

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Уральское региональное отделение  
Российской академии космонавтики  
имени К. Э. Циолковского

---

# ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ и УПРАВЛЕНИЯ

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

---



Межвузовский сборник научных трудов

*Издается с 1972 г.*

Выпуск 55



Пермь 2023

УДК 531+681.5  
ББК 22.21+32.915  
П78

**ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И УПРАВЛЕНИЯ.** Нелинейные динамические системы: межвузовский сборник научных трудов / Пермский государственный национальный исследовательский университет. – Пермь, 2023. – Вып. 55. – 98 с.

ISBN 978-5-7944-4059-1 (вып. 55)  
ISBN 978-5-7944-1360-1

В настоящем выпуске опубликованы статьи о научных исследованиях в области управления нелинейными динамическими объектами. Рассматриваются математические модели различных систем, методы их оптимального управления и др.

Издание предназначено для научных работников, инженеров-механиков, аспирантов, студентов старших курсов технических факультетов вузов.

**PROBLEMS OF MECHANICS AND CONTROLLABLES.** Nonlinear dynamic systems: A collection of scientific papers / Perm State University. – Perm, 2023. – Issue 55. – 98 p.

The present issue problems of the optimal control theory, numerical solution of nonlinear problems and the methods of control of some dynamic systems.

The issue is meant for researchers, post-graduates, engineers and students, studying non-linear dynamic systems.

УДК 531+681.5  
ББК 22.21+32.915

**Рецензенты:** доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Автоматика и телемеханика» Пермского национального исследовательского политехнического университета (ПНИПУ) **С. Ф. Тюрин**;

доктор технических наук, профессор **О. Г. Пенский**

Печатается по решению ученого совета механико-математического факультета  
Пермского государственного национального исследовательского университета

#### Редакционная коллегия

**В.В. Маланин** (д.т.н., проф., Пермский государственный национальный исследовательский университет) – *главный редактор*,  
**Р.Г. Мухарлямов** (д.ф.-м.н., проф., Российский университет дружбы народов) – *зам. гл. редактора*, **Н.Н. Макеев** (д.ф.-м.н., проф., г. Саратов), **В.И. Яковлев** (д.ф.-м.н., проф., Пермский государственный национальный исследовательский университет), **С.В. Лутманов** (к.ф.-м.н., доц., Пермский государственный национальный исследовательский университет) – *секретарь*

Издание включено  
в национальную информационно-аналитическую систему  
«Российский индекс научного цитирования» (РИНЦ).

ISBN 978-5-7944-4059-1 (вып. 55)  
ISBN 978-5-7944-1360-1

© Пермский государственный  
национальный исследовательский  
университет, 2023

---

---

# Содержание

---

---

Выпуск 55 / 2023

<b>Кусяков А.Ш.</b> Статистическое моделирование многостеночной цилиндрической оболочки.....	4
<b>Лутманов С.В.</b> Сравнительный анализ качества решения задачи вывода возмущенного движения точки на базовую траекторию по различным критериям оптимальности.....	11
<b>Макеев Н.Н.</b> Об интегралах движения сложной механической системы.....	34
<b>Макеев Н.Н.</b> Маятниковые движения гиростата в поле светового давления.....	49
<b>Полосков И.Е.</b> Ограниченное случайное возмущение, его характеристики и вопросы статистического моделирования.....	60
<b>Полосков И.Е.</b> Определение спектральной плотности решения линейного нейтрального стохастического параболического дифференциального уравнения с несколькими запаздываниями в установившемся режиме.....	72
<b>Трофимова И.В., Переварюха А.Ю., Михайлов В.В.</b> Алгоритм переопределения дифференциальных уравнений для моделирования инвазионных процессов.....	85
Об авторах опубликованных статей.....	96
Информация по оформлению рукописей .....	97

УДК 539.3

**А. Ш. Кусяков**

*Пермский государственный национальный  
исследовательский университет*

Россия, 614068, г. Пермь, ул. Букирева, 15

kusyakov@psu.ru

### СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МНОГОСТЕНОЧНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

*Приведены результаты статистического моделирования многостеночной цилиндрической оболочки, находящейся действием осевых сжимающих нагрузок. Построены точечные оценки коэффициента общей формы потери устойчивости. Показано, что с достаточной для инженерных расчетов точностью, можно считать, что коэффициент устойчивости имеет нормальное распределение, а разброс физических характеристик материала не оказывает существенного влияния на величину этого коэффициента. Все расчеты выполнялись в среде математического пакета MAXIMA.*

**Ключевые слова:** композит; цилиндрическая оболочка; устойчивость; статистическое моделирование; точечные оценки; MAXIMA.

В задачах механики конструкций необходимость в статистическом моделировании возникает, как правило, в следующих случаях:

– невозможность получения аналитических выражений функций распределения вероятностей искомых величин (напряжений, критических нагрузок, перемещений и т. д.);

– невозможность проведения натуральных экспериментов с реальными объектами.

Статистическое моделирование включает следующие основные этапы:

- моделирование входных случайных величин;
- преобразование входных величин в соответствии с исследуемой моделью;
- построение выходных статистических оценок искомых величин.

Общие вопросы статистического моделирования, а также применение этого метода в самых различных областях науки и техники исследовались многими авторами [4, 5, 10, 11 и др.].

Вероятностные методы расчета конструкций из традиционных материалов приведены, например, в работах [2, 3].

Краткий исторический обзор исследований в области статистических методов в механике композитных материалов приведен в статье [1].

В статье [7] были построены точечные коэффициенты устойчивости для многостеночной прямоугольной пластинки.

Целью данной работы является построение точечных оценок коэффициента общей устойчивости для многостеночной цилиндрической оболочки, находящейся под действием осевых сжимающих нагрузок. В качестве входных параметров использовались упругие характеристики материала конструкции. Все расчеты были выполнены в среде математического пакета MAXIMA [6].

Рассматривается многостеночная цилиндрическая оболочка, состоящая из двух несущих слоев с одинаковыми геометрическими и физическими характеристиками, соединенных набором стенок (рис. 1).

Полотно несущего слоя образовано укладкой продольных слоев однонаправленного композитного материала. Стенки состоят из того же материала, что и несущие слои. Продольная укладка слоев обеспечивает наилучшие характеристики прочности по направлению действия нагрузок, а введение в конструкцию оболочки вертикальных стенок позволяет увеличить изгибную жесткость конструкции.

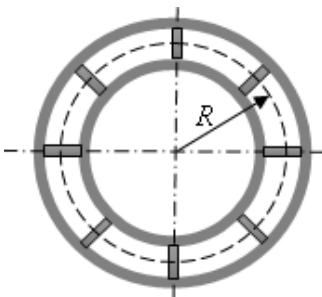


Рис. 1. Поперечное сечение многостеночной оболочки

Оболочка находится под действием осевых сжимающих нагрузок  $q$  (рис. 2). Требуется исследовать влияние разброса упругих характеристик материала оболочки на величину коэффициента общей устойчивости конструкции.

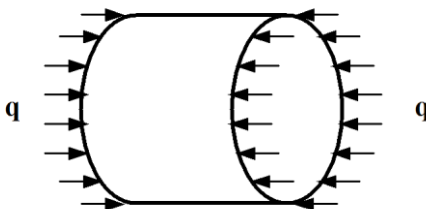


Рис. 2. Оболочка, находящаяся под действием сжимающих нагрузок

Основные расчетные зависимости для многостеночной оболочки приведены в работе [8]. В частности, критическую нагрузку, соответствующую общей форме потери устойчивости, будем определять по формуле

$$q_{cr} = \frac{2}{R} \sqrt{\frac{D_{xx}^{(p)}}{\delta_{yy}^{(p)}}}. \quad (1)$$

Здесь  $D_{xx}^{(p)}$  – изгибная жесткость конструкции по направлению действия нагрузки,  $\delta_{yy}^{(p)}$  – податливость оболочки в окружном направлении.

Коэффициент общей формы потери устойчивости определим следующим образом:

$$\eta = \frac{q_{cr}}{q} \quad (2)$$

Исследуем влияние разброса упругих характеристик материала конструкции на величину коэффициента устойчивости. Предполагается, что плотности распределения вероятностей упругих характеристик материала конструкции подчиняются нормальному закону. Для решения задачи воспользуемся пакетами `descriptive` и `distrib` системы MAXIMA. Загрузка этих пакетов выполняется по командам

`load(descriptive); load(distrib).`

Формирование случайных величин, распределенных по нормальному закону с математическим ожиданием  $m$  и среднеквадратичным отклонением  $s$  осуществляется по команде

`random_normal(m,s).`

Команды вычисления точечных оценок выборочной совокупности, представленной списком `list`, приведены в таблице.

Команды вычисления точечных оценок

<i>Команда</i>	<i>Описание</i>
<code>mean(list)</code>	Выборочная средняя
<code>median(list)</code>	Выборочная медиана
<code>var(list)</code>	Выборочная дисперсия
<code>var1(list)</code>	Исправленная выборочная дисперсия
<code>std(list)</code>	Среднеквадратичное отклонение
<code>std1(list)</code>	Исправленное среднеквадратичное отклонение
<code>skewness(list)</code>	Выборочный коэффициент асимметрии
<code>kurtosis(list)</code>	Выборочный коэффициент эксцесса

Для построения гистограмм в пакете MAXIMA имеется команда `histogram`. В простейших случаях синтаксис вызова этой команды имеет вид

`histogram(list).`

Данная команда имеет множество опций, из которых наиболее употребительными являются:

- nclasses (по умолчанию 10) – число классов гистограммы;
- frequency (по умолчанию absolute) – масштаб оси ординат, возможные значения: absolute (абсолютный), density (относительный), percent (процентный).

В качестве примера рассмотрим оболочку радиусом  $R=0,5$  м и длиной  $L=0,5$  м, находящуюся под действием сжимающей нагрузки  $q=5 \cdot 10^6$  Н/м. Исходные данные по физическим и геометрическим характеристикам многостеночной оболочки приведены в работе [8].

Входным параметром в этой задаче служит модуль Юнга материала монослоев  $E_1$ , выходным параметром – коэффициент общей формы потери устойчивости  $\eta$ . Теоретическое значение этого коэффициента равно единице.

Исходные данные для модуля Юнга  $E_1$ :

математическое ожидание – 140 ГПа;

среднеквадратичное отклонение – 7 ГПа.

Количество испытаний случайной величины примем равным 1000.

Гистограмма распределения относительных частот представлена на рис. 3.

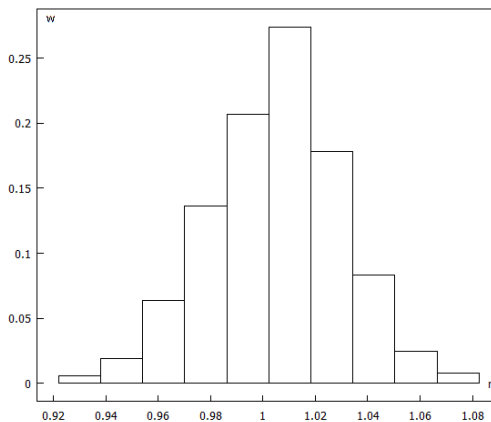


Рис. 3. Гистограмма распределения относительных частот

Результаты статистического анализа для коэффициента общей формы потери устойчивости:

выборочная средняя – 1,005;  
среднеквадратичное отклонение – 0,025;  
коэффициент асимметрии – (-0,088);  
коэффициент эксцесса – 0,099.

Коэффициент общей устойчивости, как это видно по результатам расчета, имеет незначительную отрицательную асимметрию и более "острую" по сравнению с нормальным распределением вершину. С достаточной для инженерных расчетов точностью можно считать, что коэффициент общей формы потери устойчивости имеет нормальное распределение.

По правилу "трех сигм" получим, что практически достоверно, что значения коэффициента устойчивости заключены в интервале (0,93; 1,08). Таким образом, разброс упругих характеристик материала многостеночной оболочки не оказывает существенного влияния на величину коэффициента общей формы потери устойчивости.

### Библиографический список

1. *Архипов И.К.* Роль математики в развитии механики композиционных материалов / И.К. Архипов, В.И. Абрамова, А.Е. Гвоздев, Д.В. Малий // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, № 3(71). С. 430–439.
2. *Бакиров Ж.Б.* Вероятностные методы расчета элементов конструкций. Караганда: КарГТУ, 2001 180 с.
3. *Болотин В.В.* Методы теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. М.: Стройиздат, 1981. 381 с.
4. *Ермаков С.М.* Курс статистического моделирования. М.: Наука, 1976. 320 с.
5. *Задорожный В.Н.* Имитационное и статистическое моделирование: учеб. пособие. Омск: Изд-во ОмГТУ, 2013. 136 с.
6. *Ильина В.А., Силаев П.К.* Система аналитических вычислений МАХИМА для физиков-теоретиков М.: Изд-во МГУ, 2007. 113 с.

7. *Кусяков А.Ш.* Анализ оптимальных многостеночных пластин // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Перм. гос. нац. иссл. ун-т. Пермь, 2022. Вып. 54. С. 24–31.

8. *Кусяков А.Ш.* Проектирование многостеночных композитных оболочек // Вестник Томск. гос. ун-та. Математика и механика. 2021. № 74. С. 103–112.

9. *Рыжиков, Ю.И.* Имитационное моделирование. Теория и технологии / СПб: КОРОНА-принт; М.: Альтекс-А, 2004. 384 с.

10. *Соболь И.М.* Метод Монте-Карло. М.: Наука, 1978. 64 с.

11. *Советов Б.Я., Яковлев С.А.* Моделирование систем: учеб. для вузов. М.: Высшая школа, 2001. 343 с.

## STATISTICAL MODELING OF A MULTI-WALL CYLINDRICAL SHELL

**A. Sh. Kusyakov**

Perm State University, Perm, Russia

kusyakov@psu.ru

The results of statistical modeling of a multi-walled cylindrical shell subject to axial compressive loads are presented. Point estimates of the coefficient of the general form of buckling are constructed. It is shown that with sufficient accuracy for engineering calculations, we can assume that the stability coefficient has a normal distribution, and the spread of the physical characteristics of the material does not have a significant effect on the value of this coefficient. All calculations were performed in the MAXIMA mathematical package environment

**Keywords:** composite; cylindrical shell; stability; statistical modelling; point estimates; MAXIMA.

УДК 519.7

**С. В. Лутманов**

*Пермский государственный национальный  
исследовательский университет*

Россия, 614068, г. Пермь, ул. Букирева, 15

svlut@yandex.ru

**СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ  
КАЧЕСТВА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВЫВОДА  
ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ  
НА БАЗОВУЮ ТРАЕКТОРИЮ  
ПО РАЗЛИЧНЫМ КРИТЕРИЯМ ОПТИМАЛЬНОСТИ**

*Рассматривается полет управляемой материальной точки, движущейся в однородном поле тяжести с учетом сопротивления среды пропорционального квадрату величины скорости при наличии фазовых ограничений. Целью управления служит попадание точки в заданную область. Решение этой задачи сводится к переводу фазового вектора некоторого вспомогательного линейного объекта в начало координат. Указанный перевод осуществляется путем построения дополнительного управления, оптимального по критерию «минимум силы». При этом в развитие предыдущей работы автора [9] рассмотрены три вида нормы вектора управляющей силы. Для каждого случая задача управления решена до конца. Приводятся результаты численных экспериментов, подтверждающие эффективность примененного алгоритма.*

**Ключевые слова:** кинематический закон движения; базовая траектория; фазовые ограничения; программное управление; малая окрестность.

## Введение

Задача наведения на цель управляемой материальной точки при наличии фазовых ограничений на ее траекторию и сопротивления движению, пропорционального квадрату скорости точки является актуальной. Такие задачи рассматривались и решались, например, в [1–4] и [11–15].

Аналогичные задачи исследовались автором в работах [7–10] по следующей схеме. Сначала строился базовый закон движения точки, для которого траектория точки приводилась в малую окрестность цели в конечный момент времени и удовлетворяла фазовым ограничениям, состоящих в запрете захода горизонтальной проекции точки в заданные области, а также в необходимости движения точки в заданном коридоре над поверхностью земли. Программное управление  $u_{\text{баз}}(t), t \in [t_0, T_1]$  (базовое), порождающее базовый закон движения, определялось из дифференциальных уравнений динамики точки.

В силу несовпадения реальных начальных условий полета точки с начальными условиями для ее базового закона движения базовое управление не могло служить решением исходной задачи наведения точки на цель. В связи с этим предусматривалось введение дополнительного управления  $u_{\text{дон}}(t), t \in [t_0, T_1]$ , входящего в дифференциальные уравнения движения точки аддитивно основному управлению, и которое в некоторый заданный момент времени совмещало закон реального (в дальнейшем возмущенного) движения точки с ее базовым законом движения, обеспечивая тем самым выполнение фазовых ограничений и наведение точки на цель. В работе [7] на дополнительное управление налагались геометрические ограничения, состоящие в требовании принадлежности в каждый текущий момент времени вектора управляющих параметров некоторому выпуклому компакту.

В данной статье геометрические ограничения на дополнительное управление снимаются и заменяются требованием его оптимальности по тому или иному критерию. В статье производится анализ качества решения задачи наведения точки на цель в зависимости от конкретного вида критерия оптимальности.

Критерий качества управления взят в форме "минимум силы" [6], минимизация которого обеспечивает минимальные перегрузки для точки. Рассмотрены три вида нормы вектора управляющей силы [10]. Для каждого из них получено оптимальное управление, решающее поставленную задачу. Проведен анализ результатов численного эксперимента, подтверждающий общие теоретические положения.

## 1. Дифференциальные уравнения для возмущений

Разность между реальным (возмущенным) и базовым законом движения точки назовем возмущением. В [9] были выведены дифференциальные уравнения, с высокой степенью точности, описывающие управляемую динамику возмущений. Они представляют собой линеаризацию исходных дифференциальных уравнений движения точки [8]

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{k}{m} \cdot |\dot{\vec{r}}| \cdot \dot{\vec{r}} + \frac{1}{m} (\bar{\vec{v}} + \bar{\vec{u}}) + \bar{\vec{g}}, \quad t \in [t_0, T], \quad (1)$$

в окрестности пары "базовое программное управление, базовое движение" на промежутке времени  $t \in [t_0, T_1]$ .

Здесь

$t \in [t_0, T]$  – текущее время,

$[t_0, T]$  – промежуток времени, на котором происходит полет точки,

$\bar{\vec{r}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3$  – радиус-вектор точки относительно начала координат,

$m$  – масса точки,

$\bar{\vec{v}} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \in R^3$  – вектор основных управляющих параметров,

$\bar{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \in R^3$  – вектор дополнительных управляющих параметров,

$\bar{g}$  – вектор ускорения силы тяжести,

$k$  – коэффициент пропорциональности,

$T_1 < T$  – планируемый момент стыковки возмущенного и базового движения точки.

Эти уравнения представляют собой линейную однородную систему шестого порядка и имеют вид:

$$\dot{x} = A(t)x + Bu, \quad t \in [t_0, T_1], \quad (2)$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad A(t) \div 6 \times 6, B \div 6 \times 3,$$

$$\text{где } A(t) = \begin{pmatrix} O & E \\ O & \Pi \end{pmatrix} \Big|_{p=p_{baz}}, O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \dot{x}}(P(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \cdot \dot{x}) & \frac{\partial}{\partial \dot{y}}(P(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \cdot \dot{x}) & \frac{\partial}{\partial \dot{z}}(P(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \cdot \dot{x}) \\ \frac{\partial}{\partial \dot{x}}(P(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \cdot \dot{y}) & \frac{\partial}{\partial \dot{y}}(P(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \cdot \dot{y}) & \frac{\partial}{\partial \dot{z}}(P(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \cdot \dot{y}) \\ \frac{\partial}{\partial \dot{x}}(P(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \cdot \dot{z}) & \frac{\partial}{\partial \dot{y}}(P(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \cdot \dot{z}) & \frac{\partial}{\partial \dot{z}}(P(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \cdot \dot{z}) \end{pmatrix} \Big|_{\substack{x(t)=x_{baz}(t) \\ y(t)=y_{baz}(t) \\ z(t)=z_{baz}(t)}},$$

$$P(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = -\frac{k}{m} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \Big|_{\substack{x(t)=x_{baz}(t), \\ y(t)=xy(t), \\ z(t)=z_{baz}(t)}}$$

$$B = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

## 2. Постановка задачи оптимального управления

Для линейного динамического объекта (2) поставим задачу о переводе его фазового вектора в начало координат в заданный момент времени посредством программного управления, оптимального в смысле некоторого критерия качества.

**Задача 1.** Для начального условия  $x_0 \in R^6$  определить программное управление  $u^0(\cdot) \in \Pi[t_0, T_1]$  динамическим объектом (2), для которого  $x^0(T_1) = 0$ , где

$$x^0(\cdot) = x(T_1, t_0, x_0, u^0(\cdot)) -$$

– движение объекта, выходящее из начального положения  $(t_0, x_0)$  и порожденное программным управлением  $u^0(\cdot) \in \Pi[t_0, T_1]$ . При этом среди всех программных управлений  $u(\cdot) \in \Pi[t_0, T_1]$ , удовлетворяющих равенству  $x^0(T_1) = 0$ , управление  $u^0(\cdot)$  должно выделяться условием

$$I[u^0(\cdot)] = \min_{u(\cdot)} I[u(\cdot)].$$

Здесь  $I: \Pi[t_0, T_1] \rightarrow R^1$  некоторый функционал, определенный на множестве программных управлений  $\Pi[t_0, T_1]$ .

В статье **задача 1** будет решаться путем сведения ее к функциональной проблеме моментов [6], поэтому критерий качества  $I: \Pi[t_0, T_1] \rightarrow R^1$  должен удовлетворять аксиомам нормы.

Именно:

1. Для всех  $u(\cdot) \in \Pi[t_0, T_1]$  справедливо неравенство  $I[u(\cdot)] \geq 0$ , причем  $I[u(\cdot)] = 0$  тогда и только тогда, когда  $u(t) = 0$  почти всюду на  $[t_0, T_1]$ .

2. Для всех  $u^{(1)}(\cdot), u^{(2)}(\cdot) \in \Pi[t_0, T_1]$  справедливо неравенство,

$$I[u^{(1)}(\cdot) + u^{(2)}(\cdot)] \leq I[u^{(1)}(\cdot)] + I[u^{(2)}(\cdot)].$$

3. Для всех  $u(\cdot) \in \Pi[t_0, T_1]$ ,  $\lambda \in R^1$  имеет место равенство

$$I[\lambda u(\cdot)] = |\lambda| I[u(\cdot)].$$

В работе [8] задача 1 была решена по критерию

$$I_{\text{эн}}^0[u(\cdot)] = \left[ \int_0^{T_1} [u_1^2(\tau) + u_2^2(\tau) + u_3^2(\tau)] d\tau \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

и по критерию

$$\begin{aligned} I_{\text{свл}}[u(\cdot)] &= \max_{\tau \in [t_0, T_1]} \|u(\tau)\| = \max_{\tau \in [t_0, T_1]} \sqrt{\langle u(\tau), u(\tau) \rangle} = \\ &= \max_{\tau \in [t_0, T_1]} \sqrt{u_1^2(\tau) + u_2^2(\tau) + u_3^2(\tau)} \end{aligned} \quad (4)$$

В книге [6] критерий (3) носит название "минимум энергии", а критерий (4) – "минимум силы". Заметим, что оба эти критерия удовлетворяют условиям 1)–3), сформулированным выше. В частности, условие 2) для критерия "минимум энергии" является следствием неравенства Миньковского [5]:

$$\left[ \int_{t_0}^{T_1} \|u^{(1)}(\tau) + u^{(2)}(\tau)\|^p d\tau \right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[ \int_{t_0}^{T_1} \|u^{(1)}(\tau)\|^p d\tau \right]^{\frac{1}{p}} + \left[ \int_{t_0}^{T_1} \|u^{(2)}(\tau)\|^p d\tau \right]^{\frac{1}{p}}$$

при  $p = 2$ , а для критерия (4) – неравенства

$$\max_{\tau \in [t_0, T_1]} \|u^{(1)}(\tau) + u^{(2)}(\tau)\| \leq \max_{\tau \in [t_0, T_1]} \|u^{(1)}(\tau)\| + \max_{\tau \in [t_0, T_1]} \|u^{(2)}(\tau)\|,$$

$$u^{(i)} \in \Pi[t_0, T_1], i = 1, 2$$

В настоящей статье исследуется случай критерия "минимум силы", в котором евклидова норма вектора "силы"

$$\|u\|_1 = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

последовательно заменяется на

$$\|u\|_2 = \sum_{i=1}^3 |u_i|, \quad u \in R^3$$

и на

$$\|u\|_3 = \max_{i \in \{1, 2, 3\}} |u_i| = \max \{|u_1|, |u_2|, |u_3|\}, \quad u \in R^3.$$

Очевидно, что условия 1)–3) здесь также выполняются. При этом все три нормы  $\|u\|_1, \|u\|_2, \|u\|_3$  топологически эквивалентны [5], так как они задают одни и те же системы открытых окрестностей в пространстве  $R^3$ .

