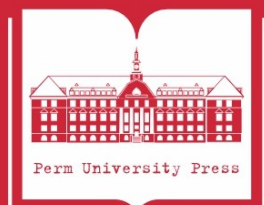


ПЕРМСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

М. М. Бузмакова

МЕТОДЫ ТЕОРИИ ПЕРКОЛЯЦИИ: КУРС ЛЕКЦИЙ



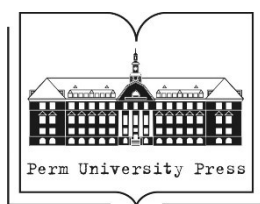
МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

М. М. Бузмакова

**МЕТОДЫ ТЕОРИИ ПЕРКОЛЯЦИИ:
КУРС ЛЕКЦИЙ**

*Допущено методическим советом
Пермского государственного национального исследовательского университета
в качестве учебного пособия для студентов,
обучающихся в магистратуре по направлению
«Прикладная математика и информатика»*



Пермь 2026

УДК 530.182(075.8)
ББК 22.317я73
Б904

Б904 **Бузмакова М. М.**

Методы теории перколяции: курс лекций [Электронный ресурс] : учебное пособие / М. М. Бузмакова ; Пермский государственный национальный исследовательский университет. – Электронные данные. – Пермь, 2026. – 5,17 Мб ; 91 с. – Режим доступа: <https://psu.ru/files/docs/science/books/uchebnie-posobiya/Buzmakova-Metody-teorii-perkolyacii-kurs-lekcij.pdf>. – Заглавие с экрана.

ISBN 978-5-7944-4325-7

Учебное пособие знакомит читателей с ключевыми понятиями и методами анализа сложных систем, связанных с прохождением веществ, сигналов и потоков через неоднородные среды. Междисциплинарный подход объединяет знания физики, математики, химии и биологии для изучения взаимосвязей элементов в структуре. Пособие предназначено для подготовки специалистов, исследователей и практиков, стремящихся повысить свою квалификацию в области анализа и проектирования сложных систем.

УДК 530.182(075.8)
ББК 22.317я73

*Издается по решению ученого совета физико-математического института
Пермского государственного национального исследовательского университета*

Рецензенты: кафедра прикладной информатики, информационных систем и технологий Пермского государственного гуманитарно-педагогического университета (зав. каф. – канд. техн. наук **А. Г. Кузнецов**);

канд. физ.-мат. наук, доцент, заведующий кафедрой информационной безопасности Астраханского государственного университета им. В. Н. Татищева **В. А. Черкасова**

ISBN 978-5-7944-4325-7

© ПГНИУ, 2026
© Бузмакова М. М., 2026

Оглавление

Введение	5
 Лекция 1. Введение в теорию перколяции.....	8
Основные определения, классификация перколяционных задач	8
Этапы решения перколяционных задач	13
Направления развития теории перколяции	14
 Лекция 2. Знакомство с кластерами.....	16
Понятие кластера, перколяционный кластер	16
Характеристики кластеров, структура и свойства перколяционного кластера ...	17
Критические показатели.....	21
Методика оценки порога перколяции	23
Другие характеристики перколяционной модели.....	26
 Лекция 3. Алгоритмы, применяемые в теории перколяции.....	27
Решения некоторых перколяционных задач.....	27
Классические алгоритмы	29
Специальные алгоритмы, модификация алгоритмов.....	35
Распараллеливание алгоритмов.....	35
 Лекция 4. Применение теории перколяции в некоторых приложениях	36
Процессы фильтрации, гелеобразования.....	36
Моделирование распространения пожаров.....	38
Моделирование распространения эпидемий	43
Моделирование распространения разрушений и трещин	50
Переходы диэлектрик-проводник, парамагнетик-ферромагнетик и др.....	53
Моделирование теплопроводности	55

Лекция 5. Применение теории перколяции в прочих приложениях.....	57
Перколяционные процессы в информационных сетях/системах	57
Моделирование распространения компьютерных вирусов.....	60
Процессы управления и экономики	64
Распознавание изображений	65
Моделирование структуры Вселенной.....	67
 Лекция 6. Моделирование структуры и свойств сред, конструкций и материалов.....	 69
Моделирование структуры и свойств различных сред	69
Изучение композитов, в том числе нанокompозитов, с помощью методов теории перколяции	72
Явление джемминга.....	79
Литература.....	81

Введение

Учебное пособие «Методы теории перколяции» представляет собой комплекс теоретических основ, посвященный одному из ключевых направлений современной науки – теории перколяции. Перколяционная теория перколяции исследует поведение физических, химических, биологических и других систем, характеризующихся наличием связей между элементами системы и возникающими при этом глобальными эффектами прохождения веществ, сигналов или потоков через неупорядоченную среду. Примеры включают электрические явления в композитных материалах, образование трещин в конструкциях, динамику роста кристаллов, распространение болезней среди населения, а также функционирование сложных информационных, социальных и других сетей и систем.

Теория перколяции возникла на стыке нескольких дисциплин, таких как физика, математика, химия и биология, и активно развивается благодаря применению новых вычислительных технологий и развитию экспериментальной базы. Она имеет огромное значение для понимания механизмов возникновения аномалий и катастрофических изменений в природе и технике, способствуя разработке эффективных решений проблем надежности, безопасности и оптимизации производственных процессов.

Основной целью данного учебного пособия является предоставление будущим специалистам подробного обзора фундаментальных знаний и современных подходов, применяемых в рамках теории перколяции. Оно направлено на формирование целостного представления о сущности перколяционных процессов, необходимых базовых концептах и инструментарии, позволяющем эффективно анализировать различные ситуации, возникающие в инженерной практике, науке и промышленности.

Особое внимание уделено вопросам классификации задач перколяции, основным этапам решения этих задач, современным направлениям исследований и перспективам дальнейшего развития дисциплины. Эти вопросы являются важнейшими аспектами профессионального образования и необходимы каждому специалисту, занимающемуся проектированием, расчетом и эксплуатацией высокотехнологичных устройств и конструкций.

Для современного инженера, исследователя или специалиста-практика знание принципов теории перколяции крайне важно. Данная дисциплина помогает решать широкий круг прикладных задач, встречающихся практически во всех сферах человеческой деятельности. Например, понимание особенностей формирования проводящих путей в полупроводниках и изоляторах позволяет создавать новые поколения электронных компонентов и датчиков, обладающих уникальными свойствами. Анализ поведения разветвленных пространственных

структур способствует созданию высокопрочных строительных материалов и эффективной защиты сооружений от землетрясений и взрывов. Исследование динамики переноса жидкости сквозь поры в грунтах применяется при конструировании дренажных систем и очистных сооружений. Кроме того, владение принципами перколяции необходимо для эффективного управления рисками техногенных аварий, экологических бедствий и кризисных ситуаций в обществе. Таким образом, данное учебное пособие обеспечивает комплексную подготовку студентов к работе в условиях стремительно развивающейся научно-технической сферы, предоставляя инструменты для принятия обоснованных технических и управленческих решений.

Учебное пособие состоит из шести лекций, каждая из которых раскрывает отдельные важные аспекты теории перколяции.

Первая лекция знакомит читателя с основными терминами и понятиями, такими как случайная среда, вероятность связи элементов, масштабность и самоподобие, фрактальные объекты и явление непрерывности перехода. Особое внимание уделяется процессу формирования перколяционного кластера и ключевым параметрам, определяющим пороговые значения для появления глобального эффекта.

Вторая лекция посвящена детальному изучению строения перколяционного кластера, особенностям распределения размеров кластеров вблизи точки перколяции, статистическим характеристикам процесса связывания элементов и критериям устойчивости полученных конфигураций. Рассматриваются наиболее значимые критерии и количественные меры, позволяющие оценить качество кластеров и устойчивость всей системы.

Третья лекция подробно описывает классические и современные численные методы, используемые для анализа перколяционных процессов. Тщательно рассматриваются такие алгоритмы, как метод Хошена – Копельмана, алгоритмы поиска в глубину и ширину, волновой алгоритм и специальные модификации существующих схем расчета. Особое внимание уделяется параллельным вычислениям и эффективному использованию многопроцессорных архитектур для ускорения расчетов.

Четвертая лекция демонстрирует применение перколяционной теории в ряде областей, таких как механика разрушения, электродинамика, гидродинамика, химическая кинетика и медицина. Приводятся конкретные примеры моделирования распространения лесных пожаров, роста трещин в металлах, течения жидкостей через капилляры, формообразования гель-полимерных композиций и других аналогичных процессов.

Пятая лекция акцентирует внимание на изучении влияния внутренней микроструктуры материала на его макроскопические свойства. Здесь

рассматривается то, каким образом структура композитных материалов влияет на их механические, электрические и теплофизические характеристики. Особое внимание уделяется рассмотрению наноструктурированных систем, широко применяемых в микроэлектронике, катализаторах и биомедицинских устройствах.

Шестая лекция расширяет рамки рассмотрения традиционных моделей перколяции и вводит ряд специальных случаев, таких как транспортные сети, социальные взаимодействия, информационные потоки и распространение компьютерных вирусов. Разбираются специфические особенности каждого типа систем и предлагаются соответствующие методики исследования.

Таким образом, учебное пособие выступает ценным источником сведений и ориентиром для успешного освоения студентами сложной и важной междисциплинарной науки – теории перколяции. Полученные знания позволяют значительно повысить уровень квалификации специалистов, способствуют принятию грамотных технологических решений и обеспечивают конкурентоспособность выпускника на рынке труда XXI в.

Лекция 1. Введение в теорию перколяции

Основные определения, классификация перколяционных задач

Перколяция – протекание, просачивание (с англ. percolation – фильтрация, протекание, просачивание; с лат. percōlāre – просачиваться, протекать) [1]. Принято считать, что перколяция начала активно развиваться во второй половине прошлого века с момента выхода работы Д. Бродбента и Дж. Хаммерсли (1957 г.), посвященной процессам прохождения жидкостей через пористые среды [2]. В своей статье авторы впервые формально определили концепцию перколяции. Авторы поставили перколяционный процесс в противоположность диффузии (неупорядоченного движения в упорядоченной среде) как упорядоченное движение в неупорядоченной среде. Это стало отправной точкой для дальнейшего развития теории. Однако упоминание перколяционного процесса есть в более ранних работах Флори (с 1941 г.) и Стокмайера (с 1943 г.), посвященных образованию гелей при полимеризации [3–10]. Эти исследования заложили основы понимания механизмов, приводящих к формированию структур в сложных системах. Более подробно с историей развития теории перколяции можно познакомиться в работе [11].

После работы Бродбента и Хаммерсли теория перколяции стала активно изучаться в различных областях науки, включая физику конденсированного состояния, химию полимеров, материаловедение и даже социологию. Теория перколяции является мощным инструментом для анализа и моделирования широкого спектра явлений, возникающих в физических, химических и социальных системах. Она позволяет исследовать переходы между различными фазовыми состояниями и критическими явлениями, такими как образование так называемых кластеров и сетей.

Теория перколяции изучает образование связанных объектов в неупорядоченных средах. С математической точки зрения перколяцию можно сопоставить с теорией вероятностей на графах. С точки зрения физики перколяционный процесс – это геометрический фазовый переход, где в первой фазе существует множество конечных связанных объектов, а во второй – связанные объекты образуют бесконечное множество.

Методы теории перколяции в настоящее время применяются при изучении различных процессов во многих областях науки. Например, процессы гелеобразования, фильтрации, перехода диэлектрик-проводник, парамагнетик-ферромагнетик, образования трещин в горных породах, распространения пожаров, распространения эпидемий, модели транспортных сетей, распространения информации, структура и свойства композитов (в том числе нанокомпозитов). Этот

список можно продолжать бесконечно, и с каждым годом перколяционные модели все больше и больше охватывают разные области современной науки.

Все рассматриваемые структуры и процессы с использованием перколяционных моделей объединяет наличие так называемого концентрационного перехода, то есть такого критического состояния модели, при котором происходит скачкообразное изменение фазы (будь то изменение структуры или свойства, или же возникновение нового свойства). Это называется *перколяционным переходом*, а концентрация связанных объектов, при которой происходит перколяционный переход, соответствует *порогу перколяции*. Например, представим диэлектрик в виде квадратной решетки (рис. 1 слева, все ячейки решетки непроводящие – белого цвета) и начнем в этот диэлектрик добавлять проводящие частицы, в результате чего появляются проводящие ячейки черного цвета (рис. 1 в середине). Вопрос: сколько нужно добавить проводящих ячеек, чтобы решетка стала проводящей (рис. 1 справа)? Ответом на вопрос является значение критической концентрации проводящих ячеек – значение порога перколяции.

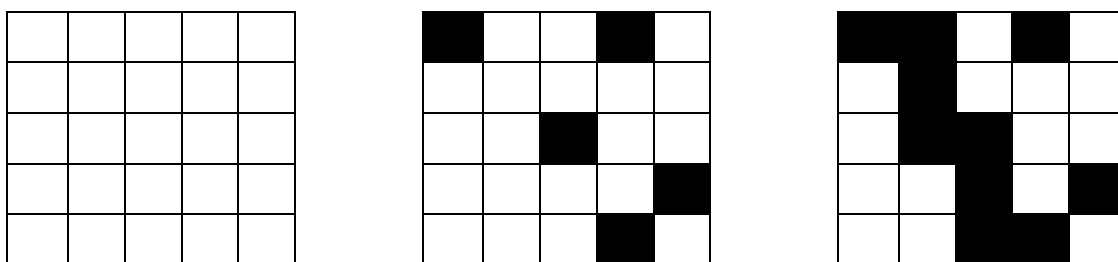


Рис. 1. Пример перколяции на простой квадратной решетке

Существует несколько критериев для классификации перколяционных задач: по виду рассматриваемой перколяционной системы, по типу объекта и характеру взаимодействия объектов, по типу используемых граничных условий и др. Рассмотрим эти классификации подробнее.

Приведенный выше пример демонстрирует перколяцию на простой квадратной решетке. Исходя из потребностей модели, решетки могут быть различных видов и размерностей (квадратные, кубические, треугольные, шестиугольные, гексагональные и т.д.). Также перколяцию можно рассматривать не на решетках, а в непрерывной среде – в континууме. Таким образом, есть два основных вида перколяционных задач по типу рассматриваемой перколяционной системы (среды) – *решеточные* и *континуальные*. Также может быть рассмотрен континуум разной размерности. Примером двумерной континуальной перколяции может служить перколяция окружностей на плоскости (рис. 2).

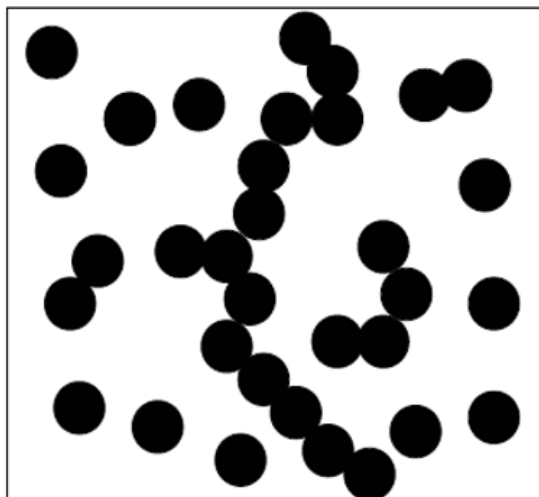


Рис. 2. Пример непрерывной перколяции окружностей

В настоящее время некоторое количество перколяционных задач на решетках решено, то есть для них определено значение порога перколяции. Некоторые из них можно увидеть в книге [1]. Непрерывные задачи решаются сложнее. Среди непрерывных задач наиболее известны «модель швейцарского сыра» (задача пустот), «обратная модель швейцарского сыра» (задача сфер). С каждым годом возрастает многообразие перколяционных моделей и их модификаций.

Кроме различных видов перколяционной системы различают объекты. Так, если объектом является одна ячейка квадратной решетки, то речь идет о перколяции *точечных объектов*. Понятно, что с помощью такой модели можно изучать достаточно ограниченное количество реальных структур или процессов. Поэтому объекты могут быть *неточечными*. Например, если рассмотреть на той же квадратной решетке в качестве объекта k подряд ее ячеек ($k = 2, 3, \dots$). Такие объекты принято называть k -мерами в теории перколяции. Или эти же k -меры в континууме – это отрезки фиксированной длины k . С помощью таких объектов круг изучаемых реальных структур и процессов значительно расширяется. Также исследуются перколяционные модели квадратов, кубов, прямоугольников, цилиндров, окружностей, сфер, эллипсоидов и многих других объектов.

По способу распределения объектов в системе перколяция бывает *случайной* и *коррелированной*. В первом случае объекты упаковываются случайным образом, во втором – с использованием некоторых правил или закономерностей. Для случайного распределения объектов, как правило, выдвигается требование равномерности. Однако это не обязательное условие, все зависит от моделируемого процесса. Кроме того, на объекты можно накладывать условия пересечения, частичного перекрытия (наличия пронизываемого слоя и твердой оболочки) или не пересечения.

При распределении неточечных объектов важным вопросом является то, как будет размещаться объект, если он попадает на границу рассматриваемой конечной области. Например, если в задаче требуется равномерное распределение, то отвергая граничные объекты, получится структура с наиболее плотной упаковкой в середине и менее плотной по краям. Для решения этой проблемы в теории перколяции принято использовать различные граничные условия. Наиболее распространенными являются открытые граничные условия, периодические граничные условия и их возможные комбинации. Если рассматривать решеточную перколяцию, то различные граничные условия можно определить следующим образом.

При *открытых граничных условиях* к каждому граничному слою добавляются нулевые слои и, таким образом, все объекты становятся эквивалентными.

В случае *периодических граничных условий* каждый объект размещается в системе с периодом, равным линейному размеру системы, по всем направлениям.

Смешанные граничные условия представляют собой различные комбинации открытых и периодических, например в одном направлении используются открытые граничные условия, в другом направлении – периодические граничные условия.

Примеры заполнений объектами при использовании открытых и периодических граничных условий представлены на рис. 3. В случае открытых граничных условий дальнейшее исследование системы происходит без учета частей объектов, которые попали в нулевые слои. Таким образом, применение любых видов граничных условий несет как свои преимущества, так и трудности в реализации.

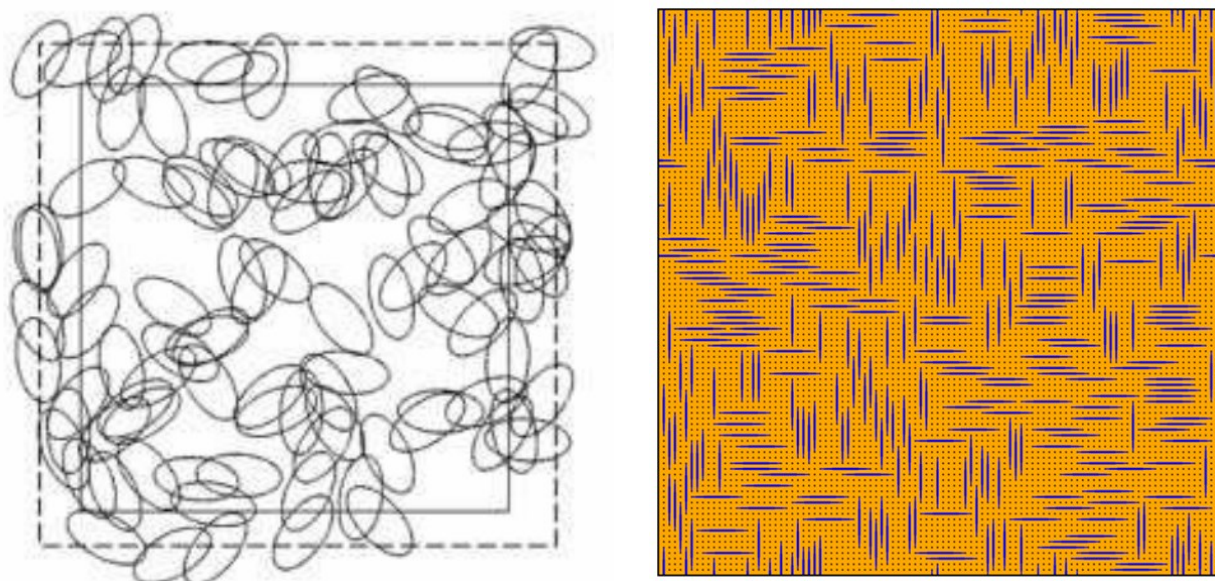


Рис. 3. Пример заполнений объектами при использовании открытых (слева) и периодических (справа) граничных условий

Среди исследователей считается, что применение периодических граничных условий предпочтительнее, так как, кроме достижения равномерности распределения объектов на всей изучаемой области, их применение на достаточно больших перколяционных системах обеспечивает результат, сопоставимый с результатом для случая бесконечных систем. А это уже значительно экономит временные ресурсы исследования.

Как уже было сказано ранее, в любой перколяционной задаче объекты связываются в группы – *кластеры*. Подробно кластеры будут рассмотрены во второй лекции данного учебного пособия. А здесь приведем классификацию перколяционных задач по способу объединения объектов в кластеры. По данному критерию рассматривают три вида перколяционных задач: *задача узлов*, *задача связей*, *смешанная задача*.

В *задаче узлов* два объекта принадлежат одному кластеру, если они просто являются соседними (в решеточной перколяции это два соседних занятых узла) или находятся на заданном расстоянии друг от друга (больше характерно для континуальных задач).

В *задаче связей* два объекта принадлежат одному кластеру, если между ними существует связь. При этом в решеточной перколяции считается, что все узлы заняты, а для перколяции необходимо возникновение связи между ними.

Смешанная задача объединяет задачу узлов и задачу связей, то есть наличие свободных и занятых узлов, при этом связи могут возникать только между занятыми. Примеры задач узлов и связей на рис. 4.

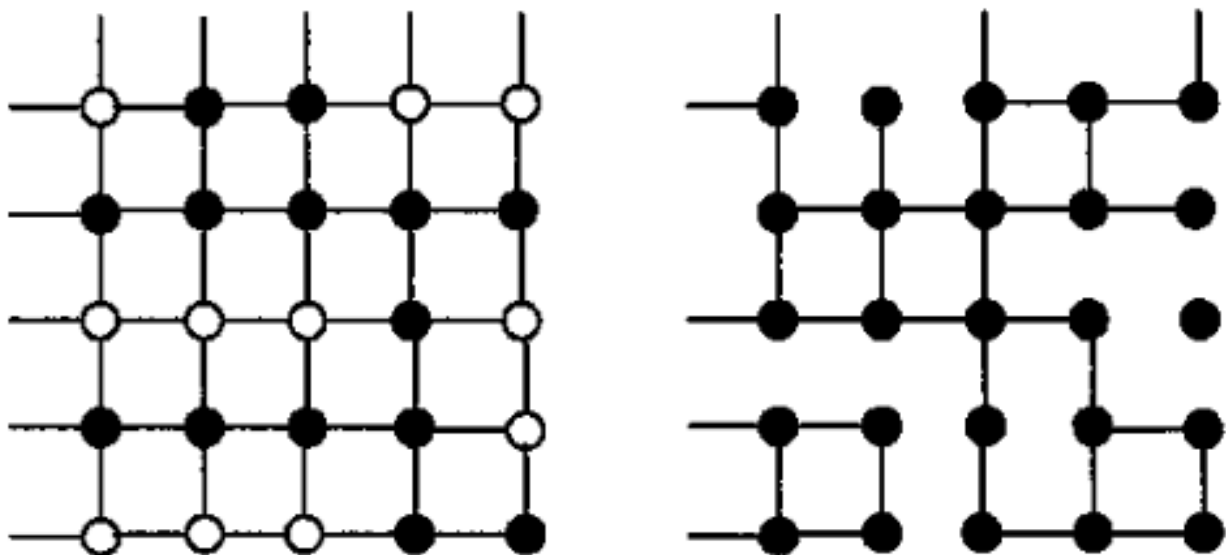


Рис. 4. Примеры перколяционной задачи узлов (слева) и связей (справа) на простой квадратной решетке [1]

Этапы решения перколяционных задач

Комбинируя различные параметры перколяционной задачи, можно описать практически любые структуры или процессы в тех или иных отраслях науки. Моделирование с применением методов теории перколяции производится в следующем порядке.

1. Постановка задачи в области исследования;
2. Математическая постановка задачи;
3. Определение используемых алгоритмов;
4. Программная реализация;
5. Проведение численного эксперимента;
6. Обработка и анализ результатов.

На первом этапе формулируется задача в той отрасли наук, где требуется изучить некоторый процесс, явление и т.д. Определяются входные параметры модели, их возможные значения и взаимосвязь. Выходным параметром любой перколяционной модели является зависимость вероятности возникновения перколяции в системе при заданной концентрации объектов. Кроме этого параметра можно находить и другие перколяционные характеристики модели, о которых будет рассказано в следующих лекциях.

На втором этапе происходит математическая формализация параметров модели, то есть устанавливаются связи между входными параметрами и между входными и выходными параметрами с использованием математических формул и соотношений.

Из математического описания модели определяются основные правила, а значит, и алгоритмы распределения объектов в системе, их объединения в группы, определения наличия перколяции в системе. Также могут быть разработаны дополнительные алгоритмы поиска других характеристик перколяционной модели. На данном этапе определяется, использовать ли стандартные алгоритмы, модифицировать их или разрабатывать новые. Используемым алгоритмам в теории перколяции будет посвящена третья лекция данного учебного пособия. На этом же этапе принимается решение об используемых структурах данных, подходе программной реализации и используемых вычислительных технологиях.

После определения алгоритмов следует разработка программы уже на конкретном языке программирования со всеми шагами проверки адекватности и эффективности алгоритмов, исправления ошибок и верификации предложенной модели с помощью воспроизведения ранее известных результатов. Это может быть как простое консольное приложение, так и программа с пользовательским интерфейсом. В любом случае важно организовать хранение результатов работы программы для дальнейшего исследования и анализа.

После того, как доказана правильность работы программы, проводится численный эксперимент. Как правило, это набор статистических испытаний. Сначала исследователем определяются диапазоны входных данных перколяционной модели. Например, с увеличенным шагом изменения концентрации объектов в системе от нуля до единицы находится тот диапазон, при котором возникает вероятность появления перколяции в системе. И далее уже в выбранном диапазоне концентраций проводится множество испытаний для получения более точного результата. Основным результатом каждого испытания является наличие перколяции в системе. Таким образом, имеются данные вероятностей возникновения перколяции при различных наборах входных данных, которые дополнительно обрабатываются. Для их обработки обычно используются различные математические пакеты или же создаются собственные программы (может часть основной программы). По данным определяются порог перколяции и другие характеристики модели.

Полученные результаты анализируются и интерпретируются в изучаемой области. На данном этапе, как правило, исследователь получает зависимости в изучаемых структурах, процессах, будь то изменение свойств композита при определенной концентрации модификатора или распространение компьютерного вируса в сети. Многие перколяционные модели также позволяют прогнозировать. Например, если модель описывает распространение какого-либо заболевания, то можно добавить в модель дополнительный(е) параметр(ы) (например, описывающий уровень привитости населения от заболевания) и спрогнозировать течение заболевания при новых условиях. Целью прогнозных моделей является, как правило, разработка рекомендаций.

Направления развития теории перколяции

Из описания этапов решения любой перколяционной задачи понятно, что, во-первых, не обойтись без каждого из них, во-вторых, любой этап требует внимательного подхода и тщательной проработки. От каждого из этих этапов зависит и правильность получаемых результатов, и их точность, и что особенно важно – затраченное время на проведение исследования. Понятно, что проведение статистических испытаний является достаточно продолжительным процессом, а при увеличении числа параметров модели и размеров рассматриваемой системы время расчетов увеличивается очень стремительно.

Каждый этап решения перколяционной задачи способствует становлению следующих *основных направлений развития теории перколяции*:

- развитие теории перколяции как *получение новых фундаментальных знаний* (сюда относится разработка и решение новых теоретических

перколяционных задач, определение значений их основных характеристик, определение значений критических показателей и установление между характеристиками и показателями фундаментальных зависимостей);

- *разработка эффективных алгоритмов*, в том числе с применением параллельных вычислений (существующие методы и подходы решают ограниченный круг так называемых классических перколяционных задач, и возникает потребность в модификации и разработке новых алгоритмов. В добавок при увеличении значений некоторых параметров исследуемой задачи, в частности линейного размера рассматриваемой системы, значительно увеличивается время вычислений, и актуальным является повышение эффективности существующих алгоритмов за счет применения технологий параллельных и облачных вычислений);
- *практическое применение перколяционных моделей* (с помощью перколяционных моделей можно исследовать широкий спектр практических задач из совершенно разных областей науки и человеческой деятельности, где можно идентифицировать так называемый концентрационный переход. Например, распространение пожара, возникновение эпидемии или изменение свойств композита).

В зависимости от цели исследователя при решении любой перколяционной задачи развиваются все направления в той или иной степени, а также может развиваться какое-то одно направление. Например, уже для существующей и решенной перколяционной задачи можно разработать новый эффективный алгоритм или же применить известную модель для ранее не изучаемого процесса. Существующие модели и алгоритмы также подвержены модификациям с целью их применения в разных отраслях науки. Каждое направление развития теории перколяции крайне актуально, так как методы теории перколяции открывают широкий диапазон простых решений непростых задач.

Лекция 2. Знакомство с кластерами

Понятие кластера, перколяционный кластер

Основным объектом изучения в любой перколяционной задаче является кластер. *Кластером* называется группа объектов в перколяционной системе, объединенных по какому-либо критерию. Самым распространенным критерием принадлежности одному кластеру является близость объектов. Кроме него можно добавлять любые условия, требуемые в рамках конкретной модели. *Размером кластера* является количество объектов, ему принадлежащих. Если существует объект, который не объединен с другими объектами, то говорят, что это кластер единичного размера.

