

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А. С. Долгаль

**ГРАВИМЕТРИЯ И МАГНИТОМЕТРИЯ:  
лабораторные работы**

Практикум



Пермь 2024

УДК 550.83(075.8)

ББК 26.21я73

Д64

**Долгаль А. С.**

Д64 Гравиметрия и магнитометрия: лабораторные работы : практикум / А. С. Долгаль; Пермский государственный национальный исследовательский университет. – Пермь, 2024. – 79 с.

Издание содержит теоретические сведения, задания и методические пояснения к практическим занятиям по дисциплине «Гравиметрия и магнитометрия». Первая практическая работа реализует наиболее сложный элемент цикла обработки данных полевых гравиметрических наблюдений – определение поправок за влияние рельефа местности, необходимое при вычислении аномалий Буге. Вторая и третья работы направлены на получение опыта решения прямых задач гравиразведки и магниторазведки в 2D и 3D-вариантах. В четвертой работе предлагается выполнить истокообразную аппроксимацию гравитационного поля, заданного на расчлененном рельефе дневной поверхности и последующее восстановление трансформант, а также оценить точность выполненных преобразований. Пятая и шестая практические работы посвящены решению нелинейной обратной задачи гравиразведки с помощью метода статистических испытаний и метода роя частиц, соответственно. Для каждой из этих работ приводится список рекомендуемой для изучения литературы, включающий в себя самые новые научные публикации.

Инструментом расчетов являются программы, разработанные автором и реализованные на языке объектно-ориентированного программирования DELPHI. Представленные алгоритмы реализуют современные подходы к интерпретации геофизических данных, базирующиеся на истокообразной аппроксимации, аддитивных технологиях и роевом интеллекте. Также приводятся сведения о применении имитационного моделирования при тестировании алгоритмов решения обратных задач.

Практикум предназначен для студентов геологического факультета, обучающихся по направлению магистратуры «Геология», программе «Геофизические методы исследования земной коры», а также для аспирантов и преподавателей вузов.

**УДК 550.83(075.8)**

**ББК 26.21я73**

*Печатается решению методической комиссии геологического факультета  
Пермского государственного национального исследовательского университета*

© Долгаль А. С., 2024

© ПГНИУ, 2024

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	4
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1 «Вычисление поправок за влияние рельефа местности при обработке данных гравиметрической съемки» .....	6
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2 «Решение прямых задач гравirazведки и магниторазведки для двухмерных тел» .....	20
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3 «Решение прямых задач гравirazведки и магниторазведки для трехмерных тел» .....	29
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4 «Трансформации аномалий силы тяжести методом истокообразной аппроксимации» .....	39
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 5 «Решение обратной задачи гравirazведки для 2D призмы методом статистических испытаний» .....	55
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 6 «Решение обратной задачи гравirazведки методом роя частиц» .....	68
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	78

## ВВЕДЕНИЕ

Настоящий практикум содержит теоретические сведения, задания и методические пояснения к практическим занятиям по дисциплине «Гравиметрия и магнитометрия» для студентов, обучающихся по направлению магистратуры «Геология», программе «Геофизические методы исследования земной коры». Последовательность изложения материала соответствует учебному плану и утвержденному учебно-методическому комплексу по этой дисциплине. Практические занятия являются обязательным условием успешного освоения дисциплины «Гравиметрия и магнитометрия». Для прохождения итогового контроля по данной дисциплине каждая практическая работа должна быть оформлена в соответствии с указанными требованиями и сдана преподавателю.

Первая практическая работа реализует наиболее сложный элемент цикла обработки данных полевых гравиметрических наблюдений – определение поправок за влияние рельефа местности, необходимое при вычислении аномалий Буге. Вторая и третья работы направлены на получение опыта решения прямых задач гравиразведки и магниторазведки в 2D и 3D вариантах. В четвертой работе предлагается выполнить истокообразную аппроксимацию гравитационного поля, заданного на расчлененном рельефе дневной поверхности и последующее восстановление трансформант, а также оценить точность выполненных преобразований. Пятая и шестая работы посвящены решению нелинейной обратной задачи гравиразведки с помощью метода статистических испытаний и метода роя частиц, соответственно. Для каждой из практических работ приводится список рекомендуемой для изучения литературы, включающий в себя научные публикации последних лет.

Инструментом расчетов являются программы, разработанные автором и реализованные на языке объектно-ориентированного программирования DELPHI. Размерность учебных задач является небольшой, поэтому затраты времени непосредственно на процессы расчета не должны играть заметную роль при выполнении практических работ. Представленные алгоритмы реализуют современные подходы к интерпретации геофизических данных, базирующиеся на истокообразной аппроксимации, аддитивных технологиях и роевом интеллекте. Также приводятся сведения о применении имитационного моделирования при тестировании алгоритмов решения обратных задач.

Ричард Хэмминг, американский математик, писал о том, что «цель расчета – понимание, а не числа». Автор полностью согласен с этим высказыванием, поэтому в тексте издания значительное внимание уделено теоретическим аспектам

и описанию вычислительных схем, при минимальном количестве формул и специальных математических терминов. Также представлено сравнительно большое число рисунков, иллюстрирующих основные положения используемых методов, а также некоторые результаты их применения. Все рисунки подготовлены с использованием компьютерных технологий SURFER и GFAFER, разработанных Golden Software, которые широко применяются в организациях геологоразведочной отрасли.

Некоторые из практических работ технологически связаны между собой: например, для решения обратной задачи гравиразведки требуется построение исходной модели путем решения 2D прямой задачи; вычислению трансформант должно предшествовать вычисление поля 3D аномалиеобразующего объекта на участке прямоугольной формы. Выполнение заданий подразумевает совместную групповую работу 2–4 студентов, включающую в себя получение и анализ полученных данных. При необходимости студент может самостоятельно освоить ту или иную тему, выполнить любую практическую работу, опираясь на пояснения к ней.

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1

### «Вычисление поправок за влияние рельефа местности при обработке данных гравиметрической съемки»

#### Теоретические сведения

*Общие сведения.* Важнейшим этапом гравиметрических исследований считается камеральная обработка результатов полевых измерений, итогом которой является построение карт (графиков) аномалий Буге. Карты изоаномал гравитационного поля или графики поля представляют собой первичные материалы, которые используются для последующей геологической интерпретации. Применение самых совершенных интерпретационных компьютерных технологий не позволяет компенсировать недостатки и ошибки, допущенные при первичной обработке гравиметрических данных, поэтому достоверность всех окончательных геолого-геофизических схем (разрезов) тесно связана с высоким качеством обработки данных наблюдений.

Необходимый элемент обработки гравиметрических материалов – это вычисление поправок за влияние рельефа местности, которое обычно выполняется после завершения полевого сезона. В соответствии с требованиями «Инструкции по гравиразведке» поправки за влияние рельефа местности вводятся в наблюдаемые значения силы тяжести в тех пунктах, где они превышают 50% величины проектной точности съемки.

Поправка за рельеф  $\delta g_p$  (топографическая поправка) *учитывает реально существующие отклонения земной поверхности от плоскопараллельного слоя, влияние которого учитывается поправкой Буге.* Физический смысл ее можно представить следующим образом (рис. 1): все углубления (прогибы) в рельефе засыпаются породой с плотностью промежуточного слоя  $\sigma$ , а все возвышения (горы) срезаются (характеризуются плотностью  $-\sigma$ , т.е. обладают нулевой массой). *Поправка за рельеф всегда положительна*, она всегда увеличивает значения аномалий силы тяжести в редукции Буге.

Это можно легко представить себе, рассмотрев поведение грузика на вертикальной пружине (простейшего гравиметра) в гравиметрическом пункте (рис. 1в). Дополнительные нижележащие массы с положительной плотностью будут создавать вертикальную компоненту силы притяжения, направленную вниз, увеличивая растяжение пружины. Удаление вышележащих масс, которые ранее тянули грузик вверх, приведет к более сильному растяжению пружины.

Таким образом, в обоих случаях грузик опустится ниже по сравнению с первоначальным положением, отмечая увеличение вертикальной составляющей гравитационного поля  $\Delta g$ .

Вычисление топографических поправок  $\delta g_p$  сводится к интегрированию по объему  $V$ , заключенному между поверхностью рельефа  $\zeta = \zeta(\xi, \eta)$  и некоторой горизонтальной поверхностью, проходящей через гравиметрический пункт. Выражение, определяющее величину поправки за рельеф, записывается в виде

$$\delta g_p(x, y, z) = G\sigma \iiint_V \frac{(\zeta - z)d\xi d\eta d\zeta}{R^3}, \quad (1)$$

где  $x, y, z$  – прямоугольные координаты гравиметрического пункта,  $G$  – гравитационная постоянная,  $\sigma$  – плотность горных пород промежуточного слоя,  $\xi, \eta, \zeta$  – координаты элемента массы,  $R = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$  – расстояние между элементом массы и гравиметрическим пунктом.

Таким образом, *величина поправки  $\delta g_p$  определяется путем решения прямой задачи гравиметрии от различных форм рельефа, являющихся отклонениями от плоскости  $z = const$* . Известно, что прямая задача гравиметрии при заданных геометрических параметрах возмущающего объекта правильной геометрической формы и известной плотности имеет однозначное решение. В качестве таких объектов могут использоваться прямоугольные призмы (параллелепипеды). Сложные по форме тела разбивают на части таким образом, чтобы их гравитационный эффект можно было определить аналитически, затем складывают вместе влияния отдельных частей и вычисляют поле, создаваемое всем телом.

Пример кусочно-призматической аппроксимации рельефа земной поверхности представлен на рис. 2. Для его описания строится цифровая модель местности (ЦММ), представляющая матрицу значений высотных отметок в узлах квадратной сети размером  $L \times L$ . Верхние основания призм располагаются на высоте  $\zeta$ , отвечающей ЦММ, нижние – на высоте  $z$  гравиметрического пункта, для которого вычисляется поправка за влияние рельефа.

При вычислении поправки за влияние рельефа местности используется плотность горных пород  $\sigma$ , принятая при определении поправки Буге. Эта плотность может составлять  $2.3 \text{ г/см}^3$ ,  $2.67 \text{ г/см}^3$  (стандартные значения плотности) или отвечать средней плотности горных пород участка гравиметрической съемки (реальное значение плотности).

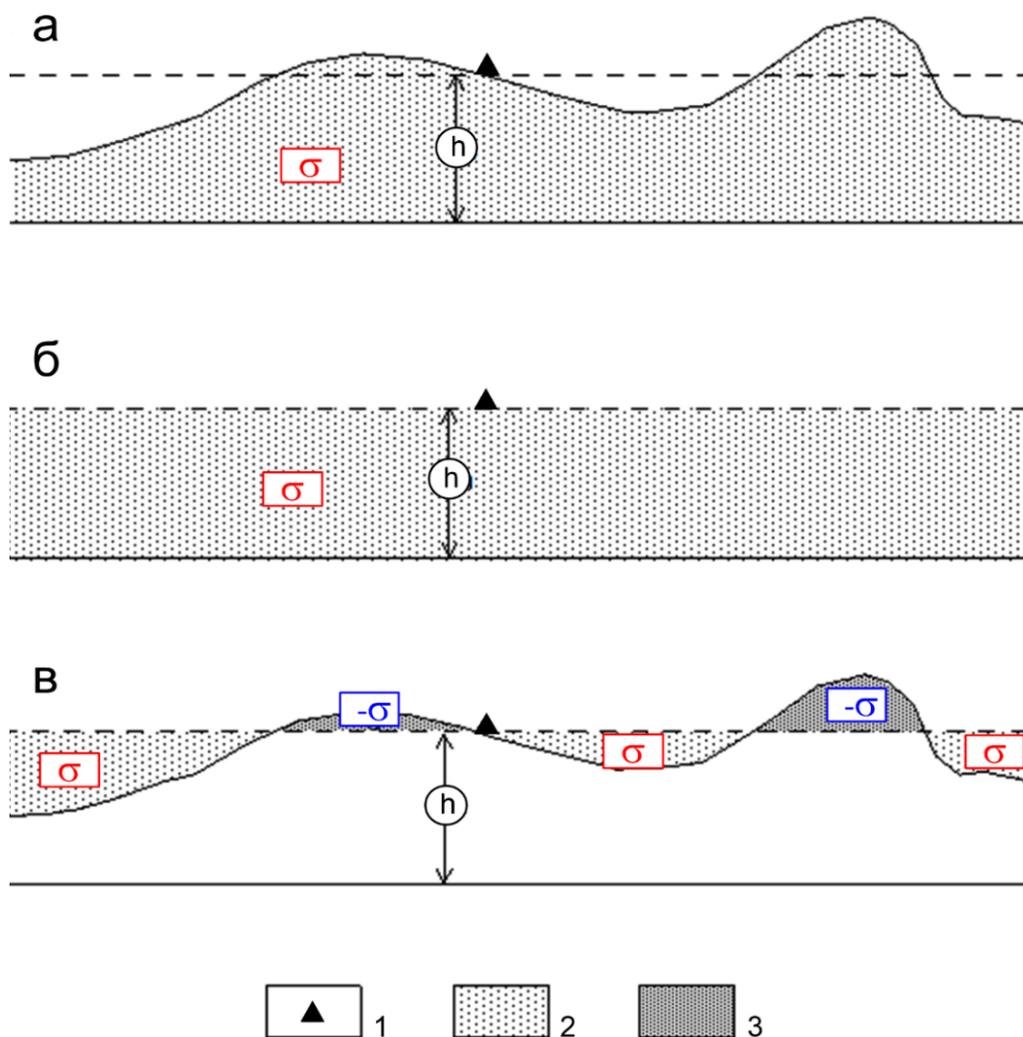
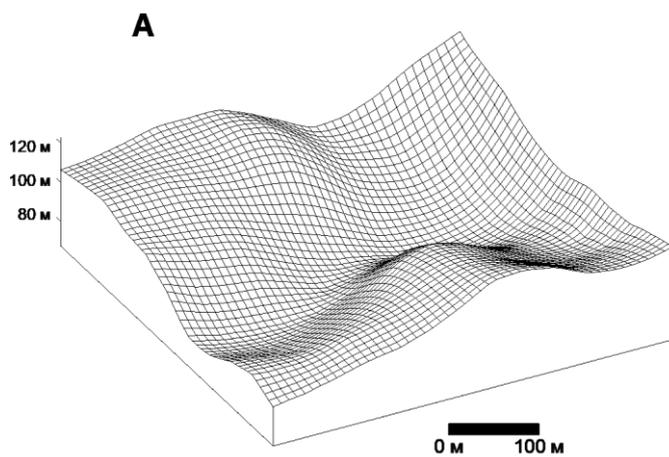


Рис. 1. Физический смысл поправки за влияние рельефа местности при гравиметрической съемке: а – местоположение пункта гравиметрических наблюдений на земной поверхности; б – плоскопараллельный слой, влияние которого учитывается поправкой Буге; в – отклонения реального рельефа от плоскопараллельного слоя, которые учитываются поправкой за влияние рельефа дневной поверхности: 1 – пункт наблюдений; 2 – горные породы с положительной эффективной плотностью  $\sigma$ ; 3 – горные породы с отрицательной эффективной плотностью  $-\sigma$

Вычисление поправок за влияние рельефа проводится по топографическим картам или аэрофотоснимкам в масштабах, удовлетворяющих требуемой точности. В частности, «Инструкцией по гравиразведке» рекомендуется использовать крупномасштабные карты (1:5 000 – 1:10 000) или аэрофотоснимки для учета рельефа в самой ближней к гравиметрическому пункту области (зоне) радиусом до 300 м.



**Б**

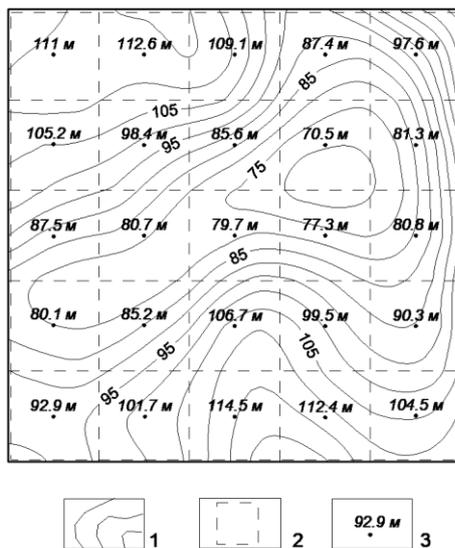


Рис. 2. Объемное изображение земной поверхности (А) и отвечающая этому изображению цифровая модель рельефа (Б): 1 – изогипсы рельефа, м; 2 – основания призм, аппроксимирующих рельеф; 3 – отметки высот

Для съемок масштаба 1:50 000 и мельче радиус учитываемой области  $R$  при вычислении поправок должен быть равен 200 км, для съемок масштаба 1:25 000 и крупнее в равнинных районах этот радиус  $R$  должен быть таким, чтобы влияние неучтенных масс рельефа было в два раза меньше проектной точности съемки. В горной местности, в зависимости от конкретных условий и решаемых задач, радиус  $R$  выбирается, исходя из условия плавного изменения влияния неучтенных топографических масс в пределах участка работ, которое затем можно исключить из гравитационного поля вместе с региональным фоном. Во всех случаях площадь ЦММ намного превышает площадь участка гравиметрической съемки (рис. 3).

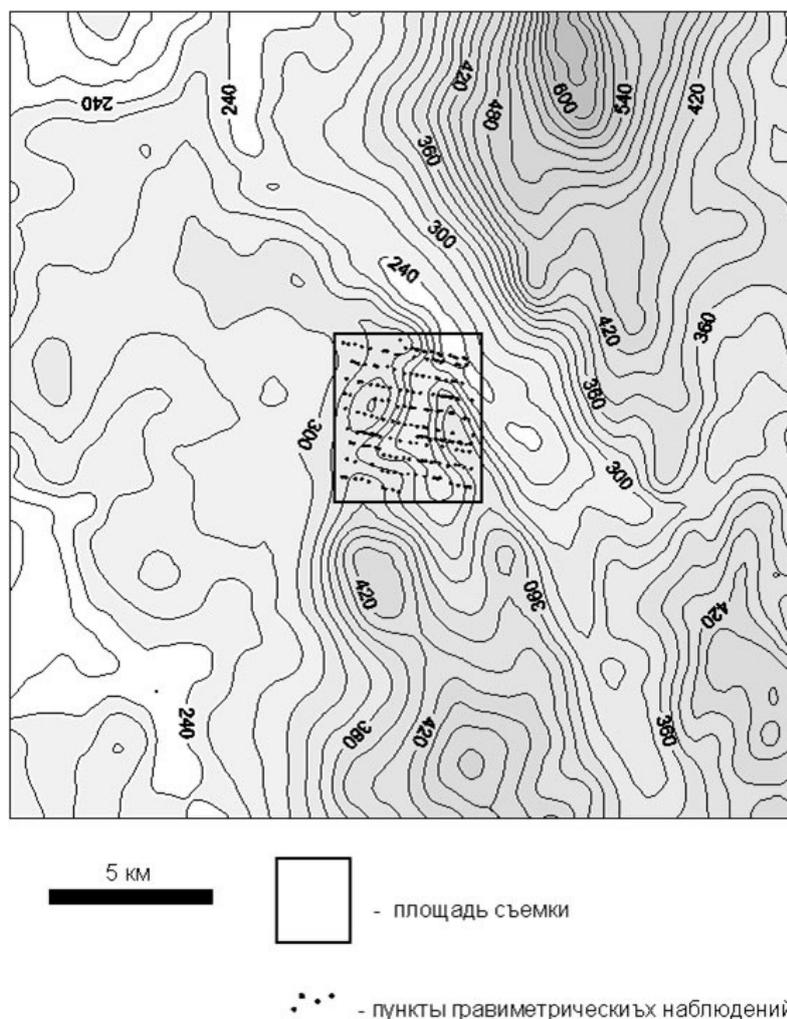


Рис. 3. Рельеф местности и пространственное положение точек расчета поправок  $\delta g_p$  (сечение изогипс – 20 м)

*Алгоритм расчета поправок за рельеф.* Технология учета влияния рельефа местности, разработанная в Горном институте УрО РАН, предполагает разбиение области учитываемого влияния рельефа  $D$  на две подобласти квадратной формы: внутреннюю  $D_1$  и внешнюю  $D_2$ ; для каждой из выделенных подобластей используются различные алгоритмы расчета топопоправки  $\delta g_p$  и разные исходные данные. Рельеф в области  $D_1$  описывается наиболее детальной ЦММ, с минимальным шагом  $L$  между точками (центрами верхних оснований призм). В пределах области  $D_2$  могут использоваться несколько ЦММ, шаг сети  $L$  которых будет последовательно увеличиваться. На рис. 4 внутренней подобласти  $D_1$  отвечает ЦММ №1 с шагом  $L_1$ , внешней подобласти  $D_2$  ЦММ №2 и ЦММ №3 с шагом  $L_2$  и  $L_3$ , соответственно. Детальность описания рельефа земной поверхности падает с увеличением площади ЦММ:  $L_3 > L_2 > L_1$ .

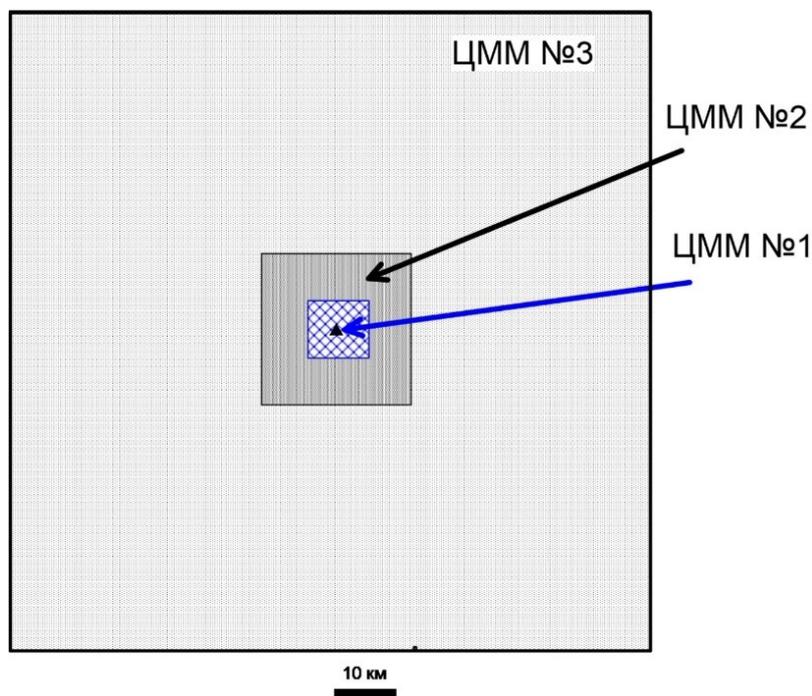


Рис. 4. Взаимное расположение ЦММ, характеризующихся различной степенью детальности описания рельефа местности: треугольником в центре рисунка обозначен гравиметрический пункт, для которого выполняется расчет поправки за рельеф местности

В качестве тел правильной геометрической формы, на которые разбивается рельеф, используются вертикальные прямоугольные призмы с квадратными основаниями со стороной  $L$ . Значение топографической поправки в точке  $(x, y, z)$  определяется выражением

$$\delta g_p(x, y, z) = \sigma \sum_{i=1}^M g_{nap}^i, \quad (2)$$

где  $\sigma$  – плотность промежуточного слоя;  $g_{nap}^i$  – аномальный эффект  $i$ -й призмы при плотности  $\sigma = 1 \text{ г/см}^3$ ;  $M$  – количество призм.

Вычисление  $g_{nap}$  осуществляется в прямоугольной системе координат по приближенной формуле Г.Г. Ремпеля, которая обеспечивает высокую точность результата при  $R \geq 2L$  и увеличение скорости счета примерно в 10 раз по сравнению с канонической формулой для параллелепипеда (требующей многократного расчета функций LN – натурального логарифма и ATAN – арктангенса для одного тела):

$$g_{\text{пар}} = \frac{G}{LR} \left[ \sqrt{(\zeta - z)^2 + (R + 0.5L)^2} - \sqrt{(\zeta - z)^2 + (R - 0.5L)^2} + L \right], \quad (3)$$

где  $R = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 - 0.075L^2}$ ;  $\xi, \eta, \zeta$  – координаты центра основания призмы;  $G$  – гравитационная постоянная.

Исходными данными для расчета топопоправок  $\delta g_p$  являются: цифровая модель местности (ЦММ), ведомость координат и высот пунктов гравиметрических наблюдений (каталог), величина плотности промежуточного слоя  $\delta_s$ . ЦММ (матрица абсолютных отметок рельефа местности  $\{z_{ij}\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ ) формируется путем интерполяции высот, после автоматизированного ввода картографической информации. Для внешней  $D_2$  и внутренней  $D_1$  подобластей используются разные алгоритмы расчета топопоправок.

