

ПЕРМСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

**В. П. Максимов
М. В. Мулюков**

**ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНОГО
УПРАВЛЕНИЯ:
ВВОДНЫЙ КУРС ЛЕКЦИЙ**



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В. П. Максимов
М. В. Мулюков

ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ: ВВОДНЫЙ КУРС ЛЕКЦИЙ

Издание 3-е, дополненное и измененное

*Допущено методическим советом
Пермского государственного национального исследовательского университета
в качестве учебного пособия для студентов,
обучающихся по направлениям подготовки бакалавров
«Прикладная математика и информатика» и «Бизнес-информатика»*



Пермь 2026

УДК 517.983.22: 330.4(075.8)
ББК 22.18: 65.050: 22.161.8я73
М171

М171 **Максимов В. П.**

Теория оптимального управления: вводный курс лекций [Электронный ресурс]: учебное пособие / В. П. Максимов, М. В. Мулюков ; Пермский государственный национальный исследовательский университет. – Издание 3-е, дополненное и измененное. – Электронные данные. – Пермь, 2026. – 0,9 Мб ; 101 с. – Режим доступа: <http://psu.ru/files/docs/science/books/uchebnie-posobiya/Maksimov-Mulyukov-Teoriya-optimalnogo-upravleniya-vvodnyj-kurs-lekcij.pdf>. – Заглавие с экрана.

ISBN 978-5-7944-4335-6

В сжатой и доступной для экономистов и математиков форме излагаются основные понятия теории оптимального управления и вариационного исчисления. Теоретический материал иллюстрируется примерами из математической экономики. Предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки бакалавров «Прикладная математика и информатика» и «Бизнес-информатика».

УДК 517.983.22: 330.4(075.8)
ББК 22.18: 65.050: 22.161.8я73

*Издается по решению ученого совета экономического факультета
Пермского государственного национального исследовательского университета*

Рецензенты: кафедра вычислительной математики, механики и биомеханики
Пермского национального исследовательского политехнического
университета (зав. кафедрой - д-р техн. наук, профессор
В. Ю. Столбов);

канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры теории управления Санкт-Петербургского государственного университета **А. В. Егоров**

© ПГНИУ, 2026
© Максимов В. П., 2004
© Максимов В. П., с изменениями, 2018
© Максимов В. П., Мулюков М. В.,
с изменениями, 2026

ISBN 978-5-7944-4335-6

Оглавление

Предисловие	6
1 Введение. Краткая историческая справка	8
1.1 История классической теории оптимизации	9
1.2 Зарождение вариационного исчисления	12
1.3 Зарождение теории линейного программирования	16
1.4 Зарождение теории оптимального управления	17
2 Некоторые задачи вариационного исчисления	20
2.1 Постановка простейшей задачи вариационного исчисления	20
2.2 Необходимое условие локального экстремума	24
2.3 Решение некоторых дифференциальных уравнений, допускающих решение в явном виде	28
2.4 Случай квадратичного интегранта	33
2.5 Достаточные условия экстремума	34
2.6 Решение задачи о максимизации прибыли монополиста . .	37
2.7 Решение задачи о брахистохроне	38
3 Принцип максимума Л. С. Понтрягина	42
3.1 Постановка задачи оптимального управления со свободным правым концом траектории	42
3.2 Формулировка принципа максимума	43
3.3 Применение принципа максимума к задаче о максимизации интегрального потребления	45
3.4 Принцип максимума для линейных задач	51
4 Достаточные условия оптимальности	53
4.1 Постановка задачи. Основная теорема	53
4.2 Примеры	55
4.3 Задачи, линейные по управлению	62
4.4 Модификации основной теоремы	64

4.5	Задачи с дискретным временем	65
4.6	Задача оптимального управления для нелинейной одно- продуктовой модели экономики	67
4.7	Синтез оптимального управления. Метод Гамильтона– Беллмана	74
5	Компьютерный инструментарий	80
6	Задачи для самостоятельной работы	88
6.1	Лабораторная работа № 1. Задача о быстродействии	88
6.2	Лабораторная работа № 2. Оптимизация потребления при постоянной норме накопления	89
6.3	Лабораторная работа № 3. Оптимизация потребления при кусочно-постоянной норме накопления	91
6.4	Лабораторная работа № 4. Исследование простейших за- дач вариационного исчисления	93
6.5	Лабораторная работа № 5. Задача оптимального управле- ния для нелинейной модели макроэкономики	95
	Литература	101

Предисловие

Предлагаемое издание охватывает основные вопросы итогового экзамена по курсу «Теория оптимального управления», читаемому для студентов, обучающихся по направлениям подготовки бакалавров «Прикладная математика и информатика» и «Бизнес-информатика» (см. [1]). Теоретический материал дан в сжатой форме, основная часть иллюстрирующих примеров связана с задачами математической экономики. Изложение материала настоящего учебного пособия доступно для студентов других направлений с математической подготовкой в рамках стандартного курса «Высшая математика».

Настоящее третье издание учебного пособия дополнено следующими материалами в теоретической части:

1. задачей вариационного исчисления со свободным правым концом;
2. решением задачи о брахистохроне в двух постановках (со свободным и закрепленным правым концом);
3. описанием компьютерного инструментария, которое может быть использовано для решения задач.

В практической части настоящее издание учебного пособия претерпело следующие изменения

1. полностью изменена постановка задачи лабораторной работы № 1;
2. добавлены варианты к лабораторным работам № 2–4;
3. более подробно изложена постановка задачи в лабораторной работе № 5.

По каждой лабораторной работе даны подробные указания по выполнению, включая дополнительные вопросы, самостоятельная проработка которых способствует более полному усвоению материала студентами.

Изложение материала настоящего учебного пособия в целом соответствует стандартным учебным пособиям [2–7], но ограничено введением и обсуждением базовых понятий и задач. Для более глубокого изучения предмета студентам рекомендуются упомянутые в списке литературы учебные пособия.

Глава 1

Введение. Краткая историческая справка

Оптимальное управление – раздел математики, изучающий широкий класс задач на экстремум, или задач на отыскание максимума или минимума, т.е. наибольших или наименьших значений величин, зависящих от конечного (или бесконечного) числа аргументов. Простейшие задачи на экстремум рассматриваются уже в школьном курсе математики (исследование функций на экстремум). Термин «экстремум» происходит от латинского *extremum* – «крайний» и объединяет оба понятия – максимум и минимум. Задачи на экстремум, или экстремальные задачи, называют еще задачами оптимизации (*optimus* означает «наилучший», «совершенный»).

Различные типы задач оптимизации рассматриваются в таких дисциплинах как математическое программирование, исследование операций и теория оптимального управления.

Чтобы понять и оценить место задач оптимального управления среди других экстремальных задач, имеет смысл обратиться к прошлому и проследить за основными этапами развития методов решения задач на экстремум, начав с почти доисторических времен и выбирая в хронологическом порядке наиболее характерные для каждого этапа конкретные задачи. Условно можно выделить следующие этапы: экстремальные задачи античной науки, задачи на экстремум для функций одной или нескольких переменных, задачи классического вариационного исчисления, задачи линейного программирования, задачи оптимального управления.

1.1 История классической теории оптимизации

Древнейшие задачи на экстремум

Древнейшая из известных экстремальных задач является изопериметрическая задача. В современных терминах она ставится так: среди плоских замкнутых кривых, имеющих заданную длину, найти кривую, охватывающую наибольшую площадь. Еще до Аристотеля (IV в. до н. э.) было известно, что решение этой задачи – окружность, а фигура наибольшей площади – круг.

Упоминание об этой и близких к ней задачах можно найти в легенде о Дидоне, приводимой в поэме «Энеида» римского поэта Вергилия, где речь идет о событиях 825 г. до н.э. Согласно этой легенде финикийская царевна Дидона, вынужденная покинуть родной город Тир с небольшим отрядом, нашла на средиземноморском побережье Африки (современная Ливия) удобное место для поселения. Однако предводитель местных жителей согласился уступить Дидоне лишь клочок земли, «который можно окружить бычьей шкурой». Дидона решила разрезать шкуру на узкие полоски и связать их в один ремень. Таким образом ей удалось окружить «бычьей шкурой» достаточно территории, где и был zaloжен город Карфаген.

Здесь можно увидеть несколько постановок задачи оптимизации.

1. Найти оптимальную форму плоского участка земли, имеющего заданную длину периметра L и наибольшую площадь S_L . Очевидно, это изопериметрическая задача. Запишем эту задачу в виде

$$S_L \rightarrow \max, \quad L = \text{const}. \quad (1.1)$$

Здесь S_L — это площадь фигуры с периметром L (ясно, что фигур, имеющих один и тот же периметр, необозримо много). Ответ в этой задаче известен, как отмечалось выше, еще до Аристотеля: кривой надо придать форму окружности, которая ограничивает круг радиуса R . При этом, как известно,

$$R = \frac{L}{2\pi}.$$

Таким образом, максимальная площадь равна

$$\max S_L = \pi R^2 = \pi \left(\frac{L}{2\pi} \right)^2 = \frac{L^2}{4\pi}.$$

2. Если считать, что Дидона хотела сохранить выход к морю, то приходим к следующей задаче. Пусть задана прямая l . Среди всех дуг длины L , содержащихся в полуплоскости, ограниченной снизу прямой l , и с концами в точках, принадлежащих прямой l (обозначим эти точки A и B , отметим, что эти точки заранее не заданы), найти такую, которая вместе с отрезком AB ограничивает фигуру наибольшей площади.

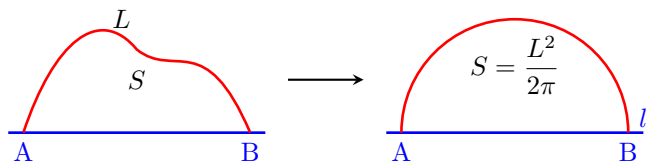


Рис. 1. Задача Дидоны с выходом к морю

Запишем эту задачу в виде

$$S_L(A, B) \rightarrow \max, \quad L = \text{const}, \quad A, B \in l.$$

Подчеркнем, что в этой записи, как и в (1.1), два «действующих лица»: S_L — величина, подлежащая максимизации, и совокупность условий, ограничивающих возможность выбора искомой фигуры. Важно понять сразу, что любое изменение как оптимизируемой величины, так и ограничений приводит к появлению новой задачи, имеющей, вообще говоря, другое решение. Ответом в этой задаче являются дуга полуокружности с длиной L , опирающаяся на отрезок AB как на диаметр (рис. 1).

3. Еще одна постановка возникает, если в предыдущую задачу добавить условие: точки A и B , принадлежащие прямой l , заранее заданы. Эта задача имеет смысл при условии, что длина отрезка AB строго меньше L . Решение этой задачи — дуга окружности, для которой отрезок AB является хордой.

Другие варианты задачи Дидоны и их решения с обсуждением, а также другие старинные задачи можно найти в книге [4, с. 12–16].

К классу изопериметрических задач, которому принадлежит рассмотренная задача Дидона, относится ещё одна хорошо известная многим школьникам задача: почему вода в невесомости собирается в шар? Ответ на этот вопрос заключается в том, что среди всех тел постоянного объёма шар является телом с наименьшей площадью поверхности (и,

следовательно, на этом теле реализуется минимально возможный уровень потенциальной энергии силы поверхностного натяжения).

Отметим, что в древнейшие времена решение экстремальных задач было скорее искусством, уделом избранных. Не было не только специальной теории, но и сколько-нибудь регулярных методов исследования.

Задачи оптимизации в Новое время

Вероятно, следующим фундаментальным шагом в создании теории оптимизации было открытие французским математиком Пьером де Ферма необходимого условия локального экстремума. Этот выдающийся учёный открыл данный принцип при решении геометрических задач на минимум и максимум.

Напомним, что при решении задач на безусловный экстремум для дифференцируемых функций f одного переменного x необходимое условие локального экстремума – равенство нулю первой производной функции в точке экстремума:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall x : |x - x_0| < \varepsilon : f(x) \leq (\geq) f(x_0) \Rightarrow f'(x_0) = 0.$$

Это условие было сформулировано П. де Ферма в 1629 г. и предоставляло исследователю правило для нахождения точек, «подозрительных» на экстремум. В XVII веке сэр Исаак Ньютон и Готфрид Вильгельм Лейбниц систематически использовали этот подход для поиска стационарных точек. В настоящее время основные навыки исследования функций одной переменной на экстремум приобретаются в средней школе, а соответствующие задачи входят в базовый уровень подготовки к единому государственному экзамену.

В своей работе 1762 г. Жозеф Луи Лагранж впервые предложил искать экстремум функции нескольких переменных при условии связи между переменными, рассматривая вспомогательную функцию (называемую ныне функцией Лагранжа), тем самым положив начало теории нахождения условного экстремума. Однако это всё ещё были необходимые условия экстремума.

Строгое систематическое исследование достаточных условий экстремума связано с работами Джеймса Джозефа Сильвестр (XIX век). В частности, эта задача сводится к исследованию знакоопределённости матрицы вторых производных (сегодня называемой гессианом).

1.2 Зарождение вариационного исчисления

Задача о брахистохроне

Принято считать, что толчком к зарождению вариационного исчисления, изучающего определенный класс экстремальных задач, послужила следующая задача о кривой наискорейшего спуска (брахистохроне - лат.). В вертикальной плоскости даны две точки A и B (рис. 2). Определить форму кривой (форму траектории), спускаясь по которой под действием силы тяжести (с нулевой начальной скоростью), материальная точка M (тяжелый шарик) пройдет путь от точки A до точки B за наименьшее время без учёта сил трения и сопротивления воздуха.

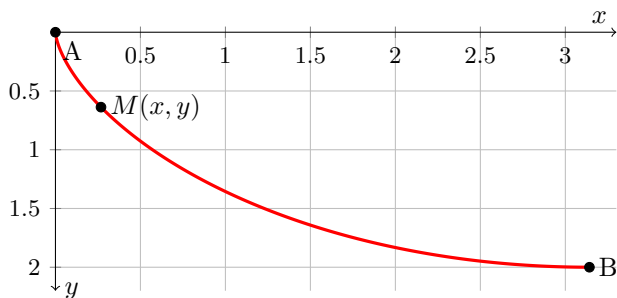


Рис. 2. Брахистохрона

Постановка такой задачи была опубликована Иоганном Бернулли в июльском номере научного (!) журнала «Acta Eruditorum» за 1696 г.¹ Решение этой задачи было дано самим И. Бернулли, а также Готфридом Вильгельмом Лейбницем, сэром Исааком Ньютоном и Яковом Бернулли (это родной брат автора задачи).

Забегая вперёд, скажем, что искомой кривой наискорейшего спуска – «брахистохроной» – оказалась (не прямая и не дуга окружности) дуга одной из замечательных кривых – циклоиды (см. ниже).

Перейдем к формальной постановке задачи. Будем считать, что оси координат введены и расположены так, как показано на рис. 2. По физическому закону Галилея мгновенная скорость движения шарика по кривой, заданной уравнением $y = y(x)$, в точке с координатами (x, y) не зависит от формы кривой между точками $A(0, 0)$ и $M(x, y(x))$, а зависит

¹Это был первый в мире научный журнал.

только от ординаты y и определяется равенством

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy(x)}, \quad (1.2)$$

где

- ds — дифференциал длины дуги кривой $y = y(x)$:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

- $g \approx 9,8 \text{ м/с}^2$ — ускорение свободного падения в поле тяжести Земли.

Подставляя выражение для ds в (1.2), получаем выражения для dt :

$$dt = \sqrt{\frac{1 + (y'(x))^2}{2gy(x)}} dx. \quad (1.3)$$

Проинтегрируем обе части (1.3). Значение $x = x_B$ соответствует конечному положению шарика (точке B с координатами (x_B, y_B) , в этом положении шарик окажется через время T). Это время можно найти:

$$\int_0^T dt = \int_0^{x_B} \sqrt{\frac{1 + (y'(x))^2}{2gy(x)}} dx.$$

Следовательно,

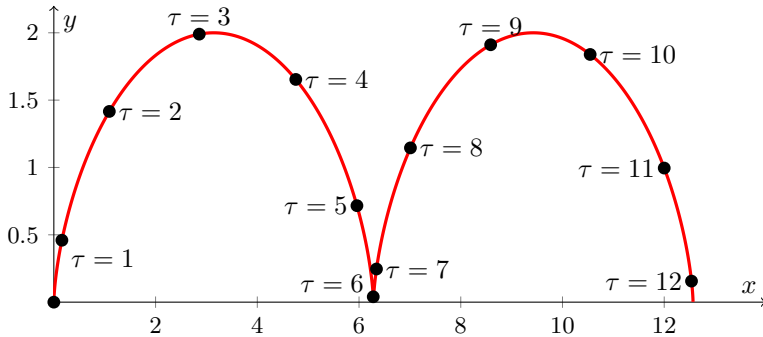
$$T = \int_0^{x_B} \sqrt{\frac{1 + (y'(x))^2}{2gy(x)}} dx.$$

Эта величина, время T , зависящая от формы кривой $y = y(x)$, под-
лежит минимизации на множестве всех (достаточно гладких) кривых,
соединяющих точки $A(0, 0)$ и $B(x_B, y_B)$. Таким образом, формальная
запись задачи принимает вид

$$T = \int_0^{x_B} \sqrt{\frac{1 + (y'(x))^2}{2gy(x)}} dx \rightarrow \min; \quad (1.4)$$

$$y(0) = 0, \quad y(x_B) = y_B.$$

Подчеркнем, что в этой задаче о брахистохроне экстремум ищется на
бесконечномерном множестве, иными словами, речь идет об экстремуме
функции бесконечного множества переменных.

Рис. 3. Дуга циклоиды при $R = 1$

Задача (1.4) является типичной задачей классического вариационного исчисления. Представление о методах решения таких задач будет дано ниже. Здесь же мы ограничимся описанием кривой наискорейшего спуска — циклоиды. Циклоида является траекторией фиксированной точки на окружности, которая катится без проскальзывания по горизонтальной прямой. Если оси координат выбрать, как показано на рис. 2, то параметрические уравнения циклоиды имеют вид

$$\begin{cases} x = R\tau - R\sin \tau, \\ y = R - R\cos \tau, \end{cases} \quad \tau \in [0, T],$$

где

- R — радиус «образующей» окружности,
- τ — параметр, угол поворота окружности (см. рис. 3),
- T — конечный момент времени.

Заметим, что в начале координат (т.е. при $\tau = 0$) касательная к графику циклоиды совпадает с осью Oy . Действительно,

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dx} = \frac{\dot{y}(\tau)}{\dot{x}(\tau)} = \frac{\sin \tau}{1 - \cos \tau} = \operatorname{ctg} \frac{\tau}{2} \rightarrow +\infty \text{ при } \tau \rightarrow 0.$$

Для задачи о кривой наискорейшего спуска это означает, что в начальный момент времени (из т. А, рис. 2) шарик начинает движение в направлении вертикально вниз. Таким образом, функция, являющаяся решением задачи (1.4), не имеет в точке $x = 0$ конечной производной

(функция $y = y(x)$ не является непрерывно дифференцируемой на отрезке $[0, x_B]$).

На рис. 4 показаны три разные траектории спуска из точки $(0, 0)$ в точку $(1, 1)$ и указано время. Наименьшее время $= 0,583$ с соответствует движению по дуге циклоиды с радиусом образующей окружности $R = 0,573$ (красная линия). Время движения по прямой равно $T = 0,639$ (зелёная линия), а по дуге параболы — $T = 0,595$ (синяя линия).

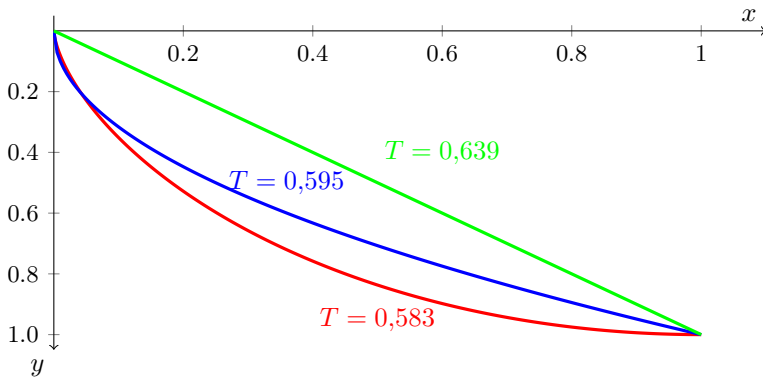


Рис. 4. Время движения по различным траекториям

Приведем пример вариационной задачи, возникающей в математической экономике.

Задача о максимизации прибыли монополиста

Рассмотрим односекторную модель монопольного производства (производится и продается один товар) на временном отрезке $[0, T]$. Пусть $C(x)$ — функция стоимости производства, x — количество произведенного товара. Будем считать, что задана функция спроса товара на рынке D , которая зависит не только от цены, но и от ожиданий покупателей относительно динамики цены на товар.

- Пусть $p(t)$ — цена товара в момент времени t .
- Тогда её производная по времени $\dot{p}(t)$ — это так называемая *тенденция формирования цены*.

Естественно предполагать, что

$$D = D(p, \dot{p}).$$

В этих предположениях прибыль в момент времени определяется равенством

$$L(p(t), \dot{p}(t)) = D(p(t), \dot{p}(t))p(t) - C(D(p(t), \dot{p}(t))).$$

Если считать известным уровень цен в начальный момент времени $p(0) = p_0$ и заданным уровень цен в конечный момент времени: $p(T) = p_T$, то получаем следующую вариационную задачу о максимизации прибыли на заданном промежутке времени $[0, T]$:

$$I(p) = \int_0^T L(p(t), \dot{p}(t)) dt \rightarrow \max, \quad p(0) = p_0, \quad p(T) = p_T. \quad (1.5)$$

Задачи (1.4) и (1.5) относятся к так называемым простейшим задачам вариационного исчисления. Более подробно такие задачи рассматриваются в гл. 2.

1.3 Зарождение теории линейного программирования

Линейное программирование — это раздел теории экстремальных задач, посвященный задачам об экстремумах линейных функций на множествах, задаваемых системами линейных неравенств и равенств.

История линейного программирования восходит к работам Гаспара Монжа — французского математика и инженера, который впервые формализовал математическую задачу оптимизации перевозки грузов при заданных ограничениях на поставщиков и потребителей. Сейчас эта математическая модель известна как транспортная задача, а сам Г. Монж решал данную задачу применительно к проблеме транспортировки земли и камня для постройки фортификаций.

Однако, начало систематического исследования задач линейного программирования было положено в 1939–1940 гг. известным советским математиком и экономистом Леонидом Витальевичем Канторовичем, который за работы в этой области был удостоен Ленинской (1965) и Нобелевской (1975) премий. Наряду с Л. В. Канторовичем основоположником теории линейного программирования считается американский математик Джордж Бернард Данциг, разработчик Симплекс-метода.

Задача линейного программирования в стандартном виде имеет вид

$$\begin{aligned} z(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max \\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m, \\ x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.6)$$

где c_j , a_{ij} , b_i — заданные числа.

К виду (1.6) приводятся многочисленные задачи с экономическим содержанием. Примером является следующая задача о планировании работы предприятия (линейная производственная задача). Предприятие может выпускать n видов продукции, реализация единицы продукции вида j , где $j = 1, \dots, n$ приносит прибыль c_j . В производстве используются ресурсы m видов. Объем имеющихся ресурсов ограничен:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

где x_j — выпуск продукции вида j . Требуется найти объем выпуска каждого вида продукции так, чтобы максимизировать суммарную прибыль z с учетом ограничений на ресурсы. Другие примеры задачи линейного программирования — задача о рационе и упомянутая выше транспортная задача.

