

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Уральское региональное отделение
Российской академии космонавтики
имени К. Э. Циолковского

ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ и УПРАВЛЕНИЯ

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ



Межвузовский сборник научных трудов

Издается с 1972 г.

Выпуск 54



Пермь 2022

УДК 531+681.5
ББК 22.21+32.915
П78

ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И УПРАВЛЕНИЯ. Нелинейные динамические системы: межвузовский сборник научных трудов / Пермский государственный национальный исследовательский университет. – Пермь, 2022. – Вып. 54. – 116 с.

ISBN 978-5-7944-3904-5 (вып. 54)
ISBN 978-5-7944-1360-1

В настоящем выпуске опубликованы статьи о научных исследованиях в области управления нелинейными динамическими объектами. Рассматриваются математические модели различных систем, методы их оптимального управления и др.

Издание предназначено для научных работников, инженеров-механиков, аспирантов, студентов старших курсов технических факультетов вузов.

PROBLEMS OF MECHANICS AND CONTROLLABLES. Nonlinear dynamic systems: A collection of scientific papers / Perm State University. – Perm, 2022. – Issue 54. – 116 p.

The present issue problems of the optimal control theory, numerical solution of nonlinear problems and the methods of control of some dynamic systems.

The issue is meant for researchers, post-graduates, engineers and students, studying non-linear dynamic systems.

УДК 531+681.5
ББК 22.21+32.915

Рецензенты: доктор технических наук, доцент, профессор кафедры «Автоматика и телемеханика» Пермского национального исследовательского политехнического университета (ПНИПУ) *В.И. Фрейман;*

доктор технических наук, профессор *О.Г. Пенский*

Печатается по решению учено совета механико-математического факультета Пермского государственного национального исследовательского университета

Редакционная коллегия

В.В. Маланин (д.т.н., проф., Пермский государственный национальный исследовательский университет) – *главный редактор,*
Р.Г. Мухарлямов (д.ф.-м.н., проф., Российский университет дружбы народов) – *зам. гл. редактора,* *Н.Н. Макеев* (д.ф.-м.н., проф., г. Саратов), *В.И. Яковлев* (д.ф.-м.н., проф., Пермский государственный национальный исследовательский университет), *С.В. Лутманов* (к.ф.-м.н., доц., Пермский государственный национальный исследовательский университет) – *секретарь*

Издание включено
в национальную информационно-аналитическую систему
«Российский индекс научного цитирования» (РИНЦ)

ISBN 978-5-7944-3904-5 (вып. 54)
ISBN 978-5-7944-1360-1

© Пермский государственный
национальный исследовательский
университет, 2022

Содержание

Выпуск 54 / 2022

К 50-летию межвузовского сборника научных трудов "ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И УПРАВЛЕНИЯ".....	4
Гуревич Г.С. Причины вращения макротел вокруг своей оси.....	7
Кусяков А.Ш. Анализ оптимальных многостеночных пластин.....	24
Лутманов С.В. Оптимальное гашение возмущений базового закона полета материальной точки по крите- риям "минимум энергии" и "минимум силы".....	32
Макеев Н.Н. Устойчивость стационарного движения гиростата-магнетика в магнитном поле.....	65
Макеев Н.Н. Устойчивость стационарного движения сложной механической системы.....	75
Переварюха А.Ю. Интерпретируемые нелинейные эффекты и бифуркации неунимодальных итераций в моделях кризисных популяций	87
Полосков И.Е. Схема расчета первых моментных по- лей стохастической интегро-дифференциальной систе- мы нейтрального типа с конечными сосредоточенными и распределенными запаздываниями	98
Об авторах опубликованных статей.....	114
Правила оформления статей для межвузовского сборника	115

50 лет**межвузовскому сборнику****«Проблемы механики и управления»**

В 2022 г. исполняется полвека с момента выхода в свет первого номера межвузовского сборника научных трудов "Проблемы механики управляемого движения".

Идея об издании межвузовского научного сборника, поддержанная кафедрами механики вузов Москвы, Ленинграда, Горького, Киева, Алма-Аты, принадлежала заведующему кафедрой механики ПГУ профессору И.Ф. Верещагину. Официальный документ об утверждении состава редакционной коллегии нового издания был подписан 17 февраля 1971 г. председателем Головного совета по механике при министерстве высшего и среднего специального образования РСФСР членом-корреспондентом АН СССР С.В. Валландером.

В первый состав редколлегии сборника вошли профессор И.Ф. Верещагин (редактор, Пермский университет), В.Г. Дёмин (зам. редактора, Московский университет), В.С. Новосёлов (зам. редактора, Ленинградский университет), А.А. Куницын (МИФИ), Н.А. Шуваев (Горьковский университет), Л.И. Кузнецов (Ленинградский университет). Позднее состав редколлегии менялся, в него входили такие известные отечественные ученые-механики как профессор В.Г. Веретенников (МАИ), А.С. Галиуллин (РУДН), Е.А. Гребенников (МАИ), Р.Г. Мухарлямов (РУДН), Ю.Г. Мартыненко (МЭИ, МГУ), В.В. Козлов (МГУ), В.В. Маланин (ПГУ–ПГНИУ), В.И. Яковлев (ПГУ–ПГНИУ), В.М. Суслонов (ПГУ), Н.Н. Макеев (ИПТМиУ РАН, г. Саратов), доцент С.В. Лутманов (ПГУ–ПГНИУ).

С 1976 г. главным редактором сборника является д.т.н., профессор В.В. Маланин. Будучи в разные времена заведующим кафедрой механики и процессов управления, проректором по научной работе, ректором, президентом Пермского университета, Владимир Владимирович неизменно находит время для поддержки этого издания не только как его руководитель, но и как автор публикаций.

К настоящему времени издано пятьдесят четыре выпуска в открытой печати, более десяти – по закрытой тематике.

Выпуск 2022 г. является юбилейным не только для сборника, но и для его редакторов.

12 ноября 2022 г. первому редактору этого издания Ивану Фёдоровичу Верещагину исполнилось бы 110 лет, а Владимир Владимирович Маланин 30 августа 2022 г. отметил свой 80-й год рождения.

На протяжении пятидесяти лет сборник выходит ежегодно и является удобной и надежной платформой для публикации статей как признанных ученых, так и тех, кто только начинает свой путь в науку. Здесь публикуются работы соискателей ученых степеней, аспирантов, первые статьи студентов и магистрантов, результаты научной работы, проводимой по научным грантам и конкурсам, юбилейные статьи.

Авторский коллектив сборника ежегодно расширялся. Среди авторов есть представители многих научных центров, вузов и НИИ не только бывшего СССР, современной России (Москвы, Санкт-Петербурга, Перми, Екатеринбурга, Нижнего Новгорода, Казани, Воронежа, Саратова, Самары, Иркутска, Красноярска, Новосибирска, Уфы, Ухты, Ижевска, Глазова, Магнитогорска, Оренбурга и других городов), но и зарубежных стран (Украины, Белоруссии, Казахстана, Узбекистана, Израиля).

Тематика публикуемых статей является достаточно обширной. В соответствии с научно-техническими запросами 1970–1980-х гг. в научных направлениях стали преобладать публикации, посвященные динамике и кинематике полета летательных аппаратов (в том числе космических), механике тел переменной массы, задачам и методам теории оптимального управления движением тел, дифференциальным играм, вопросам устойчивости движения тел.

С конца 1980-х гг. добавились статьи с решением проблем статики, кинематики, динамики абсолютно твердого тела и систем тел методами математического и компьютерного моделирования, с решением конкретных задач методами механики сплошных сред. Достойное место в сборнике заняли публикации по истории и персоналии механики.

Расширение тематики сборника привело к необходимости уточнения его названия. Поэтому в 1994 г. редколлекгией было принято решение о переименовании издания "Проблемы механики управляемого движения". С этого времени последующие выпуски сборника выходят под названием – "Проблемы механики и управления".

Вот уже полвека данное издание является своеобразным научным мостом, объединяющим наш университет с другими университетами и институтами России и зарубежья.

Необходимо особо отметить его значимость для развития исследований по механике, прикладной математике, математическому моделированию на механико-математическом факультете нашего университета. Здесь публиковали свои первые статьи наши студенты и аспиранты, нынешние преподаватели и сотрудники кафедр механики и процессов управления (процессов управления и информационной безопасности), механики сплошных сред, высшей математики, математического анализа, прикладной математики. Эти публикации продолжают и в настоящее время. Можно утверждать, что "Проблемы..." сыграли важную роль в формировании научного потенциала факультета, в признании научных достижений наших авторов.

С 2012 г. это печатное издание включено в национальную информационно-аналитическую систему "Российский индекс научного цитирования" (РИНЦ).

Нельзя не сказать о том, что всегда важную роль в качественной подготовке статей к печати играли сотрудники механико-математического факультета, в частности кафедры (механики и процессов управления, процессов управления и информационной безопасности, механики и математического моделирования). Полвека бесменно этой ответственной работой занимается и Галина Ивановна Кушнина. Именно она ведет переговоры с издательским отделом университета и регулярно, в назначенный срок, сдает журналы в печать, занимается перепиской с многочисленными авторами, помогая им также и в оформлении статей, хранит и рассылает по заявкам ранее вышедшие из печати выпуски. Ее вклад в подготовку этого издания многим незаметен, но он очень велик и трудоемок. Выражая слова искренней благодарности за полувековой труд, пожелаем Галине Ивановне крепкого здоровья и дальнейших успехов! А этот юбилейный выпуск пусть будет подарком и к ее личному юбилею.

От души поздравляем всех членов редколлегии, весь авторский коллектив межвузовского сборника научных трудов "Проблемы механики и управления" с Юбилеем! Желаем всем крепкого здоровья, творческого долголетия и благополучия на долгие годы!

*Доктор физико-математических наук,
профессор В.И. Яковлев*

Г. С. Гуревич

*Институт интеграции
и профессиональной адаптации
г. Нетания, Израиль
garoldgurevich37@gmail.com*

УДК 521.1

ПРИЧИНЫ ВРАЩЕНИЯ МАКРОТЕЛ ВОКРУГ СВОЕЙ ОСИ

Исследуются причины вращения макротел в галактиках, галактик в метагалактиках, метагалактик в Космосе. Доказывается, что причиной вращения этих макрообразований является взаимодействие этих макрообразований с материальной субстанцией суммарных гравитационных полей.

Ключевые слова: гравитация; центр равновесия; поток микрочастиц; материя; пространство; импульс; скорость; траектория; макротело; галактика; космос.

1. Образование центров равновесия в Космосе

Космос – это ближайшая, обозримая в данный исторический момент, часть бесконечной Вселенной.

Группы метагалактик, излучая материальную субстанцию, создают центры равновесия в Космосе. В этих центрах равновесия концентрируется материальная субстанция, излучаемая группой метагалактик.

Из материальной субстанции, концентрирующейся в центрах равновесия, рождаются метагалактики [3, 5, 6, 7, 8].

1.1. Образование центров равнодавления в метagalактике

Метagalактика – это группа галактик.

Группы галактик, излучая материальную субстанцию, создают центры равнодавления в метagalактике.

Из материальной субстанции, концентрирующейся в центрах равнодавления, рождаются галактики [6, 7, 8].

1.2. Образование центров равнодавления в галактике

Галактика – это группа макротел (звезд, планет и т.д.).

Группы звезд, излучая материальную субстанцию, создают центры равнодавления в галактике.

Из материальной субстанции, концентрирующейся в центрах равнодавления, рождаются макротела [6, 7, 8].

Рожденное макротело проходит эволюционный путь до фазы звезды и при достижении давления внутри звезды равным давлением вне звезды взрывается.

Таким образом в галактике происходит перераспределение материальной субстанции, поступающей от группы галактик, образовавших эту галактику.

2. Сферы материальной субстанции

Пространство вокруг макрообразований: метagalактик, галактик и макротел заполнено материальной субстанцией, движущейся в центры равнодавлений, образуя эти макрообразования.

Пространство вокруг макрообразований представляет собой эквипотенциальные поверхности. Эквипотенциальные поверхности – это поверхности равного потенциала.

Назовем плотность материальной субстанции сферы – сферой материальной субстанции и обозначим символом $Sф$.

При таком определении пространство вокруг макрообразований, заполненное материальной субстанцией, представляет собой вложенные друг в друга сферы материальной субстанции $Sф$.

2.1. Образование сфер материальной субстанции в процессе эволюции макротел

Звезды излучают материальную субстанцию в виде микро-частиц вещества, из которых они состоят. Примером является наше Солнце, излучающее в секунду четыре миллиона тонн вещества.

Обозначим микрочастицы вещества, излучаемые звездой ξ_{zv} (рис. 1).

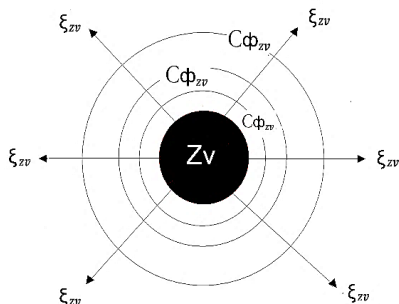


Рис. 1

Пространство вокруг звезды представляет собой вложенные друг в друга сферы материальной субстанции $CФ_{zv}$.

Плотность сферы материальной субстанции $CФ_{zv}$, созданная излучением звезды, является функцией излучаемых звездой микрочастиц вещества ξ_{zv} [3, 5].

$$CФ_{zv} = f(\xi_{zv}). \quad (1)$$

2.2. Образование сфер материальной субстанции в процессе эволюции галактик, метагалактик и в Космосе

Пространство Космоса обозримой части бесконечной Вселенной представляет собой вложенные друг в друга сферы материальной субстанции $CФ_K$.

Плотность сфер материальной субстанции Космоса $CФ_K$ образуется суммарным излучением обозримых "К" метагалактик MG_k Космоса в текущий исторический период развития науки.

$$CФ_K = f(CФ_{MG_k}). \quad (2)$$

Плотность сфер материальной субстанции метагалактики $C\Phi_{MG_k}$ образуется суммарным излучением Космоса "К", группы L метагалактик MG_L , образовавших центр равнодавления, в котором сформировалась эта метагалактика и излучением N галактик G_N , образующих эту метагалактику.

$$C\Phi_{MG_k} = f(C\Phi_{K+MG_L+G_N}). \quad (3)$$

Плотность сфер материальной субстанции галактики $C\Phi_G$ образуется суммарным излучением Космоса "К", метагалактики MG , в которой образовалась эта галактика, группы N галактик G_N , образовавших центр равнодавления, в котором сформировалась эта галактика и излучением n звезд галактики zv_n .

$$C\Phi_G = f(C\Phi_{K+MG+G_N+zv_n}). \quad (4)$$

Плотность сферы материальной субстанции звезды $C\Phi_{zv}$ образуется наложением излучений Космоса К, метагалактики MG , галактики G , излучением группы звезд zv_n , образовавших эту звезду и излучением звезды ξ_{zv} .

$$C\Phi_{zv} = f(C\Phi_{K+MG+G_N+zv_n+f(\xi_{zv})}). \quad (5)$$

Тело (планета) "Т", расположенное в гравитационном поле макротела (звезда) на одной из сфер материальной субстанции $C\Phi_T$, находится под действием четырех сфер материальной субстанции.

$$C\Phi_T = f(C\Phi_{zv}, C\Phi_G, C\Phi_{MG}, C\Phi_K). \quad (6)$$

Макротело (звезда), расположенное в гравитационном поле галактики на одной из сфер материальной субстанции $C\Phi_G$, находится под действием трех сфер материальной субстанции.

$$C\Phi_{zv} = f(C\Phi_G, C\Phi_{MG}, C\Phi_K). \quad (7)$$

Так как концентрирующаяся материальная субстанция в центрах равнодавления образована излучениями групп, вращающихся по своим траекториям макрообразований (звезд, галактик, метагалактик), то образовавшиеся макрообразования, следовательно, тоже будут вращаться вместе с ними [3, 5].

2.3. Образование сфер материальной субстанции в центрах равнодавления

Из материальной субстанции, концентрирующейся в метагалактике, рождаются галактики. Группа галактик метагалактики создает центр равнодавления, в котором концентрируется постоянный поток микрочастиц, образованный излучением этой группой галактик.

Обозначим постоянный поток микрочастиц, созданный данной группой галактик в метагалактике, символом Φ_0 (рис. 2).

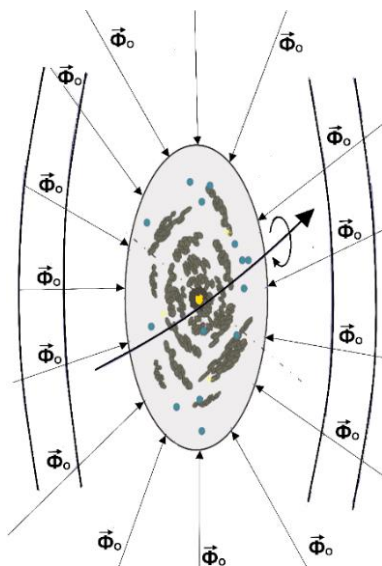


Рис. 2

Из материальной субстанции, концентрирующейся в галактике, рождаются макротела (рис. 3).

По мере накопления материальной субстанции в галактике и формирования макротел внутри макротел растет давление и температура.

Макротела переходят в фазу звезд и начинают излучать ранее накопленную материальную субстанцию (рис. 3).

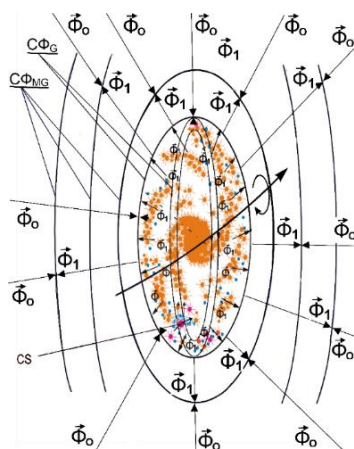


Рис. 3

Обозначим излучаемую звездами материальную субстанцию символом Φ_1 .

Суммарное излучение звезд галактики обозначим $\Sigma\Phi_1$. Потoki материальной субстанции $\Sigma\Phi_1$ галактики вступают во взаимодействие с потоками материальной субстанции Φ_0 , поступающей в центр равнодавления, образуя материальную субстанцию галактики (рис. 3).

Излучение галактик метагалактики образуют материальную субстанцию метагалактики.

Излучение метагалактик Космоса, обозримой ближайшей части Вселенной, образует материальную субстанцию пространства Космоса [8].

Таким образом в пространстве Космоса образуются следующие сферы материальной субстанции:

- 1) сфера материальной субстанции звезд $C\Phi_{zv}$, созданная материальной субстанцией, излучаемой этими звездами (рис. 1).
- 2) сфера материальной субстанции данной Галактики $C\Phi_G$, создаваемая суммарным излучением материальной субстанции звезд этой Галактики и материальной субстанцией, поступающей в центр равнодавления, в котором расположена эта галактика (рис. 3).

- 3) сфера материальной субстанции метагалактики $C\Phi_{MG}$, создаваемая суммарным излучением материальной субстанции галактиками этой метагалактики и материальной субстанцией, поступающей в центр равнодавления, в котором расположена эта метагалактика.
- 4) сфера материальной субстанции Космоса $C\Phi_K$, создаваемая суммарным излучением материальной субстанции метагалактик ближайшей, обозримой части Вселенной – Космоса.

3. Вращение макротел вокруг оси

Кроме орбитально-поступательного (спирального) движения все звезды Галактики вращаются вокруг своих осей.

Исследуем причины, вызывающие вращения планет, звезд, галактик вокруг своих осей.

Галактосфера со своими макротелами и материальной субстанцией, формирующей структуру этой Галактики, вращается вокруг Галактического центра, будучи сжатой со всех сторон материальной субстанцией, излучаемой окружающими галактиками метагалактики.

На рис. 4 показано движение Галактики вдоль оси АВ и вращения Галактики вокруг этой оси. Там же показана траектория движения Солнца и траектории движения планет вокруг Солнца [3, 5].



Рис. 4

На рис. 5 показаны планеты Солнечной системы, движущиеся вместе с Солнцем в галактике в направлении оси VG и вращающиеся вокруг этой оси, то есть вокруг Солнца, а также вращающиеся вокруг собственных осей.

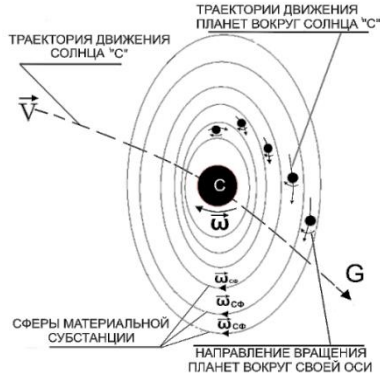


Рис. 5

В результате наложения сфер материальной субстанции, образованной макротелами $C\Phi_{zv}$, галактиками $C\Phi_G$, метагалактиками $C\Phi_{MG}$ и сферами материальной субстанции Космоса, создаются результирующие сферы материальной субстанции $C\Phi_k \div C\Phi_n$ (рис. 6).

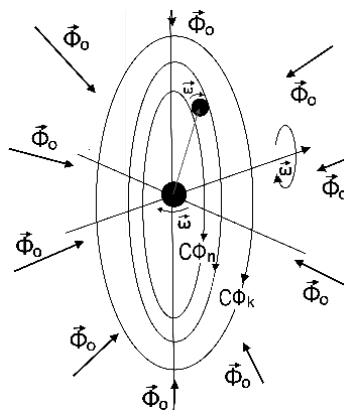


Рис. 6

Вращение материальной субстанции в Галактике можно представить вращением вложенных друг в друга сфер материальной субстанции $S\Phi_k \div S\Phi_n$ (рис. 6).

Сферы материальной субстанции $S\Phi_k \div S\Phi_n$ взаимодействуют с макротелами в Галактике (рис. 6).

Иследуем взаимодействие сфер материальной субстанции $S\Phi$ и $S\Phi_n$ с макротелом D массой m , расположенном между сферами материальной субстанции $S\Phi_k$ и $S\Phi_n$ (рис. 7).

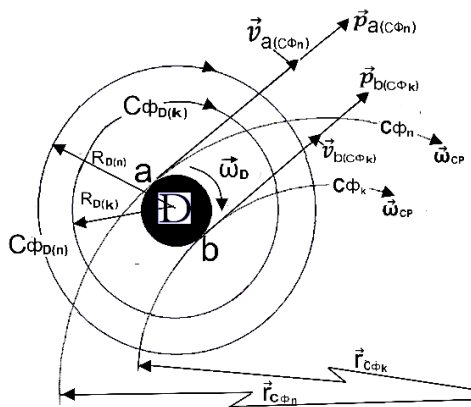


Рис. 7

Угловая скорость вращения сфер материальной субстанции среды $S\Phi_k \div S\Phi_n$ величина, меняющаяся с удалением от макрообразований.

Сделаем следующее допущение: положим, что угловые скорости сфер материальных субстанций в точках "a" и "b" равны. Это можно сделать из-за близкого расположения сфер материальных субстанций $S\Phi_k$ и $S\Phi_n$.

Обозначим угловую скорость вращения сфер материальной субстанции среды $S\Phi_k \div S\Phi_n$, в том числе и материальной субстанции среды, расположенной в точках "a" и "b", символом $\vec{\omega}_{cp}$.

Обозначим угловую скорость вращения сфер $S\Phi_k$ материальной субстанции символом $\vec{\omega}_{(S\Phi_k)}$.

Обозначим угловую скорость вращения сфер $S\Phi_n$ материальной субстанции символом $\vec{\omega}_{(C\Phi_n)}$.

Запишем равенство:

$$\vec{\omega}_{b(C\Phi_k)} = \vec{\omega}_{(C\Phi_n)} = \vec{\omega}_{cp} . \quad (8)$$

Линейная скорость вращения материальной субстанции, расположенной на сфере $S\Phi_n$, в том числе и материальной субстанции, расположенной в точке "а", будет равна $\vec{v}_{a(C\Phi_n)}$:

$$\vec{v}_{a(C\Phi_n)} = \vec{\omega}_{cp} r_{C\Phi_n} , \quad (9)$$

$r_{C\Phi_n}$ – радиус сферы материальной субстанции, исходящий из центра равнодавления. На поверхности сферы материальной субстанции находится точка "а" тела D.

Линейная скорость вращения сферы $S\Phi_k$ материальной субстанции, в том числе и материальной субстанции, расположенной в точке "b", будет равна \vec{v}_b :

Линейная скорость вращения материальной субстанции, расположенной на сфере $S\Phi_k$, в том числе и материальной субстанции, расположенной в точке "b", будет равна \vec{v}_b :

$$\vec{v}_{b(C\Phi_k)} = \vec{\omega}_{cp} r_{C\Phi_k} , \quad (10)$$

$r_{C\Phi_k}$ – радиус сферы материальной субстанции, исходящий из центра равнодавления. На поверхности сферы материальной субстанции находится точка "b" тела D.

Так как

$$\vec{r}_{C\Phi_n} > \vec{r}_{C\Phi_k} . \quad (11)$$

Следовательно,

$$\vec{v}_{a(C\Phi_n)} > \vec{v}_{b(C\Phi_k)} , \quad (12)$$

$$\vec{\omega}_{cp} r_{C\Phi_n} > \vec{\omega}_{cp} r_{C\Phi_k} . \quad (13)$$

Вращающаяся материальная субстанция среды создает на тело D в точке "а" импульс $\vec{p}_{a(C\Phi_n)}$.

$$\vec{p}_{a(C\Phi_n)} = m_{C\Phi_n} \cdot \vec{v}_{a(C\Phi_n)} , \quad (14)$$

$m_{C\Phi_n}$ – масса (плотность) материальной субстанции сферы $S\Phi_n$, в том числе в точке "а".

Масса материальной субстанции среды – величина переменная, зависящая от расположения сферы $S\Phi_n$ материальной субстанции в центре равнодавления.

Вращающаяся материальная субстанция среды создает на тело D в точке "b" импульс $\vec{p}_{b(C\Phi_k)}$.

$$\vec{p}_{b(C\Phi_k)} = m_{C\Phi_k} \cdot \vec{v}_{b(C\Phi_k)}, \quad (15)$$

$m_{C\Phi_k}$ – масса (плотность) материальной субстанции сферы $C\Phi_k$, в том числе в точке "b".

Запишем разность импульсов $\Delta\vec{p}$.

