

ПЕРМСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

**Б. Л. Смородин**

## **ФИЗИКА ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ**



Пермь 2023

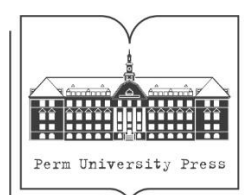
МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Б. Л. Смородин

## ФИЗИКА ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ

*Допущено методическим советом  
Пермского государственного национального  
исследовательского университета в качестве  
учебного пособия для студентов, обучающихся  
по направлениям подготовки бакалавров «Физика»,  
«Радиофизика», «Прикладная математика и физика»,  
«Нанотехнологии и микросистемная техника»*



Пермь 2023

УДК 534.1(075.8)  
ББК 22.31я73  
С516

**Сморodin Б. Л.**

**С516** Физика волновых процессов [Электронный ресурс] : учебное пособие / Б. Л. Смородин ; Пермский государственный национальный исследовательский университет. – Электронные данные. – Пермь, 2023. – 2,58 Мб ; 90 с. – Режим доступа: <http://www.psu.ru/files/docs/science/books/uchebnie-posobiya/Smorodin-Fizika-volnovyh-processov.pdf>. – Заглавие с экрана.

ISBN 978-5-7944-4015-7

В учебном пособии рассмотрен широкий спектр физических процессов, связанных с распространением волн, обсуждаются ключевые явления и общие принципы теорий, объясняющих эти явления.

Пособие предназначено для студентов старших курсов физического факультета, обучающихся по направлениям подготовки «Физика» и «Радиофизика», «Прикладная математика и физика», «Нанотехнологии и микросистемная техника».

**УДК 534.1(075.8)**  
**ББК 22.31я73**

*Издается по решению ученого совета физического факультета  
Пермского государственного национального исследовательского университета*

*Рецензенты:* лаборатория динамики дисперсных сред Института механики сплошных сред УрО РАН (зав. лабораторией, канд. физ.-мат. наук, доцент **А. С. Иванов**);

доцент кафедры физики и технологии Пермского государственного педагогического университета, канд. физ.-мат. наук, доцент **В. М. Мызников**

ISBN 978-5-7944-4015-7

© ПГНИУ, 2023  
© Смородин Б. Л., 2023

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	4
Гиперболические волны.....	5
Фазовая скорость волны.....	8
Групповая скорость волны.....	10
Дисперсия волны.....	14
Перенос усредненной плотности энергии.....	17
Волны в жидкостях и газах.....	19
Волны в твердых телах.....	26
Электромагнитные волны в однородной изотропной среде.....	29
Приближение геометрической оптики.....	32
Рефракция. Волны в слоистых средах.....	34
Нелинейность волны. Образование разрывов. Условие образования разрыва.....	37
Влияние диссипации на структуру разрыва.....	40
Самосжатие волновых пакетов.....	43
Ионный звук.....	46
Нелинейная волна в среде с дисперсией и диссипацией.....	50
Уравнение Кортвега–де Фриза.....	52
Солитон.....	54
Энергия электромагнитного поля в среде с дисперсией.....	55
Нелинейная геометрическая оптика.....	58
Самофокусировка.....	58
Порог устойчивости.....	63
Стационарные волны.....	65
Обобщение амплитудного уравнения.....	66
Генерация второй гармоники.....	68
Нелинейные волны в неоднородно нагретой слабопроводящей жидкости.....	75
Библиографический список.....	89

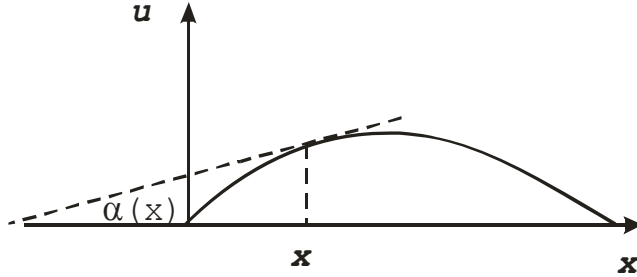
## ПРЕДИСЛОВИЕ

Волновые процессы широко распространены в окружающем нас мире. Они играют важную роль и являются объектом изучения математики [1], метеорологии, различных разделов физики [2–9], химии и биологии [10] и даже экономики. Несмотря на сильное различие областей, в которых существуют волновые процессы, они имеют универсальные свойства и описываются общими законами. Существует много хороших книг: учебников [1–3; 6; 8] и монографий [4; 5; 9; 10], посвященных волновым явлениям в физике (механике, акустике, электродинамике, квантовой механике). Ввиду большого разнообразия явлений отдельные книги подробно отражают те или иные стороны и закономерности волновых процессов.

Данное учебное пособие не ставит своей целью всестороннее рассмотрение проблемы. В нем из различных источников собраны материалы по «Физике волновых процессов», которые рассмотрены с точки зрения основных законов с учетом опыта преподавания данного курса студентам, обучающимся по направлениям «Физика» и «Радиофизика».

## ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

Рассмотрим распространение поперечной волны малой амплитуды вдоль натянутой струны (эластичного жгута), которая имеет массу  $m$  и длину  $L$  и характеризуется линейной плотностью  $\rho = m/L$  (рис. 1). Величина отклонения струны от вертикали  $u(x, t)$  и угол наклона струны к горизонтали  $\alpha(x, t)$  связаны простым соотношением (см. рис. 1)



**Рис. 1. Распространение волны  
вдоль жгута**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \operatorname{tg}(\alpha(x)). \quad (1)$$

Малость амплитуды заключается в том, что даже максимальное значение вертикального отклонения струны  $u_{\max}$  много меньше ее характерного масштаба (длины волны), а следовательно,

$$\alpha(x) \ll 1 \text{ и } \operatorname{tg} \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha, \quad \cos \alpha \approx 1. \quad (2)$$

В дальнейшем рассмотрении будем пренебрегать всеми поправками, порядок которых выше первого, оставляя лишь линейные слагаемые, что приведет к получению линейного уравнения. Этот подход используется при изучении различных типов волновых процессов, а волны малой амплитуды независимо от их природы являются линейными волнами.

Длина отрезка между двух близких точек на струне:  $x$  и  $x+dx$  после деформации изменится:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (du)^2} = \sqrt{(dx)^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha (dx)^2} = dx \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}. \quad (3)$$

Учитывая линейность волны (2), перепишем (3) в виде

$$ds = dx \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \approx dx \sqrt{1 + \alpha^2} \approx dx \left(1 + \alpha^2 / 2\right) \approx dx. \quad (4)$$

Запишем проекции второго закона Ньютона для участка струны на горизонтальную и вертикальную оси:

$$\begin{aligned} \rho dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= T_2 \sin(\alpha(x+dx)) - T_1 \sin(\alpha(x)), \\ 0 &= T_2 \cos(\alpha(x+dx)) - T_1 \cos(\alpha(x)). \end{aligned} \quad (5)$$

Из второго уравнения системы (5) следует, что натяжение струны для линейных волн удовлетворяет соотношению:  $T_2 \approx T_1 = T$ , поэтому

$$\rho dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \approx T [\sin(\alpha(x + dx)) - \sin(\alpha(x))]. \quad (6)$$

Используя разложение для  $\sin(\alpha(x + dx))$  в ряд Тейлора и учитывая малость углов, получим

$$\rho dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \approx T \left[ \sin(\alpha(x)) + \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx - \sin(\alpha(x)) \right] \approx T \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx. \quad (7)$$

Окончательный результат представляет собой линейное гиперболическое уравнение второго порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad c^2 = \frac{T}{\rho}. \quad (8)$$

Решение уравнения (8) представляет собой суперпозицию двух функций бегущих координат  $\xi = x - ct$  и  $\xi = x + ct$ , иногда называемых волновыми аргументами

$$u = f_1(x - ct) + f_2(x + ct). \quad (9)$$

Первый аргумент описывает перемещение волны, распространяющейся слева-направо (по оси  $x$ ), а второй –  $x$  в противоположном направлении.

Уравнение (8) можно факторизовать: представить в виде последовательного действия двух дифференциальных операторов  $L_+$ ,  $L_-$  на неизвестную функцию:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) u = \left( \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) u = L_+ L_- u = L_- L_+ u = 0. \quad (10)$$

Анализируя (9), (10), заметим, что для гиперболического уравнения первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (11)$$

решением будет волна, бегущая вправо  $u = f(x - ct)$ .

Для вывода нелинейного уравнения вида (11)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (12)$$

используем пример, где переменная  $u$  представляет линейную плотность вещества (заряда) непрерывно распределенной среды  $u = \rho(x, t)$ . При выполнении закона сохранения массы ее изменение в некотором интервале  $x_1 > x > x_2$  происходит только за счет несбалансированности потоков вещества (заряда)  $q(x_1, t)$  и  $q(x_2, t)$  на границах этого интервала

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx + q(x_1, t) - q(x_2, t) = 0. \quad (13)$$

В случае отсутствия разрывов производной подинтегральной функции в пределе бесконечно малого интервала ( $x_2 \rightarrow x_1$ ) получим закон сохранения массы (заряда) в дифференциальной форме

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \quad (14)$$

Предположим, что между потоком  $q$  и плотностью  $\rho$  существует функциональная зависимость, которую можно записать в виде

$$q = Q(\rho). \quad (15)$$

Подставляя (15) в (14), получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad c(\rho) = \frac{\partial q}{\partial \rho} \quad (16)$$

или

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \quad (17)$$



## ФАЗОВАЯ СКОРОСТЬ ВОЛНЫ

Рассмотрим монохроматическую плоскую волну, распространяющуюся слева – направо, длиной  $\lambda$  и периодом колебаний некоторой переменной  $T$ :

$$\rho = A \cdot \exp[i\Theta] = A \cdot \exp[i(kx - \omega t)] = A \cdot [\cos(kx - \omega t) + i \sin(kx - \omega t)]. \quad (18)$$

Амплитуда  $A$ , волновое число  $k = 2\pi / \lambda$  и циклическая частота  $\omega = 2\pi / T$  – постоянны. Образ такой волны на плоскости  $(\Re \rho, \Im \rho)$  представляет собой окружность: при любом фиксированном  $x$  изменение времени ведет к равномерному вращению точки против часовой стрелки по окружности радиуса  $A$  (рис. 2):

$$\rho = A \cdot [\cos(kx - \omega t) + i \sin(kx - \omega t)] = \operatorname{Re} \rho + i \operatorname{Im} \rho. \quad (19)$$

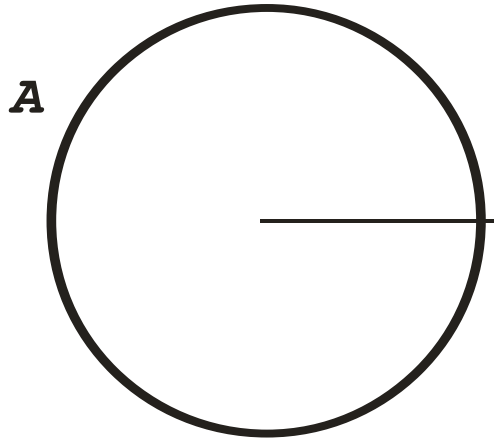
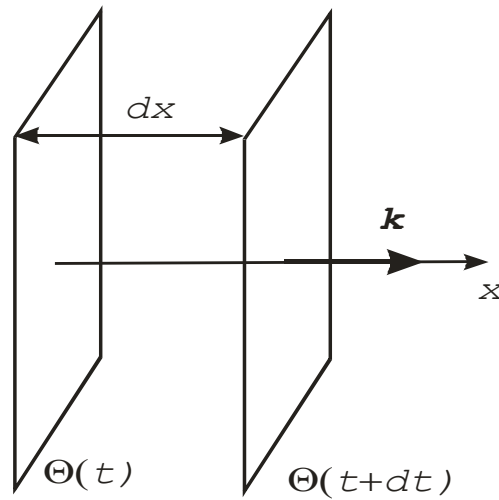


Рис. 2. Образ монохроматической волны на плоскости  $(\Re \rho, \Im \rho)$

В одномерном случае фаза плоской монохроматической волны записывается в виде:  $\Theta = kx - \omega t$ . При движении фронт волны поверхность постоянной фазы ( $\Theta = \text{const}$ ,  $d\Theta = kdx - \omega dt = 0$ ) за бесконечно малое время  $dt$  перемещается на величину  $dx$  (рис. 3), что определяет фазовую скорость волны:

$$v_{\phi} = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}. \quad (20)$$



**Рис. 3. Плоская волна. Движение поверхности постоянной фазы**

В трехмерном случае, используя вектор нормали к фазовой поверхности  $\mathbf{n}$ , выражение для фазовой скорости запишем в виде:

$$\Theta = \mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t, \quad \Theta = \text{const}, \quad d\Theta = 0, \quad \mathbf{k}d\mathbf{r} - \omega dt = 0, \quad (21)$$

$$\mathbf{k} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{k}\mathbf{n} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = k \frac{dr_{\parallel}}{dt} = \omega, \quad v_{\phi} = \frac{dr_{\parallel}}{dt} \mathbf{n} = \frac{\omega}{k} \mathbf{n}.$$

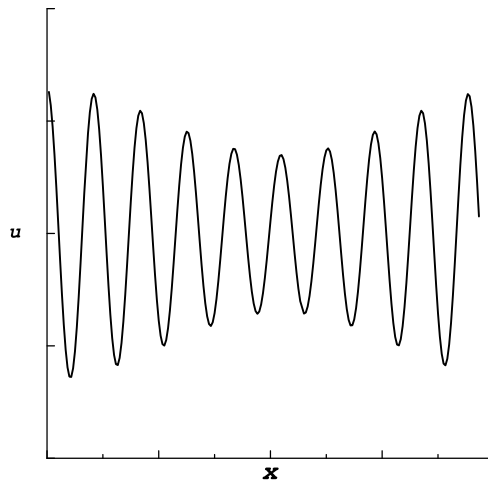
Вектор фазовой скорости, как и волновой вектор, перпендикулярен фазовой поверхности.

## ГРУППОВАЯ СКОРОСТЬ ВОЛНЫ

Групповая скорость описывает распространение волнового пакета (группы волн). Представим возмущение среды в начальный момент времени (рис. 4) в виде интеграла Фурье

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} f(k) dk, \quad (22)$$

где  $f(k)$  – амплитуда, характеризующая вклад в разложение  $k$  – пространственной гармоники.



**Рис. 4. Амплитуда сигнала с узким спектром**

Рассмотрим сигнал с ограниченным спектром (рис. 4):

$$f(k) = \begin{cases} \frac{1}{2K} & \text{для } |k| < K, \\ 0, & \text{для } |k| > K. \end{cases} \quad (23)$$

Здесь  $K$  – параметр, характеризующий ширину и амплитуду составляющих спектра. Чем уже спектр, тем выше его амплитуда:

$$f(x) = \frac{1}{2K} \int_{-K}^K e^{ikx} dk = \frac{1}{2K} \cdot \frac{e^{ikx}}{ix} \Big|_{-K}^K = \frac{1}{Kx} \cdot \frac{e^{iKx} - e^{-iKx}}{2i} = \frac{\sin Kx}{Kx}. \quad (24)$$

Обратное преобразование Фурье (22) для спектра (23) показывает, что этому сигналу соответствует следующая функция в реальном пространстве, где параметром тоже является  $K$ .

Эта функция имеет нули в точках  $x_n = \pi n / 2K$ ,  $n = \pm 1, \pm 2 \dots$ . Уменьшение параметра  $K$  ведет к удалению нулей от начала координат (рис. 5) и медленному изменению функции  $u(x)$ .

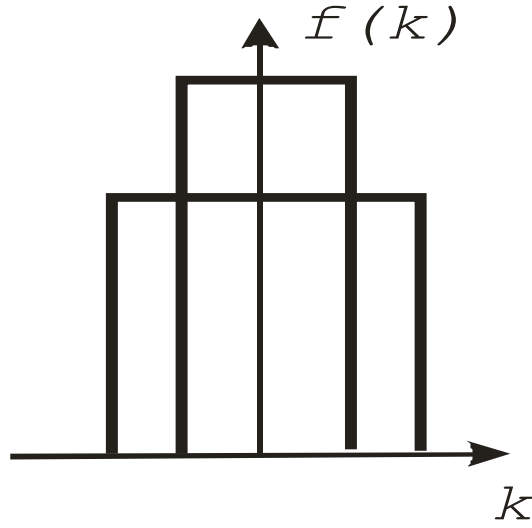


Рис. 5. Сигнал с узким спектром

Для анализа движения модулированной по амплитуде волны, несущая гармоника которой имеет частоту  $\omega_0$  и волновое число  $k_0$ , а спектр ограничен  $k = k_0 + k'$ ,  $|k'| \ll k_0$ , используем обратное преобразование Фурье. В произвольный момент решение, описывающее волну, необходимо записать в виде суперпозиции различных гармоник (монохроматических составляющих), входящих в спектр

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(k) e^{i(kx - \omega t)} dk = \frac{1}{2K} \int_{k_0 - K}^{k_0 + K} e^{i(kx - \omega t)} dk. \quad (25)$$

Учтем, что частота может быть представлена в виде ряда Тейлора

$$\omega(k) = \omega(k_0) + \left( \frac{\partial \omega}{\partial k} \right)_0 (k - k_0) + \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right)_0 \frac{(k - k_0)^2}{2} + \dots. \quad (26)$$

Подставим частоту (26) в (25) и пренебрежем нелинейными слагаемыми в фазе волны

$$u(x, t) = \frac{1}{2K} \int_{k_0 - K}^{k_0 + K} e^{i(kx - \omega t)} dk = \frac{1}{2K} \int_{-K}^K e^{i \left( (k_0 + k')x - \left( \omega(k_0) + \left( \frac{\partial \omega}{\partial k} \right)_0 k' \right) t \right)} dk', \quad (27)$$

после чего можно вынести из-под знака интеграла множители, характеризующие несущую гармонику:

$$u(x, t) = e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \frac{1}{2K} \int_{-K}^K e^{ik' \left( x - \left( \frac{\partial \omega}{\partial k} \right)_0 t \right)} dk' = \quad (28)$$

$$= f \left( x - \left( \frac{\partial \omega}{\partial k} \right)_0 t \right) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} = f(\xi) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)},$$

и заметить, что амплитуда модулированной волны зависит от бегущей координаты

$$\xi = x - \left( \frac{\partial \omega}{\partial k} \right)_0 t.$$

При фиксированном значении  $\xi = \text{const}$ , то есть в системе отсчета, движущейся со скоростью

$$v_{\text{гp}} = \frac{dx}{dt} = \left( \frac{\partial \omega}{\partial k} \right)_0, \quad (29)$$

профиль волны изменяться не будет  $f(\xi) = \text{const}$ . Таким образом, модулированная амплитуда волны, соответствующая сигналу с ограниченным спектром, будет распространяться в лабораторной системе координат вдоль несущей гармоники со скоростью  $v_{\text{гp}}$ .

При выводе соотношения (28), характеризующего распространение волнового пакета с постоянным профилем, слагаемое в фазе волны

$$\left( \partial^2 \omega / \partial k^2 \right)_0 (k - k_0)^2 t / 2 \ll 1 \quad (30)$$

было отброшено как не влияющее на ее изменение, что справедливо только на малых временах. В общем случае каждая гармоника распространяется со своей фазовой скоростью. Какие-то гармоники могут бежать быстрее, другие – медленнее, и если провести обратное преобразование Фурье в момент времени  $t > 0$ , то форма сигнала может измениться, а волновой пакет размывается. Оценим временные интервалы, на которых справедливо соотношение (30)

$$\left| \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right)_0 \frac{(k - k_0)^2}{2} t \right| = \left| \left( \frac{\partial v_{\text{гp}}}{\partial k} \right)_0 \frac{(k - k_0)^2}{2} t \right| = \left| \left( \frac{\partial \lambda}{\partial k} \right) \left( \frac{\partial v_{\text{гp}}}{\partial \lambda} \right)_0 \frac{(k - k_0)^2}{2} t \right| = \quad (31)$$

$$= \left| \frac{2\pi}{k^2} \frac{(k - k_0)^2}{2} t \right| \sim \frac{v_{\text{гp}} t}{\lambda} \ll 1.$$

Таким образом, волновой пакет не расплывается, проходя расстояния, много меньшие длины волны.

Можно ввести групповую скорость другим образом. В случае, если волна немонохроматична, ее частота и волновое число зависят от координат и времени и могут быть определены следующим образом:

$$k(x, t) = \frac{\partial \Theta}{\partial x}; \quad \omega(x, t) = -\frac{\partial \Theta}{\partial t}. \quad (32)$$

Тогда, учитывая независимость результата от последовательности вычисления частных производных:

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t \partial x}; \quad \frac{\partial \omega}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial t}, \quad (33)$$

получим уравнение

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0, \quad (34)$$

которое можно переписать в виде

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial x} = 0, \text{ или } \frac{\partial k}{\partial t} + v_{gr} \frac{\partial k}{\partial x} = 0. \quad (35)$$

Получилось гиперболическое уравнение первого порядка, описывающее распространение слева направо волны возмущений волнового числа  $\delta k = k - k_0$  со скоростью  $v_{gr} = \frac{\partial \omega}{\partial k}$ . Уравнение можно переписать и другим образом:

$$\frac{\partial k}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0, \quad \text{либо} \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial k} \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0, \quad (36)$$

что характеризует распространение в пространстве возмущения частоты

$\delta \omega = \omega - \omega_0$  с групповой скоростью  $v_{gr} = \frac{\partial \omega}{\partial k}$ .

## ДИСПЕРСИЯ ВОЛНЫ

Зависимость  $\omega(k)$  называется дисперсионным соотношением. В особенно простых случаях (линейной зависимости  $\omega(k)$ ) волны распространяются без дисперсии. В качестве примера приведем процесс распространения электромагнитных волн в вакууме. С точки зрения математики, волны, не обладающие дисперсией, описываются, например, простейшим линейным гиперболическим уравнением (8).

Дисперсионное соотношение в этом случае  $\omega^2 = c^2 k^2$  или  $\omega = \pm ck$ . Знаки  $+$  и  $-$  соответствуют волнам, распространяющимся в противоположных направлениях. Величина фазовой скорости в этом случае постоянна  $v_\phi = \omega / k = c$  для всех гармоник, поэтому волновой пакет распространяется без изменения формы. Его групповая скорость равна фазовой  $v_{gp} = \partial\omega / \partial k = c = v_\phi$ .

В случае, если функция  $\omega(k)$  нелинейна, фазовая и групповая скорости не постоянны и не равны друг другу. Разные гармоники (монохроматические составляющие) разложения начального профиля в интеграл Фурье будут распространяться с разной фазовой скоростью. Часть гармоник распространяется быстрее волнового пакета, другая – медленнее. Это приведет к уширению (расплыванию) волнового пакета. Такой процесс называется дисперсией волны. С физической точки зрения дисперсия обусловлена внутренними свойствами среды, в которой распространяется волна. Среда может иметь характерные пространственные или временные масштабы, оказывающие существенное влияние на дисперсию.

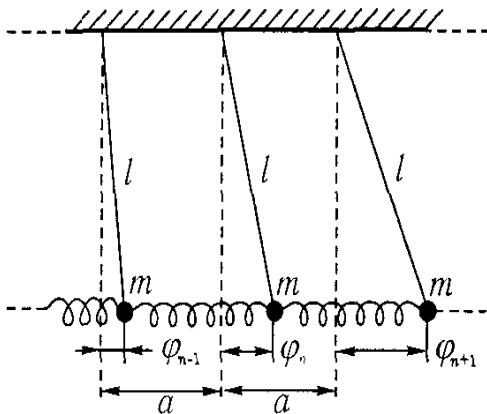


Рис. 6. Цепочка маятников [2]

Рассмотрим в качестве примера среды, в которой распространяется волна, цепочку математических маятников с периодом колебаний  $T = 2\pi / \omega_0 = 2\pi \sqrt{l/g}$ , связанных пружинками жесткости  $G$  (рис. 6) [2]. В состоянии покоя все маятники расположены вдоль горизонтали; расстояние между двумя соседями равно  $a$ , координата  $n$ -го маятника –  $na$ . Для описания отклонения малой амплитуды маятника с номером  $n$  запишем закон вращательного движения в проекции на ось, перпендикулярную плоскости рисунка

$$ml^2 \frac{d^2 \varphi_n}{dt^2} = \sum_i M_i = M_{mg} + M_T + M_{F_{n+1}} + M_{F_{n-1}}, \quad (37)$$

где в правой части уравнения записана сумма моментов сил, действующих на тело:  $M_{mg} = mgl \sin \varphi_n \approx mgl \varphi_n$  тяжести,  $M_T = 0$  натяжения подвеса,  $M_{F_{n+1}}$  — упругости левой  $M_{F_{n-1}}$  и правой пружин  $M_{F_{n+1}}$ . Подставляя выражения для моментов в уравнение (37), учитывая малость угловых и горизонтальных отклонений  $x_n = l \varphi_n$ , получим

$$\ddot{\varphi}_n + \omega_0^2 \varphi_n = \frac{G}{m} (\varphi_{n+1} + \varphi_{n-1} - 2\varphi_n). \quad (38)$$

Поскольку маятники связаны пружинками, в уравнение кроме отклонения маятника с номером  $n$  входят отклонения его ближайших соседей: с номерами  $n \pm 1$ . Рассмотрим распространение волны малых отклонений маятников вдоль такой линии, для чего запишем решение в виде

$$\varphi_n = A \exp[i(\omega t - \delta_n)] = A \exp[i(\omega t - kna)]. \quad (39)$$

Поскольку свойства среды не меняются вдоль цепочки, то все частицы колеблются с одинаковой частотой  $\omega$ , однако фаза колебаний различных частиц зависит от их пространственного расположения  $\delta_n = kna$  (в фиксированный момент времени отклонения маятников от равновесия, вообще говоря, различны). Для волны отклонений (39) в случае отсутствия затухания (действительных значениях  $k$ ) получается дисперсионное соотношение

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{4G}{m} \sin^2 \frac{ka}{2}. \quad (40)$$

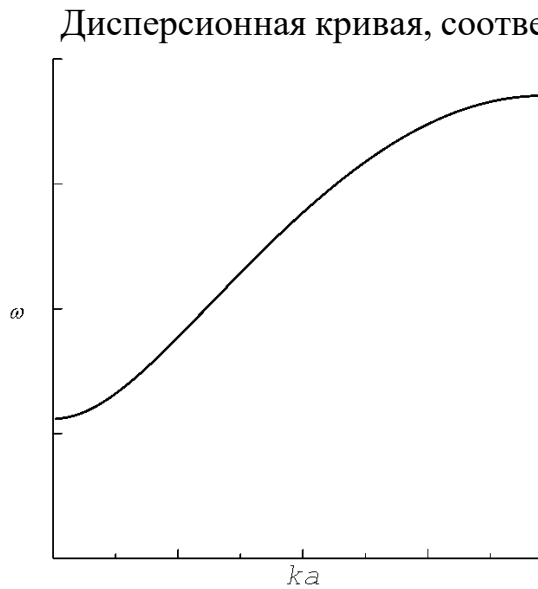


Рис. 7. Дисперсионная кривая

Дисперсионная кривая, соответствующая уравнению (40), представлена на рис. 7 и отражает нелинейный характер зависимости  $\omega(k)$ . Волна в такой системе будет диспергировать (расплываться). Это связано с тем, что характеристики волны определяются временными ( $T$ ) и пространственными ( $a$ ) параметрами среды. В частном случае высоких частот  $\omega^2 \gg \omega_0^2$  и длинных волн  $\lambda \gg a$  ( $ka \ll 1$ )

вместо (40) получаем  $\omega = \pm \frac{Ga}{m} k$ ,

т.е. дисперсия отсутствует.