Формально задача линейного программирования — задача на условный экстремум функции конечного числа переменных. Специфика исследуемой функции (ее линейность) и ограничений определяют особое место этого класса задач, в частности, здесь ничего не дают попытки применения дифференциального исчисления для нахождения точек локального экстремума, которых в задаче (1.6) нет.

1.4 Зарождение теории оптимального управления

Первой задачей, послужившей отправной точкой при построении теории оптимального управления, считается задача, о которой в 1950 г. рассказал на семинаре академика Л.С. Понтрягина в Математическом институте АН СССР инженер шахтоуправления. Теперь эта задача называется задачей о быстродействии: требуется так управлять лебедкой,

спускающей клеть в шахту, чтобы опустить её на заданный уровень и остановить там за минимальное время. Приведем здесь формальную постановку близкой задачи.

Задача о быстродействии.

Пусть имеется тележка, которая может двигаться прямолинейно без трения по горизонтальным рельсам. Тележка управляется внешней силой, величина которая может меняться в заданных пределах, скажем, $u \in [-1, 1]$. В начальный момент времени ($t = 0$) тележка неподвижна и находится в точке $x = 0$. Ее следует переместить в точку $x = l$ и там остановить. Уравнение движения тележки имеет вид

$$\ddot{x}(t) = \frac{1}{m}u(t), \quad t \in [0, T], \quad (1.7)$$

где m — масса тележки. Краевые (начальные и конечные) условия:

$$\begin{aligned} x(0) &= 0; & \dot{x}(0) &= 0; \\ x(T) &= l; & \dot{x}(T) &= 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Требуется найти такое управление $u(t)$, $t \in [0, T]$,

$$-1 \leq u(t) \leq 1, \quad t \in [0, T], \quad (1.9)$$

при котором время T (время перемещения из точки $x = 0$ в точку $x = l$) минимально:

$$T(u) \rightarrow \min. \quad (1.10)$$

С помощью принципа максимума Понтрягина (см. ниже) доказано, что решением этой задачи (оптимальным управлением) является следующее: $u(t) \equiv 1$ (максимальное ускорение) с начала движения до момента достижения середины дистанции ($x = l/2$) и затем $u(t) = -1$ (максимальное замедление) до конца дистанции.

В задаче (1.7)–(1.10) уравнение (1.7) — дифференциальное уравнение динамики, связывающее управление $u = u(t)$ и состояние (положение) $x = x(t)$ объекта управления, (1.8) — краевые условия-ограничения на переменную x , (1.9) — ограничения на переменную u , $T = T(u)$ — минимизируемый функционал.

Рассмотрим еще пример типичной задачи оптимального управления, возникающей в экономике.

Задача о максимизации интегрального потребления

Пусть $x(t)$ — чистый конечный продукт, производимый одноотраслевой экономикой в момент времени t . Возможность управления связана с использованием некоторой части $x(t)$ в качестве производственных накоплений $d(t)$. Остальная часть, $c(t) = x(t) - d(t)$, используется для непроизводственного потребления. Производственные накопления используются для развития производства (прироста чистого конечного продукта) на промежутке времени $[0, T]$:

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{B}d(t), t \in [0, T].$$

Здесь B — так называемый коэффициент капиталоемкости. Запишем это уравнение (уравнение динамики чистого конечного продукта) в виде

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{B}[x(t) - c(t)], \quad t \in [0, T] \quad (1.11)$$

и зададим начальное условие

$$x(0) = x_0, \quad (1.12)$$

считая, что $x_0 > 0$. Из содержательных соображений ясно, что

$$0 \leq c(t) \leq x(t), \quad t \in [0, T]. \quad (1.13)$$

Будем считать $c = c(t)$ управляющей переменной и поставим задачу максимизации интегрального потребления

$$I = \int_0^T c(t) dt \rightarrow \max \quad (1.14)$$

с учетом ограничений (1.11), (1.12), (1.13).

В задаче оптимального управления (1.11)–(1.14) есть те же элементы, что и в задаче (1.7)–(1.10): дифференциальные уравнения динамики, начальное условие (1.12), ограничения (1.13) и максимизируемый функционал (1.14).

Отметим одну особенность ограничений (1.13): они связывают и управление $c = c(t)$, и состояние $x = x(t)$. В таких случаях говорят, что в задаче присутствуют смешанные ограничения. Такие ограничения характерны для задач с экономическим содержанием, так как возможности (ресурсы) управления связаны с состоянием экономики (при отсутствии ресурсов, привлекаемых извне). К задаче (1.11)–(1.14) и ее модификациям мы будем обращаться еще не раз.

Глава 2

Некоторые задачи вариационного исчисления

2.1 Постановка простейшей задачи вариационного исчисления

Рассмотрим задачу о минимизации интегрального функционала

$$I(x) = \int_0^T L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \rightarrow \min \quad (2.1)$$

с дополнительными (краевыми) условиями

$$x(0) = \alpha; \quad x(T) = \beta. \quad (2.2)$$

Предполагается, что функция $L = L(t, x, y)$, называемая интегрантом, и числа α, β заданы.

$$L : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Функционал I рассматривается на множестве $C^1[0, T]$ непрерывно дифференцируемых функций $x(t)$, определенных на отрезке $[0, T]$. Для каждой такой функции определена норма

$$\|x\|_{C^1} = \max_{t \in [0, T]} |x(t)| + \max_{t \in [0, T]} |\dot{x}(t)|.$$

Определение 2.1. Функция $\bar{x} = \bar{x}(t)$, принадлежащая множеству $C^1[0, T]$ (т.е. $\bar{x} \in C^1[0, T]$) и удовлетворяющая условиям (2.2), называется глобальным решением задачи (2.1), (2.2), если неравенство $I(\bar{x}) \leq I(x)$ выполняется для всех x , удовлетворяющих условиям (2.2).

Определение 2.2. Функция $\bar{x} = \bar{x}(t)$, принадлежащая множеству $C^1[0; T]$ (т.е. $\bar{x} \in C^1[0; T]$) и удовлетворяющая условиям (2.2), называется локальным решением задачи (2.1), (2.2) (т.е. $\bar{x} \in \text{locmin}$ (2.1), (2.2)), если существует такое $\varepsilon > 0$, что неравенство $I(\bar{x}) \leq I(x)$ выполняется для всех $x \in C^1[0, T]$, удовлетворяющих условию (2.2) и неравенству

$$\|\bar{x} - x\|_{C^1} < \varepsilon. \quad (2.3)$$

Неравенство (2.3) определяет ε -окрестность функции x . В условиях определения 2.2 говорят также, что $\bar{x}$ — точка локального условного минимума функционала I .

Пример 2.1. Покажем, что $\bar{x}(t) = t$, где $t \in [0, 1]$ является глобальным решением задачи

$$\int_0^1 (\dot{x}(t))^2 dt \rightarrow \min; \quad x(0) = 0; \quad x(1) = 1$$

(т.е. задачи (2.1), (2.2), где $T = 1$, $L(t, x, y) = y^2$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$).

Найдем $I(\bar{x})$:

$$I(\bar{x}) = \int_0^1 1^2 dt = 1.$$

Произвольный элемент множества $C^1[0, 1]$, удовлетворяющий условиям $x(0) = 0$, $x(1) = 1$, можно представить в виде

$$x(t) = \bar{x}(t) + h(t) = t + h(t),$$

где $h(t)$ — функция из $C^1[0, 1]$, удовлетворяющая условиям

$$h(0) = h(1) = 0,$$

называется *допустимой вариацией* функции $\bar{x}$.

Найдем $I(x)$:

$$\begin{aligned} I(x) &= I(x + h) = \int_0^1 \left(\frac{d}{dt}(t + h(t)) \right)^2 dt = \int_0^1 (1 + \dot{h}(t))^2 dt = \\ &= \int_0^1 1^2 dt + 2 \int_0^1 (\dot{h}(t)) dt + \int_0^1 (\dot{h}(t))^2 dt = \\ &= 1 + 2(h(1) - h(0)) + \int_0^1 (\dot{h}(t))^2 dt \geq 1. \end{aligned}$$

Очевидно, что $I(\bar{x}) \leq I(x) = I(\bar{x}) + h$ для любой допустимой вариации h , поэтому по определению $\bar{x}$ — глобальное решение задачи (2.1), (2.2).

Пример 2.2. Покажем, что $\bar{x}(t) = t$, где $t \in [0, 1]$ — локальное (но не глобальное!) решение задачи

$$\int_0^1 (\dot{x}(t))^3 dt \rightarrow \min,$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 1.$$

В терминах задачи (2.1), (2.2) имеем:

$$T = 1, \quad L(t, x, y) = y^3, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 1.$$

Найдем

$$I(\bar{x}) = \int_0^1 1^3 dt = 1.$$

Дадим допустимую вариацию элементу $\bar{x}$:

$$x(t) \equiv \bar{x}(t) + h(t) = t + h(t),$$

где $h \in C^1[0, 1]$ и $h(0) = h(1) = 0$.

Найдем $I(x)$:

$$\begin{aligned} I(x) &= I(\bar{x} + h) = \int_0^1 \left(\frac{d}{dt}(t + h(t)) \right)^3 dt = \int_0^1 (1 + \dot{h}(t))^3 dt = \\ &= \int_0^1 1^3 dt + 3 \int_0^1 (\dot{h}(t)) dt + 3 \int_0^1 (\dot{h}(t))^2 dt + \int_0^1 (\dot{h}(t))^3 dt = \\ &= 1 + 3(h(t) - h(0)) + \int_0^1 \dot{h}^2(t) (3 + \dot{h}(t)) dt = \\ &= 1 + \int_0^1 \dot{h}^2(t) (3 + \dot{h}(t)) dt. \end{aligned}$$

Неравенство $I(\bar{x}) \leq I(x)$ выполняется, если число

$$\Delta I = \int_0^1 \dot{h}^2(t) (3 + \dot{h}(t)) dt$$

неотрицательно.

Легко заметить, что это условие выполняется не для всех допустимых вариаций. Например, если $\dot{h}(t) = g(t)$, где g имеет вид

$$g(t) = \begin{cases} -40t, & t \in [0, \frac{1}{10}), \\ 40(t - \frac{1}{5}), & t \in [\frac{1}{10}, \frac{1}{5}), \\ \frac{5}{2}(t - \frac{1}{5}), & t \in [\frac{1}{5}, \frac{3}{5}), \\ -\frac{5}{2}(t - 1), & t \in [\frac{3}{5}, 1], \end{cases}$$

то имеем

$$\Delta I = I(\bar{x} + h) - I(\bar{x}) = \int_0^1 g^2(t)(3 + g(t))dt = -8\frac{3}{5},$$

но

$$\Delta I = I(\bar{x} + (-h)) - I(\bar{x}) = \int_0^1 g^2(t)(3 - g(t))dt = 16\frac{3}{5}$$

График функции g представлен на рис. 5.

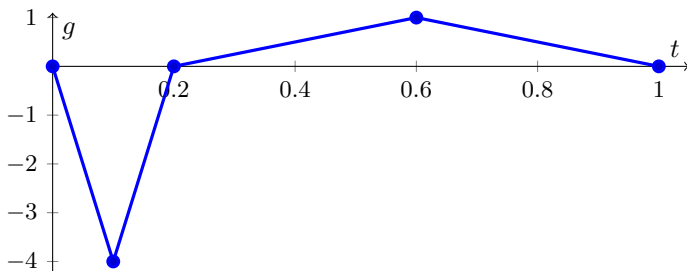


Рис. 5. График функции $g = g(t)$

Обеспечить выполнение неравенства $\Delta I \geq 0$ в данном случае можно требованием малости вариации $h(t)$, $t \in [0, 1]$ по норме $\|h\|_{C^1}$. Действительно, если

$$\|h\|_{C^1} = \max_{t \in [0, 1]} |h(t)| + \max_{t \in [0, 1]} |\dot{h}(t)| < \varepsilon = 3,$$

то очевидно, что

$$|\dot{h}(t)| < 3, \quad t \in [0, 1],$$

поэтому

$$(3 + \dot{h}(t)) > 0, \quad t \in [0, 1],$$

и

$$\Delta I = I(\bar{x} + h) - I(\bar{x}) \geq 0.$$

Таким образом, функция $\bar{x}(t) = t$ является локальным решением задачи, то есть доставляет минимум функционалу I в ε -окрестности элемента $\bar{x}$.

2.2 Необходимое условие локального экстремума

Выведем условие, которому удовлетворяет локальное решение задачи (2.1), (2.2). Подчеркнем, что использование такого условия позволяет существенно сузить круг (множество) функций, подозреваемых в качестве точек экстремума функционала I . Функции, не удовлетворяющие такому условию, не могут являться решением задачи. С другой стороны, функции, удовлетворяющие необходимому условию, могут не являться решением задачи (2.1), (2.2).

Ответ на вопрос, является ли решением задачи функция $\bar{x}$, которая удовлетворяет необходимому условию, может быть получен только после дополнительного исследования, например с помощью анализа знака приращения функционала $\Delta I(\bar{x}, h) = I(\bar{x} + h) - I(\bar{x})$, подобно тому, как это сделано в примере 2.

Пусть $\bar{x} \in \text{locmin}(2.1), (2.2)$. Дадим вариацию этому элементу:

$$x = \bar{x} + \lambda h,$$

где h — допустимая вариация:

$$h \in C^1[0, T], \quad h(0) = h(T) = 0,$$

λ — числовой параметр, регулирующий «величину» вариации λh .

При фиксированном $\bar{x}$ и фиксированной допустимой вариации h значение $I(\bar{x} + \lambda h)$ зависит только от числового аргумента λ , т. е.

$$K(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} I(\bar{x} + \lambda h)$$

является обычной функцией одной переменной. При этом по определению $\bar{x}$, в точке $\lambda = 0$ функция K имеет локальный минимум.

Считая функцию $L(t, x, y)$ достаточно гладкой (имеющей непрерывные производные

$$L_x = \frac{\partial}{\partial x} L \quad \text{и} \quad L_y = \frac{\partial}{\partial y} L,$$

чтобы функция $K(\lambda)$ была дифференцируемой, в силу классической теоремы Ферма о необходимых условиях локального экстремума, имеем

$$\left. \frac{d}{d\lambda} K(\lambda) \right|_{\lambda=0} = 0.$$

Вычислим производную $\frac{d}{d\lambda}K$:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\lambda} \int_0^T L\left(t, \bar{x}(t) + \lambda h(t), \dot{\bar{x}}(t) + \lambda \dot{h}(t)\right) dt = \\ &= \int_0^T \left[L_x \cdot \frac{d}{d\lambda}(\bar{x} + \lambda h) + L_{\dot{x}} \cdot \frac{d}{d\lambda}(\dot{\bar{x}} + \lambda \dot{h}) \right] dt = \\ &= \int_0^T \left[L_x\left(t, \bar{x} + \lambda h, \dot{\bar{x}} + \lambda \dot{h}\right) h + L_{\dot{x}}\left(t, \bar{x} + \lambda h, \dot{\bar{x}} + \lambda \dot{h}\right) \dot{h} \right] dt. \end{aligned}$$

При $\lambda = 0$ отсюда получаем:

$$\int_0^T \left[L_x(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) h(t) + L_{\dot{x}}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) \dot{h}(t) \right] dt = 0. \quad (2.4)$$

Условие (2.4) является необходимым условием локального экстремума. Его использование в качестве уравнения для нахождения $\bar{x}(t)$ осложняется наличием произвольной функции $h(t)$. Воспользуемся тем, что условие (2.4) должно выполняться для любой функции $h \in C^1[0, T]$, такой что $h(0) = h(T) = 0$. Применяя формулу интегрирования по частям

$$\int_0^T u dv = uv \Big|_0^T - \int_0^T v du$$

к первому слагаемому в левой части (2.4), можно записать (2.4) в виде

$$\int_0^T \left\{ \int_t^T L_x(s, \bar{x}(s), \dot{\bar{x}}(s)) ds + L_{\dot{x}}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) \right\} \dot{h}(t) dt = 0.$$

Обозначая выражение в фигурных скобках через $a(t)$, а $\dot{h}(t)$ — через $z(t)$, приходим к равенству

$$\int_0^T a(t) z(t) dt = 0,$$

которое выполняется для любой непрерывной функции $z(t)$, такой что

$$\int_0^T z(t) dt = 0 \quad \left(\int_0^T z(t) dt = \int_0^T \dot{h}(t) dt = h(T) - h(0) = 0 \right).$$

Известная лемма Дюбуа–Реймона гласит, что в таком случае непрерывная функция $a(t)$, $t \in [0, T]$, может быть только константой: $a(t) = \text{const}$. Таким образом, функция $\bar{x}(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\int_t^T L_x(s, \bar{x}(s), \dot{\bar{x}}(s)) ds + L_{\dot{x}}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) \equiv \text{const}, \quad t \in [0, T].$$

Дифференцируя по t обе части этого тождества, приходим к окончательной форме необходимого условия локального минимума:

$$-L_x(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) + \frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (2.5)$$

Определение 2.3. Уравнение (2.5) называется **уравнением Эйлера**, а его решения — **экстремалиями**.

Определение 2.4. Экстремали, удовлетворяющие краевым условиям (2.2), называются **допустимыми экстремалиями**.

Определение 2.5. Задача (2.2), (2.5) называется **краевой задачей Эйлера**.

Уравнение Эйлера — дифференциальное уравнение второго порядка, в общем случае его общее решение содержит две произвольные постоянные:

$$x(t; c_1, c_2), \quad t \in [0, T].$$

Допустимая экстремаль (решение краевой задачи (2.2), (2.5)) определяется такими значениями c_1 и c_2 , при которых

$$\begin{cases} x(0; c_1, c_2) = \alpha, \\ x(T; c_1, c_2) = \beta. \end{cases} \quad (2.6)$$

Задача (2.2), (2.5) имеет столько допустимых экстремалей, сколько решений имеет система (2.6).

Для конкретных вариационных задач эффективность нахождения допустимых экстремалей зависит от возможности записать в явном виде общее решение уравнения Эйлера (далеко не все дифференциальные уравнения второго порядка допускают запись решения в явном виде) и решить систему (2.6) относительно (c_1, c_2) .

Задача со свободным правым концом

В рассмотренных выше задачах осуществлялся поиск экстремума функционала $I = I(x)$ при фиксированных значениях функции $x(t)$ на концах отрезка $[0; T]$:

$$x(0) = \alpha, \quad x(T) = \beta.$$

Рассмотрим задачу поиска экстремума функционала при отсутствии граничного условия на правом конце.

Преобразуем выражение (2.4) с помощью интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left(L_x(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) h(t) + L_{\dot{x}}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) \dot{h}(t) \right) dt = \\ &= \int_0^T L_x(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) h(t) dt + \int_0^T L_{\dot{x}}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) dh = \\ &= \int_0^T \left(L_x(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) - \frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) \right) h(t) dt + \\ & \quad + L_{\dot{x}}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) h(t) \Big|_0^T. \end{aligned}$$

Если $\bar{x}$ — решение уравнения Эйлера, то первое слагаемое обращается в ноль. Если функция $\bar{x} = \bar{x}(t)$ даёт экстремум функционалу I при любых значениях приращения $h(T)$, то второе слагаемое тоже обращается в ноль:

$$\begin{aligned} & L_{\dot{x}}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) h(t) \Big|_0^T = \\ &= L_{\dot{x}}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) \Big|_{t=T} h(T) - [L_{\dot{x}}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) \Big|_{t=0} h(0) = 0, \end{aligned}$$

следовательно,

$$L_{\dot{x}}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) \Big|_{t=T} = 0. \quad (2.7)$$

Это граничное условие, которое заменяет для незакреплённого конца экстремали граничное условие простейшей задачи.

Граничные условия такого типа называются условиями трансверсальности — они появляются в задачах вариационного исчисления, когда концы траектории не фиксированы полностью, а имеют некоторую свободу. Выделяют следующие условия трансверсальности:

- начальная или конечная точка не заданы (рассмотренный выше случай);

- начальная и/или конечная точка лежат на кривых;
- конечный момент времени не фиксирован.

В каждом из этих случаев свои условия трансверсальности дополняют уравнение Эйлера и обеспечивают необходимые условия экстремума.

2.3 Решение некоторых дифференциальных уравнений, допускающих решение в явном виде

Рассмотрим несколько классов дифференциальных уравнений, к которым нередко сводится уравнение Эйлера и для которых возможно получение явных аналитических решений.

Во многих случаях уравнение Эйлера представляет собой линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Рассмотрим алгоритм его решения.

Общее решение однородного уравнения

Определение 2.6. Однородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка называется уравнение вида

$$\ddot{x}(t) + p\dot{x}(t) + qx(t) = 0, \quad t \in [a, b]. \quad (2.8)$$

Общее решение однородного уравнения (2.8) с постоянными коэффициентами p и q представляется в виде линейной комбинации:

$$x(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t), \quad (2.9)$$

где $u_1(t)$, $u_2(t)$ — два линейно независимых решения уравнения (2.8), c_1 , c_2 — произвольные постоянные.

Для нахождения u_1 и u_2 составляется характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \quad (2.10)$$

Коэффициентами при степенях λ ($\lambda^0 = 1$) являются коэффициенты при производной соответствующего порядка в уравнении (2.8). После нахождения корней λ_1 , λ_2 квадратного уравнения (2.10) можно найти u_1 и u_2 .

Рассмотрим все возможные случаи.

Случай 1. Корни λ_1 и λ_2 — вещественные и различные (этот случай имеет место, когда $p^2 - 4q > 0$).

Здесь:

$$u_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \quad u_2(t) = e^{\lambda_2 t},$$

и общее решение принимает вид:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Пример 2.3. Общее решение уравнения

$$\ddot{x}(t) - 4x(t) = 0,$$

для которого характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 4 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$, записывается в виде:

$$x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}.$$

Случай 2. Вещественный корень λ_1 уравнения (2.10) является кратным:

$$\lambda_1 = \lambda_2 \quad (\text{этот случай имеет место, когда } p^2 - 4q = 0).$$

В этом случае:

$$u_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \quad u_2(t) = t \cdot e^{\lambda_1 t},$$

и

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t \cdot e^{\lambda_1 t}.$$

Пример 2.4. Общее решение уравнения

$$\ddot{x}(t) - 2\dot{x}(t) + x(t) = 0$$

(для него характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \quad \text{или} \quad (\lambda - 1)^2 = 0$$

имеет кратный корень $\lambda_1 = 1$) записывается в виде:

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t.$$

Случай 3. Уравнение (2.10) имеет комплексно сопряжённые корни:

$$\lambda_1 = \alpha + \beta \cdot i, \quad \lambda_2 = \alpha - \beta \cdot i,$$

где i — мнимая единица, то есть $i^2 = -1$ (этот случай имеет место, когда $p^2 - 4q < 0$).

В этом случае:

$$u_1(t) = e^{\alpha t} \cdot \sin(\beta t), \quad u_2(t) = e^{\alpha t} \cdot \cos(\beta t),$$

и

$$x(t) = c_1 e^{\alpha t} \sin(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} \cos(\beta t).$$

Пример 2.5. Общее решение уравнения

$$\ddot{x}(t) - 2\dot{x}(t) + 2x(t) = 0$$

(для него характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 1 + i$, $\lambda_2 = 1 - i$) записывается в виде:

$$x(t) = c_1 e^t \sin t + c_2 e^t \cos t.$$

Общее решение неоднородного уравнения:

Решение уравнения

$$\ddot{x}(t) + p\dot{x}(t) + qx(t) = f(t), \quad t \in [a, b], \quad (2.11)$$

с постоянными коэффициентами p , q и заданной функцией $f(t)$ имеет вид:

$$x(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) + g(t),$$

где $u_1(t)$ и $u_2(t)$ — те же, что в (2.9), $g(t)$ — какое-нибудь частное решение уравнения (2.11).