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_{a(C\Phi_n)} - \vec{p}_{b(C\Phi_k)} = m_{C\Phi_n} \cdot \vec{v}_{a(C\Phi_n)} - m_{C\Phi_k} \cdot \vec{v}_{b(C\Phi_k)}. \quad (16)$$

Сделаем следующее допущение: положим, что массы сфер материальных субстанций в точках "a" и "b" равны. Это можно сделать из-за близкого расположения сфер материальных субстанций $C\Phi_k$ и $C\Phi_n$.

$$m_{C\Phi_n} = m_{C\Phi_k} = m_{C\Phi}. \quad (17)$$

В этом случае уравнение (16) переписывается в виде:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_{a(C\Phi_n)} - \vec{p}_{b(C\Phi_k)} = m_{C\Phi} (\vec{v}_{a(C\Phi_n)} - \vec{v}_{b(C\Phi_k)}). \quad (18)$$

Подставим скорости $\vec{v}_{a(C\Phi_n)}$ и $\vec{v}_{b(C\Phi_k)}$ из формул (9) и (10) в формулу разности импульсов (18) и, используя формулу (17), получим равенство:

$$\begin{aligned} \Delta\vec{p} = \vec{p}_{a(C\Phi_n)} - \vec{p}_{b(C\Phi_k)} &= m_{C\Phi} (\vec{\omega}_{cp} r_{C\Phi_n} - \vec{\omega}_{cp} r_{C\Phi_k}) = \\ &= m_{C\Phi} \vec{\omega}_{cp} (r_{C\Phi_n} - r_{C\Phi_k}). \end{aligned} \quad (19)$$

Из формулы (19) следует: чем больше разность радиусов сфер материальной субстанции ($r_{C\Phi_n} - r_{C\Phi_k}$), тем больше разность импульсов $\Delta\vec{p}$, приложенных к телу D.

При условии

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_{a(C\Phi_n)} - \vec{p}_{b(C\Phi_k)} > 0 \quad (20)$$

будет выполняться соотношение импульсов

$$\vec{p}_{a(C\Phi_n)} > \vec{p}_{b(C\Phi_k)}. \quad (21)$$

На рис. 7 видно, что диаметр тела D равен разности радиусов сфер материальной субстанции $C\Phi_k - C\Phi_n$.

$$D = r_{C\Phi} - r_{C\Phi_k}. \quad (22)$$

Из формул (19) и (22) следует: чем больше диаметр тела D, равный разности сфер материальной субстанции (13), тем больше разность импульсов $\Delta\vec{p}$ (19).

Чем больше разность импульсов $\Delta\vec{p}$ (20), тем больше импульс $\vec{p}_{a(C\Phi_n)}$ (21), приложенный в точке "a" к телу D (рис. 7).

Таким образом, вращающиеся сферы материальной субстанции $S\Phi_k \div S\Phi_n$ приведут во вращение тело D вокруг своей оси.

Линейная скорость точки "а" тела D связана с угловой скоростью вращения тела D соотношением

$$\vec{v}_{a(D)} = \vec{\omega}_D r_D . \quad (23)$$

Из формулы (23) следует: чем больше линейная скорость $\vec{v}_{a(D)}$ точки "а" тела D , тем больше угловая скорость $\vec{\omega}_D$ вращения тела D вокруг своей оси.

Примером этого вывода является скорость вращения планеты Юпитер и нашей планеты Земля. Радиус Юпитера в десять раз больше радиуса Земли. Угловая скорость вращения Земли составляет один оборот за 24 часа, а угловая скорость вращения Юпитера – один оборот за 9,9 часа.

Тело, расположенное между двумя вписанными друг в друга участками галактической сферы, будет вращаться, так как внешняя сфера материальной субстанции, имеющая большую линейную скорость, будет закручивать тело в ту же сторону (как это имеет место во всех фрикционных системах механики) (рис. 7).

Именно этими астромеханическими процессами обусловлен тот факт, что наша Солнечная система вращается в ту же сторону, куда и вся Галактика, то есть по спиральной траектории правого шага. А само Солнце и все его спутники-планеты имеют правый спин, правый винт и правую орбиту.

Вращающееся макротело D (рис. 8) вступает во взаимодействие с окружающей материальной субстанцией и приводит ее во вращение пропорционально своему угловому вращению.

Вокруг макротела D образуются вращающиеся сферы материальной субстанции. Обозначим интервал сфер материальной субстанции, образованных макротелом D , символом $S\Phi_{D(k)} \div S\Phi_{D(n)}$ (рис. 8).

В пространстве галактики происходит наложение сфер материальной субстанции, образованных в центре равновесия галактики $S\Phi_k \div S\Phi_n$, со сферами материальной субстанции $S\Phi_{D(k)} \div S\Phi_{D(n)}$, созданными вращающимся макротелом D .

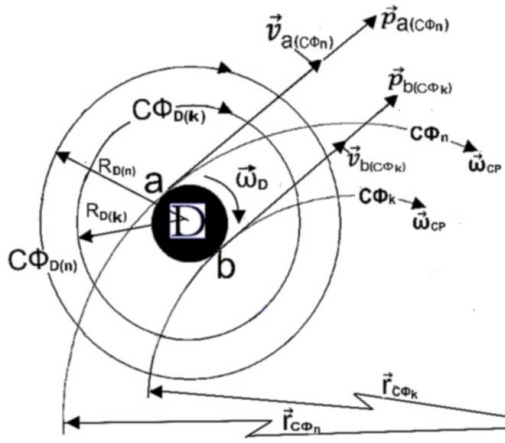


Рис. 8

Исследуем взаимодействие сфер материальной субстанции с телом L, расположенном в пространстве наложенных сфер материальной субстанции гравитационного поля галактики и гравитационного поля макротела D (рис. 9).

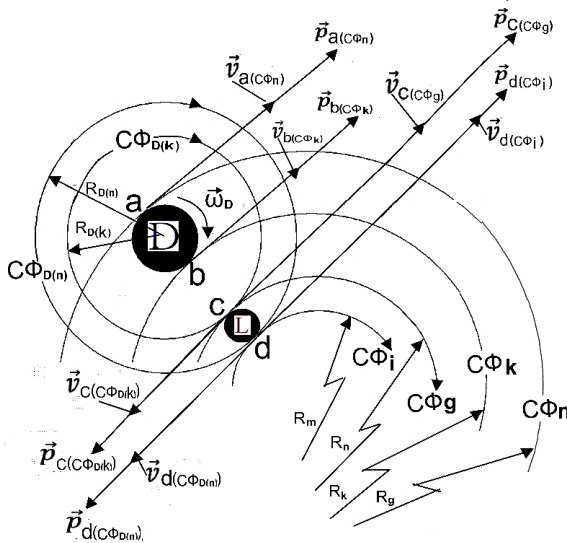


Рис. 9

С телом L взаимодействуют сферы материальной субстанции $S\Phi_g \div S\Phi_i$ гравитационного поля галактики и сферы материальной субстанции $S\Phi_{D(k)} \div S\Phi_{D(n)}$ гравитационного поля макротела D.

В точке "C" со стороны гравитационного поля галактики действует импульс

$$\vec{p}_{C(S\Phi_g)} = m_{C\Phi_g} \cdot \vec{v}_{C(S\Phi_g)}. \quad (24)$$

Как было показано выше, импульс $\vec{p}_{C(S\Phi_g)}$ вращает тело L в сторону вращения сферы материальной субстанции $S\Phi_g$.

Со стороны гравитационного поля макротела D в точке "C" действует импульс

$$\vec{p}_{C(S\Phi_{D(k)})} = m_{D(S\Phi_{D(k)})} \cdot \vec{v}_{C(S\Phi_{D(k)})}. \quad (25)$$

Как было показано выше, импульс $\vec{p}_{C(S\Phi_{D(k)})}$ вращает тело L в сторону вращения сферы материальной субстанции $S\Phi_{D(k)}$.

На рис. 9 видно, что импульс $\vec{p}_{C(S\Phi_g)}$, приложенный к телу L в точке "c", возникающий в результате взаимодействия материальной субстанции $S\Phi_g$ гравитационного поля галактики с телом L, направлен противоположно импульсу $\vec{p}_{C(S\Phi_{D(k)})}$, приложенному в этой же точке "c" к телу L, возникающему в результате взаимодействия материальной субстанции $S\Phi_{D(k)}$ гравитационного поля макротела D с телом L.

Аналогичное взаимодействие сфер материальной субстанции гравитационных полей галактики и макротела D происходит с телом L в точке "d".

Импульс $\vec{p}_{d(S\Phi_i)}$, приложенный к телу L в точке "d", возникающий в результате взаимодействия материальной субстанции $S\Phi_i$ гравитационного поля галактики с телом L, направлен противоположно импульсу $\vec{p}_{d(S\Phi_{D(n)})}$, приложенному в этой же точке "d" к телу L, возникающему в результате взаимодействия материальной субстанции $S\Phi_{D(n)}$ гравитационного поля макротела D с телом L.

Возможны три варианта взаимодействия импульсов, создаваемых сферами материальных субстанций гравитационных полей галактики и макротела D с телом L.

Исследуем взаимодействие импульсов гравитационных полей галактики и макротела D с телом L в точке "с" (рис. 9).

1. Импульс $\vec{p}_{C(C\Phi)}$ гравитационного поля, создаваемый в точке "с" на тело L, больше импульса $\vec{p}_{C(C\Phi_{D(k)})}$, создаваемого гравитационным полем макротела D.

$$\vec{p}_{C(C\Phi_g)} > \vec{p}_{C(C\Phi_{D(k)})} . \quad (26)$$

В этом случае тело L будет вращаться в сторону вращения сфер материальной субстанции галактики. В исследуемом случае по часовой стрелке.

2. Импульс $\vec{p}_{C(C\Phi_g)}$ гравитационного поля, создаваемый в точке "с" на тело L, равен импульсу $\vec{p}_{C(C\Phi_{D(k)})}$, создаваемому гравитационным полем макротела D.

$$\vec{p}_{C(C\Phi_g)} = \vec{p}_{C(C\Phi_{D(k)})} . \quad (27)$$

В этом случае тело L не будет вращаться вокруг оси.

3. Импульс $\vec{p}_{C(C\Phi_g)}$ гравитационного поля, создаваемый в точке "с" на тело L, меньше импульса $\vec{p}_{C(C\Phi_{D(k)})}$, создаваемого гравитационным полем макротела D.

$$\vec{p}_{C(C\Phi_g)} < \vec{p}_{C(C\Phi_{D(k)})} . \quad (28)$$

В этом случае тело L будет вращаться в сторону вращения сфер материальной субстанции макротела D. В исследуемом случае против часовой стрелки.

Аналогичный анализ взаимодействие импульсов гравитационных полей галактики и макротела D с телом L можно провести в точке "d" (рис. 9).

Примером различных направлений вращения планет является наша Солнечная система.

При исследовании направления вращения планет, расположенных в гравитационном поле Солнца, необходимо учитывать наложение гравитационных полей самого Солнца, гравитационного поля галактики и гравитационного поля метагалактики.

Именно в результате наложения этих гравитационных полей планета Меркурий не вращается вокруг своей оси. Вернее, совершает один оборот вокруг своей оси за один оборот вокруг Солнца, оставаясь повернутой одной стороной к Солнцу.

Остальные планеты вращаются вокруг своих осей.

При исследовании вращения Луны, спутника Земли, необходимо учитывать влияние сфер материальной субстанции гравитационного поля Земли.

Именно в результате наложения гравитационного поля Земли, Луна, как и Меркурий, не вращается вокруг своей оси [3, 5].

В Солнечной системе спутники ряда планет вращаются противоположно вращению планет. Например, спутник Сатурна Феба.

Заключение

Таким образом, вращение вокруг своих осей макротел в галактике, галактик в метагалактике, метагалактик в Космосе объясняется взаимодействием этих макрообразований с материальной субстанцией суммарных гравитационных полей.

Библиографический список

1. *Голубев Ю.Ф.* Основы теоретической механики. М.: МГУ, 2000. С. 160–720 с. ISBN 5-211-04244-1.
2. *Лебедев Н.П.* Давление света. М.: Гостехиздат, 1922. Классики естествознания.
3. *Гуревич Г.С., Каневский С.Н.* Чем Солнце тянет Землю? М.: ИПО "У Никитских ворот", 2012. 72 с. ISBN 978-5-91366-376-4.
4. *Гуревич Г.С.* Математическое моделирование процессов в гравитационном поле макротел // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2021. Вып. 1(52). С. 16–24.
5. *Каневский С.Н., Гуревич Г.С.* Астродинамика. М.: ИПО "У Никитских ворот", 2009. 384 с. ISBN 978-5-91366-081-7.
6. *Гуревич Г.С., Пенский О.Г.* О существовании центров равнодавлений, являющихся центрами концентрации материальной субстанции // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2021. Вып. 2(53). С. 25–28.
7. *Гуревич Г.С., Лутманов С.В., Пенский О.Г.* Математические модели центров равнодавлений в звездных системах // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2021. Вып. 3(54). С. 24–29.

8. Гуревич Г.С., Лутманов С.В., Ильев О.И., Белозерова Т.С., Пенский О.Г. Обоснование гипотезы об образовании звезд в центрах равнодавлений галактики // Danish Scientific Journal. 2021. № 51. MATHEMATICAL SCIENCES.

9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Физматлит, 2002. ISBN 5-9221-0056-4.

10. Эйнштейн А. К электродинамике движущихся тел. "Анналы физики", 1905.

11. Эйнштейн А. Собрание научных трудов. М.: Наука, 1965. Т. 1. С. 7–35.

THE REASONS FOR THE ROTATION OF MACROBODIES AROUND ITS AXIS

G. S. Gurevich

Institute of Integration and Professional Adaptation

Netanya, Israel

garoldgurevich37@gmail.com

The article explores the causes of rotation of macrobodies in galaxies, galaxies in metagalactics, metagalactics in Space. It is proved, that the reason for the rotation of these macro-formations is the interaction of these macro-formations with the material substance of the total gravitational fields

Keywords: gravity; center of equal pressure; flow of microparticles; matter; space; momentum; velocity; trajectory; macrobody; galaxy; cosmos.

УДК 539.3

А. Ш. Кусяков

*Пермский государственный национальный
исследовательский университет*

Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15

kusyakov@psu.ru; 8 (342) 2-396-560

АНАЛИЗ ОПТИМАЛЬНЫХ МНОГОСТЕНОЧНЫХ ПЛАСТИН

Приведены результаты вероятностного анализа многостеночных пластин, оптимальных по условиям устойчивости и прочности. Предполагается, что пластина находится в условиях цилиндрического изгиба под действием сжимающих нагрузок. Показано, что в данном случае разброс упругих характеристик материала многостеночной пластины не оказывает существенного влияния на величину коэффициента запаса по общей форме потери устойчивости.

Ключевые слова: композит; пластина; устойчивость; вероятность.

Одной из характерных особенностей композитных конструкций является значительный разброс физических характеристик исходного материала.

В работе [5] исследовано влияние разброса упругих характеристик исходного материала на жесткостные характеристики многослойного пакета.

Ниже приведены результаты вероятностного анализа композитной многостеночной пластины, находящейся под действием сжимающих нагрузок.

Многостеночная пластина состоит из двух одинаковых внешних слоев (несущие слои), соединенных набором стенок из композитного материала.

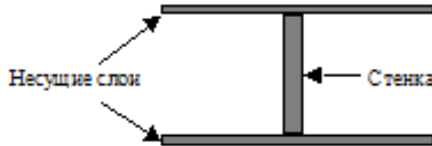


Рис. 1. Элемент многостеночной пластины

Введем следующие обозначения:

a, b – длина и ширина пластинки соответственно;

h_0 – толщина одного несущего слоя;

t_s – расстояние между центрами тяжести стенок

H_s, B_s – соответственно высота и ширина стенки;

E_1, E_2 – модули Юнга вдоль и поперек волокон материала несущих слоев соответственно;

ν_{12}, ν_{21} – коэффициенты Пуассона материала несущих слоев;

G_{12} – модуль сдвига материала несущих слоев;

E_s – модуль Юнга материала стенок;

$D_{xx}, D_{yy}, D_{xy}, D_G$ – изгибные жесткости несущего слоя.

Если несущие слои многостеночной пластины состоят только из продольных монослоев, изгибные жесткости можно представить следующим образом:

$$D_{xx} = \frac{b_{11}h_0^3}{12}, D_{yy} = \frac{b_{22}h_0^3}{12}, D_{xy} = \frac{b_{12}h_0^3}{12}, D_G = \frac{b_{33}h_0^3}{12}.$$

Здесь

$$b_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, b_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, b_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, b_{33} = G_{12}.$$

Предполагается, что пластина находится под действием сжимающих в плоскости конструкции нагрузок.

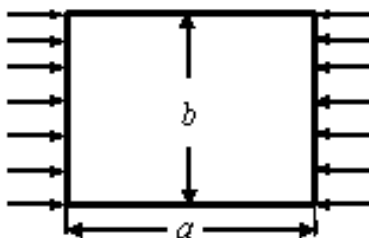


Рис. 2. Пластина, находящаяся под действием сжимающих нагрузок

Основные расчетные зависимости для многостеночной пластины приведены в работе [5]. В частности, критическую нагрузку, соответствующую общей форме потери устойчивости, будем определять по формуле

$$q_{cr} = D_{xx}^{(p)} \left(\frac{\pi}{a} \right)^2, \quad (1)$$

где

$$D_{xx}^{(p)} = 8D_{xx} \left(1 + 3 \left(\frac{H_s}{h} \right)^2 + 3 \frac{H_s}{h} \right) + \frac{E_s h_s H_s^2}{12}, \quad (2)$$

$$h_s = \frac{B_s H_s}{t_s}, \quad h = 2h_0. \quad (3)$$

Вероятностному анализу композитных конструкций должен предшествовать этап построения оптимального проекта. Вопросы оптимального проектирования конструкций из композитных материалов исследовались многими авторами [1–3, 7–9] и др.

В настоящей работе используется алгоритм оптимизации, приведенный в статье [6]. Этот алгоритм, в отличие от большинства известных алгоритмов оптимального проектирования, не требует применения численных методов нелинейного математического программирования.

В качестве примера рассмотрим пластину длиной $a = 1$ м и шириной $b = 3$ м, находящуюся под действием сжимающей нагрузки $q_0 = 2 \cdot 10^2$ Н/м.

Пластина подкреплена вертикальными стенками, изготовленными из того же материала, что и несущие слои пластины. Максимально возможная по условиям технологии высота стенки – $H_{sm} = 0,02$ м. Предел прочности материала пластины при сжатии вдоль волокон – $\sigma_{1b} = 0,7$ ГПа. Упругие характеристики материала конструкции приведены в таблице.

Упругие характеристики материала конструкции

Характеристика	E_1 , ГПа	E_2 , ГПа	ν_{12}	G_{12} , ГПа
Значение	140	7	0,24	27,5

Требуется подобрать параметры конструкции так, чтобы обеспечить двукратное снижение массы G многостеночной конструкции по сравнению с неподкрепленной пластиной.

В результате решения задачи оптимизации получены следующие результаты [6]:

$$h = 0,0024 \text{ м}; h_s = 0,0036 \text{ м}; t_s = 0,053 \text{ м}; H_s = 0,0118 \text{ м}.$$

Несущие слои оптимальной многостеночной пластины состоят только из продольных монослоев, что обеспечивает наилучшие характеристики прочности конструкции по направлению действия нагрузок. Коэффициент запаса по общей устойчивости конструкции равен

$$\eta = \frac{q_{cr}}{q_0} = 1.$$

Исследуем влияние разброса упругих характеристик на величину коэффициента запаса устойчивости. Для решения задачи воспользуемся модулем пакетами descriptive и distrib системы МАХИМА. Входными параметром служит модуль Юнга материала монослоев E_1 , выходной параметр – коэффициент запаса по общей устойчивости η многостеночной пластины.

Предполагается, что плотность распределения вероятностей модуля Юнга подчиняется нормальному закону.

Исходные данные вероятностного анализа для E_1 :

математическое ожидание – 140 ГПа;

среднее квадратичное отклонение – 7 ГПа.

С точностью до произведения коэффициентов Пуассона выражение для критической нагрузки (1) можно представить в виде:

$$q_{cr} = \frac{8E_1 h_0^3}{12} \left(1 + 3 \left(\frac{H_s}{h} \right)^2 + 3 \frac{H_s}{h} \right) + \frac{E_1 h_s H_s^2}{12}.$$

Таким образом, критическая нагрузка для общей формы потери устойчивости зависит только от модуля Юнга E_1 .

Программа вероятностного анализа:

```
/* Многостеночная пластина. Вероятностный анализ*/
load(descriptive);
load(distrib);
fpprintprec:4;
pi:3.1415927;
/* Нагрузка */
q:2E5,number;
/* Габариты конструкции и толщина несущего слоя*/
a:1; b:3;h0:0.0012; h:2*h0;
/* Характеристики ребер */
hs:0.0036, numer;
HS:0.0118,number;
/* МО и СКО.*/
E1:140E9;
S:7E9;
/* Моделирование СВ */
N1:1;
N2:10000;
STP:1;
list:[]$
for i:N1 thru N2 step STP do
block(CVE1:random_normal(E1,S),
DXX:8*CVE1*h0^3/12*(1+3*(HS/h)^2+3*HS/h)+
```

```
CVE1*hs*HS^2/12,  
KZ:DXX*(pi/a)^2/q,  
list:endcons(KZ,list));  
histogram(list,frequency=percent);  
AVR:mean(list);  
STD1:std1(list);  
ASS:skewness(list);  
EKS:kurtosis(list);
```

Результаты вероятностного анализа для коэффициента запаса общей формы устойчивости:

математическое ожидание – 0,99;
среднее квадратичное отклонение – 0,05;
коэффициент асимметрии – 0,012;
коэффициент эксцесса – 0,066.

Гистограмма распределения относительных частот (в процентах) представлена на рис. 3.

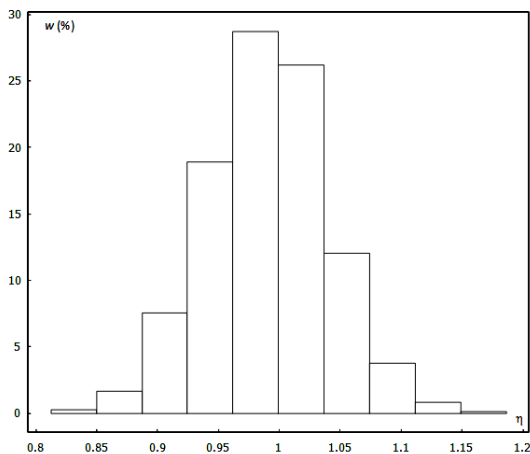


Рис. 3. Гистограмма распределения относительных частот

Анализ полученных результатов показывает, что в данном случае разброс упругих характеристик материала многостеночной пластины не оказывает существенного влияния на величину коэффициента запаса по общей форме потери устойчивости.

Библиографический список

1. Бакулин В.Н., Гусев Е.Л., Марков В.Г. Методы оптимального проектирования и расчета композиционных конструкций: в 2-х т. Оптимальное проектирование конструкций из композиционных и традиционных материалов. М.: Физматлит, 2008. Т. 1. 256 с.
2. Баничук Н.В., Кобелев В.В., Рикардс Р.Б. Оптимизация элементов конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 224 с.
3. Нарусберг В.Л., Тетерс Г.А. Устойчивость и оптимизация оболочек из композитов. Рига, 1988. 299 с.
4. Кусяков А.Ш. Вероятностный анализ жесткостных характеристик многослойных композитов // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Перм. гос. нац. иссл. ун-т. Пермь, 2017. Вып. 49. С. 17–24.
5. Кусяков А.Ш. Оценка эффективности многостеночных композитных пластин // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Перм. гос. нац. иссл. ун-т. Пермь, 2020. Вып. 52. С. 4–10.
6. Кусяков А.Ш. Моделирование композитных пластин и оболочек. Пермь: Изд-во ПГНИУ. 2020. 188 с. URL: <https://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/kusyakov-modelirovaniekompozitnyh-plastin-i-obolochek.pdf> (дата обращения 30.08.2022).
7. Немировский Ю.В., Янковский А.П. Рациональное проектирование армированных конструкций. Новосибирск: Наука, 2002. 488 с.
8. Смердов А.А. Основы оптимального проектирования композитных конструкций. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 88 с.
9. Чамис К. Проектирование элементов конструкций из композитов // Композиционные материалы: в 8 т. / под ред. Л. Браутмана и Р. Крока. М.: Машиностроение, 1978. Т. 8, ч. 2. С. 214–254.

ANALYSIS OF OPTIMAL MULTIPLE PLATES

A. Sh. Kusyakov

Perm State University; Perm, Russia

kusyakov@psu.ru

The results of the probabilistic analysis of multi-wall plates, optimal in terms of stability and strength, are given. It is assumed that the plate is in the conditions of cylindrical bending under the action of compressive loads. It is shown that in this case, the dispersion of the elastic characteristics of the material of the multi-walled plate has a significant influence on the size coefficient of the stock in the general shape of the loss stability.

Keywords: composite; plate; stability probability.

УДК 519.7

С. В. Лутманов

*Пермский государственный национальный
исследовательский университет*

Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15

svlut@yandex.ru

**ОПТИМАЛЬНОЕ ГАШЕНИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ
БАЗОВОГО ЗАКОНА ПОЛЕТА
МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ ПО КРИТЕРИЯМ
"МИНИМУМ ЭНЕРГИИ" И "МИНИМУМ СИЛЫ"**

Рассматривается полет управляемой материальной точки, движущейся в однородном поле тяжести с учетом сопротивления среды пропорционального квадрату величины скорости. В статье решена задача наведения точки на цель с учетом фазовых ограничений, состоящих в запрете попадания горизонтальной проекции точки в заданные области, а также в необходимости движения точки в заданном коридоре над поверхностью земли. Задача гашения отклонения точки от базового закона движения, возникающая в процессе построения искомого программного управления, решается как задача оптимального управления линейным динамическим объектом по критериям "минимум энергии" и "минимум силы". Ее решение реализуется на базе принципа максимума Н.Н. Красовского. Проведен численный эксперимент, подтверждающий эффективность примененного алгоритма.

Ключевые слова: математическая модель; программное управление; оптимальное управление; матрица Коши; формула Коши; функциональная проблема моментов; принцип максимума.

