УДК 519.2:62.19

Я.П.Лумельский, М.Г.Шеховцова
(Пермский университет)

ПУАССОНОВСКИЕ БЛУЖДАНИЯ И ОЦЕНКА НАДЕЖНОСТИ

Цель настоящей статьи состоит в рассмотрении на основе схемы пуассоновских блужданий укороченных планов испытания надежности для оценки вероятности безотказной работы [1], [2]. Испытаниям надежности изделий (отдельных элементов, устройств или приборов), поставим в соответствие [3] блуждание из начала координат в точки плоскости с неотрицательными координатами, где на оси абсцисс откладывается время τ проведения испытаний, а на оси ординат y – число отказавших изделий. Пространство блужданий $U = T \times M$, где M – множество неотрицательных целых чисел ($y \in M$), а T – множество неотрицательных действительных чисел ($\tau \in T$). Вместо времени τ иногда на оси абсцисс откладывают наработку изделия в километрах, оборотах или каких-то других единицах измерения. С точки зрения статистической теории несущественно, в каких единицах измеряется величина τ, а поэтому принято считать, что τ – время испытаний. Функцию $y(\tau)$, наблюдаемую в результате испытаний надежности, называют реализацией процесса $y(\tau)$.

Задание границы G в пространстве $U = T \times M$ определяет план Π^G. Граница остановки плана испытаний с фиксированным числом отказавших изделий определяется уравнением $y = r$, план испытаний надежности, когда время испытаний фиксировано, задается границей $\tau = \tau_0$.

Укороченный план испытаний надежности задается границей остановки $\{\tau = \tau_0\} \cup \{y = r\}$, т.е. испытания надежности прекращаются либо при наступлении r отказов, либо по истечении времени τ_0. Такой план обозначим $\Pi'_{yc}(\tau_0, r)$. Важнейшим показателем надежности является вероятность безотказной работы за время τ. При пуассоновском потоке отказов с параметром λ ($\lambda > 0$) вероятность безотказной работы за время τ_1 равна

$$P_\lambda(0, \tau_1) = e^{-\lambda\tau_1}. \tag{1}$$

В случае пуассоновского потока отказов план испытаний Π^G с границей остановки G $(G \in U)$ определяет $\mathcal{P}_\lambda^G$ - семейство распределений, зависящее от параметра λ $(\lambda \in (0, +\infty))$.

Семейство распределений в случае пуассоновского плана с границей остановки $G: \tau = \tau_0$ совпадает с семейством распределений Пуассона

$$P_\lambda[0; (\lambda, \tau_0)] = \frac{(\tau_0 \lambda)^y}{y!} e^{-\tau_0 \lambda}, \qquad (2)$$

зависящим от параметра $\lambda \in (0, +\infty)$. Так как пуассоновский поток отказов однороден, то несущественно, является ли τ_0 временем испытания одного изделия с восстановлением или фиксируется τ_0 - суммарная наработка n испытываемых изделий $\tau_0 = \sum_{i=1}^{n} \tau_i$.

Граница остановки пуассоновского плана $\Pi^G(G: y(\tau)) = r$, r - натуральное число, определяет семейство гамма-распределений. Плотность вероятности этого семейства распределений имеет вид

$$P_\lambda[0, (\tau, r)] = \begin{cases} \dfrac{\lambda^r \tau^{r-1} e^{-\lambda\tau}}{\Gamma(r)}, & \tau \geqslant 0, \\ 0, & \tau < 0; \end{cases} \qquad (3)$$

где $\Gamma(r)$ - гамма-функция. В распределении (3) непрерывной случайной величиной является время τ, за которое получено r отказов.

Пуассоновский укороченный план $\Pi'_{ув}(\tau_0, r)$ определяет семейство распределений

$$P_\lambda(0, \Gamma) = \begin{cases} \dfrac{(\lambda\tau_0)^y e^{-\lambda\tau_0}}{y!}, & \text{если } \Gamma(\tau_0, y), \\ \dfrac{\lambda^r \tau^{r-1} e^{-\lambda\tau}}{\Gamma(r)}, & \text{если } \Gamma(\tau, r). \end{cases} \qquad (4)$$

Распределение (4) при $\tau = \tau_0$ является дискретным, а при $y = r$ непрерывным.