В некоторых случаях частное решение уравнения (2.11) может быть легко найдено, например, если

$$f(t) \equiv \text{const} = d \neq 0 \quad \text{и} \quad q \neq 0,$$

то очевидно, что функция

$$g(t) \equiv \frac{d}{q}$$

обращает уравнение (2.11) в тождество.

В общем случае в качестве функции $g(t)$ можно взять

$$g(t) = \int_a^t \frac{\begin{vmatrix} u_1(s) & u_2(s) \\ u_1(t) & u_2(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1(s) & u_2(s) \\ \dot{u}_1(s) & \dot{u}_2(s) \end{vmatrix}} f(s) ds, \quad (2.12)$$

где символом $|\cdot|$ обозначен детерминант, то есть

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \gamma\beta.$$

Пример 2.6. Найдём общее решение уравнения

$$\ddot{x}(t) - x(t) = 2, \quad t \in [0, T].$$

В данном случае $u_1(t) = e^t$, $u_2(t) = e^{-t}$ (см. Пример 2.3),

$$g(t) = -2.$$

Таким образом,

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} - 2.$$

Пример 2.7. Найдём общее решение уравнения

$$\ddot{x}(t) + x(t) = t, \quad t \in [0, 1]. \quad (2.13)$$

Здесь $u_1(t) = \sin t$, $u_2(t) = \cos t$.

Далее,

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_0^t (-\sin s \cdot \cos t + \cos s \cdot \sin t) s ds = \\ &= -\cos t \int_0^t s \cdot \sin s ds + \sin t \cdot \int_0^t s \cos s ds = \\ &= -\cos t(\sin t - t \cos t) + \sin t(\cos t + t \sin t - 1) = t - \sin t. \end{aligned}$$

Ответ: общее решение уравнения (2.13) имеет вид

$$x(t) = c_1 \sin t + c_2 \cos t + t - \sin t.$$

В некоторых случаях дифференциальное уравнение второго порядка допускает понижение порядка, поэтому кратко рассмотрим некоторые часто встречающиеся дифференциальные уравнения первого порядка.

Решение линейного дифференциального уравнения первого порядка

Общее решение уравнения

$$\dot{x}(t) + q(t)x(t) = r(t), \quad t \in [0, T]$$

имеет вид

$$x(t) = e^{-\int_0^t q(\tau) d\tau} \cdot c + e^{-\int_0^t q(\tau) d\tau} \cdot \int_0^t e^{\int_0^s q(\tau) d\tau} r(s) ds.$$

Если задано начальное значение $x(0) = \alpha$, то получаем соответствующее частное решение при $c = \alpha$:

$$x(t) = e^{-\int_0^t q(\tau) d\tau} \cdot \alpha + e^{-\int_0^t q(\tau) d\tau} \cdot \int_0^t e^{\int_0^s q(\tau) d\tau} r(s) ds.$$

Если задано конечное значение $x(T) = \beta$, то после нахождения постоянной c получаем:

$$x(t) = e^{\int_t^T q(\tau) d\tau} \cdot \beta - e^{\int_t^T q(\tau) d\tau} \cdot \int_t^T e^{-\int_t^s q(\tau) d\tau} r(s) ds.$$

Решение уравнения Бернулли

Уравнением Бернулли называется уравнение

$$\dot{x} + p(t)x = q(t)x^v, \quad t \in [0, T], \quad (2.14)$$

где $v \neq 1$.

Решение этого уравнения сводится к решению линейного уравнения с помощью подстановки

$$z(t) = (x(t))^{1-v}. \quad (2.15)$$

Найдём:

$$\dot{z}(t) = (1-v)(x(t))^{-v} \dot{x}(t). \quad (2.16)$$

Разделив обе части уравнения (2.14) на x^v , получаем для $z(t)$ линейное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\dot{z} + (1-v)p(t)z = (1-v)q(t), \quad t \in [0, T].$$

Общее решение этого уравнения $z(t, c)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} z(t, c) = & e^{-(1-v) \int_0^t p(\tau) d\tau} \cdot c + \\ & + (1-v) e^{-(1-v) \int_0^t p(\tau) d\tau} \cdot \int_0^t e^{(1-v) \int_0^s p(\tau) d\tau} \cdot q(s) ds, \end{aligned}$$

где c — произвольная постоянная.

Отсюда находим общее решение уравнения (2.14):

$$x(t, c) = {}^{1-v}\sqrt{z(t, c)}. \quad (2.17)$$

При этом $x(t, c)$ определено для всех t , для которых определена правая часть (2.17).

2.4 Случай квадратичного интегранта

Рассмотрим класс задач (2.1), (2.2), для которого допустимая экстремаль оказывается единственной и может быть записана в явной форме.

Пусть подынтегральная функция (интегрант) L имеет вид

$$L(x, \dot{x}) = ax^2 + bx\dot{x} + c\dot{x}^2 + dx + e\dot{x} \quad (2.18)$$

(это так называемая квадратичная функция с коэффициентами, не зависящими от t). В этом случае

$$L_x(x, \dot{x}) = 2ax + b\dot{x} + d,$$

$$L_{\dot{x}}(x, \dot{x}) = bx + 2c\dot{x} + e,$$

$$\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(x, \dot{x}) = b\dot{x} + 2c\ddot{x},$$

и уравнение Эйлера (2.5) может быть записано в виде:

$$2c\ddot{x} - 2ax - d = 0,$$

или (при $c \neq 0$):

$$\ddot{x} - \frac{a}{c}x = \frac{d}{2c}. \quad (2.19)$$

Уравнение (2.19) — линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его общее решение может быть записано в явном виде (см. §2.3):

$$x(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) + g(t),$$

где

$$g(t) = -\frac{d}{2a}, \text{ если } a \neq 0$$

и

$$g(t) = \frac{d}{4c} t^2, \text{ если } a = 0.$$

Для нахождения допустимой экстремали надо найти такие постоянные c_1 и c_2 , чтобы были выполнены краевые условия (2.2):

$$\begin{aligned} x(0) &= c_1 u_1(0) + c_2 u_2(0) + g(0) = \alpha, \\ x(T) &= c_1 u_1(T) + c_2 u_2(T) + g(T) = \beta. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Таким образом, условие

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_1(0) & u_2(0) \\ u_1(T) & u_2(T) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (2.21)$$

является необходимым и достаточным для существования единственной допустимой экстремали.

2.5 Достаточные условия экстремума

Считая выполненным условие (2.21), обозначим через $\bar{x}(t)$ допустимую экстремаль и получим достаточные условия наличия экстремума функционала (2.1) с интегрантом (2.18) на допустимой экстремали. Для этого исследуем поведение приращения функционала

$$\Delta I = I(x) - I(\bar{x}) = I(\bar{x} + h) - I(\bar{x}).$$

Используя специфический вид (2.18) функции L и элементарные преобразования, приращение ΔI можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \Delta I &= \int_0^T [2a\bar{x}(t) - 2\ddot{\bar{x}}(t) + d] h(t) dt + \\ &+ \int_0^T b h(t) \dot{h}(t) dt + \int_0^T [a h^2(t) + c \dot{h}^2(t)] dt. \end{aligned}$$

Первое слагаемое в этом выражении равно нулю, так как допустимая экстремаль является решением уравнения Эйлера (2.5). Второе слагаемое также равно нулю:

$$b \int_0^T h(t) \dot{h}(t) dt = b \int_0^T h(t) dh(t) = \frac{b}{2} h^2(t) \Big|_{t=0}^{t=T} = \frac{b}{2} [h^2(T) - h^2(0)] = 0.$$

Таким образом,

$$\Delta I = \int_0^T (ah^2(t) + c\dot{h}^2(t)) dt,$$

и достаточные условия экстремума формулируются в следующем виде.

Пусть в задаче (2.1), (2.2) интегрант L определён равенством (2.18).

При выполнении неравенств $c > 0$ и $a \geq 0$ допустимая экстремаль $\bar{x}(t)$, $t \in [0, T]$, является локальным (и глобальным) решением задачи:

$$\int_0^T L(x, \dot{x}) dt \rightarrow \min; \quad x(0) = \alpha, \quad x(T) = \beta.$$

При выполнении неравенств $c < 0$ и $a \leq 0$ допустимая экстремаль $\bar{x}(t)$, $t \in [0, T]$, является локальным (и глобальным) решением задачи:

$$\int_0^T L(x, \dot{x}) dt \rightarrow \max; \quad x(0) = \alpha, \quad x(T) = \beta.$$

В обоих случаях на допустимой экстремали достигается абсолютный минимум (максимум), так как знак приращения функционала не зависит от допустимой вариации $h(t)$.

Пример 2.8. Исследуем задачу (2.1), (2.2), где $T = 1$,

$$L(x, \dot{x}) = 4x^2 - x\dot{x} + \dot{x}^2 + x - \dot{x}, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 2.$$

1. Запишем уравнение Эйлера:

$$\ddot{x} - 4x = \frac{1}{2}, \quad t \in [0, 1].$$

2. Находим общее решение:

$$x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} - \frac{1}{8}.$$

3. Используя краевые условия, находим постоянные c_1 и c_2 :

$$c_1 + c_2 = \frac{1}{8},$$

$$c_1 e^2 + c_2 e^{-2} = \frac{17}{8}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^2 & e^{-2} \end{vmatrix} = e^{-2} - e^2;$$

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{8} & 1 \\ \frac{17}{8} & e^{-2} \end{vmatrix}}{e^{-2} - e^2} = \frac{\frac{1}{8}e^{-2} - \frac{17}{8}}{e^{-2} - e^2};$$

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{8} \\ e^2 & \frac{17}{8} \end{vmatrix}}{e^{-2} - e^2} = \frac{\frac{17}{8} - \frac{1}{8}e^2}{e^{-2} - e^2}.$$

4. Таким образом,

$$\bar{x}(t) = \frac{\frac{1}{8}e^{-2} - \frac{17}{8}}{e^{-2} - e^2} \cdot e^{2t} + \frac{\frac{17}{8} - \frac{1}{8}e^2}{e^{-2} - e^2} \cdot e^{-2t} - \frac{1}{8}.$$

5. В данном случае $a = 4 > 0$, $c = 1 > 0$, поэтому $\bar{x}(t)$, $t \in [0, 1]$ — решение задачи (точка абсолютного минимума).

6. Минимальное значение функционала $I_{\min}$ находится подстановкой функции $\bar{x}(t)$ в подынтегральное выражение и вычислением интеграла.

В данном случае

$$I_{\min} = I(x) \Big|_{x=\bar{x}(t)} = 5,045$$

(с точностью до 0,001).

Укажем для сравнения значения функционала для функций $x_1(t) = 2t$ и $x_2(t) = 2t^2$:

$$I_1 = I(x) \Big|_{x=x_1(t)} = 6,6(3),$$

$$I_2 = I(x) \Big|_{x=x_2(t)} = 5,200$$

(с точностью до 0,001).

7. Из равенства

$$\Delta I = I(\bar{x} + h) - I(\bar{x}) = \int_0^T 4h^2(t) dt + \int_0^T \dot{h}^2(t) dt$$

следует, что значения функционала I не ограничены сверху.

2.6 Решение задачи о максимизации прибыли монополиста

Пример 2.9. Вернёмся к задаче (1.5) о максимизации прибыли монополиста. Пусть

$$D(p, \dot{p}) = -p + 10\dot{p} + 10,$$

$$C(x) = 0, 1x^2 + x, \quad T = 5, \quad p(0) = 5,91, \quad p(T) = 11,82$$

(цена удваивается).

1. Запишем интегрант $L(p, \dot{p})$:

$$L(p, \dot{p}) = D(p, \dot{p})p - C(D(p, \dot{p})) = -1,1p^2 + 12p\dot{p} - 10\dot{p}^2 + 13p - 30\dot{p} - 20.$$

2. Уравнение Эйлера:

$$\ddot{p} - 0,11p = -0,65, \quad t \in [0, 5].$$

3. Общее решение (см. §2.3):

$$p(t) = c_1 e^{0,332t} + c_2 e^{-0,332t} + 5,91.$$

4. $c_1 = 1,166$; $c_2 = -1,166$.

5. Допустимая экстремаль:

$$\bar{p}(t) = 5,91 + 1,166 (e^{0,332t} - e^{-0,332t}).$$

6. $a = -1,1 < 0$; $c = -10 < 0$, поэтому $\bar{p}(t)$ – решение задачи на максимум (точка абсолютного максимума).

7.

$$I_{\max} = I(p) \Big|_{p=\bar{p}(t)} = 418,91$$

(такова максимально возможная прибыль за 5 лет).

Для сравнения:

$$I_1 = I(p) \Big|_{p=p_1(t)=5,91+1,182t} = 409,53$$

(таким образом, при линейном росте цен можно потерять в прибыли 9,38 условных единиц, или 2,24%).

$$I_2 = I(p) \Big|_{p=p_2(t)=5,91+0,0095t^4} = 363,20.$$

Пример 2.10. Изменим в предыдущей задаче только конечный уровень цен:

$$p(5) = 2,955 \quad (\text{т.е. в два раза меньше, чем } p(0) = 5,91).$$

В этом случае решением задачи является динамика цен

$$\bar{p}(t) = 5,91 - 0,58 (e^{0,332t} - e^{-0,332t}),$$

при этом

$$I_{\max} = -7,2.$$

Знак «минус» здесь указывает на убытки, при любой другой динамике цен с их падением вдвое убытки будут больше, например при линейной динамике

$$p_1(t) = 5,91 - 0,59t$$

имеем

$$I_1 = I(p) \Big|_{p=p_1(t)} = -9,8.$$

2.7 Решение задачи о брахистохроне

Решение задачи о брахистохроне с закреплённым правым концом

Решим задачу вариационного исчисления (1.4), рассмотренную в параграфе 1.2:

$$T(y, y') = \int_0^{x_B} \sqrt{\frac{1 + (y'(x))^2}{2gy(x)}} dx \rightarrow \min,$$

$$y(0) = 0, \quad y(x_B) = y_B.$$

Имеем

$$L(y, y') = \sqrt{\frac{1 + (y'(x))^2}{2gy(x)}}.$$

Уравнение Эйлера имеет вид

$$L_y - \frac{d}{dt}L_{y'} = 0.$$

Интегрант не содержит аргумента x в явном виде, поэтому справедливы преобразования уравнения Эйлера:

$$L_y(y, y') - \frac{d}{dx}L_{y'}(y, y') = L_y(y, y') - L_{yy'}(y, y')y'' - L_{y'y'}(y, y')y''.$$

Умножив это выражение на y' , с учётом уравнения Эйлера, получим:

$$L_y y' - L_{yy'} y'' y' - L_{y'y'} y'^2 = \frac{d}{dx}(L - y' L_y) = 0.$$

Значит,

$$L - y' L_y = C_0 = \text{const},$$

следовательно,

$$\frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{2gy}} - y' \frac{y'}{\sqrt{2gy}\sqrt{1 + (y')^2}} = C_0.$$

Преобразуем последнее дифференциальное уравнение к виду

$$y' = \sqrt{\frac{C_1 - y}{y}}, \quad (2.22)$$

где $C_1 = (2gC_0^2)^{-1}$.

Далее,

$$dx = \frac{\sqrt{y} dy}{\sqrt{C_1 - y}},$$

следовательно

$$x = \int_0^y \frac{\sqrt{\xi} d\xi}{\sqrt{C_1 - \xi}}.$$

Для вычисления интеграла проведём замену:

$$\xi = C_1 \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

где θ — новая переменная.

Обозначим

$$\tau = \arccos \left(1 - \frac{2y}{C_1} \right).$$

Заметим, что τ — угол поворота окружности (см. § 1.2).

После замены получаем

$$\begin{aligned} x &= C_1 \int_0^\tau \frac{\sqrt{C_1 \sin^2(\theta/2) C_1 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)} d\theta}{\sqrt{C_1(1 - \sin^2(\theta/2))}} = \\ &= C_1 \int_0^\tau \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta = \frac{C_1}{2} \int_0^\tau (1 - \cos \theta) d\theta = \frac{C_1}{2}(\tau - \sin \tau) + C_2. \end{aligned}$$

Запишем полученное общее решение дифференциального уравнения в параметрическом виде:

$$x(\tau) = \frac{C_1}{2}(\tau - \sin \tau) + C_2,$$

$$y(\tau) = \frac{C_1}{2}(1 - \cos \tau),$$

где τ выступает в роли параметра.

Согласно граничному условию на левом конце отрезка имеет место условие $x = 0$, $y = 0$, следовательно, $C_2 = 0$ (причём эта точка соответствует значению параметра $\tau = 0$). Если положить $C_1 = 2R$, то в качестве экстремали получаем рассмотренное выше семейство циклоид:

$$\begin{cases} x = R\tau - R \sin \tau, \\ y = R - R \cos \tau, \end{cases} \quad \tau \in [0, T].$$

Для того, чтобы выполнялось граничное условие на правом конце $x(T) = x_B$, $y(T) = y_B$, необходимо решить систему трансцендентных уравнений

$$\begin{cases} x_B = RT - R \sin T, \\ y_B = R - R \cos T. \end{cases} \quad (2.23)$$

Сделаем это, предварительно исключив параметр R :

$$\frac{x_B}{y_B} = \frac{T - \sin T}{1 - \cos T}. \quad (2.24)$$

Численное решение уравнения (2.24) можно получить, в частности, используя систему Maple (см. главу 5). Подстановка полученного значения T в (2.23) непосредственно позволяет вычислить R .

Решение задачи о брахистохроне со свободным правым концом

Рассмотрим задачу при условии, что материальная точка должна остановиться на прямой $x = x_B$, но при этом ордината точки остановки не задана. Тогда

$$T = \int_0^{x_B} \sqrt{\frac{1 + (y'(x))^2}{2gy(x)}} dx \rightarrow \min,$$

$$y(0) = 0.$$

Условие трансверсальности (2.7) из предыдущего параграфа приводит к равенству:

$$L_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{2gy}\sqrt{1 + (y')^2}} = 0,$$

следовательно, $y'(x_B) = 0$.

Из (2.22) вытекает, что $y(x_B) = C_1 = 2R$. Таким образом, на правом конце экстремали выполняется условие $\cos T = -1$, а сама циклоида задаётся следующим образом:

$$\begin{cases} x = R\tau - R\sin\tau, \\ y = R - R\cos\tau, \end{cases} \quad \tau \in [0, \pi].$$

Для того, чтобы найти значение параметра R , подставим $\tau = \pi$ в первое уравнение:

$$x_B = R\pi.$$

Более подробную информацию о задачах вариационного исчисления можно найти в [9]

Глава 3

Принцип максимума Л. С. Понтрягина

3.1 Постановка задачи оптимального управления со свободным правым концом траектории

Рассмотрим задачу о минимизации функционала:

$$I(x) = \int_0^T f(t, x, \dot{x}, u) dt \rightarrow \min \quad (3.1)$$

с дополнительными ограничениями:

$$\dot{x} = \varphi(t, x, u), \quad x \in \mathbb{R}, \quad u \in \mathbb{R} \quad (3.2)$$

$$x(0) = x_0 \quad (3.3)$$

$$u(t) \in U \subset \mathbb{R} \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.4)$$

В этой задаче заданы функции f , φ , число T и множество U . Известными (искомыми) являются функции $x(t)$ (фазовая переменная, траектория) и $u(t)$ (управляющая переменная, управление).

Будем предполагать, что функции f и φ дифференцируемы по аргументу x .

Функция f (интегрант) задаёт функционал, подлежащий минимизации, функция φ — правая часть дифференциального уравнения (уравнения динамики) — задаёт связь между управляющей и фазовой переменной.

Функционал I будем рассматривать на множестве пар $(x(t), u(t))$, где вторая компонента $u(t)$ кусочно непрерывна на $[0, T]$, а первая — кусочно непрерывно дифференцируема. Управление $u(t)$ называется **допустимым**, если выполняется условие (3.4). Предполагается, что всякое допустимое управление определяет единственную траекторию $x(t)$ уравнения (3.2) с начальным условием (3.3).

Пара $(x(t), u(t))$, где $u(t)$ — допустимое управление, а $x(t)$ — соответствующая ему траектория, называется **допустимым процессом управления** (ДПУ).

Определение 3.7. Допустимый процесс управления $(\bar{x}, \bar{u})$ называется **оптимальным** (ОПУ), если существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$I(x^*, \bar{u}) \leq I(x, u)$$

для любого допустимого процесса управления $(x(t), u(t))$, удовлетворяющего условию

$$|x(t) - \bar{x}(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.5)$$

Заметим, что в этом определении $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$ доставляет функционалу I локальный минимум, при этом свойство локальности и соответствующая окрестность (3.5) определяется только по отношению к первой компоненте процесса управления.

3.2 Формулировка принципа максимума

Центральным понятием в теории оптимального управления является функция Гамильтона–Понтрягина:

$$H(t, x, u, p) = p\varphi(t, x, u) - f(t, x, \dot{x}, u). \quad (3.6)$$

Принцип максимума. Пусть $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$ — оптимальный процесс в задаче (3.1)–(3.4). Тогда существует такая функция $p(t)$, что выполнены следующие условия:

а) $p(t)$ является решением сопряженной краевой задачи:

$$\begin{cases} \dot{p}(t) = -p(t)\varphi_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) + f_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)), & t \in [0, T], \\ p(T) = 0; \end{cases} \quad (3.7)$$

б) равенство

$$H(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), p(t)) = \max_{u \in U} H(t, \bar{x}(t), u, p(t)) \quad (3.8)$$

выполняется во всех точках промежутка $[0, T]$, являющихся точками непрерывности оптимального управления $\bar{u}$.

Таким образом, **принцип максимума Л.С. Понтрягина** даёт необходимые условия локального минимума в задаче (3.1)–(3.4). Как и другие необходимые условия экстремума, он позволяет исключить из рассмотрения такие пары $(x(t), u(t))$, для которых не выполняются условия а) и б), и выделить пары, которые могут оказаться точками экстремума.

Заметим, что дифференциальное уравнение краевой задачи (3.7) можно записать компактно:

$$\dot{p} = - \left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}, u=\bar{u}}.$$

Эффективность принципа максимума существенно зависит от возможности в явном виде записать решение краевой задачи (3.7) и возможности эффективно решить при каждом фиксированном t задачу на максимум для функции H как функции аргумента u , определённой на заданном множестве U .

Опишем идею доказательства принципа максимума. Из определения решения $(\bar{x}, \bar{u})$ следует, что

$$I(\bar{x}, \bar{u}) \leq I(x_\varepsilon, u_\varepsilon),$$

где $(x_\varepsilon, u_\varepsilon)$ — «близкий» к $(\bar{x}, \bar{u})$ процесс управления, который возникает, если оптимальное управление возмутить с помощью так называемой **элементарной иголки** с шириной $\varepsilon > 0$ и высотой v :

$$u_\varepsilon(t) = \begin{cases} v, & t \in [\tau - \varepsilon, \tau], \\ \bar{u}(t), & t \in [0, \tau - \varepsilon] \cup (\tau, T], \end{cases}$$

где τ — точка непрерывности управления $\bar{u}(t)$ (см. рис. 6).

Так как

$$\frac{I(x_\varepsilon, u_\varepsilon) - I(\bar{x}, \bar{u})}{\varepsilon} \geq 0,$$

то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{I(x_\varepsilon, u_\varepsilon) - I(\bar{x}, \bar{u})}{\varepsilon} \geq 0.$$

Вычисление предела (мы опускаем здесь соответствующие выкладки) приводит к неравенству

$$\forall v \in U: H(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), p(t)) - H(t, \bar{x}(t), v, p(t)) \geq 0,$$

которое эквивалентно условию (3.8).

