порядка 0.1 м/с.

Таблица 3. Скорость движения лазера и угол хвостовой части бассейна расплава

Номер испытания	$V_{л}$ (м/с)	$\sin \varphi$	$V_{кр}$ (м/с)
1	0.56	0.4	0.224
2	0.63	0.425	0.267
3	0.7	0.44	0.308
4	0.77	0.454	0.349
5	0.84	0.463	0.389

На графике (рис. 1) представлена зависимость диаметра вершины дендрита в зависимости от скорости кристаллизации. Сплошная линия является решением математической модели (1) – (17), крестиками нанесены экспериментальные данные по размеру элементов микроструктуры, полученных в результате лабораторных испытаний.

Снимок анализа микроструктуры образца, полученного в СЛП при скорости движения лазера 0.7 м/с, представлен на рисунке 2. Размер области снимка 1.5x1.5 мкм. На рисунке представлено продольное сечение, где отчетливо видна структура в виде вытянутых дендритов, характерный размер которых варьируется в диапазонах 0.1–0.3 мкм. Полученные значения средних диаметров структуры образца и результаты размеров дендритов, вычисленных по предложенной модели, сопоставимы по значениям. Полученные данные показывают, что предложенная авторами [3–6] модель

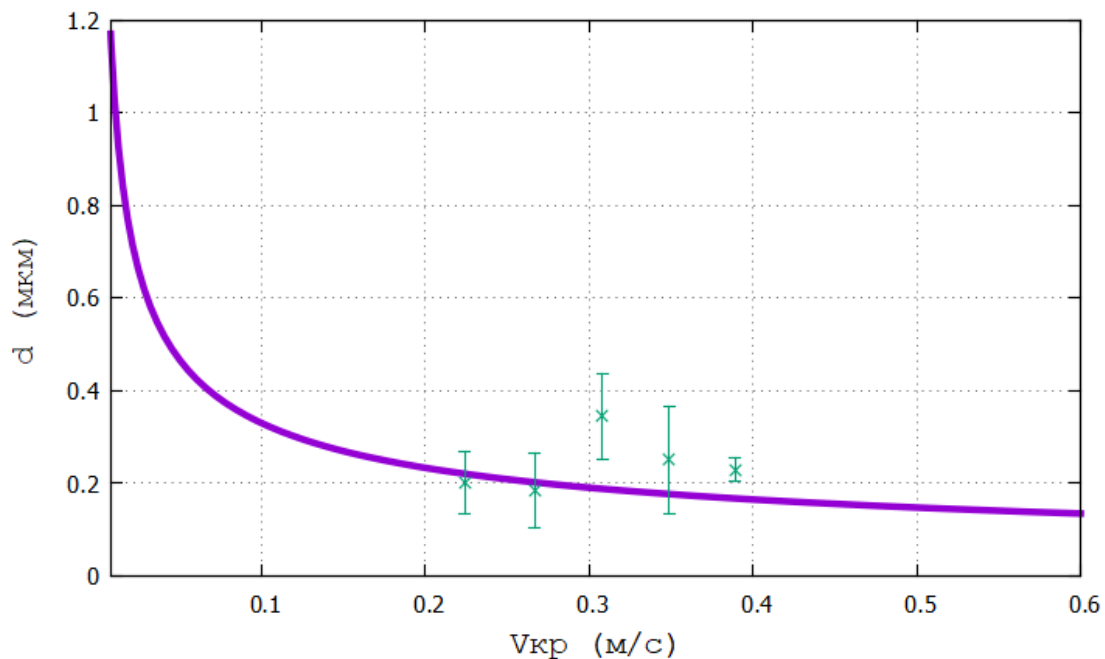


Рис. 1. Зависимость диаметра дендрита от скорости кристаллизации. Сплошная линия – результаты вычисления. Крестиками обозначены результаты лабораторных испытаний

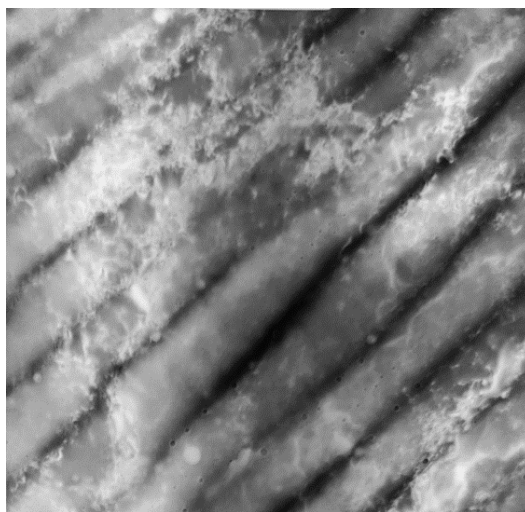


Рис. 2. Микроструктура образца, полученная методом просвечивающей электронной микроскопии. Размер снимков поверхности 1.5x1.5 мкм. Скорость луча лазера при СЛП $V_d = 0.7$ м/с, продольное сечение.

достоверно дает значение размеров структуры дендритов при высокоскоростной кристаллизации расплава нержавеющей стали 316L в технологиях селективного лазерного плавления.

Авторы выражают благодарность за финансовую поддержку ГК Росатом в рамках реализации проекта ЕОТП-96 «Пучковая энергия». Авторы выражают признательность Е. В. Харанжевскому за интерпретацию экспериментальных данных и помощь в проведении исследований.

Список литературы

1. *Ivanov I. A., Dub V. S., Karabutov A. A., Cherepetskaya E. B., Bychkov A. S. et al.* Effect of laser induced ultrasound treatment on material structure in laser surface treatment for selective laser melting applications // *Scientific Reports*. 2021. Vol. 11. 23501. DOI: 10.1038/s41598-021-02895-8.
2. *Иванцов Г. П.* Температурное поле вокруг шарообразного, цилиндрического и иглообразного дендрита, растущего в переохлажденном расплаве // *Доклады Академии Наук СССР*. 1947. Т.58. №4. С. 567–569.
3. *Nestler B., Danilov D., Galenko P.* Crystal growth of pure substances: Phase-field simulations in comparison with analytical and experimental results // *Journal of Computational Physics*. 2005. Vol. 207. P. 221–239. DOI:10.1016/j.jcp.2005.01.018.
4. *Alexandrov D. V., Galenko P. K.* Selection criterion of stable dendritic growth at arbitrary Peclet numbers with convection // *Physical Review E*. 2013. Vol. 87. 062403. DOI: 10.1103/PhysRevE.87.062403.
5. *Торопова Л. В.* Математическое моделирование устойчивой моды дендритного роста при различных условиях кристаллизации // *Дисс. на соиск. учён. степ. к.ф.-м.н.* Екатеринбург: УрФУ. 2020. 124 с.
6. *Александров Д. В., Галенко П. К.* Дендритный рост с вынужденной конвекцией: методы анализа и экспериментальные тесты // *Успехи Физических Наук*. 2014. Т. 184. №8. С. 833–850. DOI: 10.3367/UFNr.0184.201408b.0833.
7. *Гордеев Г. А., Кривилев М. Д.* Компьютерное моделирование теплопереноса и усадки металлических порошков при селективном лазерном плавлении // «XXII Харитоновские тематические научные чтения. Суперкомпьютерное моделирование и искусственный интеллект». Материалы Междунар. науч. конф, 24–27 мая 2021 г. // Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2021. С. 33.
8. *Gordeev G. A., Ankudinov V., Kharanzhevskiy E. V., Krivilyov M. D.* Numerical simulation of selective laser melting with local powder shrinkage using FEM with the refined mesh // *The European Physical Journal Special Topics*. 2020. Vol. 229. P. 205–216. DOI: 10.1140/epjst/e2019-900100-6.
9. *Pinomaa T., Lindroos M., Walbrühl M., Provatas N., Laukkanen A.* The significance of spatial length scales and solute segregation in strengthening rapid solidification microstructures of 316L stainless steel // *Acta Materialia*. 2020. Vol. 184. P. 1–16. DOI: 10.1016/j.actamat.2019.10.044.

О механизме транспорта примесей в газообразной разреженной среде

В. А. Демин^{a,b}, Т. В. Демина^a, Б. С. Марышев^{a,c}

^a Пермский государственный национальный исследовательский университет, 614990, Пермь, ул. Букирева, 15
email: demin@psu.ru

^b Пермский национальный исследовательский политехнический университет, 614990, Пермь, Комсомольский пр., 29

^c Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1
email: maryshev@gmail.ru

Проанализирован процесс доставки паров кремния от зеркала расплава к поверхности изделия в ходе высокотемпературного силицирования пористого углеродного материала. Построена новая обобщенная физико-математическая модель, которая помимо диффузионного переноса учитывает наличие в системе дополнительного конвективного транспорта. Оказалось, что задача сводится к специфическому уравнению диффузии с дополнительной нелинейностью типа квадрата градиента концентрации. В стационарном случае в одномерной постановке получено аналитическое решение этого уравнения. Эволюция профиля концентрации исследована численно методом конечных разностей.

Ключевые слова: разреженный газ; высокотемпературные процессы; диффузионный транспорт примеси

On the mechanism of impurity transport in a gaseous rarefied medium

V. A. Demin^{a,b}, T. V. Demina^a, B. S. Maryshev^{a,c}

^a Perm State University, 15 Bukireva St., 614990, Perm
email: demin@psu.ru

^b Perm National Research Polytechnic University, 29 Komsomolsky Pr., 614990, Perm

^c Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, 1 Akademika Koroleva St., 614013, Perm
email: maryshev@gmail.ru

The process of silicon vapor transport from the melt mirror to the product surface during high-temperature siliconization of a porous carbon material is analyzed. A new generalized physical and mathematical model has been constructed, which, in addition to diffusion transfer, takes into account the presence of supplementary convective transport in the system. It turned out that the problem is reduced to a specific diffusion equation with an additional nonlinearity like the square of the concentration gradient. In a stationary case of the one-dimensional statement, an analytical solution of this equation is obtained. The evolution of the concentration profile is studied numerically by the finite difference method.

Keywords: rare gas; high-temperature processes; diffusive transport of admixture

1. Введение

Процесс испарения жидкостей в вакуум или разреженную среду в последние годы интенсивно изучается методами молекулярной динамики [1–3]. Разработка этого метода в совокупности с развитием вычислительных мощностей позволила рассмотреть достаточно большое число осложняющих факторов, включая кривизну поверхности испарения [4]. Однако, отличительной чертой всех рассматриваемых задач является модельный характер их постановки. По причине того, что методы молекулярной динамики основаны, в конечном счете, на законах статистической физики, для расчетов с их помощью по-прежнему характерно хоть и достаточно большое, но, тем не менее, не макроскопическое число частиц. Также успешная реализация данного подхода возможна только в случае простейших граничных условий и небольших объемов, занимаемых газом. В то же время для описания реальных технологических процессов необходимо учитывать, как раз, именно эти требования.

Так, процесс высокотемпературного силицирования пористых углеродных материалов происходит в большом пространстве рабочей печи, в котором сложным образом расставлены источники паров кремния, у каждого из которых имеется свое зеркало расплава. В результате при существующих вычислительных мощностях использовать для численного моделирования этого процесса методы молекулярной динамики пока не представляется возможности. Единственным путем остается применение каких-то сплошносредных подходов. Таким образом, возникает задача построения работоспособной физико-математической модели данного процесса с целью его детального описания и дальнейшей разработки методов управления технологическим процессом.

2. Постановка задачи

Рассмотрим процесс переноса паров кремния в разреженной газообразной среде от плоского зеркала расплава к поверхности изделия. В качестве несущей среды выступает инертный газ – аргон. Поверхность расплава находится на расстоянии L от заготовки (рис. 1).

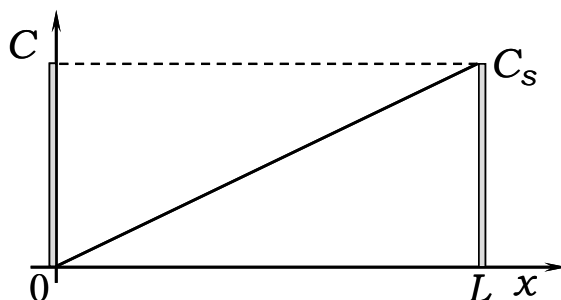


Рис. 1. Конфигурация задачи и система координат

Предполагается, что на зеркале расплава (справа на рис. 1) имеет место испарение кремния, причем, не вдаваясь в тонкости этого сложного процесса, будем считать, что на этой границе пары кремния находятся в насыщенном состоянии. Тогда p_n – давление насыщенного пара кремния, ρ_n – соответственно, плотность насыщенного пара. Считается, что на противоположной границе (слева на рис. 1) происходит полное поглощение кремния, поэтому парциальное давление кремния там равно нулю. Ранее предполагалось, что процесс доставки газообразного кремния через несущую среду

происходит исключительно диффузионным образом и описывается соответствующим дифференциальным уравнением вида

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right), \quad (1)$$

где C – массовая концентрация, D – коэффициент диффузии.

Действительно, согласно известно формуле молекулярно-кинетической теории газов коэффициент диффузии вычисляется следующим образом:

$$D = \frac{3}{8} \frac{kT}{\sigma_{12} p} \sqrt{\frac{\pi kT}{2\mu_{12}}} = \frac{3}{8} \frac{(kT)^{3/2}}{d_{Si}^2 p \sqrt{\pi m_0}}.$$

Здесь k – постоянная Больцмана, σ_{12} – эффективное сечение рассеяния для двух частиц, μ_{12} – приведенная масса. Для двух примерно одинаковых по массе и размерам частиц имеем $\sigma_{12} = \pi d^2$, $\mu_{12} = m_0$. Масса одного атома кремния равна $m_0 = \mu_k / N_A = 0.028 \text{ кг/Моль} / 6.02 \cdot 10^{23} \text{ 1/Моль} = 4.7 \cdot 10^{-26} \text{ кг}$. Из табличных данных возьмем диаметр атома кремния $d_{Si} = 0.23 \cdot 10^{-9} \text{ м}$. В результате получаем $D = 0.7 \text{ м}^2/\text{с}$. Это просто гигантское значение для коэффициента диффузии. Заметим, что по похожей формуле можно вычислить динамическую вязкость аргона

$$\eta = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{3/2} \frac{(m_0 kT)^{1/2}}{d_{Ar}^2},$$

где m_0 – очевидно масса одного атома аргона. Из этой формулы получаем

$$\eta = 3.5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}.$$

В стационарной постановке уравнение (1) приводится к классическому уравнению Лапласа, которое в одномерном случае и для упомянутых выше граничных условий дает единственное нетривиальное решение в виде линейной зависимости, схематично представленное на рис. 1:

$$C(x) = \frac{C_n}{L} x.$$

Объемная концентрация для кремния в состоянии насыщения вычисляется через давление насыщенных паров с помощью уравнения состояния идеального газа

$$n_n = \frac{p_n}{kT} = \frac{10}{1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 1800} = 4.02 \cdot 10^{20} \text{ 1/м}^3.$$

Здесь предполагается, что характерная рабочая температура лежит в окрестности $T = 1800 \text{ К}$. Сравним предсказываемую теоретически плотность потока кремния со значением, наблюдаемым в эксперименте. В самом деле, по определению плотность потока вещества – это масса, переносимая за единицу времени через единицу площади

$$\vec{j} = \frac{dm}{dS dt} \vec{n} = \frac{dm}{dS dt} \frac{dl}{dl} \vec{n} = \rho \vec{v},$$

где \vec{n} – единичный вектор, направленный в сторону движения газа. Если перенос кремния определяется только диффузией, то в этом случае плотность потока кремния определяется только законом Фика

$$\vec{j}_k = -\rho D \nabla C = -D \nabla \rho_k.$$

Данная формула предсказывает весьма малое значение плотности потока кремния $j_k = 2.62 \cdot 10^{-5}$ кг/м²с (плотность кремния на зеркале расплава составляет $\rho_k = p_k \mu_k / RT = 1.87 \cdot 10^{-5}$ кг/м³). По оценкам технологов, занимающихся силицированием углеродных изделий, этого явно недостаточно, чтобы при имеющейся пористости материала за разумное время произвести полную закупорку пор. Однако в действительности при выполнении некоторых условий различные по форме изделия все же успешно насыщаются кремнием, и можно считать надежно установленным факт, согласно которому все неудачи в ходе технологического процесса определяются совсем другими факторами.

Более общее уравнение переноса примеси с учетом дополнительного конвективного транспорта газа как сплошной среды [5] записывается в виде

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) C = D \Delta C. \quad (2)$$

Здесь \vec{v} – макроскопическая скорость физически малого элемента газа. Главной проблемой при использовании уравнения (2) является вопрос о его замыкании. В рамках механики сплошных сред динамика флюида в общем случае определяется уравнением Навье – Стокса. В трехмерном случае это три нелинейных дифференциальных уравнения в частных производных для трех компонент скорости u_x , u_y и u_z . В эти уравнения входят еще две переменные – давление и плотность, которые тоже подлежат определению. В результате к системе уравнений добавляются еще два: закон сохранения массы в дифференциальной форме и уравнение состояния. Таким образом, итоговая система уравнений становится чрезвычайно громоздкой и трудноразрешимой.

В настоящее время прямое численное моделирование рассматриваемых процессов в полной трехмерной постановке весьма затруднительно даже с помощью высокопроизводительных суперкомпьютеров. Проблема заключается в том, чтобы попытаться сформулировать задачу в упрощенной постановке, так чтобы с одной стороны, учесть все физические факторы, важные для адекватного описания рассматриваемых процессов, а с другой стороны, избежать использования излишне сложных моделей, чтобы задача считалась за разумное время и не требовала бы излишних вычислительных мощностей.

Замкнем уравнение (2) законом Дарси. Будем иметь в виду модель, согласно которой газообразный кремний как некий флюид фильтруется через несущую газообразную среду, как через пористую матрицу. А именно, пары кремния движутся сквозь промежутки между точечными более тяжелыми, но, тем не менее, подвижными атомами аргона. В виду крайней разреженности несущей среды ожидается, что ее проницаемость будет иметь аномально большое значение. Обоснование этого шага и оценка проницаемости несущей среды представлены в работе [5].

$$\vec{v} = -\frac{\kappa}{\eta} \nabla p_k, \quad (3)$$

где κ – проницаемость среды. За счет испарения на зеркале расплава и поглощения на изделии имеем некий средний градиент плотности паров кремния. Так как давление идеального газа пропорционально плотности, это порождает градиент давления кремния, который может выступать в роли дополнительной движущей силы помимо

диффузии. Локальное значение парциального давления кремния согласно уравнению состояния идеального газа равно

$$p_k = n_k kT, \quad (4)$$

где $n_k = N_k/V$ – число атомов кремния в единице объема. Выразим n_k через массовую концентрацию C . По определению под массовой концентрацией будем понимать

$$C = \frac{m_k}{m_a + m_k} = \frac{\rho_k}{\rho_a + \rho_k}.$$

Плотность кремния выражается через относительную массовую концентрацию следующим образом

$$\rho_k = \frac{C}{1-C} \rho_a. \quad (5)$$

Перепишем уравнение (4) через плотность кремния и подставим туда соотношение (5):

$$p_k = \frac{RT}{\mu_k} \frac{C}{1-C} \rho_a.$$

Далее подставим этот результат в закон Дарси (3), пренебрегая пространственными неоднородностями плотности аргона и температуры. Также учтем тот факт, что концентрация кремния в действительности никогда не достигает единицы. Аргон или остаточный воздух присутствуют в реторте всегда, и их концентрация примерно на порядок превышает концентрацию паров кремния. В результате разложим множитель $C/(1-C)$ в ряд по малым C и ограничимся в итоговом выражении первым не исчезающим членом. Закон Дарси (3) приобретает вид

$$\vec{v} = -\frac{\kappa}{\eta} \nabla p_k = -\frac{\kappa}{\eta} \frac{RT \rho_a}{\mu_k} \nabla C. \quad (6)$$

Подставляя (6) в обобщенное уравнение переноса примеси (2), получаем окончательно уравнение

$$\frac{\partial C}{\partial t} - \frac{\kappa RT \rho_a}{\eta \mu_k} (\nabla C)^2 = D \Delta C. \quad (7)$$

Теперь это более сложное дифференциальное уравнение в частных производных с нелинейностью типа квадрата градиента концентрации.

3. Методика расчета

Уравнение (7) в частных производных совместно с краевыми условиями при обоснованных значениях параметров решалось численно методом конечных разностей в одномерной постановке. Схемы дискретизации первого порядка точности использовались для аппроксимации производных как по времени, так и по пространству. Первый порядок точности для пространственных производных с «разностями назад» использовался для обеспечения устойчивости разностной схемы. Программный код был реализован на языке программирования FORTRAN-90.

4. Результаты и обсуждение

Как видно из динамики концентрационного фронта, представленного для разных моментов времени на рис. 2, решение довольно быстро выходит на установившийся

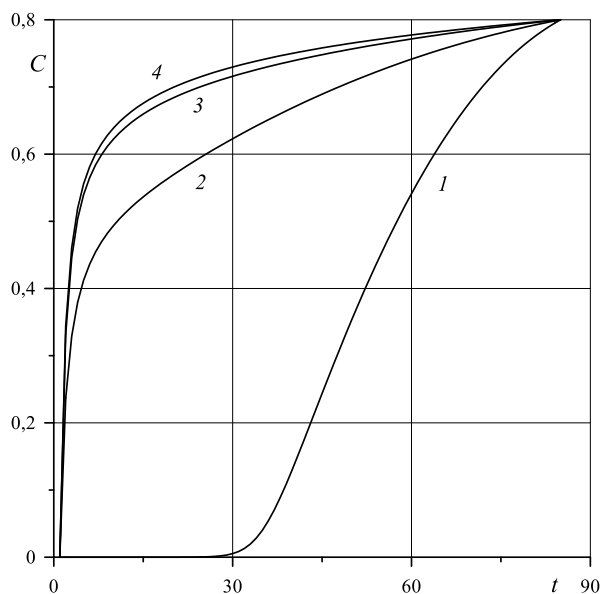


Рис. 2. Эволюция профиля концентрации в разные моменты времени:
 $1 - t = 0.004 \text{ с}$, $2 - t = 0.03 \text{ с}$, $3 - t = 0.3 \text{ с}$, $4 - t = 1.0 \text{ с}$

стационарный профиль в виде выпуклой функции. Время выхода на стационар составляет порядка 1 с. Наибольшая производная имеет место на левой границе расчетной области, т.е. на поверхности изделия. Отметим, что плотность потока пропорциональна величине производной в этой точке. Таким образом, учет независимого конвективного переноса паров кремния в дополнение к диффузионному транспорту позволяет объяснить наблюдаемую в экспериментах достаточно большую скорость высокотемпературного насыщения углеродного материала в условиях среднего вакуума в отличие от значения потока кремния, предсказываемого классическим уравнением диффузии.

5. Заключение

Полученное в ходе данного исследования численное решение обобщенного уравнения диффузии паров кремния при силицировании пористого углеродного материала показывает, что газообразный кремний быстро занимает практически весь объем рабочего пространства печи. Иными словами, нет необходимости максимально близко приближать тигли с расплавом кремния к поверхности изделия, как это предполагалось долгое время по результатам предшествующих теоретических работ.

Полученные результаты показывают, что сопротивление сторонних газов диффузионному потоку кремния, конечно, должно присутствовать в реальном технологическом процессе, но классическая диффузия является не единственным механизмом переноса. Обобщение модели с учетом дополнительного конвективного переноса позволило решить парадокс, согласно которому в эксперименте наблюдается аномально интенсивное насыщение пористого углеродного материала парами кремния в противовес более ранним теоретическим предсказаниям.

Список литературы

1. Крюков А. П., Левашов В. Ю. Молекулярно-динамическое моделирование процессов испарения и конденсации. Сравнение с кинетическими расчетами // Труды XIV

- Минского Международного форума по тепломассообмену. Минск, 2012. Т. 1, Ч. 2. С. 521–529.
2. Жаховский В. В., Анисимов С. И. Численное моделирование испарения жидкости методом молекулярной динамики // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1997. Т. 111. Вып. 4. С. 1328–1346.
 3. Крюков А. П., Левашов В. Ю., Павлюкевич Н. В. Коэффициент конденсации: определения, современные экспериментальные и расчетные данные, оценка величины // Инженерно-физический журнал. 2014. Т. 87. № 1. С. 229–237.
 4. Bond M., Struchtrup H. Mean evaporation and condensation coefficients based on energy dependent condensation probability // Physical Review E. 2004. Vol. 70. 061605 DOI: 10.1103/PhysRevE.70.061605
 5. Демин В. А., Демина Т. В., Марышев Б. С. Физико-математическая модель переноса газообразного кремния в ходе высокотемпературного силицирования углеродных композитных материалов // Вестник Пермского университета. Физика. 2022. № 3. Направлена в печать.

Ионный пограничный слой вблизи поверхности кристалла ниобата лития в процессе протонирования

В. А. Демин, М. И. Петухов, Р. С. Пономарев

Пермский государственный национальный исследовательский университет,
614990, Пермь, ул. Букирева, 15
email: demin@psu.ru

Работа посвящена теоретическому анализу ионного пограничного слоя, образующегося в процессе протонного обмена в бензойной кислоте, молекулы которой взаимодействуют с кристаллом ниобата лития. В результате поглощения подложкой ионов водорода, из нее инжектируются ионы лития и бензоат-ионы, которые перераспределяются в кислоте за счет диффузии. В работе построена математическая модель, описывающая данный процесс. Дополнительно учитывается эффект рекомбинации ионов в нейтральную молекулу бензоата лития. Результаты расчетов показывают возникновение экспоненциальных профилей концентрации как у иона лития, так и у бензоат-иона. При этом из-за существенной разницы в подвижности ионов возникает заметная разница между их концентрациями при одинаковых удалениях от подложки. Это приводит к возникновению неоднородного электрического поля. Модель учитывает электронейтральность системы.

Ключевые слова: протонный обмен; бензойная кислота; численное моделирование

Ionic boundary layer near the surface of a lithium niobate crystal during protonation

V. A. Demin, M. I. Petukhov, R. S. Ponomarev

Perm State University, 15 Bukireva St., 614990, Perm
email: demin@psu.ru

The work is devoted to a theoretical analysis of the ionic boundary layer formed in benzoic acid during proton exchange process near lithium niobate crystal. Result of interaction between substrate and acid is absorption of hydrogen ions by the first and injection of lithium ion and benzoate-ion in acid. Injected ions propagate in the acid due to diffusion. In this work, mathematical model that describes this process is formulated. The effect of ion recombination into a neutral lithium benzoate molecule is also taken into account. The calculation results show the occurrence of exponential concentration profiles for both types of ions. Due to a significant difference in the mobility of ions, a noticeable difference arises between their concentrations at equal distances from the substrate. It leads to the appearance of an inhomogeneous electric field. The model takes into account the electrical neutrality of the system.

Keywords: proton exchange; benzoic acid; numerical simulation

1. Введение

Протонный обмен на подложке, изготовленной из ниобата лития и погруженной в расплав бензойной кислоты при температуре порядка 500 К, является одним из наиболее активно используемых методов создания канальных волноводов. Общие принципы данного процесса были описаны несколько десятилетий назад [1, 2]: молекулы кристалла ниобата лития вступают в реакцию с молекулами бензойной кислоты. При протекании этой реакции подложка поглощает ионы водорода, отнятые от молекул кислоты после диссоциации. В результате с поверхности кристалла в кислоту инжектируются продукты реакции: положительно-заряженные ионы лития и отрицательно-заряженные бензоат-ионы.

Несмотря на большое количество работ, посвященных исследованию данной реакции, на данный момент нет полноценного фундаментального объяснения происходящих на межфазной границе «подложка – кислота» процессов. Распространение протонов внутри ниобата лития было описано в теоретической работе [3]. Впоследствии данный подход был расширен на случай анизотропии кристалла [4]. В свою очередь, процессы, протекаемые в кислоте при инжекции в нее продуктов упомянутой реакции, а именно, формирование ионного пограничного слоя и его возможные характеристики, до этого момента не описывались теоретически, что и является целью данной работы.

2. Математическая модель и метод решения

Для построения математической модели, воспользуемся классическим сплошнородным подходом, считая, что в реакции протонного обмена участвует большое количество молекул с характерным значением концентрации $\sim 10^{18} \text{ м}^{-3}$. Рассмотрим однородную поверхность раздела кристалл – кислота, положение которой выберем за начало координат ($x = 0$). С данной поверхности в кислоту инжектируются ионы лития и бензойной кислоты. Для простоты считаем, что задача является изотермической. Таким образом, поведение ионов после инжекции сведется к следующей системе уравнений [5]:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p + \eta \Delta \vec{v} + e(n_+ - n_-) \vec{E}, \quad \text{div} \vec{v} = 0,$$

$$\text{div}(\varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}) = e(n_+ - n_-), \quad \vec{E} = -\nabla \varphi,$$

$$\frac{\partial n_+}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) n_+ = D_+ \Delta n_+ - \nabla(k_+ \vec{E} n_+) - k_r n_+ n_-,$$

$$\frac{\partial n_-}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) n_- = D_- \Delta n_- + \nabla(k_- \vec{E} n_-) - k_r n_+ n_-,$$

где \vec{v} , p , \vec{E} , φ , n_+ , n_- – поля скорости, давления, напряженности электрического поля, потенциала и концентрации положительно- и отрицательно заряженных ионов, η , ρ , ε_0 , ε – динамическая вязкость, плотность, электрическая постоянная и диэлектрическая проницаемость, которая принимала модельное значение, равное единице. Коэффициенты e , D_+ , D_- , k_+ , k_- , k_r отвечают элементарному заряду, коэффициентам диффузии и подвижности соответствующих зарядов, а также коэффициенту рекомбинации.

Будем искать стационарное решение приведенной системы уравнений, предполагая, что в первом приближении можно пренебречь конвективными слагаемыми. Поэтому уравнения можно преобразовать:

$$p' = -e(n_+ - n_-)\varphi', \quad \varepsilon_0\varphi'' = -e(n_+ - n_-) \quad (1)$$

$$D_+n_+'' + k_+(\varphi''n_+ + \varphi'n_+') - k_Rn_+n_- = 0, \quad D_-n_-'' - k_-(\varphi''n_- + \varphi'n_-') - k_Rn_+n_- = 0. \quad (2)$$

Штрихи обозначают производную по координате x .

В текущей задаче положение правой границы должно определяться пределами существования образуемого пограничного слоя. Пусть толщина слоя задается величиной h . Все потоки на данном удалении от кристалла должны обращаться в ноль, поэтому можно сформулировать следующие граничные условия:

$$x=0: \quad n_+ = \bar{n}, \quad n_- = n, \quad \varphi = 0, \quad p = 0, \quad (3)$$

$$x=h: \quad n_+' = 0, \quad n_-' = 0, \quad \varphi' = 0. \quad (4)$$

Помимо граничных условий необходимо ввести дополнительное условие сохранения заряда, отвечающее общей электронейтральности пограничного слоя:

$$\int_0^h n_+ dx = \int_0^h n_- dx.$$

Это условие связано с равенством потоков инжектируемых ионов:

$$x=0: \quad D_+n_+' + k_+\varphi'n_+ = D_-n_-' - k_-\varphi'n_-. \quad (5)$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (1)–(2) совместно с граничными условиями (3)–(4) и законом сохранения (5) решалась численно с использованием программы, написанной на языке программирования Fortran-90. Для решения использовался метод стрельбы в комбинации с методом Ньютона при решении нелинейных уравнений.

Используемые параметры принимали следующие значения: $h = 1.8 \cdot 10^{-6}$ м, $k_+ = 3 \cdot 10^{-8}$ м²/с·В, $k_- = 10^{-9}$ м²/с·В, $D_+ = 10^{-8}$ м²/с, $D_- = 10^{-10}$ м²/с, $k_R = 3 \cdot 10^{-15}$ м³/с. Величина h выбиралась из соображений пределов существования пограничного слоя, а именно, она отвечала такой толщине, при которой существуют ионы двух типов. В свою очередь, значение \bar{n} определялось в ходе подбора методом стрельбы при выполнении граничного условия (5).

3. Результаты расчетов

Результаты, полученные в ходе численного моделирования, показывают формирование стационарного ионного пограничного слоя. Профили концентрации положительных и отрицательных ионов, а также профили электрического потенциала представлены на рисунке. Оба профиля концентрации принимают экспоненциальную форму, однако большая разница в кинетике ионов приводит к тому, что концентрация ионов лития меняется не так ощутимо, как концентрация ионов бензойной кислоты.

Уменьшение величины n отвечает случаю, когда вблизи кристалла начинают накапливаться тяжелые молекулы бензоата лития, что приводит к уменьшению интенсивности процесса протонирования.

Как показывает рисунок (б), в ответ на разницу в распределениях концентраций ионов, вдоль всего пограничного слоя формируется неоднородное электрическое поле.

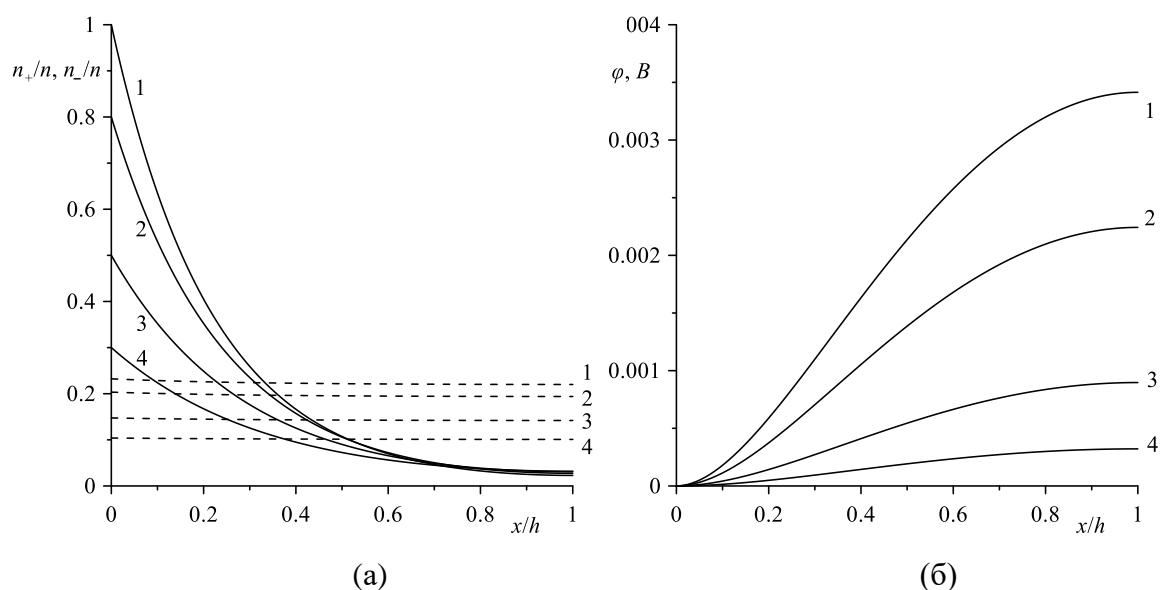


Рисунок. Профили концентрации отрицательных (сплошные линии) и положительных (штриховые линии) ионов (а) и потенциала (б) для разных значений концентрации инжектируемых ионов: 1 – $n = 10^{18} \text{ 1/м}^3$, 2 – $n = 0.8 \cdot 10^{18} \text{ 1/м}^3$, 3 – $n = 0.5 \cdot 10^{18} \text{ 1/м}^3$, 4 – $n = 0.3 \cdot 10^{18} \text{ 1/м}^3$

Уменьшение концентрации на границе приводит к уменьшению разницы концентраций, что в итоге также уменьшает интенсивность создаваемого электрического поля.

4. Выводы

Как показали результаты численного моделирования, при протонировании подложки, изготовленной из ниобата лития, вблизи нее возникает ионный пограничный слой, толщина которого может достигать величины $\sim 10^{-7} \div 10^{-6} \text{ м}$. Сопутствующее электрическое поле, формируемое в данном процессе, характеризуется разностью потенциалов $\sim 10^{-3} \text{ В}$.

Список литературы

1. Jackel J. L., Rice C. E., Veselka J. J. Proton exchange for high-index waveguides in LiNbO₃ // Applied Physics Letters. 1982. Vol. 41 (7). 607. DOI: 10.1063/1.93615
2. Jackel J. L. Proton exchange: past, present, and future // Proceedings SPIE. Boston, MA, United States, 1991. Vol. 1583. Integrated Optical Circuits. P. 54–63. DOI: 10.1117/12.50875
3. Vohra S. T., Mickelson A. R., Asher S. E. Diffusion characteristics and waveguiding properties of proton-exchanged and annealed LiNbO₃ channel waveguides // Journal of Applied Physics. 1989. Vol. 66. P. 5161–5174. DOI: 10.1063/1.343751
4. Демин В. А., Петухов М. И., Пономарев Р. С., Топова А. В. О роли анизотропии и нелинейных диффузионных эффектов при формировании волноводов в кристалле ниобата лития // Вестник Пермского университета. Физика. 2021. Вып. 1. С. 49–58. DOI: 10.17072/1994-3598-2021-1-49-58
5. Pontiga F., Castellanos A. Physical mechanisms of instability in a liquid layer subjected to an electric field and a thermal gradient // Physics of Fluids. 1994. Vol. 6. 1684. DOI: 10.1063/1.868231

Колебательные режимы концентрационной конвекции в капле, поглощающей ПАВ из его однородного раствора

М. О. Денисова^{a,b}, К. Г. Костарев^{a,b}

^a Пермский национальный исследовательский политехнический университет, 614990, Пермь, Комсомольский пр. 29

^b Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1
email: mod@icmm.ru

Экспериментально исследован процесс поглощения каплей поверхностно-активного вещества из окружающего однородного раствора. Рассмотрен вариант, при котором установление равенства химических потенциалов между каплей и окружающей средой предполагает многократное превышение содержания ПАВ в капле по сравнению с ее окружением, что достигается диффузией ПАВ сквозь межфазную границу в направлении нарастания ее концентрации. В результате, благодаря гравитации в капле формируется значительный градиент концентрации, что приводит к развитию конвекции Марангони, несмотря на отсутствие внешнего градиента. Визуализация структуры течений и полей концентрации в капле и окружающей среде позволила проследить их эволюцию и выявить условия возникновения колебательного режима массообмена, определить зависимости периода и продолжительности осцилляций течения, изменения минимальной концентрации ПАВ и его перепада в капле со временем. Продемонстрирована перспективность использования подобной капли как концентратора реагентов для поведения химических реакций.

Ключевые слова: капля; диффузия; массоперенос

Oscillatory regimes of solutal convection in a drop that absorbs a surfactant from its homogeneous solution

M. O. Denisova^{a,b}, K. G. Kostarev^{a,b}

^a Perm National Research Polytechnic University, 29 Komsomolsky Pr., 614990, Perm

^b Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, 1 Akademika Koroleva St., 614013, Perm
email: mod@icmm.ru

The process of absorption by a drop of a surfactant from a surrounding homogeneous solution has been experimentally studied. In the considered case the establishment of chemical potentials equality between the drop and the environment implies a multiple excess of the surfactant percentage in the drop compared to its environment, which is achieved by surfactant diffusion through

the interface in the direction of increasing its concentration. As a result, due to gravity, a significant concentration gradient is formed in the drop, which leads to the development of Marangoni convection, despite the absence of an external gradient. Visualization of the flow structure and concentration fields in the drop and the environment made it possible to trace their evolution and identify the conditions for the occurrence of an oscillatory regime of mass transfer, to determine the dependences of the period and duration of flow oscillations, changes in the minimum surfactant concentration and its difference in the drop over time. The prospect of using such a droplet as a concentrator of reactants for carrying out the chemical reactions is demonstrated.

Keywords: drop; diffusion; mass transfer

Один из нетривиальных эффектов в системе жидкостей с межфазной границей и диффундирующим через нее реагентом состоит в том, что направление и интенсивность диффузии определяется не трансграничной разностью концентраций, а разностью химических потенциалов, обусловленных энергией, поглощаемой или выделяемой контактирующими объемами жидкостей при изменении концентрации реагента. Если диффузия реагента через межфазную границу не сопровождается необратимой реакцией или фазовым переходом, то изменение химического потенциала оказывается связанным в основном с процессом перестройки структуры жидкой смеси за счет создания/разрушения сольватов – соединений, возникающих за счет образования водородных и электростатических связей между молекулами/ионами растворяемого реагента и молекулами базовой жидкостей. Энергия сольватации диффундирующего реагента, как правило, значительно различается для каждой из контактирующих базовых (взаимно нерастворимых) жидкостей. Как результат, в подобных системах равенство химических потенциалов наступает при существенно разных концентрациях реагента по обе стороны межфазной границы [1], а процесс диффузии реагента через границу контакта возможен в направлении нарастания его концентрации.

Если достижение равенства химических потенциалов в системе поглощающая капля – окружающая среда предполагает опережающий рост концентрации реагента в капле, то такая капля является его концентратором и может играть роль эффективного химического реактора (при изначальном добавлении в каплю соответствующих реагентов). Построение математической модели этого перспективного «капельного» реактора является весьма сложной процедурой. Как результат, построение подобной модели предполагает ряд упрощений из-за одновременного протекания диффузии реагента и химической реакции с возможным дополнением – развитием концентрационной конвекции в объеме капли и конвекции Марангони на ее поверхности. Соответствующий эксперимент с каплей позволит получить подробную информацию о структуре и эволюции течений и полей концентрации реагента и продуктов реакции, а также оценить влияние тех или иных допущений. Получению этой информации мешает сферическая форма капли, однако это препятствие можно обойти, если придать капле форму цилиндра с параллельными торцами, что позволяет использовать оптические методы [2].

В нашем эксперименте для создания капли выбрана дистиллированная вода. В качестве окружающей среды использована смесь бензола и хлорбензола с диффундирующим компонентом – уксусной кислотой. В опытах использованы капли в виде короткого горизонтального цилиндра, зажато между стеклянными стенками вертикальной ячейки Хеле – Шоу. Диаметр капли-цилиндра варьировался от 5 до 9 мм, толщина ячейки 1.2 мм. Для визуализации полей концентрации выбран интерферометр Физо.

Визуализация процесса поглощения капель воды кислоты из смеси бензолов продемонстрировала наличие двух режимов массообмена. Первый из них наблюдался при малых начальных концентрациях кислоты ($C_0 \leq 0.4$ моль/л) и представлял собой медленное однородное по всем направлениям проникновение кислоты в каплю. Так как плотность водного раствора кислоты возрастала с его концентрацией, то возникавшие растворы кислоты стекали вдоль боковых границ капли в ее нижнюю часть, создавая здесь застойную зону с устойчивой стратификацией по концентрации (рис. 1а). При $C_0 \geq 0.5$ моль/л монотонное поглощение кислоты прерывалось «вспышками» конвекции Марангони, связанными с достижением перепадом концентрации на поверхности капли порогового значения для развития капиллярного движения (рис. 1б–в).

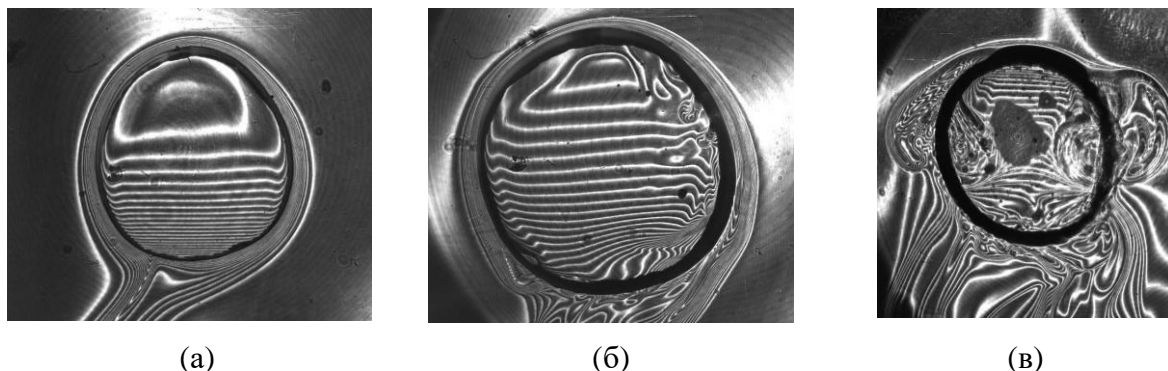


Рис. 1. Структура поля концентрации кислоты в капле для различных C_0 моль/л, и временах t , с: (а) – 0.4 (1086); (б) – 0.7 (322); (в) – 1.0 (15)

Период осцилляций составлял всего несколько секунд. Продолжительность колебательного режима, напротив, составляла несколько десятков минут (рис.2), т.к. равенство химических потенциалов наступало при содержании кислоты в капле примерно в десять раз выше, чем в окружающем растворе.

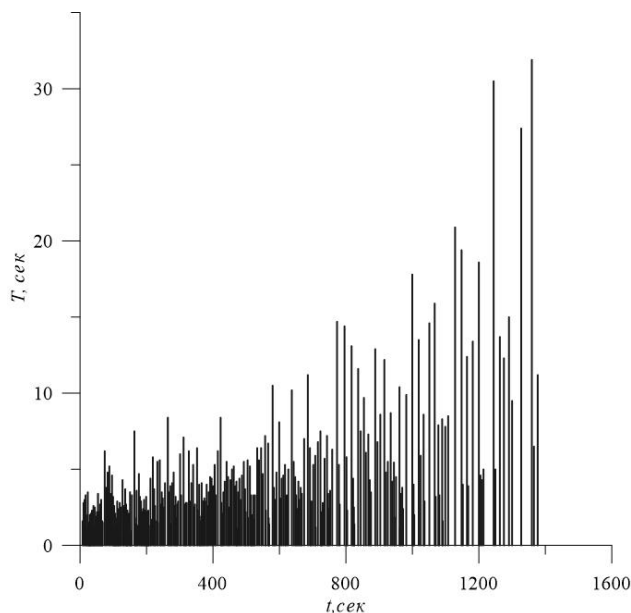


Рис. 2. Период капиллярного движения на поверхности капли, поглощающей уксусную кислоту $C_0 = 1.0$ моль/л ($D_0 = 8.2$ мм)

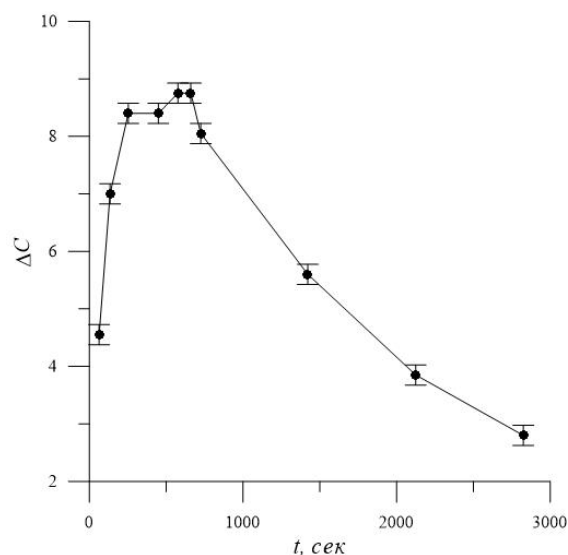


Рис. 3. Вертикальный перепад концентрации кислоты в поглощающей капле от времени; $C_0 = 0.5$ моль/л ($D_0 = 7.7$ мм)

Отметим немонотонное поведение вертикального перепада кислоты в капле (рис. 3), что может быть объяснено уменьшением скорости диффузии кислоты в воду по мере снижения разности химических потенциалов.

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта РНФ № 19-11-00133-П.

Список литературы

1. *Harkins W. D., McLaughlin H.* Monomolecular between liquids: butyric acid between water and hexane, and acetic aci between water and benzene // *Journal of the American Chemical Society*. 1925. Vol. 47. P. 1610–1613. DOI: 10.1021/JA01683A015
2. *Костарев К. Г.* Исследование экстракции поверхностно-активного компонента бинарной жидкости из модельных («цилиндрических») капель // *Коллоидный журнал*. 2005. Т.67. № 3. С. 357–262. DOI: 10.1007/s10595-005-0099-z

Волны-убийцы в Мировом океане в период с 2005 по 2021 год: статистика и данные реанализа

Е. Г. Диденкулова^{a,b}, И. И. Диденкулова^b

^a Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», 603155, Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, 25/12
email: edidenkulova@hse.ru

^b Институт прикладной физики РАН, 603950, Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46
email: didenkulova@gmail.com

В работе исследуются инциденты, связанные с волнами-убийцами в Мировом океане за 17 лет: в период с 2005 по 2021 год. В базу данных волн-убийц вошли 429 события. Рассматриваемые волны-убийцы не являются результатом натурного измерения, но их описания взяты из открытых источников информации: новостных сводок, научных статей и каталогов. Все события привели к повреждению судов или прибрежных/морских сооружений и/или к человеческим жертвам. Был проведен анализ волн-убийц на основе их характеристик, взятых из описаний событий (включая локацию, глубину воды, повреждения). Также выполнен анализ параметров волн, взятых из климатического реанализа ERA5. Определены наиболее вероятные параметры фонового волнения во время возникновения волны-убийцы для каждого события.

Ключевые слова: волны-убийцы; реанализ; каталог; ERA5

Freak waves in the World Ocean from 2005 to 2021: statistics and reanalysis

E. G. Didenkulova^a, I. I. Didenkulova^b

^a National Research University Higher School of Economics, 25/12 Bolshaya Pecherskaya St., 603155, Nizhny Novgorod
email: edidenkulova@hse.ru

^b Institute of Applied Physics RAS, 46 Ulyanov St., 603950, Nizhny Novgorod
didenkulova@gmail.com

The work examines incidents associated with freak waves in the World Ocean for 17 years: from 2005 to 2021. The freak wave database includes 429 events. The considered rogue waves are not measured in situ data, but their descriptions, which have been found in the mass media sources and scientific articles. All of them resulted in ship or coastal/offshore structure damage and/or human losses. The analysis based on their characteristics taken from the descriptions of the events (including locations, water depth, damages) is carried out. The analysis of wave parameters taken from the climate reanalysis ERA5 is performed. Thus, the most probable background wave parameters in time of freak event for each freak wave event are determined.

Keywords: freak waves; reanalysis; catalogue; ERA5

1. Введение

Настоящий бум исследований аномально больших волн в океане произошел после получения первых инструментальных данных волн-убийц 1 января 1995 года в результате удара 26-метровой волны нефтяной платформой Дропнер в Северном море, получившей название «Новогодняя волна». Это способствовало развитию исследования волн-убийц по всевозможным направлениям: они изучались в натурных измерениях, вычислительных экспериментах, строились физические и математические модели.

Большое количество происшествий, связанных с волнами-убийцами (повреждение и затопление судов, повреждения береговых сооружений, шельфовой инфраструктуры, многочисленные человеческие жертвы), послужило импульсом к созданию каталогов волн-убийц по типу каталогов других опасных явлений (таких как цунами [1], штормовые нагоны [2], внутренние волны [3]).

Первый каталог волн-убийц был опубликован еще в 2006, где были собраны описания случаев аномально больших волн в океане в 2005 году [4]. В дальнейшем был опубликован еще ряд сводок, содержащих случаи волн-убийц за различные временные периоды или относящиеся к конкретным акваториям [5–8].

В рамках настоящей работы произведено объединение существующих каталогов волн-убийц в единую базу данных. Выполнен анализ волн-убийц на основе их характеристик, взятых из описаний событий (включая локацию, глубину воды, повреждения). Также выполнен анализ параметров волн, взятых из климатического реанализа ERA5. Определены наиболее вероятные параметры фонового волнения во время возникновения волны-убийцы для каждого события.

2. Статистика волн-убийц по данным описаний событий

Полный список проанализированных событий, которые можно рассматривать как волны-убийцы, можно найти по ссылке <https://www.ipfran.ru/institute/structure/240605316/catalogue-of-rogue-waves>. Рассматриваемый временной период – с 2005 по 2021 год. В основном эти события не являются натурными измерениями, а основаны на сообщениях очевидцев, взятых из средств массовой информации, различных хроник и сборников, научных статей. Всего в период с 2005 г. по 2021 г. в базу данных вошло 429 событий. По каждому событию представлена следующая информация: дата, локация и координаты, описание, нанесенный ущерб, ссылка на источник. С помощью батиметрии GEBCO 2021 и сервиса Multimap service были определены глубины мест происшествий. Все события были нанесены на карту (рис. 1), их география оказалась весьма обширной. Наибольшее количество точек на карте сконцентрировано ближе к берегам и морским границам стран, потому что вероятность стать свидетелем волны-убийцы в этих регионах больше, чем в открытом океане. В следующих районах скопление точек, соответствующих происшествиям с волнами-убийцами, оказалось наибольшим: восточное и западное побережья США, побережья Ирландии и Соединенного Королевства, Средиземное море, Южная Африка, южное и юго-восточное побережья Австралии, Новая Зеландия.

Все события были разделены на глубоководные (глубина воды более 50 метров), мелководные (глубина воды менее 50 метров), а также был выделен класс береговых волн (внезапное затопление плоских пляжей и аномальный всплеск в результате удара волны о скалы или вертикальные конструкции). В банке данных оказалось 81 событие (19%), произошедшее на глубокой воде, 124 (29%) – на мелководье, 224 события

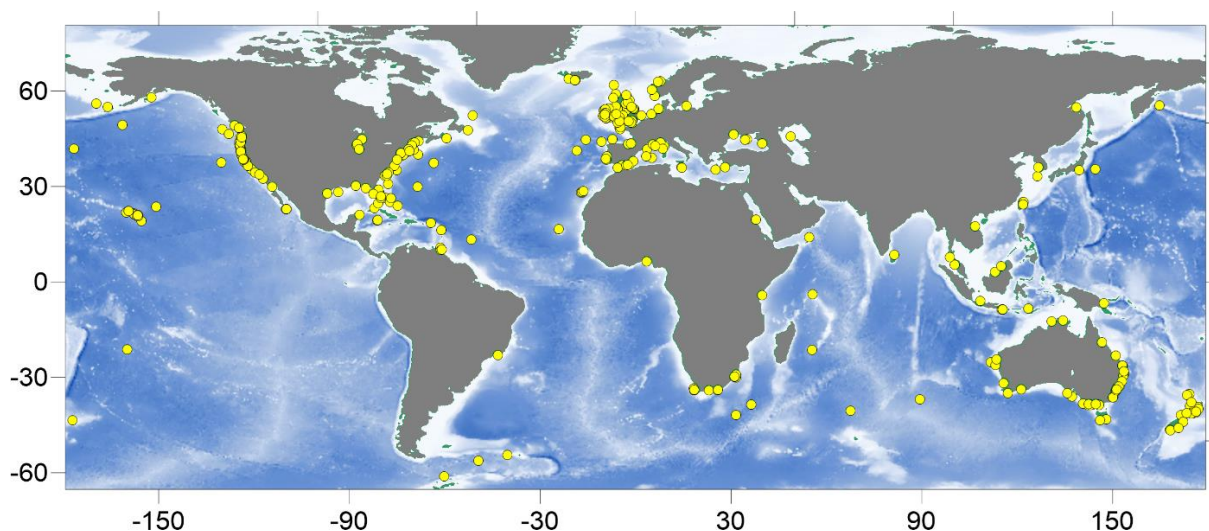


Рис. 1. Карта происшествий с волнами-убийцами с 2005 по 2021 год

(52%) – на берегу, в том числе 82 (19%) – на плоских пляжах и 142 (33%) – на высоких скалах и прибрежных конструкциях. Еще один критерий, который объединяет все события – это нанесенный ущерб. События из объединенного каталога привели к травмированию 575 людей и гибели 658 человек, повреждению 102 судов и затоплению 55 судов, как небольших рыболовецких лодок, так и больших кораблей.

3. Характеристики волн-убийц по данным реанализа

Помимо параметров волн-убийц, взятых из описаний событий, был выполнен анализ характеристик морских волн с использованием данных атмосферного реанализа глобального климата ECMWF пятого поколения ERA5. Высоты волн-убийц (H_{fr}) определялись как максимальные высоты индивидуальных волн за данный интервал времени в данном регионе. Значительные высоты волн (H_s) были получены по данным реанализа как средние значения высот одной трети самых высоких поверхностных волн, порожденных ветрами и связанных с зыбью. Расчетные отношения H_{fr}/H_s для всех 429 событий лежат в диапазоне от 1.8 до 2. Принимая погрешность в 10%, можно утверждать, что анализируемые события удовлетворяют амплитудному критерию волн-убийц [9].

По данным реанализа значительные высоты волн варьировались от 0.5 до 11.2 м, пиковый период – от 3.1 до 15.4 с, максимальная высота отдельной волны (H_{fr}) – от 1 до 20.9 м.

Крутизна волн может быть проанализирована путем построения зависимости значительной высоты волны от пикового периода [10]. На рис. 2 показана зависимость значительных высот волн от периодов волн (а) и индивидуальных максимальных высот волн от периодов волн (б) для каждого события. Черная линия соответствует максимальной крутизне волны Стокса $kH/2 = 0.44$ (k – волновое число, H – высота волны), после которой начинается необратимый процесс обрушения волны [11]. Облако точек, образованное волнами-убийцами, сгущается ближе к кривой максимальной крутизны. Однако большая часть облака попадает в пределы значений H_s из первого графика. Волны-убийцы из базы данных либо не опрокидывались, либо имели максимальную крутизну волны Стокса.

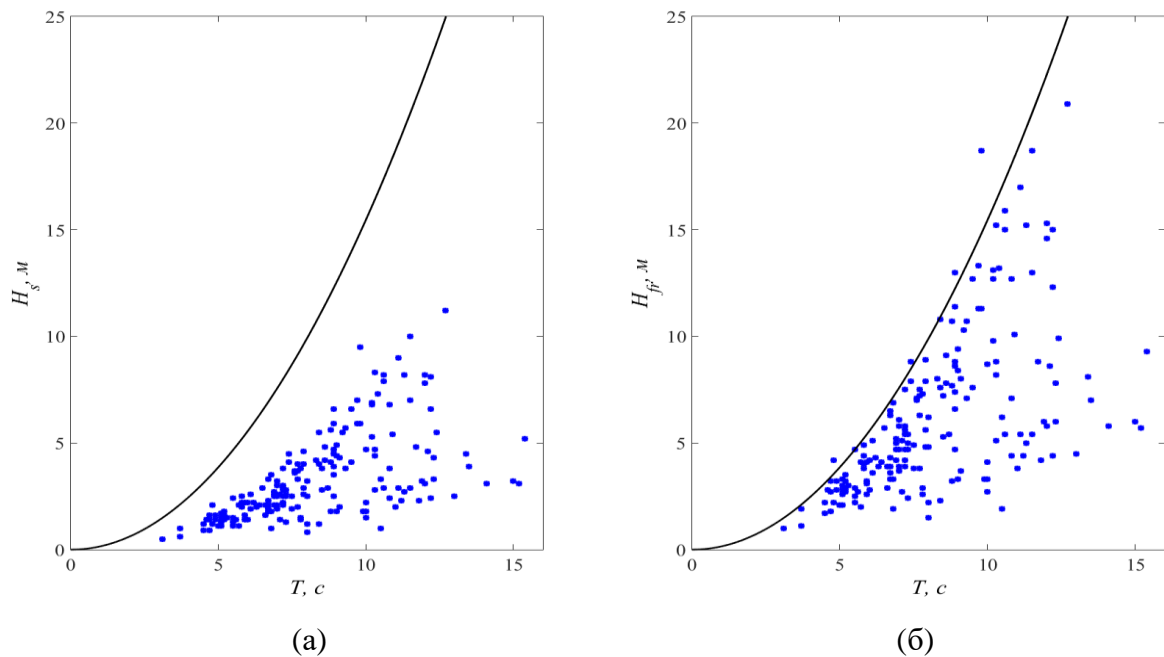


Рис. 2. (а) Значительная высота волнения по отношению к периоду волн, (б) индивидуальная максимальная высота волны по отношению к периоду волн. Черная линия соответствует кривой максимальной крутизны

Одним из наиболее важных вопросов, связанных с волнами-убийцами, остается причина их появления. В настоящее время считается, что модуляционная неустойчивость является основным механизмом формирования волн-убийц в глубоководных районах. Ближе к побережью роль модуляционной неустойчивости должна уменьшаться [9] и должны преобладать другие механизмы, такие как геометрическая фокусировка или взаимодействия волн и течений. Используя данные, полученные из реанализа ERA5, было проверено, удовлетворяют ли выбранные события критерию модуляционной неустойчивости $kh > 1.363$, где h – глубина воды, k – волновое число [12]. Зависимость kh от h представлена на рис. 3 для волн-убийц, произошедших на промежуточной глубине. Точки, расположенные правее пунктирной линии, соответствуют модуляционно неустойчивым волнам. Показано, что по рассмотренным данным событий волн-убийц критерий модуляционной неустойчивости хорошо применим для глубин более 20 м.

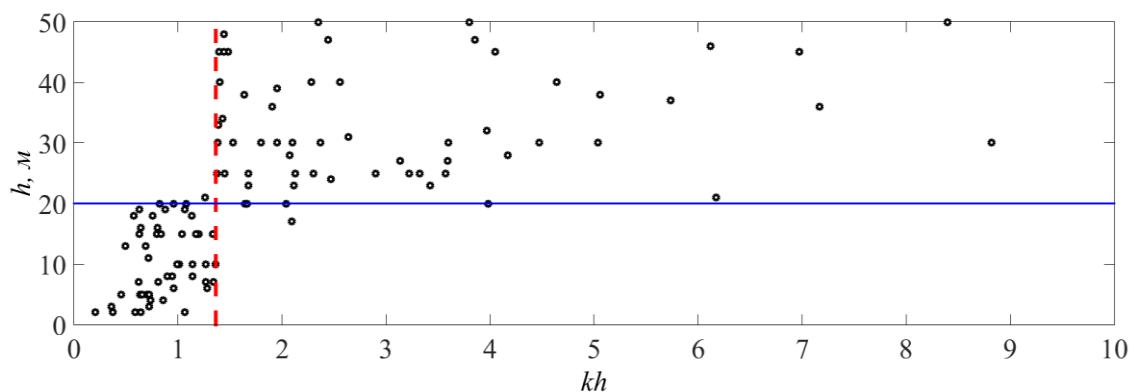


Рис. 3. Зависимость параметра kh от глубины воды

4. Благодарности

Работа выполнена при поддержке РНФ (грант № 21-77-00003). Авторы благодарны И. П. Медведеву за предоставление данных реанализа.

Список литературы

1. *Maramai A., Brizuela B., Graziani L.* The euro-mediterranean tsunami catalogue // *Annals of geophysics*. 2014. Vol. 57. N. 4. S0435. DOI: 10.4401/ag-6437
2. *Rabinovich A. B., Sokolova S. E.* On organizing a catalogue of storm surges for the Sea of Japan // *Natural Hazards*. 1992. Vol. 5. P. 319–325. DOI: 10.1007/BF00125234
3. *Енифанова А. С., Рыбин А. В., Моисеенко Т. Е., Куркина О. Е., Куркин А. А., Тюгин Д. Ю.* База данных наблюдений внутренних волн в Мировом океане // *Морской гидрофизический журнал*. 2019. Т. 35. № 4. С. 395–403. DOI: 10.22449/0233-7584-2019-4-395-403
4. *Didenkulova I., Slunyaev A., Pelinovsky E., Kharif Ch.* Freak waves in 2005 // *Natural Hazards and Earth System Sciences*. 2006. Vol. 6. P. 1007–1015. DOI: 10.5194/nhess-6-1007-2006
5. *Liu P. C.* A chronology of freak wave encounters // *Geofizika*. 2007. Vol. 24. P. 57–70.
6. *Nikolchina I., Didenkulova I.* Catalogue of rogue waves reported in media in 2006–2010 // *Natural Hazards*. 2012. Vol. 61. P. 989–1006. DOI: 10.1007/s11069-011-9945-y
7. *O'Brien L., Renzi E., Dudley J. M., Clancy C., Dias F.* Extreme wave events in Ireland: 2012 – 2016 // *Natural Hazards and Earth System Sciences*. 2018. Vol. 18. P. 729–758. DOI: 10.5194/nhess-18-729-2018
8. *Didenkulova E.* Catalogue of rogue waves occurred in the World Ocean from 2011 to 2018 reported by mass media sources // *Ocean & Coastal Management*. 2020. Vol. 188. 105076. DOI: 10.1016/j.ocecoaman.2019.105076
9. *Kharif C., Pelinovsky E., Slunyaev A.* Rogue waves in the ocean. Berlin: Springer-Verlag, 2009. 216 p.
10. *Christou M., Ewans K.* Field Measurements of rogue water waves // *Journal of Physical Oceanography*. 2014. Vol. 44. P. 2317–2335. DOI: 10.1175/JPO-D-13-0199.1
11. *Toffoli A., Waseda T., Houtani H., Cavaleri L., Greaves D., Onorato M.* Rogue waves in opposing currents: an experimental study on deterministic and stochastic wave trains // *Journal of Fluid Mechanics*. 2015. Vol. 769. P. 277 – 297. DOI: 10.1017/jfm.2015.132
12. *Osborne A.* Nonlinear ocean waves and the inverse scattering transform. San Diego: Academic Press, 2010. 944 p.

Результаты изучения устойчивости границы между легкой сыпучей средой и жидкостью во вращающемся горизонтальном цилиндре

В. В. Дьякова^а, Д. А. Полежаев^б

^а Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
614990, Пермь, ул. Комсомольский пр., 29
email: dyakova@pspu.ru

^б Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет,
Лаборатория вибрационной гидромеханики,
614990, Пермь, ул. Сибирская, 24
email: polezhaev@pspu.ru

Экспериментально изучается устойчивость поверхности цилиндрического слоя легкой сыпучей среды во вращающемся горизонтальном цилиндре с жидкостью. Обнаружено, что при медленном вращении изначально осесимметричный цилиндрический слой сыпучей среды теряет устойчивость к появлению рельефа в виде регулярных холмов. Это происходит после того, как частицы поверхностного слоя сыпучей среды переходят во взвешенное состояние и начинают совершать азимутальные колебания относительно вращающейся жидкости. Относительное движение гидродинамических сред провоцирует развитие неустойчивости Кельвина – Гельмгольца и возникновение рельефа. Показано, что азимутальная длина холмов определяется безразмерным ускорением, равным отношению ускорения свободного падения и центробежного ускорения, и относительной плотностью частиц.

Ключевые слова: сыпучая среда; жидкость; вращение; неустойчивость

Results of experimental study of the stability of the interface between a light granular medium and a fluid in a rotating horizontal cylinder

V. V. Dyakova^a, D. A. Polezhaev^b

^a Perm National Research Polytechnic University, 29 Komsomolsky Pr., 614990, Perm
email: dyakova@pspu.ru

^b Perm State Humanitarian Pedagogical University,
Laboratory of Vibrational Hydromechanics, 24 Sibirskaya St., 614990, Perm
email: polezhaev@pspu.ru

The stability of the surface of a cylindrical layer of a light granular medium in a rotating horizontal cylinder with liquid is experimentally studied. It is found that initially axisymmetric cylindrical layer of a granular medium is unstable to the appearance of relief in the form of regular hills at slow rotation. The novel

experimental effect appears after the granules at the interface become suspended and begin to oscillate in an azimuthal direction relative to the rotating fluid. The relative motion of hydrodynamic media provokes the onset of the Kelvin – Helmholtz instability and the appearance of the relief. It is shown that the azimuthal length of the hills is determined by the dimensionless acceleration equal to the ratio of the acceleration of gravity and centrifugal acceleration, and the relative density of the granules.

Keywords: granular medium; fluid; rotation; instability

В быстро вращающемся горизонтальном цилиндре с жидкостью частицы тяжелой сыпучей среды образуют кольцевой слой вблизи цилиндрической стенки. Наблюдения показывают, что в случае, когда отношение плотностей частиц и жидкости мало отличается от единицы, поверхность сыпучей среды может испытывать неустойчивость к возникновению волн Кельвина – Гельмгольца [1]. Возникновению неустойчивости предшествует ожижение поверхности сыпучей среды, которое начинается в окрестности верхней точки сыпучей среды при равенстве силы тяжести и центробежной силы инерции или, другими словами, когда

$$\Gamma \equiv \frac{g}{(2\pi f)^2 a} = 1, \quad (1)$$

здесь g – ускорение свободного падения, f – скорость вращения цилиндра, a – расстояние от оси вращения до межфазной границы. В экспериментах [1] неустойчивость наблюдалась только при $\Gamma > 1$.

В настоящей работе продолжается изучение устойчивости границы между жидкостью и сыпучей средой во вращающемся цилиндре, но для случая, когда плотность частиц сыпучей среды меньше плотности жидкости.

Эксперименты проведены в прозрачном цилиндре с радиусом $R = 70$ мм и длиной $L = 4.4$ мм (радиальной ячейке Хеле – Шоу). В качестве рабочей жидкости используются водные растворы хлорида натрия и йодида натрия. Варьирование концентрации соли позволяет изменять плотность жидкости ρ_l в диапазоне от 1.11 г/см³ до 1.44 г/см³. В качестве сыпучей среды используются сферические пластиковые частицы плотностью $\rho_s = 1.06$ г/см³, просеянные между ситами с размером ячеек 0.56 мм и 0.8 мм: средний диаметр частиц равен $d = 0.72 \pm 0.06$ мм.

В быстро вращающемся цилиндре с маловязкой жидкостью частицы легкой сыпучей среды образуют осесимметричную колонну в центре цилиндра. При медленном вращении цилиндра поверхность сыпучей среды ожижается под действием подъемной силы, и частицы поверхностного слоя становятся способными перемещаться вдоль межфазной границы. Измерения показывают, что частицы на поверхности сыпучей среды совершают колебательное азимутальное движение относительно вращающейся жидкости. Различие между скоростями движения двух гидродинамических сред может провоцировать возникновение неустойчивости Кельвина – Гельмгольца.

На рисунке приведены фотографии наблюдаемых в эксперименте изменений формы поверхности сыпучей среды. Анализ фотографий показывает, что холмы на поверхности сыпучей среды наиболее отчетливые в правой части (около опускающейся стенки цилиндра). Около поднимающейся стенки цилиндра (левая половина) холмы уменьшаются в размерах или полностью исчезают (рисунк (а)). При очень медленном вращении, когда большое количество частиц находится во взвешенном состоянии в течение полного оборота цилиндра, холмы наблюдаются на всей поверхности сыпучей среды (рисунк (б) и (в)). Также можно заметить, что размеры (длина и высота) холмов

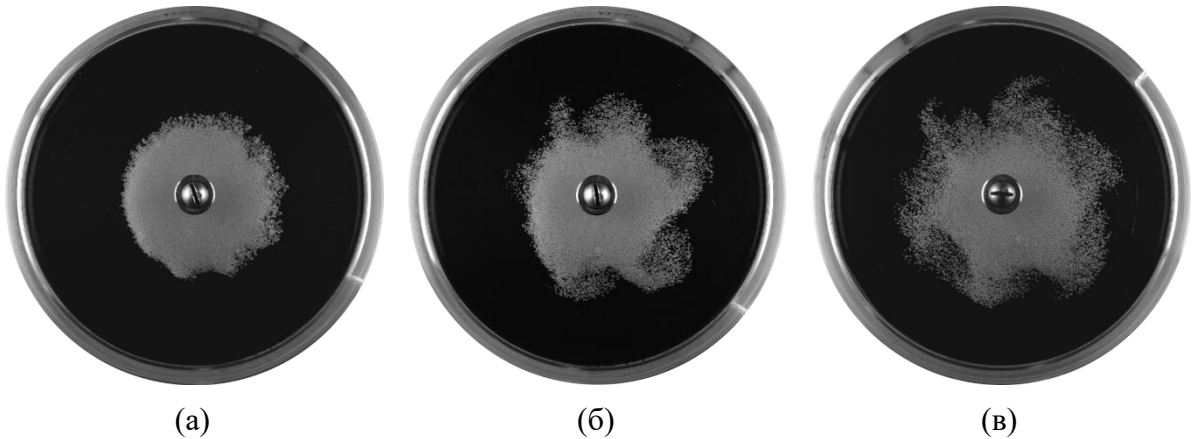


Рисунок. Фотографии границы между сыпучей средой и жидкостью при различных скоростях вращения: $f = 1.90, 1.50$ и 1.30 об/с (а – в); $\rho_l = 1.44$ г/см³. Цилиндр вращается по часовой стрелке

увеличиваются при уменьшении скорости вращения. При очень медленном вращении холмы разрушаются, так как все частицы переходят во взвешенное состояние.

Сравнение результатов настоящего исследования с данными об устойчивости поверхности тяжелой сыпучей среды из работы [1] указывает на общие закономерности наблюдаемых явлений. Во-первых, в обоих случаях холмы на межфазной границе возникают только при $\Gamma > 1$. Во-вторых, в обоих случаях наблюдается зависимость формы и размеров холмов от их азимутального положения. Наконец, азимутальная длина холмов увеличивается при уменьшении скорости вращения (увеличении Γ). Это позволяет сделать предположение, что наблюдаемые в экспериментах холмы являются следствием развития неустойчивости Кельвина – Гельмгольца.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 18-71-10053).

Список литературы

1. Dyakova V., Polezhaev D. Pattern formation on the surface of the granular medium in a horizontal rotating cylinder filled with fluid // Physical Review Fluids. 2022. Vol. 7 (4). 044302. DOI: 10.1103/PhysRevFluids.7.044302

Влияние ветра на теплообмен в условиях городской среды

А. В. Евграфова, А. Н. Сухановский

Институт механики сплошных сред УрО РАН,
614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1
email: eav@icmm.ru

В условиях глобальной урбанизации остро стоит вопрос о создании комфортных климатических условий внутри городов. В данной работе экспериментально изучен процесс остывания поверхности со сложным рельефом после продолжительного нагрева инфракрасным излучением. В качестве объекта исследования использован трехмерный макет части города Пермь. Изучено влияние интенсивности внешнего обдува на распределение температуры в процессе остывания. Показано, что существенное изменение теплообмена происходит только для очень высокой скорости обдува, которая в реальности соответствует экстремальным погодным условиям.

Ключевые слова: лабораторное моделирование; топология поверхности; городская климатология

The influence of wind on heat transfer in urban conditions

A. V. Evgrafova, A. N. Sukchanovskii

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS,
1 Akademika Koroleva St., 614013, Perm
email: eav@icmm.ru

In the context of global urbanization, the problem of comfortable climatic conditions inside cities is acute. In this paper, the cooling process of a surface with a complex relief after prolonged heating by infrared radiation was experimentally studied. A three-dimensional layout of a part of the city of Perm was used as an object of research. The influence of the intensity of external wind on the temperature distribution during cooling was investigated. It was shown that a significant change in heat transfer is observed only for a very high wind speed, which in real city corresponds to extreme weather conditions.

Keywords: laboratory modeling; surface topology; urban climatology

1. Введение

Стремительный процесс урбанизации приводит к вопросам о создании комфортных климатических условий внутри городской среды. Известно, что температура внутри города в среднем выше, чем у близлежащих областей. Это связано, в первую очередь, с геометрией городского пространства. Сложный массив зданий затрудняет процессы естественной терморегуляции и повышает среднюю теплоемкость городских агломераций. Важными факторами, которые также оказывают существенное

влияние на городской климат, являются термодинамические свойства городских поверхностей и особенности рельефа местности.

Существует два основных направления исследований проблем городской климатологии. Первый заключается в анализе температуры поверхности различных городов на основе спутниковых данных [1, 2]. В настоящее время одним из наиболее интересных спутников, который ведет регулярную съемку поверхности Земли в тепловом инфракрасном (ИК) диапазоне, является Landsat-8. Регистрируемые данные ИК-диапазона имеют высокое пространственное разрешение 100 метров на пиксель, а повторяемость съемки составляет 16 дней. Это означает, что для заданной исследуемой территории, за вычетом снимков с высоким процентом облачности, можно рассчитывать не менее чем на десяток «безоблачных» снимков в год.

Вторым подходом в изучении тепловых характеристик города является численное моделирование [3, 4]. Физически реалистичное моделирование конкретных городов может быть реализовано при помощи адаптации различных моделей вычислительной гидродинамики (CFD). Подробная детализация имеет несомненные преимущества, однако требует больших вычислительных затрат, сложной постобработки и анализа. Поэтому данный подход удобен только для параметризации существующих метеорологических моделей.

В рамках данного исследования в качестве разумной альтернативы представленным методам предложен новый подход, который основан на лабораторном моделировании процессов теплообмена в условиях городского ландшафта. Задача исследования заключается в определении основных закономерностей процесса остывания поверхности со сложным рельефом в зависимости от наличия внешней циркуляции. В качестве объекта исследования был использован детализированный макет части города Пермь.

2. Эксперимент

В качестве объекта исследований использована модель центрального района города Пермь. Модель создана из ABS пластика на 3D принтере Picaso. Модель с высокой точностью воспроизводит особенности рельефа местности, расположение и высоту зданий на территории 5 квадратных километра (масштаб печати 1:4000). Пространственный масштаб был выбран таким образом, что значения основных безразмерных параметров, таких как число Рэлея, близки к эффективным (с учетом турбулентной вязкости) параметрам для пограничного слоя атмосферы. Для создания модели был использован черный ABS пластик. Модель покрыта матовой серой термоустойчивой грунтовкой. Модель расположена в теплоизолированном боксе, размер которого 85 на 75 сантиметров. Стенки бокса выполнены из органического стекла, толщиной 5 миллиметров и высотой 20 сантиметров, дном бокса является текстолитовая пластина толщиной 20 миллиметров.

Нагрев поверхности города реализован при помощи инфракрасного обогревателя (BALLU BIH-S2-0.3, мощность излучения 300 Вт). Лампа расположена на высоте 20 сантиметров от поверхности модели и вмонтирована заподлицо с крышкой теплоизолирующего бокса. В результате поверхность модели прогревается практически однородно до температуры 100 градусов. Числа Рэлея при этом достигают порядка $6 \cdot 10^3$, в реальных условиях для летнего времени эффективные числа Рэлея (рассчитанные при помощи турбулентных коэффициентов) составляют от $1 \cdot 10^3$ до $9 \cdot 10^3$ в зависимости от значения турбулентной вязкости (характерный размер выбран 50 метров, перепад температуры несколько градусов). Для измерения температуры была использована инфракрасная камеры FLIR SC5000. На рис. 1 представлено

изображение макета, расположение области измерения ИК камеры отмечено белой рамкой, красным показано расположение инфракрасного обогревателя. Остывание макета происходит без стенок теплоизолирующего бокса. В качестве внешней циркуляции был использован колонный вентилятор. Вентилятор создает горизонтальный поток воздуха на уровне поверхности макета. Направление ветра указано на рис. 1 белой стрелкой (направление ветра соответствует направлению с юга на север в реальных условиях). Эксперименты были проведены для трех различных скоростей обдува: скорость 1 – максимальная скорость до 10 см/с; скорость 2 – до 20 см/с; скорость 3 – до 50 см/с.



Рис. 1. Расположение области измерения ИК камеры и инфракрасного обогревателя относительно центра модели

3. Результаты

На рис. 2 представлены термограммы поверхности города, промежуток времени между термограммами около получаса. Топология поверхности и морфология застройки приводят к тому, что поверхность макета остывает неоднородно. Открытая местность остывает быстрее, при этом здания, напротив, аккумулируют тепло (вблизи домов температура остается выше средней даже спустя продолжительное время).

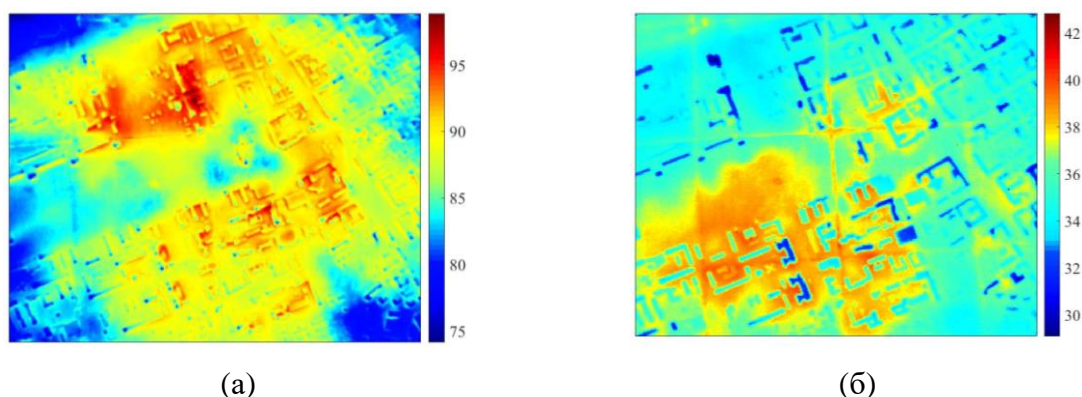


Рис. 2 Термограммы поверхности макета после продолжительного нагрева ИК излучением. Разница между снимками около получаса

Для того, чтобы определить, как интенсивность ветра влияет на распределение температуры с течением времени мы использовали коэффициент корреляции Пирсона (3.1), который применяется для исследования взаимосвязи двух наборов данных:

$$R_{XY} = \frac{\sum (X - \bar{X})(Y - \bar{Y})}{\sqrt{\sum (X - \bar{X})^2 \sum (Y - \bar{Y})^2}}. \quad (1)$$

В качестве реперной температуры мы использовали распределение, полученное в отсутствие внешнего обдува. Таким образом, был проведен сравнительный анализ реперного распределения температуры и распределений температуры для трех скоростей обдува.

На рис. 3 представлены зависимости коэффициентов корреляции для средних и максимальных значений температуры поверхности макета в зависимости от времени остывания. Видно, что степень корреляции довольно высока для низких скоростей обдува. Другими словами, существенных отличий в распределениях температуры при наличии и отсутствие внешнего обдува не наблюдается для данных режимов. Существенное изменение коэффициента корреляции наблюдается только для случая высокой скорости ветра. Однако, данный режим в реальных условиях соответствует скорости ветра от 10 до 40 м/с в зависимости от значений турбулентной вязкости. При этом среднемесячная скорость ветра в летнее время по Перми составляет около 2 м/с, при скорости ветра свыше 15 м/с объявляется штормовое предупреждение.

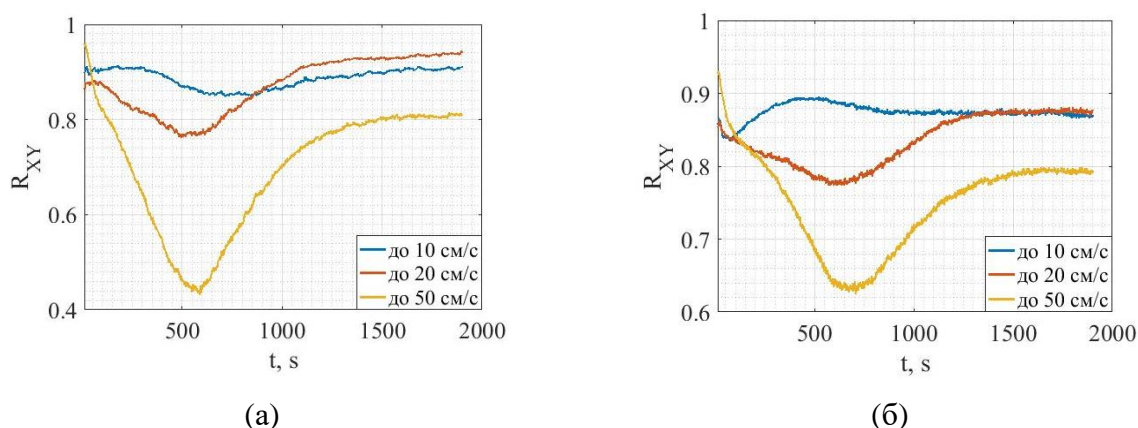


Рис. 3. Коэффициенты линейной корреляции для средней (а) и максимальной (б) температуры макета для различных скоростей обдува

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ №22-61-00098.

Список литературы

1. Shreevastava A., Bhalachandran S., McGrath G. S., Huber M., Rao P. S. C. Paradoxical impact of sprawling intra-Urban Heat Islets: Reducing mean surface temperatures while enhancing local extremes // Scientific Reports. 2019 Vol. 9 (1). P. 1–10. DOI: 10.1038/s41598-019-56091-w
2. Zhang M., Dong S., Cheng H., Li F. Spatio-temporal evolution of urban thermal environment and its driving factors: Case study of Nanjing, China // PloS One. 2021. Vol. 16 (5). e0246011. DOI: 10.1371/journal.pone.0246011
3. Cybyk B., Boris J., Young T., Emery M., Cheatham S. Simulation of fluid dynamics around complex urban geometries // 39th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. Reno, NV, U.S.A, 2001. P. 803. DOI: 10.2514/6.2001-803
4. Boris J. The threat of chemical and biological terrorism: preparing a response // Computing in Science & Engineering. 2002. Vol. 4 (2). P. 22–32. DOI: 10.1109/5992.988644.

Электроконвективная неустойчивость слабопроводящей жидкости при антисимметричном внешнем сигнале

А. А. Зайкова, Н. Н. Картавых

Пермский государственный национальный исследовательский университет,
614990, Пермь, ул. Букирева, 15
email: nastjuhaz@yandex.ru

На основе маломодовой модели электроконвекции исследована нелинейная динамика движения неравномерно нагретой слабопроводящей жидкости в электрическом поле горизонтального конденсатора. Форма внешнего электрического поля представляет собой антисимметричный относительно половины периода сигнал. Рассматривается случай, когда основным механизмом электроконвективной неустойчивости выступает электрокондуктивный механизм. Построены зависимости интенсивности возмущений от амплитуды электрического поля. Найдены области существования регулярных и хаотических колебаний.

Ключевые слова: электроконвекция; слабопроводящая жидкость; негармоническое электрическое поле

Electroconvective instability of a poorly conducting fluid in nonharmonic electric field

A. A. Zajkova, N. N. Kartavykh

Perm State University, 15 Bukireva St., 614990, Perm
email: nastjuhaz@yandex.ru

The motion nonlinear dynamics of a nonuniformly heated poorly conducting fluid in the electric field of a horizontal capacitor is studied. Low-mode model of electroconvection is used. The external electric field shape is antisymmetric about half period signal. The case is considered when electroconductive mechanism makes the main contribution. The dependences of the perturbations intensity on the amplitude of the electric field are obtained. The existence regions of regular and chaotic oscillations are found.

Keywords: electroconvection; poorly conducting fluid; nonharmonic electric field

1. Введение

Слабопроводящие жидкости, к которым относят жидкие диэлектрики, углеводородные масла и топлива, обладают проводимостью $\sigma \leq 10^{-7} - 10^{-12} \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$ [1]. Тем не менее именно проводимость определяет поведение таких веществ в электрическом поле. Исследование поведения слабопроводящей жидкости в электрическом поле представляет интерес в связи с возможностью управления процессами тепло- и массопереноса.

Течения в слабопроводящих жидкостях, помещенных в постоянные и переменные гармонические электрические поля, изучались в работах [2–5], что позволило обнаружить синхронный и квазипериодический колебательные режимы на границе области устойчивости. В работе [6] в рамках линейного приближения было рассмотрено поведение слабопроводящей жидкости под воздействием внешнего электрического поля негармонической формы. В результате исследования были обнаружены не только синхронный и квазипериодический отклики системы на внешнее воздействие, но и субгармонические возмущения. Отметим, что влияние ассиметричных силовых полей на поведение различных сред изучалось в работах [7–10].

В данной работе исследованы нелинейные режимы электроконвекции слабопроводящей жидкости в негармоническом электрическом поле горизонтального конденсатора.

2. Постановка задачи

Рассмотрим слой неоднородно нагретой вязкой несжимаемой слабопроводящей жидкости, помещенный в поле силы тяжести \mathbf{g} и электрическое поле горизонтального конденсатора с напряжённостью $\mathbf{E}(t)$. Ось x совпадает с нижней границей слоя и направлена вдоль неё, ось z – перпендикулярна границе слоя. Поле, приложенное к обкладкам конденсатора, изменяется по закону (рис. 1):

$$E = -E_0 \cos(\pi \nu t),$$

где E_0 , ν – амплитуда напряжённости и частота внешнего электрического поля соответственно.

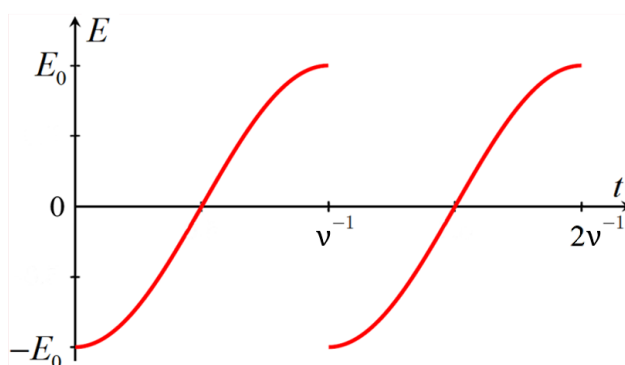


Рис. 1. Форма внешнего сигнала

На пластинах конденсатора выполняются условия для скорости, температуры и потенциала:

$$\begin{aligned} z = 0: \quad V = 0, \quad T = \Theta, \quad \varphi = -U \cos(\pi \nu t), \\ z = h: \quad V = 0, \quad T = 0, \quad \varphi = 0, \end{aligned}$$

где h – толщина слоя, Θ – разность температур между границами конденсатора, U – амплитуда напряжения.

В задаче рассматривается конкуренция двух механизмов неустойчивости: термогравитационного, связанного с неравномерным нагревом жидкости и присутствием силы тяжести, и электрокондуктивного, когда электропроводность жидкости линейно зависит от температуры. Используются электрогидродинамическое и безындукционное приближения, приближение Буссинеска.

Для описания движения жидкости в слое была использована маломодовая модель электроконвекции [2, 3]:

$$\begin{aligned}
 \dot{X} &= \text{Pr}(-X + rY + eT\cos(\pi vt)), \\
 \dot{Y} &= -Y + X + XZ, \\
 \dot{Z} &= -bZ - XY, \\
 \dot{W} &= -dW + V, \\
 \dot{V} &= \text{Pr}(-dV + (rW - eS\cos(\pi vt))/d), \\
 \dot{S} &= -gS + XU + gY\cos(\pi vt), \\
 \dot{T} &= -gT + gW\cos(\pi vt), \\
 \dot{U} &= -gU - XS + 2gZ\cos(\pi vt).
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь X, V – амплитуды пространственных гармоник функции тока, Y, W, Z – температуры, S, T, U – плотности заряда. Введены параметры:

$$\begin{aligned}
 r &= \frac{\text{Ra}}{\text{Ra}_0}, \quad e = \frac{\text{Ra}_\sigma}{\text{Ra}_{\sigma 0}}, \quad \text{Ra}_0 = \frac{\pi^4(1+k^2)^3}{k^2}, \quad \text{Ra}_{\sigma 0} = \frac{3\pi^4(1+k^2)^3}{8k^2}, \\
 b &= \frac{4}{1+k^2}, \quad d = \frac{4+k^2}{1+k^2}, \quad g = \frac{\text{Pr}}{\pi^2(1+k^2)\text{Pr}_e},
 \end{aligned}$$

где r, e – нормированные тепловое и электрическое число Рэлея; $\text{Ra}_0, \text{Ra}_{\sigma 0}$ – параметры системы; b, d – геометрические параметры, зависящие от волнового числа k ; g – параметр, определяющий отношение времени тепловых возмущений и возмущений заряда.

3. Результаты

Вычисления в настоящей работе проводились для следующего набора параметров: $\text{Pr} = 400$, $\text{Pr}_e = 30$, соответствующих реальной слабопроводящей жидкости (кукурузное масло [11]), интенсивность нагрева $r = 0.8$. Система (1) решалась численно, использовался метод Рунге–Кутты четвёртого порядка точности. В качестве начальных условий для амплитуд пространственных мод брались малые возмущения порядка 10^{-11} , также применялся метод продолжения по параметру. Значение волнового числа отвечает минимуму нейтральной кривой электроконвекции, полученной в рамках линейного приближения для набора частот внешнего воздействия ν [6].

Были получены бифуркационные диаграммы для частот $\nu = 0.02$ и $\nu = 0.008$ при $e = [1; 5]$ с шагом $10^{-2} - 10^{-4}$ по e (рис. 2, 4). Расчеты интенсивности возмущений проводились в сторону увеличения и уменьшения амплитуды электрического поля, в результате чего удалось обнаружить явление гистерезиса. Область одновременного сосуществования нескольких состояний системы выделена пунктиром. Цветом выделены колебательные режимы: красный соответствует синхронным возмущениям класса НЗ [5], зелёный – субгармоническому режиму, синий – квазипериодическому, фиолетовый – хаотическому.

При $\nu = 0.02$ потеря устойчивости происходит в точке $e = 2.56$ (рис. 2) и при дальнейшем увеличении параметра e до точки $e = 3.31$ система испытывает синхронные колебания класса НЗ [5], содержащие чётные и нечётные гармоники внешней частоты в спектре Фурье (рис. 3а). При дальнейшем увеличении e возмущения в системе затухают

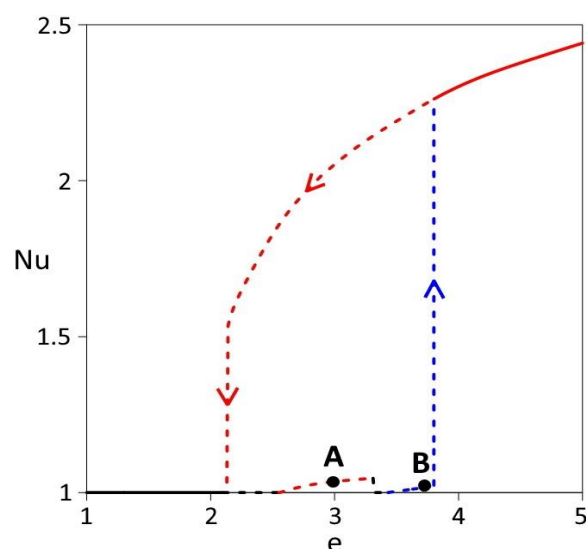


Рис. 2. График зависимости безразмерного теплового потока Nu от электрического параметра e при $\nu = 0.02$, $k = 4.64$. Красный цвет соответствует синхронным возмущениям, синий – квазипериодическим. Пунктиром выделена область гистерезиса

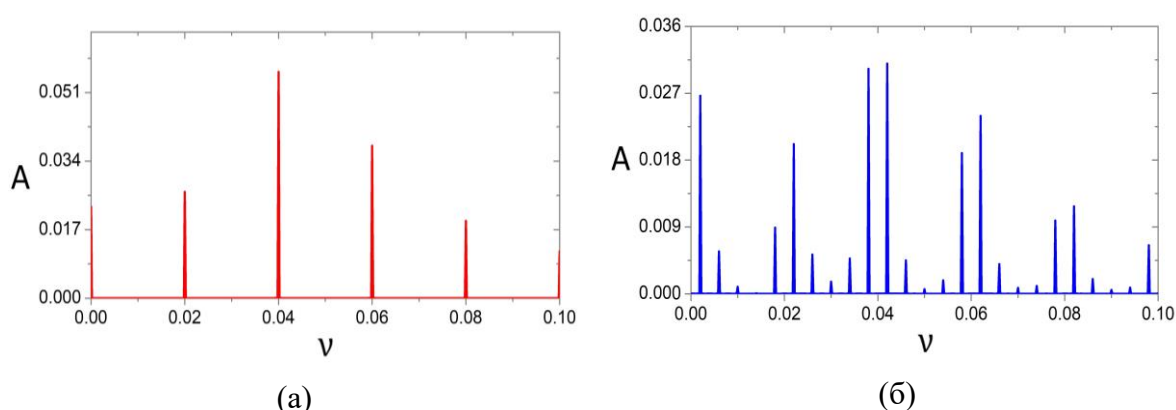


Рис. 3. Спектр Фурье амплитуды X при $\nu = 0.02$, $k = 4.64$: (а) $e = 3.0$ (точка А на рис. 2); (б) $e = 3.8$ (точка В на рис. 2)

и появляются только в точке $e = 3.43$, с дискретным спектром, соответствующим квазипериодическим колебаниям (рис. 3б). В точке $e = 3.8$ происходит смена режима, сопровождающаяся резким увеличением числа Нуссельта. Установившиеся колебания являются синхронными класса НЗ. В случае уменьшения амплитуды внешнего поля e в системе можно наблюдать явление гистерезиса: синхронные колебания класса НЗ сохраняются до $e = 2.14$, после которых система приходит в состояние равновесия.

При $\nu = 0.008$ потеря устойчивости происходит в точке $e = 2.10$ (рис. 4), в системе наблюдаются субгармонические колебания, содержащие в спектре Фурье частоты, кратные половине частоты внешнего воздействия (рис. 5а).

После точки $e = 2.30$ (рис. 4б) в спектре начинают появляться дополнительные частоты, при $e = 2.34$ спектр становится сплошным (рис. 5б). В точке $e = 2.40$ в системе наблюдается смена режима с резким скачком числа Нуссельта (рис. 4а). Установившиеся колебания соответствуют синхронным возмущениям класса НЗ, которые сохраняются при дальнейшем увеличении амплитуды электрического поля.

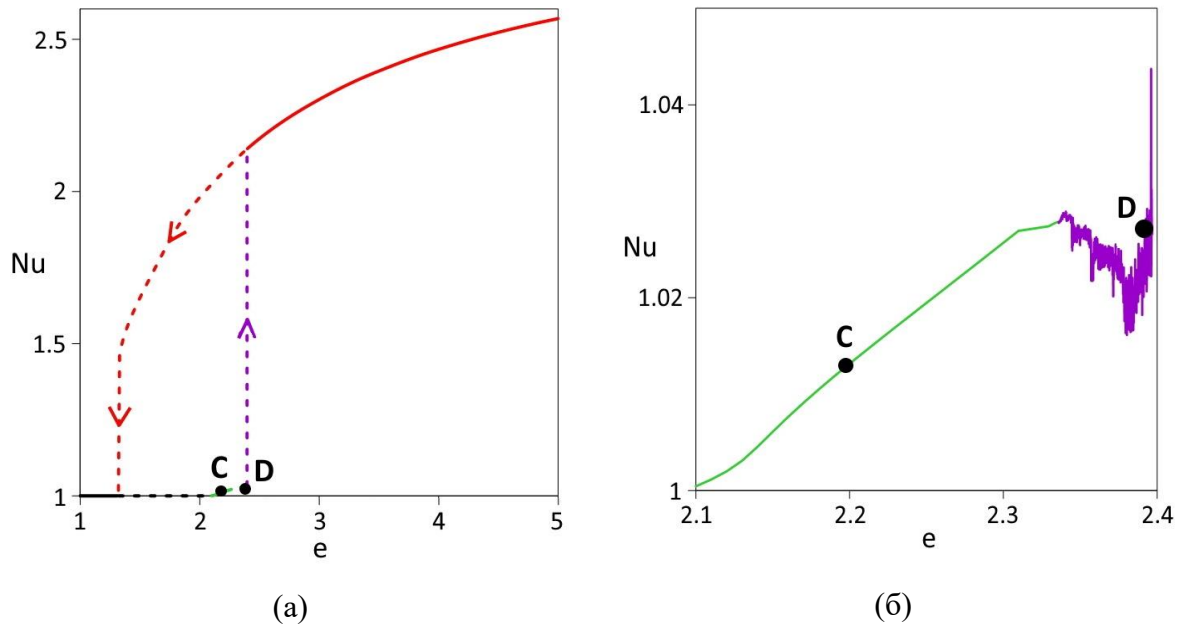


Рис. 4. График зависимости безразмерного теплопотока Nu от электрического параметра e при $\nu = 0.008$, $k = 6.92$ на разных масштабах. Красный цвет соответствует синхронным возмущениям, зелёный – субгармоническим, фиолетовый – хаотическим. Пунктиром выделена область гистерезиса

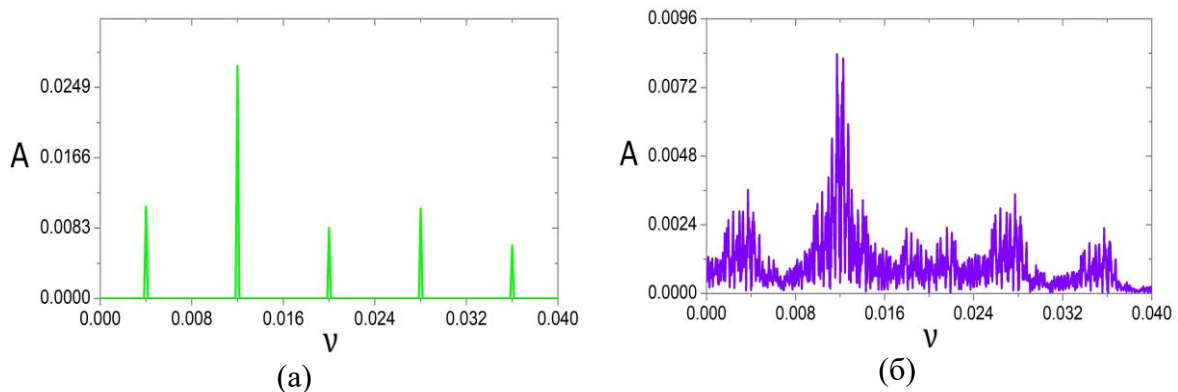


Рис. 5. Спектр Фурье амплитуды X при $\nu = 0.008$, $k = 6.92$: (а) $e = 2.2$ (точка C на рис. 4); (б) $e = 2.39$ (точка D на рис. 4)

В случае уменьшения электрического параметра e в системе снова наблюдается явление гистерезиса (рис. 4а): присутствует только синхронный колебательный режим класса НЗ, существующий до $e = 1.33$.

4. Заключение

На основе маломодовой модели исследованы нелинейные режимы электроконвекции слабопроводящей жидкости в негармоническом электрическом поле горизонтального конденсатора при нагреве снизу. Построены зависимости числа Нуссельта от безразмерного электрического параметра, а также Фурье-спектры возмущений, с помощью которых была проведена классификация колебательных режимов. В отличие от работ [4–5], где слабопроводящие жидкости изучались в гармонических электрических полях, в данных условиях потеря устойчивости

происходит через субгармонические возмущения и синхронные возмущения класса НЗ, которые при росте надкритичности могут эволюционировать в хаотические колебания. Обнаружено явление гистерезиса: в зависимости от начальных условий в системе возможны синхронные или субгармонические, квазипериодические, хаотические возмущения. Отметим, что результаты настоящей работы полностью согласуются с результатами анализа линейной устойчивости, полученными ранее для подобной динамической системы [6].

Список литературы

1. Саранин В. А. Устойчивость равновесия, зарядка, конвекция и взаимодействие жидких масс в электрических полях. М. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. 332 с.
2. Ильин В. А., Смородин Б. Л. Нелинейные режимы электроконвекции слабопроводящей жидкости // Письма в журнал технической физики. 2007. Т. 33. Вып. 8. С. 81–87.
3. Ильин В. А. Электроконвекция слабопроводящей жидкости в постоянном электрическом поле // Журнал технической физики. 2013. Т. 83. Вып. 1 С. 64–73.
4. Nekrasov O. O. Kartavykh N. N. Electroconvection instability of poorly conducting fluid in alternating electric field // Interfacial Phenomena and Heat Transfer. 2019. Vol. 7 (3). P. 217–225. DOI: 10.1615/InterfacPhenomHeatTransfer.2019030611
5. Smorodin B. L., Kartavykh N. N. Periodic and chaotic oscillations in a low conducting in an alternating electric field // Microgravity Science and Technology. 2020. Vol. 32. P. 423–434. DOI: 10.1007/s12217-020-09779-y
6. Зайкова А. А., Картавых Н. Н. Поведение слабопроводящей жидкости при подогреве снизу в негармоническом электрическом поле // Физика для Пермского края: материалы региональной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. Пермь, 2020. Вып. 13. С. 54–59.
7. John T., Heuer J., Stannarius R. Influence of excitation wave forms and frequencies on the fundamental time symmetry of the system dynamics, studied in nematic electroconvection // Physical Review E. 2005. Vol. 71. 056307. DOI: 10.1103/PhysRevE.71.056307
8. Картавых Н. Н., Мордвинов А. Н., Смородин Б. Л. Электроконвекция нематического жидкого кристалла в переменном электрическом поле // Вестник Пермского университета. Серия: Физика. 2008. № 1 (17). С. 22–28.
9. Любимов Д. В., Перминов А. В. Воздействие несимметричных вибраций на движение тонкого слоя вязкопластичной жидкости // Механика жидкости и газа. 2011. № 1. С. 30–41.
10. Мелентьев А. Б., Тарунин Е. Л. Эффекты асимметричных колебаний в конвекции // Вычислительная механика сплошных сред. 2012. Т. 5. № 3. С. 284–291. DOI: 10.7242/1999-6691/2012.5.3.33
11. Жданов С. А., Косвинцев С. Р., Макарихин И. Ю. Влияние электрического поля на устойчивость термогравитационного течения в вертикальном конденсаторе // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2000. Т. 117. Вып. 2. С. 398–406.

Экспериментальное изучение течений вокруг сферы, движущейся во вращающейся полости с жидкостью

Е. А. Звягинцева, Е. М. Кудимова, В. Я. Романец, В. Г. Козлов

Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет,
614990, Пермь, ул. Сибирская, 24
email: zvyagintsevk@gmail.com

Экспериментально изучается движение жидкости во вращающемся вертикальном цилиндре, возбуждаемое легким сферическим телом, всплывающим вдоль оси полости. Методом PIV исследуется структура потоков. Эксперименты выполняются при быстром вращении, когда действие силы Кориолиса является определяющим, а центробежная сила позиционирует тело на оси вращения. Показано, что в системе отсчета полости тело возбуждает движение в форме столбика Тейлора – Праудмена, диаметр которого согласуется с диаметром тела. В верхней области столбика, фронтальной по отношению к движущемуся телу, жидкость совершает отстающее дифференциальное вращение, в нижней – опережающее. В заданном по высоте сечении полости интенсивность отстающего азимутального движения в фронтальной области повышается по мере приближения тела, интенсивность опережающего вращения с тыльной стороны понижается по мере удаления тела. За пределами столбика дифференциальное вращение жидкости на несколько порядков ниже, чем внутри. Обнаружено, что свободное тело одновременно с поступательным движением вдоль оси совершает собственное дифференциальное вращение: в нижней части полости – опережающее, в верхней – отстающее, интенсивность вращения изменяется с продольной координатой по линейному закону.

Ключевые слова: вязкая жидкость; вращение; движущееся сферическое тело; столбик Тейлора-Праудмена

Experimental study of flows around a sphere moving in a rotating cavity with fluid

E. A. Zvyagintseva, E. M. Kudymova, V. Ya. Romanets, V. G. Kozlov

Perm State Humanitarian Pedagogical University, 24 Sibirskaya St., 614990, Perm
email: zvyagintsevk@gmail.com

Liquid flow around the light spherical body moving along the axis of rotating vertical cylinder is studied experimentally by PIV method. The rotation is rapid, the Coriolis force and centrifugal force plays the governing role. In the cavity frame the body generates motion in the form of a Taylor-Proudman column, consistent with the body diameter. The upper part of the column performs a lagging differential rotation, advancing – in the lower part. In definite cavity

cross-section, the lagging azimuthal motion in the frontal region increases as the body approaches, the prograde rotation behind the body decreases as the body moves away. Outside the column the liquid differential rotation is several orders of magnitude lower than inside. During the motion along the axis the body performs differential rotation: advancing in the lower cavity part and lagging in the upper, the intensity of rotation varies with the longitudinal coordinate according to linear law.

Keywords: viscous liquid; rotation, moving spherical body; Taylor-Proudman column

1. Введение

Задача о движении сферического тела во вращающейся жидкости привлекала внимание многих ученых [1–4]. Показано, что движущееся в быстро вращающейся жидкости тело толкает перед собой и образует позади себя столбики Тейлора-Праудмена. Столбики имеют двухмерную структуру и представляют собой колонны жидкости, которая перетекает из одного столбика в другой через тонкий слой Экмана. В результате этого сила сопротивления, оказываемая движущемуся телу, значительно возрастает. В столбике, который находится за телом, генерируется положительная относительная осевая завихренность, в столбике перед телом – отрицательная. В результате этого столбики совершают дифференциальное вращение относительно вращающейся системы координат в противоположных направлениях. Это связано с действием силы Кориолиса. Интерес к теоретическому и экспериментальному изучению потоков вокруг движущихся во вращающейся жидкости тел не угасает [5]. Большой интерес представляет структура трехмерных потоков во вращающихся полостях конечной длины и трансформация этих течений с изменением длины столбиков в результате перемещения тела. Не меньший интерес представляет и зависимость описанных эффектов от безразмерной скорости вращения. Так, в [6] показано, что в полостях конечной длины движущееся свободное тело само совершает вращение в результате взаимодействия со столбиками. В данной работе представлены результаты дальнейшего исследования движения жидкости вокруг сферического тела в столбиках Тейлора-Праудмена и за их пределами с использованием PIV метода. Исследование проводится с целью изучения структуры потоков во вращающихся полостях конечной длины.

2. Экспериментальная установка и методика

Экспериментальная установка состоит из цилиндрической кюветы, в которую помещено легкое сферическое тело (рис. 1). Кювета 1 изготовлена из оргстеклянной трубы внутренним диаметром 5.3 см и длиной 22.5 см. Кювета приводится во вращение при помощи шагового двигателя. Частота вращения может изменяться в диапазоне 0 – 20 об/с. Положение кюветы (горизонтальное, под углом к горизонту или вертикальное) можно изменять, в том числе, во время эксперимента. Прозрачное дно кюветы позволяет вести наблюдение за движением жидкости и изучать поле азимутальной скорости жидкости в различных по длине полости поперечных сечениях.

В экспериментах используется раствор глицерина в воде (43%) с добавлением светоотражающих PIV частиц диаметром 6 мкм и плотностью 1.04 г/см³. Плотность раствора составляет $\rho_L = 1.12$ г/см³, кинематическая вязкость $\nu = 3.5$ сСт. В качестве легкого сферического тела 2 используется резиновый шарик массой 6.94 г и диаметром $d = 2.40$ см. Плотность тела составляет $\rho_s = 0.90$ г/см³.

Для изучения поля скорости в поперечном сечении вращающейся полости методом PIV используется «световой нож», который рассекает кювету на заданном расстоянии от нижнего торца кюветы ($h = 7.1, 15.4$ см). Освещение выполняется твердотельным одномодовым лазером 3 с диодной накачкой видимого зеленого света (532 нм) KLM – 532. Положение светорассеивающих частиц в жидкости фиксируется скоростной видеокамерой Core 4. Для работы с видеокамерой используется приложение CoreView. Видеокамера устанавливается строго соосно вращающейся кювете со стороны прозрачного фланца: при изучении поля скорости перед движущимся телом (в верхней части полости) камера располагается сверху, при изучении поля скорости позади поднимающегося сферического тела – снизу. Частота видео регистрации подбирается кратной частоте вращения для того, чтобы из видеоряда можно было выбрать кадры, получающиеся строго через период. Это позволяет изучить поля скорости дифференциального движения жидкости, то есть движения жидкости в системе отсчета полости.

Одновременно с изучением поля скорости с помощью скоростной камеры 4 фиксируется положение тела в кювете (расстояние L_z тела от дна кюветы) с боковой стороны с помощью обычной видеокамеры 5.

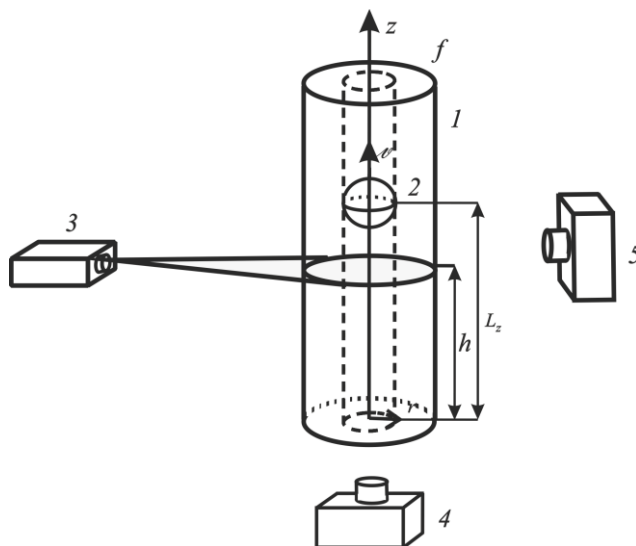


Рис. 1. Схема экспериментальной установки

Методика проведения опытов следующая. В начале эксперимента кювета переводится в наклонное положение так, что нижняя часть (дно) оказывается выше верхнего торца. При этом легкое тело под действием силы Архимеда перемещается ко дну. После этого кювета приводится во вращение с заданной скоростью, при этом тело переходит в центрифугированное состояние и располагается вблизи оси полости. Далее кювета поворачивается и устанавливается вертикально. Легкое тело, находящееся вблизи дна кюветы, начинает всплывать вдоль оси. В этот момент одновременно включаются скоростная видеокамера и обычная видеокамера. После того, как тело достигает верхнего торца, видеосъемка завершается. Эксперимент повторяется при различных скоростях вращения полости. При изменении скорости вращения изменяются и настройки частоты съемки скоростной камерой.

После проведения экспериментов данные в виде фотографий, выгружаются с жесткого диска скоростной камеры и обрабатываются в приложении MATLAB. Видео с обычной видеокамеры обрабатывается в Image J. Это позволяет соотнести поле

скорости в определенный момент с положением шарика относительно дна кюветы в этот же момент.

При изучении движения жидкости перед телом, методика проведения остается той же. Изменяется лишь положение прозрачного дна и, соответственно, скоростной камеры. Установка в ходе эксперимента находится в перевернутом положении, при этом прозрачное дно располагается сверху, а скоростная камера устанавливается над кюветой. Лазер устанавливается таким образом, чтобы его луч рассекал кювету на расстоянии 7.1 см от прозрачного торца кюветы.

3. Структура течений в полости

Изучение движения жидкости, возникающего перед всплывающей сферой, показало, что жидкость, находящаяся в столбике Тейлора–Пraudмена, имеет отрицательную завихренность относительно полости (рис. 2а), столбик совершает отстающее дифференциальное вращение.

Движение жидкости позади всплывающей сферы имеет противоположное направление, столбик совершает опережающее дифференциальное вращение (рис. 2б).

Общая черта – интенсивное азимутальное движение наблюдается в пределах столбика Тейлора–Пraudмена, за пределами столбика скорость близка к нулю, в этой области жидкость совершает твердотельное вращение вместе с кюветой.

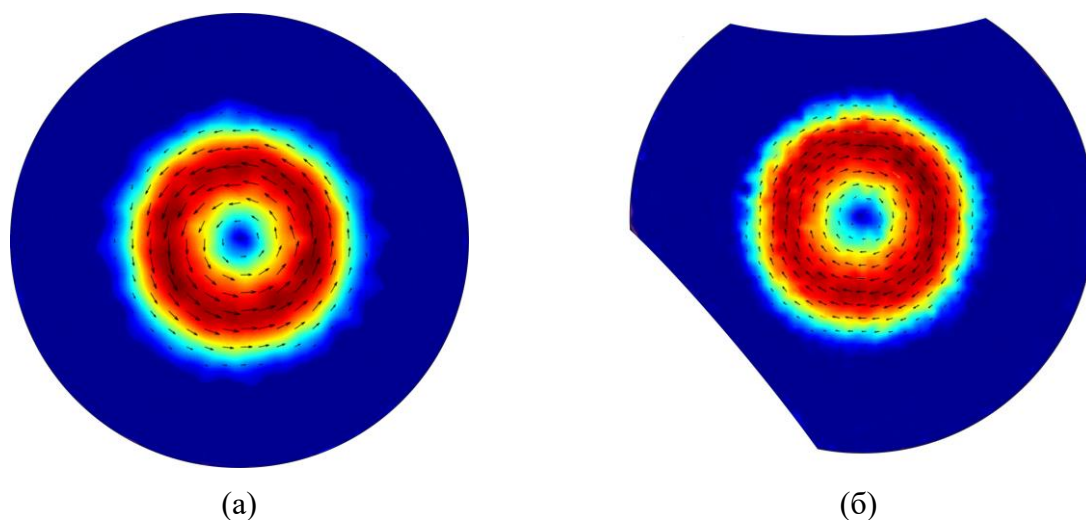


Рис. 2. Поле дифференциальной скорости в поперечном сечении вращающегося цилиндра при подъеме легкого сферического тела: (а) перед телом (вид сверху, вращение полости по часовой стрелке); (б) за телом (вид снизу, вращение полости против часовой стрелки)

На рис. 3 показана зависимость азимутальной скорости движения жидкости от расстояния до оси вращения перед всплывающим сферическим телом и за ним. Тангенциальная скорость жидкости, находящейся в столбике Тейлора–Пraudмена позади всплывающего тела, имеет положительный знак, а перед сферическим телом – отрицательное значение.

Скорость азимутального дифференциального движения жидкости с удалением от оси вращения сначала возрастает и достигает некоторого максимального значения, затем уменьшается и за границами столбика Тейлора–Пraudмена практически исчезает. Интенсивность отстающего дифференциального вращения в столбике перед телом в выбранном сечении возрастает по мере приближения тела (темные точки). Позади

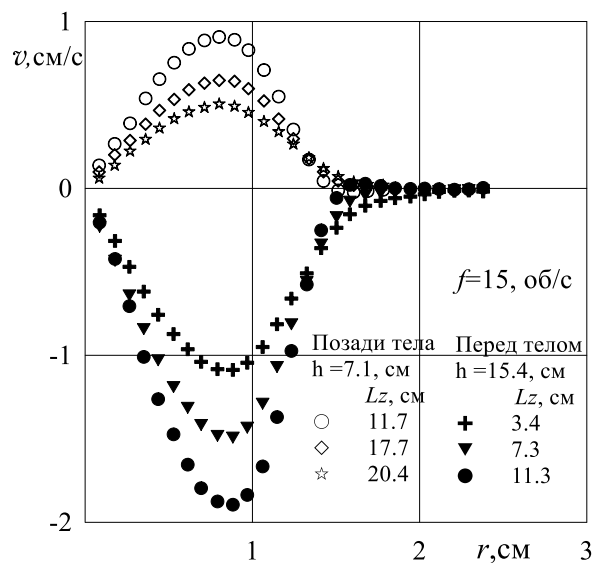


Рис. 3. Азимутальная скорость движения жидкости в зависимости от расстояния до оси вращения в разных сечениях полости при различном положении движущегося тела в полости

движущегося тела жидкость в столбике Тейлора–Праудмена совершает опережающее вращение, интенсивность которого понижается по мере удаления тела.

Работа выполнена при поддержке Правительства Пермского края (грант для ведущей научной школы С-26/1191).

Список литературы

1. Taylor G. I. Motion of solids in fluids when the flow is not irrotational // Proceedings of the Royal Society of London. 1916. Vol. 33. N. 3. P. 577–589. DOI: 10.1098/rspa.1917.0007
2. Proudman J. On the motion of solids in a liquid possessing vorticity // Proceedings of the Royal Society of London. 1916. Vol. 33. N. 3. P. 408–424. DOI: 10.1098/rspa.1916.0026
3. Maxworthy T. The observed motion of a sphere through a short, rotating cylinder of fluid // Journal of Fluid Mechanics. 1968. Vol. 31. N. 4. P. 643–655. DOI: 10.1017/S0022112068000388
4. Moore D. W., Saffman P. G. The rise of a body through a rotating fluid in a container of finite length // Journal of Fluid Mechanics. 1968. Vol. 31. N. 4. P. 635–642. DOI: 10.1017/S0022112068000376
5. Макарихин И. Ю., Смородин Б. Л., Шатрова Е. Ф. О дрейфе шаров во вращающейся жидкости // Механика жидкости и газа. 2008. Вып. 4. С. 6–15.
6. Звягинцева Е. А., Кудымова Е. М., Романец В. Я., Козлов В. Г. Экспериментальное изучение движения сферического тела во вращающейся жидкости // Конвективные течения. 2021. Вып. 10. С. 89–100. DOI: 10.24412/2658-5421-2021-10-89-100

Наблюдение и моделирование русловых процессов на участке реки обь у г. Барнаула (в районе городского водозабора)

А. Т. Зиновьев, А. А. Вагнер, А. В. Дьяченко, А. А. Коломейцев, К. В. Марусин

Институт водных и экологических проблем СО РАН,
656038, Барнаул, ул. Молодежная, 1

Объект исследования – меандрирующий участок реки Обь в районе водозабора, являющегося в настоящее время основным источником питьевого водоснабжения города. На основе натурных наблюдений последних лет с привлечением данных космической съемки показано, что в среднесрочной перспективе развитие русловых деформаций может привести к прекращению функционирования водозабора. На основе программного комплекса Delft3D построена компьютерная модель морфодинамики русла на рассматриваемом участке. Средствами компьютерного моделирования изучен один из возможных вариантов противодействия негативному ходу руслового процесса.

Ключевые слова: морфодинамика русла; русловой процесс; излучины; русловые деформации; натурные наблюдения; компьютерное моделирование; Delft3D; Обь; Барнаул; городской водозабор

Observation and modeling of channel processes in the section of the Ob River near the city of Barnaul (in the area of the city water intake)

A. T. Zinoviev, A. A. Wagner, A. V. Dyachenko, A. A. Kolomeitsev, K. V. Marusin

Institute for Water and Enviromental Problems SB RAS,
1 Molodezhnaya St., 656038, Barnaul

The object of study is the meandering section of the Ob River in the water intake area, which is currently the main source of drinking water supply for the city. On the basis of field observations of recent years, with the use of satellite imagery data, it is shown that in the medium term, the development of channel deformations can lead to the cessation of the functioning of the water intake. Based on the Delft3D software package, a computer model of the channel morphodynamics in the area under consideration was built. By means of computer simulation, one of the possible options for counteracting the negative course of the channel process has been studied.

Keywords: channel morphodynamics; channel process; meanders; channel deformations; natural observations; computer modeling; Delft3D; Ob; Barnaul; urban water intake

Русловые деформации весьма часто оказывают негативное влияние на хозяйственную деятельность, особенно на участках крупных рек, расположенных на урбанизированных территориях. В частности, они могут затруднять работу речных водозаборов вследствие заполнения наносами водоприемных устройств или создания препятствий для доступа речного потока к ним. Одним из инструментов для решения задач по прогнозированию русловых деформаций и разработке мер противодействия их негативному влиянию является компьютерное (математическое) моделирование.

В работе выполнено компьютерное моделирование морфодинамики участка крупной реки со сложным рельефом русла, для которого проблема негативного воздействия русловых деформаций стоит достаточно остро. Результаты моделирования верифицированы данными натурных наблюдений. Разработанная компьютерная модель использована для разработки возможных мер противодействия негативному ходу руслового процесса.

Объект исследования – меандрирующий участок реки Обь в районе водозабора, являющегося в настоящее время основным источником питьевого водоснабжения города (рисунок).

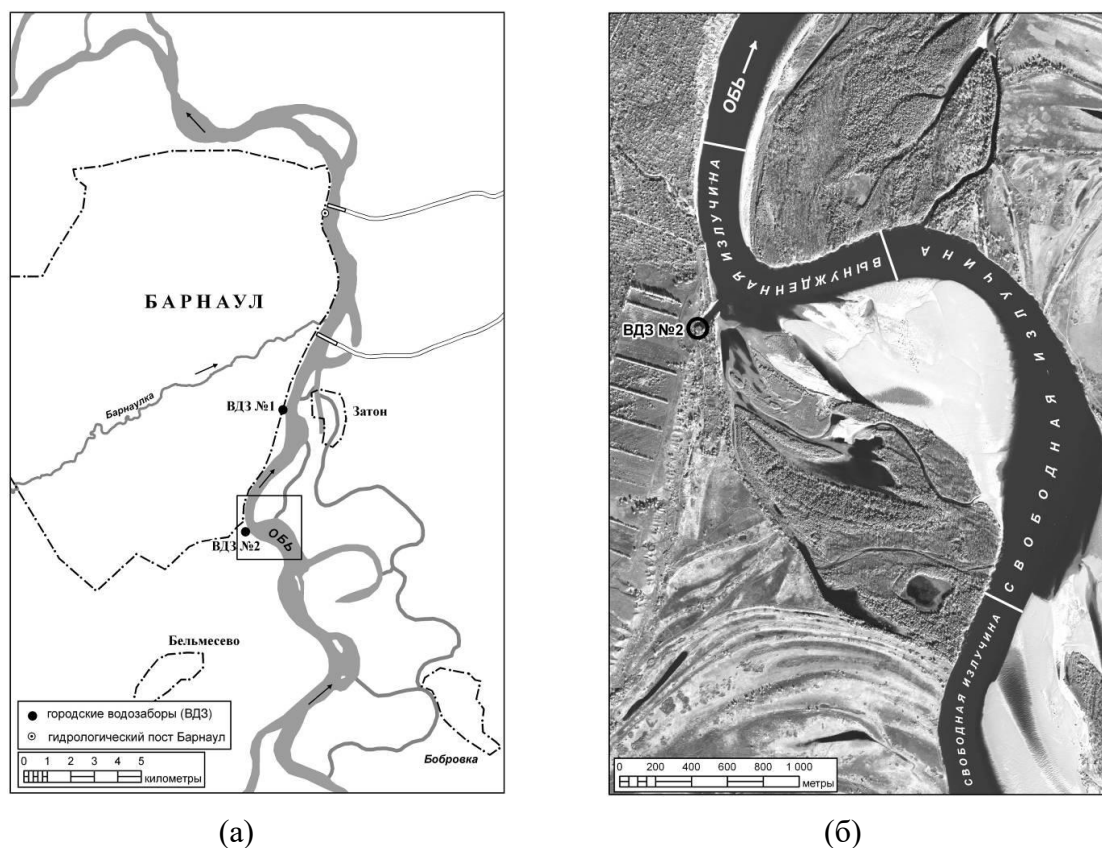


Рисунок. Местоположение и морфологическое строение исследуемого участка русла р. Обь в районе Барнаульского водозабора №2: (а) местоположение участка; (б) морфология русла

На основе натурных наблюдений последних лет с привлечением данных космической съемки дана оценка современного состояния и тенденций развития русла. Река на рассматриваемом участке образует систему двух сопряженных излучин: верхней – свободной и нижней – вынужденной [1]. Процесс развития вынужденной излучины заключается в постепенном увеличении крутизны ее верхнего крыла относительно коренного левого берега реки с дальнейшим его заваливанием и итоговым

спрямлении излуины, что уже в среднесрочной перспективе может привести к прекращению функционирования водозабора.

На основе программного комплекса Delft3D построена компьютерная модель морфодинамики русла на рассматриваемом участке [2]. Такой подход уже прошел апробацию при компьютерном моделировании гидродинамики, транспорта наносов и русловых деформаций на сопредельных участках реки Обь [3].

Выполнено компьютерное моделирование течения и русловых деформаций в реальных нестационарных гидрологических условиях периода открытой воды – от половодья до межени. Результаты расчетов русловых деформаций верифицированы данными натурных наблюдений. В целом результаты моделирования показывают удовлетворительно соответствие с данными наблюдений, вместе с тем, некоторые существенные детали вертикальных и плановых деформаций русла не воспроизводятся корректно.

Средствами компьютерного моделирования изучен один из возможных вариантов противодействия негативному ходу руслового процесса. Суть варианта состоит в том, чтоб частично спрямить изгиб русла реки выше водозабора, проложив канал (прорезь) через левобережные песчаные отложения. Результаты расчетов для условий модельного половодья показывают, что наличие спрямляющего канала существенно снижает скорость течения в смежных крыльях свободной и вынужденной излуины. Как следствие, величина отступления на размываемых участках правого берега в заваливающемся крыле вынужденной излуины уменьшается на 25 – 50%. При длительном воздействии достаточно высоких расходов воды канал в целом сохраняет свою форму. Наблюдается даже некоторый размыв его дна.

Рассмотренный вариант инженерных мероприятий не является окончательным. Он лишь обозначает направление, в котором, по нашему мнению, следует двигаться, а также демонстрирует возможности компьютерного моделирования для решения задач такого рода.

Список литературы

1. Чалов Р. С., Завадский А. С., Панин А. В. Речные излуины. М.: изд-во МГУ, 2004. 371 с.
2. Delft3D-FLOW User Manual. WL / Delft Hydraulics, Delft, The Netherlands, 2013. 706 p.
3. Zinoviev A. T., Dyachenko A. V., Koshelev K. B., Marusin K. V. Modeling of channel processes in large rivers with the use of field data // Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications. 2021. Vol. 9 (1). P. 87–102. DOI: 10.32523/2306-6172-2021-9-1-87-102

Развитие стандартного подхода определения порога термомагнитной конвекции в шаровой полости

П. Н. Казанцев, П. В. Краузин

Пермский государственный национальный исследовательский университет,
614990, Пермь, ул. Букирева, 15
email: krauzin@gmail.com

В данной работе исследуется влияние температурной зависимости магнитной проницаемости неоднородно нагретой магнитной жидкости, заполняющей шаровую полость, на систему уравнений термомагнитной конвекции относительно бесконечно малых возмущений. На основе данной системы с помощью метода Галеркина получены критические числа Рэлея. Произведено сравнение полученных критических чисел с результатами модели, в которой температурная зависимость магнитной проницаемости учитывалась лишь частично.

Ключевые слова: магнитная жидкость; шаровая полость; конвективная устойчивость

Development of a standard approach for determining the threshold of thermomagnetic convection in a spherical cavity

P. N. Kazanstev, P. V. Krauzin

Perm State University, 15 Bukireva St., 614990, Perm
email: krauzin@gmail.com

In this paper, the influence of the temperature dependence of the magnetic permeability inside a cavity filled with inhomogeneously heated ferrofluid on the system of thermomagnetic convection equation is investigated. Using the Galerkin method critical Rayleigh numbers are obtained. These critical numbers were compared to the results of the model where magnetic permeability dependence on temperature is not fully considered.

Keywords: ferrofluid; spherical cavity; convective stability

1. Постановка задачи

Шаровая полость (рис. 1), окруженная бесконечным немагнитным массивом с теплопроводностью λ_m , заполнена магнитной жидкостью с теплопроводностью λ_f и магнитной проницаемостью $\mu = \mu(H, T)$. Вдали от полости заданы однородное магнитное поле H_∞ и температурный градиент γ_∞ , соответствующий подогреву снизу.

Система уравнений конвекции несжимаемой МЖ имеет вид [1]:

$$\begin{aligned}
\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) &= -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} + \mu_0 M \nabla H, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \\
\frac{\partial T_f}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) T_f &= \kappa_f \Delta T_f, \quad \frac{\partial T_m}{\partial t} = \kappa_m \Delta T_m, \\
\nabla \times \mathbf{H} &= 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}),
\end{aligned} \tag{1}$$

где ρ – плотность жидкости, \mathbf{v} – скорость, p – давление, η – коэффициент сдвиговой вязкости, $\kappa = \lambda / \rho c_p$ – коэффициент температуропроводности, c_p – изобарная удельная теплоемкость, μ_0 – магнитная постоянная, T – температура, \mathbf{M} – намагниченность, \mathbf{H} – напряженность магнитного поля, \mathbf{B} – магнитная индукция.

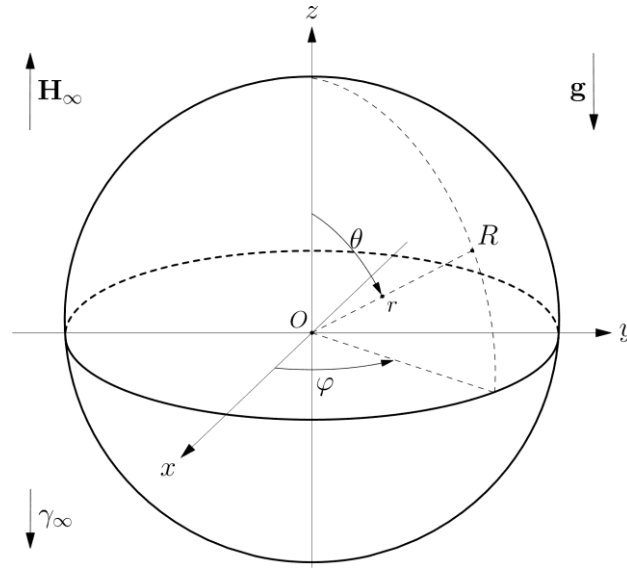


Рис. 1. Геометрия задачи

Замыкают систему (1) уравнения состояния:

$$\rho = \rho(T, p), \quad \mathbf{M} = M(H, T) \mathbf{H} / H.$$

На границах полости должны выполняться следующие условия для температуры и магнитного поля:

$$\begin{aligned}
T_f &= T_m, & \lambda_f \frac{\partial T_f}{\partial n} &= \lambda_m \frac{\partial T_m}{\partial n}, \\
(\mathbf{B}_f - \mathbf{B}_m) \cdot \mathbf{n} &= 0, & (\mathbf{H}_f - \mathbf{H}_m) \cdot \boldsymbol{\tau} &= 0,
\end{aligned}$$

где \mathbf{n} и $\boldsymbol{\tau}$ – векторы нормали и касательной к поверхности сферической полости. Для скорости ставится условие прилипания: $\mathbf{v} = 0$.

2. Механическое равновесие

Если жидкость в рассматриваемом объеме неподвижна, распределение температуры внутри полости определяется выражением [2]:

$$T_0(r, \theta) = T_* + \gamma r \cos \theta = T_* + \delta T, \quad \gamma = \frac{3\gamma_\infty}{2 + \lambda},$$

где $\lambda = \lambda_f / \lambda_m$, а T_* – температура жидкости в центре полости.

С учетом температурной зависимости магнитной проницаемости

$$\mu = \mu_* \left(1 - \alpha \frac{\delta T}{\gamma R} \right), \quad \alpha = \frac{K_* \gamma R}{\mu_* H_*}, \quad H_* = \frac{3H_\infty}{2 + \mu_*},$$

распределение магнитного потенциала ($\mathbf{H} = \nabla \psi$) в состоянии механического равновесия имеет вид [3]:

$$\psi_0(r, \theta) = H_* \left(r \cos \theta + \alpha \frac{2\mu_* \cos^2 \theta + 1}{2\mu_* + 3} \frac{r^2}{2R} \right),$$

где μ_* – магнитная проницаемость при постоянной температуре T_* , K_* – пироманитный коэффициент. Параметр α является малой величиной.

3. Система термомангнитной конвекции относительно малых возмущений

Представим искомые величины в виде суперпозиции равновесного значения и бесконечно малого возмущения: $X = X_0 + X'$. Тогда после ряда преобразований система уравнений термомангнитной конвекции относительно безразмерных малых возмущений примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} &= -\nabla p' + \Delta \mathbf{v}' + \text{Gr} T' \mathbf{e}_z + \text{Gr}_m \left[\frac{2\mu_* + 1}{2\mu_* + 3} T' - \mathbf{e}_z \cdot \nabla \psi' + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha}{2\mu_* + 3} (\mathbf{r} + (4\mu_* + 1)\mathbf{z}) \cdot \nabla \psi' \right] \mathbf{e}_z, \quad \nabla \cdot \mathbf{v}' = 0, \\ \frac{\partial T'}{\partial t} - \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{v}' &= \text{Pr}^{-1} \Delta T', \quad \frac{\partial T'_m}{\partial t} = \text{Pr}^{-1} \kappa^{-1} \Delta T'_m, \\ \Delta \psi' &= \mathbf{e}_z \cdot \nabla T' - \alpha \left[\frac{2}{2\mu_* + 3} T' + \frac{1}{2\mu_* + 3} (\mathbf{r} - \mathbf{z}) \cdot \nabla T' \right], \quad \Delta \psi'_m = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\kappa}, \quad \text{Gr} = \frac{\beta_* g \gamma R^4}{\nu^2}, \quad \text{Gr}_m = \frac{\mu_0 K_*^2 \gamma^2 R^4}{\rho_* \nu^2 \mu_*}, \quad \kappa = \frac{\kappa_f}{\kappa_m}.$$

В качестве масштабов величин были выбраны: расстояние – радиус полости R , времени – R^2/ν , массы – $\rho_* R^3$, температуры – γR , напряженности магнитного поля – $K_* \gamma R / \mu_*$.

На границе полости ($r = 1$) должны выполняться условия:

$$\begin{aligned} T &= T_m, \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial T_m}{\partial r}, \quad \mathbf{v} = 0, \\ \psi &= \psi_m, \quad \mu_* (1 + \alpha \cos \theta) \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial \psi_m}{\partial r}, \end{aligned}$$

а на большом удалении от нее ($r \rightarrow \infty$):

$$T_m = 0, \quad \psi_m = 0.$$

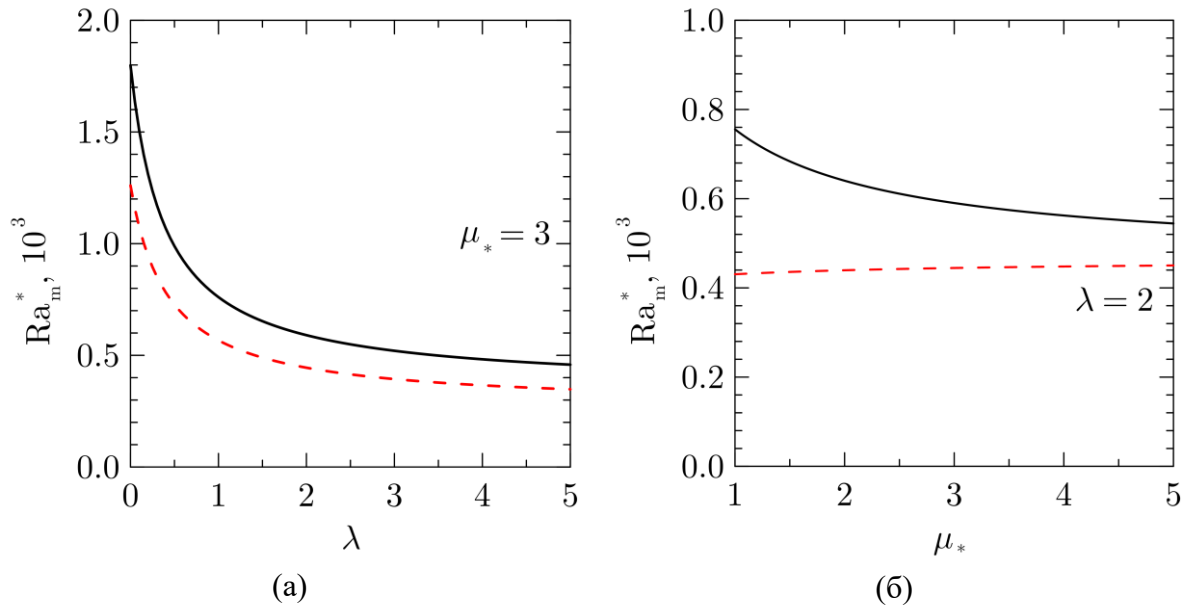


Рис. 2. Графики зависимостей первых двух критических чисел Рэлея без гравитационного поля от относительной теплопроводности λ (а) и магнитной проницаемости жидкости μ_* (б), полученных с учетом температурной зависимости магнитной проницаемости (черная линия) и без (красная штриховая линия)

Отметим, что в данной системе, наряду с λ , μ_* , Gr , Gr_m , появляется еще один управляющий параметр α , а также дополнительные слагаемые в уравнении Навье-Стокса, уравнении для магнитного потенциала и его граничных условиях. При этом если $\mu_* \rightarrow \infty$, то $\alpha \rightarrow 0$, и в данной системе происходит предельный переход к задаче, в которой температурная зависимость магнитной проницаемости явно не учитывалась [2]. В том случае магнитная проницаемость считалась постоянной в равновесной задаче с внешним температурным градиентом, а также в граничных условиях для магнитного потенциала, но при выводе уравнений Максвелла относительно малых возмущений косвенно считалась функцией температуры за счет зависимости намагниченности от напряженности и температуры.

4. Пороги устойчивости

Система (2) имеет решения, зависящие по времени по закону $\propto e^{-\Lambda t}$, где Λ – декремент возмущения. При $\Lambda = 0$ возмущения не затухают и не возрастают – их называют критическими. Для получения критических чисел воспользуемся методом Галеркина-Канторовича с использованием векторных сферических функций в качестве базисных. Данная процедура последовательно описана в работе [2].

Базис векторных сферических функций позволяет выделить два линейно-независимых класса решений: течения без радиальной компоненты и течения без псевдовекторной компоненты. Уровни устойчивости первого из них лежат ниже [4], поэтому остановимся на их рассмотрении. Также перейдем от магнитного числа Грасгофа к магнитному числу Рэлея: $Ra_m = Pr Gr_m$.

На рис. 2 представлены зависимости первых критических магнитных чисел Рэлея в отсутствие гравитации Ra_m^* от магнитной проницаемости жидкости μ_* и относительной теплопроводности λ , полученных с учетом температурной зависимости

магнитной проницаемости на всех этапах расчетов (черная сплошная линия) и при допущении, что магнитная проницаемость постоянна (красная штриховая линия), для течений без радиальной компоненты скорости. Полученные выражения для Ra_m^* не приводятся в силу их громоздкости.

Нетрудно заметить, что в рассматриваемом диапазоне параметров критические числа, полученные в данной работе, лежат ощутимо выше чисел из расчетов с постоянной проницаемостью [2]. Данное расхождение растет по мере уменьшения μ_* до единицы, то есть при приближении к случаю слабомагнитной жидкости. Важно отметить, что расхождение между подходами в критических числах практически не зависит от α . Более того, на рис. 2 параметр α равен нулю, то есть его влияние исключено. При этом учет даже очень слабой зависимости магнитной проницаемости от температуры ($\alpha \ll 1$) приводит к возникновению фактора $(2\mu_* + 1)/(2\mu_* + 3)$, не зависящему от α , перед Gr_m в уравнении Навье-Стокса. Отметим, что в подходе с постоянной магнитной проницаемостью множитель перед соответствующим слагаемым равен единице. Этот фактор имеет максимальную разность с единицей при $\mu_* = 1$, а минимальную – при $\mu_* \rightarrow \infty$.