Можно рассмотреть два приближения по отдельности. Только для высоких частот  $\omega^2 \gg \omega_0^2$  дисперсия характеризуется пространственным масштабом  $a$ :

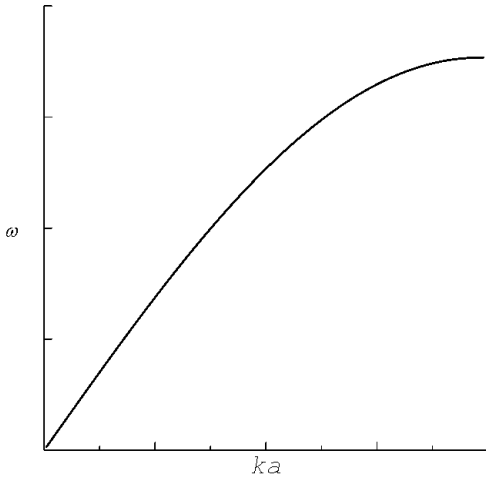


$$\omega = \pm \sqrt{\frac{4G}{m}} \sin \frac{ka}{2} \quad (41)$$

(рис. 8) и называется пространственной дисперсией.

В случае длинных волн  $ka \ll 1$  нелинейность дисперсионного соотношения обеспечивается наличием собственной частоты

$$\omega = \pm \sqrt{\omega_0^2 + \frac{G}{m}(ka)^2}, \quad (42)$$



создавая временную дисперсию.

Например, в плазме характерный пространственный масштаб – радиус Дебая, а характерный временной масштаб связан с плазменной частотой.

Вместо рассмотрения дискретной системы можно применить подход сплошной среды с помощью использования непрерывной пространственной переменной

**Рис. 8. Дисперсионная кривая**

$$\varphi_n(an, t) = \varphi(x, t),$$

$$\varphi_{n+1}(t) = \varphi(a(n+1), t) = \varphi(x+a, t) = \varphi(x, t) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)a + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)\frac{a^2}{2} \dots \quad (43)$$

$$\varphi_{n-1}(t) = \varphi(a(n-1), t) = \varphi(x-a, t) = \varphi(x, t) - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)a + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)\frac{a^2}{2} \dots$$

Подставляя выражения (43) в (38), получим волновое уравнение Клейна-Гордона

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{Ga^2}{m} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \omega_0^2 \varphi = 0. \quad (44)$$

## ПЕРЕНОС УСРЕДНЕННОЙ ПЛОТНОСТИ ЭНЕРГИИ

Изменение средней плотности энергии  $E$  со временем в некотором объеме связано с потоком энергии  $\mathbf{S}$  через его границу  $\frac{\partial E}{\partial t} + \text{div} \mathbf{S} = 0$ . Рассмотрим вопрос о средней плотности энергии и средней плотности потока энергии в одномерном случае

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \quad (45)$$

на примере волнового уравнения Клейна-Гордона (44), которое перепишем в общем виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta^2 u = 0. \quad (46)$$

Коэффициенты  $V^2 = \frac{Ga^2}{m}$ ,  $\beta^2 = \omega_0^2$  постоянны, а дисперсионное соотношение имеет вид:

$$\omega^2 = V^2 k^2 + \beta^2. \quad (47)$$

Используя  $\partial u / \partial t$  в качестве множителя, преобразуем уравнение (46) к новому виду:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{\beta^2 u^2}{2} \right) - V^2 \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (48)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{\beta^2 u^2}{2} + \frac{V^2}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( -V^2 \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0. \quad (49)$$

Плотность потока энергии  $E = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{\beta^2 u^2}{2} + \frac{V^2}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$  содержит три слагаемых, соответствующих плотности кинетической, потенциальной энергии и плотности энергии взаимодействия соседних объемов. Поток энергии выражается через пространственные и временные производные  $S = -V^2 \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x}$ . Подставляя в (49) решение  $u$  в виде (18), получим выражения для плотности энергии и плотности потока энергии

$$E = (\omega^2 + V^2 k^2) A^2 / 4 + \beta^2 \cdot A^2 / 4 = F(k) A^2, \quad (50 \text{ а})$$

$$S = V^2 \omega k A^2 / 2. \quad (50 \text{ б})$$

Отметим, что энергия волны пропорциональна квадрату амплитуды

$$v_{\text{гp}} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{V^2 k}{\sqrt{V^2 k^2 + \beta^2}} = \frac{V^2 k}{\omega}. \quad (51)$$

Скорость распространения энергии

$$v = \frac{S}{E} = \frac{V^2 \omega k A^2 / 2}{(\omega^2 + V^2 k^2) A^2 / 4 + \beta^2 \cdot A^2 / 4} = \frac{2V^2 \omega k}{(\omega^2 + V^2 k^2) + \beta^2} = \frac{2V^2 \omega k}{2\omega^2} = v_{\text{ep}}. \quad (52)$$

Совпадение скорости распространения энергии волны и ее групповой скорости имеет место и в общем случае: для волнового пакета с узким спектром, в отсутствии вращения плоскости поляризации и поглощения [2].

Закон сохранения средней плотности энергии можно записать в виде

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(v_{\text{ep}} E) = 0, \quad (53)$$

или, используя (50 а),

$$\frac{\partial (F(k) A^2)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(v_{\text{ep}} F(k) A^2) = 0. \quad (54)$$

Выполняя дифференцирование и комбинируя слагаемые, получим

$$\frac{\partial F}{\partial k} A^2 \left[ \frac{\partial k}{\partial t} + v_{\text{ep}} \frac{\partial k}{\partial x} \right] + F(k) \left[ \frac{\partial (A^2)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(v_{\text{ep}} A^2) \right] = 0. \quad (55)$$

В силу (35) первое слагаемое обращается в нуль, что в итоге дает уравнение

$$\frac{\partial A^2}{\partial t} + v_{\text{гp}} \frac{\partial A^2}{\partial x} = 0. \quad (56)$$

## ВОЛНЫ В ЖИДКОСТЯХ И ГАЗАХ

Для описания волн в жидкостях и газах существует несколько подходов. Простейший из них состоит в рассмотрении идеальной жидкости, т.е. случая, когда можно пренебречь вязкостью и теплопроводностью среды. Для описания волнового поведения в такой ситуации необходимы закон сохранения массы, уравнение движения жидкости (уравнение Эйлера) и уравнение состояния среды.

Поскольку поток вещества в жидкости или газе  $\mathbf{q} = \rho \mathbf{v}$ , закон сохранения массы в трехмерном случае записывается в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0. \quad (57)$$

Уравнение Эйлера представляет собой второй закон Ньютона, записанный для бесконечно малого объема жидкости, в которой действуют только силы давления

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p. \quad (58)$$

В идеальной жидкости уравнение состояния связывает давление с плотностью

$$p = f(\rho).$$

В частном случае газа уравнение состояния записывается явным образом:

$$p = p_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma. \quad (59)$$

Рассмотрим распространение возмущений давления  $p'$ , плотности  $\rho'$  и скорости  $\mathbf{v}$  на фоне механического равновесия среды ( $p_0, \rho_0, \mathbf{v}_0 = 0$ ), причем

$$p = p_0 + p', \quad \rho = \rho_0 + \rho'.$$

В случае волн малой амплитуды все возмущения малы:  $p_0 \ll p', \rho_0 \ll \rho', v \ll 1$ , что позволяет линеаризовать систему уравнений (57), (58):

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (60 \text{ а})$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p', \quad (60 \text{ б})$$

$$p' = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_0 \rho' = \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \rho'. \quad (60 \text{ в})$$

Давление легко исключается из двух последних уравнений

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\gamma \frac{p_0}{\rho_0} \nabla \rho'. \quad (61)$$

Применяя операцию  $\text{rot}$  к уравнению (61), получаем вывод, что существует класс решений, описывающих безвихревые движения

$$\text{rot } v = 0 \quad (62)$$

и, следовательно, можно ввести потенциал

$$v = \nabla \varphi. \quad (63)$$

После подстановки (63) в (61) и однократного интегрирования по пространственным переменным находим связь возмущений плотности и потенциала:

$$\gamma \frac{p_0}{\rho_0} \rho' = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (64)$$

тогда получаем линейное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \varphi, \quad c^2 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0}. \quad (65)$$

Другим примером, который может быть исследован в рамках модели идеальной жидкости, служат гравитационные волны. Здесь сжимаемостью среды можно пренебречь  $\rho_0 = \text{const}$ , и уравнение неразрывности принимает вид

$$\text{div } v = 0. \quad (66)$$

Используя потенциал скорости  $\text{div } v = \text{div}(\nabla \varphi) = 0$ , получим уравнение Лапласа

$$\Delta \varphi = 0, \quad (67)$$

решением которого являются гармонические функции. Обратим внимание на то, что в нашем примере волна описывается не эллиптическим уравнением.

Для нахождения двумерного решения уравнения Лапласа (67), описывающего гравитационные волны в жидкости (рис. 9).

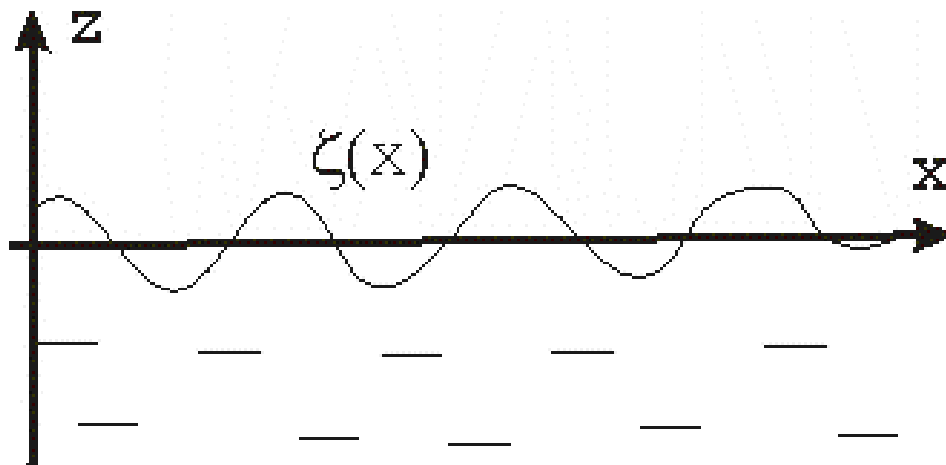


Рис. 9. Гравитационные волны в глубоком бассейне

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad (68 \text{ а})$$

$$\varphi(x, t) = \cos(kx - \omega t)(C_1 \exp(kz) + C_2 \exp(-kz)), \quad (68 \text{ б})$$

необходимо учесть граничные условия. Рассмотрим случай глубокого бассейна. Далеко от поверхности (на большой глубине) волны отсутствуют

$$z \rightarrow -\infty: \quad \varphi = 0,$$

т.е.  $C_2=0$ . Второе граничное условие получается из анализа условий на поверхности. Для жидкости в поле тяжести в уравнение Эйлера добавляется сила тяжести

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p + \rho \mathbf{g}. \quad (69)$$

Для потенциального движения (63) уравнение (68) интегрируется

$$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + p + \rho g z = \text{const}.$$

После чего для точек на поверхности раздела следует записать:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + g \zeta = \frac{p_0}{\rho}, \quad (70)$$

где  $\zeta$  – деформация поверхности, а  $p_0$  – атмосферное давление. Поскольку потенциал  $\varphi$  определяется с точностью до некоторой функции времени, после замены  $\varphi \rightarrow \varphi - \int \frac{p(t)}{\rho} dt + \frac{p_0 t}{\rho}$  в (70) получим:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + g \zeta = 0. \quad (71)$$

Продифференцируем (71) по времени и заметим, что для волн малой амплитуды скорость деформации соответствует вертикальной скорости жидкости  $\partial \zeta / \partial t = v_z = \partial \varphi / \partial z$ . Кроме того, перенесем граничное условие (71) на плоскую границу  $z=0$  и с точностью до малых второго порядка будем иметь

$$\left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=0} = 0. \quad (72)$$

Подставляя (68 б) в (72), получим дисперсионное соотношение

$$\omega = \sqrt{gk}. \quad (73)$$

Гравитационные волны в глубоком бассейне диспергируют. В этом случае дисперсия пространственная, несмотря на то что в дисперсионном соотношении (73) отсутствует в явном виде пространственный масштаб. Характерным масштабом длины при распространении гравитационной волны является глубина проникновения в жидкость  $\delta$ , которая равна длине гравитационной волны.

В бассейне конечной глубины ( $z = -H$ ) вместо граничного условия на бесконечности запишем условие непротекания жидкости через границу на дне:

$$z = -H, \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0.$$

С учетом вида потенциала скорости (68 б) это приведет к выражению:

$$kC_1 \exp(-kH) - kC_2 \exp(kH) = 0, \quad (74 \text{ а})$$

а условие (72) на плоской верхней границе запишется в виде:

$$-\omega^2(C_1 + C_2) + kg(C_1 - C_2) = 0. \quad (74 \text{ б})$$

Условие существования нетривиального решения системы уравнений (74) – равенство нулю определителя:

$$\begin{vmatrix} \exp(-kH) & -\exp(kH) \\ -\omega^2 + kg & -\omega^2 - kg \end{vmatrix} = 0$$

представляет собой дисперсионное соотношение для волн в бассейне произвольной глубины:

$$-\omega^2(\exp(kH) + \exp(-kH)) + kg(\exp(kH) - \exp(-kH)) = 0$$

или в более компактном виде:

$$\omega^2 = kg \operatorname{th}(kH). \quad (75)$$

Из этого общего выражения следуют два предельных случая. Один уже известный – глубокий бассейн ( $H \gg \lambda$ ):

$$kH \gg 1, \quad \operatorname{th}(kH) \rightarrow 1, \quad \omega^2 \rightarrow kg$$

(формула (73)). Другой предельный случай – «мелкая вода» (глубина слоя воды много меньше длины волны  $H \ll \lambda$ ):

$$kH \ll 1, \quad \operatorname{th}(kH) \rightarrow kH, \quad \omega^2 \rightarrow k^2 gH.$$

В этом случае

$$\omega = \sqrt{gH} k,$$

$$v = v_\phi = v_{\text{гp}} = \sqrt{gH}$$

и волна распространяется без дисперсии. С помощью формулы () можно рассчитать скорость волн цунами в океане, длина которых достигает до 300 км. При глубине океана  $H = 4$  км, получим  $v \approx \sqrt{10 \cdot 4000} = 200$  м/с = 720 км/час.

В вязкой жидкости изменяется уравнение движения. Вместо уравнения Эйлера используется уравнение Навье-Стокса, учитывающее сдвиговую  $\eta$  и объемную  $\zeta$  вязкость жидкости

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + (\zeta + \eta/3) \nabla \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad (76)$$

а уравнение состояния

$$p = f(p, s)$$

содержит энтропию, поскольку в среде есть потери.

Рассматривая волны малой амплитуды, получим

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \nabla \rho' = \eta \Delta \mathbf{v} + (\xi + \eta/3) \nabla \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (77)$$

Поле скорости как всякое векторное поле можно разложить на потенциальную и вихревую части

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_l + \mathbf{v}_t = \nabla \varphi + \operatorname{rot} \mathbf{A},$$

где  $\mathbf{A}$  – векторный потенциал.

Рассмотрим, прежде всего, сдвиговые колебания  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_t = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ , для которых из (60 а) следует несжимаемость жидкости  $\partial \rho' / \partial t = 0$ ,  $\rho' = 0$ , а уравнение движения (77) сильно упрощается

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}_t}{\partial t} = \eta \Delta \mathbf{v}_t. \quad (78)$$

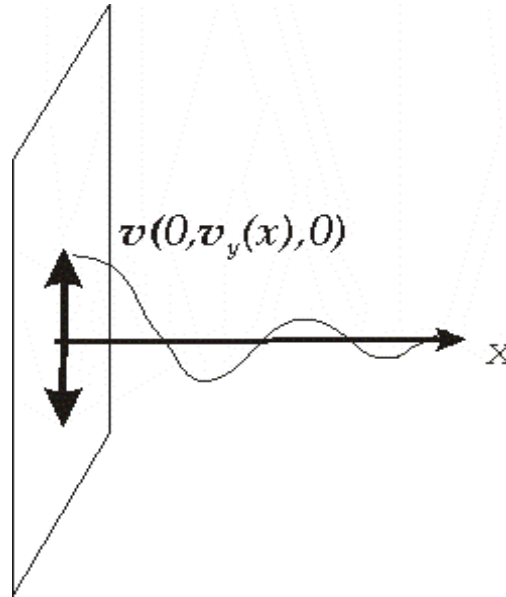


Рис. 10. Волна Стокса

Уравнение вида (78) является параболическим и в отличие от гиперболических уравнений может описывать процессы распространения вынужденных волн, порождаемых колебанием тел в среде. В случае жидкостей волна может быть вызвана колебаниями плоскости, помещенной внутрь нее (рис. 10) по закону:

$$\mathbf{v}_t(x=0, t) = \{0, v_0 \exp(-i\omega t), 0\}.$$

Рассматривая поперечную волну вида

$$v_y = v_0 \exp(ikx - i\omega t),$$

получим дисперсионное соотношение

$$i\omega = \eta k^2 / \rho_0,$$

определяющее для фиксированной частоты волны комплексное волновое число



$$k = \pm(i+1)\sqrt{\omega\rho_0/\eta},$$

мнимая часть которого характеризует затухание волны

$$v_y = v_0 \exp\left\{-\sqrt{(\omega\rho_0/2\eta)x}\right\} \exp\left\{i\left(\sqrt{(\omega\rho_0/2\eta)x} - \omega t\right)\right\}. \quad (79)$$

На расстоянии длины волны  $\lambda = 2\pi/\Re k = 2\pi/\sqrt{(\omega\rho_0/2\eta)}$  поперечная волна в жидкости уменьшится в  $\exp\left\{-\sqrt{(\omega\rho_0/2\eta)\lambda}\right\} = \exp\{-2\pi\} \approx 535$  раз, т.е. поперечные колебания практически не распространяются.

Обсудим теперь распространение продольных волн  $\mathbf{v} = v_l = \mathbf{m} \cdot \mathbf{v}$ . Используем координату  $\zeta = \mathbf{m} \cdot \mathbf{r}$  вдоль некоторого выбранного направления, задаваемого единичным вектором  $\mathbf{m}$  (рис. 11).

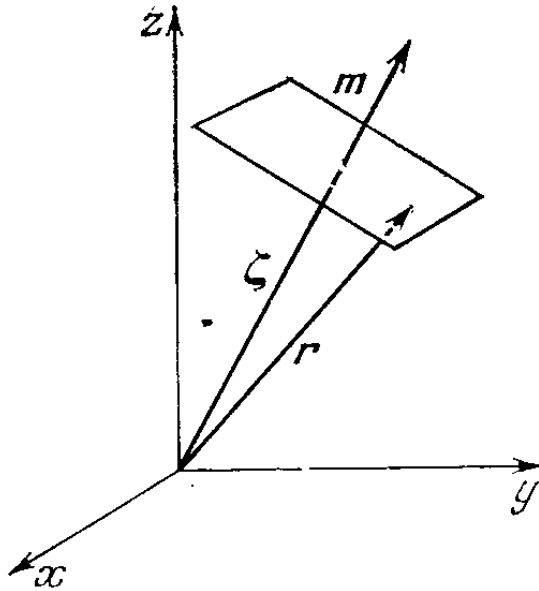


Рис. 11. Продольные волны [11]

Производная вдоль этого направления выражается в виде

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial \zeta}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \zeta} = \mathbf{m} \frac{\partial}{\partial \zeta}.$$

Умножая (77) скалярно на вектор  $\mathbf{m}$  и исключая плотность жидкости с помощью (60 а), получим:

$$\Delta v_l - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 v_l}{\partial t^2} + \frac{b}{c_0^2 \rho_0} \frac{\partial}{\partial t} \Delta v_l = 0. \quad (80)$$

Здесь  $b = \frac{4}{3}\eta + \zeta$  – диссипативный коэффициент. Точно рассчитать величину этого коэффициента можно при учете эволюции энтропии и переноса тепла

$$b = \frac{4}{3}\eta + \zeta + \kappa \left( \frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right), \quad (81)$$

где  $\kappa$  – коэффициент теплопроводности, а  $c_v$ ,  $c_p$  – коэффициенты теплоемкости среды.

Записывая решение в виде

$$v_l(\zeta, t) = mA(\zeta) \exp(-i\omega t), \quad (82)$$

где  $A(\zeta)$  – амплитуда, зависящая от пространственной переменной, из (80) получим уравнение Гельмгольца [11]

$$\frac{d^2 A}{d\zeta^2} + \frac{\omega^2}{c_0^2} \left( 1 - i \frac{\omega b}{c_0^2 \rho_0} \right)^{-1} A = 0. \quad (83)$$

Для плоской волны

$$A(\zeta) = A_1 e^{ik\zeta} + A_2 e^{-ik\zeta}, \quad (84)$$

из (83) получим дисперсионное соотношение, которое дает комплексное волновое число

$$k = \frac{\omega}{c_0} \left( 1 - i \frac{\omega b}{c_0^2 \rho_0} \right)^{-1/2} = \Re k + i \Im k = k' + ik'', \quad (85)$$

что соответствует затуханию волны в реальной жидкости (газе) вследствие вязкости и теплопроводности среды. В случае слабого затухания  $\omega b / 2c_0^2 \rho_0 \ll 1$  воспользуемся разложением (85) в ряд Тейлора

$$k \approx \frac{\omega}{c_0} + i \frac{\omega^2 b}{2c_0^3 \rho_0}. \quad (86)$$

Затухание звука пропорционально квадрату частоты.

## ВОЛНЫ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

Для описания распространения волн в твердом теле традиционно используются лагранжевы координаты: все величины рассматриваются как функции времени  $t$  и положений частиц  $\mathbf{a}$  в начальный момент времени  $t=0$ . Пусть некоторая точка твердого тела

$M_0(t=0, a_x, a_y, a_z) = M_0(t=0, \mathbf{a})$ , соответствующая вектору  $\mathbf{a}$ , после деформации заняла новое положение  $\mathbf{r}(x, y, z)$ :

$$M(t, x(\mathbf{a}), y(\mathbf{a}), z(\mathbf{a}))$$

(рис. 12), причем вектор  $\mathbf{U}(t, \mathbf{a}) = \mathbf{r} - \mathbf{a}$  представляет собой смещение частицы.

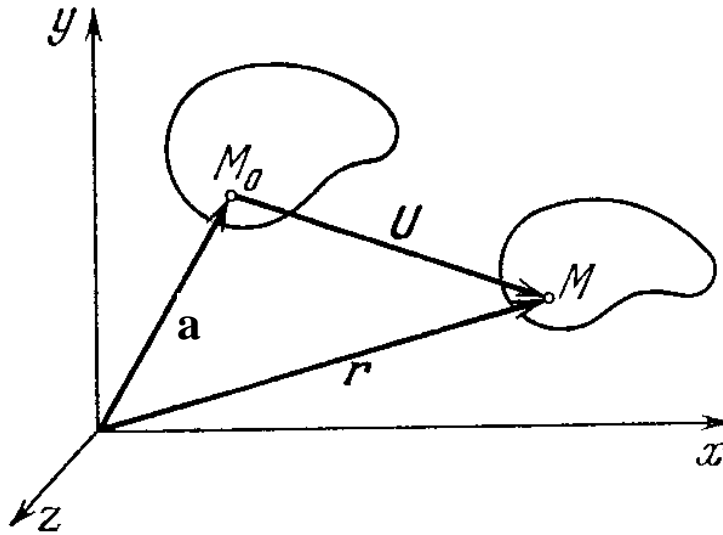


Рис. 12 Деформация твердого тела [11]

Уравнение движения твердого тела запишем в виде

$$\rho_0 \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \rho_0 \frac{d^2 \mathbf{U}}{dt^2} = \mathbf{F} \quad (87 \text{ а})$$

или в индексной форме

$$\rho_0 \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial a_k}. \quad (87 \text{ б})$$

Тензор напряжений  $\sigma_{ik}$  выражается через компоненты тензора деформаций, который зависит от смещения точек среды  $\mathbf{U}(t, \mathbf{a})$ . Введем в рассмотрение тензор деформаций. Для этого рассмотрим квадрат длины между двумя бесконечно близкими точками после деформации тела и перепишем его в индексном виде

$$dr^2 = (d\mathbf{a} + d\mathbf{U})^2 = \left( da_i + \frac{\partial U_i}{\partial a_k} da_k \right)^2 = da_i da_i + 2 \frac{\partial U_i}{\partial a_k} da_i da_k + \frac{\partial U_i}{\partial a_k} \frac{\partial U_i}{\partial a_l} da_k da_l.$$

Второе слагаемое можно разбить на два одинаковых и заменить в одном из них повторяющиеся («немые») индексы  $i \leftrightarrow k$ . В последнем нелинейном по деформациям слагаемом заменим  $i \leftrightarrow l$  и запишем разность  $dr^2 - da^2$  в компактном виде

$$dr^2 - da^2 = \frac{\partial U_i}{\partial a_k} da_i da_k + \frac{\partial U_k}{\partial a_i} da_k da_i + \frac{\partial U_l}{\partial a_k} \frac{\partial U_l}{\partial a_i} da_k da_i = 2U_{ik} da_i da_k, \quad (88)$$

где элементы тензора деформаций

$$U_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial a_k} + \frac{\partial U_k}{\partial a_i} + \frac{\partial U_l}{\partial a_k} \frac{\partial U_l}{\partial a_i} \right) \quad (89)$$

выражены через компоненты смещений частиц  $U_i$ . Тензор деформаций симметричен  $U_{ik} = U_{ki}$ , что позволяет привести его к диагональной форме с помощью поворота координатных осей. В главных осях квадрат расстояния имеет наиболее простой вид

$$dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (1 + 2U_{xx})da_x^2 + (1 + 2U_{yy})da_y^2 + (1 + 2U_{zz})da_z^2.$$

Элементарный объем в деформированном образце

$$\begin{aligned} dV &= dxdydz = \sqrt{(1 + 2U_{xx})(1 + 2U_{yy})(1 + 2U_{zz})} da_x da_y da_z = \\ &= \sqrt{(1 + 2U_{xx})(1 + 2U_{yy})(1 + 2U_{zz})} dV_0 \end{aligned}$$

выражается через диагональные элементы тензора деформаций. Для малых деформаций, когда нелинейными слагаемыми можно пренебречь, получим  $dV = (1 + U_{xx})(1 + U_{yy})(1 + U_{zz})dV_0$ ,  $(dV - dV_0)/dV = U_{ll} = Sp U_{ik}$ .

Относительное изменение объема равно следу тензора деформации. Если записать тензор деформации в виде:

$$U_{ik} = (U_{ik} - 1/3\delta_{ik} U_{ll}) + 1/3\delta_{ik} U_{ll}, \quad (90)$$

то сразу можно заметить, что любая деформация представляет собой сумму деформации сдвига (первое слагаемое, след которого нулевой, изменения объема нет) и объемной деформации сжатия. Тензор напряжений изотропного тела в линейном приближении может быть записан в виде

$$\sigma_{ik} = K\delta_{ik} U_{ll} + 2\mu(U_{ik} - 1/3\delta_{ik} U_{ll}), \quad (91)$$

который называется законом Гука.  $K$ ,  $\mu$  – модули всестороннего сжатия и сдвига.