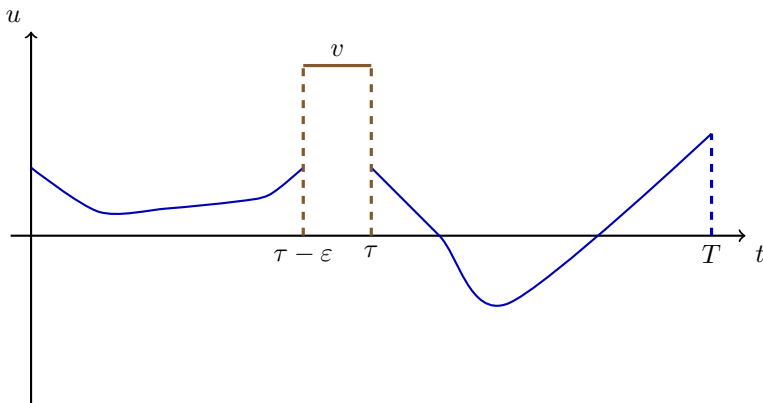


Рис. 6. График функции $u_\varepsilon = u_\varepsilon(t)$

3.3 Применение принципа максимума к задаче о максимизации интегрального потребления

Для иллюстрации принципа максимума сопоставим две постановки: упрощённую задачу с единичным коэффициентом капиталоемкости и без дисконтирования, а также более общую задачу с дисконтированием и произвольным коэффициентом капиталоемкости.

Пример 3.11. Применим принцип максимума к задаче (1.11)–(1.14) о максимизации интегрального потребления.

Для упрощения записи положим $B = 1$ и запишем задачу в виде (3.1)–(3.4).

Обозначим через $u(t)$ норму производственного накопления:

$$d(t) = u(t)x(t), \quad t \in [0, T]$$

(при каждом t величина $u(t)$ — часть чистого конечного продукта, используемая как производственные накопления).

Тогда для потребления $c(t)$ имеем:

$$c(t) = (1 - u(t))x(t), \quad t \in [0, T].$$

Таким образом, задача принимает вид:

$$I(x, u) = \int_0^T (u(t) - 1)x(t) dt \rightarrow \min \quad (3.9)$$

(здесь мы вместо максимизации интегрального потребления минимизируем интегральное потребление, взятое со знаком «минус», что не меняет смысла задачи на экстремум).

$$\dot{x}(t) = u(t)x(t), \quad t \in [0, T], \quad (3.10)$$

$$x(0) = x_0 > 0, \quad (3.11)$$

$$u(t) \in [0, 1] = U. \quad (3.12)$$

Теперь к задаче (3.9)–(3.12) непосредственно применим принцип максимума.

1. Запишем функцию Гамильтона–Понтрягина:

$$\begin{aligned} H(t, x, u, p) &= p \cdot \varphi(t, x, u) - f(t, x, u) = \\ &= pux - (u - 1)x = x(p - 1)u + x. \end{aligned}$$

2. Из условия (3.8) следует, что при фиксированном t значением оптимального управления $\bar{u}(t)$ может быть только значение, принадлежащее множеству $U = [0, 1]$ и доставляющее максимальное значение функции

$$H(t, \bar{x}(t), v, p(t)) = \bar{x}(t)(p(t) - 1)v + \bar{x}(t)$$

как функции аргумента v . В данном случае эта функция является линейной. Она возрастает и принимает максимальное значение на правом конце промежутка $[0, 1]$ (т. е. при $v = 1$), если

$$\bar{x}(t)(p(t) - 1) > 0, \quad (3.13)$$

и убывает, принимая максимальное значение на левом конце промежутка $[0, 1]$ (т. е. при $v = 0$), если

$$\bar{x}(t)(p(t) - 1) < 0. \quad (3.14)$$

Из уравнения (3.10) и условия (3.11) видно, что $\bar{x}(t) > 0$, поэтому условия (3.13), (3.14) можно записать в виде неравенств

$$p(t) - 1 > 0, \quad (3.15)$$

и

$$p(t) - 1 < 0. \quad (3.16)$$

Таким образом, вывод о структуре оптимального управления $\bar{u}(t)$ можно сделать уже сейчас, а именно

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } p(t) > 1, \\ 0, & \text{если } p(t) < 1. \end{cases}$$

где $p(t)$, $t \in [0, T]$ — решение сопряжённой краевой задачи (3.7).

3. Запишем сопряжённую краевую задачу:

$$\dot{p}(t) = -\bar{u}(t)p(t) + (\bar{u}(t) - 1), \quad t \in [0, T], \quad (3.17)$$

$$p(T) = 0.$$

4. Решение этой задачи можно записать (см. §2.3) в явном виде:

$$p(t) = -e^{\int_t^T \bar{u}(\tau) d\tau} \cdot \int_t^T e^{-\int_s^T \bar{u}(\tau) d\tau} \cdot (\bar{u}(s) - 1) ds. \quad (3.18)$$

5. Из краевого условия $p(T) = 0$ следует, что в самой точке $t = T$ и (в силу непрерывности функции p) в некоторой её окрестности будет выполняться условие (3.16): $p(t) < 1$. В таком случае, как мы выяснили ранее, $\bar{u}(t) = 0$ и так будет при движении от точки $t = T$ влево до тех пор, пока не начнёт выполняться неравенство (3.15): $p(t) > 1$. Это произойдёт только после того, как при движении влево по оси t найдётся первая такая точка t^* , в которой $p(t^*) = 1$. Найдём эту точку — так называемую точку переключения (точку разрыва оптимального управления).

6. Так как на промежутке $(t^*, T]$ имеем $p(t) < 1$ и, следовательно, $\bar{u}(t) = 0$, то уравнение $p(t^*) = 1$ принимает вид:

$$-e^0 \cdot \int_{t^*}^T e^0 (0 - 1) ds = 1,$$

откуда получаем

$$t^* = T - 1.$$

Можно показать, что $p(t) > 1$ для $t < t^*$, и, таким образом, t^* — единственная точка переключения оптимального управления $\bar{u}(t)$.

7. Для построения процесса управления $(\bar{x}, \bar{u})$, удовлетворяющего принципу максимума, придётся рассмотреть два случая: (а) $T \leq 1$ и (б) $T > 1$.

В случае (а) на всём промежутке $[0, T]$ имеем $\bar{u}(t) = 0$ (точки переключения нет), в силу уравнения (3.10) $\bar{x}(t) \equiv x_0$,

$$I(\bar{x}, \bar{u}) = x_0 \cdot T.$$

Смысл управления $\bar{u}(t)$ в этом случае состоит в постоянном потреблении всего конечного продукта и нулевых производственных накоплениях. На коротком промежутке времени такое управление представляется естественным.

В случае (б) имеем

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, T-1), \\ 0, & t \in [T-1, T]. \end{cases}$$

$$\bar{x}(t) = \begin{cases} x_0 \cdot e^t, & t \in [0, T-1), \\ x_0 \cdot e^{T-1}, & t \in [T-1, T]. \end{cases}$$

$$I(\bar{x}, \bar{u}) = x_0 \cdot e^{T-1}.$$

До момента переключения (т.е. на промежутке $[0, T-1)$) потребление отсутствует, норма производственного накопления — максимальная. После переключения весь чистый конечный продукт потребляется, производственные накопления — нулевые. Структура решения и здесь вполне логична: на достаточно большом промежутке времени сначала следует максимально развивать производство и только потом начинать потребление.

На рис. 7, 8 представлены графики функций $\bar{u}$ и $\bar{x}$ в случае $T = 3$ и $x_0 = 1$.

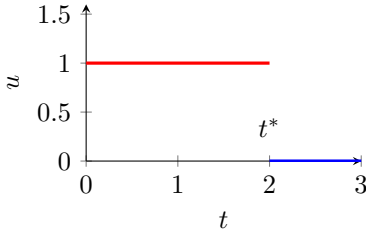


Рис. 7. График функции $\bar{u}$

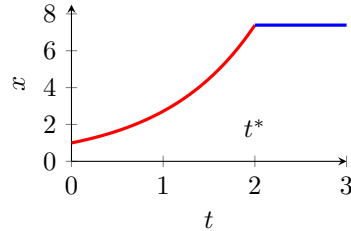


Рис. 8. График функции $\bar{x}$

8. Найденный процесс управления $(\bar{x}, \bar{u})$ удовлетворяет необходимым условиям оптимальности. Утверждение, что $(\bar{x}, \bar{u})$ — оптимальный процесс управления, требует доказательства, например в виде проверки достаточных условий оптимальности (см. гл. 4).

Пример 3.12. В этом примере мы исследуем влияние на момент переключения t^* двух факторов — коэффициента капиталоемкости и коэффициента дисконтирования потребления. Рассмотрим модификацию задачи (3.9)–(3.12):

$$I(x, u) = \int_0^T e^{-\lambda t} (u(t) - 1)x(t) dt \rightarrow \min, \quad (3.19)$$

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{B}u(t)x(t), \quad t \in [0, T], \quad (3.20)$$

$$x(0) = x_0, \quad (3.21)$$

$$u(t) \in [0, 1] = U. \quad (3.22)$$

Здесь B — коэффициент капиталоемкости, λ — коэффициент дисконтирования потребления (множитель $e^{-\lambda t}$ характеризует уменьшение ценности потребляемого продукта с течением времени). Введение параметров B и λ приводит только к изменению соотношений, полученных в пунктах 1–7 примера 3.11, общий ход рассуждений остаётся прежним.

1. Функция Гамильтона–Понтрягина:

$$\begin{aligned} H(t, x, u, p) &= p \frac{1}{B}ux - e^{-\lambda t}(u - 1)x = \\ &= x \left(\frac{1}{B}p - e^{-\lambda t} \right) u + e^{-\lambda t}x. \end{aligned}$$

2. Структура оптимального управления. Условия (3.15) и (3.16) здесь принимают вид

$$\frac{1}{B}p - e^{-\lambda t} > 0, \quad (3.23)$$

$$\frac{1}{B}p - e^{-\lambda t} < 0. \quad (3.24)$$

Таким образом,

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } p(t) > Be^{-\lambda t}, \\ 0, & \text{если } p(t) < Be^{-\lambda t}. \end{cases}$$

где $p(t)$, $t \in [0, T]$ — решение сопряжённой краевой задачи (3.7).

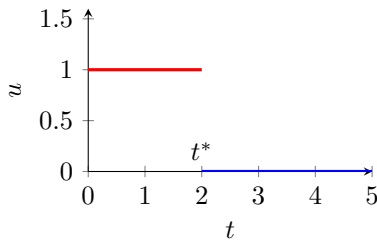
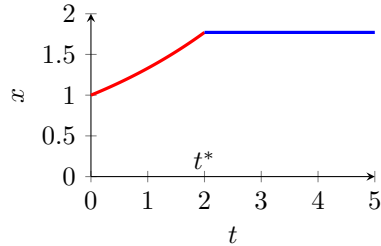
3. Сопряжённая краевая задача:

$$\dot{p}(t) = -\frac{1}{B}\bar{u}(t)p(t) + e^{-\lambda t}(\bar{u}(t) - 1), \quad (3.25)$$

$$p(T) = 0.$$

4. Решение сопряжённой краевой задачи (см. §2.3):

$$p(t) = -e^{\frac{1}{B} \int_t^T \bar{u}(\tau) d\tau} \cdot \int_t^T e^{-\frac{1}{B} \int_t^s \bar{u}(\tau) d\tau} \cdot e^{-\lambda s} (\bar{u}(s) - 1) ds. \quad (3.26)$$

Рис. 9. График функции $\bar{u}(t)$ Рис. 10. График функции $\bar{x}(t)$

5. Уравнение для момента переключения:

$$p(t^*) = Be^{-\lambda t^*}, \quad t^* \in [0, T].$$

6. Нахождение момента переключения:

$$-e^{-\frac{1}{B} \cdot 0} \int_{t^*}^T e^{-\frac{1}{B} \cdot 0} \cdot e^{-\lambda s} (0 - 1) ds = Be^{-\lambda t^*},$$

или

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\lambda} \int_{t^*}^T e^{-\lambda s} d(-\lambda s) &= Be^{-\lambda t^*}, \\ -\frac{1}{\lambda} (e^{-\lambda T} - e^{-\lambda t^*}) &= Be^{-\lambda t^*}, \\ e^{-\lambda t^*} - e^{-\lambda T} &= \lambda Be^{-\lambda t^*}, \\ e^{-\lambda t^*} \cdot (1 - \lambda B) &= e^{-\lambda T}, \\ -\lambda t^* + \ln(1 - \lambda B) &= -\lambda T, \end{aligned}$$

можно считать, что $\lambda < \frac{1}{B}$, откуда

$$t^* = T + \frac{1}{\lambda} \ln(1 - \lambda B). \quad (3.27)$$

Заметим, что при $\lambda \rightarrow 0$ правая часть равенства (3.27) стремится к $T - B$, таким образом, при $\lambda = 0$ и $B = 1$ получаем для t^* , как и в примере 3.11, значение $t^* = T - 1$.

На рис. 9 и 10 представлены графики $\bar{u} = \bar{u}(t)$ и $\bar{x} = \bar{x}(t)$ для случая $T = 5$; $x_0 = 1$; $B = 3,5$ и $\lambda = 0,01$.

При этом

$$t^* = T + \frac{1}{\lambda} \ln(1 - \lambda B) \approx 5 - 3,56 = 1,44.$$

3.4 Принцип максимума для линейных задач

Задача оптимального управления для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с линейным интегральным функционалом и линейными ограничениями сводится к семейству задач линейного программирования.

Рассмотрим задачу

$$I(x, u) = \int_0^T (\langle a(t), x(t) \rangle + \langle b(t), u(t) \rangle) dt \rightarrow \min, \quad (3.28)$$

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t), \quad t \in [0, T], \quad (3.29)$$

$$x(0) = x_0, \quad (3.30)$$

$$G \cdot u(t) \leq \gamma, \quad t \in [0, T]. \quad (3.31)$$

Здесь

- $x = \text{col}(x_1, \dots, x_n)$;
- $a = \text{col}(a_1, \dots, a_n)$;
- $b = \text{col}(b_1, \dots, b_r)$;
- G — постоянная $(m \times r)$ -матрица;
- $A(t), B(t)$ — $(n \times n)$ -матрицы, элементы которых кусочно-непрерывны на $[0, T]$;
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение:

$$\langle a(t), x(t) \rangle = a^T(t) \cdot x(t) = \sum_{i=1}^n a_i(t) \cdot x_i(t),$$

- $\cdot^T$ — символ транспонирования.

Предполагается, что множество решений линейной системы неравенств

$$G \cdot v \leq \gamma$$

непусто и ограничено, обозначим это множество V .

Функция Гамильтона–Понтрягина для задачи (3.28)–(3.31) имеет вид

$$\begin{aligned}
 H(t, x, u, p) &= \langle p, A(t)x + B(t)u + f(t) \rangle - \langle a(t), x \rangle - \langle b(t), u \rangle = \\
 &= \langle p, A(t)x \rangle + \langle p, B(t)u \rangle + \langle p, f(t) \rangle - \langle a(t), x \rangle - \langle b(t), u \rangle = \\
 &= \langle p, B(t)u \rangle - \langle b(t), u \rangle + \langle p, A(t)x \rangle - \langle a(t), x \rangle + \langle p, f(t) \rangle = \\
 &= \langle B^\top(t)p, u \rangle - \langle b(t), u \rangle + \langle A^\top(t)p, x \rangle - \langle a(t), x \rangle + \langle p, f(t) \rangle = \\
 &= \langle B^\top(t)p - b(t), u \rangle + \langle A^\top(t)p - a(t), x \rangle + \langle p, f(t) \rangle.
 \end{aligned}$$

Запишем сопряжённую краевую задачу принципа максимума

$$\dot{p}(t) = -H_x, \quad p(T) = 0$$

(см. (3.7)). В рассматриваемом случае эта задача имеет вид

$$\begin{cases} \dot{p}(t) = -A^\top(t)p(t) + a(t), & t \in [0, T], \\ p(T) = 0. \end{cases} \quad (3.32)$$

Обозначим решение этой задачи через $p_0 = p_0(t)$. Тогда, в силу принципа максимума, управление $u_0 = u_0(t)$, удовлетворяющее принципу максимума, является решением следующего семейства задач линейного программирования:

$$z(t) = \langle B^\top(t)p_0(t) - b(t), u \rangle \rightarrow \max, \quad Gu \leq \gamma. \quad (3.33)$$

или

$$\begin{aligned}
 u_0(t) &= \arg \max_{u \in V} \langle B^\top(t)p_0(t) - b(t), u \rangle = \\
 &= \arg \max_{u \in V} \left\{ (B^\top(t)p_0(t) - b(t))^\top \cdot u \right\} = \\
 &= \arg \max_{u \in V} \left\{ (p_0^\top(t) \cdot B(t) - b^\top(t)) \cdot u \right\}.
 \end{aligned}$$

Имея в виду, что множество V — многогранник в пространстве $\mathbb{R}^r$, можно сказать, что каждый момент переключения в рассматриваемой задаче — это момент времени, когда происходит переключение с одной угловой точки многогранника V на другую при изменении направления градиента целевой функции z , т.е. вектора $(B^\top(t)p_0(t) - b(t))$ при непрерывном изменении времени $t \in [0, T]$. Приближённое решение задачи (3.28)–(3.31) можно получить, заменяя отрезок $[0, T]$ дискретным набором значений $\{0, \Delta, 2\Delta, \dots, T\}$, задавая достаточно малое значение $\Delta = T/N$. При этом погрешность нахождения моментов переключения не превосходит Δ .

Глава 4

Достаточные условия ОПТИМАЛЬНОСТИ

4.1 Постановка задачи. Основная теорема

Рассмотрим задачу оптимального управления

$$I(x, u) = \int_0^T f(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \min, \quad (4.1)$$

$$\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), u(t)), \quad t \in [0, T], \quad (4.2)$$

$$x(0) = x_0, \quad (4.3)$$

$$(x(t), u(t)) \in V^t, \quad t \in [0, T]. \quad (4.4)$$

В этой задаче условие (4.4) представляет собой обобщение условия (3.4) из предыдущего параграфа, множество $V^t \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$ задано и при каждом t задаёт ограничение на положение точки $(x(t), u(t))$. Таким образом, ограничение (4.4) — смешанное ограничение, связывающее фазовую переменную x и управляющую переменную u . Ограничение $u(t) \in U$, $t \in [0, T]$, очевидно, можно записать в виде (4.4), если положить

$$V^t = V = \mathbb{R}^n \times U.$$

Для формулировки достаточных условий оптимальности введём вспомогательные функции $W = W(t, x)$ и $\mathcal{R} = \mathcal{R}(t, x, u)$. Функция $\mathcal{R}$ строится по функции W , при этом роль функции $\mathcal{R}$ близка к

той роли, которую играет в принципе максимума функция Гамильтона–Понтрягина H :

$$\mathcal{R}(t, x, u) = \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial x} \cdot \varphi(t, x, u) - f(t, x, u). \quad (4.5)$$

Заметим, что сумма первых двух слагаемых в правой части этого выражения представляет собой производную от функции W в силу системы (4.2):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(W(t, x(t)) \right) &= \left. \frac{\partial W}{\partial t}(t, x) \right|_{x=x(t)} + \left. \frac{\partial W}{\partial x}(t, x) \cdot \frac{dx}{dt} \right|_{x=x(t)} = \\ &= \left. \frac{\partial W}{\partial t}(t, x) \right|_{x=x(t)} + \left. \frac{\partial W}{\partial x}(t, x) \right|_{x=x(t)} \cdot \varphi(t, x(t), u(t)), \end{aligned}$$

где $x(t)$ — траектория системы (4.2).

Определение 4.8. Допустимым процессом управления в задаче (4.1)–(4.4) называется пара

$$(x, u) \in KC^1[0, T] \times KC[0, T],$$

удовлетворяющая условиям (4.2)–(4.4).

Теорема 4.1 (Основная теорема о достаточных условиях оптимальности). Пусть функция $W = W(t, x)$ и допустимый процесс управления $(\bar{x}, \bar{u})$ таковы, что

- а) при каждом t , принадлежащим отрезку $[0, T]$, функция $\mathcal{R}$ достигает максимума по всем процессам управления $(x, u) \in V^t$ на процессе управления $(\bar{x}, \bar{u})$, то есть

$$\mathcal{R}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = \max_{(x, u) \in V^t} \mathcal{R}(t, x, u), \quad t \in [0, T],$$

- б) на правом конце области определения процессов управления функция W достигает минимума по всем $y \in V_x^T$ в точке $x(T)$, то есть

$$W(T, \bar{x}(T)) = \min_{y \in V_x^T} W(T, y),$$

где V_x^T — проекция множества V^T на ось x .

Тогда $(\bar{x}, \bar{u})$ — решение задачи (4.1)–(4.4).

Доказательство. Введем вспомогательный функционал Λ :

$$\Lambda(x, u) = - \int_0^T \mathcal{R}(t, x(t), u(t)) dt + W(T, x(T)) - W(0, x(0)).$$

Этот функционал обладает следующими свойствами:

1. Пара $(\bar{x}, \bar{u})$, очевидно в силу условий а) и б), доставляет минимум этому функционалу на множестве всех пар (x, u) , удовлетворяющих условию (4.4).
2. На множестве допустимых процессов управления исходный функционал I и функционал Λ совпадают.

Действительно,

$$\begin{aligned} \Lambda(x, u) &= - \int_0^T \frac{d}{dt} W(t, x(t)) dt + \\ &+ \int_0^T f(t, x(t), u(t)) dt + W(T, x(T)) - W(0, x_0) = \\ &= -W(t, x(t)) \Big|_0^T + W(T, x(T)) - W(0, x_0) + \int_0^T f(t, x(t), u(t)) dt = \\ &= \int_0^T f(t, x(t), u(t)) dt = I(x, u). \end{aligned}$$

Для завершения доказательства остаётся заметить, что множество допустимых процессов управления является подмножеством процессов управления, удовлетворяющих условию (4.4).

Заметим, что имеющуюся свободу в выборе функции W можно использовать так, чтобы соответствующая функция $\mathcal{R}$ допускала эффективное нахождение точек экстремума. $\square$

4.2 Примеры

Пример 4.13. Рассмотрим задачу

$$I(x, u) = \int_0^5 (2x^2 u - x) dt \rightarrow \min, \quad (4.6)$$

$$\dot{x} = xu, \quad t \in [0, 5], \quad (4.7)$$

$$x(0) = 2, \quad (4.8)$$

$$x(5) = 4, \quad u(t) \in U = [0, 1], \quad t \in [0, 5]. \quad (4.9)$$

Запишем условия (4.9) в виде (4.4). Для этого определим множество V^t следующим образом:

$$V^t = \begin{cases} \mathbb{R} \times [0, 1], & \text{если } t \in [0, 5), \\ \{4\} \times [0, 1], & \text{если } t = 5. \end{cases}$$

1. Запишем общий вид функции $\mathcal{R}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(t, x, u) &= \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial x} \cdot xu - (2x^2u - x) = \\ &= \frac{\partial W}{\partial t} + xu \left(\frac{\partial W}{\partial x} - 2x \right) + x. \end{aligned} \quad (4.10)$$

2. Выберем функцию $W = W(t, x)$ так, чтобы $\mathcal{R} = \mathcal{R}(t, x, u)$ не зависела от u (обратилось в нуль выражение в круглых скобках):

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 2x.$$

Такой $W(t, x)$ является

$$W(t, x) = x^2.$$

При этом

$$\mathcal{R}(t, x, u) = x \quad (4.11)$$

и для выполнения условия а) теоремы из всех возможных значений x следует выбирать наибольшее.

3. Дадим описание множества всех допустимых значений $x(t)$. При каждом $t \in [0, 5]$ точка $(t, x(t))$ должна лежать на допустимой траектории (на графике решения уравнения (4.7)). С учетом условий (4.8) и (4.9) нас интересуют только траектории, выходящие из точки $(0, 2)$ и заканчивающиеся в точке $(5, 4)$ при всех допустимых управлениях $u = u(t)$.