Введение

Данная работа является продолжением цикла статей автора [4–6]. Рассматривается полет управляемой материальной точки в однородном поле тяжести в среде с сопротивлением, пропорциональным квадрату скорости. В начальный момент точка принимает некоторое положение в пространстве и задается вектор ее скорости. В дальнейшем в течении выделенного промежутка времени, который назовем основным, точка обязана находиться внутри заданного коридора над поверхностью земли, а ее горизонтальная проекция не должна заходить в заранее оговоренные области. По истечении основного промежутка времени точка начинает снижение и предельно приближается к намеченной цели, оставаясь при этом выше поверхности земли. Управление точкой осуществляется посредством приложенной к ней силы, закон изменения которой ищется в классе программных стратегий.

Решение задачи управления производится по следующей схеме. Подбирается кинематический закон движения точки, удовлетворяющий всем перечисленным выше требованиям к полету точки. При этом начальное положение точки и ее начальная скорость для подобранного закона не обязаны совпадать с теми, которые в действительности придаются точке в начальный момент времени. Указанный закон движения будем называть базовым. Далее решается обратная задача динамики по определению базового программного управления, реализующего базовый закон движения. В силу того, что начальные условия для базового закона движения не совпадают с реальными начальными условиями, полет точки, осуществляемый в результате применения базового программного управления, не будет происходить в соответствие с базовым законом движения. Получающийся таким образом кинематический закон движения точки назовем возмущенным движением, а разность между возмущенным и базовым законами движения точки назовем возмущением. С большой степенью точности динамика возмущения описывается системой линейных дифференциальных уравнений, получающейся в результате линеаризации исходных дифференциальных уравнений управляемого движения точки, в окрестности пары "базовый закон движения, базовое программное управление".

Идея рассматриваемого подхода состоит в том, чтобы путем введения дополнительного управления обнулить возмущение к началу основного промежутка времени. В дальнейшем дополнительное управление отключается, и полет точки будет происходить в соответствии с базовым законом движения, что обеспечивает выполнение всех кинематических требований к полету точки. Задача обнуления возмущения в момент начала основного промежутка времени в статье рассматривается как задачи оптимального управления по критериям "минимум энергии" и "минимум силы". Решение задачи осуществляется путем сведения ее к функциональной проблеме моментов [3]. Преимущество этого подхода в сравнении с алгоритмом, основанном на необходимых условиях принципа максимума [9], состоит в том, что здесь двухточечная задача интегрирования системы дифференциальных уравнений заменяется на решение специальной задачи математического программирования.

1. Постановка задачи

Полет точки рассмотрим в прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$. Начало координат поместим на поверхность земли в исходное положение точки, в котором она находилась до придания ей начального положения и начальной скорости. Ось Oz направим вертикально вверх, оси Ox и Oy – горизонтальны. При этом плоскость Oxz проведем через точку-цель. (см. рис. 1).

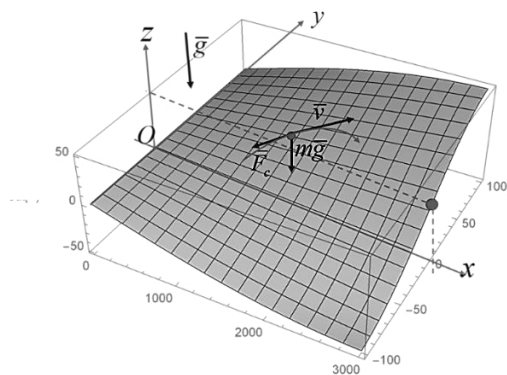


Рис. 1. 3D график рельефа местности

Перечислим все данные, которые считаются известными для решения задачи управления полетом точки: m – масса точки;

$$\bar{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} - \text{вектор ускорения силы тяжести; } k - \text{коэффициент}$$

пропорциональности при вычислении силы сопротивления;

$[t_0, T]$ – промежуток времени, в течении которого происходит

$$\text{весь полет; } \bar{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} - \text{радиус-вектор начального положения}$$

$$\text{точки; } \dot{\bar{r}}_0 = \begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{z}_0 \end{pmatrix} - \text{вектор начальной скорости точки;}$$

$$\bar{r}_T = \begin{pmatrix} x_T \\ 0 \\ z_T \end{pmatrix} - \text{радиус-вектор цели; } [T_1, T^*] \subset [t_0, T] - \text{основной}$$

промежуток времени;

$\varepsilon > 0$ – ширина вертикальной полосы над поверхностью земли, в которой должна находиться точка вплоть до окончания основного промежутка времени;

$\Pi[t_0, T] = \{v(\cdot) | v : [t_0, T] \rightarrow R^3\}$ – множество программных управлений, интегрируемых на отрезке $[t_0, T]$;

$\Pi[t_0, T_1] = \{v(\cdot) | v : [t_0, T_1] \rightarrow R^3\}$ – множество программных управлений, интегрируемых на отрезке $[t_0, T_1]$.

Функция $\varphi : R^2 \rightarrow R^1$ – описывает рельеф местности.

При этом $\begin{pmatrix} x \\ y \\ \varphi(x, y) \end{pmatrix}$ – точки на поверхности земли.

Функции $g_1, \dots, g_s : R^1 \rightarrow R^1$ определяют множества

$$G_i = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| y > g_i(x) \right\}, i = 1, \dots, s$$

– открытые области, во внутрь которых не может заходить горизонтальная проекция управляемой точки.

Дифференциальные уравнения управляемого движения точки выводятся на базе второго закона Ньютона [8], получены в работе [5] и имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{k}{m} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \dot{x} + \frac{1}{m} v_x, \\ \ddot{y} &= -\frac{k}{m} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \dot{y} + \frac{1}{m} v_y, \\ \ddot{z} &= -\frac{k}{m} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \dot{z} + \frac{1}{m} v_z - g, \end{aligned}$$

Здесь $\bar{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ – вектор декартовых координат точ-

ки; $\bar{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \in R^3$ – вектор ее управляющих параметров.

В работе решается следующая задача.

Задача 1. Определить программное управление $v^0(\cdot) \in \Pi[t_0, T]$, для которого движение точки

$$\bar{r}(\cdot) = \begin{pmatrix} x^0(\cdot) \\ y^0(\cdot) \\ z^0(\cdot) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x^0(t_0) \\ y^0(t_0) \\ z^0(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \dot{x}^0(t_0) \\ \dot{y}^0(t_0) \\ \dot{z}^0(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{z}_0 \end{pmatrix},$$

порожденное этим управлением, удовлетворяет условиям:

$$\begin{pmatrix} x^0(t) \\ y^0(t) \end{pmatrix} \notin G_i, i = 1, 2, \dots, s, t \in [T_1, T^*],$$

$$\varphi(x^0(t), y^0(t)) + \varepsilon \leq z^0(t) \leq \varphi(x^0(t), y^0(t)) + 2\varepsilon, t \in [T_1, T^*],$$

$$z^0(t) \geq \varphi(x^0(t), y^0(t)), t \in [T^*, T],$$

$$\left\| \begin{pmatrix} x^0(T) \\ y^0(T) \\ z^0(T) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_T \\ y_T \\ z_T \end{pmatrix} \right\| \rightarrow \min.$$

2. Базовый закон движения, базовое программное управление, возмущение

Опишем процедуру построения базового закона движения точки. Нарбатывается последовательность моментов времени

$$t_0 = \tau[0] < \tau[1] < \dots < \tau[i] < \dots < \tau[n] = T.$$

В каждый момент времени $\tau[i], i = 1, \dots, n$ относительно переменных $x[i], y[i], z[i]$ решается задача математического программирования:

$$(y[i] - y_T)^2 + (z[i] - z_T)^2 \rightarrow \min$$

$$y[i] \leq g_j(x[i]), j = 1, \dots, s,$$

$$\varphi(x[i], y[i]) + \varepsilon \leq z[i] \leq \varphi(x[i], y[i]) + 2\varepsilon, \quad t[i] \in [T_1, T^*],$$

$$\varphi(x[i], y[i]) + \varepsilon \cdot (T - \tau[i]) \leq z[i] \leq$$

$$\leq \varphi(x[i], y[i]) + 2\varepsilon \cdot (T - \tau[i]), \quad t[i] \in [T^*, T].$$

Решения этих задач образуют последовательности чисел:

$$\begin{aligned} &x[0], x[1], \dots, x[i], \dots, x[n], \\ &y[0], y[1], \dots, y[i], \dots, y[n], \\ &z[0], z[1], \dots, z[i], \dots, z[n]. \end{aligned}$$

Аппроксимация построенных последовательностей полиномами времени

$$x = x_{baz}(t), y = y_{baz}(t), z = z_{baz}(t), t \in [t_0, T]$$

будет служить базовым законом движения точки.

Более подробно процедура построения базового закона движения рассмотрена в [4].

Базовое программное управление вычисляется по формуле:

$$\begin{pmatrix} v_{bazx}(t) \\ v_{bazy}(t) \\ v_{bazz}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\ddot{x}_{baz} + k\sqrt{\dot{x}_{baz}^2 + \dot{y}_{baz}^2 + \dot{z}_{baz}^2} \dot{x}_{baz} \\ m\ddot{y}_{baz} + k\sqrt{\dot{x}_{baz}^2 + \dot{y}_{baz}^2 + \dot{z}_{baz}^2} \dot{y}_{baz} \\ m\ddot{z}_{baz} + k\sqrt{\dot{x}_{baz}^2 + \dot{y}_{baz}^2 + \dot{z}_{baz}^2} \dot{z}_{baz} + mg \end{pmatrix},$$

$$t \in [t_0, T].$$

Заменой

$$\begin{aligned} p_1 = x, p_2 = y, p_3 = z, p_4 = \dot{x}, p_5 = \dot{y}, p_6 = \dot{z}, \\ v_1 = v_x, v_2 = v_y, v_3 = v_z, u_1 = u_x, u_2 = u_y, u_3 = u_z \end{aligned}$$

нормализуем исходную систему дифференциальных уравнений движения.

В результате получим

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= p_4, \quad \dot{p}_2 = p_5, \quad \dot{p}_3 = p_6, \\ \dot{p}_4 &= -\frac{k}{m} \cdot \sqrt{p_4^2 + p_5^2 + p_6^2} \cdot p_4 + \frac{1}{m}(v_1 + u_1), \\ \dot{p}_5 &= -\frac{k}{m} \cdot \sqrt{p_4^2 + p_5^2 + p_6^2} \cdot p_5 + \frac{1}{m}(v_2 + u_2), \\ \dot{p}_6 &= -\frac{k}{m} \cdot \sqrt{p_4^2 + p_5^2 + p_6^2} \cdot p_6 - g + \frac{1}{m}(v_3 + u_3). \end{aligned} \quad (2.1)$$

В новых переменных базовый закон движения и базовое программное управление будут иметь вид:

$$p_{baz}(t) = \begin{pmatrix} p_{baz1}(t) \\ p_{baz2}(t) \\ p_{baz3}(t) \\ p_{baz4}(t) \\ p_{baz5}(t) \\ p_{baz6}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{baz}(t) \\ y_{baz}(t) \\ z_{baz}(t) \\ \dot{x}_{baz}(t) \\ \dot{y}_{baz}(t) \\ \dot{z}_{baz}(t) \end{pmatrix},$$

$$v_{baz}(t) = \begin{pmatrix} v_{baz1}(t) \\ v_{baz2}(t) \\ v_{baz3}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{bazx}(t) \\ v_{bazy}(t) \\ v_{bazz}(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [t_0, T].$$

Линеаризуем систему (2.1) в окрестности пары "базовое программное управление, базовое движение" на промежутке времени $[t_0, T_1]$.

В результате получим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + Bu, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix},$$

$$A(t) \div 6 \times 6, \quad B \div 6 \times 3, \quad t \in [t_0, T_1] \quad (2.2)$$

относительно шести мерного фазового вектора $x \in R^6$, динамика которого практически совпадает с динамикой возмущения, что позволяет отождествить эти понятия. Вектор $u \in R^3$ является вектором параметров дополнительного управления.

Здесь

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial p_4}(P \cdot p_4) & \frac{\partial}{\partial p_5}(P \cdot p_4) & \frac{\partial}{\partial p_6}(P \cdot p_4) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial p_4}(P \cdot p_5) & \frac{\partial}{\partial p_5}(P \cdot p_5) & \frac{\partial}{\partial p_6}(P \cdot p_5) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial p_4}(P \cdot p_6) & \frac{\partial}{\partial p_5}(P \cdot p_6) & \frac{\partial}{\partial p_6}(P \cdot p_6) \end{pmatrix}_{p=p_{baz}},$$

$$P = -\frac{k}{m} \cdot \sqrt{p_4^2 + p_5^2 + p_6^2}, \quad B = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выпишем начальные условия для возмущения

$$x^0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \\ x_{40} \\ x_{50} \\ x_{60} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{z}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{baz}(t_0) \\ y_{baz}(t_0) \\ z_{baz}(t_0) \\ \dot{x}_{baz}(t_0) \\ \dot{y}_{baz}(t_0) \\ \dot{z}_{baz}(t_0) \end{pmatrix}.$$

3. Обнуление возмущения

Символом $x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot))$ обозначим решение линейного дифференциального уравнения (2.2), выходящее из начального положения (t_0, x_0) и порожденное программным управлением $u(\cdot) \in \Pi[t_0, T_1]$. Сформулируем задачу обнуления возмущения в момент времени T_1 , дополнив ее требованием оптимальности управления $u^0(\cdot) \in \Pi[t_0, T_1]$ по критерию $I: \Pi[t_0, T_1] \rightarrow R^1$.

Задача 2. Определить программное управление $u^0(\cdot) \in \Pi[t_0, T_1]$ для которого

$$x(T_1, t_0, x_0, u^0(\cdot)) = 0 \in R^6 \quad (3.1)$$

и для всех других управлений $u(\cdot) \in \Pi[t_0, T_1]$, удовлетворяющих условию (3.1), выполнялось бы неравенство

$$I[u^0(\cdot)] \leq I[u(\cdot)].$$

Будем предполагать, что функционал $I: \Pi[t_0, T_1] \rightarrow R^1$ удовлетворяет следующим требованиям:

1) Для всех $u(\cdot) \in \Pi[t_0, T_1]$ справедливо неравенство $I[u(\cdot)] \geq 0$, причем $I[u(\cdot)] = 0$ тогда и только тогда, когда $u(t) = 0$ почти всюду на $[t_0, T_1]$.

2) Для всех $u^{(1)}(\cdot), u^{(2)}(\cdot) \in \Pi[t_0, T_1]$ справедливо неравенство,

$$I[u^{(1)}(\cdot) + u^{(2)}(\cdot)] \leq I[u^{(1)}(\cdot)] + I[u^{(2)}(\cdot)].$$

3) Для всех $u(\cdot) \in \Pi[t_0, T_1]$, $\lambda \in R^1$ имеет место равенство

$$I[\lambda u(\cdot)] = |\lambda| I[u(\cdot)].$$

Тогда **задача 2** может быть сведена к функциональной проблеме моментов. Действительно, пусть $u(\cdot) \in \Pi[t_0, T_1]$ программное управление, удовлетворяющее условию (3.1).

По формуле Коши имеем

$$0 = X[T_1, t_0]x_0 + \int_{t_0}^{T_1} X[T_1, \tau]B(\tau)u(\tau)d\tau \Rightarrow$$

$$\int_{t_0}^{T_1} H[T_1, \tau]u(\tau)d\tau = b,$$

где $X[t, \tau]$, $t, \tau \in [t_0, T_1]$ – фундаментальная матрица Коши для однородного уравнения $\dot{x} = A(t)x$, т. е. матрица размера 6×6 со свойствами

$$X[s, s] = E = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{d}{dt} X[t, \tau] = A(t)X[t, \tau].$$

Матрица

$$H[T_1, \tau] = X[T_1, \tau]B = \begin{pmatrix} h^{(1)}[T_1, \tau] \\ \dots \\ h^{(6)}[T_1, \tau] \end{pmatrix}, \quad \tau \in [t_0, T_1]$$

размера 6×3 называется матрицей перехода. Ее строки будем трактовать как элементы линейного пространства 3-мерных вектор-функций $h(\cdot)$, определенных на промежутке $[t_0, T_1]$. Это пространство обозначим символом $\Omega[t_0, T_1]$ и в дальнейшем будем называть основным.

Вектор

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_6 \end{pmatrix} = -X[T_1, t_0]x_0$$

определяется начальными условиями для фазового вектора $x \in R^6$.

На основании теоремы о представлении линейных функционалов на пространстве вектор-функций [2] можно установить взаимно однозначное соответствие между линейными функционалами φ , определенными на пространстве $\Omega[t_0, T_1]$, и программными управлениями $u(\cdot) \in \Pi[t_0, T_1]$ формулой

$$\varphi_u[h(\cdot)] = \int_{t_0}^{T_1} \langle h(\tau), u(\tau) \rangle d\tau, \quad h(\cdot) \in \Omega[t_0, T_1].$$

Эта формула позволяет отождествить совокупность программных управлений $\Pi[t_0, T_1]$ с пространством $\Omega^*[t_0, T_1]$, сопряженным к основному пространству, т. е. с пространством линейных функционалов, определенных на $\Omega[t_0, T_1]$. На линейном пространстве $\Omega[t_0, T_1]$ зададим норму, определив ее для каждого элемента $h(\cdot) \in \Omega[t_0, T_1]$ по формуле

$$\|h(\cdot)\| = \sup_{u(\cdot) \in \Pi[t_0, T_1]} \int_{t_0}^{T_1} \langle h(\tau), u(\tau) \rangle d\tau, \quad I[u(\cdot)] \leq 1.$$

В силу предположений 1) – 3) относительно функционала $I: \Pi[t_0, T_1] \rightarrow R^1$ эта величина действительно является нормой.

Тогда естественная норма в пространстве $\Omega^*[t_0, T_1]$, т. е. норма линейного функционала

$$\varphi_u[h(\cdot)] = \int_{t_0}^T \langle h(\tau), u(\tau) \rangle d\tau, \quad h(\cdot) \in \Omega[t_0, T],$$

задаваемая формулой

$$\|\varphi\|^* = \sup_{\substack{h(\cdot) \in \Omega[t_0, T_1] \\ h(\cdot) \neq 0}} \frac{|\varphi[h(\cdot)]|}{\|h(\cdot)\|},$$

будет удовлетворять условию

$$\|\varphi_u\|^* = I[u(\cdot)], \quad u(\cdot) \in \Pi[t_0, T_1].$$

Таким образом, задача 2 об оптимальном управлении свелась к следующей функциональной проблеме моментов.

Задача 3 (проблема моментов)

Дано:

$\Omega[t_0, T_1]$ – основное линейное нормированное пространство 3-мерных вектор-функций, $h^{(1)}[T_1, \cdot], \dots, h^{(6)}[T_1, \cdot] \in \Omega[t_0, T_1]$ – шесть элементов основного пространства 3-мерных вектор-функций $h(\cdot)$, $b_1, \dots, b_6 \in R^1$ – шесть действительных чисел.

Найти линейный функционал $\varphi_{u^0} \in \Omega^*[t_0, T_1]$:

$$\varphi_{u^0}[h(\cdot)] = \int_{t_0}^{T_1} \langle h(\tau), u^0(\tau) \rangle d\tau, \quad h(\cdot) \in \Omega[t_0, T_1],$$

для которого

$$\varphi_{u^0}[h^{(i)}[T_1, \cdot]] = b_i, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (3.2)$$

и такой, что среди всех других функционалов

$$\varphi_u \in \Omega^*[t_0, T_1]: \varphi_u[h(\cdot)] = \int_{t_0}^{T_1} \langle h(\tau), u(\tau) \rangle d\tau,$$

удовлетворяющих условию (3.2), он имел бы наименьшую естественную норму

$$\|\varphi_u\|^* = I[u(\cdot)].$$

4. Алгоритм решения задачи "проблема моментов"

Заметим, что если $b_1 = \dots = b_6 = 0$, то решением проблемы моментов будет тривиальный функционал. Поэтому в дальнейшем этот случай рассматривать не будем. В пространстве $\Omega[t_0, T_1]$ введем гиперплоскость

$$Q = \left\{ h(\cdot) = \sum_{i=1}^n l_i h^{(i)}[T_1, \cdot] \in \Omega[t_0, T_1], \right.$$

$$l_i \in R^1, i = 1, \dots, 6, \left\{ \sum_{i=1}^6 l_i b_i = 1 \right\}.$$

Следуя монографии [3] сформулируем теоремы, служащие обоснованием алгоритма решения задачи "проблема моментов".

Теорема 1. Существует элемент $h^0 \in Q$, удовлетворяющий условию $\|h^0\| = \min_{h \in Q} \|h\|$ (см. рис. 2).

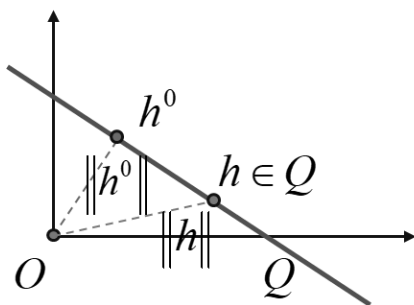


Рис. 2. Гиперплоскость Q

Определение 1. Элемент $h^0(\cdot) = \sum_{i=1}^6 l_i^0 h^{(i)} [T_1, \cdot] \in Q$, назовем "минимальным", а его норму обозначим символом ρ^0 .

Теорема 2. Задача 3 разрешима тогда и только тогда, когда $\rho^0 > 0$. При этом

$$\|\varphi_{u^0}\|^* = \frac{1}{\rho^0}.$$

Теорема 2 (принцип максимина)

Пусть $\varphi_{u^0} \in \Omega^* [t_0, T_1]$ – решение задачи 3, $h^0 \in Q$ –

"минимальный" элемент и $G = \left\{ \varphi_u \in \Omega^* [t_0, T_1] \mid \|\varphi_u\|^* = \frac{1}{\rho^0} \right\}$.

Тогда

$$\varphi_{u^0}(h^0) = \max_{\varphi_u \in G} \varphi[h^0].$$

Приведем основные этапы решения задачи 3, а, следовательно, и задачи 2.

Первый этап. Посредством формулы

$$\|h(\cdot)\| = \sup_{u(\cdot) \in \Pi[t_0, T_1]} \int_{t_0}^{T_1} \langle h(\tau), u(\tau) \rangle d\tau, \quad I[u(\cdot)] \leq 1$$

ввести норму на линейном (основном) пространстве 3-мерных вектор функций $\Omega[t_0, T_1]$.

Второй этап. Построить минимальный элемент $h^0(\cdot) \in \Omega[t_0, T_1]$ из условия

$$\|h^0\| = \min_{h \in Q} \|h\|, \quad Q = \left\{ h(\cdot) = \sum_{i=1}^6 l_i h^{(i)}[T_1, \cdot] \mid \sum_{i=1}^6 l_i b_i = 1 \right\} \Rightarrow$$

$$h^0(\cdot) = \sum_{i=1}^n l_i^0 h^{(i)}[T_1, \cdot], \quad \rho^0 = \|h^0(\cdot)\|.$$

Третий этап. Определить оптимальное программное управление $u^0(\cdot)$ из условия

$$\int_{t_0}^{T_1} \langle h^0(\tau), u^0(\tau) \rangle d\tau = \max_{I[u(\cdot)] = \frac{1}{\rho^0}} \int_{t_0}^{T_1} \langle h^0(\tau), u(\tau) \rangle d\tau.$$

5. Управление по критерию "минимум энергии"

В качестве критерия оптимальности рассмотрим функционал

$$I_{эн}^0[u_i(\cdot)] = \left[\int_{t_0}^{T_1} [(u_1(\tau))^2 + (u_2(\tau))^2 + (u_3(\tau))^2] d\tau \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (5.1)$$

В книге [3] говорится, что термин "энергия" для функционала (5.1) носит условный смысл. Однако в случаях электромеханических систем эта величина действительно может играть роль оценки энергии. Заметим, что условия 1) – 3) предыдущего пункта для функционала (5.1) имеют место. В частности, условие 2) является следствием неравенства Миньковского [1]

$$\left[\int_{t_0}^{T_1} \|u^{(1)}(\tau) + u^{(2)}(\tau)\|^p d\tau \right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\int_{t_0}^{T_1} \|u^{(1)}(\tau)\|^p d\tau \right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_{t_0}^{T_1} \|u^{(2)}(\tau)\|^p d\tau \right]^{\frac{1}{p}}$$

при $p = 2$.

Таким образом, для решения задачи 2 можно применить поэтапный алгоритм, описанный выше.

Первый этап сводится к решению изопериметрической задачи вариационного исчисления

$$\begin{aligned} \|h(\cdot)\| &= \max_{u(\cdot) \in \Pi[t_0, T_1]} \int_{t_0}^{T_1} \langle h(\tau), u(\tau) \rangle d\tau = \\ &= \max_{u(\cdot) \in \Pi[t_0, T_1]} \int_{t_0}^{T_1} (h_1(\tau)u_1(\tau) + h_2(\tau)u_2(\tau) + h_3(\tau)u_3(\tau)) d\tau, \\ & \left[\int_{t_0}^{T_1} \langle u(\tau), u(\tau) \rangle d\tau \right]^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left[\int_{t_0}^{T_1} [(u_1(\tau))^2 + (u_2(\tau))^2 + (u_3(\tau))^2] d\tau \right]^{\frac{1}{2}} \leq 1. \end{aligned}$$

Ее решением будет [7]

$$\begin{aligned} \|h(\cdot)\| &= \left[\int_{t_0}^{T_1} \langle h(\tau), h(\tau) \rangle d\tau \right]^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left[\int_{t_0}^{T_1} [(h_1(\tau))^2 + (h_2(\tau))^2 + (h_3(\tau))^2] d\tau \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

На *втором этапе* решается задача математического программирования

$$\|h^0\| = \min_{h \in Q} \|h\|,$$

$$Q = \left\{ h(\cdot) = \sum_{i=1}^6 l_i h^{(i)} [T_1, \cdot] \mid \sum_{i=1}^n l_i b_i = 1 \right\} \Rightarrow$$

$$\left[\sum_{i,j=1}^6 \alpha_{ij} l_i l_j \right]^{\frac{1}{2}} \rightarrow \min,$$

$$\sum_{i=1}^6 l_i b_i = 1$$

где $\alpha_{ij} = \int_{t_0}^{T_1} \langle h^{(i)} [T_1, \tau], h^{(j)} [T_1, \tau] \rangle d\tau, i, j = 1, \dots, 6.$

Пусть вектор $l^0 = \begin{pmatrix} l_1^0 \\ \dots \\ l_6^0 \end{pmatrix} \in R^6$ – ее решение.