5. Заключение

Таким образом, с учетом температурной зависимости магнитной проницаемости получена система уравнений термомагнитной конвекции относительно бесконечно малых возмущений. Отмечен случай предельного перехода к задаче, в которой эта зависимость не учитывается. На основе данной системы уравнений получены зависимости критических чисел Рэлея в отсутствие гравитации от магнитной проницаемости жидкости и отношения теплопроводностей. Обнаружено, что даже при очень слабой зависимости магнитной проницаемости от температуры в уравнении движения возникает фактор, который значительно меняет вид зависимостей критических чисел от параметров системы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 20-01-00491).

Список литературы

1. Баитовой В. Г., Берковский Б. М., Вислович А. Н. Введение в термомеханику магнитных жидкостей. М.: ИВТАН, 1985. 188 с.
2. Казанцев П. Н., Краузин П. В. Применение базиса векторных сферических функций для определения критических чисел Рэлея термомагнитной конвекции в шаровой полости // Физика для Пермского края: материалы региональной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. Пермь, 2020. Вып. 13. С. 60–65.
3. Казанцев П. Н., Краузин П. В. Определение магнитного потенциала в неоднородно нагретой магнитной жидкости: шаровая полость и горизонтальный цилиндр // Физика для Пермского края: материалы региональной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. Пермь, 2021. Вып. 14. С. 41–46.
4. Циберкин К. Б. Применение векторных сферических гармоник к анализу конвективной устойчивости жидкости в шаровой полости // Вестник Пермского университета. Серия: физика. 2014. Т. 40. № 4. С. 5–10.

Граница раздела жидкостей при осцилляциях в радиальном щелевом канале

И. Э. Карпунин, В. Г. Козлов

Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет,
614990, Пермь, ул. Сибирская, 24
email: karpunin_ie@pspu.ru, kozlov@pspu.ru

Экспериментально исследуется осцилляционная динамика границы раздела несмешивающихся жидкостей с высоким контрастом вязкостей в круглой ячейке Хеле-Шоу в зависимости от параметров осцилляций, толщины слоя и взаимного расположения жидкостей. Обнаружено, что с ростом амплитуды колебаний на границе раздела на части периода, когда маловязкая жидкость вытесняет высоковязкую, пороговым образом проявляется пальчиковая неустойчивость. При обратном смещении восстанавливается осесимметричная граница раздела. Найдена связь пороговых значений управляющих безразмерных параметров: безразмерного размаха колебаний границы раздела и капиллярного числа, рассчитанного через скорость осциллирующего движения «языка» и динамическую вязкость более вязкой жидкости. Неустойчивость имеет преимущественно локальный характер, наиболее сильно проявляющийся в случае, когда более вязкая жидкость располагается с внутренней стороны круговой границы.

Ключевые слова: радиальная ячейка Хеле-Шоу; граница раздела жидкостей; контраст вязкости жидкостей; осцилляции; пальчиковая неустойчивость

Liquid interface during oscillations in a radial slotted channel

I. E. Karpunin, V. G. Kozlov

Perm State Humanitarian Pedagogical University, 24 Sibirskaya St., 614990, Perm
email: karpunin_ie@pspu.ru, kozlov@pspu.ru

The dynamics of the interface of immiscible liquids with a high contrast of viscosities, which performs radial oscillations in a radial Hele-Shaw cell, is experimentally studied, depending on the parameters of the oscillations, the layer thickness, and the relative position of the liquids. With an increase in the amplitude of oscillations at the interface for a part of the period, when a low-viscosity liquid displaces a high-viscosity one, finger instability manifests itself in a threshold manner. With reverse displacement, the axisymmetric interface is restored. A relation has been found for the threshold values of the controlling dimensionless parameters: the range of interface oscillations and the capillary number, calculated through the rate of the oscillating movement of the «tongue» and the dynamic viscosity of a more viscous liquid. The instability has a

predominantly local character, which is most strongly manifested when a more viscous liquid is located on the inner side of the circular boundary.

Keywords: radial Hele-Shaw cell; liquid interface; liquid viscosity contrast; oscillations; finger instability

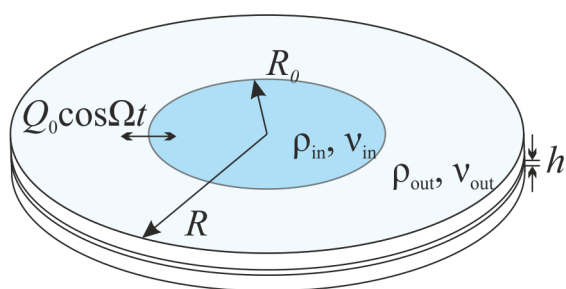
1. Введение

Актуальность темы настоящей работы определяется необходимостью изучения фундаментальных вопросов воздействия на межфазную границу двух жидкостей с целью подавления неустойчивости, развивающейся при вытеснении вязкой жидкости менее вязкой из пористой среды или щелевых каналов. В классической постановке, когда маловязкая жидкость располагается с внутренней стороны границы раздела и вытесняет более вязкую, традиционно экспериментально изучается в геометрии радиальной ячейки Хеле-Шоу [1]. Наряду с радиальной конфигурацией ячейки Хеле-Шоу экспериментальные исследования выполняются в прямых щелевых каналах, в той геометрии, в которой этот тип неустойчивости был впервые обнаружен, экспериментально исследован и теоретически описан [2]. Одним из методов воздействия на границу раздела жидкостей в пористых средах является вибрационное воздействие. Теоретические и экспериментальные работы [3, 4], направленные на описание влияния осцилляций на границу раздела жидкостей свидетельствуют об изменении режима вытеснения вязкой жидкости в результате волнового воздействия. Однако полное понимание механизма влияния вибраций на межфазную границу и развитую неустойчивость на данный момент отсутствует. Экспериментальное исследование динамики границы раздела двух жидкостей с высоким контрастом вязкостей, совершающей осцилляции в узком щелевом канале было начато в радиальной ячейке Хеле-Шоу [5] и продолжено в прямом щелевом канале [6]. В радиальной ячейке маловязкая жидкость располагалась с внутренней стороны круговой межфазной границы. При осцилляциях границы раздела маловязкая жидкость совершала колебания в виде «языка», периодически проникающего в вязкую жидкость. Был обнаружен новый вид морфологической неустойчивости, проявляющейся в формировании пальчиковых структур на границе раздела, и показано, что порог её возникновения определяется относительным размахом колебаний «языка» маловязкой жидкости. Таким образом, большой интерес представляет исследование влияния на формирование обнаруженной ранее неустойчивости: ширины щелевого канала, отношения вязкостей жидкостей, коэффициента поверхностного натяжения на границе раздела жидкостей, начального взаимного расположения жидкостей, совершающих радиальные колебания в круглой ячейке Хеле-Шоу.

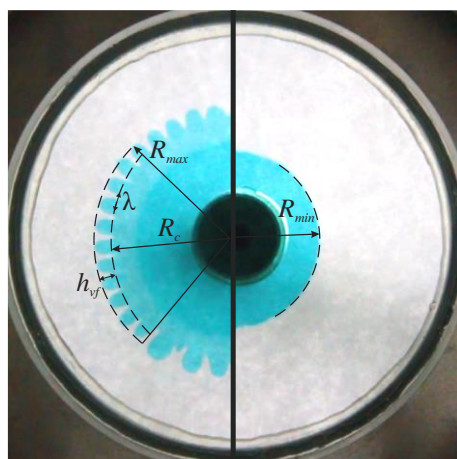
2. Экспериментальная установка и методика

Экспериментальная кювета (рисунок (а)) представляет собой осесимметричный плоский слой толщиной h , образованный двумя стеклянными дисками толщиной 7.9 мм и радиусом $R = 75$ мм, вклеенными в алюминиевые обоймы. Выравнивание давления на внешней границе слоя обеспечивается осесимметричным обводным каналом сечением 2.9 см^2 . Осциллирующее радиальное движение жидкости в осесимметричном щелевом зазоре создается гармоническим изменением перепада давления между центральным отверстием в одном из стёкол и обводным каналом. Подробное описание кюветы, конструктивных особенностей экспериментальной установки, а также принцип работы различных ее элементов приведены в [5]. Кювета изначально заполняется одной рабочей жидкостью (ρ_{out}, ν_{out}), а затем медленно

подается вытесняющая жидкость (ρ_{in}, ν_{in}), при этом формируется начальная осесимметричная граница раздела жидкостей радиусом R_0 . Рабочие жидкости подобраны таким образом, что их вязкости отличаются на несколько порядков, а плотности близки: подкрашенная пищевым красителем вода ($\rho_e = 1.0$ г/см³, $\nu_e = 1.0$ сСт), силиконовое масло ПМС-1000 ($\rho_m = 0.96$ г/см³, $\nu_m = 10^3$ сСт) и подкрашенный 50% р-р глицерина в воде ($\rho_g = 1.21$ г/см³, $\nu_g = 4.3$ сСт). Коэффициент межфазного натяжения на границе раздела пар рабочих жидкостей составляет $\sigma_1 = 38.8$ дин/см (подкрашенная вода – ПМС-1000) и $\sigma_2 = 22.5$ дин/см (подкрашенный 50% р-р глицерина в воде – ПМС-1000).



(а)



(б)

Рисунок. Схема плоского радиального слоя (а) и фото границы раздела жидкостей (вид снизу) в фазе максимального растяжения (левая часть рисунка) и стягивания (правая часть рисунка) с указанием измеряемых величин для пары подкрашенная вода (по центру) – ПМС-1000 (снаружи) при $h = 1.90$ мм и $f_{vib} = 3.5$ Гц (б)

С учетом малой толщины зазора и подобных характеристик жидкостей исключается действие силы тяжести – опыты выполняются в кювете, расположенной горизонтально. Толщина рабочего слоя в экспериментах задается с точностью 0.05 мм и составляет $h = 0.99, 1.70, 1.90$ мм. Наблюдение за динамикой границы раздела жидкостей, фото и видеорегистрация производятся со стороны стеклянных дисков, образующих слой, в проходящем освещении. Колебания границы раздела жидкостей задаются с помощью гидравлического насоса, управляемого электронным генератором. Расход прокачиваемой через кювету жидкости определяется законом $Q = Q_0 \cos \Omega t$, где Q_0 – амплитудное значение расхода прокачиваемой жидкости, $Q_0 = 0–7$ мл/с, и $f_{vib} = \Omega / 2\pi$ – частота заданных вибраций, $f_{vib} = 2–5$ Гц. В экспериментах определяется радиальный размер в фазе максимального смещения границы R_{max} и в фазе максимального стягивания – R_{min} (см. рисунок (б)). При некотором пороговом размахе колебаний границы раздела её поверхность теряет устойчивость [5] и в определенных фазах колебаний на границе возникают "пальцы" маловязкой жидкости,

характеризующиеся высотой структур h_{vf} и пространственным азимутальным периодом λ .

3. Результаты

Для всех проведенных экспериментов характерно появление и развитие неустойчивости осциллирующей межфазной границы пороговым образом при повышении размаха колебаний границы $\Delta_R = R_{\max} - R_{\min}$. Однако порог зависит от частоты осцилляций, толщины щелевого зазора и свойств жидкостей. Относительное взаимное расположение жидкостей влияет на форму надкритической межфазной границы, однако порог возникновения локальной неустойчивости однотипен и в первую очередь определяется размахом колебаний границы. Для пары подкрашенная вода – ПМС-1000 несмотря на вариацию относительного положения жидкостей пороговые значения определяются одной зависимостью, но для пары 50% водоглицериновый р-р – ПМС-1000 для развития пальчиковой неустойчивости при равных частотах требуется больший размах колебаний границы. Сравнение результатов для разной толщины рабочего слоя свидетельствует, что пороговое значение Δ_R понижается с уменьшением толщины h , неустойчивость формируется при меньшем значении размаха колебаний границы раздела. Для всех рассмотренных случаев общим является понижение порогового значения Δ_R с частотой колебаний. Анализ экспериментальных результатов, показывает, что если использовать безразмерный параметр Δ_R / h , характеризующий пороговое значение длины «языка» маловязкой жидкости, проникающего в слой более вязкой жидкости, пороговые значения в кювете заданной толщины согласуются между собой на плоскости безразмерных параметров Δ_R / h от ω , введенных в [5]. Параметр ω есть безразмерная частота, определяемая частотой колебаний, толщиной слоя и вязкостью маловязкой жидкости: $\omega = \Omega h^2 / \nu = 2\pi f_{vib} h^2 / \nu$. С повышением безразмерной частоты наблюдается уменьшение порогового значения Δ_R / h . В то же время, результаты для разных толщин слоя и пар жидкостей расслаиваются на плоскости этих параметров, но определяются одним законом $\Delta_R / h \sim \omega^{-1/3}$. Анализ показывает, что если ввести в рассмотрение капиллярное число $Ca = \Delta_R \Omega \eta_m / 2\sigma$, где $\eta_m = \rho_m \nu_m$ – динамическая вязкость силиконового масла ПМС-1000, то на плоскости $\Delta_R / h (Ca)$ результаты всех экспериментов на слоях различной толщины удовлетворительно согласуются между собой и укладываются на одну зависимость $\Delta_R / h \sim Ca^{-1/2}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Правительства Пермского края и Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант № 20-41-596011).

Список литературы

1. Singh A., Singh Y., Pandey K. M. Viscous fingering instabilities in radial Hele-Shaw cell: A review // Materials Today: Proceedings. 2020. Vol. 26. P. 760–762. DOI: 10.1016/j.matpr.2020.01.022
2. Saffman P. G., Taylor G. I. The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences. 1958. Vol. 245(1242). P. 312–329. DOI: /10.1098/rspa.1958.0085

3. *Lyubimova T., Ivantsov A., Lyubimov D.* Control of fingering instability by vibrations // *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*. 2021. Vol. 16. 40. DOI: 10.1051/mmnp/2021031
4. *Arun R., Dawson S. T., Schmid P. J., Laskari A., McKeon B. J.* Control of instability by injection rate oscillations in a radial Hele-Shaw cell // *Physical Review Fluids*. 2020. Vol. 5. 123902. DOI: 10.1103/PhysRevFluids.5.123902
5. *Kozlov V., Karpunin I., Kozlov N.* Finger instability of oscillating liquid – liquid interface in radial Hele-Shaw cell // *Physics of Fluids*. 2020. Vol. 32. 102102. DOI: 10.1063/5.0018541
6. *Kozlov V., Vlasova O.* Oscillatory dynamics of immiscible liquids with high viscosity contrast in a rectangular Hele–Shaw channel // *Physics of Fluids*. 2022. Vol. 34 (3). 032121. DOI: 10.1063/5.0084363

О функциональных связях гидродинамических полей стационарного осесимметричного течения вязкой жидкости

Д. В. Князев

Институт механики сплошных сред УрО РАН,
614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1
email: dvk@icmm.ru

Анализ уравнений стационарного осесимметричного движения вязкой жидкости в переменных функция тока, вихрь, функция Бернулли показывает, что в случае существенно вязкого течения ранг матрицы Якоби системы этих гидродинамических переменных равен двум, что означает наличие между ними функциональной связи. Основой для нахождения этой связи служит уравнение, полученное как следствие уравнений движения и переноса вихря, имеющее вид линейной комбинации градиентов трёх гидродинамических полей с коэффициентами равными минорам второго порядка матрицы Якоби. С помощью интегрирующего множителя линейная комбинация приводится к полному градиенту некоторой функции, сохраняющей, хотя бы локально, постоянное значение на решении исходной системы гидродинамических уравнений. Эта сохраняющаяся величина даёт выражение функциональной зависимости между функцией Бернулли и модифицированными вихрем и функцией тока. Для осуществления указанной процедуры требуется найти коэффициенты линейной комбинации как функций заранее неизвестных гидродинамических полей, а не пространственных переменных, что приводит к необходимости рассмотрения замкнутой системы уравнений, построенной в настоящей работе. По её решениям находится вид искомой функциональной зависимости и сами гидродинамические поля. Приведены примеры такого рода решений.

Ключевые слова: уравнения гидродинамики; осесимметричные течения; сохраняющиеся величины; функциональная зависимость

On functional dependency of the stationary axisymmetric hydrodynamic fields

D. V. Knyazev

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS,
1 Akademika Koroleva St., 614013, Perm
email: dvk@icmm.ru

An analysis of the stationary axisymmetric viscous fluid flow equations in the stream function, vortex, Bernoulli function variables in the case of an essentially viscous flow shows that the Jacobi matrix rank of the system of these

hydrodynamic variables is equal to two, which means their functional dependency. The equation obtained as a consequence of the equations of motion and vortex transfer is the base for finding such relationship, which has the form of a three hydrodynamic fields gradients linear combination with coefficients proportional to the second order minors of the Jacobi matrix. By an integrating factor the linear combination is reduced to the full gradient of a certain function that retains, locally at least, a constant value on the solution of original hydrodynamic equations system. This conserved quantity is an expression the functional relationship of the Bernoulli function and the modified vortex and stream function. It is required to find the coefficients of a linear combination as functions of beforehand unknown hydrodynamic fields, rather than spatial variables, to implement this procedure which leads to consideration a certain closed system of equations constructed in this paper. The form of the desired functional dependence and the hydrodynamic fields themselves are found according to its solutions. Examples of such solutions are given.

Keywords: hydrodynamics equations; axisymmetric flows; conserved quantities; functional dependency

1. Введение

Известно, что при стационарном трёхмерном течении вязкой несжимаемой жидкости функция Бернулли β сохраняет постоянное значение вдоль линий тока и вихревых линий. Убедиться в этом проще всего, спроектировав уравнения движения вязкой жидкости в форме Громеки-Ламба на эти линии, как это сделано в [1]. Формальным путём к данному результату можно прийти, применяя к вектору скорости \mathbf{v} преобразование [2]

$$\mathbf{v} = \nabla \lambda_1 \times \nabla \mu_1 \quad (1.1)$$

и преобразование Клебша [3, 4].

$$\mathbf{v} = \nabla \Phi + \lambda_2 \nabla \mu_2. \quad (1.2)$$

В случае (1.1) линия тока в трёхмерном пространстве (x, y, z) является пересечением поверхностей потенциалов $\lambda_1(x, y, z)$, $\mu_1(x, y, z)$. Из уравнения движения следует, что $\nabla \beta$ равен линейной комбинации $\nabla \lambda_1$, $\nabla \mu_2$, а значит имеет место функциональная связь $\beta = \beta(\lambda_1, \mu_1)$.

Преобразование (1.2) справедливо, в том числе, для нестационарного течения, причём вихрь скорости равен $\boldsymbol{\Omega} = \nabla \lambda_2 \times \nabla \mu_2$, то есть пространственная вихревая линия есть пересечение поверхностей $\lambda_2(t, x, y, z)$, $\mu_2(t, x, y, z)$. Из уравнения движения следует, что величина $B \equiv \beta + \Phi_t + \lambda_2 \mu_{2t}$ (здесь индекс t обозначает частную производную по времени) является функцией переменных t , λ_2 , μ_2 . В стационарном случае $B(\lambda_2, \mu_2)$ совпадает с функцией Бернулли. При безвихревом течении ($\lambda_2 = 0$, $\mu_2 = 0$) величина $B = \beta + \Phi_t$ в фиксированный момент времени постоянна для всего потока (интеграл Коши–Лагранжа).

В случае двумерного стационарного течения вектор вихря имеет только одну компоненту, перпендикулярную плоскости течения $\boldsymbol{\Omega} = \Omega(x, y)\mathbf{k}$, а линии тока совпадают с изолиниями функции тока $\Psi(x, y)$, вводимой как $\mathbf{v} = \nabla \times (\Psi \mathbf{k})$. Из

уравнения движения $\Omega \nabla \Psi = -\nabla \beta$, следуют функциональные связи $\Omega(\Psi) = -d\beta(\Psi)/d\Psi$. Таким образом, завихрённость и функция Бернулли сохраняются вдоль линии тока. Подобные результаты справедливы для осесимметричных и вращательно-симметричных установившихся течений идеальной жидкости [5, 6].

Во всех перечисленных случаях удаётся показать, что градиент функции Бернулли (или её модификация, как в случае нестационарного преобразования Клебша) локально представим в виде линейной комбинации градиентов двух величин, связанных с линиями тока и завихрённости. Следовательно, между тремя этими величинами имеется функциональная связь, имеющая смысл интеграла уравнений движения идеальной жидкости, или сохраняющейся, в некотором смысле, величины.

В настоящей работе показано, что уравнениями осесимметричного стационарного движения вязкой жидкости допускается, по крайней мере, локально, существование функции $S(\psi, \omega, \beta) = \text{const}$ (то есть $\nabla S(\psi, \omega, \beta) = 0$), представляющей собой функциональную связь между функцией Бернулли β и модифицированными вихрём ω и функцией тока ψ . В отличие от течений идеальной жидкости, для описания которых упомянутые выше функциональные зависимости выбираются «произвольно», вычисление $S(\psi, \omega, \beta)$ требует решения системы уравнений в частных производных. Для двумерных установившихся вязких течений аналогичный результат получен в [7].

2. Функциональные связи гидродинамических полей

Уравнения движения вязкой жидкости в форме Громеки–Ламба имеют вид [8]

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} = -\nabla \beta - \mathbf{v} \nabla \times \boldsymbol{\Omega}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{v}, \quad \beta = \Pi + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2}. \quad (2.1)$$

Здесь Π включает в себя давление, отнесённое к постоянной плотности, и потенциал массовых сил. Остальные обозначения стандартные.

Рассмотрим установившееся осесимметричное течение вязкой жидкости. Используя цилиндрическую систему координат (r, φ, ζ) с ортонормированным базисом $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_\zeta$ представим векторы скорости и вихря следующим образом

$$\mathbf{v} = \nabla \times \left(\frac{\Psi(r, \zeta)}{r} \mathbf{e}_\varphi \right), \quad \boldsymbol{\Omega} = r \omega(r, \zeta) \mathbf{e}_\varphi.$$

В результате уравнения (2.1) преобразуются к системе

$$\omega \nabla \psi + \nabla \beta = v r \mathbf{e}_\varphi \times \nabla \omega, \quad \Delta \psi - \frac{2\mathbf{e}_r}{r} \cdot \nabla \psi = -r^2 \omega, \quad (2.2)$$

где $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ – оператор Лапласа в цилиндрических координатах; $\psi(r, \zeta) = \Psi(r, \zeta) + 2v\zeta$.

В случае $\omega = \omega_0 = \text{const}$ система (2.2) упрощается

$$\nabla(\omega_0 \psi + \beta) = 0, \quad \Delta \psi - \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = -r^2 \omega_0. \quad (2.3)$$

Из первого уравнения (2.3) следует, что функция $S(\psi, \omega_0, \beta) = \omega_0 \psi + \beta$ сохраняет постоянное значение. К такого рода движениям жидкости относится течение Пуазейля в цилиндрической трубе кругового нормального сечения. При потенциальном течении

($\omega = 0$) сохраняющаяся величина $S(\psi, \omega_0, \beta)$ переходит в интеграл Бернулли-Эйлера $\beta = \text{const}$.

Пусть теперь $\omega \neq \text{const}$. Воспользуемся двумя следствиями первого уравнения (2.2)

$$\nabla \omega \times \nabla \psi = \mathbf{e}_\varphi v r \Delta \omega, \quad \nabla \psi \times \nabla \beta = \mathbf{e}_\varphi v r \nabla \psi \cdot \nabla \omega. \quad (2.4)$$

Одно из них – уравнение переноса вихря, второе – получено векторным умножением уравнения движения на $\nabla \psi$. Умножим векторно первое уравнение (2.4) на $\nabla \beta$, второе – на $\nabla \omega$, сложив результаты, воспользуемся тождеством Якоби [9] и после векторного умножения на \mathbf{e}_φ и простых преобразований получим

$$P \nabla \psi + Q \nabla \omega + R \nabla \beta = 0. \quad (2.5)$$

Коэффициенты этого выражения равны

$$P = \mathbf{e}_\varphi \cdot (\nabla \beta \times \nabla \omega), \quad Q = v r \nabla \omega \cdot \nabla \psi, \quad R = v r \Delta \omega. \quad (2.6)$$

С другой стороны, в силу (2.4), имеем

$$P = \mathbf{e}_\varphi \cdot (\nabla \beta \times \nabla \omega), \quad Q = \mathbf{e}_\varphi \cdot (\nabla \psi \times \nabla \beta), \quad R = \mathbf{e}_\varphi \cdot (\nabla \omega \times \nabla \psi). \quad (2.7)$$

Соотношение (2.5) с коэффициентами (2.6) справедливо, только если функции $\psi(r, \zeta)$, $\omega(r, \zeta)$, $\beta(r, \zeta)$ связаны первым уравнением (2.2). Выражение (2.5) с коэффициентами (2.7) является тождеством, верным для произвольных гладких функций $\psi(r, \zeta)$, $\omega(r, \zeta)$, $\beta(r, \zeta)$, причём P , Q , R – миноры второго порядка матрицы Якоби этой системы функций. Последнее обстоятельство позволяет судить о характере связей между величинами ψ , ω , β .

В случае идеальной жидкости ($v = 0$) из (2.5), (2.6) следует, что $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, то есть ранг матрицы Якоби системы функций $\psi(r, \zeta)$, $\omega(r, \zeta)$, $\beta(r, \zeta)$ равен единице, а значит две из этих функций могут быть выражены через третью. Обычно это свойство формулируется как утверждение о сохранении величиной ω и функцией Бернулли β постоянного значения вдоль линии тока в осесимметричном стационарном потоке идеальной жидкости. Система (2.2) редуцируется к уравнению относительно ψ [5]

$$\Delta \psi - \frac{2\mathbf{e}_r}{r} \cdot \nabla \psi = -r^2 \omega(\psi),$$

и связи $d\beta(\psi)/d\psi = -\omega(\psi)$, в которых одна из функций $\omega(\psi)$ или $\beta(\psi)$ должна быть выбрана из дополнительных физических соображений, диктуемых постановкой конкретной задачи.

Покажем, что в случае вязкой жидкости при выполнении условия $\nabla \omega \neq 0$ ранг матрицы Якоби системы функций $\psi(r, \zeta)$, $\omega(r, \zeta)$, $\beta(r, \zeta)$ равен двум, то есть в каждой точке области течения $P^2 + Q^2 + R^2 > 0$. Исключим $\nabla \omega$ из (2.7) с помощью первого уравнения (2.2)

$$Q = \mathbf{e}_\varphi \cdot (\nabla \psi \times \nabla \beta), \quad P = -\frac{1}{vr} \nabla \beta \cdot (\omega \nabla \psi + \nabla \beta), \quad R = \frac{1}{vr} \nabla \psi \cdot (\omega \nabla \psi + \nabla \beta). \quad (2.8)$$

Предположим обратное: пусть в некоторой точке области течения $\nabla\omega \neq 0$ и при этом $P=0$, $Q=0$, $R=0$. Величина Q обращается в ноль в трёх случаях: $\nabla\psi=0$, $\nabla\beta=0$, $\nabla\psi$ и $\nabla\beta$ – коллинеарны. При $\nabla\psi=0$ из второго выражения (2.8) и предположения $P=0$ следует, что $\nabla\beta=0$, но тогда из первого уравнения (2.2) вытекает $\nabla\omega=0$, что противоречит условию $\nabla\omega \neq 0$. Пусть теперь $\nabla\beta=0$, тогда из предположения $R=0$ и последнего соотношения (2.8) следует, что в рассматриваемой точке либо $\nabla\psi=0$, либо $\omega=0$, но, в силу уравнения движения (2.2), оба эти случая вновь противоречат требованию $\nabla\omega \neq 0$. Пусть $\nabla\beta=\alpha\nabla\psi \neq 0$, тогда из $P=0$, $R=0$ и (2.8) получаем $\alpha=-\omega$, что, с учётом первого уравнения (2.2), опять ведёт к противоречию с условием $\nabla\omega \neq 0$.

Из доказанного утверждения и формулы (2.5) следует, что величины P и R не обращаются в ноль в одной и той же точке. Отметим, что ось симметрии потока $r=0$ к области течения не относится, а принадлежит её границе.

Поскольку ранг матрицы Якоби системы функций $\psi(r,\zeta)$, $\omega(r,\zeta)$, $\beta(r,\zeta)$ равен двум, они, по крайней мере, локально функционально зависимы, то есть существует функция $S(\psi,\omega,\beta)$, сохраняющая постоянное значение на решении системы (2.2):

$$S(\psi,\omega,\beta)=S_0=\text{const}, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial\psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial\omega}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial\beta}\right)^2 > 0.$$

Выражение (2.5) с помощью интегрирующего множителя $\mu \neq 0$ может быть приведено к полному градиенту функции $S(\psi,\omega,\beta)$, то есть

$$\mu(P\nabla\psi + Q\nabla\omega + R\nabla\beta) = \nabla S(\psi,\omega,\beta) = \frac{\partial S}{\partial\psi}\nabla\psi + \frac{\partial S}{\partial\omega}\nabla\omega + \frac{\partial S}{\partial\beta}\nabla\beta = 0. \quad (2.9)$$

Для этого нужно, чтобы P , Q , R были таковы, что $\nabla \times [\mu(P\nabla\psi + Q\nabla\omega + R\nabla\beta)] = 0$, это равносильно требованию

$$\nabla\psi \times \nabla P + \nabla\omega \times \nabla Q + \nabla\beta \times \nabla R = 0. \quad (2.10)$$

Легко убедиться в том, что условие (2.10) всегда выполнено в силу (2.7) и тождества Якоби. Далее строится система уравнений для нахождения $S(\psi,\omega,\beta)=S_0$.

3. Система уравнений

Предполагается, что в области течения диссипативное слагаемое в (2.2) не обращается в ноль, то есть $\nabla\omega \neq 0$, следовательно, ранг матрицы Якоби системы гладких функций $\psi(r,\zeta)$, $\omega(r,\zeta)$, $\beta(r,\zeta)$ во всех внутренних точках равен двум, в частности это означает, что координаты r , ζ и две из переменных ψ , ω , β связаны (локальным) диффеоморфизмом. Исходя из этого далее принимается, что произвольная функция $A(r,\zeta)$ может быть также представлена как гладкая функция переменных ψ , ω , β , а именно

$$A(r,\zeta) = A(\psi(r,\zeta), \beta(r,\zeta), \omega(r,\zeta)).$$

Отыскание $S(\psi, \omega, \beta) = S_0$ эквивалентно вычислению P , Q , R как функций переменных ψ , ω , β . Осуществить это возможно исходя из требования совместности (2.5) (или (2.9)) с исходной системой (2.2), а также (2.6), (2.7), (2.10).

Удобно ввести новые неизвестные $X(\psi, \omega, \beta)$, $Y(\psi, \omega, \beta)$, $Z(\psi, \omega, \beta)$, связанные с $P(\psi, \omega, \beta)$, $Q(\psi, \omega, \beta)$, $R(\psi, \omega, \beta)$, $r(\psi, \omega, \beta)$, первыми производными от $S(\psi, \omega, \beta)$ и интегрирующим множителем $\mu(\psi, \omega, \beta)$, соотношениями

$$P = \nu e^{2Z}(\omega Y - r) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial S}{\partial \psi}, \quad Q = \nu^2 r e^{2Z} X = \frac{1}{\mu} \frac{\partial S}{\partial \omega}, \quad R = \nu e^{2Z} Y = \frac{1}{\mu} \frac{\partial S}{\partial \beta}. \quad (3.1)$$

Из (2.5) и первого уравнения (2.2), с учётом (3.1), выразим $\nabla \psi$, $\nabla \beta$

$$\nabla \psi = \nu(X \nabla \omega + Y \mathbf{e}_\phi \times \nabla \omega), \quad \nabla \beta = -\nu[\omega X \nabla \omega + (\omega Y - r) \mathbf{e}_\phi \times \nabla \omega]. \quad (3.2)$$

В силу (2.2) уравнения (2.7) и второе соотношение (2.6) сводятся к уравнению

$$\nabla \omega \cdot \nabla \omega = e^{2Z}. \quad (3.3)$$

Для дальнейшего, используя (3.2), (3.3), полезно выписать выражение для ∇A произвольной функции $A(\psi, \omega, \beta)$

$$\begin{aligned} \nabla A &= D_1[A] \nabla \omega + D_2[A] \mathbf{e}_\phi \times \nabla \omega, \\ D_1[A] &= \frac{\partial A}{\partial \omega} + \nu X \left(\frac{\partial A}{\partial \psi} - \omega \frac{\partial A}{\partial \beta} \right), \quad D_2[A] = \nu \left[Y \frac{\partial A}{\partial \psi} + (r - \omega Y) \frac{\partial A}{\partial \beta} \right]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Формулы (3.2) – частный случай (3.4) при $A = \psi$ и $A = \beta$.

Исходя из требования $\nabla \times \nabla A \equiv 0$, найдём условие, которому должны удовлетворять неизвестные X , Y , r для того, чтобы выражение (3.4) действительно было градиентом произвольной функции $A(\psi, \omega, \beta)$. С учётом последнего уравнения (2.6), а также того, что

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \nabla r(\psi, \omega, \beta) = D_1[r] \nabla \omega + D_2[r] \mathbf{e}_\phi \times \nabla \omega, \\ \mathbf{e}_\zeta &= \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\phi = D_2[r] \nabla \omega - D_1[r] \mathbf{e}_\phi \times \nabla \omega, \end{aligned} \quad (3.5)$$

придём к цепочке равенств

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla A &= \mathbf{e}_\phi e^{2Z} \left(D_1[D_2[A]] - D_2[D_1[A]] + \frac{1}{r} (Y - D_1[r]) D_2[A] \right) = \\ &= \nu \mathbf{e}_\phi e^{2Z} \left(\frac{\partial A}{\partial \psi} - \omega \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) \left(D_1[Y] - D_2[X] + \frac{Y}{r} (Y - D_1[r]) \right) = 0. \end{aligned}$$

Для того чтобы она была верна независимо от выбора функции $A(\psi, \omega, \beta)$, неизвестные X , Y , r должны быть связаны уравнением

$$D_1[Y] - D_2[X] + \frac{Y}{r} (Y - D_1[r]) = 0, \quad (3.6)$$

а для операторов $D_1[A]$, $D_2[A]$ справедливо тождество

$$D_1[D_2[A]] - D_2[D_1[A]] + \frac{1}{r}(Y - D_1[r])D_2[A] = 0, \quad (3.7)$$

эквивалентное условию $\partial^2 A / \partial r \partial \zeta = \partial^2 A / \partial \zeta \partial r$. Легко убедиться в том, что требование (2.10) сводится к уравнению (3.6).

Остаётся рассмотреть второе уравнение (2.2) и последнее уравнение (2.6). Подставив (3.2) во второе уравнение (2.2) найдём

$$D_1[X] + D_2[Y] + \frac{1}{r}(XY - 2XD_1[r] - YD_2[r]) + \frac{\omega r^2}{v}e^{-2Z} = 0. \quad (3.8)$$

Из (3.5) и (3.3) следует, что

$$\nabla \omega = e^{2Z}(D_1[r]\mathbf{e}_r + D_2[r]\mathbf{e}_\zeta), \quad e^{-2Z} = (D_1[r])^2 + (D_2[r])^2. \quad (3.9)$$

Подставляя $\nabla \omega$ из (3.9) в последнее уравнение (2.6), получим

$$D_1[D_1[r]] + D_2[D_2[r]] + \frac{1}{r}(Y - D_1[r])D_1[r] = 0. \quad (3.10)$$

Второе выражение (3.9) можно рассматривать как определение $Z(\psi, \omega, \beta)$, тогда уравнения (3.6), (3.8), (3.10) образуют искомую замкнутую систему относительно $X(\psi, \omega, \beta)$, $Y(\psi, \omega, \beta)$, $r(\psi, \omega, \beta)$:

$$\begin{aligned} D_1[Y] - D_2[X] + \frac{1}{r}Y(Y - D_1[r]) &= 0, \\ D_1[X] + D_2[Y] + D_1[r]\left(\frac{\omega r^2}{v}D_1[r] - \frac{2X}{r}\right) + D_2[r]\left(\frac{\omega r^2}{v}D_2[r] - \frac{Y}{r}\right) + \frac{XY}{r} &= 0, \\ D_1[D_1[r]] + D_2[D_2[r]] + \frac{1}{r}(Y - D_1[r])D_1[r] &= 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Последнее уравнение системы (3.11) равносильно паре уравнений

$$D_1[r] = -D_2[\zeta], \quad D_2[r] = D_1[\zeta]. \quad (3.12)$$

Действительно, сравнивая (3.5) с выражениями

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\zeta &= \nabla \zeta(\psi, \omega, \beta) = D_1[\zeta]\nabla \omega + D_2[\zeta]\mathbf{e}_\phi \times \nabla \omega, \\ \mathbf{e}_r &= \mathbf{e}_\phi \times \mathbf{e}_\zeta = -D_2[\zeta]\nabla \omega + D_1[\zeta]\mathbf{e}_\phi \times \nabla \omega, \end{aligned}$$

получим (3.12). Требуя для $D_1[\zeta]$, $D_2[\zeta]$ выполнения условия совместности (3.7) придём к третьему уравнению (3.11).

Преобразуем систему (3.11) к более симметричному виду. Второе уравнение (3.9) обращается в тождество, если принять

$$D_1[r] = e^{-Z} \cos W, \quad D_2[r] = e^{-Z} \sin W. \quad (3.13)$$

Здесь $W(\psi, \omega, \beta)$ – новая неизвестная. Подставляя (3.13) в последнее уравнение (3.11) и требуя для $D_1[r]$, $D_2[r]$ выполнения условия совместности (3.7) получим

$$D_1[Z] - D_2[W] = \frac{1}{r}(Y - e^{-Z} \cos W), \quad D_1[W] + D_2[Z] = 0.$$

В результате (3.11) преобразуется в систему уравнений первого порядка относительно $X(\psi, \omega, \beta)$, $Y(\psi, \omega, \beta)$, $Z(\psi, \omega, \beta)$, $W(\psi, \omega, \beta)$, $r(\psi, \omega, \beta)$

$$\begin{aligned} D_1[Y] - D_2[X] &= \frac{Y}{r} (e^{-Z} \cos W - Y), \\ D_1[X] + D_2[Y] &= \frac{e^{-Z}}{r} (2X \cos W + Y \sin W) - \frac{XY}{r} - \frac{\omega r^2}{v} e^{-2Z}, \\ D_1[Z] - D_2[W] &= \frac{1}{r} (Y - e^{-Z} \cos W), \\ D_1[W] + D_2[Z] &= 0, \\ D_1[r] &= e^{-Z} \cos W, \quad (D_2[r] = e^{-Z} \sin W). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Согласно (3.2), (3.9), (3.13) справедливы равенства

$$\begin{aligned} \nabla \omega &= e^Z (\mathbf{e}_r \cos W + \mathbf{e}_\zeta \sin W), \\ \nabla \psi &= v e^Z [\mathbf{e}_r (X \cos W + Y \sin W) + \mathbf{e}_\zeta (X \sin W - Y \cos W)], \\ \nabla \beta &= v e^Z \{ \mathbf{e}_r [(r - \omega Y) \sin W - \omega X \cos W] - \mathbf{e}_\zeta [(r - \omega Y) \cos W + \omega X \sin W] \}, \\ \mathbf{v} &= \frac{v e^Z}{r} [\mathbf{e}_r (2e^{-Z} + Y \cos W - X \sin W) + \mathbf{e}_\zeta (X \cos W + Y \sin W)]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

С помощью (3.15) и (3.4) легко убедиться в том, что требования $\nabla \times \nabla \psi = 0$, $\nabla \times \nabla \omega = 0$ приводят к первому и четвёртому уравнениям (3.14). Подстановка выражений $\nabla \omega$, $\nabla \psi$ из (3.15) во второе уравнение (2.2) и первое уравнение (2.4) дают второе и третье уравнения (3.14). Первое уравнение (2.2) и (2.5) обращаются в тождества. С помощью (3.15) можно формулировать граничные условия для (3.14).

После того как некоторое решение (3.14) найдено, величина $S(\psi, \omega, \beta) = S_0$ вычисляется как решение уравнений

$$D_1[S] = 0, \quad D_2[S] = 0, \quad (3.16)$$

следующих из (3.1) (или того, что $\nabla S(\psi, \omega, \beta) = 0$ и (3.4)), и совместных в смысле условия (3.7).

4. Редукции и примеры решений

Ввиду существования связи $S(\psi, \omega, \beta) = S_0$ наличие в (3.11) или (3.14) трёх независимых переменных ψ , ω , β представляется избыточным. Рассмотрим два преобразования, позволяющие сократить количество независимых переменных

$$\xi = \omega, \quad \eta = \psi, \quad \chi = S(\psi, \omega, \beta). \quad (4.1)$$

$$\xi = \omega, \quad \eta = \beta, \quad \chi = S(\psi, \omega, \beta). \quad (4.2)$$

Преобразование (4.1) не вырождено при условии $\partial S / \partial \beta \neq 0$. Под его действием дифференциальные операторы $D_1[A]$, $D_2[A]$, а вместе с ними система (3.14), приводятся к виду, не содержащему переменной χ

$$D_1[A] = \frac{\partial A}{\partial \xi} + vX \frac{\partial A}{\partial \eta}, \quad D_2[A] = vY \frac{\partial A}{\partial \eta}.$$

При этом функция $S(\psi, \omega, \beta)$, разумеется, заранее не известна, достаточно лишь знать, что она обладает свойствами (3.16). Таким образом, преобразование (4.1) понижает размерность задачи.

Преобразование (4.2) также понижает размерность. Оно невырождено при условии $\partial S / \partial \psi \neq 0$, и редуцирует операторы $D_1[A]$, $D_2[A]$ к виду

$$D_1[A] = \frac{\partial A}{\partial \xi} - v\xi X \frac{\partial A}{\partial \eta}, \quad D_2[A] = v(r - \xi Y) \frac{\partial A}{\partial \eta}.$$

Система (2.14) обладает решением вида

$$X = X_0(\omega) + (a\psi - b\beta)X_1(\omega), \quad Y = Y(\omega), \quad Z = Z(\omega), \quad r = r(\omega), \quad W = \pi n. \quad (4.3)$$

Здесь a, b – постоянные; n – целое число. Новые неизвестные удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\omega} &= (-1)^n e^{-Z}, \quad \frac{dZ}{d\omega} = \frac{1}{r} [Y - (-1)^n e^{-Z}] \\ \frac{dX_1}{d\omega} + \left\{ v(a + b\omega)X_1 + \frac{1}{r} [Y - 2(-1)^n e^{-Z}] \right\} X_1 &= 0, \\ \frac{dY}{d\omega} + \left\{ v(a + b\omega)X_1 - \frac{1}{r} [Y - (-1)^n e^{-Z}] \right\} Y &= vbrX_1, \\ \frac{dX_0}{d\omega} + \left\{ v(a + b\omega)X_1 + \frac{1}{r} [Y - 2(-1)^n e^{-Z}] \right\} X_0 &= -\frac{\omega r^2}{v} e^{-2Z}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

От сомножителя $(-1)^n$ в (4.4) можно избавиться, выполнив замены $\omega \rightarrow (-1)^n \omega$, $X_1 \rightarrow (-1)^n X_1$, $Y \rightarrow (-1)^n Y$, $b \rightarrow (-1)^n b$. Ограничимся рассмотрением двух частных решений (4.3), (4.4), соответствующих $\partial S / \partial \beta = 0$ и $\partial S / \partial \psi = 0$.

Пусть $Y = 0$ (согласно (3.1) – $\partial S / \partial \beta = 0$), $X_1 = 0$, $X = X_0$. Система (4.4) преобразуется к виду

$$\frac{dr}{d\omega} = e^{-Z}, \quad r \frac{dZ}{d\omega} = -e^{-Z}, \quad \frac{dX}{d\omega} = \frac{2}{r} e^{-Z} X - \frac{\omega r^2}{v} e^{-2Z},$$

её общее решение

$$r = C_2 e^{C_1 \omega}, \quad X = e^{2C_1 \omega} \left[C_3 + \frac{C_2^4}{4v} (1 - 2C_2 \omega) e^{2C_1 \omega} \right], \quad Z = -(\ln |C_1 C_2| + C_1 \omega).$$

Здесь и далее C_i – постоянные интегрирования ($i = 0, 1, 2, \dots$). При $Y = 0$ первое уравнение (3.2) переписывается как $\nabla \psi = vX \nabla \omega$ следовательно, $\psi = \psi(\omega)$ и $d\psi/d\omega = vX$. Решение последнего уравнения, представленное в виде

$$2C_1 \psi - \left[vC_3 + \left(\frac{C_2}{2} \right)^4 (3 - 4C_1 \omega) e^{2C_1 \omega} \right] e^{2C_1 \omega} = C_4,$$

можно принять в качестве $S(\psi, \omega)$, так как оно удовлетворяет требованиям (3.16). С помощью (3.15) вычисляется вектор скорости

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_r \frac{2v}{r} + \mathbf{e}_\zeta \frac{v}{C_1 C_2^2} \left[C_3 + \frac{C_2^2}{4v} r^2 \left(1 - 2 \ln \frac{r}{C_2} \right) \right]. \quad (4.5)$$

Пусть теперь $Y = r/\omega$ (согласно (3.1) – $\partial S/\partial \psi = 0$), $X_1 = 0$, $X = X_0$. Система (4.4) преобразуется к виду

$$\frac{dr}{d\omega} = e^{-z}, \quad r \frac{dZ}{d\omega} = \frac{r}{\omega} - e^{-z}, \quad \frac{dX}{d\omega} = \left(\frac{2}{r} e^{-z} - \frac{1}{\omega} \right) X - \frac{\omega r^2}{v} e^{-2z},$$

её общее решение

$$r = C_2 |\omega|^{C_1}, \quad Z = -\ln(C_2 |C_1| |\omega|^{C_1-1}), \quad X = \frac{C_1^2 C_2^4}{v} |\omega|^{2C_1-1} \left(C_3 + \frac{1 - |\omega|^{2C_1+1}}{2C_1+1} \right),$$

$$\omega C_1 > 0, \quad C_2 > 0.$$

При $Y = r/\omega$ второе уравнение (3.2) переписывается как $\nabla \beta = -v\omega X \nabla \omega$ следовательно, $\beta = \beta(\omega)$ и $d\beta/d\omega = -v\omega X$. Решение последнего уравнения, представленное в виде

$$\beta - \frac{C_1^2 C_2^4}{v} \left[\frac{1 + C_3(2C_1+1) - |\omega|^{2C_1+1}}{2C_1+1} \right]^2 = C_4,$$

можно принять в качестве $S(\psi, \omega)$, так как оно удовлетворяет требованиям (3.16). С помощью (3.15) вычисляется вектор скорости

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_r \frac{v(2C_1+1)}{r C_1} + \mathbf{e}_\zeta |C_1| C_2^2 \left[C_3 + \frac{1 - (r/C_2)^{(2C_1+1)/C_1}}{2C_1+1} \right]. \quad (4.6)$$

Поля скорости вида (4.5), (4.6) принадлежат семейству точных решений уравнений гидродинамики вязкой жидкости

$$\mathbf{v} = \frac{vG}{r} \mathbf{e}_r + u(r) \mathbf{e}_\zeta, \quad \Pi = \Pi_0(r) + \zeta \Pi_1, \quad \frac{d}{dr} (r^{-G} u) = \frac{\Pi_1}{2v} r^{1-G} + C_0 r^{-1-G},$$

описывающему течения среды, индуцированные постоянным осевым градиентом давления $\Pi_1 \mathbf{e}_\zeta$ и линейным однородным источником либо стоком мощности $vG/(2\pi)$, расположенным на оси симметрии.

5. Заключение

Показано, что в силу первого уравнения (2.2) и его дифференциального следствия (уравнения переноса вихря) справедливо уравнение (2.5), коэффициенты которого P , Q , R равны минорам второго прядка матрицы Якоби решения $\psi(r, \zeta)$, $\omega(r, \zeta)$, $\beta(r, \zeta)$ системы (2.2). В случае существенно вязкого течения, такого, что выполнено условие $\nabla \omega \neq 0$, ранг матрицы Якоби гладкого решения равен двум, то есть $P^2 + Q^2 + R^2 > 0$, и левая часть выражения (2.5) с помощью интегрирующего множителя приводится к полному градиенту некоторой функции $S(\psi, \omega, \beta)$, сохраняющей постоянное значение

на решении системы (2.2). Иными словами $S(\psi, \omega, \beta) = \text{const}$ представляет собой функциональную связь между гидродинамическими полями $\psi(r, \zeta)$, $\omega(r, \zeta)$, $\beta(r, \zeta)$, описывающими стационарное осесимметричное течение вязкой жидкости. Вообще говоря, перечисленные результаты носят локальный характер, так как гладкости решения системы (2.2) во всей области течения и, как следствие, гладкости выражения (2.5) ещё не достаточно для существования однозначной зависимости $S(\psi, \omega, \beta) = \text{const}$ для всего потока, следует учитывать свойства самой области (как правило, степень её связности).

Показано, что $\nabla\omega$, $\nabla\psi$, $\nabla\beta$ имеют вид (3.15), где неизвестные X , Y , Z , W , r , зависящие от ψ , ω , β , удовлетворяют системе (3.14) (или (3.11)). Решив её, величину $S(\psi, \omega, \beta)$ можно найти из пары совместных уравнений (3.16).

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (тема № 121031700169-1).

Список литературы

1. Седов Л. И. Механика сплошных сред. М.: Наука, 1970. Т. 2. 568 с.
2. Keller J. J. A pair of stream functions for three-dimensional vortex flows // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP. 1996. Vol. 47. P. 821–836. DOI: 10.1007/BF00920036
3. Серпин Дж. Математические основы классической механики жидкости. М.: Иностранная литература, 1963. 256 с.
4. Sholle M., Marner F. A generalized Clebsch transformation leading to a first integral of Navier-Stokes equations // Physics Letters A. 2016. Vol. 380 (40). P. 3258–3281. DOI: 10.1016/j.physleta.2016.07.066
5. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
6. Андреев В. К., Капцов О. В., Пухначев В. В., Родионов А. А. Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике. Н.: Наука, 1994. 319 с.
7. Knyazev D. V. An integral of the two-dimensional stationary viscous fluid flow equations // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 1945. 012019.
8. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. М.: Физматгиз, 1963. Ч. 2. 727 с.
9. Корн Г., Корн М. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1970. 720 с.

Осцилляционная динамика многофазных систем в щелевых зазорах

В. Г. Козлов

Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет,
614990, Пермь, ул. Сибирская, 24
email: kozlov@pspu.ru

Динамика гидродинамических систем с границей раздела в стеснённых (щелевых) зазорах или пористых средах является актуальной проблемой в научном и прикладном аспектах. Особую важность представляет случай жидкостей с высоким контрастом вязкостей, характерный для задач нефтедобычи. Осцилляционное воздействие на межфазную границу с целью управления ее формой и устойчивостью представляет большой интерес. В настоящей работе обобщаются результаты исследования осцилляционной динамики границы раздела двух жидкостей с высоким контрастом вязкостей в узких щелевых зазорах разной формы: в плоской и конической радиальных ячейках Хеле-Шоу, прямом канале Хеле-Шоу. Анализируются случаи, когда жидкости колеблются в нормальном и тангенциальном направлении. В последнем случае маловязкая жидкость совершает тангенциальные инерционные колебания вблизи границы раздела, исследования выполняются в неравномерно вращающейся круглой ячейке Хеле-Шоу. Результаты исследований обобщены в пространстве безразмерных управляющих параметров.

Ключевые слова: граница раздела; контраст вязкостей; осцилляции, морфологическая неустойчивость

Oscillatory dynamics of multiphase systems in slotted gaps

V. G. Kozlov

Perm State Humanitarian Pedagogical University, 24 Sibirskaya St., 614990, Perm
email: kozlov@pspu.ru

The dynamics of hydrodynamic systems with an interface in slotted gaps or porous media is an urgent problem in scientific and applied aspects. The case of liquids with a high contrast of viscosities, which is typical for oil recovery technologies is of particular importance. The oscillatory effect on the interfacial boundary in order to control its shape and stability is of great interest. The paper summarizes the results of experimental studies and theoretical analysis of different cases, when fluids oscillate in the normal and tangential boundary directions. In the latter case, a low-viscosity liquid performs tangential inertial oscillations near the interface; studies are carried out in a non-uniformly rotating circular Hele-Shaw cell. The research results are generalized in the space of dimensionless control parameters.

Keywords: interface; contrast of viscosities; oscillations, morphological instability

1. Введение

Динамика систем с границей раздела в стеснённых (щелевых) зазорах или пористых средах является актуальной проблемой в научном и прикладном аспектах. Интересен случай жидкостей с высоким контрастом вязкостей, характерный для задач нефтедобычи. Распространённым приемом моделирования движения системы несмешивающихся жидкостей в пористых средах является применение ячейки Хеле-Шоу. В ячейке Хеле-Шоу в процессе равномерного вытеснения маловязкой жидкости высоковязкую на границе раздела развивается неустойчивость в виде маловязких «пальцев», пробивающихся в вязкую жидкость [1]. Морфология пространственных структур зависит от управляющих параметров, таких как геометрия ячейки, скорость вытеснения жидкости и межфазное поверхностное натяжение. Задаче стационарного вытеснения одной жидкостью другой в ячейке Хеле-Шоу большое количество исследований (литературный обзор можно найти в [2]). Количество работ, в которых рассматривается динамика межфазной границы при осциллирующей прокачке, очень ограничено.

В настоящей работе обобщаются результаты исследования осцилляционной динамики границы раздела двух жидкостей с высоким контрастом вязкостей в узких щелевых зазорах. Рассматриваются случаи, когда жидкости колеблются в нормальном и тангенциальном направлении.

Эксперименты выполняются в ячейках Хеле-Шоу различной толщины $h = 1 \div 5$ мм и шириной (диаметром), превосходящим толщину более, чем на порядок. В опытах использовались различные пары жидкостей близкой плотности с высоким контрастом вязкостей, например, вода – силиконовое масло PMS-1000, касторовое масло – Fluorinert FC-40 и т. п. Подробная информация об условиях экспериментов, конструкции установок и теоретических моделях, описывающих обнаруженные в экспериментах явления, имеется в опубликованных статьях. Задача настоящей работы – дать обобщенное представление о явлениях, наблюдаемых при осцилляционном воздействии на жидкости вблизи межфазной границы.

2. Результаты исследований

В [3] при изучении динамики границы раздела несмешивающихся жидкостей с высоким контрастом вязкостей в радиальной ячейке Хеле-Шоу при гармонической модуляции расхода прокачиваемой жидкости был обнаружен новый тип неустойчивости, проявляющийся в развитии пальцев на границе раздела жидкостей в определенных фазах при колебаниях границы в нормальном направлении.

Опыты, выполненные в прямых и радиальных каналах, показывают, что колебания границы происходят в виде языков маловязкой жидкости, периодически проникающих в вязкую жидкость. При этом линия контакта со стенками канала практически совпадает с положением межфазной границы при смещении в сторону маловязкой жидкости. Анализируется влияние осцилляций на форму межфазной границы; рассматривается неустойчивость осциллирующей границы, проявляющаяся в возникновении пальцев маловязкой жидкости (рис. 1). Последние развиваются в фазе вытеснения высоковязкой жидкости и полностью исчезают в фазе максимального смещения границы в сторону маловязкой жидкости. Особенностью обнаруженной неустойчивости является то, что порог ее развития определяется критической амплитудой колебаний границы. Показано, что пространственный период пальчиковых структур определяется капиллярным числом и удовлетворительно согласуется с теорией [4], развитой для стационарного смещения межфазной границы. Интересно,

что несмотря на это, в надкритической области положение пальцев и впадин между ними периодически изменяется каждые два периода. Это связано с периодическим нарушением формы контактной линии и говорит о ее важной роли в развитии неустойчивости границы. Развитие данного направления в случае прямого канала Хеле-Шоу выполнено в [5]. В настоящее время данная тематика расширена на случай конического щелевого канала.

Другой случай, когда колебания жидкостей происходят в тангенциальном направлении, исследовался в [6, 7]. Исследования выполнялись в щелевом зазоре, совершающем неравномерное (модулированное) вращение. Под действием тангенциального градиента давления высоковязкая и маловязкая жидкости совершают колебаний различной амплитуды. При этом в результате неустойчивости Кельвина-Гельмгольца на границе раздела развивается квазистационарный пространственный рельеф (рис. 2).

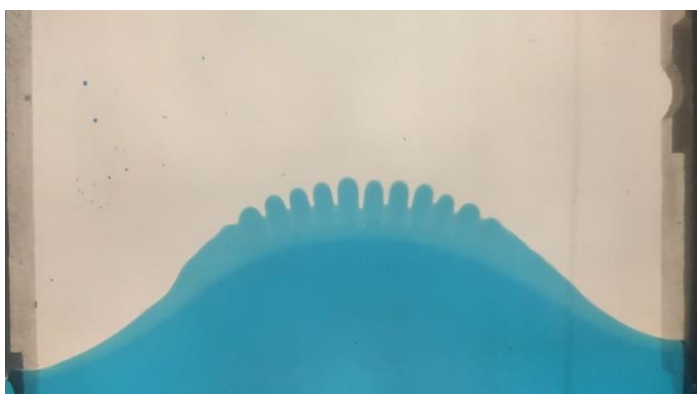


Рис. 1. Форма осциллирующей в плоском щелевом канале межфазной границы в надкритической области [5]

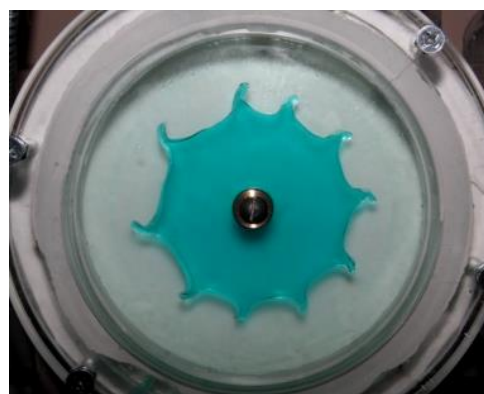


Рис. 2. Надкритические структуры в неравномерно вращающейся круговой ячейке Хеле-Шоу

Работа выполнена при поддержке Правительства Пермского края и РФФИ (проект 20-41-596011).

Список литературы

1. Saffman P. G., Taylor G. I. The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid // *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*. 1958. Vol. 245. N. 1242. P. 312–329. DOI: 10.1098/rspa.1958.0085
2. Anjos P. H. A., Dias E. O., Miranda J. A. Radial fingering under arbitrary viscosity and density ratios // *Physical Review Fluids*. 2017. Vol. 2 (8). 084004. DOI: 10.1103/PhysRevFluids.2.084004
3. Kozlov V., Karpunin I., Kozlov N. Finger instability of oscillating liquid–liquid interface in radial Hele-Shaw cell // *Physics of Fluids*. 2020. Vol. 32. N. 10. 102102. DOI: 10.1063/5.0018541
4. Fernandez J., Kurowski P., Limat L., Petitjeans P. Wavelength selection of fingering instability inside Hele-Shaw cells // *Physics of Fluids*. 2001. Vol. 13 (11). P. 3120–3125. DOI: 10.1063/1.1410120

5. *Kozlov V., Vlasova O.* Oscillatory dynamics of immiscible liquids with high viscosity contrast in a rectangular Hele-Shaw channel // *Physics of Fluids*. 2022. Vol. 34. N. 3. 032121. DOI: doi.org/10.1063/5.0084363
6. *Kozlov V. G., Dementieva J. S., Kobeleva V. S. Petuhova M. A.* Stability of interface between liquids with high viscosity contrast in unevenly rotating cavity // *Journal of Physics: Conference Series*. 2021. Vol. 1809. 012022. DOI: 10.1088/1742-6596/1809/1/012022
7. *Kozlov V. G., Dementieva J. S., Kobeleva V. S.* Experimental study of liquids interface oscillatory dynamics in rotating slot gap // *Journal of Physics: Conference Series*. 2022. Vol. 2317(1). 012013. DOI: 10.1088/1742-6596/2317/1/012013

Поведение двухжидкостной системы во вращающейся ячейке Хеле-Шоу в зависимости от частоты либраций

В. Г. Козлов^a, М. А. Петухова^a, Н. В. Козлов^b

^a Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, 614990, Пермь, ул. Сибирская, 24

email: kozlov@pspu.ru, mar.petuhova@yandex.ru

^b Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1

email: kozlov.n@icmm.ru

Изучается поведение двух жидкостей разной плотности и высоким контрастом вязкостей в вертикальном щелевом зазоре, совершающем модулированное вращение вокруг перпендикулярной плоскости зазора оси. Изучается форма и устойчивость межфазной границы в зависимости от амплитуды и частоты модуляции скорости. Показано, что при определенных соотношениях частоты либрации и скорости вращения осесимметричная граница раздела в системе отсчета полости смещается в радиальном направлении. Эффект усиливается с повышением амплитуды модуляции. Обнаружено, что при повышении амплитуды модуляции скорости вращения круговая граница раздела пороговым образом теряет устойчивость, на границе развивается «замороженный» рельеф, возникновение которого связано с развитием неустойчивости Кельвина-Гельмгольца на фоне тангенциальных колебаний менее вязкой жидкости вблизи межфазной границы.

Ключевые слова: неравномерное вращение; межфазная граница; контраст вязкостей; неустойчивость Кельвина-Гельмгольца

Two-fluid system behavior in a rotating Hele-Shaw cell depending on the libration frequency

V. G. Kozlov^a, M. A. Petukhova^a, N. V. Kozlov^b

^a Perm State Humanitarian Pedagogical University, 24 Sibirskaya St., 614990, Perm
email: kozlov@pspu.ru, mar.petuhova@yandex.ru

^b Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS,
1 Akademika Koroleva St., 614013, Perm
email: kozlov.n@icmm.ru

We study the behavior of two liquids of different densities and high contrast of viscosities in a vertical slotted gap that performs a modulated rotation around an axis perpendicular to the plane of the gap. The shape and stability of the interfacial

boundary are studied depending on the amplitude and frequency of velocity modulation. It is shown that under certain ratios of the modulation frequency and rotation speed, the axisymmetric interface in the cavity reference frame is displaced in the radial direction. The effect increases with modulation amplitude growth. It was found that with an increase in the amplitude of the velocity modulation, the circular interface loses stability in a threshold manner, a “frozen” relief develops on the interface, the occurrence of which is associated with the development of the Kelvin-Helmholtz instability against the background of tangential oscillations of a less viscous fluid near the interface.

Keywords: uneven rotation; interphase boundary; viscosity contrast; Kelvin-Helmholtz instability

1. Введение

Поведение границы раздела жидкостей с высоким контрастом вязкостей в неравномерно вращающейся полости является актуальной технической и природной задачей. Экспериментальное исследование границы раздела жидкостей в неравномерно вращающихся щелевых зазорах [1] обнаруживают пороговое развитие «замороженного» рельефа на межфазной границе с повышением амплитуды модуляции скорости в случае, когда жидкости имеют большой контраст вязкостей. Анализ свидетельствует, что возникновение «замороженного» рельефа объясняется неустойчивостью Кельвина-Гельмгольца, возбуждаемой тангенциальными осцилляциями жидкостей вблизи границы раздела [2]. Данная неустойчивость проявляется в образовании квазистационарного рельефа на границе раздела жидкостей. Она была обнаружена в [3] и описана теоретически в [4] в случае поступательных высокочастотных колебаний полости с невязкими жидкостями в горизонтальном направлении.

Целью настоящего исследования является экспериментальное изучение динамики границы раздела двухжидкостной системы во вращающейся ячейке Хеле-Шоу в зависимости от частоты либрации.

2. Экспериментальная установка и методика

Исследования выполнялись на установке, представленной на рис. 1. Рабочей полостью является вертикальная ячейка Хеле-Шоу толщиной d с круглой боковой границей радиусом R_c . В полости находятся две жидкости разной плотности и высоким контрастом вязкостей. Основная серия экспериментов выполнена на паре жидкостей ПМС-1000 ($\nu_1 = 10$ Ст, $\rho_1 = 0.967$ г/см³) и веретенное масло ($\nu_2 = 0.92$ Ст, $\rho_2 = 0.870$ г/см³) с коэффициентом межфазного натяжения $\sigma = 1.0 \pm 0.1$ мН/м. В экспериментах варьируются скорость вращения, амплитуда и частота либраций.

Полость приводится во вращение по закону $\Omega = \Omega_{rot}(1 - \varepsilon \cos \Omega_L t)$ с помощью шагового двигателя. Частота вращения варьируется в интервале $f_{rot} = \Omega_{rot} / 2\pi = 1 - 4$ об/с, частота модуляции скорости вращения $f_L = \Omega_L / 2\pi$ – в интервале $0 - 8$ Гц, амплитуда модуляции скорости – в интервале $\varepsilon = 0 - 1$.

При равномерном вращении межфазная граница под действием центробежной силы имеет осесимметричную круговую форму. Форма границы раздела регистрируется в свете лампы-вспышки с помощью расположенного соосно с кюветой фотоаппарата

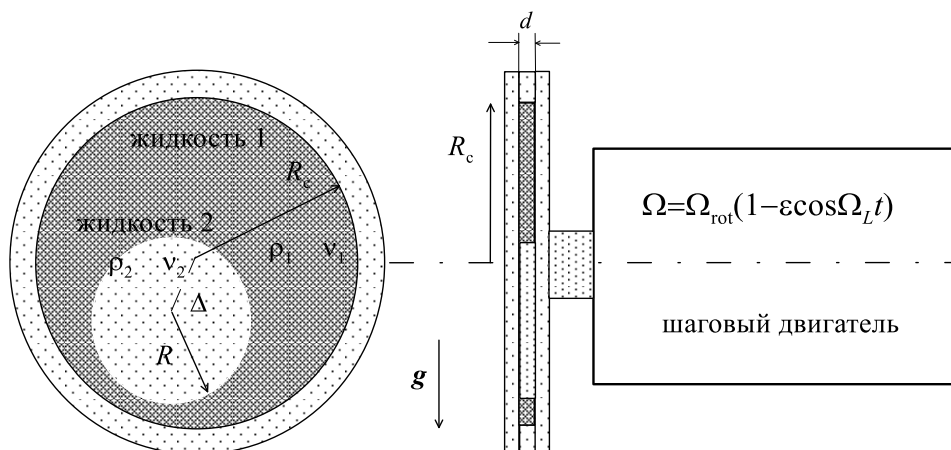


Рис. 1. Схема экспериментальной установки: фронтальный вид и вид сбоку

Nikon D5300. Форма границы и ее расположение в зависимости от параметров вращения анализируются по фотографиям с использованием программы ImageJ.

В определенных случаях легкое фазовое включение смещается с оси вращения. Если при этом граница сохраняет круговую форму, измеряется положение ее центра и его смещение Δ относительно оси вращения полости. Когда легкая жидкость касается границы полости, последняя в средней части кюветы описывается кругом (рис. 2), при этом рассчитывается смещение центра кривизны границы от оси вращения, Δ .

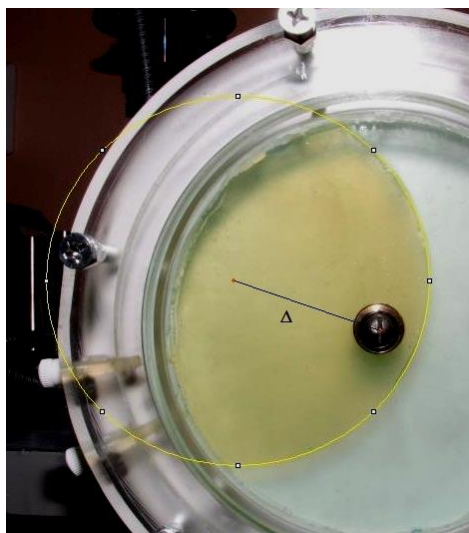


Рис. 2. Измерение смещения Δ центра кривизны границы раздела жидкостей от оси вращения

3. Экспериментальные результаты

Опыты показывают, что при воздействии с определенной относительной частотой $n \equiv f_{lib} / f_{rot} = 1, 0.5, 0.33 \dots$ модуляция скорости вращения приводит к смещению легкого фазового включения с оси полости, эффект усиливается с повышением амплитуды модуляции скорости вращения. При этом граница раздела сохраняет круговую форму вплоть до прикосновения с боковой границей кюветы. Далее граница раздела деформируется, однако в средней части полости ее форма остается близкой к круговой (рис. 3).

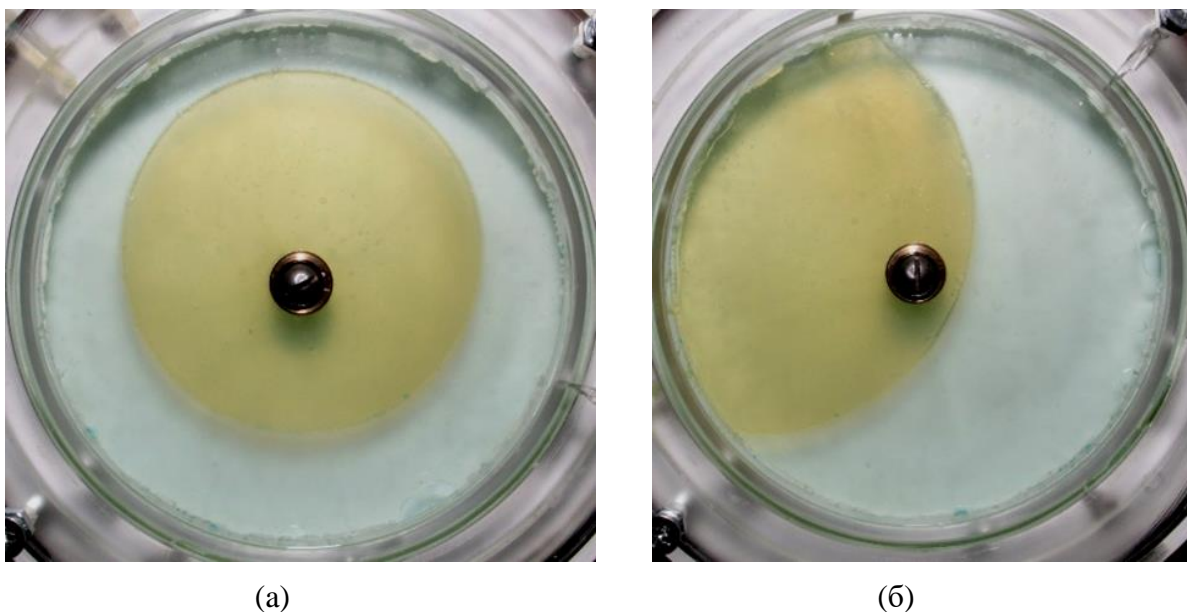


Рис. 3. Граница раздела жидкостей при частоте вращения $f_{rot}=1$ об/с и частоте модуляции $f_{lib}=1$ Hz; фрагменты (а) и (б) соответствуют $\varepsilon = 0.13$ и 0.41

Наибольший эффект наблюдается при $n = 1$. Аналогичное поведение (радиальное смещение межфазной границы), но более слабое, наблюдается также при $n = 0.5$ и $n = 0.33$. Эффект усиливается при понижении скорости вращения, в этом случае заметное смещение достигается уже при малых значениях ε . Во всех случаях повышение ε приводит к монотонному росту Δ .

За исключением перечисленных дискретных значений n смещение легкого фазового включения с оси вращения отсутствует даже при интенсивных либрациях в изученном интервале $n = 0.3 - 2.2$ (рис. 4).

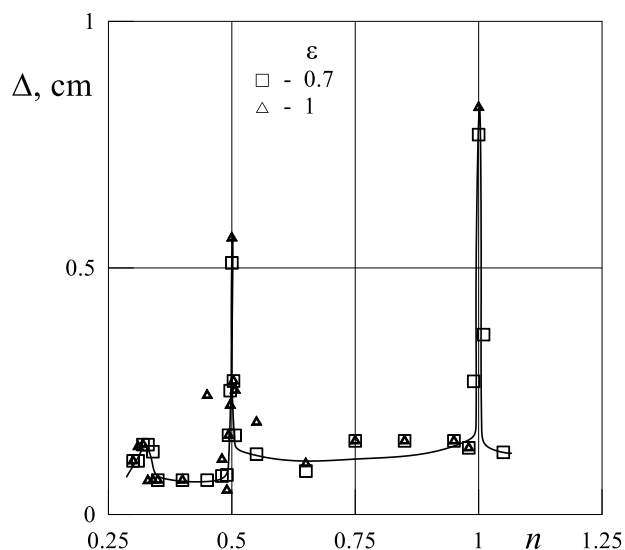


Рис. 4. Зависимость смещения «центра» внутреннего маловязкого фазового включения от относительной частоты либраций при заданных значениях $\varepsilon = 0.7, 1$ (веретенное масло – ПМС-1000)

4. Заключение

Экспериментально изучено поведение границы раздела жидкостей с высоким контрастом вязкостей в щелевом зазоре, совершающем модулированное вращение вокруг перпендикулярной плоскости слоя горизонтальной оси. Эксперименты обнаружили два новых эффекта: изменение равновесной формы межфазной границы и развитие «замороженного» рельефа на границе раздела.

Обнаружено, что при определенных соотношениях частоты либраций и скорости вращения, $\Omega_{\text{lib}} / \Omega_{\text{rot}} = 1, 2^{-1}, 3^{-1}, \dots$, либрации нарушают осесимметричную равновесную форму границы раздела, в системе отсчета полости граница раздела смещается в радиальном направлении. Эффект монотонно усиливается с повышением амплитуды модуляции и наиболее сильно проявляется при $\Omega_{\text{lib}} / \Omega_{\text{rot}} = 1$ – под действием либраций фазовое включение меньшей плотности «ложится» на боковую границу полости.

Другой эффект заключается в возбуждении квазистационарного в системе отсчета полости регулярного рельефа на границе раздела при повышении амплитуды модуляции скорости вращения. Возникновение «замороженного» рельефа на границе объясняется неустойчивостью Кельвина-Гельмгольца, вызванной тангенциальными колебаниями менее вязкой жидкости вблизи межфазной границы. В основе описанного поведения границы раздела лежит контраст вязкостей, который определяет различное вязкое взаимодействие жидкостей с границами щелевого зазора и, как следствие, различие в амплитуде тангенциальных колебаний жидкостей вблизи межфазной границы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 18-71-10053).

Список литературы

1. Kozlov V. G., Dementieva J. S., Kobeleva V. S., Petuhova M. A. Stability of interface between liquids with high viscosity contrast in unevenly rotating cavity // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 1809. 012022. DOI: 10.1088/1742-6596/1809/1/012022
2. Любимов Д. В., Любимова Т. П., Черепанов А. А. Динамика поверхностей раздела в вибрационных полях. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 216с.
3. Wolf G. H. The dynamic stabilization of the Rayleigh-Taylor instability and the corresponding dynamic equilibrium // Zeitschrift für Physik A Hadrons and nuclei. 1969. Vol. 227. P. 291–300. DOI: 10.1007/BF01397662
4. Любимов Д. В., Черепанов А. А. О возникновении стационарного рельефа на поверхности раздела жидкостей в вибрационном поле // Известия Академии наук СССР. Механика жидкости и газа. 1986. № 6. С. 8–13.

Экспериментальное изучение ультразвукового разделения водно-масляной эмульсии

Н. В. Козлов, А. И. Мизёв

Институт механики сплошных сред УрО РАН,
614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1
email: kozlov.n@icmm.ru

Экспериментально исследуется процесс разделения водно-масляной эмульсии в ультразвуковом поле. Жидкость заполняет рабочий объём реактора, построенного по принципу акустического резонатора с излучающей и отражающей стенками. Обработка эмульсии производится в загрузочном режиме. Ось УЗ излучения ориентирована горизонтально. Для наблюдения динамики разделения через рабочий объём пропускается рассеянный свет, и его изображения захватываются КМОП-камерой. В качестве количественной характеристики выступает яркость изображений. Обнаружено формирование структур в объёме жидкости и ускорение процесса перераспределения массы жидкостей под действием ультразвуковых колебаний. В частности, это выражается через время достижения пика неоднородности распределения яркости, по которому рассчитывается относительная интенсификация деэмульгирования. Величина интенсификации немонотонно зависит от интенсивности УЗ излучения.

Ключевые слова: акустический резонатор; деэмульгирование; ультразвуковое разделение

Experimental study of ultrasonic separation of water-oil emulsion

N. V. Kozlov, A. I. Mizev

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS,
1 Akademika Koroleva St., 614013, Perm
email: kozlov.n@icmm.ru

The process of water-oil emulsion separation in an ultrasonic field is studied experimentally. The fluid fills the working volume of a reactor built upon the acoustic resonator principle with emitting and reflecting boundaries. The processing of the emulsion is conducted in batch mode. The axis of US radiation is oriented horizontally. To observe the dynamics of separation, the scattered light is shed through the working volume, and the images of it are captured with a CMOS camera. The image brightness is used as a quantitative characteristic. Under the action of ultrasonic oscillations, the structure formation in the fluid volume and the acceleration of the process of liquids mass redistribution are

found. In particular, this is manifested through the time of reaching the peak non-homogeneity of brightness distribution, from which the relative demulsification intensification is calculated. The intensification value depends non-monotonously on the intensity of US radiation.

Keywords: acoustic resonator; demulsification; ultrasonic separation

1. Введение

Ультразвуковые методы разделения эмульсий широко применяются во многих видах промышленности, например, в пищевой, биологической, химической. Они позволяют повысить энергоэффективность и экологичность процессов. В частности, в нефтеперерабатывающей промышленности УЗ волны могут быть использованы для повышения качества нефти путём устранения примесей, например капель воды. Современный обзор литературы по разделению водо-нефтяных эмульсий дан в работе [1].

Эффективным и распространённым способом воздействия являются стоячие УЗ волны, которые вызывают несколько физических эффектов. Первичная акустическая сила приводит к осреднённому движению частиц диспергированной фазы (капель), взвешенных в непрерывной среде (основной объём жидкости), на фоне колебательного движения. При этом частицы аккумулируются в областях с наименьшей потенциальной энергией [2]. Направление движения частиц и место их аккумуляции определяются акустофоретическим коэффициентом, который в свою очередь зависит от отношения плотностей диспергированной/непрерывной фаз и аналогичного отношения скоростей звука [1, 3]. Например, капли воды, диспергированной в нефти, будут аккумулироваться вблизи узлов стоячей волны. Вторичная акустическая сила проявляется при взаимодействии частиц (капель), колеблющихся в окружающей жидкости. Если частицы колеблются вдоль радиуса, соединяющего их центры, на них действует сила отталкивания, если же направление колебаний перпендикулярно этому радиусу – действует сила притяжения [1, 4]. Совместное действие первичной и вторичной акустических сил приводит к аккумуляции и ускоренной коагуляции диспергированных капель, что в свою очередь облегчает разделение эмульсии и открывает возможность для эффективной манипуляции включениями, которые требуется удалить из основного объёма жидкости [5, 6].

В настоящей работе изучается процесс отделения капель воды, эмульгированных в силиконовом масле. Применяется резонатор, в котором генерируется стоячая УЗ волна. Для измерений применяется оптический метод.

2. Экспериментальная установка и методика

Центральным узлом является УЗ резонатор 1, представляющий из себя прозрачную ячейку из оргстекла и имеющий отражатель с настраиваемым положением (рис. 1). Резонатор устанавливается на столик 2, под которым располагается диодный осветитель 3. Между резонатором и осветителем, в столике располагается окно, закрытое матовым, светорассеивающим стеклом. Такая конструкция обеспечивает визуализацию границ раздела теневым методом. Изображение рабочего слоя в монохромном 8-битном формате регистрируется камерой IDS UI-3260CP-C-HQ 4, установленной над резонатором, на штативе 5. Для определения на изображении системы координат, соответствующей средней высоте слоя, применяется световой нож, создаваемый лазером 6, установленным за ячейкой. Управление УЗ воздействием

осуществляется посредством генератора сигналов Rigol DG1022Z 7, сигнал с которого подаётся на высокочастотный усилитель Falco Systems WMA-300 8, а затем – на электрический вход резонатора. Для измерения интенсивности УЗ воздействия и настройки резонатора применяется осциллограф АКИП-4115/3А 9. Интенсивность воздействия I находилась как отношение электрической мощности $P = U_0^2/R_{\text{узи}}$, рассеиваемой УЗИ, к площади его волновода $\pi D_{\text{узи}}^2/4$:

$$I = \frac{4U_0^2}{\pi R_{\text{узи}} D_{\text{узи}}^2}, \quad (1)$$

где U_0 – амплитуда колебаний напряжения на клеммах УЗИ, $R_{\text{узи}}$ – его сопротивление в резонансе, $D_{\text{узи}}$ – диаметр волновода УЗИ в месте его соединения со стенкой ячейки.

Ячейка резонатора имеет полость со следующими размерами: длина $L = 100.0$ мм, высота $H = 60.0$ мм, толщина $d' = 60.0$ мм. Излучающей поверхностью является стенка 10, в которой закреплён на резьбовом соединении ультразвуковой излучатель (УЗИ) CN8038-40НВ 11 (рис. 1). Собственная частота УЗИ составляет $f_{\text{узи}} = 80 \pm 2$ кГц, диаметр волновода $D_{\text{узи}} = 40$ мм, активное сопротивление в резонансе $R_{\text{узи}} < 25$ Ом. УЗ воздействие осуществляется вдоль горизонтальной оси. Отражающей поверхностью является подвижная алюминиевая пластина 12, положение которой выбирается в соответствии со свойствами жидкости и частотой УЗ излучения. В настоящем эксперименте толщина рабочего слоя составляла $d = 18$ мм.

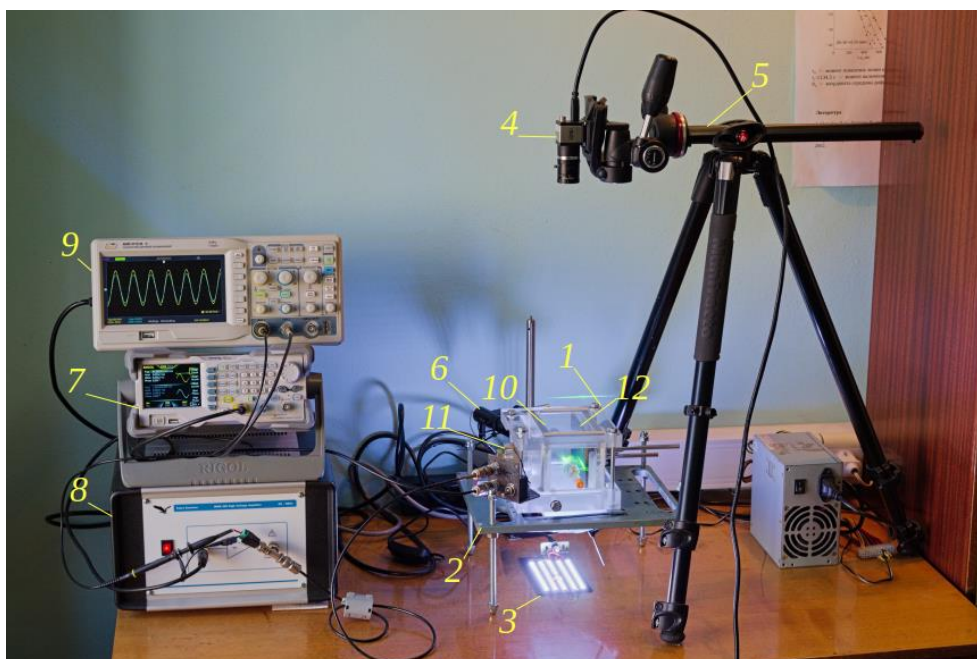


Рис. 1. Фотография экспериментальной установки

Для создания дисперсной системы использованы дистиллированная вода, являющаяся дисперсной фазой, и силиконовое масло ПМС-5, выступающее в качестве дисперсионной среды. Характерные значения плотности и скорости звука составляют, соответственно, $\rho_{\text{ч}} = 10^3$ кг/м³ и $c_{\text{ч}} = 1.5 \cdot 10^3$ м/с – для воды, $\rho_0 = 0.9 \cdot 10^3$ кг/м³ и $c_0 = 1.35 \cdot 10^3$ м/с – для силиконового масла. По своим свойствам выбранная модельная дисперсная система близка к некоторым видам промышленной обводнённой нефти.

3. Результаты эксперимента

Непосредственно после заливки эмульсии изображение рабочего слоя на просвет представляет собой однородное серое поле (рис. 2а). Для описания эволюции эмульсии воспользуемся количественной характеристикой, основанной на измерении яркости изображений: β – среднее по полю стандартное отклонение уровня серого, нормированное на своё значение в нулевой момент времени. Данная величина была найдена при обработке видеозаписей эксперимента. Она, в целом, изменяется с течением времени немонотонно и демонстрирует чётко выраженную зависимость от параметров УЗ воздействия. Характерной особенностью является наличие максимума β , время регистрации которого t_1 варьируется между экспериментами.

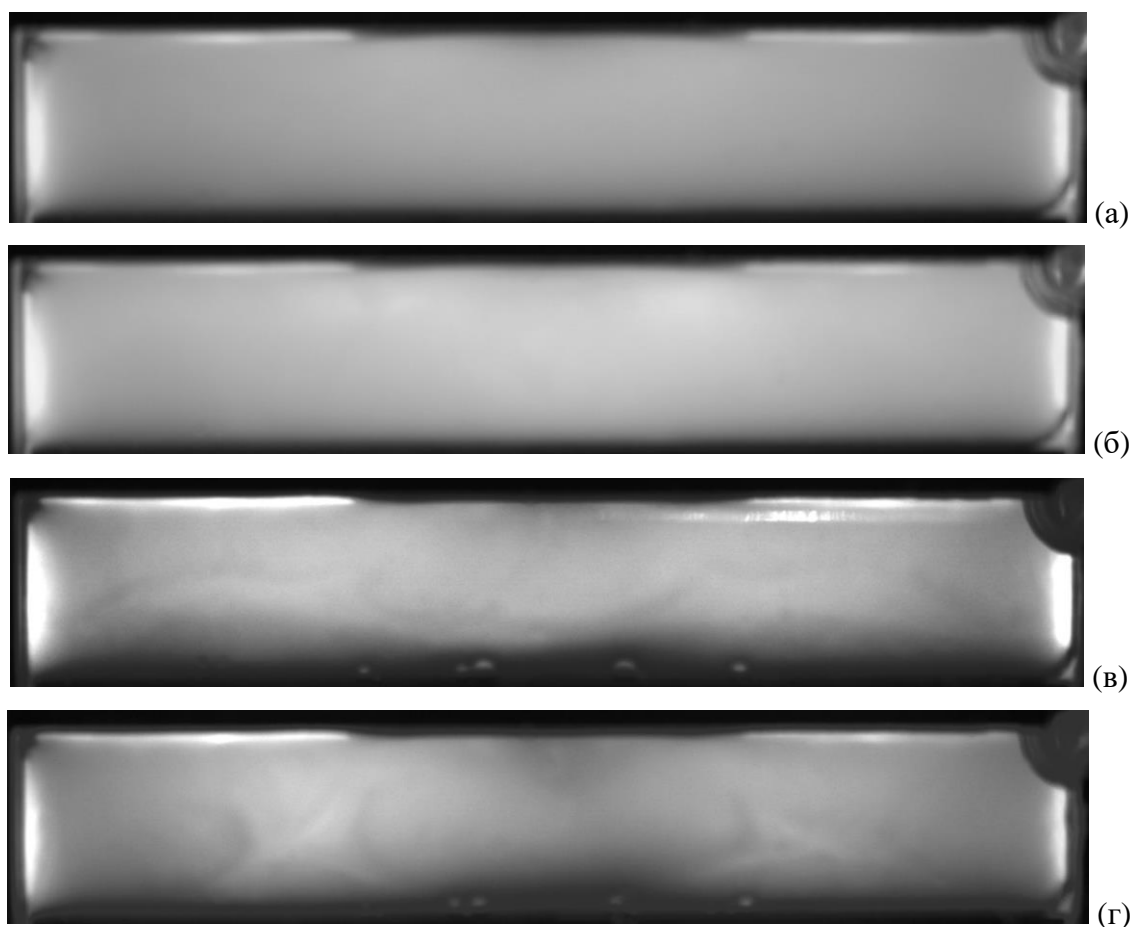


Рис. 2. Фотографии рабочего объёма: вид сверху, в проходящем свете; (а) – в начальный момент времени, (б) – в момент времени t_1 , соответствующий максимально неоднородному распределению яркости на изображении, в отсутствие УЗ воздействия, (в) – в момент времени t_1 при УЗ воздействии с интенсивностью $I = 1.03 \text{ Вт/см}^2$, (г) – УЗ, t_1 , $I = 1.93 \text{ Вт/см}^2$; на изображениях (в), (г) усилен контраст для читаемости структур

В отсутствие УЗ слой постепенно просветляется (рис. 2б), при этом величина β достигает пика при $t_1 \approx 2280 \text{ с}$ (рис. 3а, 1). Несмотря на то, что β в отсутствие УЗ оказывается наиболее высоким, в абсолютном выражении это не проявляется: поле изображения остаётся достаточно однородным (рис. 2б).

Включение УЗ воздействия приводит к формированию структур в слое эмульсии, которые свидетельствуют о перераспределении жидкостей (рис. 2в, г). Более сложное

распределение жидкостей при УЗ воздействии может свидетельствовать о более быстром разделении фаз, приводящем к формированию крупных капель коалесцировавшей воды на дне ячейки, действующих, как линзы. Формирование структур сказывается также на динамике параметра β : время достижения им пикового значения t_1 заметно снижается (рис. 3а, 2–б).

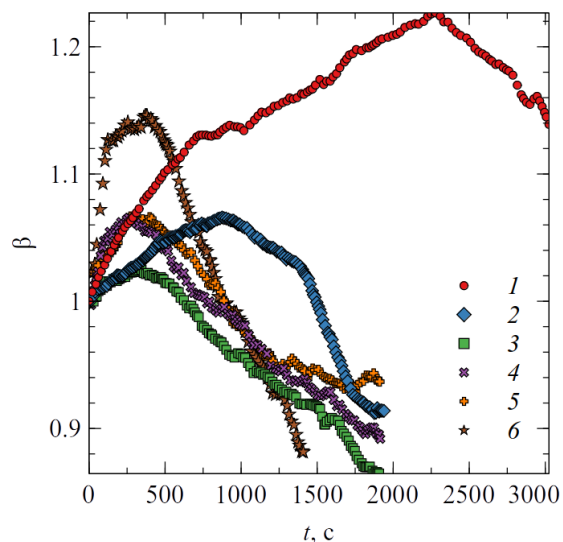


Рис. 3. Временная зависимость среднего по полю стандартного отклонения яркости β , измеренного по уровню серого записанных изображений; $I = (0, 0.39, 0.68, 1.03, 1.38, 1.93) \text{ Вт/см}^2$ (точки 1–6, соответственно)

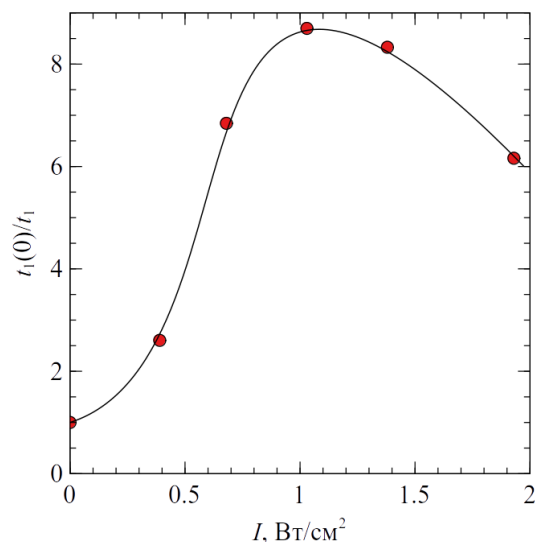


Рис. 4. Зависимость относительного ускорения эволюции распределения эмульсии $t_1(0)/t_1$ от интенсивности УЗ

Зависимость времени t_1 от интенсивности I оказывается немонотонной. Для количественного сравнения случаев простого гравитационного разделения и УЗ воздействия введём относительное ускорение эволюции эмульсии в виде отношения времени, характерного для отсутствия УЗ, ко времени при различных значениях интенсивности УЗ воздействия: $t_1(0)/t_1$ (рис. 4). Как можно видеть, УЗ воздействие приводит к заметному ускорению процесса разделения эмульсии. Зависимость на рис. 4 имеет экстремум в окрестности $I \approx 1 \text{ Вт/см}^2$ и по своему виду качественно согласуется с зависимостями эффективности УЗ деэмульгации, которые можно найти в научной литературе [7]. Наличие экстремума связано с присутствием паразитных эффектов, таких как акустическая кавитация и акустические течения, вызванных УЗ колебаниями и усиливающимися по мере роста интенсивности воздействия.

4. Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Пермского края в рамках проекта 20-41-596009.

Список литературы

1. Luo X., Cao J., Gong H., Yan H., He L. Phase separation technology based on ultrasonic standing waves: a review // Ultrasonics Sonochemistry. 2018. Vol. 48. P. 287–298. DOI: 10.1016/j.ultsonch.2018.06.006

2. Горьков Л. П. О силах, действующих на малую частицу в акустическом поле в идеальной жидкости // Доклады Академии наук СССР. 1961. Т. 140. № 1. С. 88–91.
3. Gröschl M. Ultrasonic separation of suspended particles – Part I: fundamentals // Acta Acustica united with Acustica 1998. Vol. 84 (3). P. 432–447.
4. Crum L. A. Acoustic force on a liquid droplet in an acoustic stationary wave // The Journal of the Acoustical Society of America. 1971. Vol. 50 (1B). P. 157–163. DOI: 10.1121/1.1912614
5. Pangu G. D., Feke D. L. Droplet transport and coalescence kinetics in emulsions subjected to acoustic fields // Ultrasonics. 2007. Vol. 46 (4). P. 289–302. DOI: 10.1016/j.ultras.2007.03.004
6. Nii S., Kikumoto S., Tokuyama H. Quantitative approach to ultrasonic emulsion separation // Ultrasonics Sonochemistry. 2009. Vol. 16 (1). P. 145–149. DOI: 10.1016/j.ultsonch.2008.07.005
7. Luo X., Gong H., Cao J., Yin H., Yan Y., He L. Enhanced separation of water-in-oil emulsions using ultrasonic standing waves // Chemical Engineering Science. 2019. Vol. 203. P. 285–292. DOI: 10.1016/j.ces.2019.04.002

Исследование перераспределения примеси NaCl в потоке воды сквозь пористую среду в вертикальной круглой трубе

Н. В. Колчанов, Е. А. Колчанова

Институт механики сплошных сред УрО РАН,
614013, Пермь, ул. Академика Королёва, 1
email: kolchanovn@gmail.com

В работе проводилось экспериментальное исследование распределения концентрации соли NaCl в цилиндре, заполненном пористой средой при добавлении примеси в поток дистиллированной воды. Специально для исследования была создана система кондуктометрических датчиков определяющих концентрацию соли в девяти точках распределенных вдоль круглой трубы. Были получены графики изменения концентрации с течением времени в точках нахождения кондуктометрических датчиков. Опыты проведены в некоторой области параметров начальной концентрации и перепада давления. Построены профили концентрации соли NaCl. Они позволили выявить особенную точку провала концентрации. Из-за особых свойств течения в этой точке происходит раздвоение пика всплеска концентрации. Отдельно проанализирован эффект превышения начальной концентрации соли при просачивании сквозь пористую среду. Этот эффект наблюдается по обе стороны от особенной точки провала.

Ключевые слова: пористая среда; перераспределение примеси NaCl; адсорбция; десорбция

Investigation of NaCl impurity redistribution in a water flow through porous medium in a vertical circular pipe

N. V. Kolchanov, E. A. Kolchanova

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS,
1 Akademika Koroleva St., 614013, Perm
email: kolchanovn@gmail.com

In this work we report on an experimental study of NaCl concentration distribution in a cylinder filled with porous medium, when the impurity is added to the distilled water flow. A system of conductometric sensors which determine the salt concentration in the nine points distributed along the circular pipe has been designed especially for the study. Plots showing the variation of concentration over time at the points of conductometric sensors are obtained. The experiments are carried out in a certain range of values for the initial concentration and pressure drop. The NaCl concentration profiles are depicted. They allow

identifying a particular point of the concentration fall. A bifurcation of the concentration peak occurs due to special properties of the flow at this point. The effect of exceeding the initial salt concentration at the throughflow in the porous medium is analyzed separately. This effect is observed on both sides of the special point of the fall.

Keywords: porous medium; NaCl impurity redistribution; adsorption; desorption

1. Введение

Задачи просачивания жидкостей сквозь пористые среды имеют широкое распространение, поэтому они актуальны. При прокачке жидкости с примесью через пористую среду на распределение примеси влияют сорбционные процессы. Частицы или молекулы примеси, находящиеся в связанной жидкости или прилипшие к твердому скелету пористой среды (адсорбированные), перестают двигаться [1, 2]. Осевшая примесь уменьшает пористость и проницаемость среды. Обратный десорбционный процесс запускается с уменьшением концентрации примеси и немобильная фаза вымывается потоком жидкости из рабочей области. Актуальность исследования течений жидкости в пористой среде представляет значительный научный интерес, а изучение эффектов, возникающих при протекании жидкости в такой среде, является важной экспериментальной задачей.

2. Экспериментальная установка и методика проведения эксперимента

В экспериментальной установке присутствует заполненный дистиллированной водой сосуд Мариотта. Полый цилиндр связан с сосудом системой двух одинаковых параллельных каналов, по одному из которых вначале опыта течёт вода, а в другой закачивается раствор NaCl. Полый цилиндр представляет собой ПВХ трубу, имеющую длину 800 мм, внешний диаметр 26.8 мм и внутренний диаметр 16.2 мм. На краях трубы закреплены две идентично выточенные на станке ЧПУ концевые детали. В концевые детали вмонтированы под графитовые электроды и манометрические трубки. Электроды находятся друг от друга на расстоянии 5 см и каждая пара электродов образует датчик проводимости. Вдоль трубы с шагом 10 см расположены ещё семь датчиков проводимости, электроды которых расположены не напротив друг друга, а с небольшим смещением. Это смещение позволяет увеличить расстояние между электродами для повышения чувствительности датчиков. Расстояние между электродами у датчиков вдоль трубы составляет 35 мм. Все датчики соединены в цепь последовательно с двумя многоканальными ключами, источником переменного тока и амперметром. Многоканальные ключи синхронизированы между собой, что позволяет быстро переключаться между датчиками. Кроме всего вышеперечисленного, в установке имеется мерный стакан, установленный на весах, подключенных к компьютеру.

Пористая среда создавалась из стеклянного гранулята с размером фракций 0.8 до 1.2 мм. Работа состояла из опыта по просачиванию примеси сквозь пористую среду. Опыты проводились при перепадах давления в 50 и 110 мм вод. ст. Прокачивались растворы соли концентрациями 2%, 4%, 6%, 8%, 10% и 12%. Перед экспериментом раствор соли NaCl определенной концентрации закачивался в один из каналов. На начало каждого опыта канал с примесью закрывался. Размер параллельных каналов подбирался таким образом, что один объем помещенной в отдельный канал жидкости был равен одному объему порового пространства внутри цилиндра (в эксперименте объем составлял 57 см³).

В начале опыта устанавливался стационарный поток воды через первый канал (без примеси) и трубу с пористой средой. Сразу после измерения перепада давления манометрические трубки отсоединялись. Далее, с помощью кранов, поток перенаправлялся во второй канал с примесью, которая проталкивалась сквозь пористую среду чистой дистиллированной водой из сосуда Мариотта. Труба располагалась вертикально, а жидкость прокачивалась снизу вверх. Прокачка примеси сквозь пористую среду сопровождалась измерениями силы тока в электрической цепи при подключении каждого из девяти кондуктометрических датчиков. Переключение от датчика к датчику производилось при помощи двух синхронизированных многоканальных ключей в течение времени, которое не превышало 10 с. Измерения силы тока повторялись с периодом 30 – 180 с. Из трубы с пористой средой через выходной канал жидкость попадала в мерный стакан, который располагается на электронных весах. Весы были подключены к компьютеру, на который записывались показания весов о массе вытекающей жидкости с течением времени. По экспериментальной временной зависимости массы вычислялась зависимость расхода жидкости от времени.

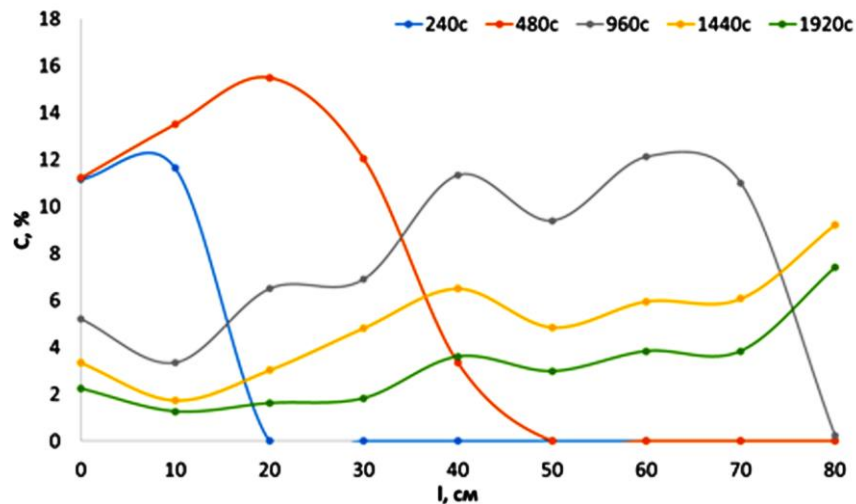
3. Распределение концентрации NaCl вдоль трубы

Профили концентрации, представленные на рисунке, показывают распределение примеси NaCl вдоль трубы в пористой среде. На рисунке (а) представлены профили концентрации в некоторые моменты времени после запуска измерений при перепаде давления $\Delta p = 50$ мм вод. ст., а на рисунке (б) – при $\Delta p = 110$ мм вод. ст. для начальной концентрации $C_0 = 12$ %. Всплеск концентрации NaCl, возникающий при просачивании примеси сквозь пористую среду, имеет четко выраженную переднюю часть. Рост концентрации C от нуля до пикового значения наблюдается на протяжении 20 – 30 см. Например, передняя часть всплеска на рисунке (а) в момент времени 480 с располагается от 20 до 50 см от начала отсчета координаты вдоль оси цилиндра в опыте при $\Delta p = 110$ мм вод. ст. Всплеск движется вдоль цилиндра, и когда достигает координаты 50 см его пик раздваивается на два (примеры профиля с двумя пиками смотри на рисунке (а) в момент времени $t = 960$ с, а на рисунке (б) в момент времени $t = 515$ с). Область провала между пиками с течением времени сохраняет своё расположение в точке с координатой 50 см, а вертикальные размеры пиков меняются. В момент раздвоения пик концентрации C слева от провала (слева от датчика 50) по своему значению превышает пик справа. Но с течением времени в результате движения всплеска концентрации соли к выходу цилиндра пик справа от провала уменьшается и исчезает, а пик слева увеличивается и становится основным.

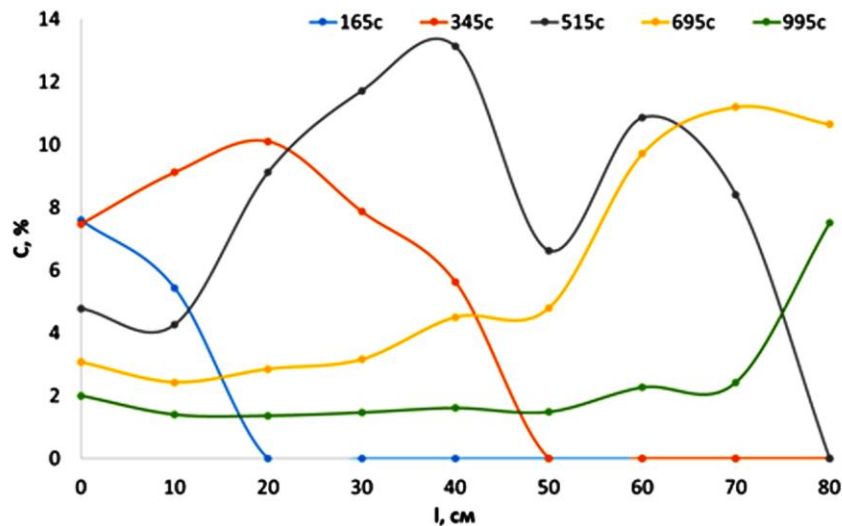
4. Заключение

Были получены графики изменения концентрации с течением времени в точках нахождения кондуктометрических датчиков. Опыты проведены в некоторой области параметров начальной концентрации и перепада давления. Построены профили концентрации соли NaCl. Они позволили выявить особенную точку при $x = 50$ см, в которой образовывался провал концентрации. Из-за особых свойств течения в этой точке происходит раздвоение пика всплеска концентрации. Концентрация в точке провала не превышает начальной концентрации и с ростом перепада давления провал становится более четким и заметным.

В ходе проведения экспериментов было зафиксировано уменьшение расхода жидкости при прокачке примеси NaCl. Ослабления потока жидкости из-за примеси



(а)



(б)

Рисунок. Профили концентрации NaCl при $C_0=12\%$ в различные моменты времени для следующих значений перепада давления: (а) 50 мм.вод.ст.; (б) 110 мм.вод.ст.

можно объяснить захватом части примеси пористой средой, то есть увеличением немобильной компоненты примеси. Небольшое значение концентрации поддерживается некоторое время после полного прохождения всплеска концентрации всего цилиндра за счет десорбции накопленных на начальной стадии запасов соли.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 20-11-20125).

Список литературы

1. Latrille C., Cartalade A. New experimental device to study transport in unsaturated porous media // Symposium of Water Rock Interaction. 2010. P. 299-302.
2. Agaoglu B., Scheytt T., Copt N. K. Laboratory-scale experiments and numerical modeling of cosolvent flushing of multi-component NAPLs in saturated porous media // Journal of Contaminant Hydrology. 2012. Vol. 140. P. 80–94. DOI: 10.1016/j.jconhyd.2012.07.005

Экспериментальное определение эффективной тепловыделяющей части волокнистой пористой среды

Н. В. Колчанов, А. С. Сидоров

Пермский государственный национальный исследовательский университет,
614990, Пермь, ул. Букирева, 15
email: kolchanovn@gmail.com, sidorovaliksandr@mail.ru

Работа посвящена технологии изготовления тепловыделяющей волокнистой пористой среды с низкой теплопроводностью, насыщенной воздухом, и изучению ее свойств. Три исследуемых образца пористой среды сделаны путём вплетения тепловыделяющих волокон в фотополимерный каркас. Для анализа мощности тепловыделения и определения эффективной теплопроводности разработана и собрана экспериментальная установка. По температуре в центре пористого слоя определена мощность тепловыделения во всём объёме пористого образца. Для исследуемых образцов пористой среды проведено сравнение этой мощности с потребляемой от источника питания электрической мощности. Получены значения эффективной доли тепловыделяющей части, скорректированной из-за тепловыделения фотополимерным каркасом.

Ключевые слова: волокнистая пористая среда; внутреннее тепловыделение; низкая теплопроводность; эффективная тепловыделяющая доля

Experimental measuring the effective heat-generating fraction of fibrous porous medium

N. V. Kolchanov, A. S. Sidorov

Perm State University, 15 Bukireva St., 614990, Perm
email: kolchanovn@gmail.com, sidorovaliksandr@mail.ru

The paper is devoted to the technique of manufacturing a low thermally conductive heat-generating air-saturated fibrous porous medium and the study of its properties. The three investigated samples of the porous medium are made by weaving the heat release fibres into a photopolymer framework. An experimental setup has been designed and assembled to analyze the heat source strength and determine the effective thermal conductivity. The heat source strength in the total volume of a porous sample has been determined through the temperature measurements at the center of the porous layer. This strength is compared with the electric power consumed from the power supply for the investigated samples of porous medium. One obtains the effective heat-generating fraction corrected by heat release in the photopolymer framework of the porous medium.

Keywords: fibrous porous medium; internal heating; low thermal conductivity; effective heat-generating fraction

1. Введение

Тепловыделение в пористой среде можно организовать различными способами. Например, используя проводящую жидкость, можно создать объёмное тепловыделение, пропуская через неё электрический ток [1, 2]. Или индукционным воздействием электромагнитной волны нагревать металлические элементы, из которых может быть изготовлена пористая среда [3]. Для нашего исследования необходимо создавать равномерный нагрев внутри сложной системы, состоящей из нескольких горизонтальных слоев: газ – пористая среда, насыщенная газом. В теоретических расчетах для такой системы получена бимодальная нейтральная кривая [4]. Это означает, что в одном случае конвективное течение возникает в виде локальных валов в свободном от пористой среды слое, а в другом – в виде крупномасштабных валов, захватывающих оба слоя. Перечисленные методы для этого не подходят. В первом примере тепловыделение будет возникать во всей двухслойной системе, а должно только в пористом слое. Во втором примере теплопроводность металлической среды сильно (на несколько порядков) отличается от теплопроводности жидкости или газа, из-за чего эффекта бимодальности в системе с такой пористой средой организовать не удастся. Эффект бимодальности реализуется в случае, когда теплопроводности насыщенного воздухом пористого слоя и самого воздуха близки друг другу [4].

В итоге был выбран, с одной стороны, трудоёмкий и требующий дополнительной разработки способ тепловыделения, а, с другой стороны, выбранный способ позволил удовлетворить всем заявленным вначале условиям задачи, для исследования влияния внутреннего тепловыделения на бимодальный характер конвекции в двухслойной системе «воздух – тепловыделяющая пористая среда».

2. Описание установки и методики эксперимента

2.1. Волокнистая тепловыделяющая пористая среда

Процесс создания волокнистой тепловыделяющей пористой среды состоит из нескольких этапов: изготовление тепловыделяющего волокна; разработка и печать на 3D принтере фотополимерного каркаса; вплетение волокон в фотополимерный каркас и их соединение в электрическую цепь.

Три образца волокнистой тепловыделяющей среды были сделаны путём вплетения тепловыделяющих волокон в фотополимерный каркас. Толщины h_{pt} образцов были значительно меньше двух других одинаковых продольных размеров. Продольный размер от образца к образцу практически не менялся и составлял 100 – 102 мм. Толщины h_{pt} пористых образцов указаны в таблице.

Таблица. Толщина, диаметр тепловыделяющего волокна, объёмные доли каркаса и волокна, сопротивление изготовленных образцов

Образец	h_{pt} , мм	Диаметр волокна, мм	Число волокон	ϕ_0	ϕ_s	m	R, Ом
1	12.9	0.83	288	0.119	0.116	0.77	391
2	12.9	0.80	235	0.089	0.088	0.82	567
3	12.8	0.09	523	0.119	0.003	0.88	689

Пористость m получившихся образцов определяется через объёмные доли каркаса ϕ_0 и тепловыделяющих волокон ϕ_s по формуле:

$$m = 1 - \phi_0 - \phi_s. \quad (1)$$

ϕ_0 для каркасов измерялась средствами программного обеспечения Blender 2.9.1. и стандартным методом по вытесненному объёму жидкости (спирта или дистиллированной воды) при погружении каркаса в неё. Значения ϕ_0 , полученные двумя разными способами совпали. Для определения ϕ_s проводились многократные измерения диаметра каждого волокна, вплетённого в фотополимерный каркас. По среднему значению диаметра волокна и его длине определялся объём отдельного волокна. Отношение объёма, приходящегося на все волокна, ко всему объёму пористого образца определяло ϕ_s .

2.2. Экспериментальная установка

Для анализа мощности тепловыделения, определения эффективной теплопроводности κ_{pm} и проницаемости K разработана и собрана экспериментальная установка. Она состоит из двух медных квадратных пластин с толщиной 8 мм и стороной квадрата 160 мм. К пластинам припаяны медные трубки, по которым прокачивается термостатирующая жидкость от термостатов KRIO-VT-01. Между теплообменными медными пластинами сверху вниз располагаются следующие слои: слой с образцом, ограниченным боковыми гранями из PLA пластика; слой из дюралюминия с толщиной 5.5 – 5.8 мм; слой из органического стекла с толщиной $h_{plex} = 4.3$ мм. Слой с образцом приклеивается к верхней теплообменной пластине и дюралюминиевому слою герметиком, а область контакта слоя из органического стекла с соседними элементами заполняется термопастой КПТ-8. Для измерения температур используются несколько медь-константановых дифференциальных термопар. Три термопары измеряют перепады температур на слое органического стекла, слое с образцом и боковой ограничивающей образец границе из PLA пластика. Дополнительная термопара в совокупности с ртутным термометром измеряет абсолютную температуру в центральной области тепловыделяющего волокнистого пористого образца. Тепловыделение в волокнах возникает, когда по цепи образца пускается электрически ток от источника питания GRP-11H30D.

2.3. Методика измерения объёмной мощности внутреннего тепловыделения

Однородное тепловыделение согласно теоретическим расчётам в пористом слое в отсутствие конвекции приводит к установлению равновесного параболического профиля поперёк слоя с максимумом температуры T_m в середине пористого слоя. Значение максимальной температуры T_m связано с мощностью тепловыделения Q во всём объёме следующим образом

$$Q = \frac{8\kappa_{pm}(T_m - T_0)}{h_{pm}^2}. \quad (2)$$

Проведение измерений температуры T_m в центре пористого слоя для одинаковых температур T_0 на его границах позволяет рассчитать по формуле (2) объёмную мощность тепловыделения $Q(T_m)$ во всём объёме пористой среды.

Внутреннее тепловыделение возникает в волокнах за счёт Джоулева разогрева при протекании электрического тока от источника питания GRP-11H30D, мощность которого может регулироваться. В электрическую цепь, состоящую из источника питания и образца тепловыделяющей волокнистой среды, последовательно включается амперметр для измерения силы электрического тока и определения электрической мощности $Q(U, I)$.

3. Результаты эксперимента

По температуре T_m в центре тепловыделяющего образца рассчитана мощность тепловыделения $Q(T_m)$ на единицу всего объёма пористой среды. Получены линейные графики зависимости мощности тепловыделения $Q(T_m)$ от электрической мощности Q_s на единицу объёма тепловыделяющих волокон (рисунок (а)).

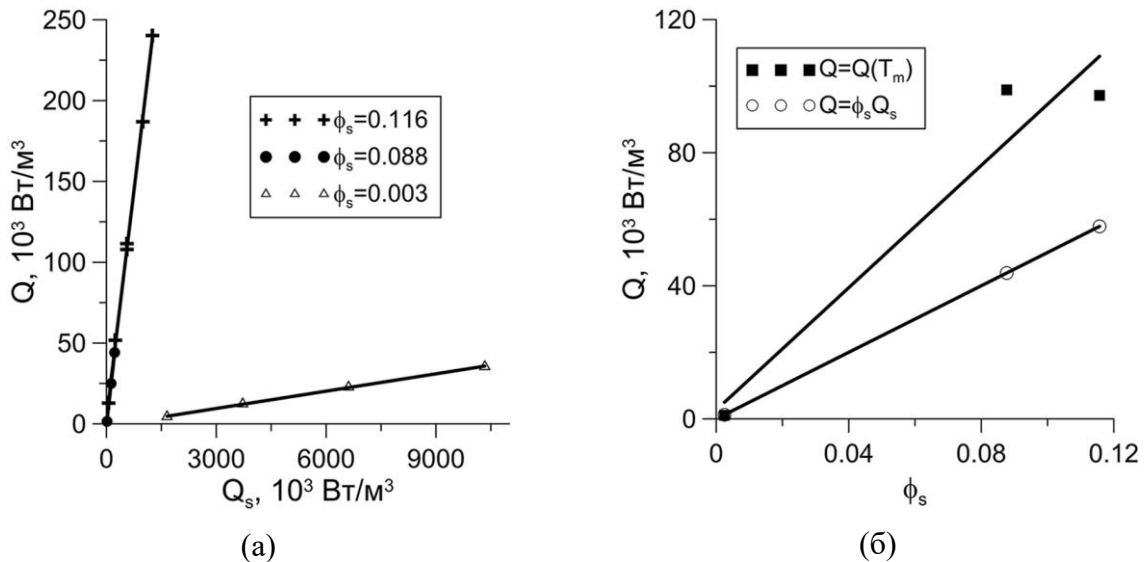


Рисунок. Зависимости мощности тепловыделения $Q(T_m)$ на единицу всего объема пористой среды (а) от электрической мощности тепловыделения Q_s на единицу объема тепловыделяющей части пористой среды и (б) от объёмной доли тепловыделяющей твёрдой фазы при $Q_s = 500 \cdot 10^3 \text{ Вт/м}^3$

На рисунке (б) проведено сравнение значений рассчитанной $Q(T_m)$ и задаваемой $Q(U, I)$ электрическим источником питания мощности тепловыделения на единицу объёма пористой среды, которое позволяет оценить эффективную объёмную долю тепловыделяющей части $\tilde{\phi}_s$ (с коррекцией на тепловыделение фотополимерного каркаса) для каждого из трёх перечисленных выше образцов: $\tilde{\phi}_s = 0.187$ (образец 1); $\tilde{\phi}_s = 0.200$ (образец 2); $\tilde{\phi}_s = 0.0035$ (образец 3).

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-71-10045, <https://rscf.ru/project/21-71-10045/>.

Список литературы

1. Buretta R. J., Berman A. S. Convective heat transfer in a liquid saturated porous layer // ASME. Journal of Applied Mechanics. 1976. Vol. 43 (2). P. 249–253. DOI: 10.1115/1.3423818
2. Kulacki F. A., Freeman R. G. A note on thermal convection in a saturated, heat generating porous layer // Journal of Heat Transfer. ASME. 1979. Vol. 101. P. 169–171. DOI: 10.1115/1.3450910
3. Rhee S. J., Dhir V. K., Catton I. Natural convection heat transfer in beds of inductively heated particles // Journal of Heat Transfer. ASME. 1978. Vol. 100. N. 1. P. 78–85. DOI: 10.1115/1.3450507
4. Kolchanova E., Kolchanov N. Onset of internal convection in superposed air-porous layer with heat source depending on solid volume fraction: influence of different modeling // Acta Mechanica. 2022. Vol. 233. P. 1769–1788. DOI: 10.1007/s00707-022-03204-8

Влияние прослоек воздуха на возникновение конвекции в многослойной пористой системе с внутренним тепловыделением

Е. А. Колчанова, Н. В. Колчанов

Пермский государственный национальный исследовательский университет,
614990, Пермь, ул. Букирева, 15
email: kolchanovaea@gmail.com

Исследуется новая задача о возбуждении конвекции в многослойной системе, состоящей из пористых субслоев одинаковой толщины и проницаемости. Субслои разделены воздушными прослойками. Пористая среда является тепловыделяющей с однородной объемной мощностью. Система сверху и снизу ограничена теплопроводными плоскостями одинаковой температуры. Решение конвективной задачи получается в предельном случае тонких воздушных прослоек, когда уравнения в воздушных субслоях сводятся к эффективным граничным условиям с комбинированными коэффициентами: параметром прослойки ε и параметром скачка теплопроводностей ζ . В результате численного моделирования показано, что добавление прослоек воздуха способствует понижению порога возникновения конвекции. Причем, этот эффект становится более заметным с ростом числа пористых субслоев при неизменной толщине многослойной системы, т.к. число прослоек тоже возрастает. В рассматриваемой системе конвекция носит крупномасштабный характер. Длина волны конвективных структур увеличивается с ростом значений параметров ε и ζ .

Ключевые слова: многослойная воздушно-пористая система; тонкие воздушные прослойки; усиление конвекции; внутреннее тепловыделение

Influence of air interlayers on convection onset in a multilayer porous system with internal heat generation

E. A. Kolchanova, N. V. Kolchanov

Perm State University, 15 Bukireva St., 614990, Perm
email: kolchanovaea@gmail.com

A new problem concerning the excitation of convection in a multilayer system composed of the porous sublayers of equal depth and permeability is investigated. The sublayers are separated by air interlayers. The porous medium is a heat-generating one with a uniform heat source strength. The system is bounded by top and bottom thermally conductive planes with equal temperature. The solution of convective problem is obtained in the limiting case of thin air interlayers when the

equations reduce to the effective boundary conditions which contain complex coefficients such as an interlayer parameter of ε and a parameter of thermal conductivity jump of ζ . The results of numerical simulation show that the addition of air interlayers is capable of speeding up the convection onset. In this case, the effect becomes more pronounced with increasing the number of porous sublayers at the same depth of the multilayer system because the number of interlayers also increases. Convection is of a large scale in the system under consideration. The wavelength of convective patterns rises with the growth of the values of ε and ζ .

Keywords: multilayer air-porous system; thin air interlayers; enhancement of convection; internal heat generation

1. Постановка задачи и методы

Рассмотрим конвективную систему толщиной H , состоящую в общем случае из N пористых субслоев, разделенных тонкими воздушными прослойками толщиной dH каждая (рис. 1). Пористые субслои насыщены воздухом и способны выделять тепло с однородной мощностью, пропорциональной объемной доле твердой фазы. Толщина и проницаемость субслоев одинакова. Внешние границы системы содержатся при одинаковых температурах. Задача о возбуждении конвекции при наличии внутреннего тепловыделения в такой системе, насколько известно авторам, является новой и ранее не изучалась. В литературе имеются работы, посвященные двухслойным конфигурациями, включающим пористые субслои разной проницаемости [1] или слой газа/жидкости поверх пористой среды [2, 3], а также трехслойной конфигурации с двумя субслоями тепловыделяющей жидкости, окружающих пористый субслой [4].

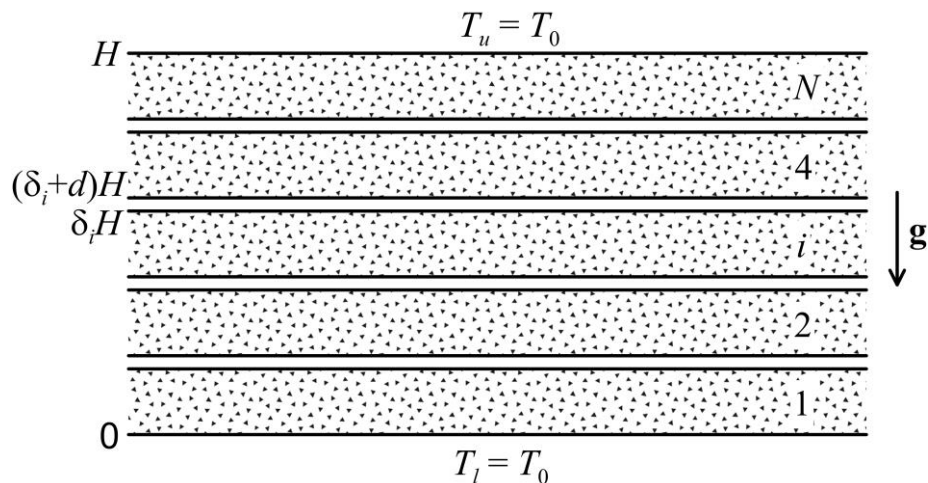


Рис. 1. Конфигурация многослойной воздушно-пористой системы на примере пяти пористых субслоев ($N = 5$)

Конвекция в системе описывается в приближении Буссинеска. В пористой среде применяется модель Дарси. В пределе тонких воздушных прослоек с $d \ll 1$ задача сводится к уравнениям конвекции, которые записываются в каждом пористом субслое с эффективными граничными условиями. Эти условия содержат параметр прослойки $\varepsilon = d^3/(12Da)$ и параметр $\zeta = \kappa d$, где d – безразмерная толщина воздушной прослойки, Da – число Дарси, κ – отношение теплопроводностей пористой среды и воздуха.

2. Численные результаты

Численное моделирование проводится на основе метода построения фундаментальной системы решений. Определяется порог возникновения конвекции в терминах внутреннего числа Релея-Дарси Ra_m^* , пропорционального объемной мощности тепловыделения. На рис. 2 представлены зависимости числа Ra_m^* от параметра прослойки при различных значениях параметра скачка теплопроводностей. Данные приведены на примере двух систем с числом пористых субслоев $N = 2$ и $N = 5$. Кривые на рисунке разграничивают области параметров для механического равновесия и конвекции. Видно, что увеличение толщины воздушной прослойки и рост скачка теплопроводности (или рост значений параметров ε и ζ) приводит к дестабилизации равновесия, т.е. к понижению порога возбуждения конвекции. Эффект становится заметнее, если при одинаковой толщине системы увеличить число пористых субслоев, т.к. влияние прослоек усилится.

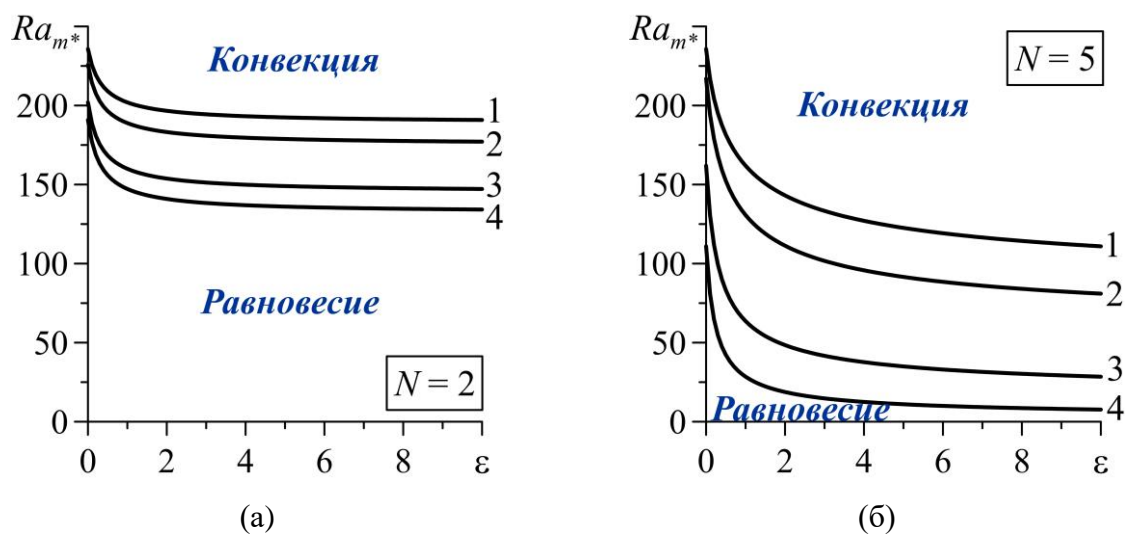


Рис. 2. Пороговое внутреннее число Релея-Дарси в зависимости от параметра прослойки ε при различных значениях параметра скачка теплопроводности ζ : 0 (линия 1), 0.1 (линия 2), 1 (линия 3), 10 (линия 4). Число пористых субслоев равно (а) $N = 2$ и (б) $N = 5$

Отметим, что в многослойной системе изучаемого типа независимо от числа пористых субслоев, которые имеют одинаковую проницаемость, течение возбуждается в виде крупномасштабных валов. Эти валы охватывают всю неустойчиво стратифицированную по плотности область системы. Их длина волны возрастает с увеличением числа пористых субслоев и значений параметров ε и ζ .

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-71-10045, <https://rscf.ru/project/21-71-10045/>.

Список литературы

1. Kuznetsov A. V., Nield D. A. The effect of strong heterogeneity on the onset of convection induced by internal heating in a porous medium: A layered model // *Transport in Porous Media*. 2013. Vol. 99. P. 85–100. DOI: 10.1007/s11242-013-0175-5
2. Lisboa K. M., Su J., Cotta R. M. Single domain integral transform analysis of natural convection in cavities partially filled with heat generating porous medium //

- Numerical heat transfer, Part A: Applications. 2018. Vol. 74 (3). P. 1068–1086. DOI: 10.1080/10407782.2018.1511141
3. *Kolchanova E., Kolchanov N.* Onset of internal convection in superposed air-porous layer with heat source depending on solid volume fraction: influence of different modeling // *Acta Mechanica*. 2022. Vol. 233. P. 1769–1788. DOI:10.1007/s00707-022-03204-8
 4. *Shalbaf S., Noghrehabadi A., Assari M. R., Dezfuli A. D.* Linear stability of natural convection in a multilayer system of fluid and porous layers with internal heat sources // *Acta Mechanica*. 2013. Vol. 224. P. 1103–1114. DOI:10.1007/s00707-012-0793-y

Конвективная устойчивость течения Пуазейля в двухслойной пористой среде с закупоркой

Е. А. Колчанова, Н. В. Колчанов

Институт механики сплошных сред УрО РАН,
614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1
email: kolchanovaea@gmail.com

Изучается задача линейной устойчивости плоского течения Пуазейля в двухслойной пористой среде с учетом иммобилизации примеси и ее оседания на скелет среды. Определяются критические параметры системы, соответствующие порогу возникновения колебательной концентрационной конвекции на фоне этого течения. Рассмотрение ведется в рамках нелинейной МИМ модели, подразумевающей деление примеси на мобильную и немобильную фазы. Найдено, что порог возбуждения конвекции повышается с ростом коэффициента засорения среды и интенсивности основного течения. Рассмотрены слоистые системы двух типов, отличающихся положением высокопроницаемого пористого слоя. Показано, что влияние закупорки более эффективно для системы с верхним высокопроницаемым слоем.

Ключевые слова: двухслойная пористая среда; течение Пуазейля; конвективная устойчивость; нелинейная МИМ модель; иммобилизация примеси; закупорка пор

Convective stability of Poiseuille flow in a two-layered porous medium with clogging

E. A. Kolchanova, N. V. Kolchanov

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS,
1 Akademika Koroleva St., 614013, Perm
email: kolchanovaea@gmail.com

We study a linear stability problem for a plane-parallel Poiseuille flow in a two-layered porous medium with the immobilization of impurity and solute trapping by the porous matrix. The critical parameters of the system, which correspond to the onset of oscillatory solutal convection over this flow, are determined. The consideration is based on the nonlinear MIM model which implies the division of solute into mobile and immobile phases. It is found that the value for the onset of convection increases with the growth of the clogging coefficient and intensity of the basic Poiseuille flow. The layered systems of two types, which differ by the position of a highly permeable porous layer, are considered. It is shown that the clogging effect is most pronounced for the system with the upper highly permeable layer.

Keywords: two-layered porous medium; Poiseuille flow; convective stability; nonlinear MIM model; solute immobilization; pore clogging

1. Постановка проблемы

Рассматривается пористая среда, состоящая из двух горизонтальных слоев разной проницаемости, насыщенных бинарной смесью (рис. 1). Смесью представляет собой несущую жидкость и активную примесь, способную взаимодействовать со скелетом пористой среды. Учитывается частичная иммобилизация примеси и закупорка пор среды, что приводит к изменению средней проницаемости слоев. Концентрация примеси в несущей жидкости неоднородна по вертикали. Внешние границы двухслойной пористой системы непроницаемы. При наличии постоянного горизонтального градиента давления создается основное плоскопараллельное течение. Устойчивость этого течения по отношению к малым возмущениям мы изучаем в данной работе. Задача в такой постановке является новой и интересна, например, с точки зрения анализа распространения загрязняющих веществ в почве и дне водоемов. В литературе имеются работы, посвященные тепловой конвекции в двухслойной конфигурации «однокомпонентная жидкость – пористая среда» в отсутствие закупорки [1, 2], и концентрационной конвекции в однослойной пористой среде с сорбцией [3–5]. В недавней работе авторов [6] исследован эффект закупорки на порог возбуждения стационарной концентрационной конвекции в слоистой пористой среде без течения.

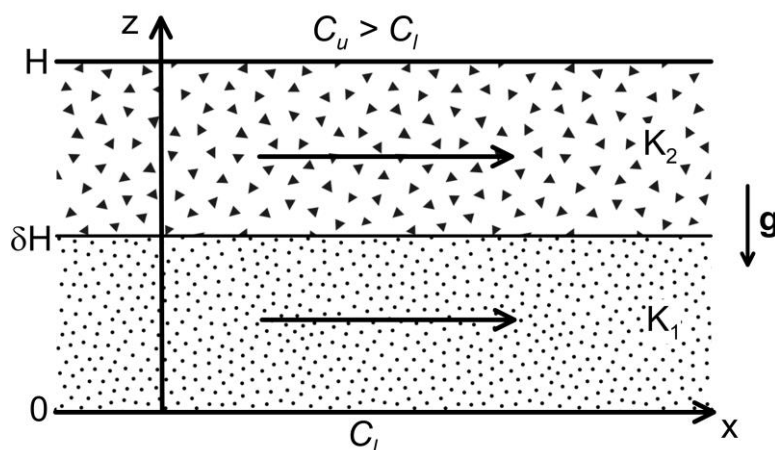


Рис. 1. Конфигурация двухслойной пористой среды, насыщенной бинарной смесью с неоднородной по вертикали концентрацией в поле силы тяжести

Конвекция в неоднородной пористой среде описывается в приближении Буссинеска с применением модели Дарси и нелинейной МММ модели. МММ модель делит активную примесь на две составляющие: мобильную, перемещающуюся вместе с потоком несущей жидкости, и немобильную, способную оседать на скелет пористой среды. Определяется пороговое концентрационное число Релея-Дарси R_{m*} , при котором в системе основное течение (течение Пуазейля) теряет устойчивость и колебательным образом возбуждается конвекция в виде валов с волновым числом k^* и частотой ω^* .

2. Результаты

Численное моделирование уравнений конвекции производилось на основе метода построения фундаментальной системы решений. Расчеты выполнены для системы с одинаковой толщиной пористых слоев (безразмерное положение границы раздела слоев $\delta = 0.5$), единичным отношением коэффициентов адсорбции ($a = 4$) и десорбции ($b = 4$) примеси и одинаковой исходной пористостью незагрязненных слоев ($\phi_0 = 0.4$). На рис. 2 приведены критические параметры, соответствующие порогу возникновения колебательной конвекции ($\omega^* > 0$) на фоне течения Пуазейля в зависимости от числа

Пекле для двух типов пористых систем. Первая система имеет верхний высокопроницаемый пористый слой (отношение проницаемостей незагрязненных слоев $Kr = 10$), вторая система, наоборот, содержит нижний высокопроницаемый слой ($Kr = 0.1$). В отсутствие закупорки (коэффициент засорения $\zeta = 0$) значения критических параметров совпадают для обеих систем. Симметрия нарушается в случае активной пористой среды, способной захватывать примесь ($\zeta > 0$). Закупорка пор для обеих систем приводит к повышению устойчивости основного плоскопараллельного течения так же, как и увеличение его скорости (рост числа Пекле). Однако, наиболее эффективное влияние на порог отмечается для системы с верхним высокопроницаемым слоем.

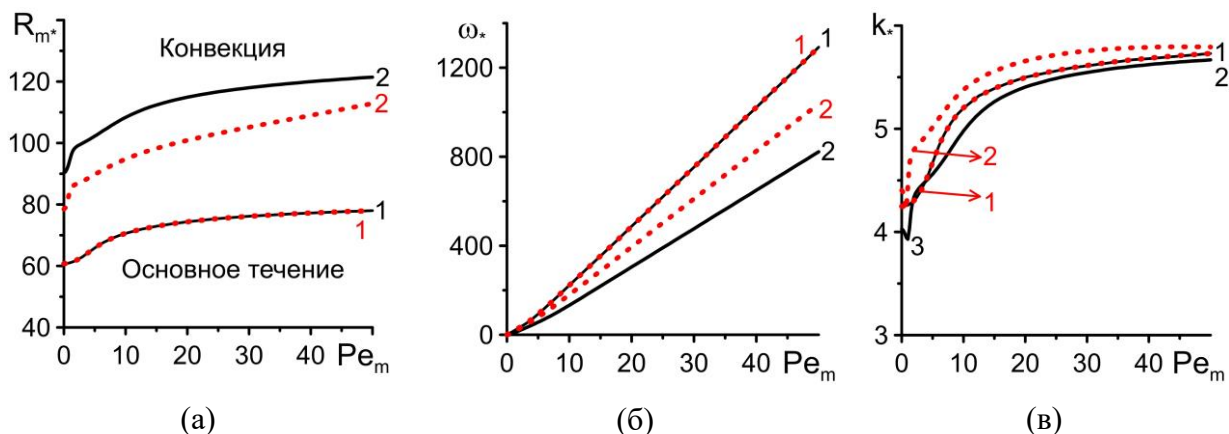


Рис. 2. (а) Пороговое концентрационное число Релея-Дарси, (б) частота критических возмущений основного течения и (в) их волновое число в зависимости от числа Пекле при $Kr = 10$ (сплошные линии) и $Kr = 0.1$ (штриховые линии) и различных значениях коэффициента засорения ζ : 0 (линия 1), 0.3 (линия 2)

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 20-11-20125).

Список литературы

1. Liu I. C., Wang H. H., Umavathi J. C. Poiseuille-Couette flow and heat transfer in an inclined channel for composite porous medium // Journal of Mechanics. 2012. Vol. 28. P. 171–178. DOI: 10.1017/jmech.2012.18
2. Lyubimova T. P., Lyubimov D. V., Baydina D. T., Kolchanova E. A., Tsiberkin K. B. Instability of plane-parallel flow of incompressible liquid over a saturated porous medium // Physical Review E. 2016. Vol. 94. 013104. DOI: 10.1103/PhysRevE.94.013104
3. Maryshev B. S. The effect of sorption on linear stability for the solutal Horton–Rogers–Lapwood problem // Transport in Porous Media. 2015. Vol. 109. P. 747–764. DOI: 10.1007/s11242-015-0550-5
4. Maryshev B. S., Klimenko L. S. Solutal convection in a horizontal porous layer with clogging at a high solute concentration // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 1809. 012009. DOI: 10.1088/1742-6596/1809/1/012009
5. Maryshev B. S., Klimenko L. S. Convective stability of a net mass flow through a horizontal porous layer with immobilization and clogging // Transport in Porous Media. 2021. Vol. 137. P. 667–682. DOI: 10.1007/s11242-021-01582-6
6. Kolchanova E. A., Kolchanov N. V. Onset of solutal convection in layered sorbing porous media with clogging // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2022. Vol. 183. Part A. 122110. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2021.122110

Влияние акустических вибраций на взаимодействие газового пузыря и твердой частицы в жидкости

В. В. Коновалов^a, Т. П. Любимова^{a,b}

^a Институт механики сплошных сред УрО РАН,
614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1
email: konovalov@icmm.ru

^b Пермский государственный национальный исследовательский университет,
614990, Пермь, ул. Букирева, 15
email: lubimova@psu.ru

Численно исследовано взаимодействие сферической твердой частицы и газового пузыря, взвешенного в жидкости, которая подвергается ультразвуковому воздействию. Рассматриваемая проблема является обобщением классической проблемы в отсутствие частицы, когда течение имеет сферическую симметрию, а скорость границы раздела жидкость-газ находится из уравнения Рэлея-Плессе. Расчеты проводились с учетом вязкости жидкости в рамках двухполевого подхода. Задача рассматривалась в пределе высокой частоты и малой либо конечной амплитуды скорости вибраций. Найдена действующая на тяжелую частицу осредненная вибрационная сила и описана ее зависимость от расстояния до рассматриваемой недеформируемой поверхности пузыря. Показано, что указанная сила имеет притягивающий характер.

Ключевые слова: акустические вибрации; многофазные среды; вибрационная сила; вязкость

Influence of acoustic vibrations on the interaction of a gas bubble and a solid particle in a liquid

V. V. Konovalov^a, T. P. Lyubimova^{a,b}

^a Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS,
1 Akademika Koroleva St., 614013, Perm
email: konovalov@icmm.ru

^b Perm State University, 15 Bukireva St., 614990, Perm
email: lubimova@psu.ru

The interaction of a spherical solid particle and a gas bubble suspended in a liquid subjected to ultrasonic treatment has been numerically studied. The problem under consideration is a generalization of the classical problem in the absence of a particle, when the flow has spherical symmetry, and the velocity of the liquid-gas interface is found from the Rayleigh-Plesset equation. The calculations were carried out taking into account the viscosity of the liquid in the framework of the two-field approach. The problem was considered in the limit of high frequency

and small or finite vibration velocity amplitude. The averaged vibrational force acting on a heavy particle is found and its dependence on the distance to the considered non-deformable bubble surface is described. It is shown that this force has an attractive character.

Keywords: acoustic vibrations; multiphase media; vibration force; viscosity

1. Введение

Результат высокочастотного вибрационного воздействия на ряд гидродинамических систем может заключаться в появлении осредненной вибрационной силы, действующей на взвешенное в жидкой матрице включение отличной плотности. Задача управления поведением таких включений, как с деформируемой, так и недеформируемой поверхностью, возникает во многих областях практической деятельности. В качестве примера можно упомянуть процесс флотации, а также перспективные с точки зрения медицины методы целенаправленной доставки лекарств по кровеносным сосудам. Вибрации, в том числе и акустических частот, оказываются экономичным и эффективным способом изменить типичное поведение многофазной системы благодаря имеющей место неоднородности инерционных сил, а также наличию ряда других факторов, скажем сжимаемости газа во взвешенных в жидкости пузырях.

В [1] определена осредненная сила для сферической твердой частицы, взвешенной в колеблющейся идеальной жидкости. Сила оказывается пропорциональной градиенту квадрата пульсационной скорости в геометрическом центре частицы. Обобщение на случай включения с деформируемой поверхностью получено в [2]. Заметим, что теории [1, 2] основаны на предположении, что диаметр частицы намного меньше, чем характерный размер существующей в жидкости неоднородности.

Неоднородность течения возникает вблизи сжимаемого газового пузыря, когда его поверхность движется в поле акустической волны в жидкости. Согласно [3] действующая на взвешенные частицы осредненная вибрационная сила способна значительно увеличивать их область притяжения к всплывающему в жидкости пузырю.

Предположительно вязкость жидкости может препятствовать захвату частицы пузырем из-за смены знака осредненной вибрационной силы. Так сила отталкивания появляется для двух одинаковых по размеру твердых сфер, расположенных на расстояниях порядка толщины стокового слоя друг от друга, когда жидкость вибрирует перпендикулярно направлению отрезка, соединяющего их центры [4]. Похожий результат получен в [5] для двух цилиндров с параллельными друг другу осями. В случае ансамбля взвешенных в колеблющейся жидкости сферических частиц игра сил притяжения и отталкивания способна приводить к формированию периодических структур в виде цепочек, ориентированных перпендикулярно оси вибраций [6, 7].

2. Постановка задачи

Рассмотрим взвешенный в жидкости с плотностью ρ и коэффициентом кинематической вязкости ν газовый пузырь с равновесным радиусом R_0 . На границе раздела жидкость-газ действует поверхностное натяжение с коэффициентом σ . Газ в пузыре характеризуется плотностью ρ_g и давлением p_g , которые могут меняться от своих равновесных значений ρ_{g0} и p_{g0} , соответственно.

