УДК 519.21:519.10

Е.Г.Цылова
(Пермский университет)

КОМБИНАТОРНЫЕ ТОЖДЕСТВА И БЛУЖДАНИЯ ПОЙА

В данной заметке продолжены исследования [1] по применению теории случайных блужданий к доказательству комбинаторных тождеств.

Докажем на основе блужданий [2] Пойа тождество

$$\sum_{x_1=j}^{S}\sum_{x_2+\ldots+x_\ell=0}^{S-x_1}\frac{\left(\sum_{t=1}^{\ell}x_t-1\right)!\prod_{h=0}^{x_1-j-1}(P_2+\alpha h)\prod_{t=2}^{\ell}\prod_{h=0}^{x_t-1}(P_{t+1}+\alpha h)\prod_{h=0}^{j-1}(P_1+\alpha h)}{(x_1-j)\prod_{t=1}^{\ell}x_t!\,(j-1)!\prod_{h=0}^{x_1+\ldots+x_\ell-1}(1+\alpha h)}= \tag{1}$$

$$=\sum_{x_1=j}^{S}\sum_{x_2+\ldots+x_\ell=0}^{S-x_1}\frac{S!\prod_{t=1}^{\ell}\prod_{h=0}^{x_t-1}(P_t+\alpha h)\prod_{h=0}^{S-x_1-\ldots-x_\ell-1}(P_{\ell+1}+\alpha h)}{\prod_{t=1}^{\ell}x_t!\left(S-\sum_{t=1}^{\ell}x_t\right)!\cdot\prod_{h=0}^{S-1}(1+\alpha h)},$$

где $p_t\geq 0$, $t=\overline{1,\ell+1}$, $\sum_{t=1}^{\ell+1}P_t=1$, $1\leq j\leq S$, ℓ – натуральное число. Для простоты доказательство приведем в случае $\ell=1$. Тогда формула (1) примет вид

$$\sum_{x=j}^{S}\binom{x-1}{j-1}\frac{\prod_{h=0}^{x-j-1}(1-p+\alpha h)\prod_{h=0}^{j-1}(p+\alpha h)}{\prod_{h=0}^{x-1}(1+\alpha h)}= \tag{2}$$

$$=\sum_{x=j}^{S}\binom{S}{x}\frac{\prod_{h=0}^{x-1}(p+\alpha h)\prod_{h=0}^{S-x-1}(1-p+\alpha h)}{\prod_{h=0}^{S-1}(1+\alpha h)}.$$

Рассмотрим блуждание Пойа на плоскости. Пусть $P(O,\Gamma)$ – вероятность попадания в граничную точку. Рассмотрим два замкнутых плана, определяемых границами

$$G_1:\ x(\Gamma)+y(\Gamma)=S \qquad \text{и}$$

$$G_2:\ \{x(\Gamma)+y(\Gamma)=S,\ S-j\leq y(\Gamma)\leq S\}\cup$$

$$U\{x(\Gamma)=j,$$
$$0 \le y(\Gamma) < s-j\}.$$

Очевидно, $\sum_{\Gamma\in G_1} P(0,\Gamma) = \sum_{\Gamma\in G_2} P(0,\Gamma) = 1$, но так как границы G_1 и G_2 содержат общую часть AE, то $\sum_{\Gamma\in BE} P_{BE}(0,\Gamma) = \sum_{\Gamma\in CE} P_{CE}(0,\Gamma)$ (см. рис. I).

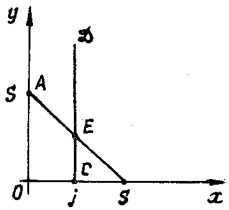

Рис. I

Подставляя в последнее равенство значения вероятностей, получим

$$\sum_{y=0}^{s-j}\binom{y+j-1}{j-1}\frac{\prod_{h=0}^{j-1}(p+\alpha h)\prod_{h=0}^{y-1}(1-p+\alpha h)}{\prod_{h=0}^{y+j-1}(1+\alpha h)} = \tag{3}$$
$$=\sum_{x=j}^{s}\binom{s}{x}\frac{\prod_{h=0}^{x-1}(p+\alpha h)\prod_{h=0}^{s-x-1}(1-p+\alpha h)}{\prod_{h=0}^{s-1}(1+\alpha h)}.$$

Переходя в сумме, стоящей в левой части (3), от индекса суммирования y к индексу суммирования $x=y+j$, получим требуемое тождество (2).