При малых долях заполнения объектами перколяционной системы кластеров мало, и они в основном единичные. При дальнейшем увеличении доли заполнения количество кластеров также увеличивается, размеры кластеров также постепенно увеличиваются за счет присоединения к ним новых объектов. Далее происходит слияние малых кластеров в более крупные. Затем появляется минимум один кластер, который распространяется по всей системе (просачивается, пронизывает систему), и могут оставаться некоторые малые кластеры. Кластер, пронизывающий всю систему, называется *перколяционным*. Если в системе существует хотя бы один перколяционный кластер, то говорят о наступлении перколяции. При дальнейшем увеличении числа объектов в системе, как правило, все оставшиеся малые кластеры присоединяются к перколяционному. Пример процесса образования кластеров из занятых узлов на простой квадратной решетке можно посмотреть на рис. 5.

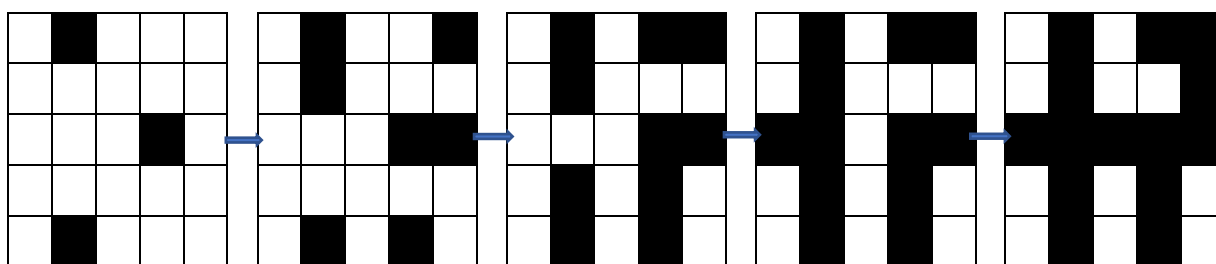


Рис. 5. Пример появления кластеров при увеличении доли заполнения перколяционной системы объектами

Таким образом, при постоянном увеличении доли заполнения перколяционной системы объектами происходит перколяционный переход, который разделяет две фазы, поэтому его можно отнести к фазовым переходам, в данном случае фазовым переходам второго рода. Описываемые в перколяции фазовые

переходы являются концентрационными. В первой фазе так называемых малых концентраций существуют только кластеры конечного размера, во второй фазе при увеличении концентрации до определенного значения помимо конечных кластеров присутствует как минимум один бесконечный (перколяционный кластер). Точка перколяционного перехода соответствует *порогу перколяции*. Определение порога перколяции является основной задачей для каждой перколяционной модели. По значению порога перколяции можно идентифицировать, например, концентрации наполнителя в композите для модификации свойств.

Характеристики кластеров, структура и свойства перколяционного кластера

Перед тем, как перейти к методике определения порога перколяции, необходимо ознакомиться с некоторыми характеристиками кластеров. Поведение данных характеристик является закономерным для всех перколяционных моделей, и их исследование важно прежде всего для верификации моделей.

Формулы для решеточной и континуальной перколяции отличаются. Рассмотрим сначала характеристики для решеток.

Пусть N – это общее количество ячеек решетки, p – доля заполнения решетки объектами, N_s – количество кластеров размером s , $\langle N_s \rangle$ – среднее количество кластеров размером s (значения усредняются по количеству испытаний), тогда распределение кластеров по размерам:

$$n_s(p) = \frac{\langle N_s \rangle}{N}, \quad (1)$$

количество занятых ячеек, принадлежащих кластеру размера s :

$$s \cdot n_s(p) \quad (2)$$

полное число занятых ячеек:

$$\sum_s s \cdot n_s(p), \quad (3)$$

вероятность того, что случайным образом выбранная ячейка (узел) принадлежит кластеру размера s :

$$w_s = \frac{s \cdot n_s(p)}{\sum_s s \cdot n_s(p)}, \quad (4)$$

средний размер кластера:

$$S = \sum_s s \cdot w_s, \quad (5)$$

мощность перколяционного кластера:

$$P_\infty = \frac{N_\infty}{N}, \quad (6)$$

радиус-вектор центра масс кластера (r_i – радиус вектор i -го объекта):

$$\langle r \rangle = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s r_i \quad (7)$$

радиус циркуляции:

$$R_s^2 = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s (r_i - \langle r \rangle)^2, \quad (8)$$

корреляционная длина (связности):

$$\xi^2 = \frac{2 \sum_s R_s^2 s^2 n_s}{\sum_s s^2 n_s}. \quad (9)$$

Для континуальных перколяционных систем в формулах происходит замена количества ячеек (узлов) на площади (объемы) объектов в зависимости от размерности задачи, то есть вместо N берется L^2 (L^3), где L – линейный размер рассматриваемой системы (квадрата, куба и т.д.). Таким образом, например, формула для мощности перколяционного кластера в трехмерной задаче выглядит так (V – объем объекта):

$$P_\infty = \frac{N_\infty \cdot V}{L^3}. \quad (6')$$

Поведение среднего размера кластера и мощности перколяционного кластера схематично изображены на рис. 6 и 7 соответственно.

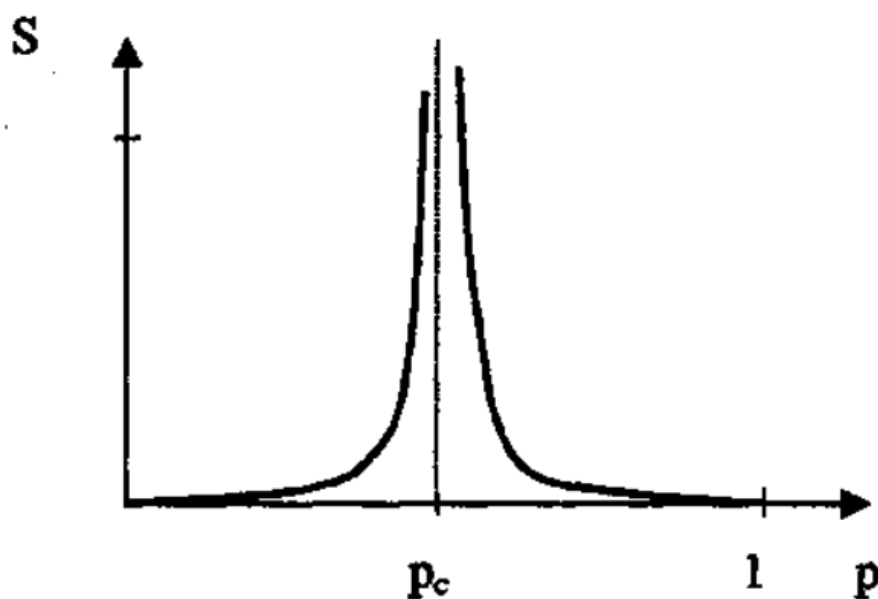


Рис. 6. Схематичное изображение поведения среднего размера кластера [1]

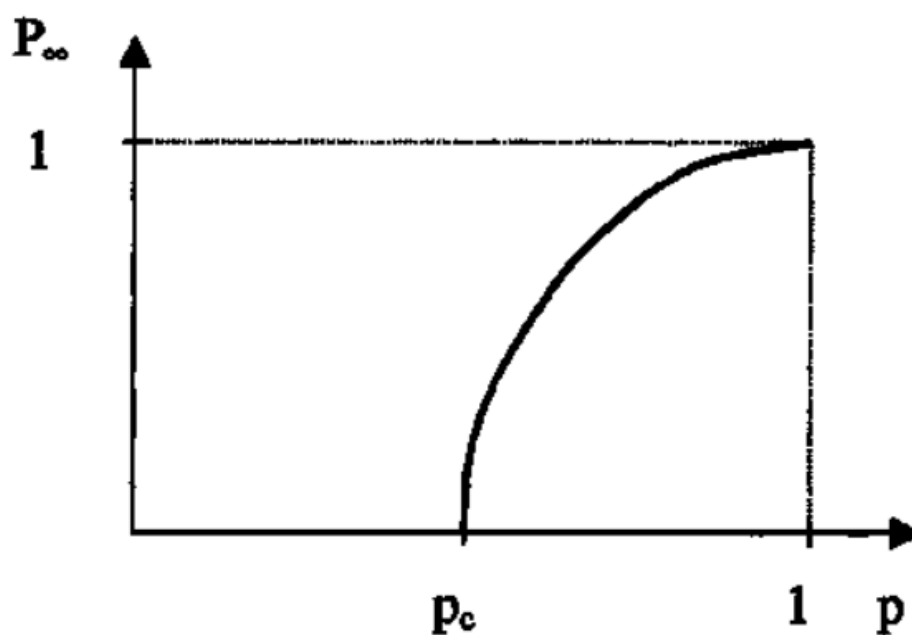


Рис. 7. Схематичное изображение поведения мощности перколяционного кластера [1]

Кроме мощности перколяционного кластера для исследователей интересны его структура и свойства. Известно, что перколяционный кластер имеет фрактальную структуру и обладает свойством самоподобия [12, 13]. Масса перколяционного кластера (число объектов, принадлежащих перколяционному кластеру) зависит от размера рассматриваемой системы и при разных

концентрациях ведет себя по-разному. Поведение массы перколяционного кластера до порога перколяции, на пороге перколяции и после порога перколяции описаны следующими соотношениями [12]:

$$M(L) \sim \begin{cases} \ln L, & p < p_c \\ L^D, & p = p_c, \text{ при } L \rightarrow \infty. \\ L^E, & p > p_c \end{cases} \quad (10)$$

Из (10) видно, что на пороге перколяции масса перколяционного кластера ведет себя как показательная функция, где D – фрактальная размерность. Это дает возможность исследователю определить значение фрактальной размерности, которое также имеет диапазон допустимых значений и зависит только от размерности рассматриваемой задачи. Фрактальная размерность перколяционного кластера определяется по следующей стандартной методике [1].

1. Находится центр масс перколяционного кластера x_c, y_c для двумерной задачи. Если размерность задачи больше, значит, и координаты центра масс добавляются;
2. Находится число элементов $M(l)$, находящихся внутри квадрата (куба и т.д. в зависимости от размерности задачи) с линейным размером l и с центром в центре масс ($l < L$);
3. l увеличиваем в два раза;
4. Повторяем выполнение пунктов 2 и 3, пока l не станет равным L ;
5. Строится зависимость $M(l)$ от l в логарифмическом масштабе, которая получается линейной. Полученные точки аппроксимируются прямой линией, наклон которой принимается за значение фрактальной размерности перколяционного кластера.

Определение значения фрактальной размерности перколяционного кластера является еще одним фактором для верификации исследуемой модели в целом, а также для исследования структуры и свойств отдельно перколяционного кластера. Разными исследователями получены значения фрактальной размерности перколяционного кластера для тех или иных значений размерности задачи, которые представлены ниже, при этом данные значения не зависят от того, какой тип перколяционной задачи рассмотрен.

Размерность задачи, d	Фрактальная размерность перколяционного кластера, D
2	$\approx 1,89$
3	$\approx 2,54$
≥ 6	≈ 4

Также для исследования интересны подструктуры перколяционного кластера. Вот основные.

Остов перколяционного кластера – часть перколяционного кластера, которая участвует в протекании. Это наиболее важная часть кластера, поскольку именно она обеспечивает прохождение потока или распространения какого-то свойства через всю систему. Если убрать остов, система перестанет быть перколирующей, то есть сигнал или жидкость больше не смогут пройти через нее целиком. Обычно остов состоит из узлов и связей, которые образуют цепочку пути от одной границы системы до противоположной.

Мертвые концы перколяционного кластера – часть перколяционного кластера, которая не участвует в протекании. Эти части находятся внутри основного кластера, но не участвуют непосредственно в переносе сигнала или вещества. Они связаны с основной структурой, однако не входят в критический путь переноса. Удаление мертвых концов никак не влияет на способность кластера проводить поток, но они увеличивают общий размер и сложность структуры.

Красные связи перколяционного кластера – связи между объектами перколяционного кластера, при удалении которых кластер перестает быть перколяционным. Красные связи играют ключевую роль в обеспечении целостности перколяционного кластера. Это особые связи, удаление каждой из которых нарушает свойство перколяции, то есть разрывает цепь передачи сигнала или течения жидкости. Наличие красных связей означает, что кластер обладает минимальной устойчивостью, и любое нарушение в этих местах приведет к потере проводимости.

Таким образом, изучение этих структур помогает лучше понимать процессы протекания в сложных системах, таких как электрические сети, транспортные потоки, биологические ткани и даже социальные взаимодействия. Перколяционные модели широко используются в физике конденсированного состояния, материаловедении, химии полимеров и многих других областях науки и техники.

Критические показатели

Перколяция рассматривается как критическое явление. Многие важные характеристики кластеров вблизи критической концентрации (соответствующей порогу перколяции) ведут себя как показательные функции:

$$S(p) \propto |p - p_c|^\gamma, \quad (11)$$

$$P_\infty(p) \propto |p - p_c|^\beta, \quad (12)$$

$$\xi(p) \propto (p - p_c)^{-\nu}. \quad (13)$$

Критические показатели являются универсальными для все типов перколяционных задач, их значения зависят только от размерности задачи. Критические показатели и фрактальная размерность перколяционного кластера связаны между собой соотношениями:

$$2\beta + \gamma = \nu d, \quad (14)$$

$$D = d - \frac{\beta}{\nu}. \quad (15)$$

Значения критических показателей для некоторых размерностей задачи представлены в табл. 1 [1].

Таблица 1

Значения критических показателей

Показатель	Размерность задачи, d				
	2	3	4	5	≥ 6
β	5/36	$0,417 \pm 0,003$	0,5	0,7	1
γ	43/18	$1,795 \pm 0,005$	1,8	1,6	1
ν	4/3	$0,875 \pm 0,008$	0,7	0,6	1/2

Для верификации перколяционной модели исследователями проводится определение критических показателей γ и β следующим методом. Известно, что величины среднего размера кластера и мощности перколяционного кластера ведут себя как показательные функции. При проведении вычислительного эксперимента рассчитываются значения среднего размера кластера и мощности перколяционного кластера по формулам (5) и (6), значения усредняются по количеству проведенных испытаний. Используя уравнения (11) и (12), графически строим зависимость $\lg P_\infty(p)$ от $\lg (p - p_c)$ и $\lg S(p)$ от $\lg (p_c - p)$ (для нахождения значения критического показателя до порога перколяции), $\lg S(p)$ от $\lg (p - p_c)$ (для нахождения значения критического показателя после порога перколяции). Полученные данные аппроксимируются прямой линией, значение наклона которой в первом случае принимается за значение критического показателя β , во втором случае – за значение критического показателя γ (до и после порога перколяции).

Методика оценки порога перколяции

Существует несколько методик для определения порога перколяции, и четкого теоретического обоснования ни для одной из них нет. Ряд исследователей пользуются подходом, который описан далее. Сначала определяется порог перколяции для нескольких перколяционных систем конечного размера (минимум трех для возможности построения прямой линии), а потом, используя масштабные эффекты, находится порог перколяции для бесконечного случая. Рассмотрим этот процесс подробнее.

Сначала обратимся к процедуре нахождения порога перколяции для системы конечного размера. Для каждого набора входных параметров перколяционной модели проводится серия испытаний (минимум 100). В каждом испытании формируется перколяционная система, заполненная объектами с заданным значением доли заполнения, а именно концентрации p . Для каждого испытания выводится ответ – наступила перколяция или нет (то есть существует ли хотя бы один перколяционный кластер).

Таким образом, для каждого значения концентрации имеется вероятность возникновения перколяционного кластера. Пример значений вероятностей возникновения перколяционного кластера при разных значениях концентраций представлен на рис. 8. При увеличении концентрации объектов в перколяционной системе вероятность возникновения перколяционного кластера растет от 0 до 1. На рис. 8 видно, что рост вероятности возникновения перколяционного кластера происходит скачкообразно, то есть имеет место фазовый переход. Данную зависимость можно представить, например, в виде сигмоиды.

Имеются различные подходы в выборе аппроксимирующей функции, в частности использование полиномов или прямых. Ни один из этих способов не имеет строго теоретического обоснования, однако применение различных аппроксимирующих функций приводит к одним и тем же значениям порога перколяции с ошибкой, не превышающей ошибку компьютерного эксперимента. Большинство исследователей принято аппроксимировать полученные данные вероятности возникновения перколяционного кластера функцией вида

$$P(p) = (1 + \exp(-((p - p_c))a))^{-1}. \quad (16)$$

На рис. 8 видно, что при каждой концентрации значение вероятности берется с некоторой погрешностью (дальнейшая аппроксимация проводится с ее учетом), которая считается следующим образом [14–17]. Для каждого значения

вероятности возникновения перколяционного кластера найдено стандартное отклонение среднего

$$\sigma_{\bar{P}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{N-1} \sum (P_i - \bar{P})^2}}{\sqrt{N}}. \quad (17)$$

Далее, используя критерий Стьюдента, найден доверительный интервал $\bar{P} \pm t\sigma_{\bar{P}}$, в который с некоторой вероятностью (согласно критерию) попадает наше значение вероятности возникновения перколяционного кластера, где t – коэффициент Стьюдента.

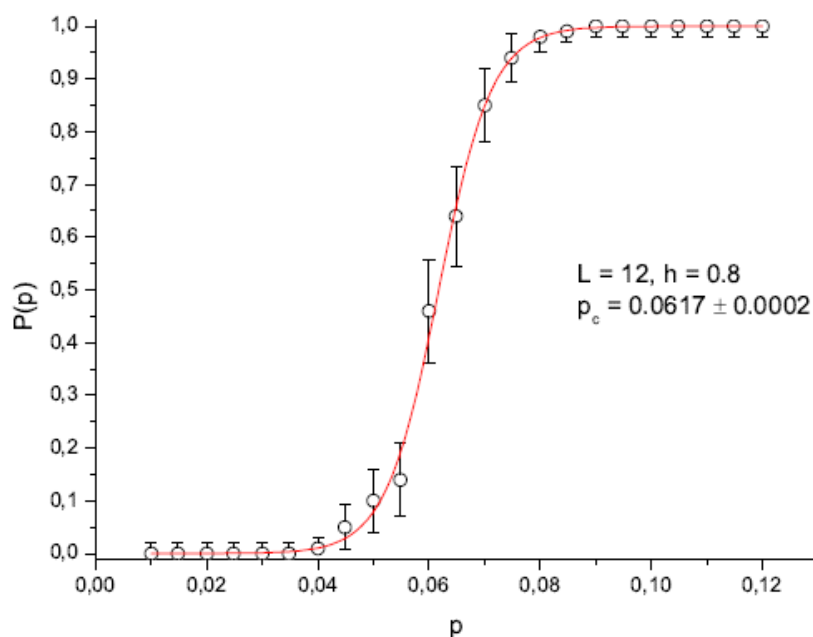


Рис. 8. Вероятность возникновения перколяционного кластера (пример)

Значение параметра p , при котором вероятность возникновения кластера равна 0,5, принимается за оценку значения порога перколяции для конечной системы. В зависимости от программы, в которой проводится аппроксимация, может получиться значение порога перколяции с ошибкой на порядок ниже ошибки исходных данных, потому что при вычислении ошибки результата учитываются не только ошибки исходных данных как веса, но и близость полученной кривой к экспериментальным данным (по разным статистическим критериям). Как правило, чем больше точек на графике и чем больше проведено статистических испытаний, тем точнее получается значение порога перколяции. Для ряда прикладных задач бывает очень весомым и пятый знак после запятой, так как порог перколяции может соответствовать, например, значению критической

концентрации одной фазы в композите, при котором новый материал обладает уникальными свойствами.

Для получения достоверного значения порога перколяции рассмотрения систем конечного размера мало, потому как эти значения для разных систем могут достаточно сильно отличаться. Возникают масштабные эффекты, причем для одних задач наблюдается уменьшение значения порога перколяции при увеличении линейного размера рассматриваемой системы, в других случаях – увеличение. Даже применение различных видов граничных условий способно повлиять на эти эффекты. Конечно, исследователю интересно значение порога перколяции для бесконечного случая. Определяется оно с помощью следующего подхода. Сначала для одного набора входных данных необходимо получить значения порога перколяции минимум для трех перколяционных систем конечного размера. Далее порог перколяции определяется в термодинамическом пределе ($L \rightarrow \infty$) с помощью скейлингового соотношения [17]:

$$|p_c(L) - p_c(\infty)| \propto L^{-\frac{1}{\nu}}, \quad (18)$$

где ν – уже известный нам критический показатель (табл. 1).

Пример нахождения порога перколяции для бесконечной системы показан на рис. 9. Получены значения порога перколяции для трех конечных систем. Далее данные аппроксимируются прямой линией, где значение по оси ординат (p_c) в точке пересечения с осью абсцисс берется за значение порога перколяции для бесконечной системы.

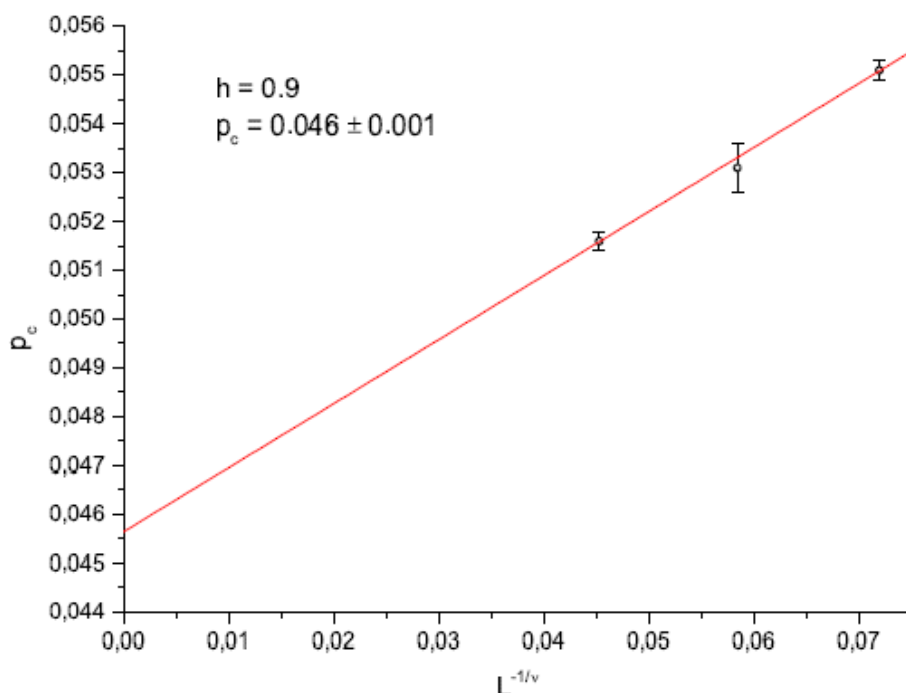


Рис. 9. Пример нахождения порога перколяции в термодинамическом пределе

Другие характеристики перколяционной модели

Кроме определения порога перколяции, распределения кластеров по размерам, среднего размера кластера, мощности и фрактальной размерности перколяционного кластера важным является вопрос о среднем значении соседей B_c (особенно на пороге перколяции). Этому вопросу посвящены исследования (например, [18–21]). Как правило, для каждой перколяционной модели разрабатывается оригинальная методика подсчета среднего значения соседей. Например, можно использовать следующий подход. Считается количество объектов $N(k)$, имеющих k соседей ($0 \leq k \leq k_{max}$). Тогда среднее значение количества соседей вычисляется по формуле

$$B_c = \frac{\sum_{k=0}^{k_{max}} kN(k)}{n}, \quad (19)$$

где n – количество объектов.

Лекция 3. Алгоритмы, применяемые в теории перколяции

Решения некоторых перколяционных задач

В настоящее время существуют решения небольшого числа перколяционных задач. Некоторые задачи решены аналитически. Например, перколяция на одномерной цепочке [1]. Пусть дана одномерная цепочка узлов (рис. 10), каждый из которых занят с некоторой вероятностью p . Понятно, что в такой системе перколяционный кластер возникает только тогда, когда все узлы заняты. В данном случае порог перколяции $p_c = 1$.



Рис. 10. Пример перколяции на одномерной цепочке [1]

Так как порогу перколяции соответствует стопроцентное заполнение системы, поведение характеристик модели можно рассматривать только ниже порога перколяции. Все законы поведения здесь сохраняются, как и для задач больших размерностей [1]. При этом критические показатели: $\nu = 1, \gamma = 1$.

Также аналитическим решением обладает перколяционная задача на дереве Кейли. Дерево Кейли представляет собой структуру без петель с ветвями единичной длины. Как, правило, существует один центральный узел, из которого выходит z ветвей, соединяющих этот узел с z узлами следующего уровня. Далее из узлов следующего уровня также выходит $(z-1)$ новых ветвей к новым соседним узлам и т.д. Этот процесс продолжается бесконечно. Из каждого узла дерева Кейли выходит z ветвей. При $z = 2$ дерево Кейли превращается в одномерную цепочку. Пример дерева Кейли при $z = 3$ представлен на рис. 11 [1].

В данной задаче порог перколяции меньше 1, поэтому поведение характеристик модели можно рассматривать как до порога перколяции, так и после. Порог перколяции для такой системы равен

$$p_c = \frac{1}{z-1}.$$

Критические показатели равны значениям показателя для задач с размерностью $d \geq 6$.

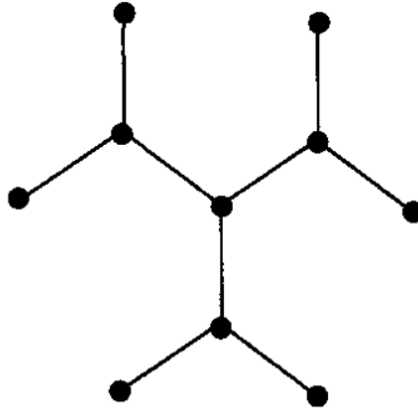


Рис. 11. Пример дерева Кейли при $z = 3$ [1]

Для триангулированных решеток (узлы решетки располагаются в углах равностороннего треугольника) порог перколяции равен $1/2$. Порог перколяции для квадратной решетки в случае задачи узлов равен 0,59, в случае задачи связей – $1/2$. Для шестиугольной решетки порог перколяции вычисляется по формуле $p_c = 1 - 2 \sin\left(\frac{\pi}{18}\right) = 0,652704 \dots$

Решетка КагOME является покрывающей решеткой для шестиугольной. *Покрывающей решеткой* называется такая решетка L^c , которая образуется путем преобразования связи в узел. То есть узлом новой решетки является связь между узлами исходной решетки L . Таким образом порог перколяции для задачи связей исходной решетки будет равен порогу перколяции для задачи узлов покрывающей решетки.

Также аналитическим решением обладают задача бернуллиевской перколяции на дереве Кестена [22, 23] и задача коагуляции агрегатов, описываемой уравнением Смолуховского [24].

В случае бернуллиевской перколяции рассматривается дерево, на каждом уровне которого количество ветвей удваивается. Каждый узел дерева случайно занимает значение «открытого» или «закрытого» согласно вероятности p . Какова вероятность существования пути от корня дерева? Решая аналитически, получается, что пороговая вероятность равна $p_c = 1/2$. При $p > 1/2$ почти наверняка существует бесконечная открытая ветвь, а при $p \leq 1/2$ ее нет.

В задаче коагуляции агрегатов, описываемой уравнением Смолуховского, процесс агрегации частиц описывается кинетическими уравнениями, учитывающими слияние двух любых пар частиц с некоторой вероятностью. Уравнение описывает эволюцию концентрации частиц различного размера $n_k(t)$, где k – число частиц в агрегате. Решение уравнения Смолуховского возможно аналитически лишь в некоторых специальных случаях (например, при постоянной скорости коагуляции, называемой моделью Флаэрти – Пратта).

Классические алгоритмы

Большинство перколяционных моделей, отражающих реальные структуры и процессы, описываются математически и реализуются с использованием компьютерных методов при опоре на подход Монте-Карло. В связи с этим возникает потребность в разработке эффективных алгоритмов. Для любой перколяционной задачи основной алгоритм решения выглядит следующим образом.

На начальном этапе происходит ввод начальных данных изучаемой модели: размер области, размер объекта, диапазон рассматриваемых концентраций, количество испытаний и прочие необходимые сведения. Далее организуется основной цикл по диапазону рассматриваемых концентраций. Внутри цикла организуется цикл по испытаниям, в котором уже работают алгоритм построения перколяционной системы, алгоритм распределения объектов по кластерам, поиск перколяционного кластера. После проведения серии экспериментов для каждого шага концентрации определяются вероятность возникновения перколяционного кластера и другие характеристики модели.

В настоящее время существует ряд классических алгоритмов, применяемых в теории перколяции. Описание некоторых из них приводится далее в данной лекции.

К алгоритмам построения перколяционной системы относят распределение объектов на решетке или в континууме, случайное распределение или удовлетворяющее какому-либо закону распределения. Как правило, в данных алгоритмах используется генератор псевдослучайных чисел. И в большинстве случаев, если заполнение объектов случайное, необходимо условие равномерности. Важным этапом верификации правильности работы алгоритма является проверка выполнения закона распределения методами теории вероятностей и математической статистики. Самый простой алгоритм распределения объектов – это генерировать их координаты; если место свободно, то объект его занимает; если место занято ранее размещенным объектом, то данные координаты отвергаются и генерируются новые. И так далее до тех пор, пока не будет достигнуто необходимое значение доли заполнения системы объектами. В рамках конкретной задачи могут накладываться дополнительные условия на пересечение, частичное пересечение, не пересечение объектов, их взаимное расположение, соблюдение граничных условий.

Среди алгоритмов распределения объектов по кластерам одним из первых так называемых «алгоритмов-классиков» стал алгоритм Хошена – Копельмана. Данный алгоритм был предложен в 1976 г. для распределения объектов по кластерам для решеточной перколяционной задачи на простой квадратной решетке [25]. Изначально объект на решетке назывался узлом (или ячейкой).

Рассмотрим пример работы алгоритма для квадратной решетки с линейным размером L . Каждый узел решетки может быть занят с некоторой вероятностью p . Данное заполнение можно сформировать в виде двумерного массива, состоящего изначально из 0 и 1 (0 соответствует тому, что узел свободен, 1 – узел занят). Просмотр каждого узла решетки начинается с первого элемента массива.

Ищем в массиве очередной занятый узел. Для него проверяем, если слева и сверху от него нет занятых узлов, то предполагается, что данный узел является началом нового кластера, при этом в программе сохраняется метка нового кластера, а количество элементов в новом кластере равно 1.