Процесс вычисления  $\delta g_p$  для внутренней подобласти  $D_1$ , имеющей форму квадрата со стороной  $d_l = 3L_l$  ( $L_l$  – шаг ЦММ) в каждом пункте гравиметрических наблюдений  $(x_p, y_p, z_p)$  сводится к следующему:

- 1) проверка принадлежности координат  $(x_p, y_p)$  заданной ЦММ (в случае, если пункт выходит за пределы ЦММ или находится слишком близко к ее границам, то величине  $\delta g_p$  присваивается код неопределенного значения:  $\delta g_p = 999$ );
- 2) определение индексов  $(i^*, j^*)$  и горизонтальных координат  $(x^*, y^*)$  левого верхнего угла подматрицы  $\{z_{ij}^*\}$ :  $i = 1, 2, \dots, 5$ ;  $j = 1, 2, \dots, 5$  и выборка значений высот из  $\{z_{ij}\}$  для ближайших к пункту наблюдений 25 точек ЦММ в двумерный массив;
- 3) аппроксимации высотных отметок  $\{z_{ij}^*\}$  в окрестностях точки  $(x_p, y_p, z_p)$  алгебраическим полиномом 4-й степени с использованием метода наименьших квадратов, путем формирования расширенной матрицы Грама и решения нормальной системы линейных уравнений методом Гаусса;
- 4) восстановление значений высот  $z''$  внутри квадрата размером  $3L_l \times 3L_l$  по сети  $L^* \times L^*$ , описываемых поверхностью тренда, по коэффициентам  $a_0 - a_{14}$  полинома 4-й степени и текущим значениям координат  $(x, y)$ , при  $L^* = L_l/3$  (сеть является более густой);
- 5) вычисление и суммирование для точки  $(x_p, y_p, z_p'')$  аномальных эффектов от 81 параллелепипеда, характеризующих рельеф в области  $D_1$ , с использованием формулы Ремпеля, при этом  $z_p''$  определяется подстановкой  $x_p, y_p$  в аппроксимирующий полином. При таком задании высоты гравиметрического пункта  $z_p''$  минимизируется погрешность, обусловленная различием инструментальных и картографических высот.

Расчет  $\delta g_p$  для внешней подобласти  $D_2$ , имеющей форму квадрата с длиной стороны  $d_1$  (размер стороны внутреннего квадрата «палетки», для которого рельеф не учитывается, составляет  $d_2$ ) в пункте гравиметрических наблюдений  $(x_p, y_p, z_p)$  включает в себя следующие операции:

- 1) проверка принадлежности координат  $(x_p, y_p)$  заданной ЦММ (код неопределенного значения 999 используется в тех же случаях, что и при расчете  $\delta g_p$  для центральной зоны);
- 2) определение индексов  $(i^*, j^*)$  и горизонтальных координат  $(x^*, y^*)$  левого верхнего угла подматрицы  $\{z_{ij}\}: i = 1, 2, \dots, k_2; j=1, 2, \dots, k_2$  и выборка значений высот из  $\{z_{ij}\}$  для ближайших к пункту наблюдений точек ЦММ с записью результата в двумерный массив;
- 3) вычисление и суммирование аномальных эффектов от всех элементарных тел для четырех ближайших к пункту наблюдений узлов ЦММ за исключением тел, расположенных во внутренней области  $D_2$  для данного гравиметрического пункта;
- 4) аппроксимация рассчитанных в четырех узлах ЦММ значений  $\delta g_p^1, \delta g_p^2, \delta g_p^3, \delta g_p^4$  в окрестностях пункта  $(x_p, y_p, z_p)$  полем  $\Delta g$  вертикальных полубесконечных нитей (определение линейной массы нитей  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ );
- 5) расчет  $\delta g_p$  в точке  $(x_p, y_p, z_p)$  путем решения прямой задачи гравиразведки с использованием параметров нитей  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$  (3D-интерполяция топопоправки).

Важным моментом при расчете поправок  $\delta g_p$  является соблюдение условия: *шаг ЦММ  $L_1$  для внутренней подобласти  $D_1$  быть строго в три раза меньше шага сети  $L_2$  примыкающей к ней ЦММ для внешней подобласти  $D_2$ . Все ЦММ, использующиеся при расчете поправок за влияние рельефа местности, не должны пересекаться друг с другом и плотно стыковаться на границах между ними.*

*Оценка точности определения поправок за рельеф.* Одним из важных вопросов является оценка погрешностей определения топопоправок, связанная, в свою очередь, с точностью вычисления аномалий силы тяжести в редукции Буге и, как следствие, с разрешающей способностью гравиразведки при решении геологических задач.

Достаточно объективную оценку влияния, в том числе и совокупного, различных возмущающих факторов можно получить с помощью имитационного моделирования вычисления поправки  $\delta g_p$  для неоднородных по физическим характеристикам геологических сред, при реальных технических условиях выполнения съемок.

Рассмотрим процесс имитационного моделирования на примере вычисления  $\delta g_p$  в прямоугольной системе координат. Выражение, определяющее значение топографической поправки  $\delta g_p$  для поля силы тяжести, в данном случае, можно представить следующим образом:

$$\delta g_p = \sum \sum \Omega(\mathbf{u}_{ij}), \quad (4)$$

где  $u_{ij}$  – компоненты  $m$ -мерного вектора параметров  $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ , характеризующего физические и геометрические параметры отдельной аппроксимационной ячейки и ее местоположение относительно точки расчета  $\delta g_p$  с координатами  $(x, y, z)$ ;  $\Omega$  – оператор решения прямой задачи гравиразведки;  $i = \overline{1, k}$ ,  $j = \overline{1, k}$ ,  $k \times k$  – число элементарных ячеек в пределах области учета рельефа  $D$ .

Рассмотрим новый вектор  $\mathbf{p} = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ , структура которого аналогична структуре вектора  $\mathbf{u}$ , но одна или несколько компонент которого осложнены случайной составляющей  $\varepsilon$ :  $\mathbf{p}_n = u_n + \varepsilon$ , где  $n = 1, 2, \dots, m$ . Погрешность определения поправки  $\Delta^g$  в отдельной точке пространства, обусловленная наличием случайных отклонений в исходных данных, определяется выражением

$$\Delta^g = \sum \sum \Omega(\mathbf{p}_{ij}) - \sum \sum \Omega(\mathbf{u}_{ij}) \quad . \quad (5)$$

Оценка погрешностей, выраженных приведенной выше формулой, осуществляется с помощью метода Монте-Карло. Моделирование случайной составляющей выполняется путем генерации последовательности псевдослучайных чисел  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$ . Процесс вычислений реализуется для совокупности точек пространства, при этом определяются статистические параметры для погрешности  $\Delta^g$  и закон ее распределения.

### Выполнение практической работы

*Характеристика исходных данных для расчета приводится ниже:*

1. ЦММ представляется в виде **текстового (в кодах ASCII) grd-файла** программы SURFER, **использование расширения \*.grd в имени файла обязательно.**

2. Ведомость гравиметрических пунктов представляется в виде текстового dat-файла, в начале каждой строки которого обязательно должны присутствовать в указанном порядке **PR, PK, Y, X, H** (номер профиля, номер пикета, прямоугольные координаты и высота гравиметрического пункта), после цикла расчеты в крайний столбец записываются значения топопоправок. В качестве

разделителей используются только пробелы, **использование расширения \*.dat в имени файла обязательно.**

3. Номера **PR, PK** гравиметрических пунктов в ведомости могут быть только целыми числами.

4. Все **координаты X, Y** задаются в метрах; **высоты – то же в метрах.**

5. Длины сторон «палетки» при расчете поправок для внешней подобласти  $D_2$  задаются в шагах сети используемой ЦММ и всегда должны быть **нечетными числами**; максимальная длина  $L_2$  составляет 701 точку.

6. После одного цикла расчета топопоправок новая ведомость записывается в **файл с новым именем.**

*Работа в программе TOPWIN.* Работа с программой не представляет сложности: после открытия главного окна программы (рис. 5) выбирается режим работы – расчет поправок  $\delta g_p$  для внутренней  $D_1$  (рис. 6) или внешней  $D_2$  (рис. 7) подобласти учета влияния рельефа. Результаты цикла расчета записываются в dat-файл с именем, которое задается пользователем программы. В каждой строке результативного файла записаны параметры: **PR, PK, Y, X, H,  $\delta g_p$ .**

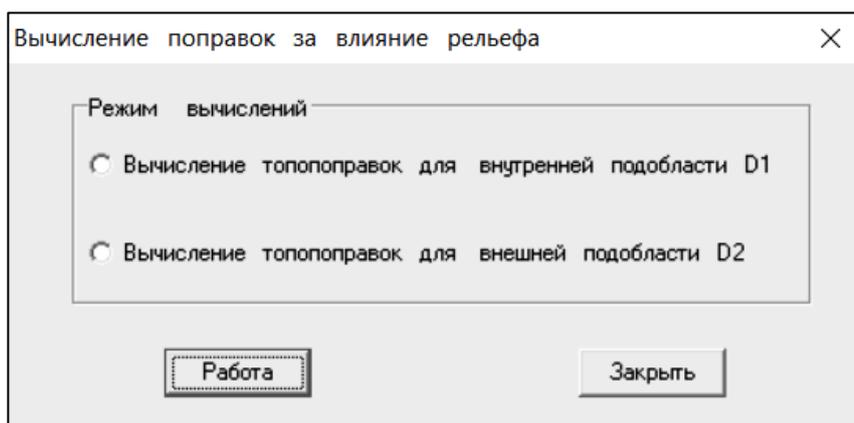


Рис. 5. Главное окно программы TOPWIN

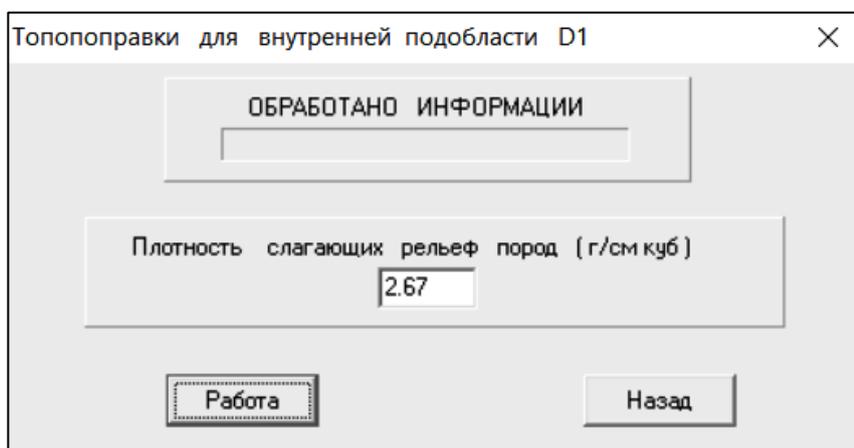


Рис. 6. Окно программы TOPWIN при вычислении поправок для внутренней области  $D_1$

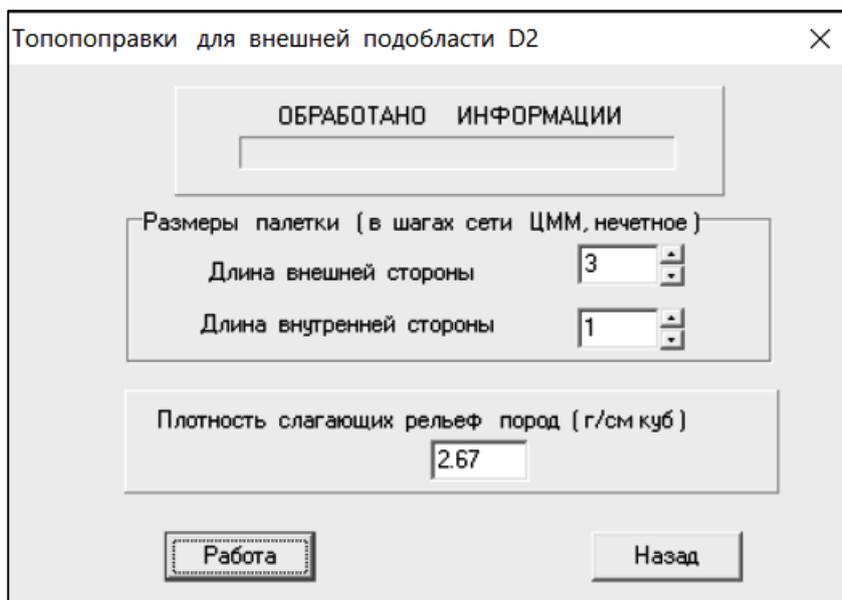


Рис. 7. Окно программы TOPWIN при вычислении поправок для внутренней области  $D_1$

Число результативных файлов должно отвечать числу используемых при расчете ЦММ с разным шагом между точками. Обязательным условием является выполнение соотношения между шагами сети ЦММ для внутренней подобласти  $D_1$  и следующей прилегающей к ней ЦММ **1:3**. Суммирование значений поправок (столбцов ведомости) для разных ЦММ может выполняться в программах SURFER, GRAFER или EXCEL. При вычислении значений гравитационных аномалий в редукции Буге требуется именно суммарная топографическая поправка  $\delta g_p$ , характеризующая влияние рельефа в пределах всей области  $D = D_1 \cup D_2$ .

Сбои при расчете поправок (т.е. появление кодов неопределенных значений 999) обычно обусловлены неверно заданными координатами  $X, Y$  в ЦММ или ведомости. Желательно предварительно проверить пространственное положение ЦММ и гравиметрических пунктов в программе SURFER, наложением (Overlay Maps) карты рельефа (Contour Map) и схемы размещения пунктов (Post Map). При этом следует учесть, что для ЦММ ось  $OY$  направлена на север (т.е. вверх – используется математическая система координат); а для ведомости ось  $OY$  направлена на восток (т.е. вправо – используется геодезическая система координат).

*Выполнение расчета поправок за рельеф.* Для ЦММ с шагом  $100 \times 100$  м;  $300 \times 300$ ;  $1900 \times 1900$  м с помощью программы TOPWIN рассчитываются поправки за влияние рельефа  $\delta g_p$ . Плотность промежуточного слоя составляет  $2.67 \text{ г/см}^3$ . Основные сведения об исходных материалах и методике вычислений поправок за рельеф приведены в таблице.

Основные характеристики исходных данных  
и методики расчета поправок за влияние рельефа местности

Номер ЦММ	Размеры области учета («палетки»), км		Сеть ЦММ, м	Примечания
	Сторона внутреннего квадрата	Сторона внешнего квадрата		
1		0.3	100×100	Подобласть $D_1$
2	0.3	5.7	300×300	Подобласть $D_2$
3	5.7	96.9	1900×1900	

*Оценка точности расчета поправок.* С помощью генерации серий случайных чисел (опция RANDN в программе SURFER) моделируются произвольно ориентированные в пространстве отклонения гравиметрических пунктов в плане от их истинного местоположения. Предполагалось, что отклонения по каждой координате  $X$  и  $Y$  взаимно независимы, амплитуды смещений распределены по нормальному закону с математическим ожиданием  $M = 0$  и среднеквадратическим отклонением (СКО)  $S = \pm 14.14$  м. Таким образом, максимальная величина суммарного смещения  $\varepsilon_{xy}$  гравиметрического пункта в плане при вероятности ~68 % (на уровне  $M \pm S$ ) не будет превышать  $\varepsilon_{xy} = \sqrt{14.14^2 + 14.14^2} \approx \pm 20$  м, предусмотренных «Инструкцией по гравirazведке» для съемки масштаба 1:25 000. Для новых плановых положений пунктов путем интерполяции в программе TOPWIN автоматически определяются новые значения высот рельефа.

Таким образом, генерация смещения пунктов в плане приводит к появлению соответствующих ошибок высот этих пунктов, т.е. моделируются погрешности  $\Delta^g$  вычисления поправок за влияние рельефа, обусловленные *отклонениями в планово-высотной привязке точек измерений поля силы тяжести*. Погрешности расчета топопоправок  $\Delta^g$  определяются по разности значений поправок, вычисленных при первоначальном (указанном в каталоге) и смещенном положении гравиметрических пунктов по формуле (5).

Таким образом, практическая работа должна содержать в себе:

- 1) Результаты расчета поправок за влияние рельефа для все 3-х ЦММ и суммарную поправку.
- 2) Оценку точности определения поправок за рельеф.

*Требования к содержанию и оформлению работы.* Отчет по выполненной работе должен содержать: 1) краткие теоретические сведения (1–2 стр.) и характеристику исходных данных для расчета (параметры ЦММ и их графическое представление); результаты вычислений: 2) таблицу со статистическими характеристиками поправок  $\delta g_p$  за влияние рельефа для всех ЦММ и для суммарной поправки  $\delta g_p$  (минимум, максимум, среднее значение, среднеквадратическое отклонение); 3) карты изолиний поправок за рельеф  $\delta g_p$  для всех ЦММ и карту суммарной поправки  $\delta g_p$ , построенные в программе SURFER с нанесенными на них пунктами гравиметрических измерений; 4) оценку точности расчетов суммарной поправки за рельеф  $\delta g_p$ ; выводы: 5) указать отличия поправок за рельеф  $\delta g_p$  для разных ЦММ; 6) сопоставить амплитуду вычисленных поправок за рельеф с точностью выполненной гравиметрической съемки и обосновать целесообразность ввода поправки.

### Литература

1. *Бычков С.Г., Долгаль А.С., Симанов А.А.* Вычисление аномалий силы тяжести при высокоточных гравиметрических съемках. Пермь, УрО РАН, 2015. 142 с.
2. *Гордин В.М.* Способы учета влияния рельефа дневной поверхности при высокоточных гравитационных измерениях. Обзор ОНТИ ВИЭМС. сер. IX. М.: ВИЭИС. 1974. 89 с.
3. *Гравиразведка: Справочник геофизика / под ред. Е.А. Мудрецовой, К.Е. Веселова.* 2-е изд. перераб. и доп. М.: Недра, 1990. 607 с.
4. *Долгаль А.С.* Компьютерные технологии обработки и интерпретации данных гравиметрической и магнитной съемок в горной местности. Абакан: ООО «Фирма-МАРТ», 2002. 188 с.
5. *Долгаль А.С., Костицын В.И.* Гравиразведка: способы учета влияния рельефа местности: учеб. пособие / Перм. гос. ун-т. Пермь, 2010. 88 с.
6. *Инструкция по гравиразведке.* М.: Недра, 1980. 80 с.
7. *Каленицкий А.И., Смирнов В.П.* Методические рекомендации по учету влияния рельефа местности в гравиразведке. Новосибирск: СНИИГГиМС, 1981. 160 с.
8. *Маловичко А.К., Костицын В.И., Тарунина О.Л.* Детальная гравиразведка на нефть и газ. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Недра, 1989. 224 с.

9. *Ремпель Г.Г.* Актуальные вопросы методики введения поправок, связанных с рельефом местности в данные гравиразведки и магниторазведки // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1980. № 12. С. 75–89.

10. *Симанов А.А.* Использование ГИС-технологий для учета влияния рельефа местности при гравиметрической съемке // Восьмая Уральская молодежная научная школа по геофизике. Пермь: ГИ УрО РАН, 2007. С. 234–238.

11. *Хохлова В.В.* Разработка методики редуцирования данных высокоточной гравиразведки с учетом сферичности Земли: дис. ... канд. техн. наук: 1.6.9. 2023. 118 с. URL: <http://www.psu.ru/files/docs/science/dissertatsionnye-sovety/khokhlova/disser.pdf>

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2

### «Решение прямых задач гравиразведки и магниторазведки для двухмерных тел»

#### Теоретические сведения

*Общие сведения.* В интерпретации гравитационных и магнитных данных исключительную роль играет прямая задача. Только на основе решения прямой задачи возможно:

- 1) исследовать закономерности связи полей и их источников с целью проверки различных геологических гипотез;
- 2) создание вычислительных алгоритмов и программ для учета влияния известных геологических тел и границ (вычисление поправок за влияние рельефа местности, геологическое редуцирование);
- 3) разработка алгоритмов и программ по решению интерпретационных задач на основе метода подбора.
- 4) осуществить тестирование различных методов количественной интерпретации методом имитационного моделирования;

Обычно *под прямой задачей гравиразведки и магниторазведки понимают определение элементов гравитационного и магнитного полей по заданному распределению плотности или намагниченности.* К числу таких элементов относятся те поля, которые непосредственно измеряются: поле силы тяжести (первая вертикальная производная гравитационного потенциала), вторые горизонтальные и вертикальные производные потенциала силы притяжения, модуль полного вектора, вертикальная и горизонтальные компоненты магнитного поля, его склонение, наклонение, модуль.

Понятие прямой задачи должно включать в себя понятие множества точек, на котором определяются элементы аномальных полей или функционалов. В частности, это может быть область пространства, внешняя по отношению к источникам (внешняя прямая задача) или область, расположенная внутри источников поля (внутренняя прямая задача). Помимо этого в понятие прямой задачи должен входить метод решения: численно или аналитически определяются искомые элементы поля.

При этом под понятием аналитического решения обычно понимают вывод формулы, описывающей конкретный элемент поля от заданного распределения источников. Для некоторых тел правильной геометрической формы выведены десятки принципиально идентичных, но различающихся по виду аналитических

формул. При этом одни из формул оказываются чересчур громоздкими и неудобными для программирования на ЭВМ. Другие позволяют вычислять поле не во всех внешних по отношению к телу точках. Третьи – более универсальны, однако требуют при реализации повышенной точности представления чисел.

Численное решение – нахождение конкретного значения поля или его элемента в заданной области. Это решение может быть основано как на расчете поля по точным аналитическим функциям, описывающим эти поля, так и на численных методах, позволяющих в ряде случаев упростить решение прямой задачи от заданной модели. Такая ситуация возникает для моделей, аналитическое решение для которых не получено.

Академиком В.Н. Страховым были сформулированы основные требования к алгоритмам решения прямых задач: **точность, быстродействие и устойчивость**.

Суть первого требования состоит в том, что вычислительный алгоритм должен обеспечивать изначально заданную **точность** решения. Поскольку любые вычисления происходят с конечным числом значащих цифр, то существуют ошибки округления. Поэтому результат, полученный даже по точной аналитической формуле, будет содержать некоторые ошибки, т.е. будет приближенным. В некоторых случаях такие ошибки могут достигать значительных величин и тем самым приводить к неверным результатам. Чтобы избежать этого, необходим анализ ошибок округления и анализ используемой численной схемы.

Требование **быстродействия** предполагает, что время решения прямой задачи с заданной точностью должно быть минимальным. Несомненно, что максимальную точность и быстродействие удастся получить в тех случаях, когда для элементов полей оказывается возможным получить явные аналитические выражения в элементарных трансцендентных функциях. Таким образом, проблемы аналитического и точного численного решения прямых задач оказываются взаимосвязанными.

У термина **устойчивость** для прямой задачи своя специфика. Смысл его раскрывается следующим образом. Существует множество точек пространства, в которых расчеты по аналитическим выражениям без их предварительного анализа невозможны. Вычисляемые величины, входящие в выражения для решения, могут обращаться в бесконечность или претерпевать разрыв, вместе с тем результат должен быть непрерывной функцией. В точках, близких к указанному, так называемому множеству устранимых особых точек, точность вычислений может падать.

Обычно при решении прямой задачи от сложной геологической среды происходит замена истинного распределения источников поля на некоторое модельное (аппроксимационное). В результате такой замены появляются ошибки, связанные с модельным представлением реальной геологической среды. Поскольку всякое решение прямой задачи выполняется в рамках определенных модельных представлений, то чем сложнее модель, тем меньшую роль оказывает ошибка, связанная с аппроксимацией среды. В то же время, чрезмерная детализация модели может привести, с одной стороны, к неоправданным вычислительным затратам, а с другой – к усилению влияния вычислительных ошибок. Поэтому ***аппроксимационная модель, отражая физико-геологическую ситуацию, не должна содержать излишних деталей.***

Большое значение имеет размерность аппроксимационной модели:

- 1) Реальные геологические объекты и создаваемые ими гравитационные аномалии – трехмерны. Принятым обозначением такой размерности является 3D: от английского слова *dimension* (размерность).
- 2) Многие геологические тела и структуры имеют существенную вытянутость в некотором горизонтальном направлении. К ним можно отнести дайки, зоны разломов, и т.д. Для таких объектов при условии неизменности их физических свойств по простиранию характерно слабое изменение аномального поля по простиранию вблизи эпицентра. Если длина объекта более чем в пять раз превышает его мощность, то такую аномалию и такой объект принято называть двухмерными (2D). 2D-аномалии можно интерпретировать по одному профилю, ориентированному вкrest простирания объекта.
- 3) Если относительная вытянутость объекта не столь велика, то вводят модели с так называемой размерностью 2.5D. Они обычно представляют собой горизонтальные призмы, ограниченные по простиранию вертикальными плоскостями, перпендикулярными линии простирания.

Моделирование геологического строения по гравиметрическим данным по Е.Г. Булаху сводится к следующей задаче. На основании всех имеющихся сведений о геологическом строении площади исследований и петрофизической информации, а также с учетом результатов визуального анализа аномального поля и его трансформант осуществляется построение начальной схемы геологического строения. Местоположение и размеры геологических объектов характеризуются параметрами  $p_1, p_2, \dots, p_m$ , а значения плотности  $\sigma$  этих объектов будем считать априорно известными. Таким образом получим  $m$ -мерный вектор  $\mathbf{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$  параметров изучаемого фрагмента геологической среды. Можно

говорить о функциональном пространстве  $Q$ , где каждой конкретной физико-геологической модели соответствует своя точка  $P$ :  $P \in Q$ . Значения аномального поля можно представить как некоторый  $n$ -мерный вектор  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . Пространство  $W$  объединяет различные совокупности  $V$ :  $V \in W$ .