Поток событий, определяющий пуассоновское блуждание, характеризуется тем, что случайная величина - число появлений событий $y(\Delta\tau)$ за время $\Delta\tau$ удовлетворяет следующим условиям:

а) случайные величины $y(\Delta\tau_1), \ldots, y(\Delta\tau_n)$ для непересекающихся временных интервалов $\Delta\tau_1, \ldots, \Delta\tau_n$ являются независимыми;

б) вероятность появления того или иного числа событий в интервале $\Delta\tau$ не зависит от расположения $\Delta\tau$ на временной оси, т.е. поток событий однороден;

в) вероятность наступления одного события за время $\Delta\tau$ приближенно равна $\lambda\Delta\tau + o(\Delta\tau)$, а вероятность наступления более чем одного события за небольшой промежуток времени $\Delta\tau$ имеет более высокий порядок малости, по сравнению с $\Delta\tau$.

В случае произвольного замкнутого плана Π^G, учитывая вышеуказанные свойства пуассоновского потока событий, можно найти $P_\lambda[0,F(\tau,y)]$ - вероятность (плотность вероятности) перехода из начала координат в достижимую (проходимую или граничную) точку $F(\tau,y)$. Величина $P_\lambda[0,F(\tau,y)]$ представляется (см. [4] с.539) в следующем виде:

$$P_\lambda[0,F(\tau,y) = L(0,F/G)\lambda^y e^{-\lambda\tau}, \tag{5}$$

где множитель $L(0,F/G)$ зависит от координат точки F и плана Π^G, но не зависит от параметра λ. Формулы (2) - (4) - частные случаи (5), выписанные для граничных точек $\Gamma(\Gamma\in G)$ трех различных планов Π^G. Формула (1) определяет вероятность перехода из начала координат в точку $F(\tau_1,0)$.

Из соотношения (5) вытекает ряд важных утверждений. Координаты граничной точки $\Gamma(\tau,y)$ $(\Gamma\in G)$ являются достаточной статистикой для семейства распределений $\mathcal{P}_\lambda^G$, определенного пуассоновским планом Π^G. С помощью соотношения (5) можно также доказать, что оценка максимального правдоподобия для параметра λ в случае произвольного пуассоновского плана Π^G задается формулой

$$\check{\lambda} = \frac{y}{\tau} \quad \forall\Gamma(\tau,y),\ \Gamma\in G. \tag{6}$$

Несмещенная оценка для вероятности перехода из начала координат в достижимую точку при пуассоновском плане задается формулой

$$\hat{P}_\lambda[0,F] = \frac{P_\lambda[0,F]\cdot P_\lambda[F,\Gamma]}{P_\lambda(0,\Gamma)} \quad \forall\Gamma\in G. \tag{7}$$

На основе (5) соотношению (7) можно придать другой вид:

$$\hat{P}_\lambda[0,F] = \frac{L(0,F/G)\cdot L(F/G)}{L(0,\Gamma/G)}. \tag{8}$$

Здесь приводятся результаты статьи [5] для случая $k = 1$.

На основе плана Π^{Q}, определяющего семейство распределений (2) $\tau_0 > \tau_1$ и формулы (7), учитывая, что $P_\lambda(0,\tau_1) = P_\lambda[0, F(\tau_1, 0)]$, получим несмещенную оценку для вероятности безотказной работы (I)

$$\hat{P}_\lambda(0,\tau_1) = \left(1 - \frac{\tau_1}{\tau_0}\right)^{y}, \tag{9}$$

известную ранее.

Воспользовавшись формулами (7) и (3), получим

$$\hat{P}_\lambda(0,\tau_1) = \frac{e^{-\lambda\tau_1} \dfrac{\lambda^r(\tau-\tau_1)^{r-1} e^{-\lambda(\tau-\tau_1)}}{\Gamma(r)}}{\dfrac{\lambda^r \tau^{r-1} e^{-\lambda\tau}}{\Gamma(r)}},$$

когда $\tau \geqslant \tau_1$. Тогда окончательно $\hat{P}_\lambda(0,\tau_1)$ имеет следующий вид:

$$\hat{P}_\lambda(0,\tau_1) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{\tau_1}{\tau}\right)^{r-1}, & \text{если } \tau \geqslant \tau_1, \\ 0, & \text{если } \tau < \tau_1. \end{cases} \tag{10}$$