Пусть в объеме жидкости устанавливается стоячая акустическая волна, длина которой намного превышает размеры пузыря. На большом удалении от пузыря задано поле акустического давления

$$p_{\infty} = p_0 + \Delta p \cdot \Re e^{i\omega t}, \quad (1)$$

которое далее в целях упрощения нашего анализа считается однородным. Здесь p_0 – атмосферное давление, Δp – амплитуда колебаний давления с циклической частотой ω , а как \Re обозначена вещественная часть. Неоднородной компонентой давления можно пренебречь, скажем, в силу малости отношения характерного размера содержащего жидкость сосуда $L \gg R_0$ к длине волны $\lambda = 2\pi c / \omega$. Это накладывает следующее ограничение на частоту $f = \omega / 2\pi$

$$f \ll \frac{c}{L},$$

где c – скорость звука в жидкости. Так для заполненного водой контейнера с минимальной длиной десять сантиметров это дает верхнюю границу для частоты f равную пятнадцати килогерцам.

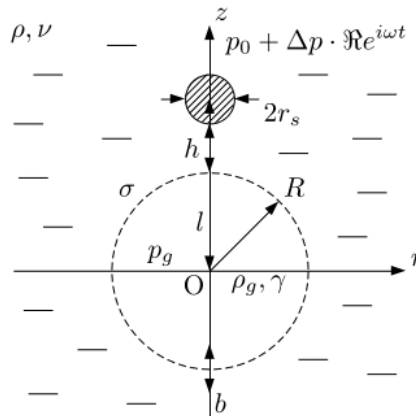


Рис. 1. Конфигурация и параметры системы

Сформулированная в таком виде задача обладает сферической симметрией, а переменный радиус пузыря $R(t)$ подчиняется уравнению Рэлея-Плессе

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{p_g - p_{\infty}}{\rho} - \frac{4\nu}{R}\dot{R} - \frac{2\sigma}{\rho R}. \quad (2)$$

Если частота ω в выражении (1) достаточно высока, то давление внутри пузыря p_g подчиняется адиабатическому закону

$$p_g R^{3\gamma} = p_{g0} R_0^{3\gamma} = \text{const}, \quad (3)$$

где γ – характеризующий газ показатель адиабаты.

Линеаризуя соотношение (2) с учетом (3) можно связать амплитуду скорости b , с которой колеблется межфазная поверхность, с амплитудой акустического давления Δp

$$b = \frac{\Delta p}{\rho R_0 \omega - \frac{\gamma p_0 + \frac{2(\gamma-1)\sigma}{R_0}}{R_0 \omega} + \frac{4\rho\nu}{R_0} i} \approx \frac{\Delta p}{\rho R_0 \omega - \frac{2(\gamma-1)\sigma}{R_0 \omega}} \text{ при } \nu \ll \frac{1}{4} R_0^2 \omega, \quad (4)$$

где мы пренебрегли фактором вязкости жидкости, который вызывает демпфирование колебаний и сдвиг по частоте. Далее в качестве контролируемого параметра используется амплитуда b , для которой дополнительно полагаем, что $b \ll R_0 \omega$.

Пусть на некотором расстоянии от пузыря l находится твердая частица сферической формы радиусом r_s . Плотность материала частицы ρ_s много больше плотности жидкости ρ , а значит частица может считаться неподвижной в лабораторной системе отсчета относительно «быстрого» пульсационного потока. Тогда величину l удобно отсчитывать между центром пузыря в состоянии равновесия и центром частицы.

Предположим, что размер частицы $r_s \ll R_0$ достаточно мал, так что ее наличие практически не влияет на обладающее сферической симметрией решение для радиальной скорости вдали от газового пузыря, которое определяется амплитудой (4) как

$$u_r = b \left(\frac{R_0}{r} \right)^2 \Re e^{i\omega t}. \quad (5)$$

Здесь радиальная координата r отсчитывается от центра O сферической системы координат $\{r, \theta, \alpha; O\}$, который выбран в неподвижном центре пузыря. Ось z , от которой отсчитывается меридиональный угол θ , направим через центр сферической частицы. В этом случае возможна осевая симметрия решения задачи, когда $\partial/\partial\alpha \equiv 0$ и $u_\alpha = 0$.

Радиус частицы r_s используем в качестве единицы длины, а величину r_s^2/ν в качестве единицы времени. Амплитуда b выбрана нами в качестве единицы скорости, а величина $\rho\nu b/r_s$ взята за единицу давления. В безразмеренной таким образом проблеме появляются следующие параметры. Это число Рейнольдса и капиллярное число

$$\text{Re} = \frac{b r_s}{\nu}, \quad \text{Ca} = \frac{\sigma r_s}{\rho \nu^2},$$

а также безразмерные частота вибраций, радиус пузыря и расстояние между центрами пузыря и частицы

$$\Omega = \frac{\omega r_s^2}{\nu}, \quad \tilde{R} = \frac{R}{r_s}, \quad \tilde{l} = \frac{R + l + r_s}{r_s}.$$

Далее в своем анализе мы следуем технике работы [5], где показано, что поле пульсаций можно определить в рамках линеаризованной задачи при условии, что $\text{Re} \ll \Omega$. Для нахождения же осредненного течения используется приближение ползущего течения, корректное при $\text{Re} \ll \sqrt{\Omega}$. Кроме того, мы ограничимся ситуацией недеформируемой поверхности газового пузыря, что соответствует $\text{Ca} \rightarrow \infty$.

Перейдем сейчас к терминам функции тока ψ и завихренности ϕ , когда

$$\phi = \text{rot}_\alpha \vec{u},$$

$$\vec{u} = \text{rot} \left\{ 0, 0, \frac{\psi}{r \sin \theta} \right\} = \left\{ \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}, 0 \right\}.$$

Поля представлены нами в виде осредненной и пульсационной частей как

$$\psi = \bar{\psi} + \hat{\psi} = \bar{\Psi}(r, \theta) + \hat{\Psi}(r, \theta) \exp(i\Omega t) + \text{c.c.},$$

$$\phi = \bar{\phi} + \hat{\phi} = \bar{\Phi}(r, \theta) + \hat{\Phi}(r, \theta) \exp(i\Omega t) + \text{c.c.},$$

$$f = \bar{f} + \hat{f} = \bar{F}(\theta) + \hat{F}(\theta) \exp(i\Omega t) + \text{c.c.}.$$

Выпишем сейчас задачу для пульсационного течения в главном порядке по Re . Уравнения для пульсационного течения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial \theta^2} - \cot \theta \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \theta} \right) + r \sin \theta \hat{\Phi} &= 0, \\ i\Omega \hat{\Phi} - \frac{1}{r^2} \left(r^2 \frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \theta} - \frac{\hat{\Phi}}{\sin^2 \theta} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Граничные условия для пульсационного течения записываются как в объеме жидкости при $r \rightarrow \infty$:

$$\hat{\Psi} = -\frac{1}{2} \tilde{R}^2 \cos \theta, \quad \hat{\Phi} = 0;$$

на оси симметрии при $\theta = 0, \pi$:

$$\frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \theta} = 0;$$

на поверхности пузыря при $r = \tilde{R}$:

$$\hat{\Psi} = -\frac{1}{2} \tilde{R}^2 \cos \theta, \quad \hat{\Phi} + \frac{2}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial r} \right) = 0, \quad i\hat{F} = \frac{1}{2} \frac{Re}{\Omega};$$

на поверхности частицы при $(r \sin \theta)^2 + (r \cos \theta - \tilde{l})^2 = 1$:

$$\hat{\Psi} = -\frac{1}{2} \tilde{R}^2, \quad \frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial \theta^2} + r \sin \theta \hat{\Phi} = 0.$$

Последнее условие имеет место из уравнения (6), так как $\partial \hat{\Psi} / \partial \theta = 0$.

Уравнения для осредненного течения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \theta^2} - \cot \theta \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \theta} \right) + r \sin \theta \bar{\Phi} &= 0, \\ \frac{1}{r^2} \left(r^2 \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \theta} - \frac{\bar{\Phi}}{\sin^2 \theta} \right) - \\ - \frac{Re}{r^2 \sin \theta} \Re \left(\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \theta} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial r} - \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial r} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \theta} - \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \theta} \frac{\hat{\phi}}{r} + \cot \theta \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial r} \hat{\phi} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Граничные условия для осредненного течения записываются как в объеме жидкости при $r \rightarrow \infty$:

$$\bar{\Psi} = 0, \quad \bar{\Phi} = 0;$$

на оси симметрии при $\theta = 0, \pi$:

$$\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \theta} = 0;$$

на поверхности пузыря при $r = \tilde{R}$:

$$\bar{\Psi} + \Re \left(\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial r} \hat{f} \right) = 0,$$

$$\bar{\Phi} + \frac{2}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial r} \right) + \Re \left[\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \hat{\phi} + \frac{2}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial r} \right) \right\} \hat{f} \right] = 0,$$

$$\bar{F} = 0;$$

на поверхности частицы при $(r \sin \theta)^2 + (r \cos \theta - \tilde{l})^2 = 1$:

$$\bar{\Psi} = 0, \quad \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \theta^2} + r \sin \theta \bar{\Phi} = 0.$$

Последнее условие имеет место из уравнения (6), так как $\partial \bar{\Psi} / \partial \theta = 0$.

Действующая на частицу вибрационная сила находится из выражения

$$P_v = \int_{S: (r \sin \theta)^2 + (r \cos \theta - \tilde{l})^2 = 1} (\bar{p} \bar{n} - \bar{\sigma} \bar{n}) \bar{e}_z dS,$$

где интегрирование осуществляется по сферической поверхности частицы $(r \sin \theta)^2 + (r \cos \theta - \tilde{l})^2 = 1$. Для перехода к размерной величине силы необходимо произвести умножение на фактор $\rho v b r_s$.

Давление вблизи частицы определялось как

$$\bar{p} = p_A + \int_{l: (r \sin \theta)^2 + (r \cos \theta - \tilde{l})^2 = 1} \nabla \bar{p} d\vec{l},$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial r} = \frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} \left(\bar{u}_r + \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \theta} + \cot \theta \bar{u}_\theta \right),$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} = r \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_\theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{u}_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \theta} - \frac{\bar{u}_\theta}{r^2 \sin \theta} \right).$$

Здесь p_A – некоторое давление в точке A на оси z на поверхности частицы, а поле осредненной скорости находится из выражений

$$\bar{u}_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \theta} \quad \text{и} \quad \bar{u}_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial r}.$$

Компоненты тензора вязких напряжений для осредненного течения есть

$$\bar{\bar{\sigma}}_{rr} = \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r}, \quad \bar{\bar{\sigma}}_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial r} - \frac{\bar{u}_\theta}{r}, \quad \bar{\bar{\sigma}}_{\theta\theta} = \frac{2}{r} \left(\frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \theta} + \bar{u}_r \right).$$

3. Численные результаты

Расчеты проводились в вычислительном пакете CrystarPack [8]. На рисунке 2 показана зависимость вибрационной силы от расстояния между поверхностями газового пузыря диаметром 1 мм и твердой частицы диаметром 100 мкм в водной среде. Амплитуда вибраций была выбрана равной 0.1 м/с, а частота вибраций равной 100000 с^{-1} . Штриховая линия представляет данные невязкого приближения.

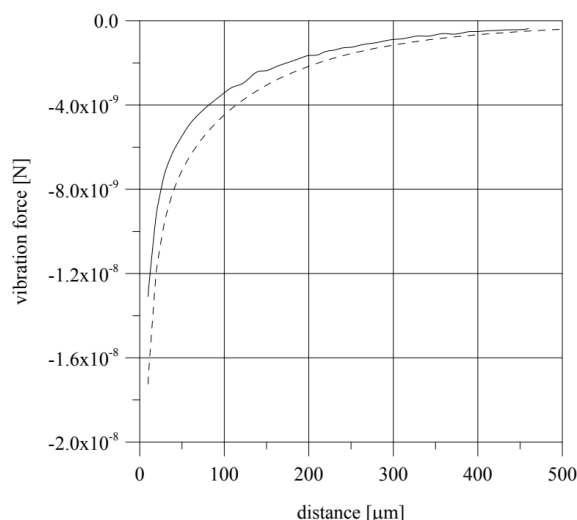


Рис. 2. Зависимость вибрационной силы от расстояния между поверхностями газового пузыря и твердой частицы

4. Заключение

Показано, что вязкость жидкости не препятствует притяжению твердой частицы к всплывающему в жидкости газовому пузырю, участвующему в монополярной моде сжатия/растяжения во внешнем поле давления, созданного стоячей акустической волной. Смены знака силы на расстоянии порядка толщины слоя Стокса не обнаружено.

Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда, грант № 20-69-46066.

Список литературы

1. Заичкин Е. В., Любимов Д. В. Поведение взвешенного в жидкости тела в поле торсионных вибраций // Вибрационные эффекты в гидродинамике. Пермь: Изд-е Перм. ун-та. 2001. Вып. 2. С. 97–109.
2. Lyubimov D., Cherepanov A., Lyubimova T. Behavior of a drop (bubble) in a non-uniform pulsating flow // Advances in Space Research. 2002. Vol. 29. N. 4. P. 667–672. DOI: 10.1016/S0273-1177(01)00669-X
3. Lyubimov D. V., Klimenko L. S., Lyubimova T. P., Filippov L. O. The interaction of a rising bubble and a particle in oscillating fluid // Journal of Fluid Mechanics. 2016. Vol. 807. P. 205–220. DOI: 10.1017/jfm.2016.608

4. *Klotsa D., Swift M. R., Bowley R. M., King P. J.* Interaction of spheres in oscillatory fluid flows // *Physical Review E*. 2007. Vol. 76. N. 5. P. 056314. DOI: 10.1103/PhysRevE.76.056314
5. *Lyubimova T., Lyubimov D., Shardin M.* The interaction of rigid cylinders in a low Reynolds number pulsational flow // *Microgravity Science and Technology*. 2010. Vol. 23. N. 3. P. 305–309. DOI: 10.1007/s12217-010-9252-3
6. *Klotsa D., Swift M. R., Bowley R. M., King P. J.* Chain formation of spheres in oscillatory fluid flows // *Physical Review E*. 2009. Vol. 79. N. 2. 021302. DOI: 10.1103/PhysRevE.79.021302
7. *Lyubimov D. V., Baydin A. Y., Lyubimova T. P.* Particle dynamics in a fluid under high frequency vibrations of linear polarization // *Microgravity Science and Technology*. 2013. Vol. 25. N. 2. P. 121–126. DOI: 10.1007/s12217-012-9336-3
8. *Konovalov V. V.* Development of CrystarPack numerical package for solving computational fluid dynamics problems // *Journal of Physics: Conference Series*. 2022. Vol. 2317. N. 1. 012003. DOI: 10.1088/1742-6596/2317/1/012003

Конвекция магнитной жидкости в контуре. Влияние параметров задачи

М. А. Косков^{a,b}, А. Ф. Пшеничников^b

^a Пермский государственный национальный исследовательский университет,
614990, Пермь, ул. Букирева, 15
email: koskov.m@icmm.ru

^b Институт механики сплошных сред УрО РАН,
614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1
email: pshenichnikov@icmm.ru

Экспериментально исследуется конвективный теплообмен в нагреваемом сбоку замкнутом гидродинамическом контуре, заполненном феррожидкостью. Контур изготовлен из тонкой трубы круглого сечения и обдувается потоком термостатированного воздуха, обеспечивающего постоянство коэффициента теплоотдачи на поверхности труб. Показано, что в режиме стационарного течения вдоль контура устанавливается экспоненциальное распределение температуры. Измеряемый в опытах показатель экспоненты даёт информацию об интегральном осевом тепловом потоке. Опыты проведены с керосином и четырьмя образцами феррожидкости на основе коллоидного магнетита и керосина, различных концентраций и одинакового дисперсного состава. Опыты проведены как в режиме гравитационной конвекции (в нулевом магнитном поле), так и в режиме смешанной (терромагнитной и гравитационной конвекции) при наложении градиентного магнитного поля на участок контура вблизи нагревателя. Установлено, что включение магнитного поля вызывает усиление конвективного теплообмена в 2.5 и более раз в зависимости от напряжённости поля и концентрации магнитной жидкости.

Ключевые слова: магнитная жидкость; терромагнитная конвекция; конвективный теплопоток; температурные измерения

Ferrofluid convection in a loop. The role of the problem parameters

M. A. Koskov^{a,b}, A. F. Pshenichnikov^b

^a Perm State University, 15 Bukireva St., 614990, Perm
email: koskov.m@icmm.ru

^b Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS,
1 Akademika Koroleva St., 614013, Perm
email: pshenichnikov@icmm.ru

Convective heat transfer in a laterally heated closed hydrodynamic loop filled with ferrofluid is investigated experimentally. The circuit is made of a thin tube of circular cross-section and is blown by a stream of thermostatic air that ensures a constant coefficient of heat transfer on the tubes surface. It is shown that the temperature distribution along the loop is exponential under steady-state conditions.

The exponent value measured in the experiments provides information about the integral axial heat flux. The experiments were carried out with paraffin and four ferrofluid samples based on colloidal magnetite and paraffin, of different concentrations and the same disperse composition. The experiments were carried out both in the mode of gravitational convection (in zero magnetic field) and in the mixed mode (thermomagnetic and gravitational convection) when a gradient magnetic field was applied on the contour segment near the heater. It was found that inclusion of magnetic field causes intensification of convective heat transfer by 2.5 and more times depending on field strength and concentration of magnetic fluid.

Keywords: magnetic fluid; thermomagnetic convection; convective heat flow; temperature measurements

1. Введение

Магнитные жидкости представляют собой коллоидные растворы ферро- или ферримангнитных материалов в немагнитной жидкости носителе [1]. Интерес к тепловой конвекции в таких системах обусловлен существованию двух механизмов, обеспечивающих конвективное движение. Первый механизм, свойственный всем жидкостям, – плавучесть вследствие теплового расширения в гравитационном поле. Интенсивность тепловых потоков при таком типе конвекции определяется тепловым числом Релея [2].

$$Ra = \frac{g\beta\rho r^3}{\chi\eta} \Delta T, \quad (1)$$

где g – ускорение свободного падения, β – коэффициент теплового расширения жидкости, ρ – её плотность, χ – температуропроводность, η – динамическая вязкость; r – характерный размер сосуда, ΔT – характерный перепад температуры. Второй, свойственный только магнитным жидкостям термомагнитный механизм конвекции связан с зависимостью их намагниченности от температуры. В неоднородном магнитном поле эта зависимость приводит к возникновению некомпенсированной пондеромоторной силы, вызывающей конвективное движение [1].

Прикладные исследования термомагнитной конвекции направлены на создание систем безнасосного жидкостного охлаждения. В качестве простейшей модели такого устройства рассматривается конвективная петля, в которой магнитная жидкость непрерывно переносит тепло от нагревателя к холодильнику. В работах [3–5] показана одновременно перспективность конвективной петли как теплообменника и высокая чувствительность термомагнитной конвекции к большому числу параметров задачи: концентрации магнитной фазы, геометрии теплообменного устройства и магнитного поля и т.д. Настоящая работа посвящена поиску оптимальных с точки зрения интенсивности теплообмена условий для термомагнитной конвекции. Основное внимание сфокусировано на подборе оптимальной концентрации магнитной жидкости.

2. Детали эксперимента

Для проведения эксперимента использовался вертикальный гидродинамический контур, изготовленный из тонкой стеклянной трубки круглого сечения (рис. 1). Внутренний радиус канала составил $r = 2.6$ мм, его длина – 35 см. Нагревался сравнительно короткий вертикальный участок контура, к которому было приложено неоднородное магнитное поле. Отвод тепла осуществлялся в отличие от работ [3–5] без

использования дополнительного радиатора со всей поверхности трубки путём её обдува термостатированным воздухом. Температурные измерения проводились при помощи миниатюрных медь-константановых термопар, горячие спаи которых находились на поверхности контура, а холодные поддерживались при температуре охлаждающего воздуха. Перепад температуры на нагревателе ΔT , определяющий число Релея (1), измерялся дополнительной термопарой, горячий и холодный спаи которой находились соответственно выше и ниже нагреваемого участка трубки. Источником неоднородного магнитного поля служила намагничивающая система с плоскими полюсными наконечниками. Магнитное поле охватывало участок контура вблизи нагревателя длиной около 30 мм. Конструкция намагничивающей системы допускала варьирование амплитудного значения напряжённости поля в рабочем зазоре в пределах 23-29 кА/м. Характерное значение градиента напряжённости составляло $\sim 10^6$ А/м².

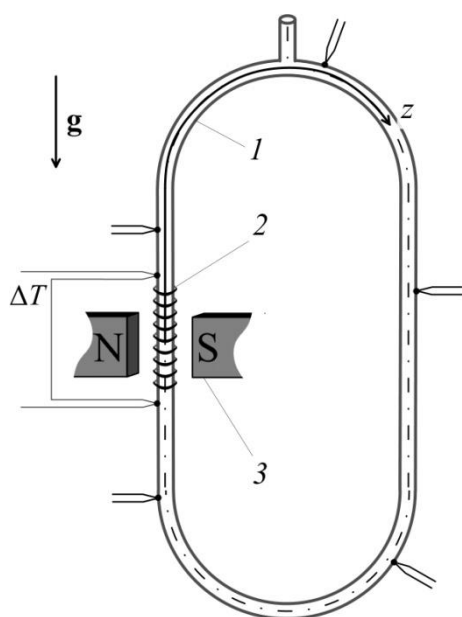


Рис. 1. Экспериментальный контур со схематичным указанием расположения спаев термопар. 1 – стеклянная трубка, 2 – нагреватель, 3 – полюсные наконечники намагничивающей системы. Начало оси Oz привязано к середине нагревателя

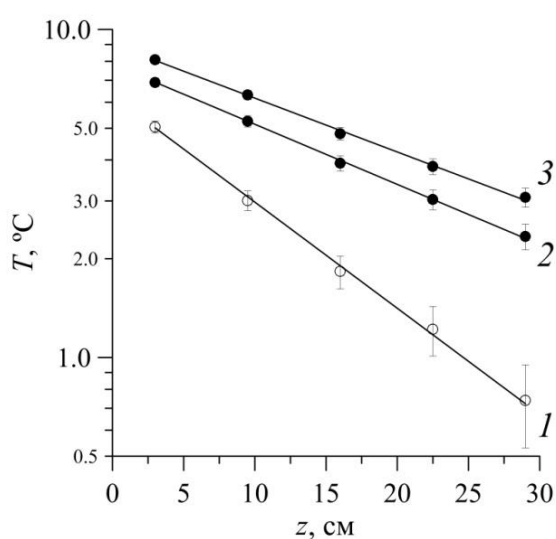


Рис. 2. Температура вдоль поверхности контура с магнитной жидкостью с объёмной долей магнетита $\phi_s = 0.060$. 1 – в нулевом магнитном поле, 2 – в неоднородном поле с амплитудой напряжённости 23 кА/м (в отсутствие жидкости), 3 – в неоднородном поле с амплитудой 29 кА/м. Точки – термопарные показания, линии – аппроксимации экспонентами

Конвективная петля заполнялась магнитной жидкостью типа «магнетит – керосин – олеиновая кислота». В экспериментах было использовано четыре образца магнитной жидкости различной концентрации и одинакового дисперсного состава. Образцы жидкостей были получены путём разбавления одного базового концентрированного образца осветительным керосином. Плотность образцов измерялась пикнометром, вязкость – ротационным вискозиметром (таблица). Остальные физические параметры рассчитывались по известным формулам [1]. В контрольных опытах использовался чистый осветительный керосин.

Таблица. Физические свойства образцов жидкостей

Образец	ρ (г/см ³)	φ_s	$\chi \cdot 10^8$ (м ² /с)	$\beta \cdot 10^4$ (К ⁻¹)	η (сП)
1	0.96	0.040	7.6	7.5	1.63
2	1.05	0.060	7.9	6.7	2.25
3	1.13	0.078	8.1	6.1	2.72
4	1.22	0.099	8.4	5.5	3.75
керосин	0.78	-	7.0	9.6	1.04

Как было показано в [6, 7], воздушное охлаждение поверхности трубки обеспечивает экспоненциальное распределение температуры $T \propto \exp(-kz)$ вдоль контура в режиме стационарного теплообмена (рис. 2). Пространственный декремент затухания k даёт информацию о безразмерном интегральном осевом тепловом потоке – числе Нуссельта:

$$Nu = \frac{A}{r^2 k^2}, \quad (2)$$

где A – безразмерный коэффициент [7], определяемый, в условиях проводимого эксперимента, свойствами жидкости. При переходе от одного образца к другому, значения A изменялись в относительно узком диапазоне 0.84 – 1.05.

3. Результаты и обсуждение

Каждый образец феррожидкости использовался в трёх сериях измерений. В первой серии исследовалась гравитационная конвекция в нулевом магнитном поле. В этой же серии проведены опыты с осветительным керосином. Во второй и третьей сериях опытов исследовалась смешанная, гравитационная и термомагнитная, конвекция, в неоднородном магнитном поле с амплитудой напряжённости соответственно 23 и 29 кА/м. Установившиеся профили температуры вдоль трубки аппроксимировались экспоненциальными кривыми по методу наименьших квадратов (сплошные линии на рис. 2). Экспериментальные пары значений $(\Delta T, k)$ – установившийся перепад температуры на нагревателе и показатель экспоненты соответственно, пересчитывалась по формулам (1) и (2) в пары (Ra, Nu) . Графическое представление результатов дано на рис. 3, 4. Как и ожидалось, в условиях гравитационной конвекции, экспериментальные точки (Ra, Nu) для всех образцов жидкостей ложатся на одну универсальную кривую. Разница состоит лишь в том, что менее вязкие образцы при прочих равных условиях дают большие числа Релея. Наложение магнитного поля запускает термомагнитную конвекцию и увеличивает интегральный теплоток в 2.5 – 4 раза в зависимости от концентрации жидкости и напряжённости поля. Максимальный теплоток был достигнут в образцах с объёмной долей магнетита $\varphi_s = 0.04 - 0.06$. При больших концентрациях конвекция ослабевает из-за увеличения вязкости [8], а при меньших за счёт уменьшения пондеромоторной силы [1]. В области средних концентраций эти два механизма компенсируют друг друга.

В проведённых опытах тепловое число Релея не является независимым параметром, поскольку разность температур ΔT сама устанавливается в процессе конвекции. Поэтому, корректным также будет сравнение чисел Релея при фиксированном числе Нуссельта, т.е. при одинаковых безразмерных тепловых потоках. В неоднородном магнитном поле числа Релея, характеризующие вклад гравитационной конвекции в теплоток, оказываются в 3 – 4.5 раза меньше чем в нулевом поле. Таким

образом, во всех образцах магнитной жидкости терромагнитный механизм конвекции превосходил гравитационный по интенсивности теплопереноса.

4. Заключение

Экспериментально исследована тепловая конвекция магнитной жидкости в замкнутом протяжённом нагреваемом сбоку контуре при наложении градиентного магнитного поля на участок контура вблизи нагревателя. Цель работы – получение информации об оптимальной, с точки зрения интенсивности теплообмена, концентрации магнитных частиц. Опыты проведены с четырьмя образцами магнитной жидкости типа «магнетит – керосин – олеиновая кислота» отличающимися концентрацией частиц и с чистым керосином, который являлся контрольным образцом. Контур охлаждался потоком термостатированного воздуха, что обеспечило фиксированные условия теплообмена во всех сериях измерений. Показано, что наложение неоднородного магнитного поля на участок контура вблизи нагревателя приводит к возникновению терромагнитной конвекции и усилению теплообмена в 2.5 – 4 раза. Наибольшая интенсивность теплопереноса наблюдалась в образцах с умеренной концентрацией магнетита (4 – 6% по объёму).

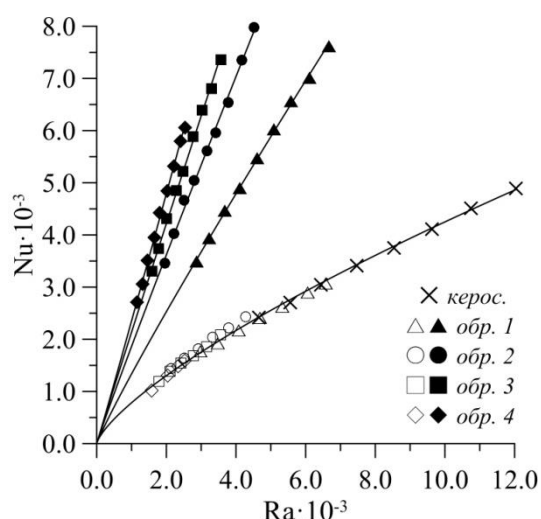


Рис. 3. Число Нуссельта в зависимости от теплового числа Релея. Светлые точки соответствуют опытам в нулевом магнитном поле, темные – опытам в неоднородном поле с амплитудой напряжённости (в отсутствие жидкости) 23 кА/м. Линии – аппроксимация показательными функциями

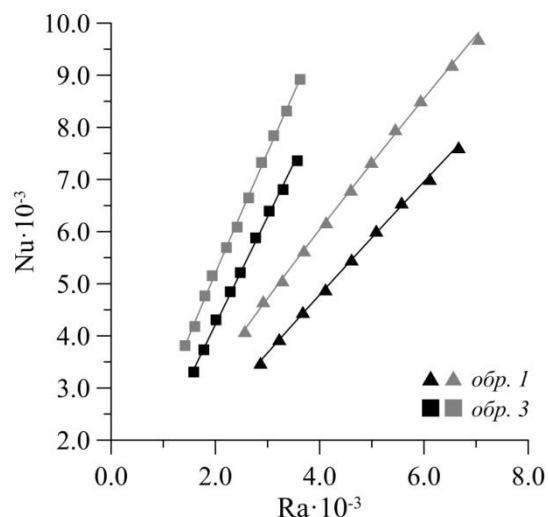


Рис. 4. Число Нуссельта в зависимости от теплового числа Релея. Светлые точки – опыты в магнитном поле с напряжённостью (в отсутствие жидкости) до 29 кА/м, темные – до 23 кА/м. Линии – аппроксимация показательными функциями

Список литературы

1. Берковский Б. М., Медведев В. Ф., Краков М. С. Магнитные жидкости. М.: Химия, 1989. 240 с.
2. Lienhard J. H. Heat Transfer Textbook. Cambridge MA, USA: Phlogiston Press, 2019. 784 p.

3. *Matsuki H., Yamasawa K., Murakami K.* Experimental considerations on a new automatic cooling device using temperature-sensitive magnetic fluid // *IEEE Transactions on Magnetics*. 1977. Vol. (5). P. 1143–1145. DOI: 10.1109/TMAG.1977.1059679
4. *Fumoto K., Yamagishi H., Ikegawa M.* A Mini heat transport device based on thermosensitive magnetic fluid // *Nanoscale and Microscale Thermophysical Engineering*. 2007. Vol. 11. P. 201–210. DOI: 10.1080/15567260701333869
5. *Aursand E., Gjennestad M. A., Lervåg K. Y., Lund H.* Potential of enhancing a natural convection loop with a thermomagnetically pumped ferrofluid // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 2016. Vol. 417. P. 148–159. DOI: 10.1016/j.jmmm.2016.05.029
6. *Косков М. А., Пиеничников А. Ф.* Конвекция магнитной жидкости в замкнутом гидродинамическом контуре // *Вестник Пермского университета. Физика*. 2021. № 2. С. 14–22. DOI: 10.17072/1994-3598-2021-2-14-22
7. *Косков М. А.* Конвекция феррожидкости в замкнутом контуре: анализ температурного поля // *Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Техника и технологии*. 2022. Т. 12. № 2. С. 166–182. DOI: 10.21869/2223-1528-2022-12-2-166-182
8. *Chow T. S.* Viscoelasticity of concentrated dispersions // *Physical review E*. 1994. Vol. 50. No. 2. P. 1274–1279. DOI: 10.1103/PhysRevE.50.1274

Моделирование капиллярной турбулентности в одномерной плоско-симметричной геометрии

Е. А. Кочурин

Сколковский институт науки и технологий, 121205, Москва, Большой бул., 30, стр. 1
Институт электрофизики УрО РАН, 20016, Екатеринбург, ул. Амундсена, 106
e-mail: kochurin@iep.uran.ru

Проведено прямое численное моделирование волновой капиллярной турбулентности поверхности жидкости, развивающейся в плоско-симметричной одномерной геометрии. Несмотря на то, что нетривиальные трех- и четырех-волновые резонансные взаимодействия отсутствуют в этой вырожденной геометрии, результаты расчетов демонстрируют, что перекачка энергии в малые масштабы все же происходит. Спектр турбулентности в режиме квазистационарной диссипации энергии демонстрирует четкий скейлинг волнового числа по степенному закону, который хорошо согласуется с аналитическим спектром турбулентности, полученным на основе размерностного анализа, включающего резонансные четырех-волновые взаимодействия. Проведенный корреляционный анализ подтверждает количественно, что доминирующую роль в исследуемой задаче играют четырех-волновые квазирезонансные взаимодействия.

Ключевые слова: свободная поверхность; волновая турбулентность; капиллярные волны

Simulation of capillary turbulence in one-dimensional plane-symmetric geometry

E. A. Kochurin

Skolkovo Institute of Science and Technology, 30/1 Bolshoy Blvd, 121205, Moscow
Institute of Electrophysics UB RAS, 106 Amundsen St., 620016, Ekaterinburg
e-mail: kochurin@iep.uran.ru

Direct numerical simulation of the wave capillary turbulence of the surface of a liquid developing in a plane-symmetric one-dimensional geometry has been carried out. Despite the fact that nontrivial three- and four-wave resonant interactions are absent in this degenerate geometry, the calculation results demonstrate that energy transfer to small scales does occur. The turbulence spectrum in the regime of quasi-stationary energy dissipation demonstrates a clear scaling of the wave number according to a power law, which is in good agreement with the analytical turbulence spectrum obtained on the basis of a dimensional analysis, including resonant four-wave interactions. The performed correlation analysis confirms quantitatively that the dominant role in the problem under study is played by four-wave quasi-resonance interactions.

Keywords: free surface; wave turbulence; capillary waves

1. Введение

Известно, что нелинейные волновые системы могут переходить в состояние квазистационарного хаотического движения (волновая турбулентность). Это явление распространено повсеместно: волны в океане, плазменные волны в солнечном ветре, нелинейные оптические волны, упругие волны или гравитационные волны [1]. Слабонелинейная теория (или теория слабой турбулентности), описывающая статистические свойства нелинейных волновых систем, развита в работах Захарова и соавторов [2]. Захаровым получены точные стационарные решения кинетических уравнений, описывающих распределение квазичастиц-волн. Эти решения называют спектрами Колмогорова-Захарова (или КЗ спектры). Спектры слабой турбулентности описывают стационарную перекачку энергии из больших масштабов в малые (прямой каскад). К настоящему моменту времени теория слабой турбулентности с высокой точностью подтверждена для изотропной капиллярной турбулентности на свободной поверхности жидкости, как численно [3], так и экспериментально [4]. Ситуация меняется при рассмотрении анизотропной геометрии, когда волны на поверхности жидкости распространяются преимущественно в одном выделенном направлении. В настоящей работе будет рассмотрена именно такая задача. На основе метода прямого численного моделирования будет показано, что система одномерных плоских капиллярных волн может переходить в режим развитой волновой турбулентности.

2. Вычислительная модель

В настоящей работе мы рассмотрим динамику идеальной несжимаемой жидкости бесконечной глубины со свободной поверхностью. Закон дисперсии для поверхностных капиллярных волн имеет вид

$$\omega(k) = \left(\frac{\sigma}{\rho} \right)^{1/2} k^{3/2}, \quad (1)$$

где ω – частота, k – волновое число, σ – коэффициент поверхностного натяжения, ρ – плотность жидкости. Для слабонелинейных волн передача энергии между волнами происходит за счет резонансных волновых взаимодействий. Преобладающее нелинейное взаимодействие волн соответствует числу, определяемому как минимальное целое число N , для которого выполняются условия

$$\begin{aligned} \omega(k_1) \pm \omega(k_2) \dots \pm \omega(k_N) &= 0, \\ k_1 \pm k_2 \dots \pm k_N &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Для классической изотропной капиллярной турбулентности доминирующим процессом являются трех-волновые резонансные взаимодействия, $N=3$. В плоско-симметричной одномерной геометрии такие взаимодействия запрещены, т.е. соотношения (2) не могут быть выполнены для дисперсионного соотношения (1). Таким образом, возникает фундаментальный вопрос: какой спектр турбулентности может реализоваться для поверхностных капиллярных волн в одномерной плоско-симметричной геометрии? Для ответа на него в настоящей работе будет проведено прямое численное моделирование нелинейной динамики свободной поверхности жидкости.

Вычислительная модель будет строиться на основе кубически нелинейной системы интегро-дифференциальных уравнений движения границы жидкости:

$$\eta_t = \hat{k}\psi - (\eta\psi_x)_x - \hat{k}(\eta\hat{k}\psi) + \hat{k}(\eta\hat{k}[\eta\hat{k}\psi]) + \frac{1}{2}(\eta^2\hat{k}\psi)_{xx} + \frac{1}{2}\hat{k}(\eta^2\psi_{xx}) + \hat{D}_k\eta, \quad (3)$$

$$\psi_t = \eta_{xx} - \frac{1}{2}[(\psi_x)^2 - (\hat{k}\psi)^2] - (\hat{k}\psi)\hat{k}(\eta\hat{k}\psi) - (\eta\hat{k}\psi)\psi_{xx} + F(x,t) + \hat{D}_k\psi, \quad (4)$$

где функции $\eta(x,t)$ и $\psi(x,t)$ определяют форму поверхности жидкости и значение потенциала скорости жидкости на границе, соответственно, оператор \hat{k} определяется в Фурье-пространстве как $\hat{k}f_k = |k|f_k$. Оператор \hat{D}_k отвечает за эффект вязкости, в k -пространстве он определяется как

$$\hat{D}_k = -\nu_0(|k| - k_d)^2, \quad |k| \geq k_d; \quad \hat{D}_k = 0, \quad |k| \leq k_d.$$

Здесь ν_0 – константа, а k_d – волновое число, определяющее пространственный масштаб, в котором происходит диссипация энергии. Член, отвечающий за накачку энергии, определяется следующим образом:

$$F(x,t) = a_0 \sum_{i=1}^4 \sin(f_i t) \cos(k_i x + \phi_i),$$

где a_0 – константа, определяющая силу воздействия, $k_i = i$ – волновые числа воздействия, f_i и ϕ_i – случайные числа, нормально распределенные в интервале $[0, 2\pi]$. Схема численного интегрирования решения системы (3) и (4) по времени основана на явном методе Рунге-Кутты четвертого порядка с шагом dt . Пространственные производные и интегральные операторы рассчитываются псевдоспектральными методами с полным числом гармоник \mathcal{N} . Моделирование проводилось в периодическом одномерном ящике размером с параметрами: $x \in [0, L_x]$, $\mathcal{N} = 2048$, $dt = 2.5 \cdot 10^{-5}$, $a_0 = 2$, $k_i = 1, 2, 3, 4$, $k_d = 500$, $\nu_0 = 10$.

3. Результаты моделирования

На рис. 1 показана временная эволюция полной энергии системы. Можно видеть, что к моменту времени $t \approx 2 \cdot 10^3$ система переходит к квазистационарному режиму движения. На рис. 2 показан пространственный спектр поверхностных возмущений в режиме квазистационарной диссипации энергии. Можно видеть, что в инерционном интервале волновых чисел спектр турбулентности действительно приобретает степенную зависимость. На рис. 2 также показаны аналитические спектры турбулентности:

$$S(k) = C_{1D}^{3w} P^{1/2} \left(\frac{\sigma}{\rho} \right)^{-3/4} k^{-15/4}, \quad (5)$$

$$S(k) = C_{1D}^{4w} P^{1/3} \left(\frac{\sigma}{\rho} \right)^{-1/2} k^{-7/2}. \quad (6)$$

Выражение (5) соответствует спектру одномерной капиллярной турбулентности, для трех-волновых взаимодействий, а спектр (6) получен в предположении о доминирующем влиянии четырех-волновых взаимодействий. Рис. 2 демонстрирует, что результаты моделирования лучше согласуются с оценкой (6), полученной в

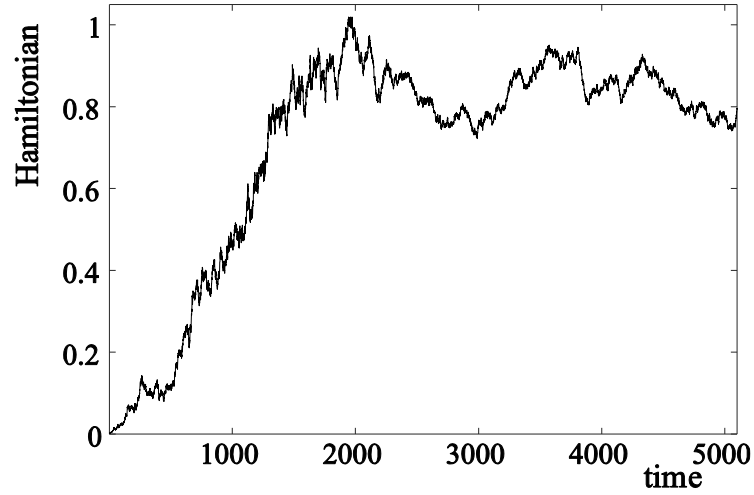


Рис. 1. Эволюция полной энергии системы

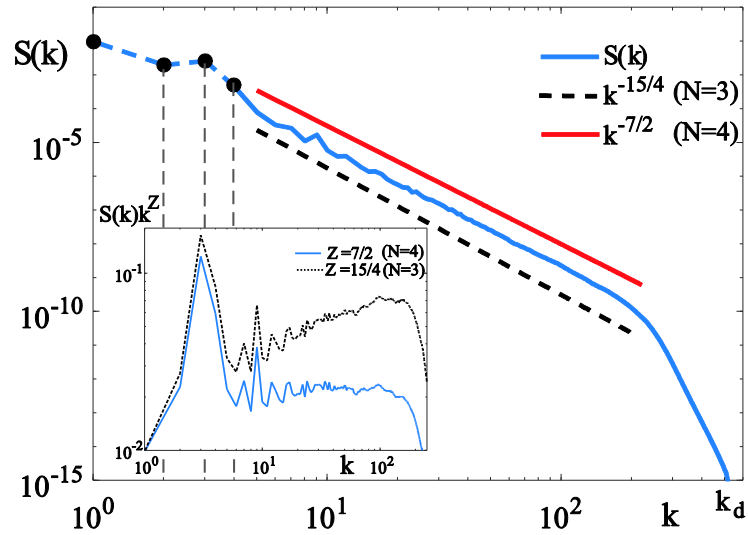


Рис. 2. Пространственный спектр поверхностных возмущений в квазистационарном режиме движения, во вставке показаны скомпенсированные спектры

предположении о доминирующем влиянии четырех-волновых резонансных взаимодействий.

Для того, чтобы убедиться в возможности доминирования четырех-волновых резонансных взаимодействий, вычислим нормированные корреляции третьего и четвертого порядка:

$$B(k_1, k_2) = \frac{|\langle \eta_{k_1}^* \eta_{k_2} \eta_{k_1+k_2} \rangle|}{\sqrt{\langle |\eta_{k_1}|^2 \rangle \langle |\eta_{k_2} \eta_{k_1+k_2}|^2 \rangle}},$$

$$T(k_1, k_2, k_3) = \frac{|\langle \eta_{k_1}^* \eta_{k_2}^* \eta_{k_3} \eta_{k_1+k_2-k_3} \rangle|}{\sqrt{\langle |\eta_{k_1} \eta_{k_2}|^2 \rangle \langle |\eta_{k_3} \eta_{k_1+k_2-k_3}|^2 \rangle}}.$$

Вычисленные функции $B(k_1, k_2)$ и $T(k_1, k_2, 20)$ показаны на рис. 3. На рис. 3а видно, что трех-волновые квазирезонансные взаимодействия действительно присутствуют, но их количество очень мало: большинство квазирезонансных мод расположено при малых волновых числах. Ситуация меняется на рис. 3б, на котором можно видеть большое число коррелирующих Фурье-гармоник. Таким образом, рис. 3 уверенно демонстрирует тот факт, что четырех-волновые квази-резонансные взаимодействия играют доминирующую роль в развитии турбулентности плоско-симметричных капиллярных волн.

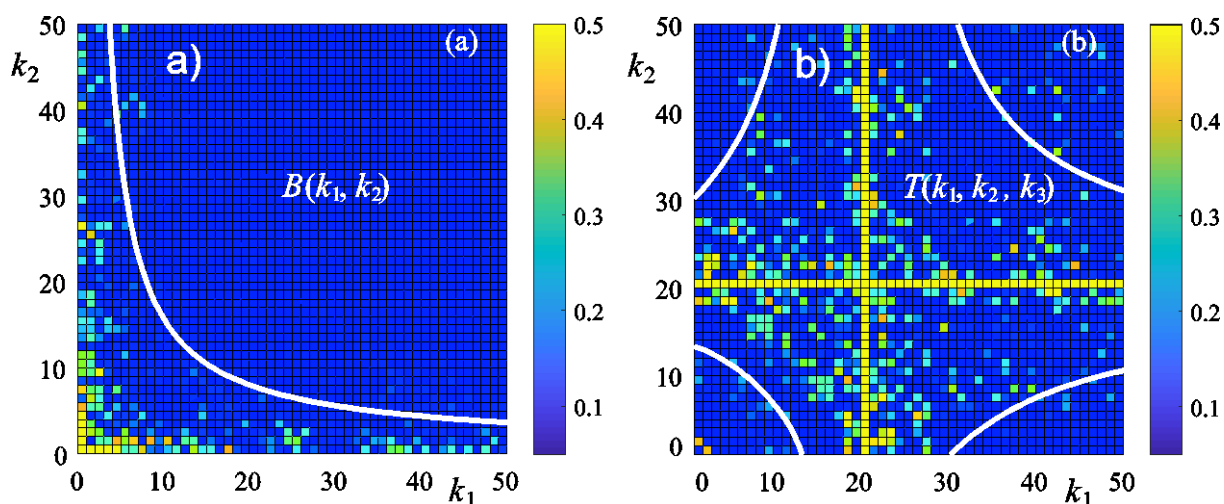


Рис. 3. Корреляционные функции третьего и четвертого порядка (a) и (b), соответственно, измеренные в квазистационарном состоянии. Белые сплошные линии соответствуют областями с максимальным значением корреляций

Работа поддержана советом по грантам Президента Российской Федерации № МК-3003.2021.1.2.

Список литературы

1. Zakharov V. E., L'vov V. S., Falkovitch G. Kolmogorov Spectra of Turbulence I: Wave Turbulence. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1992. 263 p.
2. Zakharov V. E., Filonenko N. N. Weak turbulence of capillary waves // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1967. Vol. 8. P. 37–40. DOI: 10.1007/BF00915178
3. Pushkarev A. N., Zakharov V. E. Turbulence of Capillary Waves // Physical Review Letters. 1996. Vol. 76. P. 3320.
4. Falcon E., Mordant N. Experiments in Surface Gravity-Capillary Wave Turbulence // Annual Review of Fluid Mechanics. 2022. Vol. 54. P. 1–25. DOI: 10.1146/annurev-fluid-021021-102043

Изменение спектра растворимых аэрозольных частиц

Ю. Л. Кузнецова

Институт механики сплошных сред УрО РАН,
614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1
email: julyas@icmm.ru

Проведено исследование влияния растворения и кристаллизации водорастворимых аэрозольных частиц на изменение функции распределения частиц по размеру в замкнутом канале прямоугольной формы с неподвижной средой носителем. При моделировании предполагалось, что на изменение спектра частиц, кроме процесса массообмена с влагой окружающего воздуха, оказывают влияние коагуляция, гравитационное оседания и диффузия частиц. Для описания гигроскопического изменения размеров частиц применялась новая модель, позволяющая учитывать долю нерастворенного вещества на динамику роста частицы. Численное решение осуществлялось с использованием разделения спектра частиц на секции и последовательным учетом влияния каждого процесса, участвующего в изменении функции распределения частиц, на каждом временном шаге. На основе численных расчетов установлено, что при влажности окружающего воздуха близкой к гигроскопической точке растворение и рост частиц имеют доминирующее значение при малых концентрация аэрозоля. При повышении концентрации влияние гигроскопического изменения размера влияет на форму только на начальной стадии эволюции спектра частиц и практически не отражается на конечной форме кривой распределения.

Ключевые слова: распределение частиц по размерам; полидисперсные аэрозоли; математическое моделирование

Change in density of soluble aerosol particles

J. L. Kuznetsova

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS,
1 Akademika Koroleva St., 614013, Perm
email: julyas@icmm.ru

The effect of dissolution and crystallization of water-soluble aerosol particles on the change in the particle size distribution function in a closed rectangular channel with a fixed carrier medium has been studied. In the simulation, it was assumed that the change in the spectrum of particles, in addition to the process of mass exchange with the moisture of the surrounding air, is influenced by coagulation, gravitational subsidence and diffusion of particles. To describe the hygroscopic change in particle sizes, a new model was used that allows taking into account the proportion of undissolved matter on the dynamics of particle growth. The numerical solution was carried out using the separation of the particle spectrum into sections and the sequential consideration of the influence of each process involved in changing the particle distribution function at each time step. Based on numerical calculations, it was found that at ambient humidity close to the

hygroscopic point, the dissolution and growth of particles have a dominant value at low aerosol concentrations. With an increase in concentration, the effect of hygroscopic size changes affects the shape only at the initial stage of the evolution of the particle spectrum and practically does not affect the final shape of the distribution curve.

Keywords: particle size distribution; polydisperse aerosols; mathematical modeling

1. Введение

Аэрозоли, представляющие собой механическую смесь частиц дисперсной фазы со средой носителем, являются широко распространенным объектом в природе и повседневной деятельности человека. Одной из главных характеристик таких систем является распределение частиц по размерам (спектр частиц). Спектр частиц определяет макроскопическое поведение ансамбля частиц дисперсной фазы и, в конечном счете, от него зависят газодинамическое движение, оптические и диффузионные свойства аэрозоля. В свою очередь, сам спектр размеров частиц подвержен сильным изменениям в процессе течения. Для атмосферных аэрозолей наиболее существенным является изменение дисперсного состава в результате процессов обмена частиц со средой носителем (конденсация и испарение), осаждения на стенках и слияния частиц в результате парных столкновений (коагуляция).

Для описания локальной эволюции спектра частиц $f(r, \mathbf{x}, t)$ (r – радиус частицы; t – время; \mathbf{x} – координаты) под влиянием перечисленных процессов широко используют уравнение:

$$\frac{\partial f(r, \mathbf{x}, t)}{\partial t} + (\nabla \cdot [\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}(r)]) f(r, \mathbf{x}, t) + \frac{\partial}{\partial r} \left(f(r, \mathbf{x}, t) \frac{dr}{dt} \right) = I_1 + I_2 + I_3. \quad (1)$$

Здесь dr/dt описывает скорость изменения размера частиц вследствие диффузии водяного пара к частицам; член I_1 характеризует убыль капель размером r за единицу времени в единице объема за счет столкновения с другими каплями; член I_2 описывает возникновение частиц радиуса r за счет столкновения капель меньшего размера; I_3 диффузию частиц. Задавая конкретный вид законов изменения для каждого из процессов, удается описать поведение аэрозольных систем различной природы и при различных внешних условиях.

Изменение спектра частиц пылевых атмосферных аэрозолей, размер частиц которых варьируется в диапазоне от нанометров до нескольких десятков микрометров, в основном описывают с помощью механизма броуновской и турбулентной коагуляции, при этом дополнительно предполагая изменение размера частиц в результате конденсации или испарения молекул воды на/с поверхности частицы [1, 2]. Последнее допущение справедливо для нерастворимых частиц или при влажности воздуха, меньше или выше гигроскопической точки DRH (Deliquescence Relative Humidity), т.е. вдали от влажности воздуха, при которой начинается интенсивное растворение твердой частицы в каплю концентрированного раствора. Для описания поведения пылевых аэрозолей с растворимыми частицами, например, при моделировании запыленности в соледобывающих шахтах, при влажности воздуха равной гигроскопической точке частицы могут изменять размер в несколько раз, при этом скорость растворения зависит от начального радиуса частиц. Этот факт может влиять на эволюцию спектра распределения частиц и, как следствие, на динамику аэрозоля. В связи с вышесказанным, целью данной работы является оценка влияния изменения размера растворимых аэрозольных частиц при влажности окружающего воздуха близкой к гигроскопической точке.

2. Описание модели

Рассмотрим пылевой аэрозоль, состоящий из среды носителя – воздуха заданной относительной влажности и водорастворимых частиц сферической формы, размеры которых изменяются в диапазоне 0.01–100 мкм. Предполагается, что все частицы имеют сферическую форму.

Для описания эволюции спектра частиц внутри замкнутого объема прямоугольной формы с неподвижной средой носителем $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0$ используется уравнение (1). Предполагается, что:

– коагуляция происходит в результате броуновского движения и гравитационного осаждения частиц:

$$I_1 = -f(r, \mathbf{x}, t) \int_0^\infty K(r, r') f(r', \mathbf{x}, t) dr', \quad I_2 = \frac{1}{2} \int_0^r K(r-r', r') f(r', \mathbf{x}, t) f(r-r', \mathbf{x}, t) dr',$$

где

$$K(r, r') = 4\pi(r+r')(D+D') + \frac{2gE\pi}{9\eta} (r+r')^2 |(\rho - \rho_{\text{air}})r^2 - (\rho' - \rho_{\text{air}})r'^2| t$$

ядро коагуляции;

– диффузия частиц пропорциональна коэффициенту броуновской диффузии $I_3 = \nabla \cdot [D_b \nabla f(r, \mathbf{x}, t)]$;

– гравитационное оседание частиц определяется законом Стокса

$$\mathbf{v}(r) = \frac{2gr^2(\rho - \rho_{\text{air}})}{9\eta_{\text{air}}};$$

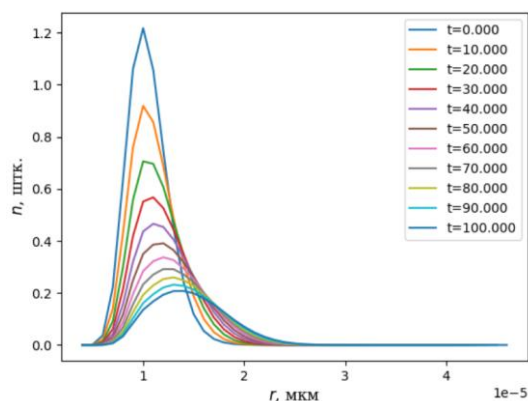
– гигроскопическое изменение размера описывается моделью, предложенной в работе [3], которая позволяющая учитывать долю нерастворенного вещества на динамику роста частицы. В начальный момент спектр частиц описывался логнормальным распределением.

3. Метод решения и результаты

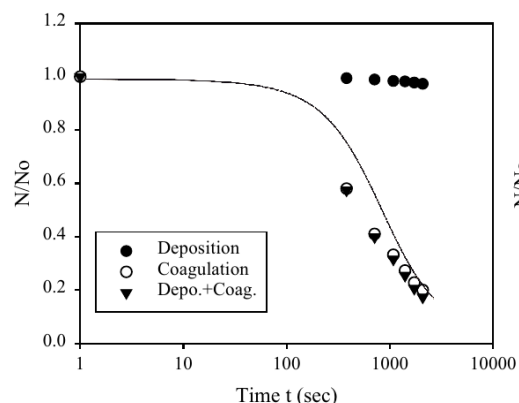
Уравнение эволюции функции распределения частиц по размерам (1) с учетом указанных закономерностей для I_1, I_2, I_3 представляет собой нелинейное интегродифференциальное уравнение. Для численного решения данного уравнения использовался секционный подход, который, не смотря на достаточно большие вычислительные затраты, позволяет достаточно точно описать каждый из механизмов, влияющих на изменения спектра частиц. Частицы, попадающие в одну секцию, описываются средним радиусом, имеют одинаковую скорость и степень растворенности. Также в расчете предполагалось, что на каждом временном шаг изменение спектра частиц происходит последовательно. Сначала совершают конвективный перенос и гравитационное оседание, затем происходит коагуляция и диффузия частиц, а завершает процесс изменение размера за счет растворения или кристаллизации частиц.

Численные расчеты проводились для пылевого аэрозоля частиц хлорида натрия при относительной влажности вблизи гигроскопической точки ($\varphi \in [74\%, 76\%]$), для различных концентраций аэрозоля и начальной растворенности частиц (сухие частицы, капли). На рисунке приведены результаты расчета изменения спектра частиц и относительной концентрации в различные моменты времени.

Адекватность предложенной модели обеспечивается согласованием численных результатов с имеющимися теоретическими и экспериментальными данными как для



(a)



(б)

Рисунок. Изменение формы спектра частиц в результате процессов коагуляции и гигроскопического роста (а) и сравнение расчетной относительной концентрации частиц с учетом гигроскопического роста (сплошная линия) и экспериментальных данных работы [4] для нерастворимых частиц (б)

модели жидкокапельных аэрозолей, т.е. без учета гигроскопического растворения, так и модели растворения частицы [3, 4], используемой в качестве модификации уравнения (1).

4. Выводы

Проведена оценка влияния гигроскопического изменения размера аэрозольных частиц на функцию распределения частиц по размерам. Установлено, что при влажности окружающего воздуха близкой к гигроскопической точке растворения и рост частиц имеют доминирующее значение при малых концентрациях аэрозоля. При повышении концентрации влияние гигроскопического изменения размера влияет на форму только на начальной стадии эволюции спектра частиц и практически не отражается на конечной форме кривой распределения.

Исследование выполнено при поддержке РФФИ (проект No 20-45-596020) и в рамках задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема No 121031700169-1).

Список литературы

1. Кудряшова О. Б., Антонникова А. А. Физико-математическая модель эволюции двухфазных аэрозолей при ультразвуковом воздействии // Вестник томского государственного университета. 2012. № 4 (20). С. 94–106.
2. Марчук, Г. И., Алоян А. Е., Арутюнян В. О., Ермаков А. Н. Динамика газовых примесей и аэрозолей в атмосфере при торфяных пожарах // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2013. №. 3. С. 85–100.
3. Кузнецова Ю. Л. Эволюция размера растворимой аэрозольной частицы во влажном воздухе // Вычислительная механика сплошных сред. 2022. Т. 15. Вып. 1. С. 31–44. DOI: 10.7242/1999-6691/2022.15.1.3
4. Park S. H., Kim H. O., Han Y. T., Kwon S. B., Lee K. W. Wall loss rate of polydispersed aerosols // Aerosol Science and Technology. 2001. Vol. 37. P. 710–717. DOI: 10.1080/02786820152546752

Применение тепловых карт для картирования кавитационной активности в сонохимическом реакторе

М. О. Кучинский^{a,b}, М. В. Козлов^a

^a Пермский государственный национальный исследовательский университет,
614990, Пермь, ул. Букирева, 15
email: kat6chinskiy@gmail.com

^b Институт механики сплошных сред УрО РАН,
614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1

На данный момент существует ряд методик, позволяющих исследовать различные физико-химические процессы, происходящие внутри сонохимического реактора. В данной работе описана методика картирования активности кавитационных событий в сонохимическом реакторе на основе модифицированного метода теста фольгой с применением тепловых карт. Благодаря своей относительной простоте данный метод в некоторых аспектах значительно превосходит другие, позволяя получать результаты в наглядной форме.

Ключевые слова: ультразвук; тест фольгой; тепловые карты

The use of thermal maps for mapping cavitation activity in a sonochemical reactor

М. О. Kuchinskiy^{a,b}, М. V. Kozlov^a

^a Perm State University, 15 Bukireva St., 614990, Perm
email: kat6chinskiy@gmail.com

^b Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS,
1 Akademika Koroleva St., 614013, Perm

At the moment, there are a number of techniques that allow us to study various physico-chemical processes occurring inside a sonochemical reactor. This paper describes a technique for mapping the activity of cavitation events in a photochemical reactor based on a modified foil test method with the use of thermal maps. Due to its relative simplicity, this method is significantly superior in some aspects to others, allowing to get results in a visual form.

Keywords: ultrasound; foil test; thermal maps

1. Введение

Применение теста фольгой является, несмотря на все особенности его применения [1, 2], стандартным способом визуализации и качественного анализа распределения интенсивности кавитационных событий в сонохимическом реакторе [3–5]. Обычно для теста используется фольга, натянутая на жесткую рамку, которую располагают в некоторой области реактора, а затем подвергают действию УЗ

ограниченного по времени, после чего визуально регистрируют повреждения, вызванные УЗ. Такая методика позволяет ответить на вопрос о том, работает ли вообще источник УЗ в данный момент, а также оценить степень кавитационной активности в некоторой плоскости сонохимического реактора [6]. Временная динамика повреждения поверхности фольги при этом не рассматривается, по-видимому, для максимального упрощения методики такого теста.

Тепловые карты, являясь наглядным способом представления данных для временной динамики всевозможных процессов [7], как показал обзор литературы, не применялись в такого рода исследованиях, несмотря на широкое их использование от бизнес-анализа до географических визуализаций [8, 9].

Настоящая статья предполагает использование тепловых карт для развития метода foil test в качестве временного визуализатора активности кавитационных событий при лабораторных исследованиях УЗ полей. Цель работы состоит в обработке методом тепловых карт данных, полученных с помощью модифицированного метода теста фольгой сонохимического реактора.

2. Описание экспериментальной установки и методики обработки данных

Экспериментальная установка (рис. 1) состояла из кюветы, имеющей форму параллелепипеда (аналогичная используемой в статьях [10, 11]) с внутренними размерами $103 \times 102 \times 190 \text{ мм}^3$, которая была изготовлена из акрилового стекла толщиной 3 мм. В нижней части установки располагался источник ультразвука мощностью $P = 36 \text{ Вт}$, частотой $\nu = 28 \text{ кГц}$.

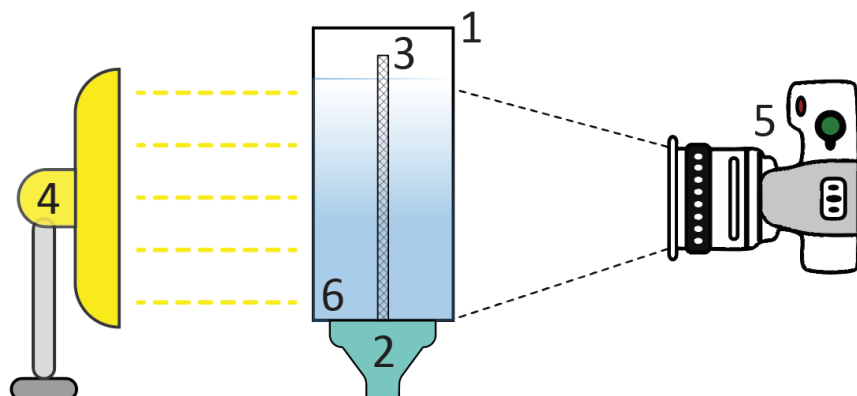


Рис. 1. Схема установки: 1) кювета $103 \times 102 \times 190 \text{ мм}^3$; 2) 28 кГц – источник ультразвука; 3) фольга толщиной 10 мкм; 4) источник света на основе IPS матрицы; 5) камера Canon d5400; 6) рабочая жидкость объемом 2 л

В качестве рабочей жидкости использовалась очищенная с помощью обратноосмотической системы водопроводная вода, общая минерализация которой $< 10 \text{ мг/л}$. Помимо этого, вода выдерживалась сутки в помещении, уровень содержания газа в этом случае соответствовал температуре ($T_{\text{ком}} = 22^\circ$). Объем исследуемой жидкости составлял 2 л, высота слоя жидкости над источником УЗ при этом составляла $h_{\text{воды}} = 177 \text{ мм}$. В экспериментах использовалась фольга толщиной 10 мкм. Рассматривалась область $90 \times 180 \text{ мм}^2$. В качестве источника контрольного света использовалась IPS матрица монитора.

Для регистрации областей разрушения фольги применялась цифровая камера Canon d5400 с объективом Nikon 50mm f/1.8D AF, расположенная на расстоянии

250 мм от центра кюветы. Съемка происходила со следующими настройками: ISO 100, выдержка $1/10$ с, f5. Эксперимент проводился в течение 5 минут. В ходе эксперимента получался набор из 150 фотографий, соответствующий одному срезу реактора. Первые два кадра соответствовали состоянию с отключенным УЗ, оставшиеся демонстрировали временную динамику разрушения фольги при УЗ воздействии (рис. 2).

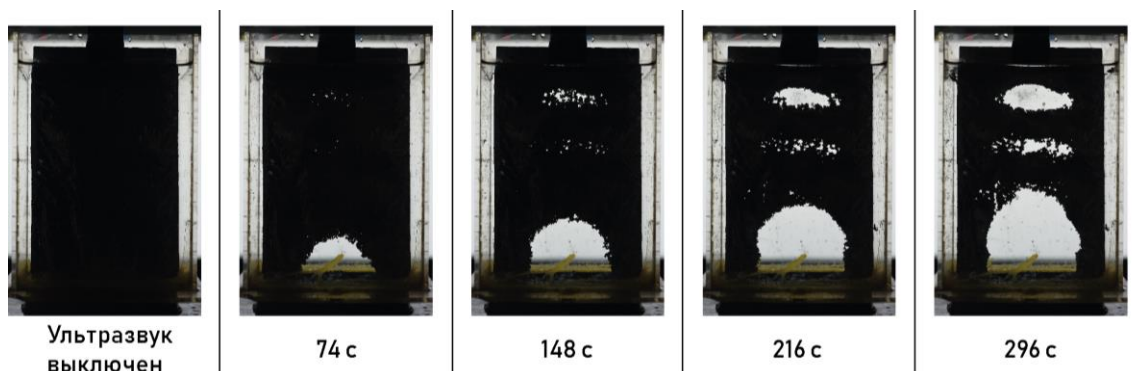


Рис. 2. Динамика разрушения фольги

Полученные описанным образом фотографии обрабатывались с помощью алгоритма на Python, определяющего границы разрушения фольги с последующей визуализацией на фотографии (рис. 3). Вначале программа загружает полученные фотографии, а затем приступает к их обработке, в результате которой получаются черно-белые снимки с четкими границами разрушения фольги. Для получения числовых значений в каждой точке на изображении необходимо из полученных фотографий получить двумерные матрицы и в дальнейшем применить операцию сложения матриц с помощью библиотеки NumPy. Таким образом, точка с большим числовым значением означает более раннее разрушение, чем точка с меньшим значением, а нулевое значение соответствует отсутствию разрушения фольги в данной точке. На следующем этапе обработки происходит присвоение цвета в каждой точке, где минимальному значению присваивается черный цвет, а максимальному красный цвет. В дальнейшем происходит построение итогового изображения активности кавитационных событий в кювете с применением библиотеки matplotlib и цветовой схемы Magma.

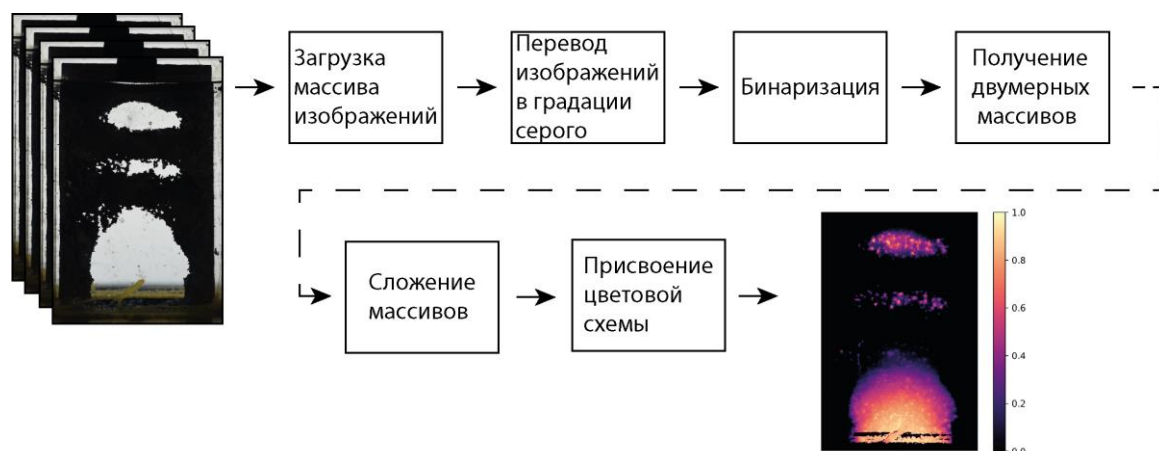


Рис. 3. Алгоритм визуализации трехмерного изображения активности кавитационных событий

3. Выводы

Разработан метод регистрации кавитационной активности на основе разрушения фольги (foil test). Визуализация с использованием тепловых карт позволила проследить за временной динамикой кавитационной активности в центральной области сонохимического реактора. Предложенный метод выгодно отличается от других методов оценки кавитационной активности относительной простотой реализации экспериментов, доступностью расходных материалов, наглядностью полученных результатов.

Исследование выполнено при финансовой поддержке из средств гранта Российского научного фонда (проект № 20-69-46066).

Список литературы

1. *Fuchs J.* Foil Test – Foil Variabilities. July, 2020 [Электронный ресурс]. URL: <https://techblog.ctgclean.com/2020/07/foil-test-foil-variabilities/> (дата обращения: 20.08.2022).
2. *Fuchs J.* Aluminum Foil Test for Ultrasonic Performance – Potential Problems. March, 2020 [Электронный ресурс]. URL: <https://techblog.ctgclean.com/2020/03/aluminum-foil-test-for-ultrasonic-performance-potential-problems/> . (дата обращения: 20.08.2022).
3. *Tangsopa W., Thongsri J.* Development of an industrial ultrasonic cleaning tank based on harmonic response analysis // *Ultrasonics*. 2019. Vol. 91. P. 68–76. DOI: 10.1016/j.ultras.2018.07.013
4. *Li F., Ge S., Qin S., Hao Q.* Simulation of ultrasonic cleaning and experimental study of the liquid level adjusting method // *Re-engineering Manufacturing for Sustainability*. Springer, 2013. P. 275–278. DOI: 10.1007/978-981-4451-48-2_45
5. *Avvaru B., Pandit A. B.* Experimental investigation of cavitation bubble dynamics under multi-frequency system // *Ultrasonics sonochemistry*. 2008. Vol. 15 (4). P. 578–589. DOI: 10.1016/j.ultsonch.2007.06.012
6. *Yuan B., Jiang Y., Zhu L.* Study on the processing methods of aluminum foil measurement signals for ultrasonic cleaning parameters // 2011 Second International Conference on Digital Manufacturing & Automation. Zhangjiajie, China, 2011. P. 1180–1183. DOI: 10.1109/ICDMA.2011.290.
7. *Yu C., He Z. C.* Analysing the spatial-temporal characteristics of bus travel demand using the heat map // *Journal of Transport Geography*. 2017. Vol. 58. P. 247–255. DOI: 10.1016/j.jtrangeo.2016.11.009
8. *Wilkinson L., Friendly M.* The history of the cluster heat map // *The American Statistician*. 2009. Vol. 63 (2). P. 179–184. DOI: 10.1198/tas.2009.0033
9. *Netek R., Pour T., Slezakova R.* Implementation of heat maps in geographical information system—exploratory study on traffic accident data // *Open Geosciences*. 2018. Vol. 10 (1). P. 367–384. DOI: 10.1515/geo-2018-0029
10. *Lyubimova T., Rybkin K., Fattalov O., Kuchinskiy M., Filippov L.* Experimental study of temporal dynamics of cavitation bubbles selectively attached to the solid surfaces of different hydrophobicity under the action of ultrasound // *Ultrasonics*. 2021. Vol. 117. 106516. DOI: 10.1016/j.ultras.2021.106516
11. *Kuchinskiy M. O., Lyubimova T. P., Rybkin K. A., Fattalov O. O., Klimenko L. S.* Experimental and numerical study of acoustic pressure distribution in a sonochemical reactor // *Journal of Physics: Conference Series*. 2021. Vol. 1809. 012025. DOI: 10.1088/1742-6596/1809/1/012025

Построение точного решения, описывающего течения в системе «жидкость-жидкость-газ» в горизонтальном канале

Е. В. Ласковец

Алтайский государственный университет, 656049, Барнаул, пр. Ленина, 61
email: katerezanova@mail.ru

В работе представлено точное решение уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска, являющееся обобщением известных решений Остроумова-Бириха. Данное решение позволяет моделировать трехслойные течения типа «жидкость-жидкость-газ» в горизонтальном канале с учетом испарения. Дополнительно в верхнем слое системы учитываются эффекты Соре и Дюфура, задан расход газа. Термокапиллярные границы раздела считаются недеформируемыми. Твердые стенки канала подвержены неоднородному нагреву. Представлены примеры трехслойных течений для системы «силиконовое масло-вода-воздух» в случае, когда на верхней стенке выполняется условие отсутствия потока пара. Рассмотрено влияние толщины нижнего слоя жидкости на характер течения.

Ключевые слова: трехслойная система; испарение; термокапиллярная граница

Construction of an exact solution describing the flow in the «liquid-liquid-gas» system in a horizontal channel

E. V. Laskovets

Altai State University, 61 Pr. Lenina, 656049, Barnaul
email: katerezanova@mail.ru

The paper presents the exact solution of the Navier-Stokes equations in the Boussinesq approximation, which is a generalization of the well-known solutions of Ostroumov-Birich. This solution makes it possible to simulate three-layer flows of the "liquid-liquid-gas" type in a horizontal channel, taking into account evaporation. Additionally, the Soret and Dufour effects are taken into account in the upper layer of the system, and the gas flow rate is set. Thermocapillary interfaces are considered non-deformable. The solid walls of the channel are subject to inhomogeneous heating. Examples of three-layer flows for the "silicone oil-water-air" system are presented in the case when the condition of no vapor flow is satisfied on the upper wall. The effect of the thickness of the lower liquid layer on the nature of the flow is considered.

Keywords: three-layer system; evaporation; thermocapillary interface

1. Введение

Интерес к математическому моделированию течений с границами раздела вызван бурным развитием наукоемких технологий, необходимостью создания новых материалов и появлением новых экспериментальных методов исследования конвективных течений жидкостей и газов (см., например, [1, 2]). Построение точных решений, описывающих конвективные течения с границами раздела, позволяет анализировать влияние различных параметров системы на топологию течения. В настоящее время построению точных решений посвящено достаточно большое количество работ [3–6]. Моделирование двухслойных течений жидкости и газа с учетом испарения на термокапиллярной границе раздела проводилось в [7–10]. Точное решение, описывающее трехслойное течение, приведено в [11].

В данной работе рассматриваются трехслойные течения двух несмешивающихся жидкостей и газа, содержащего пары жидкости среднего слоя, в горизонтальном канале с твердыми непроницаемыми стенками. Предполагается, что термокапиллярные границы раздела жидкость-жидкость и жидкость-газ недеформируемы. В верхнем слое системы учитываются эффекты Соре и Дюфура. Математическое моделирование осуществляется на основе точного решения специального вида уравнений Навье-Стокса в приближении Обербека-Буссинеска. Процесс массопереноса на границе жидкость-газ моделируется с помощью граничных условий. С помощью полученного точного решения изучается влияние параметров задачи на течения в системе «силиконовое масло-вода-воздух».

2. Постановка задачи о трехслойном течении в горизонтальном канале с испарением

Рассмотрим трехслойную систему типа «жидкость-жидкость-газ» в бесконечном горизонтальном канале с твердыми непроницаемыми стенками. Жидкости нижнего и среднего слоев не смешиваются, а средняя жидкость испаряется в газовый слой. Система координат введена следующим образом: ось Oy параллельна вектору силы тяжести и направлена против него. Ось Ox параллельна стенкам канала и совпадает с границей раздела жидкость-жидкость. Моделирование течений в каждом из слоев осуществляется на основе уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска. В стационарном случае система записывается следующим образом:

$$uu_x + vu_y = -(1/\rho)p_x + \nu \Delta u, \quad (1)$$

$$uv_x + vv_y = -(1/\rho)p_y + \nu \Delta v + g(\beta T + \gamma C), \quad (2)$$

$$u_x + v_y = 0, \quad (3)$$

$$uT_x + vT_y = \chi(\Delta T + \delta \Delta C), \quad (4)$$

$$uC_x + vC_y = D(\Delta C + \alpha \Delta T) \quad (5)$$

с использованием традиционных обозначений. Параметры α и δ характеризуют эффекты Соре и Дюфура, соответственно. Последние слагаемые в уравнениях (2) и (4) и уравнение (5) используются только в случае моделирования газопарового слоя, поскольку жидкости нижнего и среднего слоев считаются однокомпонентными.

2.1. Построение точного решения

Точное решение системы (1) – (5) строится в специальном виде [3, 4]:

$$u_i = u_i(y), \quad v_i = 0, \quad T_i = (a_1^i + a_2^i y)x + \vartheta_i(y), \quad C_i = (b_1 + b_2 y)x + \varphi(y). \quad (6)$$

Тогда функции продольной скорости, температуры, концентрации пара и давления принимают следующую форму:

$$u_i = L_2^i \frac{y^4}{24} + L_1^i \frac{y^3}{6} + \frac{y^2}{2} c_1^i + y c_2^i + c_3^i,$$

$$T_i = (a_1^i + a_2^i y)x + N_6^i \frac{y^7}{1008} + N_5^i \frac{y^6}{720} + N_4^i \frac{y^5}{120} + N_3^i \frac{y^4}{24} + N_2^i \frac{y^3}{6} + N_1^i \frac{y^2}{2} + y c_4^i + c_5^i, \quad (5)$$

$$C = (b_1 + b_2 y)x + S_6^i \frac{y^7}{1008} + S_5^i \frac{y^6}{720} + S_4^i \frac{y^5}{120} + S_3^i \frac{y^4}{24} + S_2^i \frac{y^3}{6} + S_1^i \frac{y^2}{2} + y c_6 + c_7,$$

$$C = (b_1 + b_2 y)x + S_6^i \frac{y^7}{1008} + S_5^i \frac{y^6}{720} + S_4^i \frac{y^5}{120} + S_3^i \frac{y^4}{24} + S_2^i \frac{y^3}{6} + S_1^i \frac{y^2}{2} + y c_6 + c_7,$$

$$p_i = \rho_i v_i (d_1^i \frac{y^2}{2} + d_2^i y + c_1^i)x + k_7^i \frac{y^8}{8} + k_6^i \frac{y^7}{7} + k_5^i \frac{y^6}{6} + k_4^i \frac{y^5}{5} + k_3^i \frac{y^4}{4} + k_2^i \frac{y^3}{3} + k_1^i \frac{y^2}{2} + k_0^i y + c_8^i.$$

Здесь индекс i определяет принадлежность функций соответствующему слою: $i = 1$ – нижний, $i = 2$ – средний, $i = 3$ – верхний слой системы. Коэффициенты L_j^i , N_j^i , d_s^i , k_m^i , S_n^i зависят от физико-химических параметров системы, c_j^i – константы интегрирования, возникающие в процессе решения системы уравнений (1) – (5).

2.2. Граничные условия задачи

Одним из важных вопросов при изучении задач о течениях в системах с двумя и более средами является формулировка условий на границах раздела. В рассматриваемой задаче на границах жидкость-жидкость и жидкость-газ полагаются выполненными условия непрерывности скоростей и температур, кинематические и динамические условия и условие переноса тепла. Отметим, что при формулировке последнего условия на границе жидкости и газопаровой смеси должен приниматься во внимание эффект диффузионной теплопроводности. Дополнительно на границе жидкость-газ выполняются условие баланса масс с учетом эффекта термодиффузии и соотношение, определяющее концентрацию насыщенного пара (следствие уравнений Менделеева-Клапейрона и Клапейрона-Клаузиуса) [8, 10].

Твердые непроницаемые стенки канала подвержены неоднородному нагреву: температура распределена линейно относительно продольной координаты. Функции продольной скорости удовлетворяют условиям прилипания. Концентрация пара на верхней стенке может удовлетворять одному из двух условий: полной абсорбции пара или отсутствию потока пара. В верхнем слое системы задан расход газа.

С помощью перечисленных выше условий определяются неизвестные константы интегрирования и масса испаряющейся с границы раздела жидкость-газ жидкости. Также с помощью граничных условий устанавливается взаимосвязь продольных градиентов температуры на стенках канала и границе раздела жидкость-жидкость: только один из них может быть задан произвольным образом. Два других градиента температуры должны быть выражены через него.

3. Примеры течений в системе «силиконовое масло – вода – воздух»

Рассмотрим трехслойное течение на примере системы «силиконовое масло-вода-воздух». Физико-химические параметры рабочих сред приведены в работах [2, 11].

Физические параметры задачи имеют следующие значения: продольный градиент температуры на нижней стенке канала равен -1 К/м, расход газа в верхнем слое полагается равным $3.6 \cdot 10^{-4}$ кг/(м с). В качестве условия для концентрации пара на верхней стенке выбрано условие отсутствия потока пара.

Рассмотрим влияние толщины нижнего жидкого слоя на характер течения. Рисунок 1 иллюстрирует структуру течения в канале в случае, когда толщины всех слоев системы полагались равными 3 мм. Профиль скорости здесь носит параболический характер. Основными механизмами, формирующими подобные течения, являются термокапиллярные силы и касательные напряжения. Охлаждение границы раздела жидкость-газ вызвана испарением жидкости среднего слоя. Масса испаряющейся с границы раздела жидкости в данном случае равна $2.44 \cdot 10^{-4}$ кг/(м² с).

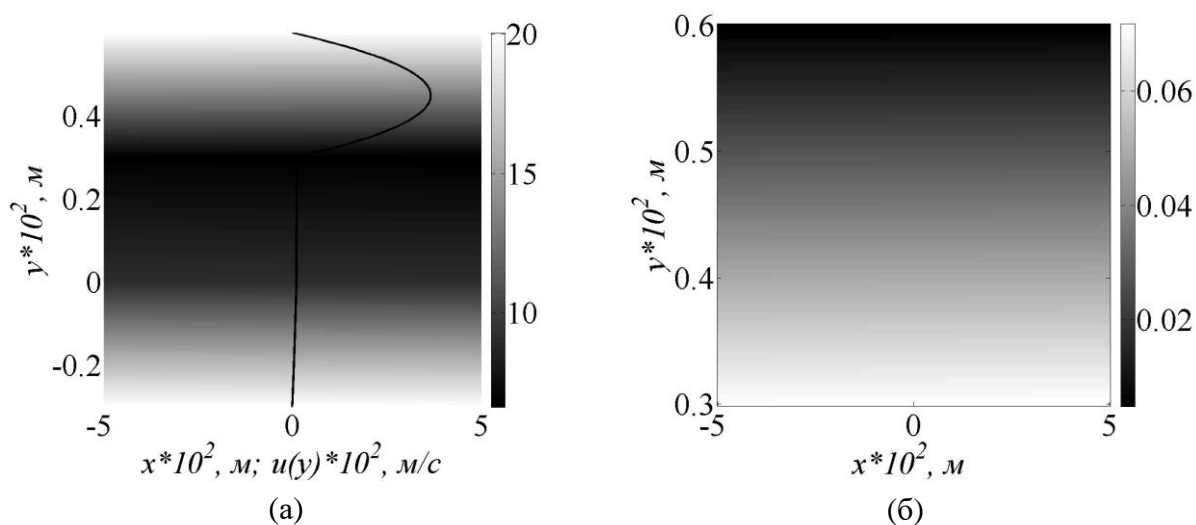


Рис. 1. Профиль скорости, распределение температуры (а) и концентрации пара (б) в системе «силиконовое масло-вода-воздух» при $h_1 = 3$ мм

В случае, когда толщина нижнего слоя h_1 полагается равной 1 мм, прогрев жидкостей существенно усиливается (см. рисунок 2а). Это приводит к несколько более интенсивному испарению ($M = 2.6 \cdot 10^{-4}$ кг/(м² с)) и росту значений функции концентрации пара (рисунок 2б). Профиль скорости при этом изменяется слабо.

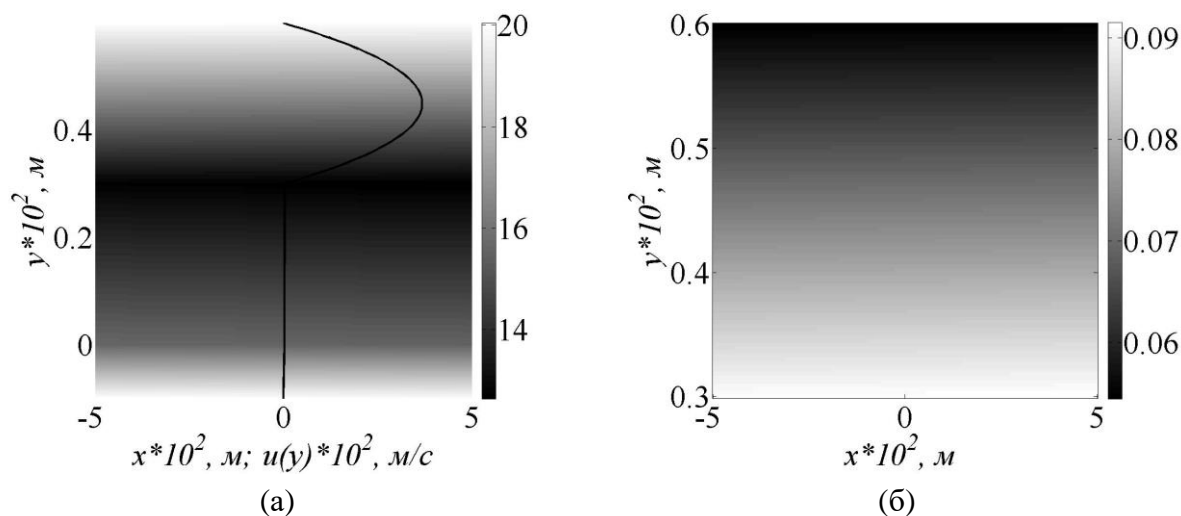


Рис. 2. Профиль скорости, распределение температуры (а) и концентрации пара (б) в системе «силиконовое масло – вода – воздух» при $h_1 = 1$ мм

Таким образом, построенные точные решения позволяют выявлять влияние параметров задачи на характер течения и интенсивность массопереноса в системе.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ по теме «Современные методы гидродинамики для задач природопользования, промышленных систем и полярной механики» (номер темы: FZMW-2020-0008).

Список литературы

1. Люлин Ю. В., Феоктистов Д. В., Афанасьев И. А., Чачило Е. С., Кабов О. А., Кузнецов Г. В. Измерение скорости испарения с локальной поверхности слоя жидкости под действием потока газа // Письма в журнал технической физики. 2015. Т. 41. Вып. 14. С. 1–7.
2. Bekezhanova V. B., Goncharova O. N., Ivanova N. A., Klyuev D. S. Instability of a two-layer system with deformable interface under laser beam heating // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. 2019. Vol. 12. N. 5. P. 543–550. DOI: 10.17516/1997-1397-2019-12-5-543-550
3. Остроумов Г. А. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. Москва-Ленинград: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1952. 256 с.
4. Бирих Р. В. О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // Прикладная математика и техническая физика. 1966. Вып. 3. С. 69–72.
5. Stepanova I. V. Constraction and analysis of exact solution of Oberbeck–Boussinesque equations // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. 2019. Vol. 12. N. 5. P. 590–597. DOI: 10.17516/1997-1397-2019-12-5-590-597
6. Андреев В. К., Собачкина Н. Л. Движение бинарной смеси в плоских и цилиндрических областях. Красноярск: СФУ, 2012. 187 с.
7. Шлиомис М. И., Якушин В. И. Конвекция в двухслойной бинарной системе с испарением // Ученые записки Пермского госуниверситета, серия Гидродинамика: сборник научных трудов. 1972. № 4. С. 129–140.
8. Бекежанова В. Б., Гончарова О. Н., Резанова Е. В., Шефер И. А. Устойчивость двухслойных течений жидкости с испарением на границе раздела // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2017. № 2. С. 23–35. DOI: 10.7868/S0568528117020062
9. Bekezhanova V. B., Goncharova O. N., Shefer I. A. Analysis of an exact solution of problem of the evaporative convection (Rewiew). Part I. Plane case // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. 2018. Vol. 11. N. 2. P. 178–190. DOI: 10.17516/1997-1397-2018-11-2-178-190.
10. Гончарова О. Н., Резанова Е. В. Пример точного решения стационарной задачи о двухслойных течениях с испарением на границе раздела // Прикладная математика и техническая физика. 2014. Т. 55. № 2. С. 68–79.
11. Rezanova E. V. Construction of exact solution describing three-layer flows with evaporation in a horizontal channel // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. 2021. Vol. 14. N. 1. P. 57–68. DOI: <https://doi.org/10.17516/1997-1397-2021-14-1-57-68>

Опыт практической реализации Лагранжевого подхода к измерению скоростей течений в поверхностных водных объектах с использованием БПЛА

А. П. Лепихин^а, А. И. Лучников^а, П. Г. Фрик^б, Ю. С. Ляхин^а

^а Горный институт УрО РАН, 614007, Пермь, ул. Сибирская, 78а

^б Институт механики сплошных сред УрО РАН,
614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1

Рассмотрена технология измерения скоростей течений в малых поверхностных водных объектах на основе Лагранжевого принципа с использованием БПЛА. Отработка технологии была проведена на конкретном водном объекте, играющем важную роль в обеспечении технической водой промышленных предприятий г. Березники – Верхне-Зырянском водохранилище. Показано существенное различие в характере поверхностных скоростей течения и на глубине 2 м.

Ключевые слова: малые водоемы; беспилотные летательные аппараты; измерения скоростей течений

Experience of practical implementation of the Lagrangian approach to measuring current velocities in surface water bodies using UAVs

A. P. Lepikhin^a, A. I. Luchnikov^a, P. G. Frick^b, Yu. S. Lyakhin^a

^a Mining Institute UB RAS, 78a Siberian St., 614007, Perm

^b Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS,
1 Akademika Koroleva St., 614013, Perm

The technology of measuring current velocities in small surface water bodies based on the Lagrangian principle using UAVs is considered. The technology was tested at a specific water facility that plays an important role in providing industrial enterprises of Berezniki with industrial water – the Verkhne-Zyryansk reservoir. A significant difference in the nature of the surface flow velocities and at a depth of 2 m is shown.

Keywords: small reservoirs; unmanned aerial vehicles; measurements of current velocities

1. Постановка задачи и методы

Как известно, существует два различных подхода к описанию гидродинамических процессов: Лагранжевый, когда за основу принимается описание траектории перемещения отдельной частицы жидкости и Эйлера, при котором рассматривается изменение характеристик потока в некоторой фиксированной точке. Хотя существует

однозначная связь между параметрами потока, полученными при использовании этих двух подходов, и они описываются одними и теми же уравнениями гидродинамики, тем не менее имеются принципиальные различия как в получении исходных данных, так и их использовании при решении различных практических задач. При этом возникает вопрос: какой подход более эффективен при их решении? При Эйлеровом подходе датчик размещается в определенной фиксируемой точке потока, и снимаются показания, характеризующие значения измеряемого параметра в определенные моменты времени, в тоже время при Лагранжевом подходе отслеживается перемещение точечного маркера в течении определенного времени. При реализации данных подходов используются не только принципиально различные технологии, но и сами результаты измерений имеют принципиально отличный вид. Совершенно очевидно, что при выполнении различных балансовых оценок значительно более удобно использование Эйлерового подхода, в тоже время при исследовании пространственной структуры течений более эффективен Лагранжевый подход. В реках, где основной задачей гидрометрических измерений является оценка расходов воды, проходящих через определенные поперечные сечения водотока более удобен Эйлеровый подход, и на его реализацию были направлены основные усилия речной гидрометрии от простейших гидрометрических вертушек до современных измерительных комплексов, в том числе в виде различных профилографов [1]. Хотя современные профилографы [1] проводят непрерывные измерения по всему поперечному сечению потока, там так же реализуется принцип Эйлера подхода. Данные подходы становятся тождественными, если измерения проводятся непрерывно в неограниченном количестве точек в пространстве при решении или при использовании неограниченно большого количества маркеров. Так как при решении практических задач нет возможности использования очень большого количества датчиков или маркеров, то возникает задача нахождения эффективных компромиссных решений. Современные технологии открывают принципиально новые возможности по совершенствованию этих подходов. Хотя в речной гидрологии в силу указанных выше причин значительно большее внимание уделяется Эйлеровому подходу, Лагранжевый подход, обеспечивающий получение информации о пространственном распределении структуры течений, может играть принципиально важную роль в обеспечении условий устойчивого водопользования. Так, например, по замерам скорости потока в нескольких дискретных точках можно построить общую схему течения в масштабах всего водного объекта. Естественно гидродинамические модели в 2D, 3D приближении могут обеспечить такие схемы течений, однако они сами нуждаются в эффективной калибровке, валидации, верификации. Самое сложное, самое основное в Лагранжевой технологии эффективная фиксация координат маркеров с требуемой частотой измерений [1, 2]. Традиционные технологии на основе теодолитов, фото- и видеокамер, кроме сложности, громоздкости реализации не позволяют фиксировать положения маркеров с требуемой высокой точностью. В настоящее время современные технологии, в частности, с использованием БПЛА, позволяют проводить такие оценки с требуемой надежностью. К сожалению, они в настоящее время не получили должного развития. Ранее технологии на основе использования БПЛА нами успешно использовались при решении задач динамики береговой полосы [3]. Летом 2022 г. была предпринята попытка отработки технологии оценки скорости течения на основе Лагранжевого подхода с использованием БПЛА на примере конкретного водного объекта - Верхне-Зырянского водохранилища.

2. Объект исследования

Верхне-Зырянское водохранилище (рис. 1) расположено в долине р. Зырянка, образованной в результате слияния р. Извер и р. Легчим. Бассейн реки расположен на западных предгорьях Уральского хребта в границах Пермского края. Длина реки – 53 км.

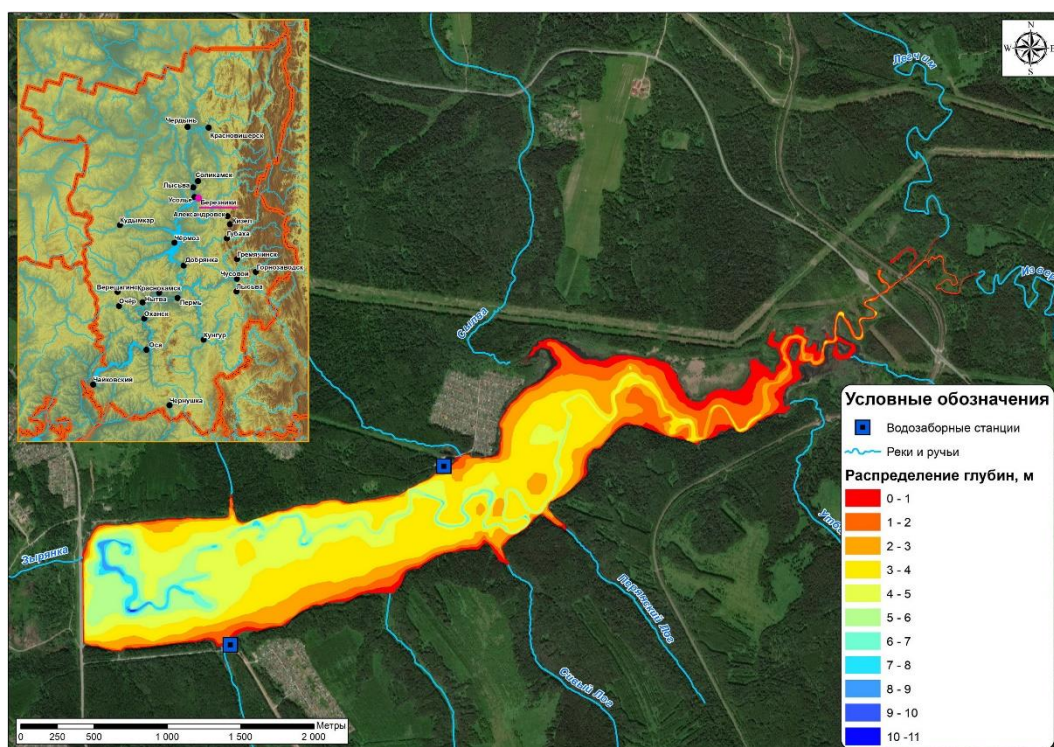


Рис. 1. Картосхема распределения глубин по акватории Верхне-Зырянского водохранилища

Площадь водосбора в створе плотины составляет 251 км^2 . Среднегодовой расход воды – $2.42 \text{ м}^3/\text{с}$, средний многолетний объем стока $\sim 75 \text{ млн. м}^3$. Река Зырянка – левобережный приток р. Камы, впадающий в нее на 939 км от устья (в 196 км выше Камского гидроузла) у г. Березники.

Верхне-Зырянское водохранилище образовано низконапорной плотиной, водосбросом (водосливом с широким порогом) и является водохранилищем сезонного регулирования стока. Введено в постоянную эксплуатацию в 1969 году [4].

В настоящее время основным назначением Верхне-Зырянского водохранилища является промышленное водоснабжение предприятий г. Березники (БКПРУ-2 и БКПРУ-4) и рекреация. Суммарный объем забора воды в 2020 году по фактическим данным составил около 6.3 млн. м^3 .

Характерной особенностью данного водного объекта является наличие существенной вертикальной неоднородности водных масс. Наличие вертикальной стратификации водных масс данного водоема существенно затрудняет обеспечение устойчивого технического водоснабжения из водоема [5].

В целом, рассматриваемый водный объект Верхне-Зырянское водохранилище характеризуется следующими параметрами: «характерная глубина» $h \sim 5 \text{ м}$; толщина верхнего «опресненного» слоя $h_0 \sim 3 \text{ м}$; ширина $L \sim 1000 \text{ м}$; $\Delta\rho/\rho$ – относительная разница плотности верхнего и нижнего слоев водных масс $\sim 10^{-3}$.

В период проведения натурного эксперимента 04.08.2022 г. расход воды в р. Зырянка и гидрологический режим были достаточно близки к многолетним значениям с характерным расходом притока $\sim 2 \text{ м}^3/\text{с}$. Также отметим, что длительное отсутствие атмосферных осадков, устойчивая летняя межень и постоянное положение порога водослива на плотине являются положительными факторами формирования устойчивых перемещений водных масс в Верхне-Зырянское водохранилище.

3. Технология проведения эксперимента

Натурный эксперимент по оценке коэффициентов горизонтальной дисперсии был проведен 4 августа 2022 г. Для решения поставленной задачи, на основе использования БПЛА, было применено следующее оборудование и материалы (рис. 2):

- квадрокоптер DJI Phantom 4 Pro (2 комплекта);
- квадрокоптер AUTELEVO II (1 комплект);
- портативная метеостанция Kestrel 4500;
- поплавки (16 шт.) из них 12 поверхностных и 4 заглубленных с расположением паруса на глубине 2 метра;
- контрольные буйки (8 шт);
- лодка Stingray с двигателем Yamaha.



Рис. 2. Используемое оборудование и материалы при выполнении полевых исследований

Процесс подготовки и выполнения эксперимента состоял из нескольких взаимосвязанных этапов:

1. установка 8 «контрольных» буйков на акватории Верхне-Зырянского водохранилища. Буйки выполнены из экструзионного пенополистирола повышенной плотности в виде планшетов ярко-желтого цвета, размером 0.60x0.60 м. При установке на акватории планшеты якорились за счет веревок и грузов по ~10 кг;
2. установка портативной метеостанции и включение автоматической записи метеопараметров с интервалом 1 мин;
3. подготовка и настройка БПЛА. Взлет, позиционирование и зависание квадрокоптера над центром акватории в месте спуска поплавков. Режим интервальной съемки 1 кадр через 60 сек. Угол съемки – 90° (в надира);
4. спуск поплавков на акваторию с лодки, отметим, что перемещение лодки к берегу после спуска поплавков осуществлялось плавно, на веслах, чтобы минимизировать воздействие на поверхностный слой водной массы. В качестве поплавков были

использованы планшеты диаметром ~ 0.6 м, выполненные из OSB-плиты толщиной 6 мм, в форме 8-ми угольников, окрашенных в различные контрастные цвета (18 шт.).

Непосредственное начало эксперимента (запуск поплавков) осуществлено в 09:46 по местному времени. Каждые 18–20 минут в непосредственной близости к снимающему квадрокоптеру на такую же высоту выводился второй квадрокоптер. Выполнялось позиционирование камеры и перевод в режим интервальной съемки. Только после этого, первый квадрокоптер возвращался на точку взлета для замены аккумуляторной батареи. Запасные аккумуляторы и их перезарядка в полевых условиях позволили выполнять непрерывную интервальную съемку до 12:46 ч, что составило ровно 3 часа. Далее имеется временной разрыв в наблюдениях, крайние положения поплавков зафиксированы в 13:36 ч. Общая длительность эксперимента составила ~ 4 часа.

Основные параметры метеорологических условий получены при помощи автоматической портативной метеостанция Kestrel, установленной непосредственно на б «контрольном» буйке, на треноге на высоте 1,0 м от водной поверхности. Необходимо отметить, что запись метеоусловий на акватории водохранилища выполнялась с 08:30 (общее время ~ 5.5 часов). На рис. 3 представлены графики изменения скорости и направления ветра на высоте 1 метр от водной поверхности.

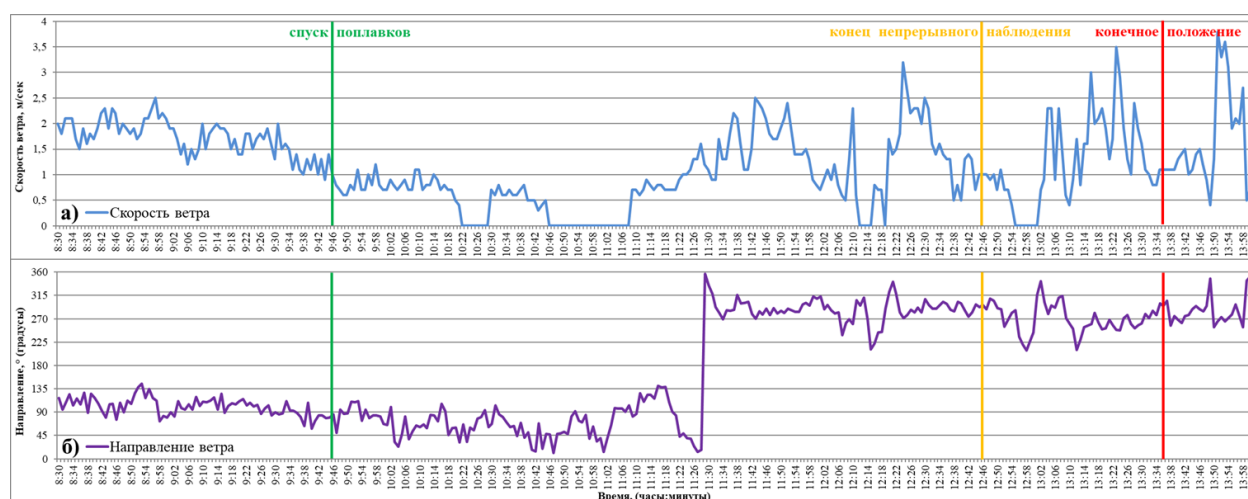


Рис. 3. Графики изменения скорости (а) и направления ветра (б) в период проведения эксперимента

Как следует из рис. 3, во время проведения эксперимента до 11:26 наблюдался весьма слабый ветер (менее 1.2 м/сек) преимущественно восточного и северо-восточного направлений (71° – осредненное направление ветра за период) периодически переходящий в штиль. После, в период с 11:26 до 11:34 направление ветра резко поменялось на западное и северо-западное (287° – осредненное направление ветра за период), при этом, скорости ветра в целом возросли, превышая в отдельные моменты времени 3 м/сек.

Обработка полученной информации. На первоначальном этапе каждый снимок был обработан в программной среде ArcMap. В частности, каждая фотография была точно переориентирована по сторонам света и масштабирована над акваторией за счет контрольных буйков и береговой линии.

Далее была проведена оцифровка местоположения каждого поплавка со всех снимков в единой системе координат (UTM 40N). Результаты оцифровки представлены на рис. 4 в виде картосхемы перемещения поверхностных и заглубленных поплавков по

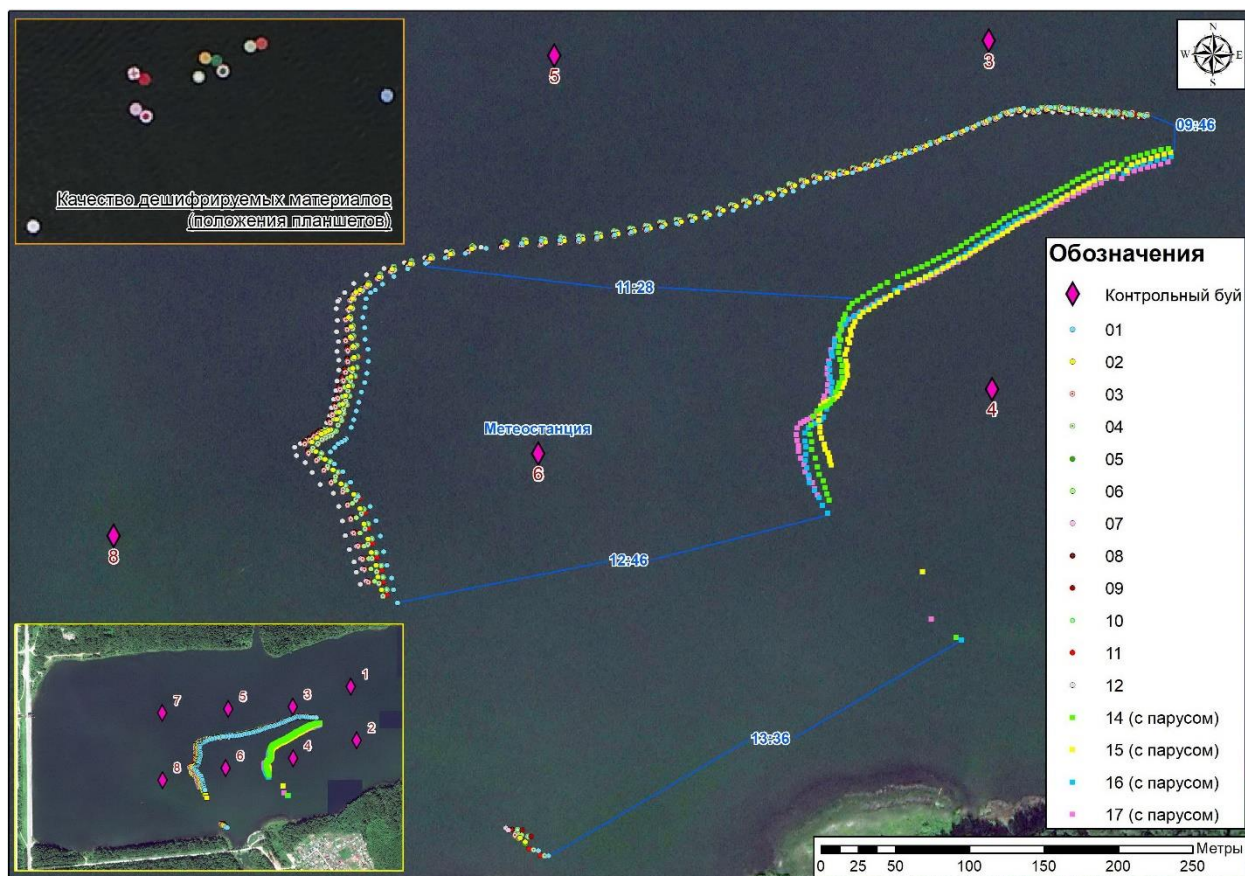


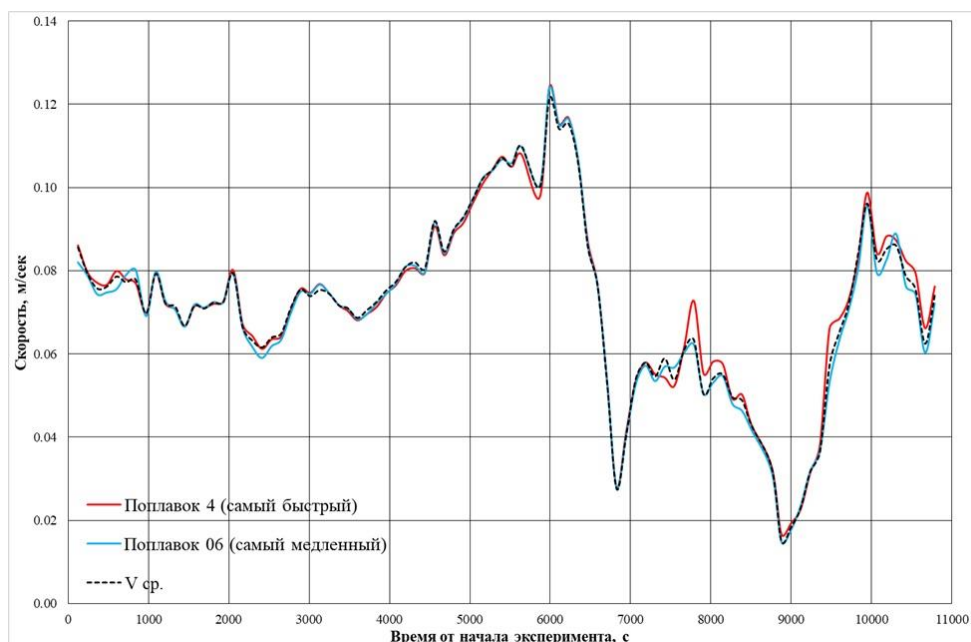
Рис. 4. Картосхема изменения положения поверхностных и заглубленных поплавков по акватории Верхне-Зырянского водохранилища за время проведения эксперимента

акватории Верхне-Зырянского водохранилища. Для оцифрованных данных поплавков вычислены плановые координаты, которые в дальнейшем были использованы при расчетах абсолютных скоростей перемещения.

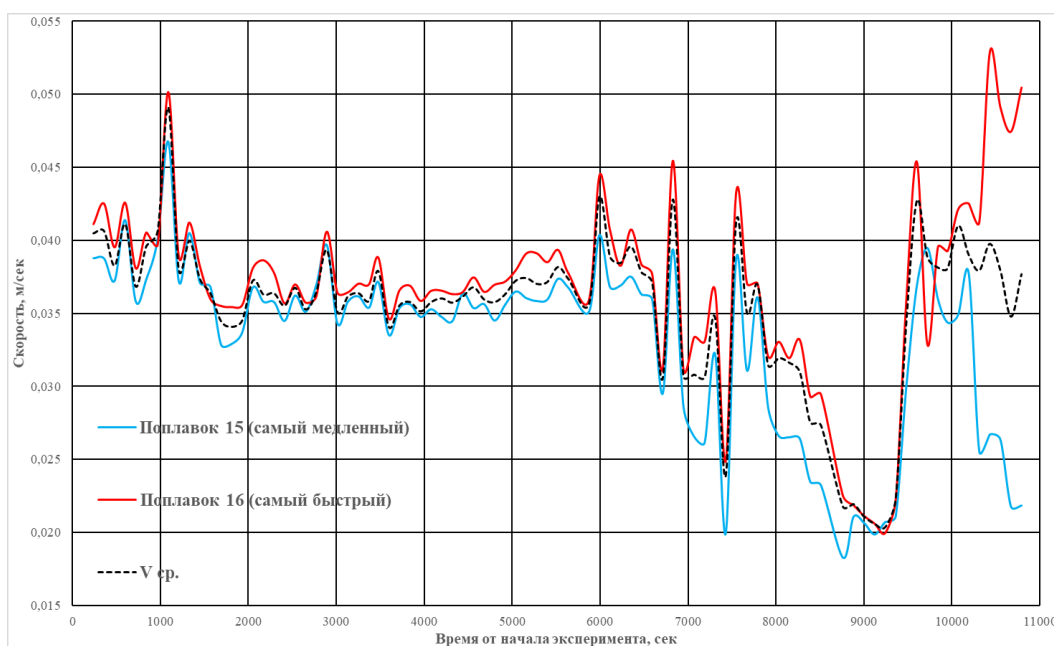
4. Обсуждение результатов

Используемые технологии с применением БПЛА позволяют проводить оцифровку маршрутов (координаты) перемещения каждого поплавка в фиксируемые моменты времени с шагом несколько секунд и абсолютной погрешностью определения местоположения менее 0.1 м. Это значимо меньше размера самого поплавка. На основе полученных координат перемещающихся поплавков в фиксируемые моменты времени рассчитывались абсолютные скорости перемещения как поверхностных, так и приглубленных поплавков, характеризующих течения на глубине 2 м. При этом для большей информативности были рассчитаны как медианные значения, так и скорости перемещения как наиболее быстрого, так и наиболее медленного поплавков.

Результаты выполненных оценок представлены на рис. 5а, 5б. Как следует из рис. 5а и 5б скорости перемещения поверхностных поплавков более чем 2 раза выше, относительно заглубленных. При этом, все 12 поверхностных поплавков характеризуются очень близкими скоростями перемещения. Различия в скорости перемещения заглублённых поплавков более существенны, особенно в конце эксперимента.



(а)



(б)

Рис. 5. Динамика перемещения поверхностных поплавков (а) и заглубленных поплавков (б) во время эксперимента

Как отмечается в [6] оценка скорости ветрового течения должна проводиться по модели Экмана $V \sim K_{\text{вет}} \cdot W / \sqrt{\sin \varphi}$, где $K_{\text{вет}}$ – ветровой коэффициент, определяемый в общем случае скоростью ветра, φ – широта местности. Согласно эмпирическим оценкам [6], в общем случае коэффициент $K_{\text{вет}}$ для малых скоростей ветра значительно больше, чем для больших. Так при $W \sim 1 - 2$ м/сек он по эмпирическим данным [6] составляет ~ 0.055 , а при скорости ветра 7 м/с – снижается до 0.01. Для широты г. Березники $1/\sqrt{\sin(\psi)} = 1.075$. В тоже время согласно [7] по многочисленным эмпирическим данным данный коэффициент может изменяться в очень широких интервалах.

В нашем случае, если принять среднюю скорость ветра во время проведения эксперимента равной ~ 1.5 м/с (рис. 3), среднюю скорость перемещения поверхностных поплавков ~ 0.07 м/с, то в этом случае ветровой коэффициент течения $K_{\text{вет}} = V_{\text{теч}} / V_{\text{вет}}$ для поверхностных поплавков составит $K_{\text{вет}} \sim 0.046$.

5. Заключение

На конкретном водном объекте, играющем важную роль в обеспечении устойчивого технического водоснабжения г. Березников, Верхне-Зырянском водохранилище рассмотрена технология оценки скорости течения на основе Лагранжевого подхода с использованием БПЛА. Одновременно проводилась оценка как поверхностных скоростей течений, так и по глубине 2 м. Осредненный за весь период проведения эксперимента ветровой коэффициент составил 0.046 – для поверхностных поплавков, а для заглубленных на 2 м – 0.023. В ходе проведения эксперимента направление ветра резко поменялось на $\sim 144^\circ$, в тоже время траектория перемещения поплавков сместилась на $\sim 90^\circ$.

В целом данная новая технология измерения скоростей течения в небольших водных объектах открывает новые перспективы в обеспечении задач устойчивого водопользования.

Список литературы

1. Лаврова О. Ю., Соловьев Д. М., Строчков А. Я., Назирова К. Р., Краюшкин Е. В., Жук Е. В. Использование мини-дрифтеров для проведения подспутниковых измерений параметров прибрежных течений // Исследование Земли из космоса. 2019. № 5. С. 36–49. DOI: 10.31857/S0205-96142019536-49
2. Мотыжев С. В., Лунев Е. Г., Толстошеев А. П. Развитие дрифтерных технологий и их внедрение в практику океанографических наблюдений в Черном море и Мировом океане // Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа. 2011. Вып. 24. С. 259–273.
3. Лучников А. И., Ляхин Ю. С., Лепихин А. П. Опыт применения беспилотных летательных аппаратов для оценки состояния берегов поверхностных водных объектов // Водное хозяйство России. 2018. №1. С. 37–46. DOI: 10.35567/1999-4508-2018-1-3
4. Правила использования водных ресурсов Верхне-Зырянского и Нижне-Зырянского водохранилищ. Екатеринбург. ФГУП «РосНИИВХ», 2021. Этап 3. 75 с.
5. Lyubimova T., Lepikhin A., Parshakova Y., Bogomolov A., Lyakhin Y., Tiunov A. Peculiarities of hydrodynamics of small surface water bodies in zones of active technogenesis (on the example of the Verkhne-Zyryansk reservoir, Russia) // Water. 2021. Vol. 13 (12). 1638. DOI: 10.3390/w13121638
6. Богословский Б. Б. Волны, течения и водные массы водоемов (Конспект лекций ЛГМИ). Изд. ЛПИ, 1980. 56 с.
7. Филатов Н. Н. Динамика озер. Л.: Гидрометеиздат, 1983. 166 с.

Исследование влияния добавок наночастиц на течения буровых растворов и транспорт шлама в кольцевых каналах

Е. И. Лысакова^a, А. В. Минаков^{a,b}

^a Сибирский федеральный университет, 660041, Красноярск, пр. Свободный, 79
email: mihienkova_evgeniya@mail.ru

^b Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН,
630090, Новосибирск, пр. Академика Лаврентьева, 1
email: tov-andrey@yandex.ru

Проведено расчетно-экспериментальное исследование влияния добавок наночастиц оксидов кремния и алюминия на характеристики транспортировки шлама из ствола скважины. В качестве бурового раствора использовали водный раствор бентонита с концентрацией 5 мас.%. Концентрация наночастиц в растворах варьировалась от 0.25 до 2 мас.%, а их размер – от 5 до 50 нм. Показано, что добавка наночастиц в буровые растворы приводит к значительному изменению их реологических свойств уже при небольших концентрациях, а также к увеличению транспортной характеристики бурового шлама до 3 раз.

Ключевые слова: буровой раствор; реология; наночастицы; транспорт шлама

Investigation of the effect of nanoparticle additives on drilling fluid flows and cuttings transport in annular channels

E. I. Lysakova^a, A. V. Minakov^{a,b}

^a Siberian Federal University, 79 Svobodny Pr., 660041, Krasnoyarsk
email: mihienkova_evgeniya@mail.ru

^b Kutateladze Institute of Thermophysics SB RAS,
1 Akademika Lavrentieva Ave., 630090, Novosibirsk
email: tov-andrey@yandex.ru

A computational and experimental study of the effect of additives of nanoparticles of silicon and aluminum oxides on the characteristics of cutting transport from the borehole was carried out. An aqueous solution of bentonite with a concentration of 5 wt.% was used as a drilling fluid. The concentration of nanoparticles in solutions varied from 0.25 to 2 wt. %, and their size is from 5 to 50 nm. It has been shown that the addition of nanoparticles to drilling fluids leads to a significant change in their rheological properties already at low concentrations, as well as to an increase in the transport characteristics of drilling cuttings up to 3 times.

Keywords: drilling fluid; rheology; nanoparticles; cutting transport

1. Введение

Необычные свойства наночастиц делают нестандартными и свойства наножидкостей, в которых они являются составной частью. Это обусловило широчайший спектр применения наножидкостей [1–3]. Вполне естественно, что интерес к нанотехнологиям возник и в нефтегазовой промышленности. В настоящее время области применения наножидкостей в нефтегазовой индустрии очень активно исследуются [4–8]. Наножидкости стали использоваться для регулирования вязкости и контроля процесса фильтрации бурового раствора, для снижения коэффициента трения буровой трубы и стабилизации стенок скважины. Уже существующие исследования дают интересные данные, показывающие перспективность применения нанотехнологий в бурении.

Одной из основных функций бурового раствора является удаление шлама с забоя скважины на поверхность. Основным механизмом очистки скважины зависит от реологии бурового раствора. Кроме того, на процесс транспортировки шлама влияют несколько взаимосвязанных параметров бурового раствора, таких как: размер и плотность частиц шлама, плотность бурового раствора, размеры и угол наклона скважины к горизонту, реология бурового раствора, скорость проходки, расход бурового раствора, скорость вращения бурильной трубы и др. Эффективное удаление пробуренного шлама из ствола скважины улучшает скорость проходки и эффективность бурения.

Разработка бурового раствора с улучшенными реологическими свойствами могла бы стать решением для увеличения эффективности транспортировки шлама. В связи с этим в последние несколько лет проведено очень большое количество исследований, направленных на изучение влияния добавки наночастиц на вязкость и реологию буровых растворов. В большинстве работ отмечается, что добавление наночастиц в буровые растворы приводит к значительному увеличению вязкости и реологических свойств этих растворов [4–6]. Исследований влияния добавок наночастиц в буровой раствор на эффективность выноса шлама из скважин при бурении на сегодняшний день известно существенно меньше [7–8]. В связи с этим, целью данной работы является исследование эффективности выноса частиц шлама из наклонных и горизонтальных скважин буровыми растворами, модифицированными наночастицами. В настоящее время подобных систематических исследований в литературе нет.

2. Экспериментальное исследование влияния наночастиц на реологические свойства буровых растворов

2.1. Приготовление буровых растворов

В работе для приготовления глинистого раствора частицы глины добавлялись в дистиллированную воду и суспензия интенсивно перемешивалась в течение 30 мин на высокоскоростной мешалке (OFITE 152-18 - Prince Castle) на 20000 об/мин. Массовая концентрация частиц глины в экспериментах составляла 5%. Далее в глинистую суспензию вводилось необходимое количество заранее приготовленных наносуспензий. Чтобы разрушить конгломераты наночастиц, суспензии подвергались обработке в ультразвуковом технологическом аппарате серии «Волна» УЗТА-0.4/22-ОМ.

В качестве наночастиц рассмотрены частицы оксидов кремния и алюминия. Концентрация частиц в растворах варьировалась от 0.25 до 2 мас.%, а их размер – от 5 до 50 нм. Для изучения вязкости и реологии эмульсий использованы вискозиметры Ofite 900 и 1100. Вискозиметр в процессе исследований позволяет изменять диапазон измерений от 0.0006 до 1000 об/мин. Он позволяет измерять скорость сдвига, напряжение сдвига, вязкость и температуру. Погрешность измерений составляет 3%.

2.2. Исследование реологических свойств буровых растворов, модифицированных наночастицами

В работе исследованы зависимости вязкости и реологии буровых растворов (БР) от концентрации, размера и материала наночастиц. Для аппроксимации реологических параметров модифицированных наночастицами растворов использовалась модель Хершеля - Балкли:

$$\mu_f = (\tau_0 + k_v \dot{\gamma}^n) \dot{\gamma}^{-1}, \quad (1)$$

где $\dot{\gamma}$ – скорость сдвига, с^{-1} , n – индекс течения, τ_0 – предел текучести, Па, k_v – пластическая вязкость, Па с.

В результате систематического изучения вязкости более буровых растворов с наночастицами было установлено, что добавка наночастиц в буровые растворы может значительно улучшить их реологические характеристики. Показано, что с увеличением концентрации (рис. 1) и уменьшением размера (рис. 2) наночастиц эффективная вязкость возрастает. Влияние наночастиц начинается с очень малых концентраций, которые практически не влияют на плотность бурового раствора.

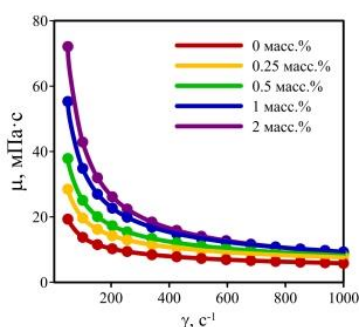


Рис. 1. Влияние концентрации частиц Al_2O_3 (43 нм) на вязкость глинистого БР

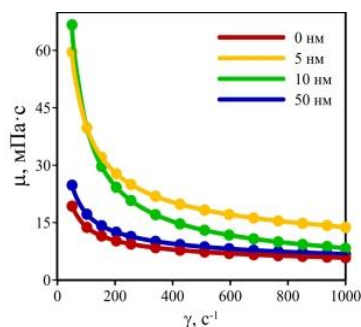


Рис. 2. Влияние размера частиц SiO_2 (2 мас.%) на вязкость глинистого БР

Было показано, что и реологические свойства исследуемых суспензий также значительно зависят не только от концентрации, но и от размера добавляемых наночастиц (рис. 3). Установлено, что с увеличением концентрации и уменьшением размера наночастиц может меняться реологическая модель бурового раствора, также значительно снижается показатель степенной модели, а индекс консистенции, предельное напряжение и пластическая вязкость, напротив, возрастают.

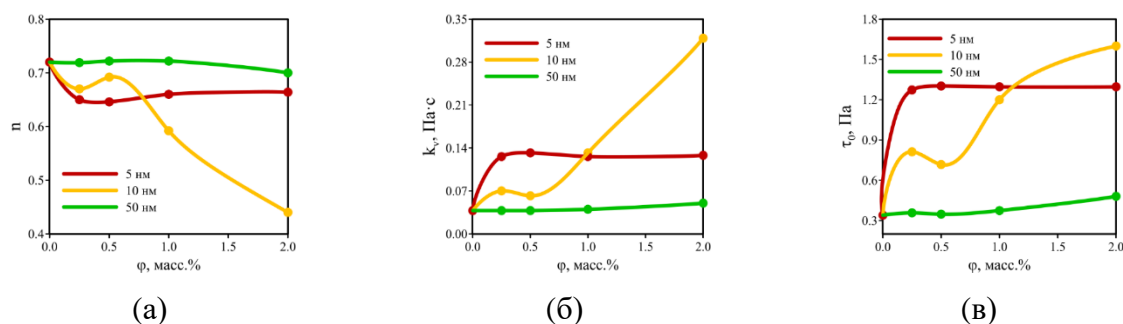


Рис. 3. Индекс течения (а), пластическая вязкость (б) и предельное напряжение сдвига (в) глинистой суспензии от концентрации и размера наночастиц SiO_2

3. Исследование влияния добавки наночастиц в буровой раствор на эффективность выноса шлама

На основании полученных выше экспериментальных данных по реологии буровых растворов, модифицированных наночастицами, проведено исследование течения полученных буровых растворов в скважинах. Исследовано влияние наночастиц на эффективность выноса шлама в скважинах при циркуляции глинистых буровых растворов на водной основе. Плотность частиц оксида алюминия и диоксида кремния составляла 3950 кг/м^3 и 2650 кг/м^3 и соответственно. Для моделирования были рассмотрены стандартные параметры скважины и процесса бурения, используемые при строительстве нефтегазовых скважин. Плотность бурового раствора была равна 1050 кг/м^3 . В качестве частиц шлама рассмотрены сферические частицы размером 3 мм плотностью 2600 кг/м^3 . Концентрация шлама на входе в канал задавалась равной 3% по объему. Для численного моделирования использовалась расчетная сетка, состоящая из $40 \times 140 \times 120$ расчетных узлов. Для изучения поведения шлама и бурового раствора в затрубном пространстве использовалась модель двухфазного потока Эйлера: поток бурового раствора состоит из твердой «s» (частицы шлама) и жидкой «f» (модифицированный наночастицами буровой раствор) фаз, которые являются отдельными друг от друга, но образуют взаимопроникающие континуумы: $\alpha_f + \alpha_s = 1$, где α_f и α_s – объемные концентрации жидкой и твердой фаз соответственно. Уравнения неразрывности:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\alpha_s \rho_s \vec{v}_s) &= 0, \\ \nabla \cdot (\alpha_f \rho_f \vec{v}_f) &= 0.\end{aligned}\tag{2}$$

В общем случае рассматривалось турбулентное течение бурового раствора. Для моделирования турбулентности использовалась двухпараметрическая k- ω SST модель.

После успешного тестирования описанной расчетной методики с помощью численного моделирования было показано, что добавка наночастиц в буровой раствор существенно сказывается на качестве промывки скважины от шлама. На рис. 4 показаны установившиеся профили концентрации и скорости проскальзывания частиц шлама в кольцевом канале. Шлам хорошо транспортируется по центру канала, из-за этого концентрация частиц максимальна вблизи внешней стенки кольцевого канала, где она увеличивается на 6 – 7% за счет действия центробежной силы, действующей на частицы. Анализ результатов моделирования показывает, что добавка наночастиц приводит к значительному снижению скорости проскальзывания как в ядре потока, так и в области пограничных слоев. С увеличением концентрации и уменьшением размера наночастиц этот эффект усиливается.

Было установлено, что для горизонтальных скважин двухпроцентная по массе концентрация наночастиц оксида кремния в буровом растворе приводит к повышению эффективности выноса шлама в 2.7 раз, в то время как для вертикальных скважин это повышение составляет всего около 10 – 15%. Кроме того, данные моделирования показывают, что добавка наночастиц делает процесс выноса шлама менее чувствительным к углу наклона скважины. Так, если для базового бурового раствора переход от вертикального к горизонтальному участку скважины снижает эффективность транспорта шлама практически в три раза, то для модифицированного наночастицами (2 мас.%) раствора это снижение составляет 22%.

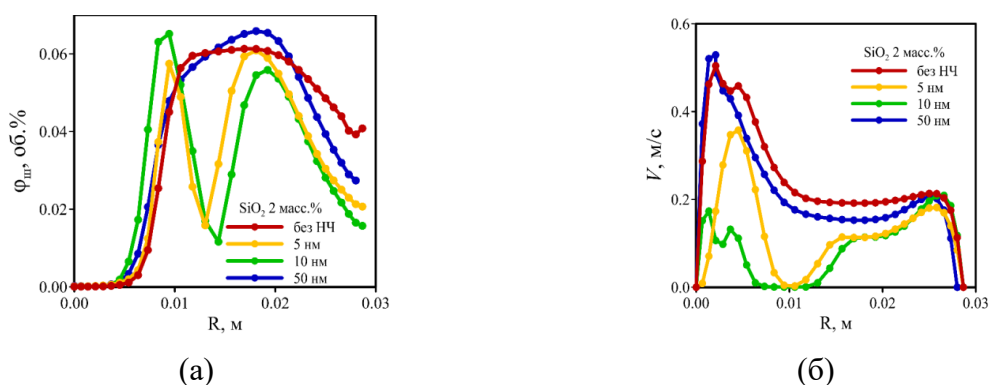


Рис. 4. Профили концентрации частиц шлама (а) и скорости проскальзывания (б) в кольцевом пространстве в зависимости от размеров наночастиц SiO_2 2 масс.%

4. Заключение

В данной работе было показано, что добавки наночастиц могут значительно менять реологические свойства буровых растворов. При этом в отличие от суспензий с макро и микроскопическими размерами частиц реологические параметры наносуспензий зависят от размеров и материала наночастиц и изменяются значительно уже при небольших их концентрациях. Увеличение эффективности выноса шлама при добавке наночастиц при заданном расходе бурового раствора обусловлено в основном уширением формы профиля скорости в канале. Это уширение связано с уменьшением показателя степени n при увеличении концентрации частиц и уменьшении размера наночастиц. Реологией также объясняется и влияние материала наночастиц на эффективность выноса шлама. Также было установлено, что добавка наночастиц в буровой раствор будет наиболее эффективна для горизонтально-направленных скважин. Это открывает широкую перспективу применения наночастиц для управления характеристиками течения буровых растворов.

Список литературы

1. Stark W. J., Stoessel P. R., Wohlleben W., Hafner A. Industrial applications of nanoparticles // Chemical Society Reviews. 2015. Vol. 4. P. 5793–5805.
2. Das S. K., Choi S. U. S., Patel H. Heat exchange in nanofluids. A Review // Heat Transfer Engineering. 2006. Vol. 20 (10). P. 3–19. DOI: 10.1080/01457630600904593
3. Minakov A. V., Guzei D. V., Pryazhnikov M. I., Zhigarev V. A., Rudyak V. Ya. Study of turbulent heat transfer of the nanofluids in a cylindrical channel // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2016. Vol. 102. P. 745–755. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.06.071
4. Sadeghalvaad M., Sabbaghi S. The effect of the TiO_2 /polyacrylamide nanocomposite on water-based drilling fluid properties // Powder Technology. 2015. Vol. 272. P. 113–119. DOI: 10.1016/j.powtec.2014.11.032
5. Kang Y., She J., Zhang H., You L., Song M. Strengthening shale wellbore with silica nanoparticles drilling fluid // Petroleum. 2016. Vol. 2 (2). P. 189–195. DOI: 10.1016/j.petlm.2016.03.005
6. Minakov A. V., Mikhienkova E. I., Zhigarev V. A., Neverov A. L., Rudyak V. Ya. A study of the influence of nanoparticles on the properties of drilling fluids // Colloid Journal. 2018. Vol. 80 (4). P. 418–426. DOI: 10.1134/S1061933X18040099

7. *Samsuri A., Hamzah A.* Water based mud lifting capacity improvement by multiwall carbon nanotubes additive // International Journal of Petroleum and Gas Engineering. 2016. Vol. 3 (8). P. 001–009.
8. *Boyou N. V., Ismail I., Sulaiman W. R. W., Haddad A. S., Husein N., Hui H. T., Nadaraja K.* Experimental investigation of hole cleaning in directional drilling by using nano-enhanced water-based drilling fluids // Journal of Petroleum Science and Engineering. 2019. Vol. 176. P. 220–231. DOI: 10.1016/j.petrol.2019.01.063

Особенности формирования вертикальной неоднородности водных масс в крупных водохранилищах и ее влияние на устойчивость водопользования

**Т. П. Любимова^{a,b}, А. П. Лепихин^c, А. В. Богомолов^c, Ю. С. Ляхин^c,
Я. Н. Паршакова^a**

^a Институт механики сплошных сред УрО РАН,
614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1
email: parshakova@icmm.ru

^b Пермский государственный национальный исследовательский университет,
614990, Пермь, ул. Букирева, 15
email: lyubimovat@mail.ru

^c Горный институт УрО РАН, 614007, Пермь, ул. Сибирская, 78а

В настоящее время действующая система, как регламентации техногенных воздействий на водные объекты, так и их хозяйственного использования, базируется на априорном допущении однородности водных масс поверхностных водных объектов по глубине. В условиях развитой турбулентности и плотностной однородности водных масс, это положение не вызывает возражений. Однако для водоемов с замедленным водообменом, тем более в условиях значительных техногенных нагрузок данное важнейшее допущение, может переставать выполняться. В работе на конкретных примерах показаны особенности обеспечения устойчивости водопользования в условиях значительных вертикальных водных масс.

Ключевые слова: водные объекты; неоднородность водных масс; устойчивость водопользования

Features of the formation of vertical heterogeneity of water masses in large reservoirs and its impact on the impact of water use

**T. P. Lyubimova^{a,b}, A. P. Lepikhin^c, A. V. Bogomolov^c, Yu. S. Lyakhin^c,
Ya. N. Parshakova^a**

^a Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS,
1 Akademika Koroleva St., 614013, Perm
email: parshakova@icmm.ru

^b Perm State University, 15 Bukireva St., 614990, Perm
email: lyubimovat@mail.ru

^c Mining Institute UB RAS, 78a Siberian St., 614007, Perm

At present, the current system, both for the regulation of technogenic impacts on water bodies and their economic use, is based on an a priori assumption of the uniformity of water masses of surface water bodies in depth. Under conditions of developed turbulence and density homogeneity of water masses, this provision is not objectionable. However, for reservoirs with slow water exchange, especially under conditions of significant technogenic loads, this most important assumption may cease to be fulfilled. In the work, specific examples show the features of ensuring the sustainability of water use in conditions of significant vertical water masses.

Keywords: water bodies; heterogeneity of water masses; sustainability of water use

1. Введение

В настоящее время действующие системы как регламентации техногенных воздействий на водные объекты, так и их хозяйственного использования, базируются на априорном допущении однородности водных масс водных объектов, по глубине. В условиях развитой турбулентности и плотностной однородности это положение не вызывает возражений. Однако для водоемов с замедленным водообменом, особенно в условиях значительных техногенных нагрузок, данное важнейшее допущение может перестать выполняться. Рассмотрим данное положение на двух характерных примерах: 1) обеспечение нормативного качества воды по показателю «жесткость» на основном питьевом водозаборе г. Перми; 2) повышение устойчивости функционирования технических водозаборов г. Березники из р. Камы (Камского водохранилища).

Основным питьевым водозабором г. Перми являются Чусовские очистные сооружения (ЧОС), располагающиеся непосредственно ниже слияния рек Сылта и Чусовая, и находящиеся в зоне подпора от Камской ГЭС (рис. 1).

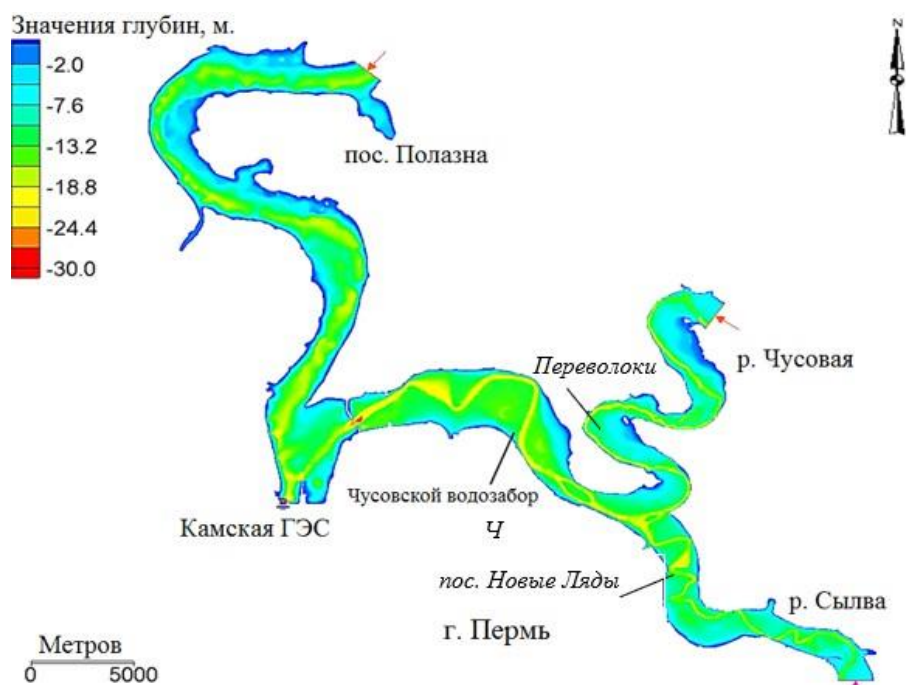


Рис. 1. Нижняя часть Камского водохранилища с расположением Чусовского водозабора г. Перми и водозабора п. Новые Ляды

Из-за почвенно-геохимических особенностей водосборной территории в зимний период вода р. Сылва характеризуется высокой жесткостью. Снижение жесткости забираемой воды является основной проблемой обеспечения нормативного качества воды на ЧОС. Поскольку в зимний период минерализации вод данных водотоков существенно различаются, то в условиях низких скоростей течения в зоне слияния этих рек формируется значительная вертикальная неоднородность водных масс (рис. 2).

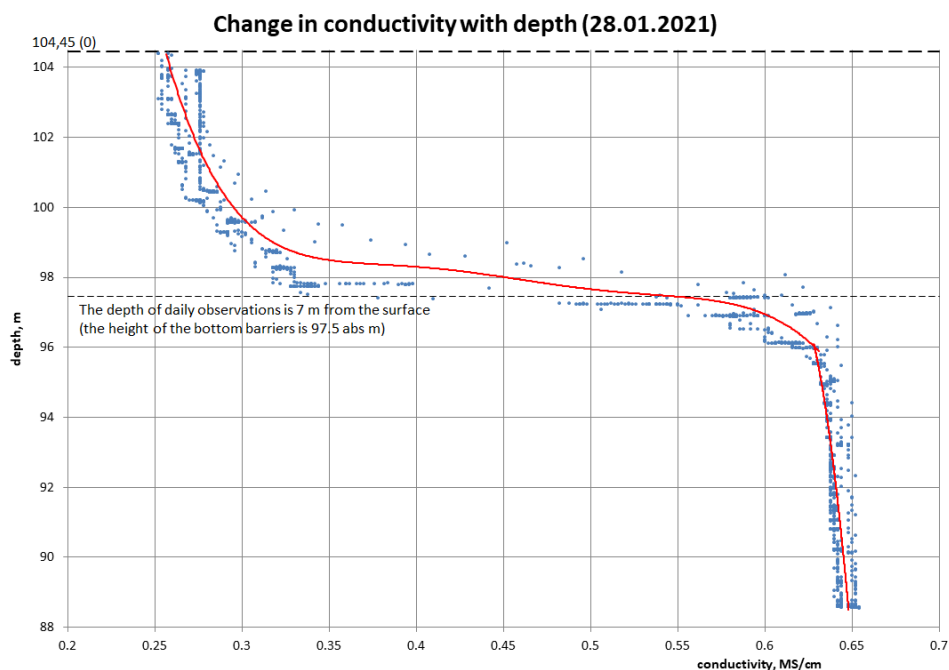


Рис. 2. Характерное вертикальное распределение удельной электропроводности воды в зимний период в районе Чусовского водозабора г. Перми

Данная вертикальная неоднородность весьма значительна, она носит устойчивый характер и проявляется не только в распределении минерализации воды, ее удельной электропроводности, но и в распределении основного лимитирующего показателя для данного водозабора - жесткости воды, поэтому данный эффект было решено использовать для улучшения качества забираемой воды. После многочисленных обсуждений [1–4] в 2020 г. на данном водозаборе была внедрена селективная схема отбора воды путем создания у водозаборных оголовков донных барьеров, отсекающих поступление более плотных, более минерализованных вод с повышенной жесткостью из нижних придонных горизонтов. Реализация данной схемы позволила при минимальных материальных затратах снизить жесткость забираемой воды в два раза, обеспечить ее нормативное качество.

Вертикальная плотностная неоднородность водных масс может формироваться не только вследствие естественных факторов, но и в зонах активного техногенеза, создаваться полностью под влиянием техногенных факторов. Для Пермского края, активно разрабатывающего одно из крупнейших в мире Верхне-Камское месторождение калийных и магниевых солей, это явление весьма характерно. Данная проблема приобрела особую актуальность для водоснабжения г. Березники в июле 2020 г., когда из-за забора воды ненормативного качества, была приостановлена работа такого крупного предприятия как филиал «Азот» г. Березники, осуществляющий забор технической воды из р. Камы (Камского водохранилища) [5] (рис. 3).