Если соседний занятый узел найден в количестве одного, то текущий занятый узел принадлежит кластеру занятого соседа. Он помечается кластерной меткой соседа, а количество элементов в данном кластере увеличивается на 1.

Если у текущего занятого узла находятся оба занятых соседа с одинаковой кластерной меткой, то аналогично предыдущей ситуации текущий занятый узел принадлежит кластеру занятого соседа. Он помечается кластерной меткой соседа, а количество элементов в данном кластере увеличивается на 1.

Если текущий узел имеет двух занятых соседей с разными кластерными метками, то происходит так называемый конфликт меток. В этом случае за кластерную метку текущего узла и соседа с большей кластерной меткой берется кластерная метка узла с меньшим значением, и определяется, что кластер с большей кластерной меткой – это кластер с меньшей кластерной меткой.

Пример работы алгоритма Хошена – Копельмана на квадратной решетке представлен на рис. 12. На рисунке разные кластеры отмечены разным цветом для удобства восприятия.

0	1	0	0	1	0	1	1	0	0
0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	1	0	1	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1	0	1	1

0	1	0	0	2	0	3	3	0	0
0	1	0	0	0	0	0	3	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	4	0	0	0	0	5	0	6	0
0	0	7	7	0	0	0	0	6	6
0	0	0	7	7	0	0	0	0	0
8	0	0	7	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	9	0	10	0	11	0
0	0	0	0	9	0	0	0	0	12
0	13	13	0	9	9	9	0	12	12

Рис. 12. Пример работы алгоритма Хошена – Копельмана на квадратной решетке

Данный алгоритм можно применить к различным решеткам, добавляется информация о просматриваемых соседях. Также данный алгоритм может быть модифицирован для континуальной перколяции. Модифицированный алгоритм Хошена – Копельмана отличается от классического тем, что в классическом алгоритме перебираются по порядку все слои решетки, а в модифицированном перебираются все элементы от 1 до n , где n – число упакованных элементов. Это дает возможность работать алгоритму не на решетке, а в континууме. Например, для перколяции сфер [26] алгоритм работает по следующей схеме:

1. При генерации первого элемента ему присваивается кластерная метка 1 и размеру первого кластера также присваивается значение 1;
2. Для каждого следующего элемента i , где $2 \leq i \leq n$, проверяется, существуют ли среди ранее проверенных элементов (уже имеющих кластерную метку) ее соседи;
3. Если соседей не нашлось, то элемент i , предположительно, принадлежит новому кластеру. В этом случае k увеличивается на 1, элементу i присваивается k -ое значение кластерной метки, а значению размера k -го кластера присваивается 1;
4. Если встречается один сосед, то два элемента принадлежат одному кластеру. В этом случае элементу i присваивается кластерная метка соседа, а размер кластера с данной меткой увеличивается на 1;
5. Если соседей нашлось несколько, то все элементы принадлежат одному кластеру. В этом случае соседи могут иметь как одинаковые, так и разные кластерные метки. Если все кластерные метки соседей одинаковые, то сфере i присваивается кластерная метка соседа, а размер кластера с данной меткой увеличивается на 1. Если среди соседей есть такие, которые имеют разные кластерные метки, то возникает конфликт кластерных меток. В этом случае:
 - (а) находим среди кластерных меток наименьшую, она является правильной кластерной меткой, остальные метки являются неправильными;
 - (б) элементу i и всем соседям присваивается значение правильной кластерной метки, размер кластера с правильной меткой увеличивается на $(1+(\text{количество соседей} - 1))$;
 - (с) среди ранее рассмотренных элементов находятся те, которые имеют неправильные кластерные метки. Для каждого такого элемента меняем кластерную метку на правильную, размер кластера с правильной меткой увеличивается на количество таких элементов, а размеры кластеров с неправильными кластерными метками обнуляются.

Алгоритмы поиска в глубину и ширину, а также «волновой» алгоритм успешно применяются для поиска перколяционного кластера и исследования кластерных подструктур.

Поиск в глубину и ширину определяют пути в графе, то есть если представить объекты в виде вершин графа, то можно искать пути между ними. Поиск в глубину найдет первый путь от одной заданной вершины к другой (просмотр объектов происходит от соседа к соседу следующего уровня). Поиск в ширину находит кратчайший (просматриваются сначала все соседи объекта одного уровня, потом переходит к просмотру соседей следующего уровня). Схематично работа алгоритма на примере бинарного дерева изображена на рис. 13. Оба алгоритма реализуются рекурсивно. Очевидна значительная сложность алгоритмов, которая сильно растет при увеличении количества рассматриваемых объектов.

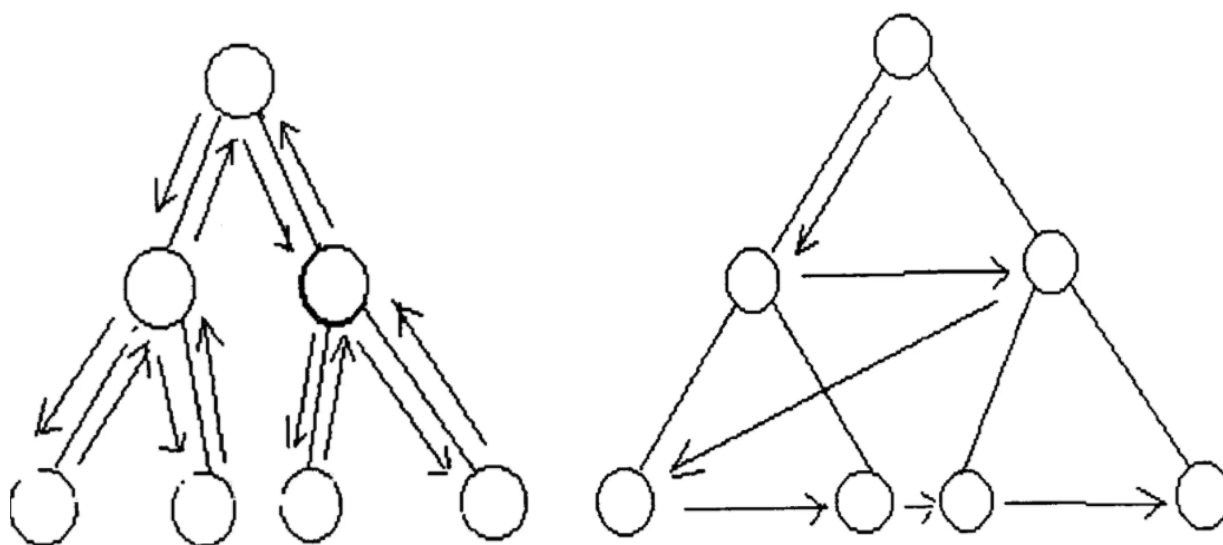


Рис. 13. Алгоритм поиска в глубину (слева) и поиска в ширину (справа)

«Волновой» алгоритм похож на алгоритм поиска в ширину и основан на идее представления элементов одного уровня в виде волны. Поиск от одного заданного элемента к другому происходит путем перехода от фронта «старой волны» к фронту «новой волны», реализация не рекурсивная. Пример реализации данного алгоритма на поиске перколяционного кластера в системе сфер в пространстве [26]. На рис. 14 представлено двумерное изображение перколяционной системы сфер.

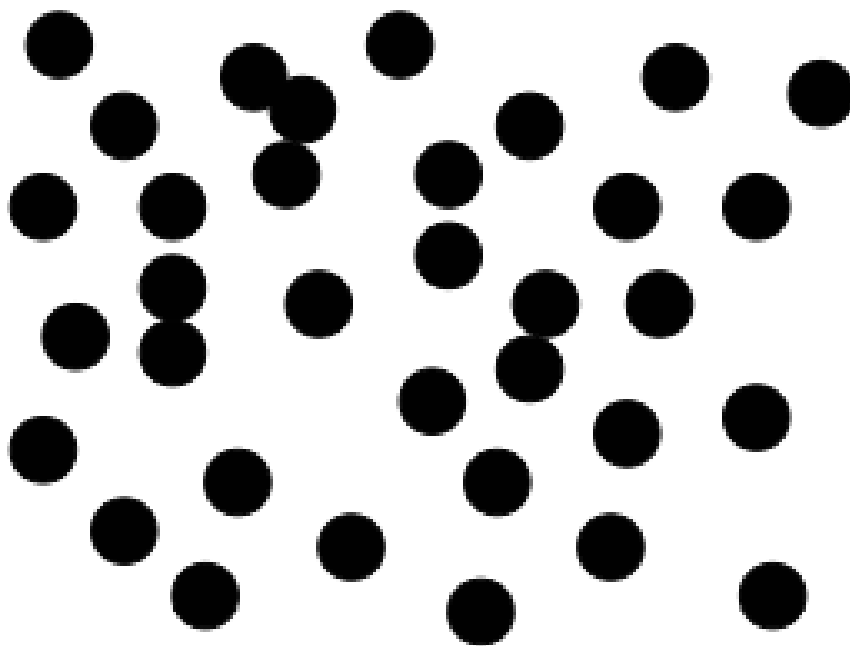


Рис. 14. Двумерное изображение перколяционной системы сфер

Перколяционный кластер представляет собой кластер, соединяющий любую пару сфер (одна взята из верхнего слоя системы, вторая – из нижнего), то есть достаточно найти хотя бы один путь. Работа «волнового алгоритма»:

1. Выбирается пара объектов из верхнего и нижнего слоя системы, имеющих одинаковые кластерные метки (то есть предполагается, что они принадлежат одному кластеру): $mini$ – начало пути, $maxi$ – конец пути;
2. Создаются массивы OF (старый фронт волны), NF (новый фронт волны), T (волновая метка);
3. Создаются переменные Tr (текущее время), $length$ (длина пути);
4. Для всех элементов $T[i] = 0$, где $1 \leq i \leq n$;
5. $mini$ принадлежит старому фронту волны и записывается в массив OF , $Tr = 1$, $length = 0$, $T[mini] = -1$;
6. Для каждого из элементов, принадлежащих старому фронту волны OF , перебираются все соседи;
7. Для каждого соседа j проверяется: если $T[j] = 0$, то: $T[j] = Tr, j$ записывается в массив NF , то есть он принадлежит новому фронту волны;
8. Если массив NF после предыдущего действия оказался пуст, то перколяционного кластера нет. Работа алгоритма прекращается;
9. Если массив NF содержит элементы, то:
 - (а) ищем среди элементов массива NF элемент $maxi$;

- (b) если $maxi$ найден среди элементов массива NF , то перколяционный кластер найден. В этом случае найден кратчайший путь от $mini$ до $maxi$ $length = Tr$. Работа алгоритма прекращается;
- (c) в случае, если $maxi$ не найден среди элементов массива NF , то: массив OF очищается; в массив OF записываются элементы массива NF (то есть на следующем шаге элементами старой волны OF становятся элементы, которые были элементами новой волны NF на предыдущем шаге), $Tr = Tr + 1$; переходим к пункту 6.

Пример результата работы «волнового алгоритма» можно посмотреть на рис. 15. На рисунке метка начала пути – $start$, метка конца пути – end . По синим линиям происходят переходы от старой волны к новой. Алгоритм похож на «поиск в ширину», только он является не рекурсивным, что экономит используемую память при реализации.

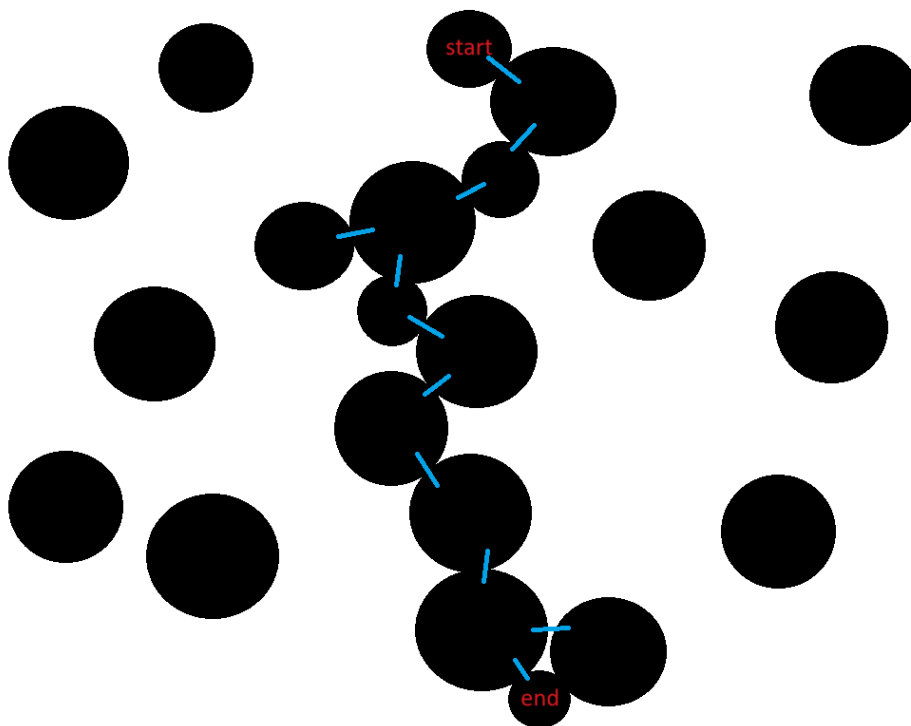


Рис. 15. Нахождение перколяционного кластера – пути от метки $start$ до метки end «волновым алгоритмом»

Также для определения перколяции известен алгоритм Зиффа, а для генерации отдельного кластера – алгоритм Лиса, подробное описание которых можно найти в книге [1].

Численные решения для ряда перколяционных задач также известны. Например, известен порог перколяции для задачи узлов, связей и смешанной задачи для простых квадратных и кубических решеток [1]. Достаточно неплохо

исследована перколяция k -меров на решетках [например, 27–29], окружностей и сфер, эллипсоидов и некоторых других объектов [например, 30–34].

Специальные алгоритмы, модификация алгоритмов

Каждая перколяционная модель, описывающая реальную структуру/процесс, специфична. В связи с этим возникает потребность в модификации «классических» алгоритмов и разработке так называемых «специальных алгоритмов». Например, модификация алгоритма Хошена – Копельмана для использования в континуальных системах или на решетках с просмотром узлов еще и по диагонали. К специальным алгоритмам можно отнести алгоритмы поиска подструктур перколяционного кластера, расчета кластерных характеристик (средний размер кластера, мощность и фрактальная размерность перколяционного кластера), определения среднего числа соседей объекта (этому вопросу посвящены многие отдельные исследования). Также разрабатывая специальные алгоритмы, можно исследовать специфичные структуры и свойства модели.

Распараллеливание алгоритмов

Проведение вычислительного эксперимента – процесс весьма сложный и длительный, особенно если речь идет о сложных моделях. Для получения результатов с высокой точностью необходимо большое количество испытаний и рассмотрение больших размеров перколяционных областей. Целесообразно применять параллельные вычисления. Самыми распространенными подходами в данном случае являются распараллеливание по циклам, рассмотрение подобластей рассматриваемой перколяционной системы параллельно. За последние годы появились исследования в этой области [например, 35–37].

Статья [37] посвящена детальному изучению эффективных параллельных алгоритмов, предназначенных для решения задач перколяции на двумерных решетках. Рассмотрены различные схемы параллельного программирования, такие как MPI и OpenMP. Проведено тестирование предложенных алгоритмов на различных конфигурациях вычислительных кластеров. Получены оценки производительности и масштабируемости разработанных решений.

Развитие технологий облачных вычислений также способствует ускорению проведения численных экспериментов по определению значений характеристик перколяционных задач.

Лекция 4. Применение теории перколяции в некоторых приложениях

Процессы фильтрации, гелеобразования

В последние годы методы теории перколяции набирают обороты в использовании во многих областях науки, смело выйдя за пределы физики. С помощью перколяционных моделей можно исследовать самые различные процессы, начиная с поведения жидкостей в пористых структурах и заканчивая экономическими или демографическими процессами. В рамках данной лекции будут описаны так называемые практические «приложения-классики» теории перколяции.

Как уже говорилось в первой лекции данной книги, впервые перколяционный подход был упомянут в изучении процессов гелеобразования и полимеризации [3–10]. Процесс гелеобразования протекает в золях при слиянии молекул и дальнейшем образовании макромолекул (рис. 16), что можно описать с использованием идей образования кластеров. Как правило, рассматривается смешанная перколяционная задача, в которой учитываются концентрация молекул, условие возникновения связи, температура и другие возможные параметры. Порог перколяции в данном случае соответствует точке перехода золь – гель.

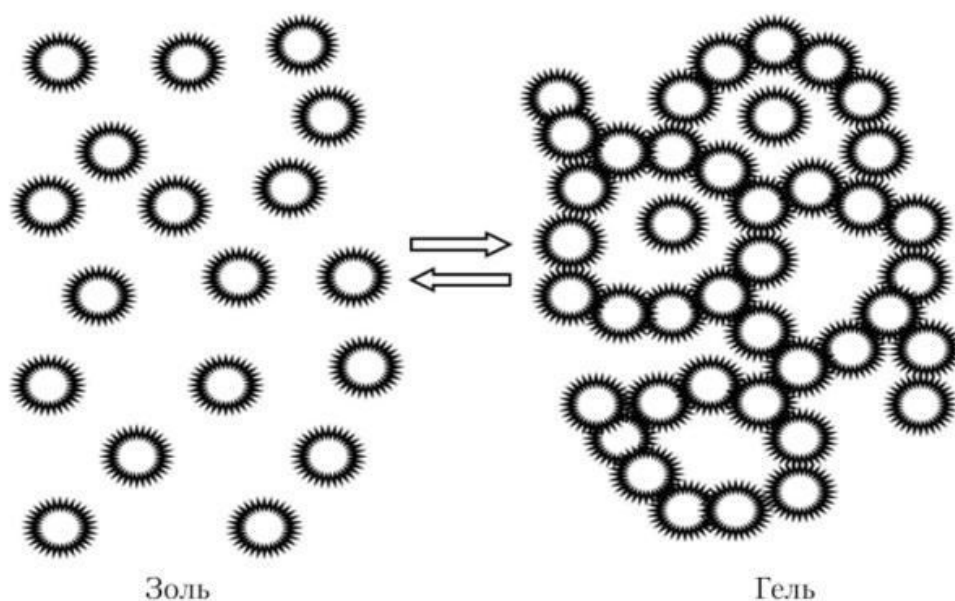


Рис. 16. Визуализация процесса слияния молекул и образования макромолекул

Во время полимеризации мономеры соединяются вместе, формируя длинные цепи. По мере увеличения длины цепей возникает возможность образования поперечных связей между цепями, приводящих к образованию сетки. Такой переход также хорошо описывается перколяционной моделью.

Еще одним «приложением-классиком» является изучение вопросов фильтрации, прохождения жидкостей через пористые среды. Первыми тут отметились Бродбент и Хамерсли [2]. Авторами впервые была сформулирована идея о

прохождении вещества сквозь неоднородные среды, представленные как случайно занятые ячейки двумерной решетки. Каждый элемент решетки мог находиться в одном из двух состояний: открыт («проницаем») или закрыт («непроницаем»). Основным результатом стало введение понятия критического порога p_c , при превышении которого формируются бесконечно большие связанные компоненты – кластеры, обеспечивающие пропускание вещества через всю систему.

Есть и современные исследования. Например, перколяционный подход был применен авторами работы [38] при гидродинамическом моделировании воздействия на призабойную зону скважины. Приведены результаты моделирования кислотной обработки скважины на основе промысловых данных. Результаты моделирования с использованием теории перколяции показывают хорошую сходимость расчетных показателей с фактическими данными. Загрязнение призабойной зоны моделировалось путем уменьшения проницаемости. Расчет происходил в программе Matlab с опорой на метод инвазивной перколяции. Затем данные переносились в tNavigator для финального моделирования. Проницаемость зон кислотного проникновения принималась равной 250 мД. Иллюстрация моделирования представлена на рис. 17.

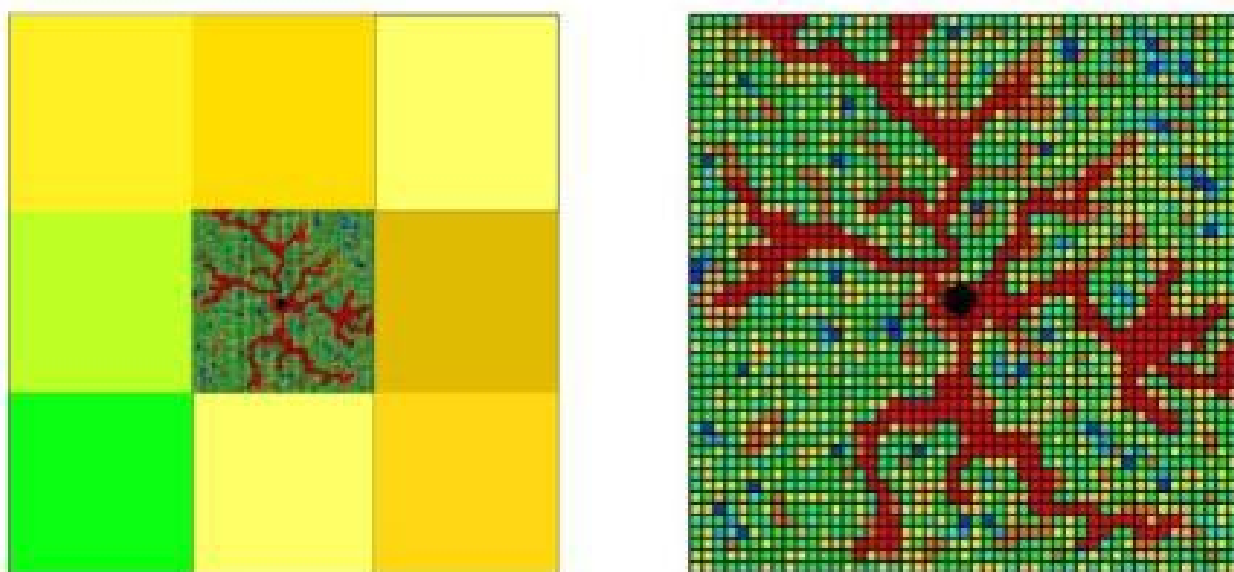


Рис. 17. Изменение проницаемости при моделировании кислотной обработки [38]

Разница в фактической и расчетной накопленной добыче составляет по нефти 332,2 м³, по жидкости – 1337,9 м³, а погрешность расчета не превышает 7 % (рис. 18).

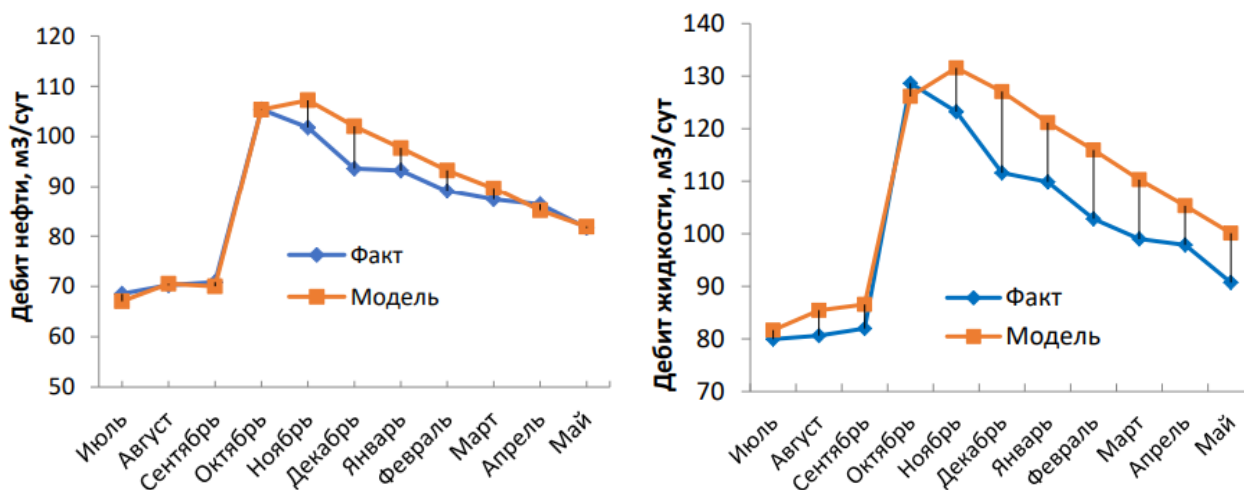


Рис. 18. Слева результат расчета модели для дебита скважины по нефти, справа результат расчета модели для дебита скважины по жидкости [38]

Моделирование распространения пожаров

Еще в книге [17] можно увидеть описание лесного пожара с использованием перколяционной задачи узлов на простой квадратной решетке, где занятый узел соответствует горящему дереву, а свободный узел – еще не горящему дереву, но имеющему на это определенный шанс, поэтому эту модель также можно отнести к «приложениям-классикам».

В 2012 году авторы статьи [39] исследовали развитие лесного пожара с применением перколяционной модели. Исходными данными являлись скорость ветра; направление ветра; вид пожара; класс горимости; класс пожарной опасности погоды; масштабный коэффициент (scale) используемой в модели ячейки, определяющий расстояние на реальной местности, соответствующее стороне ячейки; матрица со значениями вероятности распространения огня, полученная в результате обработки аэрофотоснимка; координаты очага возгорания (i, j); длительность времени прогноза.

Результатом моделирования работы [39] стали визуализированная матрица пожара; матрица значений времени возгорания отдельных областей относительно времени начала пожара; площадь пожара. Пример результата моделирования лесного пожара при скорости ветра 6 м/с в направлении 100 градусов для леса первого класса горимости и третьего класса пожарной опасности через 2, 4, 6 часов после возгорания соответственно можно посмотреть на рис. 19.

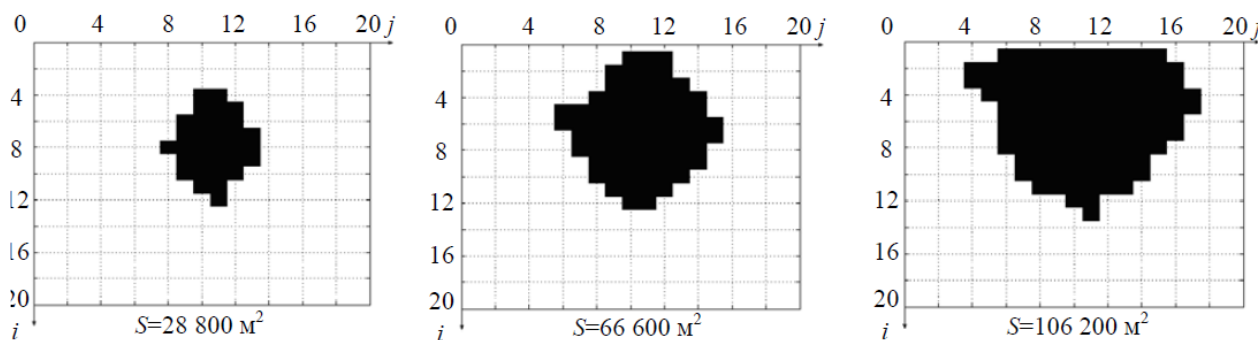


Рис. 19. Результат моделирования лесного пожара при скорости ветра 6 м/с в направлении 100 градусов для леса первого класса горимости и третьего класса пожарной опасности через 2, 4, 6 часов после возгорания соответственно [39]

Исследование включает сравнение результатов моделирования с экспериментальными данными и существующими методами прогнозирования, такими как карты риска лесных пожаров.

Моделирование распространения пожара в жилой местности было рассмотрено в работе [40] 2011 г. Перколяционная модель пожара представляет собой метод описания распространения процесса горения на двумерной решетке, где существует непрерывный путь через соседние проводящие узлы от одного края решетки до противоположного.

В модели учитываются следующие факторы: территория разбивается на отдельные участки (узлы); каждый узел может находиться в одном из состояний: горящий или негорящий; между узлами устанавливаются связи, определяющие вероятность распространения огня; процесс развития пожара описывается как последовательное изменение состояний узлов.

Основными параметрами модели являются вероятность возгорания (переход в состояние горения), вероятность распространения (передача горения на соседние участки), матрица переходных вероятностей между состояниями, временные интервалы развития процесса.

Модель учитывает случайные факторы развития пожара, позволяет рассматривать прерывание процесса при случайном обрыве связей и описывает динамику распространения горения. В модели также принимается в расчет влияние различных факторов (погодные условия, тип построек).

Схематически распространение пожара от здания к зданию изображено на рис. 20. Видно, что в модели учитываются здания тех или иных типов с разной вероятностью возгорания и один источник возникновения пожара.

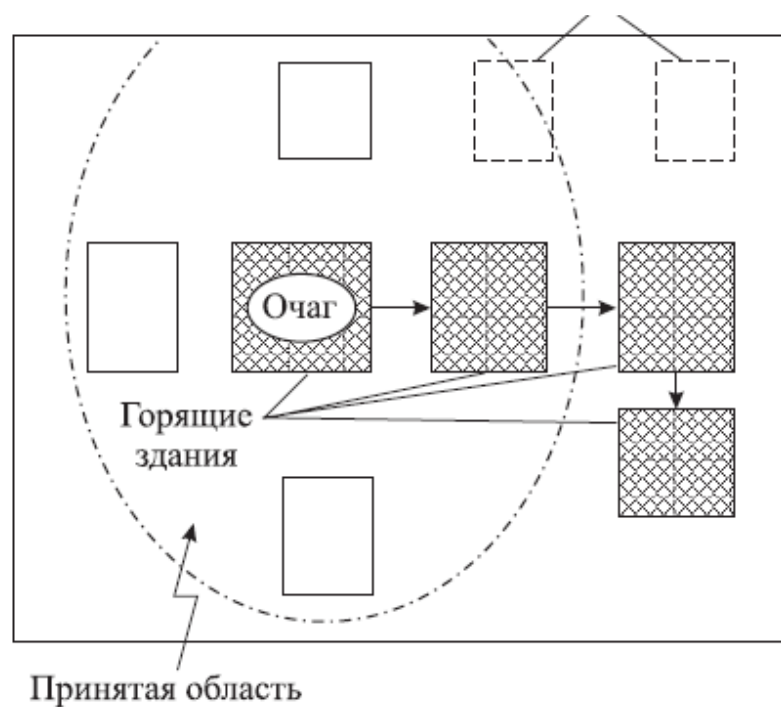


Рис. 20. Распространение пожара от здания к зданию:верху – развитие пожара, внизу – схематическое представление деревни [40]

Пример моделирования распространения пожара в деревнях Передельцы и Требухино Рязанской области представлен на рис. 21. Параметрам модели были даны значения, основанные на реальных пожарах. Авторы работы показали удовлетворительное соответствие результатов моделирования с реальным течением вышеуказанных пожаров.