Подставляя (91), (90) в уравнение движения (87) и выражая все через компоненты вектора деформации, получим следующее уравнение:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial a_k} = \left( K - \frac{2\mu}{3} \right) \frac{\partial^2 U_l}{\partial a_i \partial a_l} + 2\mu \frac{\partial^2 U_l}{\partial a_k \partial a_{kl}}, \quad (92)$$

которое также записывают и в векторной форме:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} = \left( K + \frac{\mu}{3} \right) \text{grad div} \mathbf{U} + \mu \Delta \mathbf{U}. \quad (93)$$

Используя вектор выделенного направления  $\mathbf{m}$  и соответствующую ему координату, перепишем (93) еще в одном виде:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} = \left( K + \frac{\mu}{3} \right) \mathbf{m} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} (\mathbf{m} \mathbf{U}) + \mu \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial \zeta^2}. \quad (94)$$

Для рассмотрения продольных волн в твердом теле умножим уравнение (94) скалярно на вектор  $\mathbf{m}$  и запишем закон изменения скорости продольной волны  $U_l = (\mathbf{m} \mathbf{U})$ :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 U_l}{\partial t^2} = \left( K + \frac{4\mu}{3} \right) \frac{\partial^2 U_l}{\partial \zeta^2}. \quad (95)$$

Для рассмотрения поперечных волн в твердом теле сначала умножим уравнение (94) скалярно на единичный вектор  $\boldsymbol{\tau}$ , направленный по нормали к выделенному направлению, и получим закон изменения скорости поперечной волны  $U_\tau = (\boldsymbol{\tau} \mathbf{U})$ :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 U_\tau}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 U_\tau}{\partial \zeta^2}. \quad (96)$$

Скорости распространения продольных и поперечных волн определяются соотношениями:

$$c_l^2 = \left( K + \frac{4\mu}{3} \right) / \rho_0, \quad c_t^2 = \mu / \rho_0, \quad (97)$$

из которых видно, что скорость продольной волны выше, чем скорость поперечной.

## ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Рассмотрим распространение электромагнитных волн в однородной изотропной среде в случае, когда интенсивность волны достаточно мала и нет необходимости рассматривать нелинейные явления. Для описания волновых процессов в этом случае используем систему уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad (98 \text{ а})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (98 \text{ б})$$

и материальные соотношения

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad (99)$$

в которых характеристики среды:  $\sigma$  – электропроводность,  $\varepsilon$  и  $\mu$  – диэлектрическая и магнитная проницаемости. Все эти характеристики – постоянные величины.

Учтем, что свободный заряд релаксирует за время  $\tau = \varepsilon/4\pi\sigma$ , и будем рассматривать процессы, развивающиеся на временах  $t \gg \tau$ , когда свободный заряд в системе отсутствует. С помощью дифференцирования (98 б) по времени взятия операции  $\operatorname{rot}$  от уравнения (98 а) исключим из (98) магнитное поле

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{E} + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right). \quad (100)$$

Далее используем стандартное соотношение векторного анализа  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E}$ , которое в случае отсутствия свободных зарядов упрощается  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\Delta \mathbf{E}$ . Это позволит переписать (100) в виде

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \left( \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right). \quad (101)$$

Для монохроматической плоской волны  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(\zeta) e^{-i\omega t}$  из (101) получим уравнение Гельмгольца

$$\frac{d^2 \mathbf{E}_0}{d\zeta^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \mu\varepsilon \left( 1 + \frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon} i \right) \mathbf{E}_0 = 0. \quad (102)$$

В уравнение входит безразмерный параметр

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon} = \frac{1}{\omega\tau} = \frac{T}{2\pi\tau}, \quad (103)$$

который называют тангенс угла потерь. Этот параметр характеризует условия, при которых среду можно считать проводящей или диэлектрической. Если

$\operatorname{tg}\delta = 4\pi\sigma / \omega\varepsilon = 0$ , то среда является идеальным диэлектриком. При этом вместо уравнения (101) получается однородное гиперболическое уравнение второго порядка, характеризующее распространение волны без дисперсии. Случай слабой проводимости  $\operatorname{tg}\delta = 4\pi\sigma / \omega\varepsilon \rightarrow 0$  среды реализуется либо при малой электропроводности, либо даже при высокой электропроводности на высоких частотах. В этом случае период внешнего поля  $T$  много меньше времени релаксации заряда  $\tau$ . Подставляя решение уравнения (102) в виде волны, бегущей слева направо  $E_0(\zeta) = A_1 e^{ik\zeta}$ , получим дисперсионное соотношение

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \mu\varepsilon \left( 1 + \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon\omega} i \right). \quad (104)$$

Волновое число имеет комплексный вид

$$k = \frac{\omega}{c} (n + i\kappa) = \Re k + i\Im k = k' + ik'', \quad (105)$$

что говорит о затухании волны (см. С. 25)

$$E = E_0(\zeta) \exp(ik\zeta - i\omega t) = E_0(\zeta) \exp(ik'\zeta - i\omega t) \exp(-k''\zeta). \quad (106)$$

Вещественная часть волнового числа  $k'$  содержит показатель преломления  $n$ , характеризующий фазовую скорость распространения волны в среде  $v_\phi = \omega / k = c / n$ . Мнимая часть волнового числа  $k'' = \omega\kappa / c$  содержит показатель поглощения  $\kappa$ . Соотношение (104) свидетельствует о том, что проводящая среда, в общем случае, является диспергирующей, что приводит к искажению начального профиля волны.

Для нахождения показателей преломления и поглощения возведем (105) в квадрат, сравним с (104), что даст соотношение

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \mu\varepsilon (1 + i \operatorname{tg}\delta) = \frac{\omega^2}{c^2} (n + i\kappa)^2.$$

Приравнивая вещественные и мнимые части, получим

$$n^2 - \kappa^2 = \mu\varepsilon, \quad 2n\kappa = \mu\varepsilon \operatorname{tg}\delta. \quad (107)$$

Исключив из (107) для начала один из показателей, например  $n = \mu\varepsilon \operatorname{tg}\delta / 2\kappa$ , получим для второго биквадратное уравнение:

$$\kappa^4 + \mu\varepsilon\kappa^2 - (\mu\varepsilon \operatorname{tg}\delta / 2)^2 = 0. \quad (108)$$

Записав решение для

$$\kappa = \left\{ \frac{\mu\varepsilon}{2} \left[ \left( 1 + \operatorname{tg}^2\delta \right)^{1/2} - 1 \right] \right\}^{1/2} \quad (109)$$

и возвращаясь к первому уравнению из (107), найдем и показатель преломления

$$n = \left\{ \frac{\mu\epsilon}{2} \left[ (1 + \operatorname{tg}^2 \delta)^{1/2} + 1 \right] \right\}^{1/2}. \quad (110)$$

В случае сильного затухания волны  $\operatorname{tg} \delta = 4\pi\sigma / \omega\epsilon \gg 1$  и оставляя в (109) (110) наибольшие вклады, получим

$$n \approx \kappa \approx \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \operatorname{tg} \delta} = \sqrt{\frac{2\pi\mu\sigma}{\omega}}. \quad (111)$$

Поскольку  $E \propto \exp(-k''\zeta) = \exp(-\omega\kappa\zeta / c)$ , волна, проникая вглубь хорошего проводника, затухает в  $e$  раз на глубине, определяемой соотношением

$$\frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{2\pi\mu\sigma}{\omega}} \delta_* = 1. \quad (112)$$

Т.е. толщина скин-слоя обратно пропорциональна квадратному корню из частоты

$$\delta_* = \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu\sigma\omega}}. \quad (113)$$

Такой закон носит название нормального скин-эффекта и справедлив в случае, когда глубина проникновения много больше длины свободного пробега носителей заряда.

В противоположном предельном случае  $\operatorname{tg} \delta \ll 1$  необходимо воспользоваться разложением (109), (110) в ряды Тейлора по малому параметру. При этом показатель преломления не зависит от частоты

$$n = \sqrt{\mu\epsilon}, \quad (114)$$

и дисперсия отсутствует. Это связано с тем, что характерный временной масштаб среды отсутствует (время релаксации  $\tau$  – бесконечно большое). Показатель поглощения среды

$$\begin{aligned} \kappa &= \left\{ \frac{\mu\epsilon}{2} \left[ (1 + \operatorname{tg}^2 \delta)^{1/2} - 1 \right] \right\}^{1/2} \approx \left\{ \frac{\mu\epsilon}{2} \left[ 1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \delta}{2} - 1 \right] \right\}^{1/2} = \\ &= \sqrt{\mu\epsilon} \operatorname{tg} \delta / 2 = \frac{2\pi\sigma}{\omega} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \kappa(\omega) \end{aligned} \quad (115)$$

зависит от частоты.



## ПРИБЛИЖЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

Рассмотрим поведение волн в средах, свойства которых меняются на масштабах  $L$ , заведомо больших длины волны  $\lambda$  ( $L \gg \lambda$ ). В таких случаях гармоническая волна характеризуется уравнением Гельмгольца

$$\Delta u + k^2(\mathbf{R})u = 0. \quad (116)$$

В качестве примера упомянем распространение света в воздухе над разогретой в жаркий день асфальтовой дорогой или электромагнитных волн в верхних слоях атмосферы Земли. При этом в качестве переменной  $u$  в (116) выступает амплитуда электрического поля  $E_0$ , а диэлектрическая проницаемость и связанный с ней показатель преломления будут зависеть от координат, и из (116) сразу видна зависимость  $k^2(\mathbf{R})$ .

Представим решение уравнения Гельмгольца (116) в виде:

$$u(\mathbf{R}) = A(\mathbf{R}) \exp[ik_0 \Psi(\mathbf{R})], \quad (117)$$

где амплитуда  $A(\mathbf{R})$  и  $\Psi(\mathbf{R})$  – эйконал (от греч. εἰκών – изображение) – функция, определяющая оптическую длину пути между двумя точками. При нашем подходе  $A(\mathbf{R})$  и  $\nabla \Psi(\mathbf{R})$  заметно изменяются на больших масштабах  $L \gg \lambda$ . Подставляя (117) в (116), получим уравнение

$$\frac{\Delta A}{k_0^2 A} + 2i \frac{\nabla A \nabla \Psi}{k_0 A} \Psi + i \frac{\Delta \Psi}{k_0} - \left[ (\nabla \Psi)^2 - \frac{k^2(\mathbf{R})}{k_0^2} \right] = 0, \quad (118)$$

содержащее слагаемые разных порядков малого параметра  $1/(k_0 L) = \lambda/(2\pi L)$ .

В нулевом порядке получим уравнение эйконала

$$(\nabla \Psi)^2 = \frac{k^2(\mathbf{R})}{k_0^2} = n^2(\mathbf{R}) \quad \text{и} \quad |\nabla \Psi| = n, \quad (119)$$

где  $n(\mathbf{R})$  – показатель преломления среды, характеризующий ее неоднородность, зависит от координат. В случае воздуха над дорогой более горячие его слои в приземном слое имеют меньший показатель преломления, чем находящиеся выше.

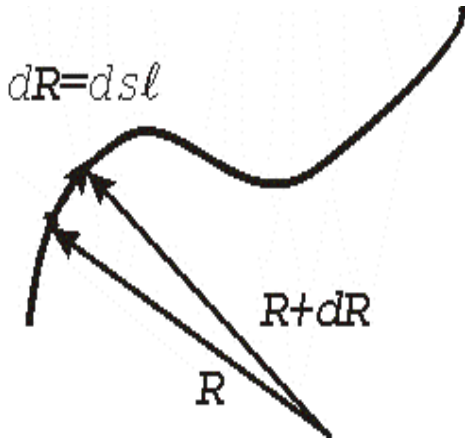


Рис. 13. Распространение луча в неоднородной среде

Рассмотрим вывод уравнения, характеризующего траекторию луча в неоднородной среде (рис. 13). Расстояние, отсчитываемое вдоль траектории, обозначим  $s$ , тогда единичный вектор вдоль траектории луча  $l$  в точке  $R$  запишется

$$l = \frac{dR}{ds}, \quad (120)$$

с другой стороны, этот вектор может быть записан в виде

$$l = \frac{\nabla \Psi}{|\nabla \Psi|} = \frac{\nabla \Psi}{n}. \quad (121)$$

Сопоставляя две формы записи единичного вектора касательной к траектории луча  $l$  (120), (121):  $l = \frac{dR}{ds} = \frac{\nabla \psi}{n}$ , получим выражение для градиента эйконала

$$\nabla \psi = n \frac{dR}{ds}. \quad (122)$$

Выразим производную вдоль траектории луча

$$\frac{d}{ds} = \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{dR}{ds} \nabla = (l \nabla) \quad (123)$$

и рассмотрим, как вектор  $\nabla \psi$  меняется вдоль  $s$ :

$$d(\nabla \psi) / ds = (l \nabla)(\nabla \psi). \quad (124)$$

Используя (121) и известное векторное равенство  $(a \nabla) a = \nabla(a^2/2) - a \operatorname{rot} a$ , преобразуем выражение (124) к простому виду:

$$\frac{d(\nabla \psi)}{ds} = (l \nabla)(\nabla \psi) = \frac{((\nabla \psi) \cdot \nabla)(\nabla \psi)}{n} = \left[ \nabla \frac{(\nabla \psi)^2}{2} - (\nabla \psi) \operatorname{rot}(\nabla \psi) \right] = \frac{1}{n} \nabla \left( \frac{n^2}{2} \right) = \nabla n$$

И, наконец, исключая из выражения  $d(\nabla \psi) \cdot ds = \nabla n$  эйконал с помощью (122), получим

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{dR}{ds} \right) = \nabla n \quad \text{или} \quad \frac{d}{ds} (nl) = \nabla n. \quad (125)$$

## РЕФРАКЦИЯ. ВОЛНЫ В СЛОИСТЫХ СРЕДАХ

Рассмотрим распространение луча в плоскопараллельной слоистой среде, считая, что показатель преломления  $n(z)$  зависит только от вертикальной координаты  $z$  (рис. 14). Проекция уравнения на ось  $x$  дает

$$\frac{d(nl_x)}{ds} = \frac{\partial n(z)}{\partial x} = 0. \quad (126)$$

После интегрирования получим закон Снеллиуса:

$$nl_x = n(z) \sin \theta(z) = n_0 \sin \theta_0 = \text{const}, \quad (127)$$

где  $\theta$  – угол отклонения луча от вертикали,  $\theta_0$  – значение в некоторой фиксированной точке (обычно в точке входа луча в среду). В плоскопараллельной слоистой среде луч распространяется так, чтобы произведение показателя преломления на угол отклонения луча оставалось постоянной величиной. Используя геометрические соображения и тригонометрические формулы, получим дифференциальное уравнение

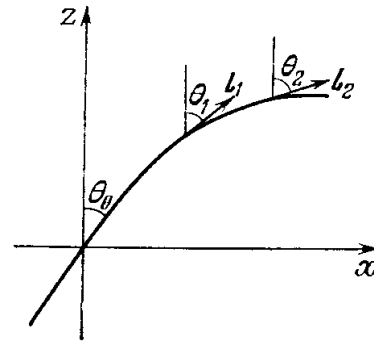


Рис. 14. Распространение луча в плоскопараллельной среде [11]

$$\frac{dx}{dz} = \frac{ds \sin \theta}{ds \cos \theta} = \text{tg } \theta = \frac{n_0 \sin \theta_0}{[n(z)^2 - (n_0 \sin \theta_0)^2]^{1/2}}, \quad (128)$$

позволяющее определить траекторию луча, если известно распределение  $n(z)$ . Иногда траекторию луча описывают другим уравнением

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{d(n^2)/dz \cdot dz/dx}{2n_0 \sin \theta_0 [n^2 - (n_0 \sin \theta_0)^2]^{1/2}} = \frac{d(n^2)/dz}{2(n_0 \sin \theta_0)^2}. \quad (129)$$

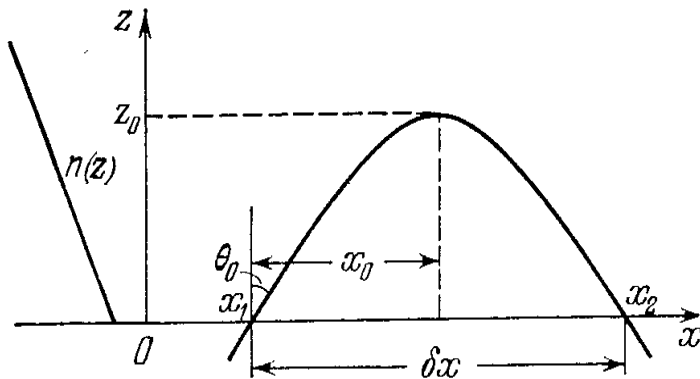


Рис. 15. Нормальная атмосферная рефракция [11]

Из (129) видно, что лучи в неоднородной среде искривляются. Это явление называется рефракцией.

Рефракционная картина зависит от распределения  $n(z)$ . Если показатель преломления монотонно уменьшается с высотой  $dn/dz < 0$ , то атмосферная рефракция называется нор-

мальной (характерное значение градиента показателя преломления  $dn/dz = -4 \cdot 10^{-8} \text{ м}^{-1}$ ). Из (127) следует, что уменьшение показателя преломления с высотой должно компенсироваться ростом  $\theta$ . В этом случае луч, вышедший с поверхности Земли под углом  $\theta_0$ , отклоняется от вертикали до тех пор, пока в некоторой точке не станет параллельным поверхности Земли  $\sin \theta = 1$  (рис. 15). При этом высота  $z_0$ , на которой это происходит, определяется из условия  $n(z_0) = n_0 \sin \theta_0$ . В дальнейшем происходит разворот луча и его возвращение на Землю. Подобные условия реализуются в атмосфере в случае, когда в нижних слоях господствует холодный антициклон, а в верхние слои притекает теплый воздух. Отметим, что вследствие нормальной рефракции светящиеся тела кажутся выше своего истинного положения. Для тел, расположенных на горизонте, подъем может достигать  $35'$ .

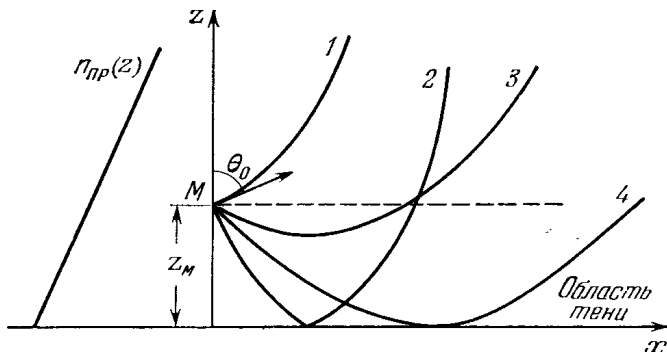


Рис. 16. Аномальная атмосферная рефракция

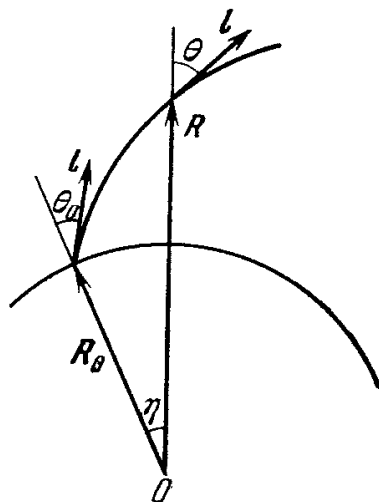


Рис. 17. Траектория луча в сферически слоистой среде

Случай монотонного роста показателя преломления с высотой  $dn/dz > 0$  реализуется вблизи хорошо прогретой поверхности Земли. В безветренную погоду такое состояние может сохраняться довольно долго. Рассмотрим поведение луча, выходящего из некоторой точки под углом  $\theta_0$  к вертикали (рис. 16). Если  $\theta_0 > \pi/2$ , траектория луча идет к поверхности Земли. Уменьшение показателя преломления должно компенсироваться ростом  $\sin \theta$ , т.е. уменьшением угла между траекторией и вертикалью. Может случиться так, что луч достигнет точки поворота на высоте, определяемой соотношением  $n(z_0) = n_0 |\sin \theta_0|$ , после чего возвращается в верхнюю часть пространства.

При больших значениях угла  $(\theta_0)^*$  точка поворота находится на Земле, являясь границей области тени А. Лучи, выходящие из некоторой точки над поверхностью Земли, не могут достичь

точек, расположенных левее А. Подобное поведение лучей в атмосфере наблюдается при возникновении миражей.

В сферически слоистой среде (рис. 17) показатель преломления зависит только от радиальной координаты  $n(R)$  и удобнее переписать уравнение (125) в виде

$$\frac{d(n\mathbf{l})}{ds} = \nabla n = \frac{\mathbf{R}}{R} \frac{\partial n}{\partial R}. \quad (126)$$

Умножая (126) векторно на  $\mathbf{R}$ , получим

$$\frac{d[\mathbf{R}(n\mathbf{l})]}{ds} = [\mathbf{R}\nabla n] = 0.$$

Это означает, что лучи принадлежат одной плоскости, причем вдоль траектории выполняется закон Снеллиуса для сферически слоистой среды:

$$n(R)R \sin \theta(R) = n_0 R_0 \sin \theta_0 = \text{const}. \quad (127)$$

Уравнение траектории в этом случае принимает вид

$$\text{tg} \theta = dR \frac{R d\eta}{dR} = \frac{R_0 n_0 \sin \theta_0}{[n^2 R^2 - (n_0 R_0 \sin \theta_0)^2]^{1/2}}. \quad (128)$$

Рассмотрим распространение электромагнитных волн в атмосфере Земли. Пусть луч выходит с поверхности  $z = 0$  под углом  $\theta_0$  к вертикали. На некоторой высоте над поверхностью  $z$  координата  $R = R_0 + z$  и выражение (127) можно записать в виде

$$n(z) \cdot (1 + z / R_0) \sin \theta = n_0 \sin \theta_0. \quad (129)$$

Если использовать приведенный показатель преломления  $n_{np} = n(z) \cdot (1 + z / R_0)$ , то вместо (129) получим известный для плоскостойкого случая закон Снеллиуса

$$n_{np} \sin \theta = n_0 \sin \theta_0. \quad (130)$$

При условии  $z / R_0 \ll 1$ , которое справедливо для Земли  $R_0 \approx 6400$  км, задача о распространении волн в сферически-слоистой среде сводится к плоскостойкому случаю.

## НЕЛИНЕЙНОСТЬ ВОЛНЫ. ОБРАЗОВАНИЕ РАЗРЫВОВ. УСЛОВИЕ ОБРАЗОВАНИЯ РАЗРЫВА

В случае, когда скорость распространения волны не является постоянной, зависит от величины возмущения  $c(\rho)$ , разные точки волны проходят разное расстояние за одно и то же время. Это приводит к нелинейному искажению профиля волны.

Пусть  $c(\rho)$  – возрастающая функция, тогда вершина волны (рис. 18) будет перемещаться быстрее, чем ее основание. Передний фронт волны будет укрупняться до тех пор, пока не появится неоднозначность решений. Эта неоднозначность

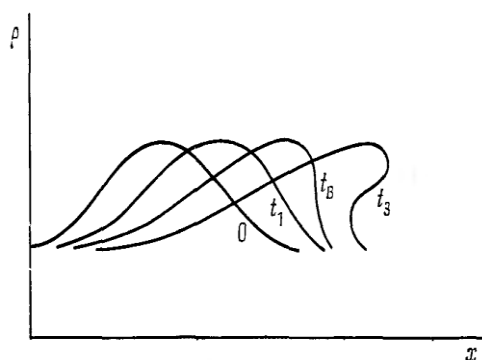


Рис. 18. Изменение профиля при опрокидывании волны [11]

может быть истолкована по-разному. В некоторых задачах она свидетельствует о невозможности в дальнейшем использовать некоторый математический аппарат, поскольку решение получается бессмысленным с физической точки зрения.

Например, процесс образования ударных волн в газовой динамике (или нелинейных волн в телеграфной линии). В каждой точке среды имеется только одно значение плотности газа, одно значение напряжения в

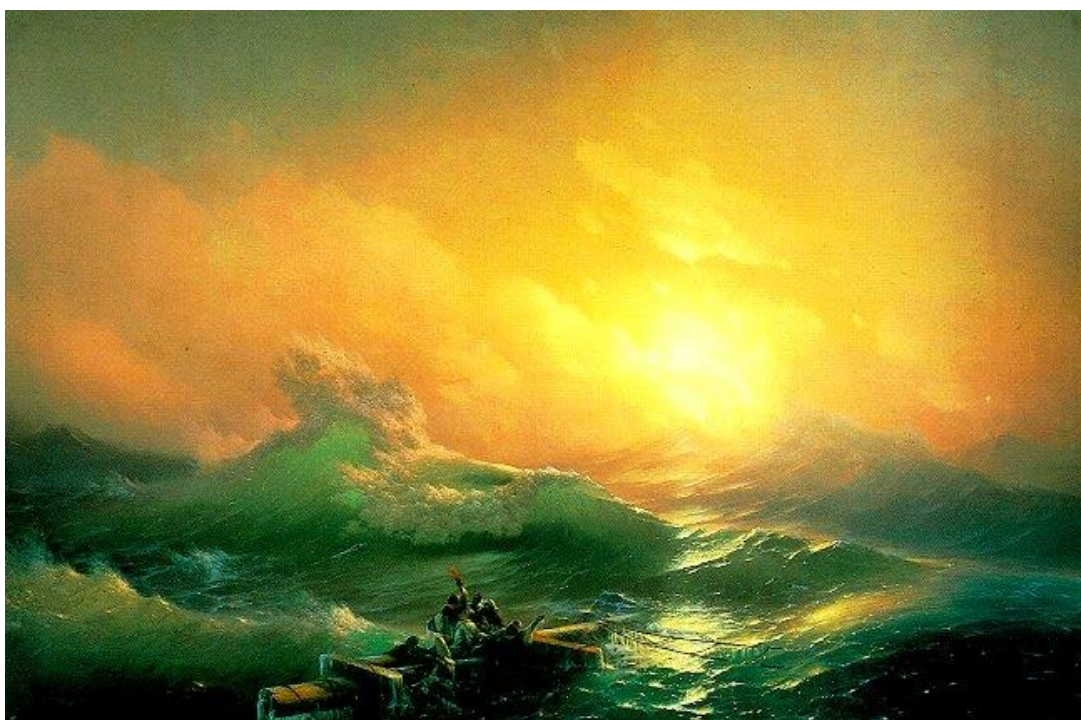


Рис. 19. Волна на поверхности воды

цепи. В других задачах неоднозначность решений имеет физический смысл. Это относится к процессу укрупнения и обрушения волн на поверхности воды. Это известное явление запечатлено на полотнах художников (Айвазовский, Девятый вал, рис. 19) и на множестве фотографий, размещенных в сети Internet. В любом случае пограничное состояние между однозначным и неоднозначным решением является особой точкой, называемой точкой образования разрыва. Характеристики разрыва можно найти в результате стандартных процедур, которые немного отличаются в случае задачи с начальными или граничными условиями.

