УДК 519.258

П.Н.Сапожников
(Пермский университет)

БЛИЗКИЕ К МАКСИМИННЫМ ТЕСТЫ В СЛУЧАЕ КОНЕЧНОГО ЧИСЛА ГИПОТЕЗ

Пусть на основе статистической структуры $(\mathcal{U}, \mathcal{A}, P_\theta, \theta \in \Omega)$ проверяется гипотеза H_0: $\theta \in \Omega_0 \subset \Omega$ против альтернативы H_1: $\theta \in \Omega_1$, $(\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1, \Omega_0 \Omega_1 = \phi$, $\mathcal{K}_\alpha$ - множество всех тестов, уровень которых не превосходит α (α - некоторое наперед заданное число в диапазоне $(0,1)$).

Хорошо известно, что теста, доставляющего равномерный на Ω *supremum* функционалам

$$M_\theta \beta = \int_{\mathcal{U}} \beta(u) dP_\theta(u) \qquad (\beta \in \mathcal{K}_\alpha),$$

во многих случаях не существует. Напротив, максиминный тест, т.е. тест, доставляющий *supremum* функционалу

$$\inf_{\theta \in \Omega_1} M_\theta \beta$$

в $\mathcal{K}_\alpha$, существует при весьма общих ограничениях [I] и совпадает с равномерно наилучшим, если таковой существует.

К сожалению, отыскание максиминных тестов представляет собой весьма сложную математическую проблему. Упрощения можно добиться, если сузить исходный класс тестов.

В настоящей работе предлагается метод построения приближенно максиминного теста, в основе которого лежит отмеченная идея, для случая, когда множество Ω содержит лишь конечное число параметров $\Omega = \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n\}$.

Пусть $\Omega = \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m\}$, а $\Omega_0 = \{\theta_{m+1}, \theta_{m+2}, \ldots, \theta_n\}$. Через $f_k(u)$ обозначим плотности в смысле Радона-Никодина мер P_{θ_k} относительно меры $\mu = P_{\theta_1} + P_{\theta_2} + \ldots + P_{\theta_n}$. Выбор плотностей f_k можно осуществить таким образом, что

$$f_k(u) \le 1, \sum_{k=1}^{m} f_k(u) = 1 \qquad \text{для всех } u \in \mathcal{U}.$$

Определим гильбертово пространство H как линейное замыкание множества $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ в пространстве всех интегрируемых с

квадратом относительно меры μ статистик на U. Наконец, через $\tilde{\mathcal{K}}_\alpha$ обозначим класс всех тестов из $\mathcal{K}_\alpha$, принадлежащих H. Сужение исходного множества тестов в целом уменьшает функции мощностей, но зато построение максиминного теста в $\tilde{\mathcal{K}}_\alpha$ существенно проще. Кроме того, при увеличении числа альтернатив, множество $\tilde{\mathcal{K}}_\alpha$ расширяется и мощность максиминного теста увеличивается. Это дает повод называть максиминный тест в $\tilde{\mathcal{K}}_\alpha$ приближенно максиминным.

Для сокращения записей примем следующие обозначения:

$$\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} f_{m+1} \\ f_{m+2} \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix},$$

$$A_1 = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1^T), \; A_{12} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2^T) \quad A_2 = (\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_2^T),$$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ A_{12}^T & A_2 \end{bmatrix}, \qquad e_i \text{ - единичные векторы в } R_m.$$

Л е м м а I. Если $f_1, f_2, \ldots, f_n$ линейно независимы μ - п.в. на U, то для каждого i ($i = 1, 2, \ldots, m$) существует статистика Ψ_i ($\Psi_i \in H$), удовлетворяющая условиям

$$M_{\theta_j} \Psi_i = 0 \text{ для всех } j \in (1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n),$$
$$M_{\theta_i} \Psi_i = 1.$$

Для каждого i ($i = 1, 2, \ldots, m$) Ψ_i - единственная μ - п.в. статистика в H, удовлетворяющая указанным условиям, и определяется формулой

$$\Psi_i = (\mathbf{f}_1^T - \mathbf{f}_2^T A_2^{-1} A_{12}^T)(A_1 - A_{12} A_2^{-1} A_{12}^T)^{-1} e_i .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проверка равенств осуществляется непосредственно, а единственность μ - п.в. статистик Ψ_i следует из линейной независимости μ -п.в. базиса H.

Пусть W - множество риска, т.е. подмножество m -мерного евклидова пространства вида

$$W = \{ M_{\theta_1} \beta, M_{\theta_2} \beta, \ldots, M_{\theta_m} \beta, \; \beta \in \tilde{\mathcal{K}}_\alpha \},$$

β_i - наилучшие тесты в $\tilde{\mathcal{K}}_\alpha$ для проверки гипотезы $H_0: \theta \in \Omega_0$ против простых альтернатив $H_1 i : \theta = \theta_i$ ($i = 1, 2, \ldots, m$).

Так как *supremum* функционала $M_{\theta_i}\beta$ на $\tilde{\mathcal{K}}_\alpha$ достигается в некоторой точке этого множества, то при любой i наилучший тест существует. Действительно, всякий тест из $\tilde{\mathcal{K}}_\alpha$ уровня α имеет вид

$$\beta = \alpha + \sum_{i=1}^{m} x_i \psi_i ,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ удовлетворяют условию

$$-\alpha \leq \sum_{i=1}^{m} x_i \psi_i \leq 1 - \alpha .$$

Отсюда следует, что $\tilde{\mathcal{K}}_\alpha$ - ограниченное замкнутое выпуклое подмножество H и потому линейный непрерывный функционал в H

$$M_{\theta_i}\beta = (f_i, \beta)$$

достигает точной верхней грани в некоторой точке $\tilde{\mathcal{K}}_\alpha$ ([2], с. 75).