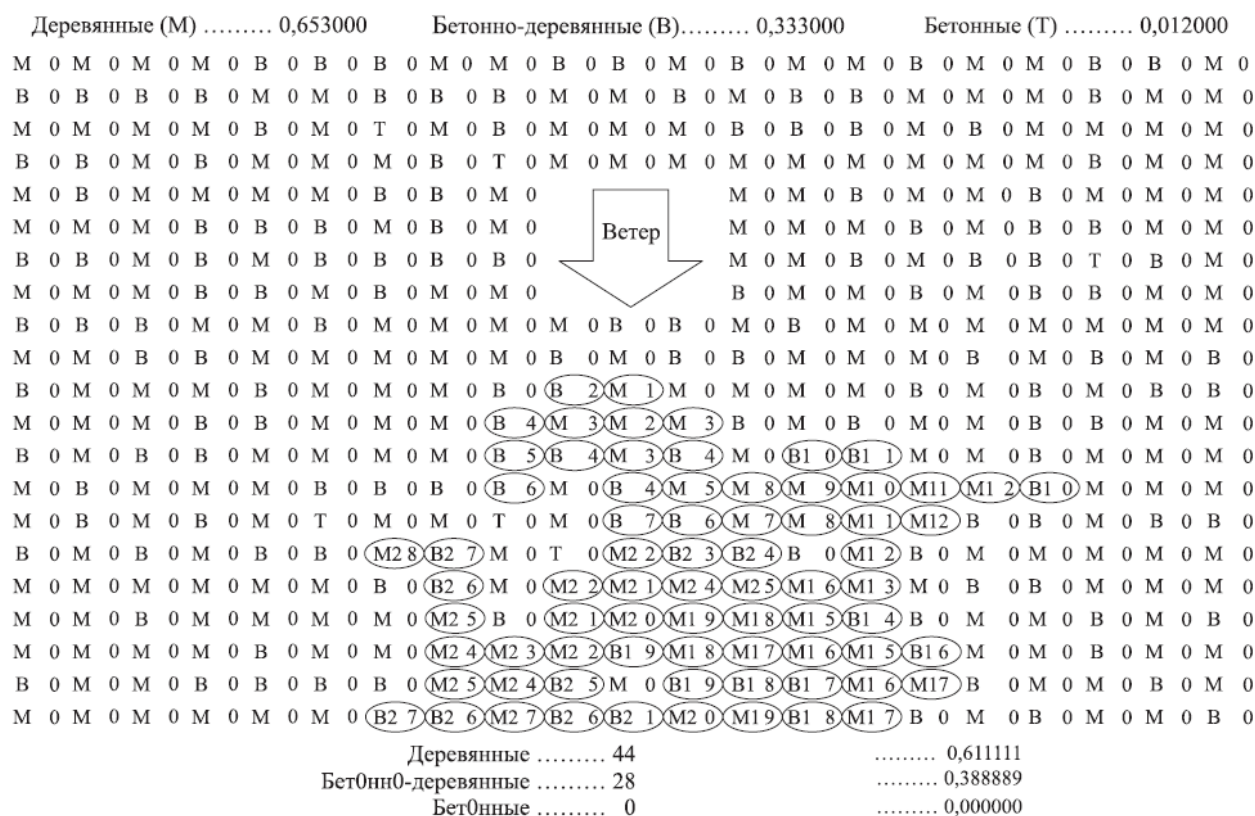


Рис. 21. Пример моделирования развития пожара в деревне [40]

Спустя 6 лет первый автор данного исследования модифицировал модель уже с другим соавтором [41]. В представленной работе они использовали комплексный подход к моделированию развития пожаров на открытых территориях, объединяющий перколяционную модель и нейронные сети.

Основная идея исследования заключается в создании вероятностной модели распространения пожара, учитывающей случайные факторы и нелинейные зависимости между параметрами. Перколяционный процесс использовался для описания распространения пожара, нейронные сети – для обработки и анализа данных (блок-схема разработанного авторами алгоритма представлена на рис. 22).

Преимуществами предложенного подхода стали более точное прогнозирование распространения пожара, учет сложных нелинейных зависимостей, возможность адаптации модели под конкретные условия и повышение точности предсказаний благодаря использованию нейронных сетей.

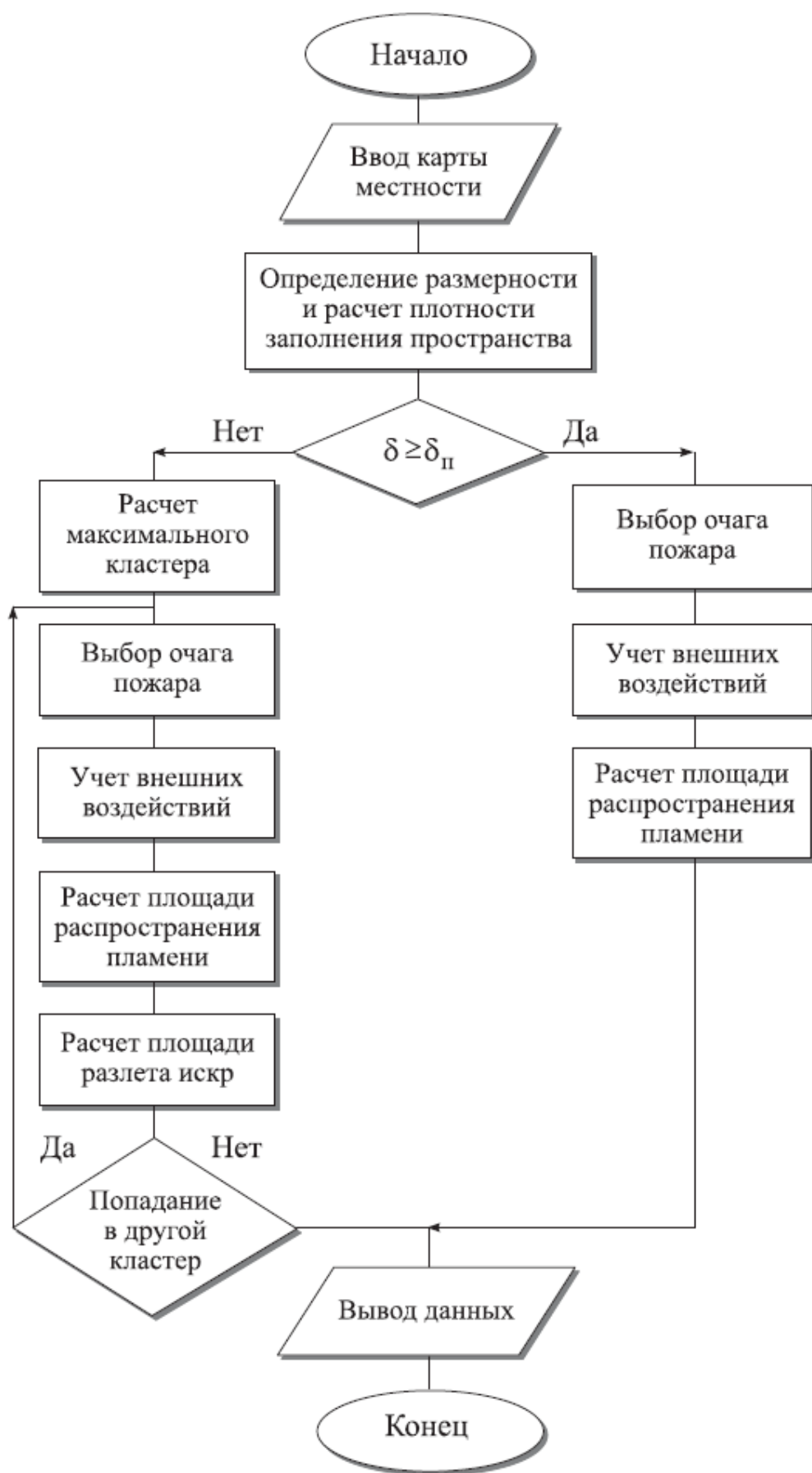


Рис. 22. Блок-схема алгоритма развития и распространения пожаров в сельской местности [41]

Пример работы предложенного комплексного подхода схематично изображен на рис. 23. Видно возникновение перколяционного кластера на квадратной решетке, что соответствует распространению пожара.

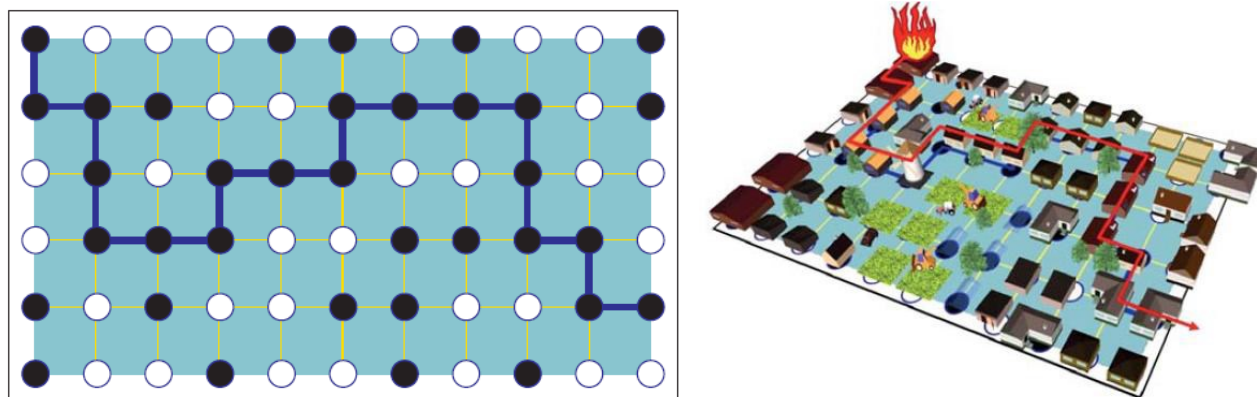


Рис. 23. Перколяционный процесс на двумерной решетке [41]

Моделирование распространения эпидемий

Также перколяционные модели применяются для исследования процесса распространения заболеваний и эпидемий.

Пример использования подходов теории перколяции можно увидеть в работе [42], где была построена мультиагентная модель с использованием перколяционного подхода и высокопроизводительных вычислений.

Под агентом в работе [42] понимается некая сущность, которая обладает активностью, автономным поведением, может принимать решения в соответствии с определенными правилами, взаимодействовать с окружением и другими агентами, а также изменяться.

С применением положений теории перколяции в МСЦ РАН – филиале ФНЦ НИИСИ РАН был разработан действующий прототип реализации алгоритма многократной маркировки перколяционных кластеров (ММПК) Хошена – Копельмана на языке Си с использованием библиотеки MPI. Прототип был использован для исследования возникновения и распространения широкомасштабных эпидемий на примере конкретных населенных пунктов (рис. 24).

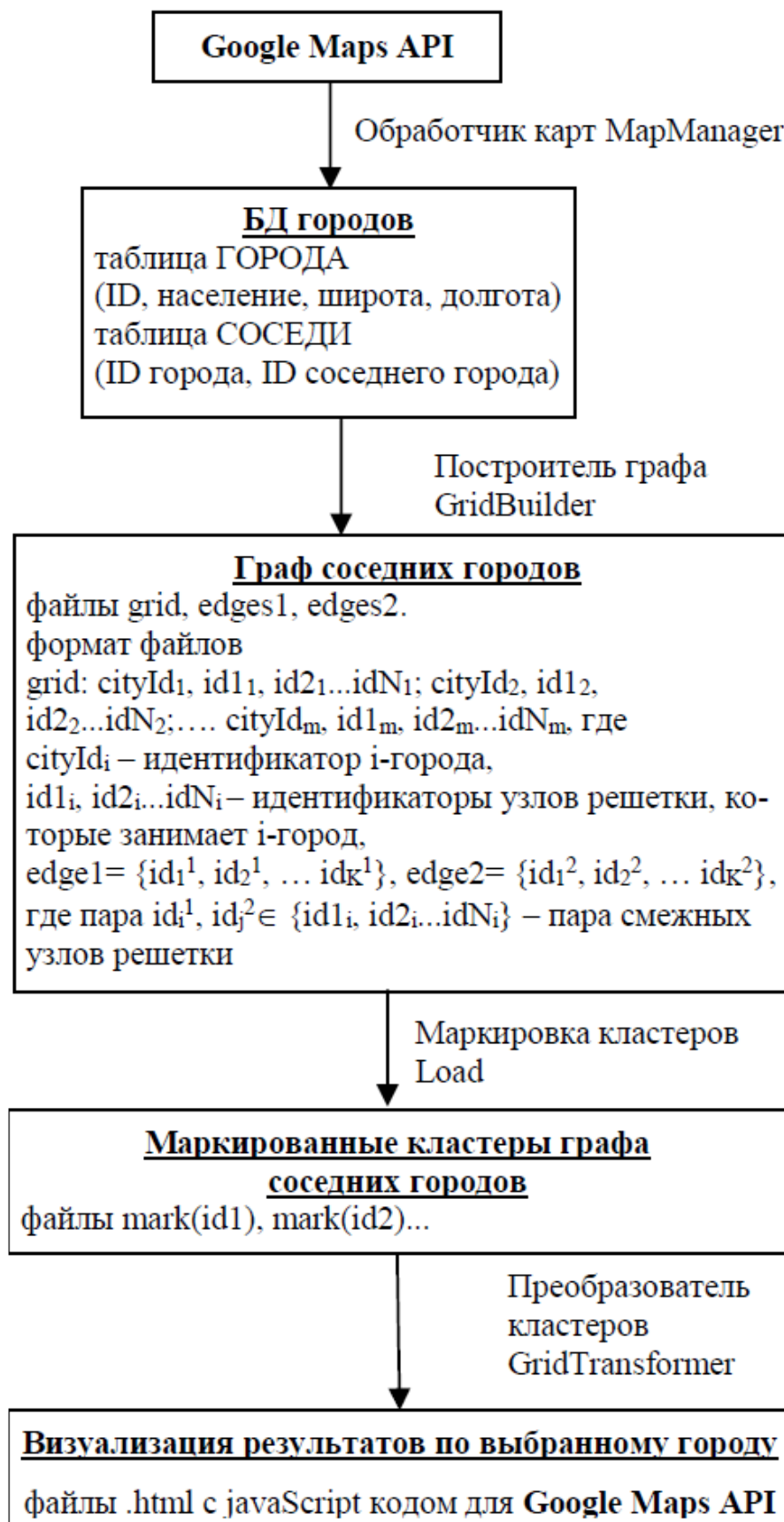


Рис. 24. Схема действующего прототипа [42]

Рисунок 25 показывает результаты численного моделирования, проведенного при условии возникновения инфекционного очага в г. Токио – наиболее близком крупном населенном пункте к потенциальным зонам вскрытия и деконсервации захороненных биоотходов вследствие различных факторов риска (тектонические сдвиги, резкое повышение температуры, акты терроризма, техногенные катастрофы и прочие). Из рисунка понятно, что максимальный уровень вероятности заражения в окрестностях японской столицы составляет примерно 0,3. Этот показатель свидетельствует о высоком риске превращения локальной эпидемии в глобальную пандемию ввиду значительной концентрации населения региона.

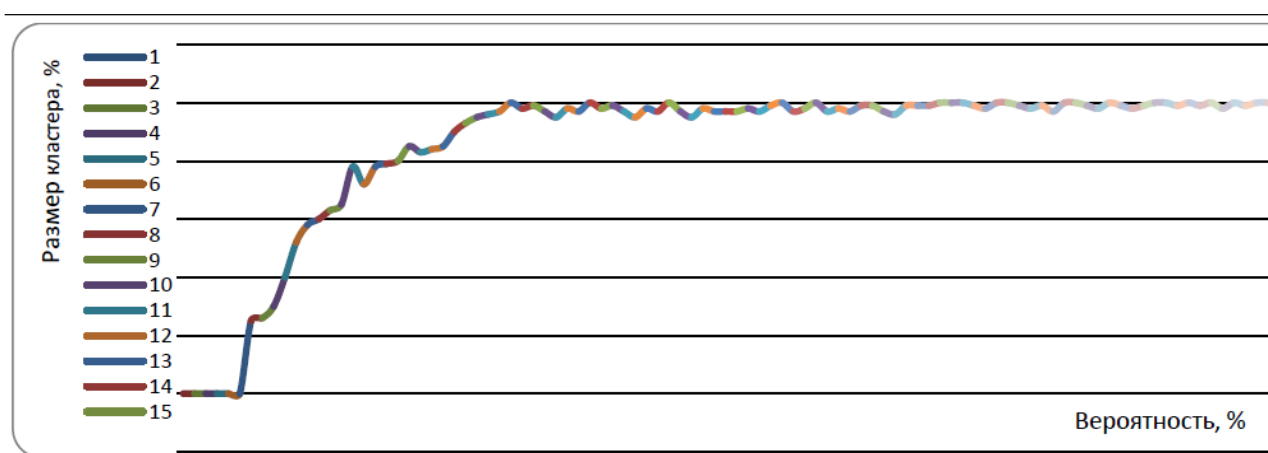
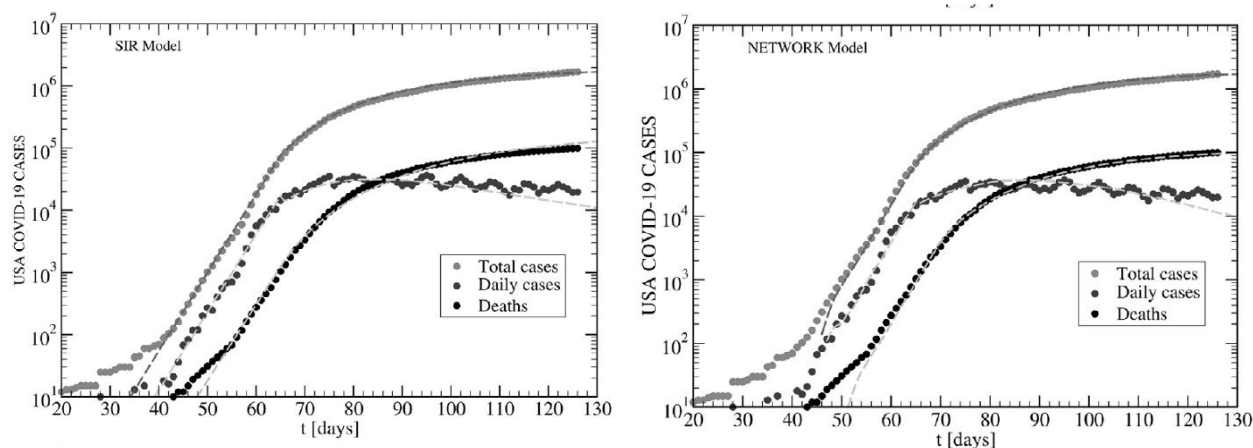


Рис. 25. Вероятность инфицирования в районе г. Токио [42]

Другими авторами в 2020 г. было исследовано распространение COVID-19 [43]. Основная идея работы заключается в использовании теории графов и перколяционных процессов для описания динамики распространения инфекции. Авторы рассматривают социальную сеть как случайный граф, где узлы представляют индивидов, а связи между ними – социальные контакты.

Представленная в [43] модель базируется на классической SIR-модели и включает дополнительные компоненты, учитывающие влияние карантинных мер на население. Подробно рассматриваются ключевые концепции и динамика поведения предложенной решетчатой перколяционной модели, использующей аналогичную стратегию изоляции, что и стандартная SIR-модель.

Были проведены многочисленные компьютерные эксперименты. Результаты экспериментов были сопоставлены с реальными данными по заболеваемости COVID-19 в Соединенных Штатах Америки (рис. 26). Несмотря на хорошее совпадение результатов обоих подходов с фактической информацией, выявленные расхождения свидетельствуют о преимуществах альтернативного взгляда над традиционной SIR-моделью.



**Рис. 26. Динамика распространения COVID-19 в США.
Модель SIR слева и решеточная модель справа [43]**

Причем это не далеко не единственный автор, изучающий в годы пандемии перколяционные модели коронавируса.

Автором данного пособия совместно со студентом бакалавриата Шиляевым В. В. в рамках его научной работы также была предложена перколяционная модель, описывающая распространение заболевания [44].

Процесс распространения эпидемии представлен в виде перколяционной задачи узлов на квадратной решетке. Узлы решетки – это люди. Каждый узел имеет несколько вариантов меток, что соответствует одному из состояний человека: здоровый (0); больной (1); больной с осложнениями (3); больной, болеющий без симптомов (4); выздоровевший (2) и умерший (–1). Узлы с метками 0 могут поменять метку на 1 или 4 с определенной вероятностью, если у них есть соседние узлы с меткой 1, 3 или 4, то есть больные, больные болеющие без симптомов и больные с осложнениями могут заразить окружающих себя людей с некоторым шансом. Этот шанс зависит от вида инфекции и состояния человека, например для выздоровевших людей вероятность заболеть меньше, чем для здоровых (считается, что человек приобрел иммунитет на некоторое количество дней). Узлы с метками 1 через некоторое время могут приобрести метки 2 или 3 или –1, то есть больной выздоровеет через несколько дней и станет выздоровевшим или совсем разболеется и станет больным с осложнениями или умрет. Узлы с меткой 4 через некоторое время меняют свою метку на 2 и отображают выздоровевшего человека. Узлы с метками 2 через некоторое время меняют свою метку на 0, кроме того, они снова с некоторой вероятностью могут поменять метку на 1, то есть выздоровевший человек может повторно стать больным, когда у него закончится иммунитет, а также в период, когда у него есть иммунитет, но вероятность этого крайне мала.

Схема состояний человека и возможных переходов представлена на рис. 27.

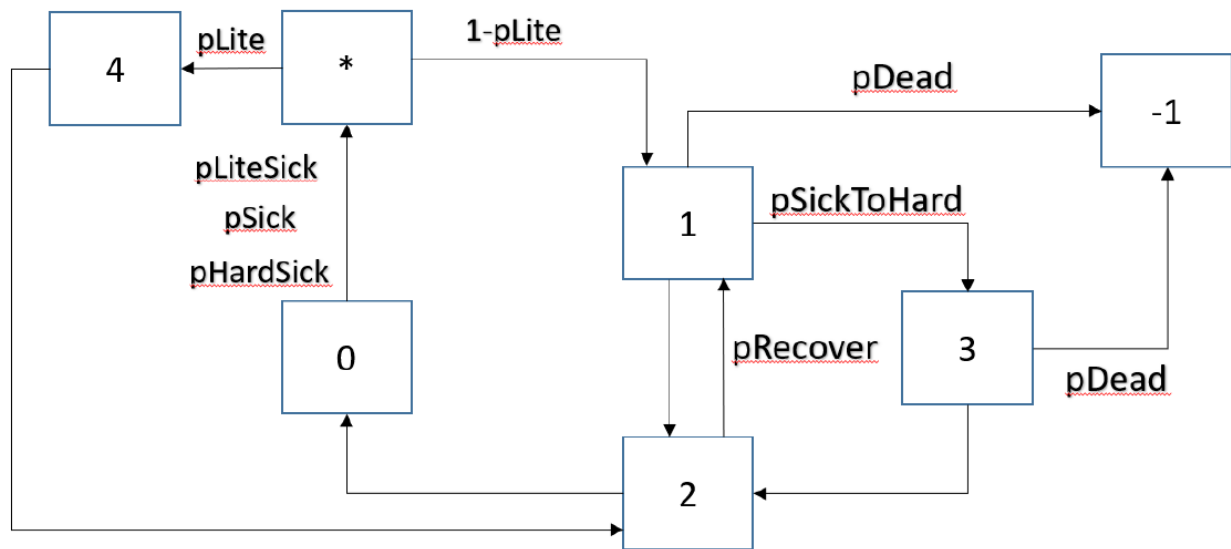


Рис. 27. Схема состояний человека и возможных переходов

Предложенная модель является динамической и математически может быть описана следующим соотношением

$$M = \langle N, pSick, pRecover, pDead, StartSick, day, HealDay, ImmunityDay, pHardSick, pSickToHard, HardDay, IterNum \rangle,$$

где:

N – линейный размер квадратной решетки;

$pSick$ – вероятность заболеть;

$pRecover$ – вероятность выздороветь после выздоровления;

$pDead$ – вероятность умереть;

$StartSick$ – количество больных в начале;

day – количество дней для которых делается прогноз;

$HealDay$ – среднее количество дней для выздоровления;

$ImmunityDay$ – среднее количество дней работы иммунитета;

$pHardSick$ – вероятность заболеть от больного с осложнениями;

$pSickToHard$ – вероятность превратиться из больного в больного с осложнениями;

$HardDay$ – количество дней, за которое тяжело больной человек станет здоровым;

$IterNum$ – количество испытаний.

Был проведен компьютерный эксперимент по прогнозированию распространения таких заболеваний, как грипп, ОРВИ, коронавирусная инфекция, корь и краснуха. Входные данные начальных сведений для программы и течения эпидемий для сравнения результатов взяты из официальных источников статистической информации из свободных интернет-источников.

Результаты моделирования и реальные статистические данные совпадают в рамках погрешности не более чем на 20 % (рис. 28–31) для всех рассмотренных заболеваний. При этом наблюдается схожее поведение реальных и моделируемых данных, для ОРВИ погрешность минимальная, для краснухи погрешность максимальная. Возможно, это происходит из-за недостаточности данных о параметрах заболевания и ее течения или же фактора отказа от прививок, что модель не учитывает. Несмотря на это, полученные результаты подтвердили адекватность предложенной модели и возможность ее использования для изучения распространения инфекционных заболеваний.

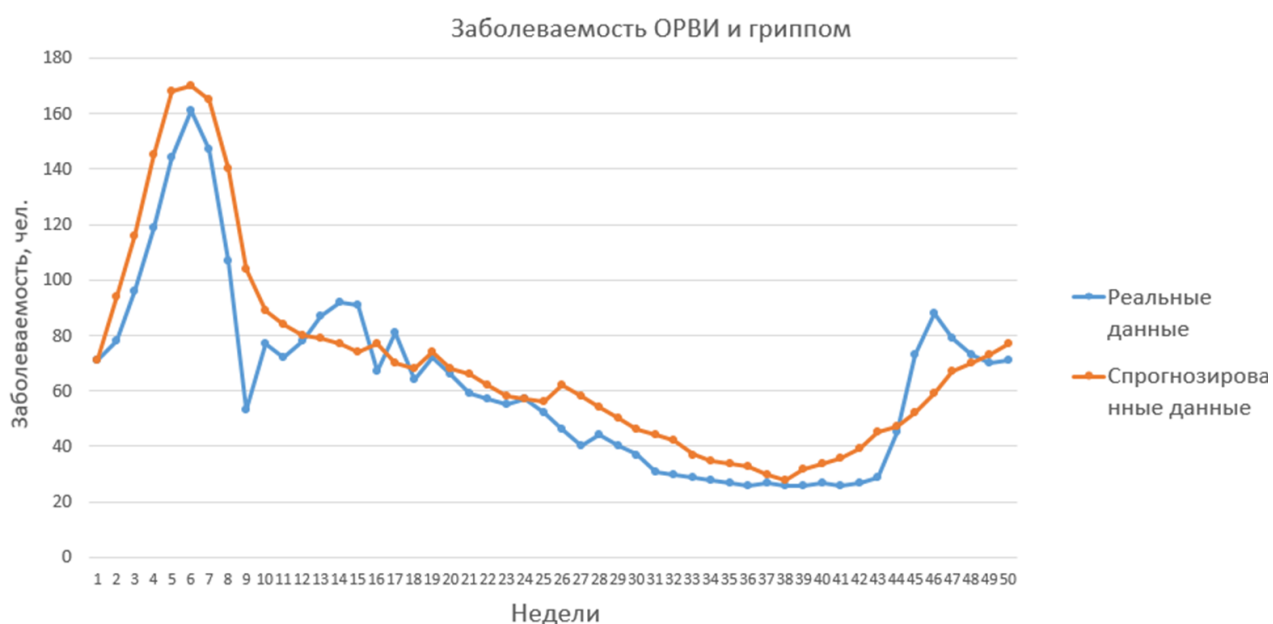


Рис. 28. Количество заболевших ОРВИ и гриппом за 50 недель течения эпидемии

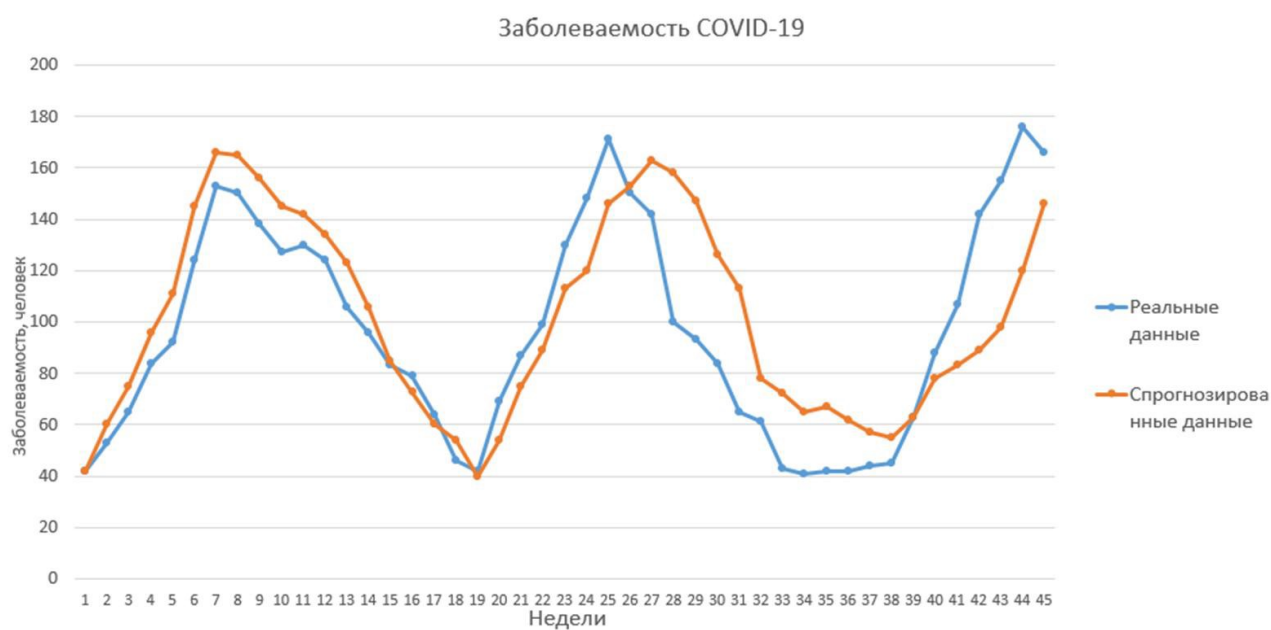


Рис. 29. Реальные и спрогнозированные данные течения COVID-19 в 2022–23 гг.