Рассмотрим волну с начальным профилем  $\rho(x, t=0)$  (рис. 18), движущуюся слева направо со скоростью  $c(\rho)$  в среде, сохраняющей число частиц (без химических реакций)  $\rho = \text{const}$ . Тогда  $\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + c(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$  и, следовательно,

$$c(\rho) = \frac{dx}{dt} = \text{const}. \quad (131)$$

После интегрирования уравнения (131) получим

$$\xi = x - c(\rho)t = \text{const}, \quad (132)$$

где постоянная  $\xi$ , согласно (132), представляет собой значения координаты в начальный момент времени.

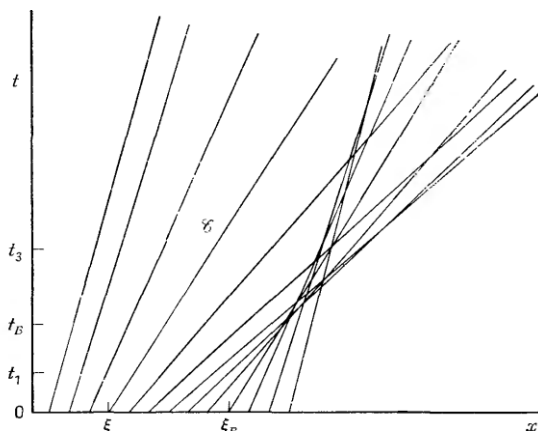


Рис. 19. Характеристическая плоскость [11]

В теории волн часто используют характеристическую плоскость, на которой по оси абсцисс отложена координата, по оси ординат — время какой-либо точки волны. В случае  $\xi_1 = x_1$  (рис. 19) на характеристической плоскости  $t(x)$  мы получим прямую, тангенс угла наклона к оси абсцисс которой равен  $\text{tg}\alpha_1 = 1/c_1$ , и эта прямая про-

ходит через точку  $(x_1, 0)$ . Для других начальных условий  $\xi_2 = x_2$  угол наклона к оси абсцисс будет другой —  $\text{tg}\alpha_2 = 1/c_2$ ,  $c_2 = c(\rho(x_2, t=0)) < c_1$ . В нашем примере (рис. 19) он меньше.

Из рисунка видно, что две характеристики пересекаются в некоторой точке  $(t^*, x^*)$ , которая характеризует образование разрыва. В момент времени  $t = t^*$  на профиле волны появляется участок неоднозначности: значению координаты  $x = x^*$  соответствует целый интервал значений переменной, характеризующей

волну  $[\rho_{\min} - \rho_{\max}]$ . Этот процесс называется образованием разрыва. При дальнейшей эволюции неоднозначность профиля сохраняется: каждому значению  $x$  соответствуют три значения  $\rho$ .

В нашем случае возрастающей функции  $c(\rho)$  разрыв образуется на переднем фронте волны. Если  $c(\rho)$  убывает – разрыв будет формироваться на заднем фронте волны.

Для определения координат разрыва используется методика, в основе которой лежит то, что в точке разрыва производные

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \infty, \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = \infty. \quad (133)$$

Это легко понять, рассматривая функции  $x(\rho)$  в моменты времени  $t_2 > t_1 > t^*$ . Из рисунка видно, что при  $t = t_2$  функция имеет максимум  $x_{\max} = x(\rho_2, t_2)$  и минимум  $x_{\min} = x(\rho_1, t_2)$ . При меньших временах максимум и минимум сближаются, сливаясь при  $t = t^*$ . При этом точка максимума и минимума совпадают с точкой перегиба, что ведет к условию

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial \rho^2} = 0, \quad (134)$$

из которого сразу следует (133).

Способ определения координат разрыва немного отличается в задачах с начальными условиями и в задачах с граничными условиями.

Рассмотрим задачу с начальными условиями. Если в момент времени  $t=0$  задан профиль  $\rho(x, t=0)$ , его можно рассмотреть как функцию  $\rho(\xi)$  и найти обратную функцию:

$$\xi = x - c(\rho)t = G(\rho), \quad (135)$$

которая определяет линию на характеристической плоскости, вдоль которой переменная  $\rho = \text{const}$  и скорость  $c(\rho)$  постоянны. Используя разные начальные данные  $x$  и, следовательно,  $\xi$ , мы будем получать разные характеристики. Рассмотрим этот набор характеристик как функцию  $\xi(\rho)$  при различных значениях времени  $t$ , рассматриваемого как параметр.

Дифференцируя выражение (135) дважды, получим

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} - \frac{\partial c(\rho)}{\partial \rho} t = \frac{\partial G(\rho)}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial \rho^2} - \frac{\partial^2 c(\rho)}{\partial \rho^2} t = \frac{\partial^2 G(\rho)}{\partial \rho^2}. \quad (136)$$

Решая совместно уравнения (135), (136) при использовании условий (134), получим характеристики разрыва:  $t^*$ ,  $x^*$ ,  $\rho^*$



## ВЛИЯНИЕ ДИССИПАЦИИ НА СТРУКТУРУ РАЗРЫВА

Если предполагается, что поток частиц зависит только от их концентрации  $q(\rho)$ , то

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = c(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x}. \quad (137)$$

Однако если рассматривать процессы, в которых важна диффузия частиц, то выражение для потока должно быть усовершенствовано

$$q(\rho) \rightarrow q(\rho) - D \frac{\partial \rho}{\partial x}. \quad (138)$$

Интересно, что подобный вид потока используется для описания волн в потоке транспорта на дороге без ответвлений [2]. Если второе градиентное слагаемое мало, то поток равен произведению числа частиц на скорость  $q(\rho) = c \cdot \rho$ , все машины в потоке движутся с одинаковой скоростью. В случае красного светофора, аварии или пробки в некотором месте дороги образуется избыток машин, а их градиент  $\frac{\partial \rho}{\partial x}$  будет направлен из области их меньшей концентрации в сторону большей. Общий поток, согласно (138), уменьшится. На бытовом уровне это знакомо всем: все адекватные водители снижают скорость, заметив впереди скопление машин.

Используя (138) вместо (137), получим нелинейное уравнение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \quad (139)$$

учитывающее диссипацию.

Рассмотрим решения (139) в виде бегущей с постоянной скоростью  $V$  волны  $\rho = \rho(\xi) = \rho(x - Vt)$  и перейдем от уравнения в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$D \frac{d^2 \rho}{d\xi^2} = (c(\rho) - V) \frac{d\rho}{d\xi}. \quad (140)$$

После однократного интегрирования получим

$$D \frac{d\rho}{d\xi} = (q(\rho) - V\rho) + A. \quad (141)$$

Для дальнейшего анализа задачи необходимо знать явный вид функции  $q(\rho)$ . Представим простейший вид нелинейной зависимости – квадратичный закон  $q(\rho) = \alpha \rho^2 + \beta \rho + \gamma$ .

Рассмотрим решения уравнения (141), удовлетворяющие следующим условиям на бесконечности:  $\xi = -\infty$ ,  $\rho = \rho_1$  и  $\xi = \infty$ ,  $\rho = \rho_2 < \rho_1$ . Отметим прежде всего, что правая часть (141) может быть записана в виде

$$(q(\rho) - V\rho) + A = \alpha(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2), \quad (142)$$

что приводит к автоматическому удовлетворению этого уравнения на бесконечности. Кроме того, неизвестные константы  $A$  и  $V$  выражаются через значения  $\rho_1, \rho_2$ . Уравнение (141) с учетом (142) после разделения переменных примет вид

$$\frac{d\rho}{(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)} = \frac{\alpha}{D} d\xi. \quad (143)$$

Пользуясь методом неопределенных коэффициентов, перепишем (143)

$$\int \frac{d\rho}{(\rho - \rho_1)} - \int \frac{d\rho}{(\rho - \rho_2)} = \frac{\alpha(\rho_1 - \rho_2)}{D} \int d\xi, \quad (144)$$

а затем, интегрируя (144), получим выражение

$$\ln \frac{\rho - \rho_1}{\rho - \rho_2} = \frac{\alpha(\rho_1 - \rho_2)}{D} \xi + \ln C. \quad (145)$$

После потенцирования (145)

$$\frac{\rho - \rho_1}{\rho - \rho_2} = C \exp \left\{ \frac{\alpha(\rho_1 - \rho_2)}{D} \xi \right\}, \quad (146)$$

из которого найдем

$$\rho = \frac{\rho_1 + C\rho_2 \exp \left\{ \frac{\alpha(\rho_1 - \rho_2)}{D} \xi \right\}}{1 + C \exp \left\{ \frac{\alpha(\rho_1 - \rho_2)}{D} \xi \right\}} = \frac{\rho_1 + C\rho_2 \exp \left\{ \frac{\xi}{L} \right\}}{1 + C \exp \left\{ \frac{\xi}{L} \right\}} = \frac{\rho_1 + C\rho_2 \exp \{\xi'\}}{1 + C \exp \{\xi'\}}, \quad (147)$$

где  $L = \frac{D}{\alpha(\rho_1 - \rho_2)}$  – характерный масштаб  $\xi$ . В качестве толщины переходной области, в которой неизвестная, описывающая волну, изменяется от верхнего

предела  $\rho_1$  до нижнего  $\rho_2$ , можно выбрать величину  $L_1 = \frac{(\rho_1 - \rho_2)}{\max(\text{abs}(\rho_{\xi'}))} L$ . Вы-

числения показывают, что максимум крутизны профиля  $\text{abs}(\rho_{\xi'})$  соответствует

точке  $\xi' = -\ln C$  и равен  $(\rho_1 - \rho_2)/4$ , что дает  $L_1 = \frac{4D}{\alpha(\rho_1 - \rho_2)}$ .

В отсутствие диссипации ( $D = 0$ ) разрыв существует – волна имеет ступенчатый профиль. Диссипация ведет к размыванию такого профиля, а увеличение  $D$  увеличивает область перехода (рис. 20).

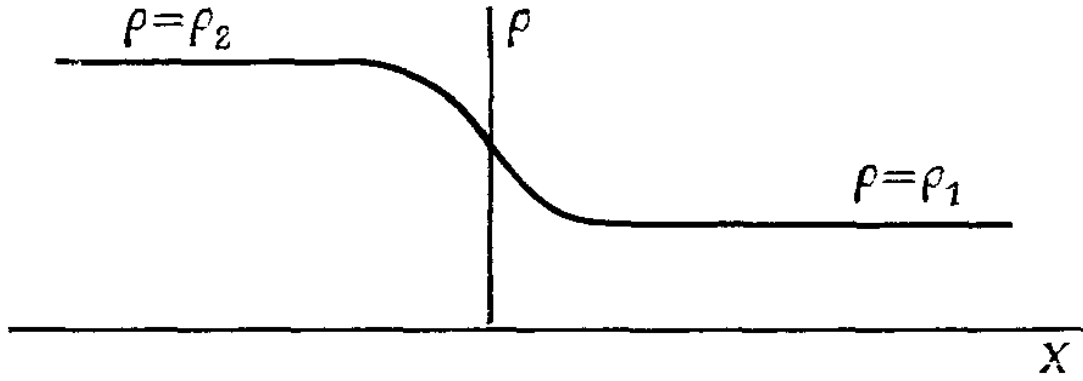


Рис. 20. Структура ударной волны [11]

Умножая (139) на производную от скорости и интегрируя полученное уравнение

$$c'(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial t} + c'(\rho) c(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} = D c'(\rho) \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \quad (148)$$

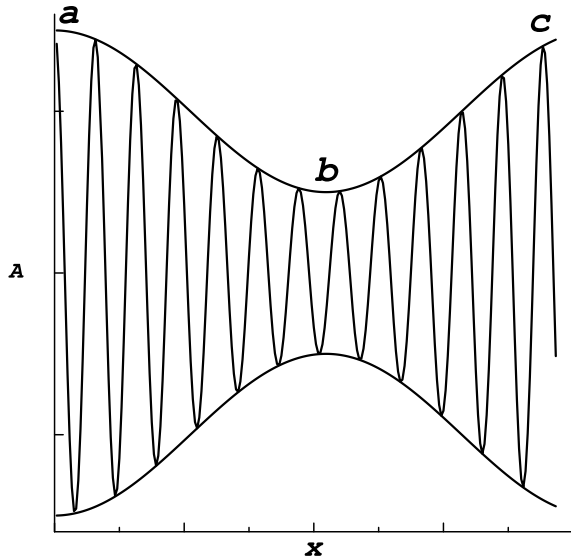
$$\frac{\partial c}{\partial t} + c(\rho) \frac{\partial c}{\partial x} = D \left( \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - c''(\rho) \left( \frac{\partial c}{\partial x} \right)^2 \right), \quad (149)$$

получим уравнение Бюргерса в случае, когда  $c''(\rho) = 0$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + c(\rho) \frac{\partial c}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}. \quad (150)$$

## САМОСЖАТИЕ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ

Модуляционная неустойчивость, или неустойчивость относительно самосжатия волновых пакетов, продемонстрирована на рис. 21. При выполнении некоторых условий амплитуда модуляции нарастает, степень перетяжек пучка увеличивается до тех пор, пока пучок не разбивается на отдельные волновые пакеты. Широко известным примером явления самосжатия волновых пакетов являются волны на поверхности воды: набегающие на берег волны изменяют свою амплитуду.



**Рис. 21. Самосжатие волновых пакетов**

Получим условие, приводящее к модуляционной неустойчивости. В нелинейном случае закон дисперсии усложняется, частота зависит не только от волнового числа, но и от амплитуды волны

$$\omega = f(k, A^2). \quad (151)$$

Будем считать, что нелинейность мала, что позволяет разложить дисперсионное уравнение в ряд по степеням амплитуды

$$\omega = f(k) + \frac{\partial \omega}{\partial A^2} A^2 + \dots = \omega_0(k) + \alpha A^2 + \dots \quad (152)$$

Подставляя дисперсионное соотношение (151) в соотношение (152)

$$\frac{\partial k}{\partial t} = -\frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad (153)$$

получим:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial x} + \alpha \frac{\partial A^2}{\partial x} = 0. \quad (154)$$

Кроме того, будем использовать уравнение для амплитуды, вытекающее из уравнения переноса энергии

$$\frac{\partial A^2}{\partial t} + \frac{\partial (v_{gp} A^2)}{\partial x} = 0. \quad (155)$$

Рассмотрим малые возмущения  $\delta A, \delta k$  несущей гармоники с амплитудой и волновым числом  $A_0, k_0$ .

$$k = k_0 + \delta k, \quad \delta k \ll k_0, \quad (156)$$

$$A = A_0 + \delta A, \quad \delta A \ll A_0.$$

Линеаризуя систему (154), (155) и учитывая зависимость групповой скорости от волнового числа  $v_{gp} \approx v_{gp}(k_0) + \frac{\partial v_{gp}}{\partial k} \delta k$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta k}{\partial t} + v_{gp} \frac{\partial \delta k}{\partial x} + 2\alpha A_0 \frac{\partial \delta A}{\partial x} &= 0, \\ 2A_0 \frac{\partial \delta A}{\partial t} + v_{gp} 2A_0 \frac{\partial \delta A}{\partial x} + A_0^2 \frac{\partial v_{gp}}{\partial k} \frac{\partial \delta k}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (157)$$

Рассмотрим эволюцию медленных, длинноволновых по отношению к частоте и длине волны основной гармоники ( $\kappa \ll k_0, \nu \ll \omega_0$ ) возмущений вида

$$col(\delta k, \delta A) \sim \exp[i(\kappa x - \nu t)], \quad (158)$$

нарастание которых приводит к увеличению глубины модуляции. Используя решения вида (158) в системе (157), получим

$$\begin{aligned} -i\nu \delta k + i v_{gp} \kappa \delta k + 2\alpha A_0 \frac{\partial \delta A}{\partial x} &= 0, \\ 2A_0 \frac{\partial \delta A}{\partial t} + v_{gp} 2A_0 \frac{\partial \delta A}{\partial x} + A_0^2 \frac{\partial v_{gp}}{\partial k} \frac{\partial \delta k}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (159)$$

Для разрешимости линейной относительно  $\delta A, \delta k$  системы уравнений ее определитель должен обращаться в ноль

$$\begin{vmatrix} i(\nu - \kappa v_{gp}) & i\kappa 2\alpha A_0 \\ i\kappa A_0^2 \frac{\partial v_{gp}}{\partial k} & i2A_0(\nu - \kappa v_{gp}) \end{vmatrix} = 0. \quad (160)$$

Из (160) получаем дисперсионное соотношение

$$\nu = \left\{ v_{gp} \pm \left( \alpha A_0^2 \frac{\partial v_{gp}}{\partial k} \right)^{1/2} \right\} \kappa. \quad (161)$$

Модуляционная неустойчивость возникает при нарастании возмущений, т.е. в случае комплексного значения частоты  $\nu = \nu' + i\nu''$ , которое возможно при условии

$$\alpha A_0^2 \frac{\partial v_{gp}}{\partial k} < 0, \quad \text{или} \quad \alpha \frac{\partial v_{gp}}{\partial k} < 0. \quad (162)$$

Неустойчивость данного типа имеет простую интерпретацию. Пусть  $\alpha > 0$ , что соответствует росту частоты с увеличением амплитуды. Тогда на участке АВ рис. 21 частота будет убывать  $\partial\omega < 0$ . В соответствии с (153) на этом участке волновое число будет возрастать со временем, уменьшая групповую скорость

$$\begin{aligned} \delta v_{gp} &= v_{gp} - v_{gp}(k_0) = \frac{\partial v_{gp}}{\partial k} \delta k, \\ \delta k > 0, \quad \partial v_{gp} &= \frac{\partial \omega}{\partial k} < 0, \quad \delta k > 0 \end{aligned} \quad (163)$$

Волновой пакет вследствие этих процессов будет отставать на интервале АВ, увеличивая амплитуду в точке максимума. На участке ВС частота волны растет вместе с амплитудой, а волновое число убывает, что ведет к увеличению групповой скорости и ускорению волны на этом участке.

Для гравитационных волн конечной амплитуды на поверхности глубокой воды нелинейное дисперсионное соотношение имеет вид

$$\omega(k, A^2) = \sqrt{gk} \left( 1 + 1/2 A^2 k^2 + \dots \right), \quad (164)$$

что дает выражения для

$$\alpha = \sqrt{gk} k^2 / 2, \quad v_{gp} = \left( \frac{\partial \omega}{\partial k} \right)_{k_0} = \sqrt{g/k} / 2. \quad (165)$$

Вычисляя  $\left( \frac{\partial v_{gp}}{\partial k} \right)_{k_0} = -\sqrt{g/k^3} / 4$ , получим, что условие неустойчивости выполняется:

$$\alpha \frac{\partial v_{gp}}{\partial k} = \frac{\sqrt{gk} k^2}{2} \left( -\frac{\sqrt{g}}{4\sqrt{k}k} \right) = -\frac{g}{8k} < 0. \quad (166)$$

## ИОННЫЙ ЗВУК

Большое разнообразие волновых процессов наблюдается в плазме. Рассмотрим важный и интересный случай распространения волн, называемых ионным звуком. Это происходит в ситуации, когда импульс ионов много больше импульса электронов  $m_i v_i \gg m_e v_e$  (инерцией электронов можно пренебречь), но в то же время ионная температура много меньше электронной  $T_i \ll T_e$   $\left( \frac{m_i v_i^2}{2} \ll \frac{m_e v_e^2}{2} \right)$ . Оба условия дают интервал соотношения скоростей ионов и

электронов, в котором могут наблюдаться подобные явления:  $\sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \ll \frac{v_e}{v_i} \ll \frac{m_i}{m_e}$ .

Для водородной плазмы, содержащей самые легкие ионы:  $m_i / m_e \approx 1840$ , это соотношение будет выполняться в области  $43 \ll v_e / v_i \ll 1846$ . Для всех других ионов интервал скоростей увеличивается. В плазме могут возникать волны, фазовая скорость которых удовлетворяет условию  $\sqrt{k_B T_i / m_i} \ll v_\phi \ll \sqrt{k_B T_e / m_e}$ , и уравнение движения ионов описывается уравнением холодной плазмы. Полная система уравнений в одномерном случае примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial x} &= -\frac{e}{m_i} \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad 0 = -\frac{1}{n_e m_e} \frac{\partial}{\partial x} (n_e k_B T_e) + \frac{e}{m_e} \frac{\partial \phi}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= -4\pi e (n_i - n_e), \quad \frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (n_i v_i) = 0. \end{aligned} \quad (167)$$

Поскольку  $p_i = n_i k_B T_i$ ,  $p_e = n_e k_B T_e$ , то  $p_i \ll p_e$ , что позволяет пренебречь в системе двухжидкостной гидродинамики плазмы не только инерцией электронов, но и ионным давлением.

Рассмотрим сначала уравнения малых возмущений механического равновесия ( $v_0 = 0$ ) квазинейтральной плазмы  $n_{i0} \approx n_{e0} = n_0$  для скорости  $v$ , потенциала  $\phi$ , концентрации ионов  $n_i$  и электронов  $n_e$ , которые примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial t} &= -\frac{e}{m_i} \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad 0 = -\frac{1}{n_e m_e} \frac{\partial}{\partial x} (n_e k_B T_e) + \frac{e}{m_e} \frac{\partial \phi}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= -4\pi e (n_i - n_e), \quad \frac{\partial n_i}{\partial t} + n_0 \frac{\partial}{\partial x} (v_i) = 0. \end{aligned} \quad (168)$$

Решение этой системы представим в виде вектора столбца:

$$\text{col}(v, \phi, n_i, n_e) = (V, \Phi, N_i, N_e) \cdot \exp[i(kx - \omega t)], \quad (169)$$

после чего система уравнений в частных производных превратится в систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
i\omega V - \frac{ike}{m_i} \Phi &= 0, \quad \frac{ike}{m_e} \Phi - \frac{ikk_B T_e}{n_0 m_e} N_e = 0, \\
k^2 \Phi - 4\pi e(N_i - N_e) &= 0, \quad ikn_0 V - i\omega N_i = 0.
\end{aligned} \tag{170}$$

Сокращая в (170) мнимые единицы и требуя выполнения условия разрешимости этой системы, приравняем к нулю определитель:

$$\begin{vmatrix}
\omega & \frac{ke}{m_i} & 0 & 0 \\
0 & e & 0 & \frac{k_B T_e}{n_0} \\
0 & k^2 & -4\pi e & 4\pi e \\
kn_0 & 0 & 0 & \omega
\end{vmatrix} = 0. \tag{171}$$

Из (171) сразу же получается дисперсионное соотношение

$$\omega^2 = \frac{\left( \frac{k_B T_e}{m_i} \right) k^2}{\left( 1 + k^2 \frac{k_B T_e}{4\pi m_0 e^2} \right)} = \frac{v_s^2 k^2}{(1 + k^2 r_D^2)}. \tag{172}$$

Величина  $v_s$  — ионно-звуковая скорость.

Зависимость  $\omega(k)$  представлена на рис. 22. При  $k \rightarrow \infty$  частота выходит на постоянную асимптоту  $\omega \approx v_T / r_D = \omega_{pi}$ , соответствующую плазменной частоте

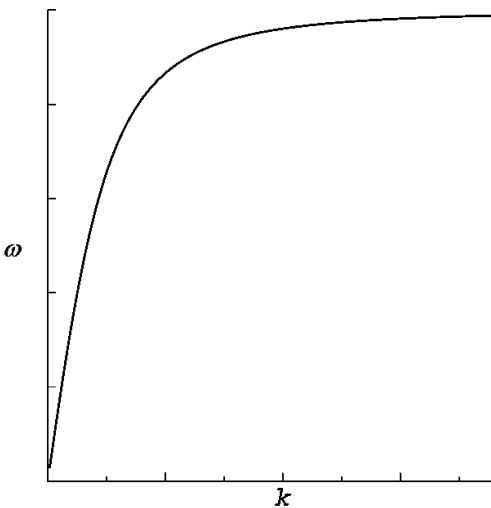


Рис. 22. Ионный звук.  
Дисперсионное соотношение

ионов. Если длина волны много больше пространственного масштаба плазмы  $r_D \ll \lambda$  (т.е.  $kr_D \ll 1$ ), то фазовая скорость постоянна и равна ионно-звуковой. Дисперсии нет. Это связано с тем, что отклонение от квазинейтральности не оказывает влияния на распространение волны и можно использовать условие  $n_i = n_e$ . Из (172) видно, что фазовая скорость всегда больше тепловой скорости электронов  $v_s = \sqrt{k_B T_e / m_i} \ll \sqrt{k_B T_e / m_e}$ . С другой стороны, фазовая скорость будет больше тепловой скорости ионов  $\sqrt{k_B T_e / m_e} \ll v_s = \sqrt{k_B T_e / m_i}$  при

выполнении условия  $T_e \gg T_i(1 + k^2 r_D^2)$ , что заведомо реализуется для волн конечной и большой длины.



Рассмотрим распространение нелинейных волн:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial t} + \left( v_i \frac{\partial}{\partial x} \right) v_i &= -\frac{k_B T_e}{m_i n_i} \frac{\partial n_i}{\partial x}, \quad \frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (n_i v_i) = 0, \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= -4\pi e (n_i - n_e). \end{aligned} \quad (173)$$

Будем считать, что электроны находятся в равновесии в электрическом поле с потенциалом  $\phi$  и выполняется закон распределения Больцмана

$$n_e(x, t) = n_0 \exp\left(\frac{e\phi(x, t)}{k_B T}\right), \quad (174)$$

где  $n_0$  – концентрация электронов при  $\phi=0$ . Отметим, что при нелинейной эволюции системы (167) отклонение от квазинейтральности, отвечающее за дисперсию волн, имеет важное значение. Нелинейность ведет к укрупнению фронта и опрокидыванию волны. При увеличении крутизны фронта характерный размер изменения параметров уменьшается и становится порядка радиуса Дебая. Начиная с этого момента, дисперсия играет важную роль, ограничивая процессы опрокидывания.

Найдем солитонное решение задачи (167), зависящее от бегущего аргумента  $\xi = x - \lambda t$  ( $\lambda = \text{const}$ ). Прежде всего, перейдем от уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned} (v_i - \lambda) \frac{\partial v_i}{\partial \xi} &= -\frac{k_B T_e}{m_i n_i} \frac{\partial n_i}{\partial \xi}, \quad (v_i - \lambda) \frac{\partial n_i}{\partial \xi} + n_i \frac{\partial v_i}{\partial \xi} = 0, \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} &= -4\pi e (n_i - n_e). \end{aligned} \quad (175)$$

Первые два уравнения системы легко привести к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial (v_i - \lambda)^2}{\partial \xi} &= -\frac{k_B T_e}{m_i n_i} \frac{\partial n_i}{\partial \xi}, \quad (v_i - \lambda) \frac{\partial n_i}{\partial \xi} + n_i \frac{\partial v_i}{\partial \xi} = 0, \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} &= -4\pi e (n_i - n_e) \end{aligned} \quad (176)$$

и проинтегрировать:

$$m_i \frac{(v_i - \lambda)^2}{2} + e \frac{\partial \phi}{\partial \xi} = 0. \quad (177)$$

Исключая из (176) концентрацию ионов и подставляя туда явное выражение для распределения электронов (174), получим

$$\phi'' = -4\pi e n_0 \left\{ \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 2e\phi / m_i}} - \exp\left(\frac{e\phi}{k_B T}\right) \right\}, \quad (178)$$

уравнение колебаний частицы в нелинейной потенциальной яме.