Все траектории, выходящие из точки $(0, 2)$ при управлениях $u(t) \in [0, 1]$, образуют так называемую интегральную воронку, т.е. располагаются между «верхней» траекторией, соответствующей управлению $u(t) = 1$, и «нижней» — соответствующей управлению $u(t) = 0$.

Для нахождения границ этой интегральной воронки следует решить две задачи:

$$\dot{x}(t) = x(t), \quad t \in [0, 5], \quad x(0) = 2 \quad (4.12)$$

и

$$\dot{x}(t) = 0, \quad t \in [0, 5], \quad x(0) = 2. \quad (4.13)$$

Их решения: $x(t) = 2e^t$ и $x(t) = 2$, соответственно.

Таким образом,

$$2 \leq x(t) \leq 2e^t, \quad t \in [0, 5]. \quad (4.14)$$

Все траектории, заканчивающиеся в точке $(5, 4)$, также образуют интегральную воронку. Её границы являются решениями задач

$$\dot{x}(t) = x(t), \quad t \in [0, 5], \quad x(5) = 4 \quad (4.15)$$

и

$$\dot{x}(t) = 0, \quad t \in [0, 5], \quad x(5) = 4. \quad (4.16)$$

Решая эти задачи (см. §2.3), получаем

$$4e^{t-5} \leq x(t) \leq 4, \quad t \in [0, 5].$$

Так как допустимые траектории удовлетворяют условиям (4.8) и (4.9) одновременно, они заполняют множество, представляющее собой пересечение двух построенных интегральных воронок. Обозначим это множество через $\mathcal{V}_x^t$. На рис. 11 оно расположено внутри криволинейного прямоугольника.

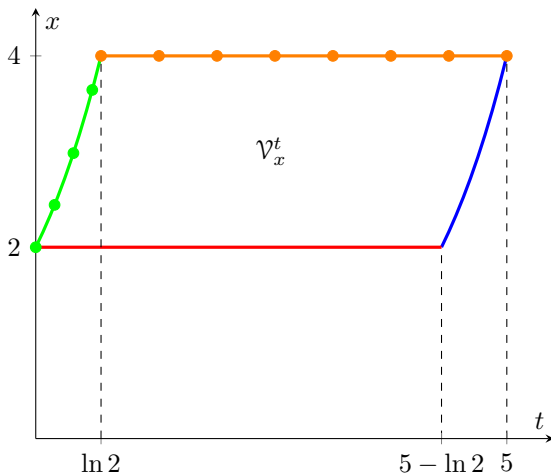


Рис. 11. Интегральные воронки для примера 4.13

4. Учитывая, что функционал I рассматривается только на допустимых процессах управления, множество V^t можно заменить более узким множеством

$$\bar{V}^t = V_x^t \times [0, 1] = \{(x, u) : x \in V_x^t, u \in [0, 1]\}, \quad t \in [0, 5].$$

5. Так как функция $\mathcal{R}(t, x, u) = x$ (см. (4.11)) не зависит от u , то

$$\max_{(x, u) \in \bar{V}^t} \mathcal{R}(t, x, u) = \max_{x \in V_x^t} \mathcal{R}(t, x, u).$$

В силу монотонности функции $\mathcal{R}$ по x условию а) теоремы о достаточных условиях оптимальности удовлетворяет функция $\bar{x}(t)$, у которой при каждом t значение $\bar{x}(t)$ является наибольшим из всех допустимых значений.

Другими словами, при каждом фиксированном t на рис. 11 надо выбирать точку множества V_x^t с максимально большой координатой x . Таким образом,

$$\bar{x}(t) = \begin{cases} 2e^t, & t \in [0, \ln 2), \\ 4, & t \in [\ln 2, 5]. \end{cases}$$

На рис. 11 эта траектория отмечена символом $\bullet$.

6. Условие б) теоремы выполняется автоматически, так как множество V_x^T состоит из одной точки: $V_x^T = \{4\}$.

7. По оптимальной траектории $\bar{x}(t)$ оптимальное управление $\bar{u}(t)$ можно построить, используя уравнение (4.7), связывающее x и u . Из него следует, что

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \ln 2), \\ 0, & t \in [\ln 2, 5]. \end{cases}$$

8. Найдём $I_{\min}$:

$$\begin{aligned} I_{\min} &= I(\bar{x}, \bar{u}) = \int_0^{\ln 2} (2(4e^{2t}) - 2e^t) dt + \int_{\ln 2}^5 (-4) dt \\ &= 4 \int_0^{\ln 2} e^{2t} d(2t) - 2 \int_0^{\ln 2} e^t dt - 4(5 - \ln 2) \\ &= 4e^{2t} \Big|_0^{\ln 2} - 2e^t \Big|_0^{\ln 2} - 4(5 - \ln 2) = 4 \ln 2 - 10. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Для сравнения приведём значение I_1 , соответствующее допустимой траектории $x_1(t) = 2 + \frac{2}{5}t$ и допустимому управлению

$$u_1(t) = \frac{\frac{2}{5}}{2 + \frac{2}{5}t} :$$

$$I_1 = I(x_1, u_1) = -4.$$

Пример 4.14. Рассмотрим задачу

$$I(x, u) = \int_0^4 (x^2 u + 2(x^2 - 8x)) dt \rightarrow \min, \quad (4.18)$$

$$\dot{x} = 2x(1 - u), \quad (4.19)$$

$$x(0) = 1, \quad (4.20)$$

$$x(4) = 5, \quad u \in [0, 1]. \quad (4.21)$$

1. Запишем общий вид функции $\mathcal{R}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(t, x, u) &= \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial x} \cdot 2x(1 - u) - x^2 u - 2(x^2 - 8x) = \\ &= \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial x} 2x - \frac{\partial W}{\partial x} 2xu - x^2 u - 2(x^2 - 8x) = \\ &= \frac{\partial W}{\partial t} - xu \left(2 \frac{\partial W}{\partial x} + x \right) - 2(x^2 - 8x) + \frac{\partial W}{\partial x} 2x. \end{aligned}$$

2. Выберем $W(t, x)$ так, чтобы $\mathcal{R}(t, x, u)$ не зависела от u . Для этого в качестве $W(t, x)$ возьмём решение уравнения

$$2 \frac{\partial W}{\partial x} + x = 0 :$$

$$W(t, x) = -\frac{x^2}{4}.$$

При этом окончательный вид функции $\mathcal{R}$ определяется равенством

$$\mathcal{R}(t, x, u) = -2x^2 + 16x - \frac{1}{2}x \cdot 2x = -3x^2 + 16x \triangleq r(x).$$

Эта функция принимает максимальное значение, если x является решением уравнения

$$\frac{d}{dx} r(x) = 0 : \quad -6x + 16 = 0, \quad \text{т.е. при } x = 2\frac{2}{3}.$$

Это значение доставляет функции $r(x)$ абсолютный максимум, поэтому из всех допустимых значений x в соответствии с условием а) теоремы

о достаточных условиях оптимальности следует (при каждом t) выбрать значение, ближайшее к

$$x = 2\frac{2}{3}.$$

3. Построим, как и в примере 4.13, множество всех допустимых траекторий — пересечение двух интегральных воронок. Их границы находятся как решения краевых задач, формулы которых опущены, так как совпадают по форме с решением задач (4.12)–(4.16).

Эти задачи имеют решения:

$$x(t) \equiv 1, \quad x(t) = e^{2t}, \quad x(t) \equiv 5, \quad x(t) = 5e^{2(t-4)}.$$

Множество $\mathcal{V}_x^t$ для данного случая показано в рис. 12. На этом же рисунке штрихами показана горизонтальная прямая значений x , доставляющих максимальное значение функции $\mathcal{R}$:

$$\operatorname{argmax}_x \mathcal{R} = \operatorname{argmax}_r = 2\frac{2}{3}.$$

4. Далее

$$\bar{V}^t = \mathcal{V}_x^t \times [0, 1] = \{(x, u) : x \in V_x^t, u \in [0, 1]\}, \quad t \in [0, 4].$$

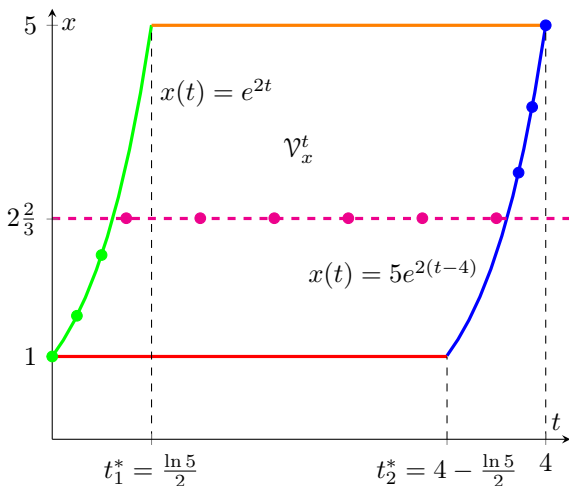


Рис. 12. Интегральные воронки для примера 4.14

5. Построение оптимальной траектории (траектории, удовлетворяющей условию а) теоремы): фиксируем $t = t^*$, находим сечение $\mathcal{V}_x^{t^*}$, из всех точек x этого множества выбираем точку, ближайшую к $x = 2\frac{2}{3}$.

Реализуя этот алгоритм, получаем

$$\bar{x}(t) = \begin{cases} e^{2t}, & t \in [0, \frac{1}{2} \ln 2\frac{2}{3}], \\ 2 \cdot \frac{2}{3}, & t \in (\frac{1}{2} \ln 2\frac{2}{3}, \frac{1}{2} (8 + \ln(\frac{1}{5} \cdot 2\frac{2}{3})))], \\ 5e^{2(t-4)}, & t \in (\frac{1}{2} (8 + \ln(\frac{1}{5} \cdot 2\frac{2}{3})), 4]. \end{cases}$$

6. Условие б) теоремы выполнено, так как $V_x^4 = \{5\}$.

7. Оптимальное управление $\bar{u}(t)$ находится по $\bar{x}(t)$ с использованием уравнения (4.19):

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \frac{1}{2} \ln 2\frac{2}{3}], \\ 1, & t \in (\frac{1}{2} \ln 2\frac{2}{3}, \frac{1}{2} (8 + \ln(\frac{1}{5} \cdot 2\frac{2}{3})))], \\ 0, & t \in (\frac{1}{2} (8 + \ln(\frac{1}{5} \cdot 2\frac{2}{3})), 4]. \end{cases}$$

8. Найдём $I_{\min}$:

$$\begin{aligned} I_{\min} &= I(\bar{x}, \bar{u}) = \int_0^4 [\bar{x}^2(t) \bar{u}(t) - 2(\bar{x}^2(t) - 8\bar{x}(t))] dt = \\ &= - \int_0^{t_1^*} 2(e^{4t} - 8e^{2t}) dt + \int_{t_1^*}^{t_2^*} [e^{4t} - 2(e^{4t} - 8e^{2t})] dt - \\ &\quad - \int_{t_2^*}^4 [2(25e^{4(t-4)} - 8 \cdot 5e^{2(t-4)})] dt = -619182. \end{aligned}$$

Пример 4.15. Воспользуемся достаточными условиями оптимальности для доказательства того, что найденный с помощью принципа максимума для задачи (1.13)–(1.16) о максимизации интегрального потребления процесс $(\bar{x}, \bar{u})$ (см. рис. 7, 8) является решением этой задачи (при условии $T > 1$).

1. Зададим функцию $W(t, x)$ равенством

$$W(t, x) = (T - t)x.$$

Отметим сразу, что

$$W(T, x) \equiv 0,$$

и поэтому условие б) теоремы о достаточных условиях оптимальности выполняется автоматически. Остаётся проверить условие а).

2. По выбранной $W(t, x)$ построим функцию $\mathcal{R}$:

$$\mathcal{R}(t, x, u) = (T - t) xu - xu = (T - 1 - t) xu.$$

3. Для каждого $t \in [0, T - 1)$ функция $(T - 1 - t) xu$ монотонно возрастает по x и по u , поэтому пара

$$(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) = (x_0 \cdot e^t, 1),$$

где каждая компонента принимает максимальное из всех допустимых значений, удовлетворяет условию а).

4. Для каждого $t \in (T - 1, T]$ функция $(T - 1 - t) xu$ монотонно убывает по x и по u , поэтому пара

$$(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) \equiv (x_0 \cdot e^{T-1}, 0),$$

где каждая компонента принимает минимальное из всех допустимых значений, удовлетворяет условию а).

5. Из пунктов 3 и 4 следует, что процесс $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$, $t \in [0, T]$,

$$\bar{x}(t) = \begin{cases} x_0 e^t, & t \in [0, T - 1], \\ x_0 e^{T-1}, & t \in (T - 1, T], \end{cases}$$

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, T - 1], \\ 0, & t \in (T - 1, T] \end{cases}$$

является оптимальным.

4.3 Задачи, линейные по управлению

Рассмотрим частный случай задачи оптимального управления (4.1)–(4.4):

$$I(x, u) = \int_0^T (p(t, x) + p_0(t, x) \cdot u) dt \rightarrow \min, \quad (4.22)$$

$$\dot{x}(t) = q(t, x) + q_0(t, x) \cdot u, \quad t \in [0, T], \quad (4.23)$$

$$x(0) = x_0, \quad (4.24)$$

$$(x(t), u(t)) \in V^t, \quad t \in [0, T], \quad (4.25)$$

в котором функции f и φ имеют специальный вид зависимости от управления — линейный.

Заметим сразу, что в случае $q_0(t, x) = 0$ задача теряет смысл, так как уравнение динамики не содержит управляющего воздействия, поэтому в дальнейшем предполагаем, что $q_0(t, x) \neq 0$. В таком случае можно дать описание первых шагов решения задачи, не прибегая к конкретизации параметров задачи. Действительно, функция $\mathcal{R}$ в данном случае принимает вид

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(t, x, u) &= \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial x} (q(t, x) + q_0(t, x) \cdot u) - p(t, x) - p_0(t, x) \cdot u = \\ &= \frac{\partial W}{\partial t} + u \left(\frac{\partial W}{\partial x} q_0(t, x) - p_0(t, x) \right) + \frac{\partial W}{\partial x} q(t, x) - p(t, x).\end{aligned}$$

Как обычно, для упрощения функции $\mathcal{R}$ выбираем функцию W , приравнявая к нулю выражение в круглых скобках:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{p_0(t, x)}{q_0(t, x)}.$$

Частным решением этого уравнения является функция

$$W(t, x) = \int_{x_0}^x \frac{p_0(t, \xi)}{q_0(t, \xi)} d\xi.$$

Отсюда для $\mathcal{R}(t, x, u)$ получаем окончательно

$$\mathcal{R}(t, x, u) = r(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_{x_0}^x \frac{p_0(t, \xi)}{q_0(t, \xi)} d\xi \right\} + \frac{p_0(t, x)}{q_0(t, x)} q(t, x) - p(t, x).$$

Исследование функции $r(t, x)$ на максимум (только по x) можно проводить стандартным образом. В частности, стационарные точки находятся из уравнения

$$\frac{\partial r(t, x)}{\partial x} = 0, \quad t \in [0, T].$$

При известных условиях (теорема о неявной функции) это уравнение определяет $x(t)$ как неявную функцию. Учёт ограничений (4.24), (4.25) производится как обычно (см. п. 4.2).

4.4 Модификации основной теоремы

Рассмотрим вариант задачи оптимального управления (4.1)–(4.4):

$$J(x, u) = \int_0^T f(t, x(t), u(t)) dt + F(x(T)) \rightarrow \min, \quad (4.26)$$

$$\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), u(t)), \quad t \in [0, T], \quad (4.27)$$

$$x(0) = x_0, \quad (4.28)$$

$$(x(t), u(t)) \in V^t, \quad t \in [0, T]. \quad (4.29)$$

Здесь

- $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — заданная непрерывная функция,
- $F(x(T))$ — так называемое *терминальное слагаемое*, входящее в состав целевого функционала $J(x, u)$.

Введём дополнительно функцию

$$\Phi(x) = W(T, x) + F(x). \quad (4.30)$$

Теорема 4.2. Пусть функция $W(t, x)$ и допустимый процесс управления $(\bar{x}, \bar{u})$ таковы, что

$$a) \quad \mathcal{R}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = \max_{(x, u) \in V^t} \mathcal{R}(t, x, u), \quad t \in [0, T],$$

$$б) \quad \Phi(\bar{x}(T)) = \min_{x \in V_x^T} \Phi(x),$$

где V_x^T — проекция множества V^T на ось x . Тогда $(\bar{x}, \bar{u})$ — решение задачи (4.26)–(4.29).

Доказательство данной теоремы проводится по схеме доказательства основной теоремы.

Теорема 4.2 будет использована ниже при решении задачи синтеза оптимального управления.

В случае, когда экстремальные значения функций $\mathcal{R}$ и Φ не достигаются, решение задачи (4.26)–(4.29) можно искать в классе минимизирующих последовательностей. Напомним соответствующее определение.

Определение 4.9. Последовательность $\{x_k, u_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, допустимых процессов управления называется *минимизирующей* для задачи (4.26)–(4.29), если

$$J(x_k, u_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \inf_{\substack{\text{по всем} \\ \text{допустимым} \\ (x, u)}} J(x, u). \quad (4.31)$$

Достаточные условия разрешимости задачи (4.26)–(4.29) в классе минимизирующих последовательностей даёт следующая теорема.

Теорема 4.3. Пусть функция $W(t, x)$ и последовательность допустимых процессов управления $\{x_k, u_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, таковы, что

$$\begin{aligned} \text{а) } \mathcal{R}(t, x_k(t), u_k(t)) &\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \sup_{(x, u) \in V^T} \mathcal{R}(t, x, u), \quad t \in [0, T], \\ \text{б) } \Phi(x_k(T)) &\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \inf_{x \in V_x^T} \Phi(x), \end{aligned}$$

где V_x^T — проекция множества V^T на ось x . Тогда $\{x_k, u_k\}$ — минимизирующая последовательность для задачи (4.26)–(4.29).

Замечание. Условие а) этой теоремы подразумевает сходимость функциональной последовательности

$$\{r_k(t)\}, \quad r_k(t) = \mathcal{R}(t, x_k(t), u_k(t))$$

и поэтому нуждается в пояснении.

Требование равномерной на отрезке $[0, T]$ сходимости:

$$\max_{t \in [0, T]} |r_k(t) - r(t)| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0, \quad r(t) = \sup_{(x, u) \in V^T} \mathcal{R}(t, x, u),$$

часто оказывается слишком жёстким. Более естественным является требование сходимости в среднем:

$$\int_0^T |r_k(t) - r(t)| dt \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0.$$

4.5 Задачи с дискретным временем

В этом разделе мы приведём аналоги теорем о достаточных условиях оптимальности для задач, в которых время t меняется дискретно, принимая последовательно значения $0, 1, \dots, T$. В таком случае аналогом задачи (4.1)–(4.4) п. 4 является задача

$$I(x, u) = \sum_{t=0}^{T-1} f(t, x(t), u(t)) + F(x(T)) \rightarrow \min \quad (4.32)$$

$$x(t+1) = \varphi(t, x(t), u(t)), \quad t = 0, 1, \dots, T-1, \quad (4.33)$$

$$x(0) = x_0, \quad (4.34)$$

$$(x(t), u(t)) \in V^t, \quad t = 0, 1, \dots, T-1, \quad x(T) \in V_x^T. \quad (4.35)$$

Заметим, что начальная задача (4.33), (4.34) однозначно разрешима при любой заданной функции $\varphi(t, x, u)$ и любом заданном управлении

$$u : \{0, 1, \dots, T-1\} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Это решение может быть построено за конечное число шагов:

$$x(0) = x_0,$$

$$x(1) = \varphi(0, x_0, u(0)),$$

$$x(2) = \varphi(1, \varphi(0, x_0, u(0)), u(1)), \dots,$$

$$x(T) = G(x_0, u(0), \dots, u(T-1)).$$

Для формулировки аналога теоремы 4.1 о достаточных условиях оптимальности введём функции $\mathcal{R}(t, x, u)$ и $\Phi(x)$ равенствами:

$$\mathcal{R}(t, x, u) = W(t+1, \varphi(t, x, u)) - W(t, x) - f(t, x, u),$$

$$\Phi(x) = W(T, x) + F(x).$$

Теорема 4.4. Пусть функция $W(t, x)$ и допустимый процесс управления $(\bar{x}, \bar{u})$ таковы, что

$$а) \quad \mathcal{R}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = \max_{(x, u) \in V^t} \mathcal{R}(t, x, u), \quad t = 0, \dots, T-1,$$

$$б) \quad \Phi(\bar{x}(T)) = \min_{x \in V_x^T} \Phi(x),$$

где V_x^T — проекция множества V^T на ось x . Тогда $(\bar{x}, \bar{u})$ — решение задачи (4.32)–(4.35).

Доказательство. Введём вспомогательный функционал

$$\Lambda(x, u) = - \sum_{t=0}^{T-1} \mathcal{R}(t, x(t), u(t)) + \Phi(x(T)) - W(0, x(0)).$$

Для этого функционала условия а) и б) с очевидностью гарантируют его минимизацию. Остаётся заметить, что на множестве допустимых процессов управления функционалы $I(x, u)$ и $\Lambda(x, u)$ совпадают:

$$\Lambda(x, u) = - \sum_{t=0}^{T-1} \mathcal{R}(t, x(t), u(t)) + \Phi(x(T)) - W(0, x(0)) =$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{t=0}^{T-1} \{W(t+1, \Phi(t, x(t), u(t))) - W(t, x(t)) - f(t, x(t), u(t))\} + \\
&\quad + \Phi(x(T)) - W(0, x(0)) = \\
&= - \sum_{t=0}^{T-1} \{W(t+1, x(t+1)) - W(t, x(t)) - f(t, x(t), u(t))\} \\
&\quad + \Phi(x(T)) - W(0, x(0)) = \\
&= - \sum_{t=0}^{T-1} \{W(t+1, x(t+1)) - W(t, x(t))\} + \Phi(x(T)) \\
&= -W(T, x(T)) + W(0, x(0)) + \Phi(x(T)) = \\
&= F(x(T)) + \sum_{t=0}^{T-1} f(t, x(t), u(t)) = I(x, u).
\end{aligned}$$

□

В заключение этого раздела сформулируем условия разрешимости задачи (4.32)–(4.35) в классе минимизирующих последовательностей.

Теорема 4.5. Пусть функция $W(t, x)$ и последовательность допустимых процессов управления $\{x_k, u_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, таковы, что

$$\begin{aligned}
a) \quad & \mathcal{R}(t, x_k(t), u_k(t)) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \sup_{(x, u) \in V^t} \mathcal{R}(t, x, u), \quad t = 0, 1, \dots, T-1, \\
б) \quad & \Phi(x_k(T)) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \inf_{x \in V_x^T} \Phi(x),
\end{aligned}$$

где V_x^T — проекция множества V^T на ось x . Тогда $\{x_k, u_k\}$ — минимизирующая последовательность для задачи (4.32)–(4.35).

4.6 Задача оптимального управления для нелинейной однопродуктовой модели экономики

Рассмотрим однопродуктовую (единственная отрасль производит единственный продукт) модель, в которой динамика фондовооружённости (объёма производственных фондов, отнесённого к числу работающих в отрасли) определяется уравнением

$$\dot{k}(t) = b u(t) x(t) - \mu k(t), \quad t \in [0, T]. \quad (4.36)$$

Здесь

- k — фондовооружённость,
- x — производительность труда,
- u — норма производственного накопления,
- b — заданный коэффициент (определяется по коэффициенту прямых затрат и коэффициенту капиталоемкости),
- μ — заданный коэффициент амортизации (выбытия) фондов.