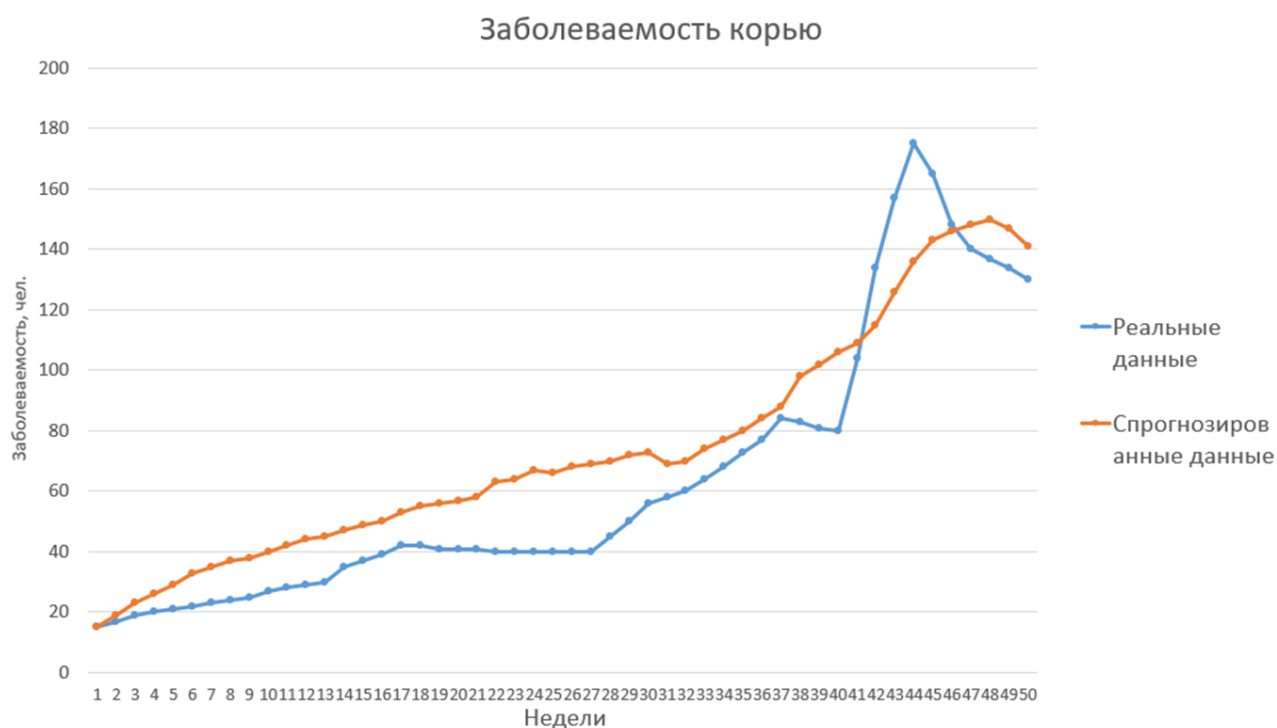


Рис. 30. Реальные и спрогнозированные данные течения кори в 2022–23 гг.

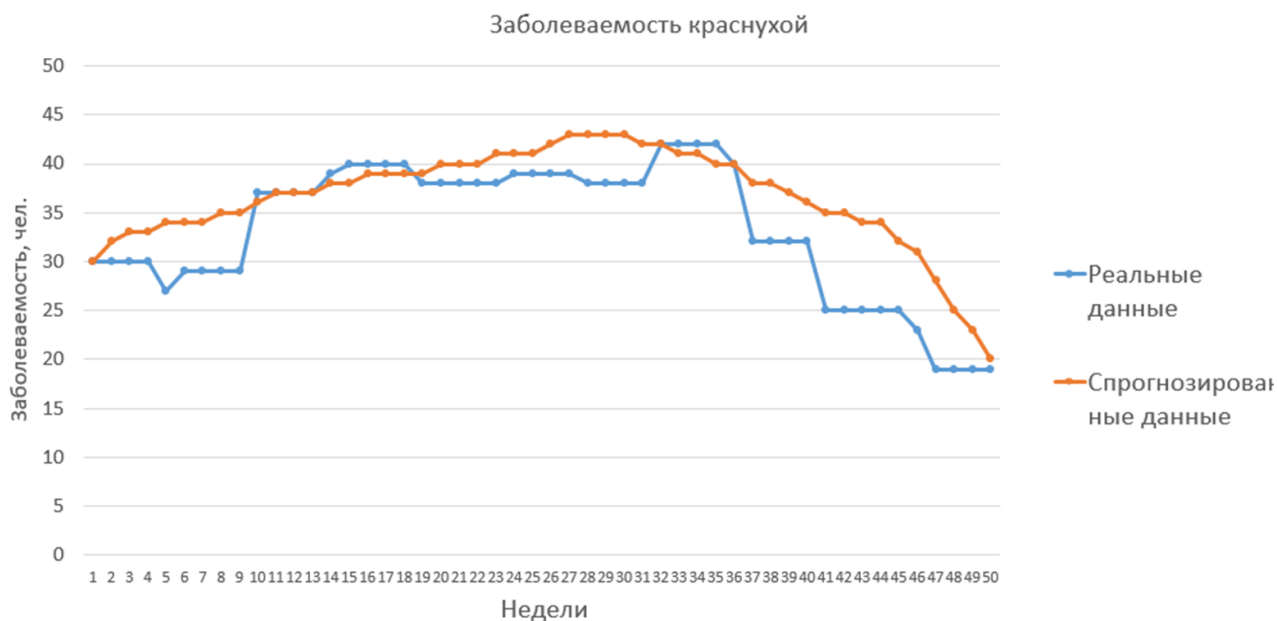


Рис. 31. Реальные и спрогнозированные данные течения краснухи в 2023 г.

Моделирование распространения разрушений и трещин

Также методы теории перколяции применяются при исследовании различных видов разрушений, распространений трещин и т.п. Причем тут можно моделировать как процесс формирования трещины в горной породе или процесс разрушения конструкции моста, так и разрушения материалов на микро- и нано-уровне.

В данной области к современным исследованиям можно отнести работу [45], в которой описана простая компьютерная модель развития трещины в композитном материале с тканой матрицей разных видов переплетения. В работе изучены особенности распространения трещины в материале в зависимости от правила переплетения.

Там же исследованы энергетические затраты, необходимые для образования трещин в зависимости от вида переплетения и статистической неоднородности наполнителя. На рисунке 32 слева показано саржевое переплетение, справа – с добавленной случайной компонентой. Был проведен эксперимент по моделированию траектории распространения трещины.

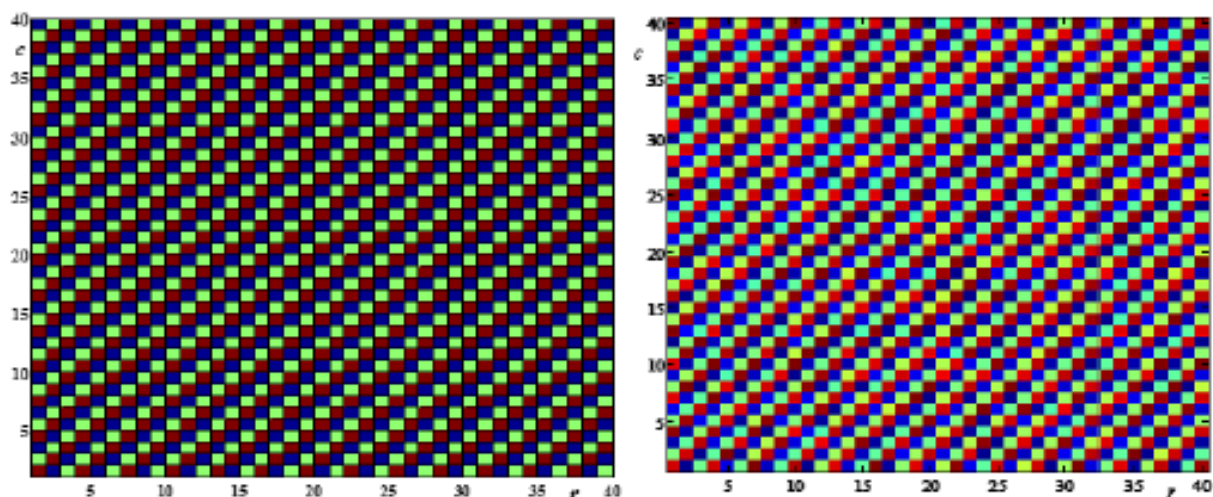


Рис. 32. Слева показано саржевое переплетение, справа — с добавленной случайной компонентой [45]

На рис. 33 представлен образец модельных путей распространения трещин в среде с саржевым плетением ткани. Данные пути были получены в результате пяти последовательных запусков модели, выполненных при постоянных параметрах и одинаковых начальных условиях. Каждая итерация отличалась своей уникальной реализацией, что привело к формированию отдельных траекторий. Фон рисунка отражает неравномерность структуры материала относительно показателя сопротивления трещинообразованию.

Приведенный пример демонстрирует, что специфическая структура тканой основы с саржевым переплетением определяет общее направление движения трещин по диагонали, тогда как случайные вариации свойств среды вызывают постепенное увеличение разброса траекторий, исходящих из единой начальной точки на поверхности композита.

Авторами [45] получено, что «для второго варианта переплетения, при котором нити ткани периодически, в пределах переплетения, препятствуют распространению трещины, средние энергозатраты на трещину примерно в 8 раз выше, чем для композита, у которого трещина распространяется вдоль одномерно направленной волокнистой основы. Однако при большой неоднородности наполнителя анизотропия основы уже не имеет такого значения, и затраты у обоих вариантов переплетений становятся практически одинаковыми».

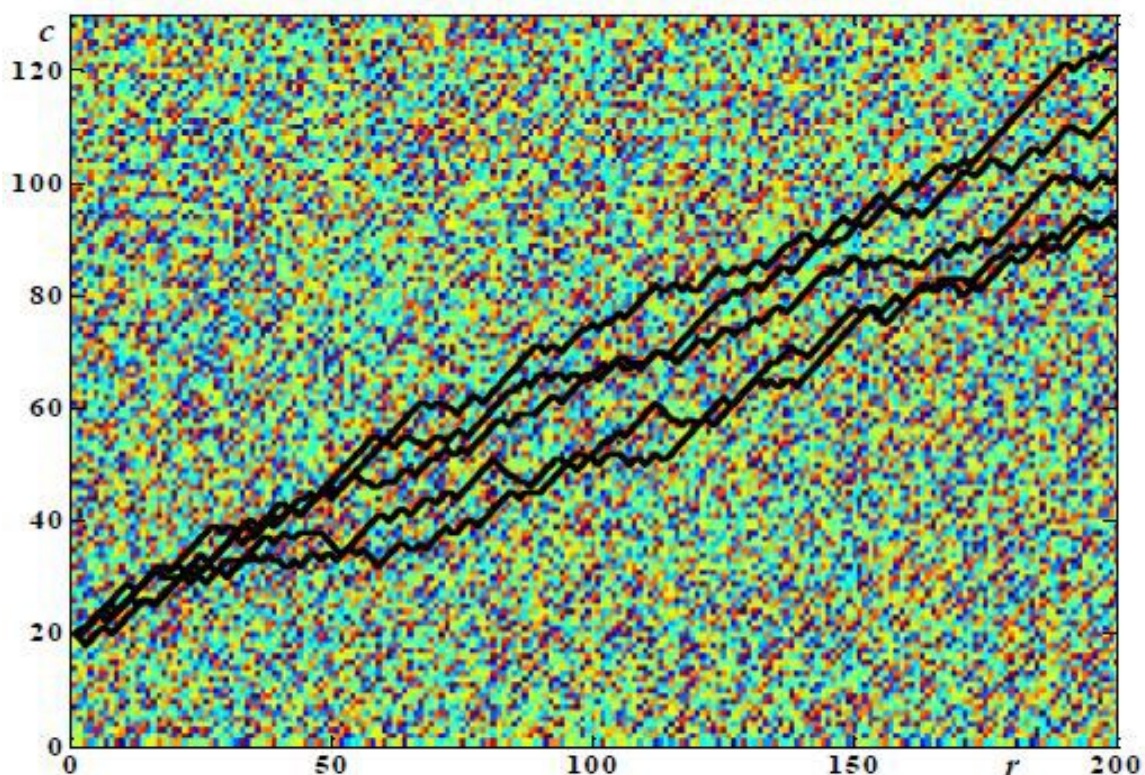


Рис. 33. Пример модельных траекторий трещин в образце среды с саржевым переплетением [45]

Другими авторами предложена перколяционная модель накопления микродефектов и коллапса зоны вынужденной эластичности перед фронтом трещины разрушения в полимерных и композиционных материалах [46]. Установлена иерархическая перколяционная структура зоны вынужденной эластичности: дырка со своей «атмосферой» входит в состав «атмосферы» более крупной дырки, эта система является частью еще большей системы и т.д. Сформулирован перколяционный критерий коллапса эластической зоны. Установлено подобие известного концентрационного критерия разрушения и полученного перколяционного критерия коллапса эластической зоны, отношение которых является универсальной константой, равной 2,58. Это позволяет при экспериментально определенной критической концентрации СМТ находить критическую концентрацию дырок в эластической зоне. Показано, что вблизи коллапса практически все дырки находятся в связанном состоянии, а эластическая зона пронизана во всех направлениях сетью трещинок – каналов, по которым осуществляется связь дырок, что подтверждается фрактографическими исследованиями поверхности излома разрушенных образцов. Найдена критическая концентрация дырок перед коллапсом эластической зоны. В момент коллапса доля «поврежденного» дырками объема эластической зоны составляет не более 30 % объема всей зоны, которая пронизана каналами, связывающими дырки.

Переходы диэлектрик-проводник, парамагнетик-ферромагнетик и др.

Известны перколяционные модели перехода диэлектрик-проводник, проводимости полупроводников. Такой переход возможен либо под внешним воздействием, либо при добавлении проводящих частиц в непроводящую фазу. Основным вопросом является, сколько нужно добавить проводящих частиц, чтоб материал стал проводящим? К классическим сюда можно отнести работы [47, 48]. Авторами рассмотрено несколько двух- и трехмерных перколяционных моделей, в которых наступление перколяции было сопоставлено со значением среднего числа соседей в перколяционной системе B_c . Данная характеристика обсуждалась во второй лекции настоящего учебного пособия.

В 2008 году в работе [49] представлено исследование электрических свойств древесины и взаимосвязей между электропроводностью и содержанием влаги. Там использованы принципы теории перколяции для описания электрического сопротивления древесных тканей в зависимости от содержания воды. Подход основан на представлении древесины как неоднородной двухфазной среды, состоящей из сухих волокон и водных каналов. Электропроводность древесины резко возрастает при достижении определенного уровня насыщенности водой («перколяционного перехода»), после которого жидкость обеспечивает непрерывный путь прохождения тока. Этот порог соответствует критическому содержанию влаги, влияющему на электрические свойства материала. Исследование имеет большое научное и практическое значение, поскольку предлагает новый взгляд на механизм влияния влаги на электрохимические свойства древесины. Это актуально для инженеров-строителей, технологов производства мебели и композитных материалов, экологов и реставраторов исторических памятников архитектуры.

С помощью перколяционного подхода исследуются магнитные фазовые переходы [например, 50–52]. Исследованы механизмы протекания магнитных свойств в композиционных материалах, содержащих ферромагнитные частицы, диспергированные в матрице диэлектрика или парамагнетика [50]. На рис. 34 представлены микроизображения исследуемых частиц наполнителя: (а) феррит NiZn при увеличении $\times 140$, (б) феррит MnZn при увеличении $\times 70$, (в) металл НуМу при увеличении $\times 350$.

Использован метод компьютерного моделирования Монте-Карло, позволяющий исследовать поведение магнитных компаундов в широком диапазоне концентраций ферромагнитных наполнителей. Применялись статистические методы анализа для определения критического объема включения магнитных частиц и зависимостей различных характеристик.

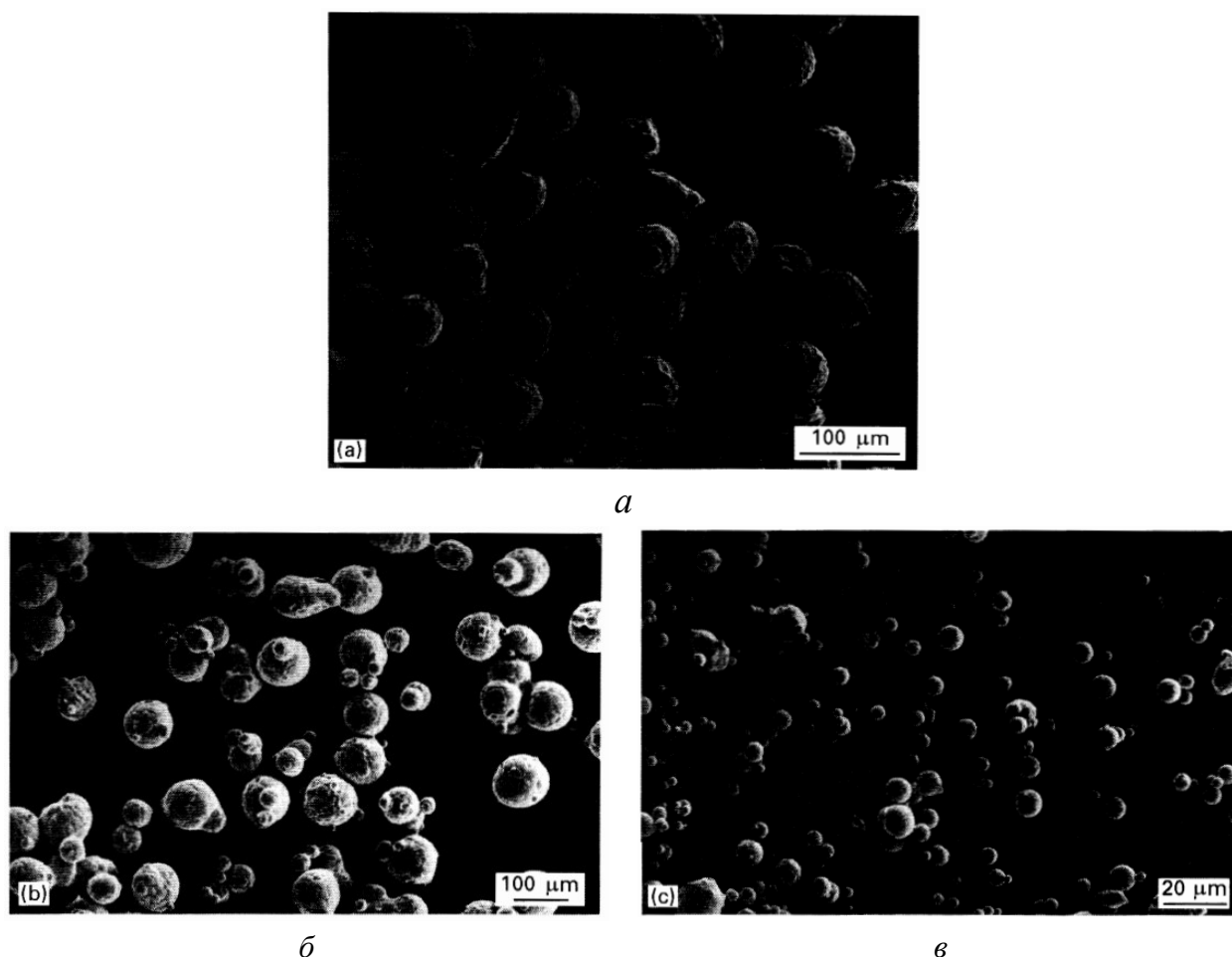


Рис. 34. Сканирующая электронная микрофотография частиц наполнителя:
(а) феррит NiZn при увеличении $\times 140$, (б) феррит MnZn при увеличении $\times 70$,
(в) металл НуМу при увеличении $\times 350$ [50]

В работе определен порог концентрации ферромагнитных частиц, при которой наблюдается резкое увеличение магнитных свойств композита; исследовано влияние формы и размера частиц ферромагнетика на величину коэффициента магнитной проницаемости; установлено наличие анизотропии магнитных свойств с учетом присутствия ориентированных путей связи между частицами.

В работе [51] исследователи изучили явление магнитной перколяции в разбавленных магнитных полупроводниках (DMS). Магнитная перколяция возникает тогда, когда концентрация магнитных примесей достигает определенного критического значения, приводящего к резкому изменению магнитных свойств материала. Такие полупроводники являются перспективными материалами для спинтроники – технологии управления спиновыми состояниями электронов для хранения и передачи информации. Выявлена минимальная концентрация магнитных примесей, необходимая для возникновения ферромагнитного порядка в образцах DMS. Построена фазовая диаграмма магнитных состояний материала в зависимости от концентрации магнитных атомов и температуры. Определен

механизм усиления межатомного взаимодействия, приводящий к возникновению дальнего магнитного упорядочения.

Моделирование теплопроводности

В работе [53] представлена перколяционная модель теплопроводности полимерных композитов, заполненных металлическими частицами. Подобные композиты широко используются в промышленности благодаря своей способности эффективно проводить тепло при сохранении механических свойств полимера. На рисунке 35 изображены поперечные сечения композита графит/ПТФЭ (получены с помощью сканирующей электронной микроскопии). Массовая доля графита: (а) 20 %, (б) 50 %.

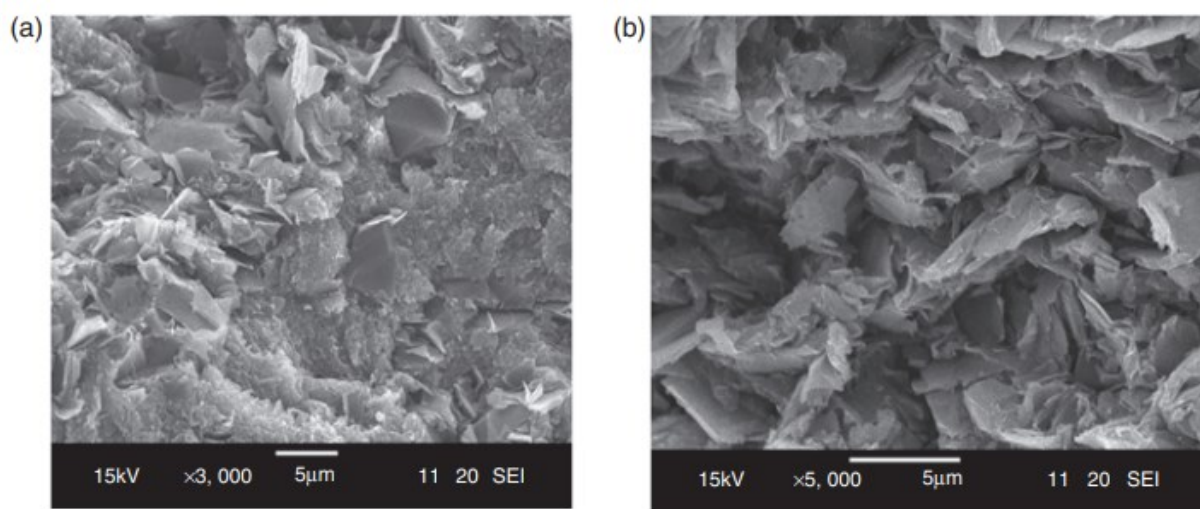


Рис. 35. Поперечные сечения композита графит/ПТФЭ
(получены с помощью сканирующей электронной микроскопии).
Массовая доля графита: (а) 20 %, (б) 50 % [53]

Авторы разработали простую, но эффективную формулу для расчета теплопроводности, согласующуюся с результатами ранее проведенных экспериментов. Было показано, что основным фактором, определяющим улучшение теплопередачи, является образование трехмерной сети металл-полимер, способствующей переносу тепла внутри материала. Кроме того, выявлены факторы, которые могут влиять на теплопроводность композита, среди которых размер частиц, форма включений, объемная доля металлической фазы. Модель демонстрирует новое понимание роли геометрии компонентов и границ раздела фаз в формировании эффективной теплопроводности композитных материалов. Такое знание полезно для последующего синтеза новых композитов с заранее заданными свойствами.

Авторами [53] установлено, что результаты предложенной ими перколяционной модели наилучшим образом согласуются с экспериментальными данными, чем результаты других исследований (рис. 36).

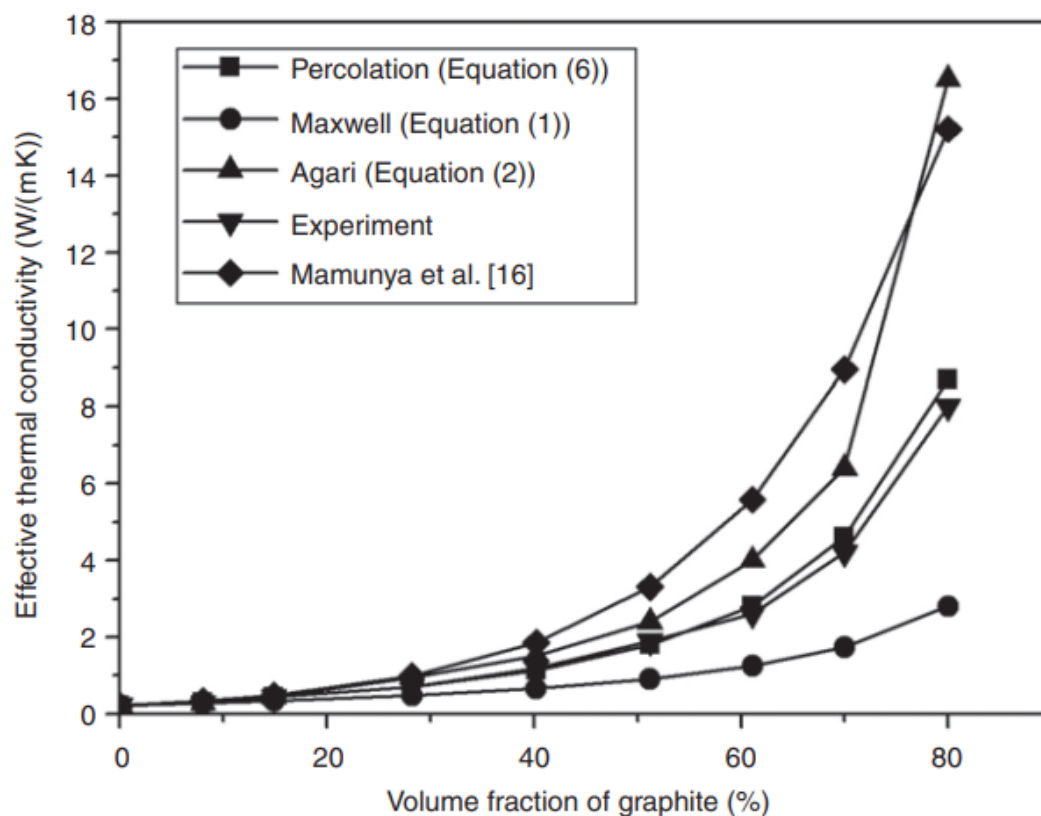


Рис. 36. Результаты модели перколяции в сравнении с экспериментальными данными и результатами других моделей для композитов графит/ПТФЭ [53]

Лекция 5. Применение теории перколяции в прочих приложениях

Перколяционные процессы в информационных сетях/системах

Несмотря на так называемое «физическое» происхождение перколяционного процесса, его подходы находят свое применения практически во всех областях деятельности человека. В данной лекции будут рассмотрены наиболее интересные случаи.

Перколяционные процессы в информационных сетях – это модели распространения информации, идей, вирусов или сбоев по сетям. Суть процесса заключается в том, что элементы сети (вершины графа) постепенно соединяются друг с другом посредством связей (ребер), формируя большие компоненты связи. Простым примером может служить вирусная реклама в социальных сетях. Когда небольшая группа пользователей делится контентом, этот контент начинает распространяться дальше по мере того, как все большее число участников подключается к процессу обмена информацией. Если достаточное количество узлов связано, образуется глобальная компонента, охватывающая значительную долю всей сети. Другой пример – сбой или атака на информационную систему, когда один узел заражается вредоносным ПО, и оно распространяется по сети, пока не достигнет критической массы инфицированных узлов, нарушая работу всей системы. Перколяционная теория используется для изучения устойчивости сетей к внешним воздействиям, оптимизации маршрутов распространения данных и защиты от угроз информационной безопасности.