Уравнение (178) можно явно проинтегрировать

$$-\frac{(\varphi')^2}{2} = 4\pi en_0 \left\{ -\frac{\lambda m_i}{e} \sqrt{\lambda^2 - \frac{2e\varphi}{m_i}} - \frac{k_B T}{e} \exp\left(\frac{e\varphi}{k_B T}\right) \right\} + C. \quad (179)$$

Солитонное решение должно удовлетворять условиям отсутствия волны на бесконечности:  $\varphi=0$ ,  $\varphi'=0$ , что позволяет определить постоянную в уравнении (179)  $C = 4\pi n_0 (m_i \lambda^2 + k_B T_e)$ . Удобно характеризовать поведение системы (176) по виду траекторий на фазовом портрете для скорости ионов  $(v') = f(v)$ , который представлен на рис. 23 при разных значениях начальной энергии системы. Уединенной волне соответствует траектория, соответствующая случаю  $E=0$ .

Удобно выразить скорость уединенной волны через максимально возможное значение потенциала  $\varphi_{\max}$ , подставляя в (179) условие  $\varphi' = 0$ :

$$\lambda^2 = \frac{k_B T_e}{2m_i} \frac{\left[ \exp\left(\frac{e\varphi_{\max}}{k_B T}\right) - 1 \right]^2}{\left[ \exp\left(\frac{e\varphi_{\max}}{k_B T}\right) - 1 - \frac{e\varphi_{\max}}{k_B T} \right]}. \quad (180)$$

Солитоны могут существовать не при любых значениях потенциала, поскольку

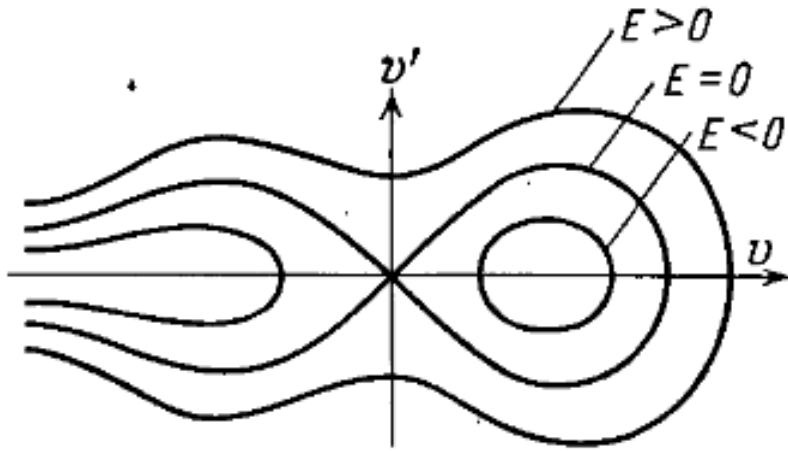


Рис. 23. Ионный звук. Солитонное решение

ионы должны проникать через потенциальный барьер. Предельное значение потенциала, при котором это возможно, определяется соотношением:

$$e\varphi_{\max} = \frac{m_i \lambda^2}{2}. \quad (181)$$

Используя (180) и (181), получим для  $z = e\varphi_{\max} / k_B T$  трансцендентное уравнение

$$4z = \frac{[\exp z - 1]^2}{\exp z - 1 - z}, \quad (182)$$

приближенный корень которого равен  $z \approx 1.3$ , или

$$e\varphi_{\max} \approx 1.3 k_B T_e. \quad (183)$$

## НЕЛИНЕЙНАЯ ВОЛНА В СРЕДЕ С ДИСПЕРСИЕЙ И ДИССИПАЦИЕЙ

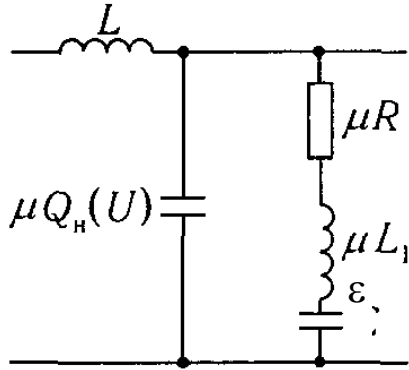


Рис. 24. Телеграфная линия с диссипацией, дисперсией и нелинейностью [2]

Рассмотрим в качестве примера модели нелинейной среды телеграфную линию (рис. 24) [2], содержащую малые нелинейные емкости  $\epsilon C_n$ , и элементы, порождающие диссипацию  $\epsilon R$  и дисперсию  $\epsilon L_1$ . Запишем для единицы длины телеграфной линии закон Фарадея

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -L \frac{\partial I}{\partial t} \quad (184)$$

и закон сохранения заряда

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial x} &= -\frac{\partial Q}{\partial t} = -\frac{\partial Q_1}{\partial t} - \frac{\partial Q_2}{\partial t} = \\ &= -\frac{\partial Q_1}{\partial t} - \frac{\partial Q_2}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\partial Q_1}{\partial t} - \epsilon C_n \frac{\partial U}{\partial t}, \end{aligned} \quad (185)$$

в котором разделены процессы эволюции заряда в линейных  $Q_1$  и нелинейных элементах  $Q_2$ , напряжение на которых одинаково. На линейном участке цепи падение напряжения происходит на конденсаторе, активной нагрузке и катушке индуктивности:

$$\frac{Q_1}{C} + \epsilon R \frac{\partial Q_1}{\partial t} + \epsilon L_1 \frac{\partial^2 Q_1}{\partial t^2} = U. \quad (186)$$

Выразим заряд  $Q_1$  из () в виде ряда по малому параметру  $\epsilon$

$$Q_1 = CU - \epsilon \left[ RC \frac{\partial Q_1}{\partial t} + L_1 C \frac{\partial^2 Q_1}{\partial t^2} \right]. \quad (187)$$

Отметим, что в нулевом по  $\epsilon$  приближении соотношения (184), (185) соответствуют случаю линейной телеграфной линии:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= -L \frac{\partial I}{\partial t}, \\ \frac{\partial I}{\partial x} &= -C \frac{\partial U}{\partial t}. \end{aligned} \quad (188)$$

Записывая соотношения (188) в ином виде

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -L \frac{\partial I}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial t}, \quad \frac{\partial I}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial x} = -C \frac{\partial U}{\partial t} \quad (189)$$

и сравнивая их, получим

$$\left( \frac{\partial I}{\partial U} \right)^2 = \frac{C}{L} \text{ или } I = \sqrt{\frac{C}{L}} U. \quad (190)$$

Подставляя (187) в (195) и пренебрегая слагаемыми малости порядка выше первого, получим

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -C \frac{\partial U}{\partial t} - \varepsilon C \left[ \frac{C_H}{C} \frac{\partial U}{\partial t} - R \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - L_l \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} \right]. \quad (191)$$

С помощью связи (190) исключим из (191) силу тока

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{\partial U}{\partial x} = -\varepsilon \left[ \frac{C_H(U)}{C} \frac{\partial U}{\partial t} - RC \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - L_l C \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} \right]. \quad (192)$$

В нулевом по  $\varepsilon$  приближении уравнение (192) представляет собой уравнение простой волны

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad (193)$$

что позволяет заменить в правой части уравнения (192) производные по следующему правилу:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{\partial}{\partial x} \quad (194)$$

и получить уравнение

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{\partial U}{\partial x} = \varepsilon \left[ \frac{C_H(U)}{C} \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{RC}{LC} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{L_l C}{LC \sqrt{LC}} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right]. \quad (195)$$

Вводя обозначения

$$v(U) = \frac{1}{\sqrt{LC}} - \varepsilon \frac{C_H(U)}{C} \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad v = \varepsilon \frac{R}{L}, \quad \beta = \varepsilon \frac{L_l}{L \sqrt{LC}}, \quad (196)$$

получим стандартное уравнение одноволнового приближения

$$\frac{\partial U}{\partial t} + v(U) \frac{\partial U}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} = v \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad (197)$$

учитывающее нелинейность волны  $v(U)$ , ее диссипацию  $v \propto R$  и дисперсию  $\beta$ .

## УРАВНЕНИЕ КОРТВЕГА–ДЕ ФРИЗА

В теории нелинейных волн особое место занимает уравнение Кортвега–де Фриза

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad (198)$$

описывающее распространение уединенной, нелинейной волны, сохраняющей свой профиль. Впервые такие волны наблюдались в 1834 г. Скоттом Расселом на поверхности воды в канале [9]. Источником волны была баржа. Она внезапно остановилась, а вода сформировала горб высотой 30–50 см и шириной порядка 10 м, который перемещался со скоростью 13–14 км/час. Волны с подобными свойствами были обнаружены в оптике, в твердом теле, в плазме. Уравнение Кортвега–де Фриза (198) представляет собой частный случай уравнения (197) в среде без диссипации  $\nu = 0$  при  $U = u$ ,  $v(U) = u$ .

Найдем решение уравнения (198), зависящее от бегущего аргумента  $\xi = x - Vt$ , переписывая его в виде

$$u \frac{\partial u}{\partial \xi} - V \frac{\partial u}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} = 0 \quad (199)$$

и интегрируя

$$\beta \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \left( \frac{u^2}{2} - Vu \right) = \text{const}. \quad (200)$$

Используя другую переменную, можно обратить константу в ноль.

Используем аналогию между (200) и нелинейным маятником в потенциале  $W(u)$ :

$$\beta \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = -\frac{\partial W(u)}{\partial u}, \quad W(u) = \frac{u^6}{6} - \frac{Vu^2}{2}, \quad (201)$$

где  $\beta$  – аналог массы,  $u$  – координаты,  $\xi$  – времени. Домножая уравнение (200) на интегрирующий множитель  $\partial u / \partial \xi$  и интегрируя, можно получить закон сохранения энергии

$$\beta \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{u^6}{6} - \frac{Vu^2}{2} \right) = C. \quad (202)$$

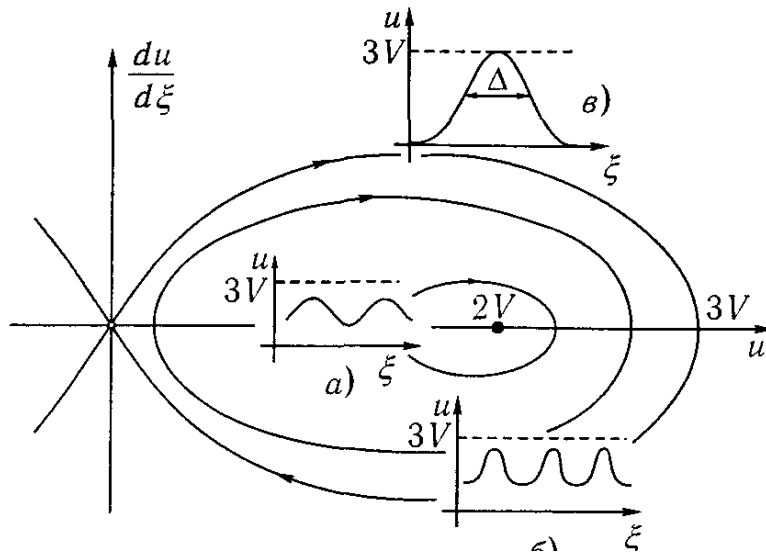


Рис. 25. Солитонное решение уравнения КдФ [2]

Различным значениям начальной энергии  $C$  соответствуют разные типы решений уравнения (198). Получим из (202) зависимость  $\partial u / \partial \xi = f(u)$  и построим фазовый портрет колебательной системы (рис. 25)

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \pm \left[ \frac{1}{\beta} \left( \frac{u^3}{6} - \frac{Vu^2}{2} \right) \right]^{1/2}, \quad (203)$$

используя качественную теорию дифференциальных уравнений [6].

Положениями равновесия для осциллятора (200) являются значения  $u_1 = 0, u_2 = 2V$ , первое из которых – неустойчивая особая точка типа седло. Другая особая точка системы  $u = 2V, \partial u / \partial \xi = 0$  – центр, вблизи которой возможны малые гармонические колебания вблизи дна потенциальной ямы  $W(u)$ , соответствующие замкнутым фазовым траекториям (рис. 25 а) и линейным волнам.

В случае, когда начальная энергия равна нулю:  $\xi \rightarrow \pm\infty \quad u = 0, \partial u / \partial \xi = 0$ , фазовая траектория представляет собой сепаратриссу, движение по которой соответствует локализованному решению в виде уединенной волны (рис. 25 в):  $u_{\min} = 0, u_{\max} = 3V$ . Периодические решения вблизи сепаратриссы, соответствующие  $u \neq 0, \partial u / \partial \xi = 0$  и малым начальным энергиям, дают решение в виде сильно нелинейных кноидальных волн: система проводит много времени вблизи неустойчивой особой точки (рис. 25 б). Это связано с тем, что инкремент возмущений вблизи нуля мал.

## СОЛИТОН

Солитонное решение уравнения (198) можно записать в виде

$$u(x, t) = \frac{u_{\max}}{\operatorname{ch}^2[(x - Vt) / \Delta]} = \frac{u_{\max}}{\operatorname{ch}^2[\xi / \Delta]}. \quad (204)$$

Параметры  $u_{\max}$  и  $\Delta$  характеризуют амплитуду и полуширину уединенной волны,  $V$  – скорость ее распространения.

Вычислим входящие в (198) производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -2 \frac{u_{\max} \operatorname{sh}[\xi / \Delta]}{\Delta \operatorname{ch}^3[\xi / \Delta]}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{2V u_{\max} \operatorname{sh}[\xi / \Delta]}{\Delta \operatorname{ch}^3[\xi / \Delta]}, \\ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} &= -\frac{24 u_{\max} \operatorname{sh}^3[\xi / \Delta]}{\Delta^3 \operatorname{ch}^5[\xi / \Delta]} + \frac{16 u_{\max} \operatorname{sh}[\xi / \Delta]}{\Delta^3 \operatorname{ch}^3[\xi / \Delta]}. \end{aligned} \quad (205)$$

Подставляя (205) в уравнение Кортвега–де Фриза и вынося в последнем слагаемом общий множитель, получим:

$$\frac{2V u_{\max} \operatorname{sh}[\xi / \Delta]}{\Delta \operatorname{ch}^3[\xi / \Delta]} - 2 \frac{u_{\max}^2 \operatorname{sh}[\xi / \Delta]}{\Delta \operatorname{ch}^5[\xi / \Delta]} + \frac{\beta u_{\max} \operatorname{sh}[\xi / \Delta]}{\Delta^3 \operatorname{ch}^3[\xi / \Delta]} \left( 16 - \frac{24 \operatorname{sh}^2[\xi / \Delta]}{\operatorname{ch}^2[\xi / \Delta]} \right) = 0. \quad (206)$$

С помощью тождества  $\operatorname{ch}^2[\xi / \Delta] - \operatorname{sh}^2[\xi / \Delta] = 1$  можно исключить  $\operatorname{sh}^2[\xi / \Delta]$  из соотношения (206) и, сокращая общий множитель, получить выражение

$$2V - \frac{2u_{\max}}{\operatorname{ch}^2[\xi / \Delta]} + \frac{\beta}{\Delta^2} \left( 16 - \frac{24(\operatorname{ch}^2[\xi / \Delta] - 1)}{\operatorname{ch}^2[\xi / \Delta]} \right) = 0, \quad (207)$$

которое должно выполняться при любых значениях  $\xi$ . Приравнявая к нулю коэффициенты при различных степенях  $\operatorname{ch}[\xi / \Delta]$ , получим соотношения между скоростью солитона, его амплитудой и полушириной

$$\frac{4\beta}{\Delta^2} = V, \quad \frac{6\beta}{\Delta^2} = \frac{u_{\max}}{2}. \quad (208)$$

Анализируя (208), получим соотношение:

$$u_{\max} = 3V, \quad (209)$$

которое показывает, что чем больше амплитуда солитона, тем выше его скорость. С другой стороны, из первого уравнения системы (208) следует, что чем больше скорость солитона, тем меньше его полуширина.

## ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В СРЕДЕ С ДИСПЕРСИЕЙ

Изменение плотности энергии электромагнитного поля  $W$  определяется уравнением

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{S}, \quad (210)$$

где  $\mathbf{S}$  – плотность потока энергии электромагнитного поля – определяется вектором Умова–Пойнтинга  $\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]$ .

Для вычисления выражения из правой части (210) используем индексную форму записи и проведем дифференцирование

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{S} &= \frac{c}{4\pi} \operatorname{div} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] = \frac{c}{4\pi} \nabla_i [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]_i = \frac{c}{4\pi} \nabla_i (e_{ijk} E_j H_k) = \\ &= \frac{c}{4\pi} e_{ijk} [E_j (\nabla_i H_k) + H_k (\nabla_i E_j)] = \frac{c}{4\pi} [E_j e_{jki} (\nabla_i H_k) + H_k e_{kij} (\nabla_i E_j)] = \\ &= \frac{c}{4\pi} [\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H}]. \end{aligned} \quad (211)$$

С помощью уравнений Максвелла перепишем (211) в виде

$$-\operatorname{div} \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \left[ \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right]. \quad (212)$$

В случае постоянных параметров среды  $\varepsilon$  и  $\mu$  (212) принимает простой вид

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \left[ \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right] = \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} [\varepsilon \mathbf{E}^2 + \mu \mathbf{H}^2]. \quad (213)$$

Таким образом, плотность потока энергии имеет электрическую  $\varepsilon \mathbf{E}^2 / 8\pi$  и магнитную составляющую  $\mu \mathbf{H}^2 / 8\pi$ .

При наличии тепловых потерь (диссипации энергии) в среде  $Q$  закон сохранения энергии перепишется в виде

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{S} - Q, \quad (214)$$

и следует найти  $\mathbf{E}$  и  $Q$  в среде, обладающей дисперсией.

Рассмотрим электрическую компоненту поля

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(t) &= \frac{1}{2} [\mathbf{E}_0(t) e^{-i\omega_0 t} + \mathbf{E}_0^*(t) e^{i\omega_0 t}], \\ \mathbf{D}(t) &= \frac{1}{2} [\mathbf{D}_0(t) e^{-i\omega_0 t} + \mathbf{D}_0^*(t) e^{i\omega_0 t}] \end{aligned} \quad (215)$$

с несущей частотой  $\omega_0$  и амплитудами  $\mathbf{E}_0(t)$ ,  $\mathbf{D}_0(t)$ , медленно меняющимися во времени, что означает выполнение условий вида  $|\partial \mathbf{E}_0 / \partial t| \ll \omega_0 \mathbf{E}_0$ .



Подставляя (215) в (212) и усредняя по периоду несущей гармоники  $T = 2\pi / \omega_0$ , получим

$$-\text{div} S = \frac{1}{16\pi} \left[ \mathbf{E}_0 \frac{\partial \mathbf{D}_0^*}{\partial t} + \mathbf{E}_0^* \frac{\partial \mathbf{D}_0}{\partial t} + i\omega_0 (\mathbf{E}_0 \mathbf{D}_0^* - \mathbf{E}_0^* \mathbf{D}_0) \right] + \text{м.п.} \quad (216)$$

Магнитные слагаемые «м.п.» можно получить из выражения в квадратных скобках из (216) с помощью замены

$$\mathbf{E}_0(t) \rightarrow \mathbf{H}_0(t), \quad \varepsilon \rightarrow \mu. \quad (217)$$

Электрическая индукция и напряженность электрического поля в общем случае связаны соотношением

$$\mathbf{D}_0(t) = \mathbf{E}_0(t) + 4\pi \int_0^\infty \chi(\tau) \mathbf{E}_0(t - \tau) e^{i\omega_0 \tau} d\tau. \quad (218)$$

Вследствие инерции перемещения носителей заряда отклик среды зависит не только от напряженности в данный момент времени, но и от ее значений во все предшествующие моменты, т.е. запаздывает по отношению к изменению напряженности. В отсутствии дисперсии среда мгновенно откликается, что математически можно записать в виде  $\chi(\tau) = \chi_0 \delta(\tau)$ . В этом случае

$$\mathbf{D}_0(t) = \left[ 1 + 4\pi \int_0^\infty \chi_0 \delta(\tau) \mathbf{E}_0(t - \tau) e^{i\omega_0 \tau} d\tau \right] = (1 + 4\pi \chi_0) \mathbf{E}_0(t) = \varepsilon \mathbf{E}_0(t). \quad (219)$$

В среде со слабой дисперсией амплитуда поля  $\mathbf{E}_0(t)$  меняется медленно, и в интеграле (219) можно разложить ее в ряд Тейлора:  $\mathbf{E}_0(t - \tau) = \mathbf{E}_0(t) - \tau \partial \mathbf{E}_0 / \partial t$ , что позволяет переписать (219):

$$\mathbf{D}_0(t) = \left[ 1 + 4\pi \int_0^\infty \chi(\tau) e^{i\omega_0 \tau} d\tau \right] \mathbf{E}_0(t) - 4\pi \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} \int_0^\infty \tau \chi(\tau) e^{i\omega_0 \tau} d\tau. \quad (220)$$

Проводя аналогию между (219) и (220), выразим диэлектрическую проницаемость в среде с дисперсией

$$\varepsilon(\omega) = \left[ 1 + 4\pi \int_0^\infty \chi(\tau) e^{i\omega_0 \tau} d\tau \right], \quad (221)$$

после чего второе слагаемое в (220) может быть выражено через производную  $\partial \varepsilon / \partial \omega$ :

$$\mathbf{D}_0(t) = \varepsilon(\omega) \mathbf{E}_0(t) + i \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t}. \quad (222)$$

Тогда производная по времени может быть записана с той же, что и (222), точностью

$$\frac{\partial \mathbf{D}_0(t)}{\partial t} = \varepsilon(\omega) \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} + \dots,$$

а выражение (216) перепишем в виде

$$-\text{div}\mathbf{S} = \frac{1}{16\pi} \left[ \begin{aligned} & i\omega_0(\varepsilon - \varepsilon^*)|\mathbf{E}_0|^2 + \frac{\partial(\omega\varepsilon^*)}{\partial\omega} \Big|_{\omega_0} \cdot \mathbf{E}_0 \frac{\partial\mathbf{E}_0^*}{\partial t} + \frac{\partial(\omega\varepsilon)}{\partial\omega} \Big|_{\omega_0} \cdot \mathbf{E}_0^* \frac{\partial\mathbf{E}_0}{\partial t} \\ & + \text{м.п.} \end{aligned} \right]. \quad (223)$$

Записывая диэлектрическую проницаемость в виде вещественной и мнимой частей

$$\varepsilon = \Re\varepsilon + i\Im\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon'', \quad (224)$$

где мнимая часть связана с потерями энергии в среде, и подставляя (224) в (223), получим

$$-\text{div}\mathbf{S} = \frac{\omega_0}{8\pi} \varepsilon'' |\mathbf{E}_0|^2 + \frac{1}{16\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial(\omega\varepsilon')}{\partial\omega} |\mathbf{E}_0|^2 \right] - \frac{i}{16\pi} \frac{\partial(\omega\varepsilon'')}{\partial\omega} \left( \mathbf{E}_0 \frac{\partial\mathbf{E}_0^*}{\partial t} - \mathbf{E}_0^* \frac{\partial\mathbf{E}_0}{\partial t} \right) \quad (225)$$

+ м.п.

Выражение характеризует тепловые потери в среде  $Q$  и изменение плотности электромагнитной энергии  $E$ , но разделить эти два вклада возможно лишь в специальных случаях.

1. В случае монохроматической волны ( $\mathbf{E}_0 = \text{const}$ ) из (225) получим

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\text{div}\mathbf{S} = \frac{\omega_0}{8\pi} \varepsilon'' |\mathbf{E}_0|^2, \quad (226)$$

т.е. энергия единицы объема среды увеличивается за счет нагрева и пропорциональна квадрату амплитуды волны, а также мнимой части диэлектрической проницаемости.

2. В другом частном случае медленного изменения амплитуды, но отсутствия мнимой части диэлектрической проницаемости рост энергии единицы объема среды определяется более сложным выражением

$$-\text{div}\mathbf{S} = \frac{1}{16\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial(\omega\varepsilon')}{\partial\omega} |\mathbf{E}_0|^2 \right]. \quad (227)$$

## НЕЛИНЕЙНАЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

Интересная область, в которой наблюдаются нелинейные волновые явления, – оптика. Возможности в этой области связаны с использованием мощных источников излучения – лазеров. В данном пособии будут рассмотрены только два из возможных явлений: самофокусировка и генерация второй гармоники.

### САМОФОКУСИРОВКА

Одно из нелинейных оптических явлений – эффект самовоздействия интенсивных световых волн [1–6] – основано на зависимости диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  (показателя преломления  $n = \epsilon^{1/2}$ ) от интенсивности распространяющейся волны. Причиной возникновения такой зависимости могут быть разнообразные физические явления. Электрострикция в поле световой волны приводит к появлению давления  $p \sim E^2$  ( $E$  – напряженность светового поля), изменяющего в области светового пучка плотность, а следовательно, показатель преломления среды. Зависимость показателя преломления от интенсивности световой волны может быть связана с нелинейностью электронной поляризации. В жидкостях с анизотропными молекулами показатель преломления изменяется из-за высокочастотного эффекта Керра, который состоит в том, что молекулы «выстраиваются» по полю. Показатель преломления всегда изменяется вследствие нагревания среды, вызванного диссипацией энергии световой волны. Во всех этих случаях изменение показателя преломления пропорционально квадрату амплитуды световой волны  $A$ :

$$n = n_0 + n_2 A^2, \quad (228)$$

где  $n_0$  – значение показателя преломления среды в линейной оптике, а  $n_2$  – коэффициент, зависящий от свойств среды. Выяснить многие черты волновых процессов можно, не прибегая к детальному рассмотрению конкретных физических механизмов нелинейности, а ограничиваясь феноменологическим описанием поляризации среды.

Предположение о линейной связи индукции электрического поля  $D$  с его напряженностью  $E$  справедливо с достаточной точностью, если напряженность  $E$  мала по сравнению со значениями, характерными для внутриатомных полей. Но и в этом случае наличие малых нелинейных поправок в зависимости  $D(E)$  может приводить к качественно новым эффектам. В дальнейшем будем предполагать, что среда обладает слабой нелинейностью. Это значит, что характерное время  $\tau$  систематического нарастания возбуждающихся колебаний, источником

которого является нелинейность среды, должно быть велико по сравнению с периодом  $1/\omega$ :  $1/\omega \ll \tau$ . Нелинейные эффекты, несмотря на свою малость, за достаточно большое время могут накапливаться и приводить к существенному изменению характера явления.

Будем считать среду однородной, но не будем учитывать ее пространственную дисперсию и магнитные свойства. Если поле еще не очень сильное, то в разложении вектора  $\mathbf{D}$  по степеням компонент вектора  $\mathbf{E}$  можно оставить только несколько первых слагаемых. Для анизотропной среды запишем:

$$D_i = \varepsilon_{ik} E_k + \varepsilon_{ikl} E_k E_l + \varepsilon_{iklm} E_k E_l E_m + \dots \quad (229)$$

Здесь по дважды повторяющимся индексам производится суммирование. Тензор  $\varepsilon_{ik}$  – обычная или линейная диэлектрическая проницаемость среды, а тензоры высших порядков  $\varepsilon_{ikl}$ ,  $\varepsilon_{iklm}$  – соответственно диэлектрическая проницаемость среды второго и третьего порядков. Если каждая точка среды является центром симметрии, то  $\varepsilon_{ikl} = 0$ . (Изменение направления координатных осей на противоположные приведет к смене знака у векторов  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$ . Знак  $\varepsilon_{ikl}$  из-за свойств симметрии среды не должен измениться, а следовательно,  $\varepsilon_{ikl} = 0$ .)