Функциональные пространства  $W$  и  $Q$  связаны между собой. Установлено некоторое правило, по которому для значений параметров среды однозначно определяются значения аномального поля – алгоритм решения прямой задачи. В общем виде прямую задачу можно описать оператором  $L$ , который каждой точке пространства  $Q$  ставит в соответствие определенную точку из пространства  $W$ :

$$V = L(P), V \in W, P \in Q. \quad (6)$$

Следовательно, *для решения прямой задачи всегда требуются три группы параметров: 1) эффективная плотность (намагниченность) аномалиеобразующих тел; 2) геометрические параметры этих тел; 3) координаты точек расчета поля* (в случае использования прямоугольной системы координат в 3D задаче – это значения  $x, y, z$ ). Для двухмерной (плоской) прямой задачи требуются только вертикальные и горизонтальные координаты  $x$  и  $z$ , соответственно.

*Алгоритм и программа решения прямой задачи.* Рассмотрим расчет гравитационного поля  $\Delta g$  или вертикальной составляющей напряженности магнитного поля  $\Delta Z$  от набора 2D горизонтальных многоугольных призм, аппроксимирующих реальные аномалиеобразующие объекты. Для расчетов использованы формулы решения прямых задач, разработанные Е.Г. Булахом, в котором в каждой точке профиля вычисляются и последовательно суммируются аномальные эффекты от каждой боковой грани призмы. При расчетах используется прямоугольная система координат (положительное направление оси  $OZ$  вниз); для вычисления магнитного поля предполагается вертикальное направление вектора намагниченности моделируемых объектов. Расчет поля выполняется на профиле с постоянным шагом между точками  $dX$ . Каждая точка характеризуется своей высотной отметкой (рис. 8).

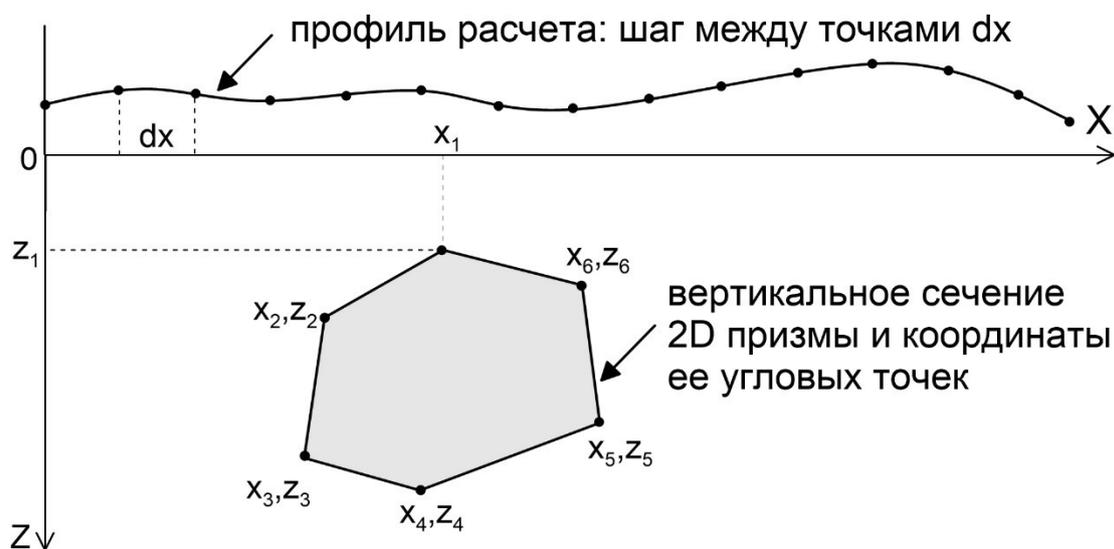


Рис. 8. Единая система прямоугольных координат  $XOZ$  для решения прямой задачи от шестиугольной призмы

Алгоритм решения прямой задачи реализован в программе PGM, имеющей следующие ограничения на размерность данных и единицы измерений:

- 1) число точек расчета поля – не более 1000;
- 2) число призм в разрезе – не более 100;
- 3) число угловых точек в каждой отдельной призме – не более 100.
- 4) все геометрические параметры (кроме высот точек профиля): координаты угловых точек  $X$ ,  $Z$  координаты начала профиля  $X0$ , шаг по профилю  $dX$  задаются в км;
- 5) значения высот задаются в метрах (все значения, находящиеся выше нулевого уровня являются положительными);
- 6) избыточная плотность призм задается в  $г/см^3$ ;
- 7) вертикальная намагниченность задается в  $А/м$ .

Вся информация для расчетов представляется в виде двух текстовых файлов (с расширением \*.txt):

Файл 1 (информация об источниках) имеет следующую структуру:

Строка 1: Буква  $G$  или  $M$  (расчет гравитационного либо магнитного поля, соответственно),  $m$  – число призм в моделируемом разрезе.

Строка 2. Параметры расчетного профиля:  $X0$  – координата начальной точки расчета поля,  $dX$  – шаг по профилю;  $k$  – число точек расчета.

Строка 3: число угловых точек  $n$  призмы № 1, ее избыточная плотность или намагниченность.

Строка 4: координаты  $X_l$ ,  $Z_l$ .

Строка 5: координаты  $X_2, Z_2$ .

.....

Строка 3+n: координаты  $X_n, Z_n$ .

Для призм №2, 3, ..., m все параметры задаются аналогично строкам 3 и 3+n.

Файл 2: (информация о точках расчета поля): в нем последовательно записаны высоты точек расчета поля (начиная с 1-й и заканчивая  $k$ -й), в м.

Программа PGM запускается кнопкой ПУСК, перед вычислением необходимо задать имена заранее подготовленные txt-файлы исходными данными. После расчета программа запрашивает имя выходного файла. В результате вычислений программа выдает:

- 1) таблицу: файл, состоящий из трех столбцов: координат  $X, Z$  точек расчета и значений поля в этих точках (расширение \*.dat).
- 2) файлы, предназначенные для графического представления графика расчетного поля и модели в программе SURFER (расширение \*.bln). Файл \*m.dat содержит информацию о модели источников поля, файл \*p.dat – результат решения прямой задачи. Эти файлы можно использовать для графического представления полученных результатов в программе SURFER (рис. 9).

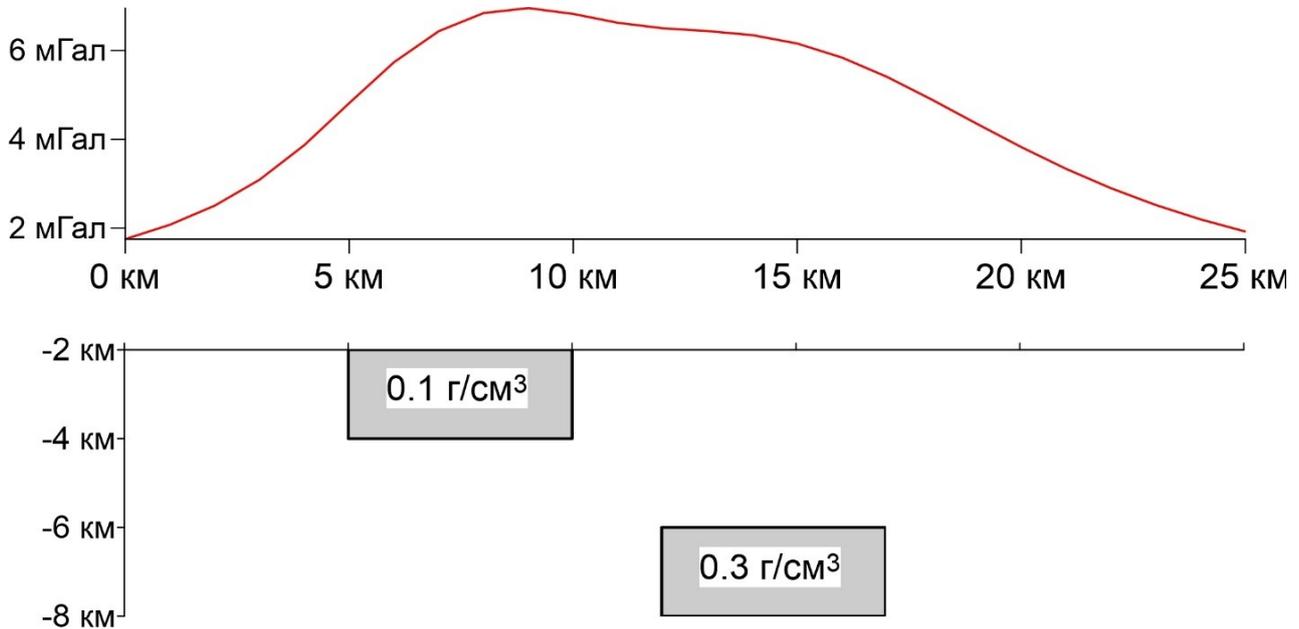


Рис. 9. Пример графического представления результатов работы программы PGM. Цифрами указаны значения эффективной плотности

Исходные данные для этого примера выглядят следующим образом:

Файл 1:

G 2

0 1 26

4 0.1

5 2

5 4

10 4

10 2

4 0.3

12 6

12 8

17 8

17 6

Файл 2: 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

(расчет поля на горизонтальном профиле)

### Выполнение практической работы

Первичные магмы, образуясь на различных глубинах, имеют тенденцию формироваться в большие массы, которые продвигаются в верхние горизонты земной коры, где литостатическое давление меньше. При определенных геологических, и в первую очередь тектонических, условиях магма не достигает поверхности Земли и застывает (кристаллизуется) на различной глубине, образуя тела неодинаковой формы и размера – *интрузивы*. На рис. 10 приведены формы некоторых интрузивных тел.



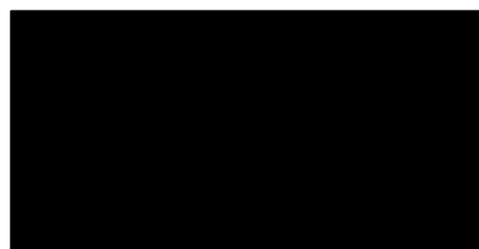
**Дайки**



**Лополит**



**Лакколит**



**Бисмалит**

Рис. 10. Формы интрузивных тел

1. С помощью программы PGM требуется осуществить расчет аномального гравитационного поля  $\Delta g$  от моделей представленных интрузивных тел. Модель интрузии должна быть вписана в прямоугольник с размерами 3 км по горизонтали и 1 км по вертикали. Глубина верхней кромки модели около 500 м. Длина *горизонтального* профиля 12–15 км, шаг между точками расчета 200 м. Модель интрузии располагается в средней трети расчетного профиля. Эффективная плотность для даек и лополита (эти интрузии имеют основной состав)  $+0.3 \text{ г/см}^3$ , для лакколита и бисмалита (эти интрузии имеют кислый состав)  $-0.15 \text{ г/см}^3$ . Для этих же моделей провести расчет аномального магнитного поля  $\Delta Z$  при вертикальной намагниченности 2 А/м.

2. Повторить расчет магнитного и гравитационного поля для построенных моделей интрузий с *использованием рельефа земной поверхности* с перепадом высот от 100 м до 800 м в пределах профиля. Выполнить вычисление полей  $\Delta g$  и  $\Delta Z$  от построенных моделей на горизонтальных профилях, расположенных на высотах 750 м и 1500 м выше уровня моря (имитация аэрогеофизических наблюдений).

3. Отдельно выполнить два варианта расчета аномального гравитационного поля  $\Delta g$  для модели лакколита при грубой аппроксимации интрузии (не более 8 угловых точек) и более точной ее аппроксимации (не менее 14 точек). Сравнить полученные результаты.

4. Привести все результаты расчета в виде рисунков, проанализировать эти результаты и сделать выводы. Выводы должны содержать мнение о возможности выделения каждого типа интрузий при наземных и аэрогеофизических наблюдениях; искажающем влиянии рельефа земной поверхности при гравиметрической и магнитной съемках; оценку изменения амплитуды аномалий геопотенциальных полей с увеличением высоты измерений. Условно будем считать, что объект может быть выделен по результатам съемки, если он создает аномалии с амплитудой не менее 0.2 мГал (гравиразведка) и 5 нТл (магниторазведка) как минимум в 5 точках расчетного профиля.

*Требования к содержанию и оформлению работы.* Отчет по практической работе должен содержать: 1) краткие теоретические сведения (1–2 стр.) и характеристику исходных данных для расчета; результаты вычислений; 2) таблицу со статистическими характеристиками гравитационных и магнитных аномалий для всех вариантов расчета (минимум, максимум, среднее значение, среднеквадратическое отклонение); 3) графики полей и разрезы с моделями интрузий, построенные в программе SURFER; выводы; 4) возможность поиска каждого типа ин-

трузий при измерениях полей на земной поверхности и в воздухе; 5) оценку искажений, обусловленных влиянием рельефа местности при наземных съемках (сопоставить максимальные значения аномалий для горизонтального профиля и профиля с различными высотами точек наблюдения); 6) оценку и количественную характеристику степени затухания магнитного и гравитационного полей с увеличением высоты измерений.

### Литература

1. *Блох Ю.И.* Интерпретация гравитационных и магнитных аномалий: учеб. пособие. 2009. URL: <http://sigma3d.com/index.php/publications/books> (дата обращения: 12.11.2023).

2. *Булах Е.Г., Зейгельман М.С., Корчагин И.Н.* Автоматизированный подбор гравитационных и магнитных аномалий: программно-алгоритмическое обеспечение и методические рекомендации. 1986. 235с. Деп. МИНИТИ № 8363-В86.ович Мет

3. *Булычев А.А., Лыгин И.В., Соколова Т.Б., Кузнецов К.М.* Прямая задача гравиразведки и магниторазведки (конспект лекций). М., 2017. 124 с.

4. *Голыздра Г.Я.* История методов решения прямых задач гравиметрии и магнитометрии // Развитие гравиметрии и магнитометрии в XX веке: тр. конф. М., 1997. ОИФЗ РАН. С. 121–148.

5. *Гольдшмидт В.И.* Оптимизация процесса количественной интерпретации данных гравиразведки. М.: Недра, 1984. 184 с.

6. *Гравиразведка: Справочник геофизика / под ред. Е.А. Мудрецово́й, К.Е. Веселова.* 2-е изд. перераб. и доп. М.: Недра, 1990. 607 с.

7. *Пятаков Ю.В., Исаев В.И.* Методы решения прямых задач гравиметрии // Известия ТПУ. 2012. №1. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/metody-resheniya-pryamyh-zadach-gravimetrii> (дата обращения: 11.04.2024).

### ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3

#### «Решение прямых задач гравиразведки и магниторазведки для трехмерных тел»

#### Теоретические сведения

*Общие сведения.* При решении прямых задач гравиразведки и магниторазведки для геологических тел и структур, имеющих в плане форму, близкую к изометричной, необходимо использование трехмерных моделей. Одной из наиболее удобных и широко применяющихся на практике аппроксимационных стратегий является построение кусочно-призматических 3D моделей локальных объектов и протяженных границ раздела физических свойств горных пород (рис. 11–13).

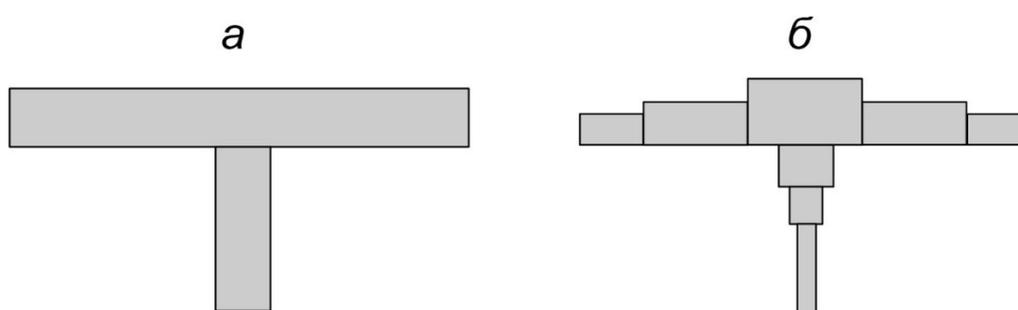


Рис. 11. Моделирование лакколита с использованием двух- (а) и восьми- (б) прямоугольных призм (вертикальный разрез)

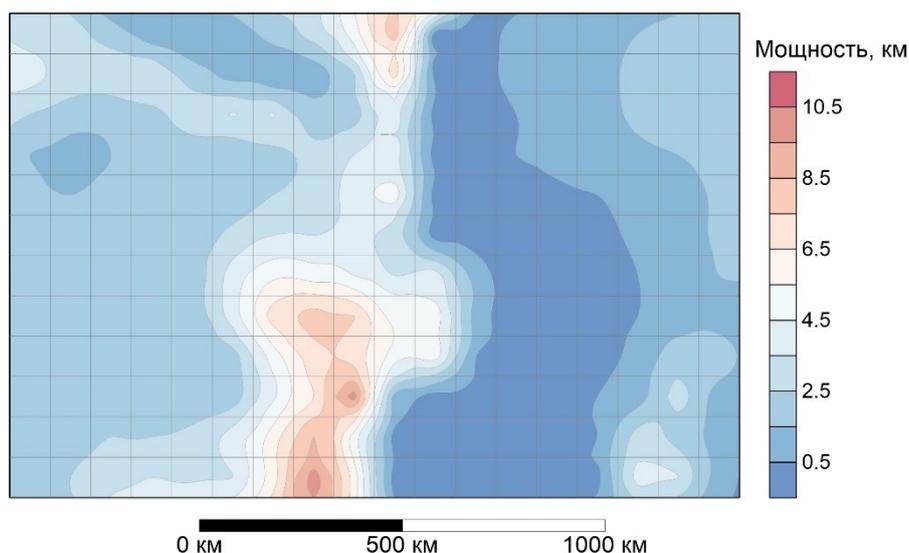


Рис. 12. Моделирование осадочного чехла с использованием плотной упаковки прямоугольных призм с размером основания 100×100 км: карта изогипс и контуры оснований призм (вид сверху)

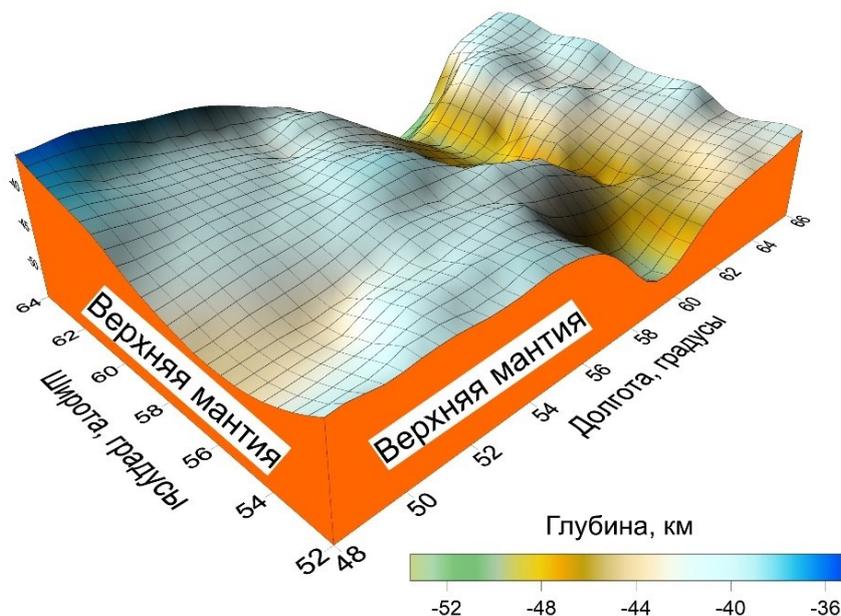


Рис. 13. Моделирование поверхности Мохо в пределах Восточно-Европейской платформы с использованием плотной упаковки сферических призм – тессероидов (объемная модель)

*Алгоритм и программа решения прямой задачи.* Программа PRIZMA предназначена для вычисления аномального гравитационного поля  $\Delta g$  или вертикальной составляющей аномального магнитного поля  $\Delta Z$  или аномалии полного вектора магнитного поля  $\Delta T$ , обусловленных совокупностью прямоугольных призм на реальном рельефе земной поверхности. Пусть тело ограничено плоскостями  $x=d1; x=d2; y=l1; y=l2; z=h; z=H$ . Гравитационный эффект призмы в произвольной точке с координатами  $(x, y, z)$  вычисляется по формуле:

$$\Delta g(x, y, z) = -G\sigma \left[ \begin{array}{l} \xi \ln(\eta + R) + \eta \ln(\xi + R) \\ + \zeta \operatorname{arctg}(\zeta R / \xi \eta) \end{array} \right] \Big|_{d1-x, l1-y, h-z}^{d2-x, l2-y, H-z}, \quad (7)$$

Где  $G$  – гравитационная постоянная,  $\sigma$  – эффективная плотность,  $R = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ ; каждое из восьми слагаемых выражения (7) вычисляется согласно  $f(\xi, \eta, \zeta) = \sum (-1)^{m+n+p} f(dm, ln, hp)$ . Процесс вычислений представляет собой два вложенных цикла: внутренний (расчет поля одной призмы во всех точках расчета) и внешний (перебор всех призм модели). Во внутреннем цикле ведется суммирование предыдущих значений поля в точке с результатами текущего расчета. Расчет полей  $\Delta Z$  и  $\Delta T$  базируется на соотношении Пуассона.

## Выполнение практической работы

Данные о рельефе задаются в виде текстового (в кодах ASCII) GRD-файла программы SURFER со следующей структурой:

- 1 строка – DSAA: строковая переменная, определяющая тип файла
- 2 строка –  $n$   $m$  (целые числа)
- 3 строка –  $Xmin$   $Xmax$  (вещественные числа)
- 4 строка –  $Ymin$   $Ymax$  (вещественные числа)
- 5 строка –  $Hmin$   $Hmax$  (вещественные числа)

6 и последующие строки – значения параметра (вещественные числа) в узлах квадратной сети с шагом  $L \times L$ , записанные по строкам, начиная с левого нижнего угла матрицы ( $i = m, j = l$ ). Наличие кода неопределенного значения  $1.74E+38$  для значений высот не допускается. При записи структуры файла использованы следующие обозначения:  $n, m$  – число строк и столбцов в матрице;  $Xmin, Xmax; Ymin, Ymax; Hmin, Hmax$  – минимаксы для координат и значений параметра, соответственно. Числа должны быть разделены пробелами или запятыми. Каждая строка матрицы высот начинается с новой строки символьного файла. Значения высот  $H$  задаются в метрах, для отметок рельефа, находящихся выше уровня моря,  $H > 0$ . Для расчета аномальных полей на горизонтальной плоскости все значения высот должны быть нулевыми:  $\forall H \equiv 0$ .

Координаты  $X, Y$  задаются в километрах. Горизонтальные координаты могут быть условными с началом в левом нижнем углу участка расчета (матрицы высот), либо могут отвечать прямоугольным координатам Гаусса–Крюгера ЦММ (при замене геодезических осей координат  $OX$  и  $OY$  на принятые в математике оси  $OY$  и  $OX$ ). Примечания: **используется единая для рельефа (модельного поля) и совокупности призм система координат**, положительное направление оси глубин  $OZ$  – вниз (рис. 14).

Каждая прямоугольная призма характеризуется следующими параметрами:  $XP$  – абсцисса центра основания;  $YP$  – ордината центра основания;  $ZP1$  – глубина верхнего основания;  $ZP2$  – глубина нижнего основания;  $LP$  – размер стороны основания;  $SIG$  – эффективная плотность **или**  $JZ$  – вертикальная намагниченность **или**  $JX, JY, JZ$  – составляющие вектора эффективной намагниченности по осям  $X, Y, Z$ , соответственно.