Рис. 3. *Расположение вертикалей измерений на рассматриваемом участке Камского водохранилища*

Многочисленными проверками, проведенными различными контролирующими органами, не были обнаружены следы возможных аварийных ситуаций или несанкционированного отведения сточных вод [5]. В то же время значительная вертикальная неоднородность водных масс, впервые была зафиксирована в данном районе еще в 1957 г., вскоре после окончания заполнения Камского водохранилища [6]. Минерализация воды, а соответственно и содержание ряда макрокомпонентов, в придонном горизонте у левого берега Камского водохранилища в районе г. Березники в период летней межени, оказалось почти на порядок больше, чем в поверхностном горизонте. Поскольку данный эффект был зафиксирован только у левого берега, а на вертикалях, расположенных в центральной части, где проводились отборы проб воды территориальными органами Росгидромета, он не наблюдался, то при решении актуальных задач водопользования на этот эффект не обращали внимания, хотя он фиксировался в последующем целым рядом исследователей.

2. Результаты численного моделирования динамики загрязняющих веществ в пористой среде

Организованный после данного происшествия ведомственный мониторинг качества забираемой из водохранилища воды с частотой отбора 4 суток, показал (рис. 4), что в теплый период при отметках уровня воды, близких к НПГ, и уклонах

водной поверхности, меньших $5 \cdot 10^{-5}$, в придонной области формируется зона с повышенной минерализацией воды.

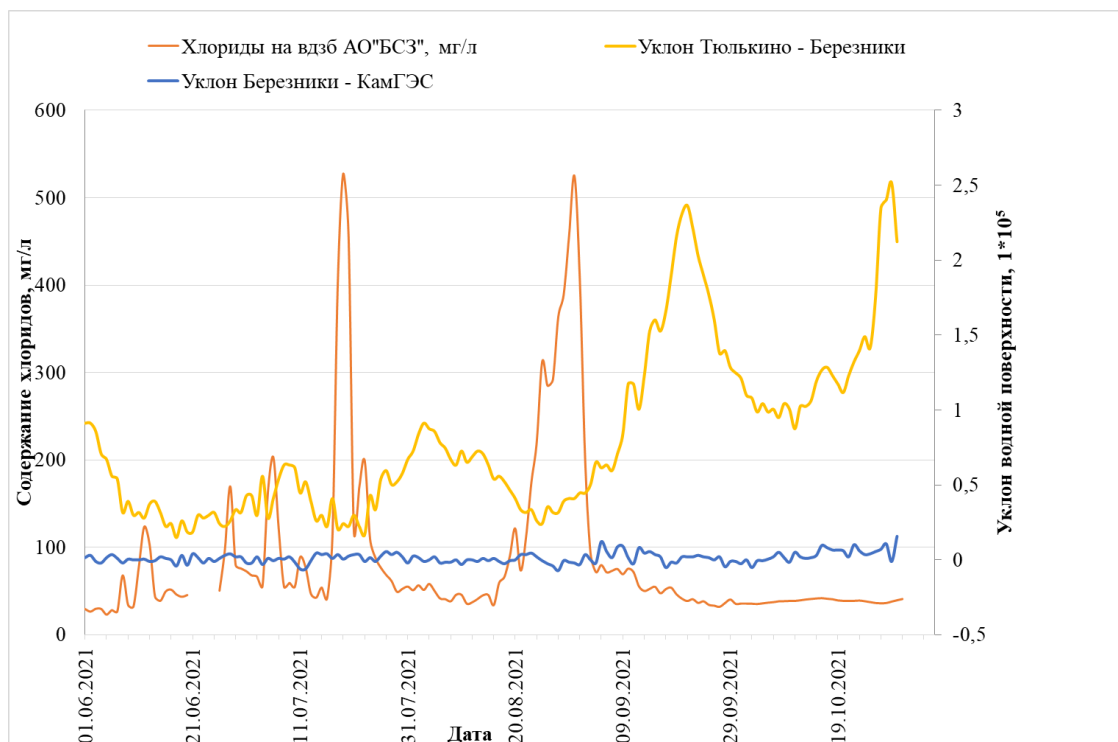


Рис. 4. *Сопряженная динамика содержания хлоридов в Камском водохранилище и уклонов водной поверхности*

Выполненные параллельно измерения распределение удельной электропроводности воды показали, что при наблюдении повышенной минерализации воды на водозаборах, вертикальное распределение свойств водных масс на данном участке Камского водохранилища, становится существенно неоднородным по глубине (рис. 5). Как следует из рис. 5, на глубинах 4–6 метров могут наблюдаться резкие изменения удельной электропроводности и соответственно и минерализации воды [7]. Как было показано в [8], данный участок р. Камы характеризуется значительной фильтрационной разгрузкой высокоминерализованных рассолов, имеющих как естественный, так и техногенный характер. Как показал выполненный комплекс исследований, включающий как регулярные натурные измерения, так и вычислительные эксперименты, при достаточных скоростях течения, вследствие вертикальной турбулентной диффузии происходит выравнивание минерализации воды по глубине водного объекта. В то же время при снижении плотностного числа Фруда $Fr_p = V / \sqrt{g z \Delta \rho / \rho}$, где $\Delta \rho / \rho$ – относительная разность плотностей вод между слоями, z – толщина нижнего слоя, V – скорость потока, ниже критического значения $Fr_{p,кр} \sim 1$ формируется «запирающий слой» являющееся основной причиной наблюдаемой вертикальной стратификации водных масс.

При этом основным определяющим параметром выступает скорость потока, задаваемая уклоном водной поверхности. При малых уклонах водной поверхности $\sim 5 \cdot 10^{-5}$ при его относительно небольшом изменении возможно формирование «запирающего слоя», вследствие чего минерализация воды в придонном слое может увеличиться более чем на порядок [8].

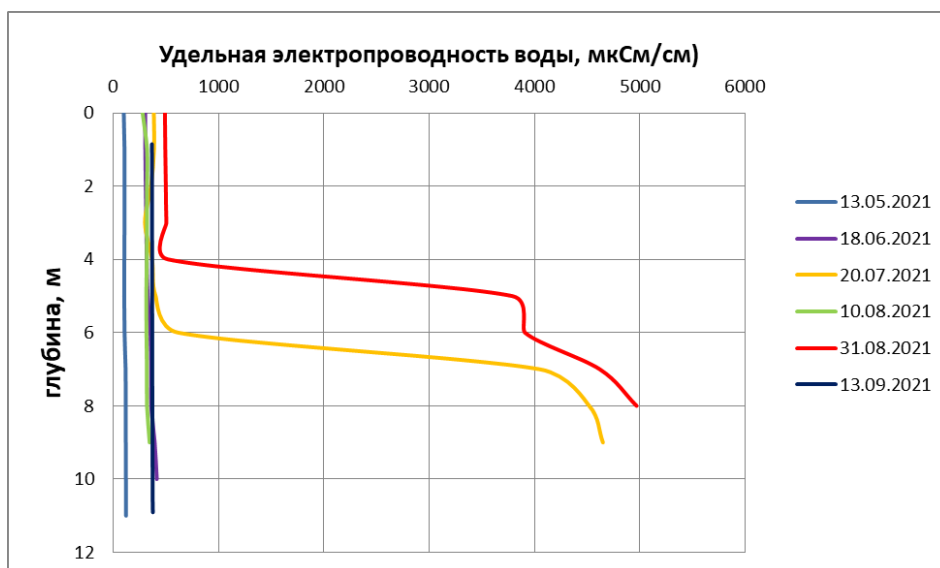


Рис. 5. Распределение удельной электропроводности воды по глубине на вертикали № 146

3. Заключение

Как показали проведенные исследования, вертикальная стратификация водных масс в водохранилищах может формироваться под действием как естественных, так и техногенных факторов. При этом основным фактором ее образования является снижение значения плотностного числа Фруда ниже критического значения. Для того, чтобы данная вертикальная стратификация не влияла на условия водопользования и даже способствовала повышению надежности, необходимо ее детальное исследование, обеспечение эффективного мониторинга водного объекта.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-41-590013 и № 20-45-596028) и Правительства Пермского края в рамках научного проекта № С-26/828.

Список литературы

1. Лепихин А. П., Немковский Б. Б., Онянов В. А., Капитанова Е. Н. Селективный отбор воды // Водоснабжение и санитарная техника. 1988. № 3. С. 27–28.
2. Lyubimova T., Lepikhin A., Parshakova Y., Konovalov V., Tiunov A. Formation of the density currents in the zone of confluence of two rivers // Journal of Hydrology. 2014. Vol. 508. P. 328–342. DOI: 10.1016/j.jhydrol.2013.10.041
3. Лепихин А. П., Любимова Т. П., Возняк А. А., Паршакова Я. Н., Богомолов А. В., Ляхин Ю. С. Особенности регулирования качества воды при ее селективном заборе из водохранилищ // Водное хозяйство России: проблемы, технологии, управление. 2017. №3. С. 56–68. DOI: 10.35567/1999-4508-2017-3-4
4. Lyubimova T., Lepikhin A., Parshakova Y., Bogomolov A., Lyakhin Y. The influence of intra-day non-uniformity of operation of large hydroelectric power plants on the performance stability of water intakes located in their upper pools // Water. 2021. Vol. 13(24). 3577. DOI: 10.3390/w13243577
5. Лепихин А. П., Веницианов Е. В., Любимова Т. П., Тиунов А. А., Паршакова Я. Н., Ляхин Ю. С., Богомолов А. В. Влияние вертикальной неоднородности водных масс на устойчивость промышленного водоснабжения в зонах высокой техногенной

- нагрузки // Труды Карельского научного центра Российской академии наук. 2021. № 4. С. 53–63. DOI: 10.17076/lim1419
6. Куликов Г. И. Влияние сброса химической промышленности на минерализацию воды Камского водохранилища в районе г. Березники // Материалы всесоюзного совещания по вопросам эксплуатации Камского водохранилища. Вып. 2. Пермь, 1959. С. 1–13.
7. Лепихин А. П., Возняк А. А., Любимова Т. П., Паршакова Я. Н., Ляхин Ю. С., Богомолов А. В. Исследование особенностей формирования и масштабов диффузного загрязнения, сформированного крупными промышленными комплексами, на примере Соликамско-Березниковского промузла // Водные ресурсы. 2020. Т. 47. № 5. С. 560–566. DOI: 10.31857/S0321059620050120
8. Богомолов А. В., Лепихин А. П., Ляхин Ю. С., Гребенева М. Г. Особенности колебаний вертикальных структур полей минерализации в камском водохранилище в период летней межени в районе в Березники // Горное эхо. 2021. № 4 (85). С. 3–11. DOI: <https://doi.org/10.7242/echo.2021.4.1>

Исследование влияния величины скорости течения реки на характер вертикальной неоднородности водных масс в зоне повышенной минерализации воды в придонной области

Т. П. Любимова^{a,b}, А. П. Лепихин^c, Я. Н. Паршакова^a, А. В. Богомолов^c, Ю. С. Ляхин^c, А. Исахов^d

^a Институт механики сплошных сред УрО РАН,
614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1
email: parshakova@icmm.ru

^b Пермский государственный национальный исследовательский университет,
614990, Пермь, ул. Букирева, 15
email: lyubimovat@mail.ru

^c Горный институт УрО РАН, 614007, Пермь, ул. Сибирская, 78а

^d Казахский национальный университет им. аль-Фараби,
050040, Республика Казахстан, Алматы, пр. аль-Фараби, 71

В работе представлены результаты натурных измерений и численного моделирования процессов изменения качества воды в реке, забираемой промышленными предприятиями с целью технического водоснабжения. Исследование проводится на примере реки Кама в районе города Березники. Материалы ведомственного мониторинга показывают, что в летний период возникают значительные риски обеспечения устойчивости водоснабжения. Как правило считается, что в зимний период, при прохождении по руслу меньших объемов воды, эти риски также должны возрастать. Однако, как показывают, а также выполненные натурные исследования, в зимний период наблюдается устойчивое функционирование технических водозаборов из реки Камы. Обнаружено, что в летний период, когда данный участок реки находится в подпоре от Камской ГЭС и скорости течений снижаются, формируется вертикальная стратификация водных масс, значительно снижающая устойчивость забора воды из придонной области. В зимний же период при понижении уровня воды, на данном участке наблюдаются более высокие скорости течения, а также интенсивное вертикальное перемешивание водных масс. Вследствие этого значительно возрастает устойчивость водопользования. Результаты численного моделирования, проведенного в рамках трехмерной модели, подтвердили сделанное заключение. Показано, что если в точке амплитуда скорости течения меняется со временем по гармоническому закону, то концентрации соли в этой точке также подчиняется гармоническому закону, но в противофазе со скоростью.

Ключевые слова: водные объекты; моделирование качества воды; сезонная динамика; вертикальная стратификация водных масс

Investigation of the influence of the river flow velocity on the nature of the vertical heterogeneity of water masses in the zone of increased water mineralization in the near-bottom region

T. P. Lyubimova^{a,b}, A. P. Lepikhin^c, Ya. N. Parshakova^a, A. V. Bogomolov^c, Yu. S. Lyakhin^c, A. Issakhov^d

^a Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS,

1 Akademika Koroleva St., 614013, Perm

email: parshakova@icmm.ru

^b Perm State University, 15 Bukireva St., 614990, Perm

email: lyubimovat@mail.ru

^c Mining Institute UB RAS, 78a Siberian St., 614007, Perm

^d al-Farabi Kazakh National University, 71 al-Farabi Ave., 050040, Almaty, Kazakhstan

The paper presents the results of field measurements and numerical modeling of the processes of changing the quality of water in a river taken by industrial enterprises for the purpose of technical water supply. The study is carried out on the example of the Kama River near the city of Berezniki. Materials of departmental monitoring show that during the summer period there are significant risks of ensuring the sustainability of water supply. As a rule, it is considered that during the winter period, when smaller volumes of water pass through the channel, these risks should also increase. However, as shown, as well as performed field studies, in winter, there is a stable functioning of technical water intakes from the Kama River. It was found that in the summer, when this section of the river is backwatered by the Kama HPP and the current velocities decrease, a vertical stratification of water masses is formed, which reduces water use from the near-bottom area. In winter, when the water level in the reservoir decreases, higher flow rates are characteristic, as well as intensive vertical mixing of water masses. As a result, the consumer properties of water are improved, which are necessary for a sustainable water supply. The results of numerical simulation carried out within the framework of a three-dimensional model confirmed the conclusion made. It is shown that if at a point the amplitude of the flow velocity changes with time according to the harmonic law, then the salt concentration at this point also obeys the harmonic law, but in antiphase with the velocity.

Keywords: water bodies; water quality modeling; seasonal dynamics; vertical stratification of water masses

1. Введение

Сегодня во многих регионах мира остро стоит проблема обеспечения населения и промышленности водой необходимого качества. На реках в средней полосе России и на территории Урала минимальные расходы воды характерны для периода зимней межени. Однако в ряде ситуаций, имеющих важное практическое значение и существенно влияющих на оценку устойчивости и надежность функционирования систем водоснабжения крупных промышленных центров, действующая система правил

отведения сточных вод в водные объекты является некорректной. В работах [1–5] рассматриваются особенности формирования техногенных нагрузок и устойчивость функционирования Камского водохранилища как важнейшего источника технического водоснабжения промышленных предприятий города Березники. В [6, 7] на основе материалов натурных наблюдений показано, что в летний период при расходах воды в реке Каме 350 – 450 м³/с могут иметь место превышения нормативных требований к качеству воды на глубинных водозаборах, обуславливаемые формированием вертикальной стратификации водных масс. В то же время, согласно принципу нормирования сброса сточных вод, в зимний период, при меньших расходах воды (около 200 – 250 м³/с), казалось бы, должны увеличиваться риски снижения устойчивости технического водоснабжения. Однако анализ материалов ведомственного мониторинга качества забираемой воды свидетельствует о надежности функционирования в зимний период системы технического водоснабжения из реки Камы. При этом следует отметить, что в зимний период происходит понижения уровня воды в водохранилище на 6 – 7 м, а гидрологический режим характеризуется более высокими скоростями течений. При бóльших расходах воды, наблюдаемых в теплый период в Камском водохранилище в районе Березников, риски забора воды ненормативного качества на глубинных водозаборах являются значительно большими, чем в зимний период. Для исследования данного явления в 2022 году выполнен комплекс натурных полевых исследований и вычислительных экспериментов по распределению гидравлических и гидрохимических показателей по акватории рассматриваемого водного объекта.

Перестройка вертикальной структуры водных масс с формированием зон повышенной минерализации в придонной области наглядно отражается в материалах контроля качества забираемой воды на водозаборе АО «БСЗ», проводимого с частотой отбора проб 4 раза в сутки (рис. 1). Так, на данном водозаборе отбор воды производился с придонного горизонта. В периоды, когда имела место вертикальная стратификация водных масс, содержание хлоридов в отбираемой воде значительно увеличивалось (рис. 1).

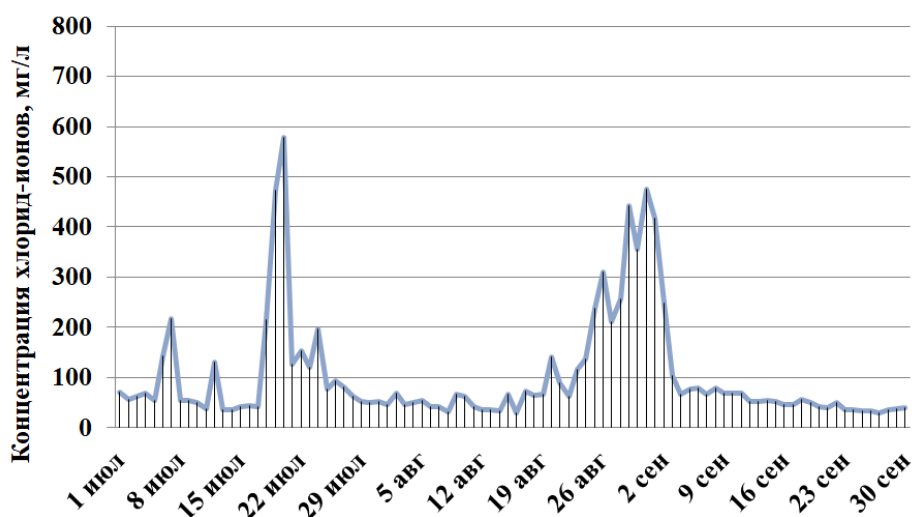


Рис. 1. Динамика содержания хлоридов на глубинном водозаборе АО «БСЗ» в июле – сентябре 2021 года

2. Результаты численного моделирования динамики загрязняющих веществ в пористой среде

Трехмерное численное моделирование включало два этапа. На первом этапе исследовались условия, при которых в придонную область происходит постоянное поступление загрязняющих веществ. Конфигурация зоны представляла собой прямоугольный параллелепипед размерами $H = 60$ м по ширине, $L = 200$ м по длине и $d = 12$ м по глубине. Глубина выбралась в соответствии со средними характеристиками участка, содержащего предполагаемую область фильтрационных разгрузок. Расчетная область располагалась вблизи контрольной вертикали 8, показанной на рисунке 1, и содержала источник загрязнения у дна вдоль левого берега реки Камы в виде прямоугольной щели высотой $h = 0.5$ м и длиной $l = 100$ м. Из щели с постоянной скоростью u поступал рассол с массовой концентрацией C_0 , расход таких рассолов составляет $q \sim 30$ кг/с. Скорость основного потока на первом этапе полагалась постоянной и равной $U = 0.1$ м/с. На втором этапе, после достижения установившегося поля концентрации, исследовалось влияние нестационарности скоростного потока. Изменение скорости задавалось в виде гармонического закона. Течение являлось турбулентным и характеризовалось числами Рейнольдса порядка 10^6 .

На рисунке 2 приведено вычисленное поле концентрации примеси на дне и в вертикальных сечениях, соответствующих значениям координаты y , равным 10 и 60 м соответственно. Видно, что по вертикали вода чистая, без примеси, поле же концентрации в придонной области существенно неоднородно; область повышенной минерализации воды расположена вблизи источника примеси и охватывает значительные участки дна вдоль левого берега.

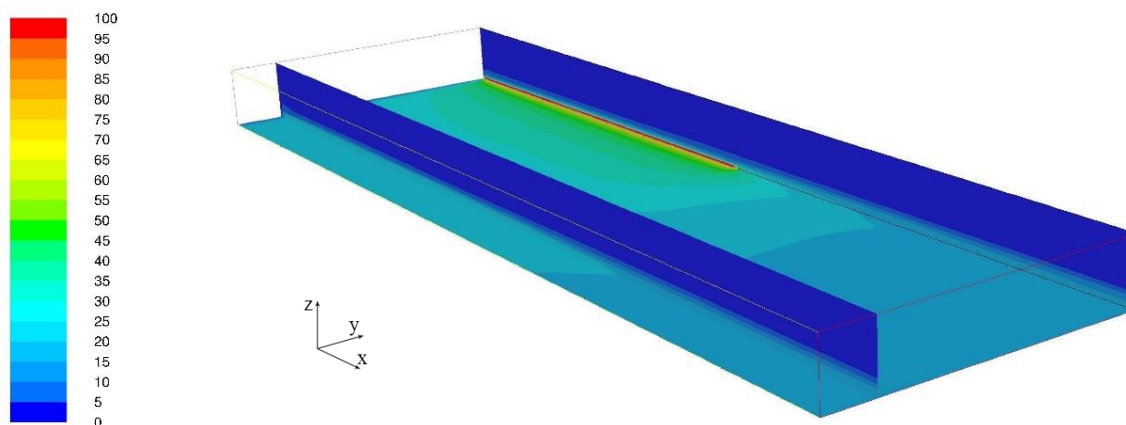


Рис. 2. Поле концентрации примеси (в г/л) от щелевидного источника загрязнения длиной $l = 100$ м и высотой $h = 0.5$ м расположенного вдоль берега возле дна реки

После нахождения, как оказалось, постоянного во времени поля концентрации примеси и скорости течения в рассматриваемой области проводился вычислительный эксперимент по исследованию влияния величины скорости основного потока на распределение примеси и поведение слоя скачка концентрации соли. Установившееся решение было получено за 41760 с (11.6 час) расчетного времени. Далее скорость на входе задавалась в виде гармонического закона, показанного на рисунке 3а.

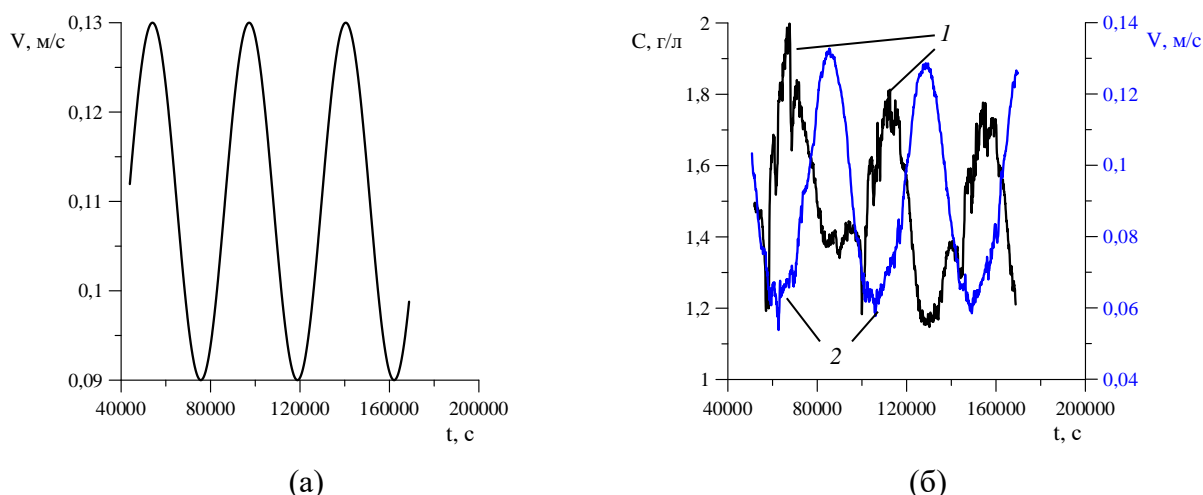


Рис. 3. Временная динамика в точке с координатами (190, 30, 3) м скорости основного потока (а), концентрации примеси (линия 1) и амплитуды скорости (2) (б)

Изменение концентрации примеси в точке, расположенной вблизи выхода из расчетной области и на глубине слоя скачка, представлено на рисунке 3б (см. линию 1). Для оценки в этой же точке влияния величины скорости на характер концентрации примеси добавлена зависимость от времени амплитуды скорости (см. рис. 3б, кривая 2). Видно, что концентрация также подчиняется гармоническому закону, но ведет себя в противофазе скорости. Когда скорость потока увеличивается, концентрация примеси снижается и, наоборот, минимумам скорости отвечают максимальные значения концентрации. Концентрация имеет разные значения по глубине, таким образом, в зависимости от уровня, с которого заберется вода, будет фиксироваться ее различная минерализация.

3. Заключение

Выполненный комплекс исследований показал, что гидрологический, гидрохимический режимы реки Камы (Камского водохранилища) в районе города Березники в теплый и зимний периоды существенно различаются, что принципиально влияет на устойчивость работы технических водозаборов. Качество забираемой воды обуславливается не только средним по глубине содержанием лимитирующих чистоту воды ингредиентов, но вертикальной стратификацией водных масс.

В теплый период на участке Камского водохранилища у Березников при уровнях воды, близких к нормальным подпорным горизонтам, низких скоростях течений, могут возникать условия для формирования вертикальной плотностной стратификации водных масс, создающей значительные риски для надежности функционирования технических водозаборов, производящих отбор воды из придонных горизонтов. В зимнее время, вследствие существенной сработки водохранилища и, соответственно, увеличения скоростей течений даже на фоне снижения расходов воды, в реке Каме вертикальная стратификация водных масс не наблюдается. Вследствие этого риски отбора воды ненормативного качества на данных водозаборах снижаются. Таким образом, при регламентации техногенных воздействий на водные объекты в зонах активного техногенеза необходимо создавать условия, обеспечивающие эффективное вертикальное перемешивание водных масс, недопущение образования их вертикальной стратификации.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-41-590013 и № 20-45-596028) и Правительства Пермского края в рамках научного проекта № С-26/828.

Список литературы

1. *Lepikhin A. P., Lyubimova T. P., Parshakova Ya. N., Tiunov A. A.* Discharge of excess brine into water bodies at potash industry works // *Journal of Mining Science*. 2012. Vol. 48. P. 390–397. DOI: 10.1134/S1062739148020220
2. *Lyubimova T. P., Lepikhin A. P., Parshakova Ya. N.* Numerical simulation of highly saline wastewater discharge into water objects to improve discharge devices // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2020. Vol. 61. P. 1250–1256. DOI: 10.1134/S002189442007007X
3. *Khayrulina E., Maksimovich N.* Influence of drainage with high contents of water-soluble salts on the environment in the Verkhnekamskoe potash deposit, Russia // *Mine Water and the Environment*. 2018. Vol. 37. P. 595–603. DOI: 10.1007/s10230-017-0509-6
4. *Lyubimova T., Lepikhin A., Parshakova Y., Bogomolov A., Lyakhin Y., Tiunov A.* Peculiarities of hydrodynamics of small surface water bodies in zones of active technogenesis (on the example of the Verkhne-Zyryansk reservoir, Russia) // *Water*. 2021. Vol. 13. 1638. DOI: 10.3390/w13121638
5. *Lepikhin A. P., Voznyak A. A., Lyubimova T. P., Parshakova Ya. N., Lyakhin Yu. S., Bogomolov S. V.* Studying the formation features and the extent of diffuse pollution formed by large industrial complexes: Case study of the Solikamsk-Berezniki industrial hub // *Water Resources*. 2020. Vol. 47. P. 744–750. DOI: 10.1134/S0097807820050127
6. *Lepikhin A. P., Venitsianov E. V., Lyubimova T. P., Tiunov A. A., Parshakova Ya. N., Lyakhin Yu. S., Bogomolov A. V.* Effects of the vertical heterogeneity of water masses on the stability of industrial water supply in industry-intensive areas // *Trudy KarNTs RAN – Transactions of the Karelian Research Centre of the Russian Academy of Sciences*. 2021. N. 4. P. 53–63. DOI: 10.17076/lim1419
7. *Bogomolov A. V., Lepikhin A. P., Lyakhin Yu. S., Grebeneva M. G.* Osobennosti kolebaniy vertikal'nykh struktur poley mineralizatsii v kamskom vodokhranilishche v period letney mezheni v rayone g. Berezniki [Peculiarities of fluctuations in the vertical structures of mineralization fields in the Kama reservoir during the summer low water period near Berezniki] // *Gornoye echo*. 2021. N. 4 (85). P. 3–11.

Тепловая конвекция в наклонном слое пористой среды, насыщенной жидкостью, при вертикальном градиенте температуры

Т. П. Любимова^{a,b}, И. Д. Муратов^b, И. С. Шубенков^{a,b}

^a Институт механики сплошных сред УрО РАН,
614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1

^b Пермский государственный национальный исследовательский университет,
614990, Пермь, ул. Букирева, 15
email: lyubimovat@mail.ru

В данной работе исследуется возникновение и нелинейные режимы тепловой конвекции в наклонном пористом слое, насыщенном жидкостью. Слой находится в поле силы тяжести и подвержен строго вертикальному градиенту температуры. Эта проблема важна для геологических приложений. Линейная устойчивость теплопроводного режима к двумерным возмущениям изучена ранее Колесниковым и Любимовым. В первой части работы численно методом конечных разностей исследуются двумерные нелинейные режимы конвекции, возникающие после потери устойчивости теплопроводного режима. Во второй части работы рассматривается линейная устойчивость теплопроводного режима по отношению к трехмерным возмущениям. Установлено, что при любом угле наклона слоя трехмерные возмущения более опасны, чем двумерные, а наиболее опасные возмущения имеют форму продольных валов. Для угла наклона слоя $\alpha < 45^\circ$ волновое число критических возмущений равно нулю, а при $\alpha > 45^\circ$ отлично от нуля. Численные расчеты методом конечных объемов в рамках полного трехмерного нелинейного подхода подтверждают выводы линейного анализа устойчивости.

Ключевые слова: тепловая конвекция; пористая среда; наклонный слой; вертикальный градиент температуры

Thermal convection in an inclined fluid-saturated porous layer subjected to vertical temperature gradient

T. P. Lyubimova^{a,b}, I. D. Muratov^b, I.S. Shubenkov^{a,b}

^a Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS,
1 Akademika Koroleva St., 614013, Perm

^b Perm State University, 15 Bukireva St., 614990, Perm
email: lyubimovat@mail.ru

In this paper, the onset and non-linear regimes of thermal buoyancy convection in an inclined porous layer saturated with fluid are studied. The layer is subject to a gravitational field and a strictly vertical temperature gradient. This problem is important for geological applications. The linear stability of the heat-conductive

regime to two-dimensional perturbations was previously studied by Kolesnikov & Lyubimov. In the first part of work, two-dimensional nonlinear convection regimes that arise after the loss of stability of the heat-conductive regime are investigated numerically, using the finite difference method. In the second part of the paper, the linear stability of the heat-conductive regime to three-dimensional perturbations is considered. It has been found that for any layer inclination angle, three-dimensional perturbations are more dangerous than two-dimensional ones, and the most dangerous perturbations have the form of longitudinal rolls. For the layer inclination angle $\alpha < 45^\circ$, the wavenumber of critical perturbations is equal to zero and for $\alpha > 45^\circ$ it differs from zero. Numerical calculations by the finite volume method within the framework of the full three-dimensional nonlinear approach confirm the conclusions of the linear stability analysis.

Keywords: thermal convection; porous medium; inclined layer; vertical temperature gradient

1. Введение

Тепловая конвекция в пористой среде во многих случаях существенно отличается от конвекции в однородной жидкости. Задача о тепловой конвекции в наклонном пористом слое, насыщенном жидкостью, широко исследовалась для случая, когда границы слоя поддерживаются при постоянных разных температурах и механическое равновесие невозможно. При любом сколь угодно малом числе Релея существует стационарное конвективное движение. Для бесконечного наклонного слоя основное течение является плоскопараллельным [1–3]. Исследуется линейная устойчивость основного течения.

Колесников и Любимов [4] исследовали тепловую конвекцию в наклонном пористом слое, насыщенном жидкостью, для случая, когда в слое создается строго вертикальный градиент температуры. Такие граничные условия могут быть важны для геологических приложений [5], в частности, такая ситуация может возникнуть в случае наклонного насыщенного жидкостью пористого слоя в горной породе, подверженной геотермическому температурному градиенту. Показано, что при любой ориентации слоя, кроме строго вертикальной, наиболее опасны ячеистые возмущения, и только для вертикального слоя неустойчивость носит длинноволновый характер.

В первой части работы исследуются нелинейные режимы двумерной тепловой конвекции в наклонном пористом слое при строго вертикальном градиенте температуры. Вторая часть статьи посвящена анализу возникновения и развития трехмерных режимов конвекции.

2. Постановка задачи

Рассмотрим тепловую конвекцию в бесконечно длинном слое пористой среды, насыщенном жидкостью и наклоненном под углом α к вертикали. Слой находится в гравитационном поле. Границы слоя твердые и идеально теплопроводные. Распределение температуры на границах соответствует строго вертикальному постоянному градиенту температуры в слое.

Для описания тепловой конвекции в насыщенном жидкостью пористом слое будем использовать модель Дарси-Буссинеска [6]. Запишем уравнения в безразмерном виде:

$$-\nabla p - \vec{v} + C T \vec{\gamma} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + C \vec{v} \nabla T = \Delta T, \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0.$$

Здесь \vec{v} – скорость конвективной фильтрации в пористой среде, T – отклонение температуры от принятой за начало отсчета средней температуры, p – отклонение давления от гидростатического давления, соответствующего средней температуре, \vec{j} – единичный вектор, направленный вертикально вверх, $C^2 \equiv g\beta Ah^2 K / (\nu\chi) = Ra_p$, Ra_p – число Рэлея; в качестве единиц длины, времени, скорости, температуры и давления выбраны h , $h^2(\rho c_p)_s / \kappa_s$, $(g\beta AK \chi \nu^{-1})^{1/2}$, Ah , $(g\beta Ah^2 K^{-1} \chi \nu \rho_l^2)^{1/2}$, где $\chi = \kappa_s / (\rho c_p)_l$, K – коэффициент проницаемости среды, κ_s – эффективная теплопроводность пористой среды, насыщенной жидкостью, параметры, обозначенные нижним индексом « l », относятся к жидкости, нижним индексом « s » к пористой среде. Остальные обозначения являются общепринятыми..

Граничными условиями на границах слоя являются условия непроницаемости и распределение температуры, соответствующее постоянному вертикальному градиенту температуры в жидкости, насыщающей пористую среду:

$$v_n = 0, \quad \nabla T \times \vec{j} = 0.$$

Сформулированная выше задача допускает решение, соответствующее состоянию механического равновесия:

$$\vec{v}_0 = 0, \quad \nabla T_0 = -\vec{j}, \quad \nabla p_0 = \sqrt{Ra_p} T_0 \vec{j}. \quad (2)$$

3. Нелинейные двумерные режимы конвекции

Для изучения нелинейных режимов конвекции, перепишем задачу (1), представив поля скорости, температуры и давления в виде сумм полей \vec{v}_0 , T_0 , p_0 , соответствующих состоянию механического равновесия, и полей \tilde{v} , \tilde{T} , \tilde{p} , соответствующих отклонению от этого состояния. Ограничимся рассмотрением двумерных нелинейных режимов тепловой конвекции в области, являющейся ячейкой бесконечно протяженного слоя. В этом случае удобно ввести функцию тока:

$$\tilde{v}_x = \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad \tilde{v}_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

Уравнения в терминах Ψ , \tilde{T} , имеют следующий вид:

$$\Delta \Psi + C \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} \sin \alpha + \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} \cos \alpha \right) = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + C \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} \right) = \Delta \tilde{T} - C \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \sin \alpha + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cos \alpha \right).$$

Граничные условия:

$$z = \pm 1: \quad \Psi = 0, \quad \tilde{T} = 0. \quad (4)$$

и периодические условия на боковых границах.

Задача решалась методом конечных разностей с использованием явной схемы второго порядка точности по пространственным переменным. В основных расчетах использовалась равномерная сетка с квадратными ячейками 1/30 линейного размера.

Численные расчеты, выполненные для различных углов наклона слоя при низких надкритичностях, дали значения критического числа Рэлея, близкие к результатам [4], полученным из линейной теории устойчивости.

Обсудим более подробно результаты расчетов при угле наклона, равном 45° . Как показали расчеты, вблизи порога устойчивости зависимость исследуемой интегральной характеристики потока хорошо описывается корневой законом (рис. 1).

Как показано Колесниковым и Любимовым [4], при любом угле наклона слоя строго вертикальные границы между конвективными валами соответствуют критическим течениям, а расстояние между валами в горизонтальном направлении (не в продольном направлении) не зависит от α и равно одной или двум толщинам слоя. Конвективные вихри разных направлений циркуляции эквивалентны.

Проведенные нами нелинейные численные расчеты показали, что вблизи порога конвекции структура течения близка к найденной Колесниковым и Любимовым [4], однако уже при низкой надкритичности эквивалентность между вихрями разных направлений циркуляции нарушается и границы между вихрями перестают быть строго вертикальными. При дальнейшем увеличении надкритичности неэквивалентность вихрей разного направления возрастает.

При некотором значении числа Рэлея $Ra_p = Ra_{p*}$ стационарное движение теряет устойчивость и сменяется стационарными колебаниями. При Ra_p , близких к Ra_{p*} , форма колебаний близка к синусоидальной. При дальнейшем увеличении числа Рэлея колебания приобретают вид, типичный для релаксационных колебаний (рис. 2). При этом на части периода колебаний движение в слое сквозное, функция тока всюду имеет один и тот же знак.

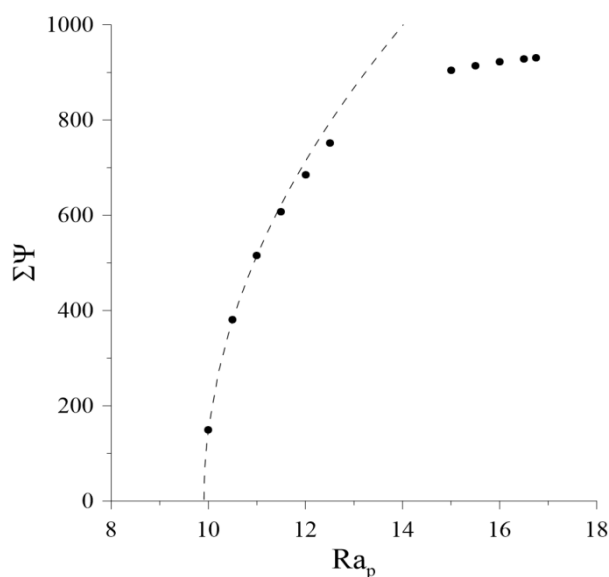


Рис. 1. Зависимость суммы модулей функции тока в полости от числа Рэлея для $\alpha = 45^\circ$ (точки – численные данные, штриховая линия – корневая зависимость)

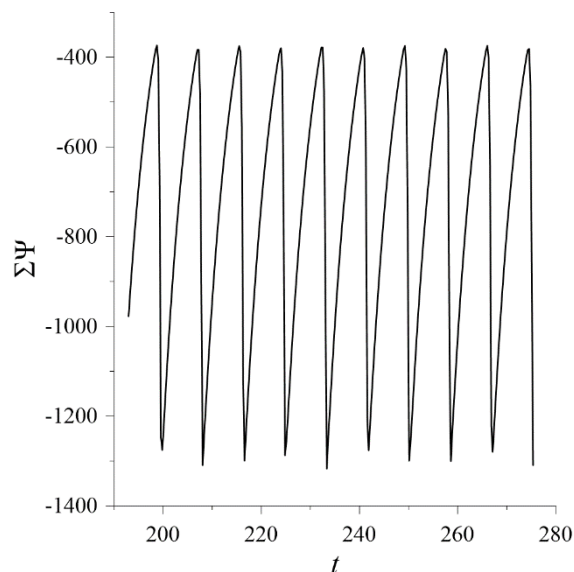


Рис. 2. Релаксационные колебания при $Ra_p = 19.5$

Период колебаний растёт с увеличением Ra_p (рис. 3). При определённом значении Ra_p ($Ra_{p0} = 2\pi^2 \approx 19.7$ для $\alpha = 45^\circ$) он стремится к бесконечности и стационарные колебания сменяются неограниченным экспоненциальным монотонным ростом интенсивности движения со временем (рис. 4), а критическое движение становится близким к плоскопараллельному.

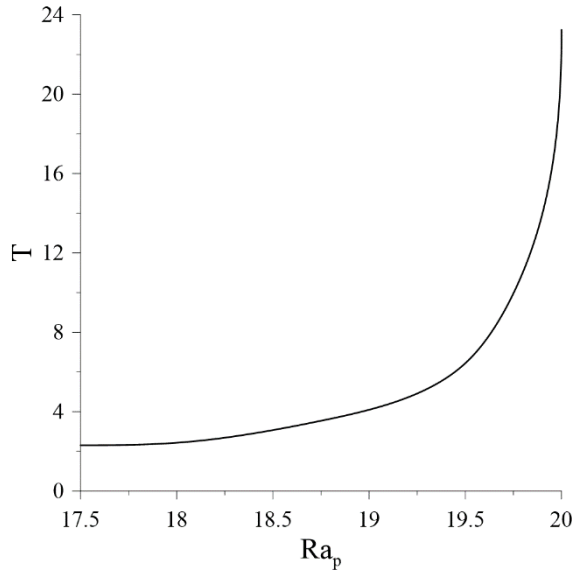


Рис. 3. Зависимость периода колебаний от числа Рэлея

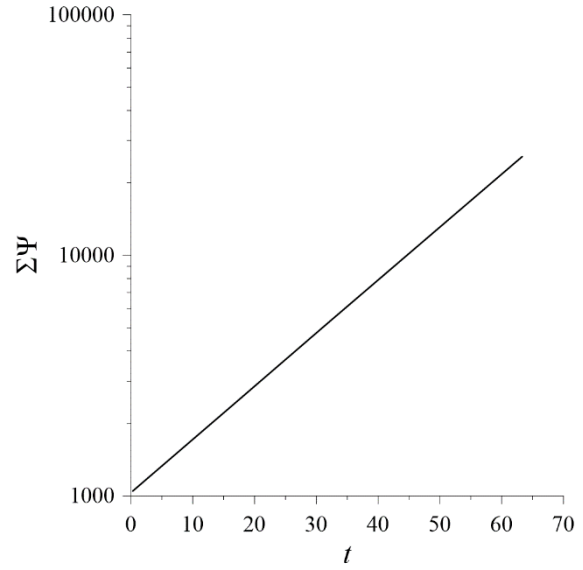


Рис. 4. Экспоненциальный рост интенсивности потока со временем при $Ra_p = 19.7$

4. Линейная устойчивость механического равновесия по отношению к трехмерным возмущениям

Рассмотрим теперь устойчивость механического равновесия по отношению к трехмерным возмущениям. Запишем линеаризованные уравнения малых трехмерных возмущений. Исключая из этих уравнений v_y, v_z и p , и вводя периодические по y и z нормальные возмущения, получаем систему уравнений для амплитуд возмущений x -компоненты скорости $u(x)$ и температуры $\theta(x)$ в виде:

$$\Delta u + iak C \theta' \cos \alpha - k^2 C \theta \sin \alpha = 0, \quad (5)$$

$$\Delta \theta - C u \sin \alpha + i C \frac{a}{k} u' \cos \alpha + C^2 (1 - a^2) \theta \cos^2 \alpha = 0,$$

где $\Delta = d^2 / dx^2 - k^2$, $k = (k_y^2 + k_z^2)^{1/2}$, $a = k_z / k$ – параметр трехмерности, штрих означает производную по x .

Граничные условия для u и θ имеют вид:

$$x = \pm 1: \quad u = 0, \quad \theta = 0. \quad (6)$$

Для случая валов с осями, параллельными оси z (продольные валы, $a = 0$) можно получить зависимость критического числа Рэлея от волнового числа и угла наклона слоя в явном виде:

$$Ra_p = \frac{(\pi^2 + 4k^2)^2}{4(\pi^2 \cos^2 \alpha + 4k^2)}. \quad (7)$$

Из (7) следует, что при $\alpha > \pi/4$ реализуется неустойчивость по отношению к возмущениям с конечной длиной волны и минимум нейтральной кривой соответствует:

$$k_m = (1/2)\pi\sqrt{-\cos 2\alpha}, \quad Ra_{pm} = \pi^2 \sin^2 \alpha. \quad (8)$$

При $\alpha < \pi / 4$ реализуется длинноволновая неустойчивость и критическое число Рэлея определяется выражением:

$$Ra_{p0} = \pi^2 / (4 \cos^2 \alpha). \quad (9)$$

Для произвольных значений a задача (5)–(6) решалась численно путем построения фундаментальной системы решений. Результаты вычислений приведены на рис. 5 и рис. 6. Как видно из рис. 5, абсолютный минимум критического числа Рэлея соответствует возмущениям с $a = 0$, причем эти возмущения являются наиболее опасными во всем диапазоне углов наклона слоя. Штриховая линия разделяет области параметров, где наиболее опасны ячеистые и длинноволновые возмущения.

Из рис. 6 видно, что при $\alpha < 45^\circ$ наиболее опасны длинноволновые возмущения, а при $\alpha > 45^\circ$ за неустойчивость ответственны возмущения конечной длины волны. Для $a = 1$ (поперечные валы) может реализовываться только ячеистая неустойчивость. По мере приближения угла наклона слоя к горизонтали разница значений волнового числа для валов разной ориентации уменьшается. Поперечные валы ($a = 1$) могут быть длинноволновыми только в случае вертикального слоя ($\alpha = 0$). При любом другом угле наклона слоя поперечные возмущения становятся ячеистыми.

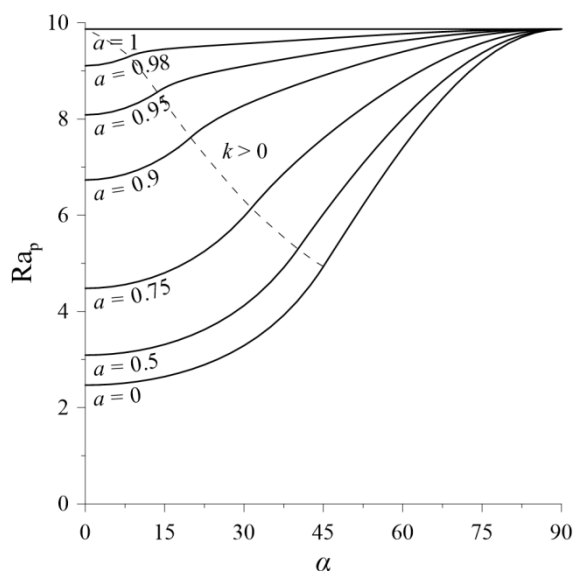


Рис. 5. Зависимости минимального критического числа Рэлея от угла наклона слоя

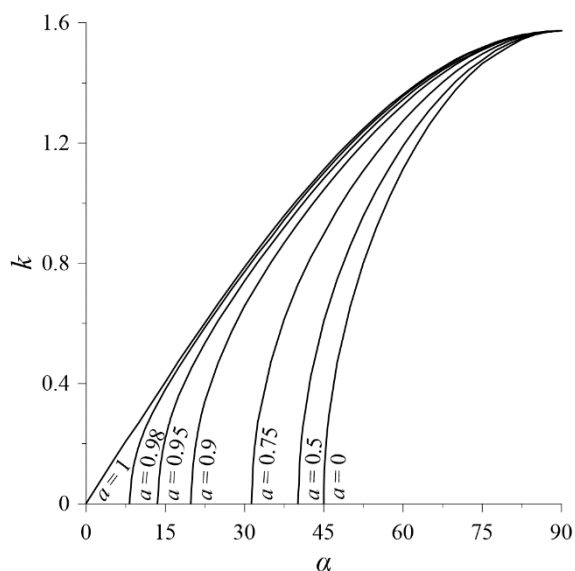


Рис. 6. Зависимости критического волнового числа от угла наклона слоя

5. Трехмерные нелинейные режимы конвекции

Для доказательства того, что в системе действительно реализуются надкритические режимы в виде продольных валов, были проведены нелинейные трехмерные расчеты с использованием пакета программ Ansys Fluent. На всех границах задавались условия непроницаемости. Распределения температуры на границах, перпендикулярных оси x (верхняя и нижняя границы), и перпендикулярных оси z , соответствуют вертикальному градиенту температуры (температура уменьшается вверх). Расчетная область имела соотношение сторон $1 \times 10 \times 10$ (x, y, z) и размер $10 \times 100 \times 100$ метров. Сетка использовалась прямоугольная, с разрешением $25 \times 125 \times 125$ узлов. Физические параметры жидкости и пористой матрицы соответствовали воде и песчанику. Начальные условия задавались в виде малых возмущений состояния

равновесия во всей расчетной области. Расчеты проводились как для адиабатических боковых границ, так и с условием вертикального градиента температуры на границах.

Расчеты показали, что при любом угле наклона слоя, кроме $\alpha = 90^\circ$ (горизонтальный слой), независимо от начальных условий устанавливается конвективное течение в виде валов с осями, параллельными оси z . Как видно из рис. 7, оси валов, полученные при расчетах, лежат в плоскости xu . Таким образом, результаты трехмерных нелинейных расчетов подтверждают, что в системе действительно реализуются продольные валы. Полученное число валов (определяющее волновое число возмущений) и критическое число Рэлея также согласуются с результатами линейной теории.

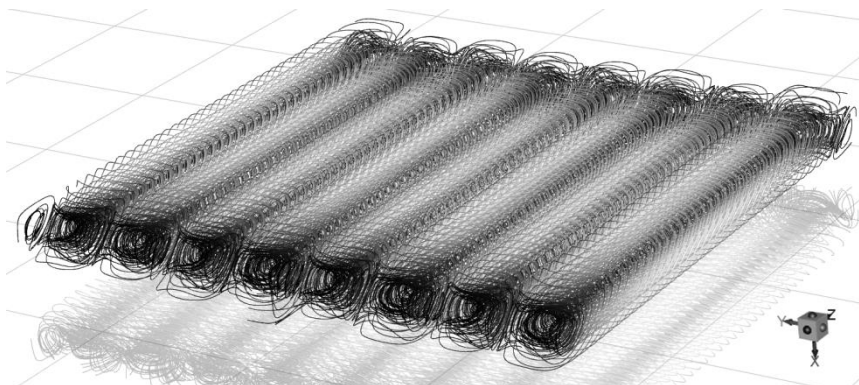


Рис. 7. *Линии тока для угла наклона слоя $\alpha = 65^\circ$ и $Ra_p = 7.72$ (диапазон скоростей от $9.29 \cdot 10^{-11}$ до $3.47 \cdot 10^{-8}$ м/с)*

Расчеты показали, что зависимость интенсивности движения от числа Рэлея хорошо описывается корневым законом примерно до полуторакратной надкритичности. Установлено также, что вдоль оси z имеется ненулевая составляющая скорости. Траектории частиц жидкости представляют собой окружности, плоскость которых параллельна вертикальному вектору \vec{y} , и вектор нормали которых направлен в сторону оси z , но смещён от неё на определённый угол. С ростом надкритичности этот угол увеличивается.

6. Заключение

1. Исследование двумерных режимов конвекции в наклонном слое пористой среды, насыщенной жидкостью показало, что в отличие от обычной жидкости длинноволновые возмущения наиболее опасны только в случае вертикального слоя.
2. Вблизи порога устойчивости при любой ориентации слоя, кроме вертикальной: (i) границы между конвективными валами строго вертикальны; (ii) расстояние между валками в горизонтальном направлении не зависит от угла наклона слоя и равно толщине слоя или двум толщинам слоя; (iii) конвективные вихри разных направлений циркуляции эквивалентны. Однако уже при низкой надкритичности эквивалентность вихрей разного направления циркуляции нарушается и границы между вихрями перестают быть строго вертикальными.
3. При определенном значении числа Рэлея стационарное течение становится неустойчивым и сменяется стационарными колебаниями. При незначительном превышении этого значения форма колебаний близка к синусоидальной, а при дальнейшем увеличении Ra_p становится близкой к типичной форме релаксационных колебаний.

4. При приближении к значению Ra_{p0} , при котором, согласно теории линейной устойчивости, теплопроводное состояние становится неустойчивым к длинноволновым возмущениям ($Ra_{p0} = 2\pi^2$ для $\alpha = 45^\circ$), период колебаний стремится к бесконечности, стационарные колебания сменяются экспоненциальным монотонным ростом интенсивность движения со временем, и движение становится близким к плоскопараллельному.
5. Анализ линейной устойчивости теплопроводного состояния по отношению к трехмерным возмущениям показал, что абсолютный минимум критического числа Рэлея реализуется при $a = 0$ (продольные валы). Эти возмущения являются наиболее опасными во всем диапазоне углов наклона слоя. Получено аналитическое выражение для кривой нейтральной устойчивости.
6. При угле наклона слоя $\alpha < 45^\circ$ в системе реализуются длинноволновые возмущения, а при $\alpha > 45^\circ$ – ячейстые.
7. Нелинейные трехмерные расчеты подтвердили, что в данной системе реализуются продольные валы. Численные данные о критическом числе Рэлея и критическом волновом числе согласуются с результатами линейной теории устойчивости.

Список литературы

1. Rees D. A. S., Bassom A. P. The onset of Darcy-Benard convection in an inclined layer heated from below // *Acta Mechanica*. 2000. Vol. 144. P. 103–118. DOI: 10.1007/BF01181831
2. Barletta A., Storesletten L. Thermoconvective instabilities in an inclined porous channel heated from below // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2011. Vol. 54. P. 2724–2733. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2011.03.020
3. Rees D. A. S., Barletta A. Linear instability of the isoflux Darcy-Bénard problem in an inclined porous layer // *Transport in Porous Media*. 2011. Vol. 87. P. 665–678. DOI: 10.1007/s11242-010-9707-4
4. Kolesnikov A. K., Lyubimov D. V. On the convective instability of a liquid in an inclined layer of a porous medium // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 1973. Vol. 14. P. 400–404. DOI: 10.1007/BF00850957
5. Simmons C. T., Kuznetsov A. V., Nield D. A. Effect of strong heterogeneity on the onset of convection in a porous medium: Importance of spatial dimensionality and geologic controls // *Water Resources Research*. 2010. Vol. 46. W09539. DOI: <https://doi.org/10.1029/2009WR008606>
6. Nield D. A., Bejan A. *Convection in Porous Media*. Springer, 2006. 640 p.

Электромагнитное управление процессом кристаллизации цилиндрических слитков

А. Д. Мамыкин, Г. Л. Лосев

Институт механики сплошных сред УрО РАН,
614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1
email: mad@icmm.ru

В данной работе экспериментально исследуется процесс кристаллизации модельной жидкости (сплава галлий–цинк–олово) в цилиндрическом объеме при воздействии охватывающего бегущего магнитного поля. Технология ультразвуковой доплеровской анемометрии применяется не только для измерения профилей скорости вдоль области, но и для восстановления и анализа формы фронта кристаллизации.

Ключевые слова: кристаллизация; электромагнитное перемешивание; ультразвуковая доплеровская анемометрия

Electromagnetic control of the crystallization process of cylindrical ingots

A. D. Mamykin, G. L. Losev

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS,
1 Akademika Koroleva St., 614013, Perm
email: mad@icmm.ru

In this work, the crystallization process of a model liquid (gallium–zinc–tin alloy) in a cylindrical volume under the influence of an enveloping traveling magnetic field is experimentally studied. The technology of ultrasonic Doppler anemometry is used not only to measure velocity profiles along the cavity, but also to reconstruct and analyze the shape of the crystallization front.

Keywords: crystallization; electromagnetic stirring; ultrasonic doppler anemometry

1. Введение

Производство сплавов с особыми свойствами является одной из приоритетных областей металлургии в наши дни. Перемешивание металлов в ходе процесса кристаллизации приводит к повышению механической прочности слитков, гомогенизации распределения примесных включений и измельчению зерна металла [1–3]. На практике распространение получил метод бесконтактного перемешивания металла за счёт приложения бегущих или вращающихся магнитных полей (БМП и ВМП) в замкнутых объёмах [4] или в процессе транспортировки металла через технологические каналы [5]. Бесконтактная генерация потока расплавленного металла полезна при непрерывном литье. Кроме того, широко исследуется применение перемешивателей для изготовления цилиндрических слитков на машинах полунепрерывного литья алюминия [6].

Переменное магнитное поле создаёт в проводящей среде вихревые токи. Взаимодействие этих токов с исходным магнитным полем приводит к генерации

электромагнитной силы и, как следствие, вихревых течений в жидком металле. Течения повышают эффективность теплопереноса в расплаве и сглаживают фронт кристаллизации [7, 8]. Модуляции магнитного поля позволят снизить энергозатраты в процессе обработки металла, а также потенциально повысят эффективность перемешивания.

Экспериментальное изучение процессов в электромагнитных перемешивателях сопряжено с рядом трудностей ввиду высокой температуры плавления и химической активности большинства металлических сплавов. Существующие оптические методы (например, PIV) не могут быть использованы для этой цели из-за оптической непрозрачности жидких металлов. В силу практической сложности изучения процессов в реальных технологических установках возникает необходимость в лабораторном моделировании исследуемых устройств, в том числе, с использованием легкоплавких сплавов. По этой причине оправдано применение ультразвукового доплеровского анемометра (УДА). Эта технология широко использовалась в подобных исследованиях (см., например, [9–12]).

В данной работе экспериментально исследуется процесс кристаллизации модельной жидкости (сплава галлий–цинк–олово) в цилиндрическом объеме при воздействии охватывающего бегущего магнитного поля. Технология УДА применяется не только для измерения профилей скорости вдоль области, но и для восстановления и анализа формы фронта кристаллизации.

2. Методы и экспериментальная установка

Экспериментальная установка (рис. 1) включает в себя вертикальный цилиндрический канал 1, индукционный перемешиватель 2, систему коммутации перемешивателя 3, источник питания 4, измерительный модуль 5 и систему термостатирования 6. Канал выполнен из нержавеющей стали и имеет диаметр 96 мм и высоту 450 мм. Торцевые стенки канала (основания цилиндра) представляют собой плоские теплообменники и выполнены из луженой галлием меди (расстояние между ними 350 мм). В верхнем теплообменнике имеется 5 цилиндрических отверстий, в которые герметично вклеены датчики ультразвукового доплеровского анемометра. Теплообменники подключены к двум термостатам КРИО-ВТ-1 через систему вентиляей. Эта система обеспечивает циркуляцию теплоносителя вне теплообменников до установления заданной температуры в термостатах. После выхода на рабочий температурный режим, поворотом управляющих вентиляей теплоноситель подается в теплообменники рабочего канала. На термостатах заданы температуры $-22\text{ }^{\circ}\text{C}$ и $+19\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Канал заполнен жидким галлиевым сплавом $\text{Ga}_{86.3}\text{Zn}_{10.8}\text{Sn}_{2.9}$ (вес. %). Физические свойства жидкости при рабочей температуре: плотность 6150 кг/м^3 , коэффициент объёмного теплового расширения $9.63 \cdot 10^{-5}\text{ K}^{-1}$, кинематическая вязкость $3 \cdot 10^{-7}\text{ м}^2/\text{с}$, электропроводность $2.6 \cdot 10^6\text{ См/м}$, скорость звука в среде 2870 м/с .

Охватывающий индукционный перемешиватель генерирует в объёме жидкого металла течения за счёт воздействия бегущим магнитным полем, направленным вертикально вверх. Питание перемешивателя осуществляется от программируемого источника Pacific Smart Source 360-ASX. Источник позволяет независимым образом задавать напряжения на каждой из трёх фаз и изменять углы между фазными токами.

Измерение скорости течения жидкого металла, положения и формы фронта кристаллизации осуществлялось неинвазивно при помощи УДА DOP 2000, Signal Processing. Принцип действия УДА основывается на излучении ультразвуковых волновых пакетов, отражении звуковых волн от твёрдых частиц в жидкости и детектировании отраженного волнового сигнала. Звукоотражающими частицами в



Рис. 1. Фото экспериментальной установки: 1 – канал кристаллизатора, 2 – индукционный перемешиватель, 3 – система коммутации перемешивателя, 4 – источник питания, 5 – УДА, 6 – система термостатирования

галлиевом сплаве являются оксиды галлия, возникающие при контакте металла с кислородом атмосферы. Скорость течения жидкости определяется в соответствии с эффектом Доплера по сдвигу частот между излученным и отраженным ультразвуковыми сигналами. Положение фронта кристаллизации определяется по уровню ультразвукового эхо. На границе раздела фаз происходит скачок акустического сопротивления, что приводит к множественным вторичным переотражениям звуковых волн и выражается в появлении локального максимума на пространственном профиле эхо. Для каждого датчика УДА в каждый момент времени находилось положение данного локального максимума и строилась интегральная эволюция фронта кристаллизации со временем. Темп кристаллизации вычислялся как среднее от производных соответствующих временных рядов положения границы раздела отдельных датчиков УДА. В качестве характеристики однородности застывания металла вводится параметр неоднородности фронта кристаллизации P_{RMS} , определенный как среднеквадратичный разброс положения границы раздела фаз по показаниям пяти датчиков УДА.

3. Результаты

В ходе работ были получены зависимости темпа и неоднородности фронта кристаллизации от фаз токов питания перемешивателя. Продолжая и углубляя результаты, полученные для плоского слоя, мы рассматривали некоторые из тех же режимов питания, что и ранее для плоского слоя [13]. А именно: $\{\varphi_B = 0^\circ, \varphi_C = 0^\circ\}$, $\{\varphi_B = 120^\circ, \varphi_C = 240^\circ\}$ и $\{\varphi_B = 270^\circ, \varphi_C = 300^\circ\}$. Существенно трёхмерная топология задачи усложняет картину течений за счёт увеличения размерности пространства, что так же сказывается на процессе фазового перехода.

На основе показания датчиков УДА были восстановлены поля вертикальной компоненты скорости течений металлического расплава в двух взаимно перпендикулярных сечениях цилиндрического объёма. На рис. 2 приведены поля скорости для двух режимов питания перемешивателя: $\{\varphi_B = 120^\circ, \varphi_C = 240^\circ\}$ и $\{\varphi_B = 270^\circ, \varphi_C = 300^\circ\}$. Оба режима создают бегущее поле, сконцентрированное вблизи стенок полости и создающее подъемное течения на периферии и опускное в центре. Однако первый соответствует равномерному чередованию фаз $(0^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ, 300^\circ)$ и задаёт предсказуемое течение, представленное на рис. 2

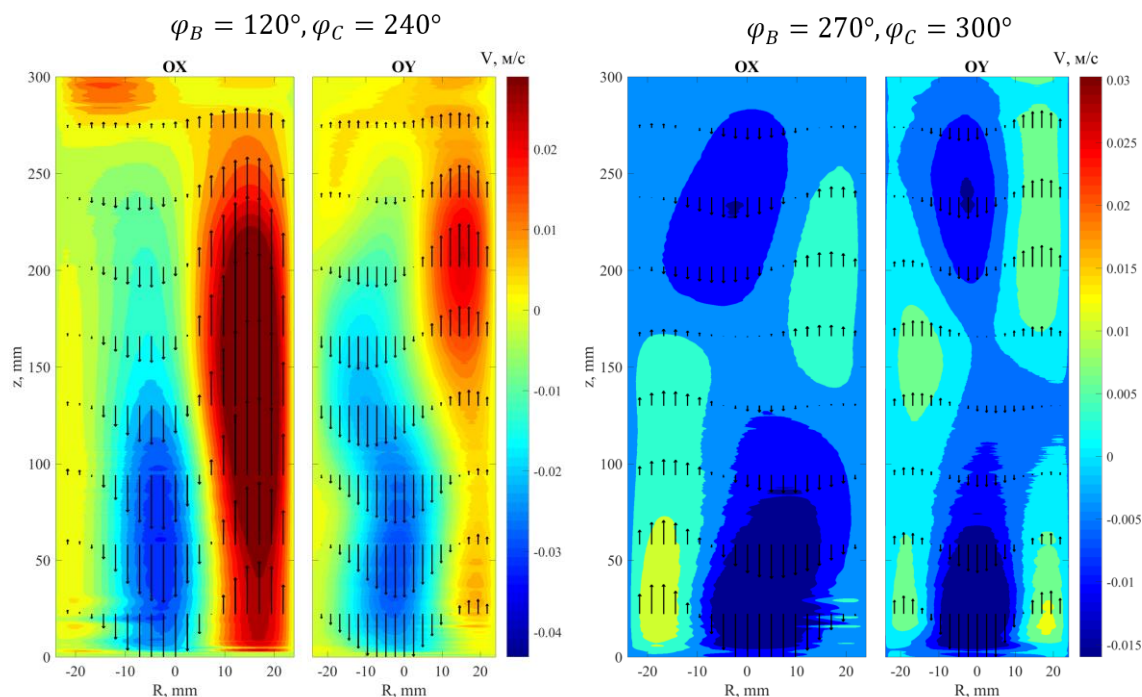


Рис. 2. Двумерные поля вертикальной компоненты скорости потоков жидкого металла в двух взаимно перпендикулярных сечениях рабочего цилиндрического объёма для двух режимов питания перемешивателя

слева. Течение на представленных сечениях достаточно несимметрично, что может быть обусловлено отличным от нуля углом наклона цилиндрической полости относительно силы тяжести. Второй режим характеризуется сильно неравномерным чередованием фаз ($0^\circ, 120^\circ, 300^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 90^\circ$), что приводит к менее выраженному среднему течению, вдвое меньшей его средней скорости (течение как бы «спотыкается») и, возможно, образованию дополнительных вихрей меньших масштабов.

Если теперь посмотреть на график зависимости параметра неоднородности фронта кристаллизации от режима питания перемешивателя (рис. 3), то видно, что режим с неравномерным чередованием фаз обеспечивает намного более однородную форму фронта кристаллизации (плоскую) на протяжении всего процесса, чем режим с равномерным чередованием фаз. На этом же графике для сравнения приведены данные для режима $\{\varphi_B = 0^\circ, \varphi_C = 0^\circ\}$, при котором магнитное поле является пульсирующим и не приводит к формированию крупномасштабных течений (однако возможны мелкомасштабные вихри). В этом режиме не осуществляется крупномасштабного перемешивания и, соответственно, наблюдается наиболее равномерная форма фронта кристаллизации на протяжении всего процесса. Видно, что с момента времени ~ 25 мин. (толщина твердой фазы – 50 из 350 мм) параметр неоднородности уравнивается для режимов $\{\varphi_B = 270^\circ, \varphi_C = 300^\circ\}$ и $\{\varphi_B = 0^\circ, \varphi_C = 0^\circ\}$ и далее принимает близкие значения.

Таким образом, показано, что с помощью изменения фазных углов токов питающих перемешиватель можно управлять процессом кристаллизации, подбирая баланс между интенсивностью перемешивания и равномерностью формы фронта кристаллизации.

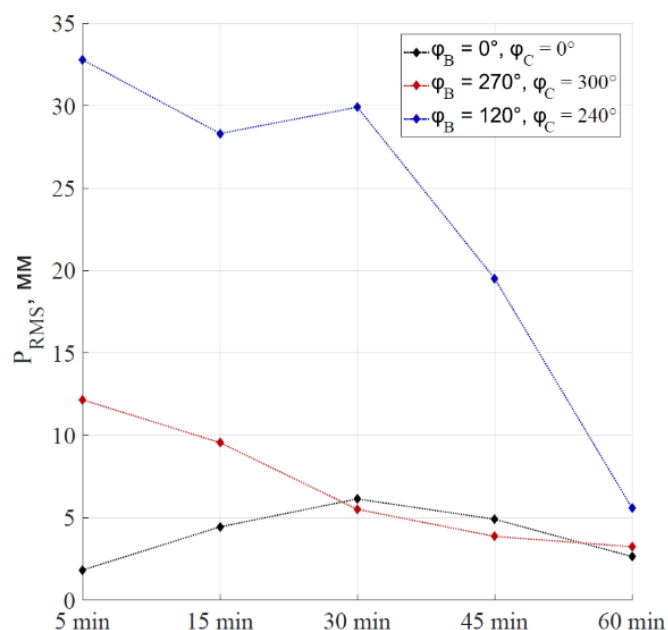


Рис. 3. Параметр неоднородности фронта кристаллизации в зависимости от фаз токов в индукционном перемешивателе для пяти моментов времени

4. Выводы

Показано, что с помощью изменения фазных углов токов питающих перемешиватель можно эффективно управлять процессом кристаллизации, подбирая баланс между интенсивностью перемешивания и равномерностью формы фронта кристаллизации. Среди рассмотренных в данной работе режимов оптимальным оказался режим с неравномерным чередованием фаз – при достаточно интенсивном перемешивании достигается равномерная форма фронта кристаллизации в течение всего процесса затвердевания. Технология ультразвуковой доплеровской анемометрии успешно применена не только для измерения профилей скорости вдоль области, но и для восстановления и анализа формы фронта кристаллизации.

Работа выполнена при поддержке Гранта президента МК-5936.2021.1.2.

Список литературы

1. Willers B., Eckert S., Nikrityuk P. A., Rübiger D., Dong J., Eckert K., Gerbeth G. Efficient melt stirring using pulse sequences of a rotating magnetic field: Part II. Application to solidification of Al-Si alloys // *Metallurgical and Materials Transactions B*. 2008. Vol. 39. N. 2. P. 304–316. DOI: 10.1007/s11663-008-9126-x
2. Scepanskis M., Jakovics A., Nacke B. Homogenization of non-conductive particles in EM induced metal flow in a cylindrical vessel // *Magnetohydrodynamics*. 2010. Vol. 46. N. 4. P. 413–423.
3. Denisov S., Dolgikh V., Khripchenko S., Kolesnichenko I., Nikulin I. The effect of traveling and rotating magnetic fields on the structure of aluminum alloy during its crystallization in a cylindrical crucible // *Magnetohydrodynamics*. 2014. Vol. 50 (4). P. 407–422.
4. Moffatt H. K. Electromagnetic stirring // *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*. 1991. Vol. 3. N. 5. P. 1336–1343. DOI: 10.1063/1.858062
5. Lielpeter Y. Liquid metal induction MHD machines. Zinatne, Riga, 1969. 246 p.
6. Mapelli C., Gruttadauria A., Peroni M. Application of electromagnetic stirring for the homogenization of aluminium billet cast in a semi-continuous machine //

- Journal of Materials Processing Technology. 2010. Vol. 210. N. 2. P. 306–314. DOI: 10.1016/j.jmatprotec.2009.09.016
7. *Hachani L., Zaidat K., Fautrelle Y.* Experimental study of the solidification of Sn–10 wt.%Pb alloy under different forced convection in benchmark experiment // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2015. Vol. 85. P. 438–454. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.01.145
 8. *Avnaim M. H., Mikhailovich B., Azulay A., Levy A.* Numerical and experimental study of the traveling magnetic field effect on the horizontal solidification in a rectangular cavity part 1: Liquid metal flow under the TMF impact // International Journal of Heat and Fluid Flow. 2018. Vol. 69. P. 23–32. DOI: 10.1016/j.ijheatfluidflow.2017.11.003
 9. *Andreev O., Kolesnikov Y., Thess A.* Application of the ultrasonic velocity profile method to the mapping of liquid metal flows under the influence of a non-uniform magnetic field // Experiments in Fluids. 2009. Vol. 46. N. 1. P. 77–83. DOI: 10.1007/s00348-008-0540-2
 10. *Ben-David O., Levy A., Mikhailovich B., Azulay A.* 3D numerical and experimental study of gallium melting in a rectangular container // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2013. Vol. 67. P. 260–271. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2013.07.058
 11. *Kolesnichenko I., Pavlinov A., Khalilov R.* Movement of the solid-liquid interface in gallium alloy under the action of rotating magnetic field // Magnetohydrodynamics. 2013. Vol. 49. N. 1–2. P. 191–197.
 12. *Franke S., Rabiger D., Galindo V. Zhang Y., Eckert S.* Investigations of electrically driven liquid metal flows using an ultrasound Doppler flow mapping system // Flow Measurement and Instrumentation. 2016. Vol. 48. P. 64–73. DOI: 10.1016/j.flowmeasinst.2015.09.004
 13. *Losev G., Mamykin A., Eltishchev V., Sokolov I.* Adaptation of linear induction machine power supply to the tasks of liquid metal transportation and stirring // Magnetohydrodynamics. 2021. Vol. 57. N. 1. P. 85–94. DOI: 10.22364/mhd.57.1.7

Горизонтальная фильтрация смеси через замкнутую область пористой среды пульсационным потоком с учетом закупорки

Б. С. Марышев^{a,b}, Л. С. Клименко^{a,b}

^a Институт механики сплошных сред УрО РАН,
614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1

^b Пермский государственный национальный исследовательский университет,
614990, Пермь, ул. Букирева, 15
email: bmaryshev@mail.ru

Решена задача о выносе примеси пульсационным потоком из прямоугольной области пористой среды с учетом влияния гравитации. Транспорт примеси описан в рамках нелинейной МММ модели с учетом закупорки. Исследована устойчивость однородного горизонтального выноса примеси. Построены нейтральные кривые и карты устойчивости режима однородной пульсационной фильтрации в пространстве параметров системы. Показано, что возникает две моды возмущений колебательная и монотонная. Для достаточно узких областей наиболее опасной является монотонная мода. В случае длинной области наиболее опасной становится колебательная мода. Показано, что пульсации потока в случае узких областей приводят к повышению устойчивости, возникающие возмущение всегда синхронны и возможность управления ими ограничена. В случае длинных областей наблюдается параметрическое возбуждение неустойчивости. Зависимости критического значения числа Релея-Дарси от частоты представляют собой характерные «мешки». При этом у границы устойчивости выше порога всегда наблюдаются субгармонические или синхронные возмущения. Самый первый «мешок» соответствует субгармоническим колебаниям, тип возмущений чередуется. В этом случае возможности управления интенсивностью и частотой пульсаций концентрации намного шире, чем в случае отсутствия пульсаций.

Ключевые слова: концентрационная конвекция; закупорка; параметрическая неустойчивость

Horizontal filtration of the mixture by pulsating flow through a closed area of a porous medium with clogging

B. S. Maryshev^{a,b}, L. S. Klimenko^{a,b}

^a Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS,
1 Akademika Koroleva St., 614013, Perm

^b Perm State University, 15 Bukireva St., 614990, Perm
email: bmaryshev@mail.ru

The problem of removal of an admixture by a pulsating flow from a rectangular region of a porous medium under gravity is investigated. The solute transport is described within the nonlinear MIM model with clogging. The stability of a uniform horizontal seepage of an admixture has been studied. Neutral curves and stability maps are plotted in the space of system parameters. It is shown that two modes of perturbations arise: oscillatory and monotonic. For sufficiently narrow regions, the most dangerous is the monotonic one. In the case of a long region, the oscillatory mode becomes the most dangerous. It is shown that flow pulsations in the case of narrow regions lead to an increase in stability, the resulting disturbances are always synchronous and the possibility of controlling them is limited. In the case of long regions, parametric excitation of the instability is observed. Dependences of the critical value of the Rayleigh-Darcy number on frequency are characteristic "bags". In this case, subharmonic or synchronous perturbations are always observed near the stability boundary above the threshold. The very first "bag" corresponds to subharmonic oscillations, the type of perturbations alternates. In this case, the ability to control the intensity and frequency of the concentration pulsations is much wider than in the absence of pulsations.

Keywords: solutal convection; clogging; parametrical instability

1. Введение

Транспортные процессы в пористой среде сопровождаются взаимодействием примеси с твердым скелетом среды. В наиболее простых случаях эти взаимодействия пренебрегают, описывая транспорт в рамках стандартной модели адвекции диффузии (ADE) [1]. Такой подход противоречит многим экспериментальным данным появившимся за последние пятьдесят лет (см., например, [2]). Наиболее популярным в настоящее время подходом к описанию такого транспорта является концепция MIM (mobile/immobile media) [3]. В рамках этой концепции предполагается, что примесь можно разделить на два «фазы» мобильную (движущуюся вместе с потоком жидкости) и немобильную (связанную или адсорбированную). При этом транспорт примеси осуществляется за счет мобильной «фазы» и описывается моделью ADE с дополнительным слагаемым, описывающим отток примеси в неподвижную фазу. Поскольку концентрация описывается двумя функциями, то необходимо дополнительное уравнение, описывающее кинетику обмена примесью между фазами. Конкретный вид кинетического уравнения определяется характером взаимодействия примеси со скелетом среды. Наиболее универсальный механизм такого взаимодействия – физическая сорбция примеси на твердой поверхности пор, обеспечиваемая за счет Ван-дер-Ваальсовых [4] взаимодействий. В случае если объемная концентрация примеси существенно ниже объема порового пространства, применяют линейную MIM модель [5], которая использует линейную кинетику сорбции. В случае если концентрация примеси велика, приходится учитывать эффект насыщения неподвижной фазы. Поскольку осесть на стенку благодаря силам Ван-дер-Ваальса может конечный объем примеси необходимо ограничивать интенсивность адсорбционного потока, что приводит к нелинейной модели с Ленгмюровской изотермой сорбции в случае, когда достигнуто динамическое равновесие [6].

Стоит заметить, что описываемый транспортный процесс имеет обратное влияние на фильтрационный поток флюида через пористую среду. Само наличие неподвижной

фазы сокращает объем пор, что приводит к увеличению гидравлического сопротивления среды или падению проницаемости. Безусловно, проницаемость среды не определяется однозначно пористостью в общем виде. Однако, если пористость меняется медленно и не происходит механического «затыкания» пор, то можно использовать модель с однозначной зависимостью. Как показывают экспериментальные данные, наиболее универсальной моделью такого типа является соотношение Козени–Кармана [7].

В настоящей работе описанная выше модель транспорта примеси применяется к задаче о концентрационной конвекции в замкнутой области пористой среды, через которую фильтруется флюид в горизонтальном направлении.

2. Вывод основных уравнений математической модели фильтрации смеси

Для описания транспорта примеси в пористой среде рассмотрим некоторый объем насыщенной пористой среды V . Внутри выделенного объема есть пространство незанятое твердым веществом среды, объем V_0 такого пространства называют поровым. Когда через пористую среду протекает смесь, поровое пространство заполняется несущей жидкостью и примесью. Предположим, что часть примеси может оседать на стенках скелета пористой среды, тогда объем поры занят объемами трех компонент: объемом несущей жидкости V_l , объемом занимаемый примесью осевшей на стенке пор V_i и объем свободной примеси переносимой общим потоком несущей жидкости V_m .

Следовательно, тогда введем новую величину $V_p = V_l + V_m$ – текущий объем поры, т.е. объем пространства, в котором несущая жидкость и свободная примесь могут перемещаться. Поделим полученное выражение $V_0 = V_p + V_i$ на полный объем среды V .

$$\frac{V_0}{V} = \frac{V_p}{V} + \frac{V_i}{V}. \quad (2.1)$$

Здесь величина $\phi_0 = V_0/V$ является пористостью «чистой» среды без примеси. Отношение $V_p/V = \phi$ в свою очередь отражает текущую пористость среды, слагаемое $V_i/V = q$ определяет объемную концентрацию (на самом деле это пористость, но по историческим причинам назовем это слагаемое концентрацией) осевшей (неподвижной или адсорбированной) части примеси. Выразим в новых терминах текущую пористость, тогда равенство (1) перепишется, следующим образом:

$$\phi = \phi_0 - q. \quad (2.2)$$

Из выражения $V_p = V_l + V_m$ определим объемную концентрацию подвижной части примеси $-c = V_m/V_p$, для этого разделим V_p , тогда

$$1 = \frac{V_l}{V_p} + c, \quad (2.3)$$

где V_l/V_p является по смыслу объемной концентрацией несущей жидкости в текущем поровом пространстве. Запишем закон сохранения массы примеси.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{V_m}{V} + \frac{V_i}{V} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\phi c + q) = -\operatorname{div}(\phi \mathbf{J}_c). \quad (2.4)$$

Поток массы \mathbf{J}_c может быть связан только с подвижной составляющей примеси и выражается согласно закону Фика: $\mathbf{J}_c = -D\nabla c + \mathbf{v}c$, где D – эффективный коэффициент диффузии, \mathbf{v} – скорость жидкости в поре или поровая скорость. Подставив поток в (2.4) получим

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi c + q) = \operatorname{div}(\phi D\nabla c - \phi \mathbf{v}c). \quad (2.5)$$

Аналогичным образом можно записать закон сохранения массы жидкости:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{V_l}{V} \right) = \operatorname{div} \left(\phi D\nabla \left(\frac{V_l}{V} \right) - \mathbf{v} \left(\frac{V_l}{V} \right) \right), \quad (2.6)$$

перепишем (2.6) с учетом (2.3) в виде

$$\frac{\partial(\phi(1-c))}{\partial t} = \operatorname{div}(\phi D\nabla(1-c) - \mathbf{v}(1-c)), \quad (2.7)$$

суммируя выражения (2.5) и (2.7) с учетом (2.2), получим условие несжимаемости для фильтрации несжимаемой смеси:

$$\operatorname{div}(\phi \mathbf{v}) = \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (2.8)$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{v}\phi$ – скорость фильтрации. Таким образом, транспорт примеси описывается системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\phi c + q) &= \operatorname{div}(\phi D\nabla c - \mathbf{u}c); \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Система уравнений (2.9) незамкнута, требуется некоторое соотношение, позволяющее связать поле скорости фильтрации с внешними задаваемыми параметрами, а также уравнение, описывающее переход примеси из подвижного состояния в неподвижное, оно должно определять концентрацию q . Для связи скорости фильтрации с приложенным внешним давлением в присутствии неоднородности плотности, вызванной неоднородностью концентрации, воспользуемся соотношением Релея-Дарси [8]:

$$\frac{\eta}{\kappa(\phi)} \mathbf{u} = -\nabla p + \rho \beta_c \mathbf{g}c, \quad (2.10)$$

где $\kappa(\phi)$ – проницаемость среды, η – коэффициент динамической вязкости, ρ – плотность несущей жидкости, β_c – коэффициент концентрационного расширения, а \mathbf{g} – гравитационное ускорение. Предположим, что оседание частиц на стенку пор происходит достаточно медленно без существенного изменения формы зерна пористой среды, в этом случае проницаемость может быть описана как однозначная функция

пористости. Наиболее популярный способ такого описания дается уравнением Козени–Кармана [7]:

$$\kappa(\phi) = \gamma \frac{\phi^3}{(1-\phi)^2}, \quad (2.11)$$

где γ – параметр Козени–Кармана, зависящий от формы и распределения зерен среды. Переход примеси из подвижного состояния (фазы) в неподвижное будем описывать в рамках МІМ подхода [3, 5], что подразумевает разделение примеси на подвижную и неподвижную фазы. В достаточно общей формулировке переход примеси между фазами может быть описан кинетическим уравнением с Ленгмюровской изотермой, характеризующей состояние равновесия [4], а именно:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \alpha(q_0 - q)c - \beta q, \quad (2.12)$$

где α, β – коэффициенты адсорбции и десорбции соответственно. Кинетическое уравнение (2.12) соответствует нелинейной МІМ модели [7] и представляет собой эволюционное уравнение для переменной q . Его правая часть имеет слагаемое, содержащее максимально возможное значение концентрации примеси в неподвижной фазе, так называемую концентрацию насыщения немобильной компоненты примеси q_0 . При достижении равенства $q = q_0$ прекращается процесс адсорбции примеси.

Все выше перечисленные уравнения составляют полную замкнутую систему уравнений, которая описывает транспорт примеси в пористой среде с учетом закупорки:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\phi c + q) &= D \nabla \phi \nabla c + \phi D \Delta c - \mathbf{u} \nabla c, \\ \frac{\partial q}{\partial t} &= \alpha(q_0 - q)c - \beta q, \\ \mathbf{u} &= -\frac{\kappa(\phi)}{\eta}(\nabla p - \rho \beta_c \mathbf{g} c), \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \\ \kappa(\phi) &= \gamma \frac{\phi^3}{(1-\phi)^2}, \\ \phi &= \phi_0 - q. \end{aligned} \quad (2.13)$$

3. Постановка задачи

Рассмотрим двумерную фильтрацию смеси состоящей из несущего флюида и примеси через замкнутую прямоугольную область. Фильтрация обеспечивается заданным градиентом давления в горизонтальном направлении. Между верхней и нижней границами поддерживается постоянный перепад концентрации. Горизонтальные границы предполагаются непроницаемыми для флюида, а на боковых границах отсутствует диффузионный поток примеси (свободное втекание и вытекание). Принципиальная схема задачи приведена на рис. 1.

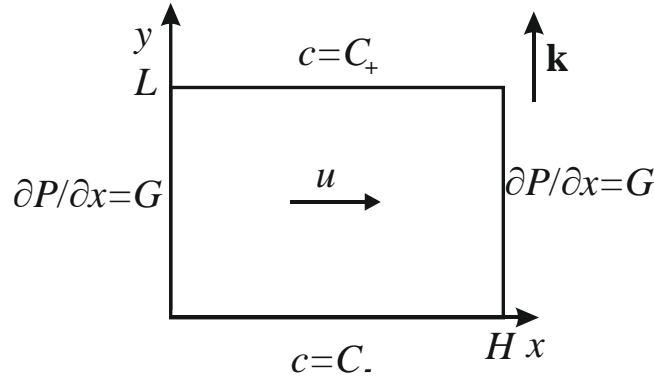


Рис. 1. Конфигурация задачи

Представим уравнения (2.13) в безразмерной форме, выберем следующие масштабы для переменных:

$$\begin{aligned} [L] &= L, \quad [T] = L^2 / D, \quad [u] = D\phi_0 / L, \quad [p] = GL, \\ [q] &= q_0, \quad [c] = C_0 = C_+ - C_-. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Тогда уравнения (2.13) принимают форму:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left((1 - \varsigma q) c + \frac{\varsigma}{C_0} q \right) &= \nabla (1 - \varsigma q) \nabla c + (1 - \varsigma q) \Delta c - \mathbf{u} \nabla c, \\ \frac{\partial q}{\partial t} &= a(1 - q)c - bc, \\ \mathbf{u} &= -\kappa(\phi)(Pe \nabla p + Rp \mathbf{k} c), \quad \text{div } \mathbf{u} = 0, \\ \kappa(\phi) &= \frac{\phi^3}{(1 - \phi)^2}, \quad \phi = \phi_0(1 - \varsigma q); \end{aligned} \quad (3.2)$$

где вектор \mathbf{k} – единичный вектор, направленный против поля тяжести. Система (3.2) содержит семь безразмерных параметров это безразмерные коэффициенты адсорбции и десорбции $a = C_0 \alpha L^2 / D$, $b = \beta L^2 / D$, число Пекле $Pe = GL\gamma / (D\phi_0\eta)$ – описывающая интенсивность напорной фильтрации, число Релея-Дарси $Rp = C_0 \rho \beta_c g \gamma L / (\eta D \phi_0)$ – описывающее интенсивность течения возникающего из-за сил плавучести. Так же присутствует параметр закупорки $\varsigma = q_0 / \phi_0 \leq 1$ – описывающий долю пористости, которая может быть занята немобильной примесью при полном насыщении немобильной фазы (максимально возможная закупорка), а так же пористость чистой среды ϕ_0 и характерная концентрация мобильной компоненты C_0 . Уравнения (3.2) должны быть дополнены следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} c|_{y=0} &= 0, \quad c|_{y=1} = C_0, \\ \partial c / \partial x|_{x=0} &= 0, \quad \partial c / \partial x|_{x=l} = 0, \\ \partial P / \partial x|_{x=0,l} &= -1, \quad \partial P / \partial y|_{y=0,l} = 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $l = H / L$ – геометрический параметр, описывающий соотношение сторон рассматриваемой области.

3.1. Основное состояние: однородная горизонтальная фильтрация

Будем искать решение задачи (3.2), (3.3) в следующей форме:

$$q = Q(y, t), \quad c = C(y, t), \quad \mathbf{u} = (u(y), 0). \quad (3.4)$$

Решение в основном состоянии дается следующими уравнениями:

$$u = Pe \frac{\phi_0^3 (1 - \zeta Q)^3}{(1 - \phi_0 (1 - \zeta Q))^2}, \quad P = -x + \frac{Rp}{Pe} \int C dy, \quad (3.5)$$

$$Q = \frac{aC}{aC + b}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(1 - \zeta \frac{aC}{aC + b} \right) \frac{\partial C}{\partial y} \right) = 0.$$

Последнее нелинейное уравнение задает распределение концентрации в вертикальном направлении и определяет распределения всех остальных величин. Примеры распределения концентрации для различных значений коэффициента адсорбции приведены на рис. 2.

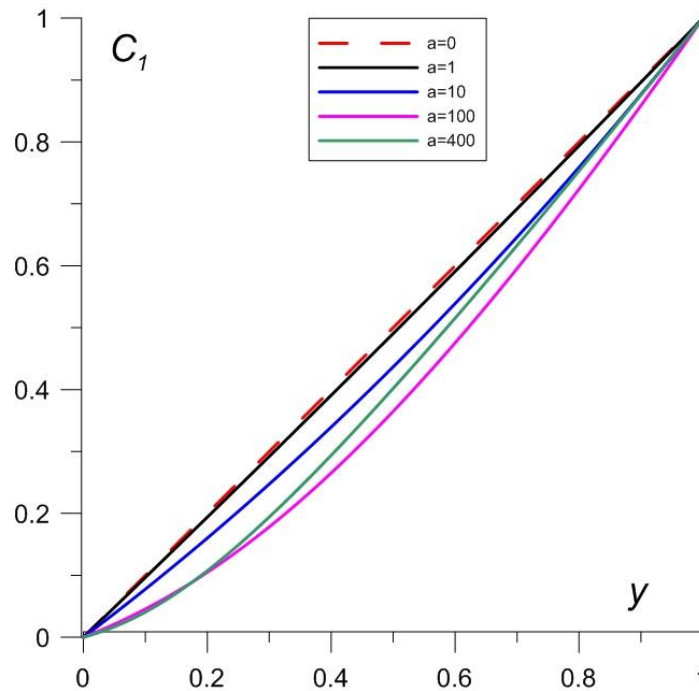


Рис. 2. Распределение мобильной концентрации вдоль вертикальной оси для различных параметров коэффициента адсорбции a . Значения остальных параметров $b = 1$; $\zeta = 0.8$; $\phi_0 = 0.4$

4. Линейная устойчивость основного состояния.

Рассмотрим малые возмущения состояния однородной горизонтальной фильтрации (3.5) в форме: $q = q + Q(y)$, $c = \tilde{c} + C(y)$, $\mathbf{u} = (u - \partial\psi/\partial y, \partial\psi/\partial x)$. Здесь ψ – функция тока для возмущений. В этом случае задача (3.2) с граничными условиями (3.3) с учетом линеаризации по возмущениям может быть записана в виде:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = & -\phi_0 \varsigma \frac{\kappa'}{\kappa} \frac{\partial Q}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} - Pe (\phi_0 \varsigma)^2 \frac{\partial Q}{\partial y} \left(\frac{\kappa'^2}{\kappa} - \kappa'' \right) q - \phi_0 \varsigma Pe \kappa' \frac{\partial q}{\partial y} + Rp \kappa \frac{\partial \tilde{c}}{\partial x}, \\
\frac{\partial \tilde{c}}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial t} \frac{\varsigma}{(1-\varsigma Q)} \left(\frac{1}{C_0} - C \right) = & - \frac{Pe \kappa}{(1-\varsigma Q)} \frac{\partial \tilde{c}}{\partial x} + \frac{1}{(1-\varsigma Q)} \frac{\partial C}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\varsigma}{(1-\varsigma Q)} \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} q + \\
& + \frac{\partial^2 \tilde{c}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{c}}{\partial y^2} - \frac{\varsigma}{(1-\varsigma Q)} \frac{\partial Q}{\partial y} \frac{\partial \tilde{c}}{\partial y} - \frac{\varsigma}{(1-\varsigma Q)} \frac{\partial C}{\partial y} \frac{\partial q}{\partial y},
\end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = a(1-Q)\tilde{c} - a\overline{qC} - b\overline{q},$$

$$\kappa = \frac{\phi^3}{(1-\phi)^2}, \quad \kappa' = \frac{\phi^2(\phi-3)}{(1-\phi)^3}, \quad \kappa'' = \frac{6\phi}{(1-\phi)^4}, \quad \phi = \phi_0(1-\varsigma Q).$$

Задача устойчивости (4.1) решалась методом построения фундаментальной системы решений. Предполагалось, что возмущения имеют нормальную форму $\tilde{c}, q, \psi \sim \exp(\lambda t + i\omega t)$, где λ – вещественный инкремент возмущений, а ω – частота возмущений. Две моды неустойчивости рассматривались отдельно: монотонная ($\omega = 0$) и колебательная ($\omega \neq 0$). В ходе решения задачи устойчивости определялись значения параметров соответствующих нейтральным возмущениям т.е. $\lambda = 0$. Полученные нейтральные кривые на плоскости параметров $Rp - Pe$ представлены на рис. 3, рис. 4 и рис. 5.

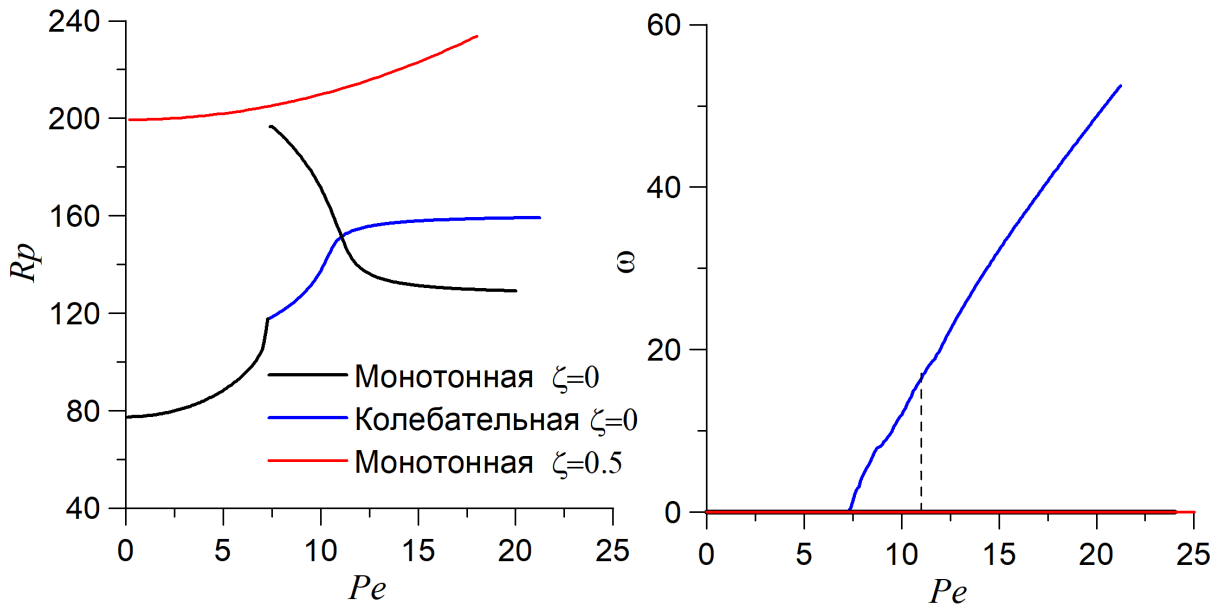


Рис. 3. Нейтральные кривые на плоскости $Rp - Pe$ (слева) и зависимость частоты нейтральных возмущений от числа Пекле (справа). Для случая отсутствия закупорки $\zeta = 0$ (черные – монотонная мода $\omega = 0$, синие – колебательная мода), для случая с учетом закупорки $\zeta = 0.5$ (красная – монотонная мода $\omega = 0$). Пунктирной линией указан переход к монотонной моде в качестве наиболее опасной. Значения остальных параметров $\phi_0 = 0.5$, $l = 1$, $a = 10$, $b = 5$, $C_0 = 0.1$

На рис. 3 представлены нейтральные кривые для случая квадратной области, рассмотрен случай отсутствия закупорки ($\zeta = 0$) и случай с учетом закупорки ($\zeta = 0.5$). Видно, что в отсутствие закупорки сосуществуют монотонная и колебательная моды возмущений, которые являются наиболее опасными в различных интервалах чисел Пекле. В случае отсутствия прокачки $Pe = 0$ возникает монотонная мода, что соответствует известному ранее решению [9]. Учет закупорки приводит к сильной стабилизации системы, при этом колебательная мода не наблюдается вплоть до чисел Пекле $Pe = 50$, для больших значений исследование не проводилось.

Результаты исследования устойчивости однородной прокачки через длинную область ($l = 3$) приведены на рис. 4 и рис. 5. Видно, что в длинной полости область существования колебательной моды намного шире, кроме того, она наблюдается даже в случае с учетом закупорки. При этом закупорка так же приводит к стабилизации системы.

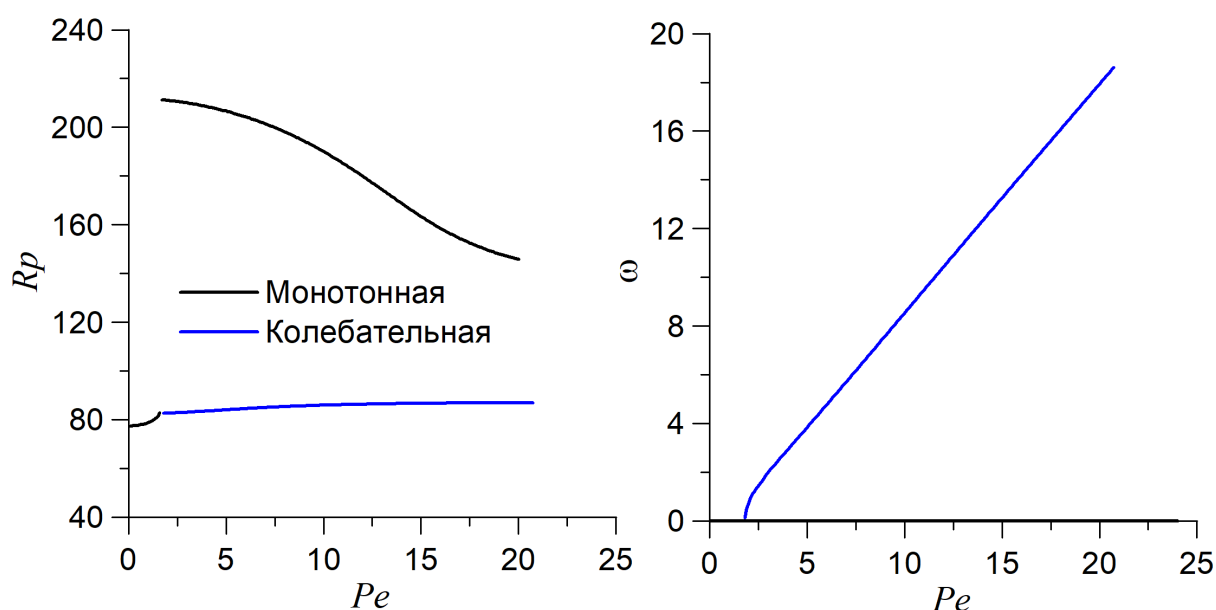


Рис. 4. Нейтральные кривые на плоскости $Rp - Pe$. (слева), и зависимость частоты нейтральных возмущений от числа Пекле (справа). Для случая отсутствия закупорки $\zeta = 0$ (черные – монотонная мода $\omega = 0$, синие – колебательная мода), $\phi_0 = 0.5$, $l = 3$

5. Влияние модуляции внешнего потока на устойчивость

Рассмотрим случай модулированного внешнего потока. То есть в качестве граничного условия для давления на боковых стенках области возьмем:

$$\left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{x=0,H} = -(G + G_a \sin \Omega^* t), \quad (5.1)$$

где G – среднее значение градиента давления, G_a – амплитуда модуляции, Ω^* – частота модуляции. В безразмерном виде граничное условие можно записать в следующем виде:

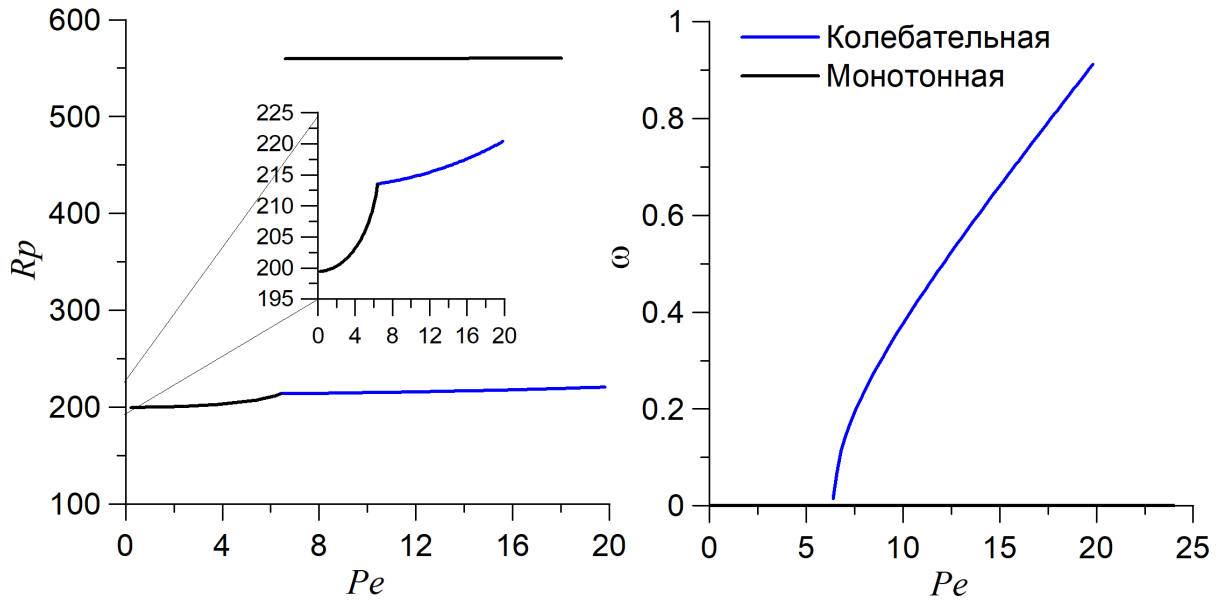


Рис. 5. Нейтральные кривые на плоскости $Rp-Pe$. (слева), и зависимость частоты нейтральных возмущений от числа Пекле (справа). Для случая с учетом закупорки $\zeta = 0.5$ (черные – монотонная мода $\omega = 0$, синие – колебательная мода). На вставке показан переход между модами. Значения остальных параметров $\phi_0 = 0.5$, $l = 3$, $a = 10$, $b = 5$, $C_0 = 0.1$

$$\left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{x=0,H} = - \left(1 + \frac{A}{Pe} \sin \Omega t \right), \quad (5.2)$$

где $A = G_a L \gamma / (D \phi_0 \eta)$ и $\Omega = \Omega^* L^2 / D$ – безразмерные амплитуда и частота модуляции. Замена граничного условия для давления в форме (3.3) на (5.2). Приводит к замене числа Пекле в уравнениях (3.2) и (4.1): $Pe \rightarrow Pe + A \sin(\Omega t)$, а так же к модификации решения для давления в основном состоянии:

$$P = -x \left(1 + \frac{A}{Pe} \sin \Omega t \right) + \frac{Rp}{Pe} \int C dy. \quad (5.3)$$

Решение нестационарной задачи (4.1) с учетом указанной замены производилось с помощью комбинации метода построения фундаментальной системы решений (ФСР) с методом Флоке. Как это принято для метода ФСР выбиралось некоторое количество ортогональных друг другу начальных условий, из них составлялся вектор – решение с неопределенными коэффициентами, количество которых равно количеству выбранных начальных условий. После этого вектор-решение численно интегрировался с помощью метода конечных разностей в течении одного периода модуляции потока. Предполагалось (согласно методу Флоке), что полученное после интегрирования решение равно начальному, умноженному на комплексный мультипликатор Флоке. Путем составления системы уравнений для неопределенных коэффициентов находилась характеристическая матрица задачи. Спектр собственных значений которой, совпадает со спектром мультипликаторов задачи. Далее итерационным методом определялся старший мультипликатор μ . Случаю нейтральных возмущений соответствует условие $|\mu| = 1$. Таким образом, возможны два варианта: μ –

действительное число ($\mu = \pm 1$) или же μ – комплексное. В первом случае говорят о явлении синхронизации собственных колебаний с внешней модуляцией, при этом случай $\mu = 1$ соответствует синхронной моде неустойчивости (наблюдаются колебания с частотой кратной частоте модуляции), а $\mu = -1$ соответствует субгармонической моде неустойчивости (наблюдаются колебания на полуцелой частоте по сравнению с частотой модуляции). Второй случай задает квазипериодическую моду неустойчивости, колебания наблюдаются на частоте несоизмеримой с внешней. Зависимости критического числа Релея от частоты модуляции представлены на рис. 6.

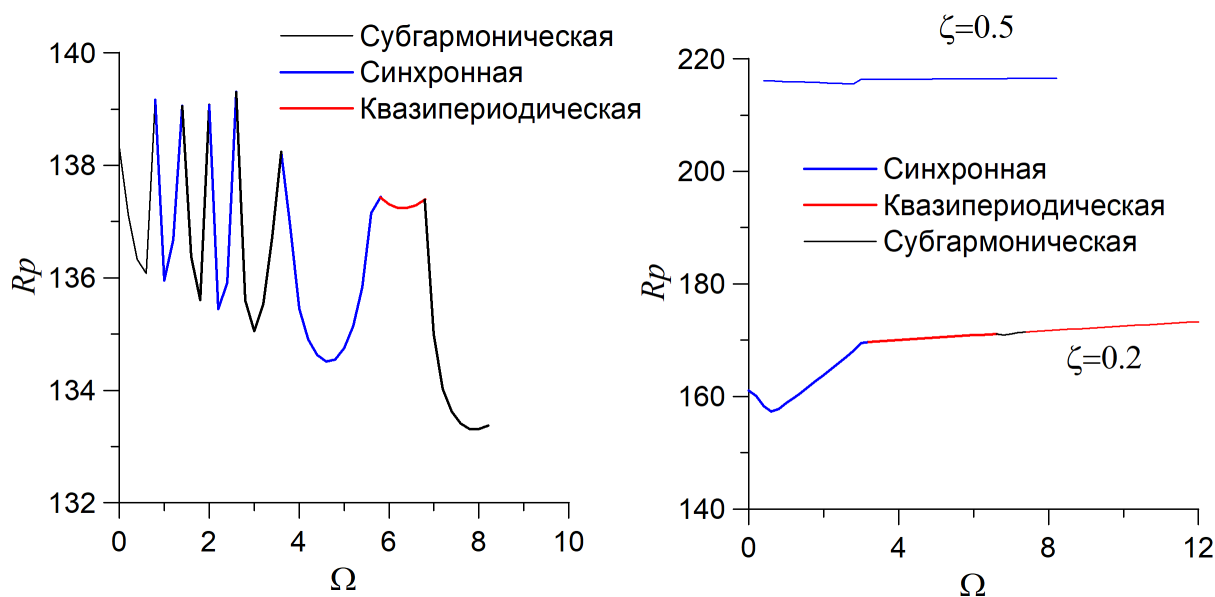


Рис. 6. Нейтральные кривые на плоскости $R_p - \Omega$. Для случаев без закуртки $\zeta = 0$ (слева) и с учетом закуртки $\zeta \neq 0$ (справа). Различные моды неустойчивости выделены цветом и указаны в легенде. Значения остальных параметров $\phi_0 = 0.5$, $l = 1$, $a = 10$, $b = 5$, $C_0 = 0.1$, $Pe = 10$, $A = 2$

Из рис. 6 видно, что в случае без закуртки наблюдаются классические «мешки» характерные для явления параметрического резонанса, при этом происходит черед мод неустойчивости. В случае сильной закуртки $\zeta = 0.5$ наблюдается только синхронная мода неустойчивости, что напрямую связано с отсутствием колебательной моды в случае без модуляции (см. рис.3). Для случая умеренной закуртки, наблюдается чередование мод неустойчивости, но преобладающей становится квазипериодическая мода, это связано со слабой зависимостью частоты собственных колебаний от параметров задачи (см. рис. 5).

6. Заключение

Рассмотрена задача об устойчивости однородной горизонтальной фильтрации смеси через замкнутую область пористой среды. Фильтрация обеспечивается заданием градиента давления на боковых границах области. Показано, что возникающая неустойчивость может иметь как монотонный, так и колебательный характер, при этом в узких областях наблюдается преимущественно монотонная неустойчивость, а в длинных колебательная. Поскольку, как известно из [10], колебательная неустойчивость возникает по причине сноса конвективных ячеек потоком, то

неудивительно, что в длинной области такое явление выражено ярче. Построены карты устойчивости в пространстве параметров задачи.

Рассмотрено влияние модуляции градиента давления на устойчивость однородной прокачки. Получены карты устойчивости в пространстве параметров системы. Показано, что в тех областях параметров, где наблюдалась монотонная устойчивость без модуляции, с учетом модуляции наблюдаются синхронные колебания. В областях параметров соответствовавших колебательной неустойчивости наблюдается чередование мод в зависимости от частоты модуляции. Так же показано, что учет закупорки существенно стабилизирует однородную фильтрацию, а также приводит к доминированию квазипериодической моды возмущений.

7. Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ грант № 20-11-20125.

Список литературы

1. *Einstein A.* On the theory of the Brownian movement // *Annalen der Physik.* 1906. Vol. 19 (4). P. 371–381.
2. *Bromly M., Hinz C.* Non-Fickian transport in homogeneous unsaturated repacked sand // *Water Resources Research.* 2004. Vol. 40 (7). WR002579. DOI: 10.1029/2003WR002579
3. *Deans H. A.* A mathematical model for dispersion in the direction of flow in porous media // *Society of Petroleum Engineers Journal.* 1963. Vol. 3 (1). P. 49–52. DOI: 10.2118/493-PA
4. *Basmadjian D.* The little adsorption book: A practical guide for engineers and scientists. Boca Raton: CRC Press, 1996. 140 p. DOI: 10.1201/9780203736487
5. *Van Genuchten M. T., Wierenga P. J.* Mass transfer studies in sorbing porous media I. Analytical solutions // *Soil Science Society of America Journal.* 1976. Vol. 40 (4). P. 473–480. DOI: 10.2136/sssaj1976.03615995004000040011x
6. *Selim H. M.* Prediction of contaminant retention and transport in soils using kinetic multireaction models // *Environmental Health Perspectives.* 1989. Vol. 83. P. 69–75. DOI: 10.1289/ehp.898369
7. *Carman P. C.* Fluid flow through granular beds // *Transactions of the Institution of Chemical Engineers.* 1937. Vol. 15. P. 150–166.
8. *Nield D. A., Bejan A.* Convection in porous media. Cham: Springer, 2017. 988 p.
9. *Horton C. W., Rogers Jr. F. T.* Convection currents in a porous medium // *Journal of Applied Physics.* 1945. Vol. 16 (6). P. 367–370. DOI: 10.1063/1.1707601
10. *Prats M.* The effect of horizontal fluid flow on thermally induced convection currents in porous mediums // *Journal of Geophysical Research.* 1966. Vol. 71 (20). P. 4835–4838. DOI: 10.1029/JZ071i020p04835

Численное исследование работы авиамодельного турбореактивного двигателя КJ-66

С. В. Мингалев, Д. С. Худяков, О. В. Галицын, М. В. Усанин

АО «ОДК-Авиадвигатель», 614990, Пермь, Комсомольский пр., 93, корп. 61

email: SMingaliov@yandex.ru

Исследуется численными методами работа турбореактивного двигателя КJ-66, разработанного К. Шреклингом более 30 лет назад для авиамодельного спорта. Конструкция и параметры этого двигателя являются открытыми, что делает его удобным при апробации математических моделей. В отличие от предыдущих исследований этого двигателя в настоящей работе расход топлива не задается, а подбирается из требования равенства моментов сил на роторах турбины и компрессора. Получены зависимости расхода воздуха и тяги от скорости вращения, которые совпадают с экспериментальными результатами до скоростей вращения вала двигателя, равных 100 000 об/мин. Затем на основании построенной модели исследовано влияние на работу двигателя КJ-66 замены топлива с керосина на водород.

Ключевые слова: КJ-66; турбореактивный двигатель; вычислительная гидродинамика

Numerical study on centrifugal flow turbojet engine KJ-66

S. V. Mingalev, D. S. Khudyakov, O. V. Galitsyn, M. V. Usanin

UEC-Aviadvigatel Joint Stock Company, 93 Komsomolsky Pr., 614990, Perm

email: SMingaliov@yandex.ru

We have performed numerical study on centrifugal flow turbojet engine KJ-66, which was developed by K. Shreckling more than 30 years ago. The design and parameters of the engine is public that makes it convenient for testing mathematical model. In contrast to previous research, the fuel flow rate is not predefined but calculated through the equality of torques on the rotors of turbine and compressor. Obtained dependences of air flow rate, thrust, pressure ratio coincide with experimental results up to rotation speeds of 100.000 rpm.

Keywords: KJ-66; turbojet; computational fluid dynamics

1. Введение

Исследование посвящено моделированию работы газотурбинных двигателей (ГТД) методом конечных объемов в трехмерной постановке. Трехмерное моделирование ГТД выполнялось в приложении к немецкому одновальному авиамодельному двигателю КJ-66, который был разработан К. Шреклингом [1]. Численное исследование компрессора этого двигателя проводилось в [2, 3], камеры

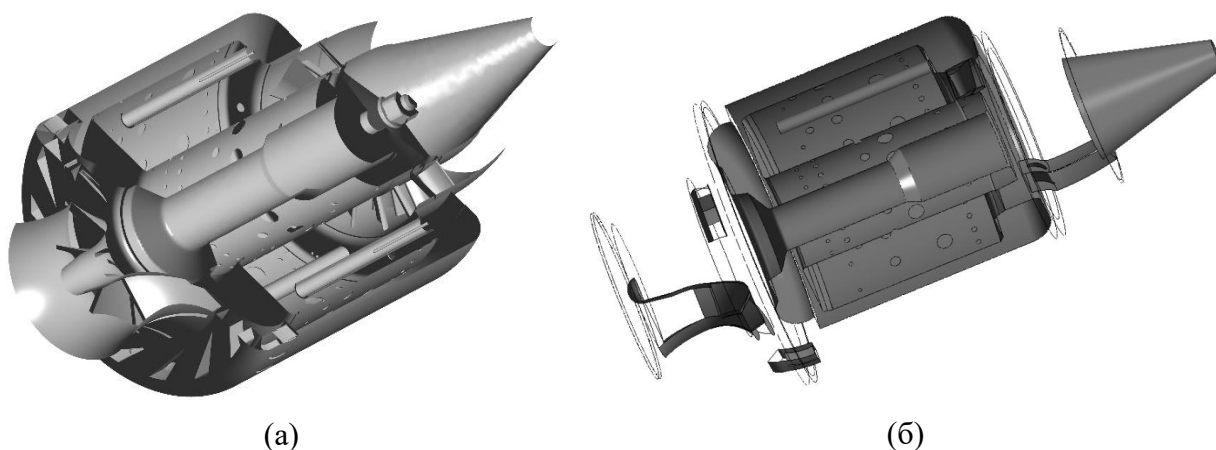


Рис. 1. Продольный разрез исходного варианта геометрии двигателя KJ-66 (а); геометрия двигателя KJ-66 после упрощения и постановки периодических граничных условий (б)

сгорания в [4]. Целиком его работу моделировали в [5, 6, 7], где было получено хорошее соответствие с результатами экспериментов, однако в другом ПО результаты могут оказаться другими, что ставит первую цель исследования, которая состояла в том, чтобы определить возможности используемого на АО «ОДК-Авиадвигатель» расчетного ПО в приложении к этой задаче.

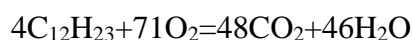
Вторая цель состояла в том, чтобы проверить возможность определения расхода топлива по балансу моментов на валу, что отличает настоящую работу от той, которая проводилась в [5, 6, 7].

Третья цель заключалась в том, чтобы, опираясь на валидированную математическую модель KJ-66, исследовать изменения, к которым приводит замена топлива с керосина на водород.

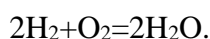
2. Постановка задачи

Изначальный вариант геометрии KJ-66, показанный на рис. 1а, был упрощен, чтобы использовать имеющуюся периодичность для уменьшения затрат вычислительных ресурсов. В результате была получена геометрия, показанная на рис. 1б: расчетная область в случае компрессора состоит из 72° , 24° , 9° -ых секторов, в случае камеры сгорания – из 120° -ого сектора, в случае турбины – из 24° , 15.65° -ых секторов. Внешняя по отношению к двигателю расчетная область имеет форму цилиндра с образующей, примерно равной семи продольным размерам двигателя и диаметром, примерно равным десяти поперечным размерам двигателя.

Исследование проводилось при следующих настройках решателя: модель турбулентности k-epsilon (scalable wall function), топливо моделировалось лагранжевыми частицами, испарявшимися в соответствии с Liquid Evaporation Model, смесь рассматривалась как идеальный газ. Использовалась модель горения – Finite Rate Chemistry/Eddy Dissipation с моделирующей горение керосина одноступенчатой реакцией,



и горение водорода –



На входах и выходах из расчетной области задавалось граничное условие Opening с параметрами воздуха, соответствующими стандартной авиационной атмосфере на уровне моря (давление $p=101325$ Па, температура $T=288$ К, массовый состав: 1.292% Ar, 0.046% CO_2 , 23.15% O_2 , 75.512% N_2). На интерфейсах между статором и ротором задавался интерфейс типа Mixing-Plane, между невращающимися расчетными областями – Frozen Rotor.

3. Результаты

Результаты расчетов демонстрирует рис. 2, на котором показаны зависимости расхода воздуха, тяги, коэффициента повышения давления и расхода топлива от скорости вращения вала. В [5] результаты расчетов получились приемлемыми вплоть до скорости вращения вала 100 000 об/мин, где наблюдалась заметное отклонение по тяге. Из рис. 2 можно сделать вывод о том, что в настоящем исследовании удалось достичь сопоставимой точности: при 80 000 об/мин расходы воздуха и тяга не отличаются от экспериментальных, в то же время при 100 000 об/мин в расчете получается занижение по расходу на 8% и по тяге – на 5%. Также из рис. 3в можно сделать о том, что математическая модель дает хорошее соответствие с экспериментальными данными по коэффициенту повышения давления при невысоких скоростях вращения.

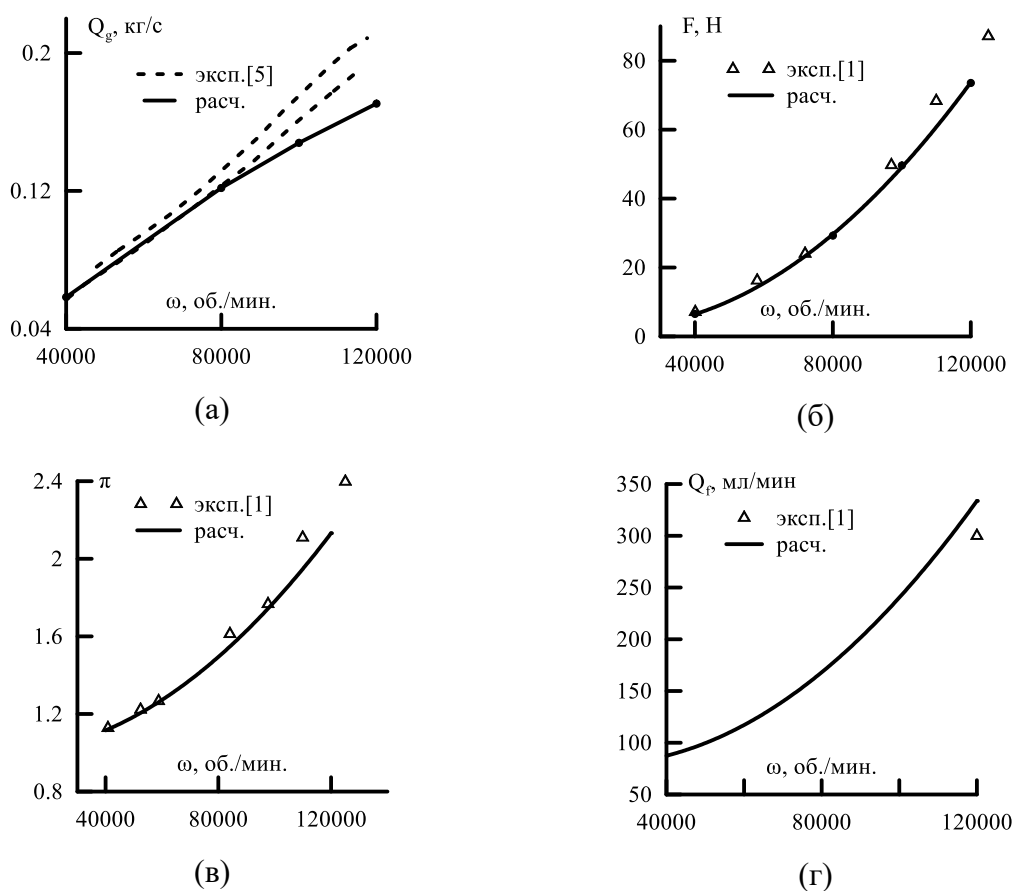


Рис. 2. Зависимость расхода воздуха (а), тяги (б), коэффициента повышения давления (в), расхода топлива (г) от скорости вращения вала двигателя

Из рис. 2г, показывающего зависимость расхода топлива от скорости вращения вала, можно сделать вывод о том, что величины расходов получаются близкие к экспериментальным (при этом экспериментальных данных в области, где модель работает наилучшим образом не удалось обнаружить).

Таким образом, созданная математическая модель позволяет получать совпадающие с экспериментом результаты вплоть до скоростей вращения вала 100 000 об/мин, что указывает на её валидированность в этих пределах. Следующий этап работы состоял в том, чтобы исследовать с помощью этой модели влияние на работу двигателя замены топлива с керосина на водород. При переходе от керосина к водороду пришлось увеличить радиус подводящих топливо каналов с 0.3 мм до 1 мм, чтобы избежать возникновения высоких скоростей топлива.

Одно из изменений в работе двигателя связано с тем, что керосину необходимо время на испарение, а капли обладают заметной инерцией, в то же время водород поступает в газообразном состоянии. Это приводит к другому распределению температуры внутри камеры сгорания, как можно заключить из рис. 3. В [5] керосин задавался газом и в результате распределение температур получалось ближе к показанному на рис. 3б, а не на рис. 3а. Таким образом это изменение в основном связано с разными агрегатными состояниями топлива.

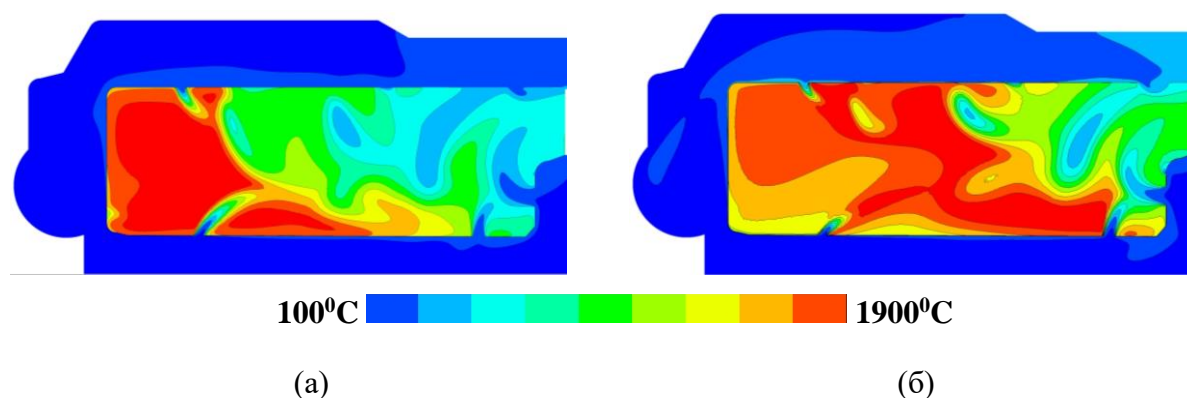


Рис. 3. Распределение температуры в камере сгорания при использовании в качестве топлива керосина (а) и водорода (б). Скорость вращения вала 40 000 об/мин

Расход водорода получился для скорости вращения вала 40 000 об/мин равным $3.54 \cdot 10^{-4}$ кг/с, что в 3.21 раз меньше, чем расход керосина на этом же режиме. Этот результат объясняется тем, что теплота сгорания водорода примерно в три раза больше теплоты сгорания керосина.

Все остальные параметры (тяга, расход газа и коэффициент повышения давления) для скорости вращения вала 40 000 об/мин не претерпели заметных изменений при замене керосина на водород.

4. Выводы

Создана валидированная до скоростей вращения вала 100000 об/мин математическая модель двигателя КЖ-66. Используя эту модель, было показано, что замена топлива с керосина на водород приводит 1) к изменению поля температуры в камере сгорания и 2) к уменьшению примерно в 3 раза массового расхода топлива в случае скорости вращения вала 40000 об/мин.

Список литературы

1. *Shreckling K.* Home Built Model Turbines. United Kingdom: Traplet Publications, 2004. 104 p.
2. *Xiang J, Schlüter J. U, Duan F.* Study of KJ-66 micro gas turbine compressor: Steady and unsteady Reynolds-averaged Navier–Stokes approach // Proc. of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering. 2017. Vol. 231 (5). P. 904–917. DOI: 10.1177/0954410016644632
3. *Ling J., Wong K. C., Armfield S.* Numerical investigation of a small gas turbine compressor / Proc. of 16th Australasian Fluid Mechanics Conference (AFMC), Gold Coast, Queensland, Australia, 3–7 December, 2007 // St. Lucia, Qld.: School of Engineering, University of Queensland, 2007. P. 961–966.
4. *Gonzalez C. A., Wong K. C., Armfield S.* Computational study of a micro-turbine engine combustor using large eddy simulation and Reynolds averaged turbulence models // ANZIAM Journal. 2008. Vol. 49. P. 407–422. DOI: 10.21914/anziamj.v49i0.338
5. *Trebumskikh T., Ivanov A., Dumnov G.* Small but mighty powerful – microturbine jet engine simulation and structural analysis // Engineering Edge. 2012. Vol. 1 (1). P. 5–8.
6. *Yuvaraj S, Suganya P, Vinoth K. M., Sudharson M, Sathiyalingam K.* Analysis of capillary diffuser for micro jet engine // Discovery. 2015. Vol. 29 (115). P. 179–183.
7. *Teixeira M.* Fully-coupled CFD engine simulations // ReSolve. 2018. N 1. P. 10–17.

Экспериментальное исследование процесса смешения потоков в микроканале Y-типа в условиях развития конвекции диффузионного слоя

Е. А. Мошева

Институт механики сплошных сред УрО РАН,
614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1
email: mosheva@icmm.ru

В данной работе исследована перспективность применения конвекции диффузионного слоя в качестве инструмента перемешивания потоков в микрореакторах проточного типа. Эксперименты проводились для различных расходов и управляющих параметров задачи. Визуализация процесса смешения потоков выполнена с помощью химического индикатора. Анализ полученных изображений позволил количественно оценить степень смешения потоков вдоль канала. Показано, что, несмотря на развитие конвективного движения, эффективность смешения прокачиваемых потоков ниже, чем при чисто диффузионном смешении, поэтому данный тип неустойчивости двойной диффузии не может быть использован как самостоятельный инструмент гомогенизации.

Ключевые слова: проточные системы; двойная диффузия; перемешивание

Experimental study of the mixing process of two flows during the development of diffusive layer convection in a Y-type microchannel

E. A. Mosheva

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS,
1 Akademika Koroleva St., 614013, Perm
email: mosheva@icmm.ru

In this work, the possibility of using diffusion layer convection as a tool for mixing flows in continuous flow microchannels are studied. The experiments were performed for various volume flow rates and key parameters of the problem. The visualization of the mixing process was performed using a chemical indicator Bromothymol Blue. Analysis of the obtained images made it possible to quantify the degree of mixing of flows along the channel. A comparison with pure diffusion mixing is given. It is shown that, despite the development of convective motion, the mixing efficiency is lower than in pure diffusion case; therefore this type of double diffusion instability cannot be used as an independent tool for flows mixing.

Keywords: continuous flow systems; double diffusion; mixing

1. Введение

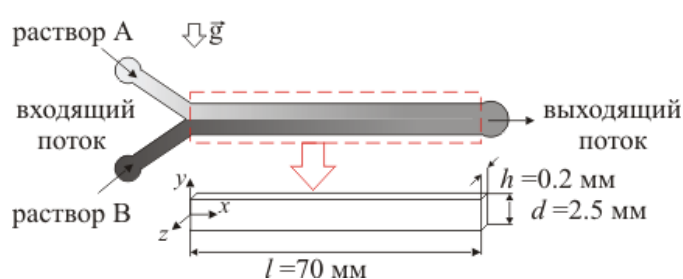
Микроканалы проточного типа получили широкое распространение как в химическом и фармакологическом производстве, так и в технологических отраслях. Обладая небольшими размерами и высокой энергоэффективностью, микроканалы продолжают внедряться в новые области науки. В настоящее время среди актуальных задач выделяется задача о создании микромиксеров, способных эффективно смешивать потоки на минимальной длине смешения и при максимальных расходах. В земных условиях в качестве инструмента смешения могут служить гравитационные типы конвекции, например, конвекция Рэля-Тейлора или неустойчивости двойной диффузии [1]. Ранее было продемонстрировано, что конвекция двойной диффузии (DD) на порядок превышает по эффективности смешения чисто диффузионные механизмы [2]. В данной работе экспериментально исследуется еще один тип конвекции из семейства неустойчивостей двойной диффузии – конвекция диффузионного слоя (далее DLC конвекция) [3].

2. Экспериментальная установка и методика эксперимента

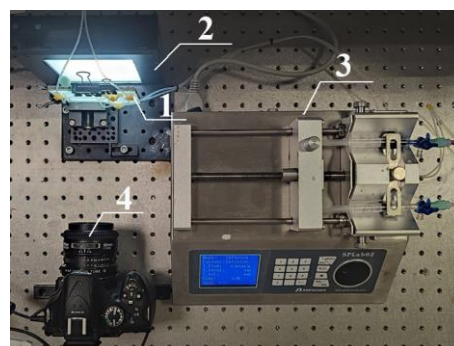
Все эксперименты выполнены в тонком горизонтальном канале длиной 7.0 см, высотой 0.25 см, толщиной 0.02 см (рис. 1а). С одной стороны, канал оснащен смесителем Y-типа, оба плеча которого подключались к инфузионному двухканальному насосу, который обеспечивал прокачку исследуемых потоков жидкостей через канал с заданным объемным расходом Q , мл/мин, который в данном исследовании изменялся в диапазоне (0.004 – 0.030) мл/мин. Через верхнее плечо смесителя всегда подавалась менее плотная жидкость, через нижнее – более плотная. Прокаченная через канал смесь свободно выводилась через отверстие, находящееся на противоположном конце канала.

В качестве рабочих жидкостей были использованы водные растворы гидроксида калия (KOH) и сульфата натрия (Na_2SO_4). Отметим, что процесс смешения данных растворов не осложнен химической реакцией, так как используемые вещества химически нейтральны по отношению друг к другу.

Известно [1], что ключевыми безразмерными параметрами, которые характеризуют интенсивность конвекции, обусловленной неустойчивостью двойной диффузии, является отношение скоростей диффузии нижнего D_n и верхнего D_v растворов $\delta = D_n / D_v$ и отношение приращений плотности раствора за счет добавления



(а)



(б)

Рис. 1. (а) Схематическое изображение микроканала Y-типа. (б) Общий вид установки, включающей микроканал (1), источник рассеянного света (2), насос (3), камеру (4)

диффундирующих компонент $R_p = \Delta\rho_n / \Delta\rho_v$, где $\Delta\rho_v = |\rho_0 - \rho_v|$ и $\Delta\rho_n = |\rho_0 - \rho_n|$, где $\rho_0 = 0.99820 \text{ г/см}^3$ – плотность растворителя (в данной задаче – воды). В случае конвекции диффузионного слоя возможный диапазон изменения данных параметров $0 < \delta < 1$, $R_p > 1$. Причем чем меньше их значения, тем интенсивнее конвекция. Данное исследование выполнено для двух случаев: $\delta = 0.3$, $R_p = 1.05$ и $\delta = 0.3$, $R_p = 1.08$. Для удобства исследуемые пары жидкостей и значения некоторых важных параметров задачи представлены в таблице.

Таблица. Исследуемые пары растворов и их свойства

№	Концентрация, моль/л		Плотность, г/см ³			Скорость диффузии · 10 ⁵ , см ² /с		R_p	δ
	КОН	Na ₂ SO ₄	КОН	Na ₂ SO ₄	вода	КОН	Na ₂ SO ₄		
1	1.13	0.49	1.05321	1.05771	0.99820	2.75	0.8	1.08	0.3
2		0.47		1.05576				1.05	

С целью визуализации процесса смешения потоков был использован химический индикатор бромтимоловый синий (БТ). Индикатор добавлялся только в щелочной раствор (нижний слой). Объемная концентрация индикатора в растворе $6.57 \cdot 10^{-5} \%$. Канал во время эксперимента освещался коллимированным источником рассеянного света (LED-панель). Съемка производилась камерой Nikon 5200. Схема расположения канала (1), световой панели (2), насоса (3) и камеры (3) представлена на рис. 16.

3. Результаты

На рис. 2 представлена серия изображений, полученных для пары №1 при различных расходах. На изображениях отчетливо видна конвективная структура в виде плюмов, развивающихся вследствие DLC конвекции. На минимальном расходе структура располагается вблизи входов канала, а ее длина волны составляет около 1.5 см. К концу канала граница между слоями становится размытой, что указывает на смешение, однако, существенный градиент цвета (поперек канала) свидетельствует о том, что смесь сильно неоднородна, то есть полного смешения не произошло. По мере увеличения расхода, увеличивается и длина волны структуры за счет ее вытягивания вследствие прокачивания, а также снижается эффективность смешения.



Рис. 2. Серия изображений, характеризующая развитие конвекции диффузионного слоя в эксперименте №1 при различных расходах. Высота канала $d = 0.25 \text{ см}$

Количественная оценка степени смешения производилась на основе анализа значений стандартного отклонения σ цвета (в градациях серого) [4]. Значения σ рассчитывались для вертикальных срезов шириной 1 пиксель вдоль всего канала. Предварительно все изображения проходили обработку, которая позволила минимизировать шумы и неоднородность освещения. Значение степени смешения M_i в точке x_i рассчитывается следующим образом [4]:

$$M_i = 1 - \frac{\sigma_i}{\sigma_{\max}},$$

где σ_i – значение стандартного отклонения среза x_i , σ_{\max} – максимальное значение стандартного отклонения в канале. Значение $M = 1$ характеризует полное смешение, значение $M = 0$ соответствует ситуации, когда слои полностью разделены. Для каждого расхода было получено не менее четырех зависимостей $M(x)$. На рис. 3а представлены осредненные зависимости, полученные для эксперимента №1 при различных расходах. Количественные измерения степени смешения подтвердили качественный анализ изображений, описанный выше.

Эффективным считается то смешение, для которого значение параметра M при максимальном расходе стремится к единице. В целом, значения M от 0.8 уже считаются достаточно хорошими показателями [5]. Как видно на рис. 3а, несмотря на развитие конвекции, максимальное значение M в зависимости от расхода варьируется в диапазоне (0.1 – 0.3), что указывает на слабое смешение и, следовательно, сильную неоднородность смеси. Сравнив полученные результаты с результатами, полученными ранее для чисто диффузионного смешения (система КОН-чистая вода), оказалось, что диффузионные процессы действуют гораздо эффективнее. На рис. 3б приведена зависимость отношения степеней смешения, полученных для конвективного M_{DLC} случая и диффузионного $M_{\text{диффузия}}$ для расхода $Q = 0.010$ мл/мин. Также на графике для удобства анализа приведена кривая $M_{\text{диффузия}} / M_{\text{диффузия}} = 1$, характеризующая диффузионное смешение. Полученная зависимость носит немонотонный характер. В начале канала, где начинают формироваться конвективные плюмы вследствие DLC конвекции, зависимость резко убывает, то есть формирование конвекции приводит к замедлению (по сравнению с диффузионным случаем) процесса смешения слоев. По мере приближения к концу канала значение $M_{DLC} / M_{\text{диффузия}}$ возрастает и стремится к 1, что указывает на постепенное уравнивание перемешивающих свойств конвективного и диффузионного механизмов.

Таким образом, несмотря на развитие вихревого конвективного движения, обусловленного DLC конвекцией, эффективность смешения потоков в этом случае сравнима с эффективностью, полученной для смешения за счет чисто диффузионных процессов. На первый взгляд результат может показаться противоречивым, ведь конвективный массоперенос превышает по силе диффузионный. Однако, объяснение низкой эффективности смешения в условиях развития DLC конвекции кроется в ее особой структуре. В докладе подробно обсуждаются специфика структуры DLC конвекции и ее влияние на перемешивающие свойства. Также приводится анализ и сравнение с результатами, полученными ранее для другого типа конвекции семейства двойной диффузии.

4. Благодарности

Автор выражает благодарность Мизеву А. И. и Шмырову А. В. за полезные советы и дискуссию. Исследование выполнено при финансовой поддержке стипендии президента РФ для аспирантов и молодых ученых (СП-2408.2021.1).

Список литературы

1. *Radko T.* Double-diffusive convection. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2013. 344 p.
2. *Mizev A. I., Mosheva E. A., Shmyrov A. V.* Double-diffusive convection in the continuous flow microreactors // *Journal of Physics: Conference Series*. 2021. Vol. 1945. N. 1. 012036. DOI: 10.1088/1742-6596/1945/1/012036
3. *Griffiths R. W.* Layered double-diffusive convection in porous media // *Journal of Fluid Mechanics*. 1981. Vol. 102. P. 221–248. DOI: 10.1017/S0022112081002619
4. *Kockmann N., Föll C., Woias P.* Flow regimes and mass transfer characteristics in static micromixers // *Microfluidics, BioMEMS, and Medical Microsystems*. 2003. Vol. 4982. P. 319–329. DOI: 10.1117/12.478157
5. *Nimafar M.* Study and development of new passive micromixers based on split and recombination principle // *PhD Thesis in Mechanics*. Torino, Italy, Politecnico di Torino, 2013. 155 p.

Устойчивость двухслойной смешивающейся системы реагирующих жидкостей в наклонной ячейке Хеле-Шоу

Е. А. Мошева, А. И. Мизёв

Институт механики сплошных сред УрО РАН,
614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1
email: mosheva@icmm.ru, alex_mizev@icmm.ru

Работа посвящена экспериментальному исследованию динамики реакции нейтрализации, протекающей в двухслойной системе смешивающихся реагирующих жидкостей в условиях пониженной гравитации. В исследовании изучаются особенности структуры конвекции, возникающей вследствие протекания реакции, при различной ориентации ячейки относительно силы тяжести. Эксперименты проводились для диапазона значений углов наклона $\alpha = (0^\circ - 70^\circ)$. Визуализация изменения поля показателя преломления, обусловленного вариациями концентрации реагентов, выполнена с помощью интерферометра Физо. Методом трассерной анемометрии исследованы поля скорости и завихренности возникающей конвекции. Обнаружено, что наклон ячейки приводит к изменению структуры и интенсивности конвективного движения. В работе обсуждается влияние формирующегося течения на процессы массопереноса и динамику фронта реакции.

Ключевые слова: реакция нейтрализации; хемоконвекция; перемешивание

Stability of a two-layer miscible reactive system in an inclined Hele-Shaw cell

E. A. Mosheva, A. I. Mizev

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS,
1 Akademika Koroleva St., 614013, Perm
email: mosheva@icmm.ru, alex_mizev@icmm.ru

The work is devoted to an experimental study of the dynamics of the neutralization reaction that occurs in a miscible two-layer system of reacting liquids under conditions of reduced gravity created by the inclination of the cell relative to gravity force. The structure of convection driven by the reaction is studied for different inclination angle of the cell that changed in the range $\alpha = (0^\circ - 70^\circ)$. Visualization of the refractive index distribution caused by the concentration variations of reagents was performed using a Fizeau interferometer. The velocity and vorticity fields of the convection were studied by PIV method. It was found that the inclination of the cell leads to a change in the structure and intensity of the convective motion. The influence of the convective flow changes on the mass transfer and the dynamics of the reaction front are discussed.

Keywords: continuous flow systems; double diffusion; mixing

1. Введение

Протекание химической реакции, как правило, сопровождается резкими пространственно-временными вариациями физико-химических параметров реагирующих сред [1]. В случае подвижных, газообразных или жидких, сред такие изменения могут приводить к развитию ряда гидродинамических неустойчивостей, и, как следствие, возникновению конвективных течений. Наличие конвективного массопереноса, в свою очередь, способно существенным образом ускорить протекание реакции, что может быть использовано при проектировании технологического процесса для управления скоростью образования конечного продукта реакции.

Ранее нами была изучена устойчивость двухслойной системы смешивающихся реагирующих жидкостей на примере реакции нейтрализации [2]. Было показано, что в зависимости от начальных концентраций реагентов в слоях, реакционные процессы могут развиваться либо в рамках устойчивого диффузионно-контролируемого режима, либо сопровождаться развитием интенсивного движения жидкости в рамках конвективно-контролируемого режима. В последнем случае, интенсивность конвективного движения может быть изменена более, чем на порядок, путем выбора соотношения начальных концентраций. Также было показано, что еще одним важным фактором, влияющим на структуру и интенсивность формирующегося в результате развития неустойчивости течения, является геометрия полости и наличие препятствий на пути движения фронта [3, 4]. Поскольку течения в смешивающихся системах обусловлены гравитационно-зависимыми механизмами, то структура и интенсивность конвективного движения должны также определяться уровнем силового воздействия со стороны поля силы тяжести. В условиях наземного моделирования вариации такого воздействия возможны за счет изменения взаимной ориентации полости и направления силы тяжести. В настоящей статье экспериментально рассмотрена возможность управления протеканием реакции за счет изменения эффективного силового воздействия на примере двухслойной системы смешивающихся реагирующих жидкостей, расположенной в наклонной ячейке Хеле-Шоу.