Если на основе произвольного пуассоновского плана несмещенно оценивается $g(\lambda)$ – функция от неизвестного параметра λ, то нижняя граница дисперсии несмещенной оценки $\hat{g}$ зависит от λ, G и удовлетворяет [6] неравенству

$$V_\lambda \hat{g} \geqslant \frac{\lambda[g'(\lambda)]^2}{E_\lambda \hat{\tau}}. \tag{11}$$

Рассмотрим пуассоновский план испытания надежности, определяющий семейство распределений (4) $\Pi'_{yc}(\tau_0, r)$. На основе результатов наблюдений по плану $\Pi'_{yc}(\tau_0, r)$ построим несмещенную оценку для $P_\lambda(0,\tau_1)$ – вероятности безотказной работы (I), когда $\tau_0 > \tau_1$, $r > 1$.

Сравнивая вероятности (плотности вероятности) (2), (3) и (4), приходим к выводу, что в соответствии с формулой (7) можно для плана $\Pi'_{yc}(\tau_0, r)$ использовать оценки (9) и (10). Тогда несмещенная оценка $\hat{P}_\lambda(0,\tau_1)$ при плане $\Pi'_{yc}(\tau_0, r)$ равна

$$\hat{P}_\lambda(0,\tau_1)=\begin{cases}\left(1-\frac{\tau_1}{\tau_0}\right)^y & \text{, если } \Gamma(\tau_0,y),\\ \left(1-\frac{\tau_1}{\tau}\right)^{r-1} & \text{, если } \Gamma(\tau,r) \text{ и } \tau\geqslant\tau_1,\\ 0 & \text{, в остальных случаях.}\end{cases} \tag{12}$$

В соответствии с формулой (6) оценка максимального правдоподобия для $P_\lambda(0,\tau_1)$ при плане $\Pi'_{\text{ук}}(\tau_0,r)$ задается соотношением

$$\check{P}_\lambda(0,\tau_1)=\begin{cases}e^{-\frac{y\tau_1}{\tau_0}} & \text{, если } \Gamma(\tau_0,y),\\ e^{-\frac{r\tau_1}{\tau}} & \text{, если } \Gamma(\tau,r).\end{cases} \tag{13}$$

Сравнение оценок (12) и (13) можно провести с помощью квадратической функции потерь. На основании формул (4), (12) и (13) выпишем квадратические функции потерь несмещенной оценки и оценки максимального правдоподобия, которые удобно рассмотреть в пространстве переменных r, $u=\lambda\tau_1$ и $\text{æ}=\frac{\tau_1}{\tau_0}$. Эти функции равны соответственно:

$$\varphi_1(u,\text{æ},r)=E_\lambda[\hat{P}_\lambda(0,\tau_1)-P_\lambda(0,\tau_1)]^2=$$

$$=\sum_{y=0}^{r-1}[(1-\text{æ})^y-e^{-u}]^2\frac{\left(\frac{u}{\text{æ}}\right)^y}{y!}e^{-\frac{u}{\text{æ}}}+\frac{1}{(r-1)!}\int_u^{\frac{u}{\text{æ}}}[(1-\tfrac{u}{z})^{r-1}- \tag{14}$$

$$-e^{-u}]^2z^{r-1}e^{-z}dz+\frac{e^{-2u}}{(r-1)!}\int_0^u y^{r-1}e^{-y}dy$$

и

$$\varphi_2(u,\text{æ},r)=E_\lambda[\check{P}_\lambda(0,\tau_1)-P_\lambda(0,\tau_1)]^2=\sum_{y=0}^{r-1}[e^{-\text{æ}y}-e^{-u}]^2\times$$

$$\times\frac{\left(\frac{u}{\text{æ}}\right)^y}{y!}e^{-\frac{u}{\text{æ}}}+\frac{1}{(r-1)!}\int_0^{\frac{u}{\text{æ}}}[e^{-\frac{ru}{z}}-e^{-u}]z^{r-1}e^{-z}dz.$$