Будем считать k фазовой переменной, а u и x — управляющими переменными (управлениями). Начальное состояние функции k считается заданным

$$k(0) = k_0. \quad (4.37)$$

Цель управления — добиться заданного состояния фондовооружённости в конце промежутка времени $[0, T]$:

$$k(T) = k_T. \quad (4.38)$$

При этом управления на всём промежутке времени должны удовлетворять следующим ограничениям:

$$u_{\min} \leq u(t) \leq u_{\max}, \quad t \in [0, T], \quad (4.39)$$

$$0 \leq x(t) \leq A \cdot k^\alpha(t) \cdot e^{nt}, \quad t \in [0, T], \quad (4.40)$$

где

- $u_{\min}$ — минимально допустимая норма производственного накопления,
- $u_{\max}$ — максимально допустимая норма производственного накопления,
- A — заданный коэффициент,
- α — заданный коэффициент эластичности по фондам ($0 < \alpha < 1$),
- n — темп научно-технического прогресса.

Кроме того, фондовооружённость не должна опускаться ниже заданного уровня

$$k(t) \geq k_{\min}. \quad (4.41)$$

И, наконец, управлять следует таким образом, чтобы максимизировать среднечеловеческое интегральное дисконтированное потребление:

$$I = \int_0^T b(1 - u(t))x(t)e^{-\rho t} dt \rightarrow \max. \quad (4.42)$$

Здесь ρ — коэффициент дисконтирования, $(1 - u)$ — норма потребления.

Задача (4.36)–(4.42) — задача оптимального управления, для решения которой можно использовать достаточные условия оптимальности (см. гл. §4.1, теорема 4.1).

Так как конечное состояние фазовой переменной задано в условии (4.38), условие б) выполнено (V_x^T состоит из одной точки k_T).

Займёмся условием а).

1. Запишем функцию $\mathcal{R} = \mathcal{R}(t, k, u, x)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(t, k, u, x) &= \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial k} [bux - \mu k] + b(1 - u)xe^{-\rho t} \\ &= \frac{\partial W}{\partial t} + bux \frac{\partial W}{\partial k} - \mu k \frac{\partial W}{\partial k} + bxe^{-\rho t} - buxe^{-\rho t} \\ &= \frac{\partial W}{\partial t} + bux \left[\frac{\partial W}{\partial k} - e^{-\rho t} \right] - \mu k \frac{\partial W}{\partial k} + bxe^{-\rho t}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

2. Выберем $W = W(t, k)$ так, чтобы функция $\mathcal{R}$ не зависела от произведения ux . Для этого можно взять

$$W(t, k) = k \cdot e^{-\rho t}. \quad (4.44)$$

(при этом выражение в квадратных скобках в (4.43) равно нулю).

3. Запишем окончательный вид функции $\mathcal{R}$:

$$\mathcal{R}(t, k, u, x) = -\rho ke^{-\rho t} - \mu ke^{-\rho t} + bxe^{-\rho t}. \quad (4.45)$$

4. Сформулируем достаточное условие оптимальности применительно к задаче (4.36)–(4.42).

Пусть $(\bar{k}, \bar{u}, \bar{x})$ — допустимый процесс управления, и при каждом $t \in [0, T]$ выполняется равенство

$$\mathcal{R}(t, \bar{k}(t), \bar{u}(t), \bar{x}(t)) = \max_{\text{по всем допустимым } (k, u, x)} \mathcal{R}(t, k, u, x), \quad (4.46)$$

тогда $(\bar{k}, \bar{u}, \bar{x})$ – решение задачи (4.36)–(4.42).

5. Сначала найдём при каждом фиксированном t абсолютный максимум функции $\mathcal{R}$. Эта функция монотонно возрастает по x , поэтому, подставив вместо x его верхнюю границу — максимальную возможную производительность труда $Ak^\alpha e^{nt}$ (см. (4.40)), найдём при каждом k абсолютный максимум функции

$$r(t, k) = \mathcal{R}(t, k, u, x) \Big|_{x=Ak^\alpha e^{nt}} = Abe^{(n-\rho)t} k^\alpha - (\mu + \rho)e^{-\rho t} k. \quad (4.47)$$

Обозначая

$$C(t) = Abe^{(n-\rho)t}, \quad D(t) = (\mu + \rho)e^{-\rho t},$$

запишем $r(t, k)$ в виде

$$r(t, k) = C(t) k^\alpha - D(t) k. \quad (4.48)$$

Вид функции $r(t, k)$ при фиксированном t показан на рис. 13.

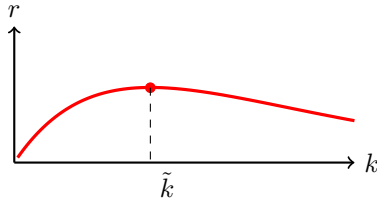


Рис. 13. Вид функции $r(t, \cdot)$

Единственную точку максимума $\tilde{k}$ найдём, приравняв производную $\frac{\partial r}{\partial k}$ к нулю и решив уравнение

$$\frac{\partial r(t, k)}{\partial k} = \alpha C(t) k^{\alpha-1} - D(t) = 0. \quad (4.49)$$

Таким образом, получаем

$$\tilde{k}(t) = \left[\frac{\alpha C(t)}{D(t)} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} = \left[\frac{\alpha Ab}{\mu + \rho} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot e^{\frac{n}{1-\alpha} t}, \quad t \in [0, T]. \quad (4.50)$$

Равенство (4.50) определяет (по построению) траекторию, которая является оптимальной для задачи (4.36), (4.40), (4.42), т.е. для задачи без ограничений на фазовую переменную.

Траекторию $k = \tilde{k}(t)$ называют *магистралью*. Заметим, что магистраль (4.50) соответствует такая динамика фондовооружённости, при которой она растёт с постоянным темпом, пропорциональным темпу научно-технического прогресса.

6. Учтём ограничения на фазовую переменную. Вид функции $r(t, k)$ позволяет сформулировать простое *правило её максимизации* с учётом ограничений (4.37), (4.38), (4.39), (4.41): *при каждом $t \in [0, T]$ из всех возможных (допустимых) значений аргумента $k(t)$ следует выбирать значение, ближайшее к $\tilde{k}(t)$.*

Множество допустимых значений $k(t)$ строится так же, как в примерах 1, 2 гл. 4: находится пересечение интегральных воронок и полуплоскости $k \geq k_{\min}$. Для построения границ интегральных воронок следует решить четыре следующие задачи:

а) задача для верхней границы начальной интегральной воронки (в уравнение (4.36) подставляется $Ak^\alpha e^{nt}$ вместо x и $u = u_{\max}$ вместо u и используется начальное условие (4.37)):

$$\dot{k}(t) = bu_{\max} \cdot Ak^\alpha(t) \cdot e^{nt} - \mu k(t), \quad k(0) = k_0; \quad (4.51)$$

б) задача для нижней границы начальной интегральной воронки

$$\dot{k}(t) = bu_{\min} \cdot Ak^\alpha(t) \cdot e^{nt} - \mu k(t), \quad k(0) = k_0; \quad (4.52)$$

в) задача для верхней границы конечной интегральной воронки

$$\dot{k}(t) = bu_{\min} \cdot Ak^\alpha(t) \cdot e^{nt} - \mu k(t), \quad k(T) = k_T; \quad (4.53)$$

г) задача для нижней границы конечной интегральной воронки

$$\dot{k}(t) = bu_{\max} \cdot Ak^\alpha(t)e^{nt} - \mu k(t), \quad k(T) = k_T. \quad (4.54)$$

Все эти задачи решаются в явном виде, так как можно записать общее решение дифференциального уравнения Бернулли (см. §2.3) и, используя начальное или конечное условие, найти произвольную постоянную.

Далее оптимальная траектория $k = \bar{k}(t)$ составляется из участков магистрали, границ интегральных воронок и, возможно, прямой $k(t) \equiv k_{\min}$ в соответствии с правилом, сформулированным в начале этого пункта. Конкретный вид оптимальной траектории зависит от взаимного расположения упомянутых графиков.

Рассмотрим один из типичных случаев. На рис. 14 показаны:

- (1) магистраль $k = \bar{k}$,
- (2) верхняя граница начальной интегральной воронки ($u = u_{\max}$),
- (3) нижняя граница начальной интегральной воронки ($u = u_{\min}$),
- (4) верхняя граница конечной интегральной воронки ($u = u_{\min}$),
- (5) нижняя граница конечной интегральной воронки ($u = u_{\max}$),
- (6) минимально допустимый уровень фондовооружённости $k = k_{\min}$.

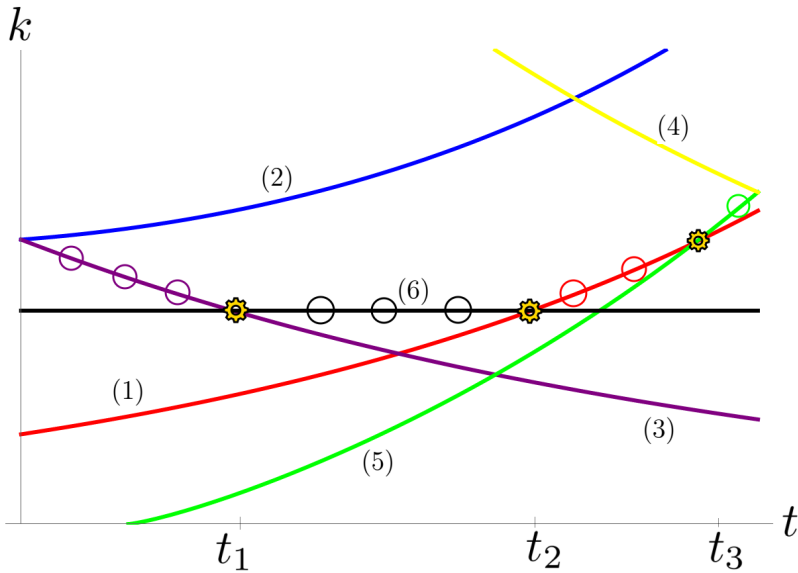


Рис. 14. Пример интегральных воронок и магистралей

В данном случае оптимальная траектория определяется следующим образом.

А) На промежутке $[0, t_1]$, где t_1 — первая точка переключения (момент пересечения кривой (3) с прямой (6)), движение происходит из начального положения k_0 по нижней границе начальной интегральной воронки (3), так как для каждого фиксированного t из $[0, t_1]$ точки кривой ближе к точке максимума (1), чем две другие допустимые точки.

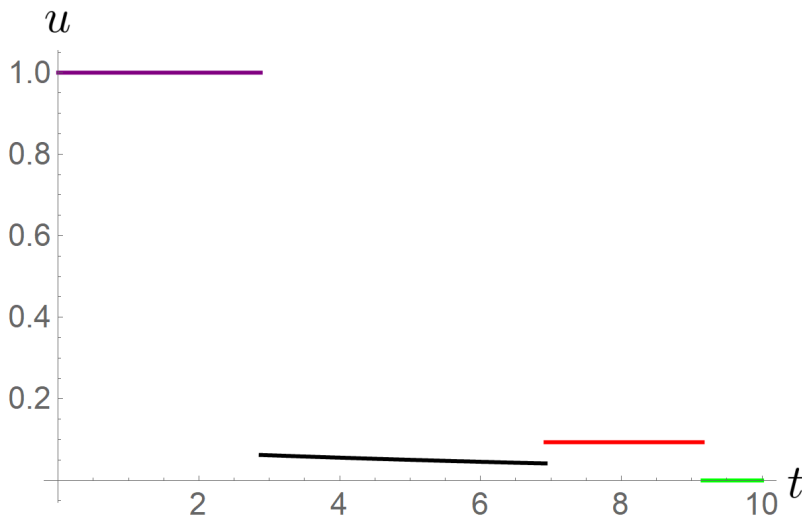


Рис. 15. Пример оптимального управления

Б) На промежутке $[t_1, t_2]$ (от первой точки переключения до второй точки переключения) движение происходит с минимально допустимым уровнем фондовооружённости $k_{\min}$ до пересечения с *магистралью* (1).

В) На промежутке $[t_2, t_3]$ магистраль (1) попадает в множество допустимых значений фондовооружённости, поэтому здесь движение происходит *по магистрали* до её пересечения с нижней границей (5) конечной интегральной воронки.

Г) На промежутке $[t_3, T]$ эта часть оптимальной траектории совпадает с нижней границей (5) конечной интегральной воронки.

7. Построим оптимальное управление.

После построения оптимальной траектории $\bar{k}(t)$ оптимальное управление находится из уравнения динамики (4.36)

$$\dot{k}(t) = bu(t) \cdot Ak^\alpha(t)e^{nt} - \mu k(t), \quad t \in [0, T] \quad (4.55)$$

после подстановки в него $\bar{k}(t)$:

$$\bar{u}(t) = \frac{\dot{\bar{k}}(t) + \mu \bar{k}(t)}{Ab \bar{k}^\alpha(t) e^{nt}}, \quad t \in [0, T]. \quad (4.56)$$

На участках движения по границам интегральных воронок оптимальное управление $\bar{u}(t)$ принимает одно из граничных значений — $u_{\max}$ и $u_{\min}$, поэтому формула (4.56) используется практически только для нахождения $\bar{u}(t)$ на промежутке движения по магистрали или по прямой $k = k_{\min}$.

Оптимальное управление, соответствующее рис. 14, показано на рис. 15. Точки переключения изображены жёлтыми шестерёнками.

8. Найдём оптимальное значение функционала.

Максимальное значение интегрального среднедушевого дисконтированного потребления находится подстановкой под знак интеграла в (4.42):

1) оптимального управления $u(t) = \bar{u}(t)$, 2) максимальной производительности труда, соответствующей оптимальной фондовооружённости:

$$x(t) = Ak^{\alpha}(t)e^{nt} = A\bar{k}^{\alpha}(t)e^{nt}.$$

После этого находится $I_{\max}$. При этом интеграл по всему промежутку $[0, T]$ разбивается на сумму интегралов по частичным промежуткам

$$[0, t_1], \quad [t_1, t_2], \quad [t_2, t_3], \quad [t_3, T],$$

на каждом из которых используются соответствующие формулы для $\bar{u}(t)$ и $\bar{k}(t)$.

4.7 Синтез оптимального управления. Метод Гамильтона–Беллмана

Все рассмотренные ранее задачи оптимального управления решались в классе так называемых *программных* управлений, т. е. управлений $u(t)$ — функций одного переменного t , времени. Построенное программное управление решает задачу, если система не подвержена внешним воздействиям и нет необходимости корректировать построенную программу. В случае когда требуется учитывать реальное состояние системы и строить управление с учётом этого состояния, приходится решать задачу в классе *позиционных* управлений $u(t, x)$ — функций двух переменных, времени t и фазовой переменной x . В таком случае говорят о синтезе управления — построении такой функции $u(t, x)$, которая при подстановке текущего состояния $x(t)$:

$$u(t, x)|_{x=x(t)} = u(t, x(t)) = v(t)$$

порождает текущее управляющее воздействие $v = v(t)$.

Рассмотрим задачу оптимального управления

$$I(x, u) = \int_0^T f(t, x(t), u(t)) dt + F(x(T)) \rightarrow \min, \quad (4.57)$$

$$\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), u(t)), \quad t \in [0, T], \quad (4.58)$$

$$x(0) = x_0, \quad (4.59)$$

$$(x(t), u(t)) \in V^t, \quad t \in [0, T], \quad (4.60)$$

рассмотренную ранее (см. (4.26)–(4.29)), как задачу синтеза оптимального управления.

Воспользуемся основной теоремой 4.2 (вариант основной теоремой о достаточных условиях оптимальности с терминальным слагаемым в минимизируемом функционале). В силу этой теоремы следует максимизировать функцию

$$\mathcal{R}(t, x, u) = \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial x} \cdot \varphi(t, x, u) - f(t, x, u) \quad (4.61)$$

при каждом t как функцию (x, u) и минимизировать функцию

$$\Phi(x) = W(T, x) + F(x). \quad (4.62)$$

Начнём с частичного решения первой задачи и будем искать управление, максимизирующее функцию $\mathcal{R} = \mathcal{R}(t, x, u)$ по u при фиксированных t и x :

$$\max_{u \in V^{tx}} \mathcal{R}(t, x, u).$$

Здесь множество V^{tx} представляет собой сечение множества V^t при фиксированном x :

$$V^{tx} = \{u : (u, x) \in V^t\}.$$

Напомним, что в конструкцию функции $\mathcal{R}$ входит функция W , от которой зависит результат упомянутой максимизации. Функцию W можно попытаться выбрать так, чтобы функция

$$\max_{u \in V^{tx}} \mathcal{R}(t, x, u) = c(t), \quad t \in [0, T] \quad (4.63)$$

не зависела от x .

Если, кроме того, $W(T, x)$ такова, что

$$\Phi(x) = W(T, x) + F(x) = d, \quad (4.64)$$

т.е. оказывается константой, то при каждом x функция

$$u(t, x) = \arg \max_{v \in V^{tx}} \mathcal{R}(t, x, v) \quad (4.65)$$

удовлетворяет условиям основной теоремы. Поэтому для решения задачи синтеза оптимального управления остаётся сформулировать соотношения для нахождения функции $W(t, x)$, удовлетворяющей условиям (4.63) и (4.64).

Эти соотношения представляют собой *краевую задачу Гамильтона-Беллмана*:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \max_{u \in V^{tx}} \{ \varphi(t, x, u) \frac{\partial W}{\partial x} - f(t, x, u) \} = c(t), \quad t \in [0, T], \quad (4.66)$$

$$W(T, x) = d - F(x). \quad (4.67)$$

Если $W(t, x)$ — решение этой краевой задачи, то функция $\bar{u}(t, x) = u(t, x)$, определённая равенством (4.65), решает задачу синтеза оптимального управления.

Для приближённого построения функции $W(t, x)$ можно воспользоваться следующей схемой. Для определённости положим $c(t) = 0, d = 0$. Заменим в уравнении (4.66) производную $\frac{\partial W(t, x)}{\partial t}$ разностным отношением

$$\frac{W(t, x) - W(t - \Delta, x)}{\Delta}$$

и, задавая достаточно малое значение $\Delta = T/N$, запишем возникающее таким образом уравнение в виде

$$\begin{aligned} W(t - \Delta, x) &= W(t, x) + \\ &+ \Delta \cdot \max_{u \in V^{tx}} \left\{ \frac{\partial W(t, x)}{\partial x} \cdot \varphi(t, x, u) - f(t, x, u) \right\} \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Будем искать решение этого уравнения $W(t, x)$, удовлетворяющее краевому условию

$$W(T, x) = -F(x). \quad (4.69)$$

Для $t = T$ имеем

$$W(T - \Delta, x) = -F(x) + \Delta \cdot \max_{u \in V^{Tx}} \left\{ \frac{\partial W(T, x)}{\partial x} \cdot \varphi(T, x, u) - f(T, x, u) \right\}.$$

Далее находим

$$\begin{aligned} W(T - 2\Delta, x) &= W(T - \Delta, x) + \\ &+ \Delta \cdot \max_{u \in V^{T-\Delta, x}} \left\{ \frac{\partial W(T - \Delta, x)}{\partial x} \cdot \varphi(T - \Delta, x, u) - f(T - \Delta, x, u) \right\}. \end{aligned}$$

Продолжая этот процесс, на последнем шаге построим сечение $W(0, x)$.

Отметим, что для систем с дискретным временем задача синтеза оптимального управления решается за конечное число шагов с точным построением функции $W = W(t, x)$. Действительно, вернёмся к постановке задачи для дискретного времени:

$$I(x, u) = \sum_{t=0}^{T-1} f(t, x(t), u(t)) + F(x(T)) \rightarrow \min, \quad (4.70)$$

$$x(t+1) = \varphi(t, x(t), u(t)), \quad t = 0, 1, \dots, T-1, \quad (4.71)$$

$$x(0) = x_0, \quad (4.72)$$

$$(x(t), u(t)) \in V^t, \quad t = 0, 1, \dots, T-1, \quad x(T) \in V_x^T. \quad (4.73)$$

Снова воспользуемся основной теоремой о достаточных условиях оптимальности (вариант с терминальным слагаемым в минимизируемом функционале), которая формулируется с использованием функций $\mathcal{R}(t, x, u)$ и $\Phi(x)$, определённых равенствами

$$\mathcal{R}(t, x, u) = W(t+1, \varphi(t, x, u)) - W(t, x) - f(t, x, u),$$

$$\Phi(x) = W(T, x) + F(x).$$

Как и в случае непрерывного времени, сначала максимизируем функцию

$$\mathcal{R}(t, x, u)$$

по u при фиксированных t и x :

$$\max_{u \in V^{tx}} \mathcal{R}(t, x, u).$$

Здесь множество V^{tx} представляет собой сечение множества V^t при фиксированном x :

$$V^{tx} = \{u : (u, x) \in V^t\}.$$

Напомним, что в конструкцию функции $\mathcal{R}(t, x, u)$ входит функция $W(t, x)$, от которой зависит результат упомянутой максимизации. Функцию $W(t, x)$ можно выбрать так, чтобы функция

$$\max_{u \in V^{tx}} \mathcal{R}(t, x, u)$$

не зависела от x :

$$\max_{u \in V^{tx}} \mathcal{R}(t, x, u) = c(t), \quad t = 0, 1, \dots, T-1. \quad (4.74)$$

Если, кроме того, $W(T, x)$ такова, что

$$\Phi(x) = W(T, x) + F(x)$$

оказывается константой:

$$\Phi(x) = W(T, x) + F(x) = d, \quad (4.75)$$

то при каждом x функция

$$u(t, x) = \arg \max_{v \in V^{tx}} \mathcal{R}(t, x, v) \quad (4.76)$$

удовлетворяет условиям основной теоремы, и поэтому для решения задачи синтеза оптимального управления остаётся сформулировать соотношения для нахождения функции $W(t, x)$, удовлетворяющей условиям (4.74) и (4.75). Эти соотношения представляют собой краевую задачу Гамильтона–Беллмана:

$$\max_{u \in V^{tx}} \{W(t+1, \varphi(t, x, u)) - W(t, x) - f(t, x, u)\} = c(t), \quad t = 0, \dots, T-1, \quad (4.77)$$

$$W(T, x) = d - F(x). \quad (4.78)$$

Уравнение (4.77) допускает запись в рекуррентном виде:

$$W(t, x) = \max_{u \in V^{tx}} \{W(t+1, \varphi(t, x, u)) - f(t, x, u)\} - c(t), \quad t = 0, \dots, T-1, \quad (4.79)$$

позволяющем последовательно найти все сечения функции

$$W(t, x), \quad t = T, T-1, \dots, 0,$$

начиная с $W(T, x)$, определяемого равенством (4.78).

Если $W(t, x)$ — решение краевой задачи (4.77), (4.78), то функция

$$\bar{u}(t, x) = u(t, x),$$

определённая равенством (4.76), решает задачу синтеза оптимального управления.

Проведём в качестве примера задачи (4.70)–(4.73) задачу, возникающую при оптимизации распределения капитальных вложений между предприятиями (см. [2], с. 250).

Пусть A — заданный фонд капитальных вложений, который надо распределить с максимальной эффективностью между n предприятиями, для каждого из которых задана эффективность реализации капитальных вложений $\psi_i(y)$, $i = 1, \dots, n$. Предполагается, что функции ψ_i —

неотрицательные и неубывающие. Математическая модель этой задачи имеет вид

$$\sum_{i=1}^n \psi_i(y_i) \rightarrow \max, \quad \sum_{i=1}^n y_i = A, \quad y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.80)$$

Сведём задачу (4.80) к задаче (4.70)–(4.73). Для этого введём обозначения $T = n$, $t = i - 1$, $u(t) = y_i$, $t = 1, \dots, T$, $f(t, u(t)) = -\psi_i(y_i)$.