Тогда $h^0(\cdot) = \sum_{i=1}^6 l_i^0 h^{(i)} [T_1, \cdot], \quad \rho^0 = \left[\sum_{i,j=1}^6 \alpha_{ij} l_i^0 l_j^0 \right]^{\frac{1}{2}}.$

На *третьем этапе* снова решается изопериметрическая задача вариационного исчисления

$$\int_{t_0}^{T_1} \langle h^0(\tau), u(\tau) \rangle d\tau \rightarrow \max,$$

$$\left[\int_{t_0}^{T_1} \langle u(\tau), u(\tau) \rangle d\tau \right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left[\int_{t_0}^{T_1} \left[(u_1(\tau))^2 + (u_2(\tau))^2 + (u_3(\tau))^2 \right] d\tau \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\rho^0}.$$

Ее решением будет [7]

$$u^0(\cdot) = \begin{pmatrix} u_1^0(\cdot) \\ u_2^0(\cdot) \\ u_3^0(\cdot) \end{pmatrix} = \frac{1}{(\rho^0)^2} \sum_{i=1}^n l_i^0 h^{(i)}[T_1, \cdot] = \sum_{i=1}^n \frac{l_i^0}{(\rho^0)^2} h^{(i)}[T_1, \cdot] \Rightarrow$$

$$u^0(\cdot) = \begin{pmatrix} u_1^0(\cdot) \\ u_2^0(\cdot) \\ u_3^0(\cdot) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n v_i^0 h^{(i)}[T_1, \cdot], \quad v_i^0 = \frac{l_i^0}{(\rho^0)^2}, i = 1, \dots, 6.$$

Из равенств

$$\int_{t_0}^T \langle h^{(i)}[T, \tau], u^0(\tau) \rangle d\tau = b_i \Rightarrow$$

$$\int_{t_0}^T \left\langle h^{(i)}[T, \tau], \sum_{j=1}^6 v_j^0 h^{(j)}[T, \tau] \right\rangle d\tau = b_i$$

вытекает, что коэффициенты $v_j^0, j = 1, \dots, 6$ можно сразу искать как решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^6 \alpha_{ij} v_j^0 = b_i, i = 1, \dots, 6 \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{16} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{61} & \dots & \alpha_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_6 \end{pmatrix}.$$

Пусть $v^0 = \begin{pmatrix} v_1^0 \\ \dots \\ v_6^0 \end{pmatrix}$ – ее решение.

Тогда оптимальное управление строится по формуле

$$u^0(\cdot) = \begin{pmatrix} u_1^0(\cdot) \\ u_2^0(\cdot) \\ u_3^0(\cdot) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^6 v_i^0 (h^{(i)}(\cdot))^T.$$

6. Управление по критерию "минимум силы"

В качестве критерия оптимальности рассмотрим функционал

$$\begin{aligned} I[u(\cdot)] &= \max_{\tau \in [t_0, T_1]} \|u(\tau)\| = \max_{\tau \in [t_0, T_1]} \sqrt{\langle u(\tau), u(\tau) \rangle} = \\ &= \max_{\tau \in [t_0, T_1]} \sqrt{u_1^2(\tau) + u_2^2(\tau) + u_3^2(\tau)}. \end{aligned} \quad (6.1)$$

В случае, когда вектор $u(\cdot)$ имеет смысл вектора силы, критерий $I[u(\cdot)]$ оценивает наибольшую по модулю величину этой силы. Заметим, что условия 1) – 3) для функционала (6.1) Здесь как и для случая "минимум энергии" также имеют место.

В частности, условие 2) является следствием очевидного неравенства

$$\max_{\tau \in [t_0, T_1]} \|u^{(1)}(\tau) + u^{(2)}(\tau)\| \leq \max_{\tau \in [t_0, T_1]} \|u^{(1)}(\tau)\| + \max_{\tau \in [t_0, T_1]} \|u^{(2)}(\tau)\|.$$

Опишем поэтапный алгоритм решения задачи 2 для случая критерий "минимум силы".

На первом этапе вводится норма в основном пространстве

$$\Omega[t_0, T_1] = \left\{ h(\cdot) = \begin{pmatrix} h_1(\cdot) \\ h_2(\cdot) \\ h_3(\cdot) \end{pmatrix} \right\}.$$

Для всех $h(\cdot) \in \Omega[t_0, T_1]$ полагаем

$$\begin{aligned} \|h(\cdot)\| &= \max_{u(\cdot) \in \Pi[t_0, T_1]} \int_{t_0}^{T_1} \langle h(\tau), u(\tau) \rangle d\tau = \\ &= \max_{u(\cdot) \in \Pi[t_0, T_1]} \int_{t_0}^T (h_1(\tau)u_1(\tau) + h_2(\tau)u_2(\tau) + h_3(\tau)u_3(\tau)) d\tau, \end{aligned} \quad (6.2)$$

при условии

$$\begin{aligned} \max_{\tau \in [t_0, T_1]} \|u(\tau)\| &= \max_{\tau \in [t_0, T_1]} \sqrt{\langle u(\tau), u(\tau) \rangle} = \\ &= \max_{\tau \in [t_0, T_1]} \sqrt{u_1^2(\tau) + u_2^2(\tau) + u_3^2(\tau)} \leq 1. \end{aligned}$$

Максимум интеграла (6.2) достигается, когда подынтегральная функция принимает максимальное значение всюду на промежутке $[t_0, T_1]$. Максимальное значение этой функции можно получить, решив следующую задачу математического программирования

$$\langle u, h \rangle \rightarrow \max, \quad \langle u, u \rangle = 1, \quad u, h \in R^3. \quad (6.3)$$

Максимальным значением целевой функции в (6.3) служит величина $\sqrt{\langle h, h \rangle}$. Тогда норма на пространстве $\Omega[t_0, T_1]$ определяется формулой [7]

$$\begin{aligned} \|h(\cdot)\| &= \int_{t_0}^{T_1} \max_{\langle u, u \rangle = 1} \langle u(\tau), h(\tau) \rangle d\tau = \int_{t_0}^{T_1} \sqrt{\langle h(\tau), h(\tau) \rangle} d\tau = \\ &= \int_{t_0}^{T_1} \sqrt{h_1^2(\tau) + h_2^2(\tau) + h_3^2(\tau)} d\tau. \end{aligned}$$

На *втором этапе* строится "минимальный" элемент и вычисляется его норма

$$\|h^0\| = \min_{h \in Q} \|h\|, \quad Q = \left\{ h(\cdot) = \sum_{i=1}^6 l_i (h^{(i)}(\cdot))^T \mid \sum_{i=1}^n l_i b_i = 1 \right\}.$$

С этой целью решается задача математического программирования:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{T_1} \sqrt{\left\langle \sum_{i=1}^6 l_i (h^{(i)}(\cdot))^T, \sum_{i=1}^6 l_i (h^{(i)}(\cdot))^T \right\rangle} d\tau &\rightarrow \min, \\ \sum_{i=1}^6 l_i b_i &= 1 \\ \int_{t_0}^{T_1} \sum_{i,j=1}^6 \sqrt{\langle h^{[i]}(\tau), h^{[j]}(\tau) \rangle} l_i l_j d\tau &\rightarrow \min, \\ \sum_{i=1}^6 l_i b_i &= 1. \end{aligned} \Rightarrow$$

Пусть вектор $l^0 = \begin{pmatrix} l_1^0 \\ \dots \\ l_6^0 \end{pmatrix} \in R^6$ – решение этой задачи. "Минимальный" элемент строится по формуле

$$h^0(\cdot) = \sum_{i=1}^6 l_i^0 h^{(i)}(\cdot)$$

А его норма вычисляется по формуле

$$\rho^0 = \int_{t_0}^{T_1} \sqrt{\langle h^0(\tau), h^0(\tau) \rangle} d\tau.$$

На *третьем этапе* строится оптимальное программное управление.

Для этого решается задача максимизации функционала

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{T_1} \langle u(\tau), h^0(\tau) \rangle d\tau = \\ & = \max_{u(\cdot) \in L^2[t_0, T_1]} \int_{t_0}^{T_1} (h_1^0(\tau)u_1(\tau) + h_2^0(\tau)u_2(\tau) + h_3^0(\tau)u_3(\tau)) d\tau, \end{aligned}$$

при ограничении $\max_{\tau \in [t_0, T_1]} \sqrt{\langle u(\tau), u(\tau) \rangle} = \frac{1}{\rho^0}.$

Ее решение, как и на первом этапе, сводится к максимизации в каждый момент $\tau \in [t_0, T_1]$ подынтегральной функции

$$\langle u(\tau), h^0(\tau) \rangle = h_1^0(\tau)u_1(\tau) + h_2^0(\tau)u_2(\tau) + h_3^0(\tau)u_3(\tau)$$

при ограничении $\langle u(\tau), u(\tau) \rangle = \frac{1}{(\rho^0)^2}.$

Максимум подынтегрального выражения достигается на вектор-функции [7]

$$u^0(\tau) = \frac{1}{\rho^0} \cdot \frac{h^0(\tau)}{\sqrt{\langle h^0(\tau), h^0(\tau) \rangle}}, \quad \tau \in [t_0, T_1],$$

которая и является оптимальным программным управлением.

7. Численный эксперимент

Проиллюстрируем полученные результаты на числовых данных, взятых из работы [4]:

$$t_0 = 0 \text{ с}, T = 10 \text{ с}, T_1 = 1 \text{ с}, T^* = 8 \text{ с}, m = 100 \text{ кг}, g = 9.8 \frac{\text{М}}{\text{с}^2},$$

$$n = 200, k = 0.45 \frac{\text{кг}^2}{\text{М}}, \varphi(x, y) = 50 \cdot \sin(0.000005 \cdot x \cdot y) \text{ м},$$

$$x_T = 3000 \text{ м}, y_T = 0 \text{ м}, \varepsilon = 100 \text{ м},$$

$$g_1(x) = 0.001(x - 1000)(x - 500) \text{ м},$$

$$g_2(x) = 0.001(x - 2500)(x - 2000) \text{ м}.$$

Графики базовых законов изменения координат управляемой точки, иллюстрирующие выполнения всех требований, предъявляемых к кинематическому закону полета точки, а также графики изменения компонент базового управления построены и приведены в статье [4].

Приведем основные результаты эксперимента в части оптимального управления по критерию "минимум энергии".

На рис. 3–5 представлены графики изменения во времени компонент оптимального управления.

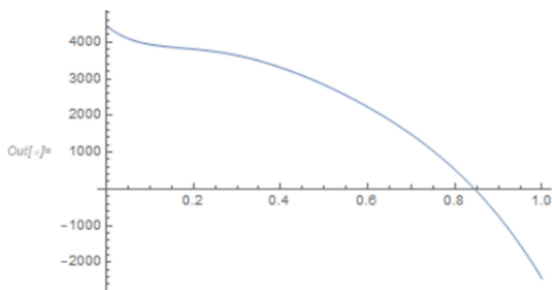


Рис. 3. График изменения во времени $u_1^0(\cdot)$

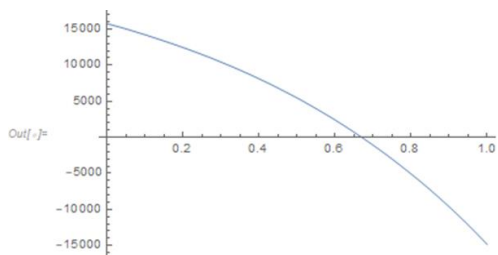


Рис. 4. График изменения во времени $u_2^0(\cdot)$

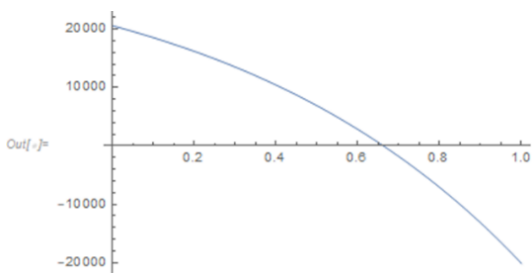


Рис. 5. График изменения во времени $u_3^0(\cdot)$

На рис. 6–11 представлены графики изменения во времени координат фазового вектора линейного объекта, отвечающие оптимальному управлению $u^0(\cdot)$.

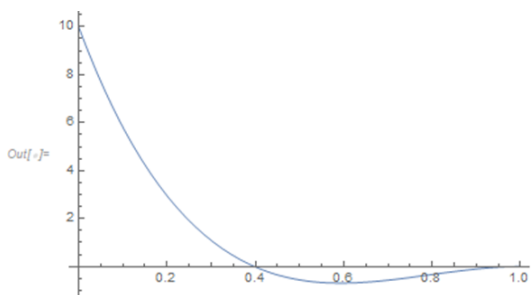


Рис. 6. График изменения во времени $x_1^0(\cdot)$

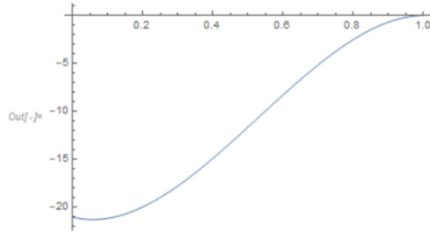


Рис. 7. График изменения во времени $x_2^0(\cdot)$

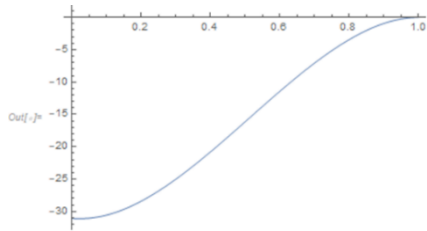


Рис. 8. График изменения во времени $x_3^0(\cdot)$

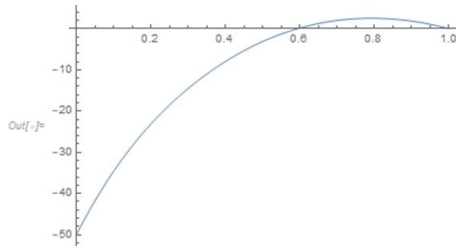


Рис. 9. График изменения во времени $x_4^0(\cdot)$

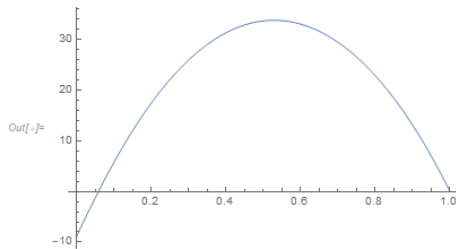


Рис. 10. График изменения во времени $x_5^0(\cdot)$

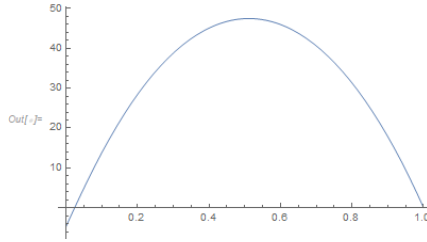


Рис. 11. График изменения во времени $x_6^0(\cdot)$

Из приведенных на рис. 6–11 графиков видно, что в момент времени $T_1 = 1c$ фазовый вектор попадает в начало координат. Этот факт подтверждается и непосредственно

$$x(T_1) = \begin{pmatrix} x_1(T_1) \\ x_2(T_1) \\ x_3(T_1) \\ x_4(T_1) \\ x_5(T_1) \\ x_6(T_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.92 \times 10^{-7} \\ -1.01 \times 10^{-6} \\ 4.86 \times 10^{-6} \\ 5.29 \times 10^{-6} \\ 3.67 \times 10^{-7} \\ -6.60 \times 10^{-7} \end{pmatrix}.$$

Управление, обеспечивающее полет точки, удовлетворяющий всем предъявляемым к нему требованиям, имеет вид

$$v^0(t) = \begin{pmatrix} \begin{cases} v_{bazx}(t) + u_1^0(t), & t \in [t_0, T_1] \\ v_{bazx}(t), & t \in (T_1, T] \end{cases} \\ \begin{cases} v_{bazy}(t) + u_2^0(t), & t \in [t_0, T_1] \\ v_{bazy}(t), & t \in (T_1, T] \end{cases} \\ \begin{cases} v_{bazz}(t) + u_3^0(t), & t \in [t_0, T_1] \\ v_{bazz}(t), & t \in (T_1, T] \end{cases} \end{pmatrix}.$$

На рис. 12–14 видно, что закон возмущенного движения в момент времени $T_1 = 1c$ выходит на базовый закон движения и в

дальнейшем с ним совпадает. Таким образом, программное управление $\nu^0(\cdot)$ решает задачу 1.

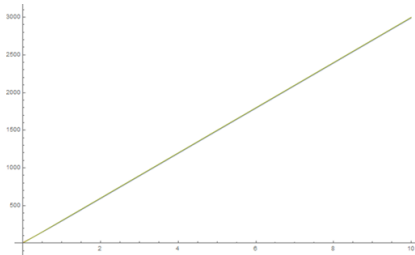


Рис. 12. График изменения во времени $x(\cdot)$

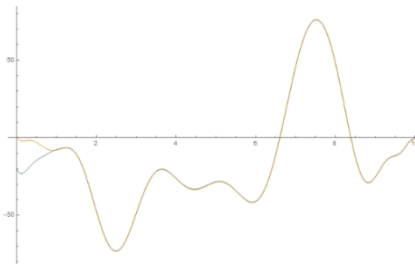


Рис. 13. График изменения во времени $y(\cdot)$

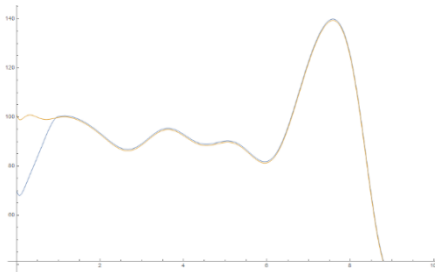


Рис. 14. График изменения во времени $z(\cdot)$

Промех по цели составляет величину

$$\gamma = \sqrt{(x(T) - x_T)^2 + (y(T) - y_T)^2 + (z(T) - z_T)^2} = 2.327 \text{ м} .$$

Приведем основные результаты эксперимента в части оптимального управления по критерию "минимум силы".

На рис. 15–17 представлены графики изменения во времени компонент оптимального управления.

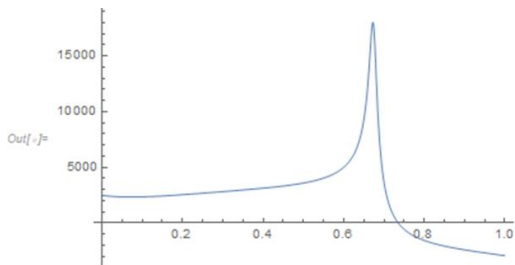


Рис. 15. График изменения во времени $u_1^0(\cdot)$

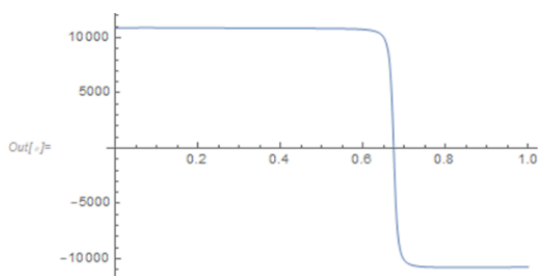


Рис. 16. График изменения во времени $u_2^0(\cdot)$

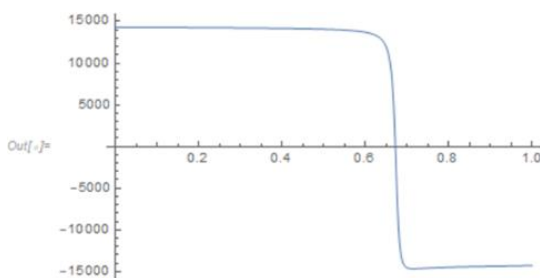


Рис. 17. График изменения во времени $u_3^0(\cdot)$

Заметим, что в соответствии с теоретическими результатами модуль оптимального управления должен оставаться постоянным. Этот факт подтверждается графиком на рис. 18.

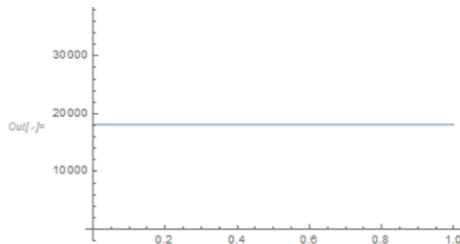


Рис. 18. График изменения во времени $\sqrt{u_1^2(\cdot) + u_2^2(\cdot) + u_3^2(\cdot)}$

На рис. 19–24 представлены графики изменения во времени координат фазового вектора линейного объекта, отвечающие оптимальному управлению $u^0(\cdot)$

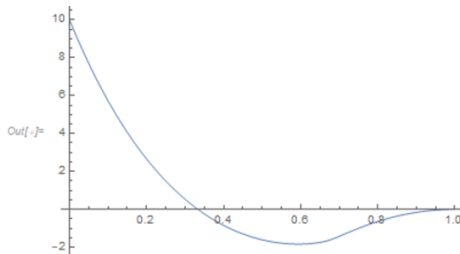


Рис. 19. График изменения во времени $x_1^0(\cdot)$

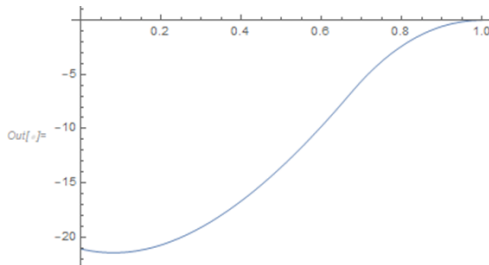


Рис. 20. График изменения во времени $x_2^0(\cdot)$

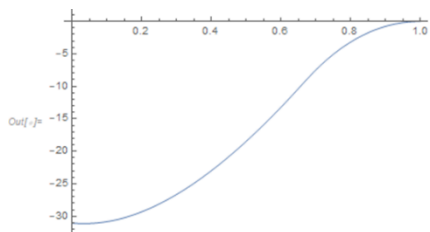


Рис. 21. График изменения во времени $x_3^0(\cdot)$

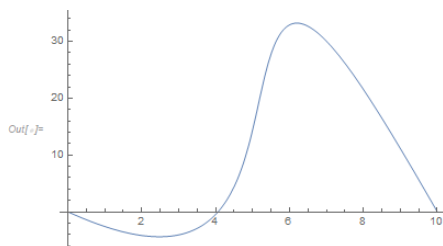


Рис. 22. График изменения во времени $x_4^0(\cdot)$

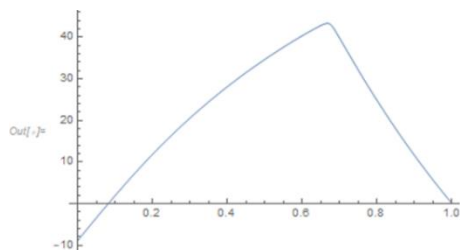


Рис. 23. График изменения во времени $x_5^0(\cdot)$

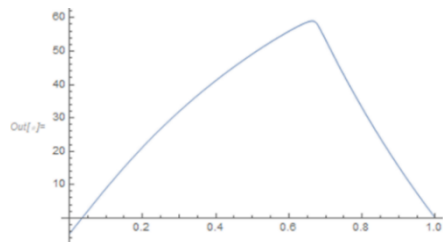


Рис. 24. График изменения во времени $x_6^0(\cdot)$

Из приведенных графиков рис. 19–24 видно, что в момент времени $T_1 = 1c$ фазовый вектор попадает в начало координат. Этот факт подтверждается и непосредственно:

$$x(T_1) = \begin{pmatrix} x_1(T_1) \\ x_2(T_1) \\ x_3(T_1) \\ x_4(T_1) \\ x_5(T_1) \\ x_6(T_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9.035 \cdot 10^{-6} \\ 0.0000222 \\ 0.0000163 \\ 0.0000516 \\ 0.0000428 \\ 0.0000459 \end{pmatrix}.$$

Управление, обеспечивающее полет точки, удовлетворяющий всем предъявляемым к нему требованиям, имеет вид

$$v^0(t) = \begin{pmatrix} \begin{cases} v_{bazx}(t) + u_1^0(t), & t \in [t_0, T_1] \\ v_{bazx}(t), & t \in (T_1, T] \end{cases} \\ \begin{cases} v_{bazy}(t) + u_2^0(t), & t \in [t_0, T_1] \\ v_{bazy}(t), & t \in (T_1, T] \end{cases} \\ \begin{cases} v_{bazz}(t) + u_3^0(t), & t \in [t_0, T_1] \\ v_{bazz}(t), & t \in (T_1, T] \end{cases} \end{pmatrix}.$$

На рис. 25–27 видно, что закон возмущенного движения в момент времени $T_1 = 1c$ выходит на базовый закон движения и в дальнейшем с ним совпадает. Таким образом, программное управление $u^0(\cdot)$ решает задачу 1.

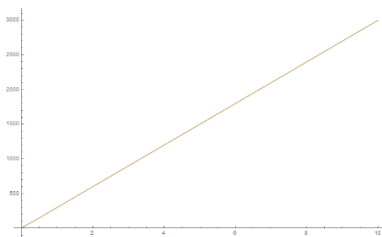
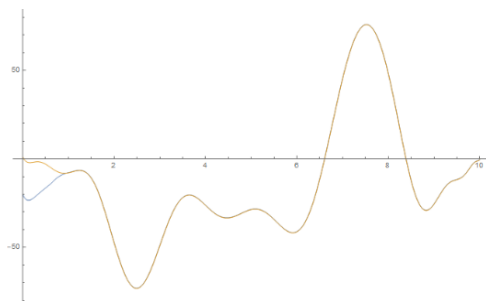
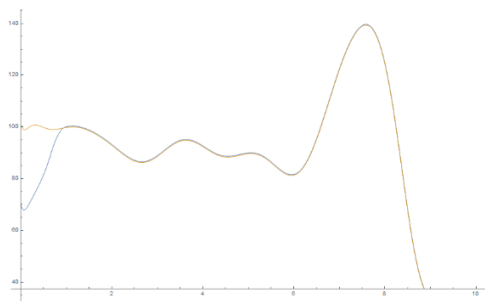


Рис. 25. График изменения во времени $x(\cdot)$

Рис. 26. График изменения во времени $y(\cdot)$ Рис. 27. График изменения во времени $z(\cdot)$

Промех по цели составляет величину

$$\gamma = \sqrt{(x(T) - x_T)^2 + (y(T) - y_T)^2 + (z(T) - z_T)^2} = 2.457 \text{ м}.$$

Заключение

В статье решена задача наведения на цель управляемой материальной точки, движущейся в однородном поле тяжести с учетом сопротивления пропорционального квадрату величины скорости. На полет точки накладывались ограничения, состоящие в запрете попадания горизонтальной проекции точки в заданные области, а также в необходимости движения точки в заданном коридоре над поверхностью земли. Проведен численный эксперимент, подтверждающий эффективность примененного алгоритма.