### 3. Решение задачи оптимального управления

В статье **задача 1** оптимального управления решается путем сведения ее к функциональной проблеме моментов [6].

Приведем ее формулировку.

#### Задача 2 (проблема моментов)

Дано: линейное нормированное пространство  $H$ ,  $k$  элементов  $h^{(1)}, \dots, h^{(k)} \in H$  этого пространства и  $k$  действительных чисел  $b_1, \dots, b_k \in R^1$ .

Найти: линейный функционал  $L^0 \in H^*$ , для которого

$$L^0[h^{(i)}] = b_i, i = 1, \dots, k \quad (5)$$

и такой, что среди всех других функционалов  $\varphi \in H^*$ , удовлетворяющих условию (5), он имел бы наименьшую естественную норму  $\|\cdot\|^*$ .

Установим соответствие между терминологией **задачи 1** и **задачи 2**:

$H$  – линейное нормированное пространство  $\Omega[t_0, T_1]$  трехмерных векторов

$$h(\cdot) = \begin{pmatrix} h_1(\cdot) \\ h_2(\cdot) \\ h_3(\cdot) \end{pmatrix}$$

дифференцируемых вектор-функций, определенных на промежутке времени  $[t_0, T_1]$ , которое в дальнейшем будем называть основным;

число  $k = 6$  – размерность фазового пространства линейного объекта (2);

элементы  $h^{(1)}, \dots, h^{(6)} \in H$  – вычисляются по формуле

$$\begin{pmatrix} h^{(1)} \\ \dots \\ h^{(6)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^{(1)}[T_1, \tau] \\ \dots \\ h^{(6)}[T_1, \tau] \end{pmatrix} = X[T_1, \tau]B, \quad \tau \in [t_0, T_1],$$

где  $X[t, \tau]$ ,  $t, \tau \in [t_0, T_1]$  – фундаментальная матрица Коши для однородного векторного дифференциального уравнения  $\dot{x} = A(t)x$ ;

числа  $b_1, \dots, b_6 \in R^1$  вычисляются по формуле

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_6 \end{pmatrix} = x_{T_1} - X[T_1, t_0]x_0;$$

линейный функционал определен на основном пространстве  $\Omega[t_0, T_1]$  формулой

$$L[h(\cdot)] = L_{u(\cdot)}[h(\cdot)] = \int_{t_0}^{T_1} \langle h(\tau), u(\tau) \rangle d\tau, \quad h(\cdot) \in \Omega[t_0, T_1],$$

$$u(\cdot) \in \Pi[t_0, T_1];$$

естественная норма  $\|\cdot\|^*$  на сопряженном пространстве  $\Omega^*[t_0, T_1]$ , совпадающая с величиной

$$\|L_{u(\cdot)}\|^* = I[u(\cdot)], \quad u(\cdot) \in \Pi[t_0, T_1].$$

Решение задачи 1 опирается на принцип максимина Н.Н. Красовского [6] и реализуется в три этапа.

*Первый этап.* Посредством формулы

$$\|h(\cdot)\| = \sup_{u(\cdot) \in \Pi[t_0, T_1]} \int_{t_0}^{T_1} \langle h(\tau), u(\tau) \rangle d\tau, \quad (6)$$

$$I[u(\cdot)] \leq 1$$

вводится норма на линейном (основном) пространстве  $\Omega[t_0, T_1]$  трехмерных вектор функций.

*Второй этап.* Строится минимальный элемент  $h^0(\cdot) \in \Omega[t_0, T_1]$  из условия

$$\|h^0\| = \min_{h \in Q} \|h\|, \quad Q = \left\{ h(\cdot) = \sum_{i=1}^6 l_i h^{(i)}[T_1, \cdot] \mid \sum_{i=1}^6 l_i b_i = 1 \right\} \Rightarrow$$

$$h^0(\cdot) = \sum_{i=1}^6 l_i^0 h^{(i)}, \quad \rho^0 = \|h^0(\cdot)\|.$$

*Третий этап.* Определяется оптимальное программное управление  $u^0(\cdot)$  из условия

$$\int_{t_0}^{T_1} \left\langle \sum_{i=1}^6 l_i^0 h^{(i)}[T_1, \cdot], u^0(\tau) \right\rangle d\tau =$$

$$= \max_{u(\cdot) \in \Pi[t_0, T_1]} \int_{t_0}^{T_1} \left\langle \sum_{i=1}^6 l_i^0 h^{(i)}[T_1, \cdot], u(\tau) \right\rangle d\tau,$$

$$I[u(\cdot)] = \frac{1}{\rho^0}.$$

Конкретная процедура реализации приведенных этапов решения задачи 1 зависит от выбранного критерия качества  $I: \Pi[t_0, T_1] \rightarrow R^1$ . В частности, для критерия "минимум энергии" и "минимум силы" с евклидовой нормой  $\|u\|_1 = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$  вектора "силы", все требуемые построения были произведены в [9]. Ниже аналогичные построения осуществляются для критерия "минимум силы" в случаях

$$\|u\|_2 = \sum_{i=1}^3 |u_i|,$$

и

$$\|u\|_3 = \max_{i \in \{1, 2, 3\}} |u_i| = \max\{|u_1|, |u_2|, |u_3|\}, \quad u \in R^3.$$

Полученные результаты иллюстрируются в вычислительном эксперименте на числовых данных, взятых из работ [7–9]. Приведем эти данные:

$$t_0 = 0 \text{ с}, T = 10 \text{ с}, T_1 = 1 \text{ с}, T^* = 8 \text{ с}, m = 100 \text{ кг}, g = 9.8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}, n = 200,$$

$$k = 0.45 \frac{\text{кг}}{\text{м}}, \varphi(x, y) = 50 \cdot \sin(0.000005 \cdot x \cdot y) \text{ м},$$

$$x_T = 3000 \text{ м}, y_T = 0 \text{ м},$$

$$\varepsilon = 100 \text{ м}, g_1(x) = 0.001(x - 1000)(x - 500) \text{ м},$$

$$g_2(x) = -0.001(x - 2500)(x - 2000) \text{ м}$$

#### 4. Случай $\|u\|_2$

*Первый этап.* Условие (6) здесь принимает вид

$$\|h\| = \int_{t_0}^{T_1} \sum_{i=1}^3 u_i(t) h_i(t) dt \rightarrow \max,$$

$$I_{cul}^{\|\cdot\|_2}[u(\cdot)] = \max_{t \in [t_0, T]} \sum_{i=1}^3 |u_i(t)| \leq 1. \quad (7)$$

Максимум интеграла в (7) достигается, когда для всех  $t \in [t_0, T_1]$  выполнено равенство

$$u_i(t) = \begin{cases} \text{sign}[h_i(t)], & i = i^*, \\ 0 & i \neq i^* \end{cases},$$

$$|h_{i^*}(t)| = \max_{i \in \{1, 2, 3\}} |h_i(t)|.$$

Тогда

$$\|h(\cdot)\| = \int_{t_0}^{T_1} \max \{|h_1(t)|, |h_2(t)|, |h_3(t)|\} dt, \quad (8)$$

$$h(\cdot) \in \Omega[t_0, T_1].$$

*Второй этап.* Задача математического программирования по определению "минимального" элемента  $h^0 \in Q$  в силу (8) здесь имеет вид

$$\int_{t_0}^{T_1} \max \left\{ \left| \sum_{i=1}^6 l_i h_1^{(i)} [T_1, \cdot] \right|, \left| \sum_{i=1}^6 l_i h_2^{(i)} [T_1, \cdot] \right|, \left| \sum_{i=1}^6 l_i h_3^{(i)} [T_1, \cdot](t) \right| \right\} dt \rightarrow \min,$$

$$\sum_{i=1}^6 l_i c_i = 1.$$

Пусть вектор  $l^0 = \begin{pmatrix} l_1^0 \\ \dots \\ l_6^0 \end{pmatrix}$  решение этой задачи.

Тогда "минимальный" элемент и его норма вычисляются по формулам

$$h^0(\cdot) = \sum_{i=1}^6 l_i^0 h^{(i)} [T_1, \cdot],$$

$$\rho^0 = \int_{t_0}^{T_1} \max \left\{ \left| \sum_{i=1}^6 l_i^0 h_1^{(i)} [T_1, \cdot] \right|, \left| \sum_{i=1}^6 l_i^0 h_2^{(i)} [T_1, \cdot] \right|, \left| \sum_{i=1}^6 l_i^0 h_3^{(i)} [T_1, \cdot] \right| \right\} d\tau$$

соответственно.

*Третий этап.* Непосредственное построение оптимального управления  $u^0(\cdot)$  сводится к следующей задаче на максимум

$$\int_{t_0}^{T_1} \langle u(t), h^0(t) \rangle dt = \left\langle u(t), \sum_{i=1}^6 l_i^0 h^{(i)} [T_1, \cdot] \right\rangle \rightarrow \max,$$

$$\max_{t \in [t_0, T_1]} \max \{ |u_1(t)|, |u_2(t)|, |u_3(t)| \} = \frac{1}{\rho^0}.$$

Тогда

$$u_j^0(t) = \begin{cases} \frac{1}{\rho^0} \text{sign} \left[ \sum_{i=1}^6 l_i^0 h_j^{(i)} [T_1, \cdot] \right], & j = j^*, \\ 0 & j \neq j^* \end{cases},$$

$$j^* : |h_{j^*}(t)| = \max_{j \in \{1,2,3\}} \left| \sum_{i=1}^6 l_i^0 h_j^{(i)} [T_1, \cdot] \right|, \quad i \in \{1,2,3\}.$$

Ниже на рис. 1–3 приводятся графики изменения координат вектора управляющих параметров в зависимости от текущего времени

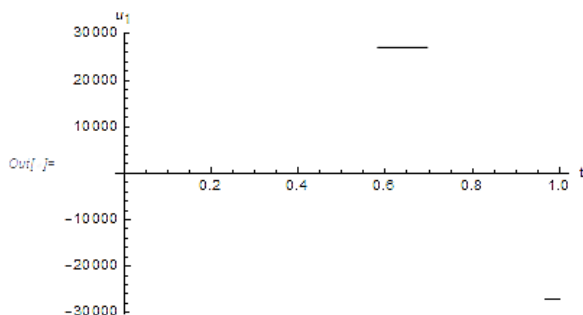


Рис. 1. График изменения координаты  $u_1$  вектора управляющих параметров для случая  $\|u\|_2$

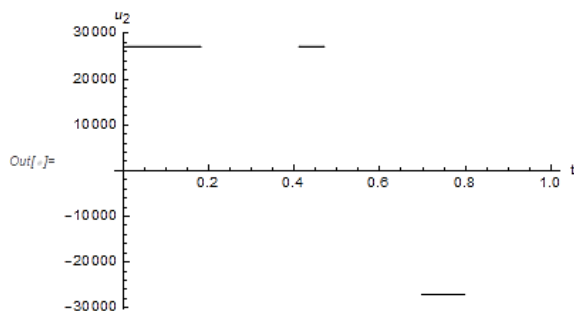


Рис. 2. График изменения координаты  $u_2$  вектора управляющих параметров для случая  $\|u\|_2$

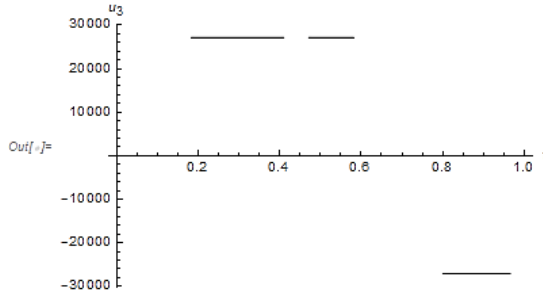


Рис. 3. График изменения координаты  $u_3$  вектора управляющих параметров для случая  $\|u\|_2$

## 5. Случай $\|u\|_3$

*Первый этап.* Условие (6) здесь принимает вид:

$$\|h\| = \int_{t_0}^{T_1} \sum_{i=1}^3 u_i(t) h_i(t) dt \rightarrow \max,$$

$$I^{\|\cdot\|_3}[u(\cdot)] = \max_{t \in [t_0, T_1]} \max \{|u_1(t)|, |u_2(t)|, |u_3(t)|\} \leq 1. \quad (8)$$

Максимум интеграла в (8) достигается, когда для всех  $t \in [t_0, T_1]$  выполнено равенство  $u_i(t) = \text{sign}[h_i(t)], i \in \{1, 2, 3\}$ .

Тогда

$$\|h(\cdot)\| = \int_{t_0}^{T_1} (|h_1(\tau)| + |h_2(\tau)| + |h_3(\tau)|) d\tau. \quad (9)$$

*Второй этап.* Задача математического программирования по определению «минимального» элемента  $h^0 \in Q$  в силу (9) здесь имеет вид:

$$\int_{t_0}^{T_1} \left[ \left| \sum_{i=1}^6 l_i h_1^{(i)}[T_1, t] \right|, \left| \sum_{i=1}^6 l_i h_2^{(i)}[T_1, t] \right|, \left| \sum_{i=1}^6 l_i h_3^{(i)}[T_1, t] \right| \right] dt \rightarrow \min,$$

$$\sum_{i=1}^6 l_i c_i = 1.$$

Пусть вектор  $l^0 = \begin{pmatrix} l_1^0 \\ \dots \\ l_6^0 \end{pmatrix}$  решение этой задачи. Тогда "минимальный" элемент и его норма вычисляются по формулам:

$$h^0(\cdot) = \sum_{i=1}^6 l_i^0 \sum_{i=1}^6 l_i h^{(i)}[T_1, \cdot],$$

$$\rho_0 = \int_{t_0}^{T_1} \left[ \left| \sum_{i=1}^6 l_i^0 h_1^{(i)}[T_1, t] \right| + \left| \sum_{i=1}^6 l_i^0 h_2^{(i)}[T_1, t] \right| + \left| \sum_{i=1}^6 l_i^0 h_3^{(i)}[T_1, t] \right| \right] dt,$$

соответственно.

*Третий этап.* Непосредственное построение оптимального управления  $u^0(\cdot)$  сводится к следующей задаче на максимум

$$\int_{t_0}^{T_1} \langle u(t), h^0(t) \rangle dt = \sum_{i=1}^6 l_i^0 h^{(i)}[T_1, \cdot] \rightarrow \max,$$

$$\max_{t \in [t_0, T_1]} (|u_1(t)| + |u_2(t)| + |u_3(t)|) = \frac{1}{\rho^0}.$$

Тогда  $u_j^0(t) = \frac{1}{\rho^0} \text{sign} \left[ \sum_{i=1}^6 l_i^0 h_j^{(i)}[T_1, t] \right], \quad j \in \{1, 2, 3\}.$

На рис. 4–6 приводятся графики изменения координат вектора управляющих параметров в зависимости от текущего времени

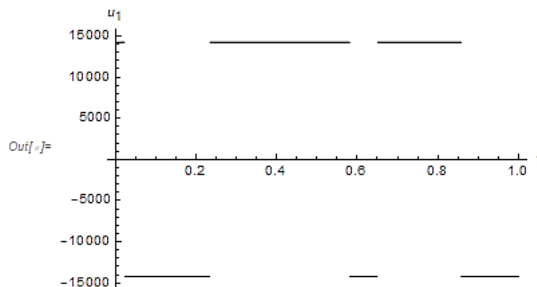


Рис. 4. График изменения координаты  $u_1$  вектора управляющих параметров для случая  $\|u\|_3$

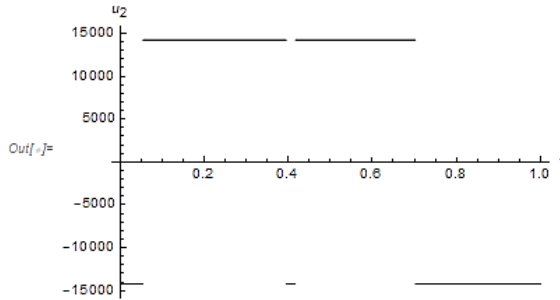


Рис. 5. График изменения координаты  $u_2$  вектора управляющих параметров для случая  $\|u\|_3$

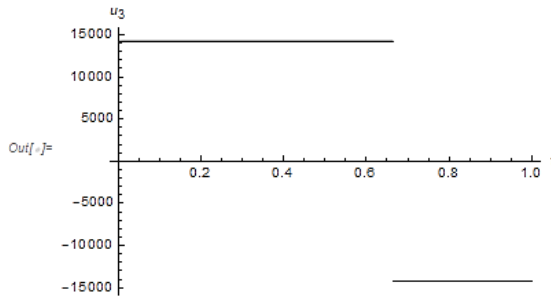


Рис. 6. График изменения координаты  $u_3$  вектора управляющих параметров для случая  $\|u\|_3$

## 6. Наведение на цель

Во введении было анонсировано, что дополнительное управление, найденное как решение **задачи 1** оптимального управления, в момент времени  $T_1$  осуществляет совмещение (попадание в достаточно малую окрестность) возмущенного движения точки с ее базовым законом движения. Причем совмещение происходит по всем шести координатам фазового вектора. В дальнейшем дополнительное управление отключается и полет точки происходит в малой окрестности ее базового движения.

Получающееся таким образом движение точки назовем откорректированным движением. Таким образом, программное управление

$$w^0(t) = \begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ w_3(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [t_0, T], \text{ решающее задачу наведе-}$$

ния точки на цель с учетом фазовых ограничений, имеет вид

$$w^0(t) = \begin{cases} u_{\bar{\alpha}z}(t) + u_{\bar{\alpha}on}^0(t), & t \in [t_0, T_1], \\ u_{\bar{\alpha}z}(t), & t \in [T_1, T], \end{cases}$$

где программное управление  $u_{\bar{\alpha}on}^0(t), t \in [t_0, T_1]$  является решением **задачи 1** оптимального управления по одному из критериев оптимальности. Ниже на рис. 7–8 приводятся графики зависимости расстояния между базовым и откорректированным движениями на промежутке времени  $[t_0, T]$  для случаев  $\|u\|_2$  и  $\|u\|_3$ .

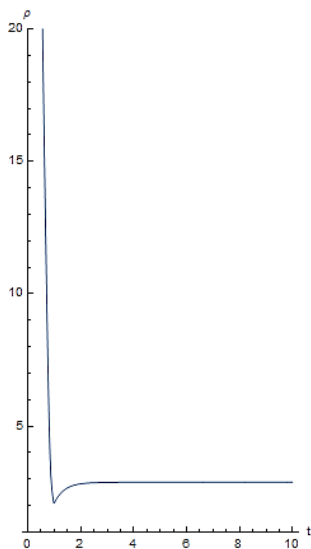


Рис. 7. График изменения расстояния между базовым и откорректированным движениями для случая  $\|u\|_2$

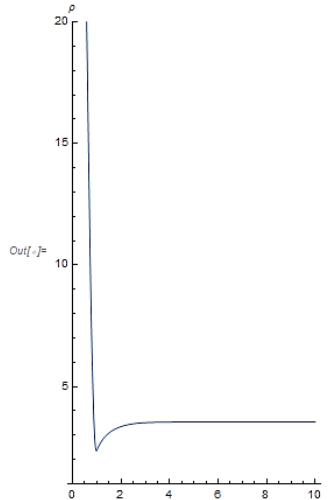


Рис. 8. График изменения расстояния между базовым и откорректированным движениями для случая  $\|u\|_3$

Из приведенных графиков видно, что в обоих случаях откорректированное движение начиная с момента времени  $T_1 = 1\text{ с}$  сближается с базовым движением на расстояние менее 3 м и это расстояние не увеличивается вплоть до конца полета.

На рис. 9–10 приведены 3D траектории точки в процессе всего полета

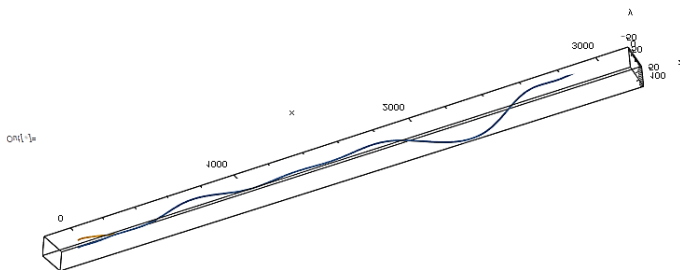


Рис. 9. Траектории базового и откорректированного движений для случая  $\|u\|_2$

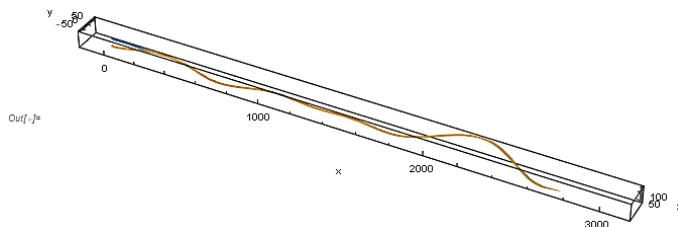


Рис. 10. Траектории базового и откорректированного движений  
для случая  $\|u\|_3$

## Заключение

В статье решена задача наведения на цель управляемой материальной точки в условиях сопротивления среды, пропорционального квадрату скорости точки при наличии фазовых ограничений на ее траекторию.

В процессе решения осуществлялось совмещение возмущенного движения точки с базовым движением. Это совмещение можно трактовать как решение задачи оптимального управления некоторым линейным динамическим объектом, построенным в статье.

Были рассмотрены два критерия оптимальности

$$I_{\text{сум}}^{\|u(\cdot)\|_2} [u(\cdot)] = \max_{t \in [t_0, T_1]} \sum_{i=1}^3 |u_i(t)|$$

и

$$I_{\text{сум}}^{\|u(\cdot)\|_3} [u(\cdot)] = \max_{t \in [t_0, T_1]} \max \{ |u_1(t)|, |u_2(t)|, |u_3(t)| \}.$$

Основные характеристики качества решения задачи наведения приведены в таблице.

Данные для заполнения первых двух столбцов таблицы были получены автором в работе [9]. Наименьшее значение функционала (что и следовало ожидать) достигается в столбце, который соответствует оптимальному по этому критерию управлению.

	Управление по крите- рию $\min$ «энер- гии	Управление по крите- рию $\min$ «силы 1»	Управле- ние по крите- рию $\min$ «силы 2»	Управле- ние по крите- рию $\min$ «силы 3»
Критерий $\min$ «энергии» $[t_0, T_1]$ $(h \cdot \sqrt{c})$	15975.4	18126.3	27111.1	24645.7
Критерий $\min$ «силы 1» $[t_0, T_1]$ $(h)$	26297.7	18126.3	27111.1	24645.7
Критерий $\min$ «силы 2» $[t_0, T_1]$ $(h)$	40781.3	31339.9	27111.1	42687.7
Критерий $\min$ «силы 3» $[t_0, T_1]$ $(h)$	20587.9	18014.2	27111.1	14229.2
$\rho_{T_1}$ $(m)$ В шести мерном простран- стве	$7.36 \times 10^{-6}$	0.00009	3.5	1.1
Промех по цели (м)	2.3	2.4	2.8	3.3

Самый неблагоприятный результат по совмещению возмущенного и базового движений точки получен в случае управления по критерию  $\min$  "силы 2". Тем не менее, как это видно из графика на рис. 7, откорректированное движение остается в окрестности базового движения радиуса 3.5 м в процессе всего полета, что обеспечивает величину промаха по цели меньше этого расстояния.