Покажем справедливость формулы (I). Приравнивая суммы вероятностей Пойа для планов, определяемых границами

$$\left\{\sum_{t=1}^{\ell}x_t(\Gamma)=s\cap x_1(\Gamma)\ge j\right\}\left\{x_1(\Gamma)=j\cap\sum_{t=2}^{\ell+1}x_t(\Gamma)\le s-j\right\}$$

и произведя замену переменных $x_1=x_2+j$; $x_i=x_{i+1}$; $i=\overline{2,\ell}$, получим тождество (I). В качестве следствий формулы (I) можно получить тождества: $\alpha=0$ (случай полиномиальных блужданий)

$$\sum_{x_1=j}^{s}\ \sum_{x_2+\ldots+x_\ell=0}^{s-x_1}\frac{\left(\sum_{t=1}^{\ell}x_t-1\right)!\,p_2^{x_1-j}\prod_{t=2}^{\ell}p_{t+1}^{x_t}\,p_1^{j}}{\prod_{t=2}^{\ell}x_t!\,(x_1-j)!\,(j-1)!} = \tag{4}$$
$$=\sum_{x_1=j}^{s}\ \sum_{x_2+\ldots+x_\ell=0}^{s-x_1}\frac{s!\prod_{t=1}^{\ell}p_t^{x_t}\,p_{\ell+1}^{s-x_1-\ldots-x_\ell}}{\prod_{t=1}^{\ell}x_t!\,\left(s-\sum_{t=1}^{\ell}x_t\right)!};$$

при $\alpha=0$, $\ell=1$ получаем

$$\sum_{x=j}^{s}\binom{x-1}{j-1}p^{j}(1-p)^{x-j}=\sum_{x=j}^{s}\binom{s}{x}p^{x}(1-p)^{s-x}. \qquad (5)$$

Когда $p_t=\frac{i_t}{n}\left(\sum_{t=1}^{\ell+1}i_t=n\right)$, $\alpha=-\frac{1}{n}$ (случай гипергеометрических блужданий)

$$\sum_{x_1=j}^{s}\sum_{x_2+\ldots+x_\ell=0}^{s-x_1}\frac{\left(\sum_{t=1}^{\ell}x_t-1\right)!\left(n-\sum_{t=1}^{\ell}x_t\right)!}{(x_1-j)!\prod_{t=2}^{\ell}x_t!(j-1)!(i_1-j)!(i_2-x-j)!\prod_{t=2}^{\ell}(i_{t+1}-x_t)!}= \qquad (6)$$

$$=\sum_{x_1=j}^{s}\sum_{x_2+\ldots+x_\ell=0}^{s-x_1}\frac{\cdot}{\prod_{t=1}^{\ell}(i_t-x_t)!(i_{\ell+1}-s+\sum_{t=1}^{\ell}x_t)!\prod_{t=1}^{\ell}x_t!(s-\sum_{t=1}^{\ell}x_t)!}.$$

При $\ell=1$ из формулы (6) получим

$$\sum_{x=j}^{s}\binom{x-1}{j-1}\binom{n-x}{i-j}=\sum_{x=j}^{s}\binom{s}{x}\binom{n-s}{i-x}. \qquad (7)$$

Это тождество было доказано ранее [3].

Для любого целого числа h ($0\le h\le c$); для любых функций $\varphi_i(t)$ и целочисленных функций $\xi_i(k)$, $i=\overline{1,p}$ и для любых последовательностей $\{A_k^{(i)}\}$, $i=\overline{1,p}$ имеет место тождество

$$\sum_{k=0}^{h}\binom{a+k}{a}\sum_{\ell=0}^{h-k}\binom{c-a-1-k}{\ell}\prod_{i=1}^{p}\varphi_i\left(A^{(i)}_{\xi_i(k+\ell)}\right)+$$

$$+\sum_{k=0}^{c-h-1}\binom{a+k}{a}\sum_{k=0}^{c-h-1-k}\binom{c-a-1-k}{h-a+\ell}\prod_{i=1}^{p}\varphi_i\left(A^{(i)}_{\xi_i(h+1+\ell)}\right)= \qquad (8)$$

$$=\sum_{k=0}^{c}\binom{c}{k}\prod_{i=1}^{p}\varphi_i\left(A^{(i)}_{\xi_i(k)}\right).$$

Для его доказательства рассмотрим тождество для отрицательного гипергеометрического распределения в виде

$$\sum_{k=0}^{b}\binom{a+k}{a}\binom{c-a-1-k}{b-k}=\binom{c}{b}.$$

Домножим обе его части на $\prod_{i=1}^{p}\varphi_i(A^{(i)}_{\xi_i(b)})$ и просуммируем их по b в пределах от 0 до h. Получим

$$\sum_{b=0}^{h}\sum_{k=0}^{b}\binom{a+k}{a}\binom{c-a-1-k}{b-k}\prod_{i=1}^{p}\varphi_i(A^{(i)}_{\xi_i(b)})=$$
$$=\sum_{b=0}^{h}\binom{c}{b}\prod_{i=1}^{p}\varphi_i(A^{(i)}_{\xi_i(b)}). \qquad (9)$$

В левой части равенства перейдем от индексов суммирования b и k к индексам суммирования k и $\ell=b-k$, тогда двойная сумма $\sum_{b=0}^{h}\sum_{k=0}^{b}$ заменится двойной суммой $\sum_{k=0}^{h}\sum_{\ell=0}^{h-k}$. Действительно, $\sum_{b=0}^{h}\sum_{k=0}^{b}\equiv\sum_{k+\ell=0}^{h}\equiv\sum_{k=0}^{h}\sum_{\ell=0}^{h-k}$ и тождество (9) примет вид

$$\sum_{k=0}^{h}\binom{a+k}{a}\sum_{\ell=0}^{h-k}\binom{c-a-1-k}{\ell}\prod_{i=1}^{p}\varphi_i(A^{(i)}_{\xi_i(k+\ell)})=\sum_{b=0}^{h}\binom{c}{b}\prod_{i=1}^{p}\varphi_i(A^{(i)}_{\xi_i(b)}) \qquad (10)$$