Библиографический список

1. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 741 с.
2. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 544 с.
3. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
4. *Лутманов С.В.* Построение базового закона движения материальной точки и реализующего его программного управления при наличии фазовых ограничений // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2022. Вып. 3(58). С. 25–37.
5. *Лутманов С.В., Хотько О.А.* Коррекция полета тяжелой материальной точки в среде с сопротивлением при наличии геометрических ограничений на дополнительные управления // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 3(46). С. 56–64.
6. *Лутманов С.В.* Об одной методике исследования управляемой динамической системы // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 1(36). С. 13–20.
7. *Лутманов С.В.* Вариационное исчисление и теория оптимального управления в примерах и упражнениях: учеб. пособие // Перм. ун-т. Пермь, 2010. 200 с.
8. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001. 414 с.
9. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976. 392 с.

**OPTIMAL DAMPING OF PERTURBATIONS
OF THE BASIC LAW OF FLIGHT OF A MATERIAL POINT
ACCORDING TO THE CRITERIA
OF "MINIMUM ENERGY" AND "MINIMUM FORCE"**

S. V. Lutmanov

Perm State University; Perm, Russia

svlut@yandex.ru

The flight of a controlled material point moving in a homogeneous gravity field is considered, taking into account the resistance of the medium proportional to the square of the velocity. The article solves the problem of pointing a point at a target, taking into account the phase constraints, which consist in prohibiting the horizontal projection of a point from falling into specified areas, as well as the need for the point to move in a given corridor above the earth's surface. The problem of damping the deviation of a point from the basic law of motion, arising in the process of constructing the desired program control, is solved as the problem of optimal control of a linear dynamic object according to the criteria of "minimum energy" and "minimum force". Its solution is implemented on the basis of Maximin N.N. Krasovsky's principle. A numerical experiment has been carried out confirming the effectiveness of the applied algorithm.

Keywords: Mathematical model; software control; optimal control; Cauchy matrix; Cauchy formula; functional problem of moments; Maximin principle.

УДК 531.381; 517.933

Н. Н. Макеев

Саратов, Россия

nmakeyev@mail.ru; (845) 272-35-33

**УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ
ГИРОСТАТА-МАГНЕТИКА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ**

Рассматривается движение гиростата с постоянным гиростатическим моментом в стационарном однородном магнитном поле, силовые линии которого параллельны. Гиростат движется под воздействием заданного внешнего момента сил так, что его носитель (абсолютно твердое тело) вращается вокруг неподвижного полюса, совпадающего с центром масс. Гиростат несет постоянный магнит, неизменно связанный с носителем. На основе аппарата Родрига–Гамильтона получено достаточное условие устойчивости по Ляпунову стационарного вращения гиростата вокруг одной из его главных центральных осей инерции, а также достаточное условие неустойчивости этого движения для общего случая конфигурации массы гиростата.

Ключевые слова: гиростат; устойчивость; кватернион; параметры Родрига–Гамильтона; стационарное движение.

1. Предварительные положения.**Уравнения движения**

Гиростат с постоянным результирующим гиростатическим моментом \mathbf{k} движется под воздействием внешнего силового момента \mathbf{L} в стационарном однородном параллельном магнитном поле напряженности \mathbf{H} так, что его неизменяемая основа (носитель

гиростата) вращается вокруг неподвижного полюса O , совпадающего с центром масс гиростата.

Предполагается, что носитель гиростата несет неизменно закрепленный с ним ферромагнитный элемент с постоянным собственным магнитным моментом \mathbf{I} , в результате чего при движении во внешнем магнитном поле на гиростат действует результирующий момент силы [1, с. 310]

$$\mathbf{L}^M = \mu (\mathbf{I} \times \mathbf{H}) \quad (1)$$

относительно полюса O . Здесь μ – постоянный коэффициент магнитной проницаемости однородной магнитной среды.

Введем правые координатные ортобазисы с общим началом в полюсе O : неподвижный Γ_0 , связанный с инерциальным пространством, и базис $\Gamma(Ox_1x_2x_3)$, оси которого Ox_j направлены по главным в полюсе O направлениям тензора инерции гиростата $\mathbf{A} = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$, где A_j – собственные значения оператора инерции гиростата. Здесь и всюду далее все координатные элементы относятся к осям базиса Γ и соответствуют номерам $j = 1, 2, 3$. Предполагается, что одна из осей базиса Γ_0 коллинеарна силовым линиям магнитного поля.

Обозначим: $\boldsymbol{\omega}(\omega_j)$ – мгновенная угловая скорость носителя гиростата, $\mathbf{k}(k_j)$ – гиростатический момент, \mathbf{A} – матрица приведенного по Н. Жуковскому [2] тензора инерции гиростата, отнесенного к полюсу O ; $\mathbf{s}(s_j)$ – орт линий внешнего магнитного поля, неизменно связанный с базисом Γ_0 .

Уравнение движения гиростата согласно заданным предпосылкам и выражению (1) имеет вид [3, с. 82]

$$\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\omega}} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}) + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}) = \mu (\mathbf{I} \times \mathbf{H}) + \mathbf{L}, \quad (2)$$

где $\mathbf{L} = \mathbf{L}(L_j)$.

Уравнение (2) эквивалентно системе, представленной в проекциях на оси координат базиса Γ

$$\begin{aligned} A_1 \dot{\omega}_1 + (A_3 - A_2) \omega_2 \omega_3 + k_3 \omega_2 - k_2 \omega_3 = \\ = \mu (I_2 s_3 - I_3 s_2) + L_1 \quad (1, 2, 3). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь (1, 2, 3) – символ циклической перестановки данных индексов, применяемый для получения остальных уравнений системы (3) по данному уравнению-представителю.

Введем четырехмерное векторное пространство над полем действительных чисел и зададим кватернионы на основе упорядоченной совокупности параметров Родрига–Гамильтона λ_s , где $s = 1, \dots, 4$ [4]. Эти параметры объединены тождеством

$$\sum_{s=0}^3 \lambda_s^2 = 1 \quad (4)$$

и задаются кватернионной матрицей

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & \lambda_0 & \lambda_3 & -\lambda_2 \\ -\lambda_2 & -\lambda_3 & \lambda_0 & \lambda_1 \\ -\lambda_3 & \lambda_2 & -\lambda_1 & \lambda_0 \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \mathbf{\Lambda} = [\lambda_0 \ \lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3]^T, \quad a_j = A_j^{-1} \quad (j=1, 2, 3), \\ \mathbf{\Phi} = [a_1 F_1 \quad a_2 F_2 \quad a_3 F_3 \quad F_0]^T, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\mathbf{\Lambda}$ – матрица параметров Родрига–Гамильтона, $\mathbf{\Phi}$ – матрица внешнего влияния, T – символ транспонирования матриц.

Представляя известным образом [5] уравнения системы (3) согласно выражениям (5), (6), в результате получаем

$$\mathbf{B} \ddot{\mathbf{\Lambda}} = \mathbf{\Phi}, \quad (7)$$

где компоненты F_s определяются равенствами

$$F_0 = - \sum_{s=0}^3 \dot{\lambda}_s^2, \quad (8)$$

$$F_1 = 2[(A_2 - A_3)Z_1 + k_2 Z_2 - k_3 Z_3] - \mu I_3 Z_4 + \frac{1}{2} L_1 \quad (9)$$

(1, 2, 3).

В уравнениях (9) $Z_r(\lambda_s, \dot{\lambda}_s)$ ($r = 1, \dots, 4$; $s = 0, \dots, 3$) – функции λ – параметров и их производных по t , выражения для которых известны [5]. Равенство (8) получено в силу соотношения (4) при его дифференцировании по t .

Система уравнений (7) представима в форме [5]

$$\ddot{\Lambda} - \mathbf{A} \cdot \Lambda = 0, \quad (9')$$

где кососимметрическая матрица – ядро оператора

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} F_0 & -a_1 F_1 & -a_2 F_2 & -a_3 F_3 \\ a_1 F_1 & F_0 & a_3 F_3 & -a_2 F_2 \\ a_2 F_2 & -a_3 F_3 & F_0 & a_1 F_1 \\ a_3 F_3 & a_2 F_2 & -a_1 F_1 & F_0 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

В дальнейшем применяются уравнения системы (9'), соответствующие второй и третьей строкам матрицы \mathbf{A} (10).

2. Динамическая система первого приближения в вариациях

Выделим из системы (9) подсистему первого приближения и в невозмущенном движении положим

$$\begin{aligned} \omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \omega = \text{const} \neq 0, \\ s_1 = s_2 = 0, \quad s_3 = 1. \end{aligned} \quad (11)$$

Найдем условие устойчивости по Ляпунову этого движения.

Вводя традиционным способом углы Эйлера θ, ψ, φ [3], в движении (11) находим $\theta(t) \equiv 0$ и, согласно кинематическому уравнению Эйлера

$$\dot{\psi} + \dot{\phi} = \omega, \quad \lambda_0 = \cos \frac{\chi}{2}, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0,$$

$$\lambda_3 = \sin \frac{\chi}{2}, \quad \chi(t) = \chi^0 + \omega t, \quad \chi^0 = \text{const.}$$

Положим в возмущенном движении (индекс*)

$$\lambda_0 = \cos \frac{\chi}{2} + \lambda_0^*, \quad (\lambda_1, \lambda_2) = (\lambda_1^*, \lambda_2^*), \quad \lambda_3 = \sin \frac{\chi}{2} + \lambda_3^*$$

(в дальнейшем индекс * опускается) и на основе выделенной из системы (9) подсистемы составим динамические уравнения в вариациях, полагая дополнительно

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &\equiv 0, \quad k_1 = k_2 = 0, \quad k_3 = k \neq 0, \\ I_1 = I_2 &= 0, \quad I_3 = I \neq 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Определяя суммарные поправки $\delta Q_2, \delta Q_3$, привносящие вклад гиросtatического момента в уравнения выделенной подсистемы в вариациях при условиях (12), согласно системе уравнений (9) в результате получаем

$$\begin{aligned} \delta Q_2 + i \delta Q_3 &= 2k(a_1 V_2 + i a_2 V_1) \exp(i\chi), \\ V_1 &= \dot{w}_1 + \omega w_2, \quad V_2 = \dot{w}_2 - \omega w_1, \end{aligned} \tag{13}$$

где канонизирующие переменные w_1, w_2 – такие, что

$$w_1 + i w_2 = -\bar{\lambda} \exp(i\chi), \quad \lambda = \lambda_1 + i \lambda_2, \quad i = \sqrt{-1}, \tag{14}$$

а черта сверху обозначает комплексное сопряжение.

Обозначим

$$\begin{aligned} G &= (A_3 - A_2 - A_1)\omega + 2k, \\ H_r &= (A_3 - A_r)\omega^2 + 2k\omega + \mu I \quad (r = 1, 2), \end{aligned} \tag{15}$$

где величины k, I определяются равенствами (12).

Применяя к уравнениям выделенной подсистемы в вариациях, представленным в переменных (14), известный элемен-

тарный прием [5], согласно выражениям (13) получаем определяющую систему

$$\begin{aligned} \ddot{w}_1 - a_1 G \dot{w}_2 + a_1 H_2 w_1 &= 0, \\ \ddot{w}_2 + a_2 G \dot{w}_1 + a_2 H_1 w_2 &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Система уравнений (16) имеет гироскопическую структуру [6] и является эволюционной динамической системой первого приближения в вариациях.

Линейная и квадратичная формы (15) представляют собой характерные функции, в общем случае отражающие свойства движения гиростата.

3. Условия устойчивости стационарного движения

Динамическая система (16) обладает квазиэнергетическим первым интегралом

$$V(w_1, w_2, \dot{w}_1, \dot{w}_2) \equiv A_1 \dot{w}_1^2 + A_2 \dot{w}_2^2 + H_2 w_1^2 + H_1 w_2^2 = 2h, \quad (17)$$

где h – постоянная интегрирования.

Квадратичная форма (17), принимаемая в качестве функции Ляпунова, согласно критерию Сильвестра определительно положительна при условиях

$$H_r > 0 \quad (r = 1, 2), \quad (18)$$

где величины H_r определяются равенствами (15).

Полагая для определенности

$$A_1 > A_2 > A_3, \quad (19)$$

сведем систему условий (18) к ограничению

$$H_1 > 0. \quad (20)$$

Таким образом, система условий (19), (20) в силу теоремы Ляпунова об устойчивости движения [7, с. 157] выражает *достаточное условие устойчивости* состояния (11) гиростата по переменным $(w_1, w_2) \leftrightarrow (\lambda_1, \lambda_2)$.

Поскольку параметры λ_0, λ_3 выражаются через устойчивые (в смысле достаточности условия) вариации переменных λ_1, λ_2 в силу тождественного соотношения связи (4) и согласно одному из общих первых интегралов системы уравнений (9), данное состояние гиростата устойчиво и по переменным λ_0, λ_3 .

Определим континуальное множество значений величины ω , при которых состояние (11) гиростата при заданных структурно-динамических условиях устойчиво по Ляпунову.

Пусть при ограничениях (19) выполняются соотношения

$$(\omega_1, \omega_2) = (A_1 - A_3)^{-1} (k \mp \sqrt{Q}), \quad Q = k^2 + (A_1 - A_3) \mu I.$$

Тогда условие (20) выполняется только в случае, при котором $Q > 0$; здесь при $\omega_2 > \omega_1$ имеем $\omega_1 < \omega < \omega_2$.

Если $Q \leq 0$, то ограничение (20) не выполняется ни при каких значениях величины ω .

4. Условие неустойчивости стационарного движения

Покажем, что если выполняется условие, смысл которого противоположен смыслу условия устойчивости (20), то состояние гиростата (11) неустойчиво по Ляпунову. Иначе, следует показать, что условие (11) является необходимым условием и его нарушение приводит к неустойчивости состояния.

Характеристическое уравнение системы (16) имеет вид

$$\lambda^4 + (a_1 a_2 G^2 + a_1 H_2 + a_2 H_1) \lambda^2 + a_1 a_2 H_1 H_2 = 0, \quad (21)$$

где величины H_1, H_2 определяются равенствами (15).

Известно, что каждому корню $\nu = \sigma \pm \beta i$ уравнения (21) соответствует корень $(-\nu) = -\sigma \mp \beta i$ ($i = \sqrt{-1}$). Если хотя бы для одного корня этого уравнения $\text{Re } \nu = \sigma \neq 0$, то существует такой его корень ν , что $\text{Re } \nu > 0$.

Но тогда, согласно теореме Ляпунова о неустойчивости по первому приближению, невозмущенное состояние (11) неустойчиво.

Следовательно, для устойчивости данного невозмущенного состояния необходимо, чтобы для всех корней уравнения (21) выполнялось условие

$$(v = \beta i, \beta > 0, \sigma = 0) \leftrightarrow (v^2 = -\beta < 0). \quad (22)$$

Для выполнения условия (22) необходимо, чтобы дискриминант D данного уравнения относительно v^2 удовлетворял условию

$$D(v^2) > 0 \quad (23)$$

или, в развернутой форме,

$$N \equiv (A_1 H_1 - A_2 H_2)^2 + (G^2 + 2P)G^2 > 0, \quad (24)$$

где обозначено $P = A_1 H_1 + A_2 H_2$.

Условие (24) и присоединенные к нему ограничения

$$H_1 H_2 > 0, \quad P + G^2 > 0 \quad (25)$$

являются частью условий Льенара–Шипара [8, с. 34], существенно упрощающих условия Гурвица. При этом, если для ограничений (19) выполняется условие (20), то в силу этого выполняется и каждое из соотношений системы (24), (25).

Используя известный прием [5], в результате получаем

$$D(v^2) = N < 0, \quad (26)$$

где постоянная N определяется соотношением (24).

Неравенство (26) имеет смысл, противоположный смыслу соотношения (23).

Следовательно, ограничение $H_1 < 0$ выражает *достаточное условие неустойчивости* невозмущенного состояния (11).

Заключение

В результате анализа устойчивости стационарного вращения гиростата в однородном постоянном магнитном поле показано следующее. В зависимости от изменения величин и знаков параметров влияния k , I , содержащихся в результирующих соотношениях (15), (20), степень устойчивости данного движения может изменяться (увеличиваться или уменьшаться).

Поскольку параметры λ_s ($s = 0, \dots, 4$), устойчивость движения по которым установлена, выражаются посредством однозначных и непрерывных соотношений связи с переменными ω_j ($j = 1, 2, 3$) [9], то состояние (11) устойчиво также и по данным параметрам.

В случае центральной структурно-кинетической симметрии гиростата ($A_1 = A_2 = A_3 = A$), при котором условия (19) не выполняются, формы H_1, H_2 становятся линейными по переменной ω . При этом $H_1 = H_2 = 2k\omega + \mu I$ и условие устойчивости (20) принимает вид

$$2k\omega + \mu I > 0.$$

К данному условию, согласно равенству (15), следует присоединить соотношение

$$G = 2k - A\omega.$$

Следует отметить, что соотношения (25), выражающие неполные критериальные условия Льенара–Шипара, отражают иннорную положительность (по Э. Джури [8]) двух характерных определяющих матриц, связанных с матрицей-ядром \mathbf{A} (10).

Другой характерной особенностью исследуемого случая динамической системы, принятой в качестве первого приближения, является магнито-гиростатическая симметрия, выражающаяся в том, что гиростатический момент и собственный магнитный момент гиростата коллинеарны координатной оси Ox_3 базиса Γ .

Библиографический список

1. *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. М.: Наука, 1966. 624 с.
2. *Жуковский Н.Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородною капельною жидкостью. Собр. соч. в 7 т. М.; Л.: Гостехиздат. 1949. Т. 2. С. 152–309.
3. *Виттенбург Й.* Динамика систем твердых тел. М.: Мир, 1980. 294 с.
4. *Журавлев В.Ф.* Основы теоретической механики. М.: Физматлит, 2001. 320 с.

5. *Макеев Н.Н.* Устойчивость стационарного вращения гиростата вокруг вертикали / Саратовский гос. технический ун-т. Саратов, 1993. 10 с. Деп. в ВИНТИ 21.07.93, № 2063–В 93.

6. *Магнус К.* Гироскоп. Теория и применение. М.: Мир, 1974. 528 с.

7. *Кузьмин П.А.* Малые колебания и устойчивость движения. М.: Наука, 1973. 206 с.

8. *Джури Э.* Инноры и устойчивость динамических систем. М.: Наука, 1979. 300 с.

9. *Кошляков В.Н.* Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов. М.: Наука, 1985. 288 с.

STABILITY OF STATIONARY MOTION OF A GYROSTAT-MAGNET IN A MAGNETIC FIELD

N. N. Makeev

Saratov, Russia

nmakeyev@mail.ru; (845) 272-35-33

The motion of a gyrostat with a constant gyrostatic moment in a stationary uniform magnetic field with parallel lines of force is considered. The gyrostat moves under the influence of a given external torque in such a way that its carrier (absolutely rigid body) rotates around a fixed pole coinciding with the center of mass. The gyrostat carries a permanent magnet permanently connected to the carrier. On the basis of the Rodrigues–Hamilton apparatus, a sufficient condition for the Lyapunov stability of the stationary rotation of a gyrostat around one of its main central axes of inertia is obtained, as well as a sufficient condition for the instability of this motion for the general case of a gyrostat mass configuration.

Keywords: gyrostat; stability; quaternion; Rodrigues–Hamilton parameters; stationary movement.

УДК 531.381; 531.395

Н. Н. Макеев

Россия, Саратов; nmakeyev@mail.ru

УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ СЛОЖНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Исследуется устойчивость по Ляпунову стационарного (квазиперманентного) вращения механического объекта с изменяемыми во времени составом массы и конфигурацией при движении в однородном поле силы тяжести. Объект как механическая система составлен из абсолютно твердого тела (носителя) с постоянным составом массы и неизменной конфигурацией массы, к которому присоединены твердые тела, движущиеся относительно носителя и составляющие присоединенную подсистему тел. Объект движется так, что его носитель вращается вокруг неподвижного полюса. Найдены достаточные условия устойчивости и неустойчивости данного движения при структурно-динамических условиях, идентичных соответствующим условиям случая С.В. Ковалевской в одноименной классической задаче динамики твердого тела.

Ключевые слова: сложная механическая система; устойчивость; стационарное движение; программная управляющая связь.

1. Основные предпосылки

Основные предпосылки и описание структурной модели объекта переменного состава массы, а также понятия *сложной механической системы* (СМС), приведены в работе [1].

Величина массы СМС и ее конфигурация изменяются во времени вследствие переноса тел присоединенной подсистемы (*рабочего тела*) внутри объекта с заданной скоростью. В результате СМС является структурно изменяемым механическим объектом переменного состава массы и конфигурации.

Предполагается, что СМС движется так, что ее теленоситель вращается вокруг фиксированного неподвижного полюса O в указанном силовом поле под воздействием программно заданного результирующего силового момента $\mathbf{L}(t)$ ($t \in [0, +\infty) \equiv T$).

Введем правые координатные ортобазисы $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ с общим началом в полюсе O : неподвижный Γ_1 ; базис Γ_2 , неизменно связанный с носителем, и базис Γ_3 ($Ox_1x_2x_3$), оси которого Ox_j ($j = 1, 2, 3$) для каждого момента времени $t \in T$ направлены по главным в полюсе O осям тензора инерции СМС с матрицей $\mathbf{J}(t) = \text{diag} [A_1(t), A_2(t), A_3(t)]$. В силу непрерывного по $t \in T$ изменения конфигурации и состава массы СМС базис Γ_3 в общем случае вращается относительно Γ_2 с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}^r(\omega_j^r)$, зависимость которой от величин заданных компонент $A_j(t)$ тензора инерции СМС $\mathbf{J}(t)$ известна [2].

Таким образом, непрерывные и непрерывно дифференцируемые зависимости вида $\boldsymbol{\omega}^r(t)$, $\mathbf{J}(t)$, отнесенные к базису Γ_3 , считаются *программно заданными* и, следовательно, известными в любой момент времени $t \in T$.

Рассмотрим движение СМС под действием *квазиреактивных сил* [3], обусловленных переносом рабочего тела из некоторой области S , принадлежащей объекту, с программно заданной абсолютной скоростью $\mathbf{u}(t)$. Результирующий момент этих сил относительно полюса O для $t \in T$ определяется следующим равенством

$$\mathbf{L}(t) = \int_S \frac{\partial \rho}{\partial t} (\mathbf{r} \times \mathbf{u}) dV.$$

Здесь $\rho(t, \mathbf{r})$ – локальная плотность массы в области S ; $\mathbf{u}(t, \mathbf{r})$ – абсолютная скорость переноса масс рабочего тела из этой области; $\mathbf{r}(t)$ – радиус-вектор произвольной точки области S .

Обозначим

$$\mathbf{G} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{G}^r, \quad \boldsymbol{\lambda}(t) = \boldsymbol{\omega}^r - \mathbf{J}^{-1}\mathbf{G}^r,$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}^r = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{G} + \boldsymbol{\lambda},$$

где $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\Omega}$ – абсолютные угловые скорости носителя СМС (базиса Γ_2) и базиса Γ_3 ; $\mathbf{G}(G_j)$, $\mathbf{G}^r(t)$ – кинетические моменты относительно полюса O всего объекта и рабочего тела, соответственно (последний – относительно базиса Γ_2); $\boldsymbol{\lambda}(t)$ – эффективная угловая скорость носителя; $A_j(t)$ ($j = 1, 2, 3$) – главные осевые моменты инерции СМС, заданные для каждого $t \in T$ в осях базиса Γ_3 . Характерные вектор-параметры $\mathbf{L}(t)$, $\mathbf{G}^r(t)$ являются *управляющими* [4]; каждый из них задан для $t \in T$ соответствующей программой, определенной во времени. Любые ограничения, налагаемые на управляющие параметры, являются *управляющими связями*.

Пусть $M(t)$ – величина массы СМС; g – стандартное значение величины ускорения силы тяжести; $\boldsymbol{\gamma}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ – орт, неизменно связанный с ортобазисом Γ_1 ; $\mathbf{g} = -g\boldsymbol{\gamma}$; $\mathbf{r}_c(t)$, $r_j(t)$ – радиус-вектор центра тяжести СМС и его координаты в проекциях на оси базиса Γ_3 ($j = 1, 2, 3$); $\mathbf{s}(t) = M\mathbf{r}_c$ – барицентрический вектор (статический момент массы).

Движение СМС при данных предпосылках характеризуется неавтономной эволюционной динамической системой [1]

$$\dot{\mathbf{G}} + \mathbf{J}^{-1}\mathbf{G} \times \mathbf{G} + \boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{G} = \mathbf{L} + g(\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{s}), \quad (1)$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} + \mathbf{J}^{-1}\mathbf{G} \times \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{\gamma} = 0.$$

Введем структурно-динамические условия, заданные для значений $t \in T$

$$A_1 = A_2 = 2A_3, \quad r_1 \neq 0, \quad r_2 = r_3 = 0, \quad (2)$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 0, \quad \mathbf{L} = 0. \quad (3)$$

Условия (2), (3) определяют *обобщенный аналог классического случая С.В. Ковалевской* [4]. При этом первые два условия (3) реализуются на управляющих связях $G_2^r = A_2 \omega_2^r, G_3^r = 0$; третье условие (3) устанавливает пассивный режим управления.

Динамическая система (1) в проекциях на оси координатного базиса Γ_3 при ограничениях (2), (3) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{G}_1 - f G_2 G_3 &= 0, & f &= (2A_3)^{-1}, \\ \dot{G}_2 + f G_3 G_1 - \lambda_1 G_3 &= g s_1 \gamma_3, \\ \dot{G}_3 + \lambda_1 G_2 &= -g s_1 \gamma_2, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_1 + f G_2 \gamma_3 - 2f G_3 \gamma_2 &= 0, \\ \dot{\gamma}_2 + 2f G_3 \gamma_1 - (f G_1 + \lambda_1) \gamma_3 &= 0, \\ \dot{\gamma}_3 + (f G_1 + \lambda_1) \gamma_2 - f G_2 \gamma_1 &= 0 \end{aligned}$$

и имеет частное решение

$$[\mathbf{G} \ \boldsymbol{\gamma}]^T = [(G_1^0 \ 0 \ 0) \ (1 \ 0 \ 0)]^T, \quad (5)$$

где $G_1^0 = G_1(0) \neq 0$. Решение (5) определяет стационарное (*квазиперманентное* [1]) состояние СМС, при котором ее координатный базис Γ_3 вращается вокруг его оси Ox_1 с абсолютной скоростью $\Omega_1 = f G_1^0$.