Наиболее важной особенностью нелинейной среды является генерация в ней колебаний с новыми частотами. Падающая на среду монохроматическая волна с частотой  $\omega$  приводит к генерации волн с частотами  $m\omega$  (где  $m$  – целое число).

Рассмотрим нелинейные оптические эффекты, связанные с изменением поля на частоте первичной волны (рассматривается нелинейный вклад в  $\mathbf{D}$  той же частоты  $\omega$ , которую имеет монохроматическое поле  $\mathbf{E}$ ). В квадратичных членах такой вклад отсутствует: они содержат только частоты  $2\omega$  и  $0$ . Первый, отличный от нуля, эффект возникает от кубической нелинейности и содержится в членах вида  $\mathbf{E}\mathbf{E}\mathbf{E}^*$  (частота  $\omega + \omega - \omega = \omega$ ).

В случае изотропной среды члены третьего порядка в  
индукции, приводящие к явлению самофокусировки, в общем случае имеют вид:

$$\mathbf{D}^{(3)} = \alpha(\omega) |\mathbf{E}|^2 \mathbf{E} + \beta(\omega) \mathbf{E}^2 \mathbf{E}^*. \quad (230)$$

Они содержат два независимых коэффициента; в прозрачной среде эти коэффициенты – вещественные, четные функции частоты. Будем рассматривать линейно поляризованное поле  $\mathbf{E}$ , для которого комплексный вектор  $\mathbf{E}$  сводится к вещественному вектору, умноженному на общий фазовый множитель; тогда выражения  $|\mathbf{E}|^2 \mathbf{E}$  и  $\mathbf{E}^2 \mathbf{E}^*$  совпадают и

$$\mathbf{D}^{(3)} = (\alpha + \beta) \mathbf{E}^2 \mathbf{E}. \quad (231)$$

Индукция поляризована так же, как и  $E$ . Таким образом, вектор электрической индукции может быть записан в виде:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^{(1)} + \mathbf{D}^{(3)} = \varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{D}^{(3)}, \quad (232)$$

где  $\varepsilon(\omega)$  – обычная линейная проницаемость.

Подставим (232) в уравнения Максвелла, которые необходимо записать (исключив из них магнитное поле  $H$ ) в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= 0. \end{aligned} \quad (233)$$

Существенно, что эта нелинейная система уравнений допускает точное решение в виде монохроматической плоской волны

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(kr - \omega t)} \quad (234)$$

с линейной поляризацией. Для таких волн  $|E|^2 = |E_0|^2$ , так что формула имеет тот же характер, что и проницаемость, зависящая от амплитуды поля  $E_0$ ; поэтому можно брать вещественную часть после решения уравнений. Связь  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  в этих случаях будем записывать в виде

$$\mathbf{D} = \left( \varepsilon + \frac{2c^2}{\omega^2} \eta |E|^2 \right) \mathbf{E}, \quad (235)$$

введя удобное для дальнейшего обозначение:  $\eta = \omega^2(\alpha + \beta)/2c^2$ . Подставляя (235) во второе уравнение системы (233), получим  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ . Поле остается поперечным, как в линейной теории. С учетом этого подстановка монохроматической волны (234) в первое уравнение (233) позволяет получить дисперсионное соотношение:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon + 2\eta |E_0|^2. \quad (236)$$

Фазовая скорость  $\omega/k$  оказывается зависящей не только от частоты, но и от амплитуды волны. Если  $\eta > 0$ , фазовая скорость убывает с увеличением амплитуды; такую среду называют фокусирующей; если  $\eta < 0$ , то фазовая скорость растет при увеличении амплитуды и среду называют дефокусирующей.

Рассмотрим теперь почти монохроматическую волну

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(t, \mathbf{r}) e^{i(kr - \omega t)}, \quad (237)$$

где  $\mathbf{E}_0(t, \mathbf{r})$  – медленно меняющаяся функция времени и координат (мало ее относительное изменение на интервалах времени  $1/\omega$  и расстояниях  $1/k_0$ ). Входящие в Фурье-разложение этого поля волновые векторы распределены в неболь-

шом интервале значений вокруг вектора  $k_0$ , направленного вдоль оси  $x$  (это условие узкого пучка, т.е. близкого к монохроматическому). Величина вектора  $k_0$  определяется из линейной теории:

$$k_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon. \quad (238)$$

Получим уравнение для эволюции функции  $E_0(t, r)$ . Для этого необходимо вычислить  $\text{rot rot } \mathbf{E}$  и производную по времени  $\partial^2 \mathbf{D} / \partial t^2$ , входящие в первое уравнение из (233). Заметим, что в выражении

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = \text{grad div } \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} \quad (239)$$

можно пренебречь первым слагаемым. Для этого сначала возьмем операцию  $\text{div}$  от обеих частей выражения (235)

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{D} = \text{div} \left[ \left( \varepsilon + \frac{2c^2}{\omega^2} \eta |E_0|^2 \right) \mathbf{E} \right] &= \left( \varepsilon + \frac{2c^2}{\omega^2} \eta |E_0|^2 \right) \text{div } \mathbf{E} + \\ &\frac{2c^2}{\omega^2} \eta \mathbf{E} \nabla |E_0|^2 = 0. \end{aligned} \quad (239)$$

Поскольку  $\eta$  мало (коэффициент при слагаемых третьего порядка малости), выражение (239) можно преобразовать к виду

$$\text{div } \mathbf{E} \approx - \frac{2c^2}{\varepsilon \omega^2} \eta \mathbf{E} \nabla |E_0|^2 = 0. \quad (240)$$

Здесь опять учтем малость коэффициента  $\eta$  и, кроме того, медленное изменение  $\mathbf{E}_0$  с координатой. Следовательно, в нашем приближении можно считать  $\text{div } \mathbf{E} \approx 0$ . Таким образом,

$$\text{rot rot } \mathbf{E} \approx - \Delta \mathbf{E} \approx - \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Delta_{\perp} \right) [\mathbf{E}_0(t, \mathbf{r}) e^{i(\mathbf{k} \mathbf{r} - \omega t)}], \quad (241)$$

где  $\Delta_{\perp} = \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$ . Вычисляя производные по  $x$ , опустим малое по сравнению с  $\Delta_{\perp}$  слагаемое  $\partial^2 \mathbf{E}_0 / \partial x^2$ , отвечающее за самомодуляцию (самосжатие) волновых пакетов. В результате получим

$$\text{rot rot } \mathbf{E} \approx \left( k_0^2 - 2ik_0 \frac{\partial}{\partial x} - \Delta_{\perp} \right) \mathbf{E}_0(t, \mathbf{r}) e^{i(k_0 r - \omega t)}. \quad (245)$$

Для вычисления производной  $\partial^2 \mathbf{D} / \partial t^2$  используем тот же подход, что и в пп. 8. Учитывая слагаемые нулевого и первого порядков малости, получим

$$\frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} = \left( -\omega^2 \varepsilon(\omega) \mathbf{E}_0 - i \frac{d(\omega)^2 \varepsilon}{d\omega} \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} \right) \exp[i(k_0 r - \omega t)]. \quad (246)$$

Индукция электрического поля  $\mathbf{D}$  содержит два слагаемых:  $\mathbf{D}^{(1)}$  и  $\mathbf{D}^{(3)}$ . Вычислим производные от обоих слагаемых. Для первого из них после использования дисперсионного соотношения (238) и определения групповой скорости  $v_{\text{гр}}$ :

$$\frac{1}{v_{\text{гp}}} = \frac{dk_0}{d\omega} = \frac{1}{c} \frac{\partial(\omega\sqrt{\varepsilon})}{\partial\omega} \quad (247)$$

выражение (246) можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial^2 \mathbf{D}^{(1)}}{\partial t^2} = -c^2 \left( k_0 \mathbf{E}_0 + 2i \frac{k_0}{v_{\text{гp}}} \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} \right) \exp[-i\omega_0 t]. \quad (248)$$

Для  $\mathbf{D}^{(3)}$  уже первое слагаемое в производной (246) мало ( $\sim \eta$ ), что позволяет пренебречь членом с малой производной  $\partial \mathbf{E}_0 / \partial t$  и сохранить только один член:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{D}^{(3)}}{\partial t^2} = -2c^2 \eta(\omega) |E_0|^2 \mathbf{E} \exp[i(k_0 r - \omega t)]. \quad (249)$$

Подставляя полученные выражения (245), (248), (249) в первое уравнение системы (233), окончательно получим следующее уравнение для эволюции амплитуды световой волны:

$$ik_0 \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{v_{\text{гp}}} \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathbf{E}_0 + \frac{1}{2} \Delta_{\perp} \mathbf{E}_0 + \eta(\omega) |E_0|^2 \mathbf{E}_0 = 0. \quad (250)$$

Комбинация производных в левой стороне равенства выражает собой тот факт, что возмущения амплитуды переносятся в направлении распространения волны с групповой скоростью  $v_{\text{гp}}$ .

## ПОРОГ УСТОЙЧИВОСТИ

С помощью уравнения (250) исследуем неустойчивость неограниченной плоской волны  $E = E_0(t, r) e^{i(kr - \omega t)}$ , для которой зависимость волнового числа от амплитуды волны можно получить, разлагая (236) в ряд по малому параметру

$$k \approx k_0 + \frac{\eta E_0^2}{k_0} \quad (251)$$

с  $k_0$  из (238); в линейно поляризованной волне амплитуда  $E_0$  может быть определена как вещественный вектор. Если записывать монохроматическую волну в виде (237), то в последнем выражении надо положить

$$E_0(x) = E_0 \exp\left(ix - \frac{\eta E_0^2}{k_0}\right). \quad (252)$$

Это выражение играет роль амплитуды невозмущенной волны.

Рассмотрим стационарную задачу ( $\partial/\partial t = 0$ ) о пространственном нарастании возмущений вдоль направления распространения волны. Амплитуда результирующей волны представляет собой сумму невозмущенной волны  $E = E_0(t, r) e^{i(kr - \omega t)}$  и малого возмущения  $\delta E(r)$ :

$$E_0(r) = [E_0 + \delta E(r)] \exp\left(ix - \frac{\eta E_0^2}{k_0}\right). \quad (253)$$

Предположим, что  $\delta E$  направлено вдоль  $E_0$ . Подставляя решение (254) в уравнение для эволюции волны (250) для малых возмущений  $\delta E$ , получим

$$ik_0 \frac{\partial \delta E}{\partial x} + \frac{1}{2} \Delta_{\perp} \delta E + \eta(\omega) E_0^2 (\delta E + \delta E^*) = 0. \quad (254)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде

$$\delta E = A e^{i(qr + sx)} + B^* e^{-i(qr + sx)}, \quad (255)$$

где  $q$  – вектор в плоскости  $yz$ . Подставляя это выражение в уравнение, описывающее эволюцию малых возмущений, и собирая по отдельности коэффициенты при  $\exp[\pm i(qr + sx)]$ , получим два алгебраических уравнения:

$$\begin{aligned} \left(\frac{q^2}{2} - \eta E_0^2 + k_0 s\right) A - \eta E_0^2 B &= 0, \\ -\eta E_0^2 A + \left(\frac{q^2}{2} - \eta E_0^2 + k_0 s\right) B &= 0. \end{aligned} \quad (256)$$



Нетривиальное решение системы уравнений существует в случае равенства нулю определителя, составленного из коэффициентов этих уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{q^2}{2} - \eta E_0^2 + k_0 s : - \eta E_0^2, \\ - \eta E_0^2 : \frac{q^2}{2} - \eta E_0^2 + k_0 s. \end{aligned} \quad (257)$$

Из данного условия определяется значение  $s$ :

$$s = \pm \frac{q}{2k_0} \sqrt{q^2 - 4\eta E_0^2}. \quad (258)$$

При  $\eta > 0$  и  $q^2 < 4\eta E_0^2$  получаются мнимые  $s = -i \operatorname{Im} s$  и  $\delta E \sim \exp(\operatorname{Im} s)$  – возмущения поля экспоненциально растут (волна неустойчива).

Одно из проявлений этой неустойчивости – самофокусировка светового пучка, ограниченного по ширине и распространяющегося в фокусирующей среде. Происхождение этого явления связано с тем, что если амплитуда поля убывает от оси пучка к его периферии, то зависящая от этой амплитуды диэлектрическая проницаемость среды тоже убывает (при  $\eta > 0$ ) в том же направлении. В результате та область среды, в которой распространяется луч, становится оптически более плотной, и область лучевого канала подобна фокусирующей линзе. Однако ход лучей в случае самофокусировки и собирающей линзы различен.

## СТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНЫ

Поведение пучка определяется конкуренцией двух противоположных тенденций: расширением пучка из-за дифракции и фокусировкой. При определенных условиях эти тенденции точно компенсируют друг друга, приводя к специфически нелинейному эффекту: пучок будет проходить через среду практически без изменения поперечного размера, создавая для себя волновод, по которому распространяется без рассеяния в стороны. Такой режим распространения света называется самоканалированием (self-trapping) светового пучка. В линейной теории всякий ограниченный по сечению пучок будет расходиться из-за дифракции.

Рассмотрим стационарное решение уравнения (250) в виде нерасширяющегося пучка. Возьмем одномерный случай (поле  $E$  зависит только от одной поперечной координаты  $y$ , волна распространяется вдоль оси  $x$ ). При этом мы «закроем глаза» на тот факт, что бесконечный в направлении  $z$  пучок заведомо неустойчив (в нем возможно существование неустойчивых возмущений с малыми значениями  $q_z$ ). Будем искать решение в виде  $E_{0x} = E(y)e^{1\alpha x}$  с малой величиной  $\alpha$ , играющей роль поправки к волновому вектору  $k_0$ ; функция  $E(y)$  вещественная. Подставляя выражение для поля в уравнение (250), получим

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 E}{dy^2} = k_0 \alpha E - \eta E^3. \quad (259)$$

Первый интеграл этого выражения легко находится

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dE}{dy} \right)^2 - k_0 \alpha E^2 + \frac{\eta}{2} E^4 = \text{const}. \quad (260)$$

Интересуясь только тем решением, для которого  $E$  и  $dE/dy$  стремятся к нулю при  $|y| \rightarrow \infty$ , обращаем const. в ноль. Тогда решение уравнения (34) имеет вид

$$E = \left( \frac{2k_0 \alpha}{\eta} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\text{ch}[(2k_0 \alpha)^{\frac{1}{2}} y]} \quad (261)$$

(начало отсчета  $y$  выбрано в центре пучка). Ширина пучка по оси  $y$ :

$$\delta \sim (k_0 \alpha)^{-\frac{1}{2}} \sim \frac{1}{\sqrt{\eta}} E(0). \quad (262)$$

Поскольку протекающий по пучку поток энергии  $P \sim E^2(0)\delta$ , то  $\delta \sim 1/P$  – пучок будет тем уже, чем больше переносимая им мощность.

Напишем качественный критерий самофокусировки для реального пучка ограниченного сечения. В пучке с характерным радиусом  $R$  возможны возмущения с поперечными к оси пучка длинами волн, меньшими  $R$ , т.е.  $s \geq 1/R$ . Условие (32) определяет верхнюю границу значений  $k$ , приводящих к неустойчивости. Поэтому пучок будет неустойчивым относительно фокусировки при

$$E_0^2 R^2 \eta \geq 1. \quad (263)$$

Мощность  $P$ , переносимая вдоль пучка, определяется произведением  $E_0^2 R^2$ . Критическое значение мощности, за которым начинается самофокусировка, не зависит от площади сечения пучка  $P \sim 1/\eta$  [3, 4]. Оценки величины  $P$  показали, что эффекты самофокусировки должны наблюдаться даже для умеренных лазерных мощностей. Самофокусировка в жидкостях с большой постоянной Керра (для  $CS_2$ , например) возникает при  $P=10$  кВт. А в некоторых сортах оптического стекла пороговая мощность  $P$  составляет всего 1 ватт.

## ОБОБЩЕНИЕ АМПЛИТУДНОГО УРАВНЕНИЯ

Самофокусировка является лишь одним из нелинейных эффектов, связанных с прохождением узких волновых пучков в среде со слабой нелинейностью. Мы рассмотрели задачу о самофокусировке, исходя из уравнений Максвелла и учитывая нелинейную зависимость электрической индукция  $D$  от поля  $E$ .

Можно использовать более общий подход и описывать эволюцию комплексной амплитуда волны:

$$\psi = A \exp(i\varphi); \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = k - k_0; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \omega - \omega_0. \quad (264)$$

При этом, конечно, надо потребовать, чтобы выполнялось два условия:

- 1) среда обладает слабой нелинейностью, т.е. дисперсионное соотношение имеет вид:

$$\omega = \omega_0(k) + \alpha A^2; \quad (265)$$

- 2) рассматриваются узкие волновые пучки:  $|k - k_0| \ll k_0$ .

Амплитуда волны должна удовлетворять дисперсионному соотношению

$$D(k - k_0, \omega - \omega_0) = 0. \quad (266)$$

Направляя ось  $x$  вдоль  $k_0$  и разлагая в (264)  $\omega_0(k)$  в ряд до второго порядка включительно:

$$\begin{aligned} \omega(k, A^2) &\approx \omega_0(k) + v_{\text{гр}} \left( \sqrt{(k_0 + \varkappa_x)^2 + \varkappa_{\perp}^2} - k_0 \right) + \frac{1}{2} \frac{dv_{\text{гр}}}{dk} \varkappa_x^2 + \\ &\alpha A^2 \approx \\ &\approx \omega_0(k) + v_{\text{гр}} \left( \varkappa_x + \frac{1}{2k_0} \varkappa_{\perp}^2 \right) + \frac{1}{2} \frac{dv_{\text{гр}}}{dk} \varkappa_x^2 + \alpha A^2, \end{aligned} \quad (267)$$

где обозначено  $\mathfrak{x} = k - k_0$ . Выражение (267) представляет собой достаточно общий вид нелинейного закона дисперсии для узких пучков с малыми амплитудами. Запишем выражение (267) в виде

$$[(\omega - \omega_0) - v_{\text{гp}} \left( \mathfrak{x}_x + \frac{1}{2k_0} \mathfrak{x}_\perp^2 \right) - \frac{1}{2} \frac{dv_{\text{гp}}}{dk} \mathfrak{x}_x^2 - \alpha |\psi|^2] \psi = 0. \quad (268)$$

Применяя стандартную процедуру замены [5]

$$k - k_0 \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial r}; \quad \omega - \omega_0 \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t} \quad (269)$$

для перехода от дисперсионного соотношения к нелинейному дифференциальному уравнению, получим параболическое уравнение:

$$i \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} + v_{\text{гp}} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \frac{v_{\text{гp}}}{k} \Delta_\perp \psi + \frac{1}{2} \frac{dv_{\text{гp}}}{dk} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \alpha |\psi|^2 \psi = 0. \quad (270)$$

Заметим, что это уравнение является обобщением уравнения (250). Кроме случая самофокусировки ( $\partial^2 / \partial x^2 = 0$ ) уравнение (270) описывает самосжатие волновых пакетов ( $\Delta_\perp = 0$ ) [6]. Амплитуда модуляции пучка в нелинейной среде нарастает, в результате чего увеличивается степень перетяжек пучка, и волновой пакет разбивается на отдельные пакеты или волновые сгустки.

## ГЕНЕРАЦИЯ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ

Для описания электромагнитных полей в диэлектрической среде, обладающей нелинейными свойствами, используются уравнения Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{D} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0, \end{aligned} \quad (271)$$

в которых отсутствуют свободные заряды и магнитная проницаемость равна единице ( $\mu=1$ ), т.е.  $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ . Электрическая поляризация среды  $\mathbf{P}$ , входящая в вектор электрической индукции  $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ , становится нелинейной (квадратичной) функцией электрического поля. Разбивая поляризацию на линейную и нелинейную части, запишем электрическую индукцию в виде

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi(\mathbf{P}^{(l)} + \mathbf{P}^{(nl)}) = \varepsilon\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}^{(nl)}. \quad (272)$$

После подстановки (272) в уравнение (271) уравнения Максвелла переписутся в удобном для дальнейшего анализа виде:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= 0, & \operatorname{div}(\varepsilon\mathbf{E}) &= -4\pi \operatorname{div} \mathbf{P}^{(nl)}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \frac{\partial \mathbf{P}^{(nl)}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0. \end{aligned} \quad (273)$$

Несмотря на то, что в реальных изотропных средах квадратичные нелинейные явления невозможны, для упрощения рассмотрения, следуя [12], используем изотропную модель среды, генерирующей вторую гармонику:

$$\mathbf{P}_{nl} = \alpha_2 \mathbf{E}\mathbf{E}. \quad (274)$$

Обратим внимание на то, что в силу малости коэффициента  $\alpha_2$  правые части системы уравнений (273), пропорциональные нелинейной поляризации, малы, что позволяет найти решения этой системы в виде разложения в ряды по малому параметру (степени нелинейности):

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots, \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 + \dots \end{aligned} \quad (274)$$

В нулевом приближении получим линейные уравнения электродинамики, решением которых является монохроматическая волна

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{A} \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t),$$

волновой вектор и частота которой связаны дисперсионным соотношением

$$k^2 c^2 = \omega^2 \varepsilon(\omega). \quad (275)$$

Для нахождения поля в первом приближении перепишем поляризацию в виде

$$\mathbf{P}_{нл} = \alpha_2 \mathbf{E}_0 \mathbf{E}_0 = \alpha_2 \mathbf{A} \mathbf{A} \cos^2(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t) = \frac{\alpha_2 \mathbf{A} \mathbf{A}}{2} \{1 + \cos[2(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)]\}, \quad (276 \text{ а})$$

или в комплексном виде

$$\mathbf{P}_{нл} = \Re \left\{ \frac{\alpha_2 \mathbf{A} \mathbf{A}}{2} \{1 + \exp[2i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)]\} \right\}, \quad (276 \text{ б})$$

который удобнее для проведения преобразований.

Отметим первое (постоянное) слагаемое в выражении (276 б). Оно соответствует эффекту оптического детектирования: в поле мощного электромагнитного излучения возникает постоянная поляризация. Изменение поляризации можно наблюдать экспериментально, помещая, например, кристалл кварца в конденсатор. Лазерный луч, проходя через кристалл, вызывает изменение поляризации, приводящее к появлению импульса тока в цепи конденсатора.

Второе слагаемое в (276 б) отвечает за генерацию волны с удвоенной частотой. Перепишем уравнения Максвелла в первом порядке разложения:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{H}^{(I)} &= 0, \operatorname{div} \mathbf{E}^{(I)} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}^{(I)} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}^{(I)}}{\partial t} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}^{(I)} - \frac{\varepsilon(2\omega)}{c} \frac{\partial \mathbf{E}^{(I)}}{\partial t} &= -i2\omega \frac{4\pi}{2c} \alpha_2 \mathbf{A} \mathbf{A} e^{2i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}. \end{aligned} \quad (277)$$

Благодаря малости нелинейного эффекта система уравнений (277) линейная, хотя и неоднородная, и для ее решения применяются стандартные методы решения дифференциальных уравнений: общее решение неоднородной системы представляет собой суперпозицию частного решения неоднородной системы (277) и общего решения однородных уравнений, состоящих из левых частей системы (277).

Частное решение записывается в виде

$$\mathbf{E}^{(I)} = \mathbf{A}_{(I)} \exp[2i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)], \quad \mathbf{H}_{(I)} = \mathbf{B} \exp[2i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)]. \quad (278)$$

Исключая из (277) магнитное поле стандартным образом, получим

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{H}^{(I)} &= 0, \operatorname{div} \mathbf{E}^{(I)} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}^{(I)} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}^{(I)}}{\partial t} &= 0, \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}^{(I)} - \frac{\varepsilon(2\omega)}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}^{(I)}}{\partial t^2} &= -i2\omega \frac{4\pi}{c^2} \alpha_2 \mathbf{A} \mathbf{A} e^{2i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}. \end{aligned} \quad (279)$$

Подставляя электрическое поле из (278) в последнее уравнение из (279), получим

$$4k^2 E^{(1)} - \frac{\varepsilon(2\omega)}{c^2} 4\omega^2 E^{(1)} = -2\omega^2 \frac{4\pi}{c^2} \alpha_2 A A e^{2i(kr - \omega t)}. \quad (280)$$

Использование дисперсионного соотношения (275) позволяет сократить коэффициенты  $4\omega^2/c^2$  в правой и левой частях уравнения (280) и получить выражение для амплитуды волны в первом приближении:

$$A_{(1)} = \frac{2\pi\alpha_2 A A}{\varepsilon(\omega) - \varepsilon(2\omega)}. \quad (281)$$

Полное решение неоднородной системы (277) представим в виде

$$E^{(1)} = \tilde{A} \exp[i(k_2 r - \omega_2 t)] + \frac{2\pi\alpha_2 A A}{\varepsilon(\omega) - \varepsilon(2\omega)} \exp[2i(kr - \omega t)], \quad (282)$$

суммы общего и частного решений. Причем волновой вектор должен удовлетворять дисперсионному соотношению

$$k_2^2 c^2 = \omega_2^2 \varepsilon(2\omega). \quad (283)$$

Полное решение (282) должно удовлетворять условию на границе: на входе в кристалл вторая гармоника отсутствует в любой момент времени. Расположим начало координат на границе кристалла, тогда из (281) следует

$$E^{(1)}(r=0) = \tilde{A} \exp[-i\omega_2 t] + \frac{2\pi\alpha_2 A A}{\varepsilon(\omega) - \varepsilon(2\omega)} \exp[-2i\omega t] \text{ или} \quad (284)$$

$$\omega_2 = 2\omega \text{ и } \tilde{A} = -\frac{2\pi\alpha_2 A A}{\varepsilon(\omega) - \varepsilon(2\omega)}.$$

После подстановки соотношений (284) в решение (282) запишем результат в вещественном виде

$$E_1 = \frac{2\pi\alpha_2 A A}{\varepsilon(\omega) - \varepsilon(2\omega)} [\cos(2kr - 2\omega t) - \cos(k_2 r - 2\omega t)]. \quad (285)$$

Отметим, что амплитуда второй гармоники велика в случае резонанса, когда  $\varepsilon(\omega) \approx \varepsilon(2\omega)$ . Вторая гармоника состоит из двух распространяющихся в одном направлении волн: 1) вынужденной  $\cos(2kr - 2\omega t)$ , связанной с переизлучением среды вследствие ее нелинейной поляризации и описываемой частным решением; 2) свободной  $\cos(k_2 r - 2\omega t)$ , описываемой общим решением однородного уравнения.

Обе волны распространяются с разными фазовыми скоростями

$$v_{ph}^{(1)} = \frac{2\omega}{2k} = \frac{\omega}{k}, \quad v_{ph}^{(2)} = \frac{2\omega}{k_2}. \quad (286)$$

При распространении в среде различие фазовых скоростей приведет к изменению разности фаз и явлению биений.