В качестве примера можно привести работу [54], в которой проведено исследование эффекта перколяции в информационных сетях с неустойчивыми связями. Авторы рассматривают возможность снижения затрат на передачу данных в динамических сетях путем использования механизма «перколяционной лавины». В рамках данной работы перколяция описывает процесс прохождения сигнала через среду с различными уровнями проводимости. В информационном контексте это означает распространение пакетов данных через сеть, где связи могут быть активными или неактивными. Исследование фокусируется на трех ключевых сценариях: минимальном значении p_1 , при котором начинается передача данных; оптимальном значении p_2 , при котором эффективность частичной лавины сравнима с полной лавиной; полной лавине ($p = 1$), обеспечивающей максимальную доставку данных. Эксперименты проводились на параллельных сетевых симуляторах с использованием различных топологий и размеров сетей. Авторы ввели в рассмотрение параметр Mf – среднее значение вероятности активности связей в динамической сети. Это интегральная статистическая характеристика, которая используется для описания изменчивости топологии сети. Авторы

связывают порог перколяции в динамическом случае с порогом перколяции в статическом случае через эту характеристику (рис. 37).

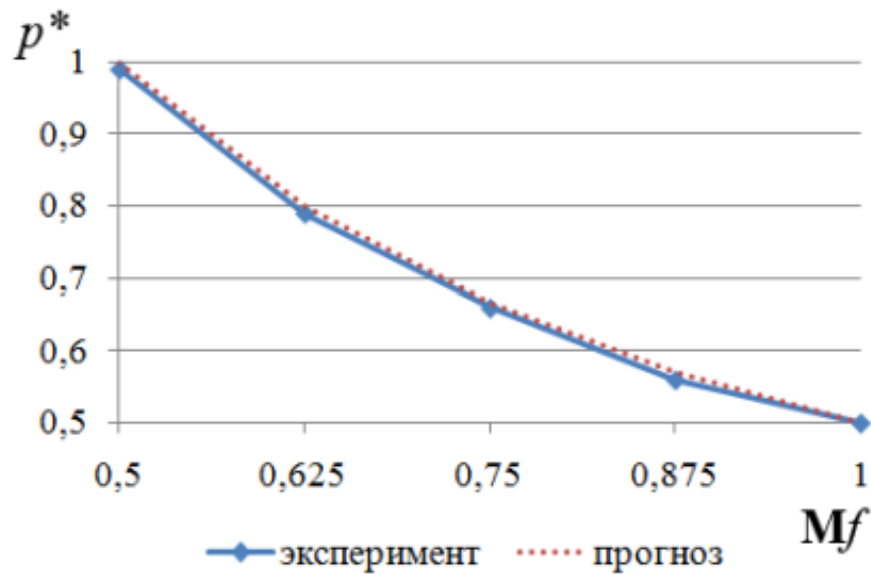


Рис. 37. Порог перколяции для динамических сетей в зависимости от Mf [54]

Результаты показали, что динамика сети влияет на порог перколяции, который зависит от средней вероятности активности связей. Использование перколяционной лавины позволяет значительно снизить затраты на передачу данных (до 2,5 раз) при сохранении высокой надежности доставки (рис. 38).

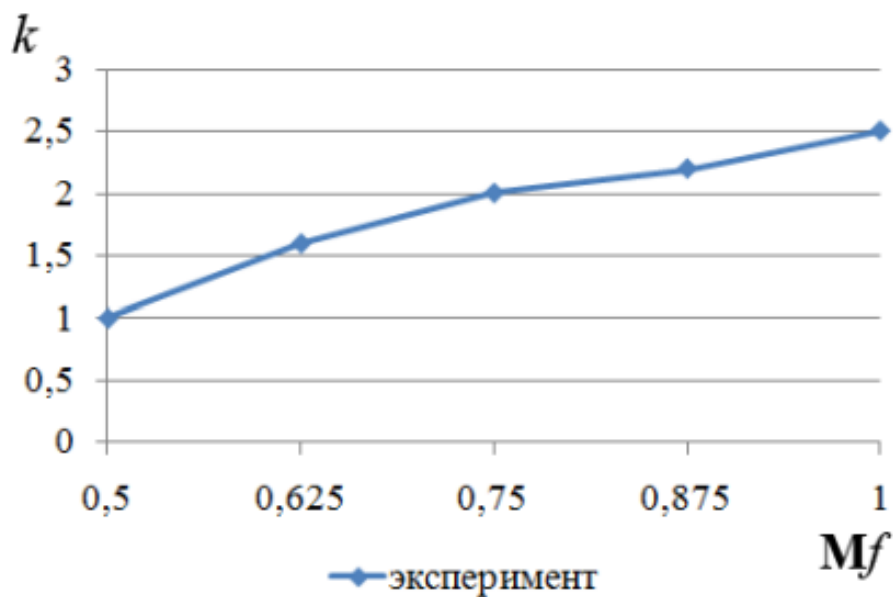


Рис. 38. Сокращение расходов на лавину в зависимости от Mf [54]

Этот метод особенно полезен в мобильных сетях с высокой динамикой изменения топологии. Исследование демонстрирует потенциал метода перколяции для оптимизации передачи данных в сложных информационных сетях. Выводы могут быть использованы для улучшения существующих протоколов маршрутизации и управления трафиком.

В работе [55] авторы применяют теорию перколяции для описания динамики распространения сигнала среди множества движущихся объектов. Методологически авторы основывают свою работу на классических моделях теории перколяции, адаптированных к условиям непрерывного перемещения объектов. Они рассматривают сигнал как вещество, которое распространяется по различным маршрутам в зависимости от взаимного положения приемопередающих устройств. Важнейшими параметрами являются: плотность объектов в пространстве; вероятность установления устойчивой связи между объектами; критический порог покрытия территории объектом, после которого передача становится эффективной. На рисунке 39 изображены конфигурации подвижных узлов.

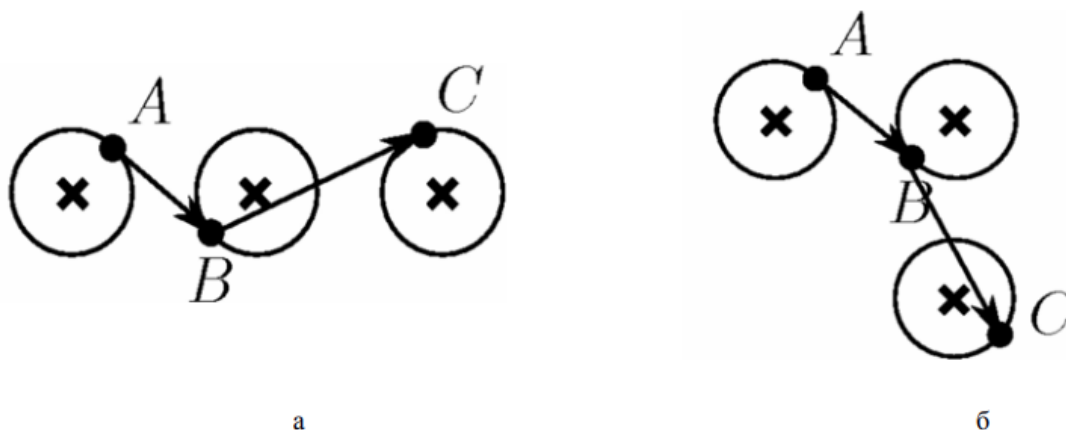


Рис. 39. Конфигурации подвижных узлов [55]

Авторы приводят итоги численных экспериментов, демонстрируя формирование зон устойчивого приема сигнала в разных конфигурациях расположения объектов. На рисунке 40 приведены результаты численного эксперимента по исследованию зависимости вероятности прохождения сигнала через систему от максимальной дальности установления связи между парой узлов. Показано, что при достижении определенной плотности объектов (например, автомобилей на дороге) существует значительный шанс успешного распространения сигнала даже в неблагоприятных условиях.

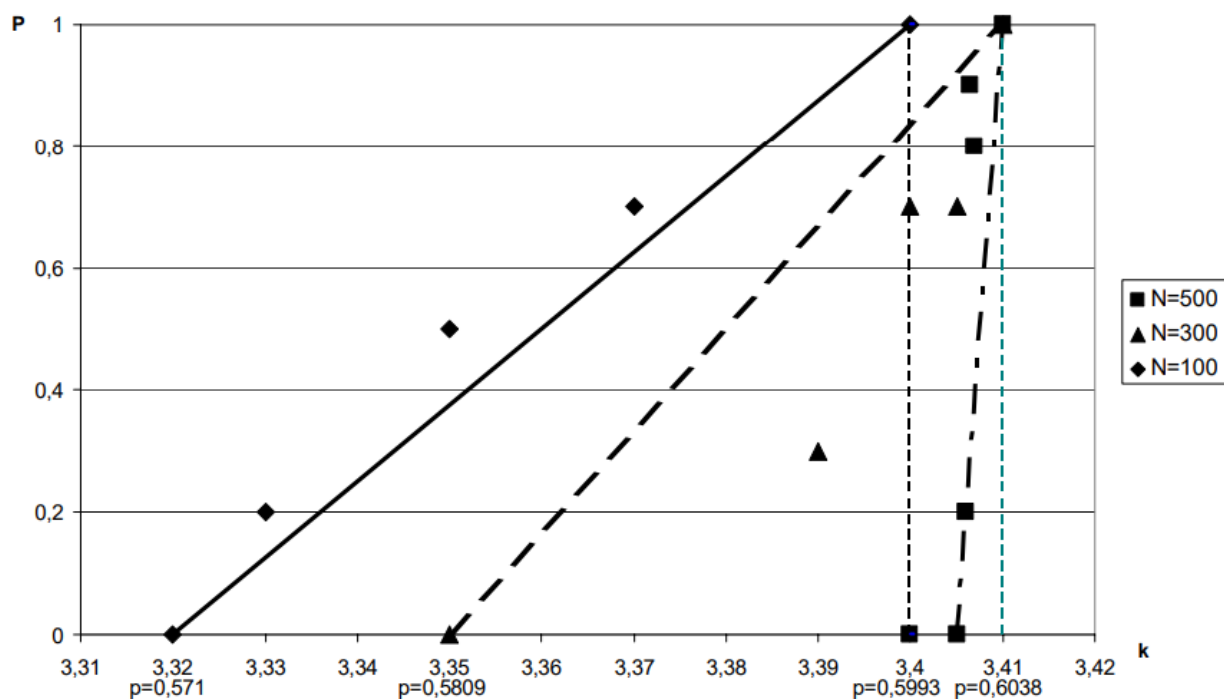


Рис. 40. Результаты машинного эксперимента по исследованию зависимости вероятности прохождения сигнала через систему от максимальной дальности установления связи между парой узлов [55]

Приводится аналитическое выражение для определения оптимального количества ретрансляторов, необходимого для поддержания надежного сигнала в мобильной сети. Описана методика оценки зоны уверенного приема сигнала на основе перколяционного критерия.

Моделирование распространения компьютерных вирусов

Исследование [56] посвящено созданию комплексной модели динамики развития эпидемий вирусов в компьютерных сетях, учитывающей их топологические свойства и механизмы распространения вирусов. Теория перколяции используется для описания процесса прохождения сигнала через случайную структуру. На рисунке 41 изображена диаграмма, описывающая рассматриваемую модель процесса распространения вирусов в компьютерной сети, процесс описан системой кинематических уравнений; на рис. а, b, с, k – некоторые коэффициенты, характеризующие соответствующие переходы из одного состояния узла в другое (эти коэффициенты являются интегральными параметрами, зависящими, например, от числа копий рассылаемых вирусов и антивирусов, вероятности встречи и т.д.).

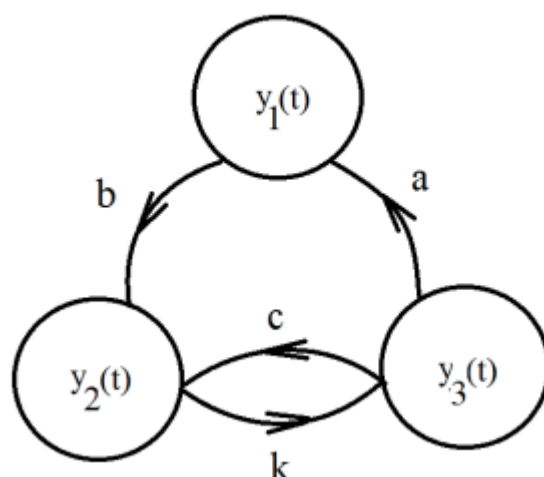


Рис. 41. Диаграмма, описывающая рассматриваемую модель процесса распространения вирусов в компьютерной сети [56]

В данном исследовании определяется порог перколяции, характеризующий плотность сети, при достижении которого распространение вируса становится глобальным. Установлено, что этот порог зависит от средней степени связности сети (среднего числа связей на узел). При среднем числе связей на узел от 2,5 до 3,5 доля работающих узлов должна составлять от 0,52 до 0,37. На основе полученных данных авторами впервые предлагается модель, учитывающая повторное заражение ранее иммунных узлов и задержку антивирусной защиты. Узлы могут быть защищены, заражены или нейтральны. В предложенной модели есть возможность расширения путем учета роста числа пользователей и устройств улучшает точность предсказаний.

Автором данного пособия совместно со студентом бакалавриата 4 курса специальности «Прикладная математика и информатика» было исследовано распространение сетевого вируса в локальной компьютерной сети. Результаты были опубликованы [57]. Кроме того, были предложены две перколяционные модели, описывающие два вида сетей: проводные и беспроводные. Порог перколяции соответствует доле зараженных компьютеров в сети, при которой сеть теряет работоспособность.

Беспроводная сеть представлена ячеистой топологии в виде квадратной решетки. Линейный размер решетки – N , количество узлов $N*N$. Узлы решетки – компьютеры. Узлы могут быть свободными (не зараженными вирусом) и занятыми (зараженными вирусом). Свободным узлом считается компьютер, сохраняющий полную работоспособность и никак не влияющий работу соседних компьютеров. Под занятым узлом подразумевается, что компьютер имеет вредоносный код, способный причинить вред компьютеру, а также передавать свою копию соседним компьютерам. Однако такой компьютер продолжает работать. Один

компьютер может заразить другой компьютер, то есть если текущий узел занят, то соседние с ним узлы могут стать занятыми с вероятностью q_1 . Кроме того, учитывается способность компьютера к восстановлению, то есть занятый узел может стать свободным с вероятностью q_2 . Восстановление возвращает узлу свободное состояние и освобождает компьютер от вредоносного кода. Соседние занятые узлы образуют кластеры – группы зараженных компьютеров. Концентрация занятых узлов p соответствует степени распространения вируса в локальной сети. Основной задачей в рамках предложенной модели является получение оценки значения порога перколяции при различных значениях q_1 , q_2 и N для различных граничных условий.

Математически предложенную модель можно описать так:

$$M_1 = \langle N, p, q_1, q_2, k \rangle,$$

где k – количество испытаний.

Пример локальной ячеистой сети в виде решеточной модели $N = 4$ представлен на рис. 42.

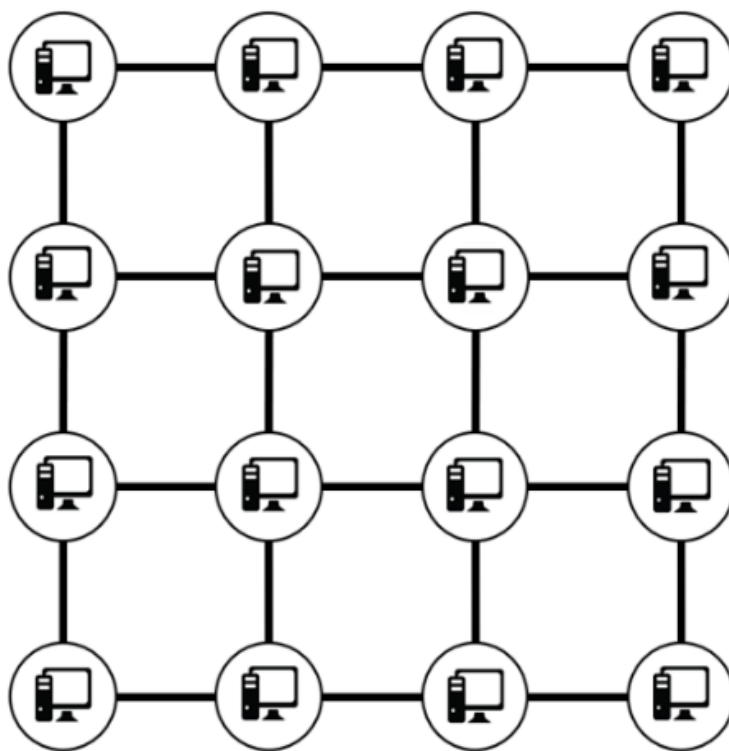


Рис. 42. Пример локальной ячеистой сети в виде решеточной модели, $N=4$

Проводная сеть представляет смешанную топологию, в основе которой лежат базовые топологии «Шина», «Кольцо», «Звезда». Предлагается смешанная топология двух уровней. На первом – «внешнем» – уровне располагается шинная топология в качестве связующей сети для множества других топологий,

состоящая из N узлов – подсетей. Каждый узел этого уровня является частью кольцевой или звездной топологии, располагающейся на втором – «внутреннем» – уровне. Каждая подсеть объединяет в себе z узлов. Математически модель записывается следующим образом:

$$M_2 = \langle N, z, p, k \rangle.$$

На рисунке 43 представлен пример смешанной проводной сети.

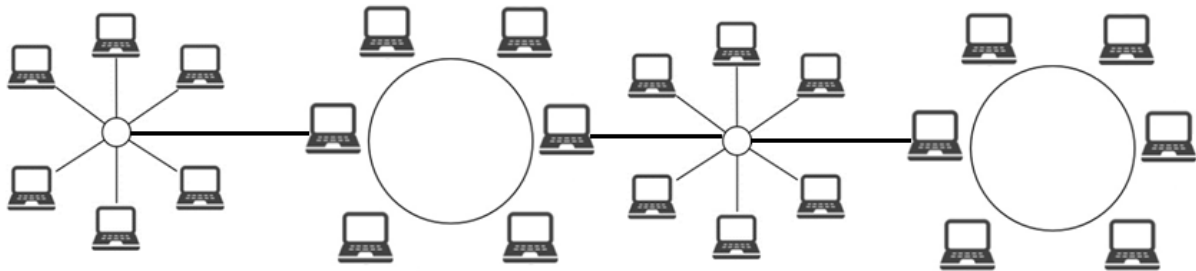


Рис. 43. Пример смешанной сети второй модели

Для первой модели получены значения порога перколяции при открытых и периодических граничных условиях (табл. 2).

Табл. 2

Значения порогов перколяции для случая бесконечной системы

q_2	Scaling, ОГУ	Scaling, ПГУ
0	0,387 (0,11)	0,385 (0,03)
0,1	0,429 (0,15)	0,429 (0,10)
0,2	0,569 (0,003)	0,567 (0,002)
0,3	0,809 (0,005)	0,828 (0,005)
0,4	-	-
0,5	-	-
0,6	-	-

Для случая проводной сети получено, что независимо от количества подсетей и узлов в подсетях, значение порога перколяции стремится к 0,5 (рис. 44).

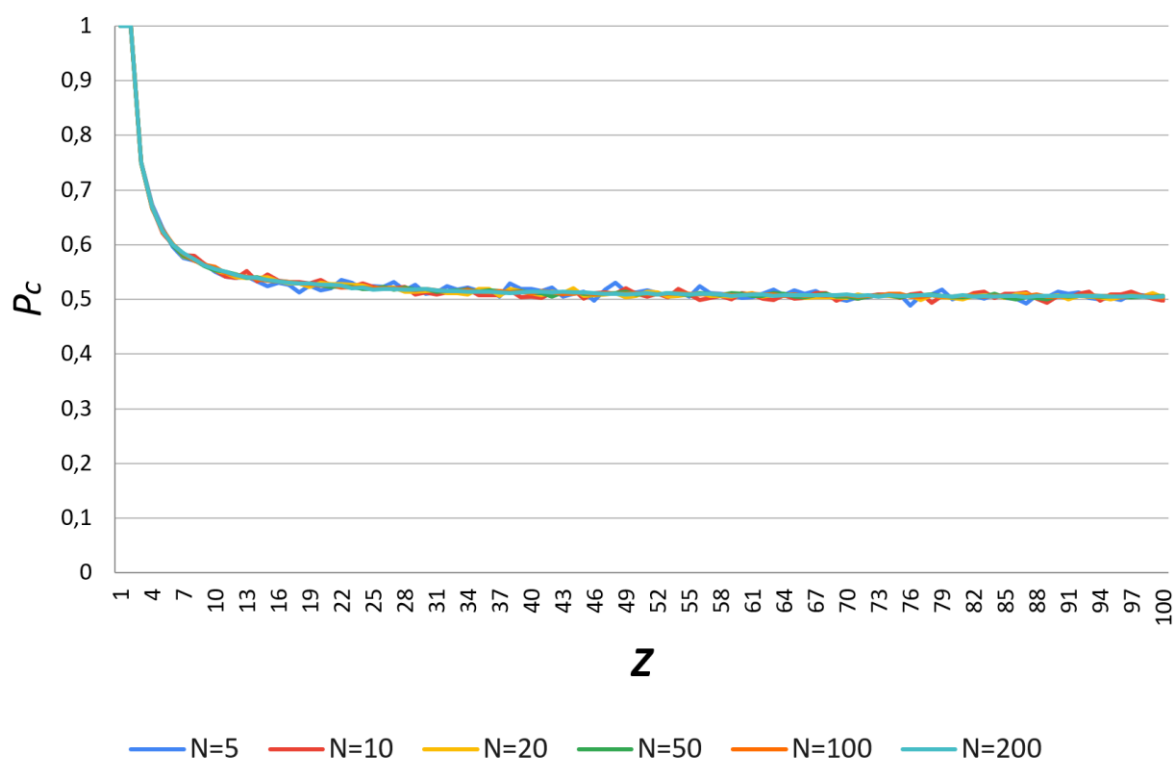


Рис. 44. Сравнительный график значений порога перколяции между различными N

Результаты исследования первой модели показывают, что при отсутствии возможности восстановления зараженных узлов компьютерная сеть довольно быстро подвергается заражению и теряет свою работоспособность. Однако если компьютеры имеют механизм восстановления после заражения, то риск полного заражения локальной сети значительно снижается. По результатам второй модели был определен порог перколяции для бесконечной сети, т.к. при большом количестве испытаний показатель количества узлов общей сети не является значимым.

Процессы управления и экономики

Большие обороты набирают методы теории перколяции в экономике и управлении. Например, в работе [58] автор говорит о том, что конкурентоспособность предприятия определяется множеством факторов, среди которых особое место занимает организация каналов распределения продукции. Подчеркивается важность выбора эффективных каналов распределения. Суть подхода заключается в анализе иерархической структуры муниципальных образований, где каждый уровень соответствует участнику цепочки поставок. Географическое положение и количество задействованных посредников играют ключевую роль в формировании конкуренции. Центральной идеей исследования является

разработка математической модели, основанной на теории перколяции, которая помогает исследовать, как каналы распределения влияют на общий успех бизнеса. Автор акцентирует внимание на случайных факторах, таких как география размещения и иерархия организаций, и утверждает, что правильный выбор этих факторов может привести к улучшению позиций предприятия на рынке. Модель позволяет визуализировать структуру рынка и рассчитать оптимальное количество и размещение пунктов продаж.

В работе [59] представлен обзор методов экономико-математического моделирования, заимствующих принципы из физики и смежных наук, в частности теории перколяции. Авторы заостряют внимание на том, что традиционные экономические модели часто страдают от недостаточной обоснованности гипотез и чрезмерной абстрактности. Поэтому привлечение инструментов физической науки может обогатить экономику новыми подходами и моделями, позволяющими точнее прогнозировать экономические процессы. Так, авторами рассмотрены: моделирование динамики экономических агентов на основе применения законов механики и кинетики для описания взаимодействий потребителей и производителей; закономерности роста и упадка экономических систем, подобные фазовым переходам в физике; использование эргодических представлений для изучения равновесных состояний и долгосрочных тенденций в экономике.

Распознавание изображений

Интересным и перспективным практическим применением теории перколяции является распознавание изображений.

В работе [60] был предложен принципиально новый алгоритм улучшения качества бинарных изображений. Приведены результаты компьютерных экспериментов, показывающих особую эффективность этого алгоритма при обработке «смазанных» в результате движения изображений. Рассматривается зашумленное бинарное изображение как набор перколяционных кластеров.

Пример результата работы предлагаемого алгоритма представлен на рис. 45, где видно, что после обработки изображения шумов становится меньше, а значит, распознать такое изображение станет проще.



Рис. 45. Изображение до и после обработки [60]

Также авторами [60] показана принципиальная возможность применения его для цветных изображений.

В работе [61] автором данного пособия совместно со студентом бакалавриата 4 курса предлагается модель процесса идентификации объектов на микроизображении с использованием подходов теории перколяции.

Рассмотрена перколяционная задача узлов на квадратной решетке. Занятым узлом считается пиксель, принадлежащий некоторому объекту, свободный узел – это пиксель фона [61]. Пиксели одного объекта объединяются в группы – кластеры. Для модели разработан алгоритм маркировки занятых узлов и алгоритм распределения узлов по кластерам. Для полученных результатов реализована возможность проводить анализ параметров объектов, таких как их размеры, распределение, количество, минимальные и максимальные значения и др. Также большое внимание было уделено предобработке изображений: бинаризации и выделению границ с целью разделения объектов.

В ходе работы был реализован алгоритм обработки цветного изображения: бинаризация, выделение краев, эрозия, дилатация разделение объектов. На основе этих этапов строится матрица разбиения на кластеры Хошена – Копельмана. С учетом полученной матрицы можно исследовать различные свойства кластеров (объектов), такие как количество, средний размер, медианный размер, стандартное отклонение, коэффициент вариации, минимальный и максимальный размер кластеров, размах между размерами, коэффициент асимметрии, общую площадь, распределение кластеров по размерам. Есть возможность построения графика распределения кластеров по размерам. Была разработана программа с пользовательским интерфейсом, на рис. 46–48 представлены некоторые примеры ее работы. Результаты работы показали, что методы теории перколяции можно успешно применять на практике для идентификации и изучения свойств объектов на микроизображениях.



Рис. 46. Изображение кварцевого песка под микроскопом

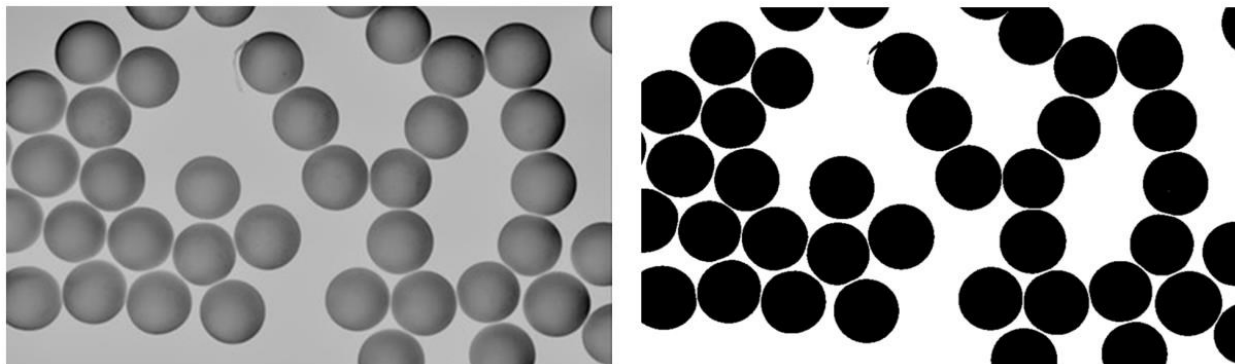


Рис. 47. Изображение металлического порошка под микроскопом

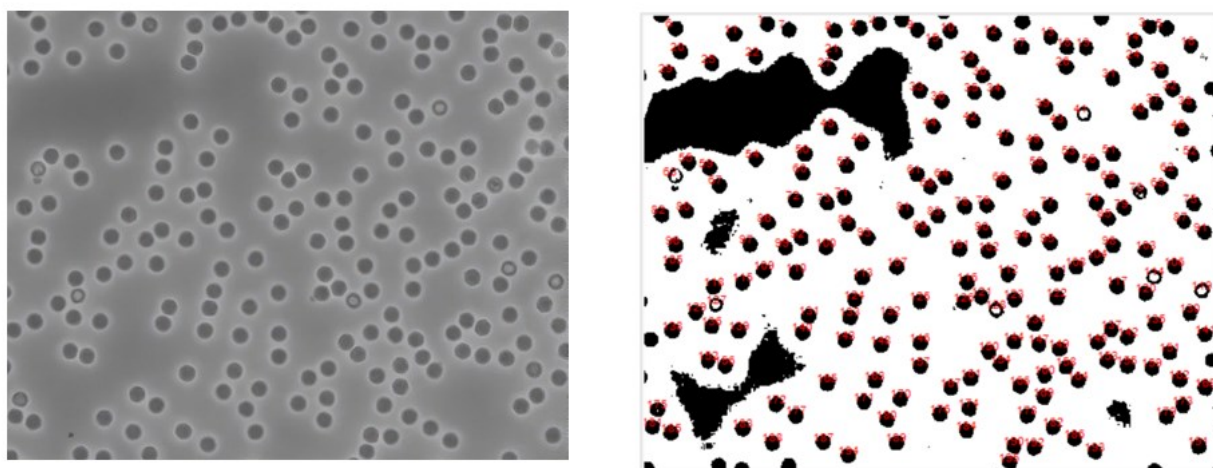


Рис. 48. Изображение аденоассоциированного вируса под микроскопом

Моделирование структуры Вселенной

Еще одним крайне интересным и ярким применением подходов теории перколяции является моделирование крупномасштабной структуры Вселенной [62], которое легло в основу научной работы студента бакалавриата Караваевой К. А. по специальности «Прикладная математика и информатика». Автором для реализации модели вводятся следующие обозначения и общие определения. Первичные материальные объекты – галактики, кластеры – скопления галактик.

Входные параметры модели:

- num_galaxies – целое число равное количеству моделируемых галактик, galaxies_masses – массив масс для каждой галактики;
- galaxies_position – размер области для построения галактической структуры, force_threshold – порог расстояния для «связи» между галактиками, mass – средняя масса галактики (в кг), r – радиус окружности, внутри которой формируются скопления галактик;

– G_{constant} – гравитационная постоянная (в $\text{H} \cdot \text{m}^2 / \text{кг}^2$).