### Библиографический список

1. *Баландин, Д.В.* Стабилизация линейных динамических объектов по измеряемому с ошибкой состоянию при ограничениях на фазовые и управляющие переменные / Д.В. Баландин, А.А. Федюков // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2021. № 5. С. 5–17.

2. *Велицанский М.А.* Движение летательного аппарата в вертикальной плоскости при наличии ограничений на состояния // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2016. № 3. С. 70–81.

3. *Горбачева А.В., Карамзин Д.Ю.* Уточнение условий оптимальности в задачах управления с фазовыми ограничениями типа равенств и неравенств // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2016. Т. 21. Вып.1. С. 40–55.

4. *Горбачева А.В., Карамзин Д.Ю.* О некоторых классах задач управления с фазовыми ограничениями // Вестник РУДН. Серия Математика. Информатика. Физика. 2016. № 1. С. 11–18.

5. *Колмогоров А.Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. М.: Наука, 1976. 544 с.

6. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.

7. *Лутманов С.В.* Приведение возмущенного движения точки на базовую траекторию при наличии геометрических ограничений на дополнительные управления // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2023. Вып. 3(62). С. 44–54.

8. *Лутманов С.В.* Построение базового закона движения материальной точки и реализующего его программного управления при наличии фазовых ограничений // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2022. Вып. 3(58). С. 25–35.

9. *Лутманов С.В.* Оптимальное гашение возмущений базового закона полета материальной точки по критериям "минимум энергии" и "минимум силы" / Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Пермь, 2022. Вып. 54. С. 32–64.

10. *Лутманов С.В.* Оптимальное управление реактивным снарядом по критерию "минимум силы" // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2021. Вып. 3(54). С. 42–51.

11. *Самсонов В.А., Шамолин М.В.* К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1989. № 3. С. 51–54.

12. *Федюков А.А.* Синтез робастного управления с учетом ограничений на фазовые и управляющие переменные // Информатика и системы управления. 2015. № 2(44). С. 121–130.

13. *Ченцов А.Г., Ченцов А.А., Григорьев А.М.* Об одной задаче маршрутизации, моделирующей перемещения в радиационных полях // Вестник УдГУ. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. № 4. С. 540–557.

14. *Черноусько Ф.Л.* Оптимальные периодические движения двухмассовой системы в сопротивляющейся среде // Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72, № 2. С. 116–125. 28.

15. *Шамолин М.В.* Введение в задачу о торможении тела в сопротивляющейся среде и новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 1996, № 4. С. 57–69.

## COMPARATIVE ANALYSIS OF THE QUALITY OF SOLVING THE PROBLEM OF INFERRING THE PERTURBED MOTION OF A POINT ON A BASIC TRAJECTORY ACCORDING TO VARIOUS OPTIMALITY CRITERIA

**S. V. Lutmanov**

Perm State University, Perm, Russia

svlut@yandex.ru

*The flight of a controlled material point moving in a homogeneous gravity field is considered, taking into account the resistance of the medium proportional to the square of the velocity value in the presence of phase constraints. The purpose of the control is to hit a point at a given target. The solution of this problem is reduced to the translation of the phase vector of some auxiliary linear object to the origin. This transfer is carried out by constructing an additional control that is optimal according to the criterion of "minimum force". At the same time, in the development of the author's previous work [9], three types of the norm of the vector of the controlling force are considered. For each case, the control problem is solved to the end. The results of numerical experiments confirming the effectiveness of the applied algorithm are presented.*

**Keywords:** Mathematical model; software control; optimal control; Cauchy matrix; Cauchy formula; functional problem of moments.

УДК 531.381; 531.395

**Н. Н. Макеев**

Россия, Саратов; nmakeyev@mail.ru

## ОБ ИНТЕГРАЛАХ ДВИЖЕНИЯ СЛОЖНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

*Рассматривается движение относительно неподвижного полюса механического объекта с изменяемыми во времени составом массы и конфигурацией в стационарном однородном поле силы тяжести. Исследуется задача о полноте многообразия первых дополнительных алгебраических интегралов системы уравнений движения. Это многообразие включает интегралы, содержащие не более трех независимых основных переменных – компонент вектора кинетического момента и орта вертикали. На механический объект наложены программные управляющие связи или линейные стационарные сервосвязи. Установлено, что многообразие дополнительных интегралов содержит линейные и квадратичные первые интегралы, существующие при определенных структурно-кинетических ограничениях и управляющих связях.*

**Ключевые слова:** сложная механическая система; интегральное многообразие; алгебраический интеграл; управляющая связь.

### 1. Основные предпосылки и постановка задачи

Основные предпосылки и описание структурной модели объекта переменного состава массы, а также понятия *сложной механической системы* (СМС), приведены в работе [1].

Величина массы СМС и ее конфигурация изменяются во времени вследствие переноса тел присоединенной подсистемы (*рабочего тела*) внутри объекта с заданной относительной скоростью.

В результате СМС является структурно изменяемым механическим объектом переменного состава массы и изменяемой конфигурации.

Предполагается, что СМС движется так, что ее тело-носитель (абсолютно твердое тело) вращается вокруг фиксированного неподвижного полюса  $O$  в указанном силовом поле под воздействием программно заданного результирующего силового момента  $\mathbf{L}(t)$  ( $t \in [0, +\infty) \equiv T$ ).

Введем правые координатные ортобазисы  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  с общим началом в полюсе  $O$ : неподвижный  $\Gamma_1$ ; базис  $\Gamma_2$ , неизменно связанный с носителем, и базис  $\Gamma_3$  ( $Ox_1x_2x_3$ ), оси которого  $Ox_j$  ( $j=1,2,3$ ) для каждого момента времени  $t \in T$  направлены по главным в полюсе  $O$  осям тензора инерции СМС с матрицей  $\mathbf{J}(t) = \text{diag}[A_1(t), A_2(t), A_3(t)]$ . В силу непрерывного по  $t \in T$  изменения конфигурации и состава массы СМС базис  $\Gamma_3$  в общем случае вращается относительно  $\Gamma_2$  с угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}^r(\boldsymbol{\omega}_j^r)$ , зависимость которой от величин заданных компонент  $A_j(t)$  тензора инерции СМС  $\mathbf{J}(t)$  известна [2].

Таким образом, непрерывные и непрерывно дифференцируемые зависимости вида  $\boldsymbol{\omega}^r(t)$ ,  $\mathbf{J}(t)$ , отнесенные к базису  $\Gamma_3$ , считаются *программно заданными* и, следовательно, известными в любой момент времени  $t \in T$ .

Обозначим [3]:

$$\mathbf{G} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{G}^r, \quad \boldsymbol{\lambda}(t) = \boldsymbol{\omega}^r - \mathbf{J}^{-1}\mathbf{G}^r,$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}^r = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{G} + \boldsymbol{\lambda},$$

где  $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\Omega}$  – абсолютные угловые скорости носителя СМС (базиса  $\Gamma_2$ ) и базиса  $\Gamma_3$ ;  $\mathbf{G}(G_j)$ ,  $\mathbf{G}^r(t)$  – кинетические моменты относительно полюса  $O$  всего объекта и рабочего тела, соответственно (последний – относительно базиса  $\Gamma_2$ );  $\boldsymbol{\lambda}(t)$  – эффективная угловая скорость носителя;  $A_j(t)$  ( $j=1,2,3$ ) – главные

осевые моменты инерции СМС (диагональные элементы матрицы тензора  $\mathbf{J}$ ), заданные для каждого  $t \in T$  в осях базиса  $\Gamma_3$ . Характерные вектор-параметры  $\mathbf{L}(L_1, L_2, L_3)$ ,  $\mathbf{G}^r(G_1^r, G_2^r, G_3^r)$  являются *управляющими*; каждый из них задан для  $t \in T$  соответствующей программой, определенной во времени. Любые ограничения, налагаемые на управляющие параметры, являются *управляющими связями*.

Пусть  $M(t)$  – величина массы СМС;  $g$  – стандартное значение величины ускорения силы тяжести;  $\mathbf{s}(s_1, s_2, s_3)$  – орт, неизменно связанный с ортобазисом  $\Gamma_1$ ;  $\mathbf{g} = -g \mathbf{s}$ ;  $\mathbf{r}_c(t)$ ,  $r_j(t)$  – радиус-вектор центра тяжести СМС и его координаты в проекциях на оси базиса  $\Gamma_3$ ;  $P(t) = M(t)g$ .

Движение СМС при данных предпосылках характеризуется неавтономной эволюционной динамической системой [1]

$$\dot{\mathbf{G}} + \mathbf{J}^{-1} \mathbf{G} \times \mathbf{G} + \boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{G} = \mathbf{L} + P(\mathbf{s} \times \mathbf{r}_c), \quad (1)$$

$$\dot{\mathbf{s}} + \mathbf{J}^{-1} \mathbf{G} \times \mathbf{s} + \boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{s} = 0.$$

В проекциях на оси базиса  $\Gamma_3$  уравнения (1) имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{G}_1 + m_1 G_2 G_3 + \lambda_2 G_3 - \lambda_3 G_2 &= L_1 + P(r_3 s_2 - r_2 s_3), \\ \dot{s}_1 + (A_2^{-1} G_2 + \lambda_2) s_3 - (A_3^{-1} G_3 + \lambda_3) s_2 &= 0, \\ m_1(t) &= A_2^{-1}(t) - A_3^{-1}(t) \quad (1, 2, 3), \end{aligned} \quad (2)$$

где символ  $(1, 2, 3)$  обозначает циклическую перестановку данных индексов, применяемую для определения остальных уравнений системы по данным уравнениям-представителям.

*Поставим задачу:* на множестве заданных возможных значений функций  $\{\mathbf{G}, \mathbf{s}\}$ , при ограничениях, наложенных на вектор-функцию  $\mathbf{L}(t)$ , определить структурно-кинетические условия и управляющие связи, при реализации которых для динамической системы (1) или (2) на множестве функций  $\{\mathbf{G}, \mathbf{s}\}$  фазового пространства существуют дополнительные по Э. Уиттекеру [4] первые интегралы данной системы в классе алгебраических функций.

Здесь символ  $\{ \dots \}$  обозначает полный набор скалярных величин – координат указанных вектор-функций.

Таким образом, поставленная задача является ограниченной задачей нахождения величин  $\mathbf{G}(t)$ ,  $\mathbf{s}(t)$  в классе функций  $C^2$ , определяющей полноту интегрального многообразия алгебраических первых интегралов исходной динамической системы. Это многообразие должно определять совокупность интегралов, независимых по отношению к основным интегралам этой системы (потенциально существующим интегралам энергии, кинетического момента и тривиальному), а также по отношению к каждому дополнительному интегралу данной системы. При этом характерно, что каждый дополнительный интеграл является функцией лишь части полного набора основных переменных  $(G_j, s_j)$  ( $j = 1, 2, 3$ ) данной задачи.

## 2. Основное уравнение

Приведем уравнение, порождающее дополнительные первые интегралы исходной динамической системы.

Задача о существовании дополнительных первых интегралов системы уравнений (1) рассматривается в классе однозначных алгебраических функций  $(G_j, s_j)$  ( $j = 1, 2, 3$ ) класса  $C^2$ . Представим искомые интегралы в общем виде

$$F(t; G_1, G_2, G_3; s_1, s_2, s_3) = h, \quad (3)$$

где  $F$  – полиномиальная функция заданных переменных,  $h$  – постоянная интегрирования.

Как известно [5], критериальным условием существования первого интеграла (3) системы уравнений (2) является равенство нулю скобки Пуассона (коммутатора) от функции  $F$  и гамильтониана данной системы, заданных на симплектическом многообразии. Согласно этому имеем [6, с. 84]

$$F_t + (\nabla_{\mathbf{G}} F \bullet \dot{\mathbf{G}}) + (\nabla_{\mathbf{s}} F \bullet \dot{\mathbf{s}}) = 0, \quad (4)$$

где индекс  $t$  обозначает частное дифференцирование по  $t$ .

Равенство (4) в силу уравнений системы (2) является тождеством по всем переменным  $G_j$  и по любым двум переменным  $s_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ), удовлетворяющемуся при определенных структур-

но-кинетических условиях. Совокупность этих аналитических условий составляет результирующее критериальное условие существования данного первого дополнительного интеграла.

### 3. Интегралы с одной и двумя переменными

Пусть первый интеграл (3) имеет вид

$$F(t, G_1) = h \quad (1, 2, 3) \quad (5)$$

при фиксированном значении нижнего индекса. Обозначим

$$p_j = \frac{\partial F}{\partial G_j}, \quad q_j = \frac{\partial F}{\partial s_j}, \quad \Omega_j = A_j^{-1} G_j + \lambda_j \quad (j = 1, 2, 3).$$

Тогда соотношение (4) принимает форму

$$F_t + p_1 L_1 + p_1 [P(r_3 s_2 - r_2 s_3) - m_1 G_2 G_3 + \lambda_3 G_2 - \lambda_2 G_3] = 0$$

и тождественно выполняется при условиях

$$A_1 = A_2, \quad r_1 = r_2 = 0, \quad r_3 \neq 0; \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad F_t + p_1 L_1 = 0. \quad (6)$$

Ограничениям (6) удовлетворяет обобщенный интеграл Лагранжа [1]. Следовательно, интеграл вида (5) может быть только линейным по  $G_1$  интегралом лагранжевой структуры.

Полагая для интеграла (3)

$$F(t; s_1) = h \quad (1, 2, 3), \quad (7)$$

представим условие (4) в виде

$$F_t + (\Omega_3 s_2 - \Omega_2 s_3) q_1 = 0.$$

Это равенство не является тождеством по переменным  $G_2, G_3$  и, следовательно, интеграл вида (7) не существует.

Таким образом, первый дополнительный интеграл, зависящий от одной из переменных  $G_j, s_j$ , может быть только интегралом Лагранжа, линейным по одной из переменных  $G_j$ .

Рассмотрим интеграл вида

$$F(t; G_1, G_2) = h \quad (1, 2, 3). \quad (8)$$

В этом случае из равенства (4) следует:

$$F_t + p_1 L_1 + p_2 L_2 - [(m_1 G_2 + \lambda_2) p_1 + (m_2 G_1 - \lambda_1) p_2] G_3 + \\ + P r_3 (p_1 s_2 - p_2 s_1) + P (p_2 r_1 - p_1 r_2) s_3 + (p_1 G_2 - p_2 G_1) \lambda_3 = 0.$$

Это равенство удовлетворяется тождественно по переменным  $G_3, s_1, s_2$ , если выполняются условия

$$\begin{aligned} N \equiv (m_1 G_2 + \lambda_2) p_1 + (m_2 G_1 - \lambda_1) p_2 &= 0, \\ F_t + (\lambda_3 G_2 + L_1) p_1 - (\lambda_3 G_1 - L_2) p_2 &= 0, \\ p_j r_3 = 0 \quad (j=1, 2), \quad p_2 r_1 - p_1 r_2 &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Из второго и третьего равенств (9) следует

$$r_3(t) = 0, \quad (10)$$

а совокупность первого и пятого условий как системы уравнений относительно  $(p_1, p_2) \neq 0$  приводит к соотношению

$$m_1 r_1 G_2 + m_2 r_2 G_1 + \lambda_2 r_1 - \lambda_1 r_2 = 0. \quad (11)$$

Равенство (11) в классе программных структурно-кинетических ограничений выполняется при любых значениях переменных  $G_1, G_2$ , если

$$m_j r_j = 0 \quad (j=1, 2), \quad \lambda_2 r_1 - \lambda_1 r_2 = 0. \quad (12)$$

Последнее условие (12) эквивалентно управляющей связи

$$(G_2^r - A_2 \omega_2^r) A_1 r_1 - (G_1^r - A_1 \omega_1^r) r_2 = 0. \quad (13)$$

Из структурных условий (8), (12) следуют случаи существования интеграла вида (8) в классе программных ограничений:

а). Случай центральной структурно-кинетической симметрии, определяемый условиями  $A_j(t) = A(t)$ , где  $A(t) \in \mathbb{C}^1$ .

б). Случай Эйлера, соответствующий условию  $\mathbf{r}_C = 0$ .

в). Случай осевой структурной симметрии, при которой центр масс СМС расположен на главной оси инерции, совпадающей с осью структурной симметрии. Здесь выполняется одна из следующих групп условий:

$$A_j = A_3, \quad r_j = r_3 = 0 \quad (j=1, 2). \quad (14)$$

Согласно пятому условию (9) для группы (14) при  $j = 1$  получаем  $r_2 = 0$ , а для условий при  $j = 2$  имеем  $r_1 = 0$ . Следовательно, в силу ограничения  $\mathbf{r}_c = 0$  случай (в) входит в случай (б). Управляющая связь (13), являющаяся ограничением только в случае (а), принимает вид

$$r_1 G_2^r - r_2 G_1^r = 0.$$

Таким образом, случаи существования интеграла вида (8) в классе программных ограничений сводятся к случаям (а, б) и к обобщенному аналогу случая Гесса [1].

Введем интеграл вида

$$F(t; G_1, s_1) = h. \quad (15)$$

Тогда соотношение (4) принимает вид

$$F_t + p_1 L_1 - (Pr_2 p_1 + \Omega_2 q_1) s_3 + [A_3^{-1} s_2 q_1 - (m_1 G_2 + \lambda_2) p_1] G_3 + \lambda_3 p_1 G_2 + (\lambda_3 q_1 + Pr_3 p_1) s_2 = 0. \quad (16)$$

Так как равенство (16) есть тождество по переменной  $s_3$ , то

$$Pr_2 p_1 + (A_2^{-1} G_2 + \lambda_2) q_1 = 0.$$

Это равенство является тождеством по переменной  $G_2$ , в силу чего имеем  $q_1 \equiv 0$  и интеграл (15) принимает вид (5).

Пусть интеграл (3) имеет вид

$$F(t; G_1, s_2) = h. \quad (17)$$

Согласно равенству (17) из соотношения (4) следует:

$$F_t + p_1 L_1 + (\Omega_1 q_2 - Pr_2 p_1) s_3 - [(m_1 G_2 + \lambda_2) p_1 + A_3^{-1} s_1 q_2] G_3 + Pr_3 s_2 p_1 + \lambda_3 (p_1 G_2 - s_1 q_2) = 0. \quad (18)$$

Так как равенство (18) является тождеством по переменным  $G_3, s_1$ , то имеем

$$(m_1 G_2 + \lambda_2) p_1 + A_3^{-1} s_1 q_2 = 0,$$

откуда  $q_2 \equiv 0$  и интеграл (17) принимает вид (5).

Если интеграл (3) представлен в виде

$$F(t; G_1, s_3) = h, \quad (19)$$

то соотношение (4) будет

$$F_t + p_1 L_1 + [(\lambda_3 - m_1 G_3) p_1 + A_2^{-1} s_1 q_3] G_2 + (P r_3 - \Omega_1 s_2 q_3) s_2 - P r_2 s_3 p_1 + \lambda_2 (s_1 q_3 - p_1 G_3) = 0. \quad (20)$$

Поскольку равенство (20) является тождеством по переменным  $G_2, s_1$ , то имеет место условие

$$(\lambda_3 - m_1 G_3) p_1 + A_2^{-1} s_1 q_3 = 0,$$

откуда следует  $q_3 \equiv 0$ . Таким образом, интеграл вида (19) приводится к форме (5).

В случае, при котором интеграл вида (3) принимает вид

$$F(t; s_1, s_2) = h, \quad (21)$$

соотношение (4) приводит к условию

$$F_t + (A_1^{-1} q_2 G_1 - A_2^{-1} q_1 G_2) s_3 + A_3^{-1} (s_2 q_1 - s_1 q_2) G_3 + (\lambda_3 s_2 - \lambda_2 s_3) q_1 + (\lambda_1 s_3 - \lambda_3 s_1) q_2 = 0,$$

являющемуся тождеством по  $G_j$ . Отсюда  $q_1 = q_2 \equiv 0$  и, следовательно, интеграл вида (21) не существует.

Таким образом, из первых интегралов исходной системы уравнений, содержащих две из величин  $G_j, s_j$ , существует только интеграл вида (8).

#### 4. Интеграл с тремя переменными

Пусть интеграл (3) имеет вид

$$F(t; G_1, G_2, G_3) = h. \quad (22)$$

Представим соотношение (4) в форме

$$F_t + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{Q}_*) + P(\Phi \cdot \mathbf{s}) = 0, \quad (23)$$

где обозначено  $\mathbf{p} = \mathbf{p}(p_j)$ ,  $\Phi = \Phi(\Phi_j)$  ( $j=1, 2, 3$ ),

$$\mathbf{Q}_* = \mathbf{L} - (\mathbf{J}^{-1} \mathbf{G} \times \mathbf{G}) - (\lambda \times \mathbf{G}), \quad \Phi = (\mathbf{r}_C \times \mathbf{p}).$$

Равенство (23) является тождеством по переменным  $s_1, s_2$ . Выражая величину  $s_3$  из тривиального интеграла  $\|\mathbf{s}\|^2 = 1$ , разложим это выражение в ряд Маклорена по переменным  $s_1, s_2$  и подставим его в равенство (23). В результате получаем

$$F_t + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{Q}_*) + P\Phi_3 = 0, \quad \Phi_1 = \Phi_2 = 0. \quad (24)$$

Рассмотрим равенства (24) как систему линейных уравнений относительно величин  $p_j$  ( $j=1, 2, 3$ ) с определителем

$$D = \Lambda r_3 \quad (\Lambda = \mathbf{Q}_* \cdot \mathbf{r}_C) \quad (25)$$

и выделим случаи, при которых  $D = 0$ . Это условие выполняется, если

$$r_3(t) = 0, \quad (26)$$

а также при  $r_3 \neq 0$  в случае, для которого  $\Lambda(t) = 0$ .

В классе программных структурно-кинетических ограничений последнее условие выполняется для значений  $t \in T$  при произвольных возможных значениях величин  $G_j$ , если

$$(\mathbf{r}_C \cdot \mathbf{L}) = 0 (a); \quad (U \cdot \mathbf{r}_C) = 0 (b); \quad (\lambda \times \mathbf{r}_C) = 0 (c), \quad (27)$$

где  $U$  – проектор-оператор с проективным ядром  $[\mathbf{r}_C(m_j r_j)]$ , зависящий от условий, дополнительных к ограничениям (27).

Согласно условию  $r_3 \neq 0$  из ограничения (27 b) находим, что к соотношениям (27 a, c) следует присоединить либо условие существования центральной кинетической симметрии, либо одно из условий (14). Каждый из этих случаев соответствует осевой кинетической симметрии по Лагранжу [1].

Согласно соотношениям  $\Phi_j = 0$  (24) в симметрическом случае получаем  $p_j r_3 = 0$  ( $j = 1, 2$ ), в силу чего интеграл (22) принимает вид линейного интеграла типа Лагранжа [1].

Если выполняется условие (26), то последние два равенства (24) переходят в соотношения  $p_3 r_j = 0$  ( $j = 1, 2$ ) и тождественно удовлетворяются либо в случае (12, б), либо при  $p_3 = 0$ , когда интеграл (22) приводится к виду (8).

Таким образом, если интеграл (22) имеет стационарную форму

$$F(G_1, G_2, G_3) = h,$$

то в классе программных ограничений этот интеграл существует либо в режиме (12, б), либо в случае (12, а) на управляющих связях (27, а), (27, с).