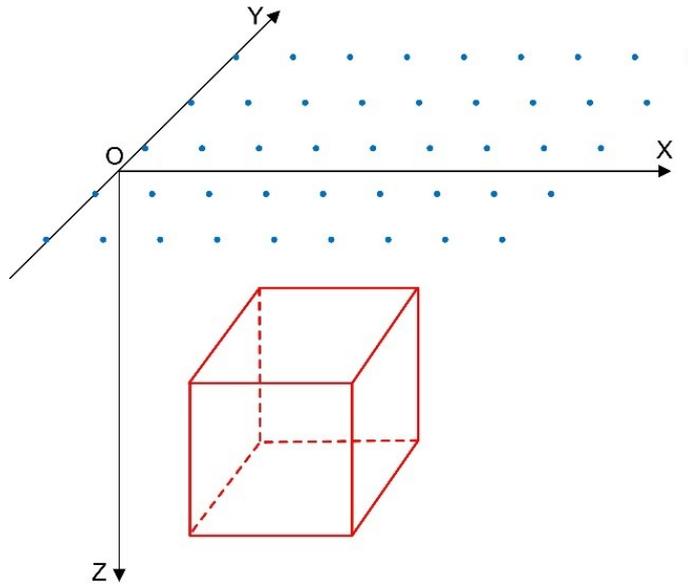


Рис. 14. Система пространственных координат XYZ, аномалиеобразующая прямоугольная призма (красный цвет) и точки расчета поля (синий цвет)

Основания призмы размером  $LP \times LP$  располагаются в горизонтальных плоскостях, параллельных плоскости XOY. Все геометрические параметры ( $XP$ ,  $YP$  и др.) задаются в км. Значения эффективной плотности  $SIG$  – в г/куб. см, значения намагниченности  $J$  задаются в А/м. Параметры каждой призмы записываются с новой строки в текстовом файле (с расширением TXT). Пример информации о модели источников (призмах) при расчете поля  $\Delta g$  :

```
0 40 1 4 2 0.3
20 20 2 5 2 0.2
35 30 4 10 2 0.1
```

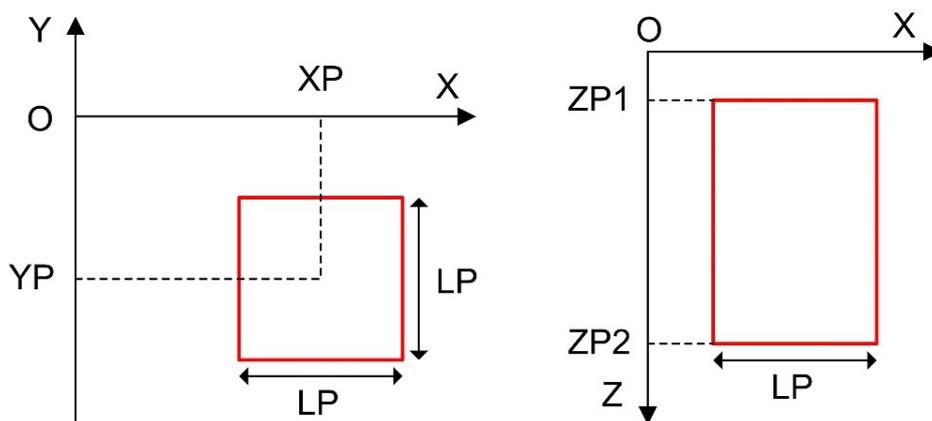


Рис. 15. Геометрические параметры призмы

Ограничения на размерность задачи: количество призм не может превышать 10 000, число точек расчета поля не ограничено. При расчете аномалии полного вектора магнитного поля  $\Delta T$  используются константы для нормального магнитного поля Земли: склонение  $10^\circ$ , наклонение  $60^\circ$ . Главное окно программы представлено на рис. 16.

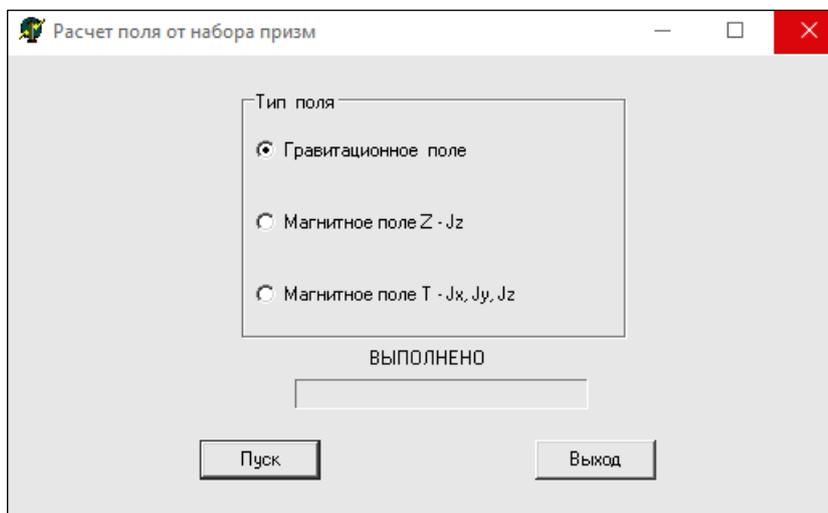


Рис. 16. Главное окно программы PRIZMA

*Работа в программе PRIZMA.* Работа с программой не представляет сложности: после открытия главного окна программы выбирается режим работы – расчет аномального гравитационного или магнитного поля. После нажатия кнопки «Пуск» программа запрашивает имена файлов с исходными данными (GRD-файла с координатами и высотами точек расчета и TXT-файла с моделью источников поля). Процесс вычислений отражается на индикаторе «ВЫПОЛНЕНО». Результаты цикла расчета записываются в GRD-файл с именем, которое задается пользователем программы.

### **Выполнение практической работы**

В процессе выполнения работы последовательно выполняются следующие операции:

1. Построение синтетической модели рельефа земной поверхности и сохранение ее в виде текстового GRD-файла. В программе SURFER выберите опцию GRID/FUNCTION и с помощью тригонометрических функций сформируйте поверхность рельефа с перепадом высот  $\sim 800$  м в пределах участка исследований размером  $10 \times 10$  км. Для этой цели необходимо задать параметры, указанные на рис. 17.

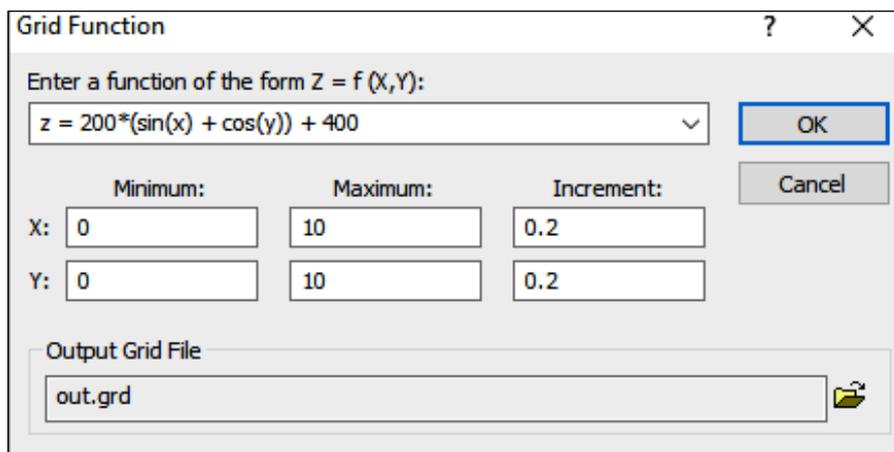


Рис. 17. Параметры для формирования модели рельефа земной поверхности

2. Создание модели аномалиеобразующей призмы с размером стороны 1.5–2.5 км, расположенной вблизи центра участка, с глубинами оснований 0.25 км и 4 км. Эффективная плотность призмы: 0.2–0.4 г/см<sup>3</sup>.

3. Вычисление гравитационного поля призмы  $\Delta g$  на дневной поверхности с шагом 200 м; на горизонтальной плоскости  $H = 0$ ; на высотах  $H = 0.8, 2, 3$  км. Построение карт изолиний аномального гравитационного поля в программе SURFER для всех 5 вариантов расчета с наложением контура основания призмы (рис. 18).

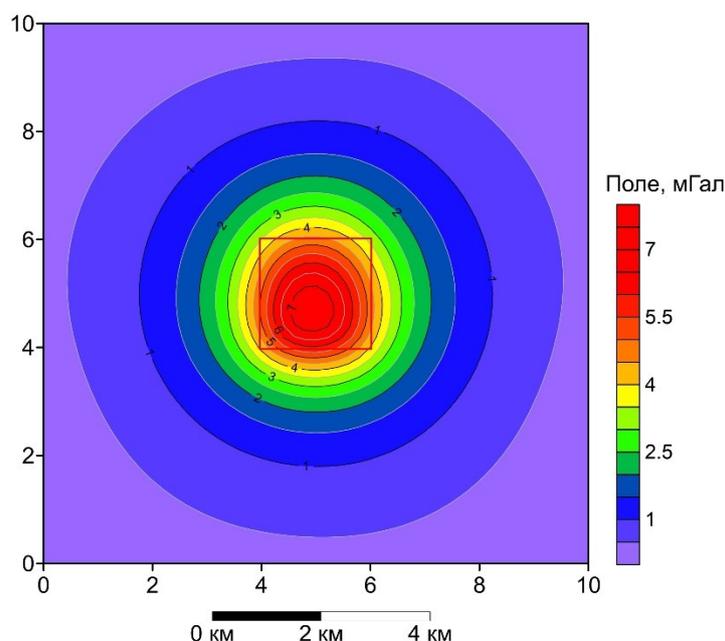


Рис. 18. Пример карты изоаномал гравитационного поля  $\Delta g$  на земной поверхности (красный контур – основание призмы)

4. Вычисление магнитного поля  $\Delta Z$  призмы на дневной поверхности с шагом 200 м; на горизонтальной плоскости  $H = 0$ ; на высотах  $H = 0.8, 2, 3$  км. Построение карт изолиний аномального магнитного поля в программе SURFER для всех 5 вариантов расчета с наложением контура основания призмы (рис. 19).

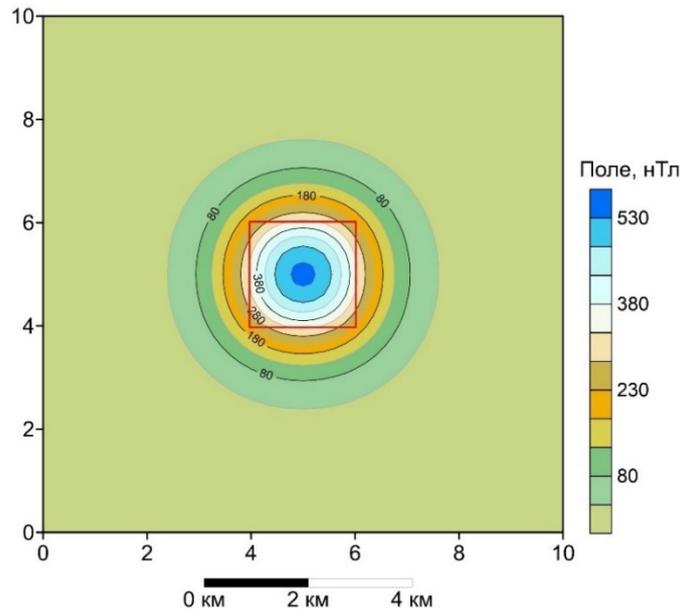


Рис. 19. Пример карты изодинам вертикальной составляющей магнитного поля  $\Delta Z$  на высоте 800 м (красный контур – основание призмы)

5. Построение с использованием опции MAP/ADD/PROFILE для каждой из 10 карт полей графиков значений  $\Delta g$  и  $\Delta Z$  по широтному профилю, пересекающему проекцию центра основания призмы (рис. 20).

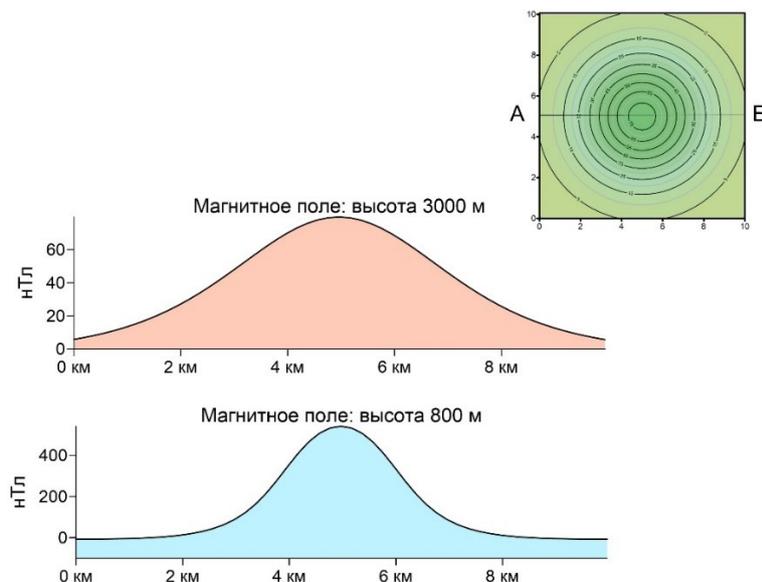


Рис. 20. Пример построения графиков: вертикальная составляющая магнитного поля  $\Delta Z$  на высотах 800 м и 3000 м

6. Оценка влияния разновысотности точек расчета поля путем вычисления разности ранее вычисленных полей на дневной поверхности (рельефе) и высоте 800 м (отвечающей максимальной отметке высот для участка). Построение карт изолиний разностного гравитационного и магнитного полей (рис. 21), определение их статистических характеристик (минимум, максимум, среднее и среднеквадратическое отклонение).

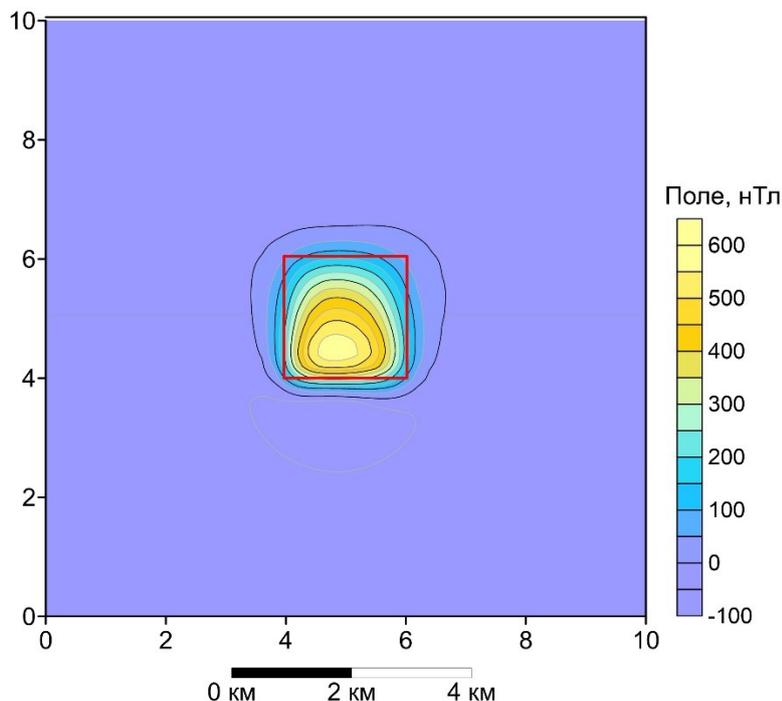


Рис. 21. Карта разности значений вертикальной составляющей магнитного поля  $\Delta Z$  на земной поверхности и на высоте 800 м (красный контур – основание призмы)

7. Вычисление аномалии полного вектора магнитного поля  $\Delta T$  от призмы на высоте 800 м в четырех вариантах:  $J_z = 2-5$  А/м,  $J_x = J_y = 0$  (ситуация отвечает высоким широтам северного полушария Земли);  $J_z = -(2-5)$  А/м,  $J_x = J_y = 0$  (ситуация отвечает высоким широтам южного полушария Земли)  $J_y = 2-5$  А/м,  $J_x = J_z = 0$  (ситуация отвечает зоне экватора Земли);  $J_x = J_y = J_z = 2-5$  А/м (ситуация отвечает средним магнитным широтам северного полушария Земли). Во всех случаях предполагается отсутствие естественной остаточной намагниченности  $J_n$  аномалиеобразующей призмы, т.е. ее намагниченность является только индуктивной  $J_i$  и направлена по современному магнитному полю Земли  $T_0$ . Изменение направления вектора эффективной намагниченности аномалиеобразующего объекта существенно сказывается на морфологии магнитного поля на поверхности (рис. 22).

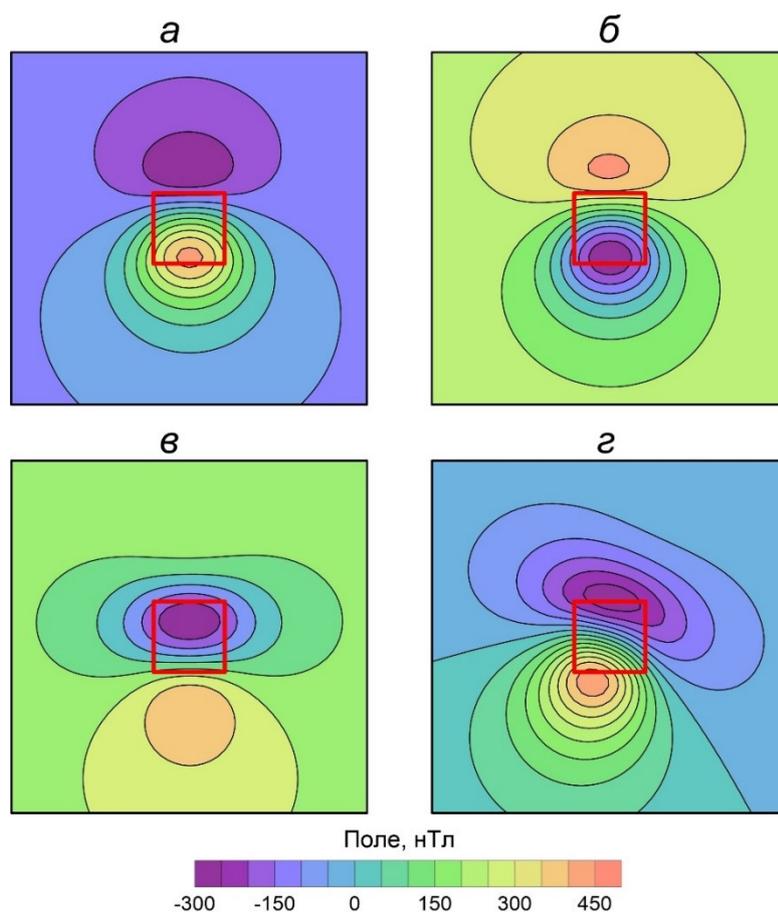


Рис. 22. Карты изодинам аномалии полного вектора магнитного поля  $\Delta T$  для призмы на высоте 800 м:  $J_z = 3$  А/м,  $J_x = J_y = 0$  (а);  $J_z = -3$  А/м,  $J_x = J_y = 0$  (б);  $J_y = 3$  А/м,  $J_x = J_z = 0$  (в);  $J_x = J_y = J_z = 3$  А/м (г) (красный контур – основание призмы)

*Требования к содержанию и оформлению работы.* Отчет по выполненной работе должен содержать: 1) краткие теоретические сведения (1–2 стр.) и характеристику исходных данных для расчета; результаты вычислений; 2) таблицу со статистическими характеристиками гравитационных и магнитных аномалий для всех вариантов расчета (минимум, максимум, среднее значение, среднеквадратическое отклонение); 3) карты и графики полей, построенные в программе SURFER; выводы; 4) оценить и количественно охарактеризовать степень затухания магнитного и гравитационного полей с увеличением высоты измерений; 5) оценить искажения, обусловленные влиянием рельефа местности при наземных съемках (сопоставить максимальные значения аномалий для измерений на горизонтальной плоскости и на земной поверхности с перепадом высот 800 м); 6) описать характерные изменения аномалий полного вектора магнитного поля  $\Delta T$ , связанные с широтой точки наблюдений (при условии отсутствия влияния естественной остаточной намагниченности).

## Литература

1. *Алексидзе М.А.* Приближенные методы решения прямых и обратных задач гравиметрии. М.: Наука, 1987. 336 с.
2. *Блох Ю.И.* Интерпретация гравитационных и магнитных аномалий: учеб. пособие. 2009. URL: <http://sigma3d.com/index.php/publications/books> (дата обращения: 12.11.2023).
3. *Булах Е.Г.* Прямые и обратные задачи гравиметрии и магнитометрии. Киев: Наукова думка, 2010. 464 с.
4. *Булычев А.А., Лыгин И.В., Соколова Т.Б., Кузнецов К.М.* Прямая задача гравиразведки и магниторазведки (конспект лекций). М., 2017. 124 с.
5. *Голыздра Г.Я.* История методов решения прямых задач гравиметрии и магнитометрии // Развитие гравиметрии и магнитометрии в XX веке: тр. конф. М., 1997. ОИФЗ РАН. С. 121–148.
6. *Голыздра Г.Я.* Основные методы решения прямой задачи гравиразведки на ЭВМ. Обзор регион., разв. и промысл. геофизики. М.: ВИЭМС, 1977. 98 с.
7. *Гольдшмидт В.И.* Оптимизация процесса количественной интерпретации данных гравиразведки. М.: Недра, 1984. 184 с.
8. *Гравиразведка: Справочник геофизика / под ред. Е.А. Мудрецово́й, К.Е. Веселова.* 2-е изд. перераб. и доп. М.: Недра, 1990. 607 с.
9. *Пятаков Ю.В., Исаев В.И.* Методы решения прямых задач гравиметрии // Известия ТПУ. 2012. № 1. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/metody-resheniya-pryamuyh-zadach-gravimetrii> (дата обращения: 11.04.2024).
10. *Страхов В.Н., Качахидзе М.К.* Решение некоторых трехмерных прямых задач гравиметрии // Сообщения АН ГССР. 1982. Т. 106, № 2. С. 301–304.

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4**  
**«Трансформации аномалий силы тяжести методом**  
**истокообразной аппроксимации»**

**Теоретические сведения**

*Общие сведения.* На величину гравитационных и магнитных аномалий в каждой из точек наблюдений оказывают влияние многочисленные геологические объекты, имеющие различную форму, залегающие на разных глубинах, петрофизические характеристики которых (эффективная плотность и эффективная намагниченность) изменяются в широком диапазоне. По этой причине аномальные поля оказываются достаточно сложными, что не только затрудняет их геологическое истолкование, но во многих случаях мешает даже визуальному обнаружению некоторых аномалий. В такой ситуации для проведения интерпретации целесообразно прибегнуть к разделению сложных полей на более простые компоненты, каждую из которых можно проанализировать отдельно, а затем, на основе всех полученных сведений, сформировать геоплотностную (геомагнитную) модель изучаемого объема геологической среды. Эта идея, возникшая на ранних этапах развития прикладной геофизики, получила очень широкое распространение в практике интерпретации геопотенциальных полей.

Задачи разделения аномалий являются весьма сложными. Главная причина этого – практическая эквивалентность полей разных объектов, приводящая к отсутствию единственности решения обратных задач. Один из примеров ее проявления отображен на рис. 23, где представлены два находящиеся друг под другом объекта одинаковой плотности, создающие гравитационные аномалии, различие между которыми не превышает точности съемки.

Тем не менее, для решения практических задач важно осуществить такое преобразование наблюденного поля, которое «сфокусировало» (позволило увидеть) содержащуюся в суммарном поле информацию об аномалиях, связанных с отдельными геологическими телами, их группами или определенными геологическими границами. Это является целью трансформации.

При любом преобразовании экспериментальных данных (наблюденного поля) общее количество информации об источниках поля не может возрасти (строго говоря – убывает). Однако контрастное выявление тех или иных «порций» информации, связанных с определенными геологическими объектами, часто настолько важно, что теоретическая потеря информации не имеет значения.

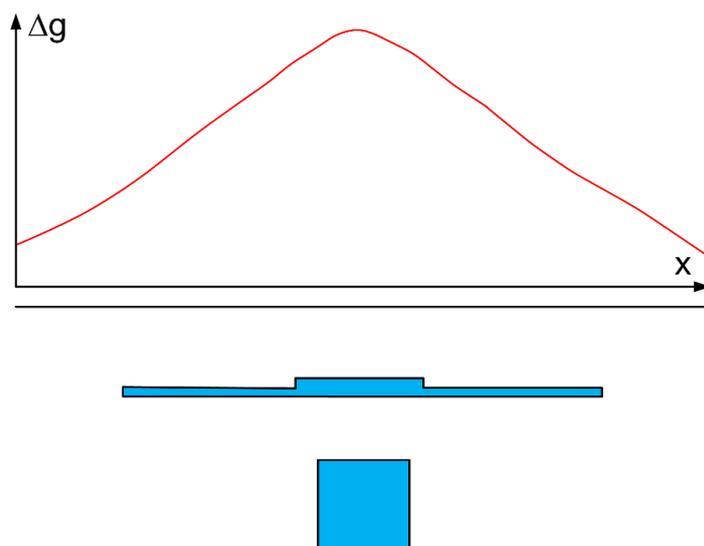


Рис. 23. Объекты с одинаковой эффективной плотностью, расположенные на разных глубинах, создающие практически эквивалентные гравитационные аномалии (по Ю.И. Блоху)

Таким образом, в основе использования трансформаций геопотенциальных полей лежит «принцип фильтрации», формулируемый следующим образом: ***трансформация осуществляется с целью подавления аномалий-помех и наиболее четкого выявления части полезной информации.*** На рис. 24 показаны результаты вычисления производной  $V_{zz}$  по данным измерений силы тяжести  $\Delta g$  над двумя сближенными объектами. Для выявления наличия двух изолированных тел в разрезе в данном случае использовано дифференциальное преобразование исходного поля.