2. Динамическая система в вариациях

Поставим задачу: для СМС, движущейся согласно уравнениям (4), найти формализованные достаточные условия устойчивости стационарного движения (5) при данных предположениях и при последующих принятых локальных ограничениях.

Для решения данной задачи перейдем в системе уравнений (4) к независимой переменной

$$\tau = \int_0^t f(s) ds \quad (6)$$

и приведем ее к виду

$$\begin{aligned}
 G_1' - G_2 G_3 &= 0, \\
 G_2' + G_3 G_1 - k G_3 &= 2gn\gamma_3, \\
 G_3' + k G_2 &= -2gn\gamma_2, \\
 \gamma_1' + G_2 \gamma_3 - 2G_3 \gamma_2 &= 0, \\
 \gamma_2' + 2G_3 \gamma_1 - (G_1 + k) \gamma_3 &= 0, \\
 \gamma_3' + (G_1 + k) \gamma_2 - G_2 \gamma_1 &= 0.
 \end{aligned} \tag{7}$$

В уравнениях (7) обозначено

$$n = A_3 M r_1, \quad k = \lambda_1 f^{-1}, \quad s_1 f^{-1} = 2n$$

и штрих обозначает дифференцирование по параметру τ . Полагая зависимость (6) однозначно обратимой, считаем, что функции $n(\tau)$, $k(\tau)$ заданы и определены в классе C^1 .

Принимая состояние (5) за невозмущенное, введем вектор возмущений $w(w_j)$ ($j=1, \dots, 6$). Полагая в возмущенном движении

$$[\mathbf{G} \ \boldsymbol{\gamma}]^T = [(G_1^0 + w_1 \ w_2 \ w_3) \ (1 + w_4 \ w_5 \ w_6)]^T,$$

из системы (7) получаем уравнения в вариациях

$$\begin{aligned}
 w_1' - w_2 w_3 &= 0, \\
 w_2' + (G_1^0 + w_1) w_3 - k w_3 &= 2gnw_6, \\
 w_3' + k w_2 &= -2gnw_5, \\
 w_4' + w_2 w_6 - 2w_3 w_5 &= 0, \\
 w_5' + 2(1 + w_4) w_3 - (G_1^0 + w_1 + k) w_6 &= 0, \\
 w_6' + (G_1^0 + w_1 + k) w_5 - (1 + w_4) w_2 &= 0.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Рассмотрим случай задания параметров динамической системы (8), при котором для $t \in T$ выполняются условия

$$\lambda_1(t) = 0, \quad n(t) = n^0, \tag{9}$$

где $n^0 = n(0)$.

Первое условие (9) в совокупности с ограничениями (3) определяет управляющую связь

$$(\lambda = 0) \leftrightarrow (\mathbf{G}^r = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}^r),$$

в силу которой гиродинамический момент СМС \mathbf{G}^r может быть аппроксимирован как кинетический момент эквивалентного гипотетического твердого тела, вращающегося вокруг полюса O .

Второе условие (9) выражает структурное подобие СМС по параметрам A_3, s_1 . Действительно, это условие с точностью до постоянного множителя представимо в виде [5]

$$A_3^0 A_3^{-1}(t) = (s_1^0)^{-1} s_1(t) = \mu(t),$$

где μ – заданный реономный (непрерывно зависящий от времени) коэффициент гомотетии с центром в полюсе O .

В дальнейшем динамическая система (8), заданная при условиях (9), будет называться *системой в вариациях* – переменных w_s ($s = 1, 2, 3$).

3. Достаточное условие устойчивости

Получим достаточное условие устойчивости стационарного состояния (5) для динамической системы (8) в случае, при котором из условий (9) выполняется только первое. Тогда эта система принимает вид

$$\begin{aligned} w_1' - w_2 w_3 &= 0, \\ w_2' + u_1 w_3 &= 2gnw_6, \\ w_3' &= -2gnw_5, \\ w_4' + w_2 w_6 - 2w_3 w_5 &= 0, \\ w_5' + 2u_4 w_3 - u_1 w_6 &= 0, \\ w_6' + u_1 w_5 - u_4 w_2 &= 0, \end{aligned} \tag{10}$$

где приняты обозначения $u_1 = G_1^0 + w_1$, $u_4 = 1 + w_4$.

В дальнейшем предполагается, что для системы уравнений (10) при $t \in T$ из заданных ограничений (9) выполняется только первое условие, в силу чего далее принимается $n = n(\tau)$.

Введем вектор-функции $\mathbf{U}(w_1, w_2, w_3)$, $\mathbf{W}(w_4, w_5, w_6)$, заданные в открытой односвязной области пространства \mathbf{R}^6 , и составим квадратичную форму

$$V_1(\tau, w_s) = 2 \|\mathbf{U}\|^2 - w_3^2 + 4G_1^0 w_1 + 2g n(\tau) w_4. \quad (11)$$

Предполагается, что форма (11) для системы уравнений (10) является некоторой *базисной функцией*, обладающей для множества значений $t \in T$ предельным при $\tau \rightarrow +\infty$ свойством

$$\lim V_1 = V_1^*(w_s) \quad (12)$$

и изначально заданным предельным ограничением

$$\lim n(\tau) = n^0 \equiv \text{const} \neq 0 \quad (\tau \rightarrow +\infty). \quad (13)$$

В равенстве (12) V_1^* – стационарная ограниченная функция класса C^0 . Динамическая система (10), для которой выполняется условие $n(\tau) \equiv n^0 = \text{const}$, содержащееся в равенстве (13), является *предельной системой уравнений* (термин [6]).

Для системы уравнений (10) имеют место стационарные первые алгебраические интегралы

$$\begin{aligned} V_2(w_s) &\equiv (\mathbf{U} \cdot \mathbf{W}) + w_1 + G_1^0 w_4 = H \quad (H = \text{const}), \\ V_3(w_s) &\equiv \|\mathbf{W}\|^2 + 2w_4 = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

являющиеся интегралами проекции кинетического момента СМС на вертикаль и тривиальным, соответственно.

Следуя приему Лагранжа [7, с.57], составим для системы уравнений (10) функцию Ляпунова в виде линейной связки базисной функции (11) и интегралов (14)

$$V(\tau, w_s) = V_1(\tau, w_s) + \lambda_2 V_2(w_s) + \lambda_3 V_3(w_s), \quad (15)$$

где λ_2, λ_3 – неопределенные постоянные множители Лагранжа ($\lambda_1 = 1$). Интегральную связку (15) можно трактовать как некоторое линейное пространство первых интегралов и присоединенной к ним базисной функции над собственно евклидовом пространством параметров, выбирая эти интегралы и данную функцию за базисные представления. Эта связка является максимальным порождающим элементом для множества заданных стационарных значений (5). Выбирая в равенстве (15) выражения для множителей λ_2, λ_3 из условия обращения в нуль слагаемых, линейных по w_s , в результате получаем квадратичную форму вида

$$\begin{aligned} V(\tau, w_s) = & (2w_1^2 - 4G_1^0 w_1 w_4 + \frac{1}{2} m w_4^2) + \\ & + (2w_2^2 - 4G_1^0 w_2 w_5 + \frac{1}{2} m w_5^2) + \\ & + (w_3^2 - 2G_1^0 w_3 w_6 + \frac{1}{2} m w_6^2), \end{aligned} \quad (16)$$

где обозначено

$$m(\tau) = 2[2(G_1^0)^2 - n(\tau)g].$$

Получено выражение, содержащее три однотипные квадратичные по w_s формы, характерные для известного приема М.Ш. Аминова [6].

Полная производная по переменной τ от функции V , определяемой равенством (16), в силу уравнений системы (10) равна

$$V'(\tau, w_s) = -n'(\tau)g \|\mathbf{W}\|^2, \quad \tau \in [0, +\infty). \quad (17)$$

Применяя к функции V обобщенный критерий Сильвестра [8, с. 222], относящийся к неавтономным динамическим системам, устанавливаем, что квадратичная форма (16) положительно определена при выполнении условия

$$r_1(t) \leq \varepsilon \leq 0 \quad (t \in T), \quad (18)$$

где ε – число, как угодно малое по модулю.

Требую отрицательной постоянности квадратичной формы (17), в результате получаем определяющее условие

$$\dot{n}(t) = \frac{d}{dt}(A_3 M r_1) > 0 \quad (t \in T). \quad (19)$$

Таким образом, согласно теореме прямого метода А.М. Ляпунова [9] об устойчивости имеем следующее результирующее утверждение.

Теорема. Если выполняются условия (18), (19), то стационарное состояние (5) динамической системы (10), обладающей предельными свойствами (12), (13), устойчиво по Ляпунову.

Эта теорема выражает достаточное условие устойчивости данного стационарного состояния.

Производя усиление смысла неравенства (19), получаем следующие структурно-динамические ограничения

$$\dot{A}_3(t) < 0, \quad \frac{d}{dt} [M(t) r_1(t)] > 0 \quad (t \in T). \quad (20)$$

Первое условие (20) определяет непрерывное уменьшение во времени величины главного центрального момента инерции СМС относительно оси Ox_3 . Второе из этих условий устанавливает возрастание во времени величины проекции барицентрического вектора системы на ось Ox_1 . Такого рода изменение величины массы системы и ее конфигурации обеспечивает достаточность устойчивости стационарного состояния (5) неавтономной системы (10) на непрерывном множестве значений $t \in T$.

Условие устойчивости (18) представляется естественным условием, аналогичным известному ограничению для механических объектов постоянного состава массы и неизменной конфигурации как случай "нижнего" (по отношению к точке закрепления – полюсу O) расположения центра тяжести объекта для положения его устойчивого равновесия в однородном поле силы тяжести.

Заключение

Задача об устойчивости стационарного движения, аналогичная приведенной в настоящей работе, рассматривалась М.Ш. Аминовым [6]. Однако в работе [6] за основу анализа принята динамическая модель объекта, описанная в переменных, являющимися компонентами вектора угловой скорости носителя, и с рядом сильных ограничений, обусловленных учетом относительного движения присоединенных масс системы.

В частности, в работе [6] принято условие $\omega^r \equiv 0$, а также установлено требование тождественного равенства нулю результирующих моментов реактивных сил и сил инерции относительного движения присоединенных масс (частиц рабочего тела).

В настоящей работе применяется динамическая модель, описанная в переменных, являющимися компонентами вектора кинетического момента системы при тождественном равенстве нулю результирующего момента квазиреактивных сил и при наложении управляющей связи $\lambda \equiv 0$. Эта связь однозначно определяет характер относительного движения рабочего тела системы и не является сильным определяющим ограничением.

Различие в постановке сопоставимых идентичных задач для качественно идентичных механических объектов, выраженное в принятии разных динамических моделей, приводит к разным наборам достаточных условий устойчивости. При этом, в зависимости от особенностей постановки задачи, некоторые ответственные условия устойчивости по форме могут совпадать.

Идея априорного задания алгоритма относительного движения присоединенной части системы (рабочего тела) в задачах динамики механических систем связанных тел применена И.Ф. Верещагиным [10, с. 245]. Этот алгоритм назван им *полной внутренней программой*, управляющей относительным переносом присоединенных масс (частиц рабочего тела СМС).

В настоящей работе применено программное задание во времени величин $\mathbf{J}(t)$, $\lambda(t)$, $n(t)$, а также принято введение локальных программ, задающих функции $r_1(t)$, $A_3(t)$, $s_1(t)$.

Такой прием может быть реализован в конкретных технических задачах, связанных с проектированием летательных аппаратов, оснащенных реактивным приводом.

Библиографический список

1. *Макеев Н.Н.* Интегралы сложных систем на управляющих связях. Саратов, 1989. 123 с. Деп. в ВИНТИ 14.03.89. № 1656–В 89.

2. *Макеев Н.Н.* О некоторых свойствах главных осей инерции тела переменной массы // Проблемы механики управляемого движения: межвуз. сб. науч. тр. / Пермь: Перм. ун-т. 1978. Вып. 10. С. 126–131.

3. *Макеев Н.Н.* Некоторые случаи интегрируемости обобщенных уравнений типа Вольтерра // Проблемы механики управляемого движения: межвуз. сб. науч. тр. / Пермь: Перм. ун-т. 1974. Вып. 4. С. 91–98.

4. *Макеев Н.Н.* Интеграл Ковалевской для уравнений движения сложной механической системы // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 1 (44). С. 22–30.

5. *Макеев Н.Н.* К теории подобно изменяемых сложных механических систем // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2021. Вып. 1 (52). С. 25–31.

6. *Аминов М.Ш.* Некоторые вопросы движения и устойчивости тела переменной массы // Труды Казанского авиационного ин-та. 1959. Вып. 48. 118 с.

7. *Раус Э. Дж.* Динамика системы твердых тел. В 2 т. М.: Наука, 1983. Т. 2. 544 с.

8. *Меркин Д.Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1976. 320 с.

9. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 471 с.

10. *Верещагин И.Ф.* Методы исследования режимов полета аппарата переменной массы. В 2 ч. / Пермь: Перм. ун-т. 1969. Ч. 1. 260 с.

STABILITY OF STATIONARY MOTION OF A COMPLEX MECHANICAL SYSTEM

N. N. Makeyev

Saratov, Russia

nmakeyev@mail.ru

We study the Lyapunov stability of a stationary (quasi-permanent) rotation of a mechanical object with a time-varying mass composition and configuration while moving in a uniform gravity field. An object as a mechanical system is composed of an absolutely rigid body (carrier) with a constant mass composition and an unchanged mass configuration, to which rigid bodies are attached, moving relative to the carrier and constituting the attached subsystem of bodies. The object moves in such a way that its carrier rotates around a fixed pole. Sufficient conditions for the stability and instability of a given motion are found under structural-dynamic conditions identical to the corresponding conditions case of S.V. Kovalevskaya in the classical problem of rigid body dynamics of the same name.

Keywords: complex mechanical system; stability; stationary movement; program control constrain.

УДК 629.075

А. Ю. Переварюха

*Российская академия народного хозяйства
и государственной службы*

Россия, 199034, г. Санкт-Петербург,
Средний проспект Васильевского острова, 57/43

temp_elf@mail.ru

**ИНТЕРПРЕТИРУЕМЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ
И БИФУРКАЦИИ НЕУНИМОДАЛЬНЫХ ИТЕРАЦИЙ
В МОДЕЛЯХ КРИЗИСНЫХ ПОПУЛЯЦИЙ**

Интерпретация нелинейных эффектов, возникающих в вычислительных моделях естественных процессов и больших биосистем, может представлять существенную сложность с точки зрения их соответствия наблюдаемой экологической реальности. Точно установить и надежно биологически обосновать реальность некоторых режимов поведения и дискретных и непрерывных моделей представляется проблематичным по данным наблюдений. Некоторые нелинейные эффекты, которые возникают во многих моделях и связаны со сценарием хаотизации М. Фейгенбаума, выглядят избыточными для популяционных процессов. Данные явления – это математические артефакты, усложняющие анализ биологической модели для выработки стратегии эксплуатации биоресурсов. Целесообразным представляется использование в гибридных моделях динамики эксплуатируемых биоресурсов неунимодальных функциональных итераций без возникновения бесконечного каскада бифуркаций удвоения периода циклов.

Ключевые слова: каскады бифуркаций; бифуркации неунимодальных отображений; нарушение критериев Синджера.

Введение

Процессы кризиса в биофизических системах часто развиваются по сценариям быстрого коллапса, который невозможно предсказать статистическими методами. Статья продолжает серию наших работ [1–3], где развивается метод построения гибридных вычислительных моделей, использующих представление иерархии событийности для биофизических процессов. Рассчитываемые алгоритмом системные события изменяют по заданному набору правил порядок расчета уравнений. Мы используем правила физически обусловленного переопределения правых частей дифференциальных уравнений. Предикаты используют расчеты группы сопутствующих характеристик, которые являются неотъемлемой частью управляемой биофизической динамики. Модель исследуется при представлении вычислительного сценария с набором параметров, начальных значений и алгоритмом выработки решений об изменении воздействия для дискретного времени. С использованием вычислительных экспериментов описан реальный сценарий исхода для ситуации, который приводит к коллапсу биофизическую систему при контролируемом уровне воздействия. Сценарий задает логику принятия управленческих решений по изменению уровня внешнего давления на естественную среду. Показано в результате моделирования, что переход процесса в колебательный режим приводит к выбору рискованного режима управления. Установлено, что динамика реальных водных популяции имеет точку порогового сокращения эффективности восполнения биоресурсов, которую невозможно предсказывать.

Актуальность

Разработанный нами в [2] модельный сценарий использует трансформации фазового портрета итераций, которые при наличии несвязных границ областей притяжения альтернативных аттракторов и странного хаотического репеллера приводят к тому, что из-за хаотических режимов в детерминированной модели возникают эффекты неопределенности.

Свойства описанного модельного сценария с хаотическим режимом динамики подтверждаются на примере вылова океа-

нических видов ракообразных. Итерационные модели в ихтиологии подчиняются фундаментальным теоремам нелинейной динамики, что составляет сущность проблемы. Пусть некий нелинейный эффект гипотетически интересен для описания популяционных процессов, но ему обязательно сопутствует другой метаморфоз фазового портрета, для которого невозможно подобрать биологического объяснения.

Мы предложили в [3] модель динамики пополнения запасов трески Атлантики, определяющую унимодальную зависимость эффективности воспроизводства при наличии критической численности, но без реализации бифуркации удвоения. Необходимо подробно обсудить значимость данного свойства.

Противоречивость статистических данных и траекторий трансформаций биосистем

Рассмотрим ситуацию, когда информация о популяционных процессах для конкретной экосистемы имеется и ставится задача разработки модели обладающей прогностическими возможностями. Естественно заметить, просто данных для построения модели недостаточно, необходимо биологическое обоснование для формализации исследуемого процесса. Существует множество классификаций моделей, но именно лежащее в основе математической модели теоретическое обоснование с точки зрения предметной области позволит нам классифицировать и сравнивать модели между собой, а главное принципиально их модернизировать. Результаты исследования модели обязаны получить обоснование в рамках биологической проблематики.

Если имеются данные и уже существует модель, разработанная на основе каких-то представлений о причинно-следственных связях в развитии процесса, то возникает задача настройки модели согласно имеющимся данным. Однако, данные были получены об объекте, находящемся в определенном состоянии. Если объект не лабораторная популяция, и мы не можем произвольно управлять её состоянием, то хорошо бы точно знать тип состояния, в котором находился объект, о котором собрана статистика.

Для построения кривых пополнения, величины R в зависимости от нерестового запаса S , предлагались довольно сложные преобразования исходных данных наблюдений. Исследователи склонны проявлять изобретательность, когда ставят цель подтвердить их теоретические предположения.

У.Е. Рикер [4] предложил экспоненциальную функцию эффективности воспроизводства для прогнозирования уловов промысловых популяций лососевых рыб в реках Канады:

$$f(S) = aS \exp(-bS). \quad (1)$$

Для анализа данных наблюдений за промыслом Рикер логарифмировал свою функцию следующим образом:

$$\ln R - \ln S = \ln a - bS. \quad (2)$$

и далее строил кривую с использованием регрессии $\ln R / S$ на S для геометрической и арифметической средней для норвежской трески, но ни одна из линий регрессии не отвечает опытным данным. Популяция под воздействием важного фактора переместилась из устойчивого стационарного состояния в неустойчивое состояние и потом резко деградировала. Статистика собиралась о популяции, рассматриваемой как естественная динамическая система, находящейся в различных режимах существования. Динамика системы начиная по имеющимся данным в строгом смысле аperiодическая. Зависимость обладает единственной стационарной точкой, которая должна быть устойчивой для отображения. Колебаний с большой амплитудой предсказывать никак не может, так как точки должны были бы группироваться в некотором радиусе от пересечения с биссектрисой координатного угла.

В книгах У.Е. Рикера ничего не сказано, что параметры моделей не равноценны по значимости. В предыдущей работе [2] мы упомянули изменения поведения модели (1), но в действительности эти свойства относятся к целому классу дискретных отображений. Данные о данной популяции горбуши заставляют усомниться в том, что для нее существует унимодальная зависимость пополнения и запаса, так динамика точек не характерна для подобного класса отображений, даже в случае образования хаотического аттрактора.

Критерии интерпретируемости для нелинейных эффектов и каскадов бифуркаций

Будем рассматривать отображение класса гладкости C^2 отрезка прямой R^1 в себя задаваемой функцией $f(x)$, которая будет интерпретироваться как связь между нерестовым стадом и образовавшимся пополнением.

Пусть неподвижная точка отображения зависеть от нескольких используемых биологами значимых параметров:

$$x^* = x^*(a, b), \text{ но } f'_x(x^*) = p(a), f'(x) \neq 0 \text{ если } x \neq c, f''(c) \neq 0.$$

Предположим, что для зависимости $f(x; x \neq c)$ всюду определен дифференциальный инвариант Шварца:

$$S_f = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2.$$

В случае функции (1) мы имеем следующие свойства:

$$\begin{aligned} f'(x) &= ae^{-bx}(1-bx), \\ f''(x) &= abe^{-bx}(bx-2), \\ f'''(x) &= ab^2e^{-bx}(3-bx) \text{ и в общем виде: } f^{(n)}(x) = a(-1)^n b^{n-1} e^{-bx}(bx-n) \end{aligned}$$

Тогда можно получить выражение и оценить знак шварциана, сохраняющийся для всех $f(f(\dots(x)\dots)) \equiv f^n(x)$:

$$S_f = b^2 \frac{-b^2 x^2 + 4bx - 6}{2(1-bx)^2} \text{ и очевидно } S_f < 0 \text{ для } x \in \mathfrak{R}.$$

Положение стационарной точки для функции (1) зависит от двух параметров: $x^* = \ln a / b$, но критерий устойчивости однопараметрическая функция.

Тогда x^* теряет устойчивость:

$$\begin{aligned} f'(x^*) &= -1, \text{ где критерий устойчивости} \\ f'(x^*) &= ae^{-b \frac{\ln a}{b}} - b \frac{\ln a}{b} ae^{-b \frac{\ln a}{b}} = \frac{a(1 - \ln a)}{e^{\ln a}} = 1 - \ln a. \end{aligned}$$

При $a = e^2, f'(x^*) = -1$ для второй итерации $f^2(x)$ свойства в теряющей устойчивость стационарной точке x^* :

$$\frac{df^2(x^*)}{dx} = 1,$$

$$\frac{d^2 f^2(x)}{dx^2} = \frac{df'(f(x))f'(x)}{dx} = f''(f(x))(f'(x))^2 + f'(f(x))f''(x),$$

$$\frac{d^2 f^2(x^*)}{dx^2} = f'(x^*)f''(x^*)(f'(x^*) + 1) = 0.$$

и шварициан: $S_{f^2(x^*)} = \frac{d^3 f^2(x^*)}{dx^3}.$

Известно, что если выполняется $S_{f^2} < 0$, то следовательно $df^2(x)/dx$ при $a = e^2$ имеет в x^* локальный максимум, и таким образом происходит бифуркация, появляются устойчивые циклические точки, являющиеся стационарными точками для второй итерации. Очевидно, что отрицательный знак шварициана служит критерием для возможности реализации бесконечного каскада бифуркаций удвоения периода цикла, о важности которого для моделей математической биологии отмечалось автором ранее. Более того, это является следствием фундаментальной теоремы Д. Сингера [5], доказавшего, что отображение унимодальной функции с отрицательным дифференциальным инвариантом Шварца S_f может иметь не более одной устойчивой траектории и эта траектория является ω -предельным множеством для критической точки $c: f'(c) = 0$.

Следовательно, предложенная Рикером биологическая модель (1) с математической точки зрения классифицируется как SU -отображение, для которого выполняются условия теоремы Д. Сингера. Модель (1) отличается от объектов, исследовавшихся Фейгенбаумом [6] и в других работах по универсальности (обычно квадратичного полинома) наличием точки перегиба $f''(x_s) = 0, x_s = 2/b$ и точек, где обращаются в ноль старшие

производные. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \rightarrow 0$ означает, что хаотический аттрактор может увеличиваться неограниченно, так как не возникнет явления "граничный кризис аттрактора".

Рассмотрим теперь другую альтернативную модель теории формирования популяции – функцию воспроизводства:

$$f(x) = \frac{ax}{1 + \left(\frac{x}{K}\right)^b}, \quad (3)$$

где $a > 1$ интерпретируется аналогично модели Рикера, K так же, как и в известном дифференциальном уравнении П. Ферхюльста: лимитирующий фактор ограниченной емкости среды, степень воздействия которого определяются показателем b . Данная модель претендовала на универсальность в теории зависимости запаса и пополнения для рыб. Построение универсальной модели для выбора оптимальной с точки зрения прибыли и надёжной стратегии длительного промысла долго будет неразрешимой проблемой.

Рассмотрим модель Кушинга с точки зрения теории бифуркаций отображений на R^1 :

$$x^* = K^b \sqrt{a-1},$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{(K^b + x^b)aK^b - ab(Kx)^b}{(K^b + x^b)^2},$$

$$\frac{df(x^*)}{dx} = \frac{a - ba + b}{a} > 0 \text{ при } b < 1.$$

Теория универсальности Фейгенбаума разработана только для однопараметрического семейства [6]. Экспериментально установлено автором, что в ограниченном диапазоне значений параметра a , имеющих смысл, бифуркации удвоения периода возникают при изменении показателя степени. При $b < 1$ критических точек нет, при $b=2$ функция имеет критическую точку $x=K$. Вторая производная в критической точке:

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = -\frac{a}{4K},$$

когда такая функция имеет максимум при данных условиях. В случае (3) мы получим сложную параметрическую зависимость для аналитического анализа бифуркаций.

Сущностная популяционная интерпретация нелинейных эффектов в моделях оказывается прямо противоположной.

Рассмотрев изменение поведения модели У. Рикера, можно сформулировать следующую гипотезу сделать вывод, что увеличение репродуктивного потенциала популяции приводит к появлению флуктуаций численности аperiodического характера. Появление циклов периода 2^n происходит при увеличении степени действия лимитирующих факторов среды. Отсюда можно предположить, что одна из двух моделей принципиально неадекватна либо заключить, что каскад бифуркаций и ряд других сложных нелинейных эффектов и внутреннего и граничного кризиса хаотического аттрактора для SU -отображений не имеет сущностной экологической, популяционной или молекулярно-генетической интерпретации.

Функциональная зависимость, соответствующая условиям теоремы Сингера, выходит за пределы применимости в популяционной динамике.