Если  $F_t \neq 0$  тождественно и  $D \neq 0$ , то в силу соотношений (24), (25) имеем

$$p = -\Lambda^{-1} F_t \mathbf{r}_C. \quad (28)$$

Согласно равенству (28) если хотя бы одна из величин  $r_j \equiv 0$ , то интеграл (22) принимает вид (8). Ввиду этого далее принимается

$$r_1 r_2 r_3 \neq 0. \quad (29)$$

В классе программных ограничений первое условие (24) тождественно удовлетворяется, если

$$F_t + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{L}) + P\Phi_3 = 0, \quad (30)$$

$$(\lambda \times \mathbf{p}) = 0, \quad U\mathbf{p} = 0. \quad (31)$$

Согласно равенству (28) из последнего соотношения (31) следует условие (12, а), а из первого равенства (31) получаем ограничение (27, с). При этом  $\Phi = 0$ , в силу чего условия  $\Phi_j = 0$  (24) тождественно удовлетворяются и соотношение (30) принимает вид

$$F_t + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{L}) = 0. \quad (32)$$

Итак, в случае, при котором  $F_t \neq 0$  и выполняется условие (29), для существования первого интеграла вида (22) в классе программных структурно-кинетических ограничений необходимо, чтобы выполнялись соотношения (12, а), (27, с), (32).

Примером существующей стационарной формы интеграла (22) является квадратичный интеграл с инвариантной нормой [1]

$$F(G_1, G_2, G_3) \equiv \|\mathbf{G}\|^2 = H^2 \quad (H = \text{const}),$$

существующий при  $\mathbf{L} \equiv 0$  при условии (12, а).

Рассмотрим интеграл вида

$$F(t; s_1, s_2, s_3) = h, \quad (33)$$

независимый по отношению к интегралу кинетического момента системы уравнений (2). Независимый интеграл (33) не существует, поскольку, если допустить обратное, то этот интеграл в силу упомянутого интеграла кинетического момента приводится к виду (21).

Рассмотрим интеграл вида

$$F(t; G_1, s_2, s_3) = h, \quad (34)$$

для которого условие (4) имеет вид

$$\begin{aligned} & F_t + p_1 L_1 + [(\lambda_3 - m_1 G_3) p_1 + A_2^{-1} s_1 q_3] G_2 - \\ & - (\lambda_2 p_1 + A_3^{-1} s_1 q_2) G_3 + (\lambda_2 q_3 - \lambda_3 q_2) s_1 + \\ & + (Pr_3 p_1 - \Omega_1 q_3) s_2 - (Pr_2 p_1 - \Omega_1 q_2) s_3 = 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Поскольку равенство (35) является тождеством по переменным  $G_2, G_3$ , то имеют место условия

$$\begin{aligned} & (\lambda_3 - m_1 G_3) p_1 + A_2^{-1} s_1 q_3 = 0, \\ & \lambda_2 p_1 + A_3^{-1} s_1 q_2 = 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Первое равенство этой системы приводит к условию  $A_2 = A_3$ , в силу чего система (36) принимает вид

$$A_2 \lambda_j p_1 + s_1 q_j = 0 \quad (j = 2, 3). \quad (37)$$

Условие (35) не налагает ограничений на переменные  $G_1, s_2, s_3$  с учетом соотношений (37), когда

$$\begin{aligned} r_j(t) &= 0, \\ \lambda_j(t) &= 0 \leftrightarrow G_j^r = A_j \omega_j^r \quad (j = 2, 3) \end{aligned} \quad (38)$$

и выполняется условие (6).

Присоединяя к соотношениям (38) условие  $A_2 = A_3$ , находим, что полученная система условий характеризует кинетическую симметрию типа Лагранжа с приведением интеграла (34) к виду (5). Действительно, в силу  $\lambda$ -условий (38) при  $p_1 s_1 \neq 0$  из соотношений (37) следует  $q_2 = q_3 \equiv 0$ .

К интегралу (34) в силу тривиального интеграла системы уравнений (2) приводятся интегралы вида

$$F(t; G_1, s_1, s_j) = h_j \quad (j = 2, 3),$$

однотипные с интегралом вида (34).

Аналогичным образом можно показать, что не существует дополнительных первых интегралов рассмотренного типа, в которых переменная  $G_1$  заменена последовательно на  $G_2$  и на  $G_3$ .

Пусть интеграл (3) имеет вид

$$F(t; G_1, G_2, s_1) = h. \quad (39)$$

Обозначим

$$Q = R - NG_3 + \lambda_3(p_1 G_2 - p_2 G_1) + P(r_1 p_2 - r_2 p_1)s_3, \quad (40)$$

где  $N$  определяется равенством (9),

$$R = F_t + p_1 L_1 + p_2 L_2.$$

В соответствии с соотношением (39) равенство (4) будет

$$Q + (\Omega_3 q_1 + P r_3 p_1)s_2 - \Omega_2 q_1 s_3 - P r_3 p_2 s_1 = 0.$$

Поскольку это равенство является тождеством по  $G_3, s_2$ , то

$$(A_3^{-1} G_3 + \lambda_3)q_1 + P r_3 p_1 = 0,$$

в силу чего имеем  $q_1 \equiv 0$  и интеграл (39) приводится к виду (8) или, если  $r_3 \neq 0$  тождественно, то к виду (5).

В случае, при котором интеграл (3) имеет вид

$$F(t; G_1, G_2, s_2) = h, \quad (41)$$

условие его существования определяется равенством

$$Q - (\Omega_3 q_2 + Pr_3 p_2) s_1 + Pr_3 p_1 s_2 + \Omega_1 q_2 s_3 = 0,$$

являющемся тождеством по переменным  $G_3, s_1$ . В силу этого из уравнения

$$(A_3^{-1} G_3 + \lambda_3) q_2 + Pr_3 p_2 = 0$$

следует  $q_2 \equiv 0$ . Следовательно, интеграл вида (41) приводится к виду (8) или, если  $r_3 \neq 0$ , то к виду (5).

Рассмотрим интеграл вида

$$F(t; G_1, G_2, s_3) = h. \quad (42)$$

Используя прием, примененный в работе [7], в силу тривиального интеграла системы уравнений (2) приведем этот интеграл к форме

$$F(t; G_1, G_2, s_1, s_2) = h. \quad (43)$$

Интеграл (43) является предметом отдельного исследования как интеграл, содержащий четыре независимые переменные.

Подобным образом с идентичными результатами проводится анализ и для интегралов, аналогичных формам (39), (41), (42), в которых пара  $(G_1, G_2)$  заменена парами  $(G_1, G_3)$ ,  $(G_2, G_3)$ .

## Заключение

Рассмотрена задача о полноте множества дополнительных первых интегралов системы уравнений движения механического объекта сложной структуры в классе алгебраических функций, а также получены условия существования этих интегралов. При этом движущийся объект (сложная механическая система) находится как на программных управляющих связях, так и на заданных линейных сервосвязях.

Установлено, что первый дополнительный интеграл с тремя переменными в классе программных структурно-кинетических ограничений существует: в форме, зависящей от трех переменных  $G_j$  – при условии  $\mathbf{r}_C = 0$  или при центральной структурно-кинетической симметрии СМС, а в форме (22) – в случае существования той же симметрии. Обе эти формы реализуются на специальных управляющих связях. В частности, такими интегралами являются аналоги линейных интегралов Гесса [1], Гриоли [8], Горячева [9], Стеклова [10], а также квадратичный интеграл с инвариантной нормой вектора кинетического момента СМС, приведенный ранее.

Исключая интеграл в форме (42), заключаем, что для динамической системы (2) дополнительные первые алгебраические интегралы остальных возможных видов с числом переменных меньше четырех при упомянутых выше системных условиях не существует.

#### Библиографический список

1. *Макеев Н.Н.* Интегралы сложных систем на управляющих связях. Саратов, 1989. 123 с. Деп. в ВИНТИ 14.03.89. № 1656–В 89.

2. *Макеев Н.Н.* О некоторых свойствах главных осей инерции тела переменной массы // Проблемы механики управляемого движения. Оптимизация процессов управления: межвуз. сб. науч. тр. / Пермь ун-т. Пермь. 1978. Вып. 10. С. 126–131.

3. *Макеев Н.Н.* Некоторые случаи интегрируемости обобщенных уравнений типа Вольтерра // Проблемы механики управляемого движения: межвуз. сб. науч. тр. / Перм. ун-т. Пермь. 1974. Вып. 4. С. 91–98.

4. *Уиттекер Е.Т.* Аналитическая динамика. М.; Л.: ОНТИ, 1937. 500 с.

5. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 431 с.

6. *Джакаля Г.Е.О.* Методы теории возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 320 с.

7. *Архангельский Ю.А.* Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука, 1977. 328 с.

8. *Макеев Н.Н.* Интеграл Гриоли для уравнений движения сложной механической системы // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2020. Вып. 3 (50). С. 41–49.

9. *Макеев Н.Н.* Интеграл Горячева для уравнений движения сложной механической системы // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып.1(44). С. 31–39.

10. *Макеев Н.Н.* Обобщенный аналог случая Стеклова для сложной системы // Проблемы механики управляемого движения. Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Перм. ун-т. Пермь. 1989. Вып. 21. С. 94–98.

## ON THE INTEGRALS OF MOTION OF A COMPLEX MECHANICAL SYSTEM

N. N. Makeev

Saratov, Russia  
nmakeyev@mail.ru

*The motion of a mechanical object with a time-varying mass composition and configuration in a stationary homogeneous gravity field is considered. The problem of the completeness of the manifold of additional algebraic integrals of a system of equations of motion is investigated. This manifold contains integrals containing no more than three independent main variables – the components of the kinetic momentum vector and the vertical ort. Software control connection or linear servo connections are applied to a mechanical object. It has been established that the manifold of additional integrals contains linear and quadratic first integrals that exist under certain structural-kinetic restrictions and control connections.*

**Keywords:** complex mechanical system; integral manifold; algebraic integral; control connection.

УДК 534.131

**Н. Н. Макеев**

Россия, Саратов; nmakeyev@mail.ru

## МАЯТНИКОВЫЕ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА В ПОЛЕ СВЕТОВОГО ДАВЛЕНИЯ

*Исследуются колебательно-вращательные движения относительно центра масс гиростата, совершающиеся под воздействием поля сил светового давления. Это силовое поле порождается стационарным однородным параллельным световым потоком постоянной интенсивности, неизменно направленным в инерциальном пространстве. Приводится волновая аналоговая интерпретация особых режимов маятниковое движение, построенная на основе принятой термомеханической модели светового излучения. Построена модельная аналогия между маятниковыми движениями гиростата, движениями уединенных нелинейных волн и солитонов. Приводится оценка устойчивости положений равновесия гиростата в данном поле сил в зависимости от заданных термомеханических параметров его внешней светоотражающей поверхности.*

**Ключевые слова:** гириостат; световое давление; маятниковое движение; нелинейная волна; устойчивость равновесия.

### 1. Основные предпосылки

Под *полем светового давления* (СД-полем) понимается стационарное (в общем случае неконсервативное) силовое поле, вызывающее эффект светового давления на поверхности твердых тел. Предполагается, что СД-поле порождается однородным параллельным световым потоком постоянной интенсивности, неизменно направленным в инерциальном пространстве. Гириостат обладает светоотражающей внешней поверхностью, харак-

теризующейся постоянными термомеханическими и оптическими показателями, а также неизменяемой конфигурацией.

Введем координатные ортобазисы с общим началом в центре масс  $C$  гиростата: базис  $\Gamma_1$ , неподвижный в инерциальном пространстве, и базис  $\Gamma_2$ , оси координат которого  $Sx_1x_2x_3$  направлены по главным направлениям тензора инерции гиростата в точке  $C$ . Пусть  $\mathbf{s}$  – орт параллельного светового потока, направленный против потока. Ориентация базиса  $\Gamma_2$  относительно  $\Gamma_1$  определяется системой углов Эйлера, связанной с координатами  $s_j$  орта  $\mathbf{s}$  ( $s_1, s_2, s_3$ ) равенствами

$$(s_1, s_2, s_3) = (\sin \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \varphi, \cos \theta) \\ (-\pi \leq \theta \leq \pi).$$

Основой для исследования *маятниковых движений* (МД) гиростата является термомеханическая модель, определяющая механизм динамического воздействия светового потока на абсолютно твердую поверхность, приведенная в работе [1]. Согласно этой модели на твердую поверхность действует силовой момент

$$\mathbf{L}(\mathbf{s}) = Q(s_3)\mathbf{F} + m_3\dot{\mathbf{F}}. \quad (1)$$

В равенстве (1) обозначено

$$Q(s_3) = m_1 + m_2 s_3, \quad \mathbf{F} = [-s_2, s_1, 0]^T, \quad (2)$$

$m_1, m_2, m_3$  – заданные постоянные термомеханические параметры внешней отражающей поверхности гиростата.

Для координат вектора  $\mathbf{L}$  в силу равенств (1), (2) имеем [1]

$$L_1 = -Q(s_3)s_2 - m_3\dot{s}_2, \quad L_2 = Q(s_3)s_1 + m_3\dot{s}_1, \quad L_3 \equiv 0. \quad (3)$$

Под МД гиростата в СД-поле понимается плоское (беспрецессионное) колебательно-вращательное движение его носителя, происходящее под воздействием силового момента (1). Согласно известным динамическим уравнениям [2] и кинематиче-

ским уравнениям Эйлера МД гиростата определяется уравнением маятникового типа

$$\ddot{\theta} + (2n \cos \theta) \dot{\theta} + 2\alpha Q(\theta) \sin \theta = 0, \quad (4)$$

где  $\theta$  – угол нутации и обозначено

$$n = \alpha m_3, \quad \alpha = (2A_2)^{-1}, \quad Q(\theta) = m_1 + m_2 \cos \theta.$$

Здесь  $A_2$  – момент инерции гиростата относительно оси  $Cx_2$ . Уравнение (4) определяет беспрецессионное движение в СД-поле маятника с диссипацией и путем преобразования приводится к уравнению Абеля второго рода [3, с. 50].

Для маятника (4) существует положение равновесия  $\theta = 0$ . Постулируя его устойчивость и применяя разложение функций, содержащихся в уравнении (4), в ряд Маклорена в окрестности данного положения, в результате (при определенных условиях, зависящих от принятых предпосылок) для различных случаев движения получаем варианты следующих уравнений:

$$\ddot{\theta} + m\theta - b\theta^3 = 0, \quad (5)$$

$$\ddot{\theta} + \Omega_p^2 \theta - \frac{1}{2} \omega_q^2 \theta^3 = 0, \quad (6)$$

$$\ddot{\theta} - \Omega_q^2 \theta + \frac{1}{2} \omega_r^2 \theta^3 = 0, \quad (7)$$

$$\ddot{\theta} - \Omega_q^2 \theta - \frac{1}{2} \omega_q^2 \theta^3 = 0, \quad (8)$$

В данных уравнениях обозначено

$$m = 2\alpha(m_1 + m_2), \quad b = \alpha m_2, \quad \Omega_p = \sqrt{A_2^{-1}(m_1 + m_2)}, \quad (9)$$

$$\Omega_q = \sqrt{-A_2^{-1}(m_1 + m_2)}, \quad \omega_q = \sqrt{A_2^{-1}m_2}, \quad \omega_r = \sqrt{-A_2^{-1}m_2}.$$

Равенства (5)–(8) являются уравнениями типа *осциллятора Дуффинга*. При этом уравнения (5), (6) относятся к случаю

воздействия на маятник мягкой упругой силы, а уравнение (7) соответствует его движению под действием жесткой упругой силы [4, с. 17, 19].

Целью настоящей работы является представление аналоговой интерпретации особых режимов маятниковых движений гиристора в СД-поле, существующих на фазовой плоскости.

## 2. Особые режимы маятниковых движений

Рассмотрим состояния маятника (5), при которых его фазовая точка движется по фазовой траектории, совпадающей с сепаратрисой на фазовой плоскости. Такие режимы движения являются особыми, обладающими характерными свойствами *уединенных нелинейных волн* (УНВ), и *солитонов* [5, 6].

Особые МД в СД-поле представляют интерес по следующим причинам. Они являются пограничными состояниями маятника, соответствующими движению фазовой точки по граничной фазовой траектории, разделяющей области фазовой плоскости с различными режимами движения. Вместе с тем, нестационарные возмущения, существующие в различных переходных процессах, распространяясь в области существования, по своей структуре асимптотически приближаются к УНВ и солитонам [5, 6].

Соотношение (5) имеет структуру уравнения *кноидальных волн* [5] (термин Кортевега и де Фриза) или уравнения периодических солитонных решеток [7], определяющего слабое взаимодействие солитонов [8]. Кноидальные волны характеризуют периодические движения фазовой точки маятника вблизи сепаратрисы. Движение по самой сепаратрисе соответствует движению УНВ, в частности, солитона.

Рассмотрим особые решения маятника (5), уравнение которого при условиях

$$m_1 + m_2 > 0, \quad m_2 > 0 \quad (10)$$

принимает вид (6). Если при условиях (10) выполняется

$$\Omega_p^2 - |w_0| \omega_q = 0, \quad w_0 = \dot{\theta}_0, \quad (11)$$

то при  $\theta_0 = 0$  решение уравнения (6) имеет вырожденный вид

$$\theta(t) = \theta_q \operatorname{th} \omega t, \quad (12)$$

где, согласно равенствам (9), (11), имеем

$$\theta_q = 2\omega_q^{-1}\omega, \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{2}}\Omega_p,$$

$\omega$  – характерный параметр. Решение (12) определяет УНВ, являющуюся *кинком* [6, 7] (кинком уравнения синус-Гордона [7].

Для маятника (6) существуют единственные топологически возможные начальные условия, порождающие два кинка – это волновой пакет, содержащий кинк и антикинк [7]. Кроме того, этот маятник в СД-поле обладает тремя видами состояния: кинк (12), антикинк и статические равновесия.

Рассмотрим кинк (12), для которого

$$w(t) = w_0 \operatorname{ch}^{-2} \omega t. \quad (13)$$

Равенство (13) на плоскости переменных  $(t, w)$  описывает УНВ, являющуюся *солитоном Рассела* [9] или, иначе, *солитоном Кортевега-де Фриза* [9]. Согласно выражениям (12), (13) уравнение сепаратрисы на фазовой плоскости этого маятника определяется равенством

$$w = w_0 - \frac{1}{2}\omega_q \theta^2.$$

Для маятника с уравнением (7) при условии  $m_1 + m_2 < 0$  особое решение принимает вид

$$\theta(t) = \theta_0 \operatorname{ch}^{-1} \Omega_q t, \quad (14)$$

где значение  $\theta_0 = \sqrt{2}\theta_q$ . Решение (14) соответствует лимитационному движению маятника с асимптотически при  $t \rightarrow +\infty$  достижимым состоянием равновесия  $\theta = w = 0$ .

Соотношение (14) характеризует УНВ – «солитон огибающей» или *групповой солитон* [9].

В случае, при котором, в отличие от условий (10),

$$m_1 + m_2 < 0, \quad m_2 > 0,$$

уравнение (5) принимает вид (8). Его особое решение имеет вид

$$\theta(t) = \sqrt{2} \theta_r \operatorname{sh}^{-1} \Omega_q t, \quad (15)$$

где  $\theta_r$  определяется равенством

$$\theta_r = \sqrt{-2m_2^{-1}(m_1 + m_2)}.$$

Особое решение (15) является УНВ и соответствует лимитационному режиму движения, приводящему асимптотически при  $t \rightarrow +\infty$  к состоянию статического равновесия  $\theta = w = 0$ .

Рассмотрим движение маятника с уравнением (4) в случае, при котором  $n = m_2 = 0$

$$\ddot{\theta} + \omega_p^2 \sin \theta = 0, \quad \omega_p = \sqrt{A_2^{-1} m_1}. \quad (16)$$

Для уравнения (16), являющемуся уравнением гармонического осциллятора, при условиях  $\theta_0 = 0$ ,  $w_0 = 2\omega_p$  существует особое решение [6, 9]

$$\theta(t) = \pi - 4 \operatorname{arctg} u(t), \quad u(t) = \exp(-\omega_p t). \quad (17)$$

Решение (17) соответствует УНВ – *солитону синус-Гордона* [6] (солитону Френкеля [9]). Маятник (16) имеет также особое решение, симметричное решению (17) – *антисолитон синус-Гордона* [6, 7] или *флюксон* [7]

$$\theta(t) = \pi + 4 \operatorname{arctg} u(t). \quad (18)$$

В силу соотношений (17), (18) уравнения сепаратрис на фазовой плоскости имеют вид:

$$w = \delta \frac{4\omega_p v}{1+u^2}, \quad v(\theta) = \delta \operatorname{tg} \frac{\pi - \theta}{4}, \quad (19)$$

где  $\delta = (1; -1)$  для данного солитона и антисолитона, соответственно. Согласно уравнениям (19) солитону (17) и антисолитону (18) соответствует одна и та же сепаратриса.

Из равенств (17), (18) следует, что положение статического равновесия  $\theta = \pi$  для солитона и антисолитона достигается лишь асимптотически при  $t \rightarrow +\infty$ .

Таким образом, особые режимы движения маятника (5) в консервативном СД-поле в структурно-топологическом смысле носят волновой характер и интерпретируются детерминированными движениями УНВ и солитонов.

### 3. Положения равновесия и их устойчивость

Для маятника (4) в неконсервативном силовом СД-поле существуют *положения статического равновесия* (ПР)

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = \theta(m_1, m_2), \quad \theta_3 = \pi. \quad (20)$$

Здесь ПР  $\theta_2$  существует лишь при  $|m_1| < |m_2|$  согласно формуле

$$s_* = \cos \theta_2 = -\frac{m_1}{m_2}. \quad (21)$$

Условие (21) содержит, как частный случай, особый случай равновесия, при котором  $\theta = \pi/2$ , когда  $m_1 = 0$ ,  $m_2 \neq 0$ . Положения  $\theta_1, \theta_3$  являются “прямым” и “обратным”, соответственно, по отношению к направлению орта  $s$ .

Множество значений (20) является полным: других ПР этого маятника для  $0 \leq \theta \leq \pi$  не существует.

Рассмотрим устойчивость по первому приближению ПР (20) маятника (4). Для ПР  $\theta_1$  согласно соотношению (4) имеем уравнение первого приближения

$$\ddot{\theta} + 2n\dot{\theta} + \Omega_p^2 \theta = 0, \quad (22)$$

для которого  $m_3 \neq 0$  и выполняются условия

$$n^2 - \Omega_p^2 > 0, \quad \Omega_p \neq 0.$$

Согласно этому на основании подробного анализа получаем следующие заключения.

Если  $\sigma = m_1 + m_2 > 0$ ,  $m_3 > 0$ , то ПР  $\theta_1$  асимптотически устойчиво. При  $\sigma < 0$  данное ПР неустойчиво для любых значений параметра  $m_3$ . В случае, при котором выполняются условия  $|n| \leq \Omega_p$ ,  $m_3 \neq 0$ , данное ПР асимптотически устойчиво при  $m_3 > 0$  и неустойчиво в обратном случае независимо от значений и знаков термомеханических параметров  $m_1, m_2$ .

В случае консервативного СД-поля ( $m_3 = 0$ ) ПР  $\theta_1$  устойчиво при  $\sigma > 0$ , неустойчиво при  $\sigma < 0$  и находится в нейтральном состоянии при  $\Omega_p = 0$ .

Рассмотрим устойчивость ПР  $\theta_3$ . Полагая в его малой окрестности  $\theta = \pi - p$ , из уравнения (4) получаем уравнение возмущений в первом приближении

$$\ddot{p} - 2n\dot{p} + \Omega_s p = 0, \quad \Omega_s = \omega_q^2 - \omega_p^2. \quad (23)$$

Пусть  $m_3 \neq 0$  и выполняется условие

$$\Delta = n^2 - \Omega_s > 0.$$

Тогда согласно уравнению (23) заключаем следующее. Если  $m_1 < m_2$ ,  $m_3 < 0$ , то ПР  $\theta_3$  асимптотически устойчиво. Для значений  $m_1 > m_2$  данное ПР неустойчиво при любых значениях параметра  $m_3$ .