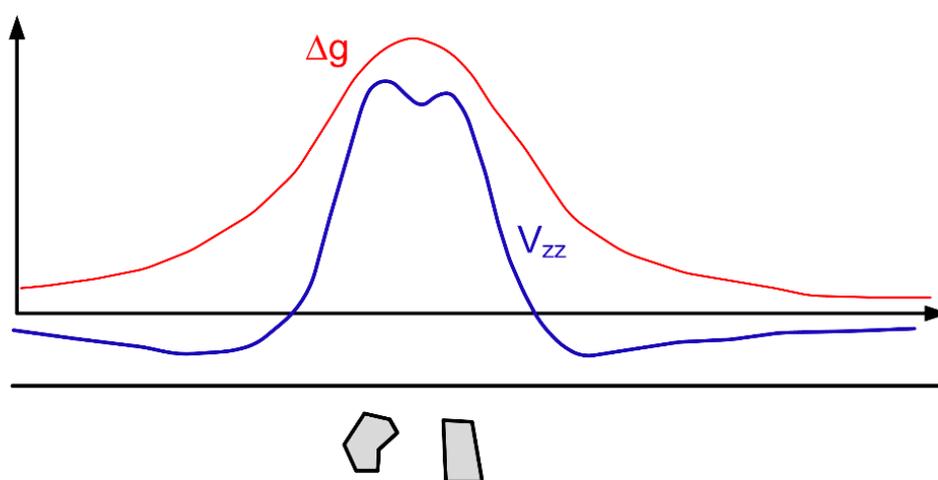


Рис. 24. Локализация аномалий от двух близко расположенных объектов путем трансформации поля силы тяжести  $\Delta g$  в вертикальный градиент  $V_{zz}$  (по Ю.И. Блоху)

Пусть  $u(x, y, z)$  – некоторый элемент аномального поля (для гравиразведки чаще всего  $u = \Delta g$ , для магниторазведки  $u = \Delta T$ ), заданный на поверхности  $S$  в системе декартовых координат  $\Sigma xyz$ . Во многих случаях принимают, что  $S$  – плоскость  $z = 0$ , в общем случае это поверхность, описываемая уравнением  $z = z(x, y)$ , характеризующим рельеф земной поверхности или фактическую линию полета при аэросъемке. Трансформантой функции  $u(x, y, z)$  называется новая функция  $v(x, y, z)$ , определенная на новой поверхности  $S^*$ :

$$v(x, y, z) = T\{u(x, y, z)\}, \quad (8)$$

где  $T$  – некоторый оператор трансформации (например, обеспечивающий вычисление первой вертикальной производной поля  $\partial u / \partial z$ , как на рис. 24). Трансформации могут выполняться для совокупности 2D или 3D дискретных значений поля  $u$ , являющихся результатами профильных  $u = u(x, z)$  или площадных измерений  $u = u(x, y, z)$  соответственно. Выбор типа трансформации (вида функции  $v$ ) определяется характером решаемой геологической задачи, объемом имеющейся априорной информации и также зависит от интуиции интерпретатора.

Общепринятой классификации методов трансформации гравитационного и магнитного полей не существует. Среди большого числа существующих трансформаций часто выделяют две основные группы, различающиеся по своим спектральным характеристикам: 1) группу «региональных трансформаций», предназначенных для построения регионального фона и сглаживания исходного поля; 2) группу «локальных трансформаций», предназначенных для выделения локальных аномалий различных порядков, обусловленных сравнительно небольшими по размерам, залегающими на малых глубинах.

Трансформация дискретно заданных значений гравитационного и магнитного полей могут осуществляться с использованием аппроксимации истокообразными функциями. При этом используется приближение наблюдаемого поля  $u$  теоретическим полем  $u'$  представленным в виде системы потенциальных функций. Данная система функций представляет собой совокупный аномальный эффект многих элементарных тел, обладающих соответствующими физическими характеристиками (массой или магнитным моментом). Первые работы по построению эквивалентных распределений масс принадлежат, по мнению В.Ф. Пашко и В.И. Старостенко, болгарскому геофизику Д. Зидарову. Г.Я. Голлидра отдает приоритет в этом вопросе отечественным исследователям Н.И. Идельсону и Л.Н. Сретенскому, указавшим на возможность представления

гармонических функций в виде потенциалов простого и двойного слоев. Е.Г. Булах писал, что идея построения эквивалентных распределений масс, аппроксимирующих наблюдаемое поле, параметры которых определяются методом подбора, принадлежит М.С. Молоденскому и А.К. Маловичко. Эффективные вычислительные схемы, реализующие аппроксимационный подход, предложены в 1967 году В.И. Ароновым и, независимо, в 1968 году норвежским исследователем А. Бьерхаммаром. Дальнейшее развитие теории и практика построения аналитических аппроксимаций геофизических полей с использованием эквивалентных источников получили в работах В.Н. Страхова, Е.Г. Булаха, В.М. Гордина, В.И. Старостенко, И.Э. Степановой, С.А. Тихоцкого, А.С. Долгая и др. В настоящее время рассматриваемые методы получили неформальное название «*истокообразная аппроксимация*».

В.И. Ароновым теоретически доказана возможность приближенного аналитического представления потенциального поля  $u$  полем  $u'$  масс, распределенных с некоторой плотностью  $\sigma(M)$  на внутренней поверхности  $S'$ , расположенной всюду ниже поверхности  $S=S(x, y, z)$  задания поля  $u$ . При этом поле масс простого слоя в произвольно выбранной точке  $P$  определяется выражением

$$u'(P) = \gamma \int \sigma(M) \frac{d}{dz} \left[ \frac{1}{r(P,M)} \right] dS', P \in S, M \in S', \quad (9)$$

а значения  $\sigma(M)$  подобраны таким образом, что для сколь угодно малого значения  $\delta > 0$  выполняется неравенство

$$\max |u(P) - u'(P)| \leq \delta, P \in S. \quad (10)$$

В формуле (2)  $\gamma = 6.674 \times 10^{-11} \text{м}^3 \text{кг}^{-1} \text{с}^{-2}$  – гравитационная постоянная. При этом выполнение условия (3) влечет за собой соблюдение этого же неравенства, для любой точки  $P \in B$  во внешней, по отношению к  $S$ , области  $B$ . Кроме того, в произвольной точке  $P \in B$

$$\max \left| \frac{d^{l+m+n} U(P)}{dx^l dy^m dz^n} - \frac{d^{l+m+n} U_*(P)}{dx^l dy^m dz^n} \right| \leq \varepsilon_{l+m+n}, \quad (11)$$

причем при  $\delta \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon_{l+m+n} \rightarrow 0$ . Следовательно, после определения параметров аппроксимационной конструкции, создающей поле  $u'$ , можно не только пересчитать поле  $u$  на различные поверхности  $S^* \in B$  (например, на горизонтальную плоскость  $z = \text{const}$ ), но и вычислить различные трансформанты этого поля  $v$ .

Поскольку аномальное геопотенциальное поле  $u$  всегда отягощено помехой  $\delta u$ , так что  $u = u_g + \delta u$ , при аппроксимации его измеренных значений фактически необходимо построить приближенное функциональное описание  $u'$  неизвестной гармонической составляющей  $u_g$ . Приближенная оценка  $\delta$  нормы помех  $\|\delta u\|$  при геофизической съемке выполняется по данным повторных наблюдений, именно  $\delta$  в дальнейшем служит мерой допустимого расхождения измеренного поля и его теоретической модели.

Приближение  $u'$  задается в явном виде. Продолжение теоретического поля  $u'$  в область, не содержащую его источники, а также вычисление в этой области производных любого порядка выполняются абсолютно точно. Это означает, что, один раз выполнив аппроксимацию поля  $u$  на земной поверхности  $S$  аналитической моделью  $u'$ , можно производить вычисление любых трансформант последней с точностью до ошибок округления. Фактическое совпадение модельного и измеренного полей (а также их трансформант) в области, свободной от их источников, будет определяться тем, насколько близки между собой аппроксимирующая функция  $u'$  и неизвестное гармоническое поле  $u_g$ .

Совокупность элементарных источников, порождающих теоретическое поле  $u'$ , является эквивалентной моделью некоторого объема геологической среды. На значения физических параметров модели не налагается никаких ограничений, единственным условием является соблюдение требуемой близости наблюдаемого и теоретического полей  $\|u - u'\| \leq \delta$ . Этим объясняется разнообразие в выборе стратегий построения пространственных распределений эквивалентных масс (или магнитных моментов). Для практических задач целесообразно использовать не указанный в выражении (9) простой слой с кусочно-постоянной плотностью  $\sigma = \sigma(x, y)$ , а аппроксимационные конструкции, представленные сеточным распределением элементарных источников поля.

Простейшая из них предложена В.И. Ароновым и предполагает расположение точечных масс на конкордантной дневному рельефу криволинейной поверхности. Такая стратегия может успешно применяться, если проекции точек измерений поля  $u$  на плоскость  $XOY$  образуют сетку, близкую к квадратной:  $\Delta x \approx \Delta y$ .

*Алгоритм истокообразной аппроксимации.* Рассмотрим 2D-случай: значения силы тяжести  $V_z$  определены на криволинейной земной поверхности вдоль профиля с постоянным шагом  $\Delta r$  между пунктами измерений (рис. 25). При дальнейшем изложении материала сохраним прежние обозначения: для измеренного поля –  $u$  вместо  $V_z$ , для его гармонической составляющей –  $u_g$ , помехи –  $\delta u$ , поля эквивалентной модели –  $u'$ .

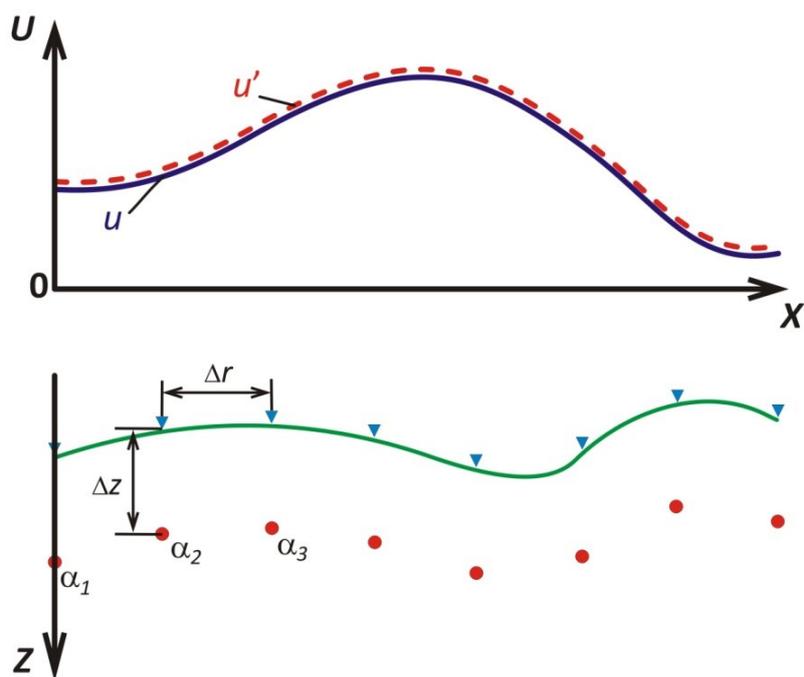


Рис. 25. Схема, поясняющая расположение эквивалентных источников в алгоритме В.И. Аронова

Простейшим элементарным телом, удобным для создания аппроксимационной конструкции, для гравитационного поля является материальная точка, для магнитного – магнитный диполь. В качестве физического параметра, ответственного за аномальный эффект тела, выступает аномальная масса (для магнитного поля – магнитный момент).

Расположим точечные источники под каждым пунктом наблюдений на глубине  $\Delta z = const$  и определим их аномальные массы путем решения СЛАУ с приближенно заданной правой частью вида

$$\mathbf{G}\alpha = \mathbf{u}, \quad (12)$$

где  $\alpha$  – вектор неизвестных значений аномальных масс (или магнитных моментов),  $\mathbf{G}$  – квадратная матрица значений гравитационных эффектов для точечного источника с единичной массой ( $\alpha = 1$ ). Под гравитационным эффектом в данном случае подразумевается первая вертикальная производная гравитационного потенциала точечного источника:

$$G = V_z = \gamma \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (13)$$

где  $x, y, z$  – расстояния от источника до точки наблюдений. СЛАУ (36) решается итерационным методом, например – методами Зейделя или релаксации, с точностью  $\|\mathbf{G}\alpha - \mathbf{u}\| \cong \delta$ . Это означает, что невязка модельного и измеренного полей, рассчитанная в выбранной метрике на множестве точек измерений  $M$  является сопоставимой с уровнем помех. Поясним запись СЛАУ (12) в матричной форме. В частности, для четырех точек задания поля будут использоваться 16 коэффициентов при неизвестных, и система четырех уравнений будет выглядеть так:

$$\begin{cases} G_{11}\alpha_1 + G_{12}\alpha_2 + G_{13}\alpha_3 + G_{14}\alpha_4 = u_1 \\ G_{21}\alpha_1 + G_{22}\alpha_2 + G_{23}\alpha_3 + G_{24}\alpha_4 = u_2 \\ G_{31}\alpha_1 + G_{32}\alpha_2 + G_{33}\alpha_3 + G_{34}\alpha_4 = u_3 \\ G_{41}\alpha_1 + G_{42}\alpha_2 + G_{43}\alpha_3 + G_{44}\alpha_4 = u_4 \end{cases} \quad (14)$$

При соблюдении неравенства

$$1 \leq \Delta z / \Delta r \leq 2, \quad (15)$$

обеспечиваются высокая скорость сходимости итерационного процесса и хорошее качество аппроксимации поля  $u$ . СЛАУ (12), как правило, имеет большую размерность и содержит порядка  $10^4$ – $10^6$  неизвестных. Для ее решения используются итерационные методы, например метод Зейделя, релаксации, наискорейшего градиентного спуска и т.п. Первоначально в этих методах задается некоторое приближенное решение – начальное приближение неизвестных. После этого с помощью некоторого алгоритма проводится один цикл вычислений, называемый итерацией. В результате итерации находят новое, более точное, приближение. Итерации проводятся до получения решения СЛАУ с требуемой точностью:  $\|\mathbf{G}\alpha - \mathbf{u}\| \leq \delta$ .

Когда массы источников  $\alpha$  определены, выполнить аналитическое продолжение поля  $u'$  в верхнее полупространство на высоту  $z_1$ ,  $z_1 < z$  (ось OZ направлена вниз) можно путем решения прямой задачи с оператором  $G^* = \gamma \frac{z+z'}{[x^2+y^2+(z+z')^2]^{3/2}}$ , полученным при коррекции аппликат на недостающую величину  $z'$ :  $z' = z_1 - z$ . Таким образом, аномалии силы тяжести на высоте  $z_1$  будут представлять собой результат умножения матрицы  $\mathbf{G}^*$  на вектор  $\alpha$ . Аналитическое продолжение поля  $u'$  есть аппроксимационное продолжение поля  $u$ .

Если вместо  $G^*$  использовать выражение гравитационного потенциала точечной массы или его производной любого порядка, то можно преобразовать исходное поле  $u$  в соответствующую функцию (трансформанту)  $v$  в произвольно

выбранных точках пространства, вне источников. Например, для расчета первой вертикальной производной на уровне наблюдений оператор решения прямой задачи будет иметь вид  $V_{zz} = \gamma \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{[x^2 + y^2 + z^2]^{5/2}}$ .

Несомненными *достоинствами этого класса методов являются высокая точность преобразований цифровых моделей геофизических полей, учет различий в высотах точек измерений, подавление негармонической составляющей (помехи), возможность одновременного выполнения 3D-интерполяции и трансформации данных. В пределах рудных районов, характеризующихся расчлененным рельефом дневной поверхности, во многих случаях полезным является пересчет гравитационных и магнитных аномалий на горизонтальную плоскость  $z = \text{const}$ .*

*Программа трансформации гравитационных аномалий APPG.* Программа имеет стандартный для WINDOWS интерфейс пользователя. Главное окно программы APPG имеет 2 панели «Аппроксимация поля» и «Восстановление поля», началом работ является задание необходимых параметров построения аппроксимационной конструкции на первой панели. Вторая панель «Восстановление поля» используется уже после решения СЛАУ и записи файла sig.dat. Для удобства пользователя компоненты на обеих панелях снабжены всплывающими ярлычками подсказки, а также в программу встроена краткая инструкция (рис. 26, 27).

*Решение СЛАУ (12) осуществляется методом релаксации,* что обеспечивает достаточно высокую скорость сходимости итерационного процесса и не требует дополнительного объема оперативной памяти компьютера для хранения промежуточных результатов.

Для подбора аппроксимационной модели целесообразно первоначально задавать 25–35 итераций при параметре  $\varepsilon$ , соизмеримым с точностью выполненной гравиметрической съемки. В частности, для гравиметрических съемок масштаба 1:25 000–1:50 000 оптимальными являются значения  $\varepsilon_3 = 0.02–0.1$  мГал.

В процессе решения практических задач установлено, что амплитуда помех негармонического характера может достигать в отдельных точках наблюдений нескольких мГал. Наличие «ураганных» значений  $\max |\Delta g_{\text{наб}} - \Delta g^*|$  существенно усложняет процесс решения задачи. Поэтому на начальной стадии вычислений может производиться двумерная (профильная) фильтрация поля  $\Delta g_{\text{наб}}$  с помощью 2D-аналога описанного выше алгоритма. Полученные результаты записываются в текстовый файл с именем dG\_2D-flt.grd. В этом случае для последующего окончательного решения задачи в 3D-варианте в качестве исходных используются значения гравитационного поля, записанные в файле dG\_2D-flt.grd.

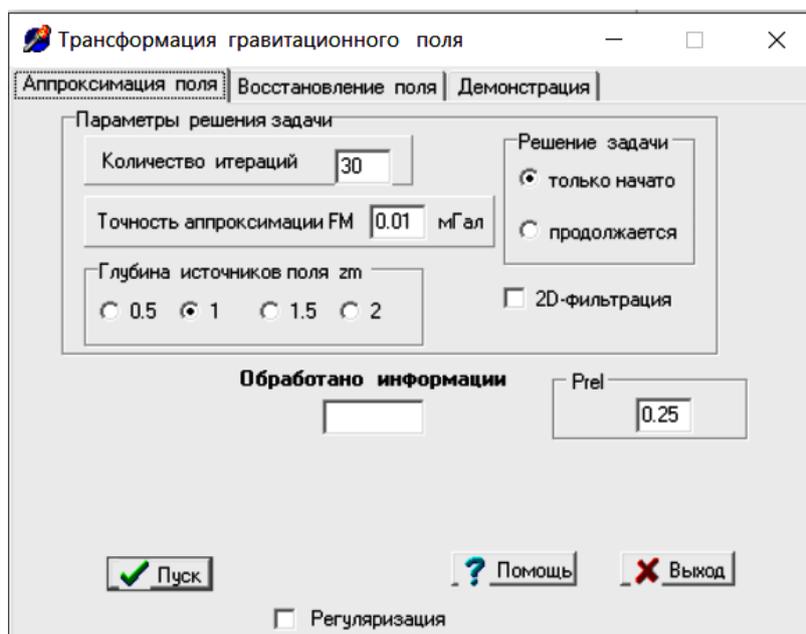


Рис. 26. Окно программы APPG: панель «Аппроксимация поля»

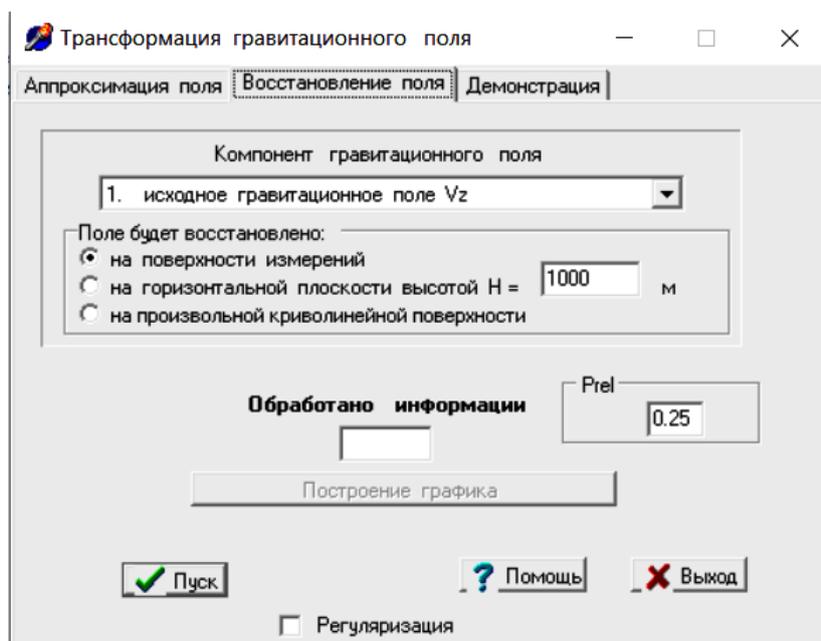


Рис. 27. Окно программы APPG: панель «Восстановление поля»

Ход процесса вычислений отображается в рабочем окне программы и одновременно записывается в файл протокола «Протокол Appg.txt». На каждой итерации выводятся следующие показатели качества решения и дополнительные параметры:  $N^o$  – номер итерации;  $F2$  – среднеквадратическое расхождение исходного и модельного полей (евклидова метрика);  $FM$  – максимальное (по модулю) расхождение исходного и модельного полей (метрика Чебышева).

В результате решения СЛАУ (12) формируется двоичный файл sig.bin, содержащий значения плотности  $\sigma$  элементов аппроксимационной конструкции.

Необходимо отметить, что никакому физико-геологическому истолкованию полученные значения не подлежат, так как являются просто одним из бесконечного множества  $\varepsilon$ -эквивалентных решений линейной обратной задачи гравиметрии, выполненных без каких-либо ограничений на параметры. Информация в файле sig.bin, перезаписывается через каждые пять итераций, что обеспечивает сохранность результивной информации при каком-либо техническом сбое, произошедшем в процессе работы. Данные из файла sig.bin считываются программой при необходимости уточнения ранее полученного решения.

Программа APPG имеет опцию «Восстановление поля», позволяющую на поверхности наблюдений  $S$  или на любой другой поверхности  $S'$ , не пересекающей источники, выполнять следующие операции:

- 1) осуществлять восстановление поля  $\Delta g^* (V_z)$ ;
- 2) рассчитывать его горизонтальную составляющую  $V_x$ ;
- 3) рассчитывать его горизонтальную составляющую  $V_y$ ;
- 4) вычислять первую вертикальную производную  $V_{zz}$ ;
- 5) вычислять вторую вертикальную производную  $V_{zzz}$ ;
- 6) вычислять разность кривизны уровенных поверхностей  $V_{\Delta} = V_{yy} - V_{xx}$ ;
- 7) вычислять модуль полного горизонтального градиента  $\sqrt{V_{zx}^2 + V_{zy}^2}$ ;
- 8) вычислять потенциал (первообразную) гравитационного поля  $V$ .

Как очевидно, частным случаем поверхности  $S'$  является горизонтальная плоскость. Приведение гравитационных аномалий к плоскости позволяет устранить искажения формы аномалий, обусловленные различной удаленностью по глубине (координате  $z$ ) точек измерений от возмущающих объектов. В качестве поверхности  $S'$  может также выступать сглаженный рельеф поверхности наблюдений (например – тренд высотных отметок). Необходимо, чтобы минимальное удаление поверхности  $S'$  от источников поля (сфер) было не меньше, чем шаг сети задания исходного поля.

Использованная вычислительная схема является асимптотически оптимальным способом вычисления трансформант. В отличие от традиционных приемов, базирующихся на численном дифференцировании и интегрировании дискретных значений поля, в данном случае учитывается влияние случайных помех и задание поля на реальном рельефе, а не на плоскости, а также ряд других факторов. Необходимо отметить, что за счет наличия в наблюдаемом поле фоновой составляющей  $\Delta g_{фон}$  могут возникать искажения поля  $\Delta g^*$  в краевых частях. Это является особенностью использования т.н. интегральных ядер Фейера, поэтому до начала работы с программой APPG из поля  $\Delta g_{наб}$  необходимо исключать фоновую составляющую. Обычно достаточно просто правильно выбрать нулевой

уровень гравитационного поля, обеспечивающий близкое к нулевому математическое ожидание суммарной амплитуды положительных и отрицательных аномалий на площади гравиметрической съемки.

*Демонстрационный пример программы APPG.* К программе прилагается тестовый пример, иллюстрирующий ее возможности. Показано гравитационное поле сферы с радиусом  $R = 100$  м, находящейся на глубине  $z = 200$  м от уровня моря ( $z = 0$ ), центр которой имеет координаты  $x = y = 1$  км, заданное на хребтообразной форме рельефа. Как очевидно, картина «наблюденного» гравитационного поля от этой весьма простой модели, существенно искажается за счет влияния рельефа поверхности измерений. При этом появляются ложные экстремумы  $\Delta g$ , расположенные за пределами проекции источника поля на дневную поверхность. Искаженное пространственное распределение поля на расчлененном рельефе местности может привести к пропуску искомым объектов при проведении горно-буровых работ в эпицентрах выявленных аномалий, и, как следствие – к ошибочным заключениям о перспективности изучаемых территорий. Пересчет поля на горизонтальную плоскость  $z = 1200$  м обеспечивает восстановление значений гравитационного поля, практически тождественное результату решения прямой задачи.