2. Экспериментальная установка и методика эксперимента

Эксперименты выполнены в ячейке Хеле-Шоу (рис. 1а), боковые грани которой образованы двумя плоскопараллельными интерференционными стёклами. Внутренние размеры полости ячейки: высота 10 см, ширина 5 см и толщина 0.12 см. Боковые стекла ячейки в средней части имеют неглубокие пазы (с внутренней стороны), куда вставляется специальная заслонка, которая разграничивает жидкости в ячейке во время создания в ней двухслойной системы.

Для исследования интенсивности и структуры конвективного движения было использовано несколько методов. Для визуализации распределения показателя преломления, обусловленного изменениями концентрации реагентов и продукта реакции, использован лазерный интерферометр, собранный по схеме Физо. Поскольку диффузионное время на три порядка больше вязкого времени (число Шмидта $Sc \sim 10^3$), изолинии концентрации оказываются захваченными движущейся жидкостью, что позволяет использовать интерференционные полосы, движущиеся вместе с жидкой средой, как своего рода «трассеры», визуализирующие структуру движения. Для изучения полей скорости использовался метод цифровой трассерной анемометрии. Для этого к используемым растворам на стадии их приготовления добавлялись полиамидные частицы Rilsan D40 диаметром 40 мкм и плотностью 1.03 г/см³. Ячейка

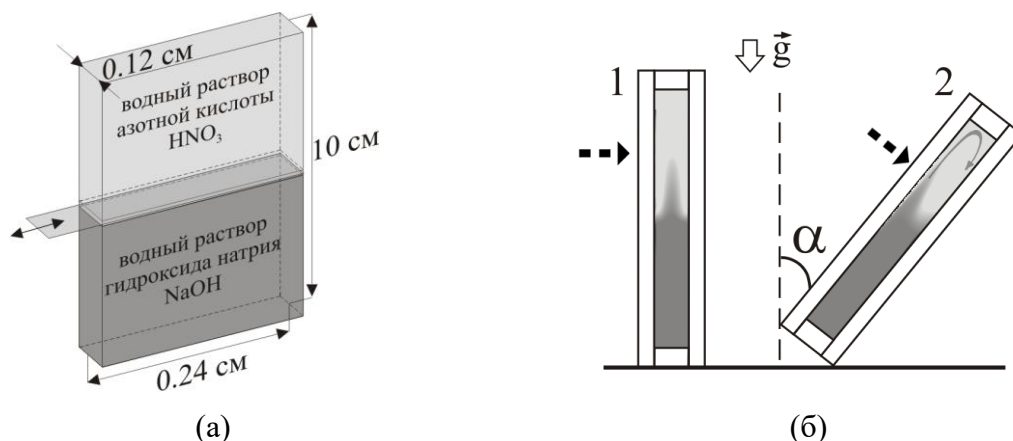


Рис. 1. Схематическое изображение двухслойной системы жидкостей, помещенной в ячейку Хеле-Шоу: (а) вид спереди; (б) вид сбоку. Цифрами 1 и 2 обозначены положения кюветы при $\alpha = 0^\circ$ и произвольном угле соответственно. Пунктирной стрелкой обозначена передняя грань ячейки

освещалась световым ножом, сформированным лазером и линзой, через ее прозрачную боковую стенку. При этом световой нож располагался вблизи передней грани ячейки.

Перед каждым экспериментом ячейка устанавливалась вертикально (положение 1 на рис. 1б, угол наклона $\alpha = 0^\circ$) в специальную конструкцию, которая позволяет регулировать угол наклона ячейки относительно силы тяжести. Далее в ячейке формировалась двухслойная смешивающаяся система, состоящая из водных растворов кислоты и основания. Нижний слой был образован более плотным однородным раствором гидроксида натрия с концентрацией $C_b = 1.5$ моль/л, верхний – менее плотным однородным раствором азотной кислоты с концентрацией $C_a = 1.8$ моль/л. До начала эксперимента слои реагентов разграничивались заслонкой, что позволяло контролировать момент контакта реагентов. После формирования двухслойной системы ячейка наклонялась на определенный угол α (положение 2 на рис. 1 б) и фиксировалась в этом положении. Далее заслонка аккуратно удалялась из системы, и реагенты вступали в контакт. Этот момент времени принимался за начало эксперимента $t_0 = 0$ с. Угол наклона в различных экспериментах изменялся в диапазоне $\alpha = (0 - 70^\circ)$. Схема используемой ячейки и ее пространственное положение при изменении угла наклона схематически проиллюстрированы на рис. 1.

3. Результаты

В работе исследуется наиболее интересный, с точки зрения активного перемешивания, режим протекания реакции – конвективно-управляемый [2]. В рамках данного режима в системе формируется неустойчивость Рэлея-Тейлора, обусловленная всплыванием более легкой по сравнению с верхним слоем системы реакционной зоны. Развитие неустойчивости сопровождается интенсивным перемешиванием верхнего слоя, при этом нижний слой остаётся неподвижным, а реакционный фронт быстро распространяется по направлению действия силы тяжести. Эксперименты показали, что наклон ячейки приводит к изменению как интенсивности, так и структуры возникающей конвекции.

На рис. 2 представлены две серии интерферограмм, полученных для $\alpha = 0^\circ$ и $\alpha = 60^\circ$. Интерферограммы в каждой из серий даны для одинаковых последовательных моментов времени t : 7, 180 и 1020 секунд. В целом, при увеличении угла наклона

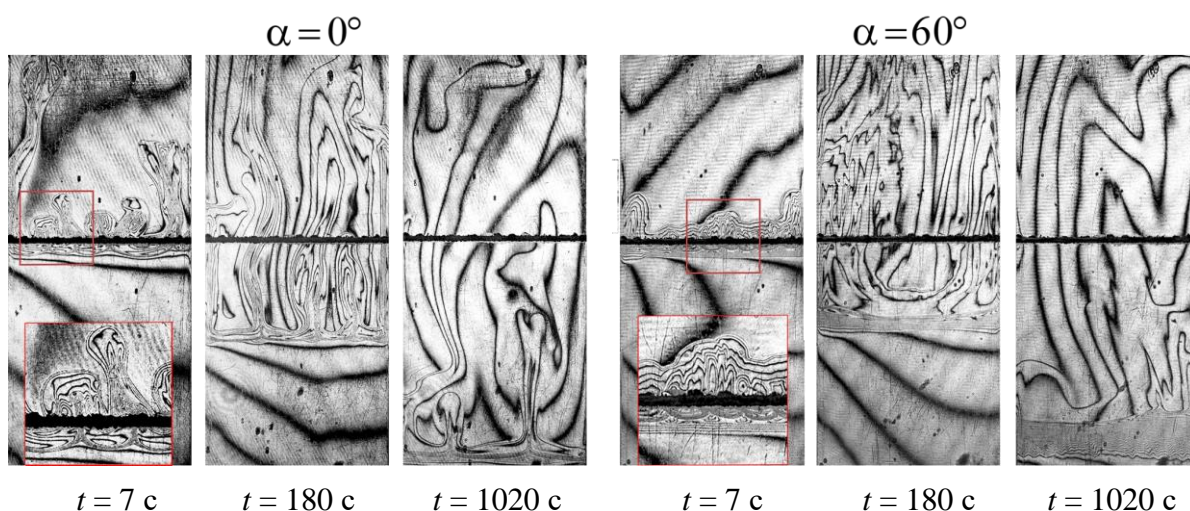


Рис. 2. *Серии интерферограмм, визуализирующие динамику реакции при различных углах наклона. Ширина кадра 2.4 см*

структура конвекции остаётся аналогичной той, что наблюдается в случае вертикально ориентированной ячейки ($\alpha = 0^\circ$). Однако, подробный визуальный анализ интерферограмм выявил некоторые существенные особенности. Сравним интерферограммы для начальных моментов времени. При $\alpha = 0^\circ$ плюмы активно формируются и свободно всплывают отдельно друг от друга. В наклоненной ячейке вертикальному всплытию плюмов препятствует передняя грань ячейки. На врезках, демонстрирующих процесс развития плюмов, видно, что при $\alpha = 60^\circ$ плюмы распространяются в виде единого натекающего слоя, а не раздельно как это происходит при $\alpha = 0^\circ$. Достигнув грани ячейки плюмы продолжают всплывать вдоль неё, натекая при этом на верхний слой подобно интрузивным течениям [5]. Такое распространение плюмов в условиях несжимаемости жидкостей инициирует нисходящее течение верхнего слоя вдоль задней стенки ячейки. О существовании такого движения свидетельствует возникающая в средней части канала структура, указывающая на наличие нисходящего потока жидкости (интерферограмма, при $t = 180$ с, $\alpha = 60^\circ$). Ввиду того, что реакция постепенно затухает вследствие выгорания реагентов, интенсивность всплытия плюмов, сформированных в начальный момент времени, на порядок выше интенсивности плюмов, формирующихся к концу реакции. Вследствие этого движение верхнего слоя постепенно затухает. На интерферограммах, приведенных для $t = 1020$ с, видно, что выраженный нисходящий поток в центральной части ячейки отсутствует, а структура конвекции приобретает свойственный для подобных реакционных систем хаотичный характер.

Анализ полей скорости и завихренности также показал формирование упорядоченного вихревого движения в верхнем слое в наклонных ячейках. На рис. 3 представлены две серии полей завихренности, полученных для одинаковых последовательных моментов времени в экспериментах при $\alpha = 0^\circ$ (верхний ряд) и $\alpha = 70^\circ$ (нижний ряд). В начале эксперимента всплывающие плюмы инициируют ряд мелких вихрей в области над фронтом реакции. Спустя некоторое время в экспериментах при $\alpha > 0^\circ$ в центральной части канала формируется крупномасштабное вихревое движение, в то время как в экспериментах при $\alpha = 0^\circ$ конвекция имеет неупорядоченную, постоянно изменяющуюся вихревую структуру. Далее формирующийся в наклонной ячейке вихрь затухает, структура конвективного движения становится схожей с той, что наблюдается при $\alpha = 0^\circ$.

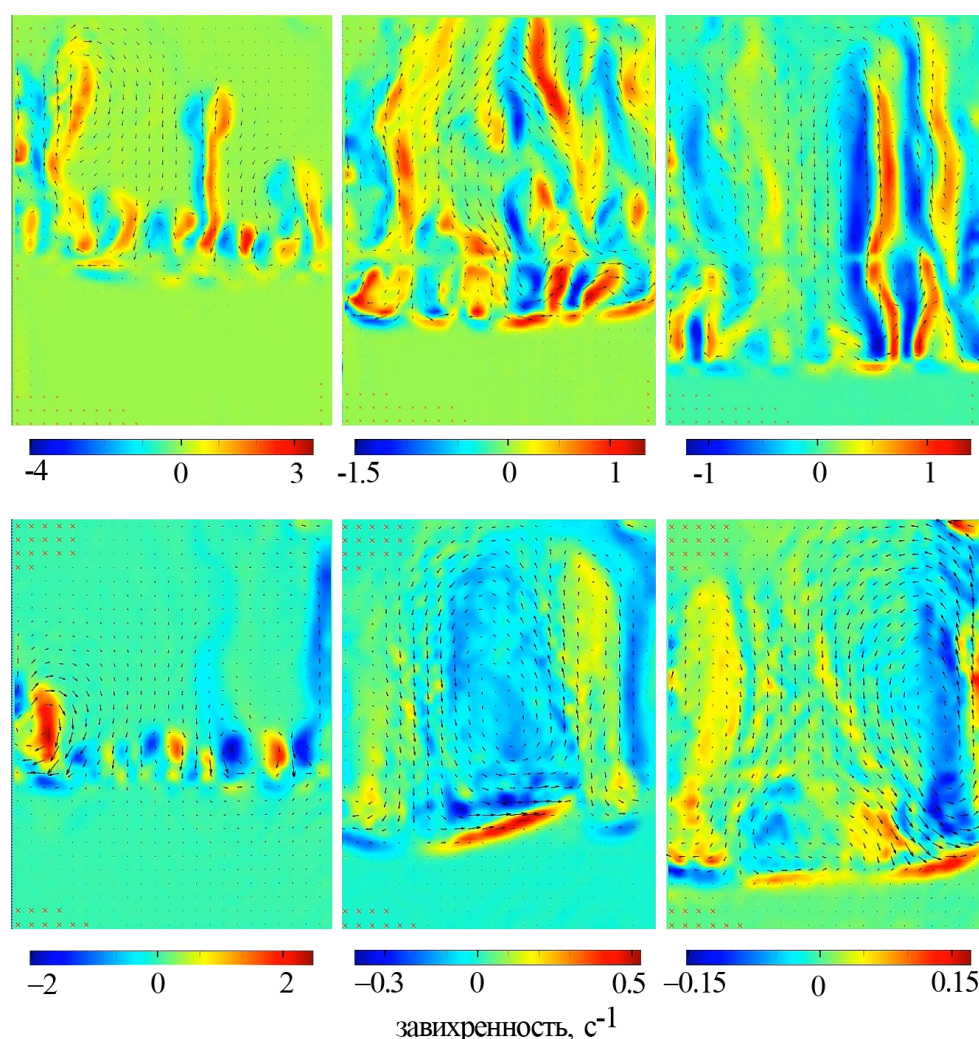


Рис. 3. Эволюция поля осредненной завихренности, характеризующая динамику структуры конвективного движения, формирующегося при $\alpha = 0^\circ$ (верхний ряд) и $\alpha = 70^\circ$ (нижний ряд). Ширина кадра 5 см. Поля приведены для последовательных моментов времени t , с: 4, 100, 280

На скорость вихревого движения влияет как угол наклона ячейки, так и интенсивность всплытия плюмов. С одной стороны, при увеличении угла наклона уменьшается значение проекции силы тяжести. Ввиду того, что всплытие плюмов обусловлено гравитационно-зависимой неустойчивостью Рэлея-Тейлора, это ведёт к замедлению роста скорости распространения плюмов. С другой стороны, увеличение α приводит к увеличению площади соприкосновения слоёв реагентов, что сопровождается растяжением фронта реакции и увеличением области реакции. Такое изменение геометрии реакционной зоны ведёт к ускорению реакции и, как следствие, к интенсификации процесса зарождения, всплытия и распространения плюмов.

Исследовать влияние этих двух механизмов на скорость интрузии плюмов независимо друг от друга в такой постановке эксперимента невозможно. Однако, анализируя динамику фронта реакции, можно прийти к выводу, что изменения, вызванные уменьшением действия силы тяжести, оказывают большее влияние. На рис. 4а представлена зависимость координаты положения фронта от времени. Хорошо видно, что при увеличении наклона фронт распространяется медленнее. По-видимому,

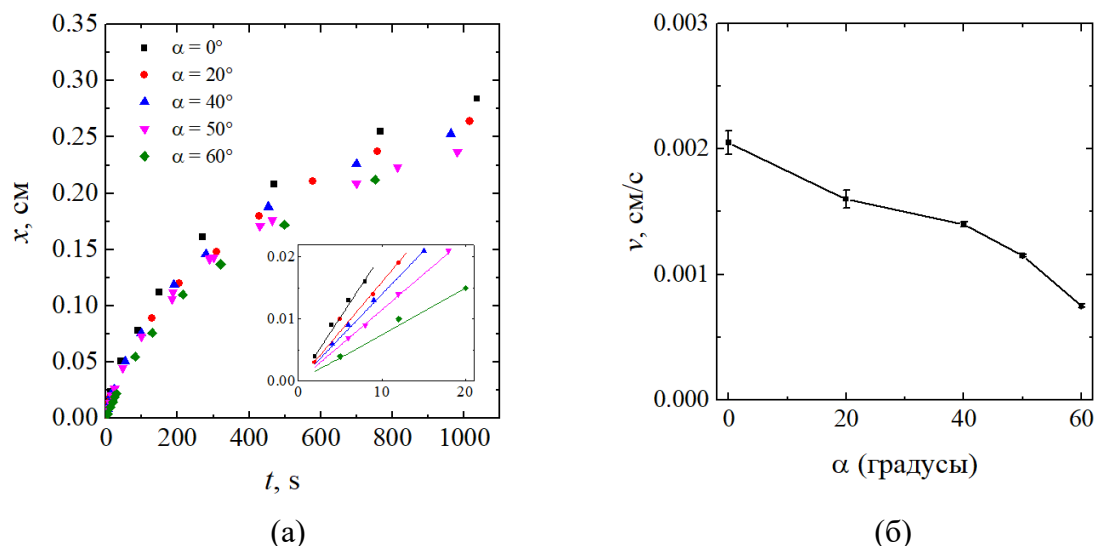


Рис. 4. Временная эволюция координаты положения фронта x (а) и его скорости v (б)

если бы механизмы, ускоряющие интрузию плюмов, превалировали, то конвективное движение над фронтом реакции, было бы интенсивнее, чем оно есть в действительности. Это привело бы к ускорению распространения фронта за счет того, что нисходящее течение вдоль задней грани ячейки проталкивало бы и деформировало реакционный фронт. Однако, эксперименты показали, что фронт во всём исследованном диапазоне значений угла наклона остаётся недеформированным, а скорость, определяемая по углу наклона начального участка зависимости $x(t)$ (см. врезку на рис. 4а) монотонно убывает (рис. 4б). В докладе более подробно обсуждается формирующееся вихревое течение, а также эволюция полей скорости и завихренности для различных значений α .

4. Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского Научного Фонда, грант 19-11-00133.

Список литературы

1. De Wit A. Chemo-hydrodynamic patterns and instabilities // *Annual Review of Fluid Mechanics*. 2020. Vol. 52. P. 531–555. DOI: 10.1146/annurev-fluid-010719-060349
2. Mizev A. I., Mosheva E. A., Bratsun D. A. Extended classification of the buoyancy-driven flows induced by a neutralization reaction in miscible fluids. Part 1. Experimental study // *Journal of Fluid Mechanics*. 2021. Vol. 916. A22. DOI: 10.1017/jfm.2021.201
3. Bratsun D. A., Mizev A. I., Mosheva E. A., Siraev R. R. Effect of channel geometry on a density wave induced by gravity and chemoconvection in miscible reacting fluids // *AIP Advances*. 2020. Vol. 10. N. 12. 125222. DOI: 10.1063/5.0028383
4. Bratsun D., Siraev R. Controlling mass transfer in a continuous-flow microreactor with a variable wall relief // *International Communications in Heat and Mass Transfer*. 2020. Vol. 113. 104522. DOI: 10.1016/j.icheatmasstransfer.2020.104522
5. Schöpf W., Stiller O. Three-dimensional patterns in a transient, stratified intrusion flow // *Physical Review Letters*. 1997. Vol. 79. N. 22. 4373. DOI: 10.1103/PhysRevLett.79.4373

Колебательная неустойчивость и стоячие электроконвективные волны в слабопроводящей жидкости

О. О. Некрасов, Б. Л. Смородин

Пермский государственный национальный исследовательский университет
614990, Пермь, ул. Букирева, 15
email: dakeln2@gmail.com

Проведено численное моделирование электроконвективных течений неизотермической слабопроводящей жидкости, возникающих в плоском конденсаторе при автономной инъекции заряда с катода. Проанализированы свойства стоячих волн. Показано, что режим стоячих волн (SW) при некотором критическом значении электрического числа Релея меняется режимом модулированных по амплитуде стоячих волн (MSW). В модулированной стоячей волне происходит конкуренция первой и второй пространственных гармоник.

Ключевые слова: инъекция заряда; электроконвекция; стоячая волна

Oscillatory instability and standing electroconvective waves in a weakly conducting liquid

O. O. Nekrasov, B. L. Smorodin

Perm State University, 15 Bukireva St., 614990, Perm
email: dakeln2@gmail.com

Numerical simulation of electroconvective flows is carried out for a horizontal capacitor with a non-isothermal weakly conducting liquid and autonomous charge injection from the cathode. The standing waves regime is analyzed. It is shown that the standing waves (SW) at a certain critical value of the electric Rayleigh number are changed by the amplitude-modulated standing waves (MSW). In the modulated standing wave the first and second spatial harmonics compete.

Keywords: charge injection; electroconvection; standing wave

1. Введение

Электроконвекция помещенных в электрическое поле слабопроводящих и диэлектрических жидкостей может существовать благодаря образованию в ней свободных или поляризационных зарядов [1–3]. В изотермической слабопроводящей жидкости, заполняющей горизонтальный конденсатор, стационарная электроконвекция [4–5] возникает за счет взаимодействия инжектированного с электрода заряда с внешним электрическим полем. При этом течение жидкости возникает в результате обратной бифуркации.

В неизотермическом случае, при нагреве конденсатора сверху в результате конкуренции сил плавучести и Кулона неустойчивость жидкости наступает колебательным образом, что приводит к возникновению волновых режимов течения [6–8]. Результаты [7] получены в случае, когда инжектированный заряд на катоде линейно зависит от приложенного поля. Кроме того, в ходе численного моделирования использовано безындукционное приближение.

Другой подход применен в [8], где рассмотрена полная постановка задачи: электрическое поле в конденсаторе определяется распределением заряда внутри него. Кроме того, в [8] предполагается, что имеет место автономная инжекция: величина инжектированного заряда постоянна. В результате бифуркации Хопфа рождаются волновые электроконвективные течения: смешанный режим (М), бегущая волна (TW), модулированная бегущая волна (MTW). Однако, режим стоячих волн при таком подходе обнаружить не удалось.

В данной работе для заполненного слабопроводящей жидкостью и нагреваемого сверху горизонтального конденсатора, когда инжекция заряда с катода постоянна изучено поведение и характер стоячих волн в зависимости от величины внешнего электрического поля. На бифуркационной диаграмме отражены решения в виде стоячих волн, а также получены распределения гидродинамических и электрических полей в конденсаторе.

2. Постановка задачи и результаты

Рассматривается заполненный слабопроводящей жидкостью горизонтальный конденсатор (d – расстояние между обкладками). Предполагается, что плотность ρ_0 , кинематическая вязкость ν , температуропроводность χ и диэлектрическая проницаемость ε жидкости постоянны. Конденсатор находится в поле силы тяжести, а к его обкладкам, приложены разность потенциалов V_0 и разность температур Θ .

Рассмотрим двумерные возмущения: $\mathbf{v} = (v_x, 0, v_z)$, и введем функции тока ψ и завихренности φ соответственно:

$$v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v_z = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \varphi = (\text{rot} \mathbf{v})_y. \quad (1)$$

Система уравнений для эволюции полей ψ , φ , температуры θ , плотности заряда q и электрического потенциала Φ слабопроводящей жидкости в безразмерном виде будет выглядеть следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \Delta \varphi + \frac{T^2}{M^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial z} \right) - \frac{Ra}{Pr} \frac{\partial \theta}{\partial x}, \\ \frac{\partial q}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial q}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{T}{M^2} (q^2 - \nabla \Phi \nabla q), \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{Pr} \Delta \theta, \\ \Delta \Phi = -q, \\ \Delta \psi = -\varphi \end{array} \right. \quad (2)$$

с соответствующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} z = 0: \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad \theta = 1, \quad \Phi = 0, \quad q = C, \\ z = 1: \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad \theta = 0, \quad \Phi = 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Система уравнений (2) и граничные условия (3) содержат следующие безразмерные параметры: число Рэлея $Ra = (g\beta d^3\Theta)/(v\chi)$, электрическое число Рэлея (электроконвективный параметр) $T = (\varepsilon_0\varepsilon V_0)/(K\nu\rho_0)$, число Прандтля $Pr = \nu/\chi$, параметр подвижности ионов $M = \sqrt{(\varepsilon_0\varepsilon)/(K^2\rho_0)}$ и параметр инжекции $C = q_0 d^2/V_0\varepsilon_0\varepsilon$, где q_0 – плотность заряда, инжектируемого на катоде. Расчеты проведены в ячейке длиной $l = 2$, с использованием сетки 41×21 . Результаты, представленные в данной статье, получены для набора параметров $Ra = -2500$, $C = -0.224$, $M = 14.14$, $Pr = 10$.

Конвекция возникает при значении электрического числа Рэлея $T_{C1} = 6805$ в результате прямой бифуркации Хопфа. При использовании в нелинейных расчетах периодических граничных условий на вертикальных границах ячейки первый устойчивый режим представляет собой колебательное течение, в котором смешаны свойства стоячих и бегущих волн (так называемый смешанный режим). Рост параметра T приводит к появлению бегущих волн [8]. Во всей области изменения параметра T режим стоячих волн неустойчив.

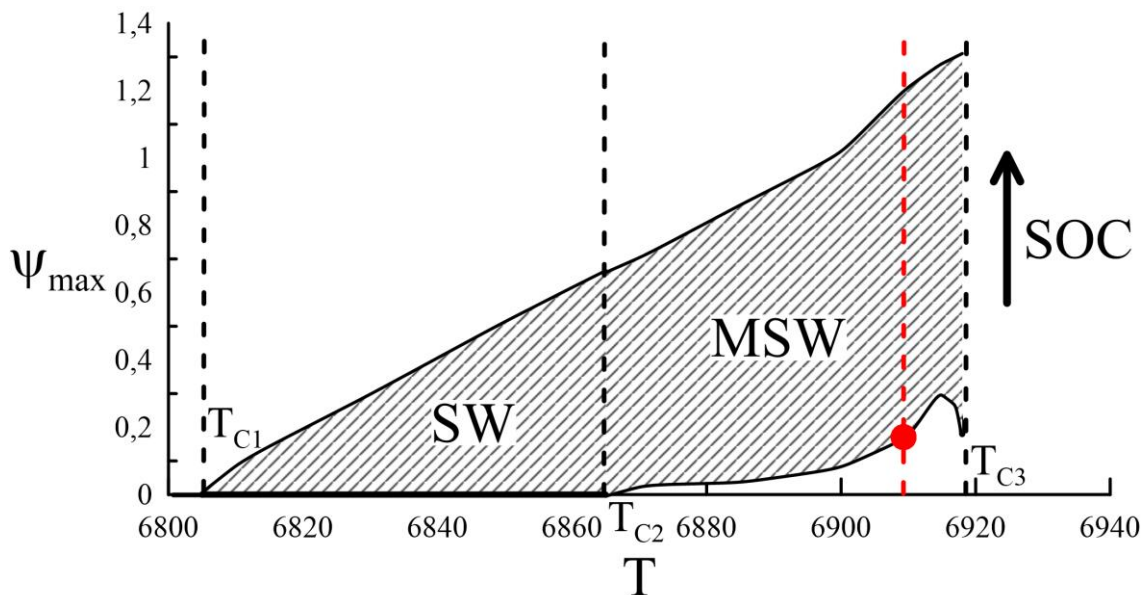


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма решений в виде стоячих волн

Для реализации в численном эксперименте неустойчивого режима стоячих волн и его дальнейшего анализа использованы специальные граничные условия, запрещающие существования бегущей волны: на левой вертикальной границе ячейки значение функции тока приравнялось нулю, далее для всех переменных применялось условие периодичности.

Бифуркационная диаграмма решений в виде стоячих волн представлена на рис. 1. Порог возникновения стоячих волн (SW) совпадает с порогом возникновения бегущих волн $T_{C1} = 6805$. Рост электрического параметра Рэлея приводит к небольшому понижению частоты стоячей волны. При $T_{C2} = 6865$ возникают модулированные стоячие волны (MSW), в которых происходит конкуренция первой и второй пространственных гармоник. Максимальное значение функции тока в этом режиме колеблется в некотором интервале, нижняя и верхняя границы которого представлены на рис. 1. При минимальной амплитуде стоячей волны структура полей функции тока и возмущения заряда определяется второй пространственной гармоникой (рис. 2а, б). Поле возмущений температуры – комбинация первой и второй пространственных гармоник (рис. 2в).

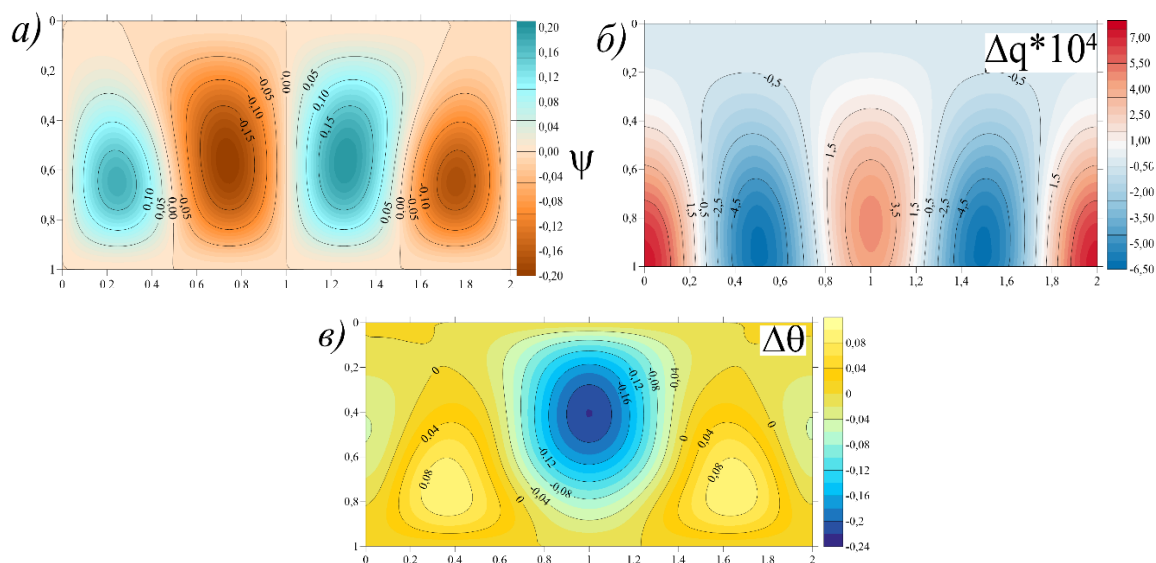


Рис. 2. Распределение функции тока (а), возмущений заряда (б) и возмущений температуры при минимальном значении амплитуды модулированной бегущей волны (в); $T = 6910$ (соответствует вертикальной штриховой линии на рис. 1)

Модулированные стоячие волны прекращают свое существование при $T_{сз} = 6919$ со скачкообразным переходом к высокоинтенсивному режиму стационарной конвекции (SOC).

Список литературы

1. *Остроумов Г. А.* Взаимодействие электрических и электрогидродинамических полей. М.: Наука, 1979. 322 с.
2. *Болога М. К., Гросу Ф. П., Кожухарь Э. И.* Электроконвекция и теплообмен. Кишинев: Штиинца, 1977. 320 с.
3. *Стишков Ю. К., Остапенко А. А.* Электрогидродинамические течения в жидких диэлектриках. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1989. 173 с.
4. *Lacroix J. C., Atten P., Hopfinger E. J.* Electroconvection in a dielectric liquid layer subjected to unipolar injection // *Journal of Fluid Mechanics*. 1975. Vol. 69 (3). P.539–563. DOI: 10.1017/S0022112075001553
5. *Верещага А. Н., Тарунин Е. Л.* Надкритические режимы униполярной конвекции в замкнутой полости // Численное и экспериментальное моделирование гидродинамических явлений в невесомости. Свердловск: УрО АН СССР, 1988. С. 92–99.
6. *Сморозин Б. Л., Тараут А. В.* Параметрическая конвекция слабопроводящей жидкости в переменном электрическом поле // *Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа*. 2010. № 1. С. 3–11.
7. *Мордвинов А. Н., Смородин Б. Л.* Электроконвекция при инъекции с катода и нагреве сверху // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 2012. Т. 141. Вып. 5. С. 997–1005.
8. *Некрасов О. О., Смородин Б. Л.* Электроконвекция слабопроводящей жидкости при униполярной инъекции и нагреве сверху // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2022. Т. 15. № 3. С. 316–332.

Влияние вибраций на конвективные режимы псевдопластической жидкости в замкнутой полости в невесомости

С. А. Никулина^а, А. В. Перминов^а, Т. П. Любимова^б

^а Пермский национальный исследовательский политехнический университет, 614990, Пермь, Комсомольский пр., 29

email: nikulina.svetlana@mail.ru

email: perminov1973@mail.ru

^б Институт механики сплошных сред УрО РАН,

614013, Пермь, ул. Академика Королёва, 1

email: lyubimovat@mail.ru

Исследована термовибрационная конвекция псевдопластической жидкости в замкнутой прямоугольной полости. Полость находится в невесомости и совершает продольные высокочастотные линейно-поляризованные вибрации. Реология псевдопластической жидкости определяется моделью Уильямсона. Градиент температуры перпендикулярен направлению вибраций. Представлена система уравнений термовибрационной конвекции для нелинейно-вязкой жидкости. Исследовано влияние вибраций на структуру и интенсивность течений. Величина вибрационного воздействия на жидкость определялась вибрационным числом Грасгофа. Получены зависимости максимума функции тока и числа Нуссельта от вибрационного числа Грасгофа. Определены пороговые значения вибрационного числа Грасгофа и числа Нуссельта, соответствующие смене режима течения. При малых значениях вибрационного числа Грасгофа в полости наблюдается медленное четырехвихревое симметричное течение. С ростом вибрационного воздействия в полости возникает интенсивное трехвихревое движение, которое трансформируется в пятивихревое. Для пятивихревого течения существует область вибрационных чисел Грасгофа, где это течение носит колебательный характер. При усилении степени неньютоновости жидкости изначально периодические колебания становятся хаотическими.

Ключевые слова: вибрации; термовибрационная конвекция; псевдопластическая жидкость; невесомость

Influence of vibrations on convective modes of a pseudoplastic fluid in a closed cavity in weightlessness

S. A. Nikulina^a, A. V. Perminov^a, T. P. Lyubimova^b

^a Perm National Research Polytechnic University, 29 Komsomolsky Pr., 614990, Perm

email: nikulina.svetlana@mail.ru

email: perminov1973@mail.ru

^b Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS,

1 Akademika Koroleva St., 614013, Perm

email: lyubimovat@mail.ru

Thermal vibration convection of pseudoplastic fluid in a closed rectangular cavity is investigated. The cavity is weightless and makes longitudinal high-frequency linearly-polarized vibrations. The rheology of a pseudoplastic fluid is defined by the Williamson model. The temperature gradient is perpendicular to the vibration direction. The system of equations of thermo-vibrational convection for a nonlinear-viscous fluid is presented. The effect of vibrations on the structure and intensity of flows is studied. The effect of vibrations on the fluid was determined by the Grashof's vibrational number. The dependences of the maximum of the current function and the Nusselt number on the Grashof vibration number were obtained. The threshold values of the vibration Grashof number and the Nusselt number corresponding to the change in the flow regime have been determined. At small values of the vibration number Grashof number in the cavity there is a slow four-versus-revolution symmetric flow. As the vibration effect increases, there is an intensive three-vortex motion in the cavity, which transforms into a five-vortex motion. For five-vortex flow there is an area of Grashof vibrational numbers, where this flow has an oscillatory character. As the degree of non-Newtonianity of the fluid increases, initially periodic vibrations become chaotic.

Keywords: vibrations; thermovibrational convection; pseudoplastic fluid; weightlessness

1. Постановка задачи

Рассмотрена прямоугольная полость с твердыми идеально теплопроводными границами с соотношением сторон 1:2. Полость заполнена псевдопластической жидкостью и находится в условиях невесомости. Задача решалась в плоской постановке. На длинных границах полости заданы постоянные разные температуры, на коротких – температура меняется по линейному закону. На всех границах выполняется условие прилипания. Полость совершает линейно-поляризованные высокочастотные малоамплитудные не акустические вибрации в направлении силы тяжести. Жидкость считается несжимаемой. Для описания поведения псевдопластической жидкости использовалась реологическая модель Уильямсона [1].

Безразмерные осредненные уравнения термовибрационной конвекции в невесомости для случая линейно-поляризованных вибраций жидкости Уильямсона в терминах функций тока осредненного ψ , пульсационного ϕ и завихренности осредненного Ω течений имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial z} + \frac{1}{2} Gv \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial z} \right) &= H_u \Delta \omega + 2 \left(\frac{\partial H_u}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial H_u}{\partial z} \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) - \\ &- \left(\frac{\partial^2 H_u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 H_u}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) - 4 \frac{\partial^2 H_u}{\partial x \partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \tau_{wxz}}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 \tau_{wxz}}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \tau_{wxz}}{\partial z^2}, \quad (1) \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial z} &= \frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \quad \omega + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = 0, \\ \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) + \left(\frac{\partial T}{\partial x} \sin \alpha - \frac{\partial T}{\partial z} \cos \alpha \right) &= 0, \\ \tau_{wxz} = H_w \frac{\partial \phi}{\partial x \partial z}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = H_w \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right), \quad H_w = \frac{\sqrt{Gv}}{2\pi} \int_0^{2\pi} H \sin t_- dt_-, \quad H_u = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H dt_-, \end{aligned}$$

$$H = 1 + \frac{Dv}{D + v \sqrt{4 \left(\sqrt{Gv} \frac{\partial \phi}{\partial x \partial z} \sin t_- + \frac{\partial \psi}{\partial x \partial z} \right)^2 + \left(\sqrt{Gv} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) \sin t_- + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \right)^2}}.$$

Задача характеризуется четырьмя безразмерными параметрами: вибрационным числом Грасгофа – $Gv = (a\omega\beta\theta h\rho/\mu_\infty)^2$, числом Прандтля – $Pr = \mu_\infty/(\rho\chi)$, динамическим пределом текучести – $D = \rho h^2 A/\mu_\infty^2$ и параметром неньютоновости – $v = A/(B\mu_\infty)$, где A и B – реологические параметры модели Уильямсона; μ_∞ – динамическая вязкость при бесконечно большом сдвиге; ρ , χ и β – соответственно плотность, температуропроводность и коэффициент объемного расширения жидкости; θ – характерный перепад температуры, $a\omega$ – амплитуда скорости вибраций, h – характерный размер полости.

Система уравнений (1) сформулирована для случая высокочастотных, малоамплитудных, не акустических вибраций: $\omega \gg \{\mu_\infty/\rho h^2, \chi/h^2\}$, $a\beta\theta \ll h$, $\lambda_c = 2\pi c/\omega \gg h$, $h \gg \mu_\infty/(\rho c)$, где λ_c – длина звуковой волны, c – скорость звука в среде. Подробно уравнения и границы применимости модели приведены в [2, 3].

2. Результаты расчетов

Численные расчеты проводились методом конечных разностей. Пространственные производные аппроксимировались конечными разностями второго порядка точности. Интегрирование по времени выполнялось методом Эйлера первого порядка точности. Расчеты выполнялись на равномерной пространственной сетке с шагом 1/20. Основные расчеты проводились для соотношения сторон полости 1:2, $Pr = 100$, динамического предела текучести $D = 0.625$ и двух значений параметра неньютоновости $v = 25, 100$. Ряд расчетов был выполнен для $v = 500$. Задача в аналогичной постановке, но без вибраций и в поле силы тяжести была решена в [1].

На рисунке 1а показана зависимости максимума функции тока ψ_{\max} от вибрационного числа Грасгофа Gv , построенные для двух значений параметра $v = 25, 100$, линии графиков так близки, что в выбранных масштабах практически неотличимы. Отличие можно наблюдать лишь при $Gv \leq 8.5$ и в диапазоне значений $190 \leq Gv \leq 250$, где наблюдаются колебательные режимы термовибрационной конвекции.

Существует несколько пороговых значений вибрационных чисел Грасгофа, при достижении которых происходит смена режима течения жидкости. При $Gv \leq 8.5$ в полости наблюдается ползущее четырехвихревое стационарное осредненное конвективное течение, которое не приводит к существенному изменению поля температур (рисунок (б)). При $8.5 < Gv \leq 50$ в полости реализуется интенсивное трех вихревое течение (рисунок (в)). Дальнейшее увеличение вибрационного числа Грасгофа трансформирует течение в пяти вихревое (рисунок (г)). Для вибрационных чисел, ограниченных на рисунке 1а штриховыми линиями, в полости реализуются колебательные режимы осредненной термовибрационной конвекции. Границы области колебательного режима зависят от параметра неньютоновости жидкости. Пунктирные линии I (рисунок (а)) в интервале $197.5 < Gv \leq 217.5$ соответствуют среднему и амплитудным значениям ψ_{\max} периодического колебательного режима

термовибрационной конвекции для $\nu = 25$. Видно, что с ростом $G\nu$ амплитуда колебаний растет, но при достижении $G\nu = 217.5$ колебания резко прекращаются. Штриховая линия 2 (рисунок (а)) в интервале $190 < G\nu \leq 250$ соответствует средним значениям максимума функции тока Ψ_{\max} хаотических колебаний термовибрационного конвективного течения при $\nu = 100$. При хаотических колебаниях реализуется пятивихревое течение, для которого, также как и при периодических колебаниях, не изменяется структура вихрей, но меняется их интенсивность. При $G\nu > 217.5$ колебания прекращаются, режимы снова становятся стационарными пятивихревыми.

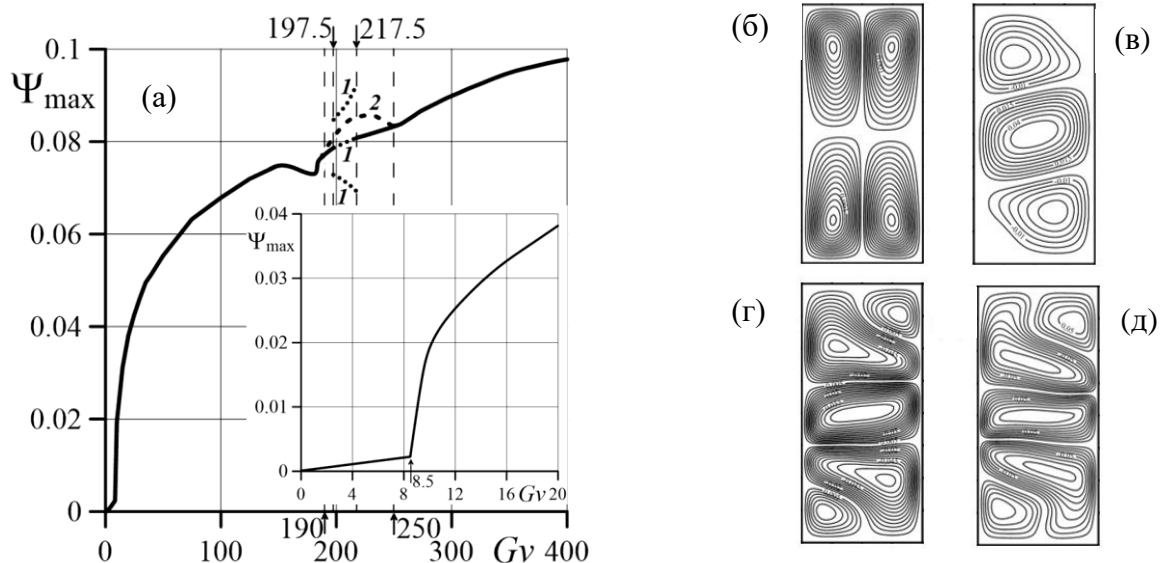


Рисунок. Зависимость максимума функции тока осредненного течения (а) и структуры течений для разных значений вибрационного числа Грасгофа: $G\nu = 5$ (б); 35 (в); 100 (г); 400 (д)

3. Заключение

В работе была сформулирована математическая модель термовибрационной конвекции псевдопластической жидкости в прямоугольной полости, находящейся в невесомости и совершающей малоамплитудные высокочастотные линейно-поляризованные вибрации. Ось вибраций ориентирована вдоль более длинной стенки полости. Приведены критерии применимости математической модели.

Показано, что вибрации на фоне неоднородного распределения температуры возбуждают в жидкости термовибрационное конвективное течение, которое изменяет свою структуру при усилении интенсивности вибрационного воздействия. При малых значениях вибрационного числа Грасгофа в полости наблюдается медленное четырехвихревое симметричное стационарное конвективное течение. С ростом вибрационного воздействия четырех вихревое течение трансформируется в трех вихревое интенсивное стационарное течение. При дальнейшем увеличении вибраций трех вихревое течение трансформируется в пяти вихревое. Для пяти вихревого течения существует область вибрационных чисел Грасгофа, где это течение носит колебательный характер, который при достижении определенного значения $G\nu$ прекращается. При усилении степени неньютоновости жидкости изначально периодические колебания становятся хаотическими. Далее при увеличении $G\nu$ колебания прекращаются, режимы снова становятся стационарными пятивихревыми.

Список литературы

1. *Любимова Т. П.* Численное исследование конвекции вязкопластичной жидкости в замкнутой области // Известия Академии наук СССР. Механика жидкости и газа. 1977. №1. С. 3–8.
2. *Lyubimova T. P., Perminov A. V., Kazimardanov M. G.* Stability of quasi-equilibrium states and supercritical regimes of thermal vibrational convection of a Williamson fluid in zero gravity conditions // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2019. Vol. 129. P. 406–414. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.09.112
3. *Никулина С. А., Перминов А. В., Любимова Т. П.* Термовибрационная конвекция псевдопластической жидкости в прямоугольной полости // Вестник Пермского университета. Физика. 2020. Вып. 3. С. 14-23. DOI: 10.17072/1994-3598-2020-3-14-23

Вихревое течение электропроводящей жидкости в цилиндрической ячейке со сферической частицей

В. С. Озерных, И. В. Колесниченко

Институт механики сплошных сред УрО РАН,
614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1
email: ozernykh.v@icmm.ru

В работе изучаются особенности возникновения и характер изменения вихревых течений в цилиндрической ячейке жидкого металла с уединенной электропроводящей частицей примеси. При коаксиальном направлении электрического тока и внешнего магнитного поля течение металла возникает под действием электромагнитной силы, обусловленной искривлением линий тока вблизи частицы. Течение развивается в различных плоскостях: возникает два азимутальных вихря, которые порождают несколько полоидальных вихрей вблизи частицы. В работе изучена структура вихрей, их интенсивность, проведен частотный анализ пульсаций скорости. Проведена оценка полоидальной и азимутальной энергии в системе при различных внешних параметрах и при различных отношениях электропроводности.

Ключевые слова: жидкий металл; вихревое течение; электромагнитная сила

Vortex flow of an electrically conductive liquid in a cylindrical cell with a spherical particle

V. S. Ozernykh, I. V. Kolesnichenko

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS,
1 Akademika Koroleva St., 614013, Perm
email: ozernykh.v@icmm.ru

The paper studies the features of the occurrence and the nature of the change of vortex flows in a cylindrical cell of a liquid metal with a solitary electrically conductive impurity particle. With the coaxial direction of the electric current and the external magnetic field, the metal flow occurs under the action of an electromagnetic force due to the curvature of the current lines near the particle. The flow develops in different planes: two azimuthal vortices appear, which generate several poloidal vortices near the particle. In this paper, the structure of vortices and their intensity are studied, and a frequency analysis of velocity pulsations is carried out. The poloidal and azimuthal energies in the system are estimated for various external parameters and for various electrical conductivity ratios.

Keywords: liquid metal; vortex flow; electromagnetic force

Принципы магнитогидродинамики широко применяются в различных отраслях промышленности. Если на электропроводящую среду (жидкий металл) наложить внешнее магнитное поле и пропустить по среде электрический ток, то в среде может возникнуть электромагнитная сила, которая приведет в движение жидкий металл. Структура течения, и его интенсивность существенно зависят от топологии растекания электрического тока [1–3], которая определяется главным образом расположением элементов, подводящих ток. Неоднородность растекания тока изучается в задачах, связанных с кристаллизацией [4], сепарацией частиц примесей [5], моделированием жидкометаллических батарей [6] и др [7].

С одной стороны, в условиях плавления металла и получения слитков интенсивное перемешивание металла за счет ВТ позволит гомогенизировать расплав. Тем самым после затвердевания (в том числе, задачи кристаллизации) произойдет улучшение физико-механических свойств слитка, таких как: однородность структуры, повышенный предел текучести и пр.

С другой стороны, вихревые течения могут играть и отрицательную роль, например, в жидкометаллических батареях [8–10] перемешивание слоев может служить причиной выхода из строя батареи.

Наличие частиц примесей в жидком металле также оказывает влияние на топологию растекания тока [11–12]. В зависимости от отношения электропроводности (параметр K) частиц и жидкого металла, ток может «затекать» в частицы, или «обтекать» частицы. В связи с этим линии тока сильно искривляются. В результате появляются скрещенные компоненты векторов магнитного поля и электрического тока. Их векторное произведение создаст нескомпенсированную электромагнитную силу в системе ($\vec{F} = \vec{j} \times \vec{B}$), которая приведет в движение жидкий металл.

В работе рассматривается цилиндрический объем жидкого металла, в котором находится сферическая электропроводящая частица, закрепленная в центре цилиндра. К торцам цилиндра подводится разность потенциалов и накладывается внешнее коаксиальное магнитное поле, величина которого существенно превышает магнитное поле тока. В системе возникают два азимутальных вихря, вращающихся выше и ниже частицы в противоположные стороны. Структуру такого вихря иллюстрирует рисунок справа, на котором изображено в безразмерном виде среднее поле скорости в горизонтальном сечении цилиндра на высоте $z = 2.5d$ для хорошо проводящей ($K = 10$) частицы.

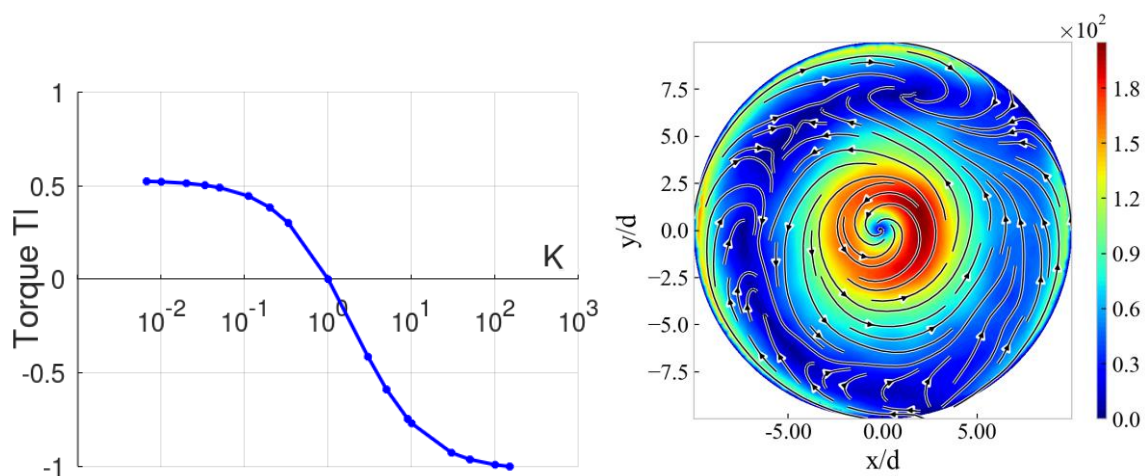


Рисунок. Вращательный момент Tl электромагнитной силы (слева), азимутальное поле скорости при $K=10$ (справа)

Поле азимутальной силы антисимметрично относительно центральной плоскости $z = 0$, то есть интегральный момент силы, действующий на частицу равен нулю. Однако если рассмотреть интегральный аксиальный момент силы, действующей на жидкий металл в половине расчетной области, то он окажется не нулевым. На рисунке слева показана зависимость момента T_l (момент силы, действующий на жидкость в верхней половине цилиндрической ячейки) от отношения электропроводностей частицы и металла K .

Видно, что при равной проводимости частицы и металла ($K = 1$) не возникает моменты силы. В предельных случаях, для хорошо проводящей частицы возникающий момент оказывается примерно вдвое больше, чем в случае плохо проводящей частицы.

Таким образом, вблизи уединенной частицы в электропроводящей среде под действием внешнего магнитного поля возникают вихревые течения. Наблюдается два азимутальных вихря и несколько полоидальных. Интенсивность течений определяется набором внешних параметров: соотношением электропроводности K , плотность тока j , величина внешнего магнитного поля B . Анализ зависимости энергии в системе от времени показал, что энергия очень быстро выходит на стационарное значение и в дальнейшем изменяется в пределах нескольких процентов. Однако при этом течение оказывается неустойчивым и генерирует сильные пульсации.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда и Пермского Края № 22-19-20106, <https://rscf.ru/project/22-19-20106/>.

Список литературы

1. Mandrykin S., Ozernykh V., Kolesnichenko I. Electro-vortex flow of liquid metal in a cylindrical cell with localized current supply and variable aspect ratio // *Magnetohydrodynamics*. 2020. Vol. 56 (2–3). P. 215–224.
2. Frick P., Mandrykin S., Eltishchev V., Kolesnichenko I. Electrovortex flows in a cylindrical cell under axial magnetic field // *Journal of Fluid Mechanics*. 2022. Accepted for publication.
3. Kolesnichenko I., Frick P., Eltishchev V., Mandrykin S., Stefani F. Evolution of a strong electrovortex flow in a cylindrical cell // *Physical Review Fluids*. 2020. Vol. 5(12). 123703. DOI: 10.1103/PhysRevFluids.5.123703
4. Rübiger D., Zhang Y., Galindo V., Franke S., Willers B., Eckert S. The relevance of melt convection to grain refinement in Al–Mg alloys solidified under the impact of electric currents // *Acta Materialia*. 2014. Vol. 79. P. 327–338. DOI: 10.1016/j.actamat.2014.07.037
5. Afshar M. R., Aboutalebi M. R., Isac M., Guthrie R. Mathematical modeling of electromagnetic separation of inclusions from magnesium melt in a rectangular channel // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2007. Vol. 61. P. 2045–2049. DOI: 10.1016/j.matlet.2006.08.012
6. Kelley D., Weier T. Fluid mechanics of liquid metal batteries // *Applied Mechanics Reviews*. 2018. Vol. 70 (2). 020801. DOI: 10.1115/1.4038699
7. Afshar M. R., Aboutalebi M. R., Guthrie R., Isac M. Modeling of electromagnetic separation of inclusions from molten metals // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2010. Vol. 52. P. 1107–1114. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2009.11.003
8. Stefani F., Galindo V., Kasprzyk C., Landgraf S., Seilmayer M., Starace M., Weber N., Weier T. Magnetohydrodynamic effects in liquid metal batteries // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2016. Vol. 143. 012024. DOI: 10.1088/1757-899X/143/1/012024

9. Weber N., Beckstein P., Galindo V., Herreman W., Nore C., Stefani F., Weier T. Metal pad roll instability in liquid metal batteries // *Mangetohydrodynamics*. 2017. Vol. 53 (1). P. 129–140.
10. Weber N., Beckstein P., Herreman W., Horstmann G. M., Nore C., Stefani F., Weier T. Sloshing instability and electrolyte layer rupture in liquid metal batteries // *Physics of Fluids*. 2017. Vol. 29 (5). 054101. DOI: 10.1063/1.4982900
11. Shu D., Li TX., Sun BD., Zhou YH., Wang J., Xu ZM. Numerical calculation of the electromagnetic expulsive force upon nonmetallic inclusions in an aluminum melt: Part I. Spherical particles // *Metallurgical and materials transactions B*. 2000. Vol. 31. P. 1527–1533. DOI: 10.1007/s11663-000-0037-8
12. Shu D., Li TX., Sun BD., Zhou YH., Wang J., Xu ZM. Numerical calculation of the electromagnetic expulsive force upon nonmetallic inclusions in an aluminum melt: Part II. Cylindrical particles // *Metallurgical and materials transactions B*. 2000. Vol. 31. P. 1535–1540. DOI: 10.1007/s11663-000-0038-7
13. 0038-7B, vol. 31B (2000), P. 1535–1540.

Конвективные структуры длинноволновой неустойчивости Марангони в нагретой жидкой пленке

Э. В. Пермякова^{a,b}, А. Е. Самойлова^{a,b}

^a Институт механики сплошных сред УрО РАН,
614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1

^b Пермский государственный национальный исследовательский университет,
614990, Пермь, ул. Букирева, 15

Мы изучаем динамику тонкой пленки жидкости, помещенной на нагретую подложку низкой теплопроводности. Развитие неустойчивости Марангони в пленке исследуется численно в рамках системы уравнений, полученных в длинноволновом приближении. Данные уравнения решаются методом конечных разностей. Вблизи порога возникновения конвекции Марангони получены поля распределения температуры и толщины пленки для стационарных и нестационарных конвективных структур в двух- и трехмерной постановках. Обнаружено совпадение результатов с предсказаниями линейной теории устойчивости, но также выявлены расхождения с результатами слабонелинейного анализа.

Ключевые слова: тонкая пленка; конвекция Марангони; численное моделирование

Marangoni patterns in a thin liquid film heated from below

E. V. Permyakova^{a,b}, A. E. Samoilova^{a,b}

^a Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS,
1 Akademika Koroleva St., 614013, Perm

^b Perm State University, 15 Bukireva St., 614990, Perm

We investigate the dynamics of a thin liquid film that is placed atop a heated substrate of a very low thermal conductivity. The direct numerical simulation of the stationary long-wave Marangoni instability is performed within the system of coupled partial differential equations that describe the evolution of film thickness and fluid temperature. We compare our results with previous results of the weakly-nonlinear analysis. A good qualitative agreement is observed for values of the Marangoni number near the instability threshold. In the case of supercritical excitation, our results for the amplitudes are described by the square root dependence on the supercriticality. In the case of subcritical excitation, we found the hysteresis. In a case of subcritical excitation, relatively high supercriticality results in that steady regimes evolve into film rupture via the emergence of secondary humps. For the three-dimensional patterns, we obtain rolls or squares depending on the problem parameters.

Keywords: thin film; Marangoni convection; numerical simulation

1. Введение

В данной работе численно исследуется поведение тонкой пленки жидкости, помещенной на нагретую твердую подложку низкой теплопроводности [1–3]. В такой системе при определенных условиях может возникать тепловая конвекция, главный механизм которой – термокапиллярный эффект, т.е. зависимость поверхностного натяжения жидкости от температуры [4–6]. Характеристики конвективной неустойчивости при этом сильно зависят от свойств системы. Так при достаточно сильном поверхностном натяжении жидкости, которое препятствует деформациям свободной поверхности, возникает ячеистая или коротковолновая конвективная неустойчивость [7]. Характерный размер конвективных структур (ячеек) при этом сравним с характерным пространственным масштабом системы – толщиной слоя жидкости. Если же недеформируемая поверхность очень слабо отдает тепло во внешнюю среду, то неустойчивость возникает в виде сильно вытянутых структур [4]. Такой тип неустойчивости называется длинноволновым; он возникает также в ситуации, когда свободная поверхность может деформироваться [8, 9].

В настоящей работе мы сосредоточены на длинноволновой конвективной неустойчивости вследствие того, что рассматриваемая система – тонкая пленка жидкости – обладает подходящими пространственными характеристиками: горизонтальный масштаб в ней намного больше, чем толщина слоя. В этом случае для описания динамики системы удобно использовать не полные гидродинамические уравнения, а специальную длинноволновую модель [1]. В данной работе мы используем длинноволновую модель, полученную в [10]. Особенность этой модели в том, что авторам удалось скомбинировать условия для возникновения длинноволновой неустойчивости: слабую теплоотдачу со свободной поверхности и конечную деформируемость. В результате были получены новые интересные результаты. Первым важным результатом оказалось предсказание существования мягкого возбуждения стационарной неустойчивости. Прежде полагалось, что развитие неустойчивости Марангони в тонкой пленке всегда приводит к разрыву вследствие жесткого возбуждения конвекции [11, 12]. Авторам в [10] удалось показать существование стабильных стационарных конвективных структур в тонкой пленке жидкости. Вторым важным результатом является обнаружение колебательной моды неустойчивости Марангони; прежде полагалось, что при нагреве снизу может возбуждаться только стационарная конвекция Марангони.

В настоящей работе мы проводим прямое численное моделирование динамики тонкой пленки в рамках уравнений в частных производных, описывающих эволюцию толщины пленки и температуры жидкости. Мы сопоставляем результаты с предсказаниями линейного и слабонелинейного анализа из [10, 13].

2. Модель длинноволновой конвекции Марангони

В работе рассматривается поведение тонкой пленки жидкости, размещенной на твердой нагретой подложке. Предполагается, что подложка обладает значительно более низкой теплопроводностью, чем жидкость. Таким образом, нижняя граница слоя жидкости считается теплоизолированной, на ней выполняется условие фиксированного теплового потока. Верхняя граница тонкой пленки является свободной; тепловой поток на этой границе по закону Ньютона уходит в окружающее пространство.

Основным механизмом массопереноса в такой системе является конвекция Марангони, вызванная термокапиллярным эффектом. В этом случае поверхностное

натяжение жидкости уменьшается с ростом температуры по линейному закону, характерному для большого круга жидкостей: $\alpha = \alpha_0 - \alpha_T T$. Здесь и далее T обозначает температуру жидкости, отсчитываемую от температуры окружающего газа, которая считается неизменной. Конвективным переносом, вызванным эффектом теплового расширения, в данной системе можно пренебречь ввиду малой толщины пленки.

Сила тяжести считается нормальной, однако предполагается, что свободная поверхность пленки может значительно деформироваться вследствие развития конвекции. Для очень тонких пленок ($\sim 0.1 - 0.01$ мм) это условие выполнимо даже для воды, которая обладает весьма высоким поверхностным натяжением.

В качестве примера реальной системы подходит слой силиконового масла кинематической вязкостью $\nu = 100$ сСт толщиной $H = 0.1$ мм. В качестве теплоизолирующей подложки в таком случае может выступать плита из органического стекла. Дальнейшие рассуждения, однако, будут проводиться в безразмерном виде.

Крупномасштабная конвекция Марангони в данной системе описывается системой двух эволюционных уравнений для толщины пленки и отклонения температуры жидкости от равновесного значения:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{j}, \quad \mathbf{j} = \frac{h^3}{3} \nabla P + Ma \frac{h^2}{2} \nabla f \quad (1)$$

$$h \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \nabla \cdot (h \nabla \Theta) - \frac{1}{2} (\nabla h)^2 - \beta f + \mathbf{j} \cdot \nabla f + \nabla \cdot \left(\frac{h^4}{8} \nabla P + \frac{h^3}{6} Ma \nabla f \right). \quad (2)$$

Здесь $P = Gah - C\nabla^2 h$ обозначает давление под искривленной поверхностью, $f = \Theta - h$ соответствует возмущению температуры на искривленной поверхности.

Задача содержит следующие безразмерные комбинации физических параметров:

$$Pr = \frac{\nu}{\chi}, \quad Ga = \frac{gH^3}{\nu\chi}, \quad Bi = \frac{qH}{\kappa}, \quad Ma = \frac{\alpha_T AH^2}{\rho\nu\chi}, \quad Ca = \frac{\alpha_0 H}{\rho\nu\chi}.$$

Это число Прандтля, число Галилея, число Био, число Марангони и параметр капиллярности, соответственно. Однако в уравнениях (1) – (2) встречаются перемасштабированные число Био и параметр капиллярности: $Ca = \varepsilon^{-2} C$, $Bi = \varepsilon^2 \beta$. Малый параметр ε – параметр длинноволнового разложения – определяется как отношение толщины пленки H к характерному горизонтальному масштабу движений L : $\varepsilon = H/L$.

Состоянию механического равновесия, соответствующему теплопроводному прогреву пленки, отвечают следующие решения уравнений (1) – (2): $h = 1$, $\Theta = 1$.

При превышении порогового значения числа Марангони Ma_c механическое равновесие сменяется конвективным движением. Пороговые значения для монотонной и колебательной мод определены в работе [10], так же как и значения волнового числа критических возмущений и частоты (для колебательного режима).

3. Численное моделирование

Система дифференциальных уравнений в частных производных (1) – (2) решается эволюционным методом с применением метода конечных разностей. В качестве расчетной области выбран промежуток $[0, L]$ на оси OX , $L = 2\pi/k$. Значение волнового числа k выбирается соответствующим наиболее опасным возмущениям при данных значениях параметров Ga , C , β . На границах ставятся периодические граничные

условия: функции $h(x,t)$ и $\Theta(x,t)$, а также их производные должны сшиваться при $x = 0$ и $x = L$.

Шаг по времени менялся в пределах $\Delta t = (0.01 \div 0.001)(\Delta x)^4$, чтобы удовлетворить сходимости явной схемы. Шаг по пространственной координате определялся как $\Delta x = L/N$. Количество узлов сетки N варьировалось от 100 до 200 в зависимости от наблюдаемых режимов конвекции. Аппроксимация пространственных производных производилась стандартными центральными разностями. Важным этапом является задание начальных условий. Малое отклонение от механического равновесия задавалось в виде $h(x,0) = 1 + 0.01 \cos(k_c x)$. Для исследования динамики системы на неустойчивой ветви решения в качестве начальных условий использовались данные вычислений для установившегося режима с конечной деформацией пленки.

4. Результаты

Для расчетов выбраны несколько значений безразмерных параметров. На рис. 1 изображены профили толщины пленки при возникновении стационарной конвекции Марангони. При $Ga = 1$, $\beta = 4$ (рис. 1b) конвекция возбуждается при $Ma > Ma_c = 5.75$. По линейной теории критические возмущения характеризуются волновым числом $k_c = 1.5$. Исследование конкуренции различных конвективных паттернов, которые могут возникать в данной системе: валов, квадратов, шестиугольников, показало, что при $Ga = 1$, $\beta = 4$ вблизи порога возникновения конвекции Ma_c должны наблюдаться устойчивые валы с характерным размером $2\pi/k_c$. Как видно, наши расчеты подтверждают эти результаты.

При $Ga = 1$, $\beta = 6$ линейная теории предсказывает возникновение конвекции при $Ma > Ma_c = 7.56$ с характерным пространственным масштабом $2\pi/k_c$, $k_c = 1.63$. При этом более устойчивыми должны оказываться конвективные структуры с квадратной симметрией. На рис. 1c показаны результаты расчетов для этих параметров, которые, как видно, хорошо согласуются с предсказаниями слабонелинейного анализа.

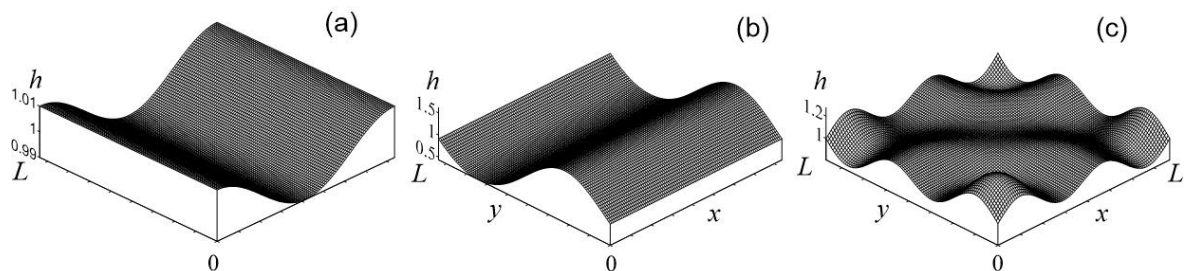


Рис. 1. Профили толщины пленки для трехмерной стационарной конвекции. (a) Профиль в начальный момент времени. (b) Установившийся профиль для $Ga = 1$, $\beta = 4$, $Ma = 6$. (c) Установившийся профиль для $Ga = 1$, $\beta = 6$, $Ma = 7.6$

На рис. 2 представлены результаты расчетов для колебательной моды неустойчивости Марангони при $Ga = 5$, $\beta = 40$. Конвекция Марангони возбуждается при таких параметрах при $Ma > Ma_c = 29.9$ с характерным пространственным масштабом $2\pi/k_c$, $k_c = 3.3$ и периодом $T = 0.225$. Слабонелинейный анализ предсказывает возбуждение устойчивых бегущих валов, однако наши расчеты показывают формирование бегущих структур с квадратной симметрией. Стоит отметить, что в расчетах не удается добиться установившегося режима, т.к. происходит разрыв пленки вследствие возбуждения коротковолновой неустойчивости Марангони. Т.е. при достаточно сильной деформации пленки исходная модель длинноволнового приближения перестает адекватно описывать динамику пленки.

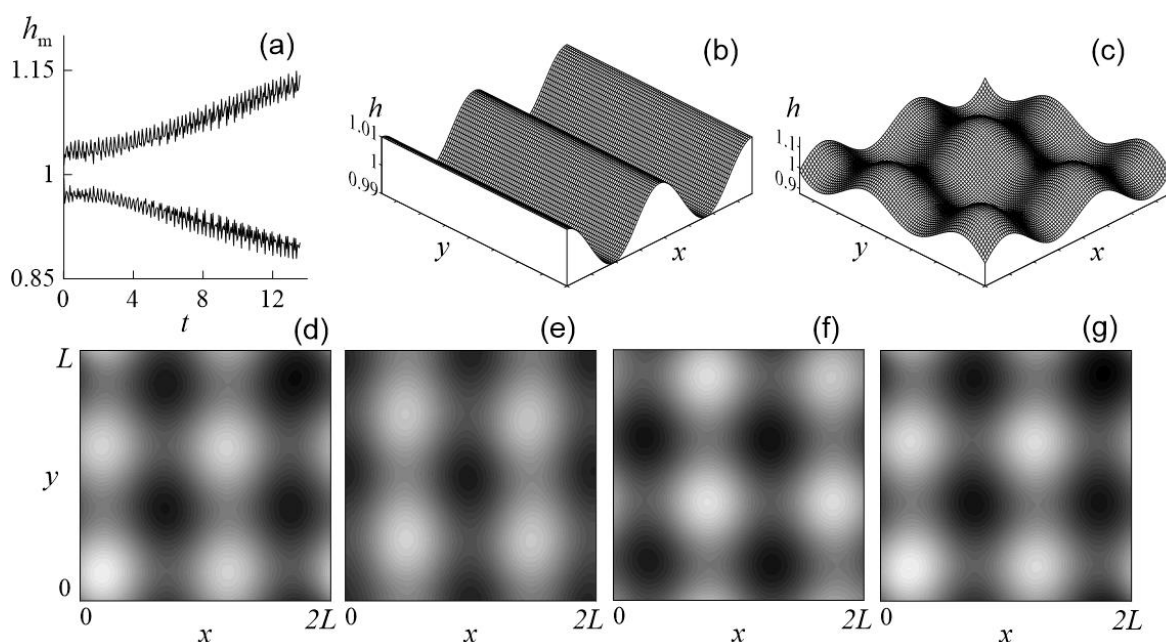


Рис. 2. Динамика толщины пленки для $Ga = 5$, $\beta = 40$, $Ma = 30$. (a) Изменение максимальной и минимальной толщины со временем. Изменение профилей (b) в начальный момент времени и (c) перед разрывом. (d) – (g) Бегущие конвективные структуры (вид на пленку сверху). Темные области соответствуют погружению жидкости, светлые соответствуют всплыванию

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 20-71-00070).

Список литературы

1. Oron A., Davis S. H., Bankoff S. G. Long-scale evolution of thin liquid films // Reviews of Modern Physics. 1997. Vol. 69. P. 931–980. DOI: 10.1103/RevModPhys.69.931
2. Craster R. V., Matar O. K. Dynamics and stability of thin liquid films // Reviews of Modern Physics. 2009. Vol. 81. P. 1131–1198. DOI: 10.1103/RevModPhys.81.1131
3. Холтанов Л. П., Шкадов В. Я. Гидродинамика и теплообмен с поверхностью раздела. М.: Наука, 1990. 271 с.
4. Pearson J. R. A. On convection cells induced by surface tension // Journal of Fluid Mechanics. 1958. Vol. 4 (5). P. 489–500. DOI: 10.1017/S0022112058000616
5. Davis S. H. Thermocapillary instabilities // Annual Review of Fluid Mechanics. 1987. Vol. 19. P. 403–435. DOI: 10.1146/annurev.fl.19.010187.002155
6. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
7. Bénard H. Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquid // Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées. 1900. Vol. 11. P. 1261–1271.
8. Scriven L. E., Sternling C. V. On cellular convection driven by surface-tension gradients: effects of mean surface tension and surface viscosity // Journal of Fluid Mechanics. 1964. Vol. 19. P. 321–340. DOI: 10.1017/S0022112064000751
9. Smith K. A. On convective instability induced by surface-tension gradient // Journal of Fluid Mechanics. 1966. Vol. 24 (2). P. 401–414. DOI: 10.1017/S0022112066000727

10. *Shklyaeв S., Alabuzhev A. A., Khenner M.* Long-wave Marangoni convection in a thin film heated from below // *Physical Review E*. 2012. Vol. 85 (1). 016328. DOI: 10.1103/PhysRevE.85.016328
11. *Oron A.* Nonlinear dynamics of three-dimensional long-wave Marangoni instability in thin liquid films // *Physics of Fluids*. 2000. Vol. 12 (7). P. 1633–1645. DOI: 10.1063/1.870415
12. *VanHook S. J., Schatz M. F., Swift J. B., McCormick W. D., Swinney H. L.* Long-wavelength surface-tension-driven Benard convection: Experiment and theory // *Journal of Fluid Mechanics*. 1997. Vol. 345. P. 45–78. DOI: 10.1017/S0022112097006101
13. *Samoilova A. E., Nepomnyashchy A.* Marangoni patterns on a rhombic lattice in a thin film heated from below // *Physics of Fluids*. 2021. Vol. 33 (1). 014101. DOI: 0.1063/5.0032901

Динамика гистерезисных переходов конвективного течения в наклоняемом квадрате

А. Н. Полудницин^а, А. Н. Шарифулин^б

^а Пермский государственный национальный исследовательский университет, 614990, Пермь, ул. Букирева, 15
email: panam.48@mail.ru

^б Пермский национальный исследовательский политехнический университет, 614990, Пермь, Комсомольский пр., 29
email: sharifulin@bk.ru

Численно методом конечных разностей исследовано влияние плавного наклона на конвективное валовое течение воздуха в квадратной полости с твердыми, теплопроводными стенками. В результате последовательного изменения угла наклона при постоянной величине числа Грасгофа в полости наблюдается гистерезис, приводящий к смене направления вращения вала. Процесс смены связан с ростом угловых вихрей и реализуется в зависимости от надкритичности и шага изменения угла наклона разными сценариями (с симметричным и несимметричным расположением возникающих вихрей).

Ключевые слова: тепловая конвекция; наклон; гистерезис

Dynamics of hysteresis transitions of a convective flow in a tilted square

A. N. Poludnitsin^a, A. N. Sharifulin^b

^a Perm State University, 15 Bukireva St., 614990, Perm
email: panam.48@mail.ru

^b Perm National Research Polytechnic University, 29 Komsomolsky Pr., 614990, Perm
email: sharifulin@bk.ru

The effect of a smooth slope on the convective bulk air flow in a square cavity with solid, heat-conducting walls is studied numerically by the finite difference method. As a result of a successive change in the angle of inclination at a constant value of the Grashof number, a hysteresis is observed in the cavity, leading to a change in the direction of rotation of the shaft. The change process is associated with the growth of corner vortices and is implemented depending on the supercriticality and the step of changing the angle of inclination by different scenarios (with a symmetrical and asymmetric arrangement of emerging vortices).

Keywords: thermal convection; slope; hysteresis

1. Введение

Тепловая конвекция воздуха в замкнутых наклоняемых прямоугольных полостях представляет интерес в связи с тем, что подобные емкости являются элементами большого количества технических устройств. Их ориентация может плавно или

ступенчато меняться, при этом в газе, заполняющем объем, конвективные течения могут претерпевать скачкообразные изменения [1–7].

Наклон при малых значениях числа Рэлея приводит к формированию нормального вихря, с направлением циркуляции, совпадающим с направлением угла наклона полости. При числах Рэлея, превышающих критическое значение, в случае наклонов полости появляется гистерезис конвективного течения. Наряду с таким нормальным вихрем может существовать и вихрь с обратным направлением циркуляции, который принято называть аномальным. Аномальные вихри существуют в ограниченном диапазоне углов. При превышении углом наклона критического значения происходит переход к нормальному режиму конвекции. Такие переходы ранее наблюдались лишь экспериментально [1, 2].

Цель настоящей работы, – на основе численного решения полных уравнений тепловой конвекции воздуха в приближении Буссинеска для различных углов наклона квадратной полости и надкритичностей, исследовать динамику переходного процесса, возникающего при смене режима течения от аномального к нормальному.

2. Постановка задачи

Рассмотрим заполненную воздухом полость имеющую форму бесконечного горизонтального цилиндра квадратного сечения, представленную на рис. 1. Введем декартовую систему координат (x, y, z) , ось y которой совпадает с ребром цилиндра и направлена от нас. Единичный вектор \vec{n} , расположен в плоскости xz , указывает направление вверх и связан с ускорением свободного падения соотношением $\vec{g} = -g\vec{n}$. Угол наклона квадратного цилиндра α , отсчитывается по часовой стрелке от оси z до \vec{n} . Диапазон изменения угла α в расчетах составляет $-30^\circ \leq \alpha \leq 30^\circ$, причем при $\alpha = 0^\circ$, сторона цилиндра, совпадающая с осью x горизонтальна и реализуется условие подогрева строго снизу.

Стенки полости предполагаются твердыми. Верхняя и нижняя плоскости $z = 0, d$ изотермические и поддерживаются при постоянном перепаде температуры Θ , причем плоскость $z = 0$ более нагрета. Боковые стенки $x = 0, d$ предполагаются теплопроводными и на них задается линейное распределение температуры $T = \Theta(1 - z/d)$. Коэффициент линейного расширения жидкости β , кинематическая вязкость ν и температуропроводность χ постоянны.

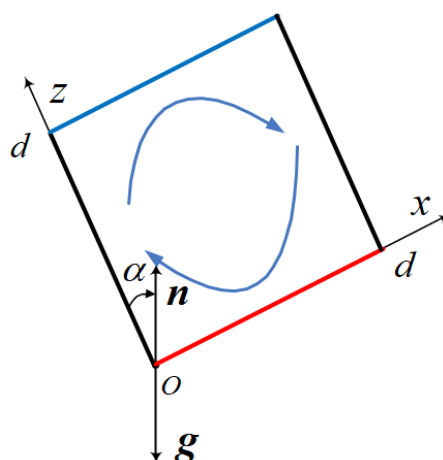


Рис. 1. Геометрия задачи о свободной тепловой конвекции в горизонтальном цилиндре квадратного сечения (см. пояснения в тексте)

Предполагается, что скорости движения воздуха достаточно малы, чтобы считать среду несжимаемой и использовать приближение Буссинеска. Выберем в качестве единиц измерения расстояния, температуры, функции тока и времени – d , Θ , коэффициент кинематической вязкости ν и d^2/ν . Будем искать плоские решения задачи. В этом случае векторные поля завихренности и функции тока будут иметь отличными от нуля только y компоненты:

$$\vec{\varphi} = (0, \varphi, 0), \quad \vec{\psi} = (0, \psi, 0). \quad (1)$$

Тогда уравнения тепловой конвекции в безразмерной форме запишутся в виде [8]:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \text{Gr} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \sin \alpha - \frac{\partial T}{\partial x} \cos \alpha \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \varphi = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right). \quad (4)$$

Безразмерные критерии подобия, число Грасгофа – Gr , число Прандтля – Pr , число Релея – Ra имеют вид:

$$\text{Gr} = \frac{g\beta\Theta d^3}{\nu^2}, \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{\chi}, \quad \text{Ra} = \text{Gr} \cdot \text{Pr}. \quad (5)$$

Скорость течения связана с полем функции тока $\psi(x, z)$:

$$\vec{v} = \left(-\frac{\partial \psi}{\partial z}, 0, \frac{\partial \psi}{\partial x} \right). \quad (6)$$

Граничные условия для температуры на нижней и верхней изотермических стенках запишутся в виде:

$$\text{при } z = 0, 1 \quad T = 1, 0. \quad (7)$$

Граничные условия для температуры в случае проводящих боковых стенок с линейным распределением температуры имели вид:

$$\text{при } x = 0, 1 \quad T = 1 - z. \quad (8)$$

Стенки полости полагались непроницаемыми и твердыми. Из условия непротекания через них и прилипания получаем граничные условия для функций тока:

$$\text{при } z = 0, 1 \quad \psi = \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0; \quad (10)$$

$$\text{при } x = 0, 1 \quad \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \quad (11)$$

Решение задачи (2) – (11) получалось конечно-разностным методом, описанным в [9]. Число Прандтля полагалось равным $\text{Pr} = 0.7$, соответствующим воздуху при нормальных условиях. Расчеты проводились на равномерной квадратной сетке:

$$x_i = i \cdot h, \quad z_k = k \cdot h,$$

$$i = 0, 1, \dots, N; \quad k = 0, 1, \dots, N,$$

где $h = 1/N$ – шаг сетки. Все вычисления проведены для $N = 64$.

Использовалась явная схема с центральными разностями для пространственных производных [9]. Для аппроксимации завихренности на границах использовалась формула Тома. Величина шага по времени Δt контролировалась и выбиралась достаточно малой для того чтобы выполнялось условие Куранта.

3. Результаты расчетов

В [8] показано, что в надкритической области по числу Грасгофа и определенном диапазоне углов наклона полости возможны два устойчивых стационарных валовых режима конвекции. В случае отсутствия наклона, т.е. при $\alpha = 0$, они отличаются только направлением циркуляции. При фиксированном значении числа Грасгофа направление циркуляции сохраняется, даже когда плавное изменение наклона полости переходит через нулевую отметку угла наклона, но при превышении углом наклона критического значения происходит перестройка структуры конвективного течения. Аналогичное поведение вала наблюдается при изменении угла наклона в обратную сторону т.е. присутствует гистерезис. Определены границы существования гистерезиса для области чисел Грасгофа до 10 надкритичностей. В настоящей работе рассматривается нестационарный процесс перестройки структуры конвективного течения, возникающий при пересечении динамической системой бифуркационной кривой для надкритичностей до 20. Уточненная в настоящей работе бифуркационная кривая приведена на рис. 2 вертикальная пунктирная линия указывает путь системы в пространстве графика при надкритичности равной четырём. Перемещение ДС в пространстве графика осуществлялось пошаговым переходом из одного стационарного состояния системы в другое стационарное состояние. В процессе перехода происходили изменения параметров системы. Для оценки развития процесса перестройки структуры течения использовалось поле функции тока.

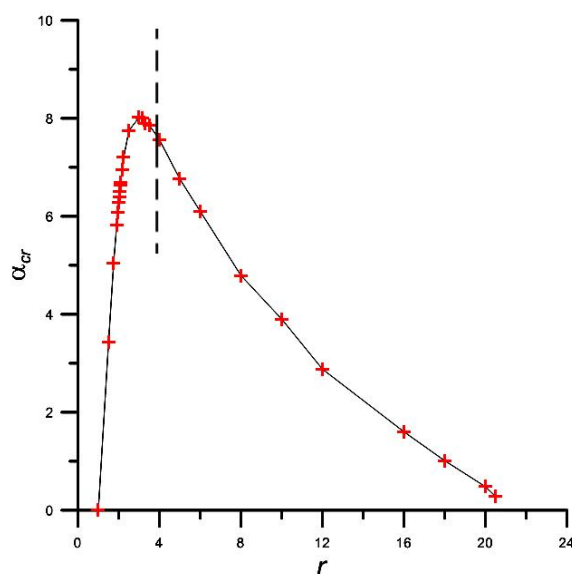


Рис. 2. Бифуркационная кривая. Пунктиром показано последовательное изменение угла наклона для надкритичности $r = 4$ (см. пояснения в тексте)

В случае малых надкритичностей ($2 > r \geq 1$) изменение поля функции тока в процессе перестройки происходит с сохранением симметрии карты поля относительно центра квадрата. (рис. 3, рис. 4 для $Gr = 7156$ и $Gr = 10734$ соответствующих значениям надкритичности $r = 1$ и $r = 1.5$).

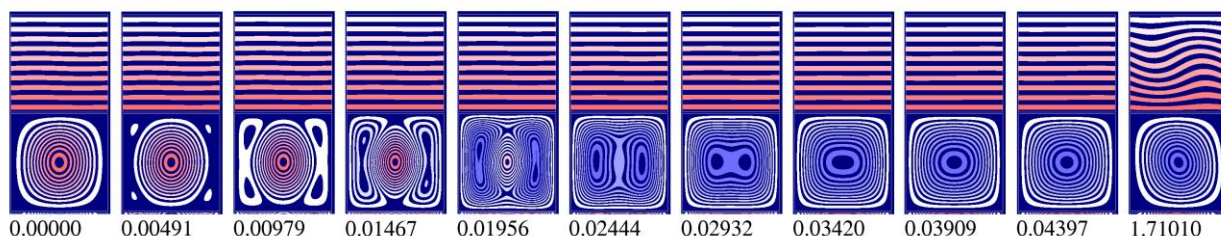


Рис. 3. Видео ряд перехода. $Gr = 7156$, $Pr = 0.7$, наклон 1.00 градус критический угол 0.01 (вверху представлены изотермы, ниже карта максимума функции тока, внизу безразмерное время)

Представленные на рисунках линии тока и изотермы, показаны для различных моментов безразмерного времени. Начальное состояние в представленной серии расчетов было получено в результате предварительного наклона полости на небольшой отрицательный угол $\alpha = -2^\circ$, достижения при нем стационарного состояния. Изменив наклон до значения $\alpha = 0^\circ$ получаем стартовое стационарное состояние, показанное на рис. 3 первым слева. Увеличение для этого состояния угла наклона до $\alpha = 1^\circ$ в момент времени принимаемый за $t = 0$, приводит к перестройки вихревой структуры. На начальном этапе (до $t = 0.005$) практически синхронно растут все четыре вихря Моффата. В дальнейшем ($t = 0.01 \div 0.02$) пары вихрей у боковых стенок имеющие направление вращения противоположным к основному валу объединяются и тормозят основной конвективный вал. Центральный конвективный вал практически исчезает к моменту времени $t = 0.024$. Объединение боковых вихрей далее приводит в итоге к формированию стационарного устойчивого крупномасштабного валового течения, приводящего к заметному изменению поля температур.

На рис. 4 показан процесс перехода при $Gr = 10734$ ($r = 1.5$) от стационарного аномального течения к нормальному при изменении угла наклона от $\alpha = 0^\circ$ до $\alpha = 3.43^\circ$, т. е. при пересечении через точку в бифуркационной кривой (рис. 2) при изменении угла наклона.

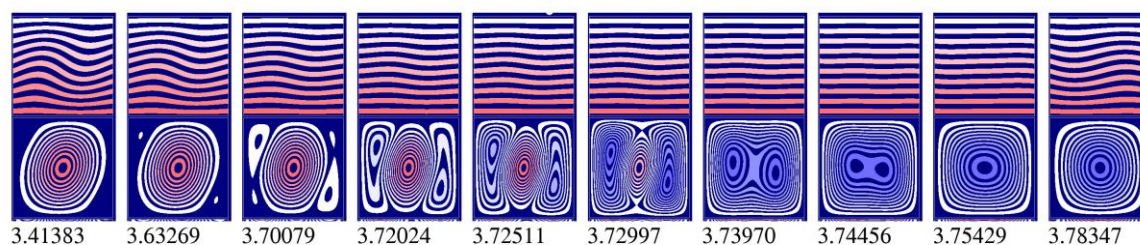


Рис. 4. Видео ряд перехода. $Gr = 10734.64$, $Pr = 0.7$, наклон 3.43 (вверху представлены изотермы, ниже карта максимума функции тока, внизу безразмерное время)

На рис. 4 состояние, соответствующее $t = 0$, т.е. моменту изменения угла наклона не показано, т.к. в течении длительного промежутка времени, до $t \approx 3$, вид полей линий тока и изотерм практически не менялся, лишь слабо росла интенсивность угловых вихрей [3, 4]. В отличие от рассмотренного выше случая, два противоположных вихря растут более интенсивно, чем два других и к моменту времени $t = 3.75$ они попарно объединившись и подавив центральный вихрь формируют слабый вихрь с нормальным направлением циркуляции. Далее увеличивается его интенсивность, приводящая к заметному изменению поля изотерм и установлению стационарного режима.

Безразмерные тепловые потоки (числа Нуссельта) через изотермические стороны квадрата в процессе перестройки проходят через минимум. Функция тока и кинетическая энергия также проходят через свои минимальные значения в процессе перехода.

При увеличении надкритичности симметричная картина поля функции тока при переходе нарушается рис. 5. Графики тепловых потоков раздвигаются (рис. 5), что является признаком нарушения симметрии переходного течения.

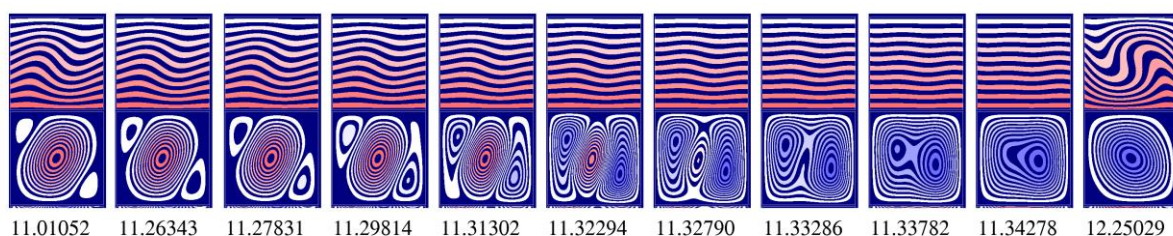


Рис. 5. Видео ряд перехода для $Gr=14312$ ($r=2$), наклон $\alpha = 6.28^\circ$ (вверху представлены изотермы, ниже линии тока, внизу безразмерное время)

После достижения надкритичности $r = 2$ симметрия картин линий тока переходного процесса нарушается. По мере увеличения надкритичности ассиметрия картины поля функции тока увеличивается. В предельном случае рост одного из пары вихрей Моффата прекращается и он исчезает. Оставшийся вихрь быстро растет (наклон поддерживает это направление вращения) и вытесняет основное течение (рис. 6).



Рис. 6. Фрагмент из видеоряда эволюции поля скорости в ходе перестройки при значении числа Грасгофа $Gr = 17890$ ($r = 2.5$) и угла наклона 7.75 градусов

Опишем процесс перехода. Угловые вихри лежащие на продолжении короткой оси эллипса вращения до подхода к бифуркационной кривой развиваются синхронно, т.е. растут с одинаковой скоростью. При пересечении бифуркационной кривой развитие одного из них (обычно нижнего возле горячей грани) замедляется, давая развиваться второму угловому валу, затем рост его возобновляется и они вытесняют основной вал. Начиная с надкритичности $r = 2.5$ угловой вал не только замедляет рост,

но и уменьшаясь исчезает. В предельном случае получаем вытеснение аномального вала одним угловым валом.

Однако если из области существования аномального течения совершить переход к углу наклона превышающем критический угол, можно вновь получить симметричную картину поля функции тока при переходе. Минимум кинетической энергии при переходе зависит от величины угла наклона превышающего критический угол.

4. Заключение

Проведено численное исследование аномального течения в квадратном цилиндре, получены бифуркационные кривые для случаев теплоизолированных и теплопроводных стенок.

Установлено, что предельный угол существования аномального течения в случае теплоизолированных стенок примерно в три раза превышает предельный угол для теплопроводных стенок. Таким образом в случае теплопроводных стенок переход от аномального течения к нормальному происходит при меньшем угле наклона полости и надкритичности.

Бифуркационные диаграммы функции тока от угла наклона и перепада температуры от угла наклона показывают одинаковые значения критического угла наклона, при котором происходит смена направления конвективного валового течения для одной и той же надкритичности. Это обосновывает использование сигналов термопарных измерений в экспериментах по изучению аномального конвективного валового течения для определения критического угла наклона полости при котором происходит смена направления течения.

Из расчетов следует, что изменение направления вращения происходит в результате интенсивного роста одного из диагональных нормальных вихрей, который подавляет и вытесняет аномальный конвективный вал.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Пермского национального исследовательского политехнического университета в рамках федеральной программы академического лидерства «Приоритет 2030».

Список литературы

1. Шарифулин А. Н., Полудницин А. Н., Кравчук А. С. Лабораторное моделирование нелокального возникновения тропического циклона // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2008. Т. 134. №6. С. 1269–1273.
2. Шарифулин А. Н., Полудницин А. Н. Экспериментальное определение пределов существования аномального конвективного течения в наклоняемом кубе // Прикладная механика и техническая физика. 2014. Т. 55. № 3 (325). С. 103–112.
3. Mizushima J., Matsuda O. Onset of 3D thermal convection in a cubic cavity // Journal of the Physical Society of Japan. 1997. Vol. 66 (8). P. 2337–2341. DOI: 10.1143/JPSJ.66.2337
4. Полежаев В. И. Течение и теплообмен при естественной конвекции газа в замкнутой области после потери устойчивости гидростатического равновесия // Известия Академии наук СССР. Механика жидкости и газа. 1968. № 5. С. 124–129.
5. Сагитов Р. В., Шарифулин А. Н. Устойчивость стационарной тепловой конвекции в наклоняемой прямоугольной полости в маломодовом приближении // Теплофизика и аэромеханика. 2008. Т. 15. № 2. С. 247–256.
6. Polezhaev V. I., Myakshina M. N., Nikitin S. A. Heat transfer due to buoyancy-driven convective interaction in enclosures: Fundamentals and applications //

- International Journal of Heat and Mass Transfer. 2012. Vol. 55 (1). P. 156–165. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2011.08.051
7. *Torres J. F., Henry D., Komiya A., Maruyama S.* Bifurcation analysis of steady natural convection in a tilted cubical cavity with adiabatic sidewalls // *Journal of Fluid Mechanics*. 2014. Vol. 756. P. 650–688. DOI: 10.1017/jfm.2014.448
 8. *Шарифулин А. Н., Полудницин А. Н.* Численное определение границ существования аномального конвективного течения в наклоняемом прямоугольном цилиндре // *Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки*. 2016. № 2(242). С. 116–125. DOI: 10.5862/JPM.242.13 УДК 532.5.013.4.536.25+519.6
 9. *Тарунин Е. Л.* Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. Иркутск: Изд-во Иркутского ун-та, 1990. 223 с.

Характеристическая задача Коши стандартного вида для описания истечения политропного газа в вакуум с косой стенки

Е. И. Понькин

Снежинский физико-технический институт

Национального исследовательского ядерного университета МИФИ,

456776, Челябинская область, Снежинск, ул. Комсомольская, 8

email: epnk@rambler.ru

Начально-краевая задача для системы уравнений газовой динамики, решение которой описывает разлет политропного газа в вакуум с косой стенки в пространстве автомодельных переменных x/t , y/t в общем несогласованном случае, приведена к характеристической задаче Коши стандартного вида в пространстве новых независимых переменных ϑ, ζ . Уравнение $\vartheta = 0$ задает характеристическую поверхность, через которую двойная волна примыкает к известному решению - центрированной волне Римана. Уравнение $\zeta = 0$ означает, что за новую координатную ось выбирается косая стенка, на которой выполняется условие непротекания. Для этой новой начально-краевой задачи в отличие от известного решения аналогичной задачи, полученного С. П. Баутиным и С. Л. Дерябиным в пространстве специальных переменных, доказана теорема существования и единственности решения СУГД в пространстве физических автомодельных переменных в виде сходящегося бесконечного ряда.

Ключевые слова: характеристическая задача Коши стандартного вида; аналог теоремы Ковалевской; характеристическая поверхность; косая стенка

Cauchy characteristic problem standard form to describe the expiration polytropic gas into a vacuum with an oblique wall

E. I. Ponkin

Snezhinsk Institute of Physics and Technology National Research Nuclear University MEPhI,

8 Komsomolskaya St., 456776, Snezhinsk, Chelyabinsk Region

email: epnk@rambler.ru

The initial-boundary value problem for the system of equations of gas dynamics, the solution of which describes the expansion of a polytropic gas into vacuum from an oblique wall in the space of self-similar variables x/t , y/t , is reduced to the characteristic Cauchy problem of standard form in the space of new independent variables ϑ, ζ . The equation $\vartheta = 0$ defines the characteristic

surface through which the double wave adjoins the well-known solution - the centered Riemann wave. The equation $\zeta = 0$ means that an oblique wall is chosen for the new coordinate axis, on which the impermeability condition is satisfied. For this new initial-boundary value problem, the theorem of existence and uniqueness of the solution in the form of a convergent infinite series is proved.

Keywords: the characteristic Cauchy problem of standard form; analogue of Kovalevskaya's theorem; characteristic surface; oblique wall

1. Постановка задачи об истечении газа в вакуум с косой стенкой

Пусть в момент времени $t = 0$ политропный газ со скоростью звука c равной единице покоится в клиновидной области плоскости xOy , затемненной на рисунке (а) и ограниченной двумя прямыми непроницаемыми стенками: вертикальная стенка $x = 0$ (при $y \geq 0$), и косая стенка $y = x \operatorname{tg} \alpha$. В момент времени $t = 0$ вертикальная стенка $x = 0$ мгновенно убирается, после чего начинается истечение газа в вакуум (помечено цифрой 3 на рисунке) вдоль косой стенки $y = x \operatorname{tg} \alpha$.

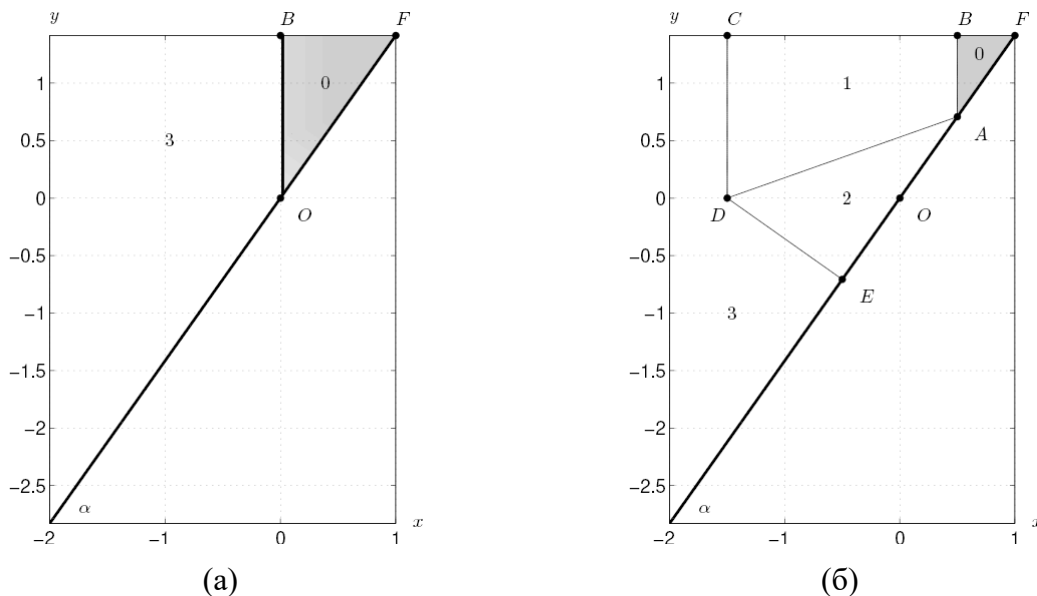


Рисунок. Начальная конфигурация в момент $t = 0$ (а) и конфигурация потока в момент $t > 0$ (б): 0 – область, в которой находится покоящийся газ; 1 – область течения в виде централизованной волны; 2 – область течения в виде ДВ; 3 – область вакуума

На рисунке (б) приведена конфигурация течения, имеющее место при истечении газа в вакуум вдоль косой стенки в момент времени $t > 0$. В области, помеченной цифрой 0, находится покоящийся однородный газ. Этот покоящийся газ отделен звуковой характеристикой – вертикальной прямой [1]

$$AB : x = t \quad (1)$$

от области известного течения, то есть от области централизованной волны (ЦВ) Римана. Течение ЦВ расположено в области, помеченной цифрой 1 (см. рисунок (б)). С другой стороны ЦВ примыкает к вакууму через свободную границу, являющейся вертикальной прямой CD и распространяющейся в вакуум по закону [1]

$$CD : x = -\frac{2}{\gamma - 1}t. \quad (2)$$

В области, помеченной цифрой 2 (см. рисунок (б)), находится искомое двумерное течение (ДВ). Это течение отделено от ЦВ звуковой характеристикой AD , которая в общем случае известна в пространстве годографа [2, 3]. В согласованном случае [4] звуковая характеристика AD является прямой в плоскости переменных (t, x) . Область ДВ примыкает к вакууму через свободную границу, обозначенную на рисунке (б) как линия DE . Эта свободная граница в согласованном случае есть прямая в плоскости переменных (t, x) , перпендикулярная непроницаемой стенке AE . Поскольку стенка AE является непроницаемой, то вектор скорости газа направлен вдоль нее и поэтому на этой стенке выполняется соотношение (условие непротекания):

$$v|_{AE} = u \operatorname{tg} \alpha|_{AE}. \quad (3)$$

В рассматриваемой задаче требуется найти звуковую характеристику AD и параметры течения газа ДВ.

2. Приведение задачи об истечении газа в вакуум с косой стенки к ХЗК стандартного вида. Доказательство аналога теоремы Ковалевской

Исходная начально-краевая задача для СУГД, описывающей истечение газа в вакуум с косой стенки, в физических автомодельных переменных $\xi = x/t$, $\eta = y/t$ для вектора $\mathbf{U} = c, u, v^T$ имеет вид [5]:

$$\begin{cases} A\mathbf{U}_\xi + B\mathbf{U}_\eta = \mathbf{0}, \\ \mathbf{U}|_{C^+} = \mathbf{U}_0, \\ v|_{y=x \cdot \operatorname{tg} \alpha} = u \operatorname{tg} \alpha|_{y=x \cdot \operatorname{tg} \alpha}, \end{cases} \quad (4)$$

где $\mathbf{U} = c, u, v^T$. Матрицы A и B соответственно равны:

$$A = \begin{pmatrix} u - \xi & \kappa c & 0 \\ c/\kappa & u - \xi & 0 \\ 0 & 0 & u - \xi \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} v - \eta & 0 & \kappa c \\ 0 & v - \eta & 0 \\ c/\kappa & 0 & v - \eta \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Здесь неизвестная звуковая характеристика C^+ задается функцией $f(\xi)$. Для упрощения записи введено обозначение $\kappa = (\gamma - 1)/2$.

Для сведения задачи (4) к ХЗК стандартного вида делается первая замена переменных:

$$\mathcal{G} = \eta - f(\xi), \quad \xi' = \xi, \quad (6)$$

где поверхность $\mathcal{G} = 0$, то есть линия $\eta = f(\xi)$ задает звуковую характеристику C^+ .

В результате исходная начально-краевая задача (4) будет иметь вид:

$$\begin{cases} [B - f'(\xi)A]U_g + AU_\xi = 0, \\ U|_{g=0} = U_0, \\ v|_{y=x \operatorname{tg} \alpha} = u \operatorname{tg} \alpha|_{y=x \operatorname{tg} \alpha}. \end{cases} \quad (7)$$

Вторая замена переменных, вместо переменных g и ξ берутся новые переменные g' и ζ по формулам:

$$g' = g, \quad \zeta = g + f(\xi) - \xi \operatorname{tg} \alpha, \quad (8)$$

то есть косая стенка берется за новую координатную ось $\zeta = 0$. Замены (6) и (8) невырожденные. В результате (7) преобразуется к виду:

$$\begin{cases} [B - f'(\xi)A]U_g + [B - \operatorname{tg} \alpha A]U_\zeta = 0, \\ U|_{g=0} = U_0, \\ v|_{\zeta=0} = u \operatorname{tg} \alpha|_{\zeta=0}. \end{cases} \quad (9)$$

Приведем начально-краевую задачу (9) к ХЗК стандартного вида. Для этого построим две невырожденные матрицы, элементы которых есть функции независимой переменной ξ :

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ c_0 f' - f & \kappa c_0 f' & -\kappa c_0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c_0 f' - f \\ 0 & 1 & c_0 f' / \kappa \\ 0 & 0 & -c_0 / \kappa \end{pmatrix}. \quad (10)$$

СУГД из задачи (9) слева умножается на матрицу T_1 , а вектор U заменяется новым вектором W , который определяется следующим образом:

$$W = T_2^{-1}U = \left(c + v \frac{\kappa}{c_0} (c_0 f' - f), u + v f', -\frac{\kappa}{c_0} v \right)^T. \quad (11)$$

Эти преобразования невырожденные. Для вектора W записывается начально-краевая задача – задача (9), приведенная к ХЗК стандартного вида:

$$\begin{cases} T_1 [B - f'_\xi A] T_2 W_g + T_1 [B - \operatorname{tg} \alpha A] T_2 W_\zeta + T_1 [B - \operatorname{tg} \alpha A] \frac{\partial T_2}{\partial \xi} \frac{W}{f'_\xi - \operatorname{tg} \alpha} = 0, \\ W|_{g=0} = W_0, \\ w_3|_{\zeta=0} = -\frac{\kappa}{c_0} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{[1 + f'_\xi \operatorname{tg} \alpha]} w_2|_{\zeta=0}. \end{cases} \quad (12)$$

Вектор W_0 равен $W_0 = w_{1,0}, w_{2,0}, w_{3,0}^T = c_0, u_0, 0^T$.

Для системы из задачи (12) вид матриц удовлетворяет условиям аналога теоремы Ковалевской [6]:

1) Матрица $T_1 [B - f'_\xi A] T_2$, стоящая перед вектором производных W_g в точке $g = 0$ в левом верхнем углу имеет ненулевой минор размерностью 2×2 . Остальные элементы матрицы равны нулю.

2) В матрице $T_1[B - \operatorname{tg} \alpha A]T_2$, стоящей перед вектором производных \mathbf{W}_ζ в точке $\vartheta = 0$, элемент из третьей строки и третьего столбца отличен от нуля, т.к. справедливо равенство $f'_\xi - \operatorname{tg} \alpha \neq 0$.

Следовательно, получившаяся задача (12) является ХЗК стандартного вида. Таким образом, доказана

Теорема. Поставленная задача (12) при найденной функции f_ξ является характеристической задачей Коши стандартного вида и поэтому у нее в некоторой окрестности точки $\zeta = 0, \vartheta = 0$ существует единственное локально-аналитическое решение, представимое в виде сходящегося ряда

$$\mathbf{W}(\zeta, \vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{W}_k(\zeta) \frac{\vartheta^k}{k!}; \quad \mathbf{W}_k(\zeta) = \left. \frac{\partial^k \mathbf{W}}{\partial \vartheta^k} \right|_{\vartheta=0}. \quad (13)$$

3. Заключение

1. В данной работе построена начально-краевая задача для СУГД, решение которой описывает движение газа при истечении в вакуум с косой стенки, в пространстве физических автомодельных переменных $x/t, y/t$.

2. В результате двух невырожденных замен исходная задача приведена к виду стандартной ХЗК в пространстве переменных ϑ, ζ , где значение $\vartheta = 0$ означает, что за новую координатную ось выбирается звуковая характеристика, а значение $\zeta = 0$ означает, что за новую координатную ось выбирается косая стенка.

3. Из анализа элементов матриц системы, стоящих перед производными \mathbf{W}_ϑ и \mathbf{W}_ζ в системе с частными производными, доказана теорема существования и единственности решения начально-краевой задачи для СУГД, решение которой описывает истечение газа с косой стенки в вакуум.

Автор выражает благодарность и признательность своему научному руководителю профессору С. П. Баутину за внимание, помощь и поддержку.

Список литературы

1. Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики. М., Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2003. 335 с.
2. Баутин С. П. Математическое моделирование сильного сжатия газа. Новосибирск: Наука, 2007. 312 с.
3. Баутин С. П., Дерябин С. Л. Математическое моделирование истечения идеального газа в вакуум. Новосибирск: Наука, 2005. 390 с.
4. Сучков В. А. Истечение в вакуум на косой стенке // Прикладная математика и механика. 1963. Т. 27. № 4. С. 739–740.
5. Баутин С. П., Понькин Е. И. Автомодельные решения задачи об истечении политропного газа в вакуум с косой стенки // Прикладная механика и техническая физика. 2021. Т. 62. № 1. С. 32–42. DOI: 10.15372/PMTF20210104
6. Баутин С. П. Характеристическая задача Коши и ее приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 2009. 368 с.

Динамика протяженного теплоизолятора, погруженного в слой жидкости с наложенным вертикальным перепадом температур

Е. Н. Попова, А. Ю. Васильев, А. Н. Сухановский, П. Г. Фрик

Институт механики сплошных сред УрО РАН,
614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1
email: san@icmm.ru

Экспериментально изучено конвективное течение, возникающее в заполненной водой подогреваемой снизу и охлаждаемой сверху прямоугольной ячейке, в которой на фиксированной высоте свободно плавает теплоизолирующий диск, диаметр которого чуть меньше ширины полости. Такая система демонстрирует целый спектр режимов, включающий периодические перемещения диска вдоль полости, хаотические движения разного типа и снос диска на край полости без дальнейших перемещений. Характер возникающих в полости конвективных течений зависит, помимо основных для конвективных систем управляющих параметров чисел Рэлея, Прандтля и отношения размеров полости, от геометрических параметров связанных с плавающим диском: относительной высоты его положения и отношения его размера к длине полости. Показано, что периодические режимы возникают только в ограниченном диапазоне отношения размеров тела к размеру полости. При увеличении длины полости возникает хаотический режим движения с остановками диска, а при максимальной рассмотренной длине полости диск сносится в крайнее положение, выйти из которого не может.

Ключевые слова: турбулентная конвекция; плавающий теплоизолятор; эксперимент

Dynamics of an extended thermal insulator immersed in a fluid layer with applied vertical temperature difference

E. N. Popova, A. Yu. Vasiliev, A. N. Sukhanovskii, P. G. Frick

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS,
1 Akademika Koroleva St., 614013, Perm
email: san@icmm.ru

Convective flow in a heated from the bottom and cooled from the top rectangular cell, filled with a water, in which a heat-insulating disk with a diameter slightly smaller than the cavity width is floating at a fixed height, has been studied experimentally. Such a system exhibits a range of modes including periodic float movements along the cavity, chaotic motions of various types and disk drift to the edge of the cavity without further movements. In addition to the Rayleigh, Prandtl

numbers and the cavity size ratio usual for convective systems, the structure of convective flows in the cavity depends on geometric parameters associated with the floating disk: the relative height of the body position and the body size to cavity length ratio. It is shown that periodic motions occur only in a limited range of body size to cavity size ratio. As the length of the cavity increases, a chaotic mode of motion with disk stops occurs, and at the maximum cavity length considered, the disk is shifted to an extreme position and remains there.

Keywords: turbulent convection; floating insulator; experiment

1. Введение

На поведение конвективной системы может оказывать влияние наличие в объеме жидкости локализованных тел, которые блокируют потоки импульса и тепла. Большой интерес представляет как влияние тел на конвективную циркуляцию, так и влияние конвективных течений на движение тел. Первые исследования такого рода были мотивированы изучением механизмов смещения тектонических плит. В качестве основного механизма движения тектонических плит до настоящего времени рассматривается тепловая конвекция в мантии [1]. В качестве простой идеализированной модели движения тектонической плиты можно рассматривать теплоизолирующую пластину, которая свободно плавает на поверхности слоя, подогреваемого снизу и охлаждаемого сверху. Первое экспериментальное исследование в такой постановке было реализовано в [2], где было показано, что движение пластины является колебательным. В [2], свободно плавающая, теплоизолирующая пластина располагалась на открытой поверхности жидкости. Более общим случаем является расположение теплоизолирующего тела в объеме жидкости. Надо также отметить, что при проведении экспериментов со свободной поверхностью есть ряд факторов, которые достаточно сложно учесть. Это касается контроля граничных условий на поверхности для температуры (потока тепла) и влияния термокапиллярных эффектов. В связи с этим, большой интерес представляет система со свободно плавающим телом в объеме жидкости, в которой обе горизонтальные границы являются твердыми и изотермическими. Строгий контроль граничных условий упрощает анализ динамики свободно плавающего тела. Если теплоизолирующее тело расположено вблизи горизонтальной границы, то система качественно близка к случаю со свободной границей. Первые исследования в такой постановке описаны в работе [3], где было показано, что если расстояние от свободно плавающего тела до изотермической границы мало (намного меньше высоты слоя), то наблюдаются регулярные, периодические движения тела от одного края модели до другого. Помимо изменения структуры течения, теплоизолирующее тело в объеме жидкости может существенно влиять на теплообмен. В [4] было проведено численное исследование влияния неподвижной теплоизолирующей пластины на структуру течений и теплообмен. Показано, что интегральный тепловой поток практически не зависит от положения теплоизолирующей пластины, если высота расположения пластины значительно (в 10 и более раз) превышает толщину температурного пограничного слоя.

Сравнительный анализ ранее полученных результатов показывает, что на структуру течений и динамику тела существенное влияние оказывают три геометрических параметра, а именно безразмерная высота, на которой плавает тело, отношение длины слоя к его высоте и отношение длины слоя к размеру тела. Для выявления общих закономерностей требуется систематическое исследование влияния всех этих параметров. В данной работе в постановке, максимально приближенной к [3],

проведены первые исследования влияния аспектного отношения (длины слоя к его высоте), на динамику движения свободно плавающего тела и структуру течений.

2. Экспериментальная модель и методика измерений

Экспериментальная модель представляет собой параллелепипед длиной L , шириной W и высотой H . Установка в разрезе представлена на рис.1. Важным отличием от установки [3] является возможность варьирования геометрических параметров в достаточно широком интервале - наибольшее значение длины L составляет 500 мм, а высоты H – 180 мм. В описываемых ниже экспериментах ширина и высота слоя были фиксированы ($W=100$ мм, $H=40$ мм), а длина варьировалась от 170 до 500 мм.

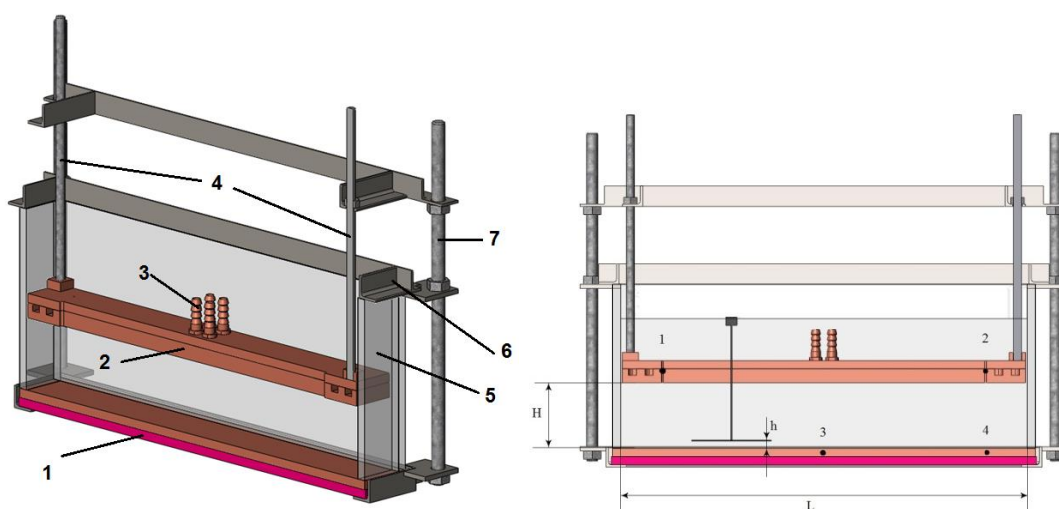


Рис. 1. Слева – экспериментальная модель в разрезе. 1 – нижний теплообменник, 2 – верхний теплообменник, 3 – патрубки верхнего теплообменника, 4 – держатели верхнего теплообменника, 5 – стенки модели (оргстекло), 6 – рамочный каркас, 7 – шпильки. Справа – схема эксперимента по конвекции со свободно плавающим телом. Расположение термопар (1 – 4) показано точками

Вертикальные стенки модели изготовлены из оргстекла толщиной 10 мм. Горизонтальные границы образованы двумя теплообменниками. Верхний (холодный) теплообменник, общей толщиной 27 мм, охлаждается при помощи термостата. В средней части теплообменника организована тонкая щель для свободного перемещения погруженного теплоизолирующего тела. Нижний (горячий) теплообменник образован массивной медной пластиной толщиной 10 мм, с нижней стороны которой закреплен набор плоских электрических нагревательных элементов с изоляционным силиконовым покрытием. Максимальная мощность нагревателя составляет 150 Вт. Использование электрического нагревателя позволяет контролировать поток тепла в режиме реального времени. Температура верхнего и нижнего теплообменников фиксировалась при помощи четырех откалиброванных медь-константановых термопар (рис. 1). Свободно плавающее тело представляет собой диск из плексигласа толщиной 1 мм и диаметром $D = 98$ мм, чуть меньшим ширины слоя. Погружение тела на заданную глубину осуществлялось при помощи тонкого стержня, установленного в центре диска. Стержень проходит через щель в верхнем теплообменнике, при этом закрепленная на его конце шайба остается на свободной поверхности воды за счет действия поверхностного натяжения. Регистрация движений свободно плавающего тела производилась при помощи CCD камеры Bobcat B2020. В качестве индикатора положения тела

использовался тонкий стержень, служащий для фиксации его положения по высоте и проходящий через его центр. Для регистрации течений в слое использовалась система «Полис», при помощи которой методом PIV (Particle Image Velocimetry) [5] восстанавливались поля скорости.

3. Динамика движения свободно плавающего тела

Основными управляющими параметрами, которые определяют структуру и динамику течений в конвекции Рэлея-Бенара (изотермические граничные условия на верхней и нижней границах), являются числа Рэлея Ra, Прандтля Pr и аспектное отношение:

$$Ra = \frac{g\beta\Delta TH^3}{\nu\chi}, \quad Pr = \frac{\nu}{\chi}, \quad \Gamma_1 = \frac{L}{H}, \quad (1)$$

где ν – кинематическая вязкость, χ – температуропроводность, β – температурный коэффициент объемного расширения, g – ускорение свободного падения, ΔT – вертикальный перепад температур. Особенностью данного исследования является наличие в слое свободно плавающего теплоизолирующего тела. В этом случае появляются дополнительные геометрические параметры, определяющих динамику плавающего тела, а именно, аспектное отношение $\Gamma_2 = L/D$ (отношение длины модели к диаметру плавающего тела) и безразмерная высота плавания тела $d = h/H$. Для основной серии экспериментов положение плавающего тела относительно нижнего теплообменника было зафиксировано $h = 4$ мм ($d = 0.1$), а длина рабочего слоя жидкости варьировалась при помощи вертикальной перегородки. Тепловые условия на верхней и нижней границах были фиксированы. На верхней границе задавалась температура (17°C), а на нижней – тепловая мощность (76.8 Вт). В силу того, что на нижней границе фиксировался поток тепла, управляющим параметром являлось потоковое число Рэлея

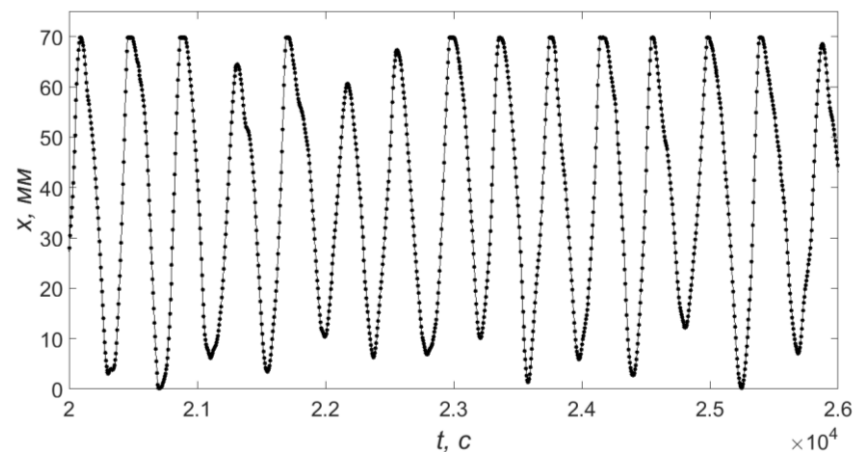
$$Ra_f = \frac{g\beta H^4 q}{\nu\chi^2 \rho c_p}, \quad (2)$$

которое в ходе проведенных экспериментов было фиксированным: $Ra_f = 9.1 \cdot 10^7$, а значение числа Рэлея (1) зависело от структуры течений. После включения нагрева и охлаждения требовалось приблизительно 2 часа для достижения квазистационарного режима.

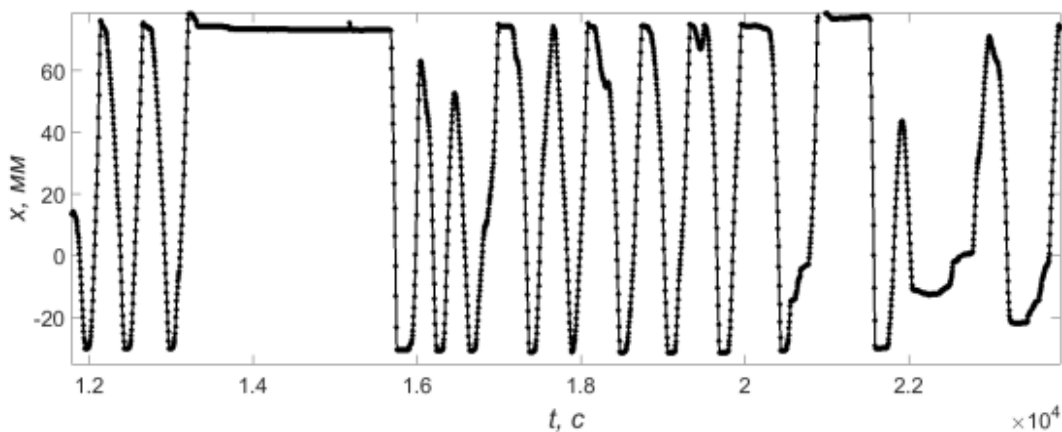
В случае аспектного отношения $\Gamma_1 = 4.25$, близкого к работе [3], где Γ_1 было равно 4.5, наблюдаются периодические перемещения тела вдоль слоя (рис. 3а).

Так как движение тела обусловлено вызываемыми крупномасштабными вихрями вязкими напряжениями на его поверхности, то очевидно, что периодические движения тела свидетельствуют о периодической перестройке структуры крупномасштабного течения. При увеличении длины слоя растет и аспектное отношение Γ_2 , а характер движения существенно изменяется (рис. 3б). Интервалы с периодическим движением могут сменяться длительными остановками или более сложным непериодическим движением.

Движение свободно плавающего тела в рассматриваемой системе происходит под влиянием конвективного течения, при этом само тело активно воздействует на структуру потока. Структура среднего течения при фиксированном положении тела в центральной части представлена на рис. 4а. Среднее течение несимметрично, вследствие чего вязкие напряжения на поверхности тела не скомпенсированы. Если тело отпустить, оно начинает дрейфовать в сторону, и после достижения боковой стенки полости (рис. 4б) остается в этом положении.

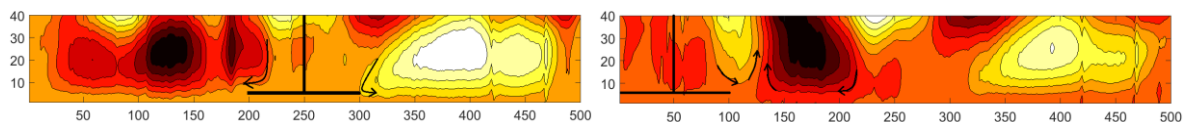


(a)



(б)

Рис. 3. Временная эволюция положения пластины вдоль слоя (фрагменты) для различных аспектных отношений: (а) $\Gamma_1 = 4.25$; (б) $\Gamma_1 = 5.75$



(a)

(б)

Рис. 4. Распределение функции тока среднего течения в центральном вертикальном сечении для $\Gamma_1 = 12.5$ при наличии тела. Черными стрелками показано направление циркуляции

В заключении можно отметить, что в работе представлены результаты экспериментального исследования конвекции Рэлея–Бенара при наличии плавающего тела для различных значений аспектного отношения. Показано, что варьирование аспектного отношения приводит к существенному изменению режима движения плавающего тела.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Пермского края в рамках научного проекта № 20-41-596001. Восстановление полей скорости методом PIV

проводились при помощи измерительного комплекса ИМСС УрО РАН в рамках темы АААА-А19-119012290101-5.

Список литературы

1. *Schubert G., Turcotte D. L., Olson P.* Mantle convection in the Earth and planets. Cambridge University Press, 2001. 940 p.
2. *Zhang J., Libchaber A.* Periodic boundary motion in thermal turbulence // *Physical Review Letters*. 2000. Vol. 84 (19). 4361. DOI: 10.1103/PhysRevLett.84.4361
3. *Попова Е. Н., Фрик П. Г.* Крупномасштабные течения в турбулентном конвективном слое с погруженным в него подвижным теплоизолятором // *Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа*. 2003. №. 6. С. 41–47.
4. *Васильев А. Ю., Сухановский А. Н., Фрик П. Г.* Влияние горизонтальных теплоизолирующих пластин на структуру конвективных течений и теплоперенос в замкнутой полости // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2022. Т. 15(1). С.83–97. DOI: <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2022.15.1.7>
5. *Raffel M., Willert C. E., Kompenhans J.* Particle image velocimetry: a practical guide. Berlin: Springer, 1998. 255 p. DOI: 10.1007/978-3-662-03637-2

Дерево квадрантов и метод пристрелки при линейном анализе устойчивости равновесия конвективных процессов

С. А. Прокопьев^a, Т. П. Любимова^{a,b}

^a Институт механики сплошных сред, УрО РАН,
614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1
email: prokorev.s@icmm.ru

^b Пермский государственный национальный исследовательский университет,
614990, Пермь, ул. Букирева, 15
email: lubimova@psu.ru

В работе разрабатывается численный алгоритм нахождения критических чисел линейной задачи устойчивости механического равновесия при рассмотрении процессов тепло- и массообмена. Для этого необходимо найти собственные числа краевой задачи однородных дифференциальных уравнений. В методе пристрелки краевая задача сводится к задаче Коши, а значения собственных чисел (искомых критериев устойчивости) подбираются («пристреливаются») до тех пор, пока решение задачи Коши не будет удовлетворять краевым условиям на обеих границах. На последнем шаге реализации алгоритма получаем некоторый определитель, который должен равняться нулю. Данный определитель является функцией от искомых критических чисел задачи, численное нахождение которых традиционно проводится с помощью таких методов как: метод секущих, метод Ньютона и др. Однако данные методы при решении реальных задач тепло- и массопереноса в ряде случаев оказываются неэффективными, в особенности, в тех случаях, когда в спектре возмущений присутствуют колебательные возмущения. В работе продемонстрировано, что для нахождения корней уравнений может быть эффективно использована структура данных дерева квадрантов.

Ключевые слова: дерево квадрантов; метод пристрелки

Quadtree and shooting method for linear analysis of equilibrium stability in convection problems

S. A. Prokorev^a, T. P. Lyubimova^{a,b}

^a Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS,
1 Akademika Koroleva St., 614013, Perm
email: prokorev.s@icmm.ru

^b Perm State University, 15 Bukireva St., 614990, Perm
email: lubimova@psu.ru

A numerical algorithm for finding the critical numbers of the linear stability problem of mechanical equilibrium at studying the processes of heat and mass transfer is elaborated in the paper. To do this, it is necessary to find the eigenvalues of the boundary value problem of ordinary differential equations. In the shooting method the boundary value problem is reduced to the Cauchy problem, and the values of the eigenvalues (the stability criteria sought) are being picking (“shooting”) until the solution of the Cauchy problem satisfies the boundary conditions on both boundaries. At the last step of the implementation of the algorithm, we obtain a determinant, which must be equal to zero. This determinant is a function of the critical numbers sought, the numerical determination of which is traditionally carried out using methods such as the secant method, the Newton method, etc. However, these methods, when solving real problems of heat and mass transfer, in some cases turn out to be inefficient, especially in cases when there are oscillatory disturbances in the spectrum of perturbations. The paper demonstrates that the quadtree data structure can be effectively used to find the roots of equations.

Keywords: quadtree; shooting method

1. Постановка задачи

Рассматривается линейная задача устойчивости механического равновесия трехкомпонентной смеси в горизонтальном слое при подогреве сверху и снизу в поле сил тяжести с заданным тепловым потоком на верхней и нижней границах. Результаты численных линейных и нелинейных расчетов, а также подробное описание задачи представлены в [1].

$$\lambda \Delta w + \Delta^2 w - \frac{Ra}{Pr} k^2 ((1 + \Psi)\theta + If) = 0, \quad (1)$$

$$\lambda \theta + w + \frac{1}{Pr} \Delta T = 0, \quad \lambda(f + \psi \theta) + \psi w + SC \Delta T = 0, \quad (2)$$

$$z = 0, 1: u = du/dz = d\theta/dz = df/dz = 0. \quad (3)$$

Система уравнений (1 – 2) вместе с граничными условиями (3) представляет собой краевую задачу однородных дифференциальных уравнений. Для решения данной системы уравнений был выбран метод пристрелки, в котором краевая задача сводится к задаче Коши. Подробности алгоритма описаны в [2], отметим, что на последнем шаге получаем некоторый определитель $D = D(Ra, Pr, SC, \lambda, \dots)$, который является функцией от параметров задачи, причем необходимо условие $D = 0$. В задаче рассматриваются возмущения, экспоненциально зависящие от времени $\sim \exp(-\lambda t)$, где декремент $\lambda = \lambda_R + i\omega$ – комплексная величина, граница устойчивости удовлетворяет условию равенства нулю действительной части $\lambda_R = 0$. Результаты расчетов в [1] показали, что возможно наличие как монотонной неустойчивости ($\lambda = 0$), так и колебательной ($\lambda_R = 0, \omega \neq 0$). При этом в последнем случае определитель D становится комплексной величиной. Для решения задачи удобно зафиксировать параметры, отвечающие за физические свойства жидкости, выберем следующие значения: $Pr = 10, Sc_1 = 100, Sc_2 = 1000, \psi_1 = 0.2, \psi_2 = -0.4$, также для примера возьмем волновое число $k = 2$. Кроме того, поскольку нами находится граница устойчивости, удобно положить $\lambda_R = 0$, и, таким образом, в системе остаются 2 неизвестные величины: число Релея, отвечающее за на нагрев, и комплексная часть декремента ω , представляющая собой частоту колебаний. В итоге получаем систему уравнений из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$D_R(Ra, \omega) = 0, D_{Im}(Ra, \omega) = 0. \quad (4)$$

Найденные корни системы уравнений (4) и будут искомыми критическими числами задачи устойчивости. Система (4) традиционно решается с помощью таких методов, как метод Ньютона, метод секущий и пр. В работе [1] использовался метод секущий, найдено, что для выше обозначенных параметров в системе присутствует несколько корней: $(Ra, \omega) = (50.5, 0), (1387.8, 0), (-1803.9, 0.045), (1461.0, 0.174)$ на интервале $-3000 < Ra < 3000$. Метод секущий хорошо работает в большом количестве случаев, требуя при этом небольшое число вычислительных действий. Однако в описанной задаче при поиске корней уравнений данный метод оказался трудно применимым при поиске колебательной неустойчивости: корни уравнений находились только в том случае, если начальное приближение оказывалось близко к искомому корню. Например, при начальном приближении $(1500, 0.1)$ решение разошлось, при $(1400, 0.15)$ решение сошлось корню для монотонной неустойчивости $(50.5, 0)$. Это обстоятельство увеличивает риск пропустить некоторые решения, что сделает решение задачи неполным. В работе [1] преодолеть данную трудность удалось лишь при помощи тщательного поиска начального приближения, что потребовало большое количество времени, а также при помощи длинноволнового анализа, благодаря которому найдены пороги устойчивости для длинноволновой неустойчивости.

Нами предполагается подход, при котором для поиска корней используется структура данных – дерево квадрантов (4-дерево, quadtree), дерево, у каждого внутреннего узла которого 4 потомка. Изначальная область поиска разделена на квадраты, в вершинах которого производится проверка: происходит ли одновременная смена знака функций D_R и D_{Im} в текущем квадрате. Если да, то квадрат делится на 4 потомка и процедура повторяется до удовлетворения заданной точности. На рисунке графически представлены результаты расчетов: с помощью реализованной схемы удалось эффективно найти все 4 корня.

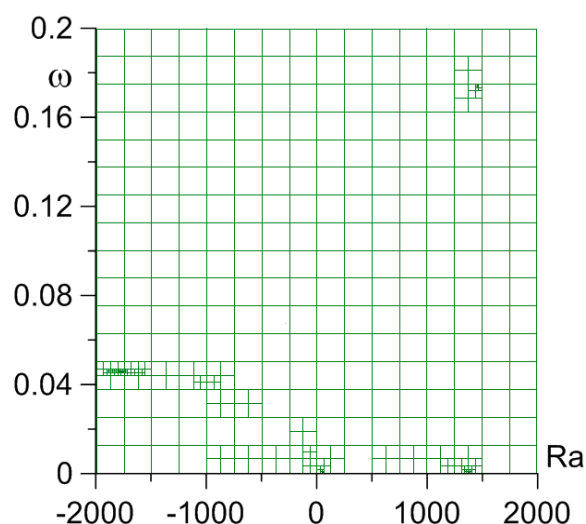


Рисунок. Поиск корней уравнений с помощью дерева квадрантов

Список литературы

1. Lyubimova T. P., Sadilov E. S., Prokopen S. A. Onset of Soret-induced convection in a horizontal layer of ternary fluid with fixed vertical heat flux at the boundaries // The European Physical Journal E. 2017. Vol. 40. 15. DOI: 10.1140/epje/i2017-11505-9
2. Лобов Н. И., Любимов Д. В., Любимова Т. П. Решение задач на ЭВМ: учеб.-метод. пособие. Пермь: Перм. ун-т, 2007. 82 с.

Особенности ультразвукового воздействия при флотации кварца

К. А. Рыбкин^{a,b}, М. О. Кучинский^{a,b}, Т. П. Любимова^{a,b},
О. О. Фатталов^{a,b}

^a Пермский государственный национальный исследовательский университет,
614990, Пермь, ул. Букирева, 15
email: k.rybkin@gmail.com

^b Институт механики сплошных сред УрО РАН,
614013, Пермь, ул. Академика Королёва, 1

В работе с точки зрения физико-химической механики рассмотрены процессы, возникающие под действием ультразвука (УЗ) во флотационной пульпе. Эксперименты показали, что при интенсивном УЗ воздействии наблюдается образование пузырьковых кластеров, состоящих из пузырьков равного диаметра. Низкая концентрация реагента во флотационной пульпе способствует закреплению отдельных частиц кварцевого песка на флотационном пузырьке, однако образование агломератов, в этом случае не происходит. Увеличение концентрации ДАН способствует как эффективному закреплению твердых частиц на пузырьках, так и образованию агломератов, состоящих из твердых частиц и пузырьков. В этом случае увеличивается как вероятность закрепления и удержания частиц на пузырьках, так и вероятность их совместного всплытия, поэтому процесс флотации становится значительно более эффективным.

Ключевые слова: дрейф; флотация кварца; УЗ

Features of ultrasonic action during quartz flotation

К. А. Rybkin^{a,b}, М. О. Kuchinsky^{a,b}, Т. P. Lyubimova^{a,b}, О. О. Fattalov^{a,b}

^a Perm State University, 15 Bukireva St., 614990, Perm
email: k.rybkin@gmail.com

^b Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS,
1 Akademika Koroleva St., 614013, Perm

The paper considers from the point of view of physico-chemical mechanics. the processes arising under the action of ultrasound in the flotation pulp. Experiments have shown that with intensive ultrasonic exposure, the formation of bubble clusters consisting of bubbles of equal diameter is observed. The low concentration of the reagent in the flotation pulp contributes to the fixation of individual quartz sand particles on the flotation bubble, however, the formation of agglomerates does not occur in this case. An increase in the concentration of DАN contributes both to the effective fixation of the solid particles on the bubbles and to the formation of agglomerates consisting of solid particles and bubbles. In this case, both the probability of fixing and retaining particles on the

bubble increases, and the probability of their joint ascent, therefore, the flotation process becomes much more efficient.

Keywords: drift; quartz flotation; US

1. Введение

Физические механизмы УЗ воздействия на флотационную пульпу очень разнообразны, например: появление в жидкости и на поверхности твердых тел парогазовых микропузырьков, возникающих вследствие кавитации; образование, под действием силы Бьеркнеса, устойчивых агломератов из воздушных пузырьков; очистка поверхности минералов от шламовых частиц и т.д. [1]. На процесс флотации руд влияет множество факторов, таких как физико-химические свойства частиц руды, тип оборудования (флотационная машина/колонна) и эксплуатационные факторы. Изменение этих факторов может как положительно, так и отрицательно повлиять на показатели флотации. Для улучшения флотационных характеристик руд применяют методы химического [2–4], физического [5–6] и физико-химического [7–8] воздействия.

При флотации кварца основные исследования сосредоточены, как правило, на практических результатах применения ультразвука при флотации [9–10]. В работе [1] показано, что УЗ влияет на поверхность твердых частиц. При длительном воздействии на поверхности может возникнуть оксидная пленка, при непродолжительном влиянии наблюдается очистка поверхности от внешних загрязнений. В этом случае наблюдается рост контактного угла и эффективность флотационного обогащения увеличивается. Кроме того, УЗ влияет на поведение и относительно крупных пузырьков, вызывая колебания их поверхности. В этом случае пузырьки могут притягиваться друг к другу и к твердым частицам вследствие воздействия силы Бьеркнеса, коалесцируя или образуя агломераты [11].

Влияние ультразвука на поверхность минералов, взаимодействие минерал-реагент, минерал-пузырьки и образование агломератов до сих пор изучено недостаточно. Поэтому необходимы дальнейшие фундаментальные исследования по изучению влияния ультразвука на процесс флотации.

Основная цель настоящей работы состоит в рассмотрении процессов, возникающих в пульпе под действием УЗ, и их влияния на количество извлекаемого при флотации продукта.

2. Методика эксперимента и экспериментальная установка

Флотацию с применением УЗ обработки осуществляли в механико-пневматической флотационной машине ФМП-Л1 «Вэктис Минералз» (рис. 1) с объемом камеры $V = 1000 \text{ см}^3$ с содержанием 10% твердой фазы при вращении ротора $\omega = 2000 \text{ об/мин}$ и температуре $T = 22 \div 28^\circ\text{C}$. Опыты включали в себя одну операцию флотации кварца и проводились по следующей схеме: навеска измельченной руды массой около $m = 100 \text{ г}$ крупности $0.1 - 0.3 \text{ мм}$ помещалась во флотационную камеру, добавлялась вода, объем которой составлял $V = 1000 \text{ см}^3$, после чего осуществлялось кондиционирование пульпы с последовательно дозируемыми реагентами. Расход реагента додециламин гидрохлорид (ДАГ) был постоянным, концентрация $C = 0.022 \text{ г/л}$, $C = 220 \text{ г/т}$. Время кондиционирования составляло 250 с, время флотации – 250 с. Для исследования влияния УЗ воздействия на флотацию кварца был использован высокотехнологичный лабораторный ультразвуковой генератор SONOPLUS HD3200 (Германия) с излучателем погружного типа со стержневым волноводом. Измерение энергии осуществляется в единицах кДж. При необходимости

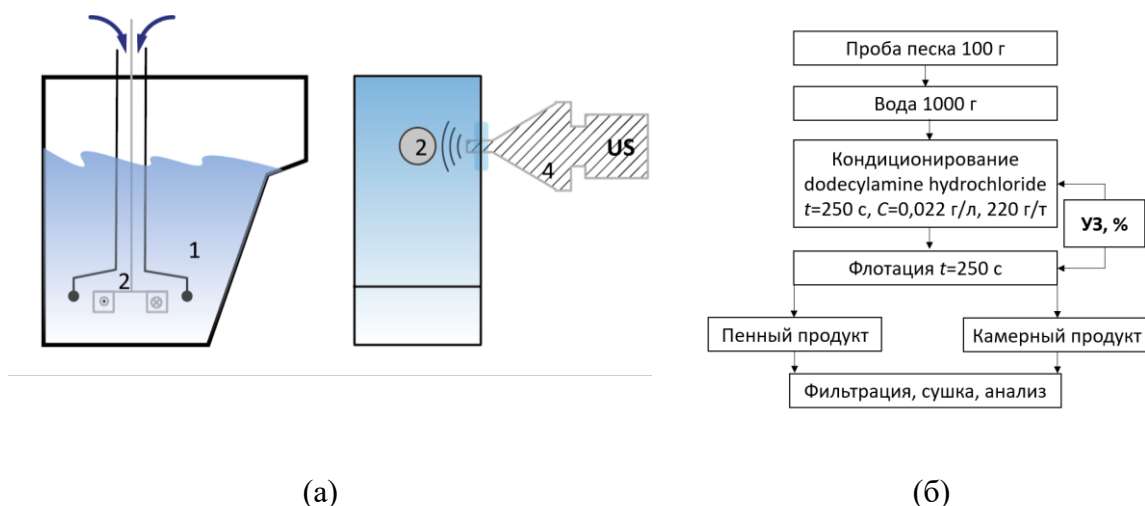


Рис. 1. (а) 1 – флотационная камера, 2 – импеллер флотационной машины, 3 – пульпа, 4 – источник УЗ Bandelin SONOPULS HD 4200; (б) схема проведения опытов по флотации с применением УЗ обработки

также возможно измерение температуры в диапазоне $T = 0 \div 120^\circ\text{C}$. Рабочая частота УЗ излучателя составляла $f = 20$ кГц. Интервал мощности генератора $P = 10 \div 100$ Вт.

Экспериментальная установка приведена на рис. 1а. Схема флотации приведена на рис. 1б. После флотации пенный и камерный продукты отфильтровывались с помощью фильтровальной бумаги, высушивались при 120°C , а затем взвешивались.

3. Результаты

Результаты экспериментов по флотации кварца с УЗ представлены на рис. 2. Предварительные эксперименты показали, что при увеличении концентрации реагента от 0 до 0.09 г/л масса пенного продукта после фильтрации увеличивалась до 80 г. Для опытов с источником ультразвука была выбрана концентрация ДАН, равная 0.022 г/л, в этом случае масса пенного продукта составляла около 60 г, т.е. 60% от общего количества кварца в флотационной камере. Эксперименты показали, что при увеличении мощности УЗ воздействия наблюдается линейный рост массы извлекаемого кварца, так, при 40% масса пенного продукта достигала 90% от массы исходного продукта.