В случае, при котором  $\Delta \leq 0$ , это ПР асимптотически устойчиво при  $m_3 < 0$  и неустойчиво при  $m_3 > 0$  независимо от значений и знаков параметров  $m_1, m_2$ .

Для случая консервативного СД-поля ( $m_3 = 0$ ) данное ПР устойчиво при  $m_1 < m_2$ , неустойчиво при  $m_1 > m_2$  и находится в нейтральном состоянии при  $m_1 = m_2$ .

В особом случае равновесия в положении  $\theta = \theta_s = \pi/2$ , при котором  $m_1 = 0, m_2 \neq 0$ , уравнение первого приближения имеет вид

$$\ddot{p} - \omega_q^2 p = 0. \quad (24)$$

Согласно уравнению (24) данное ПР при  $m_2 < 0$  устойчиво, а в противоположном случае – неустойчиво независимо от значений и знака параметра  $m_3$ .

Таким образом, каждое из ПР (20) может являться либо устойчивым (асимптотически устойчивым), либо неустойчивым или нейтральным в зависимости от значений термомеханических параметров  $m_1, m_2, m_3$  и от наложенных на них ограничений, обусловленных принятой динамической моделью.

## Заключение

Показано, что силовое СД-поле, порожденное однородным параллельным световым потоком, обладает специфическими свойствами, характерными для этого поля.

Установлена принципиальная возможность существования МД гиростата в световом потоке. Показано, что в однородном СД-поле существуют ПР гиростата, каждое из которых при определенных условиях может являться как устойчивым (или асимптотически устойчивым), так и неустойчивым. При этом подтверждено, что состояние устойчивости или неустойчивости ПР гиростата обуславливается характером ограничений, наложенных на термомеханические и оптические параметры светотражающей поверхности гиростата. Это свойство гиростатического маятника, движущегося в световом потоке, составляет характерную особенность динамического воздействия стационарного силового СД-поля.

Маятниковые движения гиростата, существующие в неконсервативном СД-поле в либрационном режиме, реализуются в виде нелинейных колебаний осциллятора Дуффинга, характеризующихся уравнениями (5)–(8).

Особые режимы МД гиростата адекватно интерпретируются волновыми движениями, существующими в сплошных средах без диссипации, описываемыми решениями волнового типа, соответствующими кноидальным волнам и УНВ (кинку, групповому солитону, солитону синус-Гордона). Данная аналоговая интерпретация МД гиростата позволяет наглядно представить динамику этих движений и сопоставить ее характерные свойства со свойствами движения материальных макрочастиц.

### Библиографический список

1. Коган А.Ю., Кирсанова Т.С. Термомеханические явления в движении относительно центра масс космического аппарата с солнечным стабилизатором // Космические исследования. 1992. Т. 30. Вып. 3. С. 312–320.
2. Макеев Н.Н. Динамика гиростата в радиационном силовом поле // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2014. Вып. 1 (24). С. 36–45.
3. Камке Э. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Физматлит, 1961. 704 с.
4. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1969. 380 с.
5. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 624 с.
6. Раджараман Р. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля. М.: Мир, 1985. 414 с.
7. Додд Р. и др. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988. 695 с.
8. Горшков К.А. и др. Взаимодействия и связанные состояния солитонов как классических частиц // Журнал теоретической и экспериментальной физики. 1976. Т. 71. С. 585.
9. Филиппов А.Т. Солитон. М.: Наука, 1990. 288 с.
10. Сборник статей. Солитоны в действии / под ред. К. Лонгрена и Э. Скотта. М.: Мир, 1981. 312 с.

## PENDULUM MOVEMENTS OF A GYROSTAT IN A LIGHT PRESSURE FIELD

**N. N. Makeev**

Saratov, Russia  
nmakeyev@mail.ru

*The oscillatory-rotational movements relative to the center of mass of the gyrostat, which occur under the influence of a field of light pressure forces, are investigated. This force field is generated by a stationary and homogenous parallel light flux of constant intensity, invariably directed in inertial space. A wave analog interpretation of special modes of pendulum motion is given, built on the basis of the accepted thermomechanical model of light radiation. A model analogy is constructed between the pendulum movements of the gyrostat and the movements of solitary nonlinear waves and solitons. An assessment is made of the stability of the equilibrium positions of the gyrostat in a given field of forces depending on the specified thermomechanical parameters of its reflective outer surface.*

**Keywords:** gyrostat; light pressure; pendulum movement; nonlinear wave; stability of equilibrium.

УДК 519.2

**И. Е. Полосков**

*Пермский государственный  
национальный исследовательский университет*

Россия, 614068, г. Пермь, ул. Букирева, 15  
polosk@psu.ru

**ОГРАНИЧЕННОЕ СЛУЧАЙНОЕ ВОЗМУЩЕНИЕ, ЕГО  
ХАРАКТЕРИСТИКИ И ВОПРОСЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО  
МОДЕЛИРОВАНИЯ**

*В работе рассмотрены теоретические и практические вопросы применения ограниченных случайных процессов, являющихся нелинейными фильтрами белого шума. Получены формулы как для переходных, так и стационарных характеристик процессов, рассмотрены проблемы статистического моделирования, связанные с использованием указанных процессов.*

**Ключевые слова:** ограниченное случайное возмущение, стационарные характеристики, переходные первые моменты, стохастическое дифференциальное уравнение, статистическое моделирование.

**Введение**

Известно, что основным инструментом анализа стохастического поведения механических систем с сосредоточенными и распределенными параметрами являются стохастические обыкновенные дифференциальные уравнения (СОДУ) [1–3] и стохастические дифференциальные уравнения в частных производных (СДУвЧП) [4–6] Ито и Стратоновича, в которых в качестве случайных возмущений используются случайные винеровские процессы и шумы.

Формальными производными последних являются временные и пространственно-временные белые шумы. Наряду с хорошими математическими свойствами этих возмущений при их применении имеется ряд проблем практического характера, с которыми сталкиваются исследователи, и первая из них – неограниченность дисперсии винеровских процессов и шумов (иначе – возможных значений соответствующих белых шумов) [7].

Для преодоления указанной проблемы уже давно предпринимаются попытки использовать модели с ограниченными возмущениями, например, посредством применения огибающих (ограниченных функций времени) при решении задач анализа сейсмических флуктуаций [8].

В. Веди́г (W.V. Wedig) в работах [9,10] и др. при анализе устойчивости параметрических распределенных механических систем в качестве возмущения использовал случайный процесс вида:

$$\begin{aligned} X(t) &= \epsilon \cos \Phi(t), \quad \Phi(t) = \omega_0 t + \gamma W(t), \\ d\Phi(t) &= \omega_0 dt + \gamma dW(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $t$  – время ( $t \geq 0$ );  $\omega_0 > 0$ ,  $\epsilon$ ,  $\gamma$  – постоянные,  $W(t)$  – винеровский процесс с интенсивностью  $\sigma_0 > 0$ . Несмотря на простой вид, данный процесс обладает полезными свойствами, важными при построении моделей возмущений для различных систем: 1) в отличие от часто используемого белого шума этот процесс ограниченный; 2) параметр  $\epsilon$  регулирует величину модуля возмущения, а  $\gamma$  – интенсивность винеровского процесса; 3) при  $\gamma = 0$   $Z(t)$  становится обычным неслучайным гармоническим процессом; 4) при увеличении интенсивности  $\sigma_0$ , коэффициента  $\gamma$  и амплитуды  $\epsilon$  на равномерно распределенной спектральной плотности нормированного белого шума.

В своих работах В. Веди́г представил минимальные вероятностные свойства простого, но важного для практики процесса  $X(t)$ , ограничившись представлением системы стохастических обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ) Ито для  $X(t)$  и  $Y(t) = \epsilon \sin \Phi(t)$ , а также форму спектральной плотности для установившегося режима. Целью настоящей работы является прямое получение как переходных, так и стационарных характеристик процессов  $X(t)$  и  $Y(t)$ , а также численный расчет, включая статистическое моделирование, ряда этих характеристик для оценки адекватности таких расчетов.

## 1. Построение соотношений

Начнем с вычисления математических ожиданий

$$m_X(t) = \mathbb{E}[X(t)], \quad m_Y(t) = \mathbb{E}[Y(t)].$$

Для их нахождения, а также дисперсий этих процессов требуется одноточечная плотность вероятности  $W(t)$ , которая в данном случае будет выглядеть так:

$$p_W(w, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2 t}} e^{-w^2/(2\sigma_0^2 t)}, \quad -\infty < w < +\infty. \quad (2)$$

Тогда

$$\begin{aligned} m_X(t) &= \mathbb{E}[\epsilon \cos [\omega_0 t + \gamma W(t)]] = \\ &= \epsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \cos (\omega_0 t + \gamma w) p_W(w, t) dw = \epsilon e^{-\frac{1}{2}\gamma^2 \sigma_0^2 t} \cos (\omega_0 t); \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} m_Y(t) &= \mathbb{E}[\epsilon \sin [\omega_0 t + \gamma W(t)]] = \\ &= \epsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \sin (\omega_0 t + \gamma w) p_W(w, t) dw = \epsilon e^{-\frac{1}{2}\gamma^2 \sigma_0^2 t} \sin (\omega_0 t). \end{aligned} \quad (4)$$

Теперь вычислим дисперсии и ковариацию процессов:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_X(t) &= \mathbb{D}[X(t)] = \mathbb{E}[X^2(t)] - m_X^2(t) = \\ &= \mathbb{E}[\epsilon^2 \cos^2 [\omega_0 t + \gamma W(t)]] - m_X^2(t) = \\ &= \epsilon^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \cos^2 (\omega_0 t + \gamma w) p_W(w, t) dw - m_X^2(t) = \\ &= \frac{\epsilon^2}{2} \left[ 1 + e^{-2\gamma^2 \sigma_0^2 t} \cos (2\omega_0 t) - e^{-\gamma^2 \sigma_0^2 t} - e^{-\gamma^2 \sigma_0^2 t} \cos (2\omega_0 t) \right] = \\ &= \frac{\epsilon^2}{2} \left( 1 - e^{-\gamma^2 \sigma_0^2 t} \right) \left[ 1 - e^{-\gamma^2 \sigma_0^2 t} \cos (2\omega_0 t) \right]; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_Y(t) &= \mathbb{D}[Y(t)] = \mathbb{E}[Y^2(t)] - m_Y^2(t) = \\ &= \mathbb{E}[\epsilon^2 \sin^2 [\omega_0 t + \gamma W(t)]] - m_Y^2(t) = \\ &= \epsilon^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2 (\omega_0 t + \gamma w) p_W(w, t) dw - m_Y^2(t) = \end{aligned}$$

$$= \frac{\epsilon^2}{2} \left[ 1 - e^{-2\gamma^2 \sigma_0^2 t} \cos(2\omega_0 t) + e^{-\gamma^2 \sigma_0^2 t} - e^{-\gamma^2 \sigma_0^2 t} \cos(2\omega_0 t) \right] =$$

$$= \frac{\epsilon^2}{2} \left( 1 - e^{-\gamma^2 \sigma_0^2 t} \right) \left[ 1 + e^{-\gamma^2 \sigma_0^2 t} \cos(2\omega_0 t) \right]; \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{XY}(t) &= \mathbb{E}[\{X(t) - m_X(t)\}\{Y(t) - m_Y(t)\}] = \\ &= \mathbb{E}[X(t)Y(t)] - m_X(t)m_Y(t) = \\ &= \mathbb{E}[\epsilon^2 \cos[\omega_0 t + \gamma W(t)] \sin[\omega_0 t + \gamma W(t)]] - m_X(t)m_Y(t) = \\ &= \frac{\epsilon^2}{2} \left[ e^{-2\gamma^2 \sigma_0^2 t} \sin(2\omega_0 t) - e^{-\gamma^2 \sigma_0^2 t} \sin(2\omega_0 t) \right] = \\ &= -\frac{\epsilon^2}{2} e^{-\gamma^2 \sigma_0^2 t} \sin(2\omega_0 t) \left( 1 - e^{-\gamma^2 \sigma_0^2 t} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Далее обратимся к получению соотношений для авто- и кросс-ковариационных функций. Для их построения необходимо иметь двухточечную плотность вероятности процесса  $W(t)$ . Ее можно записать в форме частного случая решения примера 2.4 [11, с. 58, 59], который к тому же удобен для вычисления двойных интегралов в формулах ниже:

$$\begin{aligned} p_W(w_1, t_1; w_2, t_2) &= \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_0^2 \sqrt{t_1(t_2 - t_1)}} \exp \left[ -\frac{w_1^2}{2\sigma_0^2 t_1} - \frac{(w_2 - w_1)^2}{2\sigma_0^2 (t_2 - t_1)} \right], \\ &\quad -\infty < w_1, w_2 < +\infty, \quad 0 \leq t_1 < t_2. \end{aligned} \quad (8)$$

В результате для ковариационных функций будем иметь:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{XX}(t_1, t_2) &= \mathbb{E}[\{X(t_1) - m_X(t_1)\}\{X(t_2) - m_X(t_2)\}] = \\ &= \mathbb{E}[X(t_1)X(t_2)] - m_X(t_1)m_X(t_2) = \\ &= \mathbb{E}[\epsilon^2 \cos \Phi(t_1) \cos \Phi(t_2)] - m_X(t_1)m_X(t_2) = \\ &= \frac{\epsilon^2}{2} \left[ e^{-\frac{1}{2}\gamma^2 \sigma_0^2 (3t_1+t_2)} \left\{ e^{2\gamma^2 \sigma_0^2 t_1} \cos(\omega_0 \underline{t}) + \cos(\omega_0 \bar{t}) \right\} - \right. \\ &\quad \left. - e^{-\frac{1}{2}\gamma^2 \sigma_0^2 \bar{t}} \cos(\omega_0 t_1) \cos(\omega_0 t_2) \right] = \\ &= \frac{\epsilon^2}{2} \left[ e^{-\frac{1}{2}\gamma^2 \sigma_0^2 \underline{t}} \left\{ \cos(\omega_0 \underline{t}) + e^{-2\gamma^2 \sigma_0^2 t_1} \cos(\omega_0 \bar{t}) \right\} - \right. \\ &\quad \left. - e^{-\frac{1}{2}\gamma^2 \sigma_0^2 \bar{t}} \cos(\omega_0 t_1) \cos(\omega_0 t_2) \right]; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\mathcal{C}_{YY}(t_1, t_2) = \mathbb{E}[\{Y(t_1) - m_Y(t_1)\}\{Y(t_2) - m_Y(t_2)\}] =$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathbb{E}[Y(t_1) Y(t_2)] - m_Y(t_1) m_Y(t_2) = \\
 &= \mathbb{E}[\epsilon^2 \sin \Phi(t_1) \sin \Phi(t_2)] - m_Y(t_1) m_Y(t_2) = \\
 &= \frac{\epsilon^2}{2} \left[ e^{-\frac{1}{2}\gamma^2 \sigma_0^2 (3t_1+t_2)} \left\{ e^{2\gamma^2 \sigma_0^2 t_1} \cos(\omega_0 \underline{t}) - \cos(\omega_0 \bar{t}) \right\} - \right. \\
 &\quad \left. - e^{-\frac{1}{2}\gamma^2 \sigma_0^2 \bar{t}} \sin(\omega_0 t_1) \sin(\omega_0 t_2) \right] = \\
 &= \frac{\epsilon^2}{2} \left[ e^{-\frac{1}{2}\gamma^2 \sigma_0^2 \underline{t}} \left\{ \cos(\omega_0 \underline{t}) - e^{-2\gamma^2 \sigma_0^2 t_1} \cos(\omega_0 \bar{t}) \right\} - \right. \\
 &\quad \left. - e^{-\frac{1}{2}\gamma^2 \sigma_0^2 \bar{t}} \sin(\omega_0 t_1) \sin(\omega_0 t_2) \right]; \quad (10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{XY}(t_1, t_2) &= \mathbb{E}[\{X(t_1) - m_X(t_1)\} \{Y(t_2) - m_Y(t_2)\}] = \\
 &= \mathbb{E}[X(t_1) Y(t_2)] - m_X(t_1) m_Y(t_2) = \\
 &= \mathbb{E}[\epsilon^2 \cos \Phi(t_1) \sin \Phi(t_2)] - m_X(t_1) m_Y(t_2) = \\
 &= \frac{\epsilon^2}{2} \left[ e^{-\frac{1}{2}\gamma^2 \sigma_0^2 (3t_1+t_2)} \left\{ e^{2\gamma^2 \sigma_0^2 t_1} \sin(\omega_0 \underline{t}) + \sin(\omega_0 \bar{t}) \right\} - \right. \\
 &\quad \left. - e^{-\frac{1}{2}\gamma^2 \sigma_0^2 \bar{t}} \cos(\omega_0 t_1) \sin(\omega_0 t_2) \right] = \\
 &= \frac{\epsilon^2}{2} \left[ e^{-\frac{1}{2}\gamma^2 \sigma_0^2 \underline{t}} \left\{ \sin(\omega_0 \underline{t}) + e^{-2\gamma^2 \sigma_0^2 t_1} \cos(\omega_0 \bar{t}) \right\} - \right. \\
 &\quad \left. - e^{-\frac{1}{2}\gamma^2 \sigma_0^2 \bar{t}} \cos(\omega_0 t_1) \sin(\omega_0 t_2) \right]. \quad (11)
 \end{aligned}$$

где использованы симметричные обозначения  $\underline{t} = t_2 - t_1$ ,  $\bar{t} = t_1 + t_2$ .

## 2. Стационарные характеристики

Для их нахождения перейдем в соотношениях (3)–(7) к пределу при  $t \rightarrow +\infty$ . В результате получим:

$$m_X^* = m_Y^* = 0, \quad \mathcal{D}_X^* = \mathcal{D}_Y^* = \frac{\epsilon^2}{2}, \quad \mathcal{K}_{XY}^* = 0,$$

Получим стационарные ковариационные функции. Для этого, вводя для разности  $\underline{t} = t_2 - t_1$  стандартное обозначение  $\tau$ , в равенствах (9)–(11) устремим  $t_1$  и  $t_2$  к бесконечности:

$$\begin{aligned}
 C_{XX}^*(\tau) &= C_{YY}^*(\tau) = \frac{\epsilon^2}{2} e^{-\frac{1}{2}\gamma^2 \sigma_0^2 \tau} \cos(\omega_0 \tau), \\
 C_{XY}^*(\tau) &= \frac{\epsilon^2}{2} e^{-\frac{1}{2}\gamma^2 \sigma_0^2 \tau} \sin(\omega_0 \tau).
 \end{aligned}$$

### 3. Статистическое моделирование случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$

Такое моделирование осуществлялось в среде пакета МАТЕМАТИКА [12].

Численное решение СОДУ для приближенного расчета траекторий процессов  $X(t)$  и  $Y(t)$  осуществлялось на отрезке  $[0, 2\pi]$  с постоянным шагом  $\Delta t = 0.0001 \ll 1$ , а построение графиков –  $\Delta t_p = 0.0021$  (примерно по 3000 точек).

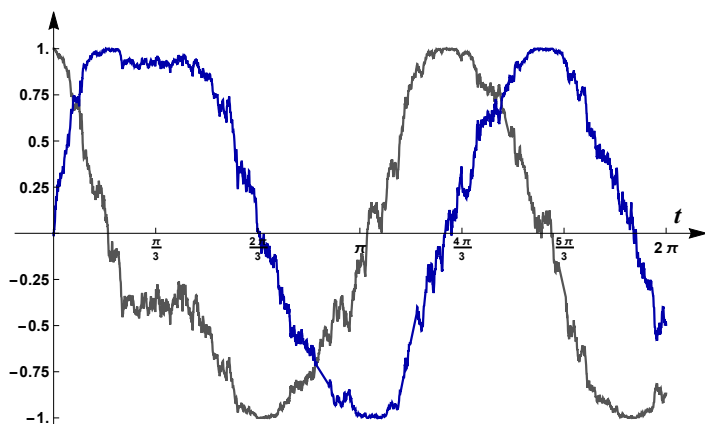


Рис. 1

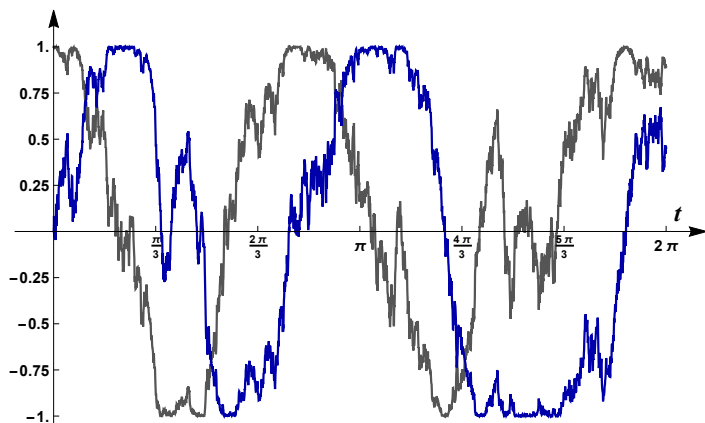


Рис. 2

При  $\epsilon = 1$  СОДУ Стратоновича и Ито для  $X(t)$  и  $Y(t)$  (для второго с учетом корректировочных членов Е. Вонга – М. Закая [13]) выглядели соответственно так:

$$dX(t) = -\omega_0 Y(t) dt - \gamma Y(t) dW(t),$$

$$dY(t) = \omega_0 X(t) dt + \gamma X(t) dW(t);$$

$$dX(t) = [-\gamma^2 X(t)/2 - \omega_0 Y(t)] dt - \gamma Y(t) dW(t), \quad (12)$$

$$dY(t) = [\omega_0 X(t) dt - \gamma^2 Y(t)/2] dt + \gamma X(t) dW(t). \quad (13)$$

В качестве значения коэффициента диффузии  $\sigma_0$  было выбрана единица, что соответствует стандартному винеровскому процессу. Начальными значениями  $X(0)$  и  $Y(0)$  были 1 и 0.

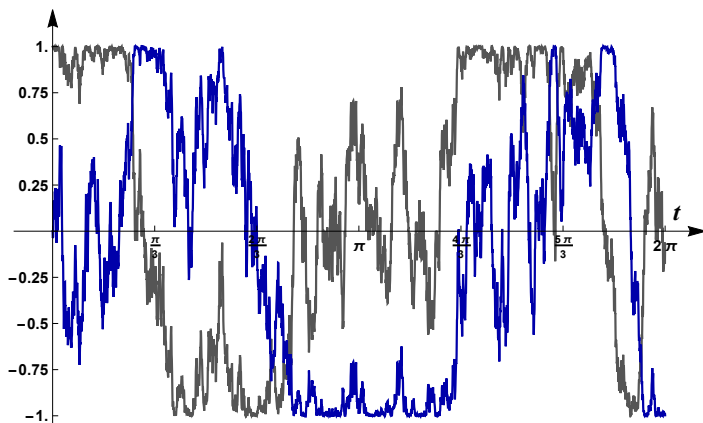


Рис. 3

Траектории процессов  $X(t)$  и  $Y(t)$  рассчитывались с помощью функций `StratonovichProcess/ItoProcess` и `RandomFunction` (метод "StochasticRungeKuttaScalarNoise") пакета МАТЕМАТИКА). При этом характерное поведение траекторий, полученное интегрированием уравнений Ито, соответствовало предполагаемому (например, на использовавшемся отрезке времени сумма квадратов аппроксимаций  $X(t)$  и  $Y(t)$  приближенно равнялась 1 с приемлемой точностью), а для СОДУ Стратоновича – нет, что, возможно, свидетельствует о различной трактовке структуры этих уравнений в нашей и зарубежной научной литературе (или же конкретно разработчиками пакета МАТЕМАТИКА).