### Выполнение практической работы

*Характеристика исходных данных.* Данные о гравитационном поле  $\Delta g$  и ЦММ представляются в виде текстового файла в формате программы SURFER (grd-файла) со следующей структурой:

1 строка – DSAA (строковая переменная, определяющая тип файла);

2 строка –  $n$   $m$  (целые числа)

3 строка –  $Xmin$   $Xmax$  (вещественные числа)

4 строка –  $Ymin$   $Ymax$  (вещественные числа)

5 строка –  $Zmin$   $Zmax$  (вещественные числа)

6-я и последующие строки – значения  $Z$  поля или высотных отметок рельефа поверхности наблюдений (вещественные числа) в узлах квадратной сети с шагом  $L \times L$ , записанные по строкам, начиная с левого нижнего угла матрицы ( $i = m, j = 1$ ). В случае, если поле в части матрицы не охарактеризовано, то соответствующим точкам необходимо присвоить код неопределенного значения  $1.70141E+38$  (на стадии подготовки данных). При записи структуры файла использованы следующие обозначения:  $n, m$  – число строк и столбцов в матрице;  $Xmin, Xmax; Ymin, Ymax; Zmin, Zmax$  – минимаксы для координат и параметров (поля  $\Delta g$  или высот  $H$ ), соответственно.

Числа должны быть разделены пробелами или запятыми. Каждая строка матрицы начинается с новой строки символьного файла. Значения  $\Delta g$  задаются в мГал, значения высот  $H$  задаются *в метрах, для отметок рельефа, находящихся выше уровня моря  $H_{ij} > 0$* . Горизонтальные координаты  $X, Y$  задаются *в километрах* и отвечают прямоугольным координатам Гаусса–Крюгера (при замене геодезических осей  $OX$  и  $OY$  на принятые в математике оси  $OY$  и  $OX$ ). Также *может использоваться локальная система прямоугольных координат с началом в левой нижней точке участка*. Результаты вычислений записываются в текстовый  $grd$ -файл, совпадающий по размерности  $m \times n$  с входными данными.

Основные требования к исходным данным:

- 1) данная версия программы работает только с текстовыми (но не двоичными)  $grd$ -файлами;
- 2) значения координат  $X$  и  $Y$  задаются только *в километрах*;
- 3) размеры исходных матриц значений поля  $\Delta g$  и высот  $H$  (число строк  $m$  и столбцов  $n$ ) должны совпадать;
- 4) шаг  $L$  сети задания поля (и рельефа) по осям  $OX$  и  $OY$  должен быть одинаков (допускается различие не более, чем на 10%);
- 5) высокие значения поля  $\Delta g$  на периферии участка могут ухудшить качество решения задачи, поэтому желательно предварительно провести исключение регионального фона (вычесть среднее значение амплитуды);
- 6) не допускается наличие неопределенных значений ( $1.70141E+38$ ) в матрице высотных отметок рельефа местности (ЦММ).

1. Применить программу APPG для аппроксимации ранее полученных данных при выполнении практической работы № 4: ЦММ и значений гравитационного поля на земной поверхности (размер участка  $10 \times 10$  км, шаг между точками 200 м). Точность аппроксимации FM – 0.01 мГал, глубина источников поля  $z_m = 1.5$  (т.е. 200 м), число итераций 30. С помощью программы GRAFER построить характеристику итерационного процесса решения СЛАУ (12) – график изменения невязки с ростом числа итераций (рис. 28).

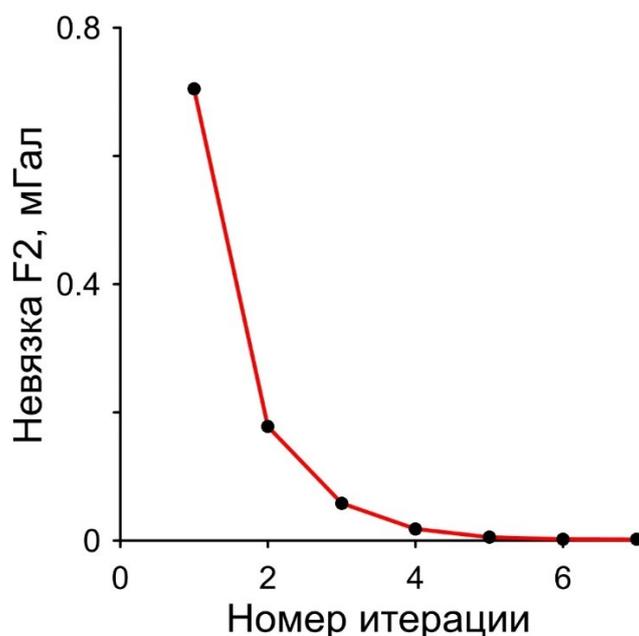


Рис. 28. Изменение невязки F2 исходного и модельного полей в процессе истокообразной аппроксимации

2. Провести восстановление гравитационного поля на земной поверхности и сопоставить его с исходными данными. Восстановить поле на высотах 800 м, 2 и 3 км и сравнить полученные результаты с результатами решения прямой задачи гравиразведки программой PRIZMA путем визуального сопоставления и вычисления разности соответствующих цифровых моделей полей (опция GRID/MATH программы SURFER). Выполнить построение карт изолиний аномального гравитационного поля в программе SURFER на этих высотах, а также карт разностных полей. Представить статистические характеристики (минимум, максимум, среднее значение, среднеквадратическое отклонение) разностных полей для трех использованных высот в виде таблицы. Оценить и количественно охарактеризовать влияние эффекта разновысотности точек наблюдений путем вычисления разности исходного гравитационного поля (на земной поверхности) и поля на высоте 800 м.

3. На горизонтальной плоскости высотой 800 м рассчитать значения 1-й и 2-й вертикальных производных гравитационного поля  $V_z$  и  $V_{zz}$ , соответственно, а также модуля полного горизонтального градиента. Построить графические изображения результатов (рис. 29). Сопоставить морфологию полученных трансформант и охарактеризовать целесообразность их использования для выделения и оконтуривания геоплотностных неоднородностей.

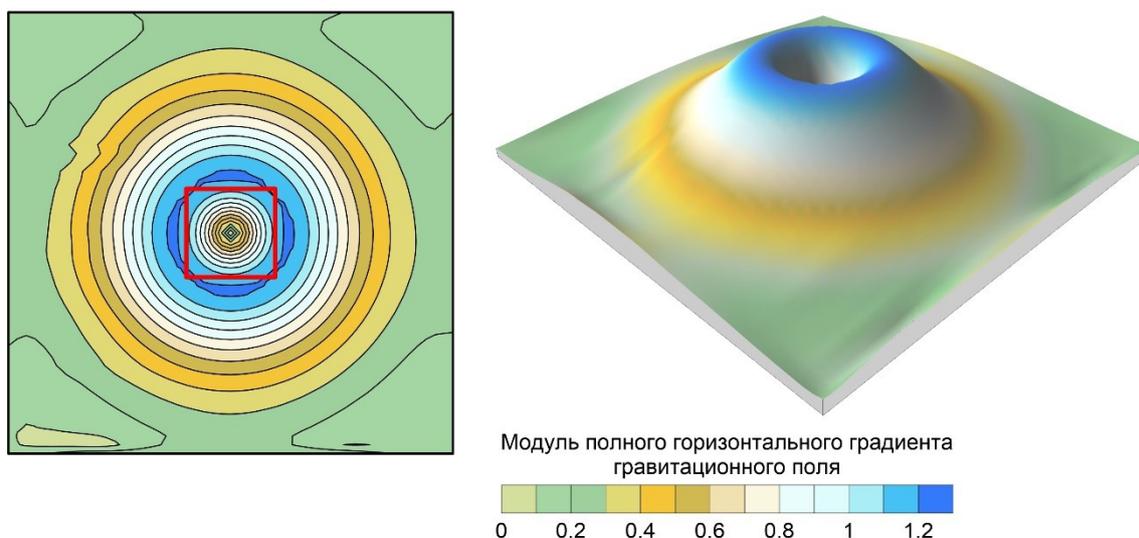


Рис. 29. Карта изолиний и 3D-поверхность модуля полного горизонтального градиента гравитационного поля призмы (красный контур – основание призмы)

4. Выполнить аппроксимацию гравитационного поля, полученного путем решения прямой задачи с использованием программы PRIZMA на горизонтальной плоскости высотой 800 м. Точность аппроксимации FM – 0.01 мГал, глубина источников поля  $z_m = 1.5$  (т.е. 200 м), число итераций – 30. Провести восстановление поля на высотах 2000 м и 3000 м, сопоставить полученные поля с результатами решения прямой задачи для этих же уровней. Представить статистические характеристики (минимум, максимум, среднее значение, среднеквадратическое отклонение) разностных полей для двух использованных высот в виде таблицы.

*Комментарий.* Во всех случаях пересчет поля на горизонтальную плоскость, расположенную выше максимальной высотной отметки рельефа дневной поверхности приводит к упрощению морфологии аномалий и существенно облегчает выделение и оконтуривание возмущающих объектов. В случае, представленном в п. 2, отмечаются некоторые расхождения результатов пересчета поля программой APPG решениями прямой задачи. Следует обратить внимание на концентрацию наиболее заметных расхождений в периферических частях площади – т.н. краевые эффекты. Это говорит о том, что возможности аппроксимационной конструкции с одним уровнем размещения точечных масс по точности преобразования поля ограничены. ***Существенное повышение качества трансформации можно обеспечить за счет использования многоуровневых аппроксимационных конструкций.*** Размещение эквивалентных источников на

нескольких уровнях глубин более адекватно отражает пространственное расположение масс в реальных физико-геологических условиях.

*Требования к содержанию и оформлению работы.* Отчет по практической работе должен содержать: 1) краткие теоретические сведения (1–2 стр.) и характеристику исходных данных для расчета (параметры аномалиеобразующей призмы, карты гравитационного поля и рельефа местности; 2) карты полученных трансформант и таблицу со статистическими характеристиками параметров (минимум, максимум, среднее значение, среднеквадратическое отклонение); 3) график итерационного процесса, отражающий процесс решения СЛАУ методом релаксации; 4) оценку применения полученных трансформант для выделения и оконтуривания возмущающего объекта; выводы: 5) привести количественную оценку точности выполненных трансформаций; 6) указать преимущества истокообразной аппроксимации перед традиционными методами трансформации геопотенциальных полей; 7) обосновать целесообразность пересчета значений гравитационного поля с расчлененного рельефа дневной поверхности на горизонтальную плоскость, расположенную примерно на уровне максимальной высотной отметки участка.

### Литература

1. *Аронов В.И.* Методы построения карт геолого-геофизических признаков и геометризации залежей нефти и газа на ЭВМ. М.: Недра, 1990. 300 с.
2. *Гордин В.М., Михайлов В.О., Михайлов Б.О.* Физические аспекты аппроксимации и фильтрации аномальных полей // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1980. № 1. С. 78–93.
3. *Гравиразведка: справочник геофизика* / под ред. Е.А. Мудрецово́й, К.Е. Веселова. 2-е изд. перераб. и доп. М.: Недра, 1990. 607 с.
4. *Долгаль А.С.* Гравиметрия и магнитометрия: трансформации геопотенциальных полей: Допущено методическим советом Пермского государственного национального исследовательского университета в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по направлению подготовки магистров «Геология» / Пермь: Издательский центр ПГНИУ, 2022. 140 с.
5. *Долгаль А.С.* Компьютерные технологии обработки и интерпретации данных гравиметрической и магнитной съемок в горной местности. Абакан: «ООО Фирма-МАРТ», 2002. 188 с.
6. *Долгаль А.С., Костицын В.И., Новикова П.Н., Пугин А.В.* Алгоритмы аппроксимации геопотенциальных полей истокообразными функциями // Геофизика. 2016. № 5. С. 4–10.

7. Долгаль А.С., Костицын В.И., Новикова П.Н., Пугин А.В., Рашидов В.А., Христенко Л.А. Практическое применение истокообразной аппроксимации геолого-геофизических данных // Геофизика. 2017. № 5. С. 29–37.
8. Долгаль А.С., Пугин А.В., Новикова П.Н. История метода истокообразных аппроксимаций геопотенциальных полей // Физика Земли. 2022. Т. 2, № 2. С. 3–26.
9. Долгаль А.С., Христенко Л.А. Совершенствование компьютерной технологии разделения аномалий силы тяжести с применением эквивалентных источников // Геофизические исследования. 2023. Т. 24, № 1. С. 31–43.
10. Костицын В.И., Хмелевской В.К. Геофизика / Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2018. 428 с.
11. Кудрявцева И.В., Прокуратова О.Н. Метод релаксации решения СЛАУ, программная реализация, примеры расчетов // Наука и современность. 2013. № 21. С. 152–156.
12. Патент № 2431160 С1 Российская Федерация, МПК G01V 7/06. Способ построения трансформант гравитационного поля : № 2010101347/28 : заявл. 18.01.2010 : опубл. 10.10.2011 / С. Г. Бычков, А.С. Долгаль, А.В. Пугин, Н.В. Веселкова; заявитель Учреждение Российской академии наук Горный институт Уральского отделения РАН (ГИ УрО РАН).
13. Страхов В.Н., Керимов И.А., Степанова И.Э. Разработка теории и компьютерной технологии построения линейных аналитических аппроксимаций гравитационных и магнитных полей. ОИФЗ РАН. М., 2009. 254 с.
14. Li, Duan & Liang, Qing & Du, Jinsong & Chao, Chen. (2022). A Dual-Layer Equivalent-Source Method for Deriving Gravity Field Vector and Gravity Tensor Components from Observed Gravity Data. Pure and Applied Geophysics. 179. DOI: 10.1007/s00024-022-03047-3.

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 5**  
**«Решение обратной задачи гравиразведки**  
**для 2D призмы методом статистических испытаний»**

**Теоретические сведения**

*Общие сведения.* **Обратная задача** – тип задач, часто возникающий во многих разделах науки, когда значения параметров модели должны быть получены из наблюдаемых данных. Определение местоположения, формы, глубины залегания, размеров и плотности возмущающих объектов по известным аномалиям силы тяжести или вторых производных потенциала называется **обратной задачей гравиразведки**. Специфическими особенностями обратной задачи являются отсутствие единственности ее решения и неустойчивость получаемых результатов. Такие задачи в математической физике носят название «некорректных».

Обратная задача состоит в том, чтобы по заданным значениям компонент поля  $V$  определить вектор параметров модели источников поля  $P$ . Таким образом, обратная задача в операторной форме может быть записана так:

$$P=L^{-1}(V) . \quad (16)$$

В математике обратные задачи подразделяются на **линейные** и **нелинейные** в соответствии с типом оператора прямой задачи (1). В геофизике к линейным обратным задачам обычно относят те из них, где оценке подлежат физические характеристики изучаемых геологических объектов, а к нелинейным – обратные задачи, в которых искомыми величинами являются их геометрические параметры (рис. 30). На практике часто приходится иметь дело со смешанными постановками задач: неизвестны как геометрические, так и физические характеристики источников поля.

В различных классах распределений масс характер связи аномалий элементов гравитационного поля и степень трудности решения обратных задач гравиразведки различны. Выделяются три идеализированных класса обратных задач: а) задачи типа рудных; б) структурные задачи; в) задачи со сложным распределением масс.

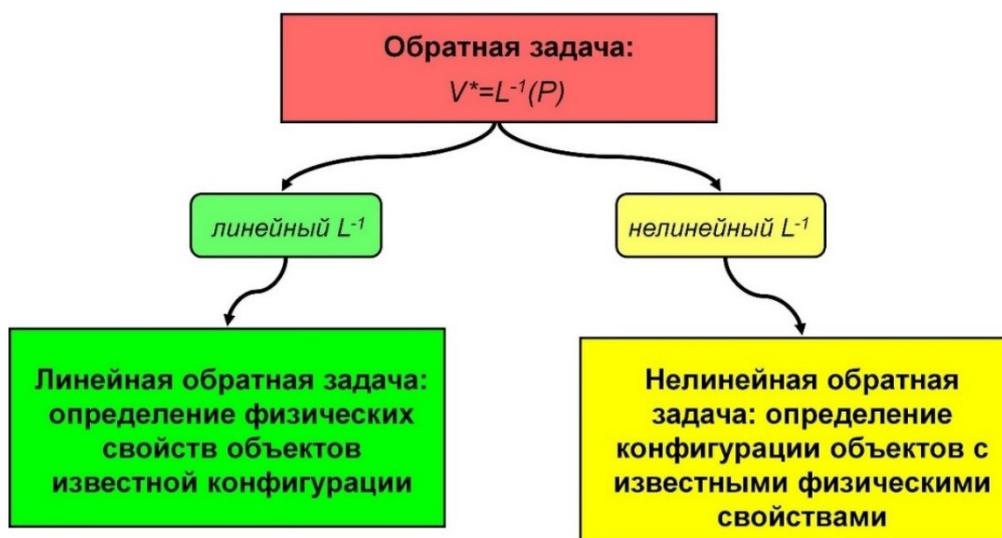


Рис. 30. Классификация обратных задач в гравиразведке и магниторазведке по типу оператора  $L^{-1}$

**Задачи рудного типа** – это задачи, в которых аномалиеобразующими объектами являются конечные односвязные (попарно не пересекающихся) тела с постоянной или переменной плотностью  $\sigma$ , находящиеся в однородной по плотности вмещающей среде.

**Структурные задачи** – задачи, в которых носителем масс является слоистая среда. Иными словами, нижнее полупространство есть совокупность слоев, не имеющих общих точек. Каждый из слоев заполнен массами постоянной или переменной плотности.

**Задачи со сложным распределением масс** – это задачи, в которых как бы объединяются распределения масс, характерные для структурных задач и задач рудного типа. По сути это – модели сложнопостроенных слоисто-блоковых сред с включениями.

Существование нескольких решений, соответствующих одному аномальному полю, называют **эквивалентностью**. Если поля моделей совпадают с абсолютной точностью во всем внешнем пространстве, то эти модели называют **теоретически эквивалентными (t-эквивалентными)**. Можно сказать, что теоретическая эквивалентность порождает отсутствие единственности решения обратных задач. В основе этого явления лежит существование распределений физических свойств, которые не порождают внешних аномальных полей.

Еще гораздо шире развита так называемая **практическая эквивалентность**, когда разные модели создают очень близкие, но не абсолютно совпадающие внешние поля. Практическая эквивалентность, которую еще иногда называют  **$\varepsilon$ -эквивалентностью**, порождает **неустойчивость** решения обратных задач.

Различают  $\varepsilon$ -эквивалентность двух типов: 1) во многих элементах внешнего поля на больших множествах их задания; 2) в одном элементе поля на узких множествах его задания. Для первого типа разность между двумя  $\varepsilon$ -эквивалентными распределениями масс практически совпадает с распределением масс нулевого внешнего потенциала (рис. 31а). Преодоление такой эквивалентности возможно только за счет учета дополнительной информации, за счет сужения модельных классов источников поля на основе введения дополнительных ограничений на решение.

Во втором классе разность между двумя  $\varepsilon$ -эквивалентными распределениями масс не очень близка по свойствам к распределениям масс нулевого внешнего потенциала: даже значения суммарной массы и координат центра тяжести могут быть для  $\varepsilon$ -эквивалентных распределений в этом классе заметно различными (рис. 31б). С такой  $\varepsilon$ -эквивалентностью можно бороться, расширяя площадь съемки и дополняя измерения одного элемента поля измерениями других элементов (например, измерения поля  $\Delta g$  измерениями вторых производных потенциала).

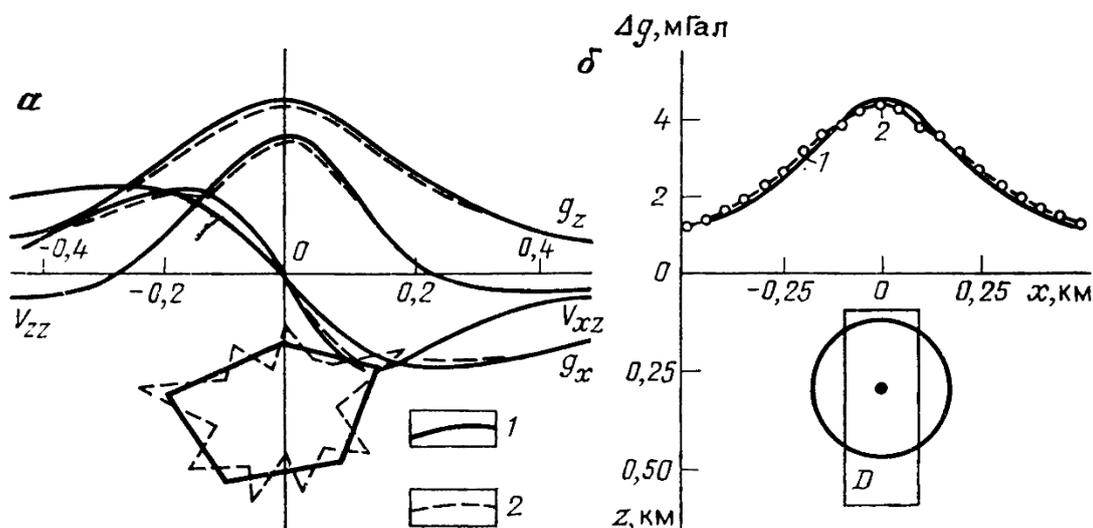


Рис. 31. Примеры  $\varepsilon$ -эквивалентности в гравиразведке (по «Справочнику геофизика. Гравиразведка»): *a* – эквивалентность связана с высокочастотными возмущениями контура тела постоянной плотности: 1 – контур звездного тела и производные гравитационного потенциала от этого тела; 2 – возмущенный контур звездного тела и те же производные от него; *б* – эквивалентность поля призмы (1) и шара (2)

В сложных физико-геологических условиях для решения обратной задачи (16) гравиразведки применяют метод подбора. Суть этого метода состоит в по-

следовательном переборе уточняющихся геоплотностных моделей, расчете гравитационного эффекта от этих моделей с помощью решения прямой задачи (1), сопоставлении полученных значений модельного поля  $\Delta g_{\text{мод}}$  с наблюдаемым полем  $\Delta g_{\text{наб}}$ . Необходимым условием завершения итерационного процесса уточнения параметров модели является достижение высокой степени совпадения полей  $\|\Delta g_{\text{наб}} - \Delta g_{\text{мод}}\| \leq \varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$  – достаточно малая величина, соизмеримая с точностью определения аномалий Буге для используемой гравиметрической съемки.

Метод реализуется в двух вариантах: неформализованный подбор, когда корректировка параметров модели выполняется вручную, на основании интуиции и опыта интерпретатора и автоматизированный подбор, основанный на решении задачи многомерной оптимизации с ограничениями на вектор переменных  $\mathbf{P}$ . В последнем случае для поиска решения используются детерминистские алгоритмы градиентного спуска, Ньютона, сопряженных градиентов, Нелдера–Мида и др. Также для этой цели могут использоваться алгоритмы случайного поиска.

Ниже будет рассмотрен простой по структуре алгоритм решения нелинейной обратной задачи гравиразведки для моногеничной (т.е. обусловленной одним источником) аномалии, реализующий метод статистических испытаний (Монте-Карло). Данный алгоритм был специально разработан с целью обучения студентов и позволяет на практике получать необходимые представления о методе подбора, разрешающей способности гравиразведки, неоднозначности и неустойчивости решения обратной задачи, имитационном моделировании, модельных классах источников поля, множестве допустимых решений и т.п.

Метод Монте-Карло был предложен Станиславом Марцином Уламом (Stanisław Marcin Ulam) и Джоном фон Нейманом (John von Neumann) в 1949 г. для моделирования нейтронной диффузии в процессе работы в Лос-Аламосе по «Проекту Манхэттен» («Manhattan Project»), реализующим программу США по разработке ядерного оружия. Суть метода заключается в описании случайного процесса математической моделью, допускающей выполнение большого объема вычислений с различными входными данными, полученными путем генерации случайных чисел, с целью определения статистических характеристик рассматриваемого процесса. Прямое моделирование методом Монте-Карло какого-либо физического процесса подразумевает моделирование поведения отдельных элементарных частей физической системы.

*Алгоритм и программа решения обратной задачи.* В данном случае при решении 2D обратной задачи гравиразведки для одиночного изолированного

аномалиеобразующего объекта, расположенного в однородной среде и обладающего эффективной плотностью  $\sigma$ , в роли элементарных частей системы выступают прямоугольные координаты его угловых точек. В алгоритме используются три модельных класса тел: горизонтальные прямоугольные призмы, наклонные пласты (параллелограммы), горизонтальные четырехугольные призмы. Согласно теореме Новикова, решение обратной задачи гравirazведки в этих классах тел, звездных относительно заданной точки, при известной постоянной эффективной плотности является единственным. Однако на практике, в силу дискретного задания значений наблюдаемого поля  $\Delta g_{\text{наб}}$ , осложненных помехами и ограниченной длины профиля наблюдений, эту возможность реализовать нельзя.

Во всех случаях вектор параметров модели имеет размерность  $m = 8$  и выглядит одинаково:  $\mathbf{P} = \{x_1, z_1, x_2, z_2, x_3, z_3, x_4, z_4\}$ . Интерпретатором задается начальное приближение – вектор  $\mathbf{P}_0$ , затем выполняется внешний цикл, состоящий из  $K$  итераций, результатом которого является последовательность векторов  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_K$ , обеспечивающих уменьшение невязки наблюдаемого и модельного полей в евклидовой метрике:

$$F2 = \sum_1^N (\Delta g_{\text{наб}} - \Delta g_{\text{мод}})^2 / N, \quad (17)$$

где  $N$  – число точек измерений поля. Степень близости полей также контролируется в метрике Чебышева  $FM = \max |\Delta g_{\text{наб}} - \Delta g_{\text{мод}}|$ , характеризующей максимальное по модулю различие амплитуды полей в точке наблюдений. Необходимым условием внешнего цикла вычислений является выполнение неравенства  $F2^{k+1} \leq F2^k$ , где  $k = \overline{1, K}$  – номер итерации. Рекомендуемое число итераций  $K$  составляет 20–50.