Было проведено моделирование при разных наборах входных данных, на рис. 49 представлены результаты и фотография Вселенной. Работа имеет свое продолжение. При добавлении дополнительных факторов в модель можно спрогнозировать поведение Вселенной во времени и выяснить, действительно ли она расширяется?

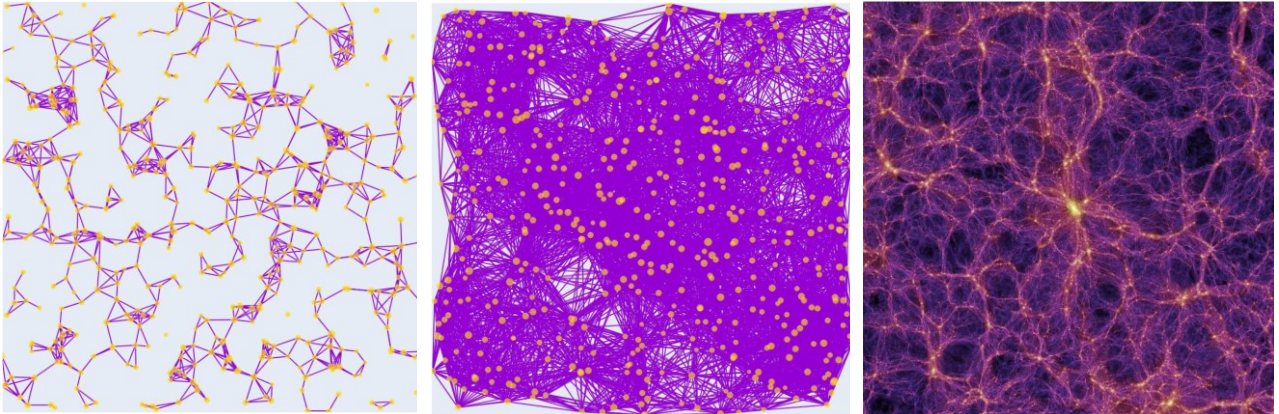


Рис. 49. Слева и в середине изображены результаты моделирования при разных входных параметрах, справа – снимок структуры Вселенной (взят из [62])

Лекция 6. Моделирование структуры и свойств сред, конструкций и материалов

Пожалуй, стоит вынести в отдельную лекцию самое распространенное среди исследователей применение теории перколяции – моделирование структуры и свойств различных сред, материалов, конструкций. Этому направлению посвящено наибольшее количество научных работ зарубежных и в последние годы российских исследователей.

Среда – вещество, заполняющее какое-либо пространство и обладающее определенными свойствами. Примеры: воздушная, фильтрующая, почвы.

Конструкция – строение, устройство, взаимное расположение частей какого-либо предмета.

Конструкция – сложный объект, составленный из различных частей.

Материалы – вещества (смеси веществ), из которых изготавливается продукция (другие материалы).

Моделирование структуры и свойств различных сред

Перколяционная модель распространения нефтепродуктов в почве была предложена авторами работы [63]. Часть почвенных пор в силу различных физико-химических ограничений всегда остается закрытой для жидкости и в процессе просачивания не участвует. При попадании в почву инородного нефтепродукта возникает внешний источник, под воздействием которого начинается постепенный перевод элементов структуры из незанятого состояния в заполненное. Почва рассматривается как трехмерная система взаимосвязанных пустот и каналов разного размера. Особенное внимание уделяется наноразмерным структурам, которые играют важную роль в транспорте влаги и питательных веществ. Рассматриваются различные факторы, влияющие на фильтрационные свойства почвы, включая влажность, плотность, химический состав, присутствие органических веществ.

Достижение порога перколяции ведет к формированию непрерывного проводящего кластера вдоль направления течения жидкости, что сопровождается резким изменением свойств всей системы. Загрязненные нефтью почвы формируют организованные дисперсные структуры с наноразмерной организацией. Основу макроструктуры почвенных гелей составляют силикаты и алюмосиликаты, тогда как роль дисперсионной среды играют жидкие углеводороды. Применение модели перколяции дает возможность детально описать ключевые стадии процесса перехода от зелей к гелям в структуре почвенного слоя. Процесс

образования кластеров из пор, занятых нефтепродуктом, можно увидеть на рис. 50–53.



Рис. 50. Пористая структура в виде двумерной решетки, состоящая из открытых и закрытых пор [63]



Рис. 51. Пористая структура в виде двумерной решетки, в которой часть открытых пор занята нефтепродуктом [63]



Рис. 52. Пористая структура в виде двумерной решетки, в которой появляется один проводящий кластер через открытые поры в направлении протекания [63]



Рис. 53. Пористая структура в виде двумерной решетки, в которой формируется соединяющий кластер [63]

Анализ течения на микроуровне позволил получить макроскопический закон фильтрации, а также критические значения градиентов давления, которые определяют границы применимости закона Дарси в работе [64]. Исследовано влияние параметров среды на значения пороговых градиентов. Показано, что при больших градиентах давления закон Дарси наиболее хорошо работает в мелкопоровых коллекторах и нарушается во всем диапазоне градиентов для крупнопоровых пород, а при низких градиентах линейный закон фильтрации выполним только для крупнопоровых пород.

Изучение композитов, в том числе нанокompозитов, с помощью методов теории перколяции

Композиты – это современные материалы, состоящие из двух или более различных компонентов, объединенных таким образом, чтобы совместить лучшие качества каждого элемента. Они широко используются благодаря своим уникальным свойствам: высокой прочности, легкости, устойчивости к коррозии и долговечности. Схематично структура композита представлена на рис. 54.

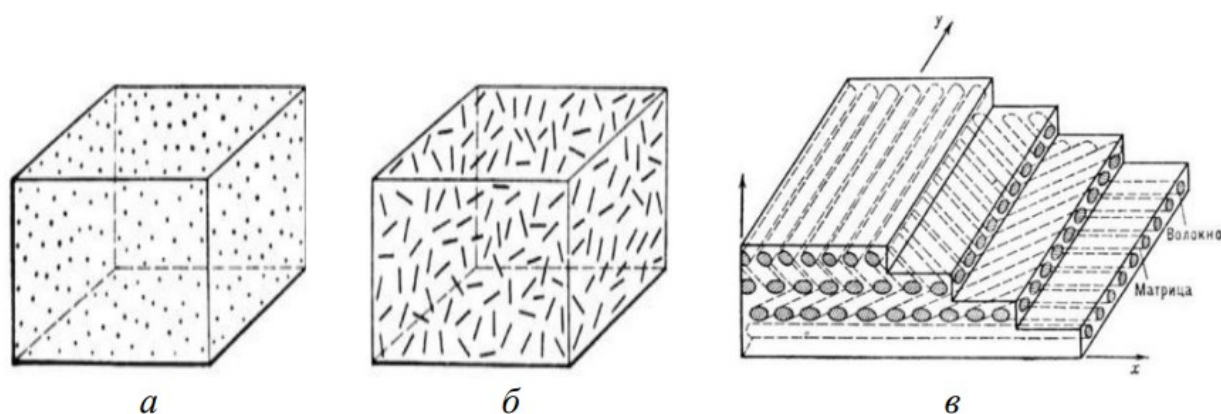


Рис. 54. Схематичное изображение композитов, наполненных дисперсными частицами (а), короткими (б) и длинными (в) волокнами [65]

Наиболее распространенными композитами являются полимерные композиты, армированные стекловолокном, углеродным волокном или арамидом. Такие материалы активно применяются в авиационной промышленности, автомобилестроении, строительстве и производстве спортивного инвентаря.

Нанокompозиты представляют собой особый класс композитов, в которых один или оба компонента имеют размеры в нанодиапазоне (менее 100 нм). Эти материалы обладают уникальными физико-химическими свойствами, значительно отличающимися от традиционных композитов.

Развитие технологий производства композитов и нанокомпозитов открывает новые возможности для инновационных решений в самых разных областях человеческой деятельности. И теория перколяции предоставляет в данном случае универсальный методологический аппарат для описания сложных явлений, происходящих в композитах и нанокомпозитах, обеспечивая глубокое понимание фундаментальных закономерностей функционирования таких материалов. Существует немало работ в этом направлении [например, 66–77].

Статья [66] посвящена изучению порогов перколяции в разнородных композитных материалах. Авторы исследуют поведение электрической проводимости в гранулированных композициях с различными геометрическими параметрами и уровнями беспорядочного расположения зерен. Получено, что порог перколяции зависит от среднего размера зерна и геометрии образца. Чем меньше средний диаметр зерен, тем ниже порог перколяции. При этом наличие локального упорядочивания (например, ориентация или агрегация зерен) снижает общий порог перколяции. Также авторами выявлены условия, при которых композиты демонстрируют скачкообразное изменение сопротивления при прохождении критической концентрации включения второго компонента. Хотя предложенная модель достаточно хорошо описывает общие тенденции изменения порога перколяции, точные количественные прогнозы требуют учета большего числа факторов, включая межфазные взаимодействия и эффекты границ раздела. Несмотря на возраст статьи, изложенные идеи остаются востребованными и находят свое отражение в современных исследованиях.

Перколяционные модели для описания степени усиления модуля упругости высоконаполненных нанокомпозитов полиуретан/графен и полимер/углеродные нанотрубки предложены в работах [74, 75]. Основное внимание уделено определению порога перколяции и построению зависимостей механических характеристик от содержания графена. Авторами показано, что достижение порога перколяции приводит к значительному увеличению жесткости материала. Подчеркивается важность учета морфологии и особенностей распределения графеновых частиц для точного предсказания свойств нанокомпозита. Также экспериментально установлено, что модуль Юнга увеличивается экспоненциально при приближении к порогу перколяции. Важным выводом стало подтверждение наличия слабых контактов между отдельными трубками, что влияет на общую проводимость и механические свойства нанокомпозита.

Также немало работ, посвященных моделированию полимерных нанокомпозитов с углеродными наночастицами, принадлежит автору данного пособия [26, 78–80]. В них были предложены математические модели перколяции для описания и расчета ключевых свойств композиционных наноматериалов, в частности:

- континуальная перколяция жестких сфер с проницаемыми оболочками в пространстве,
- континуальная перколяция жестких сфер с проницаемыми оболочками в пространстве с учетом вероятности возникновения связи между сферами (рис. 55),
- континуальная перколяция жестких эллипсоидов вращения с проницаемыми оболочками в пространстве (рис. 56),
- перколяция и джемминг k -меров на квадратной и кубических решетках разной длины и формы с учетом связи между объектами (в соавторстве с К. А. Боковым),
- перколяция и джемминг блоков на квадратной и кубических решетках (в соавторстве с К. А. Боковым),
- континуальная перколяция k -меров, прямоугольников на плоскости (в соавторстве с П. Д. Теплых, М. П. Романовой),
- континуальная перколяция k -меров, цилиндров в пространстве (в соавторстве с И. В. Никитиным, Е. А. Решетниковой, И. Старцевым, рис. 57).

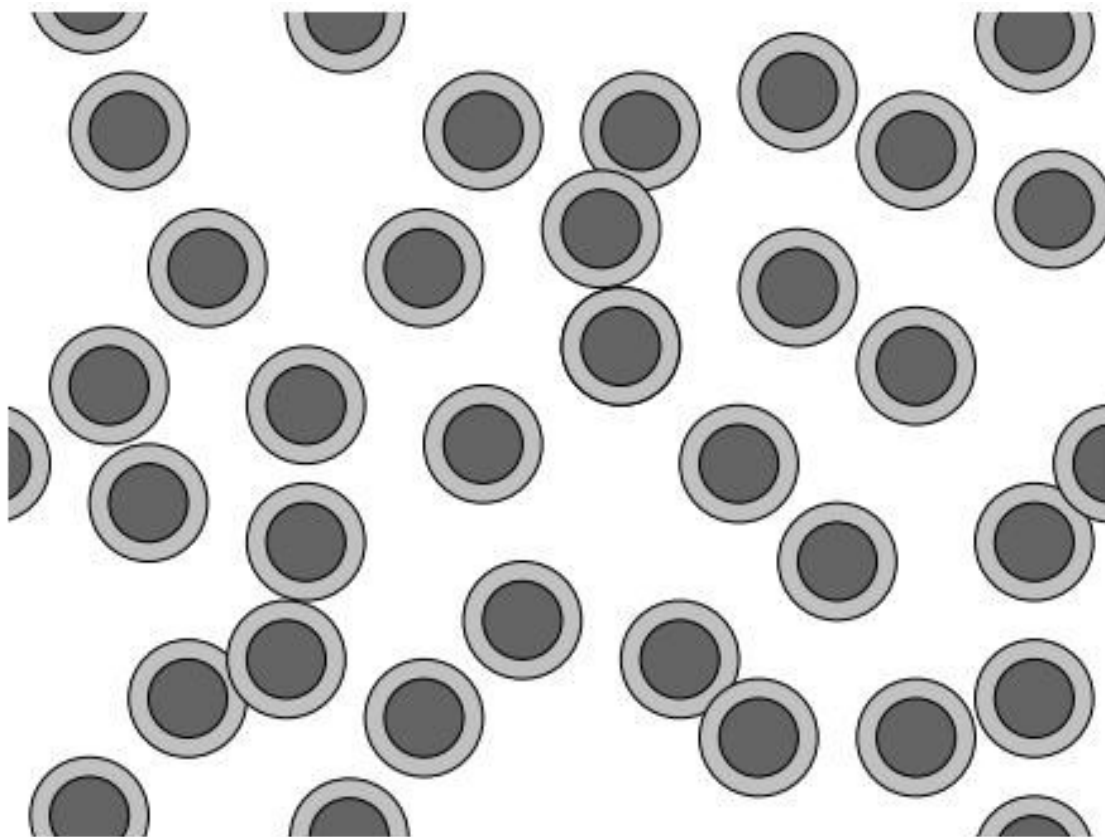


Рис. 55. Схематическое изображение континуальной перколяции жестких сфер с проницаемыми оболочками в пространстве

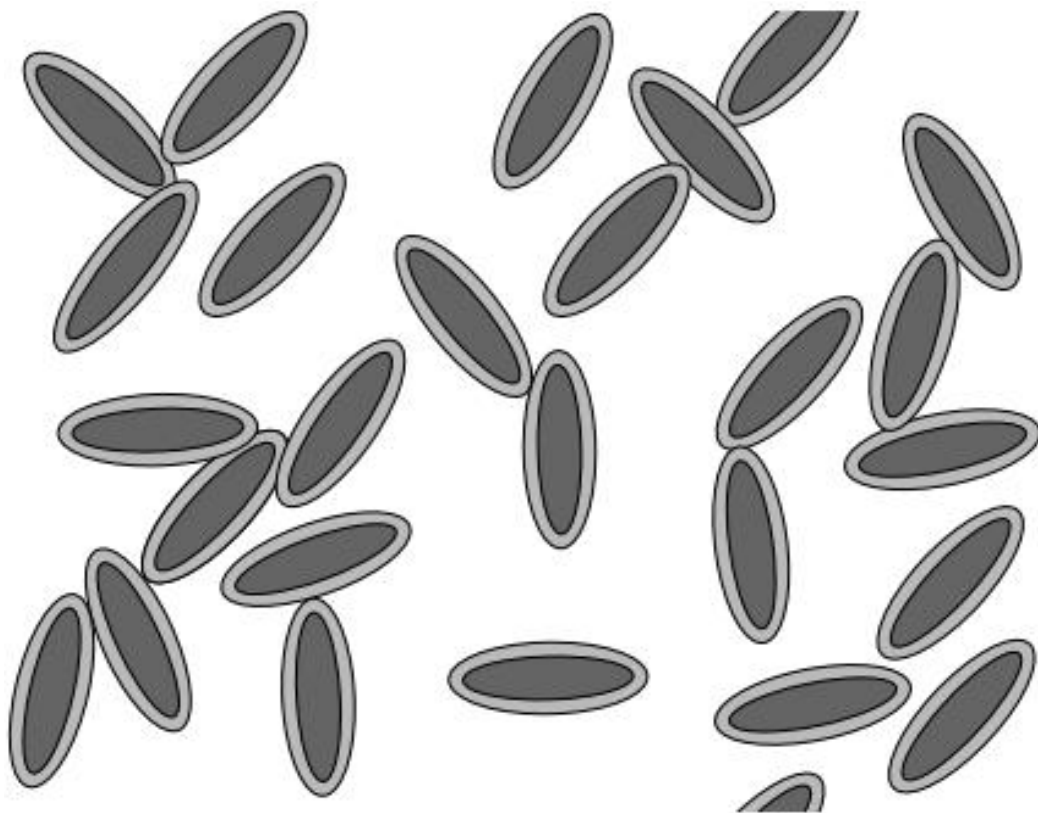


Рис. 56. Схематичное изображение непрерывной перколяции жестких эллипсоидов вращения с проницаемыми оболочками в пространстве

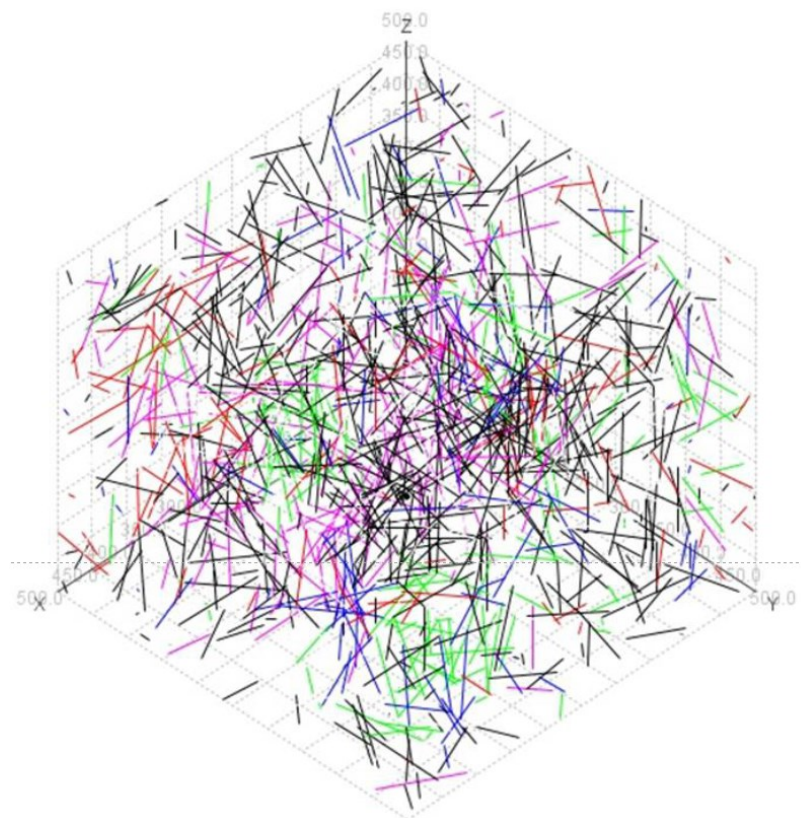


Рис. 57. Схематичное изображение непрерывной перколяции k -меров в пространстве

Континуальная перколяция жестких сфер с проницаемыми оболочками в пространстве описывает поведение полимерного нанокомпозита, содержащего фуллерены [30]. Полимерная матрица представлена трехмерным континуум, фуллерен – жесткая часть сферы, а межфазные области – проницаемые оболочки. Было определено поведение порога перколяции в зависимости от толщины проницаемого слоя, что соответствовало поведению свойств нанокомпозита при разных соотношениях нанонаполнителя и межфазного слоя. Аналогично были рассмотрены модели, описывающие поведение углеродных нанотрубок в полимере [32].

Также было изучено экспериментально и смоделировано изменение электрических и оптических свойств эпоксидной смолы, заполненной фуллеренами, и выяснено, что оптимальным значением концентрации нанонаполнителя является 0,153 % м.ч. [78, 80]. Именно при этом значении свойства нанокомпозита максимально улучшаются, и выяснено, что в данном случае величина межфазного слоя в шесть раз превышает радиус фуллерена (рис. 58–60).

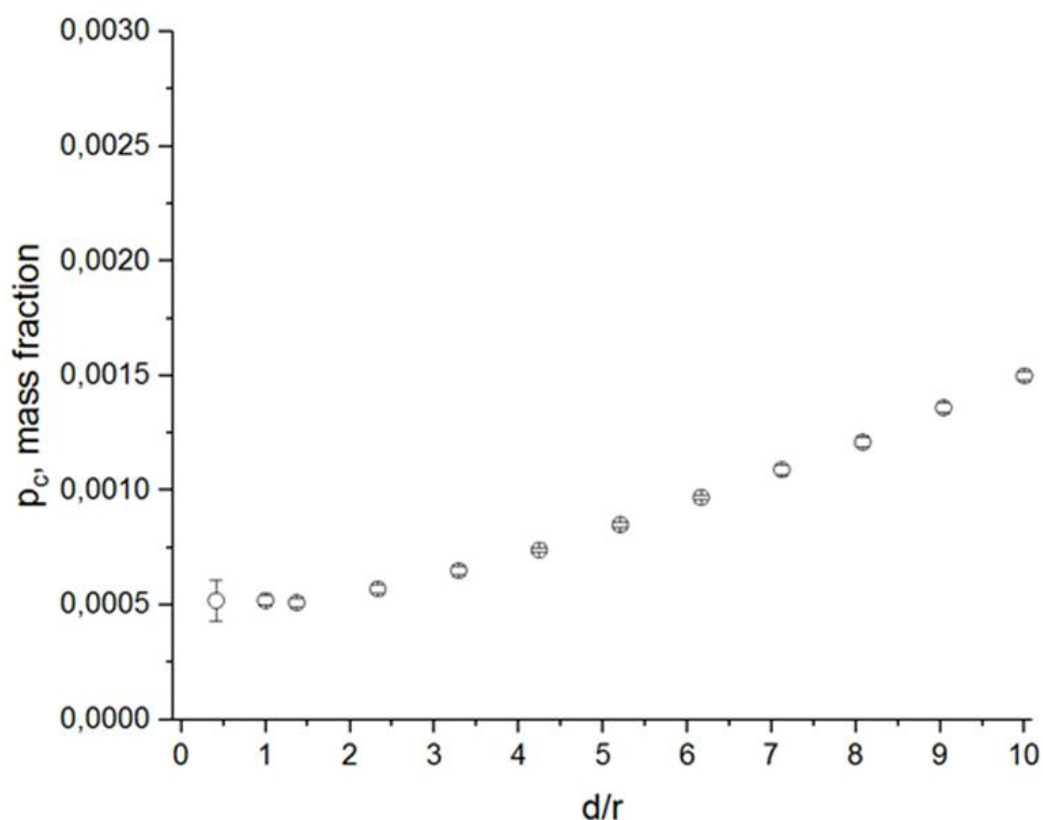


Рис. 58. Зависимость порога перколяции от величины межфазного слоя

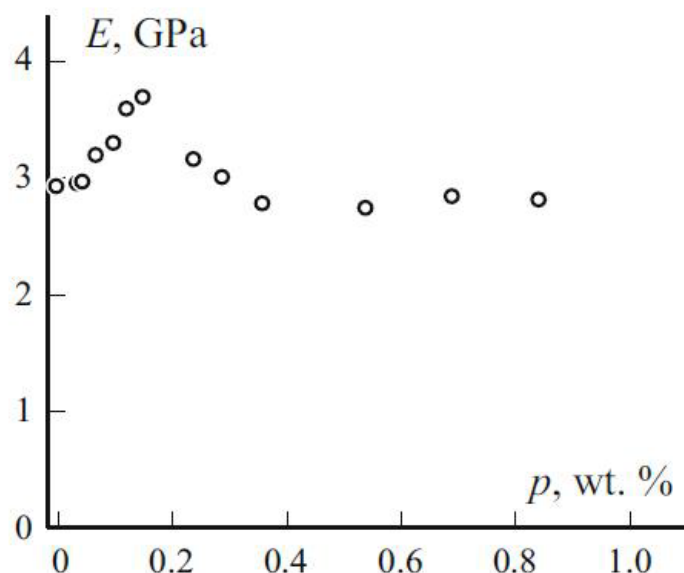


Рис. 59. Изменение электрических свойств эпоксидной смолы, модифицированной фуллеренами

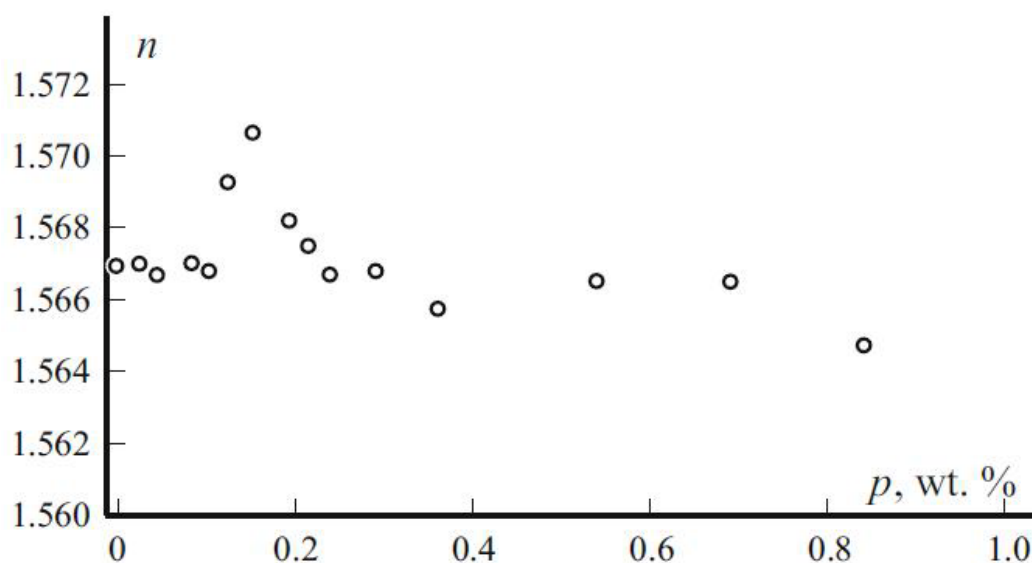


Рис. 60. Изменение оптических свойств эпоксидной смолы, модифицированной фуллеренами

Кроме того, в ряде работ автора данного пособия совместно со студентами в разные годы, посвященных решеточной и континуальной перколяции k -меров, было представлено описание структуры и свойств полимерных нанокомпозитов, наполненных углеродными нанотрубками [например, 81, 82].

В одной из работ было установлено, что если при полимеризации дать направление углеродным нанотрубкам, то такой нанокомпозит будет обладать большей электропроводимостью, чем когда углеродные нанотрубки

распределены случайным образом. Это также было объяснено перколяционной теорией. При создании ориентации в системе появляется несколько перколяционных кластеров, тем самым возникает несколько путей прохождения тока в материале.

Результат моделирования такого явления представлен на рис. 61. Результат можно интерпретировать с двух сторон. Во-первых, углеродных нанотрубок нужно меньше, так как при ориентированной перколяции порог перколяции снижается. Во-вторых, заданием направления можно регулировать значение электропроводимости нанокompозита.

Подобные исследования особенно важны для разработок новых типов полупроводниковых материалов. Например, они могут использоваться в производстве транзисторов, солнечных элементов и сенсоров, где критически важна высокая подвижность электронов и контролируемое сопротивление. Уменьшение количества необходимого наполнителя способствует снижению затрат и улучшению технологических процессов производства.

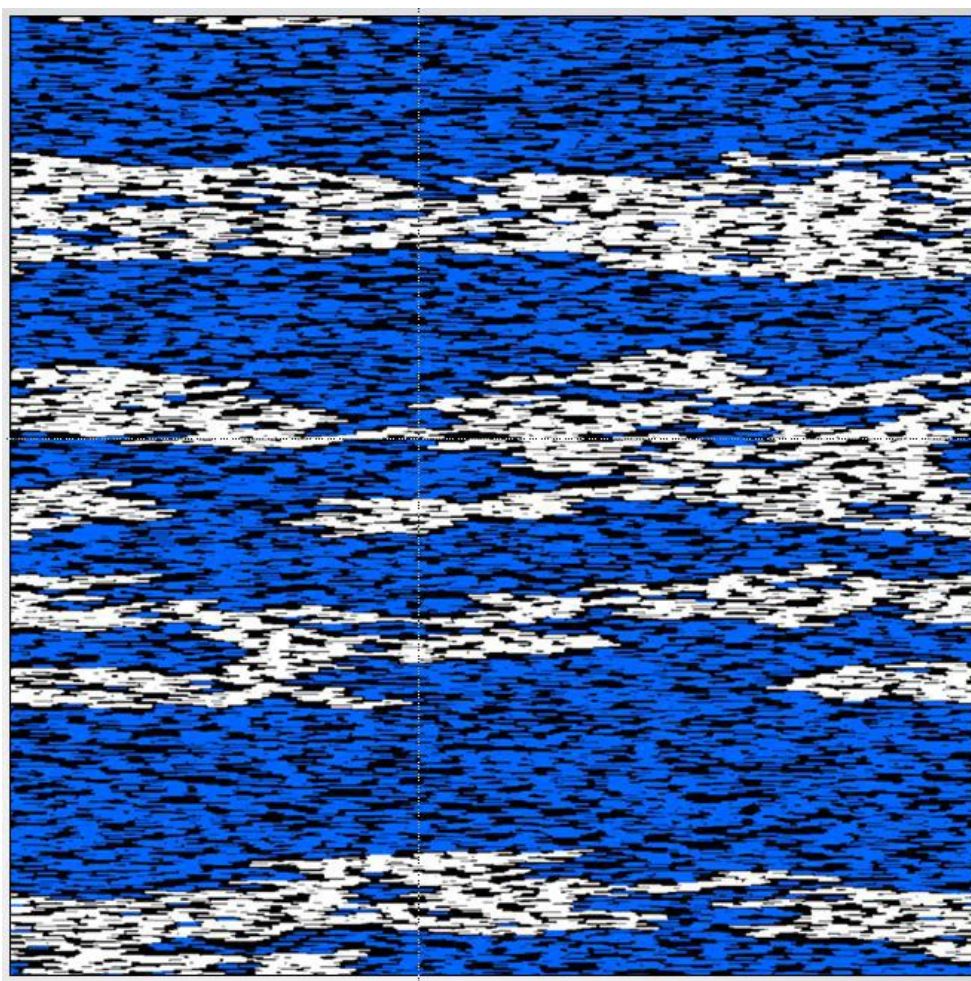


Рис. 61. Возникновение нескольких перколяционных кластеров в случае ориентированной перколяции k -меров

Явление джемминга

При моделировании случайных перколяционных систем часто возникает явление *джеремминга* (jamming), которое описывает состояние физической системы, где объекты плотно упакованы таким образом, что дальнейшее увеличение плотности невозможно без изменения структуры упаковки [82, 83]. Это явление часто наблюдается в системах, состоящих из частиц различной формы и размеров, например в сыпучих материалах (песок, зерно), коллоидных растворах, пене, стекле и полимерах.