Таким образом, функциональная зависимость вида "запас-пополнение" используемая в итерациях не должна иметь знакопостоянный шварциан.

Критерии, при соблюдении которых модель сохранит адекватность, согласуются с известным в популяционной биологии эффектом агрегированной группы. Предложим следующие условия: $y(x) = f(x)/dx$ не должна быть унимодальной функцией со свойствами: $y(x)$ должна достигать максимума на промежутке $(0,c)$; иметь минимум на промежутке (c,d) , где $y(c) = 0, y(d) < 0$; Дополнительно важно $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$.

Экологические модели, не учитывающие эффект агрегированной группы, практически выходят за рамки возможности интерпретации результатов моделирования. Есть ряд других примеров, где принципы экологии не согласуются со свойствами математического аппарата.

Известно, чем больше видов в экосистеме, тем она стабильнее, что означает способность длительное время сохранять неизменным свое состояние. Но при увеличении размерности фазового пространства математических моделей только усложняется возможность поведения траектории.

В моделях систем, описываемых тремя дифференциальными уравнениями возможно возникновение странных хаотических аттракторов.

Заключение

Задачи регулирования биофизических процессов становятся только сложнее из-за непредвиденных возмущений, потому актуально развитие вычислительных методов анализа нелинейности ситуаций с описанием логики воздействия. Эволюционно сложившиеся долгие режимы функционирования трофических цепей, к которым относятся регулярные циклы популяций, разрушаются без поддержания видового разнообразия. Избыточная эксплуатация экономически ценных популяций нарушает регуляционные механизмы [7], поддерживающие баланс соотношения видов в сообществе, что приводит к расширению ареалов бесполезных для промысла видов и занятию экологической ниши вредными видами. Особенности для проблем управления конкурентной биофизической средой создает не только быстро меняющаяся волатильная обстановка, но и адаптивный характер процесса воспроизводства в сообществах с сильной конкуренцией.

Ошибки при оптимизации влекут явление структурного коллапса, которое нужно своевременно определять по характерным признакам. Оптимизация согласно теории максимального поддерживаемого изъятия, реализуемого в течение неопределенного периода времени (*maximum sustainable yield*) в практике ее применения и для популяций, и для экономики регионов несет риск. Коллапс запасов означает долгую остановку промысла и депрессию отрасли экономики.

Регулируемый промысел ведет к неожиданной деградации биоресурсов достаточно часто. Сложность в том, что кризисные ситуации разнообразны в ключевых признаках и вызываются часто факторами гидрологии, как показано А.В. Никитиной [8].

Библиографический список

1. *Переварюха А.Ю.* Моделирование неустойчивого критического равновесия в популяционной динамике // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2013. № 45. С. 82–91.

2. *Переварюха А.Ю.* Модель деградации запасов при экспертном управлении водными биоресурсами с нерегулярными флуктуациями // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2021. № 53. С. 51–57.

3. *Дубровская В.А., Переварюха А.Ю.* О критериях обоснованности для анализа нелинейных эффектов в моделях эксплуатируемых популяций // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2016. № 48. С. 74–83.

4. *Ricker W.* Stock and recruitment // Journal Fisheries research board of Canada, 1954. №.11. С. 559–623.

5. *Singer D.* Stable orbits and bifurcations of the maps on the interval // SIAM Journal of Applied Math. 1978. Vol. 35. P. 260–268.

6. *Feigenbaum M.J.* Universal behavior in nonlinear systems // Physica D., 1983. Vol. 7, № 1–3. P. 16–39.

7. *Вецев П.В., Гутенева Г.И.* Эффективность естественного воспроизводства осетровых в Низовьях Волги в современных условиях // Экология. 2012. № 2. С. 123–127.

8. *Никитина А.В., Леонтьев А.Л.* Гидрофизическое моделирование Каспийского моря на основе модели переменной плотности // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2018. № 6. С. 16–19.

**INTERPRETABLE NONLINEAR EFFECTS
AND BIFURCATIONS OF THE NONUNIMODAL ITERATIONS
IN THE MODELS FOR A POPULATIONS CRISIS**

A.Yu. Perevaryukha

*North-West Institute of management
Branch of the Russian Presidential Academy
of National Economy and Public Administration*

St. Petersburg, Russia
temp_elf@mail.ru

Interpretation of nonlinear effects arising in computational models of natural processes and large biosystems can be quite difficult from the point of view of their correspondence to the observed ecological reality. Accurately establishing and reliably biologically substantiating the reality of some modes of behavior and discrete and continuous models seems to be problematic according to observational data. Some nonlinear effects that arise in many models and are associated with the M. Feigenbaum chaotization scenario look redundant for real population processes. These phenomena are mathematical artifacts that complicate the analysis of a biological model for developing a strategy for the exploitation of biological resources. It seems expedient to use for model tasks nonunimodal functional iterations in hybrid models of the dynamics of exploited bioresources without the occurrence of an infinite cascade of bifurcations of doubling the period of cycles.

Keywords: cascades of the bifurcations; bifurcations of nonunimodal mappings; violation of the Singer theorem criteria.

УДК 534.1:519.2

И. Е. Полосков

*Пермский государственный
национальный исследовательский университет*

Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15
polosk@psu.ru; (342) 2-396-560

**СХЕМА РАСЧЕТА ПЕРВЫХ МОМЕНТНЫХ ПОЛЕЙ
СТОХАСТИЧЕСКОЙ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ
СИСТЕМЫ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА С КОНЕЧНЫМИ
СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ И РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ
ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ**

В работе представлена схема приближенно-аналитического анализа поведения стохастической системы, описываемой нейтральным интегро-дифференциальным уравнением в частных производных (ДУвЧП) с конечными сосредоточенными и распределенными запаздываниями и параметрическим возмущением в виде стационарного белого шума. На основе применения пошаговой процедуры и расширения пространства состояний исходное уравнение заменяется цепочкой стохастических ДУвЧП без запаздывания, а затем на базе использования аппарата функционала плотности вероятности строятся последовательность уравнений для искомым моментных полей.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение в частных производных, распределенное и сосредоточенное запаздывания, моментное поле, параметрическое возмущение.

Введение

Временные запаздывания возникают во многих приложениях.

Наличие таких запаздываний является следствием того, что во многих случаях физические, химические, биологические, тепловые и экономические явления естественным образом зависят не только от текущего состояния, но и от некоторых прошлых событий [1–4].

К ДУвЧП с конечными сосредоточенными и распределенными запаздываниями приводят задачи аэроупругости, теплообмена, теплопроводности в материалах с угасающей памятью, термоупругости, управления, химических технологий, климатологии, моделирования биологических сообществ типа хищник–жертва с учетом возрастных стадий для хищников и жертв, изменения в пространстве и времени плотности видов популяций с учетом диффузии и запаздываний по времени, распространения волн, нейронных сетей, колебаний цен на финансовых рынках, описания сейсмической активности земной коры [3, 5, 6]. Основными направлениями качественного анализа таких уравнений и систем являются поиск условий существования, регулярности и существования решений, а также оценки управляемости.

Поэтому на исследование ДУвЧП с запаздыванием и, в частности, стохастических как с непрерывными, так и скачкообразными случайными возмущениями [6, 7], обращено значительное внимание исследователей, которые в последние годы получили значительные результаты о поведении решений таких уравнений.

Центральную роль в качественном анализе дифференциальных уравнений играет свойство устойчивости стационарных решений. Существует множество методов и подходов решения этой проблемы, разработанных для различных типов дифференциальных уравнений (детерминированных, стохастических, обыкновенных, в частных производных, с запаздыванием и смешанных) [5, 8–14].

Для количественного анализа решений интегро-ДУвЧП с различными формами запаздываний используют методы: квадратур по времени и Галеркина по пространству [15]; трапеций [16]; конечных разностей [17], в т.ч. сочетание конечных разностей четвертого порядка и метода коллокаций [18]; дифференцирования назад третьего порядка дискретизации по времени в сочетании с интерполяцией по Эрмиту и методом конечных элементов по пространству [19]; разложения на основе квази-вейвлетов по пространству и схему Кранка–Николсона по времени [20]; прямых [21, 22]; теории полугрупп операторов с частичной дискретизацией [23] и др. [24].

Но несмотря на достигнутые успехи, нельзя сказать, что все проблемы решены. В частности, при переносе процедур численно-

го решения детерминированных задач на стохастические не всегда учитывается специфика последних, а также общая структура моделей. Частично некоторые из этих проблем решаются в данной работе, в которой представляется новая схема приближенно-аналитического анализа поведения стохастической системы, описываемой нейтральным интегро-дифференциальным уравнением в частных производных (ДУвЧП) с конечными сосредоточенными и распределенными запаздываниями и параметрическим возмущением в виде стационарного белого шума, а именно, на основе применения пошаговой процедуры и расширения пространства состояний исходное уравнение заменяется цепочкой стохастических ДУвЧП без запаздывания, а затем на базе использования аппарата функционала плотности вероятности [25] строится последовательность уравнений для искомым моментных полей.

1. Постановка задачи

Рассмотрим стохастическое интегро-дифференциальное уравнение в частных производных нейтрального типа с распределенным и сосредоточенными запаздываниями и краевыми условиями следующего вида (здесь знак дифференциала относится только к переменной t):

$$d\left[U(x, t) + \alpha \int_{t-\tau}^t U(x, \theta) d\theta\right] = \left[\nu \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} + \beta \int_{t-\tau}^t U(x, \theta) d\theta\right] dt + \gamma U(x, t - \tau) \circ dW(t), \quad (1)$$

$$0 < x < \pi, \quad 0 < t \leq T < +\infty,$$

$$U(0, t) = U(\pi, t) = 0, \quad t > 0, \quad (2)$$

где t – время; x – пространственная координата; $U(x, t)$ – случайное поле, представляющее состояние системы с распределенными параметрами; $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, $\nu > 0$ – постоянные; $\tau > 0$; $W(t)$ – стандартный винеровский процесс, имеющий формальную производную в виде случайного процесса типа нормального белого шума $V(t)$ с обычными свойствами:

$$\mathbb{E}[V(t)] = 0, \quad \mathbb{E}[V(t) V(t')] = \delta(t - t'),$$

$\mathbb{E}[\cdot]$ – оператор математического ожидания. Будем считать, что на начальном множестве $\mathbb{E}_0 = \{(x, t) \mid 0 \leq x \leq \pi, -\tau_0 \leq t \leq 0\}$, случайная функция $U(x, t)$ удовлетворяет уравнению и дополнительным условиям вида:

$$dU(x, t) = \nu_0 \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} dt + \gamma_0 U(x, t) \circ dW(t), \quad (3)$$

$$U(0, t) = U(\pi, t) = 0, \quad U(x, -\tau) = U^{[0]}(x), \quad (4)$$

где $U^{[0]}(x)$ – стационарное случайное поле с известными характеристиками; $\gamma_0 > 0$, $\nu_0 > 0$ – постоянные.

Задача состоит в построении и реализации алгоритма расчета первых моментных полей случайного поля $U(x, t)$ при $t > 0$, т.е. поля математического ожидания $m_U(x, t) = \mathbb{E}[U(x, t)]$ и ковариации

$$\mathcal{C}(x, y, t) = \mathbb{E}[\{U(x, t) - m_U(x, t)\}\{U(y, t) - m_U(y, t)\}].$$

Отметим, что в работе [26] начально-краевая типа (1), (2) использовалась в качестве примера для демонстрации теоретических результатов по оценке корректности постановки более общей подобной задачи (с несколькими различными запаздываниями) и ее устойчивости.

2. Расширение пространства состояний

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} t_q &= q \cdot \tau, \quad q = \overline{-1, N+1} \quad (t_{N+1} \geq T), \quad s \in [0, \tau], \\ s_q &= s + t_q, \quad \Delta_q = (t_q, t_{q+1}], \quad W_q(s) = W(s_q), \quad V_q(s) = V(s_q), \\ U_q(x, s) &= U(x, s_q), \quad U_{-1}(x, 0) = U^{[0]}(x), \quad U^*(x, s) \equiv U^*(x) = U^{[0]}(x), \\ \overline{U}_q(x, s) &= \int_0^s U_q(x, \theta) d\theta, \quad \underline{U}_q(x, s) \equiv \underline{U}_q(x) = \overline{U}_q(x, \tau), \end{aligned}$$

причем для всех $q \geq 0$ верны соотношения

$$U_q(x, 0) = U_{q-1}(x, \tau), \quad W_q(0) = W_{q-1}(\tau), \quad V_q(0) = V_{q-1}(\tau).$$

Тогда, используя для удобства уравнения в производных и последовательно рассматривая полуинтервалы Δ_q , для нахождения

случайных полей $U_q(x, s)$ можно построить цепочку стохастических дифференциальных уравнений в частных производных (СДУвЧП) без наличия любых форм запаздывания (далее соответствующие полуинтервалам Δ_q однородные краевые условия и границы изменения переменных x, t не указываются).

(-1)°: Полуинтервал $\Delta_{-1} = (-\tau, 0]$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^*(x, s)}{\partial s} &= 0, \\ \frac{\partial U_{-1}(x, s)}{\partial s} &= \nu_0 \frac{\partial^2 U_{-1}(x, s)}{\partial x^2} + \gamma_0 U_{-1}(x, s) \circ V_{-1}(s), \\ \frac{\partial \bar{U}_{-1}(x, s)}{\partial s} &= U_{-1}(x, s), \\ U^*(x, 0) &= U^{[0]}(x), \quad U_{-1}(x, 0) = U^{[0]}(x), \quad \bar{U}_{-1}(x, 0) = 0. \end{aligned}$$

(0)°: Полуинтервалы $\Delta_{-1} = (-\tau, 0]$ и $\Delta_0 = (0, \tau]$.

Если учесть, что при $0 \leq t \leq \tau$

$$\begin{aligned} \int_{t-\tau}^t U(x, \theta) d\theta &= \int_{t-\tau}^0 U(x, \theta) d\theta + \int_0^t U(x, \theta) d\theta = \\ &= \int_{-\tau}^0 U(x, \theta) d\theta - \int_{-\tau}^{t-\tau} U(x, \theta) d\theta + \int_0^t U(x, \theta) d\theta = \\ &= \bar{U}_{-1}(x, \tau) - \int_0^s U_{-1}(x, \theta) d\theta + \int_0^s U_0(x, \theta) d\theta = \\ &= \underline{U}_0(x, s) - \bar{U}_{-1}(x, s) + \bar{U}_0(x, s), \end{aligned}$$

то будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^*(x, s)}{\partial s} &= 0, \\ \frac{\partial U_{-1}(x, s)}{\partial s} &= \nu_0 \frac{\partial^2 U_{-1}(x, s)}{\partial x^2} + \gamma_0 U_{-1}(x, s) \circ V_{-1}(s), \\ \frac{\partial \bar{U}_{-1}(x, s)}{\partial s} &= U_{-1}(x, s), \\ \frac{\partial \underline{U}_0(x, s)}{\partial s} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial s} [U_0(x, s) + \alpha \{ \underline{U}_0(x, s) - \bar{U}_{-1}(x, s) + \bar{U}_0(x, s) \}] &= \end{aligned}$$

$$= \nu \frac{\partial^2 U_0(x, s)}{\partial x^2} + \beta \{ \underline{U}_0(x, s) - \bar{U}_{-1}(x, s) + \bar{U}_0(x, s) \} + \\ + \gamma U_{-1}(x, s) \circ V_0(s),$$

$$\frac{\partial \bar{U}_0(x, s)}{\partial s} = U_0(x, s),$$

$$U^*(x, 0) = U^{[0]}(x), \quad U_{-1}(x, 0) = U^{[0]}(x), \quad \bar{U}_{-1}(x, 0) = 0,$$

$$\underline{U}_0(x, 0) = \bar{U}_{-1}(x, \tau), \quad U_0(x, 0) = U_{-1}(x, \tau), \quad \bar{U}_0(x, 0) = 0.$$

... ..

(N)^o. Полуинтервалы $\Delta_{-1} = (-\tau, 0]$, $\Delta_0 = (0, \tau]$, ..., $\Delta_N = (N \cdot \tau, (N + 1) \cdot \tau]$:

$$\frac{\partial U^*(x, s)}{\partial s} = 0,$$

$$\frac{\partial U_{-1}(x, s)}{\partial s} = \nu_0 \frac{\partial^2 U_{-1}(x, s)}{\partial x^2} + \gamma_0 U_{-1}(x, s) \circ V_{-1}(s),$$

$$\frac{\partial \bar{U}_{-1}(x, s)}{\partial s} = U_{-1}(x, s),$$

$$\frac{\partial \underline{U}_0(x, s)}{\partial s} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial s} [U_0(x, s) + \alpha \{ \underline{U}_0(x, s) - \bar{U}_{-1}(x, s) + \bar{U}_0(x, s) \}] = \\ = \nu \frac{\partial^2 U_0(x, s)}{\partial x^2} + \beta \{ \underline{U}_0(x, s) - \bar{U}_{-1}(x, s) + \bar{U}_0(x, s) \} + \\ + \gamma U_{-1}(x, s) \circ V_0(s),$$

$$\frac{\partial \bar{U}_0(x, s)}{\partial s} = U_0(x, s),$$

... ..

$$\frac{\partial \underline{U}_N(x, s)}{\partial s} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial s} [U_N(x, s) + \alpha \{ \underline{U}_N(x, s) - \bar{U}_{N-1}(x, s) + \bar{U}_N(x, s) \}] = \\ = \nu \frac{\partial^2 U_N(x, s)}{\partial x^2} + \beta \{ \underline{U}_N(x, s) - \bar{U}_{N-1}(x, s) + \bar{U}_N(x, s) \} + \\ + \gamma U_{N-1}(x, s) \circ V_N(s),$$

$$\frac{\partial \bar{U}_N(x, s)}{\partial s} = U_N(x, s),$$

$$\begin{aligned}
 U^*(x, 0) &= U^{[0]}(x), \quad U_{-1}(x, 0) = U^{[0]}(x), \quad \bar{U}_{-1}(x, 0) = 0, \\
 \underline{U}_0(x, 0) &= \bar{U}_{-1}(x, \tau), \quad U_0(x, 0) = U_{-1}(x, \tau), \quad \bar{U}_0(x, 0) = 0, \\
 &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 \underline{U}_N(x, 0) &= \bar{U}_{N-1}(x, \tau), \quad U_N(x, 0) = U_{N-1}(x, \tau), \quad \bar{U}_N(x, 0) = 0.
 \end{aligned}$$

3. Построение уравнений для моментных полей

Несложно увидеть, что на каждом шаге соответствующие системы СДУвЧП полностью определены, а следовательно, могут быть использованы для получения систем неслучайных ДУвЧП для требуемых первых моментных полей. Для построения таких уравнений будем применять соотношения, основанные на теории обобщенного уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова (ФПК–уравнению) для функционала плотности вероятности [24, 25].

Для подготовки построений рассмотрим систему с распределенными параметрами, которая описывается СДУвЧП (в смысле Стратоновича) вида

$$\begin{aligned}
 d\mathbf{Y}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, t, \mathbf{Y}(\mathbf{x}, t), \mathbf{Y}'_x(\mathbf{x}, t), \mathbf{Y}''_{xx}(\mathbf{x}, t), \dots) dt + \\
 &\quad + \mathcal{G}(\mathbf{x}, t, \mathbf{Y}(\mathbf{x}, t), \mathbf{Y}'_x(\mathbf{x}, t), \mathbf{Y}''_{xx}(\mathbf{x}, t), \dots) \circ d\mathbf{W}(\mathbf{x}, t), \\
 \mathbf{Y}(\mathbf{x}, t_0) &= \mathbf{Y}^0(\mathbf{x}),
 \end{aligned}$$

где t – время, $t_0 \leq t \leq T < +\infty$; $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$; $\mathbf{Y}(\mathbf{x}, t) = \{Y_\ell(\mathbf{x}, t)\} \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния; $\mathbf{Y}^0(\mathbf{x}) = \{Y_\ell^0(\mathbf{x})\} \in \mathbb{R}^n$ – случайное поле с известными характеристиками; $\mathbf{f}(\cdot, \cdot, \dots) = \{f_{ij}(\cdot, \cdot, \dots)\}$ и $\mathcal{G}(\cdot, \cdot, \dots) = \{g_{ij}(\cdot, \cdot, \dots)\}$ – заданные неслучайные векторная и матричная функции своих аргументов; $\mathbf{W}(\mathbf{x}, t) = \{W_k(\mathbf{x}, t)\} \in \mathbb{R}^m$ – вектор независимых пространственно-временных винеровских процессов,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[d\mathbf{W}(\mathbf{x}, t)] &= 0, \\
 \mathbb{E}[dW_i(\mathbf{x}_1, t_1) dW_j(\mathbf{x}_2, t_2)] &= \delta(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \delta(t_2 - t_1) \delta_{ij} d\mathbf{x} dt,
 \end{aligned}$$

$\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \{V_k(\mathbf{x}, t)\} \in \mathbb{R}^m$ – вектор независимых пространственно-временных гауссовых белых шумов, $\delta(\dots)$ – одно- или многомерная функция Дирака.

Тогда функционал плотности вероятности $P_t = P_t[\mathbf{v}]$ случайного векторного поля $\mathbf{Y}(\mathbf{x}, t)$ ($\mathbf{v} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}^\top$) удовлетворяет

обобщенному ФПК–уравнению вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_t[\mathbf{v}]}{\partial t} = & - \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{D}} \frac{\delta \{a_i(\mathbf{v}, \mathbf{y}, t) P_t[\mathbf{v}]\}}{\delta v_i(\mathbf{x}, t)} d\mathbf{x} + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \iint_{\mathbb{D}} \frac{\delta^2 \{b_{ij}(\mathbf{v}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, t) P_t[\mathbf{v}]\}}{\delta v_i(\mathbf{x}_1, t) \delta v_j(\mathbf{x}_2, t)} d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \equiv \widehat{\mathcal{L}}[P_t[\mathbf{v}]], \quad (5) \end{aligned}$$

где обобщенные коэффициенты сноса и диффузии вычисляются из соотношений

$$\begin{aligned} a_i = f_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \int_{\mathbb{D}} \frac{\delta g_{ik}(\mathbf{y}, t, \dots)}{\delta u_j(\mathbf{x}, t)} g_{jk}(\mathbf{x}, t, \dots) d\mathbf{x}, \\ b_{ij} = \sum_{k=1}^m g_{ik}(\mathbf{x}, t, \dots) g_{jk}(\mathbf{y}, t, \dots), \end{aligned}$$

которые могут быть получены из обычных формул Стратоновича с помощью перехода от дискретного вектора состояния к непрерывному и замены конечных сумм на интегралы по соответствующей области. В уравнении (5): $\delta F/\delta v$ – обозначение вариационной производной, \mathbb{D} – ограниченная или неограниченная область изменения переменных \mathbf{x} .

Система ДУВЧП для первых моментов компонент поля $\mathcal{Y}(\mathbf{x}, t)$ в этом случае выглядеть так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_\ell(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{E}[\mathcal{Y}_\ell(\mathbf{x}, t)]}{\partial t} = \int_{\mathbb{D}} v_\ell(\mathbf{x}, t) \widehat{\mathcal{L}}[P_t[\mathbf{v}]] d\mathbf{v} = \\ = \int_{\mathbb{D}} a_\ell(\mathbf{v}, \mathbf{x}, t) P_t[\mathbf{v}] d\mathbf{v}, \quad \ell = 1, 2, \dots, k \end{aligned}$$

– уравнения для полей математических ожиданий;

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{C}_{j\ell}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{E}[\{\mathcal{Y}_j(\mathbf{x}, t) - m_j(\mathbf{x}, t)\} \{\mathcal{Y}_\ell(\mathbf{y}, t) - m_\ell(\mathbf{y}, t)\}]}{\partial t} = \\ = \int_{\mathbb{D}} \left\{ b_{j\ell}(\mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + [v_j(\mathbf{x}, t) - m_j(\mathbf{x}, t)] a_\ell(\mathbf{v}, \mathbf{y}, t) + \right. \\ \left. + [v_\ell(\mathbf{y}, t) - m_\ell(\mathbf{y}, t)] a_j(\mathbf{v}, \mathbf{x}, t) \right\} P_t[\mathbf{v}] d\mathbf{v}. \end{aligned}$$

Будем строить требуемые системы ДУвЧП последовательно по шагам, соответствующим введенным выше полуинтервалам, но ограничим представление результатов только двумя первыми.

(-1)°: Полуинтервал $\Delta_{-1} = (-\tau, 0]$. Здесь

$$\begin{aligned} f_1 &= 0, & g_{11} &= 0, \\ f_2 &= \nu_0 \frac{\partial^2 u_{-1}(x)}{\partial x^2}, & g_{21} &= \gamma_0 u_{-1}(x), \\ f_3 &= u_{-1}(x), & g_{31} &= 0. \end{aligned}$$

Тогда

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ \nu_0 \frac{\partial^2 u_{-1}(x)}{\partial x^2} + \frac{\gamma_0^2}{2} u_{-1}(x) \\ u_{-1}(x) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_0^2 u_{-1}(x) u_{-1}(y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

что приводит к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_{U^*}(x, s)}{\partial s} &= 0, \\ \frac{\partial m_{U_{-1}}(x, s)}{\partial s} &= \nu_0 \frac{\partial^2 m_{U_{-1}}(x, s)}{\partial x^2} + \frac{\gamma_0^2}{2} m_{U_{-1}}(x, s), \\ \frac{\partial m_{\bar{U}_{-1}}(x, s)}{\partial s} &= m_{U_{-1}}(x, s), \\ m_{U^*}(x, 0) &= m_{U^{[0]}}(x), \quad m_{U_{-1}}(x, 0) = m_{U^{[0]}}(x), \quad m_{\bar{U}_{-1}}(x, 0) = 0, \end{aligned}$$

– для математических ожиданий и

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{C}_{U^*U^*}(x, y, s)}{\partial s} &= 0, \\ \frac{\partial \mathcal{C}_{U^*U_{-1}}(x, y, s)}{\partial s} &= \nu_0 \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{U^*U_{-1}}(x, y, s)}{\partial y^2} + \frac{\gamma_0^2}{2} \mathcal{C}_{U^*U_{-1}}(x, y, s), \\ \frac{\partial \mathcal{C}_{U^*\bar{U}_{-1}}(x, y, s)}{\partial s} &= \mathcal{C}_{U^*U_{-1}}(x, y, s), \\ \frac{\partial \mathcal{C}_{U_{-1}U_{-1}}(x, y, s)}{\partial s} &= \gamma_0^2 [2\mathcal{C}_{U_{-1}U_{-1}}(x, y, s) - m_{U_{-1}}(x, s) m_{U_{-1}}(y, s)] + \\ &+ \nu_0 \left[\frac{\partial^2 \mathcal{C}_{U_{-1}U_{-1}}(x, y, s)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{U_{-1}U_{-1}}(x, y, s)}{\partial y^2} \right], \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{C}_{U_{-1}\bar{U}_{-1}}(x, y, s)}{\partial s} = \mathcal{C}_{U_{-1}U_{-1}}(x, y, s) + \nu_0 \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{U_{-1}\bar{U}_{-1}}(y, x, s)}{\partial y^2} +$$

$$+ \frac{\gamma_0^2}{2} \mathcal{C}_{U_{-1}\bar{U}_{-1}}(y, x, s),$$

$$\frac{\partial \mathcal{C}_{\bar{U}_{-1}\bar{U}_{-1}}(x, y, s)}{\partial s} = \mathcal{C}_{U_{-1}\bar{U}_{-1}}(y, x, s) + \mathcal{C}_{U_{-1}\bar{U}_{-1}}(x, y, s),$$

$$\mathcal{C}_{U^*U^*}(x, y, 0) = \mathcal{C}_{U^*U_{-1}}(x, y, 0) = \mathcal{C}_{U_{-1}U_{-1}}(x, y, 0) = \mathcal{C}_{U^{[0]}U^{[0]}}(x, y),$$

$$\mathcal{C}_{U^*\bar{U}_{-1}}(x, y, 0) = \mathcal{C}_{U_{-1}\bar{U}_{-1}}(x, y, 0) = \mathcal{C}_{\bar{U}_{-1}\bar{U}_{-1}}(x, y, 0) = 0,$$

– для ковариаций.