В пределах внутреннего цикла (отдельной итерации) генерируется  $M$  случайных векторов  $\mathbf{P}$ , при этом выполняется следующая последовательность операций:

- 1) определяются минимальные и максимальные значения координат угловых точек уже имеющегося аномалиеобразующего объекта  $x^{\min}, z^{\min}, x^{\max}, z^{\max}$  (первоначально используется вектор  $\mathbf{P}_0$ );
- 2) по имеющимся значениям  $x^{\min}, z^{\min}, x^{\max}, z^{\max}$  вычисляются координаты  $(x_{\text{ц}}, z_{\text{ц}})$  центра прямоугольника, описанного вокруг этого объекта. Размеры этого прямоугольника являются ограничениями при дальнейшем построении пробных тел (рис. 32);

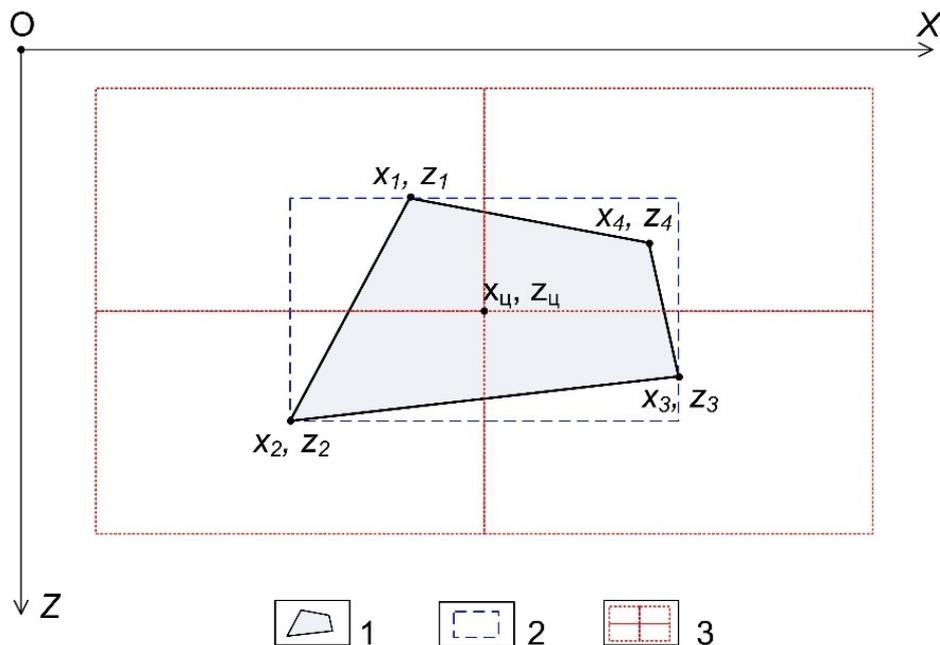


Рис. 32. Схема, поясняющая алгоритм решения обратной задачи гравиразведки в классе 2D горизонтальных четырехугольных призм: 1 – аномалиеобразующий объект; 2 – описанный прямоугольник; 3 – четыре подобласти, в пределах которых определяется местоположение угловых точек нового объекта

- 3) вычисляются новые координаты угловых точек для горизонтальной четырехугольной призмы с использованием восьми псевдослучайных чисел  $\tau$ , равномерно распределенных внутри интервала  $[0,1]$ :  $x = x_{ц} \pm \tau(x^{max} - x^{min})$ ,  $z = z_{ц} \pm \tau(z^{max} - z^{min})$ . Для прямоугольной призмы достаточно случайным образом определить координаты верхней левой и нижней правой угловых точек, используя только четыре числа  $\tau$ , так как  $x_1 = x_2, x_3 = x_4, z_1 = z_4, z_2 = z_3$ . Расчет горизонтальной и вертикальной мощности, а также угла падения наклонного пласта, требует пяти псевдослучайных чисел  $\tau$ , так как в этом случае  $z_1 = z_4, z_2 = z_3, x_4 - x_1 = x_3 - x_2$ .
- 4) выполняется решение прямой задачи гравиразведки для нового аномалиеобразующего тела по формулам Е.Г. Булаха и вычисление невязки  $F2^k$  по формуле (17);
- 5) в случае, если полученная невязка полей  $F^k < F^{k-1}$ , где  $k$  – номер текущей итерации, выполняется выход из внутреннего цикла. При  $F^k \geq F^{k-1}$  осуществляется переход к началу цикла. Число  $M$  (количество пробных тел) задается пользователем и обычно составляет от  $10^2$  до  $10^5$ .

Алгоритм был реализован в виде программы PODBOR\_ST, написанной с использованием объектно-ориентированного языка программирования Delphi (рис. 33). Перед решением обратной задачи необходимо выбрать модельный

класс тел, задать количество точек измерений  $N$ , шаг между точками (в км), эффективную плотность тела (в г/куб. см), требуемое количество итераций  $K$ , число случайных векторов  $M$ , а также выключить/включить опцию «Случайность». Последнее означает использование/отказ от использования одной и той же последовательности псевдослучайных чисел  $\{\tau\}$ , имеющей очень большую периодичность. В случае отказа включается процедура RANDOMIZE, что иногда помогает улучшить результаты случайного поиска. Затем вводятся имя DAT-файла, содержащего порядковые номера, высотные отметки и значения аномального гравитационного поля в точках наблюдений, а также имя BLN-файла для начального приближения моделируемого объекта. Алгоритм не требует «хорошего» начального приближения и характеризуется высоким быстродействием.

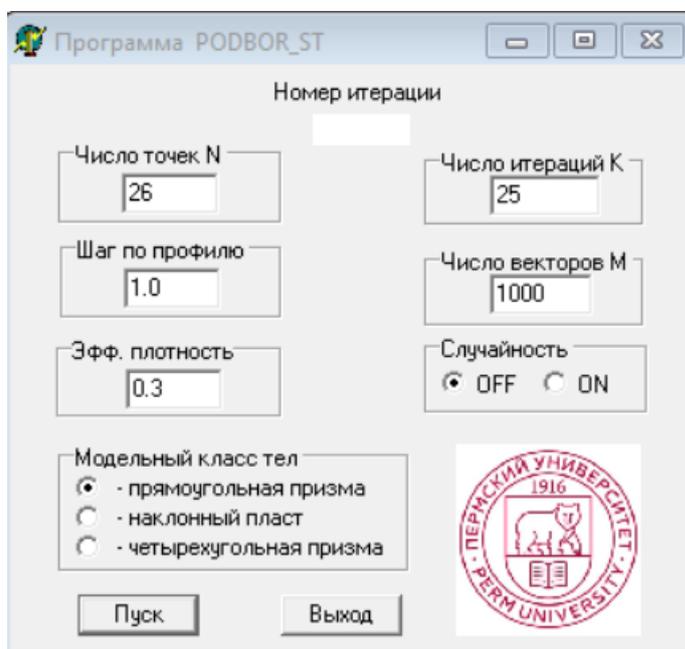


Рис. 33. Главное окно программы PODBOR\_ST

Выходными данными программы являются BLN-файлы, содержащие модели источников, полученные на каждой итерации и DAT-файлы полей, созданных этими источниками. Также записывается текстовый файл протокола расчета, в каждой строке которого содержатся номер итерации  $k$ , значения функционалов  $F2$  и  $FM$ , прямоугольные координаты центра описанного прямоугольника  $x_{ц}, z_{ц}$ . Варьируя значениями  $K$  и  $M$  практически в любых случаях удается достигнуть необходимой точности решения поставленной обратной задачи.

*Имитационное моделирование* является основным инструментом тестирования компьютерных технологий решения обратных задач геофизики. Согласно В.Н. Страхову, оно состоит в следующем:

- 1) создание набора адекватных реальности числовых моделей изучаемого фрагмента геологической среды или геологического объекта;
- 2) расчет аномальных эффектов для каждой из построенных моделей путем решения прямой задачи геофизики;
- 3) осложнение полученных модельных полей искусственной помехой с некоторыми ожидаемыми на практике параметрами;
- 4) решение целевых задач интерпретации для полученного набора данных, имитирующих изучаемый фрагмент среды или объект;
- 5) сопоставление результатов, полученных для набора различных моделей и помех во входных данных;
- 6) оценка на качественном уровне надежности и точности решения поставленной задачи.

*Гарантированный подход.* Концепция гарантированного подхода в гравиразведке, впервые озвученная в работах П.И. Балка, возникла из осознания того, что единичное решение обратной задачи, каким бы свойством оптимальности оно ни обладало, не в состоянии охватить тот объем информации об объекте исследования, которую несут данные измерений поля в совокупности с сопутствующими априорными ограничениями и которая находит свое выражение в множестве допустимых вариантов интерпретации  $Q_0$ . **Основное достоинство гарантированного подхода состоит в том, что он позволяет дать объективную оценку разрешающим возможностям гравиразведки в конкретных физико-геологических условиях.** Возможности современных компьютеров позволяют сравнительно легко сформировать подмножество допустимых решений обратной задачи  $Q_0$ , содержащее до нескольких десятков и сотен элементов. Чисто детерминистским инструментом к анализу структуры  $Q_0$  является гарантированный подход, использующийся с целью построения геологически содержательных инвариантов. Для обратной задачи рудного типа в результате гарантированного подхода можно выделить максимальный общий фрагмент  $D_2$ , за пределами которого отсутствуют возмущающие массы, а также минимальную область пространства  $D_1$ , содержащую эти массы. На языке теории множеств область  $D_2$  является объединением всех допустимых решений обратной задачи, область  $D_1$  – их пересечением. Искомый аномалиеобразующий объект  $S$  всегда будет находиться внутри области  $D_2$ , а область  $D_1$  будет являться его фрагментом:  $D_1 \subset S \subset D_2$ .

## Выполнение практической работы

1. С использованием программы PGM решить прямую задачу гравirazведки для одиночной многоугольной призмы, имеющей 4–8 угловых точек. Эффективная плотность призмы  $0.2\text{--}0.5\text{ г/см}^3$ . Профиль расчета поля  $\Delta g$  горизонтальный, направлен вдоль оси X, все высоты точек равны нулю. Шаг расчета  $100\text{--}200\text{ м}$ . Рекомендуемое расположение призмы и расчетного профиля приведено на рис. 34. Результат решения прямой задачи сохранить в DAT-файле, содержащим порядковые номера и высотные отметки точек, а также значения аномального гравитационного поля в них.

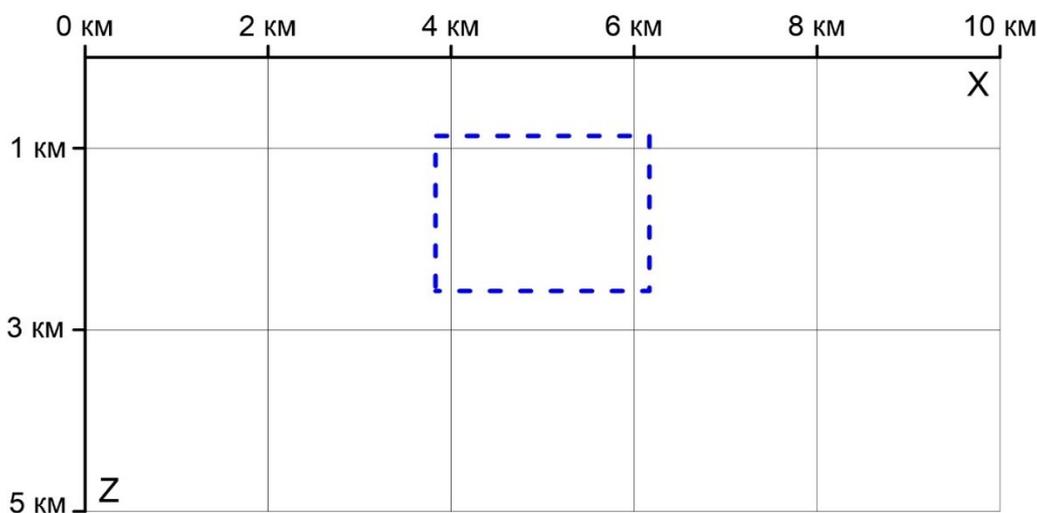


Рис. 34. Исходная модель для выполнения практической работы: аномалиеобразующая призма должна располагаться внутри прямоугольника, показанного синим пунктиром

2. Сформировать начальное приближение возмущающего объекта – 4-угольную горизонтальную призму, расположенную внутри области поиска решения обратной задачи:  $0 \leq x \leq 10, 0 \leq z \leq 5$  (в км). Приближение представляет собой BLN-файл. С помощью программы PODBOR\_ST решить обратную задачу гравirazведки для имеющихся исходных данных в трех вариантах: для прямоугольной призмы, наклонного пласта и произвольной четырехугольной призмы. Задать количество итераций  $K = 40\text{--}60$ , число векторов  $M = 10000$ . Параметр «Случайность» отключить. Представить графически полученные результаты (примеры приведены на рис. 35, 36).

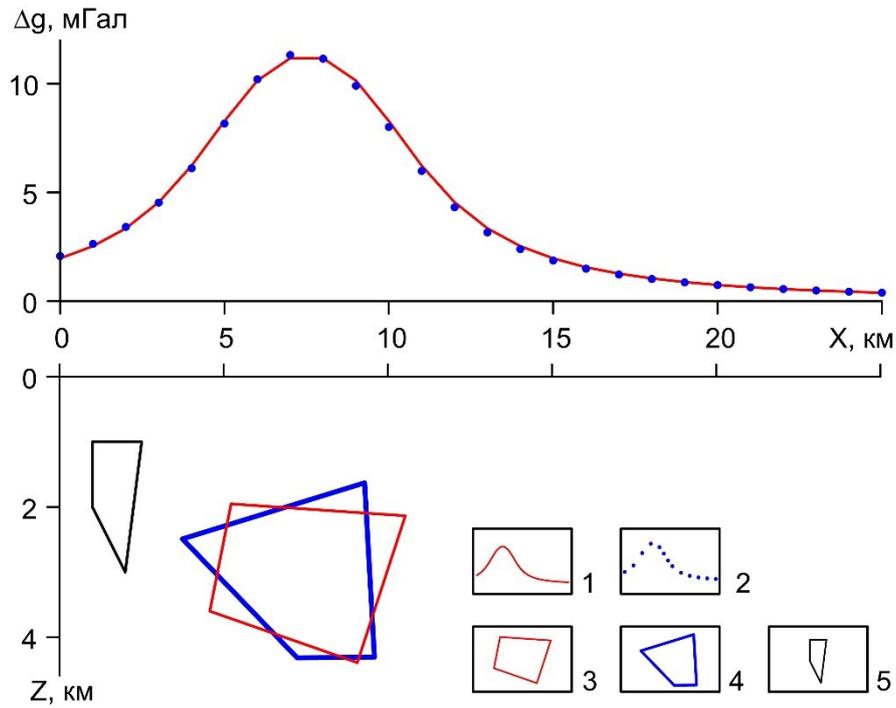


Рис. 35. Решение обратной задачи в классе четырехугольных призм произвольного сечения:  
 1 – наблюдаемое поле; 2 – модельное поле;  
 3 – возмущающий объект; 4 – подобранная модель источника;  
 5 – начальное приближение

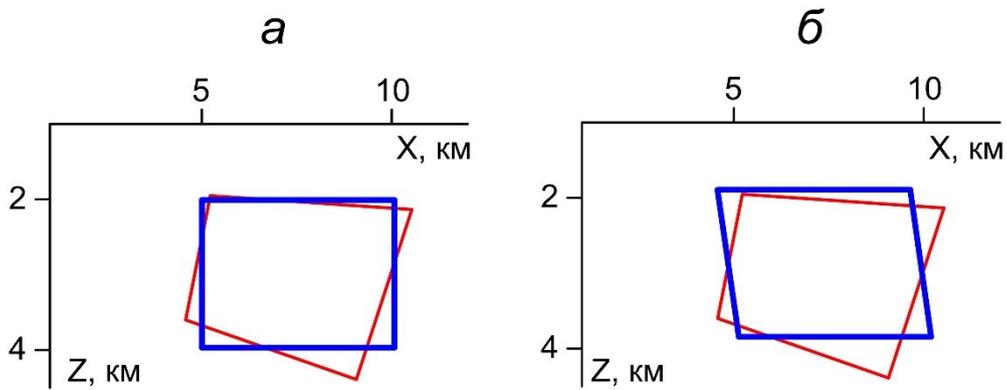


Рис. 36. Результаты решения обратной задачи в классах прямоугольных призм (а) и наклонных пластов (б). Условные обозначения даны на рис. 35

3. Просмотреть протокол работы программы, построить графики изменения невязки наблюдаемого и модельного полей в евклидовой метрике и метрике Чебышева (рис. 37).

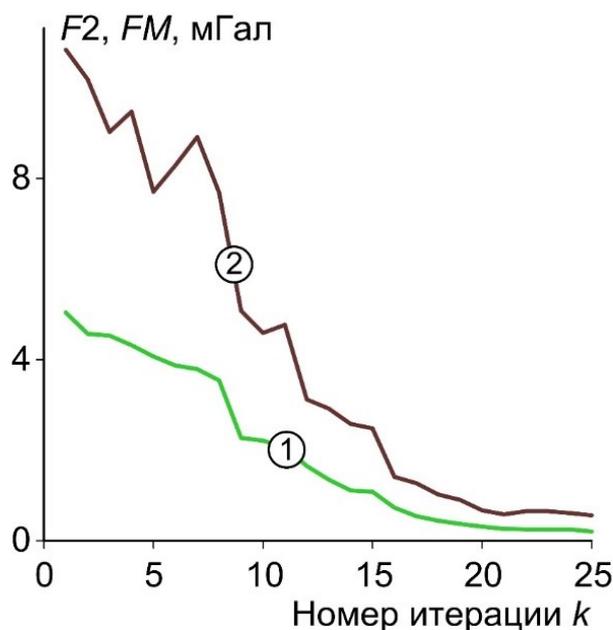


Рис. 37. Графики изменения невязки  $F1$  (1) и  $FM$  (2) в процессе решения обратной задачи

4. Гравитационное поле, обусловленное призмой (пункт 1), осложнить случайной нормально распределенной помехой с нулевым математическим ожиданием и среднеквадратическим отклонением, составляющим около 2% от максимальной амплитуды аномалии. Для этой цели использовать опцию программы SURFER WORCSHEET/TRANSFORM и команду для генерации нормально распределенных случайных чисел RANDN(a, b), где a – математическое ожидание, b – среднеквадратическое отклонение. Для поля, осложненного помехой, решить обратную задачу для трех предусмотренных в программе модельных классах тел. Сопоставить между собой результаты решения обратной задачи, полученные по точно заданному и осложненному помехой полю, используя опция MAP/ADD.

5. По полю, осложненному помехой, для любого из имеющихся модельных классов тел выполнить 5–7 серий решения обратной задачи при включенной опции «Случайность». Это обеспечивает различия получаемых конечных результатов моделирования возмущающего объекта. Область геологического пространства, в которой пересекаются все 5–7 допустимых решений обратной задачи, согласно гарантированному подходу, является фрагментом истинного возмущающего объекта (рис. 38). Для получения различных решений обратной задачи можно также изменять начальные приближения и модельные классы.

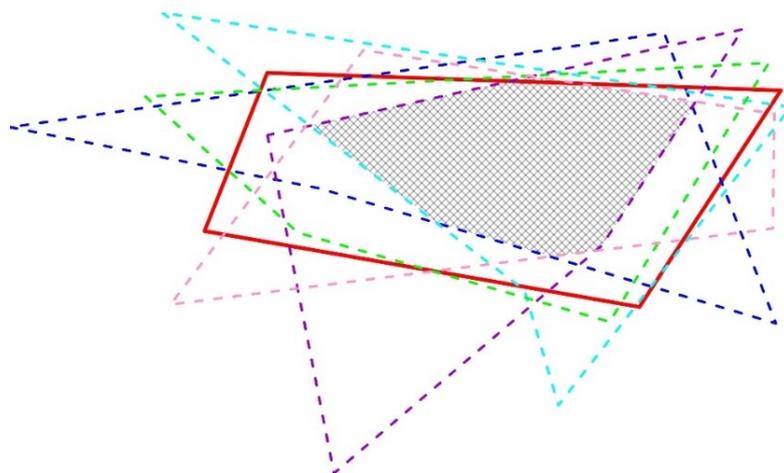


Рис. 38. Аномалиеобразующий объект (красный контур) и допустимые решения обратной задачи гравirazведки методом случайного поиска (цветной пунктир).  
Область пересечения всех полученных решений показана серой штриховкой

*Требования к содержанию и оформлению работы.* Отчет по практической работе должен содержать: 1) краткие теоретические сведения (1–2 стр.); 2) результаты решения обратной задачи гравirazведки методом случайного поиска по точно заданному полю (графики исходного и модельного полей, разрезы с контурами исходного и подобранного объектов, а также начального приближения; 3) результаты решения обратной задачи гравirazведки методом случайного поиска по осложненному помехой полю (графики исходного и модельного полей, разрезы с контурами исходного и подобранного объектов, а также начального приближения; 4) не менее двух графиков итерационного процесса, характеризующих зависимость невязки от номера итерации (для точных и осложненных помехой значений гравитационного поля); 5) рисунок, иллюстрирующий применение гарантированного подхода к решаемой обратной задаче (контур допустимых решений и границы областей  $D_1$  и  $D_2$ ); выводы; 6) оценка влияния помех в интерпретируемом гравитационном поле на точность решения обратной задачи; 7) оценка возможности детального описания границы возмущающего объекта по результатам интерпретации гравитационной аномалии; 8) применение гарантированного подхода с целью повышения достоверности решения обратной задачи гравirazведки.

### Литература

1. Балк П.И., Долгаль А.С. Аддитивные технологии решение я обратных задач гравirazведки и магниторазведки. М.: Научный мир, 2020. 45 с.
2. Блох Ю.И. Интерпретация гравитационных и магнитных аномалий. 2009. URL: <http://sigma3d.com/index.php/publications/books> (дата обращения: 12.11.2023).

3. Булах Е.Г. Прямые и обратные задачи гравиметрии и магнитометрии. Киев: Наукова думка, 2010. 464 с.
4. Гольцман Ф.М., Калинина Т.Б. Интерактивная интерпретация гравитационных и магнитных полей в условиях априорной неопределенности // Известия АН СССР. Физика Земли. 1991. № 12. С. 84–93.
5. Гравirazведка: Справочник геофизика / под ред. Е.А. Мудрецовоой, К.Е. Веселова. 2-е изд. перераб. и доп. М.: Недра, 1990. 607 с.
6. Долгаль А.С., Шархимуллин А.Ф. Повышение точности интерпретации моногеничных гравитационных аномалий // Геоинформатика. 2011. № 4. С. 49–56.
7. Долгаль, А.С., Петросян Р.Н. Решение обратной задачи гравirazведки для 2D призматических тел методом статистических испытаний // Вестник Пермского университета. Геология. 2021. Т. 20, № 4. С. 334–343.
8. Жданов М.С. Теория обратных задач и регуляризации в геофизике. М.: Научный мир, 2007. 712 с.
9. Каханер Д., Моулер К., Нэш С. Численные методы и программное обеспечение. М.: Мир, 2001. 575 с.
10. Старостенко В.И. Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии. Киев: Наукова Думка, 1978. 227 с.
11. Ягола А.Г., Ван Янфей, Степанова И.Э., Титаренко В.И. Обратные задачи и методы их решения. Приложения к геофизике. М.: Изд-во Бином, 2014. 216 с.
12. Яновская Т.В., Порохова Л.Н. Обратные задачи геофизики: учеб. пособие. 2-е изд., доп. и перераб. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2004. 214 с.
13. Rubinstein R.Y., Kroese D.P. Simulation and the Monte Carlo Method. 2<sup>nd</sup> edition, Wiley, 2007. 345 p.

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 6

### «Решение обратной задачи гравиразведки методом роя частиц»

#### Теоретические сведения

*Общие сведения.* В настоящее время методы искусственного интеллекта (ИИ) являются одним из приоритетных направлений развития науки в России и в мире. В английском языке термин *artificial intelligence*, в русском переводе означающий ИИ, означает лишь *искусственное умение рассуждать разумно*, а не «интеллект» (*intellect*). Единого определения для ИИ не существует, согласно А.В. Смолину «интеллектуальной называется система, способная целеустремленно, в зависимости от состояния информационных входов, изменять не только параметры функционирования, но и сам способ своего поведения». Академик В.Н. Страхов еще в конце XX века писал, что в будущем необходимо «создание основ специализированного искусственного интеллекта как базовой позиции в становлении автоматической компьютерной интерпретации». Следует отметить, что геофизика является хорошо структурированной предметной областью, в которой уже существуют апробированные надежные методы и некоторые из задачи, тесно связанные с ИИ, в ней уже успешно решаются. В качестве примера можно привести алгоритмы классификации многомерных данных, реализованные в системе КОСКАД-3D и распознавания образов.