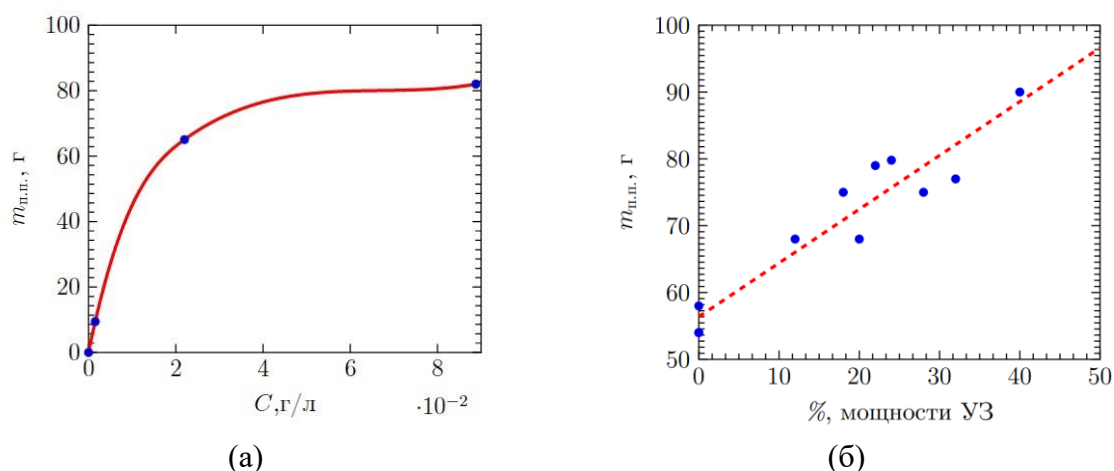


Рис. 2. (а) зависимость извлечения кварца от концентрации используемого реагента без УЗ воздействия; (б) зависимость извлечения кварца от мощности УЗ воздействия

4. Выводы

Эксперименты по флотации кварцевого песка в лабораторной флотационной машине показали возможность уменьшения концентрации реагента при использовании УЗ в момент кондиционирования и флотации кварца. Получены зависимости массы пенного продукта от концентрации ДАН в отсутствие УЗ, а также под действием УЗ для заданной концентрации ДАН. Показано, что в случае УЗ воздействия наблюдается линейный рост массы пенного продукта от мощности источника УЗ.

Исследование выполнено при финансовой поддержке из средств гранта Российского научного фонда (проект № 20-69-46066)

Список литературы

1. *Chen Y., Truong V. N., Bu X., Xie G.* A review of effects and applications of ultrasound in mineral flotation // *Ultrasonics sonochemistry*. 2020. Vol. 60. 104739. DOI: 10.1016/j.ulsonch.2019.104739
2. *Jia R., Harris G. H., Fuerstenau D. W.* Chemical reagents for enhanced coal flotation // *Coal Preparation*. 2002. Vol. 22 (3). P. 123–149. DOI: 10.1080/07349340213847
3. *Cebeci Y.* The investigation of the floatability improvement of Yozgat Ayırdam lignite using various collectors // *Fuel*. 2002. Vol. 81 (3). P. 281–289. DOI: 10.1016/S0016-2361(01)00165-X
4. *Laskowski J. S., Yu Z.* Oil agglomeration and its effect on beneficiation and filtration of low-rank/oxidized coals // *International Journal of Mineral Processing*. 2000. Vol. 58 (1–4). P. 237–252. DOI: 10.1016/S0301-7516(99)90040-6
5. *Xia W., Zhou C., Peng Y.* Enhancing flotation cleaning of intruded coal dry-ground with heavy oil // *Journal of Cleaner Production*. 2017. Vol. 161. P. 591–597. DOI: 10.1016/j.jclepro.2017.05.193
6. *Stoev S., Kuzev L., Metodiev M., Djendova S.* Vibroacoustic improvements of froth flotation // *Innovations in Flotation Technology*. NATO ASI Series. Vol. 208. Springer, Dordrecht, 1992. P. 383–407. DOI: 10.1007/978-94-011-2658-8_19
7. *Xia W., Niu C., Ren C.* Enhancement in floatability of sub-bituminous coal by low-temperature pyrolysis and its potential application in coal cleaning // *Journal of Cleaner Production*. 2017. Vol. 168. P. 1032–1038. DOI: 10.1016/j.jclepro.2017.09.119
8. *Niu C., Xia W., Xie G.* Effect of low-temperature pyrolysis on surface properties of sub-bituminous coal sample and its relationship to flotation response // *Fuel*. 2017. Vol. 208. P. 469–475. DOI: 10.1016/j.fuel.2017.07.073
9. *Ozkan S. G.* Further investigations on simultaneous ultrasonic coal flotation // *Minerals*. 2017. Vol. 7 (10). 177. DOI: 10.3390/min7100177
10. *Gungoren C., Ozdemir O., Ozkan S. G.* Effects of temperature during ultrasonic conditioning in quartz-amine flotation // *Physicochemical Problems of Mineral Processing*. 2017. Vol. 53 (2). P. 687–698. DOI: 10.5277/ppmp170201
11. *Lyubimova T., Rybkin K., Fattalov O., Kuchinskiy M., Filippov L.* Experimental study of temporal dynamics of cavitation bubbles selectively attached to the solid surfaces of different hydrophobicity under the action of ultrasound // *Ultrasonics*. 2021. Vol. 117. 106516. DOI: 10.1016/j.ultras.2021.106516

Инерционные волны во вращающемся вокруг горизонтальной оси плоском слое

К. Ю. Рысин

Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет,
614990, Пермь, ул. Сибирская, 24
email: rysin@pspu.ru

Экспериментально исследуются течения, генерируемые инерционными волнами в вертикальном плоском слое с изотермическими границами разной температуры. Вращение слоя происходит вокруг горизонтальной оси. Рассматривается случай равномерного вращения полости (при фиксированной скорости вращения), так и случай, когда скорость вращения полости периодически изменяется (либрации полости). При равномерном вращении полости вибрационная тепловая конвекция проявляется в виде ячеек, расположенных в гексагональном порядке. До порога возбуждения вибрационной конвекции в слое присутствуют тороидальные структуры слабой интенсивности, генерируемые инерционными волнами. Периодически изменяющаяся скорость вращения полости приводит к модификации течения.

Ключевые слова: вибрационная конвекция; устойчивость; вращение; плоский слой; инерционные волны

Inertial waves in a plane layer rotating about a horizontal axis

K. Y. Rysin

Perm State Humanitarian Pedagogical University, 24 Sibirskaya St., 614990, Perm
email: rysin@pspu.ru

The flows generated by inertial waves in a vertical flat layer with isothermal boundaries of different temperatures are experimentally studied. The rotation of the layer occurs around the horizontal axis. The case of uniform cavity rotation (at a fixed rotation speed) and the case when the cavity rotation speed periodically changes (cavity librations) are considered. With uniform rotation of the cavity, vibrational thermal convection manifests itself in the form of cells of a hexagonal order. In the subthreshold region of vibrational convection, the layer contains toroidal structures of low intensity generated by inertial waves. Periodically changing cavity rotation rate leads to modification of the flow.

Keywords: vibrational convection; stability; rotation; plane layer; inertial waves

1. Введение

Большое количество течений в природе и технике вызвано действием конвективного механизма, при этом жидкость может вращаться [1]. Типичными

примерами взаимодействия конвективного механизма и вращения являются крупномасштабные геофизические течения в атмосфере и океанах нашей Земли. Конвекция и вращение являются ключевыми механизмами управления тепломассопереносом в слоях жидкости, будь то жидкие оболочки планет или контейнеры различной геометрии. Исследование взаимодействия этих двух механизмов в природных гидродинамических системах позволит спрогнозировать погодные и климатические условия [2], а в технологических приложениях предопределил рост кристаллов необходимой формы и состава [3]. Предложенная модель Рэлея-Бенара, где рассматривается вращающийся вокруг вертикальной оси плоский слой жидкости, заключенный между параллельными горизонтальными границами, нагреваемыми снизу и охлаждаемыми сверху, позволяет исследовать влияние вращения на конвективную устойчивость жидкости [4, 5]. Исследованию течений и теплопереноса во вращающихся полостях в такой постановке посвящено большое количество экспериментальных, теоретических и численных работ.

В последние годы были рассмотрены задачи о влиянии вращения [6] на отличный от гравитационного механизм возбуждения конвекции – вибрационный механизм [7]. Данный механизм [7] проявляется в неоднородной по плотности среде в результате действия внешнего осциллирующего силового поля. Как и рэлеевский, «термовибрационный» конвективный механизм во вращающейся полости проявляется в пороговом возбуждении конвективных структур, в форме ячеек [8]. В допороговой области термовибрационной конвекции обнаружено существование тороидальных конвективных структур, генератором которых являются инерционные волны, рождаемые в углах полости. Взаимодействие инерционной волны с неизотермической жидкостью приводит к незначительному росту теплопереноса через слой в допороговой области вибрационной конвекции [8]. Более подробно механизм генерации течений описан в работах [9, 10]. Подобные тороидальные структуры наблюдались в экспериментах по тепловой вибрационной конвекции жидкости с внутренними источниками тепла во вращающемся горизонтальном цилиндре [11, 12]. Представленные работы [8 – 12] соответствуют случаю совпадения частоты колебания жидкости в системе отсчета полости с частотой вращения жидкости. При этом безразмерная частота осцилляций жидкости принимает значение $N = -1$. Отрицательное значение N говорит о том, что вращение полости происходит в противоположном направлении вращению силового поля в системе отсчета полости. Инерционные колебания неизотермической жидкости круговой поляризации – могут быть сгенерированы вращающимся силовым полем и в отсутствие вращения полости [13]. В случае круговых поступательных вибраций подогреваемого сверху слоя неизотермической жидкости [13], показано существование инерционных волн при значениях $0 < N < 2$. Область существования инерционных волн определяется условием – безразмерная частота осцилляций полости N должна принимать значение в интервале $-2 < N < 2$ [14]. Для исследования влияния инерционных волн на порог развития вибрационной конвекции во вращающемся плоском слое в указанном диапазоне может быть использован переход от равномерного вращения к модулированному.

Модулированное вращение является слабоизученным аспектом, влияющим на развитие вибрационной конвекции. Интерес к изучению действия инерционных волн на вибрационную тепловую конвекцию в неравномерно вращающемся плоском слое

обусловлен разработкой новых методов управления тепломассопереносом как в земных условиях, так и в невесомости.

2. Постановка эксперимента

Экспериментально были исследованы течения в плоском слое жидкости вращающемся вокруг горизонтальной оси, ориентированной перпендикулярно плоскости слоя (рисунок (а)). Показано, что в результате вращения внешнего силового поля (поля силы тяжести) в системе отсчета полости, в слое пороговым образом возбуждается вибрационная конвекция в виде ячеек, расположенных в гексагональном порядке. Обнаружено существование докритических течений слабой интенсивности в виде тороидальных валов при равномерном вращении полости (рисунок (б)). Анализ длин волн конвективных структур, проявляющихся в допороговой области, свидетельствует о их возникновении в результате взаимодействия инерционных волн с неизотермической жидкостью.

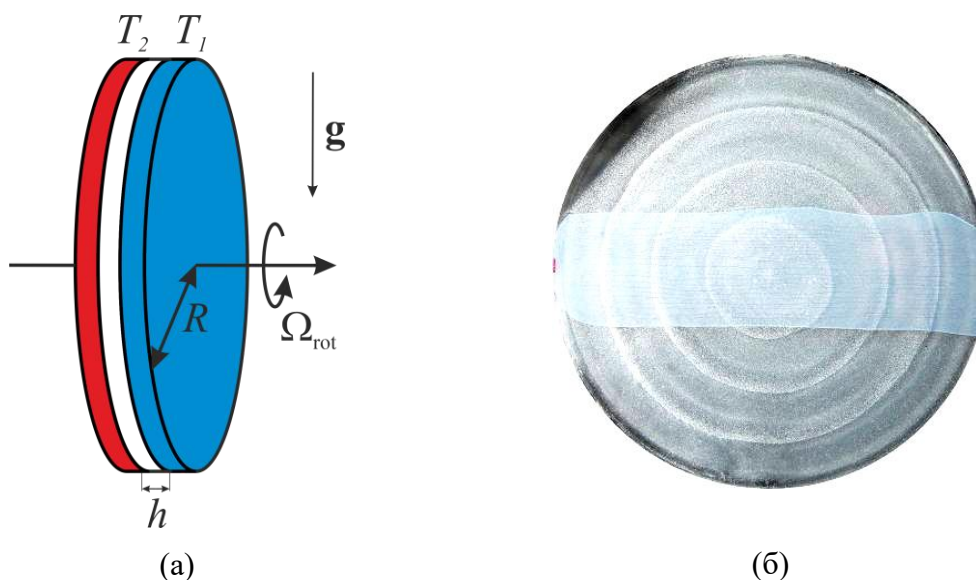


Рисунок. *Постановка задачи (а) и фотография тороидальных структур в равномерно вращающемся вокруг горизонтальной оси плоском слое (б)*

На следующем этапе исследования влияния инерционных волн на конвективную устойчивость жидкости запланированы эксперименты в случае модулированного вращения полости (расположение слоя аналогично, представленному на рисунке (а)). Методика проведения экспериментов следующая – при фиксированной скорости вращения Ω_{rot} , с выходом системы на стационарный режим, задаются вращательные колебания полости (либрации полости). Циклическая частота вращательных колебаний Ω_{lib} в одной серии экспериментов поддерживается постоянной, при этом амплитуда колебаний ϵ пошагово изменяется. Регистрация теплового потока через слой, а также измерение температуры границ полости производится при помощи термометров сопротивления. Наблюдение за генерируемыми течениями происходит через прозрачный теплообменник. Ожидается, что периодическое изменение скорости вращения полости приведёт к модификации течения. В области молекулярного теплопереноса возникнут тороидальные структуры, генерируемые инерционными

волнами, что приведет к интенсификации теплопереноса через слой и развитию вибрационной тепловой конвекции.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №22-71-00086.

Список литературы

1. *Lappa M.* Rotating thermal flows in natural and industrial processes. Wiley, 2012. 544 p.
2. *Boubnov B. M., Golitsyn G. S.* Convection in rotating fluids. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995. 232 p.
3. *Avetissov I. Ch., Sadovskii A. P., Sukhanova E. A., Zharikov E. V., Belogorokhov A. I., Levonovich B. N.* Czochralski crystal growth assisted by axial vibrational control technique // *Journal of Crystal Growth*. 2010. Vol. 312 (8). P.1104–1108. DOI: 10.1016/j.jcrysgro.2009.10.014
4. *Chandrasekhar S.* Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford University Press, 1961. 656 p
5. *Rossby H. T.* A study of Benard convection with and without rotation // *Journal of Fluid Mechanics*. 1969. Vol. 36 (2). P. 309–335. DOI: 10.1017/S0022112069001674
6. *Kozlov V. G.* Thermal Vibrational Convection in Rotating Cavities // *Fluid Dynamics*. 2004. Vol.39. P. 3–11. DOI: 10.1023/B:FLUI.0000024806.35710.e7
7. *Gershuni G. Z., Lyubimov D. V.* Thermal vibrational convection. Wiley. NY, 1998. 372 p.
8. *Иванова А. А., Козлов В. Г., Рылова В. В.* Тепловая конвекция в плоском слое, вращающемся вокруг горизонтальной оси // *Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа*. 2003. № 1. С. 12–21.
9. *Kozlov V., Vjatkin A., Rysin K., Sabirov R.* Inertial waves and vibrational thermal convection // *Proc. 66th Intern. Astronautical Congress (IAC2015)*. Israel, Jerusalem, 12–16 October 2015. P. 697–704.
10. *Вяткин А. А., Иванова А. А., Козлов В. Г., Рысин К. Ю.* Влияние тангенциальной составляющей силового поля на конвекцию во вращающемся плоском слое // *Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана*. 2017. Т. 53. № 2. С. 215–222. DOI: 10.7868/S0002351517020134
11. *Вяткин А. А., Козлов В. Г., Сараев Р. Р.* О конвективной устойчивости жидкости во вращающемся горизонтальном цилиндрическом слое // *Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа*. 2017. № 4. С. 73–84. DOI: 10.7868/S0568528117040077
12. *Kozlov V. G., Ivanova A. A., Vjatkin A. A., Sabirov R. R.* Vibrational convection of heat-generating fluid in a rotating horizontal cylinder. The role of relative cavity length // *Acta Astronautica*. 2015. Vol. 112. P. 48–55. DOI: 10.1016/j.actaastro.2015.03.014
13. *Вяткин А. А., Козлов В. Г., Рысин К. Ю.* Стенд для изучения влияния осциллирующих силовых полей на вращающиеся гидродинамические системы // *Конвективные течения*. 2015. № 7. С. 61–72.
14. *Гринспен Х.* Теория вращающихся жидкостей. Л.: Гидрометеиздат, 1975. 304 с.

Бифуркации и устойчивость стационарных коротковолновых режимов конвекции на фоне вертикального течения в воздушно-пористом тепловыделяющем слое

Р. В. Сагитов, Е. А. Колчанова

Пермский государственный национальный исследовательский университет,
614990, Пермь, ул. Букирева, 15
email: sagitovrv@mail.ru

В данной работе изучается развитие нелинейных конвективных режимов в горизонтальном воздушном подслое, находящемся над тепловыделяющим пористым подслоем, которые возникают после потери устойчивости вертикального сквозного течения. Объемная мощность тепловыделения в пористом подслое пропорциональна объемной доле твердой фазы. Течение воздуха в двухслойной среде описывается уравнениями конвекции в приближении Буссинеска. При этом применяется двухдоменная модель, в которой используются уравнение Навье–Стокса в воздушном подслое и уравнение Дарси в пористом подслое. Уравнения аппроксимируются с помощью метода конечных разностей. Стационарные решения получены и исследованы на устойчивость относительно малых возмущений многомерным методом Ньютона. Построены бифуркационные диаграммы и зависимости инкрементов от числа Рейлея–Дарси. Показана возможность мультистабильности и колебательной неустойчивости нелинейных режимов конвекции.

Ключевые слова: двухслойная система; неустойчивость; бифуркации; внутреннее тепловыделение; пористая среда; конвективный теплообмен

Bifurcations and stability of stationary short-wave convective regimes over a basic vertical throughflow in air-porous heat-generating layer

R. V. Sagitov, E. A. Kolchanova

Perm State University, 15 Bukireva St., 614990, Perm
email: sagitovrv@mail.ru

In the paper we study the development of nonlinear convective regimes in a horizontal air sublayer overlying a heat-generating porous sublayer, which arise after a vertical throughflow has lost its stability. A volumetric heat source is placed into the porous sublayer. Its strength is proportional to the solid volume fraction. The air flow in the two-layered medium is described by convection equations within the Boussinesq approximation. The two-domain model that

employs the Navier–Stokes equation in the air sublayer and the Darcy equation in the porous sublayer is applied. The equations are approximated by the finite difference scheme. Stationary solutions are obtained and examined for the stability with respect to small perturbations by the multidimensional Newton method. Bifurcation diagrams and the increments versus the Rayleigh–Darcy number are plotted. The possibility of multistability and oscillatory instability of nonlinear regimes is demonstrated.

Keywords: two-layered system; instability; bifurcations; internal heating; porous medium; convective heat transfer

1. Введение

Задача управления отводом тепла от тепловыделяющей пористой среды является актуальной, например, для создания оптимального теплового режима хранения сельскохозяйственной продукции [1, 2]. Как известно, конвективные течения воздуха, возникающее за счет внутреннего тепловыделения в пористой среде, ускоряет отвод тепла от нее [3]. Исследование линейной устойчивости вертикального течения сквозь двухслойную систему, содержащие снизу тепловыделяющий пористый подслой, насыщенный воздухом, сверху подслоем воздуха свободный от пористой матрицы, показало, что в зависимости от таких факторов, как толщина воздушной прослойки над пористой средой, объемная доля твердой фазы в ней, интенсивность и направление сквозного течения воздуха, в нем могут развиваться коротковолновые конвективные возмущения, локализованные в основном в пределах воздушного слоя или длинноволновые конвективные возмущения, охватывающие оба слоя [4]. Причем, оба типа возмущений имеют монотонный характер. В данной работе проводится исследование бифуркаций и устойчивости вторичных режимов течений, возникающих в результате потери устойчивости вертикального конвективного сквозного течения относительно коротковолновых возмущений при изменении числа Релея–Дарси.

2. Постановка задачи

Изучаемая нами конфигурация представляет собой двухслойную систему, образованную горизонтальным слоем воздуха, частично заполненным тепловыделяющей пористой матрицей. Среда сверху содержит подслоем воздуха, свободный от пористой матрицы, и снизу пористый подслой, насыщенный воздухом, толщиной h_a и h_p , соответственно. Система находится в поле силы тяжести и ограничена сверху и снизу твердыми проницаемыми для воздуха плоскостями, на которых поддерживаются одинаковые температуры T_0 . Система находится в условиях принудительного вертикального сквозного течения, при этом через одну плоскость воздух однородно закачивается со скоростью \vec{U} , через – другую отсасывается с такой же скоростью (рис. 1).

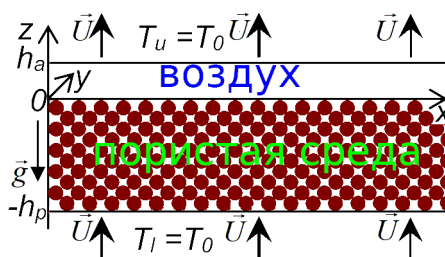


Рис. 1. Двухслойная система «воздух – пористая среда» при наличии вертикального сквозного течения в поле силы тяжести

Рассматривается гранулированная пористая среда с объемной долей твердой фазы ϕ и проницаемостью $K = D_p^2 (1 - \phi)^3 / (180 \phi^2)$, которая оценивается по формуле Кармана–Козени [Carman, Nield], где средний диаметр гранулы D_p в десять раз меньше общей толщины пористой матрицы. Пористая среда считается однородной по всем направлениям. Теплопроводность κ_p и объемная теплоемкость $(\rho C)_p$ пористого подслоя представляются в виде линейной комбинации теплопроводности и объемной теплоемкости воздуха и твердой фаз: $\kappa_p = (1 - \phi) \kappa_a + \phi \kappa_s$, $(\rho C)_p = (1 - \phi)(\rho C)_a + \phi(\rho C)_s$, где значения теплопроводностей $\kappa_s / \kappa_a = 16$ и объемной теплоемкостей $(\rho C)_s / (\rho C)_a = 3 \cdot 10^3$ выбраны типичными для биологически активной пористой матрицы, твердые элементы которой содержат в своем составе воду.

Тепловыделение считается медленным процессом по сравнению с временами распространения тепловых и гидродинамических возмущений так, что можно считать, что оно происходит с постоянной во всем объеме пористой среды объемной мощностью $Q = Q_s \phi$, пропорциональной объемной доле твердой фазы ϕ и мощности тепловыделения в твердой фазе Q_s .

Течение воздуха в двухслойной среде по аналогии с движением жидкости описывается безразмерными уравнениями конвекции в приближении Буссинеска. При этом используется двухдоменная модель [4], в которой используются уравнение Навье–Стокса в воздушном подслое и уравнение Дарси в пористом подслое [3].

На верхней и нижней внешних границах двухслойной среды выполняются условия равенства нулю отклонения температуры воздуха от температуры на ограничивающих плоскостях. На верхней границе скорость, на нижней границе нормальная компонента скорости равны скорости внешнего потока. На границе раздела подслоев ставятся условия непрерывности нормальных компонент скоростей, нормальных напряжений, температур и тепловых потоков. Предполагается, что на этой границе равна нулю касательная компонента скорости воздушного подслоя.

При обезразмеривании задачи в качестве единиц измерения длины выбрано $[x, y, z] = h_p$, времени $[t] = b h_p^2 / \chi_{ef}$, скорости $[\vec{v}] = \chi_{ef} / h_p$, давления $[p] = \rho_0 v \chi_{ef} / K$, температуры $[T] = Q_s h_p^2 / (2 \kappa_p)$, где $\chi_{ef} = \kappa_p / (\rho_0 C)_a$, $b = (\rho_0 C)_p / (\rho_0 C)_a$.

Задача характеризуется управляющими параметрами, такими как $Da = K / h_p^2$ – число Дарси, $Re = U h_p / \chi_{eff}$ – число Пекле, $Pr_p = b v / \chi_{eff}$ – число Прандтля в пористой среде, $d = h_a / h_p$ – отношение толщин слоев, ϕ – объемная доля твердой фазы, $R_1 = (g \beta Q_s K h_p^3) / (2 v \kappa_p \chi_{eff})$ – внутреннее число Рэлея–Дарси, нормированное на ϕ , $Ra_1 = \phi R_1$ – внутреннее число Рэлея–Дарси.

Для удобства решения краевой задачи введена функция тока ψ , такая что

$$v_{az} = Re + \frac{\partial \psi_a}{\partial x}, v_{ax} = -\frac{\partial \psi_a}{\partial z}, v_{pz} = Re + \frac{\partial \psi_p}{\partial x}, v_{px} = -\frac{\partial \psi_p}{\partial z}. \quad (1)$$

3. Результаты

Краевая задача допускает аналитическое решение, соответствующее сквозному течению с постоянной скоростью:

$$\psi_a = \psi_p = 0, \quad (2)$$

и с отклонением температуры в слое воздуха и в пористой среде от значения на ограничивающих плоскостях, определяемых выражениями:

$$\hat{\Theta}_a = \frac{2\phi(1 - \text{Pe} - e^{-\text{Pe}})(e^{\kappa \text{Pe} z} - e^{\kappa \text{Pe} d})}{\text{Pe}^2(e^{\kappa \text{Pe} d} - e^{-\text{Pe}})}, \hat{\Theta}_p = \frac{2\phi}{\text{Pe}} \left(\frac{(\text{Pe} + e^{\kappa \text{Pe} d} - 1)(e^{\text{Pe} z} - e^{-\text{Pe}})}{\text{Pe}(e^{\kappa \text{Pe} d} - e^{-\text{Pe}})} + z + 1 \right). \quad (3)$$

Исследование линейной устойчивости этого решения показало, что в зависимости от управляющих параметров, наиболее опасными для него могут быть или длинноволновые возмущения, охватывающие оба подслоя, или коротковолновые, локализованные преимущественно в воздушном подслое [4]. Так при $d = 0.15$, $\phi = 0.6$, $\text{Pe} = -5$ течение (2) – (3) теряет устойчивость относительно коротковолновых возмущений с волновым числом $k = 27.7$ при $\text{Ra}_1 = 37.6$.

Для исследования эволюции соответствующих вторичных режимов течения, краевая задача была дискретизирована на прямоугольной сетке с помощью метода конечных разностей. Полученная алгебраическая система уравнений решалась посредством метода Ньютона. Расчеты выполнялись для полости размером $(1+d) \times (2\pi \cdot 10/k) \approx 1.15 \times 2.2682$ на сетке 200×500 . При это вдоль оси $0x$ задавались периодические граничные условия.

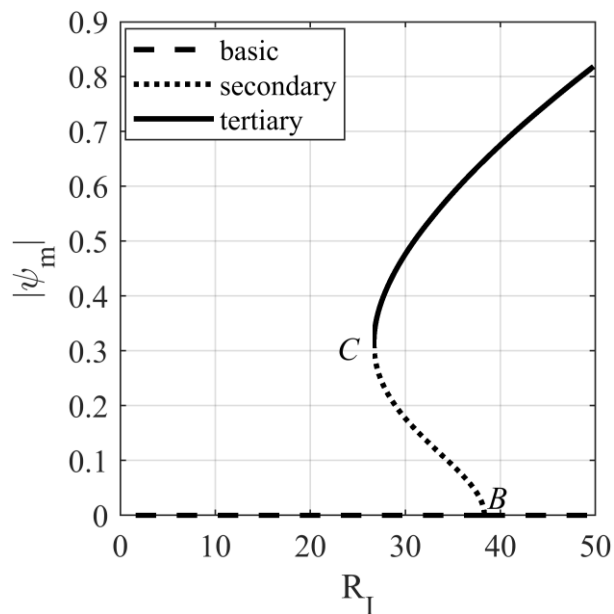


Рис. 2. Максимальная величина функции тока в зависимости от числа Релея–Дарси: *B* – подкритическая вилочная бифуркация первичного течения; *C* – седлоузловые бифуркации конечноамплитудного рождения стационарных течений

Обнаружено, что базисное течение теряет устойчивость монотонным образом при $\text{Ra}_1 = 38.3$. Потеря устойчивости сопровождается подкритической вилочной бифуркацией *B*, в результате которой рождаются вторичные стационарные течения (рис. 2), являющиеся неустойчивыми (рис. 3а). Интенсивность этих течений растет с уменьшением числа Релея–Дарси Ra_1 . В точке *C* наблюдается седлоузловая

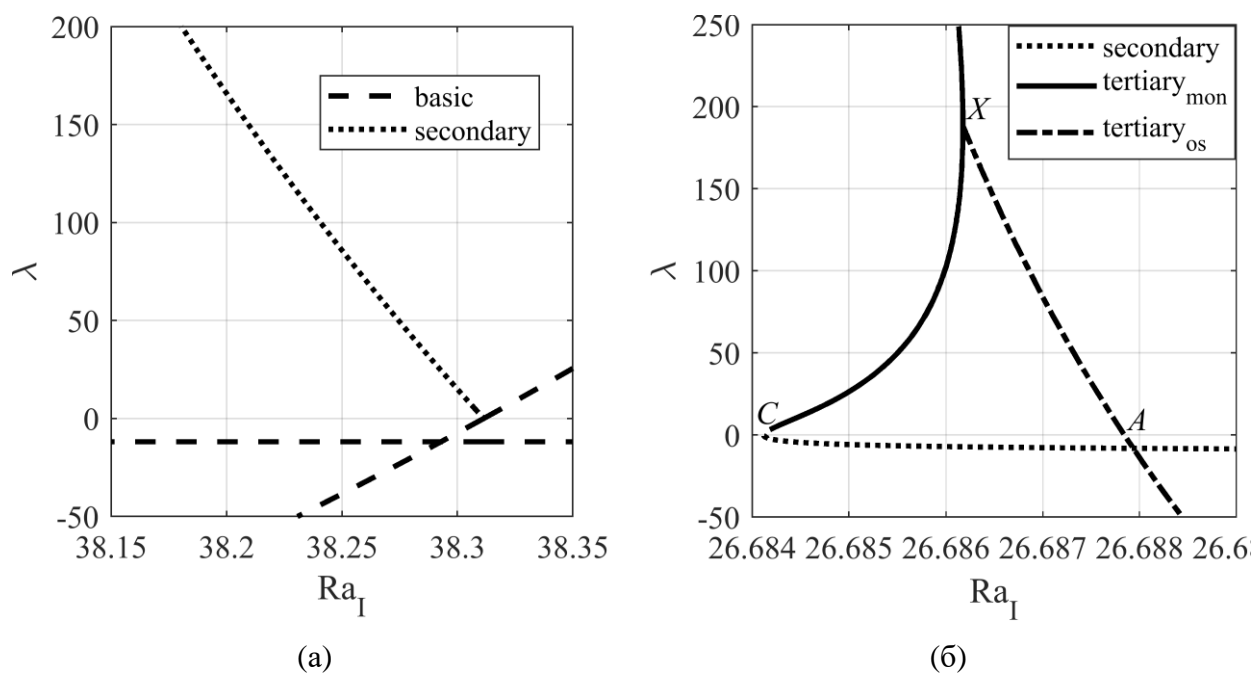


Рис. 3. Зависимость инкрементов возмущений стационарных течений от числа Рейля–Дарси

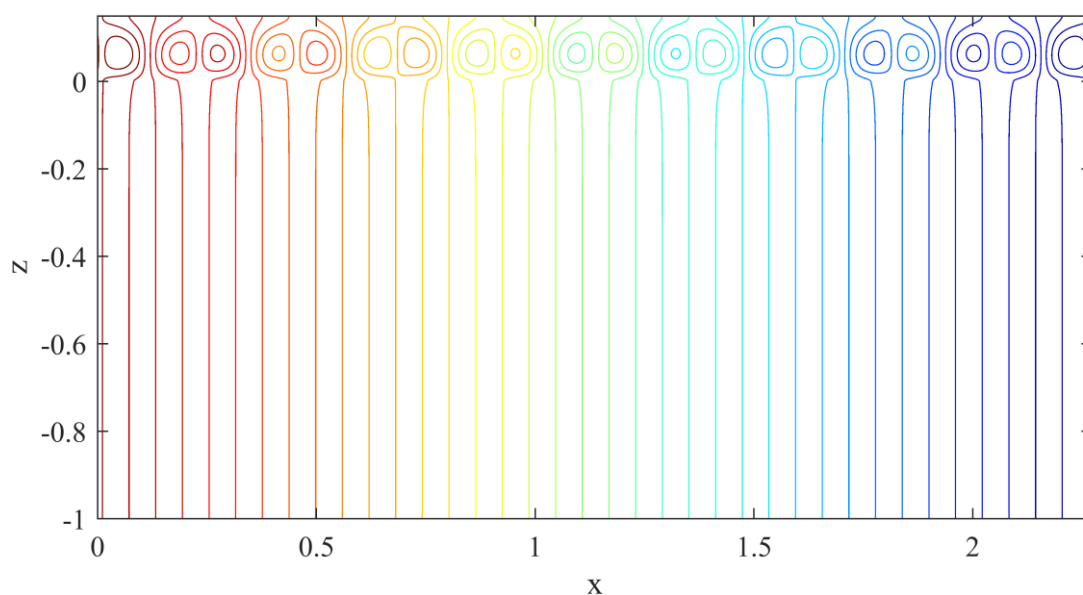


Рис. 4. Линии тока третичных течений $d = 0.15$, $\phi = 0.6$, $Pe = -5$, $Ra_I = 50$

бифуркация, в результате которой происходит рождение/исчезновение третичных стационарных течений.

В некоторой окрестности точки седлоузловой бифуркации до точки X третичные течения являются неустойчивыми монотонным образом (рис. 3б). Между точками X и A они неустойчивы относительно колебательных возмущений, что указывает на возможность возникновения колебательного режима течения, который может возникнуть в результате потери устойчивости первичного режима относительно конечно-амплитудных возмущений. Правее точки A третичные режимы являются

устойчивыми и представляют собой конвективные валы на фоне сквозного течения, локализованные в воздушном подслое (рис. 4). Между точками *A* и *B* наблюдается мультистабильность: сосуществование при фиксированном значении параметров первичного и третичного устойчивых стационарных течений.

4. Заключение

Установлено, что неустойчивость сквозного вертикального течения относительно коротковолновых возмущений носит монотонный характер и сопровождается подкритической вилочной бифуркацией, порождающей неустойчивые вторичные стационарные течения. В результате седлоузловой бифуркации рождаются третичные стационарные течения, которые могут неустойчивы колебательным образом, что указывает на возможность колебательного режима течения. При некотором значении управляющих параметров имеет место мультистабильность: возможность реализации при фиксированном значении параметров различных режимов течений.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-71-10045, <https://rscf.ru/project/21-71-10045/>.

Список литературы

1. *Kole N. K., Prasad S.* Respiration rate and heat of respiration of some fruits under controlled atmosphere conditions // *International Journal of Refrigeration*. 1994. Vol. 17 (3). P. 199–204. DOI: 10.1016/0140-7007(94)90019-1
2. *Бодров В. И., Бодров М. В.* Тепломассообмен в биологически активных системах (теория сушки и хранения): учеб. пособие. Нижний Новгород: ННГАСУ, 2013. 145 с.
3. *Nield D. A., Bejan A.* Convection in porous media. Switzerland: Springer International Publishing, 2017. 988 p.
4. *Kolchanova E., Sagitov R.* Throughflow effect on local and large-scale penetrative convection in superposed air-porous layer with internal heat source depending on solid fraction // *Microgravity Science and Technology*. 2022. Vol. 34 (4). P. 1–13. DOI: 10.1007/s12217-022-09971-2
5. *Kolchanova E., Lyubimov D., Lyubimova T.* The onset and nonlinear regimes of convection in a two-layer system of fluid and porous medium saturated by the fluid // *Transport in Porous Media*. 2013. Vol. 97 (1). P. 25–42. DOI: 10.1007/s11242-012-0108-8

Совместное влияние электрического поля и нормальных вибраций на устойчивость границы раздела между тяжёлой и лёгкой жидкостями

Е. С. Садилов

Институт механики сплошных сред УрО РАН,
614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1
email: sadilove@icmm.ru

Изучается совместное влияние нормального электрического поля и нормальных вибраций на устойчивость основного состояния системы, состоящей из двух диэлектрических жидкостей, разделённых границей раздела, которая в основном состоянии является плоской и горизонтальной. Жидкости представляют из себя слои бесконечной толщины. Плотность верхней жидкости считается малой по сравнению с плотностью нижней. Вязкость тоже считается малой в некотором смысле. Для исследования устойчивости применяется метод многих масштабов. Вводится быстрая вертикальная координата, позволяющая описать вязкий пограничный слой. Изучено влияние электрического поля на резонансную моду неустойчивости. Получена зависимость критической амплитуды вибраций от напряжённости электрического поля и волнового числа. Изучено влияние вибраций на неустойчивость Тонкса-Френкеля. Получена зависимость критического значения напряжённости электрического поля от амплитуды вибраций.

Ключевые слова: электрическое поле; нормальные вибрации; устойчивость

Joint influence of electric field and normal vibrations on the stability of the interface between heavy and light fluids

E. S. Sadilov

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS,
1 Akademika Koroleva St., 614013, Perm
email: sadilove@icmm.ru

The joint influence of the normal electric field and normal vibrations on the stability of the main state of the system, consisting of two dielectric fluids, separated by the boundary of the section, which is in the main state, is flat and horizontal, is studied. Fluids are layers of endless thickness. The density of the upper fluid is considered small compared to the density of the lower. Viscosity is also considered small in a sense. To study sustainability, the multi scale method is used. A quick vertical coordinate is introduced, which allows to describe the

viscous border layer. The pounding of an electric field into the resonant fashion of instability has been studied. The dependence of the critical amplitude of vibrations on the intensity of the electric field and the wave number was obtained. The influence of vibrations on the instability of Tonks-Frenceles has been studied. The dependence of the critical value of the intensity of the electric field on the amplitude of vibrations has been obtained.

Keywords: electric field; normal vibrations; stability

1. Введение

Влияние электрического поля на неустойчивость границы раздела двух жидких диэлектриков в отсутствие вибраций впервые, по-видимому, было исследовано в работе Зайцева, Шлиомиса [1]. В работах [2–3] исследовалось совместное влияние вибраций и электрического поля на устойчивость жидкого диэлектрического слоя со свободной границей. В работе [4] было исследовано совместное влияние нормальных вибраций и нормального электрического поля на устойчивость границы раздела для двухслойной системы, состоящей из двух жидких диэлектриков.

В данной же работе исследуется совместное влияние нормального электрического поля и нормальных вибраций на границы раздела двух жидких диэлектриков для случая, когда плотность верхней жидкости мала по сравнению с плотностью нижней.

2. Постановка задачи

Изучается система двух горизонтальных плоских слоев жидких диэлектриков с плоской горизонтальной границей раздела (в невозмущённом состоянии). Толщины слоёв бесконечные. Система находится под воздействием нормального электрического поля и нормальных вибраций.

Линеаризованная система определяющих уравнений и граничных условий для возмущений основного состояния для случая двух диэлектрических жидкостей в безразмерной форме имеет вид (после исключения давления):

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \tilde{w}_1 = \frac{N}{\sqrt{We}} \nabla^4 \tilde{w}_1, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \tilde{w}_2 = \frac{N}{\sqrt{We}} \nabla^4 \tilde{w}_2, \quad (2.2)$$

$$\nabla^2 \tilde{\varphi}_1 = 0, \quad (2.3)$$

$$\nabla^2 \tilde{\varphi}_2 = 0, \quad (2.4)$$

$$z \rightarrow -\infty: \quad \tilde{w}_1 = 0, \quad \tilde{\varphi}_1 = 0, \quad (2.5)$$

$$z \rightarrow +\infty: \quad \tilde{w}_2 = 0, \quad \tilde{\varphi}_2 = 0, \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} z = 0: \quad \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial \tilde{\varphi}_2}{\partial z}, \quad \tilde{\varphi}_1 - \varepsilon \tilde{\zeta} = \tilde{\varphi}_2 - \tilde{\zeta}, \quad \frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial z} = \frac{\partial \tilde{w}_2}{\partial z}, \quad \tilde{w}_1 = \tilde{w}_2, \quad \frac{1}{A} \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial t} = \tilde{w}_1, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{N}{\sqrt{We}} \nabla^2 \right) \frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial z} - \bar{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\bar{\nu} N}{\sqrt{We}} \nabla^2 \right) \frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial z} - \\ - \frac{(1 - \bar{\rho})}{A We} \frac{\partial^2 \tilde{\zeta}}{\partial x^2} + 4(1 - \bar{\rho}) \cos 2t \frac{\partial^2 \tilde{\zeta}}{\partial x^2} + \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2N}{\sqrt{We}} \left(\bar{\nu} \bar{\rho} \frac{\partial \tilde{w}_2}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial z} \right) - \frac{2(1-\bar{\rho})}{AWe} F \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_2}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial z} \right) = - \frac{(1-\bar{\rho})}{AWe} \frac{\partial^4 \tilde{\zeta}}{\partial x^4}, \\
& \bar{\nu} \bar{\rho} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \tilde{w}_2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \tilde{w}_1,
\end{aligned}$$

где индексы 1, 2 относятся к нижней и верхней жидкости соответственно. Здесь появляются следующие безразмерные параметры:

$$\begin{aligned}
\bar{\rho} &= \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad \bar{\nu} = \frac{\nu_2}{\nu_1}, \quad A = \frac{a}{l_c}, \quad We = \frac{\omega^2 l_c}{g}, \\
F &= \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0 E_*^2 l_c}{8\pi\alpha}, \quad \bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \quad N = \frac{\nu_1}{\sqrt{g l_c^{3/2}}}, \quad H = \frac{h}{l_c}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

(ω – половина частоты вибраций.)

3. Метод многих масштабов. Граница устойчивости

Для исследования данной уравнений и граничных условий (2.1) – (2.7) был использован метод многих масштабов. Плотность и вязкость считаются малыми. При этом их малость относительно друг друга имеет вполне определённый характер. Используя формальный малый параметр δ их относительную малость можно выразить следующим образом:

$$\bar{\rho} = \delta \bar{\rho}^{(1)}, \quad N = \delta^2 N^{(2)}. \tag{3.1}$$

Для учёта вязкости используется быстрая вертикальная координат (это позволяет учесть наличие вязкого пограничного слоя).

3.1. Резонансная мода

Сперва было исследовано влияние электрического поля на 1-ую резонансную моду (субгармонический резонанс).

При этом были использованы следующие разложения по малому параметру δ :

$$A = \delta^2 A^{(2)} \tag{3.2}$$

$$F = F^{(0)} + \delta F^{(1)} + \delta^2 F^{(2)} + \dots, \tag{3.3}$$

$$\zeta = \delta^3 \zeta^{(3)} + \delta^5 \zeta^{(5)} + \dots, \tag{3.4}$$

$$\tilde{w}_1 = \delta w_1^{(1)} + \delta^2 w_1^{(2)} + \dots, \tag{3.5}$$

$$\tilde{w}_2 = \delta w_2^{(1)} + \delta^2 w_2^{(2)} + \dots, \tag{3.6}$$

$$\tilde{\varphi}_1 = \delta^3 \varphi_1^{(3)} + \delta^5 \varphi_1^{(5)} + \dots, \tag{3.7}$$

$$\tilde{\varphi}_2 = \delta^3 \varphi_2^{(3)} + \delta^5 \varphi_2^{(5)} + \dots, \tag{3.8}$$

$$\xi = \frac{z}{\delta}, \quad z_0 = z, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial z_0}. \tag{3.9}$$

После применения метода многих масштабов было получены следующие математические выражения:

$$A \approx \delta^2 A^{(2)} = \pm \sqrt{\left(\bar{\rho} \frac{\sqrt{2\bar{\nu}N^{(2)}}}{\sqrt[4]{We}} + \frac{(F - (1 + \bar{\rho})F^{(0)})k(1 - \bar{\varepsilon})^2}{We(1 + \bar{\varepsilon})} \right)^2 + \left(\bar{\rho} \frac{\sqrt{2\bar{\nu}N}}{\sqrt[4]{We}} + \frac{kN}{2\sqrt{We}} \right)^2}, \quad (3.10)$$

$$F^{(0)} = \frac{(1 + \bar{\varepsilon})}{2(1 - \bar{\varepsilon})^2} \left(\frac{1}{k} + k - \frac{We}{k^2} \right), \quad F^{(1)} = \bar{\rho}^{(1)} F^{(0)}, \quad (3.11)$$

где учтено, что $\delta^2 F^{(2)} \approx F - F^{(0)} - \delta F^{(1)} = F - (1 + \bar{\rho})F^{(0)}$, а также соотношения (3.1). Уравнение (3.10) описывают границу устойчивости, а соотношения (3.11) можно рассматривать как дисперсионное соотношение для волнового числа.

Заметим, что если мы положим в этой формуле $\bar{\rho} = 0$, то получим соотношение из статьи [2] (формула) для случая свободной границы, учтя, что в том выражении потеряна 1/2 перед квадратным корнем. Также заметим, что в статье [3] имеется две опечатки. В формуле (24) вместо N должно быть N^2 , а в формуле (26) вместо \sqrt{N} должно быть N . И также как в [2] потеряна 1/2.

Если же мы пренебрежём N по сравнению с $\bar{\rho}\sqrt{N}$, то получим выражение из статьи [4] в пределе $H \rightarrow \infty$ и для малых $\bar{\rho}$.

3.2. Электрическая мода

«Электрической» модой неустойчивости здесь называется мода, описывающая неустойчивость Тонкса–Френкеля. В данном пункте описываются результаты изучения влияния нормальных вибраций на электрическую моду.

Так как данные результаты можно получить, как частный случай из результатов работы [4] (используя соотношение $\bar{\rho} = \delta \bar{\rho}^{(1)}$), то промежуточные выкладки здесь опускаются.

В результате имеем:

$$F - F^{(0)} \approx \delta^2 F^{(2)} = \frac{1 + \bar{\varepsilon}}{(1 - \bar{\varepsilon})^2} We A^2, \quad (3.12)$$

$$F^{(0)} = \frac{1 + \bar{\varepsilon}}{2(1 - \bar{\varepsilon})^2} \left(k + \frac{1}{k} \right). \quad (3.13)$$

4. Выводы

Изучено влияние электрического поля на резонансную моду неустойчивости для системы двух диэлектрических жидкостей в случае, когда плотность верхней жидкости мала. Этот случай промежуточный между случаем со свободной границей и случаем, когда жидкости имеют сравнимую плотность. Полученные формулы в некотором смысле интегрируют два этих случая.

Также приведены формулы для влияния амплитуды вибраций на неустойчивость Тонкса–Френкеля, но они, учитывая результаты, полученные ранее, имеют тривиальный характер.

Список литературы

1. Зайцев В. М., Шлиomis М. И. Характер неустойчивости поверхности раздела двух жидкостей в постоянном поле // Доклады Академии наук. СССР. 1969. Т. 188. № 6. Р. 1261–1262.

2. *Садилов Е. С.* Совместное влияние электрического поля и вибраций на неустойчивость жидкого диэлектрического слоя со свободной границей // Пермские гидродинамические научные чтения. Сборник материалов VII Всероссийской конференции, посвящённой памяти профессоров Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкого и Д.В. Любимова. Пермь, 2020. С. 348–352
3. *Sadilov E. S.* Joint influence of electric field and vibrations on the instability of fluid dielectric layer with free boundary // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 1809. 012027. DOI: 10.1088/1742-6596/1809/1/012027
4. *Садилов Е. С.* Совместное влияние нормальных вибраций и электрического поля на устойчивость системы, состоящей из двух слоев жидкости // Вычислительная механика сплошных сред. Направлена в печать.

Периодические конвективные процессы в магнитной жидкости в вертикальных каналах кругового сечения

А. С. Сидоров

Пермский государственный национальный исследовательский университет
614990, Пермь, ул. Букирева, 15
email: sidorovaliksandr@mail.ru

Проведены эксперименты с магнитной жидкостью в узких вертикальных связанных каналах круглого сечения, подогреваемых снизу. Вблизи порога неустойчивости механического равновесия получены специфические переходные колебательные режимы течений и периодическая смена направления закрутки течения. Такое поведение магнитной жидкости мы связываем с термодиффузионными и седиментационными механизмами, влияющими на дрейф магнитных частиц.

Ключевые слова: вертикальные связанные каналы; конвекция; термодиффузия; магнитная жидкость

Periodic convective processes in a ferrofluid in vertical channels of a circular cross section

A. S. Sidorov

Perm State University, 15 Bukireva St., 614990, Perm
email: sidorovaliksandr@mail.ru

Experiments were carried out with magnetic fluid in narrow vertical coupled channels of circular cross section, heated from below. Near the threshold of instability of mechanical equilibrium, specific transient currents and oscillatory modes associated with periodic changes in the direction of flow twist have been obtained. We attribute this behavior of the magnetic fluid to thermodiffusion and sedimentation mechanisms affecting the drift of magnetic particles.

Keywords: vertical coupled channels; convection; thermodiffusion; magnetic fluid

1. Введение

Первое упоминание о задаче с вертикальными цилиндрическими каналами кругового сечения можно встретить в работах Г. А. Остроумова [1–3]. Мы рассматриваем устойчивость течения жидкости с особыми свойствами, к которым относят магнитные жидкости. Характер течений в таких системах отличается от однокомпонентных жидкостей наличием гистерезиса при переходе системы от механического равновесия к конвекции и обратно, переходными колебательными режимами течений. Колебательный характер течения в сложных системах уже наблюдался ранее в бинарных [4, 5] и коллоидных растворах [6–8]. В перечисленных работах для объяснения такого поведения магнитной жидкости рассматривались

термодиффузионные и седиментационные механизмы, влияющие на дрейф магнитных частиц.

2. Эксперимент

Вертикальные узкие каналы образованы двумя латунными трубками 1, замыкающимися сверху и снизу латунными массивами с внутренними каналами такого же сечения (рис. 1). Высота каналов $h = 50$ мм, диаметр – $2R = 4$ мм, расстояние между центрами каналов 6 мм. Снизу располагалась латунная пластина с электрическим нагревателем внутри 2, сверху крепился алюминиевый радиатор с электрическим вентилятором для отвода тепла 3. Каналы были теплоизолированы с помощью ваты 4. В качестве нагревателя использовалась однослойная нихромовая проволока диаметром 0.3 мм с бифилярной и радиальной намоткой, и источник питания Б5-71/1м. Интенсивность течения в каналах регистрировалась с помощью дифференциальной медь-константановой термопары 5, 6 и цифрового прибора «Термодат 29БМ1». Еще одна дифференциальная термопара 7, 8 с прибором «Термодат-16ЕЗ» задавала и поддерживала вертикальный перепад температуры. Все данные по измерению температуры передавались на ноутбук через программу TermodatNet.

В экспериментах использовалась магнитная жидкость на основе ундекана с 16 % содержанием магнетитовых частиц, со средним радиусом 6 нм; плотность $\rho = 1.46$ г/см³, теплопроводность 0.25 Вт·м⁻¹К⁻¹, кинематическая вязкость $\nu = 5.8 \cdot 10^{-6}$ м²с⁻¹, температуропроводность $\chi = 1.1 \cdot 10^{-7}$ м²с⁻¹, коэффициент теплового расширения $\beta_t = 1.0 \cdot 10^{-3}$ К⁻¹, концентрационный коэффициент плотности $\beta_c = 3.1$.

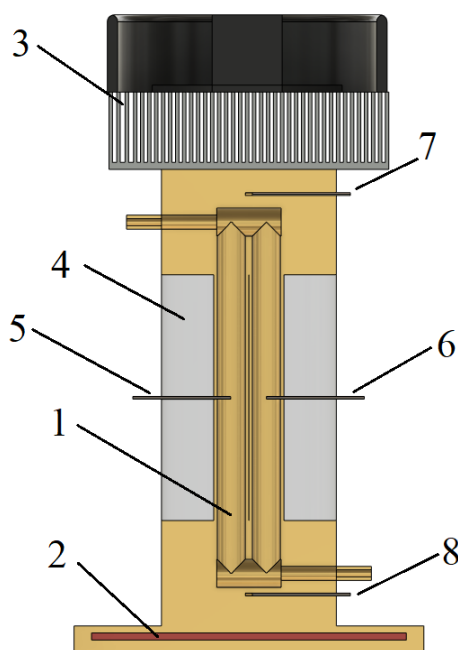


Рис. 1. Схема экспериментальной установки в вертикальном осесимметричном сечении: 1 – каналы с жидкостью, 2 – электрический нагреватель, 3 – радиатор с вентилятором, 4 – теплоизолятор, 5, 6 – спай дифференциальной термопары для измерения разности температур между каналами, 7, 8 – спай дифференциальной термопары для измерения вертикальной разности температур между теплообменниками

3. Результаты

В эксперименте исследовались режимы течений образца магнитной жидкости вблизи порога механического равновесия. На рис. 2 изображена зависимость перепада температуры между центрами каналов 2θ от вертикального перепада температуры ΔT . Критическое значения вертикального перепада температуры ΔT_c для исследуемой жидкости составило 13 К.

Во всех точках графика, лежащих правее точки ΔT_c наблюдался режим течения с периодической сменой направления закрутки. На рис. 3 представлено периодическое изменение перепада температуры в центре каналов 2θ со временем при $\Delta T = 19$ К. Видно, что на протяжении четырех часов вертикальный перепад не менялся (серая линия), а сигнал 2θ (черная линия) менял свои значения с положительных на отрицательные с периодом $\tau = 3.6 \cdot 10^3$ с. Такие изменения соответствуют периодической смене закрутки конвективного течения. Период колебаний увеличивался с ростом числа Рэлея от $1.0 \cdot 10^3$ до $4.1 \cdot 10^3$ с.

Ранее подобные течения были получены и объяснены для вертикальных связанных каналов квадратного сечения, заполненных магнитной жидкостью [9]. Причиной явления выступает термофорез коллоидных частиц за счет температурных градиентов, направленных поперек узких каналов. Конвекция генерирует неоднородности частиц за счет их термодиффузионного дрейфа перпендикулярно стенкам каналов. В канале с восходящим потоком концентрация частиц растет, а в противоположном канале падает. В итоге меняется направление конвективного течения, которое повторяется периодически. Отметим, что такое поведение характерно только для магнитных жидкостей с положительным коэффициентом Core .

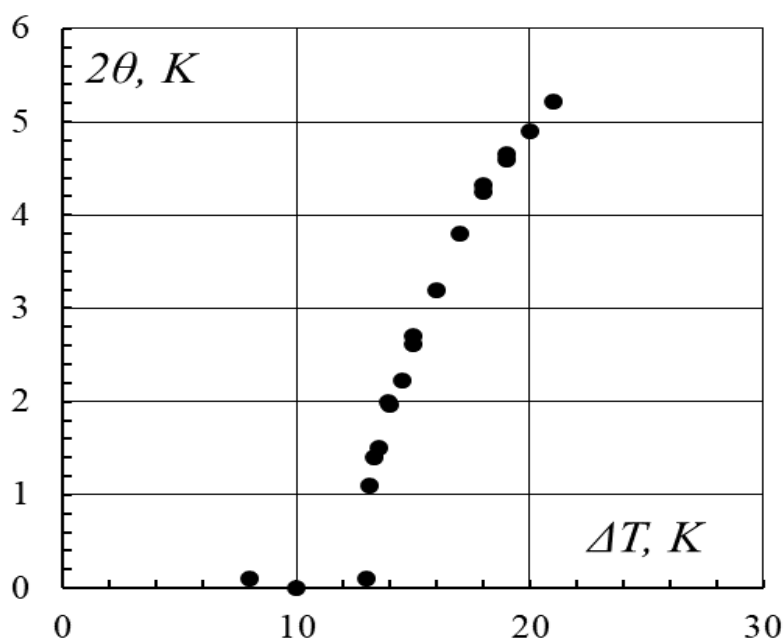


Рис. 2. Зависимость перепада температуры между центрами каналов от вертикальной разности температур

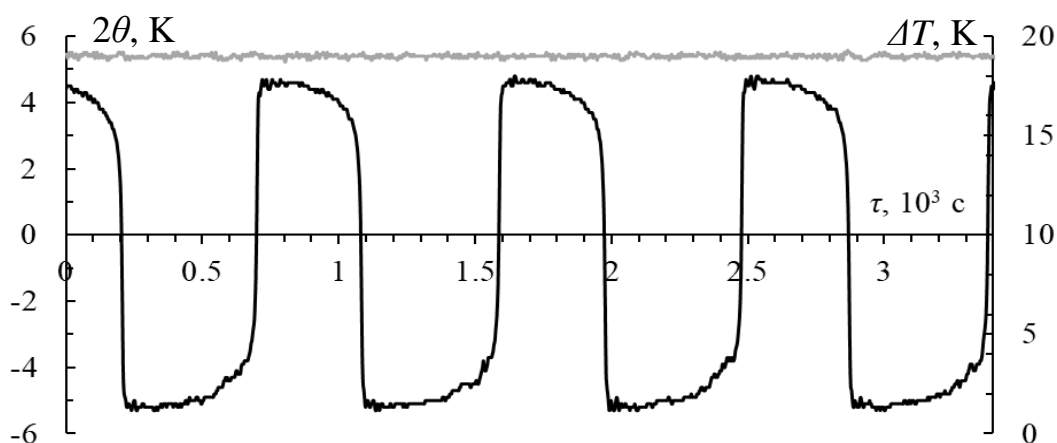


Рис. 3. Зависимость конвективной разности температур между каналами (черная линия) и заданная вертикальная разность температур (серая линия) от времени

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (Проект № 20-01-00491).

Список литературы

1. *Остроумов Г. А.* Естественная конвективная теплопередача в замкнутых вертикальных трубах // Известия Естественного института при Пермском университете. 1947. Т. 12. № 4. С. 113.
2. *Остроумов Г. А.* Математическая теория конвективного теплообмена в замкнутых вертикальных скважинах // Известия Естественного института при Пермском университете. 1949. Т. 12. № 9. С. 385.
3. *Остроумов Г. А.* Свободная конвенция в условиях внутренней задачи. Москва; Ленинград: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1952. 256 с.
4. *Пишеничников А. Ф.* Колебательная неустойчивость бинарной смеси в связанных вертикальных каналах // Гидродинамика. Пермь: ПГУ. 1976. Вып. 8. № 362. С. 3–11.
5. *Глухов А. Ф., Демин В. А., Путин Г. Ф.* Конвекция бинарной смеси в связанных каналах при подогреве снизу // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2007. № 2. С. 13–23.
6. *Глухов А. Ф., Путин Г. Ф.* Конвекция магнитных жидкостей в связанных каналах при подогреве снизу // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2010. № 5. С. 41–48.
7. *Smorodin B. L., Cherepanov I. N., Ishutov S. N., Myznikova B. I.* Convection of a colloidal suspension in a Hele-Shaw cell // European Physical Journal E. 2017. Vol. 40. 18. DOI: 10.1140/epje/i2017-11502-0
8. *Аллен Д. З., Бэнкс Р. Д., Демин В. А.* Теоретическое исследование переброшенных колебаний наножидкости в связанных каналах при учете зависимости вязкости среды от концентрации частиц // Вестник Пермского университета. Физика. 2019. № 3. С. 12–19. DOI: 10.17072/1994-3598-2019-3-12-19
9. *Глухов А. Ф.* О периодической потере устойчивости конвекции магнитной жидкости в подогреваемых снизу вертикальных каналах // Вестник Пермского университета. Физика. 2019. № 1. С. 17–25. DOI: 10.17072/1994-3598-2019-1-17-25

Нелинейные свойства модулированных волн на поверхности воды под ледяной пластиной

А. В. Слюняев^{a,b,c}, Ю. А. Степанянц^{d,e}

^a Институт прикладной физики РАН, 603950, Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46
email: slunyaev@ipfran.ru

^b Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
603155, Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, 25/12

^c Тихоокеанский океанологический институт им. В. И. Ильичева ДВО РАН,
690041, Владивосток, ул. Балтийская, 43

^d University of Southern Queensland, 487-535 West St., Toowoomba, QLD 4350, Australia
email: Yury.Stepanyants@usq.edu.au

^e Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева,
603950, Нижний Новгород, ул. Минина, 24

Исследуется свойство нелинейной самомодуляции изгибно-гравитационных волн на поверхности воды, покрытой сжатым ледяным щитом заданной толщины в бассейне постоянной глубины. Для слабонелинейных возмущений получено нелинейное уравнение Шредингера и исследованы условия, когда квазисинусоидальная волна становится неустойчивой по отношению к амплитудной модуляции. Области неустойчивости построены на плоскостях определяющих физических параметров, они имеют сложную форму. Показано, что при определенных условиях модуляционной неустойчивости могут быть подвержены более короткие группы волн, неустойчивость развивается за меньшее число периодов волн, чем в ситуации гравитационных волн на свободной поверхности глубокой воды. Модуляционная неустойчивость может возникнуть в условиях более мелкой воды, чем при свободной поверхности (при $kh < 1.363$, где k – волновое число, h – глубина воды). Даны оценки параметров неустойчивых модулированных волн для типичных физических условий покрытого льдом моря. Предложена модификация индекса модуляционной неустойчивости BFI с учетом сплошного ледового покрытия.

Ключевые слова: изгибно-гравитационные волны; волны подо льдом; модуляционная неустойчивость

Nonlinear properties of modulated waves on the surface of water covered by an ice plate

A. V. Slunyaev^{a,b,c}, Y. A. Stepanyants^{d,e}

^a Institute of Applied Physics RAS, 46 Ulyanov St., 603950, Nizhny Novgorod
email: slunyaev@ipfran.ru

^b National Research University Higher School of Economics,
25/12 Bolshaya Pecherskaya St., 603155, Nizhny Novgorod

^c V. I. Il'ichev Pacific Oceanological Institute FEB RAS,
43 Baltiyskaya St., 690041, Vladivostok

^d University of Southern Queensland, 487-535 West St., Toowoomba, QLD 4350, Australia
email: Yury.Stepanyants@usq.edu.au

^e Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R. E. Alekseev,
24 Minin St., 603950, Nizhny Novgorod

The property of nonlinear self-modulation of flexural-gravity waves on the surface of water covered with a compressed ice sheet of a given thickness in a basin of constant depth is investigated. For weakly nonlinear perturbations, a nonlinear Schrödinger equation is derived and the conditions under which a quasi-sinusoidal wave becomes unstable with respect to amplitude modulations are studied. The instability regions are given on planes of the key physical parameters, they exhibit fairly complicated patterns. It is shown that under certain conditions, shorter groups of waves can suffer from the modulational instability, and the instability develops over a smaller number of wave periods than in the situation of gravity waves on the free surface of deep water. The modulational instability can occur in shallower water than in a free water case (for $kh < 1.363$, where k is the wavenumber and h is the water depth). Estimates of the parameters of unstable modulated waves are given for typical physical conditions of an ice-covered sea. A modification of the Benjamin – Feir Index (BFI) is proposed, taking into account the ice cover.

Keywords: flexural-gravity waves; sea waves under the ice; modulational instability

Рассматривается плоская геометрия с вертикальной осью Oz , направленной вверх, и горизонтальной осью Ox вдоль распространения волны. Движение идеальной однородной жидкости плотности ρ предполагается потенциальным с потенциалом скорости $\varphi(x,y,t)$, который во всей толще жидкости $-h \leq z \leq \eta$ подчиняется уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0, \quad -h \leq z \leq \eta. \quad (1)$$

Положение поверхности воды под ледяной пластиной задается условием $z = \eta(x,t)$ (невозмущенная поверхность соответствует $z = 0$), h – глубина слоя воды. Кинематическое условие на поверхности в классической форме связывает положение поверхности с вертикальной компонентой скорости воды, а динамическое условие для движений в поле силы тяжести (g – ускорение свободного падения) дополнено учетом массы ледяной пластины (константа $M = \rho_1 d$, где ρ_1 – плотность льда, d – его толщина), ее сопротивления изгибу (константа $D = Ed^3/[12(1 - \nu^2)]$, где E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона) и сжатию/растяжению (константа Q ; сжатие соответствует значениям $Q > 0$, растяжение $Q < 0$):

$$\varphi_z = \eta_t + \varphi_x \eta_x, \quad z = \eta, \quad (2)$$

$$\varphi_t + g\eta + \frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_z^2) = -\frac{1}{\rho}[M\eta_{tt} + DK_{xx} + QK], \quad z = \eta, \quad (3)$$

$$K(\eta) = \frac{\eta_{xx}}{\left[1 + (\eta_x)^2\right]^{\frac{3}{2}} - \frac{d}{2}\eta_{xx}}. \quad (4)$$

Функция $K(\eta)$ описывает искривление ледяной пластины согласно работам [1, 2]. На дне накладывается классическое условие непротекания

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad z = -h. \quad (5)$$

Система уравнений (1) – (5) решается для гармонического возмущения малой амплитуды в предположении медленной эволюции длинных возмущений. Результатом развития асимптотической теории третьего порядка по малой крутизне и ширине спектра является нелинейное уравнение Шредингера в классической форме

$$i \left(\frac{\partial B}{\partial t} + V \frac{\partial B}{\partial x} \right) + \beta \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \alpha |B|^2 B = 0, \quad (6)$$

где $B(x, t)$ – комплексная амплитуда волны, связанная с физическими полями посредством соотношений

$$\eta = \text{Re}(B \exp(i\omega t - kx)), \quad \varphi = -\frac{\omega}{k\sigma} \text{Im}(B \exp(i\omega t - kx))e^{-kz}, \quad \sigma = \tanh kh. \quad (7)$$

Волновое число k несущей волны и циклическая частота ω связаны дисперсионным соотношением

$$\omega^2 = \frac{k\sigma(g - k^2 Q + k^4 D)}{1 + \sigma k M}. \quad (8)$$

Коэффициенты уравнения (6): групповая скорость $V = d\omega(k)/dk$, коэффициенты нелинейности α и дисперсии $\beta = -1/2 d^2\omega(k)/dk^2$ найдены как явные функции параметров k, h, d, M, D и Q . В общем виде выражения для α и β очень громоздкие, они приведены в нашей статье [3].

Уравнения в форме (6) для описания волн на поверхности воды, покрытой ледяным слоем, получались и ранее (например, [4, 5]), но обладают разного рода неполнотой или недостатками, как мы обсуждаем в [3].

Хорошо известно, что решение уравнения (6) в виде однородной монохроматической волны неустойчиво по отношению к достаточно длинным возмущениям амплитуды (модуляционная неустойчивость), если выполняется критерий Лайтхилла $\alpha\beta > 0$. Модуляционная неустойчивость является классическим эффектом нелинейной динамики волн на воде, она наблюдалась в различных экспериментах. Под ее действием последовательность однородных волн разбивается на группы, что определяет типичную картину морского волнения.

Условие Лайтхилла позволяет разграничить области устойчивости и неустойчивости волн на плоскостях параметров: глубины бассейна и характеристик льда. Два примера диаграмм построены на рисунке для ситуации льда без напряжения (а) и в сжатом состоянии (б). Картина неустойчивых областей выглядит довольно сложно. Смена условий устойчивости/неустойчивости происходит при обнулении коэффициента дисперсии $\beta = -1/2 dV/dk$ (линейные гравитационные и линейные изгибные волны обладают разными знаками производной зависимости групповой скорости от волнового числа) и проходе нелинейного коэффициента α через бесконечность (при резонансе волны со второй гармоникой или с разностной гармоникой) или ноль. Для описания нелинейно-дисперсионной динамики волн в окрестностях этих вырожденных областей необходимо развивать более аккуратную теорию с учетом эффектов более высоких порядков по нелинейности / дисперсии.

Горизонтальной пунктирной линией на рисунке отмечена глубина $kh = 1.36$, меньше которой происходит стабилизация волн, распространяющихся на поверхности воды безо льда. Из рисунка видно, что при ненулевых значениях параметра D модуляционно неустойчивыми могут становиться волны на более мелкой воде. Анализ

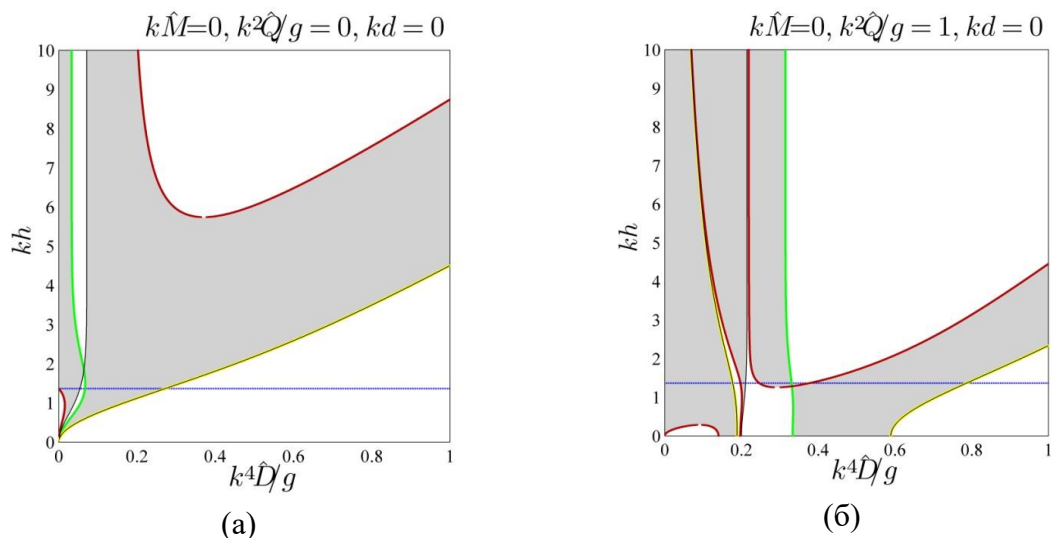


Рисунок. Диаграмма модуляционной неустойчивости волн (серые области) на плоскости параметров для $Q = 0$ (а) и $Q > 0$ (б). Величины \hat{M} , \hat{Q} и \hat{D} соответствуют M , Q и D соответственно, нормированным на плотность ρ

показывает, что могут реализоваться условия, когда модуляционно неустойчивыми становятся более короткие группы, и неустойчивость развивается за меньшее число периодов, чем в случае безо льда.

Условия, когда волны становятся модуляционно неустойчивыми, могут способствовать возникновению долгоживущих когерентных структур типа солитонов огибающей и бризеров и существенному изменению вероятностных свойств волн, что представляет интерес с точки зрения проблемы т.н. «волн-убийц» [6, 7]. На основе (6) и полученных коэффициентов α и β можно предложить модификации индекса модуляционной неустойчивости BFI с учетом сплошного ледового покрытия.

Исследования выполнены при поддержке гранта РНФ 22-17-00153.

Список литературы

1. Forbes L. K. Surface waves of large amplitude beneath an elastic sheet. Part 1. High-order series solution // Journal of Fluid Mechanics. 1986. Vol. 169. P. 409–428. DOI: 10.1017/S0022112086000708
2. Ильичев А. Т. Уединенные волновые пакеты под сжатым ледовым покровом // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2016. № 3. С. 32–42. DOI: 10.7868/S0568528116030063
3. Slunyaev A. V., Stepanyants Y. A. Modulation property of flexural-gravity waves on a water surface covered by a compressed ice sheet // Physics of Fluids. 2022. Vol. 34. 077121. DOI: 10.1063/5.0100179
4. Liu A. K., Mollo-Christensen E. Wave propagation in a solid ice pack // Journal of Physical Oceanography. 1988. Vol. 18. P. 1702–1712. DOI: 10.1175/1520-0485(1988)018<1702:WPIASI>2.0.CO;2
5. Марченко А. В., Шприца В. И. К теории двумерных нелинейных волн в жидкости под ледяным покровом // Известия Академии наук СССР. Механика жидкости и газа. 1991. № 4. С. 125–133.
6. Slunyaev A. V. Persistence of hydrodynamic envelope solitons: detection and rogue wave occurrence // Physics of Fluids. 2021. Vol. 33. 036606. DOI: 10.1063/5.0042232
7. Слюняев А. В., Пелиновский Д. Е., Пелиновский Е. Н. Морские волны-убийцы: наблюдения, физика и математика // Успехи физических наук. Направлена в печать.

Экспериментальное исследование конвекции во влажном воздухе в присутствии фазовых переходов водяного пара

С. А. Сомов, А. С. Иванов

Институт механики сплошных сред УрО РАН,
614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1

Экспериментально изучается тепловая и концентрационная конвекция влажного воздуха в условиях, близких к нормальным. Исследование основано эксперименте, который сфокусирован на аспектах термоконцентрационной конвекции в жидкостях, претерпевающих фазовые переходы первого рода типа «газ – жидкость». Особенности конвекции, вызванной изменением концентрации водяного пара (в результате его испарения или конденсации), обсуждаются в терминах безразмерных параметров. Используется пара стандартных методов: голографическая интерферометрия для визуализации конвективных потоков и метод термопар для измерения теплового потока. Продемонстрированы наблюдения конвективных потоков во влажном воздухе. Показаны качественные отличия сухого и влажного воздуха.

Ключевые слова: конвекция; число Рэлея; голографическая интерферометрия; влажный воздух; сухой воздух

Experimental study of convection in moist air in the presence of water vapor phase transitions

S. A. Somov, A. S. Ivanov

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS,
1 Akademika Koroleva St., 614013, Perm

The thermal and concentration convection of moist air under near-normal conditions is studied experimentally. The study is based on a fundamental experiment that focuses on the physical aspects of thermoconcentration convection in liquids undergoing first-order phase transitions of the gas-liquid type. The features of convection caused by changes in the concentration of water vapor (as a result of its evaporation or condensation) are discussed in terms of dimensionless parameters. A pair of standard complementary experimental methods is used: holographic interferometry to visualize convective flows and the thermocouple method to measure heat flux. Observations of convective flows in moist air are demonstrated. Qualitative differences between dry and humid air are shown.

Key words: convection; Rayleigh number; holographic interferometry; moist air; dry air

1. Введение

Конвекция играет ключевую роль во всех динамических процессах, наблюдаемых в природе, и встречается в разнообразных технических приложениях, среди которых основной интерес для нас представляют те, которые связаны с влажным воздухом. В

связи с этим предлагаемая работа посвящена экспериментальному исследованию термоконцентрационной конвекции влажного насыщенного воздуха, претерпевающего фазовые превращения влаги (испарение и конденсация). Это явление прямое отношение к хорошо известной тепловой конвекции Рэлея-Бенара, которой посвящены монографии [1 – 3], обзорные статьи (например, [4, 5]) и множество оригинальных научных статей.

Целью работы является экспериментальное исследование различий между тепловой конвекцией в сухом воздухе и термоконцентрационной конвекцией во влажном воздухе при наличии фазовых переходов первого рода «вода – пар» и «пар – вода» в условиях, близких к наблюдаемым в атмосфере.

2. Определяющие параметры

В исследуемой задаче, где одновременно происходит нагрев и изменение концентрации в смеси двух газов: сухого воздуха и водяного пара, для корректного проведения эксперимента были выбраны критерии подобия (безразмерные величины), учитывающих оба этих механизма: тепловое Ra_T и концентрационное Ra_C числа Рэлея. Их сумма соответствует эффективному числу Рэлея Ra_E :

$$Ra_T = \frac{g C_p \rho^2 d^3 \Delta T}{\kappa \eta T_0}, \quad Ra_C = \frac{g d^3 \Delta \rho_c}{\eta D}, \quad Ra_E = Ra_T + Ra_C, \quad (1)$$

где d – характерный размер полости с влажным воздухом, ΔT – перепад температур, T_0 – среднее по объему полости значение температуры, κ – теплопроводность, C_p – удельная теплоемкость газовой смеси, η – динамическая вязкость, D – кинематический коэффициент диффузии для газовой смеси, ρ – средняя плотность газа, $\Delta \rho_c$ – изменение плотности, вызванное изменением концентрационного состава смеси.

Данные корректные значения находятся [6] с помощью полуэмпирических уравнений, учитывающих зависимость параметров C_p , κ , η , D , ρ от давления, температуры и концентрационного состава смеси газов «сухой воздух – водяной пар», в результате которых мы получаем для средней температуры T_0 оптимальные значения размеров экспериментальной ячейки d и перепада температур ΔT необходимое для достижения критического числа Рэлея $Ra^* = 1700 \pm 50$, которое соответствует началу конвекции.

Для изучения свободной конвекции в сухом и влажном воздухе были выбраны методы экспериментального наблюдения, такие как голографическая интерферометрия и термопарный метод.

3. Проведение эксперимента

Собрана схема, изображенная на рис. 1, включающую в себя измерительную ячейку с параметрами: высота полости $d = 15$ мм, длина полости $L = 32$ см.

Все элементы установки (рис. 1) смонтированы на голографической плите, демпфированной 4 воздушными подушками, что минимизировало вредные механические вибрации, воздействующие извне на установку во время снятия голограммы.

Перед снятием голограммы интенсивность опорного и предметного лучей выравнивалась с целью увеличения контрастности интерференционных полос. Выравнивание интенсивности достигалось путем ослабления опорного луча одним поляризатором. Применение дополнительного анализатора не требовалось, так как свет лазера уже являлся поляризованным со степенью поляризации 500:1.

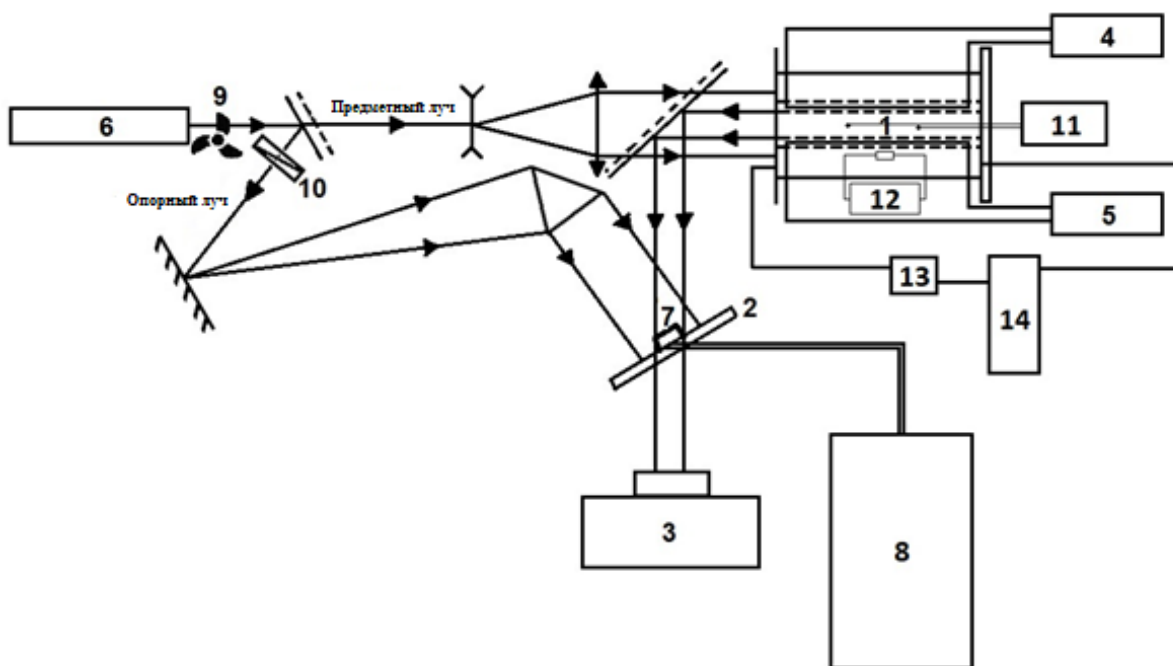


Рис. 1. Схема экспериментальной установки: 1 – измерительная ячейка, заполненная сухим или влажным воздухом; 2 – стеклянная голографическая фотопластинка; 3 – видеокамера; 4 – верхний (холодный) теплообменник и его термостат; 5 – нижний (горячий) теплообменник и его термостат; 6 – He-Ne лазер; 7 – датчик; 8 – селективный нановольтметр; 9 – obtюратор; 10 – поляризатор; 11 – LA-i-24USB; 12 – датчик влажности DHT-22 с цифровым дисплеем, управляемый микроконтроллером; 13 – электронасос; 14 – контейнер с силикагелем

Получение голограммы происходит в темной комнате, сама голографическая пластина находится неподвижна в процессе всего эксперимента, от проявления до получения результатов, только так можно добиться высокой точности получающихся интерференционных полос.

4. Результаты

Первоначальная настройка экспериментальной установки проводилась с помощью тестовых наблюдений конвекции без предварительной сушки или увлажнения (рис. 2). Как видно, интерференционная картина не содержит интерференционных полос при нулевой разнице температур между верхним и нижним теплообменниками. При нагреве сверху наблюдается стабильная температурная стратификация без макроскопических потоков жидкости. При нагреве снизу интерферометрические полосы начинают искривляться. Кривизна полос наглядно демонстрирует, насколько интенсивна конвекция жидкости (рис. 2с, d). Таким образом, экспериментальная методика позволяет визуализировать конвективные структуры.

Другие результаты приведены на рис. 3, 4 для демонстрации в диапазоне параметров $Ra = 0...2 \cdot 10^3$, $Pr = 0.74...0.84$, $Sc = 0.86...0.9$. Интерферограммы показывают, что при одинаковой разности температур ΔT между холодильником (вверху) и нагревателем (внизу) конвективный поток затухает с увеличением средней температуры T_0 . Такое поведение объясняется уменьшением теплового числа Рэлея из-за увеличения вязкости газа, вызванного неупорядоченным движением молекул [7, 8].

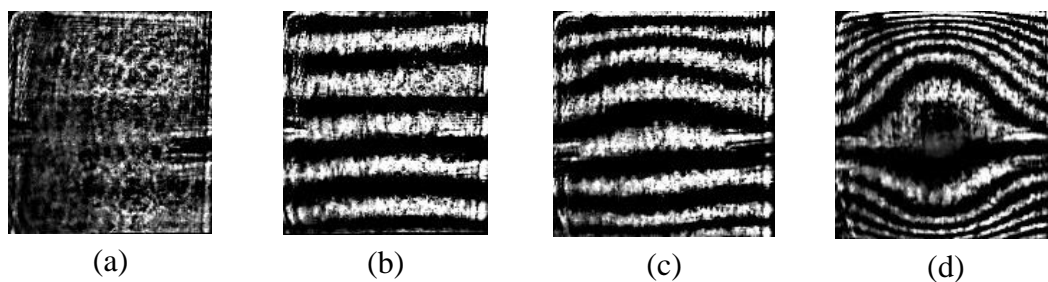


Рис. 2. Интерференционная картина для: (a) изотермического слоя воздуха; (b) градиента температуры, вызванного нагревом нижнего теплообменника; (c) начала конвективного течения; (d) интенсивной конвекции

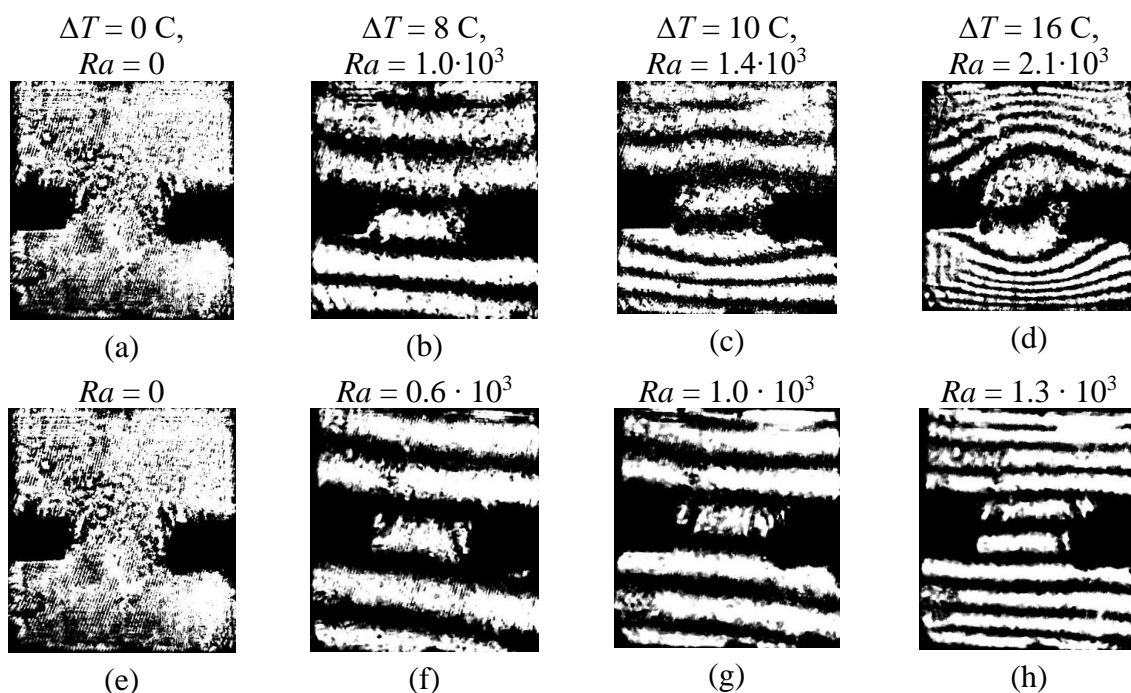


Рис. 3. Интерферограммы, свидетельствующие о конвекции в сухом воздухе при $T_0 = 10$ C (a – d) и $T_0 = 50$ C (e – h) с различными ΔT между холодильником (вверху) и нагревателем (внизу) измерительной ячейки

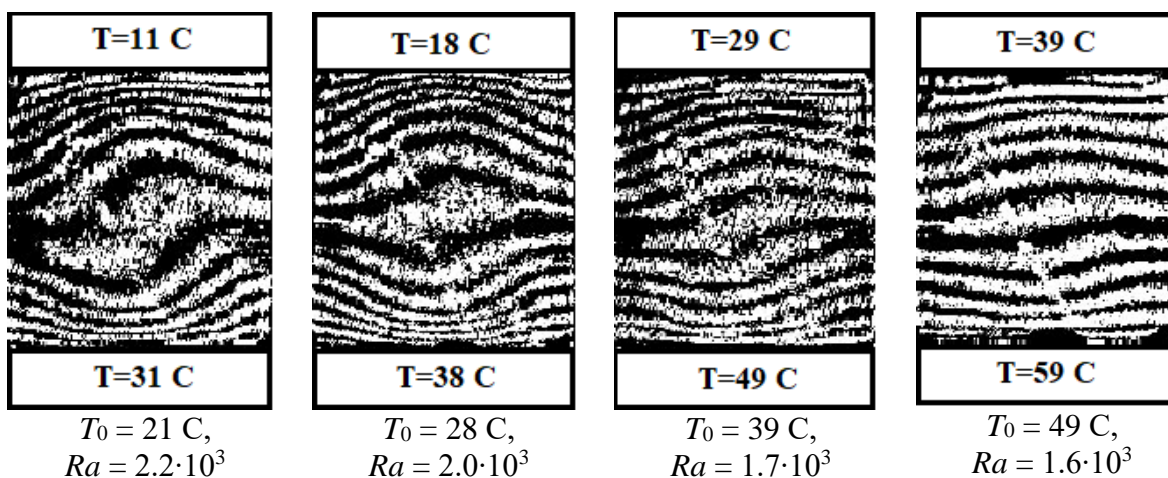


Рис. 4. Интерферограммы при различной средней температуре T_0 ($\Delta T = 20$ C – одинаково)

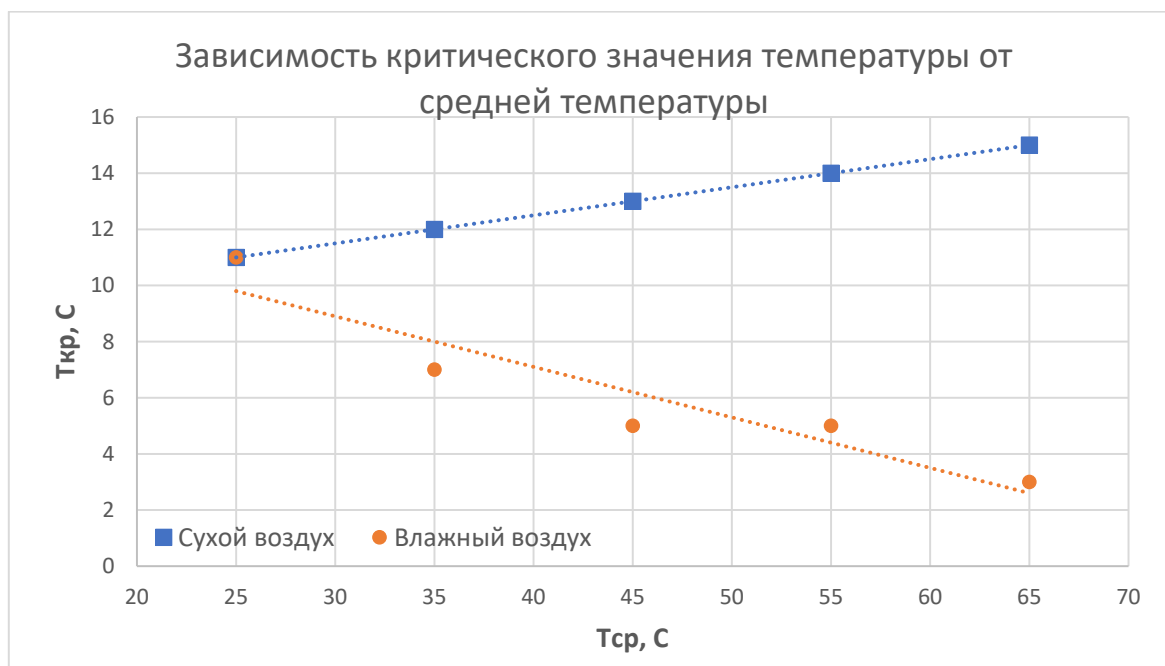


Рис. 5. Зависимость критического значения температуры от средней температуры в ячейке

Далее продемонстрируем результаты, полученные для разных $T_{ср} = 25, 35, 45, 55, 65$ С для влажного и сухого воздуха.

Из графика представленного на рис. 5 видны отличия конвекции в сухом и влажном воздухе. По мере роста средней температуры $T_{ср}$ значение критической температуры $T_{кр}$, при котором начинается конвекция, увеличивается для сухого воздуха. Такое поведение связано с уменьшением теплового числа Рэлея из-за увеличения вязкости газа, вызванного неупорядоченным движением молекул.

Если же мы рассматриваем конвекцию во влажном воздухе, то можем наблюдать обратный результат. С ростом средней температуры $T_{ср}$ значение критической температуры $T_{кр}$ уменьшается.

Полученные экспериментальные зависимости можно объяснить с позиции атомно-молекулярного учения о свойствах воды и водяного пара. Как известно, зависимость давления насыщенных паров над поверхностью воды имеет известную нелинейную зависимость. Медленный рост давления насыщенных паров $p(T)$ при температурах $T < 50$ С связано с наличием водородных связей между молекулами H_2O . При нагревании воды, часть теплоты, передаваемой ей, затрачивается на разрыв водородных связей.

Сказанное выше позволяет предположить, почему во влажном воздухе при повышении средней температуры в ячейке конвекция возможна при меньших перепадах температур. С ростом средней температуры $T_{ср} = 45, 55, 65$ С резко повышается давление насыщенных паров, то есть физические свойства влажного воздуха значительно отличаются от свойств сухого воздуха при тех же температурах. В этом случае конвекция возможна при меньших разностях температуры между холодильником и нагревателем, чем для сухого воздуха.

5. Заключение

Наглядно продемонстрировано, что с помощью метода голографической интерферометрии в реальном времени возможно наблюдать и изучать конвективные течения в сухом и влажном воздухе. Представлены результаты, полученные в ходе

эксперимента которые наглядно показывают качественные отличия влажного воздуха от сухого в присутствии фазовых переходов «жидкость-пар-жидкость». Выдвинуто предположение о том, что из-за свойств воды, а именно водородных связей поведение влажного воздуха кардинально отличается от сухого.

Список литературы

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
2. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
3. Martynenko O. G., Khramtsov P. P. Free-convective heat transfer. Springer, 2005. 518 p.
4. Ahlers G., Grossmann S., Lohse D. Heat transfer and large scale dynamics in turbulent Rayleigh-Bénard convection // Reviews of Modern Physics. 2009. Vol. 81 (2). 503. DOI: 10.1103/RevModPhys.81.503
5. Bairi A., Zarco-Pernia E., Garcia de Maria J.-M. A review on natural convection in enclosures for engineering applications. The particular case of the parallelogrammic diode cavity // Applied Thermal Engineering. 2014. Vol. 63 (1). P. 304–322. DOI: 10.1016/j.applthermaleng.2013.10.065
6. Somov S. A., Ivanov A. S. Experimental setup for studying thermosolutal convection in moist air // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2019. Vol. 581. 012016. DOI: 10.1088/1757-899X/581/1/012016
7. Rayleigh L. LIX. On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. 1916. Vol. 32 (192). P. 529–546. DOI: 10.1080/14786441608635602
8. Гинзбург Э. И., Гуляев В. Т., Жалковская Л. В. Динамические модели свободной атмосферы. Новосибирск.: Наука, 1987. 290 с.

Влияние поля силы тяжести на устойчивость осциллирующей границы раздела несмешивающихся жидкостей в коническом тонком слое

С. В. Субботин, И. Э. Карпунин, Д. В. Курышева, В. Г. Козлов

Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет,
614990, Пермь, ул. Сибирская, 24
email: subbotin_sv@pspu.ru

Экспериментально исследуется влияние внешнего статического поля на устойчивость осциллирующей границы раздела двух несмешивающихся жидкостей с большим контрастом вязкостей в конической ячейке Хеле-Шоу. Ось симметрии кюветы расположена вертикально, при этом на границу раздела действует тангенциальная составляющая поля силы тяжести. Выводы кюветы подключены к гидравлическому насосу, задающему колебания жидкостей по гармоническому закону. Обнаружено, что с повышением амплитуды вибраций на изначально цилиндрической границе возникает рельеф в виде системы вытянутых вдоль длины канала пальцеобразных структур. Пальцы появляются в процессе вытеснения вязкой жидкости из слоя и достигают наибольшего развития в фазе максимального расширения границы раздела. Повышение относительной плотности жидкостей оказывает стабилизирующее действие: пороги неустойчивостей смещаются в область более высоких амплитуд вибраций. Показано, что основным управляющим параметром, отвечающим за устойчивость системы, является произведение капиллярного числа на квадрат безразмерной амплитуды колебаний границы.

Ключевые слова: граница раздела; контраст вязкостей; пальчиковая неустойчивость

Influence of the gravity field on the stability of an oscillating interface of immiscible liquids in a thin conical layer

S. V. Subbotin, I. E. Karpunin, D. V. Kuryшева, V. G. Kozlov

Perm State Humanitarian Pedagogical University, 24 Sibirskaya St., 614990, Perm
email: subbotin_sv@pspu.ru

Influence of an external static field on the stability of an oscillating interface between two immiscible liquids with a large contrast of viscosities in a Hele-Shaw conical cell is experimentally investigated. The axis of symmetry of the cell is located vertically, while the interface is affected by the tangential component of the gravity field. The outputs of the cell are connected to a hydraulic pump that sets the liquids oscillations according to the harmonic law. It has been found that with an increase in the oscillations amplitude, a relief appears on the initially

cylindrical boundary in the form of a system of finger-like structures elongated along the length of the cell. Fingers appear in the process of displacement of a viscous liquid from the cell and reach the greatest development in the phase of maximum extrusion of the interface. An increase in the relative density of liquids has a stabilizing effect: the instability thresholds shift to the region of higher oscillation amplitudes. It is shown that the main control parameter responsible for the stability of the system is the combination of the capillary number and the square of the dimensionless amplitude of the boundary oscillations.

Keywords: interface; contrast of viscosities; finger instability

1. Введение

Исследование эволюции границы раздела между двумя несмешивающимися жидкостями, когда одна из них вытесняет другую, имеет фундаментальное значение. В ячейке Хеле-Шоу в процессе равномерного вытеснения маловязкой жидкости высоковязкую на границе раздела развивается неустойчивость в виде разветвлённых замысловатых узоров, так называемых вязких пальцев [1]. Морфология рисунка зависит от управляющих параметров, таких как геометрия ячейки, скорость вытеснения жидкости и межфазное поверхностное натяжение. Образование подобных паттернов характерно для большого числа неравновесных систем, например, в процессе роста кристаллов [2]. Более богатая морфология возникает, если на границу раздела действуют инерционные силы, например, связанные с вращением ячейки. В этом случае разность плотностей может играть дестабилизирующую роль и вызывать неустойчивость [3]. Если граница раздела жидкостей совершает гармонические колебания, неустойчивость реализуется по другому сценарию. Пальцы возникают в процессе вытеснения вязкой жидкости и пропадают в фазе сжатия границы [4]. При этом в местах, где располагались пальцы на границе раздела, остается память – «ямки», которые являются источником возмущений в следующем цикле колебаний границы раздела. Настоящая работа является логическим продолжением исследований [4]: на осциллирующую межфазную границу дополнительно действует тангенциальная составляющая поля силы тяжести (рис. 1), для этой цели используется коническая ячейка Хеле-Шоу.

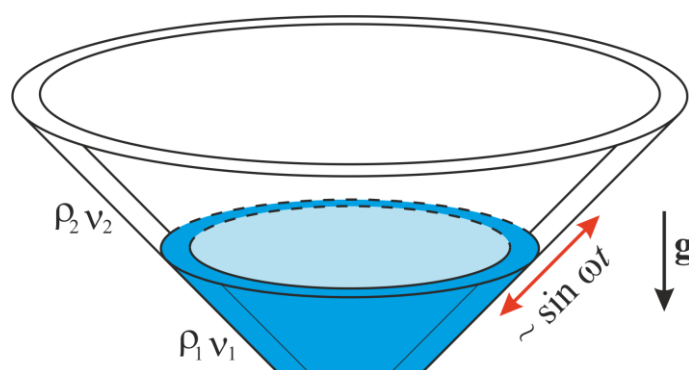


Рис. 1. Постановка задачи

2. Экспериментальная установка и методика

Кювета представляет собой тонкий коаксиальный зазор толщиной h , образованный двумя конусообразными поверхностями (рис. 1). Внешний и внутренний конусы изготовлены из двух массивных блоков прозрачного оргстекла и соединены

при помощи металлического стержня, проходящего через ось симметрии кюветы. Углы растворов конусов абсолютно идентичные и составляют 45° . Для возбуждения осциллирующего движения жидкостей по закону $\sim \sin \omega t$ используется гидравлический насос с нулевым средним расходом. Частота колебаний меняется в диапазоне $f = \omega / 2\pi = 1 - 6$ Гц. Толщина коаксиального зазора h постоянна во всем коаксиальном слое и составляет либо 1.0 мм, либо 1.9 мм. Общая длина канала вдоль радиального направления равна $L = 99$ мм.

В экспериментах используется пара несмешивающихся жидкостей с большим контрастом вязкостей: вода и водные растворы соли NaI ($\nu_1 = 0.7 - 1.0$ сСт) – силиконовое масло PMS-1000 ($\nu_2 = 10^3$). Плотность масла (верхняя жидкость) во всех экспериментах постоянна $\rho_2 = 0.966$ г/см³, в то время как плотность водных растворов соли (нижняя жидкость) меняется в диапазоне $\rho_1 = 1.000 - 1.615$ г/см³. В отличие от экспериментов [4] на границу раздела действует тангенциальная составляющая силы тяжести, направленная вдоль длины канала. Для повышения оптического контраста границы раздела вода слегка подкрашивается пищевым красителем до появления бирюзового оттенка. Коэффициент поверхностного натяжения межфазной границы зависит от концентрации соли в воде и варьируется в пределах $\sigma = 29.7 - 38.8$ мН/м.

Для проведения экспериментов кювета фиксируется на рабочем основании так, что сила тяжести направлена вдоль оси симметрии. Первоначально в рабочий слой заливается более плотная жидкость через нижний патрубок кюветы. После этого через верхний вывод медленно заливается вязкое силиконовое масло. Высота относительного заполнения коаксиального слоя в разных экспериментах варьируется в диапазоне $r_0 / L = 0.34 - 0.68$. Начальная форма границы раздела жидкостей всегда имеет форму близкую к окружности.

3. Неустойчивость границы раздела

При колебаниях с небольшим расходом граница раздела перемещается вдоль длины канала, сохраняя круговую форму. Положение линий контакта жидкостей с твердыми границами слоя практически не меняется и остается равным первоначальному положению r_0 . При этом в фазе расширения межфазная граница проникает вдоль канала в виде «языка», не контактируя с твердыми границами. При плавном повышении амплитуды расхода на границе раздела пороговым образом развивается неустойчивость в виде системы азимутально-периодических пальчиковых структур (рис. 2). Структуры появляются в процессе вытеснения вязкой жидкости из коаксиального зазора и достигают наибольшей длины в фазе максимального радиального смещения границы раздела (рис. 2а). На обратном ходе структуры уменьшаются в размере и в определенную фазу колебаний принимают вид пальцев, направленных к оси (рис. 2б). Память на межфазной границе в сжатом состоянии оказывает существенное влияние на развитие неустойчивости в следующем цикле расширения. После сжатия границы на месте ямки формируется перемычка между двумя соседними пальцами. Через период колебаний ситуация меняется: на месте бывшей перемычки возникает палец. Аналогичная динамика ранее наблюдалась как в плоской радиальной ячейке Хеле-Шоу [4], так и в плоском прямоугольном канале при гармоническом расходе [5]. Можно отметить, что чередование пальцев и впадин не

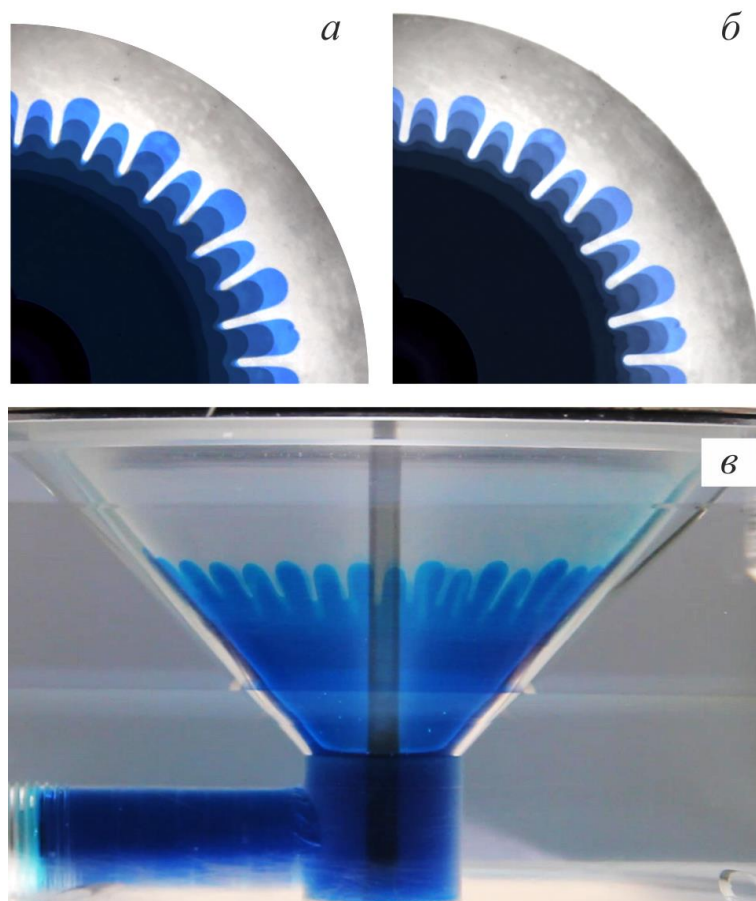


Рис. 2. Положение фронта вытеснения (а) и сжатия (б) в различные моменты времени для пары жидкостей «вода – силиконовое масло ПМС-1000» при $f = 2.0$ Гц. На фрагменте (в) показана фотография рельефа сбоку в фазе максимального расширения вытеснения вязкой жидкости

имеет отношения к параметрическому возбуждению ряби Фарадея, поскольку инерционные эффекты заведомо малы по сравнению с вязкими.

Механизм возникновения пальцеобразных структур связан с неустойчивостью Саффмана–Тейлора [1], при этом пороги неустойчивости определяются капиллярным числом $Ca = b\omega\eta_2 / \sigma$, где b – размах колебаний границы в виде языка, а $\eta_2 = 0.91$ Па·с – динамическая вязкость масла ПМС-1000. В условиях проведенного эксперимента ($Ca = 4–15$) критические значения размаха колебаний границы понижаются с капиллярным числом по закону $b_c \sim Ca^{-1/2}$. Повышение относительной плотности жидкостей ρ_1 / ρ_2 оказывает стабилизирующее действие (рис. 3). С увеличением концентрации соли NaI в воде пороги неустойчивости b_c смещаются в область более высоких значений. Это означает, что для появления рельефа в виде системы чередующихся пальцев необходимы большие амплитуды колебаний. В то же время пороговые значения волнового числа практически не меняются в диапазоне $\rho_1 / \rho_2 = 1.0–1.5$ и равны $k_c \approx 1 \text{ мм}^{-1}$. Небольшое повышение k_c наблюдается только в области высоких плотностей и, скорее всего, связано с понижением действия капиллярных сил на межфазной границе. Отметим, что в пределе малых разностей плотностей ($\rho_1 / \rho_2 \rightarrow 1$) результаты экспериментов хорошо согласуются

с

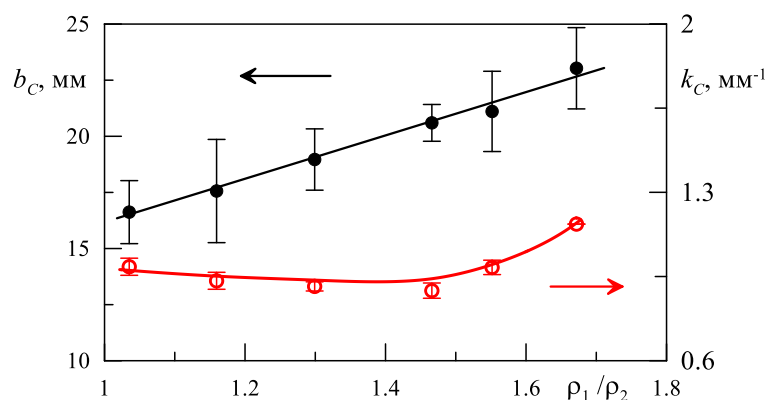


Рис. 3. Зависимость критического значения размаха границы раздела b_c (чёрные точки) и волнового числа k_c (красные круги) от относительной плотности жидкостей в слое толщиной $h = 1.9$ мм при фиксированной частоте колебаний $f = 2.0$ Гц

предыдущими исследованиями осциллирующей границы раздела в плоской радиальной ячейке Хеле-Шоу, когда действие внешнего силового поля отсутствует [4].

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект 20-41-596011).

Список литературы

1. Saffman P. G., Taylor G. I. The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences. 1958. Vol. 245. N. 1242. P. 312–329. DOI: 10.1098/rspa.1958.0085
2. Langer J. Instabilities and pattern formation in crystal growth // Reviews of Modern Physics. 1980. Vol. 52. P. 1–28. DOI: 10.1103/RevModPhys.52.1
3. Casademunt J. Exploring topological singularities with phase-field methods. Centrifugal viscous fingering as a case study // The European Physical Journal Plus. 2011. Vol. 126. 94. DOI: 10.1140/epjp/i2011-11094-8
4. Kozlov V., Karpunin I., Kozlov N. Finger instability of oscillating liquid–liquid interface in radial Hele-Shaw cell // Physics of Fluids. 2020. Vol. 32. N. 10. 102102. DOI: 10.1063/5.0018541
5. Kozlov V., Vlasova O. Oscillatory dynamics of immiscible liquids with high viscosity contrast in a rectangular Hele-Shaw channel // Physics of Fluids. 2022. Vol. 34. N. 3. 032121. DOI: 10.1063/5.0084363

Режимы течений в лабораторной модели общей циркуляции атмосферы

А. Н. Сухановский, А. Ю. Васильев, Е. Н. Попова

Институт механики сплошных сред УрО РАН,
614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1
email: san@icmm.ru

В данной работе представлены первые результаты лабораторного моделирования общей циркуляции атмосферы. Модель представляет собой вращающийся цилиндрический слой, локально охлаждаемый в верхней центральной части и нагреваемый на периферии дна. Верхняя граница, за исключением области контакта с холодильником свободна. Визуализация течений при помощи алюминиевой пудры показала, что представленная лабораторная модель воспроизводит основные черты глобальной атмосферной циркуляции, а именно антициклоническое течение на малых широтах, циклоническую циркуляцию в области средних и полярных широт, формирование крупномасштабных бароклинических вихрей.

Ключевые слова: лабораторное моделирование; глобальная циркуляция атмосферы; вращающаяся конвекция

Flow regimes in a laboratory model of general atmosphere circulation

A. N. Sukhanovskii, A. Yu. Vasiliev, E. N. Popova

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS,
1 Akademika Koroleva St., 614013, Perm
email: san@icmm.ru

This paper presents the first results of a laboratory modeling of the general atmospheric circulation. The model is a rotating cylindrical layer locally cooled in the upper central part and heated at the bottom periphery. The upper boundary, except for the area of contact with the cooler, is free. Visualization of flows using aluminum powder showed that the presented laboratory model reproduces the main features of the global atmospheric circulation, namely, anticyclonic circulation at low latitudes, cyclonic circulation at middle and polar latitudes, and formation of large-scale baroclinic vortices.

Keywords: laboratory modeling; global atmospheric circulation; rotating convection

1. Введение

Динамика общей циркуляции атмосферы в существенной степени определяет вариации климата в различных регионах Земли. Глобальная циркуляция атмосферы определяется целым рядом термодинамических и гидродинамических процессов, что чрезвычайно затрудняет выявление общих закономерностей. Это приводит к необходимости упрощения системы и изучения более простых моделей, которые

позволяют более четко выделить роль того или иного фактора. Наряду с натурными наблюдениями и математическим моделированием, лабораторное моделирование является эффективным подходом для исследования геофизических течений. Лабораторные аналоги атмосферных течений позволяют на основе хорошо воспроизводимых экспериментов изучать фундаментальные основы сложных динамических процессов, тестировать существующие гипотезы, находить новые эффекты, формулировать актуальные проблемы и строить теоретические модели [1–4]. Основным подходом для лабораторного моделирования атмосферной циркуляции в средних широтах является конвекция во вращающемся цилиндрическом зазоре с изотермическими стенками, теплоизолированным дном и твердой или свободной верхней поверхностью [4]. Данная система позволяет воспроизвести крупномасштабную циркуляцию и течения, возникающие из-за бароклинной неустойчивости, которые осуществляют транспорт тепла от экватора к полюсу. Несмотря на свою простоту, этот лабораторный аналог глобальной циркуляции позволил качественно описать фундаментальные физические процессы, нелинейные эффекты и переходы к хаосу подобные тем, что наблюдаются в атмосфере [5–11]. Однако у описанного подхода есть ряд ограничений. Во-первых, реализация горизонтального перепада температур на вертикальных стенках приводит к концентрации интенсивных подъемных и опускных движений вблизи твердых стенок и как следствие к существенному влиянию стенок на формирование течений. Во-вторых, в атмосфере нагрев на экваторе происходит внизу, на границе атмосферы и моря (суши), а охлаждение на полюсе в основном сконцентрировано в верхних слоях атмосферы. Альтернативная к [4] конфигурация была представлена в лабораторном и численном исследовании [12–13]. Нагрев в данной работе производился на периферии дна, а охлаждение на всей верхней границе (эксперимент) или на ее части (расчеты). Исследования [12–13] ограничились изучением только осесимметричных режимов зональных течений, образованных одной меридиональной конвективной ячейкой, занимающей весь слой (аналог ячейки Хэдли). Попытка уйти от основных ограничений модели [4] была предпринята в работе [14], в которой источник тепла располагался на периферии дна, а холодильник в виде кольца был расположен в верхней части центральной области цилиндрического зазора. В эксперименте производились измерения температуры и качественные наблюдения за течением жидкости. Было показано, что конвекция в предложенной лабораторной модели носит более сложный, чем в [4] пространственный характер, характеризуется суперпозицией и взаимодействием свободной конвекции и бароклинных волн. Еще одним важным фактором является геометрия слоя, как известно, атмосфера представляет собой тонкий слой, а в моделях [4] и [14] аспектное отношение Γ (ширина цилиндрического зазора к высоте слоя) было равно 1 и 1.5 соответственно. В данной работе представлены первые результаты лабораторного моделирования общей циркуляции атмосферы в постановке близкой к [14], но для значительно большего значения аспектного отношения $\Gamma=11.5$.

2. Лабораторное моделирование общей циркуляции атмосферы

На рис. 1 схематически показана лабораторная модель общей циркуляции атмосферы. Цилиндрический слой, радиусом R и высотой H , вращается вокруг центральной оси с угловой скоростью Ω . В центральной верхней части расположен холодильник (на базе элементов Пельтье) радиусом 2.5 см, а на периферии дна, с отступом в 4 см от боковой стенки, расположен электрический нагреватель в виде кольца шириной в 2.5 см.

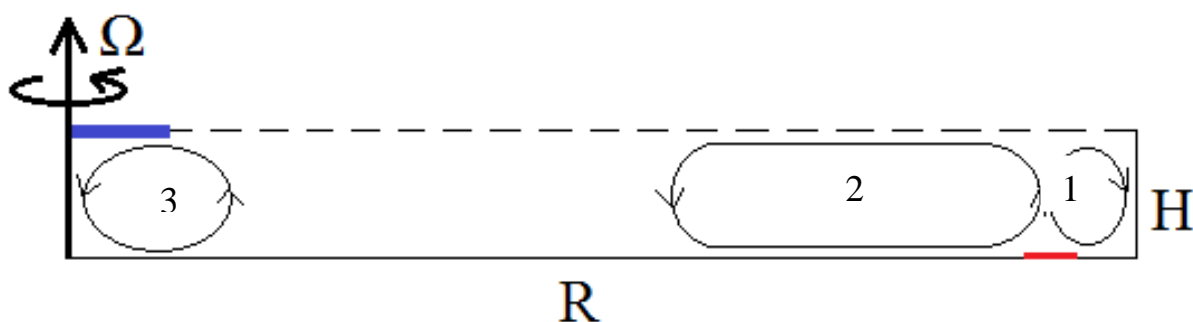


Рис. 1. Схема лабораторной модели общей циркуляции атмосферы. Синим и красным цветом обозначены холодильник и нагреватель, верхняя пунктирная линия показывает свободную границу

Охлаждение в центре и нагрев на периферии приводят к появлению нескольких меридиональных конвективных ячеек. Ячейки 2 и 3 моделируют полярную ячейку и ячейку Хэдли, а ячейка 1 возникает в результате того, что локализованная область нагрева смещена от боковой стенки. Размер ячейки 1 более или менее постоянен, а размер ячеек 2 и 3 может существенно зависеть от параметров эксперимента.

При медленном вращении ячейки 2 и 3 могут сливаться в одну, а при больших они смещены относительно друг друга, в результате чего меридиональная циркуляция между ними относительно слабая и нерегулярная. Отсутствие регулярного меридионального течения между периферией и центром приводит к заметному горизонтальному перепаду температур между центром и периферией, что приводит к бароклинной неустойчивости и сложной динамике течений на средних радиусах. Наличие меридиональных ячеек приводит к переносу и углового момента, в результате чего в верхней области ячейки 1 формируется антициклоническое течение (отстающее от вращения модели), а верхних частях ячеек 2 и 3 формируется циклоническое течение.

Основным управляющим параметром, который определяет режимы течений является конвективное число Россби, учитывающее как роль тепловой конвекции, так и вращения:

$$Ro_c = g\alpha\Delta TH / \Omega^2 R^2. \quad (1)$$

Варьирование Ro_c существенно изменяет характер течений (рис. 2). При больших значениях Ro_c ячейки 2 и 3 практически сливаются приводя к формированию почти осесимметричного азимутального движения в верхней части слоя (рис. 2а). Уменьшение Ro_c ведет к неустойчивости осесимметричного течения и появлению квазирегулярных структур, медленно движущихся в циклоническом направлении. Пространственный период этих структур также зависит от Ro_c . При дальнейшем уменьшении Ro_c квазирегулярные структуры в свою очередь становятся неустойчивыми и течение на средних радиусах представляет собой набор циклонов и антициклонов, дрейфующих в циклоническом направлении. Течения на рис.2г-е качественно подобны крупномасштабной атмосферной циркуляции, для которой также характерно наличие набора крупномасштабных циклонов и антициклонов на средних широтах.

В заключении можно отметить, что представленная лабораторная модель воспроизводит основные черты глобальной атмосферной циркуляции, а именно антициклоническое течение на малых широтах, циклоническую циркуляцию в области средних и полярных широт, формирование крупномасштабных бароклиных вихрей.

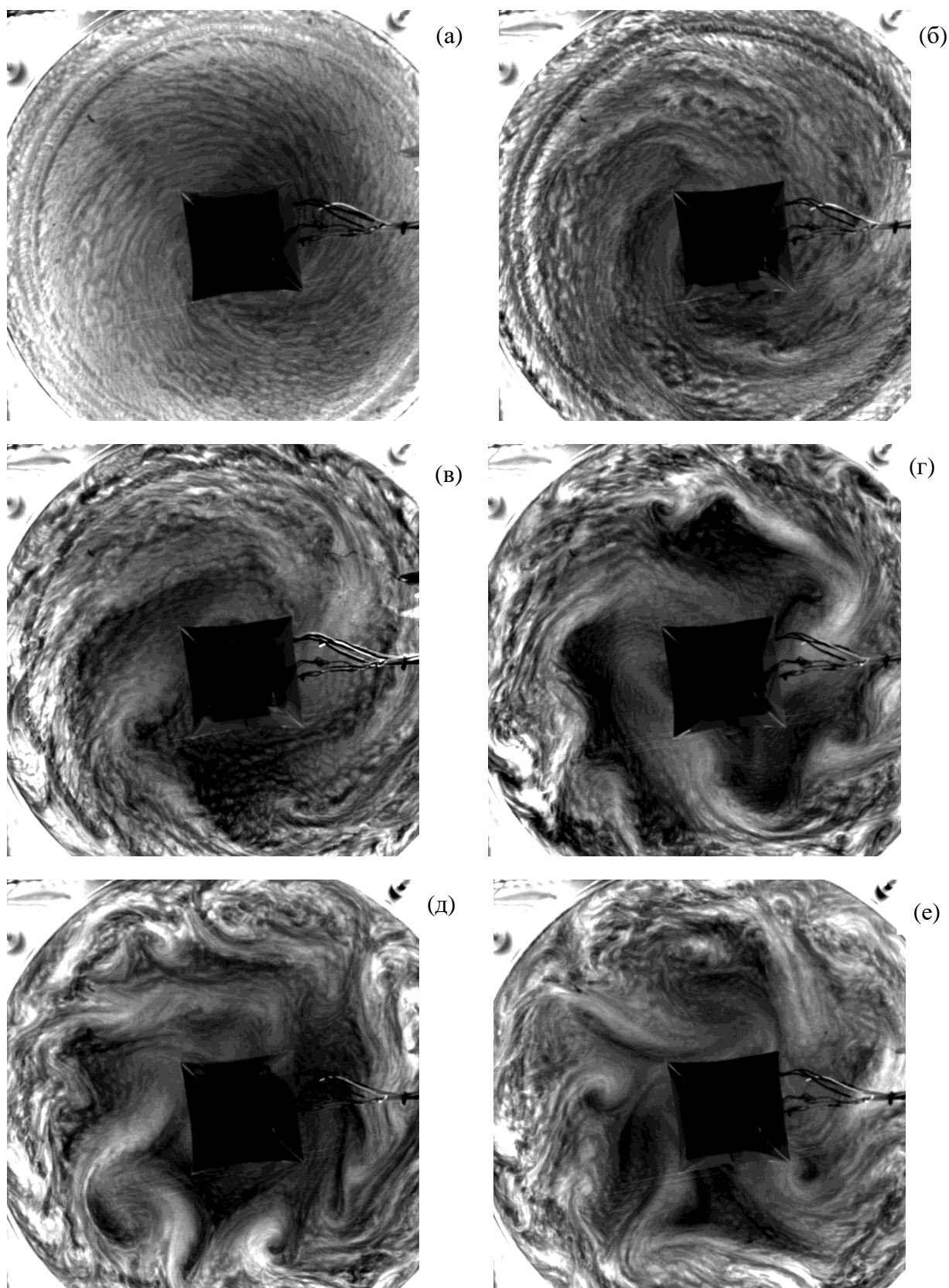


Рис. 2. Визуализация течений в верхнем слое при помощи алюминиевой пудры:
 (а) $Ro_c = 3.68$; (б) $Ro_c = 1.37$; (в) $Ro_c = 0.45$; (г) $Ro_c = 0.18$; (д), (е) $Ro_c = 0.1$ (два
 различных момента времени)

Список литературы

1. Алексеев В. В., Киселева С. В., Ланно С. С. Лабораторные модели физических процессов. М. : Наука, 2005. 312 с.
2. Белоцерковский О. М., Андрущенко В. А., Шевелев Ю. Д. Динамика вихреобразных течений в атмосфере, обусловленных природными факторами. М.: Издательство «Полет Джонатана», 2013. 431 с.
3. Андрущенко В. А., Мурашкин И. В., Шевелев Ю. Д. Динамика интенсивных вихрей и лабораторные модели атмосферного вихрегенеза. М.: Ленанд, 2019. 498 с.
4. Read P. L., Pérez E. P., Moroz I. M., Young R. M. B. General circulation of planetary atmospheres: insights from rotating annulus and related experiments // Modeling Atmospheric and Oceanic Flows: Insights from Laboratory Experiments and Numerical Simulations. Edited by Th. Von Larcher and P. Williams. American Geophysical Union, 2014. 368 p. DOI: 10.1002/9781118856024.ch1
5. Hignett B. P., White A. A., Carter R. D., Jackson W. D. N., Small R. M. A comparison of laboratory measurements and numerical simulations of baroclinic wave flows in a rotating cylindrical annulus // Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society. 1985. Vol. 111. P. 131–154. DOI: 10.1002/qj.49711146705
6. Früh W. G., Read P. L. Wave interactions and the transition to chaos of baroclinic waves in a thermally driven rotating annulus // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 1997. Vol. 355. P. 101–153. DOI: 10.1098/rsta.1997.0003
7. Bastin M. E., Read P. L. A laboratory study of baroclinic waves and turbulence in an internally heated rotating fluid annulus with sloping endwalls // Journal of Fluid Mechanics. 1997. Vol. 339. P. 173–198. DOI: 10.1017/S0022112097005259
8. Read P. L. A combined laboratory and numerical study of heat transport by baroclinic eddies and axisymmetric flows // Journal of Fluid Mechanics. 2003. Vol. 489. P. 301–323. DOI: 10.1017/S002211200300524X
9. Von Larcher T., Egbers C. Experiments on transitions of baroclinic waves in a differentially heated rotating annulus // Nonlinear Processes in Geophysics. 2005. Vol. 12. P. 1033–1041. DOI: 10.5194/npg-12-1033-2005
10. Wordsworth R. D., Read P. L., Yamazaki Y. H. Turbulence, waves, and jets in a differentially heated rotating annulus experiment // Physics of Fluids. 2008. Vol. 20 (12). 126602. DOI: 10.1063/1.2990042
11. Vincze M., Harlander U., von Larcher T., Egbers C. An experimental study of regime transitions in a differentially heated baroclinic annulus with flat and sloping bottom topographies // Nonlinear Process Geophys. 2014. Vol. 21(1). P. 237–250. DOI: 10.5194/npg-21-237-2014
12. Batalov V., Sukhanovsky A., Frick P. Laboratory study of differential rotation in a convective rotating layer // Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics. 2010. Vol. 104 (4). P. 349–368. DOI: 10.1080/03091921003759876
13. Сухановский А. Н. Формирование дифференциального вращения в цилиндрическом слое жидкости // Вычислительная механика сплошных сред. 2010. Т. 3. №2. С. 103–115. DOI: 10.7242/1999-6691/2010.3.2.21
14. Scolan H., Read P. L. A rotating annulus driven by localized convective forcing: a new atmosphere-like experiment // Experiments in Fluids. 2017. Vol. 58 (6). 75. DOI: 10.1007/s00348-017-2347-5

Гидродинамические аспекты последствий проведения крупномасштабных русловых работ

А. А. Тиунов

Горный институт УрО РАН, 614007, Пермь, ул. Сибирская, 78а
email: alexey.tiunov@gmail.com

Объектом исследования является гидролого-морфологический анализ руслового процесса р. Вятка в районе о. Девятьяровский, на основе сценарных расчетов. Методы исследования: натурное обследование водных объектов; инструментальные измерения; статистическая обработка данных; обработка данных в специализированных пакетах ГИС и гидродинамическое моделирование. Для решения данной задачи разработана гидродинамическая модель для участка р. Вятка в районе о. Девятьяровский, расположенного в районе г. Кирово-Чепецк, которая построена в программном комплексе SMS с использованием модуля RiverFlow2D, который позволяет имитировать транспорт наносов. В результате исследования дана оценка устойчивости проектируемой прорези.

Ключевые слова: гидродинамическая модель; русловые работы; устойчивость русла

Hydrodynamic aspects of the consequences of large-scale river works

A. A. Tiunov

Mining Institute UB RAS, 78a Siberian St., 614007, Perm
email: alexey.tiunov@gmail.com

The object of the study is a hydrological and morphological analysis of the channel process of the Vyatka River in the area of Devetyarovsky Island, based on scenario calculations. Research methods: natural survey of water bodies; instrumental measurements; statistical data processing; data processing in specialized GIS packages and hydrodynamic modeling. To solve this problem, a hydrodynamic model was developed for the section of the Vyatka River near Devetyarovsky Island, located near the city of Kirovo-Chepetsk, which was built in the SMS software package using the RiverFlow2D module, which allows simulating sediment transport. As a result of the study, an assessment of the stability of the designed slot was given.

Keywords: hydrodynamic model; channel works; channel stability

1. Введение

Цель работы: оценка развития деформаций русла после выполнения руслорегулирующих работ и обоснование устойчивости проектируемого варианта выполнения руслорегулирующих работ для восстановления морфометрических и

гидравлических характеристик русла р. Вятка в районе водозабора в целях улучшения условий его эксплуатации, в том числе снижения объемов поступления донных наносов в водозабор, снижения вероятности шугообразования, предотвращения прорыва пойменного перешейка и образования протоки по старице в обход водозабора.

Характерными особенностями формирования русловых процессов является адаптация морфологии русла к характеру проходящих расходов воды. Формально стабильность русла реки может наблюдаться только при стабильности расходов воды, транспортировке взвешенных и влекомых наносов. В то же время большинство рек характеризуется очень существенной, как внутригодовой, так и междугодовой изменчивостью стока. Поэтому очень существенный интерес представляет анализ изменения «адаптации» морфометрии русла к изменениям расхода воды на основе анализа русловых процессов в реальных естественных водотоках.

Динамика переформирования аллювиальных русел является одной из наиболее востребованных, в то же время наиболее сложной задачей, в гидравлике русловых потоков. В настоящее время численные гидродинамические модели динамики русел все более активно используются при решении актуальных водохозяйственных задач, как в нашей стране [1–12], так и за рубежом [13–15] и др.

Для построения гидродинамической модели транспорта наносов в двумерном приближении для участка р. Вятка в районе о. Девятьяровский, расположенного в районе г. Кирово-Чепецк, был выбран лицензированный, специализированный, гидрологический программный пакет SMS v.11.1, компании Aquaveo LLC, с использованием модели RiverFlow2D GPU с модулем Sediment Transport, компании Hydronia LLC, который позволяет имитировать транспорт наносов [16].

Программный пакет SMS v.11.1, неоднократно использовался для решения самых актуальных задач, таких как: оценка зон затопления, скоростного и уровня режимонов при добыче нерудных строительных материалов (в реках Вятка [12], Сытва [7], в водохранилищах Воткинское и Нижнекамское); распространение загрязнения (в реках Вятка [12], по защите берегов (р. Дон в районе г. Павловска [3]); транспорт наносов (р. Кама – г. Пермь [8], р. Сытва в районе сел Посад и Усть-Кишерть, р. Чепца в районе пос. Базезино [11]). Достаточно детальное описание рассматриваемого программного продукта и опыт его использования также приводятся в работах [11, 16].

2. Методика гидродинамического моделирования наносов

Методику по гидродинамическому моделированию наносов на исследуемом водном объекте можно разделить по этапам выполнения конкретных работ.

На первом этапе необходимо провести полное обследование местности, включая сам водный объект, его пойму и прилегаемую территорию. В процессе выполнения первого этапа выполняются подготовительные, топографо-геодезические, гидрологические и камеральные работы. Результатом первого этапа является составление картосхем распределения глубин и морфометрических особенностей русла, получение цифровой модели рельефа (далее ЦМР), которая будет использоваться при гидродинамическом моделировании.

На втором этапе осуществляется выбор сценариев для проведения модельных расчетов, выбор подходящей расчетной модели для построения гидродинамической модели наиболее полно описывающей данный водный объект и собственно построение гидродинамической модели.

На третьем этапе осуществляется моделирование по ранее составленным сценариям и уже сделанной гидродинамической модели. Осуществляется калибровка

модели, если есть такая возможность, или берётся река – аналог для получения ее гидрологических характеристик, при которых будут производиться расчеты для данной реки. Так как возможность осуществить калибровку именно модели транспорта наносов не всегда представляется возможным, для этого нужно иметь хотя бы две, а то и более съемки русла реки в разные периоды времени года. В то же время, именно топографо-геодезические и гидрологические работы являются самыми трудоемкими и дорогими. Также необходимо иметь точные ряды данных по расходам и уровням воды на данном участке за периоды времени между этими съемками русла реки, что тоже является проблемой при современном состоянии сети гидрометеорологических наблюдательных постов на реках России, их очень мало. То есть появляется необходимость установки временного наблюдательного поста, что тоже вносит свой финансовый вклад в разработку гидродинамической модели.

3. Построение гидродинамической модели участка р. Вятка – г. Кирово-Чепецк

Гидродинамическая модель, построенная для участка р. Вятка в районе о. Девятьяровский в г. Кирово-Чепецк, представлена на рис. 1. Характерные размеры модели: общая длина 3870 м, ширина варьируется от 250 до 700 м. Водозабор располагается в 950 м ниже о. Девятьяровский на реке Вятка в районе г. Кирово-Чепецк.

Для наиболее полного и эффективного задания особенностей морфометрии участка р. Вятка в районе о. Девятьяровский в г. Кирово-Чепецк на расчетной области построена неравномерная треугольная сетка, состоящая из 33771 элементов, со средней длиной ребра – 10 метров. В качестве сценарных расчетов транспорта наносов для разных гидрологических характеристик были выбраны три сценарных расчета при естественных условиях русла и для двух этапов устройства прорези р. Вятка в районе о. Девятьяровский у г. Кирово-Чепецк.

3.1. Сценарии расчетов и исходные данные

Сценарий 1. Используется ЦМР участка р. Вятка у г. Кирово-Чепецк «естественное русло», рис. 1. Далее сценарий 1 разбивается на подсценарии 1а и 1б по гидрологическим характеристикам водного объекта.

Сценарий 2. Используется ЦМР участка р. Вятка у г. Кирово-Чепецк «после устройства пионерной прорези», рис. 1. Далее сценарий 2 также разбивается на подсценарии 2а и 2б по гидрологическим характеристикам водного объекта.

Сценарий 3. Используется ЦМР участка р. Вятка у г. Кирово-Чепецк «после устройства проектируемой прорези», рис. 1. Далее сценарий 3 разбивается на подсценарии 3а и 3б по гидрологическим характеристикам водного объекта.

Расчет по сценариям 1а, 2а и 3а производится по гидрологическим характеристикам р. Вятка – г. Кирово-Чепецк за период весеннего половодья 2005 года (с 01.04.2005 по 01.07.2005), в котором наблюдается длительный период стояния руслоформирующего расхода воды на р. Вятка у г. Кирово-Чепецк.

Расчет по сценариям 1б, 2б и 3б производится по гидрологическим характеристикам р. Вятка – г. Кирово-Чепецк за период летне-осенней межени 50% обеспеченности, взяты расход воды – 126 м³/с и уровень воды – 105.74 м.

Для моделирования транспорта наносов использованы характеристики гранулометрического состава проб грунта, взятого на участке моделирования, на р. Вятка – г. Кирово-Чепецк в районе о. Девятьяровский.

Расчетное время для всех сценариев – 91 сутки.

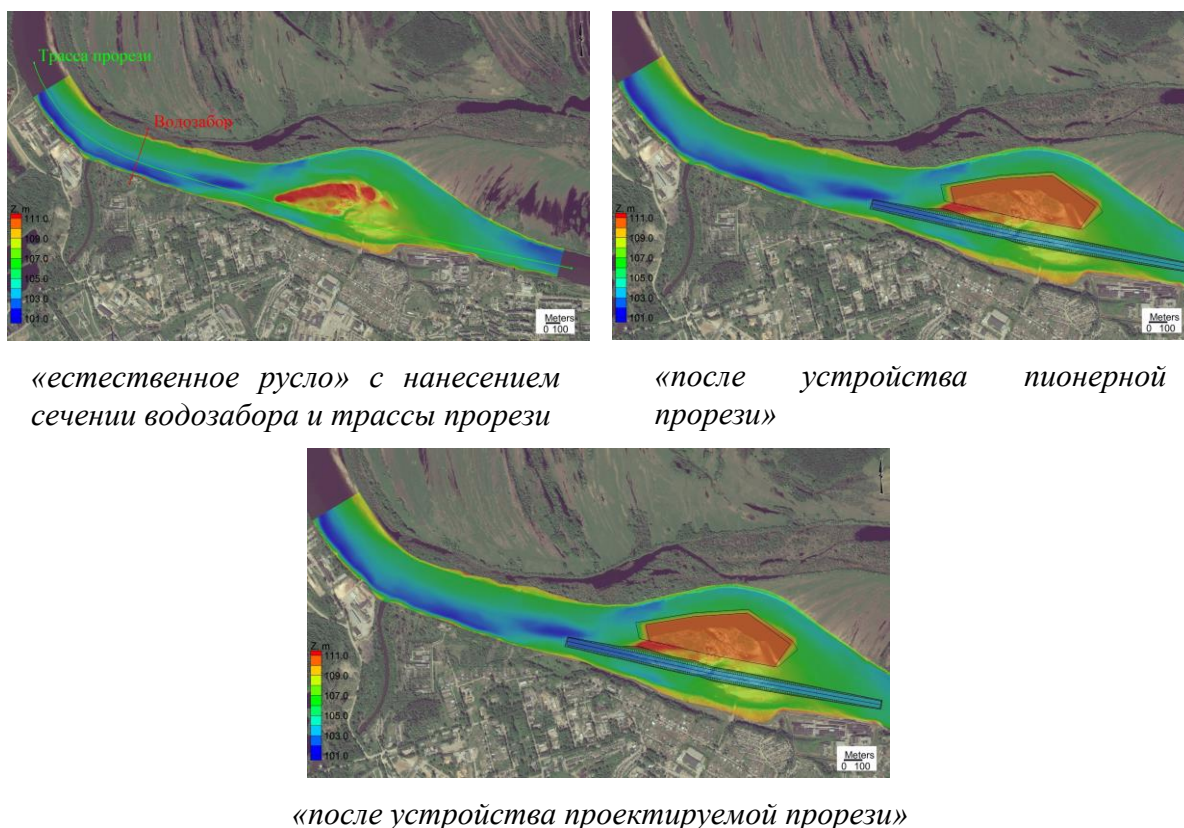


Рис. 1. Морфометрия моделируемого участка р. Вятка – г. Кирово-Чепецк

3.2. Результаты моделирования

Анализ проведенных расчетов показал, что вследствие свойственного для данного участка реки гранулометрического состава донных отложений и скоростей течения превышающих размывающие, русло р. Вятка в районе о. Девятьяровский у г. Кирово-Чепецк характеризуется высокой подвижностью донных отложений, что соответствует тенденции для свободно меандрирующего русла при аллювиальном русле реки Вятка.

3.2.1. Анализ профилей по результатам расчетов. Гидроствор ГС-1

В естественных условиях (рис. 2) основное течение происходит по основному руслу у правого берега. За период весеннего половодья происходит, размыв у левого берега на 0.2 – 0.5 м, размыв островной части по середине сечения до ~ 2 м, размыв по основному руслу у правого берега на 0,2 – 0,5 м, а также происходит намыв (замывание углубления) у левого берега до ~ 0.8 м. За период летне-осенней межени происходит, размыв по основному руслу у правого берега порядка 0.3 – 0.8 м.

В условиях «после устройства пионерной прорези» (рис. 2) основное течение делится на два рукава. За период весеннего половодья происходит, размыв у левого берега на 0.2 – 0.5 м, размыв левого откоса прорези до ~ 2.5 м, размыв правого откоса прорези до ~ 1.5 м, размыв гидроотвала на 1 – 2 м, размыв по основному руслу у правого берега до ~ 0.1 м и размыв правого берега до ~ 1 м, а также происходит намыв (замывание углубления) у левого берега до ~ 0.9 м, намыв в прорези на 1 – 3 м, намыв по основному руслу слева до ~ 1 м и намыв по основному руслу у правого берега до ~ 0,35 м. Происходит смещение прорези влево на ~ 50 м и её занесение на 1.1 м. За период летне-осенней межени происходит, размыв по основному руслу слева до ~ 0.4 м, а также происходит намыв центральной части прорези до ~ 0.5 м, намыв по основному руслу у правого берега до ~ 0.25 м. Происходит занесение прорези до ~ 0.5 м.

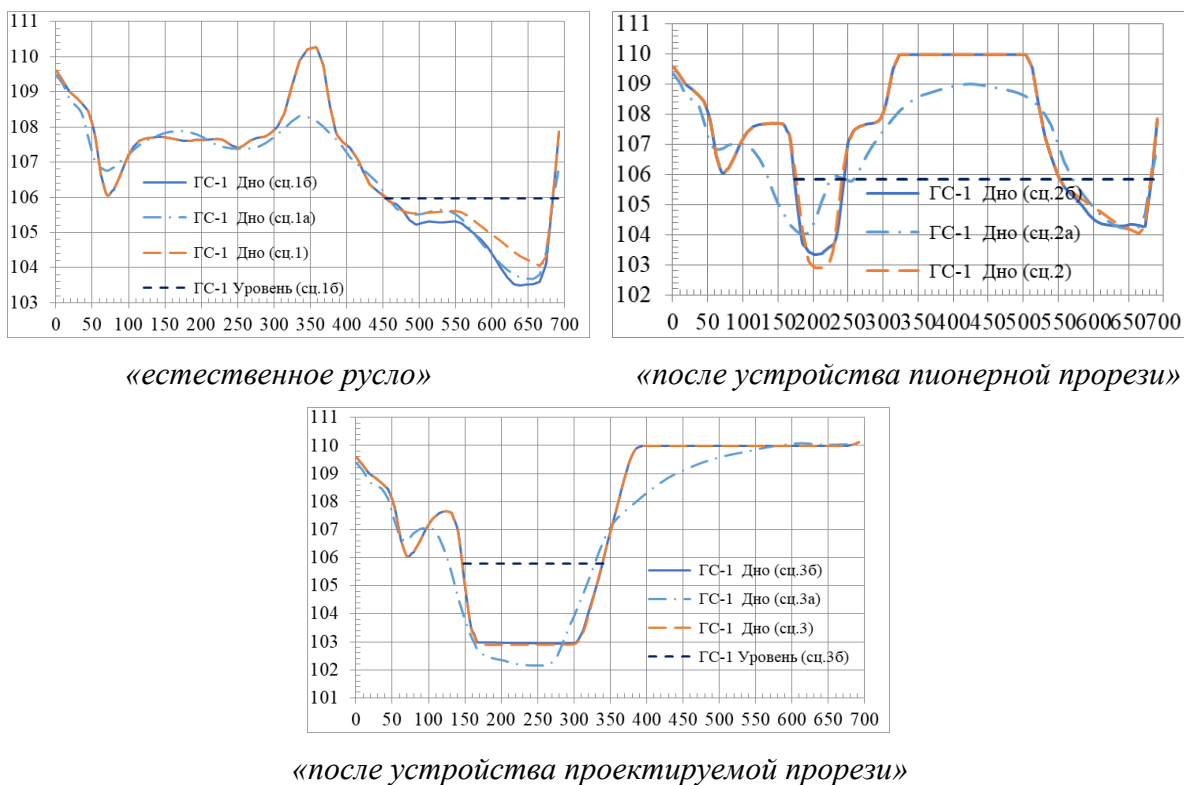


Рис. 2. Анализ профилей по результатам расчетов. Гидроствор ГС-1

В условиях «после устройства проектируемой прорези» (рис. 2) течение происходит по прорези. За период весеннего половодья происходит, размыв у левого берега на 0.2 – 0.5 м, размыв левого откоса прорези до ~ 2 м, размыв основания прорези до ~ 0.75 м и размыв левого края гидроотвала до ~ 2 м, а также происходит намыв (замывание углубления) у левого берега до ~ 0,6 м, намыв у правого откоса прорези до ~ 1.5 м. Происходит смещение прорези влево на ~ 40 м и её углубление на ~ 0.75 м. За период летне-осенней межени происходит, намыв основания прорези до ~ 0.1 м и намыв в нижней части правого откоса прорези до ~ 0.2 м. Происходит смещение нижней части правого откоса прорези влево на ~ 1 м.