(0)°: Полуинтервалы $\Delta_{-1} = (-\tau, 0]$ и $\Delta_0 = (0, \tau]$. Здесь

$$\begin{aligned} f_1 &= 0, & g_{11} &= 0, & g_{12} &= 0, \\ f_2 &= \nu_0 \frac{\partial^2 u_{-1}(x)}{\partial x^2}, & g_{21} &= \gamma_0 u_{-1}(x), & g_{22} &= 0, \\ f_3 &= u_{-1}(x), & g_{31} &= 0, & g_{32} &= 0, \\ f_4 &= 0, & g_{41} &= 0, & g_{42} &= 0, \\ f_5 &= \bar{f}_5(x), & g_{51} &= 0, & g_{52} &= \gamma u_{-1}(x), \\ f_6 &= u_0(x), & g_{61} &= 0, & g_{62} &= 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \bar{f}_5(x) &= \alpha \{ u_{-1}(x) - u_0(x) \} + \nu_0 \frac{\partial^2 u_0(x)}{\partial x^2} + \\ &+ \beta \{ u_0(x) - \bar{u}_{-1}(x) + \bar{u}_0(x) \}. \end{aligned}$$

В этом случае

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ \nu_0 \frac{\partial^2 u_{-1}(x)}{\partial x^2} + \frac{\gamma_0^2}{2} u_{-1}(x) \\ u_{-1}(x) \\ 0 \\ \alpha \{ u_{-1}(x) - u_0(x) \} + \nu_0 \frac{\partial^2 u_0(x)}{\partial x^2} + \beta \{ u_0(x) - \bar{u}_{-1}(x) + \bar{u}_0(x) \} \\ u_0(x) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_0^2 u_{-1}(x) u_{-1}(y) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma^2 u_{-1}(x) u_{-1}(y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

что дает следующие уравнения:

$$\frac{\partial m_{U^*}(x, s)}{\partial s} = 0,$$

$$\frac{\partial m_{U_{-1}}(x, s)}{\partial s} = \nu_0 \frac{\partial^2 m_{U_{-1}}(x, s)}{\partial x^2} + \frac{\gamma_0^2}{2} m_{U_{-1}}(x, s),$$

$$\frac{\partial m_{\bar{U}_{-1}}(x, s)}{\partial s} = m_{U_{-1}}(x, s),$$

$$\frac{\partial m_{\underline{U}_0}(x, s)}{\partial s} = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_{U_0}(x, s)}{\partial s} &= \alpha \{ m_{U_{-1}}(x) - m_{U_0}(x) \} + \nu \frac{\partial^2 m_{U_0}(x)}{\partial x^2} + \\ &+ \beta \{ m_{\underline{U}_0}(x) - m_{\bar{U}_{-1}}(x) + m_{\bar{U}_0}(x) \}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial m_{\bar{U}_0}(x, s)}{\partial s} = m_{U_0}(x, s),$$

$$m_{U^*}(x, 0) = m_{U^{[0]}}(x), \quad m_{U_{-1}}(x, 0) = m_{U^{[0]}}(x), \quad m_{\bar{U}_{-1}}(x, 0) = 0,$$

$$m_{\underline{U}_0}(x, 0) = m_{\bar{U}_{-1}}(\tau), \quad m_{U_0}(x, 0) = m_{U_{-1}}(x, \tau), \quad m_{\bar{U}_0}(x, 0) = 0,$$

– уравнения для математических ожиданий и

$$\frac{\partial \mathcal{C}_{U^*U^*}(x, y, s)}{\partial s} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{C}_{U^*U_{-1}}(x, y, s)}{\partial s} = \nu_0 \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{U^*U_{-1}}(x, y, s)}{\partial y^2} + \frac{\gamma_0^2}{2} \mathcal{C}_{U^*U_{-1}}(x, y, s),$$

$$\frac{\partial \mathcal{C}_{U^*\bar{U}_{-1}}(x, y, s)}{\partial s} = \mathcal{C}_{U^*U_{-1}}(x, y, s),$$

$$\frac{\partial \mathcal{C}_{U^*\underline{U}_0}(x, y, s)}{\partial s} = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{C}_{U^*U_0}(x, y, s)}{\partial s} &= \alpha \{ \mathcal{C}_{U^*U_{-1}}(x, y, s) - \mathcal{C}_{U^*U_0}(x, y, s) \} + \\ &+ \beta \{ \mathcal{C}_{U^*\underline{U}_0}(x, y, s) - \mathcal{C}_{U^*\bar{U}_{-1}}(x, y, s) + \mathcal{C}_{U^*\bar{U}_0}(x, y, s) \} + \\ &+ \nu \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{U^*U_0}(x, y, s)}{\partial y^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{C}_{U^* \bar{U}_0}(x, y, s)}{\partial s} &= \mathcal{C}_{U^* U_0}(x, y, s), \\
 \frac{\partial \mathcal{C}_{U_{-1} U_{-1}}(x, y, s)}{\partial s} &= \nu_0 \left[\frac{\partial^2 \mathcal{C}_{U_{-1} U_{-1}}(x, y, s)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{U_{-1} U_{-1}}(x, y, s)}{\partial y^2} \right] + \\
 &\quad + \gamma_0^2 \mathcal{C}_{U_{-1} U_{-1}}(x, y, s) \\
 \frac{\partial \mathcal{C}_{U_{-1} \bar{U}_{-1}}(x, y, s)}{\partial s} &= \mathcal{C}_{U_{-1} U_{-1}}(x, y, s) + \nu_0 \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{U_{-1} \bar{U}_{-1}}(x, y, s)}{\partial y^2} + \\
 &\quad + \frac{\gamma_0^2}{2} \mathcal{C}_{U_{-1} \bar{U}_{-1}}(x, y, s), \\
 \frac{\partial \mathcal{C}_{U_{-1} \underline{U}_0}(x, y, s)}{\partial s} &= \nu_0 \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{U_{-1} \underline{U}_0}(x, y, s)}{\partial x^2} + \frac{\gamma_0^2}{2} \mathcal{C}_{U_{-1} \underline{U}_0}(x, y, s) \\
 \frac{\partial \mathcal{C}_{U_{-1} U_0}(x, y, s)}{\partial s} &= \nu_0 \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{U_{-1} U_0}(x, y, s)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{U_{-1} U_0}(x, y, s)}{\partial y^2} + \\
 &\quad + \beta \{ \mathcal{C}_{U_{-1} \underline{U}_0}(x, y, s) - \mathcal{C}_{U_{-1} \bar{U}_{-1}}(x, y, s) + \mathcal{C}_{U_{-1} \bar{U}_0}(x, y, s) \} + \\
 &\quad + \alpha \{ \mathcal{C}_{U_{-1} U_{-1}}(x, y, s) - \mathcal{C}_{U_{-1} U_0}(x, y, s) \} + \frac{\gamma_0^2}{2} \mathcal{C}_{U_{-1} U_0}(x, y, s), \\
 \frac{\partial \mathcal{C}_{U_{-1} \bar{U}_0}(x, y, s)}{\partial s} &= \mathcal{C}_{U_{-1} U_0}(x, y, s) + \nu_0 \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{U_{-1} \bar{U}_0}(x, y, s)}{\partial x^2} + \\
 &\quad + \frac{\gamma_0^2}{2} \mathcal{C}_{U_{-1} \bar{U}_0}(x, y, s), \\
 \frac{\partial \mathcal{C}_{\bar{U}_{-1} \bar{U}_{-1}}(x, y, s)}{\partial s} &= \mathcal{C}_{U_{-1} \bar{U}_{-1}}(x, y, s) + \mathcal{C}_{U_{-1} \bar{U}_{-1}}(y, x, s), \\
 \frac{\partial \mathcal{C}_{\bar{U}_{-1} \underline{U}_0}(x, y, s)}{\partial s} &= \mathcal{C}_{U_{-1} \underline{U}_0}(x, y, s), \\
 \frac{\partial \mathcal{C}_{\bar{U}_{-1} U_0}(x, y, s)}{\partial s} &= \alpha \{ \mathcal{C}_{\bar{U}_{-1} U_{-1}}(x, y, s) - \mathcal{C}_{\bar{U}_{-1} U_0}(x, y, s) \} + \\
 &\quad + \beta \{ \mathcal{C}_{\bar{U}_{-1} \underline{U}_0}(x, y, s) - \mathcal{C}_{\bar{U}_{-1} \bar{U}_{-1}}(x, y, s) + \mathcal{C}_{\bar{U}_{-1} \bar{U}_0}(x, y, s) \} + \\
 &\quad + \nu \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{\bar{U}_{-1} U_0}(x, y, s)}{\partial y^2}, \\
 \frac{\partial \mathcal{C}_{\bar{U}_{-1} \bar{U}_0}(x, y, s)}{\partial s} &= \mathcal{C}_{\bar{U}_{-1} U_0}(x, y, s) + \mathcal{C}_{U_{-1} \bar{U}_0}(x, y, s), \\
 \frac{\partial \mathcal{C}_{\underline{U}_0 \underline{U}_0}(x, y, s)}{\partial s} &= 0, \\
 \frac{\partial \mathcal{C}_{\underline{U}_0 U_0}(x, y, s)}{\partial s} &= \alpha \{ \mathcal{C}_{\underline{U}_0 U_{-1}}(x, y, s) - \mathcal{C}_{\underline{U}_0 U_0}(x, y, s) \} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \beta \{ \mathcal{C}_{\underline{U}_0 \underline{U}_0}(x, y, s) - \mathcal{C}_{\underline{U}_0 \overline{U}_{-1}}(x, y, s) + \mathcal{C}_{\underline{U}_0 \overline{U}_0}(x, y, s) \}, \\
 & + \nu \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{\underline{U}_0 \underline{U}_0}(x, y, s)}{\partial y^2}, \\
 \frac{\partial \mathcal{C}_{\underline{U}_0 \overline{U}_0}(x, y, s)}{\partial s} & = \mathcal{C}_{\underline{U}_0 \underline{U}_0}(x, y, s), \\
 \frac{\partial \mathcal{C}_{U_0 \underline{U}_0}(x, y, s)}{\partial s} & = \alpha \{ \mathcal{C}_{U_{-1} \underline{U}_0}(y, x, s) - \mathcal{C}_{U_0 \underline{U}_0}(x, y, s) \} + \\
 & + \beta \{ \mathcal{C}_{\underline{U}_0 \underline{U}_0}(y, x, s) - \mathcal{C}_{\overline{U}_{-1} \underline{U}_0}(y, x, s) + \mathcal{C}_{U_0 \overline{U}_0}(x, y, s) \} + \\
 & + \alpha \{ \mathcal{C}_{U_{-1} \underline{U}_0}(x, y, s) - \mathcal{C}_{U_0 \underline{U}_0}(x, y, s) \} + \\
 & + \beta \{ \mathcal{C}_{\underline{U}_0 \underline{U}_0}(x, y, s) - \mathcal{C}_{\overline{U}_{-1} \underline{U}_0}(x, y, s) + \mathcal{C}_{\overline{U}_0 \underline{U}_0}(x, y, s) \} + \\
 & + \nu \left[\frac{\partial^2 \mathcal{C}_{U_0 \underline{U}_0}(x, y, s)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{U_0 \underline{U}_0}(x, y, s)}{\partial y^2} \right], \\
 \frac{\partial \mathcal{C}_{U_0 \overline{U}_0}(x, y, s)}{\partial s} & = \mathcal{C}_{U_0 \underline{U}_0}(x, y, s) + \nu \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{U_0 \overline{U}_0}(x, y, s)}{\partial x^2} + \\
 & + \beta \{ \mathcal{C}_{\underline{U}_0 \overline{U}_0}(x, y, s) - \mathcal{C}_{\overline{U}_{-1} \overline{U}_0}(x, y, s) + \mathcal{C}_{\overline{U}_0 \overline{U}_0}(x, y, s) \} + \\
 & + \alpha \{ \mathcal{C}_{U_{-1} \overline{U}_0}(x, y, s) - \mathcal{C}_{U_0 \overline{U}_0}(x, y, s) \}, \\
 \frac{\partial \mathcal{C}_{\overline{U}_0 \overline{U}_0}(x, y, s)}{\partial s} & = \mathcal{C}_{U_0 \overline{U}_0}(x, y, s) + \mathcal{C}_{U_0 \overline{U}_0}(y, x, s), \\
 \mathcal{C}_{U^* U^*}(x, y, 0) & = \mathcal{C}_{U^* U_{-1}}(x, y, 0) = \mathcal{C}_{U_{-1} U_{-1}}(x, y, 0) = \mathcal{C}_{U^{[0] U^{[0]}}}(x, y), \\
 \mathcal{C}_{U^* \overline{U}_{-1}}(x, y, 0) & = \mathcal{C}_{U^* \overline{U}_0}(x, y, 0) = \mathcal{C}_{U_{-1} \overline{U}_{-1}}(x, y, 0) = 0, \\
 \mathcal{C}_{U^* \underline{U}_0}(x, y, 0) & = \mathcal{C}_{U_{-1} \underline{U}_0}(x, y, 0) = \mathcal{C}_{U^* \overline{U}_{-1}}(x, y, \tau), \\
 \mathcal{C}_{U^* U_0}(x, y, 0) & = \mathcal{C}_{U_{-1} U_0}(x, y, 0) = \mathcal{C}_{U^* U_{-1}}(x, y, \tau), \\
 \mathcal{C}_{U_{-1} \overline{U}_0}(x, y, 0) & = \mathcal{C}_{\overline{U}_{-1} \overline{U}_{-1}}(x, y, 0) = 0, \\
 \mathcal{C}_{\overline{U}_{-1} \underline{U}_0}(x, y, 0) & = \mathcal{C}_{\overline{U}_{-1} U_0}(x, y, 0) = \mathcal{C}_{\overline{U}_{-1} \overline{U}_0}(x, y, 0) = 0, \\
 \mathcal{C}_{\underline{U}_0 \underline{U}_0}(x, y, 0) & = \mathcal{C}_{\overline{U}_{-1} \overline{U}_{-1}}(x, y, \tau), \quad \mathcal{C}_{\underline{U}_0 U_0}(x, y, 0) = \mathcal{C}_{\overline{U}_{-1} U_{-1}}(x, y, \tau), \\
 \mathcal{C}_{\underline{U}_0 \overline{U}_0}(x, y, 0) & = \mathcal{C}_{U_0 \overline{U}_0}(x, y, 0) = \mathcal{C}_{\overline{U}_0 \overline{U}_0}(x, y, 0) = 0, \\
 \mathcal{C}_{U_0 U_0}(x, y, 0) & = \mathcal{C}_{U_{-1} U_{-1}}(x, y, \tau),
 \end{aligned}$$

– для ковариаций.

Заключение

В работе представлены результаты пошагового построения це-

почки объединенных систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных для полей математических ожиданий и ковариаций и соответствующих начально-краевых условий для неизвестного случайного поля. Несмотря на относительную громоздкость таких систем даже для первых двух шагов, можно усмотреть, что вследствие достаточной прозрачности схемы несложно построить компьютерную процедуру для автоматического вывода подобных систем для шагов с большими номерами. Рассмотренная процедура может быть распространена на подобные системы с кратными сосредоточенными и распределенными запаздываниями.

Библиографический список

1. *Fridman E.* Introduction to time-delay systems: Analysis and control. Basel: Birkhäuser, 2014. xviii, 362 p.
2. *Govindan T.E.* Yosida approximations of stochastic differential equations in infinite dimensions and applications. Cham: Springer, 2016. xix, 407 p.
3. *Kolmanovskii V., Myshkis A.* Introduction to the theory and applications of functional differential equations. Dordrecht: Springer, 1999. xvi, 648 p.
4. *Smith H.* An introduction to delay differential equations with applications to the life sciences. New York: Springer, 2011. xi, 172 p.
5. *Govindan T.E.* Sample path exponential stability of stochastic neutral partial functional differential equations // *Journal of Numerical Mathematics and Stochastics*. 2011. Vol. 3, № 1. P. 1–12.
6. *Wang Y.-M.* Global asymptotic stability of 3-species Lotka–Volterra models with diffusion and time delays // *Applied Mathematics and Computation*. 2008. Vol. 195, № 1. P. 34–48.
7. *Cui J., Yan L., Sun X.* Exponential stability for neutral stochastic partial differential equations with delays and Poisson jumps // *Statistics and Probability Letters*. 2011. Vol. 81, № 12. P. 1970–1977.
8. *Болотин В.В.* Динамическая устойчивость упругих систем. М.: ГИТТЛ, 1956. 600 с.
9. *Кушнер Г.Дж.* Стохастическая устойчивость и управление. М.: Мир, 1969. 200 с.
10. *Хасьминский Р.З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969. 368 с.

11. *Azbelev N.V., Simonov P.M.* Stability of differential equations with aftereffect. New York, London: Taylor & Francis, 2003. xvii, 222 p.
12. *Mao X.* Asymptotic properties of neutral stochastic differential delay equations // *Stochastics and Stochastics Reports*. 2000. Vol. 68, № 3/4. P. 273–295.
13. *Potapov V.D.* Stability of stochastic elastic and viscoelastic systems. New York: John Wiley & Sons, 1999. 275 p.
14. *Wu J.* Theory and applications of partial functional differential equations. New York: Springer, 1996. x, 432 p.
15. *Sharp W.D., Allen E.J.* Development and analysis of quadrature and Galerkin methods for approximate solution to the integral formulation of Volterra's population equation with diffusion and noise // *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. 2003. Vol. 4, № 4. P. 457–486.
16. *Wu S., Gan S.* Analytical and numerical stability of neutral delay integro-differential equations and neutral delay partial differential equations // *Computers and Mathematics with Applications*. 2008. Vol. 55, № 11. P. 2426–2443.
17. *Zhang Q., Mei M., Zhang Ch.* Higher-order linearized multistep finite difference methods for non-Fickian delay reaction-diffusion equations // *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*. 2017. Vol. 14, № 1. P. 1–19.
18. *Soliman A.F., El-Asyed A M.A., El-Azab M.S.* On the numerical solution of partial integro-differential equations // *Mathematical Sciences Letters*. 2012. Vol. 1, № 1. P. 71–80.
19. *Frochte J.* An adaptive higher order method in time for partial integro-differential equations // *Numerical Analysis and Applied Mathematics: Intern. Conf. / T.E. Simos, G. Psihoyios, Ch. Tsitouras. AIP Conference Proceedings*. 2008. Vol. 1048. P. 213–216.
20. *Luo M., Xu D., Li L.* Crank–Nicolson quasi-wavelet based numerical method for Volterra integro-differential equations on unbounded spatial domains // *East Asian Journal on Applied Mathematics*. 2013. Vol. 3, № 4. P. 283–294.
21. *Bahuguna D., Dabas J.* Existence and uniqueness of a solution to a partial integro-differential equation by the method of lines // *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*. 2008. № 4. P. 1–12.
22. *Wrzosek M., Ziemińska M.* The method of lines for hyperbolic stochastic functional partial differential equations // *Czechoslovak Mathematical Journal*. 2018. Vol. 68, № 2. P. 1–17.

23. *Fabiano R.H.* Approximation for an integro-partial differential equation with strongly singular kernel // Journal of Mathematical Systems, Estimation and Control. 1995. Vol. 5, № 4. P. 1–16.

24. *Полосков И.Е.* Стохастический анализ динамических систем [Электронный ресурс]: монография. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2016. 772 с.

25. *Шмелев А.Б.* Основы марковской теории нелинейной обработки случайных полей. М.: Изд-во МФТИ, 1998. 208 с.

26. *Govindan T.E.* A new iteration procedure for stochastic neutral partial functional differential equations // International Journal of Pure and Applied Mathematics. 2009. Vol. 56, № 2. P. 285–298.

**SCHEME FOR CALCULATION OF THE FIRST MOMENT
FIELDS OF A STOCHASTIC NEUTRAL
INTEGRO-DIFFERENTIAL SYSTEM WITH FINITE
LUMPED AND DISTRIBUTED DELAYS**

I. E. Poloskov

Perm State University

Perm, Russia

polosk@psu.ru; (342) 2-396-560

The paper presents a scheme for an approximate analytical analysis of the behavior of a stochastic system described by a partial neutral integro-differential equation (PDE) with finite lumped and distributed delays and a parametric perturbation in the form of stationary white noise. On the base of the step-by-step procedure application and the expansion of the state space, the source equation is replaced by a chain of stochastic PDEs with no delay. Then a sequence of equations for the desired moment fields is constructed with the use of the probability density functional apparatus.

Keywords: partial differential integro-differential equation, distributed and lumped delays, moment field, parametric perturbation.

- Гуревич
Гарольд Станиславович* доктор физико-математических наук,
Институт интеграции и профессиональной
адаптации, г. Нетания, Израиль
- Кусяков
Альфред Шамильевич* кандидат физико-математических наук,
доцент Пермского государственного националь-
ного исследовательского университета
- Лутманов
Сергей Викторович* кандидат физико-математических наук,
доцент Пермского государственного националь-
ного исследовательского университета
- Макеев
Николай Николаевич* доктор физико-математических наук,
профессор института проблем точной
механики и управления РАН, г. Саратов
- Переварюха
Андрей Юрьевич* Российская академия народного хозяйства
и государственной службы, г. Санкт-Петербург
- Полосков
Игорь Егорович* доктор физико-математических наук, доцент
Пермского государственного национального
исследовательского университета
- Яковлев
Вадим Иванович* доктор физико-математических наук,
профессор Пермского государственного националь-
ного исследовательского университета
-
-

Правила оформления научных статей для публикации
в межвузовском сборнике научных трудов (издается с 1972 г.)

ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И УПРАВЛЕНИЯ: Нелинейные динамические системы



Текст статьи должен быть подготовлен в текстовом редакторе WinWord. Объем – от 6 до 10–12 с.

Параметры страницы: формат листа А5 (148 × 210 мм), ориентация листов – книжная, все поля устанавливаются равными 20 мм.

Заголовок статьи набирается по центру (стиль Прописной, Полуужирный, шрифт Times New Roman Cyr, 11 пт.).

Аннотация к тексту статьи приводится на русском и английском языках.

Ключевые слова (на русском и английском языках).

Тематический рубрикатор: УДК, либо другие библиотечно-библиографические классификационные и предметные индексы.

Сведения об авторах:

фамилия(и), имя, отчество автора(ов) полностью, в центре (стиль Обычный, шрифт Times New Roman Cyr, 11 пт., ниже – **город, в котором находится вуз, адрес, место работы каждого автора** (стиль Обычный, шрифт Times New Roman Cyr, курсив, 11 пт.): **контактная информация** (e-mail, телефон) для каждого автора.

Параметры абзаца: для основного текста размер шрифта (кегель) 11 пт. (при использовании шрифта Times New Roman Cyr), межстрочный интервал в основном тексте – одинарный, выравнивание текста – по ширине страницы, абзацный отступ – 1 см.

Включенные в текст **формулы** должны быть набраны в редакторе **Microsoft Word Equation, версия 3.0 и ниже** с выравниванием по центру и пробелами сверху и снизу по 6 пт. (номер формулы выравнивается по правому краю поля). Размеры всех элементов формул должны быть соизмеримы с текстовыми размерами (обычные символы – 11 пт., крупный индекс – 8 пт., мелкий индекс – 7 пт., крупный символ – 17 пт., мелкий символ – 12 пт.).

Библиографический список – после основного текста.

Издание включено в национальную информационно-аналитическую систему «**Российский индекс научного цитирования**» (РИНЦ).

Просьба быть внимательными и аккуратными при оформлении списка литературы, в котором необходимо полностью указывать названия журналов и список авторов.

Адрес редакции: Россия, 614990, г. Пермь, ГСП, ул. Букирева, 15.

Пермский государственный национальный исследовательский университет (ПГНИУ). Механико-математический факультет.

E-mail: mpu@psu.ru или svlut@yandex.ru.

Научное издание

ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И УПРАВЛЕНИЯ
Нелинейные динамические системы

Межвузовский сборник научных трудов

Выпуск 54

Издается в авторской редакции

Компьютерная верстка *Г. И. Кушниковой*

Подписан в печать 18.11.2022. Формат 60 × 84 /16.
Усл. печ. л. 6,74. Тираж 500 экз. Заказ 170

Распространяется бесплатно

Адрес редакции: 614990, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15.
Пермский государственный национальный исследовательский университет
(ПГНИУ), механико-математический факультет
E-mail: mpu@psu.ru, svlut@yandex.ru

Издательский центр Пермского государственного
национального исследовательского университета
614990, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15

Типография Пермского государственного
национального исследовательского университета
614990, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15

Межвузовский сборник научных трудов
"ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И УПРАВЛЕНИЯ. Нелинейные динамические системы"
включен в национальную информационно-аналитическую систему
«Российский индекс научного цитирования» (РИНЦ)