Выпишем теперь тождество для отрицательного гипергеометрического распределения в виде

$$\sum_{k=0}^{c-b}\binom{a+k}{a}\binom{c-a-k-1}{b-a-1}=\binom{c}{b}.$$

Домножим обе части на $\prod_{i=1}^{p}\varphi_i(A^{(i)}_{\xi_i(b)})$ и просуммируем их по b в пределах от $h+1$ до c, получим

$$\sum_{b=h+1}^{c}\sum_{k=0}^{c-b}\binom{a+k}{a}\binom{c-a-1-k}{b-a-1}\prod_{i=1}^{p}\varphi_i(A^{(i)}_{\xi_i(b)})=$$
$$=\sum_{b=h+1}^{c}\binom{c}{b}\prod_{i=1}^{p}\varphi_i(A^{(i)}_{\xi_i(b)}). \qquad (11)$$

Перейдем к левой части равенства от индексов суммирования b и k к индексам k и $\ell = b - h - 1$, тогда двойная сумма $\sum_{b=h+1}^{c}\sum_{k=0}^{c-b}$ заменится двойной суммой $\sum_{k=0}^{c-h-1}\sum_{\ell=0}^{c-h-1-k}$ и (II) примет вид

$$\sum_{k=0}^{c-h-1}\binom{a+k}{a}\sum_{\ell=0}^{c-h-1-k}\binom{c-a-1-k}{h-a+\ell}\prod_{i=1}^{p}\varphi_i\left(A^{(i)}_{\xi_i(h+1+\ell)}\right)= \tag{I2}$$

$$=\sum_{b=h+1}^{c}\binom{c}{b}\prod_{i=1}^{p}\varphi_i\left(A^{(i)}_{\xi_i(b)}\right).$$

Сложив равенства (I0) и (I2) и заменив в правой части равенства индекс суммирования b на k, получим искомое тождество (8). При $c = 2m+1$, $h = a = m$, $p = 2$, $\xi_1(k) = k$, $\xi_2(k) = 2m+1-k$,

$$\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \Gamma(t+1)$$

получим тождество, доказанное в работе [4].

I. Очевидно, несущественно, что тождество оперирует с произведением функций от последовательностей. Можно рассматривать любую комбинацию этих функций.

2. Для формул (I0) и (I2) можно получить и более общий вид:

$$\sum_{i=0}^{h-1}\binom{a+i}{a}\sum_{j=h-i}^{\beta-1}\binom{c-a-1-i}{j}\prod_{k=1}^{p}\varphi_k\left(A^{(k)}_{\xi_k(i+j)}\right)+ \tag{I3}$$

$$+\sum_{i=h}^{\beta}\sum_{j=0}^{\beta-i}\binom{a+i}{a}\binom{c-a-1-i}{j}\prod_{k=1}^{p}\varphi_k\left(A^{(k)}_{\xi_k(i+j)}\right)=$$

$$=\sum_{i=h}^{\beta}\binom{c}{i}\prod_{k=1}^{p}\varphi_i\left(A^{(k)}_{\xi_k(i)}\right).$$

$$\sum_{i=0}^{c-\beta-1}\binom{a+i}{a}\sum_{j=0}^{\beta-h-1}\binom{c-a-1-i}{h-a+j}\prod_{k=1}^{p}\varphi_k\left(A^{(k)}_{\xi(h+1+j)}\right)+$$

$$+\sum_{i=c-\beta}^{c-h-1}\binom{a+i}{a}\sum_{j=0}^{c-h-1-i}\binom{c-a-1-i}{k-a+j}\prod_{k=1}^{p}\varphi_k\left(A^{(k)}_{\xi_k(h+1+j)}\right)= \tag{I4}$$

$$=\sum_{i=h+1}^{\beta}\binom{c}{i}\prod_{k=1}^{p}\varphi_k\left(A^{(k)}_{\xi_k(i)}\right).$$

При $h=0$ из тождества (I3) получается формула (I0), а когда $\beta=c$, тогда формула (I4) приводит к тождеству (I2).

Литература

I. Лумельский Я.П., Цирульникова Л.М. Вероятностное доказательство комбинаторных тождеств. - Изв. высших учебных заведений. Математика. I976, № 7.

2. Лумельский Я.П. Случайные блуждания, отвечающие обобщенным урновым схемам. - ДАН СССР, I973, т. 209, № 6.

3. Helmut G. Beweisener Kombinatorischen Identitat mit teils eines Suswahlproblems.-Math-Phys.Semesterber,1974,b21,n1, 137-142.

4. Сарманов О.В., Севастьянов Б.А., Тараканов В.Е. Некоторые комбинаторные тождества. - Мат. заметки, I972, т. II, вып. I.