Для сравнения значений функции $\varphi_1(u,æ,r)$ и $\varphi_2(u,æ,r)$ вводится вспомогательная функция

$$\eta\,[P_\lambda(0,\tau_1)] = \eta\,(u,æ,r) = \frac{\varphi_2(u,æ,r)}{\varphi_1(u,æ,r)}\,. \tag{15}$$

По функции $\eta(u,æ,r)$ решается вопрос о выборе одного из двух методов оценивания: несмещенных оценок или максимального правдоподобия, причем следует учитывать, что оценка (13) смещенная. Смещение оценки максимального правдоподобия находится по формуле

$$\xi(u,æ,r) = E_\lambda\,[\check{P}_\lambda(0,\tau_1) - P_\lambda(0,\tau_1)] =$$
$$= \sum_{y=0}^{r-1}\left(e^{-æ y} - e^{-u}\right)\frac{e^{-\frac{u}{æ}}\left(\frac{u}{æ}\right)^y}{y!} - \frac{1}{(r-1)!}\int_0^{\frac{u}{æ}}\left(e^{-\frac{ru}{y}} - e^{-u}\right)y^{r-1}e^{-y}\,dy\,. \tag{16}$$

Ниже приводится табл. I, которая при r = 2,3,4,5,6 дает некоторое представление об изменении функций $\eta(u,æ,r)$ (верхняя строка) и $\xi(u,æ,r)$ (нижняя строка) в зависимости от значений величин u, $æ$ и r.

Другой важнейшей характеристикой пуассоновского плана контроля является $E_\lambda\tau$. Математическое ожидание времени остановки процесса блужданий для замкнутого пуассоновского плана Π^G удовлетворяет соотношению

$$E_\lambda\tau = \frac{E_\lambda y}{\lambda}\,. \tag{17}$$

Учитывая, что для плана $\Pi'_{ус}(\tau_0,r)$ вероятность попадания на границу равна единице, т.е.

$$\sum_{h=0}^{r-1}\frac{\lambda\tau_0}{h!}e^{-\lambda\tau_0} + \int_0^{\tau_0}\frac{\lambda^r x^{r-1}e^{-\lambda x}}{\Gamma(r)}\,dx = 1\,,$$

находим

$$E_\lambda y = \sum_{h=0}^{r-1} h\,\frac{(\lambda\tau_0)^h}{h!}e^{-\lambda\tau_0} + r\left(1 - \sum_{h=0}^{r-1}\frac{(\lambda\tau_0)^h}{h!}e^{-\lambda\tau_0}\right). \tag{18}$$

На основе соотношений (17) и (18) получим характеристику $E_\lambda\tau$, определяемую параметром λ и величинами τ_0 и r:

Таблица I

$r = 2$

u	x				
	0,002	0,004	0,032	0,2	0,4
0,004	2,807296 -0,003302	2,746692 -0,002374	I,486095 -0,000307	0,85I094 0,000343	0,686242 0,000693
0,0I6	2,402234 -0,0I4I55	2,409735 -0,0I3869	2,036636 -0,004585	0,93I460 0,00I005	0,706569 0,002648
0,05	I,954766 -0,0373I5	I,954800 -0,0373I5	2,00I574 -0,027II7	I,I0II07 0,000376	0,759365 0,007260
0,I	I,625859 -0,06I2I6	I,625836 -0,06I2I6	I,659957 -0,056972	I,238096 -0,005262	0,82542I 0,0II92I
0,4	0,00000I 0,000000	0,9I9447 -0,I0I888	0,9I9466 -0,I0I886	I,I03608 -0,05685I	I,0I3048 0,0II942
0,8	0,000000 0,000000	0,000003 0,00000I	0,628058 -0,076606	0,7I959I -0,0649I7	0,979856 -0,000897