Результаты численного интегрирования систем уравнений Ито изображены на рис. 1–3 для  $\omega_0 = 2$ . Значения параметра  $\gamma$  были соответственно равны 0.50, 1.00 и 1.75.

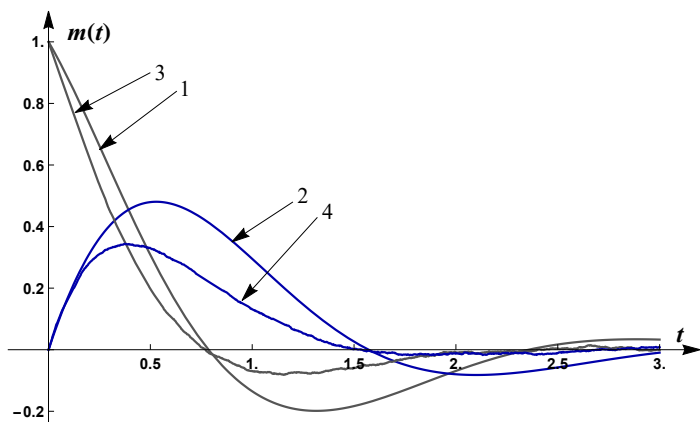


Рис. 4

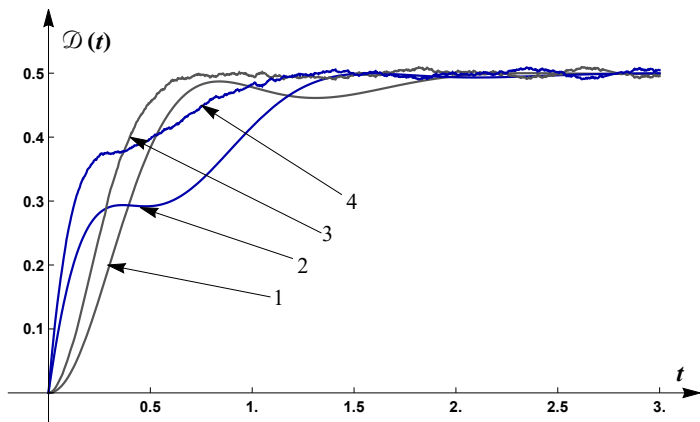


Рис. 5

В следующей группе расчетов рассматривались точность получения моментных функций на основе многократных моделирования ( $n \gg 1$ ) траекторий случайных процессов  $X(t)$  и  $Y(t)$  как решений СОДУ Ито (12), (13) в сравнении с соответствующими точными характеристиками (3)–(9). По полученным на промежу-

ке  $0 \leq t \leq 3$  при  $\omega_0 = 2$ ,  $\gamma = 1.50$  с шагом 0.001 (всего  $m$  шагов) результатам расчетов  $\hat{x}_{k\ell}$ ,  $\hat{y}_{k\ell}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ,  $\ell = 1, 2, \dots, m$ ) 10000 траекторий строились оценки математических ожиданий, дисперсий и ковариации процессов  $X(t)$  и  $Y(t)$ , для чего использовались следующие формулы:

$$\bar{x}_\ell = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \hat{x}_{k\ell}, \quad \bar{y}_\ell = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \hat{y}_{k\ell}, \quad (14)$$

$$\bar{s}_{X\ell}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (\hat{x}_{k\ell} - \bar{x}_\ell)^2, \quad \bar{s}_{Y\ell}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (\hat{y}_{k\ell} - \bar{y}_\ell)^2, \quad (15)$$

$$\bar{k}_{XY\ell} = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (\hat{x}_{k\ell} - \bar{x}_\ell)(\hat{y}_{k\ell} - \bar{y}_\ell). \quad (16)$$

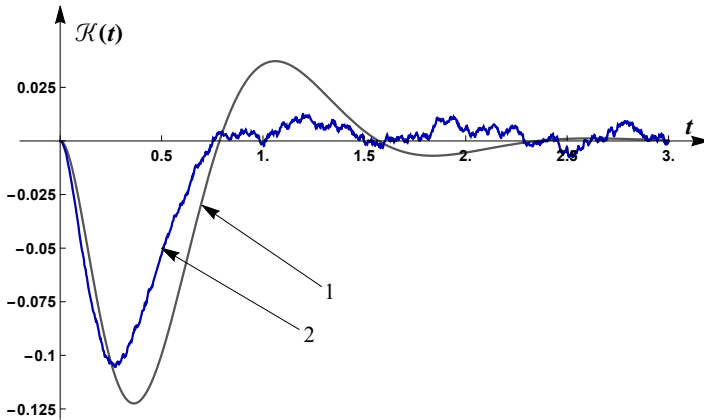


Рис. 6

Поведение  $m_X(t)$  (кривая 1),  $\hat{m}_X(t)$  (интерполяционная кривая 3, построенная по точкам  $\bar{x}_\ell$ ),  $m_Y(t)$  (кривая 2),  $\hat{m}_Y(t)$  (интерполяционная кривая 4, построенная по точкам  $\bar{y}_\ell$ ) отображено на рис. 4; изменение  $\mathcal{D}_X(t)$  (1),  $\hat{\mathcal{D}}_X(t)$  (3),  $\mathcal{D}_Y(t)$  (2),  $\hat{\mathcal{D}}_Y(t)$  (4) – на рис. 5; графики  $\mathcal{K}_{XY}(t)$  (1),  $\hat{\mathcal{K}}_{XY}(t)$  (2) – на рис. 6. Принципы построения кривых на последних двух рисунках те же, что и на рис. 4.

Графики из последней группы строились на основе прямого статистического моделирования случайных процессов  $X(t) = \cos \Phi(t)$ ,  $Y(t) = \sin \Phi(t)$  при  $\omega_0 = 2$ ,  $\gamma = 1.50$  на основе разыгрывания винеровского процесса  $W(t)$  и последующей статистической обработки

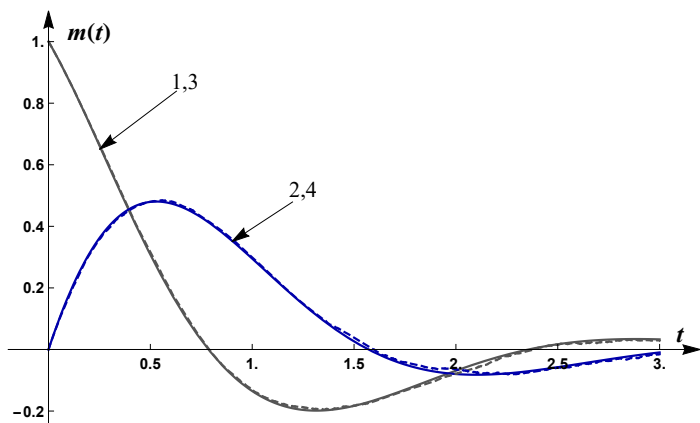


Рис. 7

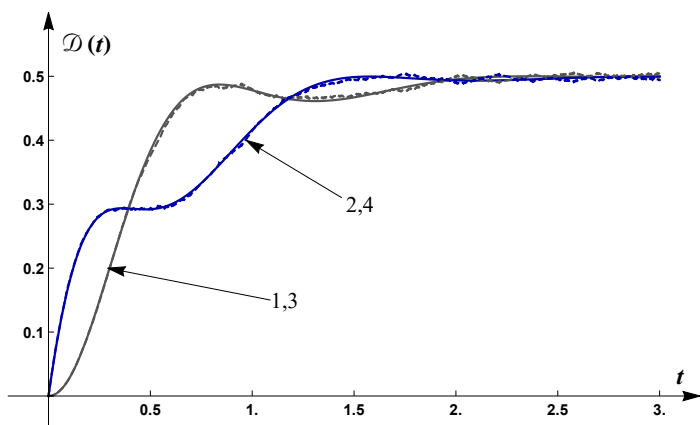


Рис. 8

по формулам (14)–(16) для оценки  $\hat{m}_X(t)$ ,  $\hat{m}_Y(t)$ ,  $\hat{D}_X(t)$ ,  $\hat{D}_Y(t)$  и  $\hat{\mathcal{K}}_{XY}(t)$  на основе 10000 поточечных траекторий, ординаты которых были получены по формулам

$$\hat{x}_{k\ell} = \cos(\omega_0 t_\ell + \gamma \hat{w}_\ell), \quad \hat{y}_{k\ell} = \sin(\omega_0 t_\ell + \gamma \hat{w}_\ell).$$

Поведение  $m_X(t)$  (кривая 1),  $\hat{m}_X(t)$  (3),  $m_Y(t)$  (2),  $\hat{m}_Y(t)$  (4) отображено на рис.7; изменение  $D_X(t)$  (1),  $\hat{D}_X(t)$  (3),  $D_Y(t)$  (2),  $\hat{D}_Y(t)$  (4) – на рис.8; графики  $\mathcal{K}_{XY}(t)$  (1),  $\hat{\mathcal{K}}_{XY}(t)$  (2) – на рис.9. Принципы построения кривых на последних трех рисунках те же,

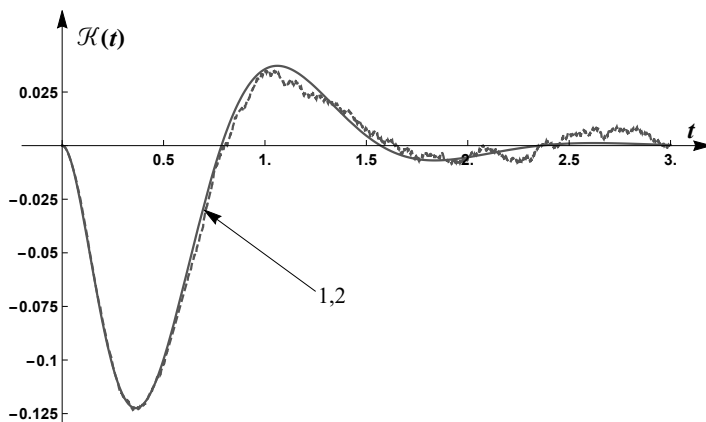


Рис. 9

что и на рис. 4–6.

### Заключение

Анализируя результаты расчетов, отображенные на рис. 4–9, несложно сделать вывод, что при необходимости получения аппроксимаций значений случайных процессов  $X(t)$  и  $Y(t)$  при различных значениях времени в переходном режиме для статистического моделирования по возможности желательно применение прямого расчета аппроксимаций на основе разыгрывания значений винеровского процесса.

### Библиографический список

1. *Lin Y.K., Cai G.Q.* Probabilistic structural dynamics. Advanced theory and applications. – New York: McGraw–Hill, 1995. – 546 p.
2. *Mao X.* Stochastic differential equations and applications. – Oxford: Woodhead Publishing, 2011. – 440 p.
3. *Roberts J.B., Spanos P.D.* Random vibration and statistical linearization. – Chichester: UK John Wiley & Sons, 1990. – xiii, 407 p.
4. *Chow P.-L.* Stochastic partial differential equations. – Boca Raton (FL): Chapman & Hall/CRC, 2015. – XII, 314 p.
5. *Duan J., Wang W.* Effective dynamics of stochastic partial differential equations. – Amsterdam: Elsevier, 2014. – XII, 270 p.

6. *Liu W., Röckner M.* Stochastic partial differential equations: An introduction. – Cham: Springer, 2015. – VI, 266 p.

7. *Полосков И.Е.* Стохастический анализ динамических систем [Электронный ресурс]: монография. – Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2016. – 772 с.

8. *Xu J., Fermandois G.A., Spencer Jr. B.F., Lu X.* Stochastic optimisation of buckling restrained braced frames under seismic loading // *Structure and Infrastructure Engineering*. – 2018. – Vol. 14, № 10. – P. 1386–1401.

9. *Wedig W.V.* Invariant measures and Lyapunov exponents for generalized parameter fluctuations // *Structural Safety*. – 1990. – Vol. 8, № 1–4. – P. 13–25.

10. *Wedig W.V.* Analysis and simulation of nonlinear stochastic systems // *Nonlinear Dynamics in Engineering Systems (IUTAM)* / W. Schiehlen (ed.). – Berlin, Heidelberg: Springer, 1990. – P. 337–344.

11. *Волков И.К., Зуев С.М., Цветкова Г.М.* Случайные процессы: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. – 448 с.

12. *Wolfram St.* An elementary introduction to the Wolfram Language. – Champaign (IL): Wolfram Media, 2017. – 340 p.

13. *Wong E., Zakai M.* On the convergence of ordinary integrals to stochastic integrals // *Annals of Mathematical Statistics*. – 1965. – Vol. 36, № 5. – P. 1560–1564.

## **BOUNDED RANDOM PERTURBATION, ITS CHARACTERISTICS AND ISSUES OF STATISTICAL MODELING**

**I. E. Poloskov**

*Perm State University*  
Perm, Russia  
polosk@psu.ru

*The paper discusses theoretical and practical issues of using limited random processes, which are nonlinear white noise filters. Formulas for both transient and stationary characteristics of processes are obtained, and problems of statistical modeling associated with the use of these processes are considered.*

**Keywords:** bounded random disturbance, stationary characteristics, transient first moments, stochastic differential equation, statistical modeling.

УДК 519.2:534

**И. Е. Полосков**

*Пермский государственный  
национальный исследовательский университет*

Россия, 614068, г. Пермь, ул. Букирева, 15  
polosk@psu.ru

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ РЕШЕНИЯ  
ЛИНЕЙНОГО НЕЙТРАЛЬНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО  
ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С  
НЕСКОЛЬКИМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ В УСТАНОВИВШЕМСЯ  
РЕЖИМЕ**

*В работе построена явная форма спектральной плотности решения линейного нейтрального стохастического параболического дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и тремя запаздываниями, получены условия существования этой плотности в терминах коэффициентов уравнения.*

**Ключевые слова:** нейтральное линейное параболическое дифференциальное уравнение, спектральная плотность, стохастическое дифференциальное уравнение в частных производных, постоянное запаздывание.

**Введение**

Функционирование различных механических, физических, технических, финансовых и других систем, моделирующих реальные процессы и описываемых (интегро-)дифференциальными уравнениями, подвержено влиянию случайных неопределенностей, присутствующих в дифференциальных операторах, начальных и гра-

ничных условиях [1–4]. В зависимости от характера моделей эти уравнения классифицируются как стохастические обыкновенные дифференциальные уравнения (СОДУ) или стохастические дифференциальные уравнения в частных производных (СДУвЧП). Уравнения случайных колебаний являются примерами моделей первого типа, а стохастические уравнения диффузии (параболические) и стохастические волновые уравнения (гиперболические) – второго.

Основными вероятностными характеристиками векторов состояния таких СДУвЧП как с запаздываниями, так и без являются пространственно-временные распределения этих векторов. К сожалению, в настоящее время получить точные аналитические представления для функционалов плотности вероятности для произвольных систем СДУвЧП с запаздыванием невозможно. Но в ряде случаев достаточным оказывается ограничиться вычислением стационарных функционалов плотности вероятности и/или других статистических характеристик, если таковые существуют. В частности, одной из таких характеристик для отдельных СДУвЧП является спектральная плотность решения, а для систем таких уравнений – матрица спектральных плотностей вектора состояния.

Важным классом СДУвЧП с запаздыванием являются линейные нейтральные стохастические параболические дифференциальные уравнения. В настоящей работе в приложении к семейству таких уравнений переносятся результаты наших работ [5–7], идеи которых, как и более ранних наших публикаций, были инициированы знакомством с работами С. Гийюзика (S. Guillouezic) [8–10], решившего ряд простых проблем для СОДУ с одним постоянным запаздыванием. Кроме собственно построения явной формы спектральной плотности решения рассматриваемого уравнения, ниже получены условия существования этой плотности в терминах коэффициентов уравнения, представлены линии уровня этой плотности при различных значениях параметров задачи.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим нейтральное СДУвЧП параболического типа с запаздыванием следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial U(x, t - \tau_1)}{\partial t} + \alpha_1 U(x, t) + \alpha_2 U(x, t - \tau_2) = \\ = \beta_1 \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} + \beta_2 \frac{\partial^2 U(x, t - \tau_3)}{\partial x^2} + \gamma \Xi(x, t), \quad (1) \end{aligned}$$

где  $t$  – время ( $t \geq 0$ );  $\tau_\ell > 0$  – постоянное запаздывание ( $\ell = 1, 2, 3$ );  $x \in \mathbb{R}$  – пространственный аргумент;  $U(x, t)$  – случайное поле с неизвестными характеристиками;  $\Xi(x, t)$  – стационарное поле с известными пространственно-временными ковариационной функцией  $C_{\Xi\Xi}(\bar{x}, \bar{t})$  и спектральной плотностью  $S_{\Xi\Xi}(\omega_1, \omega_2)$ ,

$$S_{\Xi\Xi}(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega_1 \bar{x} + \omega_2 \bar{t})} C_{\Xi\Xi}(\bar{x}, \bar{t}) d\bar{x} d\bar{t}, \quad (2)$$

$$C_{\Xi\Xi}(\bar{x}, \bar{t}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega_1 \bar{x} + \omega_2 \bar{t})} S_{\Xi\Xi}(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2; \quad (3)$$

$\alpha_1 > 0$ ,  $\alpha_2, \beta_1 > 0$ ,  $\beta_2, \epsilon, \gamma$  – константы;  $i$  – мнимая единица.

Задачей данной работы является построение спектральной плотности случайного поля  $U(x, t)$ , удовлетворяющего уравнению (1) и определяющего состояние рассматриваемой системы после завершения переходного процесса, а также нахождение условий существования такой плотности.

## 2. Соотношение для ковариационной функции

Чтобы получить уравнение для поля математического ожидания  $m_U(x, t)$ , усредним уравнение (1) по пространству элементарных исходов:

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_U(x, t)}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial m_U(x, t - \tau_1)}{\partial t} + \alpha_1 m_U(x, t) + \alpha_2 m_U(x, t - \tau_2) = \\ = \beta_1 \frac{\partial^2 m_U(x, t)}{\partial x^2} + \beta_2 \frac{\partial^2 m_U(x, t - \tau_3)}{\partial x^2} + \gamma m_\Xi(x, t). \end{aligned} \quad (4)$$

Вычтем последнее уравнение из уравнения (1), введем обозначения  $U^\circ(x, t) = U(x, t) - m_U(x, t)$ ,  $\Xi^\circ(x, t) = \Xi(x, t) - m_\Xi(x, t)$  и запишем результат так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^\circ(x, t)}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial U^\circ(x, t - \tau_1)}{\partial t} + \alpha_1 U^\circ(x, t) + \alpha_2 U^\circ(x, t - \tau_2) = \\ = \beta_1 \frac{\partial^2 U^\circ(x, t)}{\partial x^2} + \beta_2 \frac{\partial^2 U^\circ(x, t - \tau_3)}{\partial x^2} + \gamma \Xi^\circ(x, t). \end{aligned} \quad (5)$$

Отсюда получим уравнения для моментов времени  $t_1$  и  $t_2$ :

$$\frac{\partial U^\circ(x_1, t_1)}{\partial t_1} + \epsilon \frac{\partial U^\circ(x, t_1 - \tau_1)}{\partial t} + \alpha_1 U^\circ(x_1, t_1) + \alpha_2 U^\circ(x_1, t_1 - \tau_2) =$$

$$= \beta_1 \frac{\partial^2 U^\circ(x_1, t_1)}{\partial x_1^2} + \beta_2 \frac{\partial^2 U^\circ(x_1, t_1 - \tau_2)}{\partial x_1^2} + \gamma \Xi^\circ(x_1, t_1), \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U^\circ(x_2, t_2)}{\partial t_2} + \epsilon \frac{\partial U^\circ(x, t - \tau_1)}{\partial t_2} + \alpha_1 U^\circ(x_2, t_2) + \alpha_2 U^\circ(x_2, t_2 - \tau_2) = \\ & = \beta_1 \frac{\partial^2 U^\circ(x_2, t_2)}{\partial x_2^2} + \beta_2 \frac{\partial^2 U^\circ(x_2, t_2 - \tau_3)}{\partial x_2^2} + \gamma \Xi^\circ(x_2, t_2), \quad (7) \end{aligned}$$

После этого умножим уравнение (6) на  $U^\circ(x_2, t_2)$ , (7) – на  $\Xi^\circ(x_1, t_1)$  и усредним. В результате получим:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathcal{C}_{UU}(x_1, t_1; x_2, t_2)}{\partial t_1} + \epsilon \frac{\partial \mathcal{C}_{UU}(x_1, t_1 - \tau_1; x_2, t_2)}{\partial t_1} + \\ & + \alpha_1 \mathcal{C}_{UU}(x_1, t_1; x_2, t_2) + \alpha_2 \mathcal{C}_{UU}(x_1, t_1 - \tau_2; x_2, t_2) = \\ & = \beta_1 \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{UU}(x_1, t_1; x_2, t_2)}{\partial x_1^2} + \\ & + \beta_2 \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{UU}(x_1, t_1 - \tau_3; x_2, t_2)}{\partial x_1^2} + \gamma \mathcal{C}_{\Xi U}(x_1, t_1; x_2, t_2), \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathcal{C}_{\Xi U}(x_1, t_1; x_2, t_2)}{\partial t_2} + \epsilon \frac{\partial \mathcal{C}_{UU}(x_1, t_1; x_2, t_2 - \tau_1)}{\partial t_2} + \\ & + \alpha_1 \mathcal{C}_{\Xi U}(x_1, t_1; x_2, t_2) + \alpha_2 \mathcal{C}_{\Xi U}(x_1, t_1; x_2, t_2 - \tau_2) = \\ & = \beta_1 \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{\Xi U}(x_1, t_1; x_2, t_2)}{\partial x_2^2} + \\ & + \beta_2 \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{\Xi U}(x_1, t_1; x_2, t_2 - \tau_3)}{\partial x_2^2} + \gamma \mathcal{C}_{\Xi \Xi}(x_1, t_1; x_2, t_2). \quad (9) \end{aligned}$$

Пусть после завершения переходного режима система пришла в установившееся состояние, а случайное поле  $U(x, t)$  и его статистические характеристики стабилизировались. В таком состоянии поле  $U(x, t)$  можно считать стационарным и стационарно связанным с возмущающим полем  $\Xi(x, t)$  в широком смысле по времени и пространству. Тогда уравнения (8), (9) примут следующую форму:

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial \mathcal{C}_{UU}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{t}} - \epsilon \frac{\partial \mathcal{C}_{UU}(\bar{x}, \bar{t} + \tau_1)}{\partial \bar{t}} + \alpha_1 \mathcal{C}_{UU}(\bar{x}, \bar{t}) + \\ & + \alpha_2 \mathcal{C}_{UU}(\bar{x}, \bar{t} + \tau_2) = \beta_1 \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{UU}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}^2} + \\ & + \beta_2 \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{UU}(\bar{x}, \bar{t} + \tau_3)}{\partial \bar{x}^2} + \gamma \mathcal{C}_{\Xi U}(\bar{x}, \bar{t}), \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \mathcal{C}_{\Xi U}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{t}} + \epsilon \frac{\partial \mathcal{C}_{UU}(\bar{x}, \bar{t} - \tau_1)}{\partial \bar{t}} + \alpha_1 \mathcal{C}_{\Xi U}(\bar{x}, \bar{t}) + \\
 & + \alpha_2 \mathcal{C}_{\Xi U}(\bar{x}, \bar{t} - \tau_2) = \beta_1 \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{\Xi U}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}^2} + \\
 & + \beta_2 \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{\Xi U}(\bar{x}, \bar{t} - \tau_3)}{\partial \bar{x}^2} + \gamma \mathcal{C}_{\Xi \Xi}(\bar{x}, \bar{t}). \quad (11)
 \end{aligned}$$