*Метод роя частиц (МРЧ, англ. particle swarm optimization, PSO) рассматривается в теории ИИ как метод эволюционной оптимизации и позволяет моделировать поведение децентрализованной самоорганизующейся системы.* Первоначально этот метод был предложен для описания движения птичьих стай с целью выяснения законов, управляющих синхронным движением и быстрой сменой направления полета. С этих позиций стая птиц рассматривается как система роевого интеллекта (англ. *swarm intelligence*), состоящая из множества частиц, локально взаимодействующих между собой и окружающей средой.

Текущее состояние частицы характеризуется координатами в пространстве решений, а также вектором скорости перемещения. Оба этих параметра выбираются случайным образом на этапе инициализации. Кроме того, каждая частица хранит координаты лучшего из найденных ею решений, а также лучшее из пройденных всеми частицами решений – этим имитируется мгновенный обмен информацией между птицами. В итоге локальные и, в некоторой степени, случайные взаимодействия приводят к возникновению интеллектуального группового поведения, не контролируемого отдельными особями.

В настоящее время МРЧ широко применяется в задачах машинного обучения, параметрической и структурной оптимизации в области проектирования, в областях робототехники, биохимии, биомеханики и др. Иранские геофизики успешно использовали МРЧ для моделирования поверхности фундамента нефтегазоносного осадочного бассейна по аномальному гравитационному полю в провинции Голестан. МРЧ также достаточно эффективно использовался для моделирования аномалий высших производных гравитационного потенциала, связанных с дизъюнктивными нарушениями. В РФ пока имеются только две публикации, посвященные применению МРЧ при инверсии данных гравиразведки.

Основной теоретической предпосылкой для решения обратных задач гравиразведки (ОЗГ) с использованием МРЧ является существование множества равновероятных (в общем случае) допустимых решений, отвечающих априорным представлениям о геометрических параметрах и эффективной плотности источников поля, а также обеспечивающих требуемое значение невязки наблюдаемого и модельного полей  $\varepsilon_0$ . Рассмотрим возможность решения нелинейной обратной 2D задачи гравиразведки рудного типа для простейшей ситуации (одиночный изолированный объект с известной эффективной плотностью) с использованием метода роя частиц (МРЧ, англ. particle swarm optimization, PSO). В частности, таким объектом может быть интрузивное тело или рудная залежь, которые требуется локализовать в разрезе.

*Алгоритм и программа метода роя частиц.* Будем использовать аппроксимацию аномалиеобразующего геологического объекта с известной эффективной плотностью  $\sigma = const$  прямоугольной призмой с бесконечными размерами по простиранию, находящейся внутри области поиска решения обратной задачи  $D$ . Введем обозначения для координат  $\{x_0, z_0\}$  центра тяжести  $C$  призмы и размеров  $d, h$  ее горизонтальных и вертикальных граней, соответственно. Таким образом, призма полностью характеризуется четырехмерным вектором параметров  $\mathbf{p} = \{x_0, z_0, d, h\}$  и в дальнейшем рассматривается в качестве отдельной частицы роя. Рой состоит из  $N$  частиц со случайными параметрами  $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^4, i = \overline{1, N}$ , равномерно распределенными в подобласти  $D_0 \subset D$ . Каждой частице роя соответствуют модельное гравитационное поле  $\Delta g_i^{\text{мод}}$  и некоторое значение функционала  $F2 = \|\Delta g^{\text{набл}} - \Delta g_i^{\text{мод}}\|_{L^2}$ .

Состояние всего роя характеризуется наилучшим состоянием его частиц, таким образом ОЗГ сводится к минимизации функционала  $\min_{\mathbf{p} \in D} F2(\mathbf{p})$ , которое

осуществляется в течение некоторого времени, разбитого на  $k = \overline{1, M}$  интервалов. Скорость частицы  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{10}$  в текущий момент времени  $k+1$  определяется суммой трех слагаемых:

$$\mathbf{v}_i(k + 1) = \alpha \mathbf{v}_i(k) + \beta \mathbf{U}_1 \otimes [\mathbf{L}(k) - \mathbf{p}(k)] + \gamma \mathbf{U}_2 \otimes [\mathbf{G}(k) - \mathbf{p}(k)], \quad (18)$$

т.е. инерционной, когнитивной и социальной компонент. Инерционная компонента зависит от скорости частицы в предыдущий момент времени  $\mathbf{v}_i(k)$ , когнитивная – отражает стремление частицы к собственному наилучшему положению (локальному рекорду)  $\mathbf{L}(k)$ , социальная – показывает ее движение к лучшему положению роя (глобальному рекорду)  $\mathbf{G}(k)$ . Символ  $\otimes$  означает прямое (покомпонентное) произведение векторов. Длины случайных векторов  $\mathbf{U}$  равномерно распределены в интервале  $[0, 1]$ ,  $\alpha, \beta, \gamma$  – коэффициенты, которые являются постоянными величинами или зависят от времени  $k$ . Схема алгоритма МРЧ показана на рис. 39.



Рис. 39. Блок-схема алгоритма МРЧ

Этот алгоритм был реализован авторами в виде программы PDBR\_ROI, написанной на языке Delphi 7.0 (рис. 40).



Рис. 40. Главное окно программы PDBR\_ROI

Рассмотрим синтетический пример: на профиле длиной  $l = 50$  км зафиксирована аномалия гравитационного поля  $\Delta g^{\text{набл}}$  с амплитудой до 25 мГал, обусловленная двумерной горизонтальной пятиугольной призмой, обладающей эффективной плотностью  $0.25 \text{ г/см}^3$ . Шаг  $\Delta x$  между точками составляет 1 км. В области поиска решения обратной задачи  $D$  размером  $50 \times 25$  км (разрезе) разместим  $N=100$  призм с плотностью  $0.25 \text{ г/см}^3$  (частиц). На рис. 41 представлены исходные данные и начальное положение используемого роя частиц.

Динамику поиска наилучшего положения частицами роя при числе итераций  $M = 40$  отражает рис. 42. После выполнения  $M = 40$  итераций была достигнута средняя величина невязки наблюдаемого и модельного полей  $F2 = 0.79$  мГал для всего роя частиц. Для наилучшего решения  $G(40)$  величина невязки составила  $0.34$  мГал, т.е. около 1.5% от максимальной амплитуды аномалии.

Устойчивость процесса оптимизации в МРЧ обеспечивает ввод ограничений на максимальные значения скорости частиц  $\mathbf{v}_i < \mathbf{v}_{\text{max}}$ . Выбор величины  $\mathbf{v}_{\text{max}}$  столь же важен, как выбор параметра регуляризации в классических методах решения обратной задачи гравиразведки, где решаются плохо обусловленные системы алгебраических уравнений. В общем случае для рассматриваемой задачи целесообразно опираться на соотношение  $\mathbf{v}_{\text{max}} \leq 0.5\Delta x$  для параметров  $\{x_0, z_0\}$  и условие  $0.9p_j^k \leq p_j^{k+1} \leq 1.1p_j^k, j = 3, 4$  для граней призмы.

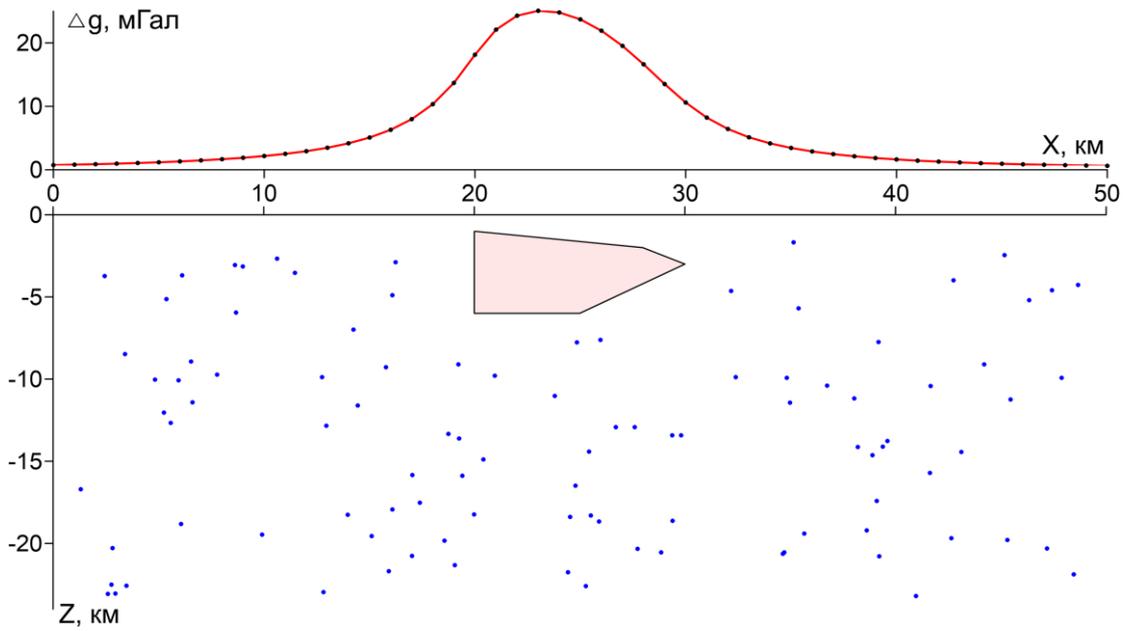


Рис. 41. График аномалии силы тяжести поля и источник поля (черный контур с заливкой). Синие точки – центры призм  $S$  для начального положения роя

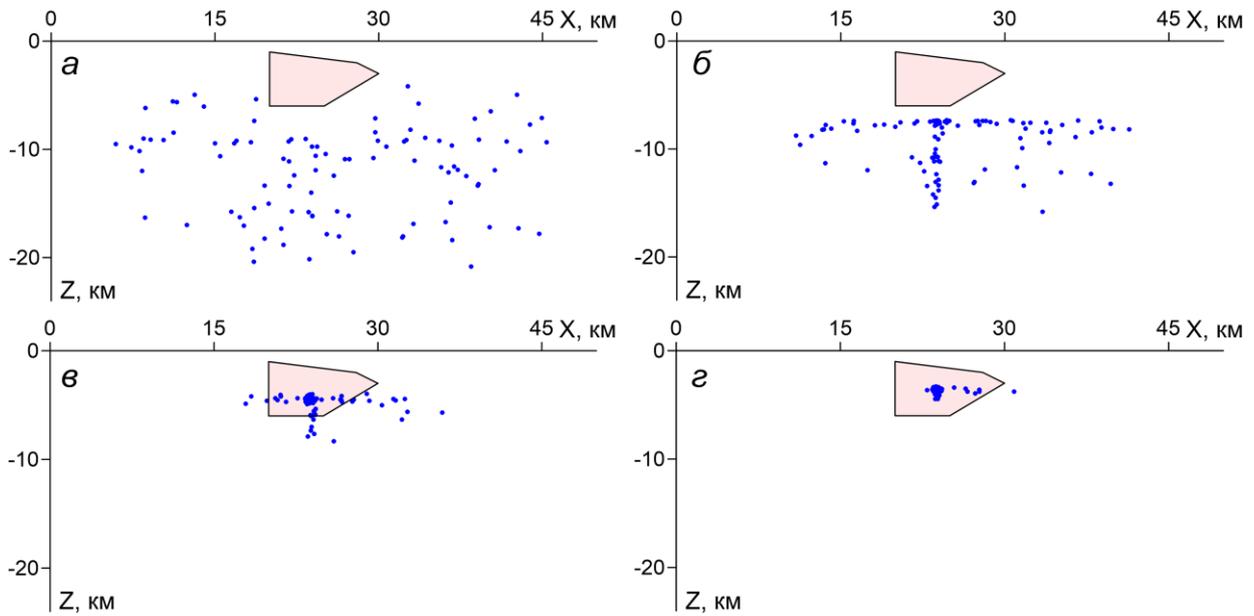


Рис. 42. Пространственное расположение центров призм  $S$  после выполнения 5 (а), 15 (б), 30 (в) и 40 (г) итераций

Используются три различных варианта изменения скоростей во времени, отвечающие выражению (18). В первом варианте используются постоянные коэффициенты  $\alpha = 0.7298, \beta = \gamma = 1.4962$ . Во втором варианте

$$\alpha = k(0.4 - 0.9)/M + 0.9, \beta = k(0.4945 - 1.4945)/M + 1.4945, \\ \gamma = k(1.4945 - 0.4945)/M + 0.4945,$$

т.е. величина  $\beta$  линейно уменьшается с ростом итерации, а величина  $\gamma$  линейно возрастает. Это позволяет сначала искать лучшее положение каждой частицы, со временем смещая акцент на лучшее положение роя. В третьем случае используется коэффициент сужения  $\mu = 0.5714$ , представляющий собой множитель в правой части (18), при постоянных значениях коэффициентов  $\alpha = 1, \beta = \gamma = 2.05$ :

$$\mathbf{v}_i(k + 1) = \mu\{\alpha\mathbf{v}_i(k) + \beta\mathbf{U}_1 \otimes [\mathbf{L}(k) - \mathbf{p}(k)] + \gamma\mathbf{U}_2 \otimes [\mathbf{G}(k) - \mathbf{p}(k)]\}. \quad (19)$$

Каждый из вариантов определяет собственный ход процесса оптимизации роя частиц и может иметь преимущества при решении конкретной задачи. Однако, согласно теореме NFL (no free lunch theorem), «*все алгоритмы оптимизации работают одинаково хорошо при усреднении по всем возможным задачам*», поэтому выбор варианта может быть только экспериментальным. Применительно к рассматриваемому синтетическому примеру вариант 3 заметно проигрывает по отношению к вариантам 1 и 2 (рис. 43).

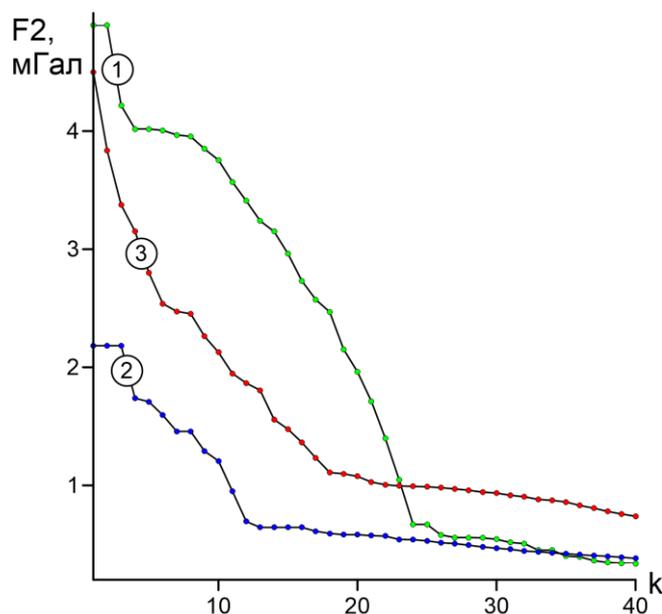


Рис. 43. Характеристики итерационного процесса различных вариантов решения ОЗГ: значения F2 отвечают глобальному рекорду  $G(p)$ . Номер варианта указан на графиках

МРЧ может оказаться весьма эффективным инструментом для построения репрезентативного подмножества допустимых решений ОЗГ. Можно задаться некоторым малым пороговым значением невязки  $F2_{\text{пор}}$  и выбрать  $n$  частиц роя, для которых величина  $F2 \leq F2_{\text{пор}}$ . Каждую из этих частиц можно описать связанной совокупностью конечных элементов  $\omega$  в форме квадратов, образующих замощение области  $D$ . Обозначим через  $n^*$  число всех призм, в каждой из которых содержится элемент  $\omega$ . Тогда  $p = n^*/n$  – оценка вероятности ситуации, когда элемент  $\omega$  является фрагментом неизвестного носителя масс.

Функцию пространственных координат  $\psi(\omega) = p(x, z)$  с областью определения  $[0,1]$  назовем **функцией локализации**, характеризующей структуру полученного множества допустимых решений ОЗГ. В качестве новой математической формы представления результатов интерпретации будем использовать одну или несколько «наилучших» результативных моделей и вертикальную карту функции локализации  $\psi(\omega)$ . На рис. 44 показаны результаты решения ОЗГ в варианте 1, отвечающие значению  $F2_{\text{пор}} = 0.4$  мГал, числу частиц  $n = 28$  и размеру элементов замощения  $100 \times 100$  м. Как очевидно, качество выполненных интерпретационных построений высокое и является вполне достаточным для заложения заверочной скважины.

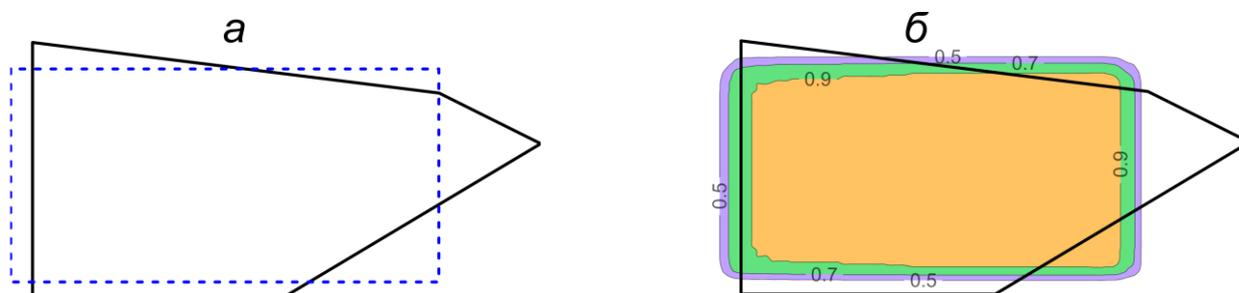


Рис. 44. Результаты решения обратной задачи гравirazведки: а – призма, отвечающая минимальному значению невязки полей  $F2 = 0.34$  мГал (синий пунктир); б – карта изолиний функции локализации  $\psi(\omega)$ .  
Черный контур – аномалиеобразующий объект

Полученные результаты подтверждают высокую перспективность применения МРЧ в области прикладной геофизики для моделирования источников аномалий геопотенциальных полей. Разработанный алгоритм обладает высокой скоростью сходимости, что делает возможным получение приемлемого по качеству решения ОЗГ даже при небольшом числе итераций. Нужно отметить, что для получения близких результатов с помощью метода Монте-Карло требуется примерно в 100 раз больше пробных решений прямой задачи гравиметрии.

## Выполнение практической работы

1. С использованием программы PGM решить прямую задачу гравirazведки для одиночной многоугольной призмы, имеющей 5–8 угловых точек (т.е. заведомо отличающейся от модельного класса для МРЧ – прямоугольной призмы). Эффективная плотность призмы  $0.2\text{--}0.5 \text{ г/см}^3$ . Профиль расчета поля  $\Delta g$  горизонтальный, направлен вдоль оси X, все высоты точек равны нулю. Шаг расчета 100–200 м. Рекомендованное расположение призмы и расчетного профиля приведено на рис. 34. Результат решения прямой задачи сохранить в DAT-файле, содержащим порядковые номера и высотные отметки точек, а также значения аномального гравитационного поля в них.

2. Выполнить решение обратной задачи с помощью программы PDDBR\_ROI, построить графически полученное решение и карту изолиний функции локализации. Просмотреть протокол работы программы, построить графики изменения невязки наблюденного и модельного полей в евклидовой метрике. Построить серию вертикальных карт, характеризующих пространственное расположение центров призм  $x_0, z_0$  на итерациях № 5, 10, 15, 25, 40 с использованием опции MAP/POST MAP программы SURFER.

3. Гравитационное поле, обусловленное призмой (пункт 1) осложнить случайной нормально распределенной помехой с нулевым математическим ожиданием и среднеквадратическим отклонением, составляющим около 2% от максимальной амплитуды аномалии. Для этой цели использовать опцию программы SURFER WORCSHEET/TRANSFORM и команду для генерации нормально распределенных случайных чисел  $\text{RANDN}(a,b)$ , где  $a$  – математическое ожидание,  $b$  – среднеквадратическое отклонение. Для поля, осложненного помехой, решить обратную задачу. Сопоставить между собой результаты решения обратной задачи, полученные по точно заданному и осложненному помехой полю, используя опцию MAP/ADD.

4. Выполнить решение обратной задачи для трех разных вариантов МРЧ. Для лучшего варианта постараться минимально сократить вычислительные затраты на решение обратной задачи, варьируя количеством точек роя M и числом итераций  $\text{kit}$ .

*Требования к содержанию и оформлению работы.* Отчет по практической работе должен содержать: 1) краткие теоретические сведения (1–2 стр.); 2) результаты решения обратной задачи гравirazведки с помощью МРЧ по точно заданному полю (разрезы с контурами исходного и подобранного объектов, а также вертикальную карту изолиний функции локализации); 3) результаты ре-

шения обратной задачи гравиразведки с помощью МРЧ по осложненному помехой полю (разрезы с контурами исходного и подобранного объектов, а также вертикальную карту изолиний функции локализации); 4) не менее двух графиков итерационного процесса, характеризующих зависимость невязки от номера итерации (для точных и осложненных помехой значений гравитационного поля); 5) рисунок, иллюстрирующий изменение положения центров призм в процессе решения обратной задачи (опция MAP/POST MAP программы SURFER); выводы 6) сопоставление эффективности применения метода случайного поиска и МРЧ для решения нелинейной обратной задачи гравиразведки; 7) оценку влияния помех в интерпретируемом гравитационном поле на точность решения обратной задачи; 8) охарактеризовать возможность оптимизации вычислительных затрат при выборе параметров решения ОЗГ (вариант МРЧ, число частиц  $M$ , количество итераций  $kit$ ).

### Литература

1. Балк П.И., Долгаль А.С. Аддитивные технологии решения обратных задач гравиразведки и магниторазведки. М.: Научный мир, 2020. 455 с.
2. Долгаль А.С. Элементы искусственного интеллекта в монтажном методе интерпретации гравитационных аномалий // Стратегия и процессы освоения георесурсов: сб. науч. тр. Вып. 16. Пермь, 2018. С. 146–149.
3. Долгаль А.С. Локализация источника аномалии силы тяжести методом роя частиц // Теория и практика разведочной и промысловой геофизики: сб. науч. тр. 23–24 ноября 2023 г. Пермь: Пермский государственный национальный исследовательский университет, 2023. С. 98–104.
4. Долгаль А.С., Петросян Р.Н., Рыжов Н.В. Оценка параметров источника гравитационной аномалии методом роя частиц // Вестник Пермского университета. Геология. 2024. Т. 23, № 1. С. 85–92.
5. Казакова Е.М. Краткий обзор методов оптимизации на основе роя частиц // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2022. Т. 39, № 2. С. 150–174.
6. Калинин Д.Ф. Информационно-статистический прогноз полезных ископаемых. СПб: ФГУНПП «Геологоразведка», 2011. 163 с.
7. Саймон Дэн. Алгоритмы эволюционной оптимизации / пер. с англ. А.В. Логунова. М.: ДМК Пресс, 2020. 1002 с.
8. Смолин А.В. Введение в искусственный интеллект: конспект лекций. 2-е изд., перераб. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 264 с.

9. *Страхов В.Н.* Что делать? (о развитии гравиметрии и магнитометрии в России в начале 21 века). М.: ОИФЗ РАН, 1988. 24 с.

10. *Eberhart R., Kennedy J.* Particle swarm optimization. Proceedings of the IEEE International Conference on Neural Networks, 4, IEEE, 1995. P. 1942–1948.

11. *Elhussein, M., Abo-Ezz, E.R., Goma, O.A. et al.* Two-sided fault parameter assessment through the utilization of a particle swarm optimizer to different gravity horizontal gradients-orders with application to various cases studies. Environ Earth Sci 82, 502 (2023).

12. *Loni S., Mehramuz M.* Comparison of improved particle swarm optimization with Marquardt Algorithm for simulation of sedimentary basin with parabolic density contrast using gravity data // J. Ind. Geophys. Union. 2022. 26 (1). P. 1–15.

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Данный практикум основан на материалах лекций, читаемых на кафедре геофизики Пермского государственного национального исследовательского университета. Он содержит элементы теории, методические пояснения и задания к практическим занятиям по дисциплине «Гравиметрия и магнитометрия». Особое внимание уделено возможности освоения студентами основных положений дисциплины «Гравиметрия и магнитометрия» и понимания роли математического моделирования и современных компьютерных технологий в процессе обработки и интерпретации материалов геофизических съемок, что позволит им в дальнейшем вести научно-исследовательскую деятельность и осуществлять работу на производстве на современном научном уровне.

*Учебное издание*

**Долгаль Александр Сергеевич**

# **Гравиметрия и магнитометрия: лабораторные работы**

**Практикум**

Редактор *Е. В. Шумилова*

Корректор *В. Е. Пирожкова*

Компьютерная верстка: *А. С. Долгаль*

---

Подписано в печать 14.06.2024. Формат 60×84/16

Усл. печ. л. 4,59. Тираж 50 экз. Заказ 88

---

Управление издательской деятельности  
Пермского государственного  
национального исследовательского университета.  
614068, г. Пермь, ул. Букирева, 15

Отпечатано в типографии ПГНИУ.  
614068, г. Пермь, ул. Букирева, 15