3.2.2. Просадки меженных уровней воды в р. Вятка

Оценка влияния руслорегулирующих работ на просадки меженных уровней воды у водозабора составляет менее 1/10 миллиметра. Влияние руслорегулирующих работ на просадки меженных уровней воды на участке в р. Вятка у г. Кирово-Чепецк в зависимости от величины прорези увеличивается, и максимальная просадка составляет 23 см, при сравнении сценариев 3б «после устройства проектируемой прорези» и 1б «естественное русло», но в тоже время русло при руслорегулирующих работах становится более глубоким, рис. 3.

Сравнивая показатель устойчивости русла (прорези) по В.М. Лохтину, для сценария 3 показатель устойчивости русла Лохтина 11.4 характеризует русло, как «сравнительно устойчивое», а для сценария 1 показатель устойчивости русла Лохтина 3.9 характеризует русло, как «неустойчивое», очевидно, что «после устройства проектируемой прорези» устойчивость русла в 2.9 раз выше, чем при «естественном русле».

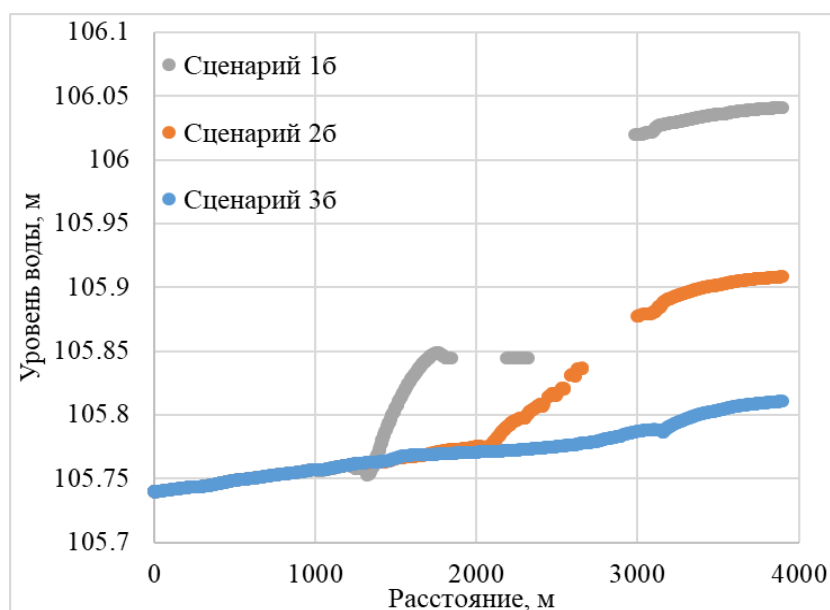


Рис. 3. Расчетный уровень воды по трассе прорези в р. Вятка у г. Кирово-Чепецк для сценариев 1б, 2б и 3б

4. Заключение

Общий анализ гидродинамических расчетов показал, что на участке моделирования прослеживается тенденция формирования скорости течения под конкретные гидрологические и морфологические условия, что обусловлено тем, что происходит переформирование русла реки под данные условия течения в результате транспорта наносов. Наибольшая интенсивность изменения морфометрии русла наблюдается во время прохождения пика половодья, когда расход воды больше руслоформирующего расхода.

Оценка эффективности проектируемых мероприятий сделана на основе выполненных вычислительных экспериментов. Наилучшим с точки зрения морфометрии на участке р. Вятка у г. Кирово-Чепецк является сценарий 3 «после устройства проектируемой прорези». При сценарии 3 для любых гидрологических условий скоростной режим на данном участке однороден и по сравнению со сценарием 1 «естественное русло», снижается вероятность заторов и зажоров, а также сокращается продолжительность и объем шугообразования в осенний период и соответственно улучшаются условия эксплуатации водозабора. Также создание руслорегулирующей прорези исключит возможность прорыва перешейка напротив Девятьяровского острова и «уход» р. Вятка в старицу, так как зона размыва перешейка будет перекрыта гидроотвалом.

Список литературы

1. Беликов В. В., Алексюк А. И., Борисова Н. М. Численная гидроморфологическая модель деформаций речных русел с учетом неоднородного состава грунта // Водные пути и русловые процессы. Гидротехнические сооружения водных путей. Сборник научных трудов IV международной научно-практической конференции. 2019. С. 62–79.
2. Беликов В. В., Колесников Ю. М. Оценка эффективности мероприятий по защите от разрушения участка левого берега р. Оки // Гидротехническое строительство. 2022. № 4. С. 20–25. DOI: 10.34831/EP.2022.46.36.004

3. Богомолов А. В., Лепихин А. П., Тиунов А. А. Использование численных гидродинамических моделей для оценки эффективности проектных решений по защите берегов (на примере реки Дон в районе города Павловска) // Водное хозяйство России: проблемы, технологии, управление. 2014. №1. С. 50–57.
4. Зиновьев А. Т., Кошелев К. Б., Марусин К. В., Кошелева Е. Д. Математическое моделирование руслового потока для прогнозов влияния строительства в поймах на гидрологический режим крупных рек (на примере реки Обь) // Водное хозяйство России: проблемы, технологии, управление. 2017. № 2. С. 54–72. DOI: 10.35567/1999-4508-2017-2-5
5. Зиновьев А. Т., Дьяченко А. В., Кошелев К. Б., Марусин К. В. Натурные наблюдения и математическое моделирование динамики руслового потока на участке реки Обь у водозабора №1 города Барнаула // В сборнике: Гидрометеорология и экология: достижения и перспективы развития. Труды III Всероссийской конференции. Санкт-Петербург, 2019. С. 388–391.
6. Zinoviev A., Dyachenko A., Koshelev K., Marusin K. Modeling of channel processes in large rivers with the use of field data // Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications. 2021. Vol. 9 (1). P. 87–102. DOI: 10.32523/2306-6172-2021-9-1-87-102
7. Лепихин А. П., Перепелица Д. И., Тиунов А. А. Анализ и обоснование возможных схем защиты г. Кунгура от наводнений // Водное хозяйство России: проблемы, технологии, управление. 2007. № 2. С. 80–94.
8. Лепихин А. П., Любимова Т. П., Лепешкин С. А., Тиунов А. А., Паршакова Я. Н., Перепелица Д. И. К проблеме оценки последствий крупномасштабной добычи нерудных строительных материалов на поверхностные водные объекты // Водное хозяйство России: проблемы, технологии, управление. 2014. № 3. С. 108–119.
9. Потапов И. И., Снугур К. С. Исследование эволюции поперечной русловой прорези под действием транзитного гидродинамического потока // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. № 2. С. 146–152.
10. Потапов Д. И., Потапов И. И. Анализ русловых деформаций р. Амур на участке хабаровского водного узла // Информатика и системы управления. 2020. № 2 (64). С. 68–74. DOI: 10.22250/isu.2020.64.68-74
11. Лепихин А. П., Тиунов А. А. Современные гидродинамические модели русловых процессов // Водное хозяйство России: проблемы, технологии, управление. 2019. № 4. С. 114–143. DOI: 10.35567/1999-4508-2019-4-6
12. Лепихин А. П., Любимова Т. П., Ляхин Ю. С., Тиунов А. А., Богомолов А. В., Перепелица Д. И., Паршакова Я. Н. Гидродинамическое моделирование реки Вятки в среднем течении: постановка задачи, результаты расчетов // Водное хозяйство России: проблемы, технологии, управление. 2013. № 3. С. 16–32.
13. Giri S., Yamaguchi S., Nabi M., Shimizu Y. Modelling river bed form dynamics: Large scale application // Proceedings of the International Conference on Fluvial Hydraulics, River Flow. Netherlands, 2014. P. 1221–1229. DOI: 10.1201/b17133-163
14. Peytavie A., Dupont T., Guérin E., Cortial Y., Benes B., Gain J., Galin E. Procedural Riverscapes // Computer Graphics Forum. 2019. Vol. 38 (7). P. 35–46. DOI: 10.1111/cgf.13814
15. Bujakowski F., Falkowski T., Podlasek A. Geomorphological immaturity as a factor conditioning the dynamics of channel processes in Rządza River // Open Geosciences. 2021. Vol. 13 (1). 027-038. DOI: 10.1515/geo-2020-0209
16. Reference Manual “RiverFlow2D Two-Dimensional Flood and River Dynamics Model” [Электронный ресурс]. URL: <http://www.hydronia.com> (дата обращения: 31.08.2022).

Контракция неводных растворов кислот и спиртов

С. В. Торохова, К. Г. Костарев

Институт механики сплошных сред УрО РАН,
614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1
email: torokhova.s@icmm.ru

Контракция – неаддитивное изменение объема раствора при изменении концентрации одной из его компонент. Причиной контракции служит образование соединений на основе молекул / ионов растворенного вещества и молекул растворителя благодаря электростатическому взаимодействию и возникновению водородных или иных связей. Этот эффект, присущий всем истинным растворам, до сих пор редко учитывается при анализе гидродинамических и тепло/массообменных явлений. Причиной подобной ситуации служит отсутствие информации о контракции для большинства жидких систем. В предлагаемом исследовании для устранения этого недостатка определена контракция неводных растворов одно- и многоатомных спиртов и карбоновых кислот. Полученные данные систематизированы и проанализированы, предложен ряд систем жидкостей для лабораторного моделирования диффузионных процессов в микрогравитации.

Ключевые слова: растворы; контракция; карбоновые кислоты; спирты

Contraction of non-aqueous solutions of acids and alcohols

S. V. Torokhova, K. G. Kostarev

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS,
1 Akademika Koroleva St., 614013, Perm
email: torokhova.s@icmm.ru

Contraction is a non-additive change in the volume of a solution with a change in the concentration of one of its components. The reason for contraction is the formation of compounds based on molecules / ions of the solute and solvent molecules due to electrostatic interaction and the occurrence of hydrogen or other bonds. This effect, inherent in all true solutions, is still rarely taken into account in the analysis of hydrodynamic and heat/mass transfer phenomena. The reason for this situation is the lack of information on contraction for most liquid systems. In the proposed study, to eliminate this drawback, the contraction of non-aqueous solutions of one- and many-atomic alcohols and carboxylic acids is determined. The obtained data are systematized and analyzed, a number of fluid systems are proposed for laboratory modeling of diffusion processes in microgravity.

Keywords: solutions; contraction; carboxylic acids; alcohols

Практически все жидкости в природе являются одно- или многокомпонентными растворами. Было бы логичным предположить, что растворенные вещества нивелируют физико-химические свойства основной жидкости пропорционально своей концентрации в растворе. Однако, как показывают измерения, значительная часть свойств, включая плотность и вязкость, изменяются неаддитивно. Причина подобного поведения свойств растворов была раскрыта Д. И. Менделеевым, который предположил, что в процессе растворения возникают соединения, схожие с химическими. На близость растворения и химической реакции указывает неизотермичность обоих процессов, плотность конечного продукта также отличается от плотности исходных компонентов. Есть и отличия – с ростом температуры соединения, возникшие в ходе растворения, разрушаются. Кроме того, свойства этих соединений, получивших название сольватов, существенно зависят от исходной концентрации растворенного вещества.

Причинами возникновения сольватов могут служить электростатическое взаимодействие (в случае полярных молекул), установление водородных (при наличии водорода и гидроксильных групп в молекулах растворителя и растворяемого вещества) либо иных связей, достаточно слабых, чтобы разрушиться при увеличении интенсивности теплового движения молекул или росте конкуренции между молекулами растворенного вещества при увеличении его концентрации.

Одним из следствий сольватации растворов является эффект контракции – неаддитивное изменение объема раствора при изменении концентрации его компонент. Отметим, что для использования в гидродинамике удобнее выбрать обратную величину – неаддитивное изменение плотности раствора, представив ее как разницу плотностей между реальным и идеальным (аддитивным) растворами (рис. 1). Ниже под контракцией будем понимать именно эту величину.

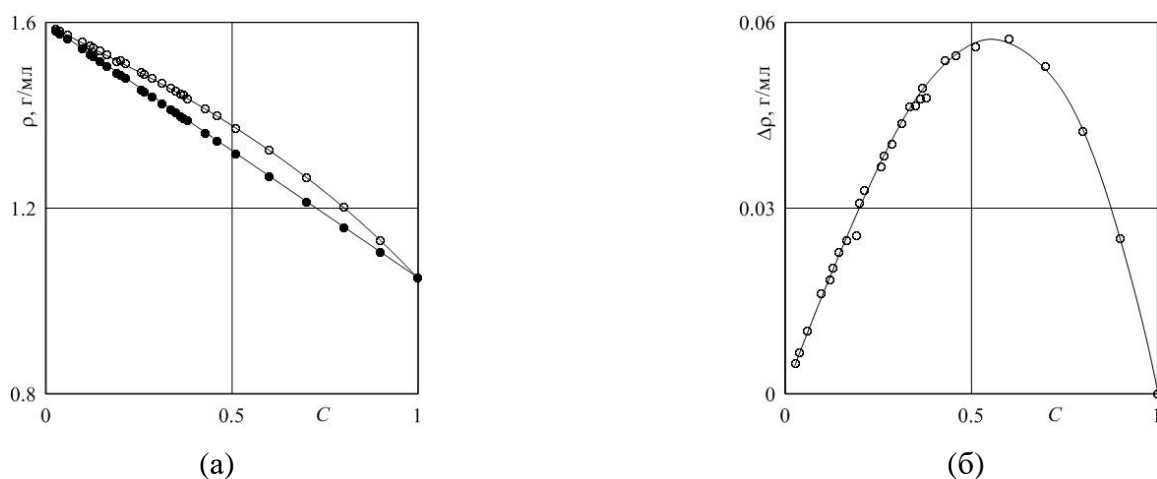


Рис. 1. Плотность ρ (а) и соответствующая контракция $\Delta\rho$ (б) уксусной кислоты в зависимости от ее концентрации (в молярных долях) в растворе тетрахлорметана при температуре $T = 293\text{ K}$

Предлагаемый доклад посвящен изучению контракции неводных растворов одноатомных спиртов и карбоновых кислот, образующих два гомологических ряда с общими формулами, соответственно, $\text{CH}_3 - (\text{CH}_2)_n - \text{OH}$ и $\text{H} - (\text{CH}_2)_n - \text{COOH}$, где $-\text{OH}$, $-\text{COOH}$, $-\text{CH}_2-$ – гидроксильная, карбоновая и метиленовая группы, а $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. На рис. 2а, б представлены зависимости плотности и соответствующей

контракции растворов одноатомных спиртов в тетрахлорметане CCl_4 от их концентрации. Видно, что в зависимости от числа метиленовых групп в молекуле спирта контракция может оказаться как положительной, так и отрицательной. При этом значения экстремальной контракции растворов данных спиртов образуют практически линейную зависимость (рис. 2в), подобную зависимости, определяемой законом Дюкло-Траубе [1–2] для поверхностной активности членов гомологического ряда. Аналогичный вид имеют зависимости контракции растворов карбоновых кислот в тетрахлорметане, а также спиртов в ряде других органических растворителей.

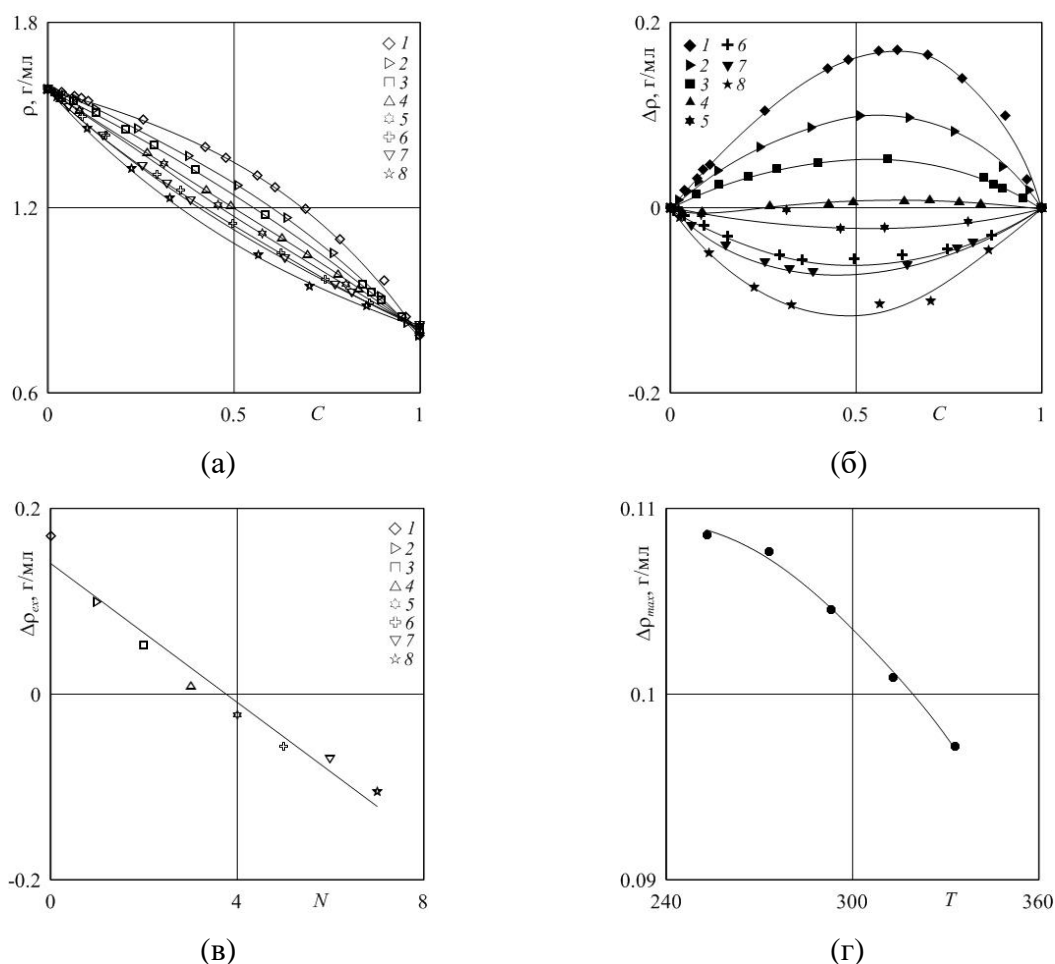


Рис. 2. Плотность (а) и контракция (б) растворов одноатомных спиртов в тетрахлорметане при $T = 298\text{ K}$ в зависимости от их концентрации: 1 – метанол, 2 – этанол, 3 – 1-пропанол, 4 – 1-бутанол, 5 – 1-пентанол, 6 – 1-гексанол, 7 – 1-гептанол, 8 – 1-октанол; (в) экстремальная контракция указанных растворов в зависимости от числа метиленовых групп в молекуле спирта; (г) экстремальная контракция раствора этилового спирта в тетрахлорметане в зависимости от температуры раствора

Заключение, что контракция раствора снижается с ростом температуры, сделанное на основе анализа данных для водных растворов, подтверждается температурной зависимостью, приведенной для раствора этилового спирта в тетрахлорметане (рис. 2г).

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта РФФИ № 19-41-590009.

Список литературы

1. *Duclaux E.* Sur la tension superficielle dans la série des alcools at des acides gras // Annales de Chimie et de Physique. 1878. Vol. 13 (5). P. 76–101.
2. *Traube I.* Ueber die Capillaritätsconstanten organischer Stoffe in wässrigen Lösungen // Justus Liebigs Annalen der Chemie. 1891. Vol. 265 (1). S. 27–55.
DOI: 10.1002/jlac.18912650103

Хемотрекция в двухслойной системе несмешивающихся реагирующих жидкостей

В. Ю. Уточкин, С. П. Некрасов, Д. А. Брацун

Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
614990, Пермь, Комсомольский пр., 29
email: vyutochkin@pstu.ru

Теоретически исследуется конвективное движение, вызванное протеканием реакции нейтрализации в системе несмешивающихся растворов «сильная кислота – сильное основание». Отсутствие у реагентов поверхностно-активных свойств исключает влияние капиллярных сил, в связи с чем наблюдаемая неустойчивость объясняется возникновением плотностных неоднородностей среды в поле силы тяжести. В рассматриваемых условиях выделяются два режима движения жидкости: диффузионно- и конвективно-управляемый. Получено основное состояние реакции-диффузии. Показано, что генератором неустойчивости является взаимодействие реакционно-диффузионных процессов, приводящее к локально неустойчивой плотностной стратификации ниже межфазной поверхности. Нелинейная динамика системы исследуется путем прямого численного моделирования.

Ключевые слова: хемотрективная неустойчивость; несмешивающиеся жидкости; реакция нейтрализации

Chemoconvection in a two-layer system of immiscible reacting fluids

V. Yu. Utochkin, S. P. Nekrasov, D. A. Bratsun

Perm National Research Polytechnic University, 29 Komsomolsky Pr., 614990, Perm
email: vyutochkin@pstu.ru

We theoretically study the convective motion caused by the neutralization reaction in the system of immiscible solutions «strong acid – strong base». The absence of surface activity of the reactants eliminates the influence of capillary forces, and therefore the observed instability is explained by the appearance of density inhomogeneities of the medium in the gravitational field. Under the conditions under consideration, two modes of fluid motion are distinguished: diffusion-controlled and convective-controlled. The base state of the reaction-diffusion is obtained. It is shown that the instability is generated by the interaction of reaction-diffusion processes, leading to locally unstable density stratification below the interface. The nonlinear dynamics of the system is investigated by direct numerical simulation.

Keywords: chemoconvective instability; neutralization reaction; immiscible fluids

Совместное действие механизмов реакции, диффузии и механического движения жидкости может приводить к возникновению конвективных структур разной степени упорядоченности. Одной из особенностей хемоконвекции является возможность существования в жидкости областей с локально неустойчивой стратификацией по плотности. В работах [1, 2], посвященных исследованию смешивающихся реагирующих растворов, образование таких областей объяснялось механизмом концентрационно-зависимой диффузии. В системах несмешивающихся растворов также были обнаружены паттерны, условия существования которых, однако, в настоящее время не до конца ясны. Особый интерес представляет развивающаяся в благоприятных для неустойчивости Рэля-Тейлора условиях система регулярных вихревых структур. Структуры равномерно удлиняются в направлении от границы раздела, что необычно для систем с глобально неустойчивой стратификацией. В работе [3] выдвигалась гипотеза о стабилизирующем влиянии тепловыделения вблизи реакционного фронта. Однако позднее выяснилось, что эффект воспроизводится даже в условиях интенсивного отвода тепла. В настоящей работе предлагается новая модель для исследования динамики хемоконвективных структур в системе несмешивающихся реагирующих растворов. Роль механизма стабилизации плотностного барьера отводится ранее не учитывавшемуся производству воды в ходе реакции.

Исследуемая конфигурация представляет собой два слоя жидкости, заполняющих ячейку прямоугольной формы и разделенных межфазной границей. Расстояние h между стенками предполагается малым по сравнению с размерами ячейки вдоль осей x и z (рис. 1). Верхняя область содержит раствор соляной кислоты HCl в пентаноле, нижняя — водный раствор щелочи NaOH . Приведение растворов в контакт инициирует реакцию нейтрализации с образованием соли и воды. Исходя из гипотезы о возможности движения только вдоль широких стенок ячейки, принимается приближение Хеле-Шоу. Ранее в эксперименте было продемонстрировано, что для динамики системы верхний слой играет роль пассивного резервуара с кислотой, поэтому с целью снижения вычислительных затрат конфигурацию можно упростить до одного слоя с раствором основания, задавая постоянный поток кислоты на верхней границе [4]. Структура течения, получаемая таким путем из численного решения уравнений реакции-диффузии-конвекции, хорошо согласуется с результатами эксперимента (рис. 2).

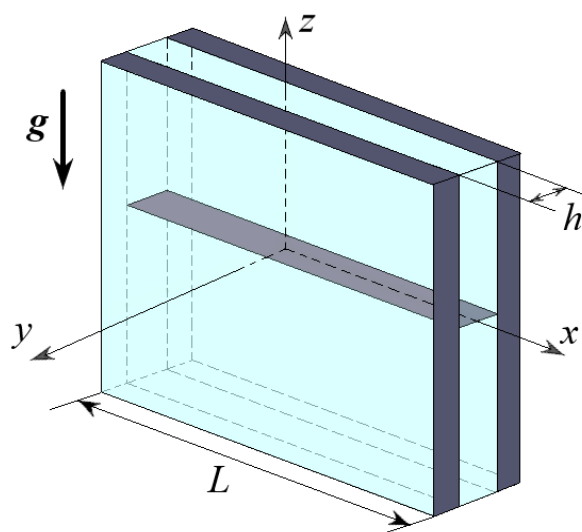


Рис. 1. Схематическое изображение ячейки Хеле-Шоу

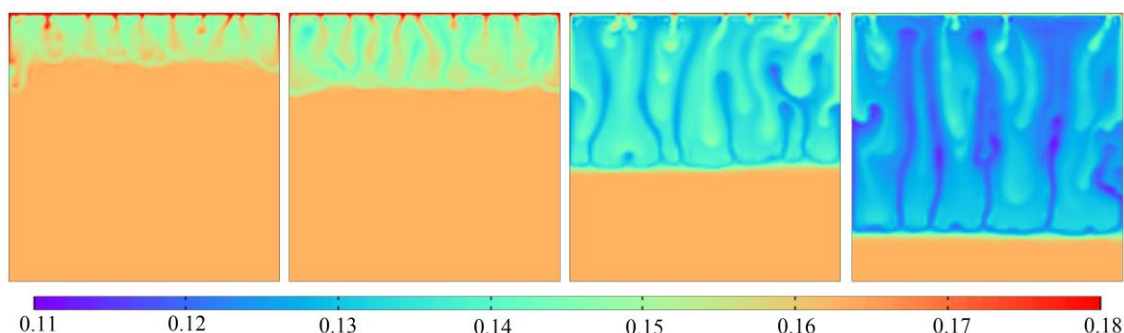


Рис. 2. Поле безразмерной плотности в конвективно-управляемом режиме для моментов времени $t = 1$, $t = 2$, $t = 5$ и $t = 10$

В рассматриваемых условиях выделяются два режима движения жидкости: диффузионно- и конвективно-управляемый. Их отличие заключается в скорости протекающих процессов и структуре наблюдаемого течения. Реализация того или иного режима определяется отношением плотностей реакционной зоны и нижнего слоя. В рамках работы получено основное состояние реакции-диффузии в условиях механического равновесия. В ходе анализа основного состояния показано, что конвективная неустойчивость возникает как следствие совместного действия механизмов реакции и диффузии, приводящего к возникновению локально неустойчивой плотностной стратификации снизу от границы раздела. Построена математическая модель явления, включающая систему уравнений реакции-диффузии-конвекции в приближениях Буссинеска и Хеле-Шоу. Нелинейная динамика системы исследуется численно с использованием метода конечных разностей. Численные результаты и экспериментальные наблюдения находятся в качественном согласии.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (грант № 19-11-00133).

Список литературы

1. Mizev A., Mosheva E., Bratsun D. Extended classification of the buoyancy-driven flows induced by a neutralization reaction in miscible fluids. Part 1. Experimental study // Journal of Fluid Mechanics. 2021. Vol. 916. A22. DOI: 10.1017/jfm.2021.201
2. Bratsun D., Mizev A., Mosheva E. Extended classification of the buoyancy-driven flows induced by a neutralization reaction in miscible fluids. Part 2. Theoretical study // Journal of Fluid Mechanics. 2021. Vol. 916. A23. DOI: 10.1017/jfm.2021.202
3. Bratsun D. On Rayleigh-Bénard mechanism of alignment of salt fingers in reactive immiscible two-layer systems // Microgravity Science and Technology. 2014. Vol. 26. P. 293–303. DOI: 10.1007/s12217-014-9374-0
4. Mizev A., Shmyrova A. Buoyancy-driven instabilities induced by a neutralization reaction in immiscible fluids // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 1809. 012030. DOI: 10.1088/1742-6596/1809/1/012030

Динамика частиц и агломератов кварца в жидкости под действием ультразвука

О. О. Фатталов^{a,b}, Т. П. Любимова^{a,b}, К. А. Рыбкин^{a,b}

^a Пермский государственный национальный исследовательский университет, 614990, Пермь, ул. Букирева, 15
email: k.rybkin@gmail.com

^b Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1

Процесс обогащения полезных ископаемых методом флотации является одним из популярных методов разделения руд, используемых в промышленности. В процессе флотации мелких и сверхмелких частиц существенна проблема низкого извлечения ценного продукта из флотационной пульпы. Одним из возможных методов решения проблемы флотации мелких частиц является применение ультразвукового (УЗ) воздействия на флотационную пульпу. В этом случае, при определенных условиях, сила Бьеркнеса способствует образованию агломератов из твердых частиц, располагающихся в узлах стоячей УЗ волны. Эксперименты показали, что существуют различия в динамике формирующихся кластеров из частиц кварца в зависимости от концентрации ПАВ. Показано, что рост концентрации ПАВ в водном растворе приводит к изменению размера кластера и его временной устойчивости.

Ключевые слова: ультразвук; динамика частиц; флотация, ПАВ

Dynamics of particles and agglomerates of quartz in a liquid under the action of ultrasound

O. O. Fattalov^{a,b}, T. P. Lyubimova^{a,b}, K. A. Rybkin^{a,b}

^a Perm State University, 15 Bukireva St., 614990, Perm
email: k.rybkin@gmail.com

^b Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, 1 Akademika Koroleva St., 614013, Perm

The flotation mineral processing process is one of the most popular ore separation methods used in industry. In the process of flotation of fine and ultrafine particles, the problem of low extraction of valuable product from the flotation pulp is significant. One of the possible methods for solving the problem of fine particles flotation is the use of ultrasonic (US) treatment of the flotation pulp. In this case, under certain conditions, the Bjerknes force contributes to the formation of agglomerates from solid particles located at the nodes of a standing ultrasonic wave. Experiments have shown that there are differences in the dynamics of clusters formed from quartz particles depending on the surfactant concentration. It

is shown that an increase in the surfactant concentration in an aqueous solution leads to a change in the cluster size and its temporal stability.

Keywords: ultrasound; particle dynamics; flotation; surfactant

1. Введение

Извлечение мелких частиц при использовании флотационного метода обогащения руды всегда было затруднено из-за низкой вероятности столкновения между флотационными пузырьками воздуха и мелкими частицами [1]. Существует несколько подходов решения проблемы, основанных на принципе использования УЗ воздействия в процессе флотации [2]. Одним из методов улучшения извлечения мелких частиц флотацией является агрегация этих частиц перед процессом флотации непосредственно во флотационной камере [3, 4]. Несколько исследований показали, что акустическая сила, возникающая в результате УЗ воздействия потенциально может быть силой притяжения для частиц, что способствует их агломерации [5]. В работе [6] обнаружено, что, если радиус кавитационных пузырьков превышает резонансный, то частицы угля с пузырьками перемещаются в узлы ультразвуковой стоячей волны под действием акустической радиационной силы, что приводит к быстрой агрегации мелких частиц. Результаты микрофлотации показали, что скорость флотации значительно увеличивается после ультразвуковой обработки [6].

Целью данного исследования было изучение процесса агрегации мелких частиц кварца и динамики сформировавшихся агломератов в результате УЗ воздействия на жидкость.

2. Методика эксперимента и экспериментальная установка

В экспериментах использовалась кювета, имеющая форму параллелепипеда, с внешними размерами $110 \times 116 \times 160$ мм³. Кювета была изготовлена из оргстекла толщиной 3 мм. Для отслеживания процесса агломерации частиц кварца использовалась установка, изображённая на рис. 1. Для регистрации пузырьков использовалось устройство, состоящее из камеры Basler acA1920-155um, оснащенной телецентрическим макрообъективом (размер сенсора $11.3 \text{ мм} \times 7.1 \text{ мм}$, resolution (H x V пикселей) $1920 \text{ px} \times 1200 \text{ px}$, размер пикселя (HxV) $5.86 \text{ мк} \times 5.86 \text{ мк}$, скорость съемки 164 fps. Для освещения использовался коллимированный источник контрольного света Telecentric HP illuminator (peak wavelength blue, 460 нм, мощность $P < 2.5$ Вт). Во всех экспериментах в качестве источника ультразвука использовался металлический диск из нержавеющей стали диаметром 88 мм, размещенный на дне кюветы внутри её так, чтобы центр излучателя совпадал с центром дна ячейки. Он подключался к генератору УЗ вибраций с частотой $f = 40$ кГц и максимальной мощностью $P = 60$ Вт. В качестве частиц использовались частицы кварца размером в диапазоне от 0.1 до 0.3 мм. В качестве ПАВ использовался ДАН (додецеламина-гидрохлорид), вода для экспериментов предварительно отстаивалась не менее суток в открытом сосуде при нормальной температуре $t = 21^\circ\text{C}$ и атмосферном давлении $p = 10^5$ Па.

По фотографиям, полученным в ходе экспериментов, анализировался процесс агломерации частиц, а также исследовалась их динамика.

3. Результаты

Типичные фотографии, полученные в ходе экспериментов, представлены на рис. 2. Из фотографий видно, УЗ воздействие способствует возникновению сил Бьеркнеса, которые активируют процесс агломерации частиц.

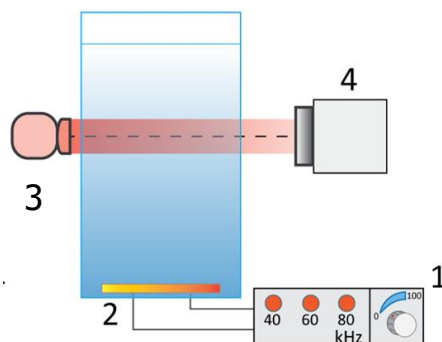


Рис. 1. Схема экспериментальной установки: 1 – генератор ультразвука $f = 40$ кГц, $P = 60$ Вт, 2 – металлический излучатель УЗ в форме диска $d = 88$ мм, 3 – коллимированный источник контрольного света, 4 – SSD камера

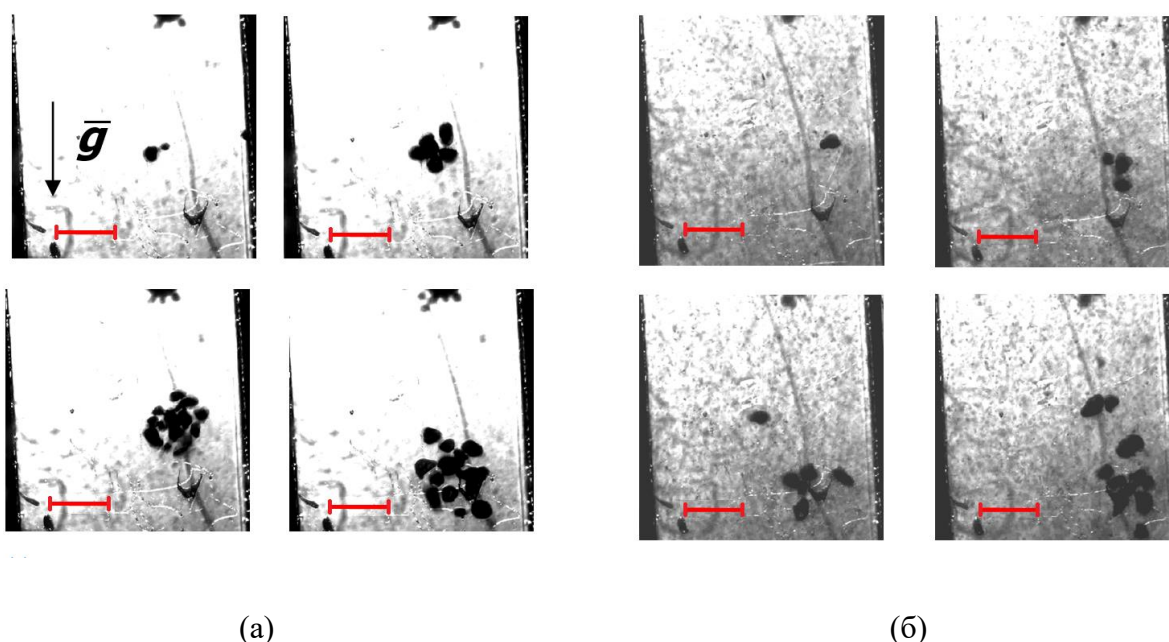


Рис. 2. Фотографии агломератов из частиц кварца, сделанные с интервалом $t = 1$ с, красным цветом обозначена масштабная линия длиной 10 мм: (а) в воде; (б) в водном растворе ПАВ с концентрацией $C = 1$ мМ ДАН

В случае чистой воды рис. 2а, агломерат из частиц постоянно растет и, достигая максимального размера 12 мм, осциллирует в узле стоячей УЗ волны, постоянно изменяя свою форму. В случае наличия $C = 1$ мМ ДАН в воде (рис. 2б), агломерат из частиц устойчив в случае небольшого количества частиц, а также имеет значительно меньшие размеры порядка 7 мм. Из фотографий видно, что ДАН способствует частичному ингибированию процесса агломерации, в результате чего средний размер агломерата уменьшается более чем в два раза. Такое различие в динамике может быть объяснено изменением поверхностных сил, а также перераспределением УЗ давления в стоячей волне. ПАВ сорбируется на поверхности частицы изменяя степень ее гидрофобности, а также способствует образованию устойчивых микропузырьков.

Наличие микропузырьков значительно влияет на распределение УЗ давления в жидкости, что приводит к уменьшению размера агломератов. Из рис. 2б видно, что фон гораздо зашумленней (более серый) при наличии ПАВ за счет кавитационных микропузырьков, возникающих результате УЗ воздействия.

4. Выводы

Показано влияние концентрации ПАВ на размер агломерата из частиц песка, формирующихся в результате УЗ воздействия. Добавление ПАВ приводит к уменьшению среднего размера формирующегося агломерата, а также влияет на его устойчивость и уменьшает время его существования.

Исследование выполнено при финансовой поддержке из средств гранта Российского научного фонда (проект № 20-69-46066).

Список литературы

1. Jin L., Wang W., Tu Y., Zhang K., Lv Z. Effect of ultrasonic standing waves on flotation bubbles // *Ultrasonics Sonochemistry*. 2021. Vol. 73. 105459. DOI: 10.1016/j.ultsonch.2020.105459
2. Chen Y., Chelgani S. C., Bu X., Xie G. Effect of the ultrasonic standing wave frequency on the attractive mineralization for fine coal particle flotation // *Ultrasonics sonochemistry*. 2021. Vol. 77. 105682. DOI: 10.1016/j.ultsonch.2021.105682
3. Chen Y., Truong V. N., Bu X., Xie G. A review of effects and applications of ultrasound in mineral flotation // *Ultrasonics sonochemistry*. 2020. Vol. 60. 104739. DOI: 10.1016/j.ultsonch.2019.104739
4. Filippov L. O., Filippova I. V., Barres O., Lyubimova T. P., Fattalov O. O. Intensification of the flotation separation of potash ore using ultrasound treatment // *Minerals Engineering*. 2021. Vol. 171. 107092. DOI: 10.1016/j.mineng.2021.107092
5. Chen Y., Zheng H., Truong V. N., Xie G., Liu Q. Selective aggregation by ultrasonic standing waves through gas nuclei on the particle surface // *Ultrasonics Sonochemistry*. 2020. Vol. 63. 104924. DOI: 10.1016/j.ultsonch.2019.104924
6. Chen Y., Xie G., Chang J., Grundy J., Liu Q. A study of coal aggregation by standing-wave ultrasound // *Fuel*. 2019. Vol. 248. P. 38–46. DOI: 10.1016/j.fuel.2019.03.030

Влияние концентраций ПАВ в водных растворах на процесс генерации микропузырьков

И. А. Фаттахова^a, М. Г. Щербань^a, М. О. Кучинский^{a,b}, М. В. Козлов^a, Т. П. Любимова^{a,b}

^a Пермский государственный национальный исследовательский университет, 614990, Пермь, ул. Букирева, 15
email: irina.fattahova2017@yandex.ru

^b Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013, Пермь, ул. Академика Королёва, 1

Изучен процесс высаливания анионного поверхностно-активного вещества додецилсульфата натрия (ПАВ SDS) в модельных растворах водопроводной воды, которая использовалась в экспериментах по генерации микропузырьков. Для изучения применяли 2 метода: метод висячей капли и спектрофотометрический. Модельный раствор помимо исследуемого ПАВ содержал ионы жесткости с их предельно-допустимой концентрацией для водопроводной воды: Fe^{3+} и Ca^{2+} . Опыты по измерению среднего диаметра пузырька показали, что при увеличении концентрации ПАВ диаметр генерируемых пузырьков уменьшался, однако при концентрации SDS равной 3 ммоль/л происходило помутнение раствора, что затрудняло измерение диаметра микропузырьков. Установлено, что введение ионов кальция приводит к снижению критической концентрации мицеллообразования (ККМ) и выделению ПАВ в отдельную фазу. Присутствие ионов железа в изученной концентрации не оказывает значительного влияния на поведение растворов SDS.

Ключевые слова: высаливание; микропузырьки; додецилсульфат натрия

Effect of surfactant concentration in aqueous solutions on the process of generation of microbubbles

I. A. Fattakhova^a, M. G. Scherban^a, M. O. Kuchinskiy^{a,b}, M.V. Kozlov^a, T.P. Lyubimova^{a,b}

^a Perm State University, 15 Bukireva St., 614990, Perm
email: k.rybkin@gmail.com

^b Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, 1 Akademika Koroleva St., 614013, Perm

The process of salting out anionic surfactant sodium dodecyl sulfate (surfactant SDS) in model solutions of tap water, which was used in experiments on the generation of microbubbles, was studied. 2 methods were used for the study: the hanging drop method and the spectrophotometric method. In addition to the

investigated surfactant, the model solution contained hardness ions with their maximum permissible concentration for water-conducting water: Fe^{3+} and Ca^{2+} . Experiments on measuring the average diameter of the bubble showed that with an increase in the concentration of surfactants, the diameter of the generated bubbles decreased, however, at a concentration of SDS equal to 3 mmol/l, turbidity of the solution occurred, which made it difficult to measure the diameter of the microbubbles. It was found that the introduction of calcium ions leads to a decrease in the critical concentration of micelle formation (CMC) and the separation of surfactants into a separate phase. The presence of iron ions in the studied concentration does not significantly affect the behavior of SDS solutions.

Keywords: salting; microbubbles; SDS

1. Введение

Использование анионных поверхностно-активных веществ на практике очень велико особенно в фармацевтической, нефтяной и горно-обогатительной промышленности [1, 2]. ПАВ широко используются в процессе пенной флотации, через пульпу прокачивается газ, как правило воздух, образующиеся пузырьки газа адсорбируются на частицах руды или пустой породы (в зависимости от типа флотореагента) и выносят их на поверхность жидкости в виде пены. Пузырьки, при флотации, могут генерироваться различными методами: при механическом перемешивании пульпы во флотационной камере; с использованием источника ультразвука; барботирования с использованием мембран [3, 4].

Увеличение концентрации SDS при мембранном методе генерации пузырьков приводит к уменьшению диаметра микропузырьков вследствие гидрофилизации поверхности мембраны и ингибирования коалесценции [5]. При определенных условиях такие растворы могут замутняться вследствие высаливания [6]. Так, к высаливанию может привести наличие солей жёсткости, в том числе растворимых в воде солей Fe и Ca. Этот процесс может быть изучен 2 стандартными методами: спектрофотометрическим и методом висячей капли.

Цель работы: проверка гипотезы влияния солей жесткости (Fe и Ca) на помутнение растворов SDS при генерации микропузырьков методом барботирования.

2. Описание экспериментальной установки и методики обработки данных

В работе использовалась кювета в форме параллелепипеда с размерами $300 \times 30 \times 500 \text{ мм}^3$, которая сделана из акрила толщиной 3 мм. Для генерации пузырьков использовалась асимметрично смачиваемая мембрана, водяной насос, воздушный компрессор. Насос создавал сдвиговый поток жидкости, срывающий с поверхности мембраны воздушные пузырьки, таким образом происходила генерация пузырьков. Пузырьки регистрировались с помощью высокоскоростной камеры с контрольным источником света. После чего использовалась компьютерная обработка изображения. Подробное описание экспериментальной установки и методики регистрации пузырьков представлено в статье [5].

В качестве модельного ПАВ использовали SDS производства ООО «Аналитик-Хим». Готовили растворы SDS разной концентрации 0.0625 – 12 ммоль/л, содержащих ионы Fe^{3+} и Ca^{2+} в количестве, регламентируемым СанПиН 2.1.4.1074-01.

Методом висячей капли [7] измеряли поверхностное натяжение растворов SDS. Для этого метода каплю дозировали из шприца, пока она почти не отделялась от кончика иглы. В этот момент делали снимок висящей капли, и контур профиля этой капли анализировали на предмет ее формы с помощью уравнения Лапласа. Для определения

величины ККМ по методу висячей капли использовали прибор DSA-25E компании KRUSS.

Образование новой фазы в растворе SDS фиксировали фотометрически [8], измеряя концентрационную зависимость оптической плотности растворов ПАВ на спектрофотометре КФК-3М в кювете толщиной 0.5 см при длине волны $\lambda = 540$ нм.

3. Результаты

При генерации пузырьков с использованием асимметрично-смачиваемой мембраны в растворах SDS происходило уменьшение диаметра пузырьков при увеличении концентрации ПАВ (рис. 1). Также при увеличении концентрации SDS происходило помутнение раствора, и съемка была затруднена. Так на рис. 1а и б видно, что при увеличении концентрации SDS, контрастность пузырьков относительно фона значительно падает, съемка экспериментов происходила с одинаковыми настройками камеры.

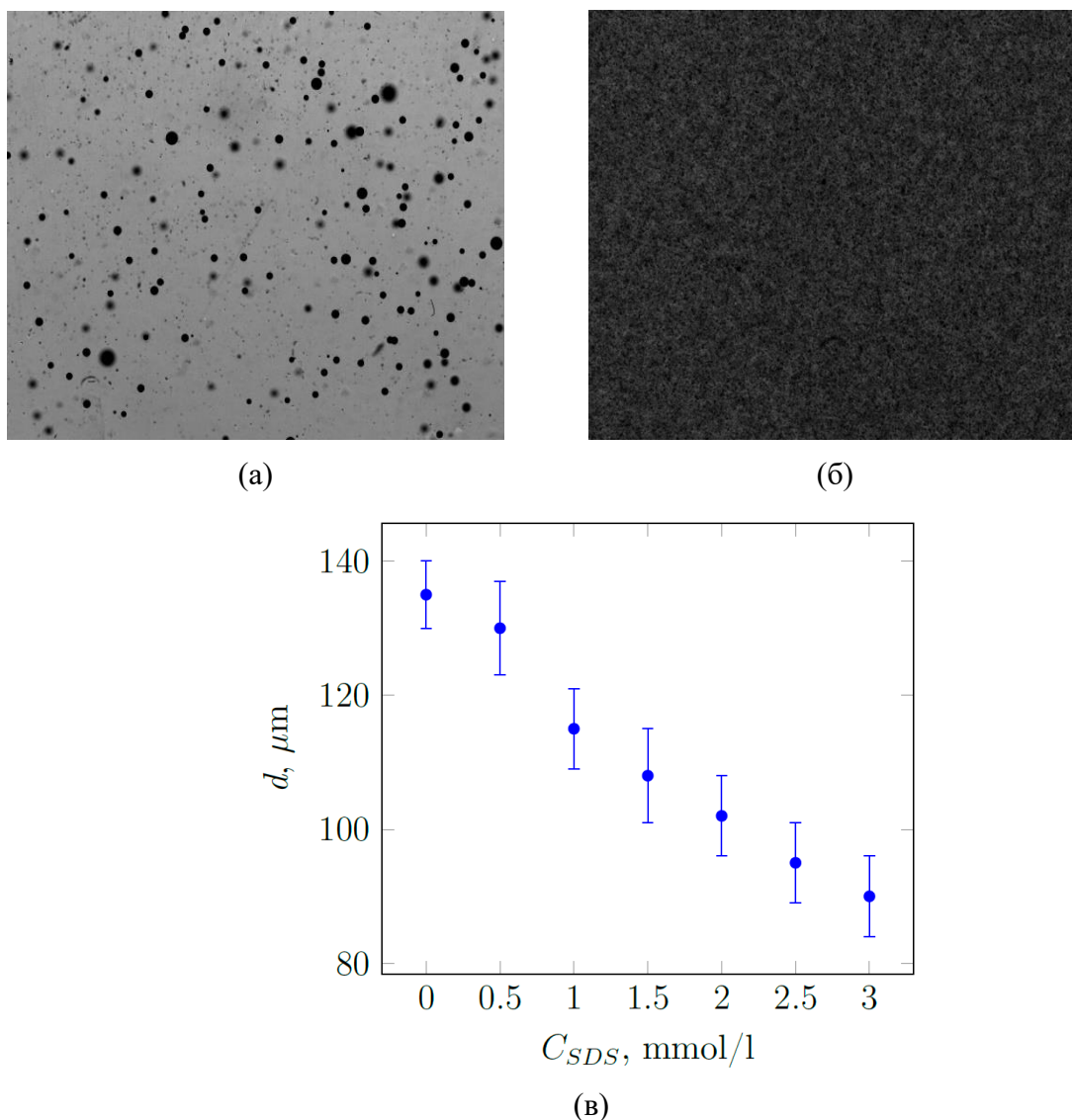


Рис. 1. (а) изображение пузырьков в воде; (б) изображение пузырьков в растворе SDS с концентрацией 2.5 ммоль/л; (в) график зависимости диаметра микропузырьков от концентрации

Для экспериментов использовалась водопроводная вода, в которой содержатся различные ионы жесткости (Ca^{2+} , Mg^{2+} , Fe^{3+}), способных привести к высаливанию и выделению SDS в собственную фазу ниже ККМ, что наблюдалось в нашем случае, и фиксировалось визуально как помутнение раствора. Для подтверждения данной гипотезы нами были определены ККМ растворов SDS, содержащих ионы жесткости Ca^{2+} и Fe^{3+} в воде, в соответствии с нормативными документами СанПиН 2.1.4.1074-01, 2 методами: спектрофотометрическим и методом висючей капли.

Эксперименты показали, что присутствие солей кальция в большей степени сказывается на изотерме поверхностного натяжения рис. 2а: значение ККМ понижается с 7.5 ммоль/л в дистиллированной воде до 1.1 ± 0.5 ммоль/л (ККМ_1), при этом на зависимости появляется ещё одна точка излома, что может соответствовать переходу к мицеллам цилиндрической формы в области концентраций, больших 7.5 ммоль/л. Понижение первой ККМ приводит к тому, что мицеллы начинают выделяться в виде собственной фазы, агрегируют, что приводит к их последующей седиментации и разрушению коллоидного раствора. Этот процесс фиксируется путём определения концентрационной зависимости оптической плотности раствора, на которой появляются несколько участков рис. 2б.

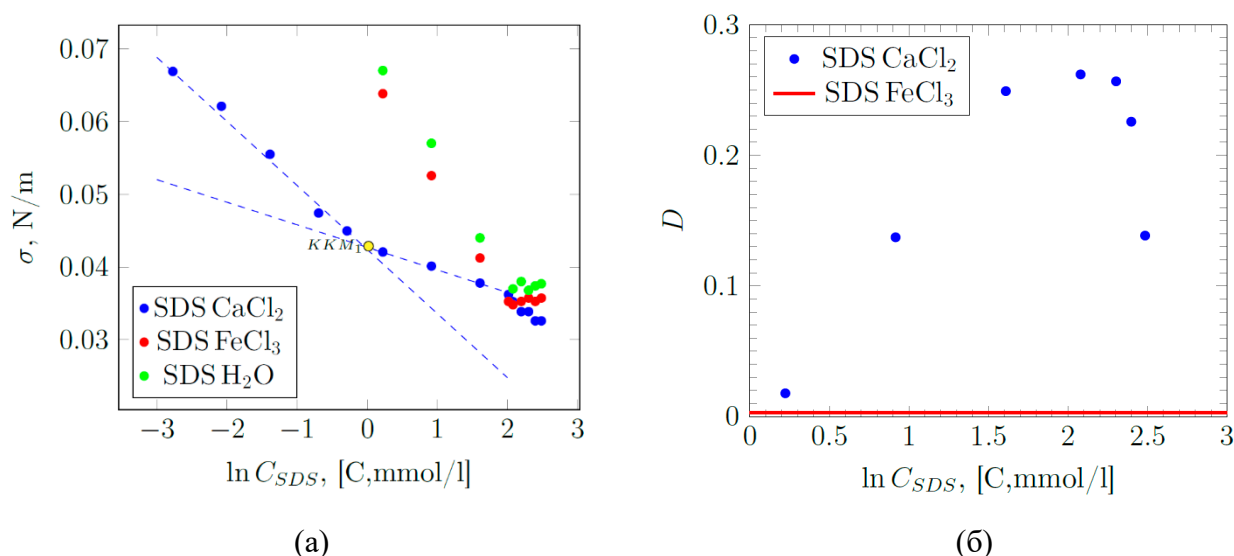


Рис. 2. (а) график зависимости поверхностного натяжения от концентрации SDS ($\text{N/m} - \text{H/m}$, $\text{mmol/l} - \text{ммоль/л}$); (б) зависимость оптической плотности раствора от концентрации SDS

Участок концентраций 0.75 – 5.0 ммоль/л соответствует образованию мицелл SDS и увеличению их количества, участок 5 – 10 ммоль/л (плато) – росту мицелл до некоторого критического размера, участок 10 – 12 ммоль/л – понижение оптической плотности при увеличении концентрации ПАВ – связан агрегацией и последующей седиментацией мицелл SDS.

В изученных растворах соли железа практически не оказывают влияние на процесс агрегации ПАВ, что связано с его низким содержанием, регламентируемым нормативными документами. Для проведения сравнительного анализа необходимо изучение физико-химических параметров растворов ПАВ при одинаковой ионной силе раствора.

4. Выводы

Обнаружено, что помутнение раствора SDS, приготовленного на жёсткой воде, приводящее к затруднению регистрации диаметра пузырьков, вызвано высаливанием ПАВ.

Метод висячей капли показал, что введение солей кальция снижает ККМ SDS с 7.5 до 1.1 ммоль/л, тогда как ионы железа изученного модельного раствора не оказывают существенного влияния на данную характеристику.

Спектрофотометрическим методом было определено, что процесс высаливания SDS в присутствии ионов кальция включает в себя стадии образования и роста мицелл с их последующей агрегацией и седиментацией. При этом оптическая плотность в растворах SDS, содержащих ионы железа, не изменялась.

Таким образом, наибольший вклад в помутнение раствора вносится ионами кальция, присутствующими в жёсткой воде. Ионы железа в изученной нами концентрации не влияют на процессы высаливания SDS и процесс помутнения раствора.

Исследование выполнено при финансовой поддержке из средств гранта Российского научного фонда (проект № 20-69-46066)

Список литературы

1. Jia H., Lian P., Leng X. *et al.* Mechanism studies on the application of the mixed cationic/anionic surfactant systems to enhance oil recovery // *Fuel*. 2019. Vol. 258. 116156. DOI: 10.1016/j.fuel.2019.116156
2. Zhang R., Xing Y., Xia Y. *et al.* Synergistic adsorption mechanism of anionic and cationic surfactant mixtures on low-rank coal flotation // *ACS omega*. 2020. Vol. 5 (32). P. 20630–20637. DOI: 10.1021/acsomega.0c02948
3. Lyubimova T., Rybkin K., Fattalov O., Kuchinskiy M., Filippov L. Experimental study of temporal dynamics of cavitation bubbles selectively attached to the solid surfaces of different hydrophobicity under the action of ultrasound // *Ultrasonics*. 2021. Vol. 117. 106516. DOI: 10.1016/j.ultras.2021.106516
4. Tao X., Liu Y., Jiang H., Chen R. Microbubble generation with shear flow on large-area membrane for fine particle flotation // *Chemical Engineering and Processing-Process Intensification*. 2019. Vol. 145. 107671. DOI: 10.1016/j.cep.2019.107671
5. Rybkin K., Kuchinskiy M., Lyubimova T., Kozlov M., Fattalov O., Fattakhova I., Sinitsyna V. Method of generation, measurement of the size and number of microbubbles in NaCl and SDS solutions of different concentrations // *Journal of Physics: Conference Series*. 2022. Vol. 2317 (1). 012007. DOI: 10.1088/1742-6596/2317/1/012007
6. Holmberg K., Lindman B., Kronberg B. Surface chemistry of surfactants and polymers. John Wiley & Sons, 2014. 496 p.
7. Котенко А. А., Хилько С. Л. Поверхностные свойства растворов дикатионных имидазолиевых ПАВ с короткими мостиковыми фрагментами // *Коллоидный журнал*. 2021. Т.83. №2. С.179–186. DOI: 10.31857/S0023291221020051.
8. Пешкова В. М., Громова М. И. Методы абсорбционной спектроскопии в аналитической химии: учебное пособие. Высшая школа, 1976. 280 с.

Моделирование вынужденного движения пластины в замкнутом объеме в развитом конвективном слое

С. А. Филимонов^{a,b}, А. А. Гаврилов^{a,b}, А. А. Дектерев^{a,b},
К. Ю. Литвинцев^a

^a Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН,
630090, Новосибирск, пр. Академика Лаврентьева, 1
email: bdk@inbox.ru

^b Сибирский федеральный университет, 660041, Красноярск, пр. Свободный, 79

В докладе представлены математическая модель и результаты численного двухмерного моделирования вынужденного горизонтального движения пластины в замкнутом объеме, нижняя стенка которого более горячая по сравнению с верхней стенкой. В условиях естественной конвекции образуются крупномасштабные подъемные течения, часть из которых перекрывается пластиной. Таким образом, наличие пластины вызывает деформацию структуры течения, что приводит пластину в движение. Численный эксперимент выполнен методами вычислительной гидродинамики совместно с методом погруженных границ, использующимся для моделирования движения пластины.

Ключевые слова: численное моделирование; метод погруженных границ; естественная конвекция

Simulation of forced motion of a plate in a closed volume in a developed convective layer

S. A. Filimonov^{a,b}, A. A. Gavrilov^{a,b}, A. A. Dekterev^{a,b}, K. Yu. Litvintsev^a

^a Kutateladze Institute of Thermophysics SB RAS,
1 Akademika Lavrentieva Ave., 630090, Novosibirsk
email: bdk@inbox.ru

^b Siberian Federal University, 79 Svobodny Pr., 660041, Krasnoyarsk

The article presents a mathematical model and the results of numerical two-dimensional simulation of the forced horizontal movement of the plate in a closed volume with the hot lower wall. In this closed space, large-scale updrafts are formed by natural convection, some of which are covered by a plate. Thus, the plate causes deformation of the flow structure, which sets it to move. The numerical experiment has performed using computational fluid dynamics methods in conjunction with immersed boundary method, which has used to simulate the plate motion.

Keywords: numerical simulation; immersed boundary method; natural convection

1. Введение

Целью данной работы является разработка математической модели для расчетного исследования крупномасштабных течений, возникающих в конвективном слое, внутри которого находится подвижный объект, препятствующий конвективному потоку. Такие течения могут формироваться в атмосфере, где облачное поле является блокирующим телом, или в области взаимодействия магмы, земной коры и океана [1].

В статье [2] были представлены результаты экспериментального исследования крупномасштабного движения, возникающего на фоне развитого конвективного течения в прямоугольной подогреваемой снизу кювете, в которой на фиксированной глубине свободно плавает горизонтальный диск. Так, в указанной работе было показано, что при определенных числах Ra и высоте зазора между диском и низом кюветы возникают колебательные движения диска.

В данной статье рассматривается возможность численного воспроизведения результатов экспериментальной работы [2] с использованием метода погруженных границ (immersed boundary method, IBM) для моделирования вынужденного движения твердого тела [3]. На текущем этапе представлены результаты численного моделирования в двумерной постановке, когда диск заменяется бесконечной пластиной.

Использование IBM обусловлено тем, что он не требует проводить перестройку расчетной сетки при моделировании движения твердого тела в жидкости. Это связано с тем, что в IBM твердое тело «погружается» в существующую расчетную сетку, деля её на несколько подобластей: жидкость, тело и граница тела [4–6]. Основной сложностью при использовании данного метода является корректное описание взаимодействия жидкости и твердого тела в ячейках, которые пересекаются границей тела.

2. Математическая модель

Математическая модель основывается на нестационарных уравнениях Навье–Стокса для несжимаемых течений с переменной плотностью, реализованных в рамках программного комплекса «SigmaFlow» [7], и включает себя: уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) = 0, \quad (1)$$

уравнение движения:

$$\rho \frac{d\mathbf{U}}{dt} = -\nabla p + (\rho - \rho_{ref}) \mathbf{g} + \nabla \cdot [\mu (\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T)], \quad (2)$$

уравнение сохранения тепловой энергии:

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T), \quad (3)$$

уравнение состояния:

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \beta \cdot \Delta T}, \quad (4)$$

где \mathbf{U} – вектор скорости; ρ – плотность, T – температура; ρ_{ref} – характерная плотность, p – давление; μ – динамическая вязкость, λ – теплопроводность, β – коэффициент термического расширения.

Метод погруженных границ реализован следующим образом (рис. 1). В расчетной области определяются ячейки, которые находятся снаружи тела (полые точки), ячейки, которые полностью попадают внутрь расчетного тела (сплошные точки), и ячейки, которые пересекаются границей тела (маркеры в виде полукруга).

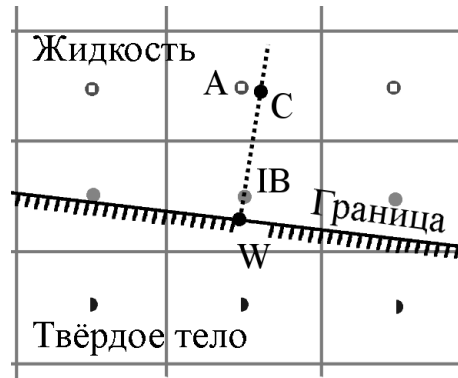


Рис. 1. Разделение расчётной области погруженной границей

В первых ячейках скорость рассчитывается прежним образом, во-вторых ячейках скорость задается равной скорости погруженного тела, а в-третьих ячейках получается путем интерполяции между скоростью на поверхности твердого тела (точка W) и скоростью в внешней относительно твердого тела части расчётной области (точка C). Для ламинарного режима течения выбрана линейная интерполяция [8]:

$$\mathbf{v}_{IB} = \frac{(\mathbf{v}_C - \mathbf{v}_W)h_1}{h_2} + \mathbf{v}_W, \quad (5)$$

где \mathbf{v}_{IB} скорость в центре ячейки IB, h_1 – расстояние между W и IB, h_2 – расстояние между W и C. Стоит отметить, что точка IB может находиться как вне твёрдого тела, так и внутри него, в таком случае h_1 берется с отрицательным знаком.

При обтекании твердого тела жидкостью на него действуют две силы: сила давления \mathbf{F}_P и сила вязкого трения \mathbf{F}_F . Сила давления определяется сумма давлений, действующих на погруженную поверхность:

$$\mathbf{F}_P = \sum_i P_C^i A^i \mathbf{norm}^i, \quad (6)$$

здесь i – ячейка, пресекаемая поверхностью твёрдого тела, P_C^i – давление в точке C, A^i – площадь пересечения твердого тела и i -ой ячейки, \mathbf{norm}^i – вектор нормали поверхности. Сила вязкого трения рассчитывается как сумма касательных напряжений:

$$\mathbf{F}_F = \sum_i \frac{(\mathbf{v}_C - \mathbf{v}_W)}{h_2} \mu A^i. \quad (7)$$

3. Постановка задачи

Моделируется двухмерное течение в замкнутой прямоугольной области, размеры которой представлены на рис. 2, полностью заполненной водой. На нижней стенке задана температура 40°C , на верхней 20°C , число Релея составляет величину $1.9 \cdot 10^7$, на боковых стенках заданы адиабатические граничные условия. Начальная температура воды равна 30°C . Возле нижней границы, на высоте 0.15 см, в область погружен параллелепипед (пластина) размером 8×0.1 см, плотность которой равна плотности воды. Движение пластины ограничено и может происходить только вдоль оси x . На всех стенках ставится условие прилипания и непротекания.

Для расчетов использовалась неравномерная расчетная сетка 2D состоящая из 40000 узлов с шагом по высоте в области движения пластины 0.025 см. Временной шаг составлял величину равную 0.1 сек.

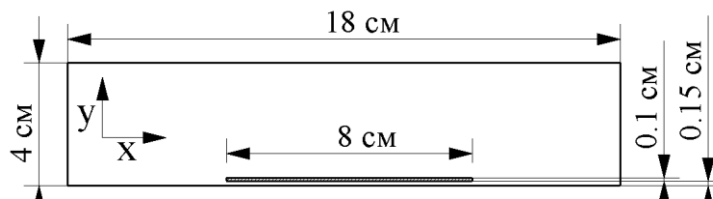


Рис. 2. Постановка задачи. Геометрия расчетной области

4. Результаты расчёта

На рисунках 3 – 6 представлены поля скорости и температур в различные моменты времени. В начальный момент времени, так как пластина находится вплотную к левой стенке, в правой части расчетной области формируется мощный восходящий конвективный поток и возникает горизонтальный градиент температуры (рис. 3). Вследствие неоднородности конвективного течения на пластину начинает действовать сила трения (рис. 6а), которая приводит пластину в движение (рис. 6в, г). Далее течение начинает выстраиваться в относительно устойчивую четырёх вихревую структуру (рис. 4, 5), при этом амплитуды скорости и перемещения пластины начинают снижаться (рис. 6в, г). Примерно к 600 секунде система переходит в квазиравновесное состояние, когда устанавливается среднеобъемная температура, что видно по динамике силы давления на пластину (рис. 6б), и амплитуда колебаний пластины становится менее 2 см.

Сопоставления результатов численного моделирования с экспериментом показывают, что переход от трехмерной задачи [2] к двумерной постановке изменяет характер взаимодействия естественного конвективного течения в замкнутой области с пластиной (диском). В двумерной постановке система становится более устойчивой, в ней формируется четырех вихревая структура течения, а движение пластины ограничивается не боковыми стенками, а колебаниями с небольшой амплитудой в центральной части.

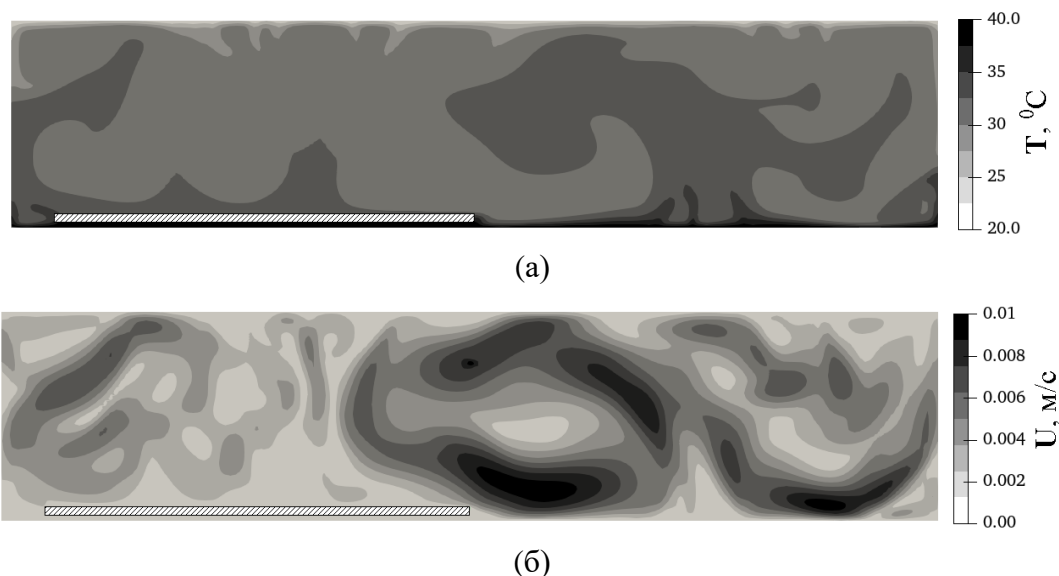


Рис. 3. Поля: (а) температуры и (б) магнитуды скорости через 30 секунд после начала расчёта

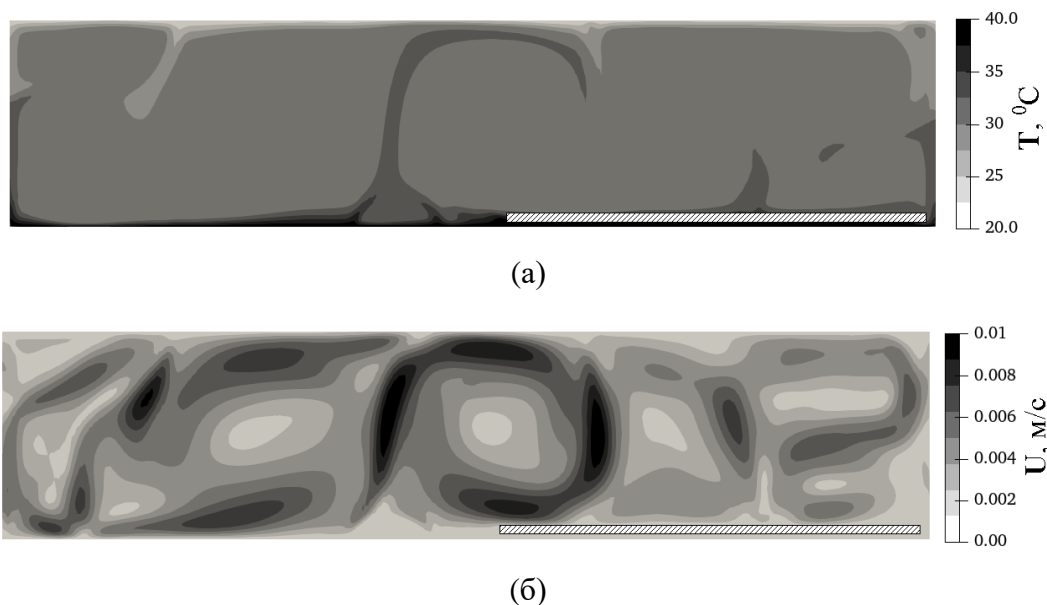


Рис. 4. Поля: (а) температуры и (б) магнитуды скорости через 160 секунд после начала расчёта

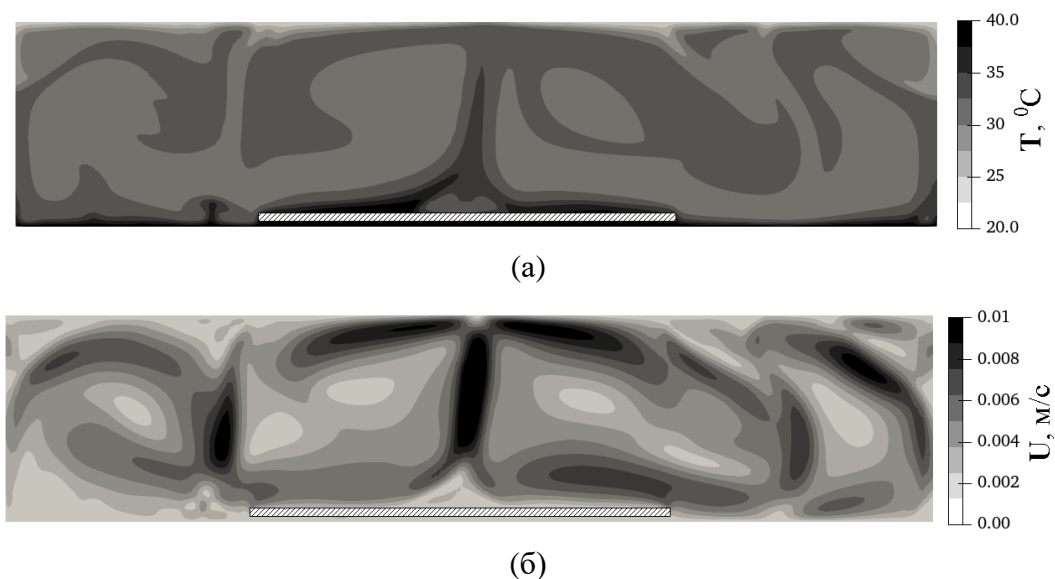


Рис. 5. Поля: (а) температуры и (б) магнитуды скорости через 660 секунд после начала расчёта

5. Заключение

С использованием метода погруженных границ разработана математическая модель для расчета движения пластины в замкнутом объеме в развитом конвективном слое.

Результаты численного моделирования показывают, что двумерная постановка, используемая в статье, приводит к формированию течения отличного от наблюдаемого в эксперименте. В дальнейшем планируется переход к пространственному моделированию и более детальная проверка точности предложенного метода расчета.

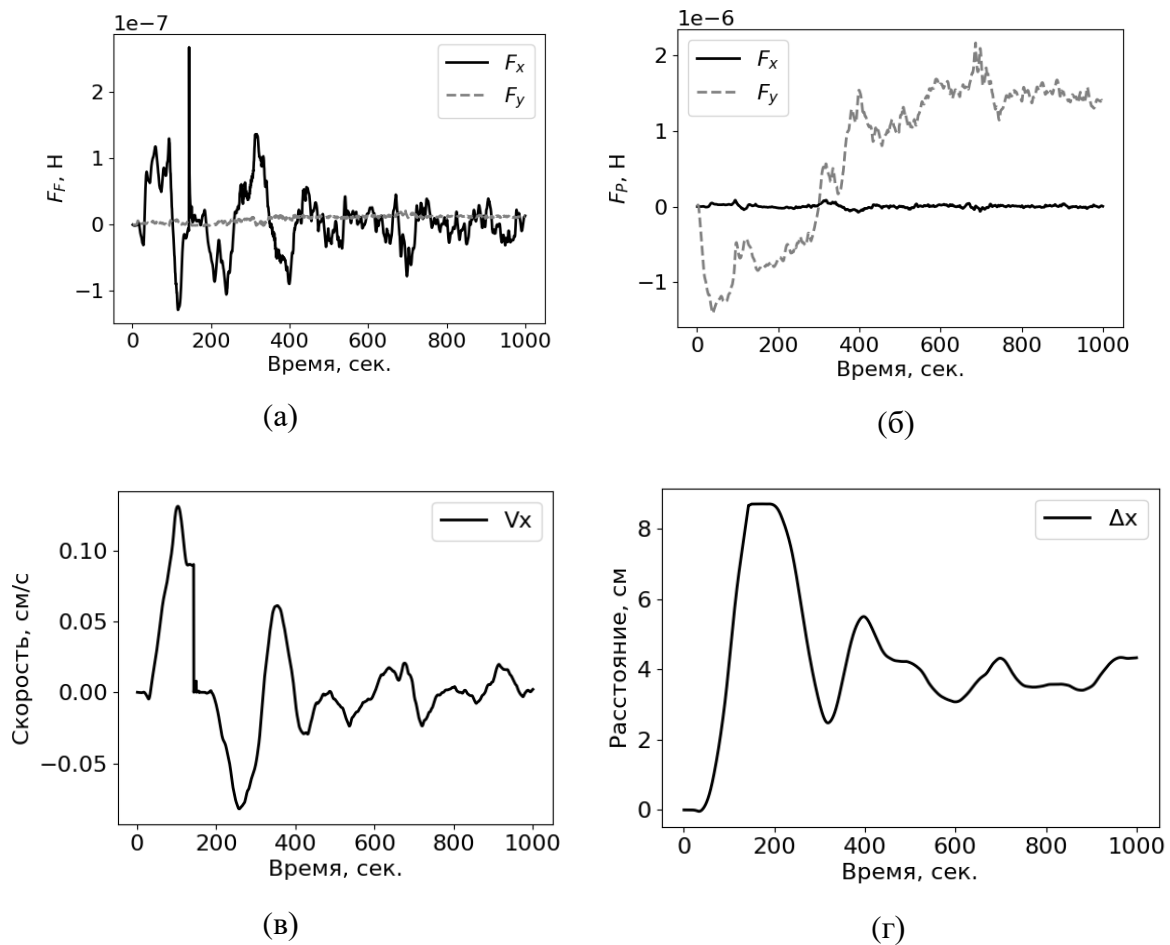


Рис. 6. Динамика сил трения (а) и давления (б), действующих на пластину, скорости (в) и перемещения (г) пластины

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-61-00098).

Список литературы

1. Zhang J., Libchaber A. Periodic boundary motion in thermal turbulence // *Physical Review Letters*. 2000. Vol. 84 (19). P. 4361–4364. DOI: 10.1103/PhysRevLett.84.4361
2. Попова Е. Н., Фрик П. Г. Крупномасштабные течения в турбулентном конвективном слое с погруженным в него подвижным теплоизолятором // *Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа*. 2003. Т. 6. С. 41–47.
3. Peskin C. S. Flow patterns around heart valves: A numerical method // *Journal of Computational Physics*. 1972. Vol. 10 (2). P. 252–271. DOI: 10.1016/0021-9991(72)90065-4
4. Mittal R., Iaccarino G. Immersed boundary methods // *Annual Review of Fluid Mechanics*. 2005. Vol. 37 (1). P. 239–261. DOI: 10.1146/annurev.fluid.37.061903.175743
5. Bandringa H. Immersed boundary methods // *Master Thesis in Applied Mathematics. Institute of Mathematics and Computing Science*, 2010. 133 p. DOI: 10.29172/7cd48089-be71-4809-9288-ffdf82e55a20

6. *Kim W., Choi H.* Immersed boundary methods for fluid-structure interaction: A review // *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 2019. Vol. 75. P. 301–309. DOI: 10.1016/j.ijheatfluidflow.2019.01.010
7. *Dekteryev A. A., Litvintsev K. Yu., Gavrilov A. A., Kharlamov E. B., Filimonov S. A.* The development of free engineering software package for numerical simulation of hydrodynamics, heat transfer, and chemical reaction processes // *Bulletin of the South Ural State University, Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*. 2017. Vol. 10 (4). P. 105–112. DOI: 10.14529/mmp170410
8. *Roman F., Armenio V., Fröhlich J.* A simple wall-layer model for large eddy simulation with immersed boundary method // *Physics of Fluids* 2009. Vol. 21 (10). 101701. DOI: 10.1063/1.3245294

Электрофорез сильно заряженной диэлектрической наночастицы

Е. А. Франц^a, Е. А. Демехин^{a,b}

^a Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации,
125167, Москва, пр. Ленинградский, 49/2
email: eafrants@fa.ru

^b Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Научно-исследовательский институт механики, 119192, Москва, Мичуринский пр., 1
email: edemekhi@gmail.com

В работе численно исследуется движение сферической диэлектрической наночастицы с высоким значением поверхностного заряда, в растворе электролита под действием внешнего электрического поля, которое меняется в широком диапазоне. Даже при малой напряженности электрического поля наблюдается сильное отклонение скорости частицы от линейной зависимости Смолуховского. Численное решение задачи электрофореза сравнивается с имеющимися экспериментальными работами. Получено хорошее соответствие экспериментам.

Ключевые слова: нелинейный электрофорез; наночастица; поверхностный заряд; дзета-потенциал

Electrophoresis of a highly charged dielectric nanoparticle

Е. А. Frants^a, Е. А. Demekhin^{a,b}

^a Financial University under the Government of the Russian Federation,
49 Leningradsky Pr., 125167, Moscow
email: eafrants@fa.ru

^b Moscow State University, Research Institute of Mechanics,
1 Michurinsky Pr., 119192, Moscow
email: edemekhi@gmail.com

The aim of work is to numerically study the motion of a spherical dielectric nanoparticle with a high surface charge in an electrolyte solution under the action of an external electric field, which intensity varies over a wide range. Even at a low electric field strength, a strong deviation of the particle velocity from the linear dependence of Smoluchowski is observed. The numerical solution of the electrophoresis problem is compared with the available experimental works. Good agreement with experiments is obtained.

Keywords: nonlinear electrophoresis; nanoparticle; surface charge; zeta potential

1. Введение

Сегодня электрофорез находит применение в микрофлюидике, коллоидной химии, секвенировании ДНК, адресной доставке лекарств, аналитической химии и это лишь некоторые области. Электрофорез является сложным физическим явлением, находящемся на стыке наук: гидромеханики, электростатики и электрохимии.

Более 100 лет назад Смолуховским была получена известная формула скорости электрофореза, которая предсказывает линейную зависимость скорости частицы от приложенного электрического поля. Позднее было показано, что она применима только в случае слабого электрического поля и небольшой величины поверхностного заряда [1]. Даже в слабом электрическом поле при достаточно большом значении поверхностного заряда наблюдается существенное отклонение от линейной зависимости [2–4]. Отклонение от формулы Смолуховского, в частности, связано с тангенциальным потоком ионов или так называемой «поверхностной проводимостью» в слое Дебая. Она возникает из-за заметного накопления противоионов в данном слое при достаточно больших дзета-потенциалах [1].

2. Математическая постановка задачи

Рассматривается движение сферической диэлектрической микрочастицы в растворе бинарного электролита под действием внешнего электрического поля напряженности E_∞ . Коэффициенты диффузии катионов и анионов принимаются равными; движение рассматривается в стоковском приближении. Так как рассматриваемая частица имеет сферическую форму, то систему уравнений Нернста–Планка–Пуассона–Стокса удобнее записать в сферической системе координат с началом в центре частицы и считать движущейся со скоростью частицы. Задача считается осесимметричной, поэтому ограничимся зависимостью только от одного угла и записью уравнений в осесимметричной постановке:

$$\frac{\partial c^\pm}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla c^\pm = \nabla \cdot (c^\pm \nabla \Phi) + \nabla^2 c^\pm; \quad (1)$$

$$\nu^2 \nabla^2 \Phi = c^- - c^+; \quad (2)$$

$$-\nabla P + \nabla^2 \mathbf{U} = (c^+ - c^-) \frac{\kappa}{\nu^2} \nabla \Phi = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{U} = 0. \quad (3)$$

Здесь c^\pm – концентрации катионов и анионов, \mathbf{U} – вектор скорости, Φ – потенциал электрического поля, P – давление, ν – число Дебая и κ – коэффициент сцепления между гидродинамической и электростатической частями задачи. В качестве базисных величин для приведения к безразмерному виду берутся радиус микрочастицы, коэффициент диффузии, динамическая вязкость, концентрация электролита на бесконечности и термический потенциал. Электролит предполагается бинарным с зарядовым числом анионов и катионов равным 1.

На поверхности наночастицы ставятся следующие краевые условия: отсутствие потоков ионов обоих знаков; скачек электрического потенциала, вызванный наличием поверхностного заряда σ ; компоненты скорости удовлетворяют условиям непроницаемости и прилипания:

$$r=1: c^+ \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\partial c^+}{\partial r} = 0, \quad c^- \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\partial c^-}{\partial r} = 0, \quad \Phi = \varphi, \quad v \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \delta v \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \sigma, \quad \mathbf{U} = 0. \quad (4)$$

Вдали от микрочастицы концентрация стремится к равновесной, вектор напряженности и вектор скорости предполагаются параллельными оси x декартовой системы координат:

$$r \rightarrow \infty: c^+ \rightarrow 1, \quad c^- \rightarrow 1, \quad \mathbf{U} \rightarrow (-U_\infty \sin \theta, U_\infty \cos \theta), \quad \Phi = -E_\infty r \cos \theta. \quad (5)$$

Задача замыкается добавлением начальных условий: концентрации катионов и анионов предполагались равными равновесной концентрации, $t = 0: c^\pm = 1$.

3. Результаты численного моделирования

Для численного решения задачи был использован метод конечных разностей второго порядка точности. Расчеты были проведены в соответствии с диапазонами экспериментальной работы [2] для двух типов частиц: PMMA с диаметром 520 нм и PS с диаметром 620 нм. Величина напряженности электрического поля была ограничена 2.5 кВ/см. Плотность поверхностного заряда составляла от -11.2 мкКл/м² до -51.2 мкКл/м². Расчеты показывают неплохое соответствие экспериментальным данным.

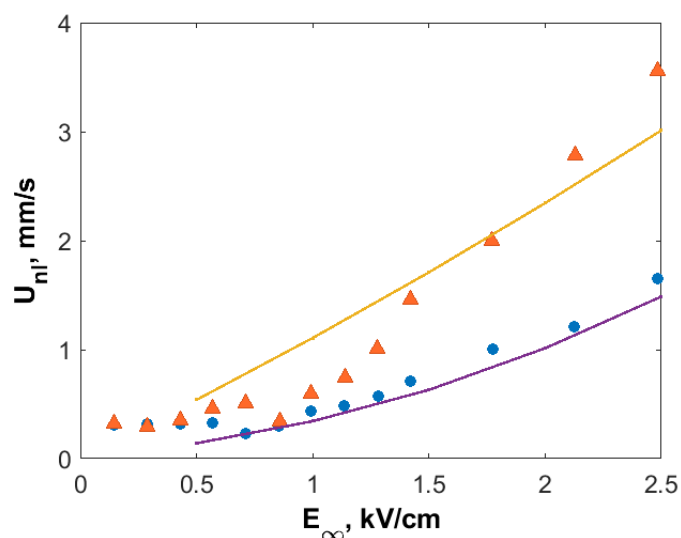


Рис. 1. Сравнение нелинейной компоненты скорости электрофореза U_{nl} из [2] с результатами численного моделирования для частиц с высоким поверхностным зарядом. Здесь маркером отмечены экспериментальные наблюдения (круглый маркер соответствует наночастицам PS 620, треугольный – PMMA 520). Линии соответствуют численным результатам

4. Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-79-00082).

Список литературы

1. *Khair A. S.* Nonlinear electrophoresis of colloidal particles // *Current Opinion in Colloid & Interface Science*. 2022. Vol. 59. 101587. DOI: 10.1016/j.cocis.2022.101587

2. Tottori S., Misiunas K., Keyser U. F., Bonthuis D. J. Nonlinear electrophoresis of highly charged nonpolarizable particles // *Physical Review Letters*. 2019. Vol. 123. 014502. DOI: 10.1103/PhysRevLett.123.014502
3. Cardenas-Benitez B., Jind B., Gallo-Villanueva R. C., Martinez-Chapa S. O., Lapidco-Encinas B. H., Perez-Gonzalez V. H. Direct current electrokinetic particle trapping in insulator-based microfluidics: theory and experiments // *Analytical Chemistry*. 2020. Vol. 92 (19). P. 12871–12879. DOI: 10.1021/acs.analchem.0c01303
4. Antunez-Vela S., Perez-Gonzalez V. H., Coll De Peña A., Lentz C. J., Lapidco-Encinas B. H.. Simultaneous Determination of Linear and Nonlinear Electrophoretic Mobilities of Cells and Microparticles // *Analytical Chemistry*. 2020. Vol. 92 (22). P. 14885–14891. DOI: 10.1021/acs.analchem.0c03525

Возникновение концентрационной конвекции в длинной прямоугольной области пористой среды

М. Р. Хабин^{a,b}, Б. С. Марышев^{a,b}

^a Пермский государственный национальный исследовательский университет, 614990, Пермь, ул. Букирева, 15

^b Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1
email: mikhail.khabin@mail.ru

Исследуется течение смеси через массив пористой среды при заданных горизонтальных перепадах давления и концентрации. Целью исследования является определение условий возникновения концентрационной конвекции в условиях характерных для стандартного эксперимента по изучению адсорбционно десорбционных свойств пористой среды. Решена двумерная задача устойчивости режима однородного горизонтального просачивания смеси через прямоугольную область пористой среды. Предполагалось, что вертикальный размер области меньше горизонтального в 10 раз. Получены нейтральные кривые в пространстве параметров задачи. Проанализированы зависимости критического значения числа Релея-Дарси и частоты нейтральных возмущений от параметров задачи.

Ключевые слова: концентрационная конвекция; пористая среда; устойчивость течения

The onset of concentration-induced convection in a long rectangular region of porous medium

M. R. Khabin^{a,b}, B. S. Maryshev^{a,b}

^a Perm State University, 15 Bukireva St., 614990, Perm

^b Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, 1 Akademika Koroleva St., 614013, Perm
email: mikhail.khabin@mail.ru

A study investigates the flow of a mixture through a massif of porous medium, having specified horizontal pressure differentials and specified concentration. The aim of the research is to determine the conditions for the onset of concentration-induced convection when the conditions are similar to a standard experiment of studying the adsorption-desorption characteristics of porous medium. The two-dimensional problem of the stability of homogeneous horizontal seepage of the mixture through a rectangular region of porous medium is solved. It is assumed that the vertical size of the region is 10 times smaller than the horizontal one. Neutral curves in the parameter space of the problem are obtained. The paper also analyzes the dependences of the critical value of the Rayleigh-Darcy number and the neutral disturbances frequency on the parameters of the problem.

Keywords: concentration convection; porous medium; flow stability

1. Введение

Рассматривается двумерная задача устойчивости течения смеси через прямоугольную область пористой среды характерной для стандартного эксперимента по изучению адсорбционно десорбционных свойств такой среды [1]. Предполагается что вертикальный размер области меньше горизонтального в 10 раз. Между вертикальными границами задаётся перепад давления и концентрации, на горизонтальных границах условие отсутствия потока несущей жидкости и примеси. Задача решается в приближении Дарси–Буссинеска [2] транспорт примеси описывается в рамках линейной ММ модели [3]. Задача устойчивости решается методом построения фундаментальной системы решения (ФСР) [4].

2. Постановка задачи

Исследуется двумерная задача транспорта двухкомпонентной примеси через массив пористой среды. Течение в приближение Дарси-Буссинеска [2], транспорт примеси описывается линейной ММ моделью [3].

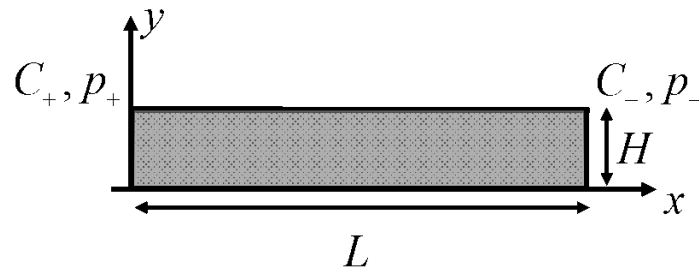


Рис. 1. Постановка задачи

Течение описывается в ограниченной прямоугольной области размерами $L \times H$ при том что $L > H$ (рис. 1). На вертикальных границах области поддерживается постоянный перепад давления $\Delta p = p_+ - p_-$ и концентрации примеси $\Delta C = C_+ - C_-$. Задача в безразмерной форме может быть записана в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial(c+q)}{\partial t} = \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \text{Pe} \left(\frac{\partial c}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y} \right) - \text{Rpe} \frac{\partial c}{\partial y}, \\ \frac{\partial q}{\partial t} = ac - bq, \\ \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - \frac{\text{Rp}}{\text{Pe}} \frac{\partial c}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где c – концентрация мобильной компоненты примеси, q – концентрация немобильной компоненты примеси, p – давление, a – коэффициент адсорбции, b – коэффициент десорбции. Rp – число Релея для пористой среды, Pe – число Пекле. Граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{y=0,h} &= \frac{\text{Rp}}{\text{Pe}} c, \quad p(0, y, t) = 1, \quad p(1, y, t) = 0, \\ \left. \frac{\partial c}{\partial y} \right|_{y=0,h} &= 0, \quad c(0, y, t) = 1, \quad c(1, y, t) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Начальные условия получены как решение стационарной задачи:

$$\begin{aligned} c(x, y, 0) &= 1 - \frac{1 - e^{\text{Pe} \cdot x}}{1 - e^{\text{Pe}}}, \\ q(x, y, 0) &= \frac{a}{b} \left(1 - \frac{1 - e^{\text{Pe} \cdot x}}{1 - e^{\text{Pe}}} \right), \\ p(x, y, 0) &= 1 - x. \end{aligned} \quad (3)$$

3. Метод решения

Исследуется устойчивость системы (1). Для этого из системы (1) получаем уравнения для возмущений:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\tilde{c} + \tilde{q})}{\partial t} = \Delta \tilde{c} - \text{Pe} \cdot \frac{\partial \tilde{c}}{\partial x} + \text{Pe} \frac{\partial c_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}, \\ \frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} = a \tilde{c} - b \tilde{q}, \\ \Delta \tilde{p} = \frac{\text{Rp}}{\text{Pe}} \frac{\partial \tilde{c}}{\partial y}. \end{cases} \quad (4)$$

В дальнейшем будем рассматривать нейтральные колебательные возмущения вида:

$$\tilde{c} = C(x, y) e^{i\omega t}, \quad \tilde{q} = Q(x, y) e^{i\omega t}, \quad \tilde{p} = P(x, y) e^{i\omega t}. \quad (5)$$

Полученная система решается методом Галеркина [5] для следующих базисных функций

$$\begin{aligned} C(x, y) &= c_1(x) \cos\left(\frac{\pi y}{h}\right) + c_2(x) \cos\left(\frac{2\pi y}{h}\right), \\ P(x, y) &= p_1(x) \sin\left(\frac{\pi y}{h}\right) + p_2(x) \sin\left(\frac{2\pi y}{h}\right); \end{aligned} \quad (6)$$

В результате получается система обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{cases} C_1 \frac{d^2 c_1}{dx^2} + B_1 \frac{dc_1}{dx} + A_1 c_1 + F_1(x) \frac{dp_2}{dx} = 0, \\ C_2 \frac{d^2 c_2}{dx^2} + B_2 \frac{dc_2}{dx} + A_2 c_2 + F_2(x) \frac{dp_1}{dx} = 0, \\ C_3 \frac{d^2 p_1}{dx^2} + B_3 p_1 + A_3 c_1 = 0, \\ C_4 \frac{d^2 p_2}{dx^2} + B_4 p_2 + A_4 c_2 = 0, \end{cases} \quad (7)$$

где A, B, C, F – коэффициенты зависящие от параметров задачи. Задача устойчивости решается методом ФСР.

4. Результаты

На рис. 2 представлена нейтральная кривая на плоскости параметров $Pe - R_p$. Видно, что при малых числах Пекле течение способствует возникновению конвективного движения. Увеличение скорости потока приводит к росту числа Релея-Дарси, и как следствие затрудняет возбуждение конвективного движения. Рост коэффициента адсорбции означает, что в системе осаждается большее количество примеси. Это приводит к дестабилизации, поскольку осевшая примесь является источником мобильной компоненты, которая приводит к увеличению неоднородности плотности.

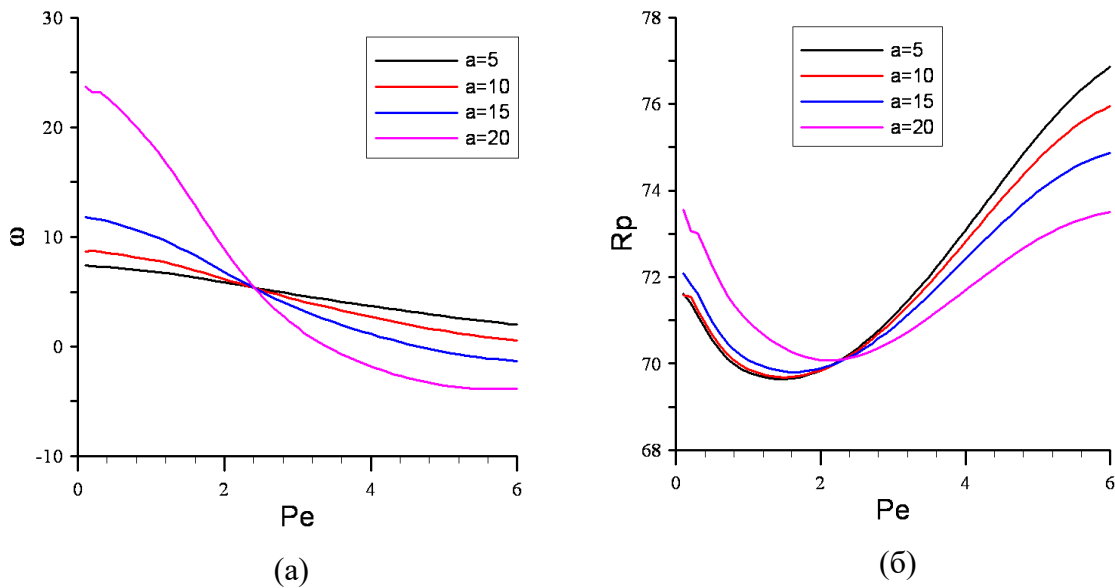


Рис. 2. Зависимость частоты нейтральных возмущений от числа Пекле для набора значений коэффициента адсорбции (а). Зависимость критического числа Релея-Дарси от числа Пекле для набора значений коэффициента адсорбции (б). Для параметра $b=3$

5. Заключение

Двумерная задача устойчивости горизонтального просачивания смеси через прямоугольную область пористой среды решалась при постоянном перепаде давления и концентрации на вертикальных границах области. Получены зависимости критического числа Релея-Дарси и частоты нейтральных возмущений от числа Пекле от параметров задачи. Проанализированы зависимости нейтральных кривых от коэффициентов, отвечающих за процессы сорбции.

6. Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ грант № 20-11-20125.

Список литературы

1. Evgrafova A. E., Kolchanova E. A., Maryshev B. S. Solute transport in a horizontal porous layer at a high solute concentration // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 2057 (1). 012031. DOI: 10.1088/1742-6596/2057/1/012031
2. Nield D. A., Bejan A. Convection in porous media. New York: springer, 2006. 654 p.

3. *Van Genuchten M. T., Wierenga P. J.* Mass transfer studies in sorbing porous media I. Analytical solutions // *Soil Science Society of America Journal*. 1976. Vol. 40 (4). P. 473–480. DOI: 10.2136/sssaj1976.03615995004000040011x
4. *Лобов Н. И., Любимов Д. В., Любимова Т. П.* Численные методы решения задач теории гидродинамической устойчивости: учебное пособие. Перм. ун-т: Пермь, 2004. 101 с.
5. *Ritz W.* Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Randwertaufgaben // *Göttingen Nachrichten, Mathematische-Physikalische Klasse*. 1908. S. 236–248.

Определение гидродинамической проницаемости мембраны при фильтрации микрополярной жидкости

Д. Ю. Ханукаева

Российский государственный университет нефти и газа (национальный исследовательский университет) им. И. М. Губкина,
119991, Москва, Ленинский пр., 65, корп. 1
email: khanuk@yandex.ru

Работа посвящена моделированию баромембранных процессов при фильтрации микрополярной жидкости. Мембрана представляется как пористая среда и описывается в рамках ячеечного подхода. Используемая модель фильтрующейся жидкости допускает наличие поступательных и вращательных степеней свободы ее элементов, которые могут испытывать помимо силовых еще и моментные напряжения. Тензоры скоростей деформаций, скоростей изгиба-кручения, силовых и моментных напряжений несимметричны. Система определяющих уравнений включает уравнение неразрывности, импульсов и моментов импульсов. В рамках ячеечной модели решена задача обтекания сферической ячейки микрополярным потоком и на основе полученного решения вычислена гидродинамическая проницаемость мембраны как ее макрохарактеристика. Для сравнения результатов расчетов с данными эксперимента все величины должны быть приведены к одним и тем же единицам. В работе показано, что формальное обезразмеривание автоматически давало нужный масштаб гидродинамической проницаемости для ньютоновской жидкости. При работе с микрополярной жидкостью введена поправка, учитывающая тот факт, что закон типа Дарси для микрополярной жидкости содержит также ее вихревую вязкость. Продемонстрирован физический смысл вида закона типа Дарси для микрополярной жидкости.

Ключевые слова: фильтрация; мембрана; гидродинамическая проницаемость; микрополярная жидкость

The definition of the hydrodynamic permeability of the membrane for the filtration of the micropolar liquid

D. Yu. Khanukaeva

Gubkin Russian State University of Oil and Gas (National Research University),
65 Leninsky Pr., 119991, Moscow
email: khanuk@yandex.ru

The work deals with baromembrane processes when the filtrating liquid is micropolar. The membrane is represented as a porous medium in the framework

of the cell model technique. The filtrating liquid consists of elements which possess translational and rotational degrees of freedom and experience stresses and couple stresses. Deformation rate tensor, curvature-twist rate tensor, stress tensor and couple stress tensor are nonsymmetric. The system of governing equations includes continuity equation, momentum, and moment of momentum equation. The flow problem for the micropolar liquid in the spherical cell is solved analytically and the solution is used for the calculation of the macro characteristic of the membrane – its hydrodynamic permeability. In order to compare theoretical results and experimental data they should be expressed in one and the same units. In the present study, it is demonstrated that the traditional nondimensional variables automatically give correct expression for the scale of the hydrodynamic permeability in case of the Newtonian liquid. For micropolar liquid it was introduced a correction factor which takes into account the fact that the Darcy-like law for the micropolar liquid includes also its rotational viscosity. The physical sense of the Darcy-like law is demonstrated.

Keywords: filtration; membrane; hydrodynamic permeability; micropolar liquid

1. Введение

Мембраны, мембранные технологии и моделирование мембранных процессов прочно вошли в современную науку и продолжают развиваться. Обзор современного состояния и перспектив развития, как экспериментальных, так и теоретических исследований мембран представлен в [1]. Под мембраной будем понимать тонкую пористую перегородку, обладающую избирательной проницаемостью для различных компонентов раствора или смеси. Предназначены мембраны для очистки, разделения или концентрирования жидких и газовых сред. Таким образом, фильтрация как процесс непосредственного задержания некоторых компонентов гетерогенной смеси является одним из множества мембранных процессов. Область применения мембранных технологий постоянно расширяется; мембраны также используют как компоненты сенсоров, топливных элементов, катализаторов, включают в гибридные технологии на той или иной стадии процесса. Изготавливаются мембраны как из неорганических материалов (керамики, металлов), так и из органических – различных полимеров. Вследствие большого многообразия методов изготовления мембран, включающих формование из растворов и расплавов, спекание порошков, травление или растяжение пленок, мембраны обладают огромным разнообразием свойств. Но это и востребовано, ввиду широчайшего спектра физико-химических процессов, в которых они участвуют. Кроме того, в подавляющем большинстве мировых мембранных лабораторий ведутся интенсивные экспериментальные исследования в направлении модификации существующих и создания новых мембранных материалов для удовлетворения тех запросов, которые возникают в ходе их эксплуатации.

В этой связи эффективным методом исследования является математическое моделирование мембранных процессов. В настоящее время развиваются как численные, так и аналитические подходы к описанию течения жидкостей и газов через пористые среды. В этих процессах следует различать поток всей смеси и потоки составляющих ее компонентов: растворителя и растворенного вещества. Причем частицы растворенного вещества могут быть как нейтральными, так и заряженными. В результате возникает три потока: конвективный (поток раствора), электромиграционный (ток ионов), диффузионный (поток частиц растворенного вещества). Причинами возникновения этих потоков могут быть три внешние движущие силы: градиент давления, градиент электрического потенциала, градиент химического

потенциала, связанный с градиентом концентрации растворенного вещества. В общем случае к ним может добавиться еще градиент температуры, приводящий к возникновению термокинетических эффектов в системе.

Полная система уравнений, описывающая перечисленные процессы, включает уравнения Стокса и Бринкмана, Нернста-Планка, Пуассона, а также уравнение сохранения энергии, и пока что не решена ни численно, ни, тем более, аналитически. Однако, существуют различные классы мембранных процессов, которые можно описать в рамках упрощенных систем, включающих только ту или иную часть упомянутых явлений. В первую очередь, это процессы, протекающие под действием градиента давления и представляющие собой фильтрацию. В зависимости от размеров задерживаемых частиц и, соответственно, необходимых для этого размерах пор мембраны различают процессы микрофильтрации, ультрафильтрации, нанофильтрации и обратного осмоса, который иногда называют гиперфильтрацией. Очевидно, по мере уменьшения размеров пор мембраны требуется все больший градиент давления для поддержания процесса. К примеру, процессы микрофильтрации идут при разностях давлений по обе стороны мембраны в 0.5 – 2 атмосферы, а обратный осмос – при разностях давлений в десятки атмосфер. Но и размер задерживаемых частиц меняется, соответственно, от микронов до нанометров и ангстремов.

Макроскопической характеристикой мембран при баромембранных процессах является гидродинамическая проницаемость L_{11} , которая определяется как коэффициент пропорциональности между скоростью фильтрации и приложенным градиентом давления. Наличие двух индексов у этой величины неслучайно. Она представляет собой первый элемент первой строки матрицы коэффициентов Онзагера, которая, в свою очередь, выражает постулат о линейной связи потоков и вызывающих их сил [2]. Наличие недиагональных элементов в этой матрице свидетельствует о присутствии перекрестных эффектов. Скажем, коэффициент L_{12} , связывающий градиент электрического потенциала и скорость течения растворителя, указывает на то, что движение заряженных частиц под действием электрического поля вовлекает в движение и их гидратные оболочки, тем самым внося вклад в поток растворителя (воды). Симметричный ему коэффициент L_{21} характеризует обратный эффект – ток течения, т.е. движение ионов из раствора за счет увлечения их растворителем под действием приложенного градиента давления. Разумеется, перекрестные эффекты вносят существенно меньший вклад в поток, чем прямые, причем, могут как усиливать, так и ослаблять его.

В данной работе будет рассмотрен коэффициент L_{11} , который имеет наглядный механический смысл. Если рассмотреть мембрану как единую пористую среду с проницаемостью k и применить к ней закон Дарси $\mu \mathbf{v} = -k \nabla p$, где μ – вязкость жидкости, \mathbf{v} – скорость фильтрации, ∇p – приложенный градиент давления, то L_{11} представляет собой проницаемость данной среды, отнесенную к вязкости фильтрующейся жидкости. Таким образом, величина гидродинамической проницаемости доступна для экспериментального определения. С другой стороны, она может быть вычислена на основе решения задачи обтекания элемента пористой структуры в рамках той или иной модели мембраны как пористой среды. Верификация модели в простых условиях открывает возможность постановки более сложных вычислительных экспериментов с учетом микроструктуры как самой мембраны, так и фильтрующейся жидкости.

При моделировании гидродинамических процессов в таких стесненных условиях как поровое пространство мембраны, становится существенной структура фильтрующейся жидкости. Данное утверждение подкреплено рядом

экспериментальных фактов, таких как аномальное возрастание вязкости в тонких пленках, аномальные расходы в субмикронных капиллярах, а также свидетельствами исследователей в области микрофлюидики. Однако, все имеющиеся модели баромембранных процессов разработаны для классической ньютоновской жидкости. В данной работе фильтрующаяся жидкость описывается в рамках микрополярной модели или среды Коссера [3]. Математический аппарат для описания простых микрожидкостей с линейным уравнением состояния был введен Эрингеном [4, 5]. Частицы такого континуума обладают полем линейных и угловых скоростей. Они испытывают силовые и моментные напряжения. А в систему уравнений движения помимо уравнения неразрывности и импульсов входит уравнение моментов импульсов. Течение микрополярной жидкости в пористой области описывается уравнением типа Бринкмана, содержащем член типа Дарси, в котором фигурирует не просто динамическая вязкость жидкости μ , а ее сумма с вихревой вязкостью κ , присущей микрополярной среде. В данной работе этот факт впервые учтен в определении гидродинамической проницаемости мембраны. Исследование зависимости гидродинамической проницаемости от свойств фильтрующейся жидкости продемонстрировало их существенное влияние на данную характеристику.

2. Микрополярная жидкость

2.1. Основные уравнения микрополярной среды

Микрополярная среда представляет собой континуум, элементы которого наделены поступательными и вращательными степенями свободы и, следовательно, ее движение описывается полем линейных \mathbf{v} и угловых $\boldsymbol{\omega}$ скоростей. Основные уравнения базируются на законах сохранения массы, импульса и момента импульса, как и в классической гидродинамике. Скорости объемной, сдвиговой, вращательной деформаций, а также скорости изгиба и кручения определяются, соответственно, тензорами скоростей деформаций $\hat{\gamma}$ и скоростей изгиба-кручения $\hat{\chi}$, которые не являются симметричными и определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}\hat{\gamma} &= (\nabla \mathbf{v})^T - \hat{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\omega}, \\ \hat{\chi} &= (\nabla \boldsymbol{\omega})^T,\end{aligned}$$

где $\hat{\varepsilon}$ – тензор Леви-Чивиты, а верхний индекс T означает транспонирование.

В отличие от моделей неньютоновских жидкостей, модель простой микрополярной жидкости связывает эти тензоры линейным образом с тензорами силовых и моментных напряжений, \hat{t} и \hat{m} , соответственно. Коэффициенты в этих связях имеют смысл вязкостей: μ – динамическая вязкость, κ – вихревая вязкость, α , δ , ζ – угловые вязкости. Таким образом, уравнения состояния микрополярной жидкости имеют вид

$$\begin{aligned}\hat{t} &= -p\hat{G} + 2\mu\hat{\gamma}^{(S)} + 2\kappa\hat{\gamma}^{(A)}, \\ \hat{m} &= \alpha(\text{tr } \hat{\chi})\hat{G} + 2\delta\hat{\chi}^{(S)} + 2\zeta\hat{\chi}^{(A)},\end{aligned}$$

где \hat{G} – метрический тензор, верхние индексы (S) и (A) обозначают, соответственно, симметричную и кососимметричную части тензоров. Заметим, что введение второго коэффициента вязкости, как и для ньютоновской несжимаемой жидкости, здесь не требуется, поскольку уравнение неразрывности микрополярной жидкости имеет классический вид:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Уравнение импульсов и моментов импульсов микрополярной жидкости можно представить в следующей форме [5, 6]

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) &= \rho \mathbf{F} - \nabla p + (\mu + \kappa) \Delta \mathbf{v} + 2\kappa \nabla \times \boldsymbol{\omega}, \\ \rho \hat{J} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) &= \rho \mathbf{L} + (\alpha + \delta - \zeta) \nabla \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} + (\delta + \zeta) \Delta \boldsymbol{\omega} + 2\kappa \nabla \times \mathbf{v} - 4\kappa \boldsymbol{\omega}, \end{aligned}$$

где ρ – плотность жидкости, \hat{J} – тензор моментов инерции, \mathbf{F} , \mathbf{L} – плотности объемных сил и моментов сил, действующих на среду.

2.2.Обтекание сферы микрополярной жидкостью

Рассмотрим классическую задачу стационарного обтекания твердой непроницаемой сферы бесконечным однородным потоком микрополярной жидкости в отсутствие внешних сил и моментов. Течение будем считать достаточно медленным для применимости приближения Стокса. Сферическую систему координат (r, θ, φ) введем так, чтобы ось $\theta = 0$ совпадала с направлением вектора скорости однородного набегающего потока \mathbf{U} . В силу симметрии задачи, искомые векторы линейной и угловой скоростей имеют следующие координаты $\mathbf{v} = \{u(r, \theta); v(r, \theta); 0\}$, $\boldsymbol{\omega} = \{0; 0; \omega(r, \theta)\}$. При этом поле угловых скоростей становится бездивергентным, и система уравнений движения принимает вид

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \\ (\mu + \kappa) \Delta \mathbf{v} + 2\kappa \nabla \times \boldsymbol{\omega} &= \nabla p, \\ (\delta + \zeta) \Delta \boldsymbol{\omega} + 2\kappa \nabla \times \mathbf{v} - 4\kappa \boldsymbol{\omega} &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Введем безразмерные переменные следующим образом:

$$\tilde{r} = \frac{r}{R_s}, \quad \tilde{u} = \frac{u}{U}, \quad \tilde{v} = \frac{v}{U}, \quad \tilde{\omega} = \omega \frac{R_s}{U}, \quad \tilde{p} = p \frac{R_s}{U\mu}, \tag{2}$$

где R_s – радиус сферы. Тогда система уравнений (1) примет вид

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \\ \Delta \mathbf{v} + 2N^2 \nabla \times \boldsymbol{\omega} &= (1 - N^2) \nabla p, \\ L^2 \Delta \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \frac{N^2}{1 - N^2} \nabla \times \mathbf{v} - \frac{N^2}{1 - N^2} \boldsymbol{\omega} &= 0, \end{aligned} \tag{3}$$

где знак тильда опущен и введены два безразмерных параметра: число микрополярности $N^2 = \kappa / (\mu + \kappa)$ и масштаб микрополярности $L^2 = (\delta + \zeta) / (4\mu R_s^2)$.

Решение данной задачи известно, оно было получено рядом авторов различными способами. Явные аналитические выражения для компонент скоростей и давления можно найти, например, в работе [7]. Там же рассмотрены различные условия на поверхности сферы, которые для микрополярной жидкости не ограничиваются прилипанием и проскальзыванием, как в случае ньютоновской жидкости. Также в работе [7] обобщены выражения для силы сопротивления и крутящего момента, которые испытывает сфера при различных условиях на ее поверхности. Очевидно, в силу симметрии крутящий момент равен нулю независимо от этих граничных условий.

Сила сопротивления, напротив, существенно зависит от способа взаимодействия жидкости и поверхности сферы. Практический интерес для данной работы имеет выражение для проекции силы сопротивления F_0 на направление потока при условиях гиперприлипания на поверхности сферы, а именно, $u(R_s, \theta) = v(R_s, \theta) = \omega(R_s, \theta) = 0$. В размерных обозначениях данной работы это выражение имеет вид

$$F_0 = 6\pi UR_s \mu \left(1 + \frac{\frac{\kappa}{\mu}}{1 + 2R_s \sqrt{\frac{\kappa(\mu + \kappa)}{\mu(\delta + \zeta)}}} \right).$$

Отметим, что при переходе к ньютоновской жидкости ($\kappa \rightarrow 0$) в выражении для F_0 получаем известную формулу Стокса. А при переходе к пределу при $R_s \rightarrow 0$ получим $F_0|_{R_s \rightarrow 0} \simeq 6\pi UR_s(\mu + \kappa)$, т.е. формулу типа Стокса, где вместо динамической вязкости жидкости фигурирует ее сумма с вихревой вязкостью.

2.3. Фильтрация микрополярной жидкости

Фильтрация ньютоновских жидкостей описывается законом Дарси или уравнением Бринкмана при необходимости учитывать влияние межфазных поверхностей на область течения. Несмотря на то, что изначально закон Дарси экспериментальный, впоследствии он получил строгое обоснование и теоретический вывод наряду с уравнением Бринкмана. Известно, что для неньютоновских жидкостей такая простая связь скорости фильтрации и перепада давления, как в законе Дарси, не наблюдается. В то же время, фильтрация микрополярных жидкостей подчиняется уравнению типа Бринкмана, как строго показано в работе [8] методом осреднения уравнений Навье-Стокса по репрезентативному объему. Таким образом, система уравнений медленного стационарного движения микрополярной жидкости в пористой среде в отсутствие внешних сил и моментов имеет вид [8]

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \\ \frac{\mu + \kappa}{\varepsilon} \Delta \mathbf{v} + 2 \frac{\kappa}{\varepsilon} \nabla \times \boldsymbol{\omega} - \frac{\mu + \kappa}{k} \mathbf{v} &= \nabla p, \\ (\alpha + \delta - \zeta) \nabla \langle \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} \rangle + (\delta + \zeta) \Delta \boldsymbol{\omega} + 2\kappa \nabla \times \mathbf{v} - 4\kappa \boldsymbol{\omega} &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где ε и k – соответственно, пористость и проницаемость пористой среды, а в уравнении моментов фигурирует объемное среднее от дивергенции угловой скорости $\langle \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} \rangle$. В задачах, обладающих симметрией и важных для практики, этот член исчезает.

Обратим внимание на член типа Дарси в уравнении импульсов системы (4). Вместо динамической вязкости, как в классическом члене Дарси, он содержит сумму $\mu + \kappa$, как и формула типа Стокса для микрополярной жидкости. Отметим, что Бринкман выписал свое уравнение эмпирически, рассматривая пористую среду, как набор сфер, создающих дополнительное, Стоксовское сопротивление к потоку жидкости наряду с вязкостью. Строгий математический вывод этого уравнения был дан значительно позднее и показал, что уравнение Бринкмана является поправкой второго порядка к закону Дарси. В этом смысле уравнение типа Бринкмана для микрополярной жидкости также является поправкой к закону, который можно интерпретировать как закон типа Дарси для микрополярной жидкости. И важно, что в нем фигурирует вихревая вязкость наряду с динамической.

3. Течения в мембранах

3.1. Ячеечные модели

При моделировании баромембранных процессов материал, из которого изготовлена мембрана, необходимо представлять в рамках той или иной модели пористой среды. Эффективным оказался ячеечный подход Хаппеля и Бреннера. В рамках этого приближения пористая среда, заполненная жидкостью, заменяется на набор идентичных ячеек сферической или цилиндрической формы. Каждая ячейка содержит твердое непроницаемое ядро и жидкую оболочку, концентрическую или соосную. Относительные размеры ядра выбираются таким образом, чтобы объем жидкой части ячейки совпадал с пористостью мембраны как целого. Пространством между ячейками пренебрегают. Взаимодействие ячеек учитывается при помощи граничных условий на их поверхностях. Градиент давления на одной ячейке считается равным градиенту давления на всей мембране. Тем самым задача фильтрации сквозь мембрану сводится к задаче обтекания уединенной ячейки. Цилиндрическую форму ячеек выбирают для моделирования волокнистых мембран, сферическую – для глобулярных. Иногда рассматривают сфероидальную форму ячеек. В некоторых случаях необходимо вводить в ячейку дополнительный пористый слой, покрывающий ядро, и проницаемый для жидкости. Тогда задача усложняется и требует сопряжения решений в жидкой и пористой областях на их границе. Тем не менее, задачи в таких постановках решены аналитически как для ньютоновской жидкости, так и для микрополярной, например, для сферической геометрии в работах [9] и [10].

Система уравнений, описывающая стационарную фильтрацию микрополярной жидкости, скажем, в сферической композитной ячейке, включает системы (1) и (4). На поверхности твердого ядра ячейки ставятся условия гиперприлипания. На поверхности пористой и жидкой области непрерывным образом сшиваются компоненты скоростей и напряжений. А на внешней границе ячейки ставится условие однородности радиальной компоненты линейной скорости, к которому добавляются еще два условия, выражающие способ взаимодействия ячеек.

При заданной скорости набегающего однородного потока решением являются поля линейной и угловой скоростей, а также распределение давления.

3.2. Гидродинамическая проницаемость мембраны

Гидродинамическая проницаемость мембраны L_{11} является ее макроскопической характеристикой. В эксперименте ее определяют как отношение скорости фильтрации к градиенту давления на мембране, полагая справедливым закон Дарси для мембраны как целого.

В рамках математической модели гидродинамическую проницаемость вычисляют, имея решение задачи обтекания ячейки, в виде отношения заданной скорости набегающего потока к градиенту давления на ячейке. Он, в свою очередь, определяется как отношение силы сопротивления, которую испытывает ядро ячейки, к ее объему. Сила сопротивления находится интегрированием напряжений по поверхности ядра ячейки.

Для сравнения экспериментальной размерной величины L_{11} с безразмерными результатами теоретических расчетов, экспериментально найденную гидродинамическую проницаемость приводят к безразмерному виду, принимая во внимание соотношения (2). При этом автоматически получается, что единицей измерения гидродинамической проницаемости является квадрат характерного масштаба задачи, деленный на вязкость жидкости μ , в полном соответствии с законом

Дарси для ньютоновской жидкости. В то же время, если фильтруется микрополярная жидкость, то следовало бы отнести квадрат характерного масштаба не к μ , а к $\mu + \kappa$, чтобы получить корректное выражение для единиц измерения L_{11} . Тем не менее, применение классического способа обезразмеривания L_{11} в случае фильтрации микрополярной жидкости допустимо, если используется поправочный коэффициент, равный $\mu / (\mu + \kappa) = 1 - N^2$.

Сделанное замечание становится существенным при сравнении расчетов с данными эксперимента. На рис. 1 представлены экспериментальные точки работы [11] и расчетные кривые зависимости гидродинамической проницаемости от пористости мембраны γ . Штрихпунктирной линией показана кривая, рассчитанная по модели ньютоновской жидкости. Пунктирная линия соответствует модели микрополярной жидкости, в которой гидродинамическая проницаемость приведена к размерным единицам в масштабе, равном квадрату длины, деленному на μ . Сплошная линия построена в единицах квадрата длины, деленного на $\mu + \kappa$. В экспериментах работы [11] использовался водный раствор этанола, причем его концентрация варьировалась. Поскольку вода – сильно полярная жидкость, а этанол – нет, то, чем выше его концентрация в растворе, тем меньше число микрополярности N . Для расчетов использовалось значение $N = 0.5$, хотя, строго говоря, каждую экспериментальную точку следовало бы нормировать с учетом изменения не только динамической вязкости от концентрации, но и вихревой. К сожалению, на данный момент, такие исследования еще не проводились.

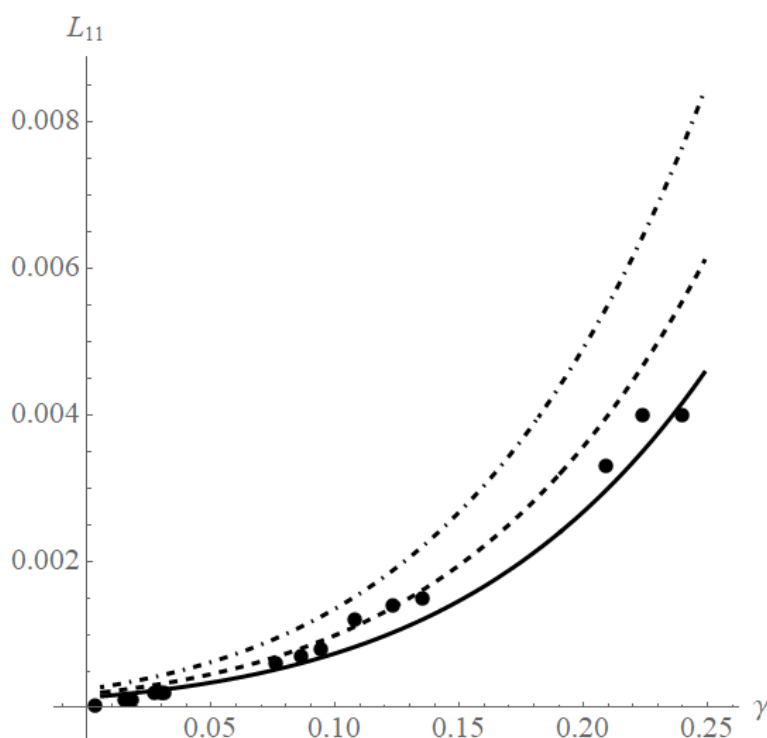


Рис. 1. Зависимость гидродинамической проницаемости от пористости мембраны в рамках модели ньютоновской жидкости (штрихпунктирная кривая), микрополярной жидкости (пунктирная кривая), микрополярной жидкости с учетом поправки на форму записи закона Дарси (сплошная кривая); точки – экспериментальные данные работы [11]

3.3. Анализ зависимостей гидродинамической проницаемости мембраны от параметров фильтрующей жидкости

Благодаря наличию явного аналитического выражения для гидродинамической проницаемости мембраны, имеется принципиальная возможность для проведения вычислительных экспериментов во всем диапазоне изменения параметров задачи, несмотря на трудности постановки экспериментов. В работе [10] уже отмечалось, что свойства фильтрующей жидкости более существенно влияют на гидродинамическую проницаемость мембраны, чем ее структурные свойства, такие как пористость и проницаемость пористого слоя ячейки, если он вводится в рассмотрение.

В данной работе показано, что корректное применение закона Дарси к мембране как целому вносит значительную поправку в величину L_{11} . На рис. 2 показаны зависимости гидродинамической проницаемости глобулярной мембраны от числа микрополярности N и масштаба микрополярности L . Для сравнения даны по две кривые: пунктирная соответствует безразмерным единицам, определяемым соотношениями (2), сплошная кривая построена с поправкой на вид закона Дарси для микрополярной жидкости. При построении кривых рис. 2а использовалось значение $L = 0.2$, при построении кривых рис. 2б задавалось $N = 0.5$, пористость мембраны в обоих случаях равнялась 0.7. Очевидно, чем сильнее проявлены полярные свойства жидкости (чем больше N), тем существеннее поправка. В то же время, зависимость гидродинамической проницаемости мембраны от масштабного фактора L достаточно слабая, как следует из рис. 2б. Такая особенность, по-видимому, является следствием симметрии задачи и структуры поля угловых скоростей.

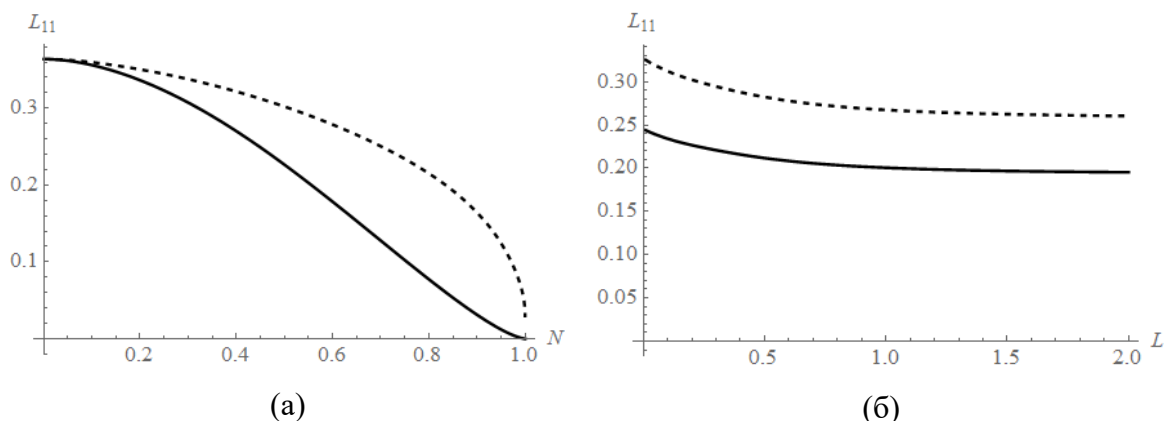


Рис. 2. Зависимости гидродинамической проницаемости мембраны от числа микрополярности N (а) и масштаба микрополярности L (б) фильтрующей жидкости при стандартном способе обезразмеривания (пунктирные кривые) и с учетом поправки на форму записи закона Дарси (сплошные кривые)

4. Заключение

Фильтрация в мембранах представляет собой пример течений в настолько сильно стесненных условиях, что существенным оказывается не только наличие микроструктуры жидкости, но и корректное описание ее взаимодействия с пористой средой. Несмотря на то, что способ приведения величин к безразмерным единицам может быть произвольным, оказывается важным учитывать его при сравнении теоретических расчетов с размерными данными эксперимента. В работе показано, что закон типа Дарси для микрополярной жидкости отличается от классического закона Дарси наличием вихревой вязкости помимо динамической. Этот факт следует

принимать во внимание при обработке экспериментальных данных по проницаемости мембран. Важно также, что в закон типа Дарси для изотропной пористой среды не входят угловые вязкости микрополярной жидкости. Данное свойство может служить существенным упрощением в постановке экспериментов и интерпретации результатов по течениям полярных жидкостей в пористых средах.

5. Благодарности

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 20-19-00670).

Список литературы

1. Апель П. Ю., Бобрешова О. В., Волков А. В., Волков В. В., Никоненко В. В., Стенина И. А., Филиппов А. Н., Ямпольский Ю. П., Ярославцев А. Б. Перспективы развития мембранной науки // Мембраны и мембранные технологии. 2019. Т. 9. № 2. С. 59–80. DOI: 10.1134/S2218117219020020
2. Onzager L. Reciprocal relations in irreversible processes. I // Physical Review. 1931. Vol. 31. P. 405–426. DOI: 10.1103/PhysRev.37.405
3. Cosserat E., Cosserat F. Theory des corps deformables. Paris: Hermann et Fils, 1909. 226 p.
4. Eringen A. C. Simple microfluids // International Journal of Engineering Sciences. 1964. Vol. 2. P. 205–217. DOI: 10.1016/0020-7225(64)90005-9
5. Eringen A. C. Theory of micropolar fluids // Journal of Mathematics and Mechanics. 1966. Vol. 16. P. 1–18.
6. Брутян М. А., Крапивский П. Л. Об эффекте уменьшения сопротивления в микрополярной жидкости // Инженерно-физический журнал. 1989. Т. 57. С. 213–219.
7. Ханукаева Д. Ю., Филиппов А. Н. Изотермические течения микрополярных жидкостей: постановка задач и аналитические решения // Коллоидный журнал. 2018. Т. 80. № 1. С. 17–40. DOI: 10.7868/S0023291218010020
8. Kamel M. T., Roach D., Hamdan M. H. On the micropolar fluid flow through porous media // «Mathematical Methods, System Theory and Control». Proceedings of the 11th MAMECTIS 2009 // WSEAS Press, 2009. ISBN 978-960-474-094-9. P. 190–197.
9. Васин С. И., Филиппов А. Н. Проницаемость сложнопористых сред // Коллоидный журнал. 2009. Т. 71. № 1. С. 32–46.
10. Khanukaeva D. Yu. Filtration of micropolar liquid through a membrane composed of spherical cells with porous layer // Theoretical and Computational Fluid Dynamics. 2020. Vol. 34. N. 3. P. 215–229. DOI: 10.1007/s00162-020-00527-x
11. Filippov A. N., Ivanov V. I., Yushkin A. A., Volkov V. V., Bogdanova Yu. G., Dolzhikova V. D. Simulation of the onset of flow through a PTMSP-based polymer membrane during nanofiltration of water–ethanol mixture // Petroleum Chemistry. 2015. Vol. 55. N. 5. P. 347–362. DOI: 10.1134/S0965544115050059

Экспериментальное исследование управляемого разрушения микроструи разбавленного полимерного раствора на микрокапли в воздухе

**Н. А. Хомутов, А. Е. Семёнова, Е. А. Хан, А. Ди Мартино,
М. В. Пискунов**

Национальный исследовательский Томский политехнический университет,
634050, Томск, пр. Ленина, 30
email: nah7@tpu.ru

В данной работе выполнено экспериментальное исследование по дроблению ламинарного потока разбавленных водных растворов альгината натрия без и с добавлением гидроксиэтилцеллюлозы, подверженного внешнему вибрационному возбуждению от действия обратного пьезоэлектрического эффекта. Изучено влияние концентрации полимера в растворе (0.5 – 5 мг/мл), расхода жидкости (5 – 26 мл/мин) на капиллярное дробление микроструи диаметром около 210 мкм в диапазоне чисел Oh от 0.046 до 1.88 и чисел Re от 0.7 до 470. Выделены режимы течения микроструи и дробления на микрокапли с указанием границ переходов между ними, построена общая карта режимов. С учетом концентрации полимера в растворе показана зависимость амплитуды колебания микроструи от длины волны возмущения с целью определения условий формирования «спутниковых» микрокапель. Полученные результаты представляют прикладное значение для приложений на основе воздушной микрогидродинамики (биоинженерия и аддитивные технологии), имеющих дело с гетерогенными жидкостями с вязкоупругими свойствами.

Ключевые слова: неустойчивость Рэлея-Плато; обратный пьезоэлектрический эффект; вязкоупругие свойства

Experimental study of controlled breaking of a microjet of a dilute polymer solution into microdroplets in air

**N. A. Khomutov, A. E. Semenova, E. A. Khan, A. Di Martino,
M. V. Piskunov**

National Research Tomsk Polytechnic University,
30 Lenin Ave., 634050, Tomsk
email: nah7@tpu.ru

In this work, an experimental study was carried out on the breaking of the laminar flow of dilute aqueous solutions of sodium alginate without and with the addition of hydroxyethyl cellulose, subject to external vibrational excitation from the action of the inverse piezoelectric effect. The influence of the polymer concentration in the solution (0.5 – 5 mg/ml), the liquid growth (5 – 26 ml/min) on the capillary breaking

of the microjet with a diameter of about 210 μm in the range of Oh numbers from 0.046 to 1.88 and Re numbers from 0.7 to 470 has been studied. The regimes of microjet flow and fragmentation into microdroplets are identified with indication of the boundaries of transitions between them, and a general map of regimes is constructed. Taking into account the polymer concentration in the solution, the dependence of the microjet oscillation amplitude on the perturbation wavelength is shown in order to determine the conditions for the formation of "satellite" microdroplets. The obtained results are of application value for the technologies based on in-air microfluidics (bioengineering and additive technologies), dealing with heterogeneous liquids with viscoelastic properties.

Keywords: Plateau–Rayleigh instability; reverse piezoelectric effect; viscoelastic properties

1. Введение

Большое количество научных публикаций, посвященных управляемому разрушению микроструи на микрокапли, свидетельствует о растущей потребности в надежных, точных и масштабируемых технологиях. Этот спрос в основном мотивирован потребностями биомедицинской и фармацевтической промышленности, которые стремятся осуществлять деятельность максимально эффективно и безопасно, насколько это возможно [1, 2]. Необходимость в управляемом дроблении микроструи также растет в менее требовательных областях, таких как производство косметики, пищевых продуктов, сельскохозяйственных ресурсов и в задачах по очистке окружающей среды [3, 4]. На сегодняшний день появилось множество приложений на основе микрокапель, включая химические микрореакторы, множественные эмульсии и клеточные капсулы [5, 6]. Тем не менее, несмотря на то, что микрофлюидика присутствует в научном сообществе на протяжении десятилетий, однако широкого применения в промышленности она еще не достигла.

Для многих вышеупомянутых технологий характерное для жидкостей с низкой вязкостью формирование «спутниковых» капель [7], образующихся между основными каплями разрушенной микроструи, является весьма нежелательным явлением и требует внимания с точки зрения управления. Существуют ряд подходов к управлению микроструйного потока с точки зрения его морфологии (режимов, в которые «выстраиваются» микрокапли) и размеров микрокапель. К основным из них относится физическая нарезка струйного потока на монодисперсные капли с помощью дополнительного устройства на основе режущего провода [8], электростатическое и вибрационное внешнее воздействие на наконечник сопла [9, 10], тонкая настройка которых под конкретную жидкость позволяет достигать желаемых результатов в плане монодисперсного распределения размеров капель.

В данной работе в качестве цели экспериментально изучается детальная морфология ламинарного потока водных растворов альгината натрия без и с добавлением гидроксипропилцеллюлозы (в качестве загустителя раствора), подверженного внешнему воздействию вибрацией вследствие действия обратного пьезоэлектрического эффекта, с выделением характерных режимов, включающая особенности микроструйного и микрокапельного потоков с учетом поли- и монодисперсности распределения капель по размерам. Эта задача имеет прикладное значение для основанных на воздушной микрофлюидике технологий, для которых на данный момент проводятся наиболее продвинутые в области взаимодействий типа «капля-струя» исследования [9, 11–13] со «сложными» жидкостями.

2. Экспериментальная методика

При исследовании процесса управляемого разрушения ламинарной микроструи на микрокапли используются водные растворы альгината натрия с добавлением гидроксиэтилцеллюлозы (при массовом соотношении 5:1, соответственно) в качестве загустителя. Альгинат натрия (ALG) – линейный полисахарид, который используется в трехмерной биопечати. Гидроксиэтилцеллюлоза (HEC) – аминокислота, применяемая для получения гидрогелей. Оба полимера растворяются в воде. В таблице приведены используемые растворы, а также их свойства: динамическая вязкость (μ), коэффициент поверхностного натяжения на границе раздела «воздух-жидкость» (σ) и плотность (ρ).

Таблица. Компонентный состав водных растворов полимеров

№	Маркировка состава	μ , мПа·с	σ , мН/м	ρ , кг/м ³
1	0.5 мг/мл ALG+HEC	4.68	52.95±0.2 2	955
2	2.5 мг/мл ALG+HEC	18.93	56.37±0.1 3	1003
3	5 мг/мл ALG	205	58.60±0.1 7	1021

Вязкость исследуемых жидкостей определялась с помощью ротационного вискозиметра Brookfield DV3T LV (точность $\pm 1\%$, диапазон измерений 1 – $6 \cdot 10^6$ мПа·с). Коэффициент поверхностного натяжения на границе «воздух-жидкость» определялся методом дю Нуи (полустатическим методом определения поверхностного натяжения) с использованием тензиометра Kruss K20 (точность $\pm 1\%$, диапазон измерений 1 – 999 мН/м). Плотность измерялась пикнометрическим методом (точность $\pm 3\%$). Для минимизации случайной погрешности проводилось не менее трех серий измерений для каждого образца при идентичных условиях.

На рисунке 1 приведена экспериментальная установка, предназначенная для управляемого дробления микроструи полимерной жидкости на монодисперсные микрокапли под действием обратного пьезоэлектрического эффекта. Похожие по принципу действия устройства использовались в исследованиях [14, 15].

Подача полимерного раствора осуществляется шприцевым насосом SPLab02 (варьируемые расходы 0.831 нл/мин – 152.9 мл/мин, точность дозирования ($\pm 0.5\%$)). Генерирование микроструй жидкости происходит через шприцевую иглу с тупым наконечником (длина металлической части 15 мм, внутренний диаметр 0.21 мм, внешний диаметр 0.4 мм). Спроектированный каркас с необходимыми технологическими отверстиями для крепления иглы и пьезоэлемента напечатан на фотополимерном 3D принтере (рис. 1, позиция 2).

Дробление микроструй растворов происходит за счет вибрационного воздействия многослойного пьезоэлектрического привода (максимальный ход рабочей части 0 – 3.8 мкм, диапазон рабочих напряжений $U = 0\text{--}100$ В), который подключен к системе задания сигнала (ПК, АЦП L-Card E14-140M). Видеорегистрация процесса дробления микроструи жидкости проводится методом теневой съёмки высокоскоростной видеокамерой Phantom Miro M310 (скорость съёмки 10000 кадров/с, разрешение 256×800 пикселей).

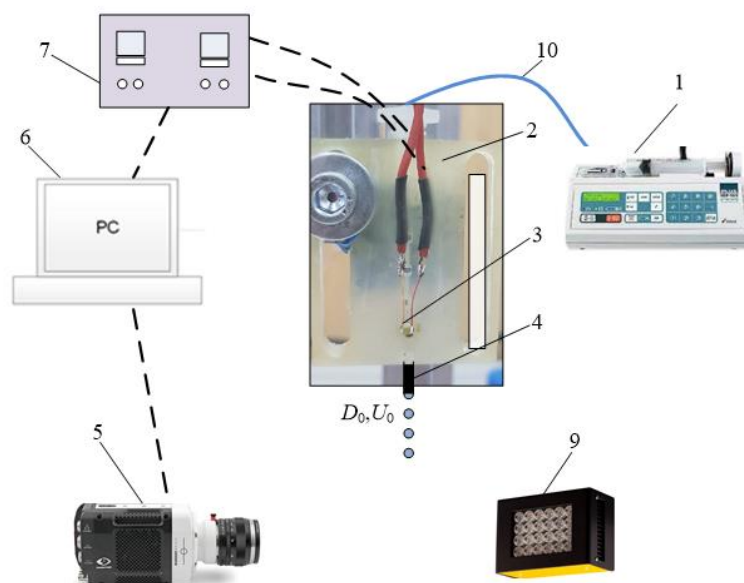


Рис. 1. Схема экспериментального стенда: 1 – шприцевой насос, 2 – каркас для крепления иглы, 3 – пьезоактюатор, 4 – сопло-полюй игла, 5 – высокоскоростная видеокамера, 6 – ПК, 7 – система подачи сигнала и его усиления, 9 – система освещения, 10 – шланг для перекачивания полимера

Внешнее воздействие на сопло в виде вибрации от реализации обратного пьезоэлектрического эффекта позволяет добиться управляемого дробления микроструи, при котором происходит отделение монодисперсных микрокапель одного размера, летящих в рамках контролируемой системы расположения микрокапель в потоке (рис. 2а, синий сектор). Физически это означает, что существуют условия управляемого монодисперсного дробления на одиночные микрокапли с отсутствием жидкостных мостов. Такой результат подтверждает значимость действия пьезоэффекта, проявление которого в свою очередь существенно зависит от расхода жидкости. Исследование поведения дробления микрокапель в условиях варьирования расхода жидкости показало, что при 5 – 9 мл/мин для раствора 0.5 мг/мл ALG+HEC происходит капиллярное дробление на монодисперсные микрокапли,двигающиеся на равноудаленном расстоянии друг от друга (рис. 2а). В то же время, для растворов 2.5 мг/мл ALG+HEC и 5 мг/мл ALG при расходе жидкости 5 мл/мин зарегистрирован режим «группами» по 2 – 4 основных микрокапли, который сменяется на монодисперсное дробление уже при расходе 6 мл/мин. Для раствора 2.5 мг/мл ALG+HEC монодисперсное дробление на микрокапли наблюдалось при расходе 6–8 мл/мин, а для раствора 5 мг/мл ALG –при 6 – 7 мл/мин. При величинах расходов в диапазоне 12 – 26 мл/мин для всех жидкостей наблюдается полидисперсное отделение микрокапель от микроструи, которое характеризуется разлетом микрокапель на разные расстояния друг от друга. Также стоит отметить, что при высоких расходах жидкости (рис. 2а, зеленая область) размер микрокапель непостоянен. Если при расходах жидкости 5 – 12 мл/мин, средний (арифметический) диаметр формируемых микрокапель (d) является постоянным ($d \approx 0.18$ мм), то при больших расходах жидкости диаметр формируемых микрокапель изменяется.