$r = 3$

α	x				
	0,002	0,004	0,032	0,2	0,4
0,004	2,363803 -0,00II63	I,868079 -0,000506	0,992095 0,00005I	0,822383 0,000373	0,6804II 0,00070I
0,0I6	2,2I5267 -0,007562	2,244II4 -0,006859	I,228765 -0,000346	0,82725I 0,00I467	0,6839I5 0,00277I
0,05	I,928I94 -0,02I370	I,928097 -0,02I369	I,805378 -0,0084I7	0,8549I7 0,0042I8	0,695222 0,008369
0,I	I,677823 -0,037I22	I,67782I -0,037I22	I,7667I5 -0,028525	0,9I8467 0,006890	0,7I4982 0,0I5835
0,4	I,050389 -0,07I032	I,050388 -0,07I032	I,0505I7 -0,07I023	I,I87942 -0,008I46	0,868260 0,04I57I
0,8	0,000000 0,000000	0,758I62 -0,057I05	0,758I63 -0,057I05	0,979815 -0,03I3I9	0,0I0388 0,042433

$r = 4$

u	x				
	0,002	0,004	0,032	0,2	0,4
0,004	I,729033	I,226894	0,969477	0,822I97	0,680396
	-0,00042I	-0,000096	0,000063	0,000373	0,00070I
0,0I6	I,9I4I0I	I,98I2I3	I,003084	0,824448	0,683674
	-0,005053	-0,003868	0,000I86	0,00I476	0,002772
0,05	I,75I263	I,75I694	I,356I23	0,832046	0,693043
	-0,0I4755	-0,0I4749	-0,002009	0,004453	0,008398
0,I	I,588895	I,588884	I,656682	0,849079	0,707I72
	-0,026242	-0,026242	-0,0I3893	0,00836I	0,0I6039
0,4	I,095083	I,095083	I,095853	I,06I983	0,806829
	-0,054099	-0,054099	-0,054057	0,0I3886	0,04770I
0,8	0,000000	0,829403	0,829403	I,I22405	0,970245
	0,000000	-0,045483	-0,045483	-0,005I33	0,0602I8

$r = 5$

u	x				
	0,002	0,004	0,032	0,2	0,4
0,004	I,309946	I,044233	0,96876I	0,822I96	0,680396
	-0,000I37	-0,0000I0	0,000063	0,000373	0,00070I
0,0I6	I,73III8	I,749633	0,972755	0,824396	0,683672
	-0,003696	-0,002I49	0,000244	0,00I476	0,002772
0,05	I,607240	I,60894I	I,099765	0,830706	0,692993
	-0,0II228	-0,0II209	0,000025	0,004464	0,008398
0,I	I,496803	I,496800	I,444II3	0,840703	0,7068II
	-0,020203	-0,020203	-0,005823	0,008502	0,0I6047
0,4	I,I08345	I,I08345	I,III380	0,959626	0,7943I8
	-0,043523	-0,043523	-0,043388	0,022I39	0,048689
0,8	0,000000	0,872674	0,872673	I,I35775	0,930550
	0,000000	-0,037749	-0,037749	0,0I3405	0,065946

$r = 6$

u	x				
	0,002	0,004	0,032	0,2	0,4
0,004	I,I08523 -0,000037	I,004609 0,000005	0,968742 0,000063	0,822I96 0,000373	0,680396 0,00070I
0,0I6	I,62966I -0,002783	I,5I80I0 -0,00IIII	0,9695II 0,000249	0,824395 0,00I476	0,683672 0,002772
0,05	I,503623 -0,009052	I,509086 -0,008999	I,005794 0,000586	0,830646 0,004465	0,692992 0,008398
0,I	I,4229I4 -0,0I6397	I,4229I3 -0,0I6397	I,2359I6 -0,00I670	0,839940 0,0085I3	0,706799 0,0I6048
0,4	I,I09462 -0,036338	I,I09462 -0,036338	I,II8428 -0,03597I	0,9I5330 0,0247I2	0,792474 0,0488I8
0,8	0,000000 0,000000	0,900885 -0,032235	0,900886 -0,032235	I,085789 0,024696	0,9I7485 0,067448