В новых обозначениях задача (4.80) принимает вид задачи оптимального управления с дискретным временем:

$$I(x, u) = \sum_{t=0}^{T-1} f(t, u(t)) \rightarrow \min, \quad (4.81)$$

$$x(t+1) = x(t) + u(t), \quad t = 0, 1, \dots, T-1, \quad (4.82)$$

$$x(0) = 0, \quad (4.83)$$

$$x(T) = A, \quad u(t) \geq 0, \quad t = 0, \dots, T-1. \quad (4.84)$$

Избавимся от терминального условия (4.84), добавив терминальное слагаемое

$$F(x) = M \cdot (x - A)^2,$$

где $M > 0$ — произвольно большое число, в минимизируемый функционал:

$$J(x, u) = \sum_{t=0}^{T-1} f(t, u(t)) + M \cdot (x(T) - A)^2. \quad (4.85)$$

Таким образом, задача (4.80) сведена к задаче

$$\begin{cases} J(x, u) \rightarrow \min, \\ x(t+1) = x(t) + u(t), \quad t = 0, \dots, T-1, \\ x(0) = 0, \\ u(t) \geq 0, \quad t = 0, \dots, T-1. \end{cases} \quad (4.86)$$

Глава 5

Компьютерный инструментарий

В большинстве рассмотренных задач целесообразно использовать компьютерный инструментарий. Ниже представлены краткие сведения об одном из них — системе Maple.

Краткие сведения о системе *MAPLE*

В настоящее время система компьютерной алгебры *Maple*, как и другие системы аналитических вычислений и математические пакеты, доступна каждому пользователю и получила широкое распространение. В настоящем издании *Maple* выступает как основной инструментарий для решения рассмотренных выше.

Приведённые сведения в основном соответствуют руководству [8] и представляют собой краткие выдержки из него, достаточные для первого знакомства с предлагаемыми алгоритмами и их реализацией. Для более глубокого изучения системы и её возможностей можно воспользоваться литературой, указанной в [8].

Основные объекты, выражения, команды

Простейшими объектами в *Maple* являются числа, константы и имена. Операции с рациональными числами производятся точно. Следует иметь в виду, что запись рационального числа с точкой в конце числа приводит к тому, что *Maple* производит операции с участием этого числа как операции с вещественными числами, ограничиваясь по умолчанию десятью значащими цифрами.

В системе представлены все основные константы: `Pi` — число π , `I` — мнимая единица, `infinity` — бесконечность, `gamma` — константа Эйлера. Эти имена зарезервированы в системе и не могут быть переопределены и использованы в другом смысле.

Каждая создаваемая переменная в *Maple* имеет обозначение-имя, которое начинается с буквы и может содержать кроме букв цифры и знак подчёркивания, например: `Xt`, `Y2s_1`, `Cts`, `f1`. Нельзя использовать в качестве имён служебные слова (приводятся в алфавитном порядке): `and`, `do`, `done`, `elif`, `else`, `end`, `fi`, `for`, `from`, `if`, `in`, `intersect`, `local`, `minus`, `mod`, `not`, `od`, `option`, `or`, `proc`, `quit`, `read`, `save`, `stop`, `then`, `to`, `union`, `while`.

Для записи выражений служат переменные и знаки операций: `+`, `-`, `*` (умножение), `/` (деление), `^` (возведение в степень), `!` (факториал). Операции выполняются слева направо, для изменения порядка используются круглые скобки.

Выражения и переменные являются параметрами команд *Maple*, стандартная команда содержит имя и указанные в скобках параметры, например,

```
C := multiply(A,B);
```

— команда умножения матриц A и B в указанном порядке и присвоения имени C результату этого умножения. Отметим, что знак `;` — необходимый атрибут выполняемой команды.

Часть команд вызываются автоматически, другие требуют загрузки определённого пакета, например, запись `with(plots);` вызывает (загружает) пакет построения графиков, `with(linalg);` — вызывает пакет линейной алгебры.

Правильно введённая команда выполняется и в следующих строках появляется результат. Если в этих строках появляется копия команды или отсутствует запись, то можно судить: *Maple* отказывается выполнять команду из-за неполноты информации, либо не может её выполнить. Это является поводом внимательно проанализировать команду, чтобы понять причину отказа. Приведён простой пример:

```
plot(sin(t), x = 0..Pi);
```

эта команда не построит график, так как диапазон $[0, \pi]$ указан как функция аргумента x , а диапазон изменения указан для другого аргумента t .

Синтаксис, стандартные функции, справка

Запись каждой команды завершается разделителем: точкой с запятой (`;`) или двоеточием (`:`). В первом случае в следующей за командой стро-

ке появляется результат выполнения команды или сообщение об ошибке. Во втором случае команда выполняется системой без сообщения о результате.

При записи выражений используются круглые, квадратные и фигурные скобки. Круглые задают порядок выполнения операций, играют роль обрамления при записи аргументов функций и параметров при записи команд. Квадратные скобки используются при работе с индексными величинами — элементами матриц. В частности, если A — матрица, то $A[2, 3]$ — её элемент, находящийся на пересечении второй строки и третьего столбца. Фигурные скобки применяются при формировании множеств, например, для объединения уравнений в систему.

При записи предложений используются знаки равенства ($=$) и присвоения ($:=$). Их различие можно проиллюстрировать простым примером:

```
> S := solve({x + 2*y = 6, x = y}, {x, y});
```

$$S := \{x = 2, y = 2\}$$

В этом примере решается система двух линейных уравнений относительно двух неизвестных. В случае множества решений выдаются все найденные решения. Компоненты решения можно увидеть отдельно: обращение к команде $S[1]$ выдаёт результат $x = 2$, аналогично: результатом $S[2]$ является $y = 2$.

Обращение к стандартной функции является элементарной операцией, если указать имя нужной функции. Все элементарные функции имеют естественные имена, поэтому не будем приводить здесь их список. Отметим только, что справку обо всех имеющихся в Maple функциях можно получить с помощью команды `?inifunction;`.

Удобная для пользователя система справок доступна непосредственно из командной строки с использованием знака вопроса и имени, например, по команде `?piecewise;` выдаётся справка о задании кусочно-постоянной функции.

Операции с формулами, преобразование типов данных, операции оценивания

Каждая команда работает только с определёнными типами данных. Использование неправильного типа приводит к ошибке. Изменить тип объекта можно с помощью команды `convert`, например, команда

```
convert(p, list);
```

преобразует полином p в список его отдельных проиндексированных слагаемых, которые можно вызывать по порядковому номеру.

```
> p := 1 + 2*x + 3*x^2 + 4*x^3;
```

$$p := 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$$

```
> q := convert(p, list);
```

$$q := [1, 2x, 3x^2, 4x^3]$$

```
> q[2];
```

$$2x.$$

Для переменной скалярного типа её значение выдаётся по указанному в командной строке имени переменной.

В более сложных случаях используется команда `eval`, например, для массива A , определённого как `array`, команда `eval(A)`; выдаёт содержимое A .

Приведём ещё несколько подобных операций.

Команда `evalf(name)` выдаёт значение в формате с плавающей запятой.

Для вычисления матричных выражений (в пакете `linalg`) с участием операций $\&*$ (матричное умножение), $+$, $-$, $\wedge$ используется команда `evalm`. Пример:

```
> A := array([[1,2], [3,4]]):
> B := array([[5,6], [7,8]]):
> C := evalm(A &* B);
```

$$C = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

В случае многократных вычислений или преобразований следует использовать операторы цикла, для записи которых употребляются следующие служебные слова: **for**, **from**, **by**, **to**, **do**, **end do**. Поясним их применение простым примером.

```
> for i from 1 by 1 to 5 do S[i]:= (i*x)^2; end do;
```

Получаем следующие результаты:

$$\begin{aligned} S_1 &= x^2, \\ S_2 &= 4x^2, \\ S_3 &= 9x^2, \\ S_4 &= 16x^2, \\ S_5 &= 25x^2. \end{aligned}$$

Заметим, что в ранних версиях системы для завершения команды цикла вместо **end do** используется **od**.

Построение графиков

В системе Maple имеется широкий выбор команд двумерной и трехмерной графики. Библиотека графики вызывается командой **with(plots)**. Результатом правильно введенной команды является рисунок в отдельном окне, имеющем свое меню, с

помощью опций которого можно интерактивно менять построенное изображение. Простейшим примером команды построения графика служит команда **plot(x, t=0..T)**, после которой появляется график функции $x(t)$ на отрезке $[0, T]$.

Команда

```
plot([x1, x2], t=0..T, color=[red, blue], thickness=[1,3]);
```

позволяет строить в одной системе координат графики двух функций с указанными цветами и толщиной линий.

Пример:

```
> plot([sin(x), cos(2*x)], x=0..Pi, color=[red, blue],
      thickness=[1,3]);
```

При необходимости используются команды **implicitplot** для построения графика функции, заданной неявно, и **pointplot** для построения графика функции дискретного аргумента. Детали можно узнать,

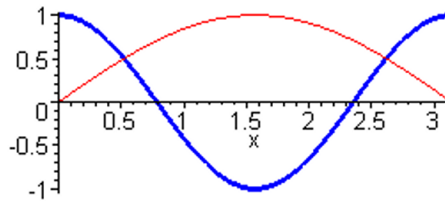


Рис. 16. Пример построения графиков в системе Maple

обратившись в системе к справке: `?implicitplot;` или, соответственно, `?pointplot;`.

Для построения двумерных графиков параметрически заданных функций в Maple используется та же команда `plot`. Параметрически заданная функция представляется в виде пары функций $x(t)$ и $y(t)$, где t — параметр.

Базовый синтаксис команды:

```
plot([x(t), y(t), t=a..b], options)
```

где:

- $x(t)$ — функция, задающая координату x
- $y(t)$ — функция, задающая координату y
- $t=a..b$ — интервал изменения параметра
- `options` — дополнительные опции форматирования

Пример 1. (спираль Архимеда):

```
>plot([t*cos(t), t*sin(t), t=0..8*Pi],color=blue, thickness=1);
```

Можно построить несколько параметрических графиков на одном рисунке:

Пример 2:

```
>plot([2*cos(t), 2*sin(t), t=0..2*Pi],[t*sin(t),-t*cos(t),  
t=-3*Pi/2..3*Pi/2],color=[red, blue],thickness=2);
```

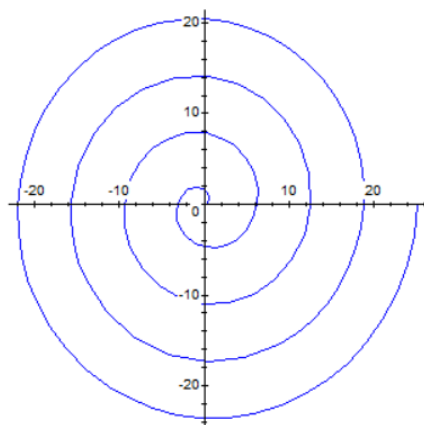


Рис. 17. График примера 1. Спираль Архимеда

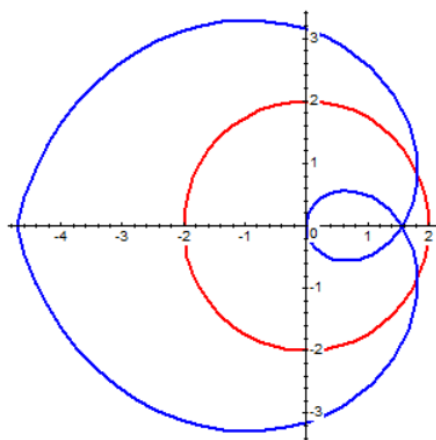


Рис. 18. График примера 2

Решение нелинейных уравнений в Maple

В Maple существует несколько способов решения нелинейных уравнений:

- Команда `solve` для аналитического решения,
- Команда `fsolve` для численного решения.

Базовая форма команды solve:

```
solve(уравнение, переменная)
```

Пример:

```
> solve(x^2 - 4 = 0, x);
```

2,-2

Однако, во многих случаях точное аналитическое решение найти невозможно — в этом случае следует использовать команду **fsolve**.

Синтаксис:

```
fsolve(уравнение, переменная, диапазон)
```

Пример:

```
> fsolve(sin(x) = x/2, x, 1..10);
```

1.895494267

Обе эти функции можно использовать для решения систем уравнений. Синтаксис:

```
fsolve({уравнение1, уравнение2}, {переменная1, переменная2})
```

Пример:

```
> fsolve({x^2 + y^2 = 1, x - y = 0}, {x, y});
```

y = -.7071067812, x = -.7071067812

Глава 6

Задачи для самостоятельной работы

6.1 Лабораторная работа № 1. Задача о быстродействии

Задание: Материальная точка перемещается из состояния неподвижности из точки $A(0, 0)$ в точку $B(\alpha, \beta)$ в поле силы тяжести по закону Галилея без учёта силы трения. Остановись в точке B , материальная точка перемещается до вертикальной прямой l . Прямая l задаётся уравнением

$$x = \alpha + \gamma.$$

Числа α , β , γ — последние три ненулевые цифры Вашего студенческого билета.

Построить траекторию движения материальной точки из точки A в точку B , а затем до прямой l , при которой общее время движения минимально (см. §1.2, 2.7, 5).

Указания:

1. Для построения траектории движения из точки A в точку B необходимо решить задачу о брахистохроне с двумя закреплёнными границами. При этом допускается использование известной формулы параметрического задания циклоиды. Для вычисления параметров циклоиды необходимо решить систему трансцендентных уравнений — для этой задачи следует использовать использовать

любой математический пакет, а при его отсутствии — решить задачу графически.

2. Для построения траектории движения из точки B до прямой l необходимо решить задачу о брахистохроне со свободной правой границей. Итоговая кривая должна состоять из двух гладких кривых (одна идёт из A в B , другая — из B до прямой l) причём в точке B гладкая стыковка не требуется.

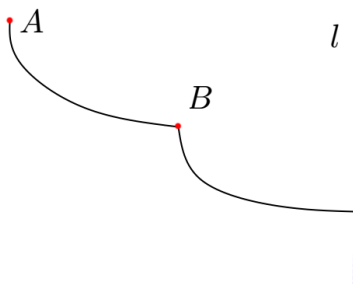


Рис. 19. Иллюстрация движения материальной точки

6.2 Лабораторная работа № 2. Оптимизация потребления при постоянной норме накопления

Задание: Динамика чистого конечного продукта y в замкнутой модели одноотраслевой экономики описывается уравнением

$$\dot{y}(t) = \frac{1}{B}[y(t) - c(t)], \quad t \in [0, T],$$

где B — коэффициент капиталоемкости, c — потребление ($0 \leq c(t) \leq y(t)$, $t \in [0, T]$). Считая заданным начальное состояние $y(0) = y_0$, решить задачу максимизации интегрального дисконтированного потребления

$$C = \int_0^T e^{-\lambda t} c(t) dt$$

при условии, что норма производственного накопления

$$\alpha = \frac{y - c}{y}$$

остаётся постоянной на всём промежутке времени.

Указания:

1. В данной задаче необходимо решить дифференциальное уравнение, подставить решение в интегральный функционал C и провести его оптимизацию по вещественному скалярному параметру α .
2. Требуется рассмотреть все комбинации параметров, указанных в вариантах ниже. В каждом случае найти оптимальное значение α и максимальное значение C .
3. В случае $\lambda = 0$ нужно ответить на вопрос: при каких значениях параметров B и T оптимальным значением для α служит ноль (то есть вовсе не имеет смысла производить накопления)?

Варианты заданий

1. $y_0 = 100$; $B \in \{3; 4\}$; $T \in \{5, 10, 15, 18\}$; $\lambda \in \{0; 0, 1; 0, 03\}$.
2. $y_0 = 50$; $B \in \{3; 4\}$; $T \in \{7, 11, 18, 20\}$; $\lambda \in \{0; 0, 2; 0, 01\}$.
3. $y_0 = 75$; $B \in \{3; 4\}$; $T \in \{5, 7, 10, 15\}$; $\lambda \in \{0; 0, 03; 0, 001\}$.
4. $y_0 = 25$; $B \in \{3; 8\}$; $T \in \{10, 14, 18, 22\}$; $\lambda \in \{0; 0, 01; 0, 05\}$.
5. $y_0 = 50$; $B \in \{2; 5\}$; $T \in \{6, 8, 10, 12\}$; $\lambda \in \{0; 0, 05; 0, 005\}$.
6. $y_0 = 100$; $B \in \{2; 3\}$; $T \in \{5, 10, 15, 20\}$; $\lambda \in \{0; 0, 03; 0, 001\}$.
7. $y_0 = 75$; $B \in \{2; 5\}$; $T \in \{6, 10, 14, 18\}$; $\lambda \in \{0; 0, 02; 0, 003\}$.
8. $y_0 = 25$; $B \in \{1; 3\}$; $T \in \{4, 8, 10, 12\}$; $\lambda \in \{0; 0, 01; 0, 004\}$.
9. $y_0 = 50$; $B \in \{2; 3\}$; $T \in \{5, 7, 9, 11\}$; $\lambda \in \{0; 0, 05; 0, 001\}$.
10. $y_0 = 25$; $B \in \{3; 5\}$; $T \in \{7, 10, 13, 16\}$; $\lambda \in \{0; 0, 03; 0, 08\}$.
11. $y_0 = 50$; $B \in \{1; 2\}$; $T \in \{3, 7, 11, 15\}$; $\lambda \in \{0; 0, 02; 0, 001\}$.
12. $y_0 = 75$; $B \in \{1; 5\}$; $T \in \{4, 7, 10, 13\}$; $\lambda \in \{0; 0, 07; 0, 005\}$.
13. $y_0 = 100$; $B \in \{3; 5\}$; $T \in \{7, 10, 14, 18\}$; $\lambda \in \{0; 0, 02; 0, 003\}$.
14. $y_0 = 75$; $B \in \{2; 3\}$; $T \in \{5, 8, 11, 14\}$; $\lambda \in \{0; 0, 01; 0, 004\}$.
15. $y_0 = 50$; $B \in \{1; 3\}$; $T \in \{4, 8, 12, 16\}$; $\lambda \in \{0; 0, 03; 0, 005\}$.
16. $y_0 = 25$; $B \in \{2; 5\}$; $T \in \{9, 12, 15, 18\}$; $\lambda \in \{0; 0, 02; 0, 001\}$.
17. $y_0 = 50$; $B \in \{2; 6\}$; $T \in \{10, 14, 18, 20\}$; $\lambda \in \{0; 0, 01; 0, 003\}$.
18. $y_0 = 75$; $B \in \{3; 5\}$; $T \in \{8, 10, 12, 14\}$; $\lambda \in \{0; 0, 03; 0, 005\}$.
19. $y_0 = 100$; $B \in \{3; 4\}$; $T \in \{7, 10, 13, 16\}$; $\lambda \in \{0; 0, 01; 0, 002\}$.
20. $y_0 = 25$; $B \in \{2; 3\}$; $T \in \{5, 7, 10, 15\}$; $\lambda \in \{0; 0, 002; 0, 004\}$.

21. $y_0 = 50$; $B \in \{2; 3\}$; $T \in \{5, 8, 9, 12\}$; $\lambda \in \{0; 0, 01; 0, 003\}$.
22. $y_0 = 75$; $B \in \{2; 4\}$; $T \in \{6, 10, 14, 18\}$; $\lambda \in \{0; 0, 02; 0, 001\}$.
23. $y_0 = 100$; $B \in \{3; 5\}$; $T \in \{8, 11, 14, 17\}$; $\lambda \in \{0; 0, 03; 0, 002\}$.
24. $y_0 = 25$; $B \in \{2; 3\}$; $T \in \{5, 8, 11, 14\}$; $\lambda \in \{0; 0, 02; 0, 001\}$.
25. $y_0 = 100$; $B \in \{2; 3\}$; $T \in \{5, 9, 13, 17\}$; $\lambda \in \{0; 0, 01; 0, 004\}$.
26. $y_0 = 200$; $B \in \{3; 4\}$; $T \in \{5, 11, 16, 19\}$; $\lambda \in \{0; 0, 2; 0, 02\}$.
27. $y_0 = 100$; $B \in \{3; 4\}$; $T \in \{7, 12, 19, 21\}$; $\lambda \in \{0; 0, 1; 0, 02\}$.
28. $y_0 = 150$; $B \in \{3; 4\}$; $T \in \{5, 8, 11, 16\}$; $\lambda \in \{0; 0, 02; 0, 002\}$.
29. $y_0 = 50$; $B \in \{3; 8\}$; $T \in \{10, 15, 19, 23\}$; $\lambda \in \{0; 0, 02; 0, 01\}$.
30. $y_0 = 100$; $B \in \{2; 5\}$; $T \in \{6, 9, 11, 13\}$; $\lambda \in \{0; 0, 02; 0, 001\}$.

6.3 Лабораторная работа № 3. Оптимизация потребления при кусочно-постоянной норме накопления

Задание: Решить задачу оптимального управления из задания № 2, считая, что норма производственного накопления может изменяться на промежутке $[0, T]$ с заданного максимального значения $\bar{\alpha}$ на заданное минимальное значение $\underline{\alpha}$ только один раз – в момент времени $t^* \in [0, T]$. Управляющим параметром считается момент переключения t^* . Сравнить значения $C(t^*)$, $C(t_1^*)$ и $C_{\max}$ (из соответствующего варианта задания № 2).

Указания:

1. В данной задаче необходимо решить дифференциальное уравнение, подставить решение в интегральный функционал C и провести его оптимизацию по вещественному скалярному параметру t^* .
2. Требуется рассмотреть все комбинации параметров, указанных в вариантах ниже. В каждом случае найти оптимальное значение t^* и максимальное значение C .
3. В случае $\lambda = 0$ нужно ответить на вопрос: при каких значениях параметров B и T оптимальным значением для t^* служит ноль (т.е. не имеет смысла производить накопления)?