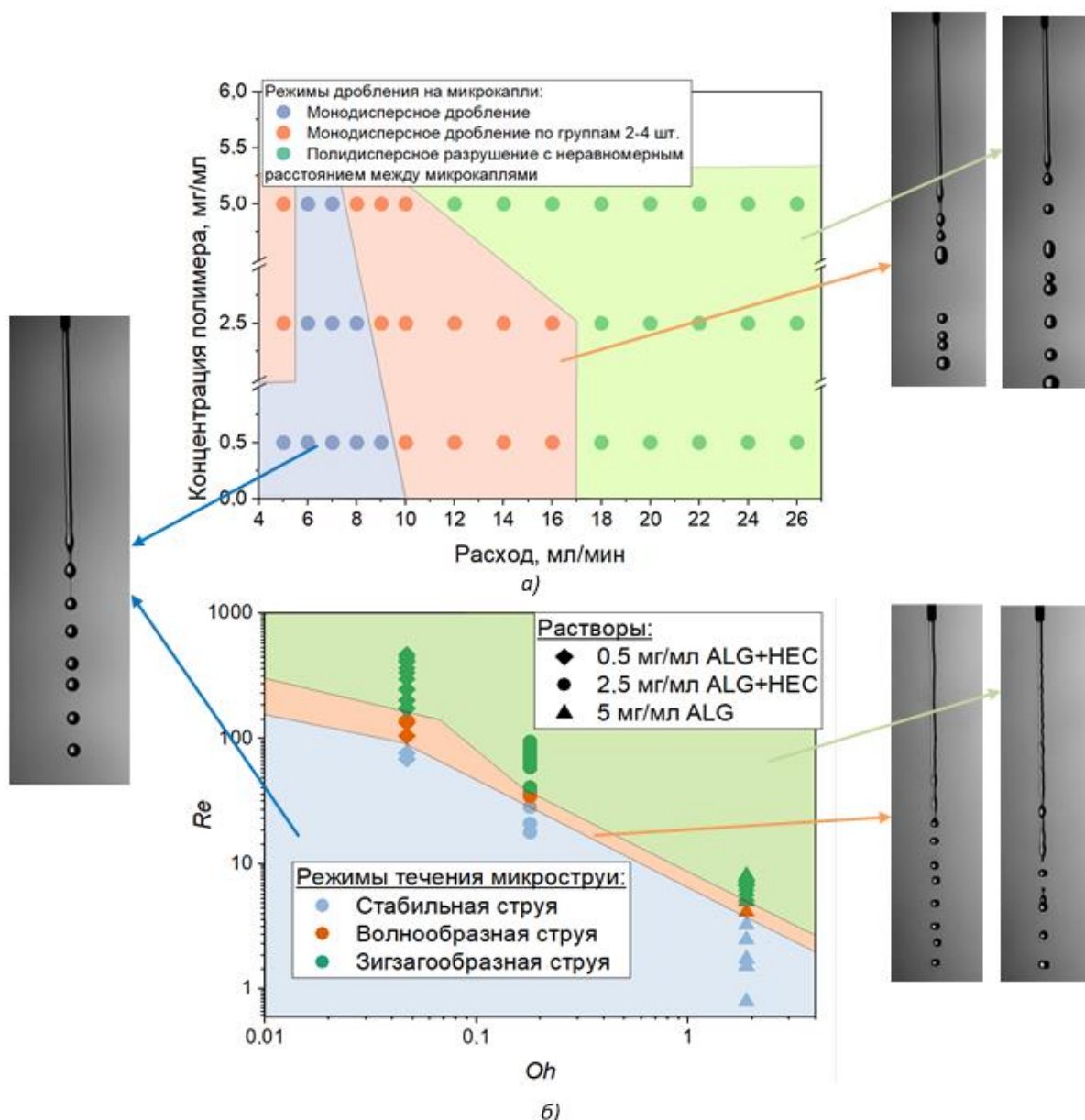


Рис. 2. Карты режимов: разрушения микроструи на микрокапли (а) и течения микроструи (б)

На рисунке 2б показано, что проявление режимов течения микроструй связано с скоростью микроструи U_j , оцениваемой по скорости первой микрокапли в диапазоне расходов жидкости 5 – 26 мл/мин, отделившейся вследствие неустойчивости микроструи, и концентрацией полимера в растворе. В целях масштабирования морфологических наблюдений построена карта режимов течения микроструи с использованием безразмерных критериев подобия – числа Онезорге, $Oh = \mu / \sigma \cdot \rho \cdot D$, и числа Рейнольдса, $Re = \rho \cdot U_j \cdot D / \mu$, где D – диаметр микроструи, м, U_j – скорость микроструи. При низких расходах жидкости (5 – 9 мл/мин) и, соответственно, низких скоростях микроструи ламинарный поток микроструи принимает линейный профиль с едва различимой амплитудой (δ) и длиной волны (λ) возмущения, т.е. микроструя при возмущающем воздействии имеет минимальную кривизну относительно оси потока (рис. 2). При увеличении расхода жидкости до 9 – 11 мл/мин наблюдается изменение картины течения микроструи. Кривизна микроструи принимает волнообразный профиль относительно оси потока с увеличением амплитуды и длины волны возмущения (рис. 2).

При дальнейшем увеличении расхода жидкости до 12 – 26 мл/мин длина волны возмущения значительно снижается, а амплитуда увеличивается и таким образом профиль микроструи приобретает форму пилообразного сигнала (рис. 2). Отмечено, что рост числа Re приводит к последовательной смене режимов течения микроструй. Переходы между режимами могут быть качественно описаны степенным законом.

Результаты исследования влияния начальной амплитуды возмущения микроструи в зависимости от длины волны возмущения для трех составов и расходов жидкости 5 – 26 мл/мин приведены на рисунке 3.

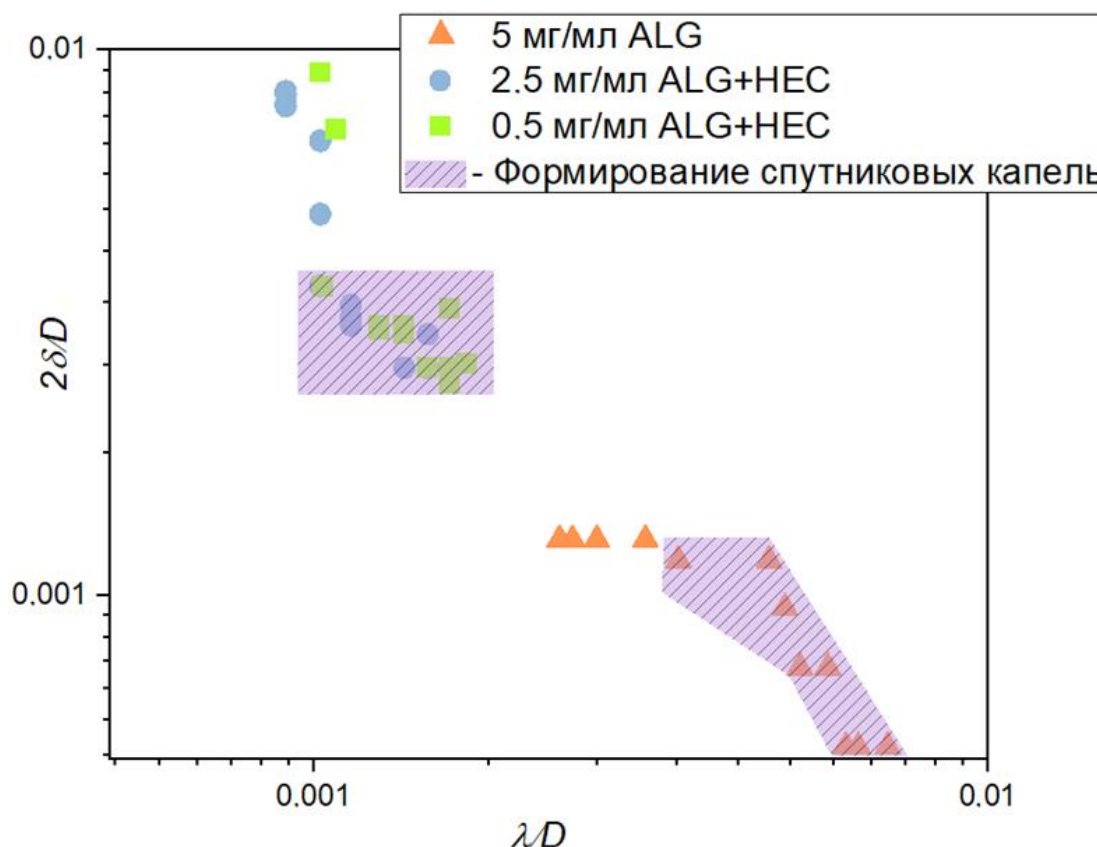


Рис. 3. Карта режимов формирования спутниковых капель с границей, описывающей их наличие / отсутствие

К особенностям неустойчивого поведения, связанного с природой жидкости, обладающей вязкоупругими свойствами, также необходимо отнести формирование «спутниковых» микрокапель между основными микрокаплями в потоке. С увеличением скорости микроструйного потока при постоянной частоте тока возмущения $f = 1000$ Гц для всех жидкостей наблюдается увеличение длины волны возмущения микроструи λ и уменьшение амплитуды возмущения δ . Также скорость микроструйного потока влияет на формирование «спутниковых» микрокапель, а именно с увеличением расхода режим монодисперсного дробления сменяется на разрушение с формированием структур типа «бусины-на-нити» [7]. Жидкостные нити с течением времени истончаются и дестабилизируются с формированием отдельных «спутниковых» микрокапель между основными микрокаплями в потоке.

При анализе режимов течения микроструй и дробления на микрокапли важно отметить, что интенсивность вибрационного возбуждения, зависящая от ряда факторов, речь о которых шла выше, возмущает ламинарный поток, обеспечивая разнообразие

амплитуд и длин волн в рамках микроструи. Данное экспериментальное исследование мотивировано более детальным изучением подхода управляемого дробления водных растворов полимеров под действием обратного пьезоэлектрического эффекта для анализа поведения режимов отделения основных и «спутниковых» микрокапель и условий переходов между ними, а также условий исключения формирования последних. Это отражает научную и практическую значимость и новизну работы в проекции на технологии аддитивного производства конструкций методами воздушной микрофлюидики.

3. Выводы

1. Выделено три режима течения микроструи при расходах жидкости 5 – 26 мл/мин и частоте тока внешнего возмущения $f = 1000$ Гц, а также в диапазоне чисел Oh от 0.046 до 1.88 и чисел Re от 0.7 до 470: микроструя с линейным профилем, микроструя с волнообразной деформацией профиля относительно оси потока, микроструя с пилообразной деформацией профиля и заметно перестраивающимся периодом колебания.

2. Определены три режима дробления ламинарного микроструйного потока на микрокапли при расходах жидкости 5 – 26 мл/мин и частоте тока внешнего возмущения $f = 1000$ Гц: монодисперсное дробление, монодисперсное дробление по группам 2 – 4 шт., полидисперсное разрушение с неравномерным расстоянием между микрокаплями.

3. Показано существование условий управляемого монодисперсного дробления на микрокапли, при которых профиль микроструи до капиллярного разрушения может быть и линейным, и волнообразным.

4. За счет построения и анализа карты режимов формирования спутниковых капель с границей, описывающей их наличие / отсутствие, установлен эффект варьирования скорости микроструйного потока на формирование «спутниковых» микрокапель при внешнем вибрационном воздействии.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-29-20109, <https://rscf.ru/project/22-29-20109/> и средств Администрации Томской области.

Список литературы

1. *Rosen H., Abribat T.* The rise and rise of drug delivery // *Nature Reviews Drug Discovery*. 2005. Vol. 4. P. 381–385. DOI: 10.1038/nrd1721
2. *Kumari A., Yadav S. K., Yadav S. C.* Biodegradable polymeric nanoparticles based drug delivery systems // *Colloids and Surfaces B: Biointerfaces*. 2010. Vol. 75 (1). P. 1–18. DOI: 10.1016/j.colsurfb.2009.09.001
3. *Serp D., Cantana E., Heinzen C., von Stockar U., Marison I. W.* Characterization of an encapsulation device for the production of monodisperse alginate beads for cell immobilization // *Biotechnology and Bioengineering*. 2000. Vol. 70 (1). P. 41–53. DOI: 10.1002/1097-0290(20001005)70:1<41::AID-BIT6>3.0.CO;2-U
4. *Martins I. M., Barreiro M. F., Coelho M., Rodrigues A. E.* Microencapsulation of essential oils with biodegradable polymeric carriers for cosmetic applications // *Chemical Engineering Journal*. 2014. Vol. 245. P. 191–200. DOI: 10.1016/j.cej.2014.02.024
5. *Augustin M. A., Hemar Y.* Nano- and micro-structured assemblies for encapsulation of food ingredients // *Chemical Society Reviews*. 2009. Vol. 38. P. 902–912. DOI: 10.1039/B801739P

6. *Riche C. T., Roberts E. J., Gupta M., Brutchey R. L., Malmstadt N.* Flow invariant droplet formation for stable parallel microreactors // *Nature communications*. 2016. Vol. 7. 10780. DOI: 10.1038/ncomms10780
7. *Christanti Y., Walker L. M.* Effect of fluid relaxation time of dilute polymer solutions on jet breakup due to a forced disturbance // *Journal of Rheology*. 2002. Vol. 46. P. 733–748. DOI: 10.1122/1.1463418
8. *Prüße U., Dalluhn J., Breford J., Vorlop K. D.* Production of spherical beads by JetCutting // *Chemical Engineering & Technology*. 2000. Vol. 23. P. 1105–1110. DOI: 10.1002/1521-4125(200012)23:12
9. *Kamperman T., Trikalitis V., Karperien M., Visser C. W., Leijten J.* Ultrahigh-throughput production of monodisperse and multifunctional janus microparticles using in-air microfluidics // *ACS applied materials & interfaces*. 2018. Vol. 10. P. 23433–23438. DOI: 10.1021/acsami.8b05227
10. *Nedović V., Manojlović V., Pruesse U., Bugarski B., Djonlagić J., Vorlop K.* Optimization of the electrostatic droplet generation process for controlled microbead production: Single nozzle system // *Chemical Industry and Chemical Engineering Quarterly/CICEQ*. 2006. Vol. 12 (1). P. 53 – 57. DOI: 10.2298/CICEQ0601053N
11. *Baumgartner D., Bernard W., Weigand B., Lamanna G., Brenn G., Planchette C.* Influence of liquid miscibility and wettability on the structures produced by drop–jet collisions // *Journal of Fluid Mechanics*. 2020. Vol. 885. A23. DOI: 10.1017/jfm.2019.967
12. *Baumgartner D., Brenn G., Planchette C.* Viscoelastic effects probed by drop-jet collisions // *International journal of multiphase flow*. 2022. Vol. 150. 104012. DOI: 10.1016/j.ijmultiphaseflow.2022.104012
13. *Baumgartner D., Brenn G., Planchette C.* Universality of stretching separation // *Journal of Fluid Mechanics*. 2022. Vol. 937. R1. DOI: 10.1017/jfm.2022.107
14. *Visser C. W., Kamperman T., Karbaat L. P., Lohse D., Karperien M.* In-air microfluidics enables rapid fabrication of emulsions, suspensions, and 3D modular (bio)materials // *Science advances*. 2018. Vol. 4 (1). eaao1175. DOI: 10.1126/sciadv.aao117
15. *Christanti Y., Walker L. M.* Effect of fluid relaxation time of dilute polymer solutions on jet breakup due to a forced disturbance // *Journal of Rheology*. 2002. Vol. 46. P.733–748. DOI: 10.1122/1.1463418.]

Стационарные волны на поверхности жидкости, возникающие при обтекании точечного препятствия

К. А. Хохрякова^a, Е. В. Колесниченко^{a,b}, М. С. Краков^c

^a Институт механики сплошных сред УрО РАН,
614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1
email: bca@icmm.ru

^b Пермский государственный национальный исследовательский университет,
614990, Пермь, ул. Букирева, 15
email: kolesnichenkoev@gmail.com

^c Белорусский национальный технический университет,
220013, Республика Беларусь, Минск, пр. Независимости, 65
email: mskrakov@gmail.com

Работа посвящена экспериментальному исследованию зависимости угла раствора волн, возникающих на поверхности магнитной и немагнитной жидкости при обтекании точечного препятствия. Получены зависимости величины угла для постоянных магнитных полей разной ориентации: перпендикулярных поверхности магнитной жидкости, параллельных и перпендикулярных вектору скорости точечного препятствия. Так же была получена зависимость угла раствора волн от вязкости для смеси вода-глицерин.

Ключевые слова: магнитная жидкость; магнитное поле; вязкость; устойчивость

Stationary waves on the surface of a liquid arising in the flow around a point obstacle

C. A. Khokhryakova^a, E. V. Kolesnichenko^{a,b}, M. S. Krakov^c

^a Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS,
1 Akademika Koroleva St., 614013, Perm
email: bca@icmm.ru

^b Perm State University, 15 Bukireva St., 614990, Perm
email: kolesnichenkoev@gmail.com

^c Belarusian National Technical University, 65 Pr. Nezavisimosti, 220013, Minsk, Belarus
email: mskrakov@gmail.com

This work is dedicated to an experimental study about the relation of wave angle arising on the magnetic fluid surface when flowing around a point obstacle. Dependences of the angle value are obtained for constant magnetic fields of different orientations: perpendicular to the surface of the magnetic fluid, parallel and perpendicular to the velocity vector of a point obstacle. The dependence of the wave angle on the viscosity for a water-glycerin mixture was also obtained.

Keywords: magnetic fluid; magnetic field; viscosity; stability

1. Введение

Целью данной работы являлось экспериментальное исследование зависимости угла раствора волн, возникающих при обтекании точечного препятствия на поверхности магнитной и немагнитной жидкостей в зависимости от приложенного однородного магнитного поля и от вязкости жидкости. В природе стационарные волны за препятствием наблюдаются в океанах при движении штормов и ураганов, атмосфере [1] и на поверхности воды за движущимися объектами [2], например случай корабельных волн на поверхности воды [3]. Анализ стационарных волн основан на дисперсионном уравнении гравитационно-капиллярных волн на поверхности жидкости [4]. Особенности этих волн продолжают исследоваться как экспериментально, так и теоретически и в настоящее время. Причиной образования стационарных волн на поверхности жидкости за движущимся препятствием является зависимость фазовой и групповой скорости распространения волн от длины волны. Для магнитных жидкостей дополнительным управляющим параметром для подобных структур на поверхности будет являться напряженности магнитного поля. Дисперсионные уравнения для глубокой воды, слоя конечной толщины, слоя с двумя свободными границами и других геометрий можно найти в [5]. Известны теоретические работы, посвященные стационарным волнам за препятствием в магнитных жидкостях [6, 7].

2. Методика эксперимента

Для экспериментального исследования гравитационно-капиллярных волн на поверхности магнитной жидкости была создана экспериментальная установка, схема которой представлена на рис. 1. Для создания магнитного поля использовались две пары катушек Гельмгольца: для создания вертикального поля катушки радиусом $R_1 = 122.5$ мм и количеством витков $N = 390$ и для создания горизонтального магнитного поля катушки радиусом $R_2 = 97.5$ мм и количеством витков $N = 321$. На горизонтальную площадку в центре катушек Гельмгольца устанавливалась стеклянная чашка с внутренним диаметром $D = 123.5$ мм и высотой боковой стенки 50 мм. Подавая на катушки постоянное напряжение от двухканального стабилизированного источника постоянного тока типа Mastech DC Power Supply HY3010E-2B, создавалось магнитное поле с однородностью не менее 95% в центральной части чашки (рис. 2).

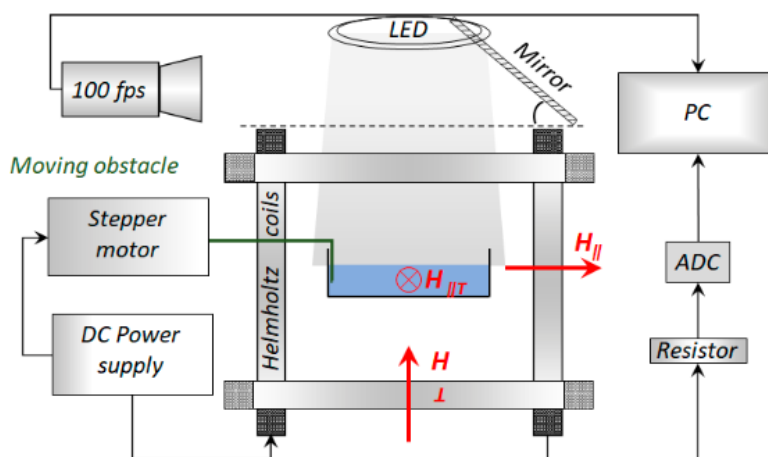


Рис. 1. Схема экспериментальной установки

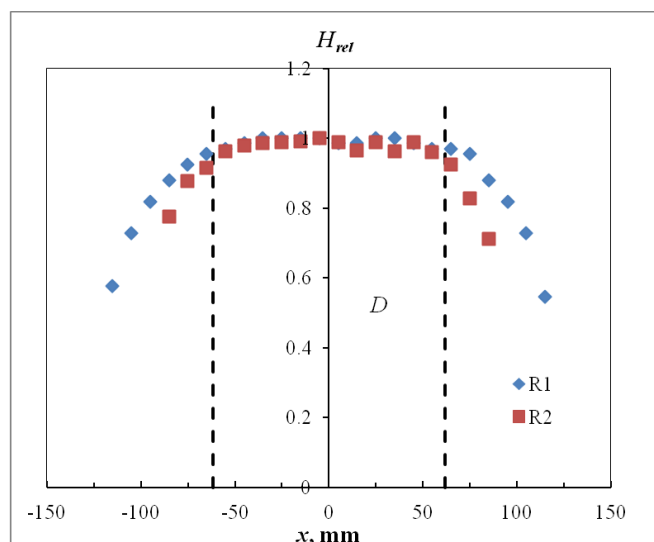


Рис. 2. Относительное распределение напряженности поля вдоль радиуса катушек Гельмгольца R1 и R2. Вертикальными штриховыми линиями отмечены границы используемой в эксперименте кюветы диаметром $D = 123.5$ мм

Индукция магнитного поля в центре системы катушек контролировалась миллитесламетром Ш1-15У-03. Величина протекавшего по катушкам тока фиксировалась с помощью включенного последовательно с катушкой резистора небольшой величины, выходной сигнал с которого подавался на вход аналого-цифрового преобразователя АЦП ЛА-И24 USB, после которого обработка сигнала производилась с помощью прилагаемого к плате стандартного комплекта программного обеспечения. Полученные показания затем пересчитывались в величину напряженности магнитного поля согласно зависимости индукции магнитного поля в центре катушек от величины тока в них.

Кювета заполнялась исследуемой магнитной жидкостью, толщина которой составляла $h = 15$ мм. Со стороны боковой стенки кюветы к рабочей области в горизонтальной плоскости была подведена подвижная платформа с шаговым двигателем, питающегося от двухканального стабилизированного источника постоянного тока. Движущаяся платформа была жестко связана с немагнитной направляющей, длиной 300 мм, к концу которой крепился горизонтальный медный стержень диаметром 1.5 мм. Поскольку размер препятствия много меньше капиллярной длины волны для данной жидкости $\lambda_c = 2\pi\sqrt{(\sigma/\rho g)}$, то в рамках данной задачи препятствие можно считать точечным. Изогнутый под углом 90° свободный конец стержня погружался в исследуемую жидкость на 1 – 2 мм миллиметра, не касаясь при этом дна кюветы. Стержень играл роль движущегося препятствия. Скорость движения платформы вместе с препятствием регулировалась при помощи источника тока Mastech. Диапазон подаваемого на платформу напряжения изменялся от 8 до 12 В, что позволяло варьировать скорость движения в пределах от 137 мм/с до 229 мм/с.

В эксперименте использована магнитная жидкость в виде коллоида магнетита в керосине, стабилизированного олеиновой кислотой (плотностью $\rho = 1.4$ г/см³, поверхностным натяжением $\sigma = 24.3$ мН/м, намагниченностью насыщения $M_s = 50$ кА/м, начальной магнитной восприимчивостью $\chi_0 = 5.2$). Опыты выполнены при температуре жидкостей и окружающей среды $(25 \pm 1)^\circ\text{C}$.

Отснятые в ходе эксперимента кадры далее обрабатывались в программы Image processing software Comef 4.3 (OEG GmbH, Germany). Измерение углов раствора волнового фронта в зависимости от величины и ориентации приложенного магнитного поля для каждого кадра осуществлялось по нескольким вспомогательным линиям

(рис. 3) по границам волнового холма с обеих сторон относительно препятствия. В результате итоговое значение измеренного угла осреднялось по целому набору данных, дисперсия которых определяла погрешность измерения углов. Следует отметить, что в поле кадра углы наклона волнового конуса справа и слева относительно препятствия (на рис. 8, соответственно, сверху и снизу) несколько отличались, что связано с небольшими углами отклонениями оптической системы от вертикали. Однако разница в полученных углах волнового конуса по обе стороны относительно препятствия не превышала в целом статистической погрешности измерений.



Рис. 3. Схема определения углов наклона волновых валов, возникающих на поверхности магнитной жидкости около движущегося препятствия

3. Результаты эксперимента

Для задачи обтекания точечного препятствия магнитной жидкостью в магнитном поле были получены следующие результаты.

Для стационарных волн в вертикальном магнитном поле использовался диапазон докритических величин напряженностей, т.е. до наступления неустойчивости поверхности магнитной жидкости. Экспериментальные данные для различных скоростей движения препятствия для слоя магнитной жидкости толщиной 15 мм представлены на рисунке 4. Видно, что для всех значений скорости движения препятствия угол раствора стационарных волн с ростом напряженности магнитного поля уменьшается.

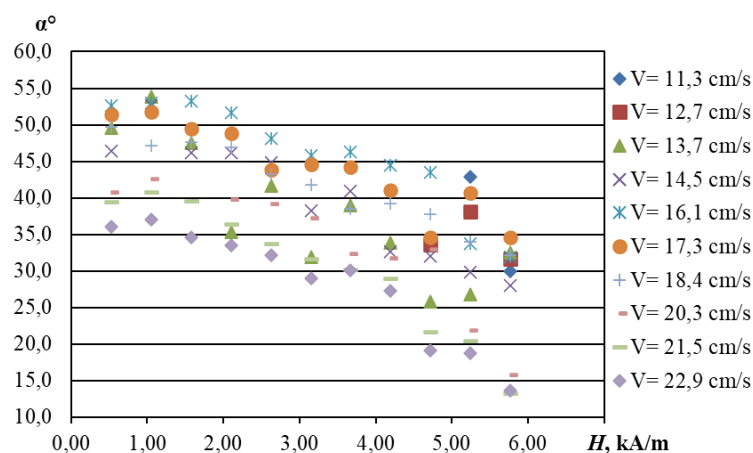


Рис. 4. Зависимость угла раствора волн от величины напряженности вертикального магнитного поля

Магнитное поле, параллельное вектору скорости движения препятствия, сначала расширяет угол раствора стационарных волн, а затем, достигнув критического значения, подавляет их (рис. 5).

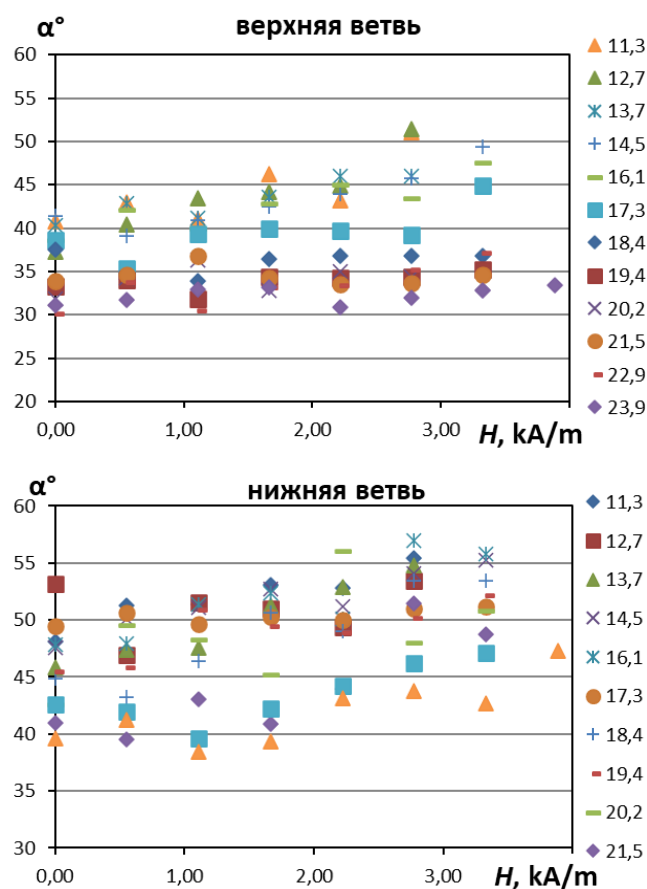


Рис. 5. Зависимость угла раствора волн от напряженности магнитного поля, параллельного вектору скорости, для различных скоростей движения препятствия

Горизонтальное магнитное поле, направленное поперек направления движения препятствия, заметно увеличивает угол конуса волн (рис. 6).

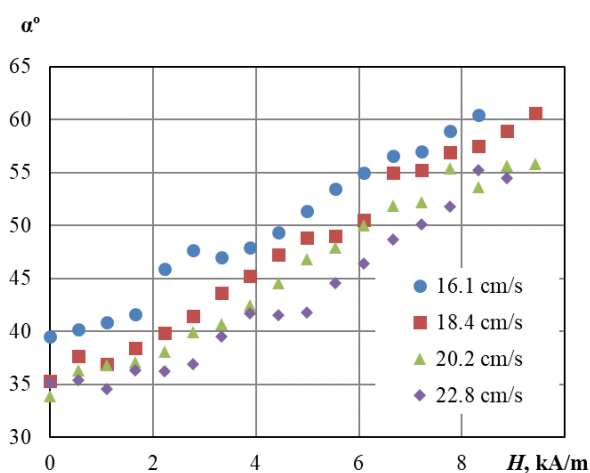


Рис. 6. Зависимость угла от напряженности магнитного поля, перпендикулярного вектору скорости

В дальнейшем предполагается провести исследования угла раствора стационарных волн для магнитных жидкостей разных характеристик, в частности, вязкости. Для понимания динамики зависимости угла раствора от вязкости были проведены исследования для смеси вода-глицерин. На рисунке 7 показана зависимость угла раствора волн от вязкости, выраженной через процентное содержание глицерина в воде для разных скоростей движения препятствия. Видно, что чем выше содержание воды в смеси и, меньше вязкость, тем больше угол раствора волн.

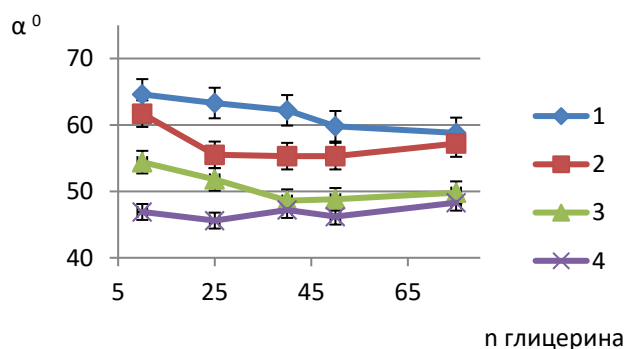


Рис. 7. Зависимость угла раствора волн от концентрации глицерина в растворе вода-глицерин для разных скоростей, см/с: 1) 16.1; 2) 18.4; 3) 20.2; 4) 22.9

4. Заключение

Экспериментальные исследования позволяют сделать следующие выводы о задаче обтекания жидкостью точечного препятствия. С ростом напряженности в вертикальном магнитном поле угол раствора стационарных волн уменьшается, а их амплитуда увеличивается. Горизонтальное магнитное поле, параллельное скорости препятствия, расширяет угол раствора стационарных волн, а при достижении определенного значения напряженности полностью волны на поверхности магнитной жидкости подавляются полностью. Горизонтальное магнитное поле, перпендикулярное скорости препятствия, также увеличивает угол раствора стационарных волн, но не влияет на их амплитуду.

Список литературы

1. *Svirkunov P. N., Kalashnik M. V.* Phase patterns of dispersive waves from moving localized sources // *Physics-Uspekhi*. 2014. Vol. 57. P. 80–91. DOI: 10.3367/UFNe.0184.201401d.0089
1. *Kelvin L.* Deep sea ship waves // *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*. 1906. Vol. 25. P. 1060–1084. DOI: 10.1017/S0370164600016771
2. *Thomson W.* XLII. On stationary waves in flowing water. – Part I // *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*. 1886. Vol. 22 (137). P. 353–357. DOI: 10.1080/14786448608627944
3. *Wilton J. R.* LXXII. On ripples // *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*. 1915. Vol. 29 (173). P. 688–700. DOI: 10.1080/14786440508635350.
4. *Cowley M. D., Rosensweig R. E.* The interfacial stability of a ferromagnetic fluid // *Journal of Fluid mechanics*. 1967. Vol. 30 (4). P. 671–688. DOI: 10.1017/S0022112067001697
5. *Berkovskii B. M., Bashtovoi V. G., Krakov M. S.* Stationary waves at the surface of a magnetizable liquid in a stream impinging on a point barrier // *Magnitnaia Gidrodinamika*. 1980. Vol. 15 (3). P. 28–32.
6. *Browaeys J., Bacri J. C., Perzynski R., Shliomis M. I.* Capillary-gravity wave resistance in ordinary and magnetic fluids // *EPL (Europhysics Letters)*. 2001. Vol. 53 (2). P. 209. DOI: 10.1209/epl/i2001-00138-7

Применение метода капиллярных волн для определения поверхностного натяжения магнитных и немагнитных жидкостей

К. А. Хохрякова, И. А. Мизева, А. В. Шмыров

Институт механики сплошных сред УрО РАН,
614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1
email: bca@icmm.ru

В работе представлены результаты экспериментального исследования зависимости поверхностного натяжения магнитной жидкости (МЖ) от величины напряженности и ориентации постоянного магнитного поля методом капиллярных волн. Особенность метода капиллярных волн (МКВ) заключается в наложении периодических малоамплитудных возмущений немагнитной природы (акустической волны) и бесконтактной регистрации профиля субмиллиметровых цилиндрических капиллярных волн с помощью цифровой интерферометрии. Измеренные величины поверхностного натяжения совпадают с табличными и определенными в ходе эксперимента другими тензиометрическими методами на сертифицированных коммерческих установках.

Ключевые слова: магнитная жидкость; поверхностное натяжение; интерферометрия; тензиометрия; магнитное поле; капиллярные волны

The capillary wave method applied to determine the surface tension of magnetic and non-magnetic fluids

C. A. Khokhryakova, I. A. Mizeva, A. V. Shmyrov

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS,
1 Akademika Koroleva St., 614013, Perm
email: bca@icmm.ru

The paper presents the results of an experimental study of the dependence of the surface tension of a magnetic fluid (MF) on the strength and orientation of a constant magnetic field by the method of capillary waves. A feature of the capillary wave method (CWM) is the imposition of periodic low-amplitude perturbations of a non-magnetic nature (acoustic wave) and non-contact registration of the profile of submillimeter cylindrical capillary waves using digital interferometry. The measured values coincide with the known values of these parameters determined using other measuring instruments.

Keywords: magnetic fluid; surface tension; interferometry; tensiometry; magnetic field; capillary waves

1. Введение

Прямые измерения поверхностного натяжения магнитной жидкости, находящейся в контакте с другой немагнитной несмешивающейся средой, по-прежнему вызывают

большой интерес ученых [1, 2]. Можно выделить две основные тенденции: определение длины волны зарождающейся пиковой неустойчивости свободной и межфазной поверхностей в ортогональном магнитном поле [3] и сравнение формы капли магнитной жидкости, растянутой в продольном поле, с формой смоделированной капли [4, 5]. Первый метод ограничен использованием размагничивающего фактора тонкого слоя феррожидкости, а второй определяется формой эллипса или сферы. Плюсы и минусы обоих методов при постановке двумерных задач были получены в [6], где капиллярные эффекты играют существенную роль из-за толщины МП, расположенного в ячейке Хеле-Шоу.

В работе представлены результаты экспериментального исследования зависимости поверхностного натяжения МЖ от величины напряженности и ориентации постоянного магнитного поля методом капиллярных волн [7, 8]. Особенность метода капиллярных волн (МКВ) заключается в наложении периодических малоамплитудных возмущений немагнитной природы (акустической волны) и бесконтактной регистрации профиля субмиллиметровых цилиндрических капиллярных волн с помощью цифровой интерферометрии [8]. Данный метод позволяет избежать неустойчивости поверхности при докритических величинах ортогонального подмагничивающего поля и корректно учесть размагничивающий фактор при расчете магнитного давления (неустойчивость Розенцвейга). В случае использования метода капиллярных волн амплитуда качания плоскости межфазной границы не превосходит по величине 0.1 градуса, что меньше амплитуды качания под действием фоновых вибрационных колебаний. Таким образом, характеристики возбуждаемой волны оказываются нечувствительны к прямому воздействию магнитного поля, что позволяет измерить свойства межфазной поверхности, взаимная ориентация вектора нормали к которой и вектора напряженности магнитного поля в процессе измерения не нарушается.

2. Методика эксперимента

В ходе опыта МЖ заливалась в стеклянную ячейку диаметром 6 см с толщиной слоя 2–3 мм и помещалась в область однородного магнитного поля в центре системы двух кольцевых катушек радиусом $R = 8$ см и с числом витков $n = 298$, ориентированных симметрично относительно общей оси (система катушек Гельмгольца).

Измерение поверхностного натяжения МЖ в ортогонально направленном магнитном поле $H \perp$ осуществлялось с помощью МКВ [7, 8], адаптированного для работы с непрозрачными средами с учетом влияния магнитного поля на ее структурные элементы (рис. 1).

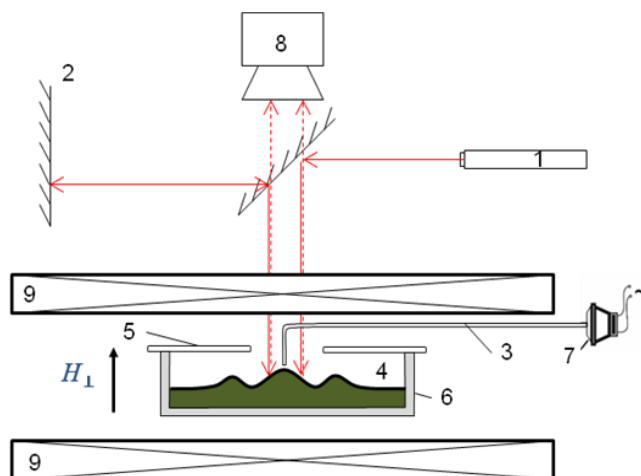


Рис. 1. Схема экспериментальной установки: 1 – лазер, 2 – опорная поверхность, 3 – волновод, 4 – свободная поверхность МЖ, 5 – крышка кюветы, 6 – рабочая ячейка, 7 – динамик, 8 – оптическая система, 9 – катушки Гельмгольца

Регистрация мгновенной карты рельефа межфазной поверхности проводилась методом оптической интерференции опорного и предметного пучков. Луч от He-Ne лазера 1, проходящий систему линз, преобразовывался в плоскопараллельный пучок диаметром ~ 1 см. Опорный пучок, имеющий плоский волновой фронт, формировался при отражении исходного пучка от плоскопараллельной стеклянной пластины 2. Предметный пучок проходил сквозь пластину 2 и крышку кюветы 3, отражался от свободной поверхности МЖ 4, заполняющей рабочую ячейку 5, и интерферировал с опорным на матрице видеокамеры 6 (Baumer TXG50, Германия). Изображение с камеры передавалось на персональный компьютер, где в режиме реального времени с помощью программного пакета IntelliWave (Mahr GmbH, Германия) осуществлялась расшифровка интерферограмм и восстановление формы волнового фронта.

Капиллярные волны на свободной поверхности МЖ возбуждались акустическими колебаниями в диапазоне частот 300 – 700 Гц от миниатюрного динамика 7, который был подключён к генератору синусоидальных колебаний. Для локализации воздействия упругих волн от механически колеблющейся мембраны динамика использовалась медная трубка-волновод 8 с керамическим наконечником, который подводился к границе раздела на расстояние порядка 0.1 мм. Длина волновода 8 подбиралась таким образом, чтобы динамик располагался за пределами катушек Гельмгольца для уменьшения влияния магнитного поля на частоту колебаний мембраны.

Полученные в ходе экспериментов профили поверхности после предварительной обработки в IntelliWave (рис. 2) аппроксимировались уравнением цилиндрической волны в пакете Mathematica [7, 8]:

$$z(x, y) = \frac{A}{\sqrt{r}} e^{-\beta r} \Re[e^{-i(\omega t + kr)}] + z_0, \quad (1)$$

что позволяло определить волновое число k (с точностью до 0.1%) и коэффициент затухания пространственных возмущений границы раздела β , характеризующий поверхностную реологию межфазной границы [9]. Т.к. амплитуда колебаний магнитной жидкости мала, то ее поверхность можно рассматривать как линейную систему, для которой выполняется принцип суперпозиции, т.е. алгебраическое сложение эффектов. В этом случае вязкие, магнитные и гравитационно-капиллярные эффекты алгебраически складываются как независимые друг от друга. Поскольку динамическая вязкость жидкости η влияет на скорость распространения капиллярной волны [10], то ее учитывать в итоговом дисперсионном соотношении. Для магнитной жидкости дисперсионное уравнение гравитационно-капиллярных поверхностных волн должно быть модифицировано с учетом вертикального однородного магнитного поля. В итоге получаем сумму независимых друг от друга слагаемых в дисперсионном соотношении, из которого далее поверхностное натяжение σ определялось по формуле:

$$\sigma = \frac{\rho}{k^3} (\omega^2 - gk) + \frac{\mu_0 H^2}{k} \left(\frac{\chi^2}{(1 + \chi_0)(2 + \chi_0)} \right) + \sqrt{\frac{8\omega\eta^3}{\rho}} - \frac{4k\eta^2}{\rho}, \quad (2)$$

где σ – поверхностное натяжение, $\omega = 2\pi\nu$ – угловая частота акустических колебаний; g – ускорение свободного падения. Измерения проводились при температуре окружающего воздуха $(23 \pm 1)^\circ\text{C}$.

3. Результаты эксперимента

Поскольку магнитные жидкости изготовлены на немагнитной основе, чаще всего керосина или декана, а сами частицы покрыты молекулами вещества-стабилизатора, олеиновой кислоты, то определенный интерес представляет собой исследование как

самых жидких немагнитных основ для МЖ, так и их растворов с добавлением вещества стабилизатора.

Исследование влияния частоты генерации капиллярных волн на значения поверхностного натяжения жидкости основы МЖ – керосина и декана, как при наличии магнитного поля, так и в его отсутствие (рис. 2) показало, что σ среды, не обладающей магнитными свойствами, которое рассчитано по формуле (2), не зависит от ν , наличия магнитного поля и в пределах погрешности сопоставимо со значением σ , полученном на тензиометре Sigma 701.

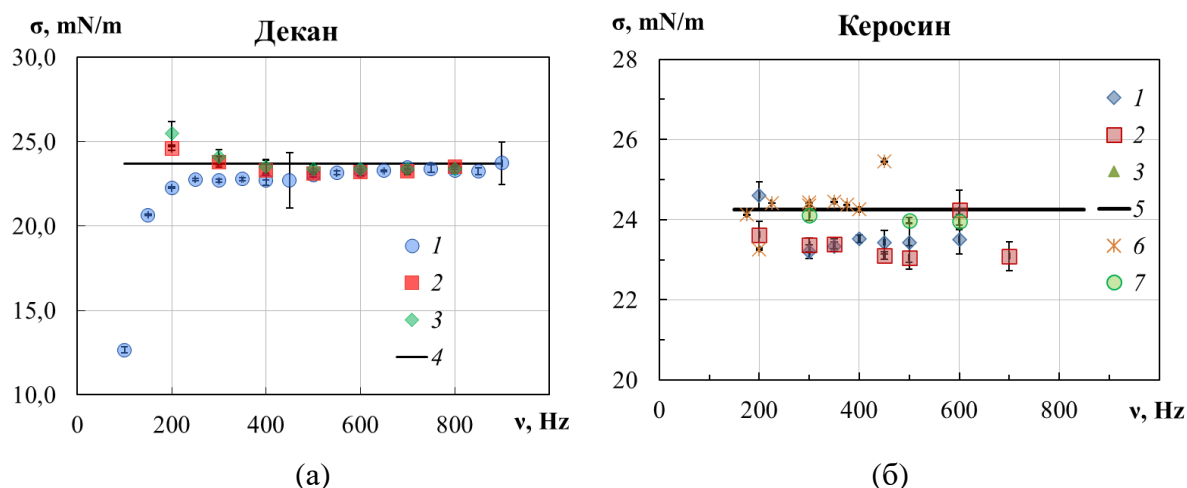


Рис. 2. Зависимость поверхностного натяжения, рассчитанная по формуле (2): (а) декана и (б) керосина от частоты возбуждения капиллярных волн ν : сплошной линией обозначено поверхностное натяжение, измеренное с помощью тензиометра; символами 1 – 7 показаны значения поверхностного натяжения, получены МКВ при различных условиях возбуждения и съемки эксперимента

Результаты исследования растворов олеиновой кислоты в керосине в зависимости от концентрации представлены на рис. 3а. Помимо длины волны в эксперименте измеряли пространственный коэффициент затухания β волн на поверхности, несущий информацию о вязкости и реологических характеристиках жидкости (рис. 3б).

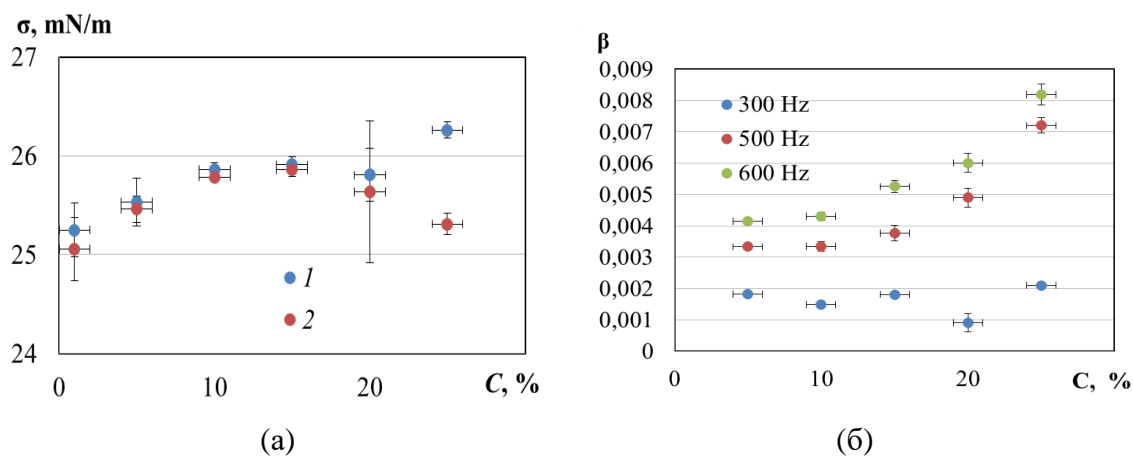


Рис. 3. Зависимость поверхностного натяжения растворов керосина в зависимости от концентрации в нем олеиновой кислоты (а); пространственный коэффициент затухания β волн на поверхности растворов керосина в зависимости от концентрации в нем олеиновой кислоты (б)

4. Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 20-01-00648_а.

Список литературы

1. *Latikka M., Backholm M., Timonen J. V., Ras R. H.* Wetting of ferrofluids: Phenomena and control // *Current Opinion in Colloid & Interface Science*. 2018. Vol. 36. P. 118–129. DOI: 10.1016/j.cocis.2018.04.003
2. *Khokhryakova (Bushueva) C., Kostarev K., Shmyrova A.* Deformation of ferrofluid floating drop under the action of magnetic field as method of interface tension measurement // *Experimental Thermal and Fluid Science*. 2019. Vol. 101. P. 186–192. DOI: 10.1016/j.expthermflusci.2018.10.014
3. *Amin M. S., Elborai S., Lee S. H., He X., Zahn M.* Surface tension measurement techniques of magnetic fluids at an interface between different fluids using perpendicular field instability // *Journal of Applied Physics*. 2005. Vol. 97. 10R308. DOI: 10.1063/1.1861374
4. *Sudo S., Hashimoto H., Ikeda A.* Measurement of the surface tension of a magnetic fluid and interfacial phenomena // *JSME International Journal*. 1989. Vol. 32. P. 47–51. DOI: 10.1299/jsmeb1988.32.1_47
5. *Afkhami S., Tyler A. J., Renardy Y., Renardy M., Pierre T. S., Woodward R. C., Riffle J. S.* Deformation of a hydrophobic ferrofluid droplet suspended in a viscous medium under uniform magnetic fields // *Journal of Fluid Mechanics*. 2010. Vol. 663. P. 358–384. DOI: 10.1017/S0022112010003551
6. *Flament, C., Lacis S., Bacri J. C., Cebers A., Neveu S., Perzynski R.* Measurements of ferrofluid surface tension in confined geometry // *Physical Review E*. 1996. Vol. 53. 4801. DOI: 10.1103/PhysRevE.53.4801
7. *Шмырова А. И., Мизёва И. А., Артамонова П. А.* Модификация метода капиллярных волн // *Вестник Пермского Университета. Физика*. 2018. Вып. 3 (41). С. 32–38.
8. *Shmyrov A., Mizev A., Shmyrova A., Mizeva I.* Capillary wave method: an alternative approach to wave excitation and to wave profile reconstruction // *Physics of Fluids*. 2019. Vol. 31 (1). 012101(8). DOI: 10.1063/1.5060666
9. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
10. *Behroozi F., Smith J., Even W.* Stokes' dream: Measurement of fluid viscosity from the attenuation of capillary waves // *American Journal of Physics*. 2010. Vol. 78 (11). P. 1165–1169. DOI: 10.1119/1.3467887

Конвекция бидисперсной коллоидной суспензии

И. Н. Черепанов, Б. Л. Смородин

Пермский государственный национальный исследовательский университет,
614990, Пермь, ул. Букирева, 15
email: bsmorodin@yandex.ru

В рамках бидисперсной модели основе численного моделирования проанализированы свойства конвективных течений коллоидной суспензии. В случае положительной термодиффузии больших и малых частиц, за счет гравитационного оседания неустойчивость может возникать колебательным образом. Показано, что в результате нелинейной эволюции колебательных возмущений может установиться режим стационарной конвекции. Получены поля функции тока, температуры и концентраций примеси малых и больших наночастиц.

Ключевые слова: коллоидная суспензия; бидисперсная модель; конвекция

Convection of bidisperse colloidal suspension

I. N. Cherepanov, B. L. Smorodin

Perm State University, 15 Bukireva St., 614990, Perm
email: bsmorodin@yandex.ru

The properties of convective flows of a colloidal suspension are analyzed based on numerical simulation. A bidisperse model of the colloidal suspension are used. The oscillatory instability can appear when positive thermodiffusion transport of large and small nanoparticles and gravitational settling have opposite directions. It is shown that a stationary convection regime can be established, as a result of the nonlinear evolution of oscillatory disturbances. The snapshots of the stream function, temperature, and impurity concentrations of small and large nanoparticles are obtained.

Keywords: colloidal suspension; bidisperse model; convection

1. Введение

Для описания конвективных течений в коллоидных суспензиях (наножидкостях), например, магнитных жидкостях часто используется монодисперсная модель [1–3], несмотря на то что реальные суспензии полидисперсны [4]. В некоторых случаях монодисперсная модель не достаточна для описания, но бидисперсная модель дает хорошее согласие с экспериментом [5]. При этом считается, что в жидкости носителя содержится только два типа наночастиц, отличающихся своими размерами.

В данной работе проанализирована конвекция коллоидной суспензии, заполняющей горизонтальный слой. Рассматривается тройная смесь, в которой каждая из компонент примеси наночастиц переносится конвективным, диффузионным и термодиффузионным потоками, а также участвует в гравитационном оседании. Построена бифуркационная диаграмма, где отражены решения в виде бегущих

волн, и получены распределения гидродинамических и концентрационных полей в плоском слое.

2. Постановка задачи и результаты

Рассмотрим горизонтальный слой коллоидной суспензии (толщина слоя h), помещенный в поле тяжести \mathbf{g} . Ось x направим вдоль границы слоя, а ось z – поперек него, так что твердые, непроницаемые, идеально теплопроводные границы имеют координаты $z = \pm h/2$. К границам слоя приложена разность температур Θ . В случае нагрева снизу $\Theta > 0$. Предположим что коллоидная суспензия содержит две фракции: маленьких частиц (радиуса r_s) и больших ($r_l = \alpha r_s$, $\alpha > 1$). Средние массовые доли малых \bar{C}_s и больших \bar{C}_l наночастиц связаны со средней массовой долей тяжелых частиц $\bar{C} = \bar{C}_s + \bar{C}_l$

$$\bar{C}_l = \gamma \bar{C}; \quad \bar{C}_s = (1 - \gamma) \bar{C}, \quad (1)$$

(γ – доля больших наночастиц). Считаем, что все коэффициенты переноса: коэффициенты диффузии обеих типов частиц D_i , ($i = s, l$), температуропроводность χ , и вязкость η , постоянны.

Уравнение состояния смеси запишем в виде:

$$\rho = \rho_0 (1 - \beta_T \theta + \beta_s \zeta_s + \beta_l \zeta_l), \quad \zeta_s = C_s - \bar{C}_s, \quad \zeta_l = C_l - \bar{C}_l, \quad (2)$$

где ρ_0 – плотность коллоидной суспензии при некоторой средней температуре \bar{T} и массовых концентрациях \bar{C}_s, \bar{C}_l ; θ и ζ_s, ζ_l – отклонения температуры и концентрации от средних значений, β_T, β_i , $i = (s, l)$ – коэффициенты теплового и концентрационного расширения, причем $\beta_s = \beta_l$.

Используя безразмерные масштабы: длины – h , времени – h^2/χ , скорости – χ/h , температуры – Θ , давления – $\rho_0 \chi^2/h^2$ и концентраций – $C_i = \beta_i \Theta / \beta_T$, запишем систему уравнений коллоидной суспензии в виде:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\nabla p + \text{Pr} \Delta \mathbf{v} + \text{Pr} \text{Ra} k^2 (\theta - \zeta_s - \zeta_l) \mathbf{e} = 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \theta &= \nabla^2 \theta, \\ \frac{\partial \zeta_i}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \zeta_i &= \text{Le}_i \nabla \left[\nabla (\zeta_i + \psi_i \theta) + \frac{\zeta_i}{l_s} \mathbf{e} \right], \quad i = s, l. \end{aligned} \quad (3)$$

Система уравнений (3) содержит числа Прандтля $\text{Pr} = \nu/\chi$ и Релея $\text{Ra} = (\beta_T g h^3 \Theta) / \nu \chi$. Числа Льюиса $\text{Le}_i = D_i/\chi$, безразмерные длины седиментации $l_i = h/(l_{\text{sed}})_i$ и параметры разделения $\psi_i = (S_T)_i \bar{C}_i (1 - \bar{C}_i) \beta_i / \beta_T$ характеризуют две компоненты коллоидной суспензии относящиеся к малым ($i = s$) и большим ($i = l$) наночастицам. $(S_T)_i$ обозначают коэффициенты термодиффузии. \mathbf{e} – единичный вектор, направленный вверх.

Решение системы (3) должно удовлетворять закону сохранения массы. Для каждой из компонент это условие запишем безразмерной форме

$$\int_{-1/2}^{1/2} C_s = \frac{\text{Bm}_s l_s}{\text{Ra}}, \quad \int_{-1/2}^{1/2} C_l = \frac{\text{Bm}_l l_l}{\text{Ra}}, \quad (4)$$

где появляются дополнительные параметры числа Больцмана $\text{Bm}_i = \beta_i g h^4 \bar{C}_i / (\nu \chi (l_{\text{sed}})_i)$ для каждой компоненты ($i = s, l$).

Граничные условия соответствуют твердым, изотермическим, непроницаемым для примеси границам:

$$z = \pm \frac{1}{2}: \quad v = 0, \quad \frac{\partial \zeta_i}{\partial z} + \psi_i \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{c_i}{l_i} = 0, \quad \theta(-1/2) = 1, \quad \theta(1/2) = 0. \quad (5)$$

Используются периодические граничные условия с периодом $l = 2$ (такому периоду отвечает волновое число $k = 2\pi/l = \pi$, соответствующее критическому волновому числу возникновения конвекции при нагреве жидкости снизу):

$$F(x, z, t) = F(x + l, z, t), \quad (6)$$

где F – любая из функций системы (3). Для расчета использована сетка 64x128.

В общем случае ($\gamma \neq 0$) параметры, характеризующие малые и большие наночастицы можно записать, используя соотношения их радиусов (α) и коэффициент γ , показывающий долю крупных частиц:

$$\text{Le}_l = \frac{\text{Le}_s}{\alpha}, \quad l_l = \frac{l_s}{\alpha^3}, \quad \text{Bm}_s = (1 - \gamma)\text{Bm}, \quad \text{Bm}_l = \gamma\alpha^3\text{Bm},$$

$$\psi_s = (1 - \gamma)\psi, \quad \psi_l = \alpha\gamma\psi. \quad (7)$$

Здесь $\text{Bm} = \beta_s g h^4 \bar{C} / (v \chi (l_{sed})_s)$ и $\psi(\bar{C})$ число Больцмана и параметр разделения моносферной жидкости, определяемые через общую концентрацию наночастиц \bar{C} .

Результаты, о которых идет речь в этой статье, получены для набора параметров $\gamma = 0.1$, $\alpha = 2.5$, $Pr = 10$, $\text{Le}_s = 1.5 \cdot 10^{-4}$, $l_s = 30$, $\text{Bm} = 2000$, $\psi_s = 1.8$, $\psi_l = 0.5$.

Согласно результатам линейной теории, конвективная неустойчивость в этом случае возникает колебательным образом при значении числа Релея $R_{osc} = 2018$. При этом критическое волновое число $k \cong 3.14$.

Расчет с использованием метода конечных разностей в ячейке длиной $L = 2$ дает границу неустойчивости $R_{osc} = 2035$. Результат эволюции возмущений при $R = 2050$, представленный на рис. 1, свидетельствует что конвекция в коллоидной суспензии возникает в результате обратной бифуркации Хопфа.

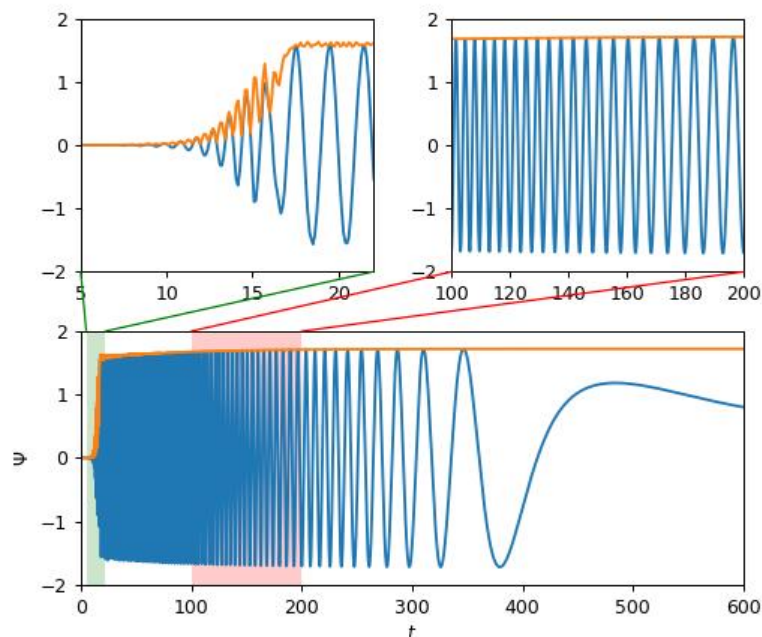


Рис. 1. Эволюция функции тока в фиксированной точке конвективной ячейки (синяя линия) и максимального значения функции тока (оранжевая линия)

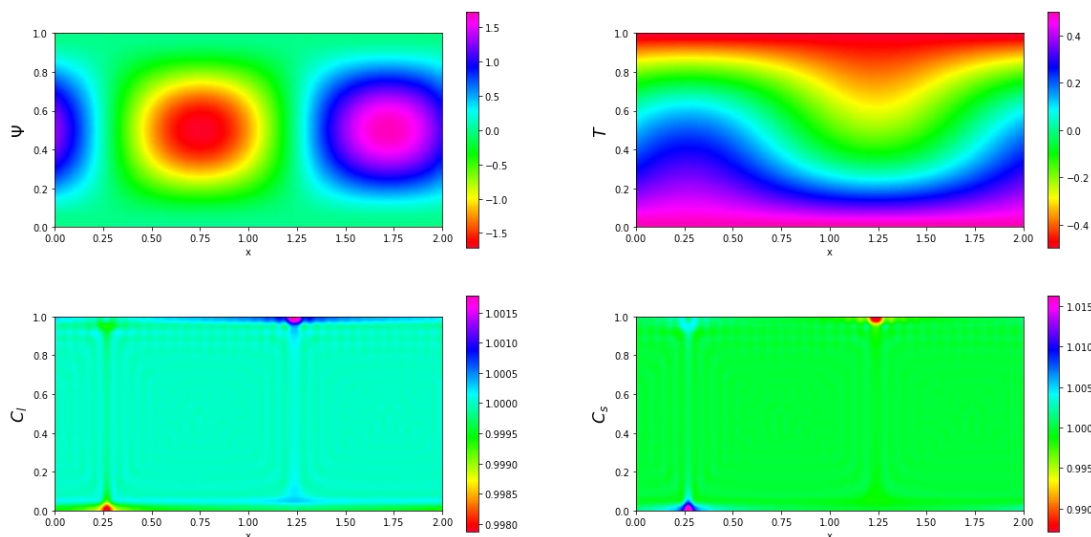


Рис. 2. Распределение полей функции тока, температуры и концентраций малых и больших наночастиц

На первом этапе $0 < t < 12$ течение представляет собой стоячую волну, амплитуда которой постоянно растет. В результате спонтанного нарушения симметрии стоячая волна разрушается, переходя к бегущей волне ($12 < t < 17$). В конце переходного периода максимальное значение функции тока перестает осциллировать. В ходе дальнейшей эволюции термодиффузионный транспорт не может поддерживать значительные концентрационные неоднородности, частота и фазовая скорость бегущей волны уменьшаются до нуля $17 < t < 600$, и в слое устанавливается стационарная конвекция (SOC). Длительность переходного процесса для частиц типа Nuflon в слое $h = 0.29$ см она составит ~ 10 часов.

Поля функции тока, температуры и концентраций малых и больших частиц в режиме (SOC) представлены на рис. 2. Отметим, что максимум распределения малых частиц соответствует минимуму распределения крупных частиц. Это связано с тем, что гравитационное оседание крупных частиц превышает их термодиффузионный поток, и они собираются у нижней границы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-01-00491).

Список литературы

1. Smorodin B. L., Cherepanov I. N. Convection of colloidal suspensions stratified by thermodiffusion and gravity // The European Physical Journal E. 2014 Vol. 37. 118. DOI: 10.1140/epje/i2014-14118-x
2. Смородин Б. Л., Черепанов И. Н. Конвекция в коллоидной суспензии в замкнутой горизонтальной ячейке // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2015. Т. 147. № 2. С. 363–371. DOI: 10.7868/S0044451015020157
3. Glukhov A. F., Sidorov S. Periodic convective processes in a magnetic fluid in vertical channels // Fluid Dynamics. 2019. Vol. 54 (4). P. 451–456. DOI: 10.1134/S0015462819040062
4. Rosensweig R. E. Ferrohydrodynamics. Dover Publications Inc. New York, 1998. 344 p.
5. Elfimova E. A., Ivanov A. O., Lakhtina E. V., Pshenichnikov A. F., Camp P. J. Sedimentation equilibria in polydisperse ferrofluids. Critical comparisons between experiment, theory, and computer simulation // Soft Matter. 2016. Vol. 12 (18). P. 4103–4112. DOI: 10.1039/C6SM00304D

Исследование устойчивости адвективного течения во вращающемся слое проводящей жидкости, помещенной в постоянное однородное магнитное поле

К. Г. Шварц, Ю. А. Шварц

Пермский государственный национальный исследовательский университет,
614990, Пермь, ул. Букирева, 15
email: kosch@psu.ru

Представлено новое точное решение уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска. Оно описывает адвективное течение в плоском вращающемся слое несжимаемой проводящей жидкости, на горизонтальных границах которого задано линейное распределение температуры. Ось вращения перпендикулярна слою жидкости. Слой помещен в постоянное однородное магнитное поле, ориентированное противоположно силе тяжести. Исследуется скорость течения, температура и напряженность магнитного поля в зависимости от числа Тейлора и Гартмана. В рамках линейной теории исследуется устойчивость адвективного течения на нормальные возмущения с помощью нового численного метода. Задача сводится к одномерной системе уравнений в частных производных с неизвестными функциями, зависящими от времени и вертикальной координаты, которая решается с помощью метода сеток. В рамках нелинейной постановки задачи численно изучаются конечно-амплитудные возмущения в надкритической области вблизи минимумов нейтральных кривых.

Ключевые слова: адвективное течение; проводящая жидкость; устойчивость

Investigation of advective flow stability in a rotating layer of a conducting fluid placed in a constant uniform magnetic field

K. G. Shvarts, Yu. A. Shvarts

Perm State University, 15 Bukireva St., 614990, Perm
email: kosch@psu.ru

A new exact solution of the Navier-Stokes equations is presented. It describes the advective flow in a flat rotating layer of incompressible conducting fluid, on the horizontal boundaries of which a linear temperature distribution is given. The rotation axis is perpendicular to the liqued layer. The layer is placed in a constant homogeneous magnetic field-oriented opposite to the force of gravity. The flow velocity, temperature and magnetic field strength as a function of Taylor and Hartmann numbers are investigated. The stability of advective flow to normal perturbations is investigated within the framework of linear theory using a new

numerical method. The problem is reduced to a one-dimensional system of partial differential equations with unknown functions depending on time and vertical coordinate, which is solved using the grid method. Within a nonlinear problem statement, the finite-amplitude perturbations in the supercritical region near the minima of neutral curves are studied numerically.

Keywords: advective flow; conductive fluid, stability

1. Введение

Устойчивость плоскопараллельных адвективных течений, возникающих в горизонтальном слое жидкости под действием горизонтального градиента температуры, изучалась достаточно интенсивно [1–3]. В последние годы активно изучается влияние вращения на устойчивость адвективных течений [4]. Имеются исследования влияния магнитного поля на устойчивость адвективных течений в горизонтальном слое в отсутствие вращения. Например, в [5] исследовалась устойчивость течения проводящей жидкости в слабом поперечном магнитном поле. Показано, что магнитное поле резко повышает устойчивость потока, не меняя характера нейтральной кривой. В [6] представлено адвективное течение, сформированное в вертикальном магнитном поле, и исследована его устойчивость. В [7] рассматривается электропроводящая жидкость в магнитном поле. Исследована устойчивость адвективного течения феррожидкости [8]. Исследовано возникновение колебательной неустойчивости адвективного течения проводящей жидкости в горизонтальном цилиндре круглого сечения в присутствии вращающегося магнитного поля [9]. Проведено исследование устойчивости проводящей жидкости в трехмерной постановке [10]. Для вращающегося с постоянной угловой скоростью слоя жидкости был разработан конечно-разностный метод, сводящий задачу изучения устойчивости к системе одномерных уравнений в частных производных для функции тока, вихря скорости и температуры [11, 12].

2. Математическая модель

Рассматривается бесконечный горизонтальный вращающийся слой несжимаемой жидкости толщиной $2h$ с твердыми границами, помещенный в однородное магнитное поле, ориентированное противоположно силе тяжести, с постоянной угловой скоростью Ω_0 . На границах слоя задается линейное распределение температуры. Ось вращения совпадает с вертикальной осью (рис. 1).

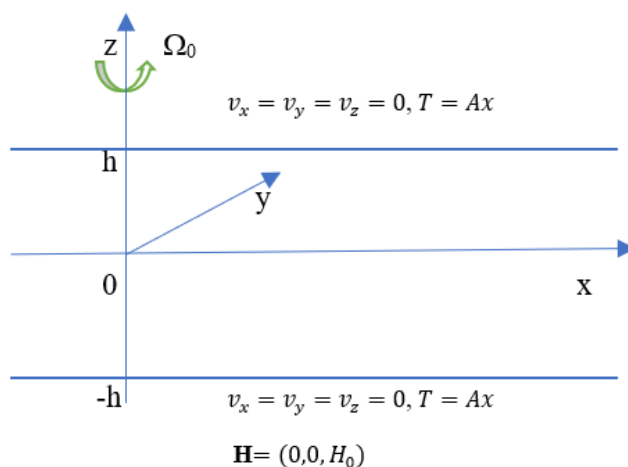


Рис. 1. Схематическое представление постановки проблемы

Движение жидкости описывается уравнениями конвекции в приближении Буссинеска [12, 13] в декартовой системе координат $Oxyz$ (z – вертикальная, x, y – горизонтальная координаты). Выбрав в качестве единиц длины, времени, скорости, температуры, давления и поля $h, h^2/\nu, g\beta Ah^3/\nu, Ah, \rho_0 g\beta Ah^3$ и константу H_0 (где ν – кинематическая вязкость жидкости, β – коэффициент теплового расширения, g – ускорение свободного падения, ρ_0 – средняя плотность), получим исходные уравнения в безразмерной форме)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} + \sqrt{Ta}(\mathbf{i}_z \times \mathbf{v}) = -\nabla\left(p + \frac{1}{2}Ha^2\mathbf{H}^2\right) + \Delta\mathbf{v} + GrT\mathbf{i}_z + Ha^2(\mathbf{H}\nabla)\mathbf{H}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{H} - (\mathbf{H}\nabla)\mathbf{v} = \frac{1}{Bt}\Delta\mathbf{H}, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla T = \frac{1}{Pr}\Delta T + S(rot\mathbf{H})^2, \quad (2.3)$$

$$div \mathbf{v} = 0, \quad div \mathbf{H} = 0, \quad (2.4)$$

$$\rho = \rho_0(1 - \beta T), \quad (2.5)$$

где Ta – число Тейлора, Gr – число Грасгофа, Pr – число Прандтля, Ha – число Гартмана, Bt – число Бетчелора: $Ta = (2\Omega_0 h^2/\nu)^2$, $Gr = g\beta Ah/\nu^2$, $Pr = \nu/\chi$, $Ha = H_0 h / (\nu\sqrt{4\pi\rho_0})$, $Bt = \nu/\nu_m$, $S = \chi_m H_0^2 / (\nu Ah)$. Здесь $\mathbf{H} = (H_x, H_y, H_z)$ – напряженность магнитного поля, $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ – вектор скорости, p – давление, \mathbf{i}_z – орт-вектор вертикальной оси z , T – температура, $\nu_m = c^2/(4\pi\sigma)$ – коэффициент магнитной вязкости, c – скорость света, σ – электропроводность жидкости, $\chi_m = \nu_m/c_p$.

Границы слоя ферромагнитные и твердые:

$$z = \pm 1: \quad \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{H} = (0, 0, 1), \quad T = x. \quad (2.6)$$

Напряженность магнитного поля, скорость и температура представляются в виде

$$\mathbf{H} = (H_x(z), H_y(z), 1), \quad \mathbf{v} = (u_0(z), v_0(z), 0), \quad T = x + \tau_0(z),$$

При заданных условиях формируется стационарное адвективное течение [12]:

$$\begin{aligned} M(z) &= \frac{Gr}{\lambda_m^2} \left[z - \frac{sh(\lambda_m z)}{sh(\lambda_m)} \right], \\ N(z) &= -Bt \frac{Gr}{\lambda_m^2} \left[\frac{z^2 - 1}{2} - \frac{ch(\lambda_m z) - ch(\lambda_m)}{\lambda_m sh(\lambda_m)} \right], \\ \tau_0(z) &= Pr Gr Re \tau_{01}(z) + Pr S Bt^2 \tau_{02}(z), \end{aligned} \quad (2.7)$$

где комплекснозначные функции $M(z) = u_0(z) + iv_0(z)$ и $N(z) = H_x(z) + iH_y(z)$,

$$\begin{aligned} \tau_{01}(z) &= \frac{z^3 - z}{6} - \frac{sh(\lambda_m z) - sh(\lambda_m)}{\lambda_m^2 sh(\lambda_m)}, \quad \tau_{02}(z) = \int_{-1}^z (z - \zeta) |M(\zeta)|^2 d\zeta - \frac{1+z}{2} \int_{-1}^1 (1 - \zeta) |M(\zeta)|^2 d\zeta, \\ |M(\zeta)|^2 &= u_0^2(z) + v_0^2(z), \\ \lambda_m &= \sqrt{Ha^2 Bt + i\sqrt{Ta}}. \end{aligned}$$

Известно, что влияние вращения во многом сходно с влиянием магнитного поля [14], влияние продольной вибрации на адвективное течение сходно с воздействием вращения [15], во всех случаях скорость течения описывается аналогично (2.7). Если $Ha = 0$, то при отсутствии магнитного поля во вращающемся слое жидкости возникает адвективное течение, описанное в [12]. При $Ta = 0$, когда отсутствует вращение, получаем течение, описанное в [6]. Аналогично описывается адвективное течение [7]. Все эти течения имеют сходный профиль скорости и в меньшей степени сходные профили температуры.

Для изучения устойчивости стационарного адвективного течения применим метод малых возмущений:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{V}, \quad \mathbf{v}_0 = (u_0, v_0, 0), \quad \mathbf{V} = (u, v, w), \quad T = T_0 + \theta, \quad T_0 = x + \tau_0(z), \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}', \quad (2.8)$$

$$\mathbf{H}_0 = (H_x(z), H_y(z), 1), \quad \mathbf{H}' = (h_x, h_y, h_z), \quad P = p_0 + P'.$$

Подставив возмущенные поля (2.8) в систему (2.1)–(2.5) и граничные условия (2.6), получим следующую задачу:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{v}_0 + (\mathbf{v}_0\nabla)\mathbf{V} + \sqrt{Ta}(\mathbf{i}_z \times \mathbf{V}) = -\nabla \left(P' + \frac{1}{2} Ha^2 \mathbf{H}'^2 + Ha^2 \mathbf{H}'\mathbf{H}_0 \right) + \Delta \mathbf{V} +$$

$$+ Ha^2 [(\mathbf{H}_0\nabla)\mathbf{H}' + (\mathbf{H}'\nabla)\mathbf{H}' + (\mathbf{H}'\nabla)\mathbf{H}_0] + Gr\theta \mathbf{i}_z, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{H}' + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{H}_0 + (\mathbf{v}_0\nabla)\mathbf{H}' - \mathbf{H}'\nabla\mathbf{v}_0 - (\mathbf{H}'\nabla)\mathbf{V} - (\mathbf{H}_0\nabla)\mathbf{V} = \frac{1}{Bt} \Delta \mathbf{H}', \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{V}\nabla T_0 + \mathbf{V}\nabla\theta + \mathbf{v}_0\nabla\theta = \frac{1}{Pr} \Delta\theta + S[(rot\mathbf{H})^2 + 2(rot\mathbf{H}')(rot\mathbf{H}_0)], \quad (2.11)$$

$$div \mathbf{V} = 0, \quad div \mathbf{H}' = 0. \quad (2.12)$$

Граничные условия:

$$z = \pm 1: \quad \mathbf{V} = 0, \quad \mathbf{H}' = 0, \quad \theta = 0. \quad (2.13)$$

3. Линейная теория устойчивости адвективного течения

В рамках линейной теории устойчивости в уравнениях (2.9) – (2.12) пренебрегаем малыми квадратичными по \mathbf{V} , \mathbf{H}' и θ слагаемыми. В результате получим линеаризованную систему уравнений для возмущений скорости \mathbf{V} , температуры θ , давления P и напряжённости магнитного поля \mathbf{H}' . В силу большой сложности исследования устойчивости течения в трёхмерной постановке будем рассматривать предельный случай: пространственные винтовые периодические по x возмущения в виде валов с осью перпендикулярной оси X . Уравнения винтовых возмущений выводятся из линеаризованной системы в предположении, что производные всех функций по y в ней равны нулю. Имеются все три компоненты вектора возмущения скорости и вектора возмущения напряжённости магнитного поля, которые, так же, как и возмущения температуры, являются функциями времени t и двух пространственных переменных x, z . Учитывая условия (2.12), введем функцию тока и вихрь возмущения скорости:

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (3.1)$$

$$\varphi = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = -\Delta \psi = -\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right), \quad (3.2)$$

потенциал и вихрь возмущения напряжённости магнитного поля:

$$h_x = -\frac{\partial \eta}{\partial z}, \quad h_z = \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (3.3)$$

$$\beta = \frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x} = -\Delta \eta, \quad (3.4)$$

Представим неизвестные функции в виде

$$\begin{aligned} \varphi &= [\varphi_1(t, z) + i\varphi_2(t, z)] \exp(ik_x x), \quad \psi = [\psi_1(t, z) + i\psi_2(t, z)] \exp(ik_x x), \\ v &= [v_1(t, z) + iv_2(t, z)] \exp(ik_x x), \quad \theta = [\theta_1(t, z) + i\theta_2(t, z)] \exp(ik_x x), \\ \beta &= [\beta_1(t, z) + i\beta_2(t, z)] \exp(ik_x x), \quad \eta = [\eta_1(t, z) + i\eta_2(t, z)] \exp(ik_x x), \\ h_y &= [\gamma_1(t, z) + i\gamma_2(t, z)] \exp(ik_x x), \end{aligned} \quad (3.5)$$

где k_x - волновое число.

В результате задача сведется к системе линейных уравнений в частных производных по времени t и переменной z .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - k_x \left(u_0(z) \varphi_2 + \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} \psi_2 \right) - \sqrt{Ta} \frac{\partial v_1}{\partial z} &= \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} - k_x^2 \varphi_1 + k_x \theta_2 + \\ + Ha^2 \left[-H_x'' k_x \eta_2 - H_x(z) k_x \frac{\partial \eta_2}{\partial z} - k_x^2 H_x(z) \eta_1 + \frac{\partial \beta_1}{\partial z} \right], \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + k_x \left(u_0(z) \varphi_1 + \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} \psi_1 \right) - \sqrt{Ta} \frac{\partial v_2}{\partial z} &= \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} - k_x^2 \varphi_2 - k_x \theta_1 + \\ + Ha^2 \left[H_x'' k_x \eta_1 + H_x(z) k_x \frac{\partial \eta_1}{\partial z} - k_x^2 H_x(z) \eta_2 + \frac{\partial \beta_2}{\partial z} \right], \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial t} - k_x u_0(z) \left(v_2 + \frac{\partial v_0}{\partial z} \psi_2 \right) - \sqrt{Ta} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} &= \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} - k_x^2 v_1 + \\ + Ha^2 \left[-H_y'(z) k_x \eta_2 - k_x H_x(z) \gamma_2 + \frac{\partial \gamma_1}{\partial z} \right], \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_2}{\partial t} - k_x u_0(z) \left(v_1 + \frac{\partial v_0}{\partial z} \psi_1 \right) - \sqrt{Ta} \frac{\partial \psi_2}{\partial z} &= \frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2} - k_x^2 v_2 + \\ + Ha^2 \left[H_y'(z) k_x \eta_1 + k_x H_x(z) \gamma_1 + \frac{\partial \gamma_2}{\partial z} \right], \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} - k_x^2 \psi_1 + \varphi_1 = 0, \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} - k_x^2 \psi_2 + \varphi_2 = 0, \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial t} - k_x \beta_2 (H_x(z) + u_0(z)) + \frac{\partial \beta_1}{\partial z} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} k_x \eta_2 = \frac{1}{B\tau} \left(\frac{\partial^2 \beta_1}{\partial z^2} - k_x^2 \beta_1 \right), \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial \beta_2}{\partial t} + k_x \beta_1 (H_x(z) + u_0(z)) + \frac{\partial \beta_2}{\partial z} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} k_x \eta_1 = \frac{1}{B\tau} \left(\frac{\partial^2 \beta_2}{\partial z^2} - k_x^2 \beta_2 \right), \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial t} - k_x v_2 H_x(z) + \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_0}{\partial z} k_x \eta_2 + k_x \gamma_2 u_0(z) = \frac{1}{B\tau} \left(\frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial z^2} - k_x^2 \gamma_1 \right), \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial \gamma_2}{\partial t} + k_x v_1 H_x(z) + \frac{\partial v_2}{\partial z} + \frac{\partial v_0}{\partial z} k_x \eta_1 - k_x \gamma_1 u_0(z) = \frac{1}{Bt} \left(\frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial z^2} - k_x^2 \gamma_2 \right), \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial^2 \beta_1}{\partial z^2} - k_x^2 \beta_1 + \eta_1 = 0, \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial^2 \beta_2}{\partial z^2} - k_x^2 \beta_2 + \eta_2 = 0, \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} - k_x \left[u_0(z) \theta_2 + \frac{\partial \tau_0(z)}{\partial z} \psi_2 \right] = \frac{1}{Pr} \left[\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z^2} - k_x^2 \theta_1 \right] + 2S \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial z} v'_0 + \beta_1 u'_0 \right), \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial t} + k_x \left[u_0(z) \theta_1 + \frac{\partial \tau_0(z)}{\partial z} \psi_1 \right] = \frac{1}{Pr} \left[\frac{\partial^2 \theta_2}{\partial z^2} - k_x^2 \theta_2 \right] + 2S \left(\frac{\partial \gamma_2}{\partial z} v'_0 + \beta_2 u'_0 \right). \quad (3.19)$$

Граничные условия

$$z = \pm 1: \psi_l = \frac{\partial \psi_l}{\partial z} = v_l = \theta_l = 0, \quad h_{yl} = \eta_l = \frac{\partial \eta_l}{\partial z} = 0 \quad (l=1, 2). \quad (3.20)$$

В качестве начальных возмущений of $\psi_1, \psi_2, v_1, v_2, \theta_1, \theta_2, h_{y1}, h_{y2}, \eta_1, \eta_2$ бралась функция $\sin^2(\pi z)$ удовлетворяющая граничным условиям (3.20).

Полученная начально-краевая задача решается с помощью численного метода, являющимся развитием методики, описанной в [12] для более простого случая. Количество узлов сетки равно 200. Величины возмущения вихря скорости и возмущения вихря напряженности магнитного поля на твердых границах слоя вычислялись по формуле Вудса [14]. При построении нейтральной кривой, описывающей зависимость критического числа Грасгофа от волнового числа. Для каждого выбранного значения k_x требуется найти такое число Грасгофа, при котором действительная часть декремента возмущений $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ равна нулю. Иными словами, решается задача о поиске корня уравнения $\lambda_1 = 0$ для неявной функции $\lambda_1(k_x, Gr, Ta, Ha, Bt)$ при фиксированных значениях Ta, Ha и Bt . Эта функция строится дискретно по точкам с помощью многократного решения эволюционной задачи (3.6)–(3.20) методом сеток. Для нахождения действительной части декремента возмущений λ_1 прослеживалась эволюция во времени максимумов по модулю неизвестных. В силу линейности задачи устойчивости в качестве аппроксимации зависимости амплитуд по времени использовалась экспоненциальная формула $C \exp(\lambda_1 t)$. Неизвестные λ_1 и C определяются методом наименьших квадратов [16] по ходу вычислений уравнений системы методом сеток. Нулевое значение декремента возмущений уточняется методом половинного деления [17]. Характер поведения возмущений от времени существенно зависит от всех параметров задачи; в области неустойчивости все возмущения нарастают, а в области устойчивости затухают.

В силу сложности системы (3.6) – (3.20) основные расчеты проводились для слабого магнитного поля ($Ha = 0; 1; 5; 10$) при $Pr = 6.7, Bt = 1, S = 1$, в умеренном значении числа Тейлора. Возмущение вихря скорости и возмущение напряжённости магнитного поля на твердых границах слоя рассчитывалось по формуле Вудса [14]. Магнитное поле повышает устойчивость адвективного течения, с ростом числа Гартмана сохраняется колебательная неустойчивость. С увеличением Ha растет критическое волновое число λ_2 , соответствующее минимуму критического числа Грасгофа (Gr_k).

4. Конечно-амплитудные пространственные возмущения в надкритических областях

Для изучений возмущений конечной амплитуды в надкритической области воспользуемся нелинейными уравнениями системы (2.9) – (2.13). Для пространственных винтовых, периодических по x возмущений они имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + u_0(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + u_0''(z) \frac{\partial \psi}{\partial x} - \sqrt{Ta} \frac{\partial v}{\partial z} = \Delta \varphi + Ha^2 \left[H_x(z) \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial z} \right] + \\ + Ha^2 \left[H_x''(z) - \frac{\partial \beta}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right] - Gr \frac{\partial \vartheta}{\partial x}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\Delta \psi + \varphi = 0, \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u_0(z) \frac{\partial v}{\partial x} + v_0'(z) \frac{\partial \psi}{\partial x} - \sqrt{Ta} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} = \Delta v + \\ + Ha^2 \left[H_y'(z) \frac{\partial \eta}{\partial x} + H_x(z) \frac{\partial h_y}{\partial x} \right] + Ha^2 \left[\frac{\partial h_y}{\partial z} - \frac{\partial \beta}{\partial z} \frac{\partial h_y}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial h_y}{\partial z} \right], \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta}{\partial t} + u_0(z) \frac{\partial \beta}{\partial x} - H_x(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} + H_x''(z) \frac{\partial \psi}{\partial x} - u_0''(z) \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \\ + h_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + h_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial h_x}{\partial x} \varphi + \frac{\partial h_z}{\partial z} \varphi = \frac{1}{Bt} \Delta \beta, \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\Delta \eta + \beta = 0, \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_y}{\partial t} + H_y'(z) + u_0(z) \frac{\partial h_y}{\partial x} - v_0'(z) \frac{\partial \eta}{\partial x} - H_x(z) \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial z} + u \frac{\partial h_y}{\partial x} + w \frac{\partial h_y}{\partial z} + \\ + h_x \frac{\partial v}{\partial x} + h_z \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{Bt} \Delta h_y, \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + w \frac{\partial \tau_0}{\partial z} + u_0(z) \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + w \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = \frac{1}{Pr} \Delta \vartheta + S \left[\left(\frac{\partial h_y}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial h_y}{\partial x} \right)^2 + \eta^2 + \right] \\ + 2S \left[\left(\frac{\partial h_y}{\partial z} \frac{\partial h_y}{\partial z} + \frac{\partial h_x}{\partial z} \eta \right) \right], \end{aligned} \quad (4.7)$$

где оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Граничные условия

$$z = \pm 1: \psi = \eta = \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0, v = h_y = \vartheta = 0, \quad (4.8)$$

на боковых границах заданы условия периодичности

$$\psi(t, 0, z) = \psi(t, L, z), \quad \varphi(t, 0, z) = \varphi(t, L, z),$$

$$v(t, 0, z) = v(t, L, z), \quad \vartheta(t, 0, z) = \vartheta(t, L, z),$$

$$\beta(t, 0, z) = \beta(t, L, z), \quad \eta(t, 0, z) = \eta(t, L, z), \quad h_y(t, 0, z) = h_y(t, L, z), \quad (4.9)$$

где L – длина волны возмущений, соответствующая критическому числу Грасгофа, для фиксированных чисел Тейлора и Гартмана.

Задача (4.1) – (4.9) решается численно с помощью метода сеток двухполевым методом [18]. Используется явная конечно-разностная схема, как с центральными, так и с направленными разностями. Уравнения Пуассона (4.2) и (4.5) для функции тока ψ и η решаются методом последовательной верхней релаксации. Вихри на твердых границах аппроксимируются по формуле Вудса.

Расчёты для исследования винтовых возмущений проводились при $Pr = 6.7$, $Ha = 5, 10$, $Ta = 4100$ на сетке 100×200 узлов. В качестве начальных возмущений, бралась функция $\cos(2\pi x/L) \sin^2 \pi z$, удовлетворяющая граничным условиям (4.8) – (4.9). Расчёты показали, что вблизи верхней и нижней границы слоя возникают движущиеся в противоположных направлениях тепловые пятна. Возмущения функции тока и второй компоненты скорости формируют вблизи границ слоя систему бегущих винтообразных вихрей, возникающих в области с неустойчивой температурной стратификацией. Возмущение напряженности магнитного поля имеет спиралевидную форму. При надкритичности выше 1.57 нестационарное течение теряет гармоничность по времени и перестраивается, масштаб вихрей уменьшается. При увеличении числа Гартмана с 5 до 10 масштабы вихрей в пограничных слоях уменьшается на 4.5 %, температурная стратификация вблизи твердых стенок сохраняется. Число Нуссельта растет по корневому закону.

Список литературы

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Непомнящий А. А. Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989. 320 с.
2. Andreev V. K., Bekezhanova V. B. Stability of non-isothermal fluids (Review) // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2013. Vol. 54 (2). P. 171–184. DOI: 10.1134/S0021894413020016
3. Gershuni G. Z., Lyubimov D. V. Thermal Vibrational Convection. John Wiley & Sons. England, 1998. 358 p.
4. Шварц К. Г. Исследование устойчивости адвективных течений во вращающемся слое жидкости // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2013. Вып. 1 (13). С. 54–61.
5. Аристов С. Н., Пичугин А. М. Монотонная устойчивость адвективного течения проводящей жидкости в слабом поперечном магнитном поле. // Магнитная гидродинамика. 1989. № 3. С. 127–129.
6. Kaddeche S., Hendry D., Benhadid H. Magnetic stabilization of the buoyant convection between infinite horizontal walls with a horizontal temperature gradient // Journal of Fluid Mechanics. 2003. Vol. 480. P. 185–216. DOI: 10.1017/S0022112002003622
7. Hudoba A., Molokov S., Aleksandrova S., Pedcenko A. Linear stability of buoyant convection in a horizontal layer of an electrically conducting fluid in moderate and high vertical magnetic field // Physics of Fluids. 2016. Vol. 28. 094104. DOI: 10.1063/1.4962741

8. *Slavtchev S., Hennenberg M., Valhev G., Weyssow B.* Stability of ferrofluid flows in a horizontal channel subjected to a longitudinal temperature gradient and an oblique magnetic field // *Microgravity Science and Technology*. 2008. Vol. 20 (1). P. 199–203 DOI: 10.1007/s12217-008-9027-2
9. *Burnysheva A. V., Lyubimova T. P.* Oscillatory instability of advective flow in a horizontal cylinder in the presence of a rotating magnetic field // *Fluid Dynamics*. 2012. Vol. 47 (4). P. 557–563. DOI: 10.1134/S0015462812050018
10. *Lyubimov D. V., Lyubimova T. P., Perminov A. B., Henry D., Hadid H. B.* Stability of convection in a horizontal channel subjected to a longitudinal temperature gradient. Part 2. Effect of a magnetic field // *Journal of Fluid Mechanics*. 2009. Vol. 635. P. 297–319. DOI: 10.1017/S0022112009007575
11. *Тарунин Е. Л., Шварц К. Г.* Исследование линейной устойчивости адвективного течения методом сеток // *Вычислительные технологии*. 2001. Т. 6. № 6. С. 108–117.
12. *Аристов С. Н., Шварц К. Г.* Вихревые течения адвективной природы во вращающемся слое жидкости. Перм. ун–т. Пермь, 2006. 155 с.
13. *Курко И. М., Курко Г. Е.* Магнитная гидродинамика. Современное видение проблем. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский институт компьютерных исследований, 2009. 632 с.
14. *Gershuni G. Z., Zhukhovitskii E. M.* Convective stability of incompressible fluids. Jerusalem, Israel: Keter Publishing House, 1976. 330 p.
15. *Shvarts K. G.* Advective flow of a rotating fluid layer in a vibrational field // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 2019. Vol. 15 (3). P. 261–270. DOI: 10.20537/nd190305
16. *Тарунин Е. Л.* Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. Иркутск: Изд-во Иркут. Ун-та, 1990. 225 с.
17. *Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З.* Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения. Спб.: Издательство «Лань», 2008. 400 с.
18. *Шварц К. Г.* Конечно-амплитудные пространственные возмущения адвективного течения во вращающемся горизонтальном слое жидкости // *Вычислительные технологии*. 2001. Т. 6. Спец. выпуск. Ч. 2. Труды Международной конференции RDAMM-2001. С. 702–707.

Математическая модель суперконцентрации заряда на пересечении нано- и микроканалов

В. С. Шелистов^a, В. А. Попов^b, М. С. Алексеев^c, Е. А. Демёхин^{a,d}

^a Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации,
125167, Москва, пр. Ленинградский, 49/2
email: VSShelistov@fa.ru

^b Южный федеральный университет,
344006, Ростов-на-Дону, ул. Большая Садовая, 105/42

^c Кубанский государственный университет, 350040, Краснодар, ул. Ставропольская, 149

^d Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Научно-исследовательский институт механики, 119192, Москва, Мичуринский пр., 1
email: edemekhi@gmail.com

В работе численно исследуется движение раствора электролита под действием внешней разности электрических потенциалов в щели, состоящей из состыкованных микро- и наноканала, стенки которых электрически заряжены. Предполагается перехлест слоёв Дебая в наноканале. Решение проводится на базе нестационарной системы Нернста-Планка-Пуассона-Навье-Стокса. Физика процесса определяется нелинейным взаимодействием объёмного и поверхностного токов, описываемого числом Духина. При критических числах Духина в окрестности стыка микро- и наноканала образуются зона обессоливания и зона отошедшего заряда. Распределение заряда по пространству существенно отличается от решения Гуи-Чепмена; в частности, величина заряда превышает в несколько десятков раз. Полученные результаты могут быть использованы для объяснения явления суперконцентрации заряженных биообъектов.

Ключевые слова: микроканал; наноканал; электролит; поверхностный заряд; решение Гуи-Чепмена

Mathematical model of charge superconcentration on the intersection of nano- and microchannels

V. S. Shelistov^a, V. A. Popov^b, M. S. Alekseev^c, E. A. Demekhin^{a,d}

^a Financial University under the Government of the Russian Federation,
49 Leningradsky Pr., 125167, Moscow
email: VSShelistov@fa.ru

^b Southern Federal University, 105/42 Bolshaya Sadovaya St., 344006, Rostov-on-Don

^c Kuban State University, 149 Stavropolskaya St., 350040, Krasnodar

^d Moscow State University, Research Institute of Mechanics,
1 Michurinsky Pr., 119192, Moscow
email: edemekhi@gmail.com

The paper numerically studies the motion of an electrolyte solution under the action of an external electric potential difference in a slot consisting of a nanochannel attached to a microchannel, the walls of both of which are electrically charged. Debye layers overlap is assumed in the nanochannel. The solution is based on the nonstationary Nernst-Planck-Poisson-Navier-Stokes system. The physics of the process is governed by a nonlinear interaction of bulk and surface currents, described by the Dukhin number. At the critical Dukhin numbers, in the vicinity of the joint of the micro- and nanochannels, a zone of desalination along with a space charge region are formed. The charge distribution in space differs significantly from the Gouy-Chapman solution; in particular, the charge magnitude is several tens of times greater. These results can be used for describing an effect of superconcentration of charged biological objects.

Keywords: microchannel; nanochannel; electrolyte; surface charge; Gouy-Chapman solution

1. Введение

Одним из проявлений концентрационно-поляризационных явлений, характерных для микро- и наножидкостных систем, являются так называемые концентрационные «ударные волны» или «скачки» обессоливания. Эти скачки сопровождаются возникновением скачков электрического заряда. Данное явление привлекло повышенное внимание учёных в связи со многими потенциальными практическими приложениями: «суперконцентрирование» ДНК и вирусов, обнаружение больших заряженных молекул, создание «молекулярного сита», разделяющего молекулы по их свойствам, связывание антитело-антиген и другими, главным образом, в медицинской диагностике. Одной из первых экспериментальных работ, где такие волны наблюдались на стыке микро- и наноканала (рисунок (а)), была статья группы Хана [1]. Первая попытка их теоретического описания была предпринята Мани, Зангле и Сантьяго [2]. Решение полной системы Нернста-Планка-Пуассона-Навье-Стокса (НППНС) даже в двумерной нестационарной постановке для длинных микро- и наноканалов весьма затруднено из-за тонких пограничных слоёв Дебая и ряда других факторов. Чтобы обойти эти сложности, авторы обобщили метод усреднения Кармана-Польгаузена классической теории пограничного слоя на уравнения НППНС, вывели упрощённую одномерную систему относительно усреднённых по каналу электрического поля, тока и концентрации соли. Однако в этой упрощённой модели был упущен ряд физических эффектов, описанных в [1], в частности – образование повышенного электрического заряда на стыке микро- и наноканала. В настоящей работе удалось получить численное решение вышеуказанной задачи в рамках двумерной постановки уравнений НППНС, не прибегая к указанным упрощениям.

2. Постановка задачи

Система НППНС для бинарного электролита решается в области, состоящей из состыкованных микроканала и наноканала (рисунок (б)). Уравнения движения жидкости в силу малости числа Рейнольдса взяты в приближении Стокса, коэффициенты диффузии катионов и анионов приняты одинаковыми. В качестве базисных величин взяты половина ширины наноканала, коэффициент диффузии, динамическая вязкость жидкости, термический потенциал и молярная концентрация электролита во входном потоке. Соответствующие безразмерные уравнения приведены ниже.

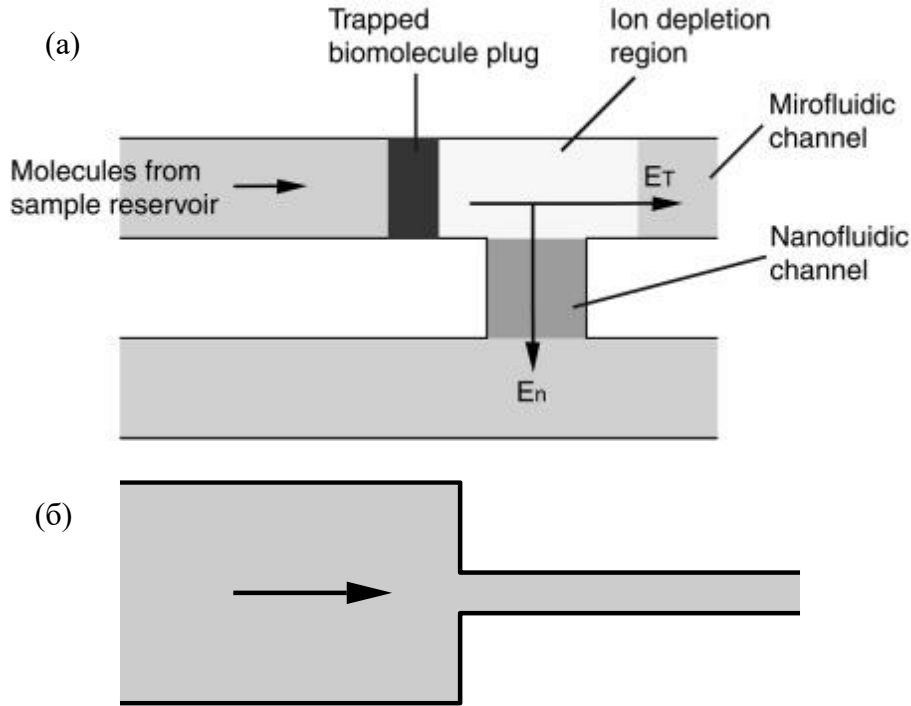


Рисунок. Геометрия задачи: (а) экспериментальная установка [1], (б) математическая модель

$$\frac{\partial c^{\pm}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla c^{\pm} = \nabla (c^{\pm} \nabla \Phi) + \nabla^2 c^{\pm}, \quad (1)$$

$$\nu^2 \nabla^2 \Phi = c^{-} - c^{+}, \quad (2)$$

$$-\nabla \Pi + \nabla^2 \mathbf{U} = (c^{+} - c^{-}) \frac{\kappa}{\nu^2} \nabla \Phi = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{U} = 0. \quad (3)$$

Здесь c^{\pm} – концентрации катионов и анионов, \mathbf{U} – вектор скорости, Φ – электрический потенциал, Π – давление, ν – число Дебая, κ – коэффициент сцепления между гидродинамической и электростатической частями задачи. На входе и выходе из системы каналов задаются разность давлений $\Delta \Pi$, разность потенциалов ΔV и равенство концентраций ионов равновесному значению: $c^{\pm} = 1$. Жёсткие поверхности каналов предполагаются непроницаемыми с условием прилипания, $\mathbf{U} = 0$, $\partial c^{\pm} / \partial n \pm c^{\pm} \partial \Phi / \partial n = 0$; на них задаётся скачок электрического потенциала, вызванный наличием поверхностного заряда σ (который для простоты положен постоянным), $\nu \partial \Phi / \partial n = -\sigma$. Задача замыкается добавлением начальных условий: концентрации катионов и анионов предполагались равновесными во всей области решения, $c^{\pm} = 1$.

Для численного решения задачи была использована модификация алгоритма из работы [3]. Дискретизация по пространству выполнялась двухточечными разностными схемами на смещённых сетках, дающих второй порядок аппроксимации. Сетки в направлениях x и y были растянуты при помощи заданных функций одной переменной так, чтобы около стенок и стыка имело место сгущение узлов. Уравнения (2) и (3) в разностной форме сводятся к СЛАУ с разреженными матрицами и решаются прямыми методами. Уравнения (1) сводятся к системе ОДУ относительно t и решаются полунявным методом Рунге-Кутты третьего порядка, причём в неявной части

используется линейная аппроксимация якобиана, также представляемая в виде разреженной матрицы. Для простоты программирования все части алгоритма, кроме решения СЛАУ, были спроектированы в однопоточной модели.

3. Результаты численного моделирования

Параметры для численного решения задачи подбирались с ориентиром на эксперименты [1] и немного варьировались для выявления шаблонов поведения системы. Размерные длины микро- и наноканала во всех расчётах составляли по 10 мкм, перепад давления положен нулевым, а разность потенциалов между входами в микро- и наноканал перебиралась от нуля в положительную сторону, при этом значения σ брались отрицательными. Расчёты проводились методом установления решения, причём вместо концентраций ионов контролировались общая концентрация раствора $K = c^+ + c^-$ и плотность заряда $\rho = c^+ - c^-$.

При малых ΔV поведение системы соответствует предсказаниям модели *leaky dielectric* (когда раствор электролита является электронейтральным, $K = 2$, $\rho = 0$, во всей пространственной области, кроме узких дебаевских слоёв). При достижении критического значения разности потенциалов возле стыка на стороне микроканала образуется пятно обессоливания, $K < 2$. При дальнейшем увеличении ΔV это пятно увеличивается в размерах, при этом K уменьшается практически до нуля. Плотность заряда ρ в области пятна приобретает локальный максимум, который растёт по амплитуде при увеличении ΔV . В расчётах значение ρ в этом максимуме могло достигать десятков, то есть вблизи стыка сосредоточивается «висячий заряд». Подчеркнём, что этот эффект, наблюдаемый в [1], в принципе не может быть получен на основе подходов [2, 4], где, во-первых, изменения вдоль продольной координаты предполагаются медленными, а во-вторых, распределение заряда фактически «замораживается» на одномерном решении Гуи-Чепмена. Практическое значение этого феномена было указано в [1]: «висячий заряд» должен притягивать отрицательно заряженные объекты, взвешенные в растворе, создавая, в свою очередь, их суперконцентрацию. На практике в роли таких объектов могут быть макромолекулы ДНК и вирусов. Поэтому полученные результаты могут иметь, помимо фундаментального, и практический интерес, в частности – в медицинской диагностике.

4. Благодарности

Работа поддержана грантом Российского научного фонда № 22-29-00307.

Список литературы

1. Wang Y.-C., Stevens A. L., Han J. Million-fold preconcentration of proteins and peptides by nanofluidic filter // *Analytical Chemistry*. 2005. Vol. 77. N. 14. P. 4293–4299. DOI: 10.1021/ac050321z
2. Mani A., Zangle T. A., Santiago J. G. On the propagation of concentration polarization from microchannel-nanochannel interfaces. Part I. Analytical model and characteristic analysis // *Langmuir*. 2009. Vol. 25. N. 6. P. 3898–3908. DOI: 10.1021/la803317p
3. Demekhin E. A., Nikitin N. V., Shelistov V. S. Direct numerical simulation of electrokinetic instability and transition to chaotic motion // *Physics of Fluids*. 2013. Vol. 25. N. 12. 122001. DOI: 10.1063/1.4843095
4. Mani A., Bazant M. Z. Deionization shocks in microstructures // *Physical Review E*. 2011. Vol. 84. N. 6. 061504. DOI: 10.1103/PhysRevE.84.061504

Экспериментальное исследование нелинейных режимов аттракторов инерционных волн во вращающемся цилиндре с неосесимметричными торцами

М. А. Ширяева, С. В. Субботин

Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет,
614000, Пермь, ул. Сибирская, 24
email: shiryaeva_ma@pspu.ru; subbotin_sv@pspu.ru

Исследуется динамика жидкости в неравномерно вращающемся (либрирующим) цилиндре, торцы которого симметрично наклонены относительно плоскости поперечного сечения. Либрации полости поддерживают инерционные волны. В определенном диапазоне частот волны фокусируются на замкнутую траекторию (волновой аттрактор). В осевом сечении полости аттрактор имеет форму параллелограмма, соотношение сторон которого определяется частотой либраций. При больших амплитудах либраций аттрактор теряет равновесную форму: появляются вторичные волны, частота которых отличается от фундаментальной частоты аттрактора. Фурье-анализ мгновенного поля азимутальной скорости показал, что помимо основной гармоники в спектре присутствуют дополнительные частоты, удовлетворяющие условию триадного резонанса.

Ключевые слова: либрации; аттрактор инерционных волн; триадный резонанс

Experimental study of nonlinear regimes of inertial wave attractors in a rotating cylinder with non-axisymmetric ends

M. A. Shiryaeva, S. V. Subbotin

Perm State Humanitarian Pedagogical University, 24 Sibirskaya St., 614990, Perm
email: shiryaeva_ma@pspu.ru, subbotin_sv@pspu.ru

Fluid flows in a non-uniform rotating (librating) cylinder, the ends of which are symmetrically inclined with respect to the cross-section plane, are investigated. The cavity librations support inertial waves. In a certain frequency range, the waves are focused on a closed trajectory (wave attractor). In the axial section of the cavity the attractor has the shape of a parallelogram, the ratio of the branches of which is determined by the frequency of the libration. At high libration amplitudes the attractor loses its equilibrium shape: secondary waves appear with a frequency different from the fundamental frequency of the attractor. Fourier analysis of the instantaneous azimuthal velocity field has shown that in addition to

the fundamental harmonic, there are new frequencies in the spectrum satisfying the triad resonance condition.

Keywords: libration; inertial wave attractor; triadic resonance

1. Введение

Инерционные волны являются разновидностью внутренних волн и способны оказывать влияние на циркуляцию жидкости в мировом океане [1, 2]. Неоднородный рельеф дна океана способствует фокусировки инерционных волн на замкнутую траекторию в виде аттрактора. Большинство внутренних волн в океане являются энергетически нестабильными [3], что вызывает особый интерес в научном обществе. Объяснение диссипации энергии связывают с теорией триадного резонанса. Исследования интенсификации энергии в масштабах диссипативной длины в диапазоне частот существования аттрактора представлены в работе [4]. В настоящей работе исследуется механизм неустойчивости аттрактора.

2. Установка и методика эксперимента

Кювета представляет собой плексигласовый цилиндр длиной $L = 110$ мм и радиусом $R = 26$ мм (рис. 1). Торцы полости представляют собой прозрачные сплошные плексигласовые вставки в виде усеченных цилиндров с углом наклона $\alpha = 23^\circ$, вклеенные в основания цилиндра. Расстояние между торцами $l = 77$ мм. В качестве рабочей жидкости используются водные растворы глицерина, кинематическая вязкость которых варьируется в диапазоне $\nu = 2 - 10$ сСт.

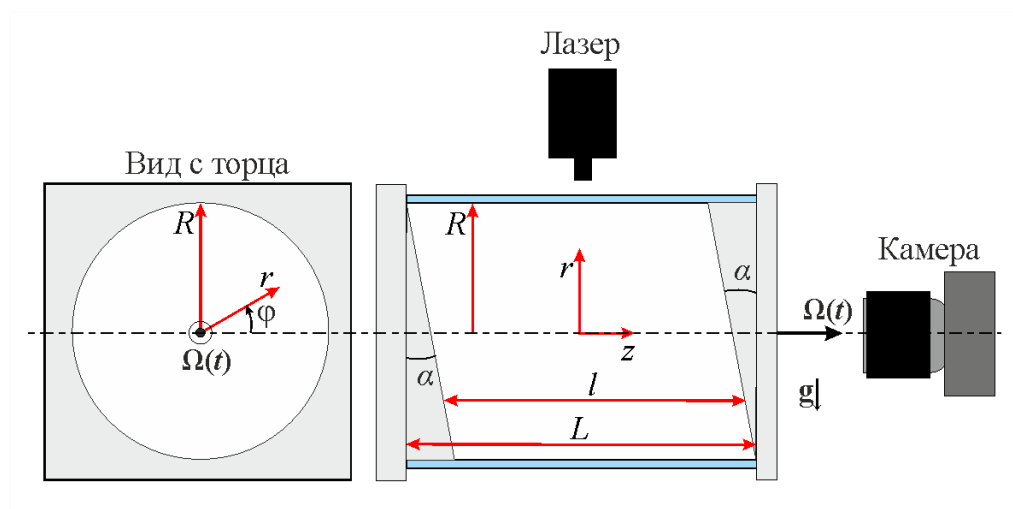


Рис. 1. Схема экспериментальной установки

Вращение кюветы задается шаговым двигателем FL86STH118-6004A подключенному к источнику постоянного тока Mastech HY5005E. Для управления шагового двигателя применяется драйвер SMD-9.0. Регулирование частоты и амплитуды сигнала осуществляется модулем Zet 210 Sigma USB в программе ZETLAB.

В лабораторной системе отсчета вращение кюветы происходит по закону:

$$\Omega(t) = \Omega \left[1 + \varepsilon \sin(\Omega_{lib} t) \right]. \quad (1)$$

Таблица. Основные параметры

Описание		Диапазон значений
Ω	средняя угловая скорость вращения, с^{-1}	62.8
Ω_{lib}	угловая частота либраций, с^{-1}	56.5 – 75.4
$\sigma = \Omega_{lib} / \Omega$	безразмерная частота либраций	0.90 – 1.20
$\varepsilon = \Delta\psi\sigma$	амплитуда либраций	0.02 – 0.16
$\Delta\psi$	угловая амплитуда либраций, рад	0.02 – 1.78
$E = \nu / \Omega R^2$	число Экмана	$5.2 \cdot 10^{-5} - 2.4 \cdot 10^{-4}$
$Re = \varepsilon E^{-3/4}$	число Рейнольдса	10 – 261

Структура течений исследуется PIV-методом. Для этого в жидкость добавляются полиамидные частицы нейтральной плавучести размером $d_p \sim 20$ мкм. Источником освещения является непрерывный лазер KLM-532/h-1000, с толщиной светового ножа $h = 2.0$ мм. Для наблюдения азимутального течения положение лазерного ножа соответствует $z/L = 0$. Видеорегистрация потоков жидкости осуществляется на неподвижную скоростную камеру Optronis CamRecord CL600x2.

Для получения мгновенного поля скорости выбираются кадры, интервал времени между которыми кратно периоду среднего вращения $T_0 = n\Omega / 2\pi$, где n – целое число. Время между кадрами рассчитывается согласно методике, описанной в работе [5]. Расчет полей скорости осуществляется в программе PIVlab [6]. Исследование областей неустойчивости в заданном диапазоне частот σ реализуется с применением Фурье-анализа.

3. Аттрактор в линейном и нелинейном режимах

Под действием либраций в полости поддерживаются инерционные волны. Волны распространяются вдоль конусообразных характеристических поверхностей под углом к оси вращения $\Theta = \pm \arcsin(\sigma/2)$ [7]. При отражении волны от границ полости угол Θ сохраняется. Для заданного диапазона частот $\sigma = 0.90 - 1.20$ инерционные волны фокусируются на замкнутую траекторию в виде аттрактора. В фазе $\Omega_{lib}t = 0$ в линейном режиме (при малых ε) аттрактор имеет форму параллелограмма (рис. 2а). Соотношение сторон параллелограмма определяется частотой либраций. Для $\sigma = 1.10$ теоретическое предсказание для направления распространения волны дает значение $\Theta = 33.4^\circ$, в то время как в эксперименте $\Theta \approx 39^\circ$ (предположительно из-за дифференциального вращения жидкости). С увеличением амплитуды либраций аттрактор становится неустойчивым. Об этом свидетельствует возникновение вторичных инерционных волн, для которых $\Theta^* \ll \Theta$ (рис. 2б, черные стрелки). Частота генерации таких волн меньше фундаментальной частоты либраций σ .

На рис. 3 представлены пороги возникновения нелинейных режимов в зависимости от частоты задаваемых возмущений. Полученная кривая имеет немонотонный вид с ярко выраженным экстремумом при $\sigma = 0.98$. Как показывают исследования аттрактора в линейном режиме скорость пульсационного течения при данной частоте достигает максимального значения.

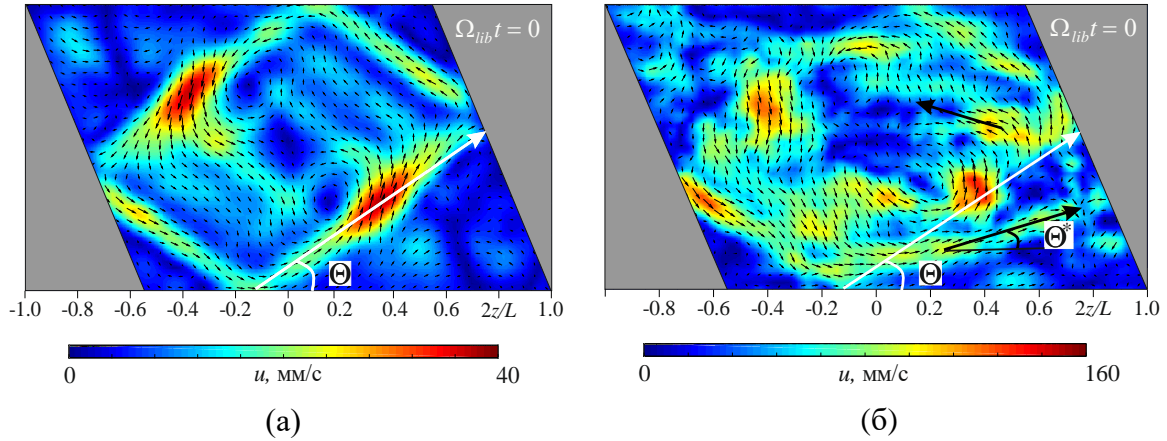


Рис. 2. Мгновенное поле скорости в осевом сечении при $\sigma = 1.10$ и $E = 5.2 \cdot 10^{-5}$: (а) $\varepsilon = 0.03$; (б) $\varepsilon = 0.09$. Белые стрелки отображают теоретически рассчитанное направление инерционных волн; черными стрелками обозначены вторичные волны

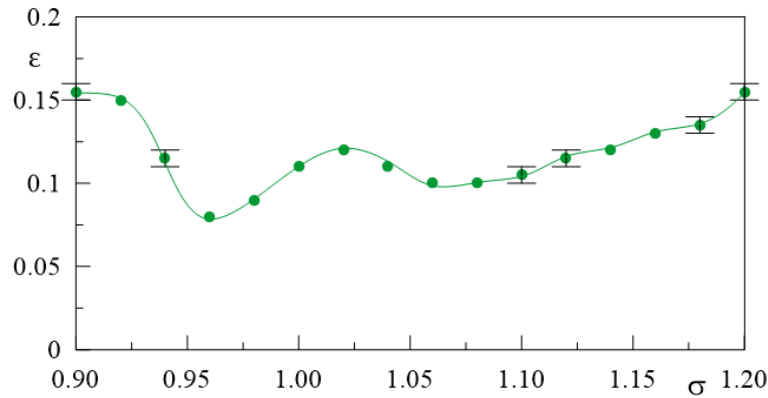


Рис. 3. Пороги неустойчивости азимутального течения зависимости от безразмерной частоты либраций σ при $E = 6.7 \cdot 10^{-5}$

Для исследования надкритических режимов аттрактора применяется преобразование Фурье:

$$S(\omega, t) = \left\langle \int_{-\infty}^{+\infty} u_{\varphi}(\tau) e^{-i\omega\tau} h(t-\tau) d\tau \right\rangle_{(r, \varphi)}, \quad (2)$$

где u_{φ} – азимутальная скорость, $h(t)$ – окно Хэмминга. Диапазон расчета: $0 \leq r/R \leq 1$; $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. В качестве примера на рис. 4 показаны срезы спектров, полученных при различных амплитудах либраций ε при фиксированной частоте σ . Анализ спектра показал, что наблюдается несколько гармоник, одна из которых соответствует частоте либраций и проявляется во всем диапазоне амплитуд. В области $\varepsilon \geq 0.10$ в жидкости появляются вторичные инерционные волны, частоты которых соответствуют $\sigma_1 = 0.80$ и $\sigma_2 = 0.35$. Полученные значения частот удовлетворяют условию триадного

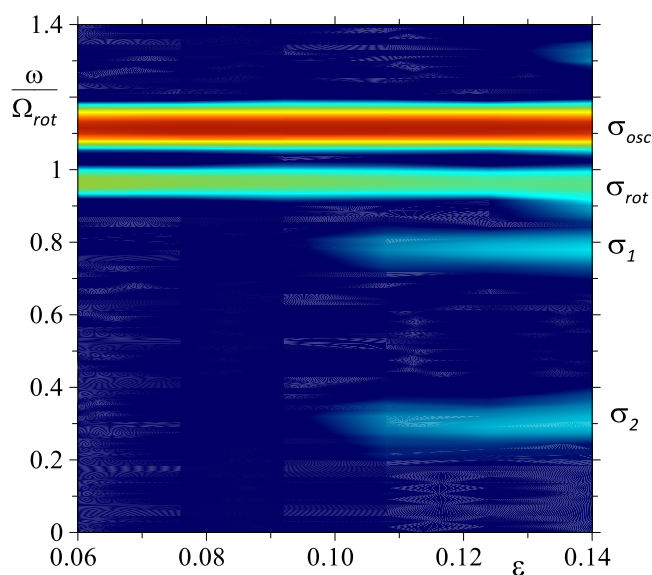


Рис. 4. Спектры азимутальной скорости в зависимости от амплитуды либраций ε при $\sigma = 1.15$ и $E = 5.2 \cdot 10^{-5}$. Цветом показано $\lg[S(\omega, t)/S_0]$

субгармонического резонанса: $\sigma_{osc} = \sigma_1 + \sigma_2$. Частоты субгармоник σ_1 и σ_2 не зависят от амплитуды либраций (в нелинейном режиме).

Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации (проект МК-1779.2021.1.1) и Правительства Пермского края (грант для ведущей научной школы С-26/1191).

Список литературы

1. Wunsch C., Ferrari R. Vertical mixing, energy, and the general circulation of the oceans // Annual Review of Fluid Mechanics. 2004. Vol. 36. P. 281–314. DOI: 10.1146/annurev.fluid.36.050802.122121
2. Johnston T. M. S., Rudnick D. L., Carter G. S., Todd R. E., Cole S. T. Internal tidal beams and mixing near Monterey Bay // Journal of Geophysical Research: Oceans. 2011. Vol. 116 (C3). C03017. DOI: 10.1029/2010JC006592
3. Nikurashin M., Ferrari R., Grisouard N., Polzin K. The impact of finite-amplitude bottom topography on internal wave generation in the Southern Ocean // Journal of Physical Oceanography. 2014. Vol. 44 (11). P. 2938–2950. DOI: 10.1175/jpo-d-13-0201.1
4. Beckebanze F., Grayson K., Maas L., Dalziel S. Experimental evidence of internal wave attractor signatures hidden in large-amplitude multi-frequency wave fields // Journal of Fluid Mechanics. 2021. Vol. 915. A41. DOI: 10.1017/jfm.2021.24
5. Subbotin S., Shiryayeva M. Steady vortex flow induced by inertial wave attractor in a librating cylinder with sloping ends // Microgravity Science and Technology. 2022. Vol. 34. 89. DOI: 10.1007/s12217-022-10008-x
6. Thielicke W., Stamhuis E. J. PIVlab – towards user-friendly, affordable and accurate digital particle image velocimetry in MATLAB // Journal of Open Research Software. 2014. Vol. 2. N. 1. e30. DOI: 10.5334/jors.bl
7. Гринспен Х. Теория вращающихся жидкостей. Гидрометеиздат: Ленинград, 1975. 304 с.

Влияние эффектов вязкости на геометрическую фокусировку внутренних волн

Н. Д. Шмакова^a, Я.-Б. Флёр^b, Б. Вуазен^b, Ж. Соммерия^b

^a Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
630090, Новосибирск, пр. Лаврентьева, 15
email: shmakova@hydro.nsc.ru

^b Laboratoire des Écoulements Géophysiques et Industriels, UGA-CNRS,
1209-1211 rue de la piscine, 38400, Grenoble, France

В работе рассматривается экспериментальное исследование внутренних волн, генерируемых горизонтальными колебаниями тора в линейно стратифицированной жидкости. В такой постановке волны фокусируются в зонах над и под тором, где наблюдается рост амплитуды волны и, как следствие, возникают нелинейные эффекты и перемешивание. Распределение энергии между основной и вторичными волнами, диссипация энергии, обрушение волн и другие волновые характеристики сильно меняются в зависимости от числа Стокса, которое варьируется в зависимости от диаметра тора (24 – 180 см). При малых амплитудах колебаний полученные с помощью PIV экспериментальные данные отлично согласуются с трехмерными линейными теоретическими расчетами. Нелинейные эффекты, такие как триадный резонанс и волновая турбулентность рассматриваются как функции чисел Стокса и Ричардсона. Дрейф Стокса вычисленный теоретически и из экспериментальных данных противоположен среднему течению в зоне фокусировки. Различия между теорией и экспериментом появляются при больших числах Стокса как следствие волновой турбулентности.

Ключевые слова: внутренние волны; число Стокса; нелинейные волны

Effects of viscosity on geometric internal wave focusing

N. D. Shmakova^a, J.-B. Flór^b, B. Voisin^b, J. Sommeria^b

^a Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, 15 Lavrenyev Ave., 630090, Novosibirsk
email: shmakova@hydro.nsc.ru

^b Laboratoire des Écoulements Géophysiques et Industriels, UGA-CNRS,
1209-1211 rue de la piscine, 38400, Grenoble, France

This experimental study considers focusing internal waves generated by a horizontally oscillating torus in a linearly stratified fluid. In such a configuration convergent waves are produced amplifying in amplitude towards the focal zone where nonlinear effects and mixing occurs. The Stokes number set by tori diameters from 24 to 180 cm varies from moderate to large values. The energy distribution over harmonics, dissipation and breaking properties of the waves, change significantly with the Stokes number. We compare experimental results obtained

from PIV-measurements to the 3D theoretical model of focusing waves that includes viscous effects. We discuss nonlinear effects such as triadic resonance and wave turbulence as a function of Stokes and Richardson numbers. In particular, the Stokes drift calculated from the linear theory and the experimental data exactly opposes the measured mean flow for moderate Stokes numbers. At high Stokes numbers the discrepancy grows due to wave turbulence.

Keywords: internal waves; Stokes number; nonlinear waves

1. Введение

Внутренние волны в океане, возникающие благодаря взаимодействию приливных течений с рельефом океанического дна, играют важную роль в динамике океана. Потенциальное перемешивание стратификации, вызванное обрушением внутренних волн, приводит к изменению распределения тепла в океане и таким образом связывает динамику внутренних волн с прогнозированием климата [1]. В лаборатории внутренние волны в стратифицированной жидкости могут моделироваться колебаниями объекта, т.е. рассматриваются в системе отсчета приливных течений. В качестве модели изолированной горы в океане обычно используются цилиндр или сфера. Подобные задачи были детально исследованы на протяжении последних трех десятилетий [2–4]. Концентрация волновой энергии может возникать вблизи изогнутых горных хребтов благодаря фокусировке внутренних волн. В модельной постановке фокусирующиеся внутренние волны генерируются горизонтальными колебаниями тора в стратифицированной жидкости. В отличие от колеблющейся сферы или цилиндра, тор генерирует сходящиеся волны, амплитуда которых растет в направлении зоны фокусировки, где наблюдаются нелинейные эффекты и обрушение волн [5–8].

Строение волн определяется числом Стокса $St = \omega_0 a^2 / \nu$, где ω_0 – частота колебания тора, a – радиус сечения тора и ν – кинематическая вязкость жидкости, и варьируется от унимодального при малых и средних числах Стокса (сильные эффекты вязкости) с волновыми лучами шириной равной диаметру сечения тора до бимодального при больших числах Стокса (слабые эффекты вязкости) с тонкими волновыми лучами, имеющими форму слоев сдвига, касательных к сечению тора (рис. 1) [3]. При фокусировке унимодальные волны сходятся в зоне с одним максимумом амплитуды, в то время как бимодальные волны образуют зону фокусировки с четырьмя локальными максимумами: два на «полсах» и два на «экваторе» (рис. 1б) [8].

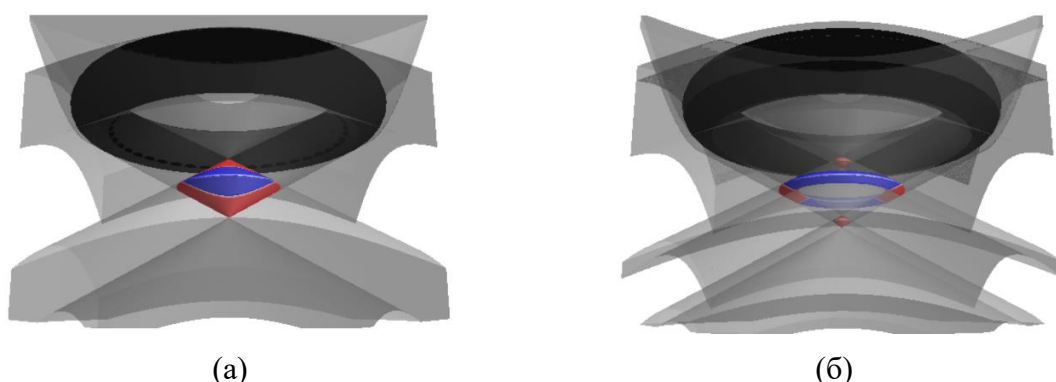


Рис. 1. Геометрия фокусировки (а) унимодальных и (б) бимодальных волн. Тор изображен черным цветом, а волновые лучи серым цветом. Пересечения лучей обозначены синим цветом, а зоны, где наблюдается максимальная амплитуда за счет горизонтальности колебаний, красным

В данной работе представлено экспериментальное исследование влияния эффектов вязкости на фокусировку внутренних волн. При малых амплитудах колебания проведено сравнение с линейной трехмерной теорией. Исследовано развитие триадного резонанса при различных числах Стокса и амплитудах колебания. Рассмотрено среднее течение в зоне фокусировки и противопоставленный ему дрейв Стокса.

2. Экспериментальная установка

Эксперименты проводились в резервуаре $1500 \times 1500 \times 900$ мм³, заполненном линейно стратифицированной по солености жидкостью с вязкостью $\nu = 1.1$ мм²/с. Плотность $\rho(z)$ и частота плавучести $N = \sqrt{-(g/\rho)(d\rho/dz)}$, где g – ускорение свободного падения (противоположно направлено z), были измерены путем сбора образцов жидкости на разной глубине. Внутренние волны генерировались горизонтальными колебаниями тора с амплитудой A и частотой ω_0 при помощи шагового двигателя. Для вариации числа Стокса использовались четыре тора с радиусами сечений $a = 2$ см ($St = 100$), 4 см ($St = 420$), 6 см ($St = 1000$) и 8 см ($St = 1800$). Соотношение радиуса тора к радиусу сечения тора сохранялось постоянным $\epsilon = 5$.

Для вычисления скоростей использовался стандартный particle image velocimetry (PIV) метод [9]. Жидкость была засеяна полиамидными сферическими частицами диаметром 60 нм и просвечивалась вертикальным лазерным ножом через дно резервуара. Таким образом, лазерный нож освещал вертикальную плоскость, проходящую через центр тора (два круглых цилиндра в сечении). Обработка данных проводилась в приложениях PIVLab [10] и UVMAT [11] среды MATLAB.

3. Основные результаты

Проведено сравнение экспериментальных данных с трехмерными аналитическими расчетами в вязкой жидкости [8]. При малых амплитудах колебания наблюдается отличное согласование теории с экспериментом. Наблюдается зависимость возникновения нелинейных эффектов от числа Стокса и амплитуды колебания. В таблице показано, что при малых амплитудах колебаний и при малых числах Стокса преобладают волны на фундаментальной чистоте. При увеличении амплитуды колебания, также как и при увеличении числа Стокса, наблюдается триадный резонанс. При большой амплитуде колебаний и при больших числах Стокса наблюдается волновая турбулентность.

Таблица. Возникновение нелинейных эффектов внутренних волн при различных числах Стокса и амплитудах колебаний. TRI и WT обозначают, соответственно, возникновение триадного резонанса и волновой турбулентности

$A/a \backslash St$	0 ... 0.2	0.2 ... 0.5	0.5 ... 0.8	≥ 0.8
100...250	linear	linear	superharmonics	TRI
400	linear	superharmonics	TRI	TRI
1000	linear	superharmonics	TRI	TRI
1800	TRI	TRI	TRI	WT

Для детального исследования среднего течения, экспериментальные данные были усреднены по 10 периодам колебаний, что позволило исключить волновой сигнал. При

малых числах Стокса поток образует четко определенную дипольную структуру в зоне фокусировки, направленную вверх вдоль оси тора и вниз по бокам, с максимумом около $1/10$ от максимальной вертикальной скорости фундаментальной волны. С увеличением St поток образует четыре диполя в вертикальной плоскости, в каждой зоне фокусировки бимодальных волновых пучков: два на оси симметрии и два между ними с обеих сторон (рис. 2в). Чтобы обосновать происхождение среднего эйлерова течения были произведены теоретические и экспериментальные расчеты вертикального дрейфа Стокса (рис. 2а и 2б, соответственно).

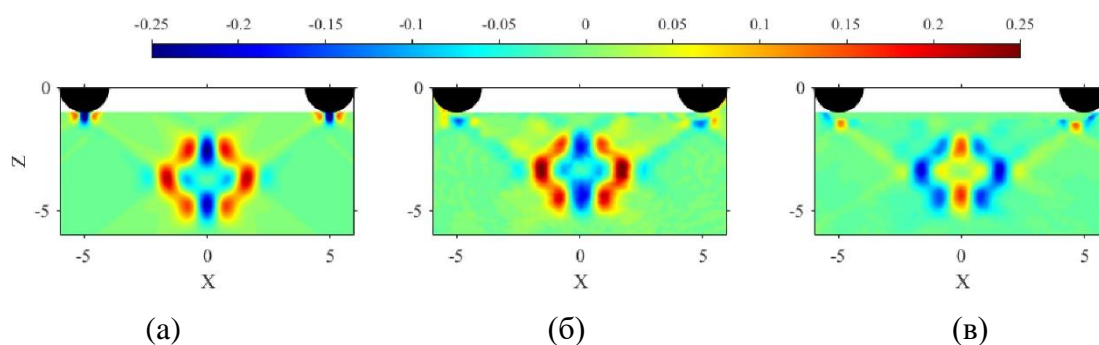


Рис. 2. Вертикальный дрейф Стокса вычисленный теоретически (а) и из экспериментальных данных (б); (с) вертикальное поле скорости, усредненное по 10 периодам колебаний. Параметры: $a = 2$ см, $St = 420$

Хорошее соответствие между теоретическими и экспериментальными скоростями дрейфа наблюдается для $St = 100, 420$ и 1000 . Дрейф Стокса почти точно противостоит среднему течению, тем самым подтверждая его невязкое происхождение. Для $St = 1800$ волновые пучки, отраженные от свободной поверхности, нарушают генерацию среднего потока в верхней зоне фокусировки, тем самым ослабляя его амплитуду. При малых амплитудах колебания вязь между средним течением и дрейфом Стокса сохраняется с течением времени. На больших амплитудах значения расходятся ввиду триадного резонанса и волновой турбулентности в системе.

Список литературы

1. Ferrari R. What goes down must come up // *Nature*. 2014. Vol. 513. P. 179–180. DOI: 10.1038/513179a
2. Voisin B. Limit states of internal wave beams // *Journal of Fluid Mechanics*. 2003. Vol. 496. P. 243–293. DOI: 10.1017/S0022112003006414
3. Voisin B., Ermanyuk E. V., Flór J.-B. Internal wave generation by oscillation of a sphere, with application to internal tides // *Journal of Fluid Mechanics*. 2011. Vol. 666. P. 308–357. DOI: 10.1017/S0022112010004209
4. Voisin B. Near-field internal wave beams in two dimensions // *Journal of Fluid Mechanics*. 2020. Vol. 900. A3. DOI: 10.1017/jfm.2020.442
5. Bühler O., Muller C. J. Instability and focusing of internal tides in the deep ocean // *Journal of Fluid Mechanics*. 2007. Vol. 588. P. 1–28. DOI: 10.1017/S0022112007007410
6. Ermanyuk E. V., Shmakova N. D., Flór J.-B. Internal wave focusing by a horizontally oscillating torus // *Journal of Fluid Mechanics*. 2017. Vol. 813. P. 695–715. DOI: 10.1017/jfm.2016.871
7. Shmakova N. D., Flór J.-B. Nonlinear aspects of focusing internal waves // *Journal of Fluid Mechanics*. 2019. Vol. 862. R4. DOI: 10.1017/jfm.2018.1020

8. *Shmakova N. D., Voisin B., Sommeria J., Flór J.-B.* Internal and inertia-gravity wave focusing at large Stokes numbers // *Physical Review Fluids*. 2021. Vol. 6. 114804. DOI: 10.1103/PhysRevFluids.6.114804
9. *Westerweel J.* Fundamentals of digital particle image velocimetry // *Measurement Science and Technology*. 1997. Vol. 8 (12). 1379. DOI: 10.1088/0957-0233/8/12/002
10. *Thielicke W., Sonntag R.* Particle Image Velocimetry for MATLAB: Accuracy and enhanced algorithms in PIVlab // *Journal of Open Research Software*. 2021. Vol. 9 (1). 12. DOI: 10.5334/jors.334
11. UVMAT/CIVx – free code for image velocimetry. [Электронный ресурс]. URL: <http://www.legi.cnrs.fr/web/spip.php?article763> (дата обращения: 25.07.2022).

Исследование влияния толщины слоя жидкости на процесс испарения методом молекулярной динамики

И. О. Юнусов, А. Ф. Поликарпов

Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, 620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19
email: igor.iunusov@urfu.ru

Многие наномасштабные исследования процессов тепломассопереноса на межфазной границе жидкость-газ проводятся при помощи стационарного неравновесного метода молекулярной динамики, в котором число частиц, энергия и объем системы остаются неизменными. Несмотря на распространённость данного метода, у него есть существенный недостаток, который заключается в том, что для рассматриваемой системы невозможно определить временную эволюцию макроскопических параметров. В настоящей работе, мы исследуем временную эволюцию макроскопических величин и их зависимость от толщины слоя жидкости при помощи нестационарного неравновесного моделирования испарения плоского слоя жидкости в вакуум методом молекулярной динамики.

Ключевые слова: молекулярная динамика; фазовый переход; тепломассоперенос

Investigation of the effect of liquid layer thickness on the evaporation process by molecular dynamics method

I. O. Yunusov, A. P. Polikarpov

Ural Federal University, 19 Mira St., 620002, Ekaterinburg
email: igor.iunusov@urfu.ru

Many studies of heat and mass transfer processes at the nano- and microscale at the liquid-gas interface are carried out using the stationary nonequilibrium molecular dynamics method, in which the number of particles, energy and volume of the system remain constant. Despite the prevalence of this method, it has a significant drawback, which is that it is impossible to determine the time evolution of macroscopic parameters for the considered system. In the present work, we investigate the time evolution of macroscopic quantities and their dependence on the thickness of the fluid layer by non-stationary nonequilibrium simulation of evaporation of a flat layer of liquid by the molecular dynamics method.

Keywords: molecular dynamics; phase change; heat and mass transfer

Настоящая работа посвящена вопросам, связанным с повышением эффективности переноса тепловой энергии, интенсификацией теплообмена в многофазных системах

наномасштаба. В центре внимания представленного в работе исследования находятся процессы тепломассопереноса, происходящие в системе жидкость – газ. В частности, существующие на сегодняшний день экспериментальные и теоретические работы, посвященные изучению влияния толщины слоя жидкости на его испарение [1, 2], свидетельствуют об актуальности данного направления и необходимости его дальнейшего развития.

Цель работы заключается в получении новых данных о физических особенностях нестационарного неравновесного испарения свободного плоского слоя жидкого аргона в вакуум и определении влияния толщины слоя жидкости на процесс испарения.

Исследования проводятся с помощью нестационарного неравновесного моделирования методом молекулярной динамики с использованием вычислительного пакета LAMMPS [3], согласно методике, описанной в работе [4]. Геометрия расчетной области представляет собой параллелепипед, на нижней грани которого находится плоский слой леннард-джонсовской жидкости, состоящий из частиц аргона, рис. 1. Термостатированный слой жидкости является источником тепла, для поддержания температуры которого используется термостат Ланжевена. У верхней границы расчетной области находится зона удаления частиц, с помощью которой создаются условия испарения в вакуум. В плоскости перпендикулярной поверхности жидкости вводятся периодические граничные условия. Расчеты проводятся для различных начальных толщин слоя жидкости $H_0 = (20 \div 50)$ нм и температур источника тепла $T_0 = 90$ К, $T_0 = 95$ К и $T_0 = 100$ К.

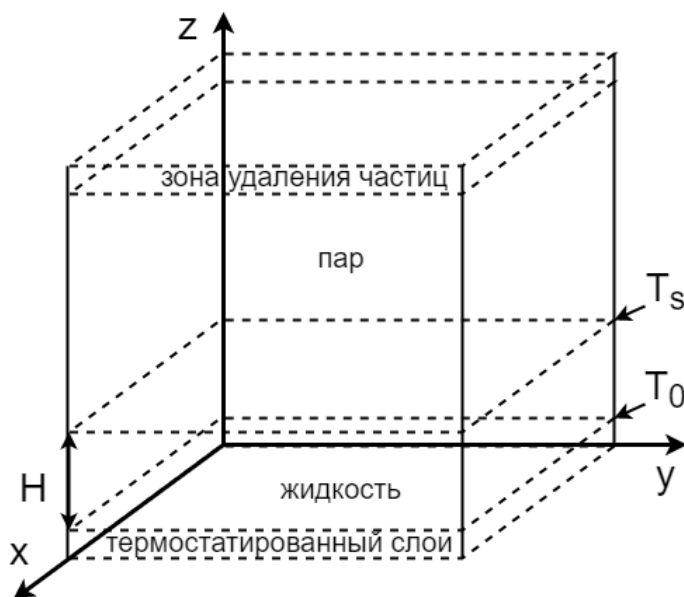


Рис. 1. Геометрия задачи

В результате молекулярного моделирования были получены временные и пространственные распределения макроскопических величин. Рассчитаны парные корреляционные функции в жидкой и газовой фазах для более точного определения состояния исследуемой системы. Получены функциональные зависимости изменения толщины слоя жидкости от времени и температуры источника тепла T_0 , массового расхода от температуры T_0 и толщины слоя жидкости. Обнаружено, что температура T_s и величина потока массы уменьшаются с увеличением толщины слоя жидкости, рис. 2. При этом значения массового расхода и температура жидкости на межфазной границе в

большей степени зависят от температуры источника тепла. Установлен интервал времени, в котором величина потока массы несущественно меняется со временем, что позволило провести сравнение результатов моделирования с известными результатами кинетической теории Герца-Кнудсена с соответствующими модификациями и соотношениями неравновесной термодинамики Онзагера.

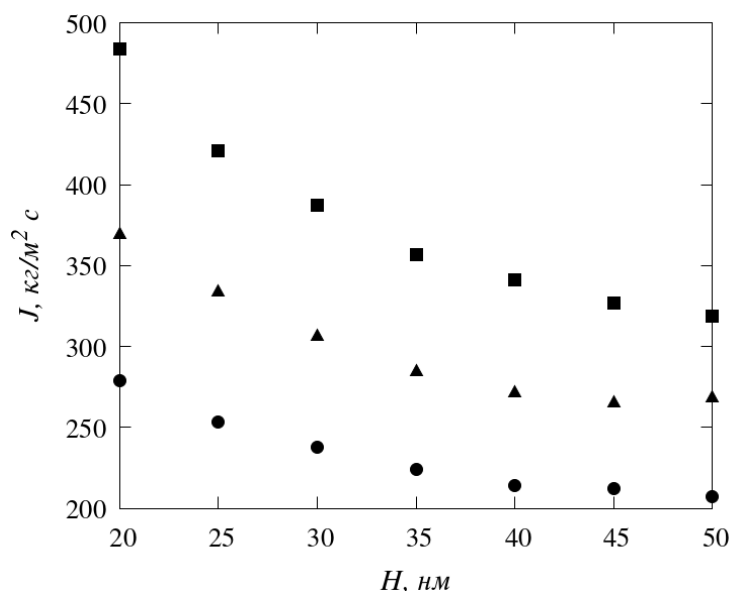


Рис. 2. Зависимость массового расхода от толщины слоя жидкости при температуре источника тепла T_0 : ● – $T_0 = 90$ K, ▲ – $T_0 = 95$ K, ■ – $T_0 = 100$ K

Результаты молекулярно-динамического моделирования тепломассопереноса в системе жидкость – пар хорошо согласуются с известными ранее полученными экспериментальными и теоретическими данными.

Работа поддержана Министерством науки и высшего образования РФ (грант № FEUZ-2020-0057).

Список литературы

1. Heinen M., Vrabec J., Fischer J. Communication: Evaporation: Influence of heat transport in the liquid on the interface temperature and the particle flux // The Journal of Chemical Physics. 2016. Vol. 145 (8). 081101. DOI: 10.1063/1.4961542
2. Kreta V. M., Maksimov V. I. The effect of the liquid layer thickness on the evaporation intensity // MATEC Web of Conferences. 2018. Vol. 194: Heat and Mass Transfer in the Thermal Control System of Technical and Technological Energy Equipment (HMTTSC-2018). 01030. DOI: 10.1051/matecconf/201819401030
3. Plimpton S. J. Fast parallel algorithms for short-range molecular dynamics // Journal of Computational Physics. 1995. Vol. 117 (1). P. 1–19. DOI: 10.1006/jcph.1995.1039
4. Cheng S., Lechman J. B., Plimpton S. J., Grest G. S. Evaporation of lennard-jones fluids // The Journal of Chemical Physics. 2011. Vol. 134 (22). 224704. DOI: 10.1063/1.3595260

Научное издание

Пермские гидродинамические научные чтения

Сборник статей по материалам
VIII Всероссийской конференции, посвященной памяти профессоров
Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкого и Д. В. Любимова

Издается в авторской редакции
Компьютерная верстка: *Н. Н. Картавых*

Объем данных 58 Мб
Подписано к использованию 01.12.2022

Размещено в открытом доступе
на сайте www.psu.ru
в разделе НАУКА / Электронные публикации
и в электронной мультимедийной библиотеке ELiS

Издательский центр
Пермского государственного
национального исследовательского университета
614990, Пермь, ул. Букирева, 15