Перепишем (285), используя формулу разности косинусов

$$\mathbf{E}_1 = \frac{2\pi\alpha_2 A \mathbf{A}}{\varepsilon(\omega) - \varepsilon(2\omega)} 2 \sin \frac{\mathbf{k}_2 \mathbf{r} - 2\mathbf{k} \mathbf{r}}{2} \left[ \sin \frac{2\mathbf{k} \mathbf{r} + \mathbf{k}_2 \mathbf{r} - 4\omega t}{2} \right]. \quad (287)$$

Коэффициент перед квадратными скобками можно интерпретировать как амплитуду второй гармоники.

При рассогласовании фазовых скоростей  $\varepsilon(\omega) \neq \varepsilon(2\omega)$  период биений определяется расстоянием между двумя нулями амплитуды. Длина, на которой амплитуда второй гармоники достигает первого максимума, называется длиной когерентности  $L_{\text{ког}}$  (рис. 26).

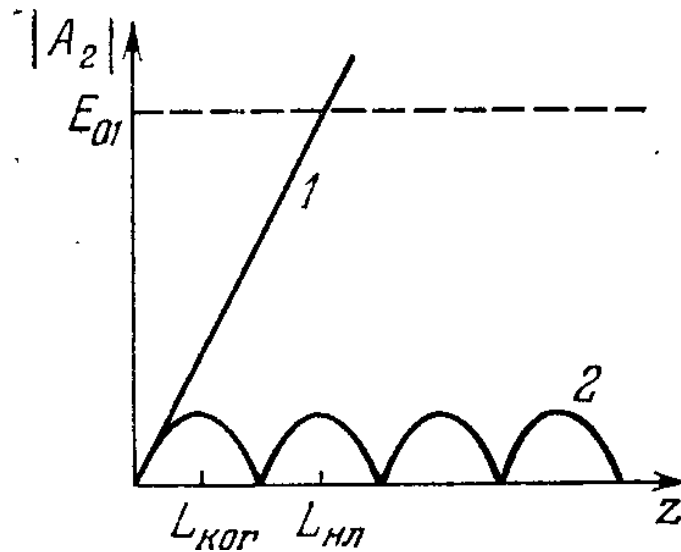


Рис. 26. Зависимость амплитуды второй гармоники при распространении вглубь кристалла от координаты [11]

Найдем интенсивность второй гармоники, определяемую в результате осреднения по периоду быстропеременной составляющей  $\omega$ :

$$I_1 = \langle \mathbf{E}_1^2 \rangle. \quad (288)$$

При вычислении  $I_1$  учтем, что первый множитель в квадратных скобках в выражении (287) не зависит от времени, а среднее от квадрата второго множителя даст коэффициент  $1/2$ ,

$$I_1 = \frac{32\pi^2 \alpha_2^2 I_0^2}{(\varepsilon(\omega) - \varepsilon(2\omega))^2} \sin^2 \beta, \quad (289)$$

где использовано обозначение  $I_0 = \langle \mathbf{E}_0^2 \rangle = A^2 / 2$  и  $\beta = (\mathbf{k}_2 - 2\mathbf{k}) \mathbf{r} / 2$ .

Для плоской волны, распространяющейся вдоль оси  $x$ ,  $\beta = (k_2 - 2k)x / 2$ .

Тогда вместо (289) запишем



$$I_1 = \frac{8\pi^2 \alpha_2^2 I_0^2 (k_2 - 2k)^2 x^2}{(\varepsilon(\omega) - \varepsilon(2\omega))^2} \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2. \quad (290)$$

Для дальнейшего упрощения (290), прежде всего, используем дисперсионные соотношения (275) и (283) и преобразуем дробь

$$\begin{aligned} \frac{(k_2 - 2k)^2}{(\varepsilon(\omega) - \varepsilon(2\omega))^2} &= \frac{(2\omega\sqrt{\varepsilon(2\omega)} / c - 2\omega\sqrt{\varepsilon(\omega)} / c)^2}{(\sqrt{\varepsilon(\omega)} - \sqrt{\varepsilon(2\omega)})^2 (\sqrt{\varepsilon(\omega)} + \sqrt{\varepsilon(2\omega)})^2} = \\ &= \frac{4\omega^2}{c^2 (\sqrt{\varepsilon(\omega)} + \sqrt{\varepsilon(2\omega)})^2} \approx \frac{\omega^2}{c^2 n^2}. \end{aligned} \quad (291)$$

Здесь учтено, что в случае резонанса  $\varepsilon(\omega) \approx \varepsilon(2\omega)$  и введен в рассмотрение показатель преломления  $n = \sqrt{\varepsilon(\omega)}$ . С учетом (291) интенсивность второй гармоники запишется более компактно:

$$I_1 = \frac{8\pi^2 \alpha_2^2 I_0^2 \omega^2 x^2}{c^2 n^2} \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2. \quad (292)$$

В случае  $\beta=0$  с помощью первого замечательного предела из (292) получим выражение

$$I_1 = \frac{8\pi^2 \alpha_2^2 I_0^2 \omega^2 x^2}{c^2 n^2}, \quad (293)$$

которое справедливо при условии

$$k_2 \approx 2k, \quad (294)$$

называемом условием фазового синхронизма.

При этом обе волны распространяются с одинаковыми фазовыми скоростями

$$v_{\text{ph}}^{(1)} = \frac{\omega}{k}, \quad v_{\text{ph}}^{(2)} = \frac{2\omega}{k_2} = \frac{2\omega}{2k} = \frac{\omega}{k}, \quad (295)$$

и фазовое соотношение между ними остается постоянным, а переход энергии от основной волны ко второй гармонике в этом случае происходит особенно интенсивно. При этом из сопоставления дисперсионных соотношений (275) и (284) можно сделать вывод о приближенном равенстве показателей преломления среды на несущей частоте и на частоте второй гармоники  $n(\omega) \approx n(2\omega)$ .

Найдем длину когерентности из условия достижения первого максимума амплитуды из уравнения (287)

$$\frac{|2k - k_2| l_{\text{ког}}}{2} = \frac{\pi}{2}, \quad (296)$$

откуда

$$l_{\text{ког}} = \frac{\pi}{|2k - k_2|}. \quad (297)$$

Заменяя в (297) волновые числа из дисперсионных соотношений (275) и (284), будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{|2k - k_2|} &= \frac{\pi}{2\omega\sqrt{\varepsilon(\omega)/c} - 2\omega\sqrt{\varepsilon(2\omega)/c}} = \\ &= \frac{2\pi c}{4\omega|\sqrt{\varepsilon(\omega)} - \sqrt{\varepsilon(2\omega)}|} = \frac{\lambda}{4|n(\omega) - n(2\omega)|}, \end{aligned} \quad (298)$$

где  $\lambda$  – длина исходной волны. Увеличение длины когерентности ведет к усилению перекачки энергии от основной волны к второй гармонике.

Отметим, что формально из (293) и (297) получается, что при фазовом синхронизме длина когерентности стремится к бесконечности и интенсивность второй гармоники также стремится к бесконечности при больших значениях координаты. Однако интенсивность второй гармоники не может быть больше начальной интенсивности основной волны. Более того, все результаты получены с помощью метода разложения по малому параметру, когда амплитуда генерируемой гармоники мала по сравнению с падающей волной.

Генерация второй гармоники в эксперименте была обнаружена в 1961 г. Франкеном [12] с использованием кристалла кварца и рубинового лазера. Однако в первоначальных опытах в энергию второй гармоники превращалась  $10^{-8}$  часть энергии основной волны, что объяснялось малостью длины когерентности в кварце. Условие фазового синхронизма  $n(\omega) \approx n(2\omega)$  не выполняется для однородных сред в области прозрачности (рис. 27). Эта область соответствует нормальной дисперсии, при которой показатель преломления монотонно растет с частотой (рис. 27).

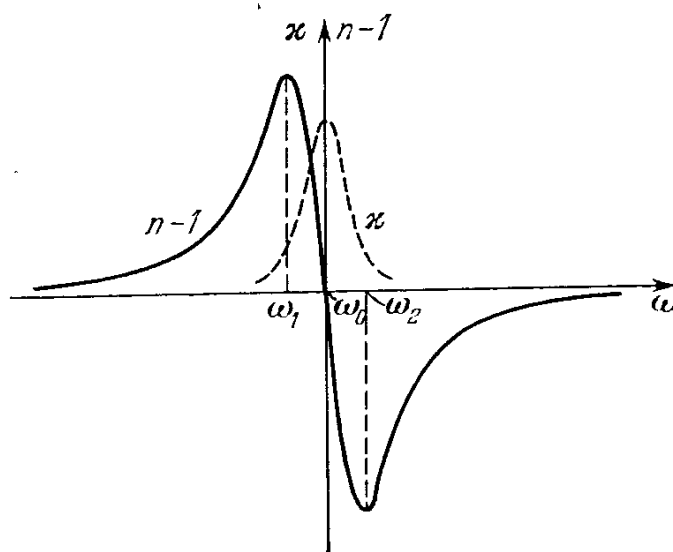


Рис. 27. Поведение показателя преломления в однородной изотропной среде

Однако ничто не мешает установлению синхронизма на частотах  $\omega$  и  $2\omega$  между обыкновенной и необыкновенной волнами, распространяющимися в некоторых кристаллах. Рассмотрим, например, случай одноосного кристалла, показатели преломления обыкновенного и необыкновенного лучей в котором представлены на рис. 28 в зависимости от направления фазовой скорости волны [12]. Сплошные линии соответствуют несущей частоте  $\omega$ , штриховые – двойной гармонике  $2\omega$ . Точкам пересечения кривых соответствуют направлениям распространения, для которых между основной волной  $\omega$  и двойной гармоникой  $2\omega$  выполняется условие синхронизма. Это направление составляет угол  $\vartheta$  с направлением главной оптической оси кристалла и называется направлением синхронизма.

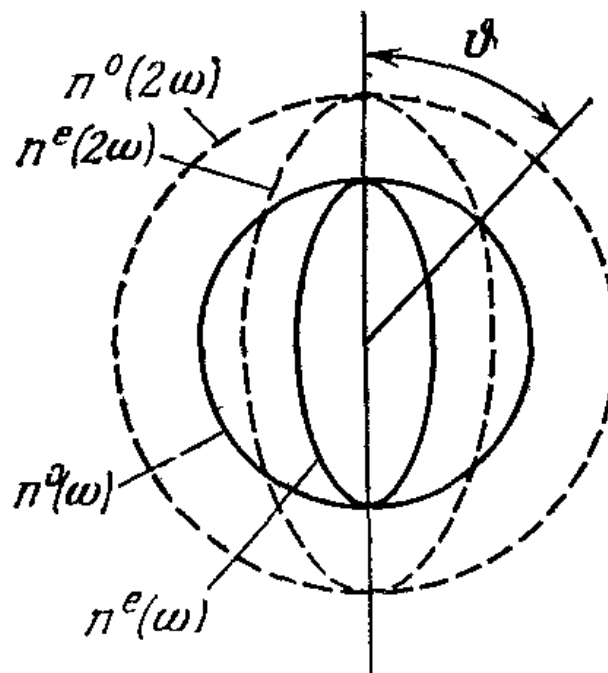


Рис. 28. Определение направление синхронизма между обыкновенным и необыкновенным лучами [12]

В анизотропных средах нелинейный эффект генерации второй гармоники в реальности описывается не скалярным коэффициентом  $\alpha_2$ , а тензором, поэтому разная поляризация обыкновенной и необыкновенной волн не будет препятствовать генерации второй гармоники.

В условиях синхронизма во вторую гармонику удастся перекачать более половины энергии основной волны. В этом случае метод разложения по малому параметру уже нельзя применять. Несмотря на упрощенный подход, проведенное выше качественное рассмотрение вопроса о генерации второй гармоники остается в силе.

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В НЕОДНОРОДНО НАГРЕТОЙ СЛАБОПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ

Исследование нелинейной стадии электроконвекции при нагреве сверху, когда сила плавучести и сила Кулона противоположны друг другу [13], показало, что нагрев слоя сверху препятствует возникновению стационарной конвекции (порог конвекции повышается), а течение жидкости может возникать и колебательным образом: в результате прямой бифуркации Хопфа. В результате численного моделирования в зависимости от параметров задачи обнаружены различные периодические колебательные режимы: стоячей волны (SW), бегущей волны (TW), модулированной бегущей волны (MTW), модулированной стоячей волны (MSW), которые могут быть реализованы в горизонтальном слое или кольцевых каналах.

В данном разделе пособия проанализированы двумерные режимы электроконвекции в горизонтальном конденсаторе, заполненном слабопроводящей жидкостью, при инжекции заряда с катода и нагреве сверху. Исследовано влияние внешнего электрического поля и интенсивности нагрева на эволюцию электроконвективных колебательных течений (стоячих и бегущих волн) в межэлектродном промежутке. Получены бифуркационные диаграммы и построена карта существования устойчивых решений. Проанализирована эволюция полей функции тока, температуры и плотности заряда для режима модулированных бегущих волн.

Рассмотрим находящийся в поле тяжести горизонтальный конденсатор толщиной  $d$  и введем декартову систему координат, ось  $x$  которой направлена вдоль катода, а ось  $z$  перпендикулярна ему вниз (рис. 29). К обкладкам конденсатора приложены разность потенциалов  $V_0$  и разность температур  $\Theta$ .

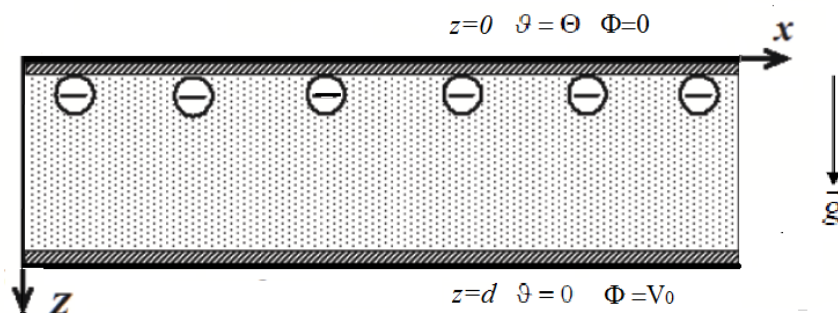


Рис. 29. Геометрия слоя со слабопроводящей жидкостью

Конденсатор заполнен слабопроводящей жидкостью с плотностью  $\rho = \rho_0(1 - \beta\vartheta)$ , линейно зависящей от температуры ( $\vartheta$  – отклонение температуры от некоторого среднего значения), коэффициентом теплового расширения  $\beta$ , вязкостью

$\nu$ , температуропроводностью  $\chi$ , диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ . Предполагается, что все характеристики жидкости и коэффициент подвижности ионов К не зависят от величины электрического поля и температуры.

Выбирая масштабы длины  $[x]=d$ , времени  $[t]=d^2/\nu$ , давления  $[p]=\rho_0\nu^2/d^2$ , скорости  $[v]=\nu/d$ , температуры  $[\vartheta]=\Theta$ , потенциала  $[\Phi]=V_0$ , плотности заряда  $[q]=\varepsilon_0\varepsilon V_0/d^2$  ( $\varepsilon_0$  – электрическая постоянная), запишем систему уравнений электроконвекции в случае неизотермической несжимаемой жидкости: уравнения переноса импульса, заряда, тепла, уравнения неразрывности и Пуассона [3, 13, 14]:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \Delta \mathbf{v} - \frac{T^2}{M^2} q \nabla \Phi + \frac{Ra}{Pr} \vartheta \mathbf{e}, \quad (299 \text{ а})$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) q = \frac{T}{M^2} (q^2 - \nabla \Phi \cdot \nabla q), \quad (299 \text{ б})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \Delta \Phi = -q, \quad (299 \text{ в})$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \vartheta = \frac{1}{Pr} \Delta \vartheta, \quad (299 \text{ г})$$

где  $\mathbf{v} = (u, 0, w)$  – скорость,  $p$  – давление,  $q$  – плотность заряда слабопроводящей жидкости,  $\mathbf{e}$  – направленный вверх единичный вектор.

На единичный объем жидкости действуют сила Кулона и сила плавучести (299 а). Поток заряда в уравнении для его эволюции содержит дрейф заряда в электрическом поле и конвективный перенос при движении жидкости (299 в).

В случае отсутствия проскальзывания на идеально теплопроводящих и электродах граничные условия записываются в виде:

$$\begin{aligned} z=0: \quad \Phi &= 0, \quad \vartheta = 1, \quad v = 0, \quad q = -A \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \\ z=1: \quad \Phi &= 1, \quad \vartheta = 0, \quad v = 0. \end{aligned} \quad (300)$$

Рассматривается случай автономной инжекции с катода, когда величина инжектируемого заряда пропорциональна величине электрического поля [13, 15], при этом инжекция предполагается слабой ( $A \ll 1$ ).

Система уравнений (299) и граничных условий (300) содержит число Рэлея  $Ra = g\beta\Theta d^3/\nu\chi$  и число Прандтля  $Pr = \nu/d$ , безразмерный электроконвективный

параметр  $T = \varepsilon_0 \varepsilon V_0 \rho_0 / K \nu$ , параметр подвижности инжектируемых ионов  $M = \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon / K^2 \rho_0}$ , а также параметр  $A = ad / \varepsilon_0 \varepsilon$ , характеризующий степень инжекции заряда (здесь  $a$  – размерный коэффициент, определяющий инжекцию). Подвижность заряда  $M$  может изменяться в широких пределах  $4 < M < 120$  в зависимости от типа носителей и вида среды.

В дальнейшем все описание проведено для типичных слабопроводящих жидкостей со значениями параметров  $Pr=10$ ,  $M=14.14$ . [13],  $A=0.25$  [15].

Механическое равновесие жидкости ( $v=0$ ) в данном случае характеризуется линейным распределением температуры  $\vartheta_0 = -z + 1$  и следующими распределениями электрического поля и заряда [15]:

$$E_z = \frac{3A(1+2Az)^{1/2}}{(1+2A)^{3/2}-1}, \quad \Phi_0 = \frac{(1+2Az)^{-3/2}}{(1+2A)^{3/2}-1}, \quad q_0 = -\frac{3A^2(1+2Az)^{-1/2}}{(1+2A)^{3/2}-1}, \quad (301)$$

При определенном наборе параметров задачи  $(T, Ra, M, Pr, A, l)$  малые возмущения начинают нарастать монотонным или колебательным образом, и в результате эволюции возникают конечно-амплитудные электроконвективные течения. Например, при нагреве сверху электроконвекция может возникать колебательным образом [12], если электроконвективный параметр превышает некоторое критическое значение  $T > T_{osc}^{lin}$ . В нашем случае оно будет зависеть от оставшихся управляющих параметров  $T_{osc}^{lin}(Ra, M, Pr, A, l)$ . При этом в горизонтальном слое или в кольцевых каналах могут установиться режимы стоячих или бегущих волн.

Численное моделирование двумерных волновых режимов электроконвекции проводилось с помощью двухполевого метода (при решении уравнения Навье-Стокса вместо переменных скорости  $v$  и давления  $p$  используются вихрь скорости  $\varphi$  и функция тока  $\psi$ ):

$$v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v_z = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \varphi = (rot v)_y. \quad (302)$$

Благодаря малой инжекции ( $A \ll 1$ ) задача может быть решена в безиндукционном приближении [15]: считается, что электрическое поле в слое не зависит от конвективного переноса зарядов. Результаты решения задачи в безиндукционном приближении и в полной постановке отличаются не более чем на 1%. В безиндукционном приближении система уравнений электроконвекции неизотермической слабопроводящей жидкости записывается в виде:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} = \Delta \varphi - \frac{T^2}{M^2} \cdot E_z \cdot \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{Ra}{Pr} \cdot \frac{\partial T}{\partial x},$$

$$\Delta \psi = -\varphi,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial q}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{T}{M^2} \left( q^2 + E_z \cdot \frac{\partial q}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial t} - \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{1}{Pr} \Delta T. \end{aligned} \quad (303)$$

Граничные условия на горизонтальных границах (2) примут вид:

$$\begin{aligned} z = 0: \quad \Phi &= 1, \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad \vartheta = 1, \quad q = -A \frac{\partial \Phi_0}{\partial z}, \\ z = 1: \quad \Phi &= 0, \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad \vartheta = 0. \end{aligned} \quad (304)$$

Для численного моделирования режимов бегущих волн необходимо использовать также условие периодичности всех функций, описывающих состояние системы вдоль горизонтальной оси  $x$ :

$$F(x, z, t) = F(x + l, z, t), \quad (305)$$

где  $F = (\psi, \varphi, \vartheta, q, \Phi)$ .

Сформулированная выше задача об электроконвекции неоднородно нагретой жидкости (303)–(305) решалась с помощью метода конечных разностей [16]. Явная схема использовалась для аппроксимации уравнения эволюции вихря. Переключение расчетов со схемы дифференцирования центральными разностями на схему с разностями «против потока» и обратно происходило в зависимости от выполнения критерия устойчивости [15]. Уравнение Пуассона для функции тока решалось методом последовательной верхней релаксации [16]. Для уравнений переноса тепла и заряда применялась явная схема с разностями «против потока». Численное моделирование проведено для случая ячейки длиной  $l=2$  (критическое волновое число  $k=\pi$ ), на сетке из  $41 \times 21$  узлов. Дальнейшее увеличение числа узлов сетки не приводило к заметному изменению результатов.

Отметим, что выбранное волновое число  $k=\pi$  соответствует точке, лежащей левее минимума нейтральной кривой устойчивости. Например, при  $Ra=1800$  значения электроконвективного параметра на нейтральной кривой, полученные из решения линейной задачи:  $T_{osc}^{lin}(k=\pi)=7007.3$  и  $T_{osc}^{lin}(k=2\pi)=6790.9$ , поэтому в нашем численном моделировании могут реализовываться решения в пространственным периодом  $l/2$  даже вблизи границы устойчивости.

Известно, что в плоском слое жидкости наряду с решениями с периодом  $l$  могут также возникать волны, имеющие другие периоды вдоль направления распространения волны (неустойчивость Экхауса). Кроме того, в слое благодаря нелинейной эволюции могут нарастать и различные трехмерные возмущения. Эти явления способны существенно изменить наблюдаемую картину.

Для возможной экспериментальной проверки нашего рассмотрения двумерных структур и с целью избежать вышеуказанных осложнений можно предложить реализацию волнового движения в кольцевом канале с длиной  $L=ml \gg 1$ , где  $m$  – целое (размерная длина  $L=ml \gg d$ ). При использовании небольших надкритичностей, например, по параметру  $T$ , и подбирая  $L$  легко добиться выполнения условия, когда волновые возмущения с пространственными периодами  $l_1$ , также удовлетворяющими условию  $L=m_1 l_1$ , находятся в области устойчивости (лежат ниже нейтральной кривой  $T(k)$ ) [12].

Геометрия кольцевых каналов часто используется для экспериментального исследования конвективных бегущих волн, наблюдаемых в бинарных смесях спирт-вода, для которых можно провести аналогию с электроконвекцией. В этих разных на первый взгляд системах существуют общие черты: 1) кроме конвективного переноса примеси (заряда) существуют дополнительные механизмы транспорта: термодиффузия нейтральной примеси под действием градиента температуры (дрейф заряда в электрическом поле); 2) при определенных условиях конвекция возникает колебательным образом, и в результате эволюции формируется бегущая волна.

Несмотря на то, что геометрия кольцевых каналов является существенно трёхмерной, в случае экспериментального исследования конвекции бинарных смесей в кольцевых каналах большого радиуса  $R \gg d$  (длины  $L = 2\pi R$ ) и ширины  $1,3-3 d$  [17] реализуются квазидвумерные режимы в виде валов, ось которых перпендикулярна боковым границам. Полученные в ходе численного моделирования бегущих волн в горизонтальном слое распределения концентрации и связанные с ними теневые изображения, а также бифуркационные диаграммы конвективных решений, находятся в хорошем соответствии с экспериментальными данными.

Эволюция осциллирующих электроконвективных течений анализировалась на основе поведения локальных и интегральных величин:

- максимального значения функции тока в конвективной ячейке

$$\psi_{max}(t) = \max[\psi_{i,j}(t_k)]; \quad (306)$$

- минимального значения функции тока в конвективной ячейке

$$\psi_{min}(t) = \min[\psi_{i,j}(t_k)]; \quad (307)$$

- функции тока в фиксированной точке слоя, например, при  $x=l/4, z=1/2$ ,

$$\psi_{loc}(t) = \psi\left(x = \frac{l}{4}, z = \frac{1}{2}, t_k\right); \quad (308)$$

- вида спектров Фурье  $A(\omega)$  осцилляции функции тока в фиксированной точке.



Для характеристики установившихся и переходных решений, у которых конвективные структуры смещаются вдоль горизонтальной координаты, будем также использовать фазовую скорость волны, определяемую как производную от горизонтальной координаты максимума функции тока в конвективной ячейке

$$v_{ph} = dx_{(\psi=\psi_{max})}/dt \quad (309)$$

Расчеты показали, что вертикальная координата этого максимума в режиме стоячих и бегущих волн располагается на середине высоты конвективной ячейки  $z_{(\psi=\psi_{max})}=1/2$ . Кроме мгновенной фазовой скорости используем также ее среднее значение:

$$\langle v_{ph} \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau v_{ph} dt = (x(\tau) - x(0))/\tau, \quad (310)$$

где  $\tau$  – достаточно большой интервал времени, по которому проводится осреднение (в нашем случае 30 и более периодов осцилляций бегущей волны  $\omega_{TW}$ ).

Пространственно-временное распределение полей функции тока  $\psi$ , заряда  $q$  и температуры  $\vartheta$  и разложение этих полей в ряды Фурье по пространственным гармоникам  $\hat{F}_n(t)$  позволяет детально охарактеризовать особенности различных течений жидкости. Ограничимся разложением искомых функций в ряды в горизонтальном направлении, в сечении, соответствующем середине высоты слоя ( $z=1/2$ ):

$$F\left(x, z = \frac{1}{2}, t\right) = \hat{F}_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{F}_n(t) e^{ik_n x}. \quad (311)$$

Для описания возникающих в жидкости структур в нашем случае достаточно информации о первой  $\hat{\psi}_1(t)$  и второй модах  $\hat{\psi}_2(t)$  разложения функции тока, вклад третьей гармоники  $\hat{\psi}_3(t)$  в общее решение мал (не превышает 1%). Наш анализ показал, что поведение гармоник температуры  $\hat{\vartheta}_n(t)$  и заряда  $\hat{q}_n(t)$  качественно воспроизводит эволюцию пространственных гармоник функции тока.

Обсудим влияние нагрева сверху (изменение числа Релея) на эволюцию электроконвективных волновых режимов. В ходе численного моделирования обнаружено два типа бегущих волн (TW –traveling wave), изображенных для примера в случае  $T=6820$ ,  $Ra=-1900$  на рис. 30.