Варианты заданий

1. $y_0 = 100$; $B \in \{3, 4\}$; $T = 10$; $\lambda \in \{0; 0, 1\}$; $t_1^* = 5$; $\bar{\alpha} = 0, 8$; $\underline{\alpha} \in \{0; 0, 3\}$.
2. $y_0 = 50$; $B \in \{3, 4\}$; $T = 18$; $\lambda \in \{0; 0, 2\}$; $t_1^* = 9$; $\bar{\alpha} = 0, 7$; $\underline{\alpha} \in \{0; 0, 1\}$.
3. $y_0 = 75$; $B \in \{3, 4\}$; $T = 10$; $\lambda \in \{0; 0, 03\}$; $t_1^* = 9$; $\bar{\alpha} = 0, 9$; $\underline{\alpha} \in \{0; 0, 2\}$.
4. $y_0 = 25$; $B \in \{3, 8\}$; $T = 22$; $\lambda \in \{0; 0, 01\}$; $t_1^* = 11$; $\bar{\alpha} = 0, 6$; $\underline{\alpha} \in \{0; 0, 2\}$.
5. $y_0 = 50$; $B \in \{2, 5\}$; $T = 12$; $\lambda \in \{0; 0, 05\}$; $t_1^* = 6$; $\bar{\alpha} = 0, 7$; $\underline{\alpha} \in \{0; 0, 1\}$.
6. $y_0 = 100$; $B \in \{2, 3\}$; $T = 20$; $\lambda \in \{0; 0, 03\}$; $t_1^* = 10$; $\bar{\alpha} = 1$; $\underline{\alpha} \in \{0; 0, 3\}$.
7. $y_0 = 75$; $B \in \{2, 5\}$; $T = 18$; $\lambda \in \{0; 0, 02\}$; $t_1^* = 9$; $\bar{\alpha} = 0, 8$; $\underline{\alpha} \in \{0; 0, 2\}$.
8. $y_0 = 25$; $B \in \{1, 3\}$; $T = 12$; $\lambda \in \{0; 0, 01\}$; $t_1^* = 6$; $\bar{\alpha} = 0, 9$; $\underline{\alpha} \in \{0; 0, 3\}$.
9. $y_0 = 50$; $B \in \{2, 3\}$; $T = 11$; $\lambda \in \{0; 0, 05\}$; $t_1^* = 8$; $\bar{\alpha} = 0, 9$; $\underline{\alpha} \in \{0; 0, 1\}$.
10. $y_0 = 25$; $B \in \{3, 5\}$; $T = 16$; $\lambda \in \{0; 0, 03\}$; $t_1^* = 8$; $\bar{\alpha} = 0, 8$; $\underline{\alpha} \in \{0; 0, 2\}$.
11. $y_0 = 50$; $B \in \{1, 2\}$; $T = 15$; $\lambda \in \{0; 0, 02\}$; $t_1^* = 10$; $\bar{\alpha} = 0, 8$; $\underline{\alpha} \in \{0; 0, 1\}$.
12. $y_0 = 75$; $B \in \{1, 5\}$; $T = 13$; $\lambda \in \{0; 0, 07\}$; $t_1^* = 9$; $\bar{\alpha} = 0, 8$; $\underline{\alpha} \in \{0; 0, 3\}$.
13. $y_0 = 100$; $B \in \{3, 5\}$; $T = 14$; $\lambda \in \{0; 0, 02\}$; $t_1^* = 10$; $\bar{\alpha} = 0, 7$; $\underline{\alpha} \in \{0; 0, 2\}$.
14. $y_0 = 75$; $B \in \{2, 3\}$; $T = 14$; $\lambda \in \{0; 0, 01\}$; $t_1^* = 10$; $\bar{\alpha} = 0, 9$; $\underline{\alpha} \in \{0; 0, 2\}$.
15. $y_0 = 50$; $B \in \{1, 3\}$; $T = 16$; $\lambda \in \{0; 0, 03\}$; $t_1^* = 12$; $\bar{\alpha} = 0, 8$; $\underline{\alpha} \in \{0; 0, 3\}$.
16. $y_0 = 25$; $B \in \{2, 5\}$; $T = 15$; $\lambda \in \{0; 0, 02\}$; $t_1^* = 10$; $\bar{\alpha} = 0, 8$; $\underline{\alpha} \in \{0; 0, 4\}$.
17. $y_0 = 50$; $B \in \{2, 6\}$; $T = 15$; $\lambda \in \{0; 0, 01\}$; $t_1^* = 15$; $\bar{\alpha} = 1$; $\underline{\alpha} \in \{0; 0, 3\}$.
18. $y_0 = 75$; $B \in \{3, 5\}$; $T = 14$; $\lambda \in \{0; 0, 03\}$; $t_1^* = 12$; $\bar{\alpha} = 0, 9$; $\underline{\alpha} \in \{0; 0, 2\}$.
19. $y_0 = 100$; $B \in \{3, 4\}$; $T = 16$; $\lambda \in \{0; 0, 01\}$; $t_1^* = 12$; $\bar{\alpha} = 1$; $\underline{\alpha} \in \{0; 0, 3\}$.
20. $y_0 = 25$; $B \in \{2, 3\}$; $T = 15$; $\lambda \in \{0; 0, 02\}$; $t_1^* = 11$; $\bar{\alpha} = 0, 7$; $\underline{\alpha} \in \{0; 0, 2\}$.
21. $y_0 = 50$; $B \in \{2, 3\}$; $T = 16$; $\lambda \in \{0; 0, 01\}$; $t_1^* = 12$; $\bar{\alpha} = 0, 6$; $\underline{\alpha} \in \{0; 0, 1\}$.
22. $y_0 = 100$; $B \in \{2, 4\}$; $T = 17$; $\lambda \in \{0; 0, 03\}$; $t_1^* = 14$; $\bar{\alpha} = 0, 8$; $\underline{\alpha} \in \{0; 0, 1\}$.
23. $y_0 = 100$; $B \in \{3, 5\}$; $T = 17$; $\lambda \in \{0; 0, 03\}$; $t_1^* = 11$; $\bar{\alpha} = 0, 8$; $\underline{\alpha} \in \{0; 0, 2\}$.
24. $y_0 = 25$; $B \in \{2, 3\}$; $T = 14$; $\lambda \in \{0; 0, 02\}$; $t_1^* = 12$; $\bar{\alpha} = 1$; $\underline{\alpha} \in \{0; 0, 3\}$.
25. $y_0 = 100$; $B \in \{2, 3\}$; $T = 17$; $\lambda \in \{0; 0, 01\}$; $t_1^* = 12$; $\bar{\alpha} = 0, 9$; $\underline{\alpha} \in \{0; 0, 01\}$.
26. $y_0 = 200$; $B \in \{3, 4\}$; $T = 11$; $\lambda \in \{0; 0, 2\}$; $t_1^* = 5$; $\bar{\alpha} = 0, 8$; $\underline{\alpha} \in \{0; 0, 2\}$.
27. $y_0 = 100$; $B \in \{3, 4\}$; $T = 19$; $\lambda \in \{0; 0, 1\}$; $t_1^* = 9$; $\bar{\alpha} = 0, 7$; $\underline{\alpha} \in \{0; 0, 1\}$.
28. $y_0 = 150$; $B \in \{3, 4\}$; $T = 11$; $\lambda \in \{0; 0, 02\}$; $t_1^* = 9$; $\bar{\alpha} = 0, 9$; $\underline{\alpha} \in \{0; 0, 2\}$.
29. $y_0 = 150$; $B \in \{3, 8\}$; $T = 23$; $\lambda \in \{0; 0, 01\}$; $t_1^* = 11$; $\bar{\alpha} = 0, 6$; $\underline{\alpha} \in \{0; 0, 2\}$.
30. $y_0 = 100$; $B \in \{2, 5\}$; $T = 13$; $\lambda \in \{0; 0, 02\}$; $t_1^* = 6$; $\bar{\alpha} = 0, 7$; $\underline{\alpha} \in \{0; 0, 1\}$.

6.4 Лабораторная работа № 4. Исследование простейших задач вариационного исчисления

Задание: Решить задачу вариационного исчисления.

Литература: [7, с. 90–97, 114–116].

Указания:

1. Найти экстремаль $\bar{x}$, решив уравнение Эйлера.
2. Определить, достигает ли функционал экстремума на $\bar{x}$. Если да, то какого?
3. Ограничен ли данный функционал?

Варианты:

1. $\int_1^e t \dot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}; \quad x(1) = 0, \quad x(e) = 1.$
2. $\int_0^1 (1+t) \dot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}; \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1.$
3. $\int_1^e (t \dot{x}^2 + 2x) dt \rightarrow \text{extr}; \quad x(1) = 1, \quad x(e) = 0.$
4. $\int_1^e (x - t \dot{x}^2) dt \rightarrow \text{extr}; \quad x(1) = 1, \quad x(e) = 2.$
5. $\int_1^2 t^2 \dot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}; \quad x(1) = 3, \quad x(2) = 1.$
6. $\int_2^3 (t^2 - 1) \dot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}; \quad x(2) = 0, \quad x(3) = 1.$
7. $\int_1^e (2x - t^2 \dot{x}^2) dt \rightarrow \text{extr}; \quad x(1) = e, \quad x(e) = 0.$
8. $\int_0^1 (\dot{x}^2 + x \dot{x} + 12tx) dt \rightarrow \text{extr}; \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 0.$

9. $\int_1^e (t\dot{x}^2 + x\dot{x}) dt \rightarrow \text{extr}; \quad x(1) = 0, x(e) = 1.$
10. $\int_{-1}^1 (\dot{x}^2 + x^2) dt \rightarrow \text{extr}; \quad x(-1) = 1, x(1) = 1.$
11. $\int_{-1}^1 (\dot{x}^2 + 4x^2) dt \rightarrow \text{extr}; \quad x(-1) = -1, x(1) = 1.$
12. $\int_0^1 (\dot{x}^2 + x^2 + 2x) dt \rightarrow \text{extr}; \quad x(0) = 0, x(1) = 0.$
13. $\int_0^1 (\dot{x}^2 + x^2 + tx) dt \rightarrow \text{extr}; \quad x(0) = 0, x(1) = 0.$
14. $\int_1^e (2x - t^2\dot{x}^2) dt \rightarrow \text{extr}; \quad x(1) = e, x(e) = 0.$
15. $\int_1^2 t^2\dot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}; \quad x(1) = 3, x(2) = 1.$
16. $\int_1^e (x - t\dot{x}^2) dt \rightarrow \text{extr}; \quad x(1) = 1, x(e) = 2.$
17. $\int_0^2 (t\dot{x}^2 + x) dt \rightarrow \text{extr}; \quad x(1) = 1, x(2) = 0.$
18. $\int_0^1 ((1+t^2)\dot{x}^2 + 3x) dt \rightarrow \text{extr}; \quad x(0) = 0, x(1) = \frac{3}{4} \ln 2.$
19. $\int_0^2 (\dot{x}^2 + tx + x) dt \rightarrow \text{extr}; \quad x(0) = 1, x(2) = 5.$
20. $\int_1^2 (t^2\dot{x}^2 + 2x^2) dt \rightarrow \text{extr}; \quad x(1) = 1, x(2) = 0.$
21. $\int_0^2 (\dot{x}^2 + t\dot{x} + 2x) dt \rightarrow \text{extr}; \quad x(0) = -1, x(2) = 1.$
22. $\int_{-1}^1 (\dot{x}^2 + 4x^2 - tx) dt \rightarrow \text{extr}; \quad x(-1) = 0, x(1) = 0.$

6.5 Лабораторная работа № 5. Задача оптимального управления для нелинейной модели макроэкономики

Задание: Построить оптимальное управление макроэкономикой, максимизирующее интегральное среднечеловеческое дисконтированное потребление J . Управляющими параметрами считаются доля непроизводственного потребления $u = u(t)$ и производительность труда $x = x(t)$. Считаются известными:

- коэффициент прямых затрат $a = a(t)$;
- производственная функция Кобба–Дугласа

$$F(t, K, L) = A(t)K^\alpha L^\beta,$$

с заданными коэффициентами эластичности по фондам α , по трудовым ресурсам β и заданным оценок научно-техническим прогрессом $A = A(t)$;

- начальный объём K_0 основных производственных фондов (ОПФ);
- конечный объём ОПФ K_T ;
- минимально допустимый объём ОПФ $K_{\min}$;
- динамика трудовых ресурсов $L = L(t)$;
- коэффициент амортизации ОПФ $\mu = \mu(t)$;
- коэффициент дисконтирования потребления $\delta = \delta(t)$;
- минимально допустимая доля потребления $u_{\min} = u_{\min}(t)$.

После перехода к относительным переменным

$$k = \frac{K}{L} \text{ (фондовооружённость)}$$

и

$$x = \frac{F}{L} \text{ (производительность труда)}$$

математическая модель задачи принимает вид:

$$J(k, x, u) = \int_0^T (1 - a(t))u(t)x(t)e^{-\delta t} dt \rightarrow \max,$$

$$\dot{k}(t) = (1 - a(t))(1 - u(t))x(t) - \left(\mu(t) + \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} \right) k(t), \quad t \in [0, T].$$

Начальные и конечные условия:

$$k(0) = \frac{K_0}{L(0)}, \quad k(T) = \frac{K_T}{L(T)}.$$

Ограничения:

$$\begin{cases} k(t) \geq \frac{K_{\min}(t)}{L(t)}, \\ x(t) \leq A(t)L^{\alpha+\beta-1}(t)k^\alpha(t), \\ u_{\min}(t) \leq u(t) \leq 1, \end{cases} \quad t \in [0, T].$$

Литература: [2, гл. 6].

Указания:

1. В плоскости (t, k) построить на одном графике магистраль, интегральные воронки и ограничения на минимально допустимый объём ОПФ.
2. Найти оптимальное управление $\bar{u} = \bar{u}(t)$, отметить на графике оптимальную фазовую траекторию.
3. Все точки переключения оптимального управления должны быть вычисленны численно (например, с помощью системы Maple).
4. Вычислить максимальное значение функционала J .

Важное замечание:

В некоторых вариантах дифференциальные уравнения, описывающие интегральные воронки не интегрируются в квадратурах. В таких случаях для построения интегральных воронок допускается использование математических пакетов, включающих методы численного интегрирования дифференциальных уравнений.

Варианты:

1.

$$\begin{aligned}
T &= 20, \quad K_0 = 170, \quad K_T = 400, \quad K_{\min} = 170, \quad a(t) = 0,2e^{0,001t}, \\
U_{\min}(t) &= 0,2e^{0,05t}, \quad \mu(t) = 0,1 + 0,0025t, \quad \alpha = 0,2; \quad \beta = 0,7; \\
A(t) &= 2,5; \quad L(t) = 150 - 0,1t; \quad \delta = 0,15.
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
T &= 20, \quad K_0 = 190, \quad K_T = 500, \quad K_{\min} = 180, \quad a(t) = 0,15 + 0,00015t; \\
U_{\min}(t) &= 0,55 + 0,01t; \quad \mu(t) = 0,1; \quad \alpha = 0,25; \quad \beta = 0,75; \\
A(t) &= 2 + 0,02t; \quad L(t) = 155 - 0,5t; \quad \delta = 0,14.
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
T &= 10, \quad K_0 = 180, \quad K_T = 400, \quad K_{\min} = 150, \quad a(t) = 0,2 \cdot (1 - 0,002t); \\
U_{\min}(t) &= 0,6; \quad \mu(t) = 0,2; \quad \alpha = 0,3; \quad \beta = 0,8; \quad A(t) = 2,5e^{0,015t}; \\
L(t) &= 120 - t; \quad \delta = 0,2.
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
T &= 20, \quad K_0 = 205, \quad K_T = 500, \quad K_{\min} = 200, \quad a(t) = 0,2 - 0,0025t; \\
U_{\min}(t) &= 0,5; \quad \mu(t) = 0,1 + 0,0025t; \quad \alpha = 0,3; \quad \beta = 0,8; \\
A(t) &= 2,6 \cdot (1 + 0,015t); \quad L(t) = 110 + t; \quad \delta = 0,1.
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
T &= 20, \quad K_0 = 180, \quad K_T = 310, \quad K_{\min} = 120, \quad a(t) = 0,2e^{-0,001t}, \\
U_{\min}(t) &= 0,3 + 0,002t, \quad \mu(t) = 0,12, \quad \alpha = 0,35, \quad \beta = 0,85; \\
A(t) &= 2,8e^{0,015t}, \quad L(t) = 130 + 0,05t, \quad \delta = 0,2.
\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
T &= 15, \quad K_0 = 1250, \quad K_T = 1120, \quad K_{\min} = 1070, \quad a(t) = 0,3e^{-0,001t}, \\
U_{\min}(t) &= 0,4, \quad \mu(t) = 0,12 - 0,002t, \quad \alpha = 0,3, \quad \beta = 0,75; \\
A(t) &= 2,7e^{0,03t}, \quad L(t) = 150e^{0,005t}, \quad \delta = 0,08.
\end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned}T &= 15, \quad K_0 = 1200, \quad K_T = 1300, \quad K_{\min} = 1100, \quad a(t) = 0,4; \\U_{\min}(t) &= 0,3e^{0,002t}, \quad \mu(t) = 0,1 \cdot (1 - 0,001t), \quad \alpha = 0,3, \quad \beta = 0,7; \\A(t) &= 3 \cdot (1 + 0,002t), \quad L(t) = 200e^{0,01t}, \quad \delta = 0,1.\end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned}T &= 12, \quad K_0 = 200, \quad K_T = 250, \quad K_{\min} = 200, \quad a(t) = 0,1 + 0,002t; \\U_{\min}(t) &= 0,25e^{0,001t}, \quad \mu(t) = 0,05 - 0,0001t, \quad \alpha = 0,2, \quad \beta = 0,8; \\A(t) &= 3,5 \cdot (1 - 0,001t), \quad L(t) = 250 - 2t, \quad \delta = 0,15.\end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned}T &= 14, \quad K_0 = 150, \quad K_T = 200, \quad K_{\min} = 145, \quad a(t) = 0,2e^{0,001t}, \\U_{\min}(t) &= 0,6 \cdot (1 + 0,002t), \quad \mu(t) = 0,06, \quad \alpha = 0,15, \quad \beta = 0,75; \\A(t) &= 3,2 \cdot (1 + 0,002t), \quad L(t) = 200 + t, \quad \delta = 0,12.\end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned}T &= 18, \quad K_0 = 190, \quad K_T = 210, \quad K_{\min} = 180, \quad a(t) = 0,2; \\U_{\min}(t) &= 0,6 \cdot (1 + 0,001t), \quad \mu(t) = 0,08, \quad \alpha = 0,3, \quad \beta = 0,7; \\A(t) &= 2,7 \cdot (1 + 0,002t), \quad L(t) = 200 + 2t, \quad \delta = 0,1.\end{aligned}$$

11.

$$\begin{aligned}T &= 20, \quad K_0 = 150, \quad K_T = 200, \quad K_{\min} = 150, \quad a(t) = 0,1 \cdot (1 - 0,001t); \\U_{\min}(t) &= 0,5, \quad \mu(t) = 0,05 + 0,001t, \quad \alpha = 0,4, \quad \beta = 0,7; \\A(t) &= 3,5, \quad L(t) = 150 - t, \quad \delta = 0,12.\end{aligned}$$

12.

$$\begin{aligned}T &= 16, \quad K_0 = 140, \quad K_T = 160, \quad K_{\min} = 130, \quad a(t) = 0,25 \cdot (1 + 0,002t); \\U_{\min}(t) &= 0,6, \quad \mu(t) = 0,08 + 0,002t, \quad \alpha = 0,3, \quad \beta = 0,7; \\A(t) &= 2,6e^{0,001t}, \quad L(t) = 160 + 2t, \quad \delta = 0,15.\end{aligned}$$

13.

$$\begin{aligned}
T &= 15, \quad K_0 = 1400, \quad K_T = 1350, \quad K_{\min} = 1200, \quad a(t) = 0,3e^{0,001t}; \\
U_{\min}(t) &= 0,4 \cdot (1 + 0,02t), \quad \mu(t) = 0,07, \quad \alpha = 0,2, \quad \beta = 0,85; \\
A(t) &= 3,2 \cdot (1 - 0,01t), \quad L(t) = 250 + 2t, \quad \delta = 0,12.
\end{aligned}$$

14.

$$\begin{aligned}
T &= 20, \quad K_0 = 170, \quad K_T = 230, \quad K_{\min} = 170, \quad a(t) = 0,2e^{-0,02t}; \\
U_{\min}(t) &= 0,3 \cdot (1 + 0,01t), \quad \mu(t) = 0,06 - 0,001t, \quad \alpha = 0,35, \quad \beta = 0,75; \\
A(t) &= 3,5 \cdot (1 + 0,01t), \quad L(t) = 150 + t, \quad \delta = 0,1.
\end{aligned}$$

15.

$$\begin{aligned}
T &= 10, \quad K_0 = 150, \quad K_T = 180, \quad K_{\min} = 145, \quad a(t) = 0,2e^{-0,01t}; \\
U_{\min}(t) &= 0,4, \quad \mu(t) = 0,07 + 0,001t, \quad \alpha = 0,2, \quad \beta = 0,8; \\
A(t) &= 2,7, \quad L(t) = 110 + 2t, \quad \delta = 0,15.
\end{aligned}$$

16.

$$\begin{aligned}
T &= 20, \quad K_0 = 200, \quad K_T = 250, \quad K_{\min} = 190, \quad a(t) = 0,1 \cdot (1 + 0,001t); \\
U_{\min}(t) &= 0,5e^{0,002t}, \quad \mu(t) = 0,1 - 0,001t, \quad \alpha = 0,25, \quad \beta = 0,85; \\
A(t) &= 3,2 \cdot e^{-0,02t}, \quad L(t) = 110 \cdot e^{0,001t}, \quad \delta = 0,1.
\end{aligned}$$

17.

$$\begin{aligned}
T &= 16, \quad K_0 = 180, \quad K_T = 220, \quad K_{\min} = 175, \quad a(t) = 0,2; \\
U_{\min}(t) &= 0,6e^{-0,01t}, \quad \mu(t) = 0,05, \quad \alpha = 0,3, \quad \beta = 0,65; \\
A(t) &= 3,1e^{0,001t}, \quad L(t) = 160e^{0,002t}, \quad \delta = 0,11.
\end{aligned}$$

18.

$$\begin{aligned}
T &= 12, \quad K_0 = 150, \quad K_T = 180, \quad K_{\min} = 150, \quad a(t) = 0,2e^{-0,001t}; \\
U_{\min}(t) &= 0,7e^{-0,001t}, \quad \mu(t) = 0,09, \quad \alpha = 0,35, \quad \beta = 0,6; \\
A(t) &= 3,5e^{0,002t}, \quad L(t) = 175 \cdot (1 + 0,001t), \quad \delta = 0,08.
\end{aligned}$$

19.

$$T = 20, \quad K_0 = 190, \quad K_T = 210, \quad K_{\min} = 185, \quad a(t) = 0,15;$$

$$U_{\min}(t) = 0,6e^{0,001t}, \quad \mu(t) = 0,1, \quad \alpha = 0,3, \quad \beta = 0,7;$$

$$A(t) = 2,8e^{0,003t}, \quad L(t) = 150 \cdot (1 + 0,002t), \quad \delta = 0,08.$$

20.

$$T = 15, \quad K_0 = 170, \quad K_T = 200, \quad K_{\min} = 170, \quad a(t) = 0,2e^{-0,001t};$$

$$U_{\min}(t) = 0,5 \cdot (1 - 0,001t), \quad \mu(t) = 0,08, \quad \alpha = 0,35, \quad \beta = 0,75;$$

$$A(t) = 3,1e^{-0,002t}, \quad L(t) = 100 \cdot (1 - 0,001t), \quad \delta = 0,12.$$

Литература

- [1] *Максимов В.П.* Теория оптимального управления: программа курса, варианты индивидуальных заданий, вопросы к итоговому экзамену / Перм. ун-т. — Пермь, 2001.
- [2] Основы теории оптимального управления / под ред. В.Ф. Кротова. — М.: Высшая школа, 1990.
- [3] *Лагоша Б.А.* Оптимальное управление в экономике. — М.: Финансы и статистика, 2003.
- [4] *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. — М.: Наука, 1979.
- [5] *Лутманов С.В.* Курс лекций по методам оптимизации. — Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2001.
- [6] *Галеев Э.М., Тихомиров В.М.* Оптимизация: теория, примеры, задачи. — М.: Эдиториал УРСС, 2000.
- [7] *Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М.* Сборник задач по оптимизации. — М.: Наука, 1984.
- [8] *Говорухин В.Н., Цибулин В.Г.* Введение в Maple. Математический пакет для всех.- М.: Мир, 1997. 208 с.
- [9] *Киселёв В. Ю., Калугина Т. Ф.* Вариационное исчисление и теория оптимального управления : учебное пособие. — М., Вологда : Инфра-Инженерия, 2023. 132 с.

Учебное издание

Максимов Владимир Петрович

Мулюков Михаил Вадимович

Теория оптимального управления: вводный курс лекций

Учебное пособие

Редактор *А. С. Серебренников*

Корректор *С. А. Вороненко*

Компьютерная верстка: *М. В. Мулюков*

Объем данных 0,9 Мб

Подписано к использованию 01.06.2026

Размещено в открытом доступе

на сайте psu.ru

в разделе НАУКА / Электронные публикации
и в электронной мультимедийной библиотеке ELiS

Управление издательской деятельности

Пермского государственного

национального исследовательского университета

614068, г. Пермь, ул. Букирева, 15

Тел.: (342) 239-65-47