Л е м м а 2. I. Множество риска является выпуклым замкнутым подмножеством R_m .

2. Пусть Γ - та часть границы множества риска, которая принадлежит подмножеству R_m вида

$$\bigcap_{j=1}^{m} \{x : x_i \geqslant M_{\theta_i}\beta_j ,\ i = 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, m\} .$$

Тогда всякая точка $x \in \Gamma$ есть вектор риска некоторого байесова теста из $\tilde{\mathcal{K}}_\alpha$. Наоборот, вектор риска всякого байесового теста из $\tilde{\mathcal{K}}_\alpha$ принадлежит Γ .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первое утверждение леммы очевидно, поэтому остановимся лишь на доказательстве второго.

Пусть $x^{(0)} \in \Gamma$, а $\ell(x) = \ell(x^{(0)})$ - опорная гиперплоскость в точке $x^{(0)}$. Из определения Γ и выпуклости W следует, что вектор нормали λ в точке $x^{(0)}$ указанной гиперплоскости, внешней по отношению к W , имеет неотрицательные координаты. Следовательно, не нарушая общности, можно считать, что координаты λ удовлетворяют условию

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k = 1 .$$

Кроме того, в силу выбора λ для всякой точки из области риска имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k \leq \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k^{(0)},$$

т.е. $(x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)})$ - вектор риска некоторого байесового теста из $\tilde{\mathcal{K}}_\alpha$. Обратное утверждение очевидно.

Положим теперь

$$\tilde{\psi} = \sum_{i=1}^{m} \psi_i$$

и определим числа K_1, K_2 следующим образом:

$$K_1 = ess \inf_{(u, \mathcal{A}, \mu)} \tilde{\psi}(u),$$

$$K_2 = ess \sup_{(u, \mathcal{A}, \mu)} \tilde{\psi}(u).$$

Далее выберем $\psi(u)$ в классе μ - эквивалентных $\tilde{\psi}(u)$ таким образом, чтобы числа K_1, K_2 служили нижней и верхней границей ψ соответственно.

Т е о р е м а. В классе $\tilde{\mathcal{K}}_\alpha$ существует максиминный тест. Пусть равномерно наилучшего в $\tilde{\mathcal{K}}_\alpha$ теста нет. Если Γ пересекается с прямой $x_1 = x_2 = \ldots x_m$ и c - координата точки пересечения, то максиминный тест равен

$$\alpha + c\psi,$$

при этом

$$c = \min\left[1, -\frac{\alpha}{K_1}, \frac{1-\alpha}{K_2}\right].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого теста

$$\beta = \alpha + \sum_{k=1}^{m} x_k \psi_k \in \tilde{\mathcal{K}}_\alpha$$

имеет место

$$\min_{1 \leq k \leq m} M_{\theta_k} \beta = \min_{1 \leq k \leq m} (\alpha + x_k).$$

Следовательно, задача о построении максиминного теста сводится к следующей стандартной задаче: найти максимум вогнутой функции

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \min_{1 \leq k \leq m} (\alpha + x_k)$$

на ограниченном выпуклом замкнутом подмножестве $W \subset R_m$. Однако последняя задача имеет решение.

Если Γ пересекается с прямой $x_1 = x_2 = \ldots = x_m$ в некоторой точке $\gamma = (c, c, \ldots, c)$, то тест, точкой риска которого является γ - максиминный, как байесов тест с постоянной мощностью ([3] , с. 371).

В случае, если Γ не пересекается с указанной прямой, она не пересекается хотя бы с одной из областей вида

$$B_k = \{x : x_k = \min(x_1, x_2, \ldots, x_m)\}.$$

Пусть, например, $\Gamma B_m = \phi$, тогда максиминный тест следует искать в классе тестов вида

$$\beta' = \alpha + \sum_{k=1}^{m-1} x_k \psi_k ,$$

так как

$$\min_{1 \le k \le m} x_k = \min_{1 \le k \le m-1} x_k \qquad \text{для всех } x \in W .$$

Поскольку $M_{\theta_m} \beta' = \alpha$, то областью риска тестов β' служит $W' = W \cap \{x_m = \alpha\}$, а рассматриваемый нами кусок границы Γ заменяется на $\Gamma' = \Gamma \cap \{x_m = \alpha\}$.

Таким образом, отыскание максиминного теста в классе $\tilde{\mathcal{K}}_\alpha$ в случае, когда $\Gamma B_m = \phi$ сводится к задаче меньшей размерности в классе тестов

$$\tilde{\mathcal{K}}'_\alpha : \quad \beta' = \alpha + \sum_{k=1}^{m-1} x_k \psi_k$$

найти максиминный тест для проверки гипотезы $\theta \in \Omega_0$, против альтернативной гипотезы: $\theta \in \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{m-1}\}$.

Нетрудно видеть, что к этой новой задаче применима рассмотренная теорема с очевидными изменениями.

В заключение заметим, что $\Gamma B_k = \phi$, если точка риска всех тестов $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$ не принадлежит B_k .

Литература

1. Вальд А. Статистические решающие функции. - В сб. Позиционные игры. М., Наука, 1967.

2. Балакришнан А. Введение в теорию оптимизации в гильбертовом пространстве. М., Мир, 1974.

3. Закс Ш. Теория статистических выводов. М., Мир, 1975.