Таблица 2

	2	3	4	5	6
0,00I	0,999983 0,999950	I,000000 I,000000	I,000000 I,000000	I,000000 I,000000	I,000000 I,000000
0,04	0,999739 0,99922I	0,999997 0,999990	I,000000 I,000000	I,000000 I,000000	I,000000 I,000000
0,I6	0,996059 0,988487	0,999845 0,999394	0,999995 0,999976	I,000000 0,999999	I,000000 I,000000
0,5	0,967347 0,909796	0,996I2I 0,9856I2	0,999625 0,998248	0,999970 0,999828	0,999998 0,999986
I,0	0,896362 0,735759	0,976663 0,9I9699	0,99565I 0,98I0I2	0,9993II 0,996340	0,999905 0,999406
2,0	0,729330 0,406006	0,89099I 0,676676	0,962429 0,857I23	0,988756 0,947347	0,997038 0,983436
4,0	0,472527 0,09I578	0,66300I 0,238I03	0,804633 0,433470	0,897424 0,628837	0,95II4I 0,785I30
8,0	0,24958I 0,0030I9	0,37286I 0,0I3754	0,492564 0,042380	0,605II0 0,099632	0,706205 0,I9I236
25	0,080000 0,000000	0,I20000 0,000000	0,I60000 0,000000	0,200000 0,000000	0,240000 0,00000I
32	0,062500 0,000000	0,093750 0,000000	0,I25000 0,000000	0,I56250 0,000000	0,I87500 0,000000
50	0,040000 0,000000	0,060000 0,000000	0,080000 0,000000	0,I00000 0,000000	0,I20000 0,000000
I00	0,020000 0,000000	0,030000 0,000000	0,040000 0,000000	0,050000 0,000000	0,060000 0,000000
400	0,000000 0,000000	0,000000 0,000000	0,000000 0,000000	0,000000 0,000000	0,0I5000 0,000000

$$E_\lambda \tau = \frac{1}{\lambda}\sum_{h=0}^{r-1} h\,\frac{(\lambda\tau_0)^h}{h!}e^{-\lambda\tau_0} + \frac{r}{\lambda}\Big[1-\sum_{h=0}^{r-1}\frac{(\lambda\tau_0)^h}{h!}e^{-\lambda\tau_0}\Big]. \qquad (19)$$

Среднее затрачиваемое время испытаний $E_\lambda(\tau)$, отнесенное ко времени τ_0 у плана $\Pi'_{yc}(\tau_0,r)$, выраженное через переменные $u_1=\lambda\tau_0$ $(u_1=\frac{u}{\text{æ}})$ и r, имеет следующий вид:

$$\frac{E_\lambda\tau}{\tau_0} = \frac{1}{u_1}\sum_{h=1}^{r-1} h\,\frac{u_1^h}{h!}e^{-u_1} + \frac{r}{u_1}\Big[1-\sum_{h=0}^{r-1}\frac{u_1^h}{h!}e^{-u_1}\Big]. \qquad (20)$$

Пусть при контроле партии изделий на основе пуассоновского плана $\Pi'_{yc}(\tau_0,r)$ в точках $\Gamma(\tau_0,y)$ $y=\overline{0,r-1}$ принимается решение о приемке партии по результатам испытаний, а в остальных точках границы партия забраковывается. Тогда оперативная характеристика плана $\Pi'_{yc}(\tau_0,r)$ задается формулой

$$\mathcal{L}(u,r) = \sum_{h=0}^{r-1}\frac{(\lambda\tau_0)^h}{h!}e^{-\lambda\tau_0},$$

или через переменные $u_1=\lambda\tau_0$ и r –

$$\mathcal{L}(u,r) = \sum_{h=0}^{r-1}\frac{(u_1)^h}{h!}e^{-u_1}.$$

В табл. 2 при некоторых значениях u_1 и r даны значения функции $\frac{E_\lambda\tau}{\tau_0}$ (верхняя строка) и функции $\mathcal{L}(u,r)$ (нижняя строка).

Литература

1. Лумельский Я.П. О двух методах оценки вероятности безотказной работы при пуассоновском потоке отказов. – Надежность и контроль качества, 1973, № 1.

2. Лумельский Я.П., Шеховцова М.Г. Характеристика точности оценок надежности при пуассоновском потоке отказов. Деп. № 1878 – 74.

3. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности. М., Наука, 1965.

4. Каган А.М., Линник Ю.В., Рао С.Р. Характеризационные задачи математической статистики. М., Наука, 1972.

5. Б е л я е в Ю.К., Л у м е л ь с к и й Я.П. Многомерные пуассоновские блуждания. - См. наст. сб.

6. Trybula S., Sequential Estimation in Processes with Independent Increments. Rozprawy Matematyczny, LX, Warszawa, 1968.