### 3. Соотношение для спектральной плотности

Предположим, что  $\mathcal{Y}_1(\underline{x}, \underline{t})$  и  $\mathcal{Y}_2(\underline{x}, \underline{t})$  – некоторые стационарные и стационарно связанные случайные поля с известными ковариационными функциями и спектральными плотностями. Тогда для  $r = 1, 2$  верны следующие соотношения [11–14]:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}_{r_1 r_2}(\omega_1, \omega_2) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega_1 \underline{x} + \omega_2 \underline{t})} \mathcal{C}_{r_1 r_2}(\underline{x}, \underline{t}) d\underline{x} d\underline{t}, \\
 e^{\pm i\omega_2 \tau} \mathcal{S}_{r_1 r_2}(\omega_1, \omega_2) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega_1 \underline{x} + \omega_2 \underline{t})} \mathcal{C}_{r_1 r_2}(\underline{x}, \underline{t} \pm \tau) d\underline{x} d\underline{t}, \\
 (i\omega_2)^r \mathcal{S}_{r_1 r_2}(\omega_1, \omega_2) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega_1 \underline{x} + \omega_2 \underline{t})} \frac{\partial^r \mathcal{C}_{r_1 r_2}(\underline{x}, \underline{t})}{\partial \underline{t}^r} d\underline{x} d\underline{t}, \\
 (i\omega_1)^r \mathcal{S}_{r_1 r_2}(\omega_1, \omega_2) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega_1 \underline{x} + \omega_2 \underline{t})} \frac{\partial^r \mathcal{C}_{r_1 r_2}(\underline{x}, \underline{t})}{\partial \underline{x}^r} d\underline{x} d\underline{t}.
 \end{aligned}$$

Учитывая эти соотношения, равенства (2) и (3) и допустимость выполнения требуемых операций над несобственными интегралами I рода, зависящими от параметра [15, 16], а также интегрируя уравнения (10), (11) по переменным  $(\bar{x}, \bar{t}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , перейдем к спектральным плотностям. Это приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно  $\mathcal{S}_{UU}(\omega_1, \omega_2)$  и  $\mathcal{S}_{\Xi U}(\omega_1, \omega_2)$ :

$$\begin{aligned}
 & -i\omega_2 \mathcal{S}_{UU}(\omega_1, \omega_2) - \epsilon i\omega_2 e^{i\omega_2 \tau_1} \mathcal{S}_{UU}(\omega_1, \omega_2) + \alpha_1 \mathcal{S}_{UU}(\omega_1, \omega_2) + \\
 & + \alpha_2 e^{i\omega_2 \tau_2} \mathcal{S}_{UU}(\omega_1, \omega_2) = \beta_1 (i\omega_1)^2 \mathcal{S}_{UU}(\omega_1, \omega_2) + \\
 & + \beta_2 (i\omega_1)^2 e^{i\omega_3 \tau_2} \mathcal{S}_{UU}(\omega_1, \omega_2) + \gamma \mathcal{S}_{\Xi U}(\omega_1, \omega_2), \\
 & i\omega_2 \mathcal{S}_{\Xi U}(\omega_1, \omega_2) + \epsilon i\omega_2 e^{-i\omega_2 \tau_1} \mathcal{S}_{\Xi U}(\omega_1, \omega_2) + \alpha_1 \mathcal{S}_{\Xi U}(\omega_1, \omega_2) +
 \end{aligned}$$

$$+ \alpha_2 e^{-i\omega_2 \tau_2} \mathcal{S}_{\Xi U}(\omega_1, \omega_2) = \beta_1 (i\omega_1)^2 \mathcal{S}_{\Xi U}(\omega_1, \omega_2) + \\ + \beta_2 (i\omega_1)^2 e^{-i\omega_3 \tau_2} \mathcal{S}_{\Xi U}(\omega_1, \omega_2) + \gamma \mathcal{S}_{\Xi \Xi}(\omega_1, \omega_2),$$

или

$$(\beta_1 \omega_1^2 + \beta_2 \omega_1^2 e^{i\omega_2 \tau_3} - i\omega_2 - \epsilon i e^{i\omega_2 \tau_1} \omega_2 + \\ + \alpha_1 + \alpha_2 e^{i\omega_2 \tau_2}) \mathcal{S}_{UU}(\omega_1, \omega_2) = \gamma \mathcal{S}_{\Xi U}(\omega_1, \omega_2), \\ (\beta_1 \omega_1^2 + \beta_2 \omega_1^2 e^{-i\omega_2 \tau_3} + i\omega_2 + \epsilon i e^{-i\omega_2 \tau_1} \omega_2 + \\ + \alpha_1 + \alpha_2 e^{-i\omega_2 \tau_2}) \mathcal{S}_{\Xi U}(\omega_1, \omega_2) = \gamma \mathcal{S}_{\Xi \Xi}(\omega_1, \omega_2).$$

Решая сначала второе, а потом первое уравнение, получим:

$$\mathcal{S}_{UU}(\omega_1, \omega_2) = \frac{\gamma^2 \mathcal{S}_{\Xi \Xi}(\omega_1, \omega_2)}{Q(\omega_1, \omega_2)}, \quad (12)$$

где

$$Q(\omega_1, \omega_2) = Q_0(\omega_1, \omega_2) \overline{Q_0}(\omega_1, \omega_2) = H_1^2(\omega_1, \omega_2) + H_2^2(\omega_1, \omega_2), \\ Q_0(\omega_1, \omega_2) = \beta_1 \omega_1^2 + \beta_2 \omega_1^2 e^{i\omega_2 \tau_3} + \alpha_1 + \alpha_2 e^{i\omega_2 \tau_2} - \\ - i\omega_2 - \epsilon i \omega_2 e^{i\omega_2 \tau_1} \equiv H_1(\omega_1, \omega_2) + i H_2(\omega_1, \omega_2), \\ H_1(\omega_1, \omega_2) = \beta_1 \omega_1^2 + \beta_2 \omega_1^2 \cos(\omega_2 \tau_3) + \alpha_1 + \alpha_2 \cos(\omega_2 \tau_2) + \\ + \epsilon \omega_2 \sin(\omega_2 \tau_1), \\ H_2(\omega_1, \omega_2) = \beta_2 \omega_1^2 \sin(\omega_2 \tau_3) + \alpha_2 \sin(\omega_2 \tau_2) - \omega_2 - \epsilon \omega_2 \cos(\omega_2 \tau_1),$$

где черта сверху означает комплексное сопряжение.

#### 4. Анализ основного результата

Исследуем полученное соотношение, полученное формальными выкладками. Для того, чтобы функция  $\mathcal{S}_{UU}(\omega_1, \omega_2)$  задавала спектральную плотность необходимо, чтобы она была определена и неотрицательна при любых значениях аргументов  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , четна по обоим переменным и интегрируема по Риману в области  $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2$ .

4.1°. Выражение (12) не будет существовать на множестве точек, в которых знаменатель  $Q(\omega_1, \omega_2)$  обращается в нуль. Чтобы такое множество было пустым, необходимо, чтобы не было точек  $(\omega_1, \omega_2)$ , где функции  $H_1$  и  $H_2$  одновременно принимали значение 0. Найдем условия, при которых последняя ситуация не наблюдается.

Структурно  $H_1$  и  $H_2$  – квазиполиномы аргументов  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , причем коэффициенты этих квазиполиномов – линейные тригонометрические полиномы переменной  $\omega_2$  с, вообще говоря, различными

периодами. Поэтому "плохие" точки в первую очередь надо искать на прямых  $\omega_1 = 0$  и  $\omega_2 = 0$ .

Пусть  $\omega_1 = 0$ ,  $\omega_2 = 0$ . Тогда  $H_1(\omega_1, 0) = \alpha_1 + \alpha_2$ ,  $H_2(0, 0) \equiv 0$ . Если  $\alpha_1 > |\alpha_2|$ , то  $H_1(0, 0) \neq 0$ , и  $Q(0, 0) \neq 0$ .

Пусть  $\omega_2 = 0$ . Тогда  $H_2(\omega_1, 0) \equiv 0$ , а  $H_1(\omega_1, 0) = \beta_1 \omega_1^2 + \beta_2 \omega_1^2 + \alpha_1 + \alpha_2$ . Если  $\alpha_1 > |\alpha_2|$  и  $\beta_1 > |\beta_2|$ , то  $H_1(\omega_1, 0) \neq 0$ .

Пусть  $\omega_1 = 0$ ,  $\omega_2 \neq 0$ . Тогда

$$H_1(0, \omega_2) = \alpha_1 + \alpha_2 \cos(\omega_2 \tau_2) + \epsilon \omega_2 \sin(\omega_2 \tau_1),$$

$$H_2(0, \omega_2) = \alpha_2 \sin(\omega_2 \tau_2) - \omega_2 - \epsilon \omega_2 \cos(\omega_2 \tau_1),$$

Если  $\sin(\omega_2 \tau_1) = 0$ , то при условии  $\alpha_1 > |\alpha_2|$  находим, что  $H_1(0, \omega_2) \neq 0$ .

Пусть  $\sin(\omega_2 \tau_1) \neq 0$ ,  $|\epsilon| < 1$ , т. е.  $1 + \epsilon \cos(\omega_2 \tau_1) > 0$ . В этом случае для того, чтобы  $H_1(0, \omega_2)$  и  $H_2(0, \omega_2)$  одновременно обратились в нуль должно выполняться равенство

$$-\frac{\alpha_1 + \alpha_2 \cos(\omega_2 \tau_2)}{\epsilon \sin(\omega_2 \tau_1)} = \frac{\alpha_2 \sin(\omega_2 \tau_2)}{1 + \epsilon \cos(\omega_2 \tau_1)}.$$

Отсюда находим, что при

$$\alpha_1 > \frac{|\alpha_2| (1 + |\epsilon|)}{1 - |\epsilon|}$$

$H_1(0, \omega_2)$  и  $H_2(0, \omega_2)$  одновременно в нуль не обращаются.

Пусть теперь  $\omega_1 \neq 0$ ,  $\omega_2 \neq 0$ . Если  $\sin(\omega_2 \tau_1) = 0$ , то при условии  $\alpha_1 > |\alpha_2|$  и  $\beta_1 > |\beta_2|$ , то  $H_1(\omega_1, \omega_2) \neq 0$ .

Пусть  $\sin(\omega_2 \tau_1) \neq 0$ ,  $|\epsilon| < 1$ , т. е.  $1 + \epsilon \cos(\omega_2 \tau_1) > 0$ . В данном случае для того, чтобы  $H_1(0, \omega_2)$  и  $H_2(0, \omega_2)$  одновременно обратились в нуль должно выполняться равенство

$$\begin{aligned} & -\frac{\beta_1 \omega_1^2 + \beta_2 \omega_1^2 \cos(\omega_2 \tau_3) + \alpha_1 + \alpha_2 \cos(\omega_2 \tau_2)}{\epsilon \sin(\omega_2 \tau_1)} = \\ & = \frac{\beta_2 \omega_1^2 \sin(\omega_2 \tau_3) + \alpha_2 \sin(\omega_2 \tau_2)}{1 + \epsilon \cos(\omega_2 \tau_1)}. \end{aligned}$$

Это равенство сводится к уравнению:

$$\begin{aligned} & \alpha_1 + \alpha_1 \epsilon \cos(\omega_2 \tau_1) + \alpha_2 [4 \cos(\omega_2 \tau_2) + 3 \epsilon \cos(\omega_2 \tau_1 - \omega_2 \tau_2) + \\ & + \epsilon \cos(\omega_2 \tau_1 + \omega_2 \tau_2)] / 2 + \omega_1^2 [\beta_1 + \beta_1 \epsilon \cos(\omega_2 \tau_1) + \\ & + \beta_2 \cos(\omega_2 \tau_3) + \beta_2 \epsilon \cos(\omega_2 \tau_1 - \omega_2 \tau_3)] = 0. \end{aligned}$$

Это уравнение не будет иметь действительных решений, если

$$\alpha_1 > \frac{2|\alpha_2|(1+|\epsilon|)}{1-|\epsilon|}, \quad \beta_1 > \frac{|\beta_2|(1+|\epsilon|)}{1-|\epsilon|}, \quad (13)$$

т. е. одновременного обращения  $H_1(\omega_1, \omega_2)$  и  $H_2(\omega_1, \omega_2)$  в нуль не будет, а следовательно, условия (13) обеспечивают определение функции  $\mathcal{S}_{UU}(\omega_1, \omega_2)$  при любых  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

4.2°. Функция  $\mathcal{S}_{\Xi\Xi}(\omega_1, \omega_2) \geq 0$ , множитель  $\gamma^2 > 0$ , если  $\gamma \neq 0$ , что соответствует наличию случайного возмущения. Кроме того, при условиях (13) знаменатель  $Q$  строго положителен. Вывод: функция (12) неотрицательна.

4.3°. Рассмотрим структуру знаменателя  $Q(\omega_1, \omega_2)$ . Несложно усмотреть, что  $H_1^2$  и  $H_2^2$  – четные функции и по  $\omega_1$ , и по  $\omega_2$ , что наряду с четностью по тем же переменным числителя дает то же свойство и для всей функции  $\mathcal{S}_{UU}(\omega_1, \omega_2)$ .

4.4°. Еще раз обратимся структуре знаменателя  $Q(\omega_1, \omega_2)$ . Он является квазиполиномом четвертого порядка по  $\omega_1$  и второго порядка по  $\omega_2$ , а этого наряду с интегрируемостью числителя достаточно для существования несобственного интеграла Римана по области  $\mathbb{D} = \mathbb{R}^2$  от функции  $\mathcal{S}_{UU}(\omega_1, \omega_2)$ .

## 5. Пример

Визуализируем форму функции  $\mathcal{S}_{UU}(\omega_1, \omega_2)$  для некоторых значений параметров.

5.1°. Первый график относится к ситуации, когда запаздывания отсутствуют, т. е.

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0, \quad \epsilon = \alpha_2 = \beta_2 = 0.$$

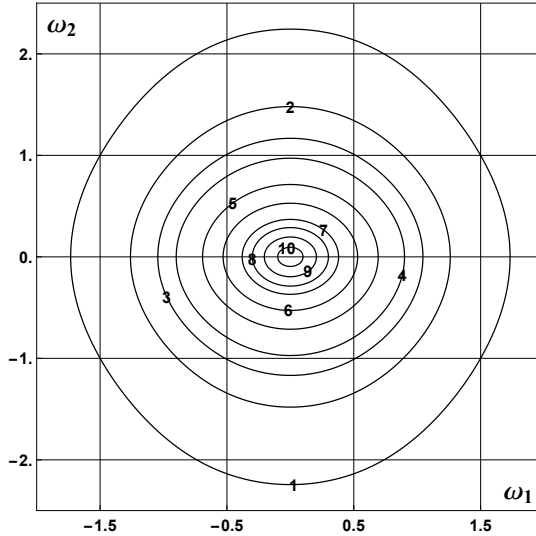
Остальные параметры визуализации имели следующие значения:

$$\alpha_1 = 2, \quad \beta_1 = 1, \quad \gamma_1 = 1,$$

Для расчетов применялись спектральная плотность поля возмущения вида:

$$\mathcal{S}_{\Xi\Xi} = \frac{1}{1 + \omega_1^2 + 2\omega_2^2}.$$

На рис. 1 изображены соответствующие линии уровня в данном случае.



**Рис. 1.** Линии уровня (первый набор данных): 1 – 0.01, 2 – 0.03, 3 – 0.05, 4 – 0.07, 5 – 0.11, 6 – 0.15, 7 – 0.19, 8 – 0.21, 9 – 0.23, 10 – 0.245

5.2°. Теперь рассмотрим вариант с наличием запаздывания. Выберем следующие значения:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \pi/2, & \tau_2 &= 3\pi/2, & \tau_3 &= 2\pi, \\ \epsilon &= 1/4, & \alpha_2 &= 1, & \beta_2 &= -1/5. \end{aligned}$$

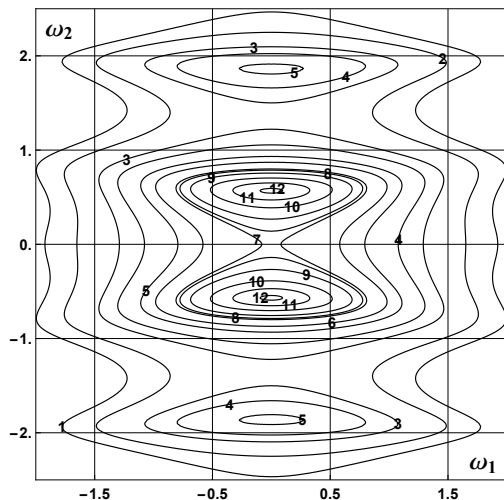
Остальные расчетные параметры те же, что и в пункте 5.1°. На рис. 2 представлены линии уровня спектральной плотности, соответствующие выбранным значениям параметров.

5.3°. Изменим некоторые параметры, оставляя другие, включая значения запаздываний, теми же, что и в пункте 5.2°:

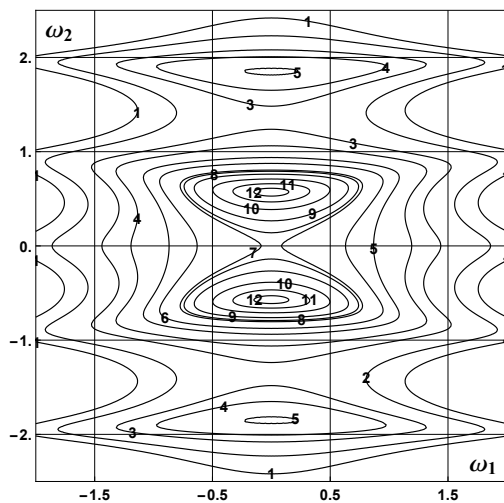
$$\epsilon = 1/5, \quad \beta_2 = -1/2.$$

Линии уровня функции  $\mathcal{S}_{UU}(\omega_1, \omega_2)$  для этого случая приведены на рис. 3.

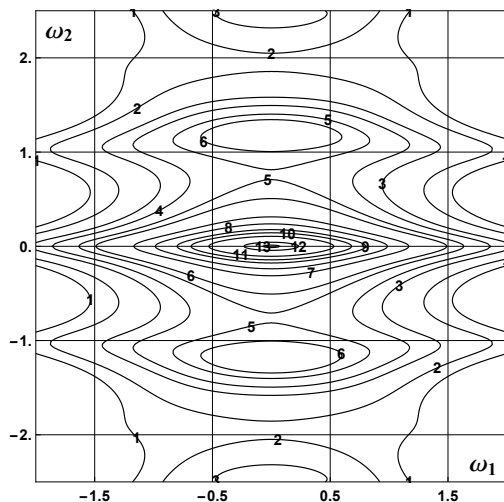
5.4°. В данном случае изменятся один параметр:  $\alpha_2 = -1$ , оставляя другие неизменными. Линии уровня спектральной плотности для этого случая приведены на рис. 4.



**Рис. 2.** Линии уровня (второй набор данных): 1 – 0.006, 2 – 0.01, 3 – 0.02, 4 – 0.03, 5 – 0.05, 6 – 0.07, 7 – 0.11, 8 – 0.12, 9 – 0.15, 10 – 0.22, 11 – 0.31, 12 – 0.39



**Рис. 3.** Линии уровня (третий набор данных): 1 – 0.006, 2 – 0.01, 3 – 0.02, 4 – 0.03, 5 – 0.05, 6 – 0.07, 7 – 0.11, 8 – 0.12, 9 – 0.15, 10 – 0.22, 11 – 0.31, 12 – 0.39, 13 – 0.40



**Рис. 4.** Линии уровня (четвертый набор данных): 1 – 0.006, 2 – 0.01, 3 – 0.02, 4 – 0.03, 5 – 0.05, 6 – 0.07, 7 – 0.15, 8 – 0.23, 9 – 0.35, 10 – 0.45, 11 – 0.60, 12 – 0.90, 13 – 0.99

## Библиографический список

1. *Болотин В.В.* Случайные колебания упругих систем. – М.: Наука, 1979. – 336 с.
2. *Bažant Z.P., Le J.-L.* Probabilistic mechanics of quasibrittle structures: strength, lifetime, and size effect. – Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2017. – XVI, 302 p.
3. *Klyatskin V.I.* Stochastic equations: Theory and applications in acoustics, hydrodynamics, magnetohydrodynamics, and radiophysics. – Cham: Springer, 2015. – Vol.1. Basic concepts, exact results, and asymptotic approximations. – XX, 418 p.
4. *Klyatskin V.I.* Stochastic equations: Theory and applications in acoustics, hydrodynamics, magnetohydrodynamics, and radiophysics. – Cham: Springer, 2015. – Vol.2. Coherent phenomena in stochastic dynamic systems. – XVIII, 491 p.
5. *Полосков И.Е.* Спектральная плотность стационарного случайного поля как решения стохастического дифференциального уравнения в частных производных с постоянным запаздыванием // Статистические методы оценивания и проверки гипотез: межвуз.

сб. науч. тр. / Перм. гос. нац. иссл. ун-т. – Пермь, 2016. – Вып. 27. – С. 90–100.

6. Полосков И.Е. Построение спектральной плотности решения линейного стохастического дифференциального уравнения в частных производных с постоянными запаздываниями // Вестник Пермского ун-та. Математика. Информатика. Механика. 2018. Вып. 1 (40). – С. 36–45.

7. Полосков И.Е. Спектральные характеристики системы двух линейных стохастических дифференциальных уравнений гиперболического типа // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Перм. ун-т. – Пермь, 2020. – Вып. 52. – С. 69–86.

8. Guillouzic S., L'Heureux I., Longtin A. Small delay approximation of stochastic differential delay equations // Physical Review. – 1999. – Vol. E59, № 4. – P. 3970–3982.

9. Guillouzic S., L'Heureux I., Longtin A. Rate processes in a stochastically driven delayed overdamped // Physical Review. 2000. Vol. E61, № 5. P. 4906–4914.

10. Guillouzic S. Fokker–Planck approach to stochastic delay differential equations. – Thesis for the degree of PhD. – Ottawa: University of Ottawa, 2000. – 100 p.

11. Яглом А.М. Корреляционная теория стационарных случайных функций: с примерами из метеорологии. – Л.: Гидрометеоздат, 1981. – 280 с.

12. Primak S., Kontorovich V., Lyandres V. Stochastic methods and their applications to communications: Stochastic differential equations approach. – Chichester: John Wiley & Sons, 2004. – XII, 434 p.

13. VanMarcke E. Random fields: Analysis and synthesis. – Cambridge: MIT Press, 1983. – 382 p. (Web Edition by Rare Book Services, Princeton (NJ): Princeton University Press, 1998).

14. Yaglom A.M. Correlation theory of stationary and related random functions. – New York: Springer, 1987. – Vol. 1. Basic results. – IX, 258 p.

15. Кастрица О.А., Мазаник С.А., Наумович А.Ф., Наумович Н.Ф. Математический анализ. Ряды и несобственные интегралы: учеб. пособие. – Минск: Вышэйшая школа, 2015. – 389 с.

16. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. – Т. 2. – М.: Дрофа, 2004. – 720 с.

**DERIVATION OF THE SPECTRAL DENSITY OF THE SOLUTION OF  
A LINEAR NEUTRAL STOCHASTIC PARABOLIC DIFFERENTIAL  
EQUATION WITH SEVERAL DELAYS IN A STEADY MODE**

**I. E. Poloskov**

*Perm State University*

Perm, Russia

polosk@psu.ru

*In this paper, we derive an explicit form of the spectral density of the solution for a linear neutral stochastic parabolic differential equation with constant coefficients and three delays. Then we obtain conditions of the existence for this density in terms of the equation coefficients.*

**Keywords:** neutral linear parabolic differential equation, spectral density, stochastic partial differential equation, constant delay.