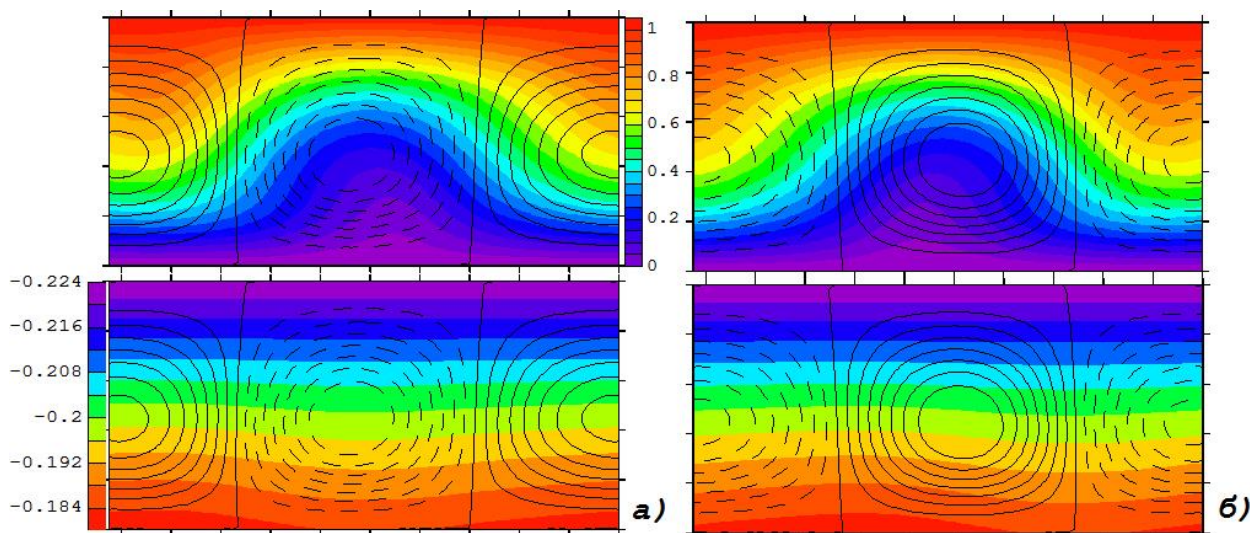
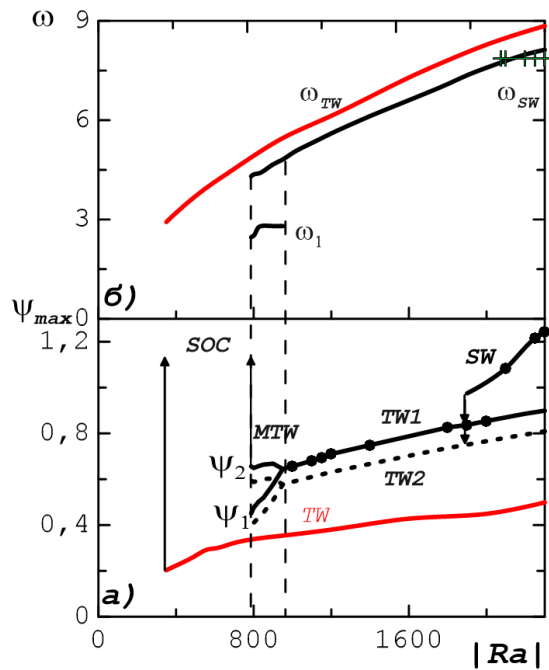


Рис. 30. Бегущие волны Изолинии функции тока и температуры (верхний ряд), функции тока и заряда (нижний ряд): а) режим TW1, б) режим TW2

Изолинии вращающихся по часовой стрелке вихрей (положительная функция тока, штриховые линии) против часовой стрелки (отрицательная функция тока, сплошные линиями) совмещены с полями температуры (верхний ряд) и плотности заряда (нижний ряд). Несмотря на то, что оба решения трансляционно-симметричны с пространственным периодом  $l$ , между ними имеется и различие, которое связано с тем, что интенсивность вращения соседних вихрей в бегущей волне разная. В одном режиме (TW1, бегущей слева направо волны) вращающийся по часовой стрелке положительный вихрь имеет большую интенсивность, но меньший горизонтальный размер, чем его сосед  $\psi_{max}^1 > |\psi_{min}^1|$  (рис. 30 а), а в другом режиме (TW2, бегущей справа налево волны) наоборот –  $\psi_{max}^2 < |\psi_{min}^1|$ , причем  $\psi_{max}^1 \approx -\psi_{min}^2$  и  $\psi_{max}^2 \approx -\psi_{min}^1$ . Из рис. 30 видно, что конвективное движение сильно искажает изолинии температуры, в то время как отклонение заряда от равновесного значения мало и имеет наибольшее значение у анода (нижнего электрода).

Бифуркационные диаграммы режимов при  $T=6780$  и  $T=6820$  представлены на рис. 31. Они содержат зависимости максимального значения функции тока  $\psi_{max}^1$  (сплошная линия) и  $\psi_{max}^2$  (штриховая линия) бегущих волн (рис.31 а), а



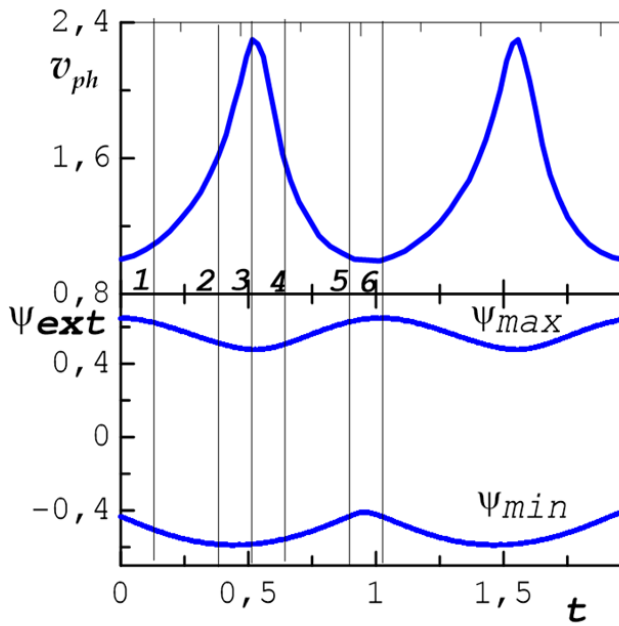
**Рис. 31. Бифуркационные диаграммы режимов электроконвекции;  $A=0.25$ ,  $M=14.1$ ,  $Pr=10$**

также циклической частоты колебаний функции тока в фиксированной точке ячейки  $\psi_{loc}(t)$  (рис. 31 б) от модуля числа Релея. Точками на рис. 31 а отмечены данные максимального значения функции тока для бегущих TW1 и стоячих волн, которые соответствуют значениям параметров ( $T=6820$ ,  $1000 < |Ra| < 2500$ ). Частоты (рис. 31 б) определяются по спектрам Фурье, которые могут содержать либо характерную частоту электроконвективных колебаний  $\omega_{TW}$  (рис. 31 б, бегущая волна,  $\omega_{TW}$ ) и удвоенную гармонику  $2\omega_{TW}$ , либо дополнительно к ним частоту  $\omega_1$  (рис. 31 б, MTW– модулированная бегущая волна).

Из бифуркационной диаграммы (рис. 31) видно, что уменьшение интенсивности нагрева ( $|Ra|$ ) приводит к уменьшению максимального значения функции тока, а следовательно, интенсивности конвективного перемешивания жидкости в волне. Основная частота колебаний  $\omega_{TW}$  в фиксированной точке конвективной ячейки и фазовая скорость волны  $v_{ph} = \omega_{TW}/k$ , также убывает с уменьшением интенсивности нагрева.

При уменьшении степени нагрева  $|Ra| < |Ra_{MTW}|=925$  на бифуркационной диаграмме появляется новое решение: бегущая волна приобретает модуляцию по амплитуде  $\psi_1 < \psi_{max}(t) < \psi_2$ , при этом новая частота, связанная с модуляцией волны, возникает скачком  $\omega_1=2,802$  и характеризует квазипериодические колебания решений в фиксированной точке конвективной ячейки (отношение

$Q=\omega_1/\omega_{TW}$  не является рациональным числом). Минималь-

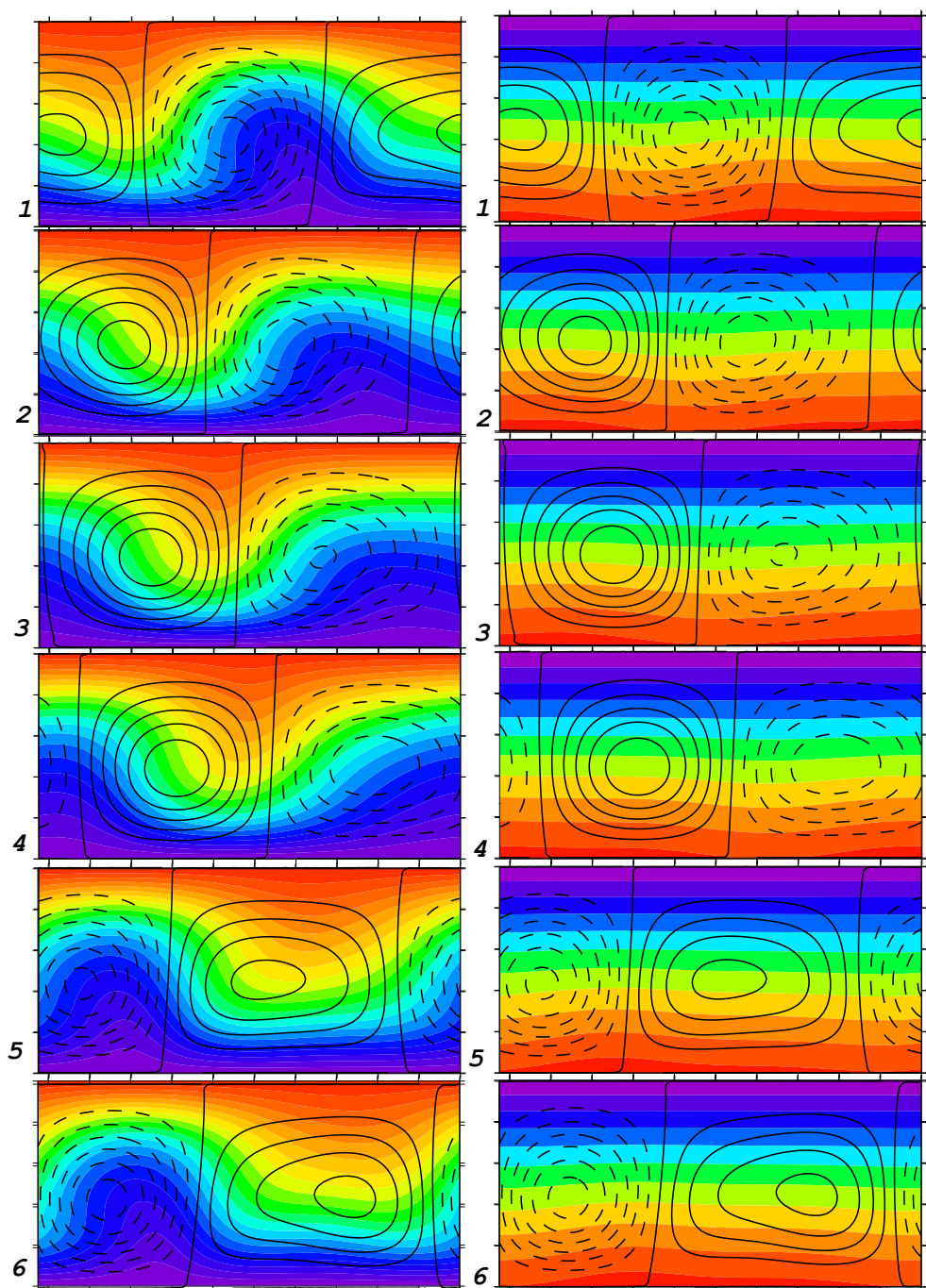


**Рис. 32. Модулированная бегущая волна. Зависимости максимального и минимального значения функции тока, а также фазовой скорости волны от времени**

ное  $\psi_1$  и максимальное  $\psi_2$  значения амплитуды бегущей волны также представлены на рис. 31 а. С уменьшением модуля числа Релея степень модуляции амплитуды постепенно нарастет  $\delta_A = \psi_1/\psi_2$ , а частота бегущей волны  $\omega_{TW}$  и частота  $\omega_1$  уменьшаются (рис. 31 б). При некотором критическом значении числа Релея  $|Ra_{SOC}| \approx 784$  модулированная бегущая волна теряет устойчивость и после переходного процесса устанавливается режим интенсивной стационарной конвекции (SOC,  $\psi_{soc} \cong 26$ ). Этот режим характеризуется зеркальной симметрией между противоположно вращающимися валами.

В модулированной волне (MTW) при  $|Ra| < |Ra_{MTW}|$  (например,

для  $T=6820$ ,  $|Ra|=800$ , рис. 32) периодически меняется не только амплитуда (значение  $\psi_{max}(t)$  изменяется в интервале  $(\psi_1, \psi_2)$  (рис. 32 а)), но и фаза  $v_{ph_1} < v_{ph} < v_{ph_2}$  (рис. 32 б). Причем средняя фазовая скорость MTW во всем интервале их существования удовлетворяет условию  $\langle v_{ph} \rangle \cong \omega_{TW}/k$ , (например,  $T = 6820$ ,  $Ra = -800$ ,  $\omega_{TW} = 4.33$ ,  $k = \pi$ ,  $\omega_1 = 2.52$ ,  $\langle v_{ph} \rangle = 1.37$ ), а фазовая скорость на периоде модуляции меняется в  $(v_{ph})_{max}/(v_{ph})_{min} \approx 2.3$  раза. Частота модуляции  $\omega_{mod} = 2\pi/T$  ( $T$  – период модуляции) связана с частотами колебаний в спектре квазипериодических колебаний соотношением  $\omega_{mod} =$



а)

б)

**Рис. 33. Модулированная бегущая волна.**

**Изолинии а) функции тока и температуры;**

**б) функции тока и плотности различные моменты времени.**

**Индексы «1»-«6» соответствуют моментам времени, отмеченным на рис. 32.**

**$Ra=-800$ .  $T=6820$ ,  $A=0.25$ ,  $M=14.1$ ,  $Pr=10$ .**

$2\omega_{TW} - \omega_1$  и одинакова для изменения фазовой скорости  $v_{ph}(t)$ , максимального  $\psi_{max}(t)$  и минимального значений  $\psi_{min}(t)$  функции тока. Колебания максимального  $\psi_{max}(t)$  и минимального  $\psi_{min}(t)$  значений функции тока сдвинуты

по фазе. Интенсивность вращения соседних вихрей в конвективной ячейке в режиме модулированной бегущей волны различны, но в отличие от бегущей волны изменяются на периоде модуляции.

Изолинии функции тока, температуры и плотности заряда модулированной бегущей волны (MTW) в моменты времени  $t_1 = T/8$ ,  $t_2 = 3T/8$ ,  $t_3 = 4T/8$ ,  $t_4 = 5T/8$ ,  $t_5 = 7T/8$ ,  $t_6 = T$  при ( $|Ra| = 800$ ,  $\omega_{mod} = 6.123$ ) представлены на рис. 6 (ряды, отмеченные индексами 1–6 на рис. 33, соответственно). Следует обратить внимание на то, что сверху находится более нагретая (легкая) жидкость и течение обеспечивается силой Кулона, поднимающей более холодную (тяжелую) жидкость вверх (рис. 6 а). Из рисунков видно направление движения волны слева направо. Общее свойство: конвективное движение значительно искажает изолинии температуры (отклонение изолиний от горизонтального положения в равновесии велико), в то время как отклонение плотности заряда от равновесного распределения (3) мало. Конвективные валы, вращающиеся по и против часовой стрелке, не только смещаются вдоль горизонтали и меняют свою интенсивность, но и меняются в размерах, что связано с генерацией второй пространственной гармоники  $\hat{\psi}_2, \hat{\vartheta}_2, \hat{q}_2$  (12). Наличие высших пространственных гармоник  $\hat{F}_2$  хорошо видно на эволюции поля температуры (рис. 5 а).

В момент  $t_1 = T/8$ , фазовая скорость волны немного превышает минимум, интенсивность электроконвекции большая, горизонтальный размер вихря, вращающегося против часовой стрелки, превышает размер соседнего. В ходе эволюции размеры соседних противоположно вращающихся вихрей осциллируют в противофазе и в моменты  $t = 3T/8$  и  $6T/8$  практически совпадают. При  $t_2 < T < t_4$  большую часть ячейки занимает вихрь, вращающийся по часовой стрелке, при  $t_5, t_6$  снова преобладает вихрь, направленный против часовой стрелки. В эти моменты времени нулевая изолиния (соответствующая средней температуре) имеет форму близкую к трапеции.

На бифуркационной диаграмме (рис. 31) при  $T = 6280$  присутствует область чисел Релея  $1900 < |Ra| < 2400$ , в которой сосуществуют бегущие (TW) и стоячие (SW) волны. Отметим, что частота стоячей волны  $\omega_{SW}$  немного меньше частоты



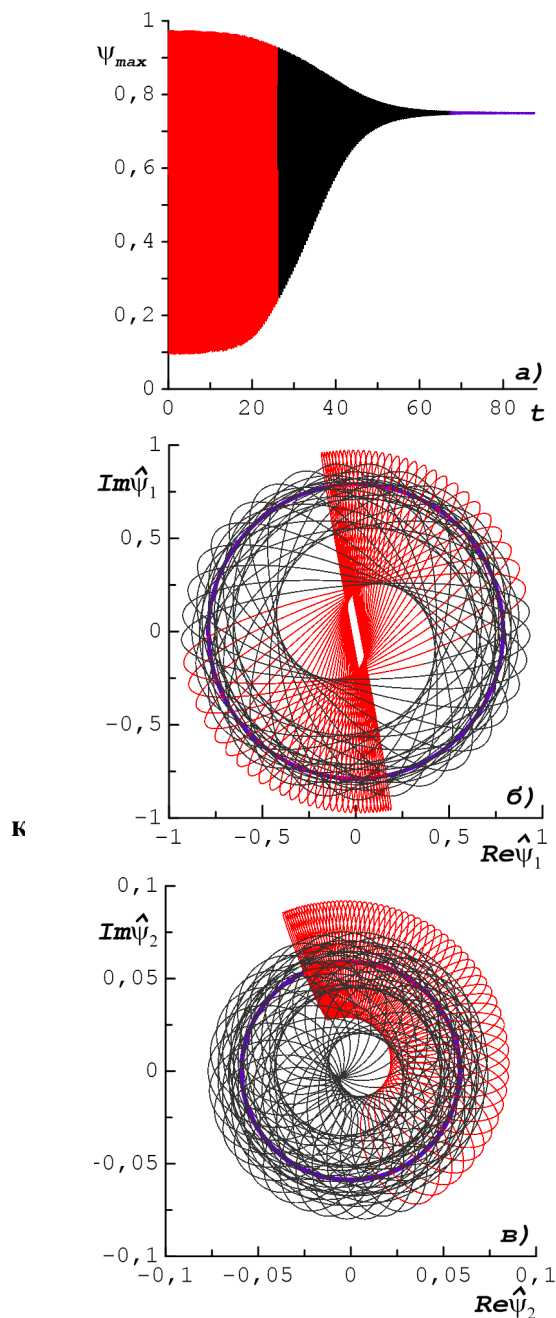
бегущей  $\omega_{TW}$  и практически не зависит от числа Релея (крестики на рис. 31 б).

В стоячей волне выполняется условие  $\psi_{max}(t) = -\psi_{min}(t)$ .

Обсудим переходный процесс от стоячей волны к бегущей, отраженный для примера на рис. 34, 35 при  $|Ra|=1888$ . Изменение пространственного положения максимума функции тока на начальном интервале перехода представлено на характеристической плоскости (рис. 34,  $0 < t < 26,5$ , красные круги). На первом временном интервале  $t < 1.88$  положение максимума функции тока осциллирует в интервалах координат  $0.5 < x < 0.75$  и  $1.5 < x < 1.75$ , оставляя на характеристической плоскости следы в виде «подков». Верхние границы этих интервалов ( $x=0.5$  и  $x=1.5$ ) соответствуют положениям экстремумов первой пространственной гармоники, а сами осцилляции связаны с изменениями амплитуды второй гармоники. Через половину периода по времени происходит переключение: положение максимума сдвигается на половину длины ячейки  $\pm l/2$ .

В интервале  $1.88 < t < 25$  характер волны изменяется. Несмотря на то, что горизонтальное движение структуры существует по-прежнему только в части конвективной ячейки, интервал координат  $x$ , при котором существует возвратное движение, уменьшается и

полностью исчезает при  $t=20,39$ . В дальнейшем при  $t=25.16$  возникает сквозное движение конвективных валов через слой, при этом из рисунка видно, что формирующаяся бегущая волна движется справа налево (решение TW2) и модулирована по фазе: фазовая скорость волны равна обратному тангенсу наклона к графику  $t(x)$ .



**Рис. 35. Переход от стоячей волны к бегущей. Эволюция а) эволюция максимальной функции тока, б) первой и в) второй пространственных гармоник функции тока.**

Полностью переход от стоячей волны к бегущей при  $Ra = -1888$ , представлен на рис. 8 ( $0 < t < 87,5$ ), где изображены эволюция максимальной функции тока (рис. 35а) траектории на плоскостях  $Re(\hat{\psi}_1) - Im(\hat{\psi}_1)$  (рис. 35 б), и  $Re(\hat{\psi}_2) - Im(\hat{\psi}_2)$  (рис. 35 с), отражающие эволюцию первой и второй пространственных гармоник функции тока. При этом на всех частях рисунка использована одинаковая цветовая кодировка: красные линии соответствуют интервалам времени  $\Delta t_1$  ( $0 < t < 26,5$ ), черные –  $\Delta t_2$  ( $26,5 < t < 78,32$ ), фиолетовые –  $\Delta t_3$  ( $78,32 < t < 87,5$ ). В результате представленного на рис. 35 процесса формируется бегущая волна TW2 (рис. 30) с  $\psi_{max}^2 = 0.750$ . Вклад второй гармоники (рис. 35 в) на порядок меньше вклада первой (рис. 35 б). Первый этап  $\Delta t_1$  соответствует переходу от стоячей волны к модулированной бегущей, который был обсужден ранее (рис. 34). На втором этапе  $\Delta t_2$  модуляция фазовой скорости значительно изменяется, уменьшаясь по амплитуде. При дальнейшей эволюции волны  $\Delta t_3$  амплитуда модуляции фазовой скорости убывает до нуля и при  $t = 78,32$  возникает бегущая с постоянной скоростью и амплитудой волна. На рис. 35 эту волну отображают фиолетовые окружности, причем вклад второй гармоники  $|\hat{\psi}_2| = 0.059$  составляет 13% от вклада первой гармоники и  $|\hat{\psi}_1| = 0.792$ . Вклад третьей гармоники, как отмечалось ранее, пренебрежимо мал  $|\hat{\psi}_3| = 0.0016$ . Аналогичное поведение демонстрируют гармоники температуры и заряда.

При значении электрического параметра  $T = 6780$  бифуркационная диаграмма меняется (красные линии на рис. 31), режим модулированных бегущих волн отсутствует, а переход к стационарной конвекции (SOC) происходит от режима бегущих волн (TW) при  $|Ra_{SOC}| \approx 337$ . Отметим, что различие между двумя режимами бегущих волн TW1 и TW2 по-прежнему существует, но в пределах графика не заметно. Частота бегущей волны уменьшается с уменьшением интенсивности нагрева (красная линия на рис. 31 б).

Итоговая карта различных волновых режимов представлена на плоскости  $(Ra, T)$  (рис. 36). В зависимости от набора параметров  $(Ra, T)$  устойчивыми могут



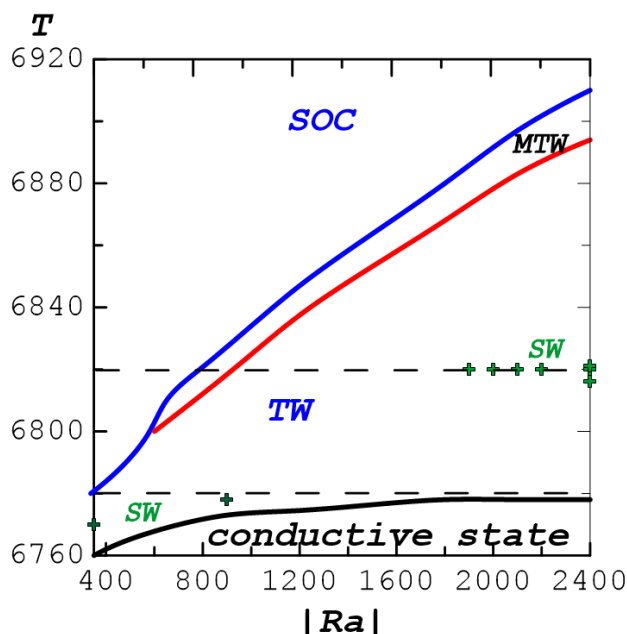


Рис. 36. Карта волновых режимов на плоскости  $(Ra, T)$ . TW – бегущая волна; SW – стоячая волна; MTW – модулированная бегущая волна, SOC – стационарная конвекция

быть различные решения. Нижняя (черная) граница отделяет область покоящейся жидкости (conductive state) от установившихся волновых режимов. При фиксированном числе Релея и увеличении электроконвективного параметра  $T$  выше этой границы начинают нарастать колебательные возмущения и формируется стоячая электроконвективная волна (SW), которая с ростом параметра  $T$  разрушается с формированием бегущей волны (TW). Устойчивые стоячие волны отмечены зелеными крестиками. В стоячей волне энергия перетекает между первой и второй пространственными гармониками, как это было проанализировано выше.

Дальнейший рост параметра  $T$  приводит к появлению относительно узкой зоны модуляции бегущей волны (MTW) по амплитуде и по фазе, а затем к разрушению волнового режима и переходу к режиму стационарной конвекции (SOC). С ростом интенсивности нагрева сверху  $|Ra|$  порог устойчивости  $T_{osc}$  повышается, а область существования волновых режимов расширяется.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
2. Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн// Регулярная и хаотическая динамика. Ижевск 2000.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
4. Заславский Г. М., Сагдеев Р. З. Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988.
5. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
6. Найфэ А. Х. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1976.
7. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973.
8. Карлов Н. В., Кириченко Н.А. Колебания, волны, структуры. М.: Физматлит, 2003.
9. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988.
10. Жижин Г. В. Саморегулируемые волны химических реакций и биологических популяций. М.: Наука, 2004.
11. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. М.: Наука, 1979.
12. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Т. IV. Оптика. М.: Наука, 1980.
13. Мордвинов А. Н., Смородин Б. Л. Журнал экспериментальной и теоретической физики. 141 (5), 997 (2012).
14. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Гидродинамика. Наука, Москва, 1986.
15. Верецага А. Н., Тарунин Е. Л. В сб. Численное и экспериментальное моделирование гидродинамических явлений в невесомости, Свердловск: УрО АН СССР, 93 1988.
16. Тарунин Е. Л. Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1990.
17. Eaton K. D., Ohlsen D. R., Yamamoto S. Y., Surko C. M., Barten W., Lücke M., Kamps M., Kolodner P. Phys. Rev. A 43, 7105. 1991.

*Учебное издание*

**Сморodin Борис Леонидович**

**Физика волновых процессов**

Учебное пособие

Редактор *А. С. Серебrenиков*

Корректор *С. А. Вороненко*

Компьютерная верстка: *Б. Л. Смородин*

---

Объем данных 2,58 Мб

Подписано к использованию 23.08.2023

---

Размещено в открытом доступе

на сайте [www.psu.ru](http://www.psu.ru)

в разделе НАУКА / Электронные публикации  
и в электронной мультимедийной библиотеке ELiS

Управление издательской деятельности  
Пермского государственного  
национального исследовательского университета  
614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15