Джеремминг возникает преимущественно в системах, где взаимодействующие элементы имеют конечный размер и форму. Классические точечные частицы (например, идеальные газовые молекулы) редко приводят к состоянию джеремминга, поскольку они свободно перемещаются даже при высокой концентрации. Напротив, объекты с ненулевым объемом (шары, эллипсоиды, цилиндры и др.) ограничены пространством вокруг себя и быстро достигают предельной степени заполнения.

Существует два основных типа упаковочных состояний: упорядоченный (когда частицы располагаются строго упорядоченно, образуя кристаллическую структуру, например гранецентрированную кубическую решетку); случайный (когда система находится в состоянии максимальной плотности, достигнутой путем хаотичного перемешивания объектов без образования четкой регулярной структуры). Наиболее интересен именно случайный джеремминг, поскольку он чаще встречается в реальных природных и промышленных условиях. Именно этот тип является предметом исследований в физике сложных систем и материаловедении.

Переход от подвижного состояния (жидкости или газа) к неподвижному (застреванию) характеризуется критической плотностью p_j , при достижении которой дальнейшая деформация становится невозможной без приложения значительных усилий. Эта точка называется точкой перехода джеремминга или порогом джеремминга.

Явление джеремминга можно изучать с учетом разных факторов: форма и размеры объектов, правила взаимодействия объектов и влияние внешней среды. Таким образом, накладывая разные условия на модель, явление джеремминга можно применять в исследованиях материаловедения, геологии, физике и химии веществ и др. Например, с помощью джеремминга сфер или кубов в пространстве можно изучать фильтрационные свойства пористых сред. В данном случае пористость материала будет равной обратной величине значения порога джеремминга.

Автором данного пособия совместно со студентами в разные годы были изучены модели джеремминга для перколяционных систем k -меров на квадратной

и кубической решетках, окружностей и сфер в пространстве [84–89]. Так, на рисунках 62–65 представлены плотные упаковки окружностей и сфер одинакового и разного размера, для которых пороги джемминга равны $0,595 \pm 0,006$ и $0,568 \pm 0,006$ соответственно.

Полученные значения согласуются с результатами других исследователей, при этом автором предложены принципиально новые эффективные алгоритмы плотной упаковки, что позволяет достаточно быстро проводить серии численных экспериментов по определению порога джемминга окружностей и сфер в случае одинакового размера объектов и в случае присутствия разброса в размере частиц.

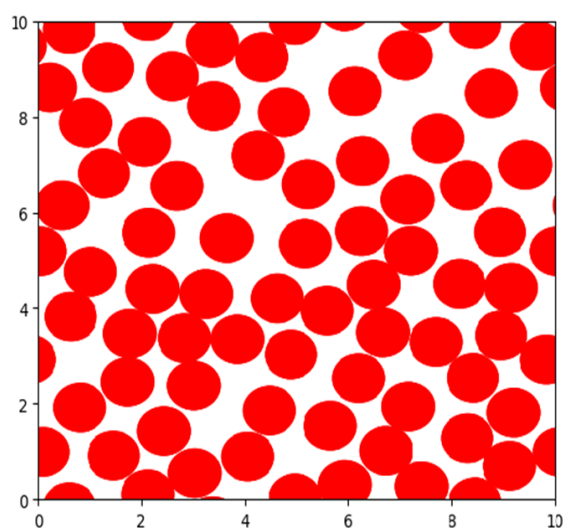


Рис. 62. Плотная упаковка окружностей одинакового размера

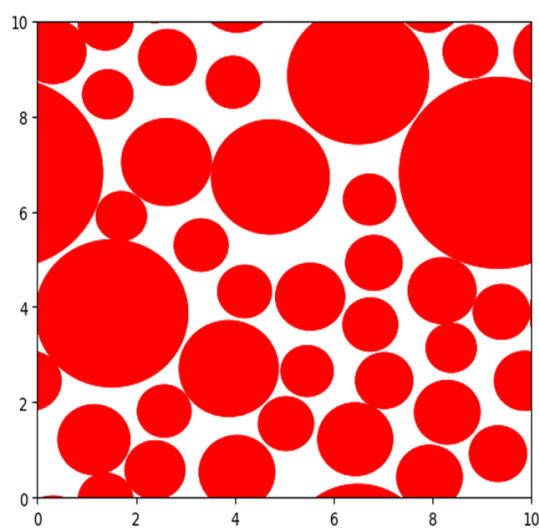


Рис. 63. Плотная упаковка окружностей разного размера

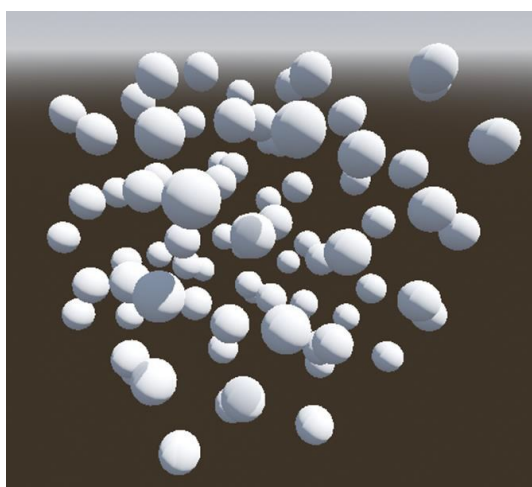


Рис. 64. Плотная упаковка сфер одинакового размера

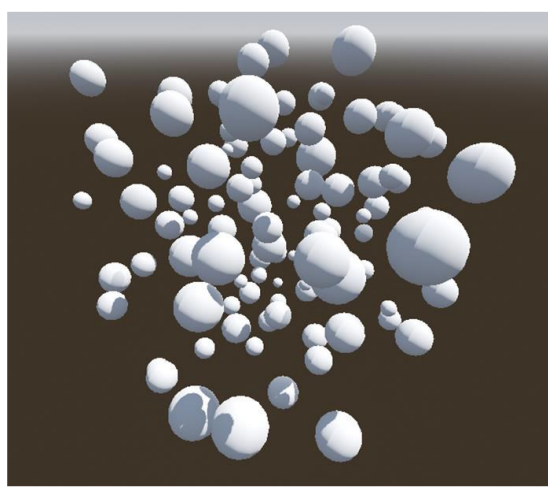


Рис. 65. Плотная упаковка сфер разного размера

Литература

1. *Перколяция: теория, приложения, алгоритмы* / Ю. Ю. Тарасевич. М.: Едиториал УРСС, 2002. 112 с. ISBN: 5-354-00233-8 EDN: JKMBRU
2. *Broadbent S. K., Hammersley J. M. Percolation Processes I. Crystals and mazes* // Proc. Camb. Phil. Soc. 1957. No. 53. P. 629–641.
3. *Flory P. J. Molecular size distribution in three-dimensional polymers. I. Gelation* // J. Am. Chem. Soc. 1941. Vol. 63. P. 3083–3090.
4. *Flory P. J. Molecular size distribution in three-dimensional polymers. II. Tri-functional branching units* // J. Am. Chem. Soc. 1941. Vol. 63. P. 3091–3096.
5. *Flory P. J. Molecular size distribution in three-dimensional polymers. III. Tetrafunctional branching units* // J. Am. Chem. Soc. 1941. Vol. 63. P. 3096–3100.
6. *Flory P. J. Molecular size distribution in three-dimensional polymers. Post-gelation relationships* // J. Am. Chem. Soc. 1947. Vol. 69. P. 30–35.
7. *Flory P. J. Molecular size distribution in three-dimensional polymers. VI. Branched polymer containing A-R-Bf-1 type units* // J. Am. Chem. Soc. 1952. Vol. 74. P. 2718–2723.
8. *Flory P. J. Principles of polymer chemistry*. New York: Cornell University Press, 1953. 672 p.
9. *Stockmayer W. H. Theory of molecular size distribution and gel formation in branched-chain polymers* // J. Chem. Phys. 1943. Vol. 11. P. 45–55.
10. *Stockmayer W. H. Theory of molecular size distribution and gel formation in branched polymers. II. General cross-linking* // J. Chem. Phys. 1944. Vol. 12. P. 125–131.
11. *Сонин А. А. К истории исследования явления перколяции* // Жидк. крист. и их практич. использ. (Liq. Cryst. and their Appl). 2016. Т. 16(1). С. 97–104. DOI: 10.18083/LCAppl.2016.1.97 EDN: VPINHF
12. *Федер Е. Фракталы* / пер. с англ. Ю. А. Данилов, А. Шукуров. М.: Мир, 1990. 254 с.
13. *Иудин Д. И., Копосов Е. В. Фракталы: от простого к сложному*. Н. Новгород: ННГАСУ, 2012. 200 с. ISBN: 978-5-87941-829-3 EDN: ZHEFRV
14. *Тейлор Д. Введение в теорию ошибок*. М.: Мир, 1985. 272 с.

15. *Ван дер Варден Б. Л.* Математическая статистика. М.: Издательство иностранной литературы, 1960. 436 с.
16. *Герасимович А. И., Матвеева Я. И.* Математическая статистика. Минск: Высшая школа, 1978. 200 с.
17. *Stauffer D., Aharony A.* Introduction to Percolation Theory. London: Taylor & Francis, 1992. 181 p.
18. *Шкловский Б. И., Эфрос А. Л.* Электронные свойства легированных полупроводников. М.: Наука, 1979. 416 с.
19. *Balberg I., Binenbaum N.* Invariant properties of the percolation thresholds in the soft-core – hard-core transition // *Physical Review A*. 1987. Vol. 35, No. 12. P. 5174(4).
20. *Эфрос А. Л.* Физика и геометрия беспорядка / Библиотека «Квант», выпуск 19. М.: Наука, 1982. 265 с.
21. *Zhydkov V.* 3D continuum percolation approach and its application to lava-like fuel-containing materials behavior forecast // *Condensed Matter Physics*. 2009. Vol. 12, No. 2. P. 193–203. DOI: 10.5488/CMP.12.2.193 EDN: XKIVHF
22. *Percolation theory for mathematicians*. Stuttgart: Birkhäuser, 1982. ISBN: 3-7643-3107-0
23. *Kesten H.* Percolation theory and first-passage percolation // *Ann. Probab.* 1987. No. 15(4). P. 1231–1271. DOI: 10.1214/aop/1176991975
24. *Smoluchowski M.* Drei Vorträge über Diffusion, Brownsche Molekularbewegung und Koagulation von Kolloidteilchen // *Phys. Z. (in German)*. 1916. Vol. 17. P. 557–571, 585–599.
25. *Hoshen J., Kopelman R.* Percolation and cluster distribution. I. Cluster multiple labeling technique and critical concentration algorithm // *Phys. Rev. B*. 1976. Vol. 14(8). P. 343–3445.
26. *Бузмакова М. М.* Компьютерное моделирование континуальной перколяции сфер и эллипсоидов с проницаемыми оболочками: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18. Астрахань, 2013. 168 с.
27. *Slutskaa M. G., Barash L. Y., Tarasevich Y. Y.* Percolation and jamming of random sequential adsorption samples of large linear k -mers on a square lattice // *Physical Review E*. 2018. Vol. 98, No. 6. P. 062130. DOI: 10.1103/PhysRevE.98.062130 EDN: ZILSIH

28. *Tarasevich Y. Y., Laptev V. V., Lebovka N. I.* Percolation of linear k -mers on a square lattice: From isotropic through partially ordered to completely aligned states // *Physical Review E – Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*. 2012. Vol. 86, No. 6. P. 061116. DOI: 10.1103/PhysRevE.86.061116 EDN: RGFSNP
29. *Боков К. А., Бузмакова М. М.* Компьютерное моделирование перколяции k -меров на квадратной решетке // *Вестник Пермского университета. Серия Математика. Механика. Информатика*. 2018. № 1(40). DOI: 10.17072/1993-0550-2018-1-51-55 EDN: XMHXWP URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/kompyuternoe-modelirovanie-perkolyatsii-k-merov-na-kvadratnoy-reshetke> (дата обращения: 24.06.2025)
30. *Бузмакова М. М.* Перколяция сфер в континууме // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Серия Математика. Механика. Информатика*. 2012. № 2. DOI: 10.18500/1816-9791-2012-12-2-48-56 EDN: OYJJIP URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/perkolyatsiya-sfer-v-kontinuume> (дата обращения: 24.06.2025)
31. *Pihlajamaa I., de Bruijn R., van der Schoot P.* Geometric percolation of hard-sphere dispersions in shear flow // *Soft Matter*. 2022. No. 18(21). P. 4167–4177. DOI: 10.1039/d2sm00375a EDN: WDKRWY
32. *Бузмакова М. М.* Перколяция вытянутых эллипсоидов вращения в континууме // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Серия Физ.-мат. науки*. 2012. № 4(29). DOI: 10.1103/PhysRevE.76.051402 URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/perkolyatsiya-vytyanutyh-ellipsoidov-vrascheniya-v-kontinuume> (дата обращения: 24.06.2025)
33. *Akagawa S., Odagaki T.* Geometrical percolation of hard-core ellipsoids of revolution in the continuum // *Phys Rev E Stat Nonlin Soft Matter Phys*. 2007. Vol. 76(5 Pt 1). P. 051402. DOI: 10.1103/PhysRevE.76.051402
34. *Garboczi E. J., Snyder K. A., Douglas J. F., Thorpe M. F.* Geometrical percolation threshold of overlapping ellipsoids // *Physical Review E*. 1995. Vol. 52(1). P. 819–828. DOI: 10.1103/PhysRevE.52.819 EDN: XPUURP
35. *Денисенко В. А., Соцков В. А.* Разработка параллельной реализации модифицированного алгоритма Франка-Лобба для исследования проводимости дефектной 2D-решетки с разделением связей // *Программные системы и вычислительные методы*. 2013. № 4(5). С. 363–369. DOI: 10.7256/2305-6061.2013.4.8041 EDN: RWRHON

36. Яппарова А. А., Маякова С. А. Распараллеливание алгоритмов численного моделирования процессов перколяции с вытеснением // Вестник УГАТУ = Vestnik UGATU. 2010. № 4(39). EDN: PWTQTN URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/rasparallelivanie-algoritmov-chislennogo-modelirovaniya-protssesov-perkolyatsii-s-vytesneniem> (дата обращения: 24.06.2025)
37. Нестеров А. А., Бузмакова М. М. Параллельные вычисления перколяционных задач на двумерной решетке // Материалы XXIII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2023): материалы конференции, с. Дивноморское, Краснодарский край, 04–10 сентября 2023 года. М.: Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 2023. С. 70–71. EDN PSMSTS
38. Сентемов А. А., Дорфман М. Б. Перколяционный подход при гидродинамическом моделировании воздействия на призабойную зону скважины // Известия ТПУ. 2022. № 7. DOI: 10.18799/24131830/2022/7/3612 EDN: WRQNOS URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/perkolyatsionnyy-podhod-pri-gidrodinamicheskom-modelirovanii-vozdeystviya-na-prizaboynuyu-zonu-skvazhiny> (дата обращения: 03.10.2024)
39. Астафьев С. А., Лысенко Д. Ю., Широков А. С. Моделирование процесса распространения лесного пожара с применением теории перколяции // Изв. вузов. приборостроение. 2012. Т. 55, № 6. EDN: OXNIGF
40. Абдулалиев Ф. А., Моторыгин Ю. Д. Описание развития пожара с помощью перколяционной модели // Пожаровзрывобезопасность. 2011. № 8. EDN: OFXCNR URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/opisanie-razvitiya-pozhara-s-pomoschyu-perkolyatsionnoy-modeli> (дата обращения: 01.10.2024)
41. Абдулалиев Ф. А., Иванов А. В., Ульяновский А. А. Вероятностный подход к моделированию развития пожара на открытых территориях с применением перколяционного процесса и функции нейронной сети // Пожаровзрывобезопасность. 2017. № 2. DOI: 10.18322/PVB.2017.26.02.44-53 EDN: YFUOPV URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/veroyatnostnyy-podhod-k-modelirovaniyu-razvitiya-pozhara-na-otkrytyh-territoriyah-s-primeneniem-perkolyatsionnogo-protssessa-i-funktsii> (дата обращения: 01.10.2024)
42. Лапина С. Ю. Мультиагентное моделирование процессов распространения массовых эпидемий с использованием суперкомпьютеров //

- Программные продукты и системы. 2018. Т. 3(31). DOI: 10.15827/0236-235X.031.3.640-644 EDN: XYOCLB
43. *Croccolo F., Roman H. E.* Spreading of infections on random graphs: A percolation-type model for COVID-19 // *Chaos Solitons Fractals*. 2020 Vol. 139. P. 110077. DOI: 10.1016/j.chaos.2020.110077 EDN: MIXGJS
44. *Шуляев В. В.* Компьютерное моделирование распространения эпидемии // ВКР бакалавра по специальности «Прикладная математика и информатика». Пермь: ПГНИУ, 2024.
45. *Севостьянов П. А., Монахов В. И., Самойлова Т. А., Зензинова Ю. Б., Вахромеева Е. Н.* Простая перколяционная модель образования трещин в текстильных композитах с тканой матрицей // *Известия высших учебных заведений. Технология текстильной промышленности*. 2021. № 6(396). DOI: 10.47367/0021-3497_2021_6_189 EDN: RIVZSA
46. *Валишин А. А., Антонова И. В.* Перколяционная модель накопления микродефектов и коллапса зоны вынужденной эластичности перед фронтом трещины разрушения в полимерных и композиционных материалах // *Инженерный журнал: наука и инновации*. 2016. № 11. DOI: 10.18698/2308-6033-2016-11-1556 EDN: WZTXFP
47. *Pike G. E., Seager C. H.* Percolation and conductivity: A computer study. I // *Physical Review B*. 1974. Vol. 10. P. 1421–1434.
48. *Pike G. E., Seager C. H.* Percolation and conductivity: A computer study. II // *Physical Review B*. 1974. Vol. 10. P. 1435–1446.
49. *Zelinka S. L., Glass S. V., Stone D. S.* A Percolation Model For Electrical Conduction In Wood With Implications For Wood-Water Relations // *Wood and Fiber Science*. 2008. Vol. 40. P. 544–552.
50. *Fiske T. J., Gokturk H. S., Kaluon D. M.* Percolation in magnetic composites // *Journal of materials science*. 1997. Vol. 32. P. 5551–5560. EDN: EQZJAN
51. *Bergqvist L., Eriksson O., Kudrnovsky J., Drchal V., Korzhavyi P., Turek I.* Magnetic Percolation in Diluted Magnetic Semiconductors // *Physical Review Letters*. 2004. Vol. 93. P. 137202(4). DOI: 10.1103/PhysRevLett.93.137202 EDN: MEZUJJ
52. *Phillips J. S* Critical transport properties of random metals in large magnetic fields // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*. 1997. Vol. 94. P. 10532–10535. DOI: 10.1073/pnas.94.20.10532 EDN: KJUMFW

53. Zhang G., Xia Y., Wang H., Tao Y., Tao G., Tu S., Wu H. A Percolation Model of Thermal Conductivity for Filled Polymer Composites // Journal of Composite Materials. 2010. Vol. 44. P. 963–970.
54. Голубев А. С., Звягин М. Ю., Милованов Д. С. Эффект перколяции в информационных сетях с неустойчивыми связями // Вестник ННГУ. 2011. № 3-2. EDN: OOJBLZ URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/effekt-perkolyatsii-v-informatsionnyh-setyah-s-neustoychivymi-svyazyami> (дата обращения: 24.06.2025).
55. Прокошев В. В., Скляренко В. А., Шамин П. Ю. Опыт применения моделей перколяционного типа для анализа процесса прохождения сигнала в больших ансамблях движущихся объектов // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия Информационные технологии. 2013. Т. 11, Вып. 2. С. 73–81. EDN: RCAAZZ
56. Лесько С. А., Алёшкин А. С., Филатов В. В. Стохастические и перколяционные модели динамики блокировки вычислительных сетей при распространении эпидемий эволюционирующих компьютерных вирусов // Российский технологический журнал. 2019. Т. 7, № 3. С. 7–27. DOI: 10.32362/2500-316X-2019-7-3-7-27 EDN: NOIYLO
57. Бузмакова М. М., Воробьёв Е. А. Перколяционная модель распространения сетевого вируса // Вестник Пермского университета. Серия Математика. Механика. Информатика. 2024. Вып. 2(65). С. 54–60. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-2-54-60 EDN: GLAQRF
58. Халкечева Л. К. Управление конкурентоспособностью предприятий путем формирования каналов распределения на основе перколяционной случайной фрактальной модели // Известия КБНЦ РАН. 2012. № 3. EDN: PAAKXB URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/upravlenie-konkurentosposobnostyu-predpriyatiy-putem-formirovaniya-kanalov-raspredeleniya-na-osnove-perkolyatsionnoy-sluchaynoy> (дата обращения: 05.10.2024)
59. Андрианов Д. Л., Симонов П. М. Обзор методов экономико-математического моделирования, основанных на принципах эконофизики. Часть 2 // Прикладная математика и вопросы управления. 2020. № 2. С. 165–190. DOI: 10.15593/2499-9873/2020.2.09 EDN: NYXOVK
60. Бондаренко М. А., Красотин С. Ю. Методы теории перколяции в задаче распознавания // Вестник Томского государственного университета. Серия

- Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 1(26). С. 25–30. EDN: RYJILF
61. *Безматерных А. Е.* Идентификация и кластеризация объектов на микро-изображениях с использованием подходов теории перколяции: ВКР бакалавра по специальности «Прикладная математика и информатика». Пермь: ПГНИУ, 2024. EDN: RPIFNS
62. *Караваева К. А.* Возможности применения методов теории перколяции для исследования крупномасштабной структуры Вселенной: курсовая работа бакалавра по специальности «Прикладная математика и информатика». Пермь: ПГНИУ, 2024. EDN: GIDPLR
63. *Бельшина Ю. Н., Галишев М. А.* Разработка перколяционной модели протекания жидкостей через пористую почвенную структуру на основе наноструктурной организации почв // Природные и техногенные риски (физико-математические и прикладные аспекты). 2014. №. 2. С. 78–84. EDN: WLYTJJ URL: <https://journals.igps.ru/ru/nauka/article/68597/view> (дата обращения: 22.06.2025)
64. *Кадет В. В., Чагиров П. С.* Перколяционный анализ основ гидродинамического моделирования разработки нефтегазовых месторождений // Актуальные вопросы исследований пластовых систем месторождений углеводородов. 2019. № 1(38). С. 139–155. EDN: QBPYHY
65. *Полимерные композиционные материалы: учебное пособие / сост. Л. И. Бондалетова, В.Г. Бондалетов.* Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2020. Ч. 2. 130 с.
66. *Balberg I., Binenbaum N.* Percolation thresholds in disordered composite materials // Physical Review Letters. 1987. Vol. 58, No. 23. P. 2378–2381.
67. *Kirkpatrick S.* Percolation and conduction // Reviews of Modern Physics. 1973. Vol. 45, No. 4. P. 574–588.
68. *Sheng P., Zeng X. C.* Theory of conductivity in granular composites near the percolation threshold // Journal of Applied Physics. 1985. Vol. 57, No. 11. P. 4831–4836.
69. *Stroud D.* Scaling properties of polymer gels near their gel point // Macromolecules. 1982. Vol. 15, No. 6. P. 1430–1434.
70. *Zhang K. Q., Li J. Y., Zhu Y. F.* Investigation on electrical percolation behavior of carbon nanotube/polymer composites // Composites Science and Technology. 2005. Vol. 65, No. 11–12. P. 1833–1840.

71. Hui C.-Y., Tang L., Huang H. H. Electrically conductive polymer nanocomposites based on graphene nanoplatelets: A review // *Progress in Polymer Science*. 2013. Vol. 38, No. 11. P. 1845–1871.
72. Benguigui L. Conduction through random systems: From finite clusters to infinite networks // *Physics Reports*. 1984. Vol. 108, No. 3. P. 153–208.
73. Villalobos G. R., Lee S. T., Zhou W. B. Percolation-based modeling for microstructure evolution in ceramic matrix composites // *Materials Science and Engineering: R: Reports*. 2006. Vol. 51, No. 1–2. P. 1–45.
74. Козлов Г. В., Долбин И. В. Перколяционные модели для описания степени усиления модуля упругости высоконаполненных нанокмполитов полимер/графен // *Прикладная физика*. 2017. № 3. С. 96–100. EDN: YTYNYZ
75. Микитаев А. К., Козлов Г. В. Перколяционная модель усиления нанокмполитов полимер/углеродные нанотрубки // *Materials Physics and Mechanics*. 2015. Т. 22. С. 101–106. EDN: UPUHJD
76. Еремин Ю. С. Перколяционные эффекты в полимерных мембранах с внедренными углеродными нанотрубками: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.04.07. М.: ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», 2020. 135 с.
77. Sahimi M. Application of percolation theory to porous media // *Advances in Chemical Engineering*. 1993. Vol. 19. P. 1–120.
78. Бузмакова М. М., Гилев В. Г., Мерзляков А. Ф., Русаков С. В. Исследование свойств композитного материала на основе эпоксидной смолы и полидисперсной смеси кварцевого песка // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Серия Механика*. 2024. № 6. С. 15–24. DOI: 10.15593/perm.mech/2024.6.02 EDN: HHQUDI
79. Бузмакова М. М. Компьютерное моделирование структуры эпоксидной смолы, модифицированной фуллеренами // *Морские интеллектуальные технологии*. 2017. № 4-3(38). С. 189–193. EDN: YPLAOG
80. Бузмакова М. М., Гилев В. Г., Русаков С. В. Экспериментальное исследование реокинетики эпоксидного связующего, модифицированного фуллеренами C₆₀ // *Вестник Пермского университета. Серия Физика*. 2019. № 2. С. 35–40. DOI: 10.17072/1994-3598-2019-2-35-40 EDN: JMTDXL
81. Bokov K. A., Buzmakova M. M. The Percolation Model of the Structure of the Polymer Nanocomposite, Containing the Carbon Nanotubes, with the Orient Factor Availability // *Journal of Physics: Conference Series: VIII International*

- Youth Scientific School-Conference «Modern Problems of Physics and Technology», MPPT 2019, Moscow, 15–20 April 2019. Vol. 1439. Moscow: Institute of Physics Publishing, 2020. P. 012027. DOI: 10.1088/1742-6596/1439/1/012027 EDN: EWYOFP
82. *Bokov K. A., Buzmakova M. M.* The Modeling of the Polymer's Thin Film, Modified by Carbon Nanotubes, this Using of the percolation theory's methods // Journal of Physics: Conference Series: 7th International Scientific School-Conference of Young Scientists on Modern Problems of Physics and Technologies, MPPT 2018, Moscow, 16–21 April 2018. Vol. 1189. Moscow: Institute of Physics Publishing, 2019. P. 012012. DOI: 10.1088/1742-6596/1189/1/012012 EDN: TQULAS
83. *Donev A., Cisse I., Sachs D., Variano E. A., Stillinger F. H., Connelly R., Torquato S., Chaikin P. M.* Unexpected density fluctuations in jammed disordered sphere packings // Physical Review Letters. 2004.
84. *O'Hern C. S., Silbert L. E., Liu A. J., Nagel S. R.* Jamming at zero temperature and zero applied stress: The epitome of disorder // Physica Status Solidi B. 2003. DOI: 10.1103/PhysRevE.68.011306 EDN: XZGRBO
85. *Эберт К. А., Бузмакова М. М.* Модели перколяции и джемминга неточечных объектов на квадратной решетке. Пермь: Перм. гос. нац. исслед. ун-т, 2024. 86 с. ISBN: 978-5-7944-4141-3 EDN: GSASHI
86. *Эберт К. А., Бузмакова М. М., Русаков С. В.* Максимальная случайная упаковка блоков на кубической решетке // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия Математическое моделирование и программирование. 2024. Т. 17, № 4. С. 82–93. DOI: 10.14529/mmp240407 EDN: TYYVGW
87. *Эберт К. А., Бузмакова М. М.* Джемминг блоков разного размера на квадратной решетке // Математическое моделирование в естественных науках. 2024. Т. 1. С. 449–452. EDN: ELRXFB
88. *Вдовин И. Е., Бузмакова М. М.* Компьютерное моделирование случайной плотной упаковки несжимаемых окружностей на плоскости // Материалы XXIII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2023): материалы конференции, с. Дивноморское, Краснодарский край, 04–10 сентября 2023 года. М.: Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 2023. С. 34–36. EDN XWGOIH

89. Бузмакова М. М., Боков К. А. Компьютерное моделирование джемминга для перколяционной задачи Накамуры // Математические методы и информационно-технические средства: материалы XV Всероссийской научно-практической конференции, Краснодар, 21 июня 2019 года / Редколлегия: И. Н. Старостенко [и др.]. Краснодар: Федеральное государственное казенное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Краснодарский университет Министерства внутренних дел Российской Федерации», 2019. С. 27–31. EDN NYPZEF

Учебное издание

Бузмакова Мария Михайловна

Методы теории перколяции: курс лекций

Учебное пособие

Редактор *А. С. Серебренников*

Корректор *С. А. Вороненко*

Компьютерная верстка: *М. М. Бузмакова*

Объем данных 5,17 Мб

Подписано к использованию 21.04.2026

Размещено в открытом доступе

на сайте psu.ru

в разделе НАУКА / Электронные публикации
и в электронной мультимедийной библиотеке ELiS

Управление издательской деятельности
Пермского государственного
национального исследовательского университета
614068, г. Пермь, ул. Букирева, 15
Тел.: (342) 239-65-47