УДК 629.075

**И. В. Трофимова, А. Ю. Переварюха, В. В. Михайлов**

*Санкт-Петербургский Федеральный  
исследовательский центр РАН*

Россия, 199178, г. Санкт-Петербург, 14-линия, д. 39

temp\_elf@mail.ru

**АЛГОРИТМ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЯ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ  
ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ИНВАЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ**

*Инвизионные процессы в биосистемах при вселении видов с высоким репродуктивным параметром в новый ареал резко запускают сложные, непредсказуемые, но интересные и многообразные нелинейные процессы в трофических цепочках биосистем. Некоторые из кризисных экодинамических ситуаций при расширении ареалов развиваются стремительно в форме одного пика вспышки и долгой депрессии, тогда как другие опасные инвизионные явления пульсируют и длятся десятилетиями, как инвазия бабочки непарного шелкопряда в лесах Северной Америки. Вспышки инвизионных или автохтонных видов обусловлены различными причинами. Для моделирования разных ситуаций и вспышек различных популяций насекомых авторы развивают различные методы. Предложена гибридная модель опасной пульсирующей инвазии и дополненная алгоритмом синхронизированного переопределения вычислительной структуры из трех уравнений. В сценарных экспериментах гибридная модель описала длиннопериодические пороговые популяционные эффекты для локально наблюдавшихся затухающих пульсирующих вспышек вредителей лесов.*

**Ключевые слова:** гибридные модели; нелинейные инвизионные процессы; пульсации численности; предикативное переопределение вычислительных структур; волны популяций.

## Введение

Эффекты глубоких кризисов в биофизических системах часто развиваются по быстрым сценариям: коллапса популяции с возможной окончательной деградацией (о чем писали ранее в [1]), либо неудержимой вспышки численности одного из видов, которая создает эффект депрессии для других. Оба эти противоположные нелинейные экологические эффекта с точки зрения биокибернетики на самом деле только отражение схожих пороговых явлений в цепочках регуляции размножения видов.

Статья продолжает серию работ [1–2] о биокибернетике, где авторами последовательно проводится дальнейшее совершенствование новой методики организации гибридных вычислительных моделей структурно изменяющихся биосистемных процессов на примере разных эксплуатируемых биоресурсов. Развиваемый метод включает представление иерархии событийности времени для прогнозирования биофизических процессов и сценариев экодинамики. Рассчитываемые алгоритмом системные события изменяют по заданному набору правил порядок расчета уравнений.

Авторы разработали формализованные правила биофизически обусловленного переопределения правых частей дифференциальных уравнений. Предикаты используют расчеты группы сопутствующих характеристик, которые являются неотъемлемой частью управляемой биофизической динамики. В данной статье развивается метод синхронизации при моделировании нелинейных связанных процессов в популяции.

**Цель работы** – исследовать в серии вычислительных экспериментов реальный сценарий инвазионного процесса, приводящий к разрушению вселенцем биотической среды при недостаточной адаптации естественных регуляторов. Модель реализуется на основе представления вычислительного сценария с набором параметров, начальных значений и алгоритмом выработки факторов изменения воздействия для событийного гибридного формата времени. Сценарий задает нужную логику изменений в фазах развития от начала инвазии и внешнего климатического давления на естественную среду нового ареала.

## **Актуальность**

Инвазионные вспышки вредителей леса – опасные явления, которые угрожают северным экосистемам во время прогнозируемого дальнейшего потепления. Ареалы насекомых стремительно расширяются сейчас повсеместно [4]. Вспышки численности априори многообразные по причинам, факторам своей нелинейной динамики явления у разных видов. Прогнозирование инвазионной активности насекомых важная междисциплинарная проблема. Известны документированные примеры разрушительных вселений, как самшитовой огневки, на побережье Черного моря. Вселение выбранного нового вида в среду, с другой стороны, представляется перспективным средством подавления и нежелательных вредоносных видов. Используют для целей биоконтроля специфических паразитов, а выпуск имеет задачу добиться в результате коллапса вселенца.

Актуально использовать разработанный ранее сценарий трансформации фазового портрета итераций, которые при наличии несвязных границ у двух областей притяжения альтернативных аттракторов [3] и странного хаотического репеллера приводят к тому, что из-за хаотических режимов в детерминированной гибридной модели возникают эффекты неопределенности. На основе анализа траектории итераций можно описать пороговые эффекты перехода к пульсирующей вспышке. Итерационные модели математической биофизики подчиняются фундаментальным теоремам нелинейной динамики, что составляет сущность проблемы. Пусть некий нелинейный эффект гипотетически интересен для описания популяционных процессов при инвазии, но ему обязательно сопутствует другой метаморфоз фазового портрета, для которого невозможно подобрать биологического объяснения.

Для целенаправленного описания нелинейные эффекты модели необходимо синхронизировать при анализе связей процессов.

## 1. Сценарии пульсирующих вспышек инвазионного непарного шелкопряда в разных биосистемах

Рассмотрим ситуацию, когда информация о процессах расселения видов для конкретной экосистемы имеется и ставится задача разработки модели инвазии, обладающей прогностическими возможностями. Естественно заметить, для построения модели инвазии вредного вида в среду недостаточно уравнений типа "хищник/жертва". Необходимо биологическое обоснование для формализации исследуемого процесса. Существует множество классификаций моделей, но именно лежащее в основе математической модели теоретическое обоснование с точки зрения экодинамики позволит принципиально классифицировать, точно модернизировать и сравнивать модели.

Результаты исследования модели обязаны получить обоснование в рамках биологической проблематики.

Классифицируем три известные ситуации масштабных инвазивных процессов агрессивных насекомых в лесных экосистемах, вызывающих локальные сплошные поражения леса, о которых собирают статистику ведомства мониторинга и лесного хозяйства. Динамика по всему обширному ареалу вида существенно отличается от поведения локальных субпопуляций. Нас интересует именно локализованные ситуации, так сведения о пульсациях в масштабах больших провинций агрегированные. Миграция насекомых вносит существенные изменения [5] в сценарий. Непарный шелкопряд *Lymantria dispar* опаснейший инвазионный вид в Азии и в Америке, но не приспособлен к миграциям, так как самки бабочек не летают. Бабочки случайно разносятся ветром.

Вспышкам *Lymantria dispar* характерна пульсирующая динамика с интервалом в 9–12 лет, как на рис. 1.

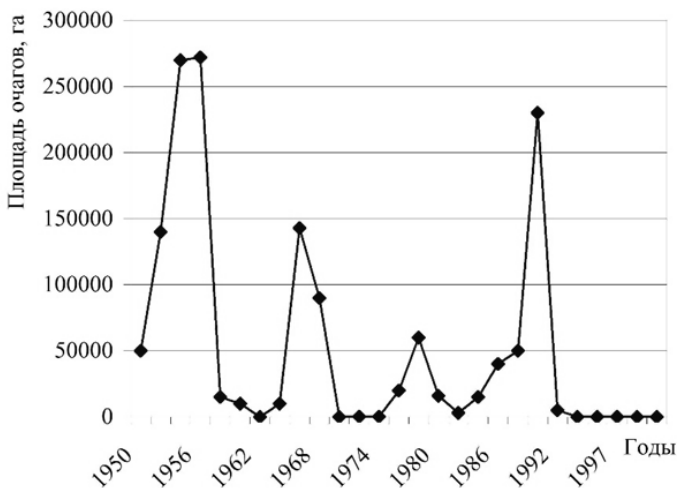


Рис. 1. Динамика вспышек непарного шелкопряда на Урале

Первичная инвазионная вспышка переходит в режим колебаний.

С момента случайной инвазии всего нескольких особей *Lymantria dispar*, привезенных в США еще в XIX в., до начала регулярных вспышек прошло четверть века. Вспышки в Канаде развивается в форме серии затухающих  $\Lambda$ -пиков и именно динамика пилообразных локальных вспышек в форме долгой серии пиков является объектом модельных исследований.

На рис. 2 представлены данные ГИС системы Канады о локальных поражениях (дефолиации) леса в провинции Онтарио. Сценарий отличается от рис. 1, так как три пика идут по возрастанию.

Во время вспышек численность инвазионного вида не уравнивается емкостью экологической ниши  $K$  по модели Пирла–Ферхюльста, так как само по себе "емкость экологической ниши" — это довольно противоречивое и абстрактное понятие, точно применимое только к территориальным животным.

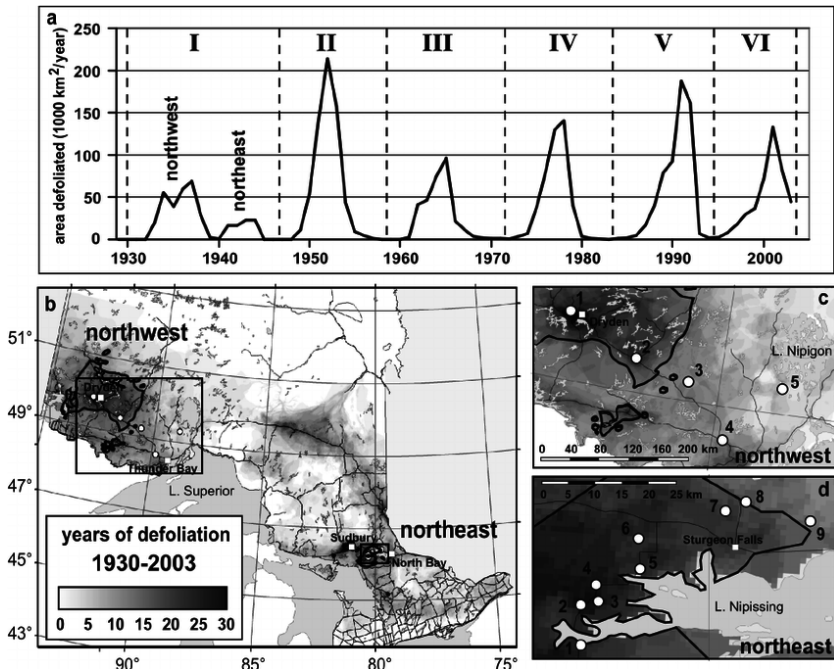


Рис. 2. Динамика серии пиков вредителя в провинции Онтарио

В Северной Америке [6] затухание вспышек непарного шелкопряда началось после адаптации к бабочке специфических грибковых патогенов. Если имеются данные и уже существует модель, разработанная на основе каких-то представлений о причинно-следственных связях в развитии процесса, то возникает задача настройки модели согласно имеющимся данным. Однако, данные были получены об объекте, находящемся в определенном состоянии. Если объект не лабораторная популяция, и невозможно произвольно управлять ее состоянием, то возникает необходимость точно знать тип состояния, в котором находился объект с собранной статистикой.

В данном случае нам нужен метод модельного описания сценария пороговых пиков и затухающих осцилляций, как режима перемежаемости из нерегулярных серий повторных пиков и долгой депрессии. Маловероятен эффект повторения пика сразу.

## **2. Алгоритмически переопределяемая вычислительная структура модели инвазионной вспышки шелкопряда**

Алгоритмически переопределяемые структуры применены авторами для описания колебаний обилия поколений фитофагов по стадиям онтогенеза. Каждая форма правой части записана соответствующим предикатом и будет активна (решаться численным методом вычислительной среды) до момента срабатывания  $P(x,y)=0$  – выхода переменных предиката из множества истинности.

Сформируем модель убыли генерации:

$$\frac{dN}{dt} = \begin{cases} -(\alpha_1 w(t)N(t) + \Psi[S]\beta)N(t), \\ P_1(t) = (t < \rho), \\ -(\alpha_2 N(\rho)\Xi[N(\rho)] / w(\rho) + \beta)N(t), \\ P_2(t, w(t)) = (\rho < t < T \wedge w(t) < w_2) \\ -\alpha_3 w(t)N(t)N(t - \zeta), \quad P_3(w(t)) = (w(t) < w_3), \end{cases} \quad (1)$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$  – различно трактуемые коэффициенты ювенильной смертности поколений,  $w$  – отдельно задаваемое гибридной структурой размерное развитие особей. В (1)  $\Psi[S]$  и  $\Xi[N(\rho)]$  – специально внедренные триггерные функционалы. Модель сформирована из дифференциального уравнения убыли начальной численности  $N(0)$  поколения насекомых [7] до половозрелого состояния  $N(T)$  с переопределяемой правой частью на трех последовательных интервалах модельного времени  $t$  с включением условий смены для вычисления итогового состояния поколения насекомых от числа яиц.

В структуре (1) фиксированная длительность у первой стадии  $p$ , для которой плотность яиц становится важным регулирующим фактором выживаемости. На второй стадии расчет уравнения переходит на стадию развития нимф, на которой достигнутый показатель развития уменьшает смертность особей поколения. Ранее разработанное авторами кортежное гибридное модельное время использовано в (1) для организации порядка событий при переопределяемых вычислениях в иерархии модельных кадров.

Расчет длительности старших стадий продолжается до достижения переходного уровня у размерного показателя  $w_3$ , полученного с использованием вычисления вспомогательной величины роста в уравнении для расчетов успешности выживания поколений инвазивных насекомых с поправкой:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{G}{\sqrt[3]{(N^2(t) + \mu)}}, \quad (2)$$

где  $G$  отражает величину доступных популяции пищевых ресурсов,  $\mu$  – поправочный коэффициент. Фиксированный показатель  $G$  в уравнении можно применять в большинстве случаев, когда скорость восполнения кормовых объектов велика по сравнению изменениями  $N(t)$ .

В других случаях  $G(t)$  зададим динамически уравнением и с явным фактором запаздывания  $\xi$ :

$$\frac{dG}{dt} = rG(t) \left( 1 - \frac{G(t - \xi)}{K} \right) - \zeta N(t). \quad (3)$$

Дополнение модели (3) имеет колебательный режим [8]. Уравнение (3) может быть не единственным вспомогательным уравнением, влияющим опосредованно на формирование итогового поколения и убыль численности стадий. Особенность разработанной вычислительной структуры в ее расширяемости. Основная структура уравнений с предикатами сохраняется, тогда как вспомогательные уравнения дополняются и развиваются.

Гибридную переопределяемую модель (1)–(3) мы предполагаем вариативной с целью применения для анализа разнообразия факторов всплеск инвазионных и автохтонных видов.

В качестве обобщения ранее предложенных методов нами развивается методология интеллектуальной модификации модели по схеме действия факторов. Логическое расширение и числа уравнений и предикатов нужно выбирать применительно к особенностям ситуаций инвазий, для чего будем проводить когнитивный анализ влияния в графе разнородных факторов.

## **Заключение**

Актуальные проблемы при регулировании биофизических процессов становятся только сложнее из-за непредвиденных климатических возмущений и непреднамеренных биотических инвазий, вызывающих разрушение среды. Актуально развитие интеллектуальных вычислительных методов для анализа экстремальных ситуаций с описанием логики воздействия.

Эволюционно сложившиеся режимы функционирования трофических цепей, к которым относятся регулярные циклы популяций, разрушаются при быстром нарушении одним видом выравненности видового разнообразия сообщества. Избыточная эксплуатация экономически ценных популяций нарушает регуляторные механизмы среды [9], поддерживающие баланс соотношения видов в сообществе. Промысел часто приводит к расширению ареалов бесполезных для самого промысла видов и занятию экологической ниши вредными вселенцами. Особенно для управления возмущенной конкурентной биофизической средой создает не только быстро меняющаяся волатильная обстановка, но и адаптивный характер процесса воспроизводства в сообществах с сильной конкуренцией, что вызывается климатическими изменениями в Голарктике или факторами гидрологии моря, как показано В.А. Дубровской в [10].

В нашем Проекте РНФ развивается подход к обоснованию когнитивной структуры вычислений, где модель записывается не только системой уравнений, а с набором предикатов выбора у формы уравнения каждой стадии исследуемого инвазионного процесса.

Схему переопределения можно задавать в виде графа, где вершинам сопоставлена стадия процесса с непрерывным временем, а дугам – набор условий для переключений модели, так как ситуации кризиса разнообразны в ключевых признаках [11].

*Работа выполнена в рамках Проекта РНФ № 23-21-00339.*

### Библиографический список

1. *Переварюха А.Ю.* Моделирование неустойчивого критического равновесия в популяционной динамике // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы. 2013. Вып. 45. С. 82–91.

2. *Переварюха А.Ю.* Модель деградации запасов при экспертном управлении водными биоресурсами с нерегулярными флуктуациями // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы. 2021. Вып. 53. С. 51–57.

3. *Дубровская В.А.* О критериях обоснованности для анализа нелинейных эффектов в моделях эксплуатируемых популяций // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы. 2016. Вып. 48. С. 74–83.

4. *Мосейко А.Г.* О находке крестоцветной блошки *Phyllotreta erysimi* Weise, 1900 (Coleoptera, Chrysomelidae) в Ленинградской области // Энтомологическое обозрение. 2016. № 3. С. 649–650.

5. *Фролов А.Н.* Луговой мотылек *Loxostege sticticalis* L. // Энтомологическое обозрение 2015. № 1. С. 3–16.

6. *Лямцев Н.И.* Модификация типов вспышек массового размножения непарного шелкопряда в зависимости от эколого-климатической ситуации // Лесоведение. 2005. № 5. С. 3–9.

7. *Hutchinson G.* Circular causal systems in ecology // Annals of the New York Academy of Sciences. 1948. Vol. 50. P. 221–246.

8. *Perevaryukha A.Y.* Modeling abrupt changes in population dynamics with two threshold states // Cybernetics and Systems Analysis. 2016. Vol. 52. № 4. P. 623–630.

9. *Соловьева Т.Н.* Динамическая модель деградации запасов осетровых рыб со сложной внутривидовой структурой // Информационно-управляющие системы. 2016. № 4. С. 60–67.

10. Дубровская В.А. Модель динамики структурированных субпопуляций осетровых рыб Каспия с учетом отклонений в темпах развития молоди // Журнал Белорусского государственного университета. Биология. 2017. № 3. С. 76–86.

11. Никитина А.В. Гидрофизическое моделирование Каспийского моря на основе модели переменной плотности // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2018. № 6. С. 16–19.

## **ALGORITHM FOR REDETERMINATION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR SIMULATION OF INVASIVE PROCESSES**

**I. V. Trofimova, A. Yu. Perevaryukha, V. V. Mikhailov**

St. Petersburg Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences

St. Petersburg, Russia

temp\_elf@mail.ru

*Invasive processes in biosystems, when species with a high reproductive parameter are introduced into a new area, abruptly trigger complex, unpredictable, but interesting and diverse non-linear processes in the trophic chains of biosystems. Some of the ecodynamic crisis situations with range expansion develop rapidly in the form of a single peak of an outbreak and a long depression, while other dangerous invasive phenomena pulsate and last for decades, like the invasion of the gypsy moth butterfly in the forests of North America. Outbreaks of invasive or indigenous species are due to various reasons. To model different situations and outbreaks of different insect populations, the authors develop various methods. A hybrid model of a dangerous pulsating invasion is proposed and supplemented by an algorithm for synchronized redefinition of the computational structure of three equations. In scenario experiments, the hybrid model described long-period threshold population effects for locally observed decaying pulsating outbreaks of forest pests.*

**Keywords:** hybrid models; nonlinear invasive processes; population fluctuations; predictive redefinition of computational structures; gypsy moth population waves.

*The work was carried out within the framework of the Russian Science Foundation Project No. 23-21-00339.*

- |   |  |
|---|--|
| <i>Кусяков<br/>Альфред Шамильевич</i>     | кандидат физико-математических наук,<br>доцент Пермского государственного нацио-<br>нального исследовательского университета   |
| <i>Лутманов<br/>Сергей Викторович</i>     | кандидат физико-математических наук,<br>доцент Пермского государственного нацио-<br>нального исследовательского университета   |
| <i>Макеев<br/>Николай Николаевич</i>      | доктор физико-математических наук,<br>профессор института проблем точной<br>механики и управления РАН, г. Саратов  |
| <i>Михайлов<br/>Владимир Валентинович</i> | доктор технических наук, профессор, в.н.с.<br>Санкт-Петербургского Федерального исследо-<br>вательского центра РАН   |
| <i>Переварюха<br/>Андрей Юрьевич</i>      | кандидат технических наук, с.н.с. Санкт-<br>Петербургского Федерального исследовате-<br>льского центра РАН, доцент РАНХиГС   |
| <i>Полосков<br/>Игорь Егорович</i>        | доктор физико-математических наук, доцент<br>Пермского государственного национального<br>исследовательского университета   |
| <i>Трофимова<br/>Инна Владимировна</i>    | кандидат физико-математических наук, м.н.с.<br>Санкт-Петербургского Федерального исследо-<br>вательского центра РАН, доцент Санкт-<br>Петербургского государственного университета |
-

Правила оформления научных статей для публикации  
в межвузовском сборнике научных трудов (издается с 1972 г.)

## ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И УПРАВЛЕНИЯ: Нелинейные динамические системы



**Текст статьи** должен быть подготовлен в текстовом редакторе WinWord. Объем – от 6 до 10–12 с.

**Параметры страницы:** формат листа **A5** (148 × 210 мм), ориентация листов – книжная, все поля устанавливаются равными 20 мм.

**Заголовок статьи** набирается по центру (стиль Прописной, Полужирный, шрифт Times New Roman Cyr, 11 пт.).

**Аннотация к тексту статьи** приводится на русском и английском языках.

**Ключевые слова** (на русском и английском языках).

**Тематический рубрикатор:** УДК, либо другие библиотечно-библиографические классификационные и предметные индексы.

### Сведения об авторах:

**фамилия(и), имя, отчество автора(ов)** полностью, в центре (стиль Обычный, шрифт Times New Roman Cyr, 11 пт., ниже – **город, в котором находится вуз, адрес, место работы каждого автора** (стиль Обычный, шрифт Times New Roman Cyr, курсив, 11 пт.): **контактная информация** (e-mail, телефон) для каждого автора.

**Параметры абзаца:** для основного текста размер шрифта (кегель) 11 пт. (при использовании шрифта Times New Roman Cyr), межстрочный интервал в основном тексте – одинарный, выравнивание текста – по ширине страницы, абзацный отступ – 1 см.

Включенные в текст **формулы** должны быть набраны в редакторе **Microsoft Word Equation, версия 3.0 и ниже** с выравниванием по центру и пробелами сверху и снизу по 6 пт. (номер формулы выравнивается по правому краю поля). Размеры всех элементов формул должны быть соизмеримы с текстовыми размерами (обычные символы – 11 пт., крупный индекс – 8 пт., мелкий индекс – 7 пт., крупный символ – 17 пт., мелкий символ – 12 пт.).

**Библиографический список** – после основного текста.

**Издание включено** в национальную информационно-аналитическую систему «Российский индекс научного цитирования» (РИНЦ), доступно в библиотеке **E-library**.

Просьба быть внимательными и аккуратными при оформлении списка литературы, в котором необходимо полностью указывать названия журналов и список авторов.

**Адрес редакции:** Россия, 614990, г. Пермь, ГСП, ул. Букирева, 15.  
Пермский государственный национальный исследовательский университет (ПГНИУ). Механико-математический факультет.

**E-mail:** mpu@psu.ru или svlut@yandex.ru.

Научное издание

**ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И УПРАВЛЕНИЯ**  
**Нелинейные динамические системы**

Межвузовский сборник научных трудов

**Выпуск 55**

Адрес редакции:

614068, Пермский край, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15, ПГНИУ  
Механико-математический факультет  
E-mail: mpu@psu.ru; svlut@yandex.ru

Издается в авторской редакции  
Компьютерная верстка *Г. И. Кушиной*

Подписано в печать 29.11.2023. Формат 60 × 84 /16.  
Усл. печ. л. 5,70. Тираж 500 экз. Заказ 146

Пермский государственный национальный исследовательский университет  
Управление издательской деятельности  
614068, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15. Тел. (342) 239-66-36  
Отпечатано в типографии ПГНИУ. Тел. (342) 239-65-47

Распространяется бесплатно

Межвузовский сборник научных трудов  
"ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И УПРАВЛЕНИЯ. Нелинейные динамические системы"  
включен в национальную информационно-аналитическую систему  
«Российский индекс научного цитирования